



HAL
open science

Optimal Design of Feeding System in Steel Castings

Ruhollah Dr. Tavakoli

► **To cite this version:**

Ruhollah Dr. Tavakoli. Optimal Design of Feeding System in Steel Castings. Mechanics [physics.med-ph]. Sharif University of Technology, 2009. Persian. NNT: . tel-00484191

HAL Id: tel-00484191

<https://theses.hal.science/tel-00484191>

Submitted on 18 May 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده مهندسی و علم مواد

رساله دکترای تخصصی
گرایش ریخته‌گری

طراحی بهینه سیستم تغذیه گذاری در فرایند شکل ریزی فولادهای ساده کربنی

نگارش:

روح اله توکلی

استاد راهنما:

پرویز دوامی

شهریور ۱۳۸۸

بسم الله الرحمن الرحيم

سپاس خداوندی را که سخنان از ستایش او عاجزند و حسابگران از شمارش نعمت‌های او ناتوان،
و تلاشگران برای ادای حق او درمانده، خدایی که انکار ژرف اندیش، ذات او را درک نمی‌کنند و
دست خواصان دریای علوم به او نخواهد رسید. پروردگاری که برای صفاتش حدی وجود ندارد، برایش
وقتی معین و سرآمدی مشخص نمی‌توان تعیین کرد. مخلوقات را با قدرت خود آفرید، و با رحمت
خود با دانه‌ها راه حرکت در آورد و به وسیله کوه‌ها اضطراب و لرزش زمین را به آرامش تبدیل کرد.

علی علیه السلام - خطبه اول نبج البلاغه (ترجمه محمد شتی)

قدردانی

بدین وسیله مراتب سپاس و قدردانی خود را نسبت به استاد راهنمای خویش، جناب آقای دکتر پرویز دوامی، اعلام می‌دارم که مرا با دنیای زیبای مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی آشنا نمود و در طول زمان انجام این پژوهش همواره مشوقم بود و با رهنمودهای ارزشمند خویش راه انجام این تحقیق را برایم آسان نمود.

از کمیته داوران رساله دکترای خود؛ آقایان دکتر حسین آشوری، دکتر ناصر وره‌رام، دکتر مهرداد تقی‌زاده منظری و دکتر سید محمد حسین میرباقری؛ نیز بواسطه کمک‌هایشان در زمان انجام این تحقیق و همچنین تصحیح این رساله نیز تشکر می‌کنم.

همچنین بر خود لازم می‌دانم از اعضای گروه طراحی مهندسی مرکز پژوهشی و متالورژی رازی؛ بویژه آقای دکتر رضا بابایی، خانم مهندس کیانوش عسگری و آقایان مسعود دادش زاده؛ که از راهنمایی‌ها و کمک‌هایشان در مراحل اولیه این پژوهش بهره‌مند شدم نیز تشکر و قدردانی کنم. بخش تجربی مربوط به این تحقیق در مرکز پژوهشی متالورژی رازی انجام پذیرفت. از مدیریت این مرکز و کارکنان آزمایشگاهی آن بویژه آقایان مهندس ستار نصیری و جلال اسلامی نیز تشکر می‌نمایم.

حروف‌چینی این اثر در محیط \LaTeX با استفاده از بسته نرم‌افزاری متن‌باز \XeTeX صورت پذیرفت. لازم است در پایان از مولف این بسته نرم‌افزاری؛ جناب آقای وفا خلیقی؛ بخاطر تلاش‌های بدون چشم‌داشت و مستمرش در بهبود کیفیت و توسعه این ابزار ارزشمند، و کمک‌هایش طی حروف‌چینی این نوشتار نیز صمیمانه تشکر نمایم.

Moreover, I would like to deeply thank Wolfgang Bangerth who patiently answered my questions in the course of this research and without him, my work was something else. I'm also grateful to Hongchao Zhang, Ernesto Birgin and Marina Andretta for their helpful discussions about the gradient projection and null-space methods.

طراحی بهینه سیستم تغذیه‌گذاری در فرایند شکل‌ریزی فولادهای ساده کربنی

چکیده:

در این پژوهش طراحی بهینه سیستم تغذیه‌گذاری در فرایند شکل‌ریزی فولادهای ساده کربنی در قالبهای ماسه‌ای مورد مطالعه قرار گرفت. بخش اول این تحقیق مشتمل بر بررسی مبانی فیزیکی حاکم بر تشکیل عیوب انقباضی از دیدگاه‌های نظری و تجربی می‌باشد. نتایج این قسمت حاوی نگرشی جامع بر: مکانیزم تشکیل عیوب انقباضی، اثر کیفیت متالورژیکی مذاب بر نحوه توزیع این عیوب و ارتباط بین تشکیل عیوب انقباضی و گازی در قطعات ریخته‌گری می‌باشد. آنالیز تئوری توابع معیار حرارتی برای پیش‌بینی عیوب انقباضی در قطعات ریخته‌گری و معرفی یک تابع معیار حرارتی نوین از دیگر اقدامات انجام شده در این بخش است. در بخش دوم این پژوهش ابتدا مدلی جهت طراحی بهینه سیستم تغذیه‌رسانی در فرایندهای شکل‌ریزی ارائه شد. در این مدل مساله طراحی بهینه مربوطه در قالب یک مساله بهینه‌سازی توپولوژی مقید به قيود موضعی تابع جواب معادله انتقال حرارت فرمول‌بندی شد. مهمترین مزیت این مدل در مقایسه با تحقیقات مشابه عدم نیاز به یک طراحی اولیه برای سیستم تغذیه‌گذاری و انجام فرایند طراحی بصورت تقریبا اتوماتیک می‌باشد. این مدل قادر است بدون دخالت کاربر تعداد، مکان، شکل و ابعاد تغذیه‌های مورد نیاز برای تولید یک قطعه سالم را محاسبه کند. با استفاده از انجام آنالیز روی فضاهای تابعی بعد-نامحدود، روشی نوین با بازدهی محاسباتی بالا برای حل مدل ریاضی مربوطه ارائه شد. در پایان با استفاده از انجام یک سری از آزمایشات عددی مناسب، توانایی و محدودیت‌های مربوط به روش ارائه شده مورد مطالعه قرار گرفت.

واژه‌های کلیدی: توابع معیار حرارتی، معیار نیاما، پیش‌بینی عیوب انقباضی در ریخته‌گری، طراحی بهینه سیستم

تغذیه‌گذاری، بهینه‌سازی توپولوژی با قيود موضعی

فهرست مطالب

ث	فهرست مطالب
۱	۱ مقدمه
۵	۲ تئوری تشکیل عیوب انقباضی حین انجماد
۵	۱.۲ ساختار حاصل از انجماد
۹	۲.۲ تئوری جوانه زنی عیوب انقباضی و گازی حین انجماد
۹	۱.۲.۲ مدل کلاسیک جوانه زنی گیبس
۱۵	۲.۲.۲ مدل جوانه زنی توسعه یافته گیبس
۲۱	۳.۲.۲ مدل جوانه زنی انرژی گرادیان (مدل کان-هیلیارد)
۲۳	۴.۲.۲ مدل‌های جوانه زنی غیر کلاسیک (تشکیل ناپیوستگی بدون جوانه زنی)
۲۴	۵.۲.۲ جمع بندی مدل‌های جوانه زنی ارائه شده
۲۵	۶.۲.۲ بررسی تئوری-تجربی نحوه توزیع عیوب انقباضی-گازی در قطعات ریختگی
۳۹	۳.۲ مروری بر توابع معیار پیش بینی عیوب انقباضی
۴۱	۴.۲ آنالیز توابع معیار پیش بینی عیوب انقباضی
۴۴	۵.۲ معرفی معیار حرارتی جدید برای پیش بینی عیوب انقباضی
۴۷	۳ مبانی طراحی سیستم تغذیه گذاری
۵۲	۴ مروری بر منابع طراحی بهینه سیستم تغذیه گذاری
۵۶	۱.۴ مبانی طراحی بهینه سیستم تغذیه گذاری
۵۸	۵ مدلسازی مفهومی در این تحقیق

۶۳	۶	مدلسازی ریاضی در این تحقیق
۶۳	۱.۶	معادلات حاکم
۷۱	۲.۶	تخفیف سازی معادلات حاکم
۷۴	۳.۶	بهینه سازی پیش از گسسته سازی
۸۷	۴.۶	آنالیز حساسیت
۹۴	۷	مدلسازی عددی
۹۴	۱.۷	گسسته سازی هندسی
۹۷	۲.۷	گسسته سازی معادلات حاکم
۱۰۱	۳.۷	مدیریت حافظه کامپیوتری حین بهینه سازی
۱۰۲	۴.۷	جستجوی عمومی یک-بعدي
۱۰۵	۵.۷	تصویر کردن در فضای کنترل
۱۰۸	۸	نتایج و بحث
۱۰۸	۱.۸	بررسی صحت حل معادله انتقال حرارت
۱۱۱	۲.۸	بررسی صحت عملکرد تابع معیار پیشنهاد شده
۱۱۵	۳.۸	بررسی صحت الگوریتم در طراحی بهینه سیستم تغذیه رسانی
۱۲۸	۹	جمع بندی نتایج و چشم انداز تحقیقات آینده
۱۲۸	۱.۹	جمع بندی نتایج
۱۳۲	۲.۹	چشم انداز تحقیقات آینده
۱۳۳	۳.۹	لیست مقالات منتشر شده
۱۳۴		فهرست مراجع

فصل ۱

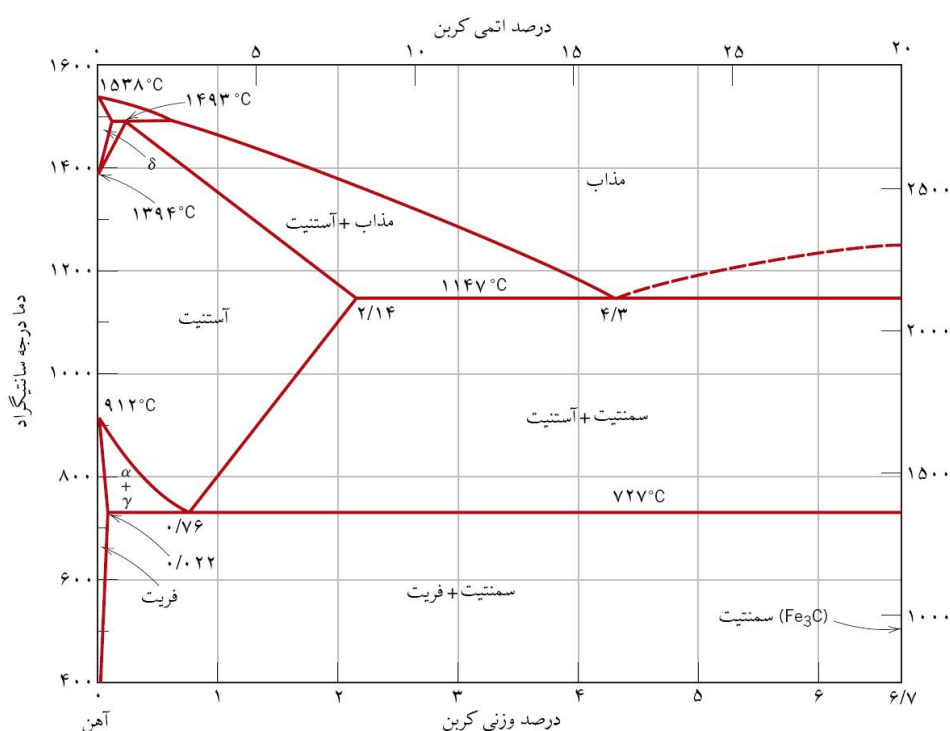
مقدمه

"The reasonable man adapts himself to the world; the unreasonable one persists to adapt the world to himself. Therefore all progress depends on the unreasonable man (George Bernard Shaw 1856–1950)"

فرایند ریخته‌گری را می‌توان به عنوان مهمترین ستون اساسی صنعت هر کشور بشمار آورد، بطوریکه صنایع دیگر بطور مستقیم یا غیر مستقیم به آن وابسته می‌باشند. این فرایند از قابلیت انعطاف بسیار بالایی برخوردار است که تعدادی از مهمترین آنها عبارتند از: وزن قطعه تولیدی می‌تواند از کمتر از یک گرم (دندان زیپ) تا چند صد تن (قالبهای شکل‌دهی) تغییر کند، امکان تولید قطعات با اشکال ساده (در پوشهای خطوط انتقال آب) و بسیار پیچیده (بدنه سیلندر خودرو)، تولید قطعه بصورت تک و تولید انبوه، تولید قطعات پیچیده نزدیک به شکل نهایی با دقت ابعادی مناسب وجود دارد. علی‌رغم قدمت بیش از ۵۰۰۰ ساله فرایند ریخته‌گری، بسیاری از جنبه‌های علمی این فرایند همچنان بصورت ناشناخته باقی مانده و امروزه بعنوان یکی از شاخه‌های فعال تحقیقاتی بحساب می‌آید. قدمت چند هزار ساله ریخته‌گری نه تنها باعث کاهش اهمیت و کاربرد این فرایند نشده است بلکه امروزه شاهد جایگزین شدن آن بجای برخی از فرایندهای تولید مانند اتصال فلزات، ماشینکاری و پتک‌کاری (فورج) هستیم.

بر اساس آمار منتشر شده جهانی (مربوط به قبل از سال ۱۹۹۶) هر ساله بالغ بر ۷۵ میلیون تن قطعات ریخته شده به ارزش بیش از ۱۵۰ میلیارد دلار در بیش از ۳۵۰۰۰ واحد ریخته‌گری در نقاط مختلف دنیا تولید می‌شود. کشورهای چین، آمریکا، ژاپن، روسیه، آلمان، هند، فرانسه، ایتالیا، مکزیک و برزیل بترتیب بزرگترین تولید کنندگان قطعات ریخته‌گری بحساب می‌آیند که بیش از ۸۰ درصد تولید کل را به خود اختصاص می‌دهند [۱]. در این میان کشور ایران علی‌رغم توانایی بالقوه بسیار بالا برای فعالیت در این صنعت (شامل دسترسی آسان و ارزان به مواد اولیه، منابع انرژی و نیروی انسانی) سهم بسیار کوچکی (کمتر از یک درصد) از تولید جهانی را به خود اختصاص داده است که این مساله اهمیت فعالیت و تحقیقات بیشتر در این زمینه را روشن می‌سازد.

از میان آلیاژهای مختلف ریخته‌گری، فولادها حدود ۹ درصد وزنی از تولید کل را به خود اختصاص می‌دهند. از جمله کاربردهای عمده فولادهای ریخته‌گری می‌توان به تولید قطعات ماشین آلات، شیرآلات و چرخ دنده های صنعتی اشاره کرد. به علت دمای ذوب نسبتاً بالا، ریخته‌گری فولادها عمدتاً در قالبهای ماسه‌ای و سرامیکی انجام می‌شود. در فولادهای ساده کربنی، کربن به عنوان عنصر آلیاژی اصلی محسوب می‌شود. سیلیسیم و منگنز معمولاً برترتیب در مقادیر حدود ۰/۸-۰/۲۵ و ۰/۵-۱/۰ درصد وزنی در ترکیب شیمیایی این فولادها یافت می‌شوند. سایر عناصر که معمولاً بمنظور انجام عملیات کیفی به مذاب افزوده می‌شوند نیز در مقادیر ناچیز (کمتر از ۰/۱ درصد وزنی) در ترکیب شیمیایی وجود دارند. بعنوان مثال عناصری مانند آلومینیوم و تیتانیم که نسبت به آهن میل ترکیبی بیشتری با اکسیژن دارند بمنظور اکسیژن‌زدایی پیش از ذوب‌ریزی به مذاب افزوده می‌شوند. در این میان استفاده از آلومینیوم بعلاوه تاثیر مناسب و قیمت پایین متداولتر می‌باشد. جز برخی از موارد استثناء، میزان فسفر و گوگرد موجود در ترکیب شیمیایی می‌بایست برترتیب کمتر از ۰/۰۶ و ۰/۰۵ درصد وزنی باشد. فولادهای ساده کربنی بر اساس میزان کربن موجود در ترکیب شیمیایی به سه دسته کم کربن (کربن کمتر از ۰/۲ درصد وزنی)، کربن متوسط (کربن بین ۰/۵-۰/۲ درصد وزنی) و پرکربن (کربن بین ۰/۵-۲/۰ درصد وزنی) تقسیم‌بندی می‌شوند [۲].



شکل ۱.۱: دیاگرام تعادلی آهن-کربن [۳].

شکل ۱.۱ دیاگرام تعادلی آهن-کربن را نشان می‌دهد. بر اساس دیاگرام تعادلی آهن-کربن، برای آلیاژهایی تا حدود ۰/۵ درصد کربن در ابتدا دندریتهای اولیه آهن دلتا با ساختار شبکه‌ای مکعب مرکزدار^۱ از مذاب جدا می‌شوند و با سرد شدن

^۱Body centered cubic (BCC)

تدریجی مذاب در دمای حدود ۱۴۹۳ درجه سانتیگراد (تا محدوده ترکیب شیمیایی ۰/۱ درصد وزنی کربن) مذاب باقیمانده با فاز دلتا ترکیب شده و در یک واکنش پریتکتیک^۲ به فاز آستنیت (آهن گاما) با ساختار شبکه ای مکعب با سطوح مرکزدار^۳ تبدیل می‌شود. برای مقادیر کربن بیشتر از ۰/۵ درصد هم با کاهش دما دندریتهای آستنیت بطور مستقیم از مذاب جدا می‌شوند.

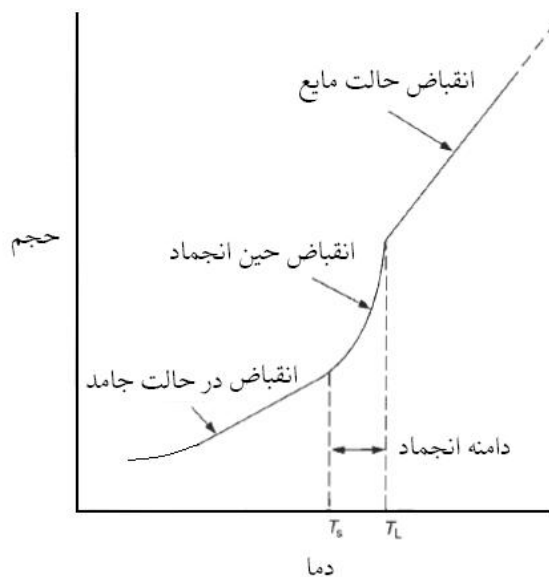
بطور کلی مذاب فولاد طی سرد شدن از دمای ریخته‌گری تا دمای محیط دچار سه نوع انقباض حجمی خواهد شد که بترتیب عبارتند از (شکل ۲.۱): انقباض در حالت مایع (حدود ۱ درصد حجمی به ازای هر ۶۰ درجه سانتیگراد کاهش دما)، انقباض حین انجماد (حدود ۳ درصد حجمی در بازه انجماد) که علت آن تغییر آرایش اتمی از یک ساختار فشرده با دامنه نظم کم به یک ساختار فشرده با دامنه نظم زیاد (ساختار کریستالی) می‌باشد، و انقباض در حالت جامد (حدود ۷ درصد حجمی از دمای انجماد تا دمای محیط) [۲]. انقباض حین سرد شدن در حالت مذاب معمولاً از طریق سیستم راهگامی تامین می‌شود. انقباض در حالت جامد نیز معمولاً با در نظر گرفتن میزان این انقباض در ابعاد مدل ریخته‌گری جبران می‌شود. در این میان کنترل انقباض حین انجماد از اهمیت بیشتری برخوردار است بطوریکه عدم کنترل صحیح آن می‌تواند منجر به پیدایش عیوب انقباضی ناخواسته در قطعه گردد. بسته به شکل هندسی قطعه ریخته شده، ترکیب شیمیایی آلیاژ و کیفیت متالورژیکی مذاب توزیع عیوب انقباضی می‌تواند بصورت گسترده یا متمرکز (واقع در مراکز حرارتی) در قطعه باشد. باید توجه داشت که افزایش عناصر آلیاژی به ترکیب شیمیایی فولاد می‌تواند موجب تغییرات قابل توجه در دیاگرام فازی آهن-کربن شود. به عنوان مثال افزودن عناصر کاربیدزا نظیر کروم و وانادیم موجب گسترش محدوده پایداری فریت تا دماهای بالاتر می‌شود.

روشهای کنترل عیوب انقباضی در قطعات ریخته‌گری را می‌توان به دو دسته کلی تقسیم کرد که عبارتند از: کنترل از طریق طراحی سازه ای و کنترل از طریق طراحی فرایند یا طراحی بکمک دیدگاه انجماد جهت دار. در دسته اول از روشها تلاش می‌شود قطعه بگونه ای طراحی شود که پس از انجماد توزیع عیوب در قطعه یکنواخت باشد و یا عیوب در قسمتهای غیر حساس قطعه واقع شوند. در روش طراحی فرایند بکمک دیدگاه انجماد جهت دار تلاش می‌شود قطعه ای عاری از عیوب انقباضی تولید شود که برای این منظور از تغذیه گذاری استفاده می‌شود. بطور کلی طراحی یک سیستم تغذیه‌رسانی شامل معین کردن تعداد، مکان، شکل و ابعاد تغذیه ها بمنظور تولید یک قطعه سالم می‌باشد. هدف از این پژوهش تلاش در جهت دستیابی به روشی بهینه بمنظور طراحی اتوماتیک سیستم تغذیه‌گذاری در فرایند فولادریزی در قالبهای ماسه ای می‌باشد. بمنظور تکمیل بحث در این قسمت، در ادامه مراحل مختلف فرایند ریخته‌گری در قالبهای ماسه‌ای به اختصار مرور خواهد شد.

مراحل اصلی تولید قطعات فولادی بروش ریخته‌گری در قالبهای ماسه‌ای عبارتند از: طراحی سازه‌ای قطعه (طراحی از

^۲ Peritectic

^۳ Face centered cubic (FCC)



شکل ۲.۱: شماتیک انواع انقباض حجمی حین سرد شدن مذاب از دمای بارریزی تا دمای محیط.

دیدگاه شرایط کاری قطعه)، طراحی سیستم راهگامی و تغذیه‌گذاری، مدلسازی، قالبگیری، تهیه ذوب (با استفاده از کوره‌های قوس الکتریکی یا کوره‌های القایی و غیره)، عملیات کیفی مذاب، ریخته‌گری، تخریب قالب و خروج قطعه پس از پایان انجماد، عملیات تمیزکاری (مثل ساچمه‌زنی) و عملیات ماشین‌کاری. مهمترین وظیفه عملیات کیفی مذاب گاززدایی بویژه اکسیژن زدایی از مذاب می‌باشد. برای جلوگیری از عیوب گازی میزان اکسیژن حل شده در مذاب می‌بایست کمتر از ۱۰۰ واحد در میلیون^۴ باشد. برای این منظور حدود ۰/۰۵-۰/۰۳ درصد وزنی آلومینیوم مورد نیاز است که با احتساب بازیابی ۳۰-۵۰ درصدی این فلز در مذاب، حدود ۰/۱ درصد وزنی آلومینیوم می‌بایست اندکی پیش از ریخته‌گری فلز مذاب به پاتیل افزوده شود. برای ریخته‌گری آلیاژهای فولاد معمولاً از پاتیل‌های کف‌ریز استفاده می‌شود (برای اطلاع از جزئیات بیشتر این فرایند به مرجع شماره [۲] مراجعه شود). تذکر این نکته ضروری است که طراحی هر یک از مراحل ذکر شده در بالا تابع مراحل دیگر بوده و نمی‌توان این مراحل را بطور مستقل از یکدیگر در نظر گرفت. از آنجا که امکان بررسی کلیه این موارد در این تحقیق میسر نبود، تلاش شد با در نظر گرفتن فرضیات مناسب مساله ساده شده و روشی برای طراحی بهینه سیستم تغذیه‌گذاری در چارچوب این فرضیات توسعه یابد. البته بمنظور آگاهی از محدودیتهای روش لازم است فیزیک حاکم بر تشکیل عیوب انقباضی با عمق بیشتر مورد مطالعه قرار گیرد.

از آنجا که در خلال این نوشتار به دفعات زیاد از اصطلاح "کیفیت متالورژیکی مذاب" استفاده خواهد شد، لازم است مفهوم خاص مورد نظر از کاربرد این واژه در این پژوهش مشخص شود. در این تحقیق منظور از اصطلاح "کیفیت متالورژیکی مذاب" میزان خلوص مذاب (بصورت کیفی) نسبت به گازهای حل شده و حبابهای گازی از پیش موجود درون مذاب می‌باشد.

^۴ Parts per million (ppm)

فصل ۲

تئوری تشکیل عیوب انقباضی حین انجماد

"We build too many walls and not enough bridges (Isaac Newton 1643-1727)"

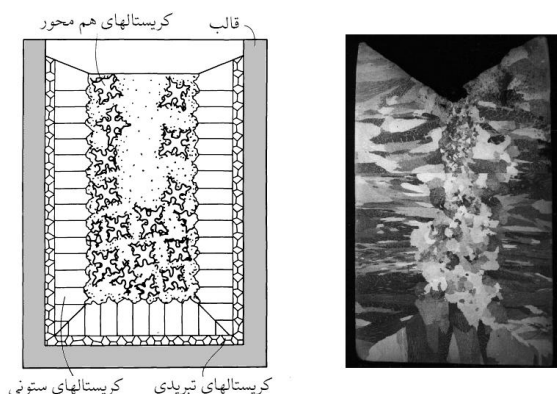
"Science requires both observation and comprehension. Without observation there are no facts to be comprehended; without comprehension science is mere documentation. The basis for comprehension is theory, and the language of theoretical science is mathematics (William Ockham 1288-1348)"

در این فصل تئوری انجماد و تشکیل عیوب انقباضی برای آلیاژهای ریختگی با دامنه انجمادی کوتاه مورد بررسی قرار خواهد گرفت. اگر چه تمرکز این پژوهش بروی کنترل عیوب انقباضی درون قطعات ریخته شده می‌باشد، لکن بعلت ارتباط تنگاتنگ نحوه تشکیل و توزیع عیوب انقباضی با عیوب گازی، مکانیزم پیدایش عیوب گازی از دیگر مواردی است که در این فصل مطالعه خواهد شد. در این راستا ابتدا جوانه زنی عیوب انقباضی-گازی مورد بررسی قرار خواهد گرفت و با یادآوری محدودیت‌های مربوط به مدل‌های موجود مدل عمومی برای تشکیل ناپیوستگی در مایعات ارائه خواهد شد. در ادامه توابع معیار پیش‌بینی عیوب انقباضی مورد بازبینی قرار خواهند گرفت و برخی از محدودیت‌های این روشها که تاکنون شناخته شده نبوده ذکر می‌شود. همچنین خانواده جدیدی از توابع معیار با محدودیت‌های کمتر معرفی خواهد شد. بررسی مطالعات تجربی انجام شده توسط سایر محققین و همچنین آزمایشات تجربی انجام شده در این پژوهش مکمل مباحث انجام شده در این فصل خواهد بود.

۱.۲ ساختار حاصل از انجماد

در ریخته‌گری فولادهای ساده کربنی، کربن به عنوان عنصر آلیاژی اصلی محسوب شده و رفتار انجمادی این آلیاژها را می‌توان توسط دیاگرام تعادلی دو جزئی آهن-کربن (شکل ۱.۱) پیش‌بینی کرد. با ریختن فلز مذاب در قالب ابتدا فلز مذاب در تماس با دیواره سرد قالب قرار می‌گیرد که بعلت فوق تبرید بالا و شرایط مناسب برای جوانه زنی غیرهمگن، لایه ای نازک

از کریستالهای هم محور^۱ روی دیواره قالب شکل می‌گیرد. نرخ انجماد در این مرحله معمولاً توسط انتقال حرارت کنترل می‌شود. در ادامه با انجام انتقال حرارت و نفوذ عنصر آلیاژی (کربن) درون مذاب (بعلا حلالیت کمتر در فاز جامد)، شیب حرارتی و غلظتی در مذاب ایجاد می‌شود. در این مرحله نرخ انجماد و ساختار حاصل از آن توسط فوق تبرید ترکیبی کنترل می‌شود. ساختار حاصله از این مرحله معمولاً یک ساختار ستونی از دیواره های قالب بسمت مرکز قطعه خواهد بود. بسته به میزان فوق گداز مذاب، ترکیب شیمیایی، شرایط جوانه زنی، ضخامت قطعه و توان سردکنندگی قالب، انجماد می‌تواند شامل رشد دانه های هم محور در قسمتهای میانی قالب در مراحل پایانی انجماد باشد (شکل ۱.۲). برای مطالعه بیشتر در خصوص مکانیزمهای مختلف انتقال از شرایط رشد ستونی به هم محور^۲ به مقاله مروری ارائه شده در [۴] مراجعه شود.



شکل ۱.۲: ساختار دانه بندی حاصل از انجماد در قطعات ریختگی: تصویر شماتیک (چپ) و مقطع ساختار مربوط به انجماد شمش آلومینیم ۴ درصد مس (راست).

بطور کلی بسته به میزان فوق تبرید ترکیبی^۳ پیدایش سه نوع ریز ساختار انجمادی محتمل می‌باشد. فرض کنید ترکیب شیمیایی و دمای ذوب آلیاژ اولیه بترتیب با C_0 و T_L نمایش داده شوند. مطابق شکل ۲.۲ ترکیب شیمیایی جامد اولیه kC_0 خواهد بود. اگر غلظت فازهای جامد و مایع بترتیب با C_s و C_l مشخص شوند، ضریب توزیع^۴ k ، برابر با $k = C_s/C_l$ خواهد بود. در مورد انجماد فولادهای کم کربن ضریب توزیع کمتر از واحد می‌باشد. لذا با پیشروی جبهه انجماد عنصر آلیاژی به داخل مذاب پس زده شده و بتدریج غلظت مذاب نسبت به عنصر آلیاژی افزایش می‌یابد. فرض کنید تجمع عنصر آلیاژی در جلوی فصل مشترک جامد-مایع در ضخامت محدود معادل δ_c اتفاق می‌افتد. فرض کنترل تجمع عنصر آلیاژی جلوی فصل مشترک توسط نفوذ عنصر آلیاژی درون مذاب نتیجه می‌دهد: $\delta_c = 2D_c/V_s$ بطوریکه D_c و V_s بترتیب نمایانگر ضریب نفوذ عنصر آلیاژی در مذاب و سرعت پیشروی جبهه انجماد هستند. با توجه به شکل ۲.۲ در صورتی که شیب حرارتی درون مذاب از یک حد بحرانی کمتر باشد؛ مطابق با رابطه (۱.۲)؛ جبهه انجماد بصورت ناپایدار رشد کرده و فصل مشترک مایع-جامد بصورت ناصاف در می‌آید. در اینصورت بسته به میزان شیب حرارتی درون مذاب ریز

^۱Equiaxed

^۲Columnar to equiaxed transition (CET)

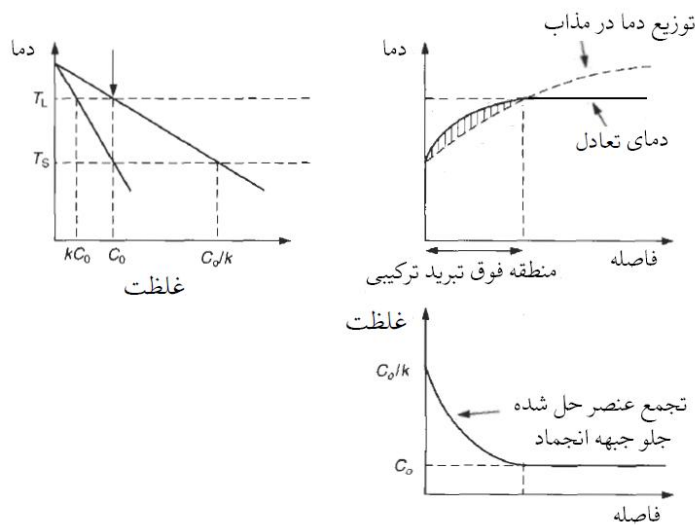
^۳Constitutional supercooling

^۴Distribution coefficient

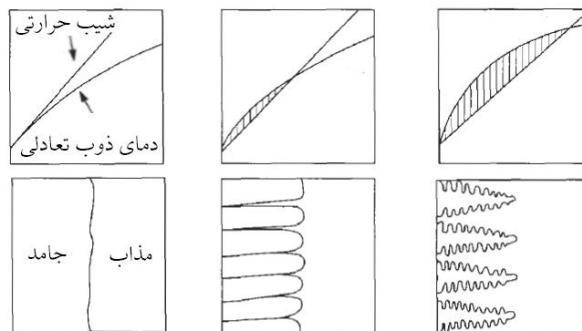
ساختار حاصل از انجماد بصورت سلولی^۵ یا دندریتی^۶ خواهد بود. در صورت عدم وجود فوق تبرید ترکیبی فصل مشترک مایع-جامد بصورت مسطح رشد کرده و ریزساختار موزائیکی^۷ را نتیجه می‌دهد.

$$\frac{G_l}{V_s} < -\frac{m_l C_0 (1-k)}{k D_c} \quad (1.2)$$

در رابطه (۱.۲)، G_l شیب حرارتی جلوی فصل مشترک مایع-جامد بوده و m_l شیب خط لیکوئیدوس در دیاگرام تعادلی دو جزئی می‌باشد. در مورد فولادهای ساده کربنی بعلت ضریب نفوذ بالای کربن در فازهای مایع و جامد توزیع غلظت کربن تقریباً بصورت تعادلی (مطابق با قانون اهرم) خواهد بود [۵].



شکل ۲.۲: ارتباط دیاگرام تعادلی آلیاژی با ضریب توزیع کمتر از واحد و ایجاد فوق تبرید ترکیبی حین انجماد [۶].

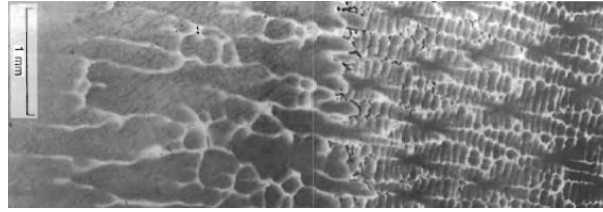


شکل ۳.۲: انواع رشد فصل مشترک بر حسب مقدار فوق تبرید ترکیبی حین انجماد: رشد مسطح (چپ)، رشد سلولی (وسط) و رشد دندریتی (راست). شیب حرارتی و دمای ذوب تعادلی (بالا) و ریز ساختار حاصله (پایین).

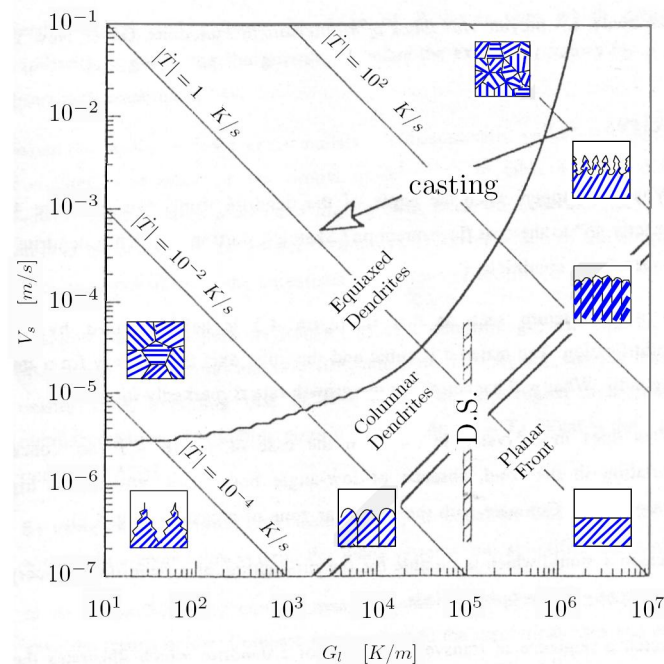
شکل ۳.۲ بطور شماتیک سه نوع مکانیزم رشد ذکر شده را نشان می‌دهد. شکل ۴.۲ ریز ساختار حاصل از انجماد یک فولاد کم آلیاژی را نشان می‌دهد که؟؟؟ بشکل جهت دار (از سمت چپ به راست در تصویر) منجمد شده و با افزایش سرعت

^۵Cellular
^۶Dendritic
^۷Plannar

سرمایش، ریز ساختار حاصل از انجماد از حالت مسطح به سلولی و سپس از سلولی به دندریتی تبدیل شده است.



شکل ۴.۲: ریز ساختار حاصل از انجماد یک فولاد کم آلیاژ: با افزایش سرعت سرمایش (از چپ به راست) ساختار از حالت مسطح به سلولی و سپس دندریتی تغییر شکل داده است [۷].



شکل ۵.۲: تاثیر تغییرات G_t و V_s بر ریز ساختار حاصل از انجماد [۶].

در شرایط عملی (نظیر ریخته گری در قالبهای ماسه‌ای) انجماد اغلب بصورت دندریتی (هم محور یا ستونی) انجام می‌شود. شکل ۵.۲ بطور شماتیک اثر تغییرات شیب دما در جلو فصل مشترک مذاب-جامد و سرعت پیشروی جبهه انجماد را بر ریزساختار نهایی حاصل از انجماد نشان می‌دهد. مطابق شکل، نسبت G_t/V_s نوع ریز ساختار را مشخص می‌کند بطوریکه با کاهش این پارامتر ریزساختار از حالت ستونی به هم‌محور تغییر شکل می‌دهد. در رشد ستونی هم با کاهش این نسبت ریزساختار از حالت موزائیکی به حالت سلولی و در نهایت دندریتی تبدیل می‌شود. همچنین پارامتر $\dot{T} = G_t V_s$ کنترل کننده ظرافت ریزساختار می‌باشد بطوریکه افزایش این پارامتر باعث ظریف‌تر شدن ریزساختار می‌شود [۶].

۲.۲ تئوری جوانه زنی عیوب انقباضی و گازی حین انجماد

جوانه زنی عیوب حین انجماد را می‌توان بعنوان مهمترین مرحله تشکیل عیوب انجمادی (بخصوص عیوب انقباضی و گازی) در قطعات ریختگی بشمار آورد. در عمل ابعاد و نحوه توزیع عیوب در قطعه تابع شرایط جوانه زنی عیوب حین انجماد می‌باشد. یکی از کاملترین تئوریهای مربوط به جوانه‌زنی در سیستمهای غیرهمگن توسط ویلارد گیبس^۸ ارائه شد. بدلیل جامعیت و سادگی زیاد، مدل گیبس بطور گسترده‌ای در منابع مربوطه مورد استفاده قرار گرفته است. بعنوان مثال در منابع مربوط به مهندسی و علم مواد، بخصوص در زمینه محاسبات کمی مربوط به جوانه‌زنی عیوب حاصل از انجماد، مدل جوانه زنی گیبس از عمومیت زیادی برخوردار است. این مساله در حالی است که بعلت محدودیتهای زیاد، امروزه نتایج مربوط به مدل گیبس تنها بعنوان نتایجی کیفی معتبر می‌باشند. لازم به تذکر است که بسیاری از این محدودیتهای توسط خود گیبس یادآوری شده‌اند. در جهت رفع محدودیتهای مربوط به مدل گیبس، ژوهانس واندروالس^۹ [۹] مدل نوینی را بمنظور بررسی ترمودینامیکی سیستم‌های غیر هموزن بر اساس مکانیک محیط‌های پیوسته ارائه کرد. بر خلاف مدل گیبس، این مدل تغییرات خواص فیزیکی را از فاز زمینه به فاز تشکیل شده بصورت پیوسته در نظر می‌گیرد. سالها بعد، مدل ترمودینامیکی واندروالس توسط جان کان^{۱۰} و جان هیلارد^{۱۱} [۱۰، ۱۱، ۱۲] برای بررسی جوانه زنی در سیستم‌های غیرهموزن تعمیم داده شد. در ادامه نسخه‌های مشابهی از این مدل تحت عنوان مدل‌های بر اساس تئوری تابع چگالی^{۱۲} [۱۳، ۱۴] نیز توسعه پیدا کردند. در سالهای اخیر تلاشهای زیادی در جهت توسعه مدل گیبس تحت عنوان مدل تعمیم یافته گیبس صورت گرفته است که نتایج این تحقیقات حاکی از جامعیت بیشتر و محدودیتهای کمتر این مدلها می‌باشد. اگر چه این روشها توانستند برخی از محدودیتهای مدل گیبس را برطرف کنند، ولی امروزه فقدان یک مدل جامع که بتواند مسائل مربوط به جوانه‌زنی در سیستم‌های غیرهمگن را بصورت کمی پوشش دهد بشدت احساس می‌شود. در ادامه این قسمت مدل جوانه زنی گیبس و برخی از مدل‌های جدیدتر به اختصار مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۱.۲.۲ مدل کلاسیک جوانه زنی گیبس

امروزه از مدل جوانه زنی گیبس بعنوان مدل کلاسیک جوانه‌زنی نام برده می‌شود. این مدل در قالب دو مقاله متوالی در سالهای ۱۸۷۵ و ۱۸۷۷ توسط گیبس ارائه شده که این مقالات در [۸] جمع آوری شده‌اند. در این مدل، سیستم غیر هموزن دوفازی توسط یک سیستم ایده‌آل شامل دو فاز هموزن دارای یک فصل مشترک کاملاً مشخص جایگزین می‌شود. انرژی داخلی^{۱۳}

^۸Willard Gibbs (1839-1903)

^۹Johannes Diderik van der Waals (1837-1923)

^{۱۰}John Werner Cahn (1927-present)

^{۱۱}John Hilliard

^{۱۲}Density functional theory

^{۱۳}Internal energy

U ، آنتروپی S ^{۱۴} و جزء مولی^{۱۵} هر یک از اجزای سیستم n_j ، $j = 1, 2, \dots, k$ توسط رابطه زیر بیان می‌شود:

$$U = U_b + U_c + U_\sigma, \quad S = S_b + S_c + S_\sigma, \quad n_j = n_{jb} + n_{jc} + n_{j\sigma}, \quad (2.2)$$

در رابطه (۲.۲) اندیسهای پایین b ، c و σ بترتیب نمایانگر فاز زمینه^{۱۶}، خوشه^{۱۷} مربوط به فاز جدید و فصل مشترک بین دو فاز می‌باشد. مشابه کمیت‌های حجمی (مثل کمیت‌های مربوط به فاز زمینه و فاز جدید)، روابط اساسی بین کمیت‌های ترمودینامیکی می‌توانند برای کمیت‌های مربوط به فصل مشترک نیز نوشته شوند.

$$dU_\sigma = T_\sigma dS_\sigma + \sum_{j=1}^k \mu_{j\sigma} dn_{j\sigma} + \sigma dA + C_1 d\kappa_1 + C_2 d\kappa_2 \quad (3.2)$$

در (۳.۲) μ پتانسیل شیمیایی، A سطح فصل مشترک، σ تنش سطحی، κ_1 و κ_2 انحناهای اصلی^{۱۸} فصل مشترک، $C_1 = \partial U_\sigma / \partial \kappa_1$ و $C_2 = \partial U_\sigma / \partial \kappa_2$ را نشان می‌دهند. رابطه (۳.۲) را می‌توان بصورت زیر نیز نوشت:

$$\begin{aligned} dU_\sigma &= T_\sigma dS_\sigma + \sum_{j=1}^k \mu_{j\sigma} dn_{j\sigma} + \sigma dA \\ &+ \frac{1}{2}(C_1 + C_2)d(\kappa_1 + \kappa_2) + \frac{1}{2}(C_1 - C_2)d(\kappa_1 - \kappa_2) \end{aligned} \quad (4.2)$$

با فرض اینکه خوشه تشکیل شده شکلی نزدیک به کروی دارد می‌توان از ترم آخر در رابطه (۴.۲) صرفنظر کرد. با در نظر گرفتن $C = C_1 + C_2$ به رابطه (۴.۲) به رابطه زیر ساده می‌شود:

$$dU_\sigma = T_\sigma dS_\sigma + \sum_{j=1}^k \mu_{j\sigma} dn_{j\sigma} + \sigma dA + C d\kappa. \quad (5.2)$$

در (۵.۲)، κ نمایانگر انحنای متوسط^{۱۹} می‌باشد که برابر است با $(\kappa_1 + \kappa_2)/2$. انتگرال گیری از (۵.۲) نتیجه می‌دهد:

$$U_\sigma = T_\sigma S_\sigma + \sum_{j=1}^k \mu_{j\sigma} n_{j\sigma} + \sigma A. \quad (6.2)$$

از ترکیب روابط (۵.۲) و (۶.۲) رابطه جذب سطحی^{۲۰} گیس بدست می‌آید:

$$S_\sigma dT_\sigma + A d\sigma + \sum_{j=1}^k n_{j\sigma} d\mu_{j\sigma} = C d\kappa. \quad (7.2)$$

رابطه (۷.۲) تغییرات خواص ترمودینامیکی را با تغییرات انحنای فصل مشترک نشان می‌دهد. با استفاده از روابط بدست آمده انرژی آزاد کل سیستم بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} U &= T_b S_b + T_c S_c + T_\sigma S_\sigma - P_b V_b - P_c V_c \\ &+ \sum_{j=1}^k (\mu_{jb} n_{jb} + \mu_{jc} n_{jc} + \mu_{j\sigma} n_{j\sigma}) + \sigma A \end{aligned} \quad (8.2)$$

^{۱۴} Entropy

^{۱۵} Mole fraction

^{۱۶} Bulk

^{۱۷} Cluster

^{۱۸} Principal curvatures

^{۱۹} Mean curvature

^{۲۰} Adsorption

$$dU = T_b dS_b + T_c dS_c + T_\sigma dS_\sigma - P_b dV_b - P_c dV_c + \sum_{j=1}^k (\mu_{jb} dn_{jb} + \mu_{jc} dn_{jc} + \mu_{j\sigma} dn_{j\sigma}) + \sigma dA + C d\kappa \quad (9.2)$$

V و P بترتیب نمایانگر فشار و حجم سیستم هستند. فرض برگشت پذیر بودن فرایند و بسته بودن سیستم نتیجه می‌دهد:

$$V = V_b + V_c = \text{const}, \quad S = S_b + S_c + S_\sigma = \text{const}, \quad n_j = n_{jb} + n_{jc} + n_{j\sigma} = \text{const} \quad (10.2)$$

با ترکیب روابط (9.2) و (10.2)، در شرایط تعادل ترمودینامیکی رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$(dU)_{S,V,\{n\}} = (T_c - T_\sigma) dS_c + (T_b - T_\sigma) dS_b + (P_b - P_c) dV_c + \sigma dA + C d\kappa + \sum_{j=1}^k (\mu_{jb} - \mu_{j\sigma}) dn_{jb} + \sum_{j=1}^k (\mu_{jc} - \mu_{j\sigma}) dn_{jc} = 0 \quad (11.2)$$

در نظر گرفتن تغییرات مربوط به متغیرهای مستقل $(S_b, S_c, V_c, n_{jb}, n_{jc})$ در رابطه (11.2) نتیجه می‌دهد:

$$T_b = T_c = T_\sigma, \quad \mu_{jb} = \mu_{jc} = \mu_{j\sigma}, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (12.2)$$

$$P_c - P_b = \sigma \frac{dA}{dV_c} + C \frac{d\kappa}{dV_c} \quad (13.2)$$

با فرض تشکیل خوشه‌های مربوط به فاز دوم در سیستم همگنی شامل فاز زمینه، تغییر انرژی داخلی سیستم عبارتست از:

$$\Delta U = U_{het} - U_{hom} = T_b S_b + T_c S_c + T_\sigma S_\sigma - TS - P_b V_b - P_c V_c + PV + \sum_{j=1}^k (\mu_{jb} n_{jb} + \mu_{jc} n_{jc} + \mu_{j\sigma} n_{j\sigma} - \mu_j n_j) + \sigma A \quad (14.2)$$

فرض کنید خواص ترمودینامیکی فاز زمینه با تشکیل خوشه‌های فاز جدید تغییر محسوسی پیدا نمی‌کند (حجم فاز تشکیل شده نسبت به حجم کل ناچیز است)، در نتیجه: $P = P_b$, $T = T_b$, $\mu_j = \mu_{jb}$ و (10.2) و (14.2) نتیجه می‌دهد:

$$\Delta U = (T_c - T_b) S_c + (T_\sigma - T_b) S_\sigma - (P_c - P_b) V_c + \sum_{j=1}^k (\mu_{jc} - \mu_{jb}) n_{jc} + \sum_{j=1}^k (\mu_{j\sigma} - \mu_{jb}) n_{j\sigma} + \sigma A \quad (15.2)$$

با در نظر گرفتن شرایط تعادل ترمودینامیکی و استفاده از (12.2) نتیجه می‌شود:

$$\Delta U = \sigma A - (P_c - P_b) V_c \quad (16.2)$$

با استفاده از رابطه (۱۳.۲) رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\Delta U = \sigma A - \left(\sigma \frac{dA}{dV_c} + C \frac{d\kappa}{dV_c} \right) V_c \quad (17.2)$$

با فرض اینکه خوشه تشکیل شده شکلی کروی با شعاع R را دارد، (۱۷.۲) به رابطه زیر ساده می‌شود:

$$\Delta U = \frac{1}{3} \sigma A - \left(C \frac{d\kappa}{dV_c} \right) V_c \quad (18.2)$$

تا کنون فرضی در زمینه نحوه انتخاب فصل مشترک یا سطح جدا کننده^{۲۱} بین دوفاز انجام نشده است. این مطلب بدین معنی است که انتخاب این سطح در آنالیز انجام شده توسط گیبس کاملاً اختیاری می‌باشد. بعبارت دیگر سطح جدایش در نظر گرفته شده ماهیت فیزیکی نداشته بلکه تنها یک ماهیت ریاضی دارد. لازم به تذکر است که هر انتخاب برای سطح جدا کننده می‌تواند منجر به مقادیر متفاوتی برای انرژی فصل مشترک و شعاع بحرانی خوشه شود. گیبس در آنالیز خود نشان داد که می‌توان سطح جدا کننده را طوری انتخاب کرد که مقدار کمیت C در محل این سطح برابر صفر باشد. این سطح توسط گیبس بعنوان سطح کشش^{۲۲} نامیده شد. در نظر گرفتن فصل مشترک به عنوان سطح کشش نتیجه می‌دهد:

$$\Delta U = \frac{1}{3} \sigma A \quad (19.2)$$

از آنجا که در محاسبات مربوط به معادله بالا شرط لازم برای نقطه بحرانی انرژی داخلی یعنی رابطه (۱۱.۲) استفاده شده است، کار لازم برای تشکیل خوشه با شعاع بحرانی، جوانه، عبارتست از:

$$W^* = \frac{1}{3} \sigma A = \frac{16\pi\sigma^3}{3(P_c - P_b)^2} \quad (20.2)$$

و شعاع بحرانی جوانه از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$R^* = \frac{2\sigma}{P_c - P_b} \quad (21.2)$$

با فرض کروی بودن خوشه‌ها و سطح کشش بعنوان سطح جداکننده، (۱۳.۲) به معادله یانگ-لاپلاس^{۲۳} تبدیل می‌شود:

$$P_c - P_b = \frac{2\sigma}{R} \quad (22.2)$$

این معادله (بدون توجه کافی به محدودیتهای آن) بطور گسترده ای در منابع مربوط به مدلسازی تشکیل عیوب گازی حین ریخته‌گری فلزات مورد استفاده قرار گرفته است (مثل مرجع [۱۵]). با در نظر گرفتن فرضیات ذکر شده در بالا تغییرات انرژی داخلی سیستم، (۱۶.۲)، برای جوانه زنی حباب در یک فاز همگن بصورت زیر در می‌آید:

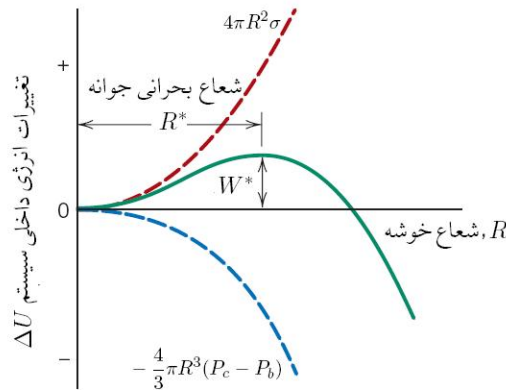
$$\Delta U(R) = 4\pi R^2 \sigma - \frac{4}{3} \pi R^3 (P_c - P_b) \quad (23.2)$$

^{۲۱} Dividing surface

^{۲۲} Surface of tension

^{۲۳} Young-Laplace equation

که نقطه بحرانی این رابطه نسبت به شعاع خوشه از رابطه (۲۱.۲) بدست می‌آید. مطابق شکل ۶.۲ شعاع بحرانی جوانه در رابطه (۲۱.۲) متناظر با نقطه ماکزیمم انرژی داخلی سیستم نسبت به شعاع خوشه تشکیل شده است. این بدین معنی است که خوشه‌هایی با شعاع کمتر از این مقدار پایدار نبوده و تدریجاً از بین می‌روند در حالی که رشد خوشه‌هایی با شعاعی بیشتر از حد بحرانی باعث پایداری بیشتر سیستم می‌شود.



شکل ۶.۲: تغییرات انرژی داخلی سیستم تک فازی نسبت به تغییرات شعاع جوانه تشکیل شده.

جان فیشر^{۲۴} [۱۶] از رابطه (۲۰.۲) برای محاسبه تنش پارگی تئوری مایعات استفاده کرد. این تنش برابر با مقدار فشار منفی لازم برای ایجاد حباب گازی (یا خلا) در داخل مایع است. واضح است برای تشکیل عیوب گازی یا انقباضی حین انجام لازم است این تنش تامین شود. بر اساس آنالیز انجام شده توسط فیشر نرخ جوانه زنی حباب در مایع برابر است با:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{NkT}{h} \exp \left[-(\Delta f_0^* + W^*)/kT \right] \quad (24.2)$$

در این رابطه n برابر است با تعداد اتمهای موجود در مذاب و Δf_0^* برابر با انرژی آزاد لازم برای جابجایی یک اتم بین فاز زمینه و خوشه تشکیل شده می‌باشد. پارگی مایع هنگامی رخ می‌دهد که اولین حباب در زمان t (زمان توقف^{۲۵}) تشکیل شود. بنابراین dn/dt برابر $1/t$ خواهد بود. با حل معادله (۲۴.۲) برای اختلاف فشار لازم جهت جوانه زنی حباب رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\Delta P_t = \sqrt{\frac{16\pi}{3} \frac{\sigma^3}{kT \ln NkTt/h - \Delta f_0^*}} \quad (25.2)$$

اندیس t در رابطه بالا برای نشان دادن وابستگی مقدار اختلاف فشار به زمان در نظر گرفته شده است. محاسبات کمی انجام شده توسط فیشر برای مقادیر مختلف زمان توقف و مقدار کمیت Δf_0^* نشان داد تغییرات تنش پارگی مذاب نسبت به این پارامترها ناچیز می‌باشد. بنابراین او تنش پارگی مایعات را بصورت زیر محاسبه کرد ($\Delta f_0^* = 0, t = 1$):

$$\Delta P = \sqrt{\frac{16\pi}{3} \frac{\sigma^3}{kT \ln NkT/h}} \quad (26.2)$$

^{۲۴}John Fisher

^{۲۵}Relaxation time

با استفاده از رابطه فوق تنش پارگی محاسبه شده برای برخی از مذابهای فلزی در جدول ۱۰۲ آورده شده است. با محاسبه شعاع بحرانی جوانه از (۲۱.۲)، مقدار آن برای مواد ذکر شده در جدول تقریباً کمتر از دو برابر قطر اتمی خواهد بود. در نتیجه تعداد فضاهای خالی موجود در جوانه بحرانی حجمی معادل کمتر از ۶۴ اتم خواهد بود. بر اساس نتایج مربوط به مطالعات تجربی [۱۷، ۱۸] و شبیه سازی‌های کامپیوتری [۱۹، ۲۰] ضخامت فصل مشترک حباب تشکیل شده حدود ۲ لایه اتمی می‌باشد که برای یک خوشه با حدود چند صد اتم، تعداد قابل توجهی از اتمهای خوشه در فصل مشترک قرار می‌گیرند. این مساله فرض گیس را مبنی بر ضخامت کم (نسبت به کل خوشه) و هموزن بودن خواص ترمودینامیکی خوشه تشکیل شده زیر سوال می‌برد. مطابق جدول ۱۰۲ مقادیر محاسبه شده بسیار بزرگ بوده و در شرایط معمول ریخته‌گری امکان دستیابی به چنین تنش‌هایی وجود ندارد. در شرایط عمل، حل شدن ناخالصی‌های فعال در مذاب باعث کاهش تنش سطحی می‌شود. بعنوان مثال حل شدن حدود ۰/۲ درصد وزنی اکسیژن در مذاب آهن باعث کاهش حدود ۵۰ درصدی کشش سطحی خواهد شد. این غلظت بالای اکسیژن در عمل بسادگی قابل حصول است چرا که ضریب توزیع اکسیژن در مذاب آهن حدود ۰/۰۵ است و با غلظت اولیه ۰/۰۱ درصدی اکسیژن در مذاب، در مراحل آغازین انجماد غلظت اکسیژن جلوی جبهه انجماد به مقدار ۰/۲ درصد وزنی می‌رسد. اگر غلظت اکسیژن جلو فصل مشترک مذاب-جامد به اندازه‌ای بالا رود که فاز FeO مایع جلو فصل مشترک تشکیل شود، بعلت تنش سطحی کمتر این فاز (حدود ۰/۵۵ نیوتن بر متر)، تنش پارگی مذاب آهن می‌تواند در بهترین شرایط حدود ۴ برابر کاهش یابد. لکن تنش پارگی مذاب در این شرایط نیز مقدار بسیار بزرگی خواهد بود.

جدول ۱۰۲: تنش پارگی محاسبه شده برای برخی از مذابهای فلزی.

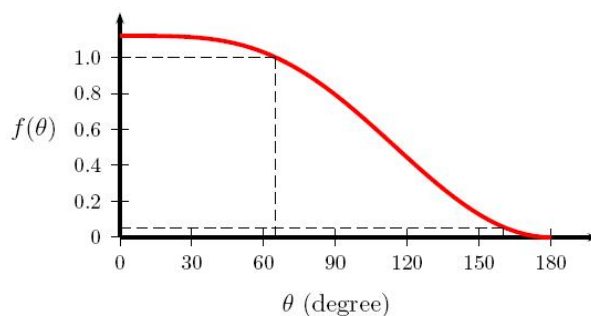
مذاب	تنش سطحی (نیوتن بر متر)	قطر اتمی (نانو متر)	تنش پارگی (اتم‌سفر)
جیوه	۰/۵	۰/۳	۲۲۳۰۰
آلومینیوم	۰/۹	۰/۲۹	۳۰۰۰۰
مس	۱/۳	۰/۲۶	۵۰۰۰۰
آهن	۱/۹	۰/۲۵	۷۰۰۰۰

فیشر همچنین ایده جوانه زنی غیر همگن را نیز مطرح کرده‌است. در صورتی که زاویه ترشوندگی مذاب با سطح موجود

برای جوانه زنی θ باشد. تنش پارگی مذاب می‌تواند با فاکتور $f(\theta)$ کاهش می‌یابد:

$$f(\theta) = 1.12\sqrt{(2 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)^2/4} \quad (27.2)$$

شکل ۷.۲ تغییرات $f(\theta)$ را نسبت به θ نشان می‌دهد. مطابق شکل برای مقادیر زاویه ترشوندگی کوچکتر از ۷۰-۶۰ درجه، جوانه‌زنی غیر همگن مزیتی بر جوانه‌زنی همگن ندارد. بر اساس آزمایشات عملی ارائه شده در مراجع [۲۱] حد بالا مشاهده شده برای زاویه ترشوندگی حدود ۱۶۰ درجه می‌باشد. با در نظر گرفتن این واقعیت، تنش پارگی مذاب می‌تواند در بهترین شرایط جوانه‌زنی غیرهمگن حدود ۲۰ برابر کاهش یابد. لذا بر اساس تئوری ذکر شده کمینه ممکن برای تنش پارگی مذاب آهن حدود ۱۰۰۰ اتم‌سفر خواهد بود. تذکر این نکته ضروری به نظر می‌رسد که تنها ناخالصی‌هایی که بخوبی توسط مذاب



شکل ۷.۲: تغییرات $f(\theta)$ با زاویه تر شونده.

تر نمی شوند می توانند بعنوان مکانهای مناسب برای جوانه زنی حبابها تلقی شوند. این مساله در حالی است که اغلب ناخالصی های موجود در مذاب فلزات مثل اکسیدها و ترکیبات بین فلزی بخوبی توسط مذاب خیس می شوند. یک عامل دیگر که به کاهش تنش پارگی مذاب کمک می کند فشار جزئی گازهای حل شده در مذاب است که بعلت حلالیت کمتر در فاز جامد به فاز مذاب پس زده می شوند. اما مقدار این فشار جزئی ناچیز بوده (کمتر از یک اتمسفر) و تاثیر قابل توجهی در مقادیر محاسبه شده ندارد. بنابراین در یک جمع بندی از مطالب ارائه شده در این قسمت می توان به این نتیجه گیری رسید که یا مدل جوانه زنی گیبس مدل مناسبی برای پیش بینی جوانه زنی عیوب گازی-انقباضی حین انجماد نمی باشد و یا مکانیزمهای دیگری در تشکیل این عیوب نقش دارند.

۲.۲.۲ مدل جوانه زنی توسعه یافته گیبس

همانطور که در قسمت قبل اشاره شد مدل جوانه زنی گیبس دارای محدودیت هایی می باشد که باعث شده است امروزه این مدل تنها به عنوان یک مدل کیفی مورد پذیرش قرار گیرد. در طول سالهای اخیر تلاشهای زیادی در جهت بر طرف کردن این محدودیت ها صورت گرفته است [۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵]. از مهمترین محاسن مدل های توسعه یافته گیبس عبارتند از: در نظر گرفتن تنش سطحی بصورت تابعی از انحنای فصل مشترک (لازم به تذکر است که بر اساس مطالعات تجربی انجام شده، انرژی فصل مشترک تابع انحنای آن می باشد)، بررسی وابستگی تنش سطحی خوشه تشکیل شده در اندازه دلخواه به خواص ترمودینامیکی دو فاز و تغییرات آن در طول فرایند جوانه زنی و رشد، بررسی تشکیل خوشه در ابعاد دلخواه در شرایط عدم تعادل ترمودینامیکی، بررسی فرضیه وجود همزمان خوشه های بحرانی با ابعاد مختلف در دماهای متفاوت که می تواند منجر به ظهور تئوری جوانه زنی غیر همدمما گردد. این مساله از اهمیت بسیار زیادی برخوردار است زیرا می تواند باعث شناخت بهتری نسبت به جوانه زنی در شرایط عملی (غیر تعادلی و غیر همدمما) شود. مدل جوانه زنی توسعه یافته گیبس مطابق با مراجع [۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵] در این قسمت مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

یکی از اولین مشکلات مربوط به توسعه مدل گیبس مشخص کردن مقادیر T_σ و $\mu_{j\sigma}$ در رابطه (۱۵.۲) است. بر اساس مطالعات گسترده انجام شده در سالهای گذشته [۲۷، ۲۸، ۲۹]، فاز سطحی ماهیت مستقلی از خود ندارد. بعبارت دیگر نمی توان خواص ترمودینامیکی فاز سطحی را بدون ابهام تعریف و اندازه گیری کرد. لذا می توان فرض کرد خواص سطحی

خوشه تشکیل شده برابر با خواص توده‌ای یکی از فازها است. به سادگی می‌توان نشان داد در صورتی که این خواص برابر با خواص فاز تشکیل شده در نظر گرفته شود در نهایت مدل جوانه‌زنی گیبس نتیجه می‌شود (برای این منظور کافی است آنالیزی که در ادامه این قسمت ارائه می‌شود را با این فرض دنبال کرد). با پیروی از [۲۹]، فرض می‌شود خواص ترمودینامیکی فصل مشترک برابر با خواص ترمودینامیکی فاز زمینه است:

$$T_{\sigma} = T_b, \quad \mu_{j\sigma} = \mu_{jb} \quad (28.2)$$

با استفاده از رابطه (۲۸.۲)، رابطه (۱۵.۲) بصورت زیر ساده می‌شود:

$$\Delta U = (T_c - T_b)S_c - (P_c - P_b)V_c + \sum_{j=1}^k (\mu_{jc} - \mu_{jb})n_{jc} + \sigma A \quad (29.2)$$

همانطور که قبلاً اشاره شد، گیبس در آنالیز خود از رابطه (۵.۲) بمنظور مدلسازی اثر وجود فصل مشترک بر تغییرات انرژی داخلی سیستم استفاده کرد. در حقیقت گیبس فرض کرده است که وضعیت ترمودینامیکی فصل مشترک می‌تواند توسط $(k+1)$ متغیر مستقل بیان شود. اما برای یک سیستم دو فازی در شرایط عدم تعادل ترمودینامیکی تعداد کل متغیرهای مستقل برای دو فاز عبارتند از $2(k+1)$ (برای هر فاز $k+1$ متغیر می‌توانند بطور مستقل تغییر کنند). در نتیجه هر متغیر مستقل ممکن است موجب تغییر حالت ترمودینامیکی فصل مشترک شود. لذا می‌توان رابطه (۵.۲) را با اضافه کردن $k+1$ متغیر فراگیر^{۲۶} مستقل دیگر که در این قسمت با نماد φ_{ic} نشان داده می‌شوند، به حالت کلی زیر گسترش داد:

$$dU_{\sigma} = T_{\sigma}dS_{\sigma} + \sum_{j=1}^k \mu_{j\sigma}dn_{j\sigma} + \sigma dA + Cdk + \sum_{i=1}^{k+1} \phi_{ic}d\varphi_{ic} \quad (30.2)$$

در (۳۰.۲) ضرایب ϕ_{ic} مشخص کننده مقدار تغییرات انرژی فصل مشترک در اثر تغییرات φ_{ic} می‌باشند. بمنظور برگشت پذیر بودن فرایند لازم است تعدادی قید مناسب به رابطه (۳۰.۲) اضافه شود (بعنوان نمونه رجوع کنید به [۲۶]). بعلاوه اینکه φ_{ic} کمیت‌هایی فراگیر هستند، انتگرال گیری از رابطه (۳۰.۲) رابطه‌ای مشابه (۶.۲) را نتیجه می‌دهد. بنابراین تغییرات انرژی داخلی سیستم ناشی از تشکیل خوشه فاز دوم مشابه قبل از رابطه (۱۵.۲) تبعیت می‌کند. ترکیب روابط (۲۸.۲) و (۳۰.۲) نتیجه می‌دهد:

$$dU_{\sigma} = T_b dS_{\sigma} + \sum_{j=1}^k \mu_{jb} dn_{j\sigma} + \sigma dA + Cdk + \sum_{i=1}^{k+1} \phi_{ic} d\varphi_{ic} \quad (31.2)$$

با در نظر گرفتن روابط (۶.۲) و (۳۱.۲) در کنار هم رابطه توسعه یافته جذب سطحی گیبس نتیجه می‌شود:

$$S_{\sigma}dT_b + Ad\sigma + \sum_{j=1}^k n_{j\sigma}d\mu_{jb} = Cdk + \sum_{i=1}^{k+1} \phi_{ic}d\varphi_{ic}. \quad (32.2)$$

^{۲۶}Intensive

رابطه (۳۲.۲) نشان می‌دهد که در حالت کلی تنش سطحی می‌بایست تابعی از خواص ترمودینامیکی فراگیر فاز تشکیل شده و فاز پایه، و همچنین تابعی از خواص غیر فراگیر^{۲۷} فاز تشکیل شده باشد. بعنوان نمونه می‌توان φ_{ic} را آنتروپی حجمی فاز تشکیل شده، $s_c = S_c/V_c$ ، و چگالی حجمی اجزای سیستم در فاز تشکیل شده، $\rho_{ic} = n_{ic}/V_c$ ، در نظر گرفت:

$$\varphi_{ic} = \rho_{ic}, \text{ for } i = 1, 2, \dots, k, \quad \varphi_{k+1 c} = s_c \quad (۳۳.۲)$$

در نظر گرفتن مجموعه $(T_b, \{\rho_b\})$ بعنوان متغیرهای مستقل بیان کننده حالت ترمودینامیکی فاز زمینه نتیجه می‌دهد:

$$\phi_{ic} = A \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi_{ic}} \right)_{\{\rho_b\}, T_b, \kappa} \quad (۳۴.۲)$$

با روشی مشابه بخش قبلی، شرایط تعادل ترمودینامیکی سیستم برای مدل توسعه یافته گیس نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} (dU)_{S, V, \{n\}} &= [(T_c - T_b)s_c + (P_b - P_c) + \sigma \frac{dA}{dV_c} + C \frac{d\kappa}{dV_c} \\ &+ \sum_{j=1}^k (\mu_{jc} - \mu_{jb}) \rho_{jc}] dV_c \\ &+ \sum_{j=1}^k [(\mu_{jc} - \mu_{jb}) V_c + \phi_{jc}] d\rho_{jc} \\ &+ [(T_c - T_b)V_c + \phi_{k+1 c}] ds_c = 0 \end{aligned} \quad (۳۵.۲)$$

با استفاده از رابطه فوق شرایط تعادل ترمودینامیکی سیستم عبارتست از:

$$(T_c - T_b)s_c + (P_b - P_c) + \sigma \frac{dA}{dV_c} + C \frac{d\kappa}{dV_c} + \sum_{j=1}^k (\mu_{jc} - \mu_{jb}) \rho_{jc} = 0 \quad (۳۶.۲)$$

$$(\mu_{jc} - \mu_{jb}) V_c + \phi_{jc} = 0 \quad \text{or} \quad \mu_{jb} - \mu_{jc} = \frac{A}{V_c} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \rho_{ic}} \right)_{\{\rho_b\}, T_b, \kappa} \quad (۳۷.۲)$$

$$(T_c - T_b)V_c + \phi_{k+1 c} = 0 \quad \text{or} \quad T_b - T_c = \frac{A}{V_c} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s_c} \right)_{\{\rho_b\}, T_b, \kappa} \quad (۳۸.۲)$$

با جایگزین کردن روابط بالا در رابطه (۲۹.۲) رابطه‌ای کاملاً مشابه رابطه (۱۷.۲) برای محاسبه کار لازم برای جوانه‌زنی بدست می‌آید. با فرض کروی بودن جوانه تشکیل شده و سطح کشش بعنوان سطح جدا کننده رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$W^* = \frac{4}{3} \pi R^* \sigma \quad (۳۹.۲)$$

شعاع جوانه بحرانی نیز بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$R^* = \frac{2\sigma}{(T_b - T_c)s_c + (P_c - P_b) + \sum_{j=1}^k (\mu_{jb} - \mu_{jc}) \rho_{jc}} \quad (۴۰.۲)$$

^{۲۷}Extensive

جهت استفاده از مدل توسعه یافته گیبس لازم است تابعیت کشش سطحی با پارامترهای حالت مربوط به دو فاز مشخص شود. از آنجا که پارامترهای حالت تابع اندازه خوشه تشکیل شده هستند، بر خلاف مدل کلاسیک جوانه زنی گیبس، مقدار کشش سطحی تابع اندازه خوشه خواهد بود. در صورتی که فرض شود خواص فراگیر دوفاز با مجموعه‌های $\{\varphi_{ic}\}$ و $\{\varphi_{ib}\}$ نمایش داده شوند، می‌توان کشش سطحی را بصورت تابعی از اختلاف خواص فراگیر دوفاز نوشت [۲۴، ۳۰، ۳۱]:

$$\sigma_{c,b} = \sigma_{c,b}((\varphi_{1,c} - \varphi_{1,b}), (\varphi_{2,c} - \varphi_{2,b}), \dots, (\varphi_{k+1,c} - \varphi_{k+1,b}))$$

بسط تیلور مرتبه دوم این تابع عبارتست از:

$$\sigma_{c,b} = \sum_{j=1}^{k+1} \Theta_j (\varphi_{j,c} - \varphi_{j,b}) + \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} \Theta_{ij} (\varphi_{i,c} - \varphi_{i,b}) (\varphi_{j,c} - \varphi_{j,b})$$

از آنجائیکه $\sigma_{c,c} = 0$ است (کشش سطحی درون یک ماده همگن صفر است) ترم درجه صفر از بسط تیلور حذف شده است. از آنجا که مقدار کشش سطحی مستقل ترتیب دو فاز می‌باشد، کشش سطحی باید نسبت به دو فاز متقارن باشد $(\sigma = \sigma_{c,b} = \sigma_{b,c})$. بنابراین ترمهای درجه فرد از سری تیلور حذف شده و مشتقات مخلوط هم با یکدیگر برابر خواهند بود:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} \Theta_{ij} (\varphi_{i,c} - \varphi_{i,b}) (\varphi_{j,c} - \varphi_{j,b}), \quad \Theta_{ij} = \Theta_{ji} \quad (41.2)$$

با استفاده از این روابط می‌توان نتیجه گرفت تفاوت عمده تئوری کلاسیک و توسعه یافته جوانه زنی مربوط به تفاوت در کشش سطحی استفاده شده در این دو مدل می‌باشد. این مساله باعث شده است برخی از مراجع از کشش سطحی وابسته به اندازه خوشه برای تصحیح مدل کلاسیک جوانه زنی استفاده کنند. از آنجا که معمولاً خوشه تشکیل شده بصورت کروی شکل فرض می‌شود، بسیاری از مراجع تنش کششی را تابعی از شعاع انحناى خوشه در نظر گرفته‌اند [۳۲، ۳۳، ۳۴].

بمنظور آنالیز بیشتر لازم است ابتدا مدلی برای تشکیل عیوب در نظر گرفته شود. پیش از ارائه این مدل لازم است اندکی در خصوص رابطه بین عیوب انقباضی و گازی بحث شود. مطالب ارائه شده مبنی بر سد انرژی بالای مربوط به جوانه زنی ناپیوستگی در مذاب منجر به نتیجه‌گیری زیر می‌شود: در صورتی که غلظت گازهای حل شده در مذاب بیشتر از حد حلالیت گازها در فاز جامد باشد، عیوب گازی بصورت مرجح درون عیوب انقباضی تشکیل می‌شوند. واضح است اگر حجم گازهای آزاد شده بیشتر از عیوب انقباضی باشد عیوب گازی بطور مستقل نیز جوانه زنی خواهند کرد. برای یک آنالیز تئوری می‌توان این دو نوع عیب را با یکدیگر ترکیب کرده و تشکیل ناپیوستگی در مذاب را بعنوان تشکیل فاز گازی (بخار فلز در تعادل با مذاب یا گاز حل شده) در نظر گرفت. برای انجام یک آنالیز کمی لازم است معادله حالت مذاب معلوم باشد. برخلاف

گازها و جامدات، امروزه اطلاعات بسیار کمی در خصوص ساختار فیزیکی مایعات در دسترس بوده و معادله حالتی که بتواند وضعیت ترمودینامیکی یک مایع را با دقت مناسب بصورت کمی پیش‌بینی کند در دسترس نمی‌باشد. این مشکل امکان انجام یک آنالیز کمی با دقت مناسب را غیر ممکن می‌سازد. یکی از کاملترین و متداولترین مدلها در این زمینه مدل سیال واندروالسی [۹] می‌باشد. معادله حالت سیال در این مدل عبارتست از:

$$\left(\Pi + \frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega - 1) = 8\theta, \quad \Pi = \frac{P}{P_c}, \quad \omega = \frac{V}{V_c}, \quad \theta = \frac{T}{T_c}$$

P_c ، V_c و T_c بترتیب مقادیر بحرانی فشار، حجم و دما هستند. معادله حالت ارتباط بین سه خاصیت فراگیر سیستم یعنی فشار، دما و حجم مخصوص را معین می‌کند. مکان هندسی منحنی اسپینودال (حد نیمه پایداری)^{۲۸} در دیاگرام فازی سیستم بکمک معادله حالت قابل محاسبه است. برای این منظور کافی است نقاط بحرانی تابع $\Pi(\theta, \omega)$ را در یک θ ثابت مشخص شوند [۳۵]:

$$\frac{\partial \Pi(\omega)}{\partial \omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(3\omega - 1)^2}{\omega^3} = 4\theta$$

هنگامی که $\theta < 1$ این معادله دو جواب مثبت ω_l^S و ω_g^S را دارد که بترتیب متناظر با حجم مخصوص فازهای مایع و گاز روی منحنی اسپینودال می‌باشند. منحنی باینودال^{۲۹} که مقدار حجم مخصوص فازهای مایع و گاز را در حالت تعادل ترمودینامیکی نشان می‌دهد توسط شرایط لازم برای تعادل ترمودینامیکی بدست می‌آید:

$$\Pi_l(\omega_l^B, \theta) = \Pi_g(\omega_g^B, \theta), \quad \mu_l(\omega_l^B, \theta) = \mu_g(\omega_g^B, \theta)$$

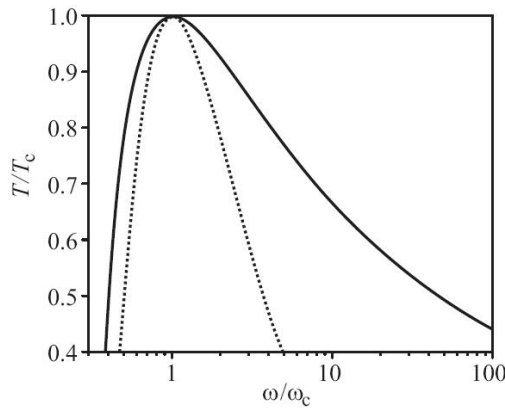
در این رابطه μ پتانسیل شیمیایی و زیرنویس‌های \square_l و \square_g بترتیب نمایانگر فازهای مایع و گاز می‌باشند. شکل ۸.۲ دیاگرام فازی یک سیال واندروالسی را نشان می‌دهد که در آن منحنی‌های اسپینودال و باینودال مشخص شده‌اند. برای تشکیل فاز گازی بروش جوانه زنی و رشد لازم است حالت (نیمه پایدار) اولیه بین منحنی‌های اسپینودال و باینودال در سمت چپ دیاگرام واقع شود. هنگامی که فوق اشباع گازهای حل شده در مذاب خیلی زیاد باشد، می‌توان این حالت را معادل حالت واقع شدن در منطقه اسپینودال در نظر گرفت که باعث می‌شود فاز گازی بدون سد انرژی بصورت پیوسته از مذاب اولیه جدا شود. برای یک سیال واندروالسی پتانسیل شیمیایی و انرژی آزاد هلمولتز بترتیب از روابط زیر محاسبه می‌شوند [۳۵]:

$$\left(\frac{\mu(\omega, \theta)}{P_c V_c}\right) = -\frac{8\theta}{3} \ln(3\omega - 1) + \frac{8\theta\omega}{3\omega - 1} - \frac{6}{\omega} + \Lambda(\theta) \quad (۴۲.۲)$$

$$\left(\frac{f(\omega, \theta)}{P_c V_c}\right) = -\frac{8\theta}{3} \ln(3\omega - 1) - \frac{3}{\omega} + \Lambda(\theta) \quad (۴۳.۲)$$

^{۲۸}Limit of metastability

^{۲۹}Binodal



شکل ۸.۲: دیاگرام فازی یک سیال واندروالسی، منحنی‌های باینودال و اسپینودال بترتیب با خط پر و نقطه چین مشخص شده‌اند، سمت چپ منحنی مربوط به فاز مایع و سمت راست مربوط به فاز گاز می‌باشد.

در این روابط Λ یک تابع معین است که تنها وابسته به دما می‌باشد. فرم صریح این تابع برای انجام آنالیز لازم نمی‌باشد. با استفاده از رابطه (۴۱.۲) می‌توان کشش سطحی بین دو فاز مایع و گاز را بصورت زیر بیان کرد:

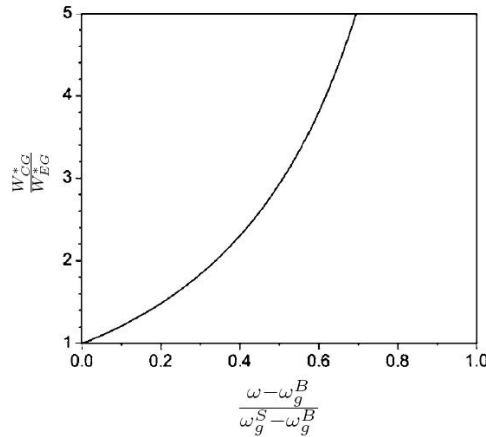
$$\sigma = 2\Theta(\theta)(\rho_l - \rho_g)^2$$

در این رابطه ρ_l و ρ_g بترتیب چگالی فازهای مایع و جامد روی منحنی باینودال در دمای مورد نظر می‌باشند. $\Theta(\theta)$ را می‌توان بکمک رابطه ماکلئود^{۳۰} [۲۹] بصورت زیر تقریب زد:

$$\Theta(\theta) \approx V_c^{-4}(\rho_l - \rho_g)^{\frac{3}{2}}$$

با استفاده از مدل واندروالسی و تقریب اشاره شده برای کشش سطحی، می‌توان مقدار کمی کار لازم برای جوانه‌زنی همگن را از مدل توسعه یافته گیبس محاسبه کرد. فرض کنید کار لازم برای جوانه‌زنی همگن در مدل کلاسیک گیبس و مدل توسعه یافته گیبس بترتیب با W_{EG}^* و W_{CG}^* نمایش داده شوند. شکل ۹.۲ تغییرات $\frac{W_{CG}^*}{W_{EG}^*}$ را نسبت به فوق اشباع فاز گازی در دمای نسبی $\theta = 0.7$ برای یک سیال واندروالسی نشان می‌دهد. لازم به تذکر است که این نسبت بصورت عمومی برای یک سیال واندروالسی محاسبه شده است. برای انجام محاسبات برای یک سیال خاص لازم است رابطه تحلیلی کشش سطحی برای آن سیال مورد دسترس باشد. مطابق شکل ۹.۲ در مقادیر فوق اشباع‌های کم، کار لازم برای جوانه‌زنی در مدل توسعه یافته گیبس به مقدار قابل ملاحظه‌ای کاهش یافته است. لکن کار لازم هنوز بسیار بزرگ بوده و نمی‌تواند فاصله زیاد بین محاسبات تئوریک و نتایج تجربی را توجیه کند. بنظر می‌رسد در موارد مربوط به فوق اشباع‌های کم، مکانیزمهای جوانه‌زنی دیگری در شکل‌گیری ناپیوستگیها حین انجماد فعال باشند. لازم به تذکر است که برخلاف مدل کلاسیک گیبس، در این مدل سد انرژی جوانه‌زنی با نزدیک شدن به منطقه اسپینودال بسمت صفر میل می‌کند.

^{۳۰} Macleode



شکل ۹.۲: تغییرات $\frac{W_{CG}^*}{W_{EG}^*}$ نسبت به فوق اشباع فاز گازی در دمای نسبی $\theta = 0.7$ برای یک سیال واندر والسی.

۳.۲.۲ مدل جوانه زنی انرژی گرادیان (مدل کان-هیلیارد)

در این قسمت به اختصار به بررسی مدل جوانه زنی کان-هیلیارد [۱۲] پرداخته می‌شود. برخلاف مدل ذره ای اشاره شده در بخش قبل، مدل جوانه زنی کان-هیلیارد بر اساس مکانیک محیط‌های پیوسته پایه ریزی شده است. در [۱۰] مدلی برای کمی سازی انرژی یک سیستم غیر همگن با دامنه ناهمگنی محدود ارائه شده است. در این مدل انرژی آزاد سیستم بصورت مجموع انرژی آزاد سیستم در حالت هموزن و یک ترم گرادیان انرژی بعلت وجود ناهمگنی مدل شده است:

$$F(c) = \int_{\Omega} [f(c) + \kappa (\nabla c)^2] d\mathbf{x} \quad (۴۴.۲)$$

$F(c)$ انرژی آزاد هلمولتز سیستم غیر همگن، Ω دامنه مکانی، $f(c)$ انرژی آزاد هلمولتز سیستم همگن و c تابعی اسکالر است که تغییرات مکانی آن معرف وجود ناهمگنی در سیستم می‌باشد. بعنوان مثال c می‌تواند غلظت فاز دوم در یک سیستم دو فازی باشد. در تغییر حالتی که سیستم با تغییر نظم همراه است c اغلب معرف پارامتر نظم ریزساختاری می‌باشد. در بررسی جوانه زنی عیوب c را می‌توان بعنوان چگالی موضعی ماده در نظر گرفت. پارامتر κ در رابطه (۴۴.۲) برابر است با:

$$\kappa = \left[\frac{\partial^2 f(c)}{\partial c \partial \nabla^2 c} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(c)}{(\partial |\nabla c|)^2} \right]_{\nabla c, \nabla^2 c \rightarrow 0}$$

در ادامه کان و هیلیارد مدل خود را جهت مدلسازی فرایند جوانه زنی مورد استفاده قرار دادند [۱۲]. در فرایند جوانه زنی عیب در حجم ثابت لازم است مقدار ماده در طول فرایند ثابت بماند:

$$\int_{\Omega} (c - c_0) d\mathbf{x} = 0$$

c_0 مقدار اولیه c می‌باشد (واضح است این مقدار برابر مقدار میانگین c نیز خواهد بود). برای تشکیل جوانه ناپیوستگی در یک حجم و دمای ثابت لازم است مشتق انرژی آزاد هلمولتز نسبت به عامل ناهمگنی صفر باشد. در صورتی که متغیر

لاگرانژ متناظر با قید بقای جرم با λ نمایش داده شود، معادله اولر-لاگرانژ متناظر با تابع F عبارتست از:

$$2\kappa\nabla^2 c + \left(\frac{\partial\kappa}{\partial c}\right)(\nabla c)^2 = \frac{\partial f}{\partial c} + \lambda$$

در صورتی که مشابه گیبس فرض شود ابعاد سیستم آنقدر بزرگ است که با تشکیل جوانه تغییر محسوسی در c فاز زمینه ایجاد نمی‌شود، می‌توان λ را با $-\frac{\partial f}{\partial c}|_{c=c_0}$ تقریب زد:

$$2\kappa\nabla^2 c + \left(\frac{\partial\kappa}{\partial c}\right)(\nabla c)^2 = \frac{\partial f}{\partial c} - \frac{\partial f}{\partial c}|_{c=c_0}$$

فرض کنید:

$$\Delta f(c) = f(c) - f(c_0) - (c - c_0)\frac{\partial f}{\partial c}|_{c=c_0}$$

با استفاده از این رابطه معادله اولر-لاگرانژ بصورت زیر در می‌آید:

$$2\kappa\nabla^2 c + \left(\frac{\partial\kappa}{\partial c}\right)(\nabla c)^2 = \frac{\partial\Delta f(c)}{\partial c} \quad (45.2)$$

برای یک سیستم ایزوتروپ یا دست کم سیستمی با تقارن کریستالی مکعبی شکل جوانه بحرانی بصورت کروی خواهد بود. بنابراین رابطه (45.2) بصورت زیر در می‌آید:

$$2\kappa\left(\frac{d^2c}{dr^2}\right) + \left(\frac{4\kappa}{r}\right)\left(\frac{dc}{dr}\right) + \left(\frac{\partial\kappa}{\partial c}\right)\left(\frac{dc}{dr}\right)^2 = \frac{\partial\Delta f(c)}{\partial c} \quad (46.2)$$

شرایط مرزی برای حل این معادله دیفرانسیل عبارتست از:

$$\frac{dc(r=0)}{dr} = 0, \quad c(r=\infty) = c_0$$

با معلوم بودن تابع $f(c)$ می‌توان معادله دیفرانسیل (46.2) را بروش عددی حل کرده و تغییرات c را نسبت به r در یک شرایط ترمودینامیکی مشخص معین کرد. در صورتیکه $c(r)$ جواب معادله دیفرانسیل (46.2) باشد، کار لازم برای جوانه زنی از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$W^* = 4\pi \int_0^\infty \left[\Delta f(c) + \kappa \left(\frac{dc}{dr}\right)^2 \right] r^2 dr \quad (47.2)$$

با فرض مستقل بودن κ از c می‌توان (47.2) را ساده کرده و بفرم زیر نوشت:

$$W^* = 4\pi \int_0^\infty \left[\Delta f(c) - \left(\frac{c-c_0}{2}\right)\left(\frac{\partial\Delta f}{\partial c}\right) \right] r^2 dr \quad (48.2)$$

بمنظور بررسی کمی کار لازم برای جوانه زنی همگن، مدل کان-هیلیارد در بسیاری از مراجع توسط روشهای "عددی" حل شده و نتایج کمی آن برای گستره وسیعی از مواد مهندسی منتشر شده است. به عنوان نمونه می‌توان به [۳۹، ۳۸، ۳۷، ۳۶، ۱۳] اشاره کرد. همچنین در تعدادی از مراجع مثل [۴۱، ۴۰] بررسی‌های "تحلیلی" کمی در ارتباط با این مدل ارائه شده است. جمع‌بندی نتایج کمی ارائه شده نشان می‌دهد این مدل کار لازم برای جوانه زنی را کمتر از مدل کلاسیک گیبس پیش بینی می‌کند. همچنین نتایج نشان می‌دهد با افزایش فوق اشباع سد انرژی جوانه زنی کاهش یافته و با نزدیک شدن به منطقه اسپینودال این سد انرژی بسمت صفر میل می‌کند. نسبت مقدار کار لازم برای جوانه‌زنی پیش بینی شده توسط این مدل به مقدار محاسبه شده توسط مدل گیبس در فوق اشباع‌های کم خیلی کوچک نبوده و همواره بزرگتر از ۰/۱ گزارش شده است. اگر چه این نتایج فاصله بین مشاهدات تجربی و نتایج تئوری را کاهش داده است اما همچنان این فاصله زیاد می‌باشد. بنابراین وجود مکانیزم‌های دیگری در تسهیل فرایند جوانه زنی در فوق اشباع‌های کم بسیار محتمل بنظر می‌رسد.

۴.۲.۲ مدل‌های جوانه زنی غیر کلاسیک (تشکیل ناپیوستگی بدون جوانه زنی)

همانطور که در بخش‌های قبل نشان داده شد، مدل جوانه زنی کلاسیک و نسخه‌های توسعه یافته آن قادر به توجیه نتایج مربوط به مشاهدات تجربی مبنی بر تنش پارگی کم مایعات یا سهولت جوانه‌زنی ناپیوستگی در مایعات نمی‌باشند. برای حل این مساله تحقیقات گسترده‌ای در طی قرن گذشته انجام شده است و مدل‌هایی تحت عنوان مدل‌های غیرکلاسیک جوانه‌زنی ارائه شده است.

یکی از مهمترین مدل‌های ارائه شده جهت توجیه یافته‌های تجربی وجود حباب‌های اولیه بصورت پایدار یا نیمه پایدار در مایع می‌باشد [۴۲]. در این مدل فرض می‌شود همواره تعداد قابل توجهی حباب ناپیوستگی بصورت پایدار با شعاع بزرگتر از شعاع بحرانی [۴۳، ۴۴، ۴۲، ۷] یا بصورت نیمه پایدار [۴۵، ۴۲] در مایع وجود دارند که به کاهش سد انرژی تشکیل ناپیوستگی در مایع کمک می‌کنند. در حقیقت در این مدل تشکیل ناپیوستگی شامل رشد ناپیوستگی روی جوانه‌های از پیش موجود در مایع (بدون نیاز به جوانه‌زنی) می‌باشد. توزیع، ابعاد و پایداری حباب‌های اولیه تابع ترکیب شیمیایی، تاریخچه حرارتی-مکانیکی و شرایط ترمودینامیکی مایع می‌باشد. لازم به تذکر است که امروزه اتفاق نظر بسیار خوبی بر صحت این مدل در میان محققان حوزه‌های مختلف مربوطه وجود دارد بطوریکه تا کنون فرضیه‌ای در جهت رد این مدل ارائه نشده است. لکن کمی‌سازی این مدل بسیار پیچیده و پرهزینه بوده و با در نظر گرفتن ابزارآلات آزمایشگاهی موجود تا حد زیادی غیرممکن می‌باشد. این مساله باعث شده این مدل امروزه بعنوان یک مدل کیفی مورد استفاده قرار گیرد. به همین دلیل سایر مدل‌های ذکر شده در گذشته اعتبار خود را از دست نداده‌اند و می‌توانند به عنوان مکمل در کنار این مدل مورد استفاده قرار گیرند. تلاش‌های اندکی نیز در راستای استفاده عملی این مدل در شبیه‌سازی‌های کامپیوتری انجام شده است. به عنوان نمونه در یکی از تحقیقات اخیر [۴۶]، یک الگوی اولیه برای حباب‌های موجود در مذاب در نظر گرفته شده و سپس توزیع

ناپیوستگی توسط شبیه سازی رشد این حبابها توسط نفوذ اتمی بدست آمده است.

یکی دیگر از مدل‌های غیر کلاسیک جوانه زنی توسط جان کمپل و همکاران [۷، ۴۷، ۴۸] ارائه شده است. در این مدل فرض می‌شود مقدار قابل توجهی پوسته های اکسیدی درون مذاب وجود دارد که در اثر جریان متلاطم سیال تا خورده و تشکیل پوسته اکسیدی دولایه^{۳۱} داده‌اند. همچنین فرض می‌شود این پوسته‌ها بدون جدایش وزنی درون حجم مذاب پخش شده‌اند. سپس فرایند جوانه زنی نا پیوستگی بصورت باز شدن پوسته دولایه شده (بدون نیاز به ایجاد سطح ناپیوستگی جدید) در نظر گرفته می‌شود. کمپل تلاش کرده است [۷، ۴۷، ۴۸] با انجام یکسری از آزمایشات ساده روی مذاب آلومینیوم مدل خود را بصورت غیرمستقیم توجیه کند (بدون مشاهدات میکروسکوپی). اما در تمام نتایجی که کمپل برای توجیه مدل خود ارائه کرده است، مدل وجود حبابهای اولیه نیز می‌تواند رفتارهای مشاهده شده را تا حد زیادی توجیه کند. همچنین کاربرد این مدل محدود به مایعاتی است که تمایل به تشکیل پوسته‌های اکسیدی داشته و بعلاوه وزن مخصوص نزدیک این پوسته‌ها به مذاب، امکان شناور شدن طولانی مدت آنها در مذاب وجود دارد. بنظر می‌رسد علی‌رغم تلاشهای جان کمپل در معرفی مدل خود در دهه گذشته، اقبالی نسبت به این مدل در میان محققان مشاهده نمی‌شود.

۵.۲.۲ جمع بندی مدل‌های جوانه زنی ارائه شده

در این قسمت به اختصار به جمع‌بندی مدل‌های جوانه زنی ارائه شده پرداخته می‌شود. همانطور که اشاره شد تشکیل ناپیوستگی اعم از حفره انقباضی یا حباب گازی نیاز به تشکیل فصل مشترک جدید داخل فاز مایع دارد. بطور کلی تشکیل چنین فصل مشترک‌هایی همراه با فرایند جوانه زنی و رشد خواهد بود. بررسی مدل کلاسیک جوانه زنی نشان داد، مقدار انرژی جوانه‌زنی (یا تنش پارگی مذاب) پیش‌بینی شده توسط این مدل با مقدار مشاهده شده در عمل، تفاوت بسیار زیادی دارد. در صورتیکه عامل ایجاد عیب نفوذ و تجمع جای خالی (حین تشکیل عیوب انقباضی) یا نفوذ و تجمع گازهای حل شده (حین تشکیل عیوب گازی) در نظر گرفته شود، انرژی جوانه زنی در مدل گیبس با افزایش فوق اشباع مذاب نسبت به عامل ایجاد عیب بسمت صفر میل نمی‌کند. این مساله بر خلاف اصول ترمودینامیکی می‌باشد. بررسی مدل‌های توسعه‌یافته گیبس و مدل گرادیان انرژی کان-هیلارد نشان داد، این مدل‌ها همواره مقدار کار لازم برای جوانه زنی را کمتر از مدل گیبس پیش‌بینی می‌کنند. لکن در موارد مربوط به فوق اشباعهای کم، میزان اختلاف کافی نبوده و همچنان نمی‌توان مشاهدات تجربی را توجیه کرد. کار لازم برای جوانه زنی در این مدل‌ها با افزایش فوق اشباع بسمت صفر میل می‌کند. بطوریکه با ورود به منطقه اسپینودال هیچگونه سد انرژی برای ایجاد ناپیوستگی وجود نداشته و تشکیل و رشد عیب بصورت پیوسته در قالب یک تحول اسپینودال انجام خواهد شد. برای پر کردن فاصله میان مدل‌های تئوری و مشاهدات تجربی مدل‌های غیر کلاسیک جوانه زنی بخصوص مدل وجود حبابهای اولیه ناپیوستگی درون مذاب مطرح شدند.

هنگامی که کیفیت متالورژیکی مذاب بالا بوده و غلظت گازهای حل شده در مذاب پایین باشد، عامل تشکیل ناپیوستگی

^{۳۱}Bifilm

نفوذ و تجمع جاهای خالی خواهد بود. از آنجا که پیشروی جبهه انجماد با نفوذ جاهای خالی از فصل مشترک مایع-جامد بسمت فاز مایع انجام می‌شود، غلظت مذاب بطور پیوسته نسبت به جاهای خالی افزایش می‌یابد. لکن به علت مقدار محدود انقباض حین انجماد مقدار این فوق اشباع در مراحل اولیه انجماد ناچیز خواهد بود. بنابراین می‌توان انتظار داشت عیوب انقباضی درون فاز مذاب و در مراحل پایانی انجماد از یک مقدار مذاب کم با فوق اشباع بسیار بالا نسبت به جاهای خالی ایجاد شود. توجه شود که در مراحل اولیه انجماد فوق اشباع عامل ایجاد ناپیوستگی پایین بوده و سد انرژی جوانه زنی زیاد خواهد بود. همچنین بعلاقی بالا بودن کیفیت متالورژیکی مذاب احتمال وجود حبابهای ناپیوستگی درون مذاب اولیه کم خواهد بود. بنابراین می‌توان انتظار داشت برای مذاب‌هایی با کیفیت متالورژیکی بالا عیوب انقباضی بصورت متمرکز (عیوب ماکروسکپی) در مناطق میانی قطعه ظاهر شوند. همچنین محتمل است بسته به کیفیت متالورژیکی مذاب و هندسه قطعه جامد پایانی تغییر شکل داده (بعلاقی فشار نسبی منفی ایجاد شده در اثر تجمع جاهای خالی) و مقدار یا بخشی از انقباض قطعه توسط تغییر شکل سطوح جبران شود.

هنگامی که کیفیت متالورژیکی مذاب پایین بوده یا مقدار قابل توجهی گاز حل شده درون مذاب وجود داشته باشد، مذاب در مراحل اولیه انجماد می‌تواند نسبت به عامل ایجاد عیب غنی شده و به فوق اشباع برسد. همچنین وجود حبابهای اولیه در مذابی با کیفیت متالورژیکی پایین بسیار محتمل می‌باشد. این مساله باعث تسهیل جوانه زنی ناپیوستگی در مذاب خواهد شد. بنابراین در این موارد بسته به میزان گازهای حل شده در مذاب می‌توان توزیع پراکنده عیوب گازی را در قطعه انتظار داشت. واضح است در این موارد عیوب انقباضی با عیوب گازی ترکیب شده و در صورتی که حجم عیوب گازی بیشتر از حجم مربوط به انقباض باشد، عیوب انقباضی غیر سطحی می‌توانند بطور کامل درون عیوب گازی قرار گیرند. بنابراین انتظار می‌رود توزیع عیوب انقباضی تحت تاثیر میزان گازهای حل شده در مذاب باشد. لازم به تذکر است که توزیع این عیوب می‌تواند تابع پارامترهای دیگری نیز باشد که در بخش‌های بعد مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۶.۲.۲ بررسی تئوری-تجربی نحوه توزیع عیوب انقباضی-گازی در قطعات ریختگی

در این بخش نحوه توزیع عیوب انقباضی و گازی در قطعات ریختگی بررسی خواهد شد. اگرچه تمرکز اصلی این تحقیق بر روی عیوب انقباضی می‌باشد، لکن بعلاقی ارتباط تنگاتنگ عیوب انقباضی و گازی با یکدیگر سعی می‌شود اثر وجود عیوب گازی بر شکل نهایی و نحوه توزیع عیوب انقباضی مورد توجه قرار گیرد. ابتدا لازم است یک دسته بندی کلی برای عیوب انقباضی بر اساس شکل ظاهری در نظر گرفته شود (لازم به ذکر است که این دسته بندی کامل نبوده و تنها بمنظور سهولت ارائه مباحث در این قسمت می‌باشد. برای یک دسته بندی کامل به اطلس عیوب قطعات ریختگی [۴۹، ۵۰] مراجعه شود). دسته بندی عیوب در این قسمت مطابق با دسته بندی است که توسط دورا استفانسکو^{۳۲} ارائه شده است [۵۱، ۵۲]. این دسته بندی تقریباً منطبق بر دسته بندی است که توسط جان کمپل انجام گرفته است [۷]. بطور کلی عیوب انقباضی

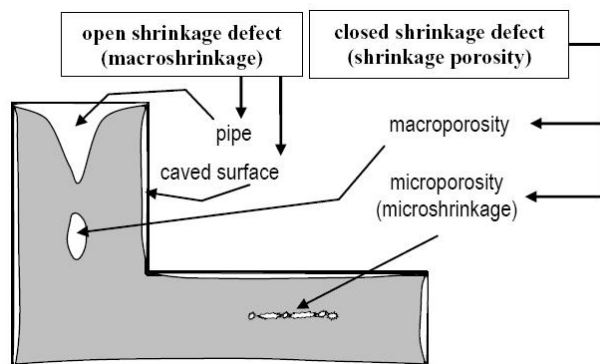
^{۳۲}Dora M. Stefanescu

ریخته‌گری را می‌توان به دو دسته عیوب ماکروسکپی (عیوب متمرکز) و عیوب میکروسکپی تقسیم کرد. در دسته اول عامل ایجاد عیوب (جای خالی یا گازهای حل شده) بصورت متمرکز در نقاطی از قطعه جمع می‌شوند طوری که مقطع منطقه حاوی عیب اغلب با چشم غیر مسلح قابل تشخیص می‌باشد. در دسته دوم عیوب انقباضی بصورت پراکنده درون قطعه توزیع شده‌اند و ابعاد آنها معمولاً کوچک بوده و مقطع حاوی این عیوب معمولاً با چشم غیر مسلح قابل تشخیص نمی‌باشد. ابعاد این عیوب می‌تواند از ۱۰ میکرومتر تا چند میلیمتر تغییر کند. البته لازم به تذکر است که محدوده بالای این عیوب بخصوص هنگامی که با عیوب گازی ترکیب شوند، معمولاً با چشم غیر مسلح قابل رویت می‌باشد. عیوب انقباضی میکروسکپی در مناطق میانی قطعه و با فاصله از سطوح ایجاد می‌شوند. با افزایش دامنه انجماد و کاهش کیفیت متالورژیکی مذاب فاصله این عیوب از سطوح قطعه کاهش می‌یابد.

عیوب انقباضی ماکروسکپی نیز خود به دو گروه عیوب انقباضی خارجی (راه به در) و داخلی تقسیم می‌شوند. در نوع اول دامنه مکانی به سطوح قطعه رسیده و حفره انقباضی به محیط خارج ارتباط دارد. در نوع دوم حفره عیب بسته بوده و درون قطعه واقع می‌شود. عیوب ماکروسکپی انقباضی خارجی را نیز می‌توان به دو دسته زیر تقسیم کرد: کشیدگی عمقی یا پایپ^{۳۳} و کشیدگی جزئی سطحی^{۳۴}. مکانیزم پیدایش این دو نوع عیب کاملاً متفاوت از یکدیگر می‌باشد. در نوع اول نقطه پایانی انجماد در منطقه عیب واقع می‌شود و ظاهراً عیب بصورت یک کشیدگی عمیق از سطح قطعه می‌باشد. با افزایش کیفیت متالورژیکی مذاب، کاهش فاصله انجماد و افزایش ضخامت قطعه امکان پیدایش این عیب افزایش می‌یابد. در نوع دوم عیوب انقباضی خارجی، ظاهر عیب بصورت کشیدگی کم عمق از سطح قطعه می‌باشد بطوریکه سطوح قطعه بخصوص در مناطق دور از گوشه‌ها بصورت خمیده با انحنا به سمت داخل دیده می‌شوند. معمولاً تشخیص این عیب با چشم غیر مسلح دشوار می‌باشد. مکانیزم پیدایش این عیب عبارت از تغییر شکل پوسته جامد ایجاد شده در اثر فشار منفی ایجاد شده درون قطعه ناشی از تراکم جاهای خالی در مکانهای پایانی انجماد است. پیدایش این عیب بشدت تابع شرایط هندسی قطعه می‌باشد. هنگامی که کیفیت متالورژیکی مذاب بالا باشد، پیدایش این عیب در قطعاتی که سطوح گسترده‌ای دارند (مثل قطعات صفحه‌ای شکل) محتمل می‌باشد. از آنجا که در تشکیل این نوع از عیوب مناطق میانی قطعه توسط تغییر شکل پلاستیک سطوح قطعه تغذیه می‌شوند، جان کمپل [۷] پدیده ایجاد این نوع از عیب را تغذیه رسانی در حالت جامد یا تغذیه رسانی پلاستیک نامیده است. شکل ۱۰.۲ بصورت شماتیک انواع عیوب ذکر شده در این قسمت را نشان می‌دهد. در ادامه این بخش نحوه توزیع عیوب انقباضی در قطعات ریخته‌گری بررسی خواهد شد. در این راستا نتایج مشاهدات تجربی موجود در مراجع با مباحث تئوری ارائه شده در بخش قبل مقایسه خواهد شد. همچنین بمنظور تکمیل مباحث نتایج آزمایشات تجربی انجام شده در این پژوهش نیز در کنار سایر نتایج ارائه خواهد شد. بنظر می‌رسد برای سهولت در ارائه مباحث بهتر است ابتدا شرایط انجماد جهت دار و سپس شرایط عمومی انجماد مورد بررسی قرار گیرد.

^{۳۳} Pipe shrinkage

^{۳۴} Surface sink shrinkage



شکل ۱۰.۲: شماتیک تقسیم بندی انواع عیوب انقباضی در قطعات ریخته گری [۵۲].

توزیع عیوب انقباضی-گازی در شرایط انجماد جهت دار: در این قسمت فرض می شود فصل مشترک جامد-مایع از دیدگاه ماکروسکوپی مسطح است. باید توجه شود که فصل مشترک می تواند از دیدگاه میکروسکوپی ناصاف باشد. مثلاً انجماد دندریتی با دندریتهای موازی را می توان جزء این رژیم انجمادی در نظر گرفت. یکی از نکات اولیه در این بحث مکان جوانه زنی عیب در این نوع از انجماد می باشد. مشاهدات تجربی روی انجماد آب و پلیمرهای کریستالی [۵۳] نشان می دهد عیب (حباب گازی یا حفره انقباضی) اغلب بصورت ناهمگن روی فصل مشترک جامد-مایع یا درون دره ای ایجاد شده لابلای دندریتهای موازی می زند. بر اساس نتایج مربوط به آزمایشات تجربی، توزیع عیوب حین انجماد جهت دار تا حد زیادی تحت تاثیر شتاب ثقل می باشد. بنابراین لازم است مطالعات مربوطه برای حالات مختلف جهت گیری فصل مشترک نسبت به جهت شتاب ثقل انجام شود.

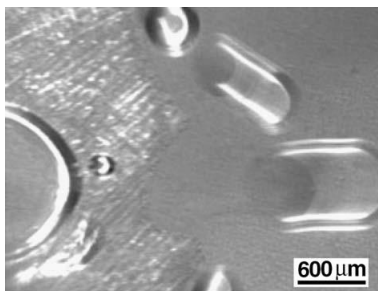
رفتار حبابهای گازی در انجماد جانبی (عمود بر جهت شتاب ثقل) پلیمرهای شفاف کریستالی توسط هان مورد بررسی قرار گرفته شده است [۵۳]. نتایج این تحقیق نشان داده است که حبابهای گازی در دره ای بین دندریتهای موازی زده و پس از رشد اولیه سه نوع رفتار از خود نشان می دهند. در مورد اول حباب پس از پیدایش درون حفره دندریتی بصورت کروی رشد می کند. سپس رشد ایزوترپ حباب در اثر محدودیت توسط بازوهای دندریتی متوقف شده و حباب در جهت طول دندریت رشد کرده و حبابی کروی شکل^{۳۵} را تشکیل می دهد. در مورد دوم حبابها پس از پیدایش مشابه مورد قبل ابتدا بصورت محدود شده لابلای اسکلت دندریتی رشد می کنند. لکن پس از مدتی حبابها یکباره از اسکلت دندریتی جدا شده و با سرعت زیاد به سمت خارج اسکلت دندریتی تخلیه می گردند (شکل ۱۱.۲). در این فرایند ممکن است قسمتی از شبکه دندریتی در اثر نیروی وارد شده از سوی حبابها خرد شود. در مورد سوم که رفتاری بین دو مورد ذکر شده است حباب پس از رشد از لابلای شبکه دندریتی به داخل مذاب جهش می کند. نیروی محرکه مربوط به این پدیده و مورد قبل ناشی از نیروی کشش سطحی می باشد. اگر طول حباب با l شعاع انحنا آن در عمق دندریت با r_1 و شعاع انحنا آن در قسمت بالاتر نسبت به

^{۳۵}Worm-like

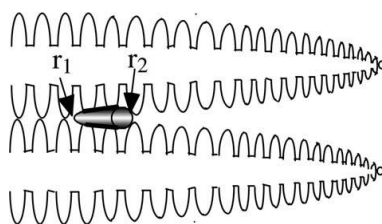
عمق دندریت با r_2 نشان داده شود، نیروی پرش اعمال شده به حباب بر واحد سطح عبارتست از [۵۳]:

$$F = \frac{2\sigma}{l} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

در این رابطه، σ نمایانگر تنش کششی حباب-مایع می‌باشد (مراجعه شود به شکل ۱۲.۲). آزمایش مشابهی بروی آلیاژ آلومینیوم-مس انجام پذیرفته [۵۴] و مدل ریاضی نیز برای آن ارائه شده است [۵۵].

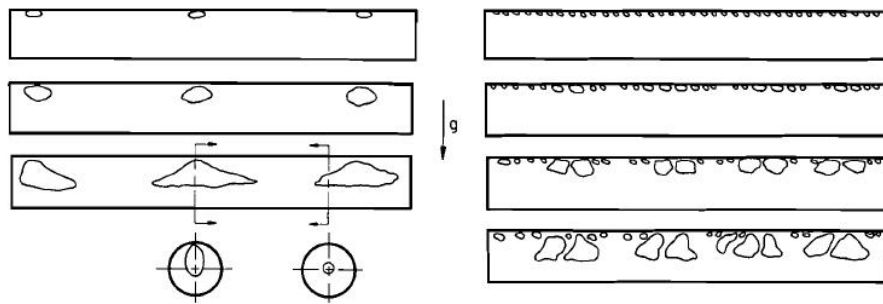


شکل ۱۱.۲: جوشش حباب در رشد دندریتی جهت‌دار [۵۳].



شکل ۱۲.۲: شماتیک یک حباب محدود شده درون شبکه دندریتی حین انجماد جهت‌دار [۵۳].

انجماد جانبی مذابهای شفاف پلیمری در مقاطع استوانه‌ای شکل مورد بررسی قرار گرفته شده است [۵۶، ۵۷]. در این مطالعات محور استوانه‌ها عمود بر جهت شتاب ثقل در نظر گرفته شده و توزیع عیوب در دو حالت مذاب گاز زدایی شده و مذاب گاز زدایی نشده مورد بررسی قرار گرفته شده است. نتایج این آزمایشات مربوط به مذاب گاز زدایی شده نشان می‌دهد با پیشروی اولیه جبهه انجماد تعداد کمی حفره روی فصل مشترک جامد-مایع تشکیل می‌شود. سپس با پیشروی بیشتر جبهه انجماد این حفرات بهم پیوسته و بزرگ می‌شوند. همچنین این حفرات به سمت قسمت‌های مرکزی قالب رانده می‌شوند بطوریکه در پایان تعداد اندکی حفره بزرگ را بصورت حفرات انقباضی مرکزی می‌توان در ساختار انجمادی مشاهده کرد. بعلاوه اثر شتاب ثقل، مکان هندسی این حفرات بسمت قسمت‌های بالایی قالب انحراف پیدا کرده است (شکل ۱۳.۲). نتایج همین آزمایشات در مورد مذاب گاز زدایی نشده نشان می‌دهد، تعداد زیادی حباب روی فصل مشترک جوانه زده و مشابه قبل با پیشروی جبهه انجماد حبابها رشد کرده و بسمت قسمت‌های مرکزی متمایل به جهت عکس شتاب ثقل رانده میشوند (شکل ۱۳.۲). همانطور که در شکل ۱۳.۲ مشخص است تفاوت عمده بین حالت گاز زدایی شده و گاز زدایی نشده تعداد و پراکندگی بیشتر حبابها در حالت دوم می‌باشد.

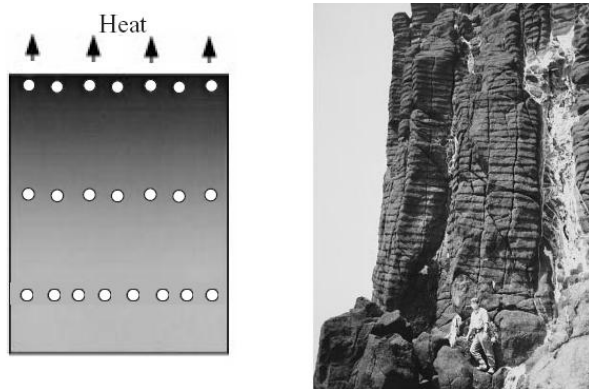


شکل ۱۳.۲: شماتیک تشکیل عیوب انقباضی در انجماد جانبی مقاطع استوانه ای با محور عمود بر جهت شتاب ثقل، تشکیل عیوب با پیشروی انجماد (بالا به پایین) برای مذاب گاز زدایی شده (چپ) و گاز زدایی نشده (راست) [۵۶].

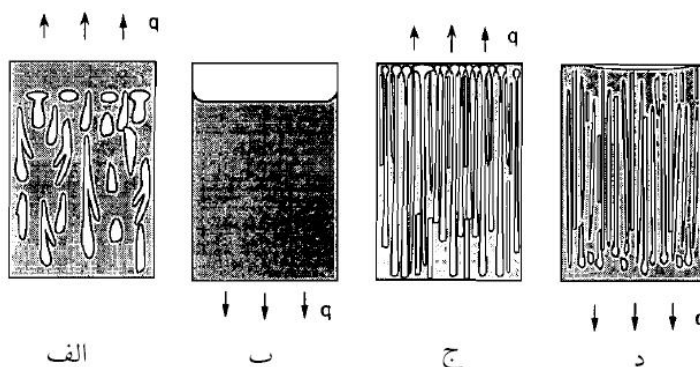
تشکیل حباب‌های هیدروژن حین انجماد جهت‌دار از بالا به پایین (خلاف جهت شتاب ثقل) و پایین به بالا (در جهت شتاب ثقل) برای آلیاژ آلومینیوم-سیلیسیم (A356) مورد بررسی قرار گرفته شده است [۵۸]. نتایج نشان می‌دهد در مراحل اولیه انجماد حبابهای اولیه در منطقه خمیری انجماد تشکیل شده و با پیشروی جبهه انجماد در این منطقه رشد می‌کنند. با افزایش اندازه حباب نیروی ثقل (نیروی بویانسی) روی حباب افزایش پیدا کرده و حباب درون فاز جامد محبوس می‌شود. با حرکت از بالا به پایین چگالی حبابها ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد. در حالت انجماد از پایین به بالا تغذیه رسانی مذاب بسهولت انجام می‌شود. در این حالت حبابهای گازی درون منطقه خمیری تشکیل شده و پس از مقدار رشد کافی بکمک نیروی ثقل از درون منطقه خمیری آزاد شده و به بالا صعود می‌کنند و تنها اندکی از حبابها درون جامد محبوس می‌شوند. نویسنده این مقاله علت محبوس شدن حبابها را تشکیل لایه اکسیدی روی سطح مذاب دانسته که مانع می‌شود حباب گازی از منطقه خمیری خارج شود. اثر افزایش سرعت سرمایش نیز در این کار مورد بررسی قرار گرفته شده است. نتایج حاکی از ریز شدن حبابها و توزیع یکنواخت تر آنها با افزایش سرعت سرمایش می‌باشد.

آزمایشات مشابهی بروی پلیمرهای شفاف کریستالی صورت گرفته شده است [۵۹، ۶۰]. در این آزمایشات اثر گاز زدایی نیز مورد بررسی قرار گرفت. نتایج این آزمایشات نشان داد در انجماد از بالا به پایین برای مذاب گاز زدایی شده، ابتدا منطقه ای عاری از عیب تشکیل می‌شود. سپس با پیشروی جبهه انجماد مذاب نسبت به عامل تشکیل عیب غنی شده (انقباض ناشی از انجماد و مقدار اندکی از گازهای حل شده) و حبابهای ریز روی جبهه انجماد جوانه می‌زنند. پس از مقداری رشد اولیه، رشد این حبابها محدود به فضاها بین دندریتی شده و حبابهای کرمی شکل را نتیجه می‌دهد. یکی از مشاهدات قابل توجه در این کار وجود یک ساختار تناوبی معیوب درون نمونه است. در حقیقت پس از تشکیل یک ردیف حبابهای کرمی شکل پس از منطقه سالم اولیه، مذاب نسبت به عامل تشکیل عیب رقیق شده و منطقه ای عاری از عیب تشکیل می‌شود. سپس با رشد منطقه عاری از عیب، جوانه زنی مجدد حبابها را روی فصل مشترک بعلت اشباع مذاب از عامل ایجاد عیب مجدداً مشاهده می‌شود. تشکیل این ساختار تناوبی در مراجعی دیگری نیز گزارش شده [۶۱، ۶۲] و مدل ریاضی نیز برای آن ارائه شده است. مطالعات تئوری انجام شده نشان می‌دهد، دامنه تناوب این حبابها با پیشرفت انجماد افزایش می‌یابد [۶۲].

لکن نتیجه تجربی برای اثبات این پیش‌بینی تئوری گزارش نشده است (شکل ۱۴.۲). الگوی توزیع عیوب انقباضی-گازی برای حالت گاز زدایی نشده مشابه حالت قبل است. لکن طول منطقه بدون عیب اولیه کوتاه‌تر شده و دامنه نوسان و طول حبابهای کرمی شکل نیز کوتاه‌تر می‌شود. بطور کلی در این حالت حجم حبابها بیشتر و توزیع آنها یکنواخت‌تر خواهد بود (شکل ۱۵.۲). برای حالت انجماد از پایین و مذاب گاز زدایی شده نتایج [۵۹] حاکی از تشکیل تعداد اندکی حباب در



شکل ۱۴.۲: تشکیل عیوب انقباضی در انجماد جهت‌دار در یک الگوی تناوبی، تصویر شماتیک (چپ) و تشکیل این الگو در انجماد ماگما (راست) [۶۲].



شکل ۱۵.۲: شماتیک انجماد جهت‌دار مذاب گاز زدایی شده (الف) از بالا به پایین، (ب) از پایین به بالا و مذاب گاز زدایی نشده (ج) از بالا به پایین، (د) از پایین به بالا [۵۹].

فصل مشترک جامد-مایع، رشد و بهم پیوستن همزمان آنها با پیشروی جبهه انجماد می‌باشد. در نهایت یک حفره بزرگ با حجمی معادل انقباض حاصل از انجماد در قسمت بالایی قالب تشکیل خواهد شد (شکل ۱۵.۲). از سوی دیگر در حالت انجماد از پایین به بالا برای مذاب گاز زدایی نشده، جوانه زنی تعداد زیاد حباب گازی و رشد محدود شده آنها بین اسکلت دندریتی منجر به ساختاری حاوی حبابهای کرمی شکل می‌شود. البته بطور مشابه موارد ذکر شده در قبل، رها شدن بخشی از حبابها از لابلای شبکه دندریتی نیز گزارش شده است. نکته مهم اینکه طول منطقه عاری از عیب در این حالت کوتاه‌تر خواهد بود (شکل ۱۵.۲).

در اینجا با استفاده از نتایج تجربی مرور شده و رجوع به مطالب تئوری ارائه شده در بخش قبل به جمع بندی نحوه

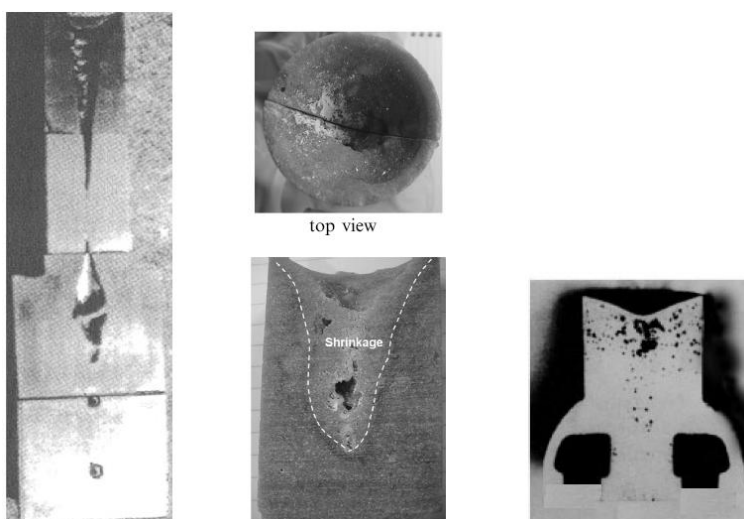
توزیع عیوب انقباضی-گازی در یک انجماد جهت‌دار پرداخته می‌شود. بطور کلی نحوه توزیع عیوب در یک انجماد جهت‌دار بشدت وابسته به کیفیت متالورژیکی مذاب (بخصوص فرایند گاز زدایی) است. با افزایش میزان گازهای حل شده در مذاب با پیشرفت انجماد فوق اشباع مذاب نسبت به عامل ایجاد عیب بیشتر شده و در نتیجه سد جوانه زنی کاهش یافته و تعداد زیادی حباب در منطقه خمیری جوانه می‌زنند. همچنین در یک مذاب با کیفیت متالورژیکی پایین امکان وجود حبابهای اولیه و تسهیل جوانه‌زنی نیز بیشتر می‌باشد. بنابراین در این حالت امکان توزیع پراکنده عیوب در داخل نمونه بسیار محتمل است. همچنین در این حالت طول منطقه اولیه عاری از عیب کوتاهتر خواهد بود. طول این منطقه در مراجع مربوط به تغذیه گذاری به اثر انتهایی معروف است. بنابراین طول اثر انتهایی رابطه مستقیم با کیفیت متالورژیکی مذاب دارد. هنگامی که جهت انجماد در جهت عکس شتاب ثقل باشد، توزیع حبابها یکنواخت‌تر و طول اثر انتهایی نیز کاهش یافته و بسمت صفر میل می‌کند. برای قطعاتی که طول آنها در جهت شتاب ثقل زیاد است، امکان تشکیل الگوی تناوبی عیوب در این رژیم از انجماد بسیار محتمل است. در انجماد جهت‌دار در جهت شتاب ثقل بشرط بالا بودن کیفیت متالورژیکی مذاب می‌توان بطور کامل از محبوس شدن عیوب در نمونه جلوگیری کرد. بنابراین بطور کلی می‌توان پیش بینی کرد که با کاهش کیفیت متالورژیکی مذاب فاصله مذاب رسانی و بازدهی تغذیه رسانی کاهش می‌یابد. همچنین با کاهش کیفیت متالورژیکی مذاب نحوه توزیع عیوب از حالت عیوب ماکروسکپی متمرکز بسمت عیوب میکروسکپی گسترده سوق پیدا می‌کند.

توزیع عیوب در شرایط انجماد چند جهته: در شرایط عملی ریخته‌گری در قالبهای ماسه‌ای انجماد قطعه اغلب الگوی مشخصی نداشته و جبهه انجماد معمولاً از دیواره‌های قالب بسمت مناطق میانی قطعه پیشروی می‌کند. البته مناطق اطراف دیواره‌های قالب و بخصوص مناطق دور از گوشه‌ها معمولاً در ابتدا انجمادی شبه-جهت‌دار را در راستای عمود بر دیواره قالب تجربه می‌کنند. بنابراین مباحث مطرح شده در ارتباط با انجماد جهت‌دار برای این مناطق نیز صادق می‌باشد. لذا زاویه بین راستای انجماد و جهت شتاب ثقل یا اثر گازهای حل شده تأثیری مشابه قبل خواهند داشت. بعنوان مثال با کاهش کیفیت متالورژیکی مذاب طول اثر انتهایی نیز کاهش می‌یابد. اما در یک انجماد چندجهته پدیده‌های دیگری نیز می‌توانند رخ دهند که لازم است بطور مستقل مورد بررسی قرار گیرند.

بطور کلی در یک انجماد چندجهته همواره یک یا چند حوزه مذاب وجود دارد که حجم آنها با گذشت زمان کاهش می‌یابد. این حوزه‌ها را می‌توان به دو گروه تقسیم کرد: حوزه‌های بسته یا ایزوله شده و حوزه‌های مرتبط با محیط یا راه-به-در. منظور از حوزه‌های ایزوله شده مناطقی از مذاب است که توسط مناطق جامد محصور شده‌اند و ارتباط آنها با محیط قطع شده است. در نوع دوم حوزه از یک سمت به قسمتهای جامد شده و از سمت دیگر با محیط بیرون ارتباط دارد. لازم به تذکر است که در تعریف حوزه راه-به-در فرض بر این است که ارتباط حوزه با اتمسفر تا پایان انجماد حفظ شده و نقاط پایانی انجماد سطوح فوقانی حوزه خواهند بود.

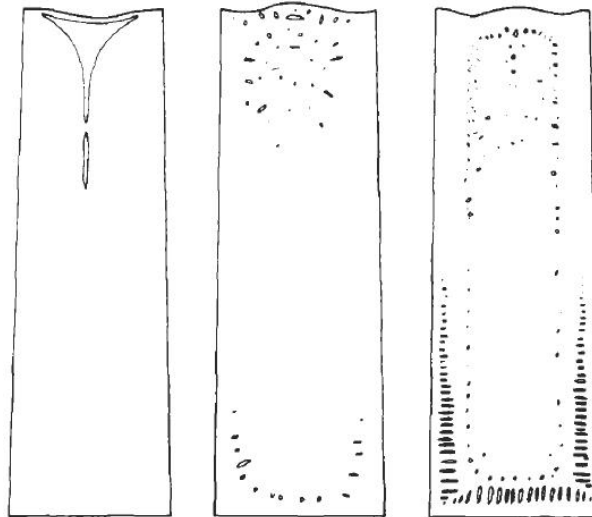
در انجماد یک حوزه راه-به-در به علت ارتباط با اتمسفر مشکلات اشاره شده در ارتباط با جوانه زنی عیب از اهمیت

کمی برخوردار است. هنگامی که دامنه انجماد کم بوده و کیفیت متالورژیکی مذاب بالا باشد، انجماد پوسته ای از دیواره های قالب شروع شده و به سطوح فوقانی حوزه در تماس با اتمسفر ختم می شود. بنابراین در پایان کاهش حجم ناشی از انجماد بصورت یک کشیدگی عمیق در سطح قطعه (پایپ انقباضی) ظاهر خواهد شد (انقباض ماکروسکوپی متمرکز). هنگامی که گاز زدایی به نحو مطلوبی انجام نشده باشد، جوانه زنی گسترده حبابهای گاز در فصل مشترک جامد-مایع باعث ایجاد حفره های گازی محبوس شده درون قطعه می شود. این پدیده شباهت زیادی به انجماد جهتدار مذابی با کیفیت متالورژیکی پایین دارد. بنابراین عیوب انقباضی بصورت گسترده و میکروسکوپی در قطعه ظاهر خواهند شد. بطور کلی می توان گفت، در انجماد یک حوزه راه-به-در با افزایش کیفیت متالورژیکی مذاب عمق کشیدگی از سطح (عمق پایپ) بیشتر شده و توزیع عیوب انقباضی از حالت گسترده بسمت حالت متمرکز میل می کند. شکل ۱۶.۲ این پدیده را برای چند قطعه ریخته گری با اشکال ساده نشان می دهد. ملاحظه می شود با کاهش کیفیت متالورژیکی مذاب از سمت چپ شکل بسمت راست عمق کشیدگی سطحی کاهش یافته و توزیع عیوب از حالت توزیع متمرکز به توزیع گسترده میل می کند. لازم به تذکر است که عدم توزیع گسترده عیوب انقباضی و تشکیل حفره انقباضی متمرکز در قطعه همواره مطلوب نیست. بعنوان مثال معمولا تشکیل پایپ انقباضی در تولید شمش های فولادی پرورش ثقلی مطلوب نمی باشد. زیرا در این حالت قسمت قابل توجهی از شمش می باید جدا شده و بازیافت شود. در حالیکه اگر عیوب انقباضی بصورت تقریبا یکنواخت در شمش توزیع شوند، می توان آنها را در خلال فرایند نورد گرم شمش حذف کرد. برای این منظور معمولا گاز زدایی شمش بصورت ناقص انجام می شود. شکل ۱۷.۲ این مساله را بطور شماتیک نشان می دهد. لازم به تذکر است که این ایده می تواند در تولید بعضی از قطعات ریخته گری نیز مورد استفاده قرار گیرد.



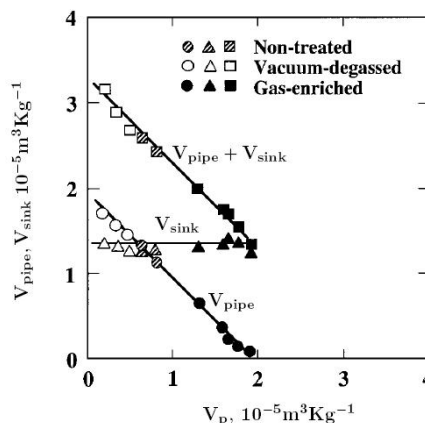
شکل ۱۶.۲: عیوب انقباضی تشکیل شده در چند قطعه ریخته گری با یک حوزه مذاب راه-به-در، با حرکت از سمت چپ به راست (با کاهش کیفیت متالورژیکی مذاب) توزیع عیوب از حالت متمرکز به حالت گسترده تغییر پیدا می کند. تصاویر از چپ به راست بترتیب از مراجع [۵۲]، [۶۳] و [۵۱] اقتباس شده اند.

مطالعه مشابهی در ارتباط با نحوه توزیع عیوب در آلیاژهای آلومینیوم-سیلیسیم صورت گرفته شده است [۶۴] که نتایج



شکل ۱۷.۲: شماتیک توزیع عیوب انقباضی در شمش‌های فولادی قابی ریخته‌گری شده بروش ثقیلی، از چپ به راست عبارتست از: فولاد کاملاً اکسیژن زدایی شده (فولاد کشته شده)، فولاد بصورت ناقص اکسیژن زدایی شده (فولاد قابی) و فولاد اکسیژن زدایی نشده [۷].

تئوری و تجربی اشاره شده را بخوبی پوشش می‌دهد. نتایج این تحقیق نشان داده است میزان کل حجم انقباضی به ازای مقدار مشخص سیلیسیم ثابت می‌باشد. لکن نحوه توزیع آن بستگی به کیفیت متالورژیکی مذاب دارد. نکته جالب اینکه نتایج این تحقیق نشان می‌دهد میزان حجم عیوب باقیمانده در قطعه مستقل از میزان گازهای حل شده می‌باشد و تنها نحوه توزیع آنها تابعی از میزان گازهای حل شده است. بر اساس نتایج این تحقیق، با افزایش میزان گازهای حل شده حجم عیوب توزیع شده بصورت ریز مکهای گازی افزایش یافته و در مقابل حجم عیوب انقباضی متمرکز بصورت کشیدگی (عمیق یا جزئی) سطحی کاهش می‌یابد. شکل‌های ۱۸.۲ و ۱۹.۲ نتایج این تحقیق را برای آلیاژ آلومینیوم با ۱۰ درصد سیلیسیم نشان می‌دهند. لازم به تذکر است که مکانیزم انجماد این آلیاژ تقریباً بصورت پوسته ای می‌باشد.



شکل ۱۸.۲: ارتباط بین حجم عیوب گازی توزیع شده میکروسکوپی (V_p) با عیوب انقباضی (متمرکز) ماکروسکوپی شامل کشیدگی عمیق از سطح (V_{pipe}) و کشیدگی جزئی سطحی (V_{sink}) در آلیاژ Al-10Si [۶۴].

نحوه توزیع عیوب در حوزه‌های مذاب ایزوله شده اندکی پیچیده‌تر از حوزه‌های راه-به-در می‌باشد. در این مورد بعلت



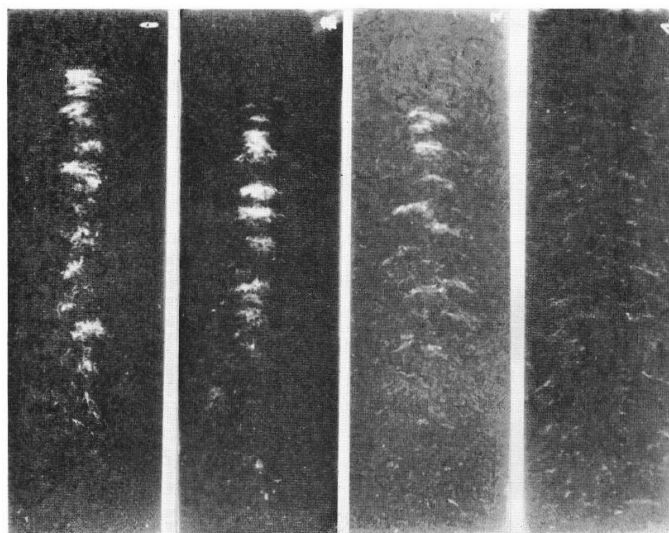
شکل ۱۹.۲: تاثیر گازهای حل شده و عملیات گاز زدایی بر نحوه توزیع عیوب انقباضی گازی در آلیاژ Al-10Si [۶۴].

عدم ارتباط با اتمسفر نحوه توزیع عیوب بشدت وابسته به نحوه جوانه زنی ناپیوستگی در مذاب خواهد بود. مشابه مباحث قبلی هنگامی که کیفیت متالورژیکی مذاب پایین باشد (مثلا عملیات گاز زدایی بدرستی انجام نشده باشد) جوانه زنی عیب ساده بوده و عیوب انقباضی اغلب با عیوب گازی ترکیب شده و توزیع گسترده عیوب را بصورت عیوب میکروسکوپی در قطعه نتیجه می دهد. با بهبود کیفیت مذاب توزیع عیوب از حالت گسترده به حالت متمرکز تمایل پیدا می کند. واضح است مشابه قبل، با افزایش کیفیت متالورژیکی مذاب طول ناحیه اثر انتهایی افزایش می یابد. در این میان یک مورد استثناء وجود دارد که می بایست بطور مستقل مورد بررسی قرار گیرد.

هنگامی که مذاب از کیفیت متالورژیکی بسیار بالایی برخوردار باشد، جوانه زنی ناپیوستگی در مذاب نیاز به عبور از سد انرژی بالایی دارد. این مساله باعث می شود غلظت جاهای خالی در مذاب بصورت پیوسته افزایش یافته و در مناطق پایانی انجماد فشار منفی بالایی درون مذاب ایجاد شود. حال بسته به توزیع دما، دامنه انجماد ضخامت و بخصوص شکل هندسی قطعه ممکن است این فشار باعث تغییر فرم پلاستیک دیواره های منجمد قطعه شده و حفره انقباضی بطور کامل یا جزئی بسته شود. در این حالت کل یا قسمتی از انقباض ناشی از انجماد از طریق حرکت سطوح قطعه بداخل جبران می شود. بنابراین سطوح قطعه به مقدار جزئی بصورت مقعر در می آیند. لازم به تذکر است چنین پدیده ای چندان دور از انتظار نبوده و امکان وقوع آن برای قطعاتی با سطوح صاف و گسترده که در قالب هایی با ضریب انتقال حرارت پایین (مثل قالبهای ماسه ای) ریخته گری می شوند بسیار محتمل است. در این میان مقعر بودن سطوح قطعه احتمال انجام این نوع مکانیزم تغذیه رسانی را تشدید می کند. به عنوان مثال این پدیده را می توان در ریخته گری قطعات فولادی صفحه ای شکل مشاهده کرد. علی رغم اهمیت این موضوع، تنها تعداد اندکی مرجع در ارتباط با بررسی این پدیده وجود دارد. جان کمپل یکی از معدود کسانی است که به بررسی این پدیده پرداخته است. به عقیده جان کمپل [۷]، این پدیده به علت پیچیدگی زیاد کمتر توسط سایر محققین درک شده است و به همین دلیل مراجع زیادی در مورد آن وجود ندارد.

انجماد نمونه های صفحه ای شکل از آلیاژهای پایه نیکل و پایه کبالت توسط کمپل مورد بررسی قرار گرفته شده است [۶۵]. کیفیت متالورژیکی مذاب در پژوهش ذکر شده بسیار بالا بوده و گاز زدایی و ریخته گری در خلاء انجام شده

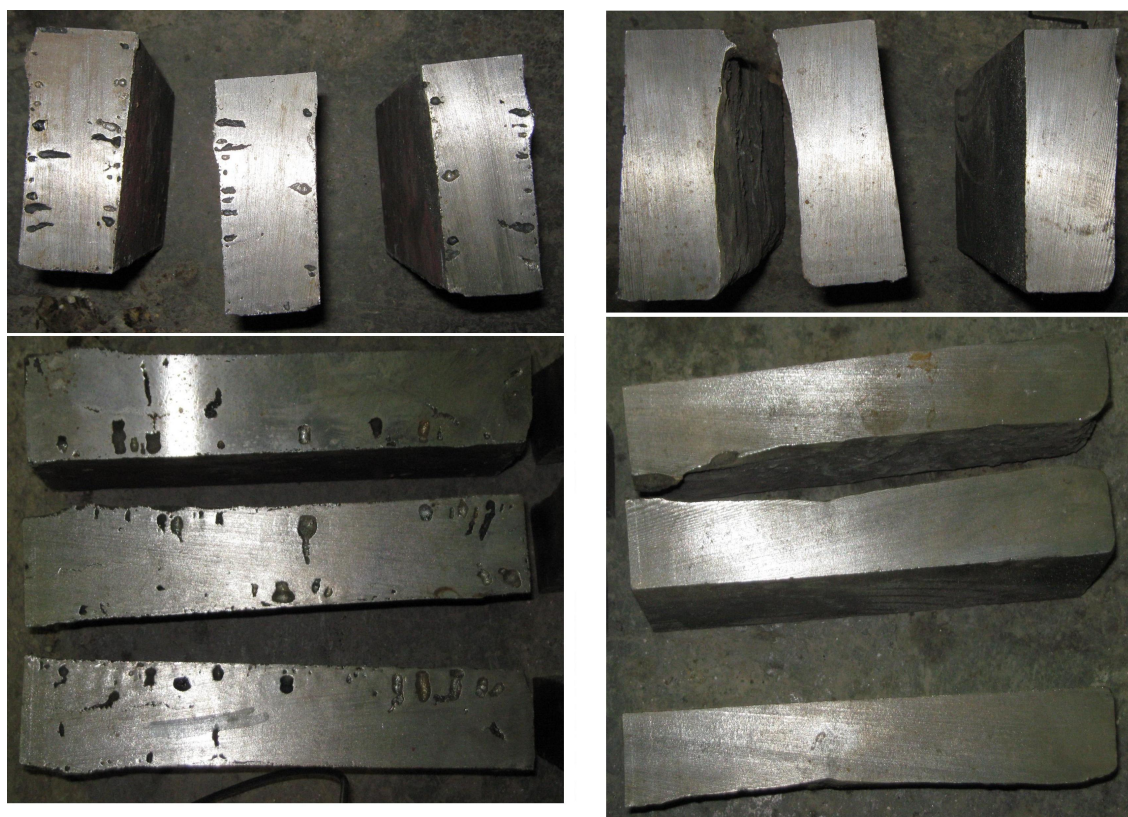
است. در این کار نمونه‌ها بدون تغذیه و توسط فرایند ریخته‌گری دقیق تولید شدند. همچنین ابعاد نمونه‌های استفاده شده $100 \times 30 \times 5$ میلیمتر بوده است. لازم به تذکر است که دامنه انجماد آلیاژهای ذکر شده زیاد بوده و به همین دلیل این آلیاژها بشدت تمایل به ایجاد ریز مکهای انقباضی دارند. نتایج رادیوگرافی اشعه ایکس روی نمونه‌های تولید شده در این کار نشان داد، عیوب انجماد در این آلیاژها از نوع ریز مکهای انقباضی پخش شده در قسمتهای مرکزی نمونه‌ها است که با افزایش پیش‌گرم قالب مقدار این عیوب بتدریج کاهش پیدا کرده و در دمای‌های پیش‌گرم بالا این عیوب تقریباً حذف می‌شوند. علت حذف این عیوب تغییر شکل سطوح نمونه و ایجاد انحناى سطحی گزارش شده است. شکل ۲۰.۲ بخشی از نتایج مربوط به این آزمایش را نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که در آزمایشات اشاره شده دو عامل ابعاد کوچک نمونه‌ها و دامنه انجماد وسیع هر دو در جهت عدم پیدایش پدیده ذکر شده هستند، به همین دلیل پیش‌گرم کردن قالب برای مشاهده این پدیده لازم بوده است.



شکل ۲۰.۲: تاثیر پیش‌گرم قالب بر نحوه توزیع عیوب انقباضی در آلیاژ پایه نیکل با کیفیت متالورژیکی بسیار بالا و تولید شده توسط ریخته‌گری دقیق. تصاویر از چپ به راست بترتیب مربوط به تصویر رادیوگرافی نمونه‌ها با پیش‌گرم قالب ۲۵۰، ۵۰۰، ۸۰۰ و ۱۰۰۰ درجه سانتیگراد می‌باشد [۶۵].

در این پژوهش پدیده ذکر شده برای اولین بار در ریخته‌گری فولاد ساده کربنی در قالبهای ماسه‌ای مورد بررسی قرار گرفت. شرایط ریخته‌گری کاملاً مشابه با شرایط عملی فولادریزی انتخاب شد. مذاب فولاد با ترکیبی در ردیف فولاد CK45 انتخاب شده و در کوره القایی ذوب گردید. عملیات اکسیژن‌زدایی با حدود ۰/۱ در صد وزنی آلومینیوم به مذاب انجام شد. نمونه‌های مربوط به این آزمایش صفحاتی با ابعاد $4 \times 20 \times 40$ سانتیمتر بودند. همچنین نمونه‌ها بدون تغذیه گذاری ریخته شدند و ابعاد سیستم راهگاهی طوری انتخاب شد که تنها انقباض در حالت مذاب را جبران کند. نمونه‌ها در دو حالت مذاب کاملاً گاز زدایی شده با کیفیت متالورژیکی بالا و بطور ناقص گاز زدایی شده ریخته‌گری شده و پس از ریخته‌گری مورد بررسی مخرب قرار گرفتند. شکل ۲۱.۲ نتایج مربوط به این آزمایش را نشان می‌دهد. مطابق شکل

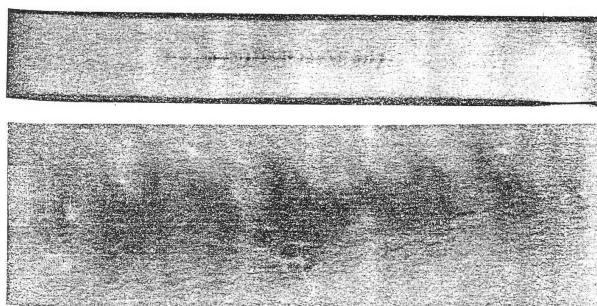
برای مذاب با کیفیت متالورژیکی پایین عیوب انقباضی با عیوب گازی ترکیب شده و توزیع پراکنده عیوب در قطعه مشاهده می‌شود. اما برای مذابی کیفیت متالورژیکی بالا قطعه عاری از عیوب انقباضی بوده و انقباض ناشی از انجماد توسط کشیدگی جزئی از سطح جبران شده است. این کشیدگی سطحی نزدیک گوشه‌ها کم بوده و در مناطق مرکزی قطعه بیشتر می‌باشد. لازم به تذکر است که نمی‌توان نتایج این آزمایش را بطور کامل به دشواری جوانه‌زنی عیب در قطعه و تغییر فرم پلاستیک سطوح نسبت داد. قضاوت دقیق‌تر پیرامون این مساله نیاز به مطالعات بیشتر دارد. لکن بدون تردید می‌توان گفت دشواری جوانه‌زنی عیب در حالتی که کیفیت متالورژیکی مذاب بالا می‌باشد سهم قابل توجهی در حذف عیوب انقباضی داشته است.



شکل ۲۱.۲: تصاویر مربوط به مقاطع نمونه‌های فولادی صفحه‌ای شکل ریخته‌گری شده در قالبهای ماسه‌ای در این تحقیق، مذاب بصورت ناقص اکسیژن زدایی شده (چپ) و مذاب بصورت مناسب اکسیژن زدایی شده (سمت راست).

یکی از نتایج غیر مستقیم این آزمایش غیر محتمل بودن امکان مشاهده عیوب انقباضی متمرکز مرکزی در قطعات صفحه‌ای شکل می‌باشد. به بیان دیگر در این نوع هندسه‌ها ایجاد عیوب انقباضی میکروسکوپی یا کشیدگی جزئی سطحی بسیار محتمل است. این مساله صحت برخی از گزارشات ارائه شده در زمینه اندازه‌گیری طول مذاب رسانی بوسیله آزمایش روی قطعات صفحه‌ای شکل را زیر سوال خواهد برد. به عنوان مثال از نمونه‌های صفحه‌ای و میله‌ای شکل برای بدست آوردن طول مذاب رسانی فولادهای ساده کربنی در مراجع زیادی استفاده شده است [۶۶، ۶۷، ۶۸]. لکن در کلیه این مراجع محققان طول مذاب رسانی را بوسیله رادیوگرافی بکمک اشعه-ایکس اندازه‌گیری کرده‌اند. در این مراجع هیچگونه نتایج مربوط به آزمون مخرب از مقاطع نمونه‌ها ارائه نشده است. به عقیده نویسنده علی‌رغم اعتبار زیاد محققان مربوط به این

مقالات، نتایج ارائه شده از اعتبار زیادی برخوردار نمی‌باشد. علت این امر پیچیدگی اشاره شده در تشکیل عیوب انقباضی بخصوص در قطعات صفحه‌ای شکل است. با توجه به مطالب تئوری و نتایج مشاهدات عملی بررسی شده در این بخش، گزارشات مربوط به طول مذاب رسانی هنگامی قابل اطمینان خواهد بود که ابتدا کیفیت متالورژیکی مذاب توسط روشی مناسب کمی سازی شده و سپس طول مذاب رسانی برای گروه‌های هندسی مشخص بصورت تابعی از کیفیت متالورژیکی مذاب ارائه شود. برای درک بهتر این موضوع به اختصار به بررسی تعدادی از تصاویر رادیوگرافی ارائه شده توسط پلینی [۶۶] پرداخته می‌شود. شکل ۲۲.۲ نتایج رادیوگرافی اشعه-ایکس را برای نمونه‌های میله ای و صفحه‌های شکل بررسی شده توسط پلینی را نشان می‌دهد. سهولت می‌توان دریافت تصویر رادیوگرافی مربوط به نمونه میله‌ای شکل بخوبی نمایانگر وجود انقباض تقریباً متمرکز در قطعه می‌باشد. اما تصویر رادیوگرافی مربوط به نمونه صفحه‌ای شکل مؤید انقباض پراکنده شده در قسمتهای مرکزی نمونه است که نشانگر کیفیت متالورژیکی پایین مذاب می‌باشد. هنگامی که کیفیت متالورژیکی مذاب بالا باشد بسته به شکل هندسی قطعه ممکن است در عمل حالت مخلوطی از تشکیل عیوب انقباضی داخلی و کشیدگی جزئی سطحی مشاهده شود (شکل ۲۳.۲).



شکل ۲۲.۲: نتایج رادیوگرافی اشعه-ایکس برای قطعات میله ای شکل (بالا) و صفحه ای شکل (پایین) ارائه شده در [۶۶].

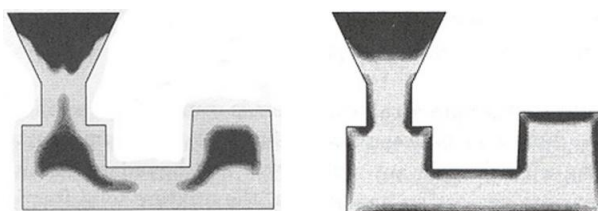


شکل ۲۳.۲: شماتیک نحوه تشکیل عیوب انقباضی متمرکز در قطعات ریخته گری، حفره انقباضی داخلی (چپ)، کشیدگی کم عمق سطحی و حالت مخلوط (وسط) [۷].

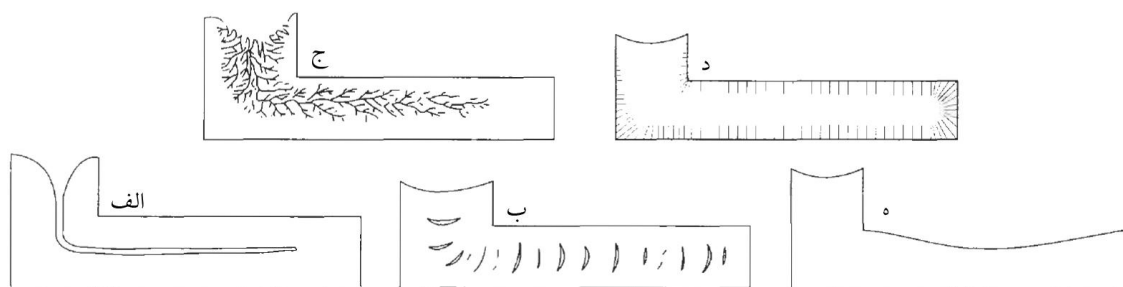
به منظور تکمیل بحث در این قسمت مفید است نحوه توزیع عیوب انقباضی در یک انجماد چند جهته برای آلیاژی با دامنه انجماد بالا نیز به اختصار مورد بررسی قرار گیرد. در این نوع از آلیاژها نمی‌توان مرز مشخصی را برای جبهه انجماد در نظر گرفت بطوریکه پس از گذشت زمان کافی از آغاز انجماد محفظه قالب با مخلوطی از دندریتهای جامد و فاز مایع پر می‌شود. در این حالت در صورتی که سرعت سرمایش خیلی بالا نبوده و کیفیت متالورژیکی مذاب بالا باشد، توزیع عیوب گازی-انقباضی را در نزدیکی سطوح قطعه نتیجه می‌دهد. این مساله دو علت اصلی دارد که عبارتند از: آسانتر بودن جوانه زنی ناپیوستگی در نزدیکی سطوح قطعه به جهت امکان ارتباط با اتمسفر (خمیری بودن انجماد، استحکام کم سطوح قطعه و

نشت پذیری آن حین پیشرفت انجماد را در نظر بگیرید). امکان حرکت عیوب انقباضی-گازی بسمت سطوح فوقانی قطعه در اثر نیروی ثقلی (بنابراین انتظار می رود میزان عیوب در نزدیکی سطوح فوقانی قطعه بیشتر باشد). شکل ۲۴.۲ نتایج حاصل از شبیه سازی کامپیوتری انجام شده که مربوط به دو آلیاژ مختلف با دامنه انجماد کم و زیاد است را در شرایط یکسان انتقال حرارت نشان می دهد [۶۹]. ملاحظه می شود که افزایش دامنه انجماد باعث تغییر نحوه توزیع عیوب انقباضی شده است. در صورت پایین بودن کیفیت متالورژیکی مذاب جوانه زنی عیوب در مناطق داخلی قطعه به سهولت انجام شده که منجر به تشکیل عیوب انقباضی-گازی پخش شده در قسمتهای میانی قطعه می شود.

شکل ۲۵.۲ بطور شماتیک ۵ نوع مختلف از نحوه توزیع عیوب انقباضی-گازی محتمل در یک انجماد چند جهته را نشان می دهد [۷]. از آنجا که جزئیات مربوط به مکانیزم پیدایش هر یک از این ساختارهای انقباضی در همین قسمت بحث شد در ادامه تنها شرایط مربوط به ایجاد هر یک از این ساختارها نام برده می شود. موارد "الف" و "ب" بترتیب مربوط به آلیاژی با دامنه انجماد کوتاه و کیفیت متالورژیکی مناسب و پایین می باشند. موارد "ج" و "د" بترتیب مربوط به آلیاژی با دامنه انجماد زیاد و کیفیت متالورژیکی مناسب و پایین می باشند. هنگامی که کیفیت متالورژیکی مذاب خیلی بالا باشد امکان پیدایش ساختار "ه" وجود دارد (با کاهش دامنه انجماد شانس پیدایش این ساختار بیشتر می شود).



شکل ۲۴.۲: نتایج شبیه سازی توزیع عیوب انقباضی-گازی در آلیاژی با دامنه انجماد کم (چپ) و دامنه انجماد زیاد (راست)، مناطق تیره نشان دهنده وجود عیوب انقباضی-گازی می باشند. [۶۹].



شکل ۲۵.۲: انواع توزیع عیوب انقباضی-گازی در یک انجماد چند جهته [۷].

۳.۲ مروری بر توابع معیار پیش بینی عیوب انقباضی

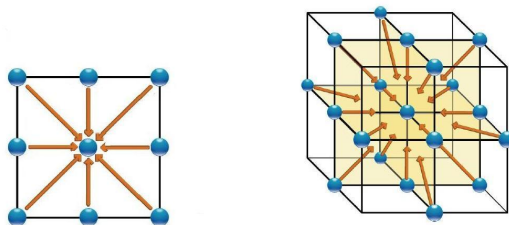
در حل مسائل مربوط به طراحی بهینه سیستم تغذیه گذاری بکمک کامپیوتر لازم است عیوب انقباضی ایجاد شده در قطعه بصورت کمی پیش‌بینی شوند. همچنین برای انجام طراحی در یک بازه زمانی معقول، لازم است هزینه محاسباتی مربوط به پیش‌بینی عیوب تا حد ممکن کم باشد. یکی از روشهای مناسب برای این منظور استفاده از توابع معیار حرارتی برای پیش‌بینی عیوب انقباضی در قطعه می‌باشد. در این روش معمولاً ابتدا معادله انتقال حرارت توسط روشهای عددی حل شده، سپس بکمک تاریخچه حرارتی قطعه احتمال تشکیل عیوب انقباضی در نقاط مختلف قطعه تخمین زده می‌شود. پیش از ورود به بحث مربوط به توابع معیار لازم است تعدادی از پارامترهای مربوط به انتقال حرارت تعریف شوند. دمای هر نقطه، زمان انجماد کل برای قطعه، زمان انجماد موضعی هر نقطه، نرخ سرمایش موضعی در لحظه انجماد، سرعت ایزوترم سالیدوس و شیب دما در جهت حرکت فصل مشترک جامد-مایع (گرادیان تغذیه رسانی) بترتیب با θ ، t_s ، t_f ، R ، v_s و G نشان داده می‌شوند. گرادیان تغذیه رسانی در هر نقطه برابر با مؤلفه گرادیان دما در جهت عمود بر فصل مشترک جامد-مایع است که از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$G = \nabla\theta \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \nabla t_f / |\nabla t_f|$$

در این رابطه \mathbf{n} بردار یکه نرمال (بسمت خارج) بر فصل مشترک جامد-مایع می‌باشد. نیاما^{۳۶} و همکارانش روش ساده‌ای را برای محاسبه گرادیان تغذیه رسانی روی یک شبکه محاسباتی یکنواخت پیشنهاد کردند [۷۰]. فرض کنید نقطه مطلوب روی شبکه محاسباتی با زیر نویس \square_p و مجموعه نقاط موجود در همسایگی نقطه p با \mathcal{N}_p نشان داده شود. روش ارائه شده توسط نیاما را می‌توان بصورت رابطه زیر نوشت:

$$G = \max_{i \in \mathcal{N}_p} (\theta_i - \theta_p) \|x_i - x_p\|_2^{-1}$$

مطابق شکل ۲۶.۲، تعداد نقاط موجود در همسایگی \mathcal{N}_p در حالت دو بعدی و سه بعدی بترتیب ۸ و ۲۶ می‌باشد. با دانستن زمان انجماد موضعی v_s را می‌توان بصورت $v_s = (\nabla t_f \cdot \mathbf{n})^{-1}$ محاسبه کرد.



شکل ۲۶.۲: همسایگی مورد استفاده برای محاسبه گرادیان تغذیه رسانی.

مطالعات تجربی روی طول مذاب رسانی فولادهای ساده کربنی توسط پلینی انجام شد [۶۶]. نمونه‌های استفاده شده

^{۳۶}E. Niyama

در این تحقیق صفحه‌ای و میله ای شکل با ابعاد متفاوت بودند. مشاهدات پلینی نشان داد برای هر نمونه یک گرادیان تغذیه رسانی بحرانی، G_{cr} ، وجود دارد که اگر گرادیان تغذیه رسانی در هر نقطه از نمونه کمتر از این مقدار باشد عیوب انقباضی در آن نقطه ایجاد می‌شود. اما مطابق با مشاهدات پلینی، G_{cr} تابع شکل و اندازه نمونه می‌باشد. نیاما و همکارانش [۷۰] با آزمایش استوانه‌های فولادی با ابعاد مختلف نشان دادند، G_{cr} با $1/\sqrt{t_s}$ متناسب می‌باشد. با استفاده از این نتیجه این محققان معیار خود را بصورت $G\sqrt{t_s}$ معرفی کردند بطوریکه اگر مقدار معیار نیاما در نقطه ای از نمونه کمتر از یک مقدار بحرانی باشد، عیوب انقباضی در آن نقطه ایجاد می‌شود. در ادامه نیاما و همکارانش $\sqrt{t_s}$ را با $(\theta_{liq} - \theta_s)/R$ تقریب زده و معیار خود را بصورت $G\sqrt{R}$ ارائه کردند. نیاما و همکارانش [۷۰] ادعا کردند این معیار عمومی بوده و مقدار بحرانی آن مستقل از ابعاد و شکل قطعه ریختگی می‌باشد. نیاما و همکارانش در پیوست مقاله خود تلاش کردند معیار خود را بصورت تئوری توجیه کنند. آنها برای این منظور از مدل‌سازی یک بعدی (فرض انجماد جهت‌دار) حرکت سیال لابلای اسکلت دندردیتی بکمک قانون داریسی استفاده کردند و نشان دادند افت فشار در اثر اصطکاک بین دندردیتی متناسب با عکس معیار نیاما می‌باشد. این آنالیز باعث شد عده زیادی از محققان معیار نیاما را بعنوان معیاری برای پیش‌بینی عیوب میکروسکوپی انقباضی در نظر گیرند. امروزه معیار نیاما به عنوان یکی از مهمترین معیارهای پیش‌بینی عیوب انقباضی بویژه برای فولادها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

هانسن^{۳۷} و ساهم^{۳۸} [۷۱] با انجام یکسری از شبیه‌سازی‌های عددی بروی قطعات صفحه‌ای و میله‌ای شکل با ابعاد مختلف نشان دادند در صورتی که ابعاد قطعه N برابر شود، گرادیان تغذیه رسانی، نرخ سرمایش و سرعت حرکت سیال درون شبکه دندردیتی، U ، بترتیب N^{-1} ، N^{-2} و N^{-1} برابر می‌شوند. همچنین آنها گزارش کردند مقدار بحرانی معیار نیاما وابسته به شکل قطعه می‌باشد و معیار نیاما یک معیار عمومی نیست. سپس این محققان با آنالیز ابعادی اثر وابستگی به اندازه را حذف کرده و معیار خود را بصورت $GR^{-0.25}U^{-0.5}$ ارائه کردند. اگر چه آنالیز انجام شده توسط این محققان تنها مستقل از ابعاد بودن این معیار را تضمین می‌کند، این محققان ادعا کردند معیار آنها مستقل از شکل نیز می‌باشد. صحت این ادعا تنها بر پایه آزمایشات عددی این محققان بروی نمونه‌های صفحه‌ای و میله‌ای شکل استوار است. بنظر می‌رسد، تا کنون این ادعا توسط محققان دیگری تأیید نشده و نتایج تجربی مناسبی هم برای اثبات آن وجود ندارد.

سیگورث^{۳۹} و وانگ^{۴۰} [۷۲] نیز تشکیل انقباض متمرکز مرکزی را در ریخته‌گری قطعات صفحه‌ای شکل مورد بررسی قرار داده و معیاری هندسی برای پیش‌بینی این عیوب ارائه کردند. این معیار بفرم کلی $G_x\sqrt{t_s} > c \tan \theta_c$ می‌باشد. در این رابطه G_x گرادیان تغذیه رسانی در جهت طولی صفحه، c عددی ثابت و θ_c زاویه بحرانی برای کانال مذاب رسانی ماکروسکوپی داخل صفحه می‌باشد. این محققان این زاویه را حدود ۵-۲ درجه برای فولادهای ساده کربنی تخمین زدند. یکی از نکات شاخص این معیار اتکاء آن به مباحث تئوریک است. بنابراین انتظار می‌رود محدودیتهای آن با استفاده از

^{۳۷} P.N. Hansen

^{۳۸} P.R. Sahn

^{۳۹} G.K. Sigworth

^{۴۰} C. Wang

فرضیات انجام گرفته در تحلیل مشخص شود. از جمله محدودیت‌های آشکار اشاره شده برای این معیار صحت آن تنها برای قطعات صفحه‌ای شکل است. از آنجا که این معیار در حالت کلی بسیار شبیه به معیار نیاما است، می‌توان انتظار داشت مقدار بحرانی معیار نیاما وابسته به شکل باشد.

۴.۲ آنالیز توابع معیار پیش بینی عیوب انقباضی

از دیدگاه ماکروسکوپی در صورتی که از اثر شتاب ثقل بر توزیع عیوب انقباضی صرف‌نظر شود، عیوب انقباضی در مناطق پایانی انجماد (نقاط گرم^{۴۱}) واقع خواهند شد. بنابراین برای مشخص کردن عیوب ماکروسکوپی انجماد لازم است مکان نقاط گرم در قطعه مشخص شوند. از دیدگاه ریاضی نقاط گرم درون قطعه زیر مجموعه‌ای از نقاط بحرانی توزیع زمانی-مکانی دما در قطعه می‌باشد. از آنجا که عیوب انقباضی در نزدیکی دمای انجماد در قطعه ایجاد می‌شوند، می‌توان این مجموعه زمانی-مکانی را به زمان انجماد موضعی محدود کرد. بنابراین شرط لازم برای تشکیل عیوب انقباضی در یک نقطه دلخواه \mathbf{x}_0 عبارتست از:

$$|\nabla\theta(t = t_f, \mathbf{x}_0)| \leq g_c$$

در این رابطه ثابتی کوچک و نزدیک صفر می‌باشد. علت انتخاب g_c به عنوان پارامتری بزرگتر از صفر مشخص کردن محدوده ای با حجم مخالف صفر از قطعه نزدیک نقاط بحرانی به عنوان محدوده معیوب می‌باشد. لازم به تذکر است که مجموعه نقاطی که شرط لازم را ارضاء می‌کنند لزوماً در منطقه معیوب قرار نمی‌گیرند. نقاط زینی^{۴۲} و نقاط سرد^{۴۳} توزیع دما نیز در مجموعه نقاط بحرانی قرار می‌گیرند. برای تفکیک بین این نقاط لازم است از مشتق دوم دما در هر نقطه استفاده شود. ماتریس مشتق دوم دما در هر نقطه ماتریس هسین^{۴۴} نامیده می‌شود. شرط کافی برای اینکه نقطه بحرانی \mathbf{x}_0 نقطه گرم باشد این است که ماتریس هسین دما، H_θ ، در زمان انجماد در آن نقطه معین منفی^{۴۵} باشد. بنابراین شرط کافی برای اینکه نقطه بحرانی \mathbf{x}_0 نقطه گرم باشد عبارتست از:

$$\mathbf{d}^T \mathbf{H}_\theta(t = t_f, \mathbf{x}_0) \mathbf{d} < 0, \quad \forall \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{H}_\theta = \nabla\nabla\theta = \begin{pmatrix} \theta_{xx} & \theta_{xy} & \theta_{xz} \\ \theta_{yx} & \theta_{yy} & \theta_{yz} \\ \theta_{zx} & \theta_{zy} & \theta_{zz} \end{pmatrix}, \quad \theta_{ab} = \frac{\partial^2\theta}{\partial a\partial b}$$

همانطور که در قسمت قبل اشاره شد، نیاما و همکارانش مشاهده کردند ضرب کردن گرادیان تغذیه رسانی در فاکتور $1/\sqrt{t_f}$ مشکل وابستگی معیار پلینی را به اندازه قطعه حل می‌کند. سپس این محققان از یک آنالیز یک بعدی پایدار جریان سیال

^{۴۱} Hot-spot

^{۴۲} Saddle points

^{۴۳} Cold-spot

^{۴۴} Hessian

^{۴۵} Negative definite

استفاده کرده و معیار خود را بصورت تئوری توجیه کردند. با توجه به مباحث گذشته پیرامون تشکیل عیوب انقباضی-گازی در یک انجماد جهت‌دار، تشکیل این عیوب بشدت تابع اثر شتاب ثقل و کیفیت متالورژیکی مذاب می‌باشد. در حالیکه در بررسی تئوری انجام شده توسط نیاما و همکارانش اثر شتاب ثقل و گازهای حل شده در نظر گرفته نشده است. بعلاوه با توجه به دانش نویسنده مطالعات تجربی انجام شده در اثبات صحت معیار نیاما مربوط به انجمادهای چند بعدی بوده و عمدتاً تشکیل عیوب انقباضی-گازی ماکروسکوپی را بررسی کرده‌اند (آزمایشات انجام شده توسط نیاما و همکارانش نیز از این دست می‌باشد). البته در برخی از آزمایشات ارائه شده تشکیل ریزمکهای انقباضی-گازی اطراف حفره انقباضی مرکزی یا کشیدگی عمیق سطحی نیز بررسی شده است. بنابراین، تا کنون اثبات تجربی یا تئوری مناسبی بر صحت معیار نیاما بعنوان معیاری برای پیش‌بینی ریزمکهای انقباضی وجود ندارد. این مساله در حالی است که در بسیاری از مراجع معیار نیاما بعنوان یک معیار کمی پیش‌بینی ریزمکهای انقباضی مورد پذیرش قرار گرفته است. در ادامه، برای اولین بار، پایه تئوری مناسبی برای توجیه معیار نیاما به عنوان معیار پیش‌بینی عیوب انقباضی ماکروسکوپی ارائه خواهد شد. همچنین نشان داده خواهد شد که بعلت وابستگی مقدار بحرانی به شکل قطعه این معیار را نمی‌توان به عنوان یک معیار کمی عمومی در نظر گرفت. ممکن است شبه‌ای در ذهن خواننده ایجاد شود که چرا با وجود این محدودیت‌ها بسیاری از نرم افزارهای ریخته‌گری این معیار را پوشش می‌دهند؛ و بسیاری از کاربران این بسته‌های نرم افزاری بطور گسترده ای از این معیار در طراحی‌های خود استفاده می‌کنند. بمنظور جلوگیری از الفاء نظرات نویسنده، عبارتی از مقاله اخیر کارلسون^{۴۶} و بکرمن^{۴۷} [۷۳] در پاسخ به این شبهه، ذکر می‌شود:

"Foundries use the Niyama criterion primarily in a qualitative fashion, to identify regions in a casting that are likely to contain shrinkage porosity"

از دلایل دیگر قابل ذکر برای متداول بودن معیار نیاما، بازدهی محاسباتی بالای آن می‌باشد.

به عقیده نویسنده، توجیه تئوری معیار نیاما بکمک استفاده از قانون چرنیف^{۴۸} (بجای قانون دارسی) قابل انجام می‌باشد.

رابطه زیر برای انجماد قطعات صفحه‌ای شکل در قالبهایی با انتقال حرارت کم صادق است [۷۴]:

$$M_c = \frac{V_c}{A_c} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\theta_M - \theta_a}{\rho_c L} \right) \sqrt{k_m \rho_m c_m \sqrt{t_s}}, \quad (49.2)$$

در این رابطه M_c ، V_c و A_c بترتیب مدول هندسی، حجم و سطح انتقال حرارت قطعه؛ θ_M و θ_a بترتیب دمای ذوب و دمای محیط؛ L و ρ_c بترتیب گرمای نهان و چگالی مذاب؛ k_m ، ρ_m و c_m بترتیب ضریب انتقال حرارت، چگالی و ظرفیت حرارتی ویژه قالب می‌باشند. این رابطه از طریق حل تحلیلی معادله انتقال حرارت در یک بعد بدست آمده است. در حقیقت معادله (۴۹.۲) معادل رابطه معروف چرنیف می‌باشد که معمولاً بفرم ساده زیر بیان می‌شود:

$$M_c = C \sqrt{t_s}$$

^{۴۶}Kent Carlson

^{۴۷}Christoph Beckermann

^{۴۸}Chvorinov's rule

با استفاده از رابطه چرنیف مشخص می‌شود اثر شکل و ابعاد قطعه، M_c ، متناسب با $\sqrt{t_s}$ بوده که این مساله توجیه تئوری معیار نیاما را کامل می‌کند. اما از دیدگاه تئوری رابطه چرنیف تنها زمانی صادق است که جبهه انجماد مسطح باشد (انجماد جهت‌دار). بنابراین با انحراف شکل جبهه انجماد از حالت مسطح میزان دقت رابطه چرنیف کم شده و در نتیجه وابستگی معیار نیاما به شکل قطعه زیاد می‌شود. به عنوان مثال در مراحل اولیه از انجماد یک نمونه میله‌ای شکل جبهه انجماد مسطح بوده و قانون چرنیف صادق است. اما در مراحل پایانی، انجماد از حالت یک بعدی به چند بعدی تبدیل شده و نرخ سرمایش به مقدار قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد [۷۵، ۷۶]. مطابق با [۷۴]، فرم کلی رابطه (۴۹.۲) برای قطعات استوانه‌ای و میله‌ای شکل بصورت زیر خواهد بود:

$$M_c = \frac{V_c}{A_c} = \frac{\theta_M - \theta_a}{\rho_c L} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{k_m \rho_m c_m} \sqrt{t_s} + \frac{nk_m t_s}{2r} \right), \quad (50.2)$$

در این رابطه n برای هندسه‌های صفحه‌ای، استوانه‌ای و کره‌ای شکل بترتیب برابر با ۰، ۱ و ۲ بوده و r نمایانگر شعاع استوانه یا کره می‌باشد. با استفاده از رابطه (۵۰.۲)، فرم تعمیم یافته قانون چرنیف را می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

$$M_c = C \left(\sqrt{t_s} + \frac{\sqrt{\pi \alpha_m} n}{4} \frac{t_s}{r} \right), \quad \alpha_m = \frac{k_m}{\rho_m c_m} \quad (51.2)$$

با استفاده از رابطه (۵۱.۲) می‌توان فرم تعمیم یافته معیار نیاما را بصورت زیر ارائه کرد:

$$G \left(\sqrt{t_s} + \frac{\sqrt{\pi \alpha_m} n}{4} \frac{t_s}{r} \right) > B \quad (52.2)$$

B در این رابطه ثابت ماده می‌باشد. نسبت $\frac{n}{r}$ در رابطه (۵۲.۲) معادل انحنا متوسط سطوح قطعه می‌باشد. با استفاده از این آنالیز می‌توان نتیجه گرفت استفاده از اطلاعات مربوط به انحنا متوسط فصل مشترک ماکروسکپی جامد-مایع می‌تواند باعث کاهش وابستگی تابع معیار به شکل قطعه گردد. توجه شود که انحنا متوسط فصل مشترک ماکروسکپی جامد-مایع در هر نقطه وابسته به شکل هندسی قطعه در همسایگی آن نقطه می‌باشد.

جمع بندی مطالب ارائه شده در این قسمت نشان می‌دهد که استفاده از تابع معیار نیاما بعنوان یک معیار پیش‌بینی عیوب ماکروسکپی قابل توجهی می‌باشد و استفاده از آن در ارتباط با ریزمکهای انقباضی نیاز به مطالعات تجربی بیشتری دارد. این معیار بیشتر یک معیار کیفی بوده و مقدار بحرانی آن وابسته به شکل هندسی قطعه می‌باشد. وابستگی به شکل این معیار را می‌توان با وارد کردن اطلاعات هندسی مربوط به شکل قطعه کاهش داد. همچنین معیارهای پلینی و نیاما تنها شرط لازم برای وجود نقاط گرم در قطعه را ارضاء می‌کنند. بنابراین لازم است نتایج مربوط به این معیارها با استفاده از شرط کافی ارائه شده در این قسمت فیلتر شوند. بعبارت دیگر ممکن است نقاطی را که معیار نیاما به عنوان نقاط گرم پیش‌بینی می‌کند در حقیقت نقاط سرد یا نقاط زینی باشند و عیوبی در آنها تشکیل نشود. این مساله برای قطعاتی با اشکال پیچیده محتمل می‌باشد. از آنجا که استفاده از توابع معیار در پیش‌بینی عیوب انقباضی متمرکز ماکروسکپی معقول می‌باشد، لازم است

فرض شود مذاب ریخته گری از کیفیت متالورژیکی مطلوبی برخوردار است. بعبارت دیگر استفاده از این معیارها برای مذابهایی با کیفیت متالورژیکی پایین یا دامنه انجماد زیاد فاقد اعتبار است.

۵.۲ معرفی معیار حرارتی جدید برای پیش بینی عیوب انقباضی

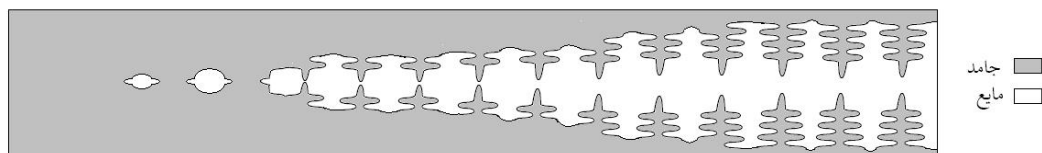
بطور کلی نزدیک شدن سطوح دو جبهه انجماد مجاور می‌تواند باعث تشکیل ناحیه‌های مذاب محبوس شده درون قطعه ریخته‌گری شود. هنگامی که ابعاد این مناطق از حدی کوچکتر می‌شود بعلت فقدان مذاب، عیوب انقباضی در این مناطق تشکیل می‌شود (مراجعه شود به شکل ۲۷.۲). بنابراین در صورتیکه بتوان میزان نزدیک شدن جبهه‌های انجماد مجاور و ابعاد حوضه‌های مذاب محبوس شده در اثر آن را تخمین زد، می‌توان امکان وقوع عیوب انقباضی را داخل قطعه پیش‌بینی کرد. بنظر می‌رسد اندازه گیری انحنای متوسط فصل مشترک جامد-مایع از دیدگاه ماکروسکپی، κ_i برای این منظور مناسب باشد. با دانستن تاریخچه حرارتی قطعه بکمک شبیه سازی، κ_i را می‌توان توسط رابطه زیر محاسبه کرد:

$$\kappa_i = -\nabla \cdot \mathbf{n} = \nabla \cdot \frac{\nabla t_f}{|\nabla t_f|}$$

از آنجا که بعد κ_i عکس طول می‌باشد، می‌توان حوضه انجماد را با کره ای به شعاع $2/\kappa_i$ تخمین زد. هنگامی که شعاع این کره از حدی بحرانی کوچکتر باشد احتمال تشکیل عیوب انقباضی افزایش می‌یابد. با توجه به شکل ۲۸.۲ عیوب انقباضی تنها زمانی می‌تواند ایجاد شود که فصل مشترک شکل مقعر داشته باشد یا κ_i منفی باشد. بنابراین معیار پیش بینی عیوب انقباضی ماکروسکپی را می‌توان بصورت زیر بیان کرد (شرط عدم تشکیل عیوب انقباضی):

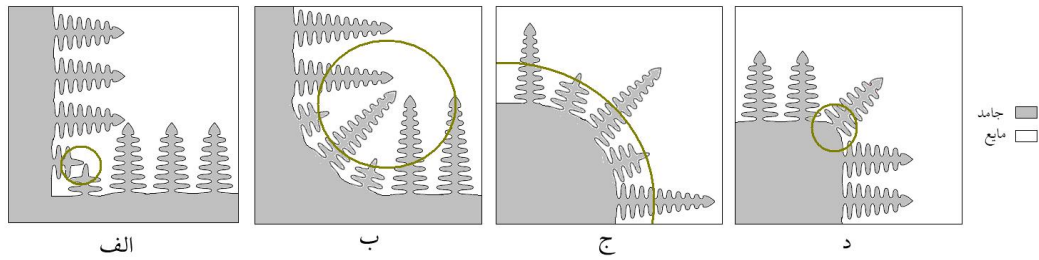
$$\kappa_i(\mathbf{x}) \geq \kappa_c \quad (53.2)$$

در این رابطه مقداری بحرانی می‌باشد که تابع مورفولوژی میکروسکپی منطقه دندردیتی است (مقدار این پارامتر همواره منفی است). مقدار κ_c باید با افزایش افت فشار مذاب درون منطقه خمیری افزایش یابد.

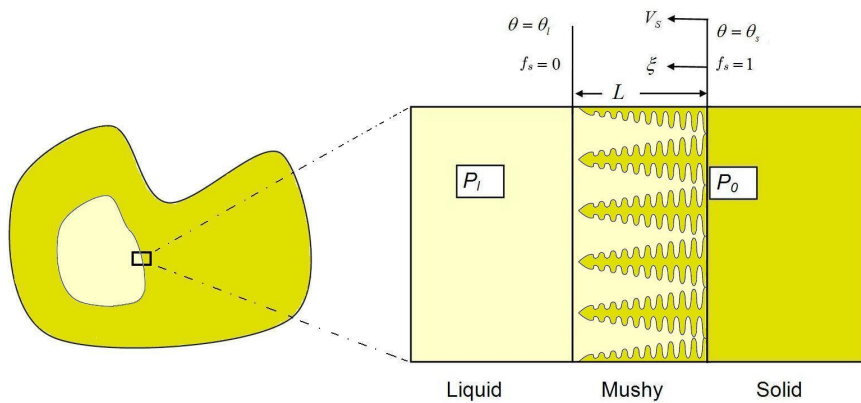


شکل ۲۷.۲: نزدیک شدن دو جبهه انجماد مجاور و تشکیل مناطق مذاب محبوس شده.

در ادامه با استفاده از روشی مشابه [۷۲، ۷۴] مقدار افت فشار مذاب در جهت عمود بر فصل مشترک ماکروسکپی جامد-مایع را درون یک کانال دندردیتی اندازه گیری می‌شود. برای این منظور حرکت مذاب در جهت عمود بر فصل مشترک ماکروسکپی



شکل ۲۸.۲: شماتیک انحنای متوسط فصل مشترک جامد-مایع برای فصل مشترک های مقعر ("الف" و "ب") و محدب ("ج" و "د") از دیدگاه ماکروسکوپی. دایره رسم شده شعاع انحنای ماکروسکوپی فصل مشترک را نشان می دهد.



شکل ۲۹.۲: شماتیک انجماد دندریتی درون یک حجم معیار کوچک عمود بر فصل مشترک ماکروسکوپی جامد-مایع.

جامد-مایع درون یک حجم معیار کوچک با طولی بزرگتر از ضخامت منطقه خمیری در نظر گرفته می شود (مطابق شکل ۲۹.۲). حرکت مذاب درون این حجم معیار را می توان توسط قانون داریسی مدل کرد:

$$v_{\xi} = -\frac{K(\xi)}{\mu_l} \frac{\partial P}{\partial \xi} \quad (54.2)$$

در این رابطه v_{ξ} ، K ، μ_l و P به ترتیب نمایانگر سرعت حرکت مذاب در جهت عمود بر فصل مشترک ماکروسکوپی جامد-مایع، ضریب نفوذپذیری^{۴۹} منطقه خمیری، ویسکوزیته دینامیکی مذاب و فشار مذاب می باشند. در صورتی که کسر حجمی جامد در هر نقطه با f_s نشان داده شود، چگالی متوسط موضعی، $\bar{\rho} = \rho_s f_s + \rho_l (1 - f_s)$ ، بر اساس قانون جرم بصورت زیر تغییر خواهد کرد:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \rho_l \frac{\partial v_{\xi}}{\partial \xi} = (\rho_s - \rho_l) \frac{\partial f_s}{\partial t} + \rho_l \frac{\partial v_{\xi}}{\partial \xi} = 0, \quad (55.2)$$

رابطه زیر برای محور مختصات منطبق بر فصل مشترک (ξ, τ) برقرار است:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \tau} - v_s \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

^{۴۹}Permeability

با فرض شبه-پایدار بودن انجماد رابطه (۵۵.۲) بفرم زیر ساده می‌شود:

$$\rho_l \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} = v_s (\rho_s - \rho_l) \frac{\partial f_s(\xi)}{\partial \xi}. \quad (56.2)$$

با فرض ثابت بودن v_s در خلال انجماد (دورن حجم معیار)، انتگرال‌گیری از رابطه (۵۶.۲) نتیجه می‌دهد:

$$v_\xi(\xi) = \beta v_s [f_s(\xi) - 1], \quad \beta = (\rho_s - \rho_l) / \rho_l \quad (57.2)$$

ترکیب روابط (۵۴.۲) و (۵۷.۲) نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{\mu_l v_s \beta}{K(\xi)} [1 - f_s(\xi)] \quad (58.2)$$

فرض می‌شود تغییرات دما درون حجم معیار در نظر گرفته شده توزیع خطی دارد: $\theta(\xi) = \theta_s + (\theta_l - \theta_s) \frac{\xi}{L}$ و تغییرات کسر حجمی جامد با دما نیز خطی می‌باشد: $f_s(\xi) = \frac{\theta - \theta_l}{\theta_s - \theta_l} = 1 - \frac{\xi}{L}$. همچنین فرض می‌شود ضریب نفوذ پذیری نیز تابع خطی از کسر حجمی جامد می‌باشد: $K(\xi) = K_0 [1 - f_s(\xi)]$ (K_0 ثابت ماده است). با استفاده از این فرضیات و انتگرال‌گیری از رابطه (۵۸.۲) نتیجه می‌شود:

$$P(\xi) - P_0 = \frac{\mu_l v_s \beta}{K_0} \xi \quad (59.2)$$

بنابراین افت فشار درون منطقه خمیری توسط رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta P = P_l - P_0 = \frac{\mu_l \beta}{K_0} v_s L \approx \frac{\mu_l \beta (\theta_l - \theta_s)}{K_0} \frac{R}{G^2} \quad (60.2)$$

در (۶۰.۲) از تقریبهای $L \approx \frac{\theta_l - \theta_s}{G}$ و $v_s \approx \frac{R}{G}$ استفاده شده است. با استفاده از رابطه (۶۰.۲) می‌توان رابطه (۵۳.۲) را بصورت زیر اصلاح کرد (با استفاده از یک تعبیر فیزیکی):

$$\kappa R G^{-2} \geq \kappa_c \quad (61.2)$$

می‌توان انتظار داشت مقدار بحرانی κ_c در این رابطه وابستگی کمی به ابعاد و شکل قطعه داشته باشد. با استفاده از این نتایج فرم کلی معیار حرارتی را می‌توان بصورت $(a + b\kappa) R^c G^d \geq \kappa_c$ نوشت که در این رابطه a, b, c, d ثوابت ماده هستند. با دقت در رابطه (۶۱.۲) می‌توان دریافت که این معیار شباهت زیادی به معیار نیاما دارد که مقیاس آن بکمک انحنای فصل مشترک تغییر پیدا کرده است. واضح است این معیار کاربردی برای یک فصل مشترک مسطح (بدون انحنای) ندارد. بنظر می‌رسد تصحیح این معیار بصورت $(1 + \kappa) R G^{-2} \geq \kappa_c$ امکان کاربرد آن را برای فصل مشترکهای مسطح میسر سازد. این رابطه شباهت ساختاری زیادی با معیار نیاما توسعه یافته، (۵۲.۲)، دارد. البته مطابق مباحث طرح شده استفاده از توابع معیار در پیش‌بینی عیوب انقباضی در انجمادهای جهت‌دار (مسطح) ابهام داشته و نیاز به مطالعات بیشتری دارد. توانایی تابع معیار (۶۱.۲) در پیش‌بینی عیوب انقباضی ماکروسکوپی با استفاده از نتایج تجربی موجود در مراجع، در فصل ۸ مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

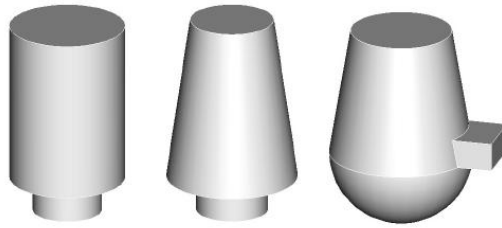
فصل ۳

مبانی طراحی سیستم تغذیه گذاری

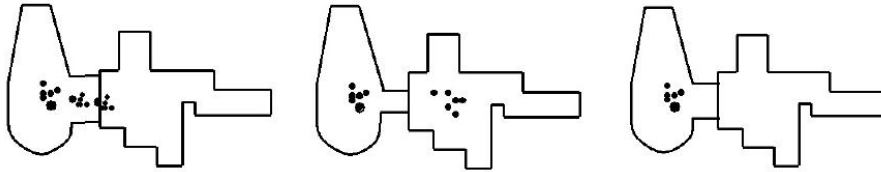
”Although nature commences with reason and ends in experience it is necessary for us to do the opposite, that is to commence with experience and from this to proceed to investigate the reason (Leonardo da Vinci 1452–1519)”

تغذیه گذاری قطعات ریختگی متداولترین روش کنترل عیوب انقباضی حاصل از انجماد می باشد. در این روش تعدادی محفظه اضافی حاوی مذاب (تغذیه) در اشکال و ابعاد مناسب به قطعه متصل می شوند که وظیفه آنها جبران انقباض حاصل از انجماد می باشد. بطور کلی تغذیه می بایست از نسبت سطح به حجم کمی برخوردار باشد. در عمل با در نظر گرفتن محدودیتهای تکنولوژیکی مثل سهولت در امر قالبگیری، تغذیه معمولا در اشکال هندسی ساده با تقارن هندسی بالا طراحی می شود. این اشکال معمولا از ترکیب شکلهای هندسی ساده ای مثل استوانه، مخروط ناقص و نیم کره حاصل می شوند. شکل ۱.۳ تعدادی از اشکال متداول تغذیه را نشان می دهد. در این میان استفاده از تغذیه های استوانه ای شکل از عمومیت بیشتری برخوردار است. از آنجا که سیستم تغذیه گذاری یک جزء موقت اضافه شده به قطعه طی فرایند تولید محسوب می شود، سیستم تغذیه رسانی می بایست در پایان فرایند تولید از قطعه جدا شده و مورد بازیافت قرار گیرد. بمنظور تسهیل جدایش تغذیه از قطعه و همچنین کاهش هزینه های ماشینکاری مربوط به این مرحله، از گردن تغذیه استفاده می شود (شکل ۱.۳). باید توجه شود که اهمیت طراحی صحیح گردن تغذیه کمتر از خود تغذیه نیست، بطوریکه طراحی نامناسب گردن تغذیه خود بتهنایی می تواند باعث معیوب شدن قطعه ریخته گری گردد. شکل و ابعاد گردن تغذیه می بایست طوری انتخاب شود که باعث کاهش عملکرد تغذیه نشود. این مساله بطور شماتیک در شکل ۲.۳ نمایش داده شده است.

طراحی سیستم تغذیه گذاری باید بنحوی انجام شود که پس از انجماد، عیوب انقباضی باقیمانده در قطعه در حد مجاز از پیش تعیین شده باشد. برای این منظور دستورالعمل های تقریبا مشابهی در مراجع مربوط به این رشته یافت می شود [۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۷۷]. در اینجا تعدادی از نکات عمومی مربوط به طراحی سیستم تغذیه رسانی مرور خواهند شد.



شکل ۱.۳: اشکال متداول تغذیه و گردن تغذیه [۷۷].

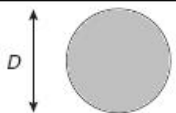
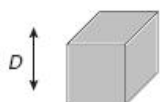
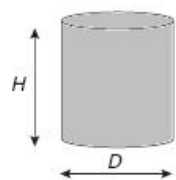
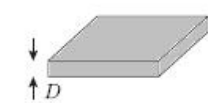


شکل ۲.۳: گردن با سطح تماس زیاد (چپ)، گردن با سطح تماس کم (وسط)، طراحی مناسب (راست) [۷۷].

۱. عدم استفاده از تغذیه گذاری تا حد امکان: بطور کلی در مورد برخی از قطعات ریختگی بخصوص قطعات کوچک این امکان وجود دارد که بدون استفاده از تغذیه گذاری به قطعه ای با خواص مکانیکی قابل قبول دست یافت. همچنین در مورد برخی از قطعات، بخصوص قطعات بزرگ و نازک با ضخامت تقریباً یکنواخت، تغذیه گذاری ممکن است نا کارآمد بوده یا از راندمان بسیار پایینی برخوردار باشد. این نوع قطعات معمولاً بدون تغذیه گذاری ریخته گری می شوند. البته در این موارد می توان امیدوار بود که عیوب انقباضی از توزیع یکنواختی در داخل قطعه برخوردار هستند. همچنین در مواردی که مذاب از کیفیت متالورژیکی بالایی برخوردار باشد، می توان امیدوار بود که کاهش حجم ناشی از انقباض از طریق کشیدگی ناچیز سطوح قطعه جبران شود. باید توجه کرد که وقوع این مکانیزم تغذیه برای سطوح مقعر و مسطح محتمل است.

۲. زمان انجماد مناسب تغذیه: زمان انجماد تغذیه باید برابر یا بزرگتر از زمان انجماد قطعه باشد. یکی از متداولترین روشها برای این منظور استفاده از قانون چرنیف می باشد [۷۷]. طبق قانون چرنیف، زمان انجماد قطعه، t_c ، متناسب با مربع مدول هندسی آن، M_c ، می باشد: $t_c = k M_c^2$. مدول هندسی قطعه عبارتست از نسبت حجم قطعه، V_c ، به سطحی که انتقال حرارت از آن انجام می شود، A_c . ضریب تناسب k در رابطه فوق تابع خواص حرارتی قالب، قطعه و دمای اولیه قالب می باشد. در روش تغذیه گذاری با استفاده از قانون چرنیف ابتدا مدول (تقریبی) هندسی قطعه حساب شده و سپس شکل و ابعاد تغذیه طوری انتخاب می شود که مدول هندسی تغذیه، M_f ، حدود $1/2$ برابر مدول هندسی قطعه باشد (یا زمان انجماد تغذیه حدود $1/5$ برابر انجماد قطعه باشد): $M_f = 1.2 M_c$. در مورد قطعات پیچیده معمولاً ابتدا قطعه به اجزائی با اشکال هندسی ساده تر تقسیم شده، و سپس مورد آنالیز هندسی قرار می گیرد. در مورد آلیاژهایی که ضریب انتقال حرارت پایینی دارند (مثل فولادها)، معمولاً می توان تغذیه گذاری هر

جزء را بطور مستقل از سایر اجزاء مورد بررسی قرار داد. شکل ۳.۳ مدول هندسی تعدادی از احجام متداول با اشکال هندسی ساده را نشان می‌دهد.

Shape	Modulus			
	100% Cooled area	Base uncooled		
Sphere		$\frac{D}{6}$	-	
Cube		$\frac{D}{6}$	$\frac{D}{5}$	
Cylinder		H/D		
		1.0	$\frac{D}{6}$	$\frac{D}{5}$
		1.5	$\frac{3D}{16}$	$\frac{3D}{14}$
Infinite plate		2.0	$\frac{D}{5}$	$\frac{2D}{9}$
		∞	$\frac{D}{4}$	-
			$\frac{D}{2}$	-

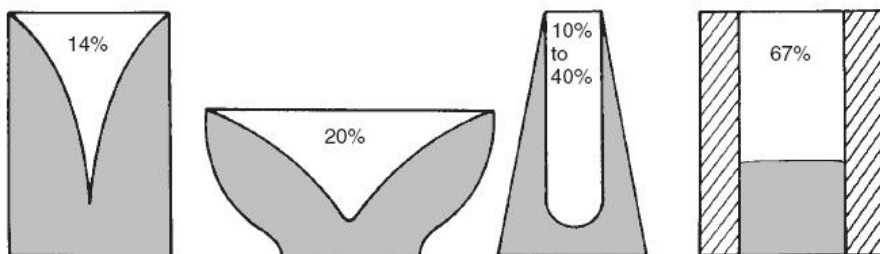
شکل ۳.۳: مدول هندسی تعدادی از احجام هندسی [۸۱].

۳. حجم مذاب کافی: تغذیه باید طوری طراحی شود که حجم مذاب موجود در تغذیه برای جبران انقباض حین انجماد و در برخی موارد بخشی از انقباض حین سرد شدن در حالت مایع، کافی باشد. از آنجا که حین انجماد قطعه، تغذیه نیز دچار انجماد می‌شود، حجم مذاب درون تغذیه با گذشت زمان کاهش می‌یابد بطوریکه تنها بخش کمی از مذاب موجود درون تغذیه امکان ورود به قطعه را پیدا می‌کند. نسبت مذاب منتقل شده از تغذیه به قطعه به حجم کل تغذیه را بازدهی تغذیه، e می‌نامند. بطور کلی بازدهی تغذیه تابع شکل تغذیه، قطعه و خواص فیزیکی قالب و مذاب می‌باشد. در برخی از مراجع مقادیری تقریبی برای بازدهی تغذیه‌هایی با اشکال هندسی از پیش مشخص شده و بخصوص در مورد قالبهای ماسه‌ای ارائه شده‌است. بعنوان مثال بازدهی تغذیه‌های استوانه‌ای با نسبت ارتفاع به قطر $1/5$ حدود ۱۴ درصد است. اگر درصد انقباض حجمی مذاب که باید توسط تغذیه جبران شود با α نشان داده شود، حداقل حجم لازم برای تغذیه از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$V_f = \frac{\alpha}{e - \alpha} V_c$$

شکل ۴.۳ بطور شماتیک نحوه انجماد و بازدهی تعدادی از تغذیه‌های متداول را نشان می‌دهد. همانطور که در شکل مشخص است، استفاده از مواد عایق یکی از موثرترین روشها در افزایش بهره‌وری تغذیه می‌باشد. یکی دیگر

از روشهای افزایش بهره‌وری تغذیه استفاده از تغذیه‌های روبسته یا کور بجای تغذیه‌های روباز است. این تغذیه‌ها معمولاً در ارتفاعی معادل قطعه و در ارتباط با سطوح جانبی آن طراحی می‌شوند. سطح فوقانی این تغذیه‌ها باید طوری طراحی شود که پوسته جامد تشکیل شده در مراحل آغازین انجماد روی سطح فوقانی آنها براحتی توسط فشار اتمسفر شکسته شده و ارتباط مذاب دورن تغذیه با اتمسفر باید تا پایان انجماد حفظ شود. به عنوان یکی از اصول کلی طراحی لازم است تا حد امکان از استفاده همزمان تغذیه‌های روباز و کور پرهیز کرد. علت این امر در این حقیقت نهفته است که تا زمانی که ارتباط بین قسمت‌های مختلف قطعه در اثر انجماد قطع نشده است، تغذیه‌های روباز حکم تغذیه را برای تغذیه‌های کور دارند. بنابراین عملکرد تغذیه روبسته زمانی آغاز می‌شود که انجماد در قطعه بمقدار قابل توجهی پیشرفت کرده باشد. واضح است که در این مدت خود تغذیه کور نیز دچار انجماد شده و بازدهی آن در عمل به مقدار قابل توجهی کمتر از حد مورد انتظار خواهد بود.

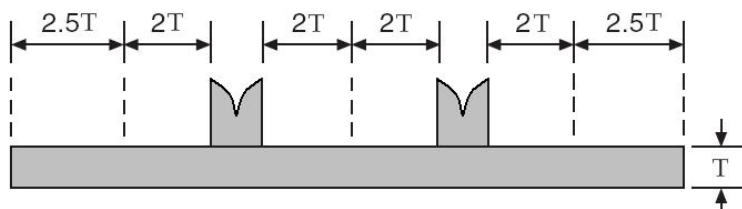


شکل ۴.۳: تاثیر شکل هندسی تغذیه بر نحوه انجماد و بازدهی آن و اثر استفاده از مواد عایق در افزایش راندمان تغذیه [۸۱].

۴. فاصله مذاب رسانی^۱ کافی: پیشرفت جبهه انجماد مستلزم انتقال اتمها به فصل مشترک جامد-مایع و پیوستن آنها به جبهه انجماد است. بعلت شباهت ساختاری زیاد بین فازهای جامد و مایع در مذابهای فلزی، انرژی فصل مشترک کوچک بوده و پیشروی فصل مشترک توسط شار اتمی بسمت فصل مشترک کنترل می‌شود. هر عاملی که باعث قطع یا کاهش شار اتمی به میزان لازم به فصل مشترک مایع-جامد شود می‌تواند منجر به تجمع جاهای خالی (یا اتمهای گازهای حل شده) در جلو فصل مشترک شود که با ادامه این تجمع منجر به تشکیل عیوب انقباضی (یا گازی) درون قطعه خواهد شد. بطور کلی شار اتمی به فصل مشترک متشکل از دو مولفه نفوذی و هیدرودینامیکی می‌باشد. یکی از عوامل اصلی که در ایجاد شار نفوذی موثر است وجود شیب دمایی کافی در مذاب می‌باشد. بنابراین لازم است در مسیر مذاب رسانی تغذیه-قطعه شیب دما به اندازه کافی وجود داشته باشد. عامل پیدایش شار هیدرودینامیکی هم وجود اختلاف فشار کافی در مسیر تغذیه‌رسانی است. بررسی مستقیم تغذیه‌رسانی به این روش بسیار پیچیده بوده و نیاز به شبیه سازی کامپیوتری با دقت بسیار بالا دارد. برای حل این مشکل، آزمایشات تجربی زیادی توسط محققان مختلف انجام شده است که در این آزمایشات هدف یافتن تقریبی فاصله مذاب‌رسانی برای تغذیه‌هایی با اشکال هندسی مشخص در شرایط ریخته گری مختلف بوده است. در ادامه تعدادی از قواعد مذاب‌رسانی ذکر خواهند شد.

^۱Feeding distance

بطور کلی برای آلیاژهای فولادی با دامنه انجماد کم (اختلاف دمای لیکوئیدوس و سالییدوس زیر ۵۰ درجه سانتیگراد) و در شرایط ریخته‌گری در قالبهای ماسه‌ای می‌توان از این قواعد استفاده کرد [۸۰]: برای قطعات صفحه‌ای شکل (نسبت عرض به ضخامت بزرگتر از ۵) به ضخامت T فاصله مذاب رسانی هر تغذیه محدود به فاصله شعاعی حدود $2T$ از سطوح جانبی تغذیه می‌باشد. این فاکتور برای قطعات میله‌ای شکل (نسبت عرض به ضخامت کوچکتر از ۵) به مقدار $1/5T$ کاهش می‌یابد. اثر انتهایی نیز برای اینگونه آلیاژها حدود $2/5T$ است. این مساله بطور شماتیک در شکل ۵.۳ نشان داده شده است. لازم به تذکر است که با استفاده صحیح از مبردگذاری می‌توان دامنه تاثیر اثر انتهایی را افزایش داد. همچنین مبردگذاری می‌تواند باعث ایجاد اثر انتهایی مصنوعی در مناطق داخلی قطعه شده و انجماد قسمتهای مختلف قطعه از یکدیگر جدا کند. برای جزئیات بیشتر به فصل ۱۹ [۸۰] یا فصل ۶ [۸۱] مراجعه شود.



شکل ۵.۳: شماتیک فاصله تغذیه رسانی و اثر انتهایی برای قطعات صفحه‌ای شکل [۸۰].

۵. ارتباط موثر تغذیه با قطعه تا خاتمه انجماد قطعه: یکی دیگر از موارد بسیار مهم در طراحی سیستم تغذیه‌گذاری، طراحی گردن تغذیه؛ محل اتصال تغذیه به قطعه؛ می‌باشد. طراحی گردن تغذیه باید بنحوی انجام شود که ارتباط موثر مذاب موجود درون تغذیه با قطعه تا پایان انجماد قطعه حفظ شود. از سوی دیگر برای سهولت در امر جداسازی تغذیه، کاهش سطح مقطع گردن تغذیه مطلوب است. بنابراین لازم است تعادلی بین این دو عامل متضاد ایجاد شود تا بتوان قطعه‌ای سالم را تولید کرد.

اصول طراحی ذکر شده در بالا علی‌رغم سادگی بطور گسترده‌ای در واحدهای ریخته‌گری صنعتی مورد استفاده قرار می‌گیرد. واضح است استفاده از این اصول نمی‌تواند لزوماً تولید قطعاتی سالم را تضمین کند. به همین دلیل معمولاً پس از یک طراحی اولیه و انجام آزمون عملی مدل ریخته‌گری بارها مورد اصلاح قرار می‌گیرد تا سرانجام نتیجه دلخواه بدست آید. در این میان دانش فنی و تجربه طراح نقش اساسی در کوتاه کردن این چرخه سعی و خطا دارد. از آنجا که سیستم تغذیه‌رسانی پس از تولید از قطعه جدا شده و مورد بازیافت قرار می‌گیرد، کاهش ابعاد این سیستم تاثیر قابل ملاحظه‌ای در کاهش هزینه تولید دارد. همچنین بزرگتر شدن ابعاد سیستم تغذیه‌رسانی اغلب باعث طولانی‌تر شدن زمان انجماد قطعه می‌شود. این مساله می‌تواند باعث درشت‌تر شدن ریزساختار و افزایش شدت جدایشها و در نتیجه کاهش کیفیت متالورژیکی محصول نهایی شود.

فصل ۴

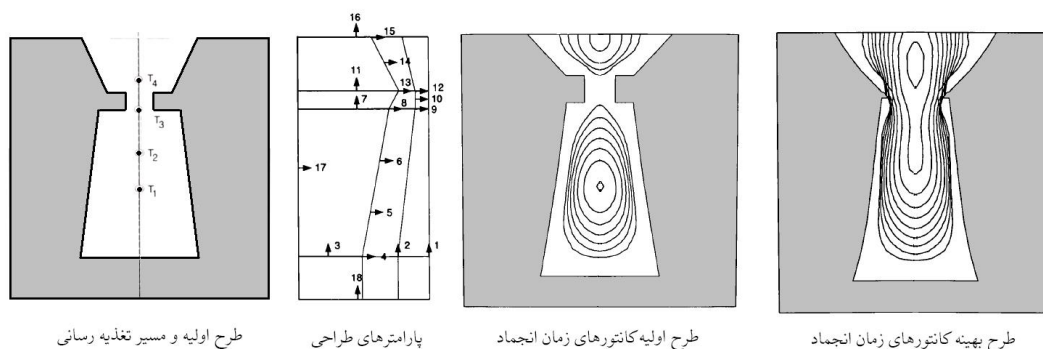
مروری بر منابع طراحی بهینه سیستم تغذیه گذاری

"With fame I become more and more stupid, which of course is a very common phenomenon (Albert Einstein 1879–1955)"

امروزه شبیه‌سازی کامپیوتری [۸۲] بعنوان ابزار مناسبی جهت پیش‌بینی فرایند انجماد و عملکرد سیستم تغذیه گذاری شناخته شده است. در این روش از طراحی، این امکان وجود دارد که طرح پیش از ریخته‌گری توسط کامپیوتر مورد ارزیابی قرار گیرد و پس از اصلاحات لازم و رسیدن به یک طراحی مناسب، مورد ارزیابی عملی قرار گیرد. این روش باعث کاهش تعداد دفعات سعی و خطا و همچنین کاهش زمان فرایند طراحی می‌شود. بعلاوه بعلت دقت بالاتر آنالیز انجماد توسط کامپیوتر (نسبت به روشهای هندسی مرسوم)، می‌توان امیدوار بود طرح نهایی به شرایط بهینه نزدیک‌تر است. علی‌رغم قدمت حدود سی ساله شبیه‌سازی کامپیوتری فرایند انجماد و انتشار نتایج حاصل از موفقیت آن، در عمل تنها بخش کوچکی از صنایع ریخته‌گری از این روش برای طراحی سیستم تغذیه‌رسانی استفاده می‌کنند. بر اساس گزارش منتشر شده توسط انجمن ریخته‌گران آمریکا [۶۷]، شبیه‌سازی کامپیوتری در طراحی کمتر از ۱۰ درصد وزنی از قطعات ریخته‌گری تولید شده آمریکا استفاده می‌شود. به عقیده نویسنده، این مساله دلایل زیادی دارد که تعدادی از آنها عبارتند از: فقدان دانش و آگاهی کافی ریخته‌گران نسبت به توانایی‌های این ابزار (در مواردی حتی دانش اولیه لازم در زمینه علم ریخته‌گری در این واحدها وجود ندارد)، گران بودن نرم‌افزارهای شبیه‌سازی ریخته‌گری و نیاز به تخصص بالا برای استفاده موثر از این بسته‌های نرم‌افزاری. در بین موارد ذکر شده مورد دوم از اهمیت بیشتری برخوردار است بطوریکه مشاهده می‌شود بسیاری از واحدهای تولیدی نرم‌افزارهای گران‌قیمتی را در این ارتباط خریداری کرده‌اند اما فاقد توانایی لازم برای استفاده موثر از این بسته‌های نرم‌افزاری هستند. علت این مساله را می‌توان به اینصورت بیان کرد که کاربر نرم‌افزار نه تنها باید از دانش کافی در زمینه طراحی فرایند ریخته‌گری برخوردار باشد بلکه لازم است از دانش و مهارت کافی در زمینه نقشه‌کشی و طراحی بکمک کامپیوتر و اصول اولیه شبیه‌سازی فرایند انجماد برخوردار باشد. تربیت نیروهای انسانی با این تخصص خود کاری

بسیار دشوار و زمان‌بر خواهد بود. لازم به تذکر است که با فرض وجود نیروی انسانی متخصص در این زمینه، دستیابی به طراحی‌های بهینه خود وظیفه‌ای بسیار دشوار می‌باشد.

بنظر می‌رسد ترکیب شبیه‌سازی کامپیوتری با روشهای بهینه‌سازی عددی یک راه حل موثر برای دستیابی به طرح‌های بهینه و رفع مشکلات ذکر شده باشد. در راستای دستیابی به چنین ابزاری، تلاشهایی از سوی محققان مختلف در دو دهه گذشته انجام گرفته است که در ادامه برخی از تحقیقات شاخص در این زمینه به اختصار مرور خواهند شد. بر اساس اطلاعات نویسنده، بهینه‌سازی طراحی سیستم تغذیه‌رسانی برای اولین بار توسط دنیل تورتورلی^۱ و همکارانش [۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶] در یک دوره حدود ۱۰ ساله مورد بررسی قرار گرفت. در کلیه تحقیقات انجام شده توسط این محققان ورودی بهینه‌سازی (طرح اولیه) شامل یک سیستم تغذیه‌رسانی از پیش طراحی شده با ابعاد و شکل غیر بهینه بوده است. سپس شکل و ابعاد بهینه سیستم تغذیه‌رسانی توسط روش بهینه‌سازی شکل^۲ محاسبه شده است. برای این منظور شکل تغذیه بوسیله تعداد کمی پارامتر جایگزین شده و تلاش شده است تا مقدار بهینه این پارامترها مشخص شود. برای بهینه‌سازی نیز از روشی بر اساس مشتق تابع هدف و قيود استفاده شده است. مقادیر مشتقات مربوطه برای بهینه‌سازی بکمک آنالیز حساسیت بروش مستقیم^۳ [۸۷] مورد محاسبه قرار گرفته شده است. تابع هدف^۴ یا بعبارت ساده‌تر کمیتی که باید در طول فرایند بهینه‌سازی کاهش یابد وزن سیستم تغذیه‌رسانی در نظر گرفته شده است. قيود بهینه‌سازی نیز شامل قيود هندسی روی متغیرهای طراحی و همچنین وجود شیب دمایی مثبت در طول مسیر تغذیه‌رسانی از قطعه به تغذیه تعریف شده است. در این روش علاوه بر تعریف طرح اولیه و پارامترهای طراحی، لازم است مسیر تغذیه‌رسانی نیز توسط کاربر تعریف شود. شکل‌های ۱.۴، ۲.۴ و ۳.۴ نمونه‌هایی از نتایج بدست آمده در این تحقیقات را نشان می‌دهند.



شکل ۱.۴: بهینه‌سازی شکل تغذیه در یک شمش [۸۳].

لوئیس^۵ و همکارانش نیز [۸۸] با پیروی از محققان قبلی روش مشابهی را در بهینه‌سازی شکل سیستم تغذیه‌رسانی دنبال کردند. تفاوت عمده این روش با روش قبل را می‌توان در نحوه انجام آنالیز حساسیت دانست که در آن از روش اختلاف

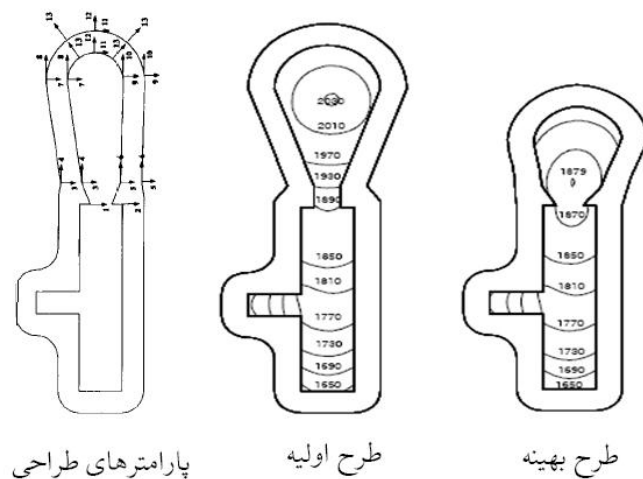
^۱ Daniel A. Tortorelli

^۲ Shape optimization

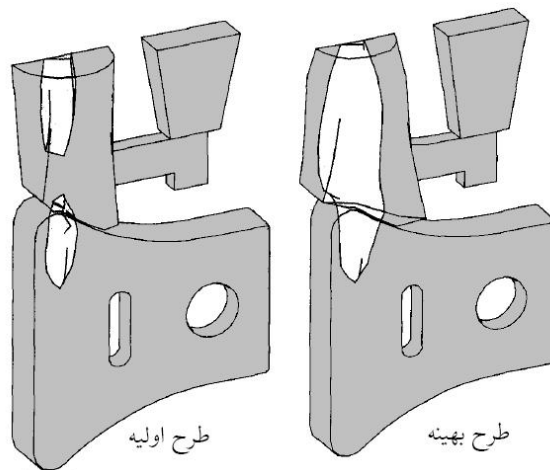
^۳ Direct sensitivity analysis

^۴ Objective function

^۵ Roland W Lewis



شکل ۲.۴: بهینه سازی شکل تغذیه و پوسته قالب در ریخته گری دقیق [۸۵].



شکل ۳.۴: بهینه سازی شکل تغذیه در ریخته گری چکش (منطقه سفید رنگ مربوط به حوزه مذاب پس از گذشت ۱۳۶۵ ثانیه از شروع انجماد است [۸۴]).

محدود^۶ بجای روش مستقیم استفاده شده است. اگر چه استفاده از روش اختلاف محدود در محاسبه آنالیز حساسیت باعث ساده تر شدن پیاده سازی الگوریتم بهینه سازی می شود، اما این روش می تواند منجر به کاهش دقت فرایند بهینه سازی نیز گردد. شکل ۴.۴ نمونه ای از نتایج مربوط به این محققان را نشان می دهد. روشی مشابه برای بهینه سازی حرارتی فرایند ریخته گری در قالبهای فلزی مورد استفاده قرار گرفت [۸۹، ۹۰] با این تفاوت که در این روش متغیر طراحی به جای شکل تغذیه ضریب انتقال حرارت فصل مشترک قالب-مذاب در نظر گرفته شده بود. نتایج ارائه شده نشان می دهد این روش توانایی اعمال کنترل بر الگوی انجماد و در نتیجه بهینه سازی فرایند تولید را دارا است. از آنجا که در فرایند ریخته گری در قالبهای ماسه ای ضریب انتقال حرارت فصل مشترک قالب-مذاب و همچنین درون ماسه کوچک می باشد، کارایی این روش در کنترل الگوی انجماد کم خواهد بود. برای جزئیات بیشتر پیرامون تحقیقات انجام شده در این حوزه به مقاله مروری

^۶Finite difference sensitivity analysis

در راستای بهینه سازی فرایند ریخته‌گری، در سالهای اخیر تلاشهایی هم از سوی توسعه دهنده گان نرم افزارهای تجاری شبیه سازی فرایندهای انجماد صورت گرفته است. با تامل و بررسی بیشتر روی این فعالیتها و نتایج ارائه شده می‌توان دریافت که اغلب این فعالیتها بیشتر جنبه تبلیغاتی داشته و از ارزش علمی کمی برخوردار هستند. بطوریکه در بهترین شرایط می‌توان آنها را نسخه ساده شده از روش‌های ذکر شده در بالا در نظر گرفت. این در حالی است که خود این روشها از محدودیت‌های زیادی برخوردار هستند، بطوریکه هنوز تا رفع این مشکلات و دستیابی به روشهایی برای استفاده در طراحی‌های روزمره به زمان و تحقیقات بیشتری نیاز است. در ادامه برخی از این محدودیت‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرند.



شکل ۴.۴: بهینه سازی پارامترهای شکل تغذیه برای یک بلوک سیلندر آلومینیومی [۸۸].

یکی از مهمترین محدودیت‌های مربوط به روشهای اشاره شده نیاز به یک طرح اولیه نزدیک به شرایط بهینه است. بعبارت ساده‌تر لازم است در ابتدا کاربر تعداد تغذیه‌های مورد نیاز و مکان (یا در بهترین شرایط مکان تقریبی) آنها را بداند. در حالی که مهمترین و پیچیده‌ترین قسمت طراحی یک سیستم تغذیه‌رسانی تصمیم‌گیری در مورد تعداد و مکان تغذیه‌ها می‌باشد. بهینه ساختن ابعاد تغذیه‌ها در درجه دوم اولویت قرار دارد. بطور کلی در بسیاری از موارد بدون توجه به راندمان ریخته‌گری، یافتن طرحی که منجر به تولید قطعه‌ای سالم شود خود وظیفه بسیار دشواری می‌باشد. علاوه بر محدودیت ذکر شده نیاز به تعریف یک مسیر مذاب‌رسانی توسط کاربر یکی دیگر از محدودیت‌های عمده روشهای ذکر شده در قبل می‌باشد. در یک طراحی سه بعدی و بخصوص در مورد قطعات پیچیده به یک ابزار آنالیز هندسی پیشرفته نیاز است تا بتوان مسیر تغذیه‌رسانی را بکمک آن تعریف کرد. آنالیز حساسیت بروش مستقیم یا اختلاف محدود از دیگر محدودیت‌های این روشها می‌باشد. علت این امر افزایش خطی هزینه محاسبات با افزایش تعداد نقاط در طول مسیر تغذیه‌رسانی می‌باشد. همچنین بدون توسعه یک روش بهینه‌سازی خاص برای حل این مسائل (در صورت استفاده از روشهای عمومی بهینه‌سازی)، تعداد دفعات تکرار الگوریتم بهینه‌سازی معمولاً با افزایش تعداد پارامترهای طراحی و قیود با نرخ غیرخطی افزایش می‌یابد. البته تذکر این نکته در این قسمت ضروری بنظر می‌رسد که بطور کلی هزینه محاسبات مسائل کنترل بهینه مقید به معادلات دیفرانسیل بسیار

بالا بوده و امروزه بعنوان یکی از بزرگترین موانع در جهت استفاده از این روشها در ارتباط با مسائل طراحی واقعی در نظر گرفته می‌شود.

۱.۴ مبانی طراحی بهینه سیستم تغذیه گذاری

در این تحقیق روشی نوین برای طراحی بهینه سیستم تغذیه‌رسانی ارائه خواهد شد. با توجه به مباحث طرح شده در قسمت قبل، تلاش در جهت ارائه روشی خواهد بود که تا حد امکان از محدودیت‌های کمتری نسبت به روش‌های ذکر شده برخوردار باشد. از آنجا که ارائه روشی که بتواند پاسخگوی حل مسائل جهان واقعی باشد نیاز به تحقیقات گسترده و صرف زمان زیادی دارد، این تحقیق بگونه‌ای جهت‌دهی شده است که نتایج حاصل از آن بتواند در آینده بعنوان پایه‌ای برای تحقیق و توسعه بیشتر مورد استفاده قرار گیرد. بطور کلی حل هر مساله طراحی بهینه توسط کامپیوتر را می‌توان به سه مرحله اصلی تقسیم کرد که بترتیب عبارتند از: مدل‌سازی مفهومی^۷، مدل‌سازی ریاضی^۸ و مدل‌سازی عددی^۹ باید توجه کرد که معمولاً پس از انجام مدل‌سازی اولیه برای حل یک مساله نتایج مورد ارزیابی قرار می‌گیرند و در صورت لزوم مدل مورد اصلاح قرار خواهد گرفت. همچنین در برخی از موارد ممکن است مدل ساده‌سازی شده یا جزئیات بیشتری به آن اضافه شود.

- **مدل‌سازی مفهومی:** در این مرحله لازم است شرایط بهینه، متغیرهای طراحی، قیود طراحی و فیزیک حاکم بر مساله تعریف شود. واضح است که با شناخت صحیح از شرایط فیزیکی و شرایط مطلوب می‌توان مدل فیزیکی را بصورت منطقی ساده‌سازی کرد. در شبیه‌سازی کامپیوتری یک پدیده فیزیکی به این مرحله مدل‌سازی فیزیکی نیز می‌گویند. بعنوان مثال در شبیه‌سازی فرایند خزش لازم است بدانیم این پدیده تابع دما، زمان، میزان تنش اعمالی، ریزساختار، عیوب میکروسکوپی و ماکروسکوپی موجود در ساختار، نوع شبکه کریستالی و سیستم‌های لغزش مربوطه می‌باشد. همچنین اطلاع از نحوه ارتباط این پارامترها در مدل‌سازی فیزیکی ضروری است. اما در نظر گرفتن همه‌ی جزئیات منجر به یک مدل فیزیکی بسیار پیچیده خواهد شد بطوریکه در صورت موفقیت در سایر قسمت‌های مدل‌سازی، امکان حل عددی چنین مساله‌ای با در نظر گرفتن توان محاسباتی پردازشگرهای فعلی میسر نخواهد بود. بنابراین ساده‌سازی معقول یک مدل فیزیکی یکی از کلیدهای موفقیت در حل مسائل واقعی خواهد بود. باید تذکر داد که ساده‌سازی یک مدل فیزیکی نه تنها نیاز به شناخت عمیق نسبت به فیزیک مساله دارد، بلکه لازم است مدل‌ساز دانش کافی نسبت به روشهای مدل‌سازی ریاضی، تکنیکهای حل عددی و توان پردازشی کامپیوترهای موجود در بازار را داشته باشد.

- **مدل‌سازی ریاضی:** در این مرحله مدل مفهومی تعریف شده بصورت ریاضی بیان می‌شود. معمولاً مدل‌سازی ریاضی منجر به دستگامی از معادلات جبری و معادلات دیفرانسیل پاره‌ای خواهد شد. این دسته معادلات می‌توانند بصورت ترکیبی از معادلات تساوی و نامساوی باشند. در بسیاری از موارد این امکان وجود دارد که دستگام معادلات حاصله

^۷Conceptual modeling

^۸Mathematical modeling

^۹Numerical modeling

به صور مختلف تعریف شود که از دیدگاه تئوری منجر به یک جواب شوند ولی از دیدگاه حل عددی دارای تفاوت‌های اساسی باشند. در این میان هنر مدل‌سازی ریاضی و اطلاعات شخص مدل‌ساز از نحوه حل عددی معادلات می‌تواند در تعریف یک مدل ریاضی مناسب کمک کند. در این مرحله ممکن است مدل‌ساز با آگاهی از نیازهای مساله مدل مفهومی را ساده‌سازی کند تا مدل ریاضی مناسب‌تری حاصل شود. بعنوان مثال در مدل‌سازی فرایند انجماد، ردیابی مستقیم فصل مشترک مایع-جامد منجر به حل یک معادله هایپربولیک غیر خطی اضافی خواهد شد در حالی که در روش غیر مستقیم؛ بدون حل یک معادله دیفرانسیل اضافه؛ می‌توان مکان فصل مشترک را بکمک خطوط همدمای سالیدوس پیدا کرد. حال بسته به نیاز مساله می‌توان بین ایندو روش که از نظر هزینه محاسباتی تفاوت زیادی با یکدیگر دارند دست به انتخاب زد. اطمینان از حل پذیر بودن ^{۱۰}، وجود جواب و خوش رفتار بودن ^{۱۱} دستگاه معادلات بدست آمده نیز از دیگر وظایف مهم مدل‌ساز در این مرحله می‌باشد. اهمیت این مساله در مواردی است که مدل‌سازی برای اولین بار انجام می‌شود و اطلاعاتی در ارتباط با کارکرد مدل موجود نمی‌باشد. در ارتباط با مسائل طراحی بهینه، در بسیاری از موارد دستیابی به دستگاه معادلات خوش رفتار در مرحله مدل‌سازی ریاضی میسر نمی‌باشد. این مساله دلایل زیادی دارد. بعنوان مثال عدم وجود اطلاعات اولیه کافی برای تعریف مساله‌ای با جواب یگانه یا عدم وجود جواب برای مساله با توجه به شرایط اولیه تعریف شده را می‌توان از جمله این دلایل نام برد. در این گونه موارد حل مشکل مربوط به بدر رفتار بودن مساله به مرحله مدل‌سازی عددی انتقال می‌یابد.

- *مدلسازی عددی*: برای دستیابی به جواب مساله طراحی بهینه لازم است دستگاه معادلات بدست آمده در مرحله مدل‌سازی ریاضی بصورتی درآید که توسط کامپیوتر قابل درک بوده و طی زمانی معقول توسط کامپیوتر قابل حل باشد. مثلا اگر این دستگاه شامل یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای می‌باشد، لازم است معادله دیفرانسیل مربوطه گسسته‌سازی شده و به شکل یک دستگاه معادلات جبری در آید. باید توجه کرد که نحوه مدل‌سازی عددی می‌تواند تاثیر قابل ملاحظه‌ای بر هزینه محاسبات عددی داشته باشد. امروزه تحقیقات بسیار گسترده‌ای در رشته‌های مختلف در ارتباط با حل عددی مسائل مختلف صورت می‌گیرد که اطلاع از یافته‌های جدید و توانایی ترکیب روشها و استفاده از آنها در حل یک مساله خاص کلید رسیدن به روشهایی با بازدهی محاسباتی بالا می‌باشد.

در فصل‌های بعدی هر یک از مراحل مختلف حل مساله بهینه‌سازی مربوط به این پژوهش به تفصیل مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

^{۱۰}Solvability

^{۱۱}Well-posedness

فصل ۵

مدلسازی مفهومی در این تحقیق

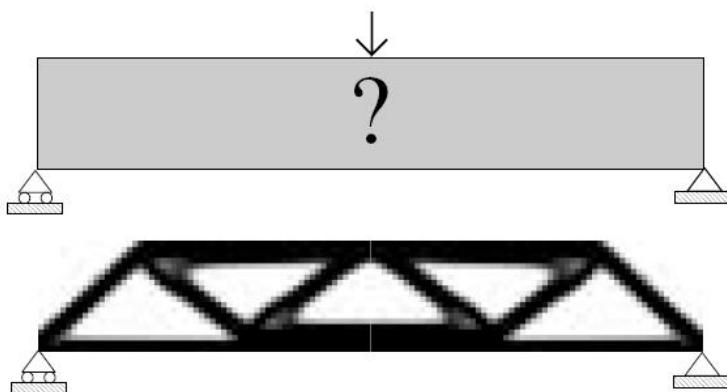
"The true sign of intelligence is not knowledge but imagination (Isaac Newton 1643--1727)"

"Imagination is more important than knowledge. For knowledge is limited, whereas imagination embraces the entire world, stimulating progress, giving birth to evolution (Albert Einstein 1879-1955)"

اولین گام در مدلسازی مفهومی طراحی بهینه سیستم تغذیه گذاری انتخاب متغیرهای طراحی می‌باشد. در کارهای گذشته [۸۳، ۸۴، ۹۲] این متغیرها بصورت پارامترهای مربوط به اندازه و شکل سیستم تغذیه‌رسانی در نظر گرفته شده‌اند. از جمله محاسن این روش تعداد کم متغیرهای طراحی می‌باشد. علاوه بر محدودیت‌هایی که در قبل برای این روش اشاره شد، دیگر محدودیت این روش عدم توانایی در تغییر توپولوژی تغذیه است بطوریکه شکل سیستم تغذیه‌گذاری همواره نزدیک به طرح اولیه خواهد بود. در برخی از کارهای انجام شده [۸۵، ۸۸] مختصات تعدادی از نقاط مشخص کننده سطح تغذیه به عنوان متغیر طراحی در نظر گرفته شده است. با این روش تعداد متغیرهای طراحی به مقدار قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد، اما در عوض امکان تغییر شکل بیشتر برای تغذیه مهیا می‌شود. مشابه حالت قبلی، علاوه بر محدودیت‌هایی که در بخش قبل به آنها اشاره شد این روش نیز قادر به تغییر توپولوژی طرح اولیه نخواهد بود. بمنظور برطرف کردن این نقیصه و همچنین عدم نیاز به هر گونه طراحی اولیه، در این تحقیق (برای اولین بار) از روش بهینه‌سازی توپولوژی^۱ [۹۳، ۹۴] جهت یافتن طراحی بهینه سیستم تغذیه‌رسانی استفاده می‌شود. روش بهینه‌سازی توپولوژی غالباً برای یافتن طراحی بهینه سازه‌های تحت تنش‌های استاتیکی استفاده می‌شود. در این روش هدف یافتن توزیع بهینه ماده درون دامنه طراحی است. شرایط مرزی و بارگذاری می‌تواند مستقل یا تابع متغیر طراحی باشد. متغیر طراحی نیز تابع مشخص کننده توپولوژی هر نقطه از دامنه حل می‌باشد. مقدار این تابع در مکانهایی که ماده وجود دارد یک و در مکانهای فاقد ماده صفر است. معمولاً در ابتدا توزیعی دلخواه برای این تابع در نظر گرفته می‌شود و در پایان حل مساله توزیع بهینه ماده حاصل می‌شود. شکل ۱.۵ بطور شماتیک نمونه‌ای از بهینه‌سازی توپولوژیک مربوط به یک پل را تحت یک بار استاتیکی مشخص نشان می‌دهد. باید توجه کرد که

^۱Topology optimization

در این روش هر نقطه از دامنه حل متناظر با یک متغیر طراحی خواهد بود. بنابراین پس از گسسته سازی ناحیه حل به ازای هر سلول محاسباتی یک متغیر طراحی وجود دارد. این مساله باعث افزایش قابل ملاحظه تعداد متغیرهای طراحی می شود که منجر به یک مساله بهینه سازی با ابعاد بسیار بزرگ خواهد شد. بطور کلی نرخ همگرایی روشهای بهینه سازی (یا هزینه محاسبات) و میزان حافظه مصرفی با افزایش تعداد متغیرهای طراحی بترتیب کاهش و افزایش می یابند. این مساله در ابتدا این نگرانی را ایجاد می کند که شاید نتوان مسائل واقعی که معمولاً مسائل بسیار بزرگی هستند را با این روش حل کرد. اما همانطور که در ادامه نشان داده خواهد شد، با استفاده از روشهای ویژه بهینه سازی که برای حل مسائل خاص توسعه داده شده اند می توان مسائلی با ابعاد بسیار بزرگ را با هزینه محاسباتی قابل قبول حل کرد.



شکل ۱۰۵: بهینه سازی توپولوژی برای یک پل، دامنه حل، نحوه بارگذاری و شرایط اولیه (بالا)، طرح بهینه (پایین)، مقدار ماده مصرف شده نصف مساحت دامنه حل می باشد [۹۴].

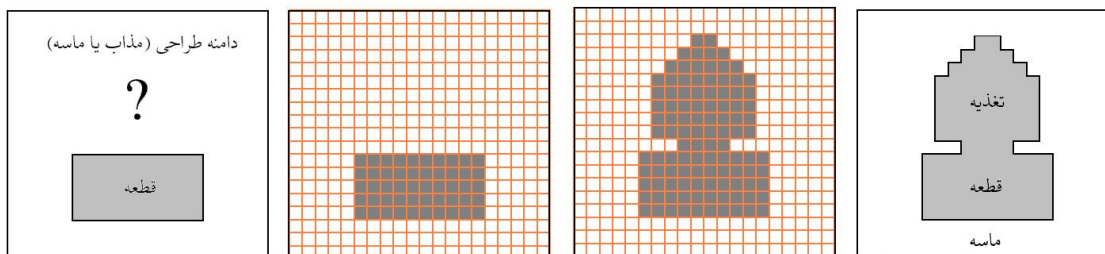
در اینجا به مدلسازی طراحی بهینه سیستم تغذیه گذاری بروش بهینه سازی توپولوژی پرداخته می شود. در ابتدا دامنه مکانی (هندسی) حل^۲ بصورت یک محفظه به شکل مکعب مستطیل (مستطیل در دو بعد) تعریف شده و قطعه ریختگی را در مرکز هندسی آن (یا در مکانی مناسب از آن) قرار می گیرد. ابعاد دامنه مکانی حل باید به اندازه کافی بزرگ باشد بطوریکه در پایان طراحی بتوان آن را به عنوان درجه های قالب ریخته گری در نظر گرفت. انتخاب شکل هندسی دامنه حل بصورت یک مکعب مستطیل تنها بمنظور ساده سازی تعریف مساله و انطباق بیشتر آن با شرایط معمول ریخته گری در قالب های ماسه ای می باشد. در عمل می توان هرگونه شکل دلخواهی را برای تعریف دامنه حل در نظر گرفت. در صورت لزوم می توان ابعاد دامنه حل را حین طراحی تغییر داد. در صورتی که فضای اشغال شده توسط قطعه از دامنه حل حذف شود، فضای باقیمانده بعنوان دامنه مکانی طراحی^۳ در نظر گرفته می شود. مقدار تابع مشخص کننده توپولوژی درون قطعه ریختگی همواره ثابت و برابر با یک خواهد بود. مقدار این تابع درون دامنه طراحی نامعلوم و به عنوان متغیر طراحی در نظر گرفته می شود. به بیان ساده تر باید مشخص شود چه نقاطی از دامنه طراحی می بایست با مذاب پر شوند (این نقاط مشخص کننده مکان هندسی تغذیه خواهند بود). تابع مشخص کننده توپولوژی در این نقاط برابر با یک است. مقدار تابع مشخص کننده توپولوژی در

^۲Spatial solution domain

^۳Spatial design space

نقاط باقیمانده از دامنه طراحی برابر با صفر خواهد بود که معادل با وجود ماسه در آن نقاط می‌باشد. پس از گسسته‌سازی دامنه حل (بمنظور حل عددی) نقاط ذکر شده عبارت از مراکز سلولهای تشکیل دهنده شبکه محاسباتی خواهند بود. اگر شبکه محاسباتی بصورت یک تصویر سیاه و سفید سه بعدی در نظر گرفته شود که هر سلول آن نمایانگر یک پیکسل تصویری باشد. هدف از طراحی بهینه یافتن رنگ هر پیکسل (سفید برای ماسه و سیاه برای مذاب) در این تصویر خواهد بود. رنگ پیکسل برای سلولهایی که درون قطعه واقع شده اند ثابت و سیاه خواهد بود. رنگ پیکسل سلولهای مربوط به دامنه طراحی مجهول خواهد بود که با مشخص شدن رنگ آنها تصویر (نقشه) سه بعدی از طرح بهینه بدست خواهد آمد (به شکل ۱.۵ مراجعه کنید). واضح است که این روش نیازی به تعریف طرح اولیه ندارد. همچنین، از دیگر مزایای آن خطی بودن تغییرات توپولوژی نسبت به تغییرات متغیرهای طراحی است.

بمنظور طراحی گردن تغذیه، ابتدا ناحیه‌ای از دامنه حل که در مجاورت سطوح قطعه واقع شده است بصورت یک پوسته نازک حجمی انتخاب می‌شود. سپس یک قید روی بیشینه حجم ماده (مذاب) توزیع شده در این ناحیه تعریف می‌شود. حد بالای این قید ضریبی (کمتر از یک) از حاصلضرب مساحت قطعه در ضخامت پوسته در نظر گرفته می‌شود. در این روش این امکان وجود دارد که سطوحی از قطعه که از لحاظ تکنولوژیکی مناسب اتصال گردن تغذیه نمی‌باشند از دامنه طراحی کنار گذاشته شوند. به عنوان مثال با عملیات ساده هندسی می‌توان سطوح تحتانی و پیرانحنای قطعه را شناسایی کرده و آنها را از دامنه طراحی خارج نمود.



شکل ۲.۵: طراحی بهینه سیستم تغذیه گذاری بروش بهینه سازی توپولوژی، قطعه با توپولوژی ثابت در کنار دامنه طراحی که باید توسط توزیعی بهینه از مذاب (تغذیه) و ماسه پر شود. از چپ به راست: شرایط اولیه، دامنه گسسته سازی شده، طرح بهینه در دامنه گسسته سازی شده، طرح بهینه.

مشابه تحقیقات ذکر شده در قسمت قبل، مجموع وزن سیستم تغذیه‌رسانی بعنوان تابع هدف در این تحقیق در نظر گرفته می‌شود. یکی از مهمترین قسمت‌های مدلسازی مفهومی تعریف قيود طراحی می‌باشد. از آنجا که در طراحی بهینه سیستم تغذیه‌رسانی، مطلوب تولید قطعه‌ای با میزان عیوب انقباضی کنترل شده می‌باشد، لازم است بیشینه عیوب انقباضی حاصل از انجماد (بصورت موضعی یا عمومی) تحت کنترل درآید. برای این منظور ابتدا باید این عیوب بصورت مناسبی پیش‌بینی شوند. برای پیش‌بینی عیوب انقباضی حاصل از انجماد روشهای متعددی در مراجع پیشنهاد شده است که از نظر هزینه و دقت محاسبات تفاوت‌های اساسی با یکدیگر دارند [۵۱]. از آنجا که در یک مساله طراحی بهینه نیاز است مقدار قيود و

مشتق آنها به دفعات زیاد محاسبه شوند، مشتق پذیری (پیوستگی خود تابع و مشتق اول آن) قیود و کم بودن هزینه محاسبات مربوط به ارزیابی قیود و مشتق آنها از اهمیت بسیار زیادی برخوردار است. مدل‌های دقیق پیش‌بینی عیوب انقباضی اغلب مدل‌هایی هیدرودینامیکی هستند و برای حل آنها لازم است دستگاه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای غیر خطی شامل معادلات ناویر استوکس^۴ یا معادلات داریسی^۵ و معادله انرژی در هر گام زمانی حل شوند. حل چنین دستگاه‌هایی علاوه بر نیاز به حافظه کامپیوتری زیاد، هزینه محاسباتی بسیار بالایی دارد. بر اساس تجربیات شخصی نویسنده، با استفاده از کامپیوترهای شخصی موجود در بازار زمان محاسبات مربوط به این مدل‌ها می‌تواند از یک روز تا بیش از یک هفته بطول انجامد (بسته به پیچیدگی قطعه، مدل و دقت مورد نیاز). حال اگر این روشها درون یک حلقه بهینه سازی مورد استفاده قرار گیرند ممکن است زمان حل مساله از مرز یک سال هم تجاوز کند. بعلاوه این مدل‌ها بخودی خود مشتق پذیر نبوده و نیاز به تقریب‌های مناسب برای فراهم کردن شرایط مشتق پذیری دارند. مشابه با محققان گذشته در این تحقیق از یک مدل حرارتی برای پیش بینی عیوب حاصل از انجماد استفاده می‌شود. در این مدل حل تنها یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای برای پیش بینی عیوب حاصل از انجماد کافی می‌باشد. باید توجه کرد که علی‌رغم مزیت محاسباتی ذکر شده، مدل حرارتی دارای محدودیتهایی نیز می‌باشد که آگاهی از آنها بمنظور استفاده صحیح از این مدل ضروری است. در زیر مهمترین فرضیات حاکم بر مدل حرارتی استفاده شده در این تحقیق ذکر می‌شوند:

- فرض می‌شود قالب در ابتدا با مذاب پر شده است و توزیع دما درون مذاب و قالب بصورت یکنواخت می‌باشد.
- از اثر شتاب ثقل و جابجایی آزاد مذاب بر رفتار انجماد و توزیع عیوب انقباضی صرف‌نظر می‌شود. واضح است این فرض برای قطعات سنگین با ارتفاع زیاد چندان معقول نمی‌باشد.
- فرض می‌شود دامنه انجماد کم بوده و فصل مشترک جامد-مایع در مقیاس میکروسکوپی مسطح می‌باشد.
- از اثر تشکیل فاصله هوایی بین قالب و فلز طی انجماد صرف‌نظر می‌شود. فرض می‌شود ضریب انتقال حرارت فصل مشترک قالب-فلز از میانگین هندسی ضریب انتقال حرارت فازها بدست می‌آید. این فرض در مورد قالب‌های ماسه‌ای که ضریب انتقال حرارت کمی دارند فرضی صحیح است و منجر به نتایج کمی با دقت قابل قبول می‌شود.
- فرض می‌شود کیفیت متالورژیکی مذاب بالا بوده و عیوب انقباضی بکمک توابع معیار حرارتی قابل پیش‌بینی هستند.
- از اثرات مربوط به جدایش عناصر آلیاژی حین انجماد صرف‌نظر می‌شود. بعلت ضریب نفوذ بالای کربن درون فازهای مایع و جامد و ضریب انتقال حرارت کم فولاد، این فرض در مورد فولادهای ساده کربنی که عنصر آلیاژی اصلی کربن است فرض معقولی تلقی می‌شود.

^۴Navier stokes equations

^۵Darcy equations

- فرض می‌شود گرمای نهان ذوب بصورت خطی در بازه دمایی لیکوئیدوس-سالییدوس توزیع شده و در نتیجه کسر حجمی فاز جامد با دما رابطه خطی دارد.

در این روش با حل معادله انرژی تاریخیچه حرارتی قطعه بدست می‌آید. سپس عیوب حاصل از انجماد توسط توابع معیار حرارتی پیش بینی می‌شوند. در حقیقت مقدار بیشینه یا کمینه تابع معیار در هر نقطه از قطعه به عنوان قید در نظر گرفته می‌شود. به عنوان مثال مقدار تابع معیار نیاما در هر نقطه درونی از قطعه را می‌توان بعنوان قید مساله تعریف کرد. در مقایسه با روشهای ارائه شده توسط محققان دیگر، این روش نیاز به تعریف یک (یا چند) مسیر تغذیه‌رسانی از پیش تعیین شده درون قطعه را ندارد. اما در عوض تعداد قیود طراحی (که قیودی غیر خطی هستند) به مقدار قابل ملاحظه ای افزایش می‌یابد. در این حالت تعداد قیود طراحی تقریباً هم ارز با تعداد متغیرهای طراحی خواهد بود. با بررسی منابع مربوط به کنترل بهینه مقید به معادلات دیفرانسیل پاره ای دریافته می‌شود که امروزه روش موثری برای حل مسائل بهینه با تعداد زیاد متغیرهای طراحی و قیود موضعی (قید تابع جواب معادله دیفرانسیل) وجود ندارد. اندک مراجع موجود در این زمینه نیز محدود به حل مسائل دوبعدی با تعداد متغیرهای طراحی کم شده و بطوریکه این محدودیت به صراحت در این مراجع [۹۵، ۹۶] ذکر شده است. بدون توجه به مشکلات مربوط وجود جواب، خوش رفتار بودن مساله، وابستگی جواب مساله و نرخ همگرایی به اندازه سلولهای محاسباتی یا عبارت دیگر تعداد پارامترهای طراحی و قیود، هزینه محاسبات مربوط به روشهای موجود بصورت مستقیم تابع تعداد قیود طراحی می‌باشد. بطور کلی برای ارزیابی هر قید لازم است یک معادله دیفرانسیل پاره ای حل شود. این مساله باعث می‌شود نتوان مسائلی با سایز بزرگ و بخصوص در سه بعد را توسط روشهای موجود کنونی حل کرد. از آنجا که لازم است پس از قالب‌گیری مدل ریخته‌گری بدون تخریب قالب از آن خارج شود، سیستم تغذیه گذاری می‌بایست از قابلیت قالبگیری^۶ مطلوبی برخوردار باشد. برای نیل به این مقصود لازم است قیود هندسی مشخصی روی توپولوژی سیستم تغذیه گذاری اعمال شود. اگر چه مدلسازی این قیود در این تحقیق بسهولت قابل انجام می‌باشد اما در نظر گرفتن این قیود باعث افزایش قابل توجه در هزینه محاسبات می‌شود. به همین علت قابلیت قالبگیری در این تحقیق در نظر گرفته نخواهد شد و مطالعات بیشتر در این زمینه موکول به تحقیقات آینده خواهد شد.

^۶Moldability

فصل ۶

مدلسازی ریاضی در این تحقیق

"The book of nature is written in mathematical language (Galileo Galilei: 1564–1642)"

"While other sciences search for the rules that God has chosen for the Universe, Mathematicians search for the rules that even God has to obey (Jean-Pierre Serre 1926–present)"

۱.۶ معادلات حاکم

همانطور که در فصل گذشته اشاره شد، در این تحقیق از یک مدل حرارتی برای پیش‌بینی عیوب انقباضی استفاده می‌شود. در صورتی که از اثر جابجایی آزاد مذاب حین انجماد صرف‌نظر شود، تغییرات دما درون قطعه و ماسه بترتیب از معادلات دیفرانسیل زیر تبعیت می‌کنند [۵۲، ۹۷]:

$$\rho_c(\theta)c_c(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (k_c(\theta)\nabla\theta) + \rho_c(\theta)L \frac{\partial f_s}{\partial t} \quad (1.6)$$

$$\rho_m(\theta)c_m(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (k_m(\theta)\nabla\theta) \quad (2.6)$$

در روابط بالا θ دما، ρ چگالی، c دما، k ضریب هدایت حرارتی، L گرمای نهان انجماد، f_s کسر حجمی فاز جامد در هر نقطه، اندیس‌های پایین $(\cdot)_c$ و $(\cdot)_m$ نیز بترتیب معرف کمیت‌های مربوط به فلز و ماسه می‌باشند. روی مرزهای خارجی قالب انتقال حرارت بصورت جابجایی آزاد انجام می‌شود:

$$-k_m \nabla \theta \cdot \mathbf{n} = h_a(\theta - \theta_a) \quad (3.6)$$

که در این رابطه \mathbf{n} بردار نرمال یکه به سمت خارج روی سطح قالب، h_a ضریب انتقال حرارت فصل مشترک قالب-محیط و θ_a دمای محیط می باشد. در این پژوهش از رابطه زیر در فصل مشترک فلز-ماسه استفاده می شود:

$$k_i \nabla \theta \cdot \mathbf{n}_I |_{cast} = -k_i \nabla \theta \cdot \mathbf{n}_I |_{mold} \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{k_i} = \frac{1}{2k_c} + \frac{1}{2k_m} \quad (5.6)$$

که \mathbf{n}_I در این رابطه نمایانگر بردار نرمال یکه روی فصل مشترک فلز-ماسه به سمت ماسه می باشد. زیرا در حل مسائل بهینه سازی مقید به معادلات دیفرانسیل پاره ای هزینه محاسبات خیلی زیاد می باشد، اقداماتی که بتواند بدون کاهش قابل توجه در دقت جواب، هزینه محاسبات را کاهش دهد، مطلوب هستند. خطی سازی معادلات دیفرانسیل غیرخطی (۱.۶) و (۲.۶) می تواند تاثیر قابل توجهی در کاهش هزینه محاسبات داشته باشد. برای این منظور می توان از اثر تغییرات خواص فیزیکی با دما صرف نظر کرده و معادلات (۱.۶) و (۲.۶) را (با شرایط مرزی مربوطه) بفرم زیر بازنویسی کرد:

$$\rho_c c_c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (k_c \nabla \theta) + \rho_c L \frac{\partial f_s}{\partial t} \quad (6.6)$$

$$\rho_m c_m \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (k_m \nabla \theta) \quad (7.6)$$

همچنین فرض می شود خواص فیزیکی مذاب و جامد مقادیر یکسانی دارند. باید توجه کرد که کلیه این فرضیات فقط بدلیل افزایش بازده محاسباتی انجام می شوند و در صورت لزوم می توان (بدون تغییر قابل توجه در روش مورد استفاده) بسادگی محاسبات را بدون انجام این فرضیات انجام داد.

امروزه روشهای بسیاری برای اعمال اثر گرمای نهان انجماد در معادله انتقال حرارت وجود دارند. از جمله این روشها عبارتند از [۹۷]: بازیابی دما^۱، ترم منبع^۲، ظرفیت حرارتی موثر^۳ و روش آنتالپی^۴. هزینه محاسباتی این روشها تا حد زیادی تابع نوع روش حل عددی استفاده شده و بخصوص روش انتگرال گیری در جهت محور زمان می باشد. با توجه به اینکه در این تحقیق از یک روش کاملاً صریح برای انتگرال گیری در جهت زمان استفاده می شود و گام زمانی خیلی کوچک است، روشهای ذکر شده تقریباً دقت یکسانی دارند. لذا به علت حجم محاسبات کمتر، در این تحقیق از روش ظرفیت حرارتی موثر استفاده می شود. معادله (۶.۶) را می توان بفرم زیر بازنویسی کرد:

$$\rho_c (c_c - L \frac{\partial f_s}{\partial \theta}) \frac{\partial \theta}{\partial t} = \rho_c c_e \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (k_c \nabla \theta) \quad (8.6)$$

^۱Temperature recovery

^۲Source term

^۳Effective heat capacity

^۴Enthalpy Method

که c_e نمایانگر ظرفیت حرارتی موثر می باشد. فرض تغییرات خطی کسر حجمی جامد با دما نتیجه می دهد:

$$f_s = \frac{\theta_l - \theta}{\theta_l - \theta_s}, \quad \frac{\partial f_s}{\partial \theta} = \frac{-1}{\theta_l - \theta_s} \quad (9.6)$$

استفاده از رابطه (9.6) در c_e نتیجه می دهد:

$$c_e = \begin{cases} c_c, & \theta > \theta_l \\ c_c + \frac{L}{\theta_l - \theta_s}, & \theta_s \leq \theta \leq \theta_l \\ c_c, & \theta < \theta_s \end{cases} \quad (10.6)$$

فرض کنید دامنه حل (فضای درون قالب) $D \subset R^d$, $d \geq 2$ به دو بخش مکمل دامنه اعمال قیود موضعی وابسته به دما (یا به اختصار دامنه مکانی قیود) D_c و دامنه طراحی D_d تقسیم شده است بطوریکه: $D_d = D \setminus D_c$, $D = D_c \cup D_d$. دامنه مکانی قیود همان مکان هندسی قطعه ریختگی است که توپولوژی آن حین طراحی ثابت باقی می ماند. امکان تغییر توپولوژی تنها در دامنه طراحی میسر است. همانطور که در بخش مدلسازی مفهومی اشاره شد، از یک تابع مشخص کننده توپولوژی، $\chi \in \{0, 1\}$ ، بمنظور تعیین مزر بین ماسه و فلز ریختگی استفاده می شود. مقدار این تابع در D_c ثابت و برابر یک خواهد بود. مقدار χ می تواند درون D_d تغییر کند بطوریکه در هر مکان $\chi(\mathbf{x}) = 1$ نمایانگر وجود تغذیه (یا گردن تغذیه) و $\chi(\mathbf{x}) = 0$ نمایانگر وجود ماسه می باشد. فرض کنید دامنه طراحی به سه منطقه مجزا شامل D_{df} ، D_{dn} و D_{de} تقسیم شده است بطوریکه: $D_d = D_{df} \cup D_{dn} \cup D_{de}$. در اینجا D_{df} نمایانگر مکان هندسی نقاطی است که طراحی تغذیه در آن انجام می شود (دامنه طراحی تغذیه)، D_{dn} مشخص کننده نوار باریکی از اطراف قطعه (واقع در دامنه طراحی) است که طراحی گردن تغذیه در آن مکان انجام می شود، D_{de} نیز معرف مکان هندسی نقاطی از دامنه طراحی است که توپولوژی آنها در طول فرایند طراحی ثابت خواهد ماند ($\chi(\mathbf{x}) = 0$). D_{de} معمولا شامل مکان هندسی نقاطی از قالب است که بدلیل محدودیت های تکنولوژیکی برای اتصال تغذیه مناسب نمی باشند. بعنوان مثال قسمت های زیرین قطعه معمولا برای اتصال تغذیه مناسب نمی باشند (بدلیل کاهش اثر شتاب ثقلی در تسهیل تغذیه رسانی). همچنین سطوح پر انحنای قطعه نیز معمولا از D_{dn} حذف شده و در ناحیه D_{de} قرار می گیرند.

با استفاده از تعاریف مربوط به دامنه های حل و مقدار تابع مشخصه توپولوژی در این نواحی می توان معادلات (7.6)،

(8.6) و (10.6) را ترکیب و بفرم یکپارچه زیر نوشت:

$$\rho(\chi) c(\chi) \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (k(\chi) \nabla \theta) \quad (11.6)$$

$$\rho(\chi) = \chi \rho_c + (1 - \chi) \rho_m \quad (12.6)$$

$$c(\chi) = \chi c_e + (1 - \chi) c_m \quad (13.6)$$

$$k(\chi) = \chi k_c + (1 - \chi) k_m \quad (14.6)$$

با این روش شرط مرزی داخلی (۴.۶) حذف شده و شرط مرزی روی دیواره خارجی قالب، رابطه (۳.۶)، بصورت زیر در می‌آید:

$$-k(\chi)\nabla\theta \cdot \mathbf{n} = h_a(\theta - \theta_a) \quad (15.6)$$

در صورتی که فرض شود دمای اولیه قالب با دمای محیط برابر بوده و دمای بارریزی با θ_p نشان داده شود، شرایط اولیه حل معادله انتقال حرارت بصورت زیر خواهد بود:

$$\theta_0(\chi) = \theta(t = 0, \mathbf{x}) = \chi\theta_p + (1 - \chi)\theta_a \quad (16.6)$$

از جمله مشکلات کار کردن با این سیستم معادلات عدم مشتق پذیر بودن ظرفیت حرارتی مؤثر (رابطه ۱۰.۶) نسبت به دما است. جهت رفع این مشکل می‌توان از یک تقریب مشتق‌پذیر مناسب بجای این رابطه استفاده کرد. برای این منظور از تقریب هموار شده تابع پله‌ای یکطرفه^۵ استفاده می‌شود. تعریف تابع پله‌ای یکطرفه بصورت زیر است:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (17.6)$$

با استفاده از تابع پله‌ای یکطرفه می‌توان ظرفیت حرارتی مؤثر را بصورت زیر تعریف کرد:

$$c_e = c_c + \frac{L}{\theta_l - \theta_s} [H(\theta - \theta_s) - H(\theta - \theta_l)] \quad (18.6)$$

در صورتی که تابع پله‌ای یکطرفه با تابعی هموار تقریب زده شود، به آن تابع پله‌ای یکطرفه هموار شده گویند. با پیروی از [۹۸] یکی از روشهای انجام این تقریب بصورت زیر خواهد بود:

$$\tilde{H}_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < -\xi \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{2\xi} + \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{\xi}\right), & -\xi \leq x \leq \xi \\ 1, & x > \xi \end{cases} \quad (19.6)$$

در این رابطه \tilde{H} تابع پله‌ای هموار شده و $\xi \in (0, \infty)$ مقیاس هموارسازی است بطوریکه:

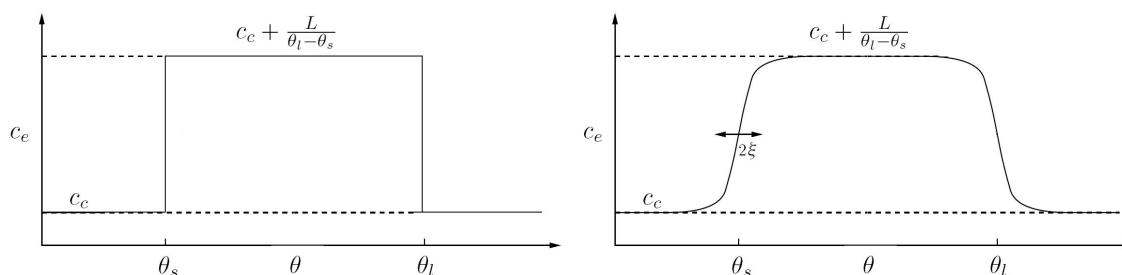
$$H(x) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \tilde{H}_\xi(x) \quad (20.6)$$

با استفاده از تابع پله‌ای یکطرفه هموار شده می‌توان فرم هموار شده (مشتق پذیر) ظرفیت حرارتی مؤثر را بدست آورد:

$$\tilde{c}_e = c_c + \frac{L}{\theta_l - \theta_s} [\tilde{H}_\xi(\theta - \theta_s) - \tilde{H}_\xi(\theta - \theta_l)] \quad (21.6)$$

شکل ۱.۶ بطور شماتیک تغییرات ظرفیت حرارتی مؤثر نسبت به دما را در حالت غیرهموار، (۱۰.۶)، و در حالت هموار شده، (۲۱.۶) نشان می‌دهد.

^۵Heaviside step function



شکل ۱.۶: تغییرات ظرفیت حرارتی مؤثر نسبت به دما در حالت غیرهموار (چپ) و در حالت هموار شده (راست).

همانطور که در فصل قبل اشاره شد، مجموع وزن سیستم تغذیه‌رسانی بعنوان تابع هدف انتخاب می‌شود. بنابراین می‌توان تابع هدف را بصورت زیر تعریف کرد:

$$\min_{\chi \in \{0,1\}} J(\chi) = \int_{D_{df}} \chi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (22.6)$$

بمنظور تولید قطعه‌ای عاری از عیوب انقباضی لازم است قیود موضعی درون قطعه ارضاء شوند. فرم کلی این قیود بصورت زیر خواهد بود:

$$g(t, \mathbf{x}, \chi) = g\left(\dot{\theta}(t, \mathbf{x}, \chi), \nabla\theta(t, \mathbf{x}, \chi), \nabla\nabla\theta(t, \mathbf{x}, \chi), g_c\right)_{t=t_s} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in D_c \quad (23.6)$$

در این رابطه g مقدار قید موضعی، $\dot{\theta}$ نرخ سرمایش موضعی، $\nabla\theta$ گرادیان دما، $\nabla\nabla\theta$ مشتق دوم دما (هسین)، t_s زمان انجماد موضعی و g_c مقدار بحرانی قید می‌باشد. باید توجه شود که کلیه کمیتها در رابطه (۲۳.۶) برای هر نقطه از قطعه در زمان انجماد موضعی ($t = t_s$) محاسبه می‌شوند. زمان انجماد موضعی برای هر نقطه عبارتست از زمانی که در آن دمای نقطه مورد نظر به دمای سالیدوس برسد. ($\theta = \theta_s$) اگر چه در شرایط ایده آل استفاده از اطلاعات درجه دوم جواب معادله انتقال حرارت ($\nabla\nabla\theta$) در پیش بینی عیوب انقباضی مطلوب است، اما بر اساس اطلاعات نویسنده، روشهای کنونی موجود در حوضه آنالیز تابعی^۶ قادر به بررسی مسائل بهینه سازی مقید به معادلات دیفرانسیل پاره ای شامل مشتقات درجه دوم جواب معادله دیفرانسیل (در تعریف تابع هدف یا قیود) نمی‌باشند (برای اطلاعات بیشتر از مرز دانش در این زمینه به [۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲] مراجعه شود). بنابراین در این تحقیق از معیار نایاما بفرم زیر استفاده می‌شود:

$$g(t, \mathbf{x}, \chi) = \frac{|\nabla\theta(t, \mathbf{x}, \chi)|}{\sqrt{\dot{\theta}(t, \mathbf{x}, \chi)}} \Big|_{t=t_s} - g_c \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in D_c \quad (24.6)$$

همانطور که قبلا اشاره شد، معیار نایاما قادر به تمایز بین نقاط سرد و گرم نمی‌باشد. لذا برای جلوگیری از ابهام حین محاسبات قبل از هر تکرار در چرخه بهینه‌سازی شرط کافی تشکیل عیوب در نقاط درون قطعه بررسی شده و مناطقی از قطعه که این شرط را ارضاء نمی‌کنند از دامنه تعریف قیود موضعی حذف می‌شوند. لازم به تذکر است (بر اساس اطلاعات نویسنده) از لحاظ تئوری توجیهی برای این اقدام وجود ندارد، لکن نتایج آزمایشات عددی نشانگر موفقیت این روش می‌باشد.

^۶Functional analysis

فرض کنید دامنه زمانی مورد بررسی با $t \in [0, T]$ نشان داده شود. واضح است T باید طوری انتخاب شود که دمای گرمترین نقطه از قطعه در زمان $t = T$ کمتر از دمای سالیدوس باشد. از آنجا که در این تحقیق معادله انتقال حرارت بصورت گذرا در دامنه زمانی $[0, T]$ حل می‌شود، برای سهولت در مدلسازی ریاضی بهتر است قیود موضعی مربوط به دما نیز طوری بیان شوند که در کل دامنه زمانی مربوطه تعریف شده باشند. برای این منظور می‌توان از تابع ضربه دیراک^۷ استفاده کرد. تابع ضربه دیراک بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\delta^{\mathcal{D}}(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{\mathcal{D}}(x) dx = 1 \quad (25.6)$$

یکی از مهمترین خواص تابع ضربه دیراک عبارتست از:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta^{\mathcal{D}}(x) dx = f(0) \quad (26.6)$$

که $f(x)$ در این رابطه یک تابع دلخواه می‌باشد. با استفاده از این خاصیت می‌توان رابطه (24.6) را بفرم زیر بازنویسی کرد:

$$g(t, \mathbf{x}, \chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{|\nabla\theta(t, \mathbf{x}, \chi)|}{\sqrt{\dot{\theta}(t, \mathbf{x}, \chi)}} - g_c \right] \delta^{\mathcal{D}}(t - t_s) dt \geq 0, \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in (-\infty, +\infty) \times \mathcal{D}_c \quad (27.6)$$

یا کمی ساده سازی نتیجه می‌شود:

$$g(t, \mathbf{x}, \chi) = \int_0^T \left[\frac{|\nabla\theta(t, \mathbf{x}, \chi)|}{\sqrt{\dot{\theta}(t, \mathbf{x}, \chi)}} - g_c \right] \delta^{\mathcal{D}}(t - t_s) dt \geq 0, \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \mathcal{D}_c \quad (28.6)$$

از آنجا که در این تحقیق زمان انجماد موضعی متغیری مستقل نبوده و بکمک درون یابی دما در جهت زمان محاسبه می‌شود، بهتر است t_s را از رابطه (28.6) حذف نموده و آن را بفرم زیر بیان کرد:

$$g(\mathbf{x}, \chi) = \int_0^T \left[\frac{|\nabla\theta(\mathbf{x}, \chi)|}{\sqrt{\dot{\theta}(\mathbf{x}, \chi)}} - g_c \right] \delta^{\mathcal{D}}(\theta - \theta_s) dt \geq 0, \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \mathcal{D}_c \quad (29.6)$$

بطور کلی کار کردن با تابع ضربه دیراک آسان نبوده و با مشکلات زیادی حین آنالیز تئوری و عددی همراه است (مثلا عدم مشتق پذیر بودن و عدم امکان استفاده مستقیم این تابع در محاسبات عددی). برای رفع این مشکلات در این تحقیق از تقریب هموار تابع ضربه، $\delta_a^{\mathcal{D}}$ ، استفاده می‌شود:

$$\delta^{\mathcal{D}}(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a^{\mathcal{D}}(x) \quad (30.6)$$

در این رابطه $a \in (0, \infty)$ مشخص کننده مقیاس هموار سازی است. در [103] چارچوب عمومی برای توسعه تقریبهای همگرا به تابع ضربه دیراک پیشنهاد شده است. با پیروی از این مرجع، در این تحقیق از تابع توزیع احتمال گوس استفاده

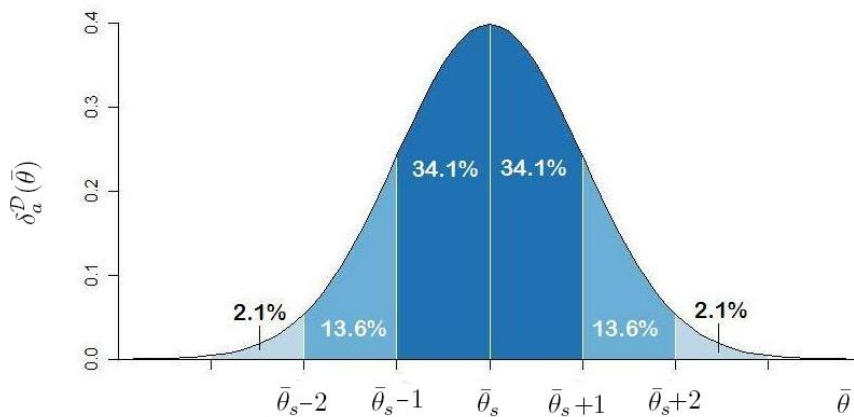
^۷Dirac delta function

می‌شود:

$$\delta_a^D(x) = \frac{e^{-(x)^2/(2a^2)}}{a\sqrt{2\pi}} \quad (31.6)$$

با استفاده از تقریب تابع ضربه اثر قیود موضعی را در یک همسایگی باریک حول زمان انجماد موضعی پخش می‌شود. انتخاب تابع توزیع گوس باعث تمرکز وزن این توزیع در نقطه انجماد می‌شود. فرض کنید مطلوب توزیع اثر قیود موضعی در بازه دمایی $\Delta\theta_a$ ۶ حول نقطه انجماد باشد، در اینصورت می‌توان از یک توزیع نرمال ($a = 1$) با آرگومان ورودی $\bar{\theta} = \frac{\theta}{\Delta\theta_a}$ استفاده کرد. این مساله بطور شماتیک در شکل ۲.۶ نشان داده شده است. مطابق شکل حدود ۷۰ درصد از وزن اثر قیود موضعی متمرکز در همسایگی از دمای انجماد به فاصله شعاعی $\Delta\theta_a$ است. این پارامتر برای همسایگی به شعاع $\Delta\theta_a$ ۳ به بیش از ۹۹ درصد می‌رسد. بمنظور افزایش دقت در محاسبات، در تحقیق حاضر از میانگین دماهای لیکوئیدوس و سالیدوس، $\theta_{sl} = \frac{\theta_l + \theta_s}{2}$ ، به جای دمای سالیدوس در رابطه (۲۹.۶) استفاده می‌شود. همچنین $\Delta\theta_a$ طوری انتخاب می‌شود که دامنه اثر تابع ضربه دیراک محدود به فاصله دمایی لیکوئیدوس-سالیدوس باشد، یعنی: $\Delta\theta_a = \frac{\theta_l + \theta_s}{6}$. بنابراین با استفاده از تابع ضربه دیراک هموار شده می‌توان رابطه (۲۹.۶) را بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$\tilde{g}(\mathbf{x}, \chi) = \int_0^T \left[\frac{|\nabla\theta(\mathbf{x}, \chi)|}{\sqrt{\dot{\theta}(\mathbf{x}, \chi)}} - g_c \right] \delta_1^D(\theta - \theta_{sl}) dt \geq 0, \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \mathcal{D}_c \quad (32.6)$$



شکل ۲.۶: تغییرات تابع ضربه دیراک هموار شده، $\delta_a^D(\bar{\theta})$ ، نسبت به $\bar{\theta}$ برای $a = 1$ ($\bar{\theta}_s = \frac{\theta_s}{\Delta\theta_a}$).

بر اساس دانش نویسنده، روش استفاده شده در هموار سازی در جهت زمان توابع وابسته به یک زمان موضعی نامعلوم برای اولین بار در این پژوهش ارائه شد. در بخش های بعد این فصل روش آنالیز حساسیت برای چنین توابعی نیز ارائه خواهد شد. کاربردهای عمومی زیادی را می‌توان برای این روش متصور شد که از جمله آنها کنترل و بهینه سازی پدیده‌های فیزیکی شامل تغییر فاز همدم است.

در این تحقیق از قید زیر برای محدود کردن میزان مذاب مصرف شده در اطراف قطعه (طراحی گردن تغذیه) استفاده می‌شود:

$$\int_{D_{dn}} \chi \, d\mathbf{x} \leq R_{dn} V_{dn} \quad (33.6)$$

در این رابطه $R_{dn} \in (0, 1]$ و V_{dn} نشان دهنده حجم D_{dn} می‌باشد. برای افزایش کیفیت طراحی لازم است سطوحی از قطعه که برای اتصال گردن تغذیه مناسب نمی‌باشند از ناحیه طراحی گردن تغذیه حذف شوند. در این راستا یکی از ساده ترین معیارها حذف سطوح پر انحنا و بخصوص سطوح مقعر می‌باشد. انحنا[^] متوسط در هر نقطه از سطح قطعه را می‌توان توسط رابطه زیر محاسبه کرد:

$$\kappa = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \chi}{|\nabla \chi|} \right) \quad (34.6)$$

در این رابطه κ نمایانگر انحنا[^] متوسط سطح است. سطوح پایینی قطعه نیز معمولاً کاندید مناسبی برای اتصال گردن تغذیه نیستند. برای مشخص کردن این سطوح کافی است زاویه نرمال سطحی با جهت شتاب ثقل را در هر نقطه سطحی مورد آزمون قرار گیرد. در تحقیق اخیر، سطوح پایینی قطعه، تمامی سطوح مقعر و سطوح محدب با انحنا[^] بیشتر از یک حد بحرانی (κ_c) از پیش مشخص شده از دامنه طراحی گردن تغذیه حذف می‌شوند. از آنجا که در اثر نیروی ناشی از وزن مذاب سطوح پایینی قطعه در تماس با قالب دارای انتقال حرارت بیشتری نسبت به سایر سطوح می‌باشند، ضریب انتقال حرارت مربوط به این سطوح در فاکتور ۲ ضرب خواهد شد. نتایج شبیه‌سازی بدست آمده نشان می‌دهد این تصحیح ساده باعث تطابق بیشتر نتایج با مشاهدات تجربی می‌شود.

در برخی از موارد ممکن است نیاز باشد حد بالایی برای میزان مذاب مصرف شده در ساخت تغذیه لحاظ شود (اعمال قید بر کمینه بهره ریخته‌گری مجاز)، برای این منظور می‌توان از قید عمومی زیر استفاده کرد:

$$\int_{D_{df}} \chi \, d\mathbf{x} \leq R_{df} V_{df} \quad (35.6)$$

در این رابطه $R_{df} \in (0, 1]$ و V_{df} نشان دهنده حجم D_{df} می‌باشد.

در یک جمع بندی از مطالب ذکر شده مدل ریاضی بکار رفته در این تحقیق را می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

[^]Mean curvature

$$(P) \left\{ \begin{array}{ll} \arg \min_{\chi \in \{0,1\}} J(\chi) = \int_{\mathcal{D}_{df}} \chi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, & \text{subject to:} \\ \rho(\chi) \tilde{c}(\chi) \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (k(\chi) \nabla \theta) & \text{in } [0, T] \times \mathcal{D} \\ \rho(\chi) = \chi \rho_c + (1 - \chi) \rho_m & \text{in } [0, T] \times \mathcal{D} \\ \tilde{c}(\chi) = \chi \tilde{c}_e + (1 - \chi) c_m & \text{in } [0, T] \times \mathcal{D} \\ k(\chi) = \chi k_c + (1 - \chi) k_m & \text{in } [0, T] \times \mathcal{D} \\ \theta(t, \mathbf{x}) = \chi \theta_p + (1 - \chi) \theta_a & \text{in } \{t = 0\} \times \mathcal{D} \\ \chi(\mathbf{x}) = 0 & \text{on } [0, T] \times \partial \mathcal{D} \\ -k(\chi) \nabla \theta \cdot \mathbf{n} = h_a(\theta - \theta_a) & \text{on } [0, T] \times \partial \mathcal{D} \\ \tilde{g}(\mathbf{x}, \chi) \geq 0 & \text{in } [0, T] \times \mathcal{D}_c \\ \int_{\mathcal{D}_{dn}} \chi d\mathbf{x} \leq R_{dn} V_{dn} & \text{in } [0, T] \\ \int_{\mathcal{D}_{df}} \chi d\mathbf{x} \leq R_{df} V_{df} & \text{in } [0, T] \end{array} \right.$$

بمنظور پایداری بهتر و همگرایی سریع‌تر حل عددی، در سیستم معادلات (P) از شرط $\chi = 0$ روی مرزهای خارجی قالب استفاده شده است. از دیدگاه فیزیکی این شرط طراحی را محدود به تغذیه‌های روبسته می‌نماید.

۲.۶ تخفیف سازی معادلات حاکم

همانطور که در فصل گذشته اشاره شد، مدل ریاضی نه تنها باید فیزیک حاکم بر مساله و شرایط بهینه را پوشش دهد بلکه لازم است دارای جواب یا دست کم یک دنباله کاهشی^۹ بسمت شرایط بهینه باشد. پایداری بهینه سازی از دیگر مواردی است که لازم است مورد توجه قرار گیرد. سیستم معادلات مربوط به مساله (P) نه تنها فاقد جواب بهینه است بلکه بعلت وجود ناپایداری توپولوژیکی ایجاد یک دنباله کاهشی بسمت شرایط بهینه آن میسر نمی‌باشد. این مشکلات دلایل عمده‌ای دارند که از مهمترین و معروفترین این دلایل محدود بودن فضای کنترل به یک فضای ناپیوسته ($\chi \in \{0, 1\}$) و همچنین وجود مشتق مکانی (گرادیان) جواب معادله دیفرانسیل در تعریف قیود می‌باشد. این موارد باعث ناپایداری و نوسان موضعی جواب و جلوگیری از پیشروی بسوی شرایط بهینه می‌گردد. مطالعات تئوریک مربوط به این دسته از مسائل کنترل بهینه (البته برای شرایط خاص و ساده) اولین بار توسط لوک تارتار^{۱۰}

[۱۰۴، ۱۰۵] صورت پذیرفت. در این تحقیق همگرایی مساله با استفاده از روش اچ-همگرایی^{۱۱} [۱۰۶، ۱۰۷] مورد مطالعه قرار گرفت. در ادامه روش پیشنهادی توسط تارتار بشکل گسترده‌ای توسط سایر محققان مورد استفاده قرار گرفت. تذکر این نکته ضروری است که بعلت پیچیدگی ساختار این مسائل مطالعات تئوریک معمولاً وابسته به شکل دامنه حل از جنبه پیوستگی و تحدب، نوع معادله دیفرانسیل پاره‌ای، بعد معادله دیفرانسیل پاره‌ای، شرایط مرزی، تابع هدف و قیود

^۹Converging sequence

^{۱۰}Luc Tartar

^{۱۱}H-convergence

می‌باشد. در این راستا موثرترین تحقیقات توسط پابلو پدرگال^{۱۲} و همکارانش در یک بازه زمانی حدود ۱۵ سال تا کنون انجام شده است. مطالعه مساله برای حالت دو بعدی غیر وابسته به زمان با تابع هدف حاوی گرادیان جواب معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی هموزن توسط پدرگال و همکارانش انجام شده است [۱۰۸]. سپس این آنالیز به سه بعد تعمیم پیدا کرده است [۱۰۹، ۱۱۰]. در ادامه مطالعه روی مسائل وابسته به زمان توسط این محققان انجام شده است [۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳]. بعلاوه محدودیت‌های تئوری مربوط به روش اچ-همگرایی، در این تحقیقات از روش اندازه-یانگ^{۱۳} [۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷] برای انجام آنالیزهای مربوطه استفاده شده است. در این روش ابتدا مساله مورد نظر بفرم معادل یک مساله برداری حساب تغییرات بازنویسی شده و مطالعه از طریق روشهای مستقیم آنالیز تابعی [۱۱۸] صورت می‌گیرد. بنظر می‌رسد در کلیه کارهای انجام شده در گذشته (تا قبل از سال ۲۰۰۹) مطالعات روی مسائل شامل وجود گرادیان جواب معادله دیفرانسیل در تابع هدف بوده است. هنگامی که این گرادیان در قیود موضعی ظاهر شود ساختار مساله بسیار پیچیده‌تر خواهد شد. این مورد بتازگی مورد بررسی قرار گرفته است [۱۱۹]. مطالعه انجام شده در این کار مربوط به معادله دیفرانسیل غیر وابسته به زمان با شرایط مرزی هموزن و در دو بعد می‌باشد. روش اندازه-یانگ بمنظور آنالیز مساله مورد استفاده قرار گرفته است و فرم صریح تخفیف^{۱۴} یافته معادلات ارائه شده است. لازم به تذکر است که علی‌رغم تحقیقات گسترده انجام شده، تاکنون اثباتی برای وجود جواب برای خانواده مسائل ذکر شده وجود ندارد و در تمام تحقیقات مربوطه هدف تنها ایجاد یک دنباله کاهشی همگرا بسمت جواب بوده است. البته دلایل فیزیکی نیز وجود دارد که نشان می‌دهد این خانواده از مسائل فاقد یک جواب بهینه هستند. جهت اطلاعات بیشتر به [۱۱۴، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۰۵، ۱۲۲، ۹۳] مراجعه شود.

بنظر می‌رسد روش استفاده شده در [۱۱۲، ۱۱۹] قابل گسترش به مساله مورد نظر در تحقیق حاضر باشد. لکن بعلاوه گذرا بودن معادله، پیچیده تر بودن شرایط مرزی، وابستگی به زمان بودن قیود، وجود نرخ سرمایش علاوه بر گرادیان دما در قیود و موضعی بودن ناحیه تعریف قیود، مطالعه تئوری روی این مساله بسیار پیچیده بوده و از چارچوب این پژوهش خارج است. در این قسمت با پیروی از [۱۱۲، ۱۱۹]، بدون اثبات، فرم تخفیف داده شده سیستم معادلات حاکم ارائه می‌شود.

بطور کلی اولین اقدام در جهت تخفیف سازی مسائل کنترل بهینه مقید به فضای ناپیوسته کنترل، گسترش فضای طراحی به فضایی پیوسته می‌باشد. بنابراین لازم است متغیر کنترل، $\chi \in \{0, 1\}$ ، با یک متغیر پیوسته، $w \in [0, 1]$ ، تعویض گردد. در حقیقت متغیر w در هر نقطه از دامنه طراحی نمایانگر کسر حجمی فلز و $(1 - w)$ در هر مکان نمایانگر کسر حجمی ماسه می‌باشد. حال با پیروی از قضیه ۴ [۱۱۹] و ملاحظه ۱۵ شماره ۲ از [۱۱۲]، می‌توان پیش‌بینی^{۱۶} کرد فرم تخفیف داده شده سیستم معادله (P) که می‌توان آن را با نماد (RP) نشان داد بفرم زیر باشد (توجه شود که در مرجع ذکر شده فرم صریح تخفیف داده شده مساله مربوطه بدون اثبات ارائه شده است. توجه شود که ساختار مساله مورد بررسی در این تحقیق

^{۱۲}Pablo Pedregal

^{۱۳}Young-measure

^{۱۴}Relaxed

^{۱۵}Remark

^{۱۶}Conjecture

بمراتب پیچیده تر از مرجع ذکر شده می‌باشد. در این پژوهش به پایداری و همگرایی حل عددی به عنوان دلیلی بر صحت فرم تخفیف داده شده تکیه خواهد شد):

$$(RP) \left\{ \begin{array}{ll} \arg \min_{w \in [0,1]} J(w) = \int_{\mathcal{D}_{df}} w(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, & \text{subject to:} \\ \rho(w)\tilde{c}(w) \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (k(w)\nabla \theta) & \text{in } [0, T] \times \mathcal{D} \\ \rho(w) = w\rho_c + (1-w)\rho_m & \text{in } [0, T] \times \mathcal{D} \\ \tilde{c}(w) = w\tilde{c}_e + (1-w)c_m & \text{in } [0, T] \times \mathcal{D} \\ \frac{1}{k(w)} = \frac{1}{k_c}w + \frac{1}{k_m}(1-w) & \text{in } [0, T] \times \mathcal{D} \\ \theta(t, \mathbf{x}) = w\theta_p + (1-w)\theta_a & \text{in } \{t=0\} \times \mathcal{D} \\ w(\mathbf{x}) = 0 & \text{on } [0, T] \times \partial\mathcal{D} \\ -k(w)\nabla \theta \cdot \mathbf{n} = h_a(\theta - \theta_a) & \text{on } [0, T] \times \partial\mathcal{D} \\ \tilde{g}(\mathbf{x}, w) \geq 0 & \text{in } [0, T] \times \mathcal{D}_c \\ \int_{\mathcal{D}_{dn}} w d\mathbf{x} \leq R_{dn}V_{dn} & \text{in } [0, T] \\ \int_{\mathcal{D}_{df}} w d\mathbf{x} \leq R_{df}V_{df} & \text{in } [0, T] \end{array} \right.$$

واضح است استفاده از فضای کنترل $w \in [0, 1]$ بجای فضای $\chi \in \{0, 1\}$ باعث می‌شود توپولوژی حاصل از حل (RP) بصورت مخلوطی از مذاب و ماسه بوده و مرز مشخصی بین دو فاز وجود نداشته باشد. چنین نتیجه‌ای از دیدگاه تکنولوژی فاقد ارزش است. برای رفع این مشکل باید (RP) را طوری اصلاح کرد که جواب نهایی آن نزدیک به $w \in \{0, 1\}$ باشد. عبارت ساده‌تر مقدار متغیر کنترل باید در هر نقطه یا نزدیک ۱ باشد یا نزدیک صفر و ضخامت مزر بین دو منطقه کم و قابل صرفنظر کردن باشد. برای حل این مشکل از روش سیمپ^{۱۷} [۹۴، ۱۲۳] بمنظور رسیدن به یک توپولوژی نزدیک به شرایط ۱-۰ استفاده می‌شود. فرمول سازی مساله (RP) با روش سیمپ، (RP^S) ، بصورت زیر خواهد بود:

$$(RP^S) \left\{ \begin{array}{ll} \arg \min_{w \in [0,1]} J(w) = \int_{\mathcal{D}_{df}} w(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, & \text{subject to:} \\ \rho(w)\tilde{c}(w) \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (k(w)\nabla \theta) & \text{in } [0, T] \times \mathcal{D} \\ \rho(w) = w^p\rho_c + (1-w^p)\rho_m & \text{in } [0, T] \times \mathcal{D} \\ \tilde{c}(w) = w^p\tilde{c}_e + (1-w^p)c_m & \text{in } [0, T] \times \mathcal{D} \\ \frac{1}{k(w)} = \frac{1}{k_c}w^p + \frac{1}{k_m}(1-w^p) & \text{in } [0, T] \times \mathcal{D} \\ \theta(t, \mathbf{x}) = w^p\theta_p + (1-w^p)\theta_a & \text{in } \{t=0\} \times \mathcal{D} \\ w(\mathbf{x}) = 0 & \text{on } [0, T] \times \partial\mathcal{D} \\ -k(w)\nabla \theta \cdot \mathbf{n} = h_a(\theta - \theta_a) & \text{on } [0, T] \times \partial\mathcal{D} \\ \tilde{g}(\mathbf{x}, w) \geq 0 & \text{in } [0, T] \times \mathcal{D}_c \\ \int_{\mathcal{D}_{dn}} w d\mathbf{x} \leq R_{dn}V_{dn} & \text{in } [0, T] \\ \int_{\mathcal{D}_{df}} w d\mathbf{x} \leq R_{df}V_{df} & \text{in } [0, T] \end{array} \right.$$

در مساله (RP^S) توان سیمپ می‌باشد که معمولا بین ۱-۵ تغییر می‌کند. در عمل می‌توان آن را برابر ۲ گرفت یا آن را در خلال تکرارهای داخلی بهینه سازی بتدریج آنرا از ۱ تا ۵ تغییر داد. در این تحقیق این توان از عدد ۱ شروع شده و در هر تکرار داخلی ۰/۳ افزایش می‌یابد.

^{۱۷}SIMP (Simple Isotropic Material Penalization)

۳.۶ بهینه سازی پیش از گسسته سازی

امروزه روشهای مختلفی برای حل مساله (RP^S) وجود دارد که می توان آنها را به دو دسته کلی گسسته سازی سپس بهینه سازی^{۱۸} و بهینه سازی سپس گسسته سازی^{۱۹} تقسیم کرد. در روش اول ابتدا دستگاه معادلات حاکم توسط یک روش عددی مناسب گسسته سازی شده و سپس توسط یک روش حل بهینه سازی روی فضاهاى بعد-محدود^{۲۰} حل می شود. از مهمترین محاسن این روش سادگی بسیار زیاد آن می باشد بطوریکه بدون ورود به جزئیات مربوط به بهینه سازی عددی، می توان از یک بسته بهینه سازی مناسب برای حل سیستم معادلات گسسته سازی شده استفاده کرد. استفاده از این روشها هنگامی که تعداد متغیرهای طراحی و قیود مربوطه کم می باشد مناسب است. در تعداد اندک مراجع موجود در ارتباط با بهینه سازی توپولوژی با قیود موضعی تابع جواب معادله دیفرانسیل پاره ای، از این روشها بمنظور حل سیستم معادلات مربوطه استفاده شده است. بعنوان مثال روش تقریب جدایی پذیر محدب [۹۶]، روش نقطه داخلی [۱۲۴] و

روش مجانب متحرک [۱۱۹] در اندک مراجع مربوطه مورد استفاده قرار گرفته شده اند. بطور کلی عیب اصلی این خانواده از روشها افزایش (با نرخ فوق خطی) هزینه محاسبات و حافظه مصرفی با افزایش تعداد قیود می باشد. این محدودیتها باعث می شود امکان حل مسائلی حتی با اندازه متوسط با در نظر گرفتن توان محاسباتی موجود مقدور نباشد. بعنوان مثال با افزایش یک قید موضعی (وابسته به جواب معادله دیفرانسیل)، لازم است یک معادله دیفرانسیل بمنظور محاسبه مشتق اول قیود حل شود. برای انجام یک مدل سازی هندسی مناسب برای یک قطعه ریختگی تعداد سلولهای موجود در شبکه محاسباتی که درون قطعه واقع می شوند بسادگی به عدد صدهزار می رسد. بنابراین زمان محاسبات در هر تکرار بهینه سازی دست کم صدهزار برابر زمان محاسبات مورد نیاز برای شبیه سازی انجماد قطعه خواهد بود. حال اگر کل چرخه بهینه سازی در نظر گرفته شود، این ضریب بسادگی به ده میلیون می رسد که انجام آن در عمل غیر ممکن می باشد.

در دسته دوم از روشهای ذکر شده، عملیات لازم برای بهینه سازی پیش از گسسته سازی انجام می شود. بعبارت دیگر شرایط لازم برای بهینه بودن جواب^{۲۱} ابتدا بدست می آید و سپس سیستم شامل شرط لازم بهینه بودن جواب گسسته سازی و توسط روشی مناسب حل می شود. در حقیقت در این روش بهینه سازی روی فضای بعد-نامحدود^{۲۲} انجام می شود. در این روش این امکان وجود دارد که با بکارگیری یک استراتژی مناسب اثر وابستگی هزینه محاسبات به تعداد قیود را حذف کرد. لکن بعلا نیاز به انجام آنالیز روی فضاهاى تابعی با بعد نامحدود و عدم هم ارز بودن نُرم روی این فضاها، این گونه روشها معمولا با پیچیدگی های تئوری بسیار زیادی همراه هستند بطوریکه امروزه مبانی تئوری تنها برای خانواده کوچکی از مسائل پایه گذاری شده است. از مهمترین دلایل پیچیدگی آنالیز وجود قیود نامساوی موضعی در سیستم معادلات مربوطه می باشد که باعث غیر هموار شدن (عدم مشتق پذیری) قیود می شود. برای درک بهتر این مساله قید نامساوی را مطابق با رابطه بعد

^{۱۸} Discretize-then-optimize

^{۱۹} Optimize-then-discretize

^{۲۰} Finite-dimensional

^{۲۱} Optimality conditions

^{۲۲} Infinite-dimensional

در نظر بگیرید:

$$h(x) \geq 0$$

از آنجا که اغلب روشهای جبری موجود توانایی حل معادلات تساوی را دارند، لازم است معادله نامساوی بالا بفرم مساوی بازنویسی شود. برای این منظور می توان مطابق زیر از تابع مینیمم استفاده کرد:

$$\min(h(x), 0) = 0$$

اما تابع مینیمم غیر هموار بوده و امکان استفاده مستقیم از روشهای مبتنی بر مشتق در ارتباط با این تابع وجود ندارد. برای حل این مشکل معمولاً از روشهای بهینه‌سازی غیر هموار^{۲۳} یا نیمه هموار^{۲۴} استفاده می‌شود [۱۲۵، ۱۲۶]. یکی از شاخص‌ترین این تحقیقات در این حوزه مرجع [۱۲۵] می‌باشد که در آن ابتدا اثبات شده است که تابع مینیمم (یا ماکسیمم) یک تابع نیمه هموار است و سپس با استفاده از روش نیوتن نیمه هموار الگوریتم مناسبی برای حل مساله ارائه شده است. لکن مسایل بررسی شده در این مراجع ساختار کاملاً متفاوتی نسبت به مساله (RPS) دارند. بعنوان نمونه قیود موضعی در این مراجع خطی بوده و روی جواب معادله دیفرانسیل پاره‌ای (نه گرادیان آن) اعمال شده است، همچنین متغیر طراحی ضرایب مربوط به معادله دیفرانسیل پاره‌ای نبوده بلکه یک نیروی حجمی اعمال شده بوده است که بررسی آن با پیچیدگی‌های کمتری همراه است.

بطور کلی تئوری کنترل بهینه عمدتاً بر مبنای وجود حداقل یک جواب برای مساله پایه گذاری شده است. حداقل شرط لازم برای وجود یک جواب بهینه برای مساله غیر تهی بودن فضای محاسباتی محدود شده با قیود مربوطه می‌باشد. در حقیقت ممکن است انجام طراحی که شرایط مطلوب مورد نظر کاربر را فراهم کند غیر ممکن باشد (مثلاً امکان تولید قطعه عاری از عیب مقدور نباشد). در این موارد لازم است تعریف اولیه مساله در جهت گسترش فضای طراحی محدود شده توسط قیود تغییر داده شود. اگر فضای طراحی محدود شده توسط قیود به مقدار کافی گسترش داده نشود مشکل قبل همچنان باقی خواهد ماند. از طرف دیگر گسترش بیش از حد این فضا باعث دور شدن از شرایط مطلوب خواهد شد (مثلاً اگر حد مجاز عیوب باقیمانده در قطعه خیلی بالا باشد، طرح از دیدگاه عملی فاقد ارزش است). یکی از روشهای مؤثر در حل اینگونه مسائل استفاده از روشهای بهینه‌سازی دو مرحله‌ای^{۲۵} [۱۲۷] می‌باشد. این روشها بعلاوه هزینه محاسباتی بسیار بالا از عمومیت کمی برخوردار هستند. علت هزینه محاسباتی بالا ناشی از چرخه خارجی بهینه‌سازی است که درون آن مساله‌ای شبیه به بهینه‌سازی اولیه حل می‌شود. حل مسائل بهینه‌سازی مقید خود شامل یک چرخه است که در آن سلسله‌ای از مسائل بهینه‌سازی غیرمقید حل می‌شوند. حل یک مساله بهینه‌سازی غیرمقید خود فرایندی مبتنی بر تکرار می‌باشد، بنابراین حل مساله بهینه‌سازی دو مرحله‌ای شامل سه حلقه تکرار تودرتو خواهد بود.

^{۲۳}Non-smooth

^{۲۴}Semi-smooth

^{۲۵}Bilevel programming

در این قسمت روش نوینی بر مبنای روشهای بهینه‌سازی سپس گسسته‌سازی ذکر شده ارائه خواهد شد. توسعه این روش با در نظر گرفتن ساختار اولیه مساله صورت گرفته است. از ویژگی‌های منحصر بفرد این روش مستقل بودن هزینه محاسبات آن از تعداد قیود و متغیرهای طراحی می‌باشد. همچنین شرایط عدم وجود جواب بطور خودکار توسط روش بررسی شده و مجموعه ای از نزدیکترین جوابها به شرایط بهینه در اختیار کاربر قرار می‌گیرد.

پیش از ورود به جزئیات لازم است ابتدا مقدمه‌ای در ارتباط با حل مسائل بهینه‌سازی مقید ارائه شود. فرض کنید $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ متغیر طراحی، $f(\mathbf{z}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ تابع هدف و قیود طراحی $g(\mathbf{z}) \leq 0$ باشد بطوریکه $g(\mathbf{z}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($m \leq n$). یکی از روشهای متداول در حل مسائل بهینه‌سازی مقید تبدیل مساله به یک سری متوالی از مسائل بهینه‌سازی غیرمقید می‌باشد. بازنویسی قید مربوطه مساله بصورت $\bar{g}(\mathbf{z}) = \max(g(\mathbf{z}), 0) = 0$ را در نظر بگیرید. با استفاده از توابع جریمه^{۲۶} $P(\mathbf{y}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$ می‌توان مساله مقید را بصورت مساله غیرمقید زیر نوشت.

$$\arg \min_{\mathbf{z}} f(\mathbf{z}) + P(\bar{g}(\mathbf{z}))$$

برخی از فرمهای متداول رابطه بالا عبارتند از [۱۲۸]:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \arg \min_{\mathbf{z}} f(\mathbf{z}) + \frac{c}{2} \|\bar{g}(\mathbf{z})\|_2^2 \quad (a)$$

$$\arg \min_{c \geq c_0, \mathbf{z}} f(\mathbf{z}) + \frac{c}{2} |\bar{g}(\mathbf{z})| \quad (b)$$

$$\arg \min_{c \geq c_0, \mathbf{z}} f(\mathbf{z}) + \lambda \bar{g}(\mathbf{z}) + \frac{c}{2} \|\bar{g}(\mathbf{z})\|_2^2 \quad (c)$$

در روابط بالا $c \in \mathbb{R}_+$ پارامتر جریمه و $\lambda \in \mathbb{R}^m$ ضریب لاگرانژ مربوط به قیود می‌باشند. حین آنالیز روی فضاهای تابعی، λ یک تابع بعد-نامحدود خواهد بود که در ادامه در مورد خواص این تابع بیشتر صحبت خواهد شد. برای رابطه (a) جواب این مساله تنها زمانی به جواب مساله اصلی میل می‌کند که c به سمت بی نهایت میل کند [۱۲۹]. بنابراین لازم است سری از مسائل بهینه‌سازی غیر مقید با افزایش تدریجی c حل شوند. رابطه (b) که به آن جریمه‌سازی دقیق^{۲۷} گویند دارای این حسن است که دیگر نیاز نیست c به سمت بی نهایت میل کند بلکه به ازای $c \geq c_0$ جواب این مساله با مساله اصلی معادل خواهد بود. بنابراین در صورتی که c به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود، تنها حل یک مساله بهینه‌سازی کافی خواهد بود. مقدار c_0 عبارتست از $c_0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i^*$ که λ^* ضریب لاگرانژ مربوط به قیود در نقطه جواب می‌باشد. بطور کلی با افزایش پارامتر c مساله بد رفتار خواهد شد بطوریکه در عمل حل مساله برای مقادیر بزرگ این پارامتر هنگامی که حدس اولیه از نقطه جواب دور است، وجود ندارد. بنابراین حل یکسری از مسائل بهینه‌سازی غیرمقید در این حالت نیز اجباری است. اما عیب عمده این روش جریمه‌سازی غیرمشتق پذیر بودن آن تابع هدف آن می‌باشد. به همین دلیل رابطه (c) پیشنهاد شده است. حضور ضریب لاگرانژ در این رابطه باعث می‌شود که این روش جریمه‌سازی نیز دقیق بوده و نیاز نباشد c به سمت بی نهایت میل

^{۲۶}Penalty functions

^{۲۷}Exact penalization

کند. در حقیقت در این روش تلاش می‌شود با یک فرایند تکرار متغیر لاگرانژ در نقطه جواب حدس زده شود و با پیشروی تکرارها این حدس بهبود یابد. البته ضریب پنالیتی نیز یک روند تصحیح غیر کاهشی را در طول تکرارهای حل طی خواهد کرد. از محاسن عمده این روش مشتق پذیر بودن و خوش رفتار بودن حل می‌باشد. علی رغم قدمت ۳۰ ساله [۱۲۹]، بعلت توانایی زیاد، امروزه این روش در حل طیف گسترده‌ای از مسائل بهینه سازی مقید مورد استفاده قرار می‌گیرد. بسیاری از روشهایی که طی سه دهه اخیر ابداع شده‌اند بدون داشتن یک برتری محسوس بصورت پایا پای با این روش رقابت می‌کنند. اما عیب عمده این روش و سایر روشها هزینه محاسبات بالای آنها می‌باشد. تعداد تکرارهای خارجی در این روش از پیش مشخص نبوده و تابع حدس اولیه استفاده شده برای متغیر لاگرانژ می‌باشد.

علی‌رغم جاذبه های فراوان روش ضرایب لاگرانژ در حل مسائل بهینه‌سازی مقید، استفاده از این روش در آنالیز مسائل کنترل بهینه روی فضاهای تابعی با مشکلات عدیده‌ای همراه است. از مهم‌ترین این مشکلات نظم ^{۲۸} کم تابع لاگرانژ مربوط به قیود موضعی وابسته به جواب معادله دیفرانسیل می‌باشد. بر اساس آنالیز انجام شده در [۱۳۰، ۱۳۱] تابع لاگرانژ مربوط به این قیود تنها یک تابع بورل ^{۲۹} (رجوع شود به فصل ۲ از مرجع [۱۳۲]) می‌باشد. بعبارت ساده‌تر تابع لاگرانژ مربوطه که در معادله دیفرانسیل پاره‌ای همزاد مربوط به آنالیز حساسیت وارد می‌شود فاقد خواص لازم برای استفاده در روشهای حل معادلات دیفرانسیل بکمک روش‌های موجود است. توجه شود که دست کم نیاز است تابع لاگرانژ مربوطه زیر مجموعه ای از فضای برداری $L^2(D)$ باشد. در این پژوهش با استفاده از یک روش ابتکاری در فرمول‌سازی، نه تنها از محدودیت‌های تئوری اشاره شده رهایی یافته می‌شود بلکه روشی با بازدهی محاسباتی بسیار بالا حاصل خواهد شد. همچنین می‌توان تعداد تکرارهای خارجی استفاده شده در الگوریتم را برای رسیدن به یک دقت مشخص از پیش تعیین کرد.

از آنجا که روش حل و هزینه محاسبات مربوط به هر مساله بهینه‌سازی مقید تا حد زیادی تابع نوع قیود موجود در سیستم معادلات و نحوه اعمال آنها می‌باشد، لازم است ابتدا خواص قیود موجود در سیستم بهینه‌سازی مورد بررسی قرار گیرد. مجهولات موجود در سیستم بهینه سازی (RPS) ، θ و w می‌باشند. بطور کلی چهار دسته قید در سیستم (RPS) وجود دارد که عبارتند از:

۱. قید معادله دیفرانسیل در جهت زمان-مکان بصورت تساوی روی θ .
 ۲. قید غیر خطی موضعی تابع w و θ در جهت زمان-مکان بصورت نامساوی (\hat{g}) .
 ۳. دو قید نامساوی عمومی مربوط به حد بالای حجم ماده مصرف شده در دامنه طراحی تغذیه و گردن آن.
 ۴. قیود خطی موضعی تابع w بصورت نامساوی (قیود مربوط به حد بالا و پایین متغیر طراحی).
- باید تذکر داد که همواره لازم نیست قیود موجود در سیستم بهینه‌سازی در هر مرحله حل بصورت ارضاء شده نگه داشته شوند.

^{۲۸}Regularity

^{۲۹}Borel function

بلکه مهم است در پایان فرایند طراحی این قیود ارضاء باشند. برخی از روشهای بهینه‌سازی ماهیت درونی دارند یعنی از یک حدس اولیه که قیود را ارضاء می‌کند شروع کرده و در مسیر بهینه‌سازی همواره قیود را بصورت ارضاء شده نگه می‌دارند. دسته دیگری از روشها بیرونی هستند بطوریکه قیود بهینه سازی تنها در نقطه جواب ارضاء خواهند بود. روش استفاده شده در این تحقیق یک روش درونی-بیرونی خواهد بود. بعبارت دیگر در طول فرایند بهینه‌سازی برخی از قیود همواره ارضاء خواهند بود و برخی دیگر تنها در نقطه جواب ارضاء می‌شوند.

از آنجا که قید ۱ تساوی رنگ-کامل^{۳۰} می‌باشد می‌توان با حل معادله دیفرانسیل به ازای یک مقدار ثابت w این قید را حذف نمود. در حقیقت با این عمل بهینه سازی روی فضای پوچ^{۳۱} تولید شده توسط θ انجام می‌شود. با این عمل مجهولات موجود در سیستم بهینه‌سازی به مقدار قابل توجهی کاهش می‌یابد. لازم به تذکر است که در روشهای دیگر که به روشهای حل یکباره^{۳۲} [۱۳۳] معروف هستند، معادله دیفرانسیل به عنوان یک قید در سیستم باقی می‌ماند. این روشها معمولاً در حل مسائلی که معادله دیفرانسیل مربوطه غیرخطی است می‌توانند مرجح باشند. علت این است که در این حالت لازم نیست در هر تکرار بهینه‌سازی معادله دیفرانسیل غیرخطی را که حل آن بسیار پر هزینه است بصورت دقیق حل کرد. از آنجا که در این تحقیق معادله انتقال حرارت خطی سازی شده است استفاده از این روش منجر به افزایش هزینه محاسبات و حافظه مصرفی خواهد شد. قیود ۳ و ۴ تقریباً ساده ترین نوع قیود موجود در این سیستم می‌باشند. در این تحقیق روش نوبنی ارائه خواهد شد که بدون افزایش محسوس در هزینه محاسبات این قیود را در تمام مراحل بهینه سازی بصورت ارضاء شده باقی نگه می‌دارد.

قید ۲ پیچیده ترین نوع قید موجود در این سیستم می‌باشد. از آنجا که این قید در عمل ضامن تولید قطعه سالم است، ارضاء آن نیز از اهمیت زیادی برخوردار است. فرض کنید در خلال فرایند بهینه‌سازی مقدار تابع هدف کمتر از $R_{df}V_{df}$ گردد. بنابراین در ادامه فرایند قید محدودیت مقدار ماده مصرفی در دامنه طراحی تغذیه غیر فعال خواهد بود. لازم به تذکر است که در عمل به علت محدود کردن فضای کنترل و امکان فقدان جواب معمولاً مرجح است که از این قید استفاده نشود. همانطور که گفته شد روش استفاده شده در این تحقیق قیود مربوط به متغیر کنترل (قیود ۳ و ۴) را همواره ارضاء نگه می‌دارد. فرض کنید پارامتر R_{df} بعنوان یک متغیر طراحی در نظر گرفته شود (این پارامتر بین ۰ و ۱ تغییر می‌کند). واضح است مینیمم‌سازی R_{df} معادل مینیمم سازی تابع هدف در مساله (RPS) می‌باشد. بنابراین می‌توان تابع هدف را در (RPS) حذف کرده و در عوض یک مساله بهینه‌سازی دومرحله‌ای با یک ساختار ویژه که جواب آن معادل جواب (RPS) است حل کرد. این مساله عبارتست از:

$$(\overline{RPS}) \quad \arg \min_{R_{df} \in [0,1]} R_{df} \quad \text{subject to: } w \text{ and } R_{df} \text{ solve } (RPS_R^S)$$

^{۳۰} Full-rank

^{۳۱} Null space

^{۳۲} All-at-once

$$(RP_R^S) \left\{ \begin{array}{l} \arg \min_w J^R(w) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}_c} [\min(\tilde{g}(\mathbf{x}, w), 0)]^2 d\mathbf{x}, \text{ subject to:} \\ \rho(w)\tilde{c}(w) \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (k(w)\nabla \theta) \quad \text{in } [0, T] \times \mathcal{D} \\ \rho(w) = w^p \rho_c + (1 - w^p) \rho_m \quad \text{in } [0, T] \times \mathcal{D} \\ \tilde{c}(w) = w^p \tilde{c}_e + (1 - w^p) c_m \quad \text{in } [0, T] \times \mathcal{D} \\ \frac{1}{k(w)} = \frac{1}{k_c} w^p + \frac{1}{k_m} (1 - w^p) \quad \text{in } [0, T] \times \mathcal{D} \\ \theta(t, \mathbf{x}) = w^p \theta_p + (1 - w^p) \theta_a \quad \text{in } \{t = 0\} \times \mathcal{D} \\ w(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{on } [0, T] \times \partial \mathcal{D} \\ -k(w)\nabla \theta \cdot \mathbf{n} = h_a(\theta - \theta_a) \quad \text{on } [0, T] \times \partial \mathcal{D} \\ 0 \leq w \leq 1 \\ \int_{\mathcal{D}_{dn}} w d\mathbf{x} \leq R_{dn} V_{dn} \quad \text{in } [0, T] \\ \int_{\mathcal{D}_{df}} w d\mathbf{x} = R_{df} V_{df} \quad \text{in } [0, T] \end{array} \right.$$

جهت سادگی آنالیز می‌توان از تقریب زیر در تعریف تابع هدف مربوط به مساله (RP_R^S) استفاده کرد:

$$\begin{aligned} J^R(w) &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}_c} [\min(\tilde{g}(\mathbf{x}, w), 0)]^2 d\mathbf{x} \\ &\approx \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{D}_c} [\min(\hat{g}(\mathbf{x}, w), 0)]^2 d\mathbf{x} dt, \quad \hat{g}(\mathbf{x}, w) = \left[\frac{|\nabla \theta|}{\sqrt{\theta}} - g_c \right] \delta_1^{\mathcal{D}} (\theta - \theta_{sl}) \end{aligned} \quad (۳۶.۶)$$

با استفاده از رابطه (۳۶.۶) مساله (RP_R^S) بفرم زیر در می‌آید:

$$(RP_R^S) \left\{ \begin{array}{l} \arg \min_w J^R(w) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{D}_c} [\min(\hat{g}(\mathbf{x}, w), 0)]^2 d\mathbf{x} dt, \text{ subject to:} \\ \rho(w)\tilde{c}(w) \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (k(w)\nabla \theta) \quad \text{in } [0, T] \times \mathcal{D} \\ \rho(w) = w^p \rho_c + (1 - w^p) \rho_m \quad \text{in } [0, T] \times \mathcal{D} \\ \tilde{c}(w) = w^p \tilde{c}_e + (1 - w^p) c_m \quad \text{in } [0, T] \times \mathcal{D} \\ \frac{1}{k(w)} = \frac{1}{k_c} w^p + \frac{1}{k_m} (1 - w^p) \quad \text{in } [0, T] \times \mathcal{D} \\ \theta(t, \mathbf{x}) = w^p \theta_p + (1 - w^p) \theta_a \quad \text{in } \{t = 0\} \times \mathcal{D} \\ w(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{on } [0, T] \times \partial \mathcal{D} \\ -k(w)\nabla \theta \cdot \mathbf{n} = h_a(\theta - \theta_a) \quad \text{on } [0, T] \times \partial \mathcal{D} \\ 0 \leq w \leq 1 \\ \int_{\mathcal{D}_{dn}} w d\mathbf{x} \leq R_{dn} V_{dn} \quad \text{in } [0, T] \\ \int_{\mathcal{D}_{df}} w d\mathbf{x} = R_{df} V_{df} \quad \text{in } [0, T] \end{array} \right.$$

باید توجه کرد که فرم بازنویسی شده مساله (RP_R^S) فاقد قيود موضعی تابع جواب معادله دیفرانسیل می‌باشد. این مورد نه تنها مساله را خوش رفتار می‌کند بلکه امکان حل آن را بدون تکرار خارجی با هزینه محاسباتی معادل حل یک مساله بهینه‌سازی غیرمقید میسر می‌سازد. در عوض حلقه تکرار قبلی به تکرار خارجی حین حل $(\overline{RP^S})$ منتقل شده است. این مساله محاسن زیادی دارد که برخی از آنها در ادامه ذکر می‌شوند. از آنجا که پارامتر طراحی در حلقه بالایی $(\overline{RP^S})$ تنها یک عدد حقیقی

بین صفر و یک است بسادگی می‌توان بازه مربوطه را به تعداد محدودی زیر بازه تقسیم کرده و در بدترین شرایط مساله را با دقت از پیش تعیین شده در تعداد تکرار خارجی مشخصی حل کرد. همچنین تمام جوابهای حل (RP_R^S) با ارزش بوده و اطلاعات آن می‌تواند کاربرد را در تصمیم‌گیری نهایی کمک کند. در حقیقت هر یک از این جوابها معادل بهترین طراحی ممکن به ازای مقدار راندمان مشخص ریخته‌گری می‌باشد. در صورتیکه مساله اصلی دارای جواب باشد، تابع هدف مربوط به (RP_R^S) در نقطه جواب با پیشروی بهینه‌سازی بسمت صفر میل کرده و پس از تعداد تکرار محدود مقدار آن همواره صفر خواهد بود. بعبارت دیگر می‌توان (RP_R^S) را به عنوان یک قید مساوی صفر نیز در نظر گرفت. اما مزیت فرمولسازی اشاره شده که خود یکی از خواص منحصر بفرد این روش است امکان حل مساله هنگام فقدان جواب می‌باشد. از دیدگاه مهندسی هنگامی که مساله اولیه فاقد جواب باشد مطلوب یافتن طرحی است که در عین حال که کمترین وزن را دارد تخطی آن از قیود نیز کمترین مقدار باشد که دقیقاً معادل حل (\overline{RPS}) است. همچنین بوسیله حل (RP_R^S) می‌توان بطور همزمان بهترین حدس اولیه برای R_{df} و امکان وجود جواب برای مساله (RP) را بررسی کرد. برای این منظور کافی است (RP_R^S) به ازای $R_{df} = 1$ حل شود. فرض کنید جواب این مساله با w_i^* نشان داده می‌شود. در صورتیکه $(J^R(w_i^*) \neq 0)$ باشد، مساله (RP) فاقد جواب بهینه است. همچنین برای ادامه حل حدس اولیه، R_{df}^0 ، برابر خواهد بود با:

$$R_{df}^0 = \frac{1}{V_{df}} \int_{D_{df}} w_i^* dx \quad (37.6)$$

همچنین دامنه تغییرات R_{df} در این مساله محدود به پاره خط $[0, R_{df}^0]$ خواهد بود، در این تحقیق این مساله را بکمک جستجوی عمومی^{۳۳} روی پاره خط $[0, R_{df}^0]$ حل می‌شود. برای این منظور می‌توان پاره خط را $[0, R_{df}^0]$ را به m (در این پژوهش $m = 10$ می‌باشد) تکه مساوی تقسیم کرده و (RP_R^S) را m بار به ازای مقادیر مشخص شده R_{df} حل کرد. سپس جواب عمومی^{۳۴} مساله توسط یک درون‌یابی یک بعدی بین این m نقطه پیدا خواهد شد. در این پژوهش ابتدا با استفاده از یک درونیابی خطی بین این نقاط جواب تقریبی مساله پیدا می‌شود. سپس با اضافه کردن اطلاعات بیشتر جواب دقیق مساله با استفاده از روشهای درونیابی مرتبه بالا غیر نوسانی محاسبه می‌شود. جزئیات این روش در فصل ۷ ارائه خواهد شد.

پس از مشخص شدن استراتژی حل مساله روی فضاهای تابعی بعد-نامحدود لازم است روشی مناسب برای حل مساله داخلی (\overline{RPS}) یعنی (RP_R^S) ارائه شود. در این پژوهش از یک روش مبتنی بر مشتق برای حل این مساله استفاده خواهد شد. با توجه به اینکه بعلت هزینه محاسباتی بالا محاسبه مشتق دوم تابع هدف (RP_R^S) در عمل غیر ممکن می‌باشد، از روشی مبتنی بر مشتق اول استفاده خواهد شد. با توجه به معادله دیفرانسیل حاکم بر مساله لازم است دست کم توابع θ و w بترتیب عضوی از فضاهای برداری $L^2([0, T]; H^1(D))$ و $L^2([0, T]; L_0^2(D))$ باشند. برای جزئیات بیشتر در خصوص این فضاهای تابعی به [۱۳۴] مراجعه شود. از آنجا که این فضاهای تابعی زیر مجموعه از فضاهای باناخ^{۳۵} هستند،

^{۳۳}Global

^{۳۴}Global solution

^{۳۵}Banach space

لازم است مفهوم مشتق روی فضاهای تابعی باناخ تبیین شود. بطور کلی مفاهیم مربوط به مشتق جهت‌دار روی فضاهای برداری بعد-محدود بسادگی قابل تعمیم به فضاهای باناخ می‌باشد. این عمل برای اولین بار توسط ریاضیدان فرانسوی بنام رنه گاتو^{۳۶} انجام پذیرفت. به احترام این دانشمند، امروزه این نوع مشتق بعنوان مشتق گاتو^{۳۷} شناخته می‌شود.

تعریف. (مشتق گاتو) فرض کنید X یک فضای باناخ است و $F : X \rightarrow \mathbb{R}$. گویند تابع F در نقطه $u \in X$ در جهت $v \in X$ مشتق‌پذیر است اگر حد زیر موجود باشد:

$$\frac{\partial F(u)}{\partial u} \cdot v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t}$$

بعلاوه اگر برای هر تابع دلخواه $v \in X$ تابع $\tilde{u} \in X'$ فضای دوگان^{۳۸} X می‌باشد) وجود داشته باشد بطوریکه:

$$(\partial F(u)/\partial u) \cdot v = \tilde{u}(v), \quad \forall v \in X$$

گویند تابع F در نقطه u بصورت گاتو مشتق‌پذیر است.

در صورتیکه در هر مرحله از فرایند بهینه‌سازی، θ جواب معادله انتقال حرارت به ازای مقدار ثابت متغیر کنترل در آن مرحله باشد، می‌توان قید معادله دیفرانسیل را از مساله (RP_R^S) حذف کرد. در نتیجه تنها متغیر بهینه‌سازی مربوط به مساله w خواهد بود. در این بخش فرض می‌شود مشتق جهت‌دار تابع هدف بروشی مناسب محاسبه شده و موجود می‌باشند. جزئیات مربوط به محاسبه این مشتق در بخش بعدی (آنالیز حساسیت) ارائه خواهد شد. فرض کنید فضای کنترل محدود شده به قیود نوع ۳ و ۴ با \mathcal{A}_{ad} نمایش داده می‌شود، این فضا عبارتست از:

$$\mathcal{A}_{ad} = \left\{ w \in L^2([0, T]; L^2(\mathcal{D})) \mid \int_{\mathcal{D}_{dn}} w \, d\mathbf{x} \leq R_{dn} V_{dn}, \int_{\mathcal{D}_{df}} w \, d\mathbf{x} = R_{df} V_{df}, 0 \leq w \leq 1 \right\}$$

جهت سهولت در ارائه مطالب نوشتار ادامه مساله (RP_R^S) بصورت مخفف زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\arg \min_w f(\mathbf{z}), \quad \text{subject to: } \mathbf{z} \in \mathcal{A}_{ad} \quad (38.6)$$

در این رابطه $\mathbf{z} \in X$ فضای باناخ مربوط به متغیر طراحی، $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ تابع هدف (تابعی دوبار مشتق‌پذیر نسبت به \mathbf{z}) و $\mathcal{A}_{ad} \in X$ فضای طراحی (قیود محدود کننده \mathbf{z}) می‌باشد. فرض کنید مشتق جهت‌دار تابع هدف نسبت به متغیر طراحی با \mathbf{g} نمایش داده شود ($\mathbf{g} = \nabla_{\mathbf{z}} f(\mathbf{z})$). ابتدا فرم غیر مقید مساله (۳۹.۶) را بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$\arg \min_{\mathbf{z}} f(\mathbf{z}), \quad \text{subject to: } \mathbf{z} \in X \quad (39.6)$$

^{۳۶}Rene Gâteaux

^{۳۷}Gâteaux derivative

^{۳۸}Dual

بطور کلی فرایند بهینه‌سازی مبتنی بر مشتق یک فرایند تکرار خواهد بود. فرض کنید کمیت‌های مربوط به تکرار k -ام با زیر نویس k مشخص شوند. در هر تکرار از بهینه‌سازی با استفاده از حدس اولیه \mathbf{z}_k ، \mathbf{z}_{k+1} بگونه‌ای محاسبه می‌شود که تابع هدف به اندازه کافی کاهش یابد. شکل کلی این فرایند تکرار را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k - \alpha_k \mathbf{g}_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (40.6)$$

پارامتر α_k نمایانگر گام حرکت در هر تکرار می‌باشد که معمولاً توسط یک روش مناسب محاسبه می‌شود. یکی از روش‌های متداول در محاسبه α_k روش حرکت در جهت تندترین شیب کاهش^{۳۹} می‌باشد. اگر گام حرکت مربوط به روش تندترین شیب کاهش با α_k^{SD} نمایش داده شود، رابطه زیر برقرار است:

$$\alpha_k^{SD} = \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}} f(\mathbf{z}_k - \alpha \mathbf{g}_k), \quad (41.6)$$

به این نحوه محاسبه گام حرکت جستجوی خطی^{۴۰} می‌گویند. حسن این روش همگرایی عمومی^{۴۱} آن می‌باشد. بنابراین با شروع از هر نقطه اولیه دلخواه روش به یک نقطه مینیمم موضعی همگرا خواهد شد. یکی از معایب معروف این روش همگرایی بسیار کند آن در نزدیکی جواب هنگام بدرفتار بودن مشتق دوم تابع هدف در نقطه جواب است. در این حالت تکرارها به آهستگی با یک رفتار زیگزاگی بسمت جواب نزدیک می‌شوند. همچنین هزینه بالای جستجوی خطی از دیگر معایب این روش برای حل مسائل بزرگ می‌باشد. باید توجه شود که در هر جستجوی خطی باید تابع هدف به ازای مقادیر مختلف متغیر طراحی ارزیابی شود. این تعداد ارزیابی معمولاً بین ۱۰ تا ۵۰ ارزیابی خواهد بود. برای مساله (RP_R^S) ، هزینه هر ارزیابی تابع هدف معادل هزینه حل یک معادله انتقال حرارت می‌باشد. بنابراین مطلوب روشی است که از حداقل تعداد ارزیابی تابع هدف استفاده کند. برای این منظور از روش ارائه شده توسط بارزیلای^{۴۲} و بوروین^{۴۳} [۱۳۵] استفاده می‌شود. ایده اصلی این روش تقریب مشتق دوم تابع هدف $(\nabla_z \nabla_z f(\mathbf{z}))$ بوسیله $\mathbf{D}(\alpha_k) = \frac{1}{\alpha_k} \mathbf{I}$ و اعمال خاصیت شبه-نیوتنی^{۴۴} روی این تقریب می‌باشد. مطابق رابطه زیر:

$$\alpha_k^{BB} = \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} \|\mathbf{D}(\alpha) \mathbf{s}_{k-1} - \mathbf{y}_{k-1}\|_2^2, \quad (42.6)$$

در این رابطه $\mathbf{s}_{k-1} = \mathbf{z}_k - \mathbf{z}_{k-1}$ ، $\mathbf{y}_{k-1} = \mathbf{g}_k - \mathbf{g}_{k-1}$ و $k \geq 2$. با استفاده از رابطه (۴۲.۶) می‌توان گام حرکت را بصورت مستقیم محاسبه کرد:

$$\alpha_k^{BB} = \frac{(\mathbf{s}_{k-1}, \mathbf{s}_{k-1})_{X,X}}{(\mathbf{s}_{k-1}, \mathbf{y}_{k-1})_{X,X}}. \quad (43.6)$$

^{۳۹}Steepest Descent (SD)

^{۴۰}Line-search

^{۴۱}Global convergence

^{۴۲}J. Barzilai

^{۴۳}Jonathan M. Borwein

^{۴۴}Quasi-Newton

در رابطه (۴۳.۶)، اپراتور $(\cdot, \cdot)_{X, X}$ نماد ضرب داخلی بین دو تابع در فضای تابعی X می‌باشد. واضح است که محاسبه α_k^{BB} بصورت مستقیم با استفاده از اطلاعات تکرار فعلی و یک تکرار قبل با هزینه محاسباتی بسیار کم قابل انجام است. معمولاً برای حفظ پایداری حل عددی مقدار α_k^{BB} را از یک فیلتر حد اطمینان عبور داده می‌شود، مطابق زیر:

$$\bar{\alpha}_k^{BB} = \min\{\alpha_{max}, \max\{\alpha_{min}, \alpha_k^{BB}\}\} \quad (44.6)$$

$\alpha_{min}, \alpha_{max} \in \mathbb{R}$ و $0 < \alpha_{min} < \alpha_{max} < \infty$. نکته بسیار مهم در ارتباط با این روش بازدهی بسیار مناسب روش علی رغم هزینه محاسبات کم آن است. نتایج محاسبات عددی نشان می‌دهد این روش معمولاً برتر از روش تندترین شیب کاهش عمل می‌کند در حالی که حجم محاسبات آن کسر کوچکی از حجم محاسبات روش تندترین شیب کاهش است. بعنوان نمونه مراجعه شود به [۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸]. نکته جالب توجه این است که علی‌رغم درجه اول بودن روش بارزیلای-بوروین، نتایج آزمایشات عددی توسط محققان مختلف نشان دهنده نرخ همگرایی بیش از حد انتظار این روش است. علت این مشاهده را می‌توان بوسیله خاصیت طیفی^{۴۵} این روش روی فضای بعد-محدود مربوطه (پس از گسسته سازی مساله) توجیه کرد. بدلیل این خاصیت برخی از مراجع این روش را از خانواده روشهای طیفی برشمرده‌اند. خاصیت طیفی این روش از رابطه زیر نتیجه می‌شود (این رابطه بکمک قضیه مقدار میانگین قابل اثبات می‌باشد):

$$\frac{1}{\alpha_k^{BB}} = \frac{(\mathbf{s}_{k-1}, \mathbf{y}_{k-1})_{X^n, X^n}}{(\mathbf{s}_{k-1}, \mathbf{s}_{k-1})_{X^n, X^n}} = \frac{\mathbf{s}_{k-1} \cdot \left(\int_0^1 \nabla_z \nabla_z f(\mathbf{z}_{k-1} + t\mathbf{s}_{k-1}) dt \right) \cdot \mathbf{s}_{k-1}}{(\mathbf{s}_{k-1}, \mathbf{s}_{k-1})_{X^n, X^n}},$$

در رابطه بالا X^n نمایانگر فضای بعد-محدود مربوط به X پس از گسسته‌سازی مساله می‌باشد. رابطه بالا نتیجه می‌دهد که $\Lambda_{max}^{-1} \leq \alpha_k^{BB} \leq \Lambda_{min}^{-1}$ که Λ_{min} و Λ_{max} بترتیب ماکسیمم و مینیمم مقادیر ویژه میانگین ماتریس هسین تابع هدف در خلال دو تکرار متوالی می‌باشد. بنابراین ماتریس $\alpha_k^{BB} \mathbf{I}$ تقریب مناسبی برای معکوس ماتریس هسین تابع هدف است. آزمایشات عددی و همچنین مطالعات تئوریک برای مسائلی با بعد کم نشان می‌دهد استفاده از سیکلی از گام حرکتی α_k^{BB} برای $m \geq 1$ تکرار متوالی می‌تواند منجر به همگرایی مساله شود [۱۳۸]:

$$\alpha_{ml+i}^{CBB} = \alpha_{ml+1}^{BB} \quad \text{for } i = 1, \dots, m, \quad l = 0, 1, \dots, \quad (45.6)$$

پس از این معرفی اولیه روش برای حل مساله بهینه‌سازی غیر مقید، لازم است به بررسی روش حل مسائل بهینه‌سازی مقید (مساله (۳۸.۶)) پرداخته شود. در این تحقیق از روش تصویر کردن گرادیان^{۴۶} استفاده می‌شود. در این روش پس از محاسبه نقطه جدید با استفاده از رابطه (۴۰.۶) دو حالت پیش می‌آید. در صورتی که این نقطه درون ناحیه محدود شده به \mathcal{A}_{ad} واقع شود این نقطه به عنوان جواب تکرار جاری در نظر گرفته می‌شود. اما در عمل بسیار محتمل است که این نقطه خارج از \mathcal{A}_{ad} واقع شود. در این حالت نقطه بدست آمده به فضای \mathcal{A}_{ad} تصویر می‌شود. برای تصویر کردن در این ناحیه

^{۴۵}Spectral

^{۴۶}Gradient projection

لازم است مساله بهینه‌سازی مرتبه دوم زیر حل شود:

$$\mathbf{y} := \mathcal{P}_{A_{ad}}[\mathbf{z}] = \arg \min_{\mathbf{x} \in \Omega} \frac{1}{2} \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|_2^2 \quad (46.6)$$

در این رابطه $\mathcal{P}_{A_{ad}}[\mathbf{z}]$ معرف اپراتور تصویرگر نقطه \mathbf{z} داخل ناحیه A_{ad} می‌باشد. هنگامیکه ناحیه A_{ad} غیر تهی باشد مساله (46.6) جواب یکه خواهد داشت. در حالت کلی تصویر کردن یک نقطه درون یک ناحیه محدب پرهزینه بوده و به همین دلیل روش گرادیان تصویر شده در حل مسائل بزرگ کاربرد چندانی ندارد. اما در موارد خاص که تصویر کردن با هزینه کم میسر باشد این روش از جاذبه بسیار زیادی برخوردار است. در این پژوهش با فرمول سازی دوگان تصویر کردن در فضای قید مساله معادلی ایجاد خواهد شد که هزینه حل آن بسیار کم می‌باشد. جزئیات این روش برای حالت گسسته شده مساله در فصل ۷ ارائه خواهد شد. گرادیان تصویر شده تابع هدف در هر تکرار، \mathbf{d}_k^α ، بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{d}_k^\alpha = \mathcal{P}_{A_{ad}}[\mathbf{z}_k - \alpha_k^{BB} \mathbf{g}_k] - \mathbf{z}_k. \quad (47.6)$$

از آنجا که A_{ad} ناحیه‌ای محدب می‌باشد گرادیان تصویر شده یک جهت کاهش^{۴۷} برای تابع هدف خواهد بود:

$$(\mathbf{g}_k, \mathbf{d}_k^\alpha)_{X,X} \leq \frac{1}{\alpha_k^{BB}} \|\mathbf{d}_k^\alpha(\mathbf{x})\|_2^2$$

بنابراین با حرکت در جهت گرادیان تصویر شده تابع هدف می‌تواند کاهش یافته و بطور همزمان نقطه حاصله درون A_{ad} قرار گیرد. بعلاوه با نزدیک شدن به جواب نرُم این گرادیان بسمت صفر میل می‌کند. بنابراین می‌توان از آن بعنوان معیار همگرایی استفاده کرد. با استفاده از گرادیان تصویر شده نقطه جدید توسط رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{z}_{x+1} = \mathbf{z}_k + \beta_k \mathbf{d}_k^\alpha, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (48.6)$$

در این رابطه β_k گام حرکت خواهد بود. در صورتی که گام حرکت توسط روش جستجوی خطی محاسبه شود، روش حاصله معادل روش تندترین شیب کاهش مقید شده خواهد بود. بمنظور استفاده از خواص طیفی α_k^{BB} مطلوب استفاده از $\beta_k = 1$ می‌باشد. اما در صورتیکه همواره از $\beta_k = 1$ استفاده شود ممکن است همگرایی عمومی روش فراهم نشود. بعبارت دیگر تضمینی برای حرکت تکرارها به سمت نقطه بهینه وجود ندارد. بنابراین نیاز است از یک روش عمومی سازی^{۴۸} مناسب برای تضمین همگرایی استفاده شود. در این تحقیق از عمومی سازی بروش جستجوی خطی غیریکنوا^{۴۹} [۱۳۹] استفاده می‌شود. لازم به تذکر است که در روش جستجوی خطی معمولی (یکنوا) برای یک مساله غیر مقید لازم است تابع هدف پس از هر تکرار مقداری کاهش یابد. اما در روش جستجوی خطی غیریکنوا تابع هدف می‌تواند در تعداد محدودی از تکرارهای متوالی

^{۴۷}Descent direction

^{۴۸}Globalization

^{۴۹}Nonmonotone line-search

افزایش پیدا کند. بنابراین در این روش امکان استفاده از $\beta_k = 1$ بسادگی میسر می‌باشد. در روش عمومی‌سازی غیریکنوا شرط زیر باید در خلال تکرارها ارضاء شود:

$$f(\mathbf{z}_{k+1}) \leq \max_{0 \leq j \leq m_k} f(\mathbf{z}_{k-j}) + \delta (\mathbf{g}_k, \mathbf{d}_k)_{X,X}. \quad (49.6)$$

در این رابطه $\delta \in (0, 1)$ و m_k عدد صحیحی غیر افزایشی است که حد پایین آن توسط رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$m_0 = 0 \quad \text{and for } k > 0: \quad 0 \leq m_k \leq \min\{m_{k-1} + 1, M\}$$

در یک جمع‌بندی نسخه عمومی‌سازی شده روش گرادیان طیفی تصویر شده (GPCBB) مطابق الگوریتم زیر خواهد بود:

Algorithm 1 (GPCBB):

Parameters:

- $\epsilon \in [0, \infty)$, error tolerance.
- $\delta \in (0, 1)$, descent parameter used in Armijo line search.
- $\eta \in (0, 1)$, decay factor for stepsize in Armijo line search.
- $\alpha_{min}, \alpha_{max} \in (0, \infty)$, safeguarding interval for BB stepsize.

Initialization:

- $k = 0$, $\mathbf{z}_0 =$ starting guess, and $f_{-1}^r = f(\mathbf{z}_0)$.

Main Loop: While $\|\mathcal{P}_{\mathcal{D}}[\mathbf{z}_k - \mathbf{g}_k] - \mathbf{z}_k\|_{\infty} > \epsilon$

1. Choose $\bar{\alpha}_k \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}]$.
2. Compute $d_k = \mathcal{P}_{\mathcal{D}}[\mathbf{z}_k - \bar{\alpha}_k \mathbf{g}_k] - \mathbf{z}_k$.
3. Choose f_k^r such that $f(\mathbf{z}_k) \leq f_k^r \leq \max\{f_{k-1}^r, f_k^{max}\}$ and $f_k^r \leq f_k^{max}$ infinitely often, where $f_k^{max} = \max\{f(\mathbf{z}_{k-i}) : 0 \leq i \leq \min(k, M-1)\}$.
4. Let f^R be either f_k^r or $\min\{f_k^r, f_k^{max}\}$.
5. Nonmonotone line search:
 - 5.1. If $f(\mathbf{z}_k + \mathbf{d}_k) \leq f^R + \delta (\mathbf{g}_k, \mathbf{d}_k)_{X,X}$ then $\beta_k = 1$.
 - 5.2. Else $\beta_k = \eta^j$, where $j > 0$ is the smallest integer such that $f(\mathbf{z}_k + \eta^j \mathbf{d}_k) \leq f^R + \eta^j \delta (\mathbf{g}_k, \mathbf{d}_k)_{X,X}$.
6. Set $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \beta_k \mathbf{d}_k$ and $k = k + 1$.

End Main Loop.

پارامتر f_k^r در این الگوریتم مقدار مرجع تابع هدف می‌باشد. در جستجوی خطی یکنوا $f_k^r = f(\mathbf{x}_k)$ و در جستجوی خطی

غیریکنوا $f_k^r = f_k^{max}$ خواهد بود. در این تحقیق f_k^r از الگوریتم ۲ که در [۱۴۰] ارائه شده است استفاده می‌شود:

Algorithm 2 (FR):

R0. If $k = 0$, choose parameters: $A > L > 0$, $\gamma_1, \gamma_2 > 1$, and $\Delta > 0$; initialize $a = l = 0$ and $f_0^{min} = f_0^{maxmin} = f_0^r = f_{-1}^r = f_0$.

R1. Update f_k^r as follows:

R1.1. If $l = L$, then set $l = 0$, and

$$f_k^r = \begin{cases} f_k^{maxmin} & \text{if } \frac{f_k^{max} - f_k^{min}}{f_k^{maxmin} - f_k^{min}} \geq \gamma_1, \\ f_k^{max} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

R1.2. Else If $a > A$, then set

$$f_k^r = \begin{cases} f_k^{max} & \text{if } f_k^{max} > f_k \text{ and } \frac{f_{k-1}^r - f_k}{f_k^{max} - f_k} \geq \gamma_2, \\ f_{k-1}^r & \text{otherwise.} \end{cases}$$

R1.3. Else set $f_k^r = f_{k-1}^r$.

R2. Set f^R as follows in step 4 of Algorithm 1 (GPCBB):

R2.1. If $j = 0$ (the first iterate in a CBB cycle) then $f^R = f_k^r$.

R2.2. Else ($j > 0$) $f^R = \min\{f_k^r, f_k^{max}\}$

R3. If $\beta_k = 1$ in Algorithm 1 (GPCBB) then $a = a + 1$, Else ($\beta_k < 1$) $a = 0$.

R4. If $f_{k+1} \leq f_k^{min} - \Delta$ then set $f_{k+1}^{maxmin} = f_{k+1}^{min} = f_{k+1}$ and $l = 0$; Else set $l = l + 1$, $f_{k+1}^{min} = f_k^{min}$ and $f_{k+1}^{maxmin} = \max\{f_k^{maxmin}, f_{k+1}\}$.

در این الگوریتم $f_k = f(\mathbf{x}_k)$ است. a شمارنده تعداد دفعات متوالی است که از $\beta_k = 1$ استفاده شده است. l نیز شمارنده تعداد تکرارها از آخرین باری است که تابع هدف به مقدار $\Delta > 0$ کاهش یافته است. f_k^{max} ماکزیمم مقدار اخیر تابع هدف را ذخیره می کند و f_k^{min} مینیمم مقدار اخیر تابع هدف را با در نظر گرفتن تیرانس Δ ذخیره می کند. متغیر f_k^{maxmin} نیز مقدار ماکزیمم تابع هدف را از آخرین باری که یک مینیمم جدید در f_k^{min} ذخیره شده است نگهداری می کند. در پایان این قسمت به ارائه جزئیات بیشتر در خصوص نحوه محاسبه $\bar{\alpha}_k$ در مرحله ۱ از الگوریتم GPCBB پرداخته می شود. فرض کنید j شمارنده تعداد تکرارهای متوالی است که گام حرکت بصورت سیکلی استفاده شده است. همچنین فرض کنید حافظه تکرار تا حداکثر تعداد دفعات مجاز به استفاده متوالی از گام حرکت با m نشان داده شود. الگوریتم ۳ نحوه محاسبه $\bar{\alpha}_k$ را در این تحقیق نشان می دهد. در این الگوریتم مقدار گام حرکت اولیه برای تکرارهای آینده استفاده می شود مگر یکی از شرایط زیر اتفاق بیفتد: الف) گام زمانی قبلی توسط تصویر کردن گرادیان کوچک شود. ب) گام زمانی قبلی توسط جستجوی خطی غیریکنوا تغییر پیدا کند. ج) تعداد دفعاتی که در آنها گام زمانی قبلی بطور متوالی استفاده شده است به یک ماکزیمم از پیش تعریف شده برسد. د) $(\mathbf{s}_k, \mathbf{y}_k)_{X, X} / \|\mathbf{s}_k\|_2 \|\mathbf{y}_k\|_2$ نزدیک به ۱ باشد. ه) شرط $(\mathbf{s}_k, \mathbf{y}_k)_{X, X} < 0$

نشان دهنده تشخیص جهت انحنای منفی است. در این شرایط با فرض سازگاری تابع هدف با تقریب درجه دوم آن، از یک گام حرکت بزرگ بمنظور کاهش هر چه بیشتر تابع هدف استفاده می‌شود.

Algorithm 3 (CBB):

- S0. If $k = 0$ choose $\bar{\alpha}_0 \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ and a parameter $\theta < 1$ near 1; set $j = 0$ and flag=1. If $k > 0$ set flag = 0.
- S1. $0 < |d_{ki}| < \bar{\alpha}_k |g_{ki}|$ for some i (component of vector) then set flag = 1.
- S2. If $\beta_k = 1$ in Algorithm 1 (GPCBB) then set $j=j+1$; Else ($\beta_k < 1$) set flag =1.
- S3. If $j \geq m$ or flag=1 or $(\mathbf{s}_k, \mathbf{y}_k)_{X,X} / \|\mathbf{s}_k\|_2 \|\mathbf{y}_k\|_2 \geq \theta$ then:
- S3.1. If $(\mathbf{s}_k, \mathbf{y}_k)_{X,X} \leq 0$ then
- S3.1.1. If $j > 1.5m$ then set $t = \min\{\|\mathbf{z}_k\|_\infty, 1\} / \|\mathbf{d}^1(\mathbf{z}_k)\|_\infty$,
 $\bar{\alpha}_{k+1} = \min\{\alpha_{max}, \max\{\alpha_{min}, \beta_k\}\}$ and $j = 0$;
 where $\mathbf{d}^1(\mathbf{z}_k) = \mathcal{P}_D[\mathbf{z}_k - \mathbf{g}_k] - \mathbf{z}_k$
- S3.1.2. Else $\bar{\alpha}_{k+1} = \bar{\alpha}_k$
- S3.2 Else set $\bar{\alpha}_{k+1} = \min\{\alpha_{max}, \max\{\alpha_{min}, \alpha_k^{BB}\}\}$ and $j = 0$.

۴.۶ آنالیز حساسیت

همانطور که در بخش قبل اشاره شد بمنظور استفاده از روشهای بهینه‌سازی مبتنی بر مشتق لازم است مشتق اول تابع هدف (مشتق جهت‌دار در چهارچوب تعریف شده توسط گاتو) مربوط به مسئله (RP_R^S) محاسبه شود. این مرحله از فرایند بهینه‌سازی معمولاً آنالیز حساسیت نامیده می‌شود. برای سهولت در ارائه مطالب از عبارت مشتق جهت‌دار بجای مشتق جهت‌دار گاتو و از اپراتور $\langle \cdot, \cdot \rangle$ برای نشان دادن ضرب داخلی روی فضای تابعی مربوطه استفاده می‌شود. تابع هدف $J^R(w)$ را در مساله (RP_R^S) در نظر بگیرید. با استفاده از تابع $\eta \in L^2([0, T]; H^1(D))$ می‌توان معادله انتقال حرارت را به تابع هدف اضافه کرده و لاگرانژین افزون شده \mathcal{L}^* زیر را تشکیل داد:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(w, \eta, \theta) = & J^R(w, \theta, \dot{\theta}, \nabla\theta) + \int_0^T \int_D \eta \left[\rho \tilde{c} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla \theta) \right] d\mathbf{x} dt \\ & + \int_0^T \int_{\partial D} \eta \left[k \nabla \theta \cdot \mathbf{n} - h_a(\theta - \theta_a) \right] d\mathbf{x} dt \end{aligned} \quad (5.6)$$

در صورتیکه $w \in \mathcal{A}_{ad}^T$ باشد، نقاط بحرانی این لاگرانژین شرط لازم جهت بهینه‌بودن جواب مساله (RP_R^S) را ارضاء می‌کنند. مشتق جهت‌دار این لاگرانژین نسبت به w در جهت تابع تست \mathcal{L}^* $w_t \in L^2([0, T]; L^2(D))$ عبارتست از:

^{۵۰} Augmented Lagrangian

^{۵۱} Test function

$$\left\langle \frac{d\mathcal{L}(w, \eta, \theta)}{dw}, w_t \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w}, w_t \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta}, \frac{\partial \eta}{\partial w} \cdot w_t \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}, \frac{\partial \theta}{\partial w} \cdot w_t \right\rangle \quad (51.6)$$

بمنظور کاهش حجم روابط در ادامه از مخفف‌سازی زیر استفاده می‌شود:

$$\delta_{(X)}(\cdot) = \left\langle \frac{\partial(\cdot)}{\partial X}, \delta_w X \right\rangle, \quad \delta_w w = w_t$$

بسط ترم اول در رابطه (51.6) نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} \delta_w \mathcal{L} &= \int_0^T \int_{\mathcal{D}} \eta \left[(\delta_w \rho \tilde{c} + \rho \delta_w \tilde{c}) \frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla \cdot (\delta_w k \nabla \theta) \right] d\mathbf{x} dt + \int_0^T \int_{\partial \mathcal{D}} \eta \delta_w k \nabla \theta \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x} dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathcal{D}} \left[(\delta_w \rho \tilde{c} + \rho \delta_w \tilde{c}) \eta \frac{\partial \theta}{\partial t} + \delta_w k \nabla \eta \cdot \nabla \theta - \nabla \cdot (\eta \delta_w k \nabla \theta) \right] d\mathbf{x} dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\partial \mathcal{D}} \eta \delta_w k \nabla \theta \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x} dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathcal{D}} \left[(\delta_w \rho \tilde{c} + \rho \delta_w \tilde{c}) \eta \frac{\partial \theta}{\partial t} + \delta_w k \nabla \eta \cdot \nabla \theta \right] d\mathbf{x} dt \end{aligned} \quad (52.6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial w} = pw^{p-1}(\rho_c - \rho_m) \quad (53.6)$$

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial w} = pw^{p-1}(\tilde{c}_e - \tilde{c}_m) \quad (54.6)$$

$$\frac{\partial k}{\partial w} = \frac{pw^{p-1}k_c k_m (k_c - k_m)}{[w^p(k_m - k_c) + k_c]^2} \quad (55.6)$$

در صورتیکه θ جواب معادله انتقال حرارت باشد ترم دوم رابطه (51.6) صفر خواهد بود. بسط ترم سوم رابطه (51.6)

نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} \delta_\theta \mathcal{L} &= \delta_\theta J^R + \int_0^T \int_{\mathcal{D}} \eta \rho \delta_\theta \tilde{c} \frac{\partial \theta}{\partial t} d\mathbf{x} dt + \int_0^T \int_{\mathcal{D}} \eta \rho \tilde{c} \frac{\partial}{\partial t} (\delta_w \theta) d\mathbf{x} dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\mathcal{D}} \eta \nabla \cdot \left(k \nabla (\delta_w \theta) \right) d\mathbf{x} dt + \int_0^T \int_{\partial \mathcal{D}} \eta k \nabla (\delta_w \theta) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x} dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\partial \mathcal{D}} \eta h_a \delta_w \theta d\mathbf{x} dt = \delta_\theta J^R + I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - I_5 \end{aligned} \quad (56.6)$$

$\delta\theta\tilde{c}$ در ترم I_1 از رابطه (۵۶.۶) بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\delta\theta\tilde{c} = w \delta\theta\tilde{c}_e = \frac{wL}{\theta_l - \theta_s} \left[\delta\theta\tilde{H}_\xi(\theta - \theta_s) - \delta\theta\tilde{H}_\xi(\theta - \theta_l) \right] \quad (۵۷.۶)$$

$$\delta_x\tilde{H}_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\xi}(1 + \cos(\pi x/\xi)), & -\xi \leq x \leq \xi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (۵۸.۶)$$

استفاده از انتگرال جزء به جزء برای ترم I_2 از رابطه (۵۶.۶) نتیجه می‌دهد:

$$I_2 = \int_{\mathcal{D}} \left[(\rho\tilde{c}\eta \delta_w\theta)|_{t=T} - (\rho\tilde{c}\eta \delta_w\theta)|_{t=0} \right] d\mathbf{x} - \int_0^T \int_{\mathcal{D}} \rho\tilde{c} \delta_w\theta \frac{\partial\eta}{\partial t} d\mathbf{x} dt \quad (۵۹.۶)$$

از آنجا که شرایط اولیه مستقل از w می‌باشد $(\delta_w\theta(t=0, \mathbf{x}) = 0)$ رابطه (۵۹.۶) به رابطه زیر ساده می‌شود:

$$I_2 = \int_{\mathcal{D}} \left[(\rho\tilde{c}\eta \delta_w\theta)|_{t=T} \right] d\mathbf{x} - \int_0^T \int_{\mathcal{D}} \rho\tilde{c} \delta_w\theta \frac{\partial\eta}{\partial t} d\mathbf{x} dt \quad (۶۰.۶)$$

استفاده از قضیه دیورژانس برای ترم I_3 از رابطه (۵۶.۶) نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^T \int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot (k \eta \nabla(\delta_w\theta)) d\mathbf{x} dt - \int_0^T \int_{\mathcal{D}} k \nabla\eta \cdot \nabla(\delta_w\theta) d\mathbf{x} dt \\ &= \int_0^T \int_{\partial\mathcal{D}} k \eta \nabla(\delta_w\theta) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x} dt - \int_0^T \int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot (\delta_w\theta k \nabla\eta) d\mathbf{x} dt \\ &+ \int_0^T \int_{\mathcal{D}} \delta_w\theta \nabla \cdot (k \nabla\eta) d\mathbf{x} dt = \int_0^T \int_{\partial\mathcal{D}} k \eta \nabla(\delta_w\theta) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x} dt \\ &+ \int_0^T \int_{\partial\mathcal{D}} \delta_w\theta k \nabla\eta \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x} dt + \int_0^T \int_{\mathcal{D}} \delta_w\theta \nabla \cdot (k \nabla\eta) d\mathbf{x} dt \end{aligned} \quad (۶۱.۶)$$

چون J^R تابع صریحی از θ ، $\dot{\theta}$ و $\nabla\theta$ می‌باشد، برای سهولت آنالیز $\delta\theta J^R$ را می‌توان بفرم معادل زیر بازنویسی کرد:

$$\delta\theta J^R \equiv \delta\theta J^R + \delta_{\dot{\theta}} J^R + \delta_{\nabla\theta} J^R \quad (۶۲.۶)$$

فرض کنید $\mathcal{I}_c \in BV(\mathcal{D})$ تابع مشخصه \mathcal{D}_c باشد:

$$\mathcal{I}_c(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{if } \mathbf{x} \in \mathcal{D}_c \\ 0, & \text{if } \mathbf{x} \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_c \end{cases} \quad (۶۳.۶)$$

با استفاده از تعریف \mathcal{I}_c می‌توان J^R را بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$J^R = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{D}} [\min(\hat{g}, 0)]^2 \mathcal{I}_c d\mathbf{x} dt, \quad \hat{g} = \left(\frac{\nabla\theta}{\dot{\theta}} - g_c \right) \delta_1^{\mathcal{D}}(\theta - \theta_{sl}) \quad (۶۴.۶)$$

$$\hat{g} = \left(\frac{\nabla \theta}{\dot{\theta}} - g_c \right) \delta_1^D (\theta - \theta_{sl}) \quad (۶۵.۶)$$

$$\frac{\partial \hat{g}}{\partial \theta} = -(\theta - \theta_{sl}) \hat{g} \quad (۶۶.۶)$$

$$\frac{\partial \hat{g}}{\partial \dot{\theta}} = -\frac{\nabla \theta}{\dot{\theta}^2} \delta_1^D (\theta - \theta_{sl}) \quad (۶۷.۶)$$

$$\frac{\partial \hat{g}}{\partial \nabla \theta} = \frac{\delta_1^D (\theta - \theta_{sl})}{\dot{\theta}} \mathbf{I} \quad (۶۸.۶)$$

I در رابطه (۶۸.۶)، معرف بردار یکه در دستگاه مختصات دکارتی می‌باشد.

$$\delta_{\theta} J^R = \int_0^T \int_{\mathcal{D}} [\min(\hat{g}, 0)] \frac{\partial \hat{g}}{\partial \theta} \delta_w \theta \mathcal{I}_c \, d\mathbf{x} \, dt \quad (۶۹.۶)$$

لازم است تذکر داده شود که علی‌رغم مشتق‌پذیر نبودن (بعلت غیر هموار بودن) تابع $\min(\hat{g}, 0)$ نسبت به \hat{g} ، مربع این تابع هموار بوده و نسبت به \hat{g} مشتق‌پذیر می‌باشد. بمنظور جلوگیری از ظهور $\delta_w \dot{\theta}$ در محاسبات مربوط به $\delta_{\dot{\theta}} J^R$ از روشی که در

[۱۴۱] پیشنهاد شده استفاده می‌شود (برای جزئیات بیشتر مراجعه شود به رابطه ۲۲ در [۱۴۱]):

$$\delta_{\dot{\theta}} J^R = \left\langle \frac{\partial J^R}{\partial \dot{\theta}}, \delta_w \dot{\theta} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial J^R}{\partial \dot{\theta}}, \delta_w \theta \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial J^R}{\partial \dot{\theta}} \right), \delta_w \theta \right\rangle = I_6 - I_7 \quad (۷۰.۶)$$

$$\left\langle \frac{\partial J^R}{\partial \dot{\theta}}, \delta_w \theta \right\rangle = \int_0^T \int_{\mathcal{D}} [\min(\hat{g}, 0)] \frac{\partial \hat{g}}{\partial \dot{\theta}} \delta_w \theta \mathcal{I}_c \, d\mathbf{x} \, dt \quad (۷۱.۶)$$

$$\begin{aligned} I_6 &= \left[\int_{\mathcal{D}} [\min(\hat{g}, 0)] \frac{\partial \hat{g}}{\partial \dot{\theta}} \delta_w \theta \mathcal{I}_c \, d\mathbf{x} \right]_{t=T} - \left[\int_{\mathcal{D}} [\min(\hat{g}, 0)] \frac{\partial \hat{g}}{\partial \dot{\theta}} \delta_w \theta \mathcal{I}_c \, d\mathbf{x} \right]_{t=0} \\ &= \int_{\mathcal{D}} [\min(\hat{g}(t=T, \mathbf{x}), 0)] \frac{\partial \hat{g}(t=T, \mathbf{x})}{\partial \dot{\theta}} \delta_w \theta(t=T, \mathbf{x}) \mathcal{I}_c \, d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (۷۲.۶)$$

فرض کنید عبارت $[\min(\hat{g}, 0)] \frac{\partial \hat{g}}{\partial \dot{\theta}}$ بصورت اختصاری با $G(\hat{g})$ نمایش داده شود. بسط I_7 نتیجه می‌دهد:

$$I_7 = \int_0^T \int_{\mathcal{D}} \left[\frac{\partial G(\hat{g})}{\partial \hat{g}} \frac{\partial \hat{g}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial G(\hat{g})}{\partial \hat{g}} \frac{\partial \hat{g}}{\partial \dot{\theta}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{\partial G(\hat{g})}{\partial \hat{g}} \frac{\partial \hat{g}}{\partial \nabla \theta} \cdot \frac{\partial \nabla \theta}{\partial t} \right] \delta_w \theta \mathcal{I}_c \, d\mathbf{x} \, dt \quad (۷۳.۶)$$

بعلت عدم مشتق‌پذیری تابع $G(\hat{g})$ نسبت به \hat{g} در نقطه $\hat{g} = 0$ امکان محاسبه I_7 در عبارت بالا وجود ندارد. برای رفع این مشکل می‌توان با استفاده از تابع پله ای یکطرفه هموار شده، (۱۹.۶)، تابع $\min(x, 0)$ را نسبت به x هموارسازی کرد:

$$\widetilde{\min}(x, 0) = x \tilde{H}_{\xi}(x) \quad (۷۴.۶)$$

در این رابطه $\widetilde{\min}(x, 0)$ نمایانگر فرم هموار شده تابع $\min(x, 0)$ می‌باشد. حال با استفاده از $\widetilde{\min}(x, 0)$ می‌توان فرم هموار شده تابع G را بصورت زیر نوشت:

$$\widetilde{G}_\xi(\hat{g}) = [\widetilde{\min}(\hat{g}, 0)] \frac{\partial \hat{g}}{\partial \theta} = \hat{g} \widetilde{H}_\xi(\hat{g}) \frac{\partial \hat{g}}{\partial \theta} \quad (۷۵.۶)$$

در این پژوهش پارامتر ξ در تابع $\widetilde{G}_\xi(\hat{g})$ برابر $g_c/10$ در نظر گرفته می‌شود. با استفاده از تعریف \hat{g} می‌توان تابع $\widetilde{G}_\xi(\hat{g})$ بصورت تابع صریحی از متغیرهای θ ، $\dot{\theta}$ و $\nabla\theta$ یعنی $\widetilde{G}_\xi(\theta, \dot{\theta}, \nabla\theta)$ نوشت. با استفاده از فرم هموار شده تابع $G(\hat{g})$ مقدار تقریبی I_7 عبارتست از:

$$I_7 \approx \int_0^T \int_{\mathcal{D}} \left[\frac{\partial \widetilde{G}_\xi(\theta, \dot{\theta}, \nabla\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{G}_\xi(\theta, \dot{\theta}, \nabla\theta)}{\partial \dot{\theta}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{\partial \widetilde{G}_\xi(\theta, \dot{\theta}, \nabla\theta)}{\partial \nabla\theta} \cdot \frac{\partial \nabla\theta}{\partial t} \right] \delta_w \theta \mathcal{I}_c \, d\mathbf{x} \, dt \quad (۷۶.۶)$$

ساده سازی بیشتر این عبارت تنها نیاز به تعدادی مشتق گیری ساده دارد که برای جلوگیری از اطاله این نوشتار از ساده سازی بیشتر عبارت پرهیز می‌شود. برای محاسبه $\delta_{\nabla\theta} J^R$ نیاز است \mathcal{I}_c دست کم یکبار نسبت به متغیر مکان، \mathbf{x} ، مشتق پذیر باشد. در حقیقت لازم است تابع مشخصه دامنه مکانی قطعه ریختگی در مرزهای این ناحیه هموار باشد. با پیروی از مرجع [۱۴۲] می‌توان فرم هموار این تابع مشخصه را با ضرب تانسوری (در دستگاه دکارتی) توابع پله ای یکطرفه هموار شده بدست آورد. در این تحقیق طول هموارسازی برابر اندازه سلولهای محاسباتی مربوط به گسسته سازی هندسی در نظر گرفته می‌شود. در ادامه این تابع مشخصه هموار شده با نماد $\widetilde{\mathcal{I}}_c$ نشان داده خواهد شد.

$$\begin{aligned} \delta_{\nabla\theta} J^R &= \int_0^T \int_{\mathcal{D}} [\min(\hat{g}, 0)] \frac{\partial \hat{g}}{\partial \nabla\theta} \cdot \delta_w(\nabla\theta) \widetilde{\mathcal{I}}_c \, d\mathbf{x} \, dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathcal{D}} [\min(\hat{g}, 0)] \frac{\partial \hat{g}}{\partial \nabla\theta} \cdot \nabla(\delta_w \theta) \widetilde{\mathcal{I}}_c \, d\mathbf{x} \, dt \end{aligned} \quad (۷۷.۶)$$

استفاده از قضیه دیورژانس در (۷۷.۶) نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} \delta_{\nabla\theta} J^R &= \int_0^T \int_{\partial\mathcal{D}} \delta_w \theta [\min(\hat{g}, 0)] \widetilde{\mathcal{I}}_c \frac{\partial \hat{g}}{\partial \nabla\theta} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{x} \, dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \left([\min(\hat{g}, 0)] \frac{\partial \hat{g}}{\partial \nabla\theta} \widetilde{\mathcal{I}}_c \right) \delta_w \theta \, d\mathbf{x} \, dt \end{aligned} \quad (۷۸.۶)$$

بعلت اینکه مقدار تابع $\widetilde{\mathcal{I}}_c$ در مرزهای قالب صفر می‌باشد، ترم مرزی در رابطه (۷۸.۶) برابر با صفر بوده و رابطه بفرم زیر ساده می‌شود:

$$\delta_{\nabla\theta} J^R = - \int_0^T \int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \left([\min(\hat{g}, 0)] \frac{\partial \hat{g}}{\partial \nabla\theta} \widetilde{\mathcal{I}}_c \right) \delta_w \theta \, d\mathbf{x} \, dt \quad (۷۹.۶)$$

در آنالیز انجام شده در این قسمت تمام عبارات نهایی موجود در آنالیز حساسیت تنها حاوی یکی از تغییرات $\delta_w \theta$ یا $\delta_w w$ می‌باشند. لازم است تذکر داده شود که عبارت از مشتق جهت دار دما نسبت به تغییرات متغیر طراحی است. از آنجا

که پس از گسسته‌سازی سیستم معادلات تعداد متغیرهای طراحی خیلی زیاد خواهد بود، محاسبه $\delta_w \theta$ بسیار پرهزینه خواهد بود. در حقیقت لازم است به ازای هر متغیر طراحی یکبار معادله انتقال حرارت حل شود. بنابراین لازم است ترمهای حاوی $\delta_w \theta$ بنحوی از آنالیز حساسیت حذف شوند. برای این منظور کافی است ترمهای حاوی $\delta_w \theta$ را فاکتورگیری کرده و عبارت داخل فاکتور را برابر صفر قرار داد. این عمل منجر به حل معادله دیفرانسیل همزاد^{۵۲} زیر خواهد شد:

$$(A) \left\{ \begin{array}{ll} \rho(w)\tilde{c}(w) \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\nabla \cdot (k(w)\nabla \eta) + \eta F_a + F_b & \text{in } [0, T] \times D \\ \rho(w) = w^p \rho_c + (1 - w^p) \rho_m & \text{in } [0, T] \times D \\ \tilde{c}(w) = w^p \tilde{c}_e + (1 - w^p) c_m & \text{in } [0, T] \times D \\ \frac{1}{k(w)} = \frac{1}{k_c} w^p + \frac{1}{k_m} (1 - w^p) & \text{in } [0, T] \times D \\ -k(w)\nabla \eta \cdot \mathbf{n} = h_a \eta & \text{on } [0, T] \times \partial D \\ \eta(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\rho c} \min(\hat{g}, 0) \frac{\partial \hat{g}}{\partial \theta} \mathcal{I}_c & \text{in } \{t = T\} \times D \end{array} \right.$$

در اینجا نحوه بدست آوردن این معادله به اختصار شرح داده می‌شود. ترم I_4 با در نظر گرفتن ترم اول از عبارت پایانی I_3 حذف خواهد شد. ترم دوم از عبارت I_2 و ترم سوم از عبارت پایانی I_3 باعث ایجاد معادله دیفرانسیل همزاد می‌شوند. I_5 و ترم دوم از عبارت پایانی I_3 شرایط مرزی این معادله دیفرانسیل را تشکیل می‌دهند. شرایط اولیه این معادله دیفرانسیل از ترکیب ترم اول عبارت I_2 و عبارت پایانی I_6 بدست می‌آید. لازم به تذکر است که شرط اولیه معادله دیفرانسیل همزاد در زمان $t = T$ موجود است. بنابراین لازم است این معادله در جهت عکس زمان از زمان $t = T$ تا زمان $t = 0$ انتگرال‌گیری شود. این مورد کاملاً سازگار با علامت بین نرخ سرمایش و ترم نفوذ در این معادله است. F_a در این معادله یک ضریب حرارتی است که از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$F_a = \rho \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{wL}{\theta_l - \theta_s} \left[\delta_\theta \tilde{H}_\xi(\theta - \theta_s) - \delta_\theta \tilde{H}_\xi(\theta - \theta_l) \right] \quad (۸۰.۶)$$

F_b بارحرارتی مربوط به معادله دیفرانسیل همزاد می‌باشد که از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$F_b = \left[\min(\hat{g}, 0) \frac{\partial \hat{g}}{\partial \theta} - \frac{\partial \tilde{G}_\xi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{G}_\xi}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial \tilde{G}_\xi}{\partial \nabla \theta} \cdot \frac{\partial \nabla \theta}{\partial t} \right] \mathcal{I}_c(\mathbf{x}) \\ - \nabla \cdot \left[\min(\hat{g}, 0) \frac{\partial \hat{g}}{\partial \nabla \theta} \tilde{\mathcal{I}}_c(\mathbf{x}) \right] \quad (۸۱.۶)$$

معادله دیفرانسیل مربوط به θ ، (D) ، را در نظر بگیرید:

^{۵۲} Adjoint

$$(D) \begin{cases} \rho(w)\tilde{c}(w) \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (k(w)\nabla \theta) & \text{in } [0, T] \times \mathcal{D} \\ \rho(w) = w^p \rho_c + (1 - w^p)\rho_m & \text{in } [0, T] \times \mathcal{D} \\ \tilde{c}(w) = w^p \tilde{c}_e + (1 - w^p)c_m & \text{in } [0, T] \times \mathcal{D} \\ \frac{1}{k(w)} = \frac{1}{k_c} w^p + \frac{1}{k_m} (1 - w^p) & \text{in } [0, T] \times \mathcal{D} \\ \theta(t, \mathbf{x}) = w^p \theta_p + (1 - w^p)\theta_a & \text{in } \{t = 0\} \times \mathcal{D} \\ -k(w)\nabla \theta \cdot \mathbf{n} = h_a(\theta - \theta_a) & \text{on } [0, T] \times \partial \mathcal{D} \end{cases}$$

با توجه به رابطه (۵۲.۶)، اگر θ جواب معادله دیفرانسیل (D) و η جواب معادله دیفرانسیل (A) به ازای یک θ معلوم

باشد، مشتق جهت‌دار تابع هدف مربوط به مساله (RP_R^S) نسبت به w از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \int_0^T \left(\tilde{c}\eta \frac{\partial \rho}{\partial w} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \rho\eta \frac{\partial \tilde{c}}{\partial w} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial k}{\partial w} \nabla \eta \cdot \nabla \theta \right) \mathcal{I}_c(\mathbf{x}) dt \quad (۸۲.۶)$$

مقادیر $\frac{\partial k}{\partial w}$ و $\frac{\partial \tilde{c}}{\partial w}$ ، $\frac{\partial \rho}{\partial w}$ در رابطه (۸۲.۶) بترتیب از روابط (۵۳.۶)، (۵۴.۶) و (۵۵.۶) بدست می‌آیند.

فصل ۷

مدلسازی عددی

"Namely, because the shape of the whole universe is most perfect and, in fact, designed by the wisest creator, nothing in all of the world will occur in which no maximum or minimum rule is somehow shining forth (Leonhard Euler 1707–1783)"

در این فصل به ارائه جزئیات مربوط به حل عددی مدل ریاضی پیشنهاد شده در فصل قبل پرداخته می‌شود. بعلت استفاده از روش بهینه‌سازی پیش از گسسته‌سازی در این پژوهش، مطالب این فصل عمدتاً مربوط به گسسته‌سازی هندسی دامنه حل و گسسته‌سازی عددی مدل ریاضی خواهد بود. انجام آنالیز حساسیت در این تحقیق به حافظه کامپیوتری بسیار بالایی نیاز دارد که این مقدار حافظه بطور طبیعی در دسترس نمی‌باشد، در یکی از بخشهای این فصل روشی ساده برای مدیریت حافظه ارائه خواهد شد. همچنین روش عددی برای تصویر کردن در فضای کنترل مربوط به مساله (RPS_R) نیز در این فصل ارائه خواهد شد.

۱.۷ گسسته سازی هندسی

اگر چه آنالیزهای مربوط به معادلات دیفرانسیل پاره‌ای روی فضاهای بعد-نامحدود انجام می‌شود، لکن اغلب بعلت فقدان جواب تحلیلی لازم است جواب تقریبی مساله بکمک روشهای عددی روی فضاهای بعد-محدود محاسبه شود. برای این منظور ابتدا فضای بعد-نامحدود در جهت زمان-مکان گسسته سازی می‌شود. بعبارت ساده‌تر جواب مساله تنها برای تعداد محدودی از نقاط با مختصات زمان-مکانی مشخص محاسبه می‌شود (جواب مربوط به سایر نقاط می‌تواند بوسیله درونیابی عددی محاسبه شود). دقت حل عددی تابع نحوه گسسته‌سازی فضای بعد-نامحدود شامل تعداد، مکان و نحوه ارتباط بین نقاط حل پس از گسسته سازی می‌باشد.

در این تحقیق بازه زمانی، $[0, T]$ ، به N تکه مساوی با طول Δt تقسیم شده (گام زمانی) و مختصات زمانی با اندیس بالانویس $n = 0, \dots, N$ نمایش داده می‌شوند. طول گام زمانی نیز توسط معیار پایداری حل عددی معادله انتقال حرارت

محاسبه می‌شود. بطور کلی روشهای مختلفی برای گسسته‌سازی مکانی فضاها تابعی وجود دارند. این روشها می‌توانند به دو گروه کلی شبکه‌های منطبق بر بدنه^۱ و شبکه‌های غیر منطبق بر بدنه^۲ تقسیم شوند. در شبکه‌های نوع اول نقاط مرزی شبکه روی مرزهای شکل قرار دارند درحالی که در شبکه‌های نوع دوم نقاط مرزی شبکه لزوماً روی نقاط مرزی شکل قرار ندارند. در مقایسه با شبکه‌های غیر منطبق بر بدنه مدل‌سازی هندسی روی شبکه‌های منطبق بر بدنه از دقت بالاتری برخوردار است. اما در عوض هزینه محاسبات روی این شبکه‌ها نیز بمیزان قابل توجهی بالاتر از شبکه‌های غیر منطبق بر بدنه می‌باشد. همچنین تولید اتوماتیک شبکه‌های منطبق بر بدنه روی هندسه‌های پیچیده هنوز به عنوان یک مساله حل نشده شناخته می‌شود. بطور کلی انتخاب یک شبکه محاسباتی تابع پارامترهای زیادی می‌باشد که توضیح آنها از حوصله این نوشتار خارج است. برای رسیدن به یک دقت محاسباتی مساوی بسته به نوع مساله و شرایط هندسی ممکن است یکی از این دو نوع شبکه مرجح باشد. از آنجا که در این تحقیق هندسه قطعه بصورت غیر مستقیم توسط یک تابع مشخصه، معین شده است و هندسه سیستم تغذیه گذاری نیز بصورت یک تابع مشخصه در طول فرایند بهینه سازی تغییر خواهد کرد، استفاده از یک شبکه منطبق بر بدنه ضرورتی ندارد. بعلاوه نتایج آزمایشات عددی در طول دو دهه گذشته نشان داده است که استفاده از شبکه‌های متعامد غیر منطبق بر بدنه در شبیه‌سازی فرایندهای ریخته‌گری در قالبهای ماسه‌ای منجر به نتایج قابل قبولی در یک هزینه محاسباتی مناسب خواهد شد. بنابراین در این تحقیق از یک شبکه دکارتی^۳ یکنواخت غیر منطبق بر بدنه استفاده می‌شود.

اگر چه تولید شبکه‌های دکارتی برای اشکال ساده آسان است، اما تولید این نوع شبکه برای هندسه‌های پیچیده با مشکلات زیادی همراه است. در این تحقیق روشی نوین برای تولید این نوع از شبکه‌ها و همچنین شبکه‌های دکارتی غیر یکنواخت درختی^۴ روی هندسه‌های پیچیده توسعه داده شد. از جمله محاسن این روش سادگی، سرعت بالا و قدرت مناسب در مدیریت هندسه‌های پیچیده و احیانا معیوب می‌باشد. جزئیات کامل این روش در [۱۴۳] آورده شده است^۵. در این قسمت تنها به اصول کلی این روش اشاره خواهد شد.

یکی از ملزومات اولیه تولید شبکه نیاز به ارتباط با نرم‌افزارهای نقشه‌کشی برای دریافت هندسه قطعه می‌باشد. برای این منظور در این تحقیق از فرمت استاندارد نقشه‌کشی به نام استریولیتوگرافی^۶ یا STL استفاده می‌شود. این فرمت شامل سطوح مثلث بندی شده هندسه است (چگالی مثلث بندی توسط کاربر قابل تنظیم است). جزئیات یک فایل STL شامل مختصات نقاط و بردار یکه نرمال خارجی هر مثلث می‌باشد. شکل ۱۰۷ بصورت شماتیک محتوای یک فایل STL از نوع متنی را نشان می‌دهد. در این پژوهش تولید شبکه سه بعدی ابتدا به یک سری متوالی شامل تولید شبکه دو بعدی تبدیل می‌شود. سپس تولید شبکه در دو بعد به یک سری متوالی شامل تولید شبکه در یک بعد خواهد شد (مطابق شکل ۲۰۷). مطابق شکل ۳۰۷ تولید شبکه در یک بعد نیز شامل مشخص کردن نقاط داخلی و خارجی شکل روی خط اسکن است که به آن رنگ آمیزی

^۱ Body-fitted grid

^۲ Non-Body-fitted grid

^۳ Cartesian

^۴ Octree Cartesian grids

^۵ کد کامپیوتری این روش از طریق آدرس "<http://mehr.sharif.ir/~tav/cartgen.htm>" قابل دسترس می‌باشد.

^۶ Stereolithography

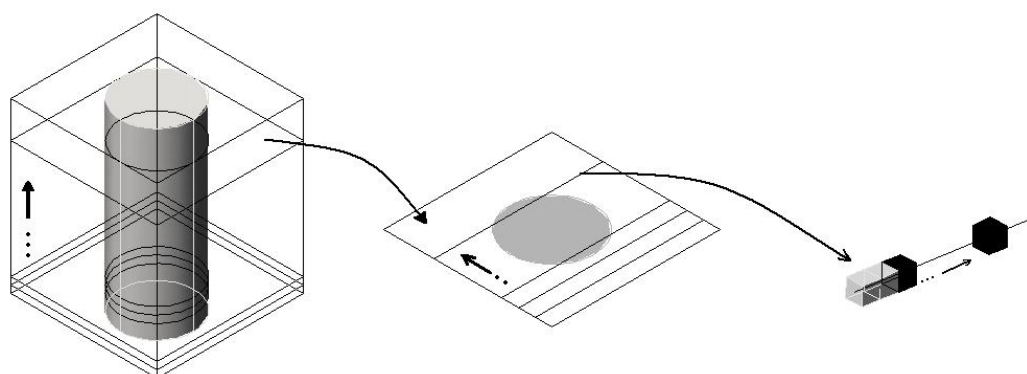
شبکه گویند. شناخت نقاط داخلی و خارجی از طریق عملیات ساده جبری قابل انجام است. پس از گسسته‌سازی، دامنه حل به $I_m \times J_m \times K_m$ سلول هم‌اندازه مکعبی شکل تبدیل می‌شود. I_m ، J_m و K_m بترتیب تعداد سلولهای شبکه در جهت محورهای x ، y و z می‌باشند. طول مش، Δx ، پارامتری است که توسط کاربر انتخاب می‌شود. در این تحقیق کمیتهای‌های مربوط به هر سلول در مرکز هندسی آن تعریف شده و با اندیس $\square_{i,j,k}$ نمایش داده می‌شوند. این اندیس‌ها مکان هر سلول را در شبکه تولید شده نشان می‌دهند. کد مشخص کننده ماده هر سلول درون قطعه و ماسه بترتیب برابر یک و صفر خواهد بود. مقدار اولیه تابع مشخص کننده توپولوژی، $w_{i,j,k}$ ، توسط کد مشخص کننده ماده معین می‌شود.

```

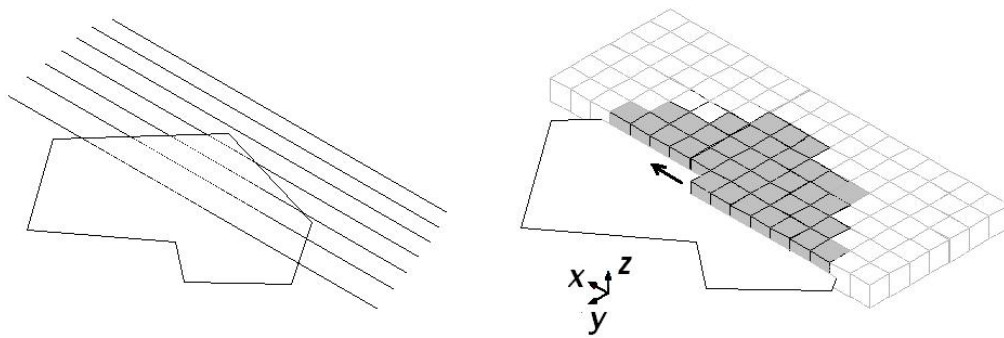
solid AutoCAD
  facet normal 0.000000e+000 0.000000e+000 1.000000e+000
    outer loop
      vertex 1.000000e+002 1.000000e+002 1.000000e+002
      vertex 0.000000e+000 1.000000e+002 1.000000e+002
      vertex 1.000000e+002 0.000000e+000 1.000000e+002
    endloop
  endfacet
  ...
  facet normal 1.000000e+000 0.000000e+000 0.000000e+000
    outer loop
      vertex 1.000000e+002 0.000000e+000 0.000000e+000
      vertex 1.000000e+002 1.000000e+002 0.000000e+000
      vertex 1.000000e+002 1.000000e+002 1.000000e+002
    endloop
  endfacet
endsolid AutoCAD

```

شکل ۱.۷: شماتیک محتوای یک فایل STL در فرمت متنی.



شکل ۲.۷: شماتیک تولید شبکه دکارتی در این پژوهش.



شکل ۳.۷: شماتیک رنگ کردن شبکه در دو بعد.

۲.۷ گسسته سازی معادلات حاکم

بمنظور گسسته‌سازی معادلات و روابط حاکم در این تحقیق از روش حجم معیار ^۷ [۱۴۴] استفاده خواهد شد. اساس این روش بر مبنای انتگرال‌گیری سلول به سلول از روابط حاکم است. استفاده از این روش روی شبکه‌های دکارتی تقریباً معادل با گسسته‌سازی معادلات بروش تفاضل محدود ^۸ می‌باشد. در این قسمت ابتدا فرم گسسته شده اپراتورهای استفاده شده در این تحقیق ارائه می‌شود. سپس فرم گسسته معادلات دیفرانسیل مربوطه ارائه خواهد شد.

فرض کنید تعداد سلولهای موجود در داخل قطعه، دامنه طراحی، دامنه طراحی تغذیه، دامنه طراحی گردن تغذیه، سلولهای واقع شده در ماسه با توپولوژی ثابت و کل سلولها بترتیب با $n_c, n_d, n_{df}, n_{dn}, n_m, n_t$ نشان داده شوند. همچنین فرض کنید مجموعه اندیس (i, j, k) سلولهای موجود در این دامنه‌های مکانی بترتیب با $\mathcal{I}_c, \mathcal{I}_d, \mathcal{I}_{df}, \mathcal{I}_{dn}, \mathcal{I}_m$ و \mathcal{I}_t نشان داده شوند. با استفاده از روش حجم معیار، فرم گسسته‌سازی شده هر انتگرال روی یک دامنه مکانی مشخص به مجموع انتگرالها روی سلولهای آن دامنه تبدیل می‌شود.

فرض کنید انتگرال تابع اسکالر $f(\mathbf{x})$ روی دامنه انتگرالگیری \mathcal{X} با مجموعه اندیسهای \mathcal{I}_X ، مطلوب است، فرم گسسته این انتگرال بصورت زیر خواهد بود:

$$\int_{\mathcal{X}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \equiv \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{I}_X} \left[\int_{(i,j,k)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] = \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{I}_X} \left[f_{(i,j,k)} V_c \right]$$

در رابطه بالا $f_{(i,j,k)}$ مقدار تابع $f(\mathbf{x})$ در مرکز سلول و V_c حجم سلول Δx^3 می‌باشد. لازم به تذکر است که تابع $f(\mathbf{x})$ می‌تواند یک عبارت جبری، حاصلضرب داخلی دو گرادیان یا یک مشتق زمانی باشد.

فرض کنید $F(\mathbf{x})$ یک تابع برداری بوده و انتگرال دیورژانس این تابع روی دامنه انتگرالگیری \mathcal{X} با مجموعه اندیسهای \mathcal{I}_X ،

^۷Control volume method

^۸Finite difference method

مطلوب است، فرم گسسته این انتگرال بصورت زیر خواهد بود:

$$\int_{\mathcal{X}} \nabla \cdot F(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \equiv \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{I}_X} \left[\int_{(i,j,k)} \nabla \cdot F(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] = \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{I}_X} \sum_{l \in \mathcal{F}(i,j,k)} F_l \cdot \mathbf{n}_l A_l$$

در رابطه بالا $\mathcal{F}(i,j,k)$ نشان دهنده مجموعه وجوه هر سلول، l شمارنده اندیس وجوه، \mathbf{n}_l بردار یکه نرمال خارجی هر وجه و A_l نمایانگر مساحت هر وجه می باشد. توجه شود که تساوی پایانی در رابطه بالا با استفاده از قضیه دیورژانس نتیجه شده است. فرض کنید مؤلفه های تابع برداری F در دستگاه دکارتی با (f^x, f^y, f^z) نمایش داده شوند. در یک شبکه دکارتی هر سلول ۶ وجه هم اندازه داشته و بردار یکه نرمال متناظر با این وجوه تنها موازی یکی از محورهای مختصات می باشد. فرض کنید مرکز وجود بکمک اندیسهای نیمه نمایش داده شوند. مثلا مرکز وجه مشترک بین دو سلول (i, j, k) و $(i+1, j, k)$ با $(i+1/2, j, k)$ و مرکز وجه مشترک بین (i, j, k) و $(i-1, j, k)$ با $(i-1/2, j, k)$ نمایش داده می شود. با استفاده از خواص اشاره شده می توان رابطه قبل را بفرم ساده شده زیر بازنویسی کرد:

$$\int_{\mathcal{X}} \nabla \cdot F(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \equiv \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{I}_X} \left[f_{i+1/2,j,k}^x - f_{i-1/2,j,k}^x + f_{i,j+1/2,k}^y - f_{i,j-1/2,k}^y + f_{i,j,k+1/2}^z - f_{i,j,k-1/2}^z \right] A_c$$

در رابطه بالا A_c نمایانگر مساحت وجوه می باشد (Δx^2) . با پیروی از [۱۴۵] میانگین گیری هارمونیک برای محاسبه ضریب هدایت حرارتی روی وجوه سلولها استفاده می شود. مثلا برای وجه $(i+1/2, j, k)$ ضریب هدایت حرارتی از رابطه زیر محاسبه خواهد شد:

$$k_{i+1/2,j,k} = \frac{2 k_{i+1,j,k} k_{i-1,j,k}}{k_{i+1,j,k} + k_{i-1,j,k}}$$

برای محاسبه گرادیان در مرز سلول از روش تفاضل مرکزی استفاده می شود. فرض کنید گرادیان تابع اسکالر $f(\mathbf{x})$ در مرکز سلول (i, j, k) مطلوب باشد. در صورتیکه مؤلفه های این گرادیان با (f^x, f^y, f^z) نمایش داده شوند، این مؤلفه ها از روابط زیر محاسبه می شوند:

$$f_{i,j,k}^x = \frac{f_{i+1,j,k} - f_{i-1,j,k}}{2\Delta x}, \quad f_{i,j,k}^y = \frac{f_{i,j+1,k} - f_{i,j-1,k}}{2\Delta x}, \quad f_{i,j,k}^z = \frac{f_{i,j,k+1} - f_{i,j,k-1}}{2\Delta x}$$

لاپلاسیان تابع اسکالر $f(\mathbf{x})$ در مرکز سلول (i, j, k) را می توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$(\nabla^2 f)_{i,j,k} = \frac{1}{\Delta x^2} (f_{i,j,k+1} + f_{i,j+1,k} + f_{i+1,j,k} - 6f_{i,j,k} + f_{i-1,j,k} + f_{i,j-1,k} + f_{i,j,k-1})$$

مطابق روابط زیر مشتقات مکانی و زمانی درجه دوم تابع اسکالر $f(\mathbf{x})$ از روش تفاضل مرکزی محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}_{i,j,k} &= \frac{f_{i+1,j,k} - 2f_{i,j,k} + f_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}_{i,j,k} &= \frac{f_{i,j+1,k} - 2f_{i,j,k} + f_{i,j-1,k}}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}_{i,j,k} &= \frac{f_{i,j,k+1} - 2f_{i,j,k} + f_{i,j,k-1}}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}_{i,j,k} &= \frac{f_{i,j,k}^{n+1} - 2f_{i,j,k}^n + f_{i,j,k}^{n-1}}{\Delta t^2}\end{aligned}$$

واضح است حین محاسبات مربوط به مشتقات زمانی نمی‌توان از روش تفاضل مرکزی برای اولین و آخرین گام زمانی استفاده کرد. در این موارد مطابق روابط زیر از روش تفاضل جلورونده یا پس‌رونده استفاده خواهد شد:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f^0}{\partial t}_{i,j,k} &= \frac{f_{i,j,k}^1 - f_{i,j,k}^0}{\Delta t} \\ \frac{\partial f^N}{\partial t}_{i,j,k} &= \frac{f_{i,j,k}^N - f_{i,j,k}^{N-1}}{\Delta t} \\ \frac{\partial^2 f^0}{\partial t^2}_{i,j,k} &= \frac{f_{i,j,k}^0 - 2f_{i,j,k}^1 + f_{i,j,k}^2}{\Delta t^2} \\ \frac{\partial^2 f^N}{\partial t^2}_{i,j,k} &= \frac{f_{i,j,k}^N - 2f_{i,j,k}^{N-1} + f_{i,j,k}^{N-2}}{\Delta t^2}\end{aligned} \quad (1.7)$$

برای محاسبه انتگرال زمانی جهت محاسبه مشتق تابع هدف در مساله (RP_R^S) از روش انتگرال‌گیری عددی بروش ذورنقه‌ای استفاده می‌شود. تابع اسکالر $f(t, \mathbf{x})$ را در نظر بگیرید. انتگرال زمانی این تابع در هر سلول مشخص واقع شده در نقطه \mathbf{x}_0 با اندیس (i, j, k) از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\int_0^T f(t, \mathbf{x}_0) dt \equiv \int_0^T f_{i,j,k}(t) dt = \frac{\Delta t}{2} \left[f_{i,j,k}^0 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} f_{i,j,k}^n + f_{i,j,k}^N \right]$$

در ادامه به بررسی گسسته‌سازی معادله انتقال پرداخته می‌شود. گسسته‌سازی مکانی این معادله بکمک روابط ارائه شده بسادگی قابل انجام می‌باشد. بطور کلی دو نوع روش برای گسسته‌سازی زمانی این معادله وجود دارد که عبارتند از: روش

صریح^۹ و روش ضمنی^{۱۰}. از جمله محاسن روش اول سادگی، نیاز به حافظه کم و دقت زمانی بالای آن می‌باشد. اما برای پایداری‌سازی حل گام زمانی در این روش محدود بوده و لذا تعداد دفعات انتگرال‌گیری خیلی زیاد خواهد بود. حسن عمده روش دوم پایداری بدون قید و شرط آن و امکان استفاده از گامهای زمانی بزرگتر حین انتگرال‌گیری در جهت زمان می‌باشد. اما این روش معمولاً به حافظه کامپیوتری زیادی نیازمند است. انتخاب صحیح بین این دو روش تابع نوع مساله، دقت مورد نیاز و توان محاسباتی قابل دسترس می‌باشد. از آنجا که در مسائل مربوط به تغییر فاز و تشکیل عیوب انقباضی، دقت پیش‌بینی مکان فصل مشترک جامد-مایع (بوسیله دما) از اهمیت زیادی برخوردار است استفاده از گامهای زمانی بزرگ باعث دقت کم در جهت زمان و حذف برخی از اطلاعات مربوط به انجماد خواهد شد. بعبارت دیگر نمی‌توان در اینگونه مسائل از تمام ظرفیت روشهای ضمنی استفاده کرد. همانطور که در [۱۴۶] نشان داده شده است، استفاده از روشهای ضمنی نه تنها می‌تواند باعث کاهش دقت محاسبات شود بلکه باعث افزایش هزینه محاسبات نیز می‌گردد. بنابراین در این پژوهش از روش صریح برای انتگرال‌گیری زمانی معادله انتقال حرارت استفاده می‌شود. مقدار دمای سلول (i, j, k) در زمان $t = (n + 1)\Delta t$ با دانستن توزیع دما در زمان $t = n\Delta t$ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\theta_{i,j,k}^{n+1} = \theta_{i,j,k}^n + \frac{\Delta t}{\rho \hat{c} \Delta x} \left[q_{i+1/2,j,k}^n - q_{i-1/2,j,k}^n + q_{i,j+1/2,k}^n - q_{i,j-1/2,k}^n + q_{i,j,k+1/2}^n - q_{i,j,k-1/2}^n \right]$$

$$\begin{aligned} q_{i+1/2,j,k}^n &= k_{i+1/2,j,k} \frac{\theta_{i+1,j,k}^n - \theta_{i,j,k}^n}{\Delta x}, & q_{i-1/2,j,k}^n &= k_{i-1/2,j,k} \frac{\theta_{i,j,k}^n - \theta_{i-1,j,k}^n}{\Delta x} \\ q_{i,j+1/2,k}^n &= k_{i,j+1/2,k} \frac{\theta_{i,j+1,k}^n - \theta_{i,j,k}^n}{\Delta x}, & q_{i,j-1/2,k}^n &= k_{i,j-1/2,k} \frac{\theta_{i,j,k}^n - \theta_{i,j-1,k}^n}{\Delta x} \\ q_{i,j,k+1/2}^n &= k_{i,j,k+1/2} \frac{\theta_{i,j,k+1}^n - \theta_{i,j,k}^n}{\Delta x}, & q_{i,j,k-1/2}^n &= k_{i,j,k-1/2} \frac{\theta_{i,j,k}^n - \theta_{i,j,k-1}^n}{\Delta x} \end{aligned}$$

رابطه بالا می‌بایست برای حالتی که یکی از وجوه سلول روی سطح قالب واقع است، اندکی اصلاح شود. در این حالت شار هدایتی مربوط به وجه مورد نظر با شار جابجایی با محیط تعویض می‌شود. مثلاً اگر وجه $(i + 1/2, j, k)$ روی سطح قالب واقع شود، $q_{i+1/2,j,k}^n$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$q_{i+1/2,j,k}^n = h_a(\theta_{i,j,k}^n - \theta_a)$$

گام زمانی معادله انتقال حرارت با استفاده از معیار پایداری این معادله طبق رابطه زیر محاسبه خواهد شد:

$$\Delta t = \frac{\rho_c c_c \Delta x^2}{6k_c}$$

^۹Explicit

^{۱۰}Implicit

معادله همزاد انتقال حرارت نیز بروشی مشابه با معادله انتقال حرارت اولیه گسسته‌سازی می‌شود. تفاوت حل عددی این دو معادله در نحوه حرکت در راستای محور زمان می‌باشد. بطوریکه در حل معادله انتقال حرارت اولیه زمان شروع $t = 0$ و زمان پایان $t = T$ است. اما حین حل معادله همزاد لازم است از زمان $t = T$ بعنوان شرایط اولیه شروع کرده و در جهت عکس محور زمان بسمت زمان $t = 0$ پیشروی کرد. همچنین معادله همزاد شامل یک بار حرارتی تابع دما نیز می‌باشد. بمنظور محاسبه شرایط اولیه و بار حرارتی معادله همزاد، لازم است معادله انتقال حرارت اولیه بطور کامل حل شده باشد.

۳.۷ مدیریت حافظه کامپیوتری حین بهینه سازی

همانطور که قبلاً اشاره شد برای حل معادله همزاد انتقال حرارت (همچنین محاسبه مشتق تابع هدف) لازم است معادله انتقال حرارت اولیه بطور کامل حل شده و اطلاعات مربوط به حل آن در دسترس باشد. بنابراین لازم است در هر گام زمانی از حل معادله انتقال حرارت دمای تمام نقاط داخل قطعه و دامنه طراحی ذخیره شوند. بمنظور تسریع و تسهیل در خواندن داده‌ها و محاسبات مربوط به آنها بهتر است دمای کل نقاط دامنه حل در هر گام زمانی ذخیره شوند. از آنجا که در این تحقیق از روش صریح برای انتگرال‌گیری معادله در جهت زمان استفاده شده، تعداد گامهای زمانی بسیار زیاد خواهد بود. این مساله باعث می‌شود به حافظه کامپیوتری زیادی برای ذخیره‌سازی جواب معادله انتقال حرارت نیاز باشد. مثلاً اگر دامنه حل با ۵ میلیون سلول گسسته‌سازی شود برای ذخیره‌سازی جواب معادله انتقال حرارت نیاز است (در این تحقیق از محاسبات با دقت مضاعف^{۱۱} استفاده خواهد شد). بطور معمول این مقدار حافظه روی هیچ کامپیوتر شخصی یافت نمی‌شود.

برای حل این مشکل تلاشهایی در مراجع مربوط به کنترل بهینه صورت گرفته است. یکی از روشهای متداول در این حوزه روش پنجره‌بندی زمانی می‌باشد [۱۴۷]. در این روش دامنه زمانی به تعدادی از پنجره‌های کوچک زمانی تقسیم می‌شود، بطوریکه امکان ذخیره‌سازی اطلاعات مربوط به هر پنجره میسر باشد. سپس مساله بهینه‌سازی اصلی به یک سری متوالی از مسائل بهینه‌سازی کوچک شده در جهت زمان روی هر پنجره زمانی تبدیل می‌شود. شرایط اولیه برای هر مساله جدید از جواب مساله قبلی بدست می‌آید. اگر چه این روش بدون افزایش در هزینه محاسبات مشکل مربوط به کمبود حافظه را حل می‌کند، ولی در عوض یک جواب غیربهینه تولید می‌کند. کارایی این روش برای تحقیق حاضر که قیود آن تنها در بازه زمانی کوچکی فعال هستند بسیار ضعیف پیش‌بینی می‌شود. نوع دیگری از خانواده این روش‌ها که منجر به یک جواب بهینه (مطلوب) خواهد شد در [۱۴۸] پیشنهاد شده است. فرض کنید دامنه زمانی به w پنجره زمانی با طول $n_w \Delta t$ تقسیم شده است. در این روش معادله دیفرانسیل اولیه از $t = 0$ تا $t = T$ بطور کامل حل می‌شود ولی داده‌ها تنها در پنجره زمانی $t = T$ تا $t = (N - n_w) \Delta t$ ذخیره خواهند شد. سپس با استفاده از داده‌های موجود معادله همزاد در پنجره زمانی $t = T$ تا $t = (N - n_w) \Delta t$ حل می‌شود (تنها برای n_w گام زمانی). در ادامه معادله دیفرانسیل اولیه دوباره از زمان $t = 0$ تا

^{۱۱}Double precision

$t = (N - n_w)\Delta t$ حل شده و داده‌ها در پنجره زمانی $t = (N - 2n_w)\Delta t$ تا $t = (N - n_w)\Delta t$ ذخیره می‌شوند. سپس حل معادله دیفرانسیل همزاد از زمان $t = (N - n_w)\Delta t$ تا زمان $t = (N - 2n_w)\Delta t$ انجام می‌شود. بطور مشابه این فرایند آنقدر تکرار می‌شود تا حل معادله همزاد به زمان $t = 0$ برسد. واضح است تنها نقص این روش هزینه محاسباتی بسیار بالای آن می‌باشد.

در این تحقیق از یک روش بسیار ساده که در عمل بازدهی محاسباتی بالاتری نسبت به روشهای ذکر شده دارد استفاده خواهد شد. این روش نه تنها یک جواب بهینه تولید می‌کند بلکه افزایش زیادی را در هزینه محاسبات ایجاد نمی‌کند. در این روش داده‌های مربوط به هر گام زمانی پس از تولید روی دیسک سخت کامپیوتر ذخیره می‌گردند. سپس داده‌های ذخیره شده حین حل معادله دیفرانسیل همزاد بترتیب عکس ذخیره‌سازی بازیابی شده و مورد استفاده قرار می‌گیرند. بر اساس آزمایشات عددی انجام شده در این پژوهش زمان ذخیره‌سازی و بازیابی داده‌ها در هر گام زمانی تقریباً برابر زمان حل معادله انتقال حرارت در یک گام زمانی می‌باشد. بنابراین در اثر استفاده از این روش هزینه محاسبات تقریباً دو برابر خواهد شد. البته روشهایی نیز برای کاهش این زمان وجود دارد. مثلاً می‌توان بکمک برنامه نویسی بروش چند مسئولیتی که مناسب برای کامپیوترهای چند هسته‌ای می‌باشد این زمان اضافه را تقریباً به صفر رساند (لازم است تذکر داده شود که امروزه اغلب کامپیوترهای شخصی دو هسته‌ای هستند).

۴.۷ جستجوی عمومی یک-بعدي

همانطور که در فصل قبل اشاره شد، در مرحله بالایی مساله (\overline{RP}_T^S) لازم است یک مساله بهینه‌سازی یک-بعدي حل گردد. منظور از مساله یک-بعدي در اینجا وجود یک متغیر بهینه‌سازی بصورت صریح می‌باشد. هنگامی که مساله (RP) دارای جواب باشد، این مساله یک بعدي بفرم کلی زیر خواهد بود:

$$\arg \min_{x \in \mathbb{R}[0, a]} x \quad \text{subject to: } h(x) = 0 \quad (۲.۷)$$

پارامتر a در این مساله برابر R_{df}^0 است که از رابطه (۳۷.۶) محاسبه می‌شود. در حقیقت حل این مساله معادل با یافتن مینیمم عمومی یک مساله بهینه‌سازی مقید یک متغیره است. از آنجا که مشتق تابع $h(x)$ موجود نمی‌باشد، لازم است از روشهای بدون نیاز به مشتق برای حل این مساله استفاده کرد. باید توجه شود که ارزیابی تابع $h(x)$ به ازای یک مقدار مشخص x معادل با حل یک مساله بهینه‌سازی پرهزینه می‌باشد. بنابراین باید از روشی استفاده کرد که تا حد ممکن از کمترین مقدار ارزیابی $h(x)$ استفاده کند. هنگامیکه مساله (RP) فاقد جواب بهینه باشد، قید $h(x)$ همواره مخالف صفر بوده و مساله (\overline{RP}_T^S) معادل با حل یک مساله بهینه‌سازی دو مرحله‌ای می‌باشد که مرحله بالایی آن بفرم زیر است:

$$\arg \min_{x \in \mathbb{R}[0, a]} x \quad \text{subject to: } x = \arg \min h(x) \quad (۳.۷)$$

حل مسائل (۲.۷) و (۳.۷) توسط روشهای عمومی بدون نیاز به مشتق [۱۴۹] منجر به بازدهی بسیار پایین الگوریتم حل خواهد شد. لکن توجه به ساختار خاص این دو مساله می‌تواند منجر به روشی ساده با بازدهی مناسب گردد. در حقیقت برای حل این مسائل کافی است گراف تابع $h(x)$ نسبت به x در بازه $[0, a]$ محاسبه شود. در صورتیکه مجموعه $\mathcal{V}_E = \{x_1, x_2, \dots\}$ حاوی نقاط تقاطع گراف تابع $h(x)$ با محور x باشد. کوچکترین عضو مجموعه \mathcal{V}_E جواب مساله (۲.۷) خواهد بود. بطور مشابه در صورتیکه مجموعه $\mathcal{V}_I = \{x_1, x_2, \dots\}$ حاوی مینیمم‌های موضعی گراف تابع $h(x)$ باشد، کوچکترین عضو مجموعه \mathcal{V}_I جواب مساله (۳.۷) خواهد بود.

برای یافتن گراف تابع $h(x)$ ابتدا پاره خط $[0, a]$ به m بازه مساوی تقسیم می‌شود. فرض کنید نقاط متناظر با این تقسیم‌بندی با $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ نمایش داده شوند ($p_i = ia/m$). سپس مقدار تابع $h(x)$ به ازای مقادیر مختلف p_i محاسبه می‌گردد. توجه شود که مقدار تابع $h(x)$ در نقطه p_m از پیش محاسبه شده و موجود می‌باشد. فرض کنید مقادیر ارزیابی شده تابع $h(x)$ در نقاط مورد نظر با مجموعه $\mathcal{H} = \{h_0, h_1, \dots, h_m\}$ نمایش داده شود. با استفاده از این اطلاعات می‌توان گراف تابع $h(x)$ را توسط درونیایی بین مجموعه نقاط $\mathcal{Q} = \{(p_0, h_0), (p_1, h_1), \dots, (p_m, h_m)\}$ مشخص کرد. در این تحقیق $m = 10$ خواهد بود. لازم به تذکر است که به ازای $m = 10$ ، در بدترین شرایط بدون استفاده از هرگونه درونیایی خطای جواب زیر 0.05 خواهد بود.

واضح است دقت جواب بدست آمده از روش بالا تابع نوع درونیایی استفاده شده می‌باشد. انتخاب نوع درونیایی تا حد زیادی تابع رفتار مساله است. یکی از بهترین روشها برای مشخص کردن رفتار مساله استفاده از آزمایشات عددی می‌باشد. آزمایشات عددی انجام شده در این تحقیق نشان می‌دهد گراف تابع $h(x)$ نسبت به x هموار می‌باشد. همچنین نتایج حاکی از عدم وجود یک رفتار نوسانی در همسایگی جواب می‌باشد. اما هنگامیکه مساله (RP) دارای جواب است گراف تابع $h(x)$ می‌تواند دارای تغییرات نسبتاً شدیدی در تعداد محدودی از نقاط باشد. بنابراین استفاده از یک درونیایی مرتبه پایین نمی‌تواند منجر به بازیابی جواب با دقت مناسب شود. از سوی دیگر استفاده از روشهای درونیایی مرتبه بالا می‌تواند باعث ایجاد نوسان کاذب در گراف تابع $h(x)$ گردد. برای حل این مشکل می‌توان از یک روش دو مرحله‌ای استفاده کرد. در این روش ابتدا بکمک درونیایی خطی روی مجموعه نقاط \mathcal{Q} جواب تقریبی مساله محاسبه می‌شود. سپس جواب دقیق مساله با استفاده از یک روش درونیایی مرتبه بالای غیر نوسانی در همسایگی جواب تقریبی محاسبه خواهد شد.

درونیایی خطی تابع $h(x)$ روی پاره خط $[p_i, p_{i+1}]$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$h(x) = h_i + (x - p_i) \frac{h_{i+1} - h_i}{p_{i+1} - p_i}$$

فرض کنید جواب تقریبی مساله در این مرحله با \tilde{x}^* نمایش داده شود. برای مدل کردن تغییرات ناگهانی محتمل برای تابع $h(x)$ در همسایگی جواب می‌توان از ایده‌های مربوط به مدل‌سازی ناپیوستگی‌های فیزیکی؛ مثل بازیابی شک در جوابهای معادلات دیفرانسیل هذلولوی؛ استفاده کرد. برای این منظور ابتدا نزدیکترین نقطه موجود در مجموعه \mathcal{P} به نقطه \tilde{x}^* مشخص

می‌شود. فرض کنید اندیس این نقطه با t نمایش داده شود. سپس تابع $h(x)$ در همسایگی نقطه p_t بصورت خطی تقریب زده می‌شود:

$$h(x_t + \delta x) = h(x_t) + \frac{\partial h(x_t)^+}{\partial x} \delta x$$

$$h(x_t - \delta x) = h(x_t) - \frac{\partial h(x_t)^-}{\partial x} \delta x$$

در این روابط $\frac{\partial h(x)^-}{\partial x}$ و $\frac{\partial h(x)^+}{\partial x}$ بترتیب نمایانگر مشتق یکطرفه تابع $h(x)$ در جهات + و - محور x می‌باشد. با استفاده از این تقریب جواب دقیق مساله را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$x^* = \begin{cases} x_t - h(x_t) \left[\frac{\partial h(x_t)^+}{\partial x} \right]^{-1} & \text{if } \frac{\partial h(x_t)^+}{\partial x} < 0 \\ x_t + h(x_t) \left[\frac{\partial h(x_t)^-}{\partial x} \right]^{-1} & \text{if } \frac{\partial h(x_t)^-}{\partial x} > 0 \end{cases} \quad (۴.۷)$$

مشتقات یکطرفه تابع h در نقطه x_t با استفاده از یک روش مرتبه بالای وزنی بدون نوسان^{۱۲} [۱۵۰، ۱۵۱] محاسبه می‌شود. برای محاسبه مشتق یکطرفه با دقت درجه سوم در هر نقطه به سه نقطه دیگر نیاز است که دو تای آنها در طرفی واقع شده که مشتق در جهت آن محاسبه می‌شود. همچنین لازم است فاصله نقاط متوالی استفاده شده یکسان باشد. هنگامیکه $t = 1$ یا $t = m - 1$ باشد، لازم است تابع $h(x)$ برای دو نقطه جدید دیگر ارزیابی شود. توجه شود که حداکثر ۲ ارزیابی اضافی مورد نیاز خواهد بود. بنابراین در بدترین شرایط هزینه محاسباتی مربوط به افزایش دقت جواب معادل دو برابر هزینه ارزیابی تابع $h(x)$ است. مطابق [۱۵۱] مشتق جهتدار غیر نوسانی تابع $h(x)$ با دقت درجه سوم از روابط زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial h(x_i)^+}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta x} (\Delta^+ h_{i-1} + \Delta^+ h_i) - \frac{W_+}{2\Delta x} (\Delta^+ h_{i+1} - 2\Delta^+ h_i + \Delta^+ h_{i-1})$$

$$\frac{\partial h(x_i)^-}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta x} (\Delta^+ h_{i-1} + \Delta^+ h_i) - \frac{W_-}{2\Delta x} (\Delta^+ h_{i-2} - 2\Delta^+ h_{i-1} + \Delta^+ h_i)$$

$$W_+ = \frac{1}{1 + 2r_+^2}, \quad W_- = \frac{1}{1 + 2r_-^2}$$

$$r_+ = \frac{\mu + (\Delta^- \Delta^+ h_{i+1})^2}{\mu + (\Delta^- \Delta^+ h_i)^2}, \quad r_- = \frac{\mu + (\Delta^- \Delta^+ h_{i-1})^2}{\mu + (\Delta^- \Delta^+ h_i)^2},$$

$$\Delta^+ h_i = h_{i+1} - h_i, \quad \Delta^- h_i = h_i - h_{i-1}$$

^{۱۲}Weighted essentially non-oscillatory scheme

$$\Delta^- \Delta^+ h_i = h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1}$$

در روابط بالا μ پارامتر کوچکی است که در [۱۵۱] مقدار 10^{-6} برای آن پیشنهاد شده است. برای محاسبه مشتق یکطرفه در جهات مثبت و منفی بترتیب به مقدار تابع در نقاط $\{x_k : k = i-1, i, i+1, i+2\}$ و $\{x_k : k = i-2, i-1, i, i+1\}$ نیاز است. نتایج آزمایشات عددی انجام شده در این تحقیق نشان می‌دهد با استفاده از این روش می‌توان جواب مساله را با خطایی کمتر از 0.005 محاسبه کرد. بر اساس دانش نویسنده استفاده از روشهای درونیایی وزنی غیر نوسانی مرتبه بالا در حل مسائل بهینه‌سازی برای اولین بار در این پژوهش گزارش می‌شود. بمنظور آگاهی از جزئیات بیشتر، کاربردها و مرز دانش مربوط به این روشهای درونیایی به مقاله مروری [۱۵۲] مراجعه شود.

۵.۷ تصویر کردن در فضای کنترل

روش عددی مناسب برای تصویر کردن در فضای کنترل از اجزای باقیمانده از حل مساله (RP_R^S) می‌باشد. فرض کنید متغیرهای کنترل مربوط به دامنه‌های طراحی تغذیه و گردن تغذیه بترتیب بوسیله دو بردار $\mathbf{w}^{dn} \in \mathbb{R}^{n_{dn}}$ و $\mathbf{w}^{df} \in \mathbb{R}^{n_{df}}$ نمایش داده شوند. فضای کنترل A_{ad} پس از گسسته‌سازی بفرم بعد-محدود زیر در می‌آید:

$$A_{ad}^T = \left\{ (\mathbf{w}^{dn}, \mathbf{w}^{df}) \in (\mathbb{R}^{n_{dn}}, \mathbb{R}^{n_{df}}) : \sum_{i=1}^{n_{dn}} w_i^{dn} \leq n_{dn} R_{dn}, \sum_{i=1}^{n_{df}} w_i^{df} = n_{df} R_{df}, 0 \leq (\mathbf{w}^{dn}, \mathbf{w}^{df}) \leq 1 \right\}$$

بعلت اینکه دامنه‌های طراحی تغذیه و گردن تغذیه با یکدیگر همپوشانی ندارند. فضاهای کنترل تعریف شده در بالای قابل تفکیک به دو فضای کنترل مستقل زیر می‌باشند:

$$A_{dn} = \left\{ \mathbf{w}^{dn} \in \mathbb{R}^{n_{dn}} : \sum_{i=1}^{n_{dn}} w_i^{dn} \leq n_{dn} R_{dn}, 0 \leq \mathbf{w}^{dn} \leq 1 \right\}$$

$$A_{df} = \left\{ \mathbf{w}^{df} \in \mathbb{R}^{n_{df}} : \sum_{i=1}^{n_{df}} w_i^{df} = n_{df} R_{df}, 0 \leq \mathbf{w}^{df} \leq 1 \right\}$$

برای سهولت در ارائه مطالب، الگوریتم تصویرسازی برای دو زیرفضای $D_{\mathcal{E}}$ و $D_{\mathcal{I}}$ که بترتیب معادل زیرفضاهای A_{df} و A_{dn} هستند، ارائه خواهد شد:

$$D_{\mathcal{E}} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = b, 0 \leq \mathbf{x} \leq 1 \right\}$$

$$D_{\mathcal{I}} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i \leq b, 0 \leq \mathbf{x} \leq 1 \right\}$$

در ابتدا تصویر کردن روی فضای $D_{\mathcal{E}}$ مورد بررسی قرار می‌گیرد. تصویر کردن نقطه دلخواه \mathbf{x} روی زیرفضای $D_{\mathcal{E}}$ معادل حل مساله بهینه‌سازی زیر خواهد بود:

$$\mathbf{y} := \mathcal{P}_{D_{\mathcal{E}}}[\mathbf{x}] = \arg \min_{\mathbf{z} \in D_{\mathcal{E}}} \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_2^2 \quad (5.7)$$

بعلت غیر تهی و محدب بودن $D_{\mathcal{E}}$ ، مساله (5.7) همواره دارای یک جواب یکتا است. با استفاده از روش متغیر لاگرانژ می‌توان قید تساوی را به تابع هدف اضافه کرده و لاگرانژین زیر را تشکیل داد:

$$\mathcal{L}(\mathbf{z}; \lambda) = \frac{1}{2} \|\mathbf{z}\|_2^2 - \mathbf{x}^T \mathbf{z} + \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda (\|\mathbf{z}\|_1 - b), \quad 0 \leq \mathbf{z} \leq 1 \quad (6.7)$$

در این رابطه $\lambda \in \mathbb{R}$ متغیر لاگرانژ مربوط به قید تساوی می‌باشد. برای یک مقدار ثابت λ مساله (6.7) محدب و جدایی پذیر^{۱۳} بوده و دارای جواب صریح زیر می‌باشد:

$$z_i(\lambda) = \max\{0, \min\{x_i - \lambda, 1\}\}, \quad i = 0, \dots, n \quad (7.7)$$

بعلت اینکه جواب‌های (7.7) قیود حد بالا و پایین متغیر طراحی را ارضاء می‌کنند، قسمت باقیمانده حل یافتن متغیر لاگرانژ بگونه‌ای است که قید تساوی نیز ارضاء شود. این متغیر لاگرانژ λ^* نامیده می‌شود. بنابراین λ^* ریشه معادله تک متغیره غیرخطی و غیر هموار زیر می‌باشد:

$$g(\lambda) = \|z(\lambda)\|_1 - b = 0. \quad (8.7)$$

با در نظر گرفتن روابط (7.7) و (8.7) می‌توان دریافت که گراف تابع $g(\lambda)$ دارای $2n$ نقطه شکست به مختصات زیر می‌باشد:

$$\lambda_i^l = x_i, \quad \lambda_i^u = x_i - 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

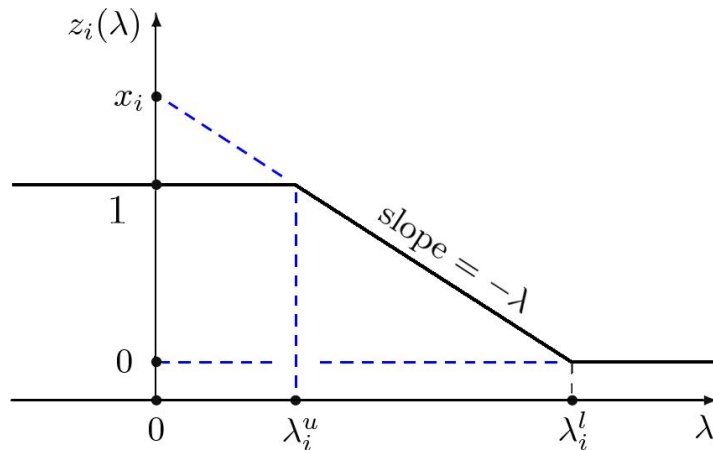
با استفاده از رابطه بالا می‌توان مقادیر $z_i(\lambda)$ در رابطه (7.7) را بفرم زیر بیان کرد:

$$z_i(\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{if } \lambda \leq \lambda_i^u, \\ x_i - \lambda, & \text{if } \lambda_i^u \leq \lambda \leq \lambda_i^l, \\ 0, & \text{if } \lambda \geq \lambda_i^l. \end{cases} \quad (9.7)$$

رابطه (9.7) نشان می‌دهد تابع $z_i(\lambda)$ ، یک تابع پیوسته تکه‌ای خطی غیرافزایشی نسبت به λ می‌باشد (مطابق شکل 4.7). بنابراین تابع $g(\lambda)$ نیز یک تابع پیوسته تکه‌ای خطی غیرافزایشی نسبت به λ خواهد بود. همچنین می‌توان نشان داد $\lambda^* \in \mathbb{R}$

^{۱۳}Separable

$[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ بطوریکه $\lambda_{min} \leq 0 \leq \lambda_{max}$ و $\lambda_{min} = \min\{\lambda_i^u\}$ ، $\lambda_{max} = \max\{\lambda_i^l\}$. بنابراین با شروع از بازه $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ و استفاده از روش نصف کردن بازه^{۱۴} می توان مقدار λ^* را در تعداد متناهی عملیات در حد دقت ماشین محاسباتی پیدا کرد. در عمل می توان از روشهای پیشرفته تر ریشه یابی بجای روش نصف کردن بازه استفاده کرد. در این تحقیق از روش ریشه یابی برنت^{۱۵} [۱۵۳] استفاده می شود. نرخ همگرایی این روش معمولاً در بدترین شرایط بهتر از روش نصف کردن بازه خواهد بود. نمونه ای از پیاده سازی کامپیوتری روش برنت در فصل ۱۸ از [۱۵۴] موجود می باشد.



شکل ۴.۷: تغییرات تابع $z_i(\lambda)$ نسبت به تغییرات λ .

مساله زیر را که مربوط به تصویر کردن در فضای کنترل D_I است، در نظر بگیرید:

$$\mathbf{y} := \mathcal{P}_{D_I}[\mathbf{x}] = \arg \min_{\mathbf{z} \in D_I} \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_2^2 \quad (۱۰.۷)$$

فرض کنید $\mathbf{y}^\mathcal{E}$ جواب مساله (۵.۷) باشد. بکمک خاصیت یکنوایی تابع $g(\lambda)$ نسبت به λ می توان نشان داد جواب مساله (۱۰.۷) از رابطه زیر بدست می آید:

$$z_i = \max\{0, \min\{x_i, y_i^\mathcal{E}\}\}, \quad i = 1, \dots, n \quad (۱۱.۷)$$

^{۱۴}Interval bisection method

^{۱۵}Brent's root finding method

فصل ۸

نتایج و بحث

"It would be better for the true physics if there were no mathematicians on the earth. There is no philosophy which is not founded upon knowledge of the phenomena, but to get any profit from this knowledge it is absolutely necessary to be a mathematician (Daniel Bernoulli 1700–1782)"

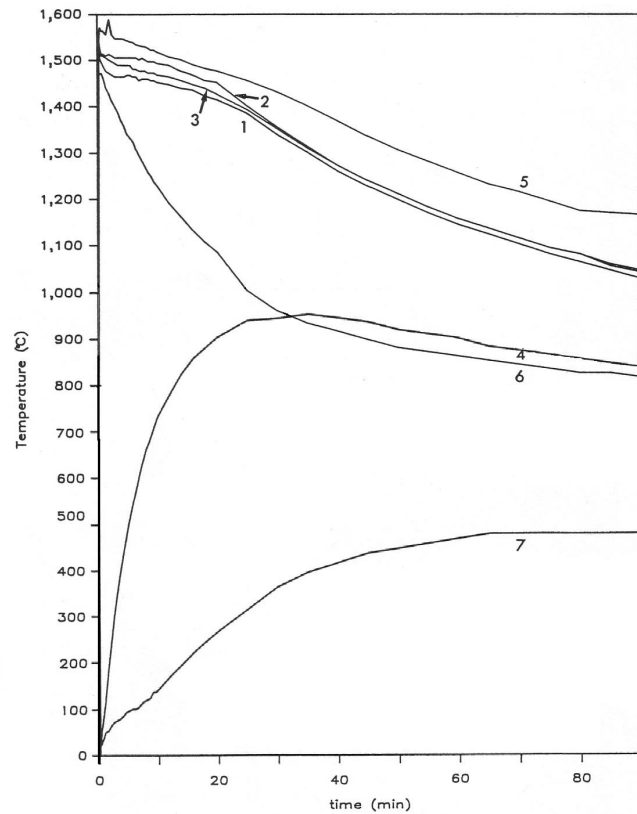
در این فصل نتایج عددی مربوط به روش طراحی بهینه ارائه شده در این پژوهش مورد بررسی قرار خواهد گرفت. همچنین توانایی تابع معیار پیشنهاد شده در فصل ۲ برای پیش‌بینی عیوب انقباضی نیز در این فصل مطالعه خواهد شد. در این پژوهش برای انجام محاسبات عددی مربوطه از یک کامپیوتر شخصی با پردازشگر AMD 2.4 GHz و 2.5 GB DDR2 RAM استفاده شد. الگوریتم‌های ارائه شده بوسیله زبانهای کامپیوتری C و Fortran برنامه‌نویسی شده و بکمک مجموعه کامپایلرهای GCC^۱ روی سیستم عامل Linux Fedora 10^۲ اجرا شدند.

۱.۸ بررسی صحت حل معادله انتقال حرارت

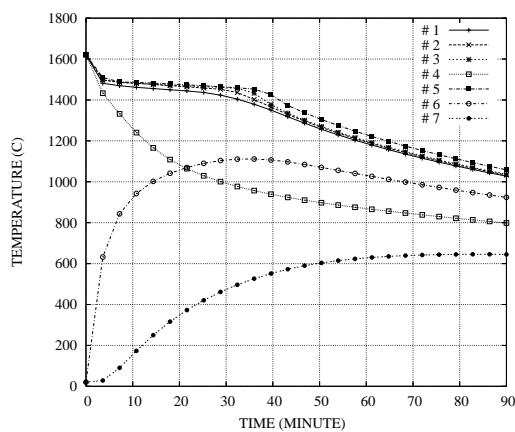
در این قسمت از نتایج تجربی مربوط به ریخته‌گری چکش فولادی در قالب ماسه‌ای که در کنفرانس چهارم TMS-AIME [۱۵۵] بعنوان آزمون استاندارد برای ارزیابی نرم افزارهای شبیه‌سازی ریخته‌گری ارائه شده است، برای بررسی دقت مدلسازی انجام دادیم. جهت ثبت تاریخچه حرارتی این قطعه، تعداد ۷ عدد ترموکوپل در نقاط مختلف قالب (داخل ماسه و درون قطعه) تعبیه شده و منحنی دما-زمان این نقاط در یک بازه ۹۰ دقیقه‌ای پس از بارریزی در [۱۵۵] گزارش شده است. شکل ۱.۸ ابعاد و مکان هندسی مربوط به ترموکوپل‌های ذکر شده را در این آزمون نشان می‌دهد. منحنی سرد شدن مربوط به ترموکوپل‌های ۱-۷ در شکل ۲.۸ نشان داده شده است. جدول ۱.۸ خواص فیزیکی و شرایط اولیه و مرزی مربوط به این آزمون را نشان می‌دهد.

^۱<http://gcc.gnu.org/>

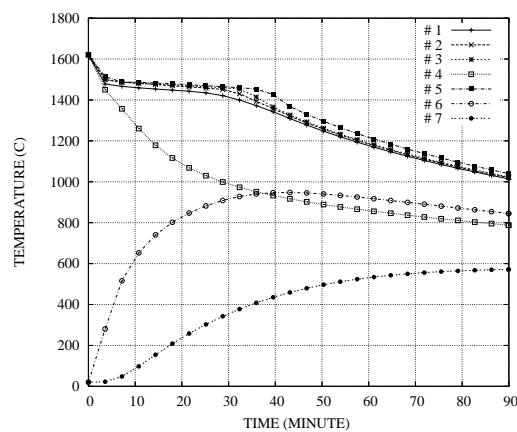
^۲<http://fedoraproject.org/>



شکل ۲.۸: منحنی سرد شدن مربوط به ترموکوپل‌های ۱-۷ در ریخته‌گری چکش فولادی [۱۵۵].



(ب)



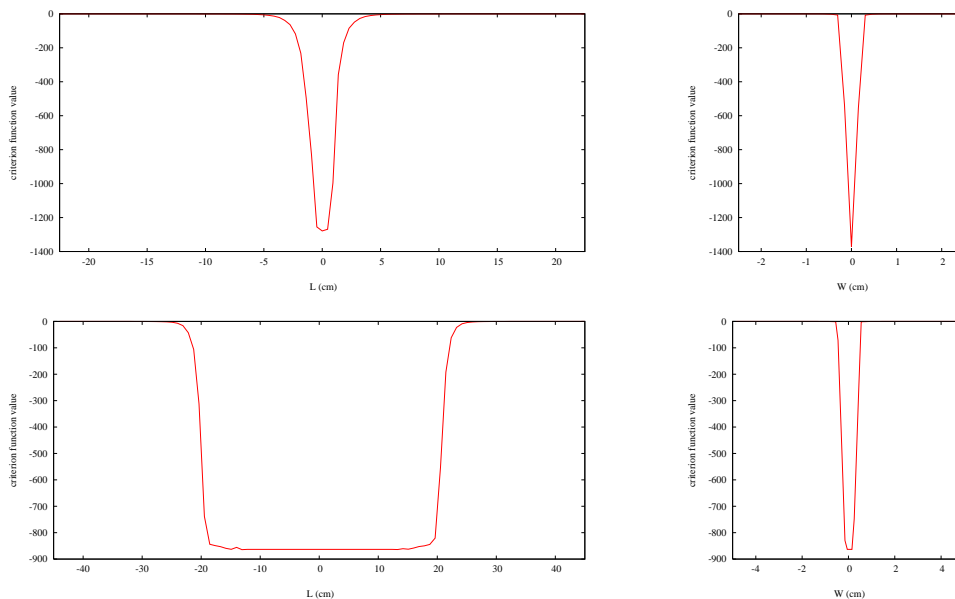
(الف)

شکل ۳.۸: منحنی‌های سرد شدن مربوط به ترموکوپل‌های ۱-۷ در آزمون ریخته‌گری چکش فولادی که توسط روش عددی در این تحقیق روی شبکه محاسباتی با حدود (الف) ۶۰۰ هزار و (ب) ۶ میلیون سلول بدست آمده است.

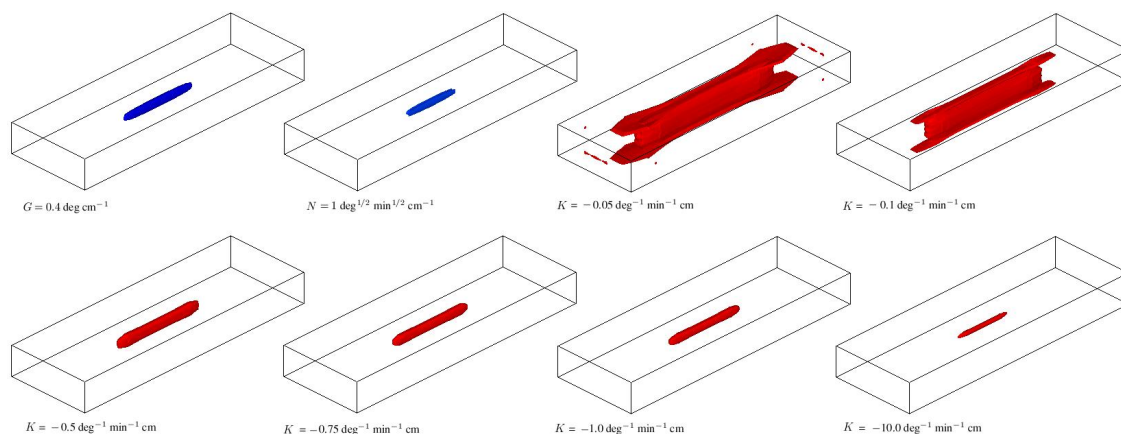
۲.۸ بررسی صحت عملکرد تابع معیار پیشنهاد شده

در این قسمت توانایی تابع معیار پیشنهاد شده در این تحقیق بکمک نتایج تجربی موجود در [۶۶، ۷۰] ارزیابی خواهد شد. در این قسمت، معیارهای پلینی، نایاما و تابع معیار جدید (رابطه ۶۱.۲) بترتیب با G ، N و K نشان داده می‌شوند. تشکیل عیوب انقباضی متمرکز مرکزی در نمونه‌های صفحه‌ای و میله‌ای شکل توسط پلینی [۶۶] مورد بررسی قرار گرفت. فرض کنید طول، عرض و ضخامت نمونه‌ها بترتیب با L ، W و T نمایش داده شود. نسبت W/T در نمونه‌های صفحه‌ای و میله‌ای شکل پلینی بترتیب برابر با ۳ و ۱؛ و نسبت L/T برای کلیه نمونه‌ها برابر ۹ می‌باشد. ضخامت نمونه‌های صفحه‌ای و میله‌ای شکل هم بترتیب برابر ۲ و ۴ اینچ است. نتایج پلینی برای نمونه‌های صفحه‌ای شکل نشان داد، عیوب انقباضی در مناطقی از قطعه که گرادیان تغذیه‌رسانی کمتر از ۲۰-۴۰ درجه سانتیگراد بر سانتیمتر می‌باشد ایجاد می‌شود. این فاکتور برای نمونه‌های میله‌ای شکل حدود ۱۲۰-۲۴۰ درجه سانتیگراد بر سانتیمتر گزارش شد. در این تحقیق شبیه‌سازی نمونه‌های پلینی روی شبکه محاسباتی با طول سلولی $T/30$ انجام شد. خواص فیزیکی و شرایط اولیه و مرزی مشابه جدول ۱.۸ می‌باشد (تنها تفاوت موجود دمای اولیه مذاب است که برابر ۱۵۹۴ درجه سانتیگراد است).

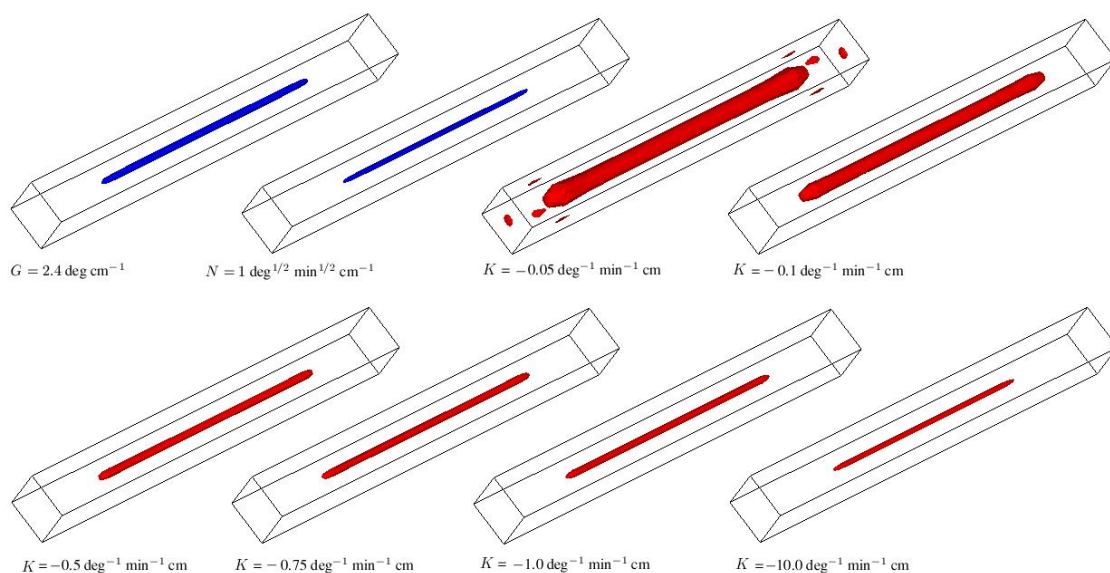
شکل ۴.۸ تغییرات K را در جهت محور طولی و عرضی گذرنده از صفحه منصف ضخامت نمونه‌ها نمایش می‌دهد. مطابق تصاویر، K مقدار منفی بزرگی را در نزدیکی مناطق معیوب اختیار کرده و شیب تغییرات آن در همسایگی مناطق معیوب تند می‌باشد که باعث قابلیت تفکیک بالا و کاهش حساسیت نتایج به انتخاب مقدار بحرانی خواهد شد. برای معین کردن مقدار بحرانی، ایزوکانتورهای مختلف این معیار در کنار ایزوکانتورهای بحرانی معیار پلینی و نایاما در شکل‌های ۵.۸ و ۶.۸ رسم شده‌اند که نشان می‌دهد کانتور $K = -1$ را می‌توان را بعنوان مقدار بحرانی این معیار در نظر گرفت.



شکل ۴.۸: تغییرات K در جهت محورهای طولی (چپ) و عرضی (راست) روی صفحه منصف ضخامت برای نمونه‌های صفحه‌ای (بالا) و میله‌ای (پایین) پلینی.



شکل ۵.۸: ایزوکانتورهای مختلف معیار جدید پیشنهاد شده در کنار ایزوکانتورهای بحرانی معیارهای پلینی و نایاما برای نمونه صفحه‌ای شکل.

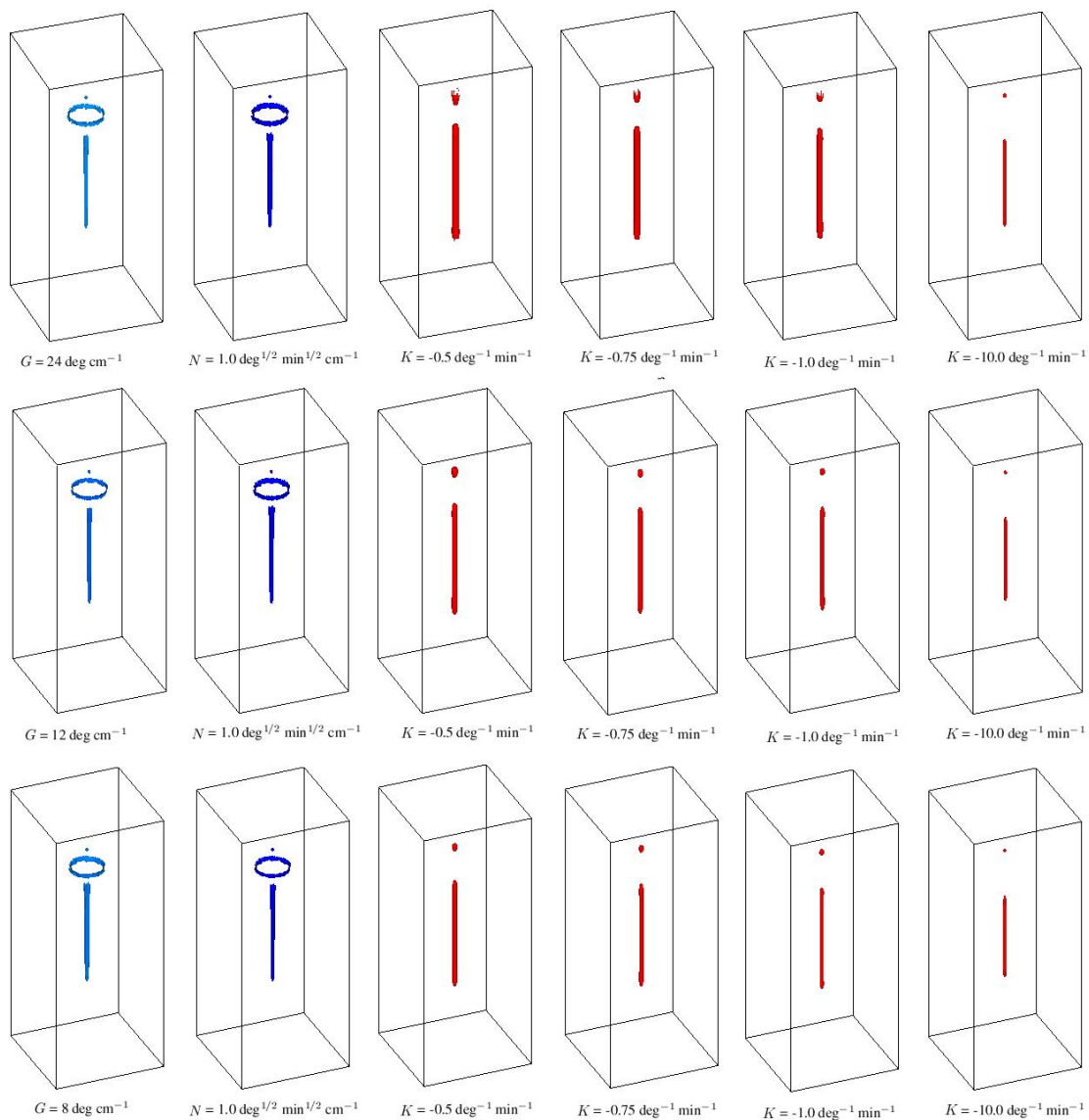


شکل ۶.۸: ایزوکانتورهای مختلف معیار پیشنهاد شده در این پژوهش در کنار ایزوکانتورهای بحرانی معیارهای پلینی و نایاما برای نمونه میله‌ای شکل.

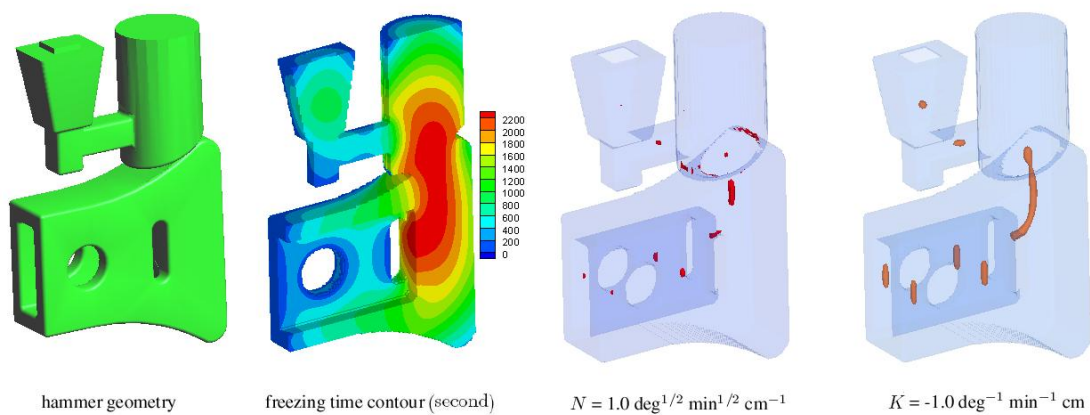
تشکیل عیوب انقباضی در ریخته‌گری استوانه‌های فولادی با اقطار ۳، ۶ و ۹ سانتیمتر با یک تغذیه فوقانی توسط نایاما و همکاران [۷۰] مورد بررسی قرار گرفت. نتایج [۷۰] نشان داد مقدار گرادیان تغذیه‌رسانی بحرانی برای این سه استوانه بترتیب برابر با ۲۴، ۱۲ و ۸ درجه بر سانتیمتر می‌باشد. در این تحقیق شبیه‌سازی استوانه‌های نایاما روی شبکه محاسباتی با طول سلول ۱/۳۰ قطر استوانه‌ها انجام شد. به استثنای دماهای سالیدوس، لیکوئیدوس و بارریزی که بترتیب برابر با ۱۴۸۵، ۱۵۲۰ و ۱۶۱۰ درجه سانتیگراد هستند، بقیه خواص فیزیکی، شرایط اولیه و شرایط مرزی مربوط به این شبیه‌سازی مشابه مورد قبل (نمونه‌های پلینی) است. نتایج مربوط به این شبیه‌سازی‌ها در شکل ۷.۸ آورده شده است. مشابه قبل بنظر می‌رسد

ایزوکانتور $K = -1$ مقدار بحرانی مناسبی برای معیار پیشنهاد شده می‌باشد. همچنین در نتایج مربوط به معیار پلینی و نایاما یک حلقه معیوب کاذب در محل اتصال تغذیه و قطعه ایجاد شده است که ناشی از تخطی از شرط کافی مربوط به تشخیص عیوب می‌باشد.

در پایان این قسمت، تشکیل عیوب انقباضی در چکش فولادی استفاده شده در بخش قبل مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور شبیه‌سازی انجماد چکش روی یک شبکه با 1912224 سلول انجام پذیرفت. شکل ۸.۸ کانتورهای زمان انجماد موضعی، ایزوکانتور مقدار بحرانی معیار نایاما و ایزوکانتور مقدار بحرانی معیار معرفی شده در این تحقیق را نشان می‌دهد. همانطور که در شکل مشخص است توان تفکیک معیار پیشنهاد شده بهتر از معیار نایاما می‌باشد. بعنوان مثال عیوب انقباضی ایجاد شده درون راهگاه بارریزی بسختی توسط معیار نایاما قابل تشخیص است. در حالیکه معیار پیشنهاد شده بخوبی این عیب را مشخص کرده است. علت این مساله وابستگی بیشتر مقدار بحرانی معیار نایاما به شکل و ابعاد قطعه می‌باشد. همچنین معیار نایاما حلقه‌ای را به عنوان ناحیه معیوب در محل اتصال تغذیه و قطعه نشان می‌دهد در حالیکه سلامت این منطقه بسیار بدیهی است. علت این خطا ناشی از تخطی از شرط کافی ذکر شده برای تشخیص عیوب می‌باشد. در یک جمع‌بندی از نتایج این قسمت می‌توان گفت: در مقایسه با معیار نایاما، مقدار بحرانی معیار پیشنهاد شده وابستگی کمتری به شکل قطعه داشته و دارای قدرت تفکیک بالاتری می‌باشد. ممکن است معیار نایاما بدلیل تخطی از شرط کافی تشخیص عیوب نتیجه کاذب تولید کند در حالیکه معیار پیشنهاد شده در این پژوهش از این خطا مصون می‌باشد. بطور کلی وابستگی به ابعاد و شکل مقدار بحرانی توابع معیار غیرقابل اجتناب بوده و نمی‌توان از این توابع بعنوان معیارهای کمی پیش‌بینی عیوب انقباضی در قطعات ریخته‌گری استفاده کرد. استفاده از توابع معیار تنها برای آلیاژهایی با دامنه انجماد کوتاه و مذابهایی با کیفیت متالورژیکی بالا منطقی خواهد بود. همچنین در مواردی که اثر شتاب ثقل در توزیع عیوب انقباضی قابل توجه باشد (مثل قطعات ضخیم و مرتفع)، استفاده از توابع معیار مجاز نمی‌باشد.



شکل ۷.۸: ایزوکانتورهای مختلف معیار پیشنهاد شده در این پژوهش در کنار ایزوکانتورهای بحرانی معیارهای پلینی و نایاما برای استوانه‌های نایاما به اقطار ۳ (بالا)، ۶ (وسط) و ۹ (پایین) سانتیمتر.



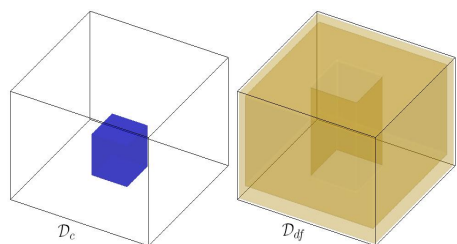
شکل ۸.۸: پیش‌بینی عیوب انقباضی بکمک توابع معیار در ریخته‌گری چکش فولادی.

۳.۸ بررسی صحت الگوریتم در طراحی بهینه سیستم تغذیه‌رسانی

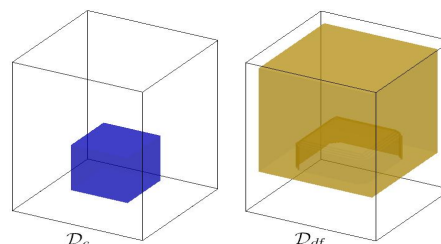
در این قسمت با استفاده از ۱۵ مثال مختلف، توانایی الگوریتم ارائه شده در طراحی سیستم تغذیه‌رسانی قطعات ریختگی مورد بررسی قرار می‌گیرد. پیچیدگی این مثالها بتدریج از شماره ۱ به ۱۵ افزایش می‌یابد. مثالهای ۱ تا ۱۱ مربوط به طراحی سیستم تغذیه‌گذاری برای قطعاتی با اشکال ساده هندسی هستند. شرایط هندسی اولیه مربوط به این مثالها که شامل هندسه قطعه (چپ)، نحوه قرار گرفتن قطعه درون قالب و دامنه طراحی تغذیه (راست) می‌باشد در شکل ۹.۸ آورده شده است. مثالهای ۱۲، ۱۳ و ۱۴ مربوط به طراحی سیستم تغذیه‌گذاری برای چکش فولادی در سه حالت مختلف می‌باشند. هندسه چکش به‌مراه طراحی سیستم تغذیه‌گذاری انجام شده برای این قطعه در کنفرانس چهارم TMS-AIME [۱۵۵] در قسمت (الف) شکل ۱۰.۸ نشان داده شده است. راندمان تغذیه‌گذاری مربوط به این طرح که منجر به تولید قطعه‌ای معیوب می‌شود، حدود ۷۰ درصد می‌باشد، مثال ۱۵ مربوط به طراحی تغذیه برای یک میل‌لنگ خودرو تیلر می‌باشد که می‌توان آن را بعنوان یک قطعه چالشی در نظر گرفت. هندسه مربوط به این قطعه به‌مراه طراحی سیستم تغذیه‌گذاری که توسط کارشناسان مرکز پژوهش متالورژی زاری انجام شده است در قسمت (ب) شکل ۱۰.۸ آورده شده است. لازم به ذکر است که این طراحی منجر به تولید قطعه‌ای سالم می‌شود و راندمان تغذیه‌گذاری مربوط به آن حدود ۵۲ درصد می‌باشد.

در کلیه مثالهای این قسمت آلیاژ مصرفی و شرایط اولیه و مرزی حل مشابه شرایط مربوط به ریخته‌گری چکش فولادی در نظر گرفته شده است. مقدار بحرانی معیار نیاما در این مثالها ۰/۵ در نظر گرفته شد. انتخاب مقدار بحرانی کوچکتر نسبت به مقدار پیشنهاد شده توسط نیاما (مقدار ۱) بعلت متوسط‌گیری وزنی این معیار (تحت یک توزیع نرمال گوسی) در دامنه انجماد می‌باشد (بطور کلی با افزایش دمای مربوط به ارزیابی معیار نیاما، مقدار بحرانی این معیار کاهش می‌یابد [۶۷]). دامنه زمانی $(0, T)$ نیز طوری انتخاب می‌شود که همواره انجماد قطعه و تغذیه را شامل شود. در این تحقیق T حدود ۱/۵ برابر زمان انجماد قطعه بدون تغذیه در نظر گرفته می‌شود. سایر پارامترهای مربوط به بهینه‌سازی مربوط به مثالهای ۱۵-۱ در جدول ۲.۸ آورده شده است.

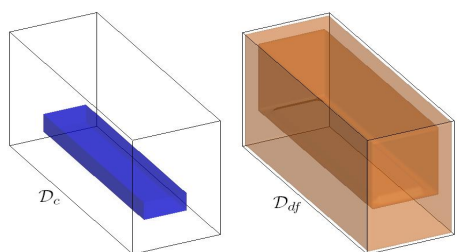
نتایج مربوط به مثالهای ۱ تا ۱۴ در شکل‌های ۱۱.۸ الی ۱۴.۸ آورده شده‌اند. این نتایج شامل توپولوژی نهایی سیستم تغذیه‌گذاری و نتایج مربوط به آنالیز انجماد طرح نهایی توسط مدل انقباضی ثقلی می‌باشد (استفاده از این مدل در نرم افزارهای شبیه‌سازی ریخته‌گری مثل *SUTCAST* و *FLOW3D* رایج می‌باشد، برای مطالعه جزئیات مربوط به این مدل به [۱۵۸] مراجعه کنید). بعلاوه برای مطالعه انجماد جهت‌دار در طرح نهایی، کانتورهای زمان انجماد موضعی نیز روی تصاویر رسم شده‌اند. راندمان ریخته‌گری و زمان محاسبات مربوط به این مثالهای ۱ تا ۱۵ در جدول ۳.۸ آورده شده است. نتایج موربوط به شبیه‌سازی طراحی انجام شده توسط متخصصان مرکز پژوهش متالورژی زاری برای میل‌لنگ تیلر در کنار نتایج مربوط به مشاهدات تجربی در شکل ۱۵.۸ آورده شده‌اند. شکل ۱۶.۸ نتایج مربوط به روش ارائه شده در این پژوهش را برای این قطعه نشان می‌دهد. در ادامه به شرح جزئیات مربوط به این مثالها و بحث روی نتایج حاصله پرداخته می‌شود.



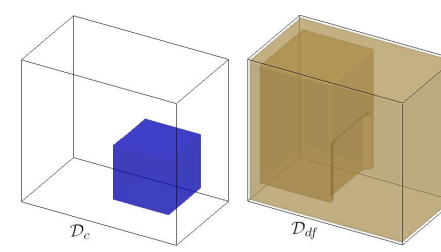
(ب)



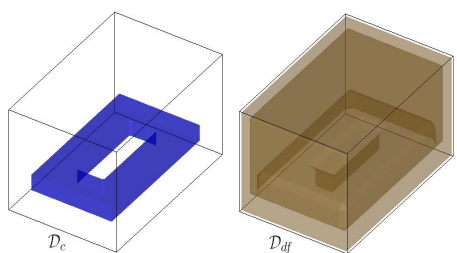
(الف)



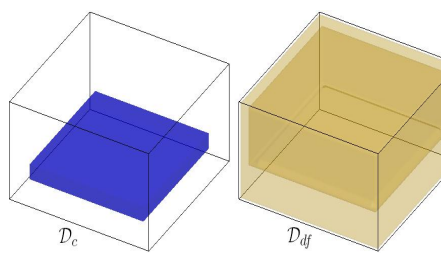
(د)



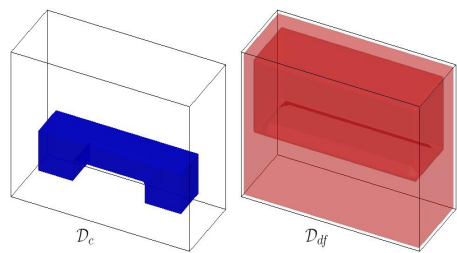
(ج)



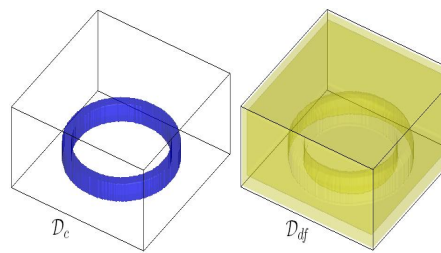
(و)



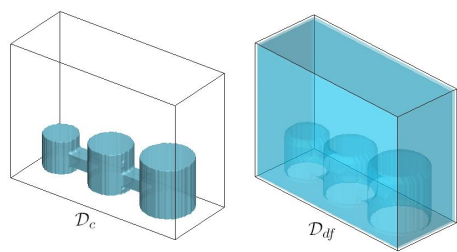
(ه)



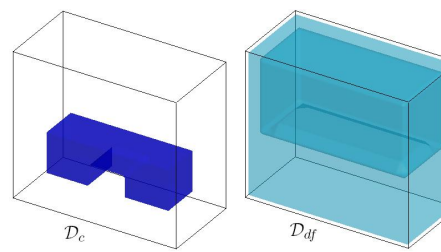
(ح)



(ز)

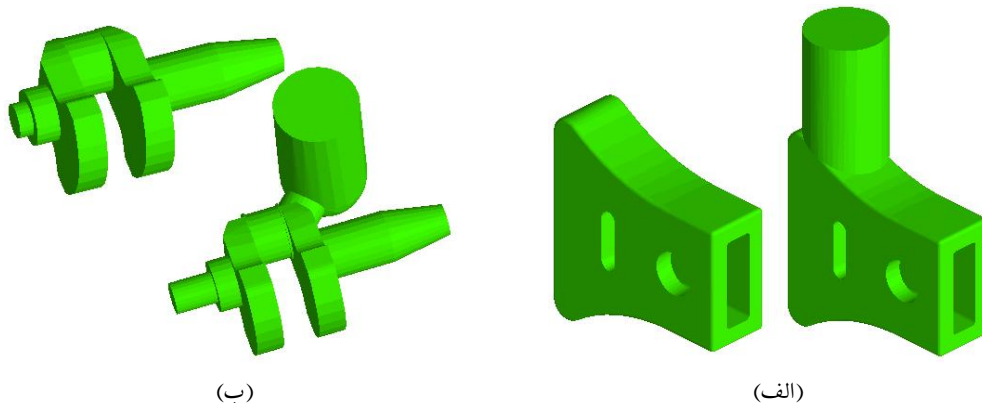


(ی)



(ط)

شکل ۹.۸: شرایط اولیه هندسی شامل هندسه قطعه (چپ) و دامنه طراحی تغذیه (راست). موارد الف، ب، ج، د، ه، و، ز، ح، ط، ی بترتیب مربوط به مثالهای ۱ تا ۱۱ می‌باشند (هندسه مربوط به مثالهای ۷ و ۸ یکسان می‌باشد).



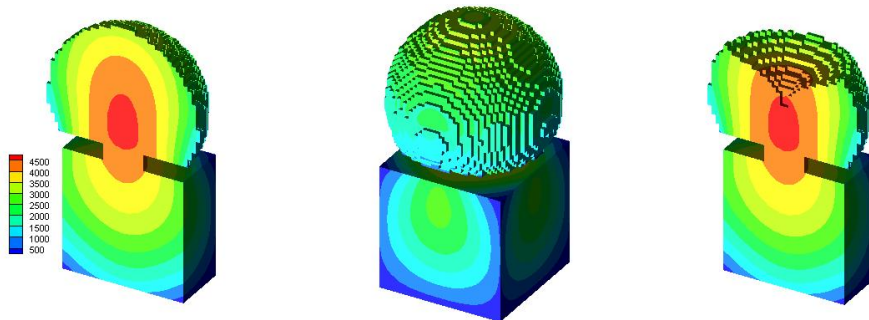
شکل ۱۰.۸: (الف) چکش فولادی در مثالهای ۱۲، ۱۳ و ۱۴ و (ب) میل لنگ خودرو تیلر مربوط به مثال ۱۵.

جدول ۲.۸: پارامترهای بهینه‌سازی مربوط به مثالهای ۱-۱۵ شامل طول سلول محاسباتی، Δx ، به سانتیمتر، ابعاد قالب بر حسب Δx ، ضخامت دامنه طراحی گردن تغذیه، L_{fn} ، بر حسب Δx و R_{dn} .

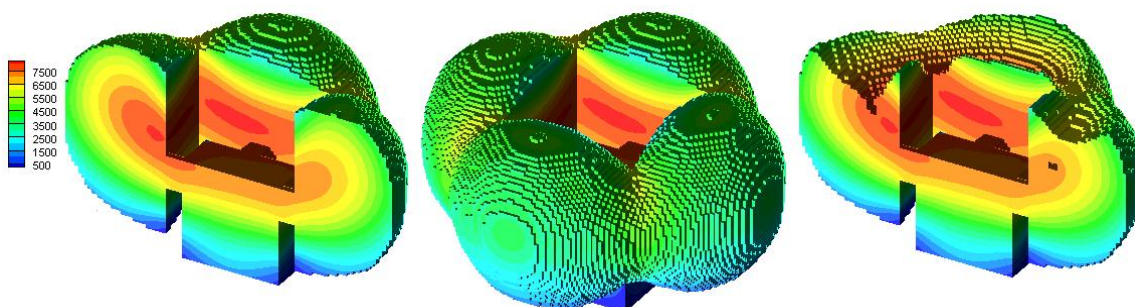
R_{dn}	L_{fn}	ابعاد قالب	Δx	مثال	R_{dn}	L_{fn}	ابعاد قالب	Δx	مثال
۰/۰۳۰۰	۳	۱۰۰×۴۰×۷۰	۱/۰۰	۹	۰/۰۱۷۵	۴	۷۰×۷۰×۱۰۰	۱/۰۰	۱
۰/۰۴۰۰	۳	۸۰×۴۰×۷۰	۱/۰۰	۱۰	۰/۰۷۰۰	۴	۱۲۰×۱۲۰×۸۰	۱/۰۰	۲
۰/۰۳۵۰	۴	۱۶۰×۶۵×۱۲۰	۱/۰۰	۱۱	۰/۰۱۷۵	۴	۸۵×۵۰×۸۰	۱/۰۰	۳
۰/۰۱۸۰	۲	۱۲۰×۱۰۰×۱۰۰	۰/۵۰	۱۲	۰/۰۳۵۰	۳	۱۱۰×۴۰×۶۰	۱/۰۰	۴
۰/۰۱۸۰	۲	۱۶۰×۶۰×۱۶۰	۰/۵۰	۱۳	۰/۰۷۰۰	۳	۱۲۰×۱۲۰×۶۰	۱/۰۰	۵
۰/۰۱۸۰	۲	۱۲۰×۱۰۰×۱۰۰	۰/۵۰	۱۴	۰/۱۰۰۰	۴	۱۲۰×۸۰×۶۰	۱/۰۰	۶
۰/۰۱۷۵	۶	۱۲۰×۱۲۰×۱۲۰	۰/۳۳	۱۵	۰/۲۰۰۰	۴	۱۶۰×۱۶۰×۷۰	۱/۰۰	۷
-	-	-	-	-	۰/۰۱۷۵	۴	۱۶۰×۱۶۰×۷۰	۱/۰۰	۸

جدول ۳.۸: نتایج مربوط به راندمان ریخته‌گری و زمان تقریبی محاسبات به ساعت مربوط به مثالهای ۱-۱۵ در این تحقیق.

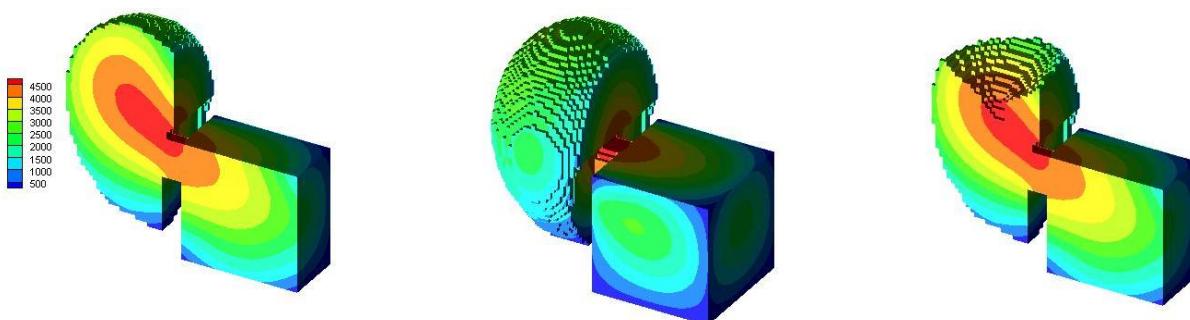
مثال	راندمان	زمان	مثال	راندمان	زمان	مثال	راندمان	زمان
۱	۵۶	۲/۸	۶	۵۱	۲/۳	۱۱	۵۱	۲۴
۲	۱۲	۱۵	۷	۴۰	۱۲	۱۲	۶۳	۲۸
۳	۴۵	۴/۲	۸	۵۵	۹/۱	۱۳	۶۱	۲۳
۴	۶۵	۱/۴	۹	۶۱	۸/۳	۱۴	۶۲	۱۸
۵	۶۱	۲/۶	۱۰	۷۳	۸/۸	۱۵	۶۲	۳۱



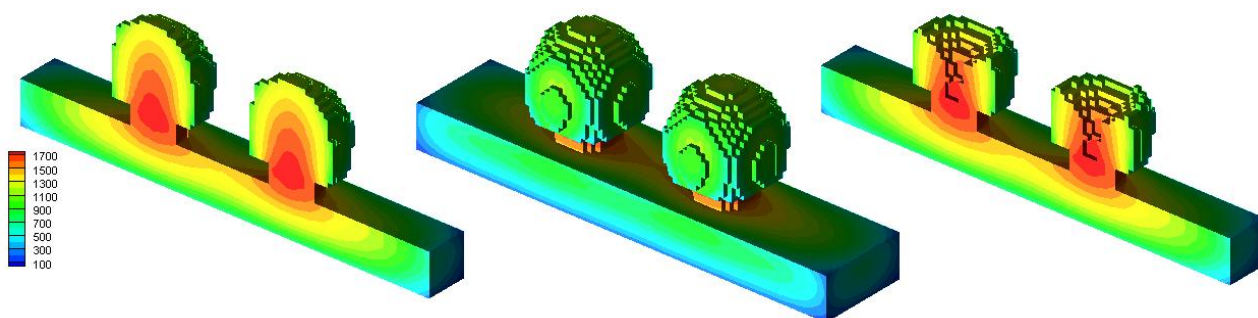
(الف)



(ب)

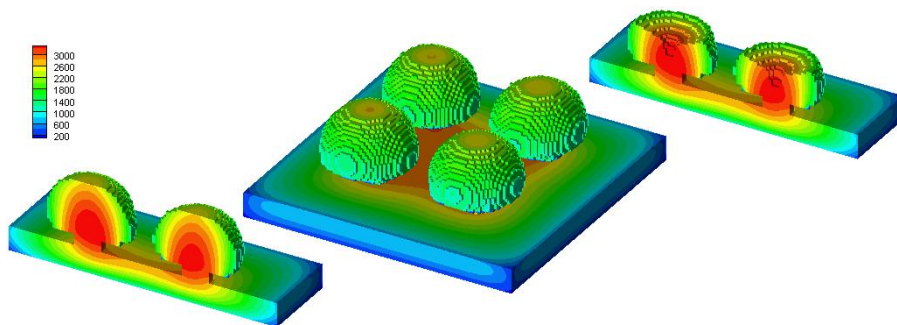


(ج)

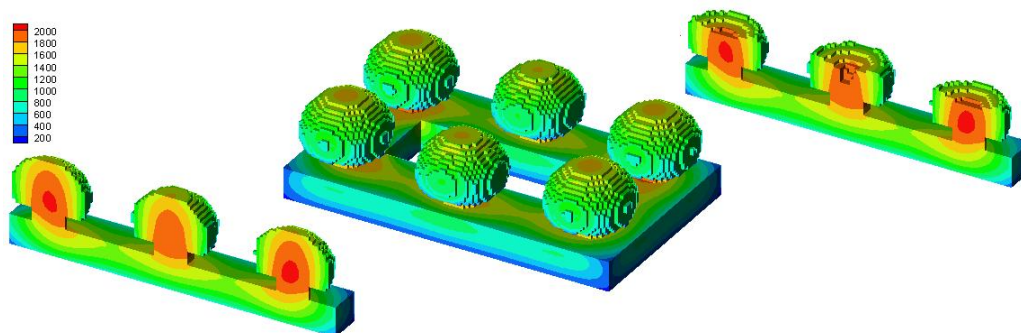


(د)

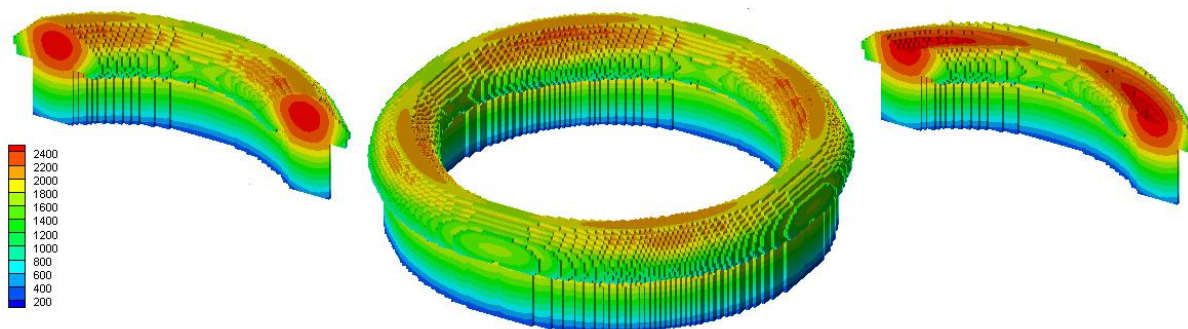
شکل ۱۱.۸: نتایج مربوط به طراحی بهینه شامل توپولوژی نهایی سیستم تغذیه گذاری و آنالیز انجماد آن در کنار کانتورهای زمان انجماد موضعی (به ثانیه). موارد الف، ب، ج، د بترتیب مربوط به مثالهای ۱ تا ۴ می‌باشند.



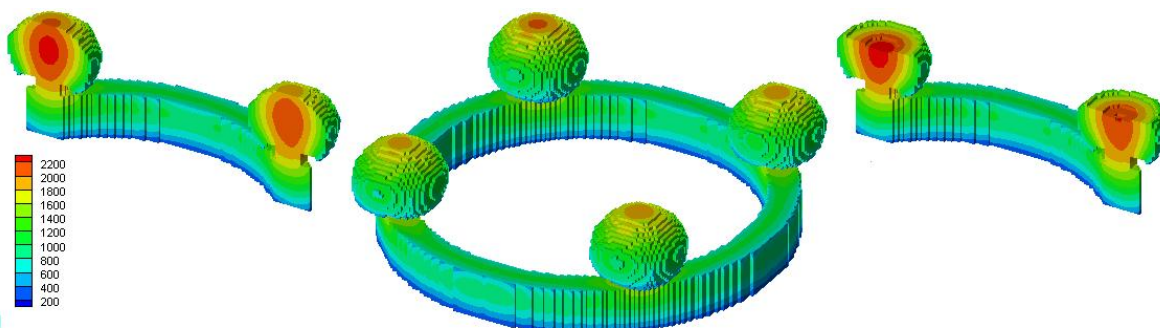
(الف)



(ب)

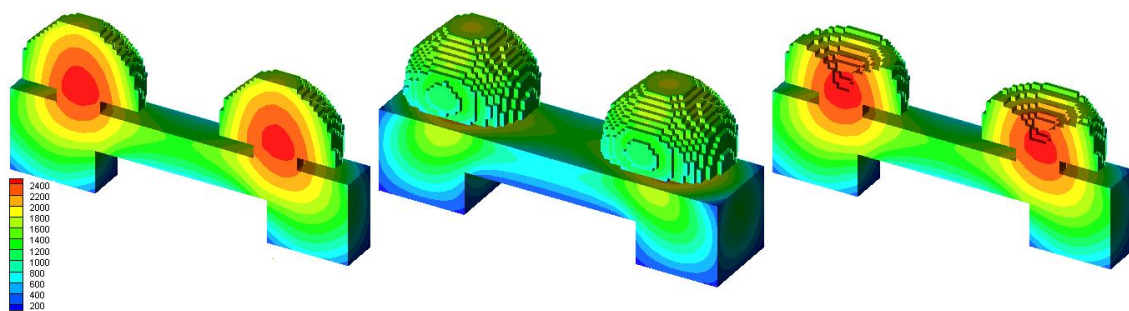


(ج)

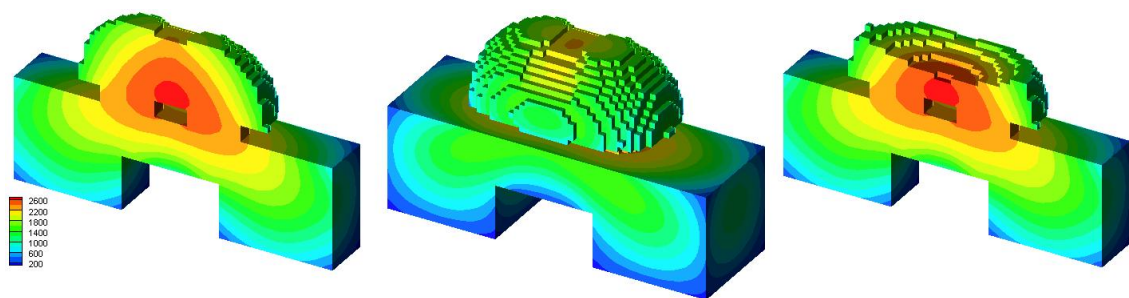


(د)

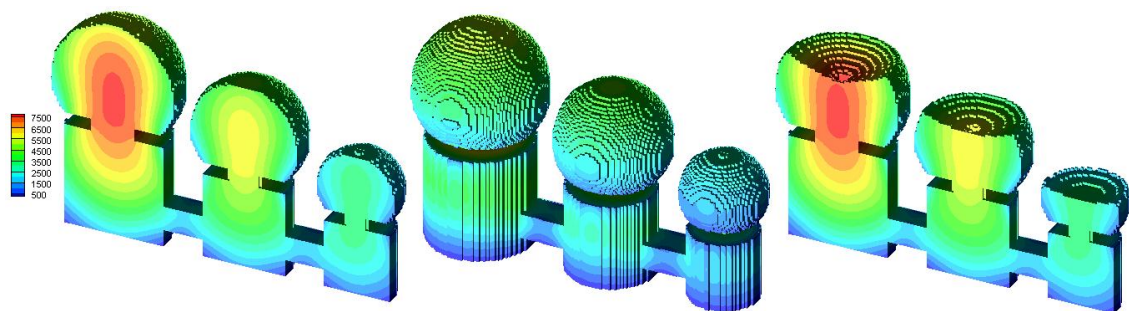
شکل ۱۲.۸: نتایج مربوط به طراحی بهینه شامل توپولوژی نهایی سیستم تغذیه گذاری و آنالیز انجماد آن در کنار کانتورهای زمان انجماد موضعی (به ثانیه). موارد الف، ب، ج، د بترتیب مربوط به مثالهای ۵ تا ۸ می باشند.



(الف)

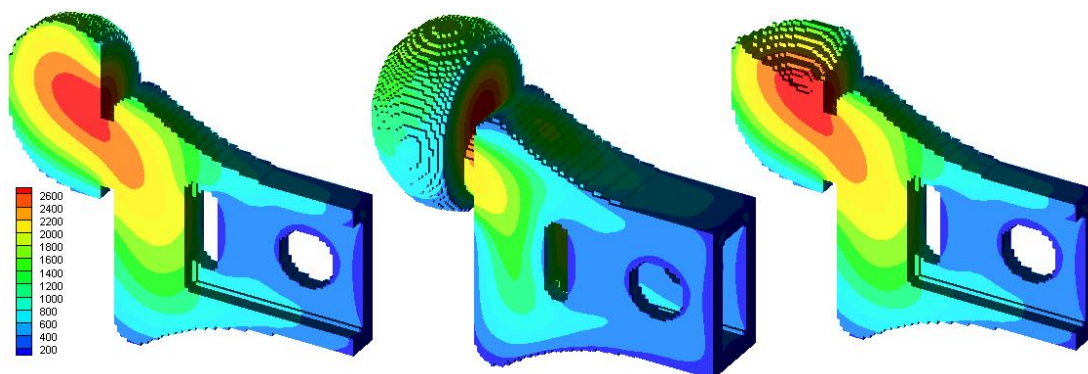


(ب)

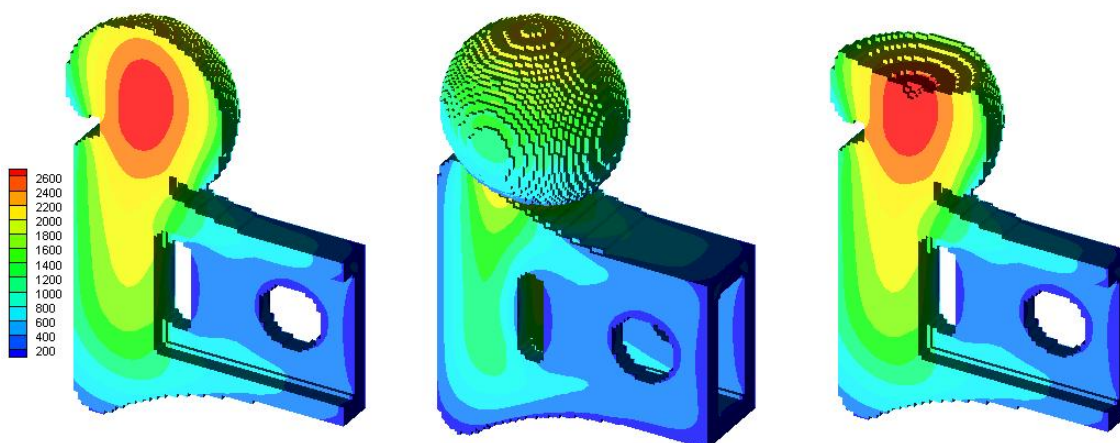


(ج)

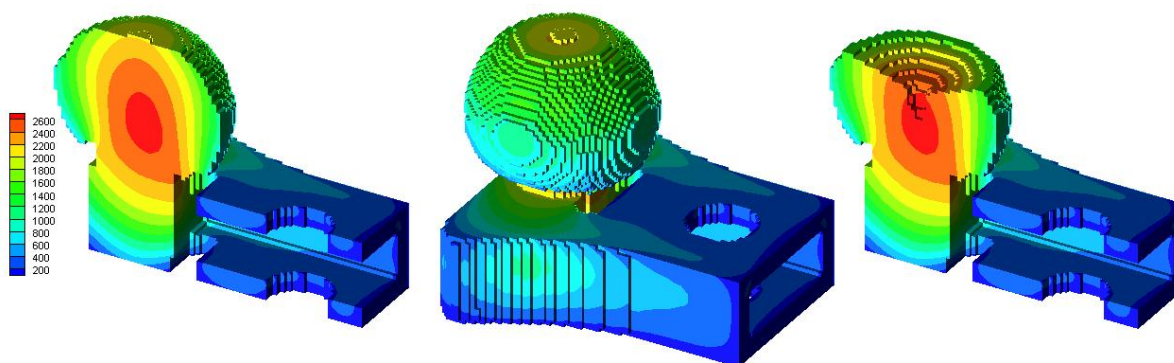
شکل ۱۳.۸: نتایج مربوط به طراحی بهینه شامل توپولوژی نهایی سیستم تغذیه گذاری و آنالیز انجماد آن در کنار کانتورهای زمان انجماد موضعی (به ثانیه). موارد الف، ب، ج بترتیب مربوط به مثالهای ۹، ۱۰ و ۱۱ می باشند.



(الف)

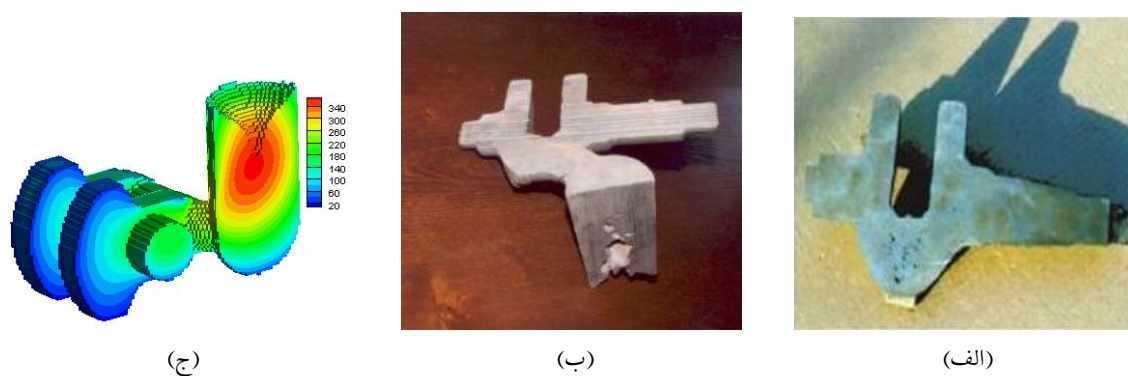


(ب)

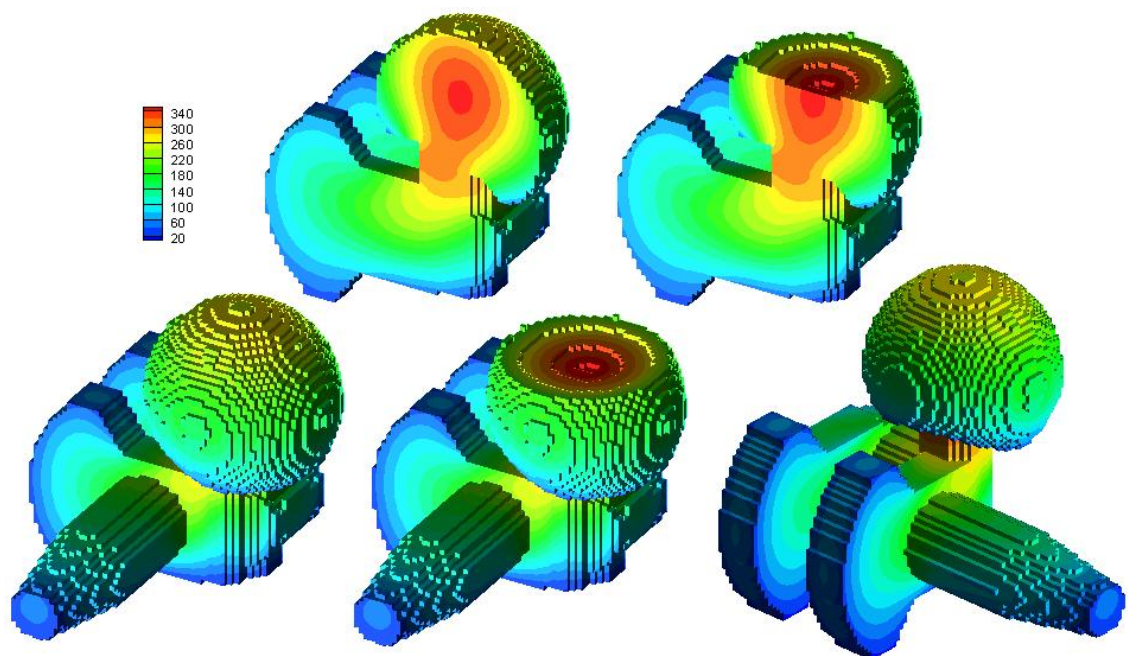


(ج)

شکل ۱۴.۸: نتایج مربوط به طراحی بهینه شامل توپولوژی نهایی سیستم تغذیه گذاری و آنالیز انجماد آن در کنار کانتورهای زمان انجماد موضعی (به ثانیه). موارد الف، ب، ج بترتیب مربوط به مثالهای ۱۲، ۱۳ و ۱۴ می باشند.



شکل ۱۵.۸: نتایج تجربی مربوط به ریخته‌گری میل‌لنگ تیلر هنگامی که (الف) گردن تغذیه عمود بر محور قطعه باشد؛ (ب) هنگامی که گردن تغذیه با محور قطعه زاویه داشته باشد (طراحی انجام شده در مرکز پژوهش متالورژی رازی) و (ج) نتایج آنالیز انجماد مربوط به این طراحی.



شکل ۱۶.۸: نتایج مربوط به طراحی بهینه شامل توپولوژی نهایی سیستم تغذیه گذاری و آنالیز انجماد آن در کنار کانتورهای زمان انجماد موضعی (به ثانیه) برای قطعه میل‌لنگ تیلر.

مثال ۱: این مثال مربوط به طراحی سیستم تغذیه‌رسانی یک قطعه مکعبی شکل به طول ضلع ۳۰ واحد می‌باشد. مطابق نتایج بدست آمده، انجماد جهتدار از قطعه بسمت تغذیه در طرح نهایی فراهم شده و منطقه گرم درون تغذیه واقع شده است. نتایج مدل انقباض ثقلی نیز نشان می‌دهد کشیدگی انقباضی بطور کامل درون تغذیه قرار گرفته است. یکی از نکات جالب مربوط به این طرح کوتاه شدن طول پایپ انقباضی بدلیل شکل شبه‌کروی تغذیه می‌باشد.

مثال ۲: این مثال مشابه مثال قبلی است با این تفاوت که مناطق فوقانی قالب که روی قطعه واقع شده‌اند از ناحیه طراحی تغذیه حذف شده است. این محدودیت مانع طراحی تغذیه فوقانی توسط الگوریتم می‌شود. مطابق نتایج حاصله طرح نهایی منجر به تولید قطعه‌ای سالم شده است. اما راندمان تغذیه‌گذاری بسیار پایین است. دلیل پایین بودن راندمان تغذیه‌گذاری استفاده از چهار تغذیه جانبی (تقریباً هم اندازه) توسط الگوریتم است، در حالیکه تنها یکی از این تغذیه‌ها برای تولید یک قطعه سالم کافی می‌باشد. سوالی که می‌توان در اینجا مطرح کرد این است که آیا طرح تولید شده توسط الگوریتم بهینه است یا خیر؟ واضح است که از دیدگاه تکنولوژیکی این طرح بهینه نمی‌باشد. اما از دیدگاه ریاضی این طرح یک جواب بهینه برای مدل استفاده شده می‌باشد. در حقیقت بعثت غیرمحدب بودن مساله بهینه‌سازی مربوطه، مساله دارای جوابهای بهینه متعدد است. تغییر شرایط اولیه می‌تواند باعث همگرا شدن الگوریتم به یکی از این جوابها گردد. از میان این جوابهای بهینه، جوابی که مقدار تابع هدف متناظر با آن کمتر از سایرین باشد مطلوب است. اما امروزه الگوریتم موثری برای دستیابی به نقطه بهینه عمومی وجود ندارد. لذا یک راه حل ساده تغییر شرایط اولیه توسط کاربر و مقایسه جواب برای حالت‌های مختلف شرایط اولیه می‌باشد.

مثال ۳: این مثال مشابه مثال ۲ است با این تفاوت که ناحیه طراحی تغذیه تنها به منطقه اطراف یکی از وجوه جانبی قطعه محدود شده است. نتایج مربوط به این مثال نشان می‌دهد، طرح نهایی منجر به تولید قطعه‌ای سالم شده است. با مقایسه این مورد با مورد اول می‌توان نتیجه گرفت که استفاده از تغذیه‌های فوقانی معمولاً منجر به بازدهی بهتری می‌شوند. البته لازم به تذکر است که در برخی از موارد بعثت محدودیت‌های تکنولوژیکی (مثل محدودیت در ارتفاع درجه‌ها یا کاهش میزان ماسه قالبگیری) استفاده از تغذیه‌های فوقانی میسر نمی‌باشد. با استفاده از نتایج این مثال می‌توان به دستورالعمل ساده زیر در ارتباط با طراحی تغذیه‌های جانبی رسید: در طراحی تغذیه‌های جانبی بهتر است در صورت امکان سطح خارجی تغذیه در مجاورت قطعه موازی با سطح خارجی قطعه باشد. این مساله نه تنها باعث بهبود عملکرد گردن تغذیه می‌شود بلکه باعث کاهش نرخ انتقال حرارت از سطوح قطعه در همسایگی تغذیه خواهد شد. علت این امر ایجاد منطقه‌ای شبه-عایق بین سطوح خارجی قطعه و تغذیه می‌باشد. استفاده از این نتیجه می‌تواند در طراحی تغذیه‌های جانبی برای قطعاتی با دیواره‌های جانبی بلند و کم انحنا موثر باشد (قابل ذکر است در این موارد استفاده از تغذیه‌های استوانه‌ای شکل بسیار متداول می‌باشد).

مثال ۴: در این مثال پیچیدگی طراحی اندکی افزایش پیدا کرده و طراحی تغذیه برای یک قطعه بشکل مکعب مسطیل با طول زیاد مورد نظر است. ابعاد قطعه برابر $10 \times 20 \times 90$ واحد می‌باشد. در صورتیکه تنها تولید یک قطعه سالم مطلوب

باشد، انواع مختلفی از طراحی‌ها برای این قطعه وجود دارد. اما همه این طرحها لزوماً بازدهی تغذیه‌گذاری بهینه را ندارند. بعنوان مثال استفاده از یک تغذیه کشیده شده در جهت محور طولی قطعه باعث راندمان پایین تغذیه‌گذاری می‌شود. با در نظر گرفتن نتایج مربوط به مثال ۲، ایجاد چنین طرحی توسط الگوریتم غیرمحمول نمی‌باشد. بنابراین این مثال می‌تواند تست مناسبی برای ارزیابی الگوریتم در انتخاب صحیح تعداد تغذیه مصرفی باشد. مطابق نتایج حاصله، الگوریتم در انتخاب تعداد تغذیه درست عمل کرده است و نگرانی اشاره شده در بالا موردی ندارد.

مثال ۵: طراحی سیستم تغذیه‌رسانی برای یک قطعه صفحه‌ای شکل به ابعاد $100 \times 100 \times 60$ در این مثال مورد بررسی قرار گرفت. نتایج مربوطه نشان می‌دهد، الگوریتم در انتخاب تعداد تغذیه بصورت صحیح عمل کرده است. با در نظر گرفتن نتایج مربوط به این مثال و مثالهای ۲ و ۴ می‌توان پیش بینی کرد که تعداد تغذیه‌ها در طرح نهایی مربوط به الگوریتم ارائه شده در این تحقیق همواره بزرگتر یا مساوی تعداد تغذیه‌ها در طرح نزدیک به شرایط واقعی بهینه خواهد بود.

مثال ۶: در این مثال طراحی سیستم تغذیه‌رسانی برای یک قطعه قابی شکل مورد نظر است. ابعاد مکعب مستطیل داخلی و خارجی تشکیل دهنده این قاب بترتیب برابر $10 \times 20 \times 60$ و $10 \times 60 \times 100$ واحد می‌باشد. مطابق نتایج حاصله، طرح نهایی حاوی ۶ تغذیه تقریباً هم اندازه است که منجر به تولید قطعه‌ای سالم می‌شود.

مثالهای ۷ و ۸: طراحی سیستم تغذیه‌رسانی برای یک رینگ به قطر خارجی ۱۲۰، قطر داخلی ۱۰۰ و ارتفاع ۱۵ در این مثال مورد بررسی قرار می‌گیرد. بررسی‌های اولیه روی نتایج مربوط به این مثال نشان داد، طراحی نهایی بشدت تابع کسر حجمی مذاب در دامنه طراحی گردن تغذیه می‌باشد. از اینرو دو مقدار مختلف $0/2$ و $0/175$ برای R_{dm} (بترتیب برای مثالهای ۷ و ۸) در نظر گرفته شد. مطابق نتایج حاصله، علی‌رغم تقارن زاویه‌ای موجود در هندسه رینگ، نتایج مربوط به انتقال حرارت این قطعه از تقارن زاویه‌ای برخوردار نمی‌باشد. بعلاوه صریح بودن الگوریتم محاسباتی، خطاهای عددی توزیع یکنواخت خواهد داشت و تنها نوسان موجود در نتایج مربوط به خطاهای گردن خواهد بود. اما تاثیر این خطا بسیار اندک بوده سهم قابل توجهی در عدم تقارن جواب حل عددی ندارد. علت اصلی این عدم تقارن مربوط به خطای گسسته‌سازی هندسی قطعه توسط یک شبکه کارترین است (لازم به تذکر است که در این نوع شبکه مرزهای منحنی بصورت پله‌ای شکل تقریب زده می‌شوند). اثر این خطا در عمل بگونه‌ای است که ضخامت موثر رینگ در نقاطی که نرمال خارجی بر سطح رینگ با یکی از محورهای مختصات موازی است، کاهش می‌یابد. در نتیجه سرعت سرمایش مربوط به این مناطق اندکی بیشتر از سایر نقاط خواهد بود. این اثر رینگ را به چهار قسمت تقریباً مستقل از یکدیگر تبدیل می‌کند. به همین دلیل الگوی تشکیل تغذیه‌ها توسط الگوریتم ارائه شده در این تحقیق دارای دو سطح تقارن متعامد می‌باشد، و نقطه ثقل تغذیه‌ها در زاویه ۴۵ درجه نسبت به محورهای مختصات واقع شده است. طرح نهایی و بهره ریخته‌گری مربوط به آن در این دو مثال بشدت وابسته به مقدار کسر حجمی مذاب در دامنه طراحی گردن تغذیه می‌باشد. با مراجعه به نتایج حاصله می‌توان انتظار داشت که الگوریتم ارائه شده در این تحقیق برای طراحی سیستم تغذیه‌گذاری قطعاتی با تقارن هندسی بالا چندان مفید نمی‌باشد.

مثال ۹: در این مثال و مثال بعدی اثر تغییر ناگهانی در سطح مقطع قطعه مورد بررسی قرار خواهد گرفت. برای این منظور از قطعه شامل دو مکعب که توسط یک پل مکعب مستطیل شکل باریک به یکدیگر متصل شده‌اند استفاده می‌شود. ابعاد هر مکعب $20 \times 20 \times 20$ و ابعاد پل ارتباطی $40 \times 20 \times 10$ واحد انتخاب شده است. مطابق نتایج حاصله، طرح نهایی شامل دو تغذیه فوقانی روی هر مکعب است که اندکی بسمت پل اتصالی انحراف پیدا کرده‌اند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در طراحی سیستم تغذیه‌گذاری برای قطعاتی با تغییر ضخامت زیاد و پلهای ارتباطی طویل بهتر است تغذیه روی قسمتهای ضخیم با اندکی تمایل بسمت پل ارتباطی قرار گیرد.

مثال ۱۰: این مثال مشابه مثال ۹ است با این تفاوت که طول پل ارتباطی بین دو مکعب در این از ۴۰ واحد به ۲۰ واحد کاهش پیدا کرده است. در این مثال، طرح نهایی شامل یک تغذیه فوقانی که روی پل ارتباطی قرار گرفته، می‌باشد. این تغذیه از دو کانال جانبی که تقریباً روی محل اتصال پل ارتباطی با مکعب‌ها قرار دارد، دو مکعب را تغذیه می‌کند. نکته قابل توجه در نتایج این است که در این طراحی خود کانال ارتباطی نقش گرم نگه داشتن تغذیه را بازی خواهد کرد، بطوریکه می‌توان آن را بخشی از خود تغذیه در نظر گرفت. البته طراحی بگونه‌ای انجام شده است که عیوب انقباضی در پایان درون تغذیه قرار گرفته و کانال ارتباطی عاری از عیوب خواهد بود. این ابتکار انجام شده توسط الگوریتم باعث افزایش قابل توجه در راندمان تغذیه‌گذاری شده است، بطوریکه بالاترین راندمان در میان نتایج مربوط به این پژوهش در این طراحی بدست آمده است.

با استفاده از نتایج مربوط به این مثال می‌توان نتیجه زیر را بطور کلی ارائه کرد. حین طراحی سیستم تغذیه‌رسانی برای قطعاتی با تغییر ضخامت زیاد و پلهای ارتباطی کوتاه این امکان وجود دارد که تغذیه را بصورت کشیده شده روی پل ارتباطی قرار داد طوری که مجموع تغذیه و پل ارتباطی یک محفظه گرم بزرگتر را ایجاد کرده و باعث انجماد جهتدار از قسمتهای ضخیم بسمت پل ارتباطی شوند. در این نوع از طراحی بخشی از قطعه بکمک تغذیه آمده و تا مراحل پایانی انجماد جزئی از سیستم تغذیه‌رسانی محسوب می‌شود. این بخشها در مراحل پایانی انجماد توسط تغذیه حقیقی مذاب‌رسانی شده و از عیوب انقباضی مصون می‌مانند. این نوع از طراحی مزایای زیادی دارد که مهمترین آنها عبارتند از: افزایش قابل توجه راندمان تغذیه‌گذاری بدلیل کوچک شدن ابعاد تغذیه، کاهش اثرات ناشی از تغییر ضخامت ناگهانی در قطعه مثل تنشهای حین انجماد (عامل ایجاد ترکهای گرم) و تنشهای پسماند، یکنواخت‌تر شدن آهنگ سرمایش قطعه و در نتیجه خواص مکانیکی آن و کاهش متوسط زمان انجماد بعلت کوچکتر شدن سیستم تغذیه‌رسانی و در نتیجه افزایش متوسط خواص مکانیکی. لازم به تذکر است که استفاده از بخشی از قطعه برای بهبود عملکرد سیستم تغذیه‌رسانی یک دیدگاه کلی بوده و ممکن است بتوان آنرا در مورد طراحی‌هایی با شرایط هندسی دیگر نیز استفاده کرد.

مثال ۱۱: در این مثال طراحی سیستم تغذیه‌رسانی برای قطعه‌ای که نیاز به تغذیه‌هایی با ابعاد متفاوت دارد، مورد بررسی قرار خواهد گرفت. برای این منظور از ترکیب سه استوانه با قطر و ارتفاع متفاوت که توسط یک پل ارتباطی باریک بیکدیگر متصل شده‌اند، استفاده می‌شود. مطابق نتایج حاصله، طرح نهایی شامل سه تغذیه فوقانی با ابعاد متفاوت می‌باشد

که منجر به تولید قطعه‌ای سالم می‌شود.

مثالهای ۱۲، ۱۳ و ۱۴: در این مثالها طراحی سیستم تغذیه‌گذاری برای چکش فولادی مربوط به کنفرانس چهارم TMS-AIME [۱۵۵] مورد بررسی قرار گرفت. در این سه مثال تغذیه‌گذاری این چکش در سه حالت مختلف مورد بررسی قرار گرفت. در مورد اول با در نظر گرفتن قیود تکنولوژیکی از اتصال تغذیه به سطوح پراخنا جلوگیری شد. در مورد دوم فضای طراحی تغذیه به قسمت فوقانی چکش محدود شد. در مورد سوم تغذیه‌گذاری چکش در حالت افقی مورد بررسی قرار گرفت (بدون در نظر گرفتن قیود تکنولوژیکی). در تمام موارد طرح نهایی منجر به تولید قطعه‌ای سالم شده است (بر اساس معیار استفاده شده در این تحقیق). مطابق نتایج حاصله با اعمال محدودیت تکنولوژیکی در مورد اول، توپولوژی سیستم تغذیه‌رسانی متفاوت از طراحی اولیه می‌باشد. اما راندمان تغذیه‌گذاری در این مورد تغییر چندانی نکرده است. همچنین ریخته‌گری چکش در حالت افقی باعث افزایش جزئی در راندمان تغذیه‌گذاری شده است. حسن عمده این طرح کاهش قابل توجه ارتفاع قطعه می‌باشد که می‌تواند باعث کاهش تلاطم مذاب حین پر شدن قالب ریخته‌گری شود.

مثال ۱۵: در این مثال طراحی سیستم تغذیه‌گذاری برای یک میل‌لنگ خودرو تیلر مورد بررسی قرار می‌گیرد. اگر چه جنس این میل‌لنگ از چدن نشکن می‌باشد، ولی بعلاوه شباهت انجماد چدن نشکن با فولادهای ساده کربنی می‌توان از این قطعه برای بررسی الگوریتم ارائه شده استفاده کرد. علت انتخاب این مثال پیچیدگی نسبی موجود در طراحی سیستم تغذیه‌رسانی این قطعه علی‌رغم هندسه بظاهر ساده آن است. طراحی سیستم تغذیه‌رسانی این قطعه در گذشته توسط کارشناسان طراحی مرکز پژوهش متالورژی رازی انجام شده است. مطابق شکل‌های ۱۰.۸ و ۱۵.۸ در طراحی ذکر شده از یک ایده ابتکاری (زاویه‌دار بودن گردن تغذیه نسبت به محور اصلی قطعه) بمنظور ایجاد انجماد جهتدار از قطعه بسمت تغذیه برای تولید قطعه سالم بهره‌گیری شده است. نتایج مربوط به این مثال نشان دهنده موفقیت الگوریتم ارائه شده در این پژوهش در طراحی سیستم تغذیه‌گذاری با راندمان مناسب برای این قطعه چالشی است.

جمع بندی: نتایج مربوط به مثالهای ۱-۱۵ نشان داد الگوریتم ارائه شده در این تحقیق قابلیت مناسبی برای طراحی بهینه سیستم تغذیه‌گذاری قطعات فولادی را داراست و می‌توان آنرا بعنوان قدم کوچکی در جهت حرکت بسوی طراحی بهینه و اتوماتیک در نظر گرفت. لکن پیچیدگی‌ها و موانع متعددی در این مسیر وجود دارند که برخی از آنها ذیلاً مرور می‌شوند. مساله بهینه‌سازی تعریف شده در این تحقیق غیرمحدب بوده و ممکن است دارای تعداد زیادی جواب بهینه باشد که تنها یکی از آنها جواب بهینه عمومی و مطلوب است. بعبارت ساده‌تر ممکن است به ازای هر نقطه شروع و دسته پارامترهای کنترلی الگوریتم به نقطه‌ای همگرا شود که از دیدگاه ریاضی یک جواب بهینه باشد اما این جواب لزوماً بهترین جواب نیست. حتی در برخی از موارد ممکن است این جواب از دیدگاه تکنولوژیکی فاقد ارزش باشد (مثلاً بعلاوه راندمان تغذیه‌گذاری بسیار پایین). بنظر می‌رسد یک راه حل مناسب برای تعدیل این مشکل استفاده از دانش کاربر در جهت تعریف مناسب شرایط اولیه و پارامترهای کنترلی است. همچنین تغییر منطقی شرایط اولیه و حل مجدد مساله ممکن است در رسیدن به نتیجه مطلوب موثر باشد.

جواب‌های بهینه تولید شده توسط الگوریتم ارائه شده در این پژوهش اجزای تقارن موجود در شرایط انتقال حرارت قطعه و قالب را به ارث می‌برد. بعنوان مثال در صورتیکه شرایط انتقال حرارت و دامنه طراحی نسبت به یک صفحه مشخص متقارن باشد، جواب بهینه نیز نسبت به آن صفحه متقارن خواهد بود. وجود تقارن در شرایط انتقال حرارت اغلب ارتباط تنگاتنگی با وجود تقارن در هندسه قطعه و قالب دارد. بعلاوه وجود این خاصیت استفاده از روش ارائه شده برای طراحی سیستم تغذیه‌رسانی قطعاتی با تقارن هندسی بالا (مثل رینگها) چندان موثر نخواهد بود. بنظر می‌رسد با افزایش تقارن هندسی قطعه تعداد جوابهای بهینه مساله نیز افزایش یافته و احتمال دستیابی به جواب بهینه عمومی کاهش یابد. استفاده از یک شرایط اولیه غیر متقارن می‌تواند یکی از راههای تعدیل اثر این خاصیت باشد.

از آنجا که قيود تکنولوژیکی مربوط به قابلیت ریخته‌گری در این تحقیق مورد بررسی قرار گرفته نشده است، ممکن است طراحی نهایی فاقد قابلیت قالبگیری با استفاده از روشهای متداول باشد. در این موارد می‌توان یا طرح را برای ایجاد قابلیت قالبگیری اصلاح کرد یا از طراحی بدست آمده بعنوان یک راهنما در طراحی دستی بهره برد. نتایج بدست آمده در این قسمت حاوی برخی از نکات عمومی است که می‌توانند در طراحی سیستم تغذیه‌گذاری بروش دستی مورد استفاده قرار گیرند. برخی از این نکات عبارتند از:

- سطوح خارجی تغذیه در مجاورت قطعه باید تا حد امکان موازی سطوح قطعه باشد. این مساله اغلب بطور طبیعی برای تغذیه‌های فوقانی لحاظ خواهد شد، ولی معمولاً برای تغذیه‌های جانبی رعایت نمی‌شود. علت مرجح بودن این نوع طراحی کاهش انتقال حرارت سطوح قطعه-تغذیه در مجاورت با یکدیگر و کمک به کاهش ابعاد تغذیه می‌باشد.
- بهتر است سطوح تغذیه در مجاورت قالب محدب و شبه-کروی باشد. این مساله باعث کاهش فصل مشترک تغذیه-قالب در واحد حجم می‌شود که در نتیجه آن نرخ انتقال حرارت تغذیه کاهش یافته و تغذیه برای مدت طولانی‌تری گرم باقی خواهد ماند. لازم به تذکر است که یک سطح شبه-کروی سطحی است که انحناهای اصلی آن در هر نقطه تقریباً برابر و تغییر انحنای با حرکت روی آن ناچیز باشد. با استفاده از این اصل می‌توان یک طراحی موجود را نیز در جهت نزدیک شدن به شرایط بهینه اصلاح کرد. برای این منظور می‌توان از یک جریان سطحی که انحنای متوسط را مینیمم می‌سازد^۳ [۹۸] استفاده کرد.

- بسته به شکل هندسی قطعه ممکن است در برخی از موارد بتوان بکمک بخشی از خود قطعه یک تغذیه مصنوعی بزرگتر ایجاد کرد طوری که با استفاده از یک تغذیه کوچکتر بتوان انجماد جهتدار را در قطعه ایجاد کرد. در این حالت بخش کمکی قطعه تا مراحل پایانی انجماد نقش جزئی از تغذیه را بازی خواهد کرد. این بخش در پایان توسط تغذیه حقیقی مذاب‌رسانی خواهد شد. از جمله محاسن این روش افزایش راندمان تغذیه‌گذاری، کاهش تنشهای حرارتی، کاهش زمان انجماد و یکنواختی خواص مکانیکی قطعه می‌باشد.

^۳Mean curvature flow

فصل ۹

جمع‌بندی نتایج و چشم‌انداز تحقیقات آینده

"No great discovery was ever made without a bold guess (Isaac Newton 1643–1727)"

"A man may imagine things that are false, but he can only understand things that are true, for if the things be false, the apprehension of them is not understanding (Isaac Newton 1643–1727)"

۱.۹ جمع‌بندی نتایج

تغذیه‌گذاری قطعات ریختگی، یکی از موثرترین راه‌های کنترل عیوب انقباضی در فرایندهای شکل‌ریزی فلزات می‌باشد. در این پژوهش طراحی بهینه سیستم تغذیه‌گذاری در فرایند شکل‌ریزی فولادهای ساده کربنی در قالبهای ماسه‌ای مورد بررسی قرار گرفت. جهت رسیدن به یک درک صحیح از نحوه شکل‌گیری عیوب انقباضی، مبانی فیزیکی نظری و تجربی مربوط به تشکیل این عیوب در بخش نخست از این پژوهش مورد مطالعه قرار گرفت. این مطالعه مشمول بررسی تحقیقات نظری-تجربی انجام شده توسط سایر محققان و تحقیقات انجام شده در پژوهش حاضر بوده است. در نتیجه این بررسی‌ها ارتباط بسیار مناسبی بین مشاهدات تجربی و مطالعات تئوری انجام شده، برقرار شد که منتج به تئوری جامع و نوینی در ارتباط با تشکیل ناپیوستگی‌های ساختاری حین فرایندهای انجماد گردید. در ادامه این بخش این یافته‌ها به اختصار مرور خواهند شد.

مطالعه کمی مدل جوانه‌زنی گوس نشان داد مقدار محاسبه شده تنش پارگی مذابها با استفاده از این مدل اختلاف زیادی با مشاهدات تجربی دارد. علت این مساله فرضیات صورت گرفته توسط گوس در ارتباط با استقلال کشش سطحی مذاب نسبت به شعاع خوشه تشکیل شده از فاز دوم می‌باشد. بررسی مدل‌های توسعه یافته گیبس و کان-هیلارد نشان داد کشش سطحی مذاب تابعی از شعاع انحناى فصل مشترک بین دوفاز می‌باشد. محاسبات تنش پارگی مذاب با استفاده از این مدلها حاکی از کاهش قابل توجه در پیش‌بینی این تنش نسبت به مدل جوانه‌زنی گیبس بود. اما اختلاف بین نتایج تئوری و مشاهدات تجربی بخصوص در فوق اشباعهای کوچک همچنان بصورت بزرگ باقی ماند. برای پر کردن این فاصله مدل‌های

غیر کلاسیک جوانه‌زنی نیز مورد بررسی قرار گرفتند. مطابق مباحث طرح شده، وجود حبابهای اولیه در مذاب را می‌توان بعنوان قویترین فرضیه محتمل در توجیه فاصله نتایج تجربی و تئوری برشمرد. اما کمی‌سازی این مدل در عمل بسیار مشکل (و تا حدی غیر ممکن) می‌باشد. بنابراین امروزه نمی‌توان هیچیک از مدل‌های جوانه‌زنی ناپیوستگی در مذاب را بعنوان یک مدل عمومی کمی پذیرفت.

بطور کلی تشکیل عیوب انقباضی در قطعات ریختگی مستقل از تشکیل عیوب گازی نبوده و ارتباط تنگاتنگی بین نحوه تشکیل و توزیع این عیوب وجود دارد. در مدل جامع تشکیل ناپیوستگی‌های ساختاری حین انجماد، تشکیل عیوب انقباضی-گازی توسط جوانه‌زنی عامل ایجاد عیب کنترل می‌شود. جوانه‌زنی عامل ایجاد عیب نیز توسط میزان فوق اشباع مذاب نسبت به این عامل در هر لحظه کنترل خواهد شد. بطور کلی عامل ایجاد عیب از دو مولفه اصلی تشکیل شده است که عبارتند از: جاهای خالی ایجاد شده در فصل مشترک جامد-مایع ناشی از انقباض حجمی مذاب حین انجماد و گازهای حل شده در مذاب. بطور کلی با تسهیل شرایط جوانه‌زنی عیب حین انجماد نحوه توزیع عیوب انقباضی-گازی از حالت عیوب متمرکز ماکروسکوپی بسمت عیوب توزیع شده میکروسکوپی میل می‌کند. با افزایش فوق اشباع مذاب نسبت به عامل ایجاد عیب، سد انرژی لازم برای جوانه‌زنی عیب کاهش می‌یابد که معادل تسهیل در امر جوانه‌زنی عیوب است. در صورتیکه فوق اشباع مذاب نسبت به عامل ایجاد عیب از یک حد بحرانی فراتر رود، تشکیل عیوب توسط یک تجزیه اسپینودال بدون نیاز به جوانه‌زنی انجام خواهد شد (این مساله می‌تواند در کنترل ابعاد حفرات در تولید فومهای فلزی مورد استفاده قرار گیرد). بنابراین با افزایش غلظت گازهای حل شده در مذاب توزیع عیوب انقباضی از حالت متمرکز بسمت حالت گسترده میل می‌کند.

بعلت اینکه با کاهش کیفیت متالورژیکی مذاب احتمال وجود حبابهای اولیه و گازهای حل شده در مذاب افزایش می‌یابد، می‌توان از کیفیت متالورژیکی مذاب (از دیدگاه میزان گازهای حل شده) بعنوان یکی از موثرترین عوامل در نحوه کنترل توزیع عیوب انقباضی در قطعات ریختگی نام برد. در ریخته‌گری قطعاتی با سطوح گسترده صاف یا مقعر، در صورت بالا بودن کیفیت متالورژیکی مذاب ممکن است بتوان عیوب انقباضی داخلی را بدون نیاز به تغذیه بطور کامل حذف نمود. در این موارد کاهش حجم ناشی از انقباض توسط کشیدگی جزئی از سطح قطعه در اثر تغییر فرم پلاستیک پوسته جامد در مراحل پایانی انجماد انجام می‌شود. صحت این فرضیه با استفاده از مبانی تئوری و نتایج مشاهدات تجربی انجام شده در این تحقیق و همچنین سایر محققان نشان داده شد.

بررسی نتایج تجربی مختلف نشان داد توزیع عیوب انقباضی-گازی در یک انجماد جهتدار تا حد زیادی تابع زاویه بین جهت انجماد و جهت شتاب ثقل می‌باشد. این نتایج در ارتباط با انجماد پوسته اولیه در رژیم‌های انجمادی چند-جهته نیز صادق است. جزئیات مربوط به این نتایج در فصل دوم موجود می‌باشد. مطابق نتایج ارائه شده فاصله مذاب‌رسانی یک تغذیه تا حد زیادی تابع کیفیت متالورژیکی مذاب (از دیدگاه میزان گازهای حل شده) می‌باشد. بطور کلی فاصله مذاب‌رسانی تغذیه با کاهش کیفیت متالورژیکی مذاب کاهش می‌یابد. بطور مشابه طول اثر انتهایی نیز با کاهش کیفیت متالورژیکی

مذاب کاهش خواهد یافت. بنابراین لازم است روشی کمی برای اندازه‌گیری کیفیت متالورژیکی مذاب‌ها در نظر گرفته شود و قواعد مربوط به طول مذاب‌رسانی و اثر انتهایی به عنوان تابعی از این پارامتر ارائه شوند.

با فرض محدود بودن دامنه انجماد و مطلوب بودن کیفیت متالورژیکی مذاب، توابع معیار حرارتی (مثل معیارهای پلینی و نیاما) جهت پیش‌بینی عیوب انقباضی مورد مطالعه قرار گرفتند. نتایج این مطالعات منجر به آشکار شدن برخی از محدودیت‌های این توابع شد که تا کنون در منابع مربوطه گزارش نشده بودند. بررسی وابستگی مقدار بحرانی این توابع به ابعاد و شکل قطعه نشان داد علی‌رغم برخی از ادعاهای انجام شده، مقدار بحرانی هیچیک از توابع معیار حرارتی مستقل از شکل قطعه نمی‌باشد. بنابراین (علی‌رغم تصور موجود) توابع معیار را نمی‌توان بعنوان معیارهای کمی پیش‌بینی عیوب انقباضی در نظر گرفت. همچنین نشان داده شد پشتیبانی تئوری انجام شده توسط نیاما و همکارانش برای معیارشان قابل تردید و بازنگری می‌باشد. برای رفع این مشکل توجیهی نوین برای این معیار ارائه شد؛ که در نتیجه آن وابستگی بشکل مقدار بحرانی معیار نیاما نشان داده شد. با استفاده از این آنالیز فرم توسعه یافته‌ای برای معیار نیاما پیشنهاد شد. مطالعات انجام شده نشان داد که پذیرش توابع معیار حرارتی بعنوان معیارهای پیش‌بینی عیوب انقباضی میکروسکوپی در حاله‌ای از ابهام بوده و نیاز به انجام آزمایشات تجربی بیشتری دارد (بخصوص مطالعه تجربی تشکیل ریزمکهای انقباضی در انجمادهای کاملاً یک جهته). نتایج بررسی‌های تئوری نشان داد توابع معیار پلینی و نیاما شرط کافی برای پیش‌بینی عیوب انقباضی ماکروسکوپی را ارضاء نمی‌کنند. این مساله می‌تواند باعث پیش‌بینی مناطق معیوب کاذب در قطعاتی با هندسه‌های پیچیده گردد. آنالیزهای انجام شده نشان دادند استفاده از اطلاعات موضعی درجه دوم انتقال حرارت می‌تواند مانع از ایجاد این نتایج کاذب شود. با بهره‌گیری از این نتایج، تابع معیار نوینی (یا معیار نیامای غنی شده) جهت پیش‌بینی عیوب انقباضی در قطعات ریختگی پیشنهاد شد. نتایج شبیه‌سازی عددی گواه بر موفقیت این تابع در پیش‌بینی عیوب انقباضی و برتری آن نسبت به معیار نیاما بود. عدم تخلف از شرط کافی پیش‌بینی عیوب انقباضی، وابستگی کمتر مقدار بحرانی این تابع به شکل قطعه و قابلیت تفکیک بالاتر از مهمترین مزایای این تابع نسبت به معیار نیاما می‌باشند.

در بخش دوم از این پژوهش، طراحی بهینه سیستم تغذیه‌رسانی مورد بررسی قرار گرفت. با انجام فرضیات مناسب بر پایه مبانی فیزیکی طرح شده، مدل مفهومی مناسبی جهت طراحی بهینه و اتوماتیک سیستم تغذیه‌رسانی ارائه شد. در این مدل مساله طراحی مورد نظر در قالب یک مساله بهینه‌سازی توپولوژی پیاده‌سازی شد. این نوع مدل‌سازی در نوع خود منحصر بفرد بوده و دارای ویژگیهای ممتاز زیادی در مقایسه با تحقیقات مشابه انجام شده است. برخی از این مزایا عبارتند از: عدم نیاز به یک طراحی اولیه شامل مکان، تعداد، شکل و ابعاد تقریبی تغذیه‌ها؛ و عدم نیاز به تعریف یک مسیر مذاب‌رسانی درون قطعه. لازم است اشاره شود که این تحقیق از معدود مطالعاتی است که در آن به مدل‌سازی یک مساله طراحی بهینه مبادرت شده است. این مدل دارای این قابلیت بالقوه است که تعداد، مکان، شکل و ابعاد بهینه تغذیه‌ها را بصورت خودکار محاسبه کند. در ادامه مدل‌سازی ریاضی این مدل مفهومی صورت پذیرفت و روشی نوین با بازدهی مناسب برای حل عددی آن ارائه شد. لازم به تذکر است که روش حل ارائه شده بخودی خود دارای مزایای بسیاری می‌باشد که می‌تواند در سایر مسائل کنترل بهینه

مهندسی نیز مورد استفاده قرار گیرد. از مهمترین مزایای این روش حل عبارتند از: مستقل بودن هزینه محاسبات نسبت به تعداد متغیر طراحی و قيود موضعی، بازدهی محاسباتی بالا، نیاز به حافظه کامپیوتری کم، نیاز به حداقل پارامترهای ورودی اولیه، امکان پیش‌بینی تقریبی هزینه محاسبات و امکان ارتباط موثر با کاربر در خلال فرایند بهینه‌سازی. در پایان اجزای مختلف روش ارائه شده بصورت مجزا و ترکیب شده مورد ارزیابی قرار گرفتند که نتایج حاصله حاکی از تطابق مناسب آنها با نتایج مورد انتظار بود.

نتایج روش طراحی ارائه شده در این پژوهش نشان داد که این روش از پتانسیل مناسبی جهت طراحی بهینه سیستم تغذیه‌گذاری در فرایند ریخته‌گری در قالبهای ماسه‌ای برخوردار است. اما نتایج حاصله در تمام موارد رضایت‌بخش نبودند که لازم می‌دارد تحقیقات بیشتری در جهت توسعه و رفع مشکلات مربوط به این مدل انجام شود. عدم تحذب مساله بهینه‌سازی مربوطه را می‌توان بعنوان مهم‌ترین دلیل ناکامی الگوریتم ارائه شده در موارد خاص در نظر گرفت. علت این مساله امکان وجود جوابهای بهینه متعدد برای یک مساله بهینه‌سازی غیرمحدب می‌باشد. در این حالت الگوریتم ارائه شده بسمت یکی از جوابهای بهینه حرکت می‌کند که این جواب تابع نحوه انتخاب شرایط اولیه و پارامترهای کنترلی مربوطه می‌باشد. اما این جواب لزوماً جواب بهینه عمومی مساله که از دیدگاه تکنولوژیکی با ارزش است، نخواهد بود. استفاده از دانش کاربر در راستای تعریف شرایط اولیه و احیانا تغییر منطقی آن می‌تواند روشی موثر در جهت تعدیل این اثر باشد.

نتایج بدست آمده نشان داد که استفاده از الگوریتم ارائه شده در طراحی سیستم تغذیه‌گذاری برای قطعاتی با تقارن هندسی بالا چندان موثر نمی‌باشد. علت اصلی این مساله را می‌توان به خاصیت وراثت هندسی این الگوریتم ارتباط داد. طبق مشاهدات انجام شده، طرح نهایی حاصل از این الگوریتم اجزای تقارن موجود در شرایط انتقال حرارت قطعه و شرایط اولیه را به ارث می‌برد. لازم است تذکر داده شود که اجزای تقارن موجود در انتقال حرارت قطعه ارتباط تنگاتنگی با اجزای تقارن موجود در شکل هندسی قطعه و قالب دارند. با استفاده از این خاصیت در مورد قطعاتی با تقارن هندسی بالا، می‌توان برخی از ویژگیهای موجود در طرح نهایی تولید شده توسط الگوریتم را پیش‌بینی کرد.

بررسی هندسی طراحی‌های انجام شده توسط روش ارائه شده منجر به نکات مفیدی در ارتباط با طراحی سیستم تغذیه‌رسانی شد که در ادامه به اختصار به آنها اشاره می‌شود (برای جزئیات بیشتر به فصل ۸ رجوع شود): بهتر است تغذیه بگونه‌ای طراحی شود که سطوح خارجی آن در مجاورت قطعه تا حد امکان موازی سطوح خارجی قطعه باشد، مرجح است سطوح خارجی تغذیه در مجاورت قالب محدب و شبه-کروی باشد، برای قطعاتی با تغییر ضخامت ناگهانی بهتر است امکان استفاده بخشی از قطعه بعنوان جزئی از تغذیه و تشکیل یک تغذیه مجازی بزرگ مورد بررسی قرار گیرد.

۲.۹ چشم‌انداز تحقیقات آینده

- در جهت توسعه و تکامل نتایج مربوط این پژوهش موارد زیر بعنوان چارچوب تحقیقات آینده پیشنهاد می‌شوند:
- مطالعات نظری و تجربی بیشتر در جهت کمی‌سازی مدل‌های جوانه‌زنی ناپیوستگی حین انجماد. همچنین استفاده از شبیه‌سازی کامپیوتری مستقیم بروش دینامیک مولکولی جهت بررسی عملکرد مدل‌ها پیشنهاد می‌شود.
 - ارائه فرم ریاضی مربوط به مدل جامع تشکیل عیوب انجمادی پیشنهاد شده در این پژوهش. برای این منظور می‌توان از توسعه مدل‌های شبه-تراکم‌ناپذیر و تراکم‌پذیر کان-هیلیارد-نویر-استوکس ارائه شده در مراجع [۱۵۹، ۱۶۰] استفاده کرد.
 - همانطور که نتایج تجربی ارائه شده در فصل دوم نشان داد، امکان تولید شمش‌های فولادی عاری از عیوب انقباضی داخلی بدون تغذیه‌گذاری وجود دارد. مدلسازی ریاضی پدیده مربوطه و تلاش در جهت بهینه‌سازی طراحی برای دستیابی به این هدف بعنوان یکی از محورهای تحقیقات آینده توصیه می‌شود. برای این منظور استفاده از مرجع [۱۶۱] جهت مدلسازی تشکیل حفره‌های داخلی پیشنهاد می‌شود.
 - توسعه یک هسته آنالیز هندسی مناسب بمنظور تشخیص سطوح نامناسب قطعه جهت اتصال تغذیه برای ایجاد تسهیل در تعریف دامنه طراحی گردن تغذیه.
 - افزایش دقت الگوریتم بوسیله بکارگیری مدل‌های دقیق‌تر جهت پیش‌بینی عیوب انقباضی (با پیشرفت توان محاسباتی کامپیوترها امکان استفاده از مدل‌های دقیق‌تر رفته رفته میسر خواهد شد).
 - تلاش در جهت محدب‌سازی مدل ارائه شده بمنظور حذف ابهام مربوط به وجود جواب‌های بهینه متعدد.
 - وارد کردن اثر مبرد و مواد حرارت‌زا به مدل فعلی در جهت طراحی بهینه سیستم تغذیه‌رسانی شامل تغذیه، مبرد و مواد حرارت‌زا. برای این منظور می‌توان از روش‌های بهینه‌سازی توپولوژی چندفازی ارائه شده در مراجع [۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴] استفاده کرد.
 - اضافه کردن قیود تکنولوژیکی مربوط به قابلیت قالبگیری به مدل حاضر. برای این منظور می‌توان از مدل‌های ریاضی ارائه شده برای قابلیت قالبگیری در مراجع [۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹] بهره گرفت.

1. R. Tavakoli and P. Davami, Unconditionally stable fully explicit finite difference solution of solidification problems, *Metallurgical and Materials Transactions B*, 38 (2007) 121–142.
2. R. Tavakoli and P. Davami, Optimal feeder design in sand casting process by growth method, *International Journal of Cast Metals Research* 20 (2007) 288–296.
3. R. Tavakoli and P. Davami, A fast method for numerical simulation of casting solidification, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24 (2008) 1723 –1740.
4. R. Tavakoli, Robust, efficient and easy to implement uniform/octree/embedded boundary Cartesian grid generator, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 57 (2008) 1753 –1770.
5. R. Tavakoli and P. Davami, Optimal riser design in sand casting process by topology optimization with SIMP method I: Poisson approximation of nonlinear heat transfer equation, *Structural and Multidisciplinary Optimization* 36 (2008) 193–202.
6. R. Tavakoli and P. Davami, Automatic optimal feeder design in steel casting process, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197 (2008) 921–932.
7. R. Tavakoli and P. Davami, Optimal riser design in sand casting process with evolutionary topology optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization* 38 (2009) 205–214.
8. R. Tavakoli and P. Davami, A new method for automatic optimal feeder design in gravity casting processes, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, inpress (2009) DOI: 10.1007/s00158-008-0340-6.

فهرست مراجع

- [1] B. Ravi and M.N. Srinivasan. Casting solidification analysis by modulus vector method. *Int. J. Cast Metals Res.*, 9(1):1–7, 1996.
- [2] ASM Handbook. Volume 15, Casting. *ASM International*, 1988.
- [3] H. Okamoto and American Society for Metals. *Binary alloy phase diagrams updating service*. ASM international, 1992.
- [4] J.A. Spittle. Columnar to equiaxed grain transition in as solidified alloys. *International Materials Reviews*, 51(4):247–269, 2006.
- [5] T.W. Clyne, M. Wolf, and W. Kurz. The effect of melt composition on solidification cracking of steel, with particular reference to continuous casting. *Metallurgical and Materials Transactions B*, 13(2):259–266, 1982.
- [6] W. Kurz and D.J. Fisher. *Fundamentals of Solidification*. Switzerland: Trans Tech Pub., 4th edition, 1998.
- [7] J. Campbell. *Castings*. Butterworth-Heinemann, 2003.
- [8] J.W. Gibbs, H.A. Bumstead, and W.R. Longley. *The Collected Works of J. Willard Gibbs*. Longmans, Green and Co, 1928.
- [9] J.D. Van der Waals. Translation of J. D. van der Waals' "The thermodynamic theory of capillarity under the hypothesis of a continuous variation of density". *Journal of Statistical Physics*, 20(2):200–244, 1979.
- [10] J.W. Cahn and J.E. Hilliard. Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy. *The Journal of Chemical Physics*, 28:258, 1958.
- [11] J.W. Cahn. Free energy of a nonuniform system. II. Thermodynamic basis. *The Journal of Chemical Physics*, 30:1121, 1959.
- [12] J.W. Cahn and J.E. Hilliard. Free energy of a nonuniform system. III. Nucleation in a two-component incompressible fluid. *The Journal of Chemical Physics*, 31:688, 1959.
- [13] D.W. Oxtoby and R. Evans. Nonclassical nucleation theory for the gas–liquid transition. *The Journal of Chemical Physics*, 89:7521, 1988.
- [14] D.W. Oxtoby. Density functional methods in the statistical mechanics of materials. *Annual Review of Materials Research*, 32(1):39–52, 2002.
- [15] C. Pequet, M. Rappaz, and M. Gremaud. Modeling of microporosity, macroporosity, and pipe-shrinkage formation during the solidification of alloys using a mushy-zone refinement method: Applications to aluminum alloys. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 33(7):2095–2106, 2002.
- [16] J.C. Fisher. The fracture of liquids. *Journal of applied Physics*, 19:1062, 1948.
- [17] D. Beaglehole. Thickness of the surface of liquid argon near the triple point. *Phys. Rev. Lett.*, 43(27):2016–2018, 1979.

- [18] D. Sluis, M.P. D'Evelyn, and S.A. Rice. Experimental and theoretical studies of the density profile in the liquid–vapor interface of Cs. *The Journal of Chemical Physics*, 78:1611, 1983.
- [19] M.P. D'Evelyn and S.A. Rice. A study of the liquid–vapor interface of mercury: Computer simulation results. *The Journal of Chemical Physics*, 78:5081, 1983.
- [20] T.M. Chang, K.A. Peterson, and L.X. Dang. Molecular dynamics simulations of liquid, interface, and ionic solvation of polarizable carbon tetrachloride. *The Journal of Chemical Physics*, 103:7502, 1995.
- [21] HK Livingston and C.S. Swingley. Contact angles in controlled atmospheres: Some theoretical considerations. *Surface Science*, 24(2):625–634, 1971.
- [22] D. Kashchiev. *Nucleation: basic theory with applications*. Butterworth-Heinemann, 2000.
- [23] D. Kashchiev. Thermodynamically consistent description of the work to form a nucleus of any size. *The Journal of Chemical Physics*, 118:1837, 2003.
- [24] J.W.P. Edited by: Schmelzer. *Nucleation theory and applications*. Wiley-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA, 2005.
- [25] D. Kashchiev. Forms and applications of the nucleation theorem. *The Journal of Chemical Physics*, 125:014502, 2006.
- [26] P.G. Debenedetti and H. Reiss. Reversible work of formation of an embryo of a new phase within a uniform macroscopic mother phase. *The Journal of Chemical Physics*, 108:5498, 1998.
- [27] A. Englert-Chwoles and I. Prigogine. On the statistical theory of the surface tension of binary mixtures. *Il Nuovo Cimento*, 9:347–355, 1958.
- [28] R. Defay and I. Prigogine. *Surface tension and adsorption*. Wiley, 1966.
- [29] J.S. Rowlinson and B. Widom. *Molecular theory of capillarity*, 1982.
- [30] J.W.P. Schmelzer, V.G. Baidakov, and G.S. Boltachev. Kinetics of boiling in binary liquid–gas solutions: Comparison of different approaches. *The Journal of Chemical Physics*, 119:6166, 2003.
- [31] J.W.P. Schmelzer, G.S. Boltachev, and V.G. Baidakov. Classical and generalized Gibbs' approaches and the work of critical cluster formation in nucleation theory. *The Journal of chemical physics*, 124:194503, 2006.
- [32] VG Baidakov and G.S. Boltachev. Curvature dependence of the surface tension of liquid and vapor nuclei. *Physical Review E*, 59(1):469–475, 1999.
- [33] V.B. Fenelonov, G.G. Kodenov, and V.G. Kostrovskys. On the Dependence of Surface Tension of Liquids on the Curvature of the Liquid- Vapor Interface. *J. Phys. Chem. B*, 105(5):1050–1055, 2001.
- [34] J. Hrubý, DG Labetski, and MEH van Dongen. Gradient theory computation of the radius-dependent surface tension and nucleation rate for n-nonane clusters. *The Journal of Chemical Physics*, 127:164720, 2007.
- [35] J.W.P. Schmelzer and J. Schmelzer Jr. Kinetics of condensation of gases: A new approach. *The Journal of Chemical Physics*, 114:5180, 2001.
- [36] XC Zeng and D.W. Oxtoby. Gas–liquid nucleation in Lennard-Jones fluids. *The Journal of Chemical Physics*, 94:4472, 1991.
- [37] M. Guilleumas, M. Pi, M. Barranco, J. Navarro, and MA Solís. Thermal nucleation of cavities in liquid helium at negative pressures. *Physical Review B*, 47(14):9116–9119, 1993.
- [38] Y. Viisanen, R. Strey, and H. Reiss. Homogeneous nucleation rates for water. *The Journal of Chemical Physics*, 99:4680, 1993.
- [39] L. Granasy and PF James. Nucleation in oxide glasses: comparison of theory and experiment. *Proceedings Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, pages 1745–1766, 1998.

- [40] M. Iwamatsu. A double-parabola model for the non-classical Cahn-Hilliard theory of homogeneous nucleation. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 5:7537–7537, 1993.
- [41] D.W. Oxtoby. Nonclassical nucleation theory: an exactly soluble model. *Physica Scripta*, 49:65–69, 1993.
- [42] S.F. Jones, G.M. Evans, and K.P. Galvin. Bubble nucleation from gas cavities—a review. *Advances in colloid and interface science*, 80(1):27–50, 1999.
- [43] E.N. Harvey, W.D. McElroy, and AH Whiteley. On cavity formation in water. *Journal of Applied Physics*, 18:162, 1947.
- [44] R.A. Outlaw, D.T. Peterson, and F.A. Schmidt. Hydrogen partitioning in pure cast aluminum as determined by dynamic evolution rate measurements. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 12(10):1809–1816, 1981.
- [45] R.B. Dean. The formation of bubbles. *Journal of Applied Physics*, 15:446, 1944.
- [46] R. Sasikumar, M.J. Walker, S. Savithri, and S. Sundarraj. Initiation of microporosity from pre-existing bubbles: a computational study. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 16(3):35009, 2008.
- [47] D. Dispinar and J. Campbell. Critical assessment of reduced pressure test. Part 1: Porosity phenomena. *International Journal of Cast Metals Research*, 17(5):280–286, 2004.
- [48] D. Dispinar and J. Campbell. Use of bifilm index as an assessment of liquid metal quality. *International Journal of Cast Metals Research*, 19(1):5–17, 2006.
- [49] M.T. Rowley. *International atlas of casting defects*. American Foundrymen’s Society, 1974.
- [50] J. Hejazi and P. Davami. *International atlas of casting defects (persian translation)*. Iranian Foundrymen’s Society, 1986.
- [51] D.M. Stefanescu. Computer simulation of shrinkage related defects in metal castings—a review. *International Journal of Cast Metals Research*, 18(3):129–143, 2005.
- [52] D.M. Stefanescu. *Science and engineering of casting solidification*. Springer Verlag, 2008.
- [53] Q. Han. Motion of bubbles in the mushy zone. *Scripta Materialia*, 55(10):871–874, 2006.
- [54] P.D. Lee and J.D. Hunt. Hydrogen porosity in directional solidified aluminium-copper alloys: in situ observation. *Acta Materialia*, 45(10):4155–4169, 1997.
- [55] P.D. Lee and J.D. Hunt. Hydrogen porosity in directionally solidified aluminium–copper alloys: a mathematical model. *Acta Materialia*, 49(8):1383–1398, 2001.
- [56] C.D. Sulfredge, L.C. Chow, and K. Tagavi. Solidification void formation for cylindrical geometries. *Experimental Heat Transfer*, 3(3):257–268, 1990.
- [57] C.D. Sulfredge, L.C. Chow, and K.A. Tagavi. Void formation in radial solidification of cylinders. *Journal of Solar Energy Engineering*, 114:32–39, 1992.
- [58] JM Kim, DG Kim, HW Kwon, and CR Loper. Pore behavior at the solid/liquid interface during solidification. *Scripta materialia*, 39(7):969–975, 1998.
- [59] K. Tagavi, LC Chow, and O. Solaiappan. Void formation in unidirectional solidification. *Experimental Heat Transfer*, 3(3):239–255, 1990.
- [60] CD Sulfredge, LC Chow, and KA Tagavi. Void initiation and growth in unidirectional freezing: the influence of natural convection. *Experimental Heat Transfer*, 6(4):411–436, 1993.
- [61] A. Toramaru, A. Ishiwatari, M. Matsuzawa, N. Nakamura, and S. Arai. Vesicle layering in solidified intrusive magma bodies: a newly recognized type of igneous structure. *Bulletin of volcanology*, 58(5):393–400, 1996.
- [62] MA Rogerson and SSS Cardoso. Patterns of bubble desorption during the solidification of a multicomponent melt. *Journal of Fluid Mechanics*, 419:263–282, 2000.

- [63] D. Sun and S.V. Garimella. Numerical and Experimental Investigation of Solidification Shrinkage. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 52(2):145–162, 2007.
- [64] Y. Awano and K. Morimoto. Shrinkage morphology of Al-Si casting alloys. *International Journal of Cast Metals Research*, 17(2):107–114, 2004.
- [65] J. Campbell. On the Origin of Porosity in Long Freezing-Range Alloys. *The British Foundryman*, 62(4):147–158, 1969.
- [66] W.S. Pellini. Factors which determine riser adequacy and feeding range. *AFS Transactions*, 61:61–80, 1953.
- [67] K.D. Carlson, R.A. Hardin, S. Ou, and C. Beckermann. Development of new feeding-distance rules using casting simulation: Part I. Methodology. *Metallurgical and Materials Transactions B*, 33(5):731–740, 2002.
- [68] S. Ou, K.D. Carlson, R.A. Hardin, and C. Beckermann. Development of new feeding-distance rules using casting simulation: Part II. The new rules. *Metall. Mater. Trans. B*, 33(5):741–755, 2002.
- [69] S. Bounds, G. Moran, K. Pericleous, M. Cross, and T.N. Croft. A computational model for defect prediction in shape castings based on the interaction of free surface flow, heat transfer, and solidification phenomena. *Metallurgical and Materials Transactions B*, 31(3):515–527, 2000.
- [70] E. Niyama, T. Uchida, M. Morikawa, and S. Saito. A method of shrinkage prediction and its application to steel casting practice. *AFS Int. Cast Metals Journal*, 7(3):52–63, 1982.
- [71] P.N. Hansen and P.R. Sahm. How to Model and Simulate the Feeding Process in Casting to Predict Shrinkage and Porosity Formation. In A.F. Giamei and G.J. Abbaschian, editors, *Modeling of Casting and Welding Process IV*, pages 33–42. TMS-AIME, 1988.
- [72] G.K. Sigworth and C. Wang. Mechanisms of porosity formation during solidification: A theoretical analysis. *Metall. Mater. Trans. B*, 24(2):349–364, 1993.
- [73] K.D. Carlson and C. Beckermann. Prediction of Shrinkage Pore Volume Fraction Using a Dimensionless Niyama Criterion. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 40(1):163–175, 2009.
- [74] M.C. Flemings. *Solidification Processing*. McGraw-Hill, 1974.
- [75] R.G. Santos and A. Garcia. Analytical technique for the determination of solidification rates during the inward freezing of cylinders. *Journal of Materials Science*, 18(12):3578–3590, 1983.
- [76] R.G. Santos and A. Garcia. Thermal behaviour during the inward solidification of cylinders and spheres and correlation with structural effects. *Int. J. Cast Metals Res.*, 11:187–195, 1998.
- [77] B. Ravi. *Metal Casting: Computer Aided Design and Analysis*. Prentice Hall of India, India, 2005.
- [78] R. Wlodawer. Directional solidification of steel castings. 1966.
- [79] P. Davami. *Cast Irons: principles of gating systems and risering*. Iranian Foundryman Society (in persian), 1983.
- [80] J.R. Brown. *Foseco ferrous foundryman's handbook*. Butterworth-Heinemann, 2000.
- [81] J. Campbell. *Castings practice: the 10 rules of castings*. Butterworth-Heinemann, 2004.
- [82] R.D. Pehlke. Computer simulation of solidification processes—The evolution of a technology. *Metallurgical and Materials Transactions B*, 33(4):519–541, 2002.
- [83] D.A. Tortorelli, J.A. Tomasko, T.E. Morthland, and J.A. Dantzig. Optimal design of nonlinear parabolic systems. II: Variable spatial domain with applications to casting optimization. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 113(1-2):157–172, 1994.
- [84] P.E.B. Morthland, D.A. Tortorelli, and J.A. Dantzig. Optimal riser design for metal castings. *Metallurgical and Materials Transactions B*, 26:871, 1995.
- [85] S.A. Ebrahimi, D.A. Tortorelli, and J.A. Dantzig. Sensitivity analysis and nonlinear programming applied to investment casting design. *Applied Mathematical Modelling*, 21(2):113–123, 1997.

- [86] D.A. Tortorelli and P. Michaleris. Nonlinear programming in process modeling and design. *JOM Journal of the Minerals, Metals and Materials Society*, 55(3):46–54, 2003.
- [87] DA Tortorelli and P. Michaleris. Design sensitivity analysis: overview and review. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 1(1):71–105, 1994.
- [88] R.W. Lewis, M.T. Manzari, and D.T. Gethin. Thermal optimisation in the sand casting process. *Engineering Computations*, 18(3-4):392–416, 2001.
- [89] R.W. Lewis and R.S. Ransing. A correlation to describe interfacial heat transfer during solidification simulation and its use in the optimal feeding design of castings. *Metallurgical and Materials Transactions B*, 29(2):437–448, 1998.
- [90] RW Lewis and RS Ransing. The optimal design of interfacial heat transfer coefficients via a thermal stress model. *Finite Elements in Analysis & Design*, 34(2):193–209, 2000.
- [91] R.S. Ransing and M.P. Sood. Optimization in castings—An overview of relevant computational technologies and future challenges. *Metallurgical and Materials Transactions B*, 37(6):905–911, 2006.
- [92] R.. Tavakoli and P. Davami. Design optimization of feeding system in sand-mold shape casting process. in: *Second shared symposium of engineering metallurgy and foundryman society, Karaj Azad University (in persian)*, 2008.
- [93] G. Allaire. Shape optimization by the homogenization method, 2002.
- [94] M.P. Bendsoe and O. Sigmund. *Topology optimization: theory, methods, and applications*. Springer, 2003.
- [95] J. Zowe, M. Kočvara, and M.P. Bendsøe. Free material optimization via mathematical programming. *Mathematical Programming*, 79(1):445–466, 1997.
- [96] P. Duysinx and MP Bendsoe. Topology optimization of continuum structures with local stress constraints. *International journal for numerical methods in engineering*, 43(8), 1998.
- [97] C.P. Hong. *Computer Modelling of Heat and Fluid Flow in Materials Processing*. CRC Press, 2004.
- [98] S. Osher and R.P. Fedkiw. *Level set methods and dynamic implicit surfaces*. Springer, 2003.
- [99] R.T. Rockafellar and J.B.W. Roger. *Variational analysis*. Springer, 1997.
- [100] I. Ekeland and R. Temam. *Convex analysis and variational problems*. Society for Industrial Mathematics, 1999.
- [101] J.M. Borwein and Q.J. Zhu. *Techniques of variational analysis*. Springer, 2005.
- [102] B.S. Mordukhovich. *Variational analysis and generalized differentiation, Vol. I, II*. Springer, 2006.
- [103] J.M. Aguirregabiria, A. Hernández, and M. Rivas. δ -function converging sequences. *Amer. J. Phys.*, 70:180, 2002.
- [104] L. Tartar. Some remarks on separately convex functions. *Institute for Mathematics and Its Applications*, 54, 1993.
- [105] L. Tartar. An introduction to the homogenization method in optimal design, in: *Optimal Shape Design, Lecture Notes in Mathematics*, Pages 47-156.
- [106] L. Tartar. H-measures, a new approach for studying homogenisation, oscillations and concentration effects in partial differential equations. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A. Mathematics*, 115(3-4):193–230, 1990.
- [107] F. Murat and L. Tartar. H-convergence. *Progress in nonlinear differential equations and their applications*, 31:21–44, 1997.
- [108] P. Pedregal. Fully explicit quasiconvexification of the mean-square deviation of the gradient of the state in optimal design. *Electronic Research Announcements of the AMS*, 7:72–78.

- [109] A. Donoso. Numerical simulations in 3D heat conduction: minimizing the quadratic mean temperature gradient by an optimality criteria method. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 28:929, 2006.
- [110] F. Maestre and P. Pedregal. Quasiconvexification in 3-D for a variational reformulation of an optimal design problem in conductivity. *Nonlinear Analysis*, 64(9):1962–1976, 2006.
- [111] F. Maestre, A. Munch, and P. Pedregal. A spatio-temporal design problem for a damped wave equation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 68(1):109–132, 2008.
- [112] A. Münch, P. Pedregal, and F. Periago. Relaxation of an optimal design problem for the heat equation. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 89:225–247, 2008.
- [113] F. Maestre and P. Pedregal. Dynamic materials for an optimal design problem under the two-dimensional wave equation. *Dynamical Systems*, 23(3):973–990, 2009.
- [114] P. Pedregal. *Parametrized measures and variational principles*. Birkhäuser, 1997.
- [115] P. Pedregal. Optimization, relaxation and Young measures. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 36:27–58, 1999.
- [116] P. Pedregal. Constrained quasiconvexity and structural optimization. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 154(4):325–342, 2000.
- [117] P. Pedregal. Multi-scale Young measures. *Transactions of the American Mathematical Society*, 358(2):591, 2006.
- [118] B. Dacorogna. *Direct methods in the calculus of variations*. Springer-Verlag New York, Inc. New York, NY, USA, 1989.
- [119] J.C. Bellido, A. Donoso, and P. Pedregal. Optimal Design in Conductivity Under Locally Constrained Heat Flux. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, inpress, 2009.
- [120] A. Cherkaev and R.V. Kohn. *Topics in the mathematical modelling of composite materials*. Birkhauser, 1997.
- [121] AA Pankov. *G-convergence and homogenization of nonlinear partial differential operators*. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [122] L. Carbone and R. De Arcangelis. *Unbounded functionals in the calculus of variations: representation, relaxation, and homogenization*. CRC Press, 2001.
- [123] M.P. Bendsøe and O. Sigmund. Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of Applied Mechanics*, 69(9):635–654, 1999.
- [124] M. Burger and R. Stainko. Phase-field relaxation of topology optimization with local stress constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 45(4):1447–1466, 2007.
- [125] M. Hintermüller, K. Ito, and K. Kunisch. The primal-dual active set strategy as a semismooth Newton method. *SIAM Journal on Optimization*, 13:865, 2002.
- [126] M. Ulbrich. Semismooth Newton methods for operator equations in function spaces. *SIAM Journal on Optimization*, 13(3):805–841, 2003.
- [127] S. Dempe. *Foundations of bilevel programming*. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [128] J.F. Bonnans, J.C. Gilbert, C. Lemarechal, and C.A. Sagastizabal. *Numerical optimization: theoretical and practical aspects*. Springer-Verlag New York Inc, 2006.
- [129] D.P. Bertsekas. *Constrained optimization and Lagrange Multiplier methods*. Academic Press, 1982.
- [130] E. Casas. Control of an elliptic problem with pointwise state constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 24(6):1309–1318, 1986.
- [131] E. Casas and L.A. Fernandez. Optimal control of semilinear elliptic equations with pointwise constraints on the gradient of the state. *Applied Mathematics and Optimization*, 27(1):35–56, 1993.

- [132] W. Rudin. Real and complex analysis, Third edition. 1987.
- [133] O. Ghattas and J.H. Bark. Optimal control of two-and three-dimensional incompressible Navier-Stokes flows. *Journal of Computational Physics*, 136(2):231–244, 1997.
- [134] L.C. Evans. *Partial differential equations*. American Mathematical Society, 1998.
- [135] J. Barzilai and J.M. Borwein. Two-point step size gradient methods. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 8(1):141–148, 1988.
- [136] M. Raydan. The Barzilai and Borwein Gradient Method for the Large Scale Unconstrained Minimization Problem. *SIAM Journal on Optimization*, 7(1):26–33, 1997.
- [137] E.G. Birgin, J.M. Martínez, and M. Raydan. Nonmonotone spectral projected gradient methods on convex sets. *SIAM Journal on Optimization*, 10(4):1196–1211, 2000.
- [138] Y.H. Dai, W.W. Hager, K. Schittkowski, and H. Zhang. The cyclic Barzilai–Borwein method for unconstrained optimization. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 26(3):604, 2006.
- [139] L. Grippo, F. Lampariello, and S. Lucidi. A nonmonotone line search technique for Newton’s method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, pages 707–716, 1986.
- [140] W.W. Hager and H. Zhang. A new active set algorithm for box constrained optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 17(2):526–557, 2006.
- [141] D.A. Tortorelli and R.B. Haber. First-order design sensitivities for transient conduction problems by an adjoint method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28(4), 1989.
- [142] Y. Hao and A. Prosperetti. A numerical method for three-dimensional gas–liquid flow computations. *Journal of Computational Physics*, 196(1):126–144, 2004.
- [143] R. Tavakoli. CartGen: Robust, efficient and easy to implement uniform/octree/embedded boundary Cartesian grid generator. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 57(12), 2008.
- [144] S.V. Patankar. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Taylor & Francis, 1980.
- [145] VR Voller. Numerical treatment of rapidly changing and discontinuous conductivities. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44(23):4553–4556, 2001.
- [146] R. Tavakoli and P. Davami. Unconditionally stable fully explicit finite difference solution of solidification problems. *Metallurgical and Materials Transactions B*, 38(1):121–142, 2007.
- [147] K. Ito and K. Kunisch. Receding horizon control with incomplete observations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 45(1):207–225, 2007.
- [148] R. Becker, D. Meidner, and B. Vexler. Efficient numerical solution of parabolic optimization problems by finite element methods. *Optimization Methods and Software*, 22(5):813–833, 2007.
- [149] A.R. Conn, K. Scheinberg, and L.N. Vicente. Introduction to derivative-free optimization. 2009.
- [150] G.S. Jiang and C.W. Shu. Efficient implementation of weighted ENO schemes. *Journal of Computational Physics*, 126(1):202–228, 1996.
- [151] G.S. Jiang and D. Peng. Weighted ENO schemes for Hamilton-Jacobi equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 21(6):2126–2143, 2000.
- [152] C.W. Shu. High Order Weighted Essentially Nonoscillatory Schemes for Convection Dominated Problems. *SIAM Review*, 51:82, 2009.
- [153] R.P. Brent. An algorithm with guaranteed convergence for finding a zero of a function. *The Computer Journal*, 14(4):422–425, 1971.
- [154] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing. 2007.
- [155] E.S. George, S.P. Elder, and G.J. Abbaschian. Thermal Profiles Measured During Casting of a Steel Hammer. In A.F. Giamei and G.J. Abbaschian, editors, *Modeling of Casting and Welding Process IV*, pages 775–788. TMS-AIME, 1988.

- [156] T. Nakagawa. Three-dimensional simulation of a hammer casting using the finite element method. In A.F. Giamei and G.J. Abbaschian, editors, *Modeling of Casting and Welding Process IV*, pages 833–838. TMS-AIME, 1988.
- [157] Zhu J.D. Ohnaka, I. Three dimensional analysis of a hammer casting by direct finite difference method. In A.F. Giamei and G.J. Abbaschian, editors, *Modeling of Casting and Welding Process IV*, pages 839–844. TMS-AIME, 1988.
- [158] I. Imafuku and K. Chijiwa. A Mathematical Model for Shrinkage Cavity Prediction in Steel Castings. *AFS Transactions*, 91:527–540, 1983.
- [159] J. Lowengrub and L. Truskinovsky. Quasi-incompressible Cahn-Hilliard fluids and topological transitions. *Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, pages 2617–2654, 1998.
- [160] H. Abels and E. Feireisl. On a diffuse interface model for a two-phase flow of compressible viscous fluids. *Indiana University Mathematics Journal*, 57(2):659–698, 2008.
- [161] M. Timmel, M. Kaliske, and S. Kolling. Modelling of microstructural void evolution with configurational forces. *ZAMM· Z. Angew. Math. Mech*, 89(8):698–708, 2009.
- [162] B. Bourdin and A. Chambolle. Design-dependent loads in topology optimization. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 9:19–48, 2003.
- [163] S. Zhou and M.Y. Wang. Multimaterial structural topology optimization with a generalized Cahn–Hilliard model of multiphase transition. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 33(2):89–111, 2007.
- [164] P. Wei and M.Y. Wang. Piecewise constant level set method for structural topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 78(4), 2009.
- [165] K.C. Hui. Geometric aspects of the mouldability of parts. *Computer-aided design*, 29(3):197–208, 1997.
- [166] H.K. Ahn, M. De Berg, P. Bose, S.W. Cheng, D. Halperin, J. Matoušek, and O. Schwarzkopf. Separating an object from its cast. *Computer-Aided Design*, 34(8):547–559, 2002.
- [167] Z.P. Yin, H. Ding, and Y.L. Xiong. Visibility theory and algorithms with application to manufacturing processes. *International Journal of Production Research*, 38(13):2891–2909, 2000.
- [168] M.W. Fu, AYC Nee, and J.Y.H. Fuh. The application of surface visibility and moldability to parting line generation. *Computer-Aided Design*, 34(6):469–480, 2002.
- [169] M.W. Fu. The application of surface demoldability and moldability to side-core design in die and mold CAD. *Computer-Aided Design*, 40(5):567–575, 2008.

Optimal Design of Feeding System in Steel Castings

Abstract:

In the present study, the optimal design of feeding system in steel sand-mold castings is considered. The first part of this research includes fundamental studies on the physics of shrinkage defect formation during the casting process. The results of these studies lead to new findings on the mechanism of shrinkage defect formation, effect of melt quality on the distribution of defects within the castings and the connection between shrinkage and gases defects. The theoretical analysis of thermal criterion functions for the prediction of shrinkage defects in castings and introducing new criterion function with fewer shortcomings can be accounted as the other finding of this part. A new model was introduced in the second part of this research for the purpose of optimal design of feeding system in the shape casting processes. In this model the optimal design problem is formulated as a point-wise constrained topology optimization problem. Unlike alternative methods, the presented method does not require any pre-designed feeding system as an initial guess. Using the functional analysis on the infinite-dimensional function spaces, a numerically efficient method was introduced to solve the optimal design problem in this study. By using extensive numerical experiments, capabilities and limitations of the presented method were studied in the last part of this research.

Keywords: *Optimal design of feeding system, Point-wise constrained topology optimization, Thermal criterion functions, Niyama criterion, Shrinkage defects prediction, Tensile strength of liquids.*



Sharif University of Technology
Department of Materials Science and Engineering

A dissertation submitted in partial fulfillment
of the requirements for the degree of
Doctor of Philosophy

Optimal Design of Feeding System in Steel Castings

by:

Ruhollah Tavakoli

Supervisor:

Parviz Davami

September 2009