



**HAL**  
open science

# Cartes incertaines et planification optimale pour la localisation d'un engin autonome

Francis Celeste

► **To cite this version:**

Francis Celeste. Cartes incertaines et planification optimale pour la localisation d'un engin autonome. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Européenne de Bretagne, 2010. Français. NNT: . tel-00483272

**HAL Id: tel-00483272**

**<https://theses.hal.science/tel-00483272>**

Submitted on 13 May 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1  
*sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne*

pour le grade de  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

*Mention : Traitement du Signal*

Ecole doctorale MATISSE

présentée par

**Francis CELESTE**

préparée à l'IRISA  
IFSIC

---

**Cartes incertaines  
et planification optimale  
pour la localisation  
d'un engin autonome.**

**Thèse soutenue à Rennes  
le 10 février 2010**

devant le jury composé de :

**Patrick BOUTHEMY**

Directeur du centre de recherche INRIA Rennes /  
président

**Claude JAUFFRET**

Professeur - Université de Toulon-Var / rapporteur

**Dominique LUZEAUX**

Directeur DGA-UM TER / rapporteur

**Christian MUSSO**

Maître de recherche ONERA / examinateur

**François LE GLAND**

Directeur de recherche INRIA / directeur de thèse

**Frédéric DAMBREVILLE**

Expert sénior DGA-CEP / co-directeur de thèse



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Jean-Pierre Le cadre, qui a accepté, malgré le contexte particulier dans lequel j'ai effectué cette thèse, d'être mon Directeur de thèse. Je lui suis reconnaissant d'avoir toujours trouvé le temps nécessaire pour aborder les points difficiles et orienter les travaux. J'ai beaucoup apprécié sa gentillesse et les échanges amicaux que nous avons eus au cours de ces années. Je me souviendrai de son soutien dans les moments de découragement. C'est donc avec fierté, mais aussi avec une tristesse que je présente ce travail en son absence.

Je remercie également Frédéric Dambreville sans qui ces travaux n'auraient pas abouti. Nos nombreuses discussions sont à l'origine de plusieurs des idées développées dans le cadre de cette thèse. Je le remercie également, pour son amitié et son professionnalisme dans le cadre des activités d'expertise menées au sein de la Direction Générale pour l'Armement.

Tous mes remerciements également à François Le Gland, qui a accepté naturellement de prendre la suite de Jean-Pierre et de m'accompagner dans la dernière ligne droite.

Je remercie les autres membres du jury : Patrick Bouthemy, président, Dominique Luzeaux et Claude Jauffret, rapporteurs, Christian Musso avec qui j'ai découvert les premières applications concrètes du filtrage particulière lors de mon stage de DEA à l'ONERA.

Merci aussi à l'ensemble des personnels de la Direction Générale pour l'Armement du site d'Arcueil que j'ai côtoyés pendant mes premières années d'ingénieur à la Direction Technique : Frédéric Pradeilles m'a fait confiance en me recrutant en sortie d'école, Véronique Serfaty qui a été un chef de département que j'ai particulièrement apprécié.

Mes remerciements vont aussi à Tristan, qui m'a aidé dans les tâches de programmation parfois complexes, le secretariat du département Espace Observation Renseignement Drones pour leur appui. Un clin d'oeil également aux personnels de la section Fusion et Autonomie pour le Renseignement et la Surveillance, en charge des activités robotique, fusion de données et observation que j'ai eu plaisir à encadrer durant trois années.

Enfin, je remercie Mélanie pour sa relecture pertinente et sa patience pendant ces nombreuses années. Pour finir, une pensée pour ma Martinique natale et mes parents.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Table des matières</b>	<b>4</b>
<b>Notations</b>	<b>9</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>11</b>
<b>Introduction</b>	<b>11</b>
1.1 Cartographie et localisation pour les systèmes dits autonomes . . . . .	11
1.2 Objectifs de la thèse . . . . .	12
1.3 Plan et apports de la thèse . . . . .	12
<b>2 Modélisation de la carte</b>	<b>15</b>
2.1 Une représentation métrique . . . . .	15
2.2 Les classes d'objets considérées . . . . .	17
2.2.1 Les objets de la classe bâtiment . . . . .	17
2.2.2 Les objets de la classe arbre isolé . . . . .	17
2.3 Un modèle de carte incertaine . . . . .	17
2.3.1 Définition de $\mathcal{H}$ . . . . .	18
2.3.2 Loi de la carte bruitée . . . . .	20
2.4 Modèle sur la structure spatiale de $\mathcal{C}$ . . . . .	21
2.4.1 Formalisme des relations . . . . .	21
2.5 Formalisme des relations appliqué à une carte vectorielle . . . . .	24
2.5.1 Proximité géographique . . . . .	24
2.5.2 Proximité de forme . . . . .	26
2.5.3 Relations d'agencement . . . . .	28
2.6 Conclusions du chapitre . . . . .	30
<b>3 Génération contrôlée de cartes incertaines</b>	<b>31</b>
3.1 Quelques résultats sur les processus ponctuels . . . . .	31
3.2 Utilisation du formalisme des processus ponctuels . . . . .	32
3.3 Loi d'une configuration $\mathcal{L}(\mathcal{C} \mathcal{C}_y)$ . . . . .	33
3.3.1 Loi a priori $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ sur la base des relations . . . . .	33
3.3.2 Définition de $\mathcal{L}(\mathcal{C} \mathcal{C}_y)$ . . . . .	34
3.4 Processus de génération des cartes . . . . .	34
3.4.1 Opérateurs de proposition pour la modification des objets . . . . .	35
3.4.2 Algorithme de génération contrôlée . . . . .	37
3.4.3 Exemple . . . . .	37
3.5 Dédution d'une carte multi-niveau pour la navigation . . . . .	39
3.5.1 Une carte d'amers représentative de l'incertitude . . . . .	40
3.5.2 Une carte d'occupation incertaine pour les obstacles . . . . .	40
3.6 Conclusions du chapitre . . . . .	42

<b>4</b>	<b>Localisation à partir d'une carte d'amers</b>	<b>45</b>
4.1	Formalisation du problème de localisation	45
4.1.1	Dynamique du mobile	45
4.1.2	Equation d'observation	48
4.2	Résolution du problème de localisation selon l'approche probabiliste	50
4.2.1	Algorithme de Kalman et EKF	50
4.2.2	L'approche UKF (Unscented Kalman Filter)	51
4.2.3	Filtrage particulière	53
4.2.4	La problématique d'association mesures/amers	55
4.3	Conclusions du chapitre	56
<b>5</b>	<b>Mesures de performance pour le processus de localisation probabiliste</b>	<b>59</b>
5.1	Mesures de performance pour l'estimation	59
5.1.1	La borne de Cramèr-Rao (BCR)	59
5.1.2	Hypothèse de biais asymptotique nul	61
5.1.3	Cas de l'estimation d'un vecteur aléatoire	62
5.2	Cas d'un processus d'estimation dynamique	63
5.2.1	Formule de Tychavsky	64
5.3	Application au problème de localisation à partir d'une carte d'amers parfaite	65
5.4	Rappels et calculs utiles pour les développement du chapitre.	66
5.4.1	Expression de $D_k^{11}$	67
5.4.2	Calcul des matrices $D_k^{12}$ et $D_k^{21}$	70
5.4.3	Calcul de $D_k^{22}$	74
5.4.4	Conclusions de la section	79
5.5	Algorithmes d'estimation de la BCRB	79
5.5.1	Approximation autour de la trajectoire nominale	80
5.5.2	Approximation par simulation de trajectoires bruitées	81
5.6	Conclusions du chapitre	82
<b>6</b>	<b>Quelques exemples en simulation</b>	<b>87</b>
6.1	Paramètres pour l'analyse	87
6.2	Analyse de la BCRB sur quelques scénarii	88
6.2.1	Analyse de l'effet du modèle de prédiction	88
6.2.2	Analyse de l'effet de la cartographie	90
6.3	Conclusions	95
<b>7</b>	<b>Prise en compte de l'incertitude de carte</b>	<b>97</b>
7.1	Adaptation de l'équation d'observation	97
7.1.1	Approximation par développement de Taylor (APT1)	99
7.1.2	Equation d'observation modifiée	102
7.2	Modification de la BCRB avec carte parfaite	102
7.2.1	Adaptation des algorithmes avec une carte parfaite	106
7.3	Analyse sur quelques scénarios	106
7.4	Conclusions et perspectives	108
<b>8</b>	<b>Planification pour la localisation</b>	<b>113</b>
8.1	Présentation du problème de planification de trajectoires	113
8.1.1	Définition de l'espace des trajectoires	113
8.1.2	Fonctionnelles pour la performance de localisation	115
8.2	Résolution du problème d'optimisation	117
8.2.1	Introduction de la méthode de cross-entropie	119
8.2.2	Application au problème de planification de trajectoires	123
8.3	Analyse du comportement sur un problème simple	127
8.4	Quelques exemples	128
8.4.1	Des exemples génériques	128
8.4.2	Un scénario plus complexe	130

8.5	Analyse de la convergence par la théorie des Valeurs Extrêmes . . . . .	133
8.5.1	Introduction à la théorie des valeurs extrêmes (TVE) . . . . .	133
8.5.2	Application au problème de planification de trajectoires . . . . .	137
8.5.3	Application sur un scénario . . . . .	138
8.6	Conclusions . . . . .	140
<b>9</b>	<b>Cadre continu</b> . . . . .	<b>145</b>
9.1	Hypothèses sur le mobile et les mesures . . . . .	145
9.2	Borne de Cramèr-Rao associée . . . . .	146
9.3	Performance instantanée de localisation . . . . .	148
9.3.1	Trace de la FIM . . . . .	148
9.3.2	Déterminant de la FIM . . . . .	149
9.3.3	Analyse et interprétation des composantes . . . . .	150
9.4	Configuration géométrique optimale « mobile-amers » . . . . .	151
9.4.1	Zone de perception avec $\Delta_m \leq \frac{\pi}{2}$ . . . . .	155
9.4.2	Zone de perception à ouverture angulaire supérieure à $\frac{\pi}{2}$ . . . . .	157
9.5	Prise en compte d'un coût intégral . . . . .	158
9.6	Formalisation du problème de planification . . . . .	159
9.6.1	Segments de visibilité le long d'un arc . . . . .	160
9.6.2	Calcul du coût pour un arc . . . . .	163
9.7	Un problème quadratique entier mixte . . . . .	180
9.7.1	Application sur un exemple. . . . .	182
9.8	Conclusions du chapitre . . . . .	183
<b>10</b>	<b>Cadre continu et incertitude sur les amers</b> . . . . .	<b>185</b>
10.1	Incertitude sur le coût de déplacement . . . . .	185
10.2	Définition d'une fonction de risque . . . . .	187
10.2.1	Recherche du chemin optimal sans contraintes de vitesse . . . . .	188
10.3	Applications sur un exemple . . . . .	190
10.3.1	Interprétation du paramètre de risque . . . . .	191
10.4	Conclusions . . . . .	191
<b>11</b>	<b>Conclusions et Perspectives</b> . . . . .	<b>193</b>
11.1	Synthèse des travaux . . . . .	193
11.1.1	D'une carte de géographe à une représentation pour la navigation . . . . .	193
11.1.2	Localisation et mesures de performance . . . . .	193
11.1.3	Des approches pour l'optimisation des trajectoires . . . . .	194
11.2	Pour aller plus loin . . . . .	195
11.2.1	Une mesure de performance plus complète . . . . .	195
11.2.2	Vers des mesures de performance pour la cartographie en ligne . . . . .	195
11.2.3	Optimisation conjointe de l'orientation et de la vitesse . . . . .	195
11.2.4	Amélioration sur mesure de la qualité de la carte . . . . .	196
11.2.5	Vers la replanification en ligne . . . . .	197
<b>A</b>	<b>Modèles associés à la dynamique du système</b> . . . . .	<b>199</b>
A.1	Modèle d'incertitude sur les commandes appliquées . . . . .	199
<b>B</b>	<b>Quelques éléments de calcul pour la BCRB</b> . . . . .	<b>201</b>
B.1	Dérivation de la formule de Slepian-Bang . . . . .	201
B.2	Éléments pour la détermination de $D_k^{11}$ . . . . .	203
B.2.1	Calcul de $Q_k^{-1}$ . . . . .	204
B.2.2	Calcul de $\text{tr}(Q_k^{-1}dQ_k/d\theta_k Q_k^{-1}dQ_k/d\theta_k)$ . . . . .	207
B.3	Éléments pour le calcul de $D_k^{22}$ . . . . .	211
<b>C</b>	<b>Détails du calcul de <math>\mathcal{J}_1</math>, <math>\mathcal{J}_2</math> et <math>\mathcal{J}_3</math></b> . . . . .	<b>213</b>
C.1	Intégration . . . . .	213

<b>D</b>	<b>Dérivation laplacien</b>	<b>219</b>
D.1	Eléments introductifs . . . . .	219
<b>E</b>	<b>Intervalles de confiance par la méthode du profil de Vraisemblance</b>	<b>221</b>
E.1	Derivation of the Value-at-Risk expression . . . . .	221
E.2	Profile likelihood Confidence intervals . . . . .	221
	<b>Liste des publications</b>	<b>223</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>228</b>
	<b>Table des figures</b>	<b>229</b>

# Notations et abréviations

Liste des notations et abréviations utilisées dans le manuscrit :

## Abréviations

SIG	Système d'Information Géographique
SLAM	Simultaneously Localisation And Mapping
BCR	Borne de Cramèr-Rao
FIM	Fisher Information Matrix
BCRB	Borne de Cramèr-Rao Bayésienne
BCRP	Borne de Cramèr-Rao a Posteriori
CE	Cross-Entropie (méthode de cross-entropie)
EKF	Extended Kalman Filter
UKF	Unscented Kalman Filter
UT	Unscented Transformation
KKT	Karush-Khun-Tucker
TVE	Théorie des Valeurs Extrêmes
GPD	Generalized Pareto Density

## Notations

### Général

$\mathcal{D}$	zone 2D d'évolution du système ( $\subset \mathbb{R}^2$ ) munie du repère $\mathcal{R}_g$
$\mathcal{R}_g$	repère global orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$
$\mathcal{N}(A, B)$	loi normale de vecteur moyen $M$ et de matrice de covariance $B$
$A^*$	transposée de $A$ si $A$ est une matrice
$\#E$	nombre d'éléments de l'ensemble $E$
$\mathcal{R}_\theta$	matrice de rotation 2D d'angle $\theta$

### Cartographie

$\mathcal{C}$	carte composée d'objets ou d'amers
$n_C$	nombre d'objets ou d'amers de $\mathcal{C}$
$O_l$	objet d'indice $l$ de $\mathcal{C}$
$f_l$	amer d'indice $l$ défini par $(x^l, y^l) \in \mathcal{R}_g$
$\mathcal{Z}_i$	partie de $\mathcal{D}$ de qualité homogène $q = i$

### Formalismes des relations

$R_s$	relation simple
$R_e$	relation étendue
$c(R)$	cardinal de la relation $R$
$c(R, \mathcal{C})$	cardinal de la relation $R$ appliquée à la carte $\mathcal{C}$
$V(R, \mathcal{C})$	voisinage de la relation $R$
$V(O_j, R, \mathcal{C})$	voisinage de l'objet $O_j$
$n_V(R, \mathcal{C})$	cardinal de $V(R, \mathcal{C})$
$U_R(\mathcal{C})$	paramètre de qualité pour la relation $R$
$D_R(\mathcal{C})$	paramètre de diffusion pour la relation $R$
$I_R(\mathcal{C})$	paramètre d'intensité pour la relation $R$
$R_G$	relation de proximité en termes de localiation géographique
$R_F$	relation de proximité en termes de forme
$R_a$	relation d'alignement
$A(O_i)$	aire de l'objet $O_j$

### Modélisation mobile et localisation

$t_k$	variable temporelle indicée ( $\in \mathbb{R}^+$ )
$x_k$	coordonnée du mobile selon $\vec{e}_1$ à $t_k$
$y_k$	coordonnée du mobile suivant $\vec{e}_2$ à $t_k$
$\theta_k$	orientation du mobile dans $\mathcal{R}_g$ défini sur $] - \pi, \pi ]$
$X_k$	état du mobile à l'instant $t_k$ défini par le vecteur $(x_k, y_k, \theta_k)^*$
$\tilde{p}_k$	vecteur de position du mobile dans $\mathcal{R}_g$ défini par $(x_k, y_k)^* \in \mathcal{D}$
$v_k$	vitesse de déplacement du mobile appliquée à l'instant $t_k$
$\phi_k$	variation d'orientation appliquée à l'instant $t_k$
$u_k := (v_k, \phi_k)$	vecteur de commande à l'instant $t_k$
$f_k(X_k, u_k)$	modèle de prédiction du système
$Q_k$	covariance sur la dynamique à $t_k$
$R_k$	covariance sur les mesures à $t_k$
$R_{k,l}$	covariance sur les mesures à $t_k$ provenant de l'amer $f_l$
$\omega_k$	bruit de dynamique
$\omega_k^u$	bruit de dynamique dû au bruit sur les commandes
$\omega_k^m$	bruit de dynamique lié à la limitation du modèle.

### Dérivation de la Borne de Cramèr-Rao a posteriori

$J_k$	Matrice d'information de Fisher
$D_k^{12}, D_k^{11}, D_k^{21}$	matrices d'information pour le calcul récursif de $J_k$
$J_k^z(f_l)$	matrice d'information due à l'observation de $f_l$
$Y_{k,l}$	matrice de correction de $J_k^z(f_l)$ pour des erreurs sur les mesures issus de $f_l$ variables
$\phi_1(\cdot)$	critère de performance moyenne sur une trajectoire
$\phi_2(\cdot)$	critère de performance finale sur une trajectoire
$\phi_3(\cdot)$	critère de performance « maxmin » sur une trajectoire
$\overrightarrow{P_k f_l}$	vecteur « position du mobile - amer $f_l$ » à $t_k$
$\rho_l^k$	norme du vecteur $\overrightarrow{P_k f_l}$
$\beta_l^k$	argument du vecteur $\overrightarrow{P_k f_l}$

### Planification

$\mathcal{G}$	graphe pour le problème de planification
$V$	Ensemble des noeuds de $\mathcal{G}$
$E$	ensemble des arcs de $\mathcal{G}$
$\mathcal{V}(p)$	voisinage du noeud $p$
$e_{pq}$	arc reliant les noeuds $p$ et $q$
$e_k$	arc utilisé à l'instant $k$

# Chapitre 1

## Introduction

Le développement récent des systèmes robotisés terrestres et aériens (drones, minidrones...) et l'engouement qu'ils suscitent dans le monde militaire, mais aussi pour de nombreuses applications civiles, pour lesquelles ils peuvent jouer un rôle primordial, montrent l'importance de leur fournir un niveau suffisant d'autonomie en termes de décision. Qu'il s'agisse de tâches de surveillance, de planification de mouvements, d'optimisation de placement pour l'acquisition d'informations, etc ..., l'autonomie décisionnelle nécessite de disposer d'une connaissance de l'environnement dans lequel évolue le système. Conjointement exploitée avec des informations recueillies au niveau des capteurs embarqués, elle permet alors d'obtenir, via des traitements, une estimation de l'état du système à chaque instant. L'analyse de la performance de ces traitements peut s'avérer très utile, afin de proposer des stratégies de comportements qui garantissent la meilleure localisation *a priori* lors de l'exécution des missions.

### 1.1 Cartographie et localisation pour les systèmes dits autonomes

La représentation cartographique disponible pour la localisation d'un système autonome peut varier en fonction des applications. Elle peut être construite en amont, à partir d'un processus de production de données cartographiques, qui utilise des sources d'informations diverses et avec des contraintes propres. Par exemple, des données géographiques sous la forme de grilles d'altitudes ou de données vectorielles, qui répertorient des structures de l'environnement, peuvent être obtenues à partir d'images prises de satellites. La production de ces données fait aussi intervenir des opérateurs humains relativement expérimentés pour l'extraction des informations lorsque des approches automatiques ne sont pas suffisamment performantes. Ces informations peuvent aussi être obtenues par des systèmes, eux-mêmes munis d'un certain niveau d'autonomie, qui, grâce à des traitements embarqués, agrègent des informations locales acquises par des capteurs (laser, vision...). La qualité des données sources et des ressources utilisées permet de produire des représentations plus ou moins fidèles.

Lors de l'exécution d'une mission, le système s'appuie sur cette connaissance de l'environnement pour se localiser à partir d'informations recueillies au niveau de ses capteurs. Ces informations sont traitées pour extraire des primitives géométriques qui seront corrélées à la représentation cartographique. Ces traitements permettent d'extraire des caractéristiques relatives du mobile par rapport au contenu de la carte, comme la distance ou la mesure de l'angle aux objets dans un repère attaché à la zone d'évolution. Grâce à la définition de modèles d'évolution temporelle du système et du processus d'acquisition des mesures, il est alors possible de déduire une estimation de son état à chaque instant. Pour cela, il est nécessaire de mettre en oeuvre des techniques *fusion*. Les modèles ne sont, en général, pas parfaits et le choix des techniques pour l'estimation dépend des hypothèses faites sur la structure des erreurs. Pour des modèles d'erreurs stochastiques, où les processus de bruits correspondent à des vecteurs aléatoires de lois connues, les techniques de filtrage *bayésien* sont utilisées. L'estimation revient à déterminer un estimateur de l'état à partir d'une densité de probabilité basée sur les mesures. C'est le cas du maximum de vraisemblance (MV) et *a posteriori*

(MAP) déduit de la fonction de vraisemblance et de la densité *a posteriori* de l'état sachant les mesures. Lorsque les erreurs sont de structures inconnues mais avec des bornes connues, il convient de s'appuyer sur les approches *ensemblistes*, comme les techniques ellipsoïdales, ou encore polygonales. Le challenge est d'estimer l'ensemble, dans une famille prédéfinie (ellipsoïdes, polygones...), où est situé le mobile. Un estimateur est, par exemple, le centroïde de l'ensemble ainsi déterminé. La qualité de l'estimateur est fonction des capacités des moyens d'acquisition des mesures, des modèles, des algorithmes de traitements (extraction, association...) et aussi de la qualité des informations (localisation géographiques, types...) sur les objets présents dans la carte.

Pour l'estimation dans un cadre probabiliste, il est possible de définir un critère de performance sur le processus de localisation en s'intéressant à l'erreur d'estimation. On peut, en effet, définir des bornes sur cette erreur, comme la Borne de Cramér-Rao. Pour les problèmes de localisation, ce sont l'extension de cette borne au processus d'estimation de systèmes dynamiques et la déclinaison de formulations récursives de calcul qui sont importantes.

Pour les problèmes de planification de trajectoires, cette borne est un outil très utile qui peut permettre de choisir les stratégies de déplacement les plus informatives au sens du problème de localisation.

## 1.2 Objectifs de la thèse

Dans cette thèse, l'objectif est de proposer une démarche qui permette de prendre en compte dans la planification d'un système robotisé la connaissance de l'incertitude d'une carte vectorielle à l'origine des primitives utilisées dans le processus servant à le localiser. Le critère de décision pour le choix des trajectoires sera la performance *a priori* du processus d'estimation. Ainsi, la démarche doit comprendre trois étapes :

- une qui permet de construire une représentation incertaine de l'environnement à plusieurs entrées à partir d'une carte vectorielle connue avec des incertitudes. L'une de ces entrées est une carte de primitives, des *amers ponctuels*, utilisables par le système pour sa localisation,
- une autre qui vise à définir une mesure de performance de la tâche de localisation, qui intègre l'incertitude sur les amers.,
- une dernière orientée vers la proposition d'approches de planification de trajectoires permettant de garantir un bon niveau de performance *a priori* du processus de localisation.

## 1.3 Plan et apports de la thèse

La thèse se compose de trois parties permettant chacune d'apporter une réponse aux étapes précédentes. Dans la première partie, nous abordons les modalités de production de cartes et la représentation des erreurs qui peuvent apparaître. La carte est une vue de la réalité, au travers de capteurs, de traitements et parfois de l'oeil de l'humain. L'analyse d'une zone urbaine ou péri-urbaine montre que l'organisation des entités est relativement structurée. En partant de ce constat, nous proposons une démarche pour garantir la génération d'un échantillon de cartes vectorielles, qui respecte la structure spatiale et qui soit représentatif de l'incertitude sur la géométrie des objets. Nous nous appuyons sur la notion de *processus ponctuels* et le formalisme de *relations* entre les objets. Des paramètres sont introduits afin de capturer cette information de structure et de raisonner conjointement sur l'incertitude. A partir de cette génération contrôlée d'un échantillon de cartes vectorielles, nous pouvons construire une carte avec plusieurs niveaux d'information : la carte des amers ponctuels, des grilles indiquant la présence des obstacles, avec l'incertitude initiale propagée. Ces éléments sont les principaux apports des chapitres 2 et 4 de cette thèse.

La seconde partie aborde les éléments utiles pour le processus de localisation du système à partir de la carte d'amers. Le modèle du système est basé sur des équations d'évolution et d'observation non-linéaires et discrètes. Nous considérons des mesures de distances et des mesures d'angles relatives aux amers perçus par le système lors de ses mouvements. Ces mesures sont issues de la mise en oeuvre d'une suite de traitements (alignement des données brutes, association...) que nous supposons maîtrisés. Nous déclinons ensuite, pour cette modélisation, la mesure de performance

pour le processus de localisation. La métrique est déduite de la borne de Cramér-Rao *a posteriori* qui est minorant de la matrice covariante de l'erreur d'estimation de l'état du système sur la base des mesures qui seraient obtenues et de sa loi d'évolution *a priori*. Nous utilisons les résultats de la littérature pour proposer des procédures de calcul récursif de cette borne à chaque instant. Trois approches pour les calculs sont analysées aux chapitres 6 et 7. Nous proposons également une approche pour prendre en compte les caractéristiques de l'erreur (amplitudes et orientations) sur les amers en étendant les résultats pour une carte parfaite au chapitre 8.

Nous étudions, en outre, une modélisation continue du système et abordons la mesure de performance à partir de l'information uniquement apportée par l'équation d'observation. Cela aboutit à des raisonnements géométriques permettant d'illustrer l'impact du positionnement relatif des amers par rapport à la position et au déplacement du mobile sur la performance de localisation. Ces éléments sont, en partie, présentés au chapitre 10.

Dans la troisième partie, nous traitons les problèmes de planification afin de choisir des trajectoires optimales au sens des critères proposés. Des algorithmes de résolution sont définis pour la résolution utilisant la méthode de cross-entropie [RK04]. Elle nécessite une phase de simulation et d'apprentissage de paramètres. Deux méthodes de génération de trajectoires admissibles, au sens de notre modèle, sont présentées. La seconde comprend notamment deux niveaux d'optimisation imbriqués. Nous analysons le comportement de convergence à partir de résultats issus de la *théorie des valeurs extrêmes*. Le chapitre 9 présente ces éléments pour le modèle dynamique discret.

Au chapitre 10 et 11, nous ramenons le problème de planification, pour le modèle continu, à un problème de recherche d'un chemin optimal dans un graphe. Nous associons à chaque arc de ce graphe un coût élémentaire qui dépend des conditions de déplacement (vitesse et orientation) sur l'arc et des amers perçus. Nous montrons qu'il est possible d'obtenir une formulation explicite. L'incertitude sur la position des amers est ensuite propagée sur ces coûts élémentaires et permet de définir une fonction de risque. Elle traduit un compromis entre les configurations géométriques « amers - mobile » intéressantes en moyenne et l'incertitude sur la performance atteignable due à l'erreur de carte. Nous définissons aussi des méthodes de résolution pour le choix de la séquence optimale de déplacements sur ce graphe.

Enfin, dans le chapitre 12, nous proposons quelques perspectives et apportons, notamment, quelques pistes pour l'optimisation conjointe de la vitesse et de l'orientation et pour l'amélioration de la qualité de la carte d'amers sous contraintes de ressources pour un choix de trajectoire donné.



## Chapitre 2

# Modélisation de la carte

Dans ce chapitre, nous présentons le modèle de carte utilisé dans le cadre de cette thèse. On s'intéresse à des modèles dits *métriques* de l'environnement qui constituent une représentation d'une zone urbaine ou péri-urbaine sous une forme vectorielle, comme on peut en trouver dans les systèmes d'Information Géographiques. On fait l'hypothèse que cette connaissance sur l'environnement est une donnée incertaine ou imprécise. Ainsi, par la suite, la notion de modèle de carte inclut à la fois les entités qui composent la carte et les paramètres caractéristiques de l'incertitude associée. Nous proposons aussi d'intégrer un niveau de modélisation « supérieure », afin de représenter la structure topologique induite par l'organisation spatiale des objets. L'introduction de ce niveau topologique sera primordiale pour garantir que le processus de génération d'échantillon de cartes (que nous proposons au chapitre suivant) respecte globalement la structure spatiale des objets de la zone cartographiée.

### 2.1 Une représentation métrique

Nous supposons que les applications abordées dans cette thèse exploitent un modèle d'environnement composé d'éléments - des objets - dans un espace à trois dimensions. Cette information est produite selon un processus de cartographie ad hoc qui peut faire intervenir différents acteurs et moyens d'acquisition. D'un point de vue technique, aux objets sont attachés des primitives géométriques qui caractérisent leur localisation dans l'espace et leur forme et des attributs sémantiques qui permettent de coder les autres types de connaissances. La classe d'appartenance de l'objet ou son type est un exemple. Ces objets sont la résultante d'une abstraction d'infrastructures géographiques naturelles et artificielles présentes dans la zone d'intérêt comme des bâtiments, des zones de végétations, des arbres isolés, des zones hydrographiques... Dans le domaine de la géographie numérique, ces données sont en général normalisées, connues sous la dénomination de *données vecteurs* et structurées dans des bases de données géographiques. Ces dernières alimentent souvent des Systèmes d'Informations Géographiques (S.I.G) utilisés pour diverses applications. Les règles de construction de ces bases de données et les formats d'échanges pour leur diffusion dépendent fortement du mode de production (interprétation d'images de télédétection par des opérateurs humains, acquisition par des systèmes autonomes comme des robots terrestres...) et de l'usage qui en est fait. Nous ne détaillerons pas ces aspects dans le manuscrit et nous invitons le lecteur intéressé par ces problématiques à consulter des ouvrages de référence [BP03].

En pratique, les objets d'une représentation métrique sont modélisés à partir de trois types de primitives géométriques élémentaires : le point, la ligne et le polygone ou sa généralisation en 3D. En ce qui nous concerne, nous utiliserons un modèle de carte noté  $\mathcal{C}$ , qui sera plus précisément une liste d'objets appartenant à des classes prédéfinies.  $\mathcal{C}$  et les objets le composant seront définis sur une partie  $\mathcal{D}$  de de l'espace  $\mathbb{R}^3$ . En outre, les objets sont répartis selon une organisation spatiale remarquable. Cette représentation permet de transporter des informations de nature géométrique, sémantique et même topologique.

Par la suite, les  $n_{\mathcal{C}}$  objets qui contenus de la carte  $\mathcal{C}$  seront notés  $O_j$ ,  $j = 1, \dots, n_{\mathcal{C}}$ .

$$\mathcal{C} := \{O_1, \dots, O_{n_c}\}. \quad (2.1)$$

Nous considérons plus particulièrement des objets avec des formes géométriques relativement simples comme des polyèdres fermés et des cylindres. Cette représentation est le résultat d'une interprétation du monde réel au travers d'un instrument de mesure, de traitements algorithmiques et parfois d'analyse humaine; elle est a fortiori imparfaite et imprécise. Cette information cartographique est utilisée pour aider à la prise de décision dans des systèmes qui peuvent avoir des conséquences importantes sur ceux-ci ou leur environnement.

Il faut également noter que dans bien des situations, l'utilisateur (et donc le décideur) n'intervient pas forcément dans le processus de production de cette donnée cartographique. C'est le cas dans les S.I.G. où les utilisateurs finaux ne sont pas des experts géographes, ou dans le cadre d'application multi-robots où les systèmes robotisés peuvent s'échanger des représentations de façon transparente via des formats d'échanges standardisés. Par conséquent, les hypothèses faites en phase de production, et donc la qualité des données, ont un impact non négligeable sur la prise de décision. De plus en plus, les processus de construction tentent de fournir des indicateurs dits de *qualité* sur les données qu'ils fournissent. En pratique, on peut trouver deux types d'indicateurs. Les indicateurs de qualité *a priori* qui sont déduits d'une analyse de la chaîne de production et obtenus par propagation de l'incertitude, généralement par des approximations au second ordre. Ce type de paramètre nécessite souvent une modélisation relativement fine de l'ensemble des étapes du processus. C'est le cas par exemple dans les chaînes de traitement des systèmes de production de Modèle Numérique de Surface par vision stéréoscopique, où une mesure de qualité peut être construite à partir des incertitudes sur les paramètres intrinsèques et extrinsèques du système de prise de vues et des nappes de disparité des algorithmes de corrélation [Sen04],[Bel93],[KE01].

Des mesures *a posteriori* peuvent être aussi déterminées à partir de campagne d'évaluation ou de sondages qui ont pour but de réaliser des comparaisons par rapport à des données qualifiées de référence plus « précises », mais plus éparpillées. Des analyses statistiques des erreurs peuvent alors être menées à partir des écarts souvent très localisés, puis étendues à l'ensemble de la base de données en faisant l'hypothèse que les erreurs sont stationnaires [ZG02],[GJ98]. En général, la qualité cartographique n'est pas un critère homogène sur l'ensemble de la zone : les indicateurs fournis sont souvent régionalisés et tiennent compte des spécificités du terrain.

Dans notre modèle, on suppose donc que la carte  $\mathcal{C}$  peut être découpée en zones de qualité homogène  $\{\mathcal{Z}_i\}_{1 \leq i \leq n_q}$  (cf. figure 2.1). Les objets communs à une zone de qualité partageront les mêmes attributs de qualité qui seront présentées dans les sections suivantes. Nous allons maintenant pré-

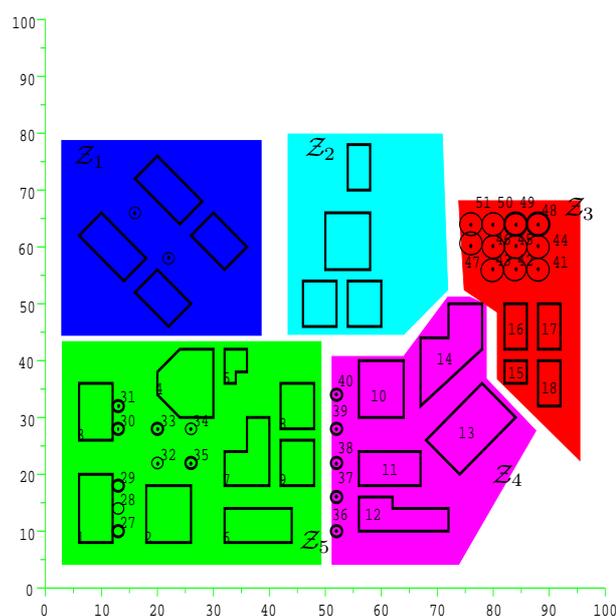


FIG. 2.1 – Vue 2D d'une cartographie avec plusieurs zones de qualité polygonales.

ciser les caractéristiques des objets qui seront utilisés dans nos raisonnements. Les travaux de cette thèse n'étant pas uniquement centrés sur les problématiques de cartographie, nous nous restreignons à deux catégories d'objets. Elles nous semblent suffisantes pour illustrer notre démarche, qui peut être généralisée sans difficulté majeure à une base d'objets cartographiques plus riche.

## 2.2 Les classes d'objets considérées

Les cartes sont composées de deux classes d'objets qui sont des représentations des infrastructures de types *bâtiments* et *arbres*. Ces deux classes ont des modèles géométriques très distincts.

### 2.2.1 Les objets de la classe bâtiment

La première catégorie d'objets est la classe représentative du bâti d'une zone habitée. Un objet de cette classe est caractérisé par un polyèdre dont l'emprise au sol est un polygone fermé. La troisième dimension est donnée par la hauteur que nous supposons constante sur l'ensemble du toit. Un bâtiment peut également disposer d'une surélévation sur une partie de son toit. On peut donc décrire un objet  $O_j$ ,  $1 \leq j \leq n_C$  de cette classe par les paramètres

- $c_j = 1$ , l'attribut définissant la classe bâtiment,
- $q_j = i$ ,  $i \in \{1, \dots, n_q\}$ , l'indice de la zone de qualité dans laquelle est situé l'objet,
- $\mathbf{C}_{b,b}^j = (B_1^j, \dots, B_N^j)$ , la suite des  $N$  sommets du polygone délimitant l'emprise au sol de l'objet. Chacun des sommets est caractérisé par sa position  $p_{B_i}^j = (x_{B_i}^j, y_{B_i}^j)$  dans  $\mathcal{R}_g$ ,
- $h_p^j \in \mathbb{R}^+$ , la hauteur de la structure principale,
- $\mathbf{C}_{b,s}^j = (S_1^j, \dots, S_Q^j)$ , la suite des  $Q$  sommets du polygone délimitant la surélévation éventuelle, les coordonnées des sommets étant de la forme  $p_{S_i}^j = (x_{S_i}^j, y_{S_i}^j)$
- et  $h_s^j \in \mathbb{R}^+$ , la hauteur de la surélévation.

Des modèles de bâtiments plus complexes peuvent être définis en particulier pour la forme des toits [Jib03]. Nous nous limitons cependant à cette modélisation pour nos travaux, qui peuvent être généralisés à d'autres hypothèses de modélisation.

### 2.2.2 Les objets de la classe arbre isolé

La seconde catégorie que nous considérons permet de représenter des objets *arbres* supposés isolés. Un arbre est défini par la localisation au sol de son tronc, sa hauteur et une zone d'influence, supposée circulaire, décrivant l'envergure de ses branches. Soit  $O_j$ ,  $1 \leq j \leq n_C$  un objet représentant un arbre de la zone cartographiée, on introduit :

- $c_j = 2$ , l'attribut associé à la classe arbre,
- $q_j = i$ ,  $i \in \{1, \dots, n_q\}$ , l'indice de la zone de qualité où se situe l'arbre,
- $p_a^j = (x_a^j, y_a^j) \in \mathbb{R}^2$  sa position planimétrique,
- $h_a^j \in \mathbb{R}^+$  sa hauteur,
- $r_a^j \in \mathbb{R}^+$  le rayon de sa zone d'influence défini par le disque  $C(p_a^j, r_a^j)$ .

D'un point de vue géométrique, l'objet arbre est donc un cylindre avec une base circulaire. Cette modélisation de l'objet arbre est relativement simple mais elle pourrait être enrichie pour satisfaire les besoins d'applications spécifiques. A titre d'exemple, des attributs sémantiques décrivant la nature du feuillage peuvent être pertinents dans des processus de localisation où la réponse spectrale des capteurs peut contribuer à améliorer les performances des traitements d'association entre les mesures et les objets de la carte.

## 2.3 Un modèle de carte incertaine

Comme indiqué dans les sections précédentes, une donnée cartographique n'est jamais parfaite. Des informations de qualité sont également fournies aux utilisateurs pour qu'ils puissent en tenir compte dans leurs applications. La représentation cartographique disponible peut être considérée

comme une observation d'une cartographie supposée parfaite. D'un point de vue formel, on peut exprimer la relation entre ces deux représentations sous la forme d'une équation paramétrique

$$\mathcal{C}_y = \mathcal{H}(\mathcal{C}, \Theta_C)$$

où  $\mathcal{C}_y$  est la carte disponible dite observée et  $\Theta_C$  un vecteur de paramètres censé caractériser l'incertitude associée à la connaissance sur  $\mathcal{C}$ . Différents modèles peuvent être utilisés pour décrire cette incertitude. Nous choisissons un modèle stochastique pour décrire les incertitudes sur les objets représentés dans  $\mathcal{C}$ .

### 2.3.1 Définition de $\mathcal{H}$

La nature des erreurs de cartographie dépend des moyens capteurs pour l'acquisition des informations (camera, laser 2D, LADAR...) et des moyens mis en oeuvre lors de la phase de traitement. Par exemple, en télédétection, à partir d'images acquises à bord de satellites d'observation, la finesse de restitution et les précisions de localisation des objets dépendent fortement de la résolution des capteurs et de la connaissance que l'on a des conditions de prise de vue et de l'expérience des analystes d'images. De même, en robotique, les processus de localisation et de cartographie simultanées utilisant des capteurs actifs [TBF05] ne fournissent pas des cartes de même qualité que celles construites à partir de capteurs de stéréovision [Duf05]. Les sources d'erreurs sont en pratique multiples et imposent de définir plusieurs indicateurs de qualité pouvant être géométriques, sémantiques, voire topologiques. De nombreux travaux se sont intéressés à la formalisation de ces erreurs dans les bases de données géographiques comme celles produites et entretenues par l'Institut Géographique National (IGN) [BHA01]. Nous retenons pour nos travaux deux composantes de la qualité :

- la composante *géométrique* qui tient compte de l'incertitude sur la position, dans un référentiel donné, et sur la géométrie des objets de la carte,
- la composante *sémantique et exhaustivité*. La qualité sémantique correspond à l'analyse des erreurs sur les attributs sémantiques. Sur ce point, on peut citer les travaux de [Bon02] sur la modélisation des erreurs d'attributs dans une base de données géographiques et sa prise en compte dans l'analyse de sensibilité pour une application de calcul d'itinéraires, grâce à l'utilisation des développements de grandes déviations. L'exhaustivité s'attache à analyser la présence ou l'absence d'objets dans la représentation par rapport à l'environnement réel. Le temps de construction de la carte et de son exploitation étant souvent très différents, ce critère est souvent très important en pratique.

#### 2.3.1.1 Qualité géométrique

Cette composante de la qualité est la plus importante et englobe souvent la notion de qualité dans de nombreux contextes. Ceci s'explique par la grande difficulté et parfois le coût important de la réalisation d'une cartographie suffisamment fidèle au monde observé. Cette composante de la qualité est primordiale dans le cadre de l'application de localisation en environnement connu, qui est l'objet de notre travail. En général, cet indicateur de qualité permet de caractériser deux types d'incertitudes :

1. L'incertitude sur le positionnement, la hauteur et l'orientation globale des objets dans  $\mathcal{D}$ . Elle affecte l'ensemble des objets d'une zone de la carte homogène sur le plan de la qualité. Plusieurs causes peuvent être à l'origine de ce type de phénomène, comme la mauvaise calibration des instruments de mesure ou la prise en compte d'informations fausses dans les processus d'estimation lors de la réalisation de la carte [ZG02].
2. L'incertitude sur la description de la forme des objets, qui affecte individuellement chacun des objets et qui peut être notamment due à l'utilisation de capteurs non suffisamment résolus par rapport aux objets d'intérêt ou encore des hypothèses de modélisation grossière retenues lors de la cartographie.

### 2.3.1.2 Incertitude associée à l'exhaustivité

On cherchera à modéliser le fait de disposer d'objets dans la carte qui ne sont plus présents dans le monde réel lors de son utilisation dans une application. Cette source d'incertitude est très importante dans des applications *sensibles*, où il est nécessaire de mettre en oeuvre des moyens, souvent coûteux, de détection de changement entre le moment de construction de la carte et de son utilisation. Il convient donc de disposer de systèmes robustes à ce type de changement, ou au d'être capable de mener des analyses de sensibilité, pour en mesurer l'impact et aider à une prise de décision en connaissance de cause. On ne tient pas compte de l'autre aspect de l'exhaustivité, tout aussi déterminant, qui mesure l'absence dans la carte disponible d'objets réellement présents dans l'environnement. En effet, bien qu'il soit possible de générer des échantillons de cartes simulant ce phénomène, cela reste en pratique difficile lorsqu'il existe une forte variété au niveau des infrastructures de la zone d'intérêt.

Par conséquent, l'exhaustivité est modélisée par une mesure de probabilité pour un objet d'être présent dans la carte de façon erronée. Cette probabilité peut en pratique dépendre de plusieurs facteurs : les caractéristiques géométriques de l'objet, les critères de production (rapidité des opérateurs, contraintes de délai...), rapidité d'évolution de la structure géographique de la zone d'intérêt. On supposera par la suite que cette information est connue et fixée pour une région de qualité et une classe d'objets données :

$$\forall j = 1, \dots, n_C, p(O_j \in \mathcal{D}) = p_{c_j, q_j} \in [0, 1]. \quad (2.2)$$

### 2.3.1.3 Modèle probabiliste des erreurs géométriques

Nous détaillons pour les deux classes d'objets les modèles probabilistes des erreurs pour le critère de qualité géométrique, en précisant les hypothèses statistiques des erreurs associées aux paramètres qui définissent la localisation et la forme des objets. On considère  $O_j, j = 1, \dots, n_C$  un objet de la carte moyenne disponible et son homologue  $O_j^y$  de la carte observée  $\mathcal{C}_y$  tenant compte des incertitudes géométriques.

#### Les objets de la classe bâtiment

On associe donc aux objets  $O_j$  et  $O_j^y$  respectivement l'ensemble des caractéristiques géométriques et sémantiques  $(c^j, q^j, C_{b,b}^j, h_p^j, C_{b,s}^j, h_s^j)$  et  $(c^j, q^j, C_{b,b}^{j,y}, h_p^{j,y}, C_{b,s}^{j,y}, h_s^{j,y})$  introduites dans la section 2.2. On suppose que ces deux ensembles sont liés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \forall l \in \{1, \dots, N\}, \quad (B_l^j, B_l^{j,y}) &\in C_{b,b}^j \times C_{b,b}^{j,y}, \quad B_l^{j,y} = B_l^j + \epsilon_{b,j} \\ \forall l \in \{1, \dots, Q\}, \quad (S_l^j, S_l^{j,y}) &\in C_{b,s}^j \times C_{b,s}^{j,y}, \quad S_l^{j,y} = S_l^j + \epsilon_{s,j} \\ h_p^{j,y} &= h_p^j + \epsilon_{h_p,j} \quad h_s^{j,y} = h_s^j + \epsilon_{h_s,j}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Les processus modélisant les erreurs sur les sommets ou sur les hauteurs sont des vecteurs ou variables aléatoires de structures gaussiennes.

$$\begin{aligned} \epsilon_{b,j} &\sim \mathcal{N}(0, \Sigma(b, q_j)), \quad \epsilon_{s,i} \sim \mathcal{N}(0, \Sigma(s, q_j)) \\ \epsilon_{h_p,j} &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_{h_p, q_j}^2) \quad \text{et} \quad \epsilon_{h_s,j} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{h_s, q_j}^2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

où les matrices de covariances  $\Sigma(b, q_j)$  et  $\Sigma(s, q_j)$  de tailles  $2 \times 2$  caractérisent l'incertitude sur les paramètres de position des sommets de la base principale et de la surélévation dans le repère  $\mathcal{R}_g$ . Cette modélisation est relativement simple et peut conduire à des formes polygones incohérentes. Des approches tenant compte de la corrélation entre les sommets et qui impose des déformations globales de type affine, auraient pu être utilisées. Il est donc possible de définir la probabilité de chaque bâtiment observée en fonction de son homologue dans la carte moyenne, en faisant l'hypothèse d'indépendance entre les erreurs sur les différents attributs. En particulier, dans l'hypothèse d'incertitudes gaussiennes :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(O_j^y|O_j) &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}[C_{b,b}^j - C_{b,b}^{j,y}]^* \Sigma_{b,q_j}^{-1} [C_{b,b}^j - C_{b,b}^{j,y}]\right\} \\
&\quad \times \exp\left\{-\frac{(h_p^j - h_p^{j,y})^2}{2\sigma_{h_p,q_j}^2}\right\} \exp\left\{-\frac{(h_s^j - h_s^{j,y})^2}{2\sigma_{h_s,q_j}^2}\right\} \\
&\quad \times \exp\left\{-\frac{1}{2}[C_{b,s}^j - C_{b,s}^{j,y}]^* \Sigma_{s,q_j}^{-1} [C_{b,s}^j - C_{b,s}^{j,y}]\right\}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Les matrices  $\Sigma_{b,q_j}$  et  $\Sigma_{s,q_j}$  sont les matrices de covariance associées au vecteur de sommets de la base et de la surélévation éventuelle. Cette matrice peut dans certains cas contenir des éléments traduisant la corrélation entre les erreurs au niveau de chacun des sommets. Dans notre cas, l'hypothèse d'indépendance impose la relation suivante :

$$\Sigma_{b,q_j} = \text{Diag} \left( \underbrace{\Sigma(b, q_j), \dots, \Sigma(b, q_j)}_{N \text{ fois}} \right) \text{ et } \Sigma_{s,q_j} = \text{Diag} \left( \underbrace{\Sigma(s, q_j), \dots, \Sigma(s, q_j)}_{Q \text{ fois}} \right).$$

### Les objets de la classe arbre isolé

Soit un objet  $O_j^y \in \mathcal{C}_y$  de la classe arbre auquel sont attachées les caractéristiques  $(p_a^{j,y}, r_a^{j,y}, h_a^{j,y}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , situé dans la zone de qualité d'indice  $q^j$ . On considère son homologue  $O_j$  dans la carte  $\mathcal{C}$  de composantes  $(p_a^j, r_a^j, h_a^j)$ . On fait l'hypothèse de modélisation suivante :

$$\begin{aligned}
p_a^{j,y} &= p_a^j + \epsilon_{p_a^j}, & \epsilon_{p_a^j} &\sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{p_a,q_j}) \Sigma_{p_a^j} \\
r_a^{j,y} &= r_a^j + \epsilon_{r_a^j}, & \epsilon_{r_a^j} &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_{r_a,q_j}^2) \\
h_a^{j,y} &= h_a^j + \epsilon_{h_a^j}, & \epsilon_{h_a^j} &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_{h_a,q_j}^2).
\end{aligned}$$

avec  $\Sigma_{p_a^j}$  la matrice de covariance sur les coordonnées du point  $p_a^j$  dans le repère  $\mathcal{R}_g$ . En supposant l'indépendance entre les différents processus, on peut en déduire la loi de  $O_j^y$  sachant  $O_j$  donnée par l'équation suivante

$$\mathcal{L}(O_j^y|O_j) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}[p_a^j - p_a^{j,y}]^* \Sigma_{p_a,q_j}^{-1} [p_a^j - p_a^{j,y}]\right\} \tag{2.6}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{(h_a^j - h_a^{j,y})^2}{2\sigma_{h_a,q_j}^2}\right\} \exp\left\{-\frac{(r_a^{j,y} - r_a^j)^2}{2\sigma_{r_a,q_j}^2}\right\}. \tag{2.7}$$

### 2.3.2 Loi de la carte bruitée

Pour tenir compte de l'hétérogénéité de la qualité définie par la présence de  $n_q$  zones  $\mathcal{Z}_i$ ,  $i = 1 \dots, n_q$  de niveaux de qualité différents, on fait l'hypothèse que le vecteur de paramètres  $\Theta_{\mathcal{C}}$  est la concaténation de vecteurs de paramètres  $\Theta_i$ ,  $i = 1 \dots, n_q$ . Le vecteur  $\Theta_i$ ,  $i = 1 \dots, n_q$  contient l'ensemble des paramètres des modèles d'incertitude des objets présents dans la zone  $\mathcal{Z}_i$ . A partir des hypothèses de la section précédente et en supposant que les processus d'erreur associés aux objets sont indépendants, la loi de probabilité de la carte globale de  $\mathcal{C}_y$  sachant  $\mathcal{C}$  peut s'écrire :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}_y|\mathcal{C}) \propto \prod_{i=1}^{n_q} \prod_{O_j \in \mathcal{Z}_i, 1 \leq j \leq n_{\mathcal{C}}} p_{c_j,i} \mathcal{L}(O_j^y|O_j). \tag{2.8}$$

où les densités  $\mathcal{L}(O_j^y|O_j)$  sont fournies par les équations (2.5) pour les objets de type bâtiment et (2.6) pour les objets de la classe arbre.

## 2.4 Modèle sur la structure spatiale de $\mathcal{C}$

Lorsque l'on observe un environnement de type urbain ou péri-urbain, on peut remarquer l'organisation spatiale des infrastructures. Cette organisation peut être traduite par des relations entre les objets. Cette analyse sera importante pour notre processus de génération de carte car l'application stricte du modèle d'incertitude présentée dans la section précédente, via l'utilisation d'une approche simple de Monte Carlo, peut conduire à des réalisations de cartes trop éloignées de la réalité perçue lors de la phase de production de la carte. Plusieurs travaux de recherche ont été proposés pour tenter de modéliser la structure spatiale en environnement urbain. On peut citer notamment les approches visant à développer des méthodes automatiques pour la généralisation automatique de cartes à différentes échelles [Reg98] [ADD04]. On peut également retenir les approches statistiques basées sur les processus ponctuels [Ort04] [LDZPD08]. Nous introduisons tout d'abord le formalisme général des relations, avant de préciser celles qui seront retenues et adaptées à notre contexte.

### 2.4.1 Formalisme des relations

Le formalisme des relations est un moyen permettant de capturer les interactions entre les objets observés, qui contribuent ainsi à modéliser la structure spatiale inhérente à la zone cartographiée. C'est donc une composante de plus haut niveau qui autorise des raisonnements sur des groupes d'objets. Nous commençons par présenter quelques définitions de base sur les relations.

#### 2.4.1.1 Définitions

**Définition 1** Une relation simple sur une  $\mathcal{C}$  est une application  $R_s$  de  $\mathcal{C}$  dans l'ensemble des parties  $\mathcal{P}(\mathcal{C})$  de  $\mathcal{C}$  qui permet d'identifier l'ensemble des liens entre des objets de la carte au sens d'un critère donné :

$$\begin{aligned} R_s : \quad \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C}) \\ \{O_1, \dots, O_{n_c}\} &\rightarrow R_s(\mathcal{C}) \\ \text{telle que : } \quad \forall r \in R_s(\mathcal{C}), \quad r &\subseteq \mathcal{C} \end{aligned}$$

Une relation simple caractérise donc les groupes d'objets de la carte similaires dans une certaine mesure. Les groupes d'objets  $r \in R_s(\mathcal{C})$  ainsi constitués sont appelés des **composantes** ou des **cliques** si on se place dans un cadre de modélisation équivalent à celui des champs de Markov. Le fait qu'une relation soit simple n'implique pas que les composantes soient complètement disjointes. A titre d'exemple, deux objets peuvent être considérés en relation s'ils sont suffisamment proches dans l'espace. Intéressons nous à l'exemple de carte de la figure 2.2, où les objets sont modélisés par des cercles. Si les composantes sont obtenues à partir des couples d'objets distincts spatialement proches, la relation simple et symétrique  $R_p$  correspondante est l'ensemble des couples d'objets :

$$R_p(\mathcal{C}) = \{(O_1, O_2), (O_1, O_4), (O_2, O_4), (O_4, O_5), (O_5, O_6), (O_6, O_7), (O_7, O_8), (O_6, O_8)\}. \quad (2.9)$$

On peut également construire des relations plus complexes à partir de plusieurs relations simples différentes faisant intervenir des ensembles d'objets distincts et modéliser des structures spatiales plus complexes avec une notion de hiérarchie. Nous utiliserons en particulier cette notion pour modéliser l'alignement de triplets d'objets de la carte en vérifiant d'abord qu'ils sont proches, puis que la différence entre les orientations formées par les objets pris deux à deux sont peu différentes.

**Définition 2** Une relation étendue  $R_e$  est une application de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{P}((\mathcal{C})^l)$  où  $l$  est un entier positif définissant le nombre de relations simples impliquées dans la réalisation de  $R_e$ .

$$\begin{aligned} R_e : \quad \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{P}((\mathcal{C})^l) \\ \mathcal{C} = \{O_1, \dots, O_{n(\mathcal{C})}\} &\rightarrow R_e(\mathcal{C}) \\ \text{telle que : } \quad \forall r \in R_e(\mathcal{C}), \quad r &= (r_1, \dots, r_l) \text{ avec } \forall 1 \leq i \leq l, r_i \subseteq \mathcal{C} \end{aligned}$$

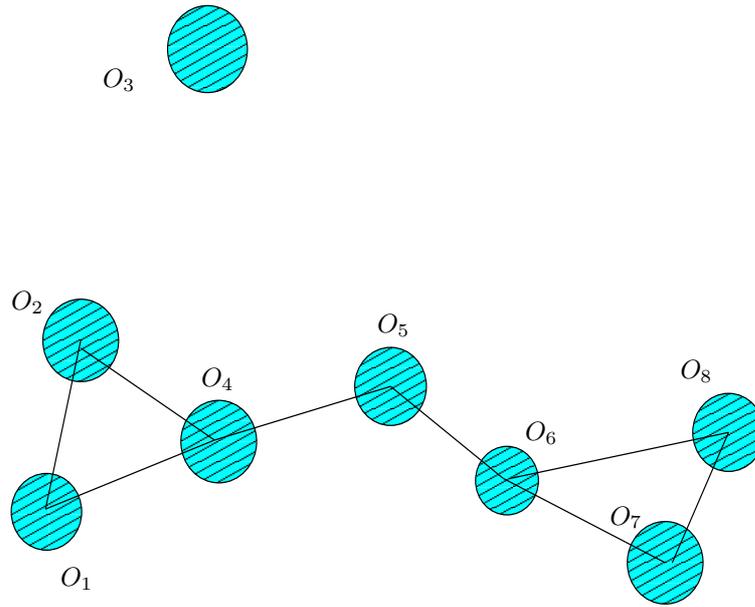


FIG. 2.2 – Exemple de carte avec 8 objets.

Reprenons notre exemple de la figure 2.2 et considérons les triplets de cercles alignés. Les objets doivent d'abord vérifier la relation de proximité. Les paires à considérer sont fournies par l'équation 2.9. La carte fait apparaître uniquement deux relations d'alignement  $R_a$

$$R_a(\mathcal{C}) = \{(O_1, O_4, O_5), (O_5, O_6, O_7)\}. \quad (2.10)$$

On peut noter que contrairement à une relation simple, les objets ne jouent pas le même rôle. En effet, l'objet central joue un rôle tout à fait particulier pour l'alignement.

#### 2.4.1.2 Propriétés sur les relations

La notion de relation étant définie, nous précisons maintenant certaines propriétés associées aux relations qui seront utiles par la suite. On note  $\mathcal{R}$  l'ensemble des relations simples et étendues définies sur une carte  $\mathcal{C}$  donnée.

**Définition 3** Soit  $R \in \mathcal{R}$ . Le cardinal de  $R$  pour  $\mathcal{C}$  est défini par :

$$c(R, \mathcal{C}) = \#R(\mathcal{C})$$

Il correspond donc au nombre de composantes construites à partir des objets de la carte  $\mathcal{C}$  au sens de la relation  $R$ . Nous considérons des relations particulières qui impliquent un nombre fixe d'objets. Ainsi, nous supposons que toutes les composantes de la carte au sens d'une relation  $R$  sont constituées d'un nombre  $c(R)$  d'objets. A ce stade, il est essentiel de ne pas confondre les deux quantités  $c(R)$  et  $c(R, \mathcal{C})$ . Dans l'exemple précédent, les composantes de la relation  $R_p$  comportent deux objets. On a donc  $c(R_p) = 2$ . Pour la relation d'alignement, on a par contre  $c(R_a) = 3$ . Pour la carte présentée à la figure 2.2, on a  $c(R_p, \mathcal{C}) = 8$  et  $c(R_a, \mathcal{C}) = 2$ .

**Définition 4** On peut également définir le voisinage de  $\mathcal{C}$  au sens de la relation  $R$  qui est l'ensemble des objets de la carte qui sont impliqués dans au moins une composante :

$$V(R, \mathcal{C}) = \{O \in \mathcal{C}, \exists r \in R(\mathcal{C}) \text{ impliquant } O\}$$

La notion de voisinage permet de définir une segmentation entre les objets participant à une composante associée à la relation  $R$  et les autres. On note  $n_V(R, \mathcal{C})$  le cardinal de  $V(R, \mathcal{C})$ .

Cette grandeur associée au paramètre  $c(R, \mathcal{C})$  permet de distinguer des structures de cartes différentes au sens de la relation  $R$ . En effet, on peut avoir deux cartes avec un nombre identique d'objets et de composantes pour une relation  $R$ . Cependant, plus  $n_V(R, \mathcal{C})$  est importante, plus les composantes sont isolées et partagent peu d'objets. Pour notre exemple introductif, nous avons  $V(R_p, \mathcal{C}) = \{O_1, O_2, O_4, O_5, O_6, O_7, O_8\}$  et  $n_V(R_p, \mathcal{C}) = 7$  alors que  $V(R_a, \mathcal{C}) = \{O_1, O_4, O_5, O_6, O_7\}$  et  $n_V(R_a, \mathcal{C}) = 5$ .

Enfin, il semble intéressant d'introduire un critère qui lie un objet particulier de la carte à une relation  $R$ .

**Définition 5** *Le voisinage d'un objet  $O_j$  de  $\mathcal{C}$  au sens de la relation  $R$  apporte une information sur le degré d'implication de cet objet dans la structure de la carte :*

$$V(R, \mathcal{C}, O_j) = \{O_i \in \mathcal{C} - \{O_j\}, \exists r \in R(\mathcal{C}) \text{ impliquant } O_j \text{ et } O_i\}.$$

La taille de cet ensemble permet notamment d'analyser si un objet est plus ou moins en interaction avec un nombre plus ou moins important d'objets de la carte. On peut également en déduire une information sur la structure des cartes et l'exploiter pour comparer plusieurs instances bruitées d'une même carte. Revenons à notre exemple de carte composée des disques  $O_i, i = 1, \dots, 8$ . Si l'on s'intéresse aux objets  $O_4$  et  $O_6$ , le cardinal de leur voisinage est 3 car ils sont en relation avec trois objets, contrairement aux objets  $O_1, O_2, O_5, O_7$ , et  $O_8$ .

### 2.4.1.3 Paramètres d'une relation

La notion de relation est basée sur la mise en oeuvre de règles permettant d'associer des objets entre eux. Nous avons présenté dans le paragraphe précédent un ensemble de critères associés à une relation donnée en nous appuyant sur une analyse de ses composantes déduites de son application sur une carte. Nous complétons ces éléments par un jeu de paramètres plus global. Les règles qui permettent de définir une composante d'une relation sont en général déterministes, comme la proximité caractérisée par un seuil sur la distance entre objets. Dans certains cas, il peut être important de pouvoir relâcher les contraintes associés à ces critères. Cet aspect est primordial lorsque l'on fait évoluer l'agencement des objets, tout en cherchant à maintenir une certaine cohérence spatiale. De façon similaire à l'approche proposée dans [Ort01], on définit des paramètres sur les relations qui permettront notamment de les comparer.

**Définition 6** *La **précision** d'une composante  $r$  d'une relation  $R$  construite à partir d'objets de la carte  $\mathcal{C}$  est une application de  $R(\mathcal{C})$  à valeurs dans  $[0, 1]$ .*

$$\begin{aligned} u : R(\mathcal{C}) &\rightarrow [0, 1] \\ r &\rightarrow u_R(\mathcal{C})(r). \end{aligned}$$

En pratique, on cherchera à disposer de composantes de relations suffisamment précises. Si nous revenons à notre exemple, une paire de cercles en relation, selon le critère de proximité peut être considérée de précision maximale tant qu'il n'y a pas de chevauchement. La précision peut alors être décroissante en fonction du taux de recouvrement. A partir des précisions individuelles de chaque composante présente dans  $\mathcal{C}$  au sens de  $R$ , on peut élargir cette notion de précision à la carte dans sa globalité.

**Définition 7** *La **précision** d'une relation  $R$  pour une carte  $\mathcal{C}$  se définit par :*

$$U_R(\mathcal{C}) = \begin{cases} \frac{1}{c(R, \mathcal{C})} \sum_{r \in R(\mathcal{C})} u_R(\mathcal{C})(r) & \text{si } c(R, \mathcal{C}) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Grâce à ce paramètre, il est possible de comparer deux cartes identiques en termes de nombre d'objets et de composantes pour une même relation mais différentes. Ceci autorise également une certaine particularisation des composantes dans une carte. En plus du paramètre de précision d'une carte pour une relation, on considère deux autres grandeurs qui sont l'*intensité* et la *diffusion*.

**Définition 8** *L'intensité d'une relation  $R$  pour une configuration  $\mathcal{C}$  est le nombre défini par :*

$$I_R(\mathcal{C}) = \begin{cases} \frac{c(R)c(R,\mathcal{C})}{n_V(R,\mathcal{C})} & \text{si } c(R,\mathcal{C}) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette grandeur apporte une mesure du nombre moyen de composantes aux sens de la relation  $R$  auxquelles appartient un objet de la carte, sachant qu'il appartient à au moins une composante. Une valeur importante de ce paramètre montre que les composantes de la carte pour la relation considérée partagent un nombre important d'objets. En particulier, lorsque les composantes sont disjointes deux à deux, on a forcément  $I_R(\mathcal{C}) = 1$ . Le paramètre de diffusion d'une relation fournit une mesure du pourcentage d'objets participant à une composante.

**Définition 9** *La diffusion d'une relation  $R$  se définit par :*

$$d_R(\mathcal{C}) = \frac{n_V(R,\mathcal{C})}{n_{\mathcal{C}}}.$$

On peut noter que dans le cas de configurations de carte avec un nombre fini et fixé d'objets (i.e.  $n_{\mathcal{C}}$  est une constante), le taux de diffusion est directement lié au nombre d'objets de la carte impliqués dans une relation  $R$ . La valeur maximale atteignable est 1 et correspond au cas où tous les objets de la carte participent à au moins une composante de la relation  $R$ . Un taux de diffusion faible indique donc une configuration de carte avec un nombre important d'objets « isolés » dans la carte au sens de la relation  $R$ .

Nous avons introduits les éléments généraux sur les relations d'une carte. Nous proposons dans la suite d'appliquer cette modélisation à notre cartographie pour définir une méthode permettant de caractériser la structure spatiale des objets qui la composent. Nous présentons donc un ensemble de relations sur les objets bâtiments et arbres.

## 2.5 Formalisme des relations appliqué à une carte vectorielle

Nous considérons plusieurs types de relations sur notre modèle de carte. On rappelle que la carte contient deux classes d'objets, bâtiments et arbres, avec des caractéristiques géométriques spécifiques à chaque classe. Les relations proposées visent à décrire la proximité en termes de localisation (relation géographique) et de ressemblance géométrique (relation de forme), et l'agencement relatif (relation d'alignement) des objets dans l'espace.

### 2.5.1 Proximité géographique

On peut définir la relation de proximité géographique  $R_G$  en considérant une distance calculée à partir des projections au sol des objets. Plusieurs distances peuvent être utilisées, classiquement la distance euclidienne ou encore la distance de Hausdorff qui mesure la distance minimale entre deux contours. Notons,  $d_G$  la distance choisie.

**Définition 10** *Soient  $(O_i, O_j) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$  un couple d'objets de la carte. Ils forment une composante au sens de la relation simple  $R_G$  lorsque*

$$d_G(O_i, O_j) < d_G^+$$

où  $d_G^+$  est le seuil sur la distance fixé. On utilise alors la notation  $O_i R_G O_j$ .

Nous détaillons le mode de calcul de cette relation pour les différentes classes d'objets de la carte, ainsi que les paramètres associés présentées en 2.4.1.3.

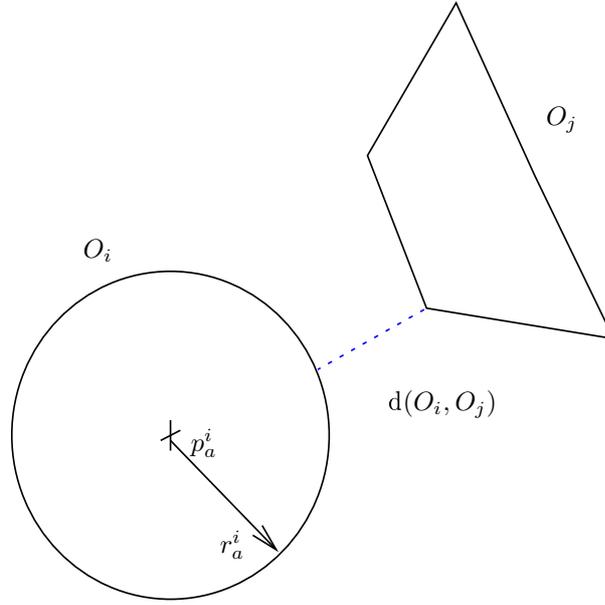


FIG. 2.3 – Distance entre un arbre et un bâtiment.

**Entre des objets de la classe *bâtiment*.** On considère la distance euclidienne entre les polygones décrivant l'emprise au sol des objets. Un tel calcul peut être réalisé en utilisant des algorithmes classiques de géométrie [Rou98]

$$d_G(O_i, O_j) = d(\mathbf{C}_{b,b}^i, \mathbf{C}_{b,b}^j) \quad (2.11)$$

où  $\mathbf{C}_{b,b}^i$  et  $\mathbf{C}_{b,b}^j$  sont des vecteurs construits à partir des coordonnées des sommets des polygones modélisant l'emprise au sol des objets. On peut noter que  $c(R_G)$  est invariant et vaut 2. Pour définir le paramètre de précision de cette relation, on conçoit bien que des configurations de cartes contenant des intersections non vides de bâtiments ne sont pas acceptables dans un monde réel. La mesure de précision d'une composante de bâtiments associée à  $R_G$  doit donc tenir compte de cette contrainte. Soit  $A(O_i \cap O_j)$  l'aire de la partie commune aux emprises au sol des deux objets. On définit la précision de la composante  $r = (O_i, O_j)$  de la façon suivante :

$$u_{R_G}(\mathcal{C})(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } A(O_i \cap O_j) \neq 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.12)$$

**Entre un objet *arbre isolé* et un *bâtiment*.** La distance est obtenue à partir de la distance entre le rayon du disque caractérisant l'emprise au sol de l'arbre et le polygone définissant l'emprise au sol du bâtiment (cf. figure 2.3). Si  $O_i$  est de la classe arbre et  $O_j$  de la classe bâtiment, la distance est calculée de la façon suivante :

$$d_G(O_i, O_j) = \begin{cases} d(p_a^i, \mathbf{C}_{b,b}^j) - r_a^i & \text{si } d(p_a^i, \mathbf{C}_{b,b}^j) > r_a^i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.13)$$

Une intersection non nulle entre un bâtiment et un arbre est admissible dans une certaine mesure. La précision de la composante  $r = (O_i, O_j)$  pour  $R_G$  doit tenir compte de cette intersection éventuelle, tout en garantissant qu'elle reste modérée selon un critère donné. On propose donc de définir une mesure qui tienne compte de la surface d'intersection relativement aux surfaces élémentaires des emprises au sol des objets. Notons  $A_{min} = \min(A(O_i), A(O_j))$  le minimum des aires des emprises au sol et  $\epsilon_{ab} = A(O_i \cap O_j)/A_{min}$ , qui mesure la surface relative intersectée.

$$u_{R_G}(\mathcal{C})(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } \epsilon_{ab} > \epsilon_{ab}^+ \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\epsilon_{ab}^+$  est la surface relative maximale admissible qui est une donnée fixée a priori.

**Entre des objets de la classe *arbre*.** En ce qui concerne les objets de la classe arbre, le calcul de distance est réalisé à partir des centres et des rayons des zones d'influence respectives des objets en relation :

$$d_G(O_i, O_j) = \begin{cases} d(p_a^i, p_a^j) - r_a^i - r_a^j & \text{si } d(p_a^i, p_a^j) > (r_a^i + r_a^j) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.14)$$

Lorsque la distance entre deux objets de la classe arbre est nulle, les objets s'intersectent. L'intersection est admissible dans une certaine mesure. En considérant les caractéristiques des disques d'influence respectifs, on peut traduire cette contrainte d'interaction partielle et définir un critère de précision adapté.

- L'intersection est nulle, la précision d'une composante  $u(\mathcal{C}, R_G)(r)$  est maximale et vaut 1.
- Lorsque l'intersection est non vide,

$$u_{R_G}(\mathcal{C})(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } d(p_a^i, p_a^j) \leq \max(r_a^i, r_a^j), \quad (a), \\ 1 & \text{si } \frac{d(p_a^i, p_a^j) - \max(r_a^i, r_a^j)}{\min(r_a^i, r_a^j)} \leq \epsilon_{aa}^+, \quad (b), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec  $\epsilon_{aa}^+ \in \mathbb{R}^+$  un seuil fixé. Le cas (a) correspond à une situation où l'un des deux arbres (en l'occurrence celui de diamètre inférieur) est inclus dans l'autre. Le critère (b), qui dépend de la distance entre les centres respectifs et des rayons est équivalent à une mesure de surface relative de l'intersection entre les objets (Cf. Figure 2.4).

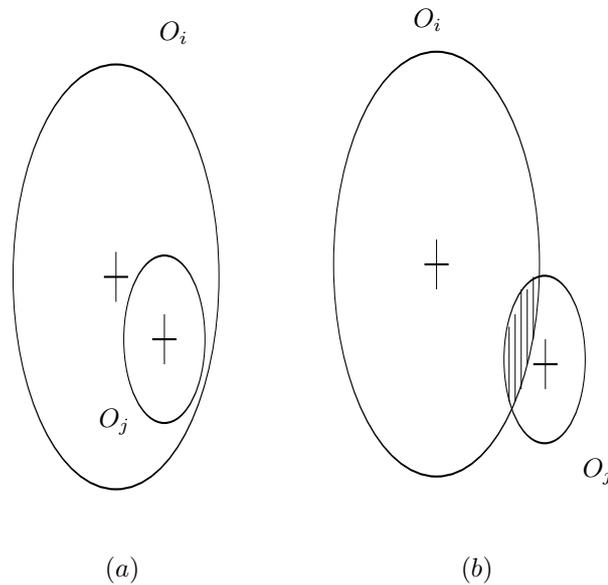


FIG. 2.4 – Mesure de précisions de  $R_G$  pour deux arbres (cas (a) et (b)).

## 2.5.2 Proximité de forme

Dans certaines zones géographiques, les règles de construction imposées se traduisent parfois par une forme d'homogénéité des infrastructures. Ainsi, dans certains cas, il n'est possible de construire des bâtiments que dans une gamme prédéfinie. De même, dans les espaces urbains ou les forêts, on ne peut implanter que des arbres respectant un certain gabarit. On peut alors définir une relation de proximité en termes de ressemblance  $R_F$  qui concerne des objets de même nature. On notera  $R_F$  ce type de relation que nous précisons pour nos deux familles d'objets. Cette relation peut

être caractérisée par des métriques qui permettent de caractériser la forme de certaines parties des objets et leur hauteur.

**Définition 11** Soit  $(O_i, O_j) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$  un couple d'objets de la carte  $\mathcal{C}$  qui appartiennent à la même classe. Ils forment une composante au sens de la relation  $R_F$  si

$$d_F(O_i, O_j) := \vec{d}_F(F(O_i), F(O_j)) < \vec{d}_F^+$$

où  $\vec{d}_F^+$  est un vecteur de seuils fixés dont la dimension dépend de la nature de l'objet et  $\vec{d}(F(O_i), F(O_j))$  est un vecteur de paramètres mesurant la distance en termes de forme des objets. On utilise alors la notation  $O_i R_F O_j$ .

Précisons les vecteurs de distances et les paramètres de précision des composantes pour les deux configurations possibles (*arbre-arbre* et *bâtiment-bâtiment*).

**Entre objets de la classe *arbre*.** La forme d'un objet arbre est caractérisée par sa hauteur et le rayon de son emprise au sol. La proximité selon  $R_F$  entre deux arbres est déterminée à partir de ces deux paramètres. Le vecteur  $\vec{d}(F(O_i), F(O_j))$  est de dimension 2 avec

$$\vec{d}(F(O_i), F(O_j)) := (|r_a^i - r_a^j| \quad |h_a^i - h_a^j|)^* . \quad (2.15)$$

La précision de la relation est obtenue en considérant la norme du vecteur  $\vec{d}(F(O_i), F(O_j))$ . On estime que cette précision est décroissante en partant de la valeur 1 pour une ressemblance stricte, pour atteindre une valeur minimale  $u_{min} > 0$  associée à une mesure calculée à partir des composantes du vecteur des seuils  $\vec{d}_F^+$ . On peut considérer une décroissance linéaire ou plus lisse pour la fonctionnelle  $f_a$  définie. Dans notre application, nous retiendrons l'hypothèse suivante pour  $f_a$  :

$$u_{R_F}(\mathcal{C})(r) = f_a(\|d(O_i, O_j)\|)$$

avec  $f_a(0) = 1$  et  $f_a(\|\vec{d}_F^+\|) = u_m^a > 0$ .

**Entre objets de la classe *bâtiment*.** Pour les objets de la classe bâtiment, la mesure de ressemblance considérée est basée sur des paramètres caractérisant la forme de l'emprise au sol et la hauteur de la partie principale. Les paramètres décrivant la forme de l'emprise sont déduits de représentations appropriées du contour polygonal ou de la surface associée [SS95]. Nous retenons la représentation angulaire pour sa simplicité de mise en oeuvre mais d'autres descripteurs, bien connus dans le domaine de Reconnaissance des Formes (descripteurs de Fourier...), peuvent être exploités.

**Définition 12** Considérons un polygone simple, donc sans intersection entre ses segments. La fonction angulaire associée  $o(s)$  est une application de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  qui décrit l'orientation des segments du polygone normalisés par leurs longueurs. Cette orientation est prise par rapport à un axe de référence.

La figure 2.5 illustre le calcul de cette fonction sur un exemple de polygone à quatre segments avec un point d'origine en  $A$  et l'axe de référence donné par le segment d'indice 1. L'inconvénient de cette fonction est sa dépendance par rapport à l'origine et le fait qu'elle ne satisfait pas la propriété d'invariance par rapport à une rotation élémentaire. Le calcul de la distance de forme entre deux objets doit donc en tenir compte. En effet, une différence de choix du point d'origine introduit un décalage circulaire de la fonction angulaire, et une rotation introduit un décalage constant en ordonnée. L'expression de la distance finalement retenue est donnée par :

$$\vec{d}(F(O_i), F(O_j)) := \left( \min_{t \in [0, 1], \alpha \in \mathbb{R}} \int_0^1 |o_i(s+t) - o_j(s) + \alpha| ds \right) \begin{pmatrix} |h_p^i - h_p^j| \\ |h_s^i - h_s^j| \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Elle mesure donc la différence en valeur absolue des surfaces formées par les fonctions angulaires des deux objets. La mesure de précision associée est définie en considérant une combinaison linéaire des composantes du vecteur précédent et, comme pour les objets arbres, définie comme suit :

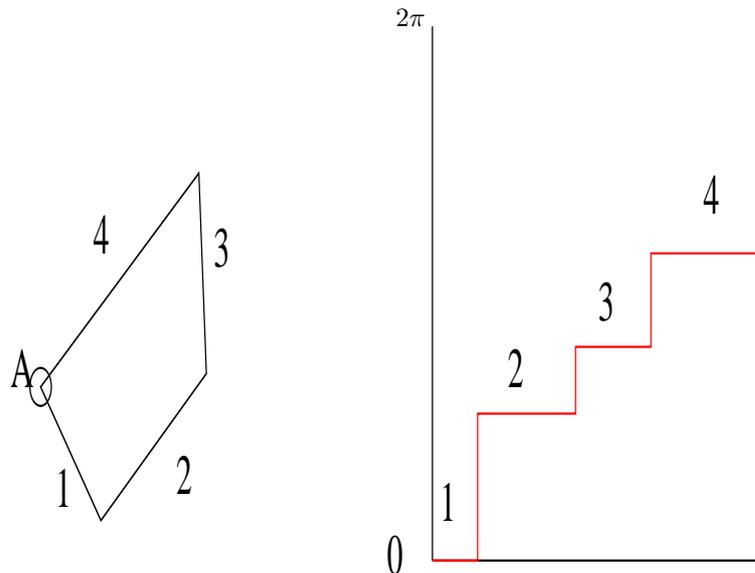


FIG. 2.5 – Calcul de la fonction angulaire pour un polygone.

$$u_{R_F}(\mathcal{C})(r) = f_b(d(F(O_i), F(O_j)))$$

avec  $f_b(0) = 1$  et  $f_b(d_F^+) = u_m^b > 0$ .

### 2.5.3 Relations d'agencement

La dernière relation considérée dans le cadre de notre étude s'intéresse à l'agencement au sens de l'alignement d'objets de même nature suffisamment proches en termes de localisation. Contrairement aux relations définies précédemment, qui étaient des relations simples et symétriques, la relation d'alignement peut être étendue et asymétrique. On considère des alignements

- entre des paires de bâtiments,
- entre des triplets d'arbres isolés.

On note respectivement  $R_a^1$  et  $R_a^2$  la relation d'alignement entre des bâtiments et entre des arbres.  $R_a^1$  est encore une relation simple, alors que  $R_a^2$  est étendue.

#### 2.5.3.1 Définition de $R_a^1$ .

La définition de la relation d'alignement  $R_a^1$  nécessite au préalable de caractériser l'*orientation* d'un objet bâtiment. On suppose que cette orientation coïncide avec celle du polygone représentant l'emprise au sol. La forme du polygone pouvant être complexe, on peut être amené à considérer plusieurs méthodes de calcul de cette caractéristique. On peut en effet s'intéresser à l'orientation globale ou à l'orientation imposée par les façades. L'orientation globale est obtenue par le calcul des axes principaux de la forme de la base. Pour caractériser l'alignement entre deux bâtiments, elle s'avère moins pertinente. Il existe plusieurs méthodes pour déterminer l'orientation des murs [Reg98][DBB<sup>+</sup>01]. Celle retenue dans nos travaux consiste à prendre pour un bâtiment l'orientation du plus long segment de son emprise au sol. Soient  $(O_i, O_j)$  deux objets bâtiments vérifiant la relation d'alignement. On introduit  $\phi_i$  et  $\phi_j$  les orientations calculées à partir du plus long segment de leurs bases respectives. Les angles  $\phi_i$  et  $\phi_j$  sont choisis dans  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Sur l'exemple de la figure 2.6, l'orientation de l'objet  $O_i$  est donnée par le segment 4 et celle de  $O_j$  par 1 :

La condition d'interaction est la suivante

$$O_i R_a^1 O_j \text{ ssi } \begin{cases} O_i R_G O_j \\ |\phi_i - \phi_j| < \delta\phi_b \end{cases}$$

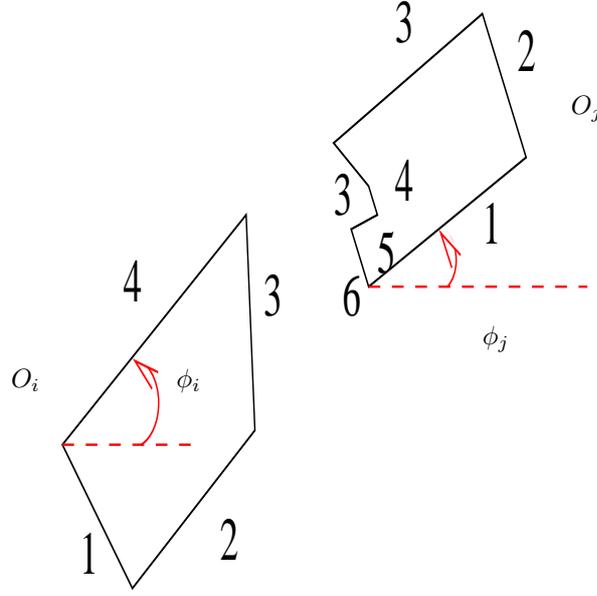


FIG. 2.6 – Aligement de deux bâtiments.

Nous avons défini un critère de précision pour la relation simple  $R_G$ , qui permet de pénaliser les intersections de bâtiments. Pour la relation d'aligement, la précision doit également tenir compte de cette contrainte. Un autre critère doit être ajouté pour tenir compte de l'écart entre les orientations définies par  $\phi_i$  et  $\phi_j$ . Pour une composante  $r = (O_i, O_j)$  au sens de  $R_a^1$ , on définit la précision en utilisant les règles suivantes :

$$u_{R_a^1}(\mathcal{C})(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } A(O_i \cap O_j) \neq 0 \\ f_a^1(|\phi_i - \phi_j|) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.17)$$

où  $f_a^1$  est une fonction décroissante définie sur  $[0, 1]$  vérifiant  $f_a^1(0) = 1$  et  $f_a^1(\delta\phi) = u_m^{a1} > 0$ .

### 2.5.3.2 Définition de $R_a^2$

Soient  $(O_i, O_j, O_k)$  trois objets de la classe arbre vérifiant la relation d'aligement. On introduit  $\phi_l \in ] - \pi, \pi]$ ,  $l = i, j, k$  les angles du triangle formé par les sommets  $(p_a^i, p_a^j, p_a^k)$ . La condition d'interaction pour la relation d'aligement est réalisée lorsqu'au moins l'un des trois objets est en interaction selon  $R_G$  avec les deux autres et que l'angle au sommet associé est proche de la valeur  $\pi$ . Sans perte de généralité, supposons que  $O_j$  est l'objet central (cf. figure 2.7), on en déduit que le triplet  $(O_i, O_j, O_k)$  est une composante de la relation d'aligement  $R_a^2$  si et seulement si

$$\begin{cases} O_i R_G O_j \ \& \ O_j R_G O_k \\ \pi - \delta\phi_a^2 \leq \phi_j \leq \pi + \delta\phi_a^2 \end{cases}$$

On utilise alors la notation  $O_i R_a^2 O_j R_a^2 O_k$ . La précision d'une composante de cette relation est déterminée à partir de la précision d'une composante de la relation  $R_G$  et en considérant la qualité de l'aligement définie par le seuil  $\delta\phi_a^2$ . Soit  $r = (O_i, O_j, O_k)$  la composante associée au sens de  $R_a^2$ , on a

$$u_{R_a^2}(\mathcal{C})(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } u_{R_G}(\mathcal{C})((O_i, O_j)) = 0 \text{ ou } u_{R_G}(\mathcal{C})((O_j, O_k)) = 0 \\ f_a^2(|\phi_j - \pi|) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.18)$$

où  $f_a^2$  est encore une fonction décroissante définie sur  $[0, 1]$  vérifiant  $f_a^2(0) = 1$  et  $f_a^2(\delta\phi) = u_m^{a2} > 0$ .

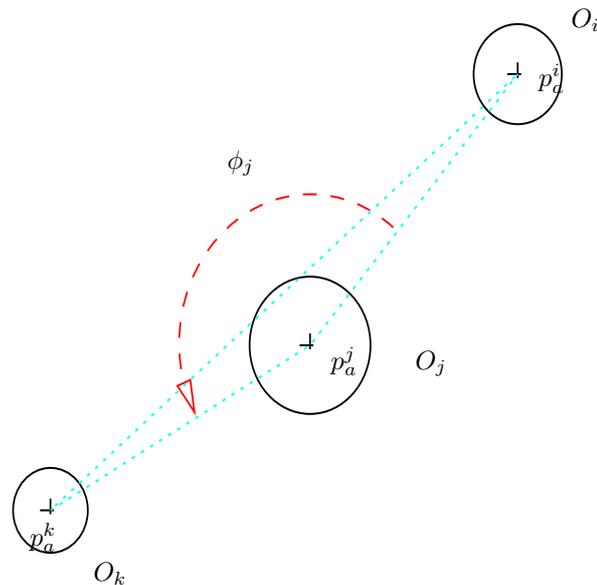


FIG. 2.7 – Alignement des arbres.

## 2.6 Conclusions du chapitre

Nous avons introduit dans ce chapitre le modèle de carte qui sera utilisé dans la suite de ce manuscrit. Il permettra de proposer une approche permettant d'analyser l'impact des incertitudes a priori sur l'information cartographique sur certaines missions d'un système mobile robotisé, comme la navigation à partir d'une carte de référence de l'environnement d'évolution. Le modèle présenté considère une base cartographique composée principalement de deux familles d'objets. La première représente des infrastructures de type bâtiments alors que la seconde s'intéresse aux arbres. Bien que cela puisse sembler restrictif, les éléments géométriques manipulés sont suffisamment représentatifs pour présenter nos développements qui doivent sans grande difficulté se généraliser à une base d'objets plus riche. En outre, nous avons explicité la notion d'incertitude, en considérant les erreurs géométriques et d'exhaustivité associées aux objets. La modélisation retenue est stochastique, avec des notions de bruits sur les paramètres de localisation et de forme des objets. La densité de probabilité d'une carte bruitée reflétant cette incertitude à partir d'une carte moyenne donnée a donc pu être déduite. Dans un second temps, nous avons proposé un mécanisme de haut niveau qui s'applique sur l'ensemble constitué par les objets, afin de disposer d'une capacité de modélisation des interactions éventuelles entre objets. Ce formalisme s'appuie sur la définition de la notion de relations simples ou étendues sur la carte. En particulier, pour notre modèle, nous avons présenté trois types de relations - proximité géographique, proximité de forme et alignement - pour lesquelles nous avons précisé les paramètres caractéristiques de précision. Les critères de précision, d'intensité et de diffusion pour une relation définis dans ce chapitre seront très utiles. En effet, sur la base de ces éléments de modélisation et en s'appuyant sur des résultats théoriques sur les processus aléatoires que sont les *processus ponctuels marqués*, qui seront plus largement présentés dans le chapitre suivant, nous allons proposer une démarche permettant de générer de façon *contrôlée* un échantillon de cartes représentatif de l'incertitude a priori et de la structure spatiale.

## Chapitre 3

# Génération contrôlée de cartes incertaines

Ce chapitre aborde la problématique de génération d'un échantillon de cartes représentatif de l'incertitude sur les objets d'une carte fournie *a priori*. L'approche que nous proposeront vise à garantir autant que possible le maintien de la structure spatiale de la carte initiale lors du processus de simulation. Nous nous plaçons dans le cadre formel des *processus de points marqués* (ou ponctuels marqués), que nous introduisons brièvement dans un premier temps. Enfin, nous définissons le mode de représentations cartographiques, en sortie de la méthode de simulation, qui sera au final exploité dans la suite des travaux.

### 3.1 Quelques résultats sur les processus ponctuels

Un processus ponctuel est associé à une variable aléatoire dont les réalisations sont des *configurations* de points d'un espace  $K$  donné. Dans certaines situations, il peut être important de considérer une notion plus étendue de points de  $K$  en y ajoutant des caractéristiques à valeurs dans un espace prédéfini  $\mathbb{M}$ . Ceci permet d'introduire une classe particulière de processus ponctuels que sont les *processus ponctuels marqués*, définis sur  $K \times \mathbb{M}$ . Pour illustrer notre propos, reprenons l'exemple du chapitre précédent avec les disques dans le plan. L'espace  $K$  est dans ce cas assimilable à  $\mathbb{R}^2$ , les centres des disques sont les points d'un processus ponctuel représentatif de configurations de  $N \in \mathbb{N}$  disques dans le plan. Ce processus devient un processus ponctuel marqué lorsque l'on attache, par exemple, à chacun des points le rayon du disque associé. Dans ce cas, l'ensemble des marques  $\mathbb{M}$  est équivalent à  $\mathbb{R}^+$ .

Le processus ponctuel le plus simple est le processus ponctuel de Poisson, qui considère la génération de configurations de points uniformément répartis dans  $K$ , et dont le nombre  $N$  suit une loi de Poisson

$$p(N = n) = e^{-\nu(K)} \frac{\nu(K)^n}{n!}. \quad (3.1)$$

où  $\nu(K)$  est une mesure adaptée sur  $K$  supposée probabilisable. Nous ne détaillerons pas les bases théoriques des processus ponctuels, mais uniquement les résultats qui seront utiles à notre besoin de génération de cartes. Les ouvrages [SS95], [VL95] et la synthèse proposée par le mémoire de thèse [Ort04] constituent d'excellentes références pour aborder le sujet.

#### Densité d'un processus ponctuel.

Nous allons maintenant introduire plus précisément la notion de processus ponctuel sur un espace  $K$  donné, qui, dans bien des cas, est de la forme  $\mathbb{R}^d$   $d > 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^+$ , on considère  $K_n$  l'espace composé de toutes les configurations de points de taille  $n$ . On notera  $x = \{x_1, \dots, x_n\} \in K_n$  une configuration de  $K_n$ . La configuration vide, qui ne contient aucun point est notée  $K_0 = \{\emptyset\}$ . Le processus ponctuel fini  $X$  est une mesure de probabilité définie sur un espace de probabilité

qui prend ses valeurs dans  $(K = \cup_{n=0}^{\infty} K_n, \mathcal{K})$ , où  $\mathcal{K}$  est une tribu sur  $K$  adaptée. La densité du processus ponctuel  $X$  se définit alors par rapport au processus ponctuel de Poisson qui constitue la mesure de référence. Si on note  $f(x)$  la densité non normalisée de  $X$  définie de l'espace des configurations de  $X$  dans  $\mathbb{R}^+$ , on peut montrer qu'il est possible sous certaines conditions de définir une chaîne de Markov  $(X_e)_{e>0}$  à valeurs dans  $K$  convergente vers la loi de  $X$  [GM94][VL95]. Ce résultat est intéressant car il indique qu'il est possible d'approcher la loi de  $X$  par échantillonnage, en s'appuyant sur une chaîne de Markov suffisamment bien construite. Notre objectif est de proposer une méthode permettant de simuler des configurations de cartes à partir d'une représentation observée bruitée, tout en respectant les contraintes imposées par la structure spatiale des objets. Pour cela,

1. nous montrons qu'il est possible de considérer une carte comme la réalisation d'un processus ponctuel dont la loi densité est connue à une constante de normalisation près,
2. nous adaptons l'algorithme de Metropolis-Hasting Green (MHG), proposée dans [GM94], pour échantillonner la loi associée par une approche de type MCMC (Monte Carlo Markov Chain).

Nous présentons d'abord, sous sa forme générique, l'algorithme proposé par Geyer et Moller [GM94] pour l'échantillonnage de la loi non normalisée d'un processus ponctuel. On cherche donc à construire une chaîne de Markov  $\{X_e\}$  dont l'espace d'états est l'ensemble des configurations de  $X$ ,  $\mathcal{X} = \{x \in \Omega | f(x) > 0\}$  et de loi  $\pi(\cdot)$  convergente vers  $f(x)$ . L'idée principale est de définir des opérateurs sur l'espace des points permettant de modifier à chaque étape de l'algorithme la configuration de points courante. La forme des opérateurs dépend des caractéristiques du processus ponctuel et de la performance recherchée en termes d'échantillonnage. Pour un processus avec des configurations d'objets de taille fixée et égale à  $n$ , l'algorithme de MHG dans sa version la plus simple est l'algorithme 1 présenté en page 32.

---

**Algorithme 1** Algorithme générique de simulation d'un processus ponctuel

---

Supposons  $X_e = x \in \mathcal{X}$  la configuration courante à l'étape  $e$ .

- 1) On effectue la transition vers l'état  $X_{e+1} = (x \cup \zeta) \setminus \eta$  de même dimension en remplaçant le point  $\eta$  choisi de façon aléatoire dans  $x$  par le point  $\zeta$  suivant un opérateur de proposition  $Q(\cdot)$  défini sur  $K \times \mathbb{M}$ .
- 2) On accepte la proposition de changement d'état avec une probabilité  $\alpha = \min(1, R)$  en considérant le rapport

$$r = \frac{f((x \cup \zeta) \setminus \eta)}{f(x)}. \quad (3.2)$$

- 3) on retourne à l'étape 1) puis on incrémente  $e$  jusqu'à convergence après un nombre d'itérations suffisants.
- 

Après convergence, il est alors possible d'obtenir un jeu de configurations simulant le processus ponctuel cible. Pour garantir la convergence de la chaîne ainsi construite les opérateurs de proposition de modifications des objets doivent vérifier certaines propriétés [VL95][Ort04]. Nous proposons une méthode de génération contrôlée de cartes qui sera basée sur cet algorithme, en définissant la loi du processus ponctuel reflétant les spécificités de notre carte et en proposant des opérateurs de proposition appropriés à la structure de notre problème.

## 3.2 Utilisation du formalisme des processus ponctuels

Nous allons utiliser le formalisme de processus ponctuel pour représenter la carte métrique que nous avons introduite au chapitre précédent. Une réalisation de carte bruitée sera considérée comme une configuration d'un processus ponctuel, aussi noté  $\mathcal{C}$  et défini sur  $\mathcal{D}$ , une partie de  $\mathbb{R}^2$ .  $\mathcal{D}$  est, par exemple, un pavé de la forme  $[x_-, x_+] \times [y_-, y_+]$  qui délimite la zone d'intérêt. Un objet de la carte est un *point marqué* de  $\mathcal{D}$  dont les marques sont les attributs qui le caractérisent. Pour notre

hypothèse de modélisation, un objet de la carte est un point marqué de  $\mathbb{R}^2$  auquel sont associées les caractéristiques définissant notamment

- sa classe d'appartenance et sa zone de qualité,
- sa géométrie.

Ainsi, pour les objets de type *bâtiment*, on choisira pour point représentatif le barycentre des sommets de l'emprise au sol. L'espace des marques associé est alors de la forme suivante

$$\mathbb{M}_b := \underbrace{\{1\}}_{\text{classe}} \times \underbrace{\{1, \dots, n_q\}}_{\text{zone de qualité}} \times \underbrace{\mathcal{D}^N}_{\text{sommets base}} \times \underbrace{\mathbb{R}^+}_{\text{hauteur principale}} \times \underbrace{\mathcal{D}^Q}_{\text{sommets surélévation}} \times \underbrace{\mathbb{R}^+}_{\text{hauteur principale}}$$

Pour les objets de la classe *arbre isolé*, le point est le centre du disque et l'espace des marques est donné par

$$\mathbb{M}_a := \underbrace{\{2\}}_{\text{classe}} \times \underbrace{\{1, \dots, n_q\}}_{\text{zone de qualité}} \times \underbrace{\mathbb{R}^+}_{\text{rayon}} \times \underbrace{\mathbb{R}^+}_{\text{hauteur}}.$$

On peut remarquer que l'espace  $\mathbb{M}_a$  est un sous espace de  $\mathbb{M}_b$ . On peut donc supposer que l'espace des marques pour l'ensemble des objets de la carte est en réalité équivalent à  $\mathbb{M}_b$ . Le processus ponctuel étant précisé, nous devons maintenant déduire l'expression de sa densité.

### 3.3 Loi d'une configuration $\mathcal{L}(\mathcal{C}|\mathcal{C}_y)$

Dans le chapitre 2, nous avons précisé les modèles d'incertitude associés aux objets présents dans la carte. Nous avons également introduit un formalisme basé sur la définition de relations traduisant différentes formes d'interaction entre les objets, afin de représenter l'organisation spatiale des objets. Nous allons définir un équivalent d'une densité a posteriori  $\mathcal{L}(\mathcal{C}|\mathcal{C}_y)$  pour les cartes bruitées à partir de la connaissance de la carte observée  $\mathcal{C}_y$  disponible. Cette densité est construite à partir de la loi  $\mathcal{L}(\mathcal{C}_y|\mathcal{C})$  qui tient compte de l'incertitude de la carte observée et d'une loi dite *a priori*  $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ , construite à partir des relations et liée à la structure spatiale de la carte.

#### 3.3.1 Loi a priori $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ sur la base des relations

L'approche présentée ici s'inspire des travaux de [Ort04] sur l'extraction de bâtiments à partir d'un modèle numérique d'élévation représentant sur une grille l'altitude d'une zone géographique. On définit la loi a priori d'une configuration à partir des relations. Dans le chapitre 2, nous avons introduit des relations de proximité géographique  $R_G$ , de proximité de forme  $R_F$  et d'alignement  $R_a^1$  et  $R_a^2$ . Pour une relation, nous avons également vu qu'il était possible de la caractériser pour une carte donnée par trois critères principaux : la précision  $U$ , l'intensité  $I$  et la diffusion  $D$ . En particulier, sur quelques exemples, nous avons montré que les valeurs de ces trois critères renseignaient sur la structure spatiale de la carte au sens des relations considérées. L'idée consiste donc à spécifier la loi a priori de la carte, en attachant un modèle probabiliste à ces grandeurs. Soit  $(\bar{U}_R, \bar{I}_R, \bar{D}_R)$  le vecteur de paramètres de la relation  $R$ , qui correspond à la structure de la carte moyenne autour de laquelle on souhaite simuler des réalisations de cartes bruitées. On considère la loi de probabilité suivante pour la relation  $R$  :

$$f_R(\mathcal{C}) \propto f_I(\mathcal{C}, R) f_D(\mathcal{C}, R) f_U(\mathcal{C}, R) \quad (3.3)$$

où les lois sur les paramètres sont supposées gaussiennes

$$\begin{aligned} f_I(\mathcal{C}, R) &\sim \mathcal{N}(\bar{I}_R, \sigma_{I,R}^2) \\ f_U(\mathcal{C}, R) &\sim \mathcal{N}(\bar{U}_R, \sigma_{U,R}^2) \\ f_D(\mathcal{C}, R) &\sim \mathcal{N}(\bar{D}_R, \sigma_{D,R}^2). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Les paramètres  $\bar{i}_R \in \mathbb{R}^+$ ,  $i \in \{I, D, U\}$  permettent de placer le mode principal de la loi et  $\sigma_{i,R}^2 \in \mathbb{R}^+$ ,  $i \in \{I, D, U\}$  caractérisent la dispersion autour de ce mode. Lorsque plusieurs relations sont impliquées, on généralise cette densité de la manière suivante :

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}) \propto \prod_R f_R(\mathcal{C}). \quad (3.5)$$

En pratique, on est confronté aux choix des paramètres de la loi  $(\bar{i}_R, \sigma_{i,R}^2)$  pour chacune des relations pour disposer d'une connaissance complète de la loi. Dans notre cas, nous souhaitons obtenir des représentations de carte autour de la carte observée. Les paramètres  $\bar{i}_R$  peuvent être fixés en analysant la structure spatiale de la cartographie disponible  $\mathcal{C}_y$ . Le choix des valeurs des paramètres de dispersion  $\sigma_i^x$  est réalisé par l'utilisateur en fonction du niveau de souplesse qu'il souhaite se donner lors de la génération des cartes bruitées par rapport à la structure de la carte observée. Si on s'autorise des réalisations de carte avec une organisation spatiale très différente de la carte  $\mathcal{C}_y$ , il faudra imposer des paramètres de dispersion importants. Inversement, une rigidité sera assurée en fixant des variances faibles.

Sur la figure 3.1, nous avons représenté les composantes de la relation de proximité  $R_G$  pour un exemple de carte  $\mathcal{C}$  composée de 53 objets de types bâtiments arbres, et pour trois seuils fixés sur les distances « bâti-bâti » (bleu foncé), « bâti-arbre » (rouge) et « arbre-arbre » (cyan). Dans cette configuration, tous les objets sont en relation avec au moins un voisin et sans intersection. La diffusion  $D_{R_G}(\mathcal{C})$  est donc maximale et vaut 1, de même que la qualité de la relation  $U_{R_G}(\mathcal{C})$ . On dénombre 122 composantes pour  $R_G$ . La cardinalité de cette relation valant 2, on en déduit une intensité  $I_{R_G}(\mathcal{C}) \approx 4.61$ . On peut noter la segmentation de la carte due à l'application des différentes relations. En effet, on peut identifier environ cinq groupes d'objets. On comprend bien que des modifications aléatoires qui ne tiendraient pas compte de cette structure modifieraient la perception de ces groupes d'objets.

Par exemple, si l'on modifie globalement le groupe d'objet en haut à gauche sans casser les liens, la segmentation n'est pas modifiée, mais toute modification d'une sous-partie de ce groupe entraînerait l'apparition d'un groupe supplémentaire. Un déplacement important du bâtiment numéro 25 va causer la suppression des liens avec les objets 53 et 26, donc deux relations en moins et un objet isolé. Ceci impacte directement la valeur de paramètres  $I_{R_G}(\mathcal{C})$  et  $D_{R_G}(\mathcal{C})$  pour la relation  $R_G$ . Notre processus de génération des cartes va donc utiliser ces propriétés en contraignant l'évolution probable de ces paramètres la proximité avec la carte moyenne fournie.

### 3.3.2 Définition de $\mathcal{L}(\mathcal{C}|\mathcal{C}_y)$

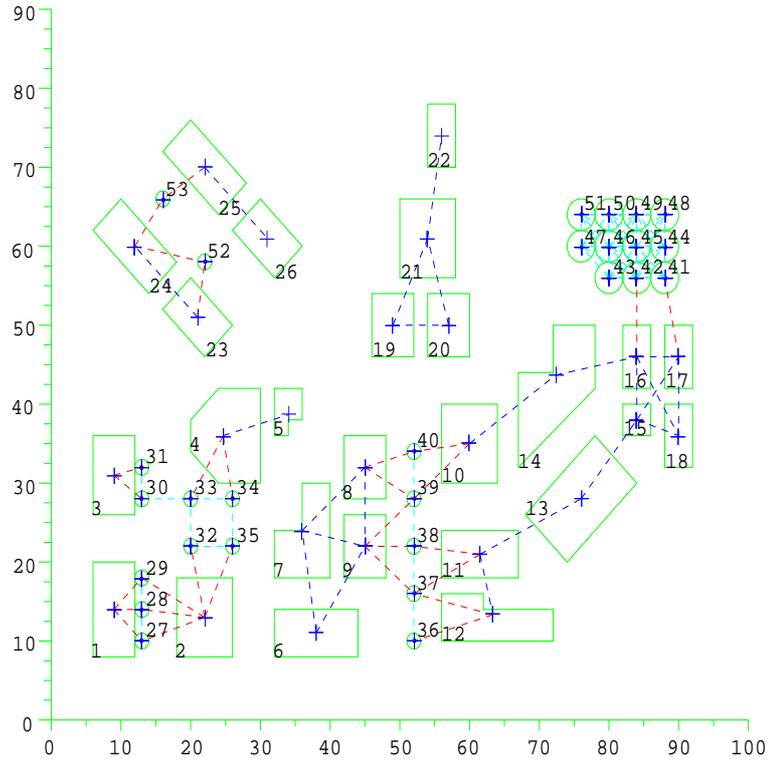
A partir de la loi a priori  $\mathcal{L}(\mathcal{C})$  définie précédemment et de l'expression de la vraisemblance  $\mathcal{L}(\mathcal{C}_y|\mathcal{C})$  donnée par l'équation 2.8, on peut déduire la loi a posteriori non normalisée pour la génération des cartes  $\mathcal{C}|\mathcal{C}_y$  en utilisant la règle de Bayes

$$L(\mathcal{C}|\mathcal{C}_y) \propto \underbrace{L(\mathcal{C}_y|\mathcal{C})}_{\text{incertitudes de cartographie}} \cdot \underbrace{L(\mathcal{C})}_{\text{structure spatiale}} \quad (3.6)$$

C'est cette loi qui servira de base à la génération de manière contrôlée de cartes, par un choix adapté des coefficients de dispersion sur les paramètres caractéristiques des relations, en s'appuyant sur les résultats des processus ponctuels et en utilisant une version adaptée de l'algorithme 1 présenté en page 32.

## 3.4 Processus de génération des cartes

Nous avons montré qu'il était possible de formaliser le processus de génération de carte comme la simulation d'un processus ponctuel dont la loi  $L(\mathcal{C}|\mathcal{C}_y)$  est fournie par l'équation (3.6). Nous présentons une adaptation de l'algorithme 1 présenté en page 32 pour échantillonner cette distribution et ainsi générer des cartes représentatives de l'incertitude sur les objets tout en respectant, dans une certaine mesure, la structure spatiale de la carte initiale. Pour appliquer l'algorithme, il est d'abord nécessaire de définir les opérateurs de proposition qui permettront de faire évoluer les objets d'une configuration à l'autre entre deux itérations.

FIG. 3.1 – Exemple de carte et relation  $R_G$ .

### 3.4.1 Opérateurs de proposition pour la modification des objets

Nous considérons des opérateurs qui agissent sur un objet à la fois. Ces opérateurs permettent de modifier la configuration courante en influant sur le positionnement global et sur la forme des objets par des transformations géométriques simples. L'objet (ou le point dans le formalisme des processus ponctuels) ainsi que l'opérateur à appliquer seront choisis de façon aléatoire et uniforme à chaque étape de l'algorithme.

#### Translation rigide $Q_1$

Le premier opérateur agit sur un objet de la carte en lui appliquant une translation définie par le vecteur  $\vec{t}_1 := (t_1^x, t_1^y)$  dans le repère  $\mathcal{R}_g$ .

$$Q_1 : \begin{array}{ccc} \mathcal{E}(\mathcal{C}) & \rightarrow & \mathcal{E}(\mathcal{C}) \\ \{O_1, \dots, O_{N_C}\} & \rightarrow & \{\tilde{O}_1, \dots, \tilde{O}_{N_C}\} \end{array}$$

où  $\exists 1 \leq i_0 \leq N_C$  choisi de façon aléatoire,

$$\tilde{O}_{i_0} = \vec{t}_1(O_{i_0}), \quad \tilde{O}_i = O_i, \quad i \neq i_0$$

L'application de cet opérateur sur un objet bâtiment consiste à traduire tous les sommets d'un déplacement défini par  $\vec{t}_1$ . Pour un objet arbre, l'objet obtenu est de même rayon et de même hauteur mais le centre est déplacé de  $\vec{t}_1$ . On peut remarquer que si l'objet sélectionné pour la modification n'intervient initialement pas dans une interaction et que si c'est toujours le cas après translation, alors la structure spatiale globale de la carte courante n'est pas impactée. Par conséquent le rapport de Métropolis Hasting  $r$  se restreint alors au rapport des vraisemblances  $L(\mathcal{C}_y|\mathcal{C})$  avant et après modification.

#### Rotation 2D d'un objet $Q_2$

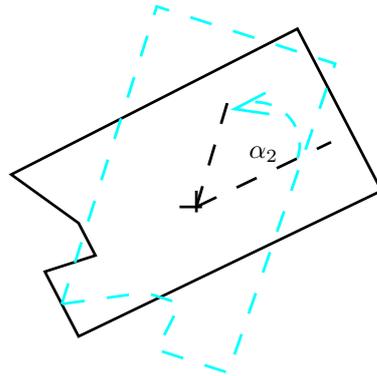


FIG. 3.2 – Opérateur de rotation d'un bâtiment.

Cet opérateur effectue une rotation d'angle  $\alpha_2 \in ]-\pi, \pi[$  par rapport à un axe de référence. La valeur  $\alpha_2$  est choisie de façon aléatoire, et l'axe de cette rotation est celui passant par le centre de gravité des objets et orthogonal au plan 2D. Pour un objet bâtiment, le centre de gravité est calculé à partir des sommets de l'emprise au sol et l'axe de référence est donné par l'orientation principale équivalente à celle du côté de plus grande longueur (cf. figure 3.2). Pour un objet arbre, compte tenu des hypothèses de modélisation, cet opérateur ne modifie pas l'objet.

$$Q_2 : \begin{array}{ll} \mathcal{E}(\mathcal{C}) & \rightarrow \mathcal{E}(\mathcal{C}) \\ \{O_1, \dots, O_{N_C}\} & \rightarrow \{\tilde{O}_1, \dots, \tilde{O}_{N_C}\} \end{array}$$

où  $\exists 1 \leq i_0 \leq N_C$  choisi de façon aléatoire,

$$\tilde{O}_{i_0} = r(\alpha_2)(O_{i_0}), \quad \tilde{O}_i = O_i, \quad i \neq i_0.$$

### Homothétie 2D d'un objet $Q_3$

L'opérateur homothétie permet de modifier la forme de l'objet de façon globale. On la définit à partir d'un facteur d'homothétie  $\alpha_3$ . Pour les objets bâtiments, elle consiste à déplacer les sommets des deux polygones décrivant la base et la surélévation à partir de leurs centres de gravité respectifs par application du facteur d'échelle  $\alpha_3$ . Pour un arbre, il suffit de modifier le rayon du disque en conséquence.

$$Q_3 : \begin{array}{ll} \mathcal{E}(\mathcal{C}) & \rightarrow \mathcal{E}(\mathcal{C}) \\ \{O_1, \dots, O_{N_C}\} & \rightarrow \{\tilde{O}_1, \dots, \tilde{O}_{N_C}\} \end{array}$$

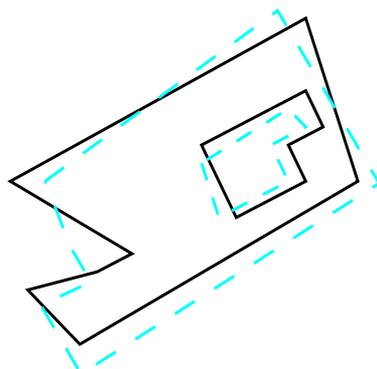
où  $\exists 1 \leq i_0 \leq N_C$  choisi de façon aléatoire,

$$\tilde{O}_{i_0} = s(\alpha_3)(O_{i_0}), \quad \tilde{O}_i = O_i, \quad i \neq i_0.$$

### Déformation 2D d'un objet $Q_4$

L'intérêt de l'opérateur  $Q_4$  est d'autoriser la déformation de façon plus élastique des objets. Pour un objet arbre, cet opérateur est équivalent, en termes de résultat, à l'opérateur  $Q_3$ . On s'intéresse donc plus spécifiquement aux objets de la classe bâtiment : on applique à chacun des sommets du polygone de l'emprise au sol une translation élémentaire de façon différenciée.

$$Q_4 : \begin{array}{ll} \mathcal{E}(\mathcal{C}) & \rightarrow \mathcal{E}(\mathcal{C}) \\ \{O_1, \dots, O_{N_C}\} & \rightarrow \{\tilde{O}_1, \dots, \tilde{O}_{N_C}\} \end{array}$$

FIG. 3.3 – Opérateur  $Q_4$  appliqué à un polygone vu de dessus.

où  $\exists 1 \leq i_0 \leq N_C$  choisi de façon aléatoire,

$$\tilde{O}_{i_0} = \vec{t}_4(O_{i_0}), \quad \tilde{O}_i = O_i, i \neq i_0.$$

avec  $\vec{t}_4$  un vecteur de dimension égale à deux fois le nombre de sommets de l'emprise au sol et de la surélévation de l'objet  $O_{i_0}$ .

### Modification de la troisième dimension $Q_5$

Enfin, le dernier opérateur considéré permet de modifier la troisième dimension des objets en proposant des objets de hauteur différente à partir de la configuration courante.

$$Q_5(\cdot) : \begin{array}{ll} \mathcal{E}(\mathcal{C}) & \rightarrow \mathcal{E}(\mathcal{C}) \\ \{O_1, \dots, O_{N_C}\} & \rightarrow \{\tilde{O}_1, \dots, \tilde{O}_{N_C}\} \end{array}$$

où  $\exists 1 \leq i_0 \leq N_C$  choisi de façon aléatoire,

$$\tilde{O}_i = O_i, i \neq i_0 \text{ et } \tilde{O}_{i_0} \text{ est un objet de mêmes caractéristiques que } O_{i_0} \text{ hormis sa hauteur.}$$

La nouvelle hauteur de l'objet modifié est obtenue par incrémentation d'une variation relative de hauteur choisie de façon aléatoire.

### 3.4.2 Algorithme de génération contrôlée

Les opérateurs de modification d'une configuration de carte ont été définis. Nous détaillons les étapes de l'algorithme de génération contrôlée d'un échantillon de cartes, basé sur l'algorithme MCMC. On obtient au final l'algorithme 2 présenté en page 38.

### 3.4.3 Exemple

Nous reprenons l'exemple de la carte présentée à la figure 3.1. Nous considérons uniquement les objets de la classe bâtiment. Les relations de proximité géographique  $R_G$  et d'alignements  $R_a^1$  entre deux bâtiments sont prises en compte dans le processus de génération de cartes. La qualité géométrique est supposée homogène sur toute la carte et caractérisée par une précision de localisation des sommets de l'emprise au sol des bâtiments. Sur la figure 3.4, nous montrons les résultats de l'application des relations  $R_G$  et  $R_a^1$  pour un ensemble de paramètres sur la distance et l'écart d'orientation entre deux bâtiments. Le seuil sur la distance est fixé à 6 mètres et pour l'orientation, on autorise un défaut d'alignement entre les plus grands axes des bâtiments de 5 degrés. La qualité d'une composante de  $R_G$  est toujours égale à 1 tant qu'il n'y a pas d'intersection. Pour une composante d'orientation, la qualité est linéairement décroissante en fonction de l'écart d'orientation entre 1 et 0.5 pour le seuil de 5 degrés. Les composantes de  $R_a^1$  sont présentées

---

**Algorithme 2** Génération contrôlée d'un échantillon de cartes.
 

---

**Initialisation** : Pour chacune des relations  $R \in \{R_G, R_F, R_a^1, R_a^2\}$ , on détermine la valeur des paramètres  $\bar{I}^R, \bar{D}^R$  et  $\bar{U}^R$  à partir de la carte disponible  $\mathcal{C}_y$  en entrée du processus. On fixe les valeurs des paramètres de dispersion  $\sigma_{I,R}^2, \sigma_{U,R}^2$  et  $\sigma_{D,R}^2$ . La configuration de carte à l'étape  $e = 0$  est  $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_y$ .

**Avant convergence** : supposons disponible une configuration de carte  $\mathcal{C}_e$  à l'étape  $e$ . On modifie la configuration comme suit :

- (1) Choisir l'opérateur  $Q_l, 1 \leq l \leq 5$  avec une probabilité  $p_l$  telle que  $\sum_{l=1}^5 p_l = 1$ ,
- (2) générer des caractéristiques de l'opérateur  $Q_l$ ,
- (3) choisir un objet  $O_{i_0}^e$  de  $\mathcal{C}_e$  de façon uniforme et appliquer l'opérateur  $Q_l$  pour obtenir  $\tilde{O}_{i_0}^e$ . Il est alors possible de déterminer la vraisemblance  $\mathcal{L}(\mathcal{C}_y | \mathcal{C}_t \setminus \{O_{i_0}^e\} \cup \{\tilde{O}_{i_0}^e\})$ ,
- (4) déterminer les interactions entre les objets de la carte  $\mathcal{C}_t \setminus \{O_{i_0}^e\} \cup \{\tilde{O}_{i_0}^e\}$  et calculer les paramètres  $I, D$  et  $U$  pour chaque relation  $R$  et déterminer  $\mathcal{L}(\mathcal{C}_e | \{O_{i_0}^e\} \cup \{\tilde{O}_{i_0}^e\})$  à partir du modèle de l'équation (3.5),
- (5) calculer le rapport de Metropolis-Hasting

$$r = \frac{\mathcal{L}(\mathcal{C}_e \setminus \{O_{i_0}^e\} \cup \{\tilde{O}_{i_0}^e\} | \mathcal{C}_y)}{\mathcal{L}(\mathcal{C}_e | \mathcal{C}_y)}, \quad (3.7)$$

- (5) accepter le changement d'état  $\mathcal{C}_{e+1} = \mathcal{C}_e \setminus \{O_{i_0}^e\} \cup \{\tilde{O}_{i_0}^e\}$  avec une probabilité  $\min(1, r)$ , sinon  $\mathcal{C}_{e+1} = \mathcal{C}_e$ ,
- (6) continuer en (1).

**Après convergence** : Enregistrement d'une séquence de  $P$  cartes  $\mathcal{C}_{1:P} := \{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_P\}$  avec une période de  $\Delta P$  itérations.

---

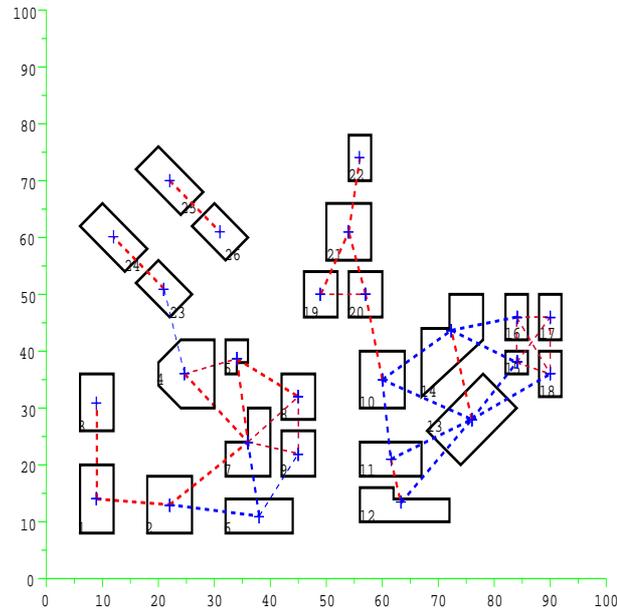


FIG. 3.4 – Composantes des relations de proximité  $R_G$  (bleu et rouge) et d'alignement  $R_a^1$  (bleu).

en couleur rouge. Une composante d'alignement nécessite d'abord une relation de proximité. Les composantes de  $R_G$  sont donc représentées par l'ensemble des liens de couleurs bleu et rouge.

Le tableau 3.1 contient les valeurs des différents paramètres de ces deux relations pour la carte donnée *a priori*. On peut noter que la diffusion de  $R_a^1$  n'est pas maximale, car l'objet numéro 6 n'a

Relation $R$	$n_V(R, \mathcal{C})$	nb relations	intensité	diffusion	qualité
$R_G$	26	38	2.92	1	1
$R_a^1$	25	25	2	0.96	0.98

TAB. 3.1 – Paramètres des relations pour la carte de la figure 3.4.

pas de voisin au sens de la définition de cette relation. La baisse de qualité est due à la composante obtenue à partir des objets 13 et 14. Nous avons appliqué l'algorithme de génération de cartes en supposant une unique région de qualité homogène. Les niveaux d'incertitudes sur les paramètres des relations sont fournis dans le tableau 3.2. L'incertitude de position sur les sommets des bâtiments étant fixés à  $\sigma_x = \sigma_y = 1$  mètre pour l'évaluation de la vraisemblance. La contrainte sur l'évolution de la qualité des composantes de la relation de proximité est plus sévère, pour limiter au maximum les éventuelles intersections. Sur la figure 3.5, nous avons tracé une réalisation de la carte bruitée

Relation	$I_R$	$\sigma_{I,R}$	$D_R$	$\sigma_{D,R}$	diffusion	$U_R$	$\sigma_{U,R}$
$R_G$	2.92	0.29	1	0.1		1	0.01
$R_a^1$	2	0.2	0.96	0.096		0.98	0.1

TAB. 3.2 – Niveaux d'incertitudes sur les paramètres des relations.

pour les paramètres de modélisation précédents sur la loi données à l'équation 3.6 après plusieurs itérations de l'algorithme. Les opérateurs de proposition utilisés sont des translation homogènes, des déformations obtenues par translation des sommets, des rotations et des homothéties. On peut

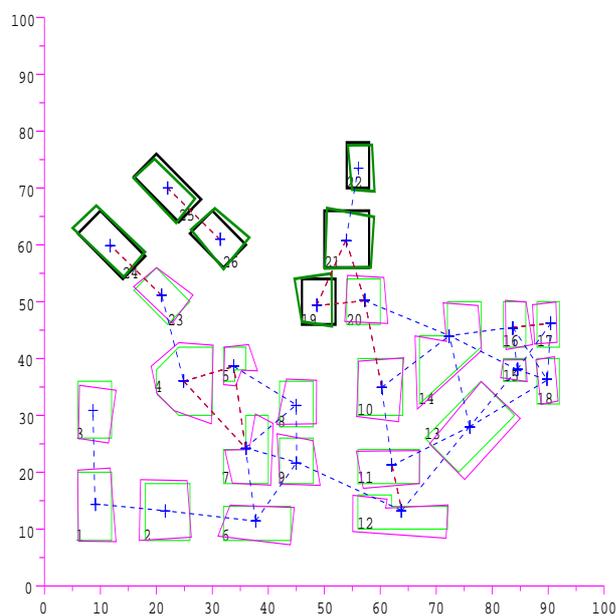


FIG. 3.5 – Réalisation bruitée de la carte et relations maintenues.

noter l'évolution du nombre de relations notamment d'alignements. Pour cette réalisation de carte, les paramètres  $(I_R, D_R, U_R)$  des relations sont respectivement  $(2.92, 1, 1)$  et  $(1.46, 0.58, 0.81)$  pour la proximité géographique et l'alignement.

### 3.5 Dédution d'une carte multi-niveau pour la navigation

Pour les besoins des tâches de navigation de systèmes robotisés, il est souvent nécessaire de pouvoir disposer d'une représentation de l'environnement à plusieurs niveaux. Nous montrons comment

il est possible de définir une telle représentation à partir d'un échantillon de cartes  $\mathcal{C}_{1:P}$  générées selon le processus proposé dans la section précédente. Le premier niveau de cette représentation est métrique et comprend des entités ponctuelles, qui seront exploitées dans des algorithmes de localisation, par corrélation avec des mesures acquises par des capteurs de perception. Ces éléments ponctuels sont caractéristiques (angles de bâtiments par exemple...) et extraites à partir de règles déduites des spécificités des applications. Par exemple, pour des algorithmes de localisation basés sur l'extraction de coins dans des images ou des scans laser, une règle possible est celle qui consiste à définir des angles de bâtiments dont la valeur sera suffisamment grande pour limiter le taux de fausses alarmes des algorithmes de détection et faciliter les appariements entre les mesures et la carte embarquée. La représentation que nous déduirons est a fortiori incertaine et les incertitudes sur les points retenus peuvent être définies par une matrice de covariance sur les coordonnées 3D. Etant données les contraintes imposées par la structure spatiale, il est possible d'avoir des modèles d'incertitudes sur les points qui soient corrélées. Le second niveau de la représentation est une grille permettant d'apporter une information plus au moins incertaine sur l'occupation des lieux par un objet cartographique. Nous proposons de décrire cette grille d'occupation soit sous une forme probabiliste, soit par des ensembles flous.

### 3.5.1 Une carte d'amers représentative de l'incertitude

On introduit l'opérateur  $T$ , qui, appliqué à une carte  $\mathcal{C}$  composée d'objets, permet d'extraire une famille de points  $f_l := (x_l, y_l, z_l)$ ,  $l = 1, \dots, N_h$  selon des règles prédéfinies. On note  $\bar{\mathcal{C}}^h$  la carte ainsi obtenue. Cette carte prend la forme d'une carte dite moyenne  $\bar{\mathcal{C}}^h = \{f_l\}_{1 \leq l \leq N_h}$  à laquelle est associée une matrice de covariance  $\Sigma(\mathcal{C}^h)$  de dimension  $3N_h \times 3N_h$ . Ces quantités sont déduites des cartes  $\mathcal{C}_{1:P}$  par les opérations

$$\bar{\mathcal{C}}^h = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P T(\mathcal{C}_p) \quad (3.8)$$

et

$$\Sigma(\mathcal{C}^h) = \frac{1}{P} [T(\mathcal{C}_p) - \bar{\mathcal{C}}][T(\mathcal{C}_p) - \bar{\mathcal{C}}]^*. \quad (3.9)$$

Ces écritures sont une forme condensée pour désigner le calcul des estimés du vecteur moyen et de la covariance des nuages de points, générés par l'échantillon de cartes bruitées suivies de l'application des critères d'extraction. Par la suite, on notera aussi  $\bar{\mathcal{C}}$  la carte moyenne  $\bar{\mathcal{C}}^h$  et  $\Sigma(\mathcal{C}^h) := \Sigma(\mathcal{C})$  lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté. On fera également l'hypothèse d'indépendance entre les points  $f_l$  et on supposera donc que la matrice  $\Sigma(\mathcal{C})$  est diagonale par blocs de taille  $2 \times 2$  correspondant à la matrice de covariance de l'erreur sur les coordonnées des projections des points  $f_l$  au sol.

### 3.5.2 Une carte d'occupation incertaine pour les obstacles

Nous avons montré dans les sections précédentes comment générer des cartes métriques représentatives des incertitudes connues sur une carte donnée. Cela nous a permis d'extraire une carte de points avec une estimation de l'incertitude sur leurs positions. Nous allons maintenant définir une couche d'information supplémentaire à partir de l'échantillon de cartes qui peut se révéler utile dans certains problèmes de planification de trajectoires. Elle constituera, par exemple, une entrée pour la définition de fonctionnelle de risque associée à la présence d'obstacles. On présente deux modes de représentation de cette couche qui est tient compte de l'incertitude initiale de la carte vectorielle. Tout d'abord, on considère une discrétisation de l'espace d'intérêt qui permet d'obtenir une grille 3D  $G(i, j, k)$ ,  $1 \leq i \leq N_x, 1 \leq j \leq N_y, 1 \leq k \leq N_k$ . On note  $c_{ijk}$  la cellule (on peut également utiliser le terme voxel) d'indice  $(i, j, k)$  de côté  $\delta x, \delta y, \delta z$ .

#### 3.5.2.1 Une grille d'occupation probabiliste

Considérons  $\mathcal{C}_{1:P}$ , l'échantillon de cartes générées selon l'algorithme 2. A chaque cellule  $c_{ijk}$  de la grille on associe une variable binaire  $m_{\langle i,j,k \rangle}$  dans  $\{0, 1\}$  telle que

$$m_{\langle i,j,k \rangle} = \begin{cases} 1 & \text{si la cellule est occupée par un objet de la carte,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.10)$$

Dans un cadre probabiliste, on cherche à déterminer pour chaque cellule la quantité  $P(m_{\langle i,j,k \rangle} = 1 | \mathcal{C}_{1:P})$  avec la contrainte

$$P(m_{\langle i,j,k \rangle} = 1 | \mathcal{C}_{1:P}) + P(m_{\langle i,j,k \rangle} = 0 | \mathcal{C}_{1:P}) = 1. \quad (3.11)$$

On fait l'hypothèse d'indépendance entre les cellules de la grille et qu'il est possible d'obtenir une estimation de cette probabilité par un simple comptage de l'évènement « l'intersection de la cellule avec au moins un objet des cartes  $\mathcal{C}_p$  est non vide ». Considérons la quantité  $n_{ijk}$ , qui est le nombre de cartes de  $\mathcal{C}_{1:P}$  qui disposent d'objets dont l'intersection avec la cellule  $c_{ijk}$  est non vide. On en déduit

$$P(m_{\langle i,j,k \rangle} = 1 | \mathcal{C}_{1:P}) = \frac{n_{ijk}}{P} \quad (3.12)$$

et donc

$$P(m_{\langle i,j,k \rangle} = 0 | \mathcal{C}_{1:P}) = \frac{P - n_{ijk}}{P}. \quad (3.13)$$

On peut exploiter une telle carte dans un algorithme de planification en définissant, par exemple, une carte de zone interdite à éviter en sélectionnant les cellules dont la probabilité d'occupation est supérieure à un seuil fixé.

### 3.5.2.2 Une représentation floue pour l'occupation

Dans cette section, on décrit la démarche permettant d'aboutir à une représentation floue de l'occupation du sol par les objets de la carte. Comme pour la grille d'occupation probabiliste, elle est déduite de l'analyse de l'intersection des objets des cartes  $\mathcal{C}_{1:P}$  avec les cellules élémentaires de la grille. On considère les ensembles des cellules *vides* et *occupées* comme des ensembles flous inclus dans  $\mathbb{R}^3$ . On les note respectivement  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{R}$ . On leur associe les fonctions d'appartenance  $\mu_{\mathcal{V}}$  et  $\mu_{\mathcal{R}}$  définies respectivement de  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{R}$  à valeurs dans  $[0, 1]$ . Il nous faut donc déterminer pour chaque cellule  $c_{ijk}$  les valeurs  $\mu_{\mathcal{R}}(c_{ijk})$  et  $\mu_{\mathcal{V}}(c_{ijk})$  qui expriment son degré d'appartenance à l'ensemble des cellules occupées et vides. Notons  $\mu_{\mathcal{R}_p}$  et  $\mu_{\mathcal{V}_p}$  les fonctions d'appartenance déduites de l'observation de la carte  $\mathcal{C}_p$ . Une façon de définir ces deux quantités est de considérer le taux d'intersection de la carte avec la cellule élémentaire. Ainsi, on calcule

$$\mu_{\mathcal{R}_p}(c_{ijk}) = \frac{\text{Volume}(C_{\langle i,j,k \rangle} \cap \mathcal{C}_p)}{\text{Volume}(C_{\langle i,j,k \rangle})} \quad (3.14)$$

où  $\text{Volume}(C_{\langle i,j,k \rangle} \cap \mathcal{C}_p)$  est le volume de l'intersection entre le cube  $C_{\langle i,j,k \rangle}$  associé à  $c_{ijk}$  et la  $\mathcal{C}_p$ . Par ailleurs, on pose aussi

$$\mu_{\mathcal{V}_p}(c_{ijk}) = 1 - \frac{\text{Volume}(C_{\langle i,j,k \rangle} \cap \mathcal{C}_p)}{\text{Volume}(C_{\langle i,j,k \rangle})}. \quad (3.15)$$

Cet opérateur est aussi utilisé dans [Fon06], mais dans une version en deux dimensions pour convertir des données d'environnement d'une représentation cartographique vectorielle à une représentation discrète sous forme de grille.

Pour déterminer  $\mu_{\mathcal{R}}(c_{ijk})$  et  $\mu_{\mathcal{V}}(c_{ijk})$ , on utilise un opérateur d'union pour agréger les informations élémentaires issues de chacune des cartes  $\mathcal{C}_p$

$$\mu_{\mathcal{R}}(c_{ijk}) = \mu_{\cup_{p=1}^P \mathcal{R}_p}(c_{ijk}) \quad (3.16)$$

et

$$\mu_{\mathcal{V}}(c_{ijk}) = \mu_{\cup_{p=1}^P \mathcal{V}_p}(c_{ijk}). \quad (3.17)$$

L'application de l'opération d'union peut être réalisée de façon itérative. Ainsi, pour  $p = 1, \dots, P-1$

$$\begin{aligned}\mu_{\mathcal{R}_{1:p+1}}(c_{ijk}) &= \mu_{\mathcal{R}_{1:p} \cup \mathcal{R}_{p+1}}(c_{ijk}), \\ \mu_{\mathcal{V}_{1:p+1}}(c_{ijk}) &= \mu_{\mathcal{V}_{1:p} \cup \mathcal{V}_{p+1}}(c_{ijk}).\end{aligned}\tag{3.18}$$

Plusieurs opérateurs peuvent être considérés tels que l'opérateur max,

$$\mu_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}(c_{ijk}) = \max(\mu_{\mathcal{A}}(c_{ijk}), \mu_{\mathcal{B}}(c_{ijk})),$$

ou encore un opérateur de la classe de Dombi ?? caractérisé par un paramètre  $\eta \in \mathbb{R}^+$  et défini pour deux ensembles flous  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  par la fonction d'appartenance

$$\mu_{\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2}(c_{ijk}) = \frac{1}{1 + \left[ \left( \frac{1}{\mu_{\mathcal{B}_1}(c_{ijk})} - 1 \right)^{-\eta} - \left( \frac{1}{\mu_{\mathcal{B}_2}(c_{ijk})} - 1 \right)^{-\eta} \right]^{-\frac{1}{\eta}}}.\tag{3.19}$$

Le choix de l'opérateur et de ses caractéristiques dépend de l'application et du comportement, en termes de risque, que l'on souhaite adopter par rapport à l'imprécision sur l'information cartographique.

A partir des informations agrégées sur l'occupation des cellules fournies par les fonctions d'appartenance  $\mu_{\mathcal{R}}(\cdot)$  et  $\mu_{\mathcal{V}}(\cdot)$ , il est possible de définir plusieurs types d'information sur l'environnement utilisables pour la navigation [HJ06], [OUV97]. Ainsi, on peut définir

- L'ensemble  $\mathcal{A} = \mathcal{R} \cap \mathcal{V}$  des cellules ambiguës (contradiction).
- L'ensemble  $\mathcal{I} = \bar{\mathcal{R}} \cap \bar{\mathcal{V}}$  des cellules indéterminées (occupées ou vides).
- L'ensemble  $\mathcal{S} = \mathcal{V}^2 \cap \bar{\mathcal{V}} \cap \bar{\mathcal{A}} \cap \bar{\mathcal{I}}$ , dit des cellules sans risque. L'indice deux dans l'opération sur les ensembles, permet de mieux discriminer les cellules avec une valeur d'appartenance à  $\mathcal{V}$  basse de celles avec une valeur importante.

La grille floue des cellules à risque est alors donnée par  $\mathcal{U} = \bar{\mathcal{S}}$ . En logique floue, l'opérateur complémentaire est définie par  $\mu_{\bar{\mathcal{B}}}(\cdot) = 1 - \mu_{\mathcal{B}}(\cdot)$ . Pour l'opération d'intersection, on dispose de plusieurs possibilités, comme le min.

### 3.6 Conclusions du chapitre

Le résultat principal de ce chapitre est la proposition d'une méthode permettant de générer de façon contrôlée des exemplaires de carte représentatifs à la fois des incertitudes et de la structure spatiale de la zone d'intérêt. La figure 3.6 présente les grandes étapes de ce processus. Notre démarche s'appuie sur la notion de processus ponctuel et utilise une méthode d'échantillonnage basée sur un algorithme de type Métropolis-Hasting et la mise en oeuvre d'opérateurs de proposition sur les objets. Ce générateur de cartes est alors exploité pour définir une représentation à plusieurs entrées plus adaptées à des applications robotiques, comme la navigation ou la planification avec évitement d'obstacles. Nous considérons dans la suite la problématique de navigation ou de localisation globale d'un robot terrestre à partir d'une carte d'amers ponctuels, mais incertaine, comme celle qui a pu être déduite ici. L'un des enjeux des travaux qui suivent est d'analyser l'impact de cette incertitude sur cette tâche de navigation, et d'imaginer des méthodes de planification de trajectoires avant mission permettant d'en tenir compte.

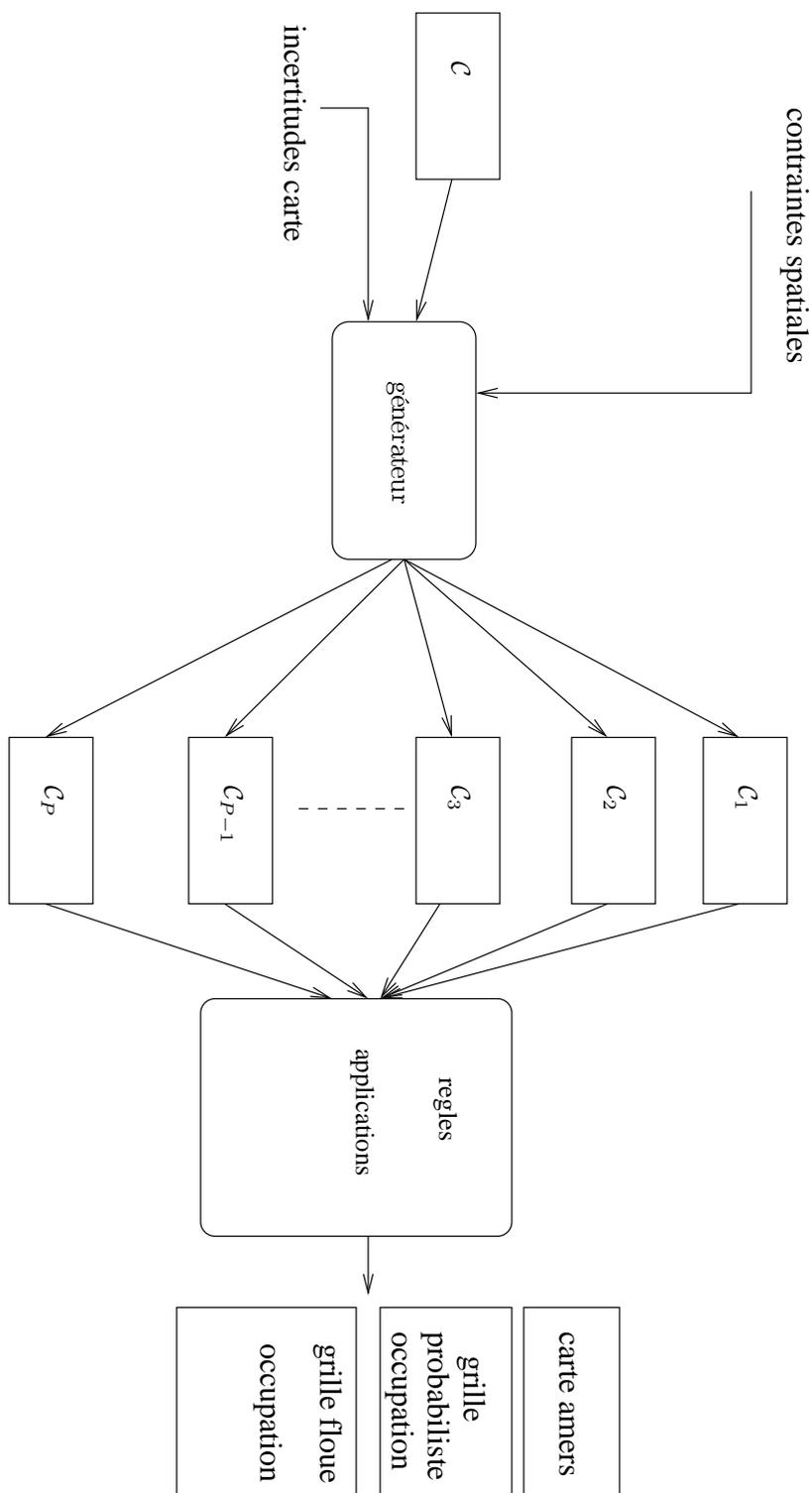


FIG. 3.6 – Synopsis du processus de construction de représentations incertaines.



## Chapitre 4

# Localisation à partir d'une carte d'amers

Dans les chapitres précédents, nous avons proposé une méthode permettant de générer des instances probables de cartes d'environnement tenant compte d'une connaissance *a priori* du bruit accompagnant leur construction. De ce processus de génération, il a été possible de déduire une représentation cartographique à plusieurs niveaux, que nous proposons d'exploiter dans des tâches réalisées par un système dit robotisé. Nous nous intéressons essentiellement à l'utilisation de la couche d'information constituée d'éléments ponctuels, les « amers », par un processus de localisation, afin d'obtenir une estimation de l'état courant d'un mobile, sur la base de mesures de distances et d'angles relatives obtenues à partir d'un capteur embarqué.

### 4.1 Formalisation du problème de localisation

Dans ce paragraphe, on introduit le modèle de dynamique et d'observation retenus pour le problème de localisation qui nous intéresse. Nous avons vu que la carte d'amers est le résultat d'une étape de sélection, qui consiste à extraire dans un modèle d'environnement, composé d'objets 3D, des éléments caractéristiques, selon des critères en cohérence avec les capacités des capteurs de mesures et des algorithmes de corrélation qui seront mis en oeuvre dans le processus de localisation. A titre d'exemple, pour des méthodes basées sur des techniques de vision en environnement intérieur, des coins ou des angles de bâtiments extraits d'images à partir d'opérateurs d'extraction de points caractéristiques (points de Harris, SIFT, SURF...) [Low04] seront utilement corrélés à leur représentation dans la carte disponible *a priori*. Les différents types de capteurs, ainsi que les stratégies d'extraction et de corrélation utilisables ne seront pas détaillés ici. On se place à un niveau où cette étape, qui correspond à un axe de recherche important de la vision par ordinateur pour la robotique mobile ou les petits drones, est vue comme un pré-traitement pour les problématiques étudiées dans ce chapitre. Cependant, il faut noter que la nature et la performance de ce module de traitement influencent fortement le choix des techniques de localisation.

#### 4.1.1 Dynamique du mobile

On considère un mobile dont l'état  $X_k$  se compose de sa position dans le plan  $(x_k, y_k)$  dans  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  et de son orientation  $\theta_k \in (-\pi, \pi]$  dans un repère global  $\mathcal{R}_g$ . Par ailleurs, on suppose qu'il est possible de contrôler le déplacement du mobile à partir d'une loi de commande  $u_k \triangleq (v_k, \phi_k)^*$  où  $v_k \in \mathcal{V}_k \subset \mathbb{R}^+$  est la vitesse de déplacement sur l'intervalle temporel  $(t_k, t_{k+1}]$  et  $\phi_k \in \Phi_k \subset ]-\pi, \pi]$  la variation d'angle appliquée à l'orientation à l'instant  $t_k$ . L'état du mobile  $X_k \triangleq [x_k \ y_k \ \theta_k]^*$  évolue donc selon l'équation

$$X_{k+1} = f_k(X_k, u_k) \tag{4.1}$$

où  $f_k$  est une fonctionnelle de  $\mathbb{R}^2 \times ]-\pi, \pi]$  à valeur dans  $\mathbb{R}^2 \times ]-\pi, \pi]$  définie par (cf. figure 4.1)

$$f_k(X_k, u_k) = \begin{bmatrix} x_k + v_k \cos(\theta_k + \phi_k) \delta t_k \\ y_k + v_k \sin(\theta_k + \phi_k) \delta t_k \\ \theta_k + \phi_k \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

avec  $\delta t_k = t_{k+1} - t_k$ . L'application de la commande introduit à chaque instant un bruit sur la

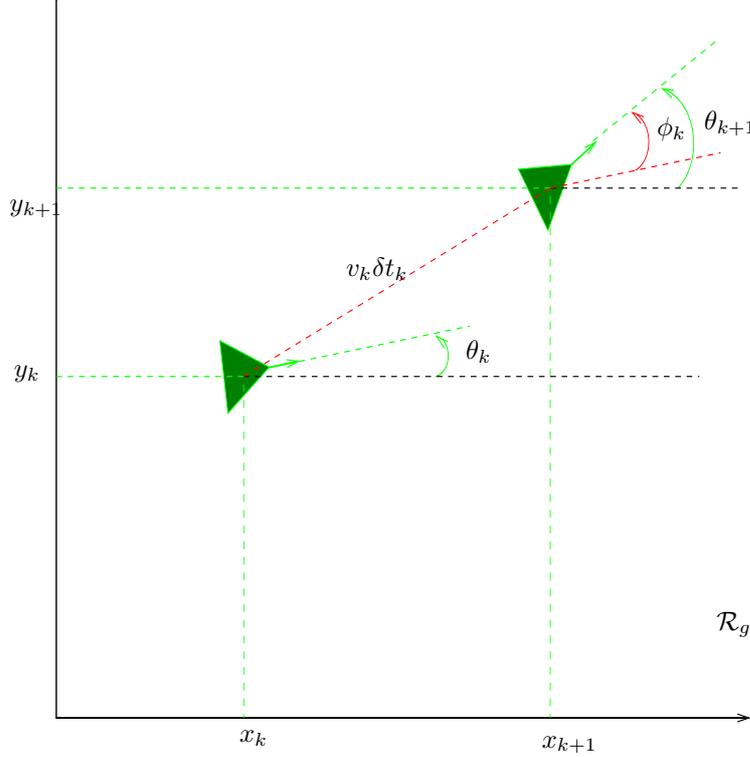


FIG. 4.1 – Evolution de l'état entre deux instants consécutifs.

position et l'orientation du système. Ce processus de bruit noté  $\omega_k \in \mathbb{R}^3$  est supposé additif et modélise les incertitudes liées à l'application des commandes  $\omega_k^u$  et les limites de modélisation sur la dynamique  $\omega_k^m$

$$\omega_k = \omega_k^u + \omega_k^m.$$

L'équation d'évolution complète qui tient compte de l'incertitude s'écrit donc

$$X_{k+1} = f_k(X_k, u_k) + \omega_k. \quad (4.3)$$

Il est possible d'adopter différentes structures pour le bruit  $\omega_k$  ( $k > 1$ ) et celui de l'équation d'observation que nous présenterons plus loin. En effet, les vecteurs de bruit peuvent avoir une structure stochastique ou déterministe. Dans le second cas, la valeur du vecteur est inconnue, mais on dispose de la connaissance d'une borne sur une norme donnée. Le choix de la méthode d'estimation ou de localisation mise en oeuvre dépend de ces hypothèses de modélisation. Pour les approches probabilistes, on s'appuie sur les méthodes de filtrage Bayésien classiques comme le filtre de Kalman et ses dérivées ou les filtres de type particulières. Dans le cadre ensembliste, on dispose également de plusieurs méthodes qui dépendent essentiellement de la famille d'ensembles utilisés pour définir l'espace d'état possible pour le système. On distingue notamment les approches ellipsoïdales, polygonales ou encore des méthodes utilisant le calcul par intervalles [JKDE01] [CGVZ98][PW94][DMJAM96]. On suppose également que la connaissance sur l'état initial du système  $X_0$  est incertaine, c'est-à-dire que

$$X_0 = \hat{X}_0 + \omega_0 \quad (4.4)$$

avec  $\omega_0$  adaptée en fonction de la structure du problème d'estimation considérée. Dans la suite nous considérons uniquement des problèmes de localisation à partir de modèles probabilistes.

### Modèle d'incertitude probabiliste

Dans l'approche probabiliste, on considère que les incertitudes sont modélisées par des processus de loi de probabilité. Nous supposons pour notre modèle que les erreurs sont gaussiennes. Ainsi, on suppose qu'à l'instant initial  $k = 0$ , le bruit du système  $\omega_0$  est un processus aléatoire gaussien de vecteur moyen nul sur  $\mathbb{R}^2 \times ]-\pi, \pi]$  et de matrice de covariance  $Q_0$ . L'estimation de l'état initial  $\hat{X}_0$  étant connue, on a donc

$$X_0 \sim \mathcal{N}(\hat{X}_0, Q_0), \quad Q_0 \succ 0 \quad (4.5)$$

La matrice de covariance  $P_0$  est de plus de forme diagonale

$$Q_0 = \begin{pmatrix} \sigma_{x_0}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{y_0}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta_0}^2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \sigma_{x_0}^2 = \sigma_{y_0}^2 = \sigma_0^2. \quad (4.6)$$

La densité de probabilité de l'état à l'instant initial s'exprime donc de la façon suivante :

$$p(X_0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{|Q_0|}} \exp -\frac{1}{2} (X_0 - \hat{X}_0)^* Q_0^{-1} (X_0 - \hat{X}_0) \mathbb{1}_{-\pi < \theta_0 \leq \pi}. \quad (4.7)$$

où  $\mathbb{1}$  est la fonction indicatrice. Les composantes de l'état initial pouvant être découplées, cette densité s'écrit encore sous la forme  $p(X_0) = p(x_0)p(y_0)p(\theta_0 | -\pi < \theta_0 \leq \pi)$  avec

$$\begin{aligned} p(x_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp -\frac{(x_0 - \hat{x}_0)^2}{2\sigma_0^2}, \\ p(y_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp -\frac{(y_0 - \hat{y}_0)^2}{2\sigma_0^2}, \\ p(\theta_0 | -\pi < \theta_0 \leq \pi) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\sigma_{\theta_0}} \frac{1}{Ga(\pi) - Ga(-\pi)}} \exp -\frac{(\theta_0 - \hat{\theta}_0)^2}{2\sigma_{\theta_0}^2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

$Ga(x)$  est l'évaluation au point  $x$  de la fonction de répartition de la densité gaussienne. La dernière densité est tronquée pour tenir compte de la restriction de l'orientation à l'intervalle  $]-\pi, \pi]$ .

A chaque instant  $k > 1$ , le bruit de dynamique est également un processus gaussien avec deux composantes indépendantes

$$\omega_k \sim \mathcal{N}(\mathcal{O}_{3 \times 1}, Q_k), \quad Q_k \succ 0$$

avec  $Q_k = Q_k^u + Q_k^m$ .  $Q_k^u$  est la matrice de covariance du processus traduisant l'incertitude sur la connaissance des commandes appliquées. Elle est donnée par la relation (cf. annexe A)

$$Q_k^u = G(\theta_k, u_k) C_u G(\theta_k, u_k)^* \quad (4.9)$$

où  $C_u$  est la matrice de covariance sur le bruit associé aux composantes de la commande

$$C_u = \begin{pmatrix} \sigma_v^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\phi^2 \end{pmatrix} \quad \text{et } G(\theta_k, u_k) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k + \phi_k) \delta t_k & -v_k \sin(\theta_k + \phi_k) \delta t_k \\ \sin(\theta_k + \phi_k) \delta t_k & v_k \cos(\theta_k + \phi_k) \delta t_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\sigma_v^2$  et  $\sigma_\phi^2$  sont respectivement la variance sur la vitesse de déplacement et la variance sur la variation d'orientation à chaque instant. On peut encore adopter l'écriture (cf. annexe A)

$$Q_k^u = \begin{pmatrix} Q_k^{xy} & \sigma_\phi b_k C_{\theta_k} \\ \sigma_\phi b_k C_{\theta_k}^* & \sigma_\phi^2 \end{pmatrix}.$$

avec

$$Q_k^{xy} = \mathcal{R}_{\theta_k + \phi_k} \text{Diag}(\delta t_k^2 \sigma_{v_k}^2, \delta t_k^2 v_k^2 \sigma_{\phi_k}^2) \mathcal{R}_{\theta_k + \phi_k}^*, \quad (4.10)$$

$\mathcal{R}_\alpha$  étant la matrice de rotation d'angle  $\alpha$ . Le vecteur  $C_{\theta_k} \in \mathbb{R}^2$  est un vecteur unitaire qui dépend de l'orientation  $\theta_k$  et de la composante de la commande  $\phi_k$

$$C_{\theta_k} = \delta t_k \begin{pmatrix} -\sin(\theta_k + \phi_k) & \cos(\theta_k + \phi_k) \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -s_{\theta_k + \phi_k} & c_{\theta_k + \phi_k} \end{pmatrix}^*,$$

avec les notations suivantes :

$$a_k = \sigma_v \delta t_k \text{ et } b_k = v_k \sigma_\phi \delta t_k.$$

La seconde composante de l'erreur de prédiction a pour sa matrice de covariance

$$Q_k^m = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\theta^2 \end{pmatrix} \delta t_k^2 \text{ avec } \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2. \quad (4.11)$$

On peut en déduire l'expression de la densité de probabilité associée à la prédiction  $p(X_{k+1}|X_k, u_k)$

$$p(X_{k+1}|X_k, u_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{|Q_k|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (X_{k+1} - f(X_k, u_k))^* Q_k^{-1} (X_{k+1} - f(X_k, u_k)) \right\} \mathbb{1}_{-\pi < \theta_{k+1} \leq \pi}. \quad (4.12)$$

### 4.1.2 Equation d'observation

Le système dispose de moyens capteurs permettant d'acquérir des mesures provenant des objets détectés dans l'environnement. Des modules de traitements permettent de les associer aux amers représentés dans la carte disponible. Ce processus d'association ou de corrélation peut être plus ou moins complexe et fiable. En effet, de fausses détections ou de mauvaises associations peuvent apparaître en fonction des caractéristiques des capteurs ou de la configuration de l'environnement. Soit  $\mathcal{C}$  la carte embarquée contenant l'ensemble des amers disponibles pour la localisation

$$\mathcal{C} = \{f_i\}, i \in 1, \dots, n_C \quad (4.13)$$

En fonction des caractéristiques du capteur et des modules de traitements (champs de vision, capacité de détection, qualité d'appariement...), seul un sous-ensemble des amers de  $\mathcal{C}$  est exploité à un instant  $t_k$ . Par conséquent, on introduit l'opérateur suivant :

$$\delta_k^i = \begin{cases} 1 & \text{si } f_i \text{ intervient dans le processus de localisation à } t_k, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on note  $\mathcal{C}_k \triangleq \{f_{i_1}, \dots, f_{i_{m_k}}\}$ , la sous-carte composées des  $m_k$  amers utilisés dans le processus d'estimation. A chacun de ces amers correspond un vecteur de mesures élémentaires  $z_{i_l}^k$  qui correspondent dans le cas le plus général à des mesures bruitées de la distance et de l'angle relatif entre le mobile dans l'état  $X_k$  et l'amer  $f_{i_l}$ . Le vecteur global de mesures  $\mathbf{z}_t = [z_{i_1}^k, \dots, z_{i_{m_k}}^k]^*$  est alors obtenu par concaténation des mesures élémentaires. Pour tout  $l \in \{1, \dots, m_k\}$ ,  $z_{i_l}^k$  vérifie donc

$$z_{i_l}^k = \begin{cases} d(X_k, f_{i_l}) + \nu_{d,k}^l \\ \varphi(X_k, f_{i_l}) + \nu_{\varphi,k}^l \end{cases} \quad (4.14)$$

où

$$\begin{aligned} d(X_k, f_{i_l}) &= \sqrt{(x_k - x_{i_l})^2 + (y_k - y_{i_l})^2}, \\ \varphi(X_k, f_{i_l}) &= \arctan_2 \left( \frac{y_{i_l} - y_k}{x_{i_l} - x_k} \right) - \theta_k. \end{aligned}$$

Par la suite, on adoptera la notation suivante :

$$z_{i_l}^k := \begin{pmatrix} d_{i_l}^k \\ \varphi_{i_l}^k \end{pmatrix} = H(X_k, f_{i_l}) + \nu_k^l.$$

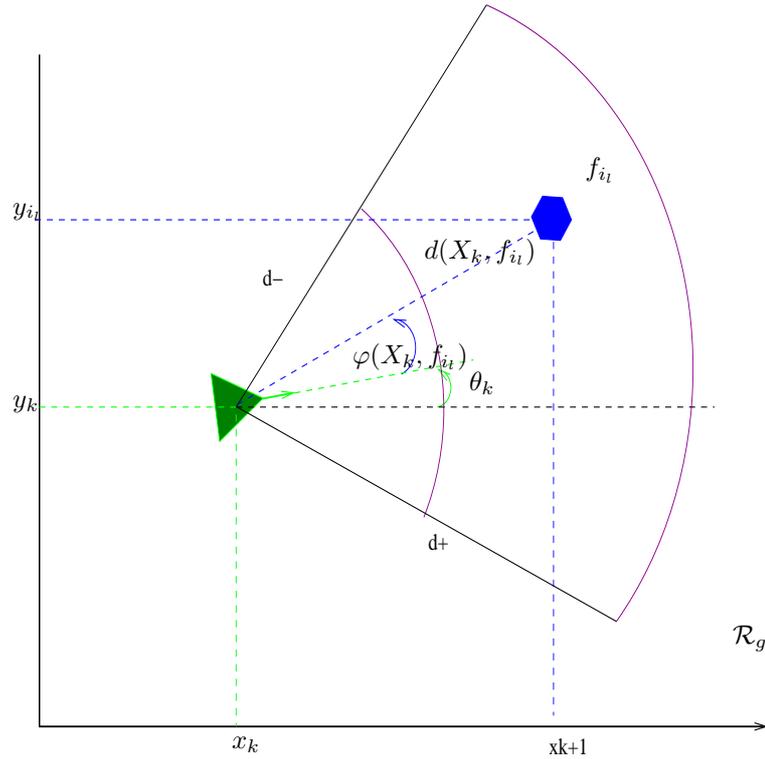


FIG. 4.2 – Processus de mesures.

L'équation d'observation complète est obtenue par concaténation des équations d'observations relatives à chaque amer élémentaire observé

$$\mathbf{z}_k = \mathcal{H}(X_k, \mathcal{C}_k) + \nu_k \quad (4.15)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(X_k) &= \left[ H(X_k, f_{i_1}), \dots, H(X_k, f_{i_{m_k}}) \right]^* \\ \nu_k &= \left[ \nu_k^1, \dots, \nu_k^{n_{t_k}} \right]^* \end{aligned} \quad (4.16)$$

On considère aussi deux types de modélisation pour l'incertitude sur les mesures en fonction des hypothèses sur le vecteur d'incertitude.

### Modèle probabiliste des erreurs de mesure

Dans le **cadre probabiliste**, le vecteur de bruit pour chaque mesure élémentaire  $\nu_k^l \triangleq \begin{bmatrix} \nu_{d,k}^l & \nu_{\varphi,k}^l \end{bmatrix}^*$  est supposé gaussien et centré de matrice de covariance

$$R_{k,l} = \begin{bmatrix} f^d(X_k, f_l) & 0 \\ 0 & f^\varphi(X_k, f_l) \end{bmatrix}.$$

Les fonctions  $f^d(X_k, f_l)$  et  $f^\varphi(X_k, f_l)$  sont utilisées pour exprimer la dépendance éventuelle des incertitudes du capteur en fonction de la position relative entre le capteur et l'amer. Leur formulation sera dépendante des caractéristiques des moyens capteurs disponibles, mais aussi des algorithmes de traitement utilisés pour l'extraction des primitives des données brutes fournies par ces capteurs et pour l'étape d'appariement des amers à ces primitives. On considère trois modèles d'incertitude sur les mesures de distances. Le premier modèle est supposé indépendant de l'état du système et des amers lors de l'acquisition des mesures. Le second fait intervenir la distance du vecteur formé par

la position du mobile lors de l'acquisition et la position de l'amer. Enfin, le troisième modèle tient compte également de l'argument de ce vecteur. Ces modèles sont caractéristiques du comportement de l'erreur de mesure de capteurs de type 3D [MG82].

$$\begin{aligned}
 (M_0) \quad f^d(X_k, f_l) &= \sigma_d^2 & (4.17) \\
 (M_1) \quad f^d(X_k, f_l) &= \sigma_d^2 d(X_k, f_l)^{2\gamma}, \quad \gamma \geq 1 \\
 (M_2) \quad f^d(X_k, f_l) &= \sigma_d^2 \frac{d^2(X_k, f_l)}{\varphi(X_k, f_l)},
 \end{aligned}$$

## 4.2 Résolution du problème de localisation selon l'approche probabiliste

Le problème de localisation à partir d'une carte d'amers disponible a priori et sur la base de mesures de distances et/ou d'angles est un problème de pistage (ou *tracking*), non linéaire. On parle de pistage car on suppose disponible une estimation de l'état initial du mobile. En fonction de la nature du problème et de l'approche retenue, cette phase d'initialisation du filtre de pistage peut se révéler relativement complexe [BLC04] [Bai03].

L'obtention d'une estimation du problème de filtrage bayésien nécessite de propager à chaque instant une description de la densité de probabilité de la trajectoire  $X_{0:k}$  de l'instant initial à l'instant  $k$ , sachant les mesures accumulées  $z_{1:k} := \{z_1, \dots, z_k\}$ . Cette loi est la loi *a posteriori* de la trajectoire sachant les mesures et sera notée  $p(X_{0:k}|z_{1:k})$ . Dans le cadre du filtrage, nous sommes davantage intéressés par l'estimation de l'état courant et donc par la loi marginale  $p(X_k|z_{1:k})$ . Cependant, cette densité n'est en général pas caractérisable à partir d'un nombre fini de paramètres. De fait, le but est d'obtenir une approximation suffisamment précise pour les besoins de l'application considérée. Nous présentons ici les principales méthodes utilisées classiquement pour le filtrage en pratique.

### 4.2.1 Algorithme de Kalman et EKF

Comme tout problème de filtrage, l'approche la plus simple pour résoudre le problème de localisation consiste à se placer dans un cadre permettant de mettre en oeuvre un algorithme de fusion classique de type *Kalman*, ou sa forme duale, le *filtre d'information*. L'algorithme de Kalman [BS95] est une méthode d'estimation récursive adaptée lorsque les modèles des processus sont linéaires et les modèles d'incertitudes gaussiens. Sous ces hypothèses, les lois de probabilité sous-jacentes sont des densités gaussiennes et il suffit d'estimer les deux premiers moments (vecteur moyen et matrice de covariance) pour complètement les définir. Les équations du filtre de Kalman permettent de déterminer de façon itérative ces deux moments. Cependant, comme nous l'avons montré dans les sections précédentes, notre problème est fortement non-linéaire, ce qui impose de passer par une étape préalable de linéarisation, et de considérer le filtre de Kalman sous sa forme étendue (*Extended Kalman Filter*). L'EKF propose une linéarisation au premier ordre des équations de prédiction et d'observation autour de l'estimateur de la moyenne. L'algorithme 3 présente les grandes étapes du processus de localisation par une approche de type EKF.

Pour les modèles de dynamique et d'observation de notre système que nous avons introduits dans la section précédente, les expressions des approximations linéaires sont les suivantes :

$$F_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -v_k \sin(\hat{\theta}_{k|k} + \phi_k) \delta t_k \\ 0 & 1 & v_k \cos(\hat{\theta}_{k|k} + \phi_k) \delta t_k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

La matrice de covariance  $Q_k$  est aussi dépendante de l'orientation et de la commande appliquée. Elle est approximée à l'étape  $k$  en utilisant l'équation (4.9) par

$$Q_k = G(\hat{\theta}_{k|k}, u_k) C_u G(\hat{\theta}_{k|k}, u_k)^* + Q_k^m.$$

---

**Algorithme 3** Algorithme EKF pour la localisation
 

---

- **Initialisation** :  $\hat{X}_{0|0} = \hat{X}_0$ ,  $P_{0|0} = P_0$  connus ou estimés à partir d'une stratégie d'initialisation.

Pour  $k \geq 0$ , on suppose disponible à l'instant  $k$  les estimées de l'état moyen  $\hat{X}_{k|k}$  et de la matrice de covariance  $P_{k|k}$ . On applique au système la commande  $u_k$ ,

- **Prédiction** :

$$\begin{aligned} F_k &= \nabla_{X_k} f_k(X_k, u_k)|_{\hat{X}_{k|k}} \\ \hat{X}_{k+1|k} &= f_k(\hat{X}_{k|k}, u_k) \\ P_{k+1|k} &= F_k P_{k|k} F_k^* + Q_k \end{aligned}$$

- **Correction** : à partir des mesures reçues  $\mathbf{z}_{k+1}$

$$\begin{aligned} H_{k+1} &= \nabla_{X_{k+1}} \mathcal{H}(X_{k+1}, \mathcal{C})|_{\hat{X}_{k+1|k}} \\ K_{k+1} &= P_{k+1|k} H_{k+1}^* (H_{k+1} P_{k+1|k} H_{k+1}^* + R_{k+1})^{-1} \\ \hat{X}_{k+1|k+1} &= \hat{X}_{k+1|k} + K_{k+1} (z_{k+1} - \mathcal{H}(\hat{X}_{k+1|k}, \mathcal{C})) \\ P_{k+1|k+1} &= (\mathcal{I}_3 - K_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1|k} \end{aligned}$$


---

Pour chacune des mesures élémentaires  $z_{i_l}^{k+1}$  reçues et associées à l'amer  $f_{i_l}$ , le calcul de la matrice  $H_{k+1}$  est déduit des blocs

$$H_{k+1}^{i_l} = \begin{pmatrix} -\frac{(\hat{x}_{k+1|k} - x_{i_l})}{\hat{\rho}_{i_l}^{k+1|k}} & -\frac{(\hat{y}_{k+1|k} - y_{i_l})}{\hat{\rho}_{i_l}^{k+1|k}} & 0 \\ \frac{(\hat{y}_{k+1|k} - y_{i_l})}{(\hat{\rho}_{i_l}^{k+1|k})^2} & -\frac{(\hat{x}_{k+1|k} - x_{i_l})}{(\hat{\rho}_{i_l}^{k+1|k})^2} & -1 \end{pmatrix}.$$

$\hat{\rho}_{i_l}^{k+1|k}$  est la distance entre l'amer et l'état prédit du mobile. Il est possible d'adopter une autre formulation faisant intervenir l'argument, dans la repère  $\mathcal{R}_g$ , du vecteur formé par le mobile dans sa position prédite (cf. figure 4.3).

$$H_{k+1}^{i_l} = \begin{pmatrix} \cos(\hat{\beta}_{i_l}^{k+1}) & \sin(\hat{\beta}_{i_l}^{k+1}) & 0 \\ \frac{\sin(\hat{\beta}_{i_l}^{k+1})}{\hat{\rho}_{i_l}^{k+1|k}} & -\frac{\cos(\hat{\beta}_{i_l}^{k+1})}{\hat{\rho}_{i_l}^{k+1|k}} & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

et donc  $H_{k+1} = \begin{pmatrix} H_{k+1}^{i_1} & \dots & H_{k+1}^{i_{m_k}} \end{pmatrix}^*$ .

L'étape de correction dépend de la matrice de covariance sur les mesures  $R_{k+1}$ . Nous avons supposé trois types de modélisations,  $(M_i)$ ,  $i = 0, 1, 2$ , pour la variance sur la distance, données par l'équation (4.17). La matrice  $P_{k+1}$  est diagonale avec des variances sur la distance estimée à partir des mesures de distances et d'angles reçues. L'approche EKF est fréquemment utilisée pour les problèmes de localisation en robotique, tant pour la localisation en environnement connu que dans des algorithmes de localisation et de cartographie simultanée et ce indépendamment des capteurs d'acquisition des informations sur le mobile (odométrie, centrale inertielle...) ou des mesures (vision, laser...).

## 4.2.2 L'approche UKF (Unscented Kalman Filter)

La localisation exploitant le filtre de Kalman étendu nécessite de vérifier la validité de l'approximation au premier ordre des applications des équations de prédiction et d'observation, ainsi que le caractère gaussien des lois de probabilité. Cette hypothèse peut s'avérer trop forte dans certaines situations. L'approche basée sur l'UKF permet une approximation des moments 1 et 2 sans passer par une linéarisation des équations. L'idée sous-jacente consiste à dire qu'il est plus facile d'approximer une densité de probabilité qu'une application non-linéaire. Elle s'appuie sur

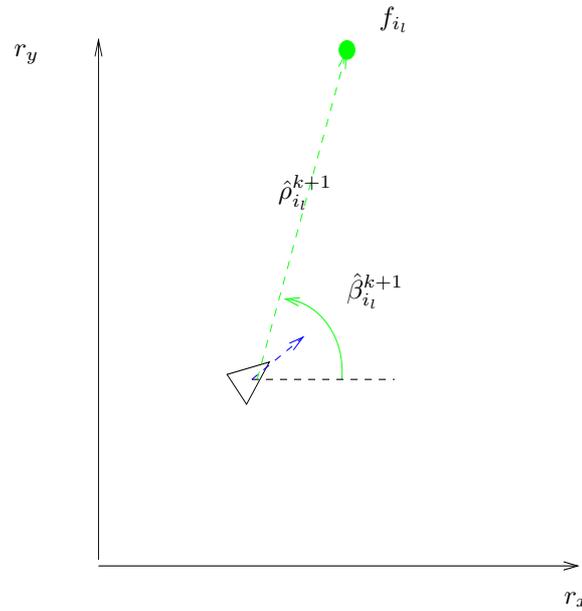


FIG. 4.3 – Vecteur « amer-mobile »

une famille de points pondérés de l'espace d'état, les *sigma-points*, qui permettent de représenter la densité et ses caractéristiques principales. Ces points et leurs poids respectifs sont choisis selon une démarche déterministe de façon à traduire certaines propriétés (symétrie...) de la loi recherchée. Le processus d'estimation dans le cadre dynamique consiste alors à propager ces sigma-points, à déterminer leurs poids et à construire les estimations des moments de la densité *a posteriori* de l'état à partir de cet échantillon pondéré.

### La transformée unscented (*inodore*)

Soit  $X$  un vecteur de paramètres probabiliste de dimension  $n_x$  pour lequel on dispose de la connaissance du vecteur moyen  $\hat{X}$  et de la matrice de covariance  $P_x$ . Supposons définie une famille de  $p$  sigma-points  $\{X^{(l)}, W^{(l)}\}_{0 \leq l \leq p}$  de moyenne  $\hat{X}$  et de matrice de covariance  $P_x$ . Considérons le problème d'estimation du vecteur aléatoire  $Y$  de taille  $n_y$  déduit de  $X$  par une application non-linéaire  $g$  de  $\mathbb{R}^{n_x}$  dans  $\mathbb{R}^{n_y}$ . On obtient une approximation de  $\hat{Y}$  et  $P_y$  en suivant les étapes suivantes [JU04] :

1. Transfert de chaque sigma-point via la fonction non-linéaire

$$Y^{(l)} = g(X^{(l)}), \quad 0 \leq l \leq p \text{ avec } \sum_{l=0}^p W^{(l)} = 1;$$

2. estimation des moments

$$\hat{Y} = \sum_{l=0}^p W^{(l)} Y^{(l)} \quad \text{et} \quad \Sigma_y = \sum_{l=0}^p W^{(l)} (\hat{Y} - Y^{(l)}) (\hat{Y} - Y^{(l)})^*.$$

En fonction du problème et de la connaissance disponible sur la densité du processus aléatoire, l'objectif est de déterminer la famille de sigma-points la plus adaptée. Une famille relativement simple permettant de décrire le contour de l'ellipsoïde associé à  $P_x$  et pour des densités symétriques a été proposée dans [JU04]. Elle se compose de  $2n_x + 1$  points tels que

$$\begin{aligned} X^{(0)} &= \hat{X} \\ X^{(l)} &= \hat{X} + \gamma \left( \sqrt{\Sigma_x} \right)_l \quad l = 1, \dots, n_x \\ X^{(l)} &= \hat{X} - \gamma \left( \sqrt{\Sigma_x} \right)_{2n_x+1-l} \quad l = n_x + 1, \dots, 2n_x + 1 \end{aligned}$$

avec  $\gamma = \sqrt{n_x}$  et  $(\sqrt{P_x})_l$ , est le vecteur ligne en position  $l$  de la matrice racine carrée de la matrice de covariance  $P_x$ . En pratique cette matrice est obtenue à partir d'une décomposition de Cholesky. Plusieurs familles ont été proposées pour prendre en compte des particularités de la densité à estimer et réduire l'erreur d'approximation [JU02] [JU04]. Elles considèrent des poids différents  $W_m^{(l)}$  et  $W_c^{(l)}$  pour les moments d'ordre 1 et d'ordre 2. La famille de paramètres suivante est proposée dans [JU02] pour tenir compte notamment de variation d'échelle au niveau de la loi.

$$\begin{aligned} W_m^{(0)} &= \lambda / ((n_x + \lambda)), & W_c^{(0)} &= W_m^{(0)} + (1 - \alpha^2 + \beta) \\ W^{(l)} &= 1 / \{2(n_x + \lambda)\} & l &= 1, \dots, n_x \\ W^{(l)} &= 1 / \{2(N_x + \lambda)\} & l &= n_x + 1, \dots, 2n_x \end{aligned} \quad (4.20)$$

avec  $\gamma = \sqrt{n_x + \lambda}$ ,  $\alpha$ ,  $\lambda = \alpha^2(n_x + \kappa) - n_x$  et  $\beta$  des paramètres permettant d'imposer une structure à la densité  $P_x$ . Pour les densités gaussiennes, on choisit en général  $\kappa = n_x - 3$ . Le paramètre  $\beta$  peut être ajusté pour réduire les erreurs d'ordre supérieure à 3. Dans [JU03], il est montré que le nombre minimal possible de points permettant une approximation des moments 1 et 2 est égal à  $n_x + 1$ .

### Implémentation.

L'implémentation générique de la version du filtre exploitant la transformée unscented construit d'abord un état augmenté à partir de l'état du système et des vecteurs de bruits des équations de prédiction et d'observation. Les équations du système pour cet état de plus grande dimension sont adaptées en conséquence. Pour la modélisation que nous avons retenue, l'état augmenté  $X_k^a$  est de dimension  $3 + 3 + 2 \times m_k$  où  $m_k \leq n_c$  est le nombre de mesures à l'instant  $k$ . Le champ de perception étant limité, la taille du vecteur de mesures varie au cours du temps et, par conséquent, la dimension de  $X_k^a$  également. L'algorithme UKF pour notre problème est composé des algorithmes 4 présenté en page 54 et 5 présenté en page 55. L'implémentation présentée ici est relativement générique et doit être adaptée aux modèles de prédiction et de mesure. Ainsi, dans le cas de bruits additifs, le passage par le vecteur augmenté n'est pas forcément justifié.

La section suivante présente, les méthodes à base de particules, également définies à partir d'un échantillon de points de l'espace d'état pour l'estimation de la densité a posteriori.

### 4.2.3 Filtrage particulière

Le filtrage particulière est une approche de type Monte-Carlo. L'idée consiste à approcher directement la loi *a posteriori*  $p(x_{0:k}|z_{1:k})$  ou tout estimateur  $\mathbb{E}l(x_{0:k}|z_{1:k})$  par un échantillonnage adapté de l'espace d'état. Contrairement aux approches de type Kalman, on ne fait pas d'hypothèse sur la densité et on ne se restreint pas aux deux premiers moments. Par définition

$$\mathbb{E}\{l(x_{0:k}|z_{1:k})\} = \int l(x_{0:k}|z_{1:k})p(x_{0:k}|z_{1:k})dx_{0:k}.$$

Cette intégrale ne peut être approchée directement par Monte-Carlo, car la densité  $p(x_{0:k}|z_{1:k})$  est en pratique inconnue. Une solution consiste à procéder via une distribution intermédiaire, dite *densité d'importance*  $\pi(x_{0:k}|z_{1:k})$ . Pour être acceptable, une telle distribution doit « dominer<sup>1</sup> » la loi  $p(x_{0:k}|z_{1:k})$  et permettre de générer facilement des échantillons. Dans ce cas, on se ramène au calcul de l'intégrale équivalente

$$\mathbb{E}\{l(x_{0:k}|z_{1:k})\} = \int l(x_{0:k}|z_{1:k}) \underbrace{\frac{p(x_{0:k}|z_{1:k})}{\pi(x_{0:k}|z_{1:k})}}_{w_k} \pi(x_{0:k}|z_{1:k}) dx_{0:k}.$$

qu'il est alors possible d'approximer à partir d'un échantillon de taille  $N$  représentatif de  $\pi(x_{0:k}|z_{1:k})$

$$\mathbb{E}\{l(x_{0:k}|z_{1:k})\} \approx \sum_{i=1}^N w_k^i l(x_{0:k}^i) \quad (4.28)$$

<sup>1</sup>soient  $f$  et  $g$  deux densités d'une variable  $x$ ,  $f$  domine  $g$  si  $f(x) \geq g(x)$  presque partout sur le support de  $x$ .

---

**Algorithme 4** Algorithme UKF pour la localisation (partie 1)
 

---

- **Initialisation** :  $\hat{X}_{0|0} = \hat{X}_0$ ,  $P_{0|0} = P_0$  connus ou estimés à partir d'une stratégie d'initialisation.

Pour  $k \geq 1$ , on suppose disponibles à l'instant  $k$  les estimées  $\hat{X}_{k|k}$ ,  $P_{k|k}$  et les commandes à appliquer  $u_k$ . On a également le vecteur de mesures  $\mathbf{z}_{k+1}$  de dimension  $2 \times m_{k+1}$ . La matrice de covariance  $R_{k+1}$  du bruit d'observation est diagonale par blocs et construite à partir des matrices de covariance de taille  $2 \times 2$  des mesures élémentaires associées aux  $m_{k+1}$  amers exploitables. Ces matrices peuvent dépendre des mesures de distances selon le modèle  $(M_i)$ ,  $i = 0, 1, 2$  retenu.

- **Etat augmenté et covariance associée** :

$$\begin{aligned}\hat{X}_k^a &= \left( \hat{X}_{k|k}^* \quad \mathcal{O}_{1 \times 3} \quad \mathcal{O}_{1 \times 2n_k} \right)^* \\ P_k^a &= \text{Diag}(P_{k|k}, Q_k, R_{k+1})\end{aligned}\quad (4.21)$$

- **Génération des sigma-points** :

En utilisant une écriture condensée pour les  $N_{sp} = 2(3 + 3 + 2n_k) + 1$  sigma-points représentatifs de l'état à l'instant  $k$ , de l'incertitude de prédiction et d'observation. la colonne  $l$  de la matrice suivante correspond au sigma-point  $\hat{X}_k^{a,l}$  pour l'état augmenté :

$$\hat{X}_k^a = \left( \hat{X}_k^a \quad \hat{X}_k^a + \gamma \sqrt{P_k^a} \quad \hat{X}_k^a - \gamma \sqrt{P_k^a} \right). \quad (4.22)$$

Les poids associés sont fournis par la méthode d'approximation retenue.

- **Prédiction à partir des sigma-points**

$$X_{k+1}^{(l)} = f_k(\hat{X}_k^{a,l}, u_k), \quad l = 0, \dots, N_{sp} \quad (4.23)$$

En pratique, on applique  $f_k(\cdot, u_k)$  aux composantes du sigma-point associées à l'état du système et au bruit de prédiction. On obtient donc un état moyen et une covariance prédits

$$\begin{aligned}\hat{X}_{k+1|k} &= \sum_{l=1}^{N_{sp}} W_m^{(l)} X_{k+1}^{(l)} \\ P_{k+1|k}^X &= \sum_{l=1}^{N_{sp}} W_c^{(l)} (X_{k+1}^{(l)} - \hat{X}_{k+1|k})(X_{k+1}^{(l)} - \hat{X}_{k+1|k})^*\end{aligned}\quad (4.24)$$

---

où  $w_k^i = \frac{p(x_{0:k}^i | z_{1:k})}{\pi(x_{0:k}^i | z_{1:k})}$ . Dans la littérature, les vecteurs  $x_{0:k}^i$  sont appelés *particules* et  $w_k^i$  est le *poids* associé à l'instant  $k$ . Cette écriture, bien que ne faisant plus apparaître la loi inconnue, ne règle pour autant pas le problème d'estimation, car elle intervient encore dans le calcul des poids. Il convient donc de choisir une densité d'importance permettant de contourner cette difficulté. Il suffit de respecter la condition

$$\pi(x_{0:k} | z_{1:k}) = \pi(x_k | x_{0:k-1}, z_{1:k}) \pi(x_{0:k-1} | z_{1:k-1}). \quad (4.29)$$

On peut alors montrer [DDFG01] la relation permettant de déterminer de façon récursive les poids

$$w_k^i \propto \frac{p(z_k | x_k^i) p(x_k^i | x_{k-1}^i)}{\pi(x_k^i | x_{0:k-1}^i, z_{1:k})} w_{k-1}^i. \quad (4.30)$$

Cette relation est valable lorsque le processus  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est markovien. Elle fait intervenir la densité  $\pi(x_k^i | x_{0:k-1}^i, z_{1:k})$ , qu'il est nécessaire de préciser. Des éléments sont fournis dans [DDFG01] sur le choix de cette densité de proposition. Dans le cas le plus simple, il convient de prendre la densité associée de l'équation de prédiction  $p(x_k | x_{k-1})$ . Le filtre ainsi obtenu est le filtre Bootstrap proposé par [GSS93].

L'algorithme de filtrage particulaire comprend au final trois étapes :

**Algorithme 5** Algorithme UKF pour la localisation (partie 2)

- **Prédiction des mesures à partir des sigma -points.** L'application  $H_{k+1}(\cdot, \mathcal{C})$  est alors appliquée aux vecteurs  $X_{k+1}^{(l)}$  auxquels on ajoute les composantes de  $X_k^{a,l}$  correspondant aux bruits sur  $\mathbf{z}_k$

$$\mathbf{z}_{k+1}^{(l)} = H(X_{k+1}^{a,l}, \mathcal{C}), \quad l = 0, \dots, N_{sp} \quad (4.25)$$

On obtient donc un vecteur de mesures prédit et les matrices de covariance

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} &= \sum_{l=1}^{N_{sp}} W_m^{(l)} \mathbf{z}_{k+1}^{(l)} \\ S_{k+1} &= \sum_{l=1}^{N_{sp}} W_c^{(l)} (\mathbf{z}_{k+1}^{(l)} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k})(\mathbf{z}_{k+1}^{(l)} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k})^* \\ P_{k+1}^{\mathbf{z}, X} &= \sum_{l=1}^{N_{sp}} W_c^{(l)} (X_{k+1}^{(l)} - \hat{X}_{k+1|k})(\mathbf{z}_{k+1}^{(l)} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k})^* \end{aligned} \quad (4.26)$$

- **Correction :**

$$\begin{aligned} K_{k+1} &= P_{k+1}^{\mathbf{z}, X} S_{k+1}^{-1} \\ X_{k+1|k+1} &= X_{k+1|k} + K_{k+1} (\mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}) \\ P_{k+1|k+1} &= P_{k+1|k} - K_{k+1} S_{k+1} K_{k+1}^* \end{aligned} \quad (4.27)$$

1. une étape de diffusion des particules équivalente à l'étape classique de prédiction,
2. une étape de mise à jour des poids associés aux particules équivalente à l'étape de correction,
3. une étape de rééchantillonnage, davantage technique, afin de garantir que les particules soient suffisamment représentatives de la loi sous-jacente et éviter la divergence de l'algorithme.

La dernière est une étape essentiellement technique qui vise à réduire le phénomène de *dégénérescence* des particules que l'on observe en pratique. Cette dégénérescence correspond à un appauvrissement de l'échantillon de particules, qui se traduit par une forte disparité des valeurs des poids, et par conséquent amène à un nombre réduit de particules participant réellement au processus d'estimation de la densité. Différents critères (variance ou entropie des poids) ont été proposés dans la littérature pour mesurer le niveau de dégénérescence et permettent de procéder à un rééchantillonnage de façon adaptative. Plusieurs travaux ont été menés pour améliorer les performances du filtre particulaire en termes de réduction du nombre de particules et de réduction de la dégénérescence. On peut citer les techniques de régularisation [Oud00] ou encore de décomposition intelligente de l'état lorsque cela est possible (filtre particulaire *rao-blackwellisé* ou équivalent) [MTKW03][Dah07]. Dans le domaine de la robotique, les travaux de [TBF05] sont une référence pour les techniques de localisation et cartographie simultanée, basées sur des approches particulières. Nous décrivons dans l'algorithme 6 présenté en page 56 l'application du filtrage particulaire dans sa formulation la plus simple à notre problème de localisation par amers en prenant comme densité d'importance la densité de prédiction.

#### 4.2.4 La problématique d'association mesures/amers

Dans les approches algorithmiques pour la résolution du problème de localisation à partir d'une carte d'amers que nous avons introduites dans les paragraphes précédents, nous avons supposé que l'association des mesures aux amers est connue à chaque instant  $t_k$ . La résolution du problème d'association, qui consiste à identifier pour chaque mesure reçue, l'amer qui en est la cause, est une étape souvent cruciale dans le processus de filtrage. La performance de l'étape de correction est directement affectée par l'efficacité des méthodes employées. En fait, l'association est un problème de décision qui peut être résolu en s'appuyant sur une phase d'optimisation, en général coûteuse en temps calcul. De nombreux travaux se sont intéressés à la performance de cette phase qui,

---

**Algorithme 6** Algorithme de localisation exploitant l'approche particulaire
 

---

- **Initialisation** : On se donne  $N$  particules  $X_0^i$ ,  $i = 1, \dots, N$  obtenues par échantillonnage de la densité associée à l'état initial  $p(X_0)$  et les poids  $w_0^i = 1/N$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Pour  $k \geq 1$ , on suppose disponibles à l'instant  $k$ , les particules pondérées  $(X_k^i, w_k^i)$   $i = 1, \dots, N$  permettant d'approximer  $p(X_k|z_{1:k})$  et la commande  $u_k$ . Un estimateur de l'état construit à partir de ces point est noté  $\hat{X}_{k|k}$ .

- **Prédiction** : On considère la densité donnée à l'équation (4.12) en utilisant la matrice de covariance en utilisant l'estimateur

$$Q_k = G(\hat{\theta}_{k|k}, u_k) C_u G(\hat{\theta}_{k|k}, u_k)^* + Q_k^m.$$

$$X_{k+1}^i \sim p(X_{k+1}|X_k^i), i = 1, \dots, N \quad (4.31)$$

- **Correction** : à partir des mesures reçues  $\mathbf{z}_{k+1}$ , on déduit d'abord une approximation de  $R_{k+1}$ , puis on effectue
  - une mise à jour des poids

$$\tilde{w}_{k+1}^i \propto p(\mathbf{z}_{k+1}|X_{k+1}^i) w_k^i, i = 1, \dots, N \quad (4.32)$$

- une normalisation

$$w_{k+1}^i = \frac{\tilde{w}_{k+1}^i}{\sum_{j=1}^N \tilde{w}_{k+1}^j}, i = 1, \dots, N \quad (4.33)$$

- **Estimation Monte Carlo** :

$$p(X_{k+1}|z_{1:k+1}) \approx \sum_{i=1}^N w_k^i \delta_{X_{k+1}=X_{k+1}^i} \quad (4.34)$$

$$\mathbb{E}\{l(X_{k+1})|z_{1:k+1}\} = \sum_{i=1}^N l(X_{k+1}^i) w_{k+1}^i$$

- **Adaptation des poids (réduction de la dégénérescence)** :

- Evaluation de  $N_{eff} = \frac{N}{\sum_{i=1}^N (w_k^i)^2}$
  - si  $N_{eff} < N_s$ ,  $N_s$  étant un seuil fixé, on effectue un tirage avec remise des  $\tilde{X}_{k+1}^i$ ,  $i = 1, \dots, N$  parmi  $(X_{k+1}^i)_{i=1, \dots, N}$  selon les poids  $(w_{k+1}^i)_{i=1, \dots, N}$  et  $w_{k+1}^i = 1/N$ , puis  $X_{k+1}^i = \tilde{X}_{k+1}^i$
- 

bien que la mise en oeuvre pratique soit propre à chaque application, s'appuyent sur une base de techniques communes. Ces techniques ont d'ailleurs directement inspirées le nom de filtres d'estimation bien connus comme le JPDAF, PDAF, PMHT [Dez03]. A noter, les travaux de [Bav05] qui présente une analyse fine des performances des associations de type *plots-plots* ou *plots-pistes* pour des problèmes de pistage multi-cibles pour différents modèles de trajectographie. Certaines approches récentes pour l'association, comme le SD-assignment [DPBS97] visent à améliorer la robustesse, en considérant une association sur plusieurs pas de temps. Dans le contexte de la localisation d'un mobile à partir d'une carte d'amers, la recherche de la meilleure (ou des meilleures) association(s) est un problème d'optimisation qui s'appuie sur des critères (géométriques, sémantiques...) et contraintes spécifiques à la nature des amers et aussi du capteur d'acquisition des mesures (caméra, laser...)[TBF05][CT05].

### 4.3 Conclusions du chapitre

Ce chapitre a permis de poser les bases du problème de localisation à partir d'une carte d'amers disponible. La présentation du problème a été relativement générique. Nous avons considéré un modèle d'évolution du système qui tient compte d'erreurs sur les commandes appliquées à chaque

instant et sur la précision du modèle de dynamique. De même, plusieurs hypothèses sur la structure du bruit des mesures ont été faites. Nous verrons dans les chapitres qui suivent que bien que simple, la dérivation d'une mesure de performances *a priori* du processus de localisation nécessitera, néanmoins, des développements relativement importants. Nous montrerons également qu'il est possible de mener suffisamment loin les calculs théoriques pour analyser les impacts des sources d'erreurs dues au modèle et à la cartographie.

Sur le plan de la résolution du problème de filtrage, nous avons présenté les approches classiques du domaine appliquées au problème qui nous concerne : L'EKF, l'UKF et les méthodes particulières. Dans le cadre de la robotique mobile, et plus généralement des systèmes autonomes, on porte actuellement davantage d'intérêt aux problématiques de localisation, mais à partir d'une carte construite simultanément (SLAM). L'état du système inclut donc à la fois l'état du mobile, mais aussi l'état de la carte. Dans ce cadre, les implémentations sont aussi nombreuses que les configurations systèmes, capteurs et modèles de représentation cartographique possibles.

Partant de cette formulation du problème de localisation, nous abordons par la suite la problématique de la mesure de sa performance *a priori*, au travers d'une borne sur l'erreur d'estimation.



## Chapitre 5

# Mesures de performance pour le processus de localisation probabiliste

Dans le chapitre 5, nous nous attachons à définir une mesure de performance du processus de localisation à partir d'une carte constituée d'amers, supposés ponctuels, dans un cadre probabiliste. Cette mesure vise à analyser le « niveau de précision » atteignable pour le problème de filtrage ou d'estimation probabiliste sous-jacent au processus de localisation basé sur les hypothèses de modélisation introduites dans les sections précédentes. Les métriques que nous proposerons s'appuient sur la Borne de Cramèr-Rao *a posteriori* ou *Bayésienne* (BCRB)[VT68] pour un système dynamique discret. Nous détaillons le calcul de ces grandeurs pour le problème d'estimation à partir de mesures de distances et d'angles qui nous intéressent en utilisant les résultats des travaux de Tichavsky et al. [TMN98]. Nous ferons également dans ce chapitre l'hypothèse que la carte d'environnement embarquée est parfaite en termes de qualité géométrique.

### 5.1 Mesures de performance pour l'estimation

Dans le cadre d'un processus d'estimation, l'objectif est d'obtenir une estimée de l'état d'un système à partir de mesures. La performance de la méthode employée peut être évaluée en considérant l'erreur d'estimation. En pratique, l'état réel du système n'étant pas connu, accéder à une mesure de l'erreur d'estimation est impossible. D'un point de vue théorique, on peut au mieux accéder à une quantité qui « minore » (on parlera de *borne*,) cette erreur. Il existe plusieurs bornes qui peuvent être utilisées pour l'estimation à partir de mesures aléatoires. Néanmoins, en fonction des hypothèses sur le processus (linéarité, régularité, propriétés du processus de bruit), il est souvent difficile, voire impossible, d'obtenir une expression analytique. La borne de Cramèr-Rao (BCR) pour l'estimation d'un vecteur de paramètres déterministe et sa version Bayésienne (BCRB) dans le cas aléatoire sont les plus utilisées dans la littérature car souvent plus simple à déterminer. Pour l'estimation de l'état dont l'évolution temporelle est régie par un système dynamique discret, on montre qu'il est possible d'évaluer de façon récursive la BCRB pour l'état à chaque instant. Si la borne de Cramèr-Rao est la plus usitée, d'autres bornes minorant l'erreur quadratique moyenne (EQM) sont utilisables et plus adaptées à des systèmes ayant des caractéristiques particulières. Ainsi, on trouve également les bornes de Battacharyya, Bobrovsky-Zakai et Weiss-Weinstein [RN05]. Par exemple, on peut citer les travaux [Rap05] sur l'application de la borne de Weiss-Weinstein pour le problème de l'estimation d'un état dont l'évolution est régie par un système dynamique hybride, pour lequel les contraintes théoriques d'utilisation de la BCRB ne sont pas satisfaites.

#### 5.1.1 La borne de Cramèr-Rao (BCR)

La BCR est une borne inférieure pour la matrice de covariance de l'erreur d'estimation. Sa structure et ses propriétés dépendent uniquement des hypothèses de modélisation sur les paramètres que l'on cherche à estimer. La formulation et l'expression théorique de cette borne diffèrent selon

que l'état est une quantité déterministe ou aléatoire. Les premiers travaux sur la BCR dans le cadre aléatoire ou Bayésien sont dus à Van Trees [VT68]. Pour les systèmes dynamiques non linéaires, une formulation réursive, très intéressante, notamment pour une exploitation dans des problèmes d'emplois optimaux de capteurs, a été proposée dans [TMN98]. Plusieurs adaptations de ce résultat important ont été proposées pour tenir compte des spécificités de certains problèmes. Ainsi, Farina & al. [FRIT02] proposent une borne adaptée pour tenir compte de processus d'observation dont la probabilité de détection est inférieure à 1, en introduisant la notion de facteur de réduction calculé à partir des données sur les probabilités de détection et de fausse-alarme du système. Cette formule est notamment exploitée pour l'analyse de performance du problème de filtrage à partir de mesures d'angles dans [FRIT03]. Hue et Le Cadre développent dans [HLCP06] une formulation de la borne pour les problèmes de pistage multi-cibles. Notons également la formulation générique de la relation de [TMN98] pour des modèles de prédiction pas forcément régulière fournie par [Ber99] et l'ensemble des travaux de Bar Shalom sur les bornes énumératives. Enfin, citons le travail théorique de Rapoport [RO04], visant à étendre l'applicabilité du calcul de la borne à des problèmes de filtrage optimal avec fautes modélisées par un processus hybride en régularisant astucieusement les paramètres discrets du système.

Nous présentons quelques résultats théoriques issus de [VT68] et [WW88] permettant de bien comprendre les propriétés et conditions d'emploi de la BCR.

Considérons le problème d'estimation d'un vecteur de paramètres  $x \in \mathbb{X}$  de dimension  $n_x$  à partir d'un vecteur de mesures disponibles  $z \in \mathbb{Z}$  de dimension  $n_z$ , qui est une réalisation d'un processus aléatoire également noté  $z$ . En outre, on introduit  $\hat{x}(z)$  l'estimateur obtenu. Les processus pouvant être aléatoires, on considère également les densités de probabilité

1.  $p(x)$  la loi *a priori* de  $x$  si il est également aléatoire,
2.  $p(z|x)$  de la mesure sachant l'état ou la vraisemblance,
3.  $p(x, z)$  la loi conjointe du couple  $(x, z)$  si  $x$  est également aléatoire.

On suppose par ailleurs que ces densités de probabilité vérifient certaines conditions de régularité et d'intégrabilité

a)  $p(x, z)$  et  $p(z|x)$  sont de classes  $\mathcal{C}^1$ , voire  $\mathcal{C}^2$

b)  $\nabla_x p(x, z)$  et  $\nabla_x p(z|x)$  sont intégrables par rapport à  $x$  et  $z$ .

On considère également une fonction vectorielle  $g(x, z) := (g_1(x, z), \dots, g_{n_x}(x, z))$  où  $g_i(x, z)$ ,  $1 \leq i \leq n_x$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et définie sur  $\mathbb{X} \times \mathbb{Z}$ . On suppose de plus que cette fonctionnelle vérifie la condition

$$\int_{\mathbb{X}} g_j(x, z) p(x, z) dx = 0, \quad z \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, \dots, n_x, \quad (5.1)$$

la condition étant à comprendre comme presque partout sur  $\mathbb{Z}$ . Pour toute fonctionnelle  $g$  suffisamment régulière et respectant ces conditions, on a la propriété suivante sur l'erreur d'estimation :

**Proposition 1** *Quel que soit l'estimateur  $\hat{x}(z)$ , on a la relation suivante sur la matrice de covariance de l'erreur d'estimation :*

$$\mathbf{E}_{x,z} [(\hat{x}(z) - x)(\hat{x}(z) - x)^*] \succeq CG^{-1}C^* \quad (5.2)$$

où  $C$  et  $G$  sont des matrices de taille  $n_x \times n_x$  construites à partir de  $g(x, y)$  comme suit :

$$C(i, j) = \mathbf{E}_{x,z} [x_i g_j(x, z)] \quad \text{et} \quad G(i, j) = \mathbf{E}_{x,z} [g_i(x, z) g_j(x, z)]. \quad (5.3)$$

Cette propriété suppose évidemment que la matrice  $G$  est non singulière, hypothèse qui sera faite par la suite. Une preuve de cette propriété peut être trouvée dans [WW88]. Elle s'appuie sur les inégalités classiques de Minkowsky et Hölder et exploite la condition 5.1. Elle peut également être obtenue en considérant le lemme matriciel suivant

**Lemme 1** *Si  $S$  est une matrice par blocs symétrique définie comme suit :*

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^* & S_3 \end{pmatrix}$$

avec  $S_1$  réelle semi-définie positive,  $S_2$  réelle et  $S_3$  symétrique réelle semi-définie positive, alors

$$S \succeq 0 \Rightarrow S_1 \succeq S_2 S_3^{-1} S_2^*.$$

Il suffit d'appliquer ce lemme en remplaçant respectivement  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  par  $\mathbf{E}_{x,z}[(\hat{x}(z) - x)(\hat{x}(z) - x)^*]$ ,  $C$  et  $G$ .

Notons que la relation 5.2 ne dépend ni de la méthode de calcul de l'estimateur de  $x$ , ni de la spécificité de la fonctionnelle  $g(x, z)$ . Le choix de la fonctionnelle  $g(x, z)$  permet de définir une famille de bornes pour la matrice de covariance de l'erreur d'estimation. Nous nous intéressons uniquement au cas de la borne de Cramèr-Rao *a posteriori*, les caractéristiques des fonctions  $g(x, z)$  permettant de dériver les bornes de Bhattacharyya, Bobrovsky-Zakai et Weiss-Weinstein pouvant être trouvées dans [WW88].

La dérivation de la borne de Cramèr-Rao est obtenue en considérant la fonctionnelle  $g(x, z)$  définie par

$$\forall i = 1, \dots, n_x \quad g_i(x, z) = \begin{cases} \frac{\partial \ln(p(x, z))}{\partial x_i} & \text{si } x \in \tilde{\mathbb{X}}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.4)$$

où  $\tilde{\mathbb{X}} \triangleq \{x \mid p(x, z) > 0, \text{ pour presque tout } z \in \mathbb{Z}\}$ . On en déduit ainsi l'expression des matrices  $C$  et  $G$

$$C(i, j) = \mathbf{E}_{x,z} \left[ x_i \frac{\partial \ln(p(x, z))}{\partial x_j} \right] \quad \text{et} \quad G(i, j) = \mathbf{E}_{x,z} \left[ \frac{\partial \ln(p(x, z))}{\partial x_i} \frac{\partial \ln(p(x, z))}{\partial x_j} \right] \quad (5.5)$$

La matrice  $G$  exprimée sous cette forme est plus communément appelée Matrice d'Information de Fisher (FIM) et sera dorénavant notée  $J$ . On peut également remarquer que la borne est équivalente à l'inverse de la FIM et indépendante de l'estimateur uniquement lorsque la matrice  $C$  est exactement la matrice identité  $\mathcal{I}_{n_x}$  sur  $\mathbb{R}^{n_x}$ .

### 5.1.2 Hypothèse de biais asymptotique nul

Nous venons de voir que l'égalité entre la borne de Cramèr-Rao et l'inverse de la matrice d'information de Fisher  $J$  est assurée lorsque  $C$  équivaut à la matrice identité. Cette condition est satisfaite lorsque le biais d'estimation respecte une propriété souvent admise et formulée sous la forme d'une hypothèse. Remarquons, tout d'abord, que la condition 5.1 implique la propriété suivante entre l'estimateur  $\hat{x}(z)$  et la fonctionnelle  $g(x, z)$  :

$$\mathbf{E}_{x,z} [\hat{x}_i(z) g_j(x, z)] = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, n_x \quad (5.6)$$

**Preuve:** Il suffit d'appliquer la définition de l'espérance sous forme d'intégrale, d'appliquer le théorème de Fubini et d'utiliser la condition 5.1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{x,z} [\hat{x}_i(z) g_j(x, z)] &= \int_{\tilde{\mathbb{X}}} \int_{\mathbb{Z}} \hat{x}_i(z) g_j(x, z) p(x, z) dx dz \\ &= \int_{\mathbb{Z}} \hat{x}_i(z) \underbrace{\int_{\tilde{\mathbb{X}}} g_j(x, z) p(x, z) dx}_{0} dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit donc une nouvelle formulation de la matrice  $C$

$$C = \int_{\tilde{\mathbb{X}}} \int_{\mathbb{Z}} (\hat{x}(z) - x) \nabla_x^* p(x, z) dx dz \quad (5.7)$$

En effet, en utilisant 5.6, on a  $\forall i, j = 1, \dots, n_x$ ,

$$\begin{aligned} C(i, j) &= \int_{\tilde{\mathbb{X}}} \int_{\mathbb{Z}} (\hat{x}_i(z) - x_i) \frac{\partial \ln(p(x, z))}{\partial x_j} p(x, z) dx dz \\ &= \int_{\tilde{\mathbb{X}}} \int_{\mathbb{Z}} (\hat{x}_i(z) - x_i) \frac{\partial p(x, z)}{\partial x_j} \frac{1}{p(x, z)} p(x, z) dx dz \\ &= \int_{\tilde{\mathbb{X}}} \int_{\mathbb{Z}} (\hat{x}_i(z) - x_i) \frac{\partial p(x, z)}{\partial x_j} dx dz \end{aligned} \quad (5.8)$$

Nous allons pouvoir préciser la propriété de biais asymptotique nul en analysant la condition pour laquelle  $C = \mathcal{I}_{n_x}$ . Considérons les termes  $C(i, j)$  et intégrons par parties par rapport à la composante  $x_j$  du vecteur  $x$ , en admettant que cette variable est définie sur l'intervalle  $[X_j^-, X_j^+]$ .

$$\begin{aligned} C(i, j) &= \int_{\mathbb{X}^{-j}} \int_{\mathbb{Z}} [(\hat{x}_i(z) - x_i) p(x, z)]_{X_j^-}^{X_j^+} dz dx^{-j} + \int_{\mathbb{X}^{-j}} \int_{\mathbb{Z}} \int_{X_j^-}^{X_j^+} \delta_{ij} p(x, z) dz dx^{-j} \\ \Leftrightarrow C(i, j) &= \int_{\mathbb{X}^{-j}} \int_{\mathbb{Z}} [(\hat{x}_i(z) - x_i) p(x, z)]_{X_j^-}^{X_j^+} dz dx^{-j} + \delta_{ij} \\ \Leftrightarrow C(i, j) &= \int_{\mathbb{X}^{-j}} \left[ \int_{\mathbb{Z}} (\hat{x}_i(z) - x_i) p(z|x) dz p(x) \right]_{X_j^-}^{X_j^+} dx^{-j} + \delta_{ij} \end{aligned}$$

où  $x^{-j}$  est le vecteur de taille  $n_x - 1$  composé des composantes de  $x$  sauf  $x_j$ . On peut définir la notion de biais d'estimation  $B(x)$  à partir de la mesure  $z$  par

$$B(x) \triangleq \int_{\mathbb{Z}} (\hat{x}(z) - x) p(z|x) dz, \quad (5.9)$$

et introduire l'hypothèse de biais asymptotique nul.

**Proposition 2 (Hypothèse de biais asymptotique nul)** *Soit  $x$  un vecteur aléatoire défini sur  $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$  à estimer à partir de mesures stochastiques  $z \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^{n_z}$  et  $B(x)$  le biais d'estimation défini selon 5.9. L'hypothèse de biais asymptotique nul est donnée par la condition aux frontières*

$$\forall j = 1, \dots, n_x, \quad \lim_{x_j \rightarrow X_j^-} B(x)p(x) = \lim_{x_j \rightarrow X_j^+} B(x)p(x) \quad (5.10)$$

En conclusion, si cette hypothèse est vérifiée la borne sur la matrice de covariance de l'erreur d'estimation est directement donnée par la matrice d'information de Fisher supposée non singulière.

### 5.1.3 Cas de l'estimation d'un vecteur aléatoire

Lorsque l'estimation concerne un vecteur de paramètres aléatoires, la matrice d'information de Fisher peut être décomposée en deux composantes, en utilisant la relation de Bayes. La première est associée à la connaissance a priori sur le vecteur de paramètres, la seconde traduit l'apport de l'information du processus de mesure. En effet,

$$J(x) = \mathbb{E}_{x,z} [\nabla_x \log p(x, z) \nabla_x^* \log p(x, z)].$$

En appliquant la relation de Bayes,  $p(x, z) = p(z|x)p(x)$ , on en déduit donc que

$$J = J_m + J_{ap}$$

où

$$J_{ap} = \mathbb{E}_{x,z} [\nabla_x \log p(x) \nabla_x^* \log p(x)] \quad \text{et} \quad J_m = \mathbb{E}_{x,z} [\nabla_x \log p(z|x) \nabla_x^* \log p(z|x)].$$

On peut également écrire  $J_m$  comme l'espérance de la matrice d'information  $F(x)$  définie à partir de la densité de mesure, i.e

$$\begin{aligned} J_m &= \mathbb{E}_{x,z} [\nabla_x \log p(z|x) \nabla_x^* \log p(z|x)] \\ &= \mathbb{E}_x [F(x)] \end{aligned}$$

avec

$$F(x) = \mathbb{E}_{z|x} [\nabla_x \log p(z|x) \nabla_x^* \log p(z|x)]$$

Cette nouvelle formulation, qui permet de dériver la matrice d'information pour l'état joint  $(x, y)$  en deux temps, sera très utile dans les développements dans notre cadre applicatif.

Nous introduisons ici un autre résultat qui sera aussi d'une grande utilité pour les calculs de détermination du critère de performance associé à notre problème de localisation.

**Proposition 3** *Considérons le processus  $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$  de densité de probabilité gaussienne dont les paramètres moyenne et covariance dépendent d'un vecteur de paramètres  $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$  comme suit*

$$p_{x_2}(x_1) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{\det(\Gamma_{x_2})}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_1 - h(x_2))^* \Gamma_{x_2}^{-1} (x_1 - h(x_2)) \right\} \quad (5.11)$$

avec  $h(x_2)$  une fonction vectorielle de  $\mathbb{R}^{n_2}$  dans  $\mathbb{R}^{n_1}$ . Les composantes  $(i, j)$ ,  $i, j = 1, \dots, n_2$  de la matrice  $\mathbb{E}_{x_1|x_2} \{ \Delta_{x_2}^{x_2} - \ln(p_{x_2}(x_1)) \}$  que l'on notera  $\Psi_{x_2}$  vérifient

$$\Psi_{x_2}(i, j) = \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \Gamma_{x_2}^{-1} \frac{d\Gamma_{x_2}}{dx_2^i} \Gamma_{x_2}^{-1} \frac{d\Gamma_{x_2}}{dx_2^j} \right\} + \left( \frac{dh(x_2)}{dx_2^i} \right)^* \Gamma_{x_2}^{-1} \left( \frac{dh(x_2)}{dx_2^j} \right) \quad (5.12)$$

où  $x_2^j$  est la composante en position  $j$  de  $x_2$  et  $l_{x_2}(x_1)$  est le logarithme de la densité de probabilité  $p_{x_2}(x_1)$ .

Ce résultat est aussi connu dans la littérature comme la *formule de Slepian-Bang*. Une démonstration de ce résultat est proposée à la section B.1 de l'annexe B.

## 5.2 Cas d'un processus d'estimation dynamique

Lorsque que l'on s'intéresse à l'estimation de l'état d'un système dynamique défini par son équation d'évolution et d'observation, la mesure de performance est liée à la trajectoire de l'état  $X_{0:k} \triangleq \{X_0, \dots, X_k\}$  à partir des mesures accumulées  $z_{1:k} \triangleq \{z_1, \dots, z_k\}$  jusqu'à l'instant  $t_k$ . Le but de la méthode d'estimation employée est de fournir un estimateur de cette trajectoire  $\hat{X}_{0:k}$ . En fonction des propriétés du modèle et de l'algorithme de filtrage retenu, cet estimateur est déduit d'une estimation (souvent une approximation en pratique) de la loi *a posteriori* complète de l'état ou de certains de ses moments. On considère le cadre général où le système dynamique d'intérêt est donné par le modèle :

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= f_k(X_k, u_k, w_k), \quad k \geq 0 \\ z_k &= h_k(X_k, \nu_k) \end{aligned} \quad (5.13)$$

où  $w_k \in \mathbb{R}^{n_x}$  et  $\nu_k \in \mathbb{R}^{n_z}$  sont des processus de lois connues  $p(w_k)$  et  $p(\nu_k)$ . L'état initial  $X_0$  est également une variable aléatoire de loi  $p(X_0)$ . Le modèle retenu pour notre problème de localisation exploitant une carte de l'environnement est directement formalisé sous une telle forme. L'erreur quadratique moyenne de l'estimateur de la trajectoire est alors définie par

$$e(\hat{X}_{0:k}(z_{1:k})) = \mathbb{E}_{X_{0:k}, z_{1:k}} \left[ (\hat{X}_{0:k}(z_{1:k}) - X_{0:k})(\hat{X}_{0:k}(z_{1:k}) - X_{0:k})^* \right],$$

et la matrice d'information de Fisher à l'instant  $t_k$  est alors obtenue à partir de la loi de l'état joint  $(\hat{X}_{0:k}, z_{1:k})$

$$J_{0:k} = \mathbb{E}_{X_{0:k}, z_{1:k}} \left[ \nabla_{X_{0:k}} \log p(X_{0:k}, z_{1:k}) \nabla_{X_{0:k}}^* \log p(X_{0:k}, z_{1:k}) \right].$$

Nous avons montré dans les sections précédentes que la matrice de covariance de l'EQM était bornée par une matrice calculée à partir de l'inverse de la matrice d'information de Fisher  $J_{0:k}$  si elle est non-singulière

$$e(\hat{X}_{0:k}(z_{1:k})) \succeq C_{0:k} J_{0:k}^{-1} C_{0:k}^* \quad (5.14)$$

où la matrice  $C_{0:k}$  est donnée par

$$C_{0:k} = \mathbb{E}_{X_{0:k}, z_{1:k}} \left[ \left( \hat{X}_{0:k}(z_{1:k}) - X_k \right) \nabla_{X_{0:k}}^* p(X_{0:k}, z_{1:k}) \right] \quad (5.15)$$

De plus, on sait que sous l'hypothèse de « non-biais asymptotique », la matrice  $C_{0:k}$  est égale à la matrice identité, et que la borne se réduit à l'inverse de la matrice de Fisher. Dans le cadre du problème d'estimation sur la base du système 5.13, le biais sur l'estimation de la trajectoire  $B(\hat{X}_{0:k})$  de l'estimateur  $\hat{X}_{0:k}$  est un vecteur de taille  $n_x \times (k+1)$  et cette hypothèse s'exprime de la façon suivante.

**Proposition 4 (Hypothèse de non-biais asymptotique)** *L'hypothèse de non biais asymptotique s'intéresse au comportement en limite de  $B(X_{0:k})$  au niveau des bords du domaine admissible de l'état. Elle est définie comme suit :*

$$\forall j = 0, \dots, n_X, \forall l = 0, \dots, k, \lim_{X_l^j \rightarrow X^{-j}} B(X_{0:k})p(X_{0:k}) = \lim_{X_l^j \rightarrow X^{+j}} B(X_{0:k})p(X_{0:k})$$

En toute rigueur, l'utilisation pour une application donnée de l'inverse de la FIM comme mineur de la matrice de covariance de l'EQM nécessite au préalable la vérification de cette hypothèse. Nous rappelons que montrer la validité de cette hypothèse revient à montrer l'égalité entre matrice  $C_{0:k}$  et la matrice identité sur  $\mathbb{R}^{n_X \times (k+1)}$ . Pour notre problème de localisation, nous supposons que cette condition est réalisée. Il est possible de fournir une démonstration en utilisant la même approche que celle proposée dans [Bré05] pour le problème de suivi de cibles à partir uniquement de mesures d'angles. Il est montré en particulier que cette hypothèse est valable lorsque les mesures d'angles sont « suffisamment » éloignées de  $\pm \frac{\pi}{2}$ .

### 5.2.1 Formule de Tychavsky

Dans le cadre du filtrage bayésien, c'est le comportement de l'erreur d'estimation de l'état *a posteriori*  $X_k|z_{1:k}$  qu'il est pertinent d'analyser, plus que la trajectoire complète  $X_{0:k}$ . C'est donc le bloc inférieur droit de la matrice  $J_{0:k}^{-1}$  qu'il convient de considérer. On notera par la suite  $J_k^{-1}$  ou  $P_k$  cette matrice de taille  $n_X \times n_X$ .  $J_k$  correspond donc à la matrice d'information de Fisher associée au processus d'estimation de l'état *a posteriori* sur la base des mesures accumulées jusqu'à l'instant  $k$ ,  $X_k|z_{1:k}$ . Dans [TMN98] Tychavsky et al. ont proposé une formule de calcul de  $J_k$  récursif pour les systèmes de la forme 5.13. Nous la présentons au travers de la proposition 5.

**Proposition 5** *Pour le problème d'estimation d'un processus dynamique vérifiant les équations (5.13), le calcul de la matrice d'information de Fisher  $J_k$  a posteriori est obtenue de façon récursive par la relation :*

$$J_{k+1} = D_k^{22} - D_k^{21} (J_k + D_k^{11})^{-1} D_k^{12}. \quad (5.16)$$

Les matrices  $D_k^{22}$ ,  $D_k^{21}$ ,  $D_k^{12}$  et  $D_k^{11}$  dépendent des lois associées à l'équation de prédiction et d'observation.

$$D_k^{11} = \mathbb{E}_{X_{0:k+1}} \left[ -\Delta_{X_k}^{X_k} \log p_{X_{k+1}|X_k}(X_{k+1}|X_k) \right] \quad (5.17)$$

$$D_k^{12} = \mathbb{E}_{X_{0:k+1}} \left[ -\Delta_{X_k}^{X_{k+1}} \log p_{X_{k+1}|X_k}(X_{k+1}|X_k) \right] \quad (5.18)$$

$$D_k^{21} = D_k^{12*} \quad (5.19)$$

$$D_k^{22} = \mathbb{E}_{X_{0:k+1}} \left[ -\Delta_{X_{k+1}}^{X_{k+1}} \log p_{X_{k+1}|X_k}(X_{k+1}|X_k) \right] \quad (5.20)$$

$$+ \mathbb{E}_{X_{0:k+1}, z_{1:k+1}} \left[ -\Delta_{X_{k+1}}^{X_{k+1}} \log p_{z_{k+1}|X_{k+1}}(z_{k+1}|X_{k+1}) \right]$$

Cette relation est démontrée par Tychavsky et al., qui utilisent des résultats d'algèbre linéaire sur les matrices et l'hypothèse de markovianité de l'état  $X_k$ . Bergman se base sur cette approche dans [Ber99] pour étendre le calcul de la borne au cas de processus de prédiction et de lissage, et propose une adaptation pour tenir compte des modèles de prédiction pour lesquels la loi de probabilité est singulière. C'est en particulier le cas lorsque le bruit de dynamique affecte uniquement un sous-ensemble du vecteur d'état. Elle a été étendue aux autres bornes de la même famille (Ziv, WW...) dans [RN05]. Elle a également été adaptée au problème de filtrage avec probabilité de détection inférieure à 1 [NWBS01]. Il est en particulier montré que la borne obtenue s'obtient par l'introduction d'un coefficient de pondération, le *facteur de réduction de l'information* (IRQ en anglais), à la borne obtenue pour un système disposant d'une capacité de détection parfaite. Une expression a également été proposée pour les problèmes de filtrage multi-cibles par [HLCP06]. Enfin, soulignons l'utilisation qui en est faite de Rapoport et al. [RO04] pour traiter le cas des systèmes avec fautes, en utilisant une régularisation de processus discrets de Bernoulli servant de modèle du phénomène d'apparition de fautes. Les processus hybrides comme ceux traités par Rapoport permettent de prendre en compte des systèmes où la présence par intermittence de biais sur les

paramètres à estimer ne peut être négligée.

**Remarques :** Notons dans cette formulation du calcul récursif de la borne la présence de deux composantes principales. L'une est liée à la perte d'information elle-même liée à la prédiction, l'autre est liée au gain d'information apporté par les mesures. On conçoit alors qu'une modification du système, donc des équations qui régissent son évolution et son interaction avec l'environnement, va impacter cette mesure de performance. Dans notre contexte, une façon de modifier le système est d'imposer des commandes  $u_k$ , la durée  $\delta t_k$  d'application de celles-ci qui vont directement impacter la phase de prédiction (matrice  $Q_k$ ) et le processus de mesure (nombre de mesures  $m_k$  et précision des mesures ( $R_k$ )). Ce sera l'objet des approches qui seront développées dans la troisième partie de nos travaux. Nous chercherons à déterminer les meilleures stratégies de déplacements en regard d'une mesure de performance déduite des matrices d'information de Fisher.

Nous avons présenté les bases théoriques qui vont nous permettre de définir une mesure de performance pour notre problème particulier de localisation à partir d'une carte d'amers. Dans la suite de ce chapitre nous déclinons l'expression de la matrice d'information de Fisher en supposant que la carte disponible pour la localisation est exempte d'erreur.

### 5.3 Application au problème de localisation à partir d'une carte d'amers parfaite

Nous détaillons les éléments permettant le calcul de la BCRB pour le système mobile décrit par les équations 4.3 et 4.15 et en supposant les positions des amers connues de façon précise. Les équations de dynamique et d'observation sont non-linéaires et font intervenir des processus de bruits gaussiens. Comme nous le montrons plus loin, la non-linéarité rend impossible l'obtention d'une formulation analytique de la borne. Nous rappelons tout d'abord la relation de récurrence pour la détermination de la BCRB à partir de l'inverse de la matrice d'information de Fisher  $J_k$  [TMN98] :

$$\forall k \geq 0, J_{k+1} = D_k^{22} - D_k^{21}(J_k + D_k^{11})^{-1}D_k^{12} \quad (5.21)$$

Les hypothèses de régularité et d'intégrabilité par rapport à l'état des différentes densités de probabilité déduites des modèles de notre système (4.3), (4.15) sont vérifiées. Les espérances intervenant dans le calcul des différents termes  $D_k^{11}$ ,  $D_k^{21}$ ,  $D_k^{12}$  et  $D_k^{22}$  de (5.21) doivent être considérées par rapport à la densité de probabilité jointe  $p(X_{0:k+1}, z_{1:k+1}, \mathcal{C})$  où  $\mathcal{C}$  est la cartographie disponible en entrée du système pour le processus de localisation. La structure markovienne du modèle permet la décomposition de cette densité sous la forme

$$p(X_{0:k+1}, z_{1:k+1}, \mathcal{C}) = p(X_0) \prod_{j=1}^{k+1} p(z_j | X_j, \mathcal{C}) \prod_{l=1}^{k+1} p(X_j | X_{j-1}) p(\mathcal{C}). \quad (5.22)$$

La carte étant supposée connue et parfaite, la densité  $p(\mathcal{C})$  se réduit pour l'instant à la distribution ponctuelle  $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$  et peut être omise pour l'instant. L'application de l'équation de récurrence (5.21) nécessite de préciser au préalable les différents termes pour notre problème de localisation. Ce sont des matrices de taille  $n_X \times n_X$  avec  $n_X = 3$  pour la position et l'orientation du mobile dans  $\mathcal{R}_g$ . Pour ce faire, nous considérons dans la suite une trajectoire particulière du mobile composée de  $K$  étapes et construite en imposant à partir d'une position initiale  $X_0$  autour de  $\hat{X}_0$  une suite de commandes en déplacement et orientation

$$\begin{aligned} u_{0:K-1} &= \{u_0, \dots, u_k, \dots, u_{K-1}\} \\ &= \{(v_0, \phi_0), \dots, (v_k, \phi_k), \dots, (v_{K-1}, \phi_{K-1})\} \end{aligned} \quad (5.23)$$

où  $(v_k, \phi_k)$  sont appliqués à l'instant  $t_k$ ,  $k = 0, \dots, K-1$ . On peut associer à cette séquence de commandes  $\hat{X}_{0:K}$  la trajectoire dans l'espace d'état construite en partant de  $\hat{X}_0$  et en appliquant successivement cette suite de commandes selon le modèle de dynamique parfait et sans bruit  $w_k$ . On s'intéresse donc à la borne sur l'erreur d'estimation de  $X_k$ ,  $k = 0, \dots, K$  à partir de  $z_{1:k}$ ,  $k =$

$1, \dots, K$  séquence de mesures qui seraient acquises lors de l'exécution de la mission. Dans la section suivante, nous rappelons des résultats détaillés en annexe B et qui seront utiles dans nos calculs.

## 5.4 Rappels et calculs utiles pour les développement du chapitre.

Les éléments rappelés dans cette section seront exploités dans les différents calculs pour la dérivation des matrices permettant la mise en oeuvre de la formule de récurrence de Tichavsky pour la détermination de la matrice d'information de Fisher a posteriori  $J_k$ .

- Les paramètres

$$a_k^2 = \sigma_v^2 \delta t_k^2, b_k^2 = v_k^2 \sigma_\phi^2 \delta t_k^2, \sigma_k^2 = \sigma^2 \delta t_k^2 \text{ et } \sigma_{\theta_k}^2 = \sigma_\theta^2 \delta t_k^2. \quad (5.24)$$

- Les vecteurs orthogonaux et de norme unitaire

$$C_{\theta_k} = \begin{pmatrix} -s_{\theta_k + \phi_k} \\ c_{\theta_k + \phi_k} \end{pmatrix} \text{ et } G_{\theta_k} = - \begin{pmatrix} c_{\theta_k + \phi_k} \\ s_{\theta_k + \phi_k} \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

On a en particulier

$$\frac{dC_{\theta_k}}{d\theta_k} = G_{\theta_k} \text{ et } \frac{dG_{\theta_k}}{d\theta_k} = -C_{\theta_k}. \quad (5.26)$$

- Le vecteur position  $\tilde{p}_k$  à l'instant  $t_k$ . Avec les notations précédentes, l'équation de prédiction sans prise en compte du bruit peut encore s'écrire

$$f_k(X_k, u_k) = \begin{pmatrix} \tilde{p}_k - v_k \delta t_k G_{\theta_k} \\ \theta_k + \phi_k \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

- L'inverse de la matrice de prédiction avec une décomposition par blocs

$$Q_k^{-1} = \begin{pmatrix} L_k & H_k \\ H_k^* & \alpha_k \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

où la matrice  $L_k$ , le vecteur  $H_k$  et  $\alpha_k$  vérifient

$$\begin{aligned} L_k &= \alpha_k^{(0)} \mathcal{I}_2 + \alpha_k^{(1)} C_{\theta_k} C_{\theta_k}^* + \alpha_k^{(2)} G_k G_k^*, & H_k &= -\alpha_k^{(3)} C_{\theta_k}, \\ \alpha_k &= \frac{(\sigma_k^2 + b_k^2)}{(\sigma_k^2 + b_k^2)\sigma_{\theta_k}^2 + \sigma_k^2 \sigma_\phi^2}, & \alpha_k^{(0)} &= \frac{\sigma_k^2}{(a_k^2 + \sigma_k^2)(b_k^2 + \sigma_k^2)}, \\ \alpha_k^{(1)} &= \frac{a_k^2}{(a_k^2 + \sigma_k^2)(b_k^2 + \sigma_k^2)} + \frac{b_k^2 \sigma_\phi^2}{(\sigma_k^2 + b_k^2)((\sigma_k^2 + b_k^2)\sigma_{\theta_k}^2 + \sigma_k^2 \sigma_\phi^2)}, & & \\ \alpha_k^{(2)} &= \frac{b_k^2}{(a_k^2 + \sigma_k^2)(b_k^2 + \sigma_k^2)}, & \alpha_k^{(3)} &= \frac{\sigma_\phi b_k}{(\sigma_k^2 + b_k^2)\sigma_{\theta_k}^2 + \sigma_k^2 \sigma_\phi^2}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Nous avons aussi défini plusieurs relations entre ces paramètres. En posant  $q_k = b_k^2 - a_k^2$ , on a

$$\begin{aligned} \alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)} &= \frac{1}{\sigma_k^2 + a_k^2} \\ \alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)} &= \frac{1}{\sigma_k^2 + b_k^2} + \frac{\sigma_\phi b_k}{\sigma_k^2 + b_k^2} \alpha_k^{(3)} \\ \alpha_k^{(2)} + \alpha_k^{(1)} &= \frac{q_k}{(\sigma_k^2 + b_k^2)(\sigma_k^2 + a_k^2)} - \frac{\sigma_\phi b_k}{\sigma_k^2 + b_k^2} \alpha_k^{(3)}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

- La dérivée par rapport à l'orientation  $\theta_k$  de la matrice de covariance du modèle de prédiction  $Q_k$ . Par hypothèse de modélisation, seule la matrice  $Q_k^u$  dépend de l'orientation, on a donc

$$\frac{dQ_k}{d\theta_k} = \frac{dQ_k^u}{d\theta_k} + \frac{dQ_k^m}{d\theta_k} = \frac{dQ_k^u}{d\theta_k}.$$

Nous avons montré dans l'annexe B que cette matrice dérivée était décomposable par blocs avec

$$\frac{dQ_k}{d\theta_k} = \begin{pmatrix} q_k N_k & \sigma_\phi b_k G_{\theta_k} \\ \sigma_\phi b_k G_{\theta_k}^* & 0 \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

et

$$N_k = C_{\theta_k} G_{\theta_k}^* + G_{\theta_k} C_{\theta_k}^*. \quad (5.32)$$

A partir de ces éléments, il est possible de déduire les relations suivantes qui seront utiles pour la détermination des matrices employées pour la mise en oeuvre de la formule de récurrence pour le calcul de la borne.

$$\begin{aligned} G_{\theta_k}^* L_k &= (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}) G_{\theta_k}^* \text{ et } \frac{dG_{\theta_k}}{d\theta_k} L_k = -(\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)}) C_{\theta_k}^*, \\ \frac{dL_k}{d\theta_k} &= (\alpha_k^{(1)} - \alpha_k^{(2)}) \left( G_{\theta_k} C_{\theta_k}^* + C_{\theta_k} G_{\theta_k}^* \right) \text{ et } G_{\theta_k}^* \frac{dL_k}{d\theta_k} = (\alpha_k^{(1)} - \alpha_k^{(2)}) C_{\theta_k}^*, \\ L_k \frac{dG_{\theta_k}}{d\theta_k} &= -(\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)}) C_{\theta_k} \text{ et } \frac{dL_k}{d\theta_k} G_{\theta_k} = (\alpha_k^{(1)} - \alpha_k^{(2)}) C_{\theta_k}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

#### 5.4.1 Expression de $D_k^{11}$

La matrice  $D_k^{11}$  est obtenue à partir du laplacien du logarithme de la densité de probabilité associée à l'étape de prédiction  $p(X_{k+1}|X_k)$ .

$$D_k^{11} = \mathbb{E}_{X_{0:k+1}} \left\{ -\Delta_{X_k}^{X_k} \ln(p(X_{k+1}|X_k)) \right\} \quad (5.34)$$

$p(X_{k+1}|X_k)$  est une densité gaussienne dont l'expression est fournie par l'équation 4.12. Il nous faut déterminer le laplacien  $\Delta_{X_k}^{X_k}$  de la quantité

$$\begin{aligned} l_{X_{k+1}}^{X_k} &= \underbrace{c_1 - \frac{1}{2} \ln(|Q_k|)}_{(1)} \\ &\quad - \underbrace{\frac{1}{2} [X_{k+1} - f_k(X_k, u_k)]^* Q_k^{-1} [X_{k+1} - f_k(X_k, u_k)]}_{(2)}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Nous allons déterminer la matrice  $D_k^{11}$  en deux étapes utilisant l'écriture

$$D_k^{11} = \mathbb{E}_{X_{0:k}} \left\{ \Psi_{k,k+1}^{11} \right\}$$

avec  $\Psi_{k,k+1}^{11} = E_{X_{k+1}|X_{0:k}} \Delta_{X_k}^{X_k} l_{X_{k+1}}^{X_k}$ . Chaque élément  $(i, j)$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$  de la matrice  $\Psi_{k,k+1}^{11}$  vérifie selon la propriété 3

$$\Psi_{k,k+1}^{11}(i, j) = \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \underbrace{Q_k^{-1} \frac{dQ_k}{dX_k^i} Q_k^{-1} \frac{dQ_k}{dX_k^j}}_{(*)} + \underbrace{\left( \frac{df_k^*(X_k, u_k)}{dX_k^i} \right) Q_k^{-1} \left( \frac{df_k(X_k, u_k)}{dX_k^j} \right)}_{(**)} \right\}. \quad (5.36)$$

Pour le modèle de dynamique considéré, selon l'équation (4.6), la matrice de covariance  $Q_k$  dépend de façon explicite de l'orientation du mobile. Le terme  $(*)$  de (5.35) ne peut donc être négligé dans les calculs. On peut alors adopter l'écriture formelle équivalente pour  $D_k^{11}$

$$D_k^{11} = D_k^{11,a} + D_k^{11,b}$$

où  $D_k^{11,a}$  et  $D_k^{11,b}$  correspondent respectivement à l'espérance par rapport à  $X_{0:k}, z_{1:k+1}$  des termes  $(*)$  et  $(**)$  de l'équation (5.36).

### 5.4.1.1 Expression de $D_k^{11,a}$

Par hypothèse sur le modèle et comme nous l'avons démontré dans l'annexe B, les coefficients des matrices  $Q_k$  et de son inverse ne dépendent que de la composante de l'état associée à l'orientation du mobile  $\theta_k$ . Par conséquent, les dérivées par rapport aux paramètres de position de la quantité (\*) sont nulles. Il reste donc à évaluer le terme en position (3, 3) de la matrice  $D_k^{11,a}$ . Ce coefficient correspond à  $\frac{1}{2}g(\theta_k)$  en posant

$$g(\theta_k) = \text{tr} \left( Q_k^{-1} \frac{dQ_k}{d\theta_k} Q_k^{-1} \frac{dQ_k}{d\theta_k} \right). \quad (5.37)$$

Nous avons également vu en annexe B, que  $g(\theta_k)$  ne dépendait pas explicitement de l'orientation à l'instant  $t_k$ . Ce terme est une constante qui ne dépend que des paramètres du modèle de prédiction et des erreurs. Par conséquent, nous utiliserons la notation  $g_k^{11} := g(\theta_k)$  par la suite. Ce résultat est démontré en annexe et son expression est donnée par l'équation (B.41) que nous reprenons dans l'équation suivante :

$$g_k^{11} = \frac{(b_k^2 - a_k^2)^2 + (\sigma_k^2 + a_k^2)^2 \sigma_\phi b_k \alpha_k^{(3)}}{(\sigma_k^2 + a_k^2)(\sigma_k^2 + b_k^2)}$$

où le paramètre  $\alpha_k^{(3)}$  s'exprime en fonction des paramètres du modèle d'erreur sur le modèle de dynamique au travers des paramètres  $a_k^2$ ,  $b_k^2$ ,  $\sigma_k^2$ ,  $\sigma_{\theta_k}^2$  et  $\sigma_\phi^2$  et des commandes appliquées à l'instant  $t_k$ . Les expressions de ces différents paramètres sont également rappelées dans la section 5.4. Sur

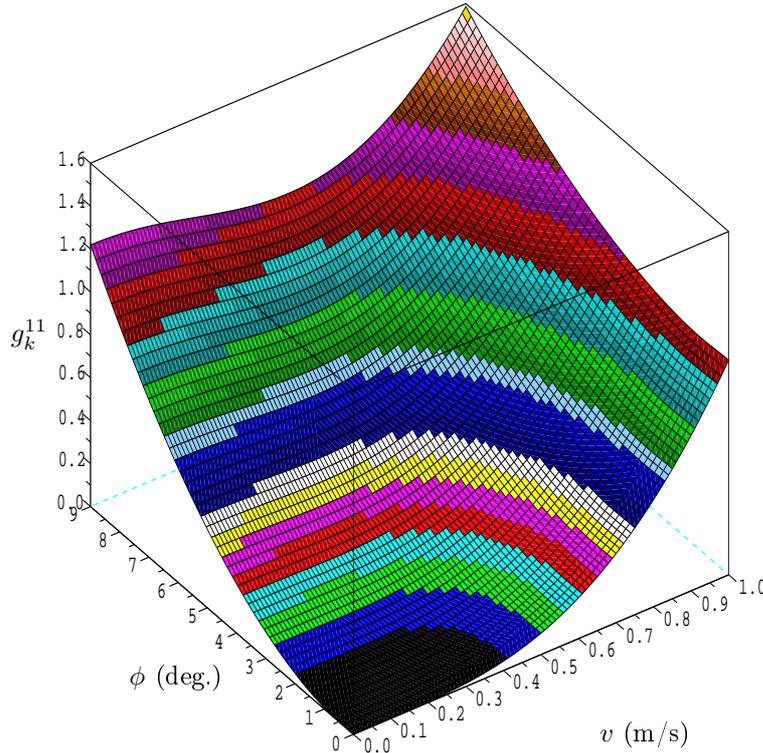


FIG. 5.1 – Evolution de  $g_k^{11}$  en fonction du niveau d'incertitude sur les commandes.

la figure 5.1 nous avons représenté l'allure de cette fonctionnelle en fonction de la variation des paramètres d'erreur sur les commandes en vitesse et rotation ( $\sigma_v$ ,  $\sigma_\phi$ ). L'écart-type de l'erreur en vitesse varie entre 0 m/s et 1 mètre par secondes et l'orientation entre 0 et 9 degrés. On constate donc un accroissement de cette fonction pour les valeurs importantes des erreurs.

$$D_k^{11,a} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_2 & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & g_k^{11} \end{pmatrix}.$$

### 5.4.1.2 Expression de $D_k^{11,b}$

Pour le calcul de l'espérance associée au terme (\*\*) de l'équation (5.36), Nous devons déterminer le gradient de la fonction de transfert  $f_k(X_k, u_k)$  par rapport à l'état  $X_k$ . Les dérivées du vecteur  $f_k(X_k, u_k)$  par rapport aux trois composantes de l'état sont données respectivement par

$$\begin{aligned}\frac{d f_k(X_k, u_k)}{d x_k} &= (1 \quad 0 \quad 0)^*, \\ \frac{d f_k(X_k, u_k)}{d y_k} &= (0 \quad 1 \quad 0)^*, \\ \frac{d f_k(X_k, u_k)}{d \theta_k} &= (-v_k \delta t_k s_{\theta_k + \phi_k} \quad v_k \delta t_k c_{\theta_k + \phi_k} \quad 1)^*.\end{aligned}\tag{5.38}$$

Nous pouvons en déduire une écriture équivalente la dérivée par rapport à l'orientation à partir du vecteur unitaire  $C_{\theta_k}$

$$\frac{d f_k(X_k, u_k)}{d \theta_k} = (v_k \delta t_k C_{\theta_k}^* \quad 1)^*.\tag{5.39}$$

La matrice  $D_k^{11,b}$  est donc déduite de l'espérance par rapport à  $X_{0:k}$  du produit

$$\begin{pmatrix} \mathcal{I}_2 & \mathcal{O}_{2 \times 1} \\ v_k \delta t_k C_{\theta_k}^* & 1 \end{pmatrix} Q_k^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{I}_2 & v_k \delta t_k C_{\theta_k} \\ \mathcal{O}_{1 \times 2} & 1 \end{pmatrix}\tag{5.40}$$

avec une décomposition par blocs de l'inverse de la matrice de covariance  $Q_k^{-1}$  définie par

$$Q_k^{-1} = \begin{pmatrix} L_k & H_k \\ H_k^* & \alpha_k \end{pmatrix}$$

où  $L_k$  et  $H_k$  dépendent des coefficients  $\alpha_k^{(i)}$ ,  $i = 0, \dots, 3$  et des vecteurs orthogonaux et unitaires  $C_{\theta_k}$  et  $G_{\theta_k}$  qui ont été introduits dans la section 5.4. En particulier, on a

$$L_k = \alpha_k^{(0)} \mathcal{I}_2 + \alpha_k^{(1)} C_{\theta_k} C_{\theta_k}^* + \alpha_k^{(2)} G_{\theta_k} G_{\theta_k}^*, \quad H_k = -\alpha_k^{(3)} C_{\theta_k}.$$

La matrice résultant du produit matriciel exprimé à l'équation (5.40) a pour expression

$$\begin{aligned}& \begin{pmatrix} L_k & H_k \\ v_k \delta t_k C_{\theta_k}^* L_k + H_k^* & v_k \delta t_k C_{\theta_k}^* H_k + \alpha_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{I}_2 & v_k \delta t_k C_{\theta_k} \\ \mathcal{O}_{1 \times 2} & 1 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} L_k & v_k \delta t_k L_k C_{\theta_k} + H_k \\ v_k \delta t_k C_{\theta_k}^* L_k + H_k^* & v_k^2 \delta t_k^2 C_{\theta_k}^* L_k C_{\theta_k} + 2 v_k \delta t_k H_k^* C_{\theta_k} + \alpha_k \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} L_k & H_k \\ H_k^* & \alpha_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{2 \times 2} & v_k \delta t_k L_k C_{\theta_k} \\ v_k \delta t_k C_{\theta_k}^* L_k & v_k^2 \delta t_k^2 C_{\theta_k}^* L_k C_{\theta_k} + 2 v_k \delta t_k H_k^* C_{\theta_k} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On reconnaît l'expression par blocs de l'inverse de la matrice de covariance  $Q_k$ . Déterminons maintenant les expressions des blocs de la seconde matrice en utilisant la définition de la matrice  $L_k$  en fonction des vecteurs orthonormés  $C_{\theta_k}$  et  $G_{\theta_k}$ . Nous avons notamment la relation  $L_k C_{\theta_k} = (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)}) C_{\theta_k}$ , ce qui implique

$$\begin{aligned}v_k \delta t_k L_k C_{\theta_k} &= v_k \delta t_k (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)}) C_{\theta_k} = v_k \delta t_k (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}) C_{\theta_k} \\ v_k^2 \delta t_k^2 C_{\theta_k}^* L_k C_{\theta_k} + 2 v_k \delta t_k H_k^* C_{\theta_k} &= v_k^2 \delta t_k^2 (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)}) - 2 v_k \delta t_k \alpha_k^{(3)}\end{aligned}\tag{5.41}$$

En reprenant les résultats précédents, la matrice  $D_k^{11,b}$  peut être exprimée sous la forme

$$D_k^{11,b} = \mathbb{E}_{X_{0:k}} \{Q_k^{-1}\} + \tilde{D}_k^{11,b},$$

où la matrice  $\tilde{D}_k^{11,b}$  est donnée par

$$\tilde{D}_k^{11,b} = \mathbb{E}_{X_{0:k}} \left\{ \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{2 \times 2} & B_k^{11,b} \\ B_k^{11,b*} & b_k^{11,b} \end{pmatrix} \right\}.$$

et le vecteur  $B_k^{11,b}$  et le paramètre  $b_k^{11,b}$

$$B_k^{11,b} = v_k \delta t_k \left( \alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)} \right) C_{\theta_k},$$

$$b_k^{11,b} = v_k \delta t_k \left( v_k \delta t_k \left( \alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)} \right) - 2 \alpha_k^{(3)} \right).$$

Nous pouvons synthétiser l'expression de la matrice  $D_k^{11}$  dans le tableau 5.1.

$D_k^{11} = D_k^{11,a} + D_k^{11,b}$ <p>avec <math>D_k^{11,b} = \mathbb{E}_{X_{0:k}} \{ Q_k^{-1} \} + \tilde{D}_k^{11,b}</math> et</p> $D_k^{11,a} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_2 & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & g_k^{11} \end{pmatrix}, \quad g_k^{11} = \frac{(b_k^2 - a_k^2)^2 + (\sigma_k^2 + a_k^2)^2 \sigma_\phi b_k \alpha_k^{(3)}}{(\sigma_k^2 + a_k^2)(\sigma_k^2 + b_k^2)},$ $\tilde{D}_k^{11,b} = \mathbb{E}_{X_{0:k}} \left\{ \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{2 \times 2} & B_k^{11,b} \\ B_k^{11,b*} & b_k^{11,b} \end{pmatrix} \right\},$ $B_k^{11,b} = v_k \delta t_k \left( \alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)} \right) C_{\theta_k}, \quad b_k^{11,b} = v_k \delta t_k \left( v_k \delta t_k \left( \alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)} \right) - 2 \alpha_k^{(3)} \right).$
---

TAB. 5.1 – Eléments pour le calcul de la matrice  $D_k^{11}$ .

**Remarque :** Cette expression de  $D_k^{11,b}$  dépend du vecteur  $C_{\theta_k}$ . La commande appliquée à l'instant  $t_k$  sur l'orientation influe donc sur la performance. De même, les paramètres d'incertitudes sur les commandes et sur le modèle interviennent au travers des termes  $\alpha_k^{(i)}$  et ont naturellement un impact sur le niveau de performance.

#### 5.4.2 Calcul des matrices $D_k^{12}$ et $D_k^{21}$

Le calcul de  $D_k^{12}$  s'obtient également à partir de la densité de probabilité associée à l'équation de prédiction  $p(X_{k+1}|X_k)$

$$D_k^{12} = \mathbb{E}_{X_{0:k+1}} \left\{ -\Delta_{X_{k+1}}^{X_k} \ln(p(X_{k+1}|X_k)) \right\}.$$

En décomposant par rapport aux composantes de position  $\tilde{p}_k$  et orientation  $\theta_k$ , on souhaite donc déterminer l'espérance par rapport à  $\mathbb{E}_{X_{0:k}}$  de la matrice

$$\Psi_{k,k+1}^{12} = \mathbb{E}_{X_{k+1}|X_k} \left\{ \begin{pmatrix} \nabla_{\tilde{p}_k} \nabla_{\tilde{p}_{k+1}}^* l_{X_{k+1}}^{X_k} & \nabla_{\tilde{p}_k} \nabla_{\theta_{k+1}}^* l_{X_{k+1}}^{X_k} \\ \nabla_{\theta_k} \nabla_{\tilde{p}_{k+1}} l_{X_{k+1}}^{X_k} & \nabla_{\theta_k} \nabla_{\theta_{k+1}} l_{X_{k+1}}^{X_k} \end{pmatrix} \right\}.$$

On considère uniquement la composante (2) de l'expression  $l_{X_{k+1}}^{X_k}$  donnée par l'équation (5.35), car le premier terme ne dépend pas de l'état à l'instant  $t_{k+1}$ . En utilisant l'expression de  $Q_k^{-1}$ , dont

la décomposition par blocs est rappelée à la section 5.4, on s'intéresse de nouveau au calcul du gradient de  $T_k$  par rapport à l'état

$$\begin{aligned} T_k &= \Delta \tilde{p}_k^* L_k \Delta \tilde{p}_k + 2v_k \delta t_k G_{\theta_k}^* L_k \Delta \tilde{p}_k + v_k^2 \delta t_k^2 G_{\theta_k}^* L_k G_{\theta_k} \\ &\quad + 2 \Delta \tilde{p}_k^* H_k [\Delta \theta_k - \phi_k] + 2 v_k \delta t_k G_{\theta_k}^* H_k [\Delta \theta_k - \phi_k] \\ &\quad + \alpha_k [\Delta \theta_k - \phi_k]^2. \end{aligned}$$

Tout d'abord, nous procédons à des simplifications, en tenant compte des spécificités de notre modèle. En premier lieu, le vecteur  $H_k$  est colinéaire à  $C_{\theta_k}$ . Il est donc aussi orthogonal à  $G_{\theta_k}$ . En utilisant ensuite l'expression de  $G_{\theta_k}^* L_k$  donnée à l'équation (5.33), on obtient

$$\begin{aligned} T_k &= \Delta \tilde{p}_k^* L_k \Delta \tilde{p}_k + 2v_k \delta t_k (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}) G_{\theta_k}^* \Delta \tilde{p}_k + v_k^2 \delta t_k^2 (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}) G_{\theta_k}^* G_{\theta_k} \\ &\quad + 2 \Delta \tilde{p}_k^* H_k [\Delta \theta_k - \phi_k] + \alpha_k [\Delta \theta_k - \phi_k]^2 \\ &= \Delta \tilde{p}_k^* L_k \Delta \tilde{p}_k + 2v_k \delta t_k (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}) G_{\theta_k}^* \Delta \tilde{p}_k + v_k^2 \delta t_k^2 (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}) G_{\theta_k}^* G_{\theta_k} \\ &\quad + 2 \Delta \tilde{p}_k^* H_k [\Delta \theta_k - \phi_k] + \alpha_k [\Delta \theta_k - \phi_k]^2 \end{aligned}$$

soit, étant donné que  $\|G_{\theta_k}\|^2 = 1$ ,

$$\begin{aligned} T_k &= \Delta \tilde{p}_k^* L_k \Delta \tilde{p}_k + 2v_k \delta t_k (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}) G_{\theta_k}^* \Delta \tilde{p}_k + v_k^2 \delta t_k^2 (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}) \\ &\quad + 2 \Delta \tilde{p}_k^* H_k [\Delta \theta_k - \phi_k] + \alpha_k [\Delta \theta_k - \phi_k]^2. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Nous devons donc calculer  $\nabla_{X_k} \left( \nabla_{X_{k+1}}^* T_k \right)$ . Ce calcul de gradient  $\nabla_{X_{k+1}}^* T_k$  peut être décomposé en considérant les gradients par rapport au vecteur position  $\tilde{p}_{k+1}$  et à l'orientation  $\theta_{k+1}$ .

$$\nabla_{X_{k+1}} T_k = \begin{pmatrix} \nabla_{\tilde{p}_{k+1}} T_k \\ \nabla_{\theta_{k+1}} T_k \end{pmatrix}$$

Dérivation des termes  $\nabla_{\tilde{p}_{k+1}} T_k$  et  $\nabla_{\theta_{k+1}} T_k$

En appliquant les propriétés de calcul différentiel d'une fonction et en utilisant la symétrie de la matrice  $L_k$ , on a

$$\begin{aligned} \nabla_{\tilde{p}_{k+1}} T_k &= 2 L_k [\Delta \tilde{p}_k] + 2 v_k \delta t_k (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}) G_{\theta_k} + 2 H_k [\Delta \theta_k - \phi_k], \\ \nabla_{\theta_{k+1}} T_k &= 2 \Delta \tilde{p}_k^* H_k + 2 \alpha_{k+1} [\Delta \theta_k - \phi_k]. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Nous pouvons maintenant aborder le calcul des matrices blocs du laplacien  $\nabla_{X_k} \left( \nabla_{X_{k+1}}^* T_k \right)$ .

Dérivation des termes  $\nabla_{\tilde{p}_k} \left( \nabla_{\tilde{p}_{k+1}}^* T_k \right)$  et  $\nabla_{\tilde{p}_k} \nabla_{\theta_{k+1}} T_k$

On déduit directement des expressions précédentes les résultats

$$\nabla_{\tilde{p}_k} \left( \nabla_{\tilde{p}_{k+1}}^* T_k \right) = -2 L_k \text{ et } \nabla_{\tilde{p}_k} \nabla_{\theta_{k+1}} T_k = -2 H_k. \quad (5.44)$$

Dérivation des termes  $\nabla_{\theta_k} \left( \nabla_{\tilde{p}_{k+1}}^* T_k \right)$  et  $\nabla_{\theta_k} \nabla_{\theta_{k+1}} T_k$

Pour ces deux composantes, les développements sont un peu plus compliqués car il convient de prendre en compte la dépendance par rapport à l'orientation  $\theta_k$  de la matrice  $L_k$  et des vecteurs  $C_{\theta_k}$  et  $G_{\theta_k}$ . Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \nabla_{\theta_k} \nabla_{\tilde{p}_{k+1}}^* T_k &= 2 \Delta \tilde{p}_k^* \frac{d L_k}{d \theta_k} + 2 v_k \delta t_k (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}) \frac{d G_{\theta_k}^*}{d \theta_k} \\ &\quad + 2 \frac{d H_k^*}{d \theta_k} [\Delta \theta_k - \phi_k] - 2 H_k^*. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Pour préciser cette expression, nous exploitons l'expression de la dérivée de la matrice  $L_k$  en fonction des vecteurs  $G_{\theta_k}$  et  $C_{\theta_k}$ . Ces relations sont données par l'équation (5.33). On obtient après substitution

$$\begin{aligned} \nabla_{\theta_k} \nabla_{\tilde{p}_{k+1}}^* T_k &= 2 \left( \alpha_k^{(1)} - \alpha_k^{(2)} \right) \Delta \tilde{p}_k^* \left( G_{\theta_k} C_{\theta_k}^* + C_{\theta_k} G_{\theta_k}^* \right) - 2v_k \delta t_k (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}) C_{\theta_k}^* \\ &\quad - 2\alpha_k^{(3)} [\Delta \theta_k - \phi_k] G_{\theta_k}^* - 2H_k^*, \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned} \nabla_{\theta_k} \nabla_{\tilde{p}_{k+1}}^* T_k &= -2H_k^* + 2 \left( \alpha_k^{(1)} - \alpha_k^{(2)} \right) \Delta \tilde{p}_k^* \left( G_{\theta_k} C_{\theta_k}^* + C_{\theta_k} G_{\theta_k}^* \right) \\ &\quad - 2v_k \delta t_k (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}) C_{\theta_k}^* - 2\alpha_k^{(3)} [\Delta \theta_k - \phi_k] G_{\theta_k}^*. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Nous pouvons maintenant évaluer l'espérance de ce vecteur relativement au vecteur de paramètres  $X_{k+1}|X_k$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{X_{k+1}|k} \left\{ \nabla_{\theta_k} \nabla_{\tilde{p}_{k+1}}^* T_k \right\} &= -2H_k^* + 2 \left( \alpha_k^{(1)} - \alpha_k^{(2)} \right) \mathbb{E}_{X_{k+1}|k} \left\{ \Delta \tilde{p}_k^* \left( G_{\theta_k} C_{\theta_k}^* + C_{\theta_k} G_{\theta_k}^* \right) \right\} \\ &\quad - 2v_k \delta t_k (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}) C_{\theta_k}^* - 2\alpha_k^{(3)} \mathbb{E}_{X_{k+1}|k} \left\{ [\Delta \theta_k - \phi_k] \right\} G_{\theta_k}^*. \end{aligned}$$

Etant donné le modèle de dynamique, lorsque  $X_k$  est fixé, le vecteur  $X_{k+1} - X_k$  suit une loi gaussienne de moyenne  $[-v_k \delta t_k G_{\theta_k}^* \phi_k]^*$ . On a<sup>1</sup> donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{X_{k+1}|k} \left\{ \Delta \tilde{p}_k^* \left( G_{\theta_k} C_{\theta_k}^* + C_{\theta_k} G_{\theta_k}^* \right) \right\} &= -v_k \delta t_k G_{\theta_k}^* \left( G_{\theta_k} C_{\theta_k}^* + C_{\theta_k} G_{\theta_k}^* \right) \\ \mathbb{E}_{X_{k+1}|k} \left\{ [\Delta \theta_k - \phi_k] \right\} &= 0. \end{aligned}$$

Nous pouvons, de nouveau, exploiter la relation d'orthogonalité entre les vecteurs unitaires  $C_{\theta_k}$  et  $G_{\theta_k}$  pour simplifier l'espérance précédente

$$\mathbb{E}_{X_{k+1}|k} \left\{ \Delta \tilde{p}_k^* \left( G_{\theta_k} C_{\theta_k}^* + C_{\theta_k} G_{\theta_k}^* \right) \right\} = -v_k \delta t_k C_{\theta_k}^*.$$

En substituant ce résultat et en simplifiant, nous obtenons

$$\mathbb{E}_{X_{k+1}|k} \left\{ \nabla_{\theta_k} \nabla_{\tilde{p}_{k+1}}^* T_k \right\} = -2H_k^* - 2v_k \delta t_k \left( \alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)} \right) C_{\theta_k}^*. \quad (5.47)$$

Enfin, considérons le dernier terme  $\nabla_{\theta_k} \nabla_{\theta_{k+1}} T_k$ . En reprenant l'expression de la dérivée de  $T_k$  par rapport à l'orientation précisée à l'équation 5.43, on a

$$\nabla_{\theta_k} \nabla_{\theta_{k+1}} T_k = 2 \Delta \tilde{p}_k^* \frac{dH_k}{d\theta_k} - 2\alpha_k$$

ou encore, après substitution de  $H_k$  par son expression en fonction de  $C_{\theta_k}$

$$\nabla_{\theta_k} \nabla_{\theta_{k+1}} T_k = -2\alpha_k^{(3)} \Delta \tilde{p}_k^* G_{\theta_k} - 2\alpha_{k+1}. \quad (5.48)$$

De cette expression, nous pouvons déduire l'espérance suivante :

<sup>1</sup>Nous utilisons la propriété  $\mathbb{E}(A.X) = A\mathbb{E}(X)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{X_{k+1|k}} \{ \nabla_{\theta_k} \nabla_{\theta_{k+1}} T_k \} &= -2\alpha_k^{(3)} \mathbb{E}_{X_{k+1|k}} \{ \Delta \tilde{p}_k^* G_{\theta_k} \} - 2\alpha_k \\
&= -2\alpha_k^{(3)} (-v_k \delta t_k G_{\theta_k}^* G_{\theta_k}) - 2\alpha_k \\
&= -2\alpha_k^{(3)} (-v_k \delta t_k G_{\theta_k}^* G_{\theta_k}) - 2\alpha_k
\end{aligned}$$

soit, étant donné que  $\|G_{\theta_k}\| = 1$ ,

$$\mathbb{E}_{X_{k+1|k}} \{ \nabla_{\theta_k} \nabla_{\theta_{k+1}} T_k \} = -2\alpha_k + 2\alpha_k^{(3)} v_k \delta t_k. \quad (5.49)$$

En concaténant les résultats des équations (5.44), (5.47) et (5.49), l'expression de  $D_k^{12}$  est obtenue en considérant l'espérance par rapport à  $X_{0:k}$  de la matrice

$$\mathbb{E}_{X_{0:k}} \left\{ - \begin{pmatrix} L_k & H_k \\ H_k^* & \alpha_k \end{pmatrix} \right\} - \tilde{D}_k^{12}$$

où la matrice  $\tilde{D}_k^{12}$  est définie par l'équation suivante :

$$\tilde{D}_k^{12} = \mathbb{E}_{X_{0:k}} \left\{ \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{2 \times 2} & \mathcal{O}_{2 \times 1} \\ v_k \delta t_k \left( \alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)} \right) C_{\theta_k}^* & -v_k \delta t_k \alpha_k^{(3)} \end{pmatrix} \right\}. \quad (5.50)$$

On peut remarquer les similitudes avec la matrice  $\tilde{D}_k^{11,b}$  sur deux points. Le vecteur  $B_k^{11,b}$  est opposé au vecteur correspondant à la dernière ligne et aux deux premières colonnes de  $-\tilde{D}_k^{12}$ . En outre, le terme  $v_k \delta t_k \alpha_k^{(3)}$  intervient également dans les deux expressions au niveau du coefficient en position (3,3) des matrices. En considérant la décomposition par bloc de l'inverse de la matrice de covariance  $Q_k$ , on a l'expression

$$D_k^{12} = -\mathbb{E}_{X_{0:k+1}} \{ Q_k^{-1} \} - \tilde{D}_k^{12}. \quad (5.51)$$

Nous pouvons synthétiser l'expression de la matrice  $D_k^{12}$  dans le tableau 5.2.

avec	$D_k^{12} = -\mathbb{E}_{X_{0:k+1}} \{ Q_k^{-1} \} - \tilde{D}_k^{12}$
	$\tilde{D}_k^{12} = \mathbb{E}_{X_{0:k}} \left\{ \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{2 \times 2} & \mathcal{O} \\ B_k^{11,b^*} & b_k^{12} \end{pmatrix} \right\},$
	$B_k^{11,b} = v_k \delta t_k \left( \alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)} \right) C_{\theta_k}, \quad b_k^{12} = -2\alpha_k^{(3)} v_k \delta t_k.$

TAB. 5.2 – Éléments pour le calcul de la matrice  $D_k^{12}$  et  $D_k^{21}$ .

**Remarque :** Comme pour la matrice  $D_k^{11}$ , cette matrice dépend explicitement des commandes appliquées au mobile à chaque instant  $t_k$  et de la distance parcourue entre les instants  $t_k$  et  $t_{k+1}$ . Le choix des commandes et l'intensité des bruits associés vont avoir une influence sur la matrice  $D_k^{12}$ , et sur la perte d'information lors du déplacement qui se traduit dans la formule de Tichavsky par le produit  $D_k^{12} (J_k + D_k^{11})^{-1} D_k^{21}$ . Le terme  $D_k^{21}$  se déduit de  $D_k^{12}$  par une simple application de l'opérateur de transposition.

### 5.4.3 Calcul de $D_k^{22}$

La matrice  $D_k^{22}$  est composée de deux termes principaux  $D_k^{22,a}$  et  $J_k^z(\mathcal{C})$  obtenus respectivement à partir de la loi de prédiction  $p(X_{k+1}|X_k)$  et de la densité de probabilité associée au processus d'observation  $p(z_{k+1}|X_{k+1}, \mathcal{C})$ .

#### 5.4.3.1 Expression de $D_k^{22,a}$

La matrice  $D_k^{22,a}$  est déterminée à partir de la relation

$$D_k^{22,a} = \mathbb{E}_{X_{0:k+1}} \left\{ -\Delta_{X_{k+1}}^{X_{k+1}} \ln(p(X_{k+1}|X_k)) \right\}.$$

De façon évidente, on peut noter que le logarithme de la densité de la prédiction (5.35) est une forme bilinéaire en  $X_{k+1}$  et que le laplacien équivaut à la matrice de covariance  $Q_k^{-1}$  car la matrice de covariance  $Q_k$  ne dépend que de l'orientation à l'instant  $t_k$ . On en déduit de façon immédiate que

$$\underline{D_k^{22,a}} = \mathbb{E}_{X_{0:k}} \{ Q_k^{-1} \} \quad (5.52)$$

#### 5.4.3.2 Expression de $J_k^z(\mathcal{C})$

Pour le terme  $J_k^z(\mathcal{C})$ , qui dépend de l'équation de mesure et de l'information cartographique disponible  $\mathcal{C}$ , on a

$$J_k^z(\mathcal{C}) = \mathbb{E}_{X_{0:k+1}, z_{0:k+1}} \left\{ -\Delta_{X_{k+1}}^{X_{k+1}} \ln(p(z_{k+1}|X_{k+1}, \mathcal{C})) \right\}.$$

Il est encore possible de l'écrire sous la forme

$$J_k^z(\mathcal{C}) = \mathbb{E}_{X_{0:k+1}} \left\{ \Psi_{k,k+1}^{22,b} \right\}.$$

où la matrice  $\Psi_{k,k+1}^{22,b}$  est obtenue en prenant l'espérance conditionnelle  $z_{1:k+1}|X_{0:k+1}$  de

$$l_{z_{k+1}}^{X_{k+1}} = -\ln(p(z_{k+1}|X_{k+1}, \mathcal{C})). \quad (5.53)$$

Nous avons supposé que le processus de localisation s'appuie sur un algorithme d'association qui permet une mise en correspondance des amers et des mesures potentielles dont la performance est maîtrisée et n'introduit pas de corrélation entre les mesures élémentaires. La matrice de covariance des mesures  $R_{k+1}$  est de dimension  $2n_{k+1}$  et diagonale par blocs de taille  $2 \times 2$  où  $n_{k+1} \leq n_{\mathcal{C}}$  est le nombre d'amers de la carte  $\mathcal{C}$  qui seraient exploités dans le processus de localisation à l'instant  $t_{k+1}$ . Considérons le sous-ensemble des  $n_{k+1}$  amers de la carte qui seraient utilisés à l'instant  $t_{k+1}$  dans le processus de correction du filtre. On le notera  $\mathcal{C}_{k+1}$  par la suite et  $\{i_l\}$ ,  $l = 1, \dots, n_{k+1}$  sont les indices des amers associés. La mesure provenant de l'amer  $f_{i_l}$  est incertaine, ce qui se traduit par la matrice de covariance élémentaire  $R_{k+1, i_l}$  diagonale. Selon le modèle considéré parmi les trois introduits à l'équation (4.17) du chapitre 4, l'incertitude sur la distance peut dépendre explicitement de l'état courant du mobile lors de l'acquisition des mesures. Ainsi, on a

$$\forall l = 1, \dots, n_{k+1}, R_{k+1, i_l} = \begin{pmatrix} \sigma_{d_{k+1, i_l}}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\varphi}^2 \end{pmatrix}. \quad (5.54)$$

Nous développerons les calculs pour les modèles  $(M_0)$  et  $(M_1)$ . Dans le modèle  $(M_0)$ , l'incertitude est modélisée par une loi gaussienne de variances constantes au cours du temps. Pour  $(M_1)$ , la variance sur la mesure de distance est une fonction de cette distance, donc du vecteur formé par la position du mobile et l'amer observé dans  $\mathcal{R}_g$ . On rappelle ici la définition de la variance pour  $M_1$

$$(M_1) \quad \sigma_{d_{k,l}} = \sigma_d d(X_k, f_l)^\gamma, \quad \gamma \geq 1$$

En outre, les mesures étant indépendantes, l'expression de  $l_{z_{k+1}}^{X_{k+1}}$  proposée à l'équation (5.53) est équivalente à

$$l_{z_{k+1}}^{X_{k+1}} = \sum_{l=1}^{n_{k+1}} l_{z_{k+1}, f_{i_l}}^{X_{k+1}} \quad (5.55)$$

avec pour chaque amer élémentaire

$$l_{z_{k+1}, f_{i_l}}^{X_{k+1}} = -\ln(p(z_{k+1}^{i_l} | X_{k+1}, f_{i_l})). \quad (5.56)$$

Nous allons nous attacher à préciser l'expression de l'espérance  $\mathbb{E}_{z_{k+1} | X_{k+1}}$  du laplacien par rapport à l'état du mobile de chacune des fonctions  $l_{z_{k+1}, f_{i_l}}^{X_{k+1}}$ ,  $l = 1, \dots, n_{k+1}$ , afin de déterminer  $\Psi_{k, k+1}^{22, b}$ . Par commodité, nous utiliserons la notation suivante :

$$\Psi_{k, k+1, i_l}^{22, b} = -\mathbb{E}_{z_{k+1} | X_{k+1}} \left\{ \Delta_{X_{k+1}}^{X_{k+1}} \ln(p(z_{k+1}^{i_l} | X_{k+1}, f_{i_l})) \right\}. \quad (5.57)$$

Les densités de mesures élémentaires étant des densités gaussiennes, par application de la propriété ??, nous savons que le terme en position  $(i, j)$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$  de cette matrice est donnée par l'expression

$$\begin{aligned} \Psi_{k, k+1, i_l}^{22, b}(i, j) &= \frac{1}{2} \text{tr} \left( \underbrace{R_{k+1, i_l}^{-1} \frac{dR_{k+1, i_l}}{dX_{k+1}^i} R_{k+1, i_l}^{-1} \frac{dR_{k+1, i_l}}{dX_{k+1}^j}}_{(*)} \right) \\ &+ \underbrace{\left( \frac{dH^*(X_{k+1}, f_{i_l})}{dX_{k+1}^i} \right) R_{k+1, i_l}^{-1} \left( \frac{dH(X_{k+1}, f_{i_l})}{dX_{k+1}^j} \right)}_{(**)}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Pour le terme (\*\*), il est donc nécessaire de préciser les gradients de la fonctionnelle d'observation  $H(X_{k+1}, f_{i_l})$ . Elle comporte deux composantes correspondant respectivement à la distance  $d(X_{k+1}, f_{i_l})$  et à la mesure d'angle relative à l'orientation du mobile  $\varphi(X_{k+1}, f_{i_l})$ . Nous avons

$$\begin{aligned} d(X_k, f_{i_l}) &= \sqrt{(x_k - x_{i_l})^2 + (y_k - y_{i_l})^2} \\ \varphi(X_k, f_{i_l}) &= \arctan_2 \left( \frac{y_{i_l} - y_k}{x_{i_l} - x_k} \right) - \theta_k. \end{aligned}$$

Avant d'exprimer les gradients par rapport à l'état  $X_{k+1}$  de ces deux fonctions, nous introduisons des notations qui nous permettront d'obtenir des formulations structurées de la matrice d'information. Ces notations traduisent la configuration géométrique associée à l'acquisition d'une mesure élémentaire.

Pour un amer  $f_{i_l}$  donné parmi les  $n_{k+1}$  amers qui seraient utilisés dans le processus de localisation, nous considérons les notations suivantes illustrées sur la figure 5.2.

- $\Delta x_{k+1}^{i_l}$  et  $\Delta y_{k+1}^{i_l}$  les coordonnées du vecteur « amer-mobile »  $\overrightarrow{P_{k+1} f_{i_l}}$  dans le repère global  $\mathcal{R}_g$ ,
- sa norme  $\rho_{i_l}^{k+1} := \left\| \overrightarrow{P_{k+1} f_{i_l}} \right\|$  et son argument  $\beta_{i_l}^{k+1} := \angle \overrightarrow{P_{k+1} f_{i_l}}$ ,
- le cosinus et le sinus de l'argument  $c_{i_l}^{k+1} := \cos(\beta_{i_l}^{k+1})$  et  $s_{i_l}^{k+1} := \sin(\beta_{i_l}^{k+1})$ .

Pour la fonction de distance, l'expression du gradient est donnée par la formule suivante :

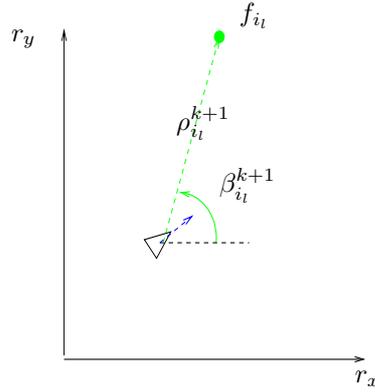


FIG. 5.2 – Notations pour une configuration « amer-mobile ».

$$\nabla_{X_{k+1}} d(X_{k+1}, f_{i_l}) = \begin{pmatrix} \frac{(x_{k+1} - x_{i_l})}{\rho_{i_l}^{k+1}} \\ \frac{(y_{k+1} - y_{i_l})}{\rho_{i_l}^{k+1}} \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\Delta x_{k+1}^{i_l}}{\rho_{i_l}^{k+1}} \\ \frac{\Delta y_{k+1}^{i_l}}{\rho_{i_l}^{k+1}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant l'argument  $\beta_{i_l}^{k+1}$  du vecteur  $\overrightarrow{P_{k+1} f_{i_l}}$ , on en déduit la formulation équivalente

$$\nabla_{X_{k+1}} d(X_{k+1}, f_{i_l}) = - \begin{pmatrix} c_{i_l}^{k+1} \\ s_{i_l}^{k+1} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.59)$$

De même, pour la fonction de mesure d'angle nous obtenons

$$\nabla_{X_{k+1}} \varphi(X_{k+1}, f_{i_l}) = \begin{pmatrix} -\frac{(y_{k+1} - y_{i_l})}{\rho_{i_l}^{k+1 2}} \\ \frac{(x_{k+1} - x_{i_l})}{\rho_{i_l}^{k+1 2}} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta x_{k+1}^{i_l}}{\rho_{i_l}^{k+1 2}} \\ -\frac{\Delta x_{k+1}^{i_l}}{\rho_{i_l}^{k+1 2}} \\ -1 \end{pmatrix}$$

En utilisant de nouveau l'argument  $\beta_{i_l}^{k+1}$  du vecteur  $\overrightarrow{P_{k+1} f_{i_l}}$ , on en déduit

$$\nabla_{X_{k+1}} \varphi(X_{k+1}, f_{i_l}) = \begin{pmatrix} s_{i_l}^{k+1} \\ \rho_{i_l}^{k+1} \\ -c_{i_l}^{k+1} \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (5.60)$$

A partir de l'expression de ces gradients, nous pouvons détailler l'expression de la matrice d'information, dont les coefficients sont obtenues à partir des termes (\*\*). Les opérations sont identiques quel que soit le modèle d'erreur considéré.

**Dérivation du terme (\*\*).** Si nous reprenons l'expression de ce terme, nous avons pour chaque composante  $(i, j)$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  de la matrice résultante,

$$\left( \frac{dH^*(X_{k+1}, f_{i_l})}{dX_{k+1}^i} \right) R_{k+1, i_l}^{-1} \left( \frac{dH(X_{k+1}, f_{i_l})}{dX_{k+1}^j} \right).$$

soit, en utilisant la définition de la fonctionnelle  $H(X_{k+1}, f_{i_l})$

$$\left( \frac{d \frac{d(X_{k+1}, f_{i_l})}{dX_{k+1}^i}}{dX_{k+1}^i} \right)^* R_{k+1, i_l}^{-1} \left( \frac{d \frac{d(X_{k+1}, f_{i_l})}{dX_{k+1}^j}}{dX_{k+1}^j} \right).$$

A partir des propriétés de calcul matriciel, il est possible d'obtenir une formulation condensée pour la matrice résultante, que nous noterons  $\mathcal{D}_{i_l}^{k+1}$

$$\mathcal{D}_{i_l}^{k+1} = \begin{pmatrix} \nabla_{X_{k+1}} d^*(X_{k+1}, f_{i_l}) \\ \nabla_{X_{k+1}} \varphi^*(X_{k+1}, f_{i_l}) \end{pmatrix}^* R_{k+1, i_l}^{-1} \begin{pmatrix} \nabla_{X_{k+1}} d^*(X_{k+1}, f_{i_l}) \\ \nabla_{X_{k+1}} \varphi^*(X_{k+1}, f_{i_l}) \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons substituer les gradients dans la formule précédente par leurs expressions calculées à partir de la configuration géométrique de l'acquisition de la mesure présentées au niveau des équations (5.59) et (5.60). Cela nous amène à introduire la matrice suivante :

$$G_{Xl}^{k+1} = \begin{pmatrix} \frac{(x_{k+1}-x_l)}{\rho_l^{k+1}} & \frac{(y_{k+1}-y_l)}{\rho_l^{k+1}} & 0 \\ -\frac{(y_{k+1}-y_l)}{\rho_l^{k+1}{}^2} & \frac{(x_{k+1}-x_l)}{\rho_l^{k+1}{}^2} & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.61)$$

Cette matrice peut encore s'écrire sous la forme équivalente, en utilisant la norme et l'argument  $\beta_{i_l}^{k+1}$  du vecteur « amer-mobile »  $\overrightarrow{P_{k+1}f_{i_l}}$ ,

$$G_{Xl}^{k+1} = \begin{pmatrix} -c_{i_l}^{k+1} & -s_{i_l}^{k+1} & 0 \\ \frac{s_{i_l}^{k+1}}{\rho_l^{k+1}} & -\frac{c_{i_l}^{k+1}}{\rho_l^{k+1}} & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.62)$$

Les vecteurs lignes correspondent aux gradients des fonctions de mesure par rapport à l'état à l'instant  $t_{k+1}$ . Par conséquent, on a pour tout amer  $f_{i_l}$

$$\underline{\mathcal{D}_{i_l}^{k+1}} = \underline{G_{Xl}^{k+1} R_{k+1, i_l}^{-1} G_{Xl}^{k+1}}. \quad (5.63)$$

**Dérivation du terme (\*).** Nous devons tenir compte du modèle d'erreur considérée.

**Cas du modèle  $M_0$ .** Pour le modèle ( $M_0$ ), la matrice de covariance  $R_{k+1, i_l}^{-1}$ ,  $l = 1, \dots, n_{k+1}$  ne dépend pas de l'état du mobile à l'instant de mesure. Le terme (\*) est donc nul pour tout  $(i, j)$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ .

**Cas du modèle  $M_1$ .** A l'inverse du modèle  $M_0$ , le terme (\*) n'est pas nul. La variance de l'erreur sur la mesure de distance dépend de cette même distance. Pour  $(i, j)$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$ , nous devons préciser l'expression

$$Y_{k+1, i_l}(i, j) = \text{tr} \left( R_{k+1, i_l}^{-1} \frac{dR_{k+1, i_l}}{dX_{k+1}^i} R_{k+1, i_l}^{-1} \frac{dR_{k+1, i_l}}{dX_{k+1}^j} \right), \quad (5.64)$$

avec la matrice de covariance de la forme

$$R_{k+1, i_l} = \begin{pmatrix} \sigma_{d_{k+1, i_l}}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\varphi}^2 \end{pmatrix}, \quad (5.65)$$

et

$$\sigma_{d_{k, l}} = \sigma_d d(X_k, f_l)^\gamma, \quad \gamma \geq 1.$$

Pour ce modèle, seuls les paramètres du vecteur de position de l'état du mobile interviennent donc au niveau de l'incertitude sur la mesure de distance. La matrice résultante est donc une matrice avec une décomposition par blocs, où seul le bloc supérieur gauche de taille  $2 \times 2$  est non nul. Nous devons déterminer la dérivée de la matrice de covariance par rapport aux composantes du vecteur position  $\tilde{p}_{k+1}$ . Les dérivées de la variance de l'erreur sur l'information de distance par rapport à  $x_{k+1}$  et  $y_{k+1}$  sont données par l'expression suivante (le détail de ces calculs est présenté en annexe B) :

$$\frac{\partial \sigma_{d_{k+1, i_l}}^2}{\partial x_{k+1}} = -2\gamma \frac{\Delta x_{k+1}^{i_l}}{\rho_{i_l}^{k+1}{}^2} \sigma_{d_{k+1, i_l}}^2, \quad \frac{\partial \sigma_{d_{k+1, i_l}}^2}{\partial y_{k+1}} = -2\gamma \frac{\Delta y_{k+1}^{i_l}}{\rho_{i_l}^{k+1}{}^2} \sigma_{d_{k+1, i_l}}^2$$

où les paramètres  $\Delta x_{k+1}^{i_l}$  et  $\Delta y_{k+1}^{i_l}$  sont les coordonnées dans  $\mathcal{R}_g$  du vecteur  $\overrightarrow{P_{k+1}f_{i_l}}$ . Pour les dérivées par rapport aux composantes de position, seul le coefficient en  $(1, 1)$  est non nul. De plus, la matrice  $R_{k+1, i_l}$  étant diagonale, on en déduit que les matrices des produits matriciels impliqués au niveau de l'opérateur trace dans l'équation (7.24) pour le calcul de  $Y_{k+1, i_l}(i, j)$  ont des termes tous nuls, hormis en position  $(1, 1)$ . Ainsi

$$\text{tr} \left( R_{k+1, i_l}^{-1} \frac{dR_{k+1, i_l}}{dX_{k+1}^i} R_{k+1, i_l}^{-1} \frac{dR_{k+1, i_l}}{dX_{k+1}^j} \right) = \begin{cases} 4\gamma^2 \frac{\Delta x_{k+1}^{i_l 2}}{\rho_{k+1}^{i_l 4}} & \text{si } i = j = 1 \\ 4\gamma^2 \frac{\Delta y_{k+1}^{i_l 2}}{\rho_{k+1}^{i_l 4}} & \text{si } i = j = 2 \\ 4\gamma^2 \frac{\Delta y_{k+1}^{i_l} \Delta y_{k+1}^{i_l}}{\rho_{k+1}^{i_l 4}} & \text{si } (i, j) = 1, 2 \text{ et } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = 3 \text{ ou } j = 3. \end{cases} \quad (5.66)$$

En utilisant l'argument  $\beta_{i_l}^{k+1}$  du vecteur  $\overrightarrow{P_{k+1}f_{i_l}}$ , on peut réécrire les termes précédents sous la forme équivalente

$$Y_{k+1, i_l}(i, j) = \begin{cases} \frac{4\gamma^2}{\rho_{k+1}^{i_l 2}} \cos^2(\beta_{i_l}^{k+1}) & \text{si } i = j = 1 \\ \frac{4\gamma^2}{\rho_{k+1}^{i_l 2}} \sin^2(\beta_{i_l}^{k+1}) & \text{si } i = j = 2 \\ \frac{4\gamma^2}{\rho_{k+1}^{i_l 2}} \cos(\beta_{i_l}^{k+1}) \sin(\beta_{i_l}^{k+1}) & \text{si } (i, j) = 1, 2 \text{ et } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = 3 \text{ ou } j = 3. \end{cases} \quad (5.67)$$

On en déduit donc l'expression définitive de la matrice  $Y_{k+1, l}$

$$Y_{k+1, i_l} = \frac{4\gamma^2}{\rho_{k+1}^{i_l 2}} \begin{pmatrix} \cos^2(\beta_{i_l}^{k+1}) & \sin(2\beta_{i_l}^{k+1})/2 & 0 \\ \sin(2\beta_{i_l}^{k+1})/2 & \sin^2(\beta_{i_l}^{k+1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.68)$$

**Remarque :** A partir de cette expression, on illustre bien l'impact du modèle d'erreur ( $M_1$ ) sur l'information de localisation, en particulier sur la performance de l'estimation des composantes du vecteur position. Le gain d'information dépend à la fois de l'inverse de la distance à l'amer et de la valeur du paramètre  $\gamma$ . En effet, si l'on considère la trace de la projection de cette matrice sur le sous-espace défini par les paramètres de position, elle est égale à  $\frac{4\gamma^2}{\rho_{k+1}^{i_l 2}}$ . Ce résultat est en accord avec le modèle ( $M_1$ ) où la variance, sur la mesure de distance, est d'autant plus importante que la distance à l'amer et le paramètre d'échelle  $\gamma$  sont grands. Pour le modèle ( $M_2$ ), il est possible de dériver également la matrice  $Y_{k+1, i_l}$ . Dans ce cas, la variance dépend de la mesure d'angle, le gain d'information sur l'état complet (position et orientation) est impacté.

**Synthèse pour l'expression de  $J_{k+1}^z(\mathcal{C})$ .** Nous avons décliné dans les paragraphes précédents l'expression des matrices  $\Psi_{k, k+1, i_l}^{22, b}$  pour chaque amer  $f_{i_l}$  utilisable dans le processus de correction du filtrage. Nous avons vu que cette matrice était composée de deux parties variables selon le modèle d'erreur considéré. Dans le cadre le plus général, nous pouvons exprimer  $J_{k+1}^z(\mathcal{C})$  comme suit :

$$J_{k+1}^z(\mathcal{C}) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{nc} \mathbb{E}_{X_{0:k+1}} \{ \delta_l^{k+1} Y_{k+1, l} \} + \sum_{l=1}^{nc} \mathbb{E}_{X_{0:k+1}} \{ \delta_l^{k+1} G_{Xl}^{k+1*} R_{k+1, l}^{-1} G_{Xl}^{k+1} \}, \quad (5.69)$$

où la matrice  $Y_{k+1, l}$  est équivalente à la matrice nulle pour le modèle  $M_0$  et donnée par l'équation (5.68) pour le modèle  $M_1$ . La matrice  $G_{Xl}^{k+1}$  est fournie à l'équation (5.70), étant structurée selon la configuration géométrique définie par l'état du mobile et les amers de la carte.

Le tableau suivant récapitule les principaux éléments pour le calcul de la matrice 5.3.

$$D_k^{22} = D_k^{22,a} + J_{k+1}^z(\mathcal{C})$$

avec  $D_k^{22,a} = \mathbb{E}_{X_{0:k}} \{Q_k^{-1}\}$  et

$$J_{k+1}^z(\mathcal{C}) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n_C} \mathbb{E}_{X_{0:k+1}} \{\delta_l^{k+1} Y_{k+1,l}\} + \sum_{l=1}^{n_C} \mathbb{E}_{X_{0:k+1}} \left\{ \delta_l^{k+1} G_{Xl}^{k+1*} R_{k+1,l}^{-1} G_{Xl}^{k+1} \right\},$$

où  $\forall l = 1, \dots, n_C$ ,

1. si le modèle d'erreur est ( $M_0$ )
 
$$R_{k+1,l} = \text{Diag}(\sigma_d^2, \sigma_\varphi^2) \text{ et } Y_{k+1,l} = \mathcal{O}_{3 \times 3},$$
2. si le modèle d'erreur est ( $M_1$ )
 
$$R_{k+1,l} = \text{Diag}(\sigma_d^2 \rho_l^{k+1 2\gamma}, \sigma_\varphi^2) \text{ et } Y_{k+1,l} = \frac{4\gamma^2}{\rho_l^{k+1 2}} \begin{pmatrix} \cos^2(\beta_l^{k+1}) & \sin(2\beta_l^{k+1})/2 & 0 \\ \sin(2\beta_l^{k+1})/2 & \sin^2(\beta_l^{k+1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$G_{Xl}^{k+1} = \begin{pmatrix} -c_l^{k+1} & -s_l^{k+1} & 0 \\ \frac{s_l^{k+1}}{\rho_l^{k+1}} & -\frac{c_l^{k+1}}{\rho_l^{k+1}} & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.70)$$

 TAB. 5.3 – Éléments pour le calcul de la matrice  $D_k^{22}$ .

#### 5.4.4 Conclusions de la section

Nous avons précisé dans cette section la formulation des matrices permettant de calculer de façon récursive la borne sur la matrice de covariance de l'estimateur *a posteriori* pour notre problème de localisation à partir d'une carte d'amers. Pour cela, nous avons supposé d'une part que la position des amers est parfaitement connue, et d'autre part que l'algorithme d'association est suffisamment performant pour que les mesures qui seraient reçues soient correctement affectées aux amers contenus dans la zone de perception du mobile. Nous verrons, dans un autre chapitre, comment l'hypothèse sur la connaissance de la carte peut être relâchée pour tenir compte d'incertitude sur leurs positions dans le plan. La suite de ce chapitre aborde l'estimation pratique des bornes, notamment au travers de l'approximation des espérances qui interviennent dans l'expression des matrices.

### 5.5 Algorithmes d'estimation de la BCRB

Nous avons obtenu dans la section précédente l'expression des différents termes permettant, à partir de la relation de récurrence de Tychavsky, de dériver la matrice d'information de Fisher *a posteriori*  $J_k$  à chaque instant. Néanmoins, en pratique, on est confronté au problème du calcul des espérances, donc des intégrales, par rapport à la trajectoire et aux mesures ( $X_{0:k}, z_{1:k}$ ) jusqu'à l'instant  $t_k$ . En effet, on ne peut obtenir une formulation explicite des matrices que dans des cas particuliers. Par exemple, lorsque les équations du système sont linéaires et les bruits gaussiens avec des matrices de covariances invariantes, on se ramène à une équation de mise à jour similaire à celui du filtre de Kalman ou de sa formulation duale, le «filtre d'information» [Dod03]. Pour certains problèmes, les inconvénients de la non-linéarité peuvent être contournés en se plaçant dans un espace de représentation de l'état plus adapté. Ainsi, dans [Bré05], une représentation logarithmique polaire (LPC) est préconisée pour le problème de pistage de cibles par mesures d'angles et permet d'obtenir des formulations explicites des matrices d'information. Cependant, dans la ma-

porité des situations rencontrées, il est nécessaire d'approcher ces quantités par simulation Monte Carlo à partir de la connaissance des densités de probabilité de prédiction et d'observation. Dans la littérature, cette difficulté est parfois omise en considérant notamment que l'impact du bruit d'évolution est faible. On se ramène donc bien souvent à une approximation autour de la trajectoire nominale et on ne s'intéresse qu'au terme dépendant du processus d'observation supposé prépondérant. Cette approche est utilisée dans [KG06] pour déterminer un critère local pour la planification des trajectoires d'un engin sous-marin se localisant à l'aide d'une carte bathymétrique. Une telle approximation est sur le plan théorique valable en limite (« régime permanent ») lorsque l'on s'intéresse à l'analyse des performances du filtre en temps long et pour des modèles de dynamique de structures bien spécifiques.

Pour une carte donnée  $\mathcal{C}$  et un mobile disposant d'un domaine de perception  $\mathcal{P}$  défini par les capacités de ses capteurs (laser, caméra...), on s'intéresse à l'approximation des intégrales de la forme

$$\begin{aligned} D_k^{11} &= \int \Psi_{k,k+1}^{11} p(X_{0:k}) dX_{0:k} \\ D_k^{12} &= \int \Psi_{k,k+1}^{12} p(X_{0:k}) dX_{0:k} \\ D_k^{22,a} &= \int \Psi_{k,k+1}^{22,a} p(X_{0:k}) dX_{0:k} \\ J_k^Z(\mathcal{C}) &= \int \Psi_{k,k+1}^{22,b} p(X_{0:k+1}) dX_{0:k+1}, \end{aligned}$$

où les matrices  $\Psi_{k,k+1}^{**,*}$  sont celles précisées dans la section précédente. Nous présentons trois méthodes permettant d'accéder à une approximation de ces grandeurs. Elles se distinguent par le coût calculatoire et la précision des approximations produites. Nous considérons une trajectoire du mobile composée de  $K$  étapes, et construite en imposant à partir d'une position initiale  $X_0$  autour de  $\hat{X}_0$  une suite de commandes en déplacement et orientation

$$\begin{aligned} u_{0:K-1} &= \{u_0, \dots, u_k, \dots, u_{K-1}\} \\ &= \{(v_0, \phi_0), \dots, (v_k, \phi_k), \dots, (v_{K-1}, \phi_{K-1})\}, \end{aligned} \quad (5.71)$$

où  $(v_k, \phi_k)$  sont appliqués à l'instant  $t_k$ ,  $k = 0, \dots, K-1$ . La trajectoire ainsi construite par application de la séquence de commande et sans prise en compte du bruit est notée  $\hat{X}_{0:K}$ .

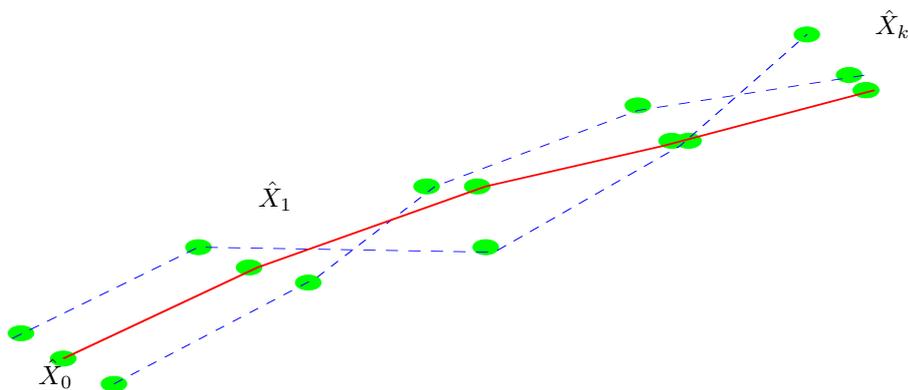


FIG. 5.3 – Trajectoire nominale (rouge) et bruitées (bleues).

### 5.5.1 Approximation autour de la trajectoire nominale

Pour éviter les coûts de calcul importants nécessaires à l'évaluation des intégrales, une première stratégie consiste à approximer les espérances des matrices par les matrices calculées au niveau

de la trajectoire nominale  $\hat{X}_{0:K}$ . On obtient une expression de la formule récursive de Tichavsky équivalente à celle qui serait obtenue pour un problème d'estimation pour le système dont le modèle de dynamique est celui déduit de la linéarisation des équations de prédiction et d'observation, autour de cette trajectoire. Cette approche se traduit par l'algorithme 7 présenté en page 81.

---

**Algorithme 7** Calcul récursif de la BCRB à partir de la trajectoire nominale.
 

---

On considère les entrées :

- $\hat{X}_0 = (\hat{x}_0 \quad \hat{y}_0 \quad \hat{\theta}_0)^*$  l'état supposé du mobile à l'instant initial,
- $(u_0, \dots, u_{K-1})$  la suite des commandes en vitesse et rotation,
- $(\delta t_1, \dots, \delta t_K)$  les durées de chaque déplacement élémentaire,
- les paramètres du modèle de dynamique  $\sigma, \sigma_\theta, \sigma_d, \sigma_\varphi$ .

**Initialisation :**

$$\hat{J}_0 = P_0^{-1} \text{ et } k = 0, \quad (5.72)$$

**Itération :**

Pour  $K - 1 \geq k \geq 0$ ,

- prédiction de  $\hat{X}_{k+1}$  à partir de  $\hat{X}_k = (\hat{x}_k \quad \hat{y}_k \quad \hat{\theta}_k)^*$  et  $u_k$ , à partir du modèle de dynamique 4.2 sans erreur,
- calcul de  $a_k, b_k, c_{\hat{\theta}_k + \phi_k}$  et  $s_{\hat{\theta}_k + \phi_k}$ , puis les approximations des vecteurs  $C_{\theta_k}$  et  $G_{\theta_k}$ , pour l'orientation égale à  $\hat{\theta}_k$ . Ces vecteurs sont notés  $\tilde{C}_{\theta_k}$  et  $\tilde{G}_{\theta_k}$ .
- calcul des coefficients  $\alpha_k$  et  $\alpha_k^{(i)}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  à partir de l'équation (5.29).
- approximation de l'inverse de  $Q_k^{-1} \approx \hat{Q}_k^{-1}$  à partir de la décomposition par blocs définie à l'équation (5.28).
- calcul des termes  $D_k^{11}, D_k^{12}, D_k^{21}$  et  $D_k^{22,a}$  à partir des équations présentées dans les tableaux 5.1, 5.2 et 5.3. A ce stade, on obtient les approximations

$$\hat{D}_k^{11}, \quad \hat{D}_k^{12}, \quad \hat{D}_k^{12} = \hat{D}_k^{21*} \text{ et } \hat{D}_k^{22,a}.$$

Elles utilisent notamment l'approximation du vecteur  $\tilde{C}_{\theta_k}$ .

- identification des amers  $\{f_i\}$  visibles de  $\hat{X}_{k+1}$  selon les caractéristiques du capteur de mesure, donc  $\delta_l^{k+1} = 1$ .
- approximation du terme associé au processus de mesure  $\hat{J}_{k+1}^z(\mathcal{C})$  de  $D_k^{22}$ , à partir des éléments donnés au tableau 5.3 :
  - pour tout  $f_l$  avec  $\delta_l^{k+1} = 1$  déterminer le couple  $(\rho_l^{k+1}, \beta_l^{k+1})$  à partir de  $\hat{X}_{k+1}$ .
  - Selon le modèle, déterminer les matrices  $R_{k+1,l}, Y_{k+1,l}$  et  $G_{Xl}^{k+1}$ .
- calcul de  $\hat{J}_{k+1}$  par application de la formule de récurrence (5.21)

$$\hat{J}_{k+1} = \hat{J}_k^z(\mathcal{C}) + \hat{D}_k^{22,a} - \hat{D}_k^{21}(\hat{J}_k + \hat{D}_k^{11})^{-1}\hat{D}_k^{12} \quad (5.73)$$

- faire  $k = k + 1$ .
- 

### 5.5.2 Approximation par simulation de trajectoires bruitées

L'approche la plus naturelle pour l'estimation des espérances consiste à employer des tirages de trajectoires, autour de la trajectoire nominale, en utilisant la densité de probabilité déduite du modèle d'évolution (cf. figure 5.3). La précision de l'approximation est en théorie directement associée à la taille de l'échantillon de trajectoires employé. Pour réduire, la charge de calcul, nous proposons de considérer une approche intermédiaire basée sur la transformée unscented qui permet un choix déterministe de l'échantillon. Nous présentons deux approches par simulation qui correspondent à deux algorithmes d'approximation des matrices de la formule de Tichavsky.

### 5.5.2.1 Simulation de de type Monte Carlo

On peut générer un échantillon de  $n_{mc}$  trajectoires bruitées  $X_{0:K}^{1:n_{mc}} := \{X_{0:K}^i\}$ ,  $i = 1, \dots, n_{mc}$  en procédant selon le schéma présenté au niveau de l'algorithme 8 en page 82. L'échantillon de

---

**Algorithme 8** Trajectoires simulées par tirage de Monte Carlo.

---

(1) **Initialisation** : pour  $i = 1, \dots, n_{mc}$   $X_0^i \sim p(X_0) = \mathcal{N}(\hat{X}_0, P_0)$

(2) **Approximation de la densité prédite** : pour  $k \geq 0$ ,

- $\forall i = 1, \dots, n_{mc}$ , déterminer la matrice de covariance du bruit sur les commandes  $Q_k^{u,i} = G(\theta_k^i, u_k) C_u G(\theta_k^i, u_k)^*$ .
- Approximer la matrice de covariance de prédiction

$$Q_k \approx \frac{1}{n_\tau} \sum_{i=1}^{n_{mc}} Q_k^{u,i} + Q_k^m. \quad (5.74)$$

- Générer un échantillon de bruits pour la prédiction  $\omega_k^i \sim \mathcal{N}(\mathcal{O}_{3 \times 1}, Q_k)$ .
- Obtenir  $X_{k+1}^i$  en appliquant le modèle de dynamique de l'équation (4.2)

$$X_{k+1}^i = f_k(X_k^i, u_k) + \omega_k^i.$$

On obtient ainsi à l'instant  $k + 1$  un échantillon permettant une approximation de la densité  $p(X_{k+1}|X_k, u_k)$ .

---

trajectoires obtenus permet d'approximer des espérances pour les termes de la formule récursive pour la détermination de la matrice d'information de Fisher. Les différentes étapes de cette approche sont présentées au niveau de l'algorithme 9 présenté en page 83.

### 5.5.2.2 Utilisation d'un échantillon déterministe

Nous avons déjà introduit la transformation unscented au chapitre 4 pour la dérivation du filtre UKF. Elle fournit une approximation des deux premiers moments d'un vecteur aléatoire déduit d'un autre vecteur aléatoire au travers d'une application non-linéaire. Cette approximation s'appuie sur un échantillonnage déterministe de l'espace d'état. Nous proposons d'utiliser cette méthode pour obtenir des estimations des espérances intervenant dans la formule récursive du calcul de la borne. Nous présentons d'abord comment propager les sigma-points entre deux instants consécutifs, pour obtenir un échantillon de trajectoires représentatif  $X_{0:K}^{1:n_{ut}}$ ,  $n_{ut}$  étant le nombre de sigma-points. Cette phase de propagation est quasiment identique à l'algorithme 8 présenté en page 82. Cette approche permet de limiter la taille de l'échantillon de trajectoires utilisées pour l'estimation des espérances. Le calcul de l'approximation est décrit par l'algorithme 11 présenté en page 85

## 5.6 Conclusions du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons introduit les éléments pour l'analyse de la performance du filtre de localisation à partir d'amers en utilisant la borne de Cramér-Rao a posteriori (BCRB). Les résultats démontrés par Tychavsky ont été exploités pour le calcul sur une trajectoire complète à partir d'une relation de récurrence. Les expressions des matrices qui interviennent dans la mise en oeuvre de cette formule nous ont permis d'illustrer l'importance des différents paramètres du modèles dans le processus de localisation.

Cependant, les caractéristiques intrinsèques du modèle ne permettent pas de définir une expression analytique des différents termes nécessaires au calcul de la séquence de matrice d'information de Fisher. Nous avons donc présenté trois approches permettant d'obtenir à une approximation en pratique. Des critères de performances seront dérivés de cette matrice pour apprécier la qualité d'un choix de trajectoire en fonction d'une répartition d'amers dans l'environnement. Par contre, il n'a pas été tenu compte de l'incertitude sur la cartographie dans les développements précédents. Nous verrons plus loin comment cette notion d'incertitude peut être intégrée dans le calcul de la BCRB,

**Algorithme 9** Calcul de la BCRB par simulation Monte Carlo

On considère les entrées :

- $\hat{X}_0$  l'état initial moyen du mobile,
- $(u_0, \dots, u_{K-1})$ , la suite des commandes en vitesse et rotation,
- $(\delta t_1, \dots, \delta t_K)$  les durées de chaque déplacement élémentaire,
- Les caractéristiques du modèle  $\sigma, \sigma_\theta, \sigma_d, \sigma_\varphi$ .

**Initialisation :**

– Génération d'un échantillon  $X_0^{1:n_{mc}}$  avec  $X_0^i = (x_0^i \ y_0^i \ \theta_0^i)^*$ ,  $i = 1, \dots, n_{mc}$  à partir de  $p(X_0)$

$$\hat{J}_0 = P_0^{-1} \text{ et } k = 0. \quad (5.75)$$

**Itération :**

Pour  $K - 1 \geq k \geq 0$ ,

- génération de l'échantillon  $X_{k+1}^{1:n_{mc}} := \{X_{k+1}^i\}$  à partir de  $X_{k+1}^{1:n_{mc}}$  et  $u_k$  en utilisant l'algorithme 8,
- calcul de  $a_k, b_k, c_{\theta_k^i + \phi_k}$  et  $s_{\theta_k^i + \phi_k}$ , puis des vecteurs  $C_{\theta_k^i}$  et  $G_{\theta_k^i}$  pour l'orientation égale à  $\theta_k^i$ ,
- calcul de l'inverse de la matrice de covariance  $Q_{k,i}^{-1}$  pour l'hypothèse d'orientation  $\theta_k^i$ ,  $i = 1, \dots, n_{mc}$  selon (5.28),
- approximation des termes  $D_k^{11}, D_k^{12}, D_k^{21}$  et  $D_k^{22,a}$

$$\begin{aligned} \hat{D}_k^{11} &= \frac{1}{n_{mc}} \sum_{i=1}^{n_{mc}} D_{k,i}^{11} & \hat{D}_k^{12} &= \frac{1}{n_{mc}} \sum_{i=1}^{n_{mc}} \hat{D}_{k,i}^{12} \\ \hat{D}_k^{12} &= \hat{D}_k^{21*} & \hat{D}_k^{22,a} &= \frac{1}{n_{mc}} \sum_{i=1}^{n_{mc}} \hat{D}_{k,i}^{22,a}. \end{aligned}$$

Les matrices  $\hat{D}_{k,i}^{**,*}$  sont obtenues en utilisant les éléments présentés dans les tableaux 5.1, 5.2 et 5.3. Elles utilisent notamment le vecteur  $C_{\theta_k^i}$ .

- Pour tout  $1 \leq i \leq n_{mc}$ , identification des amers visibles de  $X_{k+1}^i$  et calcul du terme associé au processus de mesure  $J_{k+1}^{z,i}(\mathcal{C})$  selon le modèle d'erreur, selon les étapes présentées dans l'algorithme 7 pour l'état  $X_{k+1}^i$ . On obtient donc  $J_{k+1}^{z,i}(\mathcal{C})$  à partir de l'équation (5.69) pour l'état  $X_{k+1}^i$ .
- Approximation de  $\hat{J}_k^z(\mathcal{C})$

$$\hat{J}_k^z(\mathcal{C}) = \frac{1}{n_{mc}} \sum_{i=1}^{n_{mc}} J_k^{z,i}(\mathcal{C}), \quad (5.76)$$

- calcul de  $\hat{J}_{k+1}$  par application de la formule de récurrence (5.21)

$$\hat{J}_{k+1} = \hat{J}_k^z(\mathcal{C}) + \hat{D}_k^{22,a} - \hat{D}_k^{21}(\hat{J}_k + \hat{D}_k^{11})^{-1} \hat{D}_k^{12}, \quad (5.77)$$

- faire  $k = k + 1$

par une approximation autour de la carte moyenne et en adaptant l'équation d'observation du système. Nous présentons tout d'abord dans le chapitre qui suit quelques résultats d'approximation de la borne sur quelques scenarii.

---

**Algorithme 10** Trajectoires simulées par la transformée unscented.

---

(1) **Initialisation** : soit  $w_{m,0}^{(i)}$ , un échantillon de sigma-points de bruits déduit de  $P_0$  avec  $W_{m,0}^{(i)}$  les poids. On obtient un échantillon de sigma-points pour l'état initial  $X_0^i, W_{m,0}^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n_{ut}$  en ajoutant à  $\hat{X}_0$  cet échantillon de bruits.

(2) **Approximation de la densité prédite** : pour  $k \geq 0$ ,

- $\forall i = 1, \dots, n_{ut}$ , déterminer la matrice de covariance du bruit sur les commandes  $Q_k^{u,i} = G(\theta_k^i, u_k) C_u G(\theta_k^i, u_k)^*$ ,
- approximer la matrice de covariance de prédiction

$$Q_k \approx \sum_{i=1}^{n_{ut}} W_{m,k}^{(i)} Q_k^{u,i} + Q_k^m, \quad (5.78)$$

- générer un échantillon de bruits pour la prédiction  $\omega_k^i$ ,  $i = 1, \dots, n_{ut}$  représentatif de  $Q_k$ .
- obtenir  $X_{k+1}^i, W_{m,k+1}^{(i)}$  en appliquant le modèle de dynamique de l'équation (4.2)

$$X_{k+1}^i = f_k(X_k^i, u_k) + \omega_k^i, \quad W_{m,k+1}^{(i)} = W_{m,k}^{(i)}. \quad (5.79)$$

On obtient ainsi à l'instant  $k + 1$ , un échantillon permettant une approximation de la densité  $p(X_{k+1}|X_k, u_k)$ .

---

**Algorithme 11** Calcul de la BCRB par la transformée unscented.

On considère les entrées :

- $\hat{X}_0$  l'état initial moyen du mobile,
- $(u_0, \dots, u_{K-1})$  la suite des commandes en vitesse et rotation,
- $(\delta t_1, \dots, \delta t_K)$  les durées de chaque déplacement élémentaire,
- les caractéristiques du modèle  $\sigma, \sigma_\theta, \sigma_d, \sigma_\varphi$ .

**Initialisation :**

- Génération d'un échantillon pondéré  $X_0^{1:n_{sp}}, W_{m,0}^{(i)}$  avec  $X_0^i = (x_0^i \ y_0^i \ \theta_0^i)^*$ ,  $i = 1, \dots, n_{sp}$  à partir de  $p(X_0)$

$$\hat{J}_0 = P_0^{-1} \text{ et } k = 0. \quad (5.80)$$

**Itération :**

Pour  $K - 1 \geq k \geq 0$ ,

- génération de l'échantillon pondéré  $X_{k+1}^{1:n_{sp}} := \{X_{k+1}^i\}$  à partir de  $X_k^{1:n_{sp}}$  et  $u_k$  en utilisant l'algorithme 10,
- calcul de  $a_k, b_k, c_{\theta_k^i + \phi_k}$  et  $s_{\theta_k^i + \phi_k}$ , puis les vecteurs  $C_{\theta_k^i}$  et  $G_{\theta_k^i}$  pour l'orientation égale à  $\theta_k^i$ .
- approximation de l'inverse de la matrice de covariance  $Q_{k,i}^{-1}$  pour l'hypothèse d'orientation  $\theta_k^i$ ,  $i = 1, \dots, n_{mc}$  selon (5.28).
- approximation des termes  $D_k^{11}, D_k^{12}, D_k^{21}$  et  $D_k^{22,a}$

$$\begin{aligned} \hat{D}_k^{11} &= \sum_{i=1}^{n_{ut}} W_{m,k}^{(i)} \hat{D}_{k,i}^{11,a}, & \hat{D}_k^{12} &= \sum_{i=1}^{n_{ut}} W_{m,k}^{(i)} \hat{D}_{k,i}^{12,i} \\ \hat{D}_k^{12} &= \hat{D}_k^{21*}, & \hat{D}_k^{22,a} &= \sum_{i=1}^{n_{ut}} W_{m,k}^{(i)} \hat{D}_{k,i}^{22,a}. \end{aligned}$$

Les matrices  $\hat{D}_{k,i}^{**,i}$  sont obtenues en utilisant les éléments présentés dans les tableaux 5.1, 5.2 et 5.3. Elles utilisent notamment le vecteur  $C_{\theta_k^i}$ .

- Pour tout  $1 \leq i \leq n_{ut}$ , identification des amers visibles de  $X_{k+1}^i$  et calcul du terme associé au processus de mesure  $J_{k+1}^{z,i}(\mathcal{C})$  selon le modèle d'erreur, selon les étapes présentées dans l'algorithme 7 pour l'état  $X_{k+1}^i$ . On obtient donc  $J_{k+1}^{z,i}(\mathcal{C})$  à partir de l'équation (5.69) pour l'état  $X_{k+1}^i$ .
- Approximation de  $\hat{J}_k^z(\mathcal{C})$

$$\hat{J}_k^z(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^{n_{ut}} W_{m,k}^{(i)} J_{k,i}^{z,i}(\mathcal{C}) \quad (5.81)$$

- calcul de  $\hat{J}_{k+1}$  par application de la formule de récurrence (5.21)

$$\hat{J}_{k+1} = \hat{J}_k^z(\mathcal{C}) + \hat{D}_k^{22,a} - \hat{D}_k^{21}(\hat{J}_k + \hat{D}_k^{11})^{-1} \hat{D}_k^{12}, \quad (5.82)$$

- faire  $k = k + 1$ .



# Chapitre 6

## Quelques exemples en simulation

Nous avons introduit la borne de Cramér-Rao a posteriori comme mesure de performance de notre problème de localisation, dans le sens où elle constitue une borne inférieure de l'erreur d'estimation en l'absence de biais. Plus précisément, nous avons fait apparaître le lien entre la matrice d'information de Fisher et la borne. Par ailleurs, nous avons exploité les travaux de Tichavsky et al. pour calculer, de façon récursive, le bloc inférieur droit de la matrice d'information de Fisher associée à la trajectoire de l'état. Cette matrice correspond à la borne a posteriori sur l'erreur d'estimation dans un cadre bayésien. Plusieurs stratégies ont été proposées pour contourner la difficulté liée à l'approximation des intégrales pour la détermination des espérances. L'objectif de ce chapitre est d'analyser le comportement de la borne sur quelques scénarii en simulation. On étudiera en particulier les paramètres géométriques de l'ellipsoïde associée à l'inverse de la matrice de Fisher  $J_k$ .

### 6.1 Paramètres pour l'analyse

Nous introduisons dans cette section les paramètres qui peuvent servir pour caractériser la borne. Une partie d'entre eux sera exploitée dans l'analyse qui sera menée sur les scénarii considérés dans ce chapitre. Certains paramètres permettent d'étudier une composante du vecteur d'état prise indépendamment des deux autres. D'autres offrent la possibilité de découpler les effets sur les sous-espaces correspondant respectivement à la position et à l'orientation. Nous nous focaliserons à la fois sur le comportement local en un point de la trajectoire et sur le comportement cumulé sur une trajectoire complète. Dans la suite, on se donne une trajectoire  $X_{0:K}$  construite à partir d'une séquence de commandes et de vitesses et on note  $J_{0:K}$  la suite des matrices d'information de Fisher  $J_k$  pour l'estimation de l'état  $X_k$  à chaque instant  $k = 0, \dots, K$ .

**Définition 13** Pour tout  $k = 0, \dots, K$ , on définit l'ellipsoïde  $E(k, \alpha)$  ( $\alpha \in \mathbb{R}^+$  fixé) associée à la matrice d'information  $J_k$  comme l'ensemble

$$E(k, \alpha) = \{X \in \mathbb{R}^2 \times ]-\pi, \pi] : (X - X_k)^* (W^* J_k W) (X - X_k) \leq \alpha\}, \quad (6.1)$$

où  $W$  est une matrice de pondération<sup>1</sup> particulière permettant de réduire les effets de la différence d'ordre de grandeur entre les composantes de position et l'orientation. Le choix du paramètre  $\alpha$  permet de considérer différents niveaux de confiance.

De même, si l'on s'intéresse à la performance sur l'estimation de la position dans le plan 2D indépendamment de l'orientation, on peut introduire l'ensemble  $E^{\tilde{p}}(k, \alpha)$ , délimité par la projection sur l'espace des positions de l'ellipsoïde.

**Définition 14** L'ensemble  $E^{\tilde{p}}(k, \alpha)$  est défini de façon formelle par

$$E^{\tilde{p}}(k, \alpha) = \{\tilde{p} \in \mathbb{R}^2 : (\tilde{p} - \tilde{p}_k)^* (\mathcal{B}^* J_k \mathcal{B}) (\tilde{p} - \tilde{p}_k) \leq \alpha\}, \quad (6.2)$$

---

<sup>1</sup>En effet, l'unité des coefficients de  $J_k$  correspondant aux composantes de position est le  $m^2$ , alors que pour l'orientation l'unité est le  $rad^2$ .

$\mathcal{B}$  étant la matrice de projection sur les composantes de position

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

L'analyse de chacune des composantes est réalisée à partir des paramètres suivants qui peuvent être associés aux caractéristiques de la forme géométrique de l'ellipsoïde.

**Définition 15** La borne inférieure du carré de l'erreur quadratique sur les composantes  $x_k$ ,  $y_k$ ,  $\theta_k$  est donnée respectivement par

$$b_x = \sqrt{J_k^{-1}(1,1)}(m.), \quad b_y = \sqrt{J_k^{-1}(2,2)}(m.) \quad \text{et} \quad b_\theta = \sqrt{J_k^{-1}(3,3)}(rad.). \quad (6.4)$$

Enfin, on considère des paramètres permettant de caractériser la forme de l'ellipse associée aux paramètres de position, ainsi que son orientation. Ces caractéristiques sont obtenues en considérant l'opérateur déterminant et par analyse spectrale de la matrice de Cramér-Rao projetée.

**Définition 16** Le volume et la somme des longueurs des axes de l'ellipse pour la borne projetée sur l'espace des positions sont fournies par

$$d_{\bar{p}}(k) = \sqrt{|(\mathcal{B}^* J_k \mathcal{B})^{-1}|} \quad \text{et} \quad t_{\bar{p}}(k) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sqrt{(\mathcal{B}^* J_k \mathcal{B})^{-1}(i,i)}. \quad (6.5)$$

**Définition 17** L'orientation de l'ellipse est définie à partir de l'argument des vecteurs propres. Soit  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  la paire de vecteurs propres de  $(\mathcal{B}^* J_k \mathcal{B})^{-1}$  de norme unité, l'orientation est fournie par

$$\Phi_k = \min(\angle \vec{e}_1^*, \angle \vec{e}_2^*). \quad (6.6)$$

## 6.2 Analyse de la BCRB sur quelques scénarii

Dans cette section, nous analysons, sur différents scénarii, les différentes composantes de la borne. Nous regardons d'abord le comportement de la borne en l'absence de mesures disponibles, l'objectif étant d'illustrer l'effet du modèle de dynamique adopté et de comparer les différentes stratégies d'approximation des espérances. Ensuite, nous nous intéresserons à l'estimation des bornes pour une carte donnée et différentes hypothèses de trajectoires afin d'illustrer l'apport de l'information cartographiques.

### 6.2.1 Analyse de l'effet du modèle de prédiction

Pour illustrer l'effet des erreurs du modèle de prédiction, nous nous plaçons dans une configuration où le mobile ne perçoit aucun amer lors de son déplacement. Le système dynamique considéré dispose des caractéristiques données dans le tableau 6.1. Nous supposons que la trajectoire est composée de déplacements élémentaires à vitesse constante  $v_k = 5m.s^{-1}$  sur des durées  $\delta t_k = 5s$ . Le mobile effectue une manoeuvre avec deux séquences successives de rotations, respectivement de +5 degrés et -5 degrés, suivies d'un déplacement en ligne droite. Nous montrons sur la figure 6.1 l'évolution de l'ellipse représentative de la borne sur l'erreur de position. Les ellipses sont obtenues à partir des trois algorithmes proposés au chapitre précédent. L'approche par Monte carlo est obtenue avec un échantillon de 20000 trajectoires et constitue la référence pour notre analyse. Nous pouvons noter que l'approximation qui utilise l'application des formules de récurrence uniquement à partir de la trajectoire nominale est dégradée par rapport à cette référence. L'estimation de la borne est « supérieure ». A l'inverse, pour l'approximation par l'approche unscented, l'estimation de la borne est plus optimiste que la borne de référence, l'écart avec la référence s'accroissant dans le temps, tant qu'il y a manoeuvre du mobile. Par contre, on peut aussi remarquer qu'en mouvement quasi-rectiligne, cet écart se stabilise. Ce comportement de l'approche basée sur la transformée

Bruits sur l'état initial	
$\sigma_{x_0}$	1 m
$\sigma_{y_0}$	1 m
$\sigma_{\theta_0}$	1 deg
Bruits de dynamique et commandes	
$\sigma_{x_k}$	1 m
$\sigma_{y_k}$	1 m
$\sigma_{\theta_k}$	1 deg
$\sigma_v$	$0.5\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
$\sigma_\phi$	0.1 deg

TAB. 6.1 – Erreurs initiale et de modélisation.

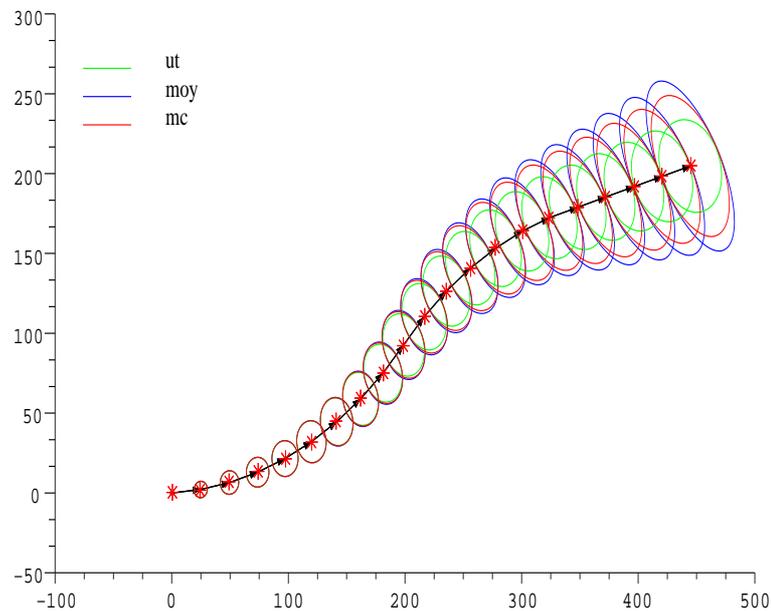


FIG. 6.1 – Evolution de l'ellipse associée à la borne sur l'erreur de position.

unscented pourrait s'expliquer par les limites de cette transformée pour l'approximation des fonctions trigonométriques intervenant dans les vecteurs  $C_{\theta_k}$  et  $G_{\theta_k}$ . Les trois ellipses sont cohérentes au niveau de leur orientation (paramètre  $\Phi_k$ ), mais leurs envergures varient. Sur la figure 6.2, nous avons tracé également les paramètres homogènes aux bornes des erreurs sur les composantes de position  $b_x$  et  $b_y$  pour les deux algorithmes basés sur la méthode par simulation. L'évolution de ces deux grandeurs est fournie relativement à la distance par rapport au point de départ situé en  $(0, 0)$ . L'allure des deux courbes confirme les remarques précédentes. Pour le paramètre d'orientation, on peut faire le même constat en s'appuyant sur la figure 6.3, qui présente l'allure de la borne sur l'orientation pour chacune des méthodes. En termes de comportement global de la borne, on note comme attendu une dégradation de la performance en l'absence de mesures. En outre, on peut aussi noter que cette dégradation est amplifiée dans la direction orthogonale au déplacement qui traduit une combinaison de l'erreur sur le déplacement et sur la commande en orientation.

Enfin, pour compléter la comparaison des deux approches par simulation, nous considérons un déplacement rectiligne uniforme et représentons graphiquement l'évolution des estimations des bornes sur l'erreur d'estimation en position et orientation sur les figures 6.4 et 6.5. L'approche par unscented est toujours plus optimiste mais l'écart avec l'estimation par Monte Carlo est faible et n'apparaît qu'au bout d'un temps suffisamment long, fonction du niveau de l'erreur de la commande et du modèle en orientation.

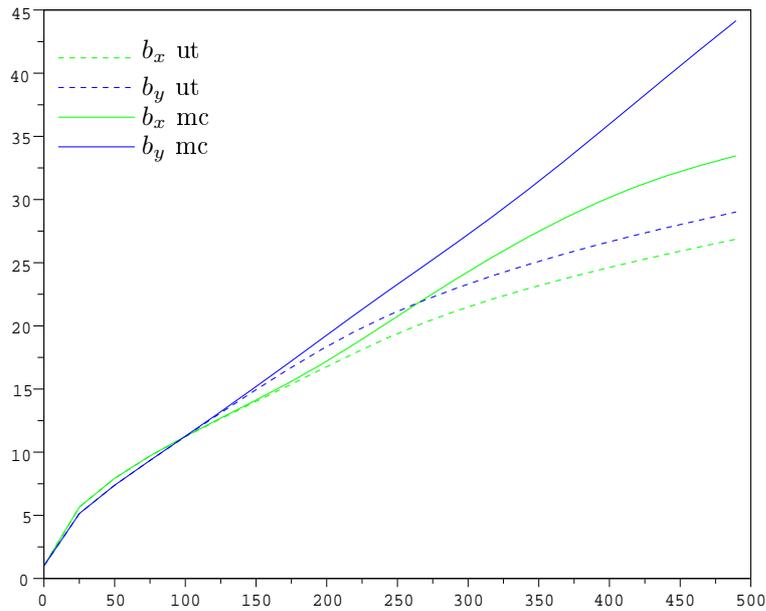


FIG. 6.2 – Paramètres caractéristiques de la borne sur l’erreur en position.

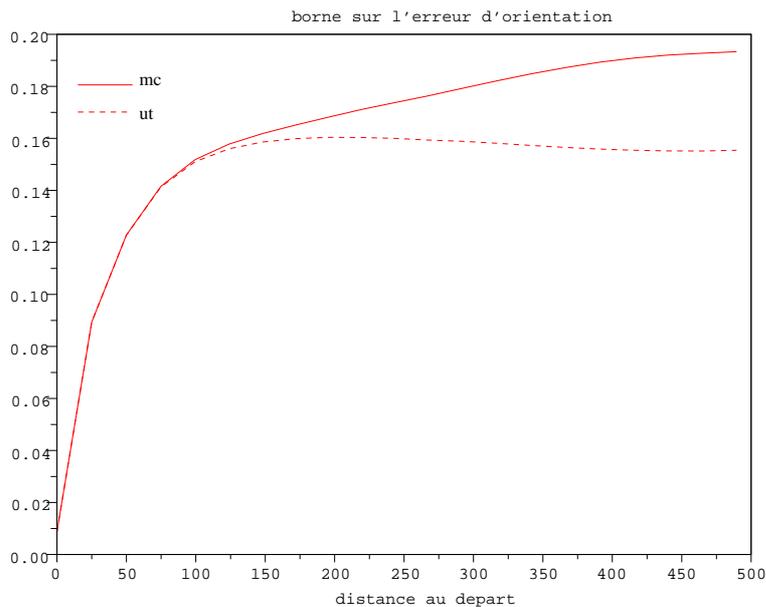


FIG. 6.3 – Evolution de la borne sur l’erreur en orientation.

### 6.2.2 Analyse de l’effet de la cartographie

Nous considérons maintenant des scénarii dans lesquels le mobile dispose d’une carte composée d’amers et de moyens lui permettant d’acquérir des mesures de distances et d’angles relatives et bruitées par rapport à son état courant. Les amers sont répartis dans l’espace comme indiqué sur la figure 6.6, et la trajectoire est identique à celle avec manoeuvres utilisée dans le scénario de la section précédente. Les trois scénarii présentés se distinguent par les capacités des capteurs de perception, en faisant varier les limites en distance et l’ouverture angulaire. Les caractéristiques des bruits du modèle d’observation, indépendantes des mesures, sont fournies dans le tableau 6.2.

**Cas 1 :** Dans ce scénario, on suppose que le capteur est omnidirectionnel et qu’il perçoit tous les amers présents dans l’environnement. Ainsi, lors du déplacement sur la trajectoire, tous les amers

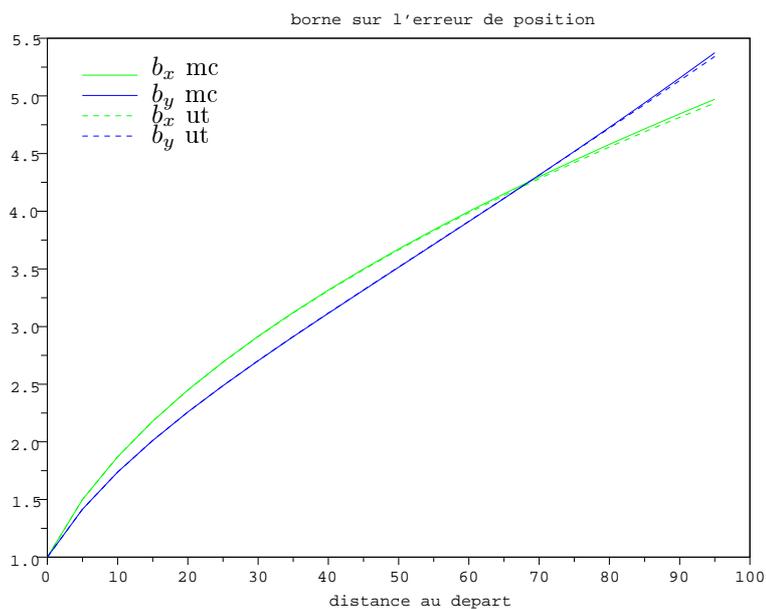


FIG. 6.4 – Bornes sur l'erreur en position pour un mouvement rectiligne.

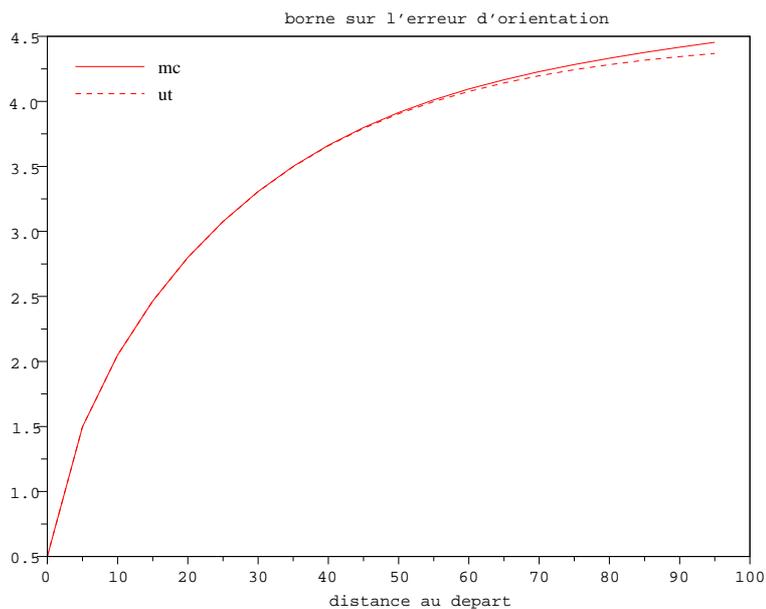


FIG. 6.5 – Bornes sur l'erreur en orientation pour un mouvement rectiligne.

<b>Bruits et capacités du capteur</b>	
erreur en distance $\sigma_d$	1 m
erreur en angle $\sigma_\varphi$	1 deg

TAB. 6.2 – Caractéristiques du capteur de perception

participent au processus de localisation. Nous présentons, respectivement sur les figures 6.7 et 6.8, l'allure des paramètres  $b_x$ ,  $b_y$  et  $b_a$  pour l'erreur d'estimation sur la position et sur l'orientation.

On constate une amélioration de la performance de localisation sur l'ensemble de la trajectoire. Par contre, en fin de trajectoire, apparaît une légère dégradation sur l'axe des  $y$  autour de 400 m du point de départ. Cette position correspond à l'instant où le mobile ne perçoit qu'un seul amer

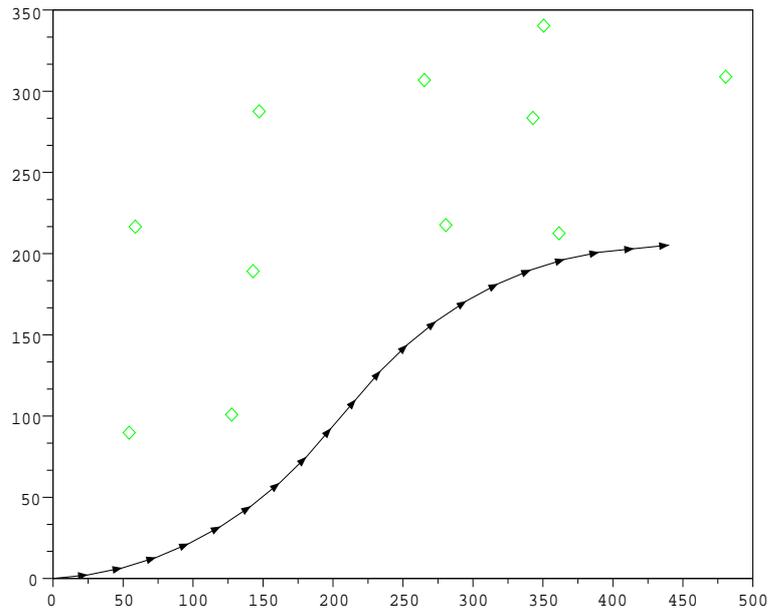


FIG. 6.6 – Répartition des amers dans l'environnement et trajectoire du mobile.

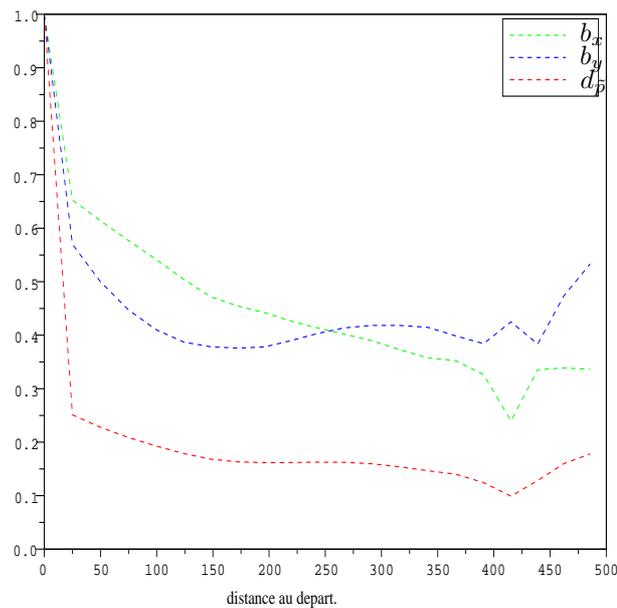


FIG. 6.7 – Paramètres de la borne sur l'erreur de position pour le cas 1.

situé en avant, les autres amers étant placés en arrière, avec des mesures de distances relativement importantes et des mesures d'angles plus proches de  $\pm\pi$ . La performance sur l'estimation de l'orientation est par contre stabilisée. Cette remarque illustre aussi l'importance de la configuration géométrique déduite de la position relative des amers et du mobile dans la performance de localisation.

**Cas 2 :** Pour ce second scénario, nous réduisons les capacités de perception en distance du mobile. Le capteur est toujours omnidirectionnel et il perçoit des mesures des amers situés jusqu'à une distance de 40 mètres de sa position courante. Ainsi, lors du déplacement sur la trajectoire, le gain en information est majoritairement apporté par les trois amers  $f_1, f_2, f_3$  les plus proches de la trajectoire. Au début de l'évolution et entre les trois amers, l'acquisition de mesures est

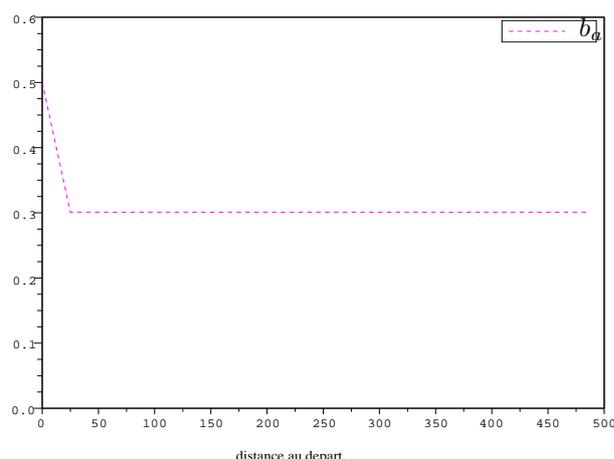
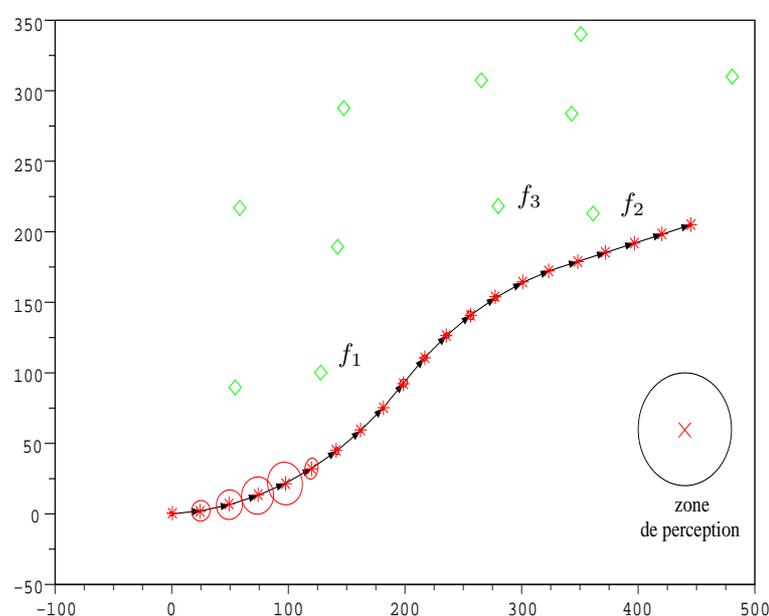


FIG. 6.8 – Paramètres de la borne sur l'erreur d'orientation pour le cas 1.

FIG. 6.9 – Ellipses de la borne en position-capteur omnidirectionnel avec  $d_{max} = 40$  m.

peu probable. On assiste donc à une dégradation de la performance a priori de localisation. Ce comportement est décrit sur les figures 6.10 et 6.11.

On constate bien une dégradation de la borne tant que le mobile reste suffisamment éloigné des amers relativement à la limite de perception du capteur. Le niveau de la borne décline fortement à proximité du premier amer contributif, pour augmenter légèrement jusqu'au prochain.

**Cas 3 :** Contrairement au scénario précédent, nous supposons que l'ouverture du capteur est restreinte et définie par l'angle  $\Delta = 180$  degrés. Le mobile ne perçoit donc que les amers situés en avant de son déplacement. La distance maximale de perception est toujours limitée et fixée à 40 mètres de sa position courante. Ainsi, lors du déplacement sur la trajectoire, le gain en information est toujours majoritairement apporté par les trois amers  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  les plus proches de la trajectoire. Cependant, par rapport au cas précédent, l'intervalle temporel pendant lequel la perception est possible est modifié et le nombre d'amers visibles est diminué. Au début de l'évolution et entre les trois amers, l'acquisition de mesures est peu probable, on assiste donc à une dégradation de la performance a priori de localisation avant une amélioration apportée par la perception des amers. Ce comportement est décrit sur les figures 6.12 et 6.13.

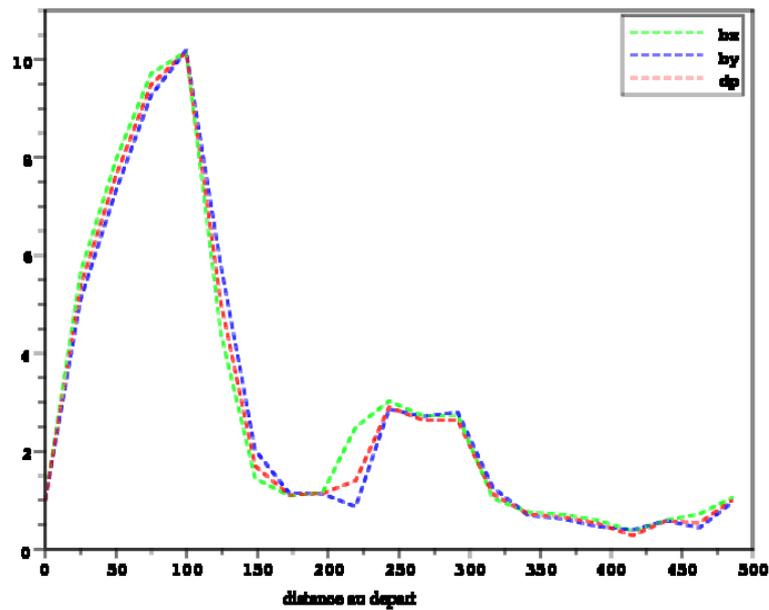


FIG. 6.10 – Borne sur l'erreur en position - capteur omnidirectionnel et  $d_{max} = 40$  m.

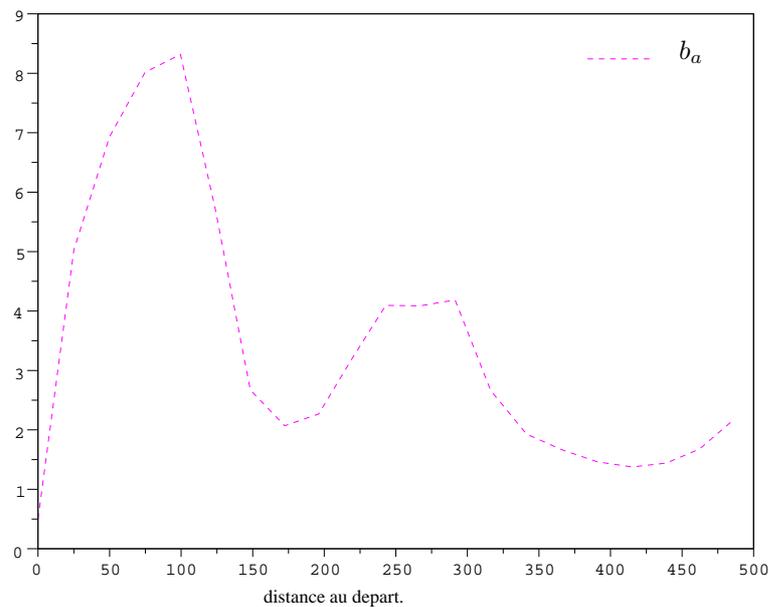


FIG. 6.11 – Borne sur l'erreur en orientation - capteur omnidirectionnel et  $d_{max} = 40$  m.

On constate bien une dégradation de la borne tant que le mobile reste suffisamment éloigné des amers relativement à la limite de perception du capteur. Le niveau de la borne décline fortement à proximité du premier amer contributif, pour augmenter légèrement jusqu'au prochain amer d'intérêt. Néanmoins, l'amélioration est retardée et moins importante que pour le scénario précédent, à cause de la différence en termes de perception. Par exemple, à la distance proche des deux amers d'intérêt pour la localisation (autour de 200 mètres à parti du point de départ), on peut noter pour un écart de l'ordre d'un degré par rapport au capteur omnidirectionnel.

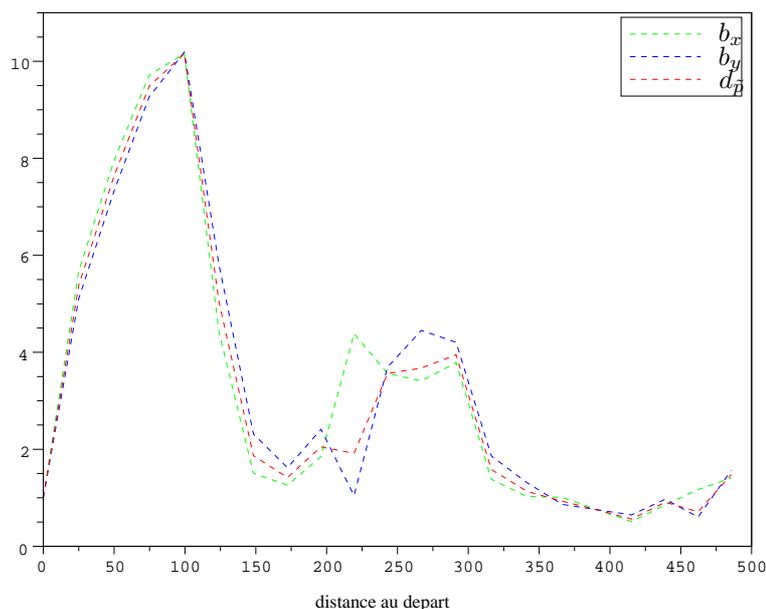


FIG. 6.12 – Borne sur l’erreur d’estimation en position - cas 3.

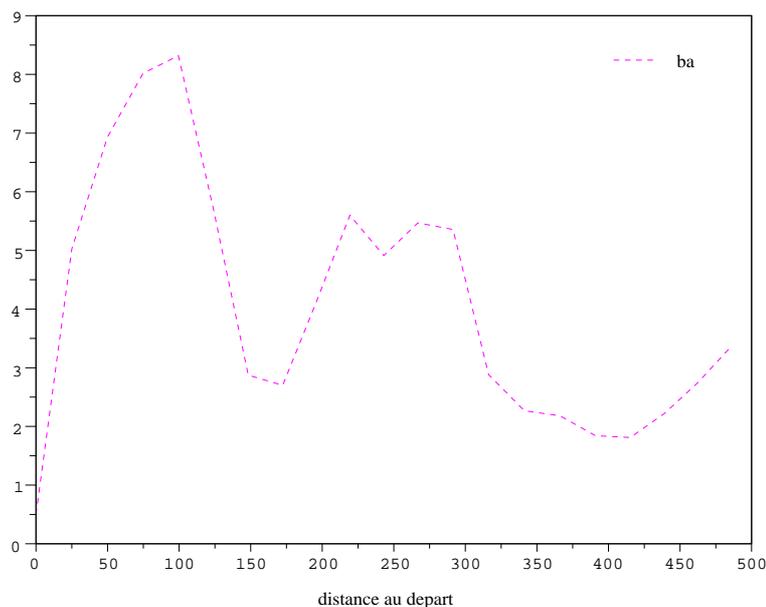


FIG. 6.13 – Borne sur l’erreur d’estimation en orientation - cas 3.

### 6.3 Conclusions

Nous avons analysé, au travers de quelques scénarii, le comportement des approches proposées pour l’estimation de la Borne de Cramér-Rao a posteriori pour le problème de localisation à partir d’amers. Sur les quelques exemples présentés, nous avons pu notamment préciser le comportement des différentes approches proposées pour le calcul des espérances nécessaires au calcul des matrices d’information de Fisher. En particulier,

- la première approche, qui consiste à appliquer la formule de Tichavsky sur la trajectoire nominale est peu précise. Elle s’est révélée « supérieure » à l’estimation de la borne par Monte-Carlo. On n’est donc pas certain qu’elle minore réellement l’erreur d’estimation. Son utilisation dans un processus de décision peut être par conséquent problématique.

- L’approche basée sur la simulation déterministe, utilisant la transformée inodore (unscented) pour générer des hypothèses de trajectoires est par contre plus optimiste que l’estimation par Monte- Carlo, notamment pour des trajectoires longues et peu informatives. Le calcul du critère semble d’autant plus dégradé que l’erreur sur les variations sur l’orientation du mobile et que les manoeuvres sont importantes.

Nous avons aussi illustré, l’impact de la répartition géographique des amers dans l’environnement relativement à l’état du mobile. L’apport de l’information liée au processus de mesure et donc à la disponibilité des amers dans la zone d’évolution du mobile dépend fortement de la configuration géométrique de l’ensemble « mobile et cartes », et aussi des capacités du capteurs de mesures.

Les développements abordés dans ce chapitre se sont focalisés sur l’analyse de la mesure de performance vis-à-vis du modèle de dynamique et d’une carte parfaite. Dans le chapitre suivant, nous étendons les résultats à une carte d’amers avec des positions incertaines, issues par exemple du processus de génération contrôlée proposé dans la première partie de ce manuscrit.

## Chapitre 7

# Prise en compte de l'incertitude de carte

Nous avons introduit dans le chapitre 5 des mesures de performance du processus de localisation dans le cadre probabiliste. Les mesures sont déduites de la BCRB, que nous pouvons calculer à partir d'une procédure récursive. Cette procédure faisait l'hypothèse d'une carte a priori exempte d'incertitude. Nous présentons une approche permettant de tenir compte de la connaissance imparfaite sur les amers dans la dérivation de la BCRB. L'information de cartographie intervient au travers de l'équation d'observation du système. Pour en tenir compte, nous faisons apparaître la contribution de l'incertitude sur les positions des amers, en effectuant une approximation autour de leur position moyenne. Ceci induit une modification de la structure de l'erreur sur les mesures, de même que la matrice d'information de Fisher déduite de la loi de vraisemblance. La loi de l'erreur d'observation comporte ainsi deux composantes : l'une liée à l'instrument de mesure, l'autre à la cartographie. Nous verrons que la structure de la seconde composante est directement liée à la méthode utilisée pour l'approximation. Par voie de conséquence, l'application de la formule de récurrence de Tichavsky permet alors de définir une borne sur l'erreur d'estimation pour la localisation à partir des amers bruités.

### 7.1 Adaptation de l'équation d'observation

Une démarche naturelle pour introduire la connaissance sur l'incertitude de la cartographie consiste à adapter le modèle du système dynamique défini par les équations 4.3 et 4.15. L'information cartographique intervenant au travers de l'étape d'acquisition des mesures au niveau de l'équation d'observation, c'est cette composante du système qu'il convient de modifier. A titre de rappel, l'équation d'évolution du système est toujours de la forme

$$X_{k+1} = f_k(X_k, u_k) + \omega_k, \quad (7.1)$$

avec les conditions initiales

$$X_0 \sim \mathcal{N}(\hat{X}_0, P_0), \quad P_0 \succ 0, \quad (7.2)$$

et l'équation d'observation donnée par

$$\mathbf{z}_k = \mathcal{H}_k(X_k, \mathcal{C}) + \nu_k \quad (7.3)$$

où

$$H_k : (\mathbb{R}^2 \times ]-\pi, \pi]) \times \mathbb{R}^{2N} \begin{array}{l} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n_k} \\ \longmapsto H_k(X_k, \mathcal{C}). \end{array} \quad (7.4)$$

La carte est définie à partir des coordonnées dans le repère  $\mathcal{R}_g$  des amers

$$\mathcal{C} = (x^1 \quad y^1 \quad \dots \quad x^{nc} \quad y^{nc})^*,$$

et  $n_k$  est le nombre d'amers qui seraient utilisés dans le processus de localisation à l'instant  $t_k$ . Nous ferons l'hypothèse que le processus de bruit sur les mesures fournies par le capteur suit le modèle  $(M_0)$  et donc

$$\nu_k \sim \mathcal{N}(\mathcal{O}_{2 \times n_k}, \mathcal{I}_{n_k} \otimes R), \quad \text{avec } R = \text{Diag}(\sigma_d^2, \sigma_\varphi^2).$$

On utilisera par la suite la notation  $R_k := \mathcal{I}_{n_k} \otimes R$ . Pour simplifier les écritures, on fait dans les raisonnements qui suivent l'hypothèse que  $n_k = n_C$ , sans que cela soit restrictif. Dans le cas le plus général, il suffit de ne considérer que la sous-carte construite à partir des amers qui seraient impliqués dans le processus d'observation. On sait par ailleurs que les erreurs sur les amers sont supposées indépendantes. La matrice de covariance de l'incertitude sur la carte est donc une matrice diagonale par blocs de taille  $2 \times 2$ .

$$\Sigma_C = \text{Diag}(\Sigma(f_1), \dots, \Sigma(f_{n_C}))$$

Cette hypothèse n'est pas forcément réaliste, notamment si l'on se réfère à notre approche de génération de cartes, où le respect de la structure spatiale introduit forcément un lien entre les erreurs sur les réalisations de cartes. Néanmoins, cette hypothèse d'indépendance ne constitue pas une contrainte pour la définition de la mesure de performance, même si elle facilite, comme nous le verrons plus loin, les calculs. La matrice de covariance  $\Sigma(f_l)$ ,  $l = 1, \dots, n_C$  est définie positive et symétrique, et diagonalisable dans une base orthonormée. On peut la définir à partir de trois paramètres :

- $\sigma_{1,l}^2$ , la plus grande valeur propre équivalant à la longueur du plus grand axe de l'ellipse d'incertitude associée.
- $\sigma_{2,l}^2$ , la plus petite valeur propre équivalente à la longueur de l'autre axe de l'ellipse.
- $\gamma_l \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , l'angle de la matrice de rotation, qui est également l'orientation du plus grand axe par rapport l'axe des abscisses  $\vec{e}_1$  de  $\mathcal{R}_g$ .

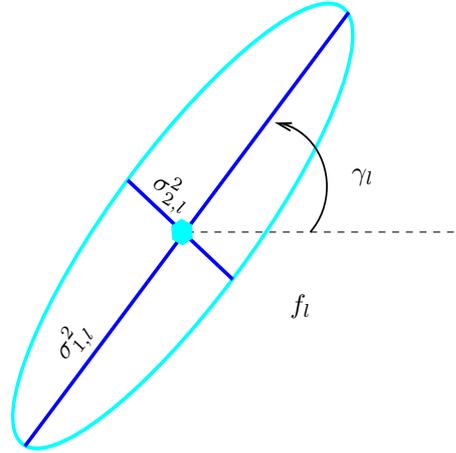


FIG. 7.1 – Paramètres de la matrice de covariance  $\Sigma(f_l)$  sur l'amer  $f_l$

Nous avons la relation

$$\Sigma(f_l) := \mathcal{R}_{\gamma_l} \begin{pmatrix} \sigma_{1,l}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{2,l}^2 \end{pmatrix} \mathcal{R}_{\gamma_l}^*, \quad (7.5)$$

où  $\mathcal{R}_{\gamma_l}$  est la matrice de rotation d'angle  $\gamma_l$ .

Considérons l'amer  $f_l$  en position  $l = 1, \dots, n_C$  et les deux composantes de mesures correspondantes à l'instant  $t_k$

$$\begin{aligned} g_1(X_k, f_l) &= \sqrt{(x_k - x^l)^2 + (y_k - y^l)^2} \\ g_2(X_k, f_l) &= \arctan_2\left(\frac{y_k - y^l}{x_k - x^l}\right) - \theta_k. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Nous allons maintenant considérer une approximation des fonctionnelles  $g_j(X_k, \cdot)$ ,  $j = 1, 2$  par rapport aux variables de position des amers. On note  $\bar{f}_l := (\bar{x}^l, \bar{y}^l)$  le vecteur moyen de position de l'amer  $f_l$ . Il est possible d'utiliser différentes approches pour dériver une telle approximation. Nous proposons d'utiliser un développement de Taylor.

### 7.1.1 Approximation par développement de Taylor (APT1)

La façon la plus simple d'intégrer l'erreur sur la connaissance de la localisation d'un amer consiste à approcher les fonctionnelles de distance et d'angle par un développement limité autour de  $\bar{f}_l$ . Il est évident que l'approximation ainsi construite dépend de l'ordre choisi pour ce développement limité. Il est possible d'effectuer une approximation au moins jusqu'au second ordre, car le gradient et la matrice hessienne par rapport aux coordonnées des amers sont calculables. Nous nous restreignons au premier ordre.

Pour  $j = 1, 2$ , nous avons donc la relation suivante :

$$g_j(X_k, f_l) \approx g_j(X_k, \bar{f}_l) + g'_j(X_k, \bar{f}_l) \cdot (f_l - \bar{f}_l) + \frac{1}{2} (f_l - \bar{f}_l)^* g''_j(X_k, f_l) (f_l - \bar{f}_l), \quad (7.7)$$

où  $g'_j(X_k, \bar{f}_l)$  et  $g''_j(X_k, f_l)$  sont respectivement le gradient et le Hessien de  $g_j(X_k, \cdot)$  calculés au point  $\bar{f}_l$ . Si l'on se restreint à l'approximation au premier ordre, on en déduit donc

$$g_j(X_k, f_l) \approx g_j(X_k, \bar{f}_l) + g'_j(X_k, \bar{f}_l) \cdot (f_l - \bar{f}_l).$$

Le vecteur  $f_l$  étant de loi gaussienne, la variable  $g_j(X_k, f_l)$  est également de densité gaussienne de moyenne et de variance données par

$$\mu_j(X_k, \bar{f}_l) = g_j(X_k, \bar{f}_l) \text{ et } \sigma_j^2(X_k, \bar{f}_l) = g'_j(X_k, \bar{f}_l) \Sigma(f_l) (g'_j(X_k, \bar{f}_l))^*. \quad (7.8)$$

En utilisant l'expression de la matrice de covariance  $\Sigma(f_l)$ , on en déduit que la variance est équivalente à

$$\begin{aligned} \sigma_j^2(X_k, \bar{f}_l) &= g'_j(X_k, \bar{f}_l) \mathcal{R}_{\gamma_l} \text{Diag}(\sigma_{1,l}^2, \sigma_{2,l}^2) \mathcal{R}_{\gamma_l}^* (g'_j(X_k, \bar{f}_l))^* \\ &= (\mathcal{R}_{\gamma_l}^* g'_j(X_k, \bar{f}_l))^* \text{Diag}(\sigma_{1,l}^2, \sigma_{2,l}^2) \mathcal{R}_{\gamma_l} g'_j(X_k, \bar{f}_l)^*. \end{aligned}$$

ou de façon équivalente

$$\sigma_j^2(X_k, \bar{f}_l) = \|\text{Diag}(\sigma_{1,l}, \sigma_{2,l}) \mathcal{R}_{\gamma_l}^* g'_j(X_k, \bar{f}_l)^*\|^2. \quad (7.9)$$

Nous allons préciser l'expression de ces moments pour les fonctionnelles liées aux mesures de distance et d'angle rappelées à l'équation (7.6). Les résultats feront apparaître les caractéristiques (norme  $\rho_l^k$  et argument  $\beta_l^k$ ) du vecteur « mobile - amer moyen »  $\overrightarrow{P_k f_l}$  dans le repère global  $\mathcal{R}_g$ .

#### Pour une mesure de distance

Selon l'équation (7.8), la moyenne de l'erreur due à l'incertitude sur la position de l'amer est la distance entre sa position moyenne et celle du mobile

$$\mu_1(X_k, \bar{f}_l) = g_1(X_k, \bar{f}_l) = \rho_l^k. \quad (7.10)$$

Pour la détermination de la variance, considérons d'abord le gradient de la fonction distance  $g_1(X_k, f_l)$  par rapport au vecteur composé des coordonnées de l'amer  $f_l$ . Nous avons

$$g'_1(X_k, f_l) = \begin{pmatrix} \frac{(x^l - x_k)}{\sqrt{(x^l - x_{k+1})^2 + (y^l - y_k)^2}} \\ \frac{(y^l - y_k)}{\sqrt{(x^l - x_k)^2 + (y^l - y_k)^2}} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \frac{\Delta x_k^l}{\rho_l^k} \\ \frac{\Delta y_k^l}{\rho_l^k} \end{pmatrix}^* .$$

En utilisant l'argument  $\beta_l^k$  du vecteur  $\overrightarrow{P_k f_l}$ , on en déduit la formulation équivalente en fonction du cosinus et du sinus de  $\beta_l^k$

$$g'_1(X_k, f_l) = (\cos(\beta_l^k) \quad \sin(\beta_l^k)) .$$

Nous pouvons appliquer la matrice de rotation  $\mathcal{R}_{\gamma_l}^*$ . On a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\gamma_l}^* g'_1(X_k, f_l)^* &= \begin{pmatrix} \cos(\gamma_l) & -\sin(\gamma_l) \\ \sin(\gamma_l) & \cos(\gamma_l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta_l^k) \\ \sin(\beta_l^k) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\gamma_l) \cos(\beta_l^k) - \sin(\gamma_l) \sin(\beta_l^k) \\ \sin(\gamma_l) \cos(\beta_l^k) + \sin(\beta_l^k) \cos(\gamma_l) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés trigonométriques remarquables, on obtient la formulation équivalente

$$\mathcal{R}_{\gamma_l}^* g'_1(X_k, f_l)^* = (\cos(\beta_l^k + \gamma_l) \quad \sin(\beta_l^k + \gamma_l))^* .$$

Au final, la variance sur la mesure de distance due à l'erreur sur la connaissance de la position de l'amer  $f_l$  est donnée selon l'équation (7.9) par la relation

$$\sigma_1^2(X_k, \overline{f_l}) = \sigma_{1,l}^2 \cos^2(\beta_l^k + \gamma_l) + \sigma_{2,l}^2 \sin^2(\beta_l^k + \gamma_l) .$$

ou sous une forme équivalente,

$$\underline{\sigma_1^2(X_k, \overline{f_l}) = \sigma_{2,l}^2 + (\sigma_{1,l}^2 - \sigma_{2,l}^2) \cos^2(\beta_l^k + \gamma_l)} . \quad (7.11)$$

### Pour une mesure d'angle

De façon similaire, la moyenne de l'erreur sur la mesure d'angle est la mesure d'angle fournie par la position moyenne de l'amer

$$\underline{\mu_2(X_k, \overline{f_l}) = g_2(X_k, \overline{f_l}) = \beta_l^k - \theta_k} . \quad (7.12)$$

Le gradient de  $g_2(X_k, f_l)$  par rapport aux composantes du vecteur  $f_l$  s'exprime comme suit :

$$g'_2(X_k, f_l) = \begin{pmatrix} -\frac{(y^l - y_k)}{(x^l - x_{k+1})^2 + (y^l - y_k)^2} \\ \frac{(x^l - x_k)}{(x^l - x_k)^2 + (y^l - y_k)^2} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta y_k^l}{\rho_l^{k^2}} \\ \frac{\Delta x_k^l}{\rho_l^{k^2}} \end{pmatrix}^* .$$

En utilisant de nouveau l'argument  $\beta_l^k$  du vecteur  $\overrightarrow{P_k f_l}$ , on en déduit la formulation équivalente en fonction du cosinus et du sinus de  $\beta_l^k$

$$g'_2(X_k, f_l) = -\frac{1}{\rho_l^k} (\sin(\beta_l^k) \quad -\cos(\beta_l^k)) . \quad (7.13)$$

Nous pouvons appliquer à ce vecteur la matrice de rotation  $\mathcal{R}_{\gamma_l}^*$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\gamma_l}^* g_2'(X_k, f_l)^* &= -\frac{1}{\rho_l^k} \begin{pmatrix} \cos(\gamma_l) & -\sin(\gamma_l) \\ \sin(\gamma_l) & \cos(\gamma_l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\beta_l^k) \\ -\cos(\beta_l^k) \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} \cos(\gamma_l) \sin(\beta_l^k) + \sin(\gamma_l) \cos(\beta_l^k) \\ \sin(\gamma_l) \sin(\beta_l^k) - \cos(\beta_l^k) \cos(\gamma_l) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

soit

$$\mathcal{R}_{\gamma_l}^* g_2'(X_k, f_l)^* = -\frac{1}{\rho_l^k} (\sin(\beta_l^k + \gamma_l) \quad -\cos(\beta_l^k + \gamma_l))^*.$$

L'utilisation de la relation (7.9) amène

$$\sigma_2^2(X_k, \bar{f}_l) = \frac{1}{\rho_l^{k2}} (\sigma_{1,l}^2 \sin^2(\beta_l^k + \gamma_l) + \sigma_{2,l}^2 \cos^2(\beta_l^k + \gamma_l)).$$

Comme pour la composante de mesure de distance, on a l'écriture

$$\sigma_2^2(X_k, \bar{f}_l) = \frac{1}{\rho_l^{k2}} (\sigma_{2,l}^2 + (\sigma_{1,l}^2 - \sigma_{2,l}^2) \sin^2(\beta_l^k + \gamma_l)). \quad (7.14)$$

**Remarques :** L'analyse des expressions des variances  $\sigma_j^2(X_k, \bar{f}_l)$ ,  $j = 1, 2$  obtenues permet de comprendre l'impact des erreurs sur la position des amers dans le processus de localisation. Tout d'abord, l'incertitude complémentaire sur la mesure de distance n'est pas affectée par la proximité du mobile par rapport à l'amer, contrairement à l'orientation du vecteur formé par la position du mobile et de l'amer moyen relativement à l'orientation de l'ellipse de l'erreur sur l'amer. Pour la mesure d'angle, les deux paramètres influent. De plus, le niveau de l'incertitude sur l'amer et l'orientation des axes principaux des erreurs, qui se traduisent par les paramètres de la matrice  $\Sigma(f_l)$ , ont une influence directe sur cette erreur complémentaire sur les mesures, l'impact étant variable sur l'erreur d'angle en fonction de la proximité à l'amer. Plus précisément, on peut noter plusieurs points que nous illustrons par quelques figures pour un mobile dans l'état  $(0, 0, 0)$  et un amer dont la position moyenne est  $(15, 0)$ .

1. Lorsque l'erreur sur la position de l'amer est homogène sur les deux axes ( $\sigma_{1,l}^2 = \sigma_{2,l}^2 := \sigma_l^2$ ), l'erreur induite est du « même ordre » et vérifie (cf. tracé en pointillé sur la figure 7.2 (a)) :

$$\sigma_1^2(X_k, \bar{f}_l) = \sigma_l^2 \quad \text{et} \quad \sigma_2^2(X_k, \bar{f}_l) = \frac{\sigma_l^2}{\rho_l^{k2}}. \quad (7.15)$$

2. Pour une position donnée du mobile, lorsque l'on applique un facteur d'échelle à  $\Sigma(f_l)$ , la variance des erreurs induites est aussi impactée, avec le même facteur d'échelle (cf. tracé en trait plein sur la figure 7.2 (a)).
3. La variance varie entre  $\sigma_{2,l}^2$  et  $\sigma_{1,l}^2$  pour la mesure de distance et entre  $\frac{\sigma_{2,l}^2}{\rho_l^{k2}}$  et  $\frac{\sigma_{1,l}^2}{\rho_l^{k2}}$  pour la mesure d'angle en fonction de l'angle  $\beta_l^k + \gamma_l$ . Les maxima pour la variance sur la mesure de distance correspondent au minima de la variance sur la mesure d'angle. Il s'agit des configurations où l'axe « mobile - amer » est orthogonal ( $\beta_l^k = -\gamma_l \pm \pi/2$ ) ou colinéaire ( $\beta_l^k = -\gamma_l \pm \pi$ ) au grand axe de l'ellipse d'erreur sur l'amer (cf. tracé de la figure 7.2 (b)).

Les caractéristiques de l'erreur due à l'incertitude des amers ont été introduites. L'équation d'observation du système avec prise en compte de l'incertitude sur la carte a priori disponible est donc modifiée.

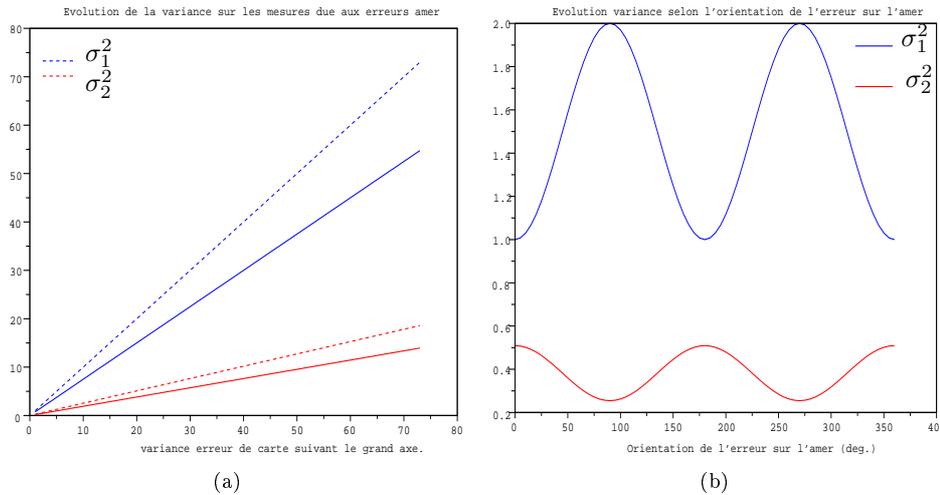


FIG. 7.2 – Effet niveau (a) et orientation (b) de l'erreur sur l'amer.

### 7.1.2 Equation d'observation modifiée

L'approximation proposée précédemment entraîne une modification de l'équation d'observation du système. Supposons le mobile dans l'état  $X_k$  à l'instant  $t_k$  et une mesure de distance et d'angle  $z_k^l$  provenant de l'amer  $f_l$ . La loi de la mesure  $z_k^l$  sachant l'état  $X_k$  est une densité gaussienne vérifiant

$$p(z_k^l | X_k, f_l) \sim \mathcal{N}(\mu_{k,l}, R_{k,l}), \quad (7.16)$$

où le vecteur  $\mu_{k,l} \in \mathbb{R}^2$  et la matrice de covariance  $R_{k,l}$  de taille de  $frm-e \times 2$  sont données par l'équation

$$\mu_{k,l} = \begin{pmatrix} \mu_1(X_k, \bar{f}_l) \\ \mu_2(X_k, \bar{f}_l) \end{pmatrix} \text{ et } R_{k,l} = \text{Diag}(\sigma_d^2 + \sigma_1^2(X_k, \bar{f}_l), \sigma_\varphi^2 + \sigma_2^2(X_k, \bar{f}_l)). \quad (7.17)$$

Pour obtenir ce résultat, nous avons fait l'hypothèse que l'erreur due à l'incertitude de carte est indépendante de l'erreur intrinsèque du capteur de mesure. Nous pouvons maintenant définir les versions de la borne qui tiennent compte de l'incertitude sur les amers.

## 7.2 Modification de la BCRB avec carte parfaite

La prise en compte de l'incertitude se traduit essentiellement par une modification de la matrice d'information  $J_{k-1}^z(\mathcal{C})$  associée aux observations et impliquée dans la formule de Tichavsky et al pour la mise à jour de la matrice d'information de Fisher  $J_k$  sur l'état estimé  $X_k | z_{1:k}$ . Nous rappelons la formule de calcul de cette matrice à partir de la loi de vraisemblance des mesures :

$$J_{k-1}^z(\mathcal{C}) = \mathbb{E}_{X_k, z_k} \left\{ -\Delta_{X_k}^{X_k} \ln(p(z_k | X_k, \mathcal{C})) \right\}.$$

Le logarithme de la fonction de vraisemblance est décomposable en  $n_C$  logarithmes de vraisemblances des mesures élémentaires issues des amers.

$$l_{z_k}^{X_k} = \sum_{l=1}^{n_C} l_{z_k, f_l}^{X_k}$$

avec pour chaque amer élémentaire  $l_{z_k, f_l}^{X_k} = -\ln(p(z_k^l | X_k, f_l))$ . Comme dans le chapitre 5, le calcul

de  $J_k^z(\mathcal{C})$  se fait en deux étapes, en considérant d'abord l'espérance conditionnelle sur les mesures  $z_k|X_k$  pour chaque amer élémentaire, puis l'espérance sur l'état  $X_k$ . On s'intéresse dans l'immédiat aux termes

$$\Psi_{k-1,k,l}^{22,b} = -\mathbb{E}_{z_k|X_k} \left\{ \Delta_{X_k}^{X_k} \ln p(z_k^l|X_k, f_l) \right\}, \quad l = 1, \dots, n_c. \quad (7.18)$$

Les densités de mesures élémentaires étant des densités gaussiennes définies par l'équation (7.16), par application de la propriété 3, nous savons que le terme en position  $(i, j)$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$  de cette matrice est donnée par l'expression

$$\Psi_{k-1,k,l}^{22,b}(i, j) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left( \underbrace{R_{k,l}^{-1} \frac{dR_{k,l}}{dX_k^i} R_{k,l}^{-1} \frac{dR_{k,l}}{dX_k^j}}_{(*)} + \underbrace{\left( \frac{d\mu_{k,l}^*}{dX_k^i} \right) R_{k,l}^{-1} \left( \frac{d\mu_{k,l}}{dX_k^j} \right)}_{(**)} \right). \quad (7.19)$$

Nous allons préciser l'expression des matrices basées sur les termes (\*) et (\*\*) à partir de la nouvelle définition de l'équation d'observation. Pour cela, nous serons amenés à détailler les dérivées des moyennes  $\mu_j(X_k, f_l)$  et des variances  $\sigma_j^2(X_k, f_l)$ ,  $j = 1, 2$  par rapport aux composantes de l'état  $(x_k, y_k, \theta_k)$ .

Pour l'approximation APT1, nous avons les expressions suivantes

$$\begin{aligned} \mu_1(X_k, \bar{f}_l) &= d(X_k, \bar{f}_l). \\ \mu_2(X_k, \bar{f}_l) &= \varphi(X_k, \bar{f}_l). \end{aligned}$$

Le calcul des gradients a été effectué lors de la dérivation de la matrice d'information pour une carte parfaite. Ils correspondent aux équations (5.59) et (5.60). Nous avons, de nouveau, des expressions qui dépendent des caractéristiques du vecteur formé par la position du mobile et la position moyenne de l'amer  $f_l$

$$\nabla_{X_k} \mu_1(X_k, \bar{f}_l) = - \begin{pmatrix} c_l^k \\ s_l^k \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla_{X_k} \mu_2(X_k, \bar{f}_l) = \begin{pmatrix} \frac{s_l^k}{\rho_l^k} \\ -\frac{c_l^k}{\rho_l^k} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit donc que l'expression de (\*\*) peut être formalisée comme dans le cas de la carte parfaite avec une simple modification au niveau de la matrice de covariance  $R_{k,l}$ , par l'ajout des variances  $\sigma_1^2(X_k, \bar{f}_l)$  et  $\sigma_2^2(X_k, \bar{f}_l)$  précisées au niveau des équations (7.11) et (7.14). On peut également reprendre la matrice  $G_{X_l}^k$  introduite dans le chapitre 5

$$G_{X_l}^k = \begin{pmatrix} -c_l^k & -s_l^k & 0 \\ s_l^k & -c_l^k & 0 \\ \rho_l^k & \rho_l^k & -1 \end{pmatrix}, \quad (7.20)$$

et déduire que la matrice de associée au terme (\*\*) se calcule par la formule suivante :

$$\underline{\mathcal{D}_l^k} = G_{X_l}^{k*} R_{k,l}^{-1} G_{X_l}^k. \quad (7.21)$$

Il reste à déterminer la matrice dont les coefficients sont fournis par les termes (\*). Ils nécessitent le calcul de la dérivée de la matrice de covariance des mesures par rapport aux composantes de l'état. Cette matrice  $R_{k,l}$  est diagonale et ses coefficients dépendent des variances  $\sigma_1^2(X_k, \bar{f}_l)$  et  $\sigma_2^2(X_k, \bar{f}_l)$  données par les équations (7.11) et (7.14). On peut noter que ces variances ne dépendent pas explicitement de la composante orientation du mobile, ce qui implique que les coefficients sur la troisième ligne et la troisième colonne sont nuls. Nous considérons uniquement les dérivées par rapport aux composantes de position. Rappelons l'expression des variances en fonction de ces paramètres :

$$\begin{aligned}\sigma_1^2(X_k, \overline{f_l}) &= \sigma_{2,l}^2 + (\sigma_{1,l}^2 - \sigma_{2,l}^2) \cos^2(\beta_l^k + \gamma_l) \\ \sigma_2^2(X_k, \overline{f_l}) &= \frac{1}{\rho_l^{k2}} (\sigma_{2,l}^2 + (\sigma_{1,l}^2 - \sigma_{2,l}^2) \sin^2(\beta_l^k + \gamma_l)).\end{aligned}$$

Par ailleurs, nous avons les relations des dérivées de la norme  $\rho_l^k$  et de l'argument  $\beta_l^k$  du vecteur  $\overrightarrow{P_k f_l}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_l^k}{\partial x_k} &= -\cos(\beta_l^k) & \frac{\partial \rho_l^k}{\partial y_k} &= -\sin(\beta_l^k) \\ \frac{\partial \beta_l^k}{\partial x_k} &= +\frac{\sin(\beta_l^k)}{\rho_l^k} & \frac{\partial \beta_l^k}{\partial y_k} &= -\frac{\cos(\beta_l^k)}{\rho_l^k}.\end{aligned}$$

**Dérivées de  $\sigma_1^2(X_k, \overline{f_l})$ .** En appliquant les règles de dérivation, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_1^2(X_k, \overline{f_l}) &= (\sigma_{1,l}^2 - \sigma_{2,l}^2) \frac{\partial \beta_l^k}{\partial x_k} (-2 \sin(\beta_l^k + \gamma_l) \cos(\beta_l^k + \gamma_l)) \\ &= -(\sigma_{1,l}^2 - \sigma_{2,l}^2) \frac{\sin(\beta_l^k)}{\rho_l^k} \sin(2(\beta_l^k + \gamma_l)).\end{aligned}$$

De même, on a pour la dérivée par rapport à la coordonnée  $y_k$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_k} \sigma_1^2(X_k, \overline{f_l}) &= (\sigma_{1,l}^2 - \sigma_{2,l}^2) \frac{\partial \beta_l^k}{\partial y_k} (-2 \sin(\beta_l^k + \gamma_l) \cos(\beta_l^k + \gamma_l)) \\ &= (\sigma_{1,l}^2 - \sigma_{2,l}^2) \frac{\cos(\beta_l^k)}{\rho_l^k} \sin(2(\beta_l^k + \gamma_l)),\end{aligned}$$

soit au final

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_1^2(X_k, \overline{f_l}) &= -\frac{(\sigma_{1,l}^2 - \sigma_{2,l}^2)}{\rho_l^k} \sin(\beta_l^k) \sin(2(\beta_l^k + \gamma_l)) \\ \frac{\partial}{\partial y_k} \sigma_1^2(X_k, \overline{f_l}) &= \frac{(\sigma_{1,l}^2 - \sigma_{2,l}^2)}{\rho_l^k} \cos(\beta_l^k) \sin(2(\beta_l^k + \gamma_l)).\end{aligned}\tag{7.22}$$

**Dérivées de  $\sigma_2^2(X_k, \overline{f_l})$ .** L'expression des dérivées pour la variance sur la mesure d'angle est plus complexe. Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_2^2(X_k, \overline{f_l}) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\rho_l^{k2}} (\sigma_{2,l}^2 + (\sigma_{1,l}^2 - \sigma_{2,l}^2) \sin^2(\beta_l^k + \gamma_l)) \\ &\quad + \frac{1}{\rho_l^{k2}} \left( (\sigma_{1,l}^2 - \sigma_{2,l}^2) 2 \frac{\partial \beta_l^k}{\partial x_k} \sin(\beta_l^k + \gamma_l) \cos(\beta_l^k + \gamma_l) \right) \\ &= -2 \frac{\partial \rho_l^k}{\partial x_k} \frac{1}{\rho_l^{k3}} (\sigma_{2,l}^2 + (\sigma_{1,l}^2 - \sigma_{2,l}^2) \sin^2(\beta_l^k + \gamma_l)) \\ &\quad + \frac{1}{\rho_l^{k2}} \left( (\sigma_{1,l}^2 - \sigma_{2,l}^2) 2 \frac{\partial \beta_l^k}{\partial x_k} \sin(\beta_l^k + \gamma_l) \cos(\beta_l^k + \gamma_l) \right).\end{aligned}$$

Substituons  $\frac{\partial \rho_l^k}{\partial x_k}$  et  $\frac{\partial \beta_l^k}{\partial x_k}$  par leurs expressions fonction de  $\rho_l^k$  et  $\beta_l^k$ . On obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_2^2(X_k, \overline{f_l}) &= 2 \cos(\beta_l^k) \frac{1}{\rho_l^{k3}} (\sigma_{2,l}^2 + (\sigma_{1,l}^2 - \sigma_{2,l}^2) \sin^2(\beta_l^k + \gamma_l)) \\ &\quad + \frac{1}{\rho_l^{k2}} \left( (\sigma_{1,l}^2 - \sigma_{2,l}^2) 2 \frac{\sin(\beta_l^k)}{\rho_l^k} \sin(\beta_l^k + \gamma_l) \cos(\beta_l^k + \gamma_l) \right) \\ &= \frac{2}{\rho_l^{k3}} \{ \cos(\beta_l^k) (\sigma_{2,l}^2 + (\sigma_{1,l}^2 - \sigma_{2,l}^2) \sin^2(\beta_l^k + \gamma_l)) \\ &\quad + (\sigma_{1,l}^2 - \sigma_{2,l}^2) \sin(\beta_l^k) \sin(\beta_l^k + \gamma_l) \cos(\beta_l^k + \gamma_l) \} \\ &= \frac{2}{\rho_l^{k3}} \{ \cos(\beta_l^k) \sigma_{2,l}^2 + (\sigma_{1,l}^2 - \sigma_{2,l}^2) \sin(\beta_l^k + \gamma_l) \\ &\quad (\cos(\beta_l^k) \sin(\beta_l^k + \gamma_l) + \sin(\beta_l^k) \cos(\beta_l^k + \gamma_l)) \} \\ &= \frac{2}{\rho_l^{k3}} \{ \cos(\beta_l^k) \sigma_{2,l}^2 + (\sigma_{1,l}^2 - \sigma_{2,l}^2) \sin(\beta_l^k + \gamma_l) \sin(2\beta_l^k + \gamma_l) \}.\end{aligned}$$

De façon analogue, dérivons l'expression de la dérivée par rapport à la composante  $y_k$  en substituant à  $\frac{\partial \rho_l^k}{\partial y_k}$  et  $\frac{\partial \beta_l^k}{\partial y_k}$  leurs expressions fonction de  $\rho_l^k$  et  $\beta_l^k$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_k} \sigma_2^2(X_k, \bar{f}_l) &= 2 \sin(\beta_l^k) \frac{1}{\rho_l^{k3}} \left( \sigma_{2,l}^2 + (\sigma_{1,l}^2 - \sigma_{2,l}^2) \sin^2(\beta_l^k + \gamma_l) \right) \\ &\quad + \frac{1}{\rho_l^{k2}} \left( -(\sigma_{1,l}^2 - \sigma_{2,l}^2) 2 \frac{\cos(\beta_l^k)}{\rho_l^k} \sin(\beta_l^k + \gamma_l) \cos(\beta_l^k + \gamma_l) \right) \\ &= \frac{2}{\rho_l^{k3}} \left\{ \sin(\beta_l^k) \left( \sigma_{2,l}^2 + (\sigma_{1,l}^2 - \sigma_{2,l}^2) \sin^2(\beta_l^k + \gamma_l) \right) \right. \\ &\quad \left. - (\sigma_{1,l}^2 - \sigma_{2,l}^2) \cos(\beta_l^k) \sin(\beta_l^k + \gamma_l) \cos(\beta_l^k + \gamma_l) \right\} \\ &= \frac{2}{\rho_l^{k3}} \left\{ \sin(\beta_l^k) \sigma_{2,l}^2 + (\sigma_{1,l}^2 - \sigma_{2,l}^2) \sin(\beta_l^k + \gamma_l) \right. \\ &\quad \left. (\sin(\beta_l^k) \sin(\beta_l^k + \gamma_l) - \cos(\beta_l^k) \cos(\beta_l^k + \gamma_l)) \right\} \\ &= \frac{2}{\rho_l^{k3}} \left\{ \sin(\beta_l^k) \sigma_{2,l}^2 - (\sigma_{1,l}^2 - \sigma_{2,l}^2) \sin(\beta_l^k + \gamma_l) \cos(2\beta_l^k + \gamma_l) \right\}. \end{aligned}$$

En synthèse, on obtient donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_2^2(X_k, \bar{f}_l) &= \frac{2}{\rho_l^{k3}} \left\{ \cos(\beta_l^k) \sigma_{2,l}^2 + (\sigma_{1,l}^2 - \sigma_{2,l}^2) \sin(\beta_l^k + \gamma_l) \sin(2\beta_l^k + \gamma_l) \right\} \\ \frac{\partial}{\partial y_k} \sigma_2^2(X_k, \bar{f}_l) &= \frac{2}{\rho_l^{k3}} \left\{ \sin(\beta_l^k) \sigma_{2,l}^2 - (\sigma_{1,l}^2 - \sigma_{2,l}^2) \sin(\beta_l^k + \gamma_l) \cos(2\beta_l^k + \gamma_l) \right\}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Nous pouvons maintenant déterminer les coefficients des termes donnés par (\*). La matrice de covariance  $R_{k,l}$  étant diagonale, on en déduit que

$$\begin{aligned} \text{tr} \left( R_{k,l}^{-1} \frac{dR_{k,l}}{dx_k} R_{k,l}^{-1} \frac{dR_{k,l}}{dx_k} \right) &= a_1^{-2} b_1^2 + a_2^{-2} b_2^2 \\ \text{tr} \left( R_{k,l}^{-1} \frac{dR_{k,l}}{dx_k} R_{k,l}^{-1} \frac{dR_{k,l}}{dy_k} \right) &= \text{tr} \left( R_{k,l}^{-1} \frac{dR_{k,l}}{dy_k} R_{k,l}^{-1} \frac{dR_{k,l}}{dx_k} \right) = a_1^{-2} b_1 c_1 + a_2^{-2} b_2 c_2 \\ \text{tr} \left( R_{k,l}^{-1} \frac{dR_{k,l}}{dy_k} R_{k,l}^{-1} \frac{dR_{k,l}}{dy_k} \right) &= a_1^{-2} c_1^2 + a_2^{-2} c_2^2, \end{aligned} \quad (7.24)$$

où les coefficients  $(a_j, b_j, c_j)$  sont déduits des variances  $\sigma_d^2$ ,  $\sigma_1^2(X_k, \bar{f}_l)$ ,  $\sigma_\varphi^2$  et  $\sigma_2^2(X_k, \bar{f}_l)$  et de leurs dérivées par rapport aux composantes de position de l'état.

$$\begin{aligned} a_1 &= \sigma_1^2(X_k, \bar{f}_l) + \sigma_d^2 & b_1 &= \frac{\partial \sigma_1^2(X_k, \bar{f}_l)}{\partial x_k} & c_1 &= \frac{\partial \sigma_1^2(X_k, \bar{f}_l)}{\partial y_k} \\ a_2 &= \sigma_2^2(X_k, \bar{f}_l) + \sigma_\varphi^2 & b_2 &= \frac{\partial \sigma_2^2(X_k, \bar{f}_l)}{\partial x_k} & c_2 &= \frac{\partial \sigma_2^2(X_k, \bar{f}_l)}{\partial y_k} \end{aligned} \quad (7.25)$$

On introduit la matrice  $Y_{k,l}$  de taille  $3 \times 3$  dont les coefficients du bloc  $2 \times 2$  supérieur gauche sont égaux aux valeurs données par l'équation (7.24) et dont les autres coefficients sont nuls. On en conclut que la matrice d'information fournie par le processus d'observation  $J_k^z(\mathcal{C})$  tenant compte des erreurs sur la carte est composée de deux parties :

$$\boxed{J_k^z(\mathcal{C}) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{nc} \mathbb{E}_{X_{0:k}} \left\{ \delta_l^k Y_{k,l} \right\} + \sum_{l=1}^{nc} \mathbb{E}_{X_{0:k}} \left\{ \delta_l^k G_{X_l}^{k*} R_{k,l}^{-1} G_{X_l}^k \right\}}. \quad (7.26)$$

Dans cette expression, nous avons introduit les paramètres permettant de tenir compte des amers exploitables à partir de l'état  $X_k$  compte tenu des caractéristiques du capteur de mesure, de l'incertitude sur les amers et des règles qui seraient utilisées dans le processus de mise en correspondance entre les amers et les mesures.

**Algorithme 12** Calcul récursif de la BCRB avec erreur de carte.

Soit la carte  $\mathcal{C}$  composée des  $n_C$  amers  $f_l$  bruités et  $\sigma_{1,l}^2, \sigma_{2,l}^2, \gamma_l$  les paramètres caractéristiques de  $\Sigma(f_l)$  pour  $l = 1, \dots, n_C$ .

**Initialisation :**

- initialisation de  $\hat{J}_0 = P_0^{-1}$  et  $k = 0$ .

**Itération :**

- approximation des termes des termes  $D_k^{11}, D_k^{12}, D_k^{21}$  et  $D_k^{22,a}$  comme dans les algorithmes 7, 9 ou 11.
- identification des amers  $f_l$ ,  $l = 1, \dots, n_C$ ,  $j = 1, 2$  utilisables à partir de l'état  $X_{k+1}^i$  selon les caractéristiques du capteur de mesures. On note  $\delta_{k+1,i}^l = 1$ , lorsque  $f_l$ ,  $l = 1, \dots, n_C$  est exploitable.
- calcul du terme associé au processus de mesure  $\hat{J}_{k+1}^z(\mathcal{C})$  :
  - pour tout  $f_l$ , déterminer la distance et la mesure d'angle  $(\rho_l^{k+1,i}, \beta_l^{k+1,i})$  de  $\bar{f}_l$  par rapport à  $X_{k+1}^i$ ,
  - déterminer les matrices  $G_{Xl}^{k+1,i}$  et  $R_{k+1,l,i}^{-1}$  qui sont les termes  $G_{Xl}^{k+1}$  et  $R_{k+1,l}^{-1}$  pour  $X = X_{k+1}^i$  et  $f_l = \bar{f}_l$ ,
  - calcul du terme  $Y_{k+1,l,i}$  selon l'équation (7.24). On a donc

$$\hat{J}_{k+1}^z(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^{n_X} W_{k+1}^i \sum_{l=1}^{n_C} \delta_{k+1,i}^l \left\{ \frac{1}{2} Y_{k+1,l,i} + G_{Xl}^{k+1,i*} R_{k+1,l,i}^{-1} G_{Xl}^{k+1,i} \right\}.$$

- calcul de  $\hat{J}_{k+1}$  par application de la formule de récurrence (5.21)

$$\hat{J}_{k+1} = \hat{J}_k^z(\mathcal{C}) + \hat{D}_k^{22,a} - \hat{D}_k^{21} (\hat{J}_k + \hat{D}_k^{11})^{-1} \hat{D}_k^{12} \quad (7.27)$$

### 7.2.1 Adaptation des algorithmes avec une carte parfaite

La base des algorithmes pour la détermination de  $J_k$  reste inchangée. Les trois approches que nous avons présentées pour le calcul de la borne sans prise en compte de l'incertitude de carte se distinguent essentiellement par la méthode de génération des réalisations de trajectoires du mobile à partir de la trajectoire nominale imposée. Les hypothèses de trajectoires bruitées se composent de points pondérés de l'espace d'état à l'instant  $t_{k+1}$  de la forme  $(X_{k+1}^i, W_{k+1}^i)_{i=1, \dots, n_X}$  dans  $\mathbb{R}^2 \times ]-\pi, \pi]$ . En particulier, lorsque le bruit de dynamique est faible, l'utilisation de la trajectoire nominale permet d'obtenir une première approximation et  $n_X = 1$  et  $W_{k+1}^1 = 1$ . Dans le cadre de la simulation par tirage Monte-Carlo et de la génération basée sur la transformée unscented, nous avons  $n_X > 1$  et  $W_{k+1}^i < 1$ . La modification des algorithmes du chapitre 5 intervient au niveau de l'estimation de la matrice  $\hat{J}_k^z(\mathcal{C})$  : une étape supplémentaire est intégrée pour le calcul des matrices  $Y_{k,l}$ ,  $l = 1, \dots, n_C$ . On obtient donc trois versions pour le calcul de la BCRP avec prise en compte de l'incertitude sur la carte que nous présentons à l'algorithme 12.

## 7.3 Analyse sur quelques scénarios

Afin d'analyser le comportement, de la borne avec la prise en compte de l'erreur de carte, nous considérons quelques scénarios génériques en faisant varier le niveau d'incertitude sur les amers, l'orientation de la matrice de l'erreur sur l'amer et la trajectoire suivie par le mobile. Cette analyse s'appuie sur les paramètres déduits de la matrice de la borne. Notamment l'estimation de la borne sur l'erreur sur les paramètres de position et d'angle. Les caractéristiques du mobile sont précisées dans le tableau 7.1.

Bruits sur l'état initial	
$\sigma_{x_0}$	1 m
$\sigma_{y_0}$	1 m
$\sigma_{\theta_0}$	1 deg
Bruits de dynamique et commandes	
$\sigma_{x_k}$	1 m
$\sigma_{y_k}$	1 m
$\sigma_{\theta_k}$	1 deg
$\sigma_v$	$0.5 \text{ m.s}^{-1}$
$\sigma_\phi$	0.1 deg
Bruits observations	
$\sigma_d$	1 m
$\sigma_\varphi$	1 deg

TAB. 7.1 – Caractéristiques du modèle de dynamique.

**Scénario 1.** Dans ce scénario, on suppose que la carte est composée d'un unique amer en position (40, 15) avec une incertitude homogène en x et en y qui se traduit par une variance  $\sigma_l^2$ . Nous considérons tout d'abord une trajectoire  $\tau_1$ , avec un déplacement qui consiste à s'approcher de l'amer, puis à s'en éloigner. Nous avons calculé la séquence de bornes pour les points successifs de cette trajectoire avec une connaissance parfaite sur la position de l'amer, puis pour des erreurs  $\sigma_l = 1, 2, 3$  m. Les caractéristiques du capteur permettent d'observer l'amer tout au long du trajet. L'allure des ellipses représentatives de la borne sur les composantes de position du mobile à chaque position, pour chaque niveau d'erreur, est fournie sur la figure 7.3. Nous avons aussi tracé les ellipses associées à l'erreur sur la position avec des couleurs identiques sur cette même figure. On constate une dégradation de la borne sur l'erreur d'estimation lorsque l'erreur de carte augmente. Ce comportement est également illustré par le tracé des approximations de la borne sur les différentes composantes de l'état sur les figures 7.4 et 7.3 en fonction de la distance au départ.

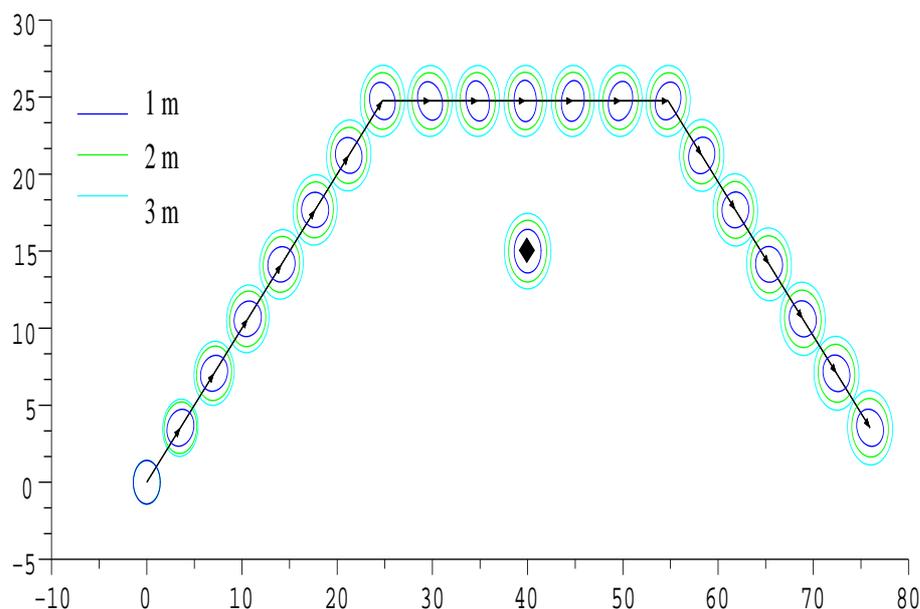


FIG. 7.3 – Allure des ellipses associées à la BCRP en position.

**Scénario 2.** Dans ce scénario, nous gardons la même trajectoire  $\tau_1$  et le même amer, mais avec une structure de l'erreur sur sa position qui n'est plus homogène quelle que soit l'orientation. On fait en plus l'hypothèse que  $\sigma_{1,l} = 2\sigma_{2,l} = 2$ . On considère quatre orientations pour l'axe principal

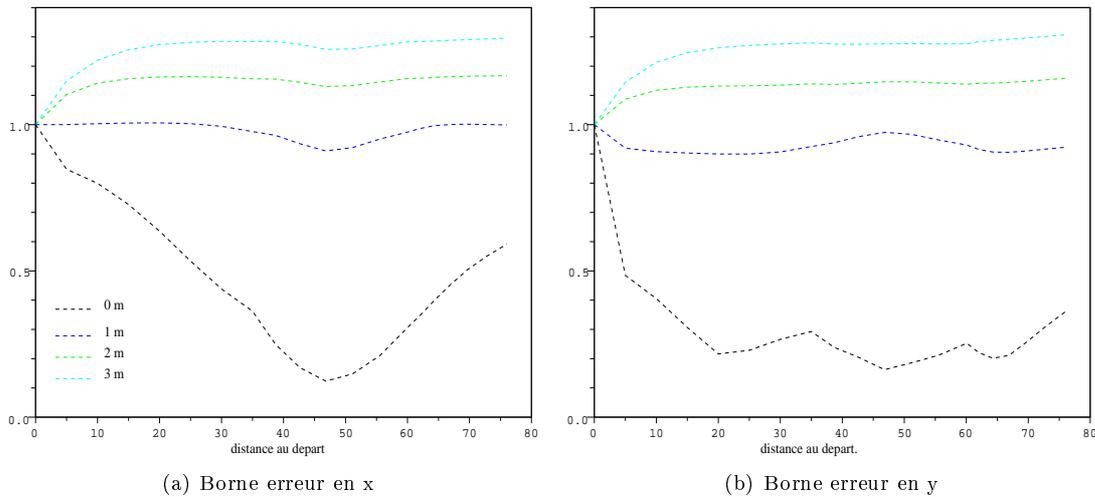


FIG. 7.4 – Bornes sur la position en fonction du niveau de l'erreur de carte.

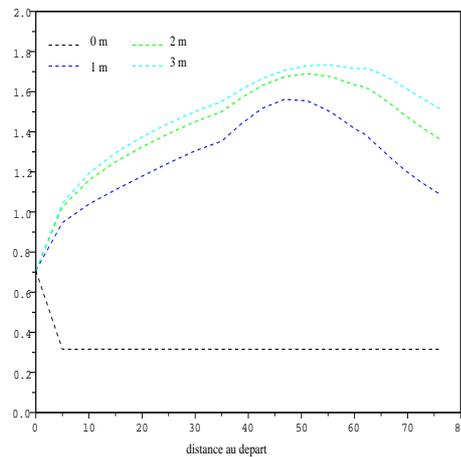


FIG. 7.5 – Borne sur l'orientation en fonction du niveau de l'erreur de carte.

de l'ellipse d'erreur sur la position de l'amer  $\gamma_l = 0, \pm \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ . Nous avons calculé la séquence de bornes pour les points successifs de cette trajectoire avec une connaissance parfaite sur la position de l'amer, puis pour les quatre orientations sur l'erreur de localisation de l'amer  $\gamma_l$ . Nous avons aussi tracé, les ellipses associées à l'erreur de carte avec des couleurs identiques. Les ellipses associées aux bornes de l'erreur sur le position du mobile sont présentées sur la figure 7.6. La performance de localisation est impactée par l'orientation de l'erreur sur l'amer. Cela se traduit différemment sur la composante en x et en y en fonction de l'orientation du déplacement du mobile. Les orientations favorables pour l'estimation de  $x_k$  sont globalement défavorables pour  $y_k$ . Ceci est cohérent avec la structure de bruit déduite de la propagation de l'erreur de carte sur les mesures. Pour l'orientation, on constate une accentuation de la dégradation de la borne à proximité de l'amer, due à la présence de la quantité  $1/\rho_l^k$  au carré dans la variance de l'erreur complémentaire sur la mesure d'angle. Ces éléments sont présentés sur les figures 7.7 et 7.3.

## 7.4 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons adapté les algorithmes de calcul de la matrice d'information de Fisher proposés au chapitre 5, afin de prendre en compte l'incertitude sur la connaissance de l'information cartographique. La méthode a consisté à apporter certaines modifications à l'équation d'observation du système au travers d'une approximation de Taylor des fonctions de distance et

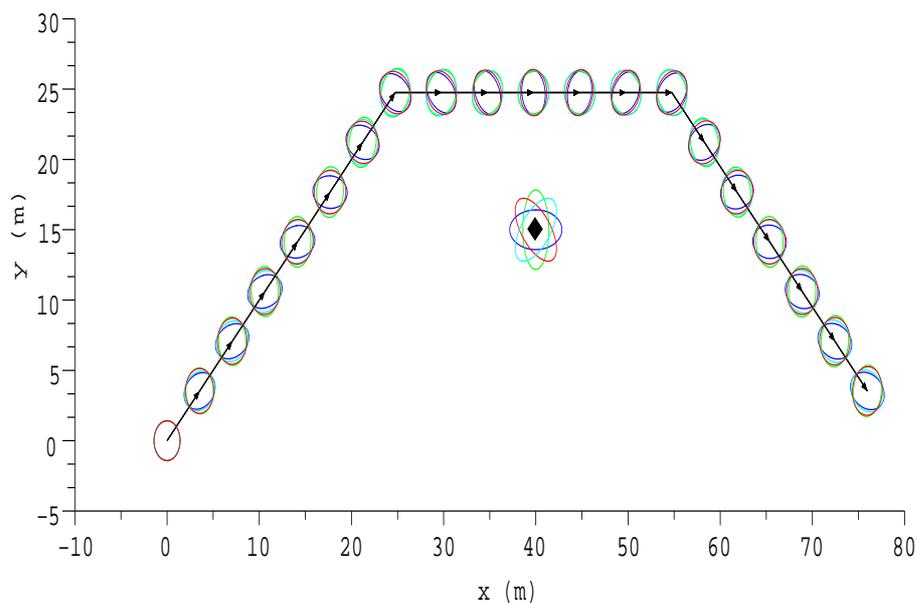


FIG. 7.6 – Ellipses associées à la BCRP en position fonction de l'orientation  $\gamma_l$ .

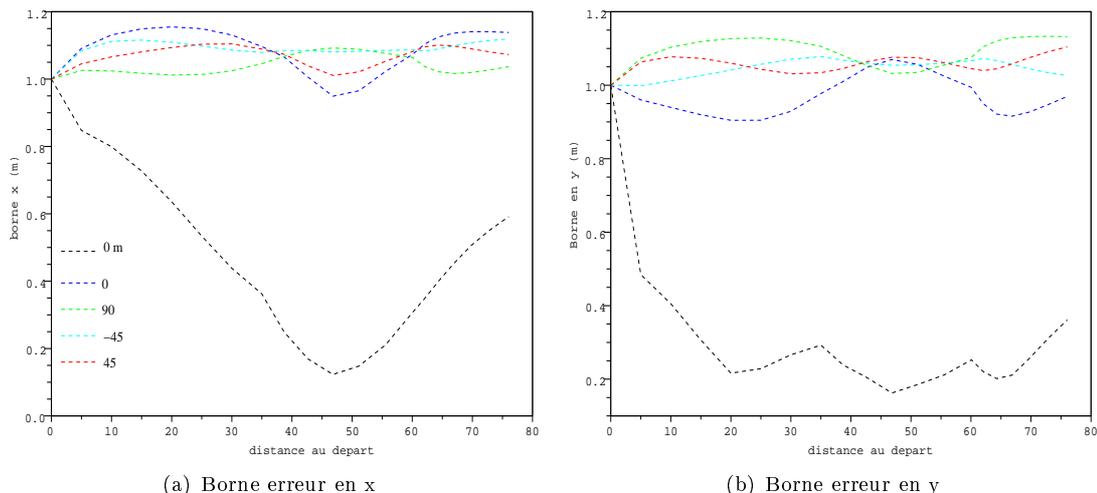


FIG. 7.7 – Borne en position du mobile fonction de l'orientation de l'erreur de carte.

d'angle. La propagation de l'erreur de carte s'est traduite par l'ajout d'un bruit supplémentaire sur les mesures directement lié à la structure du bruit de la carte. Ainsi, nous avons vu que

- le niveau de bruit sur la position des amers avait une influence directe sur le niveau de bruit ajouté,
- la proximité du mobile à l'amer et l'orientation du vecteur formé par la position du mobile et la position moyenne de l'amer par rapport à celle du grand axe de l'ellipse d'erreur des amers avaient également un impact important.

On comprend donc qu'il sera nécessaire de trouver un compromis entre le positionnement relatif du mobile par rapport à la configuration géométrique des amers et le niveau et les orientations de ces erreurs sur la carte pour atteindre la meilleure performance de localisation a priori.

La formule de récurrence de Tichavsky a été adaptée en conséquence, même si les étapes de calcul restent identiques par rapport à une carte parfaite. Le résultat principal est une modification de la matrice d'information liée au processus d'observation, qui nécessite une correction au niveau de la matrice de covariance et la prise en compte d'un terme dépendant de la dérivée et de l'inverse de

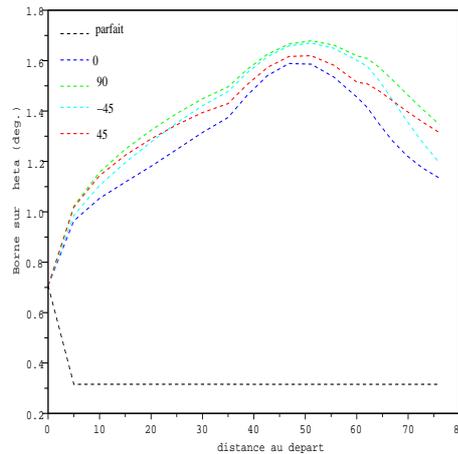


FIG. 7.8 – Borne en orientation du mobile fonction de l’orientation de l’erreur de carte.

cette matrice de covariance.

Les travaux présentés dans ce chapitre peuvent être prolongés en s’intéressant à différentes formes d’approximation des fonctions de mesures. Tout d’abord, l’approximation de Taylor pourrait être poussée à un ordre supérieur. Chaque ordre supplémentaire permettrait d’inclure des contributions des statistiques d’ordre supérieur sur l’erreur de carte. Il n’y a pas de limite théorique aux calculs. Par contre, la dérivation de la matrice d’information  $J_k^z(\mathcal{C})$  sera de plus en plus complexe. Une autre alternative pourrait consister à s’appuyer sur la transformée unscented, qui permet une approximation au second ordre. La borne ainsi construite pourrait alors être comparée au résultat obtenu à partir d’un développement de Taylor du même ordre. Il faut noter, l’intérêt d’une telle approximation, qui permet de prendre en compte de façon naturelle les limites de perception du capteur. En effet, les statistiques étant construites à partir de l’échantillon des sigma-points, dans ce cas équivalent à des amers, ceux qui ne seraient pas visibles seraient automatiquement rejetés, comme le montre la figure 7.9.

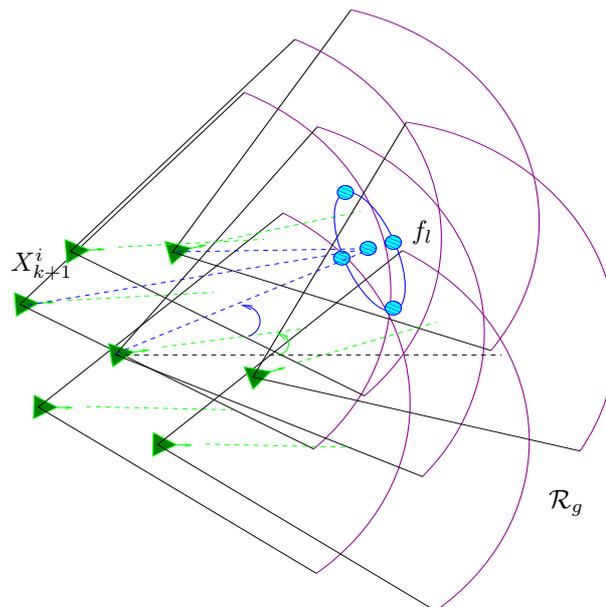


FIG. 7.9 –  $\tilde{J}_{k+1}^z$  par la méthode unscented (échantillons mobile (vert), sigma-points amers (bleu)).

Enfin, la dérivation de la borne pourrait se faire en considérant un état augmenté, construit à partir

de l'état du système  $X_k$  et de la carte  $\mathcal{C}_k$  en adaptant l'équation d'évolution de la façon suivante

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= f_k(X_k, u_k) + \omega_k. \\ \mathcal{C}_{k+1} &= \mathcal{C}_k, \end{aligned} \quad (7.28)$$

avec  $\mathcal{C}_{k+1} = (x^1 \ y^1 \ \dots \ x^{nc} \ y^{nc})^*$ ,  $\forall k$  et les conditions initiales

$$X_0 \sim \mathcal{N}(\hat{X}_0, P_0), \quad P_0 \succ 0 \text{ et } \mathcal{C}_0 \sim \mathcal{N}(\mathcal{C}, \Sigma_{\mathcal{C}}). \quad (7.29)$$

Le calcul de la matrice d'information de Fisher pour l'estimation de l'état augmenté n'est cependant pas directement réalisable car il nécessite de disposer d'une loi de prédiction régulière, ce qui n'est pas le cas pour les composantes liées à la cartographie qui n'évoluent pas au cours du temps. Néanmoins, des formules récursives similaires à celle utilisée dans nos développements ont été proposées dans [TMN98], [SKT01] pour les systèmes partiellement linéaires et bruités comme le nôtre. Une autre manière de procéder consisterait à régulariser le système en ajoutant un bruit artificiel de variance  $\epsilon > 0$  pour le modèle d'évolution de la carte, puis d'effectuer un passage à la limite après application de la formule de mise jour de la matrice  $J_k$ . Cette démarche se rapproche de celle utilisée dans [Rap05] pour s'affranchir du caractère discret des composantes des systèmes hybrides. En utilisant un état augmenté, on commence également à aborder l'étude de la performance de problèmes de localisation et de cartographie simultanée où la carte fait partie intégrante de l'état du système.



## Chapitre 8

# Planification pour la localisation

Nous avons défini une mesure de performance pour le processus de localisation d'un mobile basée sur l'acquisition d'information de distances et d'angles par rapport à des amers représentés dans une carte embarquée. Pour des missions qui consistent à atteindre un lieu donné de l'environnement d'évolution du système, étant donné un état initial, il est important de choisir la trajectoire permettant de garantir *a priori* et compte tenu de la connaissance sur le modèle du système la meilleure performance de localisation. Ce choix de trajectoire doit évidemment limiter les risques associés aux contextes et contraintes du système. Nous présentons dans ce chapitre une méthode permettant de proposer des trajectoires « optimales » au sens de critères de performance formulés à partir de la Borne de Cramèr-Rao a posteriori.

### 8.1 Présentation du problème de planification de trajectoires

Dans le cadre le plus général, le concept de *planification* ou *mission* correspond à la réalisation d'*actions* spécifiques (mouvements, collectes d'informations...). La tâche considérée ici consiste à rallier une destination en exploitant la représentation a priori de l'environnement dans le processus d'estimation de l'état du mobile à partir de mesures fournies par ses *capteurs* embarqués. En phase de planification, l'objectif est de déplacer le mobile dans l'environnement, par des commandes appropriées, ou d'adapter ses capacités d'acquisition de l'information compte tenu du contexte de la mission (durée maximale, incertitude a priori sur la carte, capacité des algorithmes impliqués dans le processus de mesure). Plus précisément, nous nous intéressons à la planification des commandes qui influent sur le déplacement du mobile. Le but est de définir une ou plusieurs trajectoires dans un espace de recherche (l'espace des *trajectoires*), à partir d'un état de départ et pour se rendre dans un ensemble d'arrivée, en respectant des contraintes et en maximisant une fonctionnelle. Le besoin principal étant de garantir la performance a priori de localisation, nous avons vu qu'elle pouvait être caractérisée par la séquence des matrices d'information de Fisher liée à la trajectoire considérée. Nous introduisons les différents éléments permettant la formulation du problème de planification. Tout d'abord, nous introduisons la famille de trajectoires sur laquelle nous nous appuyerons dans ce chapitre, ainsi que l'expression des objectifs pour l'optimisation.

#### 8.1.1 Définition de l'espace des trajectoires

Pour traiter notre problème de trajectoires, on suppose disponible une discrétisation de l'espace 2D permettant de définir un graphe de points de passage souhaités pour le mobile. Ce graphe  $\mathcal{G}(V, E)$  définis à partir des ensembles  $V$  et  $E$  est composé de

- $|V|$  noeuds  $(s_q, 1 \leq q \leq |V|)$ ,
- et  $|E|$  arcs  $\{e_{pq} = (s_p, s_q) \in V^2, q \in \mathcal{V}(p)\}$ ,  $\mathcal{V}(p)$  étant l'ensemble des noeuds voisins du noeud  $q$ .

Chaque noeud  $p \in V$  est associé à une position 2D,  $\tilde{p}_p := (x_{s_p}, y_{s_p}) \in \mathcal{D}$ . Le mouvement du mobile sur un arc  $e_{pq}$  est effectué à vitesse  $v_{e_{pq}}$  constante et avec l'orientation fixe  $\theta_{e_{pq}}$  correspondant à l'orientation entre  $-\pi$  et  $\pi$  de l'arc  $e_{pq}$  dans le repère global  $\mathcal{R}_g$ . Dans ce chapitre, les résultats qui

seront présentés feront l'hypothèse d'un graphe sous la forme d'une grille régulière, mais ils sont généralisables à une discrétisation quelconque. On suppose en outre qu'il existe un étage algorithmique permettant de passer de ces points de passage sur le graphe à une trajectoire cohérente de la dynamique par la mise en oeuvre des actionneurs du système.

**Une grille régulière.** On dispose donc d'une discrétisation régulière de l'espace d'état  $\mathcal{D} \times ]-\pi, \pi]$  et de l'espace des commandes en orientation et en vitesse. Le graphe  $\mathcal{G}$  est donc une grille de pas  $d_x$  et  $d_y$  selon respectivement l'axe des abscisses et des ordonnées de  $\mathcal{R}_g$ . On note  $n_g = n_x n_y$  le nombre de points de la grille. Chaque point de la grille est par conséquent associé au point de l'espace 2D  $\tilde{p}_{(i,j)} = (x_{(i,j)}, y_{(i,j)})$ , auquel on peut affecter un indice  $s := g(i, j)$  dans  $\mathcal{S} := \{1, \dots, n_g\}$ ,  $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}$ , où  $g$  est l'application

$$g(i, j) = i + (j - 1)n_x. \quad (8.1)$$

On introduit également une variable auxiliaire  $s_k \in \mathcal{S}$ , qui correspond à l'état  $s$  associé à la position  $\tilde{p}_k$  en 2D imposée au mobile à l'instant  $k \geq 0$ .

**Discrétisation des commandes.** D'un point de la grille, il est possible d'atteindre au plus les plus proches définis à partir d'une discrétisation de l'orientation  $\theta_k$  en  $n_a$  valeurs. Dans les exemples que nous traiterons, nous faisons l'hypothèse de déplacements permettant d'atteindre uniquement les 8 plus proches voisins. On a donc  $n_a \leq 8$ . On peut introduire la variable d'action  $a_k \in \mathcal{A} = \{1, \dots, n_a\}$  définissant l'orientation choisie à l'instant  $k$  à partir de la position  $\tilde{p}_k$ . On adoptera une règle permettant d'identifier les orientations dans le sens négatif avec  $a = 1$  pour un déplacement « à droite vers le haut » et  $a = 8$  pour un « déplacement vers la droite ».

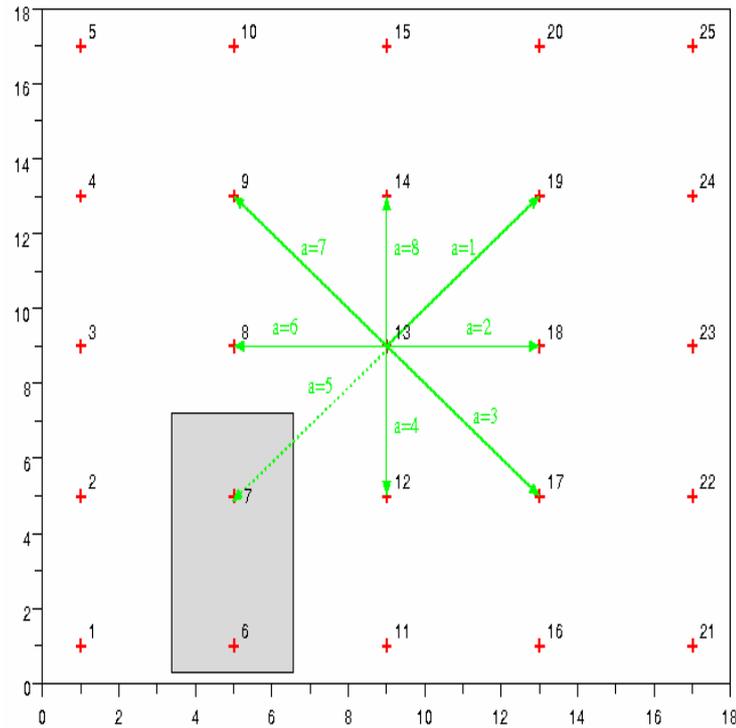
**Les trajectoires.** À partir de cette formalisation, on s'intéresse à des trajectoires composées de déplacements consécutifs à vitesse et orientation constantes à chaque instant  $k$  :

- $v_k = [v_k^x, v_k^y]$  étant à valeurs dans  $\{-v, 0, v\} \times \{-v, 0, v\} \setminus \{0\} \times \{0\}$  avec  $v \in \mathbb{R}^+$ ,
- l'orientation  $\theta_k$  étant directement liée à l'action  $a_k$  sélectionnée. L'action  $a_k$  est donc liée à la commande en orientation  $\phi_k$ .

Ainsi, une trajectoire définie entre les instants  $t_0$  et  $t_k$  à partir des points 2D de passage  $\tilde{p}_{0:k} = \{\tilde{p}_0, \dots, \tilde{p}_k\}$  est équivalente aux séquences d'états  $s_{0:k} = \{s_0, \dots, s_k\} \in \mathcal{S}^{k+1}$  et d'actions  $a_{0:k-1} = \{a_0, \dots, a_{k-1}\} \in \mathcal{A}^{k+1}$  où  $s_k$  est l'indice associée à la position  $\tilde{p}_k$  et  $a_k$  l'action exécutée en  $\tilde{p}_k$ . Notre problème de planification de trajectoire est en définitive un problème *d'optimisation de séquences de décisions* [LaV06].

On s'intéresse à des trajectoires caractérisées par une position initiale  $p_i$  et un ensemble de positions d'arrivée  $X_f$ . On suppose également que la position initiale est située sur la grille avec l'indice  $s_i$  et que  $X_f$  contient un nombre fini  $n_f$  de points de la grille repérés par les états  $S_f = \{s_f^1, \dots, s_f^{n_f}\}$ . En outre, certaines actions peuvent ne pas être admissibles à un instant donné, pour tenir compte de contraintes liées à l'environnement (bord de la zone d'évolution, obstacles, zones interdites...). La figure 8.1 présente un exemple de discrétisation avec une grille obtenue pour  $n_x = n_y = 5$ . L'ensemble  $\mathcal{S}$  est composé de 25 états. On peut noter que dans l'état  $s = 13$ , le déplacement associé à l'action  $a = 5$  provoque un déplacement vers l'état  $s = 7$  appartenant à un obstacle. Cette action est donc non admissible.

**Prise en compte de contraintes sur le mouvement.** L'évolution instantanée du mobile est en général contrainte par les capacités de ses actionneurs. Nous tenons compte dans le problème de planification de contraintes sur la variation instantanée de la commande  $u_k$ . La conséquence directe est une réduction du nombre d'états admissibles à chaque instant. On suppose donc que la variation de l'orientation entre deux instants consécutifs est bornée. Ainsi, l'espace des décisions à l'instant  $k$ , noté  $\mathcal{A}_k$ , dépend de la décision choisie à l'instant  $k - 1$ , de sorte que  $\mathcal{A}_k \subseteq \mathcal{A}$ . On introduit pour cela une matrice de transition invariante dans le temps  $\delta(a_k, a_{k-1})$ , qui précise les actions possibles à  $t_k$  sachant les décisions prises  $t_{k-1}$ . Par exemple, si l'on suppose que la

FIG. 8.1 – Grille pour  $n_x = n_y = 5$  et définition des actions dans l'état  $s = 13$ .

variation d'orientation instantanée est inférieure à  $\frac{\pi}{4}$ , c'est-à-dire  $|\phi_k| \leq \frac{\pi}{4}$ , la matrice de transition est donnée par l'équation (8.2).

$$\delta(a_k, a_{k-1}) = \begin{pmatrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

On en déduit en particulier que seules les actions  $a = 1, 2$  et  $8$  peuvent être sélectionnées au temps  $k$  si  $a_{k-1} = 1$ . La figure 8.2 présente deux exemples de trajectoires où la contrainte d'orientation de  $\frac{\pi}{4}$  est satisfaite uniquement lors de la réalisation de la première.

### 8.1.2 Fonctionnelles pour la performance de localisation

Après avoir défini l'espace des trajectoires pour le problème de planification, nous abordons dans ce paragraphe les critères d'optimisation. Nous nous intéressons uniquement au critère associé à la performance de localisation du système, et donc du filtre envisagé lors de l'exécution de la mission. Cette performance est caractérisée par la borne de Cramér-Rao *a posteriori* sur l'erreur d'estimation de la trajectoire. Considérons une trajectoire  $X_{0:k}$  entre l'instant initial et  $k$  réalisée à partir de la suite de commandes  $u_{0:k-1}$ , et l'estimation  $\hat{X}_{0:k}(u_{0:k-1}, z_{1:k})$  fournie par le filtrage à partir d'une séquence de mesures  $z_{1:k}$ . Dans le cadre du filtrage, on s'intéresse à l'estimation courante de l'état  $X_k$ . On sait que la matrice de covariance de l'erreur d'estimation de l'état à chaque instant  $k$  est bornée par l'inverse de la matrice d'information de Fisher<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Sous certaines conditions sur le modèle de dynamique discutées au chapitre 5

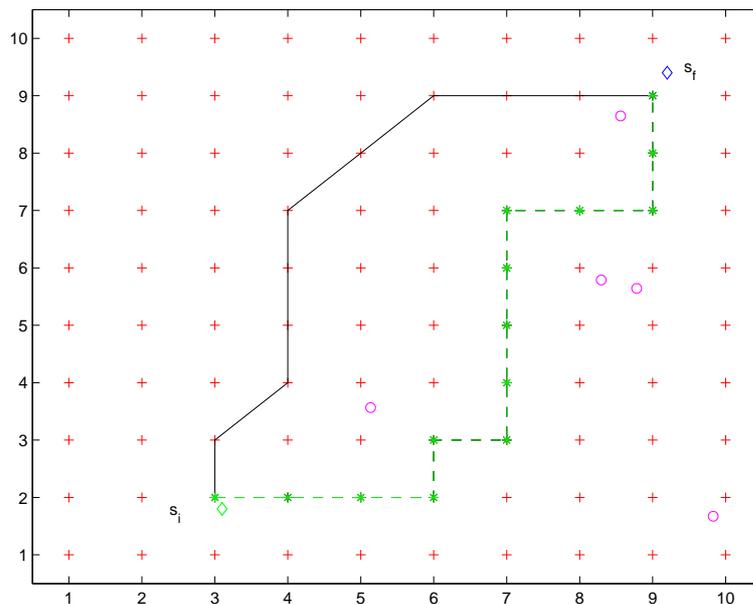


FIG. 8.2 – trajectoire avec (ligne continue) et sans (pointillé) contraintes  $\frac{\pi}{4}$ .

$$E \left\{ \left( \hat{X}_k(u_{0:k-1}, z_{1:k}) - X_k \right) \left( \hat{X}_k(u_{0:k-1}, z_{1:k}) - X_k \right)^* \right\} \succeq J_k^{-1}(u_{0:k-1}) \quad (8.3)$$

où  $J_k^{-1}(u_{0:k-1})$  est le bloc inférieur droit de taille  $\dim(X_k) \times \dim(X_k)$  de la matrice d'information de Fisher  $F_k(X_{0:k}, u_{0:k-1}, z_{1:k})$  de la trajectoire complète

$$F_k(X_{0:k}, u_{0:k-1}, z_{1:k}) := E \left[ -\Delta_{X_{0:k}}^{X_{0:k}} \log (p(X_{0:k}, u_{0:k-1}, z_{1:k})) \right].$$

Nous avons proposé plusieurs méthodes de calcul d'une estimation de la matrice  $J_k(u_{0:k-1})$  pour notre problème de filtrage au chapitre 5, en se basant sur la relation de récurrence de Tichavsky & al. [TMN98]. En fonction des objectifs de la mission et du contexte d'évolution du mobile, il peut être intéressant de considérer différents objectifs.

#### Objectif 1 (performance terminale)

Trouver la séquence optimale de commandes de haut niveau  $u_{0:K-1}^1$  de longueur  $K$  telle que :

- $u_0^1$  est la commande exécutée en l'état initial,
- $u_{K-1}^1$  permet d'atteindre la zone finale imposée,
- les contraintes sur les commandes consécutives sont satisfaites  $\forall 1 \leq k \leq K-1$

qui maximise l'espérance de la précision de localisation en bout de trajectoire  $\phi_1(J_K^{-1}(u_{0:K-1}))$ .

#### Objectif 2 (performance moyenne)

Trouver la séquence optimale de commandes de haut niveau  $u_{0:K-1}^2$  de longueur  $K$  telle que :

- $u_0^2$  est la commande exécutée en l'état initial,
- $u_{K-1}^2$  permet d'atteindre la zone finale imposée,
- les contraintes sur les commandes consécutives sont satisfaites  $\forall 1 \leq k \leq K-1$

qui maximise l'espérance de la précision de localisation sur l'ensemble de la trajectoire  $\phi_2(J_{0:K}^{-1}(u_{0:K-1}^2))$  avec  $J_{0:K}^{-1}(u_{0:K-1}) = \{J_0^{-1}, \dots, J_k^{-1}(u_{0:k-1}^2), \dots, J_K^{-1}(u_{0:K-1}^2)\}$ .

#### Objectif 3 (performance de type minmax)

Trouver la séquence optimale de commandes de haut niveau  $u_{0:K-1}^3$  de longueur  $K$  telle que :

- $u_0^3$  est la commande exécutée en l'état initial,
- $u_{K-1}^3$  permet d'atteindre la zone finale imposée,

– les contraintes sur les commandes consécutives sont satisfaites  $\forall 1 \leq k \leq K-1$  qui maximise le minimum de l'espérance de la précision de localisation sur la trajectoire  $\phi_3(J_{0:K}^{-1}(u_{0:K-1}))$  avec  $J_{0:K}^{-1}(u_{0:K-1}^3) = \{J_0^{-1}, \dots, J_k^{-1}(u_{0:k-1}^3), \dots, J_K^{-1}(u_{0:K-1}^3)\}$ .

Par la suite, nous adopterons la notation  $J_k$  pour  $J_k(u_{0:k-1})$  et  $J_{0:k}$  pour  $J_{0:k}(u_{0:k-1})$  lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté. Nous considérons des fonctions coûts  $\phi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  à maximiser qui sont obtenues à partir du déterminant d'une matrice dépendante de l'approximation de la matrice d'information de Fisher. Le déterminant peut être comparé au volume de l'ellipsoïde d'incertitude construite à partir de la matrice de covariance de l'estimation. Nous nous focaliserons sur la performance de l'estimation de la position en 2D du mobile en abordant l'optimisation des fonctionnelles

– minimisation de l'ellipse d'incertitude à l'instant final

$$\phi_1(J_{0:K}(u_{0:K-1})) = -\det(\mathcal{B}^* J_K^{-1}(u_{0:K-1}) \mathcal{B}), \quad (8.4)$$

– minimisation d'une moyenne pondérée des ellipses d'incertitude le long de la trajectoire

$$\phi_2(J_{0:K}(u_{0:K-1})) = -\sum_{k=0}^K w_k \det(\mathcal{B}^* J_k^{-1}(u_{0:k-1}) \mathcal{B}) \quad (8.5)$$

où  $w_k \in \mathbb{R}^+$  sont des poids,

– minimisation de l'ellipse d'incertitude de plus grand volume le long de la trajectoire

$$\phi_3(J_{0:K}(u_{0:K-1})) = -\max_{0 \leq k \leq K} \det(\mathcal{B}^* J_k^{-1}(u_{0:k-1}) \mathcal{B}) \quad (8.6)$$

et  $\mathcal{B}$  la matrice de projection de l'état sur le sous-espace des positions 2D

$$\mathcal{B} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce problème d'optimisation pourrait être complété par des contraintes sur l'orientation, en considérant le terme (3, 3) des matrices  $J_k^{-1}$ ,  $k = 0, \dots, K$ .

L'espace des trajectoires admissibles et le critère d'optimisation étant définis, nous présentons dans la section suivante la démarche adoptée pour la résolution du problème d'optimisation.

## 8.2 Résolution du problème d'optimisation

Une première façon d'aborder le problème de planification de trajectoires est d'essayer de le formaliser comme un *Processus de Décision Markovien* (PDM). Pour cela, on considère que l'état  $s_k \in \mathcal{S}$  constitue une chaîne de Markov et que l'objectif est de rechercher la séquence d'actions/décisions  $\{a_k^*(s_1, \dots, s_{k+1})\}_{0 \leq k \leq K-1}$  équivalente à la suite de commandes  $u_{0:K-1}$ , qui maximise l'une des fonctions de coûts définie sur l'espace des trajectoires au paragraphe précédent. Pour compléter la définition du PDM, on doit également définir

- $T_{ss'}^k(a) \triangleq \Pr(s_{k+1} = s' | s_k = s, a_k = a)$ ,  $\forall (s, s', a) \in \mathcal{S}^2 \times \mathcal{A}$ , la fonction de transition à l'instant  $k$  permettant de définir l'évolution de l'état à partir de la commande appliquée,
- $c_{ss'}(a)$ ,  $\forall (s, s', a) \in \mathcal{S}^2 \times \mathcal{A}$ , le gain élémentaire associé à la transition de l'état  $s$  à l'état  $s'$  pour le choix de l'action  $a$ .

Dans le cadre des PDM, la fonction de transition et le gain élémentaire est complètement connu et la politique optimale  $a_{1:K-1}^*$  peut être obtenue en utilisant un algorithme de programmation dynamique ou des approches par apprentissage par renforcement [SB00]. Toutes ces approches s'appuient sur le *principe d'optimalité* de Bellman [Ber68] et le chemin optimal peut être déduit de la relation de récurrence

$$\begin{aligned}
V_0(s) &= c_s(\text{initialisation}) \\
V_k(s) &= \max_{a \in \mathcal{A}_{k-1}(s)} \left[ \sum_{s' \in \mathcal{S}} \{c_{ss'}(a) + V_{k-1}(s')\} T_{ss'}^k(a) \right] \\
a_{k-1}(s) &= \arg \max_{a \in \mathcal{A}_{k-1}(s)} \left[ \sum_{s' \in \mathcal{S}} \{c_{ss'}(a) + V_{k-1}(s')\} T_{ss'}^k(a) \right]
\end{aligned} \tag{8.7}$$

$k = 1, \dots, K, s \in \mathcal{S}$ . La séquence  $\{\vec{a}_0(s), \dots, \vec{a}_{K-1}(s)\}, s \in \mathcal{S}$  est le plan de décisions définissant la décision optimale en chaque état  $s \in \mathcal{S}$  à chaque instant  $k$ . Ainsi,  $\vec{a}_0(s)$  correspond au vecteur des décisions indexés par les états  $s$ .  $\mathcal{A}_{k-1}(s) \subset \mathcal{A}$  est l'ensemble des actions admissibles à l'instant  $k-1$  à partir de l'état  $s$ . Dans le cas le plus simple,  $\mathcal{A}_{k-1}(s) = \mathcal{A}, \forall s \in \mathcal{S}, k = 2, \dots, K-1$ . La séquence optimale de décisions  $a_{0:K-1}^* = \{a_0^*, \dots, a_{K-1}^*\}$  et la séquence d'états associée  $s_{1:K-1}^* = \{s_1^*, \dots, s_{K-1}^*\}$  sont alors obtenues à partir du plan de décisions, en utilisant, par exemple, une procédure de type *back-tracking*. Pour tenir compte des contraintes de mouvements sur l'orientation liées à notre problème, il convient d'adapter la relation de récurrence pour les PDM comme proposée dans [PL02], en précisant à chaque étape l'ensemble des actions admissibles. Les contraintes sont caractérisées par la matrice  $\delta(.,.)$  introduite au paragraphe 8.1.1. L'équation (8.7) doit être modifiée comme suit :

$$\begin{aligned}
V_0(s) &= c_s(\text{initialisation}) \\
V_k(s) &= \max_{a \in \mathcal{A}_{k-1}(s)} \left[ \sum_{s' \in \mathcal{S}} \{c_{ss'}(a)\delta(a, a') + V_{k-1}(s')\} T_{ss'}^k(a) \right] \\
a_{k-1}(s) &= \arg \max_{a \in \mathcal{A}_{k-1}(s)} \left[ \sum_{s' \in \mathcal{S}} \{c_{ss'}(a)\delta(a, a') + V_{k-1}(s')\} T_{ss'}^k(a) \right]
\end{aligned} \tag{8.8}$$

où  $a'$  est l'action optimale choisie à l'étape  $k-2$  pour atteindre l'état  $s'$ . Quelques règles pratiques pour l'implémentation de cette version modifiée de l'algorithme de programmation dynamique sont proposées dans [PL02].

Etant donné l'ensemble des états atteignables  $\mathcal{S}$ , l'ensemble des actions  $\mathcal{A}$ , la matrice des contraintes de mouvement et la matrice de coûts  $\Upsilon = (c_{ss'}(a))$ , une séquence optimale (si elle existe) peut être calculée à partir d'un algorithme capable de résoudre l'équation (8.8). Cependant, la mise en oeuvre de cette approche nécessite de vérifier l'applicabilité du principe de Bellman, qui impose certaines propriétés algébriques sur la fonctionnelle de coût. Comme démontré dans [LT97], la plupart des fonctionnelles objectif basées sur le déterminant de la BCRB, ne respecte pas la propriété permettant de garantir l'applicabilité du principe d'optimalité.

**Proposition 6** [LT97] *si  $\phi$  est une fonctionnelle de la BCRP satisfaisant la propriété garantissant le principe d'optimalité (ou Matrix Dynamic Programming Property) alors elle est forcément de la forme*

$$\phi(\mathbf{M}) = \mathcal{F}(\text{tr}(\mathbf{M}\mathbf{R})) \quad \forall \mathbf{M} \in \mathcal{M}_{n \times n}$$

où  $\mathcal{F}$  est une fonction monotone croissante et  $\mathbf{R}$  une matrice fixée.

En particulier, ce n'est pas le cas des fonctionnelles retenues pour notre problème de planification, qui dépendent du déterminant et de la trajectoire complète. En effet, le coût d'une trajectoire dépend de la totalité de la trajectoire. Pour contourner cette difficulté, nous proposons de résoudre le problème en utilisant une approche heuristique basée sur la méthode de Cross-Entropie (CE) introduite par Rubinstein & al [RK04][DBKMR03].

### 8.2.1 Introduction de la méthode de cross-entropie

La méthode de cross-entropie (CE), développée par Reuven Rubinstein [RK04], a été conçue dans un premier temps comme un outil d'évaluation des probabilités d'événements rares. *Un évènement rare est un évènement de probabilité très faible.* L'étude de telles probabilités est fondamentale dans une analyse de fiabilité, par exemple, lorsque l'on se pose la question de la probabilité d'occurrence d'une panne. Un calcul mathématique ou analytique de cette probabilité n'est pas toujours possible. Dans les cas les plus défavorables, le seul recours est d'évaluer la probabilité de l'évènement rare par la simulation. Or, si la loi à évaluer est utilisée directement pour générer des réalisations de l'évènement rare, le nombre de tirages nécessaire devient largement prohibitif. L'échantillonnage préférentiel (*Importance Sampling*) est une méthode classiquement mise en oeuvre, qui a été discutée dans la présentation du filtre particulaire. L'idée est de procéder à un changement de loi de manière à favoriser l'échantillonnage de l'évènement rare. Toutefois, le paramétrage de ce changement de loi est en général difficile. La CE est une méthode itérative pour réaliser cette tâche en s'appuyant sur une famille de lois paramétriques dédiées.

Après une introduction de la méthode de cross-entropie pour le tirage d'événements rares, nous expliquerons comment cette méthode a été adaptée pour l'optimisation. Cette utilisation particulière de la CE se justifie par le fait que le tirage de l'optimum d'une fonction correspond, en général, à un évènement rare. Ce paragraphe du chapitre est volontairement succinct. Une lecture de l'ouvrage introductif [RK04] ou du tutorial [DBKMR03], qui en ont été la source d'inspiration, peuvent constituer un excellent complément. Par ailleurs, une documentation importante, avec de nombreux cas d'application, est disponible à l'adresse <http://www.cemethod.org>. Pour la présentation des éléments qui suivent, nous introduisons les notations suivantes :

- [Kronecker] Étant donnée une proposition logique  $A$ , la quantité  $\delta[A]$  vaut 1 si  $A$  est vraie, et vaut 0 dans le cas contraire.
- La quantité  $\mathbf{E}_p f(x) = \int_X f(x)p(x) dx$  désigne l'espérance de la valeur  $f(x)$  pour la densité de probabilité  $p$  associée à la variable  $x \in X$ .
- Étant donné un sous-ensemble mesurable  $Y \subset X$  et une densité de probabilité  $p$  sur  $X$ , la quantité  $\mathbf{P}_p(Y) = \mathbf{P}_p(x \in Y) = \mathbf{E}_p \delta[x \in Y] = \int_Y p(x) dx$  est la probabilité de l'évènement  $x \in Y$ .

#### 8.2.1.1 Probabilité d'un évènement rare

Nous supposons donnés un espace mesurable  $X$  et une densité de probabilité  $p$  sur celui-ci. Sur l'espace  $X$  est définie une fonction mesurable  $f$  à valeurs réelles. Nous souhaitons évaluer la probabilité pour que la fonction  $f$  dépasse un certain seuil  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Lorsque cette probabilité est très faible, typiquement si  $f$  évalue le dysfonctionnement d'un système,  $F_\gamma = \{x \in X / f(x) \geq \gamma\}$  est un *évènement rare*.

#### Méthodes d'échantillonnage

**Monte-Carlo.** Soient  $x_1, \dots, x_N$  des tirages de la variable  $x$  selon la loi  $p$ . La probabilité  $P_\gamma = \mathbf{P}_p(f(x) \geq \gamma) = \mathbf{P}_p(F_\gamma)$  peut s'estimer par la moyenne empirique

$$\hat{P}_\gamma = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta[f(x_n) \geq \gamma].$$

La variance de cet estimateur non biaisé est alors donnée par

$$\mathbf{E}_p(\hat{P}_\gamma - P_\gamma)^2 = \frac{1}{N} P_\gamma(1 - P_\gamma).$$

Puisque nous souhaitons estimer des probabilités  $P_\gamma$  très faibles, la variance n'est pas un bon critère d'évaluation de l'estimateur. L'écart-type relatif est plus approprié

$$\frac{\sigma_\gamma}{P_\gamma} = \sqrt{\frac{1 - P_\gamma}{NP_\gamma}}.$$

Nous constatons qu'il est inversement proportionnel à  $\sqrt{NP_\gamma}$ . Ainsi, la moyenne empirique n'est pas un estimateur envisageable lorsque  $F_\gamma$  est un événement rare.

**Échantillonnage préférentiel.** Dans la mesure où la loi  $p$  ne permet pas d'estimer convenablement  $P_\gamma$ , une alternative est d'utiliser une loi de tirage auxiliaire (notons la  $q$ ) permettant un échantillonnage préférentiel autour de l'évènement rare. Considérons alors  $x_1, \dots, x_N$  des tirages de la variable  $x$  selon la loi  $q$ . La probabilité  $P_\gamma$  peut être estimée par la moyenne empirique pondérée

$$\hat{P}_\gamma = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta[f(x_n) \geq \gamma] \frac{p(x_n)}{q(x_n)}.$$

La variance pour cet estimateur est donnée par

$$\mathbf{E}_q (\hat{P}_\gamma - P_\gamma)^2 = \frac{\mathbf{E}_p (\delta[f(x) \geq \gamma] p(x) q(x)^{-1}) - P_\gamma^2}{N}.$$

Cette variance est nulle pour la densité optimale  $q^*(x) = \delta[f(x) \geq \gamma] p(x) P_\gamma^{-1}$ . Malheureusement, la loi  $q^*$  n'est pas accessible, car la probabilité  $P_\gamma$  est inconnue. De manière générale, la définition d'une loi d'échantillonnage  $q$  intéressante n'est pas aisée. La méthode proposée ci-dessous consiste à choisir la loi d'échantillonnage au sein d'une famille de lois  $\pi(\cdot; \lambda) | \lambda \in \Lambda$ . L'idée est d'optimiser le paramètre  $\lambda$ , de manière à minimiser la distance  $\mathcal{D}(q^*, \pi(\cdot; \lambda))$  avec la loi de tirage optimale. Nous choisirons comme critère de distance entre deux probabilités la *divergence de Kullback-Leibler*. Cette pseudo-distance est en fait une mesure de l'entropie *croisée* entre les deux lois

$$\mathcal{D}(q, p) = \mathbf{E}_q \ln \frac{q(x)}{p(x)} = \int_X q(x) \ln q(x) dx - \int_X q(x) \ln p(x) dx.$$

**Échantillonnage à partir d'une famille de lois.** Nous souhaitons donc définir une loi de tirage optimale au sein de la famille de lois  $\pi(\cdot; \lambda) | \lambda \in \Lambda$ . La minimisation de la distance  $\mathcal{D}(q^*, \pi(\cdot; \lambda))$  se traduit par la maximisation de  $\int_X q^*(x) \ln \pi(x; \lambda) dx$ . En prenant en compte la définition de  $q^*$ , nous aboutissons à l'optimisation

$$\lambda_* \in \arg \max_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{E}_q (\delta[f(x) \geq \gamma] \ln \pi(x; \lambda)).$$

À ce stade, nous sommes confrontés au calcul d'une espérance associée à un événement rare. Le calcul du paramètre optimal  $\lambda_*$  nécessite un échantillonnage préférentiel, de loi  $q$  :

$$\lambda_* \in \arg \max_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{E}_q \left( \delta[f(x) \geq \gamma] \frac{p(x)}{q(x)} \ln \pi(x; \lambda) \right).$$

Considérons alors  $x_1, \dots, x_N$  des tirages de  $x$  selon la loi  $q$ . Le paramètre optimal  $\lambda_*$  est approché par l'estimateur  $\hat{\lambda}_*$  ainsi défini :

$$\hat{\lambda}_* \in \arg \max_{\lambda \in \Lambda} \sum_{n=1}^N \left( \delta[f(x_n) \geq \gamma] \frac{p(x_n)}{q(x_n)} \ln \pi(x_n; \lambda) \right). \quad (8.9)$$

La famille  $\pi(\cdot; \lambda) | \lambda \in \Lambda$  est choisie de manière à garantir une solution à cette maximisation. Nous verrons que, dans de nombreux cas, cela ne pose aucun problème dans la pratique. En particulier, la famille des lois dites exponentielles naturelles est intéressante à ce titre [RK04].

Toutefois, l'estimation de  $\lambda_*$  par (8.9) n'est toujours pas satisfaisante. Elle repose sur un échantillonnage préférentiel, dont la loi  $q$  nous est inconnue. Or l'estimation de  $\lambda_*$  a justement pour but de construire une telle loi. Il s'agit en quelque sorte d'un problème de point fixe que la méthode de cross-entropie résout de façon itérative.

**Méthode d'échantillonnage par cross-entropie** Au paragraphe précédent, il a été montré comment optimiser le paramètre d'une famille de lois afin de définir un échantillonnage préférentiel. Toutefois, l'estimation de ce paramètre par (8.9) repose lui-même sur un échantillonnage

préférentiel. Pour contourner cette difficulté, Rubinstein propose une méthode itérative basée sur une relaxation dégressive de l'évènement rare.

Afin de simplifier notre présentation, nous supposons l'existence d'un paramètre  $\lambda_0 \in \Lambda$  tel que  $\pi(\cdot; \lambda_0) = p$ .

**Principe de base.** Considérons une suite  $(\gamma_t | t \geq 1)$  telle que

- l'évènement  $f(x) \geq \gamma_1$  n'est pas rare,
- l'évènement  $f(x) \geq \gamma_{t+1}$  n'est pas rare pour la loi  $\pi(\cdot; \lambda_t)$ ,
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_t = \gamma$ .

Alors, une suite de paramètres  $(\lambda_t | t \in \mathbb{N})$ , avec  $\pi(\cdot; \lambda_0) = p$ , peut être construite en se basant sur une itération de l'équation d'estimation (8.9) :

- générer  $x_1, \dots, x_N$  selon la loi  $\pi(\cdot; \lambda_t)$ ,
- poser  $\lambda_{t+1} \in \arg \max_{\lambda \in \Lambda} \sum_{n=1}^N \left( \delta[f(x_n) \geq \gamma_{t+1}] \frac{p(x_n)}{\pi(x_n; \lambda)} \ln \pi(x_n; \lambda) \right)$ .

L'algorithme proposé par Rubinstein construit la suite  $(\gamma_t | t \geq 1)$  de façon adaptative.

**Construction adaptative des bornes.** En vue d'une construction adaptative de la suite  $(\gamma_t | t \geq 1)$ , un paramètre de sélection  $\rho \in ]0, 1[$  est utilisé pour décrire la vitesse de convergence. La borne  $\gamma_t$  est alors définie comme le  $(1 - \rho)$ -quantile de  $f(x)$  pour la loi  $\pi(\cdot; \lambda_{t-1})$ . Plus précisément, soient  $x_1, \dots, x_N$  les échantillons générés par  $\pi(\cdot; \lambda_{t-1})$ . Supposons ces échantillons ordonnés de manière à avoir  $f(x_n) \leq f(x_{n+1})$  pour  $1 \leq n < N$ . Alors  $\gamma_t$  est définie par  $\gamma_t = \min\{\gamma, f(x_{\lceil (1-\rho)N \rceil})\}$ . Bien entendu, le paramètre  $\rho$  doit être choisi suffisamment grand, car il est une approximation de la probabilité de l'évènement  $f(x) \geq \gamma_t$  pour la loi  $\pi(\cdot; \lambda_{t-1})$ . Enfin, la suite  $(\gamma_t | t \geq 1)$  est croissante à un bruit près. En combinant les constructions de  $(\lambda_t | t \in \mathbb{N})$  et de  $(\gamma_t | t \geq 1)$ , nous aboutissons à l'algorithme de cross-entropie exposé dans [DBKMR03].

**Algorithme intégré.** Posons  $\rho \in ]0, 1[$ . L'algorithme de cross-entropie pour la simulation d'évènements rares s'énonce ainsi

1. choisir  $\lambda_0 \in \Lambda$  tel que  $\pi(\cdot; \lambda_0) = p$ . Poser  $t = 1$ ,
2. générer  $N$  échantillons  $x_1, \dots, x_N$  pour la loi  $\pi(\cdot; \lambda_{t-1})$ . Ordonner ces échantillons de manière croissante selon  $f$ . Calculer le  $(1 - \rho)$ -quantile  $\gamma_t$  :

$$\gamma_t = \min\{\gamma, f(x_{\lceil (1-\rho)N \rceil})\}, \quad (8.10)$$

3. calculer  $\lambda_t$  par la maximisation :

$$\lambda_t \in \arg \max_{\lambda \in \Lambda} \sum_{n=1}^N \left( \delta[f(x_n) \geq \gamma_t] \frac{p(x_n)}{\pi(x_n; \lambda)} \ln \pi(x_n; \lambda) \right), \quad (8.11)$$

4. si  $\gamma_t < \gamma$ , réitérer depuis l'étape 2) en posant  $t \leftarrow t + 1$ ,
5. estimer la probabilité  $P_\gamma$  de l'évènement rare par :

$$\hat{P}_\gamma = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta[f(x_n) \geq \gamma] \frac{p(x_n)}{\pi(x_n; \lambda_t)}. \quad (8.12)$$

**Remarque.** Il existe différentes évolutions de l'algorithme de CE. En particulier, le paramètre de sélection  $\rho$  peut être défini dynamiquement. Dans le cadre des méthodes d'optimisation par CE présentées ci-dessous, des résultats théoriques sur la convergence [DMR04, Mar] ont été établis sur la base de certaines hypothèses d'évolution du paramètre  $\rho$ .

### 8.2.1.2 Méthode d'optimisation par cross-entropie

La communauté s'est vite aperçue que la méthode de tirage par CE pouvait être adaptée et appliquée à l'optimisation. Cela se comprend parfaitement, puisque les paramètres qui optimisent un objectif sont rares et difficiles à trouver en général. Considérons plus précisément l'algorithme présenté en section 8.2.1.1. Cet algorithme repose sur la construction d'une suite de bornes  $(\gamma_t | t \geq 1)$ ,

qui peut être considérée comme croissante à un bruit près. Ces bornes servent à définir des événements  $F_{\gamma_t} = \{x \in X / f(x) \geq \gamma_t\}$  de plus en plus *rarefiés*. Au cours du processus, la construction de  $(\gamma_t | t \geq 1)$  est tronquée par  $\gamma$ , le paramètre de l'évènement rare à évaluer. Toutefois, il est possible de laisser le processus se poursuivre. Cela revient à rarefier la suite des évènements afin de converger vers l'évènement  $F_{\gamma_\infty} = \{x \in X / f(x) \geq \max_{y \in X} f(y)\}$ . Cet évènement est presque vide en général. En définitive, si le processus est itéré suffisamment longtemps, nous aboutissons à la construction d'un paramètre de loi  $\lambda$  tel que la loi  $\pi(\cdot; \lambda)$  soit très resserrée autour de  $F_{\gamma_\infty}$ . Il s'agit là d'une manière probabiliste d'approcher l'optimum de  $f$ .

Cette description du principe de l'algorithme d'optimisation ne doit pas nous cacher certaines difficultés qui conditionnent la convergence de la méthode :

- le choix du paramètre de sélection  $\rho$ , ou de son évolution au cours du processus, qui conditionne le compromis entre vitesse de convergence et niveau d'exploration de l'espace du paramètres à optimiser,
- la définition d'un critère d'arrêt pour la convergence,
- *le choix d'une famille de lois  $\pi$  adaptée au problème à optimiser.*

Comme nous l'avons évoqué précédemment, quelques résultats théoriques répondent aux deux premiers points [DMR04]. Nous ne les aborderons pas et nous nous contenterons de critères approchés simples, mais fonctionnels. Le dernier point est assez délicat à formaliser et doit être abordé au cas par cas. Toutefois, nous verrons que pour notre problème de planification de trajectoires, les lois utilisées se déduisent naturellement du problème posé.

La section suivante présente l'algorithme de CE pour l'optimisation dans sa version initiale et dans sa version dite *lissée*.

### 8.2.1.3 Algorithmes

Considérons  $f$  une fonction de variable  $x \in X$  et à valeur réelle. Nous souhaitons optimiser la variable  $x$  de manière à maximiser  $f(x)$ . Dans ce but, une famille de lois  $(\pi(\cdot; \lambda) | \lambda \in \Lambda)$  est définie.

**Algorithme original.** Donnons nous un paramètre de sélection  $\rho \in ]0, 1[$ . L'algorithme de cross-entropie pour l'optimisation s'énonce ainsi :

1. initialiser  $\lambda_0 \in \Lambda$  ; typiquement ce paramètre est choisi de telle façon que  $\pi(\cdot; \lambda_0)$  soit proche d'une loi uniforme. Poser  $t = 1$ ,
2. générer un ensemble  $E_t$  de  $N$  échantillons pour la loi  $\pi(\cdot; \lambda_{t-1})$ . Sélectionner les  $\lfloor \rho N \rfloor$  meilleurs échantillons pour la fonctionnelle  $f$ . Notons  $S_t \subset E_t$  l'ensemble de ces échantillons. On a ainsi :

$$\#S_t = \lfloor \rho N \rfloor \quad \text{et} \quad \forall x \in S_t, \forall y \in E_t \setminus S_t, f(x) \geq f(y).$$

3. Calculer  $\lambda_t$  par la maximisation :

$$\lambda_t \in \arg \max_{\lambda \in \Lambda} \sum_{x \in S_t} \ln \pi(x; \lambda). \quad (8.13)$$

4. Si le critère d'arrêt n'est pas atteint, réitérer depuis 2) en posant  $t \leftarrow t + 1$ .
5. Supposons que l'étape finale est  $t = t_f$ . Alors, une valeur optimale pour  $f$  peut être estimée par le tirage d'un échantillon au moyen de la loi  $\pi(\cdot; \lambda_{t_f})$ .

Un critère d'arrêt simple est la stationnarité de la borne  $\gamma_t = \inf_{x \in S_t} f(x)$ .

**Remarques.** Comme nous ne cherchons plus à évaluer une probabilité, certaines simplifications apparaissent par rapport à l'algorithme d'échantillonnage. En particulier, l'équation de réactualisation (8.13) ne contient plus le terme de correction  $\frac{p(x)}{\pi(x; \lambda_{t-1})}$ .

Lorsque la variable  $x$  est discrète, la réactualisation (8.13) peut rendre certains échantillons prématurément inaccessibles (notamment par l'annulation de la probabilité de certains états). L'utilisation d'un lissage dans la réactualisation permet d'éviter cela.

**Algorithme lissé.** En plus du paramètre de sélection  $\rho \in ]0, 1[$ , nous définissons un paramètre de lissage  $\alpha$ . Il est supposé que l'ensemble des paramètres de loi  $\Lambda$  est convexe. L'algorithme lissé ne diffère du précédent que par son étape de réactualisation :

3) Calculer  $\kappa_t$  par la maximisation :

$$\kappa_t \in \arg \max_{\kappa \in \Lambda} \sum_{x \in S_t} \ln \pi(x; \kappa),$$

[Réactualisation lissée] Poser  $\lambda_t = \alpha \kappa_t + (1 - \alpha) \lambda_{t-1}$ .

## 8.2.2 Application au problème de planification de trajectoires

L'application de la méthode de cross-entropie à notre problème de planification nécessite de définir une famille de densités  $(\pi(\cdot, \lambda) | \lambda \in \Lambda)$  de probabilité paramétriques adaptée. Ce qui nous importe est la définition de trajectoires admissibles, au sens où elles partent de la position initiale pour arriver dans la zone cible, en un temps maximal borné, tout en respectant les contraintes sur le mouvement. Nous proposons deux méthodes pour définir les échantillons de trajectoires qui conduisent à deux versions de l'algorithme de résolution du problème de planification. Plus précisément, on cherche à générer des séquences d'états ou d'actions de longueur  $K$

- vérifiant  $s_0 = s_i$  (contrainte initiale) et  $s_K \in \{s_f^1, \dots, s_f^{n_f}\}$  (contrainte finale),
- respectant la matrice de contraintes de mouvement  $\delta(a_{k-1}, a_k)$ ,  $\forall k = 1, \dots, K - 1$ ,
- composées au maximum de  $K \leq K_{max}$  actions élémentaires.

Une fois que nous aurons précisé la loi paramétrique qui servira de moteur de proposition de trajectoires candidates, la fonctionnelle objectif  $\phi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  sera appliquée après estimation de la suite des matrices d'information  $J_k$ . A chaque itération de l'algorithme de cross-entropie et à partir des meilleures trajectoires, nous déterminerons les nouvelles valeurs des paramètres de la loi paramétrique, en résolvant le problème d'optimisation de l'étape d'actualisation.

### 8.2.2.1 Algorithme d'optimisation V1

La première méthode permettant de générer des trajectoires consiste à se doter d'une famille de matrices de densités de probabilité discrètes définie par  $\mathbf{P}_{sa} = (p_{sa})$ , avec  $s \in \{1, \dots, n_s\}$  et  $a \in \{1, \dots, n_a\}$  qui modélisent la probabilité de choisir l'action  $a$  dans l'état  $s$ .  $\mathbf{P}_{sa}$  est donc une matrice de taille  $n_s \times n_a$  avec dans notre cas  $n_a = 8$ .

$$\mathbf{P}_{sa} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{17} & p_{18} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n_s 1} & p_{n_s 2} & \cdots & p_{n_s 7} & p_{n_s 8} \end{pmatrix} \quad (8.14)$$

où la  $s^{ime}$  ligne  $P_s(\cdot)$  est une densité de probabilité discrète vérifiant :

$$P_s(i) = p_{si}, i = 1, \dots, 8 \text{ avec } \sum_{i=1}^8 p_{si} = 1.$$

$p_{si}$  est donc la probabilité de choisir l'action  $i$  lorsque l'on est dans l'état  $s$ . Il est possible d'imposer la nullité de certains éléments de cette matrice pour tenir compte de configurations particulières de la carte (obstacles, zones interdites...). Par ce biais, on pourrait notamment prendre en compte une information de type grille d'occupation, comme proposée dans le chapitre sur la génération contrôlée d'un échantillon de cartes à plusieurs niveaux. Pour résoudre notre problème de planification, on est donc amené à optimiser les  $n_s \times n_a$  (ou plus) paramètres  $(p_{sa})$  en utilisant l'algorithme de cross-entropie.

**Génération des trajectoires.** A chaque itération  $t$  de l'algorithme de cross-entropie, il est nécessaire de générer un échantillon de  $N_t$  trajectoires  $(\tau_j^t)_{1 \leq j \leq N_t}$  à partir de  $\mathbf{P}_{sa}^t$  de longueurs  $K_j^t \leq K_{max}$  en respectant les conditions imposées par la matrice  $\delta(\cdot, \cdot)$ . Introduisons les notations suivantes

**Algorithme 13** Principe de génération des trajectoires $j = 0$ Tant que ( $j < N_t$ )

- (1)  $k = 0$ , faire  $s_0 = s_i$ 
  - Générer une action  $a_0^j$  à partir de la loi de probabilité  $P_{s_0}(\cdot)$  et l'appliquer pour atteindre  $s = s_{k+1}$ .
  - Faire  $k = k + 1$  et  $K = 1$ .
- (2) Tant que  $s_k \notin S_f$  faire
  - calculer  $A(\tilde{s}, \tilde{a})_k$ ,
  - si  $A(\tilde{s}, \tilde{a})_k \neq \emptyset$ ,
    - générer une action  $a_k \in A(\tilde{s}, \tilde{a})_k$  selon la densité  $\tilde{\mathbf{P}}_{s_k}(\cdot)$  et l'appliquer pour atteindre  $s = s_{k+1}$ ,
    - faire  $k = k + 1$  et  $K = K + 1$ .
      - + si  $K > K_{max}$  faire  $j = j$  si la stratégie est le rejet et retour en (1), sinon aller en (3),
      - + sinon retour en (2),
  - sinon faire  $j = j$  si la stratégie est le rejet et retour en (1), sinon aller en (3).
- (3) Sauvegarder  $\tau_j^t = (s_i, a_0^j, s_1^j, a_1^j, \dots, s_{K-1}^j, a_{K-1}^j, s_f)$  et  $K_j^t = K$ .
- (4)  $j = j + 1$

- $A(\tilde{s}, \tilde{a})_k = \{a | s_k = \tilde{s}, \delta(a_k = a, a_{k-1} = \tilde{a}) = 1\}$ ,
- le vecteur ligne  $\tilde{P}_s(\cdot)$  tel que

$$\begin{cases} \tilde{p}_{\tilde{s}a} = \frac{p_{\tilde{s}a}}{\sum_{a \in A(\tilde{s}, \tilde{a})_k} p_{\tilde{s}a}} & \forall a \in A(\tilde{s}, \tilde{a})_k \\ \tilde{p}_{\tilde{s}a} = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (8.15)$$

$A(\tilde{s}, \tilde{a})_k$  correspond aux actions admissibles à l'instant  $k$  dans l'état  $s_k = \tilde{s}$ , sachant que  $\tilde{a}$  a été choisi à  $k - 1$  pour atteindre  $s_k$  et que  $\tilde{P}_s(\cdot)$  est la densité normalisée de  $P_s(\cdot)$  en se restreignant à  $A(\tilde{s}, \tilde{a})_k$ . Lors de la phase de tirage des trajectoires, à cause des contraintes de mouvements et la présence des bords, l'ensemble  $A(\tilde{s}, \tilde{a})_k$  peut être vide ou l'ensemble des états finaux inatteignable. Dans ce cas, nous adopterons deux stratégies, l'une qui consiste à rejeter la trajectoire en question, l'autre qui consiste à lui affecter un coût défavorable vis-à-vis du problème d'optimisation (coût égal à  $-\infty$ ). L'algorithme 13 présenté en page 124 décrit le schéma de génération de l'échantillon de trajectoires à chaque itération.

**Remarque.** Si la stratégie retenue n'est pas le rejet des trajectoires non admissibles, on risque de générer essentiellement des trajectoires non informatives au sens où le coût associé sera placé à  $-\infty$  pour le problème de maximisation. Dans ce cas, il convient d'inclure une étape permettant de garantir un nombre de trajectoires admissibles soit suffisamment important.

Une fois obtenu l'échantillon de trajectoires, l'évaluation du coût de la trajectoire est réalisée en trois étapes

- 1) déterminer la séquence équivalente de commandes en orientation  $u_{0:K_j-1}^j$  à partir de  $\tau_j$ ,  $j = 1, \dots, N_t$ ,
- 2) calculer la séquence des matrices  $J_{0:K_j}(u_{0:K_j-1}^j)$  à partir de l'un des algorithmes d'estimation proposés au chapitre 5,
- 3) calculer le coût en utilisant la fonctionnelle  $\phi_i(\tau_j)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, \dots, N_t$  en fonction de l'objectif recherché. Pour des trajectoires non admissibles, le coût est automatiquement positionné  $-\infty$ .

**Etape de mise à jour de la loi.** La mise en oeuvre de l'algorithme de cross-entropie comprend la phase de mise à jour des paramètres de la loi à partir de laquelle les trajectoires ont été générées. Cette étape est réalisée en résolvant un problème de minimisation 8.13 et en utilisant les trajectoires

extrêmes. A partir des  $N_t$  trajectoires, une estimation du quantile  $\gamma_t$  est obtenue en prenant les meilleures trajectoires selon le seuil  $\rho$  spécifié.

Soit  $\tau_j = (s_i, a_0^j, s_1^j, a_1^j, \dots, s_{k-1}^j, a_{k-1}^j, \dots, s_{K_j})$  une trajectoire générée, on a

$$\ln \pi(\tau_j, \mathbf{P}_{\mathbf{sa}}) = \sum_{(s,a)} \# [\tau_j \in \chi_{sa}] \ln p_{sa}, \quad (8.16)$$

où  $\tau_j \in \chi_{sa}$  signifie que la trajectoire  $\tau_j$  contient une visite dans l'état  $s$  où l'action  $a$  est choisie. Puisque pour chaque état  $s$ , la ligne  $P_s(\cdot)$  de  $\mathbf{P}_{\mathbf{sa}}$  est une densité de probabilité, le problème d'optimisation de l'équation (8.13) doit être résolu en respectant la contrainte suivante : la somme de chacune des lignes de  $\mathbf{P}_{\mathbf{sa}}$  vaut 1. On a donc un problème d'optimisation sous contraintes, que l'on peut résoudre en utilisant le lagrangien associé et les multiplicateurs de Lagrange  $(\mu_s)_{\{1 \leq s \leq n_s\}}$

$$\max_{\mathbf{P}_{\mathbf{sa}}} \min_{\mu_1, \dots, \mu_{n_s}} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta [\phi_i(\tau_j) \geq \gamma_t] \ln \pi(\tau_j, \mathbf{P}_{\mathbf{sa}}) + \sum_{s=1}^{n_s} \left( \mu_s \left( \sum_{a=1}^{a=8} p_{sa} - 1 \right) \right), \quad (8.17)$$

Le quantile  $\gamma_t$  est estimé par analyse des coûts des trajectoires de l'échantillon. Après différentiation par rapport aux paramètres recherchés  $p_{sa}$  ( $s \in \{1, \dots, n_s\}$ ,  $a \in \{1, \dots, 8\}$ ), on déduit le système d'équations suivant :

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta [\phi_i(\tau_j) \geq \gamma_t] \# [\tau_j \in \chi_{sa}] = -\mu_s p_{sa}, \quad \forall s.$$

En sommant, relativement à l'indice  $a$  et en appliquant la condition  $\sum_{a=1}^8 p_{sa} = 1$ , on obtient donc

$$\mu_s = -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta [\phi_i(\tau_j) \geq \gamma_t] \# [\tau_j \in \chi_s], \quad (8.18)$$

et la formule de mise à jour des densités

$$p_{sa} = \frac{\sum_{j=1}^N \delta [\phi_i(\tau_j) \geq \gamma_t] \cdot \# [\tau_j \in \chi_{sa}]}{\sum_{j=1}^N \delta [\phi_i(\tau_j) \geq \gamma_t] \cdot \# [\tau_j \in \chi_s]}, \quad (8.19)$$

où  $\tau_j \in \chi_s$  signifie que la trajectoire  $\tau_j$  passe par l'état  $s$ . Ce résultat est intuitivement correct car il indique que la mise à jour des probabilités est obtenue par la mesure de la fréquence du choix d'une action dans un état parmi les meilleures trajectoires de l'échantillon.

### 8.2.2.2 Algorithme d'optimisation V2

L'algorithme précédent s'avère simple, du fait de la famille de loi paramétrique utilisée pour la génération des hypothèses de trajectoires. En effet, elle découle directement de la structure du modèle des trajectoires employé. Néanmoins, elle peut avoir l'inconvénient de générer de nombreuses trajectoires qui sont rejetées parce qu'elles ne respectent pas les différentes contraintes du modèle. Dans cette seconde version de l'algorithme de planification de trajectoires, nous proposons une approche à deux niveaux d'optimisation, permettant d'appliquer directement la méthode de cross-entropie sur des trajectoires « réellement » admissibles, donc sans rejet.

**Une famille de densités mieux adaptée.** Pour générer des trajectoires réellement admissibles nous profitons du fait que notre problème est quasiment structuré comme un Processus de Décision Markovien. A cet effet, nous introduisons des matrices de coûts  $\Upsilon = (c_{ss'}(a))$  de passage d'un état à un état voisin de façon probabiliste. On considère donc une famille  $(\pi(\cdot, \lambda) | \lambda \in \Lambda)$  construite en appliquant un modèle probabiliste à chaque coût  $c_{ss'}(a)$  de déplacement entre deux noeuds de la grille. La loi de probabilité sur  $c_{ss'}(a)$  est pris gaussien et est donc déterminée par deux paramètres

---

**Algorithme 14** Principe de génération des trajectoires version 2.
 

---

Soit  $\pi_\mu^{t-1}(s, a)$  et  $\pi_\sigma^{t-1}(s, a)$  obtenus par l'algorithme de cross-entropie à l'itération  $t - 1$

$j = 0$

Tant que ( $j < N_t$ ),

- (1) générer  $\Upsilon^j = \{c^j(s, a)\}_{n_s \times n_a}$  à partir de  $\pi_\mu^{t-1}(s, a)$  et  $\pi_\sigma^{t-1}(s, a)$ ,
- (2) résoudre le problème d'optimisation de trajectoire à partir de  $\Upsilon^j$ . On cherche la trajectoire  $\tau = \{s_0, \dots, s_{K_\tau}\}$  vérifiant  $s_0 = s_i$ ,  $s_{K_\tau} \in \mathcal{S}^f$ ,  $K_\tau \leq K_{max}$ , les contraintes de mouvement entre deux instants et qui maximise

$$\sum_{l=0}^{K_\tau-1} c^j(s_l, a_l). \quad (8.21)$$

- (3) sauvegarder  $\tau_j = (s_i, a_0^j, s_1^j, a_1^j, \dots, s_{k-1}^j, a_{k-1}^j, \dots, s_{K_j})$ .

- (4)  $j = j + 1$
- 

$$c_{ss'}(a) \sim \mathcal{N}(\mu_{sa}, \sigma_{sa}^2). \quad (8.20)$$

Le vecteur de paramètres  $\lambda$  est par conséquent de taille  $2 \times n_s \times n_a$  et se compose des moyennes et écarts-types des coûts associés à chaque hypothèse de déplacement. On doit tenir compte de deux matrices

- $\pi_\mu(s, a)$  la matrice des moyennes sur les coûts. L'élément en position  $(s, a)$  correspond à  $\mu_{sa}$ .
- $\pi_\sigma(s, a)$  la matrice des écarts-types sur les coûts. L'élément en position  $(s, a)$  correspond à  $\sigma_{sa}$ .

À chaque itération, il est possible de tirer plusieurs réalisations de matrices de coûts  $(\Upsilon^j)_{1 \leq j \leq N_t}$  à partir de ces deux matrices. Chaque matrice de coûts est alors utilisée en entrée d'une procédure d'optimisation de type programmation dynamique pour proposer un chemin  $(\tau_j)_{1 \leq j \leq N_t}$  respectant les contraintes de mouvements et les conditions aux limites. Il faut noter que nous avons présenté un algorithme de programmation dynamique adapté à notre problème dans les sections précédentes. Cependant, d'autres critères construits à partir des matrices de coûts et algorithmes peuvent être utilisés. Par exemple, des algorithmes de type A\* sont possibles. En fait, seule l'obtention d'une trajectoire admissible est importante à ce stade, le but étant de définir une méthode d'exploration de l'espace des trajectoires admissibles. Pour chaque trajectoire admissible  $\tau_j$  ainsi déduite, on détermine, comme dans le cas de l'algorithme précédent, le coût issu de la BCRB. L'algorithme de génération est décrit dans 14 présenté en page 126 et illustré par le schéma de la figure 8.3.

À chaque itération de l'algorithme de cross-entropie, on génère des trajectoires selon cette approche. Nous devons maintenant analyser comment mettre à jour les matrices  $\pi_\mu(s, a)$  et  $\pi_\sigma(s, a)$ .

**Étape de mise à jour de la loi.** On a de nouveau un problème d'optimisation à résoudre pour l'étape de mise à jour. Soit de nouveau  $\tau_j = (s_i, a_0^j, s_1^j, a_1^j, \dots, s_{k-1}^j, a_{k-1}^j, \dots, s_{K_j})$  une trajectoire générée selon la procédure précédente. Elle est associée à la matrice de coût  $\Upsilon^j$ . On a

$$\ln \pi(\tau_j, \pi_\mu(s, a), \pi_\sigma(s, a)) = \ln \pi(\Upsilon^j, \pi_\mu(s, a), \pi_\sigma(s, a)) \sum_{(s,a)} \ln \mathcal{N}(c^j(s, a), \mu_{sa}, \sigma_{sa}), \quad (8.22)$$

où  $\mathcal{N}(c^j(s, a), \mu_{sa}, \sigma_{sa})$  est la valeur de la densité gaussienne de moyenne  $\mu_{sa}$  et de variance  $\sigma_{sa}^2$  au point  $c^j(s, a)$ . On doit donc maximiser par rapport aux composantes de  $(\pi_\mu(s, a), \pi_\sigma(s, a))$

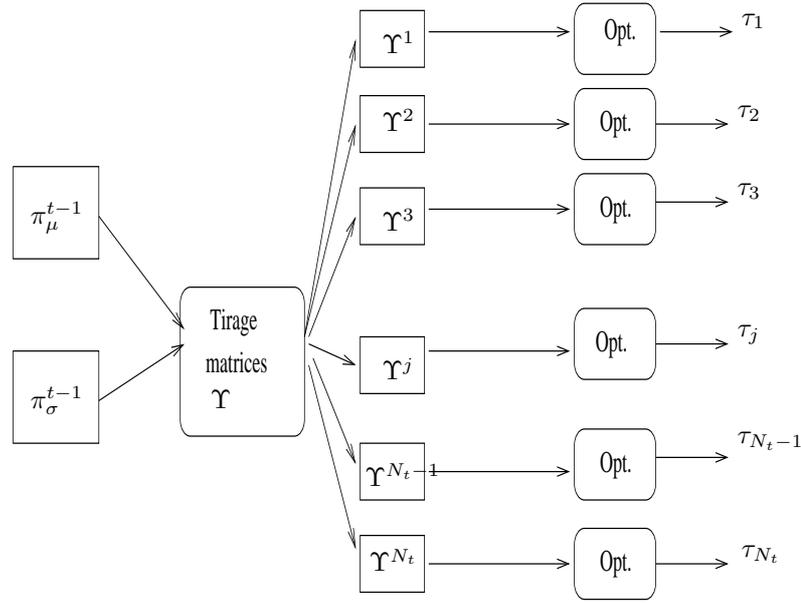


FIG. 8.3 – Schéma de génération de trajectoires à deux niveaux.

$$\max_{\pi_\mu(s,a), \pi_\sigma(s,a)} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta[\phi_i(\tau_j) \geq \gamma_t] \sum_{(s,a)} \ln \mathcal{N}(c^j(s,a), \mu_{sa}, \sigma_{sa}).$$

En considérant la condition de nullité du premier ordre relativement aux variables  $\mu_{sa}$  et  $\sigma_{sa}^2$ , on obtient les équations

$$\begin{aligned} -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta[\phi_i(\tau_j) \geq \gamma_t] \frac{(c^j(s,a) - \mu_{sa})}{\sigma_{sa}^2} &= 0 \\ -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta[\phi_i(\tau_j) \geq \gamma_t] \left( \frac{1}{\sigma_{sa}} - \frac{(c^j(s,a) - \mu_{sa})^2}{\sigma_{sa}^3} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (8.23)$$

On en déduit les équations de mise à jour

$$\begin{aligned} \mu_{sa} &= \frac{\sum_{j=1}^N \delta[\phi_i(\tau_j) \geq \gamma_t] c^j(s,a)}{\sum_{j=1}^N \delta[\phi_i(\tau_j) \geq \gamma_t]} \\ \sigma_{sa}^2 &= \frac{\sum_{j=1}^N \delta[\phi_i(\tau_j) \geq \gamma_t] (c^j(s,a) - \mu_{sa})^2}{\sum_{j=1}^N \delta[\phi_i(\tau_j) \geq \gamma_t]}. \end{aligned} \quad (8.24)$$

On obtient de nouveau un résultat logique : la mise à jour revient à proposer les expressions empiriques des paramètres des lois normales associées à chaque coefficient de la matrice de coûts en se restreignant aux trajectoires extrêmes.

### 8.3 Analyse du comportement sur un problème simple

Dans cette section, nous analysons le comportement de l'algorithme V1, qui a été implémenté. On considère un problème de plus court chemin sur un graphe de taille  $N_x = N_y = 27$ . Nous

recherchons la trajectoire de longueur minimale partant du point  $(30, 130)$  et arrivant au point  $(230, 130)$  parmi les trajectoires de longueur au plus égale à  $K = 60$  déplacements élémentaires. Nous présentons le résultat obtenu avec le jeu de paramètres :

- Echantillons de 1000 trajectoires dont 200 sont utilisées pour l'apprentissage des paramètres de la loi ( $\rho = 0.2$ ).
- 20 itérations de l'algorithme,
- un paramètre de lissage  $\alpha = 0.4$  pour la mise à jour des paramètres de la loi à chaque itération.

À l'initialisation, le choix d'une action est équiprobable en chacun des noeuds de la grille. À partir de la matrice des probabilités équiprobables, la meilleure trajectoire tirée est représentée en noir sur la figure 8.4 (a). Après 20 itérations de l'algorithme, la meilleure trajectoire choisie à partir de la matrice des probabilités optimisée est tracée en vert et correspond à la trajectoire optimale au sens du plus court chemin. Pour illustrer la convergence, nous avons présenté sur la figure 8.4 (b), l'allure de l'estimateur du quantile  $\gamma_t$  et le coût de la meilleure trajectoire parmi les 1000 générées. On constate donc une convergence de ces deux paramètres autour de la valeur optimale.

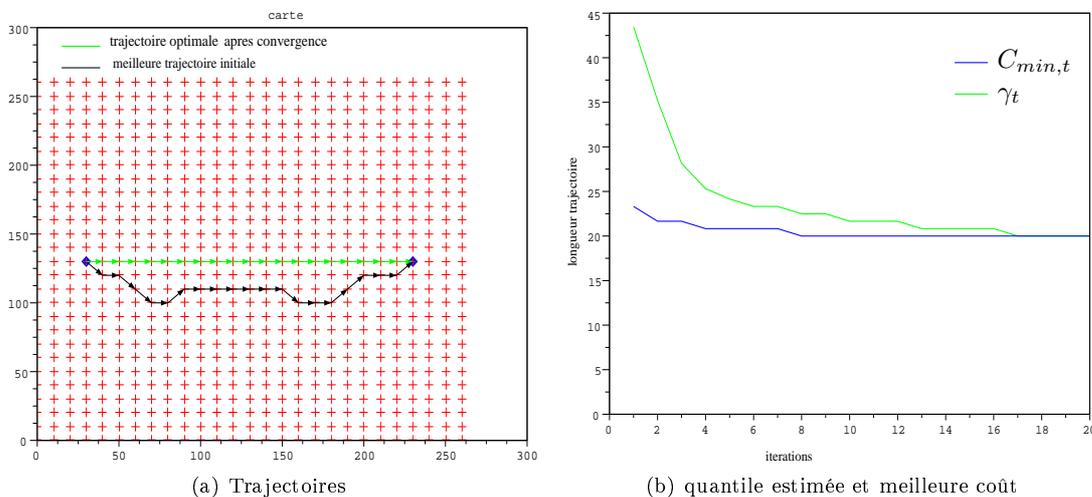


FIG. 8.4 – Comportement de l'algorithme V1 pour le plus court chemin.

## 8.4 Quelques exemples

### 8.4.1 Des exemples génériques

Nous considérons tout d'abord quelques scénarios génériques pour lesquels la carte embarquée contient un amer. Nous faisons aussi varier les paramètres de modélisation et de planification, comme les caractéristiques du capteur de perception, la longueur du chemin maximum admissible  $K_{max}$ , le niveau et l'orientation de l'erreur sur les amers. Pour l'ensemble des scénarios, nous avons une zone d'évolution carrée définie à partir des limites  $[1\ 260] \times [1\ 260]$  et discrétisée par pas élémentaires en  $x$  et  $y$  de  $\delta_x = \delta_y = 10$ . Nous avons donc 279 états. L'objectif est de relier les points  $A = (30, 130)$  et  $B = (230, 130)$  en minimisant une des fonctionnelles  $\phi_i$  calculées à partir d'une approximation de la borne sur l'erreur d'estimation de  $X_k$ , en chaque point d'acquisition de mesures. Pour l'optimisation basée sur la méthode de cross-entropie, nous utilisons une population de 3000 trajectoires dont 30% servent à la mise à jour des paramètres de la famille de proposition de trajectoires.

**scénario 1.** Dans ce scénario, nous avons un amer dont la position est supposée parfaitement connue et placé au centre de la carte et au dessus de la ligne droite reliant les points de départ et d'arrivée. Nous disposons d'au plus  $K_{max} = 60$  mouvements élémentaires possibles et les variations d'orientation entre deux instants consécutifs sont bornées en absolu par  $\frac{\pi}{2}$ . Le capteur est

omnidirectionnel, avec une distance maximale de détection  $d_+ = 50$  m soit 5 pas élémentaires de la grille. Sur la figure 8.5, nous présentons les trajectoires proposées par l'algorithme V1 pour les trois fonctionnelles :

- meilleure performance finale (courbe en bleu cyan),
- meilleure performance moyenne (courbe en bleu foncé),
- meilleure performance au sens min max (courbe en rouge).

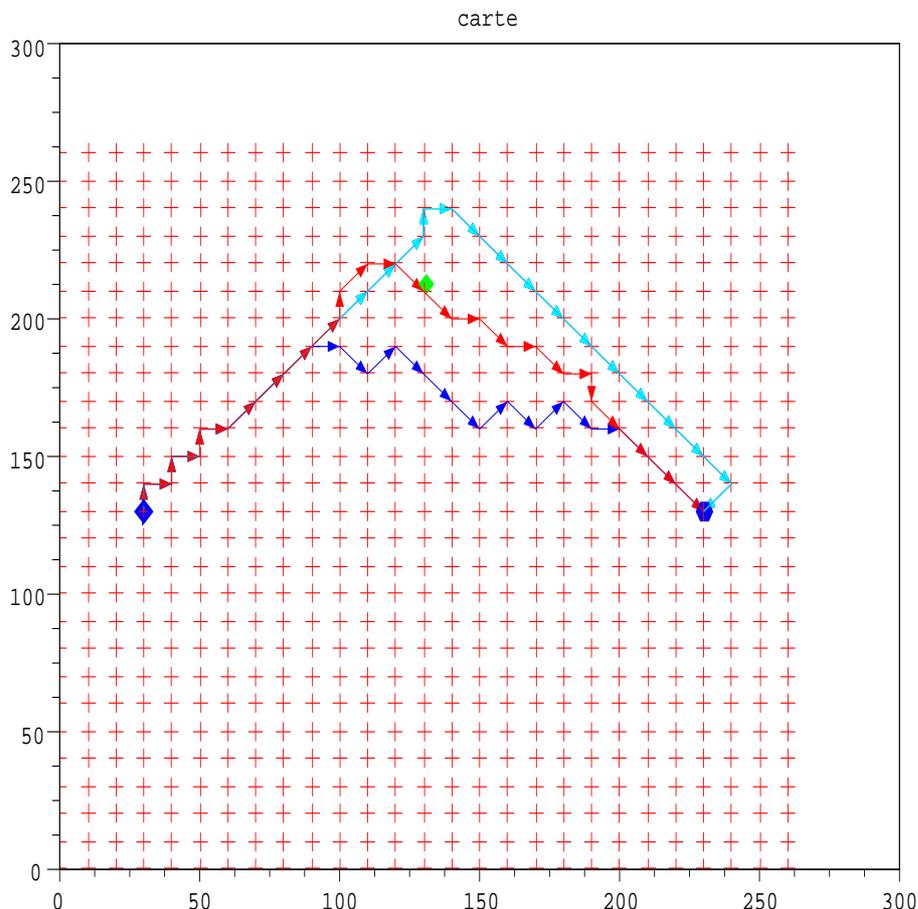


FIG. 8.5 – Trajectoires optimales pour le scenario 1.

Le comportement de l'algorithme semble cohérent. Les trajectoires suggérées comportent des manoeuvres permettant de s'orienter vers l'amer afin d'améliorer la performance de localisation. On peut noter que les fonctionnelles associées à la performance finale et *minmax* imposent des déplacements qui amènent à se rapprocher au plus près de l'amer contrairement au critère basé sur la performance moyenne. Pour illustrer la convergence de l'algorithme, le tracé de l'évolution du paramètre  $\gamma_t$  et du coût de la meilleure trajectoire  $C_{min,t}$  sont représentés sur les figures 8.6 (a) et (b). On peut aussi noter que les trajectoires proposées ont des longueurs relativement inférieures à la longueur maximale autorisée  $K_{max} = 60$ . Une explication possible est la limite de perception du capteur. Plus la trajectoire est longue, plus il est probable que le mobile soit situé dans des zones peu informatives sauf si on s'appuie sur des comportements atypiques, si la contrainte sur l'orientation n'est pas violées, permettant de rester à proximité de l'amer (effet bang-bang, rotation...) le plus longtemps possible. Enfin, nous avons reporté sur les figures uniquement la meilleure trajectoire proposée à la dernière itération de l'algorithme. Cependant, nous avons remarqué en analysant les dernières itérations que plusieurs trajectoires avec le même niveau de performance mais des longueurs différentes ont été tirées. En d'autres termes, l'approche proposée offre la possibilité de choisir parmi un ensemble de solutions, donc une faible prédictibilité. Cette propriété peut avoir un intérêt opérationnel dans certains contextes.

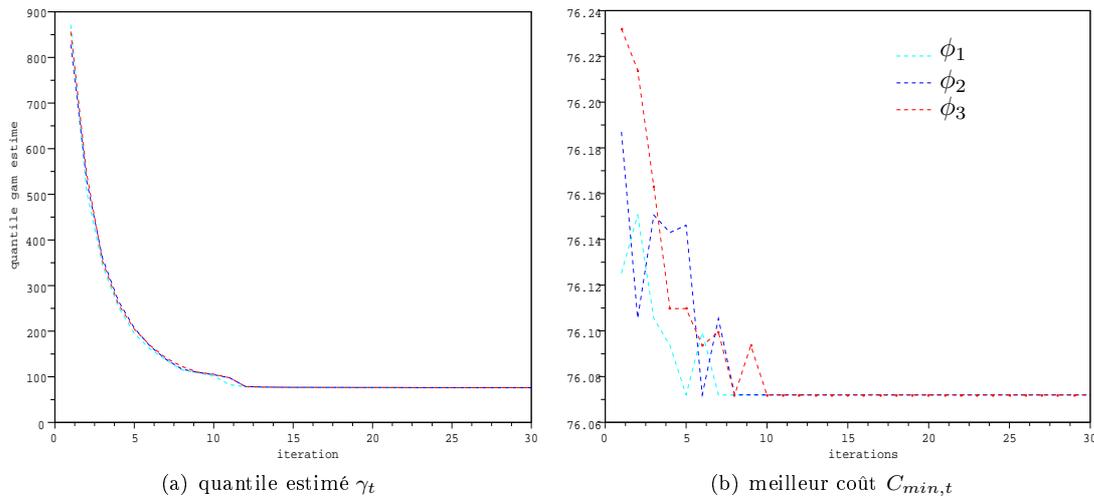


FIG. 8.6 – Illustration de la convergence pour le scénario 1.

**scénario 2.** Nous avons toujours un amer disponible pour la localisation mais avec une position incertaine avec une erreur homogène en  $x$  et  $y$  caractérisée par une variance  $\sigma^2 = 16 \text{ m}^2$ . Nous réalisons l’optimisation avec les trois fonctionnelles avec  $K_{max} = 100$ . Les meilleures trajectoires proposées après convergence de l’algorithme sont présentées sur la figure 8.7 (a) (b) et (c). Comme attendu, on note une modification des trajectoires optimales due à la prise en compte de l’erreur de carte.

**scénario 3.** Contrairement au scénario précédent, nous considérons un modèle de capteur permettant une perception de l’amer en tout point de l’espace. Le paramètre  $d_+$  est pris suffisamment grand. Nous conservons d’abord l’amer avec une erreur sur sa position homogène de l’ordre de  $\sigma = 4$ , puis modifions la structure de l’erreur de l’amer avec une ellipse d’incertitudes sur le grand axe de  $\sigma_1 = 4$  et  $\sigma_2 = 2$  sur le petit axe. On suppose que le grand axe de l’ellipse d’erreur fait un angle de  $45 \text{ deg}$ . avec la direction horizontale. Nous réalisons l’optimisation pour le critère basé sur la performance moyenne sur la trajectoire. Les meilleures trajectoires proposées après convergence de l’algorithme sont présentées sur la figure 8.8 (a) et (b).

Une erreur non homogène sur la position du mobile impacte le choix de la trajectoire. Sur cet exemple, cela se traduit par une manoeuvre en début de trajectoire à l’opposé des cas précédents. Le mobile s’éloigne afin de réduire l’effet de l’incertitude rajoutée par l’erreur de carte. Comme nous l’avons montré lors du développement de la borne, cet effet dépend de la distance à l’amer et de la différence d’orientation entre le vecteur formé avec l’amer et le grand axe de l’ellipse d’erreur sur l’amer.

### 8.4.2 Un scénario plus complexe

Dans les exemples précédents, nous avons analysé le comportement de l’algorithme d’optimisation avec une carte composée d’un unique amer. Nous considérons maintenant une configuration avec plusieurs amers. La qualité géométrique des amers varie en fonction de leur positionnement dans le plan. Sur la figure 8.9, nous représentons les amers et les ellipses représentatifs de l’erreur sur leurs positions. Les amers situés sur les bords de la carte (en haut et en bas) sont de meilleures qualités que ceux au centre et proche du point à atteindre.

Nous recherchons la trajectoire permettant de rejoindre les points  $(40, 140)$  et  $(220, 140)$  en utilisant une grille de résolution  $\delta_x = \delta_y = 20$  pour la zone définie par les limites  $[1\ 260] \times [1\ 260]$ . Le capteur est toujours omnidirectionnel et dispose d’une distance de détection maximale de  $d_+ = 60$  (3 fois la résolution de la grille). Nous considérons une optimisation, à partir de l’algorithme VI, avec une population de trajectoires de taille 10000. Les 40% meilleures trajectoires sont utilisées pour l’apprentissage de la loi de tirage. Les trajectoires recherchées sont composées d’au plus 25

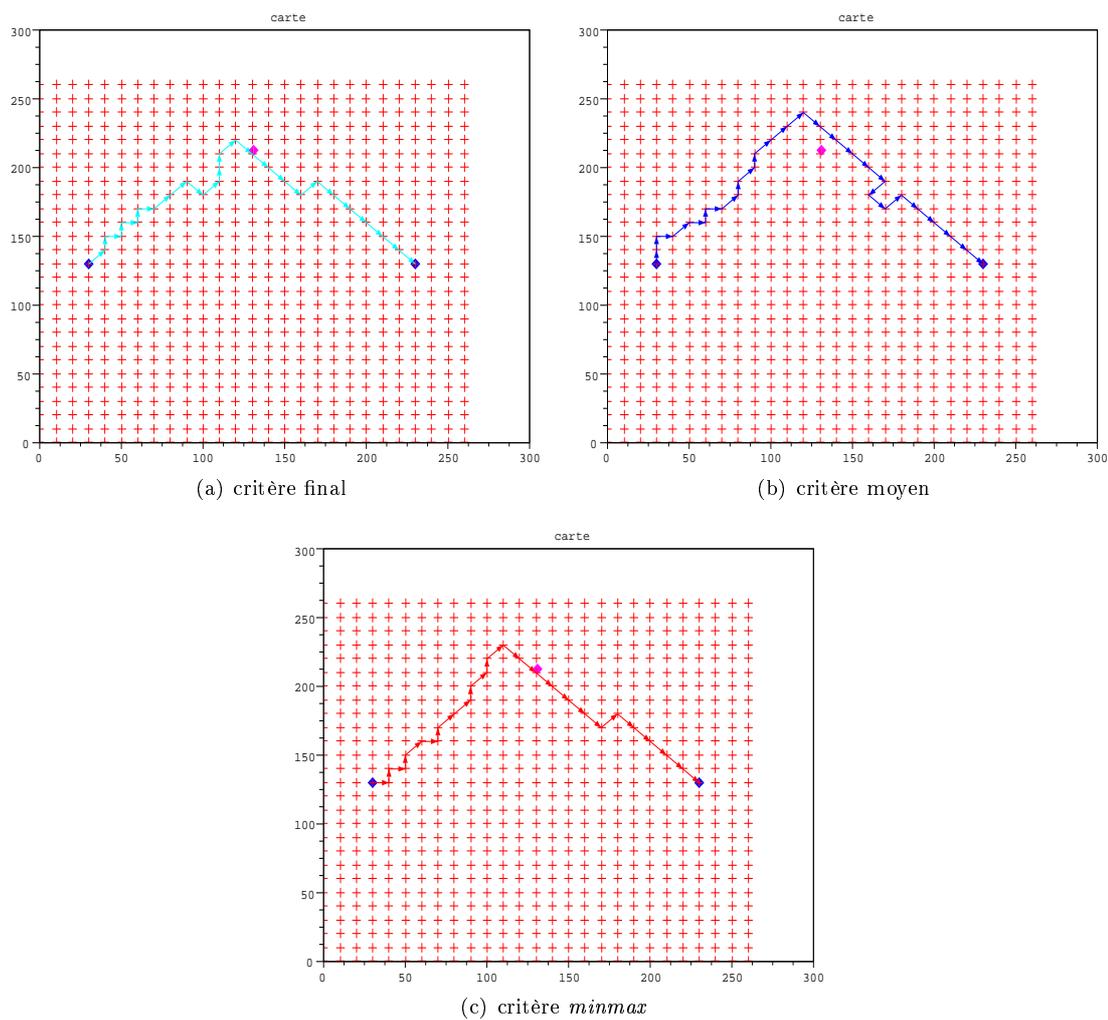


FIG. 8.7 – Trajectoires optimales pour le scenario 2.

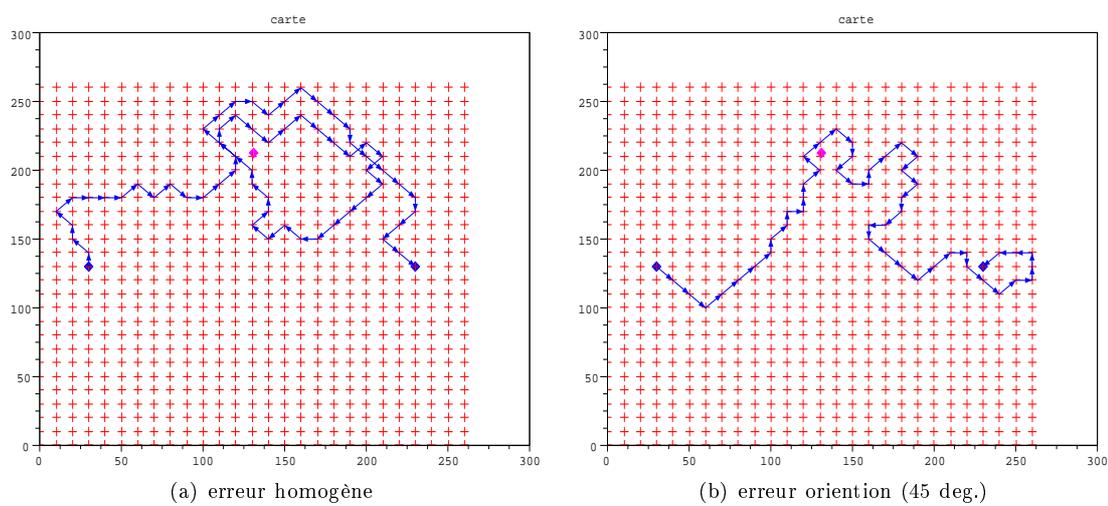


FIG. 8.8 – Trajectoires optimales pour le scenario 3.

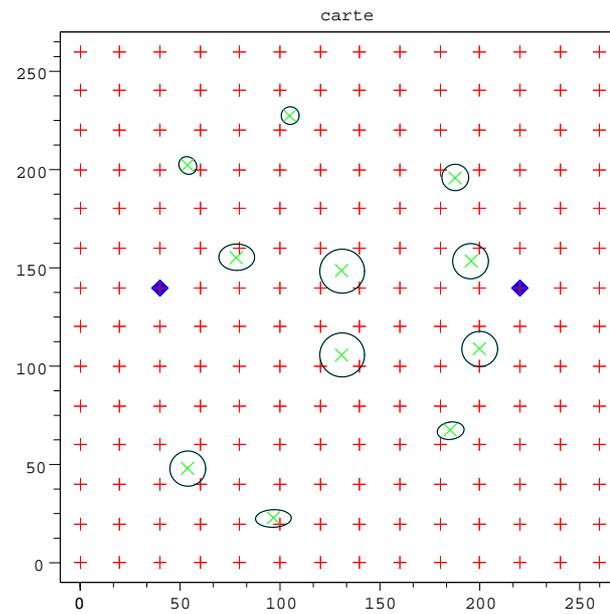


FIG. 8.9 – Positionnement des amers et ellipses d'erreur.

déplacements élémentaires sur la grille et la variation de déplacement entre deux instants consécutifs est inférieure à  $\frac{\pi}{4}$ . Le coût d'une trajectoire est obtenu à partir du critère moyen  $\phi_1$  sur l'erreur de position. Les solutions proposées par l'algorithme sont présentées sur les figures 8.10 ((a) et (b)), pour la carte parfaite et 8.11 ((a) et (b)), pour la carte avec erreurs sur les amers. Lorsque

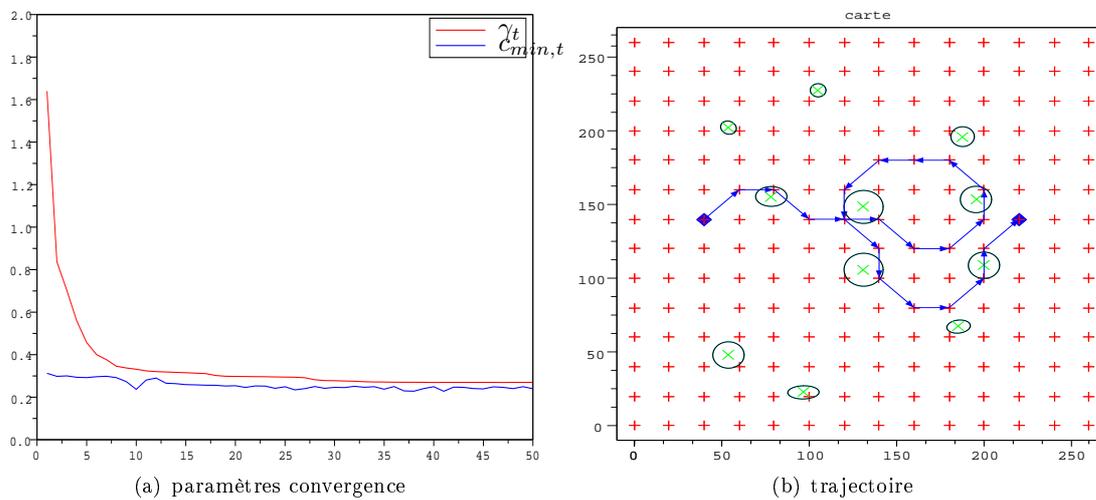


FIG. 8.10 – Trajectoires optimales sans erreurs.

l'incertitude de la carte n'est pas prise en compte dans la mesure de performance, l'algorithme propose une trajectoire qui permet d'acquérir un maximum d'information en utilisant le plus grand nombre de déplacements élémentaires possibles et en effectuant des manoeuvres pour obtenir des configurations de triangulation intéressantes. On peut noter que ces manoeuvres sont réalisées autour des amers centraux et proches du but à atteindre. Quand on considère l'incertitude sur les amers, le comportement est différent. D'abord, les déplacements sont effectués dès le départ vers les zones où les amers sont de bonnes qualités (en haut à gauche). L'autre point est le nombre relativement restreint de déplacements élémentaires utilisés. La stratégie consiste donc à atteindre le plus rapidement possible le but final en s'appuyant sur des mesures provenant des amers les plus

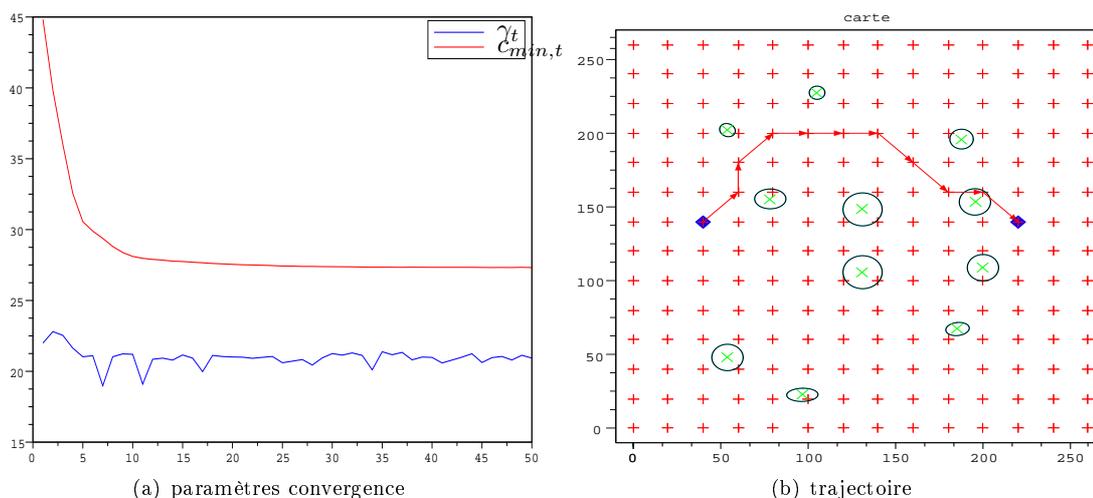


FIG. 8.11 – Trajectoires optimales avec erreurs.

précis.

## 8.5 Analyse de la convergence par la théorie des Valeurs Extrêmes

Nous avons proposé une méthode pour la planification de trajectoires pour la fonctionnelle déduite de la borne de Cramér-Rao a posteriori en utilisant la méthode de cross-entropie. Si les solutions proposées pour les différents exemples considérés semblent « bonnes » pour la fonctionnelle considérée, nous souhaitons définir une approche permettant de mieux appréhender la « qualité » des solutions. Pour cela, on propose de s'appuyer sur la théorie des *valeurs extrêmes* pour analyser le comportement de l'algorithme précédent lorsque l'on s'approche de la valeur optimale. Nous donnons tout d'abord un aperçu des principaux résultats de la théorie des valeurs extrêmes, puis nous montrons comment ils peuvent être appliqués pour la caractérisation de la performance de notre algorithme d'optimisation.

### 8.5.1 Introduction à la théorie des valeurs extrêmes (TVE)

Les résultats de la théorie des valeurs extrêmes sont très utilisés dans la plupart des problèmes traitant de la gestion de risques. En effet, dans ces situations, on est amené à étudier les propriétés probabilistes des valeurs extrêmes d'une suite de variables aléatoires pour aider à la prise de décision. On s'intéresse alors à l'estimation de la queue de la distribution de ces variables aléatoires [Col99] [Gar02], dont l'échantillon observé disponible est souvent de trop petite taille pour mettre en oeuvre les techniques statistiques classiques. Nous avons abordé ces problématiques d'événements rares lors de l'introduction de l'algorithme de cross-entropie. En effet, contrairement au cadre traditionnel de la statistique, qui s'intéresse à l'analyse des comportements moyens d'un phénomène, la TVE tente d'apporter des outils pour la compréhension des réalisations extrêmes, et souvent plus rares. Elle permet d'extrapoler le comportement de la queue de distribution à partir des plus grandes données observées. Cette théorie est encore récente et la plupart des résultats développés portent sur des phénomènes aléatoires caractérisés par des variables à une dimension et faiblement corrélées. Les cas à forte corrélation et multidimensionnel constituent des axes de recherche actuels.

**Quelques notions introductives.** Considérons  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , un échantillon représentatif d'une variable aléatoire  $X$  de fonction de répartition inconnue  $F(x)$ . On suppose de plus que  $F(x)$  est de support fini et de limite droite

$$\omega(F) = \sup \{x : F(x) < 1\}.$$

La TVE s'intéresse à ce qui se passe au-delà de l'échantillon observé. Il existe deux approches pour l'analyse du comportement extrême de  $X$ . La première cherche à caractériser la *loi du maximum*  $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , qui n'est autre que<sup>2</sup>  $F^n(x)$ . On définit un équivalent du théorème central limite pour la moyenne pour  $M_n$  qui décrit les limites possibles pour la loi du maximum. On suppose que la loi de  $X$  est dans le « domaine d'attraction » d'une loi des extrêmes [EK97]. En d'autres termes, il existe  $\xi \in \mathbb{R}$ , et des suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathbb{R}^+$  tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = H_\xi(x)$$

où  $H_\xi$  est la fonction de répartition de la loi des valeurs extrêmes :

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp\left(- (1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}}\right) & \text{pour } x \geq \frac{-1}{\xi}, \text{ si } \xi \neq 0 \\ \exp(-\exp(-x)) & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \text{ si } \xi = 0. \end{cases}$$

On peut déduire de cette hypothèse que le comportement de la queue de distribution dépend du paramètre  $\xi$ , *l'indice des valeurs extrêmes*. On dit que la fonction  $F$  est dans le domaine d'attraction de Fréchet, de Gumbel ou de Weibull pour respectivement  $\xi > 0$ ,  $\xi = 0$  et  $\xi < 0$ . L'estimation des paramètres de la loi limite est en pratique difficile, car on ne dispose en général que d'un échantillon, et donc d'une unique observation du maximum. Une manière de faire est de scinder l'échantillon par blocs et de créer ainsi de façon superficielle des observations du maximum. La seconde méthode employée pour l'estimation de la queue de distribution utilise une part plus importante des données observées, en considérant la notion d'excès de la variable  $X$  par rapport à un réel suffisamment « grand » [EK97]. Soit  $u$  un seuil fixé suffisamment grand ( $u < \omega(F)$ ), on note  $F_u$  la fonction de répartition des excès au dessus du seuil  $u$  définie par

$$F_u(y) := \begin{cases} P(X - u \leq y | X > u), & 0 \leq y \leq \omega(F) - u \\ 0 & y < 0. \end{cases}$$

On peut noter la relation avec la fonction de répartition  $F$

$$\begin{aligned} F_u(y) &= \frac{F(u+y) - F(u)}{1 - F(u)} \\ &= P(u < x \leq u+y). \end{aligned} \tag{8.25}$$

L'objectif est d'obtenir une estimation relativement précise de  $F_u$  pour mener une analyse sur le comportement de la variable  $X$  lorsqu'elle prend des valeurs importantes. Une grande partie des résultats de la TVE est basée sur le théorème fondamental suivant.

### **Théorème 1 Pickands, Balkema et Haan**

Si  $F$  appartient à l'un des trois domaines d'attraction de la loi des valeurs extrêmes, alors il existe  $\sigma(u) > 0$  et  $\xi \in \mathbb{R}$  tel que

$$\lim_{u \rightarrow \omega(F)} \sup_{0 \leq y < \omega(F) - u} |F_u(y) - G_{\xi, \sigma}(y)| = 0,$$

où  $G_{\xi, \sigma}$  est la distribution de Pareto Généralisée (GPD : Generalised Pareto Distribution) définie par :

$$G_{\xi, \sigma}(y) = \begin{cases} 1 - (1 + \frac{\xi}{\sigma} y)^{-\frac{1}{\xi}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - e^{y/\sigma} & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \tag{8.26}$$

pour  $0 \leq y \leq \omega(F) - u$ .

Ce théorème permet d'obtenir, sous certaines conditions sur  $F$ , une approximation de la distribution (et donc de la loi) des excès  $F_u$  par un modèle paramétrique caractérisé par deux paramètres principaux ( $\xi, \sigma$ ) pour toute valeur du seuil  $u$  fixée

$$F_u(y) \approx G_{\xi, \sigma}(y), \quad u \rightarrow \omega(F).$$

---

<sup>2</sup> $Pr(M_n \leq x) = Pr(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = Pr(X_1 \leq x), \dots, Pr(X_n \leq x) = F^n(x)$

### 8.5.1.1 Estimation des paramètres de la loi des excès et des quantiles extrêmes

On est confronté à l'estimation du couple de paramètres  $(\xi, \sigma)$  à partir de l'échantillon observé  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . On considère l'estimateur  $\hat{\zeta} \triangleq (\hat{\xi}, \hat{\sigma})$  au sens du maximum de vraisemblance. Notons,  $N_u$  le nombre de données observées supérieures au seuil  $u$  indicées de la façon suivante  $(x_{i_i})_{i_i \in L}$  avec  $\text{card}(L) = N_u < n$  et les excès associés  $(y_{i_i})_{i_i \in L}$

$$y_{i_i} = x_{i_i} - u, \quad i_i \in L.$$

Plusieurs méthodes statistiques sont possibles pour l'estimation paramétrique, comme des méthodes graphiques, celles des moments, ou encore l'exploitation de la vraisemblance. Nous détaillons le cas d'une estimation à partir du maximum de vraisemblance. En supposant l'indépendance entre les observations, l'expression de la log-vraisemblance pour le modèle GPD est la suivante :

$$L(\xi, \sigma) = \sum_{i_i \in L} \log \frac{\partial G_{\xi, \sigma}}{\partial y}(y_{i_i}).$$

On doit donc résoudre les problèmes de maximisation des fonctions non linéaires

$$L(\xi, \sigma) = \begin{cases} -N_u \log \sigma - \left(\frac{1}{\xi} + 1\right) \sum_{i_i \in L} \log \left[1 + \frac{\xi}{\sigma} (x_{i_i} - u)\right] & \text{si } \xi \neq 0 \\ -N_u \log \sigma - \frac{1}{\sigma} \sum_{i_i \in L} (x_{i_i} - u) & \text{si } \xi = 0. \end{cases} \quad (8.27)$$

La résolution peut être réalisée à partir de méthodes numériques classiques d'optimisation non linéaire. Une fois déterminé l'estimateur  $\hat{\zeta}$ , l'adéquation du modèle aux données peut être mesurée en utilisant des outils d'exploration permettant une visualisation du comportement asymptotique de la loi. A ce stade, il est important de faire plusieurs remarques sur le choix du seuil  $u$ , qui reste une étape délicate.

1. Plus  $u$  est grand, plus le nombre  $N_u$  d'observations situées au dessus du seuil est petit, et plus l'extrapolation et la précision de l'estimation se dégradent.
2. Le choix d'un  $u$  trop petit peut invalider le résultat de convergence vers la loi de Pareto et fournir une extrapolation de la queue de distribution très éloignée du comportement du phénomène observé.

Cette étape d'estimation des paramètres de la loi de GPD, qui permet d'extrapoler la queue de la distribution, est un préalable pour la détermination de critères d'intérêt pour l'analyse de risque. En fonction de la nature du problème, l'un des objectifs est l'estimation de quantiles extrêmes qui correspondent à des valeurs de la variable qu'il est possible de dépasser avec une très faible probabilité. Soit  $p > 0$  petit, le quantile associé est noté  $x_p$ , (encore appelé Value at Risk ( $VAR_p$ )) correspond à la valeur de  $x$  vérifiant

$$1 - p = F(x_p). \quad (8.28)$$

On peut noter qu'en général, plus  $p$  est petite, plus  $x_p$  est grand. Pour les problèmes d'optimisation utilisant des approches par simulation, on peut souhaiter par connaître le comportement de l'algorithme autour de la valeur optimale au sens d'une fonctionnelle objectif considérée. Le processus stochastique lié au problème d'optimisation peut être vu comme un moyen de générer des observations de la fonctionnelle objectif. En utilisant les valeurs importantes fournies par le simulateur, il est possible d'extrapoler le comportement de l'algorithme lorsque l'on s'approche de la solution maximale. Les quantiles extrêmes peuvent donc être considérés comme des estimateurs (pour une probabilité donnée) de la valeur optimale à atteindre. L'estimation de cette grandeur et son intervalle de confiance obtenus sur la base d'un échantillon fourni par le moteur de simulation apporte des éléments sur la performance du processus stochastique pour le problème d'optimisation.

Pour un comportement conforme à la théorie des valeurs extrêmes, l'expression du quantile extrême d'ordre  $p$  se déduit des équations (8.25) et (8.26) pour un seuil fixé  $u$  (cf. annexe E pour les détails de ce calcul) :

$$x_p := g(\zeta) = u + \frac{\sigma}{\xi} \left[ \left( \frac{n}{N_u} p \right)^{-\xi} - 1 \right], \quad (8.29)$$

et un estimateur peut être directement obtenu à partir de  $\hat{\zeta} = (\hat{\xi}, \hat{\sigma})$  estimé par le maximum de vraisemblance

$$\hat{x}_p = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left[ \left( \frac{n}{N_u} p \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right]. \quad (8.30)$$

### 8.5.1.2 Intervalles de confiance pour les paramètres estimés

Comme dans tout problème d'estimation en statistique, il est intéressant de disposer d'un intervalle de confiance pour ces différents estimateurs. Une première approche consiste à considérer que la distribution des estimateurs  $\hat{\zeta}$  et  $g(\hat{\zeta})$  est une densité normale. L'intervalle de confiance peut alors être calculée à partir d'une approximation de la matrice de covariance de  $\hat{\zeta}$  donnée par l'inverse de matrice d'information de Fisher ou la borne de Cramer-Rao [Sap90]

$$V(\hat{\zeta}) := (I(\hat{\zeta}))^{-1} = (-H(\hat{\zeta}))^{-1}$$

où  $H$  est la matrice Hessienne de la fonctionnelle donnée par la log-vraisemblance  $L(\zeta)$  (cf. équation (8.27)). Ainsi, l'intervalle théorique de confiance de probabilité  $1 - \alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) pour les composantes  $\hat{\zeta}_i$  ( $i \in 1, 2$ ) de l'estimée est donné par

$$CI^1(\hat{\zeta}_i) = \left[ \hat{\zeta}_i - z_{1-\alpha/2} \sqrt{V(\hat{\zeta})_{ii}}, \hat{\zeta}_i + z_{1-\alpha/2} \sqrt{V(\hat{\zeta})_{ii}} \right], \quad (8.31)$$

où  $z_{1-\alpha/2}$  est le quantile d'ordre  $1 - \alpha/2$  de la loi normale centrée et réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

L'intervalle de confiance pour  $\hat{x}_p$  est obtenu à partir de la différentielle par rapport à la fonction  $g$  et la matrice de covariance de  $\hat{\zeta}$

$$CI^1(\hat{x}_p) = \left[ \hat{x}_p - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\nabla_{\zeta} g(\hat{\zeta})^T V(\hat{\zeta}) \nabla_{\zeta} g(\hat{\zeta})}, \hat{x}_p + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\nabla_{\zeta} g(\hat{\zeta})^T V(\hat{\zeta}) \nabla_{\zeta} g(\hat{\zeta})} \right]. \quad (8.32)$$

**Remarque.** Les résultats d'estimation, ainsi que les intervalles de confiance précédents, basés sur le maximum de vraisemblance font l'hypothèse d'une fonction de vraisemblance symétrique (densité normale). En pratique, le tracé de cette fonctionnelle pour une des deux composantes de  $\zeta$  fixé montre une forte asymétrie lorsque l'autre varie. On risque, par cette méthode, d'obtenir des estimations relativement faussées des intervalles de confiance. Pour contourner cette difficulté, on utilise plutôt une méthode plus robuste à l'asymétrie du *profil de vraisemblance* [VM88, KG00, GCL<sup>+</sup>05], qui permet, grâce à un algorithme itératif, de déterminer par dichotomie les bornes des intervalles de confiance. Une présentation des grands principes de la méthode est proposée en annexe E. Elle consiste à analyser des coupes de la surface  $L(\xi, \sigma)$  obtenue en prenant la différence des log-vraisemblances (donc des rapports de vraisemblances) en un point  $\zeta$  quelconque et l'estimateur  $\hat{\zeta}$ ,  $L(\xi, \sigma) - L(\hat{\xi}, \hat{\sigma})$ .

Considérons le paramètre  $\xi$  de  $\zeta$ . Le profil de vraisemblance est la fonction  $\max_{\sigma} L(\xi, \sigma)$  de la variable  $\xi$ . L'intervalle de confiance pour une probabilité  $1 - \alpha$  est donné pour  $\xi$  par

$$CI^2(\hat{\xi}) = \left\{ \xi \mid -2 \left( \max_{\sigma} L(\xi, \sigma) - L(\hat{\xi}, \hat{\sigma}) \right) \leq \chi_{1, \alpha}^2 \right\},$$

où  $\chi_{1, \alpha}^2$  est le  $1 - \alpha$  quantile pour la distribution du  $\chi^2$  à un degré de liberté. De même, pour  $\sigma$

$$CI^2(\hat{\sigma}) = \left\{ \sigma \mid -2 \left( \max_{\xi} L(\xi, \sigma) - L(\hat{\xi}, \hat{\sigma}) \right) \leq \chi_{1, \alpha}^2 \right\}.$$

En ce qui concerne le quantile extrême, il est tout d'abord nécessaire de faire apparaître de façon explicite  $x_p$  dans l'expression de la vraisemblance afin d'appliquer cette technique. A cet effet, l'équation (8.29) est exploitée pour écrire le paramètre  $\sigma$  en fonction de  $\xi$  et  $x_p$ . Cette nouvelle expression de  $\sigma$  peut être ainsi reportée dans l'expression de la loi GPD (cf. équation (8.33))

$$G_{\xi, x_p}(y) = \begin{cases} 1 - \left( 1 + \frac{[(\frac{N}{Nu}p)^{-\xi} - 1]y}{x_p - u} \right)^{-\frac{1}{\xi}} & \text{if } \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-\frac{y}{x_p - u}} & \text{if } \xi = 0. \end{cases} \quad (8.33)$$

De cette nouvelle expression de la loi GPD, on peut définir une expression de la log-vraisemblance sous la forme  $L(\xi, x_p)$ , et déduire par la méthode du profil un intervalle de confiance pour  $\hat{x}_p$

$$CI^2(\hat{x}_p) = \left\{ x_p \mid -2 \left[ \max_{\xi} L(\xi, x_p) - L(\hat{\xi}, \hat{x}_p) \right] \leq \chi_{1, \alpha}^2 \right\}.$$

La figure 8.12 présente un exemple de profil de vraisemblance pour  $x_p$  et l'intervalle de confiance pour une probabilité  $p = 10^{-5}$ .

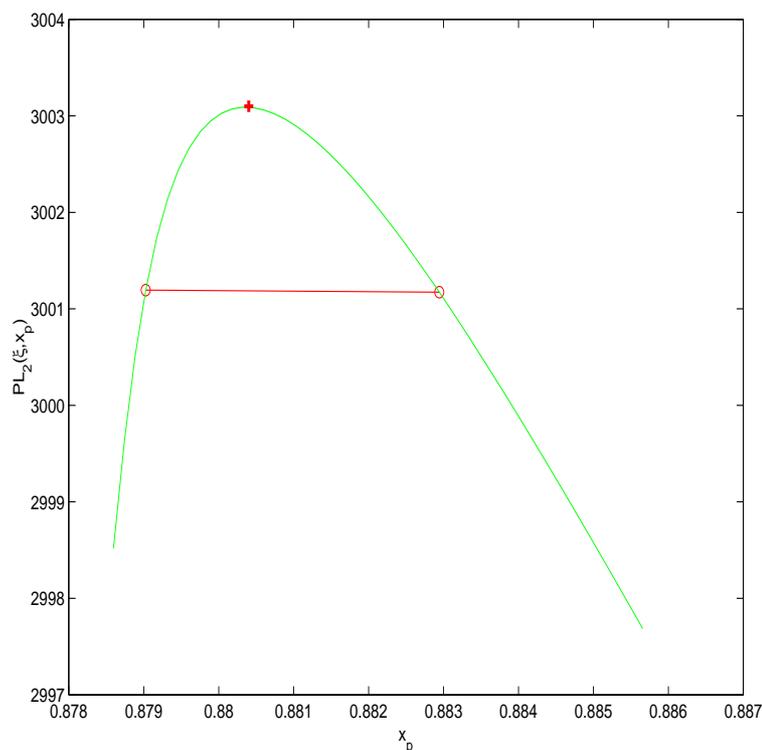


FIG. 8.12 – Un exemple de profil de vraisemblance pour  $x_p$  et intervalle de confiance.

### 8.5.2 Application au problème de planification de trajectoires

Les deux versions de l'algorithme de planification de trajectoires proposé incluent une étape de génération aléatoire de trajectoires avant l'estimation coût lié à la performance de localisation. La première s'appuie sur un algorithme d'acceptation/rejet permettant de garder des trajectoires respectant les contraintes d'orientations entre deux instants, la seconde comprend un algorithme de type programmation dynamique permettant en plus, à partir d'une matrice de coûts, de définir des trajectoires directement admissibles au sens de notre problème. Pour obtenir une évaluation de la qualité de l'optimum fourni par la méthode de cross-entropie, on utilise les méthodes de génération

pour obtenir un échantillon de trajectoires à partir duquel on mène une analyse par la théorie des valeurs extrêmes sur les meilleures d'entre elles.

Considérons un contexte donné (cartographie, contraintes sur le mouvement, conditions aux limites...) pour l'optimisation. On se donne  $N_{TVE}$  trajectoires  $\tau_j$ ,  $j = 1, \dots, N_{TVE}$  générées par le processus de simulation et, pour chacune d'entre-elles, le coût de la fonction objectif  $\phi(\tau_j)$ ,  $j = 1, \dots, N_{TVE}$ . Pour un seuil fixé  $u$  suffisamment grand, on extrapole la queue de la distribution de la variable aléatoire associée à la fonction objectif à partir des  $N_u$  valeurs  $\phi(\tau_{j_1}), \dots, \phi(\tau_{j_{N_u}})$  au dessus du seuil. A partir de la loi paramétrique GPD obtenue, il est alors possible d'estimer des quantiles extrêmes  $x_p$  pour différentes probabilités  $p$  relativement petites, avec leur intervalle de confiance, par la méthode du profil de vraisemblance. Notons  $\hat{x}_p$  l'estimateur du quantile extrême et  $CI^2(\hat{x}_p, \alpha) := [x_p - \delta x_p^{-, \alpha}, \hat{x}_p + \delta x_p^{+, \alpha}]$  son intervalle de confiance pour un seuil de confiance  $\alpha$ . On obtient donc une information sur la meilleure solution atteignable avec la probabilité  $1 - p$ . En effet, on peut déduire une estimation

- de la borne qu'il est raisonnablement possible d'atteindre, dont une approximation est donnée par  $\hat{x}_p + \delta x_p^{+, \alpha}$ ,
- du nombre  $\hat{n}_p^\alpha$  de tirages complémentaires qu'il est nécessaire de produire pour atteindre cette borne.

De façon approximative, ce nombre  $\hat{n}_p^\alpha$  est donné par le nombre moyen de trajectoires observées dont le coût peut être associé à  $\hat{x}_p$ . Une façon de déterminer cette quantité est de retenir les trajectoires dont le coût se situe dans l'intervalle de confiance  $CI^2(\hat{x}_p, \alpha)$

$$\begin{aligned} \hat{n}_p^\alpha &:= Pr(x \in CI^\alpha(\hat{x}_p)) N_u \\ &= (F_u(\hat{x}_p + \delta x_p^{+, \alpha}) - F_u(\hat{x}_p - \delta x_p^{-, \alpha})) N_u. \end{aligned} \quad (8.34)$$

En outre, on peut chercher à déterminer la taille minimale de l'échantillon de trajectoires au dessus du seuil permettant de tirer au moins une trajectoire associée au quantile extrême considéré. Il suffit de vérifier la condition  $n_p^\alpha \geq 1$ , soit

$$N_u^{min} \geq \frac{1}{F_u(\hat{x}_p + \delta x_p^{sup}) - F_u(\hat{x}_p - \delta x_p^{inf})}.$$

La présence d'une trajectoire de coût dans l'intervalle de confiance de  $\hat{x}_p$  permet de disposer d'une approximation de la trajectoire optimale. Il est possible d'effectuer cette analyse pour chaque itération de l'algorithme basé sur la cross-entropie et de comparer la meilleure trajectoire avec l'estimation des quantiles de plus en plus extrêmes pour évaluer la convergence. Une autre démarche consiste à générer un nombre très important de trajectoires en une fois, à réaliser l'estimation de la queue de la distribution et à comparer le positionnement du coût de la trajectoire optimale fournie par l'algorithme pour mesurer sa performance. Un placement dans l'intervalle de confiance, voire au delà, donne une certaine confiance dans le comportement de l'algorithme. C'est cette seconde démarche que nous avons retenue compte tenu de la spécificité des méthodes basées sur la cross-entropie, qui cherche à approcher le plus possible le point extrême.

### 8.5.3 Application sur un scenario

Pour illustrer la méthode proposée, nous considérons deux scénarios. On considère une carte définie sur  $[-4, 54] \times [-4, 54]$ . Nous supposons que la grille est de résolution  $d_x = d_y = 4$ , l'ensemble des états  $\mathcal{S}$  est de cardinal  $N_s = 225$ . Dans les scenarios, l'environnement ne contient pas d'obstacles.

**Scenario 1** Dans ce scenario, il y a 4 amers dans l'environnement. Leurs positions sont données dans le tableau 8.1. Trois des amers sont localisés en haut à gauche, le dernier est au centre. Pour la dynamique du mobile, on suppose qu'il n'y a pas d'erreur sur les commandes et que la matrice de covariance pour la dynamique est identique à celle sur l'erreur de modélisation. On a respectivement pour le modèle d'évolution et d'observation

	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
x	7.2	7.8	22.8	43.1
y	20.4	35.2	42.8	25.8

TAB. 8.1 – Coordonnées des amers scénario 1.

$$P_0 = Q_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad R_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \forall k \text{ pour tous les amers,}$$

où les variances sur la composant orientation et les mesures d'angles sont exprimés en degrés. Le système se déplace à vitesse constante égale à  $4 \text{ m.s}^{-1}$  et les commandes en orientation à chaque instant sont à choisir dans  $\{-\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}\}$ .

Le capteur disponible permet d'acquérir des mesures à partir d'un amer  $f_j$  à l'instant  $t_k$  si

$$\begin{cases} r_- \leq z_r^k(j) \leq r_+ \\ |z_\beta^k(j)| \leq 90 \text{ deg.} \end{cases}$$

avec  $r_- = 0.01 \text{ m.}$ ,  $r_+ = 12 \text{ m.}$  (3 fois la grille de résolution).

Pour le problème de planification, nous considérons des trajectoires composées de moins de  $T_{max} = 30$  déplacements élémentaires. La position initiale et finale est respectivement  $X_0 = (6; 2; 45)$  and  $X_f = (46; 46)$ . On utilise un échantillon de trajectoires  $N_{mc} = 800$  bruitées pour l'estimation de la BCRP. Pour l'analyse des valeurs extrêmes, nous générons 40000 trajectoires admissibles et déterminons le coût associé pour la fonctionnelle moyenne  $\phi_2$ . 2% de l'échantillon est alors utilisées pour l'inférence et l'estimation des paramètres  $(\hat{\xi}, \hat{\sigma})$  de la loi, c'est-à-dire les 800 meilleures. Nous normalisons d'abord l'échantillon de coûts  $\{\phi_2^j\}, j \in \{1, \dots, 40000\}$  et étudions la variable aléatoire équivalente

$$c_2^j = \frac{\phi_2^j - m[\phi_2]}{\sigma[\phi_2]}.$$

$m[\phi_2]$  et  $\sigma[\phi_2]$  sont les moyennes et les variances estimées à partir de l'échantillon de coûts. La figure

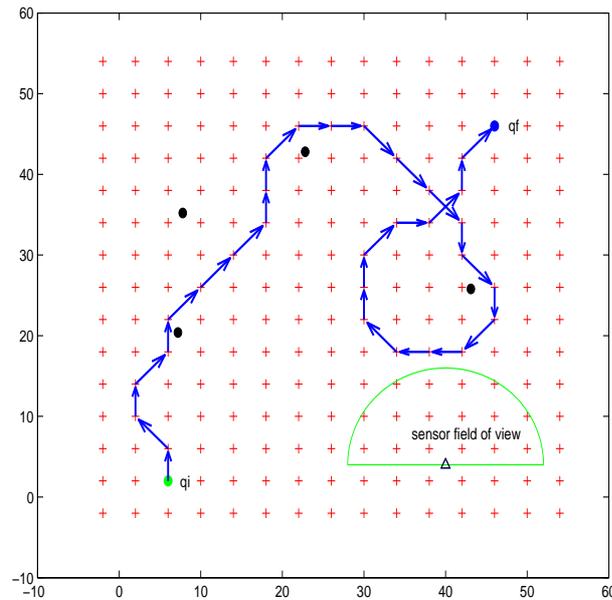


FIG. 8.13 – Meilleure trajectoire parmi les 40000.

8.13 montre la meilleure trajectoire obtenue. Le coût normalisé pour cette trajectoire est égal à  $c_2^{max} \approx 0.8815$ . Nous avons également tracé l'histogramme des 800 valeurs extrêmes de  $c_2$  sur la

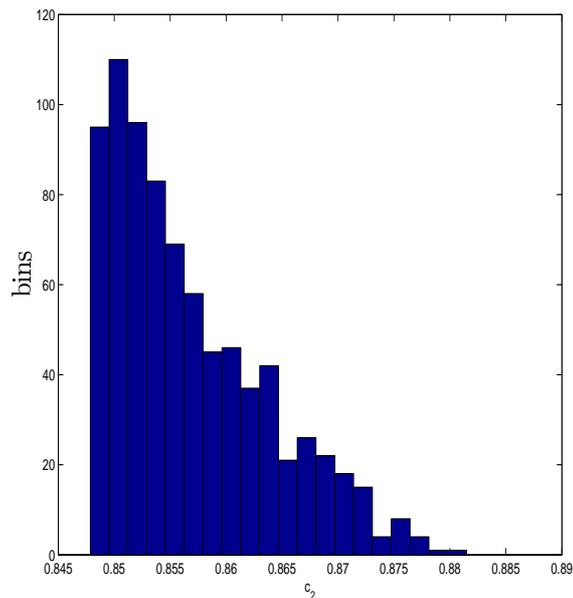


FIG. 8.14 – histogramme des 800 valeurs extrêmes de  $c_2$ .

figure 8.14. Le seuil correspondant au 2% de l'échantillon est  $u = 0.8479$ . Nous avons procédé à l'estimation du extrême  $x_p$  et de son intervalle de confiance à 95% pour la probabilité  $p = 2.10^{-5}$ . Nous avons  $\hat{x}_p = 0.8804$  et les intervalles de confiance par la méthode du profil de vraisemblance et par propagation sont respectivement  $[0.879; 0.8829]$  et  $[0.8758; 0.8849]$ . Nous avons représenté la fonction  $1 - F_u(x)$  sur la figure 8.15 avec  $\hat{x}_p$  et les deux intervalles de confiances (profil de vraisemblance en vert et méthode de propagation en bleu). On peut remarquer que l'intervalle de confiance basé sur la méthode de propagation est plus large et moins précise que celui fourni par la méthode du profil. La fonction du profil de vraisemblance pour le quantile  $x_p$  en utilisant la loi GPD exprimée en fonction de for the  $(\xi, x_p)$  (cf. l'équation 8.33), ainsi que l'intervalle de confiance sont présentés à la figure (8.16).

A partir de l'estimation de  $F(u)$ , nous avons pu calculer une valeur approximative  $\hat{n}_p^\alpha \approx 2.0325$ . Cette valeur est cohérente des observations. En effet, nous avons 2 trajectoires parmi les trajectoires extrêmes qui ont un coût normalisé dans l'intervalle de confiance (cf. figure 8.15).

Nous considérons maintenant la solution obtenue par application de la méthode de cross-entropie. A chaque itération de l'algorithme, on considère l'approximation du quantile  $\gamma(t)$  et le coût de la meilleure trajectoire  $c_2^{max}(t)$ . Pour comparer avec les résultats de l'analyse par valeurs extrêmes, on normalise ce coût par la moyenne  $m[c_2]$  et l'écart-type  $\sigma[c_2]$ . Nous utilisons l'algorithme V1 avec 4000 trajectoires à chaque itération. Nous sélectionnons 10% des trajectoires pour mettre à jour la loi  $\mathbf{P}_{sa}$ . La figure 8.17 montre l'évolution des paramètres  $\gamma(t)$  (en rouge) and  $c_2^{max}(t)$  (en vert). Le meilleur coût parmi les 40000 trajectoires utilisées pour l'analyse des valeurs extrêmes est représenté en bleu sur cette figure. La convergence de l'algorithme est rapide. En effet, les courbes  $\gamma(t)$  et  $c_2^{max}(t)$  se stabilisent autour de la vingtième itération. La méthode de cross-entropie propose pour cet exemple des hypothèses de trajectoires avec une meilleure performance que l'échantillon utilisé pour l'analyse en valeurs extrêmes. Nous avons représenté la meilleure trajectoire proposée par la méthode de cross-entropie lors de la dernière itération (cf figure 8.18). Le coût normalisé de cette trajectoire est 0.8903 qui est supérieure à la borne supérieure de l'intervalle de confiance pour la probabilité  $p = 2^{-5}$  qui est 0.8804.

## 8.6 Conclusions

Nous avons précisé dans ce chapitre notre problème de planification, l'objectif étant de proposer des hypothèses de trajectoires susceptibles de fournir des performances de localisation suffisantes

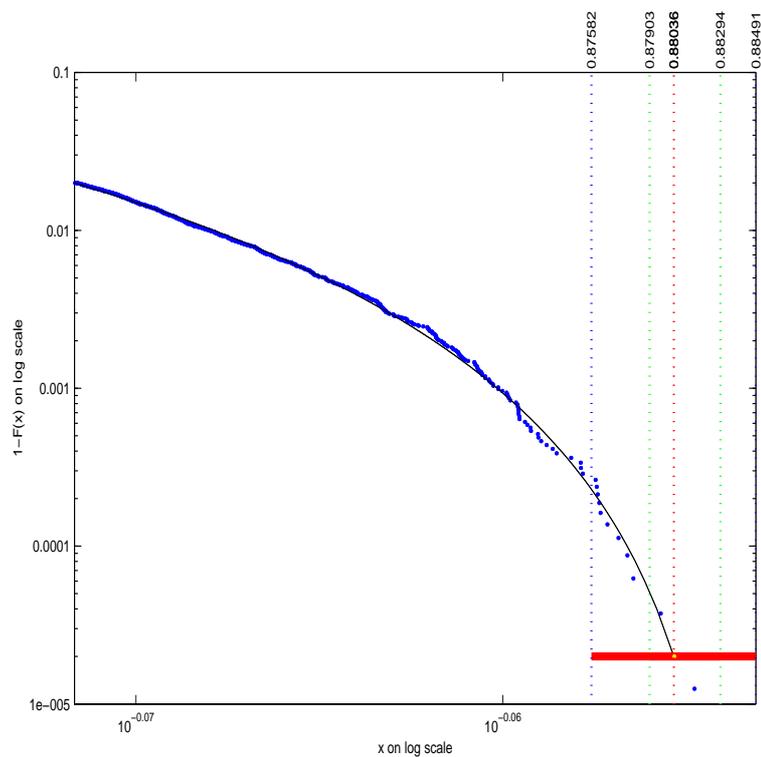


FIG. 8.15 – Courbe  $1 - G_{\hat{\xi}, \hat{\sigma}}$  estimée.  $\hat{x}_p$  (rouge) et intervalles de confiance.

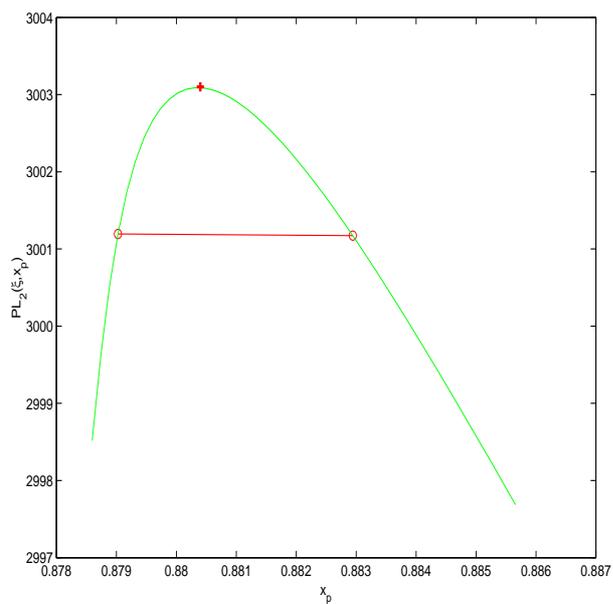


FIG. 8.16 – Profil de vraisemblance pour  $x_p$  (vert).  $CI^\alpha(\hat{x}_p)$ ,  $\alpha = 0.05$  (rouge).

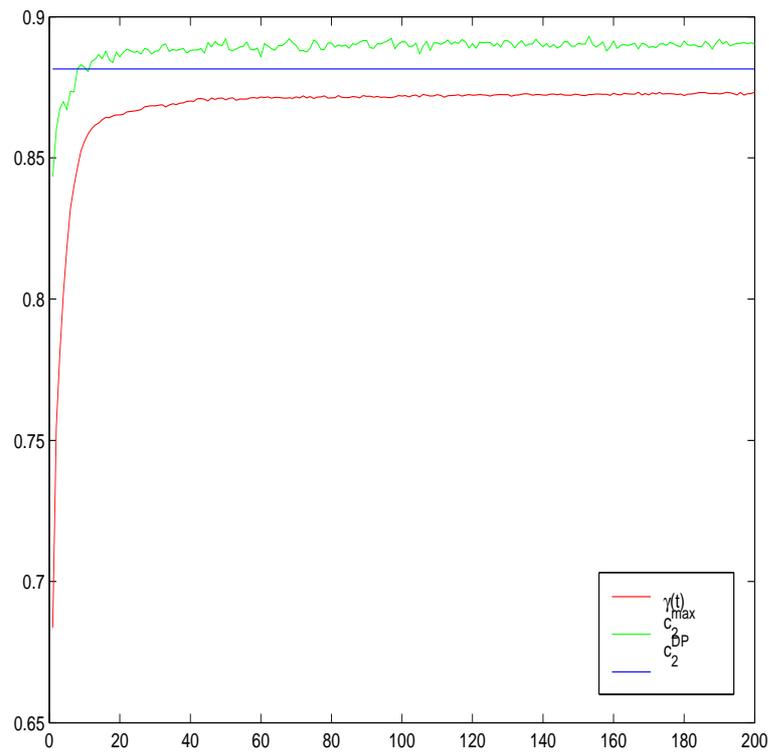


FIG. 8.17 – Paramètres de l'algorithme de CE.

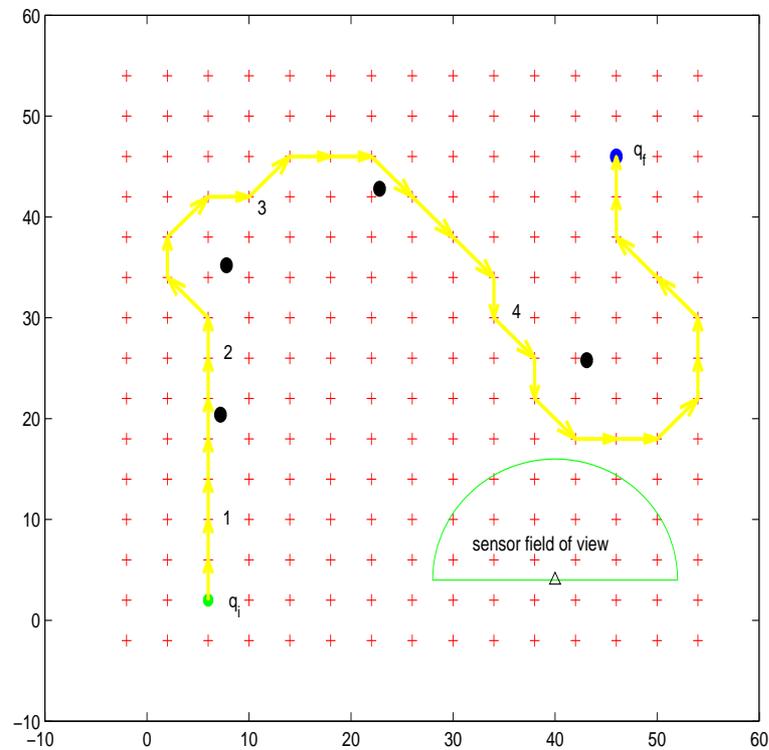


FIG. 8.18 – Meilleure trajectoire fournie par l'algorithme V1.

lors de l'exécution des mouvements. Le problème de planification a été ramené à un problème d'optimisation sur un graphe avec une prise en compte de contraintes sur les branches entre deux

instants données par la borne sur la variation d'orientation instantanée. Nous avons vu que les différents critères d'optimisation retenus ne permettaient pas de mettre en oeuvre des méthodes d'optimisation pour les Processus de Décision Markovien. Nous avons donc proposé une démarche basée sur la méthode de cross-entropie pour approcher l'ensemble des solutions. Deux versions de l'algorithme ont été présentées. Elles se distinguent essentiellement par la méthode de génération des trajectoires candidates pour l'apprentissage des paramètres de la loi paramétrique utilisée pour approcher les solutions. Il faut noter que la seconde intègre deux niveaux d'optimisation imbriqués, dont le niveau le plus bas est adaptable à volonté dès lors qu'il où il permet d'obtenir un chemin connexe dans un graphe avec les contraintes imposées. Enfin, nous avons également cherché à analyser le niveau de performance de notre approche en utilisant la théorie des valeurs extrêmes, qui nous a permis d'extraire des critères instructifs sur le comportement des trajectoires.



## Chapitre 9

# Cadre continu

A l'opposé du problème de planification abordé dans les chapitres précédents, on s'intéresse dorénavant uniquement à l'apport de la composante de la matrice d'information de Fisher associée au processus d'observation. En d'autres termes, on fait l'hypothèse que la performance du filtrage est donnée principalement par le niveau de vraisemblance des mesures acquises localement. Par ailleurs, on aborde la problématique d'optimisation de la performance à partir d'une modélisation continue de la trajectoire de l'état. Ainsi, le gain d'information sera calculé sur une trajectoire continue, et non en des positions discrètes de l'espace d'état. Cette hypothèse est forte et a évidemment quelques limites physiques, car l'acquisition de mesures est effectuée en pratique avec une fréquence d'échantillonnage donnée. Néanmoins, on suppose que la fréquence est suffisamment élevée pour rendre valide l'approche que nous présentons. En outre, cela permet de mener les calculs suffisamment loin et de disposer d'interprétations géométriques très intéressantes. Le problème de planification qui en découle se formalise naturellement comme un problème de commande optimale avec des conditions aux limites. Comme souvent, il n'est cependant pas possible d'obtenir une solution analytique en appliquant le principe du maximum pour déterminer les trajectoires optimales quelconques. On propose par conséquent une simplification en se plaçant dans un espace de trajectoires linéaires par morceaux. Cette approximation conduit à la résolution de problèmes de choix de chemins dans un graphe sous contraintes.

### 9.1 Hypothèses sur le mobile et les mesures

On rappelle les principales hypothèses et notations de modélisation retenues. Certains des éléments de ce paragraphe ont été en partie présentés dans le chapitre 4. On considère un mobile évoluant dans un environnement disposant d'objets cartographiques à partir desquels une représentation à base d'amers *a priori* est construite. Une phase de pré-traitement permet, à partir de cette représentation, d'extraire des éléments ponctuels, « les amers », qui seront exploités dans un algorithme de localisation. Le modèle de dynamique d'évolution de l'état  $X_t$  est supposé décrit par une équation différentielle stochastique. L'état  $X_t$  comprend les composantes de position 2D et l'orientation à l'instant  $t$  dans un repère global  $\mathcal{R}_g$ . La commande est composée de la vitesse de déplacement et de la vitesse de rotation instantanées  $u_t = [v_t \ \phi_t]^*$ . La dynamique en l'absence de bruits modélisés par un processus de diffusion est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}_t &= v_t \cos \theta_t, \\ \dot{y}_t &= v_t \sin \theta_t, \\ \dot{\theta}_t &= \phi_t.\end{aligned}$$

Le bruit du modèle est un bruit gaussien centré et additif. On suppose également que l'espace admissible pour les commandes est caractérisé par un ensemble de la forme

$$\mathcal{U} \triangleq \{(v, \omega), v_- \leq v \leq v_+ \quad \& \quad \phi_{min} \leq \phi \leq \phi_{max}\}.$$

Le mobile dispose de capteurs de mesures et de modules de traitements embarqués. A partir des informations brutes issues de ses capteurs et des traitements, il déduit un ensemble de mesures de distance et/ou d'angle relatives par rapport à une partie des  $N_C$  amers identifiés dans la carte disponible

$$\mathcal{C}^h = \{f_1, f_2, \dots, f_{N_C}\}.$$

Comme introduit au chapitre 4, à l'instant  $t$ , on se donne les  $m_t$  mesures relatives de distance et/ou d'angle par rapport aux amers visibles et sélectionnés par le module d'association du processus de localisation. Pour un amer  $f_i$  associé à l'une de ces mesures, on introduit l'opérateur

$$\delta_t^i = \begin{cases} 1 & \text{si } f_i \text{ est utilisé pour la localisation à } t, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La sous-carte composée des amers utilisés à l'instant  $t$  est donc définie par

$$\mathcal{C}_t^h = \left\{ f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_{m_t}}, \{i_1, i_2, \dots, i_{m_t}\} \subset \{1, 2, \dots, N_{carte}\} : \prod_{l=1}^{m_t} \delta_t^{i_l} = 1 \right\}.$$

L'équation d'observation est alors donnée par

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{H}_t(X_t, \mathcal{C}_t) + \mathbf{W}_t,$$

où les éléments en position  $2l$  et  $2l + 1$  de  $\mathbf{H}_t(X_t, \mathcal{C}_t)$  sont les composantes du vecteur de mesures élémentaires associées à l'amer  $f_{i_l}$

$$z_{i_l}^t = h(X_t, f_{i_l}) + w_t^l,$$

avec

$$h(X_t, f_{i_l}) = \begin{cases} \sqrt{(x_t - x^{i_l})^2 + (y_t - y^{i_l})^2} \\ \text{atan}_2\left(\frac{y^{i_l} - y_t}{x^{i_l} - x_t}\right) - \theta_t. \end{cases}$$

Nous supposons des processus de bruits  $w_t^l$  indépendants et identiquement distribués selon une densité gaussienne de moyenne nulle et de matrice de covariance invariante ( $w_t^l \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_t^l)$ ) en fonction de la position et de l'instant d'acquisition des mesures, c'est-à-dire

$$\forall t, \forall l \in \{1, \dots, m_t\}, \Sigma_t^l = \begin{pmatrix} \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi^2 \end{pmatrix}.$$

Au vu de ces hypothèses, la densité de probabilité de l'observation sachant l'état ou la vraisemblance s'exprime donc comme suit :

$$p(\mathbf{z}_t | X_t) \propto \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m_t} \|z_{i_l}^t - h(X_t, f_{i_l})\|_{\Sigma_t^l}^2\right), \quad (9.1)$$

où  $\|B\|_{\Sigma}^2 = B^* \Sigma^{-1} B$ ,  $B \in \mathbb{R}^2$ .

## 9.2 Borne de Cramér-Rao associée

On peut déduire de l'équation (9.1) l'expression de la matrice d'information de Fisher permettant de définir la borne inférieure sur la matrice de covariance de l'erreur d'estimation [VT68] pour un estimateur déduit uniquement de l'information apportée par le processus de mesures. Par exemple, un estimateur possible est celui qui maximise la vraisemblance pour une mesure obtenue

$$\{X_t - \hat{X}_t\} \{X_t - \hat{X}_t\}^* \succeq F^{-1}(t),$$

où  $F$  est donnée par

$$F = \left( \frac{\partial \mathbf{H}_t(X_t, \mathcal{C}_t)}{\partial X_t} \right)^* \Sigma^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{H}_t(X_t, \mathcal{C}_t)}{\partial X_t} \right),$$

ce qui est équivalent, pour le problème d'estimation considéré, à

$$F = \sum_{l=1}^{m_t} \left( \frac{\partial h(X_t, f_{i_l})}{\partial X_t} \right)^* \Sigma_l^{-1} \left( \frac{\partial h(X_t, f_{i_l})}{\partial X_t} \right).$$

Des calculs similaires à ceux développés au chapitre 5 permettent de déduire les gradients élémentaires

$$\frac{\partial h(X_t, f_{i_l})}{\partial X_t} = \begin{pmatrix} -c_{i_l} & -s_{i_l} & 0 \\ \frac{s_{i_l}}{\rho_{i_l}} & -\frac{c_{i_l}}{\rho_{i_l}} & -1 \end{pmatrix},$$

qui dépendent de l'argument et du module du vecteur défini par le mobile et l'amer  $f_{i_l}$ . On en déduit donc l'expression de  $F(t)$

$$F(t) = \sum_{l=1}^{N_C} \delta_t^i \begin{pmatrix} \sigma_d^{-2} c_l^2 + \sigma_\varphi^{-2} \frac{s_l^2}{\rho_l^2} & \sigma_d^{-2} c_l s_l - \sigma_\varphi^{-2} \frac{c_l s_l}{\rho_l} & \sigma_\varphi^{-2} \frac{s_l}{\rho_l} \\ \sigma_d^{-2} c_l s_l - \sigma_\varphi^{-2} \frac{c_l s_l}{\rho_l} & \sigma_d^{-2} s_l^2 + \sigma_\varphi^{-2} \frac{c_l^2}{\rho_l^2} & -\sigma_\varphi^{-2} \frac{c_l}{\rho_l} \\ \sigma_\varphi^{-2} \frac{s_l}{\rho_l} & -\sigma_\varphi^{-2} \frac{c_l}{\rho_l} & \sigma_\varphi^{-2} \end{pmatrix}.$$

En utilisant de nouveau les vecteurs de  $\mathbb{R}^{N_C}$  définis par

$$\begin{aligned} -\vec{c} &\triangleq (\delta_t^1 c_1 \dots \delta_t^{N_C} c_{N_C})^*, \quad \vec{s} \triangleq (\delta_t^1 s_1 \dots \delta_t^{N_C} s_{N_C})^*, \\ -\vec{c}_\rho &\triangleq \left( \delta_t^1 \frac{c_1}{\rho_1} \dots \delta_t^{N_C} \frac{c_{N_C}}{\rho_{N_C}} \right)^*, \quad \vec{s}_\rho \triangleq \left( \delta_t^1 \frac{s_1}{\rho_1} \dots \delta_t^{N_C} \frac{s_{N_C}}{\rho_{N_C}} \right)^*, \end{aligned}$$

on obtient une écriture condensée tenant compte de la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^{m_t}$  de  $\vec{c}$  et  $\vec{s}$

$$F(t) = \begin{pmatrix} \sigma_d^{-2} \|\vec{c}\|^2 + \sigma_\varphi^{-2} \|\vec{s}_\rho\|^2 & \sigma_d^{-2} \langle \vec{c}, \vec{s} \rangle - \sigma_\varphi^{-2} \langle \vec{c}_\rho, \vec{s}_\rho \rangle & \sigma_\varphi^{-2} \langle \vec{s}_\rho, \mathbf{1}_{m_t} \rangle \\ \sigma_d^{-2} \langle \vec{c}, \vec{s} \rangle - \sigma_\varphi^{-2} \langle \vec{c}_\rho, \vec{s}_\rho \rangle & \sigma_d^{-2} \|\vec{s}\|^2 + \sigma_\varphi^{-2} \|\vec{c}_\rho\|^2 & -\sigma_\varphi^{-2} \langle \vec{c}_\rho, \mathbf{1}_{m_t} \rangle \\ \sigma_\varphi^{-2} \langle \vec{s}_\rho, \mathbf{1}_{m_t} \rangle & -\sigma_\varphi^{-2} \langle \vec{c}_\rho, \mathbf{1}_{m_t} \rangle & \sigma_\varphi^{-2} \langle \mathbf{1}_{m_t}, \mathbf{1}_{m_t} \rangle \end{pmatrix}.$$

Comme au chapitre 5, on peut obtenir une expression équivalente pour la matrice  $F(t)$  en utilisant les règles de calcul matriciel. Nous supposons pour simplifier les écritures du détail des calculs que  $\sigma_d = \sigma_\varphi = 1$  degrés. On peut également réécrire la matrice  $F$  en fonction d'une matrice  $G(t)$

$$F(t) = G(t) G(t)^*. \quad (9.2)$$

La matrice  $G(t)$  est construite à partir des vecteurs lignes des gradients (9.2). Elle est de taille  $3 \times 2 N_C$

$$G(t) = \begin{pmatrix} \overbrace{(-\vec{c}^*)}^{\mathcal{G}_1(t)} & \overbrace{(\vec{s}_\rho^*)}^{\mathcal{G}_2(t)} \\ -\vec{s}^* & -\vec{c}_\rho^* \\ \mathbf{0}_{m_t} & \mathbf{1}_{m_t} \end{pmatrix}.$$

Les ensembles disjoints  $\mathcal{G}_1(t)$  et  $\mathcal{G}_2(t)$  sont donc définis par

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(t) &\triangleq \left\{ G_l = -\delta_t^l (c_l \quad s_l \quad 0)^*, \quad l = 1, \dots, N_C \right\}, \\ \mathcal{G}_2(t) &\triangleq \left\{ G_l = \delta_t^l \left( \frac{s_l}{\rho_l} \quad -\frac{c_l}{\rho_l} \quad -1 \right)^*, \quad l = 1, \dots, N_C \right\}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Ces deux ensembles correspondent à l'apport de l'information de distance et d'angle. Les résultats d'un processus de filtrage basé uniquement sur l'une de ces informations pourront aisément être déduits des éléments qui seront développés par la suite, en omettant les contributions des vecteurs de l'un des deux ensembles. On exploitera cette écriture pour déduire une expression de la fonctionnelle qui nous servira de critère pour l'optimisation des trajectoires.

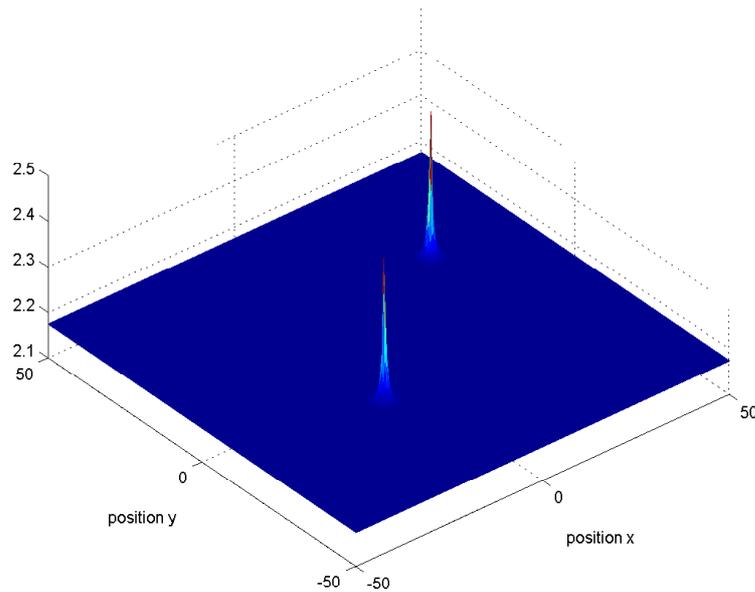


FIG. 9.1 –  $\mathcal{J}_T(t, \mathcal{C}^h)$  pour une carte composée de 2 amers et un capteur omnidirectionnel.

### 9.3 Performance instantanée de localisation

Nous allons définir et déterminer une mesure de performance instantanée pour le processus de localisation en utilisant une fonctionnelle de la matrice d'information de Fisher  $F(t)$ . Plusieurs opérateurs peuvent être utilisés, comme la trace ou le déterminant. La matrice  $F(t)$ , et plus précisément son inverse, permettent d'obtenir une borne inférieure pour la variance de l'erreur d'estimation. Si on fait l'hypothèse d'une structure gaussienne pour cette erreur, on peut s'intéresser au volume de l'ellipsoïde de confiance pour l'état défini à partir de la matrice  $F(t)^{-1}$ . L'analyse spectrale (valeurs et vecteurs propres) de cette matrice fournit également des indications sur la géométrie de cet ellipsoïde. Sans faire le calcul de l'inverse<sup>1</sup> de  $F(t)$ , on peut accéder à son déterminant. A titre indicatif, intéressons-nous d'abord à la fonctionnelle obtenue à partir de la trace.

#### 9.3.1 Trace de la FIM

Considérons la trace de  $F$  obtenue à partir de l'écriture 9.2, elle est directement donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_T(t, \mathcal{C}^h) &= \text{tr}(F(t)) = \sum_{l=1}^{N_c} \delta_t^l \left\{ \sigma_d^{-2} c_{i_l}^2 + \sigma_\varphi^{-2} \frac{s_{i_l}^2}{\rho_{i_l}^2} + \sigma_d^{-2} s_{i_l}^2 + \sigma_\varphi^{-2} \frac{c_{i_l}^2}{\rho_{i_l}^2} + \sigma_\varphi^{-2} \right\} \\ \Rightarrow \mathcal{J}_T(t, \mathcal{C}^h) &= \sum_{l=1}^{N_c} \delta_t^l (\sigma_d^{-2} + \sigma_\varphi^{-2}) + \sigma_\varphi^{-2} \sum_{l=1}^{N_c} \delta_t^l \frac{1}{\rho_l^2}. \end{aligned}$$

On constate donc que cette mesure d'information dépend uniquement du nombre d'amers vus et de l'inverse des distances par rapport au mobile. Par contre, elle est « sous-informative », dans la mesure où elle ne fait pas intervenir de façon explicite l'information de mesures d'angles. La figure (9.1) présente l'allure de cette fonctionnelle en fonction de la position du mobile dans l'espace 2D pour une carte composée de 2 amers. Le capteur est supposé omnidirectionnel avec une distance de perception suffisamment grande pour que les amers puissent être utilisables quelle que soit la position d'observation. On constate effectivement un accroissement de la fonctionnelle lorsque l'on se rapproche des amers.

<sup>1</sup> $\det(A^{-1}) = \det^{-1}(A)$

### 9.3.2 Déterminant de la FIM

Nous allons exploiter l'écriture (9.2) pour obtenir une formulation du déterminant de  $F(t)$ . On s'intéresse à la fonction  $\mathcal{J}(t)$

$$\mathcal{J}(t, \mathcal{C}^h) = \det(G(t)G(t)^*). \quad (9.4)$$

L'expression de  $\mathcal{J}(t, \mathcal{C}^h)$  peut être obtenue en appliquant le résultat d'algèbre suivant :

**Proposition 7 (Formule de Binet-Cauchy)** *Soit  $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(m, n)$  et  $B \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n, m)$ , le déterminant*

$$\det(AB) = \sum_S \det(A_s) \det(B_s).$$

*Dans cette expression,  $S$  décrit les différents sous-ensembles à  $m$  éléments de  $\{1, \dots, n\}$ . Pour chaque  $S$ ,  $A_s$  désigne la matrice de taille  $m \times m$  dont les colonnes sont celles de  $A$  dont les indices appartiennent à  $S$ . De façon similaire,  $B_s$  est la matrice obtenue à partir des lignes de  $B$  dont les indices sont donnés par  $S$ .*

Appliquons cette propriété au produit matriciel  $G(t)G(t)^*$  en considérant  $A = B^* = G$ .  $G$  est une matrice de taille  $3 \times 2N_c$ , le déterminant de  $F$  peut donc être calculé en à partir de matrices de taille  $3 \times 3$  construites à partir des colonnes de  $G$ . On en déduit l'expression suivante :

$$\mathcal{J}(t, \mathcal{C}^h) = \sum_{1 \leq i < j < r \leq 2N_c} \{\det(G_i(t), G_j(t), G_r(t))\}^2. \quad (9.5)$$

Chaque déterminant élémentaire peut être obtenu en considérant l'ensemble d'appartenance des vecteurs colonnes  $G_i(t), G_j(t), G_r(t)$  parmi  $\mathcal{G}_1(t)$  et  $\mathcal{G}_2(t)$  (9.3). En énumérant les différentes configurations, on tire la proposition 8.

**Proposition 8**  $\mathcal{J}(t, \mathcal{C}^h)$  *comprend trois termes faisant intervenir les mesures de distances et d'angles de paires ou triplets d'amers simultanément visibles*

$$\mathcal{J}(t, \mathcal{C}^h) = a_1 \mathcal{J}_1(t, \mathcal{C}^h) + a_2 \mathcal{J}_2(t, \mathcal{C}^h) + a_3 \mathcal{J}_3(t, \mathcal{C}^h) \quad (9.6)$$

avec  $a_1 = \sigma_d^{-4} \sigma_\varphi^{-2}$ ,  $a_2 = \sigma_d^{-2} \sigma_\varphi^{-4}$ ,  $a_3 = \sigma_\varphi^{-6}$  et

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(t, \mathcal{C}^h) &= \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j>i}^{N_c} \sum_{r=1}^{N_c} \delta_i^i \delta_t^j \delta_r^r g_{ijr}^{(1)}(t), \\ \mathcal{J}_2(t, \mathcal{C}^h) &= \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} \sum_{r>j}^{N_c} \delta_i^i \delta_t^j \delta_r^r g_{ijr}^{(2)}(t), \\ \mathcal{J}_3(t, \mathcal{C}^h) &= \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j>i}^{N_c} \sum_{r>j}^{N_c} \delta_i^i \delta_t^j \delta_r^r g_{ijr}^{(3)}(t), \end{aligned}$$

où  $\forall i, j, r,$

$$\begin{aligned} g_{ijr}^{(1)}(t) &= \sin^2(\beta_i(t) - \beta_j(t)) \\ g_{ijr}^{(2)}(t) &= \left( \frac{\cos(\beta_i(t) - \beta_r(t))}{\rho_r(t)} - \frac{\cos(\beta_i(t) - \beta_j(t))}{\rho_j(t)} \right)^2 \\ g_{ijr}^{(3)}(t) &= \left( \frac{\sin(\beta_i(t) - \beta_r(t))}{\rho_i(t)\rho_r(t)} + \frac{\sin(\beta_i(t) - \beta_j(t))}{\rho_i(t)\rho_j(t)} + \frac{\sin(\beta_j(t) - \beta_r(t))}{\rho_j(t)\rho_r(t)} \right)^2. \end{aligned}$$

La preuve de cette proposition est obtenue par calcul des déterminants d'ordre 3 des configurations  $G_i(t), G_j(t), G_r(t)$  et en utilisant des propriétés remarquables classiques de trigonométrie.

**Preuve:** Considérons les différents déterminants élémentaires

**cas 1**  $G_i, G_j$  et  $G_r \in \mathcal{G}_1$ , on a de façon évidente

$$\det(G_i(t), G_j(t), G_r(t)) = 0$$

**cas 2**  $G_i, G_j \in \mathcal{G}_1$  et  $G_r \in \mathcal{G}_2$ , on a donc

$$\det(G_i(t), G_j(t), G_r(t)) = \begin{vmatrix} -c_i & -c_j & \frac{s_r}{\rho_r} \\ -s_i & -s_j & -\frac{c_r}{\rho_r} \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la dernière ligne, on trouve

$$\det(G_i(t), G_j(t), G_r(t)) = c_i s_j - s_i c_j = \sin(\beta_i - \beta_j)$$

**cas 3**  $G_i \in \mathcal{G}_1$  et  $G_j, G_r \in \mathcal{G}_2$ ,

$$\det(G_i(t), G_j(t), G_r(t)) = \begin{vmatrix} -c_i & \frac{s_j}{\rho_j} & \frac{s_r}{\rho_r} \\ -s_i & -\frac{c_j}{\rho_j} & -\frac{c_r}{\rho_r} \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

On développe de nouveau par rapport à la dernière ligne, ce qui donne

$$\begin{aligned} \det(G_i(t), G_j(t), G_r(t)) &= - \left( -c_i \frac{c_r}{\rho_r} - s_i \frac{s_r}{\rho_r} \right) + \left( -c_i \frac{c_j}{\rho_j} - s_i \frac{s_j}{\rho_j} \right) \\ \Leftrightarrow \det(G_i(t), G_j(t), G_r(t)) &= \frac{\cos(\beta_i - \beta_r)}{\rho_r} - \frac{\cos(\beta_i - \beta_j)}{\rho_j} \end{aligned}$$

**cas 4**  $G_i, G_j$  et  $G_r \in \mathcal{G}_2$ ,

$$\begin{aligned} \det(G_i(t), G_j(t), G_r(t)) &= \begin{vmatrix} \frac{s_i}{\rho_i} & \frac{s_j}{\rho_j} & \frac{s_r}{\rho_r} \\ -\frac{c_i}{\rho_i} & -\frac{c_j}{\rho_j} & -\frac{c_r}{\rho_r} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \left( -\frac{s_j c_r}{\rho_j \rho_r} + \frac{c_r s_j}{\rho_r \rho_j} \right) - \left( -\frac{s_i c_r}{\rho_i \rho_r} + \frac{c_i s_r}{\rho_i \rho_r} \right) \\ &\quad + \left( -\frac{s_i c_r}{\rho_i \rho_r} + \frac{c_i s_r}{\rho_i \rho_r} \right) \\ &= \frac{\sin(\beta_i - \beta_r)}{\rho_i \rho_r} + \frac{\sin(\beta_i - \beta_j)}{\rho_i \rho_j} + \frac{\sin(\beta_j - \beta_r)}{\rho_j \rho_r} \end{aligned}$$

**Remarque :** on peut noter la différence de grandeurs entre les coefficients  $a_i, i = 1, 2, 3$  des trois termes dans l'expression (9.4). Il conviendra de pondérer ces coefficients lors de leur utilisation dans les problèmes de planification, afin de tenir compte à la fois des informations de distances et d'angles. Cependant, le choix des coefficients de pondération reste un point dur car il n'existe pas de règles a priori. La sélection devra certainement être orientée par les besoins des applications ou l'analyse de cas.

### 9.3.3 Analyse et interprétation des composantes

Il est possible d'interpréter les différentes composantes de la mesure de performance instantanée  $\mathcal{J}(t, \mathcal{C}^h)$ . En effet, elles font intervenir des interactions entre des couples ou des triplets d'amers. En

outre, la première et la dernière composantes traduisent l'apport de l'information respectivement des mesures de distances et d'angles. A l'opposé, le terme central tient compte du couplage des deux types de mesure.

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(\text{paires ou triplets d'amers}) &\iff \text{information de } \textit{distance} \\ \mathcal{J}_2(\text{paires ou triplets d'amers}) &\iff \text{information de } \textit{distance} \text{ et d' } \textit{angle} \\ \mathcal{J}_3(\text{triplets d'amers}) &\iff \text{information d' } \textit{angle} \end{aligned}$$

Sur les figures (9.2), (9.3), (9.4), on illustre le comportement de ces trois composantes en fonction de la répartition des amers dans l'environnement et de la position du mobile. Le capteur est toujours omnidirectionnel avec des capacités de détection en distance illimitées. On obtient trois surfaces correspondant respectivement aux fonctionnelles  $\mathcal{J}_i(t, \mathcal{C}^h)$ ,  $i = 1, 2, 3$  à partir d'une discrétisation régulière du plan 2D. On peut noter, pour la fonctionnelle  $\mathcal{J}_1(t, \mathcal{C}^h)$ , les courbes à gain constant

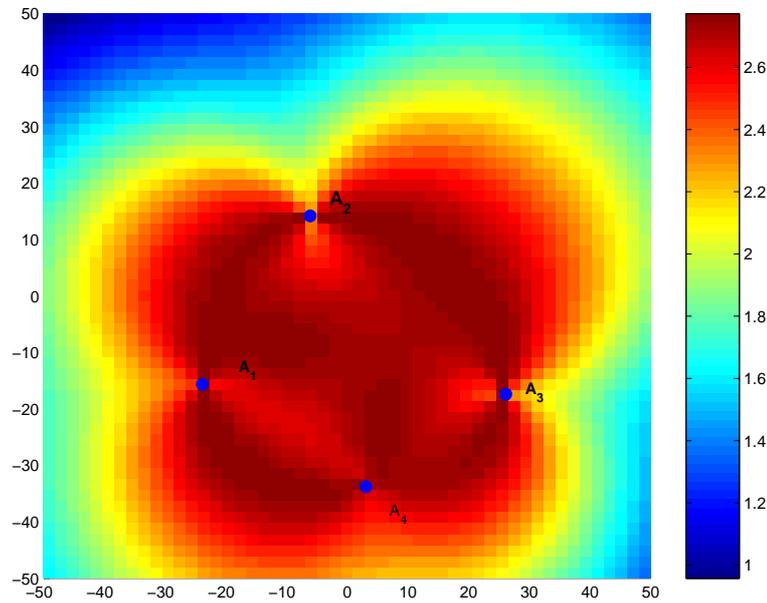
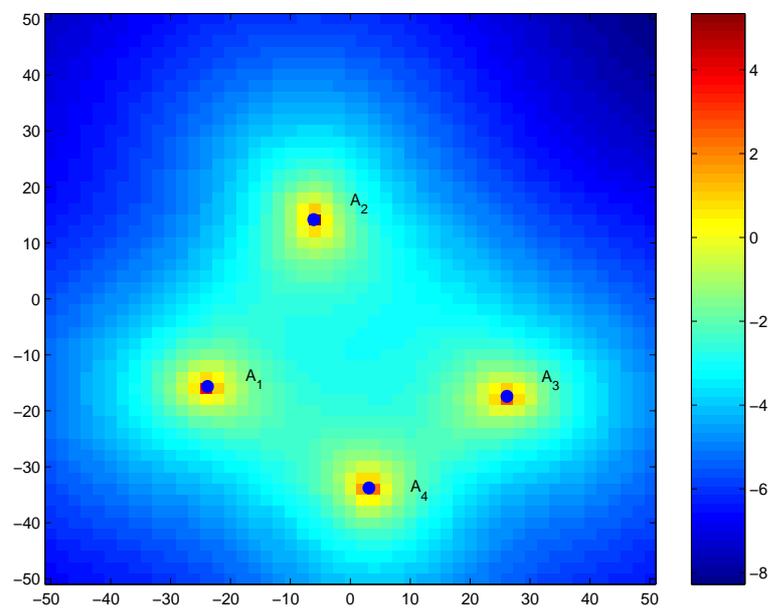
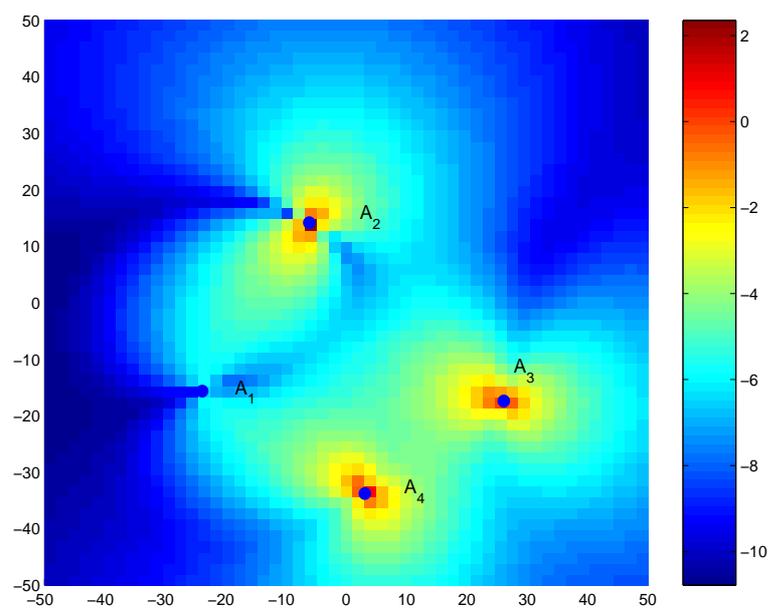


FIG. 9.2 – Surface de  $\mathcal{J}_1$  (en logarithme) avec une carte de 4 amers (bleus).

matérialisées par des arcs formés à partir des amers pris deux à deux avec un maximum sur les cercles. Ce comportement démontre l'importance d'un déplacement sur ces cercles garantissant un angle proche de 90 degrés entre les segments formés par les amers et la position du mobile. Ceci est cohérent d'un point de vue géométrique, pour une estimation basée uniquement sur l'information de distance. Pour les deux autres composantes, le comportement est plus complexe, même si un rapprochement vers les amers semble être la solution permettant d'améliorer la performance de localisation. En outre, on peut noter la différence de poids entre les composantes  $\mathcal{J}_1$  et  $\mathcal{J}_3$ , et  $\mathcal{J}_2$ . Dans le cas d'un capteur fournissant des mesures de distances et d'angles avec une précision  $\sigma_d = 0.05 \text{ m}$  et  $\sigma_\varphi = 1^\circ$  (caractéristiques constructeur typique d'un capteur laser en robotique mobile) et  $\sigma_\varphi = 5^\circ$ , on obtient respectivement une surface pour le gain global présentée sur les figures (9.5) et (9.6). On peut noter le comportement plus lisse dans le cas où la précision des mesures d'angles est dégradée, avec une plus grande contribution de la métrique associée à l'information de distance.

## 9.4 Configuration géométrique optimale « mobile-amers »

Nous proposons dans ce paragraphe d'analyser la configuration « mobile-amers » permettant d'atteindre le maximum de la fonctionnelle. Le raisonnement est uniquement statique et se restreint à la composante  $\mathcal{J}_1(t, \mathcal{C}^h)$ . La prise en compte de l'ensemble des composantes de la fonctionnelle semble difficile, voire impossible pour une telle analyse. Il faut noter que ceci équivaut à se placer dans des configurations où la condition  $\frac{\sigma_d}{\rho} \ll \sigma_\varphi$  est vérifiée. Par exemple, lorsque l'on exploite

FIG. 9.3 – Surface de  $\mathcal{J}_2$  (en logarithme) avec une carte de 4 amers (bleus).FIG. 9.4 – Surface de  $\mathcal{J}_3$  (en logarithme) avec une carte de 4 amers (bleus).

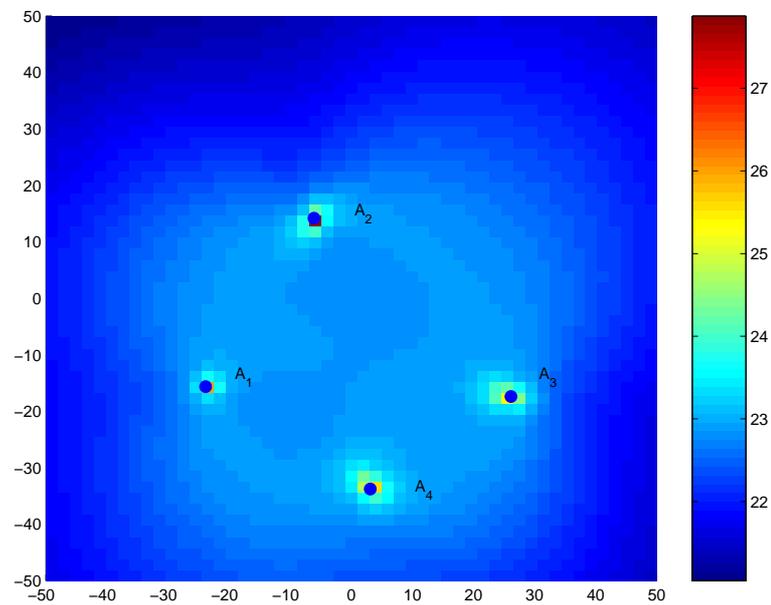


FIG. 9.5 – Surface de  $\mathcal{J}$  (en logarithme) pour  $\sigma_d = 0.05 m$  et  $\sigma_\varphi = 1^\circ$ .

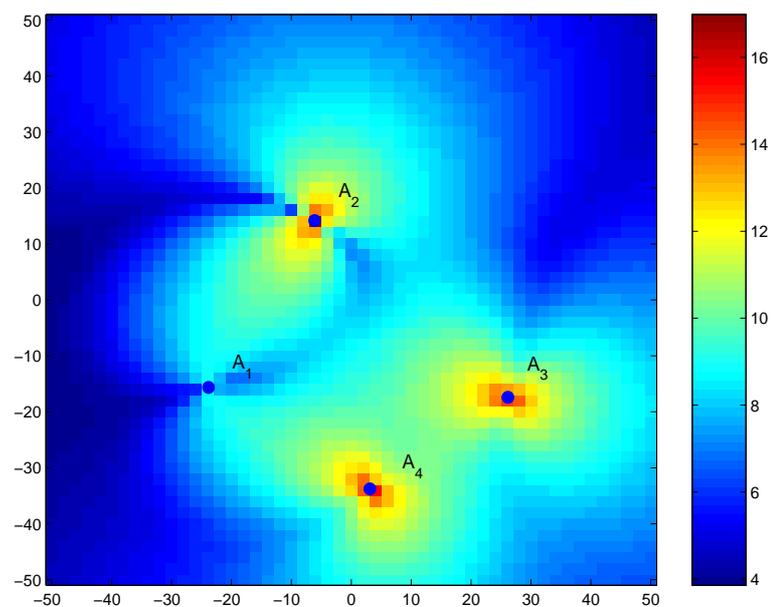


FIG. 9.6 – Surface de  $\mathcal{J}$  (en logarithme) pour  $\sigma_d = 0.05 m$  et  $\sigma_\varphi = 5^\circ$ .

uniquement des amers situés suffisamment loin du mobile ou des capteurs de distance. On fixe pour ce raisonnement les hypothèses suivantes :

1. le mobile est placé en une position  $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$  avec une orientation  $\bar{\theta}$ ,
2. la zone de perception du capteur est un secteur défini par une ouverture angulaire  $\Delta_m$  et des distances de détection maximale  $d_+$  et minimale  $d_-$ ,
3. on note  $\vec{v}_-$  et  $\vec{v}_+$  les vecteurs unitaires d'origine  $\bar{P}$  et orientés selon les directions des bords du cône de perception,
4. on dispose de  $n$  amers  $(f_1, \dots, f_n)$  visibles de l'état  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta})$ ,
5. pour obtenir le positionnement *mobile-amers* optimal, on suppose qu'il est possible de déplacer les amers dans la zone de perception,
6. on note  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$  les angles formés par  $\vec{v}_-$  et  $\vec{P}f_i$  et donc

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \alpha_i = \beta_i - \bar{\theta} + \frac{\Delta_m}{2}. \quad (9.7)$$

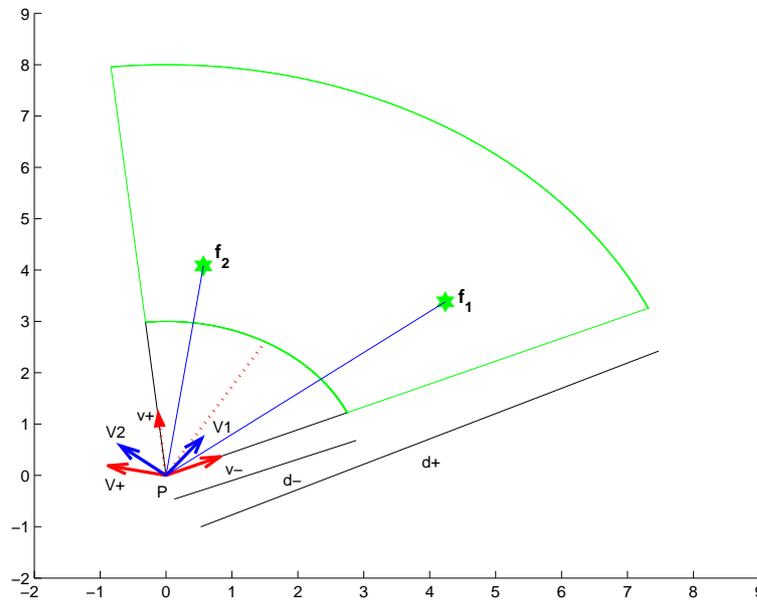


FIG. 9.7 – Notations pour l'analyse du positionnement relatif mobile-amers.

On s'intéresse donc au problème d'optimisation suivant.

#### Problème 9.4.1

$$\arg \max_{\beta_1, \dots, \beta_n} \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \sin^2(\beta_i - \beta_j)$$

En considérant les relations 9.7, il est équivalent de résoudre

#### Problème 9.4.2

$$\arg \max_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sin^2(\alpha_i - \alpha_j),$$

avec les contraintes

$$\forall i = 1, \dots, n \quad 0 \leq \alpha_i \leq \Delta_m.$$

Nous montrons d'abord que ce problème d'optimisation sous contraintes est équivalent à un problème géométrique de placement de vecteurs obtenus à partir des vecteurs mobile-amers. En effet, on a la propriété

**Proposition 9** Résoudre le problème 9.4.2 équivaut à déterminer le placement optimal des vecteurs  $(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_n)$  unitaires d'origine  $\bar{P}$  dans le secteur défini par  $\vec{v}_-$  et  $\vec{V}_+$  qui minimise la norme du vecteur  $\vec{V}_T = \sum_{i=1}^n \vec{V}_i$ . Le vecteur unitaire  $\vec{V}_+$  et d'origine  $\bar{P}$  vérifie  $\arg \vec{v}_- \vec{V}_+ = 2\Delta_m$  et  $\forall i, \arg \vec{v}_- \vec{V}_i = 2\alpha_i$  (cf. figure 9.7).

**Preuve:** La démonstration de cette proposition est basée sur les propriétés trigonométriques remarquables  $\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$  et  $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ . En effet,

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_1(t, \mathcal{C}^h) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sin^2(\alpha_i - \alpha_j), \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (1 - \cos(2\alpha_i - 2\alpha_j)), \\
&= \frac{n^2}{4} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\cos 2\alpha_i \cos 2\alpha_j + \sin 2\alpha_i \sin 2\alpha_j), \\
&= \frac{n^2}{4} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left( \cos 2\alpha_i \sum_{j=1}^n \cos 2\alpha_j + \sin 2\alpha_i \sum_{j=1}^n \sin 2\alpha_j \right), \\
&= \frac{n^2}{4} - \frac{1}{4} \left( \sum_{i=1}^n \cos 2\alpha_i \sum_{j=1}^n \cos 2\alpha_j + \sum_{i=1}^n \sin 2\alpha_i \sum_{j=1}^n \sin 2\alpha_j \right), \\
&= \frac{n^2}{4} - \frac{1}{4} \left( \sum_{i=1}^n (\cos 2\alpha_i)^2 + \sum_{i=1}^n (\sin 2\alpha_i)^2 \right), \\
&= \frac{1}{4} (n^2 - \|\sum_{i=1}^n \vec{V}_i\|^2)
\end{aligned} \tag{9.8}$$

On déduit de cette formulation le résultat annoncé. Nous investiguons dans la suite les configurations de vecteurs  $(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_n)$  qui permettent d'obtenir un vecteur somme  $\vec{V}_T$  de norme minimale. La solution recherchée dépend des capacités de perception du capteur, à savoir la valeur de l'ouverture angulaire  $\Delta_m$  du cône d'observation.

#### 9.4.1 Zone de perception avec $\Delta_m \leq \frac{\pi}{2}$

Lorsque  $\Delta_m < \frac{\pi}{2}$ , on peut déduire la propriété suivante.

**Proposition 10** Dans une configuration optimale, les amers sont situés sur les bords du cône de perception. i.e, les vecteurs  $\vec{V}_i$  sont colinéaires à  $\vec{v}_-$  ou  $\vec{V}_+$ .

Ce résultat est relativement intuitif car il indique que les configurations qui maximisent en moyenne la performance de localisation sont celles qui favorisent l'effet de triangulation entre les faisceaux formés par le mobile et les paires d'amers visibles.

**Preuve:** Soit  $\vec{V}_{i_0}, i_0 \in \{1, \dots, n\}$ . On introduit le vecteur  $\vec{V}_{i_0} := \sum_{j \neq i_0} \vec{V}_j$  et la mesure d'angle  $\alpha_{i_0} = \angle \vec{v}_- \vec{V}_{i_0}$ . L'ouverture angulaire étant inférieure à  $\frac{\pi}{2}$ , la différence d'angle entre  $\vec{V}_i$  et  $\vec{V}_j, \forall i \neq j$  est inférieure à  $\pi$  et le vecteur  $\vec{V}_T$  est forcément de norme non nulle. On a par ailleurs

$$\begin{aligned}
\|\vec{V}_T\|^2 &= \|\vec{V}_{i_0} + \vec{V}_{i_0}\|^2 = \|\vec{V}_{i_0}\|^2 + 2\langle \vec{V}_{i_0} | \vec{V}_{i_0} \rangle + \|\vec{V}_{i_0}\|^2 \\
&= 1 + \|\vec{V}_{i_0}\|^2 + 2\|\vec{V}_{i_0}\| \cos(\alpha_{i_0} - \alpha_{i_0}).
\end{aligned}$$

On en déduit donc que pour un placement donné des vecteurs  $\{\vec{V}_i, i \neq i_0\}$ , la norme du vecteur  $\vec{V}_T$  est minimale pour  $\vec{V}_{i_0}$  qui minimise la quantité  $\cos(\alpha_{i_0} - \alpha_{i_0})$ . Le vecteur  $\vec{V}_{i_0}$  se situe forcément

entre les vecteurs  $\vec{v}_-$  et  $\vec{V}_+$ . On en déduit donc que  $-\pi < -2\Delta_m \leq \alpha_{\underline{i_0}} - \alpha_{i_0} \leq 2\Delta_m < \pi$ . L'analyse de la fonction  $\cos$  sur  $[-2\Delta_m, 2\Delta_m] \subset [-\pi, \pi]$  permet de dire

$$\min_{\alpha_{i_0}} \cos(\alpha_{\underline{i_0}} - \alpha_{i_0}) = \begin{cases} \cos(\alpha_{\underline{i_0}} - 2\Delta_m), & \text{si } |\alpha_{\underline{i_0}} - 2\Delta_m| > \alpha_{\underline{i_0}} \\ \cos(\alpha_{\underline{i_0}}), & \text{si } |\alpha_{\underline{i_0}} - 2\Delta_m| < \alpha_{\underline{i_0}} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\alpha_{i_0}^* = \begin{cases} 2\Delta_m & \text{si } |\alpha_{\underline{i_0}} - 2\Delta_m| > \alpha_{\underline{i_0}} \\ 0 & \text{si } |\alpha_{\underline{i_0}} - 2\Delta_m| < \alpha_{\underline{i_0}} \end{cases},$$

ce qui montre que  $\vec{V}_{i_0}$  est situé sur l'un des bords du cône formé par  $\vec{v}_-$  et  $\vec{V}_+$ , et donc que les amers sont situés sur les bords de la zone de perception. Partant de cette assertion, il faut maintenant déterminer leur répartition sur chacun des bords.

**Proposition 11** *Les configurations où les amers sont « équirépartis » sur chacun des bords de la zone de perception sont optimales.*

**Preuve:** Soient  $n_-$  et  $n_+$  les nombres de vecteurs  $\vec{V}_i$  colinéaires à  $\vec{v}_-$  et  $\vec{V}_+$ . On a donc  $n_+ + n_- = n$ . La norme du vecteur  $\vec{V}_T$  est alors

$$\begin{aligned} \|\vec{V}_T\|^2 &= n_-^2 + n_+^2 + 2n_-n_+ \cos(\angle \vec{v}_- \vec{V}_+) \\ \|\vec{V}_T\|^2 &= n_-^2 + n_+^2 + 2n_-n_+ \cos(2\Delta_m) \\ \|\vec{V}_T\|^2 &= n_-^2 + (n - n_-)^2 + 2n_-(n - n_-) \cos(2\Delta_m) \\ \|\vec{V}_T\|^2 &= 2(1 - a)n_-^2 - 2(1 - a)nn_- + n^2 \end{aligned} \quad (9.10)$$

en posant  $a = \cos(2\Delta_m)$ . La norme est donc une fonction quadratique convexe car  $a < 1$ . Elle admet un minimum en  $n_-$  vérifiant

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial n_-} &= 4(1 - a)n_- - 2(1 - a)n = 0 \\ \Leftrightarrow n_- &= \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

On doit cependant raisonner selon la parité du nombre d'amers  $n$ .

**n pair.**

Dans ce cas, on a  $n_- = n_+ = \frac{n}{2}$  et  $\|\vec{V}_T\|^2 = \frac{n^2}{2}(1 + \cos(2\Delta_m))$ . Le maximum de la fonctionnelle vaut

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(t, \mathcal{C}^h) &= \frac{1}{4}(n^2 - \frac{n^2}{2}(1 + \cos(2\Delta_m))) \\ \mathcal{J}_1(t, \mathcal{C}^h) &= \frac{n^2}{4} \frac{1 - \cos(2\Delta_m)}{2} \\ \boxed{\mathcal{J}_1(t, \mathcal{C}^h) &= \frac{n^2}{4} \sin^2(\Delta_m)}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

**n impair.**

On suppose que  $n_- = \frac{n-1}{2}$  et  $n_+ = \frac{n+1}{2}$ . On en déduit la valeur de la norme  $\|\vec{V}_T\|^2 = 1 + (n^2 - 1) \cos^2(\Delta_m)$ . La valeur maximale de la fonctionnelle est alors

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(t, \mathcal{C}^h) &= \frac{1}{4}(n^2 - 1 - (n^2 - 1) \cos^2(\Delta_m)) \\ \mathcal{J}_1(t, \mathcal{C}^h) &= \frac{1}{4}(n^2 - 1)(1 - \cos^2(\Delta_m)) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{J}_1(t, \mathcal{C}^h) = \frac{n^2 - 1}{4} \sin^2(\Delta_m)}. \quad (9.12)$$

On peut généraliser cette propriété pour une valeur de  $\Delta_m$  égale à  $\frac{\pi}{2}$ .

#### 9.4.2 Zone de perception à ouverture angulaire supérieure à $\frac{\pi}{2}$

Pour des valeurs de  $\Delta_m$  supérieures à  $\frac{\pi}{2}$ , le raisonnement est différent et d'un niveau de complexité différent selon la parité de  $n$ . Lorsque  $n$  est pair, on peut effectivement trouver des configurations de placement qui fournissent un vecteur total  $\vec{V}_T$  de norme nulle. Il suffit de positionner les amers pour obtenir une triangulation de  $\frac{\pi}{2}$  pour chaque paire. Les configurations  $\{\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_n\}$  suivantes permettent d'atteindre cet objectif

$$\angle_{\vec{v}_\perp} \vec{V}_i = \begin{cases} \alpha_i = \bar{\alpha} \in [0, 2\Delta_m - \pi] & \text{si } i \in \{1, \dots, \frac{n}{2}\}, \\ \alpha_i + \pi \in [\pi, 2\Delta_m] & \text{si } i \in \{\frac{n}{2}, \dots, n\}. \end{cases} \quad (9.13)$$

Lorsque  $n$  est impair, l'analyse doit être différente et il semble plus difficile de définir les configurations qui annulent la norme de  $\vec{V}_T$ . Cependant, on peut s'intéresser à une famille de configurations particulières. Elle correspond à des placements des vecteurs permettant de compenser la somme d'un sous-ensemble des vecteurs par les autres situés de part et d'autre de la bissectrice de  $\vec{v}_\perp$  (cf. figure 9.8). On considère donc la répartition des vecteurs en deux ensembles :

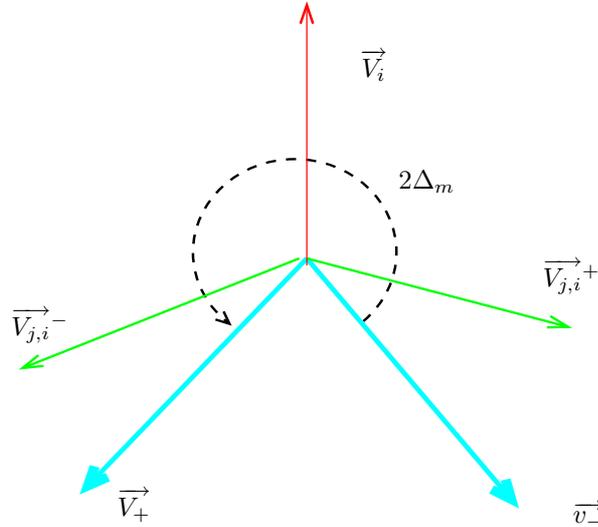


FIG. 9.8 – Famille de vecteurs considérée.

- les vecteurs  $\vec{V}_i, i \in I$  à compenser

$$\forall i \in I, \vec{V}_i = \cos(\alpha_i) \vec{v}_\perp + \sin(\alpha_i) \vec{v}_\perp^\perp \quad (9.14)$$

- les vecteurs  $\vec{V}_{j,i}^+$  et  $\vec{V}_{j,i}^-, j = 1, \dots, n_i, i \in I$

$$\begin{aligned} \exists \Delta_m \geq \theta_i \geq \frac{\pi}{2}, \quad \vec{V}_{j,i}^+ &= \cos(\alpha_i + \theta_i) \vec{v}_\perp + \sin(\alpha_i + \theta_i) \vec{v}_\perp^\perp \\ \vec{V}_{j,i}^- &= \cos(\alpha_i - \theta_i) \vec{v}_\perp + \sin(\alpha_i - \theta_i) \vec{v}_\perp^\perp. \end{aligned} \quad (9.15)$$

On en déduit donc l'expression du vecteur  $\vec{V}_T$

$$\begin{aligned}\vec{V}_T &= \sum_{i \in I} \left\{ \sum_{j=1}^{n_i} \left\{ \vec{V}_{j,i}^+ + \vec{V}_{j,i}^- \right\} + \vec{V}_i \right\} \\ \vec{V}_T &= \sum_{i \in I} n_i \left\{ (\cos(\alpha_i + \theta_i) + \cos(\alpha_i - \theta_i)) \vec{v}_- + (\sin(\alpha_i + \theta_i) + \sin(\alpha_i - \theta_i)) \vec{v}_-^\perp \right\} \\ &\quad + \cos(\alpha_i) \vec{v}_- + \sin(\alpha_i) \vec{v}_-^\perp.\end{aligned}$$

En utilisant les relations trigonométriques remarquables  $\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos(\frac{p+q}{2}) \cos(\frac{p-q}{2})$  et  $\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin(\frac{p+q}{2}) \cos(\frac{p-q}{2})$ , on aboutit à l'expression finale

$$\vec{V}_T = \sum_{i \in I} (1 + 2n_i \cos(\theta_i)) \left\{ \cos(\alpha_i) \vec{v}_- + \sin(\alpha_i) \vec{v}_-^\perp \right\}.$$

Une condition suffisante pour annuler le vecteur  $\vec{V}_T$  est de choisir un placement de façon à imposer

$$\forall i, 1 + 2n_i \cos(\theta_i) = 0,$$

ce qui équivaut à déterminer

$$\forall i, \theta_i = -\arccos \frac{1}{2n_i}. \quad (9.16)$$

On doit cependant tenir compte de la zone de perception limitée

$$\forall i, \frac{\pi}{2} \leq \theta_i \leq \Delta_m. \quad (9.17)$$

La relation 9.16 montre que plus  $n_i$  est grand, plus l'angle  $\theta_i$  est proche de  $\frac{\pi}{2}$ . On en déduit que s'il existe  $n_i$  tel que  $\theta_i$  respecte la contrainte 9.17 ( $-\arccos \frac{1}{2n_i} \leq \Delta_m$ ), alors on peut trouver une configuration optimale qui rend le vecteur  $\vec{V}_T$  équivalent au vecteur nul. En effet,  $n$  étant impair, il suffit de choisir le vecteur  $\vec{V}_i$  et les  $2n_i$  vecteurs  $\vec{V}_{j,i}^+$  et  $\vec{V}_{j,i}^-$  avec  $\theta_i = -\arccos \frac{1}{2n_i}$  et de composer des paires de vecteurs opposés avec les autres vecteurs, dont le nombre est forcément pair. Par exemple, si  $\Delta_m \geq \frac{2\pi}{3}$ , il suffit de considérer  $n_i = 1$  et de choisir un triplet de vecteurs espacés de  $\frac{2\pi}{3}$ . Si la contrainte n'est pas satisfaite, les meilleures configurations dans cette famille sont celles vérifiant

$$\text{card}(I) = 1, n_1 = \frac{n-1}{2} \text{ et } \theta_1 = \Delta_m. \quad (9.18)$$

La stratégie consiste donc à placer un amer sur la bissectrice de la zone de perception et à équilibrer les autres sur chacun des bords.

## 9.5 Prise en compte d'un coût intégral

L'analyse précédente a permis de mieux comprendre l'impact du positionnement relatif entre les amers et la plateforme sur la première composante de la mesure d'information liée au processus d'estimation à partir de mesures de distance et d'angle. Nous abordons maintenant le problème d'optimisation de trajectoires sur un horizon temporel fini pour une fonction objectif construite à partir de l'intégrale du déterminant de la matrice d'information de Fisher.

**Problème 9.5.1** Soit le mobile dont le mouvement est défini par l'équation différentielle 9.1. On cherche à déterminer la trajectoire optimale sur  $[t_0, t_f]$  avec  $t_0 < t_f \leq T$  permettant de passer de l'état initial  $X_i \in \mathcal{D}$  à l'ensemble cible  $V(X_f) \subset \mathcal{D}$  qui maximise

$$\Psi([t_0, t_f]) = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{J}(t, \mathcal{C}^h) dt + \Psi_f(V(\tilde{p}_f), X_{t_f}). \quad (9.19)$$

$\Psi_f(V(\tilde{p}_f), X_{t_f})$  est un coût terminal qui correspond à une application fonction de la distance entre la zone cible et la position finale atteinte. Par exemple, son expression pourrait être donné par

$$\Psi_f(V(\tilde{p}_f), X_{t_f}) \propto \begin{cases} \exp\left(-\|\tilde{p}_f - X_{t_f}\|^2\right) & \text{si } \|\tilde{p}_f - X_{t_f}\| \leq C_f, C_f \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (9.20)$$

## 9.6 Formalisation du problème de planification

On aborde la résolution de ce problème en considérant l'espace des trajectoires constituées d'une suite de déplacements élémentaires à orientation et vitesse constantes. Par conséquent, on considère de nouveau un graphe  $\mathcal{G}(V, E)$  composé de  $|V|$  noeuds  $(s_q, 1 \leq q \leq |V|)$  et  $|E|$  arcs  $\{e_{pq} = (s_p, s_q) \in V^2, q \in \mathcal{V}(p)\}$ . Chaque noeuds est associé à une position 2D  $(x_{s_p}, y_{s_p}) \in \mathcal{D}$ . Le mouvement du mobile sur un arc  $e_{pq}$  est effectué à vitesse  $v_{e_{pq}}$  constante et avec l'orientation fixe  $\theta_{e_{pq}}$ . On fait également l'hypothèse suivante sur la vitesse.

**Hypothèse 1** La vitesse  $v_{e_{pq}} \in \mathbb{R}^+$  le long de l'arc  $e_{pq}$  est constante et bornée :

$$v_m \leq v_{e_{pq}} \leq v_M.$$

La durée du trajet entre les noeuds  $s_p$  et  $s_q$  est notée  $\Delta_{s_p}^{s_q}$  et la longueur de l'arc associé  $l_{pq}$ . On a donc

$$\Delta_{s_p}^{s_q} = \frac{l_{pq}}{v_{e_{pq}}}.$$

Sous ces hypothèses, une trajectoire admissible  $\tau$  est équivalente à une liste ordonnée de noeuds à suivre pour aller du noeud de départ  $s_0$  correspondant à l'état initial  $X_i$  à un noeud appartenant l'ensemble des noeuds  $\mathcal{S}_f$  inclus dans  $V(X_f)$ . Si on note  $n_\tau + 1$  le nombre de noeuds de  $\tau$ , on introduit

- $(s_{i_k})_{k=0, \dots, n_\tau}$  les noeuds décrivant la trajectoire  $\tau$  avec  $s_{i_0} = s_0$  et  $s_{i_{n_\tau+1}} \in V(\tilde{p}_f)$ ,
- $(v_0, \dots, v_{n_\tau-1})$ , la séquence de vitesses de déplacement du mobile.

On note  $t_k, k = 0, \dots, n_\tau$  le temps de passage au noeud  $s_{i_k}$ . La durée totale du déplacement sur la trajectoire est donc

$$\Delta_\tau = \sum_{k=0}^{n_\tau} \Delta_{s_{i_k}}^{s_{i_{k+1}}} = \sum_{k=0}^{n_\tau} \frac{l_{i_k i_{k+1}}}{v_k}.$$

La fonction objectif pour une trajectoire est alors donnée par la somme des coûts élémentaires de chacune des portions de déplacement

$$\Psi([t_0, t_{n_\tau}]) = \sum_{k=1}^{n_\tau-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathcal{J}(t, \mathcal{C}^h) dt + \Psi_f(V(\tilde{p}_f), X_{t_{n_\tau}}). \quad (9.21)$$

avec la contrainte de durée

$$\Delta_\tau = \sum_{k=0}^{n_\tau} \frac{l_{i_k i_{k+1}}}{v_k} \leq T - t_0$$

et les contraintes sur les vitesses

$$\forall k = 0, \dots, n_\tau - 1, v_m \leq v_k \leq v_M.$$

En substituant la fonctionnelle  $\mathcal{J}(t, \mathcal{C}^h)$  par son expression (8), on obtient l'écriture suivante de la fonction objectif 9.21

$$\Psi([t_0, t_{n_\tau-1}]) = \sum_{k=0}^{n_\tau-1} \sum_{c=1}^3 a_c \underbrace{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathcal{J}_c(t, \mathcal{C}^h) dt}_{\Gamma^{(c)}(k)} + \Psi_f(V(\tilde{p}_f), X_{t_{n_\tau-1}}) \quad (9.22)$$

Pour évaluer la fonction objectif pour une trajectoire donnée, il convient donc de déterminer l'expression des grandeurs  $\Gamma^{(c)}(k)$ ,  $c = 1, 2, 3$ ,  $k = 0, \dots, n_\tau - 1$ . Nous montrons dans les sections suivantes qu'il est possible, pour le modèle de zone de perception considéré, de proposer une formulation explicite de ces grandeurs.

### 9.6.1 Segments de visibilité le long d'un arc

Le calcul des termes  $\Gamma^{(c)}(k)$ ,  $c = 1, 2, 3$ ,  $k = 0, \dots, n_\tau$  dépend des amers visibles lors du déplacement sur les arcs empruntés par le mobile. Il faut donc déterminer les portions de l'arc sur lesquelles un amer est visible. La nature et le nombre de ces portions sont variables selon le modèle de perception du capteur d'acquisition. On considère un arc de déplacement délimité par  $P_s(x_s, y_s)$  et  $P_a(x_a, y_a)$  où le mobile évolue de  $P_s$  vers  $P_a$ . Nous supposons que les capacités de perception du capteur se traduisent par la définition d'une zone de couverture caractérisée par le triplet  $(d_-, d_+, \Delta)$  représentant respectivement la distance minimale et maximale de détection et la moitié de l'angle de perception. En fonction des hypothèses retenues pour ces paramètres, la surface couverte durant l'évolution se décompose en plusieurs régions. On introduit le repère local orthonormé  $\mathcal{R}_l := (P_s, \vec{u}_l, \vec{v}_l)$  associé à l'arc. Le vecteur  $\vec{u}_l$  est colinéaire au vecteur  $\overrightarrow{P_a P_s}$  et de même direction et  $\vec{v}_l$  est obtenu par une rotation d'angle  $\pi/2$  de  $\vec{u}_l$ . Soit  $f_i$  un amer visible au cours du mouvement, il est perçu entre deux points  $P_-^i(x_-^i, y_-^i)$  et  $P_+^i(x_+^i, y_+^i)$ . Les coordonnées de ces points limites dépendent des paramètres du modèle de perception mais également du positionnement relatif de l'amer par rapport au segment de déplacement. Les paragraphes suivants apportent quelques éléments géométriques permettant de dériver ces coordonnées en fonction du capteur considéré.

#### 9.6.1.1 Capteur omnidirectionnel

Si l'on suppose que le mobile dispose d'un capteur de perception offrant la capacité de voir dans toutes les directions (on a donc  $\Delta = 180^\circ$ ), seul l'éloignement des amers est à prendre en compte pour le calcul de  $P_-^i$  et  $P_+^i$ . Nous distinguons deux situations selon le modèle de détection en distance.

**Le capteur n'a pas de limites en distance** ( $d_- = 0$ ,  $d_+ = +\infty$ ). Dans cette configuration, la zone de perception est l'espace 2D tout entier et le segment de visibilité est équivalent au segment de déplacement  $[P_s P_a]$  en l'absence d'obstacles dans l'environnement.

**La distance de détection maximale est bornée** ( $d_- = 0$ ,  $d_+ \in \mathbb{R}^+ \setminus \{\infty\}$ ). La zone vue par le mobile est alors composée de trois régions, qui sont respectivement (cf. figure 9.9) :

- le rectangle  $\mathcal{Z}_1$  formé par les points  $S_1, S_2, S_3$  et  $S_4$  dont les coordonnées dans le repère  $\mathcal{R}_l$  sont

$$S_1 = (0, d_+), \quad S_2 = (l, d_+), \quad S_3 = (0, -d_+), \quad S_4 = (l, -d_+),$$

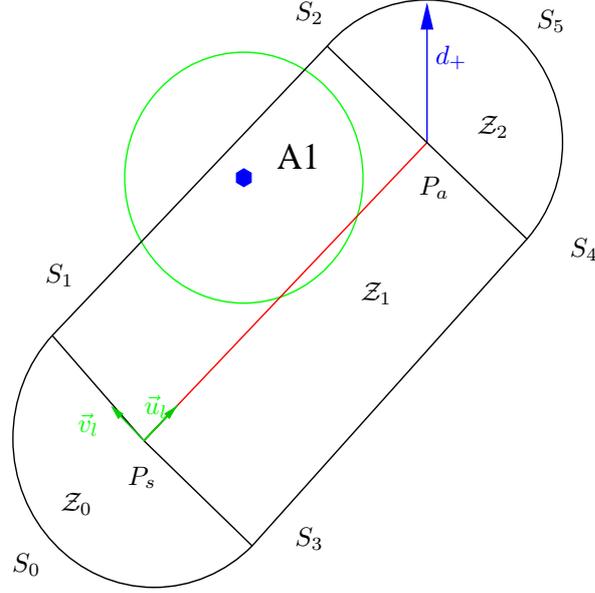
- le demi-disque  $\mathcal{Z}_0$  de centre  $P_s$  et de rayon  $d_+$  formé par les points

$$S_1, \quad S_3 \text{ et } S_0 = (-d_+, 0),$$

- le demi-disque  $\mathcal{Z}_2$  de centre  $P_a$  et de rayon  $d_+$  formé par les points

$$S_2, \quad S_4 \text{ et } S_5 = (d_+, 0).$$

Toujours en l'absence d'obstacles, la portion du segment où l'amer est visible dépend de sa zone d'appartenance parmi  $\mathcal{Z}_0, \mathcal{Z}_1$  et  $\mathcal{Z}_2$ . Les coordonnées des points limites seront obtenus à partir de  $\{P_1, P_2\} = C(f_i, d_+) \cap (P_s P_a)$  où  $C(f_i, d_+)$  est le cercle de centre  $f_i$  et de rayon  $d_+$ . On suppose

FIG. 9.9 – Zone perçue pour un capteur omnidirectionnel et  $d_+ < +\infty$ .

que  $P_1$  est situé avant  $P_2$  lorsque l'on parcourt la droite  $(P_s P_a)$  dans le sens du déplacement. Considérons alors les différentes possibilités pour la position de l'amer.

1.  $f_i \in Z_0$ . Dans ce cas,  $P_1$  est forcément situé avant le point  $P_s$  et donc

$$P_-^i = P_s \quad \text{et} \quad P_+^i = \begin{cases} P_2 & \text{si } P_2 \in [P_s P_a[ \\ P_a & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.  $f_i \in Z_1$ . On a le résultat suivant :

$$P_-^i = \begin{cases} P_1 & \text{si } P_1 \in ]P_s P_a] \\ P_s & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et} \quad P_+^i = \begin{cases} P_2 & \text{si } P_2 \in [P_s P_a[ \\ P_a & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.  $f_i \in Z_3$ . Dans ce cas,  $P_2$  est forcément situé après le point  $P_a$  et

$$P_-^i = \begin{cases} P_1 & \text{si } P_1 \in ]P_s P_a] \\ P_s & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et} \quad P_+^i = P_a.$$

### 9.6.1.2 Capteur à champ limité

Dans cette configuration capteur, les zones visibles au cours du déplacement sont représentées par des régions présentées sur la figure 9.10 :

- les parallélogrammes extérieurs  $Z_1 = (S_1, S_2, S_2', S_1')$  et  $Z_2 = (S_3, S_4, S_4', S_3')$ ,
- les parallélogrammes intérieurs  $\underline{Z}_1 = (S_1', S_2', P_a, P_s)$  et  $\underline{Z}_2 = (S_3', S_4', P_a, P_s)$  privés respectivement des portions de disques  $\bar{Z}_1$  et  $\bar{Z}_2$  de centre  $P_s$  et de rayon  $d_-$ ,
- la portion de disque  $\underline{Z}_3$  de centre  $P_a$  et de rayon  $d_-$ ,
- la portion de couronne  $Z_3$  de centre  $P_a$  et de rayons  $d_-$  et  $d_+$ .

On suppose encore l'absence d'obstacles dans la zone de perception au cours du déplacement. Dans le repère local, les points définissant la zone visible ont pour coordonnées :

$$\begin{aligned} P_s &= (0, 0), & P_a &= (l, 0) \\ S_1 &= (d_+ c_\Delta, d_+ s_\Delta), & S_2 &= (l + d_+ c_\Delta, d_+ s_\Delta) \\ S_1' &= (d_- c_\Delta, d_- s_\Delta), & S_2' &= (l + d_- c_\Delta, d_- s_\Delta) \\ S_3 &= (d_+ c_\Delta, -d_+ s_\Delta), & S_4 &= (l + d_+ c_\Delta, -d_+ s_\Delta) \\ S_3' &= (d_- c_\Delta, -d_- s_\Delta), & S_4' &= (l + d_- c_\Delta, -d_- s_\Delta) \end{aligned}$$

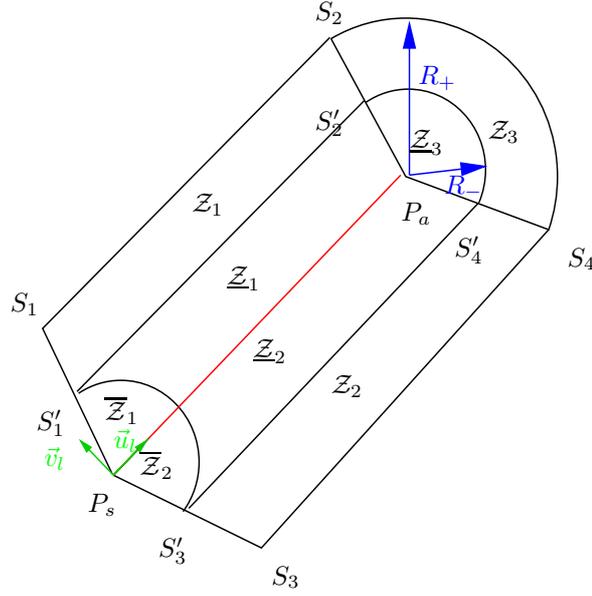


FIG. 9.10 – Région de détection lors d'un déplacement sur un arc.

avec  $c_\Delta = \cos(\Delta)$  et  $s_\Delta = \sin(\Delta)$ . Raisonnons par rapport à la position de l'amer.

1.  $f_i \in \mathcal{Z}_1$  ou  $f_i \in \mathcal{Z}_2$   
 Le point  $P_-^i$  est obtenu en analysant de nouveau l'intersection de  $C(f_i, d_+)$  avec  $(P_s P_a)$ . Il existe deux points d'intersection notés  $P_1$  et  $P_2$ . On considère également le point d'intersection entre  $(D_i' / f_i)$  et  $[P_s P_a]$  (cf. figure 9.11). On a alors
  - $P_-^i \equiv P_s$  si la distance entre  $f_i$  et  $P_s$  est plus petite que  $d_+$ , sinon  $P_-^i \equiv P_1$
  - $P_+^i = D_i' \cap [P_s P_a]$ .
2.  $f_i \in \underline{\mathcal{Z}}_1 / \overline{\mathcal{Z}}_1$  ou  $f_i \in \underline{\mathcal{Z}}_2 / \overline{\mathcal{Z}}_2$   
 Le raisonnement pour la détermination des coordonnées de  $P_-^i$  est identique au cas précédent. Les coordonnées de  $P_+^i$  se déduisent de celles de  $P_-^i$ . Dans le repère  $\mathcal{R}_l$ , on a

$${}^l x_+^i = {}^l x_-^i + (d_+ - d_-).$$

Si  ${}^l x_+^i > l$  alors  $P_+^i \equiv P_a$ .

3.  $f_i \in \mathcal{Z}_3$   
 $P_-^i$  est déterminé comme précédemment et de façon évidente on a  $P_+^i \equiv P_a$ .
4.  $f_i \in \mathcal{Z}_4$   
 $P_-^i$  est déterminé comme précédemment et  $P_+^i$  est obtenu à partir de l'intersection de  $C(f_i, d_-)$  avec  $(P_s P_a)$ .

A partir de la connaissance de  $P_-^i$  et  $P_+^i$ , pour tout amer  $f_i$ , on peut déterminer les portions de l'arc de déplacements où deux ou trois amers sont simultanément visibles. On note  $P_+^{ij}$  et  $P_-^{ij}$  les positions pour une paire d'amers  $(f_i, f_j)$ , et  $P_+^{ijr}$  et  $P_-^{ijr}$  pour un triplet  $(f_i, f_j, f_r)$ . Dans le repère local  $\mathcal{R}_l$ , les coordonnées sont obtenues simplement en appliquant les opérations suivantes.

$${}^l x_-^{ijr} = \max({}^l x_-^i, {}^l x_-^j, {}^l x_-^r) \text{ et } {}^l x_+^{ijr} = \min({}^l x_+^i, {}^l x_+^j, {}^l x_+^r),$$

avec de façon évidente l'ordonnée  ${}^l y_-^{ijr} = 0$ . Les coordonnées peuvent ensuite être exprimées dans le repère global  $\mathcal{R}_g$  par changement de repère.

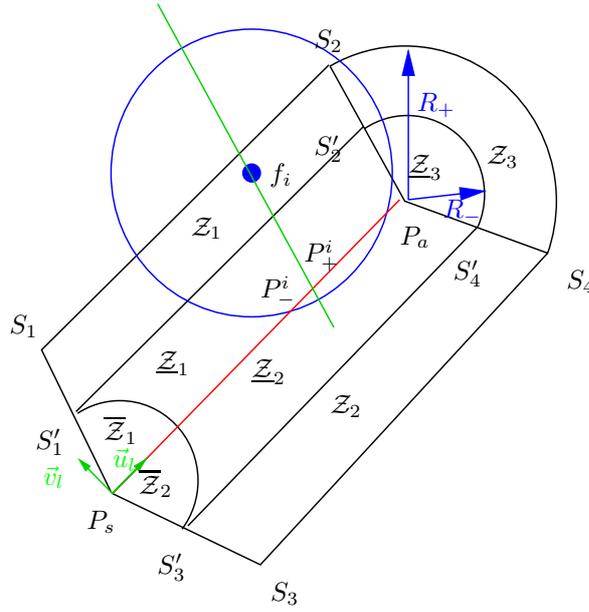


FIG. 9.11 – Région de détection lors d'un déplacement sur un arc.

### 9.6.2 Calcul du coût pour un arc

Soit  $\Gamma^{(c)}(k)$ ,  $c = 1, 2, 3$  le coût pour chacune des composantes de la fonctionnelle pour un déplacement élémentaire entre les noeuds  $s_{i_k}$  et  $s_{i_{k+1}}$ . Sur l'intervalle temporel  $[t_k, t_{k+1}]$ , le mobile évolue avec une orientation  $\theta_k$  et une vitesse  $v_k$  invariantes. Dans ces conditions, en fonction de la valeur de l'orientation  $\theta_k$ , il existe une bijection entre les coordonnées du mobile et la variable temporelle. Plus précisément, on peut définir la relation suivante entre une variation élémentaire d'une des composantes  $dx$  ou  $dy$  de position et une durée élémentaire  $dt$  :

$$dt = \begin{cases} \frac{dx}{v_k \cos \theta_k} & \text{si } \theta_k \neq \left\{ \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right\} \\ \frac{\epsilon(dy)dy}{v_k} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (9.23)$$

où  $\epsilon(dy) = \text{signe}(dy)$ . Les noeuds  $s_{i_k}$  et  $s_{i_{k+1}}$  correspondent aux points de coordonnées  $(x_{s_{i_k}}, y_{s_{i_k}})$  et  $(x_{s_{i_{k+1}}}, y_{s_{i_{k+1}}})$ . Le long de l'arc, on a donc également la relation linéaire entre les coordonnées du mobile :

$$\begin{aligned} y &= \beta_k + \gamma_k x, & \forall x \in [x_{s_{i_k}}, x_{s_{i_{k+1}}}] & \quad \text{si } \theta_k \neq \left\{ \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right\}, \\ x &= x_{s_{i_k}} = x_{s_{i_{k+1}}}, & y_{s_{i_k}} \leq y \leq y_{s_{i_{k+1}}} & \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

$\gamma_k$  et  $\beta_k$  dépendent des coordonnées des positions des noeuds et de l'orientation du déplacement. Plus précisément,

$$\gamma_k = \frac{y_{s_{i_{k+1}}} - y_{s_{i_k}}}{x_{s_{i_{k+1}}} - x_{s_{i_k}}} = \tan(\theta_k) \quad \text{et} \quad \beta_k = y_{s_{i_k}} - \gamma_k x_{s_{i_k}}.$$

Compte tenu de ces hypothèses, on se propose de montrer que la détermination des termes  $\Gamma^{(c)}(k)$ ,  $c = 1, 2, 3$  est équivalente au calcul d'intégrales de fractions rationnelles. En effet, considérons un amer  $f_q$  visible à partir d'une position  $P(x, y)$  donnée sur l'arc. On a

$$\rho_q^2 = p_q(u) := a_q u^2 + b_q u + c_q. \quad (9.24)$$

$p_q(u)$  est un polynôme défini sur  $[x_{s_{i_k}}, x_{s_{i_{k+1}}}]$  ou sur  $[y_{s_{i_k}}, y_{s_{i_{k+1}}}]$  selon que l'on considère une paramétrisation suivant l'abscisse  $x$  ( $\theta_k \neq \{\pi/2, -\pi/2\}$ ) ou l'ordonnée  $y$ . L'expression de ces coefficients pour chacun des changements de variables considéré est donnée dans le tableau suivant.

variable	$a_q$	$b_q$	$c_q$
x	$\gamma_k^2 + 1$	$2\gamma_k(\beta_k - y_q) - 2x_q$	$x_q^2 + (\beta_k - y_q)^2$
y	1	$-2y_q$	$y_q^2 + (x_{s_{i_k}} - x_q)^2$

Par ailleurs, on peut aussi écrire pour un couple d'amers  $(f_n, f_m)$  vus à partir d'une position sur l'arc à l'instant  $t$  avec les angles  $\beta_n(t)$  et  $\beta_m(t)$

$$\cos(\beta_n(t) - \beta_m(t)) = \frac{p_{nm}(u)}{\sqrt{p_n(u)p_m(u)}}, \quad (9.25)$$

avec  $p_{nm}(u) := A_{nm}u^2 + B_{nm}u + C_{nm}$  un polynôme dont les coefficients vérifient respectivement pour les déplacements non verticaux et verticaux

$$\begin{aligned} A_{nm} &= \gamma_k^2 + 1 \\ B_{nm} &= \gamma_k(2\beta_k - y_n - y_m) - (x_n + x_m) \\ C_{nm} &= x_n x_m + y_n y_m - \beta_k(y_n + y_m) + \beta_k^2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A_{nm} &= 1 \\ B_{nm} &= -(y_m + y_n) \\ C_{nm} &= (x_{s_{i_k}} - x_n)(x_{s_{i_k}} - x_m) + y_n y_m. \end{aligned}$$

De même, on a

$$\sin(\beta_n(t) - \beta_m(t)) = \frac{p_{nm}(u)}{\sqrt{p_n(u)p_m(u)}} \quad (9.26)$$

avec  $p_{nm}(u) := B_{nm}u + C_{nm}$  vérifiant si  $\theta_k \neq \{\pi/2, -\pi/2\}$

$$\begin{aligned} B_{nm} &= y_n - y_m - \gamma_k(x_n - x_m) \\ C_{nm} &= -\beta_k(x_n - x_m) + x_n y_m - x_m y_n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B_{nm} &= (x_m - x_n) \\ C_{nm} &= x_{s_{i_k}}(y_n - y_m) + x_n y_m - x_m y_n \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Partant de ces expressions sous la forme de fractions rationnelles, on montre dans les sections suivantes qu'il est possible de dériver une formulation explicite des composantes de la fonction coût, basée sur la matrice d'information de Fisher, pour chaque déplacement sur un segment élémentaire de la trajectoire. Plus précisément, on a la propriété

**Proposition 12** *Les termes  $\Gamma^{(c)}(k)$ ,  $c = 1, 2, 3$  se déduisent des primitives de la forme*

$$H^{(n)}(l, e, f, s, u_-, u_+) = \int_{u_-}^{u_+} \frac{e u + f}{p_l^n(u)} dx, \quad n = 1, \dots, 4 \quad (9.27)$$

avec  $(e, f, u_-, u_+) \in \mathbb{R}^4$  et  $l = 1, \dots, N_C$ ,  $l$  étant l'indice de l'amer  $f_l$  de la carte.

Les détails des calculs de ces intégrales peuvent être trouvés en annexe C. Ainsi, on démontre les résultats suivants

$$\begin{aligned} H^{(1)}(l, e, h, u_-, u_+) &= \nu_l^{(1)} \ln \left( \frac{p_l(u_+)}{p_l(u_-)} \right) \\ &\quad + \mu_l^{(1)} \left( \arctan \left( \frac{2a_l u_+ + b_l}{\sqrt{D_l}} \right) - \arctan \left( \frac{2a_l u_- + b_l}{\sqrt{D_l}} \right) \right) \\ H^{(2)}(l, e, h, u_-, u_+) &= \frac{1}{D_l} \left( \frac{\nu_l^{(2,1)} u_+ + \nu_l^{(2,2)}}{p_l(u_+)} - \frac{\nu_l^{(2,1)} u_- + \nu_l^{(2,2)}}{p_l(u_-)} \right) \\ &\quad + \mu_l^{(2)} \left( \arctan \left( \frac{2a_l u_+ + b_l}{\sqrt{D_l}} \right) - \arctan \left( \frac{2a_l u_- + b_l}{\sqrt{D_l}} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^{(3)}(l, e, h, u_-, u_+) &= \frac{1}{2D_l} \left( \frac{\nu_l^{(2,1)} u_+ + \nu_l^{(2,2)}}{p_l^2(u_+)} - \frac{\nu_l^{(2,1)} u_- + \nu_l^{(2,2)}}{p_l^2(u_-)} \right) \\
&\quad + \frac{3\nu_l^{(2,1)}}{2D_l^2} \left( \frac{2a_l u_+ + b_l}{p_l(u_+)} - \frac{2a_l u_- + b_l}{p_l(u_-)} \right) \\
&\quad + \frac{3a_l \mu_l^{(2)}}{D_l} \left( \arctan\left(\frac{2a_l u_+ + b_l}{\sqrt{D_l}}\right) - \arctan\left(\frac{2a_l u_- + b_l}{\sqrt{D_l}}\right) \right) \\
H^{(4)}(l, e, h, u_-, u_+) &= \frac{1}{3D_l} \left( \frac{\nu_l^{(2,1)} u_+ + \nu_l^{(2,2)}}{p_l^3(u_+)} - \frac{\nu_l^{(2,1)} u_- + \nu_l^{(2,2)}}{p_l^3(u_-)} \right) \\
&\quad + \frac{5\nu_l^{(2,1)}}{6D_l^2} \left( \frac{2a_l u_+ + b_l}{p_l^2(u_+)} - \frac{2a_l u_- + b_l}{p_l^2(u_-)} \right) \\
&\quad + \frac{5a_l \nu_l^{(2,1)}}{D_l^3} \left( \frac{2a_l u_+ + b_l}{p_l(u_+)} - \frac{2a_l u_- + b_l}{p_l(u_-)} \right) \\
&\quad + \frac{20a_l^2 \mu_l^{(2)}}{D_l^2} \left( \arctan\left(\frac{2a_l u_+ + b_l}{\sqrt{D_l}}\right) - \arctan\left(\frac{2a_l u_- + b_l}{\sqrt{D_l}}\right) \right),
\end{aligned}$$

avec  $D_l = 4a_l c_l - b_l^2$ ,  $\nu_l^{(1)} = e/(2a_l)$ ,  $\nu_l^{(2,1)} = (2a_l h - b_l e)$ ,  $\nu_l^{(2,2)} = (b_l h - 2e c_l)$ ,  $\mu_l^{(1)} = (2a_l h - b_l e)/(a_l \sqrt{D_l})$  et  $\mu_l^{(2)} = 2\nu_l^{(2,1)}/D_l^{\frac{3}{2}}$ .

Nous considérons maintenant chacune des composantes  $\Gamma^{(c)}(k)$  et précisons son expression en fonction des intégrales de la forme  $H^{(n)}(l, e, h, u_-, u_+)$ .

### 9.6.2.1 Expression de $\Gamma^{(1)}(k)$

On considère l'ensemble des triplets d'amers  $(f_i, f_j, f_r)$  simultanément visibles lors du déplacement sur un arc élémentaire. Il faut noter qu'il est possible d'avoir  $f_i \equiv f_r$ . On s'intéresse au calcul de l'intégrale

$$\Gamma^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j>i}^{N_c} \sum_{r=1}^{N_c} \Gamma_{ijr}^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j>i}^{N_c} \sum_{r=1}^{N_c} \int_{t_-^{ijr}}^{t_+^{ijr}} \delta_t^i \delta_t^j \delta_t^r g_{ijr}^{(1)}(t) dt, \quad (9.28)$$

avec  $t_-^{ijr}$  et  $t_+^{ijr}$  sont les temps de passage en  $P_-^{ijr}$  et  $P_+^{ijr}$  et

$$g_{ijr}^{(1)}(t) = \sin^2(\beta_i(t) - \beta_j(t)).$$

On fait pour l'instant l'hypothèse qu'il n'existe pas d'obstacles<sup>2</sup> et que les trois amers sont vus entre  $P_-^{ijr}$  et  $P_+^{ijr}$  sans discontinuités et donc  $\delta_t^i = \delta_t^j = \delta_t^r = 1, \forall t \in [t_-^{ijr}, t_+^{ijr}]$ . En utilisant les hypothèses de changement de variables et les notations précédentes (cf. équations (9.23) et (9.26)), on doit déterminer des intégrales de la forme

$$\Gamma_{ijr}^{(1)}(k) = \begin{cases} \frac{1}{v_k \cos(\theta_k)} \int_{x_-^{ijr}}^{x_+^{ijr}} \frac{p_{ij}^2(x)}{p_i(x)p_j(x)} dx & \text{si } \theta_k \neq \{\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\}, \\ \frac{\epsilon(y_+^{ijr} - y_-^{ijr})}{v_k} \int_{y_-^{ijr}}^{y_+^{ijr}} \frac{p_{ij}^2(y)}{p_i(y)p_j(y)} dy & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le calcul de ces intégrales est obtenu en effectuant au préalable une décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle. Une attention particulière doit être portée à la forme de cette décomposition en fonction du positionnement relatif de l'arc de déplacement et du segment formé par le couple d'amers  $(f_i, f_j)$ . En effet, on distingue deux situations possibles.

<sup>2</sup>La présence d'obstacles va entraîner un découpage du segment visibilité en sous segments mais on reste confronté au même type de calcul.

**Déplacement le long de la médiatrice de  $[f_i, f_j]$ .** On a donc la relation  $p_j(u) = p_i(u)$ ,  $\forall u$  et la décomposition est de la forme

$$\frac{p_{ij}^2(u)}{p_i(u)p_j(u)} = \frac{e_1u + h_1}{p_i(u)} + \frac{e_2u + h_2}{p_i^2(u)}.$$

Par identification, on montre que le vecteur composé des coefficients de la décomposition est solution d'un système linéaire d'ordre 4. On note  $\chi = (e_1 \ h_1 \ e_2 \ h_2)^*$  ce vecteur et  $M_{ij}^{(1)}$  la matrice du système.

$$M_{ij}^{(1)} \chi^{(1)} = \mathcal{B}_{ij},$$

avec

$$M_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} a_i & 0 & 0 & 0 \\ b_i & a_i & 0 & 0 \\ c_i & b_i & 1 & 0 \\ 0 & c_i & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{B}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_{ij}^2 \\ 2B_{ij}C_{ij} \\ C_{ij}^2 \end{pmatrix}. \quad (9.29)$$

On peut remarquer que le paramètre  $e_1$  est nul dans cette configuration.

**Déplacement en dehors de la médiatrice de  $[f_i, f_j]$ .** La décomposition de la fraction rationnelle est alors de la forme

$$\frac{p_{ij}^2(u)}{p_i(u)p_j(u)} = \frac{e_1u + h_1}{p_i(u)} + \frac{e_2u + h_2}{p_j(u)}.$$

Le système linéaire permettant de déduire les paramètres de  $\chi^{(1)}$  est identique avec cependant une modification de la matrice

$$M_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} a_j & 0 & a_i & 0 \\ b_j & a_j & b_i & a_i \\ c_j & b_j & c_i & b_i \\ 0 & c_j & 0 & c_i \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{B}_{ij} \text{ est identique au cas précédent.} \quad (9.30)$$

En conclusion, on obtient donc la propriété suivante :

**Proposition 13** Soit  $(f_i, f_j, f_r)$  un triplet d'amers simultanément visibles lors du déplacement sur l'arc  $e$  à l'étape  $k$ .

a) Si le mobile se déplace sur la médiatrice de  $[f_i, f_j]$ ,

$$\Gamma_{ijr}^{(1)}(k) = c_k^{(1)} \begin{cases} H^{(1)}(e_1^{ij}, h_1^{ij}, x_{ijr}^-, x_{ijr}^+) + H^{(2)}(e_2^{ij}, h_2^{ij}, x_{ijr}^-, x_{ijr}^+), & \theta_k \neq \{\frac{\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\}, \\ H^{(1)}(e_1^{ij}, h_1^{ij}, y_{ijr}^-, y_{ijr}^+) + H^{(2)}(e_2^{ij}, h_2^{ij}, y_{ijr}^-, y_{ijr}^+), & \theta_k = \frac{\pm\pi}{2}. \end{cases}$$

b) Si le déplacement est en dehors de la médiatrice de  $[f_i, f_j]$ ,

$$\Gamma_{ijr}^{(1)}(k) = c_k^{(1)} \begin{cases} H^{(1)}(e_1^{ij}, h_1^{ij}, x_{ijr}^-, x_{ijr}^+) + H^{(1)}(e_2^{ij}, h_2^{ij}, x_{ijr}^-, x_{ijr}^+), & \theta_k \neq \{\frac{\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\}, \\ H^{(1)}(e_1^{ij}, h_1^{ij}, y_{ijr}^-, y_{ijr}^+) + H^{(1)}(e_2^{ij}, h_2^{ij}, y_{ijr}^-, y_{ijr}^+), & \theta_k = \frac{\pm\pi}{2}. \end{cases}$$

Les coefficients  $e_l^{ij}, h_l^{ij}$ ,  $l = 1, 2$  sont obtenus à partir des systèmes linéaires dont les matrices sont données par les équations (9.29) et (9.30) selon la configuration considérée. Le coefficient  $c_k^{(1)}$  est à valeurs dans  $\{1/(v_k \cos(\theta_k)), 1/v_k, -1/v_k\}$  pour respectivement  $\theta_k \neq \pi/2, -\pi/2$ ,  $\theta_k = \pi/2$  et  $\theta_k = -\pi/2$ .

**Remarques** Ce résultat amène plusieurs commentaires. Tout d'abord, le gain d'information est d'autant plus important que la durée d'intégration est grande. Plus le triplet d'amers est visible au cours du déplacement, meilleure sera donc la performance de localisation a priori. Ce premier résultat semble logique. L'autre enseignement concerne l'impact du positionnement relatif du déplacement par rapport au couple formé par les deux amers dont l'information utile est la mesure de distance. Les configurations, avec un déplacement proche de l'orientation de la médiatrice, semblent être particulièrement singulières. Pour une telle configuration, la mesure de distance est aussi plus impactante car elle intervient en  $1/r^2$  dans le terme  $H^{(2)}$ . Sur le graphique de la figure 9.12, nous présentons l'allure de l'évolution de la composante  $\Gamma_{ijr}^{(1)}(k)$  pour une variation de l'orientation du segment. Nous avons choisi trois amers, dont deux sont positionnés en symétrie par rapport à l'axe des abscisses. On suppose toujours un capteur omnidirectionnel avec une distance de détection suffisamment grande. Le segment de visibilité est donc le segment en entier. La figure 9.13 montre

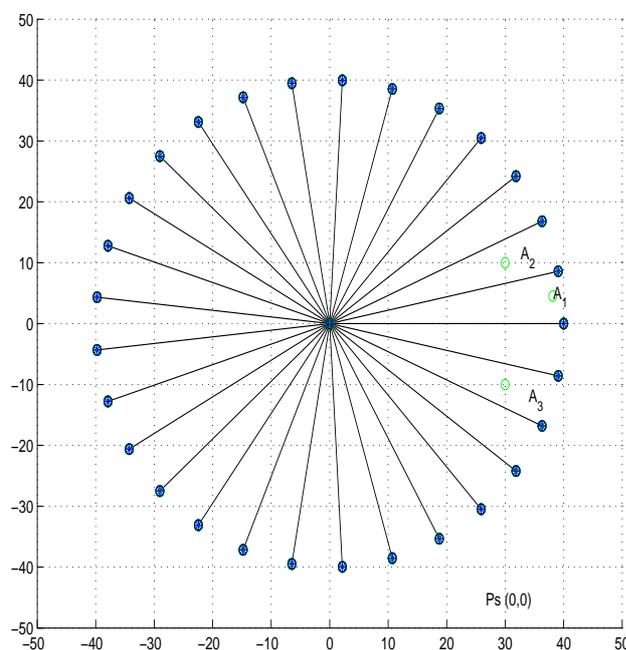


FIG. 9.12 – Configuration à trois amers et 20 segments d'orientation  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

l'évolution de  $\Gamma_{ijr}^{(1)}(k)$  en fonction de l'orientation et pour différentes configurations  $(i, j, r)$ . On peut tout d'abord noter le comportement symétrique de la courbe lorsque les deux amers en symétrie participent au calcul de la fonctionnelle  $((i, j, r) = (2, 3, 1))$ . Pour les trois cas considérés, le coût associé à un triplet augmente lorsqu'on se rapproche des amers et lorsque l'axe de déplacement a une orientation voisine de celle des médiatrices.

### 9.6.2.2 Expression de $\Gamma^{(2)}(k)$

Le calcul de  $\Gamma^{(2)}(k)$  fait intervenir des triplets d'amers de la forme  $(f_i, f_j, f_r)$  avec éventuellement  $f_i \equiv f_j$ . Plus précisément,

$$\Gamma^{(2)}(k) = \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} \sum_{r>j}^{N_c} \Gamma_{ijr}^{(2)}(k) = \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} \sum_{r>j}^{N_c} \int_{t_{ijr}^-}^{t_{ijr}^+} \delta_t^i \delta_t^j \delta_t^r g_{ijr}^{(2)}(t) dt$$

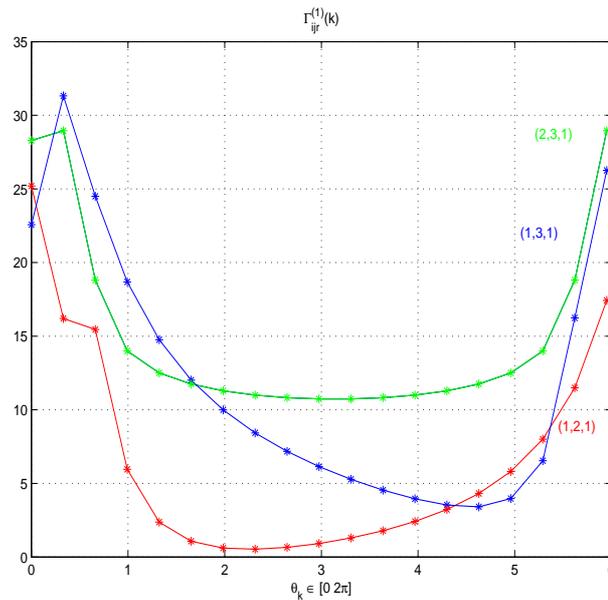


FIG. 9.13 –  $\Gamma_{ijr}^{(1)}(k)$   $((i, j, r) = (1, 2, 1)$ -rouge,  $(i, j, r) = (1, 3, 1)$ -bleu et  $(i, j, r) = (2, 3, 1)$ ).

avec  $t_-^{ijq}$  et  $t_+^{ijq}$  les temps de passage en  $P_-^{ijr}$  et  $P_+^{ijr}$ , qui délimitent la portion de l'arc où les trois amers sont simultanément visibles et

$$g_{ijr}^{(2)}(t) = \left( \frac{\cos(\beta_i(t) - \beta_r(t))}{\rho_r(t)} - \frac{\cos(\beta_i(t) - \beta_j(t))}{\rho_j(t)} \right)^2.$$

En développant cette expression, on est amené à considérer l'intégration des termes

$$\begin{aligned} T_1(t) &= \frac{\cos^2(\beta_i(t) - \beta_q(t))}{\rho_q^2(t)}, \quad q = j, r \\ T_2(t) &= \frac{\cos(\beta_i(t) - \beta_j(t)) \cos(\beta_i(t) - \beta_r(t))}{\rho_j(t) \rho_r(t)}. \end{aligned}$$

En exploitant la relation (9.25), on se ramène à des fractions rationnelles de la forme

$$\begin{aligned} T_1^{iq}(u) &= \frac{p_{iq}^2(u)}{p_i(u)p_q^2(u)}, \quad q = j, r \\ T_2^{ijr}(u) &= \frac{p_{ir}(u)p_{ij}(u)}{p_i(u)p_j(u)p_r(u)} \end{aligned}$$

où  $p_{iq}$ ,  $q = j, r$  est un polynôme du second degré. On souhaite maintenant intégrer ces expressions. Il est donc nécessaire de faire apparaître des fonctions de primitives connues en s'appuyant de nouveau sur une décomposition en éléments simples. Cette dernière sera encore dépendante de la position relative de l'arc de déplacement du mobile par rapport aux segments formés par les paires d'amers pris deux à deux. Énumérons les différentes configurations possibles.

**Les amers  $f_i$  et  $f_j$  sont identiques.** On a donc deux situations possibles.

- C1.1) Le déplacement se fait le long de la médiatrice de  $[f_j, f_r]$ , on est dans la configuration où  $p_i(u) = p_j(u) = p_r(u)$ .
- C1.2) Le déplacement se fait en dehors de la médiatrice de  $[f_j, f_r]$  et donc  $p_i(u) = p_j(u) \neq p_r(u)$ .

**Les amers  $f_i$  et  $f_j$  sont distincts.** Dans ce cas, on a  $i < j$  ou  $i > j$ .

- C2)** Si  $i < j$ , on a forcément  $r > j > i$ , et les trois amers sont distincts avec quatre possibilités :
- C2.1) le déplacement n'est sur aucune des trois médiatrices des segments formés par les amers pris deux à deux et donc  $p_i(u) \neq p_j(u) \neq p_r(u)$ ,
  - C2.2) le déplacement est sur la médiatrice de  $[f_i, f_j]$  et  $p_i(u) = p_j(u) \neq p_r(u)$ ,
  - C2.3) le déplacement est sur la médiatrice de  $[f_i, f_r]$  et  $p_i(u) = p_r(u) \neq p_j(u)$ ,
  - C2.4) le déplacement est sur la médiatrice de  $[f_j, f_r]$  et  $p_i(u) \neq p_j(u) = p_r(u)$ .
- C3)** Si  $i > j$ , on peut avoir  $r = i$  et donc les configurations suivantes :
- C3.1)  $f_i \equiv f_r$  et le déplacement est sur la médiatrice de  $[f_j, f_r]$  donc  $p_i(u) = p_j(u) = p_r(u)$ ,
  - C3.2)  $f_i \equiv f_r$  et le déplacement n'est pas sur la médiatrice de  $[f_j, f_r]$  donc  $p_i(u) = p_r(u) \neq p_j(u)$ ,
  - C3.3)  $f_i \neq f_r$  et le déplacement n'est sur aucune des trois médiatrices donc  $p_i(u) \neq p_r(u) \neq p_j(u)$ ,
  - C3.4)  $f_i \neq f_r$  et le déplacement est sur la médiatrice de  $[f_j, f_r]$  donc  $p_j(u) = p_r(u) \neq p_i(u)$ ,
  - C3.5)  $f_i \neq f_r$  et le déplacement est sur la médiatrice de  $[f_i, f_r]$  donc  $p_i(u) = p_r(u) \neq p_j(u)$ ,
  - C3.6)  $f_i \neq f_r$  et le déplacement est sur la médiatrice de  $[f_i, f_j]$  donc  $p_i(u) = p_j(u) \neq p_r(u)$ .

En termes de décomposition, on peut regrouper les cas en ensembles  $E_0 = \{C1.1, C3.1\}$ ,  $E_1 = \{C1.2, C2.2, C3.6\}$ ,  $E_2 = \{C2.3, C3.2, C3.5\}$ ,  $E_3 = \{C2.1, C3.3\}$ ,  $E_4 = \{C2.4, C3.4\}$  associés à une unique forme de décomposition. Par ailleurs, les décompositions des ensembles  $E_q$ ,  $q = 1, 2, 4$  diffèrent par permutation des coefficients  $i, j$  et  $r$ .

**Primitives pour des composantes du type  $T_1(u)$ .** On s'intéresse à la décomposition de la fraction rationnelle du type

$$T_1^{iq}(u) = \frac{p_{iq}^2(u)}{p_i(u)p_q^2(u)}, \quad q = j, r.$$

En fonction de l'égalité ou l'inégalité des polynômes  $p_i$  et  $p_q$ , on obtient des décompositions différentes.

– Si  $p_i(u) = p_q(u)$ , elle est de la forme

$$T_1^{iq}(u) = \frac{e_1u + h_1}{p_q(u)} + \frac{e_2u + h_2}{p_q^2(u)} + \frac{e_3u + h_3}{p_q^3(u)}.$$

Par identification, on montre que le vecteur  $\chi^{(2)} = (e_1 \quad h_1 \quad e_2 \quad h_2 \quad e_3 \quad h_3)^*$  est solution du système linéaire d'ordre 6 :

$$M_{iq}^{(2)} \chi^{(2)} = \mathcal{B}_{iq} \quad (9.31)$$

avec

$$M_{iq}^{(2)} = \begin{pmatrix} a_q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2a_q b_q & a_q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2a_q c_q + b_q^2 & 2a_q b_q & a_q & 0 & 0 & 0 \\ 2b_q c_q & 2a_q c_q + b_q^2 & b_q & a_q & 0 & 0 \\ c_q^2 & 2b_q c_q & c_q & b_q & 1 & 0 \\ 0 & c_q^2 & 0 & c_q & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_{iq} = \begin{pmatrix} 0 \\ A_{iq}^2 \\ 2A_{iq}B_{iq} \\ 2A_{iq}C_{iq} + B_{iq}^2 \\ 2B_{iq}C_{iq} \\ C_{iq}^2 \end{pmatrix}. \quad (9.32)$$

– Si  $p_i(u) \neq p_q(u)$

$$T_1^{iq}(u) = \frac{e_1u + h_1}{p_i(u)} + \frac{e_2u + h_2}{p_q(u)} + \frac{e_3u + h_3}{p_q^2(u)}$$

et la matrice du système à résoudre pour déterminer  $\chi^{(2)}$  est cette fois

$$M_{iq}^{(2)} = \begin{pmatrix} a_q^2 & 0 & a_i a_q & 0 & 0 & 0 \\ 2a_q b_q & a_q^2 & a_i b_q + b_i a_q & a_i a_q & 0 & 0 \\ 2a_q c_q + b_q^2 & 2a_q b_q & a_i c_q + b_i b_q + a_q c_i & a_i b_q + b_i a_q & a_i & 0 \\ 2b_q c_q & 2a_q c_q + b_q^2 & b_i c_q + b_q c_i & a_i c_q + b_i b_q + a_q c_i & b_i & a_i \\ c_q^2 & 2b_q c_q & c_i c_q & b_i c_q + b_q c_i & c_i & b_i \\ 0 & c_q^2 & 0 & c_i c_q & 0 & c_i \end{pmatrix}. \quad (9.33)$$

**Primitives pour les composantes du type  $T_2^{ijr}(u)$ .** Comme précédemment, nous devons prendre en compte le positionnement relatif des amers par rapport au segment de déplacement pour déterminer la nature de la décomposition en éléments simples.

- Pour les configurations de l'ensemble  $E_3$  où  $p_i(u) \neq p_j(u) \neq p_r(u)$ , la décomposition est

$$T_2^{ijr}(u) = \frac{e_1x + h_1}{p_i(u)} + \frac{e_2u + h_2}{p_j(u)} + \frac{e_3u + h_3}{p_r(u)}.$$

Le vecteur  $\chi^{(2)} = (e_1 \ h_1 \ e_2 \ h_2 \ e_3 \ h_3)^*$  est solution du système linéaire

$$M_{ijr}^{(2)}\chi^{(2)} = \mathcal{B}_{ijr} \quad (9.34)$$

avec une expression de la matrice du système

$$M_{ijr}^{(2)} = (M_{jr} \ M_{ir} \ M_{ij}) \quad (9.35)$$

où les sous-matrices  $M_{lp}, l, p = i, j, r$  sont de taille  $6 \times 2$  et valent

$$M_{lp} = \begin{pmatrix} a_l a_p & 0 \\ a_l b_p + b_l a_k & a_l a_p \\ a_l c_p + b_l b_p + a_p c_l & a_l b_p + b_l a_p \\ b_l c_p + b_p c_l & a_l c_p + b_l b_p + a_p c_l \\ c_l c_p & b_l c_p + b_p c_l \\ 0 & c_l c_p \end{pmatrix} \quad (9.36)$$

et

$$\mathcal{B}_{ijr} = \begin{pmatrix} 0 \\ A_{ij}A_{ir} \\ A_{ij}B_{ir} + A_{ir}B_{ij} \\ A_{ij}C_{ir} + B_{ij}B_{ir} + A_{ir}C_{ij} \\ B_{ij}C_{ir} + B_{ir}C_{ij} \\ C_{ij}C_{ir} \end{pmatrix}$$

- Si  $p_i(u) = p_j(u) = p_r(u)$ , pour l'ensemble des cas  $E_0$ , on obtient une décomposition

$$T_2^{ijr}(u) = \frac{e_1u + h_1}{p_i(u)} + \frac{e_2u + h_2}{p_i^2(u)} + \frac{e_3u + h_3}{p_i^3(u)}.$$

La matrice du système linéaire (9.31) permettant le calcul des éléments du vecteur  $\chi^{(2)}$  est alors donnée par l'expression

$$M_{ijr}^{(2)} = \begin{pmatrix} a_i^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2a_i b_i & a_i^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2a_i c_i + b_i^2 & 2a_i b_i & a_i & 0 & 0 & 0 \\ 2b_i c_i & 2a_i c_i + b_i^2 & b_i & a_i & 0 & 0 \\ c_i^2 & 2b_i c_i & c_i & b_i & 1 & 0 \\ 0 & c_i^2 & 0 & c_i & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.37)$$

- Pour les configurations des ensembles de cas  $E_1, E_2$  et  $E_4$ , on a une relation de la forme  $p_l(u) = p_q(u) \neq p_v(u)$  avec  $l, q, v = i, j, r$ . La décomposition de la fraction est de la forme

$$T_2^{ijr}(u) = \frac{e_1u + h_1}{p_l(u)} + \frac{e_2u + h_2}{p_l^2(u)} + \frac{e_3u + h_3}{p_v(u)}.$$

Le système linéaire associé est

$$M_{lqv}^{(2)}\chi^{(2)} = \mathcal{B}_{lqv}, \quad (9.38)$$

dont la matrice est

$$M_{lqv}^{(2)} = \begin{pmatrix} a_l a_v & 0 & 0 & 0 & a_l^2 & 0 \\ a_l b_v + a_v b_l & a_l a_v & 0 & 0 & 2a_l b_l & a_l^2 \\ a_l c_v + a_v c_l + b_l b_v & a_l b_v + a_v b_l & a_v & 0 & 2a_l c_l + b_l^2 & 2a_l b_l \\ b_l c_v + b_v c_l & a_l c_v + a_v c_l + b_l b_v & b_v & a_v & 2b_l c_l & 2a_l c_l + b_l^2 \\ c_l c_v & b_l c_v + b_v c_l & c_v & b_v & c_l^2 & 2b_l c_l \\ 0 & c_l c_v & 0 & c_v & 0 & c_l^2 \end{pmatrix}. \quad (9.39)$$

A partir de ces résultats, on peut déduire l'expression de  $\Gamma_{ijr}^{(2)}(k)$  pour les différentes configurations listées précédemment. Ainsi, on déduit les propriétés suivantes.

**Proposition 14** Soit  $(f_i, f_j, f_r)$  un triplet d'amers avec  $f_i \equiv f_j$ , simultanément visibles entre  $P_{ijr}^-$  et  $P_{ijr}^+$  lors du déplacement du mobile le long de l'arc, on a

**S1.1)** pour un déplacement sur la médiatrice de  $[f_i, f_r]$  (configuration de l'ensemble  $E_0$ )

$$\Gamma_{ijr}^{(2)}(k) = c_k^{(2)} \left\{ \sum_{l=j,r} \sum_{n=1}^3 H^{(n)}(l, e_n^{l,1}, h_n^{l,1}, x_{ijr}^-, x_{ijr}^+) - 2 \sum_{n=1}^3 H^{(n)}(i, e_n^2, h_n^2, x_{ijr}^-, x_{ijr}^+) \right\}$$

$$\text{si } \theta_k \neq \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{-\pi}{2} \right\}$$

$$\Gamma_{ijr}^{(2)}(k) = c_k^{(2)} \left\{ \sum_{l=j,r} \sum_{n=1}^3 H^{(n)}(l, e_n^{l,1}, h_n^{l,1}, y_{ijr}^-, y_{ijr}^+) - 2 \sum_{n=1}^3 H^{(n)}(i, e_n^2, h_n^2, y_{ijr}^-, y_{ijr}^+) \right\}$$

$$\text{si } \theta_k = \frac{\pm\pi}{2},$$

avec  $(e_n^{l,1}, h_n^{l,1})$ ,  $n = 1, 2, 3$ ,  $l = r, j$  obtenus à partir du système linéaire (9.31) avec l'expression de la matrice donnée par (9.32). Les paramètres  $(e_n^2, h_n^2)$ ,  $n = 1, 2, 3$  sont solutions du système (9.34) dont la matrice est fournie par (9.37). On a également utilisé la notation  $c_k^{(2)} = 1/(v_k \cos(\theta_k))$  si  $\theta_k \neq \{\pi/2, -\pi/2\}$  et  $c_k^{(2)} = \text{signe}(\theta_k) \frac{1}{v_k}$  pour  $\theta_k \in \{\pi/2, -\pi/2\}$ .

**S1.2)** pour un déplacement hors de la médiatrice de  $[f_i, f_r]$  (configuration de l'ensemble  $E_1$ )

$$\Gamma_{ijr}^{(2)}(k) = c_k^{(2)} \left\{ H^{(1)}(i, e_1^{r,1}, h_1^{r,1}, x_{ijr}^-, x_{ijr}^+) + H^{(1)}(r, e_2^{r,1}, h_2^{r,1}, x_{ijr}^-, x_{ijr}^+) \right.$$

$$+ H^{(2)}(r, e_3^{r,1}, h_3^{r,1}, x_{ijr}^-, x_{ijr}^+) + \sum_{n=1}^3 H^{(n)}(j, e_n^{j,1}, h_n^{j,1}, x_{ijr}^-, x_{ijr}^+)$$

$$\left. - 2 \left\{ \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(i, e_n^{ijr,2}, h_n^{ijr,2}, x_{ijr}^-, x_{ijr}^+) + H^{(1)}(r, e_3^{ijr,2}, h_3^{ijr,2}, x_{ijr}^-, x_{ijr}^+) \right\} \right\}$$

$$\text{si } \theta_k \neq \{\pi/2, -\pi/2\}$$

$$\Gamma_{ijr}^{(2)}(k) = c_k^{(2)} \left\{ H^{(1)}(i, e_1^{r,1}, h_1^{r,1}, y_{ijr}^-, y_{ijr}^+) + H^{(1)}(r, e_2^{r,1}, h_2^{r,1}, y_{ijr}^-, y_{ijr}^+) \right.$$

$$+ H^{(2)}(r, e_3^{r,1}, h_3^{r,1}, y_{ijr}^-, y_{ijr}^+) + \sum_{n=1}^3 H^{(n)}(j, e_n^{j,1}, h_n^{j,1}, y_{ijr}^-, y_{ijr}^+)$$

$$\left. - 2 \left\{ \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(i, e_n^{ijr,2}, h_n^{ijr,2}, y_{ijr}^-, y_{ijr}^+) + H^{(1)}(r, e_3^{ijr,2}, h_3^{ijr,2}, y_{ijr}^-, y_{ijr}^+) \right\} \right\}$$

$$\text{si } \theta_k = \pm\pi/2.$$

Les coefficients  $(e_n^{l,1}, h_n^{l,1})$ ,  $n = 1, 2, 3$ ,  $l = j, r$  sont les solutions des systèmes linéaires de la forme (9.31) dont la matrice est donnée respectivement pour  $l = j$  et  $l = r$  par les équations (9.32) et (9.33). Les coefficients  $(e_n^{ijr,2}, h_n^{ijr,2})$ ,  $n = 1, 2, 3$  sont solutions du système (9.34) de matrice (9.39) en posant  $(l, q, v) = (i, j, r)$ .

**Proposition 15** Soit  $(f_i, f_j, f_r)$ , avec  $f_i \neq f_j$  et  $i < j$ , simultanément visibles entre  $P_{ijr}^-$  et  $P_{ijr}^+$  lors du déplacement du mobile le long de l'arc. On a

**S2.1)** le déplacement est hors des médiatrices des segments formés par les amers

$$\Gamma_{ijr}^{(2)}(k) = c_k^{(2)} \left\{ \sum_{l=j,r} \{ H^{(1)}(i, e_1^{l,1}, h_1^{l,1}, x_{ijr}^-, x_{ijr}^+) + H^{(1)}(l, e_2^{l,1}, h_2^{l,1}, x_{ijr}^-, x_{ijr}^+) \right. \\ \left. + H^{(2)}(l, e_3^{l,1}, h_3^{l,1}, x_{ijr}^-, x_{ijr}^+) \} \right. \\ \left. - 2 \{ H^{(1)}(i, e_1^{ijr,2}, h_1^{ijr,2}, x_{ijr}^-, x_{ijr}^+) + H^{(1)}(j, e_2^{ijr,2}, h_2^{ijr,2}, x_{ijr}^-, x_{ijr}^+) \right. \\ \left. + H^{(1)}(r, e_3^{ijr,2}, h_3^{ijr,2}, x_{ijr}^-, x_{ijr}^+) \} \right\} \\ \text{si } \theta_k \neq \left\{ \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\Gamma_{ijr}^{(2)}(k) = c_k^{(2)} \left\{ \sum_{l=j,r} \{ H^{(1)}(i, e_1^{l,1}, h_1^{l,1}, y_{ijr}^-, y_{ijr}^+) + H^{(1)}(l, e_2^{l,1}, h_2^{l,1}, y_{ijr}^-, y_{ijr}^+) \right. \\ \left. + H^{(2)}(l, e_3^{l,1}, h_3^{l,1}, y_{ijr}^-, y_{ijr}^+) \} \right. \\ \left. - 2 \{ H^{(1)}(i, e_1^{ijr,2}, h_1^{ijr,2}, y_{ijr}^-, y_{ijr}^+) + H^{(1)}(j, e_2^{ijr,2}, h_2^{ijr,2}, y_{ijr}^-, y_{ijr}^+) \right. \\ \left. + H^{(1)}(r, e_3^{ijr,2}, h_3^{ijr,2}, y_{ijr}^-, y_{ijr}^+) \} \right\} \\ \text{si } \theta_k = \pm\pi/2$$

Les coefficients  $(e_n^{l,1}, h_n^{l,1})$ ,  $n = 1, 2, 3$ ,  $l = j, r$  sont les solutions des systèmes linéaires de la forme (9.31) dont la matrice est définie selon (9.33). Les coefficients  $(e_n^{ijr,2}, h_n^{ijr,2})$ ,  $n = 1, 2, 3$  sont solutions du système (9.34) de matrice (9.35).

**S2.2)** le déplacement est effectué le long de la médiatrice de  $[f_i, f_j]$

On est dans une configuration identique au cas C1.2). L'expression de  $\Gamma_{ijr}^{(2)}(k)$  est identique à celle proposée pour le cas S1.2).

**S2.3)** le déplacement est le long de la médiatrice de  $[f_i, f_r]$

Les amers  $f_j$  et  $f_r$  jouent un rôle symétrique dans le calcul de la fonctionnelle. L'expression de  $\Gamma_{ijr}^{(2)}(k)$  se déduit du cas précédent par permutation des indices  $j$  et  $r$ .

**S2.4)** le déplacement est le long de la médiatrice de  $[f_j, f_r]$

$$\Gamma_{ijr}^{(2)}(k) = c_k^{(2)} \left\{ \sum_{l=j,r} \{ H^{(1)}(i, e_1^{l,1}, h_1^{l,1}, x_{ijr}^-, x_{ijr}^+) + H^{(1)}(l, e_2^{l,1}, h_2^{l,1}, x_{ijr}^-, x_{ijr}^+) \right. \\ \left. + H^{(2)}(l, e_3^{l,1}, h_3^{l,1}, x_{ijr}^-, x_{ijr}^+) \} \right. \\ \left. - 2 \left\{ \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(j, e_n^{ijr,2}, h_n^{ijr,2}, x_{ijr}^-, x_{ijr}^+) + H^{(1)}(i, e_3^{ijr,2}, h_3^{ijr,2}, x_{ijr}^-, x_{ijr}^+) \right\} \right\} \\ \text{si } \theta_k \notin \left\{ \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\Gamma_{ijr}^{(2)}(k) = c_k^{(2)} \left\{ \sum_{l=j,r} \{ H^{(1)}(i, e_1^{l,1}, h_1^{l,1}, y_{ijr}^-, y_{ijr}^+) + H^{(1)}(l, e_2^{l,1}, h_2^{l,1}, y_{ijr}^-, y_{ijr}^+) \right. \\ \left. + H^{(2)}(l, e_3^{l,1}, h_3^{l,1}, y_{ijr}^-, y_{ijr}^+) \} \right. \\ \left. - 2 \left\{ \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(j, e_n^{ijr,2}, h_n^{ijr,2}, y_{ijr}^-, y_{ijr}^+) + H^{(1)}(i, e_3^{ijr,2}, h_3^{ijr,2}, y_{ijr}^-, y_{ijr}^+) \right\} \right\} \\ \text{si } \theta_k = \pm\pi/2$$

Les coefficients  $(e_n^{l,1}, h_n^{l,1})$ ,  $n = 1, 2, 3$ ,  $l = r, j$  sont obtenus à partir du système linéaire (9.31), dont les matrices sont données par l'équation (9.33) et  $(e_n^{ijr,2}, h_n^{ijr,2})$  à partir du système (9.38) avec  $l = j$ ,  $q = r$  et  $v = i$  et de matrice exprimée selon (9.39).

**Proposition 16** Soit  $(f_i, f_j, f_r)$ , avec  $f_i \neq f_j$  et  $i > j$ , simultanément visibles entre  $P_{ijr}^-$  et  $P_{ijr}^+$  lors du déplacement du mobile le long de l'arc, on a

**S3.1)** les amers  $f_i$  et  $f_r$  sont confondus et le déplacement est sur la médiatrice de  $[f_j, f_r]$

On est dans une configuration équivalente au cas C1.1) sur le plan de la décomposition des fractions rationnelles. L'expression du coût pour le triplet d'amers est identique à celle dérivée en S1.1) de la proposition 14.

**S3.2)** les amers  $f_i$  et  $f_r$  sont confondus et le déplacement est hors de la médiatrice de  $[f_j, f_r]$

Cette configuration est équivalente au cas C1.2) en termes de décomposition des fractions rationnelles en effectuant une permutation entre les indices  $j$  et  $r$ . L'expression du coût pour le triplet d'amers est identique à celle dérivée en S1.2) de la proposition 14 avec une permutation des indices  $j$  et  $r$ .

**S3.3)** les amers  $f_i$  et  $f_r$  sont distincts et l'arc de déplacement n'est colinéaire à aucune des trois médiatrices possibles,

On est dans une configuration équivalente au C2.1) et l'expression du coût est identique à celle proposée en S2.1) de la proposition 15.

**S3.4)** les amers  $f_i$  et  $f_r$  sont distincts et le mobile se déplace sur la médiatrice de  $[f_j, f_r]$

On est dans une configuration équivalente au C2.4) et l'expression du coût est identique à celle proposée en S2.4) de la proposition 15.

**S3.5)** les amers  $f_i$  et  $f_r$  sont distincts et le mobile se déplace sur la médiatrice de  $[f_i, f_r]$

On est dans une configuration équivalente au C2.3) et l'expression du coût est identique à celle proposée en S2.3) de la proposition 15

**S3.6)** les amers  $f_i$  et  $f_r$  sont distincts et le mobile se déplace sur la médiatrice de  $[f_i, f_j]$ .

On est dans une configuration équivalente au C2.2) et l'expression du coût est identique à celle proposée en S2.2) de la proposition 15.

**Remarque.** Comme pour la composante  $\Gamma^{(1)}(k)$ , les déplacements avec des orientations proches des médiatrices des segments formés par des amers sont aussi singulières. De même que les configurations de triplets composées d'amers identiques (indices  $i$  et  $r$ ). Contrairement au cas précédent, certaines configurations font intervenir l'inverse du cube de la distance entre les extrémités du sous-segment de visibilité et les amers.

### 9.6.2.3 Calcul de $\Gamma^{(3)}(k)$

Contrairement aux deux composantes précédentes, le calcul de  $\Gamma^{(3)}(k)$  fait intervenir uniquement des triplets d'amers strictement distincts. En reprenant l'expression (9.7), on a plus précisément

$$\Gamma^{(3)}(k) = \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j>i}^{N_c} \sum_{r>j}^{N_c} \Gamma_{ijr}^{(3)}(k) = \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j>i}^{N_c} \sum_{r>j}^{N_c} \int_{t_-^{ijr}}^{t_+^{ijr}} \delta_t^i \delta_t^j \delta_t^r g_{ijr}^{(3)}(t) dt, \quad (9.40)$$

avec  $t_-^{ijr}$  et  $t_+^{ijr}$  les temps de passage en  $P_-^{ijr}$  et  $P_+^{ijr}$  les positions délimitant la portion de l'arc où les trois amers sont simultanément visibles, et

$$g_{ijr}^{(3)}(t) = \left( \frac{\sin(\beta_i - \beta_r)}{\rho_r \rho_i} + \frac{\sin(\beta_i - \beta_j)}{\rho_j \rho_i} + \frac{\sin(\beta_j - \beta_r)}{\rho_r \rho_j} \right)^2.$$

En développant, on se ramène à l'intégration de six termes qui, mis sous forme de fractions rationnelles en utilisant (9.26), s'expriment comme suit :

$$\begin{aligned} T_1(u) &= \frac{p_{ir}^2(u)}{p_i^2(u)p_r^2(u)}, T_2(u) = \frac{p_{ij}^2(u)}{p_i^2(u)p_j^2(u)}, T_3(u) = \frac{p_{jr}^2(u)}{p_j^2(u)p_r^2(u)} \\ T_4(u) &= \frac{p_{ir}(u)p_{ij}(u)}{p_i^2(u)p_j(u)p_r(u)}, T_5(u) = \frac{p_{ri}(u)p_{rj}(u)}{p_i(u)p_j(u)p_r^2(u)}, T_6(u) = \frac{p_{ji}(u)p_{jr}(u)}{p_i(u)p_j^2(u)p_r(u)} \end{aligned}$$

et donc

$$g_{ijr}^{(3)}(t) \propto \sum_{l=1}^3 T_l(u) + 2T_4(u) + 2T_5(u) - 2T_6(u).$$

On peut traiter de façon identique les trois premiers termes, ainsi que les trois derniers, qui diffèrent uniquement par la permutation des indices  $i, j, r$ . D'un point de vue géométrique, on trouve quatre configurations possibles pour le positionnement des amers par rapport au support de l'arc de déplacement.

C1) Le déplacement se fait le long de la médiatrice de  $[f_i, f_j]$ . On est a fortiori dans une configuration où  $p_i(u) = p_j(u) \neq p_r(u)$ .

C2) Le déplacement se fait le long de la médiatrice de  $[f_i, f_r]$  et alors  $p_i(u) = p_r(u) \neq p_j(u)$ .

C3) Le déplacement se fait le long de la médiatrice de  $[f_j, f_r]$ , ce qui équivaut à  $p_i(u) \neq p_j(u) = p_r(u)$ .

C4) Le déplacement n'est effectué sur aucune des trois médiatrices, ce qui implique  $p_i(u) \neq p_j(u) \neq p_r(u)$ .

On peut encore noter que le traitement des trois premiers cas C1), C2) et C3) est identique à une permutation des indices près.

**Détermination de  $T_1(u), T_2(u), T_3(u)$ .** On s'intéresse donc à l'intégration des termes de la forme

$$T_1(u) = \frac{p_{nm}^2(u)}{p_n^2(u)p_m^2(u)}.$$

On rappelle que  $p_{nm}$  est un polynôme de degré 1 de la forme  $B_{nm}u + C_{nm}$ . Deux cas sont à prendre en compte pour la décomposition de cette fraction rationnelle :

-  $p_n(u) = p_m(u)$  et

$$T_1(u) = \sum_{l=1}^4 \frac{e_l u + h_l}{p_n^l(u)} \quad (9.41)$$

-  $p_n(u) \neq p_m(u)$  et

$$T_1(u) = \frac{e_1 u + h_1}{p_n(u)} + \frac{e_2 u + h_2}{p_n^2(u)} + \frac{e_3 u + h_3}{p_m(u)} + \frac{e_4 u + h_4}{p_m^2(u)}. \quad (9.42)$$

Les éléments  $(e_i, h_i)$ ,  $i = 1, \dots, 4$  sont obtenus par identification des numérateurs des deux fractions rationnelles, ce qui est équivalent à la résolution d'un système d'ordre 8 de vecteur inconnu  $\chi^{(3)} = (e_1 \ h_1 \ e_2 \ h_2 \ e_3 \ h_3 \ e_4 \ h_4)^*$ . Les systèmes linéaires à résoudre s'écrivent

$$M_{nm}^{(3)} \chi^{(3)} = \mathcal{B}_{nm}, \quad (9.43)$$

avec

$$\mathcal{B}_{nm} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ B_{nm}^2 \ 2B_{nm}C_{nm} \ C_{nm}^2)^*.$$

Pour les deux cas précédents, on a respectivement l'expression de la matrice  $M_{nm}^{(3)}$

$$M_{nm}^{(3)} = \begin{pmatrix} a_n^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3a_n^2 b_n & a_n^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3a_n^2 c_n + 3a_n b_n^2 & 3a_n^2 b_n & a_n^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6a_n b_n c_n + b_n^3 & 3a_n^2 c_n + 3a_n b_n^2 & 2a_n b_n & a_n^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3a_n c_n^2 + 3b_n^2 c_n & 6a_n b_n c_n + b_n^3 & 2a_n c_n + b_n^2 & 2a_n b_n & a_n & 0 & 0 & 0 \\ 3b_n c_n^2 & 3a_n c_n^2 + 3b_n^2 c_n & 2b_n c_n & 2a_n c_n + b_n^2 & b_n & a_n & 0 & 0 \\ c_n^3 & 3b_n c_n^2 & c_n^2 & 2b_n c_n & c_n & b_n & 1 & 0 \\ 0 & c_n^3 & 0 & c_n^2 & 0 & c_n & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.44)$$

et

$$M_{nm}^{(3)} = (L_{nm}^1 \ L_m^2 \ L_{mn}^1 \ L_n^2) \quad (9.45)$$

où les matrices  $L_{nm}^1$ ,  $L_{nm}^2$  sont de taille  $8 \times 2$  et valent respectivement

$$L_{nm}^1 = \begin{pmatrix} a_n a_m^2 & 0 \\ 2a_n a_m b_m + a_m^2 b_n & a_n a_m^2 b_m + a_m^2 b_n \\ 2a_n a_m c_m + a_m^2 c_n + a_n b_m^2 + 2a_m b_n b_m & 2a_n a_m b_m + a_m^2 b_n \\ (2a_n b_m + 2a_m b_n)c_m + 2a_m b_m c_n + b_n b_m^2 & 2a_n a_m c_m + a_m^2 c_n + a_n b_m^2 + 2a_m b_n b_m \\ a_n c_m^2 + (2a_m c_n + 2b_n b_m)c_m + b_m^2 c_n & (2a_n b_m + 2a_m b_n)c_m + 2a_m b_m c_n + b_n b_m^2 \\ b_n c_m^2 + 2b_m c_n c_m & a_n c_m^2 + (2a_m c_n + 2b_n b_m)c_m + b_m^2 c_n \\ c_n c_m^2 & b_n c_m^2 + 2b_m c_n c_m \\ 0 & c_n c_m^2 \end{pmatrix}$$

et

$$L_m^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_m^2 & 0 \\ 2a_m b_m & a_m^2 \\ 2a_m c_m + b_m^2 & 2a_m b_m \\ 2b_m c_m & 2a_m c_m + b_m^2 \\ c_m^2 & 2b_m c_m \\ 0 & c_m^2 \end{pmatrix}. \quad (9.46)$$

**Détermination des termes liés à  $T_4(u)$ ,  $T_5(u)$ ,  $T_6(u)$ .** On considère l'intégration des termes faisant intervenir les informations sur les trois amers

$$T(u) = \frac{p_{nm}(u)p_{nl}(u)}{p_n^2(u)p_m(u)p_l(u)} \quad (9.47)$$

avec  $(l, n, m) \in (i, j, r)$ . La décomposition en éléments simples dépend une fois de plus de la configuration des amers par rapport au support de l'arc de déplacement. Par ailleurs, on peut constater que les indices  $l$  et  $m$  jouent le même rôle dans l'expression de  $T_4(u)$ . On étudie donc uniquement les trois cas suivants avec les décompositions associées :

-  $p_n(u) = p_m(u) \neq p_l(u)$ .

$$T(u) = \sum_{i=1}^3 \frac{e_i u + h_i}{p_n^i(u)} + \frac{e_4 u + h_4}{p_l(u)}$$

-  $p_m(u) = p_l(u) \neq p_n(u)$ .

$$T(u) = \sum_{i=1}^2 \frac{e_i u + h_i}{p_n^i(u)} + \frac{e_3 u + h_3}{p_l(u)} + \frac{e_4 u + h_4}{p_l^2(u)}$$

-  $p_m(u) \neq p_l(u) \neq p_n(u)$ .

$$T(u) = \sum_{i=1}^2 \frac{e_i u + h_i}{p_n^i(u)} + \frac{e_3 u + h_3}{p_m(x)} + \frac{e_4 u + h_4}{p_l(u)}$$

Nous précisons les composantes respectives des systèmes linéaires d'ordre 8 permettant le calcul des coefficients  $(e_i, h_i)$ ,  $i = 1, \dots, 4$  pour les trois hypothèses de décomposition.

$$M_{nml}^{(3)} \chi^{(3)} = \mathcal{B}_{nml}, \quad (9.48)$$

avec

$$\mathcal{B}_{nml} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ B_{nm}C_{nl} \ B_{nm}C_{nl} + B_{nl}C_{nm} \ C_{nm}C_{nl})^*.$$

Pour le second cas, on dispose de la même décomposition que pour la détermination de  $T_1(u)$  présentée en (9.42). La matrice  $M_{nml}^{(3)}$  se déduit donc de l'équation (9.45) en substituant  $m$  par  $l$ , i.e.

$$M_{nml}^{(3)} = (L_{nl}^1 \ L_l^2 \ L_{ln}^1 \ L_n^2), \quad (9.49)$$

où les matrices  $L_{ln}^1$ ,  $L_l^2$  sont données par l'équation (9.46). Pour les deux autres cas, en procédant par identification, on obtient respectivement les expressions pour la matrice du système,

$$M_{nml}^{(3)} = (L_{nl}^3 \quad L_{nl}^4 \quad L_{ln}^5) \quad (9.50)$$

où les matrices  $L_{nl}^3$ ,  $L_{nl}^4$  et  $L_{ln}^5$  correspondent à

$$L_{nl}^3 = \begin{pmatrix} (a_n^2 b_l + 2a_n a_l b_n) & a_n^2 a_l \\ (a_n^2 c_l + 2a_n a_l c_n + 2a_n b_n b_l + a_l b_n^2) & (a_n^2 b_l + 2a_n a_l b_n) \\ 2a_n b_n c_l + (2a_n b_l + 2a_l b_n) c_n + b_n^2 b_l & a_n^2 c_l + 2a_n a_l c_n + 2a_n b_n b_l + a_l b_n^2 \\ (2a_n c_n + b_n^2) c_l + a_l c_n^2 + 2b_n b_l c_n & 2a_n b_n c_l + (2a_n b_l + 2a_l b_n) c_n + b_n^2 b_l \\ 2b_n c_n c_l + b_l c_n^2 & (2a_n c_n + b_n^2) c_l + a_l c_n^2 + 2b_n b_l c_n \\ c_n^2 c_l & 2b_n c_n c_l + b_l c_n^2 \end{pmatrix}, \quad (9.51)$$

$$L_{nl}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_n a_l & a_n a_l \\ a_n b_l + a_l b_n & a_n b_l + a_l b_n \\ a_n c_l + a_l c_n + b_n b_l & a_n c_l + a_l c_n + b_n b_l \\ b_n c_l + b_l c_n & b_l c_n \end{pmatrix}, \quad L_{nl}^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_n^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3a_n^2 b_n & a_n^3 \\ 0 & 0 & 3a_n^2 c_n + 3a_n b_n^2 & 3a_n^2 b_n \\ 0 & 0 & 6a_n b_n c_n + b_n^3 & 3a_n^2 c_n + 3a_n b_n^2 \\ a_l & 0 & 3a_n c_n^2 + 3b_n^2 c_n & 6a_n b_n c_n + b_n^3 \\ b_l & a_l & 3b_n c_n^2 & 3a_n c_n^2 + 3b_n^2 c_n \\ c_l & b_l & c_n^3 & 3b_n c_n^2 \\ 0 & c_l & 0 & c_n^3 \end{pmatrix}.$$

Et

$$M_{nml}^{(3)} = (L_{nml}^6 \quad L_{nml}^7 \quad L_{nm}^8 \quad L_{nm}^9 \quad L_{nl}^9) \quad (9.52)$$

avec

$$L_{nml}^6 = \begin{pmatrix} a_n a_l a_m \\ a_n a_l b_m + a_n a_m b_l + a_l a_m b_n \\ a_n a_l c_m + a_n a_m c_l + a_l a_m c_n + (a_n b_l + a_l b_n) b_m + a_m b_n b_l \\ (a_n b_l + a_l b_n) c_m + (a_n b_m + a_m b_n) c_l + (a_l b_m + a_m b_l) c_n + b_n b_l b_m \\ (a_n c_l + a_l c_n + b_n b_l) c_m + (a_m c_n + b_n b_m) c_l + b_l b_m c_n \\ (b_n c_l + b_l c_n) c_m + b_m c_n c_l \\ c_n c_l c_m \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L_{nml}^7 = \begin{pmatrix} 0 \\ a_n a_l a_m \\ a_n a_l b_m + a_n a_m b_l + a_l a_m b_n \\ a_n a_l c_m + a_n a_m c_l + a_l a_m c_n + (a_n b_l + a_l b_n) b_m + a_m b_n b_l \\ (a_n b_l + a_l b_n) c_m + (a_n b_m + a_m b_n) c_l + (a_l b_m + a_m b_l) c_n + b_n b_l b_m \\ (a_n c_l + a_l c_n + b_n b_l) c_m + (a_m c_n + b_n b_m) c_l + b_l b_m c_n \\ (b_n c_l + b_l c_n) c_m + b_m c_n c_l \\ c_n c_l c_m \end{pmatrix}$$

$$L_{ml}^8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_l a_m & a_l a_m \\ a_l b_m + a_m b_l & a_l b_m + a_m b_l \\ a_l c_m + a_m c_l + b_l b_m & a_l c_m + a_m c_l + b_l b_m \\ b_l c_m + b_m c_l & b_l c_m + b_m c_l \\ c_l c_m & c_l c_m \\ 0 & c_l c_m \end{pmatrix}$$

$$L_{nl}^9 = \begin{pmatrix} a_n^2 a_l & 0 \\ a_n^2 b_l + 2a_n a_l b_n & a_n^2 a_l \\ a_n^2 c_l + 2a_n a_l c_n + 2a_n b_n b_l + a_l b_n^2 & a_n^2 b_l + 2a_n a_l b_n \\ 2a_n b_n c_l + (2a_n b_l + 2a_l b_n) c_n + b_n^2 b_l & a_n^2 c_l + 2a_n a_l c_n + 2a_n b_n b_l + a_l b_n^2 \\ (2a_n c_n + b_n^2) c_l + a_l c_n^2 + 2b_n b_l c_n & 2a_n b_n c_l + (2a_n b_l + 2a_l b_n) c_n + b_n^2 b_l \\ 2b_n c_n c_l + b_l c_n^2 & (2a_n c_n + b_n^2) c_l + a_l c_n^2 + 2b_n b_l c_n \\ c_n^2 c_l & 2b_n c_n c_l + b_l c_n^2 \\ 0 & c_n^2 c_l \end{pmatrix}. \quad (9.53)$$

Il est maintenant possible de déduire l'expression de  $\Gamma_{ijr}^{(3)}(k)$  pour les différentes configurations géométriques « amers-arc de déplacement » possibles. Les résultats sont synthétisés dans les propositions 17 et 18.

**Proposition 17** Soit  $(f_i, f_j, f_r)$  un triplet d'amers avec  $r > i > j$ ,  $(i, j, r) \in \{1, \dots, N_C\}$ , simultanément visibles entre  $P_{ijr}^-$  et  $P_{ijr}^+$  lors du déplacement du mobile le long de l'arc  $e$  entre  $t_k$  et  $t_{k+1}$ , on a

**S1)** pour un déplacement sur la médiatrice de  $[f_i, f_j]$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ijr}^{(3)}(k) = c_k^{(3)} \left\{ \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(i, e_n^{ir,1}, h_n^{ir,1}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) + \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(r, e_{n+2}^{ir,1}, h_{n+2}^{ir,1}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) \right. \\
+ \sum_{n=1}^4 H^{(n)}(i, e_n^{ij,2}, h_n^{ij,2}, v_{ijr}^-, u_{ijr}^+) + \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(j, e_n^{jr,1}, h_n^{jr,1}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) \\
+ \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(r, e_{n+2}^{jr,3}, h_{n+2}^{jr,3}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) + 2 \left\{ \sum_{n=1}^3 H^{(n)}(i, e_n^{ijr,4}, h_n^{ijr,4}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) \right. \\
+ H^{(1)}(r, e_4^{ijr,4}, h_4^{ijr,4}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) + \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(r, e_n^{ijr,5}, h_n^{ijr,5}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) \\
+ \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(j, e_{n+2}^{ijr,5}, h_{n+2}^{ijr,5}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) - \sum_{n=1}^3 H^{(n)}(j, e_n^{ijr,6}, h_n^{ijr,6}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) \\
\left. \left. - H^{(1)}(r, e_4^{ijr,6}, h_4^{ijr,6}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) \right\} \right\}
\end{aligned}$$

avec  $u = x$  si  $\theta_k \neq \{\frac{\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\}$  et  $u = y$  sinon. Les différents coefficients des décompositions en éléments simples sont obtenus en résolvant les systèmes linéaires d'ordre 8 donnés aux équations (9.43) et (9.48) avec :

- pour  $(e_n^{ir,1}, h_n^{ir,1}), n = 1, \dots, 4$ , la matrice définie par l'équation (9.45) en effectuant les substitutions  $n = i, m = r$ ,
- pour  $(e_n^{ij,2}, h_n^{ij,2}), n = 1, \dots, 4$ , la matrice définie par l'équation (9.44) en effectuant les substitutions  $n = i, m = j$ ,
- pour  $(e_n^{jr,3}, h_n^{jr,3}), n = 1, \dots, 4$ , la matrice définie par l'équation (9.45) en effectuant les substitutions  $n = j, m = r$ ,
- pour  $(e_n^{ijr,4}, h_n^{ijr,4}), n = 1, \dots, 4$ , la matrice définie par l'équation (9.50) en effectuant les substitutions  $n = i, m = j, l = r$ ,
- pour  $(e_n^{ijr,5}, h_n^{ijr,5}), n = 1, \dots, 4$ , la matrice  $M$  définie par l'équation (9.49) en effectuant les substitutions  $n = r, m = i, l = j$ ,
- pour  $(e_n^{ijr,6}, h_n^{ijr,6}), n = 1, \dots, 4$ , la matrice  $M$  définie par l'équation (9.50) en effectuant les substitutions  $n = j, m = i, l = r$ .

On a également utilisé  $c_k^{(3)} = 1/(v_k \cos(\theta_k))$  si  $\theta_k \neq \pm\pi/2$  et  $c_k^{(3)} = \epsilon(\theta_k)/v_k$  pour  $\theta_k \in \pm\pi/2$ .

**S2)** pour un déplacement sur la médiatrice de  $[f_i, f_r]$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ijr}^{(3)}(k) = c_k^{(3)} \left\{ \sum_{n=1}^4 H^{(n)}(i, e_n^{ir,1}, h_n^{ir,1}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) + \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(i, e_n^{ij,2}, h_n^{ij,2}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) \right. \\
+ \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(j, e_{n+2}^{ij,2}, h_{n+2}^{ij,2}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) + \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(j, e_n^{ij,3}, h_n^{ij,3}, x_{ijr}^-, x_{ijr}^+) \\
+ \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(r, e_{n+2}^{ij,3}, h_{n+2}^{ij,3}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) + 2 \left\{ \sum_{n=1}^3 H^{(n)}(i, e_n^{ijr,4}, h_n^{ijr,4}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) \right. \\
+ H^{(1)}(j, e_4^{ijr,4}, h_4^{ijr,4}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) + \sum_{n=1}^3 H^{(n)}(r, e_n^{ijr,5}, h_n^{ijr,5}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) \\
+ H^{(1)}(j, e_4^{ijr,5}, h_4^{ijr,5}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) - \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(j, e_n^{ijr,6}, h_n^{ijr,6}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) \\
\left. \left. - \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(r, e_{n+2}^{ijr,6}, h_{n+2}^{ijr,6}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) \right\} \right\}.
\end{aligned}$$

avec  $u = x$  si  $\theta_k \neq \{\frac{\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\}$  et  $u = y$  sinon. Les paramètres sont obtenus en résolvant les systèmes linéaires introduits plus haut avec de façon plus précise :

- pour  $(e_n^{ir,1}, h_n^{ir,1}), n = 1, \dots, 4$ , la matrice définie par l'équation (9.44) en effectuant les substitutions  $n = i, m = r$ ,

- pour  $(e_n^{ij,2}, h_n^{ij,2}), n = 1, \dots, 4$ , la matrice définie par l'équation (9.45) en effectuant les substitutions  $n = i, m = j$ ,
- pour  $(e_n^{jr,3}, h_n^{jr,3}), n = 1, \dots, 4$ , la matrice définie par l'équation (9.45) en effectuant les substitutions  $n = j, m = r$ ,
- pour  $(e_n^{ijr,4}, h_n^{ijr,4}), n = 1, \dots, 4$ , la matrice définie par l'équation (9.50) en effectuant les substitutions  $n = i, m = j, l = r$ ,
- pour  $(e_n^{ijr,5}, h_n^{ijr,5}), n = 1, \dots, 4$ , la matrice  $M$  définie par l'équation (9.50) en effectuant les substitutions  $n = r, m = i, l = j$ ,
- pour  $(e_n^{ijr,6}, h_n^{ijr,6}), n = 1, \dots, 4$ , la matrice  $M$  définie par l'équation (9.49) en effectuant les substitutions  $n = j, m = i, l = r$ .

**Proposition 18** Soit  $(f_i, f_j, f_r)$ , avec  $f_i \neq f_j$ , simultanément visibles entre les positions  $P_{ijr}^-$  et  $P_{ijr}^+$  lors du déplacement du mobile le long de l'arc, on a

**S3)** pour un déplacement sur la médiatrice de  $[f_j, f_r]$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijr}^{(3)}(k) = c_k^{(3)} \left\{ \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(i, e_n^{ir,1}, h_n^{ir,1}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) + \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(r, e_{n+2}^{ir,1}, h_{n+2}^{ir,1}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) \right. \\ + \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(i, e_n^{ir,2}, h_n^{ir,2}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) + \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(j, e_{n+2}^{ij,2}, h_{n+2}^{ij,2}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) \\ + \sum_{n=1}^4 H^{(n)}(i, e_n^{ir,3}, h_n^{ir,3}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) + 2 \left\{ \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(i, e_n^{ijr,4}, h_n^{ijr,4}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) \right. \\ + \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(r, e_{n+2}^{ijr,4}, h_{n+2}^{ijr,4}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) + \sum_{n=1}^3 H^{(n)}(r, e_n^{ijr,5}, h_n^{ijr,5}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) \\ + H^{(1)}(i, e_4^{ijr,5}, h_4^{ijr,5}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) - \sum_{n=1}^3 H^{(n)}(j, e_n^{ijr,6}, h_n^{ijr,6}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) \\ \left. + H^{(1)}(i, e_n^{ijr,6}, h_n^{ijr,6}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) \right\} \end{aligned}$$

avec  $u = x$  si  $\theta_k \notin \{\frac{\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\}$  et  $u = y$  sinon. Les paramètres sont obtenus en résolvant les systèmes linéaires introduits plus haut avec de façon plus précise :

- pour  $(e_n^{ir,1}, h_n^{ir,1}), n = 1, \dots, 4$ , la matrice définie par l'équation (9.45) en effectuant les substitutions  $n = i, m = r$ ,
- pour  $(e_n^{ij,2}, h_n^{ij,2}), n = 1, \dots, 4$ , la matrice définie par l'équation (9.45) en effectuant les substitutions  $n = i, m = j$ ,
- pour  $(e_n^{jr,3}, h_n^{jr,3}), n = 1, \dots, 4$ , la matrice définie par l'équation (9.44) en effectuant les substitutions  $n = j, m = r$ ,
- pour  $(e_n^{ijr,4}, h_n^{ijr,4}), n = 1, \dots, 4$ , la matrice définie par l'équation (9.49) en effectuant les substitutions  $n = i, m = j, l = r$ ,
- pour  $(e_n^{ijr,5}, h_n^{ijr,5}), n = 1, \dots, 4$ , la matrice  $M$  définie par l'équation (9.50) en effectuant les substitutions  $n = r, m = j, l = i$ ,
- pour  $(e_n^{ijr,6}, h_n^{ijr,6}), n = 1, \dots, 4$ , la matrice  $M$  définie par l'équation (9.50) en effectuant les substitutions  $n = j, m = r, l = i$ .

**S4)** pour un déplacement effectué hors des trois médiatrices des segments formés par les amers, on a

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ijr}^{(3)}(k) = c_k^{(3)} & \left\{ \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(i, e_n^{ir,1}, h_n^{ir,1}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) + \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(r, e_{n+2}^{ir,1}, h_{n+2}^{ir,1}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) \right. \\
& + \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(i, e_n^{ij,2}, h_n^{ij,2}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) + \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(j, e_{n+2}^{ij,2}, h_{n+2}^{ij,2}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) \\
& + \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(j, e_n^{jr,3}, h_n^{jr,3}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) + \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(r, e_{n+2}^{jr,2}, h_{n+2}^{jr,3}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) \\
& + 2 \left\{ \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(i, e_n^{ijr,4}, h_n^{ijr,4}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) + H^{(1)}(j, e_3^{ijr,4}, h_3^{ijr,4}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) \right. \\
& + H^{(1)}(r, e_4^{ijr,4}, h_4^{ijr,4}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) + \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(r, e_n^{ijr,5}, h_n^{ijr,5}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) \\
& + H^{(1)}(i, e_3^{ijr,5}, h_3^{ijr,5}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) + H^{(1)}(j, e_4^{ijr,5}, h_4^{ijr,5}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) \\
& - \sum_{n=1}^2 H^{(n)}(j, e_n^{ijr,6}, h_n^{ijr,6}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) - H^{(1)}(i, e_3^{ijr,6}, h_3^{ijr,6}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) \\
& \left. \left. - H^{(1)}(r, e_4^{ijr,6}, h_4^{ijr,6}, u_{ijr}^-, u_{ijr}^+) \right\} \right\}
\end{aligned}$$

avec  $u = x$  si  $\theta_k \neq \{\frac{\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\}$  et  $u = y$  sinon. Les paramètres sont obtenus en résolvant les systèmes linéaires introduits plus haut avec de façon plus précise :

- pour  $(e_n^{ir,1}, h_n^{ir,1}), n = 1, \dots, 4$ , la matrice définie par l'équation (9.45) en effectuant les substitutions  $n = i, m = r$ ,
- pour  $(e_n^{ij,2}, h_n^{ij,2}), n = 1, \dots, 4$ , la matrice définie par l'équation (9.45) en effectuant les substitutions  $n = i, m = j$ ,
- pour  $(e_n^{jr,3}, h_n^{jr,3}), n = 1, \dots, 4$ , la matrice définie par l'équation (9.45) en effectuant les substitutions  $n = j, m = r$ ,
- pour  $(e_n^{ijr,4}, h_n^{ijr,4}), n = 1, \dots, 4$ , la matrice définie par l'équation (9.52) en effectuant les substitutions  $n = i, m = j, l = r$ ,
- pour  $(e_n^{ijr,5}, h_n^{ijr,5}), n = 1, \dots, 4$ , la matrice définie par l'équation (9.52) en effectuant les substitutions  $n = r, m = j, l = i$ ,
- pour  $(e_n^{ijr,6}, h_n^{ijr,6}), n = 1, \dots, 4$ , la matrice définie par l'équation (9.52) en effectuant les substitutions  $n = j, m = r, l = i$ .

Et  $c_k^{(3)} = 1/(v_k \cos(\theta_k))$  si  $\theta_k \neq \pm\pi/2$  et  $c_k^{(3)} = \epsilon(\theta_k)/v_k$  pour  $\theta_k \in \pm\pi/2$ .

**Remarques générales sur la fonction de performance.** Les résultats obtenus à partir de l'intégration des composantes de la fonction de performance sur un arc élémentaire montrent que

1. l'orientation du mouvement intervient :
  - comme un facteur d'échelle par la multiplication par le rapport  $1/\cos(\theta_k)$  pour les déplacements non verticaux,
  - au niveau des coefficients des primitives,
  - au niveau du positionnement par rapport à la médiatrice des segments formés par les amers.
2. la longueur de la portion du segment où les amers sont visibles à un impact sur l'intervalle d'intégration et donc sur la mesure de performance,
3. la vitesse intervient comme un élément facteur d'échelle en  $1/v_k$

Nous avons précisé les modes de calculs des coûts associés à chaque arc de déplacement du graphe. Nous montrons maintenant que déterminer le chemin optimal et la séquence de vitesses utilisées sur chaque arc de ce chemin est en réalité un problème d'optimisation quadratique à variables continues et discrètes (problème mixte) sous contraintes. Nous supposons ensuite que les vitesses sont constantes et fixées a priori et nous nous intéresserons uniquement aux choix du chemin optimal. Des éléments pour la résolution du problème complet seront présentés au chapitre 11.

## 9.7 Un problème quadratique entier mixte

Nous disposons d'un graphe  $\mathcal{G}(V, E)$  orienté avec des coûts pour chaque arc, calculé précédemment. A partir de ces éléments, il convient de trouver les chemins maximaux tout en respectant des contraintes sur la vitesse et sur l'orientation. Le choix d'un chemin du graphe impose de facto le choix de la séquence d'orientations. Nous avons vu que la vitesse intervient dans le coût d'un arc en  $1/v$ , le problème peut être formellement écrit de la façon suivante :

$$\max_{\tau \in P(s_0, B_f), (v_i)_{0 \leq i \leq n_{\tau}-1}} \sum_{e \in \tau} \frac{1}{v_e} c(e), \quad (9.54)$$

où  $c(e)$  est le coût de l'arc normalisé sans prise en compte de la vitesse,  $P(s_0, B_f)$  est l'ensemble des chemins connexes du graphe partant du noeud  $s_0$  et arrivant dans l'ensemble des noeuds  $B_f$ , et qui satisfont les contraintes

$$\sum_{e \in \tau} \frac{l(e)}{v_e} \leq \Delta_m \quad (9.55)$$

$$\forall e, f(e, succ(e)) = 1 \quad (9.56)$$

$$\forall e, v_- \leq v_e \leq v_+. \quad (9.57)$$

La contrainte de l'équation est une contrainte sur la variation d'orientation entre deux instants consécutifs 9.56.

On peut également déduire une formulation sous la forme d'un problème d'optimisation d'un vecteur de paramètres mixtes (composantes binaires et réelles) avec une fonction objectif quadratique et des contraintes d'égalité linéaires et d'inégalité quadratique ou linéaires. En effet, fixons  $N_m$  un nombre maximum de segments possibles suffisamment grand. Nous introduisons

1. les  $N_m \times |E|$  variables discrètes

$$\forall (e, k) \in E \times \{0, \dots, N_m - 1\}, \quad x_{e,k} = \begin{cases} 1 & \text{si l'arc } e \text{ est emprunté à l'étape } k, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

2. les  $N_m \times |E|$  variables réelles

$$\forall (e, k) \in E \times [0, N_m - 1], \quad \Delta_e^k := \frac{l_e}{v_k}.$$

La contrainte sur la vitesse est ramenée à une condition sur les variables de durée

$$\forall (e, k) \in E \times [0, N_m - 1], \quad \Delta_e^- \leq \Delta_e^k \leq \Delta_e^+ \quad (9.58)$$

avec  $\Delta_e^+ = l_e/v_-$ ,  $\Delta_e^- = l_e/v_+$  et le critère sur la longueur maximale de la trajectoire devient

$$\sum_{k=0}^{N_m-1} \sum_{e \in E} \Delta_e^k x_{e,k} \leq \Delta_m \quad (9.59)$$

3. La fonctionnelle à maximiser pour le vecteur de paramètres composé de  $(x_{e,k}, \Delta_e^k)$  devient donc

$$\sum_{k=0}^{N_m-1} \sum_{e \in E} x_{e,k} \frac{c(e)}{v_k} := \sum_{k=0}^{N_m-1} \sum_{e \in E} \Delta_e^k x_{e,k} \tilde{c}(e). \quad (9.60)$$

en prenant  $\tilde{c}(e)$  le coût normalisé par la longueur de l'arc.

4. Pour chaque noeud  $s \in V$ , les ensembles

$$In(s) := \{e = (s', s) : s \in V\}, \text{ les arcs arrivant en } s,$$

$$Out(s) := \{e = (s', s) : s \in V\}, \text{ les arcs partant en } s.$$

On a alors les contraintes

$$\forall s, \forall k \quad \sum_{e \in In(s)} x_{e,k} = \sum_{e \in Out(s)} x_{e,k} \quad (9.61)$$

5. Les contraintes aux limites,

$$\sum_{e \in \text{Out}(s_0)} x_{e,0} = 1 \text{ (un arc partant de la position initiale)} \quad (9.62)$$

$$\sum_{e \in \text{In}(s_f)} x_{e,N_m-1} = 1, \text{ (un arc arrivant en la position finale).} \quad (9.63)$$

6. Les contraintes sur le mouvement. On considère l'ensemble

$$\forall e, \Pi(e) := \{e' \in E \text{ dont le noeud de départ } s \text{ est le noeud d'arrivée de } e \text{ et respectant la contrainte de variation d'orientation}\}. \quad (9.64)$$

La contrainte du mouvement entre deux instants consécutifs est donc exprimée par la condition

$$\forall k \in [0, N_m - 1], \forall e, \forall e' \in \Pi(e), x_{e,k} + x_{e',k+1} \leq 1. \quad (9.65)$$

En définitive, le vecteur de paramètres pour le problème d'optimisation peut être noté  $Y = (Y_1^* \ Y_2^*)^* \in \{0, 1\}^{N_m \times |E|} \times \mathbb{R}^{N_m \times |E|}$  avec

$$\begin{aligned} Y_1 &= (x_{1,0} \ \dots \ x_{1,N-1} \ \dots \ x_{|E|,0} \ \dots \ x_{|E|,N-1})^* \\ Y_2 &= (\Delta_1^0 \ \dots \ \Delta_{N-1}^0 \ \dots \ \Delta_0^{|E|} \ \Delta_{N-1}^{|E|})^*. \end{aligned} \quad (9.66)$$

La fonctionnelle de coût est quadratique de la forme  $f(Y) = \frac{1}{2} Y^* A Y$  avec

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{N_m |E|} & \mathcal{I}_{N_m} \otimes \tilde{C} \\ \mathcal{I}_{N_m} \otimes \tilde{C} & \mathcal{O}_{N_m |E|} \end{pmatrix} \quad (9.67)$$

et  $\tilde{C} = \text{Diag}(\tilde{c}(1), \dots, \tilde{c}(|E|))$ . Formalisons également les différentes contraintes en fonction du vecteur  $Y$  :

- La contrainte sur les vitesses de l'équation (9.58) devient

$$B_1 Y - C_1 \leq \mathcal{O}_{2|E|} \quad (9.68)$$

où  $B_1$  est une matrice creuse de taille  $2|E| \times (N_m |E|)$  et  $C_1 \in \mathbb{R}^{2|E|}$  de la forme

$$B_1 = \begin{pmatrix} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & -1 & 0 & \\ \mathcal{O}_{2|E| \times N_m |E|} & 0 & 1 & & \\ & & & & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (9.69)$$

et  $C_1 = (\Delta_1^- \ -\Delta_1^+ \ \dots \ \Delta_{|E|}^- \ -\Delta_{|E|}^+)^*$ .

- La contrainte de l'équation (9.59) est une forme quadratique

$$\frac{1}{2} Y^* A_1 Y - \Delta_m \leq 0 \quad (9.70)$$

avec pour atrice

$$A_1 = 2 \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{N_m |E|} & \mathcal{I}_{N_m |E|} \\ \mathcal{I}_{N_m |E|} & \mathcal{O}_{N_m |E|} \end{pmatrix}.$$

- La contrainte de connexité de la trajectoire donnée par les équations de la forme (9.61) une égalité linéaire de la forme

$$B_2 Y = \mathcal{O}_{|V|}, \quad B_2 \text{ de taille } |V| \times (N_m |E|). \quad (9.71)$$

- La contrainte aux limites

$$B_3 Y - C_3 = \mathcal{O}_2, \quad B_3 \text{ de taille } 2 \times (N_m |E|). \quad (9.72)$$

- La contrainte sur le mouvement entre deux instants

$$B_4 Y - C_4 \leq \mathcal{O}_{|V|N_m}, \quad B_4 \text{ de taille } (|V|N_m) \times (N_m |E|). \quad (9.73)$$

La matrice  $B_4$  est une matrice diagonale composés de  $|V|$  blocs.

Il est possible de résoudre ce problème par des méthodes de résolution de type séparation et évaluation (comme les approches *Branch and Bound*). Il est aussi possible de réutiliser une méthode basée sur la cross-entropie pour obtenir une solution approchée. Nous fournirons les bases pour un algorithme de résolution dans les perspectives de cette thèse. Nous faisons abstraction de la contrainte sur la séquence de vitesses. L'information est maximale, sur un arc de déplacement, lorsque la vitesse est minimale. Cela revient à observer les amers aussi longtemps que possible. Le problème devient donc un problème de recherche de chemin maximal dans un graphe avec une contrainte sur la longueur. Nous pouvons trouver une solution, à partir d'un algorithme de programmation dynamique. Nous reprenons, la formulation proposée dans [PL02] qui permet de prendre en compte des contraintes sur la variation instantanée de l'orientation.

### 9.7.1 Application sur un exemple.

Dans cet exemple, nous nous intéressons uniquement à la composante  $\Gamma^{(1)}$  qui tient compte de l'information de distance donnée par les paires d'amers. Le scénario comprend une dizaine d'amers répartis sur une zone d'évolution rectangulaire de limites  $[0 \ 200 \ 0 \ 200]$ . Nous supposons le graphe construit à partir d'une grille de pas  $dx = dy = 20$ . Le graphe admet donc 121 noeuds. Le voisinage d'un noeud est constitué des 8 plus proches voisins. Nous recherchons des chemins reliant les points de la grille situés en  $(20, 20)$  et  $(160, 100)$ . Le scénario est représenté sur la figure 9.14.

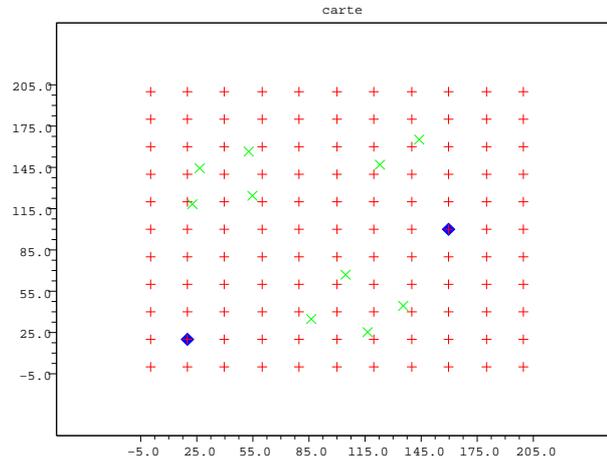


FIG. 9.14 – Scénario pour l’optimisation de  $\Gamma^{(1)}$ .

Nous allons considérons deux situations en faisant varier les contraintes sur la commande en orientation. Dans un cas, nous supposons que seules des variations d'orientation d'une amplitude de  $\frac{\pi}{4}$  sont admissibles. Dans l'autre, l'amplitude est plus importante et peut atteindre  $\frac{\pi}{2}$ . Les trajectoires admissibles sont composées de 20 sommets au maximum. Le capteur disponible pour l'acquisition des mesures est omnidirectionnel avec une distance maximale de détection de  $80m$ , soit l'équivalent de quatre fois la résolution de la grille. Les trajectoires optimales obtenues sont tracées sur les figures 9.15 (a) et (b). Les chemins optimaux ont tendance à imposer des mouvements proches des médiatrices formées par les paires d'amers. Ce comportement est visible dans le cas (a) en début et en fin de trajectoires. On peut remarquer la portion de trajectoire en forme

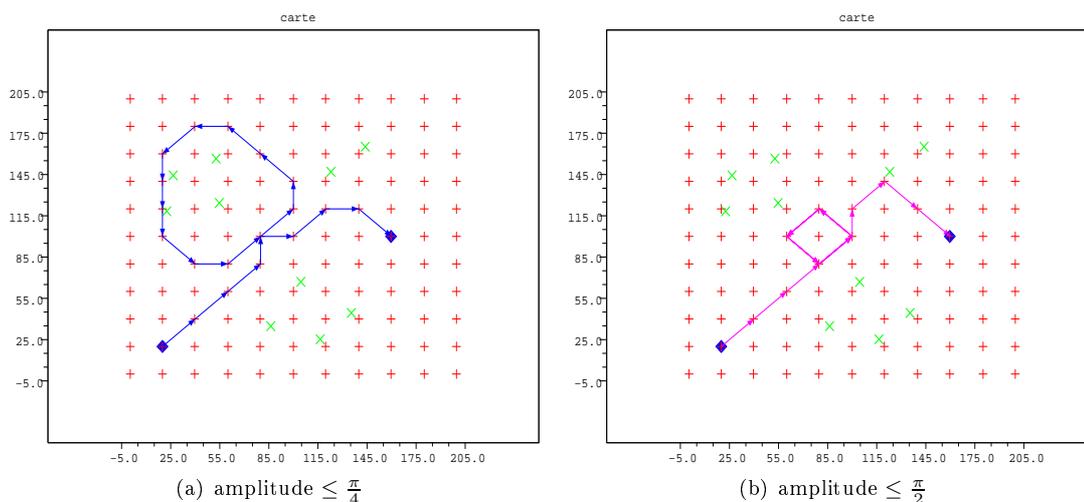


FIG. 9.15 – Chemin optimal pour  $\Gamma^{(1)}$ .

d’hippodrome autour des amers situés en haut à gauche avant le ralliement du point final. Lorsque la contrainte la vitesse de rotation est plus souple, l’optimum consiste à effectuer des plusieurs « cercles » successifs (trois dans cet exemple) au centre de la zone.

## 9.8 Conclusions du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons considéré que le modèle de dynamique du mobile était continu. Dans ce cadre, une mesure de performance instantanée  $\mathcal{J}(t, \mathcal{C}^h)$  basée sur le déterminant de la borne de Cramèr-Rao a été déduite. Elle a fait apparaître trois composantes principales permettant de comprendre l’apport de chacune des sources d’information (distance et angle). Nous avons ensuite abordé le problème de l’optimisation de la trajectoire pour un critère intégral de cette mesure de performance. Plus particulièrement, nous avons supposé que les trajectoires étaient construites à partir de portions de déplacement à vitesse et orientation constantes. Pour chaque déplacement élémentaire, il a été possible pour une configuration d’amers donnée de calculer un coût associé à la performance de localisation en se basant sur l’information apportée par le processus de mesure. Grâce à des changements de variables adaptés, nous avons montré que le coût sur les déplacements élémentaires pouvait être déduit par le calcul de primitives de fractions rationnelles. Les coefficients de ces fractions étant définis à partir des positions des amers et des points délimitant les parties de l’arc où les amers sont vus simultanément. Pour chacune des trois composantes de la fonctionnelle, une formulation explicite de ces intégrales a été proposée. On a notamment noté que le résultat obtenu est inversement proportionnel à la vitesse de déplacement adoptée sur l’arc et dépend de l’orientation de l’arc de déplacement par rapport à la médiatrice des segments formés par les paires d’amers.

Ensuite, nous avons vu que le problème d’optimisation conjointe de la vitesse et de l’orientation était en réalité un problème d’optimisation à variables mixtes entières et continues avec une fonctionnelle quadratique. La résolution des problèmes avec des variables entières est, en général, difficile. Nous avons uniquement traité le problème du choix de la séquence d’orientations. Une approche basée sur la méthode de cross-entropie pour résoudre ce problème hiérarchique sera esquissée dans le chapitre sur les conclusions et perspectives.

Dans le chapitre suivant, nous étendons les résultats au cas où la connaissance de la position des amers est incertaine. Cela nous permettra alors d’intégrer la planification une notion de risque liée à cette incertitude.



## Chapitre 10

# Cadre continu et incertitude sur les amers

Dans le chapitre précédent, nous avons formalisé un problème de planification de trajectoire en vue de maximiser les capacités de localisation du mobile sur la base d'une mesure d'information construite à partir du processus d'observation du système. Au final, nous nous sommes ramenés à un problème de recherche de chemins sur un graphe. Les coûts associés aux arcs de ce graphe dépendent notamment des configurations des amers visibles lors du déplacement sur cet arc. Nous n'avons pas tenu compte de l'éventualité d'une incertitude sur la position des amers dans les calculs. La prise en compte de l'erreur de carte impose de considérer le coût d'un déplacement élémentaire comme une variable aléatoire. L'objectif de ce chapitre est de répondre principalement à deux questions. Tout d'abord, comment propager cette incertitude en respectant les contraintes de perception du capteur ? Ensuite, une fois formalisée cette notion d'incertitude, comment intégrer cette information complémentaire dans le processus de décision que constitue l'optimisation des trajectoires ?

### 10.1 Incertitude sur le coût de déplacement

Pour préciser notre approche pour répondre à la première question, nous considérons dans cette section un arc particulier  $e_{pq}$  du graphe  $\mathcal{G}(V, E)$ . On fait les hypothèses suivantes.

- L'arc  $e_{pq}$  est défini à partir des points 2D de coordonnées  $(x_{s_p}, y_{s_p})$  et  $(x_{s_q}, y_{s_q})$ ,
- le déplacement est effectué avec la vitesse constante  $v_{e_{pq}}$ ,
- le déplacement est effectué entre les instants  $t_k$  et  $t_{k+1}$ .

Dans le cadre le plus général, nous avons montré que le coût associé à l'arc comporte trois composantes calculées en considérant les paires et triplets d'amers visibles au cours du déplacement

$$c(e_{pq}) = \sum_{c=1}^3 a_c \Gamma^{(c)}(e_{pq}), \quad (10.1)$$

avec plus précisément  $c = 1, 2, 3$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)}(e_{pq}) &= \sum_{i=1}^{n_c} \sum_{j>i}^{n_c} \sum_{r=1}^{n_c} \Gamma_{ijr}^{(1)}(e_{pq}), \\ \Gamma^{(2)}(e_{pq}) &= \sum_{i=1}^{n_c} \sum_{j=1}^{n_c} \sum_{r>j}^{n_c} \Gamma_{ijr}^{(2)}(e_{pq}), \\ \Gamma^{(3)}(e_{pq}) &= \sum_{i=1}^{n_c} \sum_{j>i}^{n_c} \sum_{r>j}^{n_c} \Gamma_{ijr}^{(3)}(e_{pq}), \end{aligned} \quad (10.2)$$

où les termes  $\Gamma_{ijr}^{(c)}$  dépendent de l'ensemble  $(f_i, f_j, f_r)$ , des propriétés géométriques de l'arc, de la vitesse et des conditions de perception (cf. chapitre 9). En particulier, nous avons vu que tous les termes  $\Gamma_{ijr}^{(c)}$  sont inversement proportionnels à la vitesse de déplacement. Par ailleurs, on peut noter que le calcul de chacun des termes  $\Gamma_{ijr}^{(c)}$  revient au calcul d'éléments d'une grille en trois dimensions où chaque point d'indice  $(i, j, r)$  correspond à la valeur de  $\Gamma_{ijr}^{(c)}$ . Ainsi, pour  $c = 1, 2$ , on a  $n_c^2 (n_c - 1)/2$  éléments à évaluer. On peut adopter l'écriture suivante

$$\forall c = 1, 2, 3, \Gamma^{(c)}(e_{pq}) = \frac{1}{v_{e_{pq}}} \mathcal{F}(e_{pq}, \mathcal{C}), \quad (10.3)$$

où  $\mathcal{F}(e_{pq}, \mathcal{C})$  est une fonctionnelle relativement complexe qui dépend des caractéristiques géométriques de l'arc, du capteur et de la carte.

Rappelons les hypothèses sur la cartographie. La carte  $\mathcal{C}$  est composée de  $n_c$  amers caractérisés par leurs positions dans  $\mathcal{D}$

$$\mathcal{C} = \{f_1, f_2, \dots, f_{n_c}\}.$$

La position de chaque amer  $f_j$ ,  $j = 1, \dots, n_c$  est supposée incertaine avec une matrice de covariance  $\Sigma(f_j)$  sur ses coordonnées  $(x^l, y^l)$ . Il y a indépendance entre les erreurs sur les positions des amers, la matrice d'incertitude de la carte  $\mathcal{C}$  est diagonale avec  $\Sigma_{\mathcal{C}} = \text{Diag}(\Sigma(f_1), \dots, \Sigma(f_{n_c}))$ . Afin de propager l'incertitude des amers sur  $\Gamma^{(c)}(e_{pq})$ , donc sur la performance de localisation, on propose d'exploiter la transformée inodore ou unscented introduite dans le chapitre 4 sur les techniques de filtrage utilisables pour la localisation. Par ce biais, il est possible de déterminer une approximation de la variance sur le coût pour un déplacement sur  $e_{pq}$ , que nous noterons  $\sigma_{\Gamma^{(c)}}^2(e_{pq})$ . La carte étant un vecteur de dimension  $2n_c$ , la transformée unscented nécessite de définir  $2(2n_c) + 1$  sigma-points équivalents à des vecteurs carte  $\mathcal{C}^{(l)}$ . La carte  $\mathcal{C}$  s'écrit sous forme vectorielle

$$\mathcal{C} = (x^1 \quad y^1 \quad \dots \quad x^l \quad y^l \quad \dots \quad x^{n_c} \quad y^{n_c})^*.$$

Les sigma-points  $\mathcal{C}^{(l)}$  sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{(0)} &= \mathcal{C}, \quad \omega_m^{(0)} = \lambda / ((2n_c + \lambda)), \quad \omega_c^{(0)} = \omega_m^{(0)} + (1 - \alpha^2 + \beta), \\ \mathcal{C}^{(l)} &= \mathcal{C}^{(0)} + \sqrt{(2n_c + \lambda)} \mathcal{C}_l, \quad \omega^{(l)} = 1 / \{2(2n_c + \lambda)\} \quad l = 1, \dots, 2n_c, \\ \mathcal{C}^{(l)} &= \mathcal{C}^{(0)} - \sqrt{(2n_c + \lambda)} \mathcal{C}_{l-2n_c}, \quad \omega^{(l)} = 1 / \{2(2n_c + \lambda)\} \quad l = 2n_c + 1, \dots, 4n_c, \end{aligned}$$

avec  $\alpha$ ,  $\lambda = \alpha^2(2n_c + \kappa) - 2n_c$ ,  $\beta$  et  $\kappa$  les paramètres permettant d'imposer une structure à la densité a priori sur  $\mathcal{C}$ , et  $\mathcal{C}_l$  est le  $l^{\text{ième}}$  vecteur colonne de la matrice *racine carrée* de  $\Sigma_{\mathcal{C}}$  obtenue, par exemple, à partir d'une factorisation de Cholesky [JU02] [JU04].

On déduit alors une approximation de la moyenne et de la variance sur le coût en appliquant les procédures de calcul  $\mathcal{F}(e_{pq}, \mathcal{C})$  à chaque exemplaire de carte  $\mathcal{C}^{(l)}$ .

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^{(c)}(e_{pq}) &= \frac{1}{v_{e_{pq}}} \left( \omega_m^{(0)} \mathcal{F}(e_{pq}, \mathcal{C}^{(0)}) + \sum_{l=1}^{4n_c} \omega^{(l)} \mathcal{F}(e_{pq}, \mathcal{C}^{(l)}) \right) \quad (10.4) \\ \bar{\sigma}_{\Gamma^{(c)}}^2(e_{pq}) &= \frac{1}{v_{e_{pq}}^2} \left( \omega_c^{(0)} \left( \mathcal{F}(e_{pq}, \mathcal{C}^{(0)}) - \bar{\Gamma}^{(c)}(e_{pq}) \right)^2 + \sum_{l=1}^{4n_c} \omega^{(l)} \left( \mathcal{F}(e_{pq}, \mathcal{C}^{(l)}) - \bar{\Gamma}^{(c)}(e_{pq}) \right)^2 \right) \end{aligned}$$

**Remarque 1 :** La structure diagonale de la matrice  $\Sigma_{\mathcal{C}}$  simplifie le calcul des moments déduits à l'équation (10.4). En effet, chaque terme  $\mathcal{F}(e_{pq}, \mathcal{C}^{(l)})$ ,  $l > 0$  se calcule à partir des calculs réalisés

pour la détermination de  $\mathcal{F}(e_{pq}, \mathcal{C}^{(0)})$ . En effet, la matrice racine carrée de  $\Sigma_{\mathcal{C}}$  est aussi diagonale et vérifie

$$\sqrt{\Sigma_{\mathcal{C}}} = \text{Diag}\left(\sqrt{\Sigma(f_1)}, \dots, \sqrt{\Sigma(f_{N_{\mathcal{C}}})}\right).$$

Par conséquent, chaque élément  $\mathcal{C}^{(l)}$ ,  $l > 0$  se déduit de  $\mathcal{C}$  par une simple modification des coordonnées de la position moyenne d'un unique amer. Plus précisément,  $\mathcal{C}^{(l)}$  est distinct de  $\mathcal{C}$  pour l'amer d'indice  $j = 1, \dots, n_{\mathcal{C}}$  tel que  $l \in \{2j, 2j-1\}$ . Le calcul des coûts étant réalisé à partir des couples et triplets d'amers perçus, il convient de modifier uniquement les couples ou triplets faisant intervenir l'amer  $f_j$  impacté par la transformée inodore. La structure de grille 3D pour le calcul du coût évoqué plus haut est alors intéressante pour une mise en oeuvre pratique.

**Remarque 2** : Nous pouvons aussi noter que la vitesse intervient comme un élément multiplicateur au niveau de la moyenne et de la variance. On peut donc adopter une écriture équivalente pour  $\bar{\Gamma}^{(c)}(e_{pq})$  et  $\bar{\sigma}_{\Gamma^{(c)}}^2(e_{pq})$

$$\bar{\Gamma}^{(c)}(e_{pq}) := \frac{1}{v_{e_{pq}}} C(e_{pq}) \quad \bar{\sigma}_{\Gamma^{(c)}}^2(e_{pq}) := \frac{1}{v_{e_{pq}}^2} \sigma_{\mathcal{C}}^2(e_{pq}).$$

## 10.2 Définition d'une fonction de risque

Nous avons montré comment il était possible de propager l'erreur sur la connaissance de la carte sur le coût pour un déplacement élémentaire d'une trajectoire. La variance ainsi construite peut être considérée comme un paramètre de qualité sur le coût moyen. Pour tout arc  $e$  du graphe  $\mathcal{G}(V, E)$ , nous disposons du couple  $(\bar{\Gamma}^{(c)}(e), \bar{\sigma}_{\Gamma^{(c)}}^2(e))$ . Nous avons vu que ces deux quantités font intervenir la vitesse de déplacement et l'orientation de l'arc. Du point de vue de l'optimisation, nous avons :

- le choix de l'orientation en un noeud est lié au choix de l'arc correspondant,
- le choix de la vitesse impacte les coûts de l'arc.

Considérons une trajectoire  $\tau$  composée de  $n_{\tau}$  arcs  $(e_1, \dots, e_{n_{\tau}})$ . L'estimation du coût moyen pour cette trajectoire pour la performance de localisation est alors donnée par

$$\mathbb{E}_{\mathcal{C}} \{\Psi(\tau, \mathcal{C})\} = \sum_{p=1}^{n_{\tau}} \frac{1}{v_{e_p}} C(e_p).$$

Sous l'hypothèse d'indépendance entre les coûts des déplacements élémentaires, on déduit également une estimation de la variance pour  $\Psi(\tau, \mathcal{C})$

$$\mathbb{V}_{\mathcal{C}} \{\Psi(\tau, \mathcal{C})\} = \sum_{p=1}^{n_{\tau}} \frac{1}{v_{e_p}^2} \sigma_{\mathcal{C}}^2(e_p). \quad (10.5)$$

Le coût d'une trajectoire  $\Psi(\tau, \mathcal{C})$  étant une variable aléatoire, lorsque nous cherchons à déterminer la meilleure trajectoire reliant deux lieux, nous devons, en toute rigueur, résoudre un problème d'optimisation stochastique. Une manière d'aborder le sujet est donc d'intégrer l'incertitude au travers de l'équivalent d'une *fonction de risque*  $r(\Psi(\tau, \mathcal{C}))$  [RS06] sous la forme

$$r(\Psi(\tau, \mathcal{C})) = \mathbb{E}_{\mathcal{C}} \{\Psi(\tau, \mathcal{C})\} - \lambda_r \mathbb{D}_{\mathcal{C}} \{\Psi(\tau, \mathcal{C})\}, \quad (10.6)$$

où  $\lambda_r > 0$  et  $\mathbb{D}_{\mathcal{C}} \{\Psi(\tau, \mathcal{C})\}$  est une fonction de dispersion sur le coût. L'idée sous-jacente est de sélectionner les trajectoires qui permettent d'atteindre un bon niveau de performance moyen tout en s'assurant d'une faible probabilité de variation autour de cette valeur. Le réglage du paramètre  $\lambda_r$  permet de trouver un compromis entre ces deux objectifs qui peuvent, pour certaines configuration de cartes, être contradictoires. En effet, le positionnement géométrique relatif des amers influe sur la performance du filtre de localisation. Cependant, si on ne tient pas compte de l'incertitude sur

la connaissance de leurs positions, on peut privilégier des mouvements dans des zones où en réalité les structures géométriques intéressantes ne sont pas respectées.

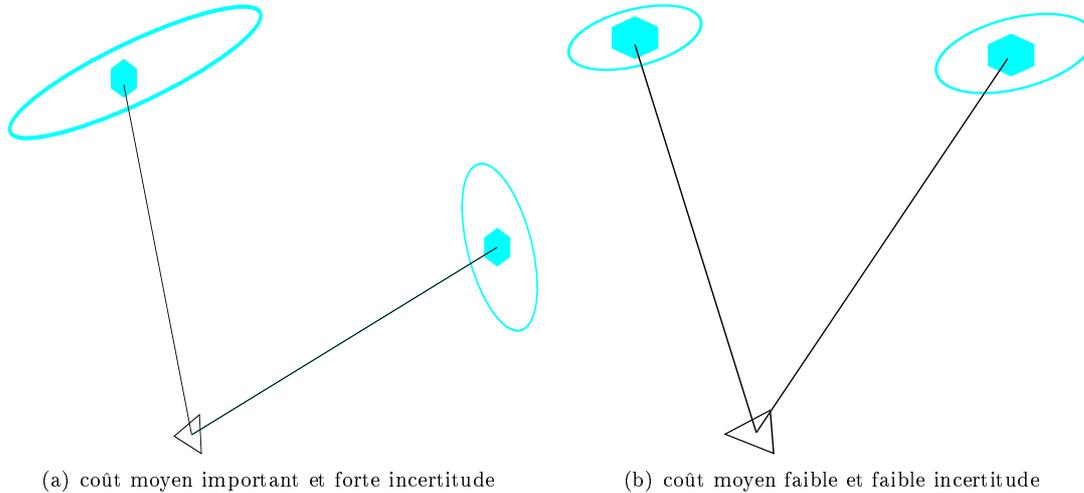


FIG. 10.1 – Compromis entre performance moyenne et incertitude due aux amers.

Sur le plan théorique, le choix de  $\mathbb{D}_C$  est important afin de garantir que le problème d'optimisation stochastique ait de bonnes propriétés pour sa résolution [RS06],[ADEH99]. Dans notre cas, il semble naturel d'exploiter une fonction de dispersion construite à partir de la variance  $\mathbb{V}_C$  estimée comme à l'équation (10.5). En définitive, on abordera les problèmes d'optimisation de trajectoires pour les fonctions de risque

$$r_1(\Psi(\tau, C)) = \sum_{p=1}^{n_\tau} \frac{1}{v_e} C(e) - \lambda_r \sum_{p=1}^{n_\tau} \frac{1}{v_e^2} \sigma_C^2(e) \quad (10.7)$$

et

$$r_2(\Psi(\tau, C)) = \sum_{p=1}^{n_\tau} \frac{1}{v_e} C(e) - \lambda_r \sqrt{\sum_{p=1}^{n_\tau} \frac{1}{v_e^2} \sigma_C^2(e)}. \quad (10.8)$$

Les difficultés de résolution des deux problèmes ne sont pas les mêmes. En effet, si nous supposons l'absence de contraintes sur la séquence de vitesse, la résolution du problème de planification utilisant la fonction  $r_1(\Psi(\tau, C))$  est possible à partir d'un algorithme de programmation dynamique ou équivalent. Ce n'est pas le cas pour  $r_2(\Psi(\tau, C))$  à cause de la nonlinéarité due à la racine carrée. Lorsque l'on envisage d'optimiser également la vitesse, on est face à un problème d'optimisation hiérarchique où, une fois sélectionnée une hypothèse de trajectoire, il convient de choisir la suite des vitesses par un algorithme de résolution de problème non-linéaire. Les conditions d'optimalité (conditions de Karush-Khun-Tucker (KKT)) pour les deux fonctions ne sont pas du même ordre en termes de complexité [BSS06].

### 10.2.1 Recherche du chemin optimal sans contraintes de vitesse

Dans le cadre le plus général, on s'intéresse à l'optimisation de la séquence de commandes à appliquer et donc au choix des orientations et des vitesses. Nous traitons uniquement le choix de la séquence d'orientations. Des éléments de réflexion pour l'optimisation des vitesses seront présentés dans le chapitre 11. On supposera donc que la vitesse de déplacement sur un arc est connue et qu'il n'existe pas de contraintes globales sur la séquence des vitesses sur une trajectoire. Comme nous l'avons indiqué précédemment, la structure de graphe adoptée pour formaliser le problème d'optimisation de la séquence d'orientations revient à déterminer un chemin dans le graphe vérifiant les

contraintes sur les positions initiale et finale, ainsi que sur les variations instantanées d'orientation. De façon plus formelle, notre problème est toujours de la forme

$$\begin{aligned} & \max_{\tau \in P(s_0, B_f)} r_j(\Psi(\tau, \mathcal{C})), \quad j = 1, 2 \\ \text{s.c.} \quad & \sum_{e \in \tau} \frac{l(e)}{v_e} \leq \Delta_m \end{aligned} \quad (10.9)$$

$$\forall e, f_{ori}(e, succ(e)) = 1, \quad (10.10)$$

où  $P(s_0, B_f)$  est l'ensemble des chemins connexes du graphe partant du noeud  $s_0$  et arrivant dans l'ensemble des noeuds de la zone d'arrivée  $B_f$ .  $succ(e)$  est l'ensemble des successeurs de l'arc  $e$ ,  $l(e)$  sa longueur et  $f_{ori}(e, succ(e))$  est la fonction permettant de définir les contraintes sur la variation d'orientation entre deux instants.

Les vitesses étant connues, les coûts moyens et les variances associées sont entièrement déterminés pour chacun des arcs du graphe. Lorsque le paramètre de décision  $\lambda_r$  est fixé, la fonction de risque  $r_1(\Psi(\tau, \mathcal{C}))$  évaluée sur  $\tau$  est décomposable en risques élémentaires associés à chaque arc :

$$r_1(e, \mathcal{C}) := \frac{1}{v_e} C(e) - \lambda_r \frac{1}{v_e^2} \sigma_C^2(e). \quad (10.11)$$

Il est donc possible de résoudre le problème pour  $r_1(\Psi(\tau, \mathcal{C}))$  par une approche de type programmation dynamique, comme pour l'optimisation sans prise en compte de l'erreur sur les amers.

Pour la fonction de risque  $r_2(\Psi(\tau, \mathcal{C}))$ , cette décomposition n'est plus possible. Pour résoudre le problème de planification, nous utilisons l'approche basée sur la méthode de cross-entropie [RK04] proposée dans le chapitre 8. Nous considérons un seuil de risque  $\lambda_r$  fixé et la vitesse constante à  $v_e = v, \forall e$ . On rappelle la méthode de génération de trajectoires admissibles. On se donne une famille de matrices de densités de probabilité discrètes définie par  $\mathbf{P}_{ss'} = (p_{ss'})$  (comme dans la section 8.2.2.1) pour chaque déplacement entre les noeuds  $(s, s') \in V \times V$  qui modélisent la probabilité de choisir l'arc  $e_{ss'}$ .  $\mathbf{P}_{ss'}$  est, par conséquent, une matrice de taille  $|V| \times |V|$  avec un certain nombre de coefficients nuls pour tenir compte de la notion de voisinage des noeuds et des contraintes du cadre d'évolution (zones interdites, obstacles...). On a en particulier

$$\mathbf{P}_{ss'} = \begin{pmatrix} p_{s_1 s_1} & p_{s_1 s_2} & \cdots & p_{s_1 s_{|V|-1}} & p_{s_1 s_{|V|}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{s_{|V|} s_1} & p_{s_{|V|} s_2} & \cdots & p_{s_{|V|} s_{|V|-1}} & p_{s_{|V|} s_{|V|}} \end{pmatrix} \quad (10.12)$$

et  $\forall s$ , la ligne notée  $P_s(\cdot)$  est une densité de probabilité discrète vérifiant

$$p_{ss'} = 0, \quad s' \notin \mathcal{V}(s) \quad \text{et} \quad \sum_{s' \in \mathcal{V}(s)} p_{ss'} = 1.$$

Pour résoudre notre problème de planification on est donc amené à optimiser les  $|V| \times |V|$  (au plus) paramètres  $(p_{ss'})$  en utilisant l'algorithme de Cross-entropie. La génération d'une trajectoire de  $P(s_0, B_f)$  respectant les conditions décrites par les équations (10.9) et (10.10) se fait en considérant les étapes :

- soit  $s_{i_k}$  le noeud atteint à l'instant  $k$  et  $e_{k-1}$  l'arc utilisé pour l'atteindre.
- On note  $E_{k,k-1}$  l'ensemble des déplacements  $e$  possibles à l'instant  $k$  respectant la contrainte sur les orientations successives  $f_{ori}(e, succ(e_{k-1}))$ .
- On construit la densité de probabilité discrète  $\tilde{P}_{s_{i_k}}(\cdot)$  en restreignant aux noeuds atteignables à partir des arcs de  $E_{k,k-1}$ , la ligne  $s_{i_k}$  de  $\mathbf{P}_{ss'}$ , puis en normalisant.
- On effectue un tirage selon  $\tilde{P}_{s_{i_k}}(\cdot)$  et on pose  $s_{i_{k+1}}$  le noeuds correspondant au tirage. Lorsque  $E_{k,k-1}$  est vide, on procède par rejet ou bien on affecte un coût égal à  $-\infty$  à la trajectoire.

Considérons une trajectoire  $\tau_i$  ainsi générée et respectant l'ensemble des contraintes. Il est alors possible de déterminer la valeur de la fonction de risque  $r_2(\Psi(\tau_i, \mathcal{C}))$ ,  $i = 1, \dots, N$  à partir de

l'estimation et de la moyenne de la fonction de performance pour le problème de localisation. A chaque étape de l'algorithme de cross-entropie, étant données les  $N$  trajectoires  $\tau_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , il est alors possible d'estimer les paramètres du modèle de probabilité pour l'itération suivante sur la base des meilleures trajectoires caractérisées par le quantile  $\gamma$

$$p_{ss'} = \frac{\sum_{i=1}^N \delta [r_2(\Psi(\tau_i, \mathcal{C})) \geq \gamma] \cdot \# [\tau_i \in \chi_{ss'}]}{\sum_{i=1}^N \delta [r_2(\Psi(\tau_i, \mathcal{C})) \geq \gamma] \cdot \# [\tau_i \in \chi_s]}, \quad (10.13)$$

où  $[\tau_i \in \chi_{ss'}]$  indique que la trajectoire  $\tau_i$  contient l'arc formé par les sommets  $s$  et  $s'$  et  $[\tau_i \in \chi_s]$  que la trajectoire  $\tau_i$  passe par le sommet  $s$ .

### 10.3 Applications sur un exemple

Dans cette section, nous présentons un exemple de résolution sur un scénario, en ne tenant compte que de l'information apportée par l'information de distance au travers des coûts  $\Gamma^{(1)}$ . Nous reprenons l'environnement introduit au chapitre précédent et défini sur  $[0, 200] \times [0, 200]$ . Il contient une dizaine d'amers avec des incertitudes sur leurs positions variables. Trois zones de qualité sont considérées. La zone la plus dégradée est localisée en haut à droite. Les amers situés en bas à droite sont les plus précis. Nous avons représenté les ellipses d'incertitude sur la figure 10.2. On recherche toujours des trajectoires, qui permettent de rejoindre le point  $(160, 100)$  en partant du point  $(20, 20)$ . Le graphe est obtenu à partir d'une discrétisation de l'espace avec une résolution  $dx = dy = 20$ . Le capteur est omnidirectionnel et de distance de détection maximale égale à 80 (quatre fois la résolution de la grille). Nous imposons des variations successives d'angle inférieures à  $\frac{\pi}{2}$  et la longueur maximale admissible correspond à 20 sommets.

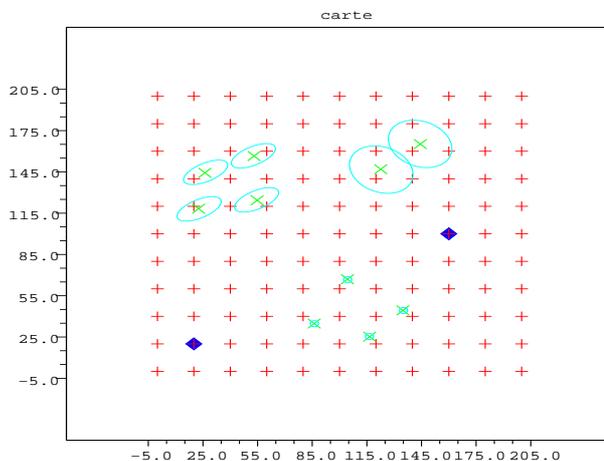


FIG. 10.2 – Ellipses d'erreur sur les amers.

Nous recherchons la trajectoire optimale pour les valeurs de  $\lambda_r$  égales à 0, 0.01, 1 et 10 pour les fonctions de risque  $r_1$ . Elles sont obtenues respectivement par la mise en oeuvre de l'algorithme de programmation dynamique. Les trajectoires optimales sont présentées sur les figures 10.3 (a), (b), (c) et (d).

La trajectoire obtenue pour  $\lambda_r = 0$  est identique à celle calculée pour la carte supposée parfaite (cf. chapitre précédent). Lorsque l'on fait croître le paramètre  $\lambda_r$ , on constate que les stratégies de mouvement consistent à se rapprocher de la zone où les amers sont les plus précis. On peut également noter, que pour  $\lambda_r = 0.01$ , la variation par rapport à la trajectoire, sans prise en compte des erreurs sur les amers, se traduit par un léger mouvement vers la zone de qualité intermédiaire (en haut à gauche).

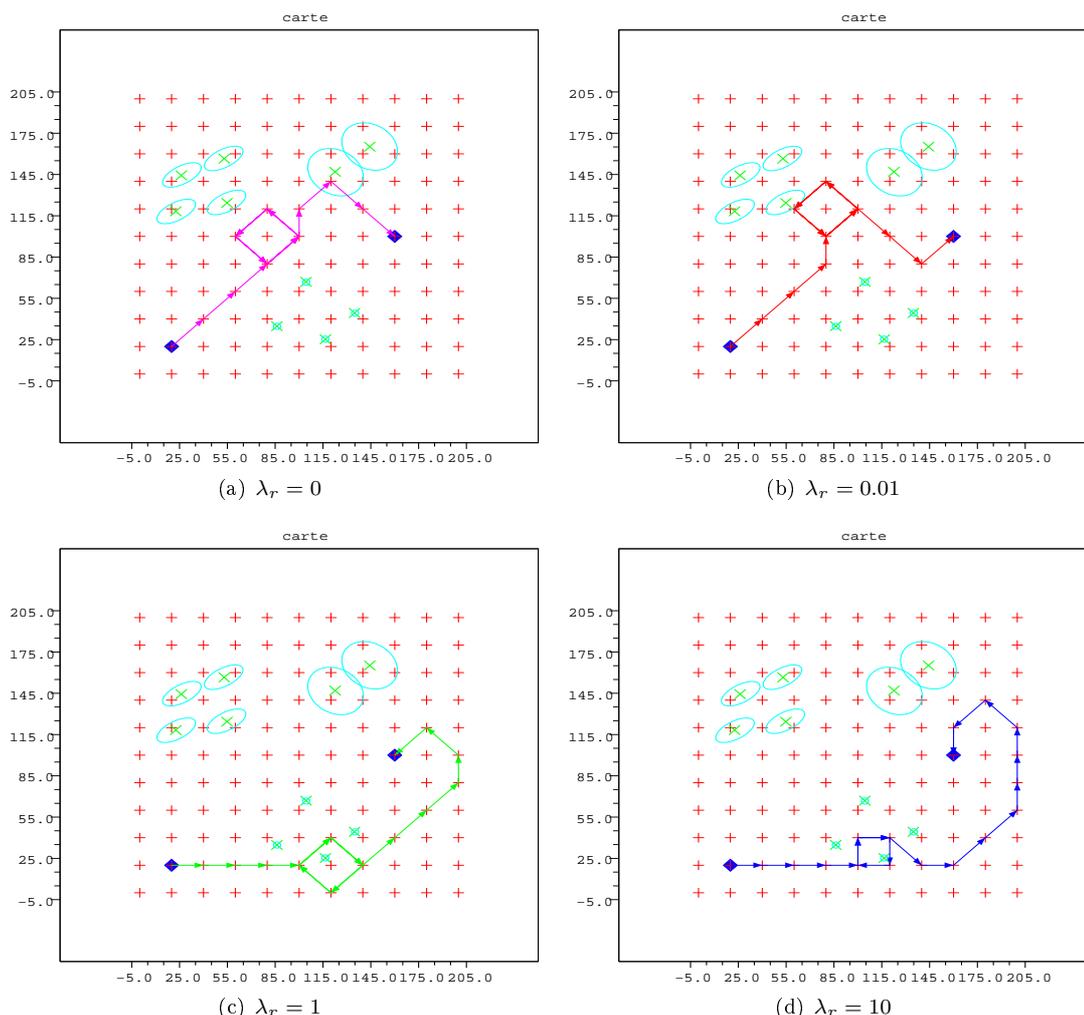


FIG. 10.3 – Chemin optimal pour la fonction de risque  $r_1$ .

### 10.3.1 Interprétation du paramètre de risque

le paramètre  $\lambda_r$  est un critère de décision choisi par l'utilisateur. Il est possible de lier le choix du paramètre  $\lambda_r$  à une hypothèse de comportement adapté à un contexte donné. En effet, en fonction de l'environnement et des conditions d'exécution de la mission, on peut être plus ou moins prêt à prendre un risque sur l'incertitude sur la performance de localisation. Par exemple, dans certaines conditions, si l'on veut limiter le risque, une performance moyenne faible avec une variance faible sera préférée à une performance moyenne importante mais avec une incertitude plus élevée. Cette différence de comportement peut se traduire par la définition d'une fonction d'utilité paramétrée par un paramètre caractéristique du comportement recherché. On peut montrer, dans le cas de  $r_1$  et sous l'hypothèse que la fonction de coût d'une trajectoire soit distribuée selon une loi gaussienne, que le paramètre  $\lambda_r$  est directement lié aux caractéristiques de cette fonction d'utilité [BSS06].

## 10.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons proposé une démarche permettant de prendre en compte l'incertitude de carte dans la mesure de performance pour la localisation dans le cadre continu. Notre approche utilise la transformation unscented pour propager l'incertitude de carte sur les coûts associés à chaque déplacement élémentaire du graphe. Le problème de planification est identique au cas sans erreurs sur les amers, mais avec une adaptation de la fonction à optimiser. En effet,

nous avons introduit des fonctions de risques construites à partir de la performance moyenne, de l'incertitude sur celle-ci et d'un paramètre de décision. La nature de la fonction de risque a un impact direct sur la méthode de résolution du problème de planification. Le choix du paramètre de risque permet de définir des stratégies de déplacement à partir d'un compromis entre performance moyenne et niveau d'incertitude.

# Chapitre 11

## Conclusions et Perspectives

### 11.1 Synthèse des travaux

#### 11.1.1 D'une carte de géographe à une représentation pour la navigation

Dans le cadre de cette thèse sur la problématique de la performance de la localisation d'un système autonome muni d'une carte d'amers avec des erreurs, nous avons commencé par une analyse des sources d'erreurs possibles lors de la construction d'une carte vectorielle à la base de la construction des amers. A partir de cette analyse, nous avons proposé une démarche qui permet, à partir de la carte vectorielle et en fonction de l'application visée, de construire une information cartographique à plusieurs couches intégrant l'incertitude initiale. Pour ce faire, nous nous sommes appuyés sur des résultats de la théorie des *processus ponctuels* pour modéliser l'organisation spatiale des objets de la carte. L'idée principale repose sur la définition de relations qui reflètent les propriétés de proximité, en termes de forme ou de positionnement, et d'alignement entre les objets. Ces relations ont notamment été précisées pour les objets bâtiments et arbres traités dans nos exemples. A partir de ce formalisme des relations, nous avons introduit des paramètres permettant de synthétiser la connaissance sur les relations appliquées à une carte. Ces paramètres ont été rendus aléatoires afin de construire une loi *a priori* permettant de représenter des cartes autour de la même structure spatiale moyenne. A partir de cette *a priori* et de la densité déduite du modèle de bruit sur la carte vectorielle, nous avons proposé un algorithme pour générer un échantillon de cartes représentatif de la structure spatiale et de l'erreur de la carte fournie. Cet algorithme utilise une approche MCMC pour échantillonner la loi *a posteriori*. Les réalisations de la carte ainsi obtenues sont à la base de la construction des différentes couches d'information cartographiques utiles pour les besoins d'un système autonome. Les amers et leurs erreurs formalisées sous la forme d'une matrice de covariance sur leurs paramètres de position dans l'environnement constituent le premier niveau d'information. Des grilles d'occupation probabilistes et floues qui formalisent la présence d'obstacles dans la zone d'évolution, ont également pu être déduites des exemples de cartes bruitées.

#### 11.1.2 Localisation et mesures de performance

Après avoir précisé une approche possible pour la construction d'une carte d'amers sur la base d'une cartographie vectorielle bruitée, nous avons présenté le problème de localisation d'un engin autonome à partir de mesures fournies par ses capteurs et de la carte. L'état du système est composé de sa position dans l'espace 2D et de son orientation, et les informations observées prises en compte sont les distances et les mesures d'angles par rapport aux amers présents dans son champ de perception. Nous avons rappelé les principales techniques de filtrage qui peuvent être employées pour résoudre le problème de localisation, qui est un problème d'estimation de l'état du système sur la base des mesures reçues et « corrélées » à la carte. Nous tenons à signaler que l'objet de cette thèse n'était pas de produire un nouvel algorithme de localisation, problématique déjà bien traitée dans la littérature, mais de définir des mesures de performance *a priori*. Nous avons ensuite abordé les mesures de performance *a priori* et tout naturellement, compte tenu de notre modèle, nous

nous sommes focalisés sur la borne de Cramèr-Rao. Les fondements théoriques ont été rappelés et l'application aux systèmes dynamiques non-linéaires discrets détaillée. En particulier, nous avons présenté la formule récursive, démontrée dans [TMN98], qui est un résultat essentiel pour le calcul récursif de la borne de Cramèr-Rao a posteriori.

Nous avons pu alors dériver la borne pour le modèle retenu pour notre système en considérant de primabord que la carte disponible était parfaite. Trois méthodes, qui se distinguent par la manière d'approximer les espérances, ont été proposées pour le calcul en pratique. L'une utilise la trajectoire nominale imposée, les autres impliquent un échantillonnage autour de cette trajectoire nominale par tirage de Monte-Carlo ou en utilisant la transformée inodore, ou *unscented* en anglais. Nous avons analysé le comportement de ces approches et remarqué que la borne basée sur la transformée inodore était trop optimiste.

Pour tenir compte de l'erreur de carte, nous avons étendu la borne initiale en adaptant le modèle d'observation initial du système grâce à un développement limité des fonctionnelles de mesures autour de la position moyenne des amers. Cette adaptation du modèle s'est traduite par une modification de la structure de l'erreur sur les mesures de distances et d'angles. Les algorithmes de calcul de la borne avec erreur sur la carte sont donc similaires au cas sans erreur mais avec une prise en compte de cette erreur supplémentaire, due à la propagation des erreurs sur la position des amers. Nous avons pu montrer que le niveau et l'orientation, relativement à la position du mobile, des erreurs sur les amers avaient une influence sur la mesure de performance.

A partir de ces éléments, nous avons proposé différents critères de performance basés sur le déterminant de la projection de la borne sur les paramètres de position du mobile : La performance finale qui permet de mesurer la performance atteignable en bout de trajectoire, la performance moyenne et la performance de type *minmax*.

Le problème de la définition d'une mesure de performance a également été abordée pour un modèle d'évolution supposé continu. La performance instantanée pour l'état complet du système a été déduite de la matrice d'information de Fisher liée au processus d'observation. Nous avons obtenu, à partir d'une propriété d'algèbre linéaire classique, une formulation intéressante du déterminant de cette matrice. Grâce à ce résultat, nous avons pu comprendre l'influence du positionnement relatif des amers par rapport au déplacement dans la performance globale de localisation. Dans ce cas, la prise en compte de l'incertitude sur la position des amers a été possible grâce à l'utilisation de la transformée inodore appliquée au vecteur aléatoire composé des coordonnées des amers. Une notion d'incertitude sur la mesure de performance a pu alors être calculée à partir des sigma-points homogènes à des réalisations de cartes représentatives du bruit. Enfin, nous avons construit à partir de ces éléments une fonction de risque qui tient compte à la fois du niveau de performance moyen atteignable et de l'incertitude sur celui-ci. L'objectif est de finir un compromis entre la recherche de configurations géométriques amers-mobile optimales et le niveau d'incertitude sur les amers utilisés.

### 11.1.3 Des approches pour l'optimisation des trajectoires

A partir des fonctions de coûts construites sur la base de la borne de Cramèr-Rao, nous nous sommes intéressés au problème d'optimisation de trajectoires entre deux zones prédéfinies.

Pour la modélisation discrète, nous avons vu qu'il n'était pas possible de résoudre le problème par des algorithmes de type programmation dynamique. Nous avons donc proposé une approche pour la résolution qui utilise la méthode de cross-entropie développée par Rubinstein et al. [RK04]. La philosophie des algorithmes consiste à faire converger une famille paramétrique de densités de probabilité permettant de générer des trajectoires admissibles autour de la trajectoire optimale au sens de notre fonctionnelle de performance. Deux algorithmes ont été déclinés. Le premier s'appuie sur un mécanisme de rejet des trajectoires qui violent les contraintes du problème alors que le second, grâce à deux niveaux d'optimisation, permet de générer directement de « bonnes » trajectoires. Nous avons essentiellement analysé le comportement de la première méthode. Afin d'apprécier la convergence de notre méthode de planification, nous avons utilisé les résultats de la théorie des valeurs extrêmes, qui permettent d'extrapoler les comportements de la queue d'une densité sous certaines conditions. Sur la base d'un échantillon de trajectoires suffisamment grand, nous avons obtenu des estimateurs des quantiles extrêmes, avec leurs intervalles de confiance, dans le but de

les comparer au coût des trajectoires optimales trouvées par notre algorithme.

Pour le cadre continu, les coûts des trajectoires ont été définis à partir des coûts des déplacement élémentaires entre deux noeuds d'un graphe. Nous avons vu que la performance était liée à l'arc de déplacement choisi mais aussi à la vitesse utilisée sur cet arc. Lorsque l'on s'intéresse uniquement à l'optimisation de la séquence d'orientation sans contrainte sur les vitesses, le problème peut être résolu par une approche de type programmation dynamique pour la fonction de risque basée sur la variance. Pour la fonction de risque avec l'écart-type sur le coût d'une trajectoire, nous avons dus exploiter une approche basée sur la cross-entropie pour obtenir des trajectoires proches de l'optimum.

## 11.2 Pour aller plus loin

### 11.2.1 Une mesure de performance plus complète

Le problème de localisation considéré dans cette thèse faisait l'hypothèse d'une mise en correspondance ou association parfaite entre les mesures acquises par le capteur et les amers disponibles. En pratique, les conditions de perception peuvent être à l'origine de difficultés sur ce point. Par exemple, lorsque des amers sont vus sous des angles très proches, des ambiguïtés peuvent apparaître. Sur la base d'une modélisation de la performance du processus d'association, il est alors possible de définir une borne de Cramèr-Rao qui intègre ce phénomène. Une première piste consisterait à définir un modèle de mauvaise association entre deux amers en fonction de leur proximité relativement à la position du mobile. La dérivation de la borne sur l'erreur d'estimation se rapprocherait des développements réalisés pour les problèmes de pistage multi-cibles. Une autre voie serait de définir une loi de probabilité sur les matrices d'association modélisant la mise en correspondance des mesures et des amers. Une telle matrice n'est composée que de 1 et de 0. Il n'est donc pas possible de calculer directement la borne de Cramèr-Rao qui nécessite des densités régulières. Une façon de contourner cette difficulté est de régulariser la densité en introduisant une variable  $\epsilon > 0$ , puis d'effectuer un passage à la limite en supposant les conditions de continuité vérifiées. Une autre approche serait de considérer non plus la borne de Cramèr-Rao mais la borne de Weiss-Weinstein, par exemple, qui est moins contraignante sur les propriétés à vérifier par les densités de probabilité.

### 11.2.2 Vers des mesures de performance pour la cartographie en ligne

Dans nos travaux, nous avons fait l'hypothèse que la cartographie était disponible a priori et qu'elle n'évoluait pas au cours du temps. En robotique, on est souvent placé dans le cas inverse où la carte est construite ou enrichie en ligne. On parle de problèmes de localisation et cartographie simultanée, ou SLAM en anglais. L'état du système n'est plus restreint à celui du mobile, mais augmenté des paramètres modélisant la cartographie. En outre, la construction se faisant en même temps que la découverte du lieu, la dimension de l'état évolue au cours du temps. Nous ne voyons pas de limites majeures des calculs de bornes présentés pour tenir compte de l'évolution de la cartographie. La différence essentielle sera la définition d'une borne de dimension variable.

### 11.2.3 Optimisation conjointe de l'orientation et de la vitesse

Pour les raisonnements dans le cadre continu, nous avons résolu le problème de planification en se restreignant à l'optimisation de la commande en orientation. Lorsque l'on s'intéresse aussi à la définition de la séquence des vitesses sous contraintes, le problème est plus complexe. En effet, il est nécessaire de découpler le problème en deux phases

1. une pour le choix d'une trajectoire admissible,
2. une autre pour le choix de la suite de vitesses.

On est donc face à un problème d'optimisation par nature hiérarchique. Nous suggérons quelques piste pour une solution basée sur la méthode de cross-entropie.

Le premier étage de sélection d'une trajectoire est réalisée, en supposant la vitesse constante et connue, à partir des algorithmes V1 et V2 proposés pour la génération de trajectoire. Une fois

déterminée la trajectoire, il convient dans un second temps de choisir la séquence de vitesses optimale. L'optimisation de la séquence de vitesses est un problème non-linéaire sous contraintes pour la fonction de risque  $r_1$ , et en particulier quadratique pour  $r_2$ . Il faut noter qu'il n'est pas exclu de se trouver sur une proposition de trajectoire où la contrainte de vitesse est violée. On lui affecte alors directement une valeur de coût pénalisante. Dans le cas contraire, on détermine la valeur de la fonction de risque en considérant la séquence optimale de vitesses fournie par un algorithme de résolution de problème d'optimisation non-linéaire sous contraintes.

Précisons comment cette résolution est réalisée en pratique pour une trajectoire donnée, en respectant les contraintes de temps maximal et de vitesse bornée. Soit une trajectoire  $\tau$  définie par la séquence d'arcs  $(e_1, \dots, e_{n_\tau})$ , on doit résoudre les problèmes d'optimisation

$$\begin{aligned} & \max_{(v_{e_p})_{0 \leq p \leq n_\tau}} f_j(v_{e_1}, \dots, v_{e_{n_\tau}}) \quad j = 1, 2 \\ \text{s.c.} \quad & \sum_{p=1}^{n_\tau} \frac{l(e_p)}{v_{e_p}} \leq \Delta_m \\ & \forall p, v_- \leq v_{e_i} \leq v_+, \end{aligned} \tag{11.1}$$

avec

$$\begin{aligned} f_1(v_{e_1}, \dots, v_{e_{n_\tau}}) & := \sum_{p=1}^{n_\tau} \frac{1}{v_{e_p}} \tilde{C}(e_p) - \lambda_r \sum_{p=1}^{n_\tau} \frac{1}{v_{e_p}^2} \sigma_C^2(e_p) \\ f_2(v_{e_1}, \dots, v_{e_{n_\tau}}) & := \sum_{p=1}^{n_\tau} \frac{1}{v_{e_p}} \tilde{C}(e_p) - \lambda_r \sqrt{\sum_{p=1}^{n_\tau} \frac{1}{v_{e_p}^2} \sigma_C^2(e_p)} \end{aligned}$$

Il est possible de résoudre le problème équivalent en considérant comme variable l'inverse des vitesses. On peut remarquer que l'ensemble admissible pour les vitesses défini par les contraintes (pavé de  $\mathbb{R}^{n_\tau}$  et contrainte linéaire) est un ensemble convexe. La fonctionnelle  $f_1(v_{e_1}, \dots, v_{e_{n_\tau}})$  est concave car on s'intéresse à des trajectoires où au moins un des arcs à un coût non nul. Un optimum local est donc un optimum global. La fonctionnelle  $f_2(v_{e_1}, \dots, v_{e_{n_\tau}})$  est non-linéaire. Pour résoudre, il convient de s'intéresser aux solutions des systèmes d'équations issues de la formulation des conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) [BSS06].

#### 11.2.4 Amélioration sur mesure de la qualité de la carte

Dans les différents développements, nous avons considéré le choix de la stratégie de déplacement comme le paramètre de décision. Dans le cas du modèle discret, la trajectoire est choisie en fonction de la performance qui intègre la connaissance sur le modèle du mobile, les erreurs du capteur et l'incertitude sur la connaissance des amers. Pour le modèle continu, un critère de risque a été introduit et a permis une sélection traduisant un compromis entre performance de localisation et incertitude sur le niveau de performance. Maintenant, nous pouvons supposer que le décideur dispose d'une liberté supplémentaire qui consiste, une fois la trajectoire optimale obtenue par les approches précédentes et pour une qualité de carte donnée, à améliorer la précision d'un nombre fini d'amers de la carte. Une conséquence possible est la possibilité de réduire le temps de parcours de la trajectoire, en adaptant les vitesses, qui peut avoir un intérêt (discrétion...). On s'intéresse donc à la problématique qui consiste à optimiser sous contraintes des moyens permettant d'améliorer une sous-partie de la carte. A titre d'exemple, cette amélioration peut-être réalisée en employant un moyen de mesure complémentaire d'un niveau de précision supérieur disponible sur la plate-forme ou des moyens d'autres plates-formes déployés sur zone avant ou pendant la mission. On peut envisager par exemple des moyens actifs, souvent consommateurs en ressources et qui imposent des stratégies d'emploi parcimonieuses. L'objectif est donc de définir une carte « sur mesure » pour une hypothèse de trajectoire. Nous présentons quelques éléments pour la formalisation et la résolution de ce problème pour la modélisation dans le cadre continu. Une approche similaire est possible pour la mesure de performance définie dans le cadre discret.

**Les capacités d'amélioration.** Le niveau d'incertitude sur la carte est modélisé par la donnée de la matrice de covariance sur les positions des amers. La capacité d'amélioration peut consister à contracter les matrices de covariances initiales des amers. Pour chaque amer  $f_j$ ,  $j = 1, \dots, n_C$ , on note  $\Sigma^0(f_j)$  et  $\Sigma^a(f_j)$  la matrice de covariance avant et après amélioration. On introduit la variable discrète  $\delta_j^a \in \{0, 1\}$  qui modélise l'action d'amélioration de l'amer  $j$ . A l'issue du processus de décision pour l'amélioration de la carte, on a donc

$$\Sigma^a(f_j) = \begin{cases} q \Sigma^0(f_j), & \text{avec } 0 < q \leq 1 & \text{si } \delta_j^a = 1, \\ \Sigma^0(f_j) & & \text{si } \delta_j^a = 0. \end{cases} \quad (11.2)$$

On peut également faire les hypothèses suivantes :

1. le coefficient de contraction  $q$  prend des valeurs discrètes. On note  $Q$  l'ensemble des  $n_Q$  valeurs possibles. On notera de façon formelle  $q = 0$  lorsqu'il n'y a pas d'amélioration.
2. L'amélioration est localement homogène. On introduit donc une segmentation de la zone d'évolution  $\mathcal{D}$  et  $n_a$  zones  $\mathcal{D}_a$  susceptibles d'être améliorées. Tous les amers contenus dans une même zone  $\mathcal{D}_a$  reçoivent le même niveau d'amélioration.
3. Le coût d'une amélioration est fonction de la zone  $\mathcal{D}_a$  et du taux de contraction appliquée. On note  $P(\mathcal{D}_a, q) \in \mathbb{R}^+$  le coût en ressources associé avec  $P(\mathcal{D}_a, q) = 0$  lorsque la zone ne fait pas l'objet d'une amélioration.
4. Les ressources employées pour l'amélioration sont limitées. On introduit donc le coût maximal  $P_m$  disponible et pour une stratégie d'amélioration  $(\mathcal{D}_a, q_a)$ ,  $a = 1, \dots, n_a$ .

$$\sum_{j=1}^{n_a} P(\mathcal{D}_a, q_a) \leq P_m. \quad (11.3)$$

**Impacts de l'amélioration de la carte.** Considérons une trajectoire  $\tau$  composée de  $n_\tau$  déplacements élémentaires réalisés à vitesse et orientation constantes. La mesure de risque associée à cette trajectoire est obtenue à partir de la moyenne et de la variance du coût élémentaire basé sur la matrice d'information de Fisher sur les morceaux de trajectoires. Ces deux moments ont été estimés en considérant une transformation inodore sur le vecteur de position des amers. L'amélioration de l'incertitude sur la donnée cartographique modifie l'estimation de ces deux paramètres.

**Proposition d'une solution.** La méthode de cross-entropie fournit un cadre pour la résolution de ce problème. Il suffit de définir une famille de probabilités permettant de tirer  $n_a$  zones parmi les  $n_Q$ . L'approche la plus simple consiste à associer à chaque paramètre de décision  $\delta_j^a$  une densité de probabilité permettant de modéliser la probabilité d'être dans l'état 1 ou 0. Sur la base de cette famille de lois, il est alors possible de proposer des configurations de zones améliorées. Les coûts élémentaires sur la trajectoire peuvent donc être de nouveau calculés et la séquence de vitesses optimisée pour définir le coût de performance global pour la trajectoire et donc de la configuration améliorée sous-jacente. Par itération de l'algorithme, il est alors possible de tendre vers une affectation des efforts d'amélioration de la carte.

### 11.2.5 Vers la replanification en ligne

Pour le modèle discret, nous avons abordé le problème de planification de la trajectoire hors-ligne de la position initiale à la zone cible. La trajectoire ainsi construite peut être vue comme une planification avant mission. En cours de mission, il est possible de définir une approche de planification en ligne sur un horizon temporel fixé  $T$  en utilisant les mêmes algorithmes. Il convient néanmoins de prendre en compte, à chaque phase de replanification à  $t_k$ , les modifications suivantes

- l'état initial à considérer est l'état estimé  $\hat{X}_k$  par le filtre embarqué,
- la matrice d'information de Fisher  $J_k$  est égale à l'inverse de matrice de covariance sur l'erreur d'estimation  $\hat{P}_k$  également fournie par le processus de filtrage.



## Annexe A

# Modèles associés à la dynamique du système

### A.1 Modèle d'incertitude sur les commandes appliquées

L'application de la commande à chaque instant introduit un bruit de déplacement et de rotation. On suppose que la commande réellement exécutée est une version bruitée de la commande imposée  $u_k^o$

$$v_k = v_k^o + \omega_k^v \quad (\text{A.1})$$

$$\phi_k = \phi_k^o + \omega_k^\phi \quad (\text{A.2})$$

Les paramètres  $\omega_k^v$  et  $\omega_k^\phi$  constituent les bruits sur les entrées qui peuvent être probabilistes de loi connue ou déterministes et inconnues mais bornées d'amplitudes connues. La méthode d'estimation utilisée pour la localisation est fortement dépendante de la nature et de la structure de ces grandeurs. Si l'on fait l'hypothèse d'incertitude de faibles amplitudes, on peut effectuer un développement limité au premier ordre au voisinage de la commande  $u_k^o$ . En développant les calculs sur chacune des composantes de l'état  $X_k$ , il vient

$$x_{k+1} = x_k + (v_k^o + \omega_k^v) \cos(\theta_k + \phi_k^o + \omega_k^\phi) \delta t_k \quad (\text{A.3})$$

$$y_{k+1} = y_k + (v_k^o + \omega_k^v) \sin(\theta_k + \phi_k^o + \omega_k^\phi) \delta t_k \quad (\text{A.4})$$

Si les bruits sont relativement faibles, les approximations suivantes peuvent être utilisées

$$\cos(\omega_k^v) \approx 1 \quad \text{et} \quad \sin(\omega_k^\phi) \approx \omega_k^\phi \quad (\text{A.5})$$

et en utilisant les relations trigonométriques remarquables

$$\cos(\theta_k + \phi_k^o + \omega_k^\phi) \approx \cos(\theta_k + \phi_k^o) - \sin(\theta_k + \phi_k^o) \omega_k^\phi \quad (\text{A.6})$$

$$\sin(\theta_k + \phi_k^o + \omega_k^\phi) \approx \sin(\theta_k + \phi_k^o) + \cos(\theta_k + \phi_k^o) \omega_k^\phi \quad (\text{A.7})$$

En introduisant les relations (A.6) et (A.7) dans l'équation de dynamique et en simplifiant les termes d'ordre supérieur, on obtient pour les paramètres de position

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + v_k^o \cos(\theta_k + \phi_k^o) \delta t_k + \cos(\theta_k + \phi_k^o) \delta t_k \omega_k^v - v_k^o \sin(\theta_k + \phi_k^o) \delta t_k \omega_k^\phi \\ y_{k+1} &= y_k + v_k^o \sin(\theta_k + \phi_k^o) \delta t_k + \sin(\theta_k + \phi_k^o) \delta t_k \omega_k^v + v_k^o \cos(\theta_k + \phi_k^o) \delta t_k \omega_k^\phi \end{aligned}$$

L'équation de prédiction peut s'écrire au final comme suit

$$X_{k+1} = X_k + B(\theta_k, u_k^o) + G(\theta_k, u_k^o) \omega_{\mathbf{k}}$$

avec

$$B(\theta_k, u_k^o) = \begin{pmatrix} v_k^o \cos(\theta_k + \phi_k^o) \delta t_k \\ v_k^o \sin(\theta_k + \phi_k^o) \delta t_k \\ \phi_k^o \end{pmatrix},$$

et

$$G(\theta_k, u_k^o) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k + \phi_k^o)\delta t_k & -v_k^o \sin(\theta_k + \phi_k^o)\delta t_k \\ \sin(\theta_k + \phi_k^o)\delta t_k & v_k^o \sin(\theta_k + \phi_k^o)\delta t_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_k^1 \\ e^* \end{pmatrix}$$

où

$$H_k^1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k + \phi_k^o)\delta t_k & -v_k^o \sin(\theta_k + \phi_k^o)\delta t_k \\ \sin(\theta_k + \phi_k^o)\delta t_k & v_k^o \sin(\theta_k + \phi_k^o)\delta t_k \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas probabiliste, l'équation de dynamique fait donc apparaître un vecteur de bruit gaussien additif de matrice de covariance donnée par

$$Q^{u_k} = \mathbb{E}_w \{ G(\theta_k, u_k^o) W_k W_k^* G(\theta_k, u_k^o)^* \}. \quad (\text{A.8})$$

avec  $W_k$  est le vecteur dont les composantes sont les bruits sur les commandes  $[\omega_k^v, \omega_k^\phi]^*$ . En notant  $\sigma_v^2$  et  $\sigma_\phi^2$  les variances respectives sur la composante en vitesse de déplacement et orientation, l'expression de  $Q_k$  peut être déduite. De façon plus précise, on a

$$Q^{u_k} = G(\theta_k, u_k^o) \mathbb{E}_w \{ W_k W_k^* \} G(\theta_k, u_k^o)^* = \begin{pmatrix} H_k^1 \\ e^* \end{pmatrix} C_u \begin{pmatrix} H_k^{1*} & e \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

où

$$C_u = \begin{pmatrix} \sigma_v^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\phi^2 \end{pmatrix}.$$

Les règles de calcul matriciel permettent d'écrire

$$Q^{u_k} = \begin{pmatrix} H_k^1 C_u H_k^{1*} & H_k^1 C_u e^* \\ e C_u H_k^{1*} & e C_u e^* \end{pmatrix}$$

ce qui est équivalent à

$$Q^{u_k} = \begin{pmatrix} Q_k^{xy} & D_{\theta_k} \\ D_{\theta_k}^* & \sigma_\phi^2 \end{pmatrix}$$

où la matrice  $Q_k^{xy}$  projection de l'incertitude sur le sous espace définie par les composantes du vecteur associée à la position et le vecteur colonne  $D_{\theta_k}$  traduisant la corrélation entre ces composantes et l'orientation. On peut montrer que

$$Q_k^{xy} = \mathcal{R}_{\theta_k + \phi_k^o}^* \begin{pmatrix} \delta t_k^2 \sigma_v^2 & 0 \\ 0 & \delta t_k^2 v_k^{o2} \sigma_\phi^2 \end{pmatrix} \mathcal{R}_{\theta_k + \phi_k^o}. \quad (\text{A.10})$$

$\mathcal{R}_{\theta_k + \phi_k^o}$  est la matrice de rotation d'angle  $\theta_k + \phi_k^o$  et

$$D_{\theta_k} = \sigma_\phi^2 v_k^o \delta t_k \begin{pmatrix} -\sin(\theta_k + \phi_k^o) \\ \cos(\theta_k + \phi_k^o) \end{pmatrix} = \sigma_\phi^2 v_k^o \delta t_k C_{\theta_k} \quad (\text{A.11})$$

## Annexe B

# Quelques éléments de calcul pour la BCRB

### B.1 Dérivation de la formule de Slepian-Bang

Nous nous intéressons à la dérivation de la matrice d'information de Fisher dans le cadre de l'estimation d'un vecteur aléatoire de paramètres de loi gaussienne. Pour ce faire nous sommes amenés à considérer les propriétés du déterminant et de sa différentielle. Nous supposons donc donnée un vecteur aléatoire  $X$  sur un espace probabilisé à valeur dans  $\mathbb{R}^n$  de densité de la forme :

$$p_\theta(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\sqrt{\det(\Gamma_\theta)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(x - h(\theta))^* \Gamma_\theta^{-1} (x - h(\theta)) \right\} \quad (\text{B.1})$$

où  $\theta$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^m$  et  $h(\theta)$  une fonction vectorielle de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^n$ . On s'intéresse au calcul de la matrice d'information de Fisher définie à partir de l'espérance du laplacien du logarithme de la densité de probabilité de la quantité

$$l_\theta(x) = -\ln(p_\theta(x)) = c_1 + \underbrace{\frac{1}{2} \ln(\det(\Gamma_\theta))}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{2}(x - h(\theta))^* \Gamma_\theta^{-1} (x - h(\theta))}_{(2)}, \quad (\text{B.2})$$

c'est-à-dire  $\mathbb{E}_{X|\theta} \Delta_\theta^\theta l_\theta(x)$ . Notons la fonctionnelle  $f_d(M) = \ln(\det(M))$  de  $\mathbb{S}^+$  sur  $\mathbb{R}^+$ . Sa dérivée en  $M$  d'ordre 1 et 2, le long de la direction définie par  $B \in \mathbb{S}$  est donnée par

$$f'_d(M; B) = -\text{tr}(M^{-1}B) \quad (\text{B.3})$$

$$f''_d(M; B) = \text{tr}(M^{-1}BM^{-1}) \quad (\text{B.4})$$

et le gradient en  $M$ ,  $f'_d(M) = -M^{-1}$ . Par ailleurs, on a pour toute matrice  $A(\eta)$  et  $B(\eta)$  dont les coefficients sont des fonctions du paramètre réel  $\eta$ , et pour toute application  $f$

$$\frac{\partial f(A(\eta))}{\partial \eta} = f' \left( A(\eta); \frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta} \right), \quad \frac{\partial \text{tr}(A(\eta))}{\partial \eta} = \text{tr} \left( \frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta} \right) \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial A(\eta)B(\eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta} B(\eta) + A(\eta) \frac{\partial B(\eta)}{\partial \eta} \quad (\text{B.6})$$

et si  $A(\eta)$  est en plus non singulière

$$\frac{\partial A^{-1}(\eta)}{\partial \eta} = -A^{-1}(\eta) \frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta} A^{-1}(\eta).$$

dans le cadre le plus général la matrice  $\Gamma_\theta$  a ses coefficients qui dépendent des composantes du vecteurs  $\theta$ , on déduit pour le terme (1) de l'équation (B.2) et des propriétés précédentes :

$$\forall i = 1, \dots, m \quad \frac{\partial f_d(\Gamma_\theta)}{\partial \theta_i} = -\text{tr} \left( \Gamma_\theta^{-1} \frac{\partial \Gamma_\theta}{\partial \theta_i} \right)$$

et donc

$$\begin{aligned} \forall i, j = 1, \dots, n \quad \frac{\partial^2 f_d(\Gamma_\theta)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} &= -\text{tr} \left( \frac{\partial \Gamma_\theta^{-1}}{\partial \theta_j} \frac{\partial \Gamma_\theta}{\partial \theta_i} + \Gamma_\theta^{-1} \frac{\partial^2 \Gamma_\theta}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \right) \\ &= \text{tr} \left( \Gamma_\theta^{-1} \frac{\partial \Gamma_\theta}{\partial \theta_j} \Gamma_\theta^{-1} \frac{\partial \Gamma_\theta}{\partial \theta_i} - \Gamma_\theta^{-1} \frac{\partial^2 \Gamma_\theta}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \right) \\ &= \text{tr} \left( \Gamma_\theta^{-1} \frac{\partial \Gamma_\theta}{\partial \theta_j} \Gamma_\theta^{-1} \frac{\partial \Gamma_\theta}{\partial \theta_i} \right) - \text{tr} \left( \Gamma_\theta^{-1} \frac{\partial^2 \Gamma_\theta}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \right) \end{aligned}$$

Considérons le terme (2) de B.2 et déterminons  $\mathbb{E}_{x|\theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta_j \partial \theta_i} (x - h(\theta))^* \Gamma_\theta^{-1} (x - h(\theta))$ . On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \theta_j \partial \theta_i} (x - h(\theta))^* \Gamma_\theta^{-1} (x - h(\theta)) &= \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left\{ (x - h(\theta))^* \frac{\partial \Gamma_\theta^{-1}}{\partial \theta_i} (x - h(\theta)) \right\} - 2 \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left\{ \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta_j} \Gamma_\theta^{-1} (x - h(\theta)) \right\} \\ &= (x - h(\theta))^* \frac{\partial^2 \Gamma_\theta^{-1}}{\partial \theta_j \partial \theta_i} (x - h(\theta)) - 2 \underbrace{\frac{\partial^2 h(\theta)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \Gamma_\theta^{-1} (x - h(\theta))}_{(*)} \\ &\quad - 2 \underbrace{\frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta_j} \frac{\partial \Gamma_\theta^{-1}}{\partial \theta_i} \Gamma_\theta^{-1} (x - h(\theta))}_{(**)} + 2 \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta_j} \Gamma_\theta^{-1} \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta_i} \\ &\quad - 2 \underbrace{\frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \Gamma_\theta^{-1}}{\partial \theta_i} (x - h(\theta))}_{(***)} \end{aligned} \tag{B.7}$$

En considérant l'espérance, les termes (\*), (\*\*) et (\*\*\*) ont une contribution nulle car on obtient des quantités liées à la moyenne du vecteur aléatoire  $X - h(\theta)$  qui, par hypothèse de modélisation, est nulle. Pour obtenir la relation recherchée, il convient de montrer que

$$\mathbb{E}_{x|\theta} \left\{ (x - h(\theta))^* \frac{\partial^2 \Gamma_\theta^{-1}}{\partial \theta_j \partial \theta_i} (x - h(\theta)) \right\} = \text{tr} \left( \Gamma_\theta^{-1} \frac{\partial^2 \Gamma_\theta}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \right)$$

On s'intéresse donc au calcul de l'espérance d'une forme quadratique d'un vecteur gaussien. Nous utilisons le lemme démontré dans [Mag86].

**Lemme 2** Soit  $X$  un vecteur de dimension  $n$  distribué selon la loi normale  $\mathcal{N}(\mu_X, \Sigma)$ . On suppose disponible une matrice  $T$  inversible telle que  $\Sigma = TT^*$ . Soit  $A$  une matrice symétrique de taille  $n \times n$ . Alors les cumulants  $\kappa_1, \kappa_2, \dots$  de la variable quadratique  $x^*Ax$  s'expriment de la façon suivante

$$\kappa_j = \mathbb{E} \{ (X^*AX)^j \} = 2^{j-1} (j-1)! \left( \text{tr}(T^*AT)^j + j\mu_X^* T^{*-1} (T^*AT)^j T^{-1} \mu_X \right) \tag{B.8}$$

En particulier pour  $j = 1$ , nous avons le résultat  $\mathbb{E} \{ (X^*AX) \} = \text{tr}(T^*AT) + \mu_X^* A \mu_X$ . La démonstration de ce lemme s'appuie sur une transformation linéaire dite de Mahalanobis de la variable  $X$  en utilisant la matrice  $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ . Cette transformation permet d'obtenir un vecteur gaussien centré et réduit. Le résultat final est alors obtenu en utilisant le lien entre la fonction caractéristique et les moments d'une variable aléatoire.

## B.2 Éléments pour la détermination de $D_k^{11}$

Le calcul de  $D_k^{11}$  fait intervenir la formule de *Slepian – Bang* avec un calcul de la dérivée de la matrice de covariance  $Q_k$  par rapport à chacune des composantes de l'état du système. Cette dernière ne dépend que de la composante  $\theta_k$  décrivant son orientation, on s'intéresse au terme

$$\text{tr} \left( Q_k^{-1} \frac{dQ_k}{d\theta_k} Q_k^{-1} \frac{dQ_k}{d\theta_k} \right).$$

Nous allons tout d'abord déterminer les matrices qui interviennent dans cette relation, en particulier la dérivée par rapport à l'orientation de la matrice de covariance

$$\frac{dQ_k}{d\theta_k} = \frac{dQ_k^{u_k}}{d\theta_k} + \frac{dQ_k^m}{d\theta_k} = \frac{dQ_k^{u_k}}{d\theta_k}.$$

En utilisant l'expression de  $Q_k^{u_k}$

$$\frac{dQ_k^{u_k}}{d\theta_k} = \begin{pmatrix} \frac{dQ_k^{xy}}{d\theta_k} & \sigma_\phi b_k \frac{dC_{\theta_k}}{d\theta_k} \\ \sigma_\phi b_k \frac{dC_{\theta_k}^*}{d\theta_k} & 0 \end{pmatrix}$$

avec  $dC_{\theta_k}/d\theta_k = -(c_{\theta_k+\phi_k} \quad s_{\theta_k+\phi_k})^*$  et

$$\begin{aligned} \frac{dQ_k^{xy}}{d\theta_k} &= \frac{d}{d\theta_k} \{ \mathcal{R}_{\theta_k+\phi_k}^* \text{Diag}(a_k^2, b_k^2) \mathcal{R}_{\theta_k+\phi_k} \} \\ &= \underbrace{\frac{d\mathcal{R}_{\theta_k+\phi_k}^*}{d\theta_k} \text{Diag}(a_k^2, b_k^2) \mathcal{R}_{\theta_k+\phi_k}}_{(1)} + \underbrace{\mathcal{R}_{\theta_k+\phi_k}^* \text{Diag}(a_k^2, b_k^2) \frac{d\mathcal{R}_{\theta_k+\phi_k}}{d\theta_k}}_{(2)}. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Les dérivées des matrices de la relation précédente s'obtiennent en considérant les dérivées des fonctions trigonométriques

$$\frac{d\mathcal{R}_{\theta_k+\phi_k}^*}{d\theta_k} = \begin{pmatrix} -s_{\theta_k+\phi_k} & -c_{\theta_k+\phi_k} \\ c_{\theta_k+\phi_k} & -s_{\theta_k+\phi_k} \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

On peut alors déterminer l'expression de la matrice (1)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{R}_{\theta_k+\phi_k}^*}{d\theta_k} \text{Diag}(a_k^2, b_k^2) \mathcal{R}_{\theta_k+\phi_k} &= \begin{pmatrix} -s_{\theta_k+\phi_k} & -c_{\theta_k+\phi_k} \\ c_{\theta_k+\phi_k} & -s_{\theta_k+\phi_k} \end{pmatrix} \text{Diag}(a_k^2, b_k^2) \begin{pmatrix} c_{\theta_k+\phi_k} & s_{\theta_k+\phi_k} \\ -s_{\theta_k+\phi_k} & c_{\theta_k+\phi_k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (b_k^2 - a_k^2) c_{\theta_k+\phi_k} s_{\theta_k+\phi_k} & -(a_k^2 s_{\theta_k+\phi_k}^2 + b_k^2 c_{\theta_k+\phi_k}^2) \\ (a_k^2 c_{\theta_k+\phi_k}^2 + b_k^2 s_{\theta_k+\phi_k}^2) & -(b_k^2 - a_k^2) c_{\theta_k+\phi_k} s_{\theta_k+\phi_k} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et de même on a pour (2)

$$\mathcal{R}_{\theta_k+\phi_k}^* \text{Diag}(a_k^2, b_k^2) \frac{d\mathcal{R}_{\theta_k+\phi_k}}{d\theta_k} = \begin{pmatrix} (b_k^2 - a_k^2) c_{\theta_k+\phi_k} s_{\theta_k+\phi_k} & (a_k^2 c_{\theta_k+\phi_k}^2 + b_k^2 s_{\theta_k+\phi_k}^2) \\ -(a_k^2 s_{\theta_k+\phi_k}^2 + b_k^2 c_{\theta_k+\phi_k}^2) & -(b_k^2 - a_k^2) c_{\theta_k+\phi_k} s_{\theta_k+\phi_k} \end{pmatrix}.$$

Ce qui entraîne au final

$$\begin{aligned} \frac{dQ_k^{xy}}{d\theta_k} &= \begin{pmatrix} 2(b_k^2 - a_k^2) c_{\theta_k+\phi_k} s_{\theta_k+\phi_k} & -(b_k^2 - a_k^2)(c_{\theta_k+\phi_k}^2 - s_{\theta_k+\phi_k}^2) \\ -(b_k^2 - a_k^2)(c_{\theta_k+\phi_k}^2 - s_{\theta_k+\phi_k}^2) & -2(b_k^2 - a_k^2) c_{\theta_k+\phi_k} s_{\theta_k+\phi_k} \end{pmatrix} \\ &= q_k \begin{pmatrix} s_{2(\theta_k+\phi_k)} & -c_{2(\theta_k+\phi_k)} \\ -c_{2(\theta_k+\phi_k)} & -s_{2(\theta_k+\phi_k)} \end{pmatrix} \\ &= q_k N_k \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

en posant  $q_k = (b_k^2 - a_k^2)$ . Introduisons le vecteur  $G_{\theta_k}^* = \frac{dC_{\theta_k}}{d\theta_k} = -(c_{\theta_k+\phi_k} \quad s_{\theta_k+\phi_k})^*$ . en outre, on peut noter que les vecteurs  $G_{\theta_k}$  et  $C_{\theta_k}$  sont de norme unitaire et orthogonaux.

On peut obtenir une écriture remarquable pour la matrice  $N_k$ , à partir des vecteurs  $C_{\theta_k}$  et  $G_{\theta_k}$ .

$$N_k = C_{\theta_k} G_{\theta_k}^* + G_{\theta_k} C_{\theta_k}^*. \quad (\text{B.12})$$

**Remarque :** De cette nouvelle expression de  $N_k$  et de la propriété d'orthogonalité, nous pouvons déduire les relations suivantes impliquant la matrice  $N_k$  et les vecteurs  $C_{\theta_k}$  et  $G_{\theta_k}$ .

$$\begin{aligned} N_k G_{\theta_k} &= (C_{\theta_k} G_{\theta_k}^* + G_{\theta_k} C_{\theta_k}^*) G_{\theta_k} \\ &= C_{\theta_k} \|G_{\theta_k}\|^2 \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$N_k G_{\theta_k} = C_{\theta_k}. \quad (\text{B.13})$$

De même, on a

$$\begin{aligned} N_k C_{\theta_k} &= (C_{\theta_k} G_{\theta_k}^* + G_{\theta_k} C_{\theta_k}^*) C_{\theta_k} \\ &= G_{\theta_k} \|C_{\theta_k}\|^2 \end{aligned}$$

Ce qui équivaut à

$$N_k C_{\theta_k} = G_{\theta_k}. \quad (\text{B.14})$$

Enfin, considérons le produit de la matrice  $N_k$  par elle-même. On a

$$\begin{aligned} N_k N_k &= (C_{\theta_k} G_{\theta_k}^* + G_{\theta_k} C_{\theta_k}^*) \cdot (C_{\theta_k} G_{\theta_k}^* + G_{\theta_k} C_{\theta_k}^*) \\ &= C_{\theta_k} \|G_{\theta_k}\|^2 C_{\theta_k}^* + G_{\theta_k} \|C_{\theta_k}\|^2 G_{\theta_k}^* \\ &= C_{\theta_k} C_{\theta_k}^* + G_{\theta_k} G_{\theta_k}^* \\ &= \begin{pmatrix} s_{(\theta_k+\phi_k)}^2 & -c_{(\theta_k+\phi_k)} s_{(\theta_k+\phi_k)} \\ -c_{(\theta_k+\phi_k)} s_{(\theta_k+\phi_k)} & c_{(\theta_k+\phi_k)}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{(\theta_k+\phi_k)}^2 & c_{(\theta_k+\phi_k)} s_{(\theta_k+\phi_k)} \\ c_{(\theta_k+\phi_k)} s_{(\theta_k+\phi_k)} & s_{(\theta_k+\phi_k)}^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Cela équivaut à la relation

$$N_k N_k = \mathcal{I}_2. \quad (\text{B.16})$$

Ces trois propriétés seront utiles dans les calculs qui vont suivre et qui serviront à la détermination de la borne de Cramér-Rao a posteriori pour notre problème de localisation.

### B.2.1 Calcul de $Q_k^{-1}$

Nous aurons besoin également du calcul de l'inverse de la matrice de covariance de l'erreur de prédiction  $Q_k$ . Pour la déterminer, on exploite le lemme d'inversion matricielle relativement classique et aussi appelé *lemme de Schur* :

**Lemme 3** Soient  $A$  une matrice inversible de taille  $m \times m$  et les matrices  $B$ ,  $C$  et  $D$  de tailles respectives  $n - m \times n - m$ ,  $n - m \times m$  et  $m \times n - m$ ,  $n > m$ , alors

$$\begin{pmatrix} A & D \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1} D \Delta^{-1} C A^{-1} & -A^{-1} D \Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1} C A^{-1} & \Delta^{-1} \end{pmatrix}$$

où  $\Delta = B - C A^{-1} D$ .

Appliquons ce lemme à notre matrice qui se décompose par blocs de la façon suivante

$$Q_k = \begin{pmatrix} \sigma_k^2 \mathcal{I}_2 + Q_k^{xy} & \sigma_\phi b_k C_{\theta_k} \\ \sigma_\phi b_k C_{\theta_k}^* & \sigma_{\theta_k}^2 + \sigma_\phi^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.17})$$

Dans l'expression précédente, on a posé  $\sigma_k = \sigma \delta t_k$  et  $\sigma_{\theta_k} = \sigma_\theta \delta t_k$ . Déterminons tout d'abord l'inverse du bloc supérieur gauche de taille  $2 \times 2$ .

Inverse de  $\sigma_k^2 \mathcal{I}_2 + Q_k^{xy}$

$$A = \sigma_k^2 \mathcal{I}_2 + Q_k^{xy} = \begin{pmatrix} \sigma_k^2 + a_k^2 c_{\theta_k + \phi_k}^2 + b_k^2 s_{\theta_k + \phi_k}^2 & (a_k^2 - b_k^2) c_{\theta_k + \phi_k} s_{\theta_k + \phi_k} \\ (a_k^2 - b_k^2) c_{\theta_k + \phi_k} s_{\theta_k + \phi_k} & \sigma_k^2 + a_k^2 s_{\theta_k + \phi_k}^2 + b_k^2 c_{\theta_k + \phi_k}^2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice est donnée par l'expression suivante.

$$\begin{aligned} d_k &= (a_k^2 c_{\theta_k + \phi_k}^2 + b_k^2 s_{\theta_k + \phi_k}^2 + \sigma_k^2)(a_k^2 s_{\theta_k + \phi_k}^2 + b_k^2 c_{\theta_k + \phi_k}^2 + \sigma_k^2) - (a_k^2 - b_k^2)^2 c_{\theta_k + \phi_k}^2 s_{\theta_k + \phi_k}^2 \\ &= a_k^2 b_k^2 (s_{\theta_k + \phi_k}^4 + c_{\theta_k + \phi_k}^4 + 2c_{\theta_k + \phi_k}^2 s_{\theta_k + \phi_k}^2) + \sigma_k^2 (a_k^2 + b_k^2) (c_{\theta_k + \phi_k}^2 + s_{\theta_k + \phi_k}^2) + \sigma_k^4 \\ &= a_k^2 b_k^2 (s_{\theta_k + \phi_k}^2 + c_{\theta_k + \phi_k}^2)^2 + \sigma_k^2 (a_k^2 + b_k^2) + \sigma_k^4 \\ &= a_k^2 b_k^2 + \sigma_k^2 (a_k^2 + b_k^2) + \sigma_k^4 \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{d_k = (a_k^2 + \sigma_k^2)(b_k^2 + \sigma_k^2)}. \quad (\text{B.18})$$

On en déduit l'expression de l'inverse de  $A$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{d_k} \begin{pmatrix} \sigma_k^2 + a_k^2 s_{\theta_k + \phi_k}^2 + b_k^2 c_{\theta_k + \phi_k}^2 & -(a_k^2 - b_k^2) c_{\theta_k + \phi_k} s_{\theta_k + \phi_k} \\ -(a_k^2 - b_k^2) c_{\theta_k + \phi_k} s_{\theta_k + \phi_k} & \sigma_k^2 + a_k^2 c_{\theta_k + \phi_k}^2 + b_k^2 s_{\theta_k + \phi_k}^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{d_k} \{ \sigma_k^2 \mathcal{I}_2 + M_k \}. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

en posant

$$M_k = \begin{pmatrix} a_k^2 s_{\theta_k + \phi_k}^2 + b_k^2 c_{\theta_k + \phi_k}^2 & -(a_k^2 - b_k^2) c_{\theta_k + \phi_k} s_{\theta_k + \phi_k} \\ -(a_k^2 - b_k^2) c_{\theta_k + \phi_k} s_{\theta_k + \phi_k} & a_k^2 c_{\theta_k + \phi_k}^2 + b_k^2 s_{\theta_k + \phi_k}^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.20})$$

On peut adopter plusieurs écritures pour la matrice  $M_k$ . Tout d'abord, elle s'exprime en fonction de la matrice de rotation d'angle  $\theta_k + \phi_k + \frac{\pi}{2}$

$$M_k = \mathcal{R}_{\theta_k + \phi_k + \frac{\pi}{2}}^* \text{Diag}(a_k^2, b_k^2) \mathcal{R}_{\theta_k + \phi_k + \frac{\pi}{2}}.$$

Une autre formulation peut être obtenue en considérant les vecteurs orthogonaux  $G_{\theta_k}$  et  $C_{\theta_k}$  :

$$M_k = a_k^2 \begin{pmatrix} s_{\theta_k + \phi_k}^2 & -c_{\theta_k + \phi_k} s_{\theta_k + \phi_k} \\ -c_{\theta_k + \phi_k} s_{\theta_k + \phi_k} & c_{\theta_k + \phi_k}^2 \end{pmatrix} + b_k^2 \begin{pmatrix} c_{\theta_k + \phi_k}^2 & c_{\theta_k + \phi_k} s_{\theta_k + \phi_k} \\ c_{\theta_k + \phi_k} s_{\theta_k + \phi_k} & s_{\theta_k + \phi_k}^2 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs  $G_{\theta_k}$  et  $C_{\theta_k}$  sont unitaires, ce qui donne

$$\boxed{M_k = a_k^2 C_{\theta_k} C_{\theta_k}^* + b_k^2 G_{\theta_k} G_{\theta_k}^*}. \quad (\text{B.21})$$

De cette écriture et de la relation d'orthogonalité entre  $G_{\theta_k}$  et  $C_{\theta_k}$ , on déduit de façon immédiate les propriétés suivantes

$$M_k C_{\theta_k} = a_k^2 C_{\theta_k} C_{\theta_k}^* C_{\theta_k} = a_k^2 \|C_{\theta_k}\|^2 C_{\theta_k}$$

soit

$$M_k C_{\theta_k} = a_k^2 C_{\theta_k}. \quad (\text{B.22})$$

De même, on montre directement

$$M_k G_{\theta_k} = b_k^2 G_{\theta_k} \quad (\text{B.23})$$

et  $M_k^* = M_k$ .

Considérons les autres composantes matricielles impliquées dans l'application du lemme d'inversion. Dans notre cas, la matrice  $B$  est une constante et vaut  $B = \sigma_\phi^2 + \sigma_{\theta_k}^2$  et les matrices  $C$  et  $D$  sont des vecteurs vérifiant  $D = C^* = \sigma_\phi b_k C_{\theta_k}$ .

La matrice  $\Delta$ . Dans le cas considéré ici  $\Delta$  est un nombre réel. Nous allons le préciser en utilisant l'expression de  $A^{-1}$  en fonction de la matrice  $M_k$ , que le vecteur  $C_{\theta_k}$  est unitaire et la relation dérivée précédemment à l'équation (B.22). On a donc

$$\begin{aligned}\Delta &= (\sigma_\phi^2 + \sigma_{\theta_k}^2) - \frac{\sigma_\phi^2 b_k^2}{d_k} C_{\theta_k}^* \{ \sigma_k^2 \mathcal{I}_2 + M_k \} C_{\theta_k} = (\sigma_\phi^2 + \sigma_{\theta_k}^2) - \frac{\sigma_\phi^2 b_k^2}{d_k} (\sigma_k^2 C_{\theta_k}^* C_{\theta_k} + C_{\theta_k}^* M_k C_{\theta_k}) \\ &= (\sigma_\phi^2 + \sigma_{\theta_k}^2) - \frac{\sigma_\phi^2 b_k^2}{d_k} (\sigma_k^2 \|C_{\theta_k}\|^2 + C_{\theta_k}^* a_k^2 C_{\theta_k}) = (\sigma_\phi^2 + \sigma_{\theta_k}^2) - \frac{\sigma_\phi^2 b_k^2}{d_k} (\sigma_k^2 \|C_{\theta_k}\|^2 + a_k^2 \|C_{\theta_k}\|^2) \\ &= (\sigma_\phi^2 + \sigma_{\theta_k}^2) - \frac{1 \sigma_\phi^2 b_k^2}{d_k} (\sigma_k^2 + a_k^2) \|C_{\theta_k}\|^2 = (\sigma_\phi^2 + \sigma_{\theta_k}^2) - \frac{\sigma_\phi^2 b_k^2}{d_k} (\sigma_k^2 + a_k^2) \\ &= (\sigma_\phi^2 + \sigma_{\theta_k}^2) - \frac{\sigma_\phi^2 b_k^2}{d_k} (\sigma_k^2 + a_k^2)\end{aligned}$$

En substituant  $d_k$  par son expression  $(a_k^2 + \sigma^2)(b_k^2 + \sigma^2)$  obtenue à l'équation (B.18), on arrive à la relation

$$\Delta = \frac{(\sigma_k^2 + b_k^2)\sigma_{\theta_k}^2 + \sigma_k^2 \sigma_\phi^2}{(\sigma_k^2 + b_k^2)} \quad (\text{B.24})$$

**Remarque.** La valeur obtenue est cohérente avec l'analyse du comportement du système lorsque l'on considère que les erreurs sur l'application des commandes sont nulles. En effet, dans cette configuration,  $b_k = \sigma_\phi = 0$ , et donc  $\Delta = \sigma_{\theta_k}^2$  qui se restreint uniquement à l'incertitude sur induite sur l'orientation par la modélisation adoptée.

La matrice  $A^{-1} + A^{-1}D\Delta^{-1}CA^{-1}$ . De même, nous utilisons les résultats démontrés précédemment.  $\Delta$  étant une constante, en substituant les matrices par leurs expressions respectives, on obtient

$$\begin{aligned}A^{-1} + A^{-1}D\Delta^{-1}CA^{-1} &= \frac{1}{d_k} \{ \sigma_k^2 \mathcal{I}_2 + M_k \} + \Delta^{-1} \frac{\sigma_\phi^2 b_k^2}{d_k} \{ \sigma_k^2 \mathcal{I}_2 + M_k \} C_{\theta_k} C_{\theta_k}^* \\ &\quad \frac{1}{d_k} \{ \sigma_k^2 \mathcal{I}_2 + M_k \} \\ &= \frac{1}{d_k} \{ \sigma_k^2 \mathcal{I}_2 + M_k \} + \frac{\sigma_\phi^2 b_k^2}{\Delta d_k^2} \{ \sigma_k^2 C_{\theta_k} C_{\theta_k}^* + M_k C_{\theta_k} C_{\theta_k}^* \} \{ \sigma_k^2 \mathcal{I}_2 + M_k \} \\ &= \frac{1}{d_k} \{ \sigma_k^2 \mathcal{I}_2 + M_k \} + \frac{\sigma_\phi^2 b_k^2 (\sigma_k^2 + a_k^2)}{\Delta d_k^2} C_{\theta_k} C_{\theta_k}^* \{ \sigma_k^2 \mathcal{I}_2 + M_k \} \\ &= \frac{1}{d_k} \{ \sigma_k^2 \mathcal{I}_2 + M_k \} + \frac{\sigma_\phi^2 b_k^2 (\sigma_k^2 + a_k^2)}{\Delta d_k^2} \{ \sigma_k^2 C_{\theta_k} C_{\theta_k}^* + C_{\theta_k} C_{\theta_k}^* M_k \} \\ &= \frac{1}{d_k} \{ \sigma_k^2 \mathcal{I}_2 + M_k \} + \frac{\sigma_\phi^2 b_k^2 (\sigma_k^2 + a_k^2)}{\Delta d_k^2} \{ \sigma_k^2 C_{\theta_k} C_{\theta_k}^* + C_{\theta_k} (M_k C_{\theta_k})^* \} \\ &= \frac{1}{d_k} \{ \sigma_k^2 \mathcal{I}_2 + M_k \} + \frac{\sigma_\phi^2 b_k^2 (\sigma_k^2 + a_k^2)^2}{\Delta d_k^2} C_{\theta_k} C_{\theta_k}^* \\ &= \frac{1}{d_k} \{ \sigma_k^2 \mathcal{I}_2 + M_k \} + \frac{\sigma_\phi^2 b_k^2}{\Delta (\sigma_k^2 + b_k^2)^2} C_{\theta_k} C_{\theta_k}^*\end{aligned}$$

en utilisant l'expression du déterminant donnée à l'équation (B.18). En outre, on a  $\Delta(\sigma_k^2 + b_k^2)^2 = (\sigma_k^2 + b_k^2)((\sigma_k^2 + b_k^2)\sigma_{\theta_k}^2 + \sigma_k^2 \sigma_\phi^2)$ . Il est alors possible d'écrire cette matrice en fonction des vecteurs orthogonaux  $C_{\theta_k}$  et  $G_{\theta_k}$  à partir de l'équation (B.21) précisant  $M_k$ .

$$A^{-1} + A^{-1}D\Delta^{-1}CA^{-1} = \alpha_k^{(0)} \mathcal{I}_2 + \alpha_k^{(1)} C_{\theta_k} C_{\theta_k}^* + \alpha_k^{(2)} G_{\theta_k} G_{\theta_k}^* \quad (\text{B.25})$$

Dans la suite, nous utiliserons la notation  $L_k$  pour cette matrice. Les coefficients  $\alpha_k^{(i)}$ ,  $i = 0, 1, 2$  sont définis au niveau de l'équation B.26

$$\begin{aligned}\alpha_k^{(0)} &= \frac{\sigma_k^2}{d_k} = \frac{\sigma_k^2}{(a_k^2 + \sigma_k^2)(b_k^2 + \sigma_k^2)}, \\ \alpha_k^{(1)} &= \frac{a_k^2}{(a_k^2 + \sigma_k^2)(b_k^2 + \sigma_k^2)} + \frac{b_k^2 \sigma_\phi^2}{(\sigma_k^2 + b_k^2)((\sigma_k^2 + b_k^2)\sigma_{\theta_k}^2 + \sigma_k^2 \sigma_\phi^2)}, \\ \alpha_k^{(2)} &= \frac{b_k^2}{d_k} = \frac{b_k^2}{(a_k^2 + \sigma_k^2)(b_k^2 + \sigma_k^2)}\end{aligned}\quad (\text{B.26})$$

**Remarque :** A nouveau, si nous supposons l'application des commandes exemptes d'erreur, c'est-à-dire que  $a_k = b_k = \sigma_\phi = 0$ , on a  $\alpha_k^{(1)} = \alpha_k^{(2)} = 0$  et  $\alpha_k^{(0)} = \sigma_k^{-2}$ . On retrouve bien l'inverse de la matrice covariance sur le modèle mais restreinte aux composantes de position.

La matrice  $-A^{-1}D\Delta^{-1}$ .

$$\begin{aligned}-A^{-1}D\Delta^{-1} &= -\frac{\sigma_\phi b_k}{d_k} \{ \sigma_k^2 \mathcal{I}_2 + M_k \} C_{\theta_k} \Delta^{-1} \\ &= -\frac{\sigma_\phi b_k}{\Delta d_k} \{ \sigma_k^2 C_{\theta_k} + M_k C_{\theta_k} \} \\ &= -\frac{\sigma_\phi b_k}{\Delta d_k} \{ \sigma_k^2 C_{\theta_k} + a_k^2 C_{\theta_k} \} \\ &= -\frac{\sigma_\phi b_k (\sigma_k^2 + a_k^2)}{\Delta d_k} C_{\theta_k}.\end{aligned}$$

En substituant les différentes quantités  $\Delta$  et  $d_k$  par leur expression respective, on déduit

$$-A^{-1}D\Delta^{-1} = -\frac{\sigma_\phi b_k}{(\sigma_k^2 + b_k^2)\sigma_{\theta_k}^2 + \sigma_k^2 \sigma_\phi^2} C_{\theta_k} := -\alpha_k^{(3)} C_{\theta_k}. \quad (\text{B.27})$$

La matrice  $-\Delta^{-1}CA^{-1}$ . Elle est obtenue par transposition de  $-A^{-1}D\Delta^{-1}$

$$-\Delta^{-1}CA^{-1} = -\alpha_k^{(3)} C_{\theta_k}^* \quad (\text{B.28})$$

### B.2.2 Calcul de $\text{tr}(Q_k^{-1}dQ_k/d\theta_k Q_k^{-1}dQ_k/d\theta_k)$

Dans la section précédente, nous avons montré que l'inverse de la matrice de covariance de l'équation de prédiction avait une écriture équivalente à

$$Q_k^{-1} = \begin{pmatrix} L_k & H_k \\ H_k^* & \alpha_k \end{pmatrix} \quad (\text{B.29})$$

avec l'expression des matrices blocs

$$\boxed{\begin{aligned}L_k &= \alpha_k^{(0)} \mathcal{I}_2 + \alpha_k^{(1)} C_{\theta_k} C_{\theta_k}^* + \alpha_k^{(2)} G_{\theta_k} G_{\theta_k}^*, & H_k &= -\alpha_k^{(3)} C_{\theta_k}, \\ \alpha_k &= \frac{(\sigma_k^2 + b_k^2)}{(\sigma_k^2 + b_k^2)\sigma_{\theta_k}^2 + \sigma_k^2 \sigma_\phi^2}, & \alpha_k^{(0)} &= \frac{\sigma_k^2}{(a_k^2 + \sigma_k^2)(b_k^2 + \sigma_k^2)}, \\ \alpha_k^{(1)} &= \frac{a_k^2}{(a_k^2 + \sigma_k^2)(b_k^2 + \sigma_k^2)} + \frac{b_k^2 \sigma_\phi^2}{(\sigma_k^2 + b_k^2)((\sigma_k^2 + b_k^2)\sigma_{\theta_k}^2 + \sigma_k^2 \sigma_\phi^2)}, \\ \alpha_k^{(2)} &= \frac{b_k^2}{(a_k^2 + \sigma_k^2)(b_k^2 + \sigma_k^2)}, & \alpha_k^{(3)} &= \frac{\sigma_\phi b_k}{(\sigma_k^2 + b_k^2)\sigma_{\theta_k}^2 + \sigma_k^2 \sigma_\phi^2}.\end{aligned}} \quad (\text{B.30})$$

On peut déduire plusieurs relation entre ces coefficients qui seront utilement exploitées par la suite.

$$\begin{aligned}
\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)} &= \frac{1}{\sigma_k^2 + a_k^2} \\
\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)} &= \frac{1}{\sigma_k^2 + b_k^2} + \frac{\sigma_\phi b_k}{\sigma_k^2 + b_k^2} \alpha_k^{(3)} \\
\alpha_k^{(2)} + \alpha_k^{(1)} &= \frac{q_k}{(\sigma_k^2 + b_k^2)(\sigma_k^2 + a_k^2)} - \frac{\sigma_\phi b_k}{\sigma_k^2 + b_k^2} \alpha_k^{(3)} \\
\sigma_\phi b_k \alpha_k &= (\sigma_k^2 + b_k^2) \alpha_k^{(3)}
\end{aligned} \tag{B.31}$$

On rappelle également que

$$\frac{dQ_k}{d\theta_k} = \begin{pmatrix} q_k N_k & \sigma_\phi b_k G_{\theta_k} \\ \sigma_\phi b_k G_{\theta_k}^* & 0 \end{pmatrix}$$

En appliquant les propriétés de calcul matriciel par blocs, l'expression de la trace devient

$$\begin{aligned}
\text{tr} \left( Q_k^{-1} \frac{dQ_k}{d\theta_k} Q_k^{-1} \frac{dQ_k}{d\theta_k} \right) &= \text{tr} \left( \left( q_k L_k N_k + \sigma_\phi b_k H_k G_{\theta_k}^* \right)^2 + (\sigma_\phi b_k L_k G_{\theta_k}) \left( H_k^* q_k N_k + \alpha_k \sigma_\phi b_k G_{\theta_k}^* \right) \right) \\
&\quad + \left( H_k^* q_k N_k + \alpha_k \sigma_\phi b_k G_{\theta_k}^* \right) (\sigma_\phi b_k L_k G_{\theta_k}) + \sigma_\phi^2 b_k^2 (H_k^* G_{\theta_k})^2 \\
&= \text{tr} \left( \left( q_k L_k N_k + \sigma_\phi b_k H_k G_{\theta_k}^* \right)^2 \right) + \text{tr} \left( (\sigma_\phi b_k L_k G_{\theta_k}) \left( q_k H_k^* N_k + \alpha_k \sigma_\phi b_k G_{\theta_k}^* \right) \right) \\
&\quad + \left( q_k H_k^* N_k + \alpha_k \sigma_\phi b_k G_{\theta_k}^* \right) (\sigma_\phi b_k L_k G_{\theta_k}) + \sigma_\phi^2 b_k^2 (H_k^* G_{\theta_k})^2
\end{aligned}$$

Nous avons montré que le vecteur  $H_k$  est colinéaire à  $C_{\theta_k}$ , il est donc orthogonal à  $G_{\theta_k}$ . De plus, en développant les produits, l'équation précédente est équivalente à

$$\begin{aligned}
\text{tr} \left( Q_k^{-1} \frac{dQ_k}{d\theta_k} Q_k^{-1} \frac{dQ_k}{d\theta_k} \right) &= \text{tr} \left( \left( q_k L_k N_k + \sigma_\phi b_k H_k G_{\theta_k}^* \right)^2 \right) + q_k \sigma_\phi b_k \text{tr} (L_k G_{\theta_k} H_k^* N_k) \\
&\quad + \alpha_k \sigma_\phi^2 b_k^2 \text{tr} (L_k G_{\theta_k} G_{\theta_k}^*) \\
&\quad + q_k \sigma_\phi b_k H_k^* N_k L_k G_{\theta_k} \\
&\quad + \alpha_k \sigma_\phi^2 b_k^2 G_{\theta_k}^* L_k G_{\theta_k}
\end{aligned} \tag{B.32}$$

Détaillons le calcul des termes impliqués dans cette relation.

### La matrice $L_k G_{\theta_k}$ .

Reprenons la formulation de  $L_k$  en fonction des vecteurs  $C_{\theta_k}$  et  $G_{\theta_k}$ . On a, en utilisant l'orthogonalité de ces deux vecteurs.

$$\begin{aligned}
L_k G_{\theta_k} &= \left( \alpha_k^{(0)} \mathcal{I}_2 + \alpha_k^{(1)} C_{\theta_k} C_{\theta_k}^* + \alpha_k^{(2)} G_{\theta_k} G_{\theta_k}^* \right) G_{\theta_k} \\
&= \alpha_k^{(0)} G_{\theta_k} + \alpha_k^{(2)} G_{\theta_k} \|G_{\theta_k}\|^2.
\end{aligned}$$

or  $\|G_{\theta_k}\|^2 = 1$ , ce qui amène

$$L_k G_{\theta_k} = (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}) G_{\theta_k}.$$

De même, on peut décliner la relation  $L_k C_{\theta_k} = (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)}) C_{\theta_k}$ . On peut déduire de ce résultat que

$$\text{tr} \left( L_k G_{\theta_k} G_{\theta_k}^* \right) = (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}) \text{tr} \left( G_{\theta_k} G_{\theta_k}^* \right) = (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}) \|G_{\theta_k}\|^2 = (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)})$$

et que

$$\underline{\underline{G_{\theta_k}^* L_k G_{\theta_k} = (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}) G_{\theta_k}^* G_{\theta_k} = (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}) \|G_{\theta_k}\|^2 = (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}) .}}$$

Avec en plus la relation  $N_k G_{\theta_k} = C_{\theta_k}$ , il est alors possible de déduire l'expression du terme  $H_k^* N_k L_k G_{\theta_k}$

$$\begin{aligned} H_k^* N_k L_k G_{\theta_k} &= (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}) H_k^* N_k G_{\theta_k} \\ &= (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}) H_k^* C_{\theta_k} \\ &= -\alpha_k^{(3)} (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}) \|C_{\theta_k}\|^2 \\ &= -\alpha_k^{(3)} (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}) \end{aligned}$$

Ce qui donne en définitive

$$\boxed{H_k^* N_k L_k G_{\theta_k} = -\alpha_k^{(3)} (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)})}. \quad (\text{B.33})$$

Le terme  $\text{tr}(L_k G_{\theta_k} H_k^* N_k)$  équivaut à  $(\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}) \text{tr}(G_{\theta_k} H_k^* N_k)$ . En utilisant les propriétés de l'opérateur trace, il vient

$$\text{tr}(G_{\theta_k} H_k^* N_k) = \text{tr}(N_k G_{\theta_k} H_k^*) = \text{tr}(C_{\theta_k} H_k^*) = H_k^* C_{\theta_k} = -\alpha_k^{(3)} C_{\theta_k}^* C_{\theta_k}.$$

On se ramène au calcul du terme B.33 et donc

$$\boxed{\text{tr}(L_k G_{\theta_k} H_k^* N_k) = -\alpha_k^{(3)} (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)})}. \quad (\text{B.34})$$

Il reste à déterminer le terme  $\text{tr}\left(\left(q_k L_k N_k + \sigma_\phi b_k H_k G_{\theta_k}^*\right)^2\right)$  qui se décompose en trois parties  $q_k^2 \text{tr}\left((L_k N_k)^2\right)$ ,  $2q_k \sigma_\phi b_k \text{tr}\left(L_k N_k H_k G_{\theta_k}^*\right)$  et  $\sigma_\phi^2 b_k^2 \text{tr}\left(H_k G_{\theta_k}^* H_k G_{\theta_k}^*\right)$ . La dernière composante proportionnelle à  $\text{tr}\left(H_k G_{\theta_k}^* H_k G_{\theta_k}^*\right)$  fait apparaître le produit scalaire  $H_k^* G_{\theta_k}$ . Or  $H_k$  et  $G_{\theta_k}$  sont orthogonaux, on en déduit donc

$$\boxed{\text{tr}\left(H_k G_{\theta_k}^* H_k G_{\theta_k}^*\right) = 0}. \quad (\text{B.35})$$

Pour le terme intermédiaire, en utilisant l'expression de  $H_k$  et la relation  $N_k C_{\theta_k} = G_{\theta_k}$ , il peut être décliné comme suit

$$\begin{aligned} \text{tr}\left(L_k N_k H_k G_{\theta_k}^*\right) &= -\alpha_k^{(3)} \text{tr}\left(L_k N_k C_{\theta_k} G_{\theta_k}^*\right) \\ &= -\alpha_k^{(3)} \text{tr}\left(L_k G_{\theta_k} G_{\theta_k}^*\right). \end{aligned}$$

En utilisant le calcul de  $\text{tr}\left(G_{\theta_k} G_{\theta_k}^*\right)$  présenté plus haut, on a

$$\Leftrightarrow \boxed{\text{tr}\left(L_k N_k H_k G_{\theta_k}^*\right) = -\alpha_k^{(3)} (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)})}. \quad (\text{B.36})$$

Enfin, intéressons-nous au terme  $\text{tr}(L_k N_k L_k N_k) = \text{tr}(N_k L_k N_k L_k)$ . On utilise ici la propriété de commutativité de la trace et l'expression de  $L_k$  fonction des vecteurs  $C_{\theta_k}$ ,  $G_{\theta_k}$  et de la matrice identité  $\mathcal{I}_2$ . On a d'abord

$$\begin{aligned} N_k L_k &= N_k \left( \alpha_k^{(0)} \mathcal{I}_2 + \alpha_k^{(1)} C_{\theta_k} C_{\theta_k}^* + \alpha_k^{(2)} G_{\theta_k} G_{\theta_k}^* \right) \\ &= \alpha_k^{(0)} N_k + \alpha_k^{(1)} N_k C_{\theta_k} C_{\theta_k}^* + \alpha_k^{(2)} N_k G_{\theta_k} G_{\theta_k}^* \\ &= \alpha_k^{(0)} N_k + \alpha_k^{(1)} G_{\theta_k} C_{\theta_k}^* + \alpha_k^{(2)} C_{\theta_k} G_{\theta_k}^* \\ &= (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)}) G_{\theta_k} C_{\theta_k}^* + (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}) C_{\theta_k} G_{\theta_k}^* \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

d'où

$$\begin{aligned}
N_k L_k N_k L_k &= \left( (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)}) G_{\theta_k} C_{\theta_k}^* + (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}) C_{\theta_k} G_{\theta_k}^* \right) \\
&\quad \left( (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)}) G_{\theta_k} C_{\theta_k}^* + (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}) C_{\theta_k} G_{\theta_k}^* \right) \\
&= (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)})^2 G_{\theta_k} C_{\theta_k}^* G_{\theta_k} C_{\theta_k}^* + (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)})(\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)})(G_{\theta_k} C_{\theta_k}^* C_{\theta_k} G_{\theta_k}^* \\
&\quad + C_{\theta_k} G_{\theta_k}^* G_{\theta_k} C_{\theta_k}^*) + (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)})^2 G_{\theta_k} C_{\theta_k}^* C_{\theta_k} G_{\theta_k}^*
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que les vecteurs  $G_{\theta_k}$  sont unitaires et orthogonaux, cela permet de déduire

$$\begin{aligned}
N_k L_k N_k L_k &= (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)})^2 G_{\theta_k}^0 C_{\theta_k}^* + (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)})(\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)})(G_{\theta_k}^1 G_{\theta_k}^* + C_{\theta_k}^1 C_{\theta_k}^*) \\
&\quad + (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)})^2 G_{\theta_k}^0 G_{\theta_k}^* \\
&= (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)})(\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)})(G_{\theta_k} G_{\theta_k}^* + C_{\theta_k} C_{\theta_k}^*).
\end{aligned}$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned}
\text{tr}(N_k L_k N_k L_k) &= (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)})(\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}) \text{tr}(G_{\theta_k} G_{\theta_k}^* + C_{\theta_k} C_{\theta_k}^*) \\
&= (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)})(\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}) \text{tr}(G_{\theta_k} G_{\theta_k}^*) + \text{tr}(C_{\theta_k} C_{\theta_k}^*) \\
&= (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)})(\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)})(\|G_{\theta_k}\|^2 + \|C_{\theta_k}\|^2).
\end{aligned} \tag{B.38}$$

On obtient donc l'expression suivante

$$\boxed{\text{tr}(N_k L_k N_k L_k) = 2(\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)})(\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)})}. \tag{B.39}$$

Au final, l'expression de la trace recherchée est une fonctionnelle qui dépend des paramètres d'incertitudes sur les commandes et sur le modèle de dynamique et aussi des commandes appliquées à l'instant  $k$ .

$$\begin{aligned}
\text{tr} \left( Q_k^{-1} \frac{dQ_k}{d\theta_k} Q_k^{-1} \frac{dQ_k}{d\theta_k} \right) &= 2q_k^2 (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)})(\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}) \\
&\quad 2 \left( \alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)} \right) \sigma_\phi b_k \left( \alpha_k \sigma_\phi b_k - 2q_k \alpha_k^{(3)} \right)
\end{aligned}$$

Nous pouvons encore simplifier cette expression en remarquant à partir des relations précisées à l'équation (B.31)

$$\alpha_k \sigma_\phi b_k - 2q_k \alpha_k^{(3)} = (\sigma_k^2 + b_k^2) \alpha_k^{(3)} - 2q_k \alpha_k^{(3)} = (\sigma_k^2 + b_k^2 - 2q_k) \alpha_k^{(3)}.$$

On en déduit donc l'expression en fonction des paramètres  $b_k$ ,  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\phi$  et  $\alpha_k^{(i)}$   $i = 0, 1, 2, 3$

$$\boxed{g_k^1 = \text{tr} \left( Q_k^{-1} \frac{dQ_k}{d\theta_k} Q_k^{-1} \frac{dQ_k}{d\theta_k} \right) = 2 \left( \alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)} \right) \left( q_k^2 (\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)}) + \sigma_\phi b_k (\sigma_k^2 + b_k^2 - 2q_k) \alpha_k^{(3)} \right)} \tag{B.40}$$

On peut obtenir une expression qui ne dépend que des paramètres  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\phi$  et  $\alpha_k^{(3)}$ . En effet, reprenons les relations déduites à l'équation (B.31) et substituons les termes  $\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)}$  et  $\alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)}$  dans l'équation précédente. On a,

$$\begin{aligned}
 g_k^1 &= 2 \frac{1}{\sigma_k^2 + a_k^2} \left( q_k^2 \left( \frac{1}{\sigma_k^2 + b_k^2} + \frac{\sigma_\phi b_k}{\sigma_k^2 + b_k^2} \alpha_k^{(3)} \right) + \sigma_\phi b_k (\sigma_k^2 + b_k^2 - 2q_k) \alpha_k^{(3)} \right) \\
 &= 2 \frac{1}{\sigma_k^2 + a_k^2} \left( \frac{q_k^2}{\sigma_k^2 + b_k^2} + \frac{q_k^2 + (\sigma_k^2 + b_k^2)(\sigma_k^2 + b_k^2 - 2q_k)}{\sigma_k^2 + b_k^2} \sigma_\phi b_k \alpha_k^{(3)} \right) \\
 &= 2 \frac{1}{(\sigma_k^2 + a_k^2)(\sigma_k^2 + b_k^2)} \left( q_k^2 + (q_k^2 + (\sigma_k^2 + b_k^2)(\sigma_k^2 + b_k^2 - 2q_k)) \sigma_\phi b_k \alpha_k^{(3)} \right) \\
 &= 2 \frac{1}{(\sigma_k^2 + a_k^2)(\sigma_k^2 + b_k^2)} \left( q_k^2 + (q_k^2 + (\sigma_k^2 + b_k^2)^2 - 2q_k(\sigma_k^2 + b_k^2)) \sigma_\phi b_k \alpha_k^{(3)} \right) \\
 &= 2 \frac{1}{(\sigma_k^2 + a_k^2)(\sigma_k^2 + b_k^2)} \left( q_k^2 + (q_k - (\sigma_k^2 + b_k^2))^2 \sigma_\phi b_k \alpha_k^{(3)} \right)
 \end{aligned}$$

En remplaçant  $q_k$  par son expression  $b_k^2 - a_k^2$ , on arrive à l'expression suivante

$$\boxed{g_k^1 = 2 \frac{(b_k^2 - a_k^2)^2 + (\sigma_k^2 + a_k^2)^2 \sigma_\phi b_k \alpha_k^{(3)}}{(\sigma_k^2 + a_k^2)(\sigma_k^2 + b_k^2)}} \quad (\text{B.41})$$

### B.3 Eléments pour le calcul de $D_k^{22}$

Considérons un amer  $f_l$  et supposons le mobile dans l'état  $X_{k+1}$  à l'instant  $t_{k+1}$ . La variance sur la mesure de distance associée issue de  $f_l$  dans le cas du modèle  $M_1$  est

$$\sigma_{d_{k+1,l}} = \sigma_d d(X_{k+1}, f_l)^\gamma, \quad \gamma \geq 1.$$

Nous devons préciser les dérivées de l'écart-type et de la variance par rapport aux variables de position et d'angle.

#### Dérivées de $\sigma_{d_{k+1,l}}$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{d_{k+1,l}}}{\partial x_{k+1}} &= \sigma_d \frac{\partial ((x_{k+1} - x_l)^2 + (x_{k+1} - x_l)^2)^{\frac{\gamma}{2}}}{\partial x_{k+1}} \\
 &= \gamma (x_{k+1} - x_l) \sigma_d ((x_{k+1} - x_l)^2 + (x_{k+1} - x_l)^2)^{\frac{\gamma}{2}-1} \\
 &= \gamma \frac{(x_{k+1} - x_l)}{((x_{k+1} - x_l)^2 + (x_{k+1} - x_l)^2)} \sigma_d ((x_{k+1} - x_l)^2 + (x_{k+1} - x_l)^2)^{\frac{\gamma}{2}}
 \end{aligned}$$

On reconnaît la composante suivant l'axe des abscisses du vecteur formé par le mobile et l'amer. En utilisant la notation  $\Delta x_{k+1}^l = x_l - x_{k+1}$ , on en déduit par substitution

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{d_{k+1,l}}}{\partial x_{k+1}} &= -\gamma \frac{\Delta x_{k+1}^l}{\rho_{i_l}^{k+1,2}} \sigma_d ((x_{k+1} - x_l)^2 + (x_{k+1} - x_l)^2)^{\frac{\gamma}{2}} \\
 &= -\gamma \frac{\Delta x_{k+1}^l}{\rho_{i_l}^{k+1,2}} \sigma_{d_{k+1,l}}
 \end{aligned}$$

De même, on a pour la composante  $y_{k+1}$

$$\frac{\partial \sigma_{d_{k+1,l}}}{\partial y_{k+1}} = -\gamma \frac{\Delta y_{k+1}^l}{\rho_{i_l}^{k+1,2}} \sigma_{d_{k+1,l}}.$$

On peut maintenant déduire les dérivées partielles du second ordre. On a, pour la composante

$x_{k+1}$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \sigma_{d_{k+1},l}}{\partial^2 x_{k+1}} &= -\gamma \left( -\frac{1}{\rho_{i_l}^{k+1,2}} \sigma_{d_{k+1},l} + 2 \frac{\Delta x_{k+1}^l \Delta x_{k+1}^l}{\rho_{i_l}^{k+1,4}} \sigma_{d_{k+1},l} - \gamma \frac{\Delta x_{k+1}^l}{\rho_{i_l}^{k+1,2}} \frac{\Delta x_{k+1}^l}{\rho_{i_l}^{k+1,2}} \sigma_{d_{k+1},l} \right) \\ &= \frac{\gamma}{\rho_{i_l}^{k+1,2}} \left( 1 + (\gamma - 2) \frac{\Delta x_{k+1}^l}{\rho_{i_l}^{k+1,2}} \right) \sigma_{d_{k+1},l}\end{aligned}$$

et de même

$$\frac{\partial^2 \sigma_{d_{k+1},l}}{\partial^2 y_{k+1}} = \frac{\gamma}{\rho_{i_l}^{k+1,2}} \left( 1 + (\gamma - 2) \frac{\Delta y_{k+1}^l}{\rho_{i_l}^{k+1,2}} \right) \sigma_{d_{k+1},l}.$$

Pour la dérivée croisée, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \sigma_{d_{k+1},l}}{\partial y_{k+1} \partial x_{k+1}} &= -\gamma \left( 2 \frac{\Delta x_{k+1}^l \Delta y_{k+1}^l}{\rho_{i_l}^{k+1,4}} \sigma_{d_{k+1},l} - \gamma \frac{\Delta x_{k+1}^l}{\rho_{i_l}^{k+1,2}} \frac{\Delta y_{k+1}^l}{\rho_{i_l}^{k+1,2}} \sigma_{d_{k+1},l} \right) \\ &= \frac{\gamma}{\rho_{i_l}^{k+1,2}} (\gamma - 2) \frac{\Delta x_{k+1}^l}{\rho_{i_l}^{k+1,2}} \frac{\Delta y_{k+1}^l}{\rho_{i_l}^{k+1,2}} \sigma_{d_{k+1},l}.\end{aligned}$$

**Dérivées de  $\sigma_{d_{k+1},l}^2$**

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{d_{k+1},l}^2}{\partial x_{k+1}} &= \sigma_d^2 \frac{\partial \left( (x_{k+1} - x_l)^2 + (x_{k+1} - x_l)^2 \right)^\gamma}{\partial x_{k+1}} \\ &= 2\gamma (x_{k+1} - x_l) \sigma_d^2 \left( (x_{k+1} - x_l)^2 + (x_{k+1} - x_l)^2 \right)^{\gamma-1} \\ &= 2\gamma \frac{(x_{k+1} - x_l)}{\left( (x_{k+1} - x_l)^2 + (x_{k+1} - x_l)^2 \right)} \sigma_d^2 \left( (x_{k+1} - x_l)^2 + (x_{k+1} - x_l)^2 \right)^\gamma\end{aligned}$$

En utilisant la notation  $\Delta x_{k+1}^l = x_l - x_{k+1}$ , on en déduit

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{d_{k+1},l}^2}{\partial x_{k+1}} &= -2\gamma \frac{\Delta x_{k+1}^l}{\rho_{i_l}^{k+1,2}} \sigma_d^2 \left( (x_{k+1} - x_l)^2 + (x_{k+1} - x_l)^2 \right)^\gamma \\ &= -2\gamma \frac{\Delta x_{k+1}^l}{\rho_{i_l}^{k+1,2}} \sigma_{d_{k+1},l}^2\end{aligned}$$

De même, on a pour la composante  $y_{k+1}$

$$\frac{\partial \sigma_{d_{k+1},l}^2}{\partial y_{k+1}} = -2\gamma \frac{\Delta y_{k+1}^l}{\rho_{i_l}^{k+1,2}} \sigma_{d_{k+1},l}^2.$$

## Annexe C

# Détails du calcul de $\mathcal{J}_1$ , $\mathcal{J}_2$ et $\mathcal{J}_3$

La détermination des coûts  $\mathcal{J}_1$ ,  $\mathcal{J}_2$  et  $\mathcal{J}_3$  nécessite de déterminer les primitives de fractions rationnelles de la forme Le calcul des différents termes nécessite donc la détermination d'intégrales de la forme : ( $n \in \{1, 2, 3\}$ ,  $l \in \{i, j, k\}$ ) :

$$H^{(n)}(l, u, v, x_-, x_+) = \int_{x_-}^{x_+} \frac{ux + v}{(a_l x^2 + b_l x + c_l)^n} dx \quad (\text{C.1})$$

### C.1 Intégration

Pour déterminer ces grandeurs, on exploite la propriété d'intégration par parties et les primitives suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{ax^2 + bx + c} &= \frac{2}{\sqrt{D}} \left( \arctan \left( \frac{2ax_+ + b}{\sqrt{D}} \right) - \arctan \left( \frac{2ax_- + b}{\sqrt{D}} \right) \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{D}} \arctan \frac{2\sqrt{D}a(x_+ - x_-)}{D + (2ax_+ + b)(2ax_- + b)} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

en utilisant la propriété remarquable  $\arctan \alpha - \arctan \beta = \arctan \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}$

$$\begin{aligned} \forall n, \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{n+1}} &= \frac{1}{nD} \left( \frac{2ax_+ + b}{(ax_+^2 + bx_+ + c)^n} - \frac{2ax_- + b}{(ax_-^2 + bx_- + c)^n} \right) \\ &\quad + \frac{2(2n-1)a}{nD} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

$$\int_{x_-}^{x_+} \frac{x dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{2a} \ln \left( \frac{ax_+^2 + bx_+ + c}{ax_-^2 + bx_- + c} \right) - \frac{b}{2a} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \quad (\text{C.4})$$

et

$$\begin{aligned} \forall n, \int_{x_-}^{x_+} \frac{x dx}{(ax^2 + bx + c)^{n+1}} &= \frac{-1}{nD} \left( \frac{2c + bx_+}{(ax_+^2 + bx_+ + c)^n} - \frac{2c + bx_-}{(ax_-^2 + bx_- + c)^n} \right) \\ &\quad - \frac{b(2n-1)}{nD} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

avec  $D = 4ac - b^2$ .

**Pour n=1** On obtient en s'appuyant sur les propriétés précédentes, en notant  $D_l = 4a_l c_l - b_l^2$

$$\begin{aligned}
H^{(1)}(l, u, v, x_-, x_+) &= u \int_{x_-}^{x_+} \frac{x \, dx}{a_l x^2 + b_l x + c_l} + v \int_{x_-}^{x_+} \frac{1}{a_l x^2 + b_l x + c_l} dx \\
&= \frac{u}{2a_l} \ln \left( \frac{a_l x_+^2 + b_l x_+ + c_l}{a_l x_-^2 + b_l x_- + c_l} \right) + \left( v - \frac{b_l u}{2a_l} \right) \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{a_l x^2 + b_l x + c_l} \\
&= \frac{u}{2a_l} \ln \left( \frac{p_l(x_+)}{p_l(x_-)} \right) + \frac{2}{\sqrt{D_l}} \left( v - \frac{b_l u}{2a_l} \right) \arctan \frac{2\sqrt{D_l} a_l (x_+ - x_-)}{D_l + (2a_l x_+ + b_l)(2a_l x_- + b_l)} \\
&= \frac{u}{2a_l} \ln \left( \frac{p_l(x_+)}{p_l(x_-)} \right) \\
&\quad + \frac{2a_l v - b_l u}{a_l \sqrt{D_l}} \arctan \frac{2\sqrt{D_l} a_l (x_+ - x_-)}{D_l + (2a_l x_+ + b_l)(2a_l x_- + b_l)}
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Ce qui équivaut à

$$H^{(1)}(l, u, v, x_-, x_+) = \nu_l^{(1)} \ln \left( \frac{p_l(x_+)}{p_l(x_-)} \right) + \mu_l^{(1)} \arctan \frac{2\sqrt{D_l} a_l (x_+ - x_-)}{D_l + (2a_l x_+ + b_l)(2a_l x_- + b_l)}. \tag{C.7}$$

avec  $\nu_l^{(1)} := \frac{u}{2a_l}$  et  $\mu_l^{(1)} := \frac{2a_l v - b_l u}{a_l \sqrt{D_l}}$ .

**Pour n=2** On a

$$\begin{aligned}
H^{(2)}(l, u, v, x_-, x_+) &= u \int_{x_-}^{x_+} \frac{x \, dx}{(a_l x^2 + b_l x + c_l)^2} + v \int_{x_-}^{x_+} \frac{1}{(a_l x^2 + b_l x + c_l)^2} dx \\
&= \frac{-u}{D_l} \left( \frac{2c_l + b_l x_+}{p_l(x_+)} - \frac{2c_l + b_l x_-}{p_l(x_-)} \right) - \frac{u b_l}{D_l} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{(a_l x^2 + b_l x + c_l)} \\
&\quad + v \int_{x_-}^{x_+} \frac{1}{(a_l x^2 + b_l x + c_l)^2} dx \\
&= \frac{-u}{D_l} \left( \frac{2c_l + b_l x_+}{p_l(x_+)} - \frac{2c_l + b_l x_-}{p_l(x_-)} \right) \\
&\quad - \frac{2u b_l}{D_l^{\frac{3}{2}}} \arctan \frac{2\sqrt{D_l} a_l (x_+ - x_-)}{D_l + (2a_l x_+ + b_l)(2a_l x_- + b_l)} + v \int_{x_-}^{x_+} \frac{1}{(a_l x^2 + b_l x + c_l)^2} dx
\end{aligned} \tag{C.8}$$

or

$$\begin{aligned}
\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{(a_l x^2 + b_l x + c_l)^2} &= \frac{1}{D_l} \left( \frac{2a_l x_+ + b_l}{(a_l x_+^2 + b_l x_+ + c_l)} - \frac{2a_l x_- + b_l}{(a_l x_-^2 + b_l x_- + c_l)} \right) \\
&\quad + \frac{2a_l}{D_l} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{(a_l x^2 + b_l x + c_l)} \\
&= \frac{1}{D_l} \left( \frac{2a_l x_+ + b_l}{(a_l x_+^2 + b_l x_+ + c_l)} - \frac{2a_l x_- + b_l}{(a_l x_-^2 + b_l x_- + c_l)} \right) \\
&\quad + \frac{4a_l}{D_l^{\frac{3}{2}}} \arctan \frac{2\sqrt{D_l} a_l (x_+ - x_-)}{D_l + (2a_l x_+ + b_l)(2a_l x_- + b_l)} \\
&= \frac{1}{D_l} \left( \frac{2a_l x_+ + b_l}{p_l(x_+)} - \frac{2a_l x_- + b_l}{p_l(x_-)} \right) \\
&\quad + \frac{4a_l}{D_l^{\frac{3}{2}}} \arctan \frac{2\sqrt{D_l} a_l (x_+ - x_-)}{D_l + (2a_l x_+ + b_l)(2a_l x_- + b_l)}
\end{aligned} \tag{C.9}$$

on en déduit donc

$$\begin{aligned}
H^{(2)}(l, u, v, x_-, x_+) &= \frac{-u}{D_l} \left( \frac{2c_l + b_l x_+}{p_l(x_+)} - \frac{2c_l + b_l x_-}{p_l(x_-)} \right) \\
&\quad - \frac{2u b_l}{D_l^{\frac{3}{2}}} \arctan \frac{2\sqrt{D_l} a_l (x_+ - x_-)}{D_l + (2a_l x_+ + b_l)(2a_l x_- + b_l)} \\
&\quad + v \frac{1}{D_l} \left( \frac{2a_l x_+ + b_l}{p_l(x_+)} - \frac{2a_l x_- + b_l}{p_l(x_-)} \right) \\
&\quad + v \left( \frac{4a_l}{D_l^{\frac{3}{2}}} \arctan \frac{2\sqrt{D_l} a_l (x_+ - x_-)}{D_l + (2a_l x_+ + b_l)(2a_l x_- + b_l)} \right) \\
&= \frac{1}{D_l} \left( \frac{(2a_l v - b_l u)x_+ + (b_l v - 2u c_l)}{p_l(x_+)} - \frac{(2a_l v - b_l u)x_- + (b_l v - 2u c_l)}{p_l(x_-)} \right) \\
&\quad + \frac{2(2a_l v - b_l u)}{D_l^{\frac{3}{2}}} \arctan \frac{2\sqrt{D_l} a_l (x_+ - x_-)}{D_l + (2a_l x_+ + b_l)(2a_l x_- + b_l)} \\
&= \frac{1}{D_l} \left( \frac{\nu_l^{(2,1)} x_+ + \nu_l^{(2,2)}}{p_l(x_+)} - \frac{\nu_l^{(2,1)} x_- + \nu_l^{(2,2)}}{p_l(x_-)} \right) \\
&\quad + \mu_l^{(2)} \arctan \frac{2\sqrt{D_l} a_l (x_+ - x_-)}{D_l + (2a_l x_+ + b_l)(2a_l x_- + b_l)}
\end{aligned} \tag{C.10}$$

avec  $\nu_l^{(2,1)} = (2a_l v - b_l u)$ ,  $\nu_l^{(2,2)} = (b_l v - 2u c_l)$  et  $\mu_l^{(2)} = \frac{2\nu_l^{(2,1)}}{D_l^{\frac{3}{2}}}$ .

**Pour n=3** On a

$$H^{(3)}(l, u, v, x_-, x_+) = u \int_{x_-}^{x_+} \frac{x \, dx}{(a_l x^2 + b_l x + c_l)^3} + v \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{(a_l x^2 + b_l x + c_l)^3} \tag{C.11}$$

Le premier terme se décompose comme suit en utilisant également C.9 :

$$\begin{aligned}
\int_{x_-}^{x_+} \frac{x \, dx}{(a_l x^2 + b_l x + c_l)^3} &= \frac{-1}{2D_l} \left( \frac{2c_l + b_l x_+}{p_l^2(x_+)} - \frac{2c_l + b_l x_-}{p_l^2(x_-)} \right) \\
&\quad - \frac{3b_l}{2D_l} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{(a_l x^2 + b_l x + c_l)^2} \\
&= \frac{-1}{2D_l} \left( \frac{2c_l + b_l x_+}{p_l^2(x_+)} - \frac{2c_l + b_l x_-}{p_l^2(x_-)} \right) \\
&\quad - \frac{3b_l}{2D_l^2} \left( \frac{2a_l x_+ + b_l}{p_l(x_+)} - \frac{2a_l x_- + b_l}{p_l(x_-)} \right) \\
&\quad - \frac{3b_l}{2D_l} \left( \frac{4a_l}{D_l^{\frac{3}{2}}} \arctan \frac{2\sqrt{D_l} a_l (x_+ - x_-)}{D_l + (2a_l x_+ + b_l)(2a_l x_- + b_l)} \right) \\
&= \frac{-1}{2D_l} \left( \frac{2c_l + b_l x_+}{p_l^2(x_+)} - \frac{2c_l + b_l x_-}{p_l^2(x_-)} \right) \\
&\quad - \frac{3b_l}{2D_l^2} \left( \frac{2a_l x_+ + b_l}{p_l(x_+)} - \frac{2a_l x_- + b_l}{p_l(x_-)} \right) \\
&\quad - \frac{6b_l a_l}{D_l^{\frac{5}{2}}} \arctan \frac{2\sqrt{D_l} a_l (x_+ - x_-)}{D_l + (2a_l x_+ + b_l)(2a_l x_- + b_l)}
\end{aligned} \tag{C.12}$$

Le second terme se déduit également à partir de C.9

$$\begin{aligned}
\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{(a_l x^2 + b_l x + c_l)^3} &= \frac{1}{2 D_l} \left( \frac{2 a_l x_+ + b_l}{p_l^2(x_+)} - \frac{2 a_l x_- + b_l}{p_l^2(x_-)} \right) + \frac{3 a_l}{D_l} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{(a_l x^2 + b_l x + c_l)^2} \\
&= \frac{1}{2 D_l} \left( \frac{2 a_l x_+ + b_l}{p_l^2(x_+)} - \frac{2 a_l x_- + b_l}{p_l^2(x_-)} \right) + \frac{3 a_l}{D_l^2} \left( \frac{2 a_l x_+ + b_l}{p_l(x_+)} - \frac{2 a_l x_- + b_l}{p_l(x_-)} \right) \\
&\quad + \frac{12 a_l^2}{D_l^{\frac{5}{2}}} \arctan \frac{2\sqrt{D_l} a_l (x_+ - x_-)}{D_l + (2a_l x_+ + b_l)(2a_l x_- + b_l)}
\end{aligned} \tag{C.13}$$

Ce qui donne au final

$$\begin{aligned}
H^{(3)}(l, u, v, x_-, x_+) &= \frac{1}{2 D_l} \left( \frac{\nu_l^{(2,1)} x_+ + \nu_l^{(2,2)}}{p_l^2(x_+)} - \frac{\nu_l^{(2,1)} x_- + \nu_l^{(2,2)}}{p_l^2(x_-)} \right) \\
&\quad + \frac{3 \nu_l^{(2,1)}}{2 d_l^2} \left( \frac{2 a_l x_+ + b_l}{p_l(x_+)} - \frac{2 a_l x_- + b_l}{p_l(x_-)} \right) \\
&\quad + \frac{3 a_l \mu_l^{(2)}}{D_l} \arctan \frac{2\sqrt{D_l} a_l (x_+ - x_-)}{D_l + (2a_l x_+ + b_l)(2a_l x_- + b_l)}
\end{aligned} \tag{C.14}$$

**Pour n=4** On a

$$H^{(4)}(l, u, v, x_-, x_+) = u \int_{x_-}^{x_+} \frac{x dx}{(a_l x^2 + b_l x + c_l)^4} + v \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{(a_l x^2 + b_l x + c_l)^4} \tag{C.15}$$

par intégration par partie et en utilisant C.13

$$\begin{aligned}
\int_{x_-}^{x_+} \frac{x dx}{(a_l x^2 + b_l x + c_l)^4} &= \frac{-1}{3 D_l} \left( \frac{2 c_l + b_l x_+}{p_l^3(x_+)} - \frac{2 c_l + b_l x_-}{p_l^3(x_-)} \right) - \frac{5 b_l}{3 D_l} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{(a_l x^2 + b_l x + c_l)^3} \\
&= \frac{-1}{3 D_l} \left( \frac{2 c_l + b_l x_+}{p_l^3(x_+)} - \frac{2 c_l + b_l x_-}{p_l^3(x_-)} \right) \\
&\quad - \frac{5 b_l}{6 D_l^2} \left( \frac{2 a_l x_+ + b_l}{p_l^2(x_+)} - \frac{2 a_l x_- + b_l}{p_l^2(x_-)} \right) \\
&\quad - \frac{5 b_l a_l}{D_l^3} \left( \frac{2 a_l x_+ + b_l}{p_l(x_+)} - \frac{2 a_l x_- + b_l}{p_l(x_-)} \right) \\
&\quad - \frac{20 b_l a_l^2}{D_l^{\frac{7}{2}}} \arctan \frac{2\sqrt{D_l} a_l (x_+ - x_-)}{D_l + (2a_l x_+ + b_l)(2a_l x_- + b_l)}
\end{aligned} \tag{C.16}$$

de même,

$$\begin{aligned}
\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{(a_l x^2 + b_l x + c_l)^4} &= \frac{1}{3 D_l} \left( \frac{2 a_l x_+ + b_l}{p_l^3(x_+)} - \frac{2 a_l x_- + b_l}{p_l^3(x_-)} \right) + \frac{10 a_l}{3 D_l} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{(a_l x^2 + b_l x + c_l)^3} \\
&= \frac{1}{3 D_l} \left( \frac{2 a_l x_+ + b_l}{p_l^3(x_+)} - \frac{2 a_l x_- + b_l}{p_l^3(x_-)} \right) + \frac{5 a_l}{3 D_l^2} \left( \frac{2 a_l x_+ + b_l}{p_l^2(x_+)} - \frac{2 a_l x_- + b_l}{p_l^2(x_-)} \right) \\
&\quad + \frac{10 a_l^2}{D_l^3} \left( \frac{2 a_l x_+ + b_l}{p_l(x_+)} - \frac{2 a_l x_- + b_l}{p_l(x_-)} \right) \\
&\quad + \frac{40 a_l^3}{D_l^{\frac{7}{2}}} \arctan \frac{2\sqrt{D_l} a_l (x_+ - x_-)}{D_l + (2a_l x_+ + b_l)(2a_l x_- + b_l)}
\end{aligned} \tag{C.17}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
H^{(4)}(l, u, v, x_-, x_+) &= \frac{1}{3 D_l} \left( \frac{\nu_l^{(2,1)} x_+ + \nu_l^{(2,2)}}{p_l^3(x_+)} - \frac{\nu_l^{(2,1)} x_- + \nu_l^{(2,2)}}{p_l^3(x_-)} \right) \\
&+ \frac{5 \nu_l^{(2,1)}}{6 D_l^2} \left( \frac{2 a_l x_+ + b_l}{p_l^2(x_+)} - \frac{2 a_l x_- + b_l}{p_l^2(x_-)} \right) \\
&+ \frac{5 a_l \nu_l^{(2,1)}}{D_l^3} \left( \frac{2 a_l x_+ + b_l}{p_l(x_+)} - \frac{2 a_l x_- + b_l}{p_l(x_-)} \right) \\
&+ \frac{20 a_l^2 \mu_l^{(2)}}{D_l^2} \arctan \frac{2\sqrt{D_l} a_l (x_+ - x_-)}{D_l + (2a_l x_+ + b_l)(2a_l x_- + b_l)}
\end{aligned} \tag{C.18}$$



## Annexe D

# Dérivation laplacien

### D.1 Eléments introductifs

Considérons la fonctionnelle  $f_d(M) = \ln(\det(M))$  définie sur  $\mathbb{S}^+$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ . La dérivée en  $M$  d'ordre 1 et 2, le long de la direction définie par une matrice  $B \in \mathbb{S}$  est donnée par

$$f'_d(M; B) = -\text{tr}(M^{-1}B) \quad (\text{D.1})$$

$$f''_d(M; B) = \text{tr}(M^{-1}BM^{-1}) \quad (\text{D.2})$$

et le gradient en  $M$ ,  $f'_d(M) = -M^{-1}$ .

Etant données des matrice  $A(\eta)$  et  $B(\eta)$  dont les coefficients sont des fonctions du paramètre réel  $\eta$ , et pour toute application  $f$  définie sur l'espace des matrices associée, on a

$$\frac{\partial f(A(\eta))}{\partial \eta} = f' \left( A(\eta); \frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta} \right), \quad \frac{\partial \text{tr}(A(\eta))}{\partial \eta} = \text{tr} \left( \frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta} \right) \quad (\text{D.3})$$

$$\frac{\partial A(\eta)B(\eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta}B(\eta) + A(\eta)\frac{\partial B(\eta)}{\partial \eta} \quad (\text{D.4})$$

et si  $A(\eta)$  est en plus non singulière

$$\frac{\partial A^{-1}(\eta)}{\partial \eta} = -A^{-1}(\eta)\frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta}A^{-1}(\eta). \quad (\text{D.5})$$

Intéressons nous aux dérivées par rapport à un paramètre  $\eta$  de l'application  $f_d$  appliquée à une matrice  $A(X)$ . En utilisant les propriétés précédentes,

$$\frac{\partial f_d(A(\eta))}{\partial \eta} = -\text{tr} \left( A(\eta)^{-1} \frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta} \right)$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_d(A(\eta))}{\partial^2 \eta} &= -\text{tr} \left( \frac{\partial A(\eta)^{-1}}{\partial \eta} \frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta} + A(\eta)^{-1} \frac{\partial^2 A(\eta)}{\partial^2 \eta} \right) \\ &= \text{tr} \left( A(\eta)^{-1} \frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta} A(\eta)^{-1} \frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta} - A(\eta)^{-1} \frac{\partial^2 A(\eta)}{\partial^2 \eta} \right) \\ &= \text{tr} \left( A(\eta)^{-1} \frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta} A(\eta)^{-1} \frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta} \right) - \text{tr} \left( A(\eta)^{-1} \frac{\partial^2 A(\eta)}{\partial^2 \eta} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Lorsque la matrice  $A$  dépend de deux paramètres  $\eta := (\eta_1, \eta_2)$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_d(A(\eta))}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} &= -\text{tr} \left( \frac{\partial A(\eta)^{-1}}{\partial \eta_2} \frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta_1} + A(\eta)^{-1} \frac{\partial^2 A(\eta)}{\partial \eta_2 \partial \eta_1} \right) \\ &= \text{tr} \left( A(\eta)^{-1} \frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta_2} A(\eta)^{-1} \frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta_1} - A(\eta)^{-1} \frac{\partial^2 A(\eta)}{\partial \eta_2 \partial \eta_1} \right) \\ &= \text{tr} \left( A(\eta)^{-1} \frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta_2} A(\eta)^{-1} \frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta_1} \right) - \text{tr} \left( A(\eta)^{-1} \frac{\partial^2 A(\eta)}{\partial \eta_2 \partial \eta_1} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

### Quelques rappels sur les dérivées vectorielles

Soit  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $f$  une application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ . Le gradient de  $f(x)$  par rapport à  $x$  est défini par le vecteur de dimension  $n$  vérifiant

$$\nabla_x f(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (\text{D.8})$$

De même, pour une fonction  $g(x, y)$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}$ , on définit le Laplacien comme la matrice de taille  $n \times p$  suivante :

$$\Delta_y^x := \nabla_y (\nabla_x^* g(x, y)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial y_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial y_1 \partial x_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial y_p \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial y_p \partial x_p} \end{pmatrix} \quad (\text{D.9})$$

## Annexe E

# Intervalles de confiance par la méthode du profil de Vraisemblance

Ce chapitre en anglais est extrait de l'article :

F. Celeste, F. Dambreville, J. P. Le Cadre. *Evaluation of a robot learning and planning via Extreme Value Theory*, dans les actes de 10<sup>th</sup> International Conference on Information Fusion, 9-12 Juillet 2007.

### E.1 Derivation of the Value-at-Risk expression

Let  $X$  the random random variable of CDF  $F(x)$  and  $X_1, \dots, X_N$  a sample drawn from  $F$ . From equation (8.25)  $F(x)$  can be written as a function of  $F_u(y)$

$$F(x) = (1 - F(u))F_u(x - u) + F(u)$$

From the Pickands theorem,  $F_u$  can be replaced by the GPD distribution for  $u$  enough large. Moreover  $F(u)$  can be estimated by  $\frac{(N-N_u)}{N}$  where  $N_u$  is the number of observation which exceed the threshold  $u$ . We can deduce that

$$F(x) = \frac{N_u}{N} \left( 1 - \left( 1 + \frac{\xi}{\sigma}(x - u) \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right) + \frac{(N - N_u)}{N}$$

which finally gives

$$F(x) = 1 - \frac{N_u}{N} \left( 1 + \frac{\xi}{\sigma}(x - u) \right)^{-\frac{1}{\xi}}$$

As  $x_p$  is defined as  $1 - p = F(x_p)$ , it can be easily derived from the above equation

$$x_p = u + \frac{\sigma}{\xi} \left( \left( \frac{N}{N_u} p \right)^{-\xi} - 1 \right)$$

### E.2 Profile likelihood Confidence intervals

The profile-likelihood approach for confidence intervals calculation is as follows. Let  $\hat{\gamma}$  be the Maximum Likelihood Estimate (MLE) of a parameter vector  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d) \in \Gamma \subset \mathbf{R}^d$  and  $L(\cdot)$  the log-likelihood function, it means :

$$\hat{\gamma} = \arg \max_{\gamma \in \Gamma} L(\gamma)$$

To determine confidence interval for  $\hat{\gamma}$ , the log-likelihood function is considered as a function of each component  $u = \gamma_i$  by assuming the others as nuisance parameters and maximizing over  $\Gamma_i(u) = \{\gamma \in \Gamma | \gamma_i = u\}$  :

$$f_i(u) = \max_{\gamma \in \Gamma_i(u)} L(\gamma)$$

$f_i$  is called the *profile likelihood function* related to component  $\gamma_i$ . It can be shown [CH74] that a  $1 - \alpha$  confidence interval of  $\gamma_i$  is given by :

$$CI(\gamma_i) = \{u | -2 [f_i(u) - L(\hat{\gamma})] \leq \chi_{1,\alpha}^2\}$$

where  $\chi_{1,\alpha}^2$  is  $1 - \alpha$  quantile of the  $\chi^2$  distribution with 1 degree of freedom. Practically, the bounds of the confidence interval is given by finding the root of the (nonlinear) function [VM88] :

$$F_i(u) = f_i(u) - (L(\hat{\gamma}) - \frac{1}{2}\chi_{1,\alpha}^2)$$

# Liste des publications

Ce chapitre liste les différentes publications produites dans le cadre de la thèse.

## Chapitre d'ouvrage

F. Dambreville, F. Celeste et C. Simonin, *Modélisation probabiliste de politiques et leurs optimisations pour la planification de capteurs*. Chapitre de l'ouvrage *Optimisation en traitement du signal et de l'image*, du Traité Information Commande, Communication (IC2) sous la direction de P. Siarry - *Hermès Science*.- Février 2007

Version anglaise: *Optimization in Signal and Image Processing* – ISTE/J. Wiley.

F. Dambreville, F. Celeste, J. Dezert, F. Smarandache, Chapitre dans *Advances and Applications of DSmT for Information Fusion Nro 3 : Probabilistic PCR6 fusion rule*, Dr Jean Dezert and Pr Florentin Smarandache editors, American Research Press, Rehoboth, 2009 (à paraître).

## Conférences internationales avec comité de relecture

F. Celeste, F. Dambreville, J. P. Le Cadre. *Optimized trajectories for mobile robot localization with map uncertainty*, 15<sup>th</sup> symposium on system identification (SYSID 2009), 6-8 juillet 2009.

N. Broguière, F. Celeste, F. Dambreville, *Optimal Team Decision : a Cross-Entropic Coordination Approach*, FUSION 2008, Cologne, Allemagne, Juillet 2008.

F. Celeste, F. Dambreville, J. P. Le Cadre. *Path planning for multiple features based localization*, dans les actes de l'International Conference in Control Automation and Robotics (ICINCO), 11-15 mai 2008.

A. Kirchner, F. Dambreville, F. Celeste, J. Dezert (ONERA), F. Smarandache. *Application of probabilistic PCR5 Fusion for Multisensor Target Tracking*, dans les actes de 10th International Conference on Information Fusion, 9-12 Juillet 2007.

F. Celeste, F. Dambreville, J. P. Le Cadre. *Evaluation of a robot learning and planning via Extreme Value Theory*, dans les actes de 10<sup>th</sup> International Conference on Information Fusion, 9-12 Juillet 2007.

F. Celeste, F. Dambreville, J. P. Le Cadre. *Optimal path planning using cross entropy*, dans les actes de la 9<sup>th</sup> International Conférence on Information Fusion, 10-13 Juillet 2006.

F. Celeste, F. Dambreville, J. P. Le Cadre. *A cross entropy based approach to determine optimal strategies*. dans les actes de la IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing, 6-8 sept. 2006.

## **Présidence de conférence et de session**

- Co-président de la session « Applications » de conférence IFAC - SYStem IDentification (SYSID), 2009.

- Membre du comité scientifique de laInternational Conference on Humans Operating Unmanned systems (HUMOUS), 2008

# Bibliographie

- [ADD04] J.J Abu Daoud and Y. Doytsher. A combined automated generalization model of spatial active objects. In *Proc of the XX<sup>ième</sup> Congrès ISPRS*, 2004.
- [ADEH99] P. Artzner, F. Delbaen, J.M. Eber, and D. Heath. Coherent measures of risk. *Math. Finance*, (9) :203–228, 1999.
- [Bai03] T. Bailey. Constrained initialisation for bearing-only SLAM. *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 2003.
- [Bav05] F. Bavencoff. *Traitement de l'information appliqué aux systèmes de Surveillance*. PhD thesis, Université d'Orsay (Paris XI) - Institut d'Electronique Fondamentale, 2005.
- [Bel93] J. Belhumeur. A Binocular Stereo Algorithm for Reconstructing sloping, creased, and broken surfaces in the presence of half-occlusion. In *IEEE Fourth Int. Conf. on Computer vision*, pages 431–438, 1993.
- [Ber68] D.P. Bertsekas. *Dynamic Programming*. New York Wiley, 1968.
- [Ber99] N. Bergman. *Recursive Bayesian estimation - Navigation and tracking applications*. PhD thesis, Linköping University, Suède, 1999.
- [BHA01] A. Bel Hadj Ali. *Qualité géométrique des entités géographiques surfaciques- Application à l'appariement et définition d'une typologie des écarts géométriques*. PhD thesis, Université de Marne La Vallée, 2001.
- [BLC04] T. Bréhard and J.P. Le Cadre. Initialization of Particle filter and Posterior Cramèr-Rao Bound for Bearings-Only Tracking in Modified Polar Coordinate System. Technical Report 5074, INRIA, 2004.
- [Bon02] O. Bonin. *Modèles d'erreurs dans une base de données géographiques et grandes déviations pour les sommes pondérées ; application à l'estimation d'erreurs sur un temps de parcours*. PhD thesis, Université de Paris 6, 2002.
- [BP03] M. Beguin and D. Pumain. *La représentation des données géographiques*. Armand Colin, 2003.
- [Bré05] T. Bréhard. *Estimation séquentielle et analyse de performance pour un problème de filtrage partiellement observé. Application à la trajectographie par mesures d'angles*. PhD thesis, Université de Rennes I, 2005.
- [BS95] Y. Bar-Shalom. *Estimation and multitarget -multisensor tracking : Principles and techniques (Tome 1 and 2)*. 1995.
- [BSS06] M.S. Bazaraa, H.D. Sherali, and C.M. Shetty. *Nonlinear Programming - Theory and Algorithms (Third Edition)*. Wiley-Interscience, 2006.
- [CGVZ98] L. Chisci, A. Garulli, A. Vicino, and G. Zappa. Block recursive parallelotopic bounding in set membership identification. *Automatica*, 34(1) :15–22, 1998.
- [CH74] D.R. Cox and D.V. Hinkley. *Theoretical Statistics*. Chapman and Hall, London, 1974.
- [Col99] S. Coles. Extreme value theory and applications. June 15, 1999.
- [CT05] J.A. Castellanos and J.D. Tardós. *Mobile Robot Localization and Map Building - A Multisensor Fusion Approach*. MIT Press, 2005.
- [Dah07] K. Dahia. *Nouvelles méthodes en filtrage particulière. Application au recalage de navigation inertielle*. PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble, 2007.

- [DBB<sup>+</sup>01] C. Duchêne, S. Bard, X. Barillot, A. Ruas, J. Trévisan, and F. Holzapfel. Quantitative and qualitative description of building orientation. 2001.
- [DBKMR03] P. De-Boer, D. Kroese, S. Mannor, and R. Rubinstein. A tutorial on the cross-entropy method. <http://www.cs.utwente.nl/~ptdeboer/ce/>, 2003.
- [DDFG01] A. Doucet, N. De Freitas, and N. Gordon. *Sequential Monte Carlo in practice*. Springer, 2001.
- [Dez03] J. Dezert. Cours ENSTA - Introduction au Pistage multi-cibles multi-senseurs. Technical report, ONERA, 2003.
- [DMJAM96] C. Durieu, M.J. M-J Aldon, and D. Meizel. Multisensor Data Fusion for Localization in Mobile Robotics. *Traitement du signal*, 13(2) :143–165, 1996.
- [DMR04] H. De Mello and R. Rubinstein. Rare Event Estimation for Static Models via Cross-Entropy and Importance Sampling. 2004.
- [Dod03] P. Dodin. *Contrôle de l'information par optimisation sur les graphes géodétiques et contrôle de l'allocation dans la cadre des systèmes de capteurs délocalisés*. PhD thesis, Université de Paris VI, 2003.
- [DPBS97] S. Deb, K.R. Pattipati, and Y. Bar-Shalom. A Generalized S-D Assignment Algorithm for Multisensor-Multitarget State Estimation. *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, 33(2), 1997.
- [Duf05] D. Dufourd. *Des cartes combinatoires pour la construction automatique de modèles d'environnement par un robot mobile*. PhD thesis, Institut national polytechnique de Toulouse, 2005.
- [EK97] P. Embrecht and C. Klüppelberg. Modelling extremal events. *Springer*, 1997.
- [Fon06] C. Fonte. Conversion between the vector and raster data structures using fuzzy geographical entities. *Proceedings 7th Symposium on spatial accuracy in natural resources and environmental.*, 2006.
- [FRIT02] A. Farina, B. Ristic, S. Immediata, and L. Timmoneri. Cramer-Rao Bound for non linear filtering with  $P_d < 1$  and its application to target tracking. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2002.
- [FRIT03] A. Farina, B. Ristic, S. Immediata, and L. Timmoneri. CRLB with  $P_d < 1$  for Bearing Only fused Tracked. *ISIF*, 2003.
- [Gar02] M. Garrido. *Modélisation des événements rares et estimation des quantiles extrêmes, méthodes de sélection de modèles pour les queues de distribution*. PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 2002.
- [GCL<sup>+</sup>05] O. Gimenez, R. Choquet, L. Lamor, P. Scofield, D. Fletcher, J.-D. Lebreton, and R. Pradel. Efficient profile-likelihood Confidence Intervals for Capture-recapture Models. *Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*, 10 :1–13, 2005.
- [GJ98] M. Goodchild and R. Jeansoulin, editors. *Data Quality in Geographic Information - From Error to Uncertainty*. Hermes, 1998.
- [GM94] C. Geyer and J. Moller. Simulations procedures and likelihood inference for spatial point processes. *Scand. Journal of Statistics*, 21 :359–373, 1994.
- [GSS93] N. Gordon, D. Salmond, and A. Smith. Novel approach to nonlinear/non gaussian bayesian estimation. *IEE Proceedings-F*, 140(2), 1993.
- [HJ06] J. Hanzel and L. Jurisica. Comparison of mapmaking methods for mobile robots. *Electrical Engineering*, 57(5) :276–284, 2006.
- [HLCP06] C. Hue, J.-P. Le Cadre, and P. Perez. Posterior Cramer-Rao Bound for multitarget tracking. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 462(1) :285–303, 2006.
- [Jib03] H. Jibrini. *Reconstruction des bâtiments en modèles polyédriques 3D à partir de données cadastrales vectorisées et d'un couple d'images aériennes haute résolution*. PhD thesis, Ecole Nationale des Sciences des Télécommunications, 2003.

- [JKDE01] L. Jaulin, M. Kieffer, O. Ditrit, and Walter E. *Applied Interval Analysis*. 2001.
- [JU02] S Julier and J.K. Uhlmann. The Scaled Unscented Transformation. *IEEE American Control Conference*, pages 4555–4559, 2002.
- [JU03] S Julier and J.K. Uhlmann. The spherical simplex unscented transformation. *IEEE American Control Conference*, pages 2430–2434, 2003.
- [JU04] S.J. Julier and J.K. Uhlmann. Unscented Filtering and Nonlinear Estimation. volume 92, 2004.
- [KE01] M. Kasser and Y. Egels. *Photogrammétrie numérique*. Hermes, 2001.
- [KG00] E. Küllezi and M. Gilli. Extreme Value Theory for Tail-Related Risk Measures. *Computational finance*, 2000.
- [KG06] R. Karlsson and F. Gustafsson. Bayesian Surface and Underwater Navigation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(11) :4204–4213, 2006.
- [LaV06] S.M. LaValle. *Planning Algorithms*. Cambridge University Press, 2006.
- [LDZPD08] F. Lafarge, X. Descombes, J. Zerubia, and M. Pierrot-Deseilligny. Automatic Building extraction from DEMs using an object approach and application to 3D-city modelling. *Journal of Photogrammetry and remote Sensing*, pages 365–381, 2008.
- [Low04] D.G. Lowe. Distinctive Image features from Scale-Invariant keypoints. *Int. Journal of Computer Vision*, 2(60) :91–110, 2004.
- [LT97] J.P. Le Cadre and O. Trémois. The Matrix Programming Property and its applications. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 18(4) :818–826, October 1997.
- [Mag86] J. Magnus. The exact moment of quadratic form. *Annales d'économie et de Statistiques*, 4 :95–109, 1986.
- [Mar] L. Margolin. On the convergence of the cross-entropy method. *Annals of Operations Research*, pages 201–214.
- [MG82] L. Matthies and P. Grandjean. Stochastic Performance Modeling and evaluation of Obstacle Detectability with imaging range sensors. Technical report, 82.
- [MTKW03] M. Montemerlo, S. Thrun, D. Koller, and B. Wegbreit. FastSLAM 2.0 : An improved particle filtering algorithm for simultaneous localization and mapping that provably converges. In *Proceedings of the Sixteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*, Acapulco, Mexico, 2003. IJCAI.
- [NWBS01] R. Niu, P. Willet, and Y. Bar-Shalom. Matrix CRLB scaling due to measurements of uncertain origin. *IEEE Trans. Signal Process.*, 49(7) :1325–1335, March 2001.
- [Ort01] M. Ortner. Extraction de caricatures de bâtiment sur des modèles numériques d'élévation. Master's thesis, Université de Paul Sabatier - Toulouse III, 2001.
- [Ort04] M. Ortner. *Processus ponctuels marqués pour l'Extraction Automatique de Caricatures de bâtiments à partir de Modèles Numériques d'Élévations*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2004.
- [Oud00] N. Oudjane. *Stabilité et approximations particulières en filtrage non-linéaire. Application au pistage*. PhD thesis, Université de Rennes 1, 2000.
- [OUV97] G. Oriolo, G. Ulivi, and M. Vendittelli. Fuzzy maps : A new tool for mobile robot perception and planning. *Robotics Systems*, 14(3) :179–197, 1997.
- [PL02] S. Paris and J.P. Le Cadre. Trajectory Planning for Terrain-Aided Navigation. In *Fusion 2002*, volume 7-11, pages 1007–1014, Annapolis(USA), 2002.
- [PW94] L. Pronzato and E. Walter. Minimum volume Ellipsoids. *International Journal of adaptive control and signal processing*, 8 :15–30, 1994.
- [Rap05] I. Rapoport. *Optimal filtering in the presence of faults : Algorithms and performance measures*. PhD thesis, Israel Institute of Technology, 2005.
- [Reg98] N. Regnauld. *Généralisation du bâti : Structure spatiale de type graphe et représentation cartographique*. PhD thesis, Université de Provence-Aix Marseilles I, 1998.

- [RK04] R.Y. Rubinstein and D. Kroese. *The Cross-Entropy Method : A uniform approach for Combinatorial Optimization, Monte-Carlo Simulation and Machine Learning*. Information Science and Statistics, 2004.
- [RN05] S. Reece and S. Nicholson. Tighter Alternatives to the Cramér-Rao Lower Bounds for Discrete-Time Filtering. In *International Conference on Information Fusion*, 2005.
- [RO04] I. Rapoport and Y. Oshman. A new Error Lower Bound for Interruption Indicators in Systems with Uncertainty. *IEEE Transactions on Information Theory*, 50(12) :3375–3384, 2004.
- [Rou98] O. Rourke. *Handbook of computational geometry*. Information Science and Statistics, 1998.
- [RS06] A. Ruszczyński and A. Shapiro. Optimization of convex risk function. *Mathematics of operations research*, 31(3) :433–452, 2006.
- [Sap90] G. Saporta. *Probabilités-Analyse des données et statistique*. Technip, 1990.
- [SB00] R.S. Sutton and A.G. Barto. *Reinforcement Learning. An Introduction*. A Bradford book, 2000.
- [Sen04] J. Senegas. *Méthodes de Monte Carlo en vision stéréoscopique - Application à l'étude des Modèles Numériques de Terrain*. PhD thesis, Ecole des Mines de Paris, 2004.
- [SKT01] M. Simandl, J. Kravolec, and P. Tichavsky. Filtering, predictive and smoothing Cramér-Rao bounds for discrete time nonlinear dynamics systems. *Automatica*, 37 :1703–1716, 2001.
- [SS95] D. Stoyan and H. Stoyan. *Fractals, Random shapes and point fields - methods of geometrical statistics*. John Wiley and Sons, 1995.
- [TBF05] S. Thrun, W. Burgard, and D. Fox. *Probabilistic Robotics*. MIT Press, 2005.
- [TMN98] P. Tichavsky, C.H. Muravchik, and A. Nehorai. Posterior Cramér-Rao Bounds for Discrete-Time Nonlinear Filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 46(5) :1386–1396, May 1998.
- [VL95] M.N.M Van Lieshout. *Markov Point process and their applications*. Imperial College Press, 1995.
- [VM88] D.J. Venzon and S.H. Moolgavkar. A method for Computing Profile-Likelihood-Based Confidence Intervals. *Applied Statistics*, 37 :87–94, 1988.
- [VT68] H.L. Van Trees. *Detection, Estimation and Modulation Theory*. New York Wiley, 1968.
- [WW88] E. Weinstein and A. J. Weiss. A General Class of Lower Bound in Parameter Estimation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 34(2) :338–342, March 1988.
- [ZG02] J. Zhang and M. Goodchild. *Uncertainty in Geographical Information*. Taylor & Francis, 2002.

# Table des figures

2.1	Vue 2D d'une cartographie avec plusieurs zones de qualité polygonales. . . . .	16
2.2	Exemple de carte avec 8 objets. . . . .	22
2.3	Distance entre un arbre et un bâtiment. . . . .	25
2.4	Mesure de précisions de $R_G$ pour deux arbres (cas (a) et (b)). . . . .	26
2.5	Calcul de la fonction angulaire pour un polygone. . . . .	28
2.6	Alignement de deux bâtiments. . . . .	29
2.7	Alignement des arbres. . . . .	30
3.1	Exemple de carte et relation $R_G$ . . . . .	35
3.2	Opérateur de rotation d'un bâtiment. . . . .	36
3.3	Opérateur $Q_4$ appliqué à un polygone vu de dessus. . . . .	37
3.4	Composantes des relations de proximité $R_G$ (bleu et rouge) et d'alignement $R_a^1$ (bleu). . . . .	38
3.5	Réalisation bruitée de la carte et relations maintenues. . . . .	39
3.6	Synopsis du processus de construction de représentations incertaines. . . . .	43
4.1	Evolution de l'état entre deux instants consécutifs. . . . .	46
4.2	Processus de mesures. . . . .	49
4.3	Vecteur « amer-mobile » . . . . .	52
5.1	Evolution de $g_k^{11}$ en fonction du niveau d'incertitude sur les commandes. . . . .	68
5.2	Notations pour une configuration « amer-mobile ». . . . .	76
5.3	Trajectoire nominale (rouge) et bruitées (bleues). . . . .	80
6.1	Evolution de l'ellipse associée à la borne sur l'erreur de position. . . . .	89
6.2	Paramètres caractéristiques de la borne sur l'erreur en position. . . . .	90
6.3	Evolution de la borne sur l'erreur en orientation. . . . .	90
6.4	Bornes sur l'erreur en position pour un mouvement rectiligne. . . . .	91
6.5	Bornes sur l'erreur en orientation pour un mouvement rectiligne. . . . .	91
6.6	Répartition des amers dans l'environnement et trajectoire du mobile. . . . .	92
6.7	Paramètres de la borne sur l'erreur de position pour le cas 1. . . . .	92
6.8	Paramètres de la borne sur l'erreur d'orientation pour le cas 1. . . . .	93
6.9	Ellipses de la borne en position - capteur omnidirectionnel avec $d_{max} = 40$ m. . . . .	93
6.10	Borne sur l'erreur en position - capteur omnidirectionnel et $d_{max} = 40$ m. . . . .	94
6.11	Borne sur l'erreur en orientation - capteur omnidirectionnel et $d_{max} = 40$ m. . . . .	94
6.12	Borne sur l'erreur d'estimation en position - cas 3. . . . .	95
6.13	Borne sur l'erreur d'estimation en orientation - cas 3. . . . .	95
7.1	Paramètres de la matrice de covariance $\Sigma(f_i)$ sur l'amer $f_i$ . . . . .	98
7.2	Effet niveau (a) et orientation (b) de l'erreur sur l'amer. . . . .	102
7.3	Allure des ellipses associées à la BCRP en position. . . . .	107
7.4	Bornes sur la position en fonction du niveau de l'erreur de carte. . . . .	108
7.5	Borne sur l'orientation en fonction du niveau de l'erreur de carte. . . . .	108
7.6	Ellipses associées à la BCRP en position fonction de l'orientation $\gamma_l$ . . . . .	109
7.7	Borne en position du mobile fonction de l'orientation de l'erreur de carte. . . . .	109
7.8	Borne en orientation du mobile fonction de l'orientation de l'erreur de carte. . . . .	110

7.9	$\tilde{J}_{k+1}^z$ par la méthode unscented (échantillons mobile (vert), sigma-points amers (bleu)).	110
8.1	Grille pour $n_x = n_y = 5$ et définition des actions dans l'état $s = 13$ .	115
8.2	trajectoire avec (ligne continue) et sans (pointillé) contraintes $\frac{\pi}{4}$ .	116
8.3	Schéma de génération de trajectoires à deux niveaux.	127
8.4	Comportement de l'algorithme V1 pour le plus court chemin.	128
8.5	Trajectoires optimales pour le scenario 1.	129
8.6	Illustration de la convergence pour le scenario 1.	130
8.7	Trajectoires optimales pour le scenario 2.	131
8.8	Trajectoires optimales pour le scenario 3.	131
8.9	Positionnement des amers et ellipses d'erreur.	132
8.10	Trajectoires optimales sans erreurs.	132
8.11	Trajectoires optimales avec erreurs.	133
8.12	Un exemple de profil de vraisemblance pour $x_p$ et intervalle de confiance.	137
8.13	Meilleure trajectoire parmi les 40000.	139
8.14	histogramme des 800 valeurs extrêmes de $c_2$ .	140
8.15	Courbe $1 - G_{\hat{\xi}, \hat{\sigma}}$ estimée. $\hat{x}_p$ (rouge) et intervalles de confiance.	141
8.16	Profil de vraisemblance pour $x_p$ (vert). $CI^\alpha(\hat{x}_p)$ , $\alpha = 0.05$ (rouge).	141
8.17	Paramètres de l'algorithme de CE.	142
8.18	Meilleure trajectoire fournie par l'algorithme V1.	142
9.1	$\mathcal{J}_T(t, \mathcal{C}^h)$ pour une carte composée de 2 amers et un capteur omnidirectionnel.	148
9.2	Surface de $\mathcal{J}_1$ (en logarithme) avec une carte de 4 amers (bleus).	151
9.3	Surface de $\mathcal{J}_2$ (en logarithme) avec une carte de 4 amers (bleus).	152
9.4	Surface de $\mathcal{J}_3$ (en logarithme) avec une carte de 4 amers (bleus).	152
9.5	Surface de $\mathcal{J}$ (en logarithme) pour $\sigma_d = 0.05 m$ et $\sigma_\varphi = 1^\circ$ .	153
9.6	Surface de $\mathcal{J}$ (en logarithme) pour $\sigma_d = 0.05 m$ et $\sigma_\varphi = 5^\circ$ .	153
9.7	Notations pour l'analyse du positionnement relatif mobile-amers.	154
9.8	Famille de vecteurs considérée.	157
9.9	Zone perçue pour un capteur omnidirectionnel et $d_+ < +\infty$ .	161
9.10	Région de détection lors d'un déplacement sur un arc.	162
9.11	Région de détection lors d'un déplacement sur un arc.	163
9.12	Configuration à trois amers et 20 segments d'orientation $\theta \in [0, 2\pi]$ .	167
9.13	$\Gamma_{ijr}^{(1)}(k)$ ( $(i, j, r) = (1, 2, 1)$ -rouge, $(i, j, r) = (1, 3, 1)$ -bleu et $(i, j, r) = (2, 3, 1)$ ).	168
9.14	Scénario pour l'optimisation de $\Gamma^{(1)}$ .	182
9.15	Chemin optimal pour $\Gamma^{(1)}$ .	183
10.1	Compromis entre performance moyenne et incertitude due aux amers.	188
10.2	Ellipses d'erreur sur les amers.	190
10.3	Chemin optimal pour la fonction de risque $r_1$ .	191



**Résumé :** Des avancées importantes ont été réalisées dans le domaine de la robotique mobile. L'usage croissant des robots terrestres et des drones de petite taille, n'est possible que par l'apport de capacités d'autonomie de mouvement dans l'environnement d'évolution. La problématique de la localisation du système, par la mise en correspondance de mesures issues des capteurs embarqués avec des primitives contenues dans une carte, est primordiale. Ce processus, qui s'appuie sur la mise en oeuvre de techniques de fusion, a été très étudié. Dans cette thèse, nous proposons de définir des méthodes de planification du mouvement d'un mobile, avec pour objectif de garantir une performance de localisation à partir d'une carte incertaine donnée a priori, et ce lors de l'exécution. Une méthode de génération contrôlée de réalisations de cartes bruitées, exploitant la théorie des processus ponctuels, est d'abord présentée. Cette base de cartes permet de construire des cartes multiniveaux pour la localisation. Le critère d'optimisation est défini à partir de fonctionnelles de la borne de Cramér-Rao a posteriori, qui tient compte de l'incertitude sur la dynamique du mobile et sur la cartographie. Nous proposons différentes approches, basées sur la méthode de Cross-Entropie pour obtenir des stratégies de déplacement avec des modèles de dynamique discret et continu. La qualité des solutions optimales fournies par ces approches heuristiques est analysée en utilisant des résultats de la Théorie des Valeurs Extrêmes. Enfin, nous esquissons une démarche pour l'amélioration ciblée des cartes sous contrainte de ressources afin d'améliorer la performance de localisation.

**Mots clefs :** robotique, localisation, processus ponctuel, Borne de Cramér-Rao a Posteriori, planification, méthode de Cross-Entropie, Théorie des Valeurs Extrêmes.

**Abstract :** Important improvements have been done in robotics. More and more mobile robots and small unmanned aerial vehicles are planned to be used in different applications due to their ability to move autonomously in their environment. The localisation task through the matching between measurements provided from embedded sensors and features given in a map is essential. This process which is based on data fusion techniques has been well studied. In this thesis, our main goal is to define a methodology for off-line path planning, in order to guarantee the best performance of localization of the robot during motion execution. This performance takes into account the uncertainty of the system dynamic and the uncertainty of the given environment map representation. First of all, we introduce a way to generate random outcomes of the uncertain map from a model of errors using the point process theory and produce a multi-level uncertain map for localization. Then, the criterion for the planning is built from the Posterior Cramér-Rao Bound for the estimation of the system dynamic and the map uncertainty. Both discrete and continuous system dynamic models are considered. The planning problem is solved via heuristic approaches based on the cross-entropy method. The analysis of the performance of the derived paths solution is then made using the results of the *extreme value theory*. At the end, some ideas are introduced to demonstrate that the map quality can be improved under resources constraints regarding the localization performance criterion.

**Keywords :** Robotics, Localization, point process, Posterior Cramér-Rao Bound, planning, The Cross Entropy method, Extreme Values Theory