



HAL
open science

Modèle d'adhésion cicatrisante et applications au contact verre/élastomère

Mathieu Schryve

► **To cite this version:**

Mathieu Schryve. Modèle d'adhésion cicatrisante et applications au contact verre/élastomère. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2008. Français. NNT: . tel-00487968

HAL Id: tel-00487968

<https://theses.hal.science/tel-00487968>

Submitted on 31 May 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Provence

Thèse

présentée par

Mathieu Schryve

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Provence

Discipline : Mécanique

Date de soutenance : le 04 Novembre 2008

**Modèle d'adhésion cicatrisante et applications
au contact verre/élastomère**

Directeurs de thèse : Michel Raous et Marius Cocou

Jury

Laurent Baillet	Rapporteur
Michel Frémond	Rapporteur
Gianpietro Del Piero	Examineur
Nunziante Valoroso	Examineur
Marius Cocou	Directeur de thèse
Michel Raous	Directeur de thèse
Michel Barquins	Invité

Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique du CNRS de Marseille dirigé par Madame Dominique Habault, au sein de l'équipe Modélisation en Mécanique du Contact.

Mes premiers remerciements vont à mes deux directeurs de thèse : Michel Raous et Marius Cocou. Leur complémentarité sur les problèmes concernant la modélisation des interfaces m'a été d'un réel atout. Leur soutien, leur aide et leur confiance témoignée durant ces années de thèse sont autant de marque de la qualité de leur encadrement.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Michel Frémond et Laurent Baillet pour avoir accepté d'expertiser ce travail en tant que rapporteur et je les remercie pour leurs remarques très constructives.

Gianpetro Del Piero, Nunzianta Valoroso et Michel Barquins ont également accepté de faire partie de ce jury. Je remercie Gianpetro Del Piero pour les discussions enrichissantes que nous avons pu avoir durant ma dernière année de thèse. Je remercie Nunzianta Valoroso pour ses remarques et ses commentaires. Et enfin, je tiens à remercier Michel Barquins pour son enthousiasme et cette envie qu'il m'a donnée de m'intéresser plus particulièrement à ses expériences de contact verre/élastomère.

Je remercie chaleureusement l'ensemble des membres de l'équipe MMC avec lesquels il est vraiment agréable de travailler ou simplement de discuter et plus particulièrement, Frédéric Lebon pour son soutien en tant que responsable de l'équipe, Iulian Rosu pour son aide dans le code LMGC90 et son assistance informatique généreuse au sein de l'équipe et Annie Fornacciari pour son aide constante et sa disponibilité sans équivalent.

J'adresse un remerciement particulier à François Kuss, mon binôme de thèse, qui a soutenu avant moi alors que durant ces années je l'ai souvent entraîné dans des promenades dans les calanques, des matchs de tennis ou perturbé en prétextant ne rien connaître en informatique.

Je souhaite également remercier toutes les personnes rencontrées au cours de ces années, trop nombreuses pour les citer, qui ont contribué à l'excellent souvenir que je garderai de mon passage au LMA.

Table des matières

Introduction	13
<hr/>	
I Physique de l'interaction entre deux corps	17
<hr/>	
I.1 Interactions à l'échelle des atomes	18
I.1.1 Les interactions à faibles portées	18
I.1.2 Les interactions à longues portées	18
I.1.3 Le potentiel de répulsion	19
I.1.4 Le potentiel de Lennard-Jones	20
I.2 Interactions à l'échelle des surfaces	20
I.2.1 Le passage à l'échelle des surfaces	21
I.2.2 L'énergie d'adhésion w	23
I.2.3 L'hystérésis d'adhésion	26
I.3 Conclusions	28
II Quelques modèles classiques pour le contact verre/élastomère	29
<hr/>	
II.1 Sollicitation de type indentation	30
II.1.1 Effort de « pull-off », augmentation du rayon de contact et col d'adhésion	31
II.1.2 Hystérésis lors de cycles approche/séparation	34
II.1.3 « Jump-on » et « jump-off »	37
II.2 Sollicitation tangentielle	38
II.2.1 Les limites de la loi de Coulomb	38
II.2.2 L'apparition des plis de recollement à faible vitesse	40
II.2.3 L'apparition des ondes de Schallamach	41
II.3 Conclusions	44

III Formulation en grandes déformations du problème de contact avec adhésion 45

III.1	Caractérisation de l'interaction entre les surfaces	46
III.1.1	Notations	46
III.1.2	Cadre cinématique	47
III.1.3	Principe d'action-réaction généralisé	50
III.2	Formulation du problème dynamique	52
III.2.1	Principe des puissances virtuelles et principes de la thermodynamique	52
III.2.2	Lois d'état et lois complémentaires	56
III.2.3	Comportements volumiques considérés	58
III.2.4	Forme locale du problème d'adhésion en représentation lagrangienne	59
III.3	Conclusions	60

IV Modèles d'interface classiques et modèle d'adhésion cicatrisante 61

IV.1	Les lois de Signorini et de Coulomb	62
IV.2	Le modèle Maugis-Dugdale et son extension à la modélisation du contact adhésif frottant	63
IV.3	Le modèle RCCM et hypothèse des petites perturbations	66
IV.4	Le modèle d'adhésion cicatrisante	74
IV.5	Réflexions sur la dissipation surfacique et sur l'interaction tangentielle à distance	82
IV.6	Forme locale du problème dynamique de contact avec adhésion cicatrisante	85
IV.7	Formulations en petites perturbations du problème dynamique de contact avec adhésion cicatrisante	86
IV.8	Conclusions	91

V Résolution numérique 93

V.1	Généralités et présentation du code LMGC90	94
V.2	Extensions du traitement des lois d'interaction au traitement des lois du contact avec adhésion cicatrisante	99
V.2.1	Cas du modèle RCCM et du modèle d'adhésion cicatrisante	101
V.2.2	Cas du modèle Dugdale généralisé	101
V.3	Benchmark CSMA	103
V.3.1	Présentation du problème	103
V.3.2	Etude de L. Champaney et étude Abaqus	104
V.3.3	Etude avec la plateforme LMGC90	107
V.3.4	Conclusions	109
V.4	Un exemple de délaminage avec le modèle RCCM	109
V.5	Conclusions	113

VI Simulations de quelques problèmes avec adhésion cicatrisante **115**

VI.1 Contact adhésif entre une sphère élastique et un bloc cylindrique viscoélastique . . . 116

 VI.1.1 Le cas d'indentation de la sphère sur le bloc cylindrique 117

 VI.1.2 Le cas de la chute de la sphère sur le bloc cylindrique 123

VI.2 Etude de la formation du col d'adhésion selon l'expérience de M. Barquins 124

 VI.2.1 Avec le modèle Dugdale généralisé 127

 VI.2.2 Avec le modèle d'adhésion cicatrisante 129

 VI.2.3 Conclusion de l'étude 131

VI.3 Etude de l'hystérésis d'adhésion selon l'expérience de M. Barquins et D. Wehbi . . . 132

 VI.3.1 Avec la théorie de M. Barquins 133

 VI.3.2 Avec le modèle d'adhésion cicatrisante 134

VI.4 Conclusions et perspectives de simulations avec le modèle d'adhésion cicatrisante . . 148

 VI.4.1 Phénomènes « jump-on » et « jump-off » 148

 VI.4.2 Formation et propagation des ondes de Schallamach 149

Conclusion **151**

Bibliographie **154**

Index des notations

Notations générales :

$d(\cdot)/dt, (\dot{\cdot})$	notations de la dérivée particulaire
$(\cdot)^r, (\cdot)^{ir}$	décomposition des forces thermodynamiques en partie réversible et partie irréversible
$\partial_z(\cdot)$	sous-gradient de (\cdot) selon la variable z
$I_K(\bullet)$	fonction indicatrice de K , égale à 0 si $\bullet \in K$, de valeur infinie sinon
$[s]^-$	partie négative de s , égale à $-s$ si $s \leq 0$, de valeur nulle sinon

Notations relatives à l'alphabet latin :

A	constante de Hamaker, A varie de 0.4 à $4.10^{-9} J$
a_{ADH_CIC}	rayons de « contact » (m) selon le modèle d'adhésion cicatrisante
a_{DUG}	rayons de « contact » (m) selon le modèle de Maugis-Dugdale
a_H	rayons de contact (m) selon la théorie de Hertz
a_{JKR}	rayons de contact (m) selon la théorie de JKR (Jonhson, Kendall, Roberts)
b	paramètre de viscosité surfacique ($N.s.m^{-1}$), $b > 0$
C_N, C_T	rigidités initiales normale et tangentielle de l'interface ($N.m^{-3}$)
C^α	tenseur de Cauchy-Green droit dans $\Omega_t^\alpha \times]0, T[$
d_0^α	dissipation intrinsèque dans Ω_0^α
d^α	dissipation intrinsèque dans Ω_t^α
D_0	dissipation intrinsèque de l'interface définie sur $\Gamma_{0,C}^1$
D	dissipation intrinsèque de l'interface définie sur $\Gamma_{t,C}^1$
D^α	tenseur des taux de déformation dans $\Omega_t^\alpha \times]0, T[$
e^α	énergie interne massique du corps Ω_t^α
e_S	énergie interne surfacique de l'interface exprimée, par choix, sur $\Gamma_{t,C}^1$
E	module d'Young (Pa)
\tilde{E}	coefficient de viscosité volumique ($Pa.s$)
E^α	tenseur de Green-Lagrange dans $\Omega_t^\alpha \times]0, T[$
\mathcal{E}_c	énergie cinétique de Ω_t^α
\mathcal{E}_{int}	énergie interne de Ω_t^α
$f(\beta)$	fonction continue décroissante de β , $f(\beta) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$
f_0^α	densité massique de force dans Ω_0^α
f^α	densité massique de force dans $\Omega_t^\alpha \times]0, T[$

F^α	tenseur gradient de la transformation dans $\Omega_t^\alpha \times]0, T[$
$F_{0,d}^\alpha$	densité surfacique de force sur $\Gamma_{0,F}^\alpha$
F_d^α	densité surfacique de force sur $\Gamma_{t,F}^\alpha$
g	saut normal ou distance relative normale entre les deux corps à l'instant t , $g \geq 0$
\mathbf{g}	vecteur distance d'interaction ($\mathbf{g} := g\mathbf{n}$)
G	taux de restitution d'énergie ($J.m^{-2}$)
G^r	travail ($J.m^{-2}$) à fournir pour rompre une unité d'aire d'interface
G^c	travail ($J.m^{-2}$) récupéré au niveau de l'interface lors de la création d'une unité d'aire d'interface
G_β	force thermodynamique surfacique associée à β
$h(\beta)$	fonction de classe C^2 , $\partial h(\beta)/\partial \beta < 0$
H^α	matrice de passage des variables globales aux variables locales du point d'interaction α
j_p	rapport entre les éléments de surface en interaction à l'instant actuel
J_p	rapport entre les éléments de surface en interaction à l'état de référence
J^α	jacobien de la transformation dans $\Omega_t^\alpha \times]0, T[$
N^α	normale unitaire sortante de Γ_0^α
\mathbf{n}^α	normale unitaire sortante de Γ_t^α
\mathbf{n}	normale unitaire sortante de $\Gamma_{t,C}^\alpha$ en \mathbf{x}_p^2 , $\mathbf{n} := \mathbf{n}_p^2 = \mathbf{n}^2(\mathbf{x}_p^2(\mathbf{X}_p^2, t))$
p	exposant sans unité, $0 \leq p \leq 1$
P, P'	charges normales (N)
$P_{pull-off}$	effort de séparation de « Pull-off » (N)
\mathcal{P}_{acc}	puissance des quantités d'accélération de Ω_t^α
\mathcal{P}_{cal}	puissance calorifique reçue dans Ω_t^α
\mathcal{P}_{ext}	puissance des efforts extérieurs de Ω_t^α
\mathcal{P}_{int}	puissance des efforts intérieurs de Ω_t^α
r	position dans le plan de contact (m)
r_0	distance minimale de rapprochement de deux atomes, $r_0 \approx 0.1nm$
s^α	entropie massique du corps Ω_t^α
s_S	entropie surfacique de l'interface exprimée, par choix, sur $\Gamma_{t,C}^1$
\mathcal{S}	entropie de Ω_t^α
\mathbf{S}^α	second tenseur de Piola-Kirchhoff dans Ω_0^α
\mathbf{t}^α	vecteur contrainte d'interaction définis sur $\Gamma_{t,C}^\alpha$, $\mathbf{t}^\alpha := \boldsymbol{\sigma}^\alpha \mathbf{n}^\alpha$
\mathbf{t}	vecteur contrainte d'interaction défini sur $\Gamma_{t,C}^1$, $\mathbf{t} = -\mathbf{t}^1(\mathbf{x}^1)$
t_N, \mathbf{t}_T	décompositions normale et tangentielle du vecteur contrainte d'interaction, $\mathbf{t} = t_N \mathbf{n} + \mathbf{t}_T$
\mathbf{T}^α	vecteur contrainte d'interaction sur $\Gamma_{0,C}^\alpha$, $\mathbf{T}^\alpha := \mathbf{F}^\alpha \mathbf{S}^\alpha \mathbf{N}^\alpha$
\mathbf{T}	vecteur contrainte d'interaction défini sur $\Gamma_{0,C}^1$, $\mathbf{T} = -\mathbf{T}^1(\mathbf{X}^1, t)$
T_N, \mathbf{T}_T	décompositions normale et tangentielle du vecteur contrainte d'interaction, $\mathbf{T} = T_N \mathbf{n} + \mathbf{T}_T$
T	température absolue

\mathbf{v}^α	vitesse de \mathbf{x}^α dans Ω_t^α
$[\mathbf{v}]$	vitesse relative invariante par rapport au changement de référentiel
$[\mathbf{v}]^\alpha$	vitesse relative locale au point d'interaction α
\mathbf{v}_{free}^α	vitesse libre locale au point d'interaction α
\mathbf{V}^{free}	vitesse libre globale ou vitesse des corps sans considération de l'action des réactions d'interaction
\mathbf{V}^α	valeur de $\dot{\mathbf{x}}^\alpha$ dans Ω_0^α
w	énergie d'adhésion ($J.m^{-2}$), $w = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_{12}$
$w(r)$	potentiel d'interaction (J)
\mathbf{x}^α	mouvement $\forall t \in [0, T]$ de $\mathbf{X}^\alpha \in \Omega_0^\alpha$, $\mathbf{x}^\alpha = \mathbf{x}^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t)$
$\mathbf{x}_d^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t)$	condition de position imposée sur $\Gamma_{0,U}^\alpha$
\mathbf{x}_d^α	condition de position imposée sur $\Gamma_{t,U}^\alpha$
\mathbf{x}_p^2	projeté à l'instant t sur $\Gamma_{t,C}^2$ du point $\mathbf{x}^1(\mathbf{X}^1, t) \in \Gamma_{t,C}^1$ candidat à l'interaction
$[\dot{\mathbf{x}}]_{NSCD}^\alpha$	vitesse relative locale au point d'interaction α pour le solveur <i>NSCD</i>
\mathbf{X}	position globale des noeuds du maillage
$\dot{\mathbf{X}}$	vitesse globale aux noeuds du maillage

Notations relatives à l'alphabet grec :

α	facteur d'affaiblissement dans le modèle d'adhésion avec cicatrisation partielle, $\alpha \in [0, 1]$
β	intensité d'adhésion introduite par M. Frémond, $\beta = \beta(\mathbf{X}^1, t) \in [0, 1]$
β_0	valeur de l'intensité d'adhésion sur $\Gamma_{0,C}^1$, $\beta_0 \in [0, 1]$
β_s	seuil de cicatrisation correspondant à la valeur maximale de β dans le modèle d'adhésion avec cicatrisation partielle
β_s^0	valeur initiale du seuil d'intensité d'adhésion β_s , $\beta_s^0 \in [0, 1]$
γ	énergie de surface ($J.m^{-2}$) d'un corps
γ_{12}	énergie interfaciale ($J.m^{-2}$) entre le corps 1 et le corps 2
γ_p	projection orthogonale à l'instant t du point $\mathbf{x}^1(\mathbf{X}^1, t) \in \Gamma_{t,C}^1$ candidat à l'interaction sur $\Gamma_{t,C}^2$
Γ_0^α	frontières de Ω_0^α
$\Gamma_{0,U}^\alpha$	partie de Γ_0^α relative aux conditions de position imposée
$\Gamma_{0,F}^\alpha$	partie de Γ_0^α relative aux conditions d'effort imposé
$\Gamma_{0,C}^\alpha$	surface potentielle d'interaction de Γ_0^α
Γ_t^α	frontières de Ω_t^α
$\Gamma_{t,U}^\alpha$	partie de Γ_t^α relative aux conditions de position imposée
$\Gamma_{t,F}^\alpha$	partie de Γ_t^α relative aux conditions d'effort imposé
$\Gamma_{t,C}^\alpha$	surface potentielle d'interaction de Γ_t^α
δ	distance d'interaction du modèle Maugis-Dugdale
ΔT	pas de l'intégration temporelle
$\Delta T \mathbf{r}^\alpha$	impulsion d'interaction locale au point d'interaction α
$\Delta T \mathbf{r}_{NSCD}^\alpha$	impulsion d'interaction locale au point d'interaction α pour le solveur <i>NSCD</i>
$\Delta T \mathbf{R}$	impulsion de la réaction globale aux noeuds du maillage

η	coefficient de viscosité volumique (s)
θ	paramètre du schéma d'intégration temporel de type θ -méthode
κ	paramètre introduit par D. Tabor, rapport entre les effets des interactions et la rigidité des corps
λ, μ	coefficients de Lamé (Pa)
$\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$	coefficients de viscosité volumique ($Pa.s$)
μ	coefficient de frottement
μ_s	coefficient de frottement statique
μ_d	coefficient de frottement dynamique
ν	coefficient de Poisson
$\tilde{\nu}$	coefficient de viscosité
ξ_T	contribution tangentielle du déplacement relatif
$\mathbf{\Pi}^\alpha$	premier tenseur de Piola-Kirchhoff dans Ω_0^α
ρ_0^α	masse volumique dans Ω_0^α
ρ^α	masse volumique dans $\Omega_t^\alpha \times]0, T[$
σ	tension de surface ($J.m^{-2}$) d'un corps
$\boldsymbol{\sigma}^\alpha$	tenseur des contraintes de Cauchy dans $\Omega_t^\alpha \times]0, T[$
$\boldsymbol{\tau}^i$	vecteur tangent unitaire, $(\boldsymbol{\tau}^1, \boldsymbol{\tau}^2, \mathbf{n})$ forme une base locale en $\mathbf{x}_p^2 = \gamma_p(\mathbf{x}^1)$
ϕ^α	potentiel de dissipation dans Ω_t^α
Φ	pseudo-potentiel de dissipation défini sur $\Gamma_{0,C}^1$
$\tilde{\Phi}$	fonction de dissipation (> 1)
ψ^α	énergie libre massique dans Ω_t^α , $\psi^\alpha = e^\alpha - Ts^\alpha$
Ψ	énergie libre surfacique de l'interface définie sur $\Gamma_{t,C}^1$, $\Psi = e_S - Ts_S$
ω	coefficient de relaxation, $\omega \in]0, 1]$
Ω_0^α	configuration de référence du corps α
Ω_t^α	configuration actuelle du corps α

Introduction

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la modélisation du comportement de l'interface entre deux corps lors du contact adhésif. Elle se situe dans la lignée des travaux développés au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique sur des modèles couplant contact unilatéral, frottement et adhésion avec prise en compte éventuelle de viscosité dans l'évolution de l'adhésion.

Nous nous intéressons en particulier à des situations où l'adhésion peut être partiellement ou complètement rétablie lors de l'approche des deux corps préalablement séparés. Pour modéliser ces effets, nous proposons une extension du *modèle RCCM* (Raous - Cangémi - Cocou - Monerie). Dans ce mémoire, le travail est essentiellement centré sur le comportement normal de l'interface et sur la cicatrisation complète de l'adhésion. Ces aspects sont particulièrement adaptés à l'étude des contacts verre/élastomère en vue de simuler les effets des interactions à distance de type van der Waals associés au potentiel de Lennard-Jones.

Le phénomène d'adhésion, présent lors du contact entre deux corps, est à la base d'un très grand nombre d'applications récentes. Les effets de l'adhésion interviennent, par exemple, au niveau du contact pneu/bitume, au niveau des contacts relevant de l'étanchéité, réalisée par les joints à lèvres ou par les joints toriques, ou encore au niveau des contacts concernant les lécheurs de vitres pour ne citer que quelques applications de l'industrie automobile. Les processus de formation et de perte de l'adhésion et l'effet de l'adhésion sur le comportement global du contact sont autant de problèmes largement ouverts scientifiquement et industriellement.

Le récent article, paru dans le numéro d'avril 2008 de la revue *Sciences et Avenir*, portant sur la présentation d'un *caoutchouc autoréparant* témoigne de l'essor des travaux de recherche concernant le phénomène d'adhésion cicatrisante.

Les interactions atomiques sont à l'origine du phénomène d'adhésion [52]. Au sein d'un corps, chaque atome interagit avec ses voisins les plus proches. C'est l'existence de cette interaction qui est responsable de la cohésion d'un corps. En volume, chaque atome est entouré par un voisinage d'atomes, de sorte que la résultante des interactions qui s'exercent sur lui peut être considérée comme nulle. L'atome est « à l'équilibre ». Par contre, l'atome en surface, si une telle notion a un sens, n'a pas de voisin à l'extérieur du corps. Il est soumis à une résultante non nulle. Ainsi, si deux corps sont approchés suffisamment près l'un de l'autre, des forces d'attraction se manifestent avant même que le contact ne soit établi. Dans ce cas, les corps sont dits en *contact adhésif*, ils sont soumis à une *interaction*, des *liens adhésifs* existent.

C'est suite à l'étude d'une de ces interactions, appelée interaction d'hydrogène, que le caoutchouc, mis au point par P. Cordier dans le cadre de son travail de thèse [29] au Laboratoire Matière Molle et Chimie (ESPCI), peut être réparé par simple rapprochement des deux morceaux préalablement séparés. Selon la sollicitation appliquée au niveau de l'interface, les interactions ou liens adhésifs peuvent donc être rompus ou se créer.

Si les études expérimentales et de modélisation sur la rupture des liens adhésifs sont très largement répandues, paradoxalement, les études concernant leurs formations et leurs cicatrisations sont récentes. Dans le cadre de ce mémoire, nous proposons un modèle d'interface, appelé *modèle d'adhésion cicatrisante* rendant compte de la possible cicatrisation des liens adhésifs. Nous appliquons cette modélisation à la simulation numérique de phénomènes particuliers observés lors du

contact verre/élastomère sous sollicitation normale ou tangentielle. La plupart de ces études sont encore des problèmes ouverts pour ce qui relève de leurs modélisations.

Dans le cadre de ce mémoire, nous appelons *interface* l'ensemble constitué des deux surfaces en vis-à-vis et de leurs interactions attractives ou répulsives que nous détaillerons par la suite. Nous employons le terme de *contact adhésif* pour décrire un contact au sein duquel, du fait de la nature des corps considérés, des interactions ont lieu. Pour le contact verre/élastomère, les interactions sont naturellement présentes sans ajout d'un troisième corps adhésif.

Le modèle proposé dans ce mémoire décrit finement le comportement des processus d'endommagement et de cicatrisation des liens adhésifs. Il introduit de plus une *dissipation surfacique* liée au comportement des liens adhésifs par l'intermédiaire du paramètre de *viscosité surfacique*.

La considération d'une dissipation dans la modélisation du comportement de la rupture d'un contact adhésif est très répandue, citons par exemple les travaux de D. Maugis et M. Barquins [73]. Il est bien établi que la rupture d'un contact adhésif dépend de la vitesse de sollicitation au niveau de l'interface. Pour s'en rendre compte, il suffit de « décoller un morceau de scotch » à différentes vitesses. Plus la vitesse de séparation sera élevée, plus l'énergie à fournir pour rompre le contact sera importante. Le processus d'endommagement des liens adhésifs est retardé.

Concernant la dissipation introduite dans le modèle d'adhésion cicatrisante, l'originalité de notre approche est double.

Premièrement, à la différence des travaux de modélisation de M. Barquins [7], de K.L. Johnson [58] ou de J.A. Greenwood [46], nous considérons que la dissipation est directement liée au comportement des liens adhésifs. Les travaux précédents reliaient la dissipation, observée au niveau de l'interface, aux caractéristiques volumiques des corps. La dissipation était donc d'origine volumique. Dans notre approche, la dissipation est introduite au niveau du comportement de l'interface. Ce qui n'exclut pas de considérer que les corps en contact ont un comportement volumique dissipatif. Ainsi nous distinguons *dissipation surfacique*, liée au comportement des liens adhésifs présents à l'interface, et *dissipation volumique*, liée au comportement des corps. Selon les applications envisagées, la contribution de l'une ou l'autre de ces dissipations pourra être plus ou moins importante.

Deuxièmement, nous considérons que le processus de cicatrisation des liens est également dissipatif lorsque le paramètre de *viscosité surfacique* est pris en compte. Les comportements d'endommagement et de cicatrisation des liens adhésifs dépendent donc de la vitesse de sollicitation au niveau de l'interface. Un retard sur la cicatrisation ou sur l'endommagement des liens adhésifs est introduit.

Enfin soulignons que, dans le modèle d'adhésion cicatrisante, le comportement tangentiel est non adhésif. Il est du type frottement de Coulomb lorsque les corps sont en contact. Il y a deux raisons à ce choix. La première raison est liée aux applications envisagées dans le cadre de ce mémoire. Elles concernent le contact verre/élastomère. Les observations expérimentales de M. Barquins [14], de M. Barquins et D. Wehbi [11] et de A. Schallamach [104] montrent que, pour ce type de contact, le déplacement tangentiel relatif des corps à l'échelle des interactions est négligeable devant le déplacement normal relatif. Son rôle sur l'état d'endommagement ou de cicatrisation des liens adhésifs est donc négligeable. La seconde raison, détaillée par la suite, est liée à la formulation en grandes déformations du problème de contact adhésif à distance entre deux corps.

L'extension du comportement tangentiel de l'interface à l'adhésion cicatrisante reste un problème ouvert pour lequel nous proposons une première approche dans ce mémoire.

Ce mémoire contient six chapitres.

Le premier chapitre introduit les caractéristiques du phénomène d'adhésion, *énergie d'adhésion* et *dissipation surfacique*, qui seront retenues dans le modèle d'adhésion cicatrisante. La modélisation proposée du comportement de l'interface se place à *l'échelle des corps*. Le lien entre l'origine des interactions atomiques et ces caractéristiques, observées à l'échelle des corps, sera considéré.

Le second chapitre est consacré aux principales modélisations existantes qui permettent de rendre compte des manifestations de l'adhésion pour un contact verre/élastomère. Ce type de contact est particulier car les interactions jouent un rôle important, du fait de la faible rigidité de l'élastomère.

Dans un premier temps, nous précisons les particularités du contact verre/élastomère dont la modélisation de certaines restent des problèmes ouverts. Citons par exemple l'étude des cycles de charge/décharge sous sollicitation normale, réalisée par M. Barquins et D. Wehbi [14], ou l'étude de la formation et de la propagation des *ondes de Schallamach* [104] sous sollicitation tangentielle.

Dans un deuxième temps, nous présentons les théories analytiques existantes pour ce type de contact. Les résultats de ces théories seront autant d'éléments de comparaison qui permettront de valider notre approche lors de son application à la simulation numérique du contact verre/élastomère.

Le troisième chapitre porte sur la formulation en grandes déformations du problème de contact avec adhésion. La modélisation du comportement de l'interface est décrite, selon M. Frémond [41], dans le cadre de la théorie des matériaux standards généralisés [49] étendue au concept de surface matérielle [82]. Le comportement est caractérisé par deux potentiels thermodynamiques : une *énergie libre surfacique* et un *pseudo-potentiel de dissipation*.

Pour décrire le contact sans interaction entre deux corps en grandes déformations, il est classique, selon A. Curnier et al. [31], d'introduire un lien cinématique qui précise la position relative des deux surfaces en vis-à-vis et un lien sthénique qui précise l'interaction entre ces deux surfaces. Le lien cinématique choisi est celui de la projection orthogonale. Le lien sthénique choisi est celui du principe d'action-réaction généralisé.

Dans le cas de corps en interaction, c'est-à-dire dans le cas de corps exerçant un effort l'un sur l'autre sans être nécessairement en contact, la considération de ces deux liens implique des conséquences sur le comportement des modèles d'interface. En effet, nous verrons que le déplacement tangentiel relatif des surfaces en vis-à-vis ne peut pas être retenu comme variable d'état du comportement de l'interface. Nous verrons également que la considération d'un comportement tangentiel adhésif dans le modèle d'interface doit faire l'objet d'une attention particulière.

En fin de chapitre, nous donnons, suite à ces premiers choix de modélisation, les équations locales de la formulation dynamique en grandes déformations du problème de contact avec adhésion. Cette formulation généralise celles proposées pour l'étude de l'endommagement de l'interface dans le cas d'évolutions quasi-statiques en petites perturbations par L. Cangémi [21] et en grandes déformations par Y. Monerie [77] et A.S. Bretelle [17, 18].

Le quatrième chapitre présente les modèles d'interface retenus pour les simulations numériques de ce mémoire. Trois modèles sont présentés selon le formalisme introduit dans le chapitre précédent.

Le premier modèle est nommé *modèle Dugdale généralisé*. Il correspond au couplage du modèle Maugis-Dugdale [72] à un comportement tangentiel de type frottement de Coulomb.

Le second modèle est le *modèle RCCM*. Ce modèle a été développé au sein de l'équipe Modélisation en Mécanique du Contact durant les travaux de thèse de L. Cangémi [21] et de Y. Monerie [77]. L'état des liens adhésifs est décrit par la variable β , introduite par M. Frémond [41]. Dans ce modèle, seul l'endommagement des liens est autorisé, si bien que β ne peut que diminuer. La présentation du modèle RCCM dans ce chapitre fera l'objet de deux nouvelles discussions. La première porte sur son extension aux grandes déformations dans le cadre de la formulation décrite au chapitre précédent. Nous complétons ainsi les travaux réalisés par A.-S. Bretelle et al. [18] sur ce sujet. La seconde concerne la place des termes liés à l'énergie d'adhésion dans les deux potentiels thermodynamiques de l'interface. Cette discussion fait suite aux travaux initiés dans le cadre d'une collaboration entre M. Raous et G. Del Piero de l'Université Ferrara en vue de généraliser l'écriture des modèles d'interface [34].

Le troisième modèle présenté est le *modèle d'adhésion cicatrisante*. Ce modèle constitue l'originalité de ce travail. Il correspond à l'extension du modèle RCCM d'une part à la possible cicatrisation des liens lors du rapprochement des corps, en proposant une nouvelle loi d'évolution de β , et d'autre part à son application aux grandes déformations. Les trois paramètres du modèle d'adhésion cicatrisante sont l'*énergie d'adhésion*, la *rigidité normale maximale de l'interface* et la *viscosité surfacique* liée aux vitesses de sollicitation. Une étude paramétrique considérant différentes sollicitations de l'interface illustre l'influence de ces paramètres sur le comportement du modèle. Quelques réflexions sur les choix réalisés lors de l'établissement de ce modèle seront également proposées. Nous reviendrons sur la considération d'un comportement dissipatif lié aux processus d'endommagement et de cicatrisation des liens et sur la considération d'un comportement tangentiel exempt des effets de l'interaction adhésive.

Le cinquième chapitre décrit la résolution par la méthode des éléments finis des équations locales de la formulation dynamique en grandes déformations du problème de contact avec adhésion cicatrisante.

Il présente la plateforme LMGC90, développée par M. Jean [56] et F. Dubois [36] et dédiée au traitement sans régularisation des problèmes de dynamique en présence de conditions de contact avec frottement ou de modèle de zone cohésive. Dans ce chapitre, notre contribution a été d'adapter les méthodes numériques de la plateforme LMGC90 à la résolution du problème avec adhésion cicatrisante. Elle consiste en deux apports. Le premier est une méthode de point fixe portant sur la variable β . Cette méthode est liée à l'intégration implicite de l'équation différentielle qui décrit l'évolution de β . Le second correspond à l'application de plusieurs changements de variable afin que les équations du problème avec adhésion cicatrisante se mettent sous une forme appropriée en vue d'utiliser le solveur de contact de la plateforme LMGC90.

En fin de chapitre deux études sur la résolution de problèmes classiques de contact sont présentées. Elles correspondent à un problème sans adhésion, celui d'un Benchmark de contact de type Hertz avec frottement, et à un problème avec adhésion, celui du délaminage d'une fine couche d'aluminium initialement collée sur un substrat rigide. Les résultats obtenus permettent de valider la résolution numérique proposée.

Le sixième chapitre présente les simulations de quelques problèmes avec adhésion cicatrisante.

La première simulation porte sur des exemples académiques de contact adhésif entre une sphère élastique et un bloc cylindrique viscoélastique. Elle permet de valider la résolution numérique du problème avec adhésion cicatrisante et de caractériser les effets dus à la dissipation surfacique et à la dissipation volumique.

La seconde simulation concerne l'étude de la formation du col d'adhésion. L'exemple retenu est issu des expériences de M. Barquins [8]. Cet exemple peut être considéré comme un Benchmark de contact adhésif. Les différents résultats obtenus sont en accord avec ceux des expériences et de la théorie JKR [62], développée par K.L. Johnson, K. Kendall et A.D. Roberts.

La simulation suivante traite l'étude des dissipations lors de cycle d'approche/séparation d'une bille de verre sur un support en polyuréthane. Cette simulation, comme celle de la formation et de la propagation des ondes de Schallamach, est encore largement ouverte. En effet, les théories analytiques et approches existantes évoquées au cours de ce mémoire sont limitées ou ne permettent pas, à notre connaissance, l'analyse de telles applications. Le modèle d'adhésion cicatrisante apporte une nouvelle contribution dans l'étude de ces problèmes.

Chapitre I

PHYSIQUE DE L'INTERACTION ENTRE DEUX CORPS

L'objectif de cette thèse est la modélisation du comportement de l'interface entre deux corps soumis à une sollicitation extérieure. Dans cette étude, nous appelons *interface*, l'ensemble constitué des deux surfaces en vis-à-vis et de leurs interactions attractives ou répulsives. Ce chapitre précise l'origine des interactions à l'échelle des atomes et décrit les caractéristiques du phénomène d'adhésion à l'échelle des surfaces.

Nous verrons que les propriétés observées lors de l'étude des interactions atomiques au paragraphe I.1 ne peuvent pas être étendues simplement à l'échelle des surfaces. Le changement d'échelle est influencé par de nombreux paramètres [32, 44, 121] comme le milieu environnant, la rugosité des surfaces, la vitesse de sollicitation des corps . . .

Dans le paragraphe I.2, l'*énergie d'adhésion* w sera introduite. Elle caractérise la valeur du travail nécessaire pour rompre une unité d'aire d'interface dans le cas de chargement quasi-statique. Nous précisons que *le comportement de l'interface dépend de la vitesse de sollicitation et diffère selon que la sollicitation soit de type séparation ou de type approche*. Nous distinguerons deux sources de dissipation responsables de cet hystérésis : l'une surfacique, issue du comportement de l'interaction atomique à l'échelle des surfaces, la seconde volumique, due aux grandes déformations observées en chacun des corps dans une zone plus ou moins proche des surfaces en vis-à-vis.

Les conclusions et remarques de ce chapitre justifieront les choix réalisés lors de la modélisation du comportement de l'interface proposée au paragraphe IV.4.

I.1 Interactions à l'échelle des atomes

Du fait de l'étendue des manifestations de l'interaction atomique (dans les liquides, corps cristallins, corps organiques, milieux vivants), les différentes approches et recherches ont abouti à une multitude de modèles d'interaction dont il est parfois difficile de faire le lien. Plusieurs interactions sont distinguées, bien que celles-ci aient toutes la même origine électrique : ce sont les électrons gravitant autour des atomes ou au sein des molécules qui interagissent pour donner lieu aux liaisons interatomiques ou intermoléculaires [74].

Nous retiendrons l'approche suivante, décrite par D. Tabor dans [115] ou par J.N. Israelachvili dans [53] : chaque force d'interaction \mathbf{f} (en N) dérive d'un potentiel d'interaction w (en J), fonction de la distance r entre les entités (atomes ou molécules) considérées. Ce potentiel d'interaction s'écrit sous forme générale

$$w(r) = \frac{A}{r^n} - \frac{B}{r^m} \text{ et donc } \mathbf{f}(r) = -\mathbf{grad}(w(r)), \quad (\text{I.1})$$

où A (en $J.m^n$) et B (en $J.m^m$) sont des constantes positives, n et m des entiers positifs non nuls, avec $n < m$. Le potentiel d'interaction est donc la somme de deux termes, l'un d'effet attractif en $1/r^n$ et l'autre d'effet répulsif en $1/r^m$. La taille des milieux dans lesquels sont plongées les deux entités n'influe pas sur l'intensité de leur interaction, la composante attractive du potentiel d'interaction (I.1) est donc telle que $n > 3$ [52].

La convention de signe adoptée (équation (I.1)) sera retenue tout au long de ce mémoire : la composante attractive est affectée d'un signe positif, celle répulsive d'un signe négatif.

La classification la plus répandue, mais non exhaustive, *des interactions attractives* (terme en $1/r^n$) est constituée des interactions à faibles portées et des interactions à longues portées.

I.1.1 Les interactions à faibles portées

Leurs rayons d'action sont de l'ordre de 0.15 à 0.25 nm . Trois types de liaisons sont distinguées (figure I.1) : les liens covalents et les liens ioniques, dont les potentiels ont une énergie maximale de l'ordre de $10.10^{-19} J$ à température ambiante, et les liens métalliques d'énergie maximale de l'ordre de $5.10^{-19} J$ à température ambiante.

Ces liaisons, de rayon d'action faible, ne sont généralement pas responsables de l'interaction des corps. En surface, elles sont écartées par les couches d'oxyde. De plus, lors d'un contact entre surfaces rugueuses, elles agissent seulement au niveau des aspérités les plus hautes, les corps soumis à ces interactions étant peu déformables.

I.1.2 Les interactions à longues portées

Leurs rayons d'action sont de l'ordre de 0.3 à 0.4 nm . Deux types de liaisons sont distinguées (figure I.1) : les liaisons de type van der Waals, dont les potentiels ont une énergie maximale de l'ordre de $2.10^{-19} J$ à température ambiante, et celles d'hydrogène d'énergie maximale de l'ordre de $0.4 10^{-19} J$ à température ambiante. En volume, ce sont les liens agissant entre les molécules. Lors de l'approche de deux corps, ce sont les premières interactions susceptibles d'être observées.

Les liaisons d'hydrogène sont par exemple à l'origine de la cohésion de l'eau sur les corps. Pour les applications considérés par la suite, elles seront non présentes ou d'effet négligeable.

Les liaisons de van der Waals sont issues des perpétuelles fluctuations dans la distribution des charges des atomes ou des molécules. Elles interviennent par exemple dans la cohésion des chaînes macromoléculaires afin de former les polymères faiblement réticulés ou les élastomères.

Il est maintenant convenu [30, 32, 44] que l'interaction de type van der Waals est en grande partie responsable du phénomène d'adhésion lorsque l'un des corps en contact est un polymère ou un élastomère.

L'interaction de van der Waals se compose de trois interactions indépendantes, suivant les molécules ou dipôles considérés. La liaison de Keesom (1912) ou force d'orientation et la liaison de Debye (1920) ou force d'induction sont toutes deux de faible contribution. La liaison de London (1930) ou force de dispersion est la force de contribution prépondérante. L'ensemble des interactions de van der Waals peut se résumer en un potentiel unique d'attraction $\tilde{w}(r)$ du type,

$$\tilde{w}(r) = \frac{C}{r^6}. \quad (\text{I.2})$$

Cette interaction est toujours présente quels que soient les atomes ou molécules considérés, C évoluant suivant les cas.

I.1.3 Le potentiel de répulsion

A toutes ces interactions attractives, il convient d'ajouter l'interaction dite de répulsion. Cette répulsion est souvent énoncée comme principe d'exclusion de Pauli. Deux noyaux atomiques ne peuvent pas se superposer, deux électrons ne pouvant se trouver dans un même état quantique. Une distance minimale de rapprochement r_0 a été introduite, elle est de l'ordre de 0.1 à 0.2 nm.

Born Mayer a interprété ce phénomène par un potentiel de répulsion de forte énergie, dépendant exponentiellement de la distance interatomique. Pour simplifier l'étude, nous considérerons ce potentiel de répulsion en $1/r^{12}$, forme classiquement retenue dans la littérature.

Ce potentiel de répulsion a été retranché à chacun des potentiels des interactions attractives précédemment rencontrées afin d'obtenir les courbes de la figure I.1. Ces courbes donnent une idée de la portée de chacune des interactions.

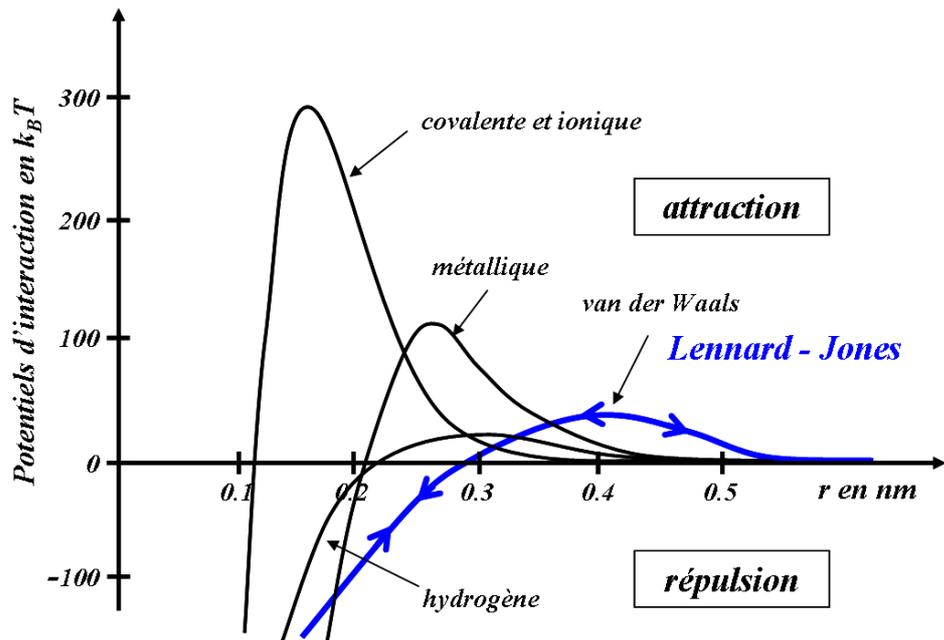


FIG. I.1 – Evolutions des potentiels des interactions interatomiques et intermoléculaires [32] ($k_B T \approx 4.10^{-21} \text{ J}$ à T ambiante, k_B est la constante de Boltzmann).

I.1.4 Le potentiel de Lennard-Jones

L'ajout du potentiel de répulsion en $1/r^{12}$ à l'interaction de van der Waals forme le potentiel de Lennard-Jones. Le potentiel de Lennard-Jones prend la forme suivante

$$w(r) = 4w_0 \left(\left(\frac{r_0}{r} \right)^6 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} \right), \quad (\text{I.3})$$

où w_0 est la valeur maximale du potentiel ($\approx 2 \cdot 10^{-19}$ J). L'interaction $\mathbf{f}(r) = -\mathbf{grad} w(r)$ est alors une somme entre force répulsive et attractive, nulle au point d'équilibre $r = 2^{1/6}r_0$. Selon les travaux de D. Tabor [115] et de J.N. Israelachvili [52], ce potentiel donne de bons résultats comparativement aux mesures expérimentales de l'interaction entre molécules.

Dans la suite, nous considérerons que l'origine de l'adhésion est issue de la partie positive du potentiel de Lennard-Jones, c'est-à-dire de l'attraction des entités atomiques des corps en vis-à-vis. Tandis que la non-pénétration des corps, décrite par exemple par le modèle macroscopique de Signorini en mécanique du contact à l'échelle des surfaces, s'explique par la partie négative du potentiel, c'est-à-dire la répulsion des atomes des corps en vis-à-vis.

A l'échelle des atomes, l'interaction dépend de la distance r et son comportement est identique que l'on soit en phase d'approche ou en phase de séparation. Lors du passage à l'échelle des surfaces, nous verrons dans le paragraphe suivant que l'interaction macroscopique conserve une dépendance par rapport à la distance relative des corps, mais qu'elle perd son caractère réversible. *Le comportement lors de la séparation des corps est différent de celui observé lors de l'approche des corps, c'est l'hystérésis d'adhésion.*

I.2 Interactions à l'échelle des surfaces

Comme pour l'étude du comportement volumique des corps, le lien entre caractéristiques atomiques et propriétés macroscopiques est loin d'être établi pour l'étude du contact avec adhésion. Rendre compte des phénomènes d'adhésion en surface resterait un point difficile même si les interactions atomiques mises en jeu et leurs liens avec les propriétés macroscopiques étaient complètement identifiées. En effet, le passage micro/macro est complexifié par de nombreux effets comme les défauts dans l'arrangement de la structure cristalline, la réactivité des surfaces en vis-à-vis, l'influence du milieu environnant ou encore la rugosité des surfaces ...

A ce propos, comme le remarque D. Tabor [115], l'adhésion est fortement influencée par le rapport entre rugosité et déformabilité des corps. Si les deux corps sont durs et rugueux, la surface d'action des interactions est restreinte aux aspérités les plus hautes. Dans ces cas, l'attraction est faible. C'est pourquoi les études expérimentales du phénomène d'adhésion concernent la plupart du temps des corps de surface atomique quasi-lisse, comme le mica, ou un corps de type élastomère ou polymère faiblement réticulé capable de « mouiller » complètement la surface rugueuse en vis-à-vis. *Précisons que dans le cadre de ce mémoire, nous limiterons nos applications aux surfaces parfaitement planes ou à l'étude de l'interaction verre/élastomère. Si bien que l'influence de la rugosité sur le comportement du contact avec interaction ne sera pas analysée.*

Nous présenterons dans ce paragraphe quelques résultats issus, d'une part, de la considération à l'échelle des surfaces des interactions atomiques et d'autre part, des observations du phénomène d'adhésion à l'échelle des surfaces. Des notions importantes seront introduites comme *l'énergie d'adhésion* et le phénomène d'*hystérésis d'adhésion*. Elles seront les bases de notre modélisation du comportement de l'interface avec adhésion proposée au paragraphe IV.4.

I.2.1 Le passage à l'échelle des surfaces

Une première approche pour rendre compte du comportement de corps macroscopiques en interaction est de « sommer » à l'échelle des surfaces l'ensemble des interactions de van der Waals présentes entre les corps. C'est l'approche retenue par H.C. Hamaker en 1937 [32]. La présentation détaillée de cette approche réalisant la détermination de l'interaction résultante des différentes interactions atomiques entre deux corps à l'échelle des surfaces fait l'objet de ce paragraphe. Bien que les résultats de H.C. Hamaker, résumés dans le tableau I.1, ne soient pas utilisés dans ce mémoire, l'intérêt de ce paragraphe est double. Premièrement, cette approche présente une méthode possible pour réaliser le passage à l'échelle des surfaces, à savoir une intégration sur le volume, qui sera reprise au paragraphe suivant en vue d'interpréter le concept d'*énergie d'adhésion*. Deuxièmement, ses conclusions donneront des ordres de grandeur sur la portée et la valeur de l'interaction à l'échelle des surfaces.

Pour réaliser le passage à l'échelle des surfaces, H.C. Hamaker considère :

- l'interaction entre deux entités atomiques non influencée par les interactions voisines,
- les forces de van der Waals non perturbées malgré l'importance des distances d'interaction,
- une répartition uniforme des atomes des corps,
- des corps indéformables.

Avec ces hypothèses, l'interaction résultante entre une entité atomique M et un demi-plan Ω (voir figure I.2), distants de $Z = D$, est obtenue en sommant toutes les interactions entre M et les entités atomiques de Ω . L'hypothèse de distance D grande par rapport au diamètre atomique D_0 du plan Ω ($D_0 \approx 2.r_0$) permet d'une part de considérer uniquement les effets des interactions de van der Waals de potentiel $\tilde{w}(r) = C/r^6$ et d'autre part de remplacer la sommation des interactions par une intégration sur le volume.

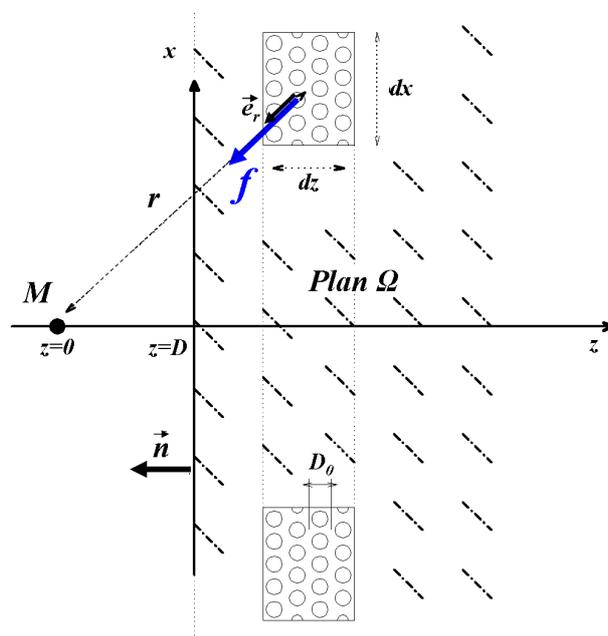


FIG. I.2 – Sommation des forces intermoléculaires à l'échelle des surfaces.

L'interaction résultante $\mathbf{T}_{M/\Omega}$ est ainsi définie par

$$\mathbf{T}_{M/\Omega}(D) = \left(\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \rho d\Omega \right) \mathbf{n}, \text{ avec } \mathbf{f} = -\frac{\partial w}{\partial r}(r) \mathbf{e}_r,$$

où \mathbf{n} est la normale unitaire sortante du plan Ω et ρ sa densité atomique. Par suite,

$$\mathbf{T}_{M/\Omega}(D) = \frac{\rho\pi C}{2 D^4} \mathbf{n} \text{ et dérive du potentiel } W_{M/\Omega}(D) = \frac{\rho\pi C}{6 D^3}.$$

H.C. Hamaker étend cette étude à l'interaction entre des corps de géométries différentes de type plan/sphère, sphère/sphère ou plan/plan. Le tableau I.1 présente ces résultats en introduisant A , la « constante de Hamaker » égale à $\pi^2 \rho_1 \rho_2 C$, où ρ_i est la densité atomique du corps i . A est un coefficient qui varie de 0.4 à 4.10^{-19} J quels que soient les corps considérés. Le potentiel d'interaction entre deux plans est surfacique, c'est-à-dire donné pour une unité d'aire. La force d'interaction obtenue par dérivation de ce potentiel est également surfacique¹. Pour des corps dans le vide, ces résultats sont en accord avec les expériences de R.S. Bradley ou de B.V. Derjaguin [32].

Géométries considérées	Potentiel (en J)	Potentiel (en $J.m^{-2}$)
plan/sphère	$W_{P/S}(D) = \frac{A}{6D} R$	
sphère/sphère	$W_{S/S}(D) = \frac{A}{6D} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$	
plan/plan		$W_{P/P}(D) = \frac{A}{12\pi D^2}$

TAB. I.1 – Résultats obtenus par H.C. Hamaker sur les potentiels d'interaction entre corps de géométries différentes distants de D . R_i est le rayon de la sphère i , $R_i \gg D$. La force d'interaction s'obtient par $\mathbf{T}(D) = -\partial(W(D))/\partial D \mathbf{n}$.

Ces résultats entraînent une valeur du potentiel d'attraction à l'échelle des surfaces 10^5 fois supérieure à celle du potentiel à l'échelle des atomes du paragraphe I.1.4. Pour s'en rendre compte, considérons l'interaction entre deux sphères de rayon $R = 1 \text{ cm}$. Avec $A = 0.4 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, il vient :

- pour $D = 0.4 \text{ nm}$, $W \approx 8 \cdot 10^{-14} \text{ J}$ et $\|\mathbf{T}\| \approx 0.2 \text{ mN}$,
- pour $D = 10 \text{ nm}$, $W \approx 0.334 \cdot 10^{-14} \text{ J}$ et $\|\mathbf{T}\| = 0.334 \cdot 10^{-3} \text{ mN}$.

Ces valeurs donnent une première idée de la contribution, certes faible, mais non négligeable selon les applications considérées, du phénomène d'adhésion.

La considération de l'ensemble des interactions intermoléculaires à l'échelle des surfaces aboutit à une énergie d'interaction macroscopique *proportionnelle à la dimension du corps* (tableau I.1), alors que le potentiel originel à l'échelle des atomes est indépendant de cette taille ($n > 3$ [52]). Ces effets d'échelle sont peu surprenants, ils viennent de l'intégration. Ainsi, plus les corps sont grands, plus les surfaces en vis-à-vis sont grandes et plus l'adhésion augmente.

Enfin, remarquons que le potentiel d'interaction macroscopique est en $1/D^2$, voir en $1/D$. *L'interaction diminue donc plus faiblement suivant la distance entre les corps que le potentiel originel intermoléculaire en $1/r^6$* . Dans les années 70, D. Tabor et indépendamment J.N. Israelachvili vérifient ce point lors d'expériences de contact entre cylindres recouverts de mica. Ils observent que *les effets de l'interaction sont non négligeables jusqu'à des distances de 130 nm*.

Cependant ce passage à l'échelle des surfaces présente deux limites majeures. D'une part, l'hypothèse d'additivité des interactions est trop forte, les interactions voisines provoquent des changements importants d'orientation et limitent l'effet de l'interaction. D'autre part, *le comportement global ne peut pas être indépendant du comportement volumique des corps en interaction*.

¹Dans la suite de ce mémoire, potentiels et forces d'interaction seront considérées en unité d'aire, respectivement en $J.m^{-2}$ et en $N.m^{-2}$.

Une seconde approche possible en vue de l'étude du phénomène d'interaction entre deux corps est de décrire l'interaction directement à l'échelle des surfaces, sans considération à priori de l'origine des interactions. Une des concepts issu de cette seconde approche est *l'énergie d'adhésion*.

I.2.2 L'énergie d'adhésion w

L'énergie de surface γ (en $J.m^{-2}$) se définit pour un solide ou un liquide quelconque considéré dans son milieu environnant. Le travail γdA représente le travail nécessaire pour créer une nouvelle surface d'aire dA du corps de façon réversible et isotherme. Dans ce cas, des atomes initialement dans le volume se retrouvent en surface et sans voisinage. Le travail rend donc compte de la rupture des liaisons de type van der Waals.

Remarquons que l'énergie de surface γ se distingue de la tension de surface σ ($J.m^{-2}$). Le travail σdA représente le travail nécessaire pour augmenter de dA une surface d'un corps. Il caractérise l'étirement des liaisons de type van der Waals ou le déplacement des atomes de surface.

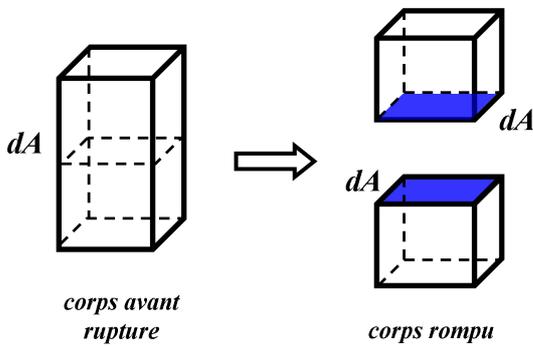


FIG. I.3 – Rupture cohésive d'un corps.

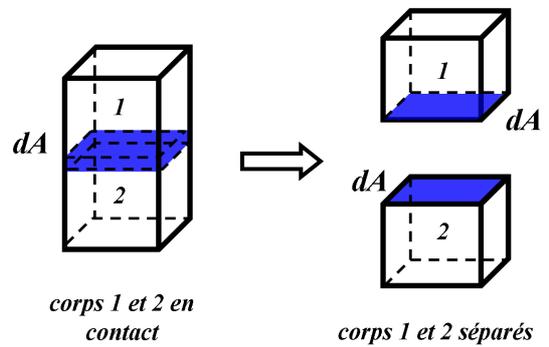


FIG. I.4 – Séparation de deux corps 1 et 2.

Lors de la rupture d'un corps, schématisée en figure I.3, pour chaque partie du corps rompu, une surface dA est créée. Le travail fourni par unité de surface pour rompre le corps est donc égal à 2γ , c'est l'énergie cohésive. Ce concept d'énergie cohésive a été introduit par A.A. Griffith en 1920, sous la forme du critère de Griffith

$$G = 2\gamma, \text{ à l'équilibre,} \quad (\text{I.4})$$

où G , le taux de restitution d'énergie ($J.m^{-2}$) dépend des sollicitations imposées. Ce critère est à la base de la théorie linéaire de la mécanique de la rupture [71]. Il permet de décrire l'état de propagation d'une fissure au sein d'un corps. Si $G > 2\gamma$ la fissure se propage, si $G < 2\gamma$ la fissure se referme, ou cicatrise idéalement. Dans cette théorie linéaire, la fissuration suit un processus réversible sans considération des modifications de comportement du corps dues aux grandes déformations observées en pointe de fissure. Quelques valeurs d'énergie surfacique γ sont données dans le tableau I.2.

Le concept d'énergie cohésive s'étend à l'étude de l'interaction entre deux corps différents 1 et 2, voir figure I.4. Pour lier les deux corps, un travail est fourni au système pour créer l'interface entre 1 et 2. Ce travail vaut $\gamma_{12}dA$ pour l'élément de surface dA , où γ_{12} est l'énergie interfaciale ($J.m^{-2}$). Pour séparer les deux corps d'un élément de surface dA , il est nécessaire de rompre l'interface, ce qui correspond au travail $-\gamma_{12}dA$, et de créer une surface dA pour chacun des corps, ce qui correspond à un travail égal à $\gamma_1dA + \gamma_2dA$. Finalement pour un élément de surface dA , la séparation nécessite un travail égal à $w dA$, où

$$w = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_{12} \text{ est l'énergie d'adhésion (ou de Dupré) en } J.m^{-2}. \quad (\text{I.5})$$

Nature du matériau	Valeurs de γ ($mJ.m^{-2}$)
Acier	2400
Cuivre	2000
Aluminium	1100
Verre	300
Plastique	10 à 50
Epoxy, PVC	50 à 100
Caoutchouc	10 à 40

TAB. I.2 – Différentes valeurs de l'énergie surfacique γ à $T = 300 K$ [52].

L'énergie d'adhésion w représente le travail nécessaire pour séparer deux surfaces dans le vide, du contact à l'infini, de façon isotherme et réversible.

Cette énergie est toujours positive car dans le vide deux corps macroscopiques s'attirent jusqu'au contact intime. Ce concept ne considère pas l'origine de l'interaction. La dépendance par rapport à la distance des corps, caractéristique de l'interaction à l'échelle des atomes, n'est pas retrouvée.

Il est possible de relier le concept d'énergie d'adhésion aux interactions atomiques par un passage à l'échelle des surfaces. En réalisant une intégration par unité d'aire du potentiel de Lennard-Jones (paragraphe I.1.4), similaire à celle effectuée par H.C. Hamaker (paragraphe I.2.1), l'effort d'interaction entre deux éléments de surface distants de D selon la normale \mathbf{n} se met sous la forme

$$\mathbf{T}_{P/P}(D) = \frac{A}{6\pi D_c^3} \left(\left(\frac{D_c}{D} \right)^3 - \left(\frac{D_c}{D} \right)^9 \right) \mathbf{n}, \quad (I.6)$$

où D_c est la distance d'équilibre, telle que $\mathbf{T}_{P/P}(D_c) = \mathbf{0}$. A partir de cet effort d'interaction, selon R. Shuttleworth (1949), il est possible d'exprimer G^r , le travail à fournir pour passer de la position « contact » ($D = D_c$) vers la position « séparée » ($D \rightarrow \infty$) de manière isotherme et réversible. Il vient

$$G^r = \int_{D_c}^{\infty} \mathbf{T}_{P/P}(D) \mathbf{n} dD.$$

Le développement des calculs, en négligeant la contribution de la partie répulsive (terme en $(1/D^9)$) devant celle des effets attractifs car $D \geq D_c$, mènent à la forme suivante de l'énergie d'adhésion :

$$w = |G^r| = \frac{A}{12\pi D_c^2}.$$

Ce résultat réalise le lien entre le concept d'énergie d'adhésion et l'origine de l'adhésion, c'est-à-dire les interactions atomiques.

De cette dernière expression et d'après le tableau I.1, l'effort $\mathbf{T}_{S/S}$ nécessaire pour séparer deux sphères initialement en contact s'écrit

$$||\mathbf{T}_{S/S}|| = 2\pi w \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (I.7)$$

Ce dernier résultat est encore très utilisé pour obtenir des valeurs expérimentales de l'énergie d'adhésion à partir d'essais de séparation.

Ces expériences sont cependant complexes à mettre en oeuvre, une description et comparaison des différentes méthodes sont données dans les travaux de thèse de A. Sekulic [107]. Les techniques les plus courantes nécessitent un appareillage spécifique de type SFA (Surface Force Apparatus, années 70), avec une sensibilité de l'ordre de 10^{-8} N et une résolution de l'ordre de 0.1 nm, ou de type AFM (Atomic Force Microscope, années 90), avec une sensibilité de l'ordre de 10^{-10} N et une résolution de l'ordre de 0.01 nm.

Les erreurs de mesure sur l'énergie d'adhésion sont maintenant bien maîtrisées (de l'ordre de $\pm 10^{-3}$ mJ.m⁻²). Cependant la valeur de l'énergie d'adhésion varie fortement, de près de 30%, selon la température ou l'hygrométrie !

A l'aide de ces appareils, pour un contact verre/élastomère, une énergie d'adhésion de l'ordre de 70 mJ.m⁻² est mesurée sous condition ambiante.

Le critère de Griffith (équation (I.4)) est valable dans les cas de fissure macroscopique où la zone d'interaction entre les surfaces créées reste confinée en pointe de fissure. Cependant, dans les cas où le comportement des corps est non élastique ou dans les cas où la taille de la zone d'interaction ne peut pas être négligée par rapport à celle de la fissure, la propagation de la fissure ne suit plus le critère de Griffith. Dans ces cas, A.N. Gent et J.Schultz en 1972 constatent que l'énergie à fournir pour créer une unité d'aire est supérieure à l'énergie d'adhésion. Ils considèrent le critère suivant $G = 2\gamma \cdot \tilde{\Phi}$ où $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}(v)$ est une fonction (> 1) dépendante de la vitesse de propagation de la fissure v et de la température T . L'énergie à fournir pour propager une fissure est d'autant plus élevée que la vitesse de propagation est élevée : $\tilde{\Phi}$ augmente si v augmente. Les différences d'ordre de grandeur sont alors de 3 à 5 entre le taux de restitution d'énergie G et l'énergie de cohésion 2γ .

Ainsi, malgré leurs faibles énergies de cohésion, les élastomères et les polymères faiblement réticulés résistent à la rupture. Ce phénomène s'explique par l'étude du comportement de ces corps [39, 48]. Les élastomères sont composés de macromolécules, c'est-à-dire des longues chaînes de monomères liés entre eux par les liaisons fortes de type covalente. Ces macrochaînes interagissent entre elles par des liens de type van der Waals et en quelques points dits de réticulation par des liens covalents pour former le polymère ou l'élastomère. Lors de sollicitations, K.A. Grosch [47] observe un retard de la déformation qu'il attribue au frottement interne des macromolécules se tendant, glissant les unes par rapport aux autres et s'entremêlant [50]. Ce phénomène dissipatif est considéré macroscopiquement par $G \gg 2\gamma$. Cet effet est plus ou moins marqué suivant la nature cristalline du polymère, la température et la vitesse de sollicitation.

Dans l'étude de l'interaction entre deux corps, les mêmes constatations peuvent être observées lors de la séparation. Dans le paragraphe suivant, nous verrons que des phénomènes dissipatifs sont aussi présents lors de l'approche des corps. Si bien que lors d'un cycle d'approche/séparation, un effet d'hystérésis est observé. Il peut être interprété par deux sources de dissipation : l'une localisée à l'interface, la seconde prenant part au volume.

I.2.3 L'hystérésis d'adhésion

Inspirés des travaux de A.N. Gent et J. Schultz, D. Maugis [73] et M. Barquins [8] s'intéressent à la description de la rupture des assemblages collés et par la suite à la séparation d'une bille de verre en contact avec un bloc élastomère.

Dans le premier cas, les dissipations observées sont naturellement liées au comportement de l'adhésif, généralement un polymère. Les dissipations sont de nature volumique.

Dans le second cas, de fortes dissipations sont également observées. Lors du contact, les macromolécules de l'élastomère peuvent être amenées à diffuser au sein de la surface du verre. Selon P.G. De Gennes [33], il est alors nécessaire d'étirer toutes les macromolécules avant de pouvoir rompre leurs liens avec les atomes de verre. Il en résulte un frottement interne dans le volume de l'élastomère proche de la zone de contact. Les dissipations sont donc également attribuées au comportement viscoélastique de l'élastomère.

Dans ces cas, D. Maugis et M. Barquins représentent par $(G - w) dA$ d'une part le travail responsable de la propagation du bord de la zone de contact d'un élément d'interface dA et d'autre part la contribution des dissipations ramenées au niveau de l'interface. La propagation du bord de la zone de contact suit alors la loi

$$G = w (1 + \Phi(a_T, v)), \quad (\text{I.8})$$

où $\Phi(a_T, v)$ est une fonction (> 0) dépendante de la vitesse de propagation du bord de la zone de contact v et du paramètre a_T de la transformation de Williams, Landel et Ferry. Φ est caractéristique du comportement volumique du polymère ou de l'élastomère considéré. Une expression de Φ de type $\Phi = \alpha(T)v^n$, appelée courbe maîtresse, peut être obtenue expérimentalement [7].

Ce modèle considère que les dissipations au niveau de l'interface sont liées au comportement volumique du polymère ou de l'élastomère. Cependant, en remarquant que les pertes viscoélastiques restent localisées dans un volume proche de la pointe de fissure ou de la zone de contact, le taux de restitution d'énergie G peut être déterminé par la théorie de l'élasticité.

Récemment S. Perutz et al. [90] étendent les observations expérimentales des dissipations au cas de l'approche des corps. Selon que l'on soit dans une phase d'approche ou une phase de séparation, ils constatent (figure I.5) que la réponse globale est différente. Lors de la séparation, le travail fourni pour séparer les corps G^r est supérieur à l'énergie d'adhésion w . Et, d'après la figure I.5, G^r augmente avec la vitesse de séparation. Lors de la mise en contact des deux corps, le travail récupéré G^c est sensiblement égal ou inférieur à w .

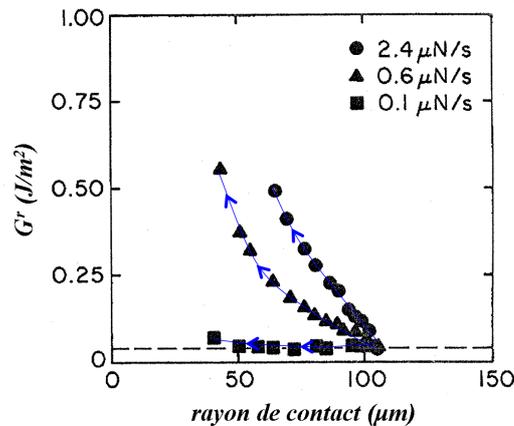


FIG. I.5 – Evolution de G^r lors d'essais de séparation à différentes vitesses [90] (en pointillés, valeurs de G^c proches de w).

Un effet d'hystérésis d'adhésion est donc observé : les comportements sont différents en approche ou en séparation, avec

$$G^r \gg w \gtrsim G^c.$$

Cet aspect est une fois de plus propre à l'étude des interactions à l'échelle des surfaces. Rappelons qu'à l'échelle des atomes, l'interaction est non dissipative et suit la même évolution en approche ou en séparation, d'après le potentiel de Lennard-Jones (I.3).

Selon cette observation, K.L. Johnson [58], J.M. Baney et al. [5], puis Y.-Y. Lin et C.-Y. Hui [69] et J.M. Baney [70] étendent les travaux de J.A. Greenwood [46] sur la cicatrisation et la rupture des polymères au cas de contact avec interaction. En séparation, ils considèrent un comportement, proche de celui introduit par M. Barquins, avec $G^r = w \Phi^r$ où $\Phi^r (> 1)$ augmente avec v . En approche, ils proposent $G^c = w \Phi^c$ où $\Phi^c (< 1)$ diminue si v augmente. Cette modélisation permet de caractériser l'hystérésis d'adhésion et les observations expérimentales suivantes :

- pour établir un contact, plus la vitesse d'approche des corps est rapide, moins l'énergie d'adhésion apparente $w \Phi^c$ est grande,
- plus le temps de contact est grand, plus l'énergie d'adhésion apparente est importante,
- à partir d'un contact établi, plus la vitesse de séparation des corps est rapide, plus l'énergie d'adhésion apparente $w \Phi^r$ est élevée,
- lors d'un cycle approche/séparation quasi-statique, le comportement lors de la séparation est identique à celui de l'approche, $G^r \approx G^c \approx w$.

K.L. Johnson [58] précise les différentes sollicitations observées lors de l'étude de l'interaction de corps viscoélastiques. Au niveau du volume, respectivement de l'interface, elles peuvent être considérées par l'intermédiaire de deux temps caractéristiques \tilde{t}^{vol} et respectivement \tilde{t}^{lien} . Pour les applications nous intéressant, ces deux temps sont différents.

L'identification de ces deux temps bien distincts nous a conduit à considérer deux contributions dissipatives dans la modélisation du problème de l'interaction entre corps viscoélastiques.

Ainsi, bien que l'origine de la dissipation soit la même, issue du glissement et de l'enchevêtrement des chaînes moléculaires au sein des corps ou formées au niveau de l'interface, nous considérons que les phénomènes dissipatifs sont :

- soit volumiques plus ou moins éloignés de la zone de contact et de temps caractéristique t^{vol} de l'ordre du temps de relaxation du polymère ou de l'élastomère. Nous utiliserons alors le terme de *dissipation volumique*.
- soit localisés au bord de la zone de contact et de temps caractéristique t^{lien} . Nous parlerons alors de *dissipation surfacique*.

De fait, dans les cas où \tilde{t}^{vol} est supérieur ou inférieur à t^{vol} , les comportements des corps en interaction seront considérés élastiques et si $\tilde{t}^{lien} \approx t^{lien}$ les dissipations sont essentiellement localisées au bord de la zone de contact.

Dans les applications où $\tilde{t}^{vol} \approx t^{vol}$ et $\tilde{t}^{lien} \approx t^{lien}$, deux sources de dissipations seront considérées. La première est due aux mécanismes de déformations des corps, la deuxième est due aux mécanismes locaux de formation et d'endommagement des liens.

Cette considération est également mentionnée dans les travaux de F. Saulnier [101] et F. Saulnier et al. [102] ou dans les travaux expérimentaux de S. Perutz et al. [90]. Dans de nombreuses applications où l'adhésion est importante et les sollicitations sont lentes, des dissipations sont toujours observées alors que les temps de relaxation des matériaux sont très courts. Les dissipations ne peuvent donc pas être dues aux comportements volumiques. Elles viennent alors des processus existants au niveau de l'interface, lieu de grandes déformations et de fortes contraintes.

Nous reviendrons au paragraphe II.1.2 sur le choix d'introduire une *dissipation surfacique* pour rendre compte d'une partie des dissipations présentes lors de l'interaction de corps viscoélastiques.

I.3 Conclusions

Après cette présentation générale du phénomène d'adhésion à l'échelle atomique et à l'échelle des surfaces, nous pouvons préciser les notions qui vont être retenues dans notre approche. *Le modèle d'interface sera formulé à l'échelle des surfaces et inscrit dans le cadre de la mécanique des milieux continus étendu au concept d'interface matérielle.* C'est-à-dire que nous attribuons un comportement propre à l'interface, les deux surfaces et leurs interactions, caractérisé par :

- *une dépendance à la distance relative des corps* car les liens atomiques s'endommagent si la distance augmente ou cicatrisent si les corps s'approchent. Cette caractéristique est issue du comportement de l'interaction à l'échelle des atomes (paragraphe I.1),

- *l'énergie d'adhésion* (équation (I.5)), un concept issu de l'étude à l'échelle des surfaces introduit au paragraphe I.2.2. Elle représente le seuil énergétique, mesurable expérimentalement [107], à partir duquel le comportement des liens évolue,

- *une dépendance du processus d'endommagement ou de cicatrisation des liens à la vitesse de sollicitation.* Ce phénomène, observé à l'échelle des surfaces (paragraphe I.2.3), rend compte d'un comportement dissipatif de l'interface différent en séparation ou en approche.

Récemment, favorisées par l'augmentation de la puissance des calculateurs, certains travaux considèrent l'origine des interactions à l'échelle des atomes et réalisent le passage à l'échelle des surfaces. Citons entre autre les travaux de C. Argento et A. Jagota ou les approches J.-F. Molinari couplant la dynamique moléculaire à une formulation milieux continus.

Les travaux de C. Argento et al. [3] et de A. Jagota et C. Argento [54] portent sur l'étude des corps de taille microscopique, avec considération de l'effet de la tension de surface. Chaque atome d'un corps interagit avec l'ensemble des atomes voisins et ceux du corps en vis-à-vis selon une interaction de type Lennard-Jones. L'interaction à distance et l'auto-interaction (tension de surface) sont formulées dans un cadre de mécanique des milieux continus étendus aux surfaces continues. Des équations d'équilibre des surfaces sont obtenues et la notion de tenseur d'interaction surfacique est introduite [54]. Cette approche est élégante car elle retient l'origine même de l'adhésion : les interactions. Pour des applications concernant des corps de taille de l'ordre du micromètre, différentes de celles nous intéressant, les phénomènes de l'adhésion sont retrouvés [55]. Cependant, pour l'instant, aucune étude à propos des dissipations n'a été considérée avec cette approche.

L'approche dynamique moléculaire couplée aux milieux continus connaît récemment de nombreuses applications, comme celle de l'étude du contact avec interaction, proposée par J.-F. Molinari [76]. Le volume proche de la surface de chaque corps est alors modélisé par une répartition d'atome. Dans ce volume, l'évolution du système est traité par un calcul de dynamique moléculaire. L'intérêt de cette approche est de retenir l'origine de l'interaction atomique et de ne pas formuler de modèle d'interaction à l'échelle des surfaces. Pour l'instant, l'interaction retenue est le potentiel de Lennard-Jones. Les travaux en cours s'intéressent à l'étude des dissipations.

Dans cette perspective, le modèle d'interface que nous proposons, bien qu'utilisé et formulé à l'échelle des surfaces dans ce mémoire, pourrait être adapté au contexte d'un code hybride dynamique moléculaire / méthode éléments finis. C'est une approche de ce type que nous proposons au paragraphe IV.5 comme une des perspectives d'application du modèle d'interface proposé, en vue de modéliser une interaction à distance s'opposant au déplacement tangentiel relatif des corps.

Chapitre II

QUELQUES MODÈLES CLASSIQUES POUR LE CONTACT VERRE/ÉLASTOMÈRE

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté le phénomène d'adhésion et des concepts introduits pour son étude. Nous précisons maintenant les effets de l'adhésion observés lors du contact plus spécifique entre une bille de verre et un bloc élastomère.

Ce chapitre présente quelques particularités observées expérimentalement ainsi que les modèles développés pour rendre compte de ces manifestations. La présentation ne prétend pas être exhaustive, elle se limite aux manifestations que nous nous proposons d'étudier par la suite au chapitre VI avec le modèle de comportement de l'interface présenté au paragraphe IV.4. Nos résultats seront comparés aux résultats expérimentaux et analytiques présentés dans ce chapitre.

Nous distinguons deux types de sollicitation : la sollicitation de type indentation, ou plus généralement d'approche/séparation, et la sollicitation tangentielle.

Les études sur les essais d'indentation ou de séparation à partir d'un contact établi sont nombreuses. Dans ces cas, les effets des interactions, précisés dans le paragraphe II.1 sont : *une augmentation du rayon de contact*, une déformation particulière de l'élastomère au bord de la zone de contact, nommée *le col d'adhésion*, et une résistance à la séparation, nommée *l'effort de « pull-off »*. Paradoxalement, les études portant sur la mise en contact des corps sont très récentes. Elles sont généralement réalisées en considérant le modèle de Maugis-Dugdale qui décrit de manière simple le comportement des interactions. Dans les cas où l'un des corps est de comportement dissipatif, ce modèle d'interface permet d'interpréter le phénomène *d'hystérésis d'adhésion* observé expérimentalement durant un cycle d'approche/séparation.

Les études sous sollicitation tangentielle sont plus rares. Lors du mouvement, du fait des interactions, le comportement ne suit pas la loi de frottement de Coulomb. La notion même de coefficient de frottement perd son sens lors de contact avec interaction. Dans le paragraphe II.2, nous verrons qu'*à faible vitesse, des plis de recollement sont observés* et qu'*à grande vitesse, des ondes, appelées ondes de Schallamach apparaissent*. La propagation des ondes de Schallamach au sein de la zone de contact est alors seule responsable du déplacement relatif des corps.

II.1 Sollicitation de type indentation

Avant de considérer l'étude des contacts avec interaction adhésive, nous présentons succinctement les résultats de la théorie de Hertz développée en 1875.

La théorie de Hertz permet d'obtenir une forme analytique du déplacement et des contraintes au sein d'un demi-plan élastique en contact sans frottement avec une sphère rigide soumise à une sollicitation d'indentation. L'analyse s'appuie sur la formulation de fonctions d'Airy. Le détail des calculs est présenté par K.L. Johnson dans [57]. Cette théorie permet d'analyser le contact sans considération des interactions entre corps élastiques de dimensions suffisamment grandes par rapport à celle de la zone de contact. Les résultats de la théorie de Hertz, donnés par la suite, feront ainsi état de référence lors de l'étude du contact entre deux corps élastiques au paragraphe V.3.

Dans le cas du contact entre une bille de rayon R considérée non déformable et un plan élastique de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν , sous une charge normale P , le rayon de contact, noté a_H , est tel que

$$\frac{K a_H^3}{R} = P, \quad (\text{II.1})$$

où $\frac{1}{K} = \frac{3}{4} \frac{1-\nu^2}{E}$. L'expression de la déformée du plan $u_H(r)$ en fonction de la position r dans le plan de contact est

$$u_H(r) = \begin{cases} -u_H^0 + \frac{r^2}{2R} & \forall r \leq a_H, \\ -\frac{a_H^2}{\pi R} \left(\sqrt{\left(\frac{r}{a_H}\right)^2 - 1} + \left(2 - \left(\frac{r}{a_H}\right)^2\right) \text{Arcsin}\left(\frac{a_H}{r}\right) \right) & \forall r > a_H, \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

où u_H^0 est l'enfoncement au centre du contact, $u_H^0 = a_H^2/R$ (figure II.1). La distribution de pression au sein de la zone de contact $p_H(r)$ prend la forme

$$p_H(r) = \begin{cases} p_H^0 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a_H}\right)^2} & \forall r \leq a_H, \\ 0 & \forall r > a_H, \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

où p_H^0 est la pression au centre du contact, $p_H^0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi a_H^2}$. Cette distribution de pression est représentée en figure II.2.

Remarquons que cette théorie a depuis été étendue au cas de contact avec frottement par exemple par les travaux de A. Spence [109] dans les cas à symétrie de révolution ou par les travaux de R.D. Mindlin en 1952 [44] et plus récemment de K.L. Johnson [57, 59] au commencement du glissement.

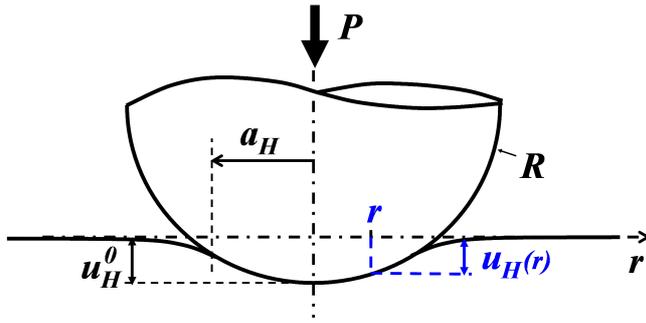


FIG. II.1 – Déformée du plan (Hertz).

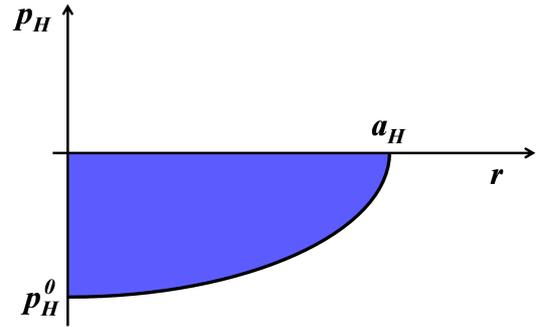


FIG. II.2 – Distribution de pression (Hertz).

II.1.1 Effort de « pull-off », augmentation du rayon de contact et col d'adhésion

En 1932, R.S. Bradley caractérise l'effort pour séparer deux corps en contact. *Cet effort est nommé l'effort de « pull-off »*. En considérant les corps non déformables et de dimension caractéristique grande par rapport à celle des interactions, R.S. Bradley intègre, par une approche similaire à celle de H.C. Hamaker, l'ensemble des interactions de type van der Waals contribuant à l'effort de « pull-off ». L'effort résultant obtenu s'exprime

$$P_{pull-off} = 2\pi w R^*, \quad (\text{II.4})$$

où R^* est le rayon équivalent, égal à R le rayon de la bille dans le cas de contact bille/plan, ou égal à $R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ dans le cas de contact entre deux billes de rayon R_1 et R_2 . Dans ce dernier cas, l'expression (I.7) de l'effort de séparation est retrouvée.

En 1969, dans les cas de contact entre une bille de verre et un élastomère, R.C. Dutrowski constate que le rayon de contact est plus grand que celui prévu par la théorie de Hertz. *Les interactions ont une contribution suffisante pour déformer la surface de l'élastomère.*

Un modèle analytique décrivant ces phénomènes a été développé par G. Sperling¹ en 1964 [110] et par K.L. Johnson, K. Kendall et A.D. Roberts en 1971 [62]. Il s'agit de la *théorie JKR* ou *JKRS* comme le suggère K.L. Johnson en 1994 dans [63]. Cette théorie, spécifique au contact adhésif entre une sphère rigide et un plan élastique semi-infini, est validée par des expériences d'indentation dans [62]. Par la suite, elle a également été validée par d'autres travaux expérimentaux comme ceux de M. Barquins [8] sur le contact verre/élastomère.

La théorie JKR est issue d'un bilan énergétique entre l'énergie élastique des corps, l'énergie potentielle et l'énergie d'adhésion w . A un chargement P donné, l'obtention du rayon de contact d'équilibre a_{JKR} peut être décrite en trois étapes :

- (i) une charge de type Hertz d'effort P qui donne un rayon de contact de valeur a_H ,
- (ii) la considération progressive des effets de l'adhésion qui augmente le rayon de contact jusqu'au rayon d'équilibre a_{JKR} ($> a_H$). Ce phénomène est modélisé par l'introduction d'une charge apparente \tilde{P} , $\tilde{P} > P$, afin d'obtenir le rayon d'équilibre a_{JKR} selon la théorie de Hertz,
- (iii) une décharge jusqu'à l'effort P en maintenant a_{JKR} fixé.

L'expression de la charge apparente \tilde{P} est la suivante :

$$\tilde{P} = P + 3\pi w R + \sqrt{6\pi w R P + (3\pi w R)^2}. \quad (\text{II.5})$$

¹Bien que G. Sperling ait mis l'accent sur l'étude théorique et expérimentale des interactions atomiques entre deux corps rigides, il propose en annexe de [110] une modélisation du contact adhésif entre une sphère rigide et un plan élastique semi-infini.

Elle correspond à la charge P additionnée des effets de l'interaction des corps, considérés uniquement au sein de la zone de contact. Dans cette théorie, les interactions à distance entre les surfaces hors de la zone de contact ne sont pas considérées. La distribution de pression au sein de la zone de contact comporte deux zones (figure II.4) : l'une centrale de type compression (répulsion), la seconde périphérique de type adhésive (attraction) de valeur infinie en $r = a_{JKR}$.

Les résultats de la théorie JKR sont en accord avec les expériences d'indentation à faible vitesse de sollicitation dans le cas où le comportement de l'élastomère peut être considéré élastique [62].

Pour un contact entre une bille rigide de rayon R et un bloc élastique de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν , la théorie JKR donne :

- une position d'équilibre vérifiant $G = w$ (critère de Griffith), où G est défini par

$$G = \frac{(\tilde{P} - P)^2}{6\pi K a_{JKR}^3}, \quad (\text{II.6})$$

- un rayon d'équilibre a_{JKR} de valeur supérieure à a_H (équation (II.1)) tel que

$$\frac{K a_{JKR}^3}{R} = \tilde{P}, \quad (\text{II.7})$$

- un effort de « pull-off », obtenu par

$$\left(\frac{\partial G}{\partial a_{JKR}} \right) \Big|_P = 0 \Leftrightarrow P_{pull-off} = \frac{3}{2} \pi w R \text{ en charge imposée,} \quad (\text{II.8})$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial a_{JKR}} \right) \Big|_u = 0 \Leftrightarrow P_{pull-off} = \frac{5}{6} \pi w R \text{ en déplacement imposé,}$$

- une jonction non tangente des corps au bord de la zone de contact, une caractéristique de ce type de contact.

Les valeurs des efforts de « pull-off » obtenues sont en accord avec les expériences de M. Barquins [8] ou de K.L. Johnson et al. [62]. En charge imposée, la valeur est différente de celle observée par R.S. Bradley car l'équation (II.4) est valable pour les cas où les corps sont peu déformables.

La déformée particulière de l'élastomère au bord de la zone de contact est en accord avec les travaux expérimentaux de M. Barquins [12]. Ce phénomène est appelé *col d'adhésion* (figure II.3). Comme précisé par la suite, la théorie JKR prévoit une jonction verticale.

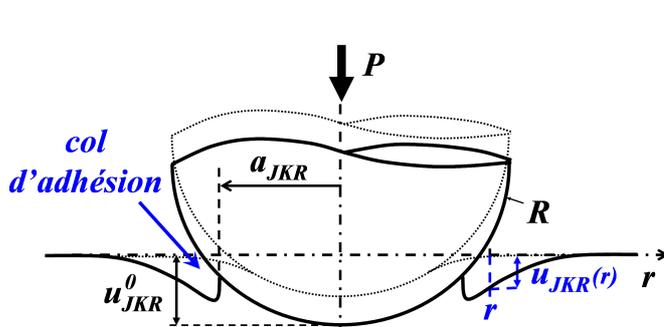


FIG. II.3 – Déformée du plan (JKR).

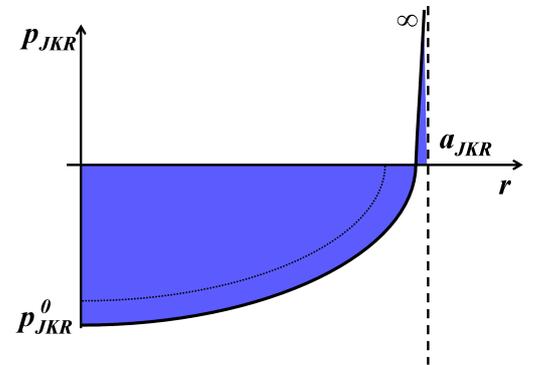


FIG. II.4 – Distribution de pression (JKR).

Les expressions de la déformée du plan u_{JKR} et de la distribution de pression p_{JKR} obtenues par la théorie JKR sont données par la suite. Ces résultats serviront de référence au paragraphe VI.2 afin de valider les résultats de notre approche lors de l'étude du contact adhésif entre une bille de verre et un bloc élastomère dont le comportement est supposé élastique.

Les expressions sont issues des travaux de D. Maugis [72] et de C. Talon et A. Curnier [117]. La déformée du plan $u_{JKR}(r)$ en fonction de la position r dans le plan de contact prend la forme suivante (la partie circulaire de la zone de contact est approchée par l'équation d'une parabole) :

$$u_{JKR}(r) = \begin{cases} -u_{JKR}^0 + \frac{r^2}{2R} & \forall r \leq a_{JKR}, \\ \check{u}_{JKR}(r) - \frac{4}{3} \frac{\tilde{P} - P}{\pi K a_{JKR}} \text{Arcsin} \left(\frac{a_{JKR}}{r} \right) & \forall r > a_{JKR}, \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

où u_{JKR}^0 est l'enfoncement maximal au centre du contact, $u_{JKR}^0 = \frac{a_{JKR}^2}{3R} + \frac{2P}{3a_{JKR}K}$ et $\check{u}_{JKR}(r)$ prend la même forme que $u_H(r)$ pour $r > a_H$ en remplaçant chaque indice H par l'indice JKR dans l'expression (II.2). La figure II.3 représente la déformée du plan et précise les notations introduites. La dérivée de $u_{JKR}(r)$ en $r = a_{JKR}$ est infinie, la jonction entre les corps est par conséquent verticale. Cette propriété permet une modélisation du col d'adhésion. La distribution de pression au sein de la zone de contact $p_{JKR}(r)$ prend la forme suivante

$$p_{JKR}(r) = - \begin{cases} \check{p}_{JKR}^0 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a_{JKR}} \right)^2} + \tilde{p}_{JKR}^0 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{a_{JKR}} \right)^2}} & \forall r \leq a_{JKR}, \\ 0 & \forall r > a_{JKR}, \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

où $\check{p}_{JKR}^0 = \frac{3}{2} \frac{\tilde{P}}{\pi a_{JKR}^2}$ et $\tilde{p}_{JKR}^0 = -\frac{\tilde{P} - P}{2\pi a_{JKR}^2}$. Cette distribution de pression est représentée en figure II.4 en posant $p_{JKR}^0 = \check{p}_{JKR}^0 + \tilde{p}_{JKR}^0$. Remarquons que la valeur de la pression attractive est infinie en $r = a_{JKR}$.

B.V. Derjaguin, V.M. Muller et Y.P. Toporov ont proposé une approche différente du contact adhésif entre corps déformables : la théorie DMT [35]. Cette théorie considère les effets des interactions uniquement dans une zone périphérique hors de la zone de contact. Les applications envisagées considéraient des matériaux de module d'Young supérieur à 10^2 MPa , si bien que l'hypothèse de non influence de l'adhésion sur la déformation des surfaces libres hors de la zone de contact est valable. Le contact est alors modélisé par la théorie de Hertz à laquelle s'ajoute une résultante attractive de valeur $2\pi wR^*$. Pour un contact entre une bille de verre et un bloc élastomère, les résultats de la théorie DMT sont un effort de « pull-off » égal à celui obtenu par R.S. Bradley (équation (II.4)), une augmentation du rayon de contact ($K a_{DMT}^3 / R = P + 2\pi wR$) et une jonction tangente des corps.

Dans les années suivantes, les théories JKR et DMT ont fait l'objet de nombreuses discussions. Il est maintenant convenu depuis les travaux de V.M. Muller, V.S. Yushchenko et B.V. Derjaguin que ces deux modèles correspondent aux résultats extrêmes d'une approche plus fine de la modélisation des interactions : la théorie MYD [81]. Proposée en 1979, cette théorie est issue d'une approche plus consistante de l'origine et du comportement des interactions. Ils considèrent que l'interaction attractive dépend de la distance des surfaces en vis-à-vis, selon la loi de Lennard-Jones (I.3). Les effets des interactions ne sont plus restreints à la zone de contact comme dans la théorie JKR ou hors de la zone de contact comme dans la théorie DMT. La distribution de pression $p_{MYD}(r)$ est présentée en figure II.5.

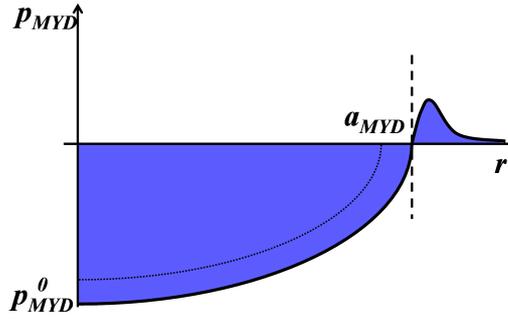


FIG. II.5 – Distribution de pression (MYD).

Selon la valeur du paramètre κ , introduit par D. Tabor [115], la théorie MYD permet de faire le lien entre les résultats de la théorie JKR et ceux de la théorie DMT. Ce paramètre représente le rapport entre les effets des interactions et les rigidités des corps². Les travaux de K.L. Johnson et J.A. Greenwood [61] présentent à l'aide de ce paramètre les domaines de validité des différentes théories. Dans les cas où $\kappa \ll 1$, les corps sont peu déformables et les interactions ont peu d'influence : les résultats de la théorie de DMT sont retrouvés. Dans les cas où $\kappa \gg 1$, les corps sont déformables et les interactions jouent un rôle prépondérant sur l'équilibre du contact : les résultats de la théorie JKR sont retrouvés.

II.1.2 Hystérésis lors de cycles approche/séparation

Une des premières contributions à l'étude des dissipations est celle de M. Barquins [8, 12]. Il étend la théorie JKR aux cas de séparation de corps viscoélastiques. En considérant que les dissipations issues du comportement viscoélastique des corps restent localisées au bord de la zone de contact, l'expression (II.6) de G obtenue pour des corps élastiques reste valable. Les dissipations sont introduites en considérant l'équation d'évolution (I.8) pour laquelle les coefficients de la fonction Φ ($\Phi = \alpha(T)v^n$) sont déterminés expérimentalement.

Dans le cas d'expériences à température ambiante de cycles charge P' / décharge P entre une bille de verre et un polyuréthane PSM4 Vishay, les coefficients $\alpha(T) = 1.68 \cdot 10^5 \text{ SI}$ et $n = 0.6$ sont retenus. Avec ces paramètres, M. Barquins et D. Wehbi [14] obtiennent des résultats en accord avec les expériences sur le nombre de cycles avant séparation ou sur la durée du contact. La figure II.6 présente les résultats expérimentaux et théoriques d'une de ces expériences et issus de (I.8).

A partir de la position d'équilibre, sous charge P , l'application de l'effort de décharge P' implique la rupture de nombreux liens adhésifs. Durant la compression d'effort P suivante, l'état de contact initial n'est pas complètement retrouvé. Au cours de l'évolution, la zone de contact se compose de deux zones distinctes (figure II.7) : une zone circulaire dont la taille diminue au fil des cycles de valeur d'énergie d'adhésion $w = w_1$ égale à l'énergie d'adhésion initiale et une zone périphérique où les liens adhésifs sont partiellement cicatrisés et rompus à chaque cycle. Ces processus d'endommagement et de cicatrisation sont modélisés par la considération d'une énergie d'adhésion faible $w = w_2$.

²Dans le cas du contact entre une bille de verre considérée rigide et un plan infini élastique de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν , le paramètre κ est défini par :

$$\kappa^3 = \frac{Rw^2}{\left(\frac{E}{1-\nu^2}\right)^2 D_C^3}, \quad (\text{II.11})$$

où R est le rayon de la bille, w l'énergie d'adhésion et D_C la distance d'équilibre liée à l'interaction. Pour les applications considérées, nous prendrons $D_C \approx 1 \text{ nm}$. Cette distance a été introduite dans (I.6).

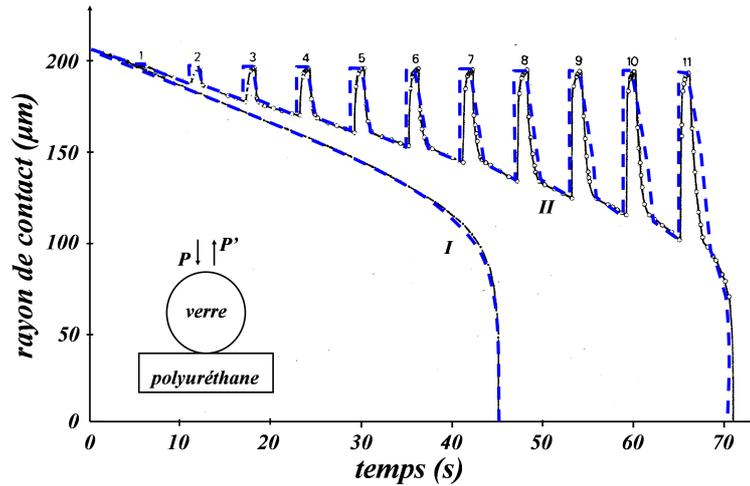


FIG. II.6 – Evolutions expérimentale (—) et théorique (---) du rayon de contact pour une sollicitation cyclique à effort imposé [14] ; courbes I, décharge continue $P' = 30 \text{ mN}$; courbes II, décharge : $t' = 5 \text{ s}$, $P' = 30 \text{ mN}$, charge : $t = 1 \text{ s}$, $P = 30 \text{ mN}$.

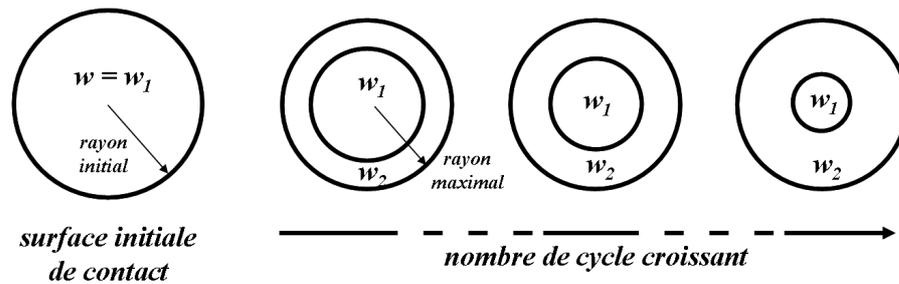


FIG. II.7 – Représentation schématique de l'évolution de la zone de contact, identification de deux zones d'énergie d'adhésion w_1 et w_2 .

La zone périphérique est le lieu de dissipations locales durant la fissuration et son aire augmente à chaque cycle selon les rapports entre temps de charge et temps de décharge. La considération de deux valeurs d'énergie d'adhésion permet de distinguer les processus d'endommagement d'une zone encore non sollicitée ($w = w_1$) de ceux d'une zone ayant déjà été sollicitée ($w = w_2$). La difficulté de cette approche réside dans la détermination de la valeur de w_2 . Cette valeur est liée à la valeur minimale du rayon de contact obtenu lors du premier cycle et dépend des conditions de sollicitation.

Au paragraphe VI.3, nous proposerons une simulation de cet essai avec l'approche retenue dans le cadre de ce travail et la modélisation des interactions décrite au paragraphe IV.4. Nous reviendrons alors sur la problématique liée à la détermination de w_2 .

Depuis les travaux de M. Barquins, dédiés à la modélisation des expériences de séparation, la littérature sur l'étude analytique des interactions entre corps viscoélastiques en approche et en séparation est très dense. Dans le cadre de ce mémoire nous ne détaillerons pas les expressions de cette approche analytique présentée dans de nombreux articles, comme ceux de J.A. Greenwood [46], K.L. Johnson [58, 60] ou de Y.-Y. Lin et C.-Y. Hui [69]. Nous précisons les limites de cette approche et les considérations retenues à la lecture de ces articles dont certaines ont déjà été introduites au paragraphe I.2.3. Cette présentation succincte permet de situer notre modélisation du comportement des interactions présentée au paragraphe IV.4.

Des nombreux articles concernant l'approche analytique du problème de contact avec adhésion entre deux corps viscoélastiques, nous avons retenu quatre points fondamentaux qui seront retrouvés dans la modélisation des interactions que nous proposons.

(i) *l'interaction doit être considérée au sein et hors de la zone de contact*, ceci même si les corps ne sont pas en contact [108]. Ce point rend délicat l'extension des théories JKR ou DMT à l'étude des dissipations.

(ii) *le comportement des interactions doit être modélisé le plus finement possible*. Par rapport aux cas de contact entre corps élastiques, la seule donnée de l'énergie d'adhésion w ne suffit plus pour décrire le comportement global. L'influence de la modélisation des processus d'endommagement et de cicatrisation des liens adhésifs sur le comportement global est grande [69].

(iii) *une dissipation localisée au bord de la zone de contact doit être considérée*. Elle est à l'origine de la différence de comportement entre l'approche et la séparation des corps [90].

(iv) *des dissipations liées au comportement viscoélastique des corps peuvent être observées dans un volume situé loin de la zone d'interaction* [58]. Cette considération est nécessaire en vue d'interpréter le profil de déformation de type trompette viscoélastique, observé par F. Saulnier [101] et F. Saulnier et al. [102]. Dans un tel cas, les travaux réalisés par M. Barquins ne sont plus applicables car le calcul du taux de restitution d'énergie par l'équation (II.6) n'est plus valable.

L'approche analytique du contact avec interaction entre deux corps viscoélastiques présente la même difficulté que celle rencontrée en mécanique de la rupture d'un corps viscoélastique. Le caractère « auto-dépendant » des modèles fins d'interaction complexifie l'écriture analytique [46]. C'est le cas, par exemple, pour le modèle de G.I. Barenblatt, classiquement utilisé pour rendre compte de l'interaction des lèvres en amont de la fissure. Dans ce modèle, la valeur de l'interaction dépend de la distance des surfaces en interaction et cette distance dépend elle-même de la déformation des surfaces due à l'interaction . . . En retenant une modélisation moins fine de l'interaction il est possible de conserver une expression analytique.

En mécanique de la rupture des corps viscoélastiques [5, 46, 71], la modélisation des interactions retenue est très souvent celle proposée par D.S. Dugdale [38]. Dans ce modèle, l'interaction est de valeur constante dans une zone en amont du front de fissure de taille δ fixée, appelée zone cohésive, et est de valeur nulle au delà.

D. Maugis en 1992 [72] étend l'application de ce modèle à l'étude du contact avec adhésion entre deux corps élastiques. Par cette approche, les résultats de la théorie MYD et ceux de JKR et DMT pour les valeurs de κ correspondantes sont retrouvés. Nous présenterons plus en détail ce modèle d'interaction au paragraphe IV.2 où son couplage à un comportement tangentiel sera considéré.

Depuis, ce modèle, couramment nommé modèle de Maugis-Dugdale, est largement utilisé lors de l'étude du contact adhésif entre corps viscoélastiques [58, 69]. Cependant, il réalise une approximation moins fine du comportement des interactions, ce qui est en désaccord avec le point (ii). De plus, dans ce modèle le comportement des liens est non dissipatif. Ce qui nécessite de relier la dissipation localisée au bord de la zone de contact au comportement viscoélastique du volume afin de vérifier le point (iii). De ce fait, dans la plupart de ces travaux où la modélisation du comportement des liens est de type Maugis-Dugdale, identique en endommagement ou en cicatrisation, une énergie d'adhésion apparente, différente selon l'approche ou la séparation, est envisagée, avec :

- $G = G^r = w \Phi^r$ lors de la séparation, où $\Phi^r (> 1)$ augmente avec v ,
- $G = G^c = w \Phi^c$ lors de l'approche, où $\Phi^c (< 1)$ diminue si v augmente.

Les fonctions Φ^r et Φ^c sont liées aux caractéristiques volumiques des corps considérés. La dissipation localisée au bord de la zone de contact lors de l'approche ou lors de la séparation rend donc compte de $G^r \geq w \geq G^c$ selon la vitesse v de propagation du bord de la zone de contact. Le point (iv) est vérifié en considérant le calcul de G à partir des propriétés viscoélastiques des corps selon les travaux de R.S. Schapery en mécanique non linéaire de la rupture.

La première restriction de cette approche analytique est qu'elle nécessite une approximation moins fine du comportement des liens adhésifs. D'autant que d'après Y.-Y. Lin et al. [70] dans le cas de contact adhésif entre corps viscoélastiques, le choix de la modélisation du comportement de l'interface conditionne les résultats obtenus.

Deuxièmement, cette approche analytique considère un modèle d'interaction non dissipatif. La dissipation est donc nécessairement d'origine volumique dans cette approche. A notre sens, ce n'est pas suffisant. Des dissipations sont encore observées par F. Saulnier [101] et F. Saulnier et al. [102] ou par S. Perutz et al. [90] même dans les cas où le comportement des corps peut être considéré comme élastique. C'est-à-dire dans des cas où la vitesse de sollicitation est lente par rapport au temps de relaxation des corps et/ou la température ambiante est de 150 K supérieure à celle de la transition vitreuse du matériau considéré. Les dissipations sont alors nécessairement dues au comportement propre des liens adhésifs au niveau de l'interface. De plus, selon J.N. Israelachvili [53], *les processus d'endommagement et de cicatrisation des liens sont dissipatifs car ils sont liés au phénomène de diffusion et dépendent du temps de contact.*

Suite à ces remarques, nous avons fait le choix de distinguer *dissipation surfacique* et *dissipation volumique*. Le modèle d'adhésion cicatrisante proposé dans ce travail réalise une approximation du potentiel Lennard-Jones plus fine que celle du modèle Maugis-Dugdale et rend compte d'un comportement différent en endommagement ou en cicatrisation des liens ($G^r \gg w > G^c$) qui est propre à l'interface. Ainsi, l'une ou l'autre des dissipations peut être considérée de contribution plus ou moins forte selon l'application envisagée.

A notre sens, ces choix permettent de retrouver les résultats de l'approche analytique précédente tout en proposant une nouvelle contribution dans la compréhension du comportement global du contact avec interaction des corps viscoélastiques.

II.1.3 « Jump-on » et « jump-off »

Ces phénomènes, observés expérimentalement, se rencontrent lors des cycles d'approche/séparation entre deux corps. Lors de l'approche, à partir d'une certaine distance, les corps viennent spontanément en contact, c'est le « jump-on » ou *baiser du caoutchouc* selon M. Barquins. Lors de la séparation, après une diminution du rayon de contact, une fois que l'effort atteint la valeur de l'effort de « pull-off », les corps se séparent spontanément, c'est le « jump-off ».

L'effet « jump-off » a été largement étudié. L'instant de séparation diffère selon que la sollicitation est de type déplacement imposé ou effort imposé. La valeur de l'effort de séparation correspond à celle de l'effort de « pull-off » donnée, selon le type de sollicitation, par les équations (II.8) de la théorie JKR.

L'effet « jump-on » est quant à lui nécessairement observé lors d'une sollicitation en déplacement imposé et fait l'objet de peu de travaux.

L'origine de ces phénomènes s'explique par le comportement des liens adhésifs. En effet, si l'on retient comme modèle d'interaction le potentiel de Lennard-Jones (équation (I.3)), les effets « jump-on » et « jump-off » sont les conséquences de la variation de l'effort d'interaction selon la distance relative. La forme particulière de l'interaction implique que plus les corps sont proches, plus ils s'attirent, si bien que suite aux déformations imposées, à partir d'une certaine distance, les corps semblent « entrer en contact » spontanément. Inversement, au commencement de la séparation les corps se retiennent l'un à l'autre jusqu'au point d'interaction maximale. Ensuite, une faible augmentation de la distance entraîne une forte diminution de l'interaction et les corps semblent se séparer spontanément.

L'étude de ces phénomènes par une approche considérant une loi d'évolution de l'interaction fonction de la distance des corps reste un sujet ouvert, notamment car l'extension des études analytiques aux cas de corps initialement non en contact est relativement récente (une dizaine d'années).

J.A. Greenwood [45] propose un premier modèle d'étude issu de l'approche analytique de Hertz étendue à une modélisation de l'interaction par le potentiel de Lennard-Jones lorsque les corps ne sont pas en contact. Les courbes d'approche/séparation obtenues rendent compte des deux phénomènes « jump-on » et « jump-off ». Les résultats sur des cas académiques montrent que les « instabilités d'adhésion » sont d'autant plus importantes que κ , coefficient représentant le rapport entre les effets des interactions et les rigidités des corps, est grand.

Plus récemment X. Shi et A.A. Polycarpou [108] proposent une étude analytique de ces phénomènes basée sur la modélisation des interactions par le modèle Maugis-Dugdale étendu aux cas de non contact. Les résultats obtenus correspondent à ceux de J.A. Greenwood et permettent d'interpréter les observations d'expériences réalisées sur le système de tête de lecture de disques magnétiques [108]. Dans ce système, lors du déplacement du glisseur, la tête de lecture survole le disque à une distance de quelques nanomètres. Durant le survol, des perturbations de type « jump-on » et « jump-off » peuvent avoir lieu. La théorie retenue par X. Shi et A.A. Polycarpou permet d'évaluer, selon la valeur du coefficient κ , les valeurs minimales de la distance de survol qui permettent d'éviter ces perturbations, en déplacement imposé ou en effort imposé. Les conclusions sur l'influence du paramètre κ correspondent à celles décrites par J.A. Greenwood et les phénomènes « jump-on » et « jump-off » sont également nommés « instabilités d'adhésion ».

A ce propos, le terme d'« instabilités d'adhésion » est, à notre sens, abusif. En effet, les études analytiques proposées par J.A. Greenwood ou par X. Shi et A.A. Polycarpou ne sont pas formulées dans un cadre dynamique. Les instabilités observées sont donc d'une part liées au traitement des équations et d'autre part dues au comportement particulier du modèle Maugis-Dugdale pour les travaux de X. Shi et A.A. Polycarpou. Ainsi, au lieu de caractériser la mise en contact ou la séparation des corps par une accélération du processus de cicatrisation ou d'endommagement des liens, elle est abusivement caractérisée par une instabilité.

L'approche que nous proposons s'inscrit dans un cadre dynamique. Pour être en accord avec les observations concernant les phénomènes « jump-on » et « jump-off », *il s'agit donc de proposer une modélisation fine de la loi d'évolution de l'effort d'interaction. C'est-à-dire un modèle dont le comportement est fonction de la distance relative des corps et dont l'évolution est proche de celle du potentiel de Lennard-Jones.*

Le paragraphe VI.4.1 propose une ébauche d'étude de ces phénomènes envisagée avec le modèle et le cadre proposé dans ce mémoire. La simulation d'une expérience sur les phénomènes « jump-on » et « jump-off » constitue une perspective de ce travail.

II.2 Sollicitation tangentielle

II.2.1 Les limites de la loi de Coulomb

La modélisation du contact entre un élastomère et une surface rugueuse par la loi de Coulomb n'est pas suffisante pour rendre compte du comportement lors d'une sollicitation tangentielle [116]. En effet, D. Tabor [114] observe l'existence d'une résistance tangentielle T au déplacement relatif même dans les cas où l'effort normal P est nul, voir négatif. Ceci souligne un effet non considéré par la loi de Coulomb.

D'autre part, dans ce type de contact T dépend de la vitesse de sollicitation V . *Les dissipations observées sont alors d'une part dues au comportement des liens intermoléculaires présents à l'interface et d'autre part dues au comportement dissipatif de l'élastomère.*

B.N.J. Persson a récemment précisé ces deux contributions dans [87, 88]. Dans le cas du contact entre deux surfaces parfaitement lisses et propres, la dissipation peut être uniquement reliée au comportement des liens adhésifs [87]. Les processus d'endommagement et de cicatrisation des liens sont alors caractérisés par un temps τ^* . En notant τ le temps caractéristique de la sollicitation, B.N.J. Persson propose la discussion suivante :

- si $\tau \gg \tau^*$, une fois le glissement établi, les liens n'ont pas le temps de se former, les dissipations sont donc très faibles,
- si $\tau \ll \tau^*$, les liens ont le temps de se rompre et de se créer de manière complète selon un processus non dissipatif, les dissipations sont donc très faibles,
- si $\tau \approx \tau^*$, les liens créés nécessitent un travail important pour être rompus, les dissipations sont maximales car $G^r \gg G^c$.

Selon A.D. Roberts [99], le temps caractéristique de formation des liens adhésifs permet d'expliquer l'augmentation de la résistance au commencement du glissement avec le temps de contact. Les liens initialement formés sont plus forts que ceux partiellement recréés lors du glissement car les chaînes macromoléculaires ont eu le temps de diffuser au sein de l'interface. Macroscopiquement, deux coefficients de frottement sont introduits : le coefficient de frottement statique μ_s et le coefficient de frottement dynamique μ_d , avec $\mu_s > \mu_d$.

A ce premier effet dissipatif s'ajoute la contribution volumique présente dans le cas de contact avec une surface rugueuse [88]. Elle est due au frottement interne des chaînes moléculaires de l'élastomère dans le volume proche de l'interface. Macroscopiquement, elle est caractérisée par le comportement viscoélastique de l'élastomère. En notant $\bar{\tau}$ le temps caractéristique du mouvement des chaînes macromoléculaires et τ le temps caractéristique de la sollicitation, défini dans ce cas par le rapport λ/V , où λ est la dimension caractéristique des aspérités, B.N.J. Persson propose la discussion suivante :

- si $\tau \gg \bar{\tau}$, la sollicitation est rapide, le volume proche de la zone de contact de l'élastomère semble se rigidifier car les chaînes macromoléculaires n'ont pas le temps de se déplacer. Son comportement volumique peut être considéré élastique. La zone de contact est restreinte aux aspérités les plus hautes et l'effort résistant à l'avancement est faible. Macroscopiquement, ceci est interprété par une diminution de l'effort résistant lorsque la vitesse augmente [121],
- si $\tau \ll \bar{\tau}$, la sollicitation est lente, les chaînes se déplacent lentement. Le comportement volumique de l'élastomère peut être considéré élastique,
- si $\tau \approx \bar{\tau}$, la dissipation est maximale car le temps de relaxation des chaînes est du même ordre de grandeur que celui du passage d'une aspérité à l'autre.

Cette dissipation d'origine volumique est d'autant plus importante que l'adhésion entre les corps est importante. Du fait de la faible rigidité de l'élastomère, la surface de contact augmente sous l'action des liens adhésifs et ainsi les aspérités de petites tailles participent au processus dissipatif.

Ces deux sources bien identifiées sont de contribution plus ou moins importante selon l'état de rugosité, la propriété des surfaces et la vitesse de sollicitation [99].

Nous nous intéressons maintenant à des phénomènes plus particuliers se produisant selon la valeur de la vitesse de sollicitation lors du contact entre une bille de verre lisse et « propre » et un élastomère. A faible vitesse, M. Barquins constate l'apparition de *plis de décollement* en arrière de la zone de contact. A grande vitesse, A. Schallamach puis M. Barquins observent la formation et la propagation d'ondes, appelées les *ondes de Schallamach*. Nous verrons que les discussions précédentes permettent d'interpréter les dissipations observées lors de ces phénomènes plus particuliers.

II.2.2 L'apparition des plis de recollement à faible vitesse

A partir d'une position de contact établi avec col d'adhésion (figure II.3), au commencement du glissement, la zone de contact perd sa propriété d'axisymétrie. Un retrait en arrière de la zone de contact est observé (figure II.8), résultant de l'effet des contraintes de traction rompant les liens adhésifs.

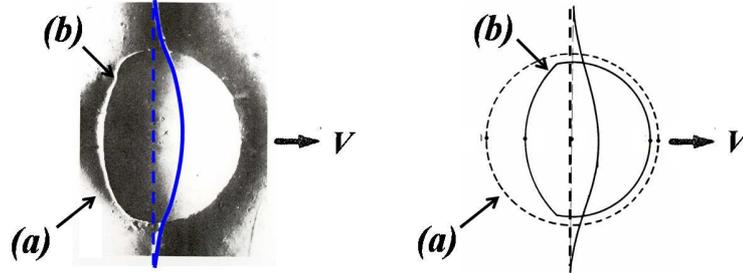


FIG. II.8 – Superposition des vues de dessus et des représentations de la zone de contact sous même charge normale (a) sans sollicitation tangentielle, (b) au début du glissement [11].

Par la suite, un bourrelet est formé en amont de la zone de contact du fait des fortes compressions et du caractère incompressible de l'élastomère [11, 12], voir figure II.9. Pour les faibles vitesses de sollicitation V , le bourrelet se déplace à la même vitesse que la bille de verre, il reste en amont de la zone de contact. La zone de contact est de forme constante et proche de celle de la schématisation (b) de la figure II.8 et le glissement suit un régime stable de type frottement de Coulomb.

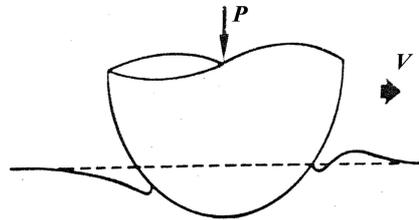


FIG. II.9 – Vue schématisique du profil de la zone de contact à faible vitesse de glissement, un bourrelet est formé [12].

Dans les cas de grands rayons de la bille de verre, un pli à l'arrière de la zone de contact apparaît [11, 12]. Ce phénomène observé même à faible vitesse de glissement est lié à l'existence des interactions entre les corps. La formation et l'atténuation du pli sont schématisées en figures II.10 et observées en figures II.11 par vue de dessus de la zone de contact au travers de la bille de verre.

Les effets des interactions entraînent de fortes tractions à l'arrière de la zone de contact (figures II.10-étape 1 et II.11(a)). A un moment donné, un décollement rapide est observé, le front de fissure se propageant de l'arrière de la zone contact vers le centre. Ce décollement diminue la surface de contact, qui devient semi-circulaire (figures II.11(b)-(c)). Suite aux fortes compressions à l'avant de la zone de contact et à la diminution de la zone de contact, un glissement est observé entre la bille de verre et l'élastomère. Ce glissement relaxe les contraintes en arrière de la zone de contact. Du fait des propriétés de viscoélasticité et d'incompressibilité de l'élastomère, en aval de la zone de contact un bourrelet est créé (figure II.10-étape 2). La hauteur de ce bourrelet est suffisante pour que les liens intermoléculaires se reconstituent entre les corps. Le bourrelet adhère à la bille en aval

de la zone de contact (figures II.10-étape 3 et II.11(d)). Un pli est créé entre la zone de contact et le lieu de recollement. Ensuite, ce pli se referme selon un processus qui peut être interprété comme la propagation de deux fronts de fissure en mode I se cicatrisant, l'un vers l'arrière, l'autre vers la zone de contact (figures II.10-étape 4 et II.11(e-g)). La zone de contact initiale (figures II.8(b) et II.9) est retrouvée (figure II.11(h)), le cycle (figures II.10-étapes 1-4 ou II.11(a-h)) peut être répété.

Ce phénomène est observé uniquement dans la zone arrière du contact. Il ne participe pas au mouvement relatif des corps qui se poursuit dans la zone avant du contact. Le bourrelet formé initialement en amont du contact (figure II.9) n'est pas modifié et se propage à la même vitesse que celle du déplacement relatif des corps.

A notre connaissance, aucune étude n'a pour l'instant modélisé ce phénomène.

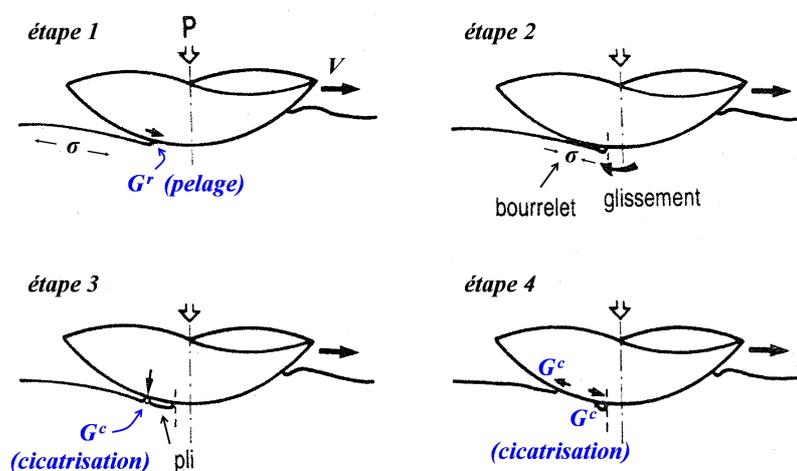


FIG. II.10 – Représentation schématique de la formation et de l'atténuation d'un pli de recollement [11].

II.2.3 L'apparition des ondes de Schallamach

A partir du régime stable de glissement en présence du bourrelet en amont de la zone de contact créé lors du début du glissement (figure II.9), un phénomène particulier est observé par A. Schallamach [104] puis par M. Barquins [11, 12] si la vitesse de sollicitation est augmentée et si l'élastomère est suffisamment souple ($E < 10 \text{ MPa}$). Le comportement viscoélastique de l'élastomère limite la vitesse de propagation du bourrelet, si bien qu'à partir d'une certaine vitesse de sollicitation, la bille de verre peut le rattraper. Du fait des interactions qui existent entre les deux corps, le bourrelet va adhérer à la bille et un pli se crée, figure II.12. Par suite, ce pli va se propager au sein de la zone de contact, c'est une *onde de Schallamach*.

Le pli se déplace de l'avant de la zone de contact (zone de compression) vers l'arrière de la zone de contact (zone de traction) à une vitesse supérieure à celle du déplacement relatif des corps. Sa propagation, une fois établie, peut être vue comme la propagation de deux fronts de fissure en mode I, l'un s'ouvrant en amont de l'onde (pelage à $\pi/2$), zone où les liens de type van der Waals entre les corps sont rompus, et l'autre se refermant tangentiellement en aval de l'onde, zone où les liens se cicatrisent.

Généralement, plusieurs plis se propagent simultanément au sein de la zone de contact, ces plis sont réguliers et se déplacent en moyenne à la même vitesse. La figure II.13 présente une vue de dessus au travers de la bille de verre de la zone de contact contenant plusieurs ondes de Schallamach

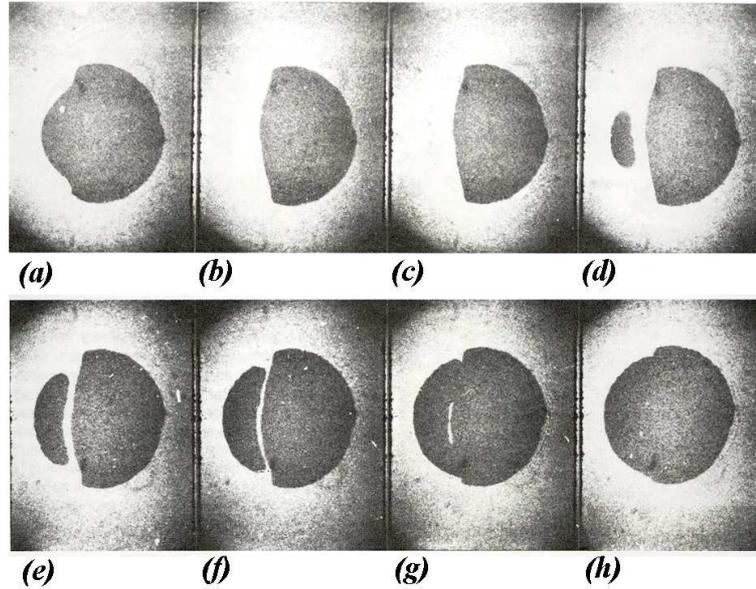


FIG. II.11 – Vues de dessus de la zone de contact à différents instants illustrant la formation et la disparition du pli de recollement [11].

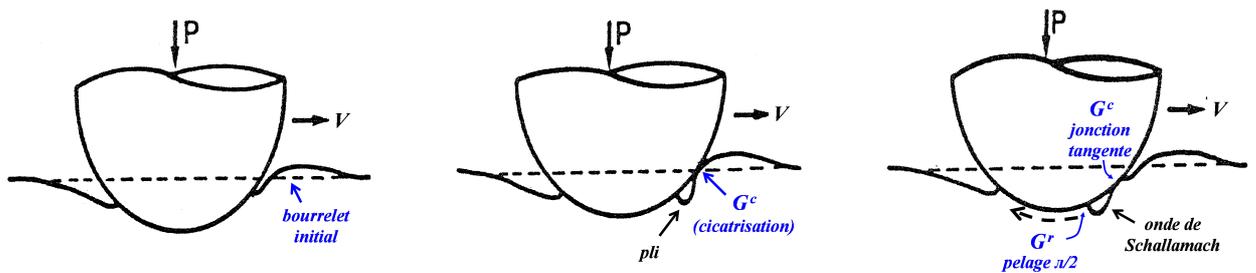


FIG. II.12 – Formation et propagation d’une onde de Schallamach [12].

à un instant donné. Cette figure est issue des résultats de l’expérience³ réalisée par M. Barquins [11]. La propagation de ces ondes d’adhésion/dés-adhésion est seule responsable du déplacement relatif des corps. La bille progresse d’une distance égale à celle de la taille de chaque onde ayant défilée. Lors de ce déplacement, il n’y a pas de glissement entre les corps et la dissipation ne peut plus être liée au frottement.

La formation de l’onde est favorisée si le rayon de la bille de verre est grand, si la vitesse imposée est grande, si l’effort normal P est faible, si la température est faible, car alors les pertes viscoélastiques de l’élastomère augmentent et le bourrelet initial se déplace moins vite [11], ou si l’épaisseur du bloc élastomère est grande [13]. Ces dépendances sont bien connues des industriels qui évitent l’apparition de ces plis dans les joints d’étanchéité ou lors du roulement d’un pneumatique en phase d’accélération [12]. Pour autant, la formation et la propagation de ces ondes ne sont pas synonymes d’usure, puisqu’après le passage de la bille de verre, aucune déformation permanente n’est observée sur la surface de l’élastomère.

³Les conditions d’apparition dépendent fortement des sollicitations (force d’indentation et vitesse de déplacement) appliquées sur la bille de verre. Nous donnons, pour information, quelques ordres de grandeur liés à l’expérience de M. Barquins : le rayon de la bille est $R = 2.19 \text{ mm}$, les sollicitations imposées sont telles que la vitesse de déplacement $V \in [4, 180] \mu\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et l’effort normal $P \in [20, 100] \text{ mN}$, le polymère retenu est un polyuréthane PSM4 Vishay de module d’Young $E = 5 \text{ MPa}$. Les résultats sont alors un effort tangentiel résistant à l’avancement $T \in [150, 400] \text{ mN}$, l’apparition de $N = 1$ à 6 ondes se propageant à une vitesse $v \in [30, 500] \mu\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ au sein de la zone de contact de diamètre $D \in [200, 500] \mu\text{m}$.

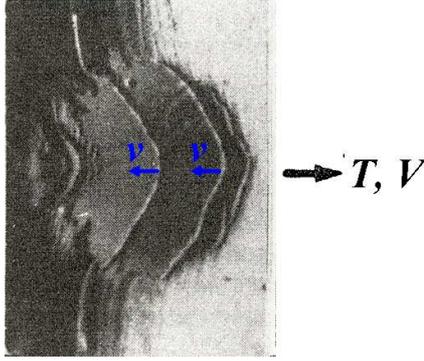


FIG. II.13 – Vue de dessus de la zone de contact avec propagation de plusieurs ondes de Schallamach [11].

Bien qu'expérimentalement la formation et la propagation des ondes de Schallamach soient bien identifiées, leurs modélisations fines restent des sujets ouverts.

Dans les cas où les dissipations volumiques et surfaciques peuvent être négligées, A.D. Roberts et A.G. Thomas [100] interprètent la propagation des ondes par le bilan énergétique suivant :

$$VT = Nfv, \quad (\text{II.12})$$

où, T est l'effort résistant, N le nombre d'ondes se propageant et f la force de type pelage exercée pour rompre les liens en amont de chaque onde. Ce bilan permet de relier la vitesse de propagation des ondes v à la vitesse relative des corps V .

M. Barquins confirme cette relation et l'étend à l'étude des dissipations [10], en considérant que les dissipations ne prennent pas part au volume, ce qui lui permet de relier par un calcul d'élasticité l'effort de pelage f à G^r . La dissipation est supposée localisée dans la zone de pelage de chaque onde, ainsi $G^r = w(1 + \alpha(T) v^n)$ (équation (I.8)). Les résultats obtenus sont alors en accord avec les expériences [10].

Cette modélisation du comportement de la propagation des ondes de Schallamach confirme les observations de A.D. Robert et A.G. Thomas [100] : le travail nécessaire pour déplacer les corps est fortement lié au travail à fournir pour rompre les liens en amont de chaque onde. Dans ce mécanisme particulier de déplacement relatif des corps, les interactions et leurs comportements dissipatifs en rupture jouent un rôle prépondérant. Cependant les résultats de M. Barquins [10] sous-estiment la valeur de l'effort tangentiel résistant.

Selon A.D. Robert [99], l'effort résistant à l'avancement T est issu de deux sources de dissipation. La première vient du comportement volumique de l'élastomère. Les ondes en se propageant imposent de fortes déformations près de la zone de contact, responsables de pertes viscoélastiques. La seconde vient du comportement des liens atomiques. Lors de la propagation de l'onde, des liens sont rompus en amont de l'onde et des liens sont cicatrisés en aval. Le bilan de cette propagation est dissipatif car $G^r \gg G^c$.

Comme il avait été observé par A. Schallamach ou précisé par B.N.J. Persson sur d'autres applications, les dissipations prennent part au volume. *Ce qui confirme que deux sources de dissipation sont à considérer : l'une localisée à l'interface liée au comportement des liens, la seconde prenant part au volume liée aux déformations de l'élastomère dues au passage des ondes.*

Au paragraphe VI.4.2, nous proposons une ébauche d'étude de la formation et de la propagation des ondes de Schallamach à l'aide de l'approche décrite au chapitre III et du modèle de comportement de l'interface présenté au paragraphe IV.4. Cette étude, qui n'a pas pu être traitée dans le cadre de cette thèse, constitue une perspective à court terme dans la poursuite de ce travail.

II.3 Conclusions

Ce second chapitre a présenté différentes manifestations macroscopiques des interactions lors du contact sous sollicitation normale ou tangentielle d'une bille de verre sur un élastomère. *Il en résulte un fort couplage entre propriétés volumique et surfacique* ainsi qu'un comportement au contact très spécifique, bien différent de celui des lois classiques comme la théorie de Hertz ou la loi de Coulomb. Plus précisément, les phénomènes tels que l'effort de « *pull-off* », l'augmentation du rayon de contact, la formation du *col d'adhésion* au bord de la zone de contact, l'*hystérésis d'adhésion*, ou la formation et la propagation des *ondes de Schallamach* ont été présentés.

L'originalité du travail qui va être présenté est de proposer un modèle d'interface qui rend compte d'une dissipation liée au comportement des liens adhésifs. L'analyse des résultats d'expérience ou des approches analytiques réalisées au sein de ces deux premiers chapitres, notamment les quatre points fondamentaux du paragraphe II.1.2, ont permis de justifier ce choix. Ce nouveau modèle d'interface est présenté au paragraphe IV.4.

Dans le chapitre suivant, nous formulons le problème de contact avec interaction entre deux corps dans le cadre de la mécanique des milieux continus. Sa résolution par une méthode éléments finis est décrite au chapitre V. Le traitement particulier du modèle d'interaction défini au chapitre IV est réalisé à l'aide des éléments cohésifs. Bien que cette approche soit très répandue dans la littérature, son application est surtout dédiée à l'étude de la rupture d'un corps [92] ou d'un assemblage [77, 95] et [78] (pour une revue des différentes modélisations retenues). Les travaux portant sur son application au contact avec interaction et à la possible restitution de l'adhésion lors de l'approche des corps sont plus rares.

Parmi ces contributions, nous avons déjà présenté au chapitre précédent celles de A. Jagota et C. Argento [54] et C. Argento et al. [3]. Leurs considérations de modélisation sont très liées aux travaux analytiques de K.L. Johnson [60] ou de Y.-Y. Lin, C.-Y. Hui et J.M. Baney [70]. Ils considèrent la dissipation d'origine volumique et un caractère non dissipatif du comportement attractif des liens : un potentiel de type van der Waals (équation (I.2)). Les applications qu'ils envisagent sont celles de l'étude de corps micrométriques de nature telle que la contribution de la tension de surface est importante [55], ce qui diffère de nos applications.

Une autre contribution sur l'étude du contact des corps en interaction par la méthode des éléments finis associée aux éléments cohésifs est celle des travaux de C. Talon et A. Curnier [117]. Nous reviendrons plus en détail au paragraphe VI.2 sur leur modélisation de l'interaction en vue de l'étude de la formation du col d'adhésion.

Malgré la littérature très diverse et dense sur le sujet, certaines questions restent largement ouvertes comme l'analyse de l'*hystérésis d'adhésion* ou la modélisation fine de la formation et de la propagation des *ondes de Schallamach*. Notre approche couplée au nouveau modèle d'interface retenu permet d'envisager la description de ces phénomènes. C'est l'objet des simulations numériques présentées au chapitre VI se comparant aux résultats expérimentaux ou analytiques présentés dans ce second chapitre.

Chapitre III

FORMULATION EN GRANDES DÉFORMATIONS DU PROBLÈME DE CONTACT AVEC ADHÉSION

A une échelle suffisamment fine ($10^{-3} \mu m$), l'interface peut être vue comme l'ensemble des atomes en interaction situés au niveau des surfaces de chaque corps. Elle est le lieu de réactions chimiques, d'interactions atomiques ou électrostatiques et possède une certaine épaisseur. Cependant, notre approche se situe à l'échelle des corps ($> \mu m$), l'interface sera ainsi assimilée à une surface d'épaisseur nulle possédant un comportement thermodynamique spécifique, c'est le concept de *surface matérielle* [82]. Suivant M. Frémond [41, 42, 43], nous décrivons la modélisation du comportement de l'interface avec les outils classiques de la thermodynamique des milieux continus étendus au concept de surface matérielle.

Nous introduirons dans les paragraphes III.1.2 et III.1.3 respectivement les cadres cinématique et sthénique, développés par Q.C. He, J.J. Telega et A. Curnier dans [51] ou par G. Pietrzak et A. Curnier dans [91] et plus récemment par A.S. Bretelle dans [17] et A.S. Bretelle et al. [18]. Les modèles de comportement d'interface, qui seront introduits au chapitre IV, sont formulés dans ces cadres. Nous verrons que les considérations des cadres cinématique et sthénique contraignent la modélisation des interactions atomiques, ce qui nous mènera à discuter des limites du lien cinématique issu de la projection orthogonale au paragraphe III.1.2 et des limites du principe d'action-réaction généralisé au paragraphe III.1.3.

Le paragraphe III.2 présente la formulation générale du problème dynamique de contact avec adhésion.

Les lois constitutives et quantités introduites sont écrites pour les grandes déformations dans une représentation eulérienne. Selon W. Noll [86], elles doivent vérifier le principe d'indifférence matérielle. D'après B.D. Coleman et M.E. Gurtin [28], elles seront choisies invariantes selon tout changement de référentiel, défini par un vecteur $\mathbf{q}(t)$ et une transformation orthogonale $\mathbf{Q}(t)$ qui dépendent du temps t . La position d'un point \mathbf{x}^* du corps dans un référentiel de temps t^* est liée à la position \mathbf{x} de ce point dans un autre référentiel de temps t par $\mathbf{x}^*(t^*) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{q}(t)$, avec $t^* = t + \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$. Ainsi, pour être invariante par changement de référentiel, toute fonction scalaire $f(\gamma, \gamma, \mathbf{\Gamma})$ doit vérifier

$$f(\gamma, \mathbf{Q}\gamma, \mathbf{Q}\mathbf{\Gamma}\mathbf{Q}^T) = f(\gamma, \gamma, \mathbf{\Gamma}).$$

De manière analogue, toute fonction vectorielle $\mathbf{f}(\gamma, \gamma, \mathbf{\Gamma})$ doit vérifier

$$\mathbf{f}(\gamma, \mathbf{Q}\gamma, \mathbf{Q}\mathbf{\Gamma}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q} \mathbf{f}(\gamma, \gamma, \mathbf{\Gamma}).$$

Enfin, toute fonction tensorielle $\mathbf{F}(\gamma, \gamma, \mathbf{\Gamma})$ doit vérifier

$$\mathbf{F}(\gamma, \mathbf{Q}\gamma, \mathbf{Q}\mathbf{\Gamma}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q} \mathbf{F}(\gamma, \gamma, \mathbf{\Gamma}) \mathbf{Q}^T.$$

Remarquons que toute quantité en représentation lagrangienne est invariante par ce changement de référentiel.

III.1 Caractérisation de l'interaction entre les surfaces

III.1.1 Notations

Nous considérons deux corps de configuration actuelle Ω_t^α dans \mathbb{R}^n , $n = 2$ ou 3 , $\forall t \in [0, T]$ et de configuration de référence Ω_0^α . Nous notons respectivement leurs frontières, considérées suffisamment régulières, Γ_t^α , de normale unitaire sortante \mathbf{n}^α , et Γ_0^α , de normale unitaire sortante \mathbf{N}^α , $\alpha = 1, 2$.

Le mouvement est noté $\mathbf{x}^\alpha = \mathbf{x}^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t)$, $\forall \mathbf{X}^\alpha \in \Omega_0^\alpha$ et $\forall t \in [0, T]$. On introduit $\mathbf{F}^\alpha = \mathbf{Grad} \mathbf{x}^\alpha$, le tenseur gradient de la transformation, $J^\alpha := \det(\mathbf{F}^\alpha)$, le jacobien de la transformation, $\mathbf{C}^\alpha = (\mathbf{F}^\alpha)^T \mathbf{F}^\alpha$ le tenseur de Cauchy-Green droit et $\mathbf{D}^\alpha = (\dot{\mathbf{F}}^\alpha (\mathbf{F}^\alpha)^{-1})_{sym}$ le tenseur des taux de déformation, pour $\alpha = 1, 2$. La dérivée particulière $d(\)/dt$ est notée également $(\dot{\ })$. Le tenseur des contraintes de Cauchy dans $\Omega_t^\alpha \times]0, T[$ est noté $\boldsymbol{\sigma}^\alpha$. Les premier et second tenseurs de Piola-Kirchhoff dans Ω_0^α sont notés respectivement $\mathbf{\Pi}^\alpha$ et \mathbf{S}^α . Ils sont définis tels que $\mathbf{\Pi}^\alpha = J^\alpha \boldsymbol{\sigma}^\alpha (\mathbf{F}^\alpha)^{-T}$ et $\mathbf{S}^\alpha = J^\alpha (\mathbf{F}^\alpha)^{-1} \boldsymbol{\sigma}^\alpha (\mathbf{F}^\alpha)^{-T}$, $\alpha = 1, 2$. Selon la formule de Nanson, il est possible de relier la normale \mathbf{N}^α correspondante à un élément de surface dS^α quelconque de Γ_0^α à la normale « actuelle » \mathbf{n}^α correspondante à un élément de surface ds^α quelconque de Γ_t^α par la relation suivante :

$$\mathbf{n}^\alpha ds^\alpha = J^\alpha (\mathbf{F}^\alpha)^{-T} \mathbf{N}^\alpha dS^\alpha.$$

Soient $\Gamma_{t,U}^\alpha$, $\Gamma_{t,F}^\alpha$ et $\Gamma_{t,C}^\alpha$ trois parties disjointes de Γ_t^α telles que $\Gamma_t^\alpha = \bar{\Gamma}_{t,U}^\alpha \cup \bar{\Gamma}_{t,F}^\alpha \cup \bar{\Gamma}_{t,C}^\alpha$. On désigne par \mathbf{f}^α , donnée, la densité massique de force et par ρ^α la masse volumique dans $\Omega_t^\alpha \times]0, T[$. Nous notons par \mathbf{F}_d^α , donnée, la densité surfacique de force sur $\Gamma_{t,F}^\alpha$. Nous considérons les conditions de position imposée $\mathbf{x}^\alpha = \mathbf{x}_d^\alpha$ sur $\Gamma_{t,U}^\alpha$.

En $t = 0$, nous précisons par $\Gamma_{0,U}^\alpha$, $\Gamma_{0,F}^\alpha$ et respectivement $\Gamma_{0,C}^\alpha$ les trois parties disjointes de Γ_0^α telles que $\Gamma_0^\alpha = \bar{\Gamma}_{0,U}^\alpha \cup \bar{\Gamma}_{0,F}^\alpha \cup \bar{\Gamma}_{0,C}^\alpha$, \mathbf{f}_0^α la densité massique de force et ρ_0^α la masse volumique dans Ω_0^α . Nous notons par $\mathbf{F}_{0,d}^\alpha$ la densité surfacique de force sur $\Gamma_{0,F}^\alpha$ et sur $\Gamma_{0,U}^\alpha$ les conditions de position imposée $\mathbf{x}^\alpha = \mathbf{x}_d^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t)$ sont spécifiées.

Les deux paragraphes suivants introduisent le lien entre les surfaces potentielles d'interaction $\Gamma_{t,C}^1$ et $\Gamma_{t,C}^2$ dans la configuration actuelle ou $\Gamma_{0,C}^1$ et $\Gamma_{0,C}^2$ dans la configuration de référence. Ce lien est établi par l'introduction d'un cadre cinématique définissant les grandeurs relatives à l'interaction. Il est décrit par la notion de point le plus proche, due à une projection orthogonale, et par l'introduction du principe d'action-réaction généralisé.

III.1.2 Cadre cinématique

Nous supposons dans la suite que $\forall t \in [0, T]$ et $\forall \mathbf{X}^1 \in \Gamma_{0,C}^1$:

- (i) \mathbf{n}^2 est continue et de dérivée continue sur $\Gamma_{t,C}^2$,
- (ii) sur $\Gamma_{t,C}^1$, $\mathbf{x}^1(\mathbf{X}^1, t)$ n'est pas situé en un centre de courbure ou en un point focal de $\Gamma_{t,C}^2$,
- (iii) les normales des surfaces $\Gamma_{t,C}^1$ et $\Gamma_{t,C}^2$ en vis-à-vis ne sont pas perpendiculaires.

Les hypothèses (i) et (ii) impliquent l'unicité de l'application projection considérée par la suite [31, 51].

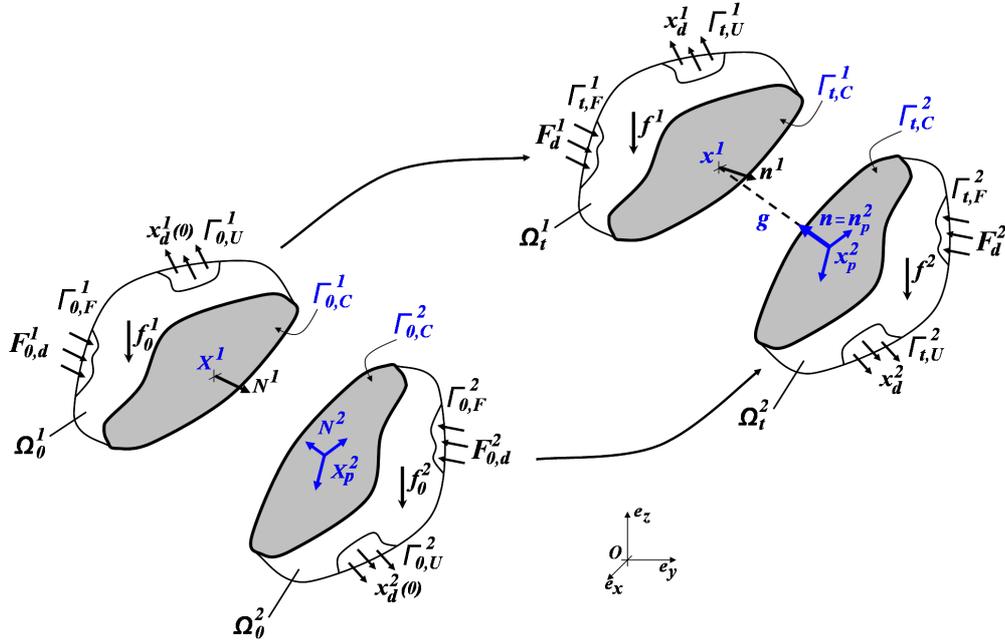


FIG. III.1 – Description des configurations considérées et notations. $\mathbf{x}^1 \in \Gamma_{t,C}^1$ se projette de façon unique en \mathbf{x}_p^2 sur $\gamma_p(\Gamma_{t,C}^2)$ selon la normale $\mathbf{n} := \mathbf{n}_p^2$. Les quantités indicées $_p$ sont relatives au point projeté.

Comme illustré sur la figure III.1, pour tout $t \in [0, T]$, on suppose que tout point matériel candidat à l'interaction, $\mathbf{x}^1(\mathbf{X}^1, t) \in \Gamma_{t,C}^1$, se projette à l'instant t de façon unique sur $\Gamma_{t,C}^2$ selon la projection orthogonale γ_p en $\mathbf{x}_p^2(\mathbf{X}_p^2, t) := \gamma_p(\mathbf{x}^1)$ (donc $\mathbf{x}_p^2 \in \gamma_p(\Gamma_{t,C}^2)$). L'application projection est définie par

$$\forall \mathbf{x}^1 \in \Gamma_{t,C}^1, \mathbf{x}_p^2 = \gamma_p(\mathbf{x}^1) = \underset{\mathbf{x}^2 \in \Gamma_{t,C}^2}{\text{Argmin}} \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2\|. \quad (\text{III.1})$$

Les quantités indicées $_p$ sont liées au point projeté. Nous notons par $\hat{\gamma}_p$, l'application définie par $\mathbf{X}_p^2 := \hat{\gamma}_p(\mathbf{X}^1) = ((\mathbf{x}^2)^{-1} \circ \gamma_p \circ (\mathbf{x}^1))(\mathbf{X}^1)$ et $\mathbf{X}_p^2 \in \hat{\gamma}_p(\Gamma_{0,C}^1)$.

La distance relative normale, invariante par rapport au changement de référentiel, $g := g(\mathbf{X}^1, t)$ est définie à chaque instant par,

$$g := (\mathbf{x}^1(\mathbf{X}^1, t) - \mathbf{x}_p^2(\mathbf{X}_p^2, t)) \cdot \mathbf{n}, \quad (\text{III.2})$$

où $\mathbf{n} := \mathbf{n}_p^2 = \mathbf{n}^2(\mathbf{x}_p^2(\mathbf{X}_p^2, t))$ est la normale unitaire sortante de $\Gamma_{t,C}^2$ en \mathbf{x}_p^2 . On introduit le vecteur distance d'interaction $\mathbf{g} := g\mathbf{n}$. Cette grandeur est invariante par rapport au changement de référentiel. La condition de non pénétration s'écrit alors

$$g \geq 0.$$

Selon T.A. Laursen et J.C. Simo [67, 68], ou A.S. Bretelle [17] et A.S. Bretelle et al. [18], nous considérons la paramétrisation de $\Gamma_{t,C}^2$ par l'application $\Theta : \Xi \rightarrow \Gamma_{t,C}^2$ suffisamment régulière où Ξ est un ouvert de \mathbb{R} . Tout élément de Ξ est noté $\xi_T = (\xi_T^1, \xi_T^2)$, tel que $\mathbf{x}^2 = \Theta(\xi_T)$. Il est alors possible de former une base locale en tout point de $\Gamma_{t,C}^2$ et en particulier en $\mathbf{x}_p^2 = \gamma_p(\mathbf{x}^1)$. Nous notons cette base $(\boldsymbol{\tau}^1, \boldsymbol{\tau}^2, \mathbf{n})$ avec

$$\boldsymbol{\tau}^i := \frac{\partial \mathbf{x}^2}{\partial \xi_T^i}((\xi_T^i)_p), \quad i = 1, 2 \text{ et } \mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\tau}^1 \wedge \boldsymbol{\tau}^2}{\|\boldsymbol{\tau}^1 \wedge \boldsymbol{\tau}^2\|},$$

où $(\xi_T)_p$ représente l'élément de Ξ vérifiant $\mathbf{x}_p^2 = \Theta((\xi_T^1)_p, (\xi_T^2)_p)$, c'est-à-dire d'après (III.1),

$$\forall \mathbf{x}^1 \in \Gamma_{t,C}^1, (\xi_T)_p = \text{Argmin}_{\xi_T \in \Xi} \|\mathbf{x}^1 - \Theta(\xi_T^1, \xi_T^2)\|. \quad (\text{III.3})$$

Nous nous intéressons maintenant à la définition d'une *vitesse relative* entre les surfaces $\Gamma_{t,C}^1$ et $\gamma_p(\Gamma_{t,C}^1)$ au point \mathbf{x}^1 considéré. Cette vitesse doit être invariante par rapport au changement de référentiel et doit permettre de déterminer les grandeurs cinématiques retenues pour modéliser le comportement de l'interface des corps en cas de contact ($g = 0$) et en cas de non contact ($g > 0$).

La première idée est de considérer la dérivée de \mathbf{g} définie en (III.2) comme vitesse relative,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{g}} = \frac{d\mathbf{g}}{dt} &= \frac{d\mathbf{x}^1}{dt}(\mathbf{X}^1, t) - \frac{d\mathbf{x}_p^2}{dt}(\mathbf{X}_p^2, t) \\ &= \frac{d\mathbf{x}^1}{dt}(\mathbf{X}^1, t) - \frac{d\Theta}{dt}((\xi_T^1)_p, (\xi_T^2)_p). \end{aligned}$$

Cette dernière forme précise la dépendance de $\dot{\mathbf{g}}$ par rapport au temps. Les variables $(\xi_T^i)_p$, $i = 1, 2$, du second terme dépendent de la position du point \mathbf{x}^1 d'après leurs définitions (équation (III.3)). Il vient

$$\dot{\mathbf{g}} = \frac{\partial \mathbf{x}^1}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{x}^2}{\partial t}((\xi_T)_p) - \left(\frac{\partial \xi_T^i}{\partial t} \right)_p \boldsymbol{\tau}^i((\xi_T)_p) = \frac{\partial \mathbf{x}^1}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{x}^2}{\partial t}((\xi_T)_p) - (\dot{\xi}_T^i)_p \boldsymbol{\tau}_p^i.$$

$\dot{\mathbf{g}}$ peut également s'écrire sous la forme $\dot{\mathbf{g}}\mathbf{n} + g \frac{d\mathbf{n}}{dt}$. Dans cette seconde écriture, le second terme ne vérifie pas le principe d'indifférence matérielle. En effet, $d\mathbf{n}^*/dt \neq \dot{\mathbf{Q}}(t) \cdot \mathbf{n}$. La considération de $\dot{\mathbf{g}}$ comme vitesse relative ne peut donc pas être retenue.

D'après cette remarque et selon [18, 31, 68, 120], nous définissons $[\mathbf{v}]$, la vitesse relative invariante par rapport au changement de référentiel suivante :

$$[\mathbf{v}] := \frac{\partial \mathbf{x}^1}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{x}_p^2}{\partial t} - g \frac{d\mathbf{n}}{dt}, \text{ ou encore } [\mathbf{v}] = \dot{\mathbf{g}}\mathbf{n} + (\dot{\xi}_T^i)_p \boldsymbol{\tau}_p^i. \quad (\text{III.4})$$

Le choix de cette vitesse est intimement lié au choix de modélisation des interactions. Nous considérerons que l'adhésion influe seulement sur le comportement normal de l'interface. Le comportement tangentiel de l'interface sera classiquement modélisé par les conditions de frottement de Coulomb lorsque les corps sont en contact ($g = 0$). Ainsi, avec ces considérations de modélisation de l'interaction, la vitesse relative doit :

- permettre de retrouver par intégration la distance relative $g(t)$ à chaque instant que les corps soient en contact ou non. Ce point est vérifié car

$$\int_0^t [\mathbf{v}(\tau)] \cdot \mathbf{n} \, d\tau = g(t) - g(0),$$

- être de composante tangentielle égale à la vitesse relative des deux corps lorsqu'ils sont en contact, c'est-à-dire égale à $\frac{\partial \mathbf{x}^1}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{x}_p^2}{\partial t}$. Ce qui est le cas en considérant $g = 0$ dans (III.4). Ceci permettra de considérer un comportement tangentiel de type frottement de Coulomb.

Remarquons que le terme $g \frac{d\mathbf{n}}{dt}$ rend compte de la rotation de la surface lors du mouvement du corps 2. Cette composante purement tangentielle implique que l'intégration par rapport au temps de la composante tangentielle de (III.4) n'est pas égale au déplacement tangentiel relatif des corps à chaque instant. En effet avec la vitesse relative retenue,

$$\begin{aligned} \int_0^t [\mathbf{v}(\tau)] \cdot \boldsymbol{\tau}_p^i \, d\tau &= (\xi_T^i)_p(t) - (\xi_T^i)_p(0) \\ &\neq \int_0^t \left(\frac{\partial \mathbf{x}^1}{\partial \tau} - \frac{\partial \mathbf{x}_p^2}{\partial \tau} \right) \cdot \boldsymbol{\tau}_p^i \, d\tau, \quad i = 1, 2, \text{ sauf si } g = 0. \end{aligned}$$

Ce choix de vitesse relative est donc inapproprié en vue de modéliser un comportement tangentiel d'interaction à distance dépendant du déplacement tangentiel relatif¹. Dans un tel cas, il faudrait :

- soit considérer une modélisation ne faisant pas appel au déplacement tangentiel relatif, on peut penser à une loi d'interaction adhésive tangentielle dépendante de la vitesse relative tangentielle. La considération d'une telle loi d'interaction fait l'objet du paragraphe IV.5 et présente une perspective de ce travail,

- soit définir l'interaction par un autre formalisme que celui de point le plus proche retenu dans ce travail. Citons par exemple le formalisme proposé par C. Argento et al. dans [3], ou par A. Jagota et C. Argento [54] qui considèrent une interaction résultante en chaque point de $\Gamma_{t,C}^1$ due à l'interaction de ce point avec l'ensemble $\Gamma_{t,C}^2$,

- soit s'assurer que les rotations relatives et les déformations des surfaces en interaction sont d'ordre suffisamment faibles, car alors le terme $g \frac{d\mathbf{n}}{dt}$ peut être négligé. Ce sera le cas, en particulier, dans l'hypothèse des petites perturbations (HPP) où la vitesse relative (III.4) permet de remonter au déplacement tangentiel relatif alors égal à $(\boldsymbol{\xi}_T)_p(t)$, ceci même pour des corps distants. Ce sera également vérifié dans certaines situations en grandes déformations avec des rotations faibles des surfaces en vis-à-vis en périphérie de la zone de contact.

Remarquons que le modèle *RCCM*, présenté au paragraphe IV.3, est un modèle écrit en déplacement (tangentiel en particulier), son extension aux grandes déformations avec les grandeurs cinématiques introduites précédemment n'est donc pas triviale.

D'un point de vue calcul numérique, la vitesse relative considérée dans le code LMGC90 (dont la présentation fait l'objet du chapitre V) correspond à celle définie en (III.4). En effet, parmi les

¹La notion de déplacement tangentiel relatif entre des corps en situation de non contact n'est pas simple, notamment vis-à-vis du terme lié à la rotation des surfaces. Notre avis est réservé sur la prise en compte de cette variable pour décrire le comportement de l'interaction entre les deux corps.

cas étudiés dans ce rapport, nous considérons soit des cas traités en HPP (Benchmark CSMA au paragraphe V.3, délaminage d'une couche d'aluminium au paragraphe V.4), soit des cas en grandes déformations (chapitre VI) pour lesquels nous ne considérerons pas la loi d'adhérence du modèle RCCM en tangentiel mais uniquement une loi de type Coulomb (la formulation en vitesse de ce type de loi entre dans le cadre présenté précédemment).

III.1.3 Principe d'action-réaction généralisé

Nous avons établi le lien cinématique entre les deux surfaces, ce qui a permis de préciser les grandeurs saut normal g (équation (III.2)) et vitesse relative $[\mathbf{v}]$ (équation (III.4)) qui caractériseront le comportement de l'interface. Il s'agit maintenant de définir le *lien sthénique* qui existe entre les deux surfaces. Pour ce faire, nous considérons les travaux de A.S. Bretelle [17], Q.C. He, J.J. Telega et A. Curnier [51] et A. Klarbring [65], sur la généralisation du principe d'action-réaction liée au cadre cinématique précédent de type projection orthogonale. Dans cette généralisation, *la relation entre les contraintes des deux surfaces est définie même si les corps ne sont pas en contact*. Dans la suite, nous appliquons ce formalisme à notre cas d'interaction adhésive à distance et nous discutons de ses limites.

Les deux axiomes de la mécanique, la loi de bilan des forces et la loi de bilan des moments, peuvent être étendus aux cas de surfaces en vis-à-vis non forcément en contact d'après les travaux de A. Curnier et al. [31].

La loi de bilan des forces s'énonce : « *la densité surfacique d'effort au voisinage de \mathbf{x}^1 et la densité surfacique d'effort au voisinage de \mathbf{x}_p^2* » interagissent, pour tout t et pour toute sous-partie $\tilde{\Gamma}_{t,C}^1$ de $\Gamma_{t,C}^1$, de sorte que

$$\int_{\tilde{\Gamma}_{t,C}^1} \mathbf{t}^1(\mathbf{x}^1) ds^1 + \int_{\gamma_p(\tilde{\Gamma}_{t,C}^1)} \mathbf{t}_p^2(\mathbf{x}_p^2) ds^2 = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x}^1 \in \tilde{\Gamma}_{t,C}^1, \quad (\text{III.5})$$

où on note $\mathbf{t}^1 := \boldsymbol{\sigma}^1 \mathbf{n}^1$ et $\mathbf{t}^2 := \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{n}^2$ les vecteurs contraintes d'interaction définis sur $\Gamma_{t,C}^1$ et respectivement $\Gamma_{t,C}^2$. Selon [51], on note j_p le rapport entre les éléments de surface en interaction à l'instant actuel, tel que $j_p(\mathbf{x}^1) ds^1 = \gamma_p(ds^1) = ds^2$. Avec les hypothèses (i), (ii) et (iii) décrites au paragraphe précédent, j_p est bien défini ($\mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{n} \neq 0$). Par le changement de variable $\mathbf{x}_p^2 = \gamma_p(\mathbf{x}^1)$, (III.5) s'écrit sous forme locale

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^1(\mathbf{x}^1) + j_p \mathbf{t}_p^2(\gamma_p(\mathbf{x}^1)) &= \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x}^1 \in \Gamma_{t,C}^1 \quad \text{et} \\ \mathbf{t}^2(\mathbf{x}^2) &= \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x}^2 \in \Gamma_{t,C}^2 \setminus \gamma_p(\Gamma_{t,C}^1), \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

où l'indice p précise la considération de la quantité au point projeté \mathbf{x}_p^2 . Tous les points de $\Gamma_{t,C}^1$ se projettent sur $\Gamma_{t,C}^2$. Sur la partie $\Gamma_{t,C}^2 \setminus \gamma_p(\Gamma_{t,C}^1)$ de $\Gamma_{t,C}^2$ aucun point n'est projeté, ainsi $\mathbf{t}^2 = \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{n}^2 = \mathbf{0}$ pour tout $\mathbf{x}^2 \in \Gamma_{t,C}^2 \setminus \gamma_p(\Gamma_{t,C}^1)$. Ce point souligne l'importance donnée à la surface « candidate » dans cette approche. En pratique, cette surface potentielle d'interaction (ici $\Gamma_{t,C}^1$) sera choisie suffisamment étendue.

Avec les notations définies précédemment et en posant $J_p(\mathbf{X}^1)$, le rapport dS^1 sur dS^2 des éléments de surface en interaction à l'état de référence, $\mathbf{T}^1 := \mathbf{F}^1 \mathbf{S}^1 \mathbf{N}^1$ le vecteur contrainte d'interaction sur $\Gamma_{0,C}^1$, $\mathbf{T}^2 := \mathbf{F}^2 \mathbf{S}^2 \mathbf{N}^2$ sur $\Gamma_{0,C}^2$ et l'indice p précisant l'écriture des quantités au point projeté, la forme locale en représentation lagrangienne de ce bilan s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^1(\mathbf{X}^1) + J_p \mathbf{T}_p^2(\hat{\gamma}_p(\mathbf{X}^1)) &= \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{X}^1 \in \Gamma_{0,C}^1 \quad \text{et} \\ \mathbf{T}^2(\mathbf{X}^2) &= \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{X}^2 \in \Gamma_{0,C}^2 \setminus \hat{\gamma}_p(\Gamma_{0,C}^1). \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

La loi de bilan des moments s'énonce : « la densité surfacique de moment au voisinage de \mathbf{x}^1 et la densité surfacique de moment au voisinage de \mathbf{x}_p^2 » interagissent, pour tout t et pour toute sous-partie $\tilde{\Gamma}_{t,C}^1$ de $\Gamma_{t,C}^1$, de sorte que

$$\int_{\tilde{\Gamma}_{t,C}^1} \mathbf{x}^1 \wedge \mathbf{t}^1(\mathbf{x}^1) ds^1 + \int_{\gamma_p(\tilde{\Gamma}_{t,C}^1)} \mathbf{x}_p^2 \wedge \mathbf{t}_p^2(\mathbf{x}_p^2) ds^2 = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x}^1 \in \tilde{\Gamma}_{t,C}^1.$$

Ce qui donne sous forme locale,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^1 \wedge \mathbf{t}^1(\mathbf{x}^1) + j_p \gamma_p(\mathbf{x}^1) \wedge \mathbf{t}_p^2(\gamma_p(\mathbf{x}^1)) &= \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x}^1 \in \Gamma_{t,C}^1, \\ \Leftrightarrow (\mathbf{x}^1 - \gamma_p(\mathbf{x}^1)) \wedge \mathbf{t}^1(\mathbf{x}^1) &= \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x}^1 \in \Gamma_{t,C}^1, \text{ d'après (III.6),} \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

et en représentation lagrangienne,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^1 \wedge \mathbf{T}^1(\mathbf{X}^1) + J_p \hat{\gamma}_p(\mathbf{X}^1) \wedge \mathbf{T}_p^2(\hat{\gamma}_p(\mathbf{X}^1)) &= \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{X}^1 \in \Gamma_{0,C}^1, \\ \Leftrightarrow (\mathbf{X}^1 - \hat{\gamma}_p(\mathbf{X}^1)) \wedge \mathbf{T}^1(\mathbf{X}^1) &= \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{X}^1 \in \Gamma_{0,C}^1, \text{ d'après (III.7).} \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Le principe d'action-réaction généralisé est constitué par les deux lois de bilan (III.6) et (III.8) en représentation eulérienne ou (III.7) et (III.9) en représentation lagrangienne. Ces deux lois de bilan constituent la forme forte du principe d'action-réaction généralisé, illustrée en figure III.2. Les conséquences immédiates de ce principe sont que l'interaction entre les corps à l'instant t est colinéaire à \mathbf{n} lorsque les points ne sont pas en contact et qu'elle correspond au principe d'action-réaction classique lorsque les points sont en contact (la partie issue de la loi de bilan des moments n'apportant alors rien de supplémentaire et $j_p = 1$, $J_p = 1$).

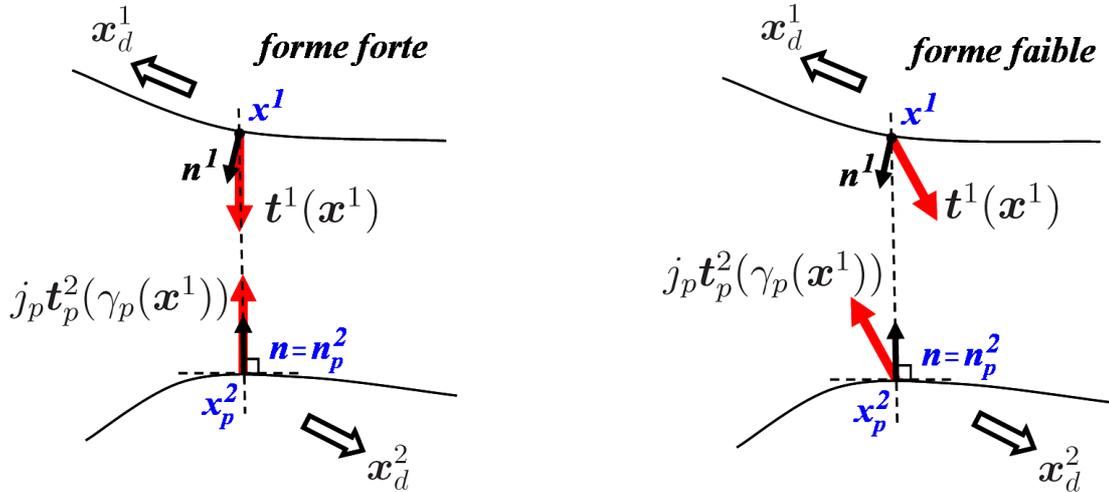


FIG. III.2 – Forme forte du principe d'action-réaction généralisé (loi de bilan des forces et des moments) et forme faible (loi de bilan des forces uniquement) [65]. Dans ce dernier cas, l'interaction à distance peut avoir une composante tangentielle.

Le principe d'action-réaction généralisé réalise le lien sthénique entre les surfaces en vis-à-vis. Comme le cadre cinématique précédent, son choix n'est pas indépendant de la modélisation des interactions envisagées.

En effet, la forme forte du principe d'action-réaction généralisé est appropriée pour décrire une interaction adhésive ayant un effet seulement selon la normale, car aucune composante tangentielle à distance ne peut exister du fait de la loi de bilan des moments. Pour obtenir un lien sthénique permettant une interaction tangentielle adhésive à distance, un autre formalisme doit être utilisé.

Dans un tel cas, il est possible :

- soit de considérer la forme faible du principe d'action-réaction généralisé, présentée par A. Klarbring [65] et illustrée en figure III.2. Le lien sthénique se résume alors à l'équation (III.6) en représentation eulérienne ou (III.7) en représentation lagrangienne,
- soit de considérer un autre formalisme comme par exemple celui des travaux de C. Argento et al. [3] et A. Jagota et C. Argento [54] discutés précédemment.

Sauf situation précisée, nous retenons pour la suite la forme forte du principe d'action-réaction généralisé.

Remarque : si on garde à l'esprit une interprétation de l'adhésion en terme de filaments entre les deux corps, il serait plus convenable d'écrire la cinématique et les lois d'action-réaction en formulation lagrangienne en se référant à la position déformée initiale de contact en lieu et place du formalisme précédent issu d'une projection orthogonale.

III.2 Formulation du problème dynamique

Ce paragraphe présente la formulation thermodynamique générale des modèles d'adhésion lors d'une évolution dynamique en grandes déformations *sans considération des effets thermiques*. Le comportement de l'interface, constituée par les deux surfaces en vis-à-vis et leurs interactions, est décrit selon M. Frémond [41, 42] dans le cadre des matériaux standards généralisés [49] étendus au concept de surface matérielle. Cette formulation généralise d'une part aux grandes déformations la formulation de L. Cangémi [21] étudiant le cas HPP ou celle de Y. Monerie [77] et d'autre part à la dynamique la formulation proposée par A.S. Bretelle [17] et A.S. Bretelle et al. [18] s'intéressant aux évolutions quasi-statiques.

Le comportement de l'interface est caractérisé par *une énergie libre surfacique* dépendant des variables d'état retenues et par *un pseudo-potentiel de dissipation* dépendant des vitesses des variables d'état.

Les choix particuliers des formes de ces potentiels conduiront au comportement non adhésif de type Signorini - Coulomb (paragraphe IV.1), au *modèle de Dugdale généralisé* (paragraphe IV.2), au *modèle RCCM* dans le cas où l'on restreint le cadre en HPP (paragraphe IV.3), ou enfin au *modèle d'adhésion cicatrisante* (paragraphe IV.4).

III.2.1 Principe des puissances virtuelles et principes de la thermodynamique

Les notations introduites précédemment (figure III.1) ainsi que le cadre cinématique proposé pour l'étude en grandes déformations sont conservés. Le principe d'action-réaction généralisé a permis d'obtenir une relation entre les deux surfaces rendant compte de la relation entre $\mathbf{t}^1(\mathbf{x}^1)$ et $\mathbf{t}_p^2(\gamma_p(\mathbf{x}^1))$.

Nous notons la vitesse par $\mathbf{v}^\alpha := \frac{d\mathbf{x}^\alpha}{dt}(\mathbf{X}^\alpha, t)$ dans Ω_t^α , $\alpha = 1, 2$.

Nous choisissons de caractériser le comportement de l'interface par le vecteur contrainte d'interaction $\mathbf{t} = -\mathbf{t}^1(\mathbf{x}^1)$, défini sur $\Gamma_{t,C}^1$. On considère la décomposition normale t_N et tangentielle \mathbf{t}_T du vecteur contrainte d'interaction telle que $\mathbf{t} = t_N \mathbf{n} + \mathbf{t}_T$. Sur $\Gamma_{0,C}^1$. Nous introduisons le vecteur contrainte d'interaction $\mathbf{T} = -\mathbf{T}^1(\mathbf{X}^1, t)$ avec sa composante normale définie par $T_N := \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ et sa composante tangentielle définie par $\mathbf{T}_T := \mathbf{T} - T_N \mathbf{n}$.

Pour tout $t \in [0, T]$ et pour tout champ de vitesse virtuelle $\tilde{\mathbf{v}}^\alpha$ cinématiquement admissible provenant d'un mouvement virtuel $\tilde{\mathbf{x}}$ cinématiquement admissible, il est possible de définir la puissance

des quantités d'accélération

$$\forall \tilde{\Omega}_t^\alpha \subset \Omega_t^\alpha,$$

$$\mathcal{P}_{acc}(\tilde{\mathbf{v}}) = \sum_{\alpha=1,2} \int_{\tilde{\Omega}_t^\alpha} \rho^\alpha \frac{d\mathbf{v}^\alpha}{dt} \cdot \tilde{\mathbf{v}}^\alpha d\tilde{\Omega}_t^\alpha,$$

et la puissance des efforts extérieurs

$$\forall \tilde{\Omega}_t^\alpha \subset \Omega_t^\alpha, \forall \tilde{\Gamma}_{t,F}^\alpha \subset \Gamma_{t,F}^\alpha,$$

$$\mathcal{P}_{ext}(\tilde{\mathbf{v}}) = \sum_{\alpha=1,2} \left[\int_{\tilde{\Omega}_t^\alpha} \rho^\alpha \mathbf{f}^\alpha \cdot \tilde{\mathbf{v}}^\alpha d\tilde{\Omega}_t^\alpha + \int_{\tilde{\Gamma}_{t,F}^\alpha} \mathbf{F}_d^\alpha \cdot \tilde{\mathbf{v}}^\alpha ds^\alpha \right].$$

La puissance des efforts intérieurs s'écrit

$$\forall \tilde{\Omega}_t^\alpha \subset \Omega_t^\alpha, \forall \tilde{\Gamma}_{t,C}^\alpha \subset \Gamma_{t,C}^\alpha,$$

$$\mathcal{P}_{int}(\tilde{\mathbf{v}}) = - \sum_{\alpha=1,2} \left[\int_{\tilde{\Omega}_t^\alpha} \boldsymbol{\sigma}^\alpha : \mathbf{D}^\alpha(\tilde{\mathbf{v}}^\alpha) d\tilde{\Omega}_t^\alpha - \int_{\tilde{\Gamma}_{t,C}^\alpha} \mathbf{t}^\alpha \cdot \tilde{\mathbf{v}}^\alpha ds^\alpha \right],$$

c'est-à-dire en réalisant le changement de variable lié à la projection orthogonale

$$\forall \tilde{\Omega}_t^\alpha \subset \Omega_t^\alpha, \forall \tilde{\Gamma}_{t,C}^1 \subset \Gamma_{t,C}^1,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{int}(\tilde{\mathbf{v}}) = & - \sum_{\alpha=1,2} \int_{\tilde{\Omega}_t^\alpha} \boldsymbol{\sigma}^\alpha : \mathbf{D}^\alpha(\tilde{\mathbf{v}}^\alpha) d\tilde{\Omega}_t^\alpha \\ & + \int_{\tilde{\Gamma}_{t,C}^1} \left(\mathbf{t}^1(\mathbf{x}^1) \cdot \tilde{\mathbf{v}}^1(\mathbf{x}^1) - j_p \mathbf{t}^2(\gamma_p(\mathbf{x}^1)) \cdot \tilde{\mathbf{v}}^2(\gamma_p(\mathbf{x}^1)) \right) ds^1, \end{aligned}$$

où $\tilde{\mathbf{v}}^1 = \frac{d\tilde{\mathbf{x}}^1}{dt}(\mathbf{X}^1, t) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}^1}{\partial t}$ et $\tilde{\mathbf{v}}^2(\gamma_p(\mathbf{x}^1)) = \frac{d\tilde{\mathbf{x}}^2}{dt}(\hat{\gamma}_p(\mathbf{X}^1), t)$. Or, à partir du moment où l'on met en relation le point \mathbf{x}^1 et son projeté $\mathbf{x}_p^2 = \gamma_p(\mathbf{x}^1)$, le point $\hat{\gamma}_p(\mathbf{X}^1)$ est fixé. Il vient ainsi $\tilde{\mathbf{v}}^2(\gamma_p(\mathbf{x}^1)) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}^2}{\partial t}(\mathbf{x}_p^2)$. Avec $\mathbf{t} = -\mathbf{t}^1(\mathbf{x}^1)$ et la forme locale de la loi de bilan des forces (III.6), la puissance des efforts intérieurs prend la forme suivante :

$$\forall \tilde{\Omega}_t^\alpha \subset \Omega_t^\alpha, \forall \tilde{\Gamma}_{t,C}^1 \subset \Gamma_{t,C}^1,$$

$$\mathcal{P}_{int}(\tilde{\mathbf{v}}) = - \sum_{\alpha=1,2} \left[\int_{\tilde{\Omega}_t^\alpha} \boldsymbol{\sigma}^\alpha : \mathbf{D}^\alpha(\tilde{\mathbf{v}}^\alpha) d\tilde{\Omega}_t^\alpha \right] - \int_{\tilde{\Gamma}_{t,C}^1} \mathbf{t} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}^1}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}^2}{\partial t}(\mathbf{x}_p^2) \right) ds^1. \quad (\text{III.10})$$

D'après la définition de la vitesse relative retenue, donnée par l'équation (III.4),

$$\frac{\partial \mathbf{x}^1}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{x}^2}{\partial t}(\mathbf{x}_p^2) = [\mathbf{v}] + g \frac{d\mathbf{n}}{dt}. \quad (\text{III.11})$$

Le terme $g \mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt}$, qui apparaît en développant (III.10) avec (III.11), se met sous la forme

$$g \left(t_N \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt} + \mathbf{t}_T \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right),$$

or

$$\begin{aligned}
 & - \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt} = 0, \text{ et} \\
 & - g \mathbf{t}_T \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt} = 0, \text{ car } \left\{ \begin{array}{l} \text{- soit } g = 0 \text{ et } \mathbf{t}_T \text{ quelconque,} \\ \text{- soit } g > 0 \text{ et } \mathbf{t}_T \text{ colinéaire à } \mathbf{n} \text{ (loi de bilan des moments (III.8)).} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Finalement, la puissance des efforts intérieurs prend la forme

$$\begin{aligned}
 & \forall \tilde{\Omega}_t^\alpha \subset \Omega_t^\alpha, \forall \tilde{\Gamma}_{t,C}^1 \subset \Gamma_{t,C}^1, \\
 & \mathcal{P}_{int}(\tilde{\mathbf{v}}) = - \sum_{\alpha=1,2} \left[\int_{\tilde{\Omega}_t^\alpha} \boldsymbol{\sigma}^\alpha : \mathbf{D}^\alpha(\tilde{\mathbf{v}}^\alpha) d\tilde{\Omega}_t^\alpha \right] - \int_{\tilde{\Gamma}_{t,C}^1} \mathbf{t} \cdot [\tilde{\mathbf{v}}] ds^1.
 \end{aligned}$$

Pour toute évolution dynamique, le principe des puissances virtuelles s'énonce :

$$\begin{aligned}
 & \forall t \in [0, T], \forall \tilde{\Omega}_t^1 \times \tilde{\Omega}_t^2 \subset \Omega_t^1 \times \Omega_t^2 \text{ et } \forall \tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{\mathbf{v}}^1, \tilde{\mathbf{v}}^2), \\
 & \mathcal{P}_{acc}(\tilde{\mathbf{v}}) = \mathcal{P}_{ext}(\tilde{\mathbf{v}}) + \mathcal{P}_{int}(\tilde{\mathbf{v}}).
 \end{aligned} \tag{III.12}$$

En réalisant les choix classiques sur $\tilde{\mathbf{v}}$ cinématiquement admissible, la forme locale suivante du principe (III.12) est obtenue, $\forall t \in]0, T[$:

$$\begin{aligned}
 & \rho^\alpha \frac{d\mathbf{v}^\alpha}{dt} - \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}^\alpha = \rho^\alpha \mathbf{f}^\alpha \text{ dans } \Omega_t^\alpha, \alpha = 1, 2, \\
 & \mathbf{x}^\alpha = \mathbf{x}_d^\alpha \text{ sur } \Gamma_{t,U}^\alpha, \alpha = 1, 2, \\
 & \boldsymbol{\sigma}^\alpha \mathbf{n}^\alpha = \mathbf{F}_d^\alpha \text{ sur } \Gamma_{t,F}^\alpha, \alpha = 1, 2, \\
 & j_p \mathbf{t}_p^2 = \begin{cases} -\mathbf{t}^1 \text{ sur } \gamma_p(\Gamma_{t,C}^1) \\ \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_{t,C}^2 \setminus \gamma_p(\Gamma_{t,C}^1) \end{cases} \quad (\text{principe d'action-réaction généralisé}).
 \end{aligned}$$

En vue d'écrire les deux principes de la thermodynamique, nous introduisons les quantités suivantes pour tout sous-système matériel $\tilde{\Omega}_t^\alpha \cup \tilde{\Gamma}_{t,C}^1$: l'énergie cinétique \mathcal{E}_c , l'énergie interne \mathcal{E}_{int} , la puissance calorifique \mathcal{P}_{cal} et l'entropie \mathcal{S} .

L'énergie cinétique s'écrit

$$\begin{aligned}
 & \forall \tilde{\Omega}_t^\alpha \subset \Omega_t^\alpha, \\
 & \mathcal{E}_c = \sum_{\alpha=1,2} \left[\frac{1}{2} \int_{\tilde{\Omega}_t^\alpha} \rho^\alpha (\mathbf{v}^\alpha)^2 d\tilde{\Omega}_t^\alpha \right].
 \end{aligned}$$

Nous introduisons l'énergie interne suivante :

$$\begin{aligned}
 & \forall \tilde{\Omega}_t^\alpha \subset \Omega_t^\alpha, \forall \tilde{\Gamma}_{t,C}^1 \subset \Gamma_{t,C}^1, \\
 & \mathcal{E}_{int} = \sum_{\alpha=1,2} \left[\int_{\tilde{\Omega}_t^\alpha} \rho^\alpha e^\alpha d\tilde{\Omega}_t^\alpha \right] + \int_{\tilde{\Gamma}_{t,C}^1} e_S ds^1,
 \end{aligned}$$

où e^α est l'énergie interne massique du corps Ω_t^α , $\alpha = 1, 2$, et e_S l'énergie interne surfacique de l'interface exprimée, par choix, sur $\Gamma_{t,C}^1$.

En notant par r^α la source volumique de chaleur dans Ω_t^α , par \mathbf{q}^α le vecteur flux de chaleur surfacique rentrant sur $\Gamma_t^\alpha \setminus \Gamma_{t,C}^\alpha$, $\alpha = 1, 2$, et par T la température dans ce qui suit, la puissance calorifique reçue prend la forme

$$\forall \tilde{\Omega}_t^\alpha \subset \Omega_t^\alpha, \forall \tilde{\Gamma}_t^\alpha \setminus \tilde{\Gamma}_{t,C}^\alpha \subset \Gamma_t^\alpha \setminus \Gamma_{t,C}^\alpha,$$

$$\mathcal{P}_{cal} = \sum_{\alpha=1,2} \left[\int_{\tilde{\Omega}_t^\alpha} r^\alpha d\tilde{\Omega}_t^\alpha - \int_{\tilde{\Gamma}_t^\alpha \setminus \tilde{\Gamma}_{t,C}^\alpha} \mathbf{q}^\alpha \cdot \mathbf{n}^\alpha ds^\alpha \right].$$

Nous introduisons l'entropie suivante :

$$\forall \tilde{\Omega}_t^\alpha \subset \Omega_t^\alpha, \forall \tilde{\Gamma}_{t,C}^1 \subset \Gamma_{t,C}^1,$$

$$\mathcal{S} = \sum_{\alpha=1,2} \left[\int_{\tilde{\Omega}_t^\alpha} \rho^\alpha s^\alpha d\tilde{\Omega}_t^\alpha \right] + \int_{\tilde{\Gamma}_{t,C}^1} s_S ds^1,$$

où s^α est l'entropie massique du corps Ω_t^α , $\alpha = 1, 2$, et s_S représente l'entropie surfacique de l'interface exprimée, également par choix, sur $\Gamma_{t,C}^1$.

Le premier principe de la thermodynamique s'écrit pour tout système matériel $\tilde{\Omega}_t^\alpha \cup \tilde{\Gamma}_{t,C}^1 \subset \Omega_t^\alpha \cup \Gamma_{t,C}^1$, $\alpha = 1, 2$, et $\forall t \in [0, T]$,

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} + \frac{d\mathcal{E}_{int}}{dt} = \mathcal{P}_{ext}(\mathbf{v}) + \mathcal{P}_{cal}.$$

En postulant la conservation de la masse volumique ρ^α dans Ω_t^α , $\alpha = 1, 2$, le principe des puissances virtuelles (III.12) pour $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$ appliqué au système matériel $\tilde{\Omega}_t^\alpha \cup \tilde{\Gamma}_{t,C}^1$ prend la forme

$$\mathcal{P}_{acc}(\mathbf{v}) = \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}_{int}(\mathbf{v}) + \mathcal{P}_{ext}(\mathbf{v}).$$

Ainsi, avec la relation précédente, le premier principe de la thermodynamique s'écrit

$$\frac{d\mathcal{E}_{int}}{dt} = -\mathcal{P}_{int}(\mathbf{v}) + \mathcal{P}_{cal},$$

ou sous sa forme locale

$$\begin{cases} \rho^\alpha \dot{e}^\alpha = \sigma^\alpha : \mathbf{D}^\alpha + r^\alpha - \text{div}^\alpha \mathbf{q}^\alpha & \text{dans } \Omega_t^\alpha, \alpha = 1, 2, \\ \dot{e}_S = t_N \dot{g} + \mathbf{t}_T \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}}_T & \text{sur } \Gamma_{t,C}^1. \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

Le second principe de la thermodynamique s'écrit : pour tout système matériel $\tilde{\Omega}_t^\alpha \cup \tilde{\Gamma}_{t,C}^1 \subset \Omega_t^\alpha \cup \Gamma_{t,C}^1$, $\alpha = 1, 2$, et $\forall t \in [0, T]$,

$$T \frac{d\mathcal{S}}{dt} \geq \mathcal{P}_{cal},$$

où T est la température absolue et conduit à la forme locale suivante.

$$\begin{cases} \rho^\alpha \dot{s}^\alpha \geq \frac{r^\alpha}{T} - \text{div}^\alpha \left(\frac{\mathbf{q}^\alpha}{T} \right) & \text{dans } \Omega_t^\alpha, \alpha = 1, 2, \\ \dot{s}_S \geq 0 & \text{sur } \Gamma_{t,C}^1. \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

Nous introduisons les énergies libres massiques ψ^α dans Ω_t^α , $\alpha = 1, 2$, et l'énergie libre surfacique de l'interface Ψ définie sur $\Gamma_{t,C}^1$ suivantes :

$$\psi^\alpha = e^\alpha - T s^\alpha, \quad \Psi = e_S - T s_S. \quad (\text{III.15})$$

En supposant une évolution isotherme du système matériel $\Omega_t^\alpha \cup \Gamma_{t,C}^1$ et sans source de chaleur volumique ($r^\alpha = 0$), les équations locales (III.13) et (III.14) avec les définitions des énergies libres (III.15) conduisent aux inégalités de Clausius-Duhem :

$$\begin{cases} d^\alpha := -\rho^\alpha \dot{\psi}^\alpha + \sigma^\alpha : \mathbf{D}^\alpha \geq 0 \text{ dans } \Omega_t^\alpha, \alpha = 1, 2, \\ \mathcal{D} := -\dot{\Psi} + t_N \dot{g} + \mathbf{t}_T \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}}_T \geq 0 \text{ sur } \Gamma_{t,C}^1, \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

où d^α représente la dissipation intrinsèque dans Ω_t^α , $\alpha = 1, 2$, et \mathcal{D} la dissipation intrinsèque de l'interface définie sur $\Gamma_{t,C}^1$.

Il est possible d'écrire les inégalités de Clausius-Duhem en représentation lagrangienne. En introduisant d_0^α la dissipation intrinsèque dans Ω_0^α et \mathcal{D}_0 la dissipation intrinsèque de l'interface définie sur $\Gamma_{0,C}^1$, il vient $\forall t \in [0, T]$

$$\begin{cases} d_0^\alpha := -\rho_0^\alpha \dot{\psi}^\alpha + \mathbf{\Pi}^\alpha : \dot{\mathbf{F}}^\alpha \geq 0 \text{ dans } \Omega_0^\alpha, \alpha = 1, 2, \\ \mathcal{D}_0 := -\dot{\Psi} + T_N \dot{g}(\mathbf{X}^1, t) + \mathbf{T}_T \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}}_T(\mathbf{X}^1, t) \geq 0 \text{ sur } \Gamma_{0,C}^1, \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

III.2.2 Lois d'état et lois complémentaires

Choix des variables d'état

La variable d'état volumique choisie est le tenseur des déformations de Green-Lagrange $\mathbf{E}^\alpha = 1/2(\mathbf{C}^\alpha - \mathbf{I})$ et on lui associe comme force thermodynamique $-\mathbf{S}^\alpha$, $\alpha = 1, 2$.

Dans les modèles RCCM ou d'adhésion cicatrisante qui seront présentés respectivement au paragraphe IV.3 et IV.4, la seule prise en compte des variables surfaciques g et $\boldsymbol{\xi}_T$ ne suffit pas à modéliser l'état du contact adhésif car l'état dépend de l'histoire des sollicitations de l'interface. *Il est donc nécessaire de considérer une variable supplémentaire $\beta = \beta(\mathbf{x}^1, t)$ caractérisant l'état d'endommagement ou de cicatrisation des liens adhésifs à l'instant actuel.* Quand $\beta = 0$, le lien adhésif est rompu, quand $\beta = 1$, le lien adhésif est intact. Cette variable a été proposée par M. Frémond [41, 42] et sera décrite plus en détail dans le paragraphe IV.3.

Les variables d'état de l'interface, définies sur $\Gamma_{0,C}^1$, sont donc en toute généralité : « le saut normal » g , le déplacement relatif $\boldsymbol{\xi}_T$ et l'intensité d'adhésion β .

Les forces thermodynamiques surfaciques associées au triplet des variables d'état $(g, \boldsymbol{\xi}_T, \beta)$ sont respectivement $-T_N$, $-\mathbf{T}_T$ et G_β .

Nous décomposons pour la suite les forces thermodynamiques en partie réversible, notée $()^r$ et partie irréversible, notée $()^{ir}$, telles que

$$\mathbf{S}^\alpha = (\mathbf{S}^\alpha)^r + (\mathbf{S}^\alpha)^{ir} \text{ dans } \Omega_0^\alpha,$$

et sur $\Gamma_{0,C}^1$

$$T_N = (T_N)^r + (T_N)^{ir},$$

$$\mathbf{T}_T = (\mathbf{T}_T)^r + (\mathbf{T}_T)^{ir},$$

$$G_\beta = (G_\beta)^r + (G_\beta)^{ir}.$$

Energies libres et lois d'état

Dans Ω_0^α , on suppose que l'énergie libre ψ^α est une fonction différentiable de \mathbf{E}^α , $\psi^\alpha = \tilde{\psi}^\alpha(\mathbf{E}^\alpha)$ et plus précisément $\psi^\alpha = \hat{\psi}^\alpha(\mathbf{C}^\alpha)$ pour des raisons d'indifférence matérielle [23]. En remarquant que $\mathbf{\Pi}^\alpha : \dot{\mathbf{F}}^\alpha = \mathbf{S}^\alpha : \dot{\mathbf{E}}^\alpha$, la dissipation volumique d_0^α dans Ω_0^α devient

$$d_0^\alpha = \left((\mathbf{S}^\alpha)^r - \rho_0^\alpha \frac{\partial \tilde{\psi}^\alpha}{\partial \mathbf{E}^\alpha}(\mathbf{E}^\alpha) \right) : \dot{\mathbf{E}}^\alpha + (\mathbf{S}^\alpha)^{ir} : \dot{\mathbf{E}}^\alpha \geq 0.$$

Il est alors possible d'identifier la loi d'état dans Ω_0^α

$$(\mathbf{S}^\alpha)^r = \rho_0^\alpha \frac{\partial \tilde{\psi}^\alpha}{\partial \mathbf{E}^\alpha}(\mathbf{E}^\alpha), \quad (\text{III.18})$$

en toute généralité, où la forme de $\tilde{\psi}^\alpha = \tilde{\psi}^\alpha(\mathbf{E}^\alpha)$ est à préciser.

Sur $\Gamma_{0,C}^1$, l'énergie libre de l'interface Ψ est fonction des variables d'état de l'interface : $\Psi = \hat{\Psi}(g, \boldsymbol{\xi}_T, \beta)$. Nous choisissons une énergie libre vérifiant le principe d'indifférence matérielle. Remarquons que pour respecter la contrainte de non pénétration ou condition de contact unilatéral, que nous expliciterons par la suite, l'énergie choisie n'est pas différentiable par rapport à chacune de ses variables. Selon J.-J. Moreau, les lois d'état sont formulées sous forme d'inclusions différentielles dans cette extension aux surfaces matérielles du cadre des matériaux standards généralisés. Sur $\Gamma_{0,C}^1$, les lois d'état s'écrivent :

$$(\mathbf{T}_N)^r \in \partial_g \hat{\Psi}(g, \boldsymbol{\xi}_T, \beta), \quad (\mathbf{T}_T)^r \in \partial_{\boldsymbol{\xi}_T} \hat{\Psi}(g, \boldsymbol{\xi}_T, \beta), \quad -G_\beta \in \partial_\beta \hat{\Psi}(g, \boldsymbol{\xi}_T, \beta), \quad (\text{III.19})$$

en toute généralité, où la forme de $\hat{\Psi}(g, \boldsymbol{\xi}_T, \beta)$ est à préciser et où $\partial_z(\cdot)$ représente le sous-gradient de (\cdot) selon la variable z .

Pseudo-potentiels de dissipation et lois complémentaires

En vue de traiter des comportements volumiques de type viscoélastique, nous considérons un potentiel de dissipation $\phi^\alpha = \hat{\phi}^\alpha(\mathbf{D}^\alpha)$ dans la configuration actuelle Ω_t^α . Le potentiel de dissipation est choisi invariant par rapport au changement de référentiel. Les propriétés de positivité et de convexité du potentiel de dissipation assurent le respect de l'inégalité volumique de Clausius-Duhem (inéquation (III.16)),

$$d^\alpha = (\boldsymbol{\sigma}^\alpha)^{ir} : \mathbf{D}^\alpha \geq 0 \text{ dans } \Omega_t^\alpha \text{ et } \forall t \in [0, T].$$

Dans le cas de potentiel de dissipation $\hat{\phi}^\alpha$ différentiable, les lois complémentaires s'écrivent,

$$(\boldsymbol{\sigma}^\alpha)^{ir} = \frac{\partial \hat{\phi}^\alpha}{\partial \mathbf{D}^\alpha}(\mathbf{D}^\alpha) \text{ dans } \Omega_t^\alpha, \quad \alpha = 1, 2 \text{ et } \forall t \in [0, T].$$

La dissipation volumique d_0^α dans Ω_0^α s'écrit

$$d_0^\alpha = (\mathbf{S}^\alpha)^{ir} : \dot{\mathbf{E}}^\alpha \geq 0 \text{ dans } \Omega_0^\alpha \text{ et } \forall t \in [0, T],$$

et les lois complémentaires en représentation lagrangienne sont

$$(\mathbf{S}^\alpha)^{ir} = J^\alpha (\mathbf{F}^\alpha)^{-1} \frac{\partial \hat{\phi}^\alpha(\mathbf{D}^\alpha)}{\partial \mathbf{D}^\alpha} (\mathbf{F}^\alpha)^{-T} \text{ dans } \Omega_0^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \text{ et } \forall t \in [0, T], \quad (\text{III.20})$$

en toute généralité, où la forme de $\hat{\phi}^\alpha(\mathbf{D}^\alpha)$ est à préciser.

Sur $\Gamma_{0,C}^1$, nous considérons que l'évolution de l'adhésion et le frottement de type Coulomb sont sources de dissipation. *Le pseudo-potentiel de dissipation* Φ est donc fonction des dérivées temporelles des variables d'état de l'interface : $\Phi = \hat{\Phi}(\dot{\xi}_T, \dot{\beta}; \chi)$, avec $\chi = (T_N, g, \beta)$. Nous choisissons un pseudo-potentiel de dissipation invariant par rapport au changement de référentiel, non forcément différentiable par rapport à l'ensemble de ses variables. Les propriétés de convexité et de positivité du pseudo-potentiel de dissipation surfacique Φ assurent le respect de l'inégalité de Clausius Duhem (III.17) dans cette extension du cadre des matériaux standards généralisés aux surfaces matérielles. La dissipation intrinsèque surfacique s'écrit

$$\mathcal{D}_0 = (\mathbf{T}_T)^{ir} \cdot \dot{\xi}_T + G_\beta \dot{\beta} \geq 0, \text{ sur } \Gamma_{0,C}^1.$$

Les lois complémentaires sur $\Gamma_{0,C}^1$ sont en toute généralité

$$(T_N)^{ir} = 0, (\mathbf{T}_T)^{ir} \in \partial_{\dot{\xi}_T} \hat{\Phi}(\dot{\xi}_T, \dot{\beta}; \chi), G_\beta \in \partial_{\dot{\beta}} \hat{\Phi}(\dot{\xi}_T, \dot{\beta}; \chi), \quad (\text{III.21})$$

où la forme de $\hat{\Phi}(\dot{\xi}_T, \dot{\beta}; \chi)$ est à préciser.

Le cadre thermodynamique des modèles d'interface vient d'être introduit, il est restreint aux évolutions sans effet thermique.

Le paragraphe suivant présente succinctement les comportements volumiques qui ont été retenus dans le cadre de ce mémoire. Ils sont classiques et ne présentent pas de nouveauté.

III.2.3 Comportements volumiques considérés

Les applications considérées dans le cadre de ce travail nécessite la modélisation du comportement volumique d'un matériau de type élastomère. Vues les déformations observées expérimentalement [11, 12, 14] ou [104], grandes mais sans nécessité d'une condition stricte sur l'incompressibilité, nous considérerons en première approximation le comportement viscoélastique de type Kelvin-Voigt en grandes déformations pour modéliser le comportement de l'élastomère.

Dans Ω_0^α , on choisit l'énergie libre $\psi^\alpha = \hat{\psi}^\alpha(\mathbf{C}^\alpha)$ de type Hencky [112] suivante :

$$\hat{\psi}^\alpha(\mathbf{C}^\alpha) = \frac{\lambda^\alpha}{2} \left(\text{tr} \left(\frac{1}{2} \ln \mathbf{C}^\alpha \right) \right)^2 + \mu^\alpha \text{tr} \left(\left(\frac{1}{2} \ln \mathbf{C}^\alpha \right)^2 \right), \quad (\text{III.22})$$

avec $\lambda^\alpha, \mu^\alpha$ les coefficients de Lamé. Dans la configuration actuelle à l'instant t , notée Ω_t^α , nous considérons le potentiel de dissipation $\phi^\alpha = \hat{\phi}^\alpha(\mathbf{D}^\alpha)$ de type Kelvin-Voigt de la forme

$$\hat{\phi}^\alpha(\mathbf{D}^\alpha) = \frac{\tilde{\lambda}^\alpha}{2} (\text{tr}(\mathbf{D}^\alpha))^2 + \tilde{\mu}^\alpha \text{tr}((\mathbf{D}^\alpha)^2), \quad (\text{III.23})$$

où $\tilde{\lambda}^\alpha$ et $\tilde{\mu}^\alpha$ sont les coefficients de viscosité. Ces potentiels sont bien invariants par rapport au changement de référentiel. De plus, $\hat{\phi}^\alpha$ est positif, convexe par rapport à \mathbf{D}^α et nul en $\mathbf{D}^\alpha = \mathbf{0}$. Dans le cadre classique des matériaux standards généralisés, le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff \mathbf{S}^α dans Ω_0^α dérive de ces potentiels. D'après les formes des lois volumiques d'état (III.18) et complémentaires (III.20), il s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{S}^\alpha(\mathbf{C}^\alpha, \mathbf{D}^\alpha) = 2 \frac{\partial \hat{\psi}^\alpha(\mathbf{C}^\alpha)}{\partial \mathbf{C}^\alpha} + J^\alpha (\mathbf{F}^\alpha)^{-1} \frac{\partial \hat{\phi}^\alpha(\mathbf{D}^\alpha)}{\partial \mathbf{D}^\alpha} (\mathbf{F}^\alpha)^{-T} \text{ dans } \Omega_0^\alpha, \alpha = 1, 2.$$

Notons qu'avec ce choix de modélisation du comportement de l'élastomère, l'incompressibilité n'est pas imposée. Néanmoins, pour rendre compte de ce caractère, nous prendrons dans les exemples

un coefficient de Poisson ν^α proche de 0.5 (cependant la condition $\nu^\alpha \neq 0.5$ sera respectée). Nous rappelons les relations entre coefficients de Lamé λ^α et μ^α , module d'Young E^α et coefficient de Poisson ν^α , $\alpha = 1, 2$:

$$\lambda^\alpha = \frac{\nu^\alpha E^\alpha}{(1 + \nu^\alpha)(1 - 2\nu^\alpha)}, \quad \text{et} \quad E^\alpha = \frac{\mu^\alpha(3\lambda^\alpha + 2\mu^\alpha)}{\lambda^\alpha + \mu^\alpha},$$

$$\mu^\alpha = \frac{E^\alpha}{2(1 + \nu^\alpha)}, \quad \nu^\alpha = \frac{\lambda^\alpha}{2(\lambda^\alpha + \mu^\alpha)}.$$

Le même type de relations reste valable pour définir le lien entre les coefficients de viscosité introduits précédemment $\tilde{\lambda}^\alpha$, $\tilde{\mu}^\alpha$ et les coefficients de viscosité \tilde{E}^α , $\tilde{\nu}^\alpha$.

Dans les exemples considérant des corps élastiques, le comportement sera classiquement modélisé en grandes déformations par un potentiel d'énergie libre de type Saint-Venant Kirchhoff. La variable d'état volumique est alors le tenseur des déformations de Green-Lagrange et le comportement est caractérisé par deux paramètres constitutifs, le module d'Young et le coefficient de Poisson.

III.2.4 Forme locale du problème d'adhésion en représentation lagrangienne

Avec les notations introduites (paragraphe III.1.1 et III.1.2) et pour le comportement volumique retenu (paragraphe III.2.3), le problème dynamique de deux corps viscoélastiques en grandes déformations en contact unilatéral avec adhésion a la forme suivante :

Problème \mathbf{P}_0 : Trouver $\mathbf{x}^\alpha = \mathbf{x}^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t)$ et $\beta = \beta(\mathbf{X}^1, t)$ tels que $\mathbf{x}^\alpha(0) = \mathbf{X}^\alpha$, $\dot{\mathbf{x}}^\alpha(0) = \mathbf{V}^\alpha$ dans Ω_0^α , $\alpha = 1, 2$, $\beta(0) = \beta_0 \in [0, 1]$ sur $\Gamma_{0,C}^1$ et pour tout $t \in]0, T[$,

- dans Ω_0^α , $\alpha = 1, 2$,

$$\rho_0^\alpha \frac{d\mathbf{v}^\alpha}{dt} - \mathbf{Div} (\mathbf{F}^\alpha \mathbf{S}^\alpha) = \rho_0^\alpha \mathbf{f}^\alpha,$$

$$\mathbf{S}^\alpha(\mathbf{C}^\alpha, \mathbf{D}^\alpha) = 2 \frac{\partial \hat{\psi}^\alpha(\mathbf{C}^\alpha)}{\partial \mathbf{C}^\alpha} + J^\alpha (\mathbf{F}^\alpha)^{-1} \frac{\partial \hat{\phi}^\alpha(\mathbf{D}^\alpha)}{\partial \mathbf{D}^\alpha} (\mathbf{F}^\alpha)^{-T},$$

$\hat{\psi}^\alpha$ et $\hat{\phi}^\alpha$ définis en (III.22) et respectivement en (III.23),

- avec les conditions aux limites

$$\mathbf{x}^\alpha = \mathbf{x}_d^\alpha \text{ sur } \Gamma_{0,U}^\alpha, \text{ et } \mathbf{F}^\alpha \mathbf{S}^\alpha \mathbf{N}^\alpha = \mathbf{F}_{0,d}^\alpha \text{ sur } \Gamma_{0,F}^\alpha, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$J_p(\mathbf{F}^2 \mathbf{S}^2 \mathbf{N}^2)_p = \begin{cases} -\mathbf{F}^1 \mathbf{S}^1 \mathbf{N}^1 & \text{sur } \gamma_p(\Gamma_{0,C}^1) \\ \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{0,C}^2 \setminus \gamma_p(\Gamma_{0,C}^1) \end{cases} \quad (\text{principe d'action-réaction généralisé}),$$

- et sur $\gamma_p(\Gamma_{0,C}^1)$

$$(\mathbf{T}_N)^r \in \partial_g \hat{\Psi}(g, \boldsymbol{\xi}_T, \beta), \quad (\mathbf{T}_T)^r \in \partial_{\boldsymbol{\xi}_T} \hat{\Psi}(g, \boldsymbol{\xi}_T, \beta), \quad -G_\beta \in \partial_\beta \hat{\Psi}(g, \boldsymbol{\xi}_T, \beta) \quad (\text{lois d'état}),$$

$$(\mathbf{T}_N)^{ir} = 0, \quad (\mathbf{T}_T)^{ir} \in \partial_{\dot{\boldsymbol{\xi}}_T} \hat{\Phi}(\dot{\boldsymbol{\xi}}_T, \dot{\beta}; \chi), \quad G_\beta \in \partial_{\dot{\beta}} \hat{\Phi}(\dot{\boldsymbol{\xi}}_T, \dot{\beta}; \chi) \quad (\text{lois complémentaires}),$$

où les formes de l'énergie libre surfacique $\hat{\Psi}(g, \boldsymbol{\xi}_T, \beta)$ et du pseudo-potentiel de dissipation surfacique $\hat{\Phi}(\dot{\boldsymbol{\xi}}_T, \dot{\beta}; \chi)$ sont à préciser (voir chapitre IV).

III.3 Conclusions

Ce chapitre a présenté le cadre de la formulation en grandes déformations du problème de contact avec interaction entre deux corps dont les comportements sont viscoélastiques. Le problème étudié correspond au **Problème P₀** du paragraphe III.2.4.

Dans ce travail, nous avons choisi la projection orthogonale et la forme forte du principe d'action-réaction généralisé pour réaliser respectivement le lien cinématique et le lien sthénique entre les surfaces en interaction. Comme il a été discuté, ces deux choix de modélisation sont intimement liés à ceux retenus, par la suite, pour décrire le comportement de l'interface. Ainsi, dans le *modèle d'adhésion cicatrisante*, le déplacement tangentiel relatif des corps n'est pas une variable d'état du comportement de l'interface et l'interaction ne connaît aucune composante tangentielle \mathbf{T}_T dans le cas où les corps sont en situation de non contact ($g \neq 0$).

La discussion de ces choix, dus à l'extension de l'interaction au cas de non contact en grandes déformations, représente une nouvelle contribution dans le domaine de l'étude du contact entre deux corps en interaction.

Nous présentons dans le chapitre suivant les différents modèles d'interface utilisés dans ce travail et notamment le modèle d'adhésion cicatrisante (paragraphe IV.4). Les modèles introduits s'inscrivent dans le cadre cinématique développé dans ce chapitre pour les grandes déformations. Seul le modèle RCCM fera l'objet d'une formulation particulière restreinte aux cas HPP.

Les modèles d'interface se distinguent par des choix différents d'énergie libre surfacique $\hat{\Psi}(g, \boldsymbol{\xi}_T, \beta)$ et de pseudo-potential de dissipation surfacique $\hat{\Phi}(\dot{\boldsymbol{\xi}}_T, \dot{\beta}; \chi)$ sur $\Gamma_{0,C}^1$. Dans chacun des modèles, le comportement de l'interface est obtenu par les lois d'état définies en (III.19) et par les lois complémentaires définies en (III.21).

Chapitre IV

MODÈLES D'INTERFACE CLASSIQUES ET MODÈLE D'ADHÉSION CICATRISANTE

Ce chapitre regroupe la présentation des différents modèles retenus dans le cadre de ce travail en vue de décrire le comportement de l'interface des corps. Les travaux réalisés en mécanique de la rupture des corps avec prise en compte des interactions des lèvres en pointe de fissure ont abouti à la considération de nombreux modèles d'interface comme celui de G.I. Barenblatt [6], de A. Needleman [83, 84], de V. Tvergaard [118], de O. Allix et P. Ladevèze [2], ou encore de C. Talon et A. Curnier [117] pour ne citer que les plus répandus. Cependant, dans ce chapitre, notre présentation est restreinte à trois modèles d'interface et nous renvoyons le lecteur aux travaux de Y. Monerie [77] et Y. Monerie et al. [78] pour une présentation plus détaillée et une comparaison des différents modèles d'interface issus des articles précédemment cités.

Le premier modèle d'interface présenté, appelé *modèle Dugdale généralisé*, correspond à une extension du modèle Maugis-Dugdale au couplage à un comportement tangentiel. Le paragraphe IV.2 présente cette contribution qui s'inscrit dans le cadre de la formulation décrite au chapitre III.

Le second modèle est le *modèle RCCM* [21, 77, 93, 94]. Comme annoncé dans le chapitre précédent, à la différence des autres modèles, le modèle RCCM présenté au paragraphe IV.3 a fait l'objet d'une formulation restreinte au cas HPP.

L'extension dans le paragraphe IV.4 du modèle RCCM aux actions à distance et à la possible cicatrisation de l'adhésion lors de l'approche des surfaces donne lieu au troisième modèle présenté dans ce mémoire, à savoir le *modèle d'adhésion cicatrisante* [24, 97, 105, 106].

Le modèle d'adhésion cicatrisante réalise une nouvelle contribution dans la modélisation des contacts avec interaction. Il constitue l'originalité de ce travail. *Dans ce modèle, la contribution de l'adhésion est restreinte au comportement normal. L'action adhésive ne joue aucun rôle sur la composante tangentielle du comportement de l'interface, qui sera considérée classiquement par un modèle de type frottement de Coulomb.* Ce choix sera justifié vis-à-vis des applications envisagées.

Le paragraphe IV.5 propose quelques réflexions sur le modèle d'adhésion cicatrisante. Il présente en particulier une perspective d'extension du modèle à la prise en compte d'une résistance tangentielle s'opposant au déplacement tangentiel relatif des corps.

En fin de chapitre, le paragraphe IV.6 précise le problème finalement retenu que l'on se propose de résoudre de manière numérique au chapitre V. Dans le paragraphe IV.7, nous étudions l'existence et l'approximation des solutions variationnelles du problème dans le cadre des petites perturbations.

IV.1 Les lois de Signorini et de Coulomb

Nous présentons succinctement dans ce paragraphe un modèle d'interface respectant les lois de Signorini et de Coulomb. Ce modèle sera utilisé par la suite lors des applications concernant l'étude du contact non adhésif entre deux corps. Il servira notamment au paragraphe V.3 à valider, pour ce type de contact, la méthode numérique de résolution du problème.

Dans le cadre développé précédemment en grandes déformations, il est possible de choisir une énergie libre et un potentiel de dissipation permettant de rendre compte d'une interface dont le comportement vérifie les lois de Signorini et de Coulomb.

Les variables d'état sont alors le couple $(g, \dot{\boldsymbol{\xi}}_T)$. La condition de non pénétration ou condition de contact unilatéral $g \geq 0$ doit être assurée. Elle porte sur la variable d'état g . Cette contrainte sera donc introduite dans l'énergie libre. Seul le frottement, lié à la vitesse relative $\dot{\boldsymbol{\xi}}_T$, est source de dissipation, ce qui apparaîtra dans le pseudo-potentiel de dissipation.

Sur $\Gamma_{0,C}^1$, l'énergie libre et le pseudo-potentiel de dissipation suivants sont introduits :

$$\check{\Psi}(g) = I_{\mathbb{R}^+}(g) \text{ et } \check{\Phi}(\dot{\boldsymbol{\xi}}_T; \chi) = \mu |T_N| \|\dot{\boldsymbol{\xi}}_T\|$$

où $I_K(\bullet)$ est la fonction indicatrice de K (égale à 0 si $\bullet \in K$, de valeur infinie sinon). Ces potentiels sont invariants par rapport au changement de référentiel, convexes par rapport à leurs variables et non différentiables, ce qui est caractéristique du caractère non-régulier des lois de contact.

Les lois d'état (III.19) et complémentaires (III.21) se résument à

$$T_N \in \partial_g(I_{\mathbb{R}^+}(g)) \text{ et } \mathbf{T}_T \in \partial_{\dot{\boldsymbol{\xi}}_T}(\mu |T_N| \|\dot{\boldsymbol{\xi}}_T\|).$$

Les lois de contact suivantes sont obtenues en développant les inclusions différentielles :

$$\begin{cases} g \geq 0, \\ T_N \leq 0, \\ T_N g = 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \|\mathbf{T}_T\| \leq \mu |T_N|, \\ \|\mathbf{T}_T\| < \mu |T_N| \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\xi}}_T = \mathbf{0}, \\ \|\mathbf{T}_T\| = \mu |T_N| \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \dot{\boldsymbol{\xi}}_T = \lambda \mathbf{T}_T. \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

Le comportement normal, respectivement tangentiel, est représenté sur la figure IV.1, respectivement IV.2.

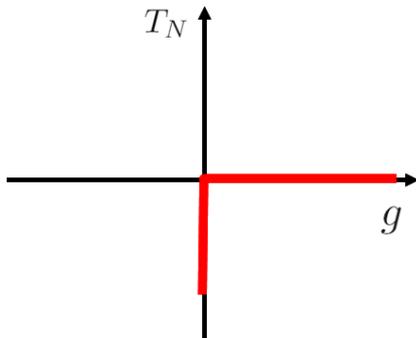


FIG. IV.1 – Graphe de Signorini.

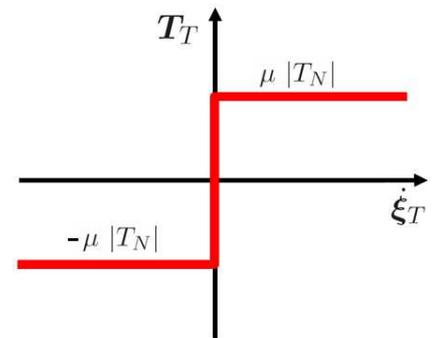


FIG. IV.2 – Graphe de Coulomb en 2D.

IV.2 Le modèle Maugis-Dugdale et son extension à la modélisation du contact adhésif frottant

Lors de l'étude de la rupture des matériaux de comportement plastique, D.S. Dugdale [38] observe que les interactions présentes entre les surfaces en aval de la pointe de la fissure doivent être considérées. En première approximation, il considère ces interactions de valeur constante et égale au seuil de plasticité du matériau au sein de la zone cohésive, et nulles au delà. La zone cohésive est définie selon la figure IV.3 en aval de la fissure. Elle correspond à la zone au sein de laquelle la distance entre les lèvres est inférieure à une distance caractéristique de l'interaction nommée δ .

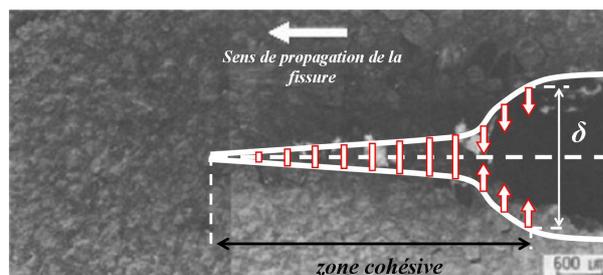


FIG. IV.3 – Schématisation de la déformation des lèvres et des forces cohésives agissant au sein de la zone cohésive.

D. Maugis [71, 72] étend l'application de ce comportement d'interaction à l'étude du contact adhésif entre deux corps. Ce modèle, dit modèle Maugis-Dugdale, prend toute sa notoriété lorsque, dans [72], D. Maugis propose grâce à cette modélisation une transition entre l'approche DMT [35] et l'approche JKR [62] alors que ces deux approches de l'étude des contacts adhésifs semblaient antagonistes. Depuis, ce modèle a été largement utilisé [58, 60, 61, 108] et malgré sa simplicité de description du comportement des interactions, il permet de rendre compte des comportements macroscopiques observés lors du contact quasi-statique entre deux corps soumis aux forces de type van der Waals.

Dans ce modèle, l'adhésion entre les corps est caractérisée par w (en $J.m^{-2}$), l'énergie d'adhésion de l'interface. Le comportement adhésif est le suivant : tant que $g \leq \delta$, la contrainte de l'interface vaut w/δ , au delà ($g > \delta$) il n'y a plus d'interaction adhésive à distance, la contrainte de l'interface est nulle. Les liens adhésifs agissent de manière complète et sans s'endommager tant que g est inférieure à la distance d'interaction. Les liens sont immédiatement rompus lorsque $g > \delta$ ou immédiatement actifs lorsque $g \leq \delta$.

Nous nous proposons maintenant de coupler cette modélisation du comportement adhésif des liens à une condition de contact unilatéral et au comportement de frottement de Coulomb. Nous exprimerons dans le cadre présenté au chapitre précédent une forme d'énergie libre et une forme de pseudo-potentiel de dissipation liées à ce nouveau modèle d'interface.

Nous considérons dans un premier temps son couplage à une condition de contact unilatéral. Lors de l'application du modèle Dugdale à l'étude des contact adhésifs, en $g = 0$ la contrainte est prise égale à w/δ . Le couplage du modèle Dugdale initial à une contrainte de non-pénétration présente alors un paradoxe. En effet, en $g = 0$, il faudrait vérifier à la fois $T_N = w/\delta$ et une contrainte répulsive de type compression $T_N \leq 0$ afin d'assurer la non pénétration. Cet aspect n'est pas détaillé dans la littérature, D. Maugis [71, 72], ou X. Shi et A.A. Polycarpou [108] ne s'intéressant qu'aux évolutions purement adhésives, c'est-à-dire aux situations où $g > 0$. Pour y remédier, nous

proposons de distinguer le comportement de non pénétration, écrit en $g = 0$, du comportement adhésif, écrit en $g > 0$. Nous considérons donc que l'adhésion agit seulement si l'interface est sollicitée en traction, c'est-à-dire si $g > 0$. Cette distinction nous permet de plus d'exprimer l'énergie libre sous une forme simple. Le comportement adhésif normal de type Maugis-Dugdale avec son couplage à une condition de contact unilatéral est présenté en figure IV.4. Remarquons qu'il réalise une approximation moins fine du potentiel de Lennard-Jones que le modèle d'adhésion cicatrisante présenté au paragraphe IV.4.

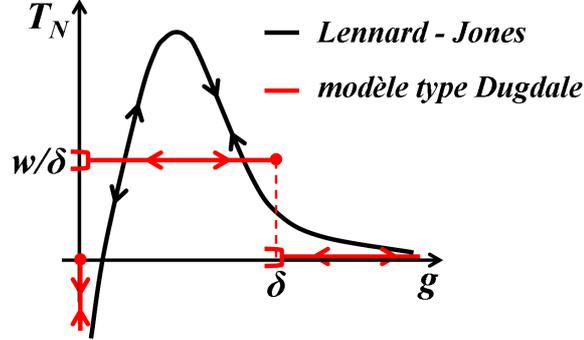


FIG. IV.4 – Approximation du potentiel de Lennard-Jones par le modèle de type Maugis-Dugdale couplé à une condition de contact unilatéral.

Comme illustré sur la figure IV.4, l'état adhésif du modèle Maugis-Dugdale ne dépend que de la valeur actuelle de g , la distance entre les corps. Il n'y a pas de notion d'endommagement ou de cicatrisation des liens adhésifs. Ils existent si $g \leq \delta$ ou sont inactifs si $g > \delta$. Il n'est donc pas nécessaire d'introduire la variable interne supplémentaire β pour caractériser l'état d'adhésion.

L'aire sous la courbe rouge de la figure IV.4 correspond à w , l'énergie d'adhésion. Ainsi pour rompre complètement une unité d'aire de l'interface (passage d'un état $g = 0$ à un état $g > \delta$), il faut consommer un travail égal à w . C'est cette même valeur d'énergie w qui est récupérée par l'interface lors de la création complète d'une unité d'aire de l'interface (passage d'un état $g > \delta$ à un état $g = 0$). Les processus d'activation et de rupture des liens suivent la même évolution représentée par la courbe rouge de la figure IV.4. Ils sont donc non dissipatifs et indépendants de la vitesse de sollicitation.

Dans un second temps, nous considérons le couplage du comportement normal précédent à un comportement tangentiel de type frottement de Coulomb (figure IV.6) intervenant lorsque les corps sont en compression ($g = 0$ et $T_N \leq 0$).

Ainsi, dans les cas de corps en interaction, $g \in]0, \delta]$ et $T_N = \frac{w}{\delta} > 0$, ou dans les cas de corps en contact affleurant, $g \approx 0$ et $T_N \approx 0$, l'effort tangentiel résistant au déplacement relatif est nul. L'adhésion agit seulement sur le comportement normal. Ce choix est justifié car lors du glissement effleurant ou à distance on peut estimer qu'il y a autant de liens adhésifs rompus en aval de la zone d'interaction (donc s'opposant au déplacement relatif) que de liens créés en amont de la zone d'interaction (donc activant le déplacement relatif). Or d'après le modèle Maugis-Dugdale, les processus d'activation et de rupture des liens sont identiques et non dissipatifs. C'est-à-dire qu'un équilibre se crée entre l'effet de rupture des liens et l'effet d'activation des liens. Ce qui revient à considérer que l'adhésion n'agit pas sur le comportement tangentiel de l'interface (la résultante de l'action adhésive tangentielle est nulle).

Par contre, lorsque les corps sont comprimés ($T_N \leq 0$), l'action tangentielle est non nulle. Elle s'oppose au déplacement relatif des corps selon la loi de Coulomb, ce qui représentera la seule source de dissipation du modèle.

De ces remarques, le comportement de l'interface de type Maugis-Dugdale couplé à une condition de contact unilatéral et à une loi de frottement de type Coulomb peut être défini sur $\Gamma_{0,C}^1$ par l'énergie libre $\Psi = \dot{\Psi}(g)$ et le pseudo-potential de dissipation $\Phi = \dot{\Phi}(\dot{\xi}_T, \chi)$ suivants :

$$\dot{\Psi}(g) = \begin{cases} +\infty \text{ pour } g \leq 0, \\ \frac{w}{\delta} g \text{ pour } g \in]0, \delta], \\ w \text{ pour } g > \delta, \end{cases} \quad \text{et} \quad \dot{\Phi}(\dot{\xi}_T, \chi) = \mu [T_N]^- \|\dot{\xi}_T\|,$$

où $[s]^-$ est la partie négative de s , égale à $-s$ si $s \leq 0$, de valeur nulle sinon. Le comportement de type frottement de Coulomb agit donc uniquement lorsque les corps sont en compression. L'invariance par rapport au changement de référentiel des potentiels, la positivité et la convexité du pseudo-potential de dissipation sont vérifiées. Les lois d'état (III.19) et complémentaires (III.21) appliquées à ce choix des potentiels donnent les lois locales suivantes :

$$g \geq 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} T_N \leq 0, \text{ pour } g = 0, \\ T_N = \frac{w}{\delta}, \text{ pour } g \in]0, \delta], \\ T_N = 0, \text{ pour } g > \delta, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \|\mathbf{T}_T\| \leq \mu [T_N]^-, \\ \|\mathbf{T}_T\| < \mu [T_N]^- \Rightarrow \dot{\xi}_T = \mathbf{0}, \\ \|\mathbf{T}_T\| = \mu [T_N]^- \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \dot{\xi}_T = \lambda \mathbf{T}_T, \end{array} \right. \quad (\text{IV.2})$$

ce que nous appellerons *le modèle Dugdale généralisé* pour la suite. Son comportement normal, respectivement tangentiel, est présenté en figure IV.5, respectivement IV.6.

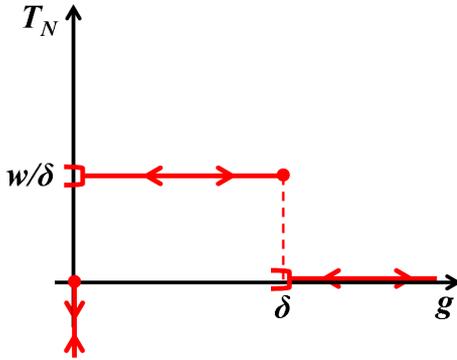


FIG. IV.5 – Comportement normal du *modèle Dugdale généralisé*.

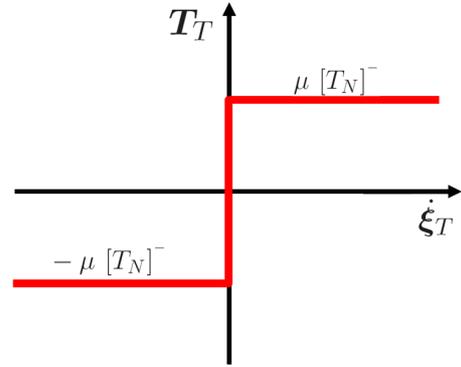


FIG. IV.6 – Comportement tangentiel du *modèle Dugdale généralisé*.

Remarquons que, selon E. Barthel [15], le comportement global du contact adhésif entre deux corps élastiques est peu dépendant de la loi d'évolution retenue pour modéliser l'interaction. Que les interactions soient modélisées par une distribution de pression attractive hors de la zone de contact dépendant de la distance des corps selon la loi de Lennard-Jones comme dans la théorie MYD, ou selon une loi linéaire ou exponentielle [15], ou encore en étant constante sur une certaine zone d'interaction comme dans le modèle Dugdale généralisé, à énergie d'adhésion w fixée, les résultats sont très proches et permettent d'interpréter les phénomènes d'effort de « pull-off », d'augmentation du rayon de contact ou de formation du col d'adhésion.

Ce point sera vérifié au paragraphe VI.2 où la résolution du **problème P₀** (paragraphe III.2.4) avec le modèle d'interface de Dugdale généralisé est étudiée. Les résultats alors obtenus sur les phénomènes d'effort de « pull-off », d'augmentation du rayon de contact ou de formation du col

d'adhésion dans le cas de contact entre corps élastiques feront état de référence en vue de valider les résultats obtenus avec le modèle d'adhésion cicatrisante.

Le choix d'une loi d'évolution de l'interaction plus fine, comme celle proposée par le modèle d'adhésion cicatrisante, prend par contre tout son sens lors des études plus subtiles, comme celle du contact adhésif entre corps viscoélastiques ou celle de l'hystérésis d'adhésion. Dans ces cas, le comportement global ne dépend plus uniquement de la valeur de l'énergie d'adhésion mais également des choix retenus sur l'évolution de l'interaction en fonction de la distance relative. Les travaux de Y.-Y. Lin et C.-Y. Hui [69] confirment ainsi les limites d'application d'un modèle de type Dugdale généralisé, où les processus d'endommagement et d'activation des liens sont identiques.

IV.3 Le modèle RCCM et hypothèse des petites perturbations

Le modèle RCCM, du aux travaux des thèses de L. Cangémi [21] et de Y. Monerie [77], encadrées par M. Raous et M. Cocou, a été initialement développé pour décrire le comportement des interfaces de type fibre/matrice pour l'étude de la rupture des matériaux composites [96].

Ce modèle est basé sur l'introduction de la variable $\beta = \beta(\mathbf{x}^1, t)$, due à M. Frémond [41, 42], qui caractérise l'état d'endommagement des liens adhésifs à l'instant actuel. Quand $\beta = 1$, le lien adhésif est intact, quand $\beta = 0$, le lien adhésif est rompu.

Le modèle RCCM est à la base de l'extension proposée dans le cadre de ce travail, à savoir le modèle d'adhésion cicatrisante. Ce paragraphe permet ainsi de présenter le modèle originel de notre réflexion et complète les travaux des thèses précédemment citées. Nous proposons dans ce paragraphe quelques réflexions sur le comportement du modèle RCCM et précisons son comportement lors de sollicitations diverses. Une étude plus détaillée de son comportement lors d'une sollicitation tangentielle sera présentée par la suite. Nous renvoyons le lecteur intéressé par l'obtention des équations locales du modèle RCCM aux travaux des thèses précédemment citées et à l'article de M. Raous, L. Cangémi et M. Cocou [94].

Comme de nombreux modèles d'interface adhésive, dus à O. Allix et P. Ladevèze [2], J-L. Chaboche et al. [22], J-C. Michel et P. Suquet [75], ou C. Talon et A. Curnier [117], le modèle RCCM est basé sur la notion de seuil énergétique d'adhésion.

Les contributions originales du modèle RCCM sont d'une part le couplage qu'il réalise entre contact unilatéral, adhésion et frottement, et d'autre part la transition progressive et continue qu'il permet entre un comportement complètement adhésif et un comportement purement frottant.

De plus, dans ce modèle, le processus d'endommagement peut être dépendant de la vitesse de séparation des corps. La dissipation, due à l'endommagement des liens adhésifs de nature chimique, comme la colle ou le ciment, peut ainsi être caractérisée.

Les applications envisagées avec le modèle RCCM décrivent la rupture des interfaces, c'est-à-dire des comportements dont l'état adhésif des liens ne peut que diminuer. C'est le cas dans l'application de M. Raous et Y. Monerie [96] concernant l'étude de la rupture des interfaces fibre/matrice au sein des matériaux composites ou dans l'application plus récente de M. Raous et A. Karray [95] concernant l'étude de la rupture des interfaces acier/béton au sein des bétons armés. Dans ces cas, l'adhésion est initialement maximale, $\beta = \beta_0$ (généralement $\beta_0 = 1$), et au cours de la sollicitation, l'adhésion ne peut que diminuer, c'est-à-dire $\dot{\beta} \leq 0$. Une fois l'adhésion entièrement rompue, le comportement de l'interface est similaire à celui obtenu par les lois de Signorini et de Coulomb.

Les conclusions des paragraphes précédents sur le cadre cinématique et sur le principe d'action-réaction généralisé ont montré que le formalisme développé au chapitre III n'est pas adapté pour la modélisation d'une interaction adhésive tangentielle à distance.

Or, dans ce modèle, l'adhésion joue un rôle en normal et en tangentiel. En effet, le comportement adhésif est similaire à celui d'un ressort endommageable de raideur liée à β et la loi d'évolution de β dépend de g et de ξ_T . Pour inscrire ce modèle dans le formalisme développé précédemment, il est nécessaire de formuler une hypothèse supplémentaire qui est celle des petites perturbations (HPP). C'est-à-dire que les déformations des surfaces en vis-à-vis et leurs déplacements relatifs doivent rester faibles. Remarquons que l'hypothèse HPP est valable pour les applications citées précédemment telles que l'étude de la rupture des matériaux composites ou du béton armé.

En HPP, il vient

$$j_p \approx J_p \approx 1,$$

$$\int_0^t [\mathbf{v}(\tau)] \cdot \boldsymbol{\tau}^i d\tau \approx \xi_T^i(t) - \xi_T^i(0), \quad i = 1, 2,$$

$$\mathbf{t} \approx \mathbf{T}.$$

Il est alors possible de remonter au déplacement tangentiel relatif (dans ce cas égal à ξ_T) à partir de la composante tangentielle de la vitesse relative. En considérant, de plus, la forme faible du principe d'action-réaction généralisé (équation (III.6)), l'interaction adhésive à distance peut avoir une composante tangentielle même si les corps ne sont pas en contact ($g \neq 0$) et le lien sthénique se résume à

$$\mathbf{t} := -\mathbf{t}^1 = \mathbf{t}^2, \quad \text{sur } \Gamma_{0,C}^1 \approx \Gamma_C.$$

Ainsi, sur Γ_C , l'énergie libre surfacique Ψ s'écrit

$$\bar{\Psi}(g, \xi_T, \beta) = \frac{C_N}{2} \beta^2 g^2 + \frac{C_T}{2} \beta^2 \|\xi_T\|^2 + wh(\beta) + I_{\mathbb{R}^+}(g) + I_{[0,1]}(\beta). \quad (\text{IV.3})$$

Les constantes et fonctions introduites sont :

- C_N et C_T , les rigidités initiales normale et respectivement tangentielle de l'interface, homogènes à une rigidité par unité de longueur ($N.m^{-3}$),
- w , l'énergie d'adhésion ($J.m^{-2}$) ou énergie de Dupré, un seuil énergétique correspondant à l'énergie consommée lors de la rupture complète d'une unité d'aire de l'interface durant un chargement quasi-statique selon la normale,
- $h(\beta)$, une fonction de classe C^2 telle que $\partial h(\beta)/\partial \beta < 0$. Le terme $wh(\beta)$ décrit une forme générale de l'énergie d'adhésion. Nous considérons pour la suite $h(\beta) = 1 - \beta$.

Les fonctions indicatrices $I_{\mathbb{R}^+}(g)$ et $I_{[0,1]}(\beta)$ assurent la condition de non pénétration $g \geq 0$ et respectivement $\beta \in [0, 1]$. Lorsque $\beta = 0$, les liens sont rompus, l'énergie libre vaut w et le comportement est similaire à celui donné par la loi de Signorini.

L'énergie libre (IV.3) est non-convexe par rapport au triplet (g, ξ_T, β) et non différentiable. Les lois d'état sont celles définies en (III.19) et écrites en HPP, c'est-à-dire

$$(\mathbf{t}_N)^r \in \partial_g \bar{\Psi}(g, \xi_T, \beta), \quad (\mathbf{t}_T)^r \in \partial_{\xi_T} \bar{\Psi}(g, \xi_T, \beta), \quad -G_\beta \in \partial_\beta \bar{\Psi}(g, \xi_T, \beta). \quad (\text{IV.4})$$

Dans ce modèle, les deux sources de dissipation sont l'endommagement et le frottement. Les liens, une fois endommagés, ne peuvent pas être reconstruits, c'est-à-dire $\dot{\beta} \leq 0$. Cette contrainte apparaît dans le pseudo-potentiel de dissipation surfacique Φ . Ainsi, sur Γ_C , Φ est choisi tel que

$$\bar{\Phi}(\dot{\xi}_T, \dot{\beta}; \chi) = \mu f(\beta) |t_N - C_N \beta^2 g| \|\dot{\xi}_T\| + \frac{b}{p+1} |\dot{\beta}|^{p+1} + I_{\mathbb{R}^-}(\dot{\beta}). \quad (\text{IV.5})$$

Les constantes et fonctions introduites sont :

- μ , le coefficient de frottement,

- $f(\beta) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, une fonction continue décroissante de β . Cette fonction introduit un coefficient de frottement variable dépendant de l'endommagement des liens adhésifs. Elle permet la transition progressive et continue entre un état purement adhésif et un comportement de type frottement de Coulomb,

- p , un exposant sans unité et b (en $N.s.m^{-1}$) des coefficients tels que $0 \leq p \leq 1$ et $b > 0$. Ces paramètres fixent la dépendance de l'endommagement des liens à la vitesse de sollicitation de l'interface \dot{g} ou $\dot{\xi}_T$. Le paramètre b est le paramètre de *viscosité surfacique*.

Ce pseudo-potentiel est convexe en $(\dot{\xi}_T, \dot{\beta})$, la positivité est assurée et $\Phi(\mathbf{0}, 0; \chi) = 0$. Si $\beta = 0$, ce pseudo-potentiel est alors équivalent à celui donnant le comportement de type frottement de Coulomb. Les lois complémentaires (III.21), écrites en HPP, se mettent sous la forme

$$(t_N)^{ir} = 0, (\mathbf{t}_T)^{ir} \in \partial_{\dot{\xi}_T} \bar{\Phi}(\dot{\xi}_T, \dot{\beta}; \chi), G_\beta \in \partial_{\dot{\beta}} \bar{\Phi}(\dot{\xi}_T, \dot{\beta}; \chi). \quad (\text{IV.6})$$

Le développement des lois d'état (IV.4) et complémentaires (IV.6) avec les choix de potentiels (IV.3) et (IV.5) conduisent aux équations locales du modèle RCCM suivantes $\forall \mathbf{x}^1 \in \Gamma_C$ et *forall* $t \in]0, T[$:

Condition de contact unilatéral couplée à l'adhésion,

$$g \geq 0,$$

$$t_N - C_N \beta^2 g \leq 0,$$

$$(t_N - C_N \beta^2 g) g = 0,$$

Frottement couplé à l'adhésion,

$$\|\mathbf{t}_T - C_T \beta^2 \xi_T\| \leq \mu f(\beta) |t_N - C_N \beta^2 g|$$

$$\|\mathbf{t}_T - C_T \beta^2 \xi_T\| < \mu f(\beta) |t_N - C_N \beta^2 g| \Rightarrow \dot{\xi}_T = \mathbf{0},$$

$$\|\mathbf{t}_T - C_T \beta^2 \xi_T\| = \mu f(\beta) |t_N - C_N \beta^2 g| \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \dot{\xi}_T = \lambda (\mathbf{t}_T - C_T \beta^2 \xi_T),$$

(IV.7)

Loi d'évolution multivoque de l'intensité d'adhésion,

$$\beta(0) = \beta_0 \in [0, 1],$$

$$b \dot{\beta}^p \geq 0 \text{ si } \beta = 0,$$

$$b \dot{\beta}^p = - \left[w - \left(C_N g^2 + C_T \|\xi_T\|^2 \right) \beta \right]^- \text{ pour } \beta \in]0, 1[,$$

$$b \dot{\beta}^p \leq - \left[w - \left(C_N g^2 + C_T \|\xi_T\|^2 \right) \right]^- \text{ si } \beta = 1.$$

Selon les travaux de M. Frémond [42, 43] ou plus récemment de F. Freddi et M. Frémond [40], Y. Monerie considère dans [77] un comportement de l'interface dont les effets non locaux influent sur l'évolution de l'endommagement. En d'autres termes, l'endommagement d'un lien adhésif dépend de l'état d'endommagement des liens adhésifs voisins. Dans ce cas, le terme $\frac{k}{2} |\nabla \beta|^2$, où k est une constante homogène à une énergie surfacique ($J.m^{-2}$), est ajouté à l'énergie libre $\bar{\Psi}$ (équation (IV.3)). L'état de l'interface dépend alors de la variable d'état supplémentaire $\nabla \beta$, $\Psi = \bar{\Psi}(g, \xi_T, \beta, \nabla \beta)$, de force thermodynamique associée est $-G_{\nabla \beta}$ [42]. Il apparaît la loi d'état supplémentaire $-G_{\nabla \beta} \in \partial_{\nabla \beta} \bar{\Psi}(g, \xi_T, \beta, \nabla \beta)$. L'étude des dissipations permet de généraliser la force thermodynamique associée à la vitesse $\dot{\beta}$ en considérant $\bar{G}_\beta = G_\beta - \text{div } G_{\nabla \beta}$. La loi complémentaire

liée à l'endommagement devient $\bar{G}_\beta \in \partial_\beta \bar{\Phi}(\dot{\xi}_T, \dot{\beta}; \chi)$. La loi d'évolution de β prend finalement la forme

$$b\dot{\beta}^p = - \left[w - \left(C_N g^2 + C_T \|\dot{\xi}_T\|^2 \right) \beta - k\Delta\beta \right]^- \text{ pour } \beta \in]0, 1[.$$

Pour la suite, nous ne retenons pas cette contribution et considérerons en première approximation le modèle RCCM sous sa forme (IV.7) avec $p = 1$ et $f(\beta) = 1 - \beta$.

Interprétations graphiques du modèle RCCM

Dans cette partie, nous présentons quelques remarques sur le modèle RCCM dans un cas 1D sous sollicitation normale, pour $w = 1 \text{ J.m}^{-2}$, $C_N = C_T = 1 \text{ N.m}^{-3}$, qui viennent compléter celles de L. Cangémi [21] et Y. Monerie [77]. Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à ces références.

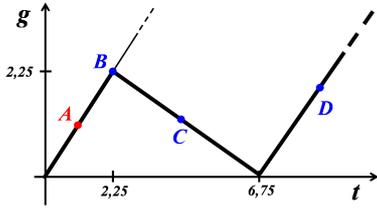


FIG. IV.7 – Sollicitations normales.

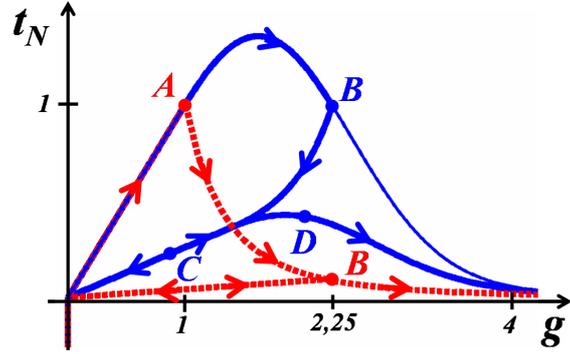


FIG. IV.8 – Comportement normal du modèle RCCM.

A partir d'une position initiale où $g = 0$, $\xi_T = \mathbf{0}$ et $\beta_0 = 1$, lors de sollicitations selon la normale de type séparation/approche/séparation précisées en figure IV.7, le comportement normal de l'interface est celui de la figure IV.8.

Tant que $g \leq \sqrt{w/C_N}$ ($= 1$ ici) le comportement est élastique de raideur C_N ($= 1$ ici), les liens adhésifs ne s'endommagent pas, l'interface se comporte comme un ressort.

Une fois que l'énergie élastique de l'interface, c'est-à-dire dans ce cas $\frac{1}{2}C_N g^2$, vaut $\frac{w}{2}$, alors le seuil énergétique dans la loi d'évolution de β est atteint et l'endommagement débute. Sur la figure IV.8 le seuil correspond à $g = \sqrt{w/C_N}$ ou $t_N = \sqrt{wC_N}$ (point A).

Dans le cas où $b \rightarrow 0$ ou si $\dot{g} \rightarrow 0$, le processus d'endommagement suit la courbe $t_N = \frac{w^2}{C_N g^3}$ en pointillé rouge, la raideur de l'interface $C_N \beta^2$ diminue. Remarquons qu'alors l'évolution de l'interaction selon la distance relative des corps est identique à celle donnée par l'équation (I.6) et due au potentiel attractif originel de type van der Waals. Lors de l'approche, débutant au point B ($g = 2,25$ ici), la réponse de l'interface endommagée est de retour élastique jusqu'en $g = 0$ sans évolution de l'endommagement. Le comportement, lors de la séparation qui suit, est de type élastique jusqu'au point B. A partir de ce point, le processus d'endommagement reprend car l'énergie élastique de l'interface $\frac{1}{2}C_N \beta g^2$ égale alors $\frac{w}{2}$. Notons que la valeur de β n'est jamais égale à 0. Le comportement est asymptotique et on estimera la rupture complète dès que $\beta \leq 10^{-5}$. L'énergie consommée lors de la rupture complète dans les cas où $b \rightarrow 0$ ou $\dot{g} \rightarrow 0$ est égale à w l'énergie d'adhésion et correspond à l'aire sous la courbe en pointillé rouge.

Dans les cas où $b \neq 0$ et pour une sollicitation non quasi-statique, le comportement est celui de la courbe bleue. La vitesse de sollicitation \dot{g} influe sur le processus d'endommagement : il est retardé. Lors de l'approche (débutant au point B), la raideur endommagée du retour élastique dans ces cas (droite bleue au point C) est supérieure à la raideur du cas précédent (droite pointillé rouge).

L'énergie consommée lors de la rupture complète de l'interface est supérieure à w . Cette dissipation correspond à l'aire située entre la courbe bleue en trait fin et la courbe rouge et vaut

$$b \int_0^{+\infty} \dot{\beta}(\tau) d\tau.$$

La figure IV.9 présente les évolutions d'endommagement quand $b = 1$ pour différentes vitesses de sollicitation \dot{g} lors de sollicitations de séparation/approche/séparation. Initialement et tant que $g \leq \sqrt{w/C_N}$ ou si l'état actuel se situe sous la courbe en pointillé rouge d'équation $t_N = \frac{w^2}{C_N g^3}$, le comportement est élastique et indépendant de la vitesse de sollicitation. Sinon, la dissipation augmente d'autant plus que la vitesse de sollicitation est élevée. Cet effet est caractéristique du comportement observé lors de la rupture d'une interface adhésive. L'endommagement est d'autant plus retardé que la vitesse de sollicitation augmente.

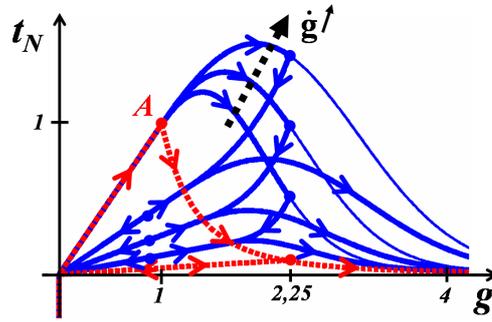


FIG. IV.9 – Comportement normal du modèle RCCM à b fixé pour différentes vitesses de sollicitation \dot{g} .

La figure IV.11 présente les évolutions d'endommagement dans le cas de sollicitations tangentielles en compression ($g = 0$, $t_N < 0$) décrites par la figure IV.10. Le comportement est initialement élastique de raideur C_T . Une fois le seuil énergétique atteint, c'est-à-dire dans ce cas quand l'énergie élastique de l'interface $\frac{1}{2}C_T \xi_T^2$ égale $\frac{w}{2}$, l'endommagement débute. Un processus frottant prend naissance. Le coefficient de frottement $\mu(1 - \beta)$ attaché à ce processus augmente avec l'état d'endommagement. Le comportement de l'interface est celui de la courbe en pointillé rouge si $b \rightarrow 0$ ou dans le cas de vitesse de sollicitation $\dot{\xi}_T$ quasi-statique. Dans les autres cas, il correspond à celui de la courbe bleue. Les caractéristiques du comportement de la composante normale sont retrouvées, à savoir : un seuil énergétique d'adhésion w , une raideur endommageable $C_T \beta^2$, une énergie consommée lors de la rupture et un endommagement qui dépendent de la vitesse de sollicitation $\dot{\xi}_T$.

Remarquons que le graphe pour décrire le comportement tangentiel en figure IV.11 a comme variable en abscisse la grandeur ξ_T , alors que le graphe lié au comportement de la loi de Coulomb (figure IV.2) a comme variable en abscisse la grandeur $\dot{\xi}_T$. Cependant, selon les équations du modèle RCCM données en (IV.7), une fois l'adhésion rompue, le comportement tangentiel du modèle RCCM est identique à celui du frottement de Coulomb.

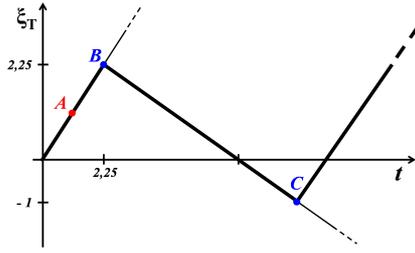


FIG. IV.10 – Sollicitations tangentielles.

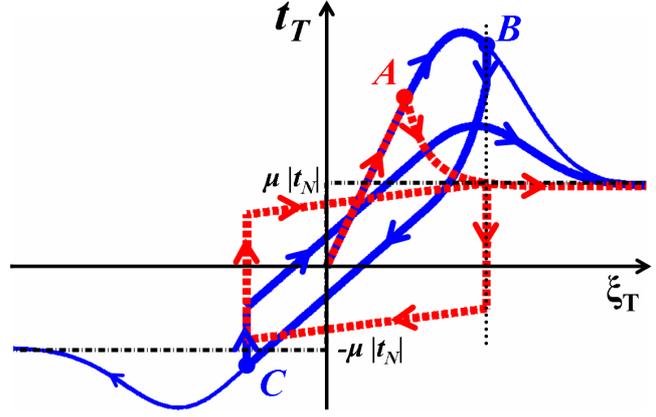


FIG. IV.11 – Comportement tangentiel du modèle RCCM.

La spécificité du modèle RCCM est le couplage du comportement tangentiel adhésif au frottement. Pour décrire plus précisément ce couplage, nous considérons une sollicitation de cisaillement cyclique de l'interface dans le cas où $b \rightarrow 0$. Cette dernière interprétation graphique du comportement du modèle RCCM complète les descriptions proposées dans les travaux de thèse de L. Cangémi [21] et Y. Monerie [77]. Nous avertissons ici le lecteur que cette présentation est plus technique.

Considérons les corps en compression $t_N < 0$ et soumis au déplacement imposé ξ_T selon une direction dans le plan tangent de contact. Dans le cas où $b \rightarrow 0$, la loi d'évolution de β est explicite et prend la forme suivante :

$$\beta_0 = 1 \text{ (choix),}$$

$$\forall \beta \in [0, 1], \beta = \frac{w}{C_T \xi_T^2} \text{ et } \dot{\beta} \leq 0.$$

Le comportement (courbes bleues) présenté en figure IV.12 se décompose selon les étapes suivantes, dont les lettres sont repérées sur la figure :

- Phase **(A)** : tant que $\xi_T \leq \sqrt{w/C_T}$ ($\beta = \frac{w}{C_T \xi_T^2} \geq 1$), $t_T = C_T \xi_T$, le comportement est élastique et représente l'étirement des liens adhésifs sans endommagement ($\beta = 1$),

- Phase **(B)** : lorsque $\xi_T > \sqrt{w/C_T}$, l'endommagement évolue, $\beta = \frac{w}{C_T \xi_T^2}$. L'évolution est telle que $t_T = \pm \mu (1 - \beta)|t_N| + C_T \beta^2 \xi_T$, où le signe \pm est fixé selon le signe de $\dot{\xi}_T$ (positif si $\dot{\xi}_T$ positif, négatif sinon). Sur la figure IV.12, l'évolution est la somme de deux termes $t_T = t_T^{frott} + t_T^{adh}$, celui du au frottement $t_T^{frott} := \mu (1 - \frac{w}{C_T \xi_T^2})|t_N|$ pour t_N fixé, hyperbole en $1/\xi_T^2$, qui tend vers $\mu|t_N|$ pour $\xi_T \rightarrow \pm\infty$, et celui du à l'adhésion $t_T^{adh} := C_T \beta^2 \xi_T$, hyperbole en $1/\xi_T^3$,

- Point **(C)** : si à un moment donné le déplacement imposé est stoppé, $\dot{\xi}_T = 0$, l'endommagement par effet de retard se poursuit jusqu'à $\beta = \hat{\beta}$,

- Phase **(D)** : si l'on désire reprendre le déplacement relatif dans le sens contraire, d'un point de vue contrainte, il est nécessaire de « traverser le cône de Coulomb pondéré par $(1 - \hat{\beta})$ ». La taille du cône de Coulomb est donc égale à $2 \times t_T^{frott}(\hat{\beta})$. La valeur de la raideur endommagée $C_T \hat{\beta}^2$ peut être obtenue graphiquement sur la figure IV.12. Elle est donnée à ξ_T fixée par l'hyperbole $t_T^{adh}(\hat{\beta})$,

- Phase \textcircled{E} : lorsque le glissement reprend l'évolution est telle que $t_T = -t_T^{frott}(\hat{\beta}) + t_T^{adh}(\hat{\beta})$ tant que $\frac{w}{C_T \xi_T^2} \geq \hat{\beta}$. Dans ce cas, la réponse est élastique de raideur le rapport t_T/ξ_T qui vaut alors $C_T \hat{\beta}^2$,

- Phase \textcircled{F} : l'endommagement reprend lorsque ξ_T est tel que $\frac{w}{C_T \xi_T^2} \leq \hat{\beta}$ ou lorsque la contrainte vérifie $|t_T - C_T \hat{\beta}^2 \xi_T| = \mu (1 - \hat{\beta}) |t_N|$. L'évolution est telle que $t_T = -t_T^{frott} + t_T^{adh}$ et correspond à la somme des deux hyperboles. Au bout d'un certain temps, l'endommagement est total et le comportement de l'interface est de type frottement de Coulomb avec $|t_T| \leq \mu |t_N|$,

- Phase \textcircled{G} : si durant la décharge \textcircled{E} , le déplacement est interrompu, la contrainte évolue dans le cône de Coulomb modifié de taille $2 \times t_T^{frott}(\hat{\beta})$,

- Phase \textcircled{H} : lorsque le glissement reprend dans le sens contraire, la contrainte vérifie de nouveau $|t_T - C_T \hat{\beta}^2 \xi_T| = \mu (1 - \hat{\beta}) |t_N|$. L'évolution est telle que $t_T = +t_T^{frott}(\hat{\beta}) + t_T^{adh}(\hat{\beta})$. Le comportement est élastique sans endommagement tant que $\frac{w}{C_T \xi_T^2} \geq \hat{\beta}$. A la limite le point \textcircled{C} est atteint.

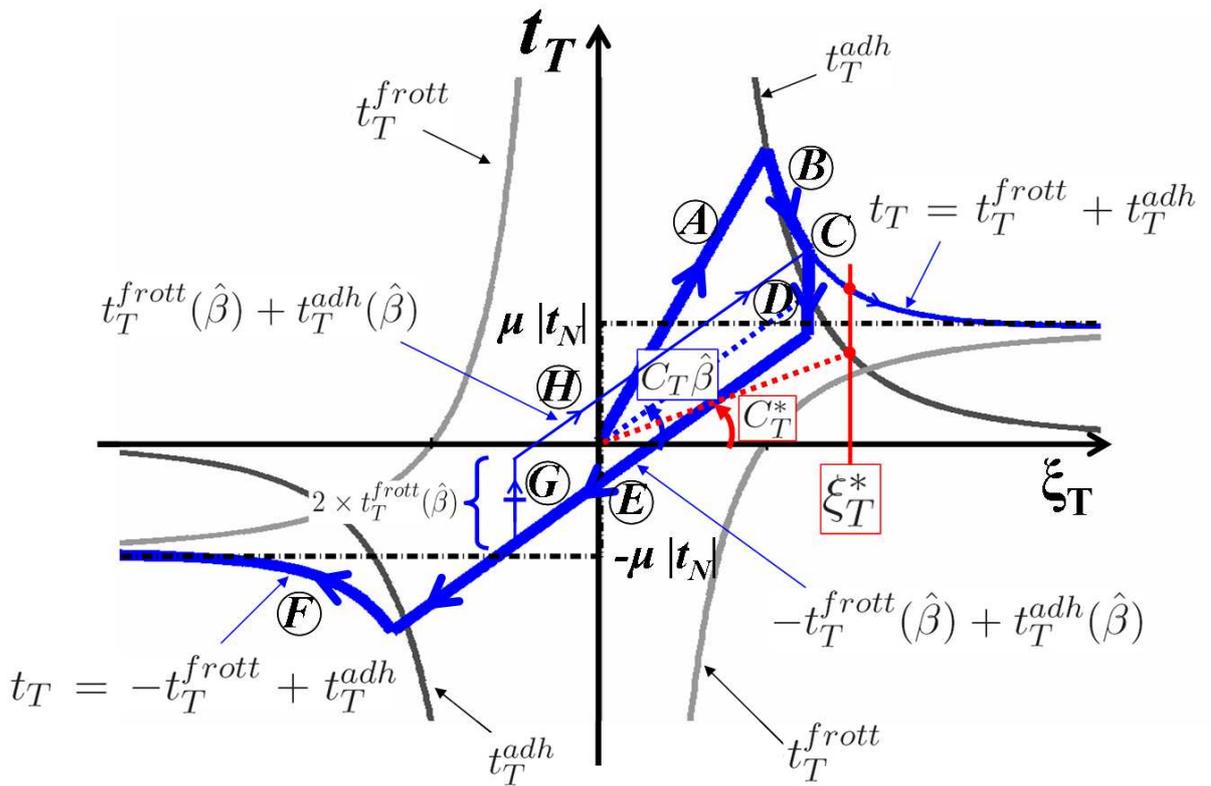


FIG. IV.12 – Détails du comportement tangential du modèle RCCM pour $b \rightarrow 0$, lors d'une sollicitation tangentielle cyclique de contrainte imposée t_T selon une direction et sous compression $t_N < 0$ et $g = 0$.

Dans ce modèle, couplant adhésion et frottement, une attention particulière doit être portée à la définition de la raideur adhésive tangentielle. En effet, cette raideur ne correspond pas au rapport t_T/ξ_T à chaque instant mais à la valeur $C_T \hat{\beta}^2$. Ainsi sur la figure IV.12 et en notation en rouge,

$\forall \xi_T^*$, l'état d'endommagement est égale à β^* et la raideur adhésive de l'interface $C_T^* = C_T(\beta^*)^2$ est définie graphiquement par le point sur la courbe $t_T^{adh}(\xi_T^*)$. La raideur effective de l'interface rapport t_T/ξ_T est supérieure à C_T^* car le frottement « rigidifie » le comportement.

Dans le cas de sollicitation mixte $g \geq 0$ et $\xi_T \neq \mathbf{0}$, les composantes normale et tangentielle du déplacement relatif participent à l'endommagement. La raideur de l'interface est alors de type élastique endommageable sans contribution due au frottement (car $t_N = C_N\beta^2 g$ dans (IV.7)).

Pour conclure sur ces interprétations graphiques du modèle RCCM, nous évoquons le comportement de type relaxation du modèle lors d'une sollicitation dont le déplacement imposé est maintenu constant à partir d'une certaine valeur. Ce cas de chargement donné en figure IV.18 et la particularité du processus d'endommagement du lien adhésif, décrit en figure IV.20, seront traités plus en détail au paragraphe IV.4.

A propos des dissipations du modèle RCCM

Dans le modèle RCCM, l'endommagement de l'adhésion est un processus dissipatif. Cependant, L. Cangémi [21] et Y. Monerie [77], comme M. Frémond [42, 43], considèrent une énergie libre contenant le terme de dissipation $wh(\beta)$. Nous proposons maintenant de placer ce terme dans le pseudo-potential de dissipation sous une forme de puissance dissipée. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [34]. Nous verrons que l'analyse énergétique de la réponse du comportement de l'interface permet de justifier cette autre écriture de l'énergie libre et du pseudo-potential de dissipation.

Réalisons cette discussion sur le comportement normal et dans le cas où il n'y a pas de dépendance à la vitesse de sollicitation du processus d'endommagement. Dans ce cas, la loi d'évolution prend la forme simplifiée $[w - C_N g^2 \beta]^- = 0$. La seule dissipation vient de l'irréversibilité de l'endommagement.

Avec ces considérations, la réponse du modèle RCCM à une sollicitation de séparation/approche/séparation, définie en figure IV.13, est décrite en figure IV.14. Sur cette figure, il est possible d'identifier le travail dissipé W_d , correspondant à l'aire grisée, et l'énergie élastique normale de l'interface $\check{\Psi}$, correspondant à l'aire hachurée.

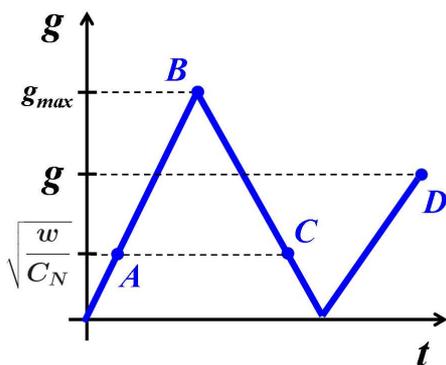


FIG. IV.13 – Sollicitation normale.

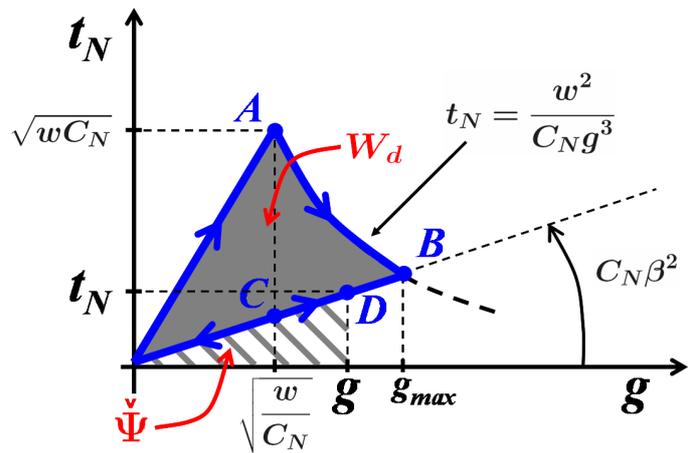


FIG. IV.14 – Réponse normale du modèle RCCM.

A l'instant correspondant au point D, l'énergie élastique de l'interface s'écrit

$$\check{\Psi} = \frac{1}{2} t_N g = \frac{1}{2} C_N \beta^2 g^2, \text{ car } \forall g > 0, t_N = C_N \beta^2 g.$$

Le travail dissipé est défini par

$$W_d = \frac{1}{2} \sqrt{w C_N} \sqrt{\frac{w}{C_N}} + \int_{\sqrt{w/C_N}}^{g_{max}} \frac{w^2}{C_N g^3} dg - \frac{1}{2} C_N \beta^2 g_{max}^2.$$

En remarquant que $C_N \beta^2 = \frac{t_N}{g} = \frac{t_N(g_{max})}{g_{max}}$, le travail dissipé s'écrit sous la forme $W_d = w(1-\beta) = wh(\beta)$. Dans ce cas, où le processus d'endommagement ne dépend pas de la vitesse de sollicitation, une fois l'interface complètement rompue, la dissipation vaut bien $W_d = w$, l'énergie d'adhésion.

En généralisant au couplage avec le comportement tangentiel et en ajoutant les contraintes sur les variables d'état et le terme de dissipation lié à la vitesse d'endommagement (coefficient b), les potentiels se mettent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \check{\Psi}(g, \xi_T, \beta) &= \frac{C_N}{2} \beta^2 g^2 + \frac{C_T}{2} \beta^2 \|\xi_T\|^2 + I_{\mathbb{R}^+}(g) + I_{[0,1]}(\beta), \\ \check{\Phi}(\dot{\xi}_T, \dot{\beta}; \chi) &= \mu f(\beta) |t_N - C_N \beta^2 g| \|\dot{\xi}_T\| + \frac{b}{p+1} |\dot{\beta}|^{p+1} + w \dot{h}(\beta) + I_{\mathbb{R}^-}(\dot{\beta}). \end{aligned}$$

Ces choix nous paraissent plus corrects vis-à-vis des dissipations : l'énergie libre décrit uniquement les processus non dissipatifs, le terme $\dot{W}_d = w \dot{h}(\beta) = w \dot{\beta} \frac{\partial h}{\partial \beta}(\beta)$ apparaît naturellement dans le pseudo-potentiel. La condition $\frac{\partial h}{\partial \beta}(\beta) < 0$ semble alors naturelle afin de vérifier le second principe de la thermodynamique, c'est-à-dire que la dissipation W_d ne peut qu'augmenter ($\dot{W}_d > 0$).

IV.4 Le modèle d'adhésion cicatrisante

Ce paragraphe présente la contribution majeure de ce travail à savoir *la proposition d'un modèle d'interface prenant en compte la possible cicatrisation des liens adhésifs lors du rapprochement des corps*. Du fait des choix de modélisation retenus introduits aux chapitres I et II et rappelés ici, ce modèle, appelé modèle d'adhésion cicatrisante, s'inscrit parfaitement dans le cadre cinématique en grandes déformations (paragraphe III.1.2) et dans le cadre sthénique (paragraphe III.1.3) correspondant à la forme forte du principe d'action-réaction généralisé.

Le modèle d'adhésion cicatrisante constitue une nouvelle modélisation du comportement de l'interface qui :

- réalise une *approximation fine* du comportement des interactions atomiques,
- rend compte de l'*hystérésis d'adhésion*,
- couple comportement normal adhésif et comportement tangentiel dans le formalisme retenu pour décrire les grands déplacements relatifs des surfaces en vis-à-vis.

Dans les cas d'interaction de type van der Waals, le comportement est classiquement modélisé par le potentiel de Lennard-Jones présenté en figure IV.15. Il est remarquable que lors de l'endommagement de l'interface ($\dot{g} \geq 0$), la réponse du potentiel de Lennard-Jones est proche de celle du modèle RCCM, voir figure IV.8. Ceci vient du fait que, dans les deux modèles (équations (IV.7) pour le modèle RCCM et équation (I.6) pour le modèle de Lennard-Jones), l'évolution du comportement adhésif correspond à une hyperbole en $1/g^3$.

Il s'agit donc de proposer un modèle dont l'évolution lors de l'endommagement des liens suit celle du modèle RCCM et qui étend le modèle RCCM à la cicatrisation des liens. Dans ce nouveau modèle, lorsque les deux corps s'approchent, l'adhésion doit cicatriser et la raideur de l'interface peut augmenter. Il faut donc permettre $\dot{\beta} \geq 0$. Ainsi, l'extension du modèle RCCM passe par la modification de la loi d'évolution de β .

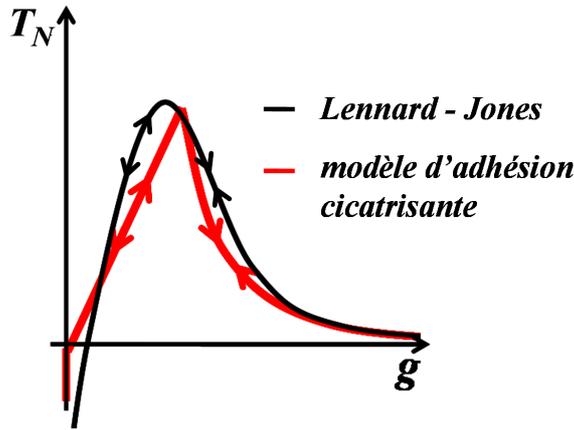


FIG. IV.15 – Approximation du potentiel de Lennard-Jones par le modèle d'adhésion cicatrisante lors de la phase d'endommagement.

Le phénomène d'hystérésis d'adhésion n'est pas pris en compte dans la loi de comportement de Lennard-Jones (équation (I.6)). En effet dans cette loi, les processus d'endommagement et de cicatrisation sont similaires, décrit par une courbe unique d'évolution T_N fonction de g voir figure IV.15. Dans ce cas, l'énergie consommée pour rompre l'interface, G^r , correspond à l'énergie d'adhésion w . Et l'énergie récupérée par l'interface lors de la cicatrisation, G^c , correspond également à l'énergie d'adhésion w . C'est-à-dire $G^r = G^c = w$. Graphiquement, l'aire sous la partie positive de la courbe de Lennard-Jones de la figure IV.15 correspond à w .

Expérimentalement, il est bien établi que le comportement dépend de la vitesse de sollicitation [53, 90] : l'énergie consommée pour rompre l'interface est d'autant plus supérieure à w que la vitesse de séparation augmente ; inversement, l'énergie récupérée par l'interface lors de la cicatrisation des liens est d'autant plus faible que la vitesse d'approche augmente. J.A. Greenwood [46] ou K.L. Johnson [60], inspirés des travaux de A.D. Roberts [100] puis M. Barquins [12] (équation (I.8)), ont déjà proposé une modélisation rendant compte de l'hystérésis d'adhésion. Cette approche, décrite au paragraphe II.1.2, considère que la dissipation est d'origine volumique. Les fonctions dissipatives introduites Φ^r et Φ^c sont donc reliées aux propriétés volumiques dissipatives des corps en interaction.

L'originalité de notre approche, dans ce concept de surface matérielle, est de proposer une modélisation de l'hystérésis d'adhésion par deux sources de dissipation distinctes : à la fois volumique et liée au comportement non linéaire des corps, mais aussi surfacique et liée au comportement dissipatif des liens adhésifs. A la différence du potentiel de Lennard-Jones ou du modèle de Dugdale généralisé (paragraphe IV.2), nous considérons que le comportement des liens adhésifs dépend de la vitesse de sollicitation et qu'il est différent selon que les liens s'endommagent ou cicatrisent.

Nous permettons ainsi $G^r > w > G^c$ lors de sollicitations non quasi-statiques. Dans le cas de sollicitations lentes, l'hystérésis d'adhésion est très faible, les processus d'endommagement et de cicatrisation suivent le même chemin, $G^r \approx G^c \approx w$. L'évolution est alors illustrée par une courbe unique, comme celle présentée en figure IV.15, qui décrit à la fois les processus d'endommagement et de cicatrisation. En ce sens les processus ne sont pas nécessairement dissipatifs et, par rapport au modèle RCCM, le terme $wh(\beta)$ trouve naturellement sa place dans l'expression de l'énergie libre (voir la discussion sur les dissipations du modèle RCCM au paragraphe précédent). Dans notre approche, l'influence de la vitesse d'endommagement ou de cicatrisation $\dot{\beta}$ est responsable d'une partie de la dissipation ou de l'hystérésis d'adhésion, l'autre partie pouvant venir des propriétés volumiques des corps en interaction. Ainsi, comme dans le modèle RCCM, le potentiel de dissipation est fonction de $\dot{\beta}$.

Comme annoncé précédemment, dans un premier temps, nous considérerons que l'adhésion ne joue aucun rôle sur le comportement tangentiel. Le lien adhésif est donc ni endommagé ni cicatrisé lors d'un déplacement tangentiel relatif. Si les corps ne sont pas en contact ($g \neq 0$), aucun effort tangentiel ne résiste au déplacement relatif des surfaces. Dans les cas où les corps sont en contact ($g = 0$), en vue de modéliser l'effort s'opposant au déplacement relatif des corps, un comportement de type frottement de Coulomb est introduit.

Cette modélisation du comportement tangentiel est à notre avis suffisante pour les applications envisagées comme celles de l'étude du col d'adhésion [12, 14] ou de la formation et de la propagation des ondes de Schallamach [11, 104]. Dans ces exemples, il est bien établi que les déplacements relatifs des corps à une échelle micrométrique s'effectuent selon la normale « au contact ». Le déplacement tangentiel relatif des surfaces en vis-à-vis est négligeable à l'échelle des interactions, ce qui n'exclut pas, par ailleurs, un déplacement tangentiel relatif macroscopique comme c'est le cas dans le déplacement par propagation des ondes de Schallamach.

Les limites de ce choix de modélisation seront discutées dans le paragraphe IV.5 en vue de l'application du modèle d'adhésion cicatrisante à l'étude d'une interaction tangentielle adhésive à distance.

L'état de l'interface est donc décrit par le couple (g, β) pour le comportement normal et par $\dot{\xi}_T$ pour le comportement tangentiel. Ces quantités sont issues du cadre cinématique développé au paragraphe III.1.2 et permettent le traitement des grands déplacements relatifs et des grandes déformations des surfaces en vis-à-vis. Le fait de ne considérer aucune action tangentielle à distance permet d'utiliser la forme forte du principe d'action-réaction généralisé du paragraphe III.1.3.

Finalement, sur $\Gamma_{0,C}^1$ les formes suivantes sont choisies pour l'énergie libre surfacique $\Psi = \tilde{\Psi}(g, \beta)$ et pour le pseudo-potential de dissipation surfacique $\Phi = \tilde{\Phi}(\dot{\xi}_T, \dot{\beta}; \chi)$, avec $\chi = (T_N, g, \beta)$:

$$\tilde{\Psi}(g, \beta) = \frac{C_N}{2} \beta^2 g^2 + w(1 - \beta) + I_{\mathbb{R}^+}(g) + I_{[0,1]}(\beta), \quad (\text{IV.8})$$

$$\tilde{\Phi}(\dot{\xi}_T, \dot{\beta}; \chi) = \mu |T_N - C_N \beta^2 g| \|\dot{\xi}_T\| + \frac{b}{2} \dot{\beta}^2, \quad (\text{IV.9})$$

où C_N est la *rigidité normale maximale de l'interface*, w l'*énergie d'adhésion*, μ le coefficient de frottement de Coulomb et b le paramètre de *viscosité surfacique* rendant le comportement de l'interface dépendant de la vitesse de sollicitation lors de l'endommagement ou lors de la cicatrisation des liens adhésifs.

Les potentiels sont invariants par changement de référentiel et le pseudo-potential de dissipation est positif, convexe en $(\dot{\xi}_T, \dot{\beta})$ et nul en $(\mathbf{0}, 0)$. Les lois surfaciques d'état (III.19) et complémentaires (III.21) s'écrivent

$$(T_N)^r \in \partial_g \tilde{\Psi}, \quad (\mathbf{T}_T)^r = \mathbf{0}, \quad -G_\beta \in \partial_\beta \tilde{\Psi}, \quad (\text{IV.10})$$

$$(T_N)^{ir} = 0, \quad (\mathbf{T}_T)^{ir} \in \partial_{\dot{\xi}_T} \tilde{\Phi}(\dot{\xi}_T, \dot{\beta}; \chi), \quad G_\beta \in \partial_{\dot{\beta}} \tilde{\Phi}(\dot{\xi}_T, \dot{\beta}; \chi). \quad (\text{IV.11})$$

Ces lois d'état et complémentaires avec les potentiels (IV.8) et (IV.9) conduisent aux équations locales du modèle d'adhésion cicatrisante suivantes $\forall \mathbf{x}^1 \in \Gamma_{t,C}^1$ et $\forall t \in]0, T[$:

Condition de contact unilatéral couplée à l'adhésion,

$$\begin{aligned} g &\geq 0, \\ T_N - C_N \beta^2 g &\leq 0, \\ (T_N - C_N \beta^2 g) g &= 0, \end{aligned}$$

Frottement sans effet dû à l'adhésion,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{T}_T\| &\leq \mu |T_N - C_N \beta^2 g| \\ \|\mathbf{T}_T\| &< \mu |T_N - C_N \beta^2 g| \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\xi}}_T = \mathbf{0}, \\ \|\mathbf{T}_T\| &= \mu |T_N - C_N \beta^2 g| \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \dot{\boldsymbol{\xi}}_T = \lambda \mathbf{T}_T, \end{aligned}$$

Loi d'évolution multivoque de l'intensité d'adhésion, (IV.12)

$$\begin{aligned} \beta(0) &= \beta_0 \in [0, 1], \\ b\dot{\beta} &\geq w \text{ si } \beta = 0, \\ b\dot{\beta} &= w - C_N g^2 \beta \text{ pour } \beta \in]0, 1[, \\ b\dot{\beta} &\leq w - C_N g^2 \text{ si } \beta = 1. \end{aligned}$$

Si $\beta = 0$, le comportement du modèle d'adhésion cicatrisante correspond à un comportement de contact de type Signorini-Coulomb.

Remarque : la cicatrisation est maintenant possible puisque la condition $\dot{\beta} \leq 0$ du modèle RCCM est ici relaxée.

Interprétations graphiques du modèle d'adhésion cicatrisante

Nous présentons quelques remarques sur le modèle d'adhésion cicatrisante dans un cas 1D, pour $w = 1 \text{ J.m}^{-2}$, $C_N = 1 \text{ N.m}^{-3}$, qui viennent compléter celles présentées dans [24, 97, 105, 106]. Pour des détails complémentaires, nous renvoyons le lecteur à ces références.

A partir d'une position initiale, où $g = 0$, $\boldsymbol{\xi}_T = \mathbf{0}$ et $\beta_0 = 1$, lors de la sollicitation selon la normale de séparation/approche/séparation précisée en figure IV.7, le comportement normal de l'interface est celui de la figure IV.16.

Par rapport au modèle RCCM, le seuil énergétique d'adhésion n'est plus explicitement lié à la considération de la partie négative du bilan entre l'énergie d'adhésion w et l'énergie élastique de l'interface $C_N \beta^2 g$. Ici, l'évolution de β doit toujours vérifier $\beta \in [0, 1]$. C'est cette condition $\beta \leq 1$ qui constitue le seuil énergétique et notamment le fait que, pour toute évolution, la raideur de l'interface $C_N \beta^2$ reste toujours inférieure ou égale à C_N .

D'après la figure IV.16 obtenue lors d'une sollicitation normale de l'interface, dans le cas où $b \rightarrow 0$ ou si $\dot{g} \rightarrow 0$, tant que $g \leq \sqrt{w/C_N}$ ou $T_N \leq \sqrt{wC_N}$ (point A), le comportement est de raideur maximale C_N avec $\beta = 1$. Au delà, les processus d'endommagement et de cicatrisation suivent

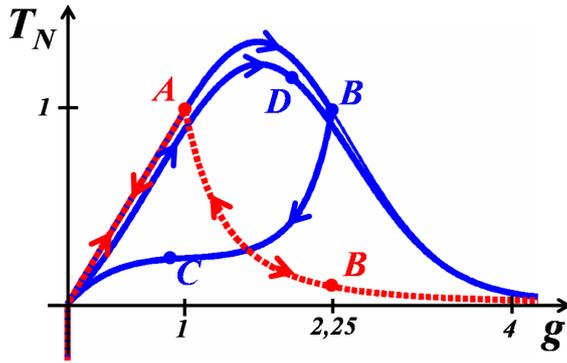


FIG. IV.16 – Comportement normal du modèle d’adhésion cicatrisante.

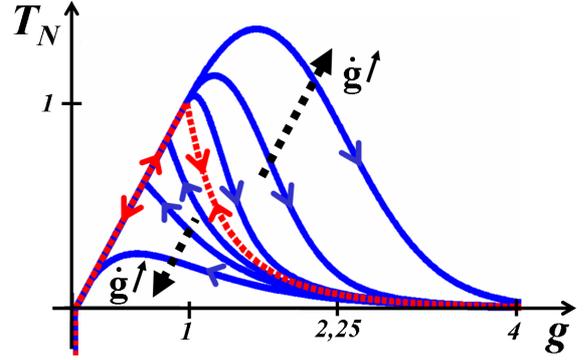


FIG. IV.17 – Comportement normal du modèle d’adhésion cicatrisante à b fixé pour différentes vitesses de sollicitation \dot{g} .

la courbe $T_N = \frac{w^2}{C_N g^3}$ en pointillé rouge (jusqu’au point B). Après la phase d’endommagement durant la séparation des corps, lors de l’approche (débutant ici en $g = 2.25$, point B), l’interface cicatrise. L’évolution lors de la cicatrisation suit la même évolution que lors de l’endommagement. La courbe de réponse en pointillé rouge est remontée jusqu’à cicatrisation complète (point A). Comme précédemment, β n’est jamais égale à 0. Le comportement est asymptotique et on estimera, par exemple, que la rupture est complète dès que $\beta \leq 10^{-5}$. Avec ce modèle, il est aussi possible de partir d’un état initial non adhésif avec des corps éloignés et d’observer lors de leur approche la création de liens adhésifs.

Dans le cas où $b \rightarrow 0$ ou si $\dot{g} \rightarrow 0$, l’énergie consommée lors de la rupture complète G^r ainsi que l’énergie récupérée par l’interface lors de la cicatrisation complète G^c sont égales à w l’énergie d’adhésion. Elles correspondent à l’aire sous la courbe en pointillé rouge.

Dans le cas où b est fixé et pour une sollicitation non quasi-statique, le comportement est celui de la courbe bleue (figure IV.16). La vitesse de sollicitation \dot{g} influe sur les processus d’endommagement (point D) et de cicatrisation (point C) : ils sont retardés. Cependant, une fois les corps en contact, si le temps de contact est suffisamment long, la cicatrisation peut être complète. Ainsi lors de la phase de séparation suivante, la réponse de l’interface est similaire à celle d’une interface complètement adhésive de raideur $C_N \beta^2$ égale à C_N , la raideur initiale.

La figure IV.17 présente les évolutions lors d’un endommagement complet et lors d’une cicatrisation complète pour $b = 1$ et différentes vitesses de sollicitation \dot{g} de séparation/approche/séparation. Les dissipations liées à l’endommagement et à la cicatrisation augmentent d’autant plus que la vitesse de sollicitation est élevée. L’endommagement et la cicatrisation sont d’autant plus retardés que la vitesse de sollicitation est élevée. Lors de l’endommagement, l’énergie consommée G^r est supérieure à w . Lors de la cicatrisation, l’énergie récupérée par l’interface G^c est inférieure à w .

La dépendance du comportement à la vitesse de sollicitation \dot{g} peut être précisée en considérant une sollicitation présentée en figure IV.18 de type séparation/relaxation ($\dot{g} = 0$)/approche avec différentes vitesses \dot{g} . Les comportements de l’interface sont donnés en figure IV.19 dans le cas de vitesse lente ($a = 1$) et en figure IV.20 dans le cas de vitesse rapide ($a = 100$). Les dissipations respectives peuvent être quantifiées graphiquement, elles correspondent aux aires hachurées sur les figures IV.19 et IV.20. Dans le cas de sollicitation lente, la réponse (figure IV.19) est peu dissipative. La réponse est d’autant plus dissipative, l’aire hachurée augmente, que la vitesse de séparation ou d’approche est élevée. La réponse de l’interface lors de la phase de relaxation ($\dot{g} = 0$) débute à partir du point B sur la figure IV.20. L’endommagement, retardé du fait du paramètre b lors de

la phase de séparation, se poursuit lors de la phase de relaxation malgré que l'interface ne soit plus sollicitée. Ce n'est qu'une fois que la réponse de l'interface atteint la courbe d'évolution non dissipative tracée en pointillé rouge que l'endommagement cesse d'évoluer durant cette phase de relaxation. Précisons que la courbe en pointillée rouge n'est en fait jamais réellement atteinte, elle correspond à une valeur asymptotique du processus d'endommagement durant la phase de relaxation.

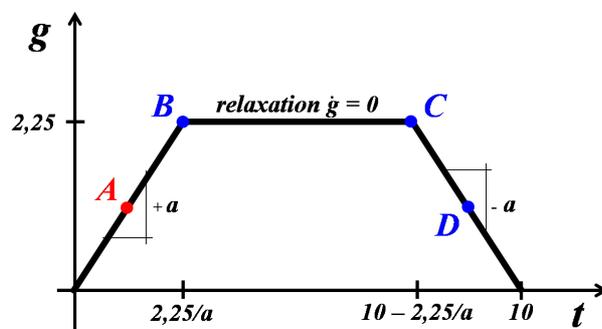


FIG. IV.18 – Cycle imposé, \dot{g} est paramétrée par a .

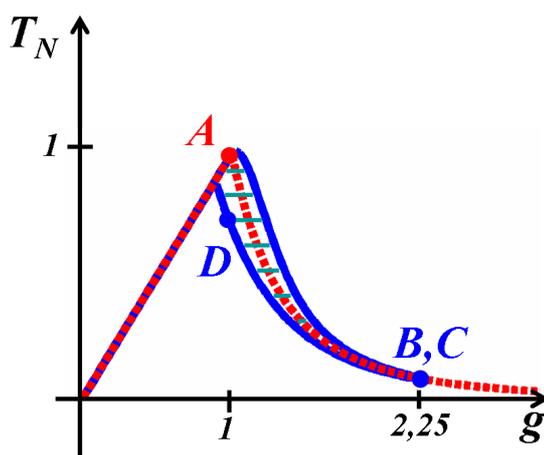


FIG. IV.19 – \dot{g} lent ($a = 1$).

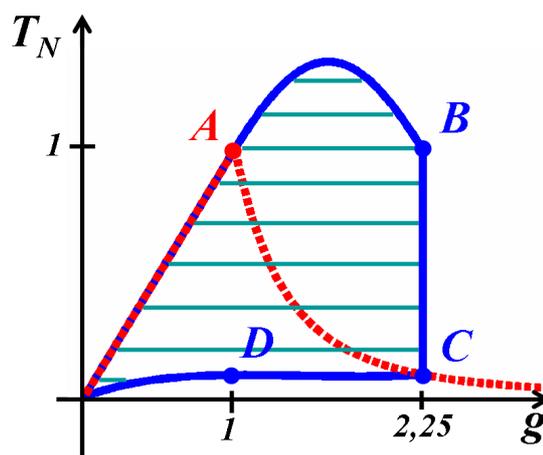


FIG. IV.20 – \dot{g} élevé ($a = 100$).

Comportement normal du modèle d'adhésion cicatrisante lors d'un cycle séparation/relaxation($\dot{g} = 0$)/approche pour différentes vitesses de sollicitation \dot{g} . La zone hachurée entre les courbes d'endommagement et de cicatrisation correspond à la dissipation surfacique liée au comportement de l'interface.

Dans le cas de sollicitation tangentielle en compression ($g = 0$), le comportement est de type frottement de Coulomb sans effet de l'adhésion. Ce comportement est présenté en figure IV.2.

Dans le cas où les corps ne sont pas en contact $g \neq 0$, alors $T_N = C_N \beta^2 g$ dans (IV.12) et pour toute évolution : $T_T = 0$.

Extension à la cicatrisation partielle

Dans le modèle précédent d'adhésion cicatrisante, l'adhésion peut être complètement cicatrisée, ce qui peut constituer une approche du comportement des liaisons de type van der Waals. Nous considérons maintenant une nouvelle application où l'adhésion est seulement partiellement retrouvée. C'est le cas, par exemple, du comportement de l'interface adhésive de type « post-it ». Collé et décollé plusieurs fois, le post-it voit son pouvoir collant diminuer au cours des cycles contact/séparation.

Une nouvelle variable β_s est introduite dans le modèle d'adhésion cicatrisante [97, 106]. Cette variable représente la valeur maximale de β et correspond au seuil de cicatrisation. La condition

$$\beta \in [0, \beta_s] \quad (\text{IV.13})$$

est alors imposée. L'équation d'évolution de β_s suit la loi

$$\beta_s(\mathbf{X}^1, t) = \beta_s^0 + \alpha \int_0^t [\dot{\beta}(\mathbf{X}^1, \tau)]^- d\tau, \quad (\text{IV.14})$$

où α est le facteur d'affaiblissement ($\alpha \in [0, 1]$) et $\beta_s^0 \in [0, 1]$ est la valeur initiale du seuil d'intensité d'adhésion β_s . Dans cette expression, la partie négative portant sur $\dot{\beta}$ indique que le seuil de restitution de l'adhésion évolue avec l'endommagement. Ainsi, β_s est analogue à la déformation plastique cumulée dans le cas de plasticité volumique. Cette variable rend compte à l'instant actuel de l'histoire de l'endommagement de l'interface. En ce sens, plus l'interface a été endommagée, plus faible sera permise la cicatrisation.

Pour $\alpha = 0$ et $\beta_s^0 = 1$, le modèle d'adhésion complètement cicatrisante est retrouvé. Pour $\alpha = 1$ et si l'interface est initialement complètement adhésive $\beta_0 = \beta_s^0$, la cicatrisation n'est plus possible. Dans le cas HPP, le modèle RCCM est alors retrouvé et à chaque instant $\beta_s(t) = \min(\beta(t))$.

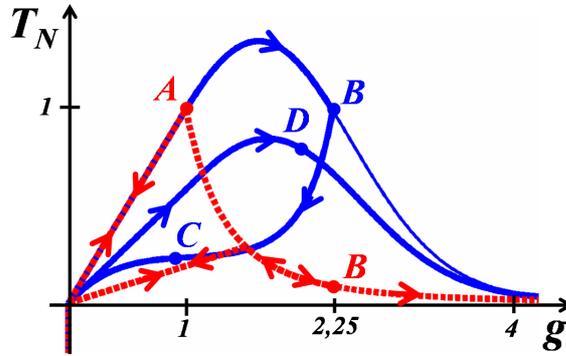


FIG. IV.21 – Comportement normal du modèle d'adhésion avec cicatrisation partielle (β_s).

La figure IV.21 présente l'évolution du comportement du modèle avec adhésion partiellement cicatrisante pour $w = 1 \text{ J.m}^{-2}$, $C_N = 1 \text{ N.m}^{-3}$, $\alpha = 0.7$ et $\beta_s^0 = 1$, pour la sollicitation normale présentée en figure IV.7.

Dans les cas où $b \rightarrow 0$ ou si $\dot{g} \rightarrow 0$, la réponse est celle de la courbe en pointillé rouge. Lors de l'approche débutant au point B ($g = 2.25$ ici), l'interface commence par cicatriser. Une fois atteint le seuil d'adhésion β_s , la cicatrisation n'est plus permise et le comportement est de type élastique de raideur endommagée $C_N \beta_s^2$.

Dans les cas où $b \neq 0$ et pour des sollicitations non quasi-statiques, la réponse est celle de la courbe bleue de la figure IV.21. Un effet de retard sur l'endommagement et la cicatrisation est observé. Mais dans ce cas, lorsque les corps sont de nouveau en contact, même si le temps de contact

est long, la raideur initiale de l'interface ne peut pas être retrouvée car la condition $\beta \leq \beta_s$ doit être respectée.

Dans le cas d'une sollicitation cyclique de séparation/approche (figure IV.22), l'effet de la prise en compte de l'histoire de l'endommagement (équation (IV.14)) peut être observé. Plus l'endommagement des liens est important ou répété, moins la cicatrisation est autorisée.

Pour le cas où $w = 1 \text{ J.m}^{-2}$, $C_N = 1 \text{ N.m}^{-3}$, $\beta_0 = \beta_s^0 = 1$, $b \rightarrow 0$, nous considérons les trois comportements de l'interface suivants : une interface de type adhésion partiellement cicatrisante ($\alpha = 0.5$), une interface avec adhésion cicatrisante ($\alpha = 0$) et une interface de type RCCM ($\alpha = 1$). La figure IV.23 présente les différents comportements. La figure IV.24 décrit l'évolution de β pour chacun des comportements. Dans le cas du comportement avec adhésion partiellement cicatrisante, la valeur maximale de la cicatrisation diminue à chaque cycle.

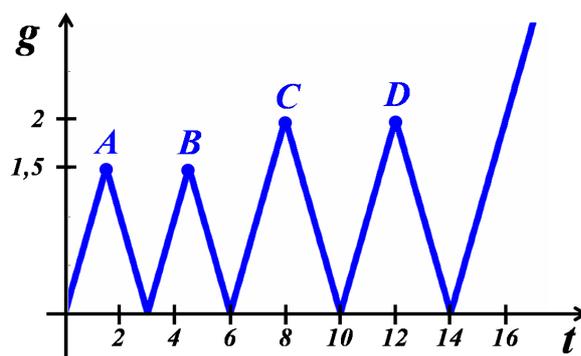


FIG. IV.22 – Sollicitation imposée.

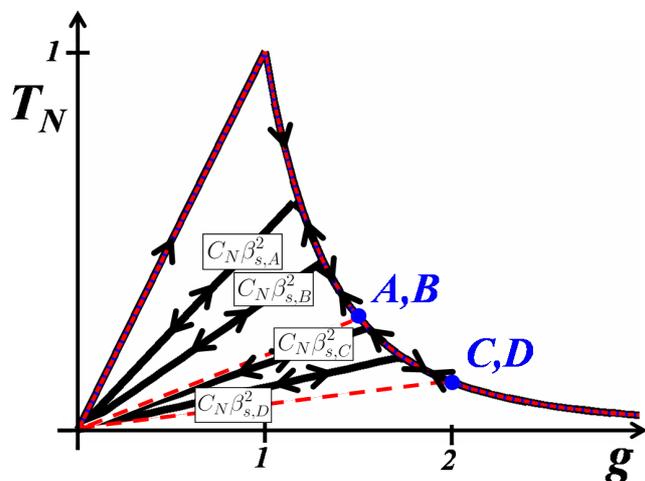


FIG. IV.23 – Réponse normale.

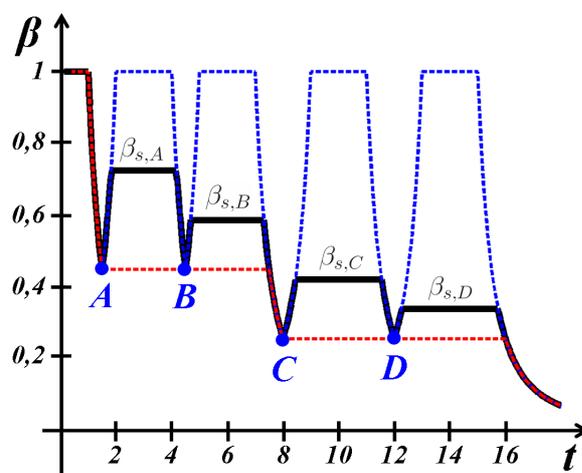


FIG. IV.24 – Evolution de β .

Etude lors de cycles approche/séparation selon la normale du comportement du modèle d'adhésion partiellement cicatrisante ($\alpha = 0.5$, courbes noires, trait épais), du modèle d'adhésion cicatrisante ($\alpha = 0$, courbes bleues, tirets), du modèle RCCM ($\alpha = 1$, courbes rouges, tirets). Pour les trois comportements $w = 1 \text{ J.m}^{-2}$, $C_N = 1 \text{ N.m}^{-3}$, $\beta_0 = \beta_s^0 = 1$, $b \rightarrow 0$.

IV.5 Réflexions sur la dissipation surfacique et sur l'interaction tangentielle à distance

Ce paragraphe propose deux réflexions sur les choix réalisés précédemment concernant le modèle d'adhésion cicatrisante, à savoir l'introduction d'une dissipation liée au comportement de l'interface et le fait qu'aucune action adhésive tangentielle ne soit retenue. La discussion aboutit, à propos de ce dernier choix, sur la proposition d'une forme de modèle d'interface avec action adhésive tangentielle.

A propos de la dissipation surfacique

Les résultats expérimentaux de S. Perutz et al. [90] et les travaux de J.N. Israelachvili [53] permettent de considérer que le comportement des liens adhésifs est dissipatif. Cependant la mesure de la dissipation est toujours globale, dépendante de la déformation des corps et de la qualité de la mesure.

M. Barquins [12] ou plus récemment J. Greenwood [46], K.L. Johnson [60], J.M. Baney et C.-Y. Hui [5] et Y.-Y. Lin et al. [70] considèrent que les dissipations viennent des déformations engendrées dans le volume proche des surfaces en vis-à-vis. Dans leurs modèles, la dissipation est caractérisée par les propriétés volumiques des matériaux considérés. Les différentes modélisations retenues pour décrire le comportement des interactions sont par contre non dissipatives.

L'originalité de notre approche consiste à introduire une dissipation surfacique liée au comportement propre des interactions. Bien que l'introduction d'une dissipation liée au comportement de l'interface soit très répandue dans le domaine de la mécanique de la rupture pour décrire le processus d'endommagement, l'introduction d'une dissipation liée au comportement de l'interface lors de l'endommagement ou lors de la cicatrisation des liens est, à notre connaissance, une nouveauté dans le domaine de l'étude des contacts avec interaction. Notre approche permet de distinguer dissipation surfacique et dissipation volumique alors que dans les travaux précédemment cités la dissipation était nécessairement liée aux propriétés volumiques des corps. Selon les applications envisagées, les choix des valeurs des coefficients de viscosité volumique λ et $\tilde{\mu}$ ou du paramètre b permettent de rendre l'une ou l'autre des dissipations prépondérantes.

Remarquons que dans le cas où le paramètre de viscosité b est pris égal à zéro le comportement de l'interface se résume à un comportement élastique endommageable non linéaire. Lors d'un cycle aucune dissipation n'est observée et l'interface peut cicatriser de manière complète.

Notre approche permet donc de généraliser les travaux de modélisation précédents rendant compte du phénomène d'hystérésis d'adhésion.

Discussions sur l'interaction tangentielle à distance

Dans les applications envisagées au chapitre VI, les résultats d'expérience montrent que les déplacements tangentiels relatifs à distance sont très limités ou non observés. La modélisation de l'action adhésive par le modèle d'adhésion cicatrisante présenté au paragraphe IV.4 est donc suffisante. L'action adhésive peut être considérée sans effet sur le comportement tangentiel et l'évolution des liens adhésifs peut être seulement pilotée par g , la distance relative des corps.

Cependant, en vue de décrire des expériences à des échelles plus fines, il est nécessaire de développer un modèle d'adhésion cicatrisante ayant une action tangentielle. Un tel modèle posséderait un comportement tangentiel à distance s'opposant au déplacement tangentiel relatif des corps. En vue de l'inscrire dans le formalisme d'interaction en grands déplacements relatifs et grandes

déformations des surfaces en vis-à-vis, le lien sthénique retenu serait, d'après les discussions observées au paragraphe III.1.3, la forme faible du principe d'action-réaction généralisé.

Schématiquement, un atome de la surface $\Gamma_{t,C}^1$ (si on estime qu'un tel atome peut être identifié) interagit avec l'ensemble des atomes de la surface de $\Gamma_{t,C}^2$ (même remarque sur la présence de tels atomes sur la surface). Dans le formalisme retenu, la résultante de ces interactions est modélisée par une interaction entre le point considéré et son projeté. Il existe de nombreuses expériences rendant compte du comportement des liens adhésifs lors de sollicitations selon la direction de leurs interactions. Pour ces expériences, dont quelques unes seront étudiées au chapitre VI, la modélisation proposée semble correcte.

Par contre, à notre connaissance, il n'existe aucune étude portant sur la sollicitation des liens adhésifs selon une direction située dans le plan normal à leurs directions d'interaction. C'est-à-dire, une expérience portant sur l'étude du déplacement tangentiel relatif entre deux corps distants. La question, « a-t-on existence d'un effort résistant tangentiel à distance ? », n'a donc pas de réponse basée sur des observations expérimentales. Il est cependant possible d'envisager une discussion, inspirée des travaux de simulation de J. Ringlein et M.O. Robbins [98] et se basant sur le comportement obtenu à l'aide du modèle d'adhésion cicatrisante.

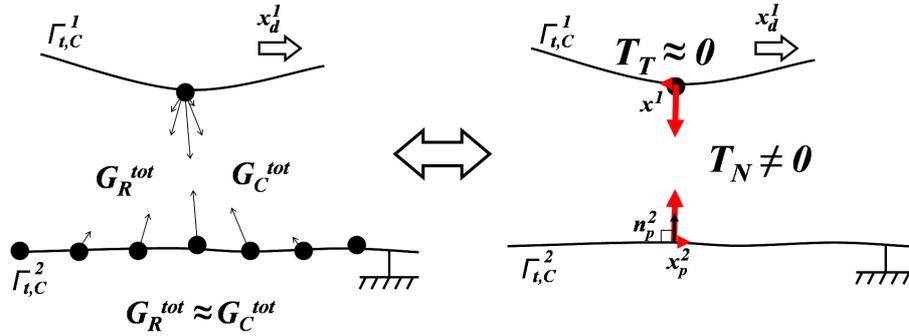


FIG. IV.25 – Sollicitation quasi-statique.

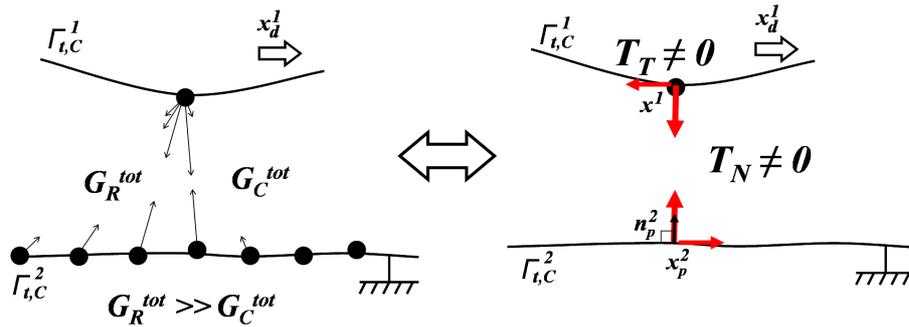


FIG. IV.26 – Sollicitation à vitesse $\dot{\xi}_T$ finie.

Schématisation et modélisation de l'interaction, passage échelle atomique / échelle des corps. La taille des vecteurs représente le niveau de l'interaction selon l'état d'endommagement du lien adhésif.

A une échelle suffisamment fine, les surfaces en vis-à-vis peuvent être supposées quasi-planes. Les schémas des figures IV.25 et IV.26 présentent une possible configuration des atomes en interaction.

D'après le comportement du modèle d'adhésion cicatrisante, lors du déplacement relatif à vitesse quasi-statique (figure IV.25), un équilibre se forme entre les liens créés avec les atomes en amont et les liens rompus avec les atomes en aval. Dans ce cas $G_{TOT}^r \approx G_{TOT}^c$ et il n'y a pas d'effort résultant s'opposant au déplacement à l'échelle des corps.

Dans le cas de vitesses de sollicitation finies (figure IV.26), un effort résistant apparaît. Cet effort est issu de la dépendance à la vitesse de sollicitation du comportement de chacune des interactions. Il en résulte $G_{TOT}^r > G_{TOT}^c$, ce qui donne naissance à un effort s'opposant au déplacement tangentiel relatif des corps. Les processus de cicatrisation ou d'endommagement des liens sont d'autant plus retardés que la vitesse d'approche ou respectivement de séparation des deux atomes considérés est élevée. L'effort s'opposant au déplacement relatif des corps est ainsi d'autant plus élevé que la vitesse relative des corps est grande.

Ce point de vue considère une interaction de composante tangentielle non nulle. Nous avons vu précédemment que la dépendance du comportement par rapport au déplacement tangentiel relatif est contraignante en vue d'écrire le modèle dans le cadre des grandes déformations. Le déplacement tangentiel relatif ne pourrait donc pas être choisi pour représenter l'état de l'interface. Pour y remédier, nous proposons un comportement tangentiel qui réalise une extension du frottement de Coulomb au cas de non contact. La variable cinématique choisie est alors $\dot{\xi}_T$ et le comportement est le suivant :

- quand les corps sont en contact ($g = 0$), le comportement de type frottement de Coulomb doit être retrouvé,
- la résistance tangentielle au déplacement relatif des corps est fonction de l'état d'endommagement des liens, c'est-à-dire \mathbf{T}_T diminue quand β diminue. Quand les liens adhésifs sont rompus, l'effort tangentiel à distance est nul. Le déplacement relatif des corps est libre,
- la résistance tangentielle \mathbf{T}_T est nulle dans les cas de vitesses tangentielles relatives $\dot{\xi}_T$ quasi-statiques, car alors $G_{TOT}^r \approx G_{TOT}^c$,
- la résistance tangentielle \mathbf{T}_T est d'autant plus élevée que la vitesse de sollicitation tangentielle $\dot{\xi}_T$ est élevée, car alors $G_{TOT}^r \gg G_{TOT}^c$.

Suite à ces considérations, les équations locales du comportement tangentiel envisagé seraient les suivantes :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{T}_T - \mathbf{T}_s(\dot{\xi}_T, \beta)\| &\leq \mu |T_N - C_N \beta^2 g| \\ \|\mathbf{T}_T - \mathbf{T}_s(\dot{\xi}_T, \beta)\| &< \mu |T_N - C_N g \beta^2| \Rightarrow \dot{\xi}_T = \mathbf{0}, \\ \|\mathbf{T}_T - \mathbf{T}_s(\dot{\xi}_T, \beta)\| &= \mu |T_N - C_N g \beta^2| \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \\ &\dot{\xi}_T = \lambda (\mathbf{T}_T - \mathbf{T}_s(\dot{\xi}_T, \beta)), \end{aligned}$$

où une nouvelle quantité $\mathbf{T}_s(\dot{\xi}_T, \beta)$ a été introduite. Cette quantité représente l'action tangentielle adhésive. Pour déterminer sa dépendance par rapport à $\dot{\xi}_T$ et β , des simulations numériques à l'échelle des atomes, comme celles illustrées en figures IV.25 et IV.26, peuvent être envisagées. En considérant une loi de type adhésion cicatrisante entre chaque atome en interaction selon la ligne passant par leur centre et en imposant un mouvement relatif tangentiel de vitesse variable $\dot{\xi}_T$, la dépendance de \mathbf{T}_s à $\dot{\xi}_T$ pourrait être identifiée. Cette dépendance aurait pour source la dissipation introduite par le coefficient b au niveau de chacune des interactions. A l'échelle des corps, l'effort résistant résultant obtenu, modélisé par le seuil $\mathbf{T}_s(\dot{\xi}_T, \beta)$, pourrait être défini au point d'interaction considéré (représentant la contribution de plusieurs atomes de $\Gamma_{t,C}^1$) en relation avec son projeté (représentant plusieurs atomes de $\Gamma_{t,C}^2$).

Cette approche de type modélisation multi-échelles va dans le sens des simulations des codes hybrides couplant la méthode des éléments finis et la dynamique moléculaire. C'est cette approche qui est retenue dans les travaux de B. Cambou et al. [19], P. Aubertin et R. Borst [4] ou J.-F. Molinari [76] sur des applications différentes de celles nous intéressant.

Cette approche multi-échelle est également réalisée par P. Wriggers [120] et J. Nettingsmeier [85] pour déterminer le coefficient de frottement macroscopique d'un élastomère sur une surface rigide rugueuse. La première étude, à l'échelle des aspérités, concerne le contact entre deux surfaces rugueuses avec comme seule condition à l'interface la condition de contact unilatéral. Cette étude est résolue par la méthode des éléments finis. Les résultats du calcul sont un effort tangentiel résultant qui s'oppose au déplacement relatif des surfaces et qui dépend de la vitesse de sollicitation. Cet effort a pour origine l'imbrication des aspérités et le comportement dissipatif du modèle volumique retenu pour décrire le comportement de l'élastomère. La seconde étude, à l'échelle des corps, concerne le contact entre deux surfaces considérées planes car à l'échelle des corps les aspérités sont de tailles négligeables. La résistance au déplacement des corps est modélisée par un comportement de type frottement de Coulomb pour lequel la valeur du coefficient de frottement retenu est directement liée aux résultats de l'étude à l'échelle des aspérités. Dans cette approche, comme le proposait B.N.J. Persson [89], le comportement à l'échelle des corps de l'interface est modélisé par la loi de Coulomb et la dissipation au niveau de l'interface est reliée au comportement dissipatif de l'élastomère.

A ce stade, seules des études préliminaires ont pu être menées sur l'étude de la dépendance de \mathbf{T}_s à $\dot{\xi}_T$ et β . La poursuite de cette étude constitue une perspective de ce travail.

IV.6 Forme locale du problème dynamique de contact avec adhésion cicatrisante

Avec les notations introduites (paragraphe III.1.1 et III.1.2), les choix réalisés pour l'interaction adhésive (paragraphe IV.4) et pour le comportement volumique (paragraphe III.2.3), le problème dynamique de deux corps viscoélastiques en grandes déformations en contact unilatéral couplant adhésion cicatrisante et frottement a la forme suivante :

Problème P : Trouver $\mathbf{x}^\alpha = \mathbf{x}^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t)$ et $\beta = \beta(\mathbf{X}^1, t)$ tels que $\mathbf{x}^\alpha(0) = \mathbf{X}^\alpha$, $\dot{\mathbf{x}}^\alpha(0) = \mathbf{V}^\alpha$ dans Ω_0^α , $\alpha = 1, 2$, $\beta(0) = \beta_0 \in [0, 1]$ sur $\Gamma_{0,C}^1$ et pour tout $t \in]0, T[$,

- dans Ω_0^α ,

$$\begin{aligned} \rho_0^\alpha \frac{d\mathbf{v}^\alpha}{dt} - \mathbf{Div} (\mathbf{F}^\alpha \mathbf{S}^\alpha) &= \rho_0^\alpha \mathbf{f}_0^\alpha, \\ \mathbf{S}^\alpha(\mathbf{C}^\alpha, \mathbf{D}^\alpha) &= 2 \frac{\partial \hat{\psi}^\alpha(\mathbf{C}^\alpha)}{\partial \mathbf{C}^\alpha} + J^\alpha (\mathbf{F}^\alpha)^{-1} \frac{\partial \hat{\phi}^\alpha(\mathbf{D}^\alpha)}{\partial \mathbf{D}^\alpha} (\mathbf{F}^\alpha)^{-T}, \end{aligned}$$

$\hat{\psi}^\alpha$ et $\hat{\phi}^\alpha$ définis en (III.22) et respectivement en (III.23), $\alpha = 1, 2$,

- avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\alpha &= \mathbf{x}_d^\alpha \text{ sur } \Gamma_{0,U}^\alpha \text{ et } \mathbf{F}^\alpha \mathbf{S}^\alpha \mathbf{N}^\alpha = \mathbf{F}_{0,d}^\alpha \text{ sur } \Gamma_{0,F}^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \\ J_p(\mathbf{F}^2 \mathbf{S}^2 \mathbf{N}^2)_p &= \begin{cases} -\mathbf{F}^1 \mathbf{S}^1 \mathbf{N}^1 \text{ sur } \gamma_p(\Gamma_{0,C}^1) \\ \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_{0,C}^2 \setminus \gamma_p(\Gamma_{0,C}^1) \end{cases} \quad (\text{principe d'action-réaction généralisé}), \end{aligned}$$

- et sur $\Gamma_{0,C}^1$

$$\left\{ \begin{array}{l} g \geq 0, \\ T_N - C_N \beta^2 g \leq 0, \\ (T_N - C_N \beta^2 g)g = 0, \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \|\mathbf{T}_T\| \leq \mu |T_N - C_N \beta^2 g|, \\ \|\mathbf{T}_T\| < \mu |T_N - C_N \beta^2 g| \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\xi}}_T = \mathbf{0}, \\ \|\mathbf{T}_T\| = \mu |T_N - C_N \beta^2 g| \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \dot{\boldsymbol{\xi}}_T = \lambda \mathbf{T}_T, \end{array} \right.$$

$$b\dot{\beta} \geq w \quad \text{si } \beta = 0,$$

$$b\dot{\beta} = w - C_N g^2 \beta \quad \text{pour } \beta \in]0, 1[,$$

$$b\dot{\beta} \leq w - C_N g^2 \quad \text{si } \beta = 1.$$

IV.7 Formulations en petites perturbations du problème dynamique de contact avec adhésion cicatrisante

Nous présentons dans ce paragraphe quelques résultats d'existence et d'approximation de la solution variationnelle du **Problème P** sous les hypothèses des petites perturbations et de frottement non local. Cette étude correspond à un résumé des résultats obtenus par M. Cocou et al. [27].

Dans le cadre des petites perturbations, l'interaction adhésive à distance est notée \mathbf{t} , avec $\mathbf{t} = -\mathbf{t}^1 = \mathbf{t}^2$ sur $\Gamma_{0,C}^1 \approx \Gamma_C$. L'inconnue principale du problème est le déplacement \mathbf{u}^α , $\mathbf{u}^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t) = \mathbf{x}^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t) - \mathbf{X}^\alpha$, $\alpha = 1, 2$. A l'instant initial, les déplacements seront considérés nuls $\mathbf{u}^\alpha(0) = \mathbf{u}_0^\alpha = \mathbf{0}$ et les vitesses sont notées \mathbf{u}_1^α , $\alpha = 1, 2$.

Nous utilisons les notations suivantes sur Γ_C pour les composantes normale et tangentielle du champs du déplacement \mathbf{v}^α , $\alpha = 1, 2$ et pour la distance relative correspondant à $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)$:

$$\begin{aligned} v_N^\alpha &:= \mathbf{v}^\alpha \cdot \mathbf{n}, \quad v_T^\alpha := \mathbf{v}^\alpha - v_N^\alpha \mathbf{n}, \\ [v_N] &:= v_N^1 - v_N^2 + g_0, \quad [v_T] := \mathbf{v}_T^1 - \mathbf{v}_T^2, \end{aligned}$$

où $\mathbf{n} := \mathbf{n}_p^2 \approx -\mathbf{n}^1$ et g_0 est la distance relative initiale. Ainsi, pour la solution $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2)$, on obtient $[u_N] = g$.

Nous notons par $\boldsymbol{\varepsilon}^\alpha$ le tenseur des déformations linéarisé et par $\boldsymbol{\mathcal{A}}^\alpha$ et $\boldsymbol{\mathcal{B}}^\alpha$, les tenseurs d'élasticité, respectivement de viscosité, définissant le comportement du corps Ω_0^α , $\alpha = 1, 2$. Les composantes des tenseurs d'élasticité et de viscosité respectent les conditions classiques de symétrie et d'ellipticité suivantes : $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, $\forall i, j, k, l = 1, \dots, n$, $\exists \alpha_C > 0$ tel que $C_{ijkl} \tau_{ij} \tau_{kl} \geq \alpha_C \tau_{ij} \tau_{ij} \quad \forall \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij})$ vérifiant $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, $\forall i, j = 1, \dots, n$, où $C_{ijkl} = A_{ijkl}^\alpha$, $C = A^\alpha$ ou $C_{ijkl} = B_{ijkl}^\alpha$, $C = B^\alpha \quad \forall i, j, k, l = 1, \dots, n$, $\alpha = 1, 2$, $n = 2, 3$.

Avec les notations introduites précédemment et en considérant, pour simplifier, que la masse volumique des corps est égale à 1, la forme locale du problème dynamique de contact avec adhésion cicatrisante entre deux corps viscoélastiques en petites perturbations est la suivante :

Problème \tilde{P} : Trouver \mathbf{u}^α et β tels que $\mathbf{u}^\alpha(0) = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{u}}^\alpha(0) = \mathbf{u}_1^\alpha$, $\alpha = 1, 2$, $\beta(0) = \beta_0 \in [0, 1]$ sur Γ_C et pour tout $t \in]0, T[$,

- dans Ω_0^α , $\alpha = 1, 2$,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}^\alpha}{dt^2} - \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}^\alpha(\mathbf{u}^\alpha, \dot{\mathbf{u}}^\alpha) &= \mathbf{f}^\alpha, \\ \boldsymbol{\sigma}^\alpha(\mathbf{u}^\alpha, \dot{\mathbf{u}}^\alpha) &= \mathcal{A}^\alpha \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\alpha) + \mathcal{B}^\alpha \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\alpha), \end{aligned}$$

- avec les conditions aux limites

$$\mathbf{u}^\alpha = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_{0,U}^\alpha, \text{ et } \boldsymbol{\sigma}^\alpha \mathbf{n}^\alpha = \mathbf{F}_{0,d}^\alpha \text{ sur } \Gamma_{0,F}^\alpha, \alpha = 1, 2,$$

$$\mathbf{t} = -\mathbf{t}^1 = \mathbf{t}^2 \text{ sur } \Gamma_C,$$

- et sur Γ_C

$$\left\{ \begin{array}{l} [u_N] \geq 0, \\ t_N - C_N \beta^2 [u_N] \leq 0, \\ (t_N - C_N \beta^2 [u_N]) [u_N] = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \|\mathbf{t}_T\| \leq \mu |\tilde{t}_N - C_N \beta^2 [u_N]|, \\ \|\mathbf{t}_T\| < \mu |\tilde{t}_N - C_N \beta^2 [u_N]| \Rightarrow [\dot{\mathbf{u}}_T] = \mathbf{0}, \\ \|\mathbf{t}_T\| = \mu |\tilde{t}_N - C_N \beta^2 [u_N]| \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, [\dot{\mathbf{u}}_T] = \lambda \mathbf{t}_T, \end{array} \right.$$

$$b\dot{\beta} \geq w \text{ si } \beta = 0,$$

$$b\dot{\beta} = w - C_N \vartheta([u_N]^2) \beta \text{ pour } \beta \in]0, 1[,$$

$$b\dot{\beta} \leq w - C_N \vartheta([u_N]^2) \text{ si } \beta = 1,$$

où $\tilde{t} := (\mathcal{R}\boldsymbol{\sigma}^2(\mathbf{u}^2, \dot{\mathbf{u}}^2)) \cdot \mathbf{n}$. Dans cette forme locale, l'opérateur de troncature ϑ et la régularisation \mathcal{R} sont introduits afin de simplifier les développements qui suivent. L'opérateur $\vartheta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est tel que $\vartheta(s) = -r$ si $s \leq -r$, $\vartheta(s) = s$ si $|s| < r$ et $\vartheta(s) = r$ si $s \geq r$, où $r > 0$ est une grandeur caractéristique donnée [94]. L'introduction de cet opérateur est naturel dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. La régularisation \mathcal{R} sera définie par la suite.

En vue d'écrire la formulation variationnelle du problème \tilde{P} , nous adoptons les notations suivantes pour les espaces de Sobolev et les produits de dualité correspondants :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^s &:= [H^s(\Omega_0^1)]^n \times [H^s(\Omega_0^2)]^n \quad \forall s \in \mathbb{R}, \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{-s,s} &= \langle \mathbf{v}^1, \mathbf{w}^1 \rangle_{\mathbf{H}^{-s}(\Omega_0^1), \mathbf{H}^s(\Omega_0^1)} + \langle \mathbf{v}^2, \mathbf{w}^2 \rangle_{\mathbf{H}^{-s}(\Omega_0^2), \mathbf{H}^s(\Omega_0^2)} \\ \forall \mathbf{v} &= (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in \mathbf{H}^{-s}, \quad \forall \mathbf{w} = (\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2) \in \mathbf{H}^s. \end{aligned}$$

Nous définissons les espaces de Hilbert suivants $(\mathbf{H}, | \cdot |)$ avec le produit scalaire associé noté (\cdot, \cdot) et $(\mathbf{V}, \| \cdot \|)$ avec le produit scalaire associé (de \mathbf{H}^1) noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et les ensembles \mathbf{K}, Λ tels que :

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &:= \mathbf{H}^0 = [L^2(\Omega_0^1)]^n \times [L^2(\Omega_0^2)]^n, \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}^1 \times \mathbf{V}^2, \quad \text{où} \\ \mathbf{V}^\alpha &= \{ \mathbf{v}^\alpha \in [H^1(\Omega_0^\alpha)]^n; \mathbf{v}^\alpha = \mathbf{0} \text{ p.p. sur } \Gamma_{0,U}^\alpha \}, \quad \alpha = 1, 2, \\ \mathbf{K} &= \{ \mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in \mathbf{V}; [v_N] \geq 0 \text{ p.p. dans } \Gamma_C \}, \\ \Lambda &= \{ \lambda \in L^2(\Gamma_C); \lambda \in [0, 1] \text{ p.p. dans } \Gamma_C \}. \end{aligned}$$

Nous supposons pour la suite que $\mathbf{F}_{0,d} = (\mathbf{F}_{0,d}^1, \mathbf{F}_{0,d}^2) \in W^{1,\infty}(0, T; [L^2(\Gamma_{0,F}^1)]^n) \times W^{1,\infty}(0, T; [L^2(\Gamma_{0,F}^2)]^n)$, $\mathbf{f} = (\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2) \in W^{1,\infty}(0, T; [L^2(\Omega_0^1)]^n) \times W^{1,\infty}(0, T; [L^2(\Omega_0^2)]^n)$, $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}$, $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{V}$, $\beta_0 \in \Lambda$, $\mu \in L^\infty(\Gamma_C)$ et $\mu \geq 0$ presque partout dans Γ_C .

Soient a et b deux formes bilinéaires, continues et symétriques de $\mathbf{H}^1 \times \mathbf{H}^1 \rightarrow \mathbb{R}$, telles que

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} &= (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2), \quad \mathbf{w} = (\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2) \in \mathbf{H}^1, \\ a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= a^1(\mathbf{v}^1, \mathbf{w}^1) + a^2(\mathbf{v}^2, \mathbf{w}^2), \\ b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= b^1(\mathbf{v}^1, \mathbf{w}^1) + b^2(\mathbf{v}^2, \mathbf{w}^2), \end{aligned}$$

et pour $\alpha = 1, 2$,

$$a^\alpha(\mathbf{v}^\alpha, \mathbf{w}^\alpha) = \int_{\Omega_0^\alpha} \mathcal{A}^\alpha \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\alpha) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^\alpha) dx, \quad b^\alpha(\mathbf{v}^\alpha, \mathbf{w}^\alpha) = \int_{\Omega_0^\alpha} \mathcal{B}^\alpha \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\alpha) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^\alpha) dx.$$

Avec les hypothèses précédentes, nous considérons l'élément de $W^{1,\infty}(0, T; \mathbf{H}^1)$ noté \mathbf{L} tel que $\forall t \in [0, T]$ et $\forall \mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in \mathbf{H}^1$

$$\langle \mathbf{L}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{\alpha=1,2} \int_{\Omega_0^\alpha} \mathbf{f}^\alpha \cdot \mathbf{v}^\alpha dx + \sum_{\alpha=1,2} \int_{\Gamma_{0,F}^\alpha} \mathbf{F}_{0,d}^\alpha \cdot \mathbf{v}^\alpha ds.$$

Nous supposons que $\mathcal{R} : [L^2_{\text{Sym}}(\Omega_0^2)]^{n^2} \rightarrow [H^1(\Omega_0^2)]^{n^2}$ est une régularisation linéaire et continue de $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2) = \boldsymbol{\sigma}^2(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2)$, qui satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0^2, \mathbf{u}_1^2))_N &= 0, \text{ et} \\ \exists C > 0, \quad \|\mathcal{R}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2)\|_{[H^1(\Omega_0^2)]^{n^2}} &\leq C(|\mathbf{u}^2| + |\mathbf{v}^2|) \quad \forall \mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2 \in \mathbf{V}^2, \end{aligned}$$

où $|\cdot|$ est la norme de $[L^2(\Omega_0^2)]^n$. Une régularisation du même type a été retenue dans les travaux de G. Scarella [103] et de M. Cocou et G. Scarella [25].

Nous définissons les formes suivantes :

$$c : L^\infty(\Gamma_C) \times (\mathbf{H}^1)^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad c(\beta, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_C} C_N \beta^2 \vartheta([u_N]) (v_N^1 - v_N^2) ds,$$

$$J : L^\infty(\Gamma_C) \times (\mathbf{H}^1)^3 \rightarrow \mathbb{R},$$

$$J(\beta, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Gamma_C} \mu |(\mathcal{R}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2))_N - C_N \beta^2 \vartheta([u_N])| |[\mathbf{w}_T]| ds,$$

$$\forall \beta \in L^\infty(\Gamma_C), \quad \forall \mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2), \mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2), \mathbf{w} = (\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2) \in \mathbf{H}^1$$

$$\gamma : \mathbf{H}^1 \times [L^2(\Gamma_C)]^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \gamma(\mathbf{u}, \delta, \lambda) = \int_{\Gamma_C} \frac{C_N}{b} \vartheta([u_N]^2) \delta \lambda ds,$$

$$\forall \mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) \in \mathbf{H}^1, \quad \forall \delta, \lambda \in L^2(\Gamma_C).$$

Nous supposons également les relations de compatibilité pour les conditions initiales suivantes :

$$\exists \mathbf{l} \in \mathbf{H} \text{ tel que}$$

$$(\mathbf{l}, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + c(\beta_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) + J(\beta_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{L}(0), \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

En notant $(\cdot, \cdot)_{\Gamma_C}$ le produit scalaire dans $L^2(\Gamma_C)$ associé à la norme $|\cdot|_{\Gamma_C}$, la formulation variationnelle du problème \tilde{P} est la suivante.

Problème P_v : Trouver $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; \mathbf{V}) \cap C^1([0, T]; \mathbf{H}^{-1/2})$, $\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Gamma_C))$ tels que $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{u}_1$ dans $\Omega_0^1 \cup \Omega_0^2$, $\beta(0) = \beta_0$ dans Γ_C , $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{K}$, $\beta(t) \in \Lambda$ pour tout $t \in]0, T[$ et

$$\begin{aligned} & \langle \dot{\mathbf{u}}(T), \mathbf{v}(T) - \mathbf{u}(T) \rangle_{-1/2, 1/2} - (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}(0) - \mathbf{u}_0) - \int_0^T (\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) dt \\ & + \int_0^T \{a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + b(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + c(\beta, \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u})\} dt \\ & + \int_0^T \{J(\beta, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v} + \kappa \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) - J(\beta, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \kappa \dot{\mathbf{u}})\} dt \geq \int_0^T \langle \mathbf{L}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle dt \end{aligned}$$

$\forall \mathbf{v} \in L^\infty(0, T; \mathbf{V}) \cap W^{1,2}(0, T; \mathbf{H})$ avec $\mathbf{v}(t) \in \mathbf{K}$ pour presque tout $t \in]0, T[$,

$$(\dot{\beta}, \lambda - \beta)_{\Gamma_C} + \gamma(\mathbf{u}, \beta, \lambda - \beta) \geq (\chi, \lambda - \beta)_{\Gamma_C}$$

$\forall \lambda \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_C))$ avec $\lambda(t) \in \Lambda$ pour presque tout $t \in]0, T[$,

où $\kappa > 0$ et $\chi := \frac{w}{b}$.

L'équivalence entre le problème variationnel P_v et le problème classique \tilde{P} se démontre aisément par intégration par parties et en utilisant la formule de Green.

Nous considérons dans la suite le problème de contact pénalisé correspondant au problème dynamique \tilde{P} où la condition de contact unilatéral est régularisée. La solution du problème pénalisé, notée $\mathbf{u}_\varepsilon = (\mathbf{u}_\varepsilon^1, \mathbf{u}_\varepsilon^2)$, β_ε , où $\varepsilon > 0$, vérifie les mêmes équations dans $\Omega_0^1 \cup \Omega_0^2$, les mêmes conditions initiales dans $\Omega_0^1 \cup \Omega_0^2$ et les mêmes conditions aux limites que celles du problème \tilde{P} , excepté pour la condition de contact unilatéral. Pour tout $t \in]0, T[$, la nouvelle condition de contact dans Γ_C est la suivante :

$$\begin{aligned} t_N^2 &= -t_N^1 = \frac{1}{\varepsilon} [u_{\varepsilon N}]^- + C_N \beta_\varepsilon^2 [u_{\varepsilon N}], \\ \mathbf{t}_T^1(\mathbf{u}_\varepsilon^1, \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon^1) &= -\mathbf{t}_T^2(\mathbf{u}_\varepsilon^2, \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon^2), \\ |\mathbf{t}_T| &\leq \mu |\tilde{t}_N - C_N \beta_\varepsilon^2 [u_{\varepsilon N}]|, \\ |\mathbf{t}_T| < \mu |\tilde{t}_N - C_N \beta_\varepsilon^2 [u_{\varepsilon N}]| &\Rightarrow [\dot{\mathbf{u}}_{\varepsilon T}] = \mathbf{0}, \\ |\mathbf{t}_T| = \mu |\tilde{t}_N - C_N \beta_\varepsilon^2 [u_{\varepsilon N}]| &\Rightarrow \exists \tilde{\lambda} \geq 0, [\dot{\mathbf{u}}_{\varepsilon T}] = \tilde{\lambda} \mathbf{t}_T, \\ \beta_\varepsilon &\in [0, 1] \text{ dans } \Gamma_C \text{ et} \\ b \dot{\beta}_\varepsilon &\geq w \text{ si } \beta_\varepsilon = 0, \\ b \dot{\beta}_\varepsilon &= w - C_N \vartheta([u_{\varepsilon N}]^2) \beta_\varepsilon \text{ si } \beta_\varepsilon \in]0, 1[, \\ b \dot{\beta}_\varepsilon &\leq w - C_N \vartheta([u_{\varepsilon N}]^2) \text{ si } \beta_\varepsilon = 1. \end{aligned}$$

En introduisant la forme $p_\varepsilon : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$p_\varepsilon(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_C} \vartheta([v_N]_-) (w_N^1 - w_N^2) ds \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V},$$

la formulation variationnelle du problème pénalisé est alors la suivante.

Problème P_ε : Trouver $\mathbf{u}_\varepsilon \in W^{2,2}(0, T; \mathbf{H}) \cap W^{1,2}(0, T; \mathbf{V})$ et $\beta_\varepsilon \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Gamma_C))$ tels que $\mathbf{u}_\varepsilon(0) = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(0) = \mathbf{u}_1$ dans $\Omega_0^1 \cup \Omega_0^2$, $\beta_\varepsilon(0) = \beta_0$ dans Γ_C , $\beta_\varepsilon(s) \in \Lambda$ pour tout $s \in]0, T[$ et presque pour tout $t \in]0, T[$

$$\begin{aligned} & (\ddot{\mathbf{u}}_\varepsilon, \mathbf{w} - \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon) + a(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{w} - \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon) + b(\dot{\mathbf{u}}_\varepsilon, \mathbf{w} - \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon) + c(\beta_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{w} - \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon) \\ & + p_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{w} - \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon) + J(\beta_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon, \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon, \mathbf{w}) - J(\beta_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon, \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon, \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon) \geq \langle \mathbf{L}, \mathbf{w} - \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon \rangle \\ & \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}, \\ & (\dot{\beta}_\varepsilon, \lambda - \beta_\varepsilon)_{\Gamma_C} + \gamma(\mathbf{u}_\varepsilon, \beta_\varepsilon, \lambda - \beta_\varepsilon) \geq (\chi, \lambda - \beta_\varepsilon)_{\Gamma_C} \quad \forall \lambda \in \Lambda. \end{aligned}$$

En considérant la résolution de la forme incrémentale de ce problème par une méthode de point fixe sur les variables \mathbf{u}_ε et β_ε , il est possible de montrer que le problème P_ε admet une solution unique. Des estimations, indépendantes de ε , permettent de conclure que, sous les hypothèses précédentes, il existe des sous-suites faiblement convergentes des solutions pénalisées vers des solutions du problème variationnel. Cette démonstration, plus technique, est présentée de manière détaillée dans [27].

Ce raisonnement reste valable dans le cas où l'un des corps est considéré comme un solide rigide. Des résultats similaires à ceux obtenus précédemment seraient retrouvés dans le cas où le comportement adhésif a une composante tangentielle.

IV.8 Conclusions

Ce chapitre a présenté l'ensemble des modèles d'interface retenus dans le cadre de ce travail et notamment la nouvelle contribution : le *modèle d'adhésion cicatrisante* (paragraphe IV.4 et paragraphe IV.5).

De manière synthétique, les choix de modélisation retenus pour établir le modèle d'adhésion cicatrisante ont été les suivants :

- *une évolution de l'interaction adhésive selon la distance relative des corps* proche de celle du modèle de Lennard-Jones, qui constitue la référence dans la communauté scientifique s'intéressant à la description du comportement des interactions,
- la considération de *l'énergie d'adhésion w* . Elle représente dans le modèle un seuil énergétique à partir duquel le comportement des liens adhésifs évolue. Son intérêt est que les valeurs expérimentales de ce paramètre sont maintenant bien connues,
- l'introduction de la variable β pour décrire l'état des liens adhésifs. La particularité du modèle d'adhésion cicatrisante est que *la loi d'évolution de β autorise la cicatrisation du lien adhésif*, c'est-à-dire que β peut augmenter et retrouver sa valeur initiale,
- l'introduction d'une *dissipation surfacique* attachée au comportement de l'interface. Les processus d'endommagement et de cicatrisation des liens adhésifs dépendent de la vitesse de sollicitation par l'intermédiaire du paramètre de *viscosité surfacique b* . Ce point rend notre modélisation des interactions originale vis-à-vis des modèles précédents s'intéressant au contact adhésif entre deux corps viscoélastiques,
- *un cadre cinématique et un cadre sthénique dédiés aux grandes déformations*. Ainsi, les corps ne sont pas nécessairement initialement en contact et lors de leur approche des liens adhésifs peuvent être créés.

Rappelons enfin que ces cadres cinématique et sthénique limitent la contribution de la composante tangentielle sur le comportement du modèle. D'une part, comme il a été discuté au paragraphe III.1.2, le cadre cinématique retenu de type projection orthogonale ne permet pas de considérer le déplacement tangentiel relatif comme variable d'état pour décrire l'évolution de β . D'autre part, comme il a été discuté au paragraphe III.1.3, le cadre sthénique retenu correspondant à la forme forte du principe d'action-réaction généralisé ne permet aucun effort tangentiel adhésif lorsque les corps ne sont pas en contact.

Ainsi, pour le modèle d'adhésion cicatrisante proposé dans le cadre de ce mémoire, il en résulte que l'action adhésive est uniquement pilotée par g , la distance normale relative, et possède uniquement une composante normale. Le comportement tangentiel est restreint au comportement de type frottement de Coulomb si les corps sont en contact ($g = 0$).

Aux vues des résultats obtenus sur les applications envisagées, notamment les études de la formation du col d'adhésion et de l'hystérésis d'adhésion, nous verrons que ces choix de modélisation sont peu contraignants.

La formulation locale du problème dynamique de contact avec adhésion cicatrisante (**Problème P**) donnée au paragraphe IV.6 clôt les quatre premiers chapitres de ce mémoire portés sur la modélisation du phénomène d'adhésion.

Dans la suite, le chapitre V s'intéresse à la résolution du **Problème P** par une méthode éléments finis. Le chapitre VI présente les résultats des simulations numériques, réalisées avec la considération de l'un ou l'autre des modèles d'interface, afin de décrire les manifestations macroscopiques observées dans le cas du contact verre/élastomère et présentées au chapitre II.

Chapitre V

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

La plateforme LMGC90 (<http://www.lmgc.univ-montp2.fr/~dubois/LMGC90/>), développée par F. Dubois et M. Jean [36, 37], permet le traitement sans régularisation des problèmes de dynamique en présence de condition de contact unilatéral avec frottement ou de modèle de zone cohésive. Nous utilisons cette plateforme pour résoudre le **Problème P** (paragraphe IV.6) de contact avec adhésion cicatrisante entre deux corps viscoélastiques.

Du fait de la non-régularité des lois d'interaction considérées, les vitesses des corps peuvent être discontinues. Afin de traiter convenablement ces discontinuités, les équations de la dynamique, discrétisées par rapport aux variables spatiales, sont formulées au sens des mesures différentielles. Cette formulation a été proposée par J.-J. Moreau [80] et M. Jean [56]. Vitesses et « impulsion de la réaction d'interaction » apparaissent alors comme inconnues principales du problème. A cause des possibles discontinuités de la vitesse, un schéma d'intégration temporel approprié doit être utilisé pour l'estimation du déplacement. Le choix s'est porté sur l'utilisation d'un schéma du 1^{er} ordre, la θ -méthode « modifiée », proposée par M. Jean et étudiée en détail par D. Vola et al. dans [119].

Dans ce travail, l'algorithme général de résolution de la plateforme LMGC90 (tableau V.1) est conservé. Le traitement des non linéarités volumiques est réalisé par appel de la MatLib au sein des boucles de Newton-Raphson [113]. La MatLib est une bibliothèque d'éléments finis et de lois de comportement développée par L. Stainier [111, 112].

Les contributions dans le cadre de ce travail portent essentiellement sur l'adaptation de l'algorithme de traitement du contact. Les méthodes numériques existantes de la plateforme LMGC90, telles que la méthode *Non Linear Gauss-Seidel (NLGS)* [1, 64] et le solveur *Non Smooth Contact Dynamics (NSCD)* [20, 56], ont été adaptées à la résolution de problèmes avec adhésion cicatrisante (**Problème P**, paragraphe IV.6).

Les contributions consistent à inscrire l'algorithme NLGS au sein d'une boucle de point fixe sur la valeur de l'intensité d'adhésion β et à réaliser un changement de variable approprié en entrée et en sortie du solveur NSCD. Le changement de variable permet de ramener les graphes du modèle Dugdale (figures IV.5 et IV.6), du modèle d'adhésion RCCM (figures IV.8 et IV.11) ou du modèle d'adhésion cicatrisante (figures IV.16 et IV.2) à des graphes de type Signorini-Coulomb formulés en vitesse (figures V.3). Ces contributions seront présentées au paragraphe V.2. Le tableau V.2 décrit l'algorithme de traitement du contact adapté à la résolution de problèmes avec adhésion cicatrisante.

Actuellement, le traitement du modèle d'adhésion cicatrisante est valable pour les cas *2D* uniquement. La résolution de cas *3D*, développée par Y. Monerie et M. Raous [96], est restreinte au traitement du modèle RCCM.

La formulation variationnelle des équations de la dynamique du **Problème P** (paragraphe IV.6) est classique, tout comme sa formulation sous forme discrète obtenue lors de l'approximation par éléments finis. Elles ne feront pas l'objet de développement dans ce mémoire. Nous renvoyons le lecteur aux références suivantes pour plus de détails [17, 77].

Nous précisons tout de même le choix réalisé sur l'ordre des éléments finis discrétisant les corps. Ils sont de type P1, c'est-à-dire que les fonctions de base sont linéaires. Ce choix est lié au traitement de la condition de non pénétration des corps. Cette condition est assurée si la vitesse normale relative en chaque point de contact ($g = 0$) est de signe positif. Les propriétés de positivité et de linéarité des fonctions de forme des éléments P1 permettent de vérifier simplement ce signe. En effet, le signe de la vitesse normale en tout point d'un segment de surface du maillage est alors directement lié aux signes des vitesses normales aux noeuds du segment.

En fin de chapitre, quelques résultats de simulations numériques sont présentés. La première simulation concerne le traitement d'un contact unilatéral, sans adhésion, avec frottement entre deux corps élastiques. Cet exemple est issu d'un Benchmark numérique proposé par le groupe de travail CSMA sur les méthodes numériques de résolution des problèmes de contact unilatéral et de frottement. Nos résultats sont comparés aux résultats analytiques de F. Kosior et al. [66] et de A. Spence [109] et aux résultats numériques de L. Champaney. La seconde simulation concerne l'étude du délaminage d'une fine couche d'aluminium initialement collée sur un support rigide. Dans ce cas le comportement de l'interface est modélisé par le modèle RCCM. Cette étude précise l'influence du paramètre b du modèle d'interface sur le comportement global du délaminage. Les résultats obtenus permettent de valider la résolution numérique proposée.

Pour la suite, nous notons par α , $\alpha = 1, \dots, N_c$, le numéro du point \mathbf{x}^α de $\Gamma_{t,C}^1$ candidat à l'interaction. N_c est le nombre total de points de $\Gamma_{t,C}^1$ candidats à l'interaction se projetant sur $\Gamma_{t,C}^2$, la surface antagoniste (voir figure V.2). En ces points α , la réaction d'interaction est notée \mathbf{r}^α . Elle représente l'action du *corps antagoniste* Ω_t^2 sur le *corps candidat* Ω_t^1 , donc l'opposé de l'interaction $\int_{\Gamma_{t,C}^1} \mathbf{t} ds^1$, introduite dans le chapitre précédent. Ainsi, dans les graphes de contact qui suivent, la considération de la quantité $-\mathbf{r}^\alpha$ en ordonnées permet de représenter une interaction de signe positif lorsqu'elle est attractive et de signe négatif lors de compression.

Hypothèse d'étude

Les applications envisagées dans le cadre de ce mémoire concernent l'interaction de corps dont les dimensions caractéristiques sont grandes par rapport à la taille de la zone de contact et à la distance d'interaction. Nous considérons alors que les surfaces en vis-à-vis $\Gamma_{t,C}^1$ et $\gamma_p(\Gamma_{t,C}^1)$ sont de faibles rayons de courbure et de normale unitaire quasi-colinéaire, il est donc possible en première approximation de retenir $J_p \approx j_p \approx 1$.

V.1 Généralités et présentation du code LMGC90

Comme nous l'avons déjà discuté, le champ de vitesse est discontinu. L'accélération ne peut donc plus être considérée comme la dérivée temporelle de la vitesse. Les équations de la dynamique des deux corps sont considérées au sens des distributions et, de manière plus appropriée, selon les travaux de J.-J. Moreau [80] et M. Jean [20], écrites en termes de mesures différentielles pour l'accélération et les réactions d'interaction¹.

¹Une mesure différentielle est une distribution de signe positif. Nous verrons par la suite que toute loi de contact ou d'interaction compressive et/ou attractive, peut se ramener par changement de variable à l'écriture d'une loi de « contact » de type Signorini avec une réaction \mathbf{r}^α de signe positif.

La discrétisation spatiale des formes variationnelles des équations de la dynamique conduit après assemblage à un système de $2N$ équations (N est le nombre global de noeuds du maillage) et d'inconnues $d\dot{\mathbf{X}}$ et $d\mathbf{R}$. La mesure différentielle $d\dot{\mathbf{X}}$ représente l'accélération du noeud de position \mathbf{X} dans le repère global $(O, \mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y)$. La réaction du noeud de position \mathbf{X} , une mesure dans ce cas, est notée $d\mathbf{R}$. Le système s'écrit

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\mathbf{X}, t) d\dot{\mathbf{X}} = -\mathbf{F}_{int}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) dt + \mathbf{F}_{ext}(t) dt + d\mathbf{R}, \quad \forall t \in]0, T], \\ + \text{conditions aux limites et conditions initiales en } t = 0, \end{cases} \quad (\text{V.1})$$

où $\mathbf{M}(\mathbf{X}, t)$ est la matrice globale de masse, $\mathbf{F}_{int}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t)$ le vecteur associé aux forces intérieures non linéaires et $\mathbf{F}_{ext}(t)$ le vecteur associé aux forces extérieures. dt est la mesure de Lebesgue et la mesure différentielle $d\dot{\mathbf{X}}$ est associée à $\dot{\mathbf{X}}$ par l'intégration sur tout intervalle de temps ouvert à gauche $]t_1, t_2]$ selon

$$\int_{t_1}^{t_2} d\dot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{X}}(t_1^+) - \dot{\mathbf{X}}(t_2^+).$$

Le système (V.1) est intégré sur un intervalle de temps $\Delta T =]t_i, t_{i+1}]$ de $]0, T]$. Pour la suite, l'indice $i + 1$, respectivement i , se rapporte à des grandeurs considérées à l'instant t_{i+1} , et respectivement t_i . En considérant \mathbf{M} indépendante du temps, il vient, d'après le théorème d'intégration implicite d'une fonction à variation bornée [79],

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{M}(\mathbf{X}, t) d\dot{\mathbf{X}} \approx \mathbf{M}(\mathbf{X}^{i+1}) (\dot{\mathbf{X}}^{i+1} - \dot{\mathbf{X}}^i) \text{ et on pose } \int_{t_i}^{t_{i+1}} d\mathbf{R} := \Delta T \mathbf{R}^{i+1},$$

où « l'impulsion moyenne » \mathbf{R}^{i+1} sera par la suite l'inconnue représentant « la quantité de réaction » dans le repère global. Lors de l'intégration numérique de $d\dot{\mathbf{X}}$, les temps t_{i+1}^+ et t_i^+ ont été naturellement associés à t_{i+1} et respectivement t_i .

Un schéma du 1^{er} ordre de type θ -méthode est utilisé pour l'estimation des positions \mathbf{X} et pour l'intégration des forces intérieures \mathbf{F}_{int} et des forces extérieures \mathbf{F}_{ext} . Selon M. Jean [56], étant donné que les vitesses peuvent être discontinues, l'utilisation de schéma d'intégration d'ordre supérieur est inappropriée. Les fonctions considérées ne sont pas suffisamment régulières pour profiter de l'intérêt des schémas plus coûteux. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{F}_{int}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) dt &\approx \Delta T \theta \mathbf{F}_{int}^{i+1} + \Delta T (1 - \theta) \mathbf{F}_{int}^i, \\ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{F}_{ext}(t) dt &\approx \Delta T \theta \mathbf{F}_{ext}^{i+1} + \Delta T (1 - \theta) \mathbf{F}_{ext}^i, \\ \mathbf{X}^{i+1} = \mathbf{X}^i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\mathbf{X}} dt &\approx \mathbf{X}^i + \Delta T \theta \dot{\mathbf{X}}^{i+1} + \Delta T (1 - \theta) \dot{\mathbf{X}}^i. \end{aligned}$$

Les inconnues principales émergentes du fait des choix précédents sont la vitesse $\dot{\mathbf{X}}^{i+1}$ et l'impulsion de la réaction $\Delta T \mathbf{R}^{i+1}$ aux noeuds du maillage. Elles vérifient le système discrétisé en temps et en espace suivant dans le cas de contact avec adhésion :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}(\mathbf{X}^{i+1}, \dot{\mathbf{X}}^{i+1}) := M(\mathbf{X}^{i+1}) (\dot{\mathbf{X}}^{i+1} - \dot{\mathbf{X}}^i) \\ \quad + \Delta T \theta \mathbf{F}_{int}^{i+1}(\mathbf{X}^{i+1}, \dot{\mathbf{X}}^{i+1}) + \Delta T (1 - \theta) \mathbf{F}_{int}^i \\ \quad - \Delta T \theta \mathbf{F}_{ext}^{i+1} - \Delta T (1 - \theta) \mathbf{F}_{ext}^i \\ \quad - \Delta T \mathbf{R}^{i+1} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{X}^{i+1} = \mathbf{X}^i + \Delta T \theta \dot{\mathbf{X}}^{i+1} + \Delta T (1 - \theta) \dot{\mathbf{X}}^i, \\ + \text{conditions aux limites et initiales,} \\ + \text{équations (IV.2) ou (IV.7) ou (IV.12) dans } (\boldsymbol{\tau}^\alpha, \mathbf{n}^\alpha), \forall \text{ point de contact } \alpha = 1, \dots, N. \end{array} \right.$$

L'équation $\mathcal{R}(\mathbf{X}^{i+1}, \dot{\mathbf{X}}^{i+1}) = \mathbf{0}$ est non linéaire à cause du terme relatif aux forces intérieures. Elle est résolue par une méthode de Newton-Raphson d'indice k . En introduisant les notations

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_k &= M(\mathbf{X}_k^{i+1}), \\ \mathbf{C}_k &= \frac{\partial \mathbf{F}_{int}^{i+1}}{\partial \dot{\mathbf{X}}}(\mathbf{X}_k^{i+1}, \dot{\mathbf{X}}_k^{i+1}), \text{ la matrice d'amortissement tangente,} \\ \mathbf{K}_k &= \frac{\partial \mathbf{F}_{int}^{i+1}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}_k^{i+1}, \dot{\mathbf{X}}_k^{i+1}), \text{ la matrice de raideur tangente,} \\ \mathbf{W}_k &= (\mathbf{M}_k + \Delta T \theta \mathbf{C}_k + \Delta T^2 \theta^2 \mathbf{K}_k)^{-1}, \end{aligned}$$

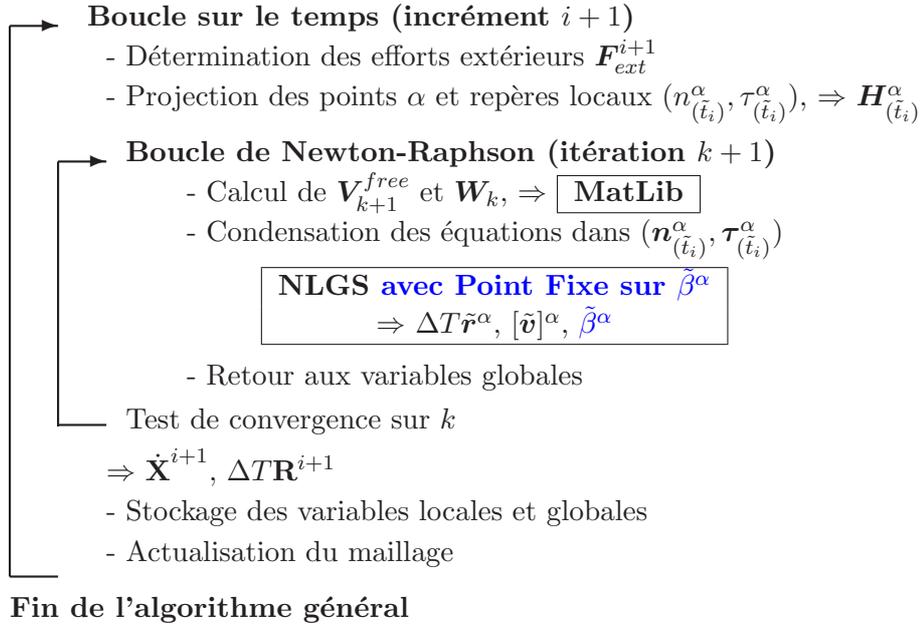
au sein d'une itération de Newton-Raphson, le système peut se mettre sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{X}}_{k+1}^{i+1} = \mathbf{V}_{k+1}^{free} + \mathbf{W}_k \Delta T \mathbf{R}_{k+1}^{i+1}, \\ \mathbf{X}_{k+1}^{i+1} = \mathbf{X}^i + \Delta T \theta \dot{\mathbf{X}}_{k+1}^{i+1} + \Delta T (1 - \theta) \dot{\mathbf{X}}^i, \\ + \text{équations (IV.2) ou (IV.7) ou (IV.12) dans } (\boldsymbol{\tau}^\alpha, \mathbf{n}^\alpha), \forall \text{ point de contact } \alpha = 1, \dots, N, \end{array} \right. \quad (\text{V.2})$$

à laquelle s'ajoutent les conditions aux limites et initiales et où \mathbf{V}_{k+1}^{free} est la vitesse des corps sans considération de l'action des réactions d'interaction. Cette vitesse est appelée vitesse libre globale, elle est calculée à l'instant t_{i+1} et pour l'itération $k + 1$. H. Baudriller [16] décrit plus en détail ce calcul.

L'algorithme général de résolution du système (V.2) est présenté dans le tableau V.1. Son intérêt est de découpler le traitement des non linéarités volumiques de celui des non régularités des lois d'interaction. Le traitement des non linéarités volumiques est réalisé par une méthode de Newton-Raphson d'indice k , dont les termes associés \mathbf{C}_k et \mathbf{K}_k sont calculés par appel de la MatLib [111, 113]. Ce calcul est réalisé dans la configuration de référence des maillages. D'une manière générale, le traitement des non régularités des lois d'interaction est effectué par la méthode Non Linear Gauss-Seidel (NLGS) et l'appel du solveur Non-Smooth Contact Dynamics (NSCD).

Dans le cadre de ce mémoire, nous ne développerons pas le traitement des non linéarités volumiques. Le lecteur trouvera plus de détails dans les travaux de L. Stainier [112, 111]. Nous nous intéressons plus particulièrement au traitement des équations des lois d'interaction et à l'adaptation de ce traitement à la résolution des équations du modèle d'adhésion cicatrisante. Cette adaptation est illustrée par les termes en bleu dans les tableaux V.1 et V.2 et sera précisée au paragraphe V.2.



TAB. V.1 – Algorithme général de résolution.

Dans la suite nous présentons l'étape de condensation des équations dans les repères de contact $(\mathbf{n}^\alpha, \boldsymbol{\tau}^\alpha)$. Cette étape précède l'appel de la méthode NLGS. Pour simplifier l'écriture, les indices $k + 1$ des boucles de Newton-Raphson sont omis.

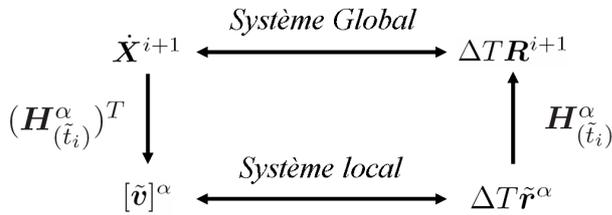


FIG. V.1 – Définitions des variables globales et locales et des relations de passage.

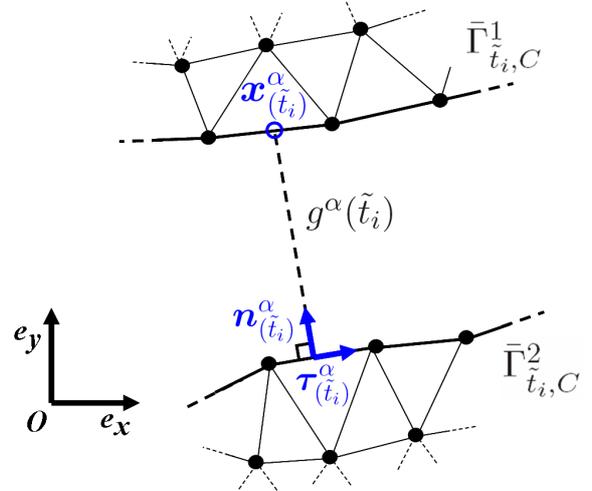


FIG. V.2 – Projection au temps intermédiaire $\tilde{t}_i = t_i + \Delta T(1 - \theta)$, $\bar{\Gamma}_{\tilde{t}_i, C}^1$ est la discrétisation de $\Gamma_{\tilde{t}_i, C}^1$ et $\bar{\Gamma}_{\tilde{t}_i, C}^2$ celle de $\Gamma_{\tilde{t}_i, C}^2$.

Les équations du système (V.2) sont condensées en chaque point d'interaction α dans le repère local $(\boldsymbol{\tau}^\alpha, \mathbf{n}^\alpha)$. Les relations de passage des variables globales $(\dot{\mathbf{X}}^{i+1}, \Delta T \mathbf{R}^{i+1})$ aux variables locales de contact, vitesse relative et impulsion d'interaction au point α , notées $([\tilde{\mathbf{v}}]^\alpha, \Delta T \tilde{\mathbf{r}}^\alpha)$, sont obtenues lors de la projection orthogonale (figures V.1 et V.2²). Cette projection est réalisée à un

²Remarquons, d'après la figure V.2, que le point candidat à l'interaction \mathbf{x}^α n'est pas nécessairement situé en un noeud du maillage du *corps candidat*. Il est éventuellement possible de considérer n_p points candidats à l'interaction sur un segment de $\bar{\Gamma}_{\tilde{t}_i, C}^1$, avec $n_p \geq 1$.

temps intermédiaire \tilde{t}_i , avec $\tilde{t}_i = t_i + \Delta T(1 - \theta)$. Elle fixe le repère local $(\boldsymbol{\tau}_{(\tilde{t}_i)}^\alpha, \mathbf{n}_{(\tilde{t}_i)}^\alpha)$. C'est dans ce repère que sont définies la vitesse relative $[\tilde{\mathbf{v}}]^\alpha$ entre le point α et son projeté et l'impulsion d'interaction $\Delta T \tilde{\mathbf{r}}^\alpha$. Précédemment et pour la suite, l'indice $\tilde{}$ précise que les grandeurs sont considérées à l'instant intermédiaire \tilde{t}_{i+1} .

Les relations de passage entre les variables globales $(\dot{\mathbf{X}}^{i+1}, \Delta T \mathbf{R}^{i+1})$ et locales $([\tilde{\mathbf{v}}]^\alpha, \Delta T \tilde{\mathbf{r}}^\alpha)$ sont les suivantes (voir figure V.1) :

$$[\tilde{\mathbf{v}}]^\alpha = (\mathbf{H}_{(\tilde{t}_i)}^\alpha)^T \dot{\mathbf{X}}^{i+1} \text{ et } \Delta T \tilde{\mathbf{r}}^\alpha = (\mathbf{H}_{(\tilde{t}_i)}^\alpha)^T \Delta T \mathbf{R}^{i+1}, \quad (\text{V.3})$$

où $\mathbf{H}_{(\tilde{t}_i)}^\alpha$ est la matrice de passage $(2N \times 2)$ du contact α .

Nous notons $(\tilde{g}^\alpha, \tilde{\xi}_T^\alpha)$ les déplacements relatifs normal et tangentiel entre le point candidat α et son point projeté à l'instant \tilde{t}_{i+1} , définis par

$$\tilde{g}^\alpha = g^\alpha(\tilde{t}_i) + \Delta T [\tilde{v}_N]^\alpha \text{ et } \tilde{\xi}_T^\alpha = \Delta T [\tilde{v}_T]^\alpha.$$

Les équations locales sont donc résolues en un temps intermédiaire ($\tilde{t}_i = t_i + \Delta T(1 - \theta)$) différent de celui du calcul des équations globales (t_{i+1}). Cet algorithme temporel est une stratégie de type « leap-frog » ou « saute-mouton ». Nous parlerons d'intégration temporelle numérique selon une θ -méthode « modifiée ». Elle permet, sans problème de restitution d'énergie (cas des schémas de type Newmark) ou sans correction à posteriori, d'obtenir à l'instant t_{i+1} en un point α d'interaction les deux conditions suivantes : $g^\alpha(t_{i+1}) = g_{i+1}^\alpha = 0$ (contact) et $[v_N]^\alpha(t_{i+1}) = [v_N]_{i+1}^\alpha = 0$ (vitesse relative normale nulle). Le lecteur pourra se reporter à l'article de D. Vola et al. [119] pour plus de détails. Dans cet article une comparaison de ce schéma sur le traitement de l'impact entre deux barres élastiques par rapport aux schémas classiques de type Newmark ou θ -méthode est proposée.

La θ -méthode « modifiée » donne, aux différents instants, les relations suivantes entre vitesse normale locale et déplacement normal local :

$$\tilde{g}^\alpha = g^\alpha(\tilde{t}_{i+1}) = g^\alpha(\tilde{t}_i) + \Delta T [\tilde{v}_N]^\alpha = g_{i+1}^\alpha + \Delta T (1 - \theta) [\tilde{v}_N]^\alpha,$$

Dans les cas de problème de contact avec le modèle RCCM ou celui d'adhésion cicatrisante, les relations (V.3) appliquées au système (V.2) conduisent aux N_c systèmes d'équations non linéaires d'inconnues principales $([\tilde{\mathbf{v}}]^\alpha, \Delta T \tilde{\mathbf{r}}^\alpha)$ à résoudre pour chaque point d'interaction α , $\alpha = 1, \dots, N_c$,

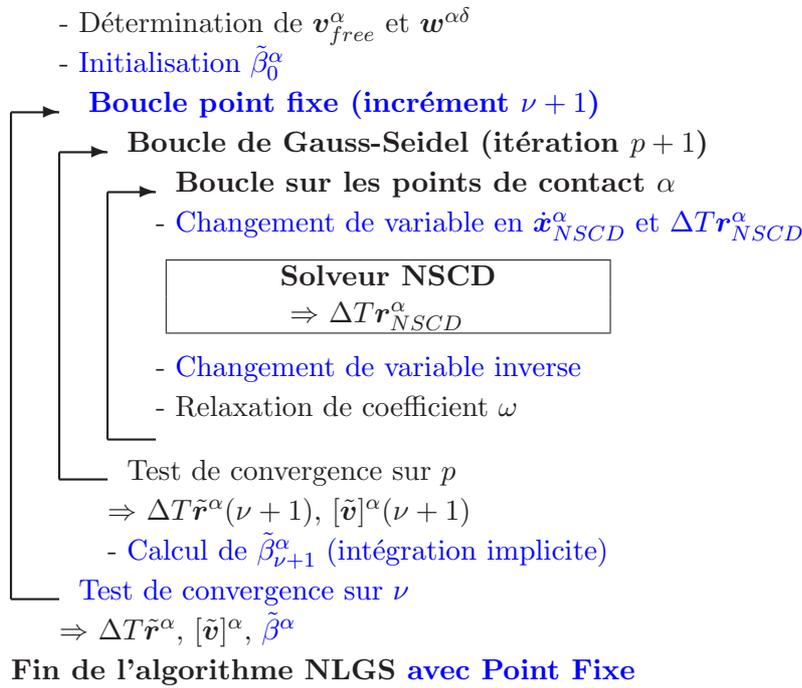
$$\left\{ \begin{array}{l} [\tilde{\mathbf{v}}]^\alpha = \mathbf{v}_{free}^\alpha + \sum_{\delta \neq \alpha}^{N_c} \mathbf{w}^{\alpha\delta} \Delta T \tilde{\mathbf{r}}^\delta + \mathbf{w}^{\alpha\alpha} \Delta T \tilde{\mathbf{r}}^\alpha, \\ \text{équations (IV.7) ou (IV.12) en } \tilde{g}^\alpha, \tilde{\xi}_T^\alpha \text{ et } \tilde{\xi}_T^\alpha / \Delta T \text{ dans le repère local } (\boldsymbol{\tau}_{(\tilde{t}_i)}^\alpha, \mathbf{n}_{(\tilde{t}_i)}^\alpha), \\ \tilde{\beta}^\alpha = f(\beta_{(\tilde{t}_i)}^\alpha, \tilde{g}^\alpha, \tilde{\xi}_T^\alpha) \text{ intégration implicite de l'équation d'évolution de } \beta^\alpha. \end{array} \right. \quad (\text{V.4})$$

Dans cette écriture condensée, $\mathbf{v}_{free}^\alpha = (\mathbf{H}_{(\tilde{t}_i)}^\alpha)^T \mathbf{V}^{free}$ et $\mathbf{w}^{\alpha\delta} = (\mathbf{H}_{(\tilde{t}_i)}^\alpha)^T \mathbf{W} \mathbf{H}_{(\tilde{t}_i)}^\delta$. En chaque point α , la vitesse relative $[\tilde{\mathbf{v}}]^\alpha$ peut être vue comme une vitesse relative libre \mathbf{v}_{free}^α , sans considération des interactions, corrigée par la contribution de l'interaction $\Delta T \tilde{\mathbf{r}}^\alpha$ en ce point et par le terme dû à la contribution des interactions $\Delta T \tilde{\mathbf{r}}^\delta$ des autres points d'interaction. La seconde ligne de ces systèmes regroupe les conditions d'interaction. Elle est la source de non linéarité. Le traitement de ces N_c systèmes non linéaires fait l'objet du paragraphe suivant.

V.2 Extensions du traitement des lois d'interaction au traitement des lois du contact avec adhésion cicatrisante

En vue du traitement des lois d'interaction du modèle RCCM ou du modèle d'adhésion cicatrisante, une boucle de type point fixe d'indice ν est réalisée sur la valeur de la variable $\tilde{\beta}^\alpha$ de chaque point d'interaction α . L'intégration de la méthode NLGS au sein de cette boucle ne pose aucune difficulté. L'algorithme de la méthode NLGS avec point fixe est présenté en tableau V.2.

Lors de la première itération $\nu = 0$, $\tilde{\beta}_0^\alpha = \beta_{(\tilde{t}_i)}^\alpha$. A la fin de chaque résolution NLGS, les valeurs convergées de $\tilde{g}^\alpha(\nu + 1)$ et de $\tilde{\xi}_T^\alpha(\nu + 1)$ permettent de calculer $\tilde{\beta}_{\nu+1}^\alpha$ par intégration implicite de l'équation d'évolution. La convergence est obtenue dès que la variation $\Delta\tilde{\beta}^\alpha = \tilde{\beta}_{\nu+1}^\alpha - \tilde{\beta}_\nu^\alpha$ est inférieure à la tolérance fixée et alors $\tilde{\beta}^\alpha = \tilde{\beta}_{\nu+1}^\alpha$.



TAB. V.2 – Méthode NLGS adaptée (termes en bleu).

Pour la suite on se place au sein de l'itération $\nu + 1$, les indices $\nu + 1$ sont omis, sauf si nécessaires.

La méthode NLGS résout les systèmes de type (V.4) par une méthode itérative de Gauss-Seidel d'indice p sur les points de contact α . Les interactions au point δ ($\delta \neq \alpha$) sont alors figées, de valeurs $\Delta T \tilde{r}^\delta(p + 1)$ si $\alpha < \delta$ et $\Delta T \tilde{r}^\delta(p)$ si $\alpha > \delta$, ce qui permet de réaliser la correction sur la vitesse relative au point α avec les dernières valeurs actualisées des réactions d'interaction des autres points δ ($\delta \neq \alpha$). Les itérations de Gauss-Seidel sur chacun des points d'interaction α sont répétées jusqu'à convergence sur la valeur de $\Delta T \tilde{r}^\alpha$. La convergence est accélérée par une méthode de relaxation de coefficient ω , $\omega \in]0, 1]$. La valeur de $\Delta T \tilde{r}^\alpha(p + 1)$ est alors prise égale à $\omega \Delta T \tilde{r}^\alpha(p + 1) + (1 - \omega) \Delta T \tilde{r}^\alpha(p)$. Plusieurs critères de convergence sont disponibles dans la plateforme LMGC90. Ils sont plus ou moins appropriés selon les applications envisagées. Dans le cadre de ce mémoire, nous avons considéré le critère le plus rude, nommé *Maxm*, qui impose entre autre que la variation maximale d'énergie quadratique relative entre deux itérations parmi tous les points d'interaction soit inférieure à la tolérance fixée.

D'une manière générale, dans la plateforme LMGC90, à chaque itération de type Gauss-Seidel, le solveur NSCD est appelé pour déterminer $\Delta T \tilde{\mathbf{r}}^\alpha$ avec $\Delta T \tilde{\mathbf{r}}^\delta$ fixées. Cependant pour que cette résolution soit possible, il est obligatoire que les variables en entrée du solveur ($[\dot{\mathbf{x}}]_{NSCD}^\alpha, \Delta T \mathbf{r}_{NSCD}^\alpha$) respectent le graphe de Signorini formulé en vitesse et le graphe de Coulomb (figures V.3).

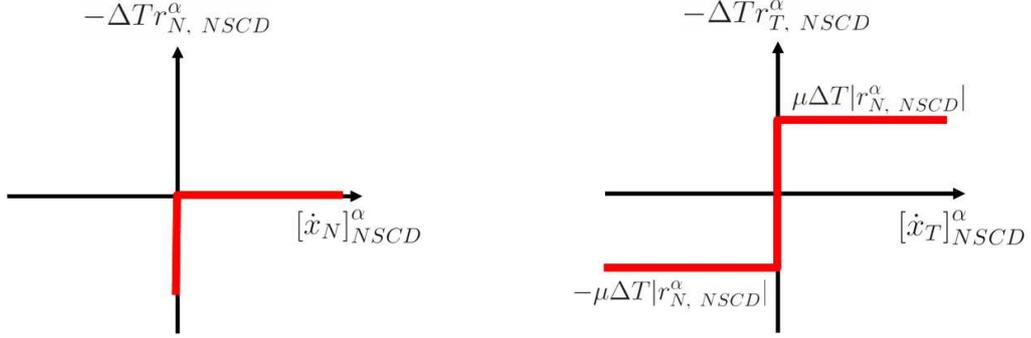


FIG. V.3 – Graphe de Signorini formulé en vitesse et graphe de Coulomb pour les variables du solveur ($[\dot{\mathbf{x}}]_{NSCD}^\alpha, \Delta T \mathbf{r}_{NSCD}^\alpha$).

En vue du traitement des lois d'interaction du modèle RCCM ou du modèle d'adhésion cicatrisante, les changements de variable retenus qui permettent l'utilisation directe du solveur NSCD sont les suivants :

$$\begin{aligned} [\dot{\mathbf{x}}]_{NSCD}^\alpha &= \begin{vmatrix} \tilde{\xi}_T^\alpha / \Delta T \\ \tilde{g}^\alpha / \Delta T \end{vmatrix}, \\ \Delta T \mathbf{r}_{NSCD}^\alpha &= \Delta T \tilde{\mathbf{r}}^\alpha + \begin{pmatrix} k_T & 0 \\ 0 & k_N \end{pmatrix} [\dot{\mathbf{x}}]_{NSCD}^\alpha, \end{aligned} \quad (\text{V.5})$$

où $k_{T/N} = C_{T/N} (\beta_\nu^\alpha)^2 (\Delta T)^2 \times l / n_p$, avec l la taille du segment contenant le point d'interaction $\tilde{\mathbf{x}}^\alpha$ et n_p le nombre de points candidats à l'interaction sur ce segment.

A partir de ces changements de variable, le système se met finalement sous une forme résolue par le solveur NSCD :

$$\begin{cases} [\dot{\mathbf{x}}]_{NSCD}^\alpha = \bar{\mathbf{v}}_{locfree}^\alpha + \bar{\mathbf{w}}^{\alpha\alpha} \Delta T \mathbf{r}_{NSCD}^\alpha, \\ \text{équations du contact (figures V.3) en } ([\dot{\mathbf{x}}]_{NSCD}^\alpha, \Delta T \mathbf{r}_{NSCD}^\alpha) \text{ dans } (\tau_{(\tilde{t}_i)}^\alpha, n_{(\tilde{t}_i)}^\alpha). \end{cases} \quad (\text{V.6})$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_{locfree}^\alpha &= \mathbf{A} \left(\mathbf{v}_{locfree}^\alpha + \begin{vmatrix} 0 \\ g_n^\alpha(\tilde{t}_i) / \Delta T \end{vmatrix} - \mathbf{w}^{\alpha\alpha} \begin{vmatrix} k_T \xi_T^\alpha(\tilde{t}_i) / \Delta T \\ 0 \end{vmatrix} \right), \\ \mathbf{v}_{locfree}^\alpha &= \mathbf{v}_{free}^\alpha + \sum_{\delta \neq \alpha}^{N_c} \mathbf{w}^{\alpha\delta} \Delta T \tilde{\mathbf{r}}^\delta, \quad \bar{\mathbf{w}}^{\alpha\alpha} = \mathbf{A} \mathbf{w}^{\alpha\alpha} \text{ et} \\ \mathbf{A} &= \left(\mathbf{I}_d - \mathbf{w}^{\alpha\alpha} \begin{pmatrix} k_T & 0 \\ 0 & k_N \end{pmatrix} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{V.7})$$

Le solveur NSCD permet d'obtenir la valeur de $\Delta T \mathbf{r}_{NSCD}^\alpha$. Nous ne détaillerons pas plus la méthode NSCD dans le cadre de ce mémoire. Le lecteur pourra se reporter au livre de B. Cambou et M. Jean [20] et à l'article de M. Jean [56] pour plus de détails. La valeur de $\Delta T \tilde{\mathbf{r}}^\alpha(p+1)$ est obtenue par changement de variable inverse en sortie du solveur NSCD. Les valeurs des inconnues locales du problème ($[\tilde{\mathbf{v}}]^\alpha, \Delta T \tilde{\mathbf{r}}^\alpha$) et la valeur de l'état du lien $\tilde{\beta}^\alpha$ sont obtenues après convergence des boucles de Gauss-Seidel puis convergence sur $\tilde{\beta}_{\nu+1}^\alpha$.

Les algorithmes présentés précédemment permettent de traiter les problèmes avec un contact adhésif selon le modèle RCCM ou selon le modèle d'adhésion cicatrisante. Il convient cependant de formuler quelques remarques propres à chacun des modèles.

V.2.1 Cas du modèle RCCM et du modèle d'adhésion cicatrisante

Dans le cas du modèle RCCM (equations (IV.7)), le coefficient de frottement μ est pondéré par la fonction $f(\beta) = 1 - \beta$ dans le solveur NSCD. De plus, l'intégration implicite de l'équation d'évolution de β^α n'est pas immédiate du fait de la présence de la partie négative portant sur le bilan énergétique. La méthode retenue est détaillée dans le tableau V.3 (où les indices ν sont omis). Elle permet de déterminer $\tilde{\beta}^\alpha$ vérifiant $\frac{b}{\Delta T}(\tilde{\beta}^\alpha - \beta^\alpha(\tilde{t}_i)) = - \left[w - C_N \tilde{\beta}^\alpha (\tilde{g}^\alpha)^2 - C_T \tilde{\beta}^\alpha (\tilde{\xi}_T^\alpha)^2 \right]^-$. La difficulté est que la valeur du bilan énergétique (noté \mathcal{A}), correspondant au terme de droite de l'équation précédente, dont on prend la partie négative ($= [\mathcal{A}]^-$) n'est pas connue, car $\tilde{\beta}^\alpha$ est à déterminer. Pour y remédier, nous choisissons de considérer une valeur simulée β_{sim}^α de $\tilde{\beta}^\alpha$, calculée pour un processus d'endommagement (c'est-à-dire pour $\mathcal{A} \leq 0$). Une correction à posteriori est réalisée si la condition ($\mathcal{A} \leq 0$) n'est pas vérifiée avec la valeur simulée.

La méthode proposée dans le tableau V.3 est également utilisée pour les cas où $b = 0$.

$$\beta_{sim}^\alpha = \frac{\Delta T w + b \beta^\alpha(\tilde{t}_i)}{b + \Delta T (C_N (\tilde{g}^\alpha)^2 + C_T (\tilde{\xi}_T^\alpha)^2)},$$

- si $\left(\beta_{sim}^\alpha < \beta^\alpha(\tilde{t}_i) \quad \text{et} \quad w \leq C_N \beta_{sim}^\alpha (\tilde{g}^\alpha)^2 + C_T \beta_{sim}^\alpha (\tilde{\xi}_T^\alpha)^2 \right)$,

endommagement $\Rightarrow \tilde{\beta}^\alpha = \beta_{sim}^\alpha$,

- sinon (correction),

pas d'endommagement $\Rightarrow \tilde{\beta}^\alpha = \beta^\alpha(\tilde{t}_i)$.

TAB. V.3 – Calcul de $\tilde{\beta}^\alpha$ pour le modèle RCCM (indices ν omis).

Dans le cas du modèle d'adhésion cicatrisante (équations (IV.12)), il faut considérer $C_T = 0$ dans les changements de variable précédents (équations (V.5)) et dans les équations (V.7). L'intégration implicite de l'équation d'évolution de β^α ne pose pas de difficultés particulières.

Dans le cas de la loi d'adhésion partiellement cicatrisante (équations (IV.12) et (IV.14) avec (IV.13)), il faut considérer $C_T = 0$ dans les changements de variable précédents (équations (V.5)) et dans les équations (V.7). L'intégration implicite de l'équation d'évolution de β^α est immédiate. Dans ce modèle, la valeur de β^α est contrainte à appartenir à l'intervalle $]0, \beta_s^\alpha(\tilde{t}_i)]$. L'équation d'évolution de β_s^α est intégrée numériquement. La valeur de $\tilde{\beta}_s^\alpha = \beta_s^\alpha(\tilde{t}_{i+1})$ est déterminée à partir des valeurs convergées de $\Delta T \tilde{\mathbf{r}}^\alpha$, $[\tilde{\mathbf{v}}]^\alpha$, $\tilde{\beta}^\alpha$.

V.2.2 Cas du modèle Dugdale généralisé

Le traitement du modèle Dugdale généralisé (équations (IV.2)) nécessite un changement de variable différent de celui proposé par les équations (V.5). La boucle de point fixe sur β est otée. Le système à résoudre pour chaque point d'interaction α , $\alpha = 1, \dots, N_c$, est le suivant :

$$\begin{cases} [\tilde{\mathbf{v}}]^\alpha = \mathbf{v}_{free}^\alpha + \sum_{\delta \neq \alpha}^{N_c} \mathbf{w}^{\alpha\delta} \Delta T \tilde{\mathbf{r}}^\delta + \mathbf{w}^{\alpha\alpha} \Delta T \tilde{\mathbf{r}}^\alpha, \\ \text{équations (IV.2) en } \tilde{g}^\alpha, \tilde{\xi}_T^\alpha / \Delta T \text{ dans le repère local } (\tau_{(\tilde{t}_i)}^\alpha, n_{(\tilde{t}_i)}^\alpha). \end{cases} \quad (\text{V.8})$$

Avant de réaliser les changements de variable, un test sur la valeur de $g^\alpha(\tilde{t}_i)$ par rapport à la valeur de la distance d'interaction δ est réalisé :

- Si $g^\alpha(\tilde{t}_i) > \delta$ alors $\Delta T \tilde{\mathbf{r}}^\alpha = \mathbf{0}$ et la solution est triviale.

- Si $g^\alpha(\tilde{t}_i) \in]0, \delta]$, il y a interaction au point α . Il est nécessaire de réaliser un changement de variable en entrée du solveur NSCD pour ramener le comportement des figures IV.5 et IV.6 aux comportements des graphes de Signorini-Coulomb formulés en vitesse (figures V.3). Nous posons alors

$$\begin{aligned} [\dot{\mathbf{x}}]_{NSCD}^\alpha &= \begin{vmatrix} \tilde{\xi}_T^\alpha / \Delta T \\ \tilde{g}^\alpha / \Delta T \end{vmatrix}, \\ \Delta T \mathbf{r}_{NSCD}^\alpha &= \Delta T \tilde{\mathbf{r}}^\alpha + \begin{vmatrix} 0 \\ \Delta T w / \delta \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Et avec

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_{locfree}^\alpha &= \mathbf{v}_{locfree}^\alpha + \begin{vmatrix} 0 \\ g_n^\alpha(\tilde{t}_i) / \Delta T \end{vmatrix} - \mathbf{w}^{\alpha\alpha} \begin{vmatrix} 0 \\ \Delta T w / \delta \times l / n_p \end{vmatrix}, \\ \mathbf{v}_{locfree}^\alpha &= \mathbf{v}_{free}^\alpha + \sum_{\delta \neq \alpha}^{N_c} \mathbf{w}^{\alpha\delta} \Delta T \tilde{\mathbf{r}}^\delta, \quad \bar{\mathbf{w}}^{\alpha\alpha} = \mathbf{w}^{\alpha\alpha}, \end{aligned}$$

le système (V.8) se met finalement sous une forme similaire à celle du système (V.6). Il peut donc être résolu par le solveur NSCD.

- Enfin, si $g^\alpha(\tilde{t}_i) = 0$, le comportement est de type Signorini - Coulomb, les figures IV.5 et IV.6 sont équivalentes aux figures IV.1 et IV.2. Elles sont ramenées aux graphes de Signorini-Coulomb formulés en vitesse (figures V.3) en considérant les changements de variable suivants :

$$\begin{aligned} [\dot{\mathbf{x}}]_{NSCD}^\alpha &= \begin{vmatrix} \tilde{\xi}_T^\alpha / \Delta T \\ \tilde{g}^\alpha / \Delta T \end{vmatrix}, \\ \Delta T \mathbf{r}_{NSCD}^\alpha &= \Delta T \tilde{\mathbf{r}}^\alpha. \end{aligned}$$

Et avec

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_{locfree}^\alpha &= \mathbf{v}_{locfree}^\alpha + \begin{vmatrix} 0 \\ g_n^\alpha(\tilde{t}_i) / \Delta T \end{vmatrix}, \\ \mathbf{v}_{locfree}^\alpha &= \mathbf{v}_{free}^\alpha + \sum_{\delta \neq \alpha}^{N_c} \mathbf{w}^{\alpha\delta} \Delta T \tilde{\mathbf{r}}^\delta, \quad \bar{\mathbf{w}}^{\alpha\alpha} = \mathbf{w}^{\alpha\alpha}, \end{aligned}$$

le système (V.8) se met finalement sous une forme similaire à celle du système (V.6). Il peut donc être résolu par le solveur NSCD.

Nous précisons que ce dernier changement de variable est celui utilisé pour traiter la résolution du contact avec des conditions de Signorini (figure IV.1) et de frottement de Coulomb (figure IV.2). Dans ce cas, les équations du comportement de l'interface sont celles écrites en (IV.1).

V.3 Benchmark CSMA

Ce premier exemple propose la résolution d'un Benchmark de contact du groupe CSMA (Association de Calcul des Structures en Mécanique) avec le code LMGC90. Il s'agit d'un contact sans adhésion entre une sphère et un plan dont les comportements sont considérés élastiques. Les résultats seront comparés d'une part aux résultats analytiques de la théorie de Hertz (paragraphe II.1) ou des théories semi-analytiques de F. Kosior et al. [66] et de A. Spence [109] et d'autre part aux résultats numériques obtenus par L. Champaney sous Castem2000. Cet exemple a été retenu car sa résolution par la méthode des éléments finis pose des difficultés même pour les codes de calcul confirmés comme Abaqus ou Castem2000. Sa résolution avec le code LMGC90 permet de souligner la robustesse de ses algorithmes.

V.3.1 Présentation du problème

La figure V.4 présente la géométrie du problème, ainsi que les caractéristiques de l'étude et les résultats recherchés.

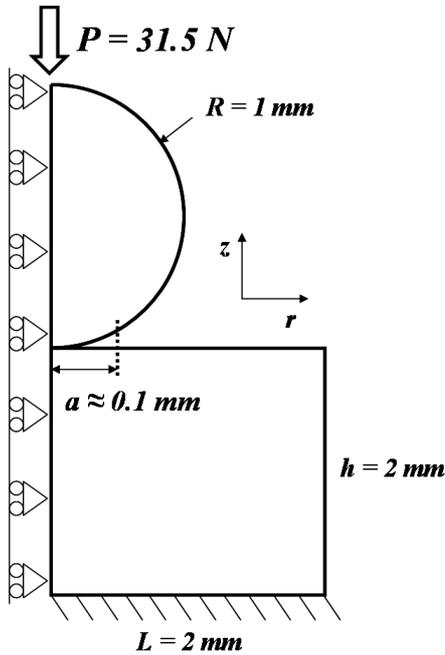


FIG. V.4 – Géométrie de l'exemple considéré, la zone potentielle de contact est de l'ordre de $100 \mu m$.

Caractéristiques de l'étude :

Plan : matériau élastique,
 $E^1 = 72 \text{ GPa}$, $\nu^1 = 0.32$.

Sphère : matériau élastique,
 $E^2 = 432 \text{ GPa}$,
 $\nu^2 = 0.32$.

Modélisation 2D Axisymétrique.

Effort appliqué : $P = 31.5 \text{ N}$.

Etude pour différentes valeurs de coefficient de frottement,

$$\mu = 0; \mu = 0.1 \text{ ou } \mu = 0.6.$$

Résultats recherchés :

- rayon de la zone de contact a ,
- rayon de la zone de non glissement c ,
- distribution de pression $p(r)$ et de contrainte tangentielle $\tau(r)$ le long de la zone de contact.
- pression maximale $p^0 = p(r = 0)$,

L. Champaney compare ses résultats avec les travaux numériques de F. Kosior et al. [66] et la théorie semi-analytique de A. Spence [109] permettant de résoudre des problèmes à symétrie de révolution de type contact de Hertz avec frottement. Dans le cas de contact sans considération du frottement ($\mu = 0$), le problème peut être résolu analytiquement par la théorie de Hertz. La valeur du rayon de contact est obtenue par l'équation (II.1), en considérant $\frac{1}{K} = \frac{3}{4} \left(\frac{1 - (\nu^1)^2}{E^1} + \frac{1 - (\nu^2)^2}{E^2} \right)$. La répartition de pression $p(r)$ est obtenue par l'équation (II.3). Les résultats « de référence » sont reportés dans le tableau V.4.

μ	a (μm)	c (μm)	c/a		p^0 (MPa)
			Kosior	Spence	
0.0	70.04	0.00	0.000	0.000	3065.8
0.1	68.8	37.5	0.545	0.535	3147
0.6	67.6	65.0	0.961	0.999	3167

TAB. V.4 – Résultats « de référence », issus de [66, 109] pour $\mu \neq 0$.

V.3.2 Etude de L. Champaney et étude Abaqus

Compte tenu des rapports c/a et des valeurs des rayons de contact, L. Champaney choisit de considérer 200 noeuds sur la zone de contact, donc une précision de $0.5 \mu m$. Le maillage retenu, composé d'éléments triangulaires P1 avec 16694 noeuds, est présenté en figures V.5 et V.6.

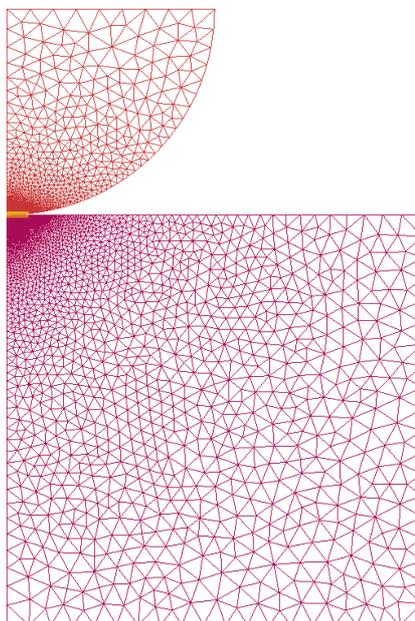


FIG. V.5 – Maillage selon L. Champaney.

Bien que les conditions aux limites du problème ne permettent pas de bloquer le mouvement de corps rigide de la sphère selon l'axe z , le traitement quasi-statique du problème sous Castem2000 est possible. L. Champaney obtient en 10 itérations les résultats reportés dans le tableau V.5. Dans le cas sans frottement, ils sont en accord avec ceux du tableau V.4. La répartition de pression obtenue (figure V.7) est très proche de celle de la théorie de Hertz. Les résultats sont plus complexes à interpréter pour $\mu \neq 0$.

Pour $\mu = 0.1$, les valeurs du rayon de contact a et de la pression maximale p^0 sont corrects (différence de l'ordre de 3%). Par contre, en certains points des figures V.7, la courbe $\tau(r)/\mu$ est supérieure à la courbe $p(r)$. Il est alors, à notre sens, délicat d'identifier le rayon de non glissement dans ce cas ...

Pour $\mu = 0.6$, les résultats sont différents de 3% avec les résultats analytiques. Cependant, des variations légères sont observées dans la répartition de pression et de manière plus visibles dans la répartition de contrainte tangentielle $\tau(r)$ en figure V.7.

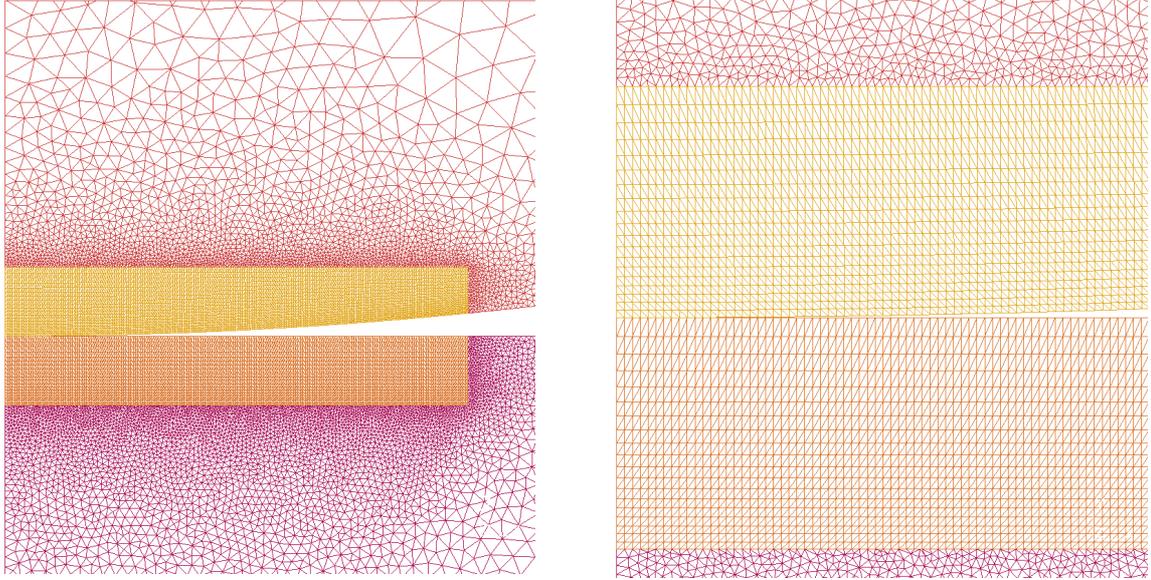


FIG. V.6 – Maillage selon L. Champany. Zooms au niveau de la zone de contact.

μ	a (μm)	c (μm)	c/a	p^0 (MPa)
0.0	70.35	0.00	0.000	3066
0.1	70.35	39	0.55	3141
0.6	69.8	68.8	0.985	3142

TAB. V.5 – Résultats de L. Champany sous Castem2000.

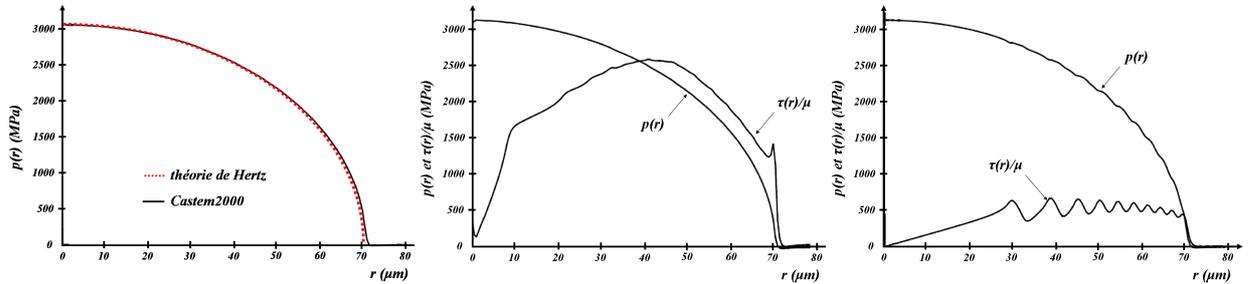


FIG. V.7 – Résultats de L. Champany, répartitions de pression $p(r)$ et de contrainte tangentielle $\tau(r)/\mu$ respectivement pour les cas $\mu = 0$, $\mu = 0.1$ et $\mu = 0.6$. Pour $\mu = 0.1$, en certains points $\tau(r)/\mu > p$! Pour $\mu = 0.6$, des perturbations sont observées.

Nous avons complété ces résultats par une résolution du Benchmark sur le code de calcul Abaqus. Cette étude nous a permis d'une part de réduire la taille du problème sans perte de précision sur les résultats et d'autre part d'obtenir une solution numérique qui semble plus correcte que la précédente, notamment pour les cas où $\mu \neq 0$.

La discrétisation retenue est présentée en figure V.8. La taille des segments de contact est de $1 \mu m$. La section angulaire du plan est maillée d'éléments triangulaires P1 avec 1885 noeuds et 120 segments de contact sur $\bar{\Gamma}_{0,C}^1$, la zone potentielle de contact de taille $0.12 mm$. La section angulaire de la sphère est maillée d'éléments triangulaires P1 avec 2220 noeuds et 100 segments de contact sur $\bar{\Gamma}_{0,C}^2$, la zone potentielle de contact de taille $0.1 mm$.

Finalement, la taille du problème est de 8210 degrés de liberté plus les 120 points de contact car chaque segment de $\bar{\Gamma}_{0,C}^1$ porte un point de contact potentiel ($n_p = 1$). A chaque itération, les points de contact de $\bar{\Gamma}_{i,C}^1$ se projettent sur $\bar{\Gamma}_{i,C}^2$. Les repères de contact sont définis sur $\bar{\Gamma}_{i,C}^2$. Cette discrétisation du problème sera également utilisée lors de l'étude LMG90.

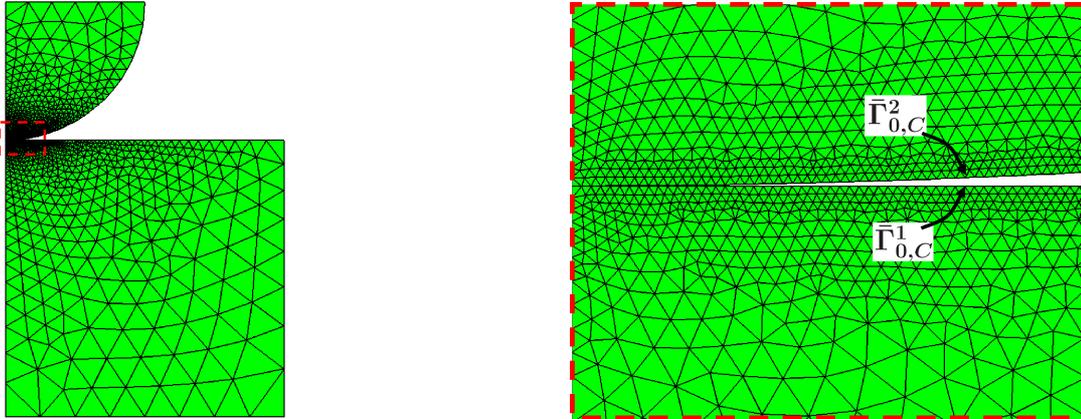


FIG. V.8 – Maillage des études Abaqus et LMG90. Figure de droite : zoom au niveau de la zone de contact, chaque segment des éléments de contact mesure $1 \mu m$.

Le traitement retenu est quasi-statique et malgré la présence d'un mouvement de corps rigide, les algorithmes restent stables. La condition de contact selon la normale est traitée par pénalisation avec l'option LOI EXP, dans laquelle deux paramètres sont à préciser : clearance et pression. Les paramètres retenus sont $clearance = 10^{-2} \mu m$ et $pression = 3000 MPa$, ce qui donne des résultats corrects sauf au voisinage de $r = 0$. Le traitement du comportement tangentiel est également réalisé par une méthode de pénalisation : l'option PENALTY avec les paramètres par défaut. Pour cette étude, le traitement des lois de contact par pénalisation ou par multiplicateur de Lagrange donne des résultats identiques, les calculs étant deux fois plus rapides lors du traitement pénalisé.

Les résultats pour les différentes valeurs de μ sont reportés dans le tableau V.6 et en figure V.9. Ils sont globalement proches des résultats de « référence » et de ceux obtenus par L. Champaney. Les différences sont de l'ordre de 3% en erreur relative.

μ	a (μm)	c (μm)	c/a	$p_{r=0}$ (MPa)
0.0	70.5 $\begin{smallmatrix} +1 \\ -1 \end{smallmatrix}$	0.00	0.000	3075 $\begin{smallmatrix} +5 \\ -5 \end{smallmatrix}$
0.1	70.6 $\begin{smallmatrix} +1 \\ -1 \end{smallmatrix}$	45.7 $\begin{smallmatrix} +1 \\ -1 \end{smallmatrix}$	0.65	3141 $\begin{smallmatrix} +5 \\ -5 \end{smallmatrix}$
0.6	69.6 $\begin{smallmatrix} +1 \\ -1 \end{smallmatrix}$	69.6 $\begin{smallmatrix} +1 \\ -1 \end{smallmatrix}$	1	3142 $\begin{smallmatrix} +5 \\ -5 \end{smallmatrix}$

TAB. V.6 – Résultats Abaqus.

Pour $\mu = 0.1$, la contrainte tangentielle $\tau(r)$ ne présente pas de dépassement de la valeur seuil $\mu p(r)$. Ce résultat semble donc plus acceptable, cependant par rapport aux résultats de « référence », la valeur de c est 30% plus élevée (ce même résultat est retrouvé avec un traitement en dynamique implicite).

Pour $\mu = 0.6$, une perturbation par pas d'itération apparaît dans la répartition de la contrainte tangentielle, ce que L. Champaney avait remarqué sous Castem2000. En augmentant le nombre d'itérations de résolution, c'est-à-dire en considérant 1000 itérations plutôt que les 10 itérations par défaut (le temps de calcul est alors de l'ordre de $20 mn^3$), la solution obtenue est bien meilleure (figure V.10) : les perturbations sont atténuées et les valeurs de a , c et p^0 restent inchangées.

³sur un Pentium 2.8 GHz avec 1Go de Ram et 500 Mo de cache.

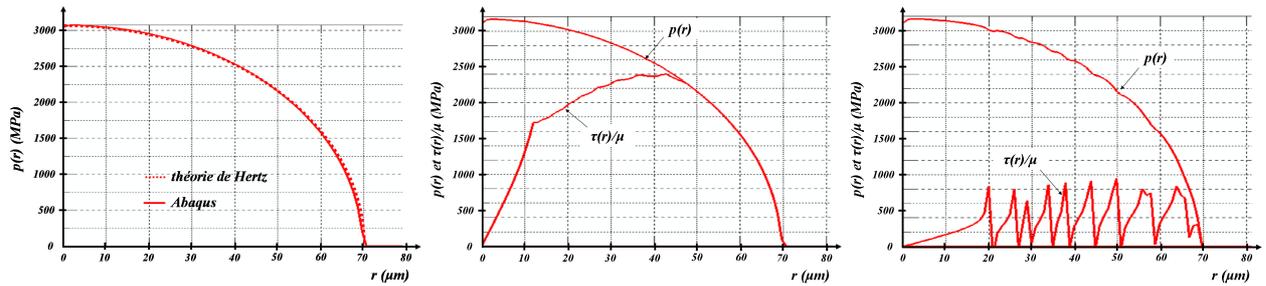


FIG. V.9 – Résultats Abaqus, répartitions de pression $p(r)$ et de contrainte tangentielle $\tau(r)/\mu$ respectivement pour les cas $\mu = 0$, $\mu = 0.1$ et $\mu = 0.6$. Pour $\mu = 0.6$, des perturbations sur $\tau(r)$ sont observées.

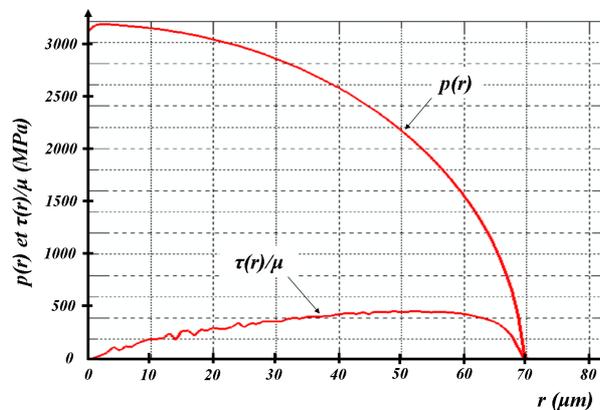


FIG. V.10 – Résultats Abaqus, résolution avec 1000 itérations, répartitions de pression $p(r)$ et de contrainte tangentielle $\tau(r)/\mu$ pour $\mu = 0.6$.

Les résultats des logiciels de calcul Castem2000 ou Abaqus confirment les difficultés liées à la résolution du Benchmark. En effet, la valeur du rayon de non glissement pose des difficultés. Pour les autres résultats, les valeurs obtenues sur Abaqus sont correctes et proches des résultats de « référence ».

V.3.3 Etude avec la plateforme LMGC90

Pour cet exemple, le traitement quasi-statique sous LMGC90, en considérant la masse volumique des corps égale à zéro, n'est pas envisageable. Le possible mouvement de corps rigide de la sphère entraîne un mauvais conditionnement de la matrice de raideur tangente K_k . Or, la matrice W_k dépend uniquement de K_k , car si la masse volumique des corps égale à zéro alors $M_k = 0$. Il en résulte que le calcul de W_k et de la vitesse libre globale de chacun des corps (définie en (V.2) et liée à W_k) est critique. Nous traitons donc le problème en dynamique, en considérant les masses volumiques des corps égales ($\rho^1 = \rho^2 = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$). Le problème est alors bien posé. Nous retenons un schéma d'intégration implicite avec $\theta = 1$. Pour le problème considéré, les comportements volumiques et le comportement de l'interface ne dépendent pas de la vitesse de sollicitation, les résultats de résolution dynamique ou quasi-statique sont donc équivalents.

Dans cet exemple, le contact est modélisé par les lois présentées au paragraphe IV.1 et illustrées en figures IV.1 et IV.2. Le traitement numérique de ce modèle d'interface a été présenté au paragraphe V.2.2 en tant que cas particulier du traitement du modèle Dugdale généralisé (cas si $g^\alpha(\tilde{t}_i) = 0$).

Afin d'obtenir la répartition de pression $p(r)$ et la répartition de la contrainte tangentielle $\tau(r)$, les composantes normale et tangentielle de la réaction de contact obtenue en chaque point de contact sont divisées par la valeur de la surface de contact « attachée » à ce point.

Lors du traitement dynamique d'un problème de contact, le choix de la valeur du pas de temps ΔT est primordial. Ici, si l'effort est imposé en 1 s, une valeur de ΔT de l'ordre de 10^{-3} implique une solution de type choc, c'est-à-dire que la sphère rebondit. Il est nécessaire de considérer un pas de temps inférieur à 10^{-4} pour obtenir une solution convenable. Le nombre d'itérations dans ce cas est de l'ordre de 10 000, le temps de calcul en est fortement augmenté (environ 7 heures⁴).

Les résultats pour les différentes valeurs de μ sont reportés dans le tableau V.7 et en figure V.11. Excepté pour le cas $\mu = 0.1$, les valeurs sur p^0 , a et c sont très proches de celles obtenues par les résultats de « référence », de L. Champaney ou de l'étude Abaqus. En erreur relative, p^0 diffère de 2%, a et c de 6 %. Pour $\mu = 0.1$, la valeur du rayon de non glissement est trop élevée.

μ	a (μm)	c (μm)	c/a	$p_{r=0}$ (MPa)
0.0	70.5 $\begin{smallmatrix} +1 \\ -1 \end{smallmatrix}$	0,00	0,000	3121 $\begin{smallmatrix} +5 \\ -5 \end{smallmatrix}$
0.1	69.6 $\begin{smallmatrix} +1 \\ -1 \end{smallmatrix}$	56.7 $\begin{smallmatrix} +1 \\ -1 \end{smallmatrix}$	0,8	3168 $\begin{smallmatrix} +5 \\ -5 \end{smallmatrix}$
0.6	69.6 $\begin{smallmatrix} +1 \\ -1 \end{smallmatrix}$	69.6 $\begin{smallmatrix} +1 \\ -1 \end{smallmatrix}$	1	3170 $\begin{smallmatrix} +5 \\ -5 \end{smallmatrix}$

TAB. V.7 – Résultats LMGC90.

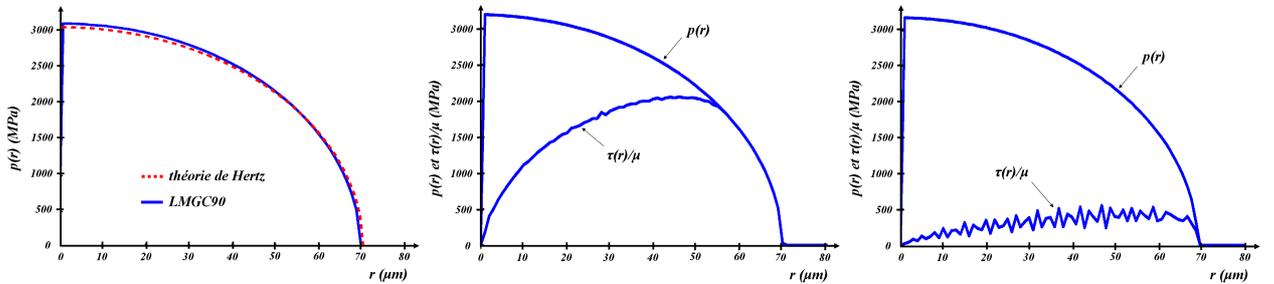


FIG. V.11 – Résultats LMGC90, répartitions de pression $p(r)$ et de contrainte tangentielle $\tau(r)/\mu$ respectivement pour les cas $\mu = 0$, $\mu = 0.1$ et $\mu = 0.6$ ($\Delta t = 10^{-4}$). Des perturbations sur $\tau(r)$ sont observées pour $\mu \neq 0$.

Les cas $\mu \neq 0$ présentent des perturbations au niveau de la répartition de la contrainte tangentielle d'autant plus élevées que μ est grand. Les résultats sont nettement améliorés si le pas de temps est diminué. Les répartitions de pression et de contrainte tangentielle pour $\Delta T = 10^{-5}$ (soit 10^5 itérations pour un temps de calcul d'environ 4 jours et 12 heures⁵) sont données en figure V.12. Les perturbations sont atténuées et les valeurs de a , c et p^0 restent inchangées (tableau V.7).

⁴sur un Pentium 2.8 GHz avec 1Go de Ram et 500 Mo de cache.

⁵sur un Pentium 2.8 GHz avec 1Go de Ram et 500 Mo de cache.

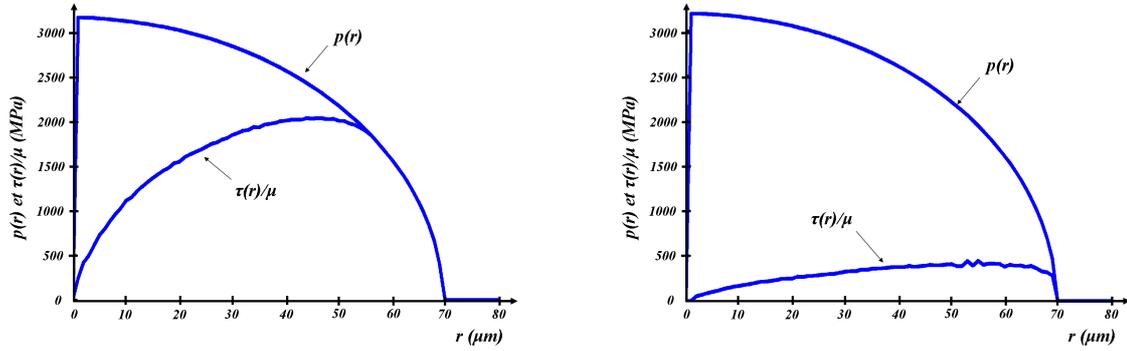


FIG. V.12 – Résultats LMGC90 avec $\Delta T = 10^{-5}$, répartitions de pression $p(r)$ et de contrainte tangentielle $\tau(r)/\mu$ pour les cas $\mu = 0.1$ et $\mu = 0.6$.

V.3.4 Conclusions

Cette première étude permet d’observer que même sur un problème aussi simple que celui d’un contact de Hertz avec frottement, les résolutions numériques présentent déjà des difficultés.

Pour $\mu = 0.1$, les simulations numériques avec trois codes de calcul différents donnent des résultats différents pour la valeur du rayon de non glissement. Ainsi, avec Castem2000 une valeur de $c = 39 \mu m$ est obtenue, avec Abaqus $c \approx 46 \mu m$ et avec LMGC90 $c \approx 57 \mu m$, alors que les travaux de référence donnaient $c \approx 37 \mu m$.

Pour $\mu = 0$ ou $\mu = 0.6$, l’accord entre les différents codes est bien meilleur. Dans ces cas, la zone de contact est mieux établie. Elle est soit complètement glissante ($c = 0$), soit complètement adhérente ($c = a$).

Une explication possible de ces différences est que chacun des codes possède sa propre résolution du problème. D’une part, les codes Castem2000 et Abaqus autorisent le traitement en quasi-statique alors que LMGC90 nécessite le traitement dynamique. D’autre part, les résolutions des conditions de contact sont très différentes. Elles sont pénalisées dans Castem2000 et Abaqus avec différentes valeurs de paramètres et non régularisées dans LMGC90.

Finalement ce premier exemple a permis de confronter la plateforme LMGC90 aux codes de calcul confirmés comme Castem2000 ou Abaqus. Selon notre point de vue, la plateforme LMGC90 rencontre des difficultés du même niveau que les autres codes mais possède l’avantage de traiter les lois d’interaction sans régularisation. Ce point nous intéresse tout particulièrement en vue de simuler des problèmes où l’accent est placé sur le comportement fin de l’interface. La contre-partie de ce traitement sans régularisation est le temps de calcul. Dans cette étude, il est de l’ordre de l’heure avec LMGC90, ce qui est important comparé à celui de l’ordre de la minute avec Abaqus. C’est le coût d’une résolution locale des lois d’interaction sans régularisation⁶.

V.4 Un exemple de délaminage avec le modèle RCCM

Nous proposons l’étude 2D en déformations planes du délaminage d’une fine couche d’aluminium en déplacement imposé. L’objet de cet exemple est de préciser le caractère dissipatif des liens adhésifs lors de leurs endommagements dans le cas de modélisation du comportement de l’interface par le modèle RCCM présenté au paragraphe IV.3 (équation (IV.7)).

⁶Remarquons ici que l’algorithme général de résolution (tableaux V.1 et V.2) peut être optimisé vis-à-vis du temps de calcul. La méthode NLGS se prête particulièrement bien à la mise en parallèle, notamment les déterminations des matrices $w^{\alpha\delta}$ qui représentent une part importante des temps de calcul. Dans le cadre de ce travail, cette optimisation n’a pu être menée par manque de temps et surtout d’expérience en programmation.

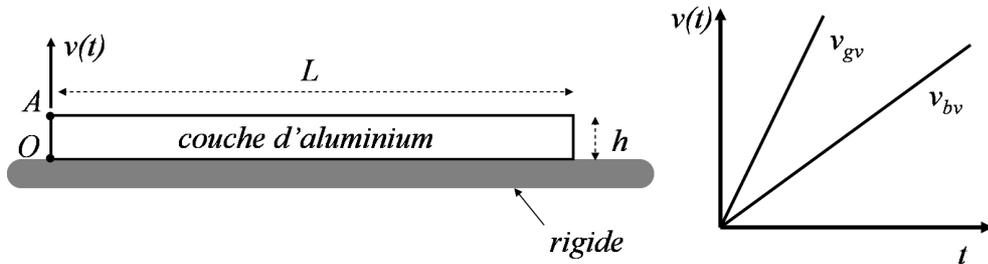


FIG. V.13 – Exemple de délaminage d’une couche d’aluminium, définition de la géométrie et des chargements imposés.

Le comportement de la couche d’aluminium est supposé élastique. Seul le comportement de l’interface est considéré dissipatif avec $b \neq 0$ dans le modèle RCCM. Nous verrons qu’à déplacement imposé équivalent, plus la vitesse de sollicitation est élevée, plus l’énergie à fournir pour rompre la liaison est importante et plus l’endommagement est retardé.

La géométrie et les caractéristiques volumiques de l’étude sont détaillées en figure V.13 et dans le tableau V.8.

	L (mm)	h (mm)	E^1 (MPa)	ν^1	ρ^1 ($kg.m^{-3}$)
Aluminium	50	2.5	$6.9 \cdot 10^4$	0.3	2700

TAB. V.8 – Caractéristiques de la couche d’aluminium.

La couche d’aluminium est initialement collée sur un support rigide. Les valeurs des paramètres du modèle RCCM qui rendent compte du comportement de cette interface adhésive sont données dans le tableau V.9.

w ($mJ.mm^{-2}$)	$C_N = C_T$ ($N.mm^{-3}$)	b ($N.s.mm^{-1}$)	μ
10^{-5}	$2 \cdot 10^5$	1.5	0.2

TAB. V.9 – Valeurs des paramètres du modèle RCCM.

Le décollement de la couche d’aluminium est obtenu par application d’une vitesse imposée verticale au point A définie en figure V.13. Deux vitesses de charge sont considérées $v_{bv} = 0.2 \times t$ et $v_{gv} = 20 \times t$. L’essai est stoppé une fois que le déplacement vertical du point A est égal à 10 mm.

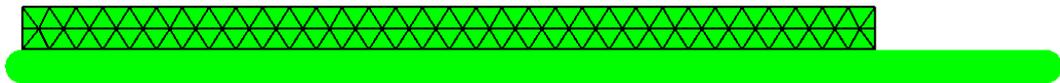


FIG. V.14 – Discrétisation retenue pour la couche d’aluminium.

La discrétisation spatiale est présentée en figure V.14. Le support porte le repère de contact. La discrétisation de la surface inférieure de la couche d’aluminium, $\bar{\Gamma}_{t,C}^1$, contient 33 points de contact ($n_p = 1$). Le maillage de la couche d’aluminium est constitué d’éléments triangulaires $P1$ pour 99 noeuds.

La résolution est dynamique implicite avec $\theta = 1$. Nous considérons $\Delta T = 10^{-3}$ et les critères de convergence sur les boucles de contact et sur les boucles de point fixe sont de valeurs respectives 10^{-5} et 10^{-3} .

Les résultats montrent que le comportement du délaminage dépend fortement de la vitesse de sollicitation imposée. Les déformées de la couche d'aluminium à différentes valeurs de déplacement imposé sont présentées en figure V.15. Elles permettent d'observer le retard global sur l'endommagement de l'interface dans le cas de vitesse de sollicitation élevée v_{gv} par rapport au cas de vitesse de sollicitation plus faible v_{bv} .

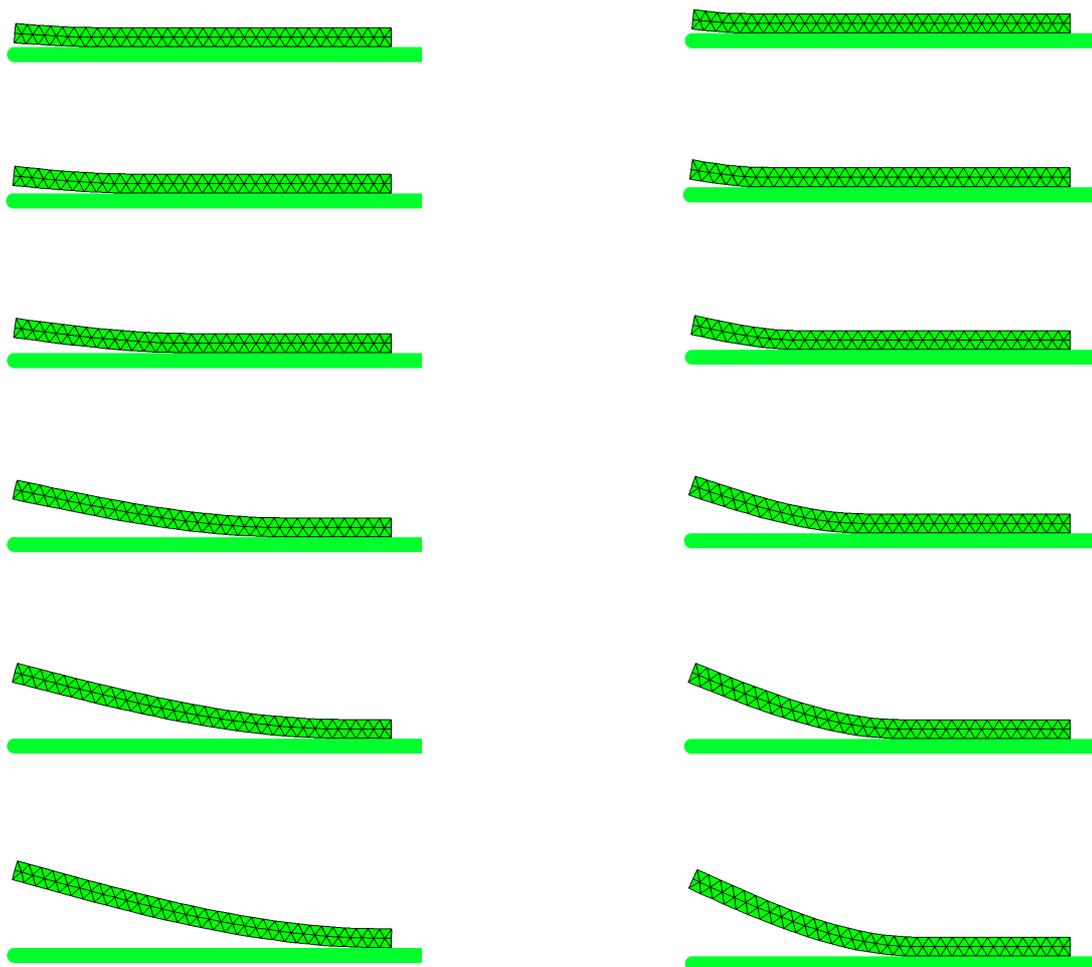


FIG. V.15 – Déformées de la couche d'aluminium, à gauche à v_{bv} imposée et à droite à v_{gv} imposée, aux différents instants correspondant à un déplacement de 0.5, 1, 2, 5, 7.5 et 9 mm du point A.

L'influence de la vitesse de sollicitation sur le comportement global du délaminage est issue du comportement dissipatif de chaque lien adhésif car $b \neq 0$ dans le modèle RCCM.

Pour les deux valeurs de vitesse imposée, les figures V.16, V.17 et V.18 présentent, pour le point O , respectivement les évolutions de β en fonction du déplacement imposé, les évolutions de la contrainte adhésive σ_N en fonction du déplacement imposé et les évolutions de σ_N en fonction de g la distance relative des corps. Ces figures illustrent le comportement dissipatif du lien adhésif au point d'interaction O défini sur la figure V.13.

D'après la figure V.16, à déplacement imposé équivalent, *l'état d'endommagement des liens adhésifs est d'autant plus retardé que la vitesse de sollicitation est élevée*. Il en résulte, à déplacement

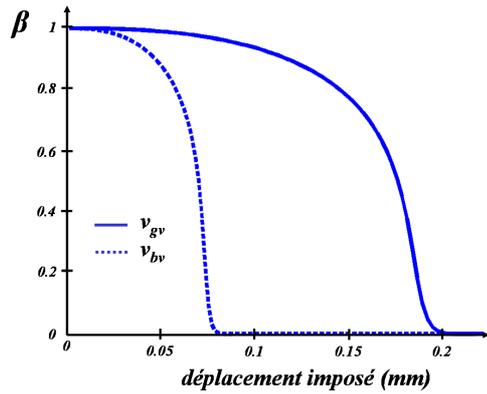


FIG. V.16 – Evolutions de β au point O .

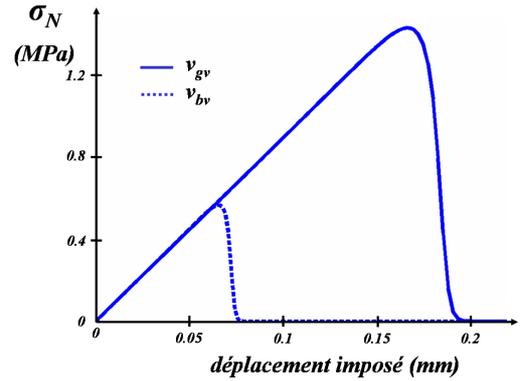


FIG. V.17 – Evolutions de la réaction adhésive normale au point O .

imposé équivalent, une réaction adhésive d'autant plus élevée que la vitesse imposée est élevée. Ce qui peut être observé sur la figure V.17.

La figure V.18 permet de caractériser l'augmentation de la dissipation surfacique au point O suite à l'augmentation de la vitesse imposée. L'aire hachurée entre les deux courbes correspond à la dissipation surfacique supplémentaire due à l'augmentation de la vitesse de sollicitation. Plus la vitesse de sollicitation est élevée, plus l'énergie à fournir pour rompre le lien est élevée.

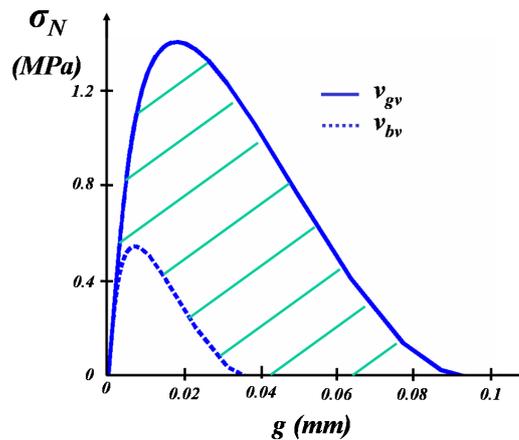


FIG. V.18 – Comportement du lien adhésif au point O .

Le comportement dissipatif de chaque lien adhésif a une influence sur le comportement global de la solution. Dans le modèle d'adhésion cicatrisante, le paramètre b a la même influence sur le processus d'endommagement des liens que celle du modèle RCCM. Le modèle d'adhésion cicatrisante présente de plus l'originalité de considérer l'effet de ce paramètre également lors de la cicatrisation des liens. C'est-à-dire qu'un retard est introduit sur le processus d'endommagement et sur le processus de cicatrisation des liens.

La dissipation observée lors d'un cycle de séparation/approche (paragraphe II.1.2) peut donc être étudiée par la considération du paramètre b dans le modèle d'adhésion cicatrisante. Cette étude fera l'objet du paragraphe VI.3.

V.5 Conclusions

Ce chapitre a présenté les modifications apportées sur l'algorithme NLGS de la plateforme LMGC90 afin de résoudre les problèmes de contact avec adhésion cicatrisante. Elles consistent d'une part en l'ajout d'une boucle de point fixe sur la valeur de l'état d'adhésion en chacun des points d'interaction et d'autre part en la considération de changements de variable appropriés afin d'utiliser le solveur NSCD pour déterminer la réaction d'interaction.

Deux exemples numériques ont été étudiés.

Le premier concerne l'étude d'un Benchmark de contact sans adhésion entre corps élastiques. Il permet de valider le traitement de ce type de problème avec le code LMGC90.

Le second exemple traite un cas de délaminage d'une couche d'aluminium sur un support rigide. La modélisation du comportement de l'adhésif entre les deux corps est réalisée à l'aide du modèle RCCM. Cet exemple valide le traitement numérique de cette loi et réalise une première analyse sur l'influence du paramètre b sur le comportement des liens lors de l'endommagement.

Le chapitre suivant traite des problèmes plus proches de ceux présentés dans le chapitre II. Le comportement de l'interface est alors modélisé soit par le *modèle Dugdale généralisé*, soit par le *modèle d'adhésion cicatrisante*.

Dans les cas de contact en grandes déformations entre corps viscoélastiques, la plateforme LMGC90 est couplée à la bibliothèque MatLib dédiée au traitement des modèles constitutifs volumiques [113]. Il est possible d'enrichir la MatLib avec ses propres modèles de comportement volumique. Dans le cadre de ce travail, le comportement volumique considéré est celui décrit au paragraphe III.2.3. Ce modèle est déjà présent dans la MatLib. Il propose une modélisation viscoélastique de type Kelvin Voigt du comportement dissipatif de l'élastomère, mais ne réalise pas de traitement particulier de la contrainte d'incompressibilité. Pour les applications envisagées au chapitre suivant, cette première approximation semble suffisante. Pour rendre compte du caractère incompressible de l'élastomère, nous travaillerons avec $\nu = 0.48$.

Chapitre VI

SIMULATIONS DE QUELQUES PROBLÈMES AVEC ADHÉSION CICATRISANTE

Ce chapitre est dédié à la présentation des simulations numériques de contact avec adhésion cicatrisante entre deux corps. L'objet de ces exemples est de traiter quelques problèmes présentés au chapitre II.

Le paragraphe VI.1 propose une étude d'exemples académiques. Son premier intérêt est de valider l'adaptation des algorithmes à l'étude de la création ou de la cicatrisation des liens adhésifs ainsi que le traitement des non linéarités volumiques par appel de la MatLib. Son second intérêt est de caractériser les effets de la dissipation volumique et de la dissipation surfacique. Ce paragraphe détaille les résultats présentés dans [24, 97, 26].

L'étude de la formation du col d'adhésion est réalisée au paragraphe VI.2. Nous comparons nos résultats à ceux de la théorie JKR [62] présentée au paragraphe II.1.1. Cette étude est réalisée à l'aide des deux modèles d'interface présentés dans ce mémoire : le *modèle Dugdale généralisé* (paragraphe IV.2) et le *modèle d'adhésion cicatrisante* (paragraphe IV.4). Ce paragraphe détaille les résultats décrits dans [105, 106].

Le paragraphe VI.3 propose une étude de l'hystérésis d'adhésion. Ces simulations sont encore largement ouvertes, nous comparons les résultats obtenus avec le modèle d'interface de Dugdale généralisé ou d'adhésion cicatrisante aux observations expérimentales et résultats analytiques de M. Barquins présentés au chapitre II.

Le paragraphe VI.4.2 regroupe les simulations qui ont été envisagées dans le cadre de ce travail à l'aide du modèle d'adhésion cicatrisante et qui n'ont pas pu être terminées. La présentation de ces études, portant sur les phénomènes « jump-on » et « jump-off » ou sur la formation et la propagation des ondes de Schallamach, permet de situer notre approche vis-à-vis de celles décrites au chapitre II.

VI.1 Contact adhésif entre une sphère élastique et un bloc cylindrique viscoélastique

Nous proposons l'étude dynamique du contact avec adhésion et frottement ($\mu = 0.2$) en grandes déformations entre deux corps homogènes et isotropes : un bloc cylindrique de comportement viscoélastique et une sphère plus rigide de comportement élastique. Le chargement imposé retenu est à symétrie de révolution ce qui permet de considérer une modélisation 2D symétrique de révolution du problème.

Le maillage des corps est constitué d'éléments triangulaires P1. Il est composé de 480 noeuds pour la section angulaire du bloc et de 270 noeuds pour la section angulaire de la sphère. La discrétisation retenue de la géométrie et les caractéristiques générales de l'étude sont présentées en figure VI.1. La taille du maillage h près des zones potentielles d'interaction discrétisées $\bar{\Gamma}_{t,C}^1$ et $\bar{\Gamma}_{t,C}^2$ est égale à $h_c \approx 0.33 \text{ mm}$, la taille du plus petit segment des éléments.

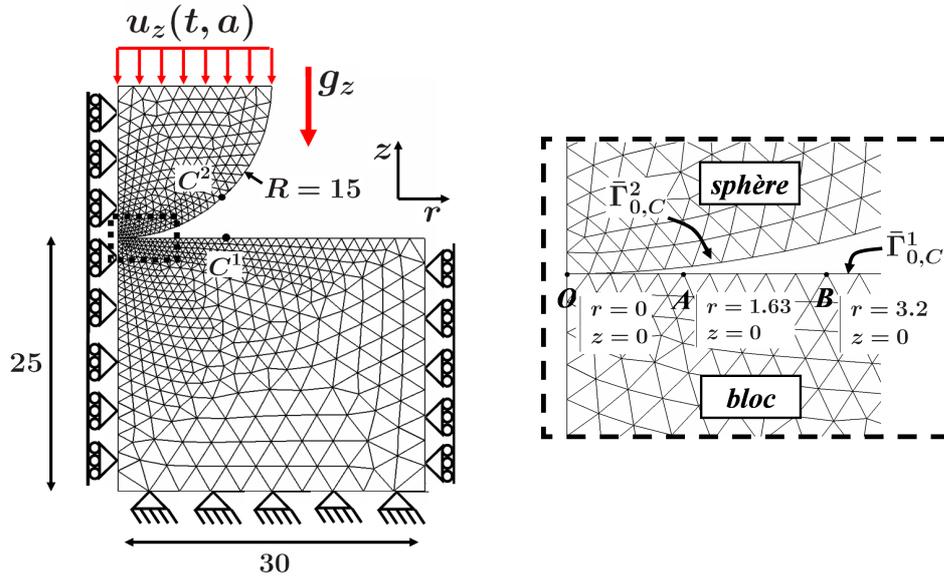


FIG. VI.1 – Géométrie (en mm), conditions aux limites et discrétisation spatiale du problème en configuration initiale. Les points $O(r = 0, z = 0)$, $A(1.63, 0)$ et $B(3.2, 0)$ sont définis. $\bar{\Gamma}_{0,C}^1$ (respectivement $\bar{\Gamma}_{0,C}^2$) sont limitées par les points extrêmes O et $C^1(10.1, 3.98)$ (respectivement $C^2(9.82, 0)$).

Nous considérons que la sphère est plus rigide que le bloc, sa surface potentielle d'interaction $\bar{\Gamma}_{0,C}^2$ portera les repères de contact. Les points d'interaction sont définis sur $\bar{\Gamma}_{0,C}^1$, la surface potentielle d'interaction du bloc.

Pour la suite, nous considérons $\theta = 0.51$, ce qui limite l'amortissement numérique. Les critères d'arrêt sur les boucles de Newton Raphson, sur la convergence de l'interaction Maxm et sur β sont fixés à 10^{-5} .

Deux types de chargement ont été envisagés. Dans les deux cas, le modèle d'interface retenu est le modèle d'adhésion cicatrisante, les valeurs des paramètres volumiques et surfaciques seront précisées par la suite pour chacune des études. Le premier chargement consiste en un cycle d'indentation en déplacement imposé à partir d'une position de contact initial au point O . Dans ce cas, nous étudions les influences sur le comportement global des paramètres du modèle d'interface, de

la vitesse de sollicitation et de la taille du maillage. Le second chargement considère une position initiale de non contact des corps selon l'axe z (figure VI.13). Nous étudions la chute de la sphère sur le bloc sous l'effet de la gravité g_z et des interactions des corps. Dans ce cas, nous précisons les effets de la dissipation surfacique et de la dissipation volumique.

Dans la suite, nous nous intéresserons à l'évolution du rayon de contact et du rayon d'adhésion. Le rayon de contact est défini par l'ensemble des points d'interaction vérifiant $g^\alpha = 0$. Le rayon d'adhésion est défini par l'ensemble des points d'interaction dont la valeur de l'intensité d'adhésion β est égale à 1.

VI.1.1 Le cas d'indentation de la sphère sur le bloc cylindrique

Nous considérons les corps non soumis à l'action de la gravité et la face supérieure de la sphère soumise à un déplacement imposé $\mathbf{u}(t, a) = u_z(t, a)\mathbf{e}_z$ ($a \geq 0$). Ce déplacement est donné pour tout $t \in [0, T]$ selon

$$u_z(t, a) = u_z(0, a) + \int_0^t v_z(\tau, a) d\tau,$$

où $u_z(0, a) = 0$ et la vitesse imposée $v_z(t, a)$ prend la forme

$$\begin{aligned} v_z(t, a) &= 0 & \forall t \in [0, 6], \\ v_z(t, a) &= -at + 6a & \forall t \in [6, 6 + \sqrt{a}/a], \\ v_z(t, a) &= at - (6a + 2\sqrt{a}) & \forall t \in [6 + \sqrt{a}/a, 6 + 3\sqrt{a}/a], \\ v_z(t, a) &= -at + (6a + 4\sqrt{a}) & \forall t \in [6 + 3\sqrt{a}/a, 6 + 5\sqrt{a}/a], \\ v_z(t, a) &= at - (6a + 6\sqrt{a}) & \forall t \in [6 + 5\sqrt{a}/a, 6 + 7\sqrt{a}/a], \\ v_z(t, a) &= -at + (6a + 8\sqrt{a}) & \forall t \in [6 + 7\sqrt{a}/a, 6 + 8\sqrt{a}/a], \\ v_z(t, a) &= 0, & \forall t \in [6 + 8\sqrt{a}/a, T = 12 + 8\sqrt{a}/a]. \end{aligned}$$

Par exemple pour $a = 1 \text{ mm.s}^{-2}$, le déplacement obtenu est présenté en figure VI.2. Il permet d'obtenir une position initiale d'équilibre due à l'action des interactions entre les corps avant le début de la sollicitation représentant deux cycles de charge/décharge.

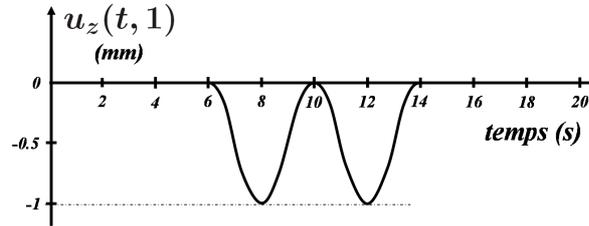


FIG. VI.2 – Déplacement imposé $u_z(t, 1)$ en mm .

Les paramètres volumiques sont donnés dans le tableau VI.1. Les lois constitutives ont été définies au paragraphe III.2.3. On rappelle que \tilde{E}^1 , $\tilde{\nu}^1$ sont les coefficients de viscosité du bloc, nous choisissons pour la suite $\tilde{E}^1 = \eta E^1 \text{ MPa.s}$ avec $\eta \in]0, 10[\text{ s}$ et $\tilde{\nu}^1 = 0.48$.

	module d'Young	coefficient de Poisson	viscosité	masse volumique
Bloc	$E^1 = 5 \text{ MPa}$	$\nu^1 = 0.48$	$\eta \in]0, 10] \text{ s}$	$\rho^1 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$
Sphère	$E^2 = 69 \text{ GPa}$	$\nu^2 = 0.3$		$\rho^2 = 2500 \text{ kg.m}^{-3}$

TAB. VI.1 – Données volumiques, le comportement de la sphère est élastique, celui du bloc est viscoélastique.

Nous étudions la dépendance du comportement global aux variations de :

- la valeur des paramètres d'adhésion C_N et w ,
- la valeur du coefficient de viscosité η ,
- la valeur du paramètre a du déplacement imposé $u_z(t, a)$,
- la taille du maillage des surfaces potentielles d'interaction $\bar{\Gamma}_{0,C}^1$ et $\bar{\Gamma}_{0,C}^2$.

Effet des paramètres du modèle d'interface

Les trois séries de valeurs des paramètres de l'interface sont données au tableau VI.2. Pour cette étude, nous prenons $a = 1 \text{ mm.s}^{-2}$ et $\eta = 1 \text{ s}$ fixés.

	comportement du lien	$w \text{ (J.m}^{-2}\text{)}$	$C_N \text{ (N.m}^{-3}\text{)}$	$b \text{ (N.s.m}^{-1}\text{)}$
cas 1	faible et fragile	1	10^8	0.1
cas 2	fort et fragile	30	$3 \cdot 10^9$	0.1
cas 3	fort et résistant	100	10^{10}	0.1

TAB. VI.2 – Les trois comportements de l'interface considérés.

Les figures VI.3 présentent les déformées au niveau de la zone de contact aux instants $t = 6 \text{ s}$ et $t = 10 \text{ s}$ pour les trois comportements adhésifs. Les évolutions de β au point B et du rayon de contact sont données en figures VI.4 et VI.5.

Pour le cas 1, les liens adhésifs sont faibles et fragiles. L'adhésion a un effet négligeable sur le comportement global. Du fait du caractère viscoélastique du bloc, lors de la phase de remontée de la sphère, la perte de contact est observée. Le rayon de contact est nul en $t = 10 \text{ s}$ (figures VI.3(cas 1) et VI.5) bien que les corps soient toujours en interaction ($\beta \neq 0$ figure VI.4).

Dans le cas 2, les liens adhésifs sont forts. Initialement et jusqu'en $t = 6 \text{ s}$, l'effet de l'adhésion est suffisant pour déformer la surface du bloc. La zone de contact ne se limite plus au point O . Cependant lors de la sollicitation la perte du contact est toujours observée en $t = 10 \text{ s}$ car bien que les corps soient toujours en interaction, les liens adhésifs sont fragiles.

Pour le cas 3, les liens adhésifs sont forts et résistants. L'effet de l'adhésion est alors prépondérant sur le comportement global. Initialement et jusqu'en $t = 6 \text{ s}$, l'attraction entre les corps est telle que la surface du bloc se déforme et adhère à la sphère. En amont de la zone de contact les actions à distance génèrent la formation d'un bourrelet. Lors de la sollicitation, les corps restent toujours en contact même en $t = 10 \text{ s}$.

Le modèle d'adhésion cicatrisante permet de décrire une large gamme de comportement de l'interface, selon les valeurs des paramètres w et C_N .

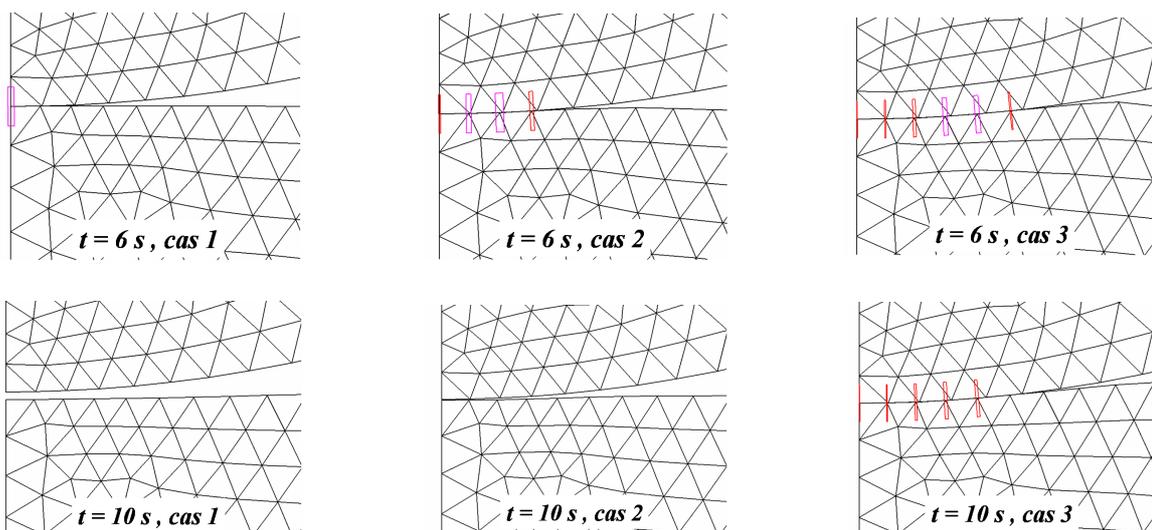


FIG. VI.3 – Déformées aux instants $t = 6\text{ s}$ et $t = 10\text{ s}$ pour les trois cas d'adhésion. Les points en contact ($g^\alpha = 0$) sont marqués d'un rectangle.

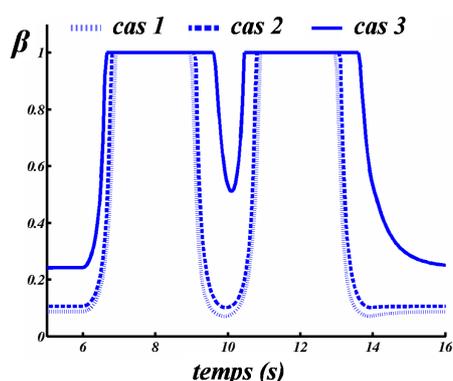


FIG. VI.4 – Evolutions de β au point B .

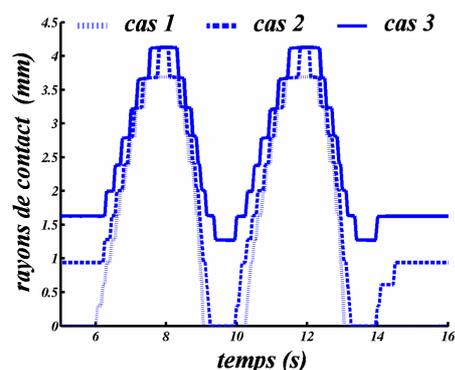


FIG. VI.5 – Evolutions du rayon de contact pour les trois cas.

Effet de la viscosité de volume

Pour cette étude, nous retenons le comportement de l'interface du cas 1 (tableau VI.2) et un déplacement imposé caractérisé par $a = 1\text{ mm.s}^{-2}$.

Les évolutions du déplacement du point O pour différentes valeurs de η sont présentées en figure VI.6. Pour ces mêmes valeurs de η , la figure VI.7 décrit les évolutions de l'intensité d'adhésion β au point A .

De ces résultats, nous pouvons interpréter que *la solution du problème de contact adhésif frottant entre deux corps viscoélastiques avec $\eta \rightarrow 0$ donne une bonne approximation de la solution du problème de contact adhésif frottant entre deux corps élastiques*. En effet, pour $\eta \rightarrow 0$, le déplacement du point O correspond alors exactement à celui de la sphère, il n'y a plus d'effet de retard sur la déformée du bloc et la valeur de β en ce point est toujours égale à 1.

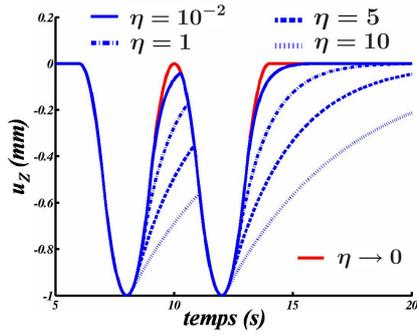


FIG. VI.6 – Evolutions du déplacement du point O pour différentes valeurs de η .

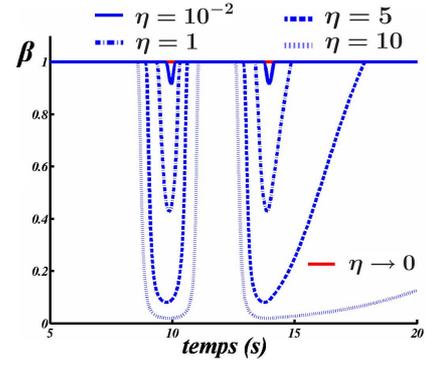


FIG. VI.7 – Evolutions de β au point A pour différentes valeurs de η .

Effet de la taille du maillage

La dépendance au maillage de la solution du problème est étudiée pour différentes discrétisations des surfaces d'interaction $\bar{\Gamma}_{0,C}^1$ et $\bar{\Gamma}_{0,C}^2$. Les discrétisations retenues sont résumées dans le tableau VI.3 et présentées en figure VI.8. Nous rappelons que le maillage de la figure VI.1 a une taille minimale égale à h_c ($h_c = 0.33 \text{ mm}$).

désignation	nombre de ddls	nombre de point de contact sur $\bar{\Gamma}_{0,C}^1$	temps de calcul jusqu'en $t = 8 \text{ s}^a$
h_c	1500	30	36 s
$h_c/2$	2956	60	1 mn 22 s
$h_c/3$	4390	90	2 mn 48 s
$h_c/8$	14660	240	22 mn 40 s

TAB. VI.3 – Caractéristiques des différents maillages.

^asur un Pentium 2.8 GHz avec 1Go de Ram et 500 Mo de cache.

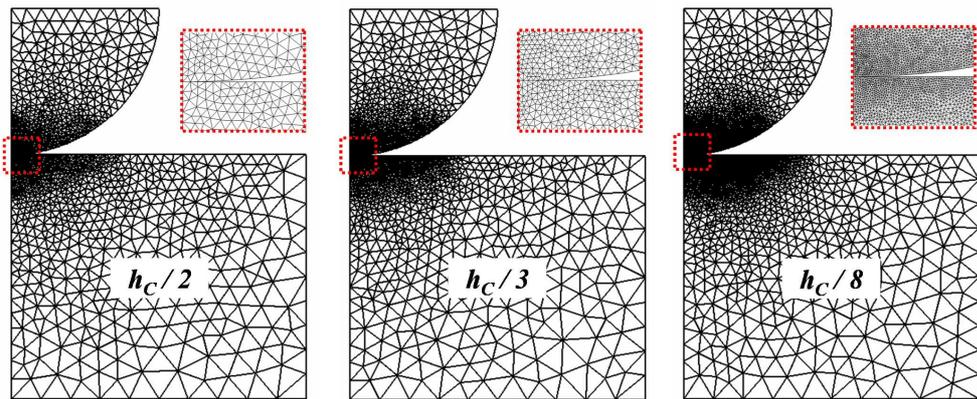


FIG. VI.8 – Les différents maillages générés selon les discrétisations de $\Gamma_{0,C}^1$ et $\Gamma_{0,C}^2$ décrites au tableau VI.3.

Pour cette étude, nous retenons le comportement de l'interface du cas 3 (tableau VI.2), η égal à 1 s et un déplacement imposé caractérisé par $a = 1 \text{ mm.s}^{-2}$.

Les répartitions de la contrainte normale $T_N(r)$ et de la contrainte tangentielle $T_T(r)$ à l'instant $t = 8 \text{ s}$ sont présentées en figure VI.9 pour les différentes tailles de maillage considérées.

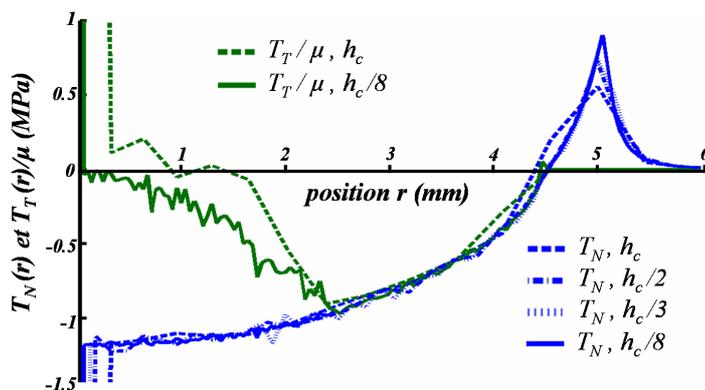


FIG. VI.9 – Répartitions de la contrainte normale $T_N(r)$ et de la contrainte tangentielle $T_T(r)$, à l'instant $t = 8 \text{ s}$, pour les différentes tailles de maillage décrites au tableau VI.3.

Les répartitions de la contrainte normale sont quasi-équivalentes. Les perturbations observées sur la répartition de la contrainte tangentielle lorsque la taille du maillage diminue s'atténuent si le pas de temps est diminué. *La solution obtenue est peu sensible à la taille du maillage.* Les corps sont en contact ($T_N(r) \leq 0$ et $g = 0$) jusqu'en $r = r_C \simeq 4.5 \text{ mm}$, ils sont soumis à une action à distance attractive ($T_N(r) \geq 0$) pour $r > r_C$.

Du fait du traitement en symétrie de révolution, les contraintes en $r = 0$ sont de valeurs élevées, théoriquement- ment infinies, c'est une conséquence de la modélisation. Ces valeurs n'engendrent pas de modifications sur les valeurs des points voisins.

Effet de la vitesse de sollicitation

Ce paragraphe précise l'influence de la vitesse de sollicitation sur la solution du problème. Pour cette étude, $\eta = 0.1 \text{ s}$ et le comportement de l'interface est celui du cas 1 (tableau VI.2).

Les figures VI.10 et VI.11 présentent respectivement les variations pour différentes valeurs de a de l'évolution de l'état d'adhésion β et de la contrainte normale T_N du lien adhésif au point d'interaction B selon la distance relative g .

Le comportement de l'interface dépend de la vitesse de sollicitation du fait du paramètre b du modèle d'adhésion cicatrisante (ici, $b = 0.1 \text{ N.s.m}^{-1}$). *Les processus d'endommagement et de cicatrisation du lien sont retardés.* Pour une même distance de séparation g , les liens sont moins endommagés (β et T_N sont plus élevés) ou moins cicatrisés (β et T_N sont plus faibles) si la vitesse de sollicitation est élevée.

Sur la figure VI.11, l'aire entre la courbe d'endommagement et la courbe de cicatrisation augmente si la vitesse de sollicitation augmente. Ceci correspond à une augmentation de la dissipation surfacique. Plus la vitesse de sollicitation est élevée, plus G^r l'énergie à fournir pour rompre le lien est supérieure à l'énergie d'adhésion w et plus G^c l'énergie récupérée par l'interface lors de la cicatrisation du lien est inférieure à w . Dans le cas de vitesse de sollicitation quasi-statique ($a \rightarrow 0$), les processus suivent la même courbe d'évolution, la dissipation surfacique est nulle et l'aire sous la courbe d'endommagement ou sous la courbe de cicatrisation est égale à w ($G^r \approx G^c \approx w$).

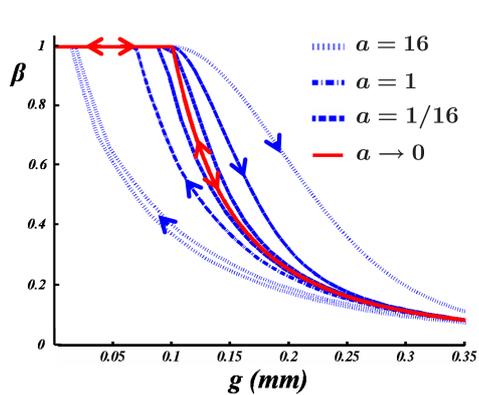


FIG. VI.10 – Evolution de β au point B .

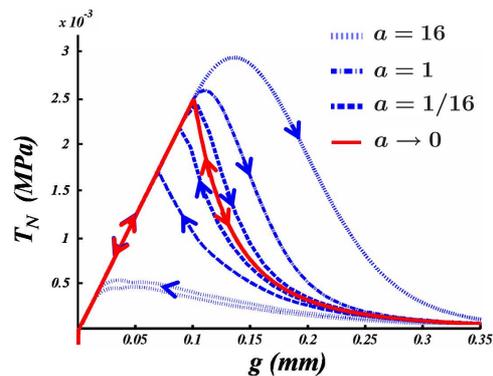


FIG. VI.11 – Comportement normal du lien au point B .

Le comportement volumique du bloc est viscoélastique ($\eta = 0.1 s$), il dépend de la vitesse de déformation. Les variations pour différentes valeurs de a de l'évolution de la contrainte σ_{rr} en fonction de la déformation ε_{rr} pour l'élément sous le point O sont présentées en figure VI.12. Sur cette figure, l'aire entre les boucles représente une partie de la dissipation volumique. Lorsque la vitesse de sollicitation imposée augmente, l'aire entre les boucles augmente, ce qui correspond à une augmentation de la dissipation volumique.

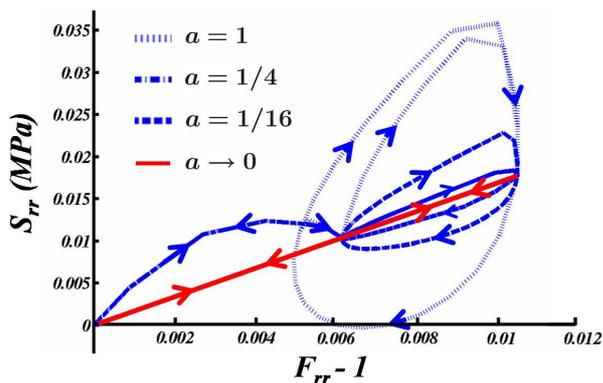


FIG. VI.12 – Comportement volumique radial de l'élément sous le point O pour différentes valeurs de a .

Par rapport aux observations de K.A. Grosch [47] et aux travaux de D. Maugis et M. Barquins [73], à l'origine des nombreuses études [45, 58, 90] présentées au paragraphe II.1.2 sur le phénomène d'hystérésis d'adhésion, l'originalité de notre approche est de distinguer deux comportements dissipatifs : l'un volumique et lié au caractère viscoélastique des corps considérés, le second, surfacique et lié au comportement des liens adhésifs. Cet exemple simple permet d'identifier en partie ces deux dissipations. Selon les applications envisagées, la contribution de l'une ou l'autre des dissipations peut être ajustée à partir des valeurs de η et de b . Comme nous le verrons par la suite cette approche permet de retrouver les résultats des travaux cités précédemment.

A notre sens, l'approche proposée dans ce mémoire généralise les travaux précédents de modélisation du contact adhésif entre des corps aux comportements non élastiques.

VI.1.2 Le cas de la chute de la sphère sur le bloc cylindrique

Le second cas de chargement traité sur cet exemple académique précise le résultat numérique évoqué précédemment à propos de l'approximation de la solution du contact adhésif frottant entre deux corps élastiques par la solution du contact adhésif frottant entre deux corps viscoélastiques avec $\eta \rightarrow 0$.

Pour illustrer ceci, nous considérons l'étude de la chute de la sphère élastique sur le bloc viscoélastique sous l'effet des interactions adhésives et de la gravité. La géométrie, les conditions aux limites et initiales sont présentées en figure VI.13. La sphère est initialement à une distance relative minimale de 1 *mm* par rapport au bloc. Seule l'action de la gravité sera retenue comme chargement imposé. Par ailleurs, les dimensions des corps et les définitions des surfaces potentielles d'interaction restent inchangées et correspondent à celles de la figure VI.1.

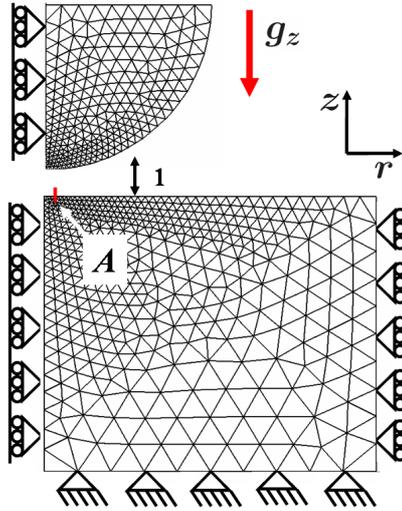


FIG. VI.13 – Configurations initiales et conditions aux limites pour le cas de la chute ($g_z = -9.81 \text{ m.s}^{-2}$).

Les caractéristiques volumiques et de l'interface sont données dans les tableaux VI.4 et respectivement VI.5.

	module d'Young	coefficient de Poisson	viscosité	masse volumique
Bloc	$E^1 = 20 \text{ MPa}$	$\nu^1 = 0.48$	$[10^{-3}, 1] \text{ s}$	$\rho^1 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$
Sphère	$E^2 = 69 \text{ GPa}$	$\nu^2 = 0.3$		$\rho^2 = 2500 \text{ kg.m}^{-3}$

TAB. VI.4 – Exemple de la chute, le comportement de la sphère est élastique, celui du bloc est viscoélastique.

$w \text{ (J.m}^{-2}\text{)}$	$C_N \text{ (N.m}^{-3}\text{)}$	$b \text{ (N.s.m}^{-1}\text{)}$	μ
10^4	10^8	0.1	0.2

TAB. VI.5 – Exemple de la chute, paramètres de l'interface.

Les évolutions du rayon d'adhésion pour différentes valeurs de η sont présentées en figure VI.14. Le calcul de la solution élastique a été réalisé en considérant le comportement du bloc élastique avec les valeurs des coefficients d'élasticité du tableau VI.4. Dans ce cas, la sphère rebondit sur le bloc. Les corps sont toujours en interaction car le rayon adhésif n'est jamais nul. Ces rebonds s'atténuent du fait du comportement dissipatif de l'interaction ($b \neq 0$) et du frottement ($\mu \neq 0$). Au bout d'un certain temps, les rayons de contact et d'adhésion se stabilisent.

Plus la valeur du paramètre de viscosité η est grande, plus les rebonds sont atténués et plus la dissipation volumique augmente. Dans le cas où $\eta = 1 s$, aucun rebond n'est observé, la dissipation volumique est importante.

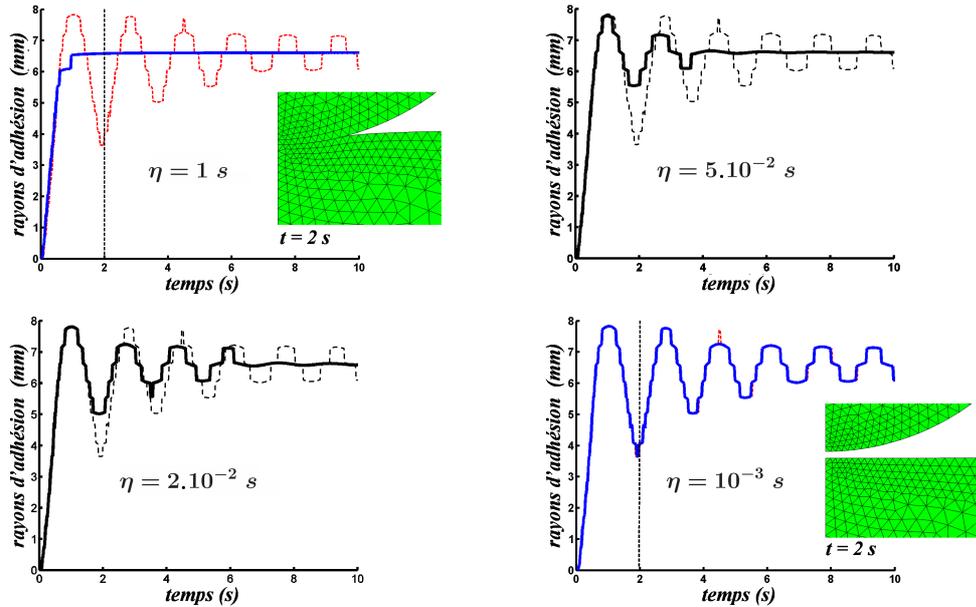


FIG. VI.14 – Evolutions du rayon d'adhésion pour différentes valeurs de η , en pointillés : solution élastique, en trait plein : solution viscoélastique.

Ces résultats numériques confirment que la solution du contact adhésif frottant entre deux corps élastiques peut être approximée par la solution du contact adhésif frottant entre deux corps viscoélastiques avec $\eta \rightarrow 0$.

VI.2 Etude de la formation du col d'adhésion selon l'expérience de M. Barquins

Dans ce paragraphe, l'objectif est de simuler l'expérience de contact réalisée par M. Barquins [8] entre une bille de verre et un bloc en élastomère. Comme nous l'avons précisé au paragraphe II.1.1, du fait des interactions de type van der Waals présentes entre les corps, même sous charge faible, l'élastomère se déforme et adhère à la surface de la bille. Il en résulte un profil particulier de déformation de l'élastomère, schématisé en figure II.3. Au bord de la zone de contact, le *col d'adhésion* est formé.

L'expérience de M. Barquins considère une bille de verre de rayon $2.19 mm$ mise en contact avec un bloc en élastomère très souple ($E = 5 MPa$). Lors de l'application des charges de type indentation et séparation, les résultats expérimentaux obtenus sur les valeurs du rayon de contact, de

l'enfoncement et de l'effort de « pull-off » sont très proches de ceux de la théorie de JKR présentée au paragraphe II.1.1 avec $w = 75 \text{ mJ.m}^{-2}$, un ordre de grandeur fréquemment retrouvé par ailleurs pour ce couple de matériau.

Nous limitons l'étude de cette expérience au cas d'effort d'indentation nul ($P = 0 \text{ N}$) et à l'étude de la valeur de l'effort de « pull-off » en chargement imposé. Les chargements sont lents et les temps de contact sont longs, si bien que le comportement des corps en contact comme le comportement de l'interface ne présentent aucune dissipation.

Deux études sont menées. Dans la première, les interactions sont modélisées par le modèle Dugdale généralisé présenté au paragraphe IV.2, dans la seconde, par le modèle d'adhésion cicatrisante présenté au paragraphe IV.4. Ces deux modèles permettent d'approximer le comportement des interactions de van der Waals (figure VI.15). Pour ces études, nous considérons des *comportements volumiques élastiques* et $b = 0$ dans le modèle d'adhésion cicatrisante. Nous comparons donc les résultats obtenus numériquement avec ceux de la théorie JKR qui sont en bon accord avec ceux de l'expérience de M. Barquins¹.

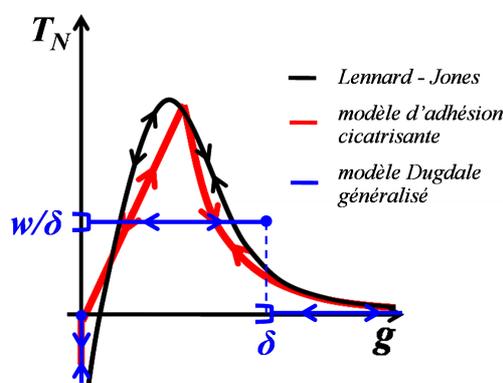


FIG. VI.15 – Approximations de l'interaction de van der Waals.

L'utilisation d'un modèle d'interface au comportement de type Dugdale a déjà été réalisée par D. Maugis [72] sur d'autres applications plus académiques. Il a déjà été démontré que les résultats de la théorie JKR étaient retrouvés. Notre apport ici est de comparer les résultats obtenus en utilisant ce type de modèle d'interface à la théorie JKR sur un problème proche d'une expérience réelle. A notre sens, *cet exemple constitue un Benchmark de contact adhésif*, ce qui est peu présent dans la littérature. Nous réalisons ensuite l'étude du Benchmark de contact adhésif à l'aide du modèle d'adhésion cicatrisante. Les résultats obtenus confirment que ce modèle permet de retrouver l'ensemble des comportements des modèles d'interface précédents, tout en proposant une nouveauté : la possible considération d'une dissipation surfacique liée au comportement des liens adhésifs.

Pour $P = 0 \text{ N}$, la théorie JKR donne un rayon d'équilibre a_{JKR} égal à $92.16 \mu\text{m}$. Cette valeur est obtenue à partir d'un calcul selon la théorie de Hertz (équation (II.7)) pour une charge apparente \tilde{P} définie en (II.5). Durant cette première phase, la jonction des corps est tangente selon la théorie de Hertz. L'équilibre final est obtenu en diminuant l'effort jusqu'à la valeur $P = 0 \text{ N}$ en gardant le rayon de contact précédent fixé. Lors de cette seconde phase, les corps étant « liés », la remontée de la bille induit une déformée particulière de l'élastomère. Le col d'adhésion est formé. En $r = 0$, le déplacement de la bille représentant l'enfoncement u_{JKR}^0 est égal à $-1.29 \mu\text{m}$. A partir de la position d'équilibre, il est nécessaire pour séparer les corps de fournir un effort de séparation de « pull-off » de valeur 0.774 mN ($3/2 \pi w R$) selon la théorie JKR.

¹Pour cette expérience, avec les valeurs retenues, le coefficient κ (II.11) est tel que $\kappa \approx 320 \gg 1$.

Cette méthode d'obtention du col d'adhésion a été reprise par C. Talon et A. Curnier [117] sur une application plus académique que celle que nous proposons. A la différence des modèles d'interface que nous considérons pour cette étude, dans leur cas, seul le processus d'endommagement des liens est autorisé. L'équilibre est donc obtenu en deux phases. La première correspond à une charge d'indentation de valeur \tilde{P} sans considération de l'adhésion, jusqu'à obtention du rayon d'équilibre. La seconde introduit l'interaction (de type RCCM, c'est-à-dire décrivant uniquement l'endommagement) au niveau de la zone de contact suivie d'une décharge jusqu'à l'effort P . Le profil de la déformée du plan obtenu décrit le col d'adhésion.

Avec cette approche, la valeur de l'effort \tilde{P} joue un rôle déterminant, ceci quelque soit le modèle d'interaction envisagé. Autrement dit, cette méthode décrit le comportement global du contact adhésif sans nécessiter une description fine du comportement de l'interaction. En effet, si une condition d'encastrement était imposée, au lieu de considérer un modèle fin du comportement de l'interface comme celui du modèle RCCM ou du modèle proposé par C. Talon et A. Curnier, le résultat sur la formation du col d'adhésion serait identique. En ce sens, cette méthode d'obtention du col d'adhésion limite l'intérêt de l'utilisation de modèles d'interface au comportement fin. Par contre, son utilisation est justifiée si à partir de la position d'équilibre l'étude de l'effort de « pull-off » est réalisée. Ainsi C. Talon et A. Curnier obtiennent une valeur de l'effort de « pull-off » en accord avec celle de la théorie JKR en modélisant le comportement de l'interface par un modèle non dissipatif d'endommagement des liens présentés dans [117].

Notre approche est différente puisqu'elle propose, à partir d'une position initiale « fictive » de contact affleurant en $r = 0$ seulement, de laisser agir les forces d'interaction à distance jusqu'à obtention de l'équilibre. Par rapport à l'approche liée à la théorie JKR et reprise par C. Talon et A. Curnier pour obtenir le col d'adhésion, cette approche nous semble plus consistante vis-à-vis de l'origine de l'adhésion. Elle est possible car à la différence de ces travaux, les processus de création ou de cicatrisation de liens adhésifs sont autorisés par le modèle Dugdale généralisé ou par le modèle d'adhésion cicatrisante.

Pour le modèle Dugdale généralisé et pour le modèle d'adhésion cicatrisante, nous laissons libre les glissements relatifs entre les corps en considérant $\mu = 0$. A posteriori, la valeur du coefficient de frottement influe peu sur les résultats : en chaque point d'interaction le déplacement tangentiel relatif est d'ordre très inférieur au déplacement relatif selon la normale au contact. Dans ce cas, le comportement tangentiel de l'interface peut être négligé et le comportement global est essentiellement issu des interactions s'exerçant selon les normales au contact.

La modélisation retenue du problème est 2D symétrique de révolution. La bille de verre est modélisée par une section angulaire de sphère rigide de masse volumique $\rho^2 = 2500 \text{ kg.m}^{-3}$ et l'élastomère par une section angulaire de plan hyperélastique de coefficients d'élasticité $E^1 = 5 \text{ MPa}$ et $\nu^1 = 0.48$, de masse volumique $\rho^1 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ et de dimensions suffisamment grandes. La plateforme LMG90 est couplée à la bibliothèque MatLib afin de traiter le comportement hyperélastique. Les conditions aux limites et la discrétisation du plan sont présentées en figure VI.16. Le maillage est constitué d'éléments triangulaires $P1$. La taille du problème est de l'ordre de 10500 degrés de liberté, auxquels s'ajoutent les degrés de liberté liés aux 710 points d'interaction considérés sur $\bar{\Gamma}_{0,C}^1$ ($n_p = 1$), la surface potentielle d'interaction du plan. La taille minimale des segments des éléments de la zone d'interaction est de $0.1 \mu\text{m}$.

Remarque sur la discrétisation temporelle

Nous désirons, vue la taille du problème, garder des temps de calcul de l'ordre de quelques jours. Cette contrainte implique que la résolution doit être réalisée en environ 10^3 itérations, soit un pas de temps $\Delta T = 10^{-3}$. Avec ce choix, le paramètre d'intégration temporel θ doit être pris égal à 1.

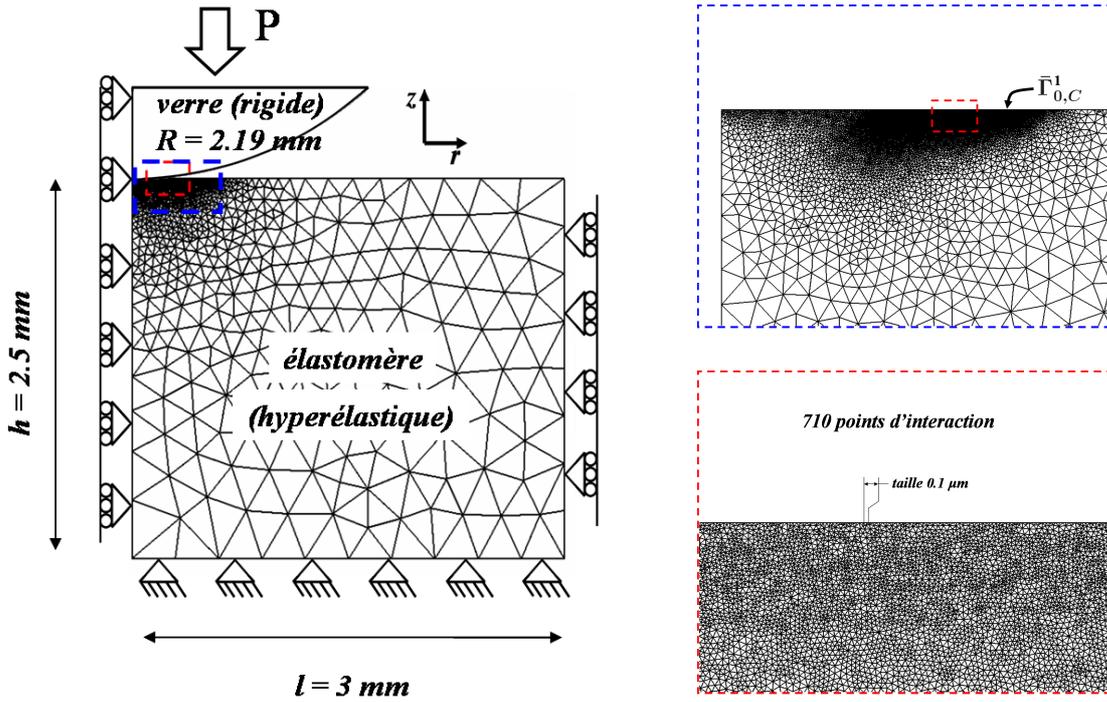


FIG. VI.16 – Géométries, discrétisation et conditions aux limites du problème considéré. Les corps sont uniquement soumis à l’adhésion ($P = 0\text{ N}$). Zooms de la surface potentielle d’interaction.

Pour des valeurs de θ plus faibles, du fait de la grande valeur de ΔT par rapport au problème, des oscillations apparaissent car l’effet des interactions est introduit brutalement en tant que condition initiale. En considérant $\theta = 1$, ces oscillations sont amorties numériquement. Cette valeur de θ permet de satisfaire la contrainte d’une résolution en 10^3 itérations. Après vérification sur des problèmes moins coûteux en temps de calcul, ce choix permet ici d’obtenir le même état d’équilibre que dans le cas d’un calcul à amortissement numérique faible, comme $\theta = 0.55$ par exemple.

Le critère d’arrêt sur les boucles de Newton Raphson est de 10^{-6} , le critère d’arrêt *Maxm* sur la convergence des réactions d’interaction vaut 10^{-5} et le critère d’arrêt sur les boucles de point fixe de β est de 10^{-5} .

VI.2.1 Avec le modèle Dugdale généralisé

Le comportement normal du modèle Dugdale généralisé présenté au paragraphe IV.2 est caractérisé par la valeur de l’énergie d’adhésion w et la valeur de la distance d’interaction δ . Nous considérons w fixée et égale à 75 mJ.m^{-2} , la valeur retenue par M. Barquins [8].

Les valeurs communément utilisées pour δ sont de l’ordre de $1/100$ à $1\text{ }\mu\text{m}$. L’influence de la valeur de δ sur le comportement global est importante et nécessite une attention particulière vis-à-vis de la discrétisation retenue. *En effet, lors de l’utilisation d’éléments cohésifs, il faut s’assurer que le maillage ne limite pas le processus d’interaction.* Autrement dit, « il est nécessaire que la taille de la zone d’interaction porte au moins sur quelques éléments ». Pour ce problème, dans le cas du modèle Dugdale généralisé, considérer $\delta = 1/10\text{ }\mu\text{m}$ nécessite une taille du maillage du même ordre de grandeur afin qu’une dizaine d’éléments cohésifs participe à l’interaction en amont du contact. Si cette précaution n’est pas prise, la discrétisation « écrantera » l’effet des actions à distance et la solution en sera fortement influencée. Pour la suite, la taille des éléments cohésifs du maillage de la figure VI.16 est en accord avec la valeur de la distance d’interaction retenue.

Avec $\delta = 0.18 \mu m$, les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux de la théorie JKR. L'équilibre est obtenu en 500 itérations pour 2 jours de calcul². La déformée du plan au niveau du bord de la zone de contact est donnée en figure VI.17. Le col d'adhésion est bien formé et le profil de la déformée du plan, présentée en figure VI.18, est proche de celui de la théorie JKR (équation (II.9)). L'enfoncement de la sphère en $r = 0$ est $u_{DUG}^0 = -1.27 \mu m$, de valeur proche de l'enfoncement théorique $u_{JKR}^0 = -1.29 \mu m$.

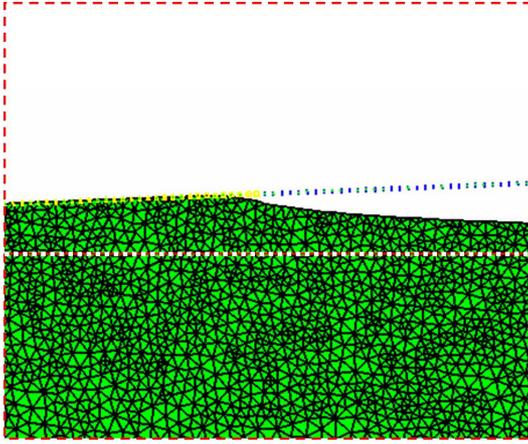


FIG. VI.17 – Déformée du plan au niveau du bord de la zone de contact obtenue avec Dugdale généralisé, le col d'adhésion est formé.

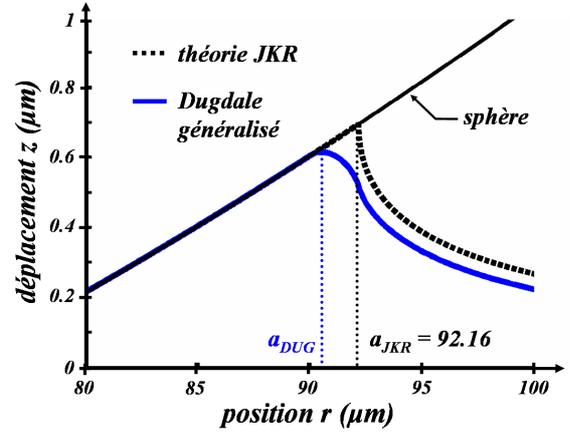


FIG. VI.18 – Comparaison des profils de la déformée obtenus avec Dugdale généralisé et avec la théorie JKR.

Par rapport à la théorie JKR, la jonction des corps est tangente (figure VI.17). Cependant, du fait des interactions à distance le plan est fortement déformé. *L'important gradient de déformation en amont du contact permet de caractériser le col d'adhésion.*

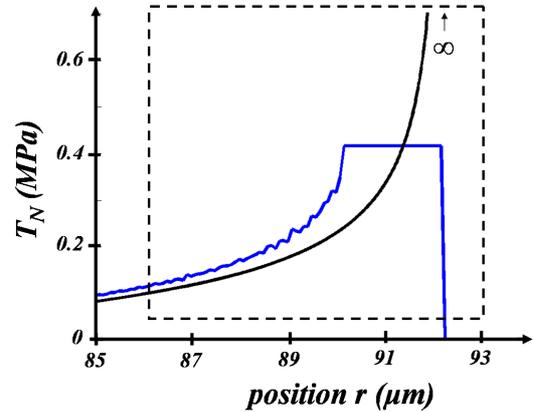
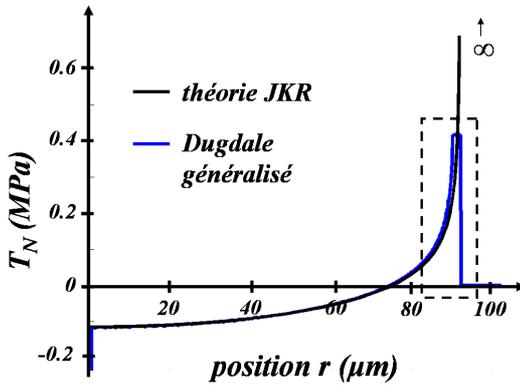


FIG. VI.19 – Répartition de la contrainte normale à l'équilibre obtenue avec le modèle Dugdale généralisé, comparaison à la théorie JKR (équation (II.10)).

La figure VI.19 présente la répartition de la contrainte normale obtenue à l'équilibre. Elle est très proche de celle de la théorie JKR (équation (II.10)). Hors de la zone de contact $T_N(r) = w/\delta$ tant que $g < \delta$, ce qui est à l'origine d'une déformée de l'élastomère moins brutale que dans le cas de la théorie JKR où la contrainte est infinie au bord.

²sur un Pentium 2.8 GHz avec 1Go de Ram et 500 Mo de cache.

La valeur du rayon de contact obtenue est de l'ordre de $74.6 \mu m$, elle est définie par l'ensemble des points de contact vérifiant $g = 0$. La valeur du rayon d'adhésion est plus délicate à définir. Si l'on considère d'après la figure VI.18 que cette valeur correspond à la position du point de l'élastomère dont l'ordonnée est maximale, il vient $a_{DUG} = 90.5 \mu m$. Cette valeur est en bon accord avec la valeur du rayon d'équilibre de la théorie JKR ($a_{JKR} = 92.16 \mu m$).

A partir de la position d'équilibre obtenue, la perte du contact est observée pour un effort $P_{DUG} = 0.65 mN$ en accord avec la valeur de l'effort de « pull-off » théorique $P_{JKR} = 0.774 mN$, issue de la définition (II.8) dans le cas de charge imposée.

Notre approche avec l'utilisation du modèle Dugdale généralisé pour décrire le comportement de l'interface permet d'approcher l'ensemble des résultats de la théorie JKR, elle même en accord avec les résultats d'expérience de M. Barquins [8]. Nous proposons maintenant de retrouver ces résultats avec le nouveau modèle d'adhésion cicatrisante.

VI.2.2 Avec le modèle d'adhésion cicatrisante

Le comportement normal du modèle d'adhésion cicatrisante présenté au paragraphe IV.4 est caractérisé par la valeur de l'énergie d'adhésion w , la valeur de la rigidité normale maximale C_N et la valeur du paramètre b . Comme évoqué précédemment, le temps de contact est long. Les liens adhésifs ont le temps de se former sans qu'un effet dissipatif ne soit observé au niveau de l'interface. Lors de l'utilisation du modèle d'adhésion cicatrisante sur ce cas, nous retenons donc $b = 0$. Par ailleurs, w est fixée et égale à $75 mJ.m^{-2}$.

Le choix de la valeur de C_N nécessite la même précaution que celle concernant le choix de la distance d'interaction δ vis-à-vis de la discrétisation et de la taille des éléments cohésifs. Cette précaution est vérifiée si, à énergie d'adhésion w fixée, le comportement normal du modèle d'adhésion cicatrisante de chaque lien adhésif est « équivalent » à celui du modèle Dugdale généralisé considéré précédemment. Cette équivalence permet d'obtenir un ordre de grandeur de la valeur de C_N à partir de la valeur optimisée du paramètre δ du modèle Dugdale généralisé.

Par exemple, si l'on considère que l'endommagement des liens doit débiter pour une distance de séparation relative g^0 de l'ordre de 50% de δ soit environ $0.09 \mu m$ et en rappelant que $g^0 = \sqrt{w/C_N}$, C_N est de l'ordre de $10^{13} N.m^{-3}$. Cette valeur est ajustée en comparant les résultats obtenus sur la déformée du plan pour différentes valeurs de C_N à énergie d'adhésion fixée. La valeur optimale retenue est $C_N = 10^{13} N.m^{-3}$.

Remarquons que sur un exemple 1D d'approche/séparation, représentant un moyen de déterminer la valeur de C_N de manière moins coûteuse en temps de calcul, les résultats, donnés en figure VI.20, montrent que le comportement du modèle d'adhésion cicatrisante avec $C_N = 5 \cdot 10^{12} N.m^{-3}$ donne une meilleure approximation du comportement du modèle Dugdale généralisé avec $\delta = 0.18 \mu m^3$.

Nous retenons finalement pour la suite $C_N = 10^{13} N.m^{-3}$. L'équilibre est obtenu en 400 itérations pour environ 2 jours et 18 heures de calcul⁴. La déformée de l'élastomère à l'équilibre est donnée en figure VI.21. Le profil est en excellent accord avec celui de la théorie de JKR. L'enfoncement de la sphère en $r = 0$, $u_{ADH_CIC}^0$, vaut $-1.28 \mu m$ ($u_{JKR}^0 = -1.29 \mu m$). Dans ce cas aussi, *la jonction entre les corps reste tangente et du fait de l'effet des interactions à distance la formation du col d'adhésion est observée.*

³Sur la figure VI.20 il est possible de remarquer que les processus d'endommagement et de séparation sont légèrement différents dans le cas du modèle Dugdale généralisé. Ces écarts sont liés au choix du pas de temps. Ils disparaissent en diminuant le pas de temps de la simulation. Les processus d'endommagement et de cicatrisation suivent alors la même courbe d'évolution.

⁴sur une station de travail 3 GHz Dual Core avec 2Go de Ram et 1 Go de cache.

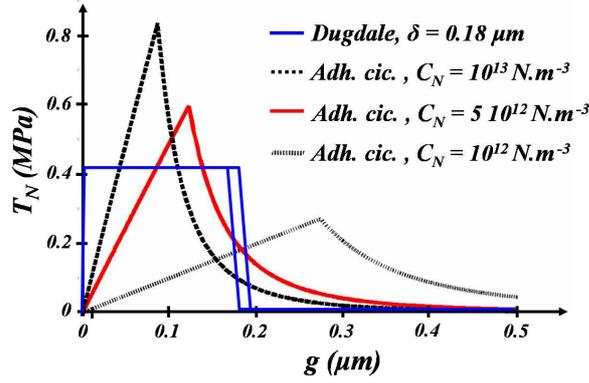


FIG. VI.20 – Détermination de la valeur de C_N par comparaisons avec le comportement du modèle Dugdale généralisé sur une étude 1D avec $w = 75 \text{ mJ.m}^{-2}$ fixée.

A ce propos, le profil de déformation de l'élastomère obtenu avec les modèles d'interface Dugdale généralisé ou d'adhésion cicatrisante nous semble physiquement plus acceptable que celui proposé par la théorie JKR considérant une jonction verticale des corps. En effet une jonction tangente des corps associée à un fort gradient de déformation au bord de la zone de contact est en accord avec l'observation expérimentale qui dénote une forme particulière des anneaux de Newton, différente de celle obtenue lors d'un contact sans adhésion de type Hertz.

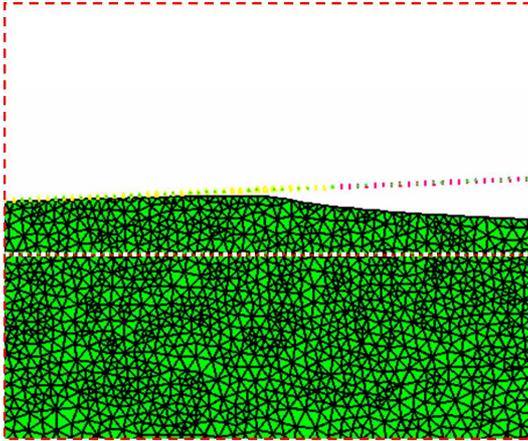


FIG. VI.21 – Déformée du plan au niveau du bord de la zone de contact obtenue avec le modèle d'adhésion cicatrisante, le col d'adhésion est formé.

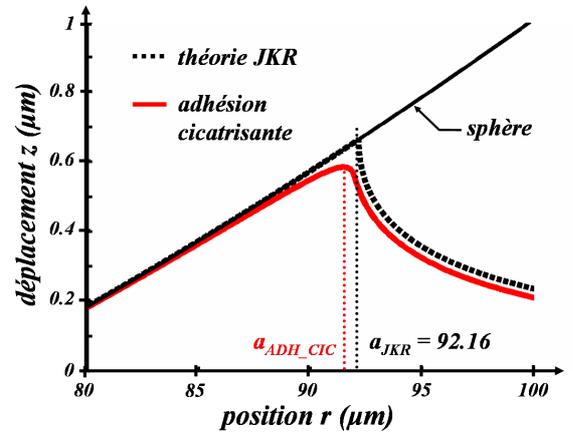


FIG. VI.22 – Comparaison des profils de la déformée obtenus avec le modèle d'adhésion cicatrisante et avec la théorie JKR.

La figure VI.23 présente la répartition de la contrainte normale obtenue à l'équilibre. Elle est proche de celle de la théorie JKR. La valeur des interactions hors de la zone de contact évolue avec la distance relative g , ce qui est à l'origine d'une déformée du plan moins brutale que celle de la théorie JKR et différente de celle obtenue avec le modèle Dugdale généralisé. La valeur du rayon de contact est égale à $74 \mu\text{m}$. Comme précédemment, la notion de rayon d'adhésion n'est pas triviale, il est possible de considérer que cette valeur correspond au point de l'élastomère dont l'ordonnée est maximale. Le rayon a_{ADH_CIC} est alors de l'ordre de $91.4 \mu\text{m}$, soit moins de 1% de différence avec le rayon a_{JKR} ($= 92.16 \mu\text{m}$).

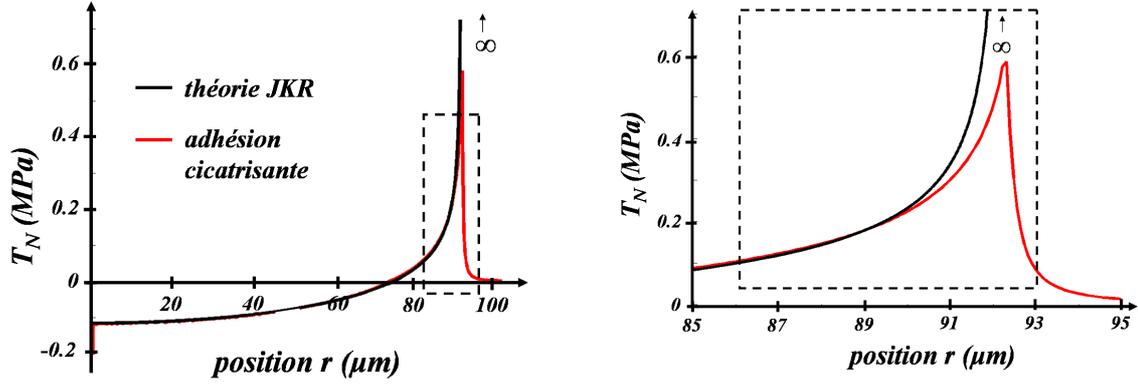


FIG. VI.23 – Répartition de la contrainte normale à l'équilibre obtenue avec le modèle d'adhésion cicatrisante, comparaison à la théorie JKR (équation (II.10)).

A partir de la position d'équilibre, la perte du contact est observée pour un effort $P_{ADH_CIC} = 0.92 \text{ mN}$, soit une différence de 18% par rapport à la valeur théorique de l'effort de « pull-off » ($P_{JKR} = 0.774 \text{ mN}$). La valeur obtenue est élevée mais reste cohérente en remarquant que dans le cas de la théorie DMT, l'effort de séparation est tel que $P_{DMT} = 1.03 \text{ mN}$ (définition (II.4)).

VI.2.3 Conclusion de l'étude

La modélisation du comportement de l'interface par le modèle d'adhésion cicatrisante permet de caractériser la formation du col d'adhésion et d'approcher la valeur de l'effort de « pull-off ». Les résultats des simulations numériques sont très proches de ceux de la théorie JKR en accord avec les expériences de M. Barquins. *Ces résultats étaient prévisibles car, dans le cas de contact entre corps élastiques à énergie d'adhésion fixée, E. Barthel [15] observe que le comportement global est peu influencé par la loi d'évolution d'endommagement ou de cicatrisation des liens adhésifs.* Dans notre cas, il faudrait ajouter l'hypothèse supplémentaire *si le comportement de l'interface peut également être considéré non dissipatif.* D'autre part, D. Maugis avait déjà noté dans [72] que la modélisation des interactions par le modèle Maugis-Dugdale permettait de retrouver les résultats des théories DMT et JKR. Ce résultat semble de nouveau se vérifier sur l'application envisagée ici, issue de l'expérience de M. Barquins.

Notre approche permet donc en considérant $b = 0$ de retrouver les résultats des études modélisant le comportement des interactions par le modèle Dugdale généralisé. Selon les différentes valeurs retenues pour w et C_N , il serait par exemple possible de retrouver les résultats de la théorie DMT dans le cas de contact entre corps peu déformables soumis à de faibles interactions. Ce n'est pas l'objet du cadre de ce mémoire qui s'intéresse plus particulièrement au contact verre/élastomère.

Par rapport au modèle Dugdale généralisé, l'intérêt du modèle d'adhésion cicatrisante est d'introduire une dissipation liée au comportement propre des liens adhésifs. Nous proposons ainsi d'étudier dans la suite des cas où, à notre sens, la *viscosité surfacique* doit être considérée.

VI.3 Etude de l'hystérésis d'adhésion selon l'expérience de M. Barquins et D. Wehbi

Ce paragraphe s'intéresse à l'étude des dissipations observées lors d'expériences de charge/décharge jusqu'à rupture du contact entre une bille de verre et un polyuréthane souple. Ces expériences, réalisées par M. Barquins et D. Wehbi [14], considèrent une bille de verre, de rayon 2.19 mm , en contact adhésif avec un bloc en polyuréthane (PSM4 Vishay) incompressible ($\nu = 0.5$) de module d'Young $E = 5.4 \text{ MPa}$. La position initiale de l'expérience est obtenue à partir de l'indentation de la bille selon une charge d'effort P . De cette position, plusieurs cycles alternant décharge d'effort P' durant le temps t' et charge d'effort P durant le temps t sont appliqués (voir figure VI.24).

Dans le cas où $P = 30 \text{ mN}$, le rayon de contact initial est de $206.5 \mu\text{m}$. Cette valeur permet d'identifier à partir de l'équation (II.7) la valeur de l'énergie d'adhésion initiale pour ce type de contact. Elle est de l'ordre de $w_1 = 46.4 \text{ mJ.m}^{-2}$. Durant les cycles $\{P' = 30 \text{ mN}, t' = 5 \text{ s}, P = 30 \text{ mN}, t = 1 \text{ s}\}$, le rayon de contact ne retrouve jamais sa valeur initiale. La valeur maximale du rayon mesuré au fil des cycles est constante et égale à $197 \mu\text{m}$. La rupture est obtenue au bout d'un certain temps, retardée d'une part par la cicatrisation des liens adhésifs précédemment rompus et d'autre part par le processus d'endommagement des liens.

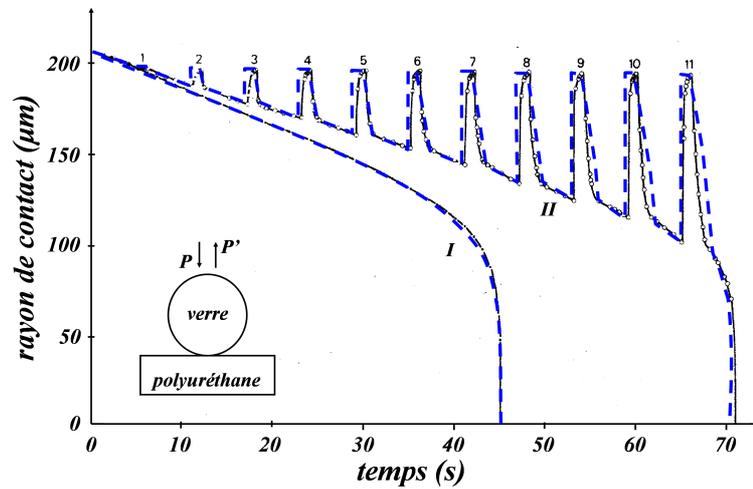


FIG. VI.24 – Evolutions expérimentale (—) et théorique (---) du rayon de contact pour un chargement cyclique à effort imposé [14]; courbes I, décharge continue $P' = 30 \text{ mN}$; courbes II, décharge : $t' = 5 \text{ s}, P' = 30 \text{ mN}$, charge : $t = 1 \text{ s}, P = 30 \text{ mN}$.

Pour déterminer les courbes théoriques présentées sur la figure VI.24, M. Barquins et D. Wehbi ont utilisé une extension de la théorie JKR à la prise en compte des dissipations (le terme $\Phi = \alpha(T)v^n$ introduit au paragraphe II.1.2). De plus, ils considèrent une énergie d'adhésion à deux niveaux selon la figure II.7 : une première valeur w_1 identifiée sur la configuration initiale (rayon de $206.5 \mu\text{m}$ pour $P = 30 \text{ mN}$) et une seconde valeur w_2 identifiée lors des cycles (rayon maximal de $197 \mu\text{m}$ pour $P = 30 \text{ mN}$). La différence entre ses deux énergies est importante, $w_1 = 46.4 \text{ mJ.m}^{-2}$ et $w_2 = 9 \text{ mJ.m}^{-2}$ et n'est pas simple à interpréter d'un point de vue mécanique. Dans [9], M. Barquins note que l'adhésion dépend de deux phénomènes :

- la diffusion des chaînes moléculaires au niveau du contact,
- la relaxation de l'élastomère.

Pour un contact élastomère/élastomère, le premier phénomène est prépondérant, alors que pour un contact verre/élastomère la relaxation de l'élastomère a une contribution prépondérante. Nous reviendrons sur ce point lors de la conclusion de cette étude.

A chaque instant, l'état d'adhésion au sein de la zone de contact est caractérisé par ces deux valeurs d'énergie d'adhésion. L'énergie d'adhésion est égale à w_1 dans la zone centrale encore non sollicitée et l'énergie d'adhésion est égale à w_2 dans la zone périphérique, où les liens ont déjà été rompus une fois (voir figure II.7). L'évolution du contact est décrite par l'équation (I.8) en considérant que les dissipations sont dues au comportement du volume proche du bord de la zone de contact. Avec cette approximation, le comportement du polyuréthane est considéré élastique et le calcul du taux de restitution d'énergie par l'équation (II.6) reste valable. Les dissipations sont liées à la courbe maîtresse $\Phi = \alpha(T)v^n$, caractéristique du comportement volumique du bloc en polyuréthane, avec $\alpha(T) = 1.68 \cdot 10^5$ en unités *SI* à température ambiante et $n = 0.6$. Les résultats de cette approche analytique sont en excellent accord avec ceux issus de l'expérience pour une décharge continue $P' = 30 \text{ mN}$ ou pour la sollicitation cyclique $\{P' = 30 \text{ mN}, t' = 5 \text{ s}, P = 30 \text{ mN}, t = 1 \text{ s}\}$ (voir figure VI.24).

Nous avons réalisé différentes simulations proposées dans [14] en appliquant la théorie de M. Barquins. De ces simulations, réalisées à l'aide de Matlab, il résulte les discussions qui suivent sur une limite de cette approche.

VI.3.1 Avec la théorie de M. Barquins

Avec les paramètres de l'interface w_1 et w_2 fixés, d'autres cas de sollicitation cyclique sont envisagés, comme par exemple $\{P' = 20 \text{ mN}, t' = 5 \text{ s}, P = 20 \text{ mN}, t = 1 \text{ s}\}$. Dans ce cas, le nombre de cycles avant rupture prévu par la théorie est de 36, il correspond toujours à celui de l'expérience égal à 40. L'évolution du rayon de contact est présentée en figure VI.25.

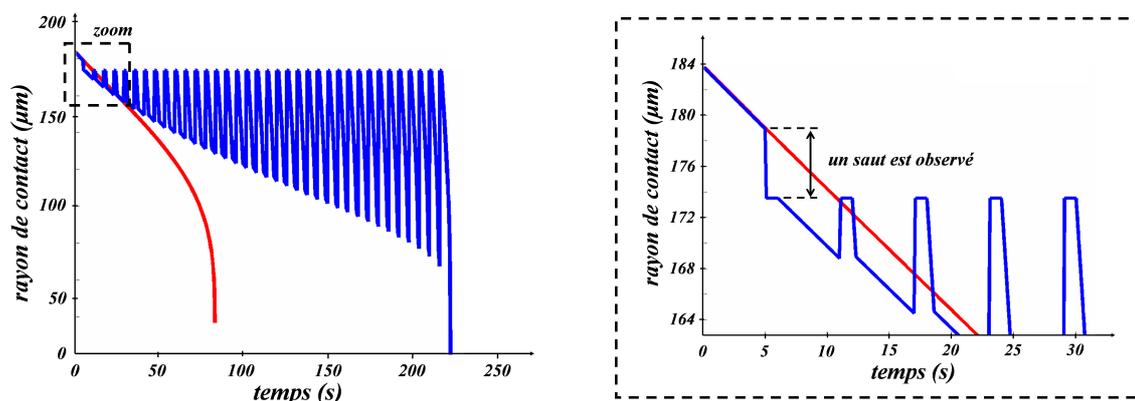


FIG. VI.25 – Evolutions du rayon de contact pour un chargement cyclique à effort imposé avec $w_1 = 46.4 \text{ mJ.m}^{-2}$ et $w_2 = 9 \text{ mJ.m}^{-2}$, calcul sous Matlab; courbe rouge, décharge continue $P' = 20 \text{ mN}$; courbe bleue, décharge : $t' = 5 \text{ s}$, $P' = 20 \text{ mN}$, charge : $t = 1 \text{ s}$, $P = 20 \text{ mN}$. A droite, zoom au niveaux des premiers cycles.

Cependant, nous avons quelques réserves sur le caractère intrinsèque de la valeur de l'énergie d'adhésion w_2 caractérisant la zone des liens rompus et cicatrisés. A notre sens, la valeur de w_2 dépend de chaque cas de sollicitation et ne peut pas être réutilisée pour décrire d'autres cas de sollicitation. Plus précisément, si l'on observe la figure VI.25 aux premiers cycles, une discontinuité dans l'évolution du rayon de contact est observée. Elle est due à la modélisation retenue. En effet, la valeur du rayon de contact initial sous une charge $P = 20 \text{ mN}$ selon la théorie de JKR est de $184 \text{ } \mu\text{m}$ pour $w = w_1 = 46.4 \text{ mJ.m}^{-2}$. Lors de la première décharge $P' = 20 \text{ mN}$, le rayon de contact diminue jusqu'à la valeur de $179 \text{ } \mu\text{m}$. En conservant $w_2 = 9 \text{ mJ.m}^{-2}$, le rayon de contact obtenu lors de la charge suivante est de $173.5 \text{ } \mu\text{m}$. Cette valeur est inférieure à celle obtenue à la fin de la première décharge! Ce qui entraîne une discontinuité dans l'évolution du rayon contact sans signification physique (zoom figure VI.25). Ainsi bien que le nombre de cycles et le temps de

rupture déterminés avec cette approche correspondent bien aux résultats expérimentaux, dans ce cas la valeur retenue du paramètre w_2 ne permet pas de caractériser le comportement de l'interface.

Une possibilité pour éviter ce « saut » est de reconsidérer la valeur de w_2 pour chaque cas de sollicitation à partir de la valeur expérimentale maximale du rayon lors des cycles. Pour la sollicitation $\{P' = 20 \text{ mN}, t' = 5 \text{ s}, P = 20 \text{ mN}, t = 1 \text{ s}\}$, un rayon de $179 \mu\text{m}$ est retrouvé à la fin de chaque phase de charge. Selon l'équation (II.7), la valeur de l'énergie d'adhésion correspondante est $\tilde{w}_2 = 20 \text{ mJ.m}^{-2}$. Les résultats obtenus avec ce choix sont présentés en figure VI.26. Le « saut » dans l'évolution du rayon de contact n'est plus observé. Cependant, au bout de quelques cycles, l'endommagement de l'interface se stabilise et la rupture complète n'est plus observée.

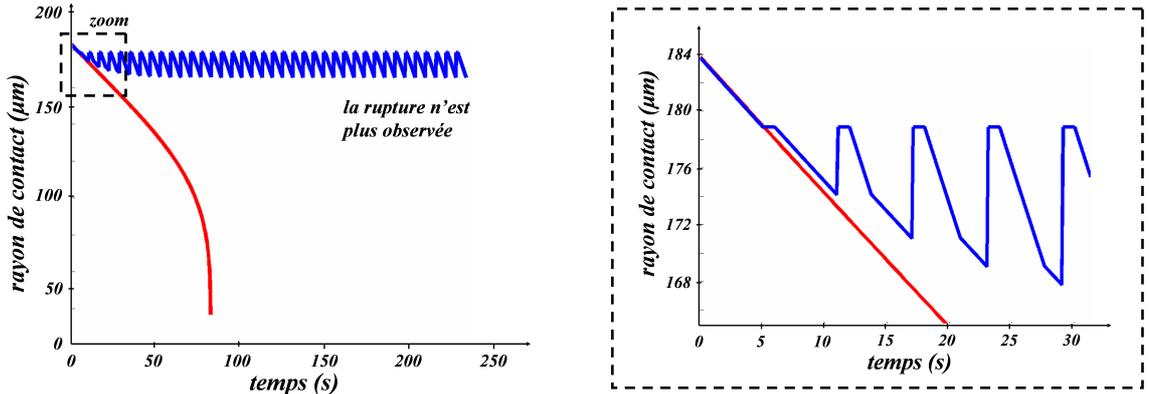


FIG. VI.26 – Evolutions du rayon de contact pour un chargement cyclique à effort imposé avec $w_1 = 46.4 \text{ mJ.m}^{-2}$ et $w_2 = 20 \text{ mJ.m}^{-2}$, calcul sous Matlab ; courbe rouge, décharge continue $P' = 20 \text{ mN}$; courbe bleue, décharge : $t' = 5 \text{ s}$, $P' = 20 \text{ mN}$, charge : $t = 1 \text{ s}$, $P = 20 \text{ mN}$. A droite, zoom au niveaux des premiers cycles.

Cette discussion nous permet de conclure que non seulement la valeur du paramètre w_2 est fonction de la valeur du rayon obtenu lors de la première décharge, donc de P' et t' , mais également du processus de cicatrisation des liens lors des différentes charges et donc des valeurs de P et t . En d'autres termes, lors de l'utilisation du modèle proposé par M. Barquins, il semble nécessaire de caractériser pour chacune des sollicitations une valeur appropriée de w_2 . A la différence de w_1 , la valeur de l'énergie d'adhésion w_2 ne représente donc pas une valeur intrinsèque du comportement de l'interface .

Dans la suite, nous étudions ces expériences à l'aide du modèle d'adhésion cicatrisante.

VI.3.2 Avec le modèle d'adhésion cicatrisante

Dans un premier temps, il est nécessaire de déterminer les valeurs des différents paramètres du modèle d'adhésion cicatrisante pour caractériser le comportement de l'interface considérée. Cette étude paramétrique, présentée dans la suite, est réalisée en considérant le cas de la décharge continue à $P' = 30 \text{ mN}$ et le cas de la sollicitation cyclique $\{P' = 30 \text{ mN}, t' = 5 \text{ s}, P = 30 \text{ mN}, t = 1 \text{ s}\}$. Pour ces cas, les courbes obtenues par application de l'approche de M. Barquins (figure VI.24) sont prises comme courbes de référence. Nous verrons que cette étude est complexe car les influences des paramètres du modèle d'adhésion cicatrisante sur le comportement global du contact sont étroitement liées.

Dans un second temps, une fois les valeurs des paramètres fixées, nous considérons différents cas de sollicitation traités par M. Barquins et D. Wehbi [14] et notamment le cas $\{P' = 20 \text{ mN}, t' = 5 \text{ s}, P = 20 \text{ mN}, t = 1 \text{ s}\}$. Ce dernier point, présenté dans la suite, permet de situer notre approche vis-à-vis de celle développée par M. Barquins introduisant deux valeurs d'énergie d'adhésion pour caractériser le comportement de l'interface.

Modélisation de l'expérience

Dans l'approche de M. Barquins, les dissipations viennent du comportement volumique du bloc en polyuréthane et sont considérées localisées au niveau de l'interface. Dans notre approche, deux sources de dissipation sont distinguées : la *dissipation surfacique* et la *dissipation volumique*. A l'échelle des molécules, elles ont la même origine. Elles sont issues du glissement et de l'enchevêtrement des chaînes moléculaires présentes au sein du polyuréthane ou formées au niveau de l'interface. Cependant, leurs effets peuvent être différents à l'échelle des corps. Ainsi, selon les travaux de F. Saulnier [101] et F. Saulnier et al. [102] ou les travaux expérimentaux de S. Perutz et al. [90] nous avons considéré une dissipation propre au comportement de l'interface et une dissipation propre au comportement des corps.

Pour ce cas d'étude des expériences de M. Barquins et D. Wehbi, nous proposons de caractériser les effets de retard de la rupture du contact uniquement par l'introduction de la *dissipation surfacique*. Etant donnée la taille de la zone de contact, de l'ordre de 200 à 240 μm pour une charge P variant de 30 à 40 mN , par rapport à celle des corps, de l'ordre de quelques centimètres, il nous semble légitime, pour ces cas de contact, de considérer un comportement élastique pour rendre compte de la déformation des corps. Nous considérons de plus un contact sans frottement. La dissipation est donc introduite au niveau de l'interface par l'intermédiaire du paramètre de *viscosité surfacique* b du modèle d'adhésion cicatrisante.

Les géométries des corps retenues pour simuler cette expérience sont très proches de celles de la figure VI.16. Les différences portent sur les dimensions du bloc. Dans ce cas, elles sont telles que $h = 2 \text{ mm}$ et $l = 2 \text{ mm}$. Le comportement du polyuréthane est considéré élastique de module d'Young $E^1 = 5.4 \text{ MPa}$ et nous considérons pour la suite $\nu^1 = 0.48$ et $\rho^1 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$. La sphère, de rayon $R = 2.19 \text{ mm}$, sera considérée rigide et $\rho^2 = 2500 \text{ kg.m}^{-3}$. Dans cette étude, nous conservons par rapport à la figure VI.16 une modélisation 2D à symétrie de révolution et les conditions d'encastrement de la face inférieure du bloc. Par contre, sur la surface située en $r = 2 \text{ mm}$ plus aucune condition n'est imposée. Ce choix fait suite aux résultats obtenus lors de l'étude de l'indentation de la bille dans le plan sous un effort $P = 30 \text{ mN}$. Sans conditions aux limites sur cette face, les résultats obtenus sur la distance de pénétration et le rayon de contact sont en meilleur accord avec les résultats de la théorie JKR.

Mise en oeuvre numérique

Comme nous l'avons déjà noté, l'étude de ce type de problème nécessite des maillages fins afin de décrire correctement les solutions sur la zone périphérique du contact (notamment la formation du col d'adhésion).

La discrétisation du bloc est ainsi proche de celle présentée en figure VI.16. Cependant, dans ce cas, des valeurs de rayon de contact de 200 à 240 μm sont attendues. La discrétisation de la zone potentielle d'interaction $\Gamma_{0,C}^1$ est donc différente de celle des zooms de la figure VI.16. Afin de réduire les temps de calcul et après une étude sur l'influence de la taille des éléments de la zone d'interaction, nous avons retenu une discrétisation $\bar{\Gamma}_{0,C}^1$ constituée de 880 noeuds ($n_p = 1$) pour une taille minimale des mailles de 0.25 μm . La taille du problème est alors de 20800 degrés de liberté, auxquels s'ajoutent les degrés de liberté liés aux 880 points d'interaction considérés.

Comme nous l'avons également discuté lors de la remarque au paragraphe précédent sur la discrétisation temporelle, ces maillages fins et le caractère « raide » du comportement du modèle d'adhésion cicatrisante (son rayon d'action est de l'ordre du micromètre ici) ont des conséquences sur la discrétisation temporelle. Un compromis entre temps de calcul, stabilité de la résolution et précision de la solution nous a conduit à choisir $\Delta T = 5.10^{-2} \text{ s}$. Pour cette valeur, les temps de calcul sont de l'ordre de 1 à 3 jours suivant le nombre de cycles de la sollicitation.

Pour la méthode d'intégration, on utilise $\theta = 1$. Ceci nous assure un amortissement numérique souhaitable car nous utilisons une résolution dynamique pour des chargements à variation lente (de l'ordre de la seconde) et nous souhaitons éliminer les oscillations numériques de hautes fréquences. Ceci a été testé et discuté au paragraphe VI.2.

Les valeurs des critères d'arrêt évoquées lors de l'étude du paragraphe précédent sont conservées (10^{-5} sur la convergence des réactions d'interaction et des boucles de point fixe).

Enfin, nous précisons le choix réalisé pour définir la valeur du rayon « de contact ». Comme nous l'avons observé lors de l'étude de la formation du col d'adhésion dans le paragraphe précédent : *dans le cas de contact avec interaction, la notion de rayon de contact est ambiguë*. Elle est pourtant essentielle dans cette étude puisqu'elle représente la quantité d'intérêt en vue de valider les résultats de notre approche. Selon les résultats obtenus au paragraphe précédent, la zone « de contact » ne se limite pas à la zone où $g = 0$ pour les surfaces en vis-à-vis. De plus, considérer que la zone « de contact » correspond à la zone où $T_N \neq 0$ est incorrect car alors sa taille serait infinie. En effet, l'interaction est non nulle en tout point des surfaces en vis-à-vis. Le choix le plus correct correspond à observer à chaque instant la déformée du plan et à repérer la position du point marquant le col d'adhésion. C'est ce qui a été réalisé lors de l'identification du rayon d'adhésion au paragraphe précédent (figure VI.22). Pour cette étude, où nous nous intéressons à l'évolution du rayon « de contact », un tel post-traitement serait trop lourd à mettre en place, car, mise à part l'observation visuelle, nous n'avons trouvé aucun critère pour repérer la position du point marquant le col d'adhésion. Ainsi, nous proposons comme définition de la zone « de contact » la zone où l'intensité d'adhésion β est supérieure ou égale à 0.95. Avec cette définition et après vérification à posteriori sur quelques cas, la valeur du rayon « de contact » correspond à $\pm 1 \mu m$ à la valeur de la position du point marquant le col d'adhésion.

Notons enfin que lors d'une sollicitation cyclique, des liens adhésifs précédemment endommagés n'ont pas nécessairement le temps de cicatriser durant la remise en contact des surfaces des corps. Dans ce cas, la définition retenue du rayon de la zone « de contact » n'est pas correcte. Pour y remédier, nous prendrons pour la suite comme définition de la valeur du rayon « de contact », notée $r_{contact}$, la valeur de la position obtenue à partir l'expression suivante :

$$r_{contact} = \max(r_{\beta \geq 0.95}, r_{g=0}), \quad (VI.1)$$

où $r_{\beta \geq 0.95}$ définit la valeur de la position correspondant à la frontière de la zone où $\beta \geq 0.95$ et où $r_{g=0}$ définit la valeur de la position correspondant à la frontière de la zone où $g = 0$.

Etude paramétrique

L'objectif est de déterminer les valeurs des paramètres w , C_N et b du modèle d'adhésion cicatrissante dans le cadre de la modélisation précédente. Nous avons décidé de prendre $w = w_1 = 46.4 \text{ mJ.m}^{-2}$ selon la théorie JKR. Il reste à déterminer C_N et b . Nous allons procéder de la manière suivante :

- détermination de C_N en considérant $b = 0$ sur la configuration initiale de l'expérience (application de la charge $P = 30 \text{ mN}$ et établissement de la position d'équilibre),
- identification de b afin de retrouver d'une part le temps à rupture pour une décharge continue et d'autre part le temps à rupture pour une sollicitation cyclique.

Ainsi, nous nous intéressons premièrement à la position initiale de contact entre la bille de verre et le bloc polyuréthane sous la charge $P = 30 \text{ mN}$. Expérimentalement, la position initiale de contact est obtenue après un temps de 10 minutes [14]. Cette étape permet de déterminer la valeur

de C_N en considérant $b = 0$, car le temps de contact est grand devant le temps de relaxation des liens adhésifs. Le résultat sur la position initiale est donc indépendant de la valeur de b . Les simulations de cette étape comportent deux chargements où $\Delta T = 5.10^{-2}$. Le premier correspond à la mise en place de l'effort $P = 30 \text{ mN}$ en 4 itérations. Il est suivi du deuxième chargement maintenant $P = 30 \text{ mN}$ pendant généralement 80 itérations afin que la position d'équilibre soit obtenue. Le temps de calcul est de l'ordre de 6 heures⁵.

Les résultats des simulations réalisées sont présentés en figure VI.27 pour différentes valeurs de C_N variant de 10^{12} à 10^{14} N.m^{-3} . D'après cette figure, $C_N = 10^{12} \text{ N.m}^{-3}$ est le meilleur choix pour caractériser le comportement de l'interface. Le rayon de contact issu de la définition (VI.1) est alors de $207 \mu\text{m}$. Cette valeur est en accord avec celle obtenue par la théorie de JKR de $206.5 \mu\text{m}$.

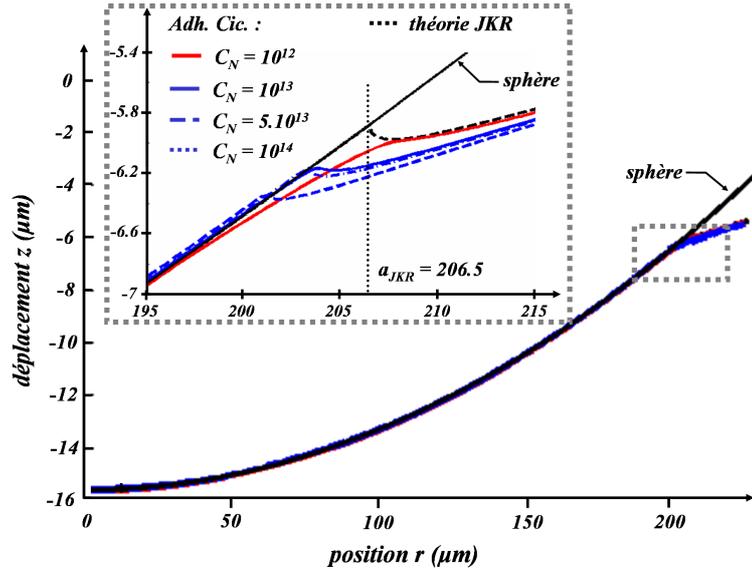


FIG. VI.27 – Comparaisons des profils de la déformée obtenus avec la théorie de JKR et avec le modèle d'adhésion cicatrisante (C_N varie de 10^{12} à 10^{14} N.m^{-3}). Les valeurs des rayons de contact diffèrent au plus de $5.5 \mu\text{m}$.

Deuxièmement, l'objectif est de déterminer la valeur du paramètre b avec w et C_N fixées. Cette étude est réalisée à l'aide des résultats portant sur le temps de rupture du contact lors de l'application de l'effort de décharge continue $P' = 30 \text{ mN}$ ou lors de l'application de la sollicitation $\{P' = 30 \text{ mN}, t' = 5 \text{ s}, P = 30 \text{ mN}$ et $t = 1 \text{ s}\}$. Deux simulations sont donc considérées à partir de la position initiale précédente.

La *simulation I* concerne l'application de l'effort de décharge continue $P' = 30 \text{ mN}$. Selon les résultats obtenus par application de la théorie de M. Barquins (courbe *I* figure VI.24), le temps de rupture est de 46 s . Notre simulation sous LMGC90, dont les résultats sont présentés par la suite, comporte deux chargements. Le premier correspond à la mise en place de l'effort de décharge $P' = 30 \text{ mN}$ en 0.2 s avec $\Delta T = 5.10^{-2}$. Il est suivi du deuxième chargement, où $\Delta T = 2.10^{-1}$, maintenant $P' = 30 \text{ mN}$ jusqu'à la rupture du contact. Le temps de calcul est de l'ordre de 33 heures ⁶.

La *simulation II* concerne l'application de la sollicitation $\{P' = 30 \text{ mN}, t' = 5 \text{ s}, P = 30 \text{ mN}$ et $t = 1 \text{ s}\}$. Selon les résultats obtenus par application de la théorie de M. Barquins (courbe *II* figure VI.24), le temps de rupture est de 71 s après 11 cycles de sollicitation. Notre simulation sous

⁵sur une station de travail 3 GHz Dual Core avec 2Go de Ram et 1 Go de cache.

⁶sur une station de travail 3 GHz Dual Core avec 2Go de Ram et 1 Go de cache.

LMGC90, dont les résultats sont présentés par la suite, comporte quatre chargements par cycle décrits par la figure VI.28. Le premier correspond à la mise en place de l'effort de décharge $P' = 30 \text{ mN}$ en 0.2 s avec $\Delta T = 5.10^{-2}$. Il est suivi du deuxième chargement, où $\Delta T = 2.10^{-1}$, maintenant $P' = 30 \text{ mN}$ pendant 4.8 s . Le troisième chargement consiste à l'application d'un effort de charge $P = 30 \text{ mN}$ en 0.2 s avec $\Delta T = 5.10^{-2}$. Enfin, le quatrième chargement maintient l'effort $P = 30 \text{ mN}$ pendant 0.8 s avec $\Delta T = 5.10^{-2}$. Ces quatre chargements sont répétés jusqu'à la rupture du contact. Le temps de calcul est de l'ordre de 3 jours et 10 heures pour 11 cycles⁷.

Dans un premier temps, les résultats de la *simulation I* permettent de déterminer une valeur de b . Une fois cette valeur déterminée, le triplet des valeurs retenues des paramètres du modèle d'adhésion cicatrisante est validé avec le résultat de la *simulation II*.

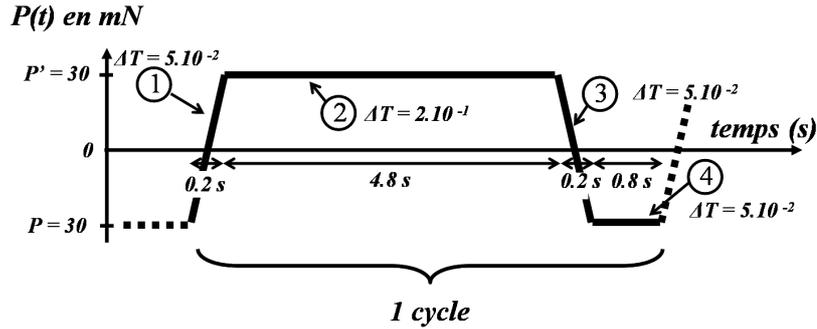


FIG. VI.28 – Description des quatre chargements considérés pour un cycle de la sollicitation $\{P' = 30 \text{ mN}, t' = 5 \text{ s}, P = 30 \text{ mN} \text{ et } t = 1 \text{ s}\}$.

Avec $w = 46.4 \text{ mJ.m}^{-2}$ et $C_N = 10^{12} \text{ N.m}^{-3}$ fixées, il faut prendre $b = 25 \text{ N.s.m}^{-1}$ pour que le temps de rupture dans le cas de décharge continue à $P' = 30 \text{ mN}$ soit égal à 46 s . La figure VI.29 présente pour ces valeurs les résultats des *simulations I* et *II*. Le temps de rupture dans le cas de la *simulation II* est de 53 s . Dans ce cas, la cicatrisation de l'interface ne joue aucun rôle sur le comportement global alors qu'une augmentation de l'ordre de 10^{-3} sur les valeurs de β est observée pendant les phases de charge à $P = 30 \text{ mN}$. L'interface semble uniquement s'endommager puisque la différence de temps de rupture entre les deux courbes des *simulations I* et *II* est de 8 s , un temps égal à celui lié aux sollicitations de charge de la bille sur le plan pour 8 cycles. Des résultats similaires à ceux de la figure VI.29 sont obtenus en modélisant le comportement de l'interface par le modèle RCCM (où $\dot{\beta} \leq 0$ est imposé), ce qui confirme la faible influence de la cicatrisation des liens sur le comportement global du contact pour ces valeurs des paramètres.

La valeur retenue de b est trop grande pour que la cicatrisation des liens adhésifs influe sur le comportement global du contact. En effet, b représente d'une manière générale le temps caractéristique d'endommagement et de cicatrisation des liens. Dans le cas de la sollicitation $\{P' = 30 \text{ mN}, t' = 5 \text{ s}, P = 30 \text{ mN} \text{ et } t = 1 \text{ s}\}$, pour observer un effet cicatrisant suffisant, ce temps caractéristique doit être de l'ordre de la seconde. Ainsi, lors de la phase de charge $P = 30 \text{ mN}$ durant 1 s des liens pourront être cicatrisés de manière significative. La difficulté est que le lien entre la valeur de b et le temps caractéristique de cicatrisation de l'interface n'est pas direct sur cet exemple où 880 points de contact interviennent.

Cependant modifier la valeur de b a des conséquences sur le résultat de la *simulation I*. Le temps de rupture est alors inférieur à 46 s . Nous nous sommes aperçus qu'il était nécessaire d'augmenter C_N si b était diminué pour conserver le résultat de la *simulation I*. En effet, si b diminue, l'interface est plus fragile. Une manière de la « renforcer » est d'augmenter la valeur de l'effort à fournir pour

⁷sur une station de travail 3 GHz Dual Core avec 2Go de Ram et 1 Go de cache.

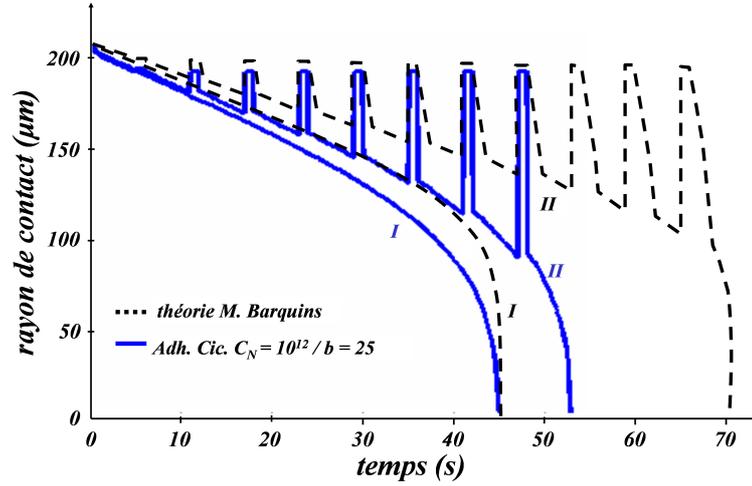


FIG. VI.29 – Evolutions du rayon de contact pour le modèle d’adhésion cicatrisante (en bleu) et d’après la théorie de M. Barquins (en noir); courbes I, décharge continue $P' = 30 \text{ mN}$; courbes II, décharge : $t' = 5 \text{ s}$, $P' = 30 \text{ mN}$, charge : $t = 1 \text{ s}$, $P = 30 \text{ mN}$.

débuter l’endommagement. Cette valeur correspond, pour toute valeur de b , à $\sqrt{w C_N}$. Ainsi, pour w fixé, en augmentant C_N l’interface semble plus résistante à un effort imposé. Par contre, avec C_N élevé, le processus d’endommagement, une fois amorcé, est plus rapide.

Parmi les courbes de la figure VI.27, la valeur de $C_N = 10^{13}$ permet d’obtenir une position initiale proche de celle de la théorie JKR, avec un rayon de contact égal à $204.5 \mu\text{m}$. Avec $w = 46.4 \text{ mJ.m}^{-2}$ et $C_N = 10^{13} \text{ N.m}^{-3}$ fixées, il faut prendre $b = 2.5 \text{ N.s.m}^{-1}$ pour que le temps de rupture de la *simulation I* soit égal à 46 s . Le temps de rupture dans le cas de la *simulation II* est alors de 53 s . Dans ce cas également l’effet de la cicatrisation est faible, les résultats sont identiques à ceux du cas $C_N = 10^{12} \text{ N.m}^{-3}$, $b = 25 \text{ N.s.m}^{-1}$.

Nous considérons donc $C_N = 10^{14} \text{ N.m}^{-3}$. Dans ce cas, le rayon de contact a pour valeur $201 \mu\text{m}$ (figure VI.27). La figure VI.30 présente les résultats des *simulations I* et *II* pour $C_N = 10^{14} \text{ N.m}^{-3}$ et $b = 0.1 \text{ N.s.m}^{-1}$.

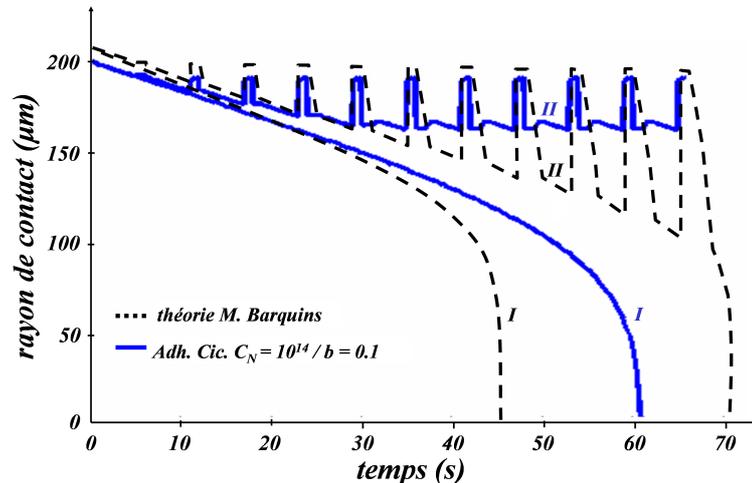


FIG. VI.30 – Evolutions du rayon de contact pour le modèle d’adhésion cicatrisante (en bleu) et d’après la théorie de M. Barquins (en noir); courbes I, décharge continue $P' = 30 \text{ mN}$; courbes II, décharge : $t' = 5 \text{ s}$, $P' = 30 \text{ mN}$, charge : $t = 1 \text{ s}$, $P = 30 \text{ mN}$.

Dans ce cas, la cicatrisation influe fortement sur le comportement global du contact. En effet dans le cas de la *simulation II*, même pour 11 cycles la rupture n'est plus observée. La cicatrisation, qui intervient durant les phases de charge et au commencement de la phase de décharge, est suffisante pour que l'évolution du rayon de contact soit stabilisée.

Observation des effets de la cicatrisation

Ces effets sont montrés sur la figure VI.31 où les résultats du modèle RCCM et du modèle d'adhésion cicatrisante sont comparés ($C_N = 10^{14} \text{ N.m}^{-3}$ et $b = 0.1 \text{ N.s.m}^{-1}$). Ils influent d'une manière générale sur la forme des cycles de la solution : d'une part, dans les phases de compression nous observons une augmentation du rayon de contact au lieu d'un palier, d'autre part, dans les phases de traction une augmentation est également observée au lieu d'une unique diminution. Ces effets sont observés sur l'ensemble des figures VI.30 à VI.33.

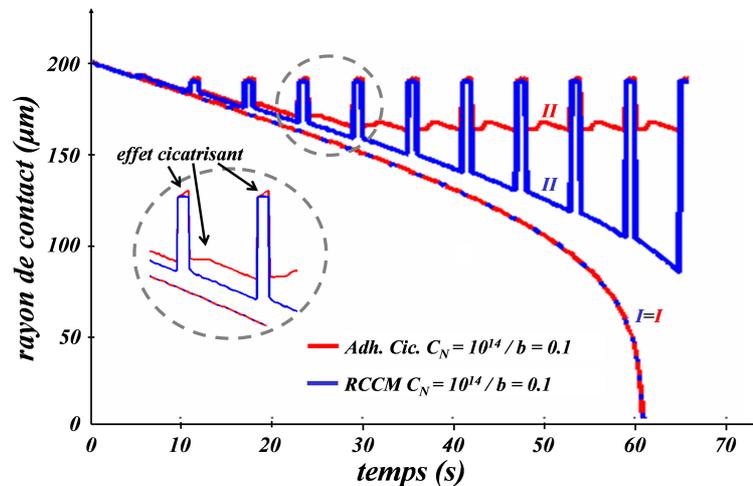


FIG. VI.31 – Evolutions du rayon de contact pour le modèle d'adhésion cicatrisante (en rouge) et pour le modèle RCCM (en bleu) ; courbes *I*, décharge continue $P' = 30 \text{ mN}$; courbes *II*, décharge : $t' = 5 \text{ s}$, $P' = 30 \text{ mN}$, charge : $t = 1 \text{ s}$, $P = 30 \text{ mN}$.

Les résultats obtenus avec ces dernières valeurs ne sont pas satisfaisants. D'une part, la rupture n'est pas observée dans le cas de la *simulation II* et d'autre part, le temps de rupture de la *simulation I*, de l'ordre de 60 s , est trop élevé. Ce cas est cependant intéressant car il rend compte de la compétition qui existe entre les processus d'endommagement et les processus de cicatrisation. En effet, selon la courbe *I* de la figure VI.30, il faudrait diminuer b pour ajuster le temps de rupture et selon la courbe *II* de la figure VI.30, il faudrait augmenter b pour réduire l'effet cicatrisant. Sur cet exemple, $C_N = 10^{14} \text{ N.m}^{-3}$ semble correspondre à une valeur seuil à partir de laquelle l'évolution du paramètre b ne permet pas d'atteindre des résultats corrects pour les *simulations I* et *II*. Pour obtenir le meilleur compromis entre les résultats de ces simulations, il est nécessaire sur cet exemple d'ajuster de manière simultanée C_N et b .

Nous retenons $b = 0.1 \text{ N.s.m}^{-1}$ afin de conserver une influence de la cicatrisation sur le comportement de l'interface et nous diminuons la valeur de C_N en vue de « fragiliser » l'interface.

La figure VI.32 présente les résultats des *simulations I* et *II* pour $C_N = 5.10^{13} \text{ N.m}^{-3}$ et $b = 0.1 \text{ N.s.m}^{-1}$. La valeur du rayon de contact de la position initiale est alors de $203 \mu\text{m}$ (figure VI.27). Les résultats ne sont pas en accord avec les résultats de la théorie de M. Barquins pour les deux simulations. L'effet cicatrisant est trop prononcé et la rupture du contact n'est pas observée lors de la *simulation II*. Cependant, pour cette valeur de C_N , il semble qu'en augmentant la valeur de b les résultats des deux simulations peuvent être améliorés.

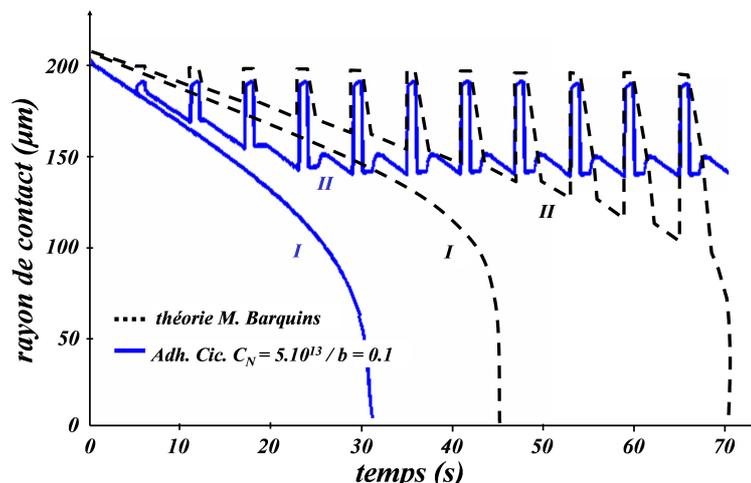


FIG. VI.32 – Evolutions du rayon de contact pour le modèle d’adhésion cicatrisante (en bleu) et d’après la théorie de M. Barquins (en noir); courbes *I*, décharge continue $P' = 30 \text{ mN}$; courbes *II*, décharge : $t' = 5 \text{ s}$, $P' = 30 \text{ mN}$, charge : $t = 1 \text{ s}$, $P = 30 \text{ mN}$.

Il s’agit donc de déterminer la valeur de b pour $C_N = 5.10^{13} \text{ N.m}^{-3}$. Dans ce cas, la valeur de b est telle que $b \in [0.1, 1]$. En effet, si $b > 1$, le temps caractéristique du processus de cicatrisation des liens adhésifs est trop long devant le temps caractéristique de la sollicitation (égal à 1 s lors de la phase de charge). Il est intéressant d’observer que, sur cet exemple, la valeur de b est de l’ordre de la valeur du temps caractéristique de la sollicitation lors de la phase de charge.

Cette particularité s’explique de la façon suivante. Pour un point d’interaction, la valeur de b est directement liée au temps caractéristique de cicatrisation ou d’endommagement du lien. Sur cet exemple, où plus de cent points d’interaction sont sollicités à chaque chargement, le lien entre la valeur de b et le temps caractéristique du processus d’endommagement et de cicatrisation de l’interface semble plus complexe. C’est effectivement le cas lors des phases de décharge P' , correspondant à un endommagement de l’interface, où de nombreux liens, sollicités les uns après les autres, participent à l’interaction et au maintien du contact. Lors des phases de charge P , tous les liens auparavant endommagés sont sollicités de la même manière car les surfaces en vis-à-vis sont mises de nouveau en contact de manière quasi-simultanée. Si bien qu’en chaque point d’interaction, le temps caractéristique de la sollicitation est le même et il est de l’ordre de 1 s . Dans ce cas, le temps caractéristique de cicatrisation au niveau d’un point d’interaction est équivalent au temps caractéristique de cicatrisation de l’interface entière comprenant plus de 880 points d’interaction. Sur cet exemple et pour la phase de charge P , la valeur de b est donc de l’ordre de la valeur du temps caractéristique de la sollicitation.

Finalement, avec $C_N = 5.10^{13} \text{ N.m}^{-3}$ et $b = 0.3 \text{ N.s.m}^{-1}$, les résultats des *simulations I* et *II*, donnés en figure VI.33, approchent ceux de la théorie de M. Barquins. Le temps de rupture de la *simulation I* est de 51 s (46 s pour la théorie), celui de la *simulation II* est de 65 s obtenu après 10 cycles de chargement (71 s et 11 cycles en théorie). Le décalage du aux effets de cicatrisation de l’interface est de l’ordre de 9 secondes. Il correspond à la différence de temps entre les temps de rupture des deux simulations, ici 19 s , auquel se retranchent les 10 s liées aux phases de charge des 10 cycles. Une fois de plus, la compétition entre le processus de cicatrisation et d’endommagement est importante. La valeur de b est trop grande d’après le résultat de la *simulation I* et est trop faible d’après le résultat de la *simulation II*.

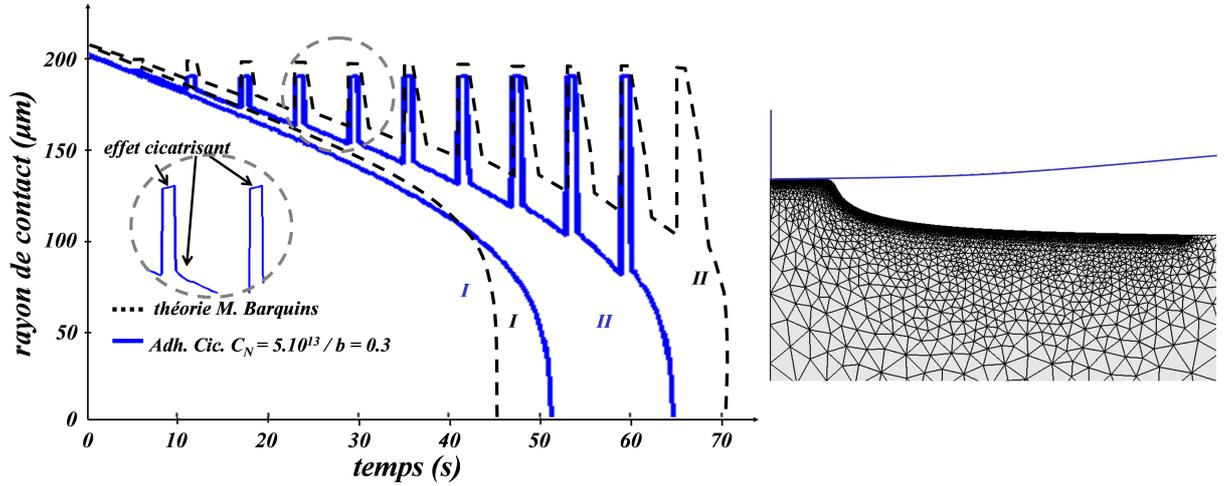


FIG. VI.33 – Evolutions du rayon de contact pour le modèle d’adhésion cicatrisante (en bleu) et d’après la théorie de M. Barquins (en noir); courbes *I*, décharge continue $P' = 30 \text{ mN}$; courbes *II*, décharge : $t' = 5 \text{ s}$, $P' = 30 \text{ mN}$, charge : $t = 1 \text{ s}$, $P = 30 \text{ mN}$. A droite, zoom au niveau de l’interface de la déformée du plan au temps de rupture de la courbe *II*.

Remarquons que, d’une part, pour $b = 0.25 \text{ N.s.m}^{-1}$ (figure VI.34), le temps de rupture de la *simulation I* est identique à celui théorique (46 s), mais dans ce cas le temps de rupture de la *simulation II* est de 61 s après 10 cycles; d’autre part, pour $b = 0.35 \text{ N.s.m}^{-1}$ (figure VI.34), le temps de rupture de la *simulation II* est identique à celui théorique (71 s après 11 cycles), mais dans ce cas le temps de rupture de la *simulation I* est de 52 s.

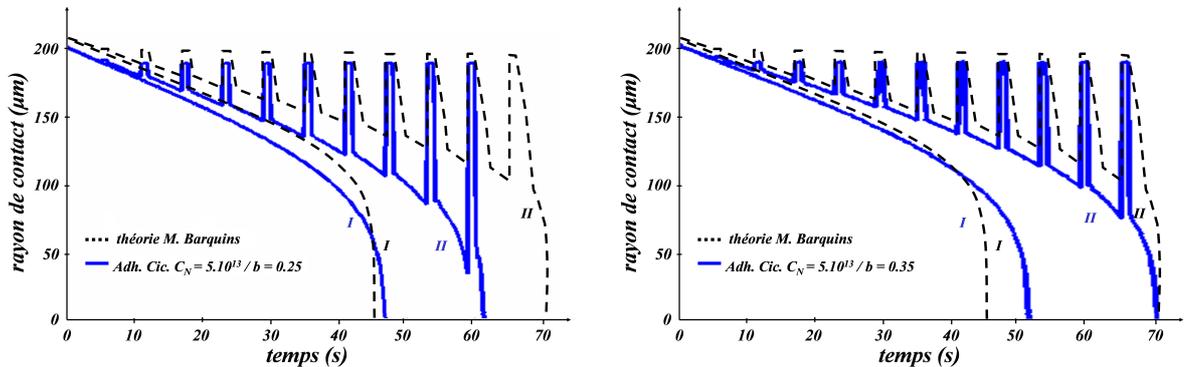


FIG. VI.34 – Evolutions du rayon de contact pour le modèle d’adhésion cicatrisante (en bleu) et d’après la théorie de M. Barquins (en noir); courbes *I*, décharge continue $P' = 30 \text{ mN}$; courbes *II*, décharge : $t' = 5 \text{ s}$, $P' = 30 \text{ mN}$, charge : $t = 1 \text{ s}$, $P = 30 \text{ mN}$. A gauche, $b = 0.25 \text{ N.s.m}^{-1}$, le temps de rupture de la *simulation I* est retrouvé; à droite, $b = 0.35 \text{ N.s.m}^{-1}$, le temps de rupture de la *simulation II* est retrouvé.

Remarque : la quantité « rayon de contact » portée en ordonnée sur les courbes précédentes (figures VI.29 - VI.34) n’est pas simple à définir. Nous avons fait le choix de considérer la rupture du contact lorsque $\beta < 0.95$ (selon la définition (VI.1)). La figure VI.33 présente la déformée du plan au temps $t = 65 \text{ s}$. Selon cette figure, les interactions encore présentes influent fortement sur la déformée du plan et la perte de contact selon la définition (VI.1) semble contestable. En poursuivant la simulation, nous avons remarqué que l’influence de l’adhésion sur la déformée du plan était négligeable lorsque $\beta < 10^{-5}$ (les corps sont alors effectivement séparés). En retenant $\beta < 10^{-5}$ comme critère de rupture, le temps de rupture est de 52 s pour la *simulation I* et de 67 s au bout de 10 cycles pour la *simulation II*. La dépendance des valeurs des temps de rupture au critère de la définition (VI.1) est donc faible.

Le comportement global de l'évolution du contact peut donc être approché en modélisant le comportement de l'interface avec le modèle d'adhésion cicatrisante dans le cas de la sollicitation $\{P' = 30 \text{ mN}, t' = 5 \text{ s}, P = 30 \text{ mN} \text{ et } t = 1 \text{ s}\}$. Nous proposons dans la suite d'étudier différents cas de sollicitation cyclique en conservant les valeurs suivantes des paramètres du modèle d'adhésion cicatrisante : $w = 46.4 \text{ mJ.m}^{-2}$, $C_N = 5.10^{13} \text{ N.m}^{-3}$ et $b = 0.3 \text{ N.s.m}^{-1}$.

Etude de différents cas de sollicitation

Après la phase d'identification des paramètres que nous venons de mener avec de larges discussions, nous abordons ici une phase de validation du modèle. Avec les valeurs des paramètres choisies, nous allons calculer la solution pour différents cas de sollicitation cyclique et la comparer aux résultats expérimentaux.

Nous considérons pour $w = 46.4 \text{ mJ.m}^{-2}$, $C_N = 5.10^{13} \text{ N.m}^{-3}$ et $b = 0.3 \text{ N.s.m}^{-1}$ les différents cas de sollicitation cyclique présentés dans le tableau VI.6. Les valeurs des pas de temps lors des différentes phases des sollicitations sont identiques à ceux retenus pour la *simulation II*. Les différentes sollicitations se distinguent au niveau des temps de décharge t' et des valeurs des amplitudes de chargements P et P' . Le tableau VI.7 donne les résultats de ces simulations.

	P' (mN)	t' (s)	P (mN)	t (s)
sollicitation 1	40	5	40	1
sollicitation 2	30	10	30	1
sollicitation 3	30	6	30	1
<i>identification</i>	30	5	30	1
sollicitation 4	20	5	20	1

TAB. VI.6 – Différents cas de sollicitation cyclique considérés, la sollicitation retenue lors de l'étude paramétrique est rappelée.

	Nombre de cycles avant rupture du contact		
	Résultats LMGC90	Théorie M. Barquins	Expérience
sollicitation 1	8	6	6
sollicitation 2	5	5	5
sollicitation 3	9	9	9
<i>identification</i>	10	11	11
sollicitation 4	14	36	40

TAB. VI.7 – Résultats des simulations pour les différents cas de sollicitation et comparaison aux résultats de M. Barquins et D. Wehbi [14].

D'une manière générale, les résultats obtenus permettent d'interpréter le comportement global du contact pour les différents cas de sollicitation en conservant les valeurs des paramètres w , C_N et b . Pour les *sollicitations* 2 et 3 où seuls les temps de décharge t' sont modifiés le même nombre de cycles est retrouvé. Les résultats de ces simulations sont données en figure VI.35.

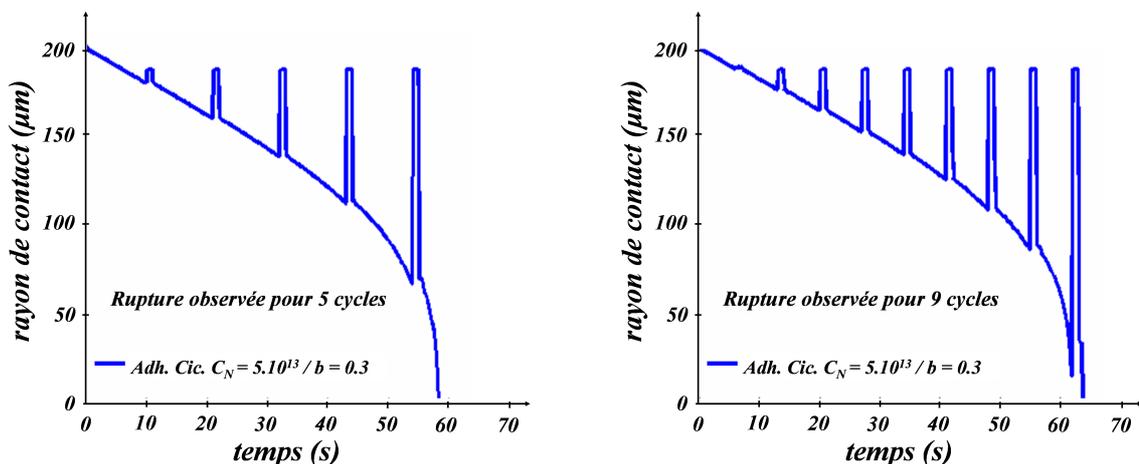


FIG. VI.35 – Evolutions des rayons de contact pour le modèle d’adhésion cicatrisante. A gauche, cas de la *sollicitation 2* ($t' = 10$ s). A droite, cas de la *sollicitation 3* ($t' = 6$ s).

Pour les simulations dont les amplitudes des efforts varient les résultats sont moins satisfaisants.

Dans le cas de la *sollicitation 1*, la valeur du rayon de contact de la position initiale, obtenue après un chargement $P = 40$ mN, est de $220 \mu\text{m}$. Elle est en bon accord avec celle issue de la théorie de JKR de valeur $224 \mu\text{m}$. Cependant, la rupture est obtenue au bout de 8 cycles (6 expérimentalement et selon la théorie de M. Barquins).

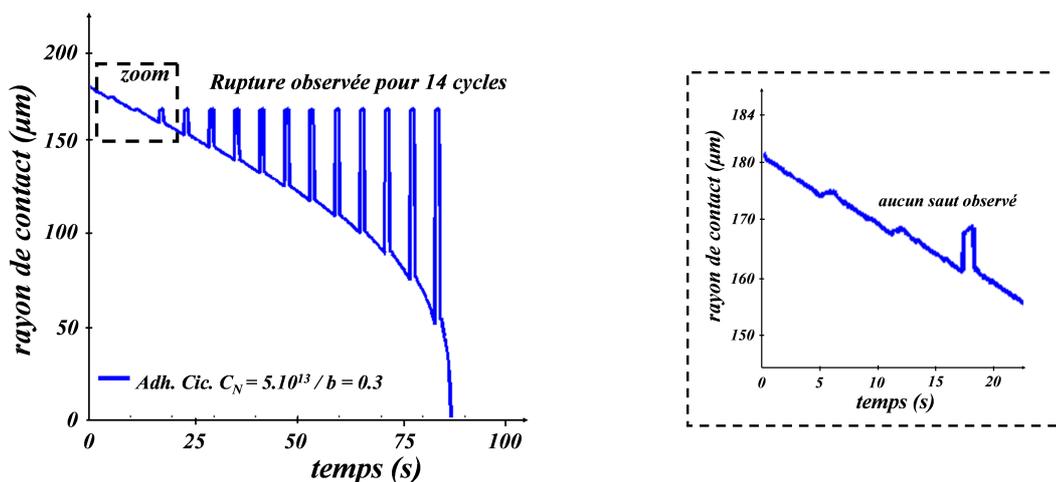


FIG. VI.36 – Evolutions du rayon de contact pour le modèle d’adhésion cicatrisante (en bleu) et d’après la théorie de M. Barquins (en noir); courbes *I*, décharge continue $P' = 20$ mN; courbes *II*, *sollicitation 4*. A droite, zoom aux premiers cycles.

Les résultats de la *sollicitation 4* nous posent quelques problèmes. L’accord est correct pour la position initiale où la valeur du rayon de contact est de $180.5 \mu\text{m}$ comparée à celle de la théorie JKR de $184 \mu\text{m}$. La figure VI.36 montre que l’évolution du rayon de contact lors des premiers cycles semble plus acceptable que celle issue de la théorie de M. Barquins (absence de saut, zoom de la figure VI.36). Cependant, la rupture est observée au bout de 14 cycles au lieu de 36 cycles selon la théorie de M. Barquins. Actuellement nous n’avons pas conclu sur les raisons de cet écart. Quelques pistes nous semblent à suivre : il serait intéressant, coté expérimental, d’obtenir une analyse plus détaillée de la solution pour ce cas de faible charge, et coté modèle, d’effectuer l’identification des paramètres sur un autre cas de charge que celui considéré ($P = 30$ mN, $P' = 30$ mN). Il est possible que les paramètres identifiés sur le cas de la *sollicitation 4* puissent convenir pour interpréter les autres cas de charge. La prise en compte de la viscoélasticité du comportement du polyuréthane serait également un point à considérer.

Conclusions de l'étude

Les résultats obtenus lors de l'étude paramétrique sur les temps à rupture du contact (t^I pour la *simulation I* et t^{II} pour la *simulation II*) sont rappelés dans le tableau VI.8.

Valeurs des paramètres C_N ($N.m^{-3}$), b ($N.s.m^{-1}$)	Résultats r_{init} (μm), t^I (s), t^{II} (s)	Observations
de $C_N = 10^{12}$, $b = 25$ à $C_N = 10^{13}$, $b = 2.5$	$r_{init} = 207$ à 205 $t^I = 46$ $t^{II} = 54$ (8 cycles) figure VI.29	aucun effet de la cicatrisation sur le comportement global, b est trop élevé devant le temps de charge
$C_N = 5.10^{13}$, $b = 0.1$ $b = 0.2$ à 0.25	$r_{init} = 203$, $t^I = 30$ rupture non observée figure VI.32 $r_{init} = 203$, $t^I = 42$ à 46 $t^{II} = 57$ à 61 (9 à 10 cycles)	l'augmentation de b permet d'améliorer les valeurs de t^I et t^{II}
$C_N = 5.10^{13}$ $b = 0.3$	$r_{init} = 203$, $t^I = 51$ $t^{II} = 65$ (10 cycles) figure VI.33	meilleur compromis pour les valeurs de C_N et b avec la remarque liée à la notion de rupture du rayon de contact (déf. (VI.1))
$C_N = 10^{14}$ $b = 0.1$	$r_{init} = 201$, $t^I = 60$ pas de rupture figure VI.30 et figure VI.31	influence forte de la cicatrisation sur le comportement global, l'évolution de b ne permet pas d'atteindre les résultats de référence
résultat de référence de M. Barquins et D. Wehbi	$r_{init} = 206.5$, $t^I = 46$ $t^{II} = 71$ (11 cycles) figure VI.24	

TAB. VI.8 – Résultats des simulations pour les différents cas de sollicitation de l'étude paramétrique et comparaison aux résultats de référence de M. Barquins et D. Wehbi [14].

Cette étude a permis d'interpréter le lien entre les paramètres C_N et b du modèle d'adhésion cicatrisante. La détermination de ces valeurs est délicate. Pour les cas où $C_N = 10^{12}$ à 10^{13} $N.m^{-3}$, les valeurs de b sont trop grandes devant la valeur du temps caractéristique de la sollicitation de charge (1 s) pour que la cicatrisation des liens adhésifs influe sur le comportement global du contact. Le cas $C_N = 10^{14}$ $N.m^{-3}$ semble être un cas limite de cette étude, car alors l'influence de la valeur de b sur le comportement global du contact est contraignante vis-à-vis de l'une ou de l'autre des simulations. En effet, il faudrait, pour la *simulation I*, diminuer la valeur de b pour que l'endommagement de l'interface soit plus rapide, et paradoxalement, pour la *simulation II*,

augmenter la valeur de b pour que la cicatrisation de l'interface soit moins rapide. Le cas $C_N = 5.10^{13} N.m^{-3}$ et $b = 0.3 N.s.m^{-1}$ permet d'obtenir les meilleurs résultats vis-à-vis de ceux de référence obtenus par M. Barquins et D. Wehbi [14].

Dans cette étude, nous avons précisé le sens physique donné au paramètre b . Il représente une grandeur intrinsèque du comportement de l'interface directement liée au temps caractéristique des processus d'endommagement et de cicatrisation des liens adhésifs.

En conservant les valeurs précédentes des paramètres du modèle d'adhésion cicatrisante, des résultats ont été obtenus pour différents cas de sollicitation cyclique. Mis à part le cas de sollicitation $\{P' = 20 mN, t' = 5 s, P = 20 mN \text{ et } t = 1 s\}$, ces résultats sont en accord avec ceux de la théorie de M. Barquins.

Dans notre approche, il est possible d'introduire une *dissipation surfacique* et une *dissipation volumique*. Sur cet exemple, à la différence de M. Barquins reliant les dissipations au comportement dissipatif des corps, nous avons introduit une dissipation liée au comportement de l'interface. En considérant le comportement du polyuréthane élastique et en prenant $b \neq 0$ dans le modèle d'adhésion cicatrisante, des résultats proches de ceux de M. Barquins, mais non complètement satisfaisants, sont obtenus. Plusieurs pistes de nature très diverses sont donc suggérées pour réduire l'écart noté entre l'expérience et la simulation avec le modèle d'adhésion cicatrisante :

- revoir la définition (VI.1) du « rayon de contact » discutée lors du paragraphe précédent portant sur la mise en oeuvre numérique de l'étude,
- prendre en compte la viscosité volumique de l'élastomère, point discuté au début de l'étude et qui semble prépondérant pour ce type de contact selon M. Barquins [9],
- dans ce cas de prise en compte de la viscosité volumique, reprendre l'identification des paramètres avec le modèle RCCM sans possibilité de cicatrisation.

Pour conclure cette étude, nous discutons dans la suite de l'influence du pas de temps sur la solution obtenue.

Remarque sur la discrétisation temporelle

Nous nous sommes aperçus que les résultats étaient différents pour des pas de temps différents de ceux retenus précédemment. Idéalement, en considérant que le pas de temps de résolution d'un problème dynamique doit être de l'ordre de celui de la propagation des ondes élastiques au sein du plus petit élément de la discrétisation, un pas de temps de l'ordre de $10^{-8} s$ serait nécessaire. Avec une telle valeur, les temps de calcul seraient considérables sur les machines mises à notre disposition. Rappelons que pour des pas de temps de l'ordre de $5.10^{-2} s$ les temps de calcul sont de quelques jours. C'est pourquoi l'analyse que nous proposons dans la suite ne présente que les tendances de l'influence de la valeur de ΔT sur les différents résultats.

Premièrement, l'influence de ΔT est étudiée dans le cas où $C_N = 10^{13} N.m^{-3}$ lors de l'obtention de la position initiale sous charge $P = 30 mN$. Pour cette simulation $b = 0$ dans le modèle d'adhésion cicatrisante. Les résultats obtenus pour différents pas de temps sont présentés en figure VI.37. Dans ce cas, l'influence du pas de temps est faible, la différence entre les résultats est directement liée à la détermination du rayon de contact par la définition (VI.1). En effet, dans les différentes zones de contact, $\beta = 0.95 \pm 0.01$ en de nombreux points d'interaction. D'une simulation à l'autre, une différence de $1 \mu m$ sur la valeur du rayon de contact peut être obtenue. Cette différence correspond à 4 points d'interaction sur 880 dont les statuts « au sein » ou « hors » de la zone de contact ne sont pas bien établis. De plus, au bout d'un nombre d'itérations suffisamment important (environ 200), les résultats tendent tous vers la même valeur donnée par la théorie JKR.

Deuxièmement, l'influence de ΔT est étudiée dans le cas où $C_N = 10^{13} N.m^{-3}$ et $b = 2.5 N.s.m^{-1}$ pour la sollicitation $\{P' = 30 mN, t' = 5 s, P = 30 mN, t = 1 s\}$. Dans ce cas, seul

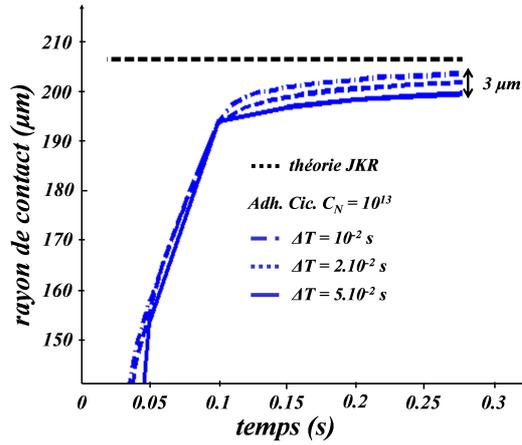


FIG. VI.37 – Dépendance au pas de temps des résultats sur la valeur du rayon de contact en position initiale. Pour cette simulation $C_N = 10^{13} N.m^{-3}$ et $b = 0$.

le pas de temps qui correspond à la décharge P' durant $4.8 s$ est modifié. Les résultats obtenus pour différents pas de temps sont présentés en figure VI.38. L'influence de ΔT est importante. A chaque instant, plus ΔT est petit, plus la valeur du rayon de contact est faible. Il semble que cette influence soit liée à la résolution de l'équation différentielle d'évolution de β . En effet, pour ce cas où $b \neq 0$, la dépendance est forte. Cependant nous n'avons actuellement pas déterminé la cause exacte de cette dépendance. Sur ce point, on peut penser que la valeur de θ joue un rôle sur cette dépendance au pas de temps de la solution. Le caractère plus ou moins implicite de l'intégration, selon la valeur de θ , peut être responsable du décalage entre la solution numérique et la solution réelle. Cette étude nécessiterait d'être complétée en considérant des valeurs de pas de temps plus faibles, proches de $10^{-8} s$, et différentes valeurs de θ afin de vérifier si les résultats convergent ou si ils restent dépendants de la valeur de ΔT .

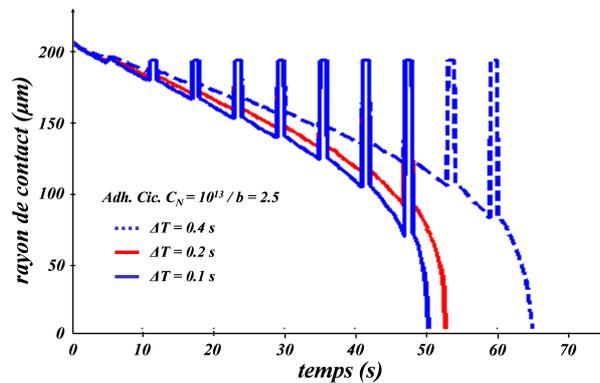


FIG. VI.38 – Dépendance au pas de temps des résultats sur l'évolution du rayon de contact pour la sollicitation $\{P' = 30 mN, t' = 5 s, P = 30 mN, t = 1 s\}$. Pour cette simulation $C_N = 10^{13} N.m^{-3}$ et $b = 2.5 N.s.m^{-1}$; seul le pas de temps correspondant à la décharge P' durant $4.8 s$ est modifié.

VI.4 Conclusions et perspectives de simulations avec le modèle d'adhésion cicatrisante

Dans ce chapitre plusieurs expériences de contact entre une bille de verre et un plan en élastomère ont été simulées en utilisant le modèle d'adhésion cicatrisante pour décrire le comportement de l'interface. Les résultats obtenus permettent de valider le modèle d'adhésion cicatrisante. Il permet :

- de décrire une gamme large de comportement d'interface par le jeu des paramètres w et C_N ,
- de rendre compte de la formation du col d'adhésion,
- de rendre compte du phénomène d'hystérésis d'adhésion lors de cycles de charge/décharge.

Il est important de noter la différence de nature du modèle d'adhésion cicatrisante et du modèle de M. Barquins. Le modèle développé dans ce mémoire est un modèle intrinsèque général. Le modèle de M. Barquins, comme la théorie de JKR dont il est issu, est plus spécifique d'une géométrie particulière et d'une classe de matériau particulière. De plus, la description des expériences cycliques de charge/décharge à l'aide du modèle de M. Barquins nécessite l'utilisation d'une loi à deux niveaux d'énergie d'adhésion.

L'effet du paramètre de *viscosité surfacique* b du modèle d'adhésion cicatrisante sur le comportement global du contact a été discuté. La valeur de ce paramètre peut être reliée au temps caractéristique des processus de cicatrisation ou d'endommagement des liens adhésifs de l'interface. La discussion menée au paragraphe VI.3 a justifié la valeur retenue pour b selon les effets désirés et les caractéristiques du problème étudié.

Dans les paragraphes suivants, nous présentons les perspectives d'étude qui seront à prendre en compte lors de la poursuite de ce travail. Elles portent sur les phénomènes « jump-on » et « jump-off » décrits au paragraphe II.1.2 et sur la formation et la propagation des ondes de Schallamach. L'apparition de ces ondes et leurs propagations ont été discutées au paragraphe II.2.

VI.4.1 Phénomènes « jump-on » et « jump-off »

L'un des objectifs de cette étude est de vérifier que l'apparition de ces phénomènes est due à la forme particulière de l'évolution de l'interaction selon la distance relative des corps. L'étude envisagée concerne l'analyse d'une expérience réelle sur ces phénomènes dont la géométrie est proche de celle des études menées dans le cadre de ce travail.

Une première simulation envisagée est d'utiliser le modèle Dugdale généralisé pour modéliser le comportement de l'interface et de considérer un comportement élastique pour décrire la déformation des corps. Dans ce cas, à notre sens aucun effet de type hystérésis ne doit être observé. En effet, lors d'une résolution dynamique avec un pas de temps suffisamment faible pour décrire le passage de l'état $g > \delta$ à $g \leq \delta$, les processus de cicatrisation et d'endommagement des liens sont identiques. Pour espérer observer un effet hystérésis et donc des résultats différents lors de l'approche et lors de la séparation des corps, il est nécessaire avec un modèle d'interface non dissipatif de considérer des comportements volumiques dissipatifs. Ce premier point justifierait que l'étude de ces phénomènes par le modèle de type Maugis-Dugdale en considérant des corps au comportement élastique n'est pas acceptable.

La simulation de ce même exemple en utilisant le modèle d'adhésion cicatrisante avec $b = 0$ entre des corps élastiques permet de vérifier si l'apparition de ces phénomènes est due à la forme particulière de l'évolution de l'interaction selon la distance relative des corps. Si les résultats ne sont pas satisfaisants, il est nécessaire dans notre cas d'introduire une dissipation pour rendre compte des phénomènes « jump-on » et « jump-off ». Dans un premier temps nous pouvons considérer $b \neq 0$ dans le modèle d'adhésion cicatrisante afin de retrouver les tendances caractéristiques de

ces phénomènes décrits par les théories analytiques, à savoir : des valeurs d'effort de séparation différentes selon le type de sollicitation (effort ou déplacement imposé) et des effets qui diminuent si κ diminue⁸.

VI.4.2 Formation et propagation des ondes de Schallamach

L'approche proposée dans ce mémoire couple formulation en grandes déformations et modélisation du comportement de l'interface par le modèle d'adhésion cicatrisante. Elle devrait permettre, à notre sens, de simuler la formation et la propagation des ondes de Schallamach. L'étude envisagée concerne l'analyse de l'expérience réalisée par M. Barquins, A.A. Koudine et D. Vallet [13]. Elle représente un cas où notre approche prend tout son sens vis-à-vis des choix de modélisation retenus et décrits dans ce mémoire. En effet, cet exemple ne peut plus être traité à l'aide d'une modélisation à symétrie de révolution. Les théories analytiques existantes de type JKR ou de M. Barquins sont donc inutilisables.

De plus, il semble nécessaire que :

- le comportement volumique de l'élastomère soit considéré incompressible afin qu'un bourrelet en amont de la zone de contact se crée,
- le comportement de l'interface couple adhésion cicatrisante et frottement. Ainsi au commencement du glissement le bourrelet pourrait être rattrapé et adhérer à la surface de la bille de verre,
- le comportement volumique de l'élastomère soit considéré viscoélastique afin que la vitesse de propagation du bourrelet en amont de la zone de contact soit limitée. Dans le cas de comportement élastique, le bourrelet se déplacerait à la même vitesse que celle de la bille et ne pourrait pas être rattrapé,
- le comportement lié aux processus de cicatrisation et d'endommagement des liens adhésifs lors de la propagation de chaque onde soit dissipatif ($G^r \gg G^c$), afin que le bilan global au niveau de l'interface respecte celui donné par l'équation (II.12) qui est en accord avec les expériences.

Pour cette simulation, nous proposons de conserver les valeurs des paramètres du modèle d'adhésion cicatrisante déterminées au paragraphe VI.3, à savoir $w = 46.4 \text{ mJ.m}^{-2}$, $C_N = 5.10^{13} \text{ N.m}^{-3}$ et $b = 0.3 \text{ N.s.m}^{-1}$ et de prendre $\mu \neq 0$. Le comportement de l'élastomère est modélisé en première approximation par un comportement viscoélastique de type Kelvin-Voigt donné au paragraphe III.2.3 avec $\eta^1 \neq 0$, $E^1 = 5 \text{ MPa}$ et $\nu^1 = 0.48$ pour caractériser l'incompressibilité.

Les géométries, discrétisation et conditions aux limites de l'étude envisagée sont précisées en figure VI.39. Selon les résultats de M. Barquins, A.A. Koudine et D. Vallet [13], l'épaisseur du plan est prise suffisamment grande ($h = 4 \text{ mm}$) afin que la propagation des ondes ait lieu dans toute la zone de contact. Nous retenons un effort d'indentation de la bille, de rayon 2.19 mm , tel que $P = 30 \text{ mN}$. Selon la théorie JKR, le rayon de contact initial (pour $V_X = 0$) est de $230 \text{ }\mu\text{m}$. La zone susceptible de contact est de dimension 1 mm car nous choisissons d'étudier la formation et la propagation des ondes pour un déplacement relatif de la bille par rapport au plan de l'ordre de $500 \text{ }\mu\text{m}$ correspondant à la taille de la zone de contact initiale. La taille des segments de $\bar{\Gamma}_{0,C}^1$ est de $1 \text{ }\mu\text{m}$. Ce choix réalise un compromis entre la taille maximale des segments et la durée des temps de calcul. En effet pour des segments de taille supérieure à $1 \text{ }\mu\text{m}$ l'effet de l'interaction est limitée. Dans ce cas, la taille du problème est de 13800 degrés de liberté auxquels s'ajoutent les degrés de liberté liés aux 1000 noeuds d'interaction de la zone de contact. La vitesse V_X imposée à la sphère est de $100 \text{ }\mu\text{m.s}^{-1}$. La vitesse des ondes est alors estimée à $500 \text{ }\mu\text{m.s}^{-1}$. Afin d'observer la propagation d'une onde au sein de la zone de contact durant une dizaine d'itération, il est nécessaire de prendre un pas de temps de l'ordre de 5.10^{-2} s . Tous ces points rendent la résolution

⁸Le paramètre κ introduit par D. Tabor [115] est défini en (II.11).

du problème très lourde et des temps de calcul de l'ordre de 4 à 5 jours sont prévisibles sur les machines mises à notre disposition. Ces aspects justifient en partie le fait que cette étude n'a pas pu être terminée faute de temps dans les dernières périodes de ce travail de thèse. La poursuite de cette étude constitue une perspective immédiate.

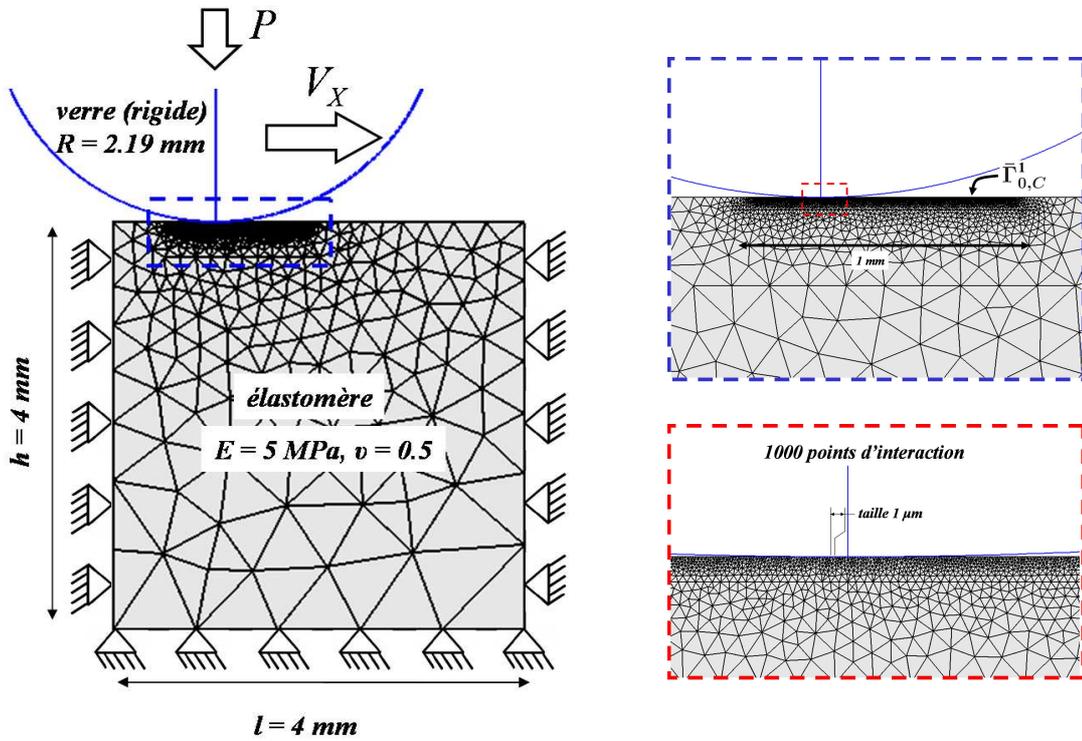


FIG. VI.39 – Géométries, discrétisation et conditions aux limites du problème envisagé. Zooms de la surface potentielle d'interaction.

Conclusion

Un nouveau modèle d'interface, appelé *modèle d'adhésion cicatrisante*, a été élaboré en vue d'étudier le comportement du contact adhésif entre deux corps. Son originalité est de rendre possible la cicatrisation ou la formation des liens adhésifs lorsque les deux corps sont rapprochés. Dans ce modèle, le comportement des liens adhésifs dépend de la vitesse de sollicitation au niveau de l'interface. Plus cette vitesse augmente, plus les processus d'endommagement ou de cicatrisation des liens adhésifs peuvent être retardés et les efforts d'interface augmentés. Nous introduisons ainsi une *dissipation surfacique* liée au paramètre de *viscosité surfacique* du modèle de comportement de l'interface.

Les contributions apportées par ce travail concernent :

- *l'extension du modèle RCCM au cas d'adhésion cicatrisante avec une prise en compte de la viscosité de l'interface, ce qui est nouveau à notre connaissance.*

La prise en compte de l'effet cicatrisant induit notamment la modélisation des effets à distance avant que les deux solides soient en contact. Les interactions entre les deux solides se font donc sur une surface d'interaction plus grande que la seule surface de contact effectif. Cette caractéristique permet de modéliser les effets de type force de van der Waals pour un contact verre/élastomère. Plus généralement, ce modèle rend compte du rétablissement des liens adhésifs, partiel ou total, lors de la nouvelle mise en contact de deux solides qui avaient été préalablement séparés. Les études précédentes menées au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique avec le *modèle RCCM* décrivaient seulement la phase de rupture des liens adhésifs. Le modèle phénoménologique proposé dans ce mémoire approche ainsi de manière simplifiée des phénomènes physico-chimiques complexes observés dans les domaines aussi divers que celui des collages, des fissures cicatrisantes, de la géophysique (interfaces des plaques tectoniques), des contacts verre/élastomère ...

En ce qui concerne les dissipations, nous avons généralisé la formulation de ce modèle d'interface à la fois pour des solides élastiques et pour des solides viscoélastiques. Ceci permet de prendre en compte de manière indépendante une dissipation visqueuse dans le comportement de l'interface et dans le comportement de volume. Dans les applications présentées ici sur les travaux expérimentaux de contact d'une sphère en verre sur un support élastomère, seule la viscosité d'interface a été considérée. Ce cas peut être envisagé chaque fois que les sollicitations sont lentes par rapport aux temps de relaxation des matériaux.

- *une formulation en grandes déformations pour les problèmes dynamiques de contact avec adhésion cicatrisante.*

Sa présentation constitue une large partie de ce mémoire. L'obtention de ces équations est classique. Elle est issue des outils de la thermodynamique des milieux continus étendus au concept de surface matérielle. Dans cette partie, notre apport a été de préciser les contraintes imposées sur le comportement de l'interface par les relations cinématiques et les relations d'interaction des surfaces en vis-à-vis. En effet, le comportement de l'interface est limité par les cadres cinématique et sthénique dus à la formulation en grandes déformations.

Nous avons retenu comme cadre cinématique la projection orthogonale et comme cadre sthénique la forme forte du principe d'action-réaction généralisé. Ces cadres impliquent que le déplacement

tangentiel relatif des corps ne peut pas être considéré comme une variable d'état et que l'interaction ne possède aucune composante tangentielle dans le cas où les corps sont en situation de non contact. Si ces choix limitent, par exemple, l'extension du *modèle RCCM* aux études en grandes déformations, ils sont justifiés vis-à-vis des applications envisagées dans ce mémoire. Pour un contact verre/élastomère, lors de la formation du col d'adhésion ou lors de la formation et de la propagation des ondes de Schallamach, l'adhésion joue un rôle prépondérant selon la normale au contact et ne dépend que de la distance relative des corps. Le modèle d'adhésion cicatrisante est donc ici restreint à un comportement adhésif selon la normale au contact auquel s'ajoute un comportement tangentiel de type frottement de Coulomb au niveau des points de l'interface qui sont en contact.

Plusieurs discussions ont été menées dans ce mémoire afin d'élargir le champ d'application du *modèle d'adhésion cicatrisante*. Par exemple, la prise en compte d'un effort adhésif tangentiel s'opposant au déplacement tangentiel relatif des corps a été envisagée.

- *la mise en oeuvre du modèle d'adhésion cicatrisante dans la plateforme LMGC90.*

La résolution numérique du problème dynamique de contact adhésif entre deux corps viscoélastiques a été effectuée à l'aide de la plateforme LMGC90. Les méthodes numériques de traitement du contact ont été adaptées en vue de résoudre le problème dynamique de contact avec adhésion cicatrisante. Ces adaptations devraient prochainement être intégrées dans la version de la plateforme LMGC90 mise à la disposition des utilisateurs.

- *l'utilisation de ce modèle pour décrire le comportement des contacts verre/élastomère.*

Nous noterons que les travaux existant sur la description fine des effets adhésifs lors d'un contact verre/élastomère sont essentiellement analytiques (modèle JKR et extensions). Ils sont de ce fait limités dans leurs applications à des géométries simples. Le modèle est présenté ici dans le cadre de la mécanique des milieux continus et résolu par des méthodes d'éléments finis ce qui ouvre largement son champ d'application. Ceci devrait notamment permettre d'aborder la modélisation des ondes de Schallamach.

De nombreuses simulations numériques ont été présentées. Les résultats des théories classiques de type JKR ou utilisant le modèle d'interface de Maugis-Dugdale ont été retrouvés sur des exemples issus d'expériences d'indentation. Les simulations portant sur l'étude des cycles de charge/décharge permettent de justifier l'intérêt de la nouvelle modélisation proposée qui introduit une *dissipation surfacique* par l'intermédiaire du paramètre de *viscosité surfacique* b . Sur ces exemples, le sens physique de ce paramètre a pu être précisé. Il peut être relié au temps caractéristique des processus d'endommagement et de cicatrisation des liens adhésifs de l'interface.

Pour ces études qui nécessitent de rendre compte du comportement fin de l'interface, la détermination des valeurs des paramètres du modèle d'adhésion cicatrisante n'est pas simple. Bien que le *modèle d'adhésion cicatrisante* ne comporte que trois paramètres l'*énergie d'adhésion*, dont la valeur est par ailleurs souvent bien établie, la *rigidité normale maximale* et la *viscosité surfacique*, leurs influences sur le comportement global du contact adhésif sont étroitement liées.

En ce qui concerne les perspectives de ce travail, nous les considérerons en deux classes.

La première, à court terme, porte sur l'utilisation et la validation du *modèle d'adhésion cicatrisante* sur un plus grand nombre d'expériences de tribologie des contacts verre/élastomère ou verre/polymère. Il s'agit en particulier des travaux de M. Barquins de l'équipe Mécanique du solide du Laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes de l'Ecole Supérieure de Chimie Industrielle, de B. Villechaise de l'équipe Structures et Interfaces du Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Université de Poitiers, de C. Gauthier de l'équipe Mécanique Physique des Polymères de l'Institut Charles Sadron à Strasbourg ... Parmi ceux-ci, l'analyse des ondes de Schallamach reste une question ouverte qui devrait être accessible avec ce modèle. L'intérêt de ce modèle devrait également être analysé en géomécanique de la tectonique des plaques, domaine pour lequel une col-

laboration est en cours entre le Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (M. Raous) et l'Institut Physique du Globe de Paris (J.-P. Vilotte) dans le cadre d'un post-doctorat (C. Herringer).

La deuxième classe des perspectives est plus fondamentale. Un travail important reste à faire sur le couplage des effets normaux et tangentiels en ce qui concerne les effets cicatrisants. Le *modèle RCCM* décrit correctement ce couplage. Dans le *modèle d'adhésion cicatrisante*, la prise en compte de l'effet cicatrisant nécessite une réflexion plus grande sur cet aspect. Dans la présente étude, seul l'effet du frottement est pris en considération dans le comportement tangentiel de l'interface. Enfin, une formulation complète du problème en grands déplacements et petites déformations serait certainement du plus grand intérêt dans de nombreux cas pratiques.

Bibliographie

- [1] **V. Acary et Y. Monerie**, *Formulation dynamique d'un modèle de zone cohésive tridimensionnelle couplant endommagement et interface*, Revue Européenne des Eléments Finis, 10 (2001), pp. 489–503.
- [2] **O. Allix et P. Ladevèze**, *Damage analysis of interlaminar fracture specimens*, Composite Structures, 31 (1995), pp. 61–74.
- [3] **C. Argento, A. Jagota, et W.C. Carter**, *Surface formulation for molecular interactions of macroscopic bodies*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 45 (1997), pp. 1161–1183.
- [4] **P. Aubertin et R. Borst**, *Couplage nano-macro dans la propagation dynamique de fissures*, Actes du VIII^{ème} Colloque National en Calcul des Structures (eds. A. Combescure, P. Boisse et F. Sabourin), Giens, 2 (2007), pp. 741–746.
- [5] **J.M. Baney et C.-Y. Hui**, *Viscoelastic crack healing and adhesion*, Journal of Applied Physics, 86 (1999), pp. 4232–4241.
- [6] **G.I. Barenblatt**, *The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture*, Advances in Applied Mechanics, 7 (1962), pp. 55–129.
- [7] **M. Barquins**, *Adherence, friction and wear of rubber-like materials*, Wear and friction of elastomers (eds. R. Denton and M.K. Keshavan), American Society for Testing and Materials, Philadelphia (1992), pp. 82–113.
- [8] **M. Barquins**, *Etude théorique et expérimentale de la cinétique de l'adhérence des élastomères*, Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris VI (1980).
- [9] **M. Barquins**, *Influence of dwell time on the adherence of elastomers*, Journal of adhesion, 14 (1982), pp. 63–82.
- [10] **M. Barquins**, *Energy dissipation in Schallamach waves*, Wear, 91 (1983), pp. 103–110.
- [11] **M. Barquins**, *Sliding friction of rubber and Schallamach waves - A review*, Materials Science and Engineering, 73 (1985), pp. 45–63.
- [12] **M. Barquins**, *Adhérence, frottement et usure des élastomères*, Kautschuck und Gummi-Kunststoffe, 40 (1987), pp. 419–438.
- [13] **M. Barquins, A.A. Koudine, et D. Vallet**, *Influence de l'épaisseur d'un élastomère sur la formation et la propagation des plis de décollement (ondes de Schallamach)*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris, Série B, 323 (1996), pp. 433–438.

-
- [14] **M. Barquins et D. Wehbi**, *Study of adherence of elastomers by cyclic unloading experiments*, Journal of Adhesion, 20 (1986), pp. 55–74.
- [15] **E. Barthel**, *On the description of the adhesive contact of spheres with arbitrary interaction potentials*, Journal of Colloid and Interface Science, 200 (1998), pp. 7–18.
- [16] **H. Baudriller**, *Approche micromécanique et modélisation de l'usure, Application aux biomatériaux des prothèses totales de hanche*, Thèse de Doctorat de l'Université Aix-Marseille II (2003).
- [17] **A.-S. Bretelle**, *Formulation et résolution des problèmes de contact avec frottement et adhérence en grandes déformations*, Thèse de Doctorat de l'Université Aix-Marseille II (1999).
- [18] **A.-S. Bretelle, M. Cocou, et Y. Monerie**, *Unilateral contact with adhesion and friction between two hyperelastic bodies*, International Journal of Engineering Science, 39 (2001), pp. 2015–2032.
- [19] **B. Cambou, M. Chaze, P. Dubujet, A. Ghaouti, Y.-M. Lamidon, et F. Sidoroff**, *Discrete models for contact problems*, Contact Mechanics (eds. M. Raous, M. Jean et J.-J. Moreau), Plenum Press, New York (1995), pp. 373–380.
- [20] **B. Cambou et M. Jean**, *Micromécanique des matériaux granulaires*, Hermès Science, Paris (2001).
- [21] **L. Cangémi**, *Frottement et adhérence : modèle, traitement numérique et application à l'interface fibre/matrice*, Thèse de Doctorat de l'Université Aix-Marseille II (1997).
- [22] **J.-L. Chaboche, R. Girard, et Levasseur P.**, *On the interface debonding models*, International Journal of Damage in Mechanics, 6 (1997), pp. 220–257.
- [23] **P.G. Ciarlet**, *Mathematical Elasticity, Volume 1 : Three-Dimensional Elasticity*, Elsevier, North-Holland, Amsterdam (1988).
- [24] **M. Cocou, M. Raous, et M. Schryve**, *Analysis of a dynamic contact problem with adhesion and friction in viscoelasticity*, In Proceedings of IIIrd European Conference on Computational Mechanics, Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering (eds. C.A. Mota Soares and al.), Lisbon, Portugal, CDROM (2006).
- [25] **M. Cocou et G. Scarella**, *Analysis of a dynamic unilateral contact problem for a cracked viscoelastic body*, Journal of Applied Mathematics and Physics, 57 (2006), pp. 523–546.
- [26] **M. Cocou, M. Schryve, et M. Raous**, *A dynamic unilateral contact problem with adhesion and friction in viscoelasticity*, Journal of Applied Mathematics and Physics (accepté).
- [27] **M. Cocou, M. Schryve, et M. Raous**, *A variational analysis of a contact interaction problem in viscoelasticity*, In Proceedings of the VIth Congress of Romanian Mathematicians, Academier Române, Bucharest, Romania, 1 (2007), pp. 501–509.
- [28] **B.D. Coleman et M.E. Gurtin**, *Thermodynamics with internal state variables*, The Journal of Chemical Physics, 47 (1967), pp. 597–613.
-

-
- [29] **P. Cordier, F. Tournilhac, C. Soulié-Ziakovic, et L. Leibler**, *Self-healing and thermo-reversible rubber from supramolecular assembly*, *Nature*, 451 (2008), pp. 977–980.
- [30] **C. Creton, E.J. Kramer, et C.H. Hui**, *Adhesion and fracture of interfaces between immiscible polymers : from the molecular to the continuum scale*, *Advances in Polymer Sciences*, 159 (2001), pp. 53–136.
- [31] **A. Curnier, Q.C. He, et A. Klarbring**, *Continuum mechanics modelling of large deformation contact with friction*, *Contact Mechanics* (eds. M. Raous, M. Jean et J.-J. Moreau), Plenum Press, New York (1995), pp. 145–158.
- [32] **E. Darque-Ceretti et E. Felder**, *Adhésion et adhérence*, Editions CNRS, Sciences et Techniques de l'Ingénieur, Paris (2003).
- [33] **P.G. de Gennes**, *Polymers at an interface : a simplified view*, *Advanced Colloid Interface Science*, 27 (1987), pp. 189–209.
- [34] **G. Del Piero et M. Raous**, *A unified model for adhesive interface with damage, viscosity and friction*, (soumis).
- [35] **B.V. Derjaguin, V.M. Muller, et Yu. P. Toporov**, *Effect of contact deformation on the adhesion of particles*, *Journal of Colloid and Interface Science*, 53 (1975), pp. 314–326.
- [36] **F. Dubois et M. Jean**, *LMGC90, Logiciel de Mécanique Gérant le Contact, End User Guide* <http://www.lmgc.univ-montp2.fr/~dubois/LMGC90/>.
- [37] **F. Dubois et M. Jean**, *LMGC90 une plateforme de développement dédiée à la modélisation de problèmes d'interaction*, *Actes du VI^{ème} Colloque National en Calcul des Structures* (eds. M. Potier-Ferry, M. Bonnet et A. Bignonnet), Ecole Polytechnique, Paris, 1 (2003), pp. 111–118.
- [38] **D. S. Dugdale**, *Yielding of steel sheets containing slits*, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8 (1960), pp. 100–104.
- [39] **M. Fontanille et Y. Gnanou**, *Chimie et physico-chimie des polymères*, Dunod, Paris (2002).
- [40] **F. Freddi et M. Frémond**, *Damage in domains and interfaces : a coupled predictive theory*, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 1 (2006), pp. 1205–1234.
- [41] **M. Frémond**, *Contact with Adhesion, Unilateral Problems in Structural Analysis*, (eds. G. Del Piero and F. Maceri), Springer Verlag, Wien (1995).
- [42] **M. Frémond**, *Non Smooth Thermo-Mechanics*, Springer, Berlin (2002).
- [43] **M. Frémond**, *Adhesion of solids*, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 6 (1987), pp. 383–407.
- [44] **J.M. Georges**, *Frottement, usure et lubrification. La tribologie ou science des surfaces*, Editions CNRS, Sciences et Techniques de l'Ingénieur, Paris (2000).
-

-
- [45] **J.A. Greenwood**, *Adhesion of elastic spheres*, Proceedings of Royal Society London A, 453 (1997), pp. 1277–1297.
- [46] **J.A. Greenwood**, *The theory of viscoelastic crack propagation and healing*, Journal of Physics D : Applied Physics, 37 (2004), pp. 2557–2569.
- [47] **K.A. Grosch**, *The relation between the friction and the viscoelastic properties of rubber*, Proceedings of Royal Society London A, 274 (1963), pp. 21–39.
- [48] **C. G'Sell et J.M. Haudin**, *Introduction à la mécanique des polymères*, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy (1995).
- [49] **B. Halphen et Nguyen Quoc Son**, *Sur les matériaux standards généralisés*, Journal de Mécanique, 14 (1975), pp. 39–63.
- [50] **J. Harris**, *A study of the mechanical properties of Ultra High Molecular Weight Polyethylene (UHMWP)*, PhD Thesis of the Department of Mechanical Engineering, University of Pittsburg (2003).
- [51] **Q.C. He, J.J. Telega, et A. Curnier**, *Unilateral contact of two solids subject to large deformations : formulation and existence results*, Proceedings of Royal Society London A, 452 (1996), pp. 2691–2717.
- [52] **J.N. Israelachvili**, *Intermolecular and Surface Forces, 2nd edition*, Academic Press, London (1992).
- [53] **J.N. Israelachvili**, *Interfacial forces*, Journal of Vacuum Science and Technology A, 10 (1992), pp. 2961–2971.
- [54] **A. Jagota et C. Argento**, *An intersurface stress tensor*, Journal of Colloid and Interface Science, 191 (1997), pp. 326–336.
- [55] **A. Jagota, C. Argento, et S. Mazur**, *Growth of adhesive contacts for Maxwell viscoelastic spheres*, Journal of Applied Physics, 83 (1998), pp. 250–259.
- [56] **M. Jean**, *The Non Smooth Contact Dynamics method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 177 (1999), pp. 235–257.
- [57] **K.L. Johnson**, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge (1985).
- [58] **K.L. Johnson**, *Contact mechanics and the adhesion of visco-elastic spheres*, Proceedings of ACM Symposium on the Tribology of Polymer Surfaces, Boston.
- [59] **K.L. Johnson**, *Adhesion and friction between a smooth elastic spherical asperity and a plane*, Proceedings of Royal Society London A, 453 (1997), pp. 163–179.
- [60] **K.L. Johnson**, *Mechanics of adhesion*, Tribology International, 31 (1998), pp. 413–418.
- [61] **K.L. Johnson et J.A. Greenwood**, *An adhesion map for the contact of elastic spheres*, Journal of Colloid and Interface Science, 192 (1997), pp. 326–333.
-

-
- [62] **K.L. Johnson, K. Kendall, et A.D. Roberts**, *Surface energy and the contact of elastic solids*, Proceedings of Royal Society London A, 324 (1971), pp. 301–313.
- [63] **K.L. Johnson et H.M. Pollock**, *The role of adhesion in the impact of elastic spheres*, Journal of Adhesion Science and Technology, 8 (1994), pp. 1323–1332.
- [64] **F. Jourdan, P. Alart, et M. Jean**, *A Gauss-Seidel like algorithm to solve frictional contact problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 155 (1998), pp. 31–47.
- [65] **A. Klarbring**, *Large displacement frictional contact : a continuum framework for finite element discretization*, European Journal of Mechanics A/Solids, 14 (1995), pp. 237–253.
- [66] **F. Kosior, N. Guyot, et G. Maurice**, *Analysis of frictional contact problem using boundary element method and domain decomposition method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 46 (1999), pp. 65–82.
- [67] **T.A. Laursen**, *The convected description in large deformation frictional contact problem*, International Journal of Solids Structures, 31 (1994), pp. 669–681.
- [68] **T.A. Laursen et J.C. Simo**, *A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation frictional contact problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 36 (1993), pp. 3451–3485.
- [69] **Y.-Y. Lin et C.-Y. Hui**, *Mechanics of contact and adhesion between viscoelastic spheres : An analysis of hysteresis during loading and unloading*, Journal of Polymer Science, Part B Polymer Physics, 40 (2002), pp. 772–793.
- [70] **Y.-Y. Lin, C.-Y. Hui, et J.M. Baney**, *Viscoelastic contact, work of adhesion and the JKR technique*, Journal of Physics serie D : Applied Physics, 32 (1999), pp. 2250–2260.
- [71] **D. Maugis**, *Contact, Adhesion and Rupture of Elastic Solids*, Springer, Berlin (2000).
- [72] **D. Maugis**, *Adhesion of spheres : The JKR-DMT transition using a Dugdale model*, Journal of Colloid and Interface Science, 150 (1992), pp. 243–269.
- [73] **D. Maugis et M. Barquins**, *Fracture mechanics and adherence of viscoelastic solids*, Adhesion and Adsorption of Polymers, Part A (ed. L.H. Lee), Plenum Press, New York (1980), pp. 203–277.
- [74] **J.M. Di Méglia**, *Les états de la matière, de la molécule au matériau*, Masson Sciences, Dunod, Paris (2001).
- [75] **J.-C. Michel et P. Suquet**, *An analytical and numerical study of the overall behaviour of metal-matrix composites*, Modelisation and Simulation in Materials Sciences Engineering, 2 (1994), pp. 637–658.
- [76] **J.-F. Molinari**, *Calcul multiéchelle éléments-finis/atomistique : exemples d'applications en mécanique du contact et matériaux nanostructurés*, Communication au VIII^{ème} Colloque National en Calcul des Structures, Giens (2007).
- [77] **Y. Monerie**, *Fissuration des matériaux composites ; Rôle de l'interface fibre/matrice*, Thèse de Doctorat de l'Université Aix-Marseille II (2000).
-

-
- [78] **Y. Monerie, M. Raous, F.H. Leroy, O. Sudre, F. Feyel, et J-L. Chaboche**, *Comparison de lois d'interface sur la base d'un modèle uniaxial d'expérience de micro-indentation*, Actes des XI^{èmes} Journées Nationales sur les Composites (eds. J. Lamon et D. Baptiste), Arcachon, 2 (1998), pp. 565–574.
- [79] **J.-J. Moreau**, *Bounded variation in time*, Topics in Non-smooth Mechanics, (eds. J.-J. Moreau, P.D. Panagiotopoulos and G. Strang), Birkhäuser Verlag, Basel - Boston - Berlin (1988), pp. 1–74.
- [80] **J.-J. Moreau**, *Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics*, Nonsmooth Mechanics and Applications, CISM Courses and Lectures No. 302 (eds. J.-J. Moreau and P.D. Panagiotopoulos), Springer-Verlag, Wien - New York (1988), pp. 1–82.
- [81] **V.M. Muller, V.S. Yushchenko, et B.V. Derjaguin**, *On the influence of molecular forces on the deformation of an elastic sphere and its sticking to a rigid plane*, Journal of Colloid and Interface Science, 77 (1980), pp. 91–101.
- [82] **A.I. Murdoch**, *Some fundamental aspects of surface modelling*, Journal of Elasticity, 80 (2005), pp. 33–52.
- [83] **A. Needleman**, *A continuum model for void nucleation by inclusion debonding*, Journal of Applied Mechanics, 54 (1987), pp. 525–531.
- [84] **A. Needleman**, *An analysis of tensile decohesion along an interface*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 38 (1990), pp. 289–324.
- [85] **J. Nettingsmeier et P. Wriggers**, *Frictional contact of elastomer materials on rough rigid surfaces*, In Proceedings of IIIrd European Conference on Computational Mechanics, Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering (eds. C.A. Mota Soares and al.), Lisbon, Portugal, CDROM (2006).
- [86] **W. Noll**, *La mécanique classique basée sur un axiome d'objectivité*, extrait de La méthode axiomatique dans la mécanique classique et nouvelle, Gauthier-Villars, Paris (1963), pp. 135–144.
- [87] **B.N.J. Persson**, *Sliding Friction, Physical Principles and Applications*, Springer, Heidelberg (1998).
- [88] **B.N.J. Persson**, *On the theory of rubber friction*, Surface Science, 401 (1998), pp. 445–454.
- [89] **B.N.J. Persson**, *Theory of rubber friction and contact mechanics*, Journal of Chemical Physics, 115 (2001), pp. 3840–3861.
- [90] **S. Perutz, E.J. Kramer, J.M. Baney, C.-Y. Hui, et C. Cohen**, *Investigation of adhesion hysteresis in Poly(dimethylsiloxane) networks using the JKR technique*, Journal of Polymer Science, Part B Polymer Physics, 36 (1998), pp. 2129–2139.
- [91] **G. Pietrzak et A. Curnier**, *Large deformation frictional contact mechanics : continuum formulation and Augmented Lagrangian treatment*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 177 (1999), pp. 351–381.
-

-
- [92] **F. Péralés**, *Fissuration des matériaux à gradient de propriétés. Application au zircaloy hydrure*, Thèse de Doctorat de l'Université de Montpellier II Sciences et Techniques du Languedoc (2005).
- [93] **M. Raous**, *Quasistatic Signorini problem with Coulomb friction and coupling to adhesion*, New developments in contact problems (eds. P. Wriggers and P.D. Panagiotopoulos), CISM Courses and Lectures, 383 (1999), pp. 101–178.
- [94] **M. Raous, L. Cangémi, et M. Cocou**, *A consistent model coupling adhesion, friction and unilateral contact*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 77 (1999), pp. 383–399.
- [95] **M. Raous et M.A. Karray**, *Model coupling friction and adhesion for steel-concrete interfaces*, International Journal of Computer Application in Technology, 34 (2009), pp. 42–50.
- [96] **M. Raous et Y. Monerie**, *Unilateral contact, friction and adhesion : 3D cracks in composite material*, in Contact Mechanics (eds. J.A.C Martins and M.D.P Monteiro Marques), Dordrecht (2002), pp. 333–346.
- [97] **M. Raous, M. Schryve, et M. Cocou**, *Restorable adhesion and friction*, In Nonsmooth/Nonconvex Mechanics with Applications in Engineering (ed. C.C. Baniotopoulos), Editions Ziti, Thessalonique, Grèce (2006), pp. 165–172.
- [98] **J. Ringlein et M.O. Robbins**, *Understanding and illustrating the atomic origins of friction*, American Journal of Physics, 72 (2004), pp. 884–891.
- [99] **A.D. Roberts**, *Theories of dry rubber friction*, Tribology International, (1976), pp. 75–81.
- [100] **A.D. Roberts et A.G. Thomas**, *The adhesion and friction of smooth rubber surfaces*, Wear, 33 (1975), pp. 45–64.
- [101] **F. Saulnier**, *Quelques processus dynamiques aux interfaces polymères*, Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris VI (2003).
- [102] **F. Saulnier, T. Ondarçuhu, A. Aradian, et E. Raphaël**, *Adhesion between a viscoelastic material and a solid surface*, Macromolecules, 37 (2004), pp. 1067–1075.
- [103] **G. Scarella**, *Etude théorique et numérique de la propagation d'ondes en présence de contact unilatéral dans un milieu fissuré*, Thèse de Doctorat de l'Université Paris Dauphine (2004).
- [104] **A. Schallamach**, *How does rubber slide ?*, Wear, 17 (1971), pp. 301–312.
- [105] **M. Schryve et M. Raous**, *Contact et adhésion cicatrisante*, Actes du VIII^{ème} Colloque National en Calcul des Structures (eds. A. Combescure, P. Boisse et F. Sabourin), Giens, 1 (2007), pp. 389–394.
- [106] **M. Schryve, M. Raous, et M. Cocou**, *Lois de contact pour les élastomères : interface adhésive*, Actes du XVIII^{ème} Congrès Français de Mécanique, Grenoble, CDROM (2007).
- [107] **A. Sekulic**, *Experimental identification of adhesive properties between epoxy and glass*, Thèse de Doctorat de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (2008).
-

-
- [108] **X. Shi et A.A. Polycarpou**, *Adhesive transition from noncontacting to contacting elastic spheres : extension of the Maugis-Dugdale model*, Journal of Colloid and Interface Science, 281 (2005), pp. 449–457.
- [109] **A. Spence**, *The Hertz contact problem with finite friction*, Journal of Elasticity, 5 (1975), pp. 297–319.
- [110] **G. Sperling**, *Eine Theorie der Haftung von Feststoffteilchen an festen Körpern*, Dissertation von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Hochschule Karlsruhe (1964).
- [111] **L. Stainier**, *Une formulation variationnelle des algorithmes de calcul des contraintes pour les modèles élastoviscoplastiques et viscoélastiques en grandes transformations*, Actes du VI^{ème} Colloque National en Calcul des Structures (eds. M. Potier-Ferry, M. Bonnet et A. Bignonnet), Ecole Polytechnique, Paris, 2 (2003), pp. 477–484.
- [112] **L. Stainier**, *MatLib v.3 Reference manual*, Université de Liège, LTAS - Milieux Continus et Thermomécanique, (2006).
- [113] **L. Stainier, F. Dubois, et R. Peyroux**, *MatLib, une bibliothèque portable de modèles constitutifs pour la mécanique non linéaire des solides : concept et implémentation*, Actes du VI^{ème} Colloque National en Calcul des Structures (eds. M. Potier-Ferry, M. Bonnet et A. Bignonnet), Ecole Polytechnique, Paris, 3 (2003), pp. 25–32.
- [114] **D. Tabor**, *Interaction between surfaces : adhesion and friction*, Surface Physics of Materials (ed. J.M. Blakely), Academic Press New York, 2 (1975), pp. 475–529.
- [115] **D. Tabor**, *Surface forces and surface interactions*, Journal of Colloid and Interface Science, 58 (1977), pp. 2–13.
- [116] **D. Tabor**, *Friction - The present state of our understanding*, Journal of Lubrication Technology, 103 (1981), pp. 169–179.
- [117] **C. Talon et A. Curnier**, *A model of adhesion coupled to contact and friction*, European Journal of Mechanics A/Solids, 22 (2003), pp. 545–565.
- [118] **V. Tvergaard**, *Effect of fibre debonding in a whisker-reinforced metal*, Materials Science and Engineering, 125A (1990), pp. 203–213.
- [119] **D. Vola, E. Pratt, M. Jean, et M. Raous**, *Consistent time discretization for a dynamical frictional contact problem and complementary technique*, Revue Européenne des Eléments Finis, 7 (1998), pp. 149–162.
- [120] **P. Wriggers et T.A. Laursen**, *Computational Contact Mechanics*, CISM Courses and Lectures, Udine, Italy (2006).
- [121] **G. Zambelli et L. Vincent**, *Matériaux et contacts, une approche tribologique*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne (1998).

Modèle d'adhésion cicatrisante et applications au contact verre/élastomère

De très nombreux problèmes rencontrés dans l'industrie sont liés aux évolutions que subissent les interfaces. Le contact, le frottement et l'adhésion y jouent un rôle fondamental.

Ce travail est une contribution au développement d'un modèle qui couple adhésion et frottement et qui autorise la cicatrisation des liens adhésifs lorsque les corps sont remis en contact après avoir été séparés. Ce modèle est appelé modèle d'adhésion cicatrisante.

Dans le cadre de ce mémoire, les applications concernent plus particulièrement l'étude du contact verre/élastomère. La formation du col d'adhésion, les phénomènes « jump-on » et « jump-off » et la formation et la propagation des ondes de Schallamach sont abordés.

Le travail propose une modélisation à l'échelle des surfaces, issue de considérations thermodynamiques et qui simule les effets des interactions de type van der Waals. Outre la possible cicatrisation des liens lors de l'approche des corps, l'originalité du modèle est que les processus d'endommagement et de cicatrisation des liens adhésifs sont tous deux liés à la vitesse de sollicitation au niveau de l'interface. Selon les applications envisagées, l'approche permet ainsi de considérer deux sources possibles de dissipations. L'une est surfacique et liée au comportement de l'interface. La seconde est volumique et liée au comportement des corps.

La formulation dynamique est donnée dans le cadre de la mécanique non régulière. Les méthodes numériques correspondantes sont mises en oeuvre dans la plateforme LMGC90 (Montpellier - Marseille). Le modèle est testé sur des Benchmarks et validé sur la simulation d'une expérience de tribologie de contact verre/élastomère.

Mots clés : Adhésion cicatrisante, dissipation surfacique, frottement, grandes déformations, col d'adhésion, ondes de Schallamach, simulation numérique.

Model of healing adhesion and applications to the glass/rubber contact

Many problems encountered in industry are concerned with interface evolutions, where contact, friction and adhesion are fundamental topics.

This PhD thesis contributes to the development of a model involving adhesion and friction and allowing the healing of the adhesive bonds when the bodies are again pushed closer together after their separation. This model is called model of healing adhesion.

In this work the applications concern specifically the contact glass/rubber. The formation of the the adhesion neck, jump-on and jump-off phenomena and the formation and the propagation of the Schallamach waves are investigated.

A modelling of the adhesive contact is thus proposed, based on thermodynamic considerations and surface interactions concepts. In addition to the possible healing of the adhesives bonds, the originality of the model is that healing process and damage process are both related to the rate of the sollicitation at the interface. According to the applications, the approach allows to consider two potential sources of dissipation. One is called surface dissipation and linked to the behaviour of the interface. The second is called bulk dissipation and linked to the behaviour of the bodies.

The dynamic formulation is done within the framework of the non-smooth mechanic. Implementations of appropriate numerical methods and simulations are done in LMGC90 (Montpellier - Marseille). The model is tested with Benchmark and validated with the simulation of a glass/rubber experiment.

Keys words : Healing adhesion, surface dissipation, friction, large deformations, neck of adhesion, Schallamach waves, numerical simulation.
