



**HAL**  
open science

# Modélisation hybride, identification, commande et estimation d'états de système soumis à des frottements secs - Application à un embrayage robotisé

Rémy Nouailletas

► **To cite this version:**

Rémy Nouailletas. Modélisation hybride, identification, commande et estimation d'états de système soumis à des frottements secs - Application à un embrayage robotisé. Automatique / Robotique. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2010. Français. NNT: . tel-00488571

**HAL Id: tel-00488571**

**<https://theses.hal.science/tel-00488571>**

Submitted on 2 Jun 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Grenoble INP**

No. attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**THESE**

*pour obtenir le grade de*

**DOCTEUR de Grenoble INP**

***Spécialité : AUTOMATIQUE-PRODUCTIQUE***

préparée au LCIS (Laboratoire de Conception et d'Intégration des Systèmes)

dans le cadre de l'Ecole Doctorale :

**Electronique, Electrotechnique, Automatique, Traitement du Signal**

*présentée et soutenue publiquement*

*par*

**Rémy NOUAILLETAS**

*le 4/11/2009*

**Titre :**

**Modélisation hybride, identification, commande et estimation  
d'états de système soumis à des frottements secs - Application  
à un embrayage robotisé**

***Directeur et Co-Directeur de thèse :***

Eduardo Mendes

Professeur, Grenoble INP

Damien Koenig

Maître de conférences, HDR, Grenoble  
INP

***Jury :***

Président :	M. Carlos Canudas de Wit	Directeur de Recherches, CNRS Grenoble
Rapporteurs :	M. Pierre Alexandre Bliman	Chargé de Recherches, INRIA Rocquencourt
	M. Jamal Daafouz	Professeur, INP Lorraine
Examineurs :	M. Said Mammam	Professeur, Université d'Evry Val d'Essone



*"La science doit s'accommoder à la nature. La nature ne peut s'accommoder à la science."*

**Ferdinand Brunot**, *La pensée et la langue*



# Remerciements

Ce travail a été effectué au sein de l'équipe Modélisation, Analyse et Commande des systèmes (MACSY) du Laboratoire de Conception et d'Intégration des Systèmes (LCIS) en collaboration avec Valeo, l'Université Technologique de Compiègne et l'Agence de l'Environnement et de la Maîtrise de l'Énergie (ADEME).

J'aimerais commencer cette page par remercier les membres du Jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait à examiner mes travaux.

Je remercie le professeur Eduardo Mendes pour m'avoir encadré. Pendant ces trois années de thèse, j'ai pu bénéficier de son expérience et de son savoir-faire. Qu'il trouve ici toute ma gratitude, l'expression de ma reconnaissance et de mon respect le plus profond.

J'adresse mes remerciements à mon co-directeur de thèse, Monsieur Damien Koenig, de m'avoir encadré durant ces trois années de thèse. Je le remercie pour sa disponibilité, pour l'ensemble de ses conseils précieux. Je lui exprime ma reconnaissance et mon respect le plus profond.

Je remercie vivement le professeur Jamal Daafouz et Monsieur Pierre Alexandre Bliman d'avoir accepté de rapporter sur ce travail de thèse. Je les remercie pour l'ensemble des commentaires et remarques qui ont permis d'améliorer de manière significative le document. Je remercie Monsieur Carlos Canudas de Wit d'avoir présidé mon jury de thèse. Je remercie le professeur Saïd Mammar d'avoir accepté d'examiner ce travail de thèse. Je leur exprime toute ma gratitude.

Je n'oublie pas de remercier Messieurs Jean Louis Delavallée, Pascal et Hervé Maurel de Valeo pour la qualité de notre collaboration au cours de ces trois années. Je remercie également Monsieur Gagnepain de l'ADEME pour avoir suivi l'avancement du projet.

Merci à Corentin et Charles du Gipsa-lab pour nos conversations instructives sur les systèmes LPV et sur la commande robuste en général.

Je tiens aussi à remercier l'ensemble des personnes qui m'ont énormément apporté pendant ces trois années, par ordre préférentielle aléatoire :

Mes collègues de l'équipe MACSY : Boussad mon collocataire de bureau, toujours disponible pour une discussion plus ou moins sérieuse, Bao mon stagiaire à vie, futur brillant docteur, roi du réglage compliqué de choses simples, Laurent L. voisin au boulot et à la ville, compagnon de mes mercredi soirs escaladesques, merci pour nos conversations enrichissantes.

Mes collègues du LCIS : l'ensemble des permanents, des ATER (Max, Khallil, Anne-Laure et Philippe le roi des crêpes) et des doctorants. En particulier je tiens à remercier Audrey et Romain pour leur amitié sans faille depuis maintenant 8 ans.

Mes collègues de l'ESISAR et plus particulièrement ceux participant à mes joyeuses virées verticales : Antoine, Marc, Guy, Laurent G., Yvan, Frédéric. Qu'ils trouvent ici mes remercie-

ments les plus chaleureux pour le temps passé ensemble autour d'une corde ou d'un Khebab.

L'ensemble de la promo P2006 et en particulier mon binôme Nicolas pour avoir compensé mon manque d'intérêt pour certaines matières.

Mes autres compagnons de cordée, c'est à dire l'ensemble du Club Densité et du comité Drome FFME. J'aimerais remercier plus particulièrement Jean-Luc, Christophe et Manu pour l'ensemble des connaissances qu'ils m'ont fait partager et pour toutes les aventures que nous avons vécues et que nous allons encore vivre.

Bien entendu, je remercie ma famille, plus particulièrement mes parents pour m'avoir appris la curiosité et le goût des sciences. Ma tante pour son affection et l'ensemble des gateaux et autres bons plats dont elle me fait profiter depuis toujours.

Je n'oublie bien sur pas l'ensemble du GRR (Groupe des Relecteurs de Rémy) pour leurs corrections orthographiques de mon manuscrit. Merci encore à Magali, Chantal, Michel et Annie.

Je finis cette page en remerciant bien entendu Céline qui me supporte tous les jours depuis déjà quelques années et m'a soutenu pendant ces trois dernières. Je lui dédie ce manuscrit.

# Liste de Publication

## Articles soumis dans des revues internationales avec comité de lecture

R. Nouailletas, E. Mendes, and D. Koenig. Hybrid modeling and identification of dry friction systems - Application to a clutch actuator. Accepté en première lecture avec révision dans *Control Engineering and Practice*, à paraître en 2010.

R. Nouailletas, E. Mendes, and D. Koenig. A robust control for dry friction system - Application to a clutch actuator. Soumis dans *Control Engineering and Practice*, septembre 2009.

## Articles acceptés dans une conférence internationale avec actes

R. Nouailletas, D. Koenig, and E. Mendes. Lmi design of a switched observer with model uncertainty : Application to a hysteresis mechanical system. Dans *IEEE Conf. Decision Control*, Nouvelle Orléans, Louisiane, décembre 2007.

R. Nouailletas, B. Hoang Le, E. Mendes, and D. Koenig. New hybrid model and switched pi observer for dry friction systems. Dans *IFAC world congress*, Seoul, Corée, juillet 2008.

R. Nouailletas, E. Mendes, and D. Koenig. Parameters identification of a hybrid model for dry friction. Dans *IEEE Conf. Decision Control*, Cancun, Mexique, décembre 2008.

## Article accepté dans une conférence nationale avec actes

R. Nouailletas, E. Mendes, and D. Koenig. Modélisation hybride de systèmes soumis à des frottements secs. Dans *MajecSTIC*, Marseille, France, octobre 2008.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>Liste des publications</b>	<b>vii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>xii</b>
<b>Table des figures</b>	<b>xvii</b>
<b>Table des tableaux</b>	<b>xix</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Contexte . . . . .	1
1.2 Problématique générale . . . . .	2
1.3 Organisation . . . . .	3
<b>2 Éléments de modélisation de systèmes mécaniques complexes</b>	<b>5</b>
2.1 Méthodologie . . . . .	5
2.1.1 Introduction . . . . .	5
2.1.2 Décomposition du système en liaisons cinématiques . . . . .	5
2.1.3 Modélisation des blocs cinématiques . . . . .	6
2.1.4 Modélisation des liaisons cinématiques . . . . .	7
2.1.5 Simplifications possibles . . . . .	10
2.1.6 Exemple : Vis-écrou . . . . .	11
2.2 Description et modélisation d'un embrayage robotisé . . . . .	14
2.2.1 Introduction . . . . .	14
2.2.2 Principe de fonctionnement . . . . .	15
2.2.3 Décomposition en blocs . . . . .	17
2.2.4 Simplifications . . . . .	19
2.2.5 Les frottements : la difficulté du système . . . . .	21
2.3 Les frottements : origines physiques . . . . .	22
2.3.1 Tribologie . . . . .	22
2.3.2 Définitions et notations . . . . .	22
2.3.2.1 Régime I : frottement statique . . . . .	23

2.3.2.2	Régime II : lubrification limite	24
2.3.2.3	Régime III : lubrification partielle	24
2.3.2.4	Régime IV : Lubrification totale	24
2.4	Modèles de frottement, état de l'art	24
2.4.1	Que doit-on modéliser ?	24
2.4.2	Modèles statiques	25
2.4.2.1	Modèle de Coulomb	25
2.4.2.2	Modèle SVC : modèle statique+Coulomb+visqueux	26
2.4.2.3	Modèle de Stribeck	26
2.4.2.4	Modèle de Karnopp	27
2.4.3	Modèles dynamiques	27
2.4.3.1	Modélisation des pré-déplacements	27
2.4.3.2	Modèle de Dahl	28
2.4.3.3	Modèle de LuGre	29
2.4.3.4	Modèle élasto-plastique	29
2.4.3.5	Modèle de Leuven	31
2.4.4	Récapitulatif	31
2.5	Conclusion	32
<b>3</b>	<b>Modélisation hybride de frottements secs</b>	<b>35</b>
3.1	Pourquoi une modélisation hybride des frottements ?	35
3.2	Description générale	35
3.3	Modélisation du glissement	37
3.4	Modélisation du collage	38
3.4.1	Sans prise en compte des pré-déplacements	38
3.4.1.1	Principe	38
3.4.1.2	Prise en compte de la période d'échantillonnage du contrôleur	39
3.4.1.3	Prise en compte de la résolution du capteur	41
3.4.1.4	Prise en compte des limitations de l'intégration numérique	41
3.4.2	Modélisation linéaire des pré-déplacements	42
3.4.2.1	Principe	42
3.4.2.2	Réglage des paramètres	44
3.4.2.3	Prise en compte de phénomènes supplémentaires	44
3.4.3	Modélisation des pré-déplacements par le modèle de Preisach	45
3.5	Existence et unicité de la solution en fonction d'une entrée définie	45
3.6	Synthèse des différentes versions du modèle	48
3.7	Comparaison avec les modèles de la littérature	52
3.7.1	Protocole de tests	52
3.7.2	Test de collage-glissement (stick-slip)	54
3.7.3	Cycles limites en boucle fermée	57
3.7.4	Tests de pré-déplacement	59
3.7.5	Propriété de non-dérive	61
3.7.6	Récapitulatif	65

3.8	Étude de stabilité du modèle hybride . . . . .	66
3.9	Conclusion . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Identification de système soumis à des frottements</b>	<b>73</b>
4.1	Cadre d'étude . . . . .	73
4.2	Mode glissant : identification de l'équation dynamique . . . . .	74
4.2.1	Influence des capteurs incrémentiels de position . . . . .	74
4.2.1.1	Calcul d'incertitude . . . . .	74
4.2.2	Filtrage des données . . . . .	76
4.2.3	Contraintes physiques . . . . .	77
4.2.4	Schéma d'aide à la décision . . . . .	78
4.2.5	Méthode des moindres carrés : application à l'identification des frottements	78
4.2.5.1	Rappels . . . . .	78
4.2.5.2	Bilan de puissance . . . . .	81
4.2.5.3	Choix de la séquence d'excitation . . . . .	82
4.2.5.4	Validation en simulation . . . . .	85
4.2.6	Méthode des sinus . . . . .	87
4.2.6.1	Principe . . . . .	87
4.2.6.2	Augmentation de la robustesse et mise en oeuvre pratique . . . . .	88
4.3	Mode "collé" : identification de la force de rupture $F_s$ . . . . .	89
4.4	Identification du modèle d'un embrayage robotisé . . . . .	90
4.4.1	Caractéristique du système . . . . .	90
4.4.2	Identification des frottements . . . . .	91
4.4.2.1	Algorithme des moindres carrés . . . . .	91
4.4.2.2	Méthode des sinus . . . . .	92
4.4.3	Identification du couple de rupture . . . . .	93
4.4.4	Validation . . . . .	93
4.5	Conclusion . . . . .	97
<b>5</b>	<b>Commandes de systèmes soumis à des frottements secs</b>	<b>101</b>
5.1	Problématique . . . . .	101
5.2	Limitation des cycles limites . . . . .	102
5.2.1	Principes . . . . .	102
5.2.2	Régulation directe en position . . . . .	104
5.2.3	Régulation en vitesse puis en position . . . . .	106
5.2.4	Résultats de simulation sur un système générique . . . . .	110
5.2.5	Augmentation des performances des commandes . . . . .	113
5.2.6	Limitations pratiques . . . . .	115
5.3	Commande robuste par synthèse LPV . . . . .	118
5.3.1	Rappel . . . . .	118
5.3.2	Modélisation polytopique des variations paramétriques du modèle . . . . .	120
5.3.3	Commande LPV, synthèse polytopique . . . . .	121
5.3.4	Commande robuste . . . . .	126

5.4	Commande d'un embrayage robotisé . . . . .	127
5.4.1	Cahier des charges . . . . .	127
5.4.2	Formalisation du problème . . . . .	127
5.4.3	Commande robuste en position . . . . .	129
5.4.3.1	Synthèse du correcteur . . . . .	129
5.4.3.2	Validation en simulation . . . . .	132
5.4.3.3	Validation expérimentale . . . . .	134
5.4.4	Commande robuste en vitesse et position . . . . .	137
5.4.4.1	Synthèse du correcteur . . . . .	137
5.4.4.2	Validation en simulation . . . . .	140
5.4.4.3	Validation expérimentale . . . . .	140
5.5	Conclusion . . . . .	144
<b>6</b>	<b>Estimation de frottements secs</b>	<b>147</b>
6.1	Introduction . . . . .	147
6.2	Synthèse d'un observateur hybride robuste aux incertitudes paramétriques . . . . .	148
6.3	Estimation du frottement sec avec effet intégral multiplicatif . . . . .	150
6.3.1	Formulation du problème . . . . .	150
6.3.2	Résultats en simulation . . . . .	154
6.4	Observateur hybride avec effet intégral . . . . .	159
6.4.1	Formulation du problème . . . . .	159
6.4.2	Résultats en simulation . . . . .	160
6.5	Conclusion . . . . .	164
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>167</b>
7.1	Contributions . . . . .	167
7.2	Perspectives . . . . .	169
<b>Annexes</b>		<b>171</b>
A	Fonction hystérésis avec mémoire non-locale . . . . .	171
B	Entropie métrique . . . . .	173
C	A robust control for dry friction system - Application to a clutch actuator . . . . .	175
<b>Bibliographie</b>		<b>198</b>

# Table des figures

2.1	Chaîne cinématique . . . . .	7
2.2	Schéma bloc générique d'une pièce mécanique . . . . .	7
2.3	Exemple : engrenage de rapport de réduction $r$ et de rendement $\eta$ . . . . .	8
2.4	Schéma bloc d'un engrenage de rapport de réduction $r$ et rendement $\eta$ . . . . .	9
2.5	Exemple : engrenage de rapport de réduction $r$ et de rendement $\eta$ . . . . .	10
2.6	Exemple : Vis-écrou + Ressort . . . . .	12
2.7	Schéma bloc du système vis-écrou + ressort . . . . .	13
2.8	Schéma d'embrayage : position débrayée (haut) et position embrayée (bas) . . . . .	15
2.9	Photos de la maquette, (a) : actionneur, (b) : embrayage, (c) : système hydraulique . . . . .	16
2.10	Schéma de principe de l'actionneur e-clutch . . . . .	16
2.11	Schéma bloc de l'actionneur e-clutch . . . . .	18
2.12	Forces appliquées par les ressorts ( $s_1$ ) et ( $s_2$ ) sur le chariot ( $r_5$ ) . . . . .	19
2.13	Force résistive totale appliquée sur le chariot ( $r_5$ ) . . . . .	21
2.14	Couple résistant total vu par le moteur . . . . .	22
2.15	Solide sur un support horizontal . . . . .	23
2.16	Evolution des frottements en fonction de la vitesse . . . . .	23
2.17	Pré-déplacement $z$ en fonction de la position $x$ . . . . .	28
2.18	Allure de la fonction $\alpha(z)$ . . . . .	30
3.1	Machine d'état du modèle hybride . . . . .	36
3.2	Trajectoires et commutations possibles du modèle hybride, mode 1 en blanc et mode 0 en gris . . . . .	40
3.3	Exemple de trajectoire du modèle hybride . . . . .	40
3.4	Exemple de trajectoire dans le plan ( $u(t), v(t)$ ) . . . . .	41
3.5	Mauvaise trajectoire due à un pas d'intégration numérique trop grand (cercles : points calculés par le simulateur) . . . . .	42
3.6	Bonne trajectoire mais avec un pas d'intégration numérique petit (cercles : points calculés par le simulateur) . . . . .	43
3.7	Triangle de Preisach pour la modélisation du phénomène d' <i>hysteresis behavior with nonlocal memory</i> . . . . .	46
3.8	Cycles centrés utilisés pour la détermination de la fonction de répartition $\mu(\alpha, \beta)$ . . . . .	52
3.9	Fonction de répartition $\mu(\alpha, \beta)$ utilisée pour le modèle de Preisach . . . . .	54

3.10	Système considéré pour le test de l'effet collage-glissement (stick-slip) . . . . .	54
3.11	Trajectoires de référence (Modèle LuGre), test de collage-glissement . . . . .	55
3.12	Trajectoires obtenues avec le modèle élasto-plastique, test de collage-glissement .	56
3.13	Comparaison entre le modèle hybride version A (ligne continue) et le modèle LuGre (tiret), test de collage-glissement . . . . .	56
3.14	Comparaison entre le modèle hybride version B (ligne continue) et le modèle LuGre (tiret), test de collage-glissement . . . . .	57
3.15	Cycles limites du modèle hybride version A (ligne continue) et du modèle référant (LuGre) (tiret) . . . . .	58
3.16	Cycles limites du modèle élasto-plastique . . . . .	58
3.17	Consigne de position du test de pré-déplacement . . . . .	59
3.18	Résultat du modèle de LuGre : force de frottement $F_f$ en fonction de la position $x$	60
3.19	Résultat du modèle élasto-plastique : force de frottement $F_f$ en fonction de la position $x$ . . . . .	60
3.20	Résultat du modèle hybride version B : force de frottement $F_f$ en fonction de la position $x$ . . . . .	61
3.21	Résultat du modèle du modèle hybride version C : force de frottement $F_f$ en fonction de la position $x$ . . . . .	62
3.22	Commande appliquée lors du test de non-dérive . . . . .	62
3.23	Résultat du test de non-dérive appliqué aux modèles de LuGre et élasto-plastique	63
3.24	Résultat du test de non-dérive appliqué aux 3 versions du modèle hybride . . . .	63
3.25	Zoom sur la position $x(t)$ des 3 versions du modèle hybride lors du test de non-dérive . . . . .	64
4.1	Exemple de quantification, $T_s = 0, 1s$ , $\delta_x = 2m$ : position réelle (tirets) et position quantifiée (ligne continue) . . . . .	75
4.2	Exemple de quantification, $T_s = 0, 1s$ , $\delta_x = 2m$ : vitesse réelle (tirets) et vitesse calculée suivant (4.2) (ligne continue) . . . . .	75
4.3	Temps de réponse normalisé du filtre passe-bas en fonction du ratio de puissances $\rho$ . . . . .	78
4.4	Algorithme d'aide au choix des paramètres identifiables . . . . .	79
4.5	Comparaison entre la fonction de Stribeck et la fonction de Stribeck pondérée par la vitesse : les déformations autour de 0 sont largement atténuées . . . . .	83
4.6	Loi de commande utilisée pour l'identification de la force de rupture $F_s$ . . . . .	89
4.7	Position $x(t)$ lors de l'identification de la force $F_s$ . . . . .	89
4.8	Commande $u(t)$ lors de l'identification de la force $F_s$ . . . . .	89
4.9	Résultats obtenus par la méthode des sinus : Mesures (croix) et approximations (pointillés) . . . . .	92
4.10	Résultats obtenus par la méthode des sinus . . . . .	93
4.11	Mesures du couple de rupture . . . . .	94
4.12	Mesures retenues après filtrage (croix) et approximations polynomiales (lignes continues) . . . . .	94
4.13	Couple résistant utilisé pour le modèle dépendant de la position $\theta$ et de la vitesse $\omega$	95

4.14	Test effectué pour la validation : consigne (pointillé) et position mesurée (ligne continue) . . . . .	97
4.15	Test effectué pour la validation : couple moteur mesuré . . . . .	98
4.16	Résultat du modèle . . . . .	98
4.17	Détail de la position mesuré (pointillés) et la position du modèle (ligne continue) . . . . .	99
5.1	Schéma bloc du système asservi directement en position . . . . .	104
5.2	Schéma bloc du système asservi en vitesse puis en position . . . . .	107
5.3	Réponse à un échelon (pointillés) du système asservi en position sans limitation des cycles limites . . . . .	112
5.4	Réponse à un échelon (pointillés) du système asservi en position avec limitation des cycles limites . . . . .	112
5.5	Détails comparatifs des deux réponses à un échelon du système asservi en position avec (lignes continues) et sans (pointillés) limitation des cycles limites . . . . .	113
5.6	Réponse à un échelon (pointillés) du système asservi en vitesse et position (correcteur de position proportionnel) . . . . .	114
5.7	Réponse à un échelon (pointillés) du système asservi en vitesse et position (correcteur de position non-linéaire) . . . . .	114
5.8	Comparaison du système asservi seulement en position sans et avec l'ajout de frottement sec virtuel (consigne en pointillés, trajectoire en ligne continue) . . . . .	116
5.9	Comparaison du système asservi en vitesse et en position sans et avec l'ajout de frottement sec virtuel (consigne en pointillés, trajectoire en ligne continue) . . . . .	117
5.10	Schéma bloc du système mis sous forme LPV . . . . .	122
5.11	Schéma bloc du problème $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	122
5.12	Gabarit du filtre $W_2^{-1}(s)$ . . . . .	129
5.13	Transfert $H_{e_\theta/\theta_c}$ pour chaque sommet du polytope et gabarit $\gamma W_2^{-1}(s)$ (en pointillés) . . . . .	130
5.14	Transfert $H_{i/\theta_c}$ pour chaque sommet du polytope et gabarit $\gamma W_3^{-1}(s)$ (en pointillés) . . . . .	131
5.15	Transfert $H_{e_\theta/w}$ pour chaque sommet du polytope et gabarit $\gamma W_1^{-1}W_2^{-1}(s)$ (en pointillés) . . . . .	131
5.16	Transfert $H_{\theta/\theta_c}$ pour chaque sommet du polytope . . . . .	132
5.17	Transfert du correcteur $G(s)$ en continu (en pointillés) et en temps discret avec effet intégral (ligne continue), $T_s = 1\text{ms}$ . . . . .	133
5.18	Réponse en simulation à un échelon de l'embrayage robotisé asservi en position : angle du rotor $\theta$ (ligne continue) et consigne $\theta_c$ (pointillés) . . . . .	134
5.19	Réponse en simulation à un échelon de l'embrayage robotisé asservi en position : couple $u$ en entrée (ligne continue) et couple consigne $u_c$ (pointillés) . . . . .	135
5.20	Réponse en simulation à un échelon de l'embrayage robotisé asservi en position : position de l'embrayage $x$ (ligne continue) et consigne $x_c$ (pointillés) . . . . .	135
5.21	Position $\theta$ (trait plein) et consigne $\theta_c$ (pointillés) de l'embrayage robotisé asservi par un correcteur RST d'ordre 5 (résultats expérimentaux) . . . . .	136
5.22	Commande mesurée $u$ (trait plein) et consigne $u_c$ (pointillés) de l'embrayage robotisé asservi par un correcteur RST d'ordre 5 (résultats expérimentaux) . . . . .	136

5.23	Position $\theta$ (trait plein) et consigne $\theta_c$ (pointillés) de l'embrayage robotisé asservi par la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ en position (résultats expérimentaux) . . . . .	137
5.24	Commande $u$ (trait plein) et consigne $u_c$ (pointillés) de l'embrayage robotisé asservi en vitesse par la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ en position (résultats expérimentaux) . . . . .	138
5.25	Schéma bloc du problème $\mathcal{H}_\infty$ dans le cas d'un asservissement en vitesse . . . . .	139
5.26	Réponse en simulation à un échelon de l'embrayage robotisé asservi en vitesse et en position : angle du rotor $\theta$ (ligne continue) et consigne $\theta_c$ filtré (pointillés) . . . . .	140
5.27	Réponse en simulation à un échelon de l'embrayage robotisé asservi en vitesse et en position : couple $u$ en entrée (ligne continue) et couple consigne $u_c$ (pointillés) . . . . .	141
5.28	Réponse en simulation à un échelon de l'embrayage robotisé asservi en vitesse et en position : vitesse angulaire du moteur $\omega$ (ligne continue) et consigne $\omega_c$ (pointillés) . . . . .	141
5.29	Réponse en simulation à un échelon de l'embrayage robotisé asservi en vitesse et en position : position de l'embrayage $x$ (ligne continue) et consigne $x_c$ filtrée (pointillés) . . . . .	142
5.30	Position $\theta$ (trait plein) et consigne $\theta_c$ (pointillés) de l'embrayage robotisé asservi en vitesse (correcteur linéaire robuste) et en position (correcteur non linéaire), résultats expérimentaux . . . . .	143
5.31	Commande $u$ (trait plein) et consigne $u_c$ (pointillés) de l'embrayage robotisé asservi en vitesse (correcteur linéaire robuste) et en position (correcteur non linéaire), résultats expérimentaux . . . . .	143
5.32	Comparaison des commandes : contrôleur RST (magenta), contrôleur en position présenté en 5.4.3 (rouge), contrôleur en vitesse et en position présenté en 5.4.4, consigne (tirets) et consigne à 95% (pointillés) . . . . .	144
5.33	Comparaison des commandes : contrôleur RST (magenta), contrôleur en position présenté en 5.4.3 (rouge), contrôleur en vitesse et en position présenté en 5.4.4 et consigne (pointillés) . . . . .	145
6.1	Fonction $f$ utilisée pour modéliser le frottement sec d'un embrayage robotisé . . . . .	148
6.2	Discrétisation spatiale de la fonction $f$ . . . . .	151
6.3	Schéma récapitulatif des différentes commutations possibles entre chaque mode . . . . .	154
6.4	Estimation de la position, de la vitesse et du coefficient d'usure $\alpha$ (référence en pointillés) de l'embrayage robotisé en simulation ( $e_\theta = \theta - \hat{\theta}$ et $e_\omega = \omega - \hat{\omega}$ ) . . . . .	155
6.5	Estimation du frottement sec $\alpha(k)f_m(i)$ (ligne continue) et frottement sec $f$ simulé de l'embrayage robotisé (pointillés) . . . . .	156
6.6	Position du système, erreur d'estimation de la vitesse et coefficient d'usure $\alpha$ de l'embrayage robotisé - simulation avec prise en compte des erreurs de modélisation et du capteur de position . . . . .	157
6.7	Estimation du frottement sec $\alpha(k)f_m(i)$ (ligne continue) et frottement sec $f$ simulé de l'embrayage robotisé (pointillés) - simulation avec prise en compte des erreurs de modélisation et du capteur de position . . . . .	158
6.8	Estimation de la position, de la vitesse et du frottement sec $\hat{f} + \alpha$ (référence en pointillés) de l'embrayage robotisé en simulation ( $e_\theta = \theta - \hat{\theta}$ et $e_\omega = \omega - \hat{\omega}$ ) . . . . .	161

---

6.9	Position du système, erreur d'estimation de la vitesse et coefficient d'usure $\alpha$ de l'embrayage robotisé - simulation avec prise en compte des erreurs de modélisation et du capteur de position . . . . .	162
6.10	Estimation du frottement sec $\hat{f} + \alpha$ (ligne continue) et frottement sec $f$ simulé de l'embrayage robotisé (pointillés) - simulation avec prise en compte des erreurs de modélisation et du capteur de position . . . . .	163
1	Exemple d'une trajectoire hystérétique. Á partir d'un contact "vierge", le mouvement démarre au point (0,0) suivant $y(x)$ (ou $-y(-x)$ ). Si le mouvement s'inverse au point 1, la trajectoire suit la courbe passant par les points 1, 2, 5. Si la direction est de nouveau changée au point 2, la courbe (2 - 3 - 3') est suivie ; si la vitesse change de signe au point 3, la trajectoire passe par (3 - 4) puis suit la courbe (1 - 2 - 5) pour arriver au point 5. Les points 2 et 3 peuvent être supprimés de la mémoire. . . . .	172



# Liste des tableaux

2.1	Récapitulatif des modèles existants de frottements . . . . .	32
3.1	Paramètres de simulation . . . . .	53
3.2	Résultats des tests comparatifs . . . . .	65
4.1	Tableau des paramètres utilisés pour la validation de la méthode proposée utilisant l'algorithme des moindres carrés . . . . .	85
4.2	Influence de la pondération des mesures par la vitesse sur l'erreur relative des paramètres identifiés ( $V_0 = 10\text{m/s}$ ) . . . . .	86
4.3	Influence du filtrage des mesures sur l'erreur relative des paramètres identifiés ( $V_0 = 10\text{m/s}$ ) . . . . .	86
4.4	Influence du bon conditionnement des mesures sur l'identification des paramètres ( $V_0 = 10^4\text{m/s}$ ) . . . . .	87
4.5	Valeurs théoriques des paramètres et constantes du système . . . . .	91
4.6	Valeurs des paramètres identifiés avec l'algorithme des moindres carrés ( $V_0 = 350\text{rad/s}$ ) . . . . .	91
4.7	Paramètres des fonctions polynomiales de $C_s$ . . . . .	95
4.8	Paramètres utilisés pour le modèle . . . . .	96
5.1	Paramètres de tests des commandes . . . . .	111
5.2	Valeurs des paramètres du modèle de synthèse de la commande et de leurs intervalles d'incertitudes . . . . .	128
5.3	Énergie fournie par chaque commande entre $t = 0$ et $t = t_{int} = 0,28\text{s}$ . . . . .	144



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Contexte

Dans le secteur du transport léger (automobile), comme dans d'autres, les contraintes énergétiques sont de plus en plus fortes : l'énergie est de plus en plus rare et chère. Aussi les constructeurs cherchent à optimiser chaque élément du véhicule afin de rationaliser le coût énergétique global. Plus précisément, l'objectif est de pouvoir transporter confortablement et en sécurité tout en consommant le moins d'énergie possible.

Dans ce but, l'embrayage, partie centrale du véhicule entre le moteur et la transmission, fait l'objet de développements constants. Sans être exhaustif, on peut noter les travaux de [1] et [2]. L'optimisation de la fonction embrayage passe par une gestion électronique et automatique des cycles d'embrayage-débrayage. Ainsi, au lieu de contrôler l'embrayage via un câble ou un système hydraulique relié directement à la pédale, les véhicules récents sont équipés de clutch-by-wire (embrayage robotisé). L'embrayage est alors mû par un actionneur électrique, la position désirée est soit donnée par un capteur sur la pédale d'embrayage soit par une stratégie de plus haut niveau comme dans le cas de boîtes de vitesses séquentielles.

Valeo, équipementier automobile, propose non seulement des embrayages mais aussi les actionneurs servant à les piloter. Son objectif est de proposer des actionneurs de plus en plus compacts et consommant le moins d'énergie possible. Cette thèse s'inscrit dans l'un de ses projets consistant à développer un actionneur d'embrayage hyper compact. Cette compacité s'obtient en incorporant l'actionneur dans la cloche d'embrayage (auparavant, le système était déporté et relié à l'embrayage via une liaison hydraulique). L'effet ressort de l'embrayage est compensé par un système mécanique innovant. Celui-ci permet de dimensionner un moteur électrique de faible encombrement gagnant ainsi encore en compacité et en consommation d'énergie. Quatre acteurs interviennent autour de ce projet :

- Valeo : le porteur du projet développe l'ensemble de la mécanique, et gère le déroulement du projet,
- l'Université Technologique de Compiègne (UTC) : l'embrayage est un organe du véhicule soumis à de grandes variations de température, l'actionneur étant destiné à être incorporé auprès de celui-ci, le moteur électrique se doit d'être résistant et de conserver ses perfor-

mances quelles que soient ces variations. Aucun moteur du commerce ne répondant à ce cahier des charges, l'UTC à travers une thèse CIFRE a été associée au projet pour développer la machine électrique adéquate,

- le Laboratoire de Conception et d'Intégration des Systèmes, à travers la thèse présentée ici, est en charge de la modélisation et de la commande en position de l'ensemble actionneur-embayage,
- l'Agence De l'Environnement et de la Maîtrise de l'Énergie (ADEME) : l'objectif étant d'optimiser le coût énergétique de la fonction embayage, permettant ainsi de faire une substantielle économie de carburant, le projet a pu bénéficier d'un financement de l'ADEME. Ainsi, l'ensemble de cette thèse a été financé par cet organisme.

L'ensemble des travaux développés ci-dessous s'appuient sur un banc d'essai d'un ensemble embayage-actionneur d'ancienne génération mis à disposition par Valeo. En effet, l'actionneur de nouvelle génération, objet de ce projet, n'a pu être finalisé dans le temps accordé aux recherches présentées ici. Ainsi, l'ensemble des méthodes et solutions présentées dans ce document ont été développées dans le but d'être facilement applicables au nouvel actionneur, une fois celui-ci disponible.

## 1.2 Problématique générale

Que ce soit sur le banc d'essai disponible ou sur le futur actionneur, les frottements secs jouent un rôle important dans le fonctionnement des systèmes étudiés. En effet, leurs mécaniques sont conçues de telle façon que, malgré l'effet ressort de l'embayage, les frottements suffisent à empêcher le système de revenir en position de repos (position embayée) lorsque la force en entrée est nulle. Cette caractéristique permet de consommer de l'énergie seulement lorsqu'on souhaite changer l'état d'équilibre du système.

Si ces frottements permettent un gain d'énergie, ils perturbent fortement l'asservissement en position de l'embayage. L'ensemble des travaux présentés s'intéresse donc à leur impact, que ce soit dans la modélisation, l'identification ou la commande de systèmes soumis à leur influence.

D'un point de vue modélisation, il y a une vraie difficulté à comprendre et à modéliser les frottements secs, en particulier pour une vitesse faible (phénomènes non-linéaires). On prendra pour preuve le grand nombre de modèles existants [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. De plus, lors de simulations numériques, dans certains cas, le temps de calcul nécessaire peut devenir très important et donc problématique.

Une fois le modèle déterminé, il faut définir l'ensemble de ses paramètres. Contrairement aux bancs de tests utilisés dans d'autres applications, l'embayage robotisé étudié ici dispose d'un capteur de position de faible résolution, d'une plage de fonctionnement limitée (amplitude de l'embayage de l'ordre du centimètre) et d'une mécanique complexe impliquant des jeux mécaniques élevés. L'ensemble de ces contraintes limite fortement l'observabilité de nombreux phénomènes liés aux frottements entraînant bien entendu une grande difficulté à identifier les paramètres correspondants, [12, 13, 1, 14].

Finalement, une fois le modèle identifié et validé, reste à synthétiser une commande satisfaisant l'ensemble du cahier des charges. Généralement, pour asservir un système soumis à des

frottements secs, on cherche tout d'abord à les compenser, [15, 16, 17, 18, 19, 20, 13, 10, 21]. Cette méthode nécessite une parfaite connaissance des frottements ainsi que de la vitesse du système. Dû encore une fois aux limitations physiques du système étudié, ces données sont mal connues et donc une approche différente doit être développée.

### 1.3 Organisation

Au cours de cette thèse, le travail a été de proposer un ensemble de solutions permettant de résoudre les problèmes énoncés précédemment. Pour les présenter, la suite du manuscrit est organisée autour des cinq chapitres suivants :

- le chapitre 2 est dédié à la modélisation de systèmes mécaniques complexes. Pour cela, une méthode systématique est proposée permettant de décomposer un système en suite de blocs (inertie, masse) et de liaisons cinématiques. Ensuite, une suite de simplifications est proposée afin d'obtenir un modèle relativement compact tout en conservant les propriétés caractéristiques du système étudié. On constate finalement que les frottements sont présents dans un grand nombre de systèmes mécaniques (si ce n'est tous), leur modélisation est donc incontournable. Ainsi, la deuxième partie du chapitre est un rappel sur les phénomènes de frottements et un état de l'art des différents modèles utilisés par la communauté,
- le chapitre 3 introduit l'apport fondamental de la thèse : la modélisation hybride des frottements secs. Un système mécanique peut être soit en mouvement, soit immobile (ou quasiment immobile). À partir de ce constat, un modèle hybride générique basé sur 2 modes (mode "glissé" ou mode "collé") est présenté. Ce modèle est décliné en trois versions, suivant la finesse de modélisation souhaitée. Une attention particulière est portée aux conditions nécessaires à l'obtention de résultats de simulations cohérents. Afin de valider le modèle présenté, une large partie du chapitre est dédiée à des comparaisons avec d'autres modèles de la littérature,
- le chapitre 4 s'intéresse à l'identification des frottements (visqueux et secs). Dû à la faible résolution du système d'acquisition du banc d'essai utilisé, la version de modèle hybride la plus simple est utilisée. Ainsi, peu de paramètres sont nécessaires et leur identification s'en trouve simplifiée. Dans un premier temps, un calcul à priori des erreurs d'identification est fait à partir des caractéristiques techniques du système. À partir de ce résultat, on peut choisir les paramètres à identifier (on utilisera pour les autres leur valeur théorique). Ensuite, une attention toute particulière est portée sur le choix du signal excitateur du système afin d'obtenir le conditionnement optimal des données utilisées par l'algorithme d'identification. Finalement deux méthodes sont proposées, la première est basée sur un bilan de puissance permettant d'identifier la masse, les frottements secs et visqueux tout en étant robuste aux non-linéarités du système autour d'une vitesse nulle. La deuxième permet d'identifier seulement le frottement sec et le frottement visqueux mais seulement à l'aide de la mesure de la commande (en supposant le système asservi au moins en vitesse). Une méthode simple permet d'identifier la force de rupture nécessaire au modèle pour passer du mode "collé" au mode "glissé". Les trois méthodes sont testées sur le banc d'essai, ainsi un modèle simple et représentatif du système est obtenu et validé en pratique,

- le chapitre 5 présente une approche originale de la commande de systèmes soumis à des frottements. D'un point de vue macroscopique, le principal inconvénient des frottements secs est l'apparition de cycles limites (oscillations) en régime stationnaire lors d'asservissements en position. Pour s'affranchir de ces problèmes, on propose ici d'utiliser ces frottements pour stabiliser le système en ayant cependant une erreur statique non nulle. Cette approche nécessite la synthèse de correcteurs linéaires en position ou en vitesse à partir du modèle développé précédemment. Ce modèle étant connu avec certaines imprécisions, la deuxième partie du chapitre propose une modélisation LPV des incertitudes paramétriques du modèle permettant ainsi d'obtenir un correcteur linéaire robuste aux erreurs d'identifications.
- dans le chapitre 6, on peut trouver l'ensemble de nos travaux sur l'estimation des frottements secs à l'aide d'observateurs hybrides à temps discret. Ces travaux ont donné lieu à la rédaction de deux articles, [22], [23]. Si les possibilités théoriques de ces outils semblent intéressantes, ils sont limités en pratique par la précision des capteurs du système.

La conclusion (chapitre 7) rappelle les différentes contributions apportées par cette thèse puis propose plusieurs axes de recherches pouvant contribuer à compléter l'ensemble des travaux présentés ici. En annexe A, on peut trouver un rappel sur une des propriétés des frottements secs : le comportement hystérétique avec mémoire non-locale pour des déplacements de faible amplitude. Finalement, l'annexe C présente un article soumis à une revue synthétisant par approche LFT (Linear Fractional Transformation) une commande robuste aux incertitudes paramétriques du modèle. Pour des raisons de planning, ce travail n'a pas pu être intégré au chapitre 5, il nous a semblé néanmoins important de le reporter en annexe.

# Chapitre 2

## Éléments de modélisation de systèmes mécaniques complexes

### 2.1 Méthodologie

#### 2.1.1 Introduction

Dans cette première partie, nous développons une méthodologie propre à la modélisation de systèmes mécaniques complexes. De nombreux travaux très proches existent, [13], [24] généralement basés sur les bond graphs [25]. La méthode présentée ici a été développée à la lecture de ceux-ci et au contact de l'expertise de Valeo. Le design d'un système mécanique se fait en utilisant des principes physiques extrêmement bien connus et maîtrisés. C'est en général la complexité de la fonction à réaliser et non ces principes qui rend le modèle exhaustif final si complexe.

Ainsi, le travail réalisé en amont lors de la conception du système peut être entièrement repris pour la modélisation de celui-ci. Tout d'abord, on décompose le système en fonctions entrées/sorties simples pour les interconnecter suivant des relations algébriques et/ou dynamiques. On obtient ainsi dans un premier temps un modèle extrêmement précis du système. Son comportement se doit d'être identique à celui attendu par le concepteur du système.

Par la suite, un certain nombre de règles simples permettent de simplifier ce modèle pour ne garder que les comportements significatifs de celui-ci (résonance, non-linéarité particulière...). L'objectif est d'obtenir un modèle assez simple pour la synthèse d'une commande. Une fois celle-ci réalisée, nous la validons successivement sur des modèles de plus en plus complexes avant de l'implanter sur le système réel.

#### 2.1.2 Décomposition du système en liaisons cinématiques

Un système mécanique est composé de plusieurs pièces mécaniques liées entre elles par des liaisons cinématiques. Ces pièces interagissent et échangent de l'énergie entre elles ou avec l'extérieur. De cette réflexion, on peut voir le système comme une chaîne où chaque maillon est une pièce mobile.

Chaque maillon possède une masse  $m$  et/ou une inertie  $J$  ainsi qu'un vecteur vitesse  $v$  et un vecteur de vitesse angulaire  $\omega$ . Sa dynamique suit la deuxième loi de Newton :

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= \sum_{i=1}^{n_F} F_i \\ J\dot{\omega} &= \sum_{i=1}^{n_C} C_i \end{aligned} \quad (2.1)$$

où  $n_F$  et  $n_C$  sont respectivement les nombres de forces  $F_i$  et de couples  $C_i$  appliqués sur la pièce étudiée. On remarque que chaque pièce du système permet de stocker de l'énergie cinématique. Les pièces du système sont reliées entre elles par des liaisons cinématiques. Elles permettent de distribuer de l'énergie entre les pièces mécaniques avec un rendement inférieur à 1. Dans la suite, les pertes sont supposées irréversibles et n'interviennent plus dans le système. Lorsqu'une liaison cinématique relie plusieurs pièces mobiles, elle prend en entrée leurs vitesses et fournit en sortie les différents couples/forces moteurs ou résistants qu'elle impose sur ces pièces.

Certaines liaisons cinématiques ne servent pas à transférer de l'énergie mais juste à contraindre une pièce mécanique. On pense par exemple à une liaison pivot permettant de forcer un pignon à tourner seulement autour de son axe. Dans ce cas, la liaison est entre le pignon et son support mais aucune énergie utile n'est transférée. Ainsi une liaison cinématique ne relie pas forcément 2 pièces mobiles. Dans ce cas, la liaison prend en entrée la vitesse de la pièce et fournit en sortie une force ou un couple résistant.

Le système possède à ses bords des entrées qui servent à le contrôler. Elles peuvent être de 2 sortes : soit une vitesse est imposée à une liaison cinématique, soit un couple ou une force moteur est imposé(e) à une pièce mécanique. Dans la suite, on s'intéresse seulement à la deuxième hypothèse. En effet, en changeant les limites du système étudié ou en ajoutant un élément fictif, on peut valider cette seconde hypothèse.

L'état du système est connu via des capteurs mesurant certaines variables du système. Encore une fois, elles sont de plusieurs types : soit on mesure une position, une vitesse, ou encore un effort (couple ou force). Par des relations d'intégration ou de dérivation, il est possible de passer d'une grandeur à l'autre.

En pratique, on considère chaque pièce ou chaque groupe de pièces solidaires comme étant un maillon de la chaîne. La complexité des mécaniques étudiées ne peut pas toujours garantir une suite linéaire de maillons, ainsi, on se garde la possibilité que chaque maillon puisse interagir avec plus de 2 autres. Chaque maillon ou bloc est relié aux autres via des liaisons cinématiques comme le montre la figure (2.1).

### 2.1.3 Modélisation des blocs cinématiques

Chaque maillon ou bloc représente une pièce ou un groupe de pièces solidaires, celle-ci est caractérisée par une masse  $m$  et une matrice d'inertie  $J$ . Sans contrainte, elle peut se déplacer et tourner suivant les 3 axes  $X, Y, Z$ . Dans les cas qui nous intéressent, les liaisons cinématiques liant cette pièce au reste du système limitent ses mouvements à 1 ou 2 degrés de liberté (une rotation et/ou une translation).

Dans le cas d'un mouvement suivant une seule dimension, une pièce possède une vitesse  $v$  déterminée par l'ensemble des forces et/ou couples moteurs ou résistants appliqués sur elle. Les

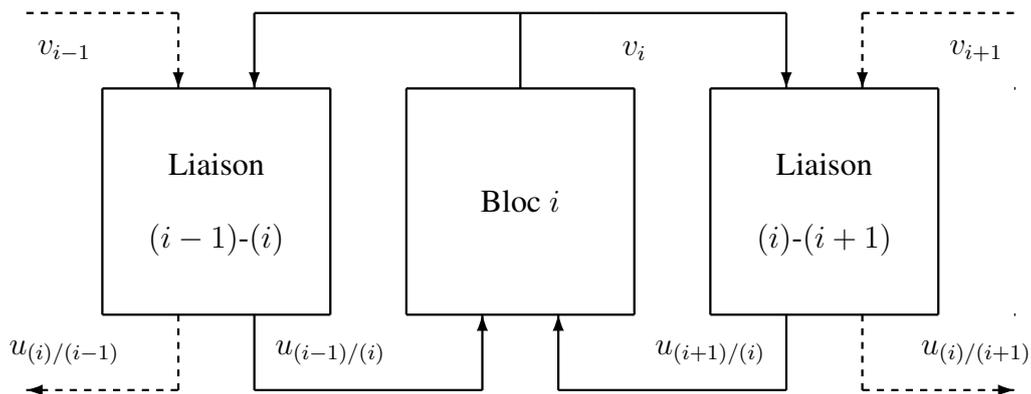


FIG. 2.1 – Chaîne cinématique

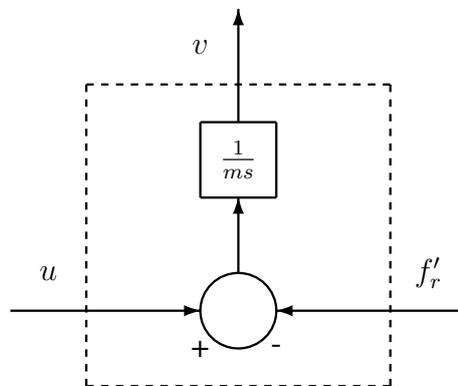


FIG. 2.2 – Schéma bloc générique d'une pièce mécanique

différentes sources du système (ex : actionneurs) appliquent une force motrice  $u$ . Les contraintes extérieures (ex : frottements) imposent une force résistive  $f'_r$ . L'équation dynamique gérant sa vitesse  $v$  est décrite par la relation fondamentale (2.2).

$$m\dot{v} = u - f'_r \tag{2.2}$$

Reprenant les équations (2.1), il est facile de généraliser à 2 ou 3 dimensions.

### 2.1.4 Modélisation des liaisons cinématiques

Les liaisons cinématiques sont les liens entre les pièces du système mécanique. Il existe 11 liaisons élémentaires (liaison pivot, glissement, plan...), elles permettent de réduire les degrés de liberté de chaque pièce afin d'obtenir la fonction finale du système. Il est à noter qu'en les combinant on peut obtenir des liaisons plus complexes comme par exemple des engrenages.

En supposant une liaison parfaite, toute l'énergie fournie par une pièce motrice devrait être reçue par la pièce réceptrice. Ainsi, la vitesse de cette dernière doit, via la relation de la liaison,

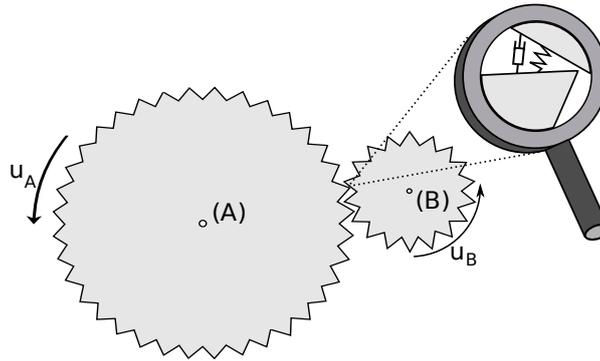


FIG. 2.3 – Exemple : engrenage de rapport de réduction  $r$  et de rendement  $\eta$

devenir instantanément égale à celle de la pièce motrice. La liaison se traduit alors par une simple relation algébrique. Mais en réalité, des phénomènes de déformation, de frottement, etc, font apparaître des pertes de puissance et des transitoires avant d'obtenir un état d'équilibre.

Ces phénomènes, pas toujours néfastes, doivent être modélisés. Ce travail fait intervenir les choix technologiques utilisés pour concevoir chaque liaison. Ainsi il doit être fait en étroite collaboration avec le concepteur du système mécanique afin de pouvoir disposer de toutes les données techniques nécessaires.

Dans le simple cas d'un engrenage entre 2 pièces  $A$  et  $B$  (figure (2.3)), celui-ci est connu avec un rapport de réduction  $r$  et un rendement  $\eta < 1$  (modélisant les frottements). Le système est donné par :

$$\begin{aligned} J_A \dot{\omega}_A &= u_A - \frac{r}{\eta} u_B \\ J_B \dot{\omega}_B &= u_B \\ \omega_B &= -r \omega_A \end{aligned} \quad (2.3)$$

où  $u_A$  est le couple moteur appliqué au pignon  $A$ . Le pignon  $A$  entraîne  $B$  via un couple  $u_B$ . Le pignon  $B$  génère un couple résistant égal à  $\frac{r}{\eta} u_B$  sur le pignon moteur. Le système (2.3) est un système singulier où les états  $\omega_A$  et  $\omega_B$  doivent à la fois satisfaire une relation dynamique et une relation algébrique. En pratique, la liaison n'est pas parfaite, les déformations et les chocs entre les 2 pièces créent des transitoires. La liaison peut alors être vue comme un amortisseur de coefficient d'amortissement  $K$  qui dissipe de l'énergie. Le couple  $u_b$  appliqué sur le pignon  $B$  devient égal à  $K(r\omega_A + \omega_B)$ . Le système devient alors :

$$\begin{aligned} J_A \dot{\omega}_A &= u_A - \frac{r}{\eta} K (r\omega_A + \omega_B) \\ J_B \dot{\omega}_B &= -K (r\omega_A + \omega_B) \end{aligned} \quad (2.4)$$

À l'état d'équilibre, on retrouve bien la relation algébrique établie en (2.3). Le coefficient  $K$  est un paramètre de simulation. Il doit être choisi supérieur aux autres dynamiques du système pour ne pas interférer avec elles. Mais, plus il sera grand, plus le temps de simulation sera élevé.

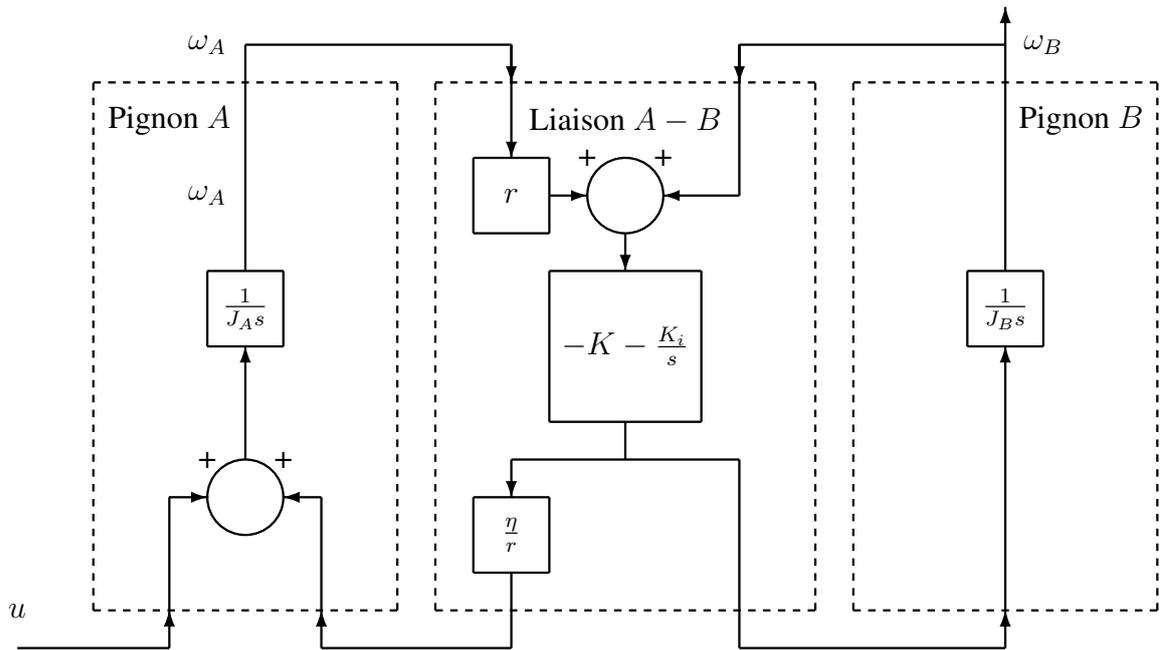


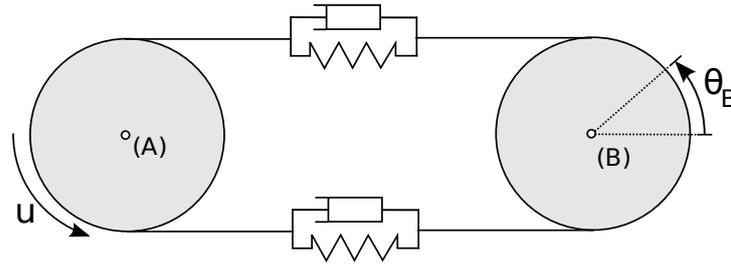
FIG. 2.4 – Schéma bloc d'un engrenage de rapport de réduction  $r$  et rendement  $\eta$

Un simple gain proportionnel sur l'erreur de vitesse ne garantit pas une convergence des positions angulaires  $\theta_A$  et  $\theta_B$  vers la relation  $\theta_B = r\theta_A$ . Pour cela, un effet intégral doit être ajouté. Ainsi, la liaison pignon peut être vue comme un système ressort+amortisseur comme le décrit la figure (2.4) ou le système :

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta}_A &= \omega_A \\
 J_A \dot{\omega}_A &= u_A - \frac{r}{\eta} (K(r\omega_A + \omega_B) + K_i(r\theta_A + \theta_B)) \\
 \dot{\theta}_B &= \omega_B \\
 J_B \dot{\omega}_B &= -K(r\omega_A + \omega_B) - K_i(r\theta_A + \theta_B)
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Si les coefficients  $K$  et  $K_i$  sont choisis positifs, les pôles du système (2.5) sont stables. Le modèle final comportera ainsi des dynamiques lentes liées aux inerties du système et des dynamiques rapides liées à la modélisation de la liaison pignon rigide. Cet écart doit être limité afin de ne pas provoquer des temps de simulation trop importants. Pour cela, on choisira les coefficients  $K$  et  $K_i$  suffisamment grands pour que les dynamiques de la liaison pignon soient supérieures aux autres dynamiques du système mais aussi suffisamment petits pour limiter le temps de simulation.

Nous ne nous attarderons pas ici à faire une liste exhaustive des liaisons, par contre des exemples seront traités dans les sections 2.1.6 et 2.2.3.

FIG. 2.5 – Exemple : engrenage de rapport de réduction  $r$  et de rendement  $\eta$ 

### 2.1.5 Simplifications possibles

Une fois le modèle développé, on se rend compte de l'extrême complexité de celui-ci : chaque pièce mécanique possède un intégrateur, et les liaisons cinématiques peuvent aussi en être pourvues.

Les dynamiques de ces liaisons sont généralement très rapides. En effet, sauf applications particulières, on cherche à minimiser les états transitoires entre 2 pièces de façon à minimiser les retards entre la commande et la sortie.

Le système possède des dynamiques lentes liées aux inerties des grosses pièces et des dynamiques rapides liées à celles des petites. Les premières imposent un horizon de simulation grand et les secondes un pas d'intégration numérique petit. Le temps de simulation sera donc important.

On se doit donc de simplifier le modèle pour le rendre plus facile à utiliser. Le modèle exhaustif pourra être conservé pour des simulations plus fines de validation. Ce sujet pouvant faire l'objet d'un exposé complet, on se borne ici à illustrer le propos avec un exemple représenté par la figure (2.5). Celui-ci est composé de 2 poulies  $A$  et  $B$  de rayon unitaire et d'inertie  $J_i$ , avec  $i = A$  ou  $B$ . Ces 2 poulies sont reliées par une courroie élastique de raideur  $K_r$  et d'amortissement  $K_v$ , le rendement est supposé égal à 1. Un couple moteur  $u$  est appliqué à la roue  $A$ . La représentation d'état du système est :

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_A \\ \dot{\omega}_A \\ \dot{\theta}_B \\ \dot{\omega}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K_r}{J_A} & -\frac{K_v}{J_A} & \frac{K_r}{J_A} & \frac{K_v}{J_A} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_r}{J_B} & -\frac{K_v}{J_B} & -\frac{K_r}{J_B} & -\frac{K_v}{J_B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_A \\ \omega_A \\ \theta_B \\ \omega_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_A} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = (0 \ 0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} \theta_A \\ \omega_A \\ \theta_B \\ \omega_B \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

La sortie mesurée est la position de la roue  $B$ . Le transfert entre  $u$  et  $\omega_B$  est :

$$H_{\theta_B/u} = \frac{\frac{K_v}{J_A J_B} (s + \frac{K_r}{K_v})}{s^4 + (\frac{K_v}{J_A} + \frac{K_v}{J_B}) s^3 + (\frac{K_v^2}{J_A J_B} + \frac{K_r}{J_A} + \frac{K_r}{J_B}) s^2 + \frac{K_v^2}{J_A J_B}} \quad (2.7)$$

Le transfert (2.7) est d'ordre 4. Pourtant, on modélise seulement une liaison souple entre 2 poulies. Si cet élément est une partie d'un système plus complexe, on se doit de chercher à le simplifier. L'amortissement dissipe de l'énergie, lorsqu'on cherche à transférer de la puissance d'un élément à l'autre, on cherche à minimiser cette perte. Ainsi on peut raisonnablement supposer le coefficient d'amortissement quasiment nul, le transfert (2.7) devient :

$$H_{\theta_B/u} = \frac{1}{\frac{J_A J_B}{K_T} s^4 + (J_A + J_B) s^2} \quad (2.8)$$

Le système est alors composé d'un double intégrateur et d'un oscillateur pur. Dans la majorité des cas, on cherche à minimiser les phénomènes d'oscillations par le choix d'éléments adaptés (ici une courroie de transmission quasiment statique). Cela signifie que le paramètre  $K_T$  doit être très grand devant le produit  $J_A J_B$ . Dans ce cas, les oscillations peuvent être négligées. Le système devient alors équivalent à une inertie de valeur  $J_A + J_B$  :

$$H_{\theta_B/u} = \frac{1}{(J_A + J_B) s^2} \quad (2.9)$$

Ainsi, pour simplifier un système mécanique composé de plusieurs masses et inerties liées entre elles, on doit étudier les liaisons cinématiques. Si celles-ci sont très raides, on peut considérer l'ensemble du système comme une simple masse égale à la somme des masses et inerties ramenées à l'entrée. Si les liaisons sont élastiques, on se doit de modéliser les différentes résonances du système. En effet, cette caractéristique est une limite aux performances en boucle fermée.

Une liaison cinématique n'est jamais parfaite. Lorsque 2 pièces se déplacent l'une par rapport à l'autre, des frottements apparaissent à leur interface dissipant de l'énergie. Ce phénomène est traduit par un rendement  $\eta < 1$ . Pour la modélisation, soit on exprime les frottements de la liaison de façon explicite, soit on exprime simplement les forces résistantes à la sortie de la liaison comme égales à celles en entrée divisées par le rendement  $\eta$ . Cette dernière option permet de simplifier encore le modèle mais doit être utilisée avec précaution comme le montre l'exemple 2.1.6.

Dans le cas de liaisons complexes, comme celle entre 2 pignons, il existe toujours un jeu entre les 2 pièces. Même si celui-ci semble faible, il peut être amplifié par les différents rapports de réduction et ne plus être négligeable une fois rapporté à l'actionneur ou au capteur. Avant toute simplification, on se doit donc de rapporter le jeu de chaque liaison aux capteurs (sorties du système) et à l'actionneur (entrées du système) pour voir l'influence de celui-ci.

L'objectif de toutes ces simplifications est de supprimer toutes les caractéristiques superflues du système dans le cadre de la synthèse d'une commande. Notons qu'une commande peut très bien fonctionner sur le modèle simplifié et ne pas donner satisfaction sur le système réel. Cela signifie que le modèle a été trop simplifié ou que les performances désirées sont trop élevées, i.e. la commande stimule des zones fréquentielles où sont situés des phénomènes non pris en compte dans le modèle de synthèse.

### 2.1.6 Exemple : Vis-écrou

Pour illustrer la méthodologie de modélisation développée ci-dessus, le système représenté par la figure (2.6) est étudié. Il est composé d'un moteur électrique lié à une vis sans fin. L'ensemble possède une inertie  $J$  et tourne à la vitesse  $\omega$ . Le moteur applique un couple moteur  $u$

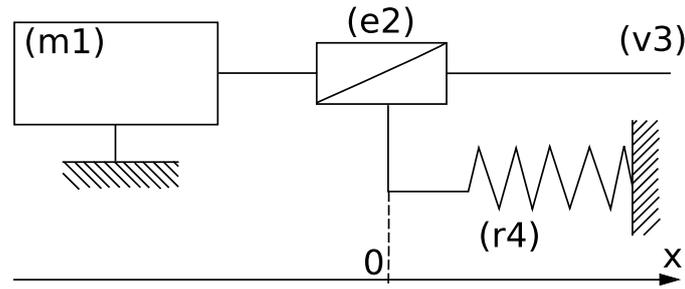


FIG. 2.6 – Exemple : Vis-écrou + Ressort

à l'ensemble du système. Autour de la vis, un écrou peut se mouvoir suivant l'axe  $Ox$ . Ainsi il comprime plus ou moins un ressort de raideur  $K$ . L'ensemble écrou+ressort possède une masse  $M$ . La vitesse et la position de l'écrou sont respectivement  $v$  et  $x$ . La liaison hélicoïdale possède un angle d'attaque  $\alpha$  et un rayon apparent  $r$ . Pour la clarté de l'exposé, on supposera l'existence de frottements seulement dans la liaison hélicoïdale. De plus les frottements visqueux et les jeux seront négligés.

Nous décomposons le système en blocs indépendants et en liaisons cinématiques. En suivant le schéma cinématique de la figure (2.6), on peut décompter deux blocs et une liaison :

- bloc 1 : moteur+vis
- bloc 2 : écrou+ressort
- liaison : liaison hélicoïdale.

Où le bloc 1 et 2 sont respectivement modélisés par les équations (2.10) et (2.11).  $C_r$  est le couple résistant vu par le moteur et  $f_m$  est la force du moteur vue par l'écrou. Le ressort applique une force  $Kx$ .

$$J\dot{\omega} = u - C_r \quad (2.10)$$

$$M\dot{v} = f_m - Kx \quad (2.11)$$

Il reste à modéliser la liaison hélicoïdale. La force  $f_m$  rapportée au moteur est égale à  $r \tan(\alpha) f_m$ . La liaison génère des frottements secs. Ces derniers seront étudiés en détail dans la section (2.3), cependant pour l'exemple, on précise qu'ils s'opposent au mouvement et que leur amplitude est proportionnel à l'effort normal à la trajectoire.

Lors du mouvement, les filets de l'écrou et de la vis sont pressés l'un contre l'autre par le ressort et par le couple moteur. Cet effort génère des frottements secs modélisés par une force tangente au filet. Une fois cette force ramenée au moteur, on obtient :

$$C_{sec} = \mu |rf_m - u \tan(\alpha)| \text{sign}(\omega) \quad (2.12)$$

Où  $\mu$  est le coefficient de proportionnalité entre l'effort normal et la force représentant les frottements secs. Il est aussi appelé coefficient de Coulomb. Le couple de frottements secs est fonction de la vitesse de rotation de la vis  $\omega$  car c'est l'élément moteur de la liaison. Le couple résistant vu par le moteur est exprimé par l'équation :

$$C_r = r \tan(\alpha) f_m + \mu |rf_m - u \tan(\alpha)| \text{sign}(\omega) \quad (2.13)$$

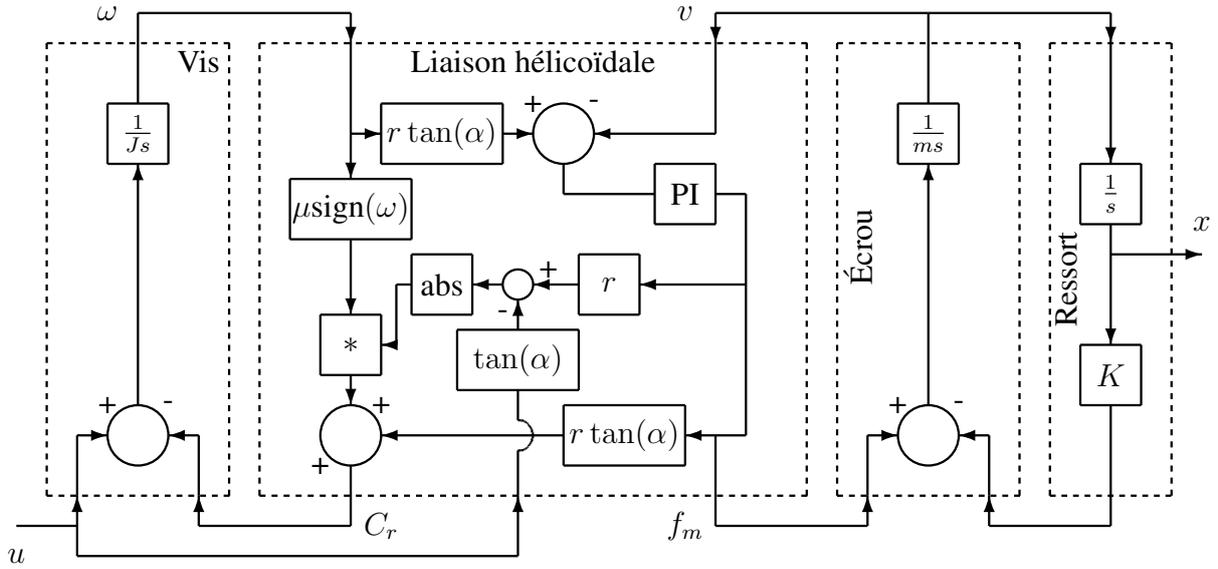


FIG. 2.7 – Schéma bloc du système vis-écrou + ressort

Pour finaliser le modèle exhaustif du système étudié, il reste à définir le mécanisme permettant d'obtenir la relation  $v = r \tan(\alpha)\omega$ . Le choix se porte sur un couplage par un régulateur PI permettant de faire converger  $v$  vers  $r \tan(\alpha)\omega$ . Le réglage de celui-ci dépend des objectifs de simulation : plus on souhaite une simulation fine, plus on devra choisir un correcteur rapide, et plus le temps de simulation sera lent. L'ensemble du modèle est présenté par la figure (2.7).

Le résultat de la modélisation est un modèle d'ordre 4 avec une composante non linéaire. Si ce modèle est une bonne base pour valider les commandes, il n'est pas envisageable de l'utiliser comme modèle de synthèse. En effet, le régulateur PI n'est qu'un artifice de simulation et n'a pas de signification physique. Suivant la sous-section 2.1.5, le premier objectif est de simplifier les liaisons cinématiques. De part sa nature, la liaison hélicoïdale est supposée statique, c'est-à-dire que l'erreur de poursuite entre  $v$  et  $r \tan(\alpha)\omega$  est nulle. On peut simplifier le modèle et considérer seulement un système masse-ressort avec des frottements secs et une masse totale égale à  $M' = J + Mr^2 \tan(\alpha)^2$ . Le terme  $Mr^2 \tan(\alpha)^2$  est la masse de l'écrou ramenée au moteur. Dans ce cas, la force  $f_m$  est égale à  $Kx$ , on se ramène alors à un modèle d'ordre 2.

Il reste à savoir si la liaison cinématique peut être modélisée par un simple rendement et un rapport de réduction. Cette question va dépendre du caractère irréversible de la liaison, i.e. est-ce que le ressort peut mouvoir à lui seul l'écrou et la vis ou non.

Dans le cas d'une liaison réversible, i.e.  $\mu < \tan(\alpha)$ , le terme  $\mu r f_m = \mu r Kx$  de l'équation (2.12) est négligé. Si on suppose la vitesse toujours du même signe que la commande (dans le cas d'une régulation de vitesse), le système peut alors être modélisé par un simple système masse+ressort sans amortissement (2.14). Le rendement du système en régime permanent est égal à  $1 - \mu \tan(\alpha)$ .

$$\begin{aligned} \dot{x} &= r \tan(\alpha)\omega \\ M'\dot{\omega} &= (1 - \mu \tan(\alpha))u - r \tan(\alpha)Kx \end{aligned} \quad (2.14)$$

Les frottements ont été modélisés par un rendement inférieur à 1. Cependant, dans le cas d'une régulation en position, ce n'est pas suffisant : en effet, les transitoires où  $\text{sign}(\omega) \neq \text{sign}(u)$  ne sont plus modélisés et transforment le système en oscillateur pur, ce qui est faux en pratique. Dans ce cas, il est préférable d'utiliser le modèle (2.15).

Si le système est irréversible, i.e.  $\mu > \tan(\alpha)$ , les frottements secs doivent être pris en compte pour bloquer la position de l'écrou lorsque  $u = 0$ . Le modèle est alors défini par (2.15).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= r \tan(\alpha) \omega \\ M' \dot{\omega} &= u - r \tan(\alpha) K x - \mu |r K x - u \tan(\alpha)| \text{sign}(\omega) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Pour l'instant, l'objectif n'est pas de modéliser les frottements secs, mais d'étudier la modélisation de systèmes mécaniques complexes, ainsi le modèle de Coulomb (cf. 2.4.2.1), très simple, suffit.

## 2.2 Description et modélisation d'un embrayage robotisé

### 2.2.1 Introduction

Dans un véhicule, un embrayage sert à transférer le couple produit par le moteur thermique (GMP) à la boîte de vitesses. Lorsque l'embrayage est débrayé, le moteur et la boîte de vitesses sont désolidarisés. S'il est embrayé, la totalité du couple moteur est transmis à la boîte de vitesses. Entre ces 2 extremums, l'embrayage patine, et seule une partie du couple moteur est transmise. La figure (2.8) rappelle le principe d'un embrayage.

Les garnitures (4) sont fixées au disque de progressivité (3). Le disque de progressivité est lié au moyeu (5) (cela peut être une liaison élastique). Le moyeu est lié en rotation avec l'arbre primaire (6) de la boîte de vitesses.

Le couvercle de l'embrayage (1) et le volant moteur (2) sont liés au vilebrequin du moteur (non représenté). Le couvercle présente une articulation sur laquelle repose le diaphragme (7) lui-même composé de deux parties :

- une rondelle belleville qui est liée par des doigts au plateau de pression (8)
- des becs de commande sur lesquels on agit par l'intermédiaire d'une butée à bille (9).

Lorsqu'on pousse sur la butée (9), on appuie sur les becs du diaphragme et on commande, par déformation de la rondelle belleville, la levée du plateau (9). Celui-ci libère alors le disque de friction (3). Le disque est alors repoussé par la rotation du volant moteur (2). L'embrayage est alors débrayé.

Lorsque l'on cesse d'appuyer sur la butée d'embrayage (9), sous l'action de la rondelle belleville du diaphragme (7), le plateau (9) se déplace et vient plaquer puis serrer le disque d'embrayage (3) contre le volant moteur (2). L'embrayage est alors embrayé.

Sur les modèles entièrement mécaniques, la butée d'embrayage est mue pas un câble ou une gaine hydraulique directement relié à la pédale d'embrayage. Aujourd'hui, ce système est de plus en plus remplacé par des "clutches by wire", i.e. des embrayages robotisés. Cette technologie permet d'optimiser chaque embrayage/débrayage et ainsi de corriger les fautes du conducteur tout en préservant le matériel : la pédale d'embrayage est conservée, mais les consignes données

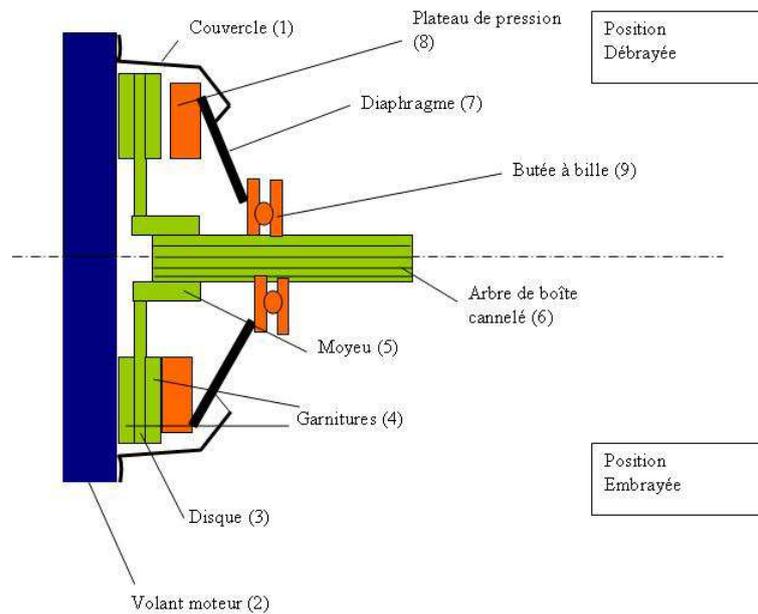


FIG. 2.8 – Schéma d'embrayage : position débrayée (haut) et position embrayée (bas)

par le conducteur sont filtrées et corrigées par un calculateur de façon à éviter par exemple des calages intempestifs ou des sur-régimes du moteur thermique.

Nous nous intéresserons ici à un actionneur d'embrayage développé par Valeo nommé "e-clutch". Celui-ci a la particularité de posséder un mécanisme qui compense la résistance du disque d'embrayage. Ce compensateur permet d'utiliser un moteur électrique de faible puissance pour mouvoir la butée d'embrayage. Ce gain de place et d'énergie entraîne bien entendu une mécanique plus complexe et donc un système plus difficile à contrôler.

### 2.2.2 Principe de fonctionnement

L'actionneur étudié est présenté sur la figure (2.9). Sur le banc d'essai, on adjoint à l'actionneur (a) l'embrayage (b). Un système hydraulique (c) connecte la sortie de l'actionneur à la butée d'embrayage : à l'aide d'un piston, l'actionneur pilote le piston esclave de l'embrayage. La force  $F_c$  développée par l'embrayage peut être modélisée comme la raideur d'un ressort non-linéaire. Ainsi, la force  $F_c$  dépend de la position de l'embrayage  $x_c$ . Le liquide dans le système hydraulique étant incompressible, les frottements et la quantité de liquide étant négligeables, les relations (2.16) peuvent être données.

$$\begin{aligned}
 F_2(x) &= \frac{S_m}{S_s} F_c(x_c) \\
 x_c &= \frac{S_m}{S_s} x
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

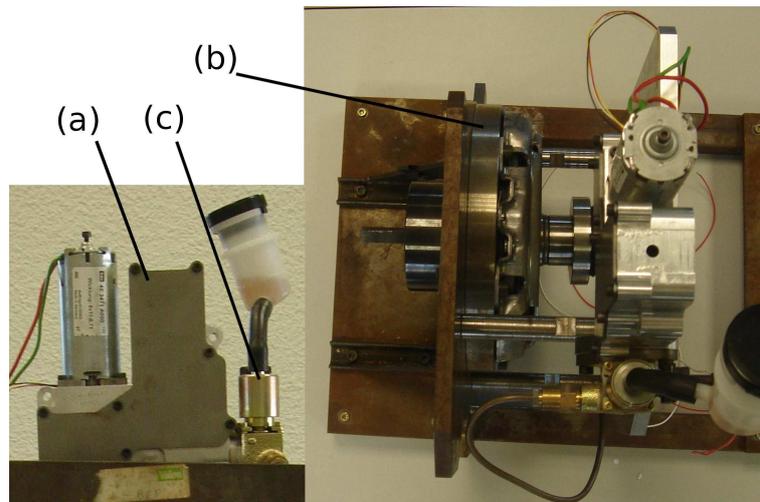


FIG. 2.9 – Photos de la maquette, (a) : actionneur, (b) : embrayage, (c) : système hydraulique

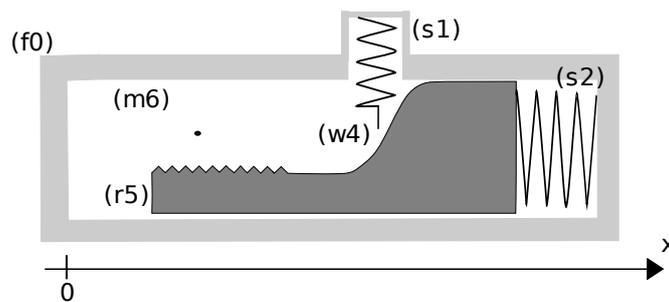


FIG. 2.10 – Schéma de principe de l'actionneur e-clutch

Où  $S_m$ ,  $S_s$ ,  $F_2$  et  $x$  sont respectivement les sections des pistons maître et esclave, la force de l'embrayage vue par l'actionneur et la position de ce dernier. Le moteur électrique déplace le piston maître via un réducteur couplé à une crémaillère. Dans la suite, on modélisera ce mécanisme par une seule crémaillère avec un coefficient réducteur équivalent  $r$  et un rendement  $\eta$ . Le jeu  $\varrho$  vu par le moteur est celui de la crémaillère amplifié par le réducteur entre le moteur et la crémaillère ( $r5$ ). La valeur numérique du jeu est de 3 radians.

Suivant les hypothèses formulées ci-dessus, l'embrayage est modélisé comme un ressort non-linéaire directement au contact de l'actionneur. La figure (2.10) donne le schéma cinématique simplifié de l'actionneur. L'actionneur est composé d'un moteur électrique ( $m6$ ), d'une crémaillère ( $r5$ ) et d'un ressort de compensation ( $s1$ ). Le ressort ( $s2$ ) représente l'embrayage. Il presse la crémaillère ( $r5$ ) suivant l'axe de déplacement de celle-ci. Le ressort ( $s1$ ) comprime, via une petite roulette ( $w4$ ), la crémaillère ( $r5$ ) sur le châssis ( $f0$ ). La courbure de la crémaillère est conçue pour que les 2 ressorts ( $s1$ ) et ( $s2$ ) se compensent : Si ( $s1$ ) est comprimé, ( $s2$ ) est relâché, et inversement. De sorte que, pour actionner l'embrayage, le couple moteur de ( $m6$ ) soit le plus petit possible afin de diminuer la taille de la machine électrique.

### 2.2.3 Décomposition en blocs

Dans le but de simplifier la compréhension du système, certaines hypothèses ont été faites dans la section précédente (dynamiques et frottements du système hydraulique négligés). Il s'agit d'une entorse faite à la méthode de modélisation proposée dans la section 2.1. Cependant, ces simplifications ont été validées en théorie et en pratique. Pour garder un exposé clair, elles sont conservées.

Suivant la méthodologie de la section 2.1, on étudie séparément chaque pièce du système. L'actionneur est décomposé suivant le schéma (2.11).

Le bloc ( $m6$ ) d'inertie  $J$  est modélisé par l'équation :

$$J\dot{\omega} = C_m - C_r \quad (2.17)$$

Où  $C_m$  et  $C_r$  sont respectivement le couple moteur et le couple résistant. Les frottements du rotor contre sa cage sont définis par le bloc ( $f0$ ) – ( $m6$ ). Le chariot ( $r5$ ) est mu via un moto-réducteur et une crémaillère : la liaison ( $m6$ ) – ( $r5$ ). Cette liaison comporte bien entendu des frottements et du jeu. De par la faible inertie des pièces, on néglige les dynamiques du réducteur. On se ramène ainsi à un simple rapport de réduction  $r$  et un rendement  $\eta$ . Le jeu est modélisé par un état  $\chi$  suivant l'équation (2.18). Lorsque l'axe ( $m6$ ) entraîne le chariot ( $r5$ ),  $\chi$  vaut 1, sinon il est égal à 0.

$$\begin{aligned} \chi &= 1 \text{ si } \left| \int_{\text{sat}[-\frac{\rho}{2}; \frac{\rho}{2}]} \left( \omega - \frac{v'_{(r5)}}{r} \right) dt \right| = \frac{\rho}{2} \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Une fois  $\chi$  défini, les équations reliant le rotor au chariot sont facilement définies par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} v'_{(r5)} &= r\omega \text{ si } \chi = 1, \\ &v_{(r5)} \text{ sinon} \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$C_{(r5)} = \frac{\chi}{r\eta} F_{(r5)} \quad (2.20)$$

$v'_{(r5)}$  est la vitesse imposée sur le chariot ( $r5$ ) par la liaison ( $m6$ ) – ( $r5$ ). Lorsque le moteur n'entraîne pas le chariot à cause du jeu de la crémaillère, ce dernier n'est plus contraint par la liaison cinématique ( $m6$ ) – ( $r5$ ). Sa vitesse de référence devient sa propre vitesse  $v_{(r5)}$ , il devient un système autonome.

Le chariot ( $r5$ ) de masse  $m$  évolue le long de l'axe  $Ox$  à la vitesse  $v_{(r5)}$  suivant l'équation :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{(r5)} &= v_{(r5)} \\ m\dot{v}_{(r5)} &= \chi R(v'_{(r5)} - v_{(r5)}) - F_{(s2)} - F_{(w4)} \\ F_{(r5)} &= -R(v'_{(r5)} - v_{(r5)}) \end{aligned} \quad (2.21)$$

$R$  est le mécanisme de simulation qui fait converger  $v_{(r5)}$  vers  $v'_{(r5)}$ . Comme dans l'exemple 2.1.6, un correcteur PI semblable à (2.22) sera utilisé. Lorsque  $\chi = 0$ , il faut déconnecter le régulateur,



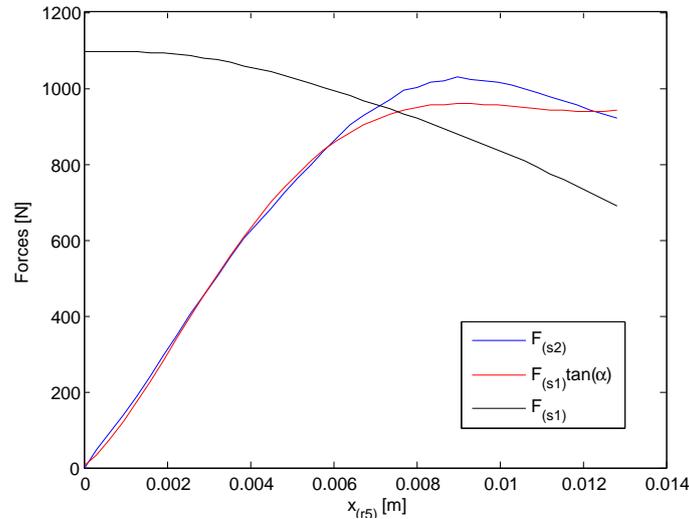


FIG. 2.12 – Forces appliquées par les ressorts (s1) et (s2) sur le chariot (r5)

## 2.2.4 Simplifications

Pour modéliser l'actionneur d'embrayage e-clutch, malgré les premières hypothèses simplificatrices (2.16), nous avons besoin des équations (2.17) à (2.23), soit 7 équations. Il faut ajouter à cela les caractéristiques de l'angle  $\alpha$  et des ressorts (s1) et (s2).

Ce modèle est très difficile à utiliser pour identifier les propriétés du système. On se doit de le simplifier. Ce travail va se faire par itérations successives, jusqu'à obtenir un modèle assez compact pour la commande et/ou l'estimation des états du système.

Le système comporte 2 pièces principales en mouvement : le rotor du moteur (m6) et le chariot (r5). La liaison cinématique entre eux n'est pas élastique. On peut considérer une simple inertie égale à  $J + r^2m$ , où  $r^2m$  est la masse du chariot ramenée au rotor du moteur. Cette masse est négligeable devant l'inertie du moteur. Donc les dynamiques du chariot peuvent être négligées. On considérera la masse du chariot nulle, ce qui implique que lorsque l'état du jeu  $\chi$  est égal à 1, sa vitesse est proportionnelle à celle du rotor (m6), sinon  $v_{(r5)}$  est nulle. Ces simplifications impliquent de larges modifications du modèle :

- le correcteur  $R$  n'est plus nécessaire, les expressions de la vitesse du chariot et de la force résistante qu'il applique sur le pignon s'en trouvent simplifiées :

$$v_{(r5)} = v'_{(r5)} \quad (2.24)$$

$$F_{(r5)} = F_{(s2)} + F_{(w4)} \quad (2.25)$$

- l'expression de  $\chi$  est simplifiée : lorsque le rotor n'entraîne pas le chariot, la vitesse de

celui-ci est nulle.

$$\begin{aligned}\chi &= 1 - \text{sign} \left( \frac{\varrho}{2} - \left| \int_{\text{sat}[-\frac{\varrho}{2}; \frac{\varrho}{2}]} \omega dt \right| \right) \\ v'_{(r5)} &= \chi r \omega \\ C_{(r5)} &= \frac{\chi}{r\eta} F_{(r5)}\end{aligned}\quad (2.26)$$

De manière à minimiser les dépenses d'énergie, l'actionneur est conçu de telle façon que la butée d'embrayage reste à sa position lorsque le couple moteur est nul (i.e. courant nul dans le moteur). La compensation entre les ressorts ( $s1$ ) et ( $s2$ ) n'étant pas parfaite, elle ne suffit pas pour acquérir cette propriété. Pour rendre le système irréversible, il faut que les frottements du chariot sur le châssis soient suffisamment importants pour compenser la force résiduelle des ressorts. Pour cela, il faut que le coefficient  $\mu_c$  vérifie l'équation (2.27).

$$\mu_c > \frac{F_{(s2)} - F_{(s1)} \tan(\alpha)}{F_{(s1)}} \quad (2.27)$$

Avoir un système irréversible permet d'intégrer le résidu de force produit par les ressorts aux frottements secs. En effet, ce résidu n'est pas moteur car inférieur aux frottements. La force  $F_{(r5)}$  devient :

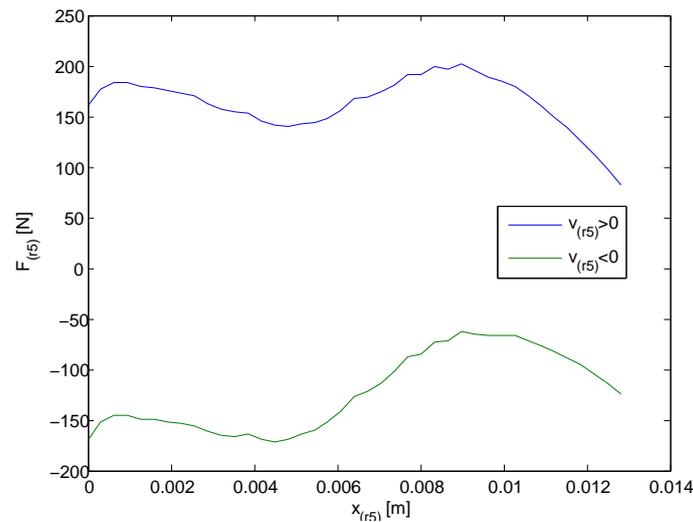
$$\begin{aligned}F_{(r5)} &= (\mu_c F_{(s1)} + F_{(s2)} - F_{(s1)} \tan(\alpha)) \text{ si } v_{(r5)} > 0 \\ &= (-\mu_c F_{(s1)} + F_{(s2)} - F_{(s1)} \tan(\alpha)) \text{ si } v_{(r5)} < 0\end{aligned}\quad (2.28)$$

Il est à noter que  $F_{(r5)}$  n'a pas été définie pour une vitesse nulle. En effet, cela dépend du modèle de frottement utilisé, voir 2.3 et 3.

En modélisant la force  $F_{(r5)}$  suivant la formulation (2.28), on peut encore simplifier le modèle en remplaçant les 2 ressorts et leurs liaisons respectives par une simple fonction pré-calculée renvoyant la force adéquate en fonction de la vitesse et de la position du chariot (cf. figure (2.13)).

En pratique, un seul capteur est positionné sur le rotor du moteur : la position du chariot est inconnue. On peut la reconstruire à l'aide du rapport de réduction  $r$  mais, ne connaissant pas la position du jeu, une erreur statique s'ajoute nécessairement au résultat. Ce jeu est important au niveau du moteur (3rad), mais rapporté au chariot, il devient faible (<0.7mm) et de toute façon inobservable. En utilisant la position du rotor pour calculer la force  $F_{(r5)}$ , on fera donc une erreur faible. De plus, malgré ce jeu, le positionnement de l'embrayage est suffisamment fin pour répondre au cahier des charges. Donc il est inutile de chercher à avoir un modèle précis du système pour des faibles déplacements, du moins pour la conception de la commande. Le jeu de la liaison ( $m6$ ) - ( $r5$ ) peut donc être négligé.

Le couple résistant issu du chariot est donc simplement égal à  $\frac{1}{r\eta} F_{(r5)}$  et la vitesse du chariot à  $r\omega$ . Nous avons précisé que  $F_{(r5)}$  et donc  $C_{(r5)}$  peuvent être vus comme des frottements calculés à partir de la position du rotor. Ils peuvent donc être intégrés aux frottements des balais de la

FIG. 2.13 – Force résistive totale appliquée sur le chariot ( $r5$ )

machine à courant continu. Le modèle de l'embrayage robotisé devient ainsi très simple :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{(r5)} &= r\omega \\
 J\dot{\omega} &= u - C_r(\theta, \text{sign}(\omega)) \\
 \theta &= \frac{1}{r}x_{(r5)}
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

$\theta$  est l'angle du rotor et  $C_r$  est donné par la figure (2.14). Le modèle (2.29) sera validé dans le chapitre 4.

### 2.2.5 Les frottements : la difficulté du système

A partir d'un système mécanique complexe, un modèle exhaustif a été développé. Celui-ci, bien que retranscrivant les phénomènes de jeux, d'inerties et de frottements du système, ne peut servir de modèle pour la synthèse d'une commande. En effet, il comporte un nombre important de paramètres (inerties, masses, coefficients de frottements, pré-contraintes et raideurs de ressorts...) qui, même bien connus au départ, peuvent évoluer dans le temps. À ces paramètres physiques, s'ajoutent des paramètres propres à la simulation comme par exemple le régulateur  $R$  de la liaison entre le moteur ( $m6$ ) et le chariot ( $r5$ ). Ces paramètres vont influencer la précision mais aussi le temps de simulation.

A partir du modèle exhaustif, on a proposé une succession d'hypothèses simplificatrices. A chaque itération, on obtenait ainsi un modèle plus simple. Au final, le système mécanique a été modélisé par une simple inertie à laquelle ont été adjoints des frottements.

Les frottements sont un phénomène inhérent à tous les systèmes mécaniques. Aussi, il est important de pouvoir les modéliser de façon adéquate. Beaucoup de travaux ont été effectués sur ce sujet, nous en proposons un panorama non-exhaustif dans la section suivante.

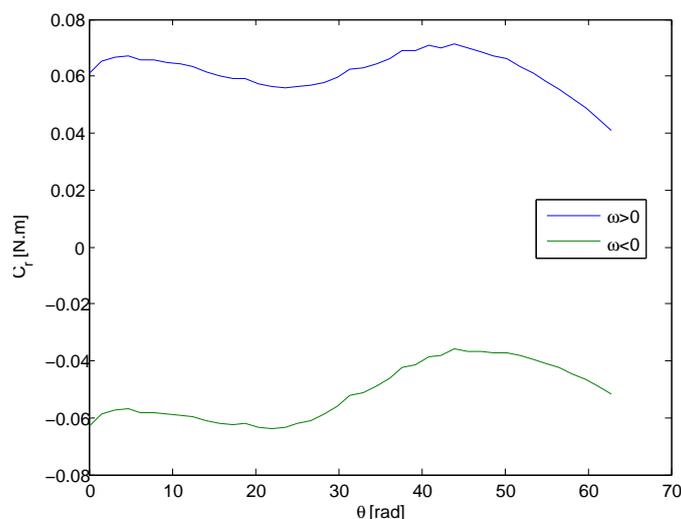


FIG. 2.14 – Couple résistant total vu par le moteur

## 2.3 Les frottements : origines physiques

### 2.3.1 Tribologie

Le mot "tribologie", construit à partir des racines grecques "tribein" (frotter) et "logos" (discours, étude), a été proposé en 1968 par G. Salomon pour désigner la science qui étudie les phénomènes susceptibles de se produire entre deux systèmes matériels en contact, immobiles ou animés de mouvements relatifs. Il recouvre, entre autres, tous les domaines du frottement, de l'usure et de la lubrification (source : Wikipédia).

Comme dans [1], on se propose de faire un rappel des différents phénomènes liés aux frottements, puis on présente une liste non-exhaustive des modèles existants avec leurs avantages et inconvénients.

### 2.3.2 Définitions et notations

Pour présenter les différents phénomènes de frottements ainsi que leurs différents modèles, on s'intéresse à un mobile de masse  $m$  sur un plan horizontal. Il est soumis à son propre poids suivant l'axe  $(Oy)$  et subit une force  $u$  suivant l'axe  $(Ox)$ . Comme sur la figure (2.15), nous considérons un mouvement rectiligne.

Quel que soit le matériau d'un solide, sa surface n'est pas parfaitement lisse. Comme le montre la figure (2.15), elle est rugueuse, comportant des irrégularités dues à l'usinage de la pièce ou même à sa nature. Lorsque 2 pièces mécaniques en contact se déplacent l'une par rapport à l'autre, ces aspérités se déforment et s'entrechoquent, dissipant ainsi de l'énergie. Cette énergie est représentée de façon macroscopique par les frottements. Suivant les matériaux utilisés, il y aura soit plus de déformations élastiques soit plus de chocs pouvant aller jusqu'à arracher de la matière.

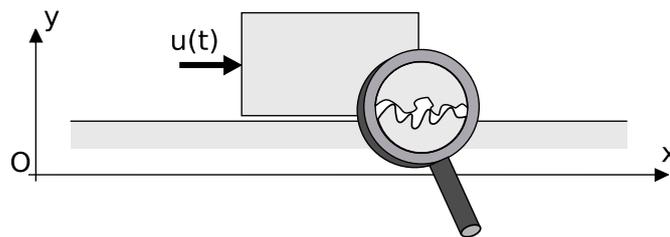


FIG. 2.15 – Solide sur un support horizontal

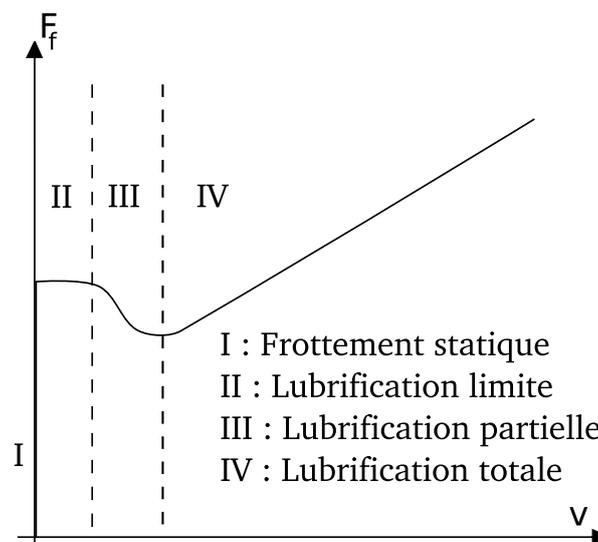


FIG. 2.16 – Evolution des frottements en fonction de la vitesse

Pour limiter ces frottements secs, on lubrifie les systèmes mécaniques pour obtenir des frottements humides. Ainsi, une pellicule de liquide s'interpose entre les 2 pièces en mouvement. Comme l'illustre la figure (2.16), la lubrification peut engendrer 4 régimes de fonctionnement, [10], [1].

### 2.3.2.1 Régime I : frottement statique

Lorsque la vitesse du solide est nulle, sa surface est "collée" à celle du support. En réalité, elles ne sont en contact qu'en un nombre fini de points, on parle de *stiction*. Si on applique une force faible de cisaillement  $u$ , chaque point de contact se déforme sans qu'il y ait rupture. Si on annule la force extérieure, le solide retourne à sa position d'origine. Dans la littérature anglophone, ce comportement est connu sous le terme de *presliding displacement*.

Au fur et à mesure qu'on augmente  $u$ , les déformations deviennent de plus en plus importantes. Certaines adhérences cassent, d'autres continuent à se déformer. Lorsque l'écart entre le solide et sa position d'origine atteint une limite  $z_{max}$ , toutes les adhérences sont cassées, il y a glissement. Cette limite est atteinte lorsque la force  $u$  est égale  $F_s$ , la force de rupture (*breakaway*

force).

Il est à noter que plus la phase de collage est longue, plus la force de rupture augmente jusqu'à atteindre un maximum. Ce temps d'immobilité et ce phénomène sont appelés respectivement *dwell time* et *rising static friction*.

Lors d'un pré-déplacement, un phénomène d'hystérésis apparaît entre la position et la force résultante du frottement. De plus, le centre de l'hystérésis varie en fonction de la trajectoire suivie par le système. Ce phénomène est connu sous le terme anglophone de *hysteresis behavior with nonlocal memory*.

### 2.3.2.2 Régime II : lubrification limite

Pour ce régime, la vitesse du solide est trop faible pour qu'un film de lubrifiant se forme à l'interface des 2 surfaces. Les aspérités de celles-ci vont donc s'entrechoquer, provoquant des déformations et/ou de l'arrachement de matière. On a affaire à un frottement quasiment sec (i.e. sans lubrifiant). D'après Coulomb, [26], [1], ce type de frottement est indépendant de la vitesse, comme le montre la figure (2.16) durant ce régime.

### 2.3.2.3 Régime III : lubrification partielle

Si la vitesse de glissement augmente encore, le lubrifiant commence à être entraîné par les 2 surfaces. Cependant, le solide ne glisse pas encore totalement sur le fluide et il reste quelques points de contacts provoquant des frottements secs ponctuels. Ainsi, plus la vitesse augmente, plus le film de lubrifiant devient important, diminuant ainsi les frottements secs. Lorsque les surfaces ne sont plus en contact direct, un minimum est atteint. Cet effet est appelé *effet Stribeck*, son allure dépend des propriétés du fluide, [27], [1].

Le lubrifiant possède sa propre dynamique, liée entre autre à sa viscosité. Ainsi les variations de vitesse ne vont pas être répercutées directement sur la qualité de la lubrification et donc sur les frottements. Ce retard est appelé *frictional memory*.

### 2.3.2.4 Régime IV : Lubrification totale

Il y a lubrification totale à partir du moment où la vitesse est suffisante pour que le fluide entre les 2 surfaces soit le seul support portant le solide. Dans ce cas, le frottement dépend de l'épaisseur du film, on parle de *frottement visqueux*. En général, les frottements augmentent avec la vitesse comme l'illustre la figure (2.16).

## 2.4 Modèles de frottement, état de l'art

### 2.4.1 Que doit-on modéliser ?

Nous avons vu dans la section précédente que les frottements sont des phénomènes macroscopiques d'origine microscopique. Modéliser de façon fine toutes les petites interactions entre

les 2 surfaces en contact n'a pas de sens pour la synthèse de la commande ou du contrôle. En effet, cela rend l'identification des paramètres et la simulation extrêmement longues et complexes.

Ainsi, la communauté préfère développer des modèles moyens rendant compte seulement des phénomènes macroscopiques. L'objectif est de capturer le maximum des comportements détaillés précédemment et résumés ici :

- *stiction* (collage) : frottement statique, le solide reste immobile tant qu'il n'y a pas rupture des adhérences,
- *pre-sliding displacement* (pré-déplacement) : lorsqu'il y a collage, les adhérences ont un comportement élastique tant qu'il n'y a pas rupture,
- *hysteresis behavior with nonlocal memory* (phénomène hystérétique avec mémoire non locale) : lors d'un pré-déplacement, la force de frottement dépend de la position suivant une hystérésis dont le centre varie, cf. annexe A, [28],
- *rising static friction* (Augmentation du frottement statique) : dépendance entre le temps de collage (*dwell time*) et la valeur de la force de rupture (*breakaway force*),
- *frictional memory* (mémoire du frottement) : pour des vitesses faibles, retard entre les variations de vitesse et la valeur des frottements,
- *effet Stribeck* : variation du frottement à faible vitesse suivant la zone III de la figure (2.16) due à la mixité du contact sec/visqueux à ce régime,
- *frottement visqueux* : à vitesse élevée, le solide glisse sur le fluide lubrifiant sans être en contact direct avec le support. Le frottement est alors proportionnel à la vitesse.

En plus de ces propriétés, un bon modèle doit présenter un temps de simulation acceptable ainsi qu'une propriété de *non dérive* : lorsqu'on applique une force  $u$  inférieure à la force de rupture  $F_s$ , la position du solide doit rester bornée.

Les modèles de frottements peuvent être classés en 2 grandes familles : les modèles statiques et les modèles dynamiques. Les premiers utilisent une fonction algébrique pour modéliser les frottements, contrairement aux seconds, qui ajoutent un ou plusieurs états pour les retranscrire.

Dans la suite, on propose une liste non exhaustive des principaux modèles utilisés dans la littérature.

## 2.4.2 Modèles statiques

### 2.4.2.1 Modèle de Coulomb

Le modèle simplifié de Coulomb, [26], [1], suppose un frottement constant quelle que soit la vitesse, (2.30).

$$\begin{aligned} F_f &= \text{sign}(u) \min(|u|, F_c) \text{ si } v = 0 \\ &= F_c \text{sign}(v) \text{ si } v \neq 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

où  $F_f$  et  $F_c$  sont respectivement la force du frottement et la force du frottement de Coulomb proportionnelle à la force normale appliquée au solide. Ce modèle très simple à mettre en oeuvre est encore largement utilisé. Cependant, en pratique pour des faibles variations de vitesse autour de 0, la fonction *sign* provoque des discontinuités qui imposent un pas d'intégration numérique

très petit et donc un temps de simulation très grand. Pour remédier à ce problème, on régularise la discontinuité en la lissant : la fonction *sign* est remplacée par une fonction *atan* ou *tanh*. Bien entendu, ce changement dégrade la véracité du modèle.

#### 2.4.2.2 Modèle SVC : modèle statique+Coulomb+visqueux

En modifiant le modèle de Coulomb, on peut facilement y intégrer les phénomènes de frottement statique et visqueux donnant le modèle SVC représenté par les équations (2.31).

$$\begin{aligned} F_f &= \text{sign}(u) \min(|u|, F_s) \text{ si } v = 0 \\ &= F_c \text{sign}(v) + \sigma_0 v \text{ si } v \neq 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

$\sigma_0$  est le coefficient de proportionnalité liant la vitesse au frottement visqueux. On obtient un modèle encore très simple à utiliser, cependant certains phénomènes physiques restent non représentés (*effet Stribeck, pre-sliding displacement...*). De plus, comme pour le modèle de Coulomb, la non-linéarité pour des vitesses faibles peut provoquer des temps de simulation très importants. En pratique, les conditions  $v = 0$  et  $v \neq 0$  sont relâchées pour faciliter la détection du passage à  $v = 0$ . On définit une vitesse  $dv$  très petite telle que :

$$\begin{aligned} F_f &= \text{sign}(u) \min(|u|, F_s) \text{ si } v \in [-dv, dv] \\ &= F_c \text{sign}(v) + \sigma_0 v \text{ si } v \notin [-dv, dv] \end{aligned} \quad (2.32)$$

Cette modification fait perdre la propriété de *non-dérive*.

#### 2.4.2.3 Modèle de Stribeck

Le modèle SVC modélise déjà les frottements statiques, de Coulomb et visqueux. Cependant, à faible vitesse, les études de Stribeck ont montré une continuité entre la force de rupture  $F_s$  et la force  $F_f$  pour  $v \neq 0$  comme le modélise (2.33).

$$\begin{aligned} F_f &= \text{sign}(u) \min(|u|, F_s) \text{ si } v = 0 \\ &= F(v) \text{ si } v \neq 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

La fonction continue  $F(v)$  dépend des matériaux en contact. Habituellement on choisit  $F(v)$  suivant l'équation (2.34).

$$F(v) = \left( F_c + (F_s - F_c) e^{-\left| \frac{v}{v_s} \right|^{\delta_s}} \right) \text{sign}(v) + \sigma_0 v \quad (2.34)$$

Le paramètre  $\delta_s$  permet de contrôler la courbure de  $F(v)$  au voisinage de  $v = 0$ . Le paramètre  $v_s$ , appelé vitesse de Stribeck, permet de maîtriser la vitesse de décroissance de  $F_s$  vers  $F_c$ .

Ce modèle, bien que plus complet que les précédents, ne résout pas les problèmes pratiques de simulation autour de  $v = 0$ .

#### 2.4.2.4 Modèle de Karnopp

Le modèle de Dean Karnopp, [6], a pour objet de résoudre les problèmes de convergence en simulation des modèles précédents (lorsque la vitesse tend vers 0 en oscillant autour). Ici, on suppose que lorsque la vitesse est comprise dans un intervalle  $[-dv, dv]$ , elle devient négligeable et donc nulle. Dans ce cas, les frottements deviennent une fonction du signe de la force d'entrée  $u$ .

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_f \\ v_m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \text{sign}(u) \min(|u|, F_s) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ si } v \in [-dv, dv] \\ &= \begin{pmatrix} F_c \text{sign}(v) + \sigma_0 v \\ v \end{pmatrix} \text{ si } v \notin [-dv, dv] \end{aligned} \quad (2.35)$$

Ce modèle est également très proche du modèle (2.32), cependant ici, il y a 2 sorties, la force des frottements et une vitesse fictive  $v_m$  qui est nulle lorsqu'il y a collage.

Avec ce modèle, les mouvements de stick-slip (collage-décollage) sont bien modélisés. Il ne présente pas de dérive pour des petites variations de  $u$ , cependant l'effet Stribeck n'est pas représenté. Il reste cependant très pertinent car dans la plupart des systèmes, les vitesses faibles (et donc l'effet Stribeck) ne sont pas observables, contrairement à l'effet stick-slip.

Attention toutefois, lorsque  $v \in [-dv, dv]$ , même si  $v_m$  est nulle,  $v$  continue à être intégrée suivant l'équation (2.36). En cas d'asservissement, le correcteur applique une commande  $u$  modifiant la trajectoire de  $v$  tout en mesurant  $v_m$  égale à 0 : le système est en boucle ouverte (résolvant le problème de convergence).

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= u - \text{sign}(u) \min(|u|, F_s) \text{ si } v \in [-dv, dv] \\ &= u - F_c \text{sign}(v) + \sigma_0 v \text{ si } v \notin [-dv, dv] \end{aligned} \quad (2.36)$$

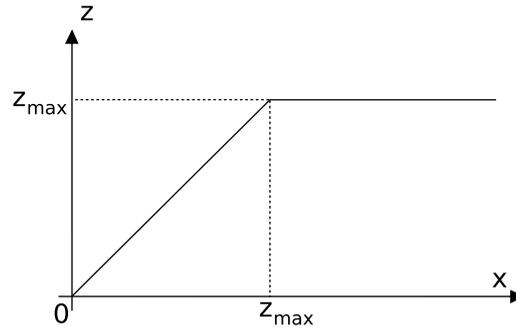
### 2.4.3 Modèles dynamiques

#### 2.4.3.1 Modélisation des pré-déplacements

Lorsqu'un solide est immobile sur un plan, les adhérences entre lui et son support ne sont pas rigides mais élastiques. De plus, les caractéristiques du collage ne sont pas uniformes sur l'ensemble de la surface. Ainsi, modéliser chaque adhérence impose trop de contraintes d'identification et de simulation, on préfère utiliser un modèle moyen : lorsqu'il y a collage, on suppose que le solide et son support sont reliés par un seul ressort. L'allongement  $z$  de celui-ci est maximal lorsque qu'il vaut  $z_{\max}$ . Il y a alors rupture des adhérences et glissement du mobile. En général, on suppose la force du frottement proportionnelle à l'élongation du ressort fictif.

Le solide peut se déplacer soit en glissant, soit, lors des phases de collage, en déformant les liaisons. Sa position est donc la somme de ces 2 déplacements relatifs. De cette relation on en déduit la figure (2.17).

Au lieu de présenter une liste exhaustive des modèles disponibles, on s'intéresse dans la suite aux plus récents et aux plus utilisés par la communauté. On note aussi la filiation entre ceux-ci : du plus simple (modèle de Dahl) [3] au plus complet (Modèle généralisé de Maxwell

FIG. 2.17 – Pré-déplacement  $z$  en fonction de la position  $x$ 

[29]). A chaque itération, la liste des phénomènes pris en compte est complétée. L'ensemble de ces modèles sont des modèles empiriques où l'objectif est de faire correspondre une ou des équation(s) différentielle(s) à la réalité observée, avec plus ou moins de succès. C'est aussi la démarche entreprise par Bliman et Sorine [7], et par le modèle "reset integrator" [11]. Il est à noter cependant que dans [29] un modèle générique de friction (generic friction model) est proposé en modélisant l'ensemble des adhérences entre le mobile et son support. Il se rapproche en cela du modèle "bristle" [11].

#### 2.4.3.2 Modèle de Dahl

Dans [3], Dahl utilise un état supplémentaire pour modéliser les pré-déplacements. Il approche le comportement élastique des adhérences en lissant la discontinuité lors de la rupture de celles-ci. Ainsi la force de frottement est modélisée par l'équation (2.37).

$$\frac{dF_f}{dx} = \sigma \left| 1 - \frac{F_f \operatorname{sign}(v)}{F_c} \right|^i \operatorname{sign} \left( 1 - \frac{F_f \operatorname{sign}(v)}{F_c} \right) \quad (2.37)$$

Où  $\sigma$  est homogène à une raideur, et  $i$  est un paramètre de réglage de l'allure globale de  $F_f(x)$  : plus  $i \in \mathbb{R}_*^+$  est élevé, plus la réponse  $z(x)$  est proche de la réalité. En général, on utilise un modèle de premier ordre ( $i = 1$ ) où la force de frottement est proportionnelle au pré-déplacement ( $F_f = \sigma z$ ). En multipliant l'équation (2.37) par  $v$  et avec  $i = 1$ , on obtient une équation différentielle vis-à-vis de la variable temporelle :

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= v \left( 1 - \frac{\sigma z \operatorname{sign}(v)}{F_c} \right) \\ F_f &= \sigma z \end{aligned} \quad (2.38)$$

Ce modèle prend en compte bien entendu le comportement élastique (*pre-sliding displacement*). En régime permanent de glissement, il est équivalent au modèle de Coulomb. Bien que ne prenant en compte que peu de phénomènes, ce modèle a l'avantage de n'avoir que 2 paramètres et d'être dissipatif.

### 2.4.3.3 Modèle de LuGre

Le modèle de LuGre est issu d'une collaboration entre les laboratoires des universités de Lund et de Grenoble, [4]. Cette extension du modèle de Dahl permet d'intégrer l'*effet Stribeck*, le *frottement visqueux* et l'*effet frictional memory*.

Pour prendre en compte l'*effet Stribeck*, le frottement de Coulomb du modèle de Dahl est remplacé par une fonction  $g(v)$  décrivant la courbe de Stribeck. En général, (2.39) est communément utilisée :

$$g(v) = F_c + (F_s - F_c)e^{-\left(\frac{v}{v_s}\right)^{\delta_s}} \quad (2.39)$$

Pour améliorer la convergence, les déformations des adhérences ne sont plus modélisées comme un simple ressort (modèle de Dahl), mais comme un couple ressort-amortisseur. Pour prendre en compte le frottement visqueux, un terme proportionnel à la vitesse est simplement ajouté à  $F_f$ . On obtient ainsi le modèle décrit par le système d'équations (2.40-2.42).

$$\frac{dz}{dt} = v - \sigma_0 \frac{|v|}{g(v)} z \quad (2.40)$$

$$g(v) = F_c + (F_s - F_c)e^{-\left(\frac{v}{v_s}\right)^{\delta_s}} \quad (2.41)$$

$$F_f = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_v v \quad (2.42)$$

Ce modèle est équivalent au modèle de Stribeck lorsqu'il y a glissement. En choisissant  $\sigma_1 < 4 \frac{g(v)}{v}$ , on peut montrer que le modèle est dissipatif, [1]. Le phénomène de *frictional memory*, s'il n'est pas explicitement décrit, est rendu par l'équation différentielle non linéaire du modèle associée à l'allure de  $g(v)$ .

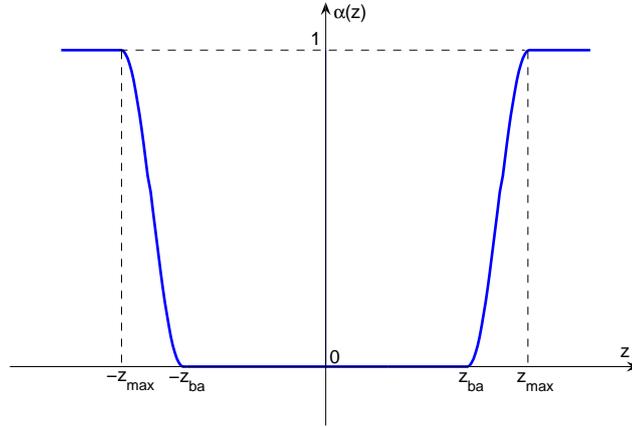
Le modèle de LuGre est très connu et est très utilisé par la communauté. Même s'il ne prend pas en compte la liste exhaustive des phénomènes physiques observables, son faible nombre de paramètres ainsi que sa relative simplicité lui ont permis d'être l'objet de nombreux travaux autant en identification qu'en contrôle-commande, [13], [21]. Les modèles qui en sont issus ne sont que de petites adaptations pour prendre en compte les derniers phénomènes non modélisés.

### 2.4.3.4 Modèle élasto-plastique

Un des inconvénients majeurs des modèles de Dahl et de LuGre est qu'ils ne possèdent pas la propriété de *non-dérive*, cf. 2.4.1. Pour la combler, il a été proposé dans [5] une extension du modèle de LuGre baptisée modèle élasto-plastique. Avec ce modèle, lorsque le mobile glisse,  $\dot{z} = 0$ , et lorsque qu'il y a adhérence (pré-déplacement), sa vitesse  $v$  est égale à  $\dot{z}$ . Ce comportement est obtenu en modifiant (2.40) pour obtenir l'équation (2.43).

$$\frac{dz}{dt} = v \left( 1 - \alpha(z) \frac{\sigma_0}{g(v)} \text{sign}(v) z \right) \quad (2.43)$$

La fonction  $\alpha(z)$  est nulle lorsqu'il y a adhérence et est égale à 1 lorsqu'il y a glissement. Dans ce cas là,  $\dot{z}$  converge vers 0. Une allure candidate pour cette fonction est représentée par la figure

FIG. 2.18 – Allure de la fonction  $\alpha(z)$ 

(2.18). Les discontinuités autour des zones de rupture sont lissées afin d'éviter les problèmes de simulation.

Pour assurer que la force de frottement s'oppose toujours au glissement, la fonction  $\alpha$  n'est introduite que lorsque  $\text{sign}(v) = \text{sign}(z)$ . En effet, si la vitesse change brutalement de signe, il y a alors relaxation brutale des déformations élastiques. Au final, le modèle est résumé par les équation (2.44) à (2.48).

$$\frac{dz}{dt} = v \left( 1 - \alpha(z, v) \frac{\sigma_0}{g(v)} \text{sign}(v)z \right) \quad (2.44)$$

$$\alpha(z, v) = \begin{cases} \alpha(z) & \text{si } \text{sign}(v) = \text{sign}(z) \\ 0 & \text{si } \text{sign}(v) \neq \text{sign}(z) \end{cases} \quad (2.45)$$

avec :

$$\alpha(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < z_{ba} \\ \frac{1}{2} \left( \sin \left( \pi \frac{|z| - z_{ba}}{z_{max} - z_{ba}} \right) + 1 \right) & \text{si } z_{ba} \leq |z| \leq z_{max} = \frac{F_s}{\sigma_0} \\ 1 & \text{si } |z| \geq z_{max} \end{cases} \quad (2.46)$$

$$g(v) = F_c + (F_s - F_c) e^{-\left(\frac{v}{v_s}\right)^2} \quad (2.47)$$

$$F_f = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_v v \quad (2.48)$$

Le modèle élasto-plastique<sup>1</sup> au prix d'une complexification importante et de l'ajout de 2 nouveaux paramètres ( $z_{ba}$  et  $z_{max}$ ) permet d'ajouter la propriété de *non-dérive* au modèle de LuGre. C'est un prix élevé pour l'ajout d'une seule propriété rendant le modèle toujours plus difficile à identifier.

<sup>1</sup>La fonction  $\alpha$  a été modifiée par rapport à la version originale,  $z$  a été remplacé par  $|z|$ . Ainsi la fonction est paire contrairement à la formulation dans [5].

### 2.4.3.5 Modèle de Leuven

Le modèle élasto-plastique résout le problème de dérive lors de pré-déplacements. Cependant, le phénomène "*hysteresis with nonlocal memory*" n'est pas encore pris en compte par le modèle. Le modèle de Leuven, [8], en modifiant le modèle de LuGre, permet de délivrer cette propriété tout en gardant celle de *non-dérive*.

La première modification porte sur l'équation de la force de frottement  $F_f$ . Le terme  $\sigma_0 z$  est remplacé par une fonction  $F_h(z)$  qui modélise le phénomène d'hystérésis des frottements lors de pré-déplacements. Suivant [9], l'équation non-linéaire régissant la variable de pré-déplacement  $z$  devient égale à (2.49). L'ensemble du modèle de Leuven est donné par les équations (2.49) à (2.51).

$$\frac{dz}{dt} = v \left( 1 - \text{sign} \left( \frac{F_h(z)}{g(v)} \right) \left| \frac{F_h(z)}{g(v)} \right|^i \right) \quad (2.49)$$

$$g(v) = F_c + (F_s - F_c) e^{-\left(\frac{v}{v_s}\right)^{\delta_s}} \quad (2.50)$$

$$F_f = F_h(z) + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_v v \quad (2.51)$$

Le paramètre  $i$  a le même objectif que l'exposant du modèle de Dahl explicité par l'équation (2.37). La fonction  $F_h(z)$  n'est pas explicitée ici. On peut utiliser la formulation proposée dans [8] ou [29]. Une autre manière consiste à utiliser le modèle de collage de Maxwell comme dans [9]. Enfin, il est à noter que le modèle de Preisach pourrait aussi convenir, [30].

Le modèle de Leuven avec ses différentes versions permet de prendre en compte exhaustivement l'ensemble des propriétés établies en 2.4.1. On peut remarquer que le modèle est très proche du modèle de LuGre, avec un degré de simplicité apparemment équivalent. Cependant, la fonction  $F_h(z)$  - égale à  $\sigma_0 z$  dans le modèle de LuGre - est en fait très complexe à modéliser et à identifier. Ainsi ce modèle ne devra être utilisé que lorsque toutes les propriétés sont observables et nécessaires à la bonne conception de la commande et/ou de l'observateur du système.

## 2.4.4 Récapitulatif

Une liste non-exhaustive mais significative de modèles de frottements a été présentée. Le tableau 2.1 récapitule les phénomènes pris en compte par chaque modèle. Le nombre de paramètres est aussi précisé pour chacun d'eux. Une propriété est bien modélisée par un modèle si un + est noté dans la case correspondante. Un - signifie que la propriété n'est pas prise en compte. Cette notation a été complétée par une troisième possibilité :  $\pm$ . Dans ce cas, la propriété est approximativement prise en compte par le modèle.

Par exemple, les modèles de Coulomb, SVC et Stribeck possèdent théoriquement la propriété de collage (*stiction*) mais dans un simulateur numérique avec un pas d'intégration non nul, ils peuvent la perdre. Il est à noter que les modèles dynamiques modélisant les pré-déplacements ne possèdent pas par définition la propriété de collage.

Les propriétés de *rising static friction* et *frictional memory* ne sont pas explicitement décrites par les modèles dynamiques. Elles découlent plutôt d'un réglage adéquat de leurs paramètres, d'où une modélisation approximative de celles-ci.

TAB. 2.1 – Récapitulatif des modèles existants de frottements

	Coulomb	SVC	Stribeck	Karnopp	Dahl	LuGre	Élasto-plastique	Leuven
Statique/Dynamique	S	S	S	S	D	D	D	D
Collage (Stiction)	±	±	±	+	-	-	-	-
Croissance temporelle de la force de rupture (Rising static friction)	-	-	-	-	-	±	±	±
Retard entre les frottements et la vitesse (Frictional memory)	-	-	-	-	-	±	±	±
pré-déplacement (Pre-sliding displacement)	-	-	-	-	+	+	+	+
Effet Stribeck	-	-	+	+	-	+	+	+
Frottements visqueux	-	+	+	+	-	+	+	+
Comportement en hystérésis des frottements (Hysteresis behavior with nonlocal memory)	-	-	-	-	-	-	-	+
Non-dérive	-	-	-	+	-	-	+	+
Nombre de paramètres	1	4	6	5	3	7	8	>8
Rapidité de simulation	-	-	-	+	+	+	+	+

La rapidité de simulation de chaque modèle est aussi précisée dans le tableau. Si la fonction sign des modèles statiques -sauf le modèle de Karnopp- n'est pas approchée, le temps de simulation peut devenir très important lorsque la vitesse est proche de zéro. Le modèle de Karnopp a été conçu pour résoudre ce problème, mais en contre-partie, il est peu précis. Les modèles dynamiques résolvent le problème de discontinuité autour d'une vitesse nulle. Leurs formulations permettent d'approcher la discontinuité liée à la rupture des adhésions. Plus on souhaite modéliser finement celle-ci, plus le temps de simulation sera lent.

## 2.5 Conclusion

Ce chapitre est divisé en 2 sections : la première s'intéresse à la modélisation des systèmes mécaniques complexes. Une méthodologie est proposée, elle consiste à étudier séparément chaque pièce mécanique du système puis à les interconnecter entre elles afin de fournir un modèle exhaustif du mécanisme étudié. La complexité du modèle est ainsi directement proportionnelle à celle du système modélisé. Si celle-ci se montre être trop importante, il faut alors simplifier le modèle. Ce travail demandant un exposé complet, seul des éléments de réponse ont été donnés. Finalement, la méthodologie présentée est appliquée à la modélisation d'un embrayage robotisé.

Celui-ci est soumis à d'importants frottements à la fois garants de son bon fonctionnement mais limitant ses performances.

La deuxième partie du chapitre est un état de l'art de la modélisation des frottements. Après un bref rappel des origines physiques de ce phénomène, une liste non-exhaustive de modèles est présentée. Suivant le système à étudier, le concepteur doit en choisir un parmi cette liste. Il doit prendre en compte le temps dont il dispose pour la modélisation, la qualité des capteurs à sa disposition pour l'identification des paramètres du modèle et les caractéristiques des actionneurs. Par exemple, il ne sert à rien d'utiliser le modèle de Leuven si la résolution des capteurs est trop grossière pour visualiser les pré-déplacements.

À contrario, si le modèle est trop simple, certains phénomènes ne seront pas pris en compte lors de la conception de la commande et pourront se révéler néfastes une fois la commande implantée. Par exemple, un système dont on souhaite asservir la position est modélisé avec un modèle de Stribeck. Les phénomènes de collage-décollage (*stick-slip*) ne sont pas modélisés, hors il s'agit de la principale difficulté de ce type de régulation. On peut alors utiliser le modèle de Karnopp ou de LuGre. Ainsi, le nombre de paramètres du système augmente sans qu'on puisse facilement les identifier.

Dans la suite, on propose un nouveau modèle de frottement basé sur une approche hybride du problème. Cette méthode est très efficace pour modéliser rapidement les principales propriétés des frottements d'un système réel. De plus, suivant la finesse du modèle recherché, il est facile de modifier celui-ci pour ajouter les propriétés nécessaires. Le concepteur peut ainsi faire évoluer le modèle au fur à mesure de ses investigations sur le système étudié.



# Chapitre 3

## Modélisation hybride de frottements secs

### 3.1 Pourquoi une modélisation hybride des frottements ?

Traditionnellement, les systèmes sont classés en 2 catégories : les systèmes à temps continu et les systèmes à temps discret. Cependant, certains systèmes échappent à cette classification. Mélant à la fois le temps continu et le temps discret, ce sont des systèmes hybrides, [31]. En général, ils sont modélisés par un automate où chaque état de l'automate modélise un sous-modèle continu ou discret, [32]. Les commutations d'un état à l'autre dépendent de grandeurs exogènes ou des variables des sous-modèles, [33], [34]. Nos résultats ci-après montrent que les frottements avec leurs différents régimes de fonctionnements se prêtent très bien à ce formalisme. De plus, en utilisant une telle approche, les résultats théoriques disponibles sur cette classe de systèmes apportent des outils puissants pour la synthèse de commandes et/ou d'observateurs. Dans la suite de l'exposé, on utilisera le terme "mode du système" lorsqu'on fera référence à l'état de l'automate du système. On désignera les variables d'états des sous-modèles par "états du système". On notera les travaux de [35] sur le même sujet, cette thèse s'intéresse à la modélisation spécifique d'un actionneur de laboratoire et à sa commande par désybridation, [36]. Ici, on cherche à développer un modèle générique.

### 3.2 Description générale

Considérons comme pour la section 2.3 un mobile de masse  $m$  posé sur un plan horizontal. On applique à celui-ci une force  $u$  tangente au support. Sa vitesse  $v$  et sa position  $x$  sont décrites par les équations (3.1).

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= v(t) \\ m\dot{v}(t) &= u(t) - F_f(t, v, x)\end{aligned}\tag{3.1}$$

La force  $u$  est pilotée via un contrôleur discret de période  $T_s$ . La position  $x_m$  est la position  $x$  mesurée tous les  $T_s$  via un capteur de résolution  $\delta_x$ . Ces précisions sont nécessaires car nous en tiendrons compte pour la construction et l'implantation du modèle contrairement à la majorité

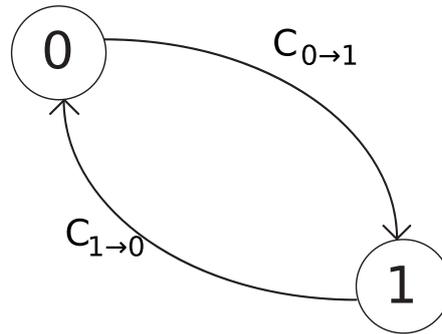


FIG. 3.1 – Machine d'état du modèle hybride

des modèles qui sont construits sans prendre en compte l'interface qui permet de contrôler et mesurer le système étudié. En effet, celle-ci contraint, par exemple, la capacité à identifier les paramètres du modèle. Ici, ces limites seront directement prises en compte dans la synthèse de ce dernier.

Généralement, les modèles de frottements s'efforcent de retranscrire les phénomènes observés via la fonction  $F_f$ . C'est suffisant lorsque le mobile glisse, par contre lorsqu'il est collé, on modifie  $F_f$  de façon à ce que le système global (3.1) ait le comportement souhaité.

D'après les rappels dans la section 2.3, on constate que les phénomènes physiques régissant le système sont différents suivant qu'il glisse ou qu'il est totalement (ou presque) immobile. L'ensemble des modèles présentés tente de les retranscrire à travers une seule équation. Cet effort se justifie dans la recherche d'un modèle compact, mais pour obtenir un modèle exhaustif, on en est venu à le complexifier jusqu'à perdre la simplicité recherchée au départ.

Le modèle hybride présenté ici décompose la modélisation des frottements secs en 2 sous-modèles :

- mode 0 : sous-modèle représentant le système lorsqu'il y a collage,
- mode 1 : sous-modèle représentant le système lorsqu'il y a glissement.

L'avantage de ce principe est qu'il permet de décorréler la modélisation du glissement, de celle du collage. Ainsi par exemple, si l'application implique une modélisation fine du glissement sans qu'il ait la même contrainte sur le collage, l'effort pourra être porté sur le sous-modèle du mode 1. Le mode 0 sera modélisé très simplement comme cela sera explicité dans la section 3.6.

Supposons les 2 sous-modèles définis, il reste à expliciter le passage de l'un à l'autre. Une machine d'état est utilisée pour mémoriser le sous-modèle actif et gérer les commutations de l'un à l'autre, cf. figure (3.1). Pour le passage du mode 1 (glissement) au mode 0 (collage), il faut définir à partir de quelle vitesse le mobile et son support se collent. Suivant la courbe de Stribeck, les frottements augmentent au fur et à mesure que la vitesse tend vers 0. Lorsque le système est à l'arrêt ( $v = 0$ ), il y a alors collage total.

Utiliser une vitesse nulle comme condition de commutation entre le mode 1 et le mode 0 provoque des problèmes de simulation semblables au modèle de Coulomb. En pratique, la vitesse est connue via un capteur. Ce capteur a une résolution non nulle. Ainsi on peut approcher la vitesse à laquelle on considère le système collé par une vitesse non-nulle  $\Sigma$ . On précisera dans la

partie 3.4 comment choisir sa valeur numérique.

Une fois le système collé, le mobile passe dans le mode 1 dès que la force  $u$  est suffisamment forte pour briser les adhérences. Cette condition,  $C_{0 \rightarrow 1}$ , sera explicitée dans la section 3.4 au cas par cas suivant la finesse du modèle que l'on souhaite.

Idéalement, la condition de commutation entre le mode 1 et le mode 0 est une condition sur la vitesse du mobile, alors que la condition de commutation entre le mode 0 et le mode 1 est une condition sur la force  $u$ . Le modèle de Karnopp commute entre 2 modes seulement suivant la vitesse. Pour cela, il utilise 2 variables "vitesse" : une première  $v$  respectant la deuxième loi de Newton et une deuxième  $v_m$  appelée vitesse mesurée. Lorsque la vitesse devient négligeable (inférieure à un seuil prédéfini), la vitesse mesurée devient nulle. Cependant,  $v$  continue à suivre la loi de Newton. Lorsque la force moteur  $u$  devient supérieur à  $F_s$ ,  $v$  est intégrée jusqu'à devenir supérieur à la valeur seuil. A cet instant, la vitesse mesurée devient égale à  $v$ . Il y a donc un retard entre le moment où le système doit glisser et le moment où le modèle se met effectivement à glisser. La modélisation hybride, en prenant directement en compte  $u$  dans ses conditions de commutation, supprime ce retard.

La condition  $C_{1 \rightarrow 0}$  pour commuter du mode 1 au mode 0 est donnée par (3.2).

$$C_{1 \rightarrow 0} : ((u < F_c) \text{ et } (0 < v < \Sigma)) \text{ ou } ((u > -F_c) \text{ et } (-\Sigma < v < 0)) \quad (3.2)$$

Les termes  $(u < F_c)$  et  $(u > -F_c)$  servent à éviter des commutations intempestives entre les 2 modes. En effet, lorsque le système commute du mode 0 au mode 1, la vitesse est inférieure à  $\Sigma$ . Lors des phases de décollage, la vitesse ne passe pas instantanément de 0 à une valeur supérieure à  $\Sigma$ . Si les inégalités sur  $u$  ne sont pas prises en compte, la condition  $C_{1 \rightarrow 0}$  reste vrai tant que  $|v| < \Sigma$ , donc le mode passe de nouveau dans le mode 0. On obtient une suite de commutations entre le mode 0 et le mode 1 qui n'a pas de raison physique. En utilisant la condition formulée par (3.2), le problème est résolu.

Pour des vitesses faibles, le frottement n'est pas égal à  $F_c$  mais suit la courbe décrite par Stribeck. La condition (3.2) ne prend pas en compte ce phénomène, ainsi elle est valide si  $\Sigma$  est choisie supérieure à  $3v_s$ . Si le besoin s'en fait ressentir, on peut toujours modifier la condition de commutation pour prendre en compte les petites variations de frottements pour des vitesses très faibles, cf. (3.3).

$$C_{1 \rightarrow 0} : ((u < |F_f(v)|) \text{ et } (0 < v < \Sigma)) \text{ ou } ((u > -|F_f(v)|) \text{ et } (-\Sigma < v < 0)) \quad (3.3)$$

### 3.3 Modélisation du glissement

Lorsque le mobile glisse il est en mode 1, les frottements sont alors représentés par une force s'opposant au mouvement. Comme le suggère Stribeck (cf. 2.4.2.3), cette force dépend de la vitesse. Dans la suite de l'exposé et afin de pouvoir comparer le modèle hybride avec les autres modèles disponibles, le frottement  $F_f$  est déterminé suivant l'équation :

$$F_f(v) = \left( F_c + (F_s - F_c) e^{-\left| \frac{v}{v_s} \right|^{\delta_s}} \right) \text{sign}(v) + \sigma_v v \quad (3.4)$$

Le sous-modèle modélisant le système est ainsi exprimé par les équations différentielles (3.5). On retrouve le modèle de Stribeck.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= v(t) \\ m\dot{v}(t) &= u(t) - F_f(v)\end{aligned}\tag{3.5}$$

Bien entendu, le modèle peut être facilement modifié pour prendre en compte les spécificités du système étudié, par exemple des valeurs différentes de  $F_c$ ,  $\sigma_v$  ou  $F_s$  suivant le signe de la vitesse comme on le verra dans la section 4.4. De même, la forme même de l'équation (3.4) peut évoluer en fonction des matériaux en contact.

## 3.4 Modélisation du collage

Comme il a été écrit dans la section 2.4.1, les frottements sont un ensemble de contacts microscopiques entre 2 surfaces ayant des répercussions macroscopiques. Lorsque les déplacements sont importants, l'ensemble de ces phénomènes microscopiques peuvent être facilement moyennés donnant un modèle simple. Par contre, pour des déplacements de faibles amplitudes, la complexité des phénomènes doit être prise en compte. Ceux-ci sont listés dans la section 2.4.1. La particularité du modèle hybride est qu'il permet de choisir l'ensemble des propriétés que l'on souhaite modéliser et d'avoir une approche constructive du modèle.

### 3.4.1 Sans prise en compte des pré-déplacements

#### 3.4.1.1 Principe

La prise en compte des pré-déplacements est utile si le système réel et les capteurs permettent de l'observer. Dans beaucoup d'applications, les capteurs peu précis et/ou les jeux des différentes liaisons les rendent tous simplement invisibles. Donc, il n'est pas utile d'avoir un modèle les prenant en compte. Dans ce cas, les modèles dynamiques présentés en 2.4.3 présentent des paramètres superflus et se révèlent trop complexes.

Ils restent les modèles statiques présentés en 2.4.2. En effet, ceux-ci ne prennent pas en compte les pré-déplacements. Cependant hormis le modèle de Karnopp, ils ne permettent pas de visualiser le phénomène de stick-slip. De plus, leur implantation en simulation pose toujours des problèmes de temps de convergence. Reste donc le modèle de Karnopp, lorsqu'il y a collage (pour une vitesse faible), celui-ci substitue la vitesse du mobile par une vitesse nulle. Mettant ainsi le système en boucle ouverte, il supprime les problèmes de convergence. Cependant la "vrai" vitesse suit toujours la deuxième loi de Newton et lorsque le système se remet à glisser, il y a un saut de 0 à la vitesse intégrée. Bien que permettant de générer des phénomènes de stick-slip, ce mécanisme ne décrit pas les phénomènes physiques observés.

Si les pré-déplacements ne sont pas observables, cela veut dire que, lors du collage, la vitesse mesurée du mobile est nulle, l'autre hypothèse est que le système reste bloqué tant que  $|u(t)|$

n'est pas supérieure à  $F_s$ , la force de rupture. Ainsi le mode 0 est régi par le sous-modèle (3.6).

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= -p_0 v(t) \\ F_f &= -u(t)\end{aligned}\tag{3.6}$$

où  $p_0$  est un paramètre de simulation positif permettant de faire converger la vitesse  $v$  vers 0. En théorie, sa valeur est très grande imposant une dynamique rapide de ce mode. Cependant, en simulation, ce réglage entraîne un pas d'intégration numérique très petit et donc un temps de simulation très grand. Il faut donc trouver un compromis entre ces deux impératifs antinomiques.

Pour commuter du mode 0 au mode 1, on suppose que toutes les adhérences sont brisées lorsque la force  $u$  devient supérieure à la force de rupture  $F_s$ . La condition  $C_{0 \rightarrow 1}$  est ainsi :

$$C_{0 \rightarrow 1} : |u| > F_s \tag{3.7}$$

La figure (3.2) résume dans le plan  $(u(t), v(t))$  les zones de chaque mode ainsi que les trajectoires possibles pour le mobile. Pour faciliter sa compréhension, la trajectoire représentée par la figure (3.3) est générée avec le modèle constitué des équations (3.2), (3.4), (3.5), (3.6) et (3.7). Le système est initialisé avec une vitesse  $v(0)$  et une force de commande  $u(0)$  positives. Ensuite, le résultat est reporté dans le plan  $(u(t), v(t))$  de la figure (3.4). Les points remarquables de l'expérience sont numérotés de (1) à (7).

- (1) : A cet instant, la force motrice devient inférieure à  $F_c$ , la vitesse atteint un maximum et commence à décroître.
- (2) : La vitesse devient inférieure à  $\Sigma$ , et la force  $u$  est inférieure à  $F_c$ , le modèle commute dans le mode 0. La vitesse converge vers 0.
- (3) : La force  $u$  devient inférieure à  $-F_s$ , le système retourne dans le mode 1.
- (4) : La vitesse décroît en valeur absolue car la force motrice est devenue supérieure à  $F_c$ .
- (5) : Autour de ce point, la vitesse change de signe. Grâce au choix judicieux de la condition  $C_{1 \rightarrow 0}$ , le système passe bien par une phase de collage.
- (6) : Comme au point (1), la vitesse décroît à cet instant car les frottements sont supérieurs à  $u$ .
- (7) : La vitesse devient inférieure à  $\Sigma$ , le mobile se colle, la vitesse converge vers 0.

### 3.4.1.2 Prise en compte de la période d'échantillonnage du contrôleur

Les états du système étudié sont en général commandés et observés via une interface numérique. Ainsi, on ne connaît le comportement du système qu'aux instants d'échantillonnage  $T_s$ . Si lors d'un collage, la convergence du système vers la vitesse nulle est suffisamment rapide, alors le comportement du modèle sera identique au comportement réel aux instants d'échantillonnage. Le mode 0 étant régi par un système de premier ordre, il est facile de majorer  $p_0$  pour obtenir un temps de réponse à 98% inférieur à  $T_s$ , soit :

$$p_0 \geq \frac{5}{T_s} \tag{3.8}$$

Suivant l'équation (3.8) et les contraintes énoncées ci-dessus, on choisit  $p_0$  égal à  $\frac{5}{T_s}$ .

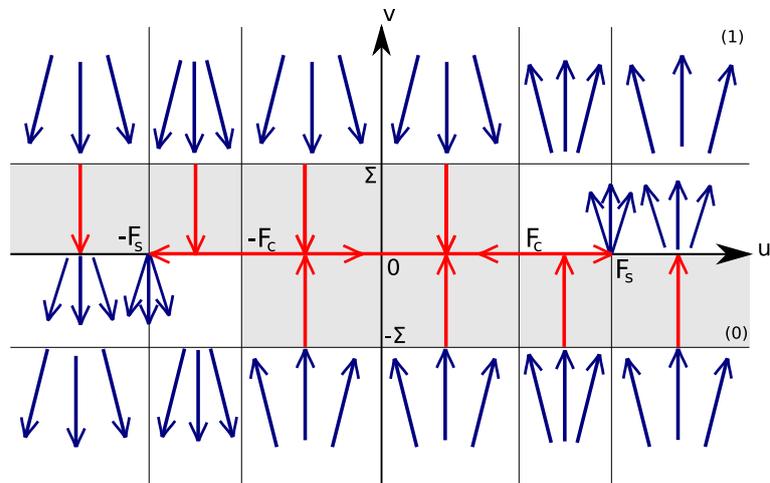


FIG. 3.2 – Trajectoires et commutations possibles du modèle hybride, mode 1 en blanc et mode 0 en gris

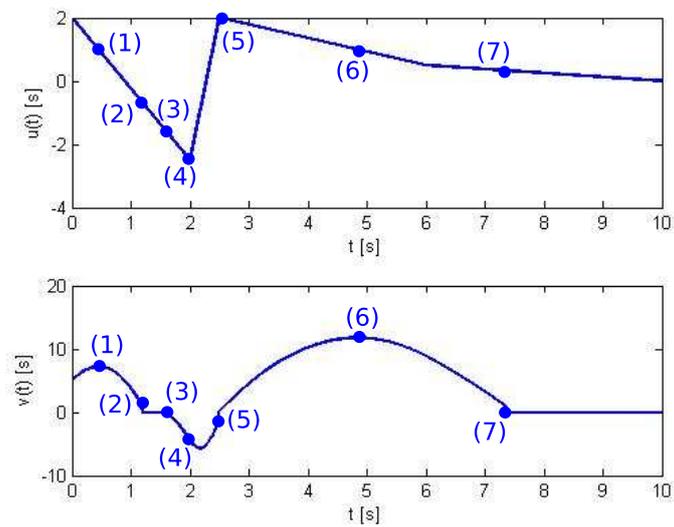
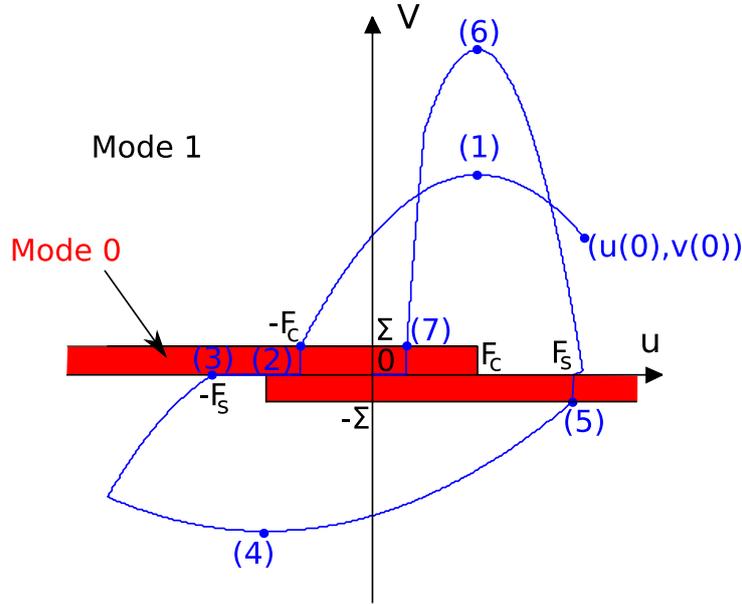


FIG. 3.3 – Exemple de trajectoire du modèle hybride

FIG. 3.4 – Exemple de trajectoire dans le plan  $(u(t), v(t))$ 

### 3.4.1.3 Prise en compte de la résolution du capteur

Lors d'un collage,  $v$  converge rapidement de  $\Sigma$  vers 0. Sa trajectoire ainsi que celle de la position sont décrites dans le cas d'une vitesse positive par les équations (3.9).

$$\begin{aligned} v(t) &= \Sigma e^{-p_0 t} \\ x(t) &= x_{1 \rightarrow 0} + \frac{\Sigma}{p_0} (1 - e^{-p_0 t}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

où  $x_{1 \rightarrow 0}$  est la position du mobile lors de la commutation entre le mode 1 et le mode 0.  $x$  est mesurée via un capteur de résolution  $\delta_x$ . Si les pré-déplacements ne sont pas visibles sur le système réel, il ne doivent pas l'être sur le modèle. Ainsi lors d'un collage, le capteur ne doit pas voir la position bouger.

On pourrait bloquer la position lors d'un collage, mais on perdrait ainsi le lien physique qui relie la vitesse à la position. Ainsi, on préfère choisir  $\Sigma$  suivant l'inégalité (3.10). Dans le pire cas, lors d'un collage, la position mesurée aura évolué d'un incrément.

$$\Sigma < \delta_x p_0 \quad (3.10)$$

### 3.4.1.4 Prise en compte des limitations de l'intégration numérique

Lorsque le modèle est implémenté dans un simulateur numérique, l'algorithme qui calcule la trajectoire de  $x(t)$  utilise un pas d'intégration  $T_e$ . Celui-ci peut être constant ou variable. Quand il est variable, on peut choisir sa valeur maximale  $T_{e \max}$  et minimale  $T_{e \min}$ . Il convient de définir avec soin le paramètre  $T_{e \max}$  afin de respecter les propriétés hybrides du modèle.

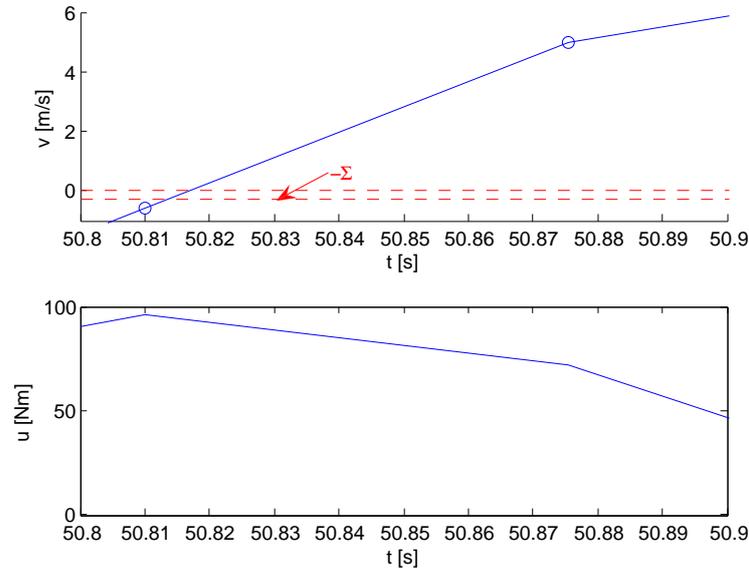


FIG. 3.5 – Mauvaise trajectoire due à un pas d'intégration numérique trop grand (cercles : points calculés par le simulateur)

Si la vitesse et la force du moteur sont de signes opposés, la vitesse va décroître jusqu'à l'activation du mode 0. Puis, si la force du moteur est suffisante, le système commute en mode 1 et le système repart en sens inverse. Ce comportement est garanti par la condition (3.2). Cependant, si le pas d'intégration  $T_e$  est trop grand, la vitesse du mobile peut, en un pas d'intégration, changer de signe tout en restant supérieure à  $\Sigma$  en valeur absolue. Dans ce cas, le changement de mode n'est pas détecté. La figure (3.5) illustre ce problème.

En choisissant un pas d'intégration petit, les changements de mode sont détectés comme le montre la figure (3.6). Cependant, plus  $T_{e\max}$  est faible, plus le temps nécessaire à la simulation est grand. Sur la figure (3.6), trop de points sont inutilement calculés en mode 0. Il s'agit donc de trouver le pas  $T_{e\max}$  le plus grand possible tout en étant sûr qu'aucune commutation ne sera omise.

La variation maximale de vitesse pendant un pas d'intégration est de  $\frac{u_{\max} T_{e\max}}{m}$ .  $u_{\max}$  est la valeur maximale absolue pouvant être prise par la force du moteur. Si l'inégalité (3.11) est respectée, on garantit qu'aucune commutation ne sera oubliée.

$$m\Sigma > u_{\max} T_{e\max} \quad (3.11)$$

## 3.4.2 Modélisation linéaire des pré-déplacements

### 3.4.2.1 Principe

Lors du collage, les liaisons entre les surfaces en contact ne sont pas rigides. Une force de faible amplitude permet de les déformer sans les briser. Chaque liaison ayant ses propres

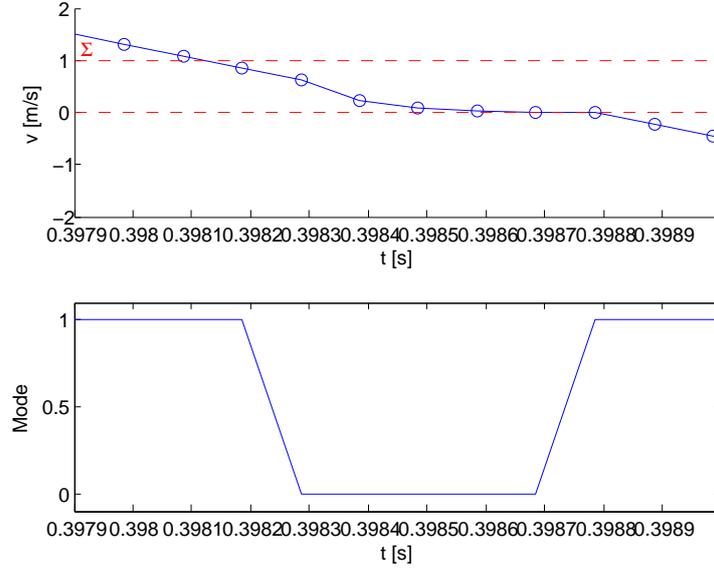


FIG. 3.6 – Bonne trajectoire mais avec un pas d'intégration numérique petit (cercles : points calculés par le simulateur)

caractéristiques, on utilise en général un modèle moyen. Intuitivement, la première idée est de modéliser ces liaisons par un système ressort-amortisseur linéaire. La force  $F_f$  fournie par ce système peut être facilement décrite par (3.12).

$$F_f = k_2 z + k_1 \dot{z} \quad (3.12)$$

Où l'état  $z$  représente le pré-déplacement moyen du mobile. L'équation du mode 0 est modifiée pour devenir (3.13). Le mode 1 reste inchangé.

Mode 0 :

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{1 \rightarrow 0} + z(t) \\ \dot{v}(t) &= \dot{z} \\ m\ddot{z} &= u(t) - k_1 \dot{z} - k_2 z \end{aligned} \quad (3.13)$$

La condition de commutation du mode 0 au mode 1 est également changée :

$$C_{0 \rightarrow 1} : ((z \geq z_{\max}) \text{ et } (u > F_s)) \text{ ou } ((z \leq -z_{\max}) \text{ et } (u < -F_s)) \quad (3.14)$$

Si la commande  $u(t)$  est nulle le comportement donné par l'équation (3.13) est très proche de celui donné par (3.6). Dans le cas présent, la vitesse converge vers 0 et la position vers  $x_{1 \rightarrow 0}$ . Lorsque les liaisons sont trop étirées, elles se cassent. On suppose qu'à partir de  $z > |z_{\max}|$ , il y a rupture totale. Le modèle commute en mode 1. Dans ce cas, l'état  $z$  est gelé et sa valeur  $\pm z_{\max}$ .

Lorsque le système commute de nouveau dans le mode 0, la vitesse de pré-déplacement  $\dot{z}$  est initialisée à  $v$ .

La condition  $|u| > F_s$  semble redondante, elle a été ajoutée pour éviter des commutations intempestives entre le mode 0 et le mode 1. En effet, lorsque  $C_{1 \rightarrow 0}$  devient vraie,  $z$  est intégré. Étant donné que  $|\dot{z}|$  est égale à  $\Sigma$ ,  $|z|$  peut devenir supérieur à  $z_{\max}$  et le système peut repasser en mode 1. Le problème est résolu en utilisant la condition sur  $u$  dans (3.14).

### 3.4.2.2 Réglage des paramètres

L'ajout du phénomène de pré-déplacement nécessite la connaissance d'un nouveau paramètre, la distance  $z_{\max}$  qui est facilement identifiable (sous l'hypothèse d'un capteur de position précis et réactif). Le transfert  $H_{zu}$  entre  $z$  et  $u$  est donné par l'équation (3.15)

$$H_{zu}(s) = \frac{1/k_1}{\frac{m}{k_1}s^2 + \frac{k_2}{k_1}s + 1} \quad (3.15)$$

On peut facilement identifier  $w_0$ ,  $G$  et  $\xi$  tel que :

$$H_{zu}(s) = \frac{G}{\frac{s^2}{w_0^2} + \frac{2\xi}{w_0}s + 1} \quad (3.16)$$

Le gain statique est choisi tel que  $z$  égale  $z_{\max}$  quand  $u$  vaut  $F_s$ . Le coefficient d'amortissement est supposé égal à 1, on en déduit facilement la valeur de  $k_2$ . En utilisant les équations (3.17) pour régler les paramètres  $k_1$  et  $k_2$ , la prise en compte des pré-déplacements est effective avec la connaissance d'un seul paramètre expérimental  $z_{\max}$ .

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{F_s}{z_{\max}} \\ k_2 &= 2\sqrt{\frac{mF_s}{z_{\max}}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

### 3.4.2.3 Prise en compte de phénomènes supplémentaires

L'ajout du phénomène de pré-déplacement suppose un système muni d'un capteur suffisamment précis pour le mesurer. Cela implique que d'autres phénomènes devraient être également mesurables. Nous les rappelons ci-après (cf. 2.4.1) :

- *Rising static friction*
- *Frictional memory*
- *Hysteresis behavior with nonlocal memory*

Si les 2 premiers sont facilement intégrables au modèle existant, la prise en compte du phénomène d'hystérésis nécessite un traitement spécial. Une solution est donnée dans la sous-section 3.4.3.

Le phénomène *Rising static friction* implique un lien entre le temps de collage et la valeur de la force de rupture. Si on souhaite identifier cette relation, il faut alors choisir  $F_s$  comme une fonction dépendant du temps de collage.

Pour de très faibles vitesses, le lubrifiant et les adhérences entraînent un retard entre la vitesse et le frottement équivalent. Ce phénomène appelé *Frictional memory* peut être pris en compte dans le modèle en ajoutant un retard pur où un simple filtre passe bas lors du calcul de  $F_f$ .

### 3.4.3 Modélisation des pré-déplacements par le modèle de Preisach

Dans la partie précédente, les pré-déplacements ont été modélisés comme un ressort couplé à un amortisseur. Pour prendre en compte le phénomène *Hysteresis with nonlocal memory*, de nombreuses solutions existent. Dans [8], le modèle de Leuven propose un algorithme permettant de générer le phénomène. Dans [9], le modèle de collage de Maxwell est utilisé. Un état de l'art est donné dans [30].

Une autre piste à considérer est le modèle de Preisach. Surtout utilisé en électromagnétisme pour simuler les phénomènes d'aimantation, il peut être mis en oeuvre pour modéliser des frottements secs. [37] présente le fonctionnement ainsi que le réglage du modèle.

Dans le mode 0, l'expression de la force  $F_f$  est modifiée. Le modèle de Preisach permet de déterminer sa valeur en fonction de  $z$  et  $\dot{z}$  : Les surfaces  $S_+$  et  $S_-$  du triangle de Preisach évoluent en fonction de la vitesse de pré-déplacement, cf. figure (3.7). Lorsque la vitesse est positive (respectivement négative), la surface  $S_+$  ( $S_-$ ) croît suivant l'axe  $\alpha$  ( $\beta$ ) au détriment de l'autre surface. La force résistante des adhérences est la différence de ces 2 surfaces pondérée par la fonction de répartition  $\mu(\alpha, \beta)$ , cf. (3.18). Lorsque la surface  $S_+$  ( $S_-$ ) est égale à l'aire du triangle (i.e.  $z = \pm z_{\max}$ ), la force  $F_f$  est égale à  $F_s$  ( $-F_s$ ). La fonction  $\mu(\alpha, \beta)$  permet d'obtenir le comportement adéquat. Le reste du modèle développé en 3.4.2 reste inchangé.

$$F_f = \iint_{S_+} \mu(\alpha, \beta) \partial\alpha \partial\beta - \iint_{S_-} \mu(\alpha, \beta) \partial\alpha \partial\beta \quad (3.18)$$

## 3.5 Existence et unicité de la solution en fonction d'une entrée définie

À partir d'une entrée  $u(t)$ , il est nécessaire de vérifier l'existence et l'unicité des trajectoires solutions des modèles hybrides proposés. En particulier, il faut s'assurer que le modèle ne peut pas entrer dans un cycle de commutations infinies. Dans la suite, on suppose que l'entrée  $u(t)$  est continue en temps, c'est à dire que pour tout  $\epsilon$  il existe  $\Delta t > 0$  tel que :

$$\frac{|u(t + \Delta t) - u(t)|}{\Delta t} \leq \epsilon \quad (3.19)$$

Cette hypothèse n'est pas restrictive car en pratique, la force  $u(t)$  est fournie par un actionneur possédant une bande passante finie. Pour valider l'existence et l'unicité d'une solution, on doit

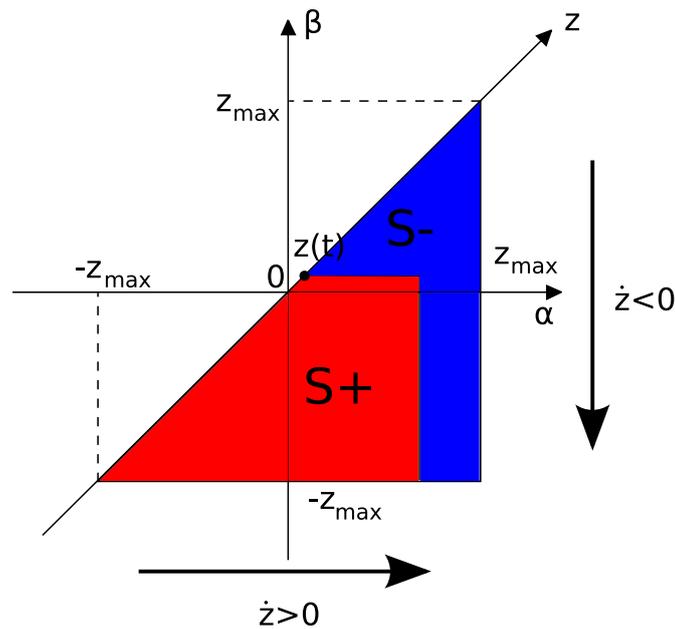


FIG. 3.7 – Triangle de Preisach pour la modélisation du phénomène d'*hysteresis behavior with nonlocal memory*

être capable de définir la trajectoire du système lorsqu'il est en mode glissant, lorsqu'il est en mode collé et lors des différentes commutations possibles.

Dans le cas du modèle hybride de frottements secs, pour qu'il y ait existence et unicité de la solution en fonction d'une entrée définie, il faut que :

- la fonction définissant l'évolution des états dans chaque mode soit lipschitzienne, c'est à dire que sa dérivée par rapport aux états du système soit bornée,
- le mode du système puisse être déterminé à chaque instant  $t$  quels que soient les états et les entrées du système, c'est à dire que les deux conditions de commutations ne doivent jamais être vraies en même temps.

Dans le cas du mode 1 commun à toute les versions, le système d'équation régissant le modèle est :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} &= f_1(x, v, u) \\ \text{avec : } f_1(x, v, u) &= \begin{pmatrix} v \\ \frac{u}{m} - \frac{F_f(v)}{m} \end{pmatrix} \\ \text{avec : } F_f(v) &= \left( F_c + (F_s - F_c) e^{-\left(\frac{v}{v_s}\right)^2} \right) \text{sign}(v) + \sigma_v v \end{aligned} \quad (3.20)$$

La fonction  $f_1$  est dérivée en fonction de l'état  $X = \begin{pmatrix} x & v \end{pmatrix}^T$  :

$$\frac{df_1}{dX} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\sigma_v - 2(F_s - F_c) \frac{v}{v_s} e^{-\left(\frac{v}{v_s}\right)^2} \text{sign}(v) \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Cette matrice est bornée par :

$$\left\| \frac{df_1}{dX} \right\|_{\infty} < \max \left( 1, \sigma_v + \sqrt{2}(F_s - F_c) \frac{1}{v_s} e^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (3.22)$$

La fonction  $f_1$  est donc lipschitzienne et lorsque le système est dans le mode 1, une solution existe et est unique. Pour le mode 0, la fonction  $f_0$  décrivant le modèle du mode 0 est aussi lipschitzienne. Suivant la version choisie, sa dérivée suivant le vecteur  $X$  vaut :

– Dans le cas de la version A :

$$\frac{df_0}{dX} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -p_0 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

– Dans le cas de la version B :

$$\frac{df_0}{dX} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

– Dans le cas de la version C :

$$\frac{df_0}{dX} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{dF_f}{dz} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Compte tenu de la définition de  $F_f$  par (3.18),  $\frac{dF_f}{dz}$  est bornée si  $\mu(\alpha, \beta)$  est bornée. Ce qui est le cas par construction. La fonction  $\frac{df_0}{dX}$  est donc bornée quelle que soit la version du modèle hybride.

On doit vérifier maintenant que les conditions de commutations  $C_{1 \rightarrow 0}$  et  $C_{0 \rightarrow 1}$  ne peuvent pas être vraies en même temps.

– Dans le cas de la version A, les 2 conditions de commutations sont vraies alors cela signifie que :

$$\begin{aligned} & (u > F_s) \text{ et } (u > -F_c) \text{ et } (-\Sigma < v < 0) \\ & \text{ou} \\ & (u < -F_s) \text{ et } (u < F_c) \text{ et } (0 < v < \Sigma) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Ces inégalités ne se contredisant pas, les conditions  $C_{1 \rightarrow 0}$  et  $C_{0 \rightarrow 1}$  définies par (3.3) et (3.7) sont vraies en même temps. Les deux modes sont actifs et il n'y a pas unicité de la solution. Cet état n'est que transitoire, car ces inégalités signifient que la vitesse  $v$  et la commande  $u$  sont de signes opposés. Ainsi la vitesse du système tend vers 0 quel que soit le mode actif puis prend le signe de  $u$ . Ce problème d'unicité vient du choix initial de ne pas définir finement le modèle du système dans le mode bloqué. En pratique, ces cycles de commutation peuvent être limités en fixant un pas d'intégration temporel minimal. Le simulateur propose ainsi une solution qui n'est pas unique mais qui est suffisante dans le cas des hypothèses faite sur le système. Pour formaliser l'intégration du pas minimal d'intégration  $T_{e \min}$  dans le modèle, on ajoute un état  $t_0$  au mode collé. Cet état correspond

au temps passé par le système dans le mode collé. Lorsque la vitesse et l'entrée sont de signes opposés, le système peut passer dans le mode glissant si  $t_0$  est supérieur à  $T_0 \geq T_{e\min}$  et si  $|u| > F_s$ . Dans le mode glissant,  $t_0$  est réinitialisé à 0. Avec cette modification, le modèle donné par les équations (3.28), (3.29) et (3.30) a une trajectoire unique car les conditions  $C_{1 \rightarrow 0}$  et  $C_{0 \rightarrow 1}$  ne peuvent pas être vraies en même temps. Si  $T_0 = T_{e\min}$ , il n'est pas nécessaire d'intégrer l'état  $t_0$  au modèle (cas pratique utilisé).

- Pour les versions B et C, les conditions de commutations sont les mêmes. Lorsque les deux sont vraies, on obtient la relation booléenne suivante :

$$\begin{aligned} & (z = z_{max}) \text{ et } (u > F_s) \text{ et } (u > -F_c) \text{ et } (-\Sigma < \dot{z} < 0) \\ & \text{ou} \\ & (z = -z_{max}) \text{ et } (u < -F_s) \text{ et } (u < F_c) \text{ et } (0 < \dot{z} < \Sigma) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Que  $z = z_{max}$  ou  $z = -z_{max}$  la vitesse  $\dot{z}$  est non nulle et son signe est de telle sorte que les égalités sur  $z$  deviennent fausses immédiatement. Ainsi les conditions de commutations  $C_{1 \rightarrow 0}$  et  $C_{0 \rightarrow 1}$  ne peuvent pas être vraies en même temps dans le cas de la version B et C du modèle hybride de frottements secs. Ainsi pour une entrée  $u$  définie continue, il existe une trajectoire unique des états  $x$  et  $v$ .

### 3.6 Synthèse des différentes versions du modèle

Dans ce chapitre, une modélisation hybride des systèmes soumis à des frottements a été présentée. En fonction de la finesse des résultats attendus, le modèle fût décliné en plusieurs versions.

La première version possède la propriété de collage (*stiction*), elle permet de modéliser l'*effet Stribeck* ainsi que les *frottements visqueux*. Les équations de chaque mode ainsi que les conditions de commutations sont rappelées ci-dessous :

**Version A : Sans prise en compte des pré-déplacements**

Mode 0 :

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= v(t) \\
\dot{v}(t) &= -p_0 v(t) \\
\dot{t}_0(t) &= \begin{cases} 1 & \text{si } t_0 < T_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
F_f &= F_{sec} = u(t)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Mode 1 :

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= v(t) \\
m\dot{v}(t) &= u(t) - F_f(v) \\
t_0 &= 0 \\
F_f(v) &= F_{sec}(v) + \sigma_v v \\
F_{sec}(v) &= \left( F_c + (F_s - F_c) e^{-\left| \frac{v}{v_s} \right|^{\delta_s}} \right) \text{sign}(v)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
C_{0 \rightarrow 1} &: (|u| > F_s) \text{ et } ((\text{sign}(u) = \text{sign}(v)) \text{ ou } (t_0 > T_0)) \\
C_{1 \rightarrow 0} &: ((u < F_c) \text{ et } (0 < v < \Sigma)) \text{ ou } ((u > -F_c) \text{ et } (-\Sigma < v < 0))
\end{aligned} \tag{3.30}$$

**avec les conditions de choix des paramètres de simulation :**

$$\begin{aligned}
p_0 &> \frac{5}{T_s} \\
\Sigma &< \delta_x p_0 \\
m\Sigma &> u_{\max} T_{e \max} \\
T_0 &\geq T_{e \min}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

où  $\sigma_v$ ,  $F_c$ ,  $F_s$ ,  $v_s$  et  $\delta_s$  permettent de régler l'évolution des frottements en fonction de la vitesse. Les paramètres  $\Sigma$ ,  $p_0$ ,  $T_0$  sont des paramètres propres au modèle,  $T_{e \max}$  et  $T_{e \min}$  sont respectivement les pas d'intégration numérique maximal et minimal utilisés lors de la simulation. Ils sont réglés grâce aux inégalités (3.31). L'état  $t_0$  sert à garantir l'existence et l'unicité de la solution pour une entrée  $u$  bornée et continue. Lorsque  $t_0 > T_0$ , sa dérivée devient nulle afin d'éviter que  $t_0$  tende vers  $\infty$  lorsque le système reste dans le mode bloqué un temps infini. Si  $T_0 = T_{e \min}$ ,  $t_0$  peut être supprimé et la condition  $C_{0 \rightarrow 1}$  simplifié (Dans ce cas,  $C_{0 \rightarrow 1} : |u| > F_s$ ). Le mode 0 n'est pas observable par le contrôleur car la résolution  $\delta_x$  et la période d'échantillonnage  $T_s$  du capteur sont insuffisantes.

Si la résolution et la période d'échantillonnage du capteur sont suffisantes, les pré-déplacements

(*pre-sliding displacements*) deviennent mesurables. Il faut alors les modéliser. Pour cela, on suppose les adhérences équivalentes à un système linéaire ressort+amortisseur lors des phases de collage. L'état  $z$  représentant l'étirement des adhérences est ajouté. Lorsque le système passe en mode glissant,  $z$  est bloqué à  $\pm z_{\max}$  suivant le sens de glissement. La condition de commutation du mode 0 au mode 1 est changée. Le modèle devient ainsi :

### Version B : Modélisation linéaire des pré-déplacements

mode 0 :

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{1 \rightarrow 0} + z(t) \\ v(t) &= \dot{z} \\ m\ddot{z} &= u(t) - F_f \\ F_f(z, \dot{z}) &= k_1 z + k_2 \dot{z} \end{aligned} \quad (3.32)$$

mode 1 :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v(t) \\ m\dot{v}(t) &= u(t) - F_f(v) \\ F_f(v) &= F_{sec}(v) + \sigma_v v \\ F_{sec}(v) &= \left( F_c + (F_s - F_c) e^{-|\frac{v}{v_s}|^{\delta_s}} \right) \text{sign}(v) \\ |z| &= z_{\max} \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} C_{0 \rightarrow 1} &: ((z \geq z_{\max}) \text{ et } (u > F_s)) \text{ ou } ((z \leq -z_{\max}) \text{ et } (u < -F_s)) \\ C_{1 \rightarrow 0} &: ((u < F_c) \text{ et } (0 < v < \Sigma)) \text{ ou } ((u > -F_c) \text{ et } (-\Sigma < v < 0)) \end{aligned} \quad (3.34)$$

avec le réglage des paramètres de pré-déplacement :

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{F_s}{z_{\max}} \\ k_2 &= 2\sqrt{\frac{mF_s}{z_{\max}}} \end{aligned} \quad (3.35)$$

et la condition sur les paramètres de simulation :

$$m\Sigma > u_{\max} T_{e \max} \quad (3.36)$$

L'intégration des pré-déplacements nécessite la détermination d'un nouveau paramètre :  $z_{\max}$ .

Pour les simulations, la condition  $m\Sigma > u_{\max}T_{e\max}$  reste toujours valable. Cette version ne prend pas en compte le comportement hystérétique des pré-déplacements. Hors si on les suppose mesurables, il faut intégrer ce phénomène au modèle.

La version la plus élaborée du modèle propose d'intégrer la propriété *hysteresis behavior with nonlocal memory*. Parmi les solutions possibles, le modèle de Preisach a été retenu. La force de retenue des adhérences est alors la différence de l'intégrale  $\mu(\alpha, \beta)$  sur les surface  $S+$  et  $S-$  du triangle de Preisach. La fonction  $\mu(\alpha, \beta)$  permet d'obtenir un comportement identique à la réalité. Les conditions de commutations sont inchangées.

### Version C : Modélisation des pré-déplacements par le modèle de Preisach

mode 0 :

$$x(t) = x_{1 \rightarrow 0} + z(t)$$

$$v(t) = \dot{z}$$

$$m\ddot{z} = u(t) - F_f$$

$$F_f = \iint_{S+} \mu(\alpha, \beta) \partial\alpha \partial\beta - \iint_{S-} \mu(\alpha, \beta) \partial\alpha \partial\beta \quad (3.37)$$

mode 1 :

$$\dot{x}(t) = v(t)$$

$$m\dot{v}(t) = u(t) - F_f(v)$$

$$F_f(v) = F_{sec}(v) + \sigma_v v$$

$$F_{sec}(v) = \left( F_c + (F_s - F_c) e^{-\left| \frac{v}{v_s} \right|^{\delta_s}} \right) \text{sign}(v) |z| \quad = z_{\max} (3.38)$$

$$C_{0 \rightarrow 1} : ((z \geq z_{\max}) \text{ et } (u > F_s)) \text{ ou } ((z \leq -z_{\max}) \text{ et } (u < -F_s))$$

$$C_{1 \rightarrow 0} : ((u < F_c) \text{ et } (0 < v < \Sigma)) \text{ ou } ((u > -F_c) \text{ et } (-\Sigma < v < 0)) \quad (3.39)$$

Les surfaces  $S+$  et  $S-$  sont calculées à l'aide du triangle de Preisach et des lois d'évolution liées. Une méthode numérique pour déterminer  $\mu(\alpha, \beta)$  est proposée dans [37]. La version C du modèle est aussi complète que le modèle Leuven. Cependant, s'il est nécessaire, les propriétés *static friction* et *frictional memory* peuvent être ajoutées.

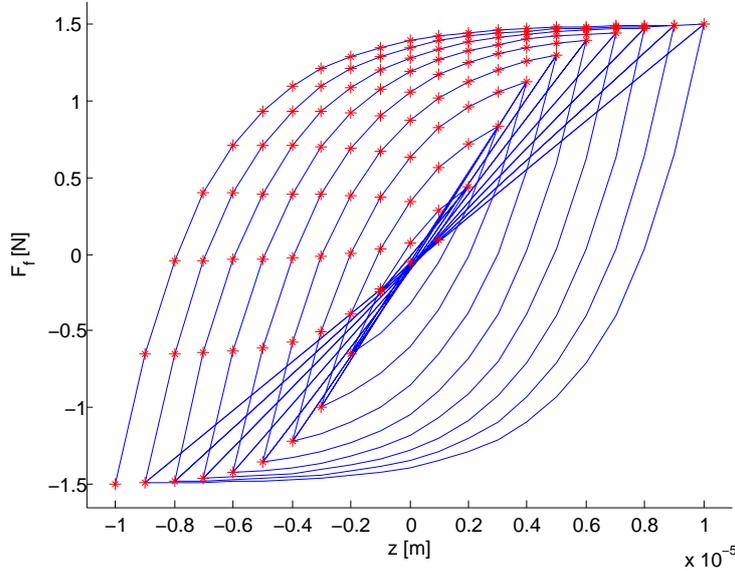


FIG. 3.8 – Cycles centrés utilisés pour la détermination de la fonction de répartition  $\mu(\alpha, \beta)$

## 3.7 Comparaison avec les modèles de la littérature

### 3.7.1 Protocole de tests

Afin de valider le comportement du modèle hybride de frottements, on le compare aux modèles existants dans la littérature. Parmi ceux énoncés dans la section 2.4, on retient 2 : le modèle de LuGre et celui de Armstrong. Le modèle de Leuven n'est pas retenu de par sa complexité de mise en oeuvre par rapport à son apport.

Les 3 versions proposées en 3.6 sont étudiées. Plusieurs tests issus de la littérature sont effectués. Les 2 premiers consistent à vérifier la capacité du modèle à générer les phénomènes de collage-glissement (*stick-slip*) et de cycles limites en boucle fermée, [4]. Ensuite, les pré-déplacements sont étudiés et en particulier le comportement hystérétique des modèles. Finalement, la propriété de non-dérive en simulation est testée suivant le protocole établi dans [38].

Dans la suite, on considère toujours un mobile de masse  $m$  soumis à une force  $u$  et posé sur un plan horizontal. Les 5 modèles sont paramétrés suivant le tableau (3.1). La version C du modèle hybride utilise le triangle de Preisach discrétisé uniformément en  $n = 20$  intervalles suivant chaque axe. Pour déterminer la fonction de répartition  $\mu(\alpha, \beta)$ , on utilise la méthode dite des cycles centrés proposée dans [37]. La figure (3.8) présente les données générées numériquement pour calculer la fonction de répartition  $\mu(\alpha, \beta)$ . 10 cycles centrés sont utilisés. Celle-ci est représentée en 3 dimensions sur la figure (3.9).

TAB. 3.1 – Paramètres de simulation

Paramètres communs	Valeurs	Unité
$m$	1	[kg]
$f_c$	1	[N]
$f_s$	1,5	[N]
$v_s$	$10^{-3}$	[m/s]
$\delta_s$	2	[]
$\sigma_2$	0,4	[Ns/m]
$u_{max}$	2	[N]
$z_{max}$	$10^{-5}$	[m]
<b>Paramètres LuGre et Armstrong</b>		
$\sigma_0$	$1,5 \cdot 10^5$	[N/m]
$\sigma_1$	$2\sqrt{1,5 \cdot 10^5}$	[Ns/m]
$z_{ba}$	0.009	[m]
<b>Paramètres Hybride</b>		
$\Sigma$	$1 \cdot 10^{-4}$	[m/s]
$T_{e \max}$	$10^{-4}$	[s]
<b>Version A</b>		
$p_0$	$10^3$	[rad/s]
<b>Version B</b>		
$k_1$	$1,5 \cdot 10^5$	[N/m]
$k_2$	$2\sqrt{1,5 \cdot 10^5}$	[Ns/m]

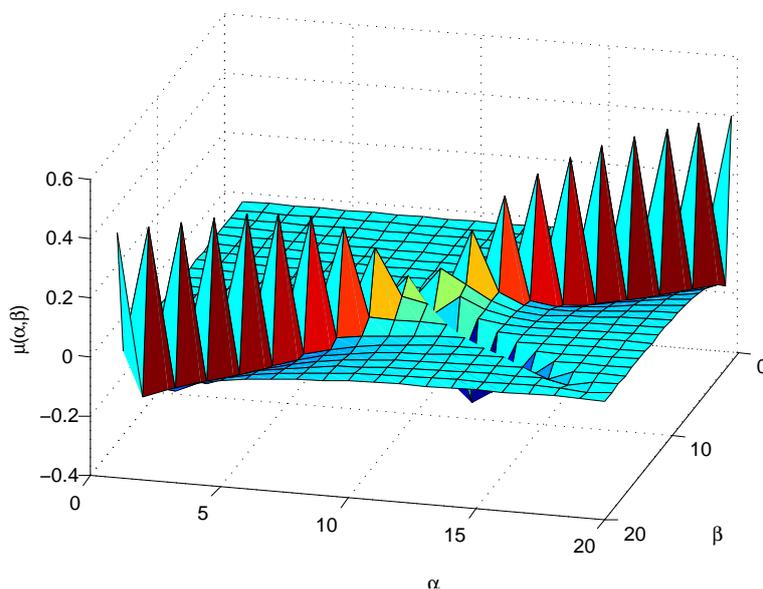


FIG. 3.9 – Fonction de répartition  $\mu(\alpha, \beta)$  utilisée pour le modèle de Preisach

### 3.7.2 Test de collage-glissement (stick-slip)

Ce test proposé dans [4] permet de valider les propriétés de glissement et de collage des modèles, cf. figure (3.10). L'expérience consiste à entraîner à vitesse constante ( $\dot{y} = 0.1\text{m/s}$ ) avec l'aide d'un ressort de raideur  $K = 2\text{N/m}$  un solide posé sur un support horizontal. Si le mobile est immobile, le ressort s'étire jusqu'à ce que la tension soit suffisamment grande pour rompre l'adhérence entre le mobile et son support. Le solide se met en mouvement, réduisant l'élongation du ressort et donc la force appliquée sur le mobile. Une fois les frottements supérieurs à cette force, la vitesse diminue, le mobile s'arrête et le ressort peut de nouveau se tendre.

Dans un premier temps, le modèle de LuGre est simulé. Le résultat est cohérent avec le comportement attendu et sert de référence (figure (3.11)). Le modèle élasto-plastique est lui

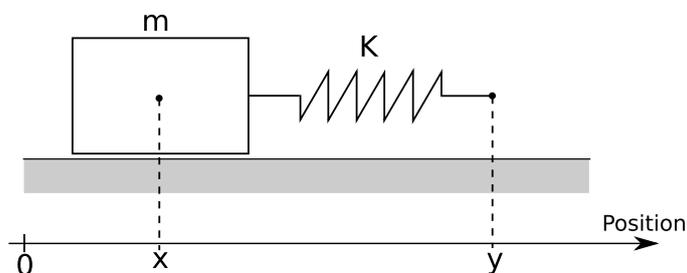


FIG. 3.10 – Système considéré pour le test de l'effet collage-glissement (stick-slip)

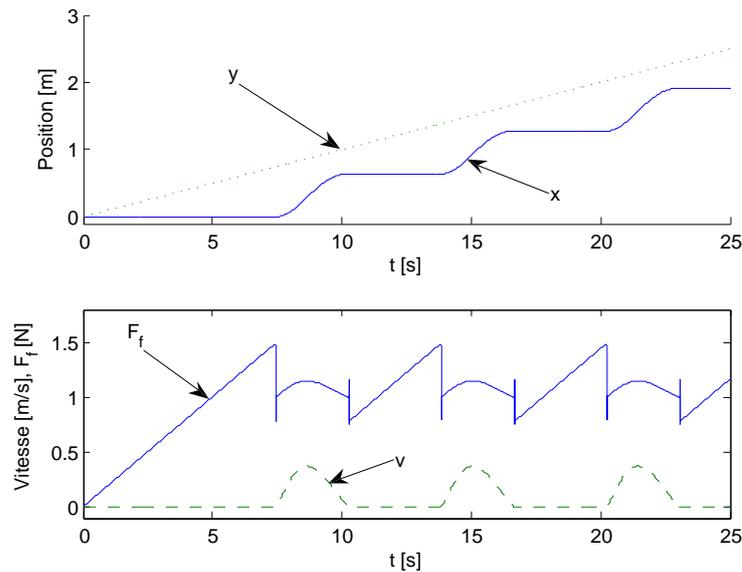


FIG. 3.11 – Trajectoires de référence (Modèle LuGre), test de collage-glissement

aussi testé. Le résultat (figure (3.12)) est beaucoup moins probant. Les phénomènes de collage-glissement sont mal simulés par le modèle. Il est à noter qu'en relaxant les discontinuités de la fonction  $\alpha$ , i.e. en prenant  $z_{ba} \simeq 0.3z_{\max}$ , les collages réapparaissent.

Les figures (3.13) et (3.14) comparent les résultats entre les versions A et B du modèle hybride et le modèle de LuGre. Dans les 2 cas, les trajectoires sont très proches de celles du modèle de LuGre. En certains points cependant les modèles diffèrent :

- Un léger décalage temporel apparaît entre LuGre et les modèles hybrides. Ce décalage croît au fur et à mesure de la simulation. Si l'influence des pré-déplacements est diminuée, c'est à dire en choisissant  $z_{\max}$  très faible,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $\sigma_0$  et  $\sigma_1$  très grands, les trajectoires se superposent. Le modèle de LuGre approche la rupture des adhérences autour de  $z_{\max}$  contrairement au modèle hybride, cf. 3.7.4. Cette approximation est responsable du décalage, la "rupture" ne se faisant pas au même moment suivant les modèles.
- Pour le modèle hybride B,  $F_f$  présente un dépassement à chaque début de phase de collage. En effet, la vitesse de pré-déplacement  $\dot{z}$  est initialisée à  $v$ , elle-même égale à  $\Sigma$ . Le terme  $k_2\dot{z}$  de l'expression de  $F_f$  est donc non nul expliquant le dépassement. Il peut être réduit en simulant plus finement, i.e. en prenant  $\Sigma$  et  $T_{e\max}$  plus petits. Dans une moindre mesure, le même phénomène est présent sur le modèle de LuGre.

La version C du modèle hybride n'a pas été testée, en effet, les phénomènes d'hystérésis lors des phases de collage ne seraient pas visibles avec ce test vérifiant le comportement macroscopique des modèles. L'écart entre les versions A et B est peu visible, le modèle C dont les règles de commutation sont les mêmes que celles du B, est très proche lui aussi des trajectoires de référence du modèle de LuGre.

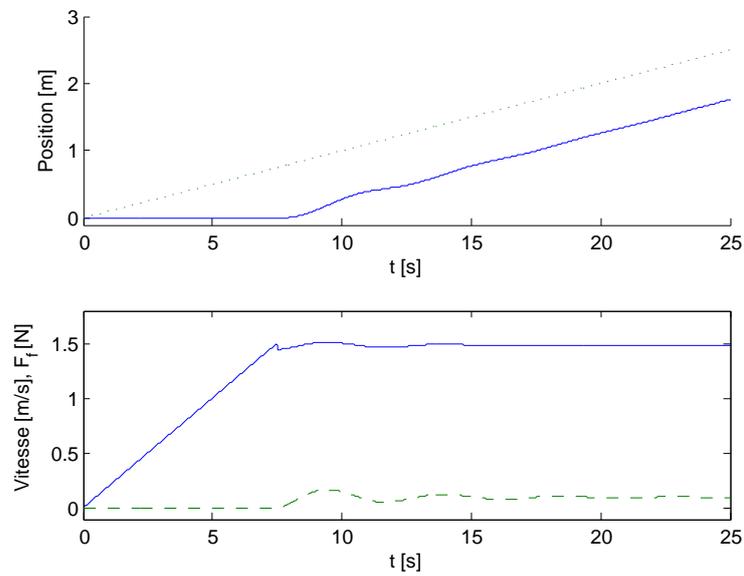


FIG. 3.12 – Trajectoires obtenues avec le modèle élasto-plastique, test de collage-glisement

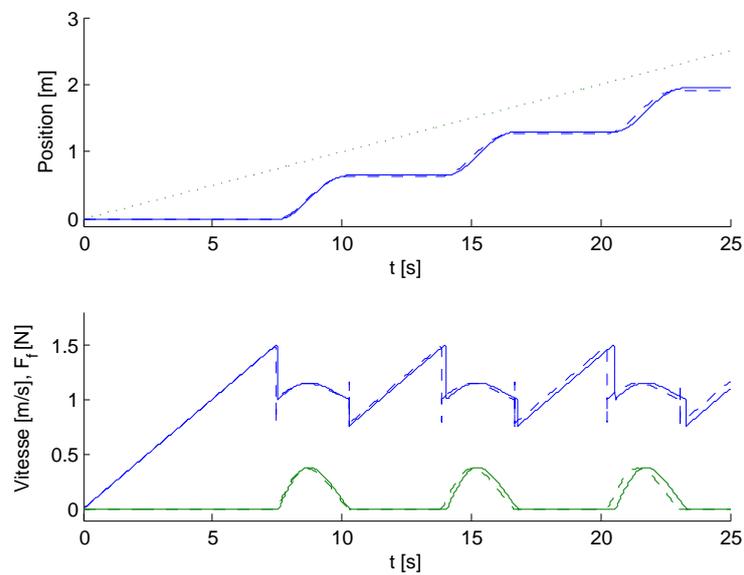


FIG. 3.13 – Comparaison entre le modèle hybride version A (ligne continue) et le modèle LuGre (tiret), test de collage-glisement

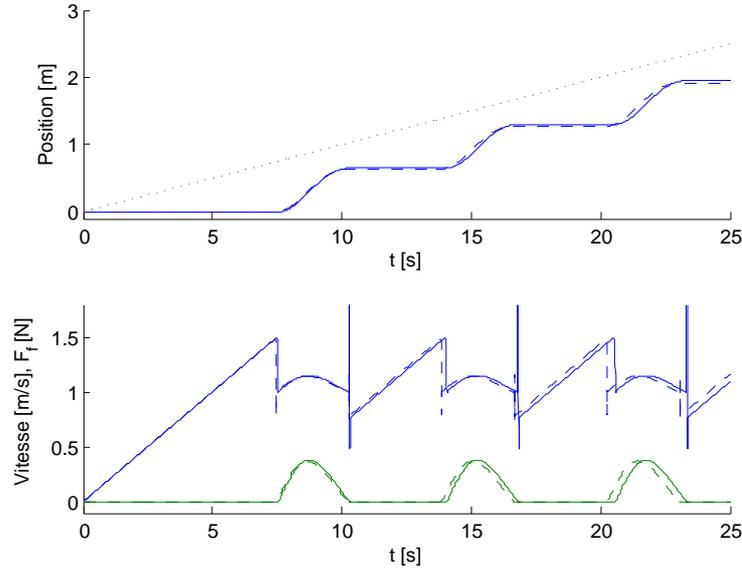


FIG. 3.14 – Comparaison entre le modèle hybride version B (ligne continue) et le modèle LuGre (tiret), test de collage-glisement

### 3.7.3 Cycles limites en boucle fermée

Lorsqu'un système soumis à des frottements secs est régulé en position avec un correcteur à effet intégral, des cycles limites apparaissent : l'erreur statique n'est alors jamais nulle, celle-ci est intégrée jusqu'à ce que la commande  $u$  soit supérieure aux frottements. Cependant dès que le mobile est en mouvement, ces frottements diminuent. La force déterminée par le correcteur est donc trop forte et la position du mobile dépasse la consigne. Le scénario se reproduit dans un sens puis dans l'autre indéfiniment.

Pour tester ce comportement, on considère toujours le mobile défini en 3.7.1. On lui applique un correcteur PID suivant la formulation (3.40).

$$u = -K_p(x - x_d) - K_v v - K_i \int (x - x_d) dt \quad (3.40)$$

Où  $K_p$ ,  $K_v$  et  $K_i$  sont respectivement égaux à 3N/m, 6Ns/m, 4N/m/s (identique au test de [4]). Encore une fois le modèle de LuGre sert de référence, figure (3.15). Si le modèle élasto-plastique génère des cycles limites, ceux-ci s'atténuent jusqu'à disparaître, ne satisfaisant pas les observations pratiques, figure (3.16).

Le modèle hybride, quelle que soit sa déclinaison, génère des cycles limites semblables à ceux du modèle de LuGre (même amplitude et même fréquence). La figure (3.15) montre le résultat obtenu avec la version A. Comme pour le test de collage-glisement (cf. 3.7.3), le décalage entre les trajectoires disparaît si l'on diminue l'influence des pré-déplacements.

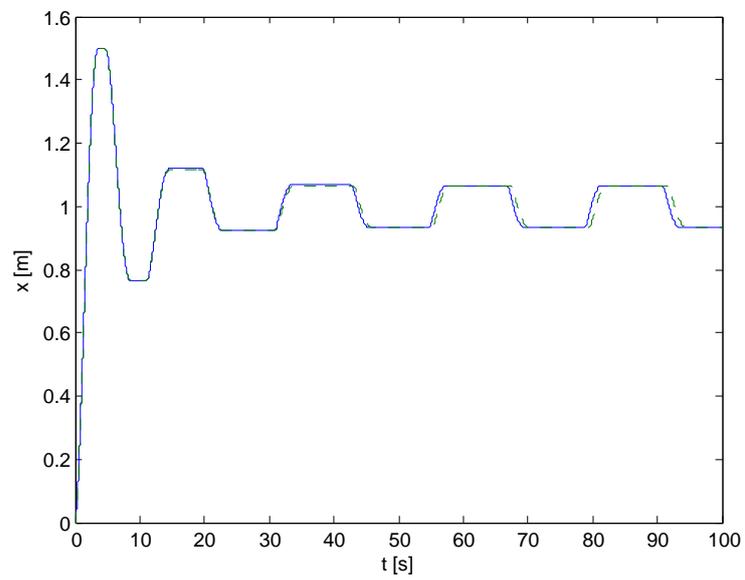


FIG. 3.15 – Cycles limites du modèle hybride version A (ligne continue) et du modèle référent (LuGre) (tiret)

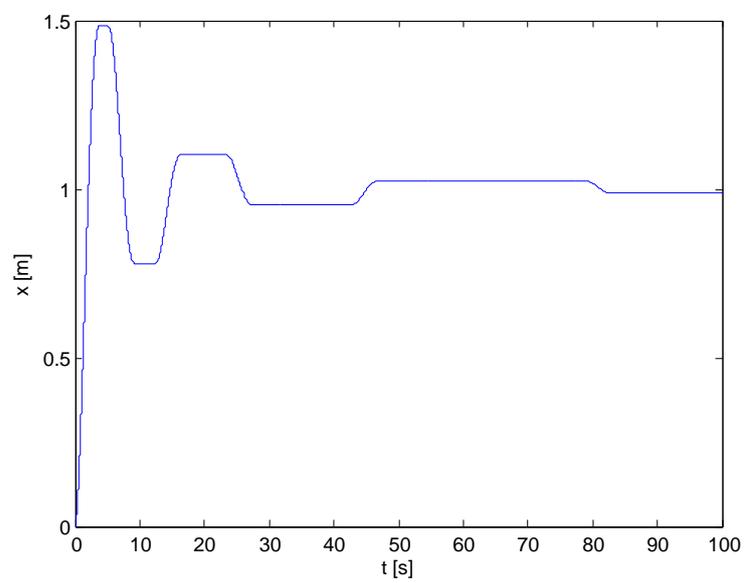


FIG. 3.16 – Cycles limites du modèle élasto-plastique

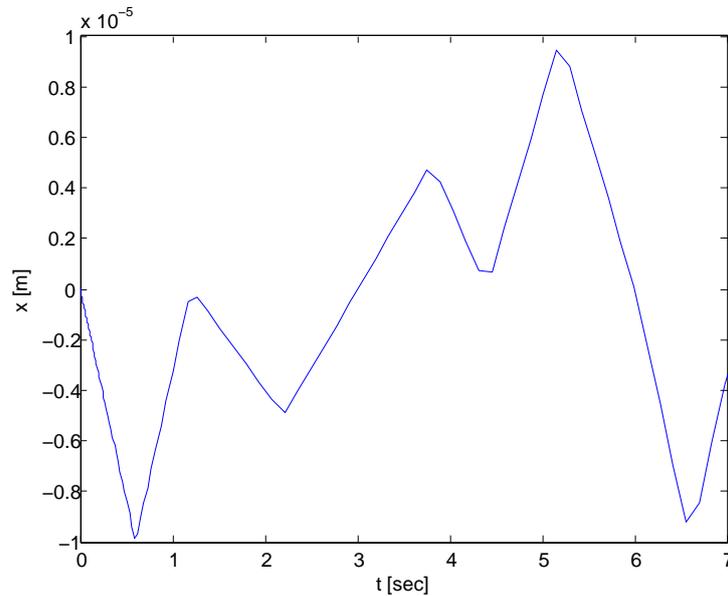


FIG. 3.17 – Consigne de position du test de pré-déplacement

### 3.7.4 Tests de pré-déplacement

Lorsque le système est immobile, des adhérences se créent entre la surface du support et celle du mobile. Si on applique une force inférieure à la force de rupture sur le système, ces adhérences sont sollicitées et se déforment. Ainsi, on peut voir un micro-déplacement ou pré-déplacement du mobile. Les pré-déplacements ont un comportement hystérétique, c'est à dire que la force de frottement  $F_f$  suit une hystérésis en fonction de la position. Le centre de cette hystérésis dépend de l'historique du système, il varie en fonction du temps. Pour plus de détails, on se reportera à [29] ou [13].

Pour vérifier la bonne modélisation de ce phénomène, le système est asservi en position. La consigne représentée par la figure (3.17) est appliquée. Le contrôleur est suffisamment précis pour obtenir une faible erreur de poursuite.

Les figures (3.18) et (3.19) affichent dans le plan  $(x, F_f)$  les résultats obtenus avec le modèle de LuGre et le modèle élasto-plastique. Avec le jeu de paramètres choisi, le phénomène d'hystérésis est très mal modélisé par ce dernier. Les résultats obtenus avec le modèle de LuGre se rapprochent plus du comportement souhaité, mais comme il est précisé dans [13] ou dans [39], les points de rebroussement (changement du signe de la vitesse) ne sont pas confondus.

Le test de pré-déplacement est appliqué aux versions B et C du modèle hybride. Les résultats sont reportés sur les figures (3.20) et (3.21). La version B ne prend pas en compte la modélisation du phénomène hystérétique des pré-déplacements, ce qui est confirmé par la simulation. Par contre la version C, en utilisant le modèle de Preisach, fournit des résultats convaincants. L'hystérésis peut être calibrée, en effet un ensemble de paramètres lui sont dédiés, permettant ainsi d'obtenir un comportement proche de celui constaté expérimentalement. Par sa conception,

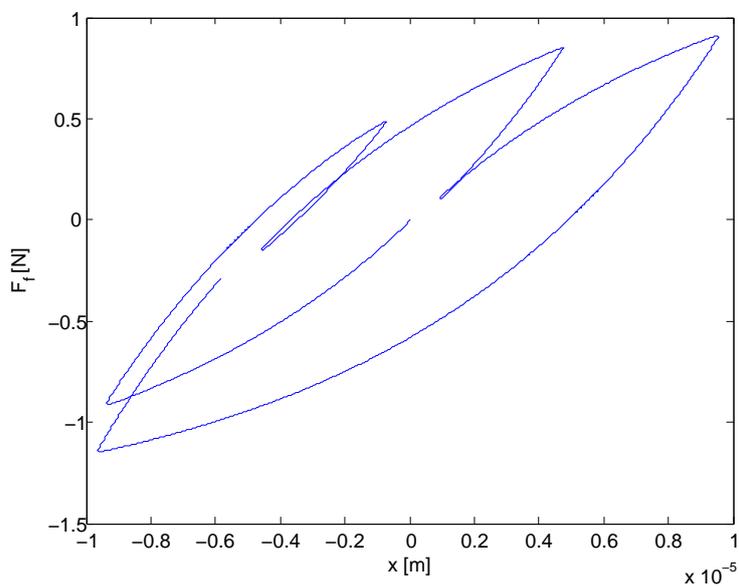


FIG. 3.18 – Résultat du modèle de LuGre : force de frottement  $F_f$  en fonction de la position  $x$

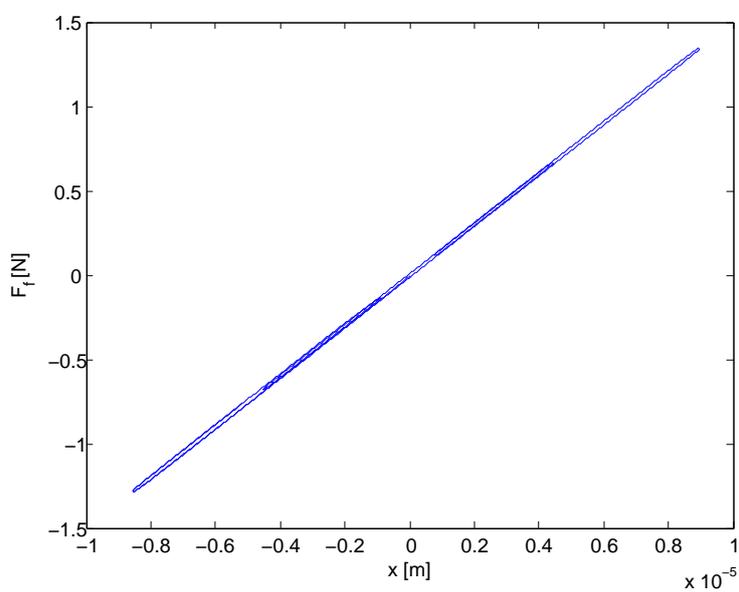


FIG. 3.19 – Résultat du modèle élasto-plastique : force de frottement  $F_f$  en fonction de la position  $x$

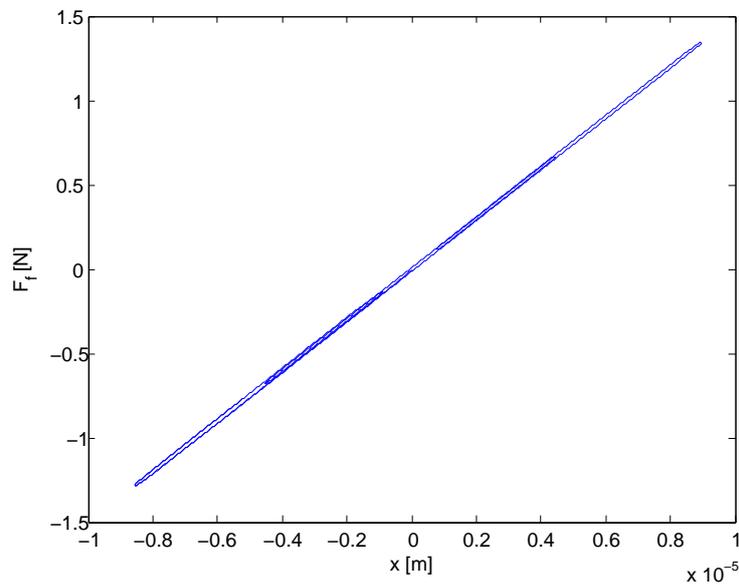


FIG. 3.20 – Résultat du modèle hybride version B : force de frottement  $F_f$  en fonction de la position  $x$

le comportement correspond exactement à la description trouvée dans la littérature. Cependant on notera que pour la version C le temps de simulation est extrêmement long et que cette déclinaison du modèle hybride ne doit être utilisée seulement que lorsqu'il est nécessaire d'avoir une simulation très fine des pré-déplacements.

### 3.7.5 Propriété de non-dérive

Lorsqu'une force externe inférieure en valeur absolue à  $F_c$  est appliquée à un mobile, le déplacement par glissement doit être nul. Si les pré-déplacements sont modélisés, ceux-ci doivent rester bornés entre  $-z_{\max}$  et  $z_{\max}$ . Les modèles statiques possèdent théoriquement cette propriété. Cependant, le remplacement de la fonction  $\text{sign}(v)$  par une fonction continue fait perdre cette propriété. Le modèle de Karnopp en mettant le système en boucle ouverte pour des vitesses faibles fait exception à la règle.

Pour les modèles dynamiques, le problème de dérive vient de l'approximation de la rupture des adhésions autour de  $z_{\max}$ . Parmi les modèles présentés, le modèle de Dahl et sa généralisation, le modèle de LuGre présentent ce problème de dérive. Reprenant l'expérience proposée dans [5], la commande de la figure (3.22) est appliquée au mobile. Les résultats pour le modèle de LuGre et le modèle élasto-plastique sont visibles sur la figure (3.23). Les figures (3.24) et (3.25) montrent la réponse des 3 versions du modèle hybride.

On remarque que les 5 modèles testés n'ont pas la même réponse temporelle au test. Étant donné qu'il n'y a pas de trajectoire de référence, on ne peut déterminer quel modèle est le plus

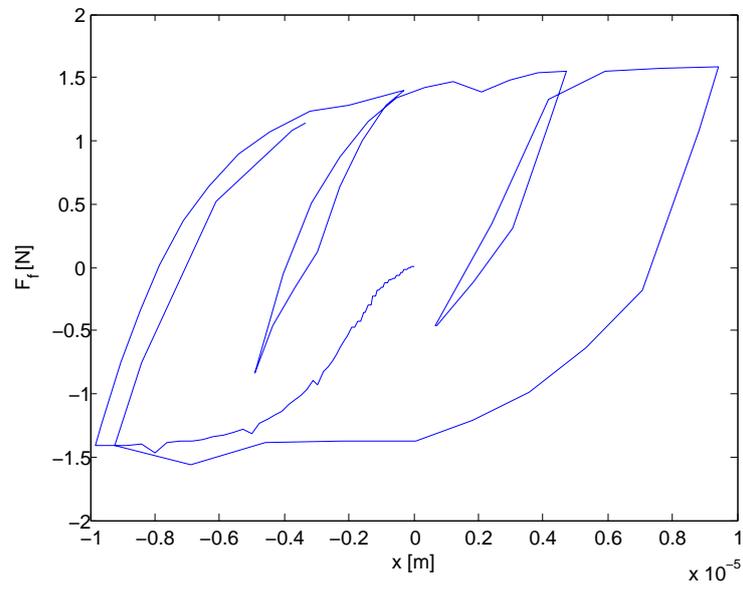


FIG. 3.21 – Résultat du modèle du modèle hybride version C : force de frottement  $F_f$  en fonction de la position  $x$

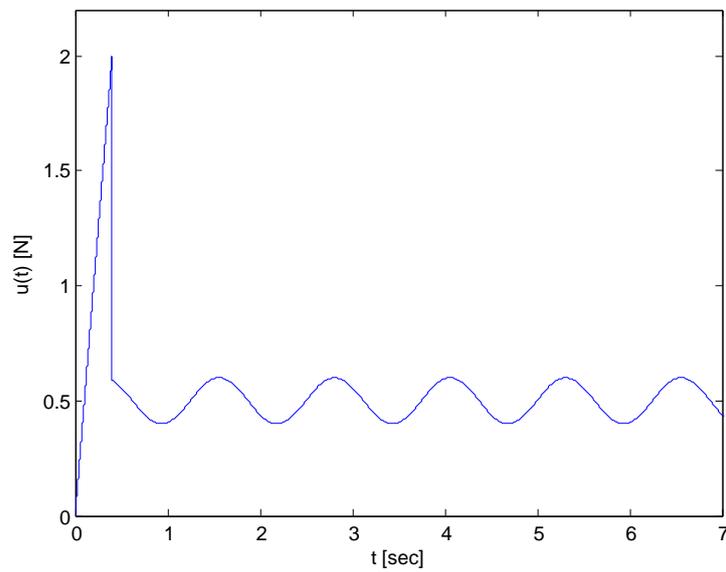


FIG. 3.22 – Commande appliquée lors du test de non-dérive

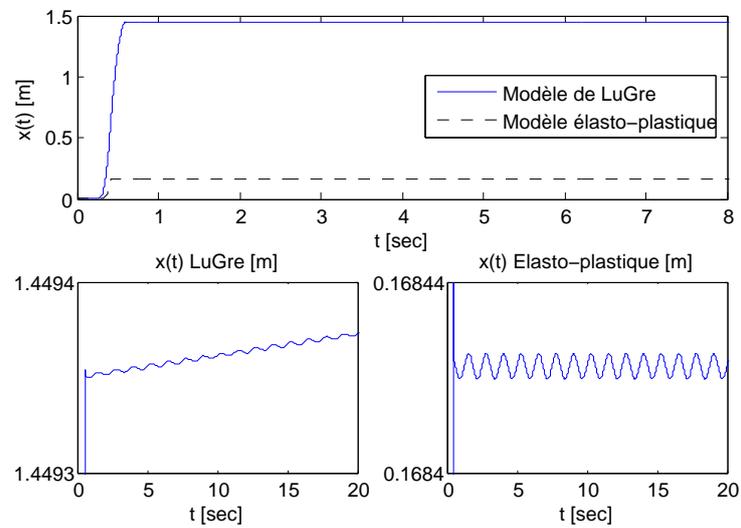


FIG. 3.23 – Résultat du test de non-dérive appliqué aux modèles de LuGre et élasto-plastique

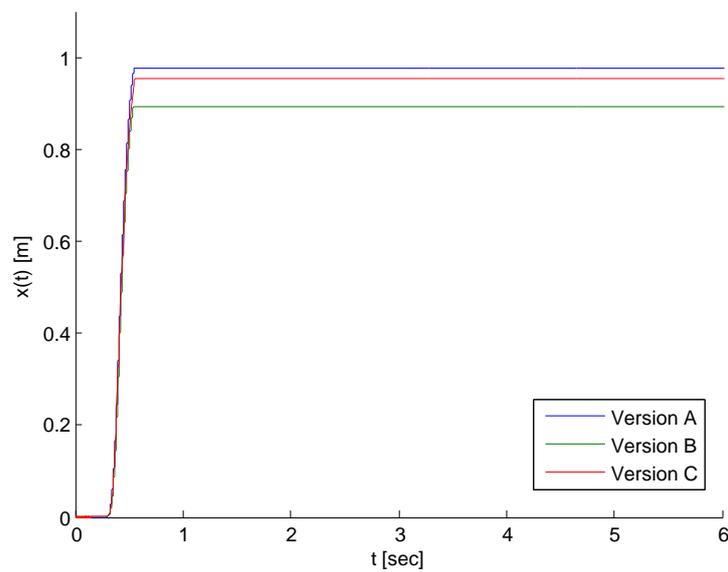


FIG. 3.24 – Résultat du test de non-dérive appliqué aux 3 versions du modèle hybride

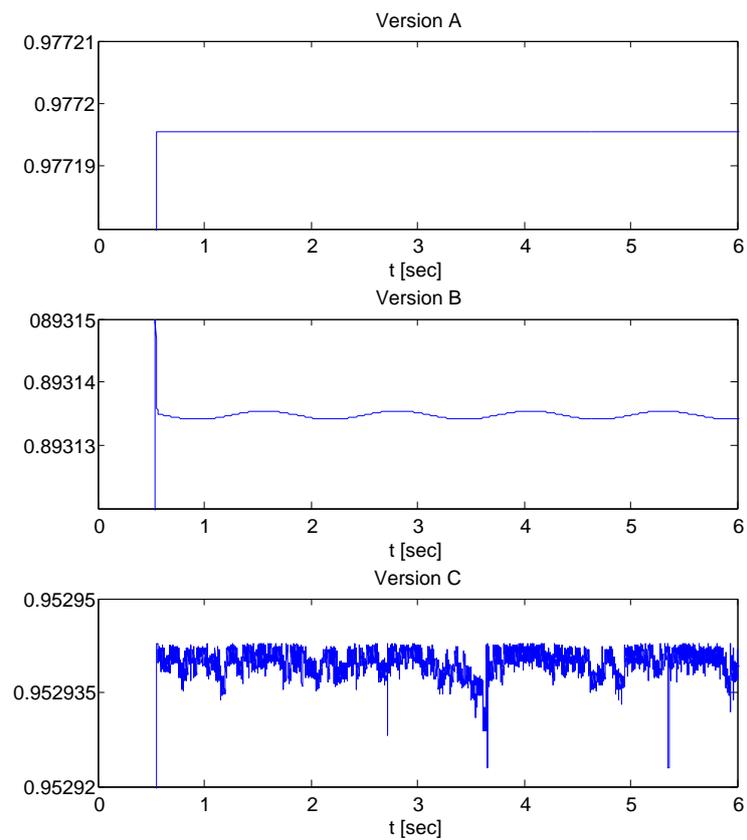


FIG. 3.25 – Zoom sur la position  $x(t)$  des 3 versions du modèle hybride lors du test de non-dérive

TAB. 3.2 – Résultats des tests comparatifs

	LuGre	Élasto-plastique	Version A	Version B	Version C
Test collage-glissement	+	-	+	+	+
Test cycles limites	+	+	+	+	+
Test pré-déplacement	±	±	-	±	+
Test non-dérive	-	+	+	+	+
Nombre de paramètre à identifier	7	8	5	6	>8

proche de la réalité. En modifiant les paramètres de chaque modèle, il est toujours possible d'améliorer la réponse de ceux-ci vers une trajectoire unique.

Le modèle élasto-plastique se différencie du modèle de LuGre par l'ajout de la propriété de non-dérive comme le montre les résultats de l'expérience. Pour le modèle hybride, les déplacements par glissement ou par déformations des adhésions sont pris en compte séparément. Le mobile ne peut pas se mouvoir à la fois par glissement et par déformation. Ainsi par leur conception, les 3 versions du modèle hybride ne dérivent pas dans le temps.

### 3.7.6 Récapitulatif

Dans cette section, les 3 versions du modèle hybride ont été testées et comparées à deux modèles de références : le modèle de LuGre et le modèle élasto-plastique. Le tableau 3.2 résume l'ensemble des résultats. Comme dans la section 2.4.4, un "+" représente un test réussi, un "-" un test échoué, c'est à dire une propriété non prise en compte par le modèle considéré. Le terme  $\pm$  permet de nuancer cette notation binaire. Par exemple, les pré-déplacements sont modélisés par la version B du modèle hybride mais pas le comportement hystérétique. Cette nuance est notée par un  $\pm$  dans la case correspondante.

Le tableau 3.2 donne aussi le nombre de paramètres à identifier, on exclut ainsi les paramètres de simulation comme par exemple  $\Sigma$ ,  $T_{e\max}$  ou  $p_0$  dans le cas du modèle hybride, version A.

Le modèle de LuGre donne de bons résultats, en effet, il n'échoue qu'au test de non-dérive. Le modèle élasto-plastique qui est, rappelons le, une déclinaison du modèle de LuGre, ne dérive pas dans le temps. Par contre, il réussit moins bien les autres tests. En modifiant les paramètres propres au modèle élasto-plastique, il est néanmoins possible d'améliorer son comportement.

En comparaison de ces 2 modèles référents, le modèle hybride propose de bonne caractéristique. Sa version A ne demande que 5 paramètres physiques à identifier et suffit lorsqu'il n'est pas nécessaire de modéliser les pré-déplacements. La version B du modèle hybride permet de simuler rapidement les pré-déplacements avec un seul paramètre supplémentaire, elle ne prend

cependant pas en compte les phénomènes hystériques. On le gardera pour des systèmes où ces phénomènes sont négligeables.

La version C du modèle modélise quasi-exhaustivement les comportements connus des frottements secs. La finesse des résultats peut être améliorée en augmentant le nombre de paramètres servant à discrétiser le triangle de Preisach. Cette amélioration se fera au détriment d'un temps de calibration du modèle et de simulation numérique plus important.

### 3.8 Étude de stabilité du modèle hybride

Dans le cadre de notre étude nous avons proposé une modélisation hybride des systèmes soumis à des frottements secs. Trois versions sont déclinées en fonction de la précision demandée. Dans notre application, la faible résolution des capteurs et donc le manque de données mesurées font que seule la version A du modèle hybride peut être validée expérimentalement. Nous proposons ici de vérifier les propriétés de dissipativité de ce modèle hybride.

#### Définition 3.8.1 (*Dissipativité, passivité, [1, 40]*)

Soit le système non-linéaire défini par

$$\Sigma_{NL} : \begin{cases} \dot{x} = f(x(t), w(t)) \\ z(t) = h(x(t), w(t)) \end{cases} \quad (3.41)$$

où  $f : X^n \times W^m \rightarrow R^n$  est localement Lipschitzienne,  $h : X^n \times W^m \rightarrow Z^m$  est continue,  $f(0, 0) = 0$ ,  $h(0, 0) = 0$ , et  $s(w(t), z(t))$  est une fonction de puissance. Le système  $\Sigma_{NL}$  est dit dissipatif s'il existe une fonction énergie  $V(x(t))$  définie positive telle que pour tout  $t_i \leq t_f$ ,

$$\begin{aligned} & V(x(t_i)) + \int_{t_i}^{t_f} s(w(t), z(t)) dt \geq V(x(t_f)) \\ \Leftrightarrow & \int_{t_i}^{t_f} \left( \frac{\partial V(x(t))}{\partial t} - s(w(t), z(t)) \right) dt \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \dot{V}(x) \leq s(w(t), z(t)), \forall t \in [t_i; t_f] \end{aligned} \quad (3.42)$$

Le système  $(\Sigma_{NL}, s(w, z))$  est :

- Conservatif si l'égalité est obtenue
  - Strictement dissipatif si l'inégalité stricte est obtenue
- Si la fonction puissance  $s(w(t), z(t))$  est de la forme  $w^T z$ , le système est dit passif.

Physiquement, un système soumis à des frottements dissipe de l'énergie. En effet, lors des phases de glissement de l'énergie est dissipée sous forme de chaleur par le système. Un modèle de frottement est a priori dissipatif. Nous proposons ici une preuve de la propriété de dissipativité du modèle hybride A.

**Proposition 3.8.1 (Dissipativité du modèle hybride, Version A)**

Pour la fonction candidate  $V(v) = \frac{m}{2}v^2$  avec  $m > 0$  et la fonction de puissance (supply rate)  $s(u(t), v(t)) = (u - F_{sec})v$  (où  $F_{sec}$  représente les frottements secs donnés par (3.29)), le système hybride (3.28) à (3.30) ayant pour entrée  $u$  et pour sortie  $v$  est dissipatif au sens de la définition 3.8.1 pour une entrée  $u$  bornée (i.e.  $|u| < u_{max}$ ) et continue, et des paramètres  $F_s, F_c, v_s, \delta_v$  et  $\sigma_v$  constants et positifs.

Pour la démonstration de la dissipativité du modèle hybride, le lemme des inégalités triangulaires est nécessaire.

**Lemme 3.8.1 (Inégalités triangulaire)**

Quels que soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$ , ils vérifient les inégalités suivantes :

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y| \quad (3.43)$$

**Démonstration 3.8.1 (Dissipativité du modèle hybride, version A)**

Pour la fonction puissance  $s(u(t), v(t)) = (u - F_{sec})v$ , on montre que la dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov candidate  $V(v) = \frac{m}{2}v^2$  vérifie la propriété de dissipativité le long des trajectoires du système (3.28) à (3.30) en mode bloqué (a), en mode glissant (b) et en phase de commutation (c).

a) Mode bloqué :

La dérivée de la fonction de Lyapunov candidate le long des trajectoires du système (3.28) à (3.30) en mode bloqué montre que

$$\dot{V} - s(u, v) = -\frac{p_0}{m}v^2 < 0, \forall v \neq 0 \quad (3.44)$$

avec  $s(u, v) = (u - F_{sec})v = 0$ .

b) Mode glissant :

La dérivée de la fonction de Lyapunov candidate le long des trajectoires du système (3.28) à (3.30) en mode glissant montre que

$$\begin{aligned} \dot{V}(v) - s(u, v) &= v(u - F_f) - v(u - F_{sec}) \\ &= v(u - F_{sec} - \sigma_v v) - v(u - F_{sec}) \\ &= -\sigma_v v^2 < 0, \forall v \neq 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

c) Phase de commutations :

Les deux modes du modèle sont dissipatifs indépendamment l'un de l'autre, il reste à vérifier que les commutations ne font pas perdre cette propriété. On choisit donc le système dans des modes différents aux instants  $t_i$  et  $t_j$ , on définit par  $t_{n \rightarrow m} \in ]t_i, t_j[$  l'instant unique de commutation du mode  $n$  au mode  $m$ . En accord avec la définition 3.8.1, on définit pour

$t \in [t_i, t_j]$  la fonction  $L(v, u)$  égale à :

$$L(v, u) = \frac{1}{2m}v(t_i)^2 + \int_{t_i}^{t_j} (u(t) - F_{sec}(t))v(t)dt \quad (3.46)$$

On doit tout d'abord vérifier que la fonction  $s(u, v) = (u - F_{sec})v$  est intégrable, c'est à dire que  $\left| \int_{t_i}^{t_j} s(u, v)dt \right|$  est bornée. On note que pour le mode bloqué,  $s(u, v)$  est nul, donc son intégrale est bornée. Pour le mode glissant, l'entrée  $u$  est bornée par définition, les frottements visqueux imposent une vitesse maximale définie par le point d'équilibre du système pour  $u = u_{\max}$  :

$$v_{\max} < \frac{u_{\max} - F_c}{\sigma_v} \quad (3.47)$$

D'après au lemme 3.8.1, on peut ainsi majorer la fonction  $s(u, v)$  :

$$|s(u, v)| = |(u - F_{sec})v| \leq (u_{\max} + F_s)v_{\max} \quad (3.48)$$

La fonction  $s(u, v)$  est bornée, donc son intégrale sur un intervalle finie  $T$  l'est aussi :

$$\left| \int_T s(u, v)dt \right| \leq (u_{\max} + F_s)v_{\max}T \quad (3.49)$$

La fonction  $s(u, v)$  est intégrable en mode bloqué et en mode glissant, il reste à vérifier cette propriété lors des commutations.

Pour une commutation du mode bloqué au mode glissant, la fonction  $I_{0 \rightarrow 1}$  est définie par :

$$\begin{aligned} I_{0 \rightarrow 1} &= \int_{t_{0 \rightarrow 1} - \Delta t}^{t_{0 \rightarrow 1} + \Delta t} s(u, v)dt \\ &= \int_{t_{0 \rightarrow 1} - \Delta t}^{t_{0 \rightarrow 1}} s(u, v)dt + \int_{t_{0 \rightarrow 1}}^{t_{0 \rightarrow 1} + \Delta t} s(u, v)dt \\ &= \int_{t_{0 \rightarrow 1} - \Delta t}^{t_{0 \rightarrow 1}} 0dt + \int_{t_{0 \rightarrow 1}}^{t_{0 \rightarrow 1} + \Delta t} (u - F_{sec})vdt \end{aligned} \quad (3.50)$$

avec  $\Delta t > 0$ . Lorsque le système est en mode bloqué, sa vitesse est inférieure ou égale à  $\Sigma$ . Lorsque le système commute dans le mode glissant, la vitesse est toujours bornée par  $\Sigma$  :

$$|v(t_{0 \rightarrow 1})| \leq \Sigma \quad (3.51)$$

La vitesse étant continue, sa valeur absolue aussi, il existe  $\Delta t > 0$  tel que pour tout  $k > 0$  :

$$\begin{aligned} \frac{|v(t_{0 \rightarrow 1} + \Delta t)| - |v(t_{0 \rightarrow 1})|}{\Delta t} &< k \\ \Leftrightarrow |v(t_{0 \rightarrow 1} + \Delta t)| &< |v(t_{0 \rightarrow 1})| + k\Delta t \\ \Leftrightarrow |v(t_{0 \rightarrow 1} + \Delta t)| &< \Sigma + k\Delta t \end{aligned} \quad (3.52)$$

Quel que soit  $k$ , on peut trouver un  $\Delta t$  suffisamment petit pour que l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$|v(t_{0 \rightarrow 1} + \Delta t)| \leq \Sigma \quad (3.53)$$

Ainsi en  $t = t_{0 \rightarrow 1}$ , d'après l'équation (3.29) et les conditions de commutations (3.30), il existe  $\Delta t$  tel que :

$$\begin{aligned} |v(t_{0 \rightarrow 1} + \Delta t)| &\leq \Sigma \\ |F_{sec}| &< F_s \\ |u(t_{0 \rightarrow 1} + \Delta t)| &> F_s \\ |u(t_{0 \rightarrow 1} - \Delta t)| &\leq F_s \end{aligned} \quad (3.54)$$

si l'entrée  $u$  est continue, alors  $|u(t_{0 \rightarrow 1} + \Delta t)| = |u(t_{0 \rightarrow 1} - \Delta t)| = F_s$  lorsque  $\Delta t$  tend vers 0, donc la fonction  $s(u, v)$  est bornée et donc intégrable autour de  $t_{0 \rightarrow 1}$  :

$$|s(u(t_{0 \rightarrow 1} + \Delta t), v(t_{0 \rightarrow 1} + \Delta t))| \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} (F_s - F_{sec}(v(t_{0 \rightarrow 1})))v(t_{0 \rightarrow 1}) \leq 2F_s \Sigma \quad (3.55)$$

Lors d'une commutation du mode glissant au mode bloqué, la fonction  $I_{1 \rightarrow 0}$  est définie par :

$$\begin{aligned} I_{1 \rightarrow 0} &= \int_{t_{1 \rightarrow 0} - \Delta t}^{t_{1 \rightarrow 0} + \Delta t} s(u, v) dt \\ &= \int_{t_{1 \rightarrow 0} - \Delta t}^{t_{1 \rightarrow 0}} s(u, v) dt + \int_{t_{1 \rightarrow 0}}^{t_{1 \rightarrow 0} + \Delta t} s(u, v) dt \\ &= \int_{t_{1 \rightarrow 0} - \Delta t}^{t_{1 \rightarrow 0}} (u - F_{sec})v dt + \int_{t_{1 \rightarrow 0}}^{t_{1 \rightarrow 0} + \Delta t} 0 dt \end{aligned} \quad (3.56)$$

En  $t = t_{1 \rightarrow 0}$ , d'après l'équation (3.29) et les conditions de commutations (3.30) on peut écrire :

$$\begin{aligned} |v(t_{1 \rightarrow 0} - \Delta t)| &\xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \Sigma \\ |F_{sec}| &< F_s \\ -u_{\max} &< u(t_{1 \rightarrow 0}) < F_c \quad \text{ou} \quad -F_c < u(t_{1 \rightarrow 0}) < u_{\max} \end{aligned} \quad (3.57)$$

La force maximale  $u_{\max}$  est supérieure à la force de Coulomb  $F_c$ , donc on peut affirmer :  $|u(t_{1 \rightarrow 0})| < u_{\max}$ . Ainsi, la fonction  $s(u, v)$  est bornée en  $t_{1 \rightarrow 0}$  et donc intégrable autour de  $t_{1 \rightarrow 0}$  :

$$|s(u(t_{0 \rightarrow 1} - \Delta t), v(t_{0 \rightarrow 1} - \Delta t))| \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} (u(t_{0 \rightarrow 1}) - F_{sec}(\Sigma))\Sigma < (u_{\max} + F_s)\Sigma \quad (3.58)$$

D'après les inégalités (3.55) et (3.58), la fonction  $s(u, v)$  est donc intégrable lors des commutations de mode, la fonction  $L$  est égale à :

$$\begin{aligned} L &= V(t_i) + \int_{t_i}^{t_j} s(u, v) dt \\ &= V(t_i) + \int_{t_i}^{t_{n \rightarrow m}} s(u, v) dt + \int_{t_{n \rightarrow m}}^{t_j} s(u, v) dt \end{aligned} \quad (3.59)$$

Le mode  $n$  est dissipatif, ainsi d'après les relations (3.42) :

$$L = V(t_{n \rightarrow m}) + \int_{t_{n \rightarrow m}}^{t_j} s(u, v) dt \quad (3.60)$$

Le mode  $m$  est lui aussi dissipatif :

$$L \geq V(t_i) + \int_{t_i}^{t_j} s(u, v) dt \geq V(t_j) \quad (3.61)$$

On retrouve la définition de la dissipativité donnée en (3.42), ainsi les commutations d'un mode à l'autre ne font pas perdre la propriété de dissipativité du système. La version A du modèle hybride est donc dissipatif sous réserve que la fonction d'entrée  $u$  soit continue et bornée.

On a démontré que la version A du modèle hybride de frottements secs est dissipative par rapport à l'entrée  $u$  et la sortie  $v$ . On peut étendre ce résultat à la sortie  $x$ . En effet, le modèle hybride est composé de deux sous-systèmes en série : le premier prend en entrée la force  $u$  et fournit la vitesse  $v$ , le deuxième intègre celle-ci pour donner la position  $x$ . Ce dernier est conservatif au sens de la définition 3.8.1, en effet en choisissant comme fonction énergie  $W(x) = \frac{x^2}{2}$  et comme fonction puissance  $r(v, x) = xv$ , on montre immédiatement :

$$\dot{W}(x) - r(v, x) = 0, \forall x \quad (3.62)$$

Ainsi en considérant la fonction énergie  $V(v)$  et la fonction puissance  $s(u, v)$  vérifiant les relations (3.42), le système global formé de la dynamique de la position et de la vitesse est dissipatif. En effet, si  $\dot{W}(x) - r(v, x) = 0$  et si  $\dot{V}(v) - s(u, v) \leq 0$  alors

$$\begin{aligned} \dot{V}_{tot}(x, v) + s_{tot}(x, v, u) &\leq 0 \\ &\text{avec :} \\ \dot{V}_{tot}(x, v) = \dot{V}(v) + \dot{W}(x) &\quad \text{et} \quad s_{tot}(x, v, u) = r(v, x) + s(u, v) \end{aligned} \quad (3.63)$$

De manière générale, on peut dire que la propriété de dissipativité est conservée par la mise en série d'un système dissipatif et d'un système conservatif. Ainsi il n'est pas nécessaire d'intégrer ce dernier dans l'étude de la dissipativité du système complet.

### 3.9 Conclusion

Dans ce chapitre, une nouvelle approche de modélisation des frottements secs a été proposée. Celle-ci est basée sur une approche hybride du phénomène. En décomposant la modélisation en un mode glissant et en un mode collé, chaque régime de fonctionnement peut être étudié et modélisé indépendamment l'un de l'autre. 3 versions ont été déclinées du modèle.

Pour les modèles de la littérature (LuGre, élasto-plastique...), certains paramètres peuvent soit avoir une signification physique soit être des paramètres de simulation. En fonction des phénomènes mesurables dans l'application expérimentale considérée, ces paramètres peuvent aussi changer de catégorie. Dans le cas du modèle hybride, cette différenciation est figée, c'est seulement le choix de la version qui permet d'adapter le modèle aux phénomènes mesurables.

Le modèle hybride a été comparé à l'aide de tests tirés de la littérature aux modèles de LuGre et élasto-plastique. Les résultats sont tout à fait satisfaisants et ainsi pour une modélisation rapide d'un système, la version la plus simple est tout à fait comparable au modèle de LuGre tout en ayant moins de paramètres à choisir et en possédant une propriété de plus (celle de non-dérive).

L'objectif affiché n'était pas de modéliser l'ensemble des propriétés énumérées dans la section (2.4.1). Cependant il a été montré que la version la plus élaborée du modèle hybride permet une prise en compte exhaustive de ces propriétés. En outre, il a été démontré que la version A du modèle hybride est dissipatif.

Les tests sont argumentés avec de nombreuses figures. En les observant, on remarque que les réponses temporelles des différents modèles sont différentes malgré un réglage identique des paramètres communs. Ces différences sont dues aux différences intrinsèques entre les modèles. Si l'on souhaite les calibrer de façon à obtenir une réponse unique, on se doit alors de modifier à la fois les paramètres propres à chaque modèle mais aussi les paramètres communs.

Ainsi, le lecteur notera immédiatement l'importance d'un paramétrage adéquat du modèle pour que celui-ci corresponde au mieux à la réalité. En réponse à cette remarque, le prochain chapitre s'intéresse à l'identification des paramètres du modèle hybride.



# Chapitre 4

## Identification de système soumis à des frottements

### 4.1 Cadre d'étude

Le modèle hybride a l'avantage majeur de pouvoir adapter la liste de ses propriétés et donc son nombre de paramètres en fonction des phénomènes observables en pratique. Ces paramètres sont divisibles en 2 catégories : les paramètres de simulation intrinsèques au modèle et les paramètres physiques. Dans le chapitre 3, le choix de leurs valeurs a été longuement discuté. La deuxième classe de paramètres est celle des paramètres ayant une signification physique, par exemple le coefficient de frottement visqueux  $\sigma_v$ , ou le pré-déplacement maximal moyen  $z_{\max}$ . Ces paramètres sont généralement communs à l'ensemble des modèles : LuGre, élastoplastique...

Si le choix du premier jeu de paramètres dépend du compromis entre la finesse souhaitée des résultats et le temps de simulation disponible, les valeurs des paramètres physiques dépendent du système étudié. De nombreux travaux proposent des méthodes pour identifier ces paramètres communs à l'ensemble des modèles : LuGre, élastoplastique, etc. [12], [42], [43]. La validation se fait souvent sur des bancs d'essais de laboratoire impliquant une mécanique simple, précise et surtout un système d'acquisition des données de haute résolution. Ainsi, de nombreuses communications portent sur l'identification des paramètres liés aux pré-déplacements et autres phénomènes microscopiques, [12], [14].

Pour un système mécanique industriel, la fonction souhaitée est réalisée en minimisant son coût final. Donc, les capteurs, la qualité de fabrication, les lubrifiants, etc. sont choisis pour remplir au plus juste les spécifications demandées. Ainsi on obtient d'un côté un mécanisme pouvant comporter des phénomènes parasites dûs à sa mauvaise finition et de l'autre un système d'acquisition conçu pour la commande et souvent insuffisamment performant pour l'identification.

Le défi n'est donc pas d'identifier un modèle complet à partir de mesures précises et peu bruitées mais plutôt d'identifier le maximum de paramètres possibles avec la configuration matérielle disponible.

Le banc d'essai disponible pour valider les différents travaux de cette thèse ne permet pas de mesurer les pré-déplacements, ou l'effet Stribeck pour des vitesses faibles. Dans la suite, on

suppose le système équivalent à une masse sur un support horizontal, les travaux se limiteront à la recherche de la force de rupture  $F_s$  et des paramètres du mode glissant ( $m, F_c, \sigma_v$ ). On obtient ainsi le modèle simple suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ m\dot{v} &= ma = u - \sigma_v v - F_c \text{sign}(v)\end{aligned}\quad (4.1)$$

## 4.2 Mode glissant : identification de l'équation dynamique

### 4.2.1 Influence des capteurs incrémentiels de position

Pour les systèmes mécaniques industriels, les données disponibles sont ainsi souvent mal conditionnées pour l'identification. En outre, les capteurs incrémentiels de position, même s'ils ne nécessitent pas de filtre anti-repliement, peuvent générer d'importants bruits de quantification lors de dérivations numériques. De manière générale, le bruit de quantification ne correspond pas à l'ajout d'un signal parasite sur la grandeur mesurée mais à la suppression d'informations sur celle-ci. Cette détérioration peut être quantifiée grâce à l'entropie métrique présentée dans l'annexe B.

Supposons la position  $x$  suivant la trajectoire de la figure (4.1). Un capteur incrémentiel de pas  $\delta_x$  mesure cette variable. Cette mesure  $x_m$  est échantillonnée à la période  $T_s$  et dérivée numériquement suivant (4.2) :

$$v(k) = \frac{x_m(k) - x_m(k-1)}{T_s}\quad (4.2)$$

L'erreur de position est bornée par le pas  $\delta_x$ . La vitesse obtenue numériquement est perturbée par un bruit de quantification d'amplitude  $\frac{\delta_x}{T_s}$ . On remarque que, plus la période d'échantillonnage est faible, plus le bruit va être important. La figure (4.2) représente typiquement le résultat obtenu : des paliers congrus à  $\frac{\delta_x}{T_s}$  ainsi que des créneaux plus ou moins larges suivant la vitesse.

Pour identifier la masse  $m$ , il est très utile de connaître l'accélération du système  $a$ . Celle-ci peut être estimée par la dérivation de la vitesse (elle-même calculée suivant (4.2)). Dans ce cas, l'amplitude du bruit de quantification  $\Delta_a$  qui est aussi l'erreur de mesure maximale entre  $a$  et  $a_m$  devient égale à  $\frac{2\delta_x}{T_s^2}$ .

En général, il est possible de connaître une valeur approchée des paramètres à identifier. Ainsi chaque paramètre est connu avec une certaine incertitude. L'identification a pour but de diminuer cet intervalle. Si en raison des limitations propres au système, les résultats obtenus sont moins précis que ceux obtenus par calcul, alors l'identification est inutile.

#### 4.2.1.1 Calcul d'incertitude

Avant d'entreprendre l'identification des paramètres du modèle, il est intéressant de calculer l'incertitude maximale générée sur chaque paramètre par l'amplitude maximale du bruit sur les

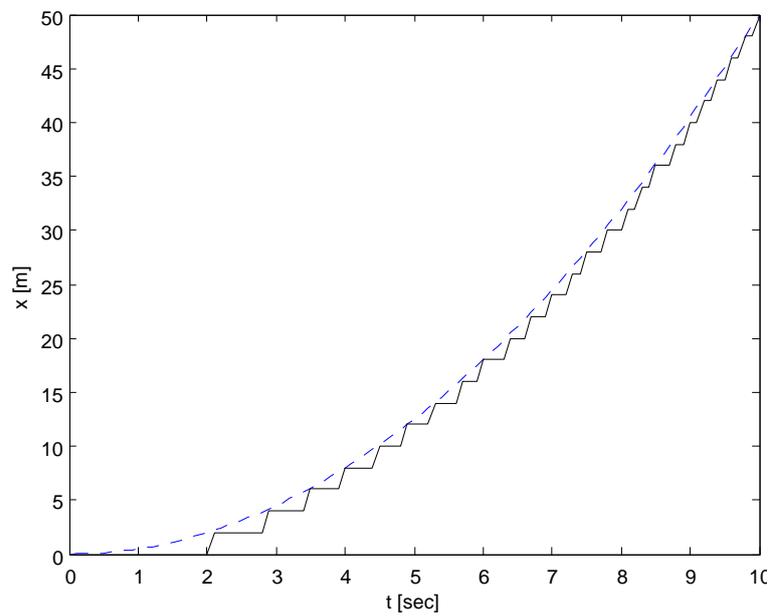


FIG. 4.1 – Exemple de quantification,  $T_s = 0,1$ s,  $\delta_x = 2$ m : position réelle (tirets) et position quantifiée (ligne continue)

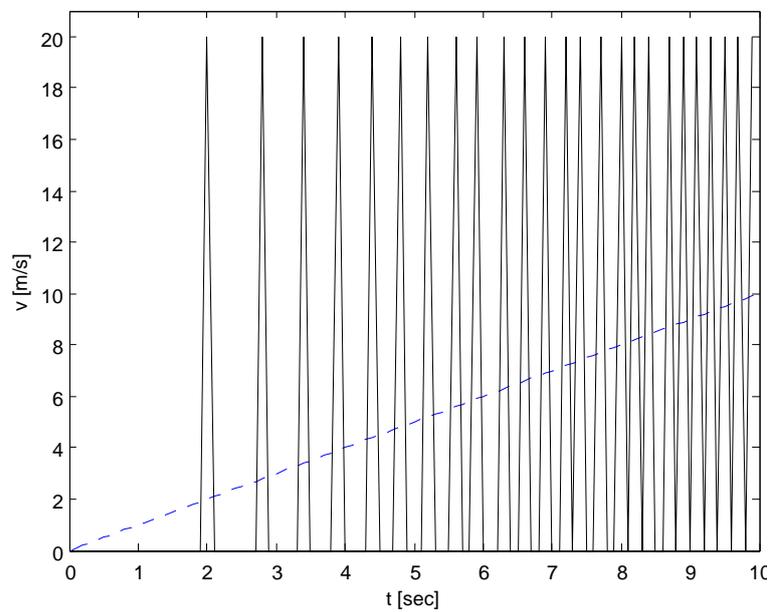


FIG. 4.2 – Exemple de quantification,  $T_s = 0,1$ s,  $\delta_x = 2$ m : vitesse réelle (tirets) et vitesse calculée suivant (4.2) (ligne continue)

signaux utilisés. A partir de l'équation (4.1) et en supposant l'accélération maximale égale à  $\frac{u_{\max}}{m}$ , on trouve l'incertitude  $\Delta_m$  sur la masse  $m$  du solide :

$$\begin{aligned} m(a + \Delta_a) &= (m + \Delta_m)a \\ \Delta_m &= m \frac{\Delta_a}{a} \\ \Delta_m &= m^2 \frac{2\delta_x}{T_s^2 u_{\max}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Avec le même raisonnement, on trouve l'incertitude  $\Delta_\sigma$  sur le coefficient de frottement visqueux  $\sigma_v$ .

$$\Delta_\sigma = \sigma_v \frac{\delta_x}{T_s v_{\max}} \quad (4.4)$$

Si l'une des incertitudes  $\Delta_m$  ou  $\Delta_\sigma$  est respectivement du même ordre que son paramètre associé, l'identification de celui-ci risque d'être difficile. De plus, le bruit important de quantification sur l'accélération ou la vitesse perturbe l'identification de l'ensemble des paramètres. Il faut donc chercher à minimiser l'influence du bruit de quantification en choisissant une séquence de test adéquate.

Le coefficient  $F_c$  est associé au signe de la vitesse. On peut raisonnablement faire l'hypothèse que l'erreur moyenne sur l'estimation du signe de la vitesse est nulle. Ainsi les erreurs de quantification sur la vitesse n'influencent pas directement le conditionnement des données liées au coefficient  $F_c$ .

## 4.2.2 Filtrage des données

Le bruit d'un signal est souvent considéré comme l'ajout d'un signal parasite sur le signal utile. Dans le cas du bruit de quantification, il n'y a pas d'ajout. La quantification supprime de l'information, créant ainsi du bruit par soustraction. Si le pas de quantification est suffisamment faible, une interpolation (ou un filtrage) peut permettre d'affiner l'information. De part la faible connaissance des paramètres du système, une interpolation est difficile, la solution préconisée est alors souvent un filtrage temporel.

Ainsi, un filtre lent (avec une constante de temps élevée) donnera un signal peu bruité mais les petites variations de vitesse seront lissées privant l'algorithme d'identification d'importantes informations. Au contraire, un filtre rapide détruit peu l'information utile dans le signal, mais celui-ci est tellement entaché de bruit qu'il en devient inexploitable. Encore une fois, la solution passe par la recherche d'un compromis.

Le spectre d'un bruit de quantification peut être majoré par celui d'un bruit blanc de même amplitude  $G$ . L'énergie d'un tel bruit filtré par une fonction de transfert du premier ordre passe-bas  $H(s)$  entre 0Hz et  $\frac{1}{T_s}$  Hz est égale à :

$$E_f = \int_0^{\frac{1}{T_s}} |G^2 H(2\pi j f)|^2 df = \int_0^{\frac{1}{T_s}} \frac{G^2}{1+(2\pi\tau f)^2} df \quad (4.5)$$

où  $\tau$  est la constante de temps du filtre  $H(s)$ . Après résolution, la relation suivante est trouvée :

$$E_f = \frac{G^2}{2\pi\tau} \arctan\left(\frac{2\pi\tau}{T_s}\right) \quad (4.6)$$

La difficulté est de régler la constante de temps  $\tau$  du filtre  $H(s)$ . Empiriquement, la bande passante est choisie 10 fois supérieure à la dynamique du système. Dans le cas présent,  $\tau = 10 \frac{m}{\sigma_v}$ . Cependant, cette dynamique n'étant pas connue précisément, ce réglage peut être très néfaste à l'identification.

Le paramètre  $\tau$  peut aussi être réglé en fonction du ratio  $\rho$  entre la puissance du bruit filtré et celle du bruit initial. L'énergie du bruit filtré  $E_f$  est équivalente à celle d'un bruit blanc de puissance  $G'^2$  intégré entre 0Hz et  $\frac{1}{T_s}$  Hz. L'énergie  $E_f$  est alors égale à  $\frac{G'^2}{T_s}$ . En définissant  $\rho$  égale à  $\frac{G'^2}{G^2}$ , l'équation (4.6) devient :

$$\rho \frac{2\pi\tau}{T_s} = \arctan\left(\frac{2\pi\tau}{T_s}\right) \quad (4.7)$$

Avec l'algorithme de Newton-Raphson, (4.7) est résolue pour un ratio  $\rho$  de 2 à 80%. La figure (4.3) présente le résultat. Au delà de 80%, la fréquence de coupure est supérieure à la fréquence d'échantillonnage, rendant le filtrage infaisable sans sur-échantillonnage. Si le ratio  $\rho$  est choisi trop petit, la faible dynamique du filtre risque de perturber l'identification de celle du système. Par contre, en supposant la dynamique du système connue, la fréquence de coupure du filtre et donc le ratio  $\rho$  peuvent être déterminés. Ainsi les incertitudes a priori sur les paramètres à identifier, peuvent être recalculées de la façon suivante :

$$\Delta_m = m^2 \sqrt{\rho} \frac{2\delta_x}{T_s^2 u_{\max}} \quad (4.8)$$

$$\Delta_\sigma = \sigma_v \sqrt{\rho} \frac{\delta_x}{T_s v_{\max}} \quad (4.9)$$

À noter qu'avec l'hypothèse de tests à vitesse constante, le filtre peut être choisi très lent ; en effet dans ce cas on s'intéresse seulement à la composante continue du signal. Pour finir, on rappellera qu'il est important de filtrer tous les signaux utilisés par l'algorithme, de façon à ne pas les déphaser les uns des autres.

### 4.2.3 Contraintes physiques

Aux contraintes liées à l'acquisition des données comme les capteurs, des contraintes physiques propres au système se rajoutent. Par exemple, si le régime stationnaire désiré ne peut pas être atteint avant que le système ait atteint une de ses limites de position, toutes les méthodes demandant une vitesse constante élevée pour identifier la courbe de Stribeck, [12] ne peuvent être utilisées.

De plus, un système mécanique réel est toujours limité en accélération et en vitesse, la puissance de l'actionneur étant finie. Reprenant les expressions (4.8) et (4.9), plus la vitesse et l'accélération sont limitées, plus le rapport signal sur bruit sera faible et donc l'identification difficile.

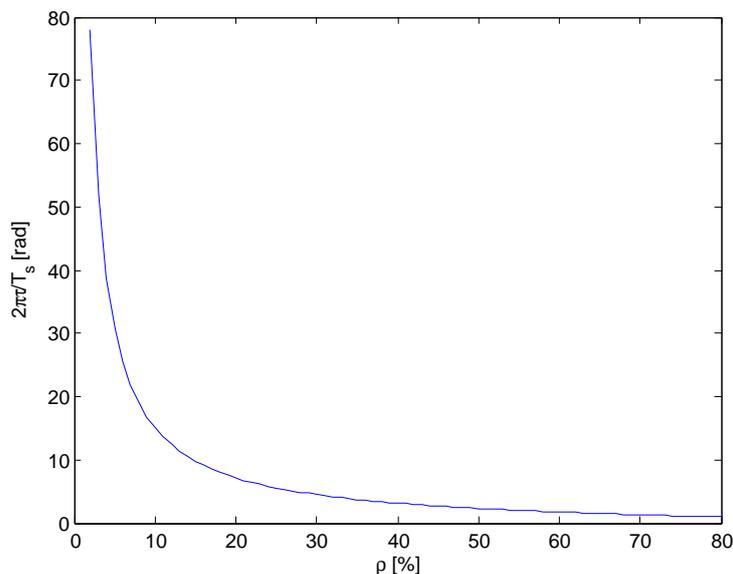


FIG. 4.3 – Temps de réponse normalisé du filtre passe-bas en fonction du ratio de puissances  $\rho$

#### 4.2.4 Schéma d'aide à la décision

A partir des remarques et propositions faites ci-dessus, un schéma d'aide à la décision peut être déterminé. La problématique est de savoir en fonction de  $\delta_x$ ,  $T_s$ ,  $v_{\max}$ ,  $u_{\max}$ , de la précision relative  $\epsilon$  que l'on souhaite sur les paramètres et des connaissances à priori de  $m$  et  $\sigma_v$ , ce qui peut et ce qui doit être fait.

En suivant l'algorithme présenté par la figure (4.4), il est facile de déterminer si l'identification est possible. Si ce n'est pas le cas, il faut supposer  $m$  connu, ce qui relâche la contrainte sur le bruit d'accélération. Ensuite, si le bruit de quantification sur la vitesse est aussi trop élevé, on ne peut pas utiliser la vitesse comme mesure. Cependant, dans le cas d'une identification en boucle fermée, le coefficient de frottement visqueux reste identifiable, comme il sera montré dans la sous-section 4.2.6.

#### 4.2.5 Méthode des moindres carrés : application à l'identification des frottements

##### 4.2.5.1 Rappels

Soit le système discret suivant :

$$\begin{aligned} y(k) &= a_1 x_1(k) + a_2 x_2(k) + \dots + a_n x_n(k) \\ y(k) &= \theta^T \phi(k) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Les scalaires  $a_1, a_2, \dots, a_n$  et les variables temporelles  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont respectivement les paramètres et les mesures des entrées et des états du système. Ils sont regroupés dans les vecteurs  $\theta$

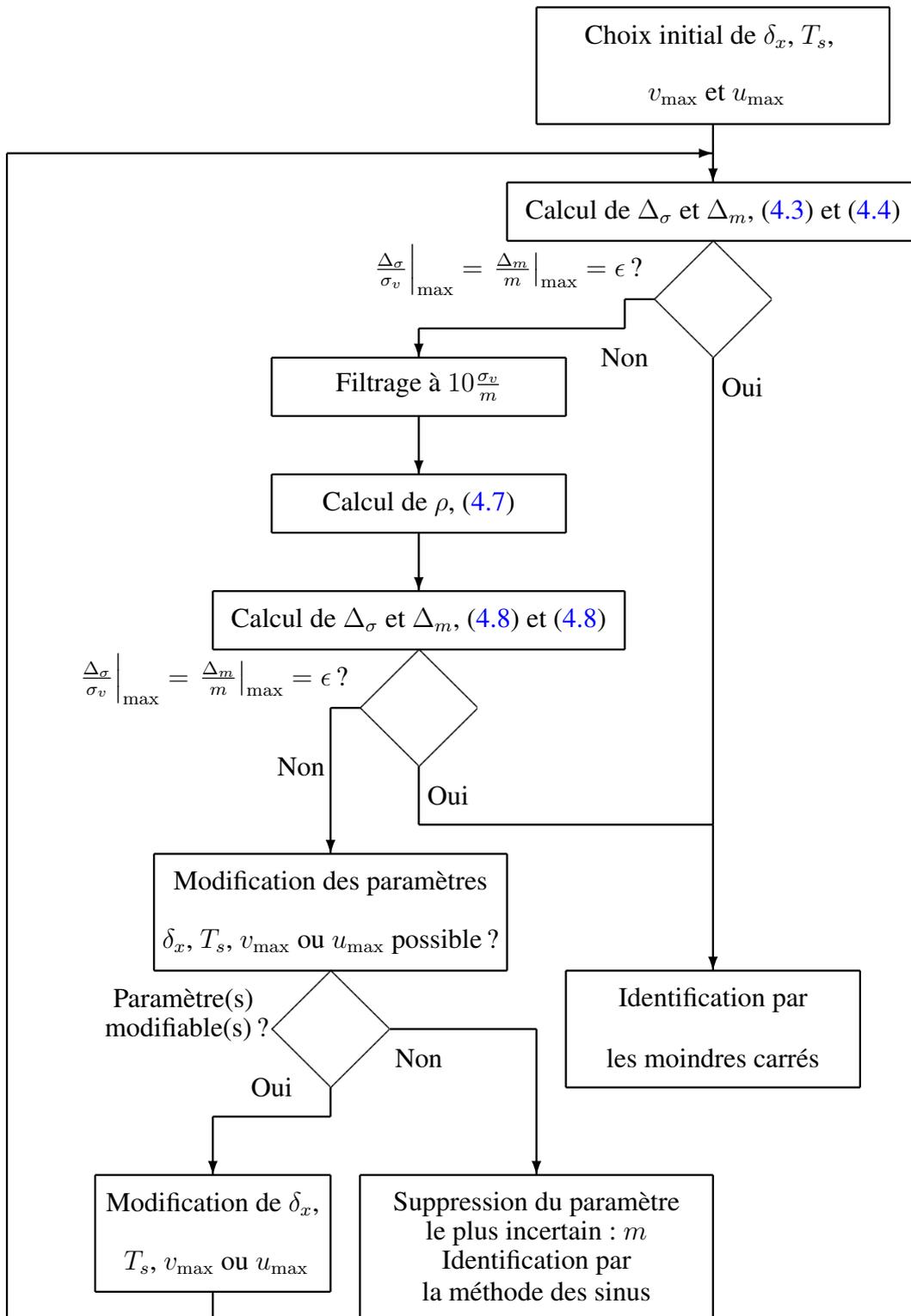


FIG. 4.4 – Algorithme d'aide au choix des paramètres identifiables

et  $\phi(k)$ .  $x_i(k)$  peut être un état  $x_j$  retardé de 1 à plusieurs périodes. De même  $x_i$  peut être une fonction non-linéaire des entrées et des états du système. L'objectif est, à partir des mesures  $\phi(k)$  et  $y(k)$  de trouver le jeu de paramètres estimés  $\hat{\theta}$  qui minimise le critère  $J(k)$ .

$$\min_{\hat{\theta}} J(k) = \sum_{i=1}^k \left( y(i) - \hat{\theta}(k)^T \phi(i) \right)^2 \quad (4.11)$$

$\hat{\theta}(k)$  est le vecteur des paramètres estimés à l'instant  $k$ . Sous réserve que  $\frac{\partial^2 J(k)}{\partial \hat{\theta}(k)^2} > 0$ , le minimum de  $J$  est atteint lorsque la dérivée  $\frac{\partial J(k)}{\partial \hat{\theta}(k)}$  est nulle.

$$\left. \frac{\partial J(k)}{\partial \hat{\theta}(k)} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = -2 \sum_{i=1}^k \left( y(i) - \hat{\theta}(k)^T \phi(i) \right) \phi(i) = 0 \quad (4.12)$$

Après quelques calculs (voir [45]), il résulte l'expression du vecteur  $\hat{\theta}(k)$  en fonction des mesures entre les instants  $i = 1$  et  $i = k$ .

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(k) &= \left( \sum_{i=1}^k \phi(i) \phi(i)^T \right)^{-1} \sum_{i=1}^k y(i) \phi(i) \\ \hat{\theta}(k) &= F(k) \sum_{i=1}^k y(i) \phi(i) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Pour avoir une bonne estimation de  $\theta$ , il est important que la matrice  $F(k) = \sum_{i=1}^k \phi(i) \phi(i)^T$  soit bien conditionnée. On définit le conditionnement d'une matrice comme le rapport entre ses valeurs propres, maximale et minimale. Plus ce ratio est proche de 1, plus la matrice est bien conditionnée. En effet, l'erreur relative sur  $\theta$  peut s'écrire en fonction du conditionnement  $\kappa$  de la matrice  $\sum_{i=1}^k \phi(i) \phi(i)^T$  et de l'erreur relative sur  $\sum_{i=1}^k y(i) \phi(i)$  :

$$\frac{\Delta \theta}{\theta} = \kappa \left( \sum_{i=1}^k \phi(i) \phi(i)^T \right) \frac{\Delta Y}{Y} \quad (4.14)$$

avec :

$$Y = \sum_{i=1}^k y(i) \phi(i) \quad (4.15)$$

Le bon conditionnement des matrices passe par une séquence d'excitation du système adéquat<sup>1</sup>, ce point sera développé en 4.2.5.3.

En utilisant l'expression (4.13), la matrice  $F(k)$  doit être recalculée à chaque nouvelle itération en faisant la somme de toutes les données depuis le début de l'échantillon puis en inversant le résultat. Cette méthode est très coûteuse en calcul, surtout lorsque l'horizon temporel de mesure

<sup>1</sup>Il est possible d'améliorer sensiblement la qualité de l'identification en pondérant le critère  $J$  par l'inverse de la matrice de covariance des erreurs de mesures.

est grand et les paramètres à identifier nombreux. Pour remédier à ce problème, [45] propose une version récursive de l'algorithme des moindres carrés déduite de (4.13) :

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(k+1) &= \hat{\theta}(k) + F(k+1)\varepsilon^0(k+1) \\ F(k+1) &= F(k) - \frac{F(k)\phi(k)\phi(k)^T F(k)}{1 + \phi(k)^T F(k)\phi(k)} \\ \varepsilon^0(k+1) &= y(k) - \hat{\theta}(k)^T \phi(k)\end{aligned}\quad (4.16)$$

$\varepsilon^0$  est l'erreur à priori entre la mesure  $y$  et la mesure prédite par le modèle. Le gain matriciel  $F$  est initialisé à  $kI_n$ . Typiquement,  $k$  est choisi égal à 1000. En faisant ainsi, une erreur initiale est faite sur  $F(0)$ , cependant elle décroît rapidement et influence peu le résultat final, cf. [45].

#### 4.2.5.2 Bilan de puissance

Dans la suite, on suppose le système d'acquisition du système suffisamment performant pour identifier la masse  $m$ , le coefficient de frottement visqueux  $\sigma_v$  et la force de frottement de Coulomb  $F_c$ . Par contre, le système est supposé limité en position ( $x \in [0, x_{\max}]$ ), c'est à dire que la séquence d'excitation du système doit être cyclique. Ainsi, le système passe pendant le test par des périodes de collage. Il est excité pendant de brefs transitoires à des faibles vitesses, faisant intervenir le phénomène de Stribeck.

L'équation à identifier est rappelée :

$$ma(t) = u(t) - \sigma_v v(t) - F_c \text{sign}(v(t)) \quad (4.17)$$

Cette équation est valide pour des vitesses élevées, c'est-à-dire lorsque les phénomènes à basses vitesses ne sont pas présents. Hors, ceux-ci parasitent les mesures dans le cas présenté ci-dessus. Ils risquent de perturber l'identification des paramètres du système imposant par exemple un décalage sur la valeur de  $F_c$ , cf. [42], [43]. Une méthode proposée dans [12] est de supprimer les mesures à basses vitesses. Pour cela, un seuil est utilisé. Lorsque la vitesse est supérieure à ce seuil, un algorithme des moindres carrés est utilisé. En choisissant  $\theta = (m \ \sigma_v \ F_c)^T$  et  $\phi = (a \ v \ \text{sign}(v))$ , le critère à minimiser est ainsi :

$$\begin{aligned}\min_{\hat{\theta}} J(k) &= \sum_{i=1}^k \left( u(i) - \hat{\theta}(i)^T \varphi(i) \right) \eta(i) \left( u(i) - \hat{\theta}(i)^T \varphi(i) \right) \\ \text{avec} \quad &: \\ \eta(i) &= 1 \text{ si } |v(i)| > v_{\text{seuil}} \\ &= 0 \text{ sinon}\end{aligned}\quad (4.18)$$

En pratique, les résultats sont très sensibles au seuil  $v_{\text{seuil}}$  et son réglage reste à la discrétion du technicien.

La méthode proposée ci-dessous s'affranchit du réglage de ce seuil en pondérant les mesures par la vitesse dans l'algorithme des moindres carrés. Cette méthode est équivalente à utiliser le bilan de puissance du système. On définit ainsi la puissance fournie  $P_p$ , la puissance utile  $P_u$  et les

puissances dissipées en raison des frottements visqueux et des frottements secs, respectivement  $P_v$  et  $P_d$ . Leurs expressions sont :

$$P_p = u(t)v(t) \quad (4.19)$$

$$P_u = ma(t)v(t) \quad (4.20)$$

$$P_v = \sigma_v v(t)^2 \quad (4.21)$$

$$P_d = F_c |v(t)| \quad (4.22)$$

Le bilan de puissance est :

$$\begin{aligned} P_p &= P_u + P_v + P_d \\ u(t)v(t) &= ma(t)v(t) + \sigma_v v(t)^2 + F_c |v(t)| \\ u(t)v(t) &= \begin{pmatrix} m & \sigma_v & F_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t)v(t) \\ v(t)^2 \\ |v(t)| \end{pmatrix} = \theta^T v(t) \phi(t) \end{aligned} \quad (4.23)$$

D'après (4.23), la fonction de pondération  $\eta(i)$  est égale à  $v(i)^2$ . En utilisant une telle fonction, l'algorithme n'introduit pas de paramètre de réglage propre à l'identification des frottements. Par contre, les avantages de [12] sont conservés ; en effet, lors des phases de collage, lorsque la vitesse est nulle, la commande  $u(t)$  n'est pas prise en compte pour l'identification. Enfin, la fonction de Stribeck est fortement atténuée par cette pondération limitant les risques de décalage sur l'estimation de la force de Coulomb (cf. figure (4.5)).

Quelle que soit la fonction de pondération utilisée, les moindres carrés ne peuvent donner des résultats satisfaisants que si le gain matriciel  $F$  est bien conditionné. Ce conditionnement est bien entendu fonction de la séquence d'excitation utilisée pour l'identification.

#### 4.2.5.3 Choix de la séquence d'excitation

Dans [12], l'auteur s'intéresse à l'identification de systèmes linéaires à temps discret. Ne connaissant pas les dynamiques de ces systèmes, il conseille d'utiliser une séquence binaire pseudo-aléatoire de faible amplitude. Le spectre de ce type de signal tend vers celui d'un bruit blanc pour un horizon d'observation grand. Ainsi le système est excité sur l'ensemble de la bande passante disponible (entre 0Hz et  $\frac{1}{T_s}$ ). L'amplitude du signal est choisie faible, de façon à limiter les phénomènes non-linéaires du système : on se place autour d'un point de fonctionnement.

Dans le cas présent, l'allure spectrale du système est assez bien connue : il s'agit d'un premier ordre, donc il n'est pas nécessaire d'exciter les hautes fréquences. De plus, pour des raisons physiques, le système ne peut pas être positionné autour d'un point de fonctionnement autre que celui d'une vitesse constante non nulle. Si la vitesse moyenne est choisie nulle, l'amplitude des signaux doit être grande pour dépasser les non-linéarités situées autour de  $v = 0$  (la méthode présentée ci-dessous est robuste à ces phénomènes). Finalement, les conseils proposés dans [12] ne peuvent pas être appliqués dans le cas du problème traité. Une autre séquence de test dédiée au problème d'identification paramétrique des frottements secs doit être développée.

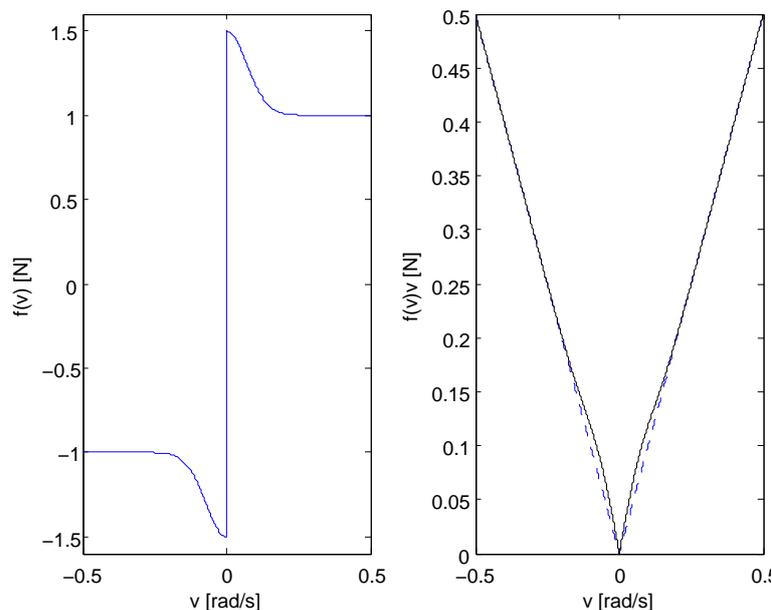


FIG. 4.5 – Comparaison entre la fonction de Stribeck et la fonction de Stribeck pondérée par la vitesse : les déformations autour de 0 sont largement atténuées

Pour que l'algorithme des moindres carrés donnent de bons résultats, il faut que la matrice  $M = \sum_{i=1}^k \phi(i)\phi(i)^T$  soit bien conditionnée. Celle-ci est de la forme :

$$M = \sum_{i=1}^k \phi(i)\phi(i)^T = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k a(i)^2 & \sum_{i=1}^k a(i)v(i) & \sum_{i=1}^k a(i)\text{sign}(v(i)) \\ * & \sum_{i=1}^k v(i)^2 & \sum_{i=1}^k |v(i)| \\ & & k \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

On suppose le système asservi en position. Une trajectoire de position sinusoïdale est appliquée arbitrairement au système. Bien entendu, sa vitesse et son accélération sont aussi sinusoïdales :

$$v(t) = V \sin(2\pi ft) \quad (4.25)$$

$$a(t) = 2\pi fV \cos(2\pi ft) \quad (4.26)$$

En choisissant  $k$  tel que  $kT_s$  soit un multiple de la période  $\frac{1}{f}$ , il vient :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^k a(i)^2 &= 2k\pi^2 f^2 V^2 \\
\sum_{i=1}^k v(i)^2 &= \frac{kV^2}{2} \\
\sum_{i=1}^k |v(i)| &= \frac{2Vk}{\pi} \\
\sum_{i=1}^k a(i)v(i) &= 0 \\
\sum_{i=1}^k a(i)\text{sign}(v(i)) &= 0
\end{aligned} \tag{4.27}$$

$\sum_{i=1}^k a(i)v(i)$  et  $\sum_{i=1}^k a(i)\text{sign}(v(i))$  sont les intercorrélations entre l'accélération et respectivement la vitesse puis le signe de la vitesse. Sachant les signaux déphasés de  $\frac{1}{4f}$ , ces sommes sont donc nulles. La matrice  $M$  devient :

$$M = \begin{pmatrix} 2k\pi^2 f^2 V^2 & 0 & 0 \\ * & \frac{kV^2}{2} & \frac{2Vk}{\pi} \\ * & * & k \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

En faisant subir une trajectoire sinusoïdale au système, l'identification de la masse  $m$  devient complètement décorrélée des 2 autres paramètres. Ainsi la précision sur  $m$  ne dépendra que de la qualité des mesures de l'accélération  $a$  et de la commande  $u$ . Il reste donc à identifier les paramètres  $\sigma_v$  et  $F_c$  à l'aide de la sous-matrice  $M_2$  :

$$M_2 = k \begin{pmatrix} \frac{V^2}{2} & \frac{2V}{\pi} \\ * & 1 \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

Pour obtenir les meilleurs résultats, on cherche la plus petite valeur du conditionnement de la matrice  $M_2$ . Celui-ci s'exprime comme le ratio entre les valeurs propres, maximale et minimale :

$$\kappa(M_2) = \frac{\frac{V^2}{2} + 1 + \sqrt{\left(\frac{V^2}{2} + 1\right)^2 - 4V^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right)}}{\frac{V^2}{2} + 1 - \sqrt{\left(\frac{V^2}{2} + 1\right)^2 - 4V^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right)}} \tag{4.30}$$

Le minimum de  $\kappa(M_2)$  est atteint lorsque sa dérivée par rapport à  $V$  est nulle, ce qui est le cas pour  $V = \sqrt{2}$ . Pour cette amplitude, le conditionnement de la sous-matrice  $M_2$  est égal à 19. C'est le meilleur résultat que l'on peut espérer en soumettant le système à une trajectoire sinusoïdale.

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
$m$	0,001kg	$\delta_x$	$10^{-4}\text{m}$
$\sigma_v$	0,4Ns/m	$T_s$	$10^{-3}\text{s}$
$F_c$	1N	$\Delta_u$	0,01N
$F_s$	1,5N	$f_0$	1Hz
$v_s$	$10^{-3}\text{m/s}$		

TAB. 4.1 – Tableau des paramètres utilisés pour la validation de la méthode proposée utilisant l'algorithme des moindres carrés

Il n'est pas toujours possible de pouvoir générer une trajectoire sinusoïdale d'amplitude  $\sqrt{2}$ . Cependant il est facile de conditionner les mesures de façon à obtenir la vitesse adéquat pour l'algorithme. L'équation dynamique initiale est multipliée par  $V = \frac{\sqrt{2}}{V}$  :

$$ma(i) \frac{\sqrt{2}}{V} = u(i) \frac{\sqrt{2}}{V} - \sigma_v v(i) \frac{\sqrt{2}}{V} - F_c \frac{\sqrt{2}}{V} \text{sign}(v(i)) \quad (4.31)$$

La nouvelle équation utilisée pour l'identification est :

$$ma'(i) = u'(i) - \sigma_v v'(i) - F'_c \text{sign}(v(i)) \quad (4.32)$$

Avec :

$$\begin{aligned} a'(i) &= \frac{\sqrt{2}}{V} a(i) \\ v'(i) &= \frac{\sqrt{2}}{V} v(i) \\ u'(i) &= \frac{\sqrt{2}}{V} u(i) \\ F'_c &= \frac{\sqrt{2}}{V} F_c \end{aligned} \quad (4.33)$$

#### 4.2.5.4 Validation en simulation

Pour valider la méthode présentée, on se propose d'identifier les paramètres  $m$ ,  $\sigma_v$  et  $F_c$  à partir de données générées en simulation. Le modèle utilisé est le modèle hybride sans prise en compte des pré-déplacements. Par contre l'effet Stribeck est modélisé. Le tableau 4.1 présente les différents paramètres de la simulation.

La mesure de la commande  $u$  est bruitée par un bruit blanc centré en 0 et de variance  $\Delta_u$ . Un correcteur PID est utilisé pour asservir le système en position. Celui-ci est défini très simplement par placement de poles : les 3 poles en boucles fermées sont placés à -100 afin d'obtenir une erreur de poursuite suffisamment faible. Une trajectoire sinusoïdale est appliquée en référence. La fréquence  $f_0$  est de 1Hz, l'amplitude est de  $\frac{V_0}{2\pi f_0}$ . La position  $x(t)$  et la commande  $u(t)$  sont

Paramètres	Erreur relative sans pondération	Erreur relative avec pondération
$m$	41,65%	54,85%
$\sigma_v$	1,95%	0,21%
$F_c$	13,18%	0,77%

TAB. 4.2 – Influence de la pondération des mesures par la vitesse sur l’erreur relative des paramètres identifiés ( $V_0 = 10\text{m/s}$ )

Paramètres	Erreur relative sans filtrage	Erreur relative avec filtrage
$m$	54,85%	7,45%
$\sigma_v$	0,21%	0,073%
$F_c$	0,77%	0,22%

TAB. 4.3 – Influence du filtrage des mesures sur l’erreur relative des paramètres identifiés ( $V_0 = 10\text{m/s}$ )

mesurées et enregistrées pendant 9s. Les données sont enregistrées pendant le régime stationnaire, i.e.  $x$ ,  $v$  et  $a$  suivent des trajectoires quasi sinusoïdales. La période d’échantillonnage est égale à  $T_s$ . Pour permettre l’identification de tous les paramètres, le pas de quantification  $\delta_x$  du capteur de position est fixé à  $10^{-4}\text{m}$ .

Dans un premier temps, on valide l’apport de la pondération des mesures par la vitesse. On souhaite une erreur relative sur le paramètre  $\sigma_v$  de l’ordre de 1%. D’après (4.4), la vitesse  $V_0$  est réglée à 10m/s. Les mesures ne sont pas filtrées. Le tableau 4.2 donne les différentes erreurs relatives entre les paramètres identifiés et les paramètres réels en utilisant un simple algorithme des moindres carrés sans et avec pondération par la vitesse.

Si l’apport de la pondération par la vitesse est incontestable sur l’identification de  $\sigma_v$  et  $F_c$ , son effet est plus relatif sur la masse  $m$ . En effet, pour une trajectoire sinusoïdale, l’accélération est forte lorsque la vitesse est faible. En pondérant par la vitesse, on prive l’algorithme d’informations importantes pour l’identification de  $m$ .

Les incertitudes théoriques trouvées à partir des équations (4.3) et (4.4) sont de 18,19% pour la masse et 1% pour le coefficient de frottement visqueux. Elles sont du même ordre que les erreurs relatives trouvées expérimentalement. Ces incertitudes peuvent être diminuées en filtrant les données initiales. Le filtre utilisé suit la prérogative définie en 4.2.2 (dynamique 10 fois plus rapide que celle du système). D’après la figure (4.3), dans le cas étudié, le filtrage correspond à une atténuation de 90,4% du bruit de mesure. Ainsi suivant les formules (4.8) et (4.9), les incertitudes devraient être divisées par au moins 3. En simulation, les erreurs relatives ne sont pas uniformément diminuées : suivant le tableau 4.3, les erreurs relatives sur  $\sigma_v$  et  $F_c$  sont effectivement divisées par 3, par contre la masse  $m$  est 7 fois mieux identifiée avec des mesures filtrées.

Avec le filtrage des mesures et la pondération par la vitesse, les paramètres identifiés sont proches de leurs valeurs théoriques. Cependant, on peut espérer de meilleurs résultats en améliorant le conditionnement des données fournies à l’algorithme. Pour cela, l’équation (4.30) est utilisée. Pour la vitesse initiale  $V_0$  égale à 10m/s, le gain apporté par cette modification n’est pas

Paramètres	Erreur relative sans conditionnement	Erreur relative avec conditionnement
$m$	2%	2%
$\sigma_v$	0,027%	0,096%
$F_c$	278%	6,58%

TAB. 4.4 – Influence du bon conditionnement des mesures sur l'identification des paramètres ( $V_0 = 10^4$ m/s)

signifiant. La matrice  $M_2$  (cf. (4.29)) est déjà suffisamment bien conditionnée sans modification.

Pour mettre en avant l'apport de la modification proposée en 4.2.5.3, un test est effectué avec une vitesse  $V_0$  égale à  $10^4$ m/s. Les mesures sont filtrées, puis pondérées par la vitesse, enfin, l'identification est effectuée tout d'abord avec l'équation (4.1) puis avec l'équation (4.29). Les résultats sont reportés dans le tableau 4.4.

Comme on s'y attendait, l'erreur relative sur le paramètre  $m$  n'a pas évolué entre les 2 essais. Ainsi, en utilisant une trajectoire sinusoïdale, l'identification de la masse est bien décorrélée de l'identification des 2 autres paramètres. En utilisant l'équation (4.29) pour l'identification, l'erreur relative sur  $\sigma_v$  a légèrement augmentée, par contre la précision sur le paramètre  $F_c$  a été multipliée par plus de 40. En effet, dans le premier cas, la matrice  $M_2$  a un conditionnement de  $2,7 \cdot 10^8$ . En multipliant les mesures par  $\frac{\sqrt{2}}{V_0}$ , cette valeur est ramenée à 19.

## 4.2.6 Méthode des sinus

### 4.2.6.1 Principe

Si le pas de quantification du capteur de position est trop grand, le rapport signal sur bruit de l'accélération et de la vitesse peut devenir trop petit pour pouvoir utiliser ces mesures lors de l'identification. L'incertitude paramétrique générée par le bruit de quantification est alors du même ordre de grandeur que les paramètres cherchés. Cependant, si le système est déjà asservi, il est possible d'identifier le coefficient de frottement visqueux  $\sigma_v$  ainsi que le frottement de Coulomb  $F_c$  à partir de la simple mesure de la commande.

Dans le cas d'un système mécanique produit en série, les masses sont calculées au plus juste toujours dans le but de minimiser les coûts. Par contre, les frottements restent difficiles à définir a priori à cause des défauts d'usinage ou de la qualité du lubrifiant qui peut varier d'un lot à l'autre. L'incertitude paramétrique sur  $m$  est ainsi généralement la plus faible et largement suffisante pour justifier l'absence d'identification de ce paramètre.

A partir de l'équation (4.17), on peut déterminer la valeur absolue de la force liée aux frottements :

$$y(t) = (u(t) - ma(t)) \text{sign}(v(t)) = \sigma_v |v(t)| + F_c \quad (4.34)$$

La vitesse du système est supposée suivre une trajectoire sinusoïdale de période  $T$  et d'amplitude  $V_i$ . La composante continue du signal  $y(t)$  est :

$$\langle y_i \rangle = \frac{1}{T} \int_T (u - ma) \text{sign}(v) dt = \frac{\sigma_v}{T} \int_T |v| dt + F_c \quad (4.35)$$

Les composantes continues des fonctions  $\text{asign}(v)$  et  $|v|$  sont respectivement nulles et égales à  $\frac{2V_i}{\pi}$ , (4.35) devient :

$$\frac{1}{T} \int_T u \text{sign}(v) dt = \sigma_v \frac{2V_i}{\pi} + F_c \quad (4.36)$$

En faisant un autre essai à une vitesse  $V_j$ , un système d'équation permet d'identifier  $\sigma_v$  et  $F_c$  :

$$\begin{pmatrix} \sigma_v \\ F_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2V_i}{\pi} & 1 \\ \frac{2V_j}{\pi} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \langle y_i \rangle \\ \langle y_j \rangle \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

Dû au bruit de mesure sur  $y_i$  et à l'erreur de trajectoire sur la vitesse  $v$ , le système (4.36) est perturbé. Si en simulation, les paramètres  $\sigma_v$  et  $F_c$  peuvent être obtenus facilement, l'application directe de la méthode présentée ci-dessus ne donne pas de bons résultats en pratique. On se doit donc de la rendre plus robuste avant de pouvoir l'utiliser sur un système réel.

#### 4.2.6.2 Augmentation de la robustesse et mise en oeuvre pratique

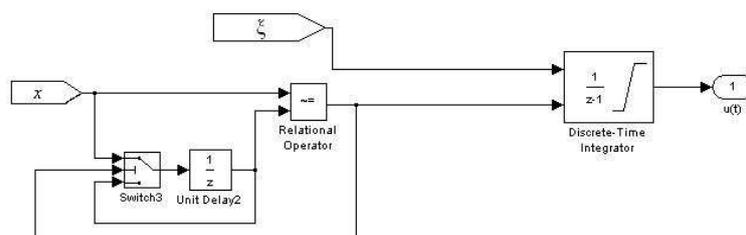
La méthode présentée ici est robuste aux incertitudes sur  $m$  et permet d'identifier 2 paramètres à partir de la mesure de  $u(t)$  et indirectement de la position  $x(t)$  (via l'asservissement). Pour cela, l'hypothèse est que la vitesse du système suit bien une trajectoire sinusoïdale d'amplitude  $V_i$ . Ainsi la qualité de l'identification est directement liée aux performances de l'asservissement du système. Dans le cas d'une mesure de commande bruitée ou d'un suivi approximatif de la trajectoire de référence, l'identification est améliorée par une redondance des essais : plusieurs essais sont faits à des vitesses  $V_i$  différentes. Les moyennes des signaux  $y_i$  sont faites sur plusieurs périodes. Le système d'équation à résoudre est alors :

$$\begin{pmatrix} \langle y_0 \rangle \\ \langle y_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle y_i \rangle \\ \vdots \\ \langle y_m \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2V_0}{\pi} & 1 \\ \frac{2V_1}{\pi} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{2V_i}{\pi} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{2V_m}{\pi} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_i \\ \vdots \\ V_m \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

En pratique, le système d'équation 4.38 n'est pas inversible. Un algorithme des moindres carrés permet de trouver le vecteur  $(\sigma_v \ F_c)$  qui minimise le critère :

$$J = \sum_{i=1}^m \left( \langle y_i \rangle - \left( \frac{2V_i}{\pi} \ 1 \right) \begin{pmatrix} \sigma_v \\ F_c \end{pmatrix} \right)^2 \quad (4.39)$$

En théorie, la fréquence de la trajectoire sinusoïdale n'a pas d'influence sur les résultats. Cependant, plus celle-ci est basse, plus les phénomènes de collage-décollage peuvent perturber le suivi de trajectoire et donc l'identification. De même, à haute fréquence, le suivi de trajectoire ne peut plus être assuré par le correcteur. Ainsi il est important de connaître la bande de fréquence

FIG. 4.6 – Loi de commande utilisée pour l'identification de la force de rupture  $F_s$ FIG. 4.7 – Position  $x(t)$  lors de l'identification de la force  $F_s$ 

utilisable pour les tests, ce qui n'est possible qu'en étudiant les transferts a priori du système en boucle fermée.

Suivant les systèmes, les frottements ne sont pas toujours modélisables par une fonction affine en la vitesse. Dans ce cas, la méthode présentée reste utilisable. En effet, il faut alors approcher les frottements par un ensemble de fonctions affines, chacune valable sur un intervalle de vitesse défini au préalable. L'identification de ces portions de droites est alors assurée par la méthode présentée.

### 4.3 Mode "collé" : identification de la force de rupture $F_s$

Si les pré-déplacements ne sont pas pris en compte, la vitesse du système est supposée nulle lorsque celui-ci est en mode "collé". Pour sortir de ce mode, il faut que la force  $u$  appliquée en entrée sur le mobile soit supérieure en valeur absolue à la force de rupture  $F_s$ . Ainsi la valeur de ce paramètre est égale à la commande  $u(t)$  lorsque le système commute du mode 0 au mode 1.

L'identification de  $F_s$  est basée sur ce principe : le système est initialement en mode 0, la force de commande  $u$  (initialement nulle) est incrémentée d'un pas  $\xi$  tout les  $T_s$ . Lorsque  $u$  devient supérieure à  $F_s$ , le mouvement est détecté et la commande est alors réinitialisée à 0. La commande peut alors de nouveau être incrémentée. Lorsque le mobile arrive en butée, le signe de la commande est changé. La figure (4.6) propose une implantation possible de la commande.

La commande  $u(t)$  est sauvegardée pendant la durée du test. Les maxima locaux correspondant à chaque commutation sont détectés. Le figure (4.7) montre en simulation la trajectoire d'un mobile de 100g. La commande appliquée sur celui-ci est représentée sur la figure (4.8). Lorsque la force de rupture  $F_s$  est égale à 1,5N.

Le maximum  $u_{\max}$  obtenu sur la figure (4.8) est 1,505N. La force de rupture est ainsi dans l'intervalle  $[u_{\max} - \xi, u_{\max}]$ . Plus  $\xi$  sera petit, plus l'identification de  $F_s$  sera précise. Elle sera néanmoins limitée par le bruit sur la commande : il est inutile de choisir un  $\xi$  inférieur au bruit

FIG. 4.8 – Commande  $u(t)$  lors de l'identification de la force  $F_s$

de mesure sur la commande.

Les irrégularités à la surface du plan-support étant aléatoires, la force  $F_s$  peut varier en fonction de la position. Suivant l'importance et la répétitivité du phénomène, il faudra soit le prendre en compte soit utiliser un paramètre moyen pour l'ensemble de la plage de fonctionnement.

## 4.4 Identification du modèle d'un embrayage robotisé

### 4.4.1 Caractéristique du système

Dans la section 2.2, un embrayage robotisé a été présenté. Des différentes équations mécaniques de ce système, un modèle simple a été proposé. Celui-ci est appelé ci-dessous :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{(r5)} &= r\omega \\ J\dot{\omega} &= u - C_r(\theta, \text{sign}(\omega)) \\ \theta &= \frac{1}{r}x_{(r5)} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Le couple résistant  $C_r$  est équivalent à du frottement sec dépendant de la position. La figure (2.14) présente sa courbe théorique. Cette courbe peut être différente en pratique dû à l'usure et au difficile réglage du ressort de pré-contrainte. De plus, des frottements visqueux peuvent s'ajouter. Ainsi, il est important d'identifier ces paramètres. Avec les méthodes proposées pour identifier les paramètres du mode glissant, il est impossible de déterminer la variation de  $C_r$  en fonction de la position. Par contre, il est tout à fait possible d'identifier le couple de rupture  $C_s$  comme une fonction de la position. En supposant  $C_s$  proportionnel à  $C_r$ , ce dernier s'écrit :

$$C_r(\theta, \text{sign}(\omega)) = \frac{\bar{C}_r}{\bar{C}_s} C_s(\theta, \text{sign}(\omega)) \quad (4.41)$$

$$= \frac{1}{\beta} C_s(\theta, \text{sign}(\omega)) \quad (4.42)$$

$\bar{C}_r$  et  $\bar{C}_s$  sont respectivement la moyenne de  $C_r$  et  $C_s$  pour une vitesse proche de 0.  $C_s$  sera déterminé à l'aide de la méthode développée en 4.3. Le couple résistant  $\bar{C}_r$  est composé de frottement sec  $\bar{C}_d$  et de frottement visqueux  $\bar{\sigma}_v\omega$ . Ces paramètres sont identifiés grâce aux méthodes proposées dans la section 4.2. L'équation dynamique utilisée sera pour cela :

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega \\ J\dot{\omega} &= u - \bar{\sigma}_v\omega - \bar{C}_d\text{sign}(\omega) \end{aligned} \quad (4.43)$$

La position du rotor du moteur est acquise via un capteur incrémentiel. Celui-ci a une résolution de 56 points par tour. Le courant fourni au moteur est mesuré, en multipliant par la constante de couple  $K$  du moteur, le couple  $u$  est calculé. Le maximum  $u_{\max}$  est égal à 1Nm. La période d'échantillonnage  $T_s$  est égale à  $10^{-3}$ s. L'embrayage est piloté par un contrôleur linéaire. La vitesse angulaire maximale est de 400rad/s. L'ensemble de ces données ainsi qu'une première évaluation des paramètres du système sont donnés dans le tableau 4.5.

Paramètres	Valeurs	Paramètres	Valeurs
$J$	$1,32 \cdot 10^{-5} \pm 2,1 \cdot 10^{-6} \text{kgm}$	$T_s$	$10^{-3} \text{s}$
$\bar{C}_d$	0,058Nm	$\omega_{\max}$	400rad/s
$\delta_\theta$	0,1122rad	$u_{\max}$	1Nm
$K$	0,0134Nm/A	$\tau$	0,0015s

TAB. 4.5 – Valeurs théoriques des paramètres et constantes du système

Paramètres	Valeurs identifiées
$J$	$1,1834 \cdot 10^{-7} \text{kgm}$
$\bar{\sigma}_v$	$7,2469 \cdot 10^{-5} \text{Nms}$
$\bar{C}_d$	0,1395Nm

 TAB. 4.6 – Valeurs des paramètres identifiés avec l'algorithme des moindres carrés ( $V_0 = 350 \text{rad/s}$ )

L'algorithme d'aide à la décision proposé en (4.2.4) est appliqué au système étudié. Tout d'abord, les incertitudes liées à la quantification sur le coefficient de frottement visqueux et sur l'inertie sont calculées grâce à (4.3) et (4.4). Les valeurs numériques sont respectivement  $\Delta_\sigma = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{Nms/rad}$  et  $\Delta_J = 4,10^{-5} \text{mkg}$ . Soit une incertitude relative de plus de 20% sur  $\bar{\sigma}_v$  et presque 300% sur  $J$ .

Clairement, l'inertie n'est pas identifiable sans filtrage. Le coefficient de frottement visqueux théorique étant inconnu, on ne peut pas régler le filtre sans être sûr de ne pas perturber l'identification. Cependant, le paramètre  $J$  étant connu a priori avec une incertitude de 16%, on choisit de régler la constante de temps du filtre à 0,0015s, de façon à obtenir la même incertitude par identification suivant l'expression (4.8). On vérifiera a posteriori que les valeurs trouvées sont cohérentes avec la bande passante du filtre.

Dans la suite, les 2 méthodes présentées auparavant pour identifier les paramètres de l'équation (4.43) vont être appliquées.

## 4.4.2 Identification des frottements

### 4.4.2.1 Algorithme des moindres carrés

Le système est excité de façon à générer une vitesse sinusoïdale d'amplitude 350rad/s. Les valeurs des paramètres estimés sont reportées dans le tableau 4.6.

La constante de temps du transfert entre la commande et la vitesse est égale à  $\frac{J}{\bar{\sigma}_v}$ . Avec les valeurs identifiées, elle est égale à 0,0016s. Cette valeur est très proche de  $\tau$ , la constante de temps du filtre (qui est donc trop grande). Ainsi, l'algorithme a identifié le filtre et non la dynamique du système. Le filtre a été réglé de façon à avoir la même incertitude paramétrique connue a priori par identification. Mais, la dynamique du système est supérieure à la bande passante du filtre. En augmentant sa bande passante, l'incertitude paramétrique par identification devient supérieure à celle connue a priori, on perd ainsi l'utilité de l'identification.

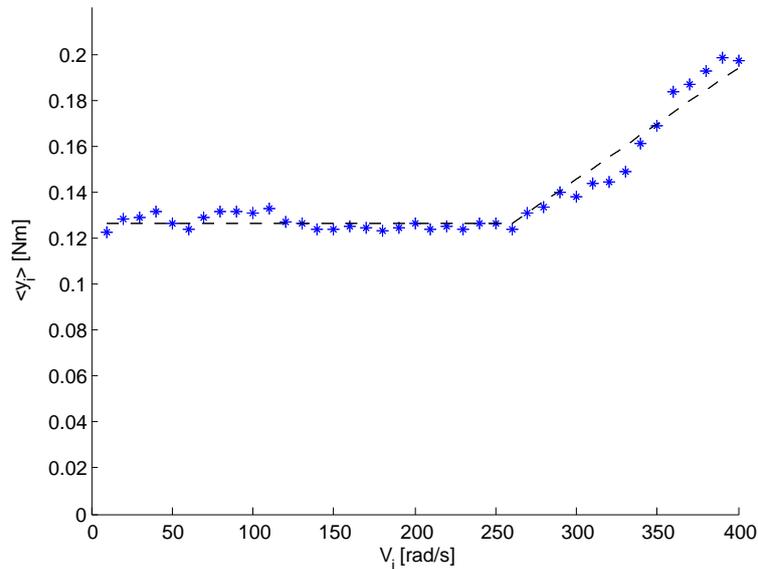


FIG. 4.9 – Résultats obtenus par la méthode des sinus : Mesures (croix) et approximations (pointillés)

Dans la configuration actuelle, l'ensemble des 3 paramètres  $J$ ,  $\bar{\sigma}_v$  et  $\bar{C}_d$  n'est donc pas identifiable. On se reporte donc à la méthode des sinus pour identifier seulement les paramètres liés aux frottements. La valeur théorique de l'inertie sera gardée pour le modèle.

#### 4.4.2.2 Méthode des sinus

Le système d'acquisition ne permet pas d'identifier l'inertie  $J$ . On se contente donc d'identifier le coefficient de frottement visqueux  $\bar{\sigma}_v$  et le couple de frottement sec moyen  $\bar{C}_d$ . Le système est soumis à une série de trajectoires sinusoïdales d'amplitudes variant entre 10 et 400rad/s. Pour chaque amplitude  $V_i$ , la mesure moyenne  $\langle y_i \rangle$  est calculée. L'ensemble de ces données est reporté sur la figure (4.9).

Suivant l'équation (4.43), les points  $(V_i, \langle y_i \rangle)$  devraient être distribués autour d'une droite affine. En pratique, 2 régimes apparaissent :

- Pour  $V_i < 260$ rad/s, les frottements visqueux sont quasiment nuls,  $\langle y_i \rangle$  est constant.
- Pour  $V_i > 260$ rad/s,  $\langle y_i \rangle$  dépend de la vitesse.

Devant la complexité mécanique du système, il est difficile d'expliquer précisément l'origine de ces 2 régimes. Cependant, on peut faire l'analogie avec la description des frottements faites dans la section 2.3.2 : pour  $V_i < 260$ rad/s, le système est en régime de lubrification limite, au delà, la lubrification est totale.

Pour chaque régime, les paramètres sont identifiés, puis la courbe (4.10) représentant le couple résistant en fonction de la vitesse est construite en faisant attention à sauvegarder la continuité de 260rad/s.

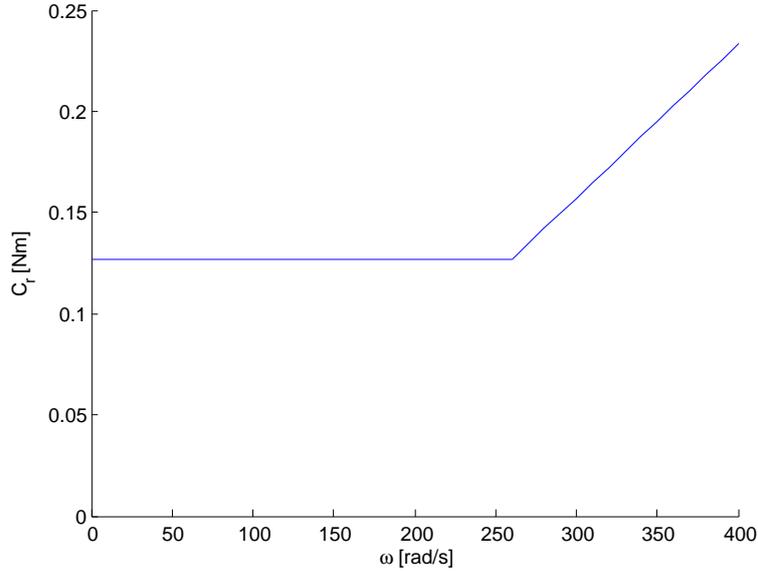


FIG. 4.10 – Résultats obtenus par la méthode des sinus

### 4.4.3 Identification du couple de rupture

Une fois les paramètres de l'équation du mode glissant identifiés, il reste à déterminer le couple de rupture  $C_s$  qui permet de déterminer quand le modèle commute du mode 0 au mode 1. Pour cela, la commande présentée dans la section 4.3 est appliquée au système. Les données de couple moteur et de position sont recueillies sur plusieurs allers-retours. Les mesures brutes sont présentées dans le plan  $(\theta, u)$  sur la figure (4.11).

Les maxima locaux de chaque point sont conservés, ils correspondent à la force de rupture du système à cette position pour commuter du mode collé au mode glissant. L'ensemble de ces points est reporté sur la figure (4.12). Une approximation polynomiale permet de déterminer 2 polynômes en  $\theta$  pour les vitesses positives et négatives, cf. (4.44). Les valeurs des coefficients de ces polynômes sont reportées dans le tableau 4.7.

$$\begin{aligned} C_s(\theta, \text{sign}(\omega) > 0) &= b_3^+ \theta^3 + \dots + b_0^+ \\ C_s(\theta, \text{sign}(\omega) < 0) &= b_4^- \theta^4 + b_3^- \theta^3 + \dots + b_0^- \end{aligned} \quad (4.44)$$

### 4.4.4 Validation

Dans les sections 4.4.2 et 4.4.3, tous les paramètres identifiables nécessaires au modèle ont été identifiés. Le système d'acquisition des données ne permet pas d'estimer par les mesures une valeur cohérente de l'inertie globale du système. La valeur théorique sera donc utilisée.

Dans le modèle générique simple (version A) de système soumis à des frottements, le frottement sec avait été supposé constant et le frottement visqueux proportionnel à la vitesse. En pratique, les frottements secs dépendent de la position et le frottement visqueux n'apparaît que

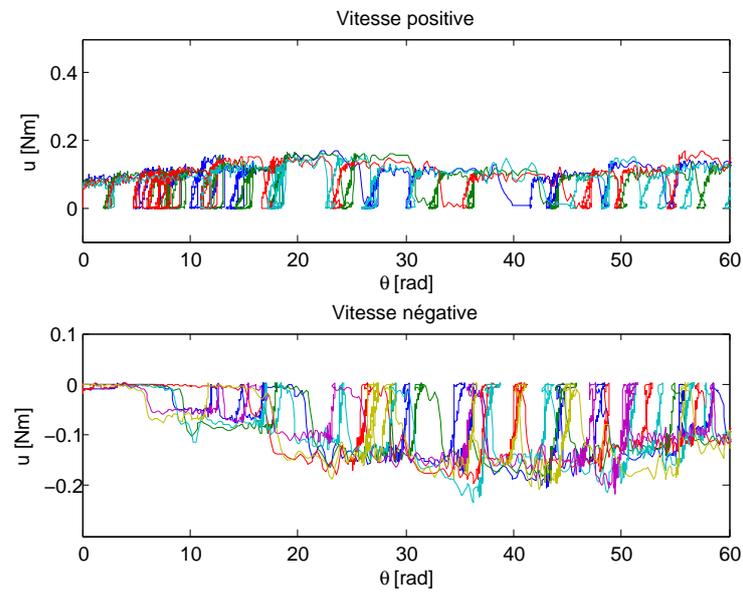


FIG. 4.11 – Mesures du couple de rupture

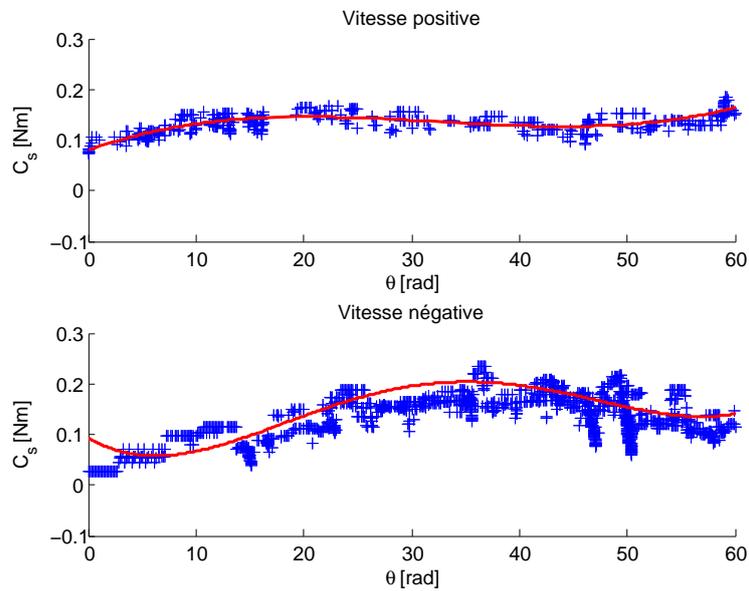
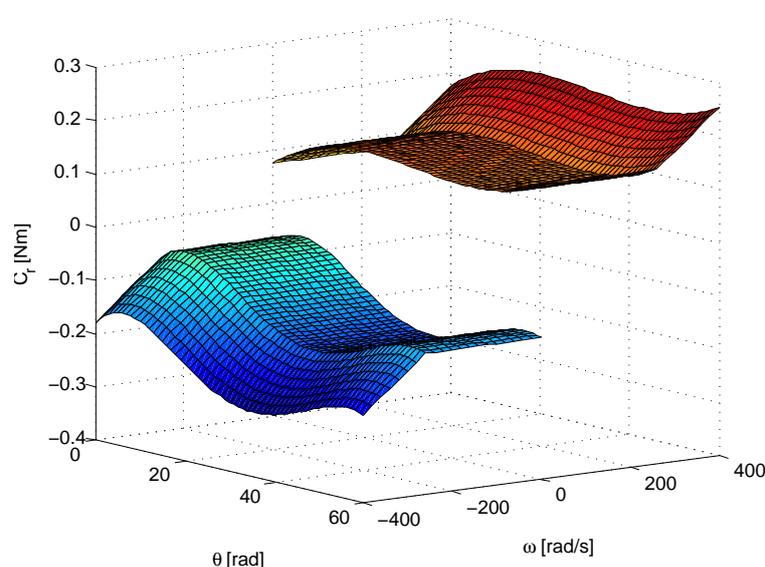


FIG. 4.12 – Mesures retenues après filtrage (croix) et approximations polynomiales (lignes continues)

TAB. 4.7 – Paramètres des fonctions polynomiales de  $C_s$ 

Paramètres	Valeurs	Paramètres	Valeurs
$b_3^+$	$2,8731 \times 10^{-6}$	$b_4^-$	$2,5120 \times 10^{-7}$
$b_2^+$	$-2,7773 \times 10^{-4}$	$b_3^-$	$-3,2940 \times 10^{-5}$
$b_1^+$	0,0077	$b_2^-$	0,0013
$b_0^+$	0,0794	$b_1^-$	-0,0126
		$b_0^-$	0,0938


 FIG. 4.13 – Couple résistant utilisé pour le modèle dépendant de la position  $\theta$  et de la vitesse  $\omega$ 

pour des vitesses élevées dû à la complexité du système (voir figures (4.10) et (4.12)). En utilisant l'équation (4.42) pour formuler le couple résistant  $C_r$  en fonction de  $C_s$  et de  $\bar{C}_r$  où  $\bar{C}_r$  est donné par la figure (4.10), le modèle prend en compte ces nouvelles dépendances (cf. figure (4.13)). L'écart entre  $\bar{C}_r$  et  $\bar{C}_s$  est faible (10%). Dans la suite, il sera modélisé, même si on peut s'interroger sur la nécessité de différencier  $C_r$  et  $C_s$ .

Le modèle utilisé pour l'identification ne prend pas en compte les différents jeux mécaniques entre les pièces du système. En pratique, le jeu entre le rotor du moteur et la butée d'embrayage est pratiquement d'un demi-tour. En utilisant des trajectoires sinusoïdales de grandes amplitudes, on vérifie en simulation que les algorithmes d'identification de l'équation dynamique sont peu influencés par ce phénomène. De même, l'identification du couple de rupture  $C_s$  ne fait pas intervenir le phénomène.

Le modèle sans jeu est donc valide pour l'identification, par contre il ne l'est pas pour la commande. En effet lorsque l'erreur statique devient faible, les petites variations autour de la

TAB. 4.8 – Paramètres utilisés pour le modèle

Paramètres	Valeurs	Paramètres	Valeurs
$p_0$	$10^{-4}$	$\varrho$	3rad
$\Sigma$	100rad/s	$\delta_\theta$	0,1122rad
$T_s$	$10^{-4}$ s	$K$	0,0134Nm/A
$J$	$1,32 \cdot 10^{-5}$ kgm	$C_{r2}$	0,05Nm
$\beta$	1,1	$r$	$2,0414 \cdot 10^{-4}$ m/rad

consigne inférieures au jeu ne font bouger que le rotor du moteur. Lors de ces petits mouvements, l'embrayage et le compensateur ne sont pas entraînés et donc les frottements sont moins importants. Seuls les frottements des balais du moteur électrique interviennent, ils sont représentés par un couple résistant opposé à la vitesse d'amplitude  $C_{r2}$  supposée constante (frottement sec). On définit par la même occasion  $C_{s2} = \beta C_{r2}$  ( $\beta > 1$ ). A cause du jeu mécanique, le reste du système peut être déconnecté du moteur, le capteur de position étant sur le rotor. La position de l'embrayage est donc inobservable et non-commandable dans ce cas de figure.

Pour modéliser le système dans un objectif de synthèse et de validation de commande, le jeu mécanique doit être pris en compte. Pour le modéliser, les équations (2.26) sont reprises et modifiées :

$$\begin{aligned}
\chi &= 1 \text{ si } \left| \int_{\text{sat}[-\frac{\varrho}{2}; \frac{\varrho}{2}]} \omega dt \right| = 1 \\
&= 0 \text{ sinon} \\
v_{(r5)} &= \chi r \omega \\
C'_r &= C_r \text{ si } \chi = 1 \\
&= C_{r2} \text{sign}(\omega) \text{ sinon}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Le couple  $C'_r$  est le couple résistant vu par le moteur. On rappelle que  $v_{(r5)}$  est la vitesse du rack ( $r5$ ) et  $\chi$  est une variable servant à modéliser l'état du jeu d'amplitude  $\varrho$ . Le tableau 4.8 récapitule les différentes valeurs nécessaires au modèle. Lorsque le moteur entraîne le rack, les frottements sont données par la figure (4.13).

Le système est commandé par un contrôleur linéaire. Une succession d'échelons de consigne lui est appliquée. La position et le couple du moteur mesurés sont représentés par les figures (4.14) et (4.15). Les phénomènes de collage-décollage sont visibles sur les 2 courbes. Pendant ces phases, on remarque une asymétrie du couple moteur : les rampes ne sont pas centrées autour de 0. De même pour la position, les créneaux ne sont pas centrés autour de la consigne.

Ce phénomène s'explique par des rebonds entre les pièces mécaniques lorsque le jeu devient nul. Chaque fois que le couple moteur dépasse le couple de rupture, le rotor se met en mouvement, l'erreur de position diminue (et donc la commande). Cependant, les liaisons cinématiques ont une certaine élasticité qui comme un ressort comprimé se détendent lorsque le couple moteur devient faible. Le rotor est repoussé loin de sa consigne bouclant ainsi le cycle observé.

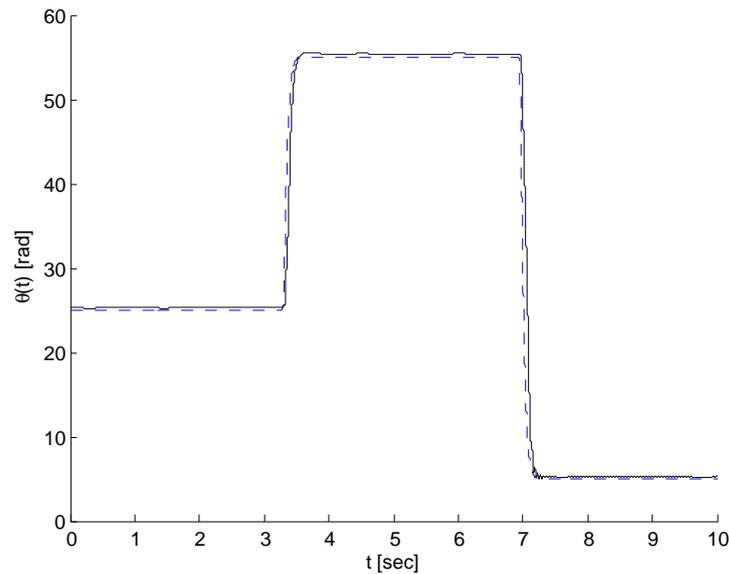


FIG. 4.14 – Test effectué pour la validation : consigne (pointillé) et position mesurée (ligne continue)

La même consigne est appliquée au modèle identifié, les résultats sont reportés sur la figure (4.16). Les phases de collage-décollage sont bien modélisées respectant l'amplitude du phénomène, mais l'asymétrie observée en pratique n'est pas représentée. Pour corriger ce détail, il faudrait modifier la modélisation du jeu mécanique. Cependant ce phénomène complexe est difficile à modéliser et à identifier finement. On préférera chercher une commande robuste à ce phénomène.

Le détail d'un échelon est proposé sur la figure (4.17). Les trajectoires du système réel et du modèle sont très proches. Par contre, les couples moteurs sont assez dissemblables. On remarque cependant que l'ordre de grandeur est respecté. À  $t = 3,3$ s, les commandes du modèle et du système réel ne sont pas initialisées de la même façon, ainsi il est clair que les allures des 2 courbes ne peuvent être identiques.

## 4.5 Conclusion

Dans le chapitre précédent, un modèle hybride de système soumis à des frottements secs a été développé. Celui-ci utilise des paramètres de simulation qui lui sont propres et des paramètres physiques communs à l'ensemble des modèles existants. Dans ce chapitre, on s'est intéressé à identifier ces derniers.

La littérature est riche en méthodes et algorithmes pour identifier les modèles de frottements secs. Cependant dans la plupart des cas, ils supposent des mesures très peu bruitées garant de bons résultats. Pour l'application pratique étudié ici (un embrayage robotisé), ce n'est pas le cas.

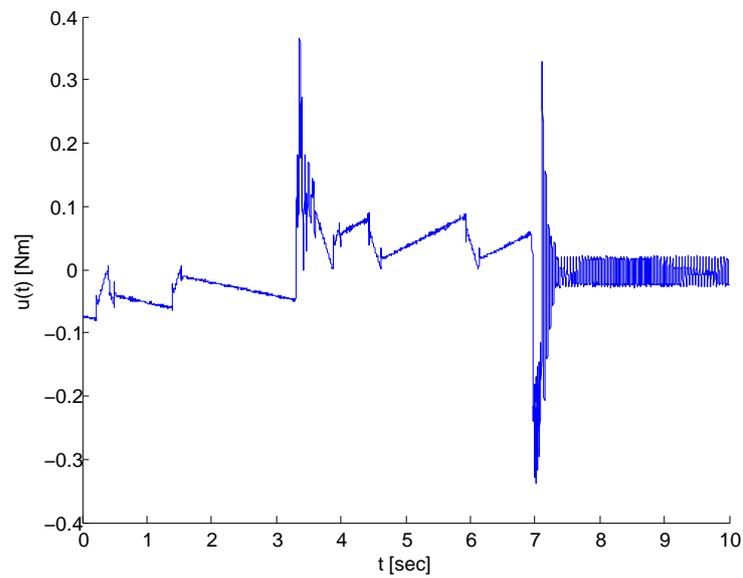


FIG. 4.15 – Test effectué pour la validation : couple moteur mesuré

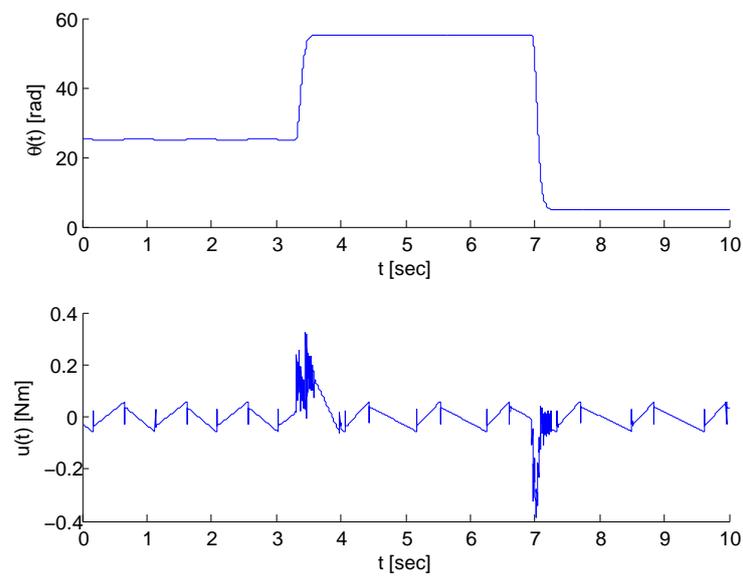


FIG. 4.16 – Résultat du modèle

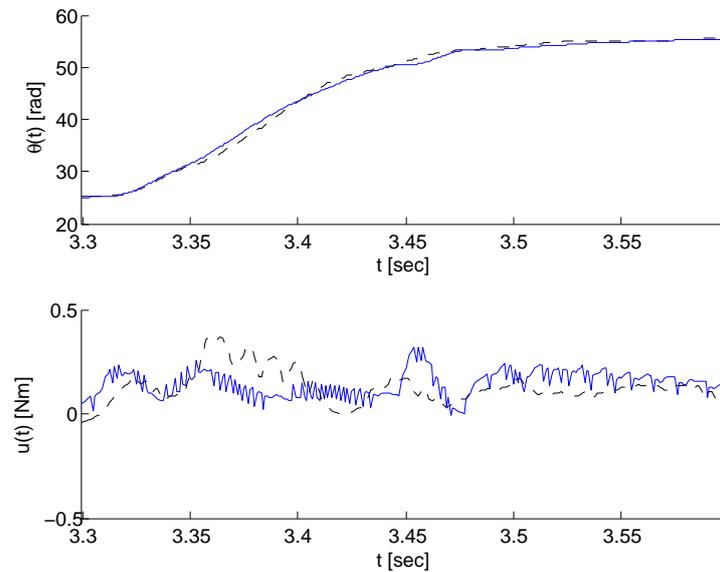


FIG. 4.17 – Détail de la position mesuré (pointillés) et la position du modèle (ligne continue)

Le jeu mécanique ainsi que le bruit de quantification perturbent énormément ces algorithmes donnant des valeurs incohérentes. De plus, les phénomènes microscopiques (pré-déplacement) sont inobservables. Dans ce chapitre, on s'est donc borné à identifier l'inertie, les frottements ainsi que le couple de rupture permettant au modèle de passer du mode "collé" au mode "glissé".

Le premier travail présenté dans ce chapitre a été de calculer a priori la précision à espérer sur chaque paramètres identifiés. Cette précision peut être améliorée par un filtrage adéquat des mesures. Cependant, cet artifice doit être utilisé avec certaines précautions qui ont été précisées. En synthèse de cette étude, un algorithme d'aide à la décision a été proposé : en fonction de la qualité des mesures disponibles, il permet de déterminer a priori quels paramètres sont identifiables et sous quelles conditions. En fonction du résultat obtenu, une des 2 méthodes présentées ensuite est à utiliser.

La première méthode utilise l'algorithme des moindres carrés. Sa version originale donne de bons résultats dans le cas où aucune non-linéarité du système étudié n'a été négligée dans le modèle. Cette hypothèse n'est pas respectée dans le cas présent : l'effet Stribeck n'est pas pris en compte. Pour corriger ce défaut, il a été proposé de pondérer les mesures par la vitesse permettant un gain de précision tout à fait significatif.

La qualité d'une identification paramétrique dépend beaucoup de la qualité des signaux utilisés. Pour identifier l'équation dynamique utilisée par le modèle, on a proposé la trajectoire optimale du système garantissant le meilleur conditionnement des matrices utilisées par l'algorithme. Si cette séquence de test n'est pas applicable en pratique, l'algorithme peut être modifié pour obtenir le même résultat.

Malgré tous les gains apportés par les modifications de l'algorithme des moindres carrés, il n'est pas toujours possible d'identifier l'ensemble des paramètres de l'équation dynamique du

modèle en mode "glissé". En effet, si le bruit de quantification est trop important, les mesures de la vitesse et de l'accélération (calculées par dérivation successive de la position) sont trop bruitées. La deuxième méthode proposée permet de s'affranchir de ce bruit. En contrepartie, la masse du système n'est pas identifiable.

Le dernier paramètre à identifier est la force de rupture nécessaire pour que le système passe du mode "collé" au mode "glissé". Ce paramètre  $F_s$  peut être facilement identifié avec une loi de commande spécifique à partir des mesures de la position et de l'entrée  $u$ .

Le chapitre finit par l'identification et la validation d'un modèle de l'embrayage robotisé étudié en 2.2. Les données utilisées pour cela proviennent d'un système d'acquisition dimensionné pour la commande en position du système. Ainsi, il est très difficile de reconstruire finement la vitesse et l'accélération du système à partir de sa position. A cause de ces contraintes, il est impossible de proposer un modèle complexe et bien calibré du système étudié. Ainsi, un modèle simple équivalent à une inertie soumise à des frottements est utilisé.

Ce modèle ne représente pas parfaitement la réalité, cependant il a été montré que compte tenu de la précision des mesures, ce résultat est optimal. Le modèle proposé a été développé dans un objectif d'asservissement du système. L'écart entre celui-ci et le système réel pourra être pris en compte dans la synthèse de la commande et être gommé par la robustesse de celle-ci.

# Chapitre 5

## Commandes de systèmes soumis à des frottements secs

### 5.1 Problématique

Ce chapitre traite de la commande de systèmes soumis à des frottements. Si les frottements visqueux stabilisent naturellement un système mécanique, les frottements secs avec les non-linéarités présentes autour d'une vitesse nulle détériorent les performances attendues du système en boucle fermée. Ainsi, depuis plusieurs décennies, la communauté propose des commandes dédiées à ce type de système, [15], [16], [17], [46], [10], [21] et [47]. Malgré le nombre de publications, le problème reste ouvert et reste un sujet de fond encore présent [48], [20], [19], [18] et [36].

Avec l'apparition d'actionneurs à la précision micro-métrique, des lois de commandes robustes au phénomène hystérétique des pré-déplacements ont été développées, [36], [39]. Cependant pour des systèmes mécaniques équipés d'actionneurs et de capteurs moins précis, ces lois ne sont pas applicables. Dans le cas pratique étudié (embrayage robotisé), seuls les phénomènes macroscopiques et particulièrement les cycles limites (cf. 3.7.3) sont observables et perturbent le bon fonctionnement du système. On s'intéressera donc à développer une commande robuste à ce phénomène.

La méthode la plus souvent utilisée pour commander un système soumis à des frottements secs est de compenser ceux-ci directement en injectant leur valeur dans la commande. Cette valeur est soit connue a priori, soit estimée, [10]. Cette méthode nécessite une bonne connaissance de la vitesse autour de 0 et donc un capteur précis. En effet, pour des faibles vitesses, la discontinuité des frottements secs autour de 0 demande une parfaite connaissance du signe de la vitesse ainsi qu'une large bande passante du contrôleur : si la vitesse oscille autour de 0, la commande doit compenser instantanément le frottement vu par le système. En pratique, la bande passante d'un actionneur est finie, la compensation ne peut donc pas être instantanée. Ainsi, en théorie, la compensation de frottements linéarise le système autour de  $v = 0$  en supprimant les frottements secs, en pratique, les limitations de bande passante, les incertitudes paramétriques et les erreurs d'estimation ou de mesure limitent grandement son efficacité. Cette méthode mé-

rite quand même d'être étudiée et testée dans le cas de systèmes aux dynamiques lentes et bien instrumentés. [47] propose d'autres types de commandes dédiées à l'asservissement en position de système soumis à des frottements secs. Les quatre contrôleurs étudiés sont composés d'un contrôleur linéaire commun (proportionnel dérivée) et d'un compensateur non-linéaire variant d'une solution à l'autre. Encore une fois, les limitations pratiques diminuent les performances théoriques des solutions proposées et le choix final dépend du système concerné ainsi que des spécifications souhaitées.

Ce chapitre est divisé en 3 parties. Premièrement, un nouveau type de commandes non-linéaires dédiées aux systèmes soumis à des frottements secs est proposé. Ces commandes sont tout particulièrement conseillées lorsque les frottements et/ou la vitesse du système sont mal connus, i.e. lorsque la compensation du frottement sec ne peut être utilisée efficacement. La deuxième section propose une approche originale de modélisation LPV (Linear Parameters Varying) des incertitudes paramétriques du modèle d'embrayage robotisé développé dans les sections 2.2 et 4.4.4 et de synthèse de commandes LPV basées sur cette modélisation. La dernière partie du chapitre s'attache à valider en pratique les commandes développées au préalable. Une conclusion synthétise les apports du travail présenté.

## 5.2 Limitation des cycles limites

### 5.2.1 Principes

Les cycles limites sont des oscillations entretenues non désirées autour d'un point d'équilibre souhaité. Lorsqu'on commande en position un système soumis à des frottements secs avec un correcteur possédant un intégrateur (typiquement un PID), l'état intégral peut être vu comme une estimation des frottements secs. Ainsi, en fonction de la vitesse, il va varier d'une valeur positive à une valeur négative. Lorsque le système se stabilise autour d'une consigne constante, une erreur statique perdure due entre autre à l'effet Stribeck ou à la résolution du capteur. Le correcteur intègre alors cette erreur jusqu'à ce que la commande  $u$  soit supérieure à la force de rupture du système. L'erreur diminue, cependant la valeur de l'intégrateur reste constante et la position dépasse la consigne. L'erreur change de signe, la valeur de l'intégrateur diminue puis change de signe jusqu'à ce que la commande  $u$  devienne suffisamment grande pour mettre le système en mouvement. Le même scénario se réalise alors dans l'autre sens. Finalement, le système bouclé est juste stable, et des créneaux périodiques apparaissent lorsque la position désirée est constante.

Généralement, pour éviter les cycles limites, la commande  $u$  est annulée lorsque l'erreur statique de position est suffisamment petite pour respecter le cahier des charges. Bien qu'efficace, il est difficile avec cette méthode de garantir une erreur statique minimale (i.e. inférieure au pas de quantification de la mesure de position). De plus, si l'énergie cinétique du système est non nulle à l'instant de la coupure, elle peut entraîner le système vers une position finale qui peut être loin de la position désirée.

On l'aura compris, cette méthode très pratique reste difficile à régler. On propose ici de garder le même principe mais de choisir une condition dépendant de la vitesse et de l'erreur de position

pour commuter l'annulation de la commande. On verra que les paramètres nécessaires à cette stratégie sont plus simples à régler.

Repartant du modèle générique représenté par la figure (2.15) et des équations (3.1), lorsque à  $t = t_0$  la commande  $u$  devient nulle, le système devient :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= v(t), x(t_0) = x_0 \\ m\dot{v}(t) &= -F_f(t, v, x), v(t_0) = v_0 \neq 0\end{aligned}\quad (5.1)$$

À  $t = t_0$ , la vitesse et la position sont non nulles et égales respectivement à  $v_0 > 0$  et  $x_0$ . La force de frottement  $F_f$  est supposée égale à  $F_c \text{sign}(v)$ . Ainsi l'effet Stribeck et les frottements visqueux sont négligés. Sous ces hypothèses, la trajectoire du système est donnée par :

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{F_c}{2m} t^2 \quad (5.2)$$

$$v(t) = v_0 - \frac{F_c}{m} t \quad (5.3)$$

À  $t = t_f$ , la vitesse devient nulle : le système autonome (5.1) a atteint son point d'équilibre, toute l'énergie du système a été dissipée. Il faut qu'à cet instant la position de consigne  $x_c$  soit atteinte à vitesse nulle :

$$\begin{aligned}x_c &= x_0 + v_0 t_f - \frac{F_c}{2m} t_f^2 \\ 0 &= v_0 - \frac{F_c}{m} t_f\end{aligned}\quad (5.4)$$

De (5.4), on déduit la relation entre l'erreur de position et la vitesse à  $t_0$  :

$$\frac{m}{2} v_0^2 = F_c |x_c - x_0| \quad (5.5)$$

Le terme  $\frac{m}{2} v_0^2$  correspond à l'énergie cinétique du système à  $t_0$ , le terme  $F_c |x_c - x_0|$  correspond au travail à fournir pour amener  $x$  à la position désirée. Ainsi, en supposant le système asservi, si la trajectoire de celui-ci passe par un point vérifiant l'égalité (5.5), il suffit d'imposer une commande  $u$  égale à 0 pour que le système converge naturellement vers  $x_c$ .

L'asservissement du système mécanique peut être de 2 types :

- une régulation directe en position (cf. figure (5.1))
- une régulation en vitesse puis en position (cf. figure (5.2))

Le système de limitation des cycles limites peut être appliqué sur les deux types d'asservissement. Cependant, comme il est détaillé dans les deux sous-sections suivantes, le principe ne peut pas être intégré de la même façon dans les deux cas.

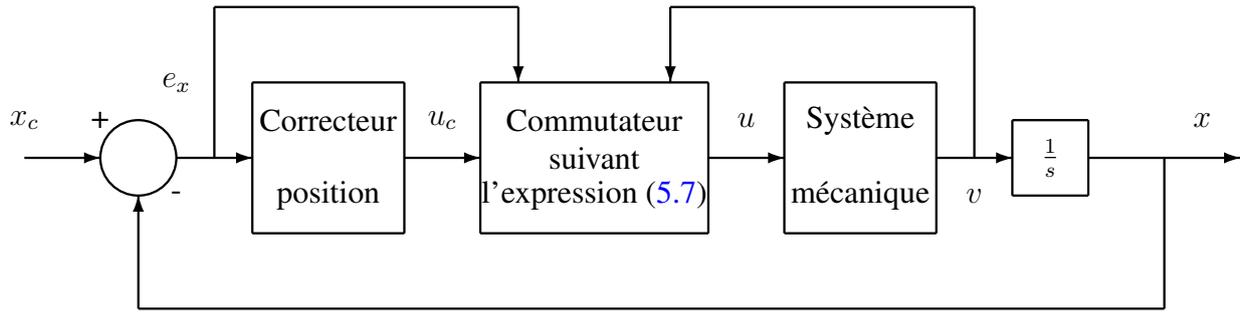


FIG. 5.1 – Schéma bloc du système asservi directement en position

## 5.2.2 Régulation directe en position

Pour cette partie, on suppose le système mécanique asservi en position. Le mécanisme de limitation de cycles est appliqué directement sur la sortie suivant la figure (5.1). Le résultat est une commande pouvant commuter entre 2 modes :

- Mode 0 :  $u = 0$
- Mode 1 :  $u = u_c$

La condition de commutation reprend le principe énoncé plus haut, cf. égalité (5.5) :

$$\begin{aligned} u &= 0 \text{ si } \frac{m}{2}v^2 = F_c|x_c - x| \\ &= u_c \text{ sinon} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Due aux imprécisions de mesure des états  $x$  et  $v$  et des incertitudes paramétriques sur  $m$  et  $F_c$ , la condition  $\frac{m}{2}v^2 = F_c|x_c - x|$  est relâchée et remplacée par :

$$\left( |e_x| < \frac{m}{2F_c}v^2 + \delta_e \right) \text{ et } \left( |e_x| > \frac{m}{2F_c}v^2 - \delta_e \right) \quad (5.7)$$

avec :  $e_x = x_c - x$

Le paramètre  $\delta_e$  est homogène à une distance, on détermine ainsi une bande de largeur  $2\delta_e$  dans le plan  $(v, e_x)$  dans laquelle on souhaite annuler la commande. Cette bande est centrée autour de l'équation  $|e_x| = \frac{m}{2F_c}v^2$ . En pratique, on choisit  $\delta_e$  supérieur à l'imprécision du capteur de position. On remarque que par un simple changement de variable il est facile d'exprimer  $\delta_e$  en fonction des incertitudes paramétriques ou de l'erreur de mesure (ou d'estimation) sur  $v$ . La proposition suivante énonce la stabilité du système asservi en position avec limitation des cycles limites.

### Proposition 5.2.1 (Stabilité du système asservi en position avec limitation des cycles limites)

Soit un système mécanique  $H$  soumis à des frottements secs défini par un modèle de Coulomb :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= u - F_c \text{sign}(v) \end{aligned} \quad (5.8)$$

et le correcteur  $K$  associé suivant :

$$\begin{aligned} \dot{X}_c &= f(X_c, e_x) \\ u_c &= g(X_c, e_x) \\ \text{avec : } e_x &= x_c - x \end{aligned} \quad (5.9)$$

où  $x_c$  est la position consigne,  $X_c$  le vecteur d'état du correcteur. Les fonctions  $f$  et  $g$  sont supposées lipschitziennes. Le correcteur  $K$  et le système mécanique  $H$  sont interconnectés suivant le schéma 5.1 via un élément de commutation défini par les équations (5.6) et (5.7). Soit la fonction de Lyapunov  $V(x, v, X_c)$  définie par :

$$V(x, v, X_c) = \frac{x^2}{2} + \frac{v^2}{2m} + X_c^T X_c \quad (5.10)$$

On suppose que  $f$  et  $g$  sont choisies de telle sorte que  $\dot{V} < 0$  lorsque  $u = u_c$  et que  $f(X_c, x) = 0$  lorsque  $u = 0$ . On montre ci-après que le schéma de régulation 5.1 est stable au sens de Lyapunov pour la fonction candidate (5.10).

### Démonstration 5.2.1 (Stabilité du système asservi en position avec limitation de cycles limites)

Sans perte de généralité, on suppose que  $x_c = 0$ . Pour prouver la stabilité du système asservi suivant le schéma 5.1, on doit tout d'abord démontrer que le système est stable lorsque  $u = 0$  et lorsque  $u = u_c$  :

- Lorsque  $u = 0$  (mode 0), la dérivée de la fonction  $V$  suivant les trajectoires du système est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, v, X_c) &= \dot{x}x + \frac{\dot{v}v}{m} + f(X_c, x)^T X_c + X_c^T f(X_c, x) \\ \dot{V}(x, v, X_c) &= vx - F_c|v| + f(X_c, x)^T X_c + X_c^T f(X_c, x) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Sachant  $f(X_c, x) = 0$  pour  $u = 0$ , on obtient :

$$\dot{V}(x, v, X_c) = vx - F_c|v| \quad (5.12)$$

La formulation (5.12) ne permet pas de conclure directement sur le signe de  $\dot{V}$ . Il convient d'étudier la dynamique de la vitesse  $v$ , laquelle est indépendante de  $x$ . On propose la fonction de Lyapunov  $V_2$  :

$$V_2(v) = \frac{v^2}{2m} \quad (5.13)$$

On montre immédiatement que la dérivée de  $V_2$  le long des trajectoires du système est négative quel que soit  $v$  :

$$\dot{V}_2 = -F_c|v| < 0, \forall v \quad (5.14)$$

$v = \dot{x}$  converge donc vers 0 et l'état  $x$  vers une constante. On peut ainsi écrire :

$$\dot{V}(x, v, X_c) = vx - F_c|v| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad (5.16)$$

Donc lorsque  $u = 0$ , la fonction de Lyapunov  $V$  tend vers une constante. Le système est un système autonome stable, sa vitesse converge vers 0 et sa position  $x$  est stable.

– Lorsque  $u = u_c$  (mode 1), la dérivée de  $V$  est négative par construction de  $f$  et  $g$ . Le système est stable lorsque  $u = u_c$ .

Les deux modes du système interconnecté sont stables indépendamment l'un de l'autre, il reste à que les commutations ne font pas perdre cette propriété. On définit  $t_{n \rightarrow m} \in [t_i, t_j]$  l'instant de commutation de mode  $n$  au mode  $m$ . On doit vérifier que la fonction  $V$  reste continue autour de  $t_{n \rightarrow m}$ .

$$V(t_{n \rightarrow m}^-) - V(t_{n \rightarrow m}^+) = \frac{x^2(t_{n \rightarrow m}^-)}{2} - \frac{x^2(t_{n \rightarrow m}^+)}{2} + \frac{v^2(t_{n \rightarrow m}^-)}{2m} - \frac{v^2(t_{n \rightarrow m}^+)}{2m} + X_c^T(t_{n \rightarrow m}^-)X_c(t_{n \rightarrow m}^-) - X_c^T(t_{n \rightarrow m}^+)X_c(t_{n \rightarrow m}^+) \quad (5.17)$$

Les fonctions  $f$  et  $g$  sont supposées lipschitziennes, les états  $v$ ,  $x$  et  $X_c$  suivent une trajectoire continue.  $V$  est donc la somme de fonctions continues, donc elle est continue et décroissante quel que soit la succession de commutations. Le système global défini par les équations (5.7), (5.8) et (5.9) est donc stable.

La démonstration 5.2.1 montre que la stratégie de limitation de cycles limites ne modifie pas la propriété de stabilité du système mécanique asservi en position. On notera toutefois que si le contrôleur  $K$  possède un état intégrateur, on se doit d'ajouter un système anti-windup de façon à stopper l'intégration de l'erreur statique résiduelle lorsque le système est en boucle ouverte afin de vérifier l'hypothèse (5.10).

### 5.2.3 Régulation en vitesse puis en position

Lorsque la vitesse est connue avec suffisamment de précision, il peut être intéressant de décomposer l'asservissement en position en 2 contrôleurs en cascade : le premier fait converger le système vers une vitesse cible  $v_c$  et le deuxième calcule cette consigne afin de contrôler la position du système.

Pour réguler la vitesse, un correcteur proportionnel intégral (PI) suffit à obtenir sur cet état une erreur statique nulle. Généralement, un simple correcteur proportionnel est utilisé pour finaliser l'asservissement. Ici, on propose d'utiliser un correcteur non-linéaire de position permettant d'utiliser au mieux les propriétés intrinsèques du système.

Le schéma bloc (5.2) résume la structure du système en boucle fermée. L'objectif du contrô-

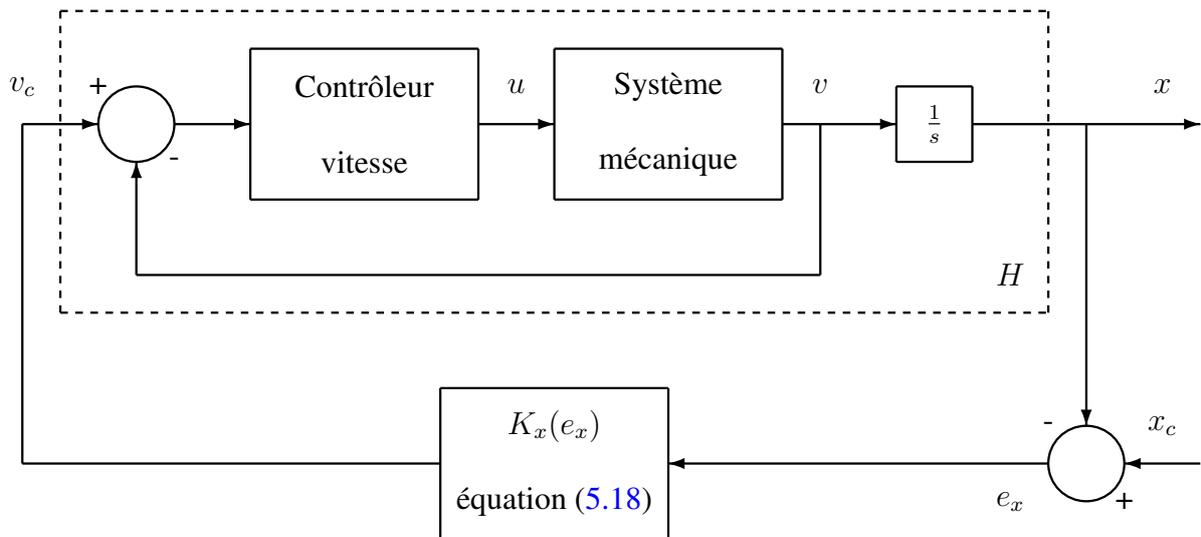


FIG. 5.2 – Schéma bloc du système asservi en vitesse puis en position

leur de position est d'amener le système sur la trajectoire décrite par l'équation (5.5). Pour cela la fonction suivante est utilisée :

$$v_c(t) = K_x(e_x) = \sqrt{\frac{2F_c}{m}} \sqrt{|e_x(t)|} \text{sign}(e_x(t)) \quad (5.18)$$

Avec un tel correcteur, le système converge vers la position désirée avec une trajectoire permettant d'utiliser les frottements au lieu de les considérer comme une perturbation. Toujours à cause des imprécisions de mesure et des incertitudes paramétriques, on choisit d'imposer un gain nul lorsque l'erreur de position est inférieure à  $\delta_e$ . La fonction  $K_x$  devient :

$$\begin{aligned} K_x(e_x) &= \sqrt{\frac{2F_c}{m}} \sqrt{|e_x(t)|} \text{sign}(e_x(t)) \text{ si } |e_x| > \delta_e \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Ainsi, lorsque l'erreur statique est petite, la vitesse de consigne nulle impose une vitesse nulle grâce au correcteur associé. Le point d'équilibre à cette vitesse impose une commande  $u < |F_c|$ . Les cycles limites sont ainsi évités. La proposition suivante énonce la stabilité du système asservi en vitesse et en position avec limitation de cycles.

**Proposition 5.2.2 (Stabilité du système asservi en position avec  $K_x(e_x)$ )**

Soit le système soumis à des frottements secs modélisé par un modèle de Coulomb :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= u - F_c \text{sign}(v) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Ce système est asservi en vitesse par un contrôleur linéaire :

$$\begin{aligned}\epsilon \dot{X}_c &= A_c X_c + B_c (v_c - v) \\ u &= \frac{C_c}{\epsilon} X_c + \frac{D_c}{\epsilon} (v_c - v) \text{ avec } 0 < \epsilon \ll 1\end{aligned}\quad (5.21)$$

où  $X_c \in \mathbb{R}^n$ ,  $A_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_c \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $C_c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ,  $D_c \in \mathbb{R}$  sont respectivement le vecteur d'état et les matrices d'états du correcteur multipliées par  $\epsilon$ .  $v_c$  est la vitesse consigne et la sortie du correcteur de position non-linéaire (5.19) de consigne  $x_c$ .

Sous ces conditions, il existe  $\epsilon$  suffisamment petit pour que les dynamiques de la boucle de vitesse soient suffisamment grandes pour être négligées devant celles de la boucle de position. Dans ce cas, la vitesse  $v$  tend vers 0 et la position  $x$  reste bornée dans une boule de rayon  $\delta_\epsilon$ .

La preuve de la proposition 5.2.2 fait appel au théorème de Tikhonov [40] que nous rappelons ci-après.

### Théorème 5.2.1 (Théorème de Tikhonov)

Soit le système suivant :

$$\begin{aligned}\Sigma_\epsilon &: \begin{cases} \dot{x} = f(x, z, \epsilon) \\ \epsilon \dot{z} = g(x, z, \epsilon) \end{cases} \\ \text{avec} &: 0 < \epsilon \ll 1\end{aligned}\quad (5.22)$$

$x \in \mathbb{R}^n$  représente les variables aux dynamiques lentes et  $z \in \mathbb{R}^m$ , celles aux dynamiques rapides.  $f$  et  $g$  sont des fonctions régulières. Si les hypothèses H1 et H2 sont satisfaites

– H1 :  $z = \rho(x)$  solution de  $g(x, z, 0) = 0$  est telle que  $\frac{\partial g}{\partial z}(x, \rho(z), 0) < 0$

– H2 : Le système réduit ( $\Sigma_0$ ) :  $\dot{x} = f(x, \rho(x), 0)$  a une unique solution  $x_0(t)$  sur  $[0, T]$  alors, pour  $\epsilon \ll 1$  le système  $\Sigma_\epsilon$  admet une solution unique  $(x_\epsilon, z_\epsilon)$  sur  $[0, T]$  (si  $z(t=0)$  est proche de  $\rho(x(t=0))$ ) et sur  $[a, T]$ ,  $a > 0$  on a :

$$\begin{aligned}x_\epsilon(t) &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} x_0(t) \\ z_\epsilon(t) &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \rho(x_0(t))\end{aligned}\quad (5.23)$$

### Démonstration 5.2.2 (Stabilité du système asservi en position avec $K_x(e_x)$ )

Le système en boucle fermée du système (5.33) asservi en vitesse par (5.25) et en position par (5.19) a pour expression :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v = f(x, v, \epsilon) \\ \epsilon \dot{v} &= \frac{C}{m} X_c + \frac{D}{m} (K_x(e_x) - v) - \frac{F_c}{m} \text{sign}(v) = g_1(x, v, \epsilon) \\ \epsilon \dot{X}_c &= A_c X_c + B_c (K_x(e_x) - v) = g_2(x, v, \epsilon)\end{aligned}\quad (5.24)$$

Nous montrons ci-après que le système (5.33) vérifie les hypothèses H1 et H2 du théorème 5.2.1.

H1 : Posons  $\epsilon = 0$ , le système (5.33) devient :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ 0 &= \frac{C}{m} X_c + \frac{D}{m} (K_x(e_x) - v) \\ 0 &= A_c X_c + B_c (K_x(e_x) - v) \end{aligned} \quad (5.25)$$

On trouve :

$$\begin{aligned} X_{c0} &= -A_c^{-1} B_c (K_x(e_x) - v_0) \\ \left( \frac{-C_c}{m} A_c^{-1} B_c + \frac{D_c}{m} \right) (K_x(e_x) - v_0) &= 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

On en déduit la solution unique  $(X_{c0}, v_0)$  :

$$\begin{aligned} X_{c0} &= 0 \\ v_0 &= \rho(x) = v_c = K_x(e_x) \end{aligned} \quad (5.27)$$

On vérifie que les dynamiques de  $X_c$  et  $v$  sont stables autour de  $(X_{c0}, v_0)$ . On doit linéariser pour cela le système autour du point d'équilibre. La fonction signe des frottements secs n'est pas continue autour de  $v = 0$ , cependant les dérivées à droite et à gauche de ce point sont égales, on prolonge donc par continuité la dérivée de la fonction :

$$\frac{\partial}{\partial v} (\text{sign}(v)) = 0, \forall v \quad (5.28)$$

Les états  $\tilde{v}$  et  $\tilde{X}_c$  sont les états du système linéarisé :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \epsilon \dot{\tilde{v}} \\ \epsilon \dot{\tilde{X}}_c \end{pmatrix}_{\epsilon \rightarrow 0} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial v} & \frac{\partial g_1}{\partial X_c} \\ \frac{\partial g_2}{\partial v} & \frac{\partial g_2}{\partial X_c} \end{pmatrix}_{\epsilon \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{X}_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial v_c} \\ \frac{\partial g_2}{\partial v_c} \end{pmatrix}_{\epsilon \rightarrow 0} v_c \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{D_c}{m} & \frac{C_c}{m} \\ -B_c & A_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{X}_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{D_c}{m} \\ B_c \end{pmatrix} v_c \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{C_c}{m} \\ A_c \end{pmatrix} \tilde{X}_c + \begin{pmatrix} \frac{D_c}{m} \\ B_c \end{pmatrix} (v_c - v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} u \\ \epsilon \tilde{X}_c \end{pmatrix}_{\epsilon \rightarrow 0} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Le système (5.29) est équivalent au correcteur (5.25). Le transfert  $(A_c, B_c, C_c, D_c)$  est stable par hypothèse donc les dynamiques rapides décrites par (5.29) sont stables autour du point d'équilibre  $(X_{c0}, v_0)$ . Le système peut être réduit sous la forme :

$$\dot{x} = K_x(e_x) \quad (5.30)$$

*H2* : On vérifie que le système réduit (5.30) est stable, on définit pour cela une fonction énergie positive  $V$  égale à  $\frac{x^2}{2}$ . Sans perte de généralité, on pose  $x_c = 0$ . La dérivée de  $V$  s'exprime :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{x}x \\ &= K_x(x)x\end{aligned}\quad (5.31)$$

Avec :

$$\begin{aligned}K_x(x)x &= -\sqrt{\frac{2F_c}{m}}|x|\sqrt{|x|} < 0 \text{ si } |x| > \delta_e \\ &= 0 \text{ sinon}\end{aligned}\quad (5.32)$$

Ainsi, il vient :

$$\dot{V} = K_x(x)x \leq 0, \forall x \quad (5.33)$$

Plus précisément :

a) si  $|x| > \delta_e$

$$\dot{V} < 0 \quad (5.34)$$

$$x \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad (5.35)$$

$$v \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad (5.36)$$

b) si  $|x| \leq \delta_e$

$$\dot{V} = 0 \quad (5.37)$$

$$v = 0 \quad (5.38)$$

Le système réduit est donc stable avec une faible erreur de position. Les hypothèses H1 et H2 du théorème de Tikhonov sont vérifiées, la vitesse converge vers 0 et l'erreur de position reste dans une boule de rayon  $\delta_e$  pour  $\epsilon$  suffisamment petit. Si  $\delta_e$  est choisi nul, le système devient asymptotiquement stable. Pour des raisons pratiques (incertitudes paramétriques, approximations du modèle et bruits de mesures) ce réglage n'est pas possible.

## 5.2.4 Résultats de simulation sur un système générique

Pour valider l'apport des commandes proposées précédemment, on propose de les tester en simulation sur un système mécanique générique semblable à celui présentée sur la figure (2.15) et modélisé par les équations (3.1). Le modèle utilisé pour la simulation est la version A du modèle hybride, l'effet Stribeck et les frottements visqueux ne sont pas pris en compte. On suppose par contre que la force de rupture des adhérences  $F_s$  est supérieure à la force de Coulomb  $F_c$ . Les

TAB. 5.1 – Paramètres de tests des commandes

Paramètres	Valeurs	Unité
$m$	1	[kg]
$f_c$	1	[N]
$f_s$	1,5	[N]
$T_{e\max}$	$1.10^{-3}$	[s]
$\Sigma$	$5.10^{-3}$	[m/s]
$p_0$	$10^3$	[rad/s]
$u_{max}$	5	[N]
Correcteur PID position		
$K$	2,1	[Nm/rad]
$T_i$	0,1	[s]
$T_d$	3,4	[s]
$a$	307	[rad]
Correcteur position+vitesse		
Correcteur vitesse (PI) :		
$K$	8	[Nms/rad]
$T_i$	0,2	[s]
Correcteur position (P) :		
$K$	10	[1/s]
Paramètre Limitation de cycles		
$\delta_e$	0,02	[m]

correcteurs linéaires utilisés pour les tests sont de la forme :

$$C(s) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{a s + 1} \right) \quad (5.39)$$

Les paramètres du modèle ainsi que ceux des différents correcteurs sont reportés dans le tableau 5.1. Dans un premier temps, on vérifie l'apport de la limitation de cycles proposés en 5.2.2. Les figures (5.3) à (5.5) représentent la position du mobile avec et sans le mécanisme de limitation de cycles. Ce mécanisme joue bien son rôle, en effet, les oscillations autour de la consigne disparaissent ainsi que l'important dépassement présent sur la figure (5.3). Lorsque la stratégie de limitation de cycles est activée, les détails de la figure (5.5) montrent la convergence du système vers la consigne en suivant une trajectoire à vitesse constante dès que la condition (5.7) est satisfaite.

Pour tester la commande proposée dans la sous-section 5.2.3, le même test que précédemment est effectué. Un correcteur PI réglé suivant le tableau 5.1 est utilisé pour asservir la vitesse. Le correcteur est successivement un simple gain proportionnel puis le gain non-linéaire proposé par (5.19). Le résultat est présenté sur les figures (5.6) et (5.7). On notera que l'asservissement en

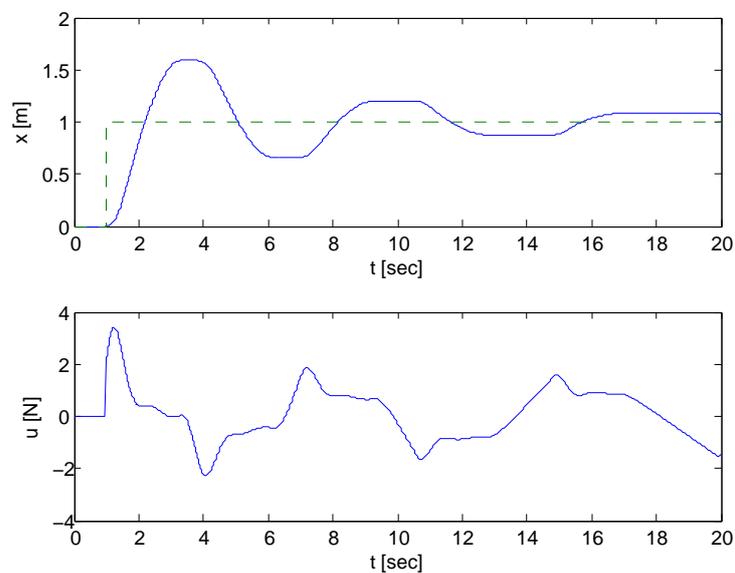


FIG. 5.3 – Réponse à un échelon (pointillés) du système asservi en position sans limitation des cycles limites

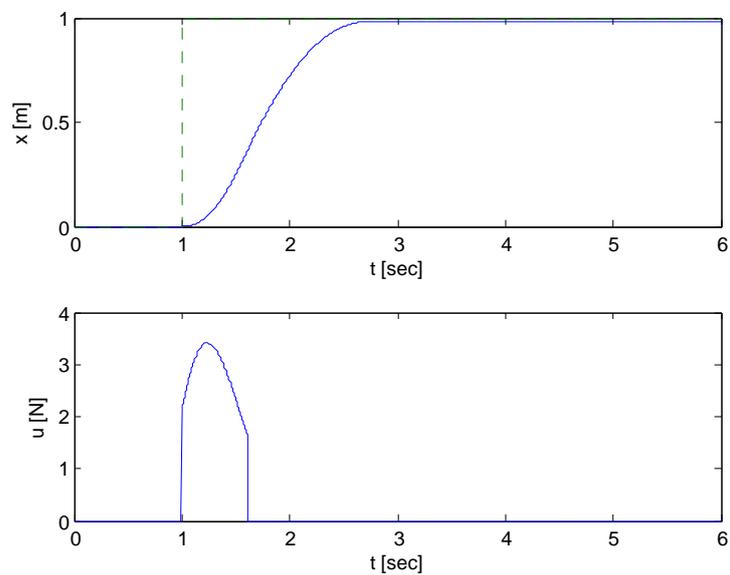


FIG. 5.4 – Réponse à un échelon (pointillés) du système asservi en position avec limitation des cycles limites

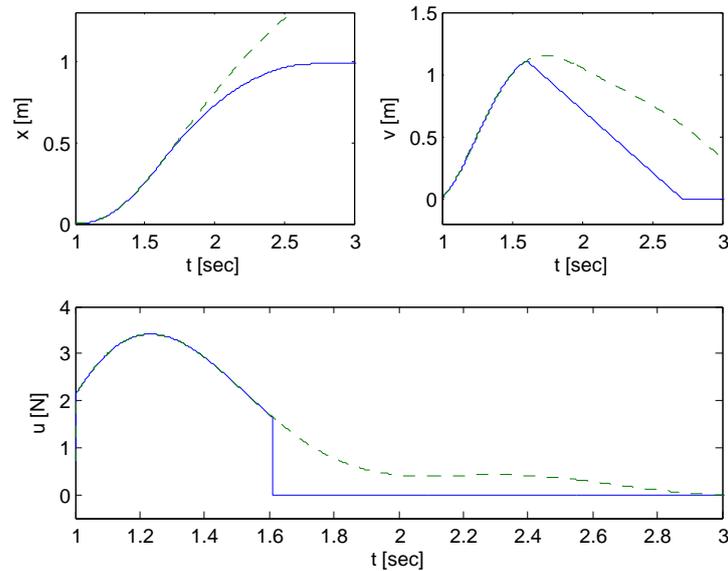


FIG. 5.5 – Détails comparatifs des deux réponses à un échelon du système asservi en position avec (lignes continues) et sans (pointillés) limitation des cycles limites

position par un simple gain provoque des cycles limites de faible amplitude non présentés sur la figure (5.6).

Le contrôleur décrit par l'équation (5.19) permet à la fois de supprimer les cycles limites et le dépassement. Toutefois, on verra dans la mise en oeuvre expérimentale (cf. 5.4.4.3 et 5.4.3.3) que les incertitudes sur les paramètres  $m$  et  $F_c$  diminuent les performances des deux contrôleurs proposés.

### 5.2.5 Augmentation des performances des commandes

Lorsque le système suit la trajectoire décrite par l'équation (5.5), la dynamique du système est dépendante uniquement des paramètres de celui-ci. En effet, plus la masse  $m$  est faible ou plus le frottement  $F_c$  est important, plus le mobile décélère vite et donc rejoint la position désirée. Dans certains cas, ces performances sont suffisantes mais dans d'autres, les performances de l'actionneur et des capteurs peuvent les améliorer.

Pour la stratégie de commande proposée en 5.2.2, on remplace le paramètre  $F_c$  par une force résistante  $F'_c$  égale à :

$$F'_c = F_c + F_{cv} \quad (5.40)$$

Le terme  $F_{cv}$  est du frottement sec virtuel ajouté par la commande  $u$ . La loi de commande (5.6)

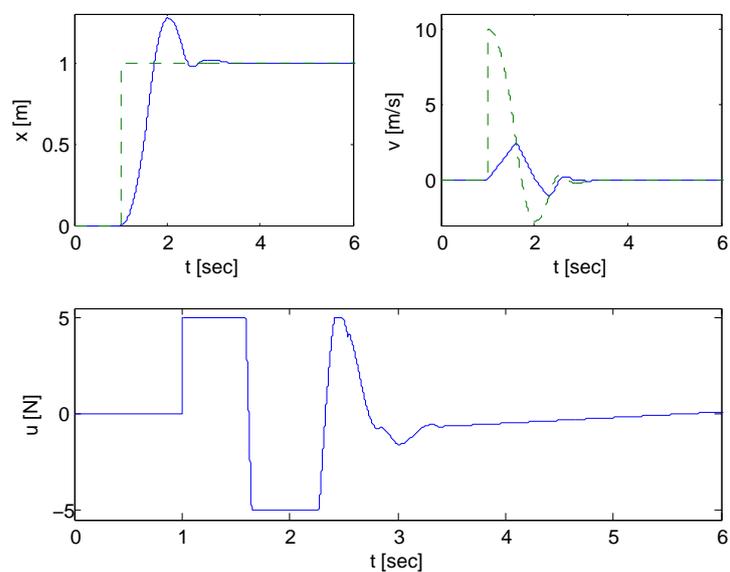


FIG. 5.6 – Réponse à un échelon (pointillés) du système asservi en vitesse et position (correcteur de position proportionnel)

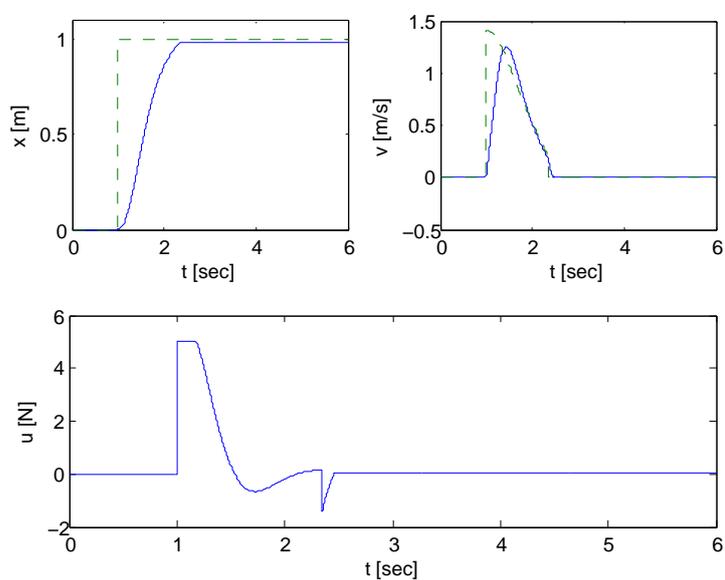


FIG. 5.7 – Réponse à un échelon (pointillés) du système asservi en vitesse et position (correcteur de position non-linéaire)

devient :

$$\begin{aligned} u &= u_c \text{ si } \left( |e_x| < \frac{m}{2F'_c} v^2 + \delta_e \right) \text{ et } \left( |e_x| > \frac{m}{2F'_c} v^2 - \delta_e \right) \\ &= -F_{cv} \tanh\left(\frac{v}{v_r}\right) \text{ sinon} \end{aligned} \quad (5.41)$$

On augmente ainsi la vitesse de convergence du système vers la position désirée. Le retard de la boucle d'asservissement peut provoquer une incohérence de signe entre la vitesse du système et la commande appliquée (en particulier pour des vitesses proches de 0) détériorant les performances du système. En remplaçant la fonction signe par  $\tanh\left(\frac{v}{v_r}\right)$ , on limite ce phénomène. Le paramètre  $v_r$  permet de régler la pente de la fonction autour de 0.

Pour vérifier l'apport de la modification proposée, l'expérience faite dans la section 5.2.4 est reprise avec  $F_c = 0.1N$  et  $F_s = 0.15N$ . La version A du modèle hybride est utilisée. Le paramètre  $v_r$  est réglé égal à 10m/s et la valeur du frottement sec virtuel  $F_{cv}$  à 1N. La figure (5.8) présente les résultats obtenus sans et avec l'ajout de  $F_{cv}$ . Dans le premier cas, le temps de réponse du système est grand, car une faible énergie cinétique suffit au système pour rejoindre la position désirée. En suivant la loi de commande (5.41), l'actionneur fournit une force résistante  $F_{cv}$  qui freine plus rapidement le système lorsque la condition de commutation devient vraie, améliorant ainsi le temps de réponse du système.

Pour la stratégie de commande proposée en 5.2.3, le correcteur de position exprimé par l'équation (5.19) peut aussi être modifié afin d'améliorer les performances du système en boucle fermée :

$$\begin{aligned} K_x(e_x) &= k\sqrt{|e_x(t)|}\text{sign}(e_x(t)) \text{ si } :|e_x| > \delta_e \\ &= 0 \text{ sinon} \\ \text{avec : } k &> \sqrt{\frac{2F_c}{m}} \end{aligned} \quad (5.42)$$

Pour valider l'apport du correcteur (5.42), la même simulation présentée par la figure (5.8) est utilisée cette fois avec le correcteur (5.42) réglé avec  $k = \sqrt{\frac{2(F_c+F_{cv})}{m}}$ . Le résultat est visible sur la figure (5.9).

Encore une fois les performances sont améliorées par les modifications faites sur  $K_x(e_x)$ . Plus  $k$  est grand, plus la dynamique de position devient rapide, elle est cependant limitée par les performances de la boucle d'asservissement en vitesse, elle-même limitée par les capacités de l'actionneur et du capteur.

## 5.2.6 Limitations pratiques

Si les résultats précédents sont excellents, il faut cependant remarquer qu'en pratique ils sont détériorés par plusieurs facteurs :

- les dynamiques de l'actionneur utilisé. En effet, suivant l'expression (5.6) on a supposé que la commande pouvait instantanément être annulée, en pratique le temps de réponse

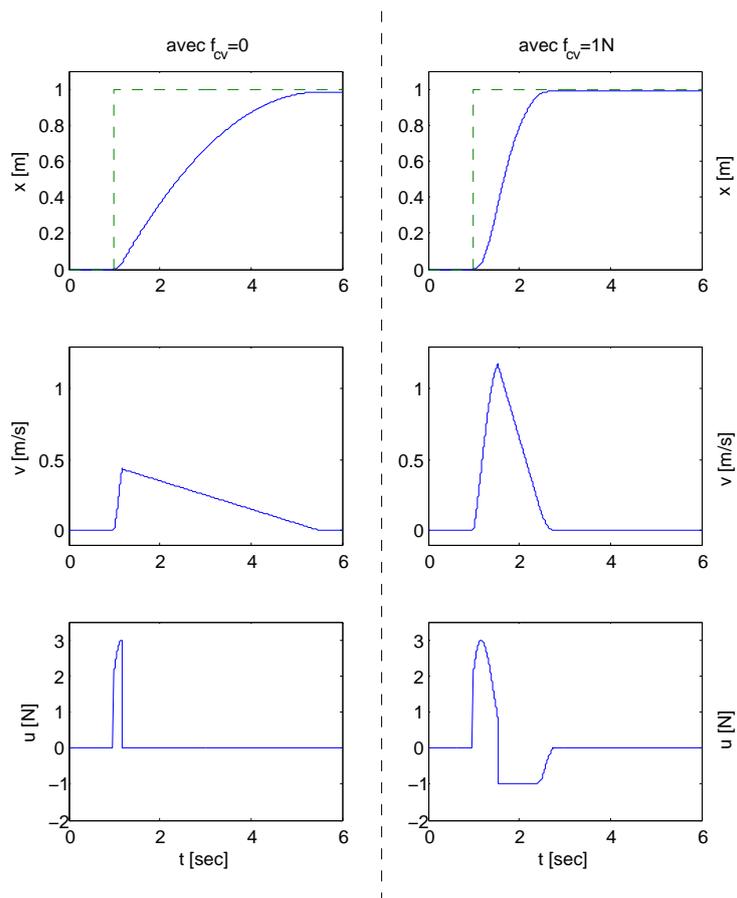


FIG. 5.8 – Comparaison du système asservi seulement en position sans et avec l'ajout de frottement sec virtuel (consigne en pointillés, trajectoire en ligne continue)

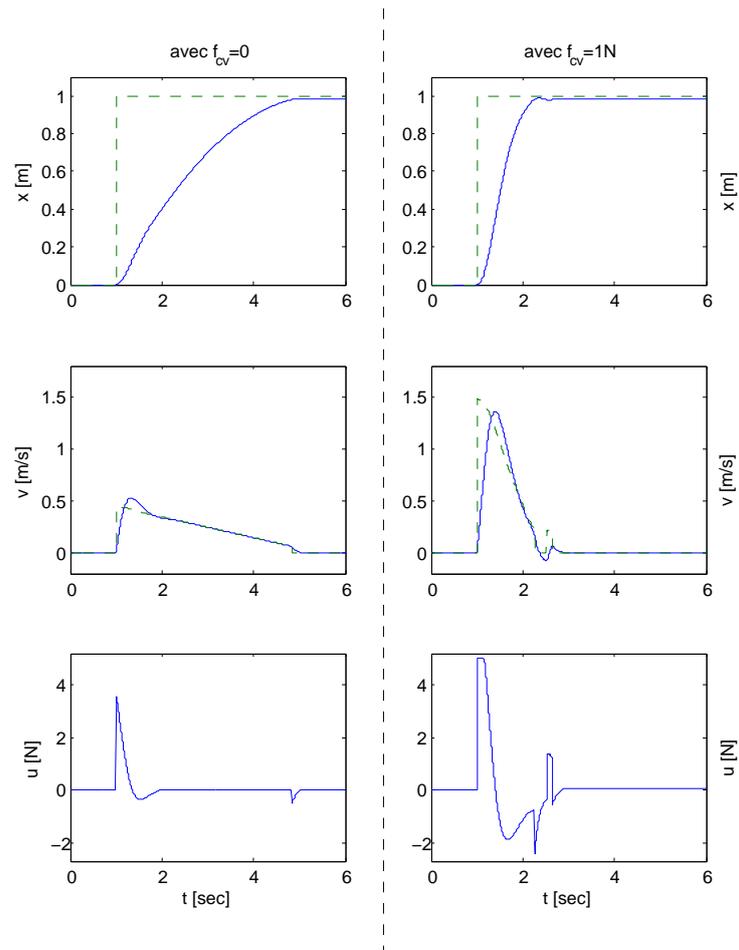


FIG. 5.9 – Comparaison du système asservi en vitesse et en position sans et avec l’ajout de frottement sec virtuel (consigne en pointillés, trajectoire en ligne continue)

de l'actionneur implique un retard non nul limitant les possibilités du correcteur à suivre scrupuleusement les stratégies proposées précédemment.

- la mesure de la position et surtout de la vitesse. Les stratégies de limitation de cycles sont basées sur une mesure de la vitesse et de la position supposées sans bruit. En pratique le bruit de mesure détériore ces signaux, le filtrage augmente le rapport signal sur bruit mais ajoute un retard qui peut être aussi néfaste que le bruit lui-même. La solution passe par l'utilisation d'observateurs comme il est proposé dans le chapitre 6.
- les incertitudes paramétriques sur la masse  $m$  et le frottement de Coulomb  $F_c$  ou la présence de frottements visqueux non négligeables rendent la condition (5.6) ou le correcteur (5.19) inexacts. Le paramètre  $\delta_e$  permet de prendre en compte ces imprécisions en imposant toute fois une erreur statique proportionnelle à ceux-ci.

À la vision de ces remarques, il paraît beaucoup moins facile malgré les propositions faites précédemment de synthétiser une commande efficace pour un système soumis à des frottements secs. En effet toutes ces limitations intra-secs au système peuvent rendre les spécifications souhaitées irréalisables. Cependant grâce aux méthodes de synthèses modernes à base de LMI (Linear Matrix Inequalities) [49], il est possible de synthétiser une commande répondant aux contraintes énoncées précédemment.

La suite du chapitre est dédiée à la mise sous forme LPV (Linear Parameter Varying) d'un système soumis à des frottements secs (avec des incertitudes paramétriques), puis à la formulation et la résolution du problème permettant de trouver un correcteur répondant aux spécifications.

## 5.3 Commande robuste par synthèse LPV

### 5.3.1 Rappel

Dans la nature, les systèmes purement linéaires n'existent pas. En effet, on peut toujours trouver une échelle de temps et/ou d'espace à laquelle des phénomènes non-linéaires apparaissent. Malgré cela, la majorité du travail de synthèse de commandes et d'observateurs se fait sur des modèles linéaires. Pour cela, grâce à des techniques de linéarisation ou tout simplement en négligeant les non-linéarités, on transforme un système réel non-linéaire en un système LTI (Linear Time Invariant).

Cette méthode est utilisée lorsque le système doit être stabilisé autour d'un point de fonctionnement linéarisable (i.e. la plage de fonctionnement du système est suffisamment petite pour qu'un modèle linéaire suffise à la décrire). Dans le cas contraire, les non-linéarités doivent être prises en compte dans l'étude et la commande du système devient plus complexe, [40]. Les classes de systèmes non-linéaires sont très nombreuses, on se borne ici à ne considérer que les systèmes hybrides déjà évoqués dans le chapitre 3 et les systèmes LPV (Linear Parameter Varying). Pour la compréhension de la suite du chapitre, un rapide rappel est fait sur cette classe de systèmes. Pour plus de détails, on se reportera aux thèses [50, 51].

**Définition 5.3.1 (Système dynamique LPV, [50, 52])**

| Soient les fonctions linéaires matricielles  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times n_w}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$  et  $D \in$

$\mathbb{R}^{n_z \times n_w}$ , un système linéaire LPV ( $\Sigma_{LPV}$ ) peut être décrit par :

$$\Sigma_{LPV} : \begin{cases} \dot{x}(t) = A(\rho(\cdot))x(t) + B(\rho(\cdot))w(t) \\ z(t) = C(\rho(\cdot))x(t) + D(\rho(\cdot))w(t) \end{cases} \quad (5.43)$$

où  $x(t)$  est le vecteur d'état du système dans l'espace d'état  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $w(t)$  est l'entrée du système appartenant à l'espace  $W \in \mathbb{R}^{n_w}$  et  $z(t)$  est la sortie prenant ces valeurs dans  $Z \in \mathbb{R}^{n_z}$ .  $\rho(\cdot)$  est un vecteur comprenant l'ensemble des paramètres variants dans le temps.  $\rho(\cdot)$  appartient à l'espace convexe  $\mathcal{P}_\rho$  tel que :

$$\mathcal{P}_\rho := \{ \rho(\cdot) := [ \rho_1(\cdot) \quad \dots \quad \rho_l(\cdot) ]^T \in \mathbb{R}^l \text{ et } \rho_i \in [ \underline{\rho}_i \quad \bar{\rho}_i ] \forall i = 1, \dots, l \} \quad (5.44)$$

où  $l$  est le nombre de paramètres variants. Dans la suite  $\rho(\cdot)$  sera noté simplement  $\rho$

Le vecteur  $\rho$  peut varier en fonction du temps ou des états du système (on parle alors de système "quasi-Linear Parameter Varying" ou qLPV). Il peut être soit connu soit inconnu. Suivant la formulation (5.43), un système LPV a une représentation sous forme d'espace d'état où les matrices sont dépendantes linéairement du vecteur  $\rho$ .

Ainsi, un système LPV peut être vu comme un système linéaire linéarisé le long des trajectoires des paramètres  $\rho_i$ . Avec cette représentation, il est possible de modéliser une description non linéaire d'un système tout en conservant une structure linéaire. Cet avantage permet d'utiliser l'ensemble des outils de la théorie des systèmes linéaires pour le contrôle et la commande des systèmes. Dans la suite, les systèmes LPV sont modélisés sous forme polytopique.

Le vecteur  $\rho$  appartient à un espace convexe, chaque paramètre  $\rho_i$  est borné dans l'intervalle  $[\underline{\rho}_i, \bar{\rho}_i]$ , ainsi on peut construire un polytope dont les sommets sont les extremums du vecteur  $\rho$ . En dimension 2, on obtient un quadrilatère, en 3 dimensions, un prisme. À chaque sommet de ce polytope, on associe un modèle LTI défini par les matrices  $(A_i, B_i, C_i, D_i)$ . Le système  $(A(\rho), B(\rho), C(\rho), D(\rho))$  est la somme de chacun de ces modèles pondérés par rapport à leur distance de  $\rho$ . Cette pondération correspond à un barycentre, plus formellement :

**Définition 5.3.2 (Système dynamique LPV sous forme polytopique, [50, 52])**

Un système LPV est dit polytopique si il peut être exprimé ainsi :

$$\begin{pmatrix} A(\rho) & B(\rho) \\ C(\rho) & D(\rho) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \alpha_i(\rho) \begin{pmatrix} A(\omega_i) & B(\omega_i) \\ C(\omega_i) & D(\omega_i) \end{pmatrix}$$

avec :  $\begin{pmatrix} A(\omega_i) & B(\omega_i) \\ C(\omega_i) & D(\omega_i) \end{pmatrix} \in \mathbf{Co} \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} A_N & B_N \\ C_N & D_N \end{pmatrix} \right\}$  (5.45)

où  $\omega_i$  avec  $i \in [1, N]$  sont les sommets du polytope formés par les extremums du vecteur de paramètres variables  $\rho \in \mathcal{P}_\rho$  et où  $\alpha_i(\rho)$  est défini tel que :

$$\alpha_i(\rho) := \frac{\prod_{k=1}^l |\rho_k - \mathcal{C}(\omega_i)_k|}{\prod_{k=1}^l (\bar{\rho}_k - \underline{\rho}_k)}, i = 1, \dots, N \quad (5.46)$$

où  $\mathcal{C}(\omega_i)_k$  est la  $k^{ime}$  composante du vecteur  $\mathcal{C}(\omega_i)$  défini ainsi :

$$\mathcal{C}(\omega_i) := \{\rho_k | \rho_k = \overline{\rho_k} \text{ si } (\omega_i)_k = \underline{\rho_k} \text{ ou } \rho_k = \underline{\rho_k} \text{ sinon}\} \quad (5.47)$$

Ensuite,  $N = 2^l$  est le nombre de sommets du polytope et  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  et  $D_i$  sont des matrices constantes et connues représentant le système à chaque sommet.

La modélisation LPV sous forme polytopique peut être appliquée à un grand nombre de systèmes non-linéaires. Dans la suite, cette méthode est utilisée pour modéliser un système générique soumis à des frottements secs connu avec des incertitudes paramétriques.

### 5.3.2 Modélisation polytopique des variations paramétriques du modèle

Dans le cas d'un système LPV, le paramètre  $\rho$  peut dépendre du temps, d'une variable extérieure au système étudié ou des états du modèle. Dans le cas d'un système mécanique, les paramètres du modèle peuvent varier en fonction de l'usure, des conditions extérieures ou des états du système. Pour garantir la robustesse du système en boucle fermée par rapport à ces variations, on peut utiliser celles-ci pour définir le paramètre  $\rho$  du modèle LPV.

Comme il est rappelé dans le chapitre 2, les frottements secs génèrent de nombreux phénomènes non-linéaires. Parmi eux, l'effet Stribeck et les pré-déplacements apparaissent pour des déplacements de faibles amplitudes. Dans notre cadre d'étude, seuls les frottements visqueux et de Coulomb sont significatifs. La commande doit donc être robuste à l'effet Stribeck et l'erreur statique désirée doit être supérieure au pré-déplacement maximal.

On suppose le système piloté par un moteur dont le couple  $u$  est proportionnel au courant  $i$  le parcourant. Le moteur est piloté en tension et asservi en courant, ainsi, cette boucle est modélisée par un système LTI  $(A_i, B_i, C_i, 0)$  associé à l'état  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ . Le courant est saturé à  $i_{\max}$ . L'entrée du système est le couple de consigne  $u_c = K i_c$  appliqué par la commande en couple. Le modèle utilisé pour la synthèse de la commande est alors :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= A_i x_i + \frac{B_i}{K} u_c \\ \dot{v} &= \frac{K + \Delta_K(t)}{m + \Delta_m} C_i x_i - \frac{\sigma_v + \Delta_\sigma(t)}{m + \Delta_m} v - \frac{F_c + \Delta_{F_c}(t)}{m + \Delta_m} f_{norm}(v, u) \\ \dot{x} &= v \end{aligned} \quad (5.48)$$

$K$  est la constante de couple du moteur, elle varie en fonction des conditions extérieures du système (température). Ce phénomène est pris en compte grâce à la variable  $\Delta_K(t)$ . Les coefficients de frottements  $\sigma_v$  et  $F_c$  peuvent aussi varier en fonction de l'usure des matériaux. Cette variation est prise en compte par  $\Delta_\sigma(t)$  et  $\Delta_{F_c}(t)$ . La masse  $m$  du système est supposée aussi pouvoir varier lentement dans le temps (usure), pour cela on lui lie la variation  $\Delta_m$ . La fonction normalisée  $f_{norm}(v, u)$  appartient à l'intervalle  $[-1, 1]$ , elle représente les frottements secs. En cohérence avec les propriétés physiques de ce phénomène, elle est de norme L2. Dans la suite, les frottements seront considérés comme une entrée exogène  $w$ .

Les variations paramétriques sont supposées mesurables suivant un moyen à définir, le vecteur  $\rho$  est choisi égal  $(\Delta_m \ \Delta_\sigma \ \Delta_{F_c} \ \Delta_K)^T$ . On remarque que le modèle (5.48) n'est pas

linéaire suivant  $\Delta_m$ , ce terme étant petit devant  $m$ , on peut le linéariser autour de sa valeur moyenne 0 :

$$\begin{aligned} \dot{v} = & (K + \Delta_K) \left(1 - \frac{\Delta_m}{m}\right) C_i x_i - (\sigma_v + \Delta_\sigma) \left(1 - \frac{\Delta_m}{m}\right) v \\ & - (F_c + \Delta_{F_c}) \left(1 - \frac{\Delta_m}{m}\right) w + o(\Delta_m^2) \end{aligned} \quad (5.49)$$

En négligeant les termes quadratiques, le système (5.50) est obtenu :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{v} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = & \left( \begin{pmatrix} A_i & 0 & 0 \\ \frac{K}{m} C_i & -\frac{\sigma_v}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K}{m^2} C_i & \frac{\sigma_v}{m^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Delta_m + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Delta_\sigma \right. \\ & + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{C_i}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Delta_K \left. \begin{pmatrix} x_i \\ v \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{B_i}{K} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_c + \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{F_c}{m} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F_c}{m^2} \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_m \right. \right. \\ & \left. \left. + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{m} \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_{F_c} \right) w \end{aligned} \quad (5.50)$$

Le vecteur  $X$  et les matrices  $A_0$ ,  $A_m$ ,  $A_\sigma$ ,  $A_K$ ,  $B_0$ ,  $T_0$ ,  $T_m$  et  $T_{F_c}$  sont définis tels que le système (5.50) puisse s'écrire :

$$\begin{aligned} \dot{X} = & (A_0 + A_m \Delta_m + A_\sigma \Delta_\sigma + A_K \Delta_K) X + ((B_0 \ T_0) + (0 \ T_m) \Delta_m \\ & + (0 \ T_{F_c}) \Delta_{F_c}) \begin{pmatrix} u_c \\ w \end{pmatrix} \\ y = & (0 \ 0 \ 1) X \end{aligned} \quad (5.51)$$

### 5.3.3 Commande LPV, synthèse polytopique

Le système LPV (5.51) intègre les variations paramétriques et prend en compte la dynamique de l'actionneur. On propose de synthétiser le contrôleur par résolution du problème standard  $\mathcal{H}_\infty$  associé au système. Cependant celui-ci n'intègre pas encore les limites liées au bruit de mesure ou à la saturation de l'actionneur. Suivant [50], on peut à l'aide de filtres fictifs prendre en compte ces contraintes. Le schéma de la figure (5.11) exprime le problème standard final pour déterminer le correcteur  $\rho$ -dépendant  $G_\rho(s)$ , où  $x_c$  est la position désirée,  $H_i(s)$  correspond au transfert décrit par  $(A_i, \frac{B_i}{K}, C_i, 0)$ . Le transfert  $H_\rho(s)$  est donné par :

$$H_\rho(s) = \frac{1}{s((m + \Delta_m)s + \sigma_v + \Delta_\sigma)} \quad (5.52)$$

Dans la suite on suppose que la sortie à piloter est  $x$ , mais l'ensemble de l'exposé reste valable pour une régulation en vitesse.

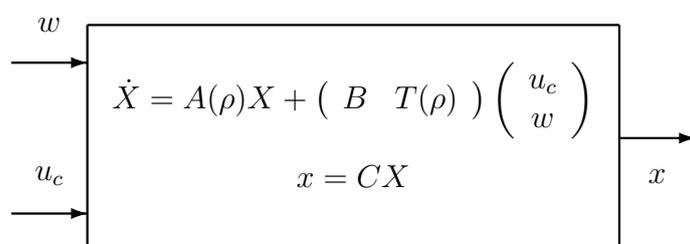
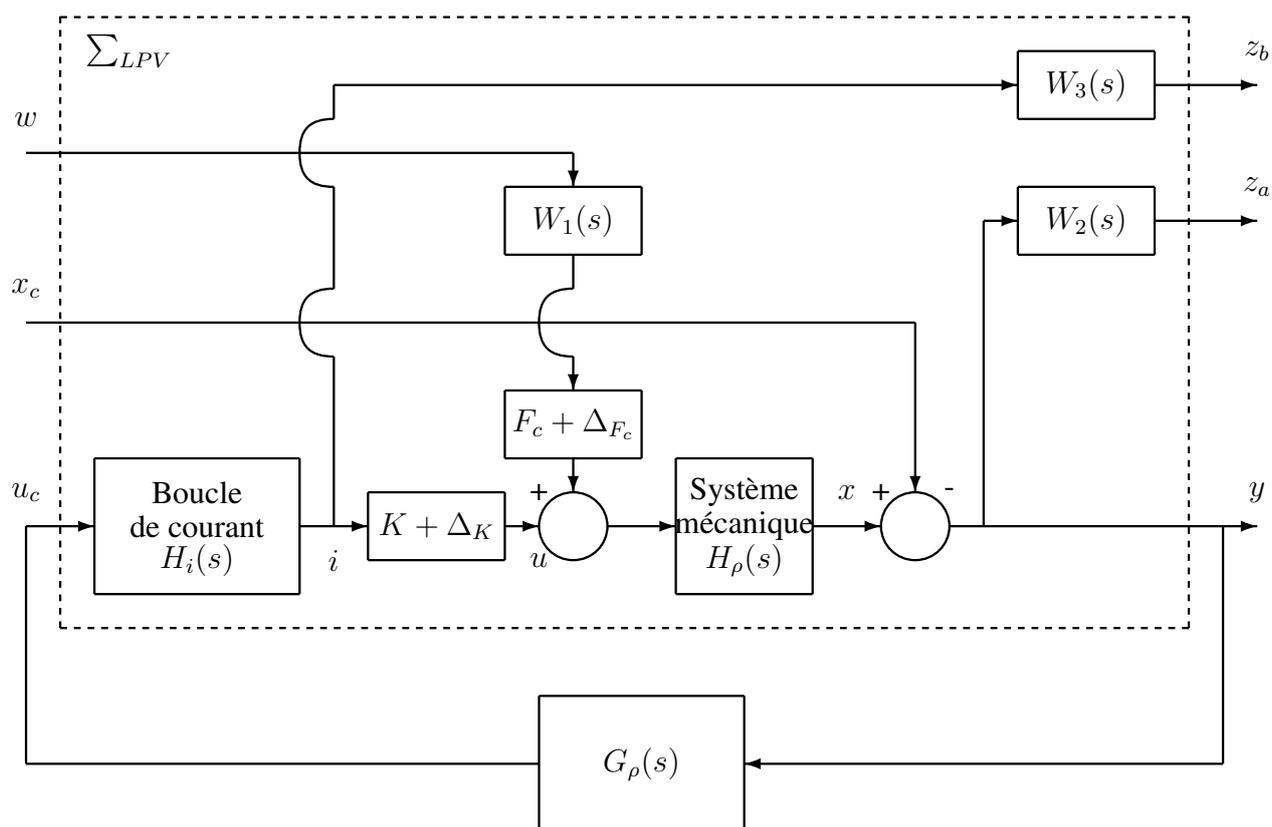


FIG. 5.10 – Schéma bloc du système mis sous forme LPV

FIG. 5.11 – Schéma bloc du problème  $\mathcal{H}_\infty$

La synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  de commande proposée est un problème d'atténuation de perturbations et de suivi. Il consiste à trouver le contrôleur stabilisant le système qui minimise le pire des transferts entre les entrées  $W = (x_c \ w)^T$  et les sorties contrôlées  $Z = (z_a \ z_b)^T$ . Plus formellement, le système en boucle fermée de transfert  $T_{ZW}$  doit respecter l'inégalité suivante :

$$\|T_{ZW}(s)\|_\infty = \left\| \begin{array}{cc} T_{z_a w}(s) & T_{z_a x_c}(s) \\ T_{z_b w}(s) & T_{z_b x_c}(s) \end{array} \right\|_\infty < \gamma \quad (5.53)$$

Plus  $\gamma > 0$  est petit, plus les perturbations sont atténuées. Dans le cas étudié, on obtient :

$$\begin{aligned} |H_{y/x_c}(s)| &= \left| \frac{1}{1 + H_\rho(s)K_\rho H_i(s)G_\rho(s)} \right| < \gamma |W_2^{-1}(s)| \\ |H_{y/w}(s)| &= \left| \frac{-H_\rho(s)F_\rho}{1 + H_\rho(s)K_\rho H_i(s)G_\rho(s)} \right| < \gamma |W_1^{-1}(s)W_2^{-1}(s)| \\ |H_{i/x_c}(s)| &= \left| \frac{H_i(s)G_\rho(s)}{1 + H_\rho(s)K_\rho H_i(s)G_\rho(s)} \right| < \gamma |W_3^{-1}(s)| \\ |H_{i/w}(s)| &= \left| \frac{-F_\rho H_i(s)G_\rho(s)H_\rho(s)}{1 + H_\rho(s)K_\rho H_i(s)G_\rho(s)} \right| < \gamma |W_1^{-1}(s)W_3^{-1}(s)| \end{aligned} \quad (5.54)$$

avec :

$$\begin{aligned} K_\rho &= K + \Delta_K \\ F_\rho &= F_c + \Delta_{F_c} \end{aligned} \quad (5.55)$$

Comme le montre les inégalités (5.54), les filtres  $W_1(s)$ ,  $W_2(s)$  et  $W_3(s)$  permettent de contraindre plus ou moins les différents transferts entrées-sorties. On utilise ces filtres pour prendre en compte dans la synthèse les spécifications et les contraintes physiques liées au système :

- L'entrée  $w$  appartient à l'intervalle  $[-1, 1]$ , ainsi  $W_1(s)$  doit avoir un gain unitaire. Si aucun contrôleur n'est trouvé avec ce réglage, on peut alors diminuer sa valeur afin de relâcher les contraintes sur la synthèse de  $G_\rho(s)$  et obtenir  $\gamma \approx 1$ . L'atténuation de perturbation en entrée sera alors moins forte.
- $W_2(s)$  est généralement choisi de la forme suivante :

$$W_2(s) = G_2 \frac{s/z_2+1}{s/p_2+1} \quad (5.56)$$

où  $p_2$  et  $z_2$  permettent de fixer la bande passante du système en boucle fermée autour de  $z_2$  ( $z_2 > p_2$ ). La marge de module  $M_{mod}$  du système est choisie grâce à  $G_2$ , en effet, celle-ci est bornée par :

$$M_{mod} > \gamma \max(|W_2^{-1}(s)|) = \gamma \frac{p_2}{G_2 z_2} \quad (5.57)$$

On choisit ainsi,  $G_2 = M_{mod} \frac{z_2}{p_2}$  avec  $\gamma$  proche de 1. L'erreur statique  $e_{stat}$  du système en boucle fermée est inférieure à  $G_2^{-1}$ . En choisissant  $p_2 = z_2 M_{mod} e_{stat}$ , on prend en compte l'erreur statique maximale admise par le cahier des charges.

–  $W_3(s)$  permet de régler l'influence de l'erreur  $e_x = x_c - x$  sur le courant  $i$ . En choisissant :

$$\|W_3(s)\|_\infty = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{i_{\max}} \quad (5.58)$$

on garantit que l'actionneur ne sera pas saturé si un contrôleur est trouvé avec  $\gamma \leq 1$ . Si  $W_3^{-1}(s)$  est un filtre passe-bas, on peut alors imposer au contrôleur de filtrer le bruit de mesure en haute fréquence.

Une fois les contraintes imposées via les filtres de pondérations, le problème standard est défini par :

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ Z \\ Y \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|cc} A(\rho) & B_1(\rho) & B_2 \\ \hline C_1(\rho) & D_{11}(\rho) & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} X \\ W \\ U \end{pmatrix} \quad (5.59)$$

avec :

$$\begin{aligned} X &= (x_i \ v \ x \ x_1 \ x_2 \ x_3)^T \\ Z &= (z_a \ z_b)^T \\ W &= (x_c \ w)^T \\ U &= u_c \end{aligned} \quad (5.60)$$

où les états  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  représentent les états des filtres  $W_1(s)$ ,  $W_2(s)$  et  $W_3(s)$ . Les matrices  $A(\rho)$ ,  $B_1(\rho)$ ,  $B_2$ ,  $C_1(\rho)$ ,  $C_2$ ,  $D_{11}(\rho)$ ,  $D_{12}$  et  $D_{21}$  sont définies de façon à respecter la description du système donnée par le schéma (5.11). Le correcteur  $G_\rho(s)$  est synthétisé en respectant les contraintes LMIs définies par le théorème 5.3.1.

### **Théorème 5.3.1 (Synthèse de correcteur LPV, [52])**

Le contrôleur dynamique de la forme  $G_\rho(s) := \left( \begin{array}{c|c} Ac(\rho) & Bc(\rho) \\ \hline Cc(\rho) & Dc(\rho) \end{array} \right)$  satisfaisant le problème de contrôle  $\mathcal{H}_\infty$  est obtenu en résolvant les LMIs suivantes en  $(X(\rho), Y(\rho), \tilde{A}(\rho), \tilde{B}(\rho), \tilde{C}(\rho)$  et  $\tilde{D}(\rho))$  tout en minimisant  $\gamma$ ,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} M_{11} & (*)^T & (*)^T & (*)^T \\ M_{21} & M_{22} & (*)^T & (*)^T \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & (*)^T \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix} &< 0 \\ \begin{pmatrix} X(\rho) & I_n \\ I_n & Y(\rho) \end{pmatrix} &> 0 \end{aligned} \quad (5.61)$$

où

$$\begin{aligned}
M_{11} &= A(\rho)X(\rho) + X(\rho)A(\rho)^T + \frac{\partial X(\rho)}{\partial \rho} \dot{\rho} + B_2 \tilde{C}(\rho) + \tilde{C}(\rho)^T B_2^T \\
M_{21} &= \tilde{A}(\rho) + A(\rho)^T + C_2^T \tilde{D}(\rho)^T B_2^T \\
M_{22} &= Y(\rho)A(\rho) + A(\rho)^T Y(\rho) + \frac{\partial Y(\rho)}{\partial \rho} \dot{\rho} + \tilde{B}(\rho)C_2 + C_2^T \tilde{B}(\rho)^T \\
M_{31} &= B_1(\rho)^T + D_{21}(\rho)^T \tilde{D}(\rho)^T B_2^T \\
M_{32} &= B_1(\rho)^T Y(\rho) + D_{21}^T \tilde{B}(\rho)^T \\
M_{33} &= -\gamma I_{n_u} \\
M_{41} &= C_1(\rho)X(\rho) + D_{12}(\rho)\tilde{C}(\rho) \\
M_{42} &= C_1(\rho) + D_{12}(\rho)\tilde{D}(\rho)C_2 \\
M_{43} &= D_{11}(\rho) + D_{12}(\rho)\tilde{D}(\rho)D_{21}(\rho) \\
M_{44} &= -\gamma I_{n_y}
\end{aligned} \tag{5.62}$$

Le contrôleur  $G_\rho(s)$  est obtenu explicitement avec les transformations suivantes,

$$\begin{aligned}
D_c(\rho) &= \tilde{D}(\rho) \\
C_c(\rho) &= \left( \tilde{C}(\rho) - D_c(\rho)C_2(\rho)X(\rho) \right) M(\rho)^{-T} \\
B_c(\rho) &= N(\rho)^{-1} \left( \tilde{B}(\rho) - Y(\rho)B_2(\rho)D_c(\rho) \right) \\
A_c(\rho) &= N(\rho)^{-1} \left( \tilde{A}(\rho) - Y(\rho)A(\rho)X(\rho) - Y(\rho)B_2(\rho)D_c(\rho)C_2(\rho)X(\rho) \right. \\
&\quad \left. - N(\rho)B_c(\rho)C_2(\rho)X(\rho) - Y(\rho)B_2(\rho)C_c(\rho)M(\rho)^T \right) M(\rho)^{-T}
\end{aligned} \tag{5.63}$$

où  $M(\rho)$  et  $N(\rho)$  sont définies telles que  $M(\rho)N(\rho)^T = I_n - X(\rho)Y(\rho)$  (Cette équation peut être résolue par une décomposition singulière suivi d'une factorisation de Cholesky).

Les LMIs (5.61) doivent être vérifiées pour tout  $\rho \in \mathcal{P}_\rho$ . Ainsi on doit résoudre un problème de dimension infini à cause de l'infinité de valeurs que peut prendre  $\rho$ . Trois solutions permettent de le ramener en dimension finie :

- L'approche polytopique (utilisée dans cette thèse),
- L'approche par discrétisation de  $\mathcal{P}_\rho$  (gridding approach),
- L'approche LFR (Linear Fractional Representation).

La méthode polytopique pour résoudre les LMIs (5.61) n'est pas détaillée ici (cf. [50]), on rappelle seulement :

- pour pouvoir utiliser l'approche polytopique, les matrices  $B_2$ ,  $D_{12}$ ,  $C_2$  et  $D_{21}$  du système (5.61) doivent être constantes, i.e. indépendantes de  $\rho$ ,
- avec l'approche polytopique, il faut et il suffit que le problème d'optimisation convexe défini par les LMIs (5.61) soit vérifié aux sommets du polytope avec  $X$  et  $Y$  constant (fonction de Lyapunov  $\rho$ -indépendante) pour qu'il soit valide pour tout  $\rho \in \mathcal{P}_\rho$ . On construit alors une base de contrôleurs  $G_{\omega_i}(s)$ ,  $i \in [1, N]$ ,

– le contrôleur  $G_\rho(s)$  est de la forme :

$$G_\rho = \sum_{i=1}^N \alpha_i \begin{pmatrix} A_{ci} & B_{ci} \\ C_{ci} & D_{ci} \end{pmatrix} \quad (5.64)$$

où  $A_{ci}$ ,  $B_{ci}$ ,  $C_{ci}$  et  $D_{ci}$  sont les matrices décrivant le contrôleur au sommet  $\omega_i$ .  $\alpha_i$  est donné par l'expression (5.46), avec :

$$\alpha_i(\rho) \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i(\rho) = 1 \quad (5.65)$$

### 5.3.4 Commande robuste

Pour construire le contrôleur  $G_\rho(s)$  suivant l'équation (5.64), on doit connaître le vecteur  $\rho$  à tout instant. Dans le cas étudié, celui-ci est formé de variations paramétriques qui ne sont pas connues en temps réel. En effet, les paramètres du système sont seulement identifiables hors ligne. Ainsi, on propose la procédure suivante :

- un jeu de paramètres  $\rho$  est identifié,
- un contrôleur constant  $G(s)$  est calculé suivant (5.64) et (5.65) à l'aide de ce vecteur et de l'ensemble des correcteurs pré-calculés pour chaque sommet du polytope,
- ce contrôleur est implanté sur le système,
- lorsque ce contrôleur n'est plus valide (baisse des performances due à l'usure du système), la procédure est refaite.

Le jeu de paramètres  $\rho$  est supposé varier lentement, on doit cependant s'assurer que le correcteur calculé  $G(s)$  garantit la stabilité du système pour tout  $\rho \in \mathcal{P}_\rho$ .

Dans ce but, les LMIs (5.61) sont résolues avec des matrices ( $X$ ,  $Y$ ,  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$  et  $\tilde{D}$ ) indépendantes de  $\rho$ . Si le contrôleur est construit en suivant les transformations (5.63), il est toujours  $\rho$ -dépendant. Si le contrôleur est construit avec un  $\rho$  fixé, il n'est pas garanti que ce contrôleur stabilise le système quel que soit  $\rho \in \mathcal{P}_\rho$ . On doit vérifier a posteriori que l'ensemble des transferts  $T_{ZW}$  vérifient l'inégalité (5.53).

Dans la suite, on choisira de construire le contrôleur avec un paramètre  $\rho$  à équidistance des sommets du polytope. Dans le cas étudié, l'ensemble des incertitudes est centrée ainsi  $\rho = 0$  est le centre du polytope.

Le contrôleur ainsi synthétisé vérifie les contraintes de saturation, de marge de module, de bande passante et de filtrage de bruit de mesure tout en étant robuste aux incertitudes sur les paramètres  $m$ ,  $\Sigma_v$ ,  $F_c$  et  $K$ . Le choix des contraintes doit être fait avec justesse, en effet, une grande robustesse aux incertitudes se traduit généralement par une bande passante limitée (et donc un temps de réponse élevé). Comme on le verra dans la suite, le principal travail est encore une fois la recherche du compromis idéal pour répondre au mieux au cahier des charges. On note que d'autres outils peuvent être utilisés pour résoudre ce problème de robustesse aux incertitudes paramétriques. Entre autre, l'approche LFT (Linear Fractional Transformation) présentée en annexe C permet d'obtenir de tels résultats.

## 5.4 Commande d'un embrayage robotisé

### 5.4.1 Cahier des charges

Au-delà de toute considération technique, dans le cadre de la commande de systèmes embarqués dans un véhicule, c'est le ressenti du conducteur qui fixe le cahier des charges. Ainsi, pour un embrayage robotisé, celui-ci doit répondre précisément et rapidement aux ordres d'embrayage et de débrayage tout en étant assez doux pour ne pas provoquer de reprise de couple trop brutal. Ces caractéristiques ergonomiques sont traduites par les constructeurs par les propriétés de la réponse du système asservi à un échelon de position. Ainsi, le cahier des charges fixe le temps de réponse, l'erreur statique et le dépassement maximal autorisés. De plus une seule oscillation est autorisée avant la stabilisation du système.

Comme tout système mécanique, un embrayage s'use, ainsi ses caractéristiques et donc celles du système étudié varient. La commande se doit d'être robuste à ces variations. Cette propriété se traduit dans le cahier des charges par une marge de module supérieur à 0,5.

La batterie du véhicule limite en tension ( $V_{\max} = 12\text{V}$ ) et en courant ( $i_{\max} = 50\text{A}$ ) le moteur électrique actionnant l'embrayage. De plus ses performances varient en fonction de sa température (démagnétisation des aimants à haute température). On demande à ce que la commande d'embrayage soit robuste à ces variations. Ainsi la loi de commande doit répondre au cahier des charges suivant :

- temps de réponse à 95% : de l'ordre de 200ms
- dépassement :  $< 5\%$
- erreur statique  $e_{stat}$  sur la position du rotor :  $< 2\text{rad}$  soit 3,3% de l'amplitude totale
- nombre d'oscillations avant stabilisation : 1
- marge de module  $M_{mod} : \geq 0,5$

avec les contraintes :

- variation lente du couple résistant dû à l'usure
- variation de la constante de couple du moteur électrique  $K$  due aux variations de températures
- limitation en puissance : tension et courant limités par la batterie du véhicule

### 5.4.2 Formalisation du problème

Dans le but de synthétiser la commande remplissant le cahier des charges décrit précédemment, l'embrayage robotisé a tout d'abord été étudié dans le chapitre 2. Il a été modélisé par une simple inertie soumise à des frottements en fonction de la position et de la vitesse. Afin de prendre en compte les phénomènes observables et critiques pour la synthèse de la commande, la version A du modèle hybride des systèmes soumis à des frottements secs proposée dans le chapitre 3 est utilisée. Ce modèle comporte peu de paramètres à identifier lesquels sont donnés dans le chapitre 4.

De part la précision du capteur de position, seul le mode 1 (mode "glissant") est comman-

Paramètre	Valeur moyenne	Minimum	Maximum	Écart
$J$	$1,32 \times 10^{-5} \text{kgm}$	$1,11 \times 10^{-5} \text{kgm}$	$1,53 \times 10^{-5} \text{kgm}$	$0,42 \times 10^{-5} \text{kgm}$
$K$	$13,4 \times 10^{-3} \text{Nm/A}$	$12,8 \times 10^{-3} \text{Nm/A}$	$14,0 \times 10^{-3} \text{Nm/A}$	$1,2 \times 10^{-3} \text{Nm/A}$
$\sigma_v$	$3,81 \times 10^{-4} \text{Nms}$	0Nms	$7,62 \times 10^{-4} \text{Nms}$	$7,62 \times 10^{-4} \text{Nms}$
$F_c$	0,099Nm	0,018Nm	0,180Nm	0,162Nm

TAB. 5.2 – Valeurs des paramètres du modèle de synthèse de la commande et de leurs intervalles d'incertitudes

dable, voici l'équation dynamique qui lui est associée :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_i &= A_i x_i + \frac{B_i}{K} u_c \\
 J\dot{\omega} &= KC_i x_i - C_r(\theta, \omega) \\
 \dot{\theta} &= \omega
 \end{aligned} \tag{5.66}$$

où l'état  $x_i$  correspond à l'état de la boucle de courant,  $C_r$  est donné par la figure (4.13). L'équation (5.66) n'est pas semblable au modèle (5.48) utilisé pour la synthèse de la commande LPV. Pour s'y ramener, la fonction  $C_r(\theta, \omega)$  est décomposée en frottements secs et visqueux :

$$|C_r(\theta, \omega)| = \sigma_v(\theta, \omega)\omega + F_c(\theta, \omega)\text{sign}(\omega) \tag{5.67}$$

Quel que soit le point  $(\theta, \omega)$ , on peut approcher  $C_r$  par un plan tangent exprimé par l'équation (5.67) où les paramètres  $\sigma_v$  et  $F_c$  appartiennent aux intervalles  $[\underline{\sigma}_v, \overline{\sigma}_v]$  et  $[\underline{F}_c, \overline{F}_c]$ .

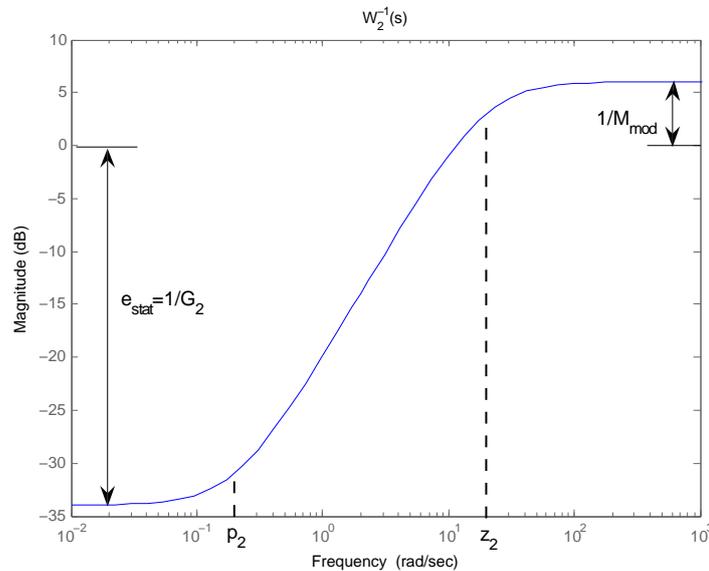
Pour une vitesse inférieure à 260rad/s, les frottements visqueux sont nuls, c'est à dire  $\underline{\sigma}_v = 0$ . Les frottements secs sont fonction de la position, on peut les borner,  $[\underline{F}_c, \overline{F}_c] = [0, 050\text{N}, 0, 180\text{N}]$ .

Lorsque la vitesse devient supérieure à 260rad/s, les frottements visqueux ne sont plus négligeables, dans ce cas  $\sigma_v = \overline{\sigma}_v = 7,62 \times 10^{-4} \text{Nms}$ . Le paramètre  $F_c$  appartient à l'intervalle  $[-0, 150\text{N}, -0, 018\text{N}]$ , dans ce cas, il ne correspond plus à du frottement sec mais juste à un paramètre permettant de conserver la continuité en  $\omega = 260\text{rad/s}$ .

Suivant la partie 5.3.2, le frottement sec est modélisé comme une perturbation en entrée du système. Ainsi, elle doit être rejetée quel que soit son signe. Pour la synthèse de la commande, seule l'amplitude de cette perturbation est importante, ainsi, pour  $\underline{F}_c$  et  $\overline{F}_c$ , on choisit le minimum et le maximum en valeur absolue des deux intervalles trouvés ( $\underline{F}_c = 0,018\text{N}$ ,  $\overline{F}_c = 0,180\text{N}$ ).

Les paramètres  $J$  et  $K$  peuvent varier suivant les valeurs fournies par le tableau 5.2. On peut alors construire le système LPV polytopique (5.68) dont les 16 sommets sont les extremums du vecteur  $\rho = (J \ K \ \sigma_v \ F_c)^T$ .

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_i &= A_i x_i + \frac{B_i}{K} u_c \\
 J(\rho)\dot{\omega} &= K(\rho)C_i x_i - \sigma_v(\rho)\omega - F_c(\rho)\text{sign}(\omega) \\
 \dot{\theta} &= \omega
 \end{aligned} \tag{5.68}$$

FIG. 5.12 – Gabarit du filtre  $W_2^{-1}(s)$ 

Pour prendre en compte la limitation en courant du moteur électrique, le filtre  $W_3(s)$  doit être choisi avec un gain respectant l'égalité (5.58).

Le filtre  $W_2(s)$  permet de régler la bande passante ainsi que la marge de module du système en boucle fermée, cf. figure (5.12).

Pour obtenir un correcteur d'ordre peu élevé, on choisit  $W_1(s)$  et  $W_3(s)$  simplement égaux à des gains notés  $W_1$  et  $W_3$ .  $W_1$  est choisi dans un premier temps égal à 1,  $W_3$  doit respecter l'égalité (5.58) avec  $x_{\min} = 0$  et  $x_{\max} = \theta_{\max} = 63\text{rad}$ .

### 5.4.3 Commande robuste en position

#### 5.4.3.1 Synthèse du correcteur

Dans un premier temps, on cherche à synthétiser une loi de commande en position de l'embrayage. À partir du système LPV et des filtres proposés dans la section 5.4.2, un correcteur est synthétisé suivant la procédure décrite dans la partie 5.3.3. Les inégalités (5.54) sont vérifiées seulement avec  $\gamma = 20,9$ . Ainsi les contraintes sur le correcteur étaient trop fortes, le cahier des charges décrit en 5.4.1 n'est pas réalisable.

Pour relâcher les contraintes, la première solution est de diminuer  $W_1$  afin d'autoriser un moins bon rejet de perturbation. Cependant après quelques essais, on se rend compte que libérer cette contrainte ne permet pas d'obtenir les performances escomptées. En diminuant le gain  $W_3$ , on autorise le correcteur à être plus réactif. Cependant, on augmente en même temps sa sensibilité au bruit de mesure. En choisissant  $W_1 = 0,1$  et  $W_3 = 0,05$ , on obtient un correcteur calculé avec le modèle nominal avec de bonnes performances ( $\gamma = 1,15$ ). La figure (5.12) représente le

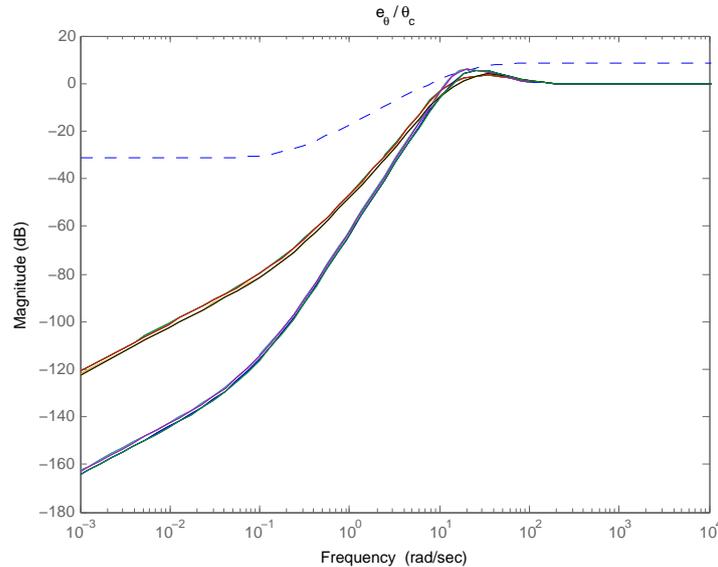


FIG. 5.13 – Transfert  $H_{e_\theta/\theta_c}$  pour chaque sommet du polytope et gabarit  $\gamma W_2^{-1}(s)$  (en pointillés)

transfert du gabarit  $W_2^{-1}(s)$ , les différentes spécificités du cahier des charges  $y$  sont reportées.

Le correcteur  $G(s)$  est calculé pour  $\rho = 0$ . La figure (5.13) présente la fonction de sensibilité  $H_{e_\theta/\theta_c}$  calculée avec le correcteur unique  $G(s)$  en chaque sommet du polytope. Le transfert  $\gamma W_2^{-1}(s)$  est aussi représenté. La marge de robustesse ainsi que les performances (temps de réponse, erreur statique) souhaitées sont atteintes quel que soit  $\rho \in \mathcal{P}_\rho$ , tout en étant robuste aux différentes variations paramétriques. Ainsi un seul correcteur  $G(s)$  indépendant de  $\rho$  suffit à satisfaire le cahier des charges.

Le transfert (5.14) permet de visualiser l'influence de la consigne  $\theta_c$  sur le courant  $i$ . On peut aussi l'interpréter comme l'influence du bruit de mesure sur la commande. Celui-ci est borné par  $W_3^{-1}$ . On remarque que seules les fréquences autour de la bande passante sont amplifiées : le bruit en haute fréquence est atténué.  $W_3$  ne respecte pas l'égalité (5.58), ainsi, l'actionneur sera saturé lorsque l'erreur de position  $e_\theta$  sera supérieure à  $W_3 i_{\max}$ .

Le transfert (5.15) entre la perturbation  $w$  et la sortie  $\theta$  présente les limites du correcteur. En effet, pour certains sommets du polytope, les transferts associés sont supérieurs au gabarit souhaité. Ainsi, le correcteur ne garantit pas le même rejet de perturbation quel que soit  $\rho \in \mathcal{P}_\rho$ . Les perturbations constantes sont simplement atténuées d'au moins 20dB mais pas totalement rejetées.

Le correcteur synthétisé est d'ordre 4. On observe que le pôle le plus lent du correcteur est situé en  $-0.3\text{rad/s}$  et est mille fois plus lent que les 3 autres. En le déplaçant en 0, on ajoute un effet intégral à la commande sans pour autant changer la dynamique du système autour de la bande passante. Les perturbations constantes sur l'entrée sont ainsi rejetées. Le courant calculé par la commande pouvant être supérieur à  $i_{\max}$ , un système anti-windup devra être intégré à la commande.

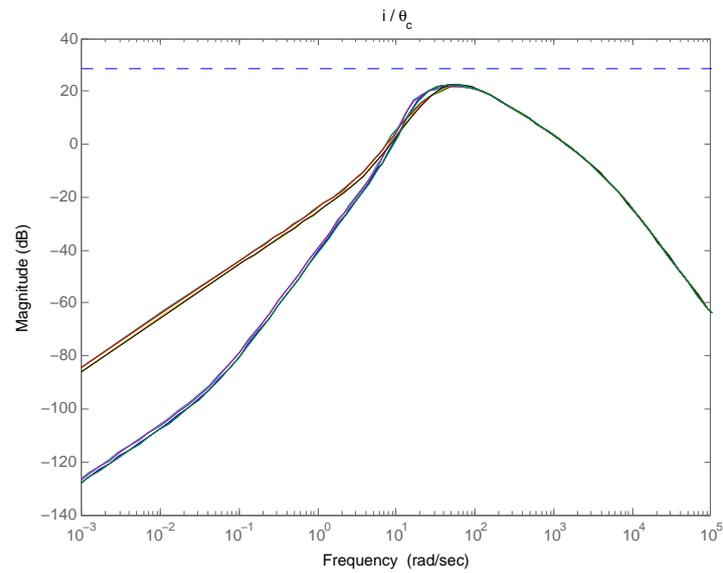


FIG. 5.14 – Transfert  $H_{i/\theta_c}$  pour chaque sommet du polytope et gabarit  $\gamma W_3^{-1}(s)$  (en pointillés)

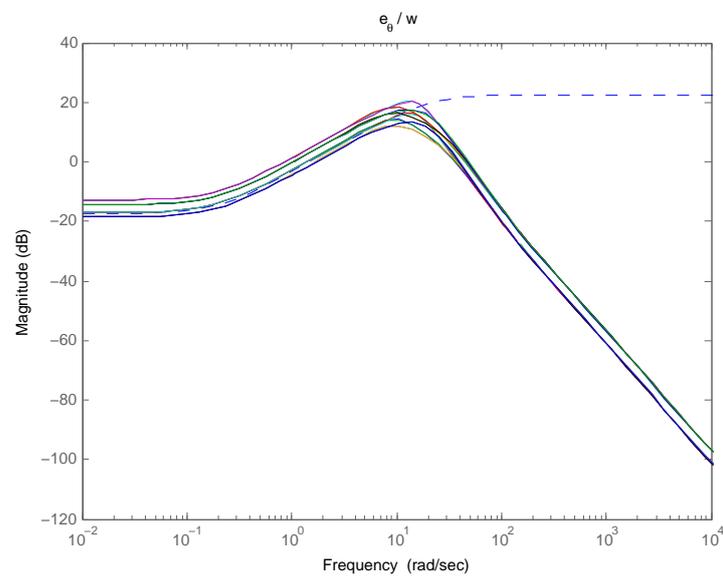


FIG. 5.15 – Transfert  $H_{e_\theta/w}$  pour chaque sommet du polytope et gabarit  $\gamma W_1^{-1}W_2^{-1}(s)$  (en pointillés)

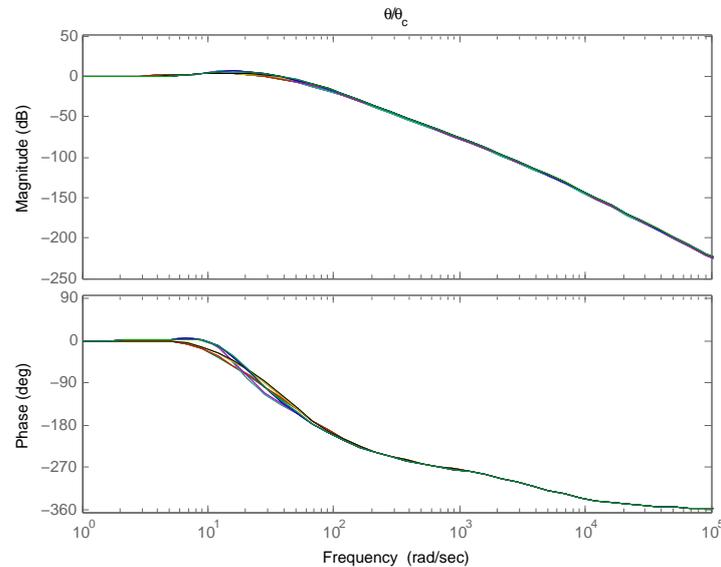


FIG. 5.16 – Transfert  $H_{\theta/\theta_c}$  pour chaque sommet du polytope

Le dépassement et la bande passante du système en boucle fermée sont visibles sur le transfert (5.16). Le dépassement de l'ordre de 50% est largement supérieur à la valeur souhaitée, néanmoins :

- celui-ci peut être diminué en ajoutant un pré-filtre sur la consigne,
- l'influence des frottements secs n'est pas prise en compte dans le transfert étudié,
- l'ajout de la stratégie de limitation de cycles limites permet d'éviter un dépassement trop grand.

Finalement, l'étude des transferts du système LPV ne permet pas de conclure sur les performances du correcteur synthétisé, on se doit de le tester en simulation avant de l'implanter. La figure (5.17) présente le correcteur discrétisé en temps par la méthode de Tustin ( $T_s = 1ms$ ). Autour de la bande passante, le correcteur discret est bien superposé au correcteur calculé en temps continu. Pour les basses fréquences, le pôle le plus lent du correcteur a été déplacé en 0 afin d'obtenir un rejet total de perturbation constante en entrée de commande et non une simple atténuation.

### 5.4.3.2 Validation en simulation

Le modèle identifié en 4.4 est utilisé pour valider le correcteur représenté par la figure (5.17), on lui adjoint la stratégie de limitation de cycle limite proposée dans la section 5.2.2 ainsi qu'un système anti-windup. La consigne est pré-filtrée avec le filtre passe-bas suivant :

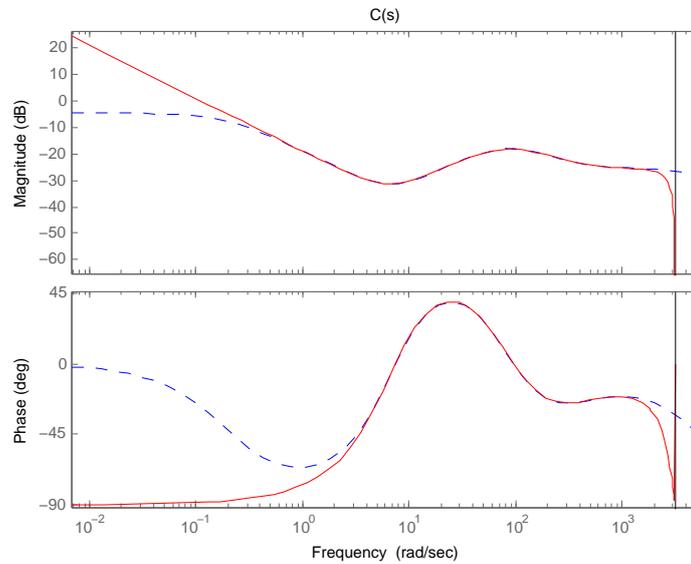


FIG. 5.17 – Transfert du correcteur  $G(s)$  en continu (en pointillés) et en temps discret avec effet intégral (ligne continue),  $T_s = 1\text{ms}$

$$H_{\theta_c} = \frac{1}{\frac{s^2}{w_0^2} + \frac{2m}{w_0}s + 1}$$

avec :  $w_0 = 30\text{rad/s}$  et  $m = 0,8$  (5.69)

Pour appliquer la stratégie de limitation de cycle limite, il faut connaître la vitesse. Celle-ci peut l'être par dérivation de la position. Cependant nous avons déjà longuement discuté des importants problèmes de bruit que cela peut engendrer, en particulier dans notre application. Ainsi, on se doit d'ajouter un filtre passe-bas afin de limiter ce bruit. Finalement, la vitesse est reconstruite en filtrant  $\theta$  par  $H_\omega$  exprimé par le transfert (5.70). On note que la vitesse peut aussi être estimée par un observateur (cf. chapitre 6).

$$H_\omega = \frac{s}{\frac{s^2}{w_\omega^2} + \frac{2}{w_\omega}s + 1} \quad (5.70)$$

où  $w_\omega$  est réglé 10 fois plus rapide que  $w_0$ , pulsation de coupure du pré-filtre. En procédant ainsi, seules les fréquences du signal au-delà de la bande passante utile sont atténuées.

Le paramètre  $\delta_\theta$  est choisi normalement égal à la résolution du capteur, mais ici, le bruit de mesure sur la vitesse et les incertitudes paramétriques ne permettent pas de garantir une telle précision. Ainsi,  $\delta_\theta$  est choisi égal à 2rad pour prendre en compte ces imprécisions. Le jeu mécanique étant de 3rad, la valeur de  $\delta_\theta$  reste de toute façon inférieure à la précision maximale possible sur la position  $x$  de l'embrayage.

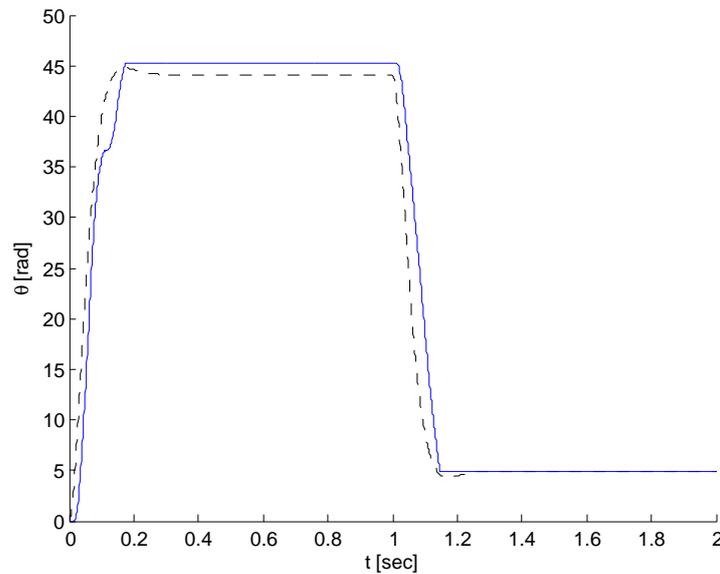


FIG. 5.18 – Réponse en simulation à un échelon de l'embrayage robotisé asservi en position : angle du rotor  $\theta$  (ligne continue) et consigne  $\theta_c$  (pointillés)

Les figures (5.18) à (5.20) présentent les résultats obtenus. On observe clairement que les objectifs du cahier des charges sont atteints :

- le temps de réponse est de l'ordre de 200ms,
- le dépassement est nul,
- l'erreur statique est inférieure à 3,3% sur l'angle du rotor  $\theta$ .

On notera néanmoins que l'erreur statique sur la position de l'embrayage est supérieure, cf. figure (5.20). Cette limite est due au jeu mécanique non observable, cf. section 4.4.4).

Après avoir testé en simulation la commande en position de l'embrayage, nous nous intéresserons à valider cette synthèse en pratique.

### 5.4.3.3 Validation expérimentale

Lors des travaux présentés dans [53], un correcteur linéaire sous forme RST d'ordre 5 a été développé. Il servira de référence. Pour cela, un test en échelon lors d'un débrayage puis d'un embrayage est effectué. Le résultat est reporté sur les figures (5.21) et (5.22). Le temps de réponse est satisfaisant, ainsi que l'erreur statique. On note cependant que lors des phases stationnaires ( $\omega = 0$ ), le couple moteur donc le courant n'est pas nul. Cette consommation d'énergie inutile provoque la montée en température du moteur électrique et donc une baisse de ses performances.

Le même test d'échelon est appliqué sur la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  étudiée dans cette section. Les figures (5.23) et (5.24) présentent les résultats :

- le temps de réponse est sensiblement supérieur à celui du contrôleur RST (cf. figure (5.32)),
- l'erreur statique est supérieure à celle obtenue avec la commande RST, cependant le cahier

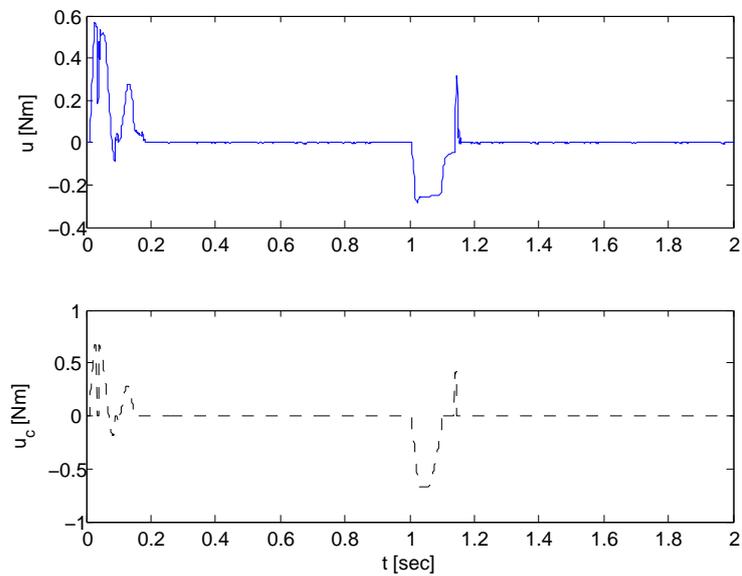


FIG. 5.19 – Réponse en simulation à un échelon de l'embrayage robotisé asservi en position : couple  $u$  en entrée (ligne continue) et couple consigne  $u_c$  (pointillés)

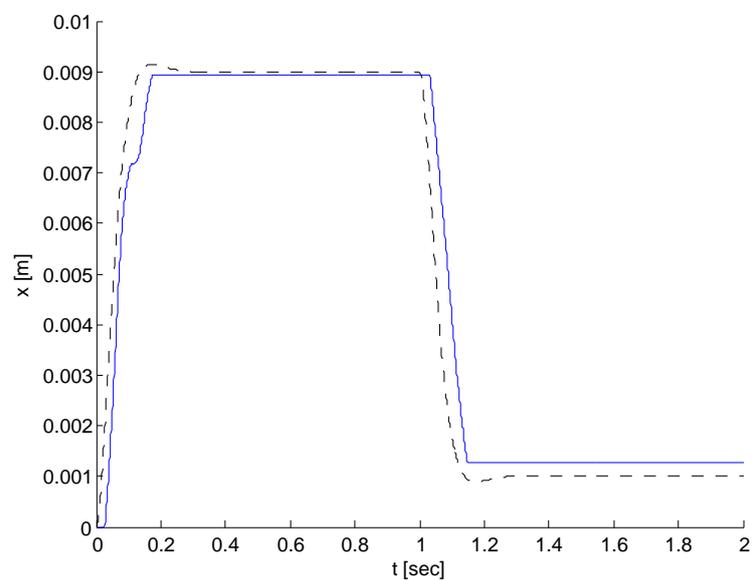


FIG. 5.20 – Réponse en simulation à un échelon de l'embrayage robotisé asservi en position : position de l'embrayage  $x$  (ligne continue) et consigne  $x_c$  (pointillés)

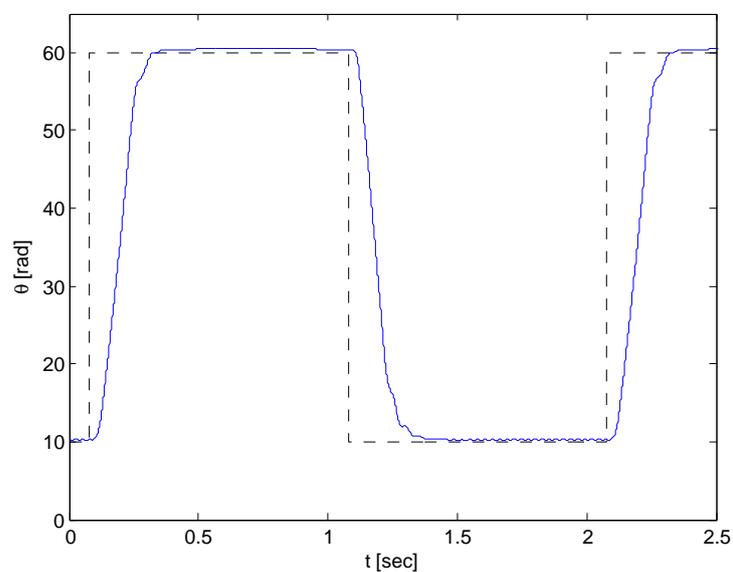


FIG. 5.21 – Position  $\theta$  (trait plein) et consigne  $\theta_c$  (pointillés) de l’embrayage robotisé asservi par un correcteur RST d’ordre 5 (résultats expérimentaux)

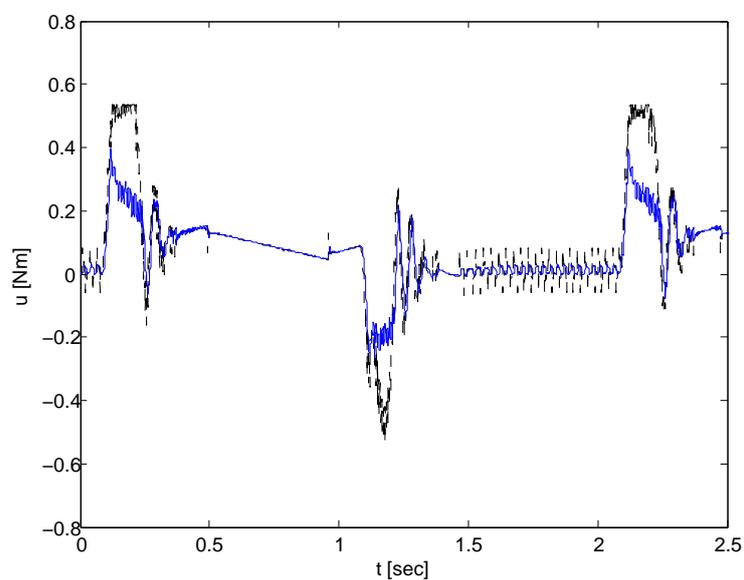


FIG. 5.22 – Commande mesurée  $u$  (trait plein) et consigne  $u_c$  (pointillés) de l’embrayage robotisé asservi par un correcteur RST d’ordre 5 (résultats expérimentaux)

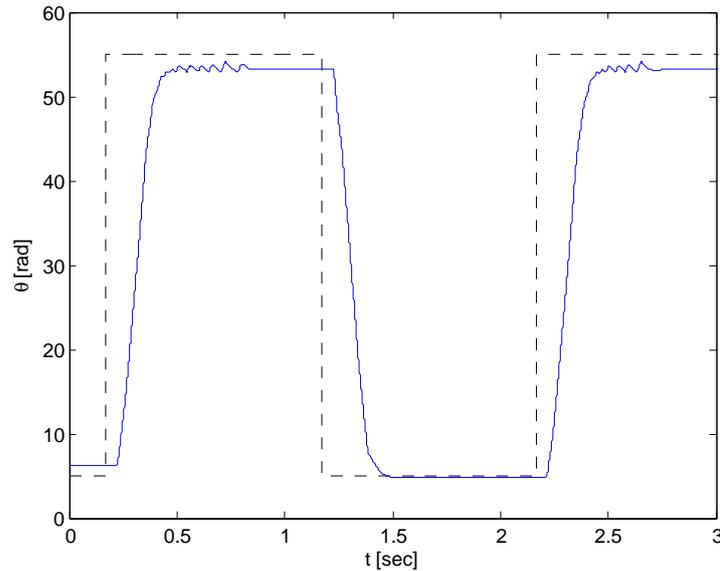


FIG. 5.23 – Position  $\theta$  (trait plein) et consigne  $\theta_c$  (pointillés) de l'embrayage robotisé asservi par la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  en position (résultats expérimentaux)

des charges est toujours respecté,

- des transitoires sont observés lors des débrayages, ceux-ci sont dus à l'influence des imprécisions paramétriques sur la condition (5.7). En augmentant  $\delta_\theta$ , ce phénomène disparaît mais l'erreur statique augmente,
- lors des phases stationnaires, le couple moteur est nul évitant ainsi de surchauffer le moteur, de provoquer des cycles limites et de consommer inutilement de l'énergie.

Ainsi, la commande proposée respecte le cahier des charges sans toutefois dépasser la commande RST. Deux raisons peuvent être proposées :

- le contrôleur étudié est d'ordre inférieur à la commande RST (4 au lieu de 5),
- la suppression des cycles limites ajoutée aux imprécisions paramétriques sur la condition (5.7) et au bruit de quantification imposent une erreur statique plus importante que celle observée sur le contrôleur RST.

## 5.4.4 Commande robuste en vitesse et position

### 5.4.4.1 Synthèse du correcteur

La section 5.4.3 présente les résultats obtenus avec un asservissement seulement en position de l'embrayage. Ici, on souhaite mettre en oeuvre la commande proposée dans la section 5.2.3. Pour cela, un asservissement efficace en vitesse doit être développé. Dans les parties 5.3.3 et 5.3.4, on propose une méthodologie pour synthétiser un correcteur en position robuste aux variations paramétriques. Cette méthode peut être aussi utilisée pour commander le système en

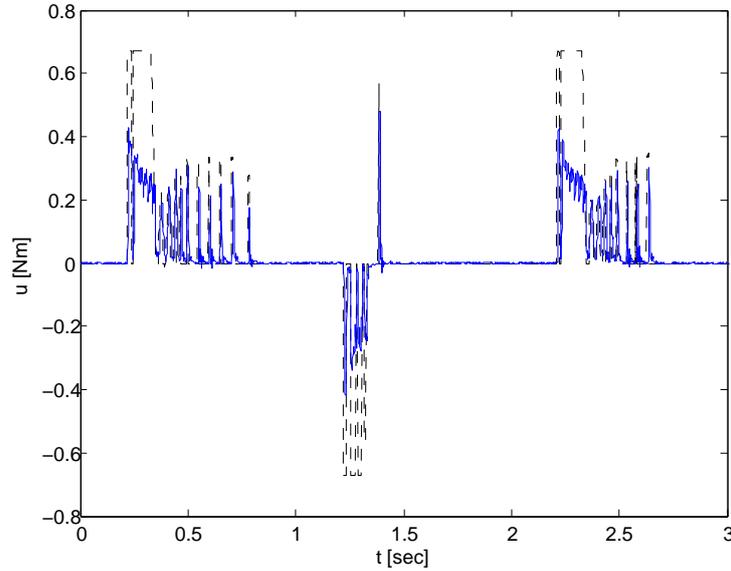


FIG. 5.24 – Commande  $u$  (trait plein) et consigne  $u_c$  (pointillés) de l’embrayage robotisé asservi en vitesse par la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  en position (résultats expérimentaux)

vitesse. Pour cela, on considère le schéma (5.25). La sortie à contrôler est alors la différence entre la vitesse et la vitesse consigne. La sortie mesurée est l’intégrale de cette erreur. Le rôle des différents filtres de pondération reste inchangé.

Les filtres  $W_1$  et  $W_3$  sont identiques à ceux utilisés dans la section (5.4.3.1), seul la dynamique du gabarit  $W_2^{-1}$  est choisie légèrement plus rapide avec  $z_2 = 40\text{rad/s}$ . Pour synthétiser le correcteur, la méthodologie reste identique à celle présentée précédemment. On note cependant que la présence de l’intégrateur entre la vitesse et la position permet de ne pas utiliser d’effet intégral dans la commande. Le correcteur de position est calculé suivant l’équation (5.19) :

$$\begin{aligned} \omega_c &= \sqrt{\frac{2\bar{C}_r(|\omega| < 260\text{rad/s})}{J_m}} \sqrt{e_\theta} \text{sign}(e_\theta) \text{ si } : |e_\theta| > \delta_\theta \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned} \quad (5.71)$$

où  $\bar{C}_r(|\omega| < 260\text{rad/s})$ ,  $J_m$  sont donnés par la figure (4.10) et le tableau 4.8. Comme pour la commande précédente,  $\delta_\theta$  est égal à  $2\text{rad}$ , cette valeur permet de prendre en compte le bruit de mesure, les incertitudes paramétriques et les variations du couple résistant autour de sa valeur moyenne  $\bar{C}_r(|\omega| < 260\text{rad/s})$ . Pour finir, le pré-filtre (5.69) est ajouté sur la consigne de position. La commande en vitesse a été synthétisée à partir d’un modèle LPV permettant d’obtenir les différents transferts voulus pour le système asservi. Si ces transferts permettent de valider la robustesse du système, ils ne peuvent être garants des performances de la commande une fois celle-ci appliquée au système réel non-linéaire. Ainsi, avant d’appliquer la commande sur le banc de test, on se doit de la valider en simulation avec le modèle non-linéaire identifié en 4.4.

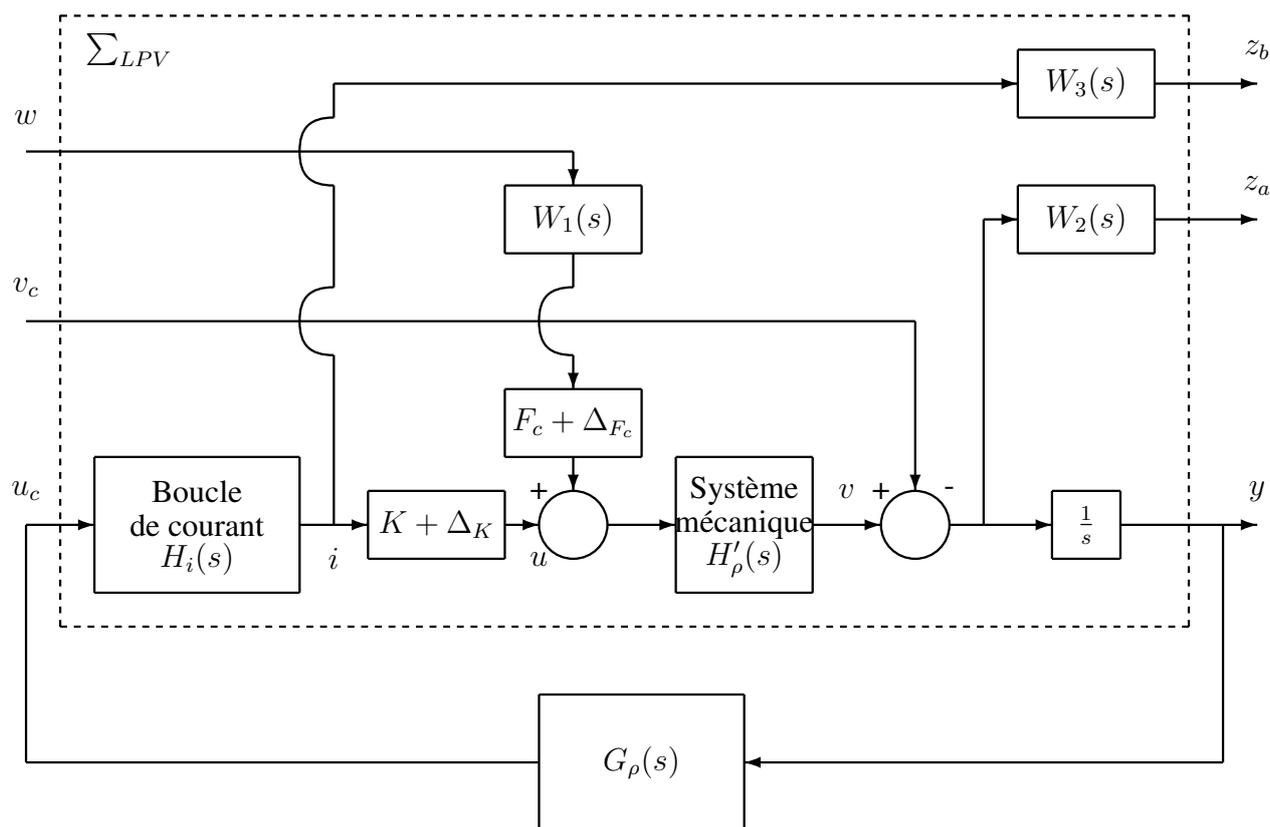


FIG. 5.25 – Schéma bloc du problème  $\mathcal{H}_\infty$  dans le cas d'un asservissement en vitesse

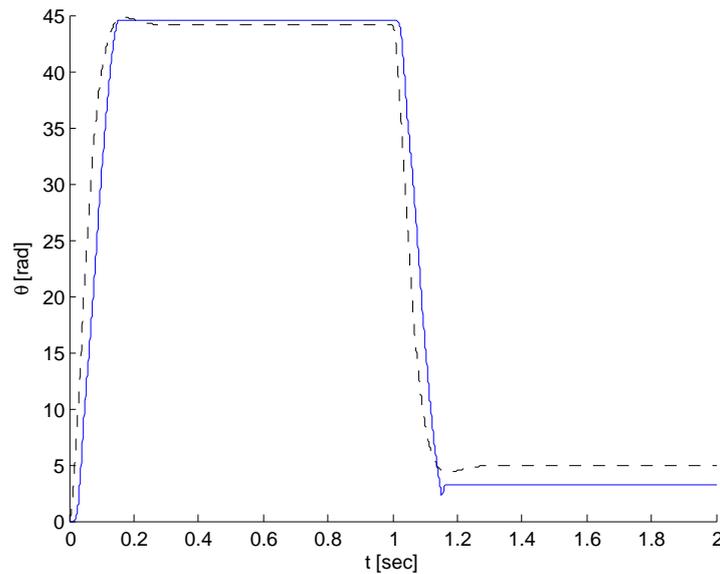


FIG. 5.26 – Réponse en simulation à un échelon de l’embrayage robotisé asservi en vitesse et en position : angle du rotor  $\theta$  (ligne continue) et consigne  $\theta_c$  filtré (pointillés)

#### 5.4.4.2 Validation en simulation

Les figures (5.26) à (5.29) présentent les résultats obtenus en simulation avec l’asservissement linéaire en vitesse et le correcteur non-linéaire de position. Les performances atteintes sont sensiblement identiques à celles obtenues en 5.4.3.2 :

- le temps de réponse maximal sur  $x$  est respecté même si celui-ci est plus grand que dans le cas d’un simple correcteur en position,
- le dépassement sur l’angle  $\theta$  est légèrement supérieur à celui présent sur la figure (5.18), il permet néanmoins grâce au phénomène de jeu mécanique d’obtenir une erreur statique plus faible sur  $x$  (cf. figure (5.29)).
- le correcteur de vitesse semble peu performant au regard de l’erreur de poursuite (cf. figure (5.28)), cependant il suffit à respecter le temps de réponse spécifié sur  $\theta$  et sa bande passante ne peut être augmentée sans amplifier l’influence du bruit de quantification sur la commande.

#### 5.4.4.3 Validation expérimentale

Une fois validée en simulation, la commande est implantée et testée en pratique. Les résultats sont présentés sur les figures (5.30) et (5.31). On note que :

- le temps de réponse est de l’ordre de 200ms (fluctuation suivant l’échelon) satisfaisant ainsi le cahier des charges,
- le dépassement respecte le cahier des charges,

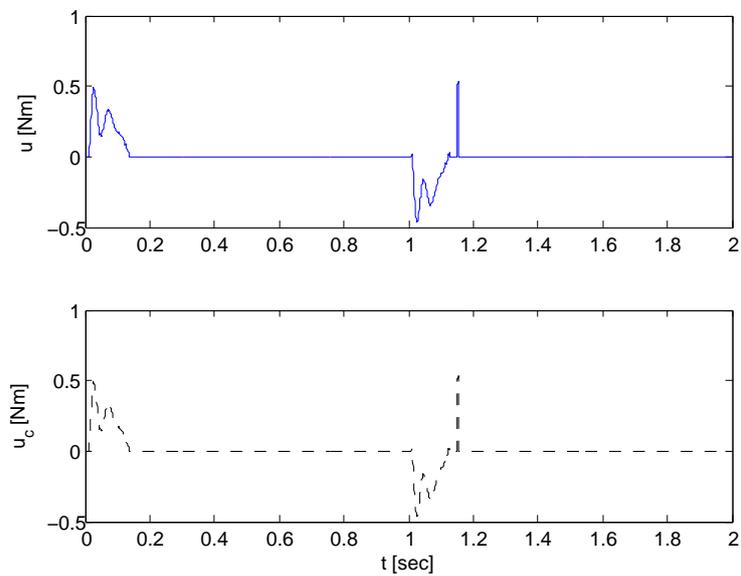


FIG. 5.27 – Réponse en simulation à un échelon de l'embrayage robotisé asservi en vitesse et en position : couple  $u$  en entrée (ligne continue) et couple consigne  $u_c$  (pointillés)

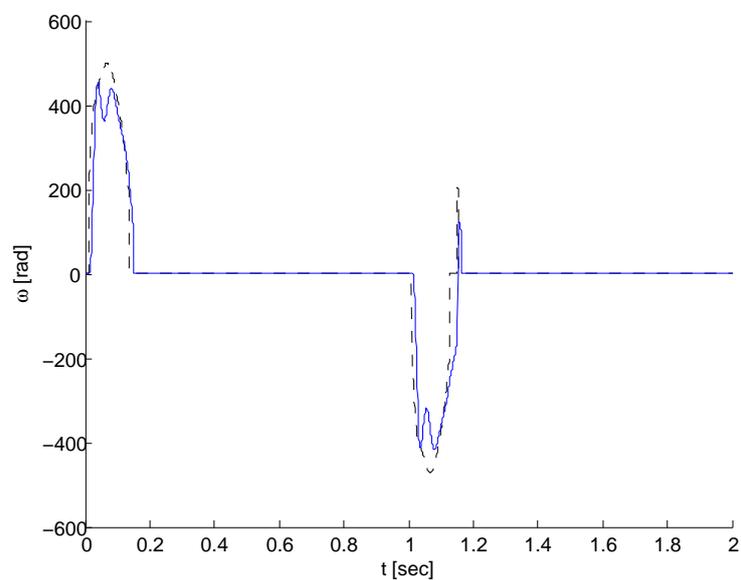


FIG. 5.28 – Réponse en simulation à un échelon de l'embrayage robotisé asservi en vitesse et en position : vitesse angulaire du moteur  $\omega$  (ligne continue) et consigne  $\omega_c$  (pointillés)

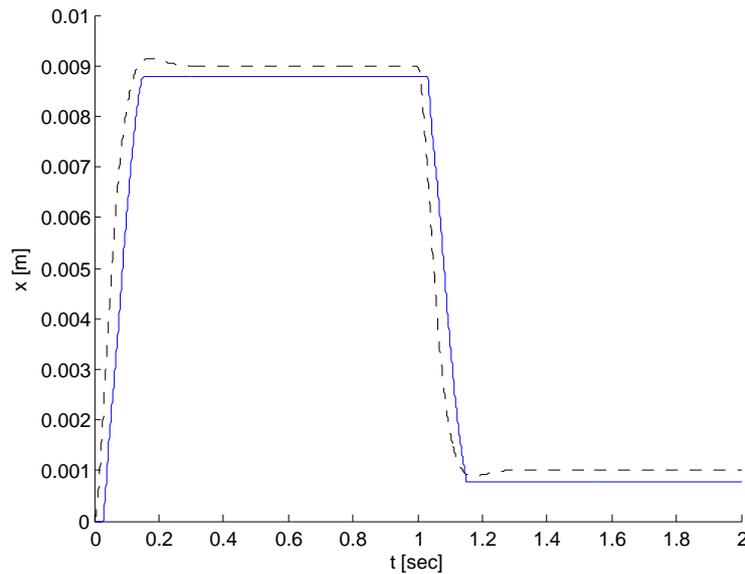


FIG. 5.29 – Réponse en simulation à un échelon de l'embrayage robotisé asservi en vitesse et en position : position de l'embrayage  $x$  (ligne continue) et consigne  $x_c$  filtrée (pointillés)

- l'erreur statique varie d'un essai à l'autre, elle reste cependant suffisamment petite pour satisfaire la précision nécessaire sur la position de l'embrayage  $x$ .

Les performances obtenues ici sont équivalentes aux résultats obtenus avec le contrôleur RST de référence (cf. 5.4.3.3) ainsi qu'avec la commande proposée en 5.4.3. On note de plus que les transitoires présents sur la figure (5.23) sont ici absents. On en déduit que la commande étudiée ici est plus robuste que la précédente.

La figure (5.32) compare la réponse à un échelon des trois commandes étudiées. La commande en position présentée dans la section 5.4.3 est la plus lente. La commande RST et celle en vitesse et position ont quasiment le même temps de réponse à 95%. Le tableau 5.3 propose l'énergie fournie par chaque commande lors d'un échelon (avec  $t \in [0, t_{int}]$ ). La commande en vitesse et position est la moins énergivore, puis vient la commande uniquement en position puis le correcteur RST de référence. Ces résultats sont cohérents, en effet :

- la commande RST est la plus rapide car elle accélère fortement le système avant de le freiner. Ainsi, de l'énergie est dépensée pour stopper le système,
- le correcteur uniquement en position a le même comportement, seulement la stratégie de limitation de cycles limites évite de dépenser de l'énergie à freiner le système lorsque l'erreur statique est faible ; en contrepartie, le temps de réponse est élevé,
- dans le cas idéal la commande en vitesse et en position fournit seulement l'énergie nécessaire au système pour atteindre la position désirée. Aucune énergie n'est consommée pour freiner le système (i.e.  $i > 0, \forall t \in [0, t_{int}]$ , cf. figure (5.33)). De plus, les caractéristiques du système et les qualités du contrôleur de vitesse permettent d'obtenir un temps réponse équivalent à la commande de RST de référence. Le gain d'énergie entre le correcteur RST

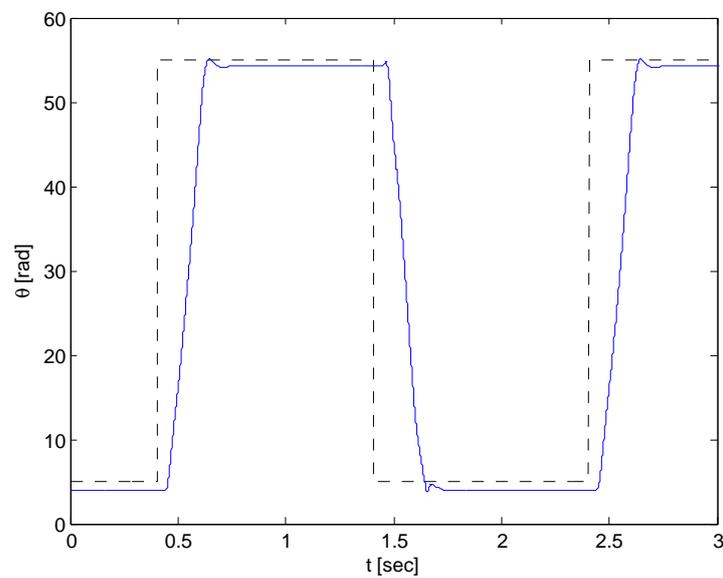


FIG. 5.30 – Position  $\theta$  (trait plein) et consigne  $\theta_c$  (pointillés) de l'embrayage robotisé asservi en vitesse (correcteur linéaire robuste) et en position (correcteur non linéaire), résultats expérimentaux

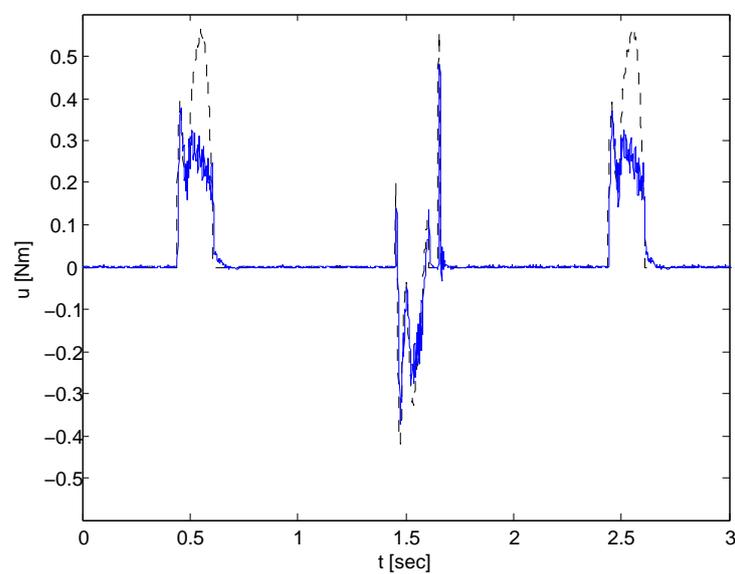


FIG. 5.31 – Commande  $u$  (trait plein) et consigne  $u_c$  (pointillés) de l'embrayage robotisé asservi en vitesse (correcteur linéaire robuste) et en position (correcteur non linéaire), résultats expérimentaux

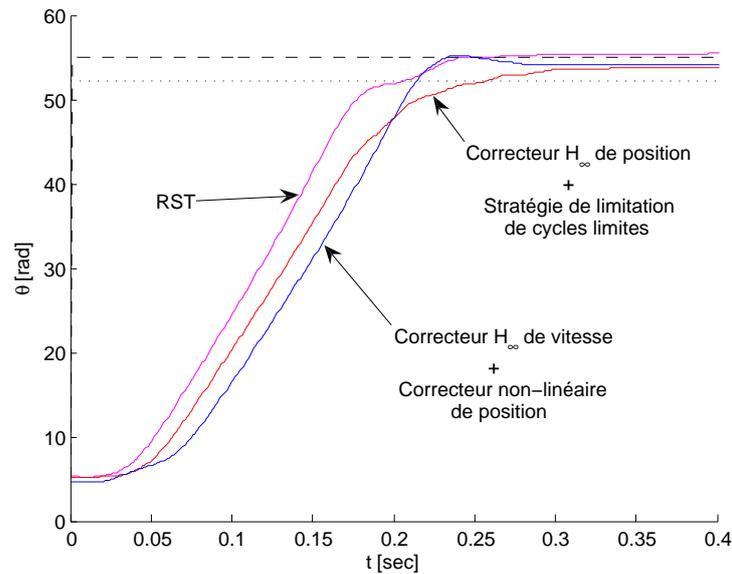


FIG. 5.32 – Comparaison des commandes : contrôleur RST (magenta), contrôleur en position présenté en 5.4.3 (rouge), contrôleur en vitesse et en position présenté en 5.4.4, consigne (tirets) et consigne à 95% (pointillés)

	contrôleur RST	contrôleur en position (cf. 5.4.3)	contrôleur en vitesse et en position (cf. 5.4.4)
$\frac{T_e}{t_{int}} \sum i^2(k) [A^2]$	223,81	222,45	210,28

TAB. 5.3 – Énergie fournie par chaque commande entre  $t = 0$  et  $t = t_{int} = 0,28$ s

et la commande en vitesse et position est de 5,8%.

## 5.5 Conclusion

Les frottements sont présents dans tout système mécanique. En dissipant de l'énergie, ils facilitent la stabilisation du système en boucle fermée. Cependant, dans le cas de frottements secs importants, les non-linéarités autour de la vitesse nulle imposent des stratégies de commande évoluées. Généralement à base de compensation de frottements, ces méthodes sont limitées par la bande passante du contrôleur.

Dans ce chapitre, l'idée n'a pas été de compenser les frottements naturels du système mais au contraire de les détourner afin de mieux contrôler le système. En utilisant les frottements secs pour stopper le système à la position désirée, on évite ainsi les cycles limites tout en optimisant la quantité d'énergie nécessaire au déplacement du système.

Notre commande est synthétisée à partir d'un modèle. Ce modèle ne représente jamais parfaitement la réalité et ainsi la commande calculée peut avoir un comportement différent en pratique

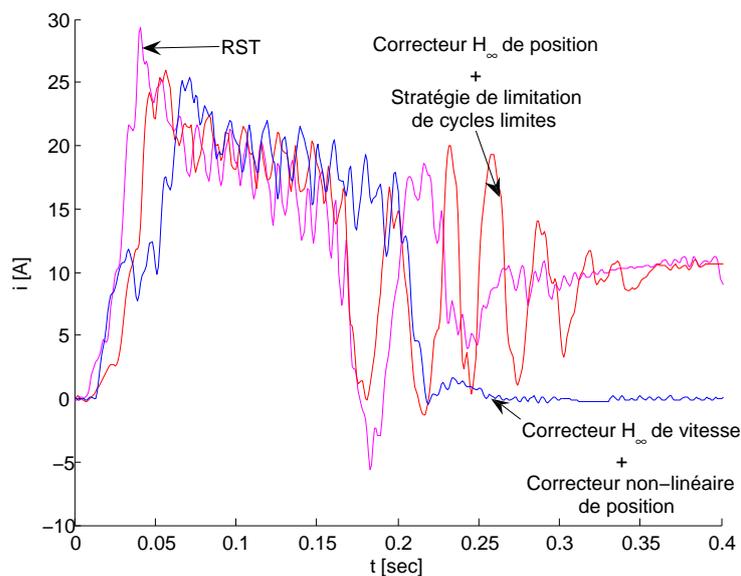


FIG. 5.33 – Comparaison des commandes : contrôleur RST (magenta), contrôleur en position présenté en 5.4.3 (rouge), contrôleur en vitesse et en position présenté en 5.4.4 et consigne (pointillés)

de celui attendu. En intégrant la notion de robustesse dans la synthèse de la commande, on peut garantir a priori que le comportement final du système bouclé sera proche de celui obtenu en simulation.

Ainsi, pour obtenir une commande robuste, il faut intégrer dans la synthèse l'erreur a priori entre le modèle et le système réel. Plusieurs méthodes existent pour cela, [54]. Ici, une approche originale d'intégration des incertitudes paramétriques dans le modèle de synthèse par modélisation LPV puis vérification a posteriori des transferts a été proposée. Afin d'obtenir un comportement adéquat, des filtres de pondération ont été ajoutés. Un soin particulier a été porté pour faire le lien entre leurs coefficients et les différentes spécifications du cahier des charges (temps de réponse, marge de module...). La méthode fût appliquée à l'embrayage robotisé déjà présenté dans la partie 2.2.

À partir de ce modèle LPV, deux commandes ont été synthétisées : la première contrôle directement le système en position, la seconde contrôle seulement la vitesse et est couplée avec un correcteur non-linéaire en cascade permettant d'asservir la position. Ces 2 commandes ont été validées en pratique sur le banc d'essai. Les performances obtenues sont équivalentes à celles du contrôleur RST servant de référence, cependant :

- les cycles limites ont disparu,
- les commandes proposées sont garanties robustes aux variations de paramètres contrairement au contrôleur RST,
- le degré des contrôleurs proposés est inférieur à celui de référence,
- la consommation d'énergie a été optimisée en particulier dans le cas de la commande en

vitesse et en position.

La position de l'embrayage est l'image du couple moteur transmis du moteur thermique à la boîte de vitesses. Ce couple est contrôlé par le conducteur via la pédale d'embrayage ou par une stratégie de plus haut niveau. Ainsi l'erreur statique observée sur la position sera naturellement corrigée afin d'obtenir le couple moteur désiré.

On peut s'interroger sur l'équivalence des performances entre un simple correcteur RST linéaire et les deux contrôleurs proposés relativement complexes. Encore une fois, la limite se situe dans la physique du système : les jeux mécaniques, la faible résolution du capteur ou encore les dynamiques du moteur électrique limitent naturellement les performances du système et cela malgré l'utilisation de théories poussées et d'algorithmes complexes.

# Chapitre 6

## Estimation de frottements secs

### 6.1 Introduction

Dans le cas de la commande d'un système soumis à des frottements secs, il peut être très intéressant d'estimer à la fois la vitesse et la valeur de ces frottements. Dans le cas des commandes étudiées, il est clair que les performances du système en boucle fermée peuvent être améliorées par une bonne estimation de ces grandeurs. Beaucoup de travaux proposent déjà des solutions basées sur des modèles de Coulomb ou de LuGre, [15, 55, 16, 17, 20, 19].

Ici encore une fois, on propose une approche hybride du problème. Le système est discrétisé en temps avant de construire l'observateur associé. Ces dernières années, de nombreuses contributions ont été faites sur cette classe de systèmes non-linéaires, [56, 57, 58, 59, 60, 61, 62].

On s'intéresse ici à estimer la vitesse et le frottement sec d'un embrayage robotisé. D'après le chapitre 3, le modèle utilisé est décomposé en 2 modes :

- Mode 0 (bloqué)

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -p_0\omega\end{aligned}\tag{6.1}$$

- Mode 1 (glissant)

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega \\ J\dot{\omega} &= u - f(\theta, \text{sign}(\omega))\end{aligned}\tag{6.2}$$

Le couple résistant est donné par la figure (6.1). On suppose le frottement visqueux négligeable, de même l'effet Stribeck et les pré-déplacements sont supposés inobservables. Dû à l'usure de l'embrayage, le couple résistant augmente lentement dans le temps. Les deux observateurs présentés proposent ainsi d'estimer cette usure. Dans le premier cas, un état  $\alpha$  est ajouté au modèle. Le couple résistant est alors égal à  $\alpha\hat{f}$ , où  $\hat{f}$  est la fonction connue à priori de  $f$ . L'usure de l'embrayage se traduit alors par l'accroissement de  $\alpha$ .

Pour le deuxième observateur, un effet intégral est ajouté : le couple résistant estimé est alors la somme de la fonction  $\hat{f}$  et de l'état intégral. Dû à la faible résolution du capteur de position du banc d'essai disponible, les observateurs présentés n'ont pas pu être validés.

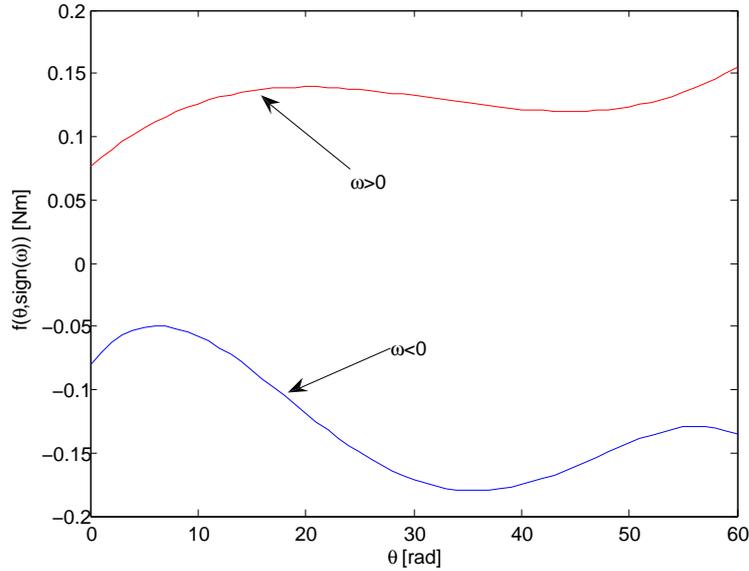


FIG. 6.1 – Fonction  $f$  utilisée pour modéliser le frottement sec d'un embrayage robotisé

## 6.2 Synthèse d'un observateur hybride robuste aux incertitudes paramétriques

Supposons un système hybride à temps discret défini par  $n$  sous-modèles :

$$\begin{aligned} X(k+1) &= A_i X(k) + B_i u(k) + Q_i \Delta(k) \\ y(k) &= C_i X(k) \end{aligned} \quad (6.3)$$

avec les matrices  $(A_i, B_i, C_i, D_i, Q_i)$  définies pour  $i \in [1, n]$ ,  $Q_i \Delta(k)$  représente l'incertitude sur le modèle  $i$  à l'instant  $k$ . L'objectif est de synthétiser un observateur robuste à temps discret qui estime une combinaison linéaire du vecteur d'état  $X(k)$ . Plus précisément, il doit minimiser :  $z(k) = \bar{C}_i (X(k) - \hat{X}(k))$ , où  $\hat{X}(k)$  est l'état estimé du système et  $\bar{C}_i$  une matrice choisie par le concepteur. L'observateur hybride d'ordre plein est construit suivant la forme :

$$\hat{X}(k+1) = A_i \hat{X}(k) + B_i u(k) + L_i (y(k) - C_i \hat{X}(k)) \quad (6.4)$$

où  $L_i$  est le gain proportionnel associé au modèle  $i$ . On assume dans un premier temps que le mode  $i$  du système (6.3) est connu. L'étude de l'équation aux différences  $e(k) = X(k) - \hat{X}(k)$  montre d'après la structure de l'observateur (6.4) et du système (6.3) que :

$$\begin{aligned} e(k+1) &= (A_i - L_i C_i) e(k) + Q_i \Delta(k) \\ z(k) &= \bar{C}_i e_k \end{aligned} \quad (6.5)$$

Le problème de synthèse de l'observateur peut ainsi être formulé :

**Problème 6.2.1 (Synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  de l'observateur)**

Le problème  $\mathcal{H}_\infty$  de synthèse d'observateur est de trouver les gains  $L_i$  de l'observateur (6.4) tels que les spécifications suivantes sont vérifiées :

- $S_1$  : l'erreur d'estimation  $e(k)$  est globalement asymptotiquement stable quand  $\Delta(k) = 0$
- $S_2$  : sous l'hypothèse de conditions initiales nulles, l'erreur  $z(k) = \bar{C}_i (X(k) - \hat{X}(k))$  vérifie  $\|z(k)\|_2 \leq \gamma \|\Delta(k)\|_2$  pour une constante  $\gamma > 0$  minimale et quelque soit  $\Delta(k) \in l_2[0, \infty)$  non nul.

Dans le cas étudié, la solution du problème 6.2.1 est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 6.2.1**

Pour  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  (où le couple  $(i, j)$  représente les commutations possibles du système hybride considéré), si toutes les paires  $(A_i, C_i)$  sont détectables et s'il existe un scalaire  $\gamma > 0$  minimal tel que la LMI suivante en  $P_i \in \mathbb{R}^{l \times l} > 0$  et  $V_i \in \mathbb{R}^{l \times m} > 0$  soit vérifiée pour tout  $(i, j)$  :

$$\begin{pmatrix} -P_i + \bar{C}_i^T \bar{C}_i & 0 & A_i^T P_i - C_i^T V_i \\ * & -\gamma^2 I & Q_i^T P_i \\ * & * & P_j - 2P_i \end{pmatrix} < 0 \quad (6.6)$$

alors l'observateur (6.4) du système (6.3) garantissant  $S_1$  et  $S_2$  existe et ses gains sont donnés par  $L_i = V_i^T P_i^{-1}$ .

Les lemmes suivants sont nécessaires à la preuve du théorème 6.2.1.

**Lemme 6.2.1**

Soit  $R > 0$  et  $S > 0$  des matrices données et l'inégalité quadratique suivante :  $(R - S)S^{-1}(R - S) \geq 0$ . Un simple développement démontre que :

$$-RS^{-1}R \leq S - 2R$$

**Lemme 6.2.2 (Lemme de Schur, [49])**

Soit  $Q > 0, S > 0$  et  $R$  des matrices données. Alors les expressions suivantes sont équivalentes :

$$a : \begin{pmatrix} Q & R \\ R^T & S \end{pmatrix} > 0 \quad (6.7)$$

$$b : Q - RS^{-1}R^T > 0$$

$$c : S - R^T Q^{-1}R > 0$$

**Démonstration 6.2.1 (Démonstration du théorème 6.2.1)**

Avant d'établir les conditions suffisantes d'existence de (6.4) vérifiant les spécifications  $S_1$  et  $S_2$ . Celles-ci sont satisfaites si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$e^T(k+1)P_j e(k+1) - e^T(k)P_i e(k) + z^T(k)z(k) - \gamma^2 \Delta^T(k)\Delta(k) < 0 \quad (6.8)$$

où  $P_i$  et  $P_j$  sont 2 matrices définies positives,  $i$  et  $j$  sont respectivement les modèles du système hybride actif aux instants  $k$  et  $k + 1$ . À partir de (6.8) et (6.5), il vient :

$$\begin{pmatrix} (A_i - L_i C_i)^T P_j (A_i - L_i C_i) - P_i + \bar{C}_i^T \bar{C}_i & (A_i - L_i C_i)^T P_j Q_i \\ * & Q_i^T P_j Q_i - \gamma^2 I \end{pmatrix} < 0 \quad (6.9)$$

Cette inégalité est équivalente d'après le lemme de Schur ( $b \rightarrow a$ ) à :

$$\begin{pmatrix} -P_i + \bar{C}_i^T \bar{C}_i & 0 & (A_i - L_i C_i)^T \\ * & -\gamma^2 I & Q_i^T \\ * & * & -P_j^{-1} \end{pmatrix} < 0 \quad (6.10)$$

L'expression (6.10) est multipliée de part et d'autre par  $\text{diag}\{I, I, P_i\}$ , pour obtenir l'équivalence suivante :

$$\begin{pmatrix} -P_i + \bar{C}_i^T \bar{C}_i & 0 & (A_i - L_i C_i)^T P_i \\ * & -\gamma^2 I & Q_i^T P_i \\ * & * & -P_i P_j^{-1} P_i \end{pmatrix} < 0 \quad (6.11)$$

En accord avec le lemme 6.2.1, (6.11) peut être majoré par :

$$\begin{pmatrix} -P_i + \bar{C}_i^T \bar{C}_i & 0 & A_i^T P_i - C_i^T L_i^T P_i \\ * & -\gamma^2 I & Q_i^T P_i \\ * & * & P_j - 2P_i \end{pmatrix} < 0 \quad (6.12)$$

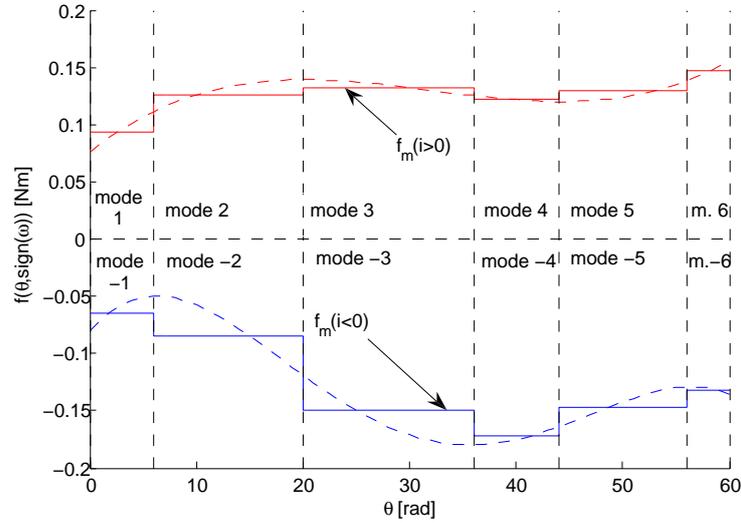
et en posant  $V_i = L_i^T P_i$ , l'expression (6.6) est alors obtenue.

## 6.3 Estimation du frottement sec avec effet intégral multiplicatif

### 6.3.1 Formulation du problème

En mode 1, l'usure de l'embrayage est estimée via l'ajout d'un état supplémentaire  $\alpha \in [0, \alpha_{\max}]$  variant lentement dans le temps (i.e.  $\dot{\alpha} = 0$ ). Le couple résistant est alors égal à  $\alpha \hat{f}$ , où  $\hat{f}$  est le couple résistant a priori du système (cf. figure (6.1)). Le modèle utilisé par l'observateur est alors :

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega \\ J\dot{\omega} &= u - \alpha \hat{f}(\theta, \text{sign}(\omega)) \\ \dot{\alpha} &= 0 \\ y(t) &= \theta \end{aligned} \quad (6.13)$$


 FIG. 6.2 – Discrétisation spatiale de la fonction  $f$ 

Suivant les équations (6.1), l'état  $\alpha$  n'est pas observable lorsque le système est en mode 0. Pour obtenir cette observabilité, on suppose mesurer en mode 0 ce coefficient  $\alpha$ , le système devient ainsi :

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta} &= \omega \\
 \dot{\omega} &= -p_0\omega \\
 \dot{\alpha} &= 0 \\
 y(t) &= \begin{pmatrix} \theta \\ \alpha \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

En pratique, l'état estimé  $\hat{\alpha}$  sera la mesure utilisée de  $\alpha$  lorsque le système sera en mode 0, l'estimation de l'usure sera ainsi gelée. Dans la suite, on supposera le système en mode 0 lorsque sa vitesse est inférieure à la vitesse minimale mesurable  $\Sigma$ . Ainsi, on est sûr que l'observateur est en mode 0 lorsque le système est immobile. Par contre, l'observateur peut être en mode 0 et le système en mouvement, dans ce cas l'erreur ne provoque pas de divergence sur l'estimation de  $\alpha$  (celle-ci est gelée).

Le modèle (6.13) décrivant le mode 1 ( $|\omega| > \Sigma$ ) est non linéaire (fonction  $\hat{f}$  polynômiale en  $\theta$ ). Cependant, en divisant ce mode en plusieurs modes, on peut obtenir un système LPV à temps discret. Tout d'abord, les vitesses positives et négatives sont décrites par 2 modes différents. Ensuite dans chaque cas, la fonction  $f$  est discrétisée en  $n$  intervalles suivant la figure (6.2). Le système (6.13) est alors approché par  $2n$  sous-modèles linéaires perturbés :

– si  $\omega > \Sigma$

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega \\ J\dot{\omega} &= u - \alpha(f_m^+(i) + \delta f(t)) \\ \dot{\alpha} &= 0\end{aligned}\tag{6.15}$$

– si  $\omega < -\Sigma$

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega \\ J\dot{\omega} &= u + \alpha(f_m^-(i) + \delta f(t)) \\ \dot{\alpha} &= 0\end{aligned}\tag{6.16}$$

où pour  $\theta \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$ ,  $f_m^\pm(i) = \frac{\hat{f}(\theta_i, \text{sign}(\omega)) + \hat{f}(\theta_{i-1}, \text{sign}(\omega))}{2}$  et  $|\delta_f(k)| < |\Delta_f(i)|$  avec  $\Delta_f(i) = \frac{\hat{f}(\theta_i, \text{sign}(\omega)) - \hat{f}(\theta_{i-1}, \text{sign}(\omega))}{2}$ .

$\delta_f(k)$  est l'écart entre le modèle discrétisé spatialement et le modèle continu. Cette différence est considérée comme une incertitude. La discrétisation de  $\hat{f}$  est choisie de telle sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$\begin{cases} \hat{f}(\theta, \text{sign}(\omega)) > \min(\hat{f}(\theta_i, \text{sign}(\omega)), \hat{f}(\theta_{i-1}, \text{sign}(\omega))) \\ \hat{f}(\theta, \text{sign}(\omega)) < \max(\hat{f}(\theta_i, \text{sign}(\omega)), \hat{f}(\theta_{i-1}, \text{sign}(\omega))) \end{cases}\tag{6.17}$$

L'inégalité  $|\delta_f(k)| < |\Delta_f|$  est ainsi garantie. Finalement par une approximation d'Euler, le modèle est discrétisé en temps. La période d'échantillonnage est notée  $T_e$ . Un scalaire  $i$  représente le modèle actif à l'instant  $kT_e$ . Les modèles sont numérotés de  $-n$  à  $-1$  ( $\omega < -\Sigma$ ) et de  $1$  à  $n$  ( $\omega > \Sigma$ ). Lorsque la vitesse est négligeable ( $|\omega| < \Sigma$ ),  $i$  est égal à  $0$ .

$$\begin{aligned}X(k+1) &= A_i X(k) + B_i u(k) + Q_i \Delta(k) \\ y(k) &= C_i X(k)\end{aligned}\tag{6.18}$$

où

$$X(k) = \begin{pmatrix} y(k) \\ v(k) \\ \alpha(k) \end{pmatrix}, B_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{T_e}{J_m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

pour  $i \in [1, n]$  :

$$\begin{aligned}A_i &= \begin{pmatrix} 1 & T_e & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{T_e}{J} f_m^+(i) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ Q_i &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{T_e}{J} \Delta_f(i) \\ 0 \end{pmatrix} C_i = (1 \ 0 \ 0)\end{aligned}$$

pour  $i \in [-n, -1]$  :

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & T_e & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{T_e}{J} f_m^-(i) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{T_e}{J} \Delta_f(i) \\ 0 \end{pmatrix}, C_i = (1 \ 0 \ 0)$$

pour  $i = 0$

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & T_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec grâce à (6.17) :

$$\Delta(k) = \frac{\delta_f(k)}{\Delta_f(i)} \alpha(k)$$

$$|\Delta(k)| < \alpha(k) < \alpha_{\max}$$

Une fois l'ensemble des modèles définis, il reste à déterminer les règles de commutations entre chacun. On suppose pour cela, que lorsque le système est dans un mode positif ( $i > 0$ ), il ne peut commuter que dans le mode 0 où dans le mode immédiatement supérieur  $i + 1$ . Si le mode est négatif ( $i < 0$ ), les règles s'inversent. Du mode  $i = 0$ , le système commute dans n'importe quel autre mode. La figure (6.3) résume l'ensemble des commutations possibles.

Le modèle (6.18) est de la forme (6.3), l'observateur proposé dans la section 6.2 peut donc être construit. On choisit :

$$\bar{C}_i = \bar{C} = \begin{pmatrix} c_\theta & 0 & 0 \\ 0 & c_\omega & 0 \\ 0 & 0 & c_\alpha \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

Le choix des scalaires  $c_\theta$ ,  $c_\omega$ ,  $c_\alpha$  permet de régler les dynamiques du système.  $c_\theta$  est fixé arbitrairement à 1. Plus  $c_\omega$  sera choisi grand, plus la dynamique de l'erreur de vitesse sera élevée mais plus l'observateur sera sensible au bruit de quantification du capteur de position. Le paramètre  $\alpha$  est supposé varier lentement, ainsi  $c_\alpha$  sera choisi petit devant  $c_\theta$  et  $c_\omega$ .

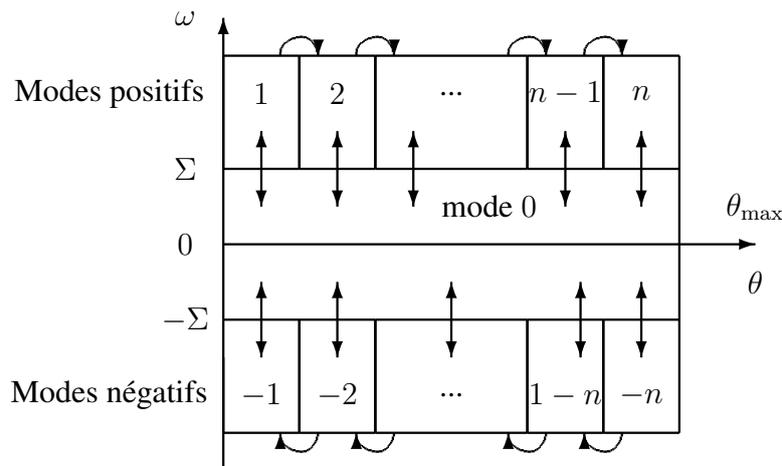


FIG. 6.3 – Schéma récapitulatif des différentes commutations possibles entre chaque mode

### 6.3.2 Résultats en simulation

Pour tester en simulation l'observateur développé ici, le modèle proposé dans la section 4.4 est utilisé sans prise en compte du jeu mécanique et des frottements visqueux, on se ramène ainsi au système décrit par les équations (6.1) et (6.2). L'embrayage robotisé est asservi à l'aide du correcteur RST utilisé dans la section 5.4.3.3. Les scalaires  $c_\theta$ ,  $c_\omega$  et  $c_\alpha$  sont choisis respectivement égaux à 1, 100 et 0.001. L'observateur est construit suivant les règles de commutations définies par la figure (6.3). Le coefficient  $\alpha$  n'est estimé que lorsque  $|\omega|$  est supérieur à  $\Sigma$ , la vitesse minimale mesurable (évitant ainsi le mode "collé", inobservable). Le capteur de position est supposé parfait, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de bruit de quantification.  $\Sigma$  est choisi égal à 100rad/s en cohérence avec les paramètres de simulation du modèle hybride (cf. chapitre 3).

Dans un premier temps, l'embrayage suit une trajectoire sinusoïdale entre 0 et 60rad et de fréquence 2Hz. La période d'échantillonnage de l'observateur est égale à 1ms (identique à celle du contrôleur). À  $t = 5s$ , le couple résistant  $f$  est multiplié par 1,5. Comme le montre la figure (6.4), le coefficient d'usure  $\alpha$  converge vers la nouvelle valeur. La figure (6.5) permet de visualiser l'effet sur le couple résistant observé  $\alpha(k)f_m(i)$  : l'observateur minimise bien l'écart entre la fonction  $f$  et son approximation à l'instant  $k$   $f_m(i)$ .

En pratique, la position du système est connue via un capteur incrémentiel avec un pas de quantification  $\delta_\theta$ . Ainsi comme il l'a été expliqué dans le chapitre 4, la quantité d'information disponible sur le système à l'instant  $k$  s'en trouve réduite.

Pour la première simulation, les frottements visqueux n'ont pas été pris en compte. De plus la valeur numérique de l'inertie de l'observateur est identique à celle du système. Enfin, la trajectoire sinusoïdale de référence appliquée au système ne correspond pas à l'utilisation finale de celui-ci.

Pour le deuxième test, on souhaite se rapprocher des conditions réelles auxquelles l'observateur doit se confronter, ainsi :

- on ajoute un capteur incrémentiel avec un pas de quantification  $\delta_\theta = \frac{2\pi}{56}$ ,

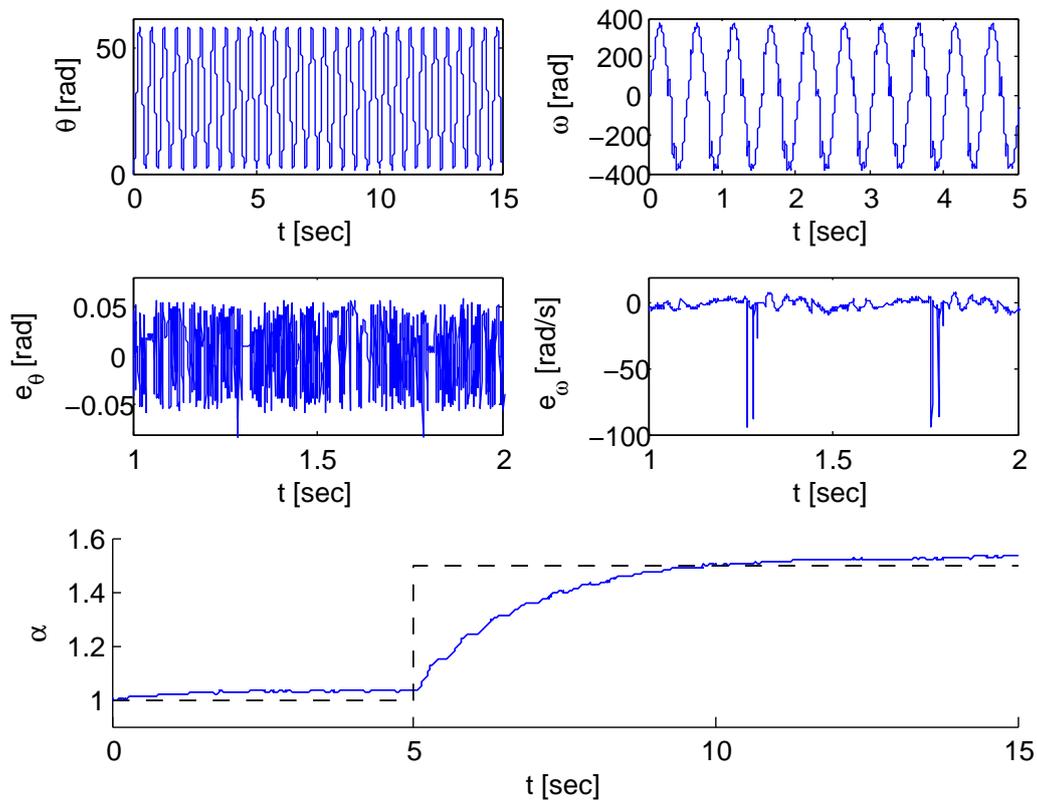


FIG. 6.4 – Estimation de la position, de la vitesse et du coefficient d'usure  $\alpha$  (référence en pointillés) de l'embrayage robotisé en simulation ( $e_\theta = \theta - \hat{\theta}$  et  $e_\omega = \omega - \hat{\omega}$ )

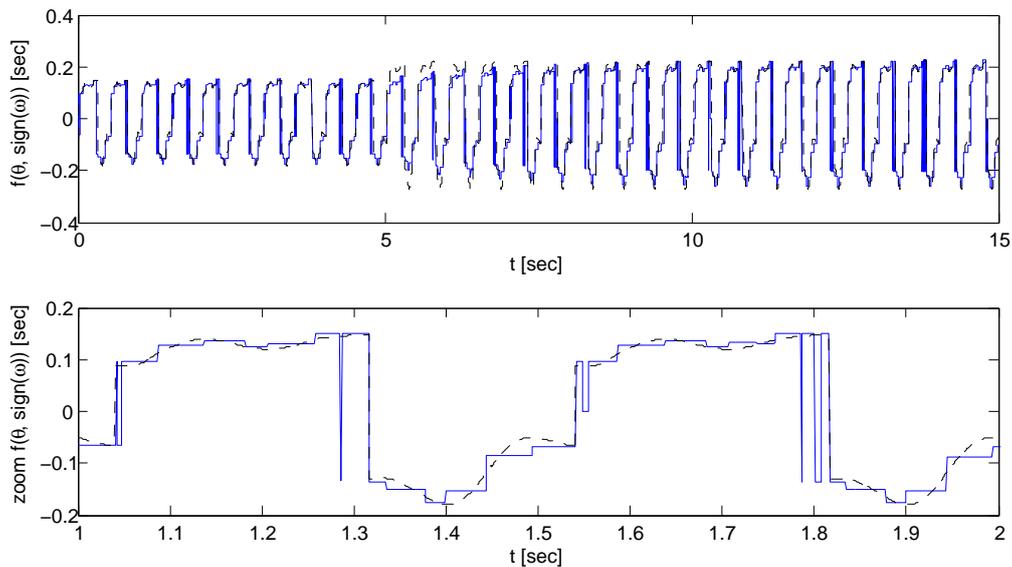


FIG. 6.5 – Estimation du frottement sec  $\alpha(k)f_m(i)$  (ligne continue) et frottement sec  $f$  simulé de l’embrayage robotisé (pointillés)

- l’inertie de l’observateur est choisie 20% plus petite que celle du système,
- les frottements visqueux sont ajoutés (cf. chapitre 4),
- les jeux mécaniques sont intégrés au modèle,
- la fonction  $f$  est choisie identique pour l’observateur et le système (donc la valeur d’équilibre de  $\alpha$  est proche de 1),
- une série d’échelons tout d’abord entre 0 et 30rad puis entre 20 et 50rad sert de trajectoire de référence pour  $\theta$

les figures (6.6) et (6.7) présentent les résultats obtenus en simulation. On note que :

- le capteur de position augmente l’erreur d’estimation de la vitesse  $\omega$  (largement supérieure à celle visible sur la figure (6.4)),
- le coefficient  $\alpha$  converge vers une valeur différente de 1, celle-ci dépend de la trajectoire de  $\theta$ ,
- l’estimation de  $\alpha(k)f_m(i)$  est fortement détériorée par l’ajout des frottements visqueux, des jeux mécaniques, et de l’incertitude paramétrique sur l’inertie.

Malgré les excellentes performances de l’observateur dans le cas idéal, celui-ci donne de mauvais résultats si un modèle plus complexe du simulation est utilisé. Si cet observateur est implanté sur le banc d’essai, l’estimation du frottement sec sera encore plus dégradée rendant impossible toute stratégie de diagnostic d’usure ou de commande par compensation de frottements.

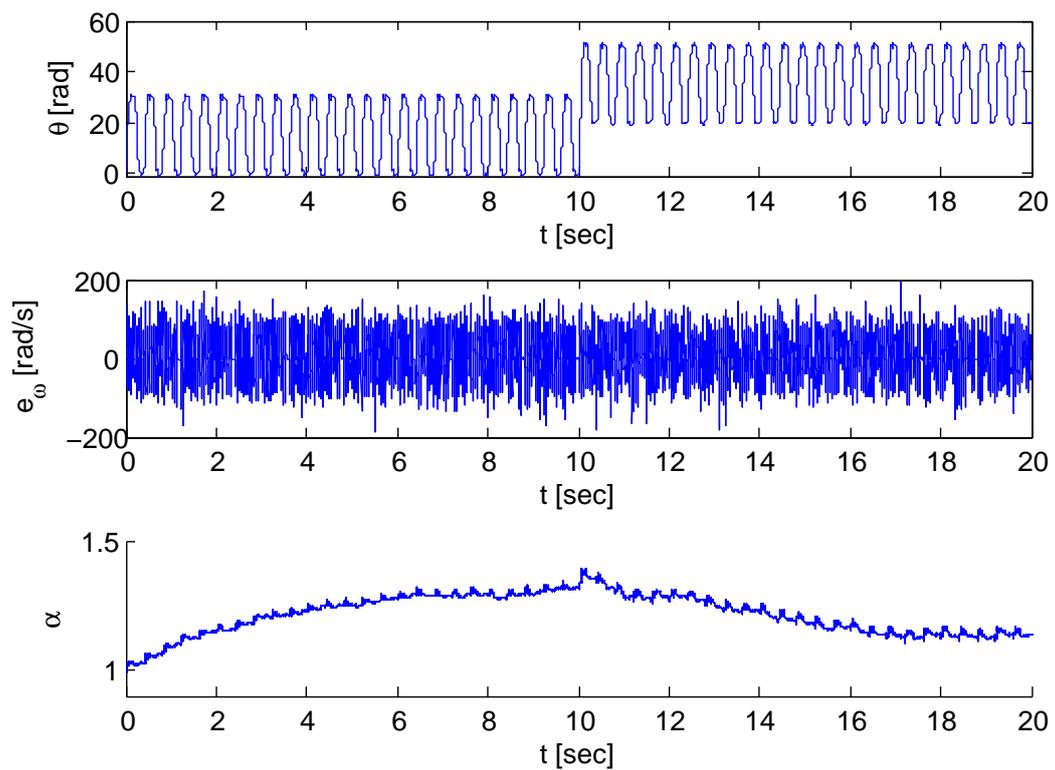


FIG. 6.6 – Position du système, erreur d'estimation de la vitesse et coefficient d'usure  $\alpha$  de l'embrayage robotisé - simulation avec prise en compte des erreurs de modélisation et du capteur de position

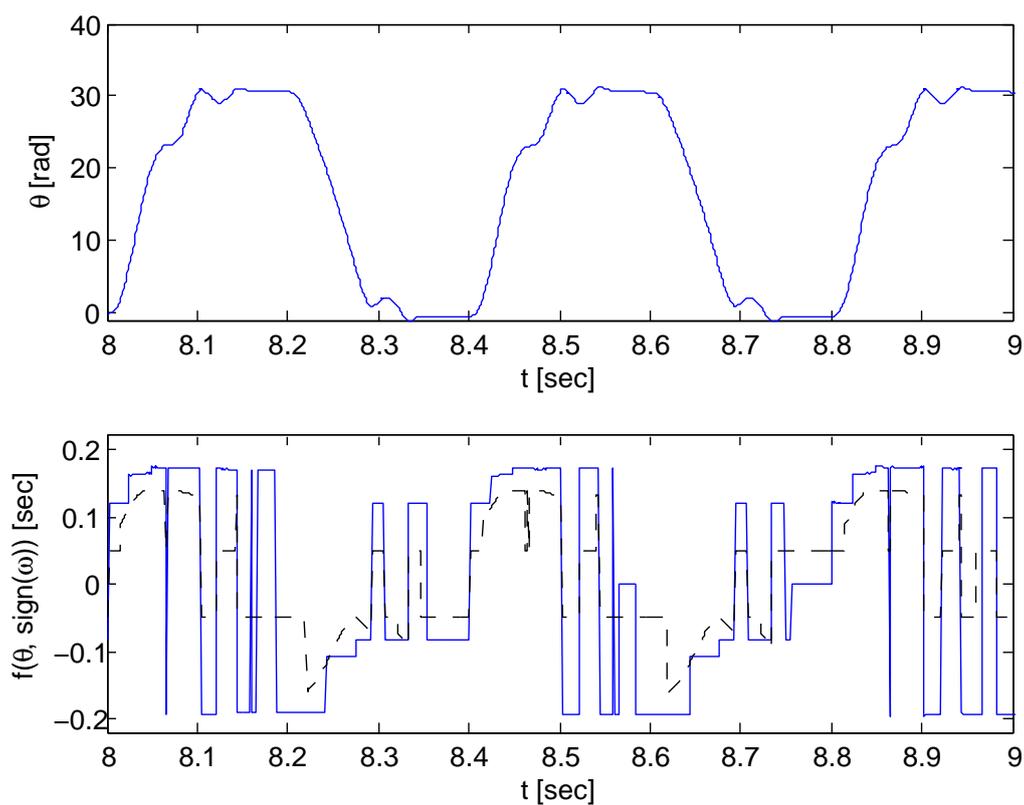


FIG. 6.7 – Estimation du frottement sec  $\alpha(k)f_m(i)$  (ligne continue) et frottement sec  $f$  simulé de l'embrayage robotisé (pointillés) - simulation avec prise en compte des erreurs de modélisation et du capteur de position

## 6.4 Observateur hybride avec effet intégral

### 6.4.1 Formulation du problème

L'observateur proposé en 6.3 suppose que l'usure de l'embrayage entraîne une amplification du couple résistant  $f$  égal à  $\alpha f$ . Cependant, il est possible que le vieillissement du système ne soit pas homogène sur l'ensemble de la plage de fonctionnement  $[0, \theta_{\max}]$ . Dans ce cas, les coefficients des polynômes en  $\theta$  modélisant le couple résistant du système varient les uns par rapport aux autres. Le principe utilisé précédemment ne peut pas être utilisé.

Dans la section 6.3, le couple résistant  $f$  était multiplié par le coefficient d'usure. Ici, on propose de considérer  $\alpha$  comme l'écart entre le couple résistant  $\hat{f}$  connu a priori et le couple résistant réel  $f$ . Pour cela, reprenant le système (6.2), le modèle est découpé en seulement 3 modèles : vitesse positive ( $\omega > \Sigma$ , mode +1), vitesse négative ( $\omega < -\Sigma$ , mode -1) et vitesse négligeable ( $|\omega| < \Sigma$ , mode 0). Après une discrétisation en temps suivant l'approximation d'Euler, le système peut être mis sous la forme :

$$\begin{aligned} X(k+1) &= A_i X(k) + B_i u(k) + F_i(X(k)) \\ y(k) &= CX(k) \end{aligned} \quad (6.20)$$

où

$$X(k) = \begin{pmatrix} \theta(k) \\ \omega(k) \end{pmatrix}, C = (1 \ 0)$$

$$\begin{aligned} A_{+1} &= A_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & T_e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} 1 & T_e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B_{+1} &= B_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{T_e}{J} \end{pmatrix}, B_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ F_{+1} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{T_e f(\theta, \omega > 0)}{J} \end{pmatrix}, F_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{T_e f(\theta, \omega < 0)}{J} \end{pmatrix}, F_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La fonction non-linéaire  $F_i$  est réécrite ainsi :

$$F_i(X(k)) = \bar{F}_i(X(k)) + \tilde{F}_i \Delta(k)$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{F}_{+1} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{T_e \hat{f}(\theta, \omega > 0)}{J} \end{pmatrix}, \bar{F}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{T_e \hat{f}(\theta, \omega < 0)}{J} \end{pmatrix} \\ \tilde{F}_{+1} &= -\tilde{F}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{T_e}{J} \end{pmatrix}, F_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\bar{F}_i$  est une fonction non-linéaire connue en  $X(k)$ ,  $\tilde{F}_i$  est une matrice constante aux dimensions appropriées, et  $\Delta(k)$  représente l'écart inconnu entre  $f$  et  $\hat{f}$ . On suppose la séquence de commutation connue en temps réel grâce aux entrées et aux sorties du système. En supposant le mode  $i$

actif à l'instant  $k$ , le système peut être mis sous la forme (6.20) :

$$\begin{aligned} X(k+1) &= A_i X(k) + B_i u(k) + \bar{F}_i(X(k)) + \tilde{F}_i \Delta X(k) \\ y(k) &= CX(k) \end{aligned} \quad (6.21)$$

Ce type de système LPV discret est largement utilisé dans de nombreuses références [63]. Contrairement à la section 6.2,  $F_i$  est supposée être une fonction non-linéaire continue en  $X(k)$ ,  $F_i$  peut cependant être discontinue durant les commutations. Cela signifie que  $F_i(X(k))$  peut être différente de  $F_j(X(k+1))$  quand la période d'échantillonnage  $T_e$  tend vers 0. À partir de (6.21), l'observateur suivant est construit :

$$\begin{aligned} \hat{X}(k+1) &= A_i \hat{X}(k) + B_i u(k) + \bar{F}_i(\hat{X}(k)) + B_i \alpha(k) + L_{X_i}(y(k) - CX(k)) \\ \alpha(k+1) &= \alpha(k) + L_{\alpha_i}(y(k) - CX(k)) \end{aligned} \quad (6.22)$$

$\alpha$  permet d'ajouter un effet intégral à l'observateur, la dynamique de l'erreur d'estimation du système augmenté s'écrit :

$$e_a(k+1) = (A_{ai} - L_{ai}C_{ai})e_a(k) + \tilde{F}_{ai}\Delta(k) \quad (6.23)$$

où :

$$e_a(k) = \begin{pmatrix} e(k) \\ \alpha(k) \end{pmatrix}, \quad (6.24)$$

$$A_{a+1} = \begin{pmatrix} A_{+1} & -B_{+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_{a-1} = \begin{pmatrix} A_{-1} & B_{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_{a0} = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.25)$$

$$C_{ai} = (C_i \ 0), \tilde{F}_{ai} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_i \\ 0 \end{pmatrix}, L_{ai} = \begin{pmatrix} L_{X_i} \\ L_{\alpha_i} \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

L'expression (6.22) est de la même forme que la dynamique de l'erreur d'estimation (6.5), et une fois la sortie  $z$  définie par  $\bar{C}e_a(k)$  avec la matrice  $\bar{C}$  égale à (6.18), on peut utiliser ce modèle pour synthétiser un observateur suivant la méthode présentée dans la section 6.2.

## 6.4.2 Résultats en simulation

Le premier test proposé dans la section 6.3.2 est appliqué à l'observateur présenté ici. À  $t = 5s$ , le couple résistant  $f$  est augmenté de 50%. La figure (6.8) présente le résultat obtenu en simulation. L'état  $\alpha$  permet de corriger la fonction  $\hat{f}$ .

Dans le cas idéal représenté par la première simulation, les résultats obtenus sont très bons, mais au fur à mesure que les phénomènes non-modélisés par l'observateur sont ajoutés, les performances de celui-ci se dégradent. Pour s'en persuader, le deuxième test présenté dans la section 6.3.2 est simulé. Les figures (6.9) et (6.10) montrent cette détérioration :

- dû au bruit de quantification du capteur, l'erreur d'estimation de la vitesse augmente,
- le paramètre  $\alpha$  compense l'écart de modélisation entre l'observateur et le modèle de simulation expliquant ses variations importantes entre  $-0,1$  et  $0,15\text{Nm}$  (de l'ordre de grandeur de  $f$ ),

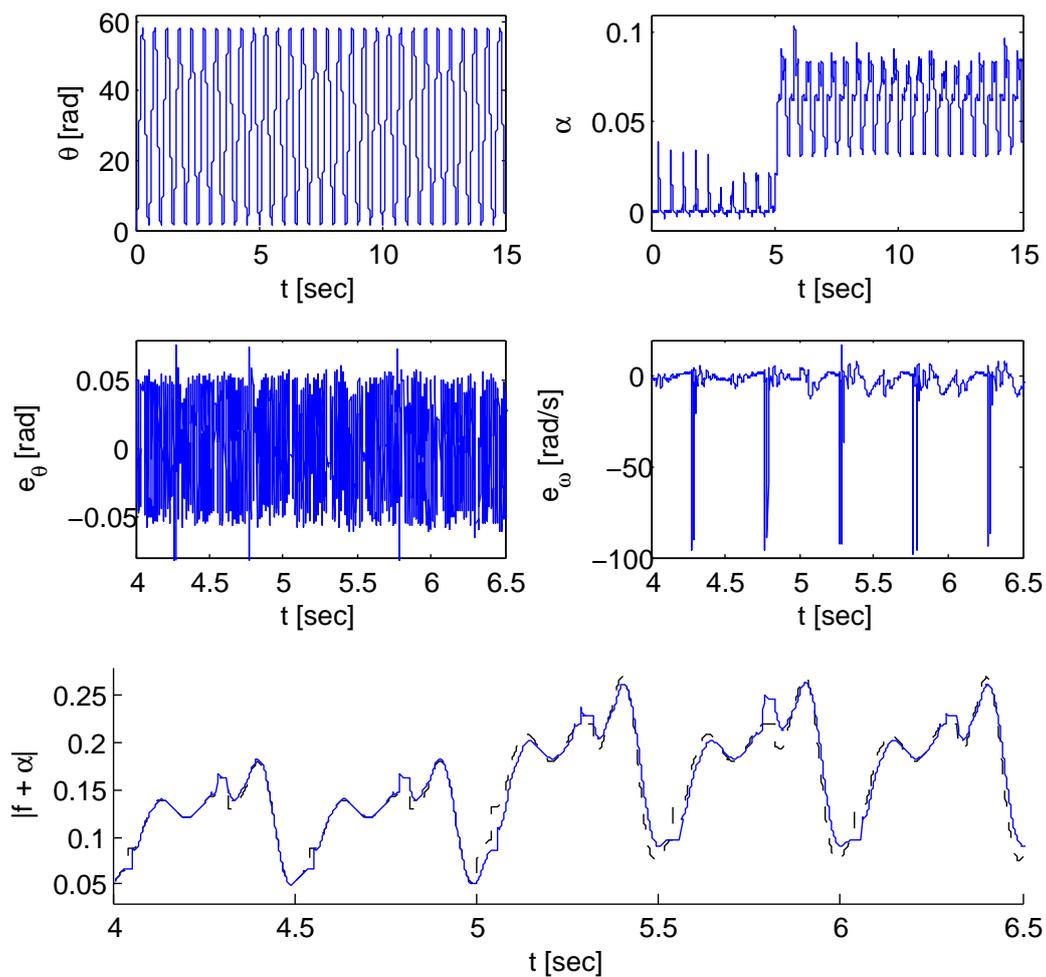


FIG. 6.8 – Estimation de la position, de la vitesse et du frottement sec  $\hat{f} + \alpha$  (référence en pointillés) de l’embrayage robotisé en simulation ( $e_\theta = \theta - \hat{\theta}$  et  $e_\omega = \omega - \hat{\omega}$ )

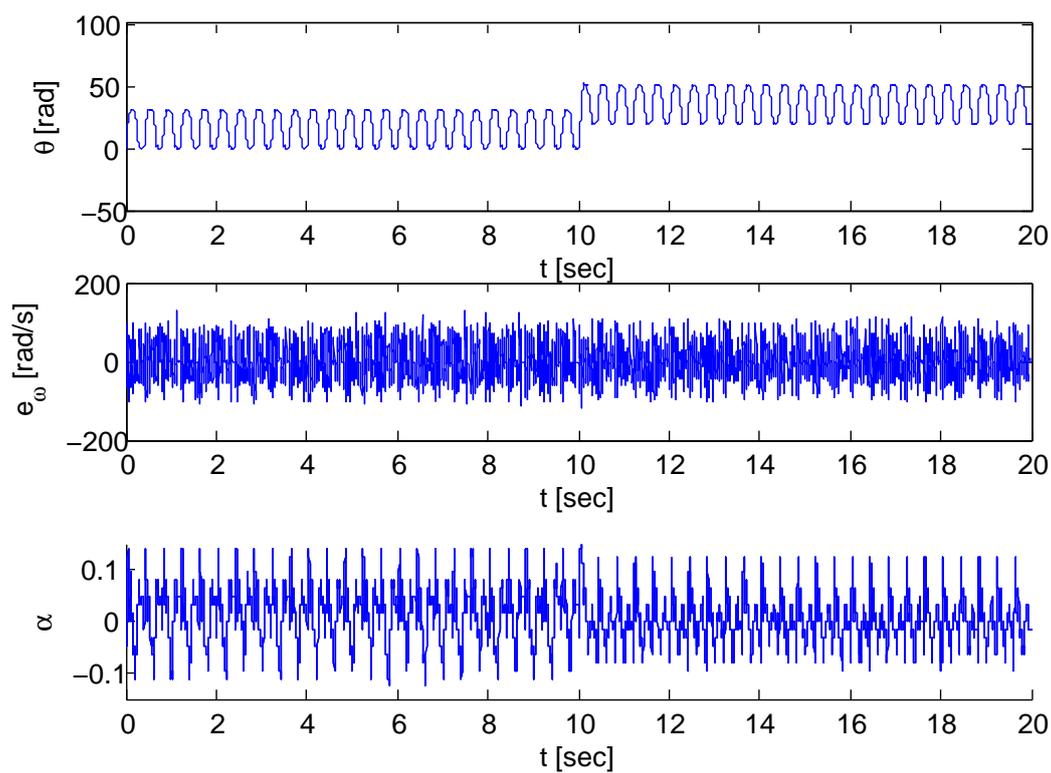


FIG. 6.9 – Position du système, erreur d'estimation de la vitesse et coefficient d'usure  $\alpha$  de l'embrayage robotisé - simulation avec prise en compte des erreurs de modélisation et du capteur de position

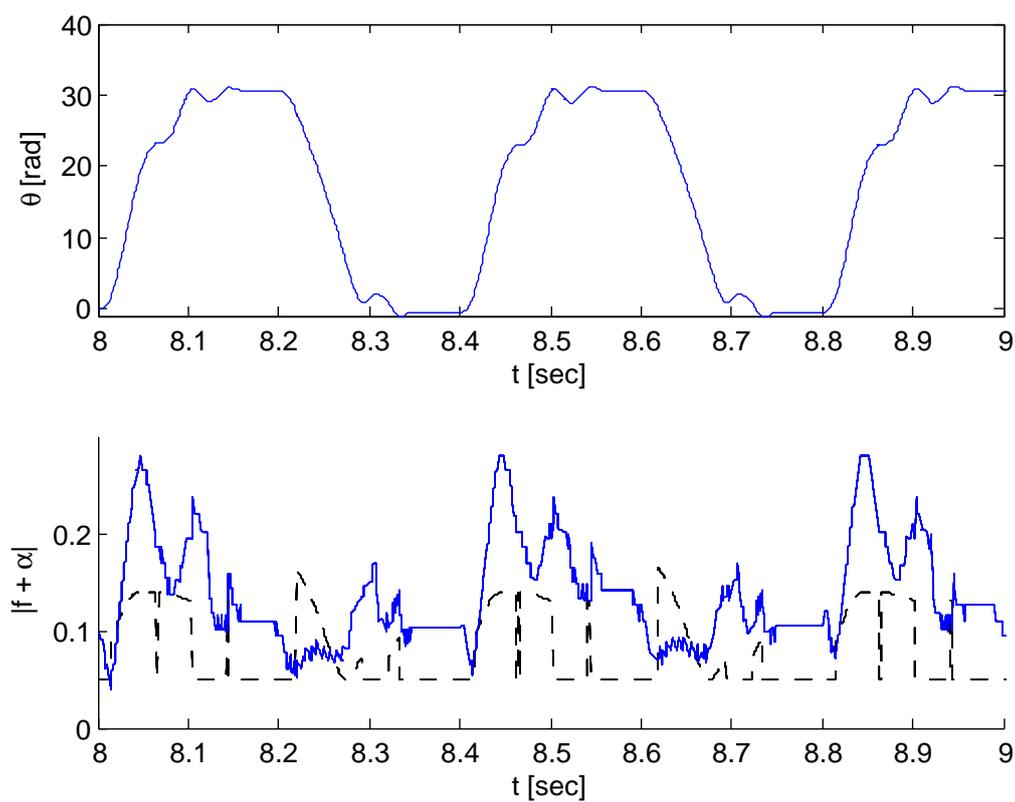


FIG. 6.10 – Estimation du frottement sec  $\hat{f} + \alpha$  (ligne continue) et frottement sec  $f$  simulé de l’embrayage robotisé (pointillés) - simulation avec prise en compte des erreurs de modélisation et du capteur de position

- la valeur du frottement sec estimé  $\hat{f} + \alpha$  est erronée (à cause des approximations de modélisation faites sur l'observateur).

Comme pour l'observateur présenté dans la section 6.3, la médiocrité des résultats présentée provient de l'ajout d'un capteur de position avec un pas de quantification important ainsi que de l'écart entre le modèle utilisé par l'observateur et le système simulé. Ainsi, malgré les capacités théoriques de l'observateur, celui-ci ne peut être intégré dans une commande afin d'estimer les frottements et de les compenser.

## 6.5 Conclusion

Les commandes dédiées aux systèmes soumis à des frottements secs sont généralement basées sur la compensation de ces derniers. Dans le cas des commandes proposées, une bonne connaissance des frottements est aussi nécessaire pour régler au plus juste les coefficients des correcteurs. Ainsi, naturellement il vient l'idée d'estimer ces frottements en temps réel à l'aide d'un observateur et de la mesure de la position. La particularité du système étudié (des frottements dépendant de la position suivant une fonction polynomiale) impose de développer des observateurs spécifiques à cette application. Ainsi dans ce chapitre, à partir d'une discrétisation temporelle du modèle hybride, deux observateurs multi-modaux ont été proposés.

Pour le premier observateur, l'usure du système est supposée faire varier linéairement la fonction  $f$  représentant les frottements. Un état  $\alpha$  est ajouté, le frottement sec est alors égal à  $\alpha f$ . La fonction  $f$  est ensuite discrétisée spatialement ( $n$  modes pour des vitesses positives,  $n$  modes pour des vitesses négatives et un mode pour des vitesses négligeables), on obtient  $2n + 1$  modes modélisés par un système linéaire. Pour chaque mode, les gains de l'observateur sont trouvés à l'aide du théorème 6.2.1. De part la physique du système étudié, seules certaines commutations de modes sont possibles. Pour la synthèse de l'observateur, seules celles-ci sont vérifiées, diminuant le nombre de LMI à satisfaire et donc simplifiant le problème de synthèse. Ensuite, l'observateur est testé en simulation. Dans le cas idéal les résultats sont satisfaisants, par contre lorsqu'on diminue la résolution du capteur de position, les résultats se détériorent pour devenir inutilisables lorsque que les caractéristiques réelles du capteur sont utilisées.

Pour le deuxième observateur, on suppose que l'usure du système peut faire varier indépendamment les coefficients des polynômes de  $f$ . Dans ce cas les frottements secs sont supposés être la somme de la fonction  $f$  et de l'état intégral  $\alpha$ . Le modèle de synthèse est alors plus simple avec un mode pour les vitesses positives, un mode pour les vitesses négatives et un mode pour les vitesses négligeables. Le théorème 6.2.1 est de nouveau utilisé pour synthétiser l'observateur, il garantit sa robustesse par rapport à l'écart entre la fonction réelle  $f$  et la fonction utilisée  $\hat{f}$ . Encore une fois, les résultats en simulation sont fortement détériorés lorsque les caractéristiques réelles du capteur sont utilisées.

Les deux observateurs proposés bien que synthétisés à l'aide d'outils puissants, ne permettent pas de s'affranchir des limitations physiques du système. Ainsi, dans le cas du système étudié, il est préférable de chercher une commande robuste aux variations des frottements plutôt que de chercher à les estimer afin d'utiliser une approche adaptative. Si toutefois on persiste à vouloir estimer ces frottements secs, il semblerait judicieux de chercher un modèle plus simple du sys-

tème intégrant directement les limitations physiques du système. Un observateur pourrait être alors synthétisé mais ses performances seraient bien entendu limitées par le modèle.



# Chapitre 7

## Conclusion

### 7.1 Contributions

Ce mémoire en s'appuyant sur une application concrète (un embrayage robotisé) a permis de mettre en oeuvre l'ensemble des compétences nécessaires à un automaticien : modélisation d'un système, identification des paramètres du modèle déterminé, et synthèse de la commande. De plus, un travail supplémentaire présente quelques résultats sur l'estimation d'état d'un système mécanique par des observateurs hybrides à temps discret.

La ligne directrice de l'exposé a été de suivre le cheminement d'une étude depuis l'écriture des premières équations décrivant le système jusqu'à la validation sur banc d'essai des commandes synthétisées. L'objectif premier des travaux présentés est de systématiser chaque procédure, chaque méthode permettant d'acquérir la connaissance puis le contrôle d'un système mécanique. L'ambition étant qu'un ingénieur novice puisse à partir de ce manuscrit reproduire facilement l'ensemble des méthodes présentées pour n'importe quel autre système mécanique.

Un actionneur d'embrayage étant destiné à être produit en masse, les coûts de production sont extrêmement étudiés. Cette rationalisation entraîne un capteur aux performances juste suffisantes pour satisfaire le cahier des charges mais qui ne permet pas d'obtenir facilement les informations nécessaires à son étude. Cette difficulté a conditionné l'ensemble de mon travail m'obligeant chaque fois à définir ce qu'il était possible de faire avant de le mettre en oeuvre. Ainsi le deuxième axe majeur de ma recherche a été de prendre en compte à priori les limitations physiques du système que ce soit lors de la modélisation, de l'identification ou de la synthèse de commandes.

Le corps de la thèse est organisé en cinq chapitres. Le premier traite de la modélisation de systèmes mécaniques complexes. Proposant une méthode systématique permettant de décomposer une mécanique en bloc interagissant entre eux, la première partie du chapitre souligne l'importance des frottements dans ce type de système. Ainsi la deuxième partie propose un état de l'art non exhaustif sur l'ensemble des différents modèles de frottements secs disponibles dans la littérature. Le constat final est que lors de l'étude d'un système soumis à des frottements, le concepteur doit faire un choix parmi ces modèles lui imposant de connaître l'ensemble de leurs caractéristiques.

L'objectif de la modélisation hybride de systèmes soumis à des frottements secs est d'éviter

ce choix au concepteur. Ici, c'est le modèle qui s'adapte aux besoins de la modélisation. Pour cela, le modèle du système est décomposé en deux sous-modèles correspondant aux différents états du système (mode "collé" : le système est immobile ou quasiment immobile, mode "glissant" : la vitesse du système est élevée). Ce principe permet de simplifier la modélisation en la découpant en deux tâches plus simples et indépendantes. Trois versions génériques du modèle plus ou moins complexes ont été déclinées, ainsi le concepteur à partir des propriétés et des phénomènes qu'il veut retranscrire, peut obtenir le modèle le plus compact possible avec le nombre suffisant et nécessaire de paramètres à identifier.

Une fois le modèle déterminé, il reste à définir les valeurs de ces paramètres. En ce qui concerne les systèmes soumis à des frottements secs, de nombreuses références proposent des méthodes toujours plus précises mais aussi complexes. Celles-ci sont généralement validées sur des bancs d'essai extrêmement précis permettant de s'affranchir du bruit de mesure ou d'autres limitations physiques importantes. Bien entendu, ces méthodes ne peuvent pas être appliquées sur le système étudié dû au bruit de quantification du capteur de position ou à la plage de fonctionnement limitée (amplitude de l'embrayage d'environ 1cm). Ainsi, lorsqu'on souhaite identifier les paramètres d'un modèle, la première question est de savoir si on peut le faire en fonction des caractéristiques du système d'acquisition de données. Pour répondre à cela, un algorithme d'aide à la décision a été proposé : en fonction du système, il détermine les paramètres pouvant être identifiés. Ceux qui ne le sont pas gardent alors leurs valeurs théoriques. Si ces valeurs n'existent pas, cela signifie que le modèle est trop complexe par rapport aux possibilités du capteur du système.

Une fois les paramètres à identifier choisis, trois méthodes sont explicitées. La première permet de déterminer la masse et les frottements secs et visqueux. Tout d'abord on choisit comme signal excitateur du système asservi des trajectoires sinusoïdales limitant ainsi les intercorrélations entre vitesse et accélération. De plus l'amplitude du signal de référence est calculée de façon à optimiser le conditionnement des données sources. Celles-ci sont alors pondérées par la vitesse afin de limiter l'influence des phénomènes non-linéaires des frottements autour d'une vitesse nulle. Un algorithme des moindres carrés récursif suffit alors à déterminer le jeu de paramètres. Cette première méthode robuste aux effets non-linéaires des frottements secs possède aussi l'avantage d'être exempte de tout paramètre de réglage permettant d'être utilisée facilement.

Lorsque le capteur est vraiment peu précis, le bruit de mesure rend impossible l'utilisation de la vitesse même filtrée. La deuxième méthode n'utilise alors que la mesure de la commande (sous hypothèse d'un système asservi au moins en vitesse) mais en contre partie, seuls les frottements secs et visqueux sont identifiés. Pour finaliser l'identification du modèle hybride, il faut déterminer la force de rupture nécessaire au modèle pour commuter du mode "collé" au mode "glissé". Pour cela, une simple expérience pratique utilisant le phénomène collage-décollage (*stick-slip*) permet de déterminer cette dernière valeur.

Une fois le modèle de simulation défini et paramétré, il reste à synthétiser la commande permettant de remplir le cahier des charges. Généralement, les commandes dédiées à la classe des systèmes étudiés utilisent la compensation de frottements secs permettant entre autre de supprimer les cycles limites en boucle fermée. Ces méthodes demandent des actionneurs et des capteurs aux performances élevées, les rendant inapplicables dans le cas étudié. L'approche proposée ici

consiste à fournir au système l'énergie cinétique nécessaire pour atteindre la position désirée. Ensuite, les frottements dissipent cette énergie et donc freinent le système afin d'obtenir une erreur statique de l'ordre de la résolution du capteur. Faisant disparaître les cycles limites, cette commande bien que optimale (aucune énergie supplémentaire n'est dépensée à freiner le système) impose un temps de réponse dépendant des caractéristique du système. Si celui-ci est trop grand, des propositions ont été faites pour le réduire.

Les paramètres identifiés du modèle hybride sont connus avec certaines incertitudes. Le principe d'asservissement présenté ci-dessus nécessite des commandes linéaires que l'on souhaite robustes à ces erreurs de modélisation. Pour répondre à cette problématique, une approche originale est proposée : la modélisation LPV des incertitudes paramétriques du modèle. L'ensemble des incertitudes permet de définir un polytope où se situe le modèle. Suivant une approche polytopique, on synthétise un unique contrôleur garantissant les performances souhaitées pour chaque sommet du polytope. Cette robustesse doit être validée à posteriori en vérifiant les différents transferts du système en boucle fermée.

Enfin un chapitre sur l'estimation des frottements propose à partir d'un modèle hybride à temps discret d'une masse soumis à des frottements d'estimer à la fois les états du système (position et vitesse) et l'évolution des frottements secs. Deux observateurs sont proposés, le premier possède un effet intégral multiplicatif et le deuxième un effet intégral additif. Les résultats en simulation sont bons dans le cas d'un capteur de position de haute résolution. Lorsque la configuration du banc d'essai est utilisée, les résultats se dégradent interdisant toute mise en oeuvre pratique et validant l'approche robuste choisie précédemment.

## 7.2 Perspectives

L'ensemble de l'étude présentée ici a permis d'aboutir à une suite de méthodes allant de la modélisation de systèmes soumis à des frottements à la synthèse de commandes robustes aux incertitudes paramétriques. Néanmoins dû à ce large panorama des disciplines de l'automatique, de nombreuses perspectives et améliorations peuvent être trouvées pour chaque point exposé dans ce manuscrit.

En ce qui concerne la modélisation de systèmes mécaniques complexes, seuls quelques éléments ont été donnés, il serait intéressant de préciser plus en détail la décomposition des fonctions mécaniques complexes en proposant par exemple une bibliothèque de blocs élémentaires permettant de modéliser des ensembles plus complexes. Le travail de simplification du système permettant d'obtenir un modèle compact mais néanmoins réaliste demande beaucoup d'expertise. À travers des exemples, seulement une partie de cette expertise a été retranscrite dans ce manuscrit, un travail plus complet permettrait de développer des outils de réduction de modèle basés à la fois sur des concepts de mécanique et d'automatique.

À propos de la modélisation hybride de systèmes soumis à des frottements secs, l'exposé essaye d'être le plus exhaustif possible, cependant dû à l'absence de maquette suffisamment élaborée, la modélisation des pré-déplacements n'a pas pu être validée en pratique. Sur ce thème, il s'agira du premier travail à effectuer. Les paramètres de simulation du modèle hybride doivent vérifier des inégalités garantissant la cohérence des résultats numériques avec la réalité. Pour

s'affranchir de ces limites, il faudra développer un simulateur dédié à la simulation de système soumis à des frottements secs qui gèrera la période d'intégration numérique en fonction de la vitesse du système (vitesse faible : pas d'intégration numérique faible).

Les travaux d'identification ont été guidés par les caractéristiques physiques du système. Ces limites ont imposé le choix d'un modèle très simple. Ainsi, les méthodes d'identification proposées permettent de définir les paramètres de la version la plus simple du modèle hybride. Pour compléter cette partie, les deux autres versions du modèle hybride doivent aussi être accompagnées par un ensemble de méthodes permettant d'identifier leurs paramètres. Pour le modèle intermédiaire, seul le pré-déplacement maximal doit être défini. Reprenant les méthodes proposées dans [12], ce paramètre peut être facilement identifié sous réserve d'un capteur de position suffisamment précis. Pour le modèle le plus élaboré, modélisant l'effet hystérésis des pré-déplacements, l'ensemble des méthodes d'identification du domaine de l'électromagnétisme permettant d'identifier les phénomènes d'hystérésis peut être adapté à la modélisation des pré-déplacements par le modèle de Preisach, [37].

Les observateurs hybrides à temps discret développés dans le dernier chapitre proposent une estimation de la vitesse et du frottement sec d'un système mécanique. Ces deux grandeurs sont nécessaires aux stratégies de commandes développées dans cette thèse. Jusqu'à présent, on a choisi d'utiliser des valeurs filtrées ou moyennées tout en vérifiant la robustesse de la commande aux erreurs de modélisation. Ce choix s'est fait au détriment des performances. Il serait intéressant de vérifier l'apport des estimations faites par ces observateurs sur les performances du système en boucle fermée. Pour cela, il faudra soit augmenter la résolution du capteur, soit améliorer les performances des observateurs proposés en choisissant par exemple un modèle plus simple du système ou en rajoutant des filtres de pondération lors de leur synthèse.

# Annexes

## A Fonction hystérésis avec mémoire non-locale

Dans le cas de déplacements microscopiques, les frottements ont un comportement hystérique indépendant de la vitesse du système. On les modélise alors par une fonction hystérésis avec mémoire non-locale  $F$  dépendante de la position  $x$  du système et de ses trajectoires passées. Cette annexe basée sur [28] propose un simple rappel sur ce type de fonction. La figure (1) représente un exemple de trajectoire dans le plan  $(x, F)$  d'une telle fonction. S'il n'y a eu aucun mouvement auparavant, la force de frottement  $F$  suit la trajectoire "vierge"  $f(x)$ .

Règle I :

$$\begin{aligned} F &= f(x) \\ \text{avec :} \\ f(x) &= y(x) \text{ si } x > 0 \\ &= -y(-x) \text{ sinon} \end{aligned} \quad (1)$$

Généralement  $y(x)$  possède les propriétés suivantes :  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) \geq 0$  et  $y''(0) \leq 0$  (ou le prime indique la dérivée de la fonction par rapport à  $x$ ). Les deux premières propriétés sont universelles, par contre, la dernière implique que la fonction d'hystérésis est dissipative pour tous ses déplacements.

Si la direction du mouvement change à  $x = x_m$  (voir figure (1)), la force de frottement devient :

Règle II :

$$\begin{aligned} F &= F_m + 2f\left(\frac{x - x_m}{2}\right) \\ F_m &= F(x_m) \text{ calculée avec la formule de } F \text{ avant le changement de direction} \end{aligned} \quad (2)$$

Si la direction change encore avant  $x = -x_m$ , la règle II est encore utilisée pour déterminer la force de frottement. Si au contraire, la direction du mouvement à  $x = -x_m$  est toujours identique, la force de frottement suit la règle I. Ainsi, quand  $|x|$  devient plus grand que le maximum de la valeur absolue de tous les points de renversement (position où il y a eu changement de direction), la règle I décrit la fonction  $F$ . Si la valeur de  $|x|$  est plus petite que cette valeur, le

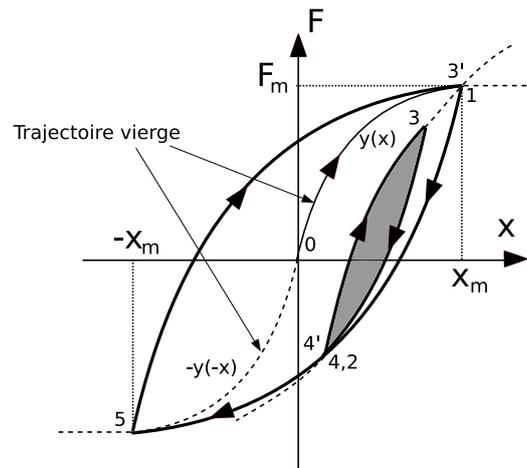


FIG. 1 – Exemple d'une trajectoire hystérétique. À partir d'un contact "vierge", le mouvement démarre au point  $(0,0)$  suivant  $y(x)$  (ou  $-y(-x)$ ). Si le mouvement s'inverse au point 1, la trajectoire suit la courbe passant par les points 1, 2, 5. Si la direction est de nouveau changée au point 2, la courbe  $(2 - 3 - 3')$  est suivie ; si la vitesse change de signe au point 3, la trajectoire passe par  $(3 - 4)$  puis suit la courbe  $(1 - 2 - 5)$  pour arriver au point 5. Les points 2 et 3 peuvent être supprimés de la mémoire.

frottement est calculé suivant la règle II utilisant pour  $(F_m, x_m)$  les valeurs du dernier point de renversement. Quand une boucle interne est "fermée" (partie grisée de la figure (1)), les deux derniers points de renversement ne sont plus nécessaires et peuvent être "oubliés" et la trajectoire basée sur le troisième dernier point de renversement est suivie. Ce phénomène est appelé "effet d'effacement du comportement hystérétique". Basée sur ces règles, la force de frottement  $F$  peut être calculée pour toutes les trajectoires  $x(t)$  du système. Ce type d'hystérésis est appelé "hystérésis avec mémoire non-locale". La physique derrière ce phénomène peut être comprise en imaginant les frottements comme des adhérences ayant une déformation d'abord élastique puis plastique lorsqu'un glissement se produit.

Ce type d'hystérésis peut être modélisé suivant deux façons :

- en utilisant une mémoire de type pile (FIFO : First In, First Out), cf. Modèle de Preisach, [37] : Dans cette méthode, la valeur de la position et la force sont mémorisées à chaque point de renversement (changement du signe de la vitesse). L'avantage de cette méthode est que la trajectoire du système est décrite analytiquement. L'inconvénient de cette méthode est que la taille de la mémoire doit être choisie à l'avance et des dépassements de mémoire sont possibles.
- en utilisant une méthode basée sur le modèle de collage de Maxwell, [9] : Cette approche modélise l'hystérésis de  $N$  ressorts de masse nulle en parallèle. La position  $x$  est commune à tous les éléments. Chaque élément est caractérisé par une raideur  $k_i$  ( $i \in [1, N]$ ) et la valeur de la force à laquelle le glissement se produit. Seulement  $N$  points de renversement sont mémorisés et le problème de dépassement de mémoire est résolu en échange d'une perte de précision.

## B Entropie métrique

Le calcul d'incertitude en fonction du pas de quantification permet de donner une idée de la qualité des futurs résultats de l'algorithme d'identification, cf. 4.2.1.1. Cependant, cette méthode utilise des majorations successives imposant une vision très pessimiste de l'identification à venir. Par filtrage, le bruit de quantification est diminué (cf. 4.2.2) et améliore de fait l'identification. Malgré tout, l'information reste dégradée par la quantification, ce qui limite les capacités d'identification du système.

Lors de la conception du système, il serait intéressant de pouvoir mesurer la qualité des informations disponibles en fonction du pas de quantification du capteur : si la résolution est deux fois meilleure, y aura-t-il deux fois plus d'informations disponibles ? L'identification sera-t-elle deux fois plus facile ? L'entropie métrique permet de répondre à la question. Avant de définir et d'utiliser cette notion, quelques rappels sont présentés, [44] :

### Définition B.1 (Tribu ou $\sigma$ -algèbre)

Soit un ensemble  $\Omega$ , on appelle tribu ou  $\sigma$ -algèbre sur  $\Omega$  un ensemble  $\mathcal{B}$  de parties de  $\Omega$  qui vérifie :

- L'ensemble vide est dans  $\mathcal{B}$
- $\mathcal{B}$  est stable par complémentarité
- $\mathcal{B}$  est stable par union dénombrable

### Définition B.2 (Mesure)

Une mesure  $\mu$  est une fonction qui associe à chaque élément  $A$  d'une  $\sigma$ -algèbre donnée  $\mathcal{B}$  une valeur  $\mu(A)$ , qui est un réel positif ou l'infini. Les propriétés suivantes doivent être vérifiées :

- L'ensemble vide a une mesure vide
- La mesure est  $\sigma$ -additive : si  $E_1, E_2, \dots, E_n$  sont des ensembles appartenant à  $\mathcal{B}$ , en quantité dénombrable et deux à deux disjoints, et si  $E$  est leur réunion, alors la mesure  $\mu(E)$  est égale à la somme  $\sum_{k=1}^n \mu(E_k)$ .

### Définition B.3 (Espace mesurable)

On appelle espace mesurable, la donnée d'un couple  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$  où  $\Omega$  est un ensemble et  $\mathcal{B}(\Omega)$  une tribu de  $\Omega$ . Les éléments de  $\mathcal{B}(\Omega)$  sont appelés les parties mesurables.

### Définition B.4 (Mesure Lebesgue)

Soit  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$  l'espace mesurable  $\Omega$  muni de sa tribu borélienne (plus petite tribu sur  $\Omega$  contenant tous les ensembles ouverts). Il existe une unique mesure notée  $\lambda$  sur cet espace mesurable qui possède les deux propriétés suivantes :

- $\forall a \in \Omega, \forall A \in \mathcal{B}(\Omega), \lambda(a + A) = \lambda(A)$  (invariance par translation)
- $\lambda([0; 1]) = 1$

Sur un intervalle, cette mesure correspond à la notion de longueur. En 2 dimensions, il s'agira d'une aire et en 3D, il s'agira d'un volume.

A l'aide de ces définitions, on peut maintenant définir l'entropie métrique.

**Définition B.5 (Entropie métrique)**

Soit  $\alpha$  une partition finie de  $X$  un ensemble mesurable. Un point  $x \in X$  est d'autant mieux localisé qu'il se situe dans une partie  $A \in \alpha$  de faible mesure  $\mu(A)$ . Donc plus  $\mu(A)$  est petit, meilleure est l'information lorsqu'on sait que  $x$  appartient à  $A$ . On définit ainsi l'information comme :

$$\forall x \in X, I(\alpha)(x) = - \sum_{A \in \alpha} \log \mu(A) \chi_A(x)$$

avec :

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= 1 \text{ si } x \in A \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned} \quad (3)$$

L'entropie métrique est la valeur moyenne de l'information sur  $X$  :

$$\mathcal{H}(\alpha) = - \sum_{A \in \alpha} \mu(A) \log \mu(A) \quad (4)$$

On remarque que la formulation (4) est très proche de l'entropie de Shannon définie dans un espace de probabilité de dimension 1. Il s'agit en fait de l'équivalent pour un espace mesurable quelconque.

Supposons un signal  $x(t)$  appartenant à  $X \in [0, x_{\max}]$ , ce signal est quantifié suivant un pas  $\delta_x$  de façon à ce que  $n = \frac{x_{\max}}{\delta_x} \in \mathbb{N}$ . On définit une partition  $\alpha = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  sur  $X$  tel que  $A_i = [\delta_x(i-1), \delta_x i[$ . En utilisant la mesure Lebesgue  $\lambda$ , l'espace mesurable  $(X, \alpha)$  devient l'espace mesuré  $(X, \alpha, \lambda)$ . Lorsque  $x$  appartient à un intervalle  $A_i$ , la mesure de  $A_i$  est égale à  $\delta_x$  et la valeur de l'information égale à  $-\ln(\delta_x)$ . L'entropie métrique de la partition  $\alpha$  est obtenue en intégrant sur l'ensemble du domaine  $X$  :

$$\mathcal{H} = -x_{\max} \ln(\delta_x) \quad (5)$$

Pour un  $\delta_x$  supérieur à 1,  $\mathcal{H}$  devient négatif. Pour compenser ce phénomène d'échelle, le signal  $x(t)$  doit être normalisé :  $x_{\max}$  est arbitrairement fixé à 1,  $\mu(A_i)$  devient égale à  $\frac{1}{n}$ . L'entropie métrique de la partition  $\alpha$  devient égale simplement à  $\ln(n)$ . Au fur et à mesure que  $n$  augmente, l'information ajoutée devient de moins en moins importante : par exemple, pour doubler la quantité d'information, il faut élever au carré  $n$  le nombre de points.

**C A robust control for dry friction system - Application to a clutch actuator**

## A robust control for dry friction system - Application to a clutch actuator

Rémy Nouailletas<sup>a</sup>, Eduardo Mendes<sup>a</sup>, Damien Koenig<sup>b</sup>

<sup>a</sup>LCIS, Institut Polytechnique de Grenoble, ESISAR, EA 3747, 50 rue Laffemas BP 54 26902 Valence, France (e-mail: remy.nouailletas, eduardo.mendes@lcis.grenoble-inp.fr)

<sup>b</sup>GIPSA, Institut Polytechnique de Grenoble, UMR 5528 CNRS-INPG-UJF, BP 45, 38402 Saint Martin d'Hères, Cedex, France (e-mail: damien.koenig@gipsa-lab.grenoble-inp.fr)

---

### Abstract

Because of the non-linear behavior of dry friction systems near their natural equilibrium point (null speed), linear control laws don't give satisfactory results. Thus, specific non-linear controls need to be developed. Usually, they are based on friction compensation. These methods linearize the system near the system equilibrium point but are limited by the noise on the measured speed. In this paper the proposed control is based on a position control loop plus a linear robust speed control loop. The first one is a non-linear control law which uses friction to stop the system at the desired position. The linear speed control is synthesized by  $\mathcal{H}_\infty$  approach. The parameter uncertainties of the model are taken into account by a LFT formulation and then by a LFT+LPV one. Both are validated and compared on a real test bench of a robotised clutch.

*Key words:* Dry friction, hybrid modeling, mechanical system, clutch actuator, stick-slip, limit cycle, LFT model, LPV model

---

### 1. Introduction

This paper proposes a new approach to control systems submitted to frictions. For the control/command community, frictions are separated in two sets: viscous frictions and dry frictions, [7]. The first ones are modelled as forces proportional to the speed of the system and opposed to the movement. The second ones are called dry frictions. For medium and high speed, they are generally modelled by a force opposed to the speed with a constant magnitude. For low speed, some behaviors appear as pre-sliding displacements, [1]. These microscopic phenomena are only observable on a system with a micrometric precision manufacturing and high resolution position sensor, [20], [6]. For usual industrial products as robotised clutches, this precision is useless and too expensive. So a simple model without pre-sliding displacement modelling is enough to obtain accurate simulations of the system [8], [13], [14].

Due to dry friction discontinuity near null speed, friction systems are non-linear around their natural equilibrium point. In the case of a speed control different from zero speed, this characteristic is without consequence, but for position control, oscillations (called limited cycles) can occur, [5]. To solve this problem, a large number of contributions can be found in the literature, [16], [22], [11], [6], [15]. The main method is to compensate friction forces. This way imposes a good knowledge of the friction function and/or high resolution sensors to estimate them [4], [12], [2], [3], [9]. In the case of a generic industrial system, these assumptions are usually not accurate. The model is known with uncertainties on each parameter, the position sensor has a low resolution and mechanical play limits the observation of microscopic phenomenon as pre-sliding displacement. Thus, compensation methods are ineffective.

In this paper, one interests to the position control of this type of friction systems. First a non-linear control law is used to control the position of the system. The output of this controller is a speed reference. Then a linear control law, robust to the model uncertainties is developed to drive the speed of the system. Using a  $\mathcal{H}_\infty$  formulation, two approaches are proposed to synthesize the speed controller: the first one uses a linear fractional transformation (LFT) model of the system, the second one models the unusual friction function by a linear parameter varying (LPV) formulation. The other uncertainties are taken into account by LFT. To demonstrate the efficiency of the proposed control law, a clutch-by-wire is studied. This complex system is modeled by a simple mass with frictions and both approaches are applied and tested on this experimental testbench.

The paper is divided in six sections. This section has introduced the paper, section 2 presents the frame of work. The new non-linear position control law is detailed in section 3. Section 4 explains the  $\mathcal{H}_\infty$  formulation to synthesize the speed controller in LFT and LPV+LFT cases. The proposed control laws are validated on a real robotised clutch test bench in section 5 before the conclusion (section 6).

## 2. Frame of work

The purpose of this paper is to develop a position control law for generic dry friction system:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega \\ J\dot{\omega} &= u - C_f(\omega, u)\end{aligned}\quad (1)$$

where  $J$ ,  $\theta$  and  $\omega$  are respectively the inertia, the position and the speed of the system.  $C_f$  is the resistive torque created by friction. Hereafter, it is supposed that microscopic phenomena as pre-displacement are not measurable, thus an usual Coulomb model with viscous friction is used to synthesize the control law. The model of the system with uncertainties is then given by:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega \\ (J + \delta J)\dot{\omega} &= (K + \delta K)i - (\sigma_v + \delta\sigma_v)\omega - (F_c + \delta F_c)\text{sign}(\omega)\end{aligned}\quad (2)$$

where  $i$  is the actuator input.  $K$ ,  $\sigma_v$  and  $F_c$  are respectively the torque constant, the viscous friction coefficient and the Coulomb friction force.  $\delta K \in \Delta K$ ,  $\delta J \in \Delta J$ ,  $\delta\sigma_v \in \Delta\sigma_v$  and  $\delta F_c \in \Delta F_c$  are the bounded uncertainties on the parameters  $K$ ,  $J$ ,  $\sigma_v$  and  $F_c$ . The parameters are chosen such that  $\delta K$ ,  $\delta J$ ,  $\delta\sigma_v$  and  $\delta F_c$  are equal to 0 with nominal model.

The sample time of the system is noted  $T_s$ . The position is quantified by a sensor with  $N_p$  points by  $2\pi$  rotation. A first feedback law is used to control the input of the system actuator. This dynamic is modelled by a first order low pass filter:

$$H_i = \frac{i}{u_d} = \frac{\frac{1}{K}}{\tau_i s + 1}\quad (3)$$

where  $u_d$  and  $1/\tau_i$  are respectively the desired input torque calculated by the torque control and the bandwidth of the transfer function  $H_i$ .

## 3. Non-linear position control law

### 3.1. Position control with optimal trajectories

When a simple linear position control law is applied to a dry friction system, limited cycles may appear in closed loop, [8]. To solve this problem, many solutions have been proposed, [21]. Main methods are based on dry friction force compensation, [3], [2]. By this way, the system is linearized by feedback compensation around the equilibrium point  $\omega = 0$ . The main drawback of this approach is that it needs a perfect knowledge of the friction function and of the speed, [9], [4]. In the studied case, the low precision of the position sensor and the uncertainties on the model parameters forbid this approach.

In this paper, a new approach is proposed. The main idea is to use the friction force to optimally slow down the system. The control law provides the sufficient kinematic energy to obtain a steady state error less than the sensor precision. To derive this new non-linear position control law, three assumptions are made:

- the system is supposed perfectly known, i.e.  $\delta J = \delta K = \delta\sigma_v = \delta F_c = 0$ ,
- the viscous friction is neglected, i.e.  $\sigma_v = 0$ ,

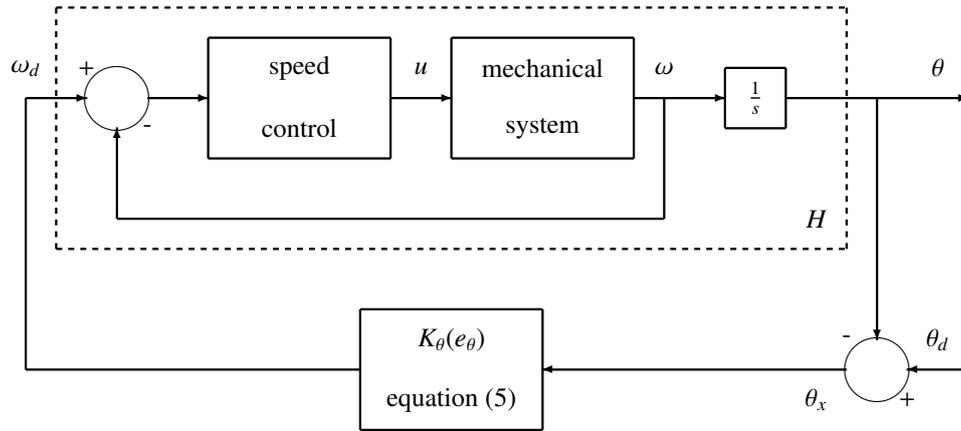


Figure 1: Block diagram of the system with speed and position control

- a linear speed control law is applied to the system, the position control produces desired speed  $\omega_d$  to control the position of the system, cf. figure (1).

Suppose that at time  $t = t_i$  the input torque of the system is set to 0, the system speed and position are supposed equal to  $\omega_i \neq 0$  and  $\theta_i \neq \theta_d$  (where  $\theta_d$  is the fixed desired position). The kinematic energy of the system is equal to  $\frac{J}{2}\omega_i^2$ . The viscous friction has been neglected, only the dry friction force dissipates this energy. The work of this force between the position  $\theta_i$  and the desired position  $\theta_d$  is equal to  $F_c|\theta_i - \theta_d|$ . If a control law guarantees that at time  $t_i$  the kinematic energy of the system is equal to the energy dissipated by  $F_c$  between  $\theta_i$  and  $\theta_d$ , the system converges to the desired position  $\theta_d$  without additional energy. The trajectory of the system is optimal in the sense that no external energy is spent to slow down the system. The following position control law is proposed:

$$\begin{aligned}\omega_d(t) &= K_\theta(e_\theta(t)) \\ &= \sqrt{\frac{2F_c}{J}} \sqrt{|e_\theta(t)|} \text{sign}(e_\theta(t))\end{aligned}\quad (4)$$

where  $e_\theta$  is equal to  $\theta_d - \theta$ ,  $\omega_d$  is the desired speed. Due to the noise on the position sensor, it is useless to try to obtain a nul steady state error. The control law is modified:

$$\begin{aligned}K_\theta(e_\theta(t)) &= \sqrt{\frac{2F_c}{J}} \sqrt{|e_\theta(t)|} \text{sign}(e_\theta(t)) \text{ if } |e_\theta| > \delta\theta \\ &= 0 \text{ else}\end{aligned}\quad (5)$$

With this tuning, the steady error is bounded by the sensor resolution  $\delta\theta$ . If the parameters uncertainties are not negligible,  $\delta\theta$  can be changed by a higher value to take into account this problem. To prove the stability of the system in closed loop, assumption 1 is formulated:

**Assumption 1.** On the block diagram (1), the transfer function between  $\omega_d$  and  $\omega$  is asymptotically stable and its dynamics are enough fast to approximate the system  $H$  by a simple integrator  $\frac{1}{s}$

**Proposition 1.** The system  $H$  formed by system (1) and the speed control is stabilized by the position control law (5) following block diagram (1) if assumption 1 is true.

**Proof 1.** Without lost of generality,  $\theta_d$  is supposed constant. The following Lyapunov candidate function  $V$  is defined:

$$V(\theta) = \frac{e_\theta^2}{2}\quad (6)$$

By temporal derivation, the following expression is obtained:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\theta) &= \dot{\theta}e_\theta = \omega e_\theta \\ &= \omega_d e_\theta = -K_\theta(e_\theta)e_\theta\end{aligned}\quad (7)$$

From (5), it comes:

$$\dot{V}(\theta) = -K_\theta(e_\theta)e_\theta \leq 0 \quad \forall e_\theta \quad (8)$$

More precisely:

- if  $|e_\theta| > \delta\theta$

$$\dot{V}(\theta) < 0 \quad (9)$$

- else

$$\begin{aligned}\dot{V}(\theta) &= 0 \\ \omega &= 0\end{aligned}\quad (10)$$

The system is stable in closed loop but a steady state error remains. The speed converges to 0 and the absolute position error is bounded by  $\delta\theta$ . If  $\delta\theta$  is set equal to 0, the system becomes asymptotically stable. For practical reasons (parameters uncertainties, noise,...), this tuning is not possible.

The main disadvantage of the proposed method is that the dynamic of the position is only function of the parameters  $J$  and  $F_c$ . If the ratio  $\frac{F_c}{J}$  is small, the time response of the system is high. To solve this problem,  $F_c$  is changed by  $F_{cv}$ , with  $F_{cv} > F_c$ .  $F_{cv}$  is used as a tuning parameter, higher is  $F_{cv}$ , higher will be the position dynamic. But the tuning of  $F_{cv}$  is limited by the performances of the speed control as it will be shown in the next section.

### 3.2. Validation in simulation

To valid the presented position control law, a simple mass  $m$  is modelled. It is submitted to dry friction  $f_c$ . The hybrid model developed in [14] is used to simulate the system. Two modes are used to model sticking and slipping movements :

- mode 0 (sticking mode):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -p_0 v\end{aligned}\quad (11)$$

- mode 1 (slipping mode):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ m\dot{v} &= u - f_c \text{sign}(v)\end{aligned}\quad (12)$$

The conditions  $C_{i \rightarrow j}$  to switch from the mode  $i$  to  $j$  are:

$$C_{0 \rightarrow 1} : ((u < f_c) \text{ and } (0 < v < \Sigma)) \text{ or } ((u > -f_c) \text{ and } (-\Sigma < v < 0)) \quad (13)$$

$$C_{1 \rightarrow 0} : |u| < f_s \quad (14)$$

Table 1: Parameters of the simulation

Paramtres	Valeurs	Unit
$m$	1	[kg]
$f_c$	1	[N]
$f_s$	1,5	[N]
$\Sigma$	$5 \cdot 10^{-3}$	[m/s]
$p_0$	$10^3$	[rad/s]
$u_{max}$	5	[N]
Speed controller (PI) :		
$K$	8	[]
$T_i$	0,2	[s]
Position controller (P) :		
$K_x$	10	[]
Non-linear controller		
$\delta x$	0,02	[m]

The input force  $u$  is saturated to  $u_{max} = 5N$ . The speed of the system is controlled by a PI controller  $C(s)$  with an anti-windup system:

$$C(s) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (15)$$

When the position error is less than  $\delta x$ , the input force  $u$  is set to 0 and the integrator state of the speed control is frozen. For the simulations, all the needed parameters are reported in table 1.

For the first simulation, a simple proportional position controller  $K_x$  is used. Figure (2) shows the results. The steady state error is nul but an overshoot is present. Moreover the speed tracking error is too large due to the low performances of the speed control against the high variations of the desired speed  $v_c$ . If the proposed non-linear position control (5) is used (figure (3)), the overshoot disappears, the speed tracking error is better and the time response is equal to the one of the first simulation. But there is a steady state error equal to  $\delta x$ .

The performances of the non-linear position control depend on the mass and the Coulomb force of the system. For example, if  $F_c$  ( $F_s$ ) is set equal to 0.1N (0.15N), the time response increases, cf. left part of figure (4). By adding virtual dry friction  $F_{cv}$  equal to 1N, the performance of the system is comparable to the one of figure (3), cf. right part of figure (4). But a little overshoot appears on the position trajectory and the force input  $u$  presents artefact when the system is stabilized, i.e. when the value of  $u$  is equivalent to the real friction force  $F_c$ . This problem comes from the discontinuity of the dry friction force around  $v = 0$ . This phenomena increases if  $F_{cv}$  is set higher.

#### 4. A linear speed control robust to the model uncertainties

To apply the non-linear position control described in the previous section, a speed controller is needed. In the frame of work of this paper, it has to be robust to:

- the uncertainties of the system ;
- the quantification noise from the position sensor ;
- the dry friction.

To synthesize this controller, two approaches with a  $H_\infty$  formulation are proposed. The first one uses a LFT approach to take into account the uncertainties of the system. The second one mixes LFT and LPV methods. Suppose the

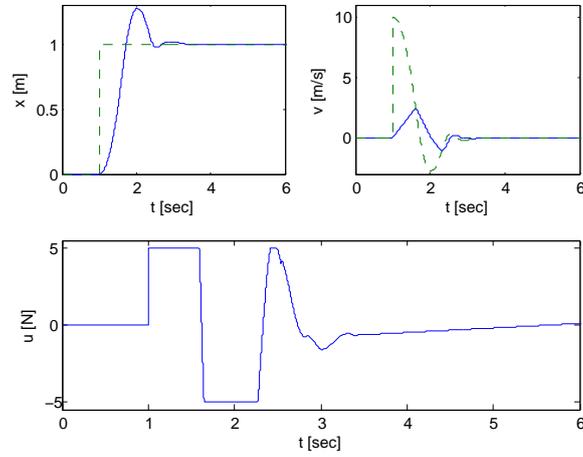


Figure 2: Response to a step with a PI speed control law and a proportional position controller, states of the system (solid) and desired states (dashed)

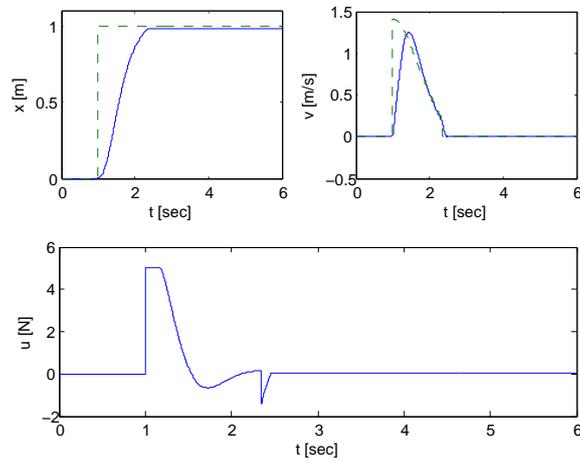


Figure 3: Response to a step with a PI speed control law and the proposed non-linear position controller, states of the system (solid) and desired states (dashed)

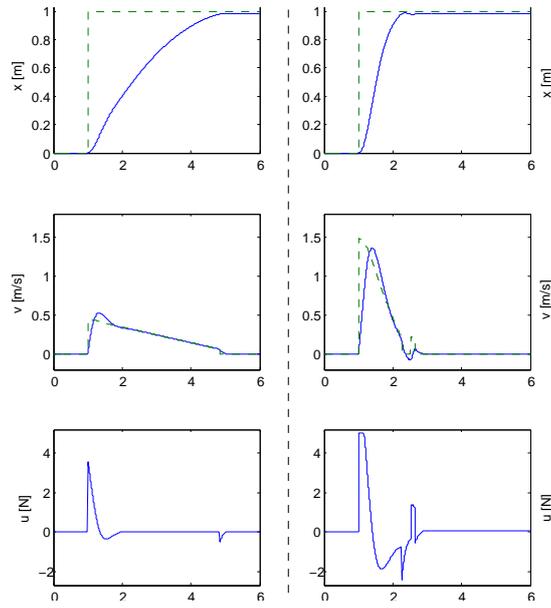


Figure 4: Comparison between the position control with natural dry friction  $F_c$  (left) and with virtual dry friction  $F_{cv}$  (right), states of the system (solid) and desired states (dashed)

friction function could be known with precision and can be modelled by a LPV model, [14]. Then, to find a stabilizing controller, ensuring  $H_\infty$  performances for the system:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\rho) & B_1(\rho) & B_2(\rho) \\ C_1(\rho) & D_{11}(\rho) & D_{12}(\rho) \\ C_2(\rho) & D_{21}(\rho) & D_{22}(\rho) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \\ u \end{pmatrix} \quad (16)$$

the following theorem is used, [18]:

**Theorem 1.** *The system (16) is robustly stabilisable with  $\mathcal{H}_\infty$  performance  $\gamma$ , if there exist non-singular matrices  $X(\rho)$ ,  $Y(\rho)$  and matrices  $\tilde{A}(\rho)$ ,  $\tilde{B}(\rho)$ ,  $\tilde{C}(\rho)$  and  $\tilde{D}(\rho)$  such the following LMI's hold:*

$$\begin{pmatrix} M_{11} & (*)^T & (*)^T & (*)^T \\ M_{21} & M_{22} & (*)^T & (*)^T \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & (*)^T \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix} < 0$$

$$\begin{pmatrix} X(\rho) & I_n \\ I_n & Y(\rho) \end{pmatrix} > 0 \quad (17)$$

where,

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= A(\rho)X(\rho) + X(\rho)A(\rho)^T + \frac{\partial X(\rho)}{\partial \rho} \dot{\rho} + B_2 \tilde{C}(\rho) + \tilde{C}(\rho)^T B_2^T \\
 M_{21} &= \tilde{A}(\rho) + A(\rho)^T + C_2^T \tilde{D}(\rho)^T B_2^T \\
 M_{22} &= Y(\rho)A(\rho) + A(\rho)^T Y(\rho) + \frac{\partial Y(\rho)}{\partial \rho} \dot{\rho} + \tilde{B}(\rho)C_2 + C_2^T \tilde{B}(\rho)^T \\
 M_{31} &= B_1(\rho)^T + D_{21}(\rho)^T \tilde{D}(\rho)^T B_2^T \\
 M_{32} &= B_1(\rho)^T Y(\rho) + D_{21}^T \tilde{B}(\rho)^T \\
 M_{33} &= -\gamma I_{n_u} \\
 M_{41} &= C_1(\rho)X(\rho) + D_{12}(\rho)\tilde{C}(\rho) \\
 M_{42} &= C_1(\rho) + D_{12}(\rho)\tilde{D}(\rho)C_2 \\
 M_{43} &= D_{11}(\rho) + D_{12}(\rho)\tilde{D}(\rho)D_{21}(\rho) \\
 M_{44} &= -\gamma I_{n_y}
 \end{aligned} \tag{18}$$

In this case, the robust dynamical output controller of the form  $G_\rho(s) := \left( \begin{array}{c|c} Ac(\rho) & Bc(\rho) \\ \hline Cc(\rho) & Dc(\rho) \end{array} \right)$  is given by:

$$\begin{aligned}
 D_c(\rho) &= \tilde{D}(\rho) \\
 C_c(\rho) &= \left( \tilde{C}(\rho) - D_c(\rho)C_2(\rho)X(\rho) \right) M(\rho)^{-T} \\
 B_c(\rho) &= N(\rho)^{-1} \left( \tilde{B}(\rho) - Y(\rho)B_2(\rho)D_c(\rho) \right) \\
 A_c(\rho) &= N(\rho)^{-1} \left( \tilde{A}(\rho) - Y(\rho)A(\rho)X(\rho) - Y(\rho)B_2(\rho)D_c(\rho)C_2(\rho)X(\rho) \right. \\
 &\quad \left. - N(\rho)B_c(\rho)C_2(\rho)X(\rho) - Y(\rho)B_2(\rho)C_c(\rho)M(\rho)^T \right) M(\rho)^{-T}
 \end{aligned} \tag{19}$$

where  $M(\rho)$  et  $N(\rho)$  are defined such that  $M(\rho)N(\rho)^T = I_n - X(\rho)Y(\rho)$  (that can be solved through a singular value decomposition plus a Cholesky factorization).

In the case of the LFT approach, a LTI model is used, so the vector  $\rho$  doesn't exist. All the matrices used in the theorem are constant and the terms  $\frac{\partial X(\rho)}{\partial \rho}$  and  $\frac{\partial Y(\rho)}{\partial \rho}$  are nul.

#### 4.1. A LFT approach

The studied system is known with some uncertainties. By a Taylor development around the nominal parameters values, the speed equation of system (2) can be written :

$$\dot{\omega} = \left( 1 - \frac{\delta J}{J} \right) \left( (K + \delta K)i - (\sigma_v + \delta \sigma_v)\omega - (F_c + \delta F_c)\text{sign}(\omega) \right) + o(\delta J^2) \tag{20}$$

The quadratic terms are neglected, the model becomes:

$$\begin{aligned}
 \dot{\omega} &= -\frac{\sigma_v}{J}\omega - \frac{F_c}{J}\text{sign}(\omega) + \frac{K}{J}i + \frac{1}{J} \left( \left( \delta J \frac{\sigma_v}{J} - \delta \sigma_v \right) \omega + \right. \\
 &\quad \left. \left( \delta J \frac{F_c}{J} - \delta F_c \right) \text{sign}(\omega) + \left( -\delta J \frac{K}{J} + \delta K \right) i \right)
 \end{aligned} \tag{21}$$

To obtain a LFT model, the uncertainties  $\delta J$ ,  $\delta \sigma_v$ ,  $\delta K$  and  $\delta F_c$  are supposed proportional to a single one  $\Delta$  and a perturbation input  $w_\Delta$  is added to the nominal system. The LFT model  $\xi(s)$  is defined:

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta} &= \omega \\
 \dot{\omega} &= -\frac{\sigma_v}{J}\omega - \frac{F_c}{J}\text{sign}(\omega) + \frac{K}{J}i + \frac{1}{J}w_\Delta \\
 z_\Delta &= \left( \bar{\Delta} J \frac{\sigma_v}{J} - \bar{\Delta} \sigma_v \right) \omega + \left( \bar{\Delta} J \frac{F_c}{J} - \bar{\Delta} F_c \right) w + \left( -\bar{\Delta} J \frac{K}{J} + \bar{\Delta} K \right) i \\
 y &= \theta
 \end{aligned} \tag{22}$$

with:

$$\begin{aligned} w_{\Delta} &= z_{\Delta} \Delta \\ w &= \text{sign}(\omega) \end{aligned} \quad (23)$$

where  $|\Delta| < 1$  and  $\bar{\Delta}x$  ( $x \in \{J, \sigma_v, K, F_c\}$ ) is the maximal value of the interval  $\Delta x$ . From this LFT model, to synthesize a controller  $C(s)$  the  $\mathcal{H}_{\infty}$  control performance is used. The block diagram (5) gives the generalized plant model  $\xi_g(s)$  with the performance weighting functions:

- $W_1(s)$  is firstly set to a simple gain  $G_1 = 1$ . If no solution is found with this tuning, by decreasing  $G_1$  the constraint on the input  $w$  becomes weaker,
- $W_2(s)$  with the controlled output  $z_{\omega}$  is used to set the modul margin, the steady state error and the bandwidth of the system in closed loop:

$$W_2(s) = G_2 \frac{s/2\pi f_2 + 1}{s/\alpha 2\pi f_2 + 1} \quad (24)$$

where  $G_2^{-1}$  is the maximal guaranteed steady state error,  $f_2$  bounds the bandwidth of the system and  $\alpha$  is equal to the product between the margin modul and the steady state error,

- $W_3(s)$  is a simple gain linked to the output  $z_i$ ,
- $W_4(s)$  is a high-band filter to remove the high frequency noise of the sensor.

$$W_4(s) = G_4 \frac{s/20\pi f_4 + 1}{s/2\pi f_4 + 1} \quad (25)$$

where  $G_4$  is equal to the quantification step of the position sensor. If this constraint is too strong,  $G_4$  can be adjusted to obtain the desired bandwidth in closed loop.  $f_4$  is set higher than  $f_2$ ,

- $W_5(s)$  set the low frequencies domain of the uncertainties. A low-band filter is used:

$$W_5(s) = \frac{s/20\pi f_5 + 1}{s/2\pi f_5 + 1} \quad (26)$$

where  $f_5$  is set lower than  $f_2$ .

The function  $\text{sign}(\omega)$  is bounded by 1. To assume the stability of the system in closed loop, the theorem of the small gain is used, the following inequality needs to be check :

$$\|H_{\omega/w}(s)\|_{\infty} \leq 1 \quad (27)$$

where  $H_{\omega/w}(s)$  is the transfer function between  $\omega$  and  $w$  when the system is in closed loop. Note that it is equal to the transfer between  $e_{\omega}$  and  $w'$  ( $W_1$  is set to 1). To synthesize the controller  $C(s)$ , the theorem 1 is used with constant matrices.

#### 4.2. A LFT+LPV approach

Friction force of model (2) can vary. To take into account this behavior, a LPV approach is used: a parameter  $\rho \in \mathcal{P}_{\rho}$  is used to take into account this variation, the dry friction force  $F_c$  and the viscous friction coefficient  $\sigma_v$  are function of this one. A LPV form of the model,  $\xi(\rho, s)$ , is obtained:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\frac{\sigma_v(\rho)}{J} \omega - \frac{F_c(\rho)}{J} w + \frac{K}{J} i + \frac{1}{J} w_{\Delta} \end{aligned} \quad (28)$$

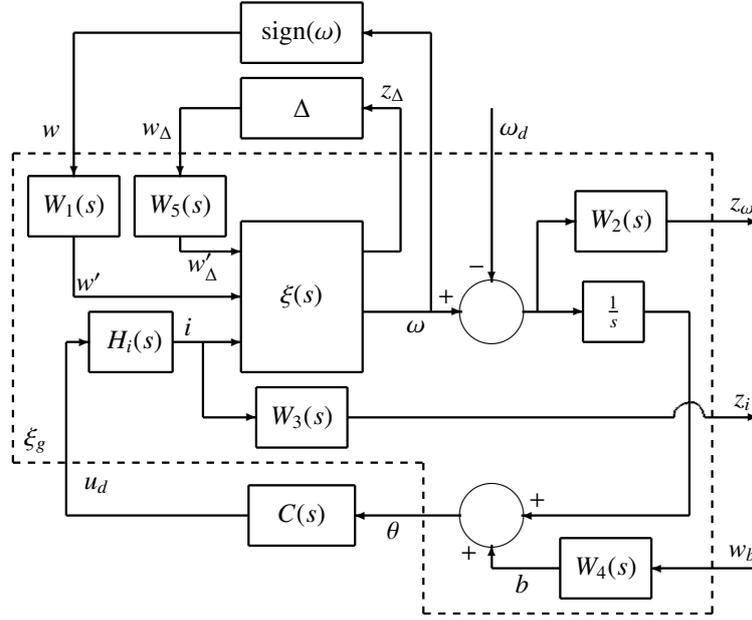


Figure 5: Generalized plant model

where:

$$\begin{aligned}
w_{\Delta} &= z_{\Delta} \Delta \\
z_{\Delta} &= \bar{\Delta} J \frac{\sigma_v(\rho)}{J} \omega + \bar{\Delta} J \frac{F_c(\rho)}{J} w + \left( -\bar{\Delta} J \frac{K}{J} + \bar{\Delta} K \right) i \\
w &= \text{sign}(\omega)
\end{aligned} \tag{29}$$

The uncertainties on  $F_c$  and  $\sigma_v$  have been removed from  $z_{\Delta}$  due to the integration of the variations of these parameters in the model. The uncertainties on the others parameters are taken into account by the LFT characteristics of the model. The same generalized plant model with the same weighting functions of the LFT approach is used to determine the controller.

To find the controller  $C(\rho)$ , LMIs (17) of the theorem 1 have to be solved, minimizing  $\gamma$  for  $\rho \in \mathcal{P}_{\rho}$ . The polytopic approach is used to solve the  $\mathcal{H}_{\infty}$  problem, [18]. In this view, some requirements have to be guaranteed:

- no direct transfer between the input and the output ( $D_{22}(\rho) = 0$ ),
- parameter independence of the input and output matrices ( $B_2$ ,  $D_{12}$ ,  $C_2$  and  $D_{21}$  must be constant),

This requirements are fulfilled by the proposed LPV model. The polytopic approach consists in finding a solution for each vertex of the polytope  $\mathcal{P}_{\rho}$ , by using a common  $X$  and  $Y$  (Lyapunov function). A controller is calculated for each vertex using (19). The global controller  $C(s, \rho)$  is given by a balanced sum of all the previously calculated controllers, [17].

## 5. Studied case

### 5.1. Description

The studied case is a clutch-by-wire. Figure (6) shows the test bench of the clutch and its actuator. It is composed of a clutch (b) and an actuator with a DC motor (a). This two parts are connected by a hydraulic system (c). In [14], it

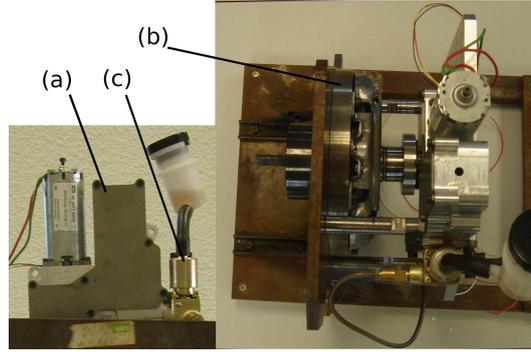


Figure 6: Photos of the studied system (top and face), (a): actuator, (b): clutch, (c): hydraulic system

Table 2: Model parameters of the clutch actuator

Parameters	Values	Parameters	Values
$J$	$1.32 \times 10^{-5} \text{kg/m}$	$\delta J$	$[-2.1; 2.1] \times 10^{-6} \text{kg/m}$
$K$	$13.4 \times 10^{-3} \text{Nm/A}$	$\delta K$	$[-1.2; 1.2] \times 10^{-3} \text{Nm/A}$
$\sigma_v$	$3.8 \times 10^{-4} \text{Nms/rad}$	$\delta \sigma_v$	$[-3.8; 3.8] \times 10^{-4} \text{Nms/rad}$
$F_c$	$0.100 \text{Nm}$	$\delta F_c$	$[-0.027; 0.027] \text{Nm}$
$\tau_i$	$3 \text{ms/rad}$	$N_p$	$56 \text{pts/rotation}$
$T_s$	$1 \text{ms}$		

has been demonstrated that this system can be modelled by a generic mass submitted to friction. Thus, it is modelled by equations (2) and (3), all the needed numeric values of the model are reported in table 2. The control methods developed in this paper can be used without restrictions.

Due to the interactions between the different parts of the studied system, an unusual friction force have been identified in [14], cf. figure (7). For low speed ( $|\omega| < \omega_{lim}$ ,  $\omega_{lim} = 260 \text{rad/s}$ ), only constant dry friction is present. For high speed ( $|\omega| > \omega_{lim}$ ), friction appears as an affine function of  $\omega$ :

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= (F_c - \delta F_c) \text{sign}(\omega) \text{ if } |\omega| < \omega_{lim} \\
 F(\omega) &= (F_c - \delta F_c) \text{sign}(\omega) + \sigma_v(\omega - \omega_{lim}) \text{sign}(\omega) \text{ if } |\omega| \geq \omega_{lim}
 \end{aligned} \tag{30}$$

where,  $F$  is the global friction torque seen by the DC motor,  $F_c = 0.127 \text{Nm}$  is the dry friction torque and  $\sigma_v = 7.6 \times 10^{-4} \text{Nms}$ . To take into account this behavior, a LPV approach is used:

$$\begin{aligned}
 F_c(\rho) &= F_c - \sigma_v \omega_{lim} \rho \\
 \sigma_v(\rho) &= \sigma_v \rho
 \end{aligned} \tag{31}$$

where:

$$\begin{aligned}
 \rho &= 0 \text{ if } |\omega| < \omega_{lim} \\
 &= 1 \text{ else}
 \end{aligned} \tag{32}$$

$\rho$  takes two discret values (0 and 1), with the LPV approach, the synthesised controller is guaranteed to be robust to any  $\rho \in [0, 1]$ . Thus, if the identification uncertainties on  $F_c$  and  $\sigma_v$  are bounded by the variations of  $F_c(\rho)$  and  $\sigma_v(\rho)$ , for  $\rho \in [0, 1]$ , the controller will be robust to these ones.

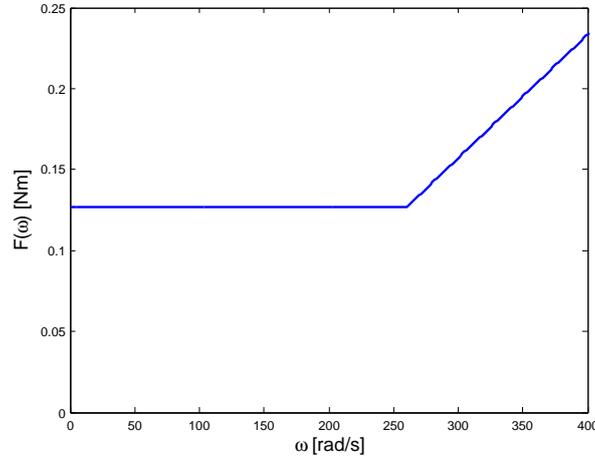

Figure 7: Identified friction function  $F$ 

Table 3: Parameters of the weighting functions  $W_i(s)$ 

Parameters	Values	Parameters	Values
$G_1$	0.1	$G_3$	0.01
$G_2$	100	$G_4$	0.001
$f_2$	79.6Hz	$f_4$	796Hz
$\alpha$	$5 \times 10^{-3}$	$f_5$	$1.6 \times 10^{-3}$ Hz

## 5.2. Tuning of the controllers

The gain of the non-linear position controller is equal to  $K_{ajust} = \sqrt{\frac{F_c}{J}}$ . Due to the uncertainties on  $F_c$  and  $J$ , the interval of  $K_{ajust}$  is [81.1; 91.1]. In practice, better results are obtained by setting  $K_{ajust}$  around the lower value, i.e. the position response becomes to noisy if  $K_{ajust}$  is increased.

The speed controller is synthesised with the LFT approach and with the LFT+LPV approach. In both cases, coefficients of the weighting functions  $W_i(s)$  are defined by table 3. By solving LMI (18) with YALMIP parser [10] and SeDuMi solver [19] and using tools developed in [17], one obtains the following sensitivity functions (figures (8) and (9)) for LFT and LPV+LFT problems (for LFT controller:  $\gamma = 1.03$  and for LPV+LFT controller:  $\gamma = 1.05$ ).

The transfers of the system in closed loop with the LFT and LPV+LFT controllers are very closed. Nevertheless, the transfer functions with input  $w'$  doesn't fit for any frequencies, figures (9-j,k,l).  $F_c$  is different in the 3 cases (one LFT and two LPV+LFT). It minds that  $B_1$  of system (16) changes as a function of  $F_c$ . But this matrice is not used to build the controllers  $C(s)$  and  $C(\rho, s)$  (cf. equations (19)), so the controllers don't vary with the variation of  $F_c$  and an offset appears between the considered transfers.

Despite these differences, the other transfers are very closed around the bandwidth for the LFT and the LPV+LFT controllers. It minds that the results of the LPV+LFT approach is equivalent to the one of the LFT approach.

One can observe the really bad sensitivity between  $i$  and  $b$  of the system in closed loop. Remind that the noise  $b$  comes from the quantification of the position. Thus, the bandwidth of this noise is limited and is a function of the displacement: if the system is motionless,  $b$  is null. Moreover, neglected dynamics of the DC motor have a damping effect and reduce the sensitivity on the transfer  $i/b$ .

The controller transfers are plotted on figure (10), the LPV controllers calculated for  $\rho = 0$  and  $\rho = 1$  fit perfectly between 0Hz and  $\frac{1}{T_s}$  ( $10^3$ Hz), it minds that after time sampling, one unique controller is suffisant to guarantee the stability of the system following the LPV formulations (28) and (29).

### 5.3. Experimental results

For the experimental validation, both speed controllers are time discretized following the Tustin method.

A positive and a negative reference step responses is applied. The results are given by figures (11) and (13). Both trajectories are very closed as it has been predict by figure (10). The step response time is equal to 120ms. Due to the resiliency of the mechanical parts, a small overshoot is presented. With mechanical plays, this overshoot is not observable on the clutch position, i.e. the driver will not feel any shocks at each clutch engagement/disengagement. The steady-state error is equal to 0.05rad and is bounded by  $\delta\theta = 0.1122rad$ .

## 6. Conclusion

This paper has presented a new approach of position control for friction systems. Instead of compensating friction force as usual, the controller uses friction to optimally slow down the system. Thus, the trajectory is optimal in the sense that no energy is spend theoretically to stop the system. This work has been motivated because the sensors of the studied system -a robotised clutch- is too weak to obtain an accurate model and to use classical advanced control laws.

To use this new position controller, a speed controller is needed. From the non-linear model of the system, two control synthesis models have been developed: the first one uses a LFT formulation to deal with parameters uncertainties. For the second one, a LPV approach is used to model the unusual friction function. A  $\mathcal{H}_\infty$  formulation is used in the both cases to find a robust linear controller against uncertainties. One notes that the difference of both controllers is very weak, it is confirmed by the practical tests made on the testbench. The presented results show a satisfaisant time response without overshoot or limited cycles but a static error, which is less than the position sensor resolution, remains.

## 7. Acknowledgement

This work was supported by the ADEME (French Environment and Energy Management Agency) grant #0566C0009 under PREDIT (programme of research, experimentation and innovation in land transport) operational group #8.

## References

- [1] Al-Bender, F. and J. Swervers (2008). Characterization of friction force dynamics. *IEEE Control Systems Magazine* pp. 64–81.
- [2] Alpeter, F. (1999). *Phd Thesis: Friction modeling, identification and compensation*. Ecole polytechnique fdrale de Lausanne.
- [3] Armstrong-Helouvry, B., P. Dupont and C. Canudas de Wit (1994). A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. *Automatica* **30**, 1083–1138.
- [4] Canudas de Wit, C. and P. Lischinsky (1997). Adaptive compensation with paratially known dynamic friction model. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* **11**, 65–80.
- [5] Canudas de Wit, C., H. Olsson, K. J. Astrom and P. Lischinsky (1995). A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on automatic control* **10**(3), 419–425.
- [6] Dhouadi, R. (2003). Nonlinear friction compensation in harmonic drives with hysteresis. In: *Proceedings of the 2003 IEEE/ASME int. conf. on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM 2003)*. pp. 278–283.
- [7] Dowson, D. (1998). *History of tribology*. Professional Engineering Publishing, London.
- [8] Karnopp, D. (1985). Computer simulation of stick-slip friction in mechanical dynamic systems. *Journal of dynamic systems, measurement and control, transactions ASME*.
- [9] Lampaert, V., J. Swervers and F. Al-Bender (2004). Comparison of model and non-model based friction compensation techniques in the neighbourhood of pre-sliding friction. In: *Proc. American Control Conf.*
- [10] Loftberg, J. (2004). Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab. In: *Proceedings of the CACSE Conference*.
- [11] Mallon, N., N. van de Wouw, D. Putra and H. Nijmeijer (2006). Friction compensation in a controlled one-link robot using a reduced-order observer. *IEEE transaction on control systems technology* **14**(2), 374–383.
- [12] Nouailletas, R., B. Hoang Le, E. Mendes and D. Koenig (2008a). New hybrid model and switched pi observer for dry friction systems. In: *IFAC world congress*. Seoul, Korea.
- [13] Nouailletas, R., E. Mendes and D. Koenig (2008b). Parameters identification of a hybrid model for dry friction. In: *IEEE Conf. Decision Control*.
- [14] Nouailletas, R., E. Mendes and D. Koenig (n.d.). Hybrid modeling and identification of dry friction systems, application to a clutch actuator. *to appear in Control Engineering and Practice*.
- [15] Olsson, H. (1996). *Control systems with friction*. Lund Institute of Technology.
- [16] Olsson, H., C. Canudas de Wit, K. J. Astrom, M. Gafvert and P. Lischinsky (1998). Friction models and friction compensation. *European Journal of Control* (4), 176–195.

- [17] Pousot, C. (2008). *Phd Thesis: Robust LPV multivariable Automotive Global Chassis Control*. Control System dpt of the GIPSA-lab - Grenoble INP.
- [18] Scherer, C., P. Gahinet and M. Chilali (1997). Multiobjective output-feedback control via lmi optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control* **42**, 896–911.
- [19] Sturm, J.F. (1999). Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optim. Methods Softw.* **11/12**, 625–653.
- [20] Swevers, J., F. Al-Bender, C.G. Ganseman and Tutuko Projogo (2000). An integrated friction model structure with improved presliding behavior for accurate friction compensation. *IEEE Transactions on Automatic Control* **45**, 675–686.
- [21] Tataryn, P.D., N. Sepehri and D. Strong (1996). Experimental comparison of some compensation techniques for the control of manipulators with stick-slip friction. *IEEE Transactions on Automatic Control* **4**, 1209–1219.
- [22] Vivas, C., F.R. Rubio and C. Canudas-de Wit (2002). Gain-scheduling control of systems with dynamic friction. In: *Proceedings of the 41st IEEE Conf. on Decision and Control*. Las Vegas, Nevada USA. pp. 89–94.

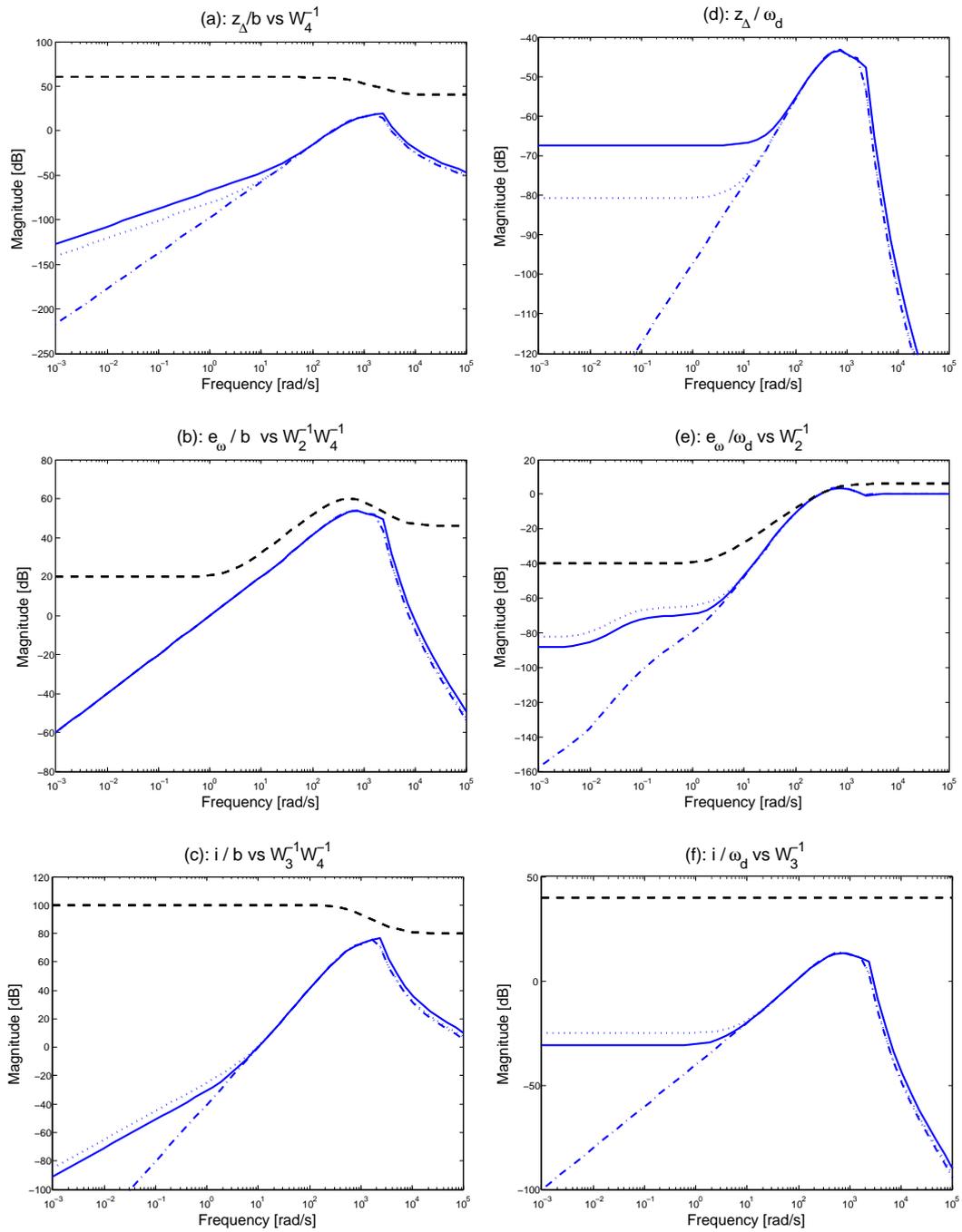


Figure 8: LFT synthesis results (blue solid), LPV+LFT polytopal synthesis results ( $\rho = 0$ , blue dot-dashed and  $\rho = 1$ , blue dotted) and weighting functions (black dashed)

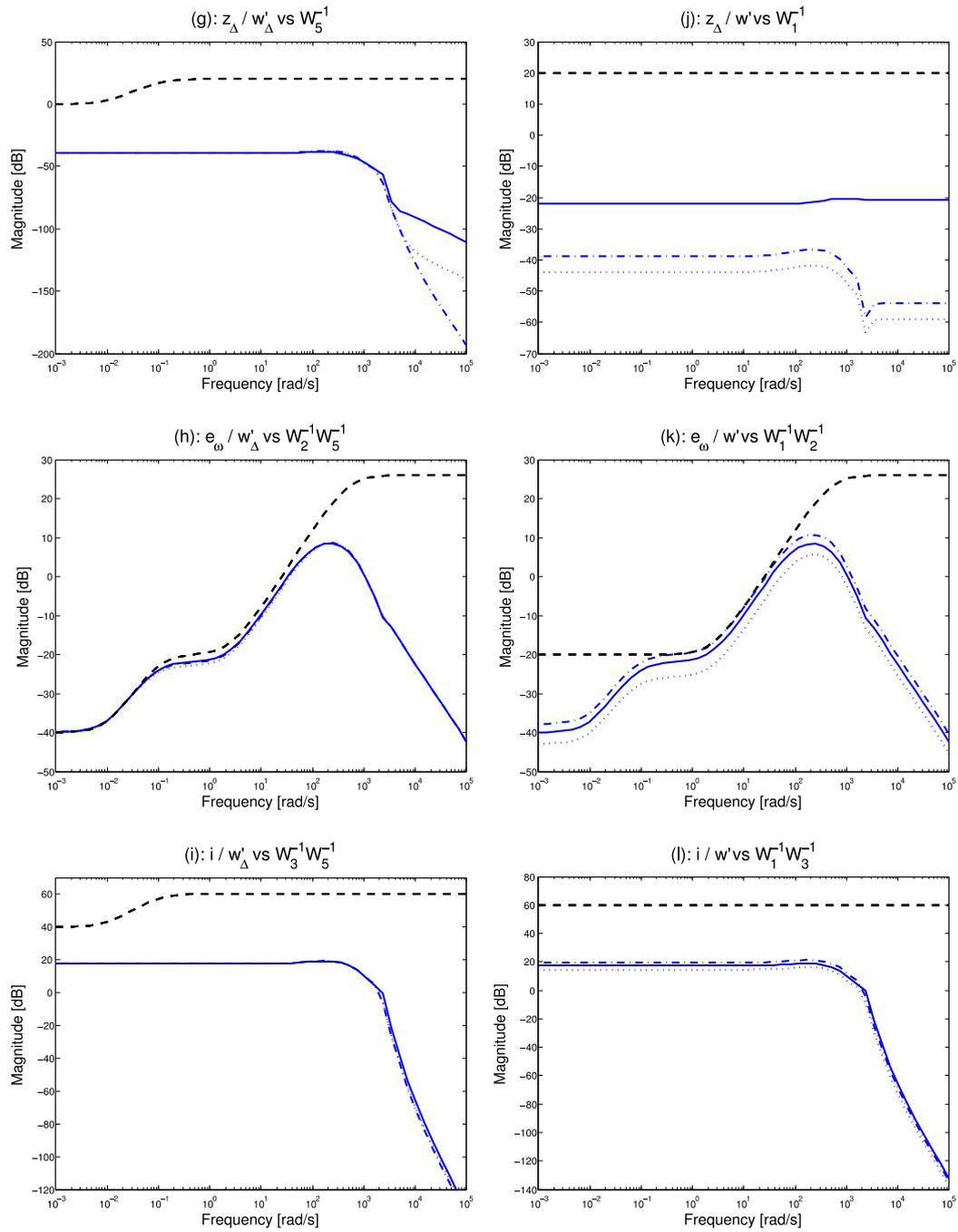


Figure 9: LFT synthesis results (blue solid), LPV+LFT polytopal synthesis results ( $\rho = 0$ , blue dot-dashed and  $\rho = 1$ , blue dotted) and weighting functions (black dashed)

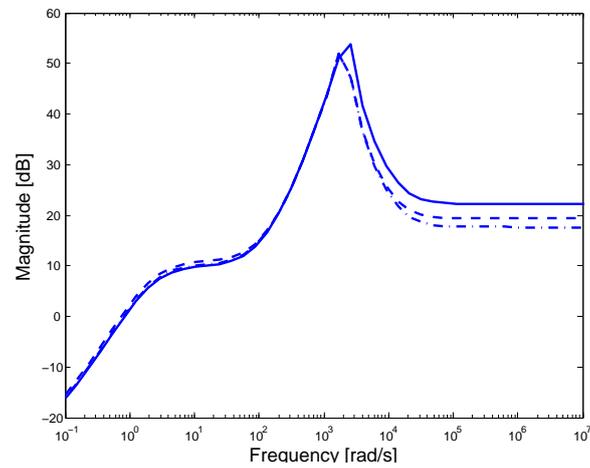


Figure 10: LFT controller (solid), LPV+LFT controller for  $\rho = 0$  (dot-dashed) and  $\rho = 1$  (dotted)

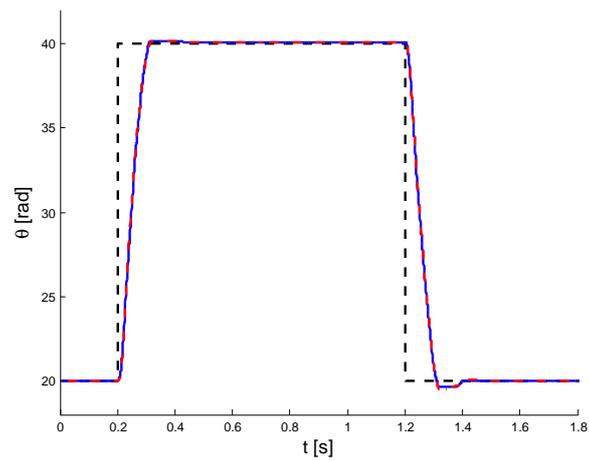


Figure 11: Position of the DC motor: desired position (dark dashed), LFT controller (blue solid) and LPV+LFT controller (red dot-dashed)

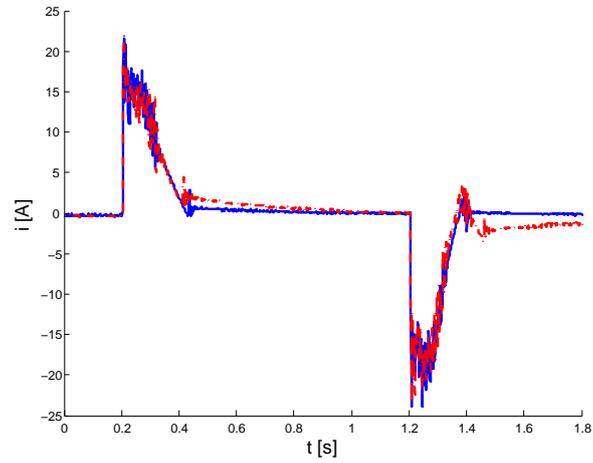


Figure 12: Current in the DC motor: LFT controller (blue solid), LPV+LFT controller (red dot-dashed)

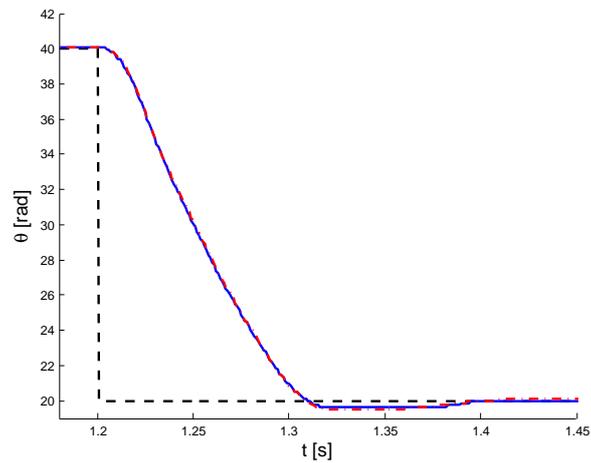


Figure 13: Zoom on the position of the DC motor: desired position (dark dashed), LFT controller (blue solid) and LPV+LFT controller (red dot-dashed)



# Bibliographie

- [1] B. Borsotto. *Modélisation, identification et commande d'un organe de friction - Application au contrôle d'un système d'embrayage et au filtrage d'acyclismes par glissement piloté*. Faculté des sciences d'Orsay, 2008.
- [2] P. J. Dolcini. *Contribution au confort de l'embrayage*. GIPSA-LAB, Grenoble INP, 2006.
- [3] P. Dahl. Solid friction damping of mechanical vibrations. *AIAA Journal*, 14 :1675–82, 1976.
- [4] C. Canudas de Wit, H. Olsson, K. J. Astrom, and P. Lischinsky. A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on automatic control*, 10(3) :419–425, March 1995.
- [5] P. Dupont, B. Armstrong, and V. Hayward. Elastoplastic friction model : contact compliance and stiction. In *Proc. Amer. Control Conf.*, Chicago, IL, 2000.
- [6] D. Karnopp. Computer simulation of stick-slip friction in mechanical dynamic systems. *Journal of dynamic systems, measurement and control, transactions ASME*, 1985.
- [7] P.A. Bliman and M. Sorine. Easy-to-use realistic dry friction models for automatic control. In *Proc. of 3rd European Conference*, Rome, Italy, 1995.
- [8] J. Swevers, F. Al-Bender, C.G. Ganseman, and Tutuko Projogo. An integrated friction model structure with improved presliding behavior for accurate friction compensation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45 :675–686, 2000.
- [9] V. Lampaert, J. Swervers, and Al-Bender F. Modification of the leuven integrated friction model structure. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47 :683–687, 2002.
- [10] B. Armstrong-Helouvry, P. Dupont, and C. Canudas de Wit. A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. *Automatica*, 30 :1083–1138, 1994.
- [11] D.A. Haessig and B. Friedland. On the modeling and simulation of friction. *Journal of dynamic systems, measurement and control, transactions ASME*, 1991.
- [12] C. Canudas de Wit. Workshop on control of systems with friction. In *IEEE Conf. on Control Applications*, Hawaii, USA, August 1999.
- [13] F. Alpeter. *Phd Thesis : Friction modeling, identification and compensation*. Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, 1999.

- [14] V. Lampaert, F. Al-Bender, and J. Swervers. Experimental characterisation of dry friction at low velocities on a developed tribometer setup for macroscopic measurements. In *Tribology Letters*, 2004.
- [15] B. Friedland and S. Mentzelopoulou. On adaptive friction compensation without velocity measurement. *IEEE Transactions on automatic control*, 1992.
- [16] B. Friedland and Y.-J. Park. On adaptive friction compensation. *IEEE Transaction on automatic control*, 37(10) :1609–1612, October 1992.
- [17] H. Olsson, C. Canudas de Wit, K. J. Astrom, M. Gafvert, and P. Lischinsky. Friction models and friction compensation. *European Journal of Control*, (4) :176–195, December 1998.
- [18] R. Dhouadi. Nonlinear friction compensation in harmonic drives with hysteresis. In *Proceedings of the 2003 IEEE/ASME int. conf. on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM 2003)*, pages 278–283, 2003.
- [19] Q.P. Ha, A. Bonchis, D.C. Rye, and H.F Durrant-Whyte. Variable structure systems approach to friction estimation and compensation. In *IEEE Robotics Aut. Conf.*, pages 3543–3548, San Francisco, CA, April 2000.
- [20] N. Mallon, N. van de Wouw, D. Putra, and H. Nijmeijer. Friction compensation in a controlled one-link robot using a reduced-order observer. *IEEE transaction on control systems technology*, 14(2) :374–383, March 2006.
- [21] H. Olsson. *Control systems with friction*. Lund Institute of Technology, 1996.
- [22] R. Nouailletas, D. Koenig, and E. Mendes. Lmi design of a switched observer with model uncertainty : Application to a hysteresis mechanical system. In *IEEE Conf. Decision Control*, 2007.
- [23] R. Nouailletas, B. Hoang Le, E. Mendes, and D. Koenig. New hybrid model and switched pi observer for dry friction systems. In *IFAC world congress*, Seoul, Korea, July 2008.
- [24] F.E. Cellier, H. Elmqvist, and M. Otter. *The control Handbook*. CRC press, 1996.
- [25] P. Gawthrop and L. Smith. *Metamodelling : For bond graphs and dynamic systems*. Prentice Hall Int. Ltd, Hertfordshire, UK, 1996.
- [26] C.A. Coulomb. *Théorie des machines simples en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur de leurs cordages*. Bachelier, Librairie, quai des Augustins, Paris, 1785.
- [27] R. Stribeck. Die wesentlichen eigenschaften des gleit-und rollenlager-. *Zeitschrift des vereines seutscher ingenieure*, 46(38, 39) :1342–48, 1432–37, 1902.
- [28] F. Al-Bender, W. Symens, and H. Van Brussel. Theoretical analysis of the dynamic behavior of hysteresis elements in mechanical systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, pages 1721–1735, 2004.
- [29] F. Al-Bender and J. Swervers. Characterization of friction force dynamics. *IEEE Control Systems Magazine*, pages 64–81, december 2008.
- [30] I.D. Mayergoyz. *Mathematical models of hysteresis*. New York : Springer-Verlag, 1991.
- [31] A. van der Shaft and H. Schumacher. *An introduction to hybrid dynamical systems*. Springer-Verlag, 1999.

- [32] M.E. Broucke. *EXE165S hybrid systems*. University of Toronto, 2007.
- [33] J.F. Sturm. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optim. Methods Softw.*, 11/12 :625–653, 1999.
- [34] M.S. Branicky. Stability of hybrid systems : state of the art. In *Proc. IEEE Conf. Decision and Control*, pages 120–125, San Diego, California USA, december 1997.
- [35] B. Sedghi. *Control design of hybrid systems via dehybridization*. Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, 2003.
- [36] B. Sedghi, B. Srinivasan, and R. Longchamp. Control of hybrid systems via dehybridization. In *Proc. IEEE American Control Conf.*, pages 692–697, 2002.
- [37] Y. Bernard. *Contribution à la modélisation de systèmes électromagnétiques en tenant en compte du phénomène d’hystérésis*. Université Paris XI Orsay, 2000.
- [38] P. Dupont, V. Hayward, B. Armstrong, and F. Altpeter. Single state elastoplastic friction models. *IEEE Transactions on automatic control*, 47 :787–198, 2002.
- [39] V. Lampaert, J. Swervers, and F. Al-Bender. Comparison of model and non-model based friction compensation techniques in the neighbourhood of pre-sliding friction. In *Proc. IEEE American Control Conf.*, 2004.
- [40] H.K. Khalil. *Nonlinear systems, second edition*. Prentice hall, New Jersey, 1996.
- [41] R.B. Gorbet. *Control of Hysteresis systems with Preisach Representations*. University of Waterloo, Waterloo, Canada, 1997.
- [42] A. Besancon-Voda and P. Blaha. Describing function approximation of a two-relay system configuration with application to coulomb friction identification. *Control Engineering Practice*, 10 :655–668, 2002.
- [43] A. Besancon-Voda and G. Besancon. Analysis of a two-relay system configuration with application to coulomb friction identification. *Automatica*, 35 :1391–1399, 1999.
- [44] L. Schwartz. *Analyse III, calcul intégral*. Hermann, Paris, 1993.
- [45] I.D Landau and G. Zito. *Digital Control Systems : Design, Identification and Implementation*. Springer, 2002.
- [46] C. Canudas de Wit and P. Lischinsky. Adaptive compensation with paratially known dynamic friction model. *International Journal of Adaptive Control and Signa Processing*, 11 :65–80, 1997.
- [47] P.D. Tataryn, N. Sepehri, and D. Strong. Experimental comparison of some compensation techniques for the control of manipulators with stick-slip friction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 4 :1209–1219, 1996.
- [48] C. Vivas, F.R. Rubio, and C. Canudas-de Wit. Gain-scheduling control of systems with dynamic friction. In *Proceedings of the 41st IEEE Conf. on Decision an Control*, pages 89–94, Las Vegas, Nevada USA, December 2002.
- [49] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. siam, 1994.

- [50] C. Poussot. *Phd Thesis : Robust LPV multivariable Automotive Global Chassis Control*. Control System dpt of the GIPSA-lab - Grenoble INP, 2008.
- [51] C. Briat. *Phd Thesis : Commande et Observation Robustes des Systèmes Linéaires Retardés à Paramètres Variants*. Control System dpt of the GIPSA-lab - Grenoble INP, 2008.
- [52] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali. Multiobjective output-feedback control via lmi optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42 :896–911, July 1997.
- [53] H. B. Le. *Rapport de projet de fin d'études : Mise en route d'un banc d'essai d'embrayage mécatronique, développement, validation et optimisation de stratégies de commande*. ESI-SAR, Grenoble INP, 2007.
- [54] K. Zhou, J. Doyle, and K. Glover. *Robust and optimal control*. Prentice Hall, New Jersey, USA, 1996.
- [55] B. Friedland and S. Mentzelopoulou. On estimation of dynamic friction. In *IEEE Decision Control Conf.*, pages 1919–1924, San Antonio, Texas, december 1993.
- [56] D. Koenig. Unknown input proportional multiple-integral observer design for linear descriptor systems : application to state and fault estimation. *IEEE Trans. Automat. Control*, 50(2) :212–217, February 2005.
- [57] D. Koenig. Observer design for unknown input nonlinear descriptor systems via convex optimization. *IEEE Trans. Automat. Control*, 51(6) :1047–1052, June 2006.
- [58] D. Koenig, B. Marx, and D. Jacquet. Unknown input observers for switched nonlinear discrete time descriptor systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, To appear in December 2007.
- [59] D. Liberzon and A. S. Morse. Basic problems in stability and design of switching system. *IEEE Control Syst. Mag.*, 19(5) :59–70, October 1999.
- [60] G. Millerioux and J. Daafouz. Unknown input observers for switched linear discrete time systems. In *IEEE Proceeding of American Control Conf.*, pages 5802–5805, Massachusetts, USA, June 2004.
- [61] H. Ye, A.N. Michel, and L. Hou. Stability analysis of switched systems. In *IEEE Conf. Decision Control*, Kobe Japan, 1996.
- [62] J. Daafouz, P. Riedinger, and C. Iung. Stability analysis and control synthesis for switched systems : A switched lyapunov function approach. *IEEE Trans. Automat. Control*, AC-47(11) :1883–1887, November 2002.
- [63] G. Millerioux, L. Rosier, G. Bloch, and J. Daafouz. Bounded state reconstruction error for lpv systems with estimated parameters. *IEEE Trans. Automat. Control*, 49(8) :1385–1389, 2004.

## Résumé

Dans ce travail, on s'intéresse à la modélisation, l'identification et la commande de systèmes soumis à des frottements secs. L'exposé est divisé en 4 parties.

La première partie porte sur la modélisation de systèmes mécaniques complexes et propose un état de l'art des modèles de frottements présents dans la littérature.

La deuxième partie est dédiée à la modélisation hybride de systèmes soumis à des frottements secs. Basé sur un nouveau modèle générique, trois modèles, de complexité croissante, sont proposés.

La troisième partie traite de l'identification pratique des frottements secs. Des méthodes robustes aux bruits de quantification entachant les données sources sont obtenues.

La quatrième partie propose deux synthèses de commande, une commande non-linéaire et une commande robuste synthétisée à partir d'un modèle LPV.

L'estimation des frottements secs est abordée dans la dernière partie à l'aide d'observateurs switchés à temps discret.

Le modèle et les commandes proposés sont validés sur un banc d'essai d'un embrayage robotisé.

**Mots clés :** modélisation hybride, frottement sec, identification, commande robuste, estimation de frottement, synthèse LPV, banc d'essai, embrayage.

## Abstract

This work deals with the modelling, the identification and the control of systems submitted to dry friction. The thesis is divided into four parts.

The first one develops two items : the modelling of complex mechanical system and the state of art of existing models for dry friction.

The second part concerns the hybrid modelling of system submitted to dry friction. Based on a new generic model, three models are proposed with increasing complexity.

The third part is devoted to the practical identification of dry friction. Methods robust to the quantification noise on the data are presented.

The fourth part is about control : firstly, an original approach of non-linear control is proposed. Then, the parameters variations are accounted into the model by a LPV approach. Thus, a robust controller is obtained.

The last part deals with the estimation of dry friction system. Two switched observers are presented and tested in simulation.

The presented model and its commands are validated on a real test bench of a clutch-by-wire.

**Key words :** hybrid modelling, dry friction, identification, robust control, friction estimation, LPV synthesis, test bench, clutch.