



HAL
open science

Automorphismes extérieurs du groupe de Burnside libre

Rémi Coulon

► **To cite this version:**

Rémi Coulon. Automorphismes extérieurs du groupe de Burnside libre. Mathématiques [math]. Université de Strasbourg, 2010. Français. NNT : 2010STRA6057 . tel-00489295

HAL Id: tel-00489295

<https://theses.hal.science/tel-00489295>

Submitted on 4 Jun 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

RÉMI COULON

AUTOMORPHISMES EXTÉRIEURS DU GROUPE DE BURNSIDE LIBRE

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université de Strasbourg et CNRS (UMR 7501)
7, rue René Descartes
67 084 Strasbourg Cedex

Mots-clés : théorie géométrique des groupes, groupes hyperboliques, groupe de Burnside, automorphismes de groupes, petite simplification, complexes asphériques.

Classification mathématique : 20F65, 20F50, 20F67, 20F69, 20F28, 20E36, 20F06, 20F05, 57M35

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
I Préliminaires de géométrie hyperbolique	13
I.1 Espaces hyperboliques	15
I.1.a Définition et premières propriétés	15
I.1.b Quasi-isométries et quasi-géodésiques	16
I.1.c Parties quasi-convexes	17
I.2 Limite d'espaces métriques suivant un ultra-filtre	19
I.2.a Définition	19
I.2.b Lien avec les espaces hyperboliques	20
I.3 Condition de contractibilité pour un espace hyperbolique	22
I.4 Groupes hyperboliques	25
I.4.a Isométries d'un espace hyperbolique	25
I.4.b Groupes hyperboliques	28
II Théorie de la toute petite simplification	29
II.1 Cône d'un espace métrique	31
II.1.a Définition et métrique	31
II.1.b Relation entre le cône et sa base	32
II.1.c Cône et homotopies	33
II.1.d Action de groupe sur un cône	37
II.1.e Courbure d'un cône	38
II.2 Cone-off d'un espace métrique	40
II.2.a Définition et distance	40
II.2.b Projection du cone-off sur sa base	43
II.2.c Cone-off et homotopies	44
II.2.d Approximation uniforme de la distance	45
II.2.e Limite d'une famille de cone-off suivant un ultra-filtre	47
II.2.f Courbure du cone-off d'un espace hyperbolique	51
II.3 Théorie de la toute petite simplification	53
II.3.a Rappels sur les orbi-espaces	53
II.3.b Toute petite simplification pour une famille de rotations	55
II.3.c Contractibilité de l'espace \bar{X}	60
II.3.d Cas de la petite simplification usuelle	61
III Exemples de complexes simpliciaux asphériques	65
III.1 Construction d'une famille de rotations	67
III.2 Exemples d'applications	68

IV Automorphismes extérieurs du groupe de Burnside	71
IV.1 Un lemme de récurrence	73
IV.2 Plongement d'un groupe dans $\text{Out}(H/H^n)$	76
IV.3 Exemples d'applications	79
IV.3.a Groupe de Burnside construit sur un groupe de surface	79
IV.3.b Groupe de Burnside libre	80
IV.4 Vers une caractérisation de la croissance des automorphismes du groupe libre	81
IV.5 Sous-groupe abéliens de $\text{Out}(\mathbf{B}_r(n))$	83
A Stabilité des quasi-géodésiques locales	87
A.1 Une preuve asymptotique	89
A.2 Conséquences	91
A.2.a Quasi-géodésiques infinies	91
A.2.b Passage du local au global	91
A.2.c Transport de l'hyperbolicité	92

INTRODUCTION

Étant donné un entier n , on dit que le groupe G est d'exposant n si quelque soit g appartenant à G , g^n est égal à l'élément neutre. Dans un article datant de 1902 [15], W. Burnside soulève la question suivante : un groupe de type fini et d'exposant fini est-il nécessairement fini ? Pour aborder ce problème, il considère le quotient du groupe libre de rang r par le sous-groupe normal engendré par les puissances n -ièmes de tous les éléments. Ce groupe, baptisé *groupe de Burnside libre de rang r et d'exposant n* , sera noté ici $\mathbf{B}_r(n)$. Plus généralement, on note G/G^n le groupe de Burnside construit sur un groupe G , c'est à dire le quotient de G par le sous-groupe normal engendré par toutes les puissances n -ièmes de G . Les premiers travaux sur ce sujet ont permis de traiter les petites valeurs de n . On sait par exemple que $\mathbf{B}_r(n)$ est fini pour $n = 2$ [15], $n = 3$ [15], [38], $n = 4$ [58] et $n = 6$ [35]. (Le cas $n = 5$ reste ouvert.) Les premiers exemples de groupes de Burnside infinis ont été décrits par P.S. Novikov et S.I. Adian, dans une série de trois articles publiés en 1968 [44], [45], [46]. En se basant sur une analyse combinatoire fine de la théorie de la petite simplification introduite par V.A. Tartakovskiï [61] et développée par M. Greendlinger dans les années soixante [27], [28], [29], ils montrent le fait suivant : si r est un entier supérieur à 2 et n est un entier impair supérieur à 4381, alors le groupe de Burnside libre $\mathbf{B}_r(n)$ est infini. Cette borne sera ramenée plus tard à 665 par S.I. Adian dans [1]. Ce résultat a été ensuite amélioré dans plusieurs directions. En 1982, A.Y. Ol'shanskiï propose une théorie de la petite simplification graduée, utilisant un langage diagrammatique, qui permet de simplifier la preuve de P.S. Novikov et S.I. Adian [48]. Le cas des exposant pairs a été résolu successivement par S.V. Ivanov [36] et I.G. Lysenok [40]. Récemment, T. Delzant et M. Gromov ont proposé une nouvelle preuve du théorème de P.S. Novikov et S.I. Adian. Leur démonstration repose sur une interprétation géométrique de la théorie de la petite simplification. Pour plus de détails sur le problème de Burnside on pourra consulter les panoramas de R.I. Grigorčuk [30] ou de S.I. Adian et I.G. Lysenok [2] ainsi que le livre de A.Y. Ol'shanskiï [49].

Ce travail porte principalement sur le groupe des automorphismes extérieurs de $\mathbf{B}_r(n)$, noté $\text{Out}(\mathbf{B}_r(n))$. Plus particulièrement nous nous sommes intéressés aux questions suivantes. Existe-t-il des automorphismes extérieurs de $\mathbf{B}_r(n)$ d'ordre infinis ? Si oui, lesquels ? Le groupe $\text{Out}(\mathbf{B}_r(n))$ contient-il des sous-groupes remarquables comme des groupes libres ou des groupes abéliens libres ? Dans ce but, nous nous sommes penchés sur les propriétés des automorphismes extérieurs du groupe libre \mathbf{F}_r qui peuvent être transportées via l'application naturelle $\text{Out}(\mathbf{F}_r) \rightarrow \text{Out}(\mathbf{B}_r(n))$. Le cas des groupes de rang deux permet d'esquisser les divers comportements qui peuvent apparaître. En effet, $\text{Out}(\mathbf{F}_2)$ s'interprète comme le groupe modulaire du tore T privé d'un point et s'identifie à $GL(2, \mathbf{Z})$. Les générateurs a et b de \mathbf{F}_2 correspondent dans cette description à deux lacets du tore T (cf. Fig. 1).

Suivant ce point de vue géométrique, les automorphismes de \mathbf{F}_2 se répartissent dans trois catégories distinctes.

- ▶ *Les automorphismes d'ordre fini*, tels que l'application φ définie par $\varphi(a) = b$ et $\varphi(b) = a$. Ils induisent évidemment des éléments d'ordre fini de $\text{Out}(\mathbf{B}_2(n))$.
- ▶ *Les twists de Dehn*. L'automorphisme φ défini par $\varphi(a) = ab$ et $\varphi(b) = b$ (cf. Fig. 1) est le paradigme de cette classe. Cet automorphisme élevé à la

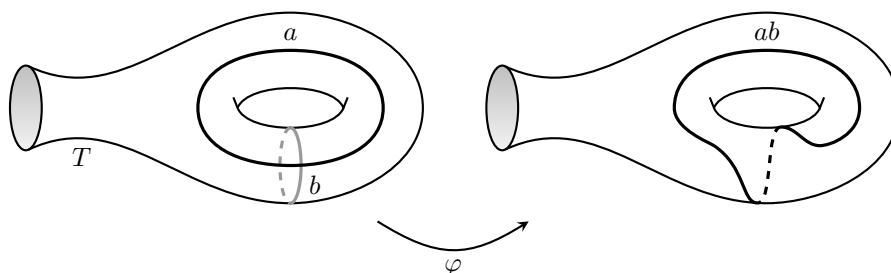


FIG. 1 – Effet d'un twist de Dehn

puissance n est caractérisé par $\varphi(a) = ab^n$ et $\varphi(b) = b$. Par conséquent φ induit un élément d'ordre fini de $\text{Out}(\mathbf{B}_2(n))$. Ce fait reste vrai pour tous les twists de Dehn (cf. proposition IV.4.4).

- *Les pseudo-Anosov.* Par exemple, l'automorphisme défini par $\varphi(a) = ab$ et $\varphi(b) = a$. Ce dernier exemple induit un automorphisme d'ordre infini de $\mathbf{B}_2(n)$ (cf. proposition IV.4.1). En effet la suite $(\varphi^n(a))$ converge vers un mot infini à droite $\varphi^\infty(a) = abaababaabaab\dots$ ne contenant pas de puissance quatrième. Or dans la preuve de leur théorème, P.S. Novikov et S.I. Adian montrent qu'un mot en a et b réduit, qui ne contient pas de petite puissance définit un élément non trivial de $\mathbf{B}_2(n)$. Par conséquent $(\varphi^n(a))$ induit une suite d'éléments deux à deux distincts de $\mathbf{B}_2(n)$. Ce fait a déjà été remarqué par E.A. Cherepanov dans [18].

En résumé, $\text{Out}(\mathbf{B}_2(n))$ contient des éléments d'ordre infini. Ce qui répond à la première question. Toutefois, tout élément d'ordre infini de $\text{Out}(\mathbf{F}_2)$ n'induit pas nécessairement un automorphisme d'ordre infini du groupe de Burnside.

En rang supérieur à deux, nous proposons une large classe d'automorphismes du groupe libre \mathbf{F}_r dont les images dans $\text{Out}(\mathbf{B}_r(n))$ sont d'ordre infini : les automorphismes hyperboliques. Un automorphisme φ de \mathbf{F}_r est dit hyperbolique si le produit semi-direct $\mathbf{F}_r \rtimes_{\varphi} \mathbf{Z}$ est un groupe hyperbolique. Les travaux de M. Bestvina, M. Feighn et M. Handel, ainsi que ceux de P. Brinkmann donnent plusieurs caractérisations des automorphismes hyperboliques [7], [10], [14]. On notera que $\text{Out}(\mathbf{F}_2)$ ne peut pas contenir d'élément hyperbolique. En effet si φ est un automorphisme de \mathbf{F}_2 , l'homéomorphisme du tore épointé T qui lui est associé doit préserver la composante de bord. La suspension de T par cet homéomorphisme contient un tore plongé. Ainsi, le produit semi-direct $\mathbf{F}_2 \rtimes_{\varphi} \mathbf{Z}$ admet un sous-groupe isomorphe à \mathbf{Z}^2 . Par conséquent il ne peut pas être hyperbolique. Les résultats que nous avons obtenus s'articulent autour du thème suivant :

Théorème 1 (cf. Théorème IV.3.7). *Soit r un entier supérieur à trois. Soit φ un automorphisme hyperbolique du groupe libre \mathbf{F}_r . Il existe un entier n_0 tel que pour tout entier impair n , supérieur à n_0 , φ induit un automorphisme extérieur d'ordre infini du groupe de Burnside libre $\mathbf{B}_r(n)$.*

Les différentes méthodes employées pour étudier le groupe de Burnside libre ont toutes le même défaut : elles utilisent une présentation de $\mathbf{B}_r(n)$ qui n'est pas stable par automorphismes. En effet, on y construit, en partant du groupe

libre \mathbf{F}_r , une suite de groupes (G_p) dont la limite directe est $\mathbf{B}_r(n)$. Ces groupes forment en quelque sorte une suite d'approximations de $\mathbf{B}_r(n)$. À chaque étape, G_{p+1} est obtenu à partir de G_p en rajoutant des relations satisfaisant une certaine hypothèse de petite simplification, ce qui a pour effet de rompre les symétries induites par $\text{Out}(\mathbf{F}_r)$. Ces relations sont choisies grandes devant les grandeurs caractéristiques de G_p . Ce faisant G_{p+1} hérite des propriétés à petite échelle de G_p . Les groupes G_p étant bien compris - ils sont hyperboliques - on obtient les résultats sur $\mathbf{B}_r(n)$ par passage à la limite.

La stratégie consiste donc à rétablir en partie la symétrie induite par l'automorphisme φ . Pour cela, on doit adapter la construction de telle sorte que φ induise un automorphisme de chaque groupe G_p . Cette contrainte s'avère gênante et ce dès le premier quotient. En effet, si ρ est l'une des relations qui engendre le noyau de $\mathbf{F}_r \rightarrow G_1$, tous les itérés $\varphi^k(\rho)$ doivent être aussi des relations. Si φ est un automorphisme quelconque, la suite des longueurs de ces relations diverge. Or la théorie de la petite simplification ne s'applique bien qu'avec des relations ayant plus ou moins la même taille. Pour contourner cette difficulté, on élargit notre cadre de travail. Plutôt que de commencer avec le groupe libre \mathbf{F}_r , on choisit comme point de départ le produit semi-direct $\mathbf{F}_r \rtimes_{\varphi} \mathbf{Z}$. L'automorphisme se trouve alors encodé dans la structure de groupe. Les itérés $\varphi^k(\rho)$ s'interprétant maintenant comme des conjugués de ρ , il n'est plus nécessaire de les rajouter au système de relations. Intervient alors l'hypothèse sur l'automorphisme. Puisque φ est hyperbolique, le produit semi-direct $\mathbf{F}_r \rtimes_{\varphi} \mathbf{Z}$ est un groupe hyperbolique. En 1992, A.Y. Ol'shanskiï a étendu le théorème de P.S. Novikov et S.I. Adian au cas des groupes hyperboliques : si G est un groupe hyperbolique non élémentaire sans torsion, il existe un entier n_0 tel que pour tout entier n impair supérieur à n_0 , le quotient G/G^n est infini. Ce résultat, redémontré par T. Delzant et M. Gromov dans [22], a été généralisé par S.V. Ivanov et A.Y. Ol'shanskiï dans [37]. La démonstration étend la construction de quotients par petite simplification itérée. L'idée est donc d'appliquer ces techniques au groupe $\mathbf{F}_r \rtimes_{\varphi} \mathbf{Z}$. Il faut toutefois prendre quelques précautions. La construction de S.V. Ivanov et A.Y. Ol'shanskiï comme celle de T. Delzant et M. Gromov permettent de tuer *toutes* les puissances n -ièmes contenues dans G . En procédant de même avec le groupe $\mathbf{F}_r \rtimes_{\varphi} \mathbf{Z}$ on tuerait en particulier la puissance n -ième de tout élément dans le facteur \mathbf{Z} . Cette opération aurait pour effet de transformer l'automorphisme φ en un élément d'ordre fini. Ce qui est tout le contraire du but recherché. Pour pallier ce problème, il est nécessaire de reprendre entièrement la construction des approximations G_p , en ayant soin de n'adjoindre comme relations que les puissances n -ièmes contenues dans le facteur \mathbf{F}_r . Plus généralement, on démontre le théorème ci-dessous.

Théorème 2 (cf. Théorème IV.1). *Soit $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow 1$ une suite exacte courte de groupes. On suppose que H est de type fini, G est hyperbolique non élémentaire, sans torsion et F est sans torsion. Il existe un entier n_0 tel que pour tout entier impair n supérieur à n_0 le morphisme naturel $F \rightarrow \text{Out}(H)$ induit une injection de F dans $\text{Out}(H/H^n)$.*

Le théorème 1 s'obtient alors en appliquant le résultat précédent à la suite $1 \rightarrow \mathbf{F}_r \rightarrow \mathbf{F}_r \rtimes_{\varphi} \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow 1$. En utilisant d'autres exemples d'extensions hyperboliques, on montre que $\text{Out}(\mathbf{B}_r(n))$ contient des sous-groupe libres. Dans

[10], M. Bestvina, M. Handel et M. Feighn exhibent en effet des paires d'automorphismes de \mathbf{F}_r qui engendrent un groupe libre et telles que le produit semi-direct $\mathbf{F}_r \rtimes \mathbf{F}_2$ qu'ils définissent est hyperbolique. On en déduit alors :

Théorème 3 (cf. Théorème IV.3.9). *Soit $r \geq 3$. Il existe un entier n_0 tel que pour tout entier impair n supérieur à n_0 , $\text{Out}(\mathbf{B}_r(n))$ contient un sous-groupe isomorphe à \mathbf{F}_2 .*

Pour plonger des groupes abéliens dans $\text{Out}(\mathbf{B}_r(n))$ on doit procéder différemment. En effet le produit semi-direct d'un groupe libre par un groupe de la forme \mathbf{Z}^m ne peut pas être hyperbolique si m est supérieur à deux. On choisit donc r automorphismes du groupe libre \mathbf{F}_{2r} , qui commutent déjà dans $\text{Out}(\mathbf{F}_{2r})$ et qui induisent des éléments d'ordre infini de $\text{Out}(\mathbf{B}_{2r}(n))$. Ensuite, on vérifie « à la main » que ces automorphismes ne satisfont pas de nouvelles relations dans $\text{Out}(\mathbf{B}_{2r}(n))$.

Théorème 4 (cf. Théorème IV.5.4). *Soit $r \geq 2$. Il existe un entier n_0 tel que pour tout entier impair n supérieur à n_0 , $\text{Out}(\mathbf{B}_{2r}(n))$ et $\text{Out}(\mathbf{B}_{2r+1}(n))$ contiennent un sous-groupe isomorphe à \mathbf{Z}^r .*

Le théorème 2 donne des résultats analogues pour les groupes de Burnside construits sur un groupe de surface. Les résultats de M. Bestvina, M. Feighn et M. Handel sont alors remplacés par le théorème d'hyperbolisation de W. Thurston et une de ses généralisations due à M. Mosher (cf. Théorèmes IV.3.2 et IV.3.4).

Comme on l'a expliqué, la preuve du théorème 2 nécessite de reprendre la construction des approximations successives du groupe de Burnside. Ce processus repose principalement sur la théorie de la petite simplification. Adoptant le point de vue géométrique développé par T. Delzant et M. Gromov dans [22], nous en avons profité pour étendre cette théorie au cas des « familles de rotations » comme le suggérait M. Gromov dans [33] et [34]. Soit X un espace géodésique, propre, δ -hyperbolique et G un groupe d'isométries de X dont l'action est propre et co-compacte. Une *famille de rotations* est la donnée d'une collection $\mathcal{F} = (Y_i, H_i)_{i \in I}$ telle que

- ▶ Y_i est une partie 10δ -quasi-convexe de X ,
- ▶ H_i est un sous-groupe de G qui laisse Y_i invariant,
- ▶ il existe une action de G sur I compatible avec l'action de G sur X . Autrement dit, pour tout $g \in G$, pour tout $i \in I$, $gY_i = Y_{gi}$ et $gH_i g^{-1} = H_{gi}$.

On note alors N le sous-groupe normal de G engendré par les H_i . Un des objectifs est d'étudier le groupe \bar{G} quotient de G par N . Par analogie avec la théorie usuelle de la petite simplification, on définit deux paramètres qui jouent respectivement le rôle de la taille de la plus petite relation et de la taille de la plus grande pièce. Le rayon d'injectivité de \mathcal{F} , noté $r_{inj}(\mathcal{F})$, est la plus petite longueur de translation d'un élément non trivial pris dans un H_i . La constante $\Delta(\mathcal{F})$ mesure le recouvrement maximal entre deux parties Y_i distinctes. On construit alors un espace \tilde{X} , appelé cone-off de X , en attachant pour tout $i \in I$ un cône à courbure négative de base Y_i sur X . Le quotient de \tilde{X} par N , noté \bar{X} , remplace le complexe de Cayley de \bar{G} . Le théorème qui suit est la clef de voûte de l'approche asymptotique de la petite simplification : si le rapport $\Delta(\mathcal{F})/r_{inj}(\mathcal{F})$ est « suffisamment petit », alors l'espace \bar{X} est hyperbolique.

Théorème 5. *Il existe des constantes strictement positives δ_0 , δ_1 et λ , qui ne dépendent ni de X , ni de la famille \mathcal{F} , ayant les propriétés suivantes. On suppose que les conditions ci-dessous sont vérifiées.*

$$(i) \quad \frac{\delta}{r_{inj}(\mathcal{F})} \leq \delta_0 \text{ et } \frac{\Delta(\mathcal{F})}{r_{inj}(\mathcal{F})} \leq \lambda.$$

(ii) *Pour tout $i \in I$, H_i est un sous-groupe d'indice fini de $\text{Stab}(Y_i)$, le stabilisateur de Y_i dans G . En outre l'action de H_i sur Y_i est co-compacte.*

(iii) *Le quotient I/G est fini.*

Alors l'espace \bar{X} est δ_1 -hyperbolique. Par ailleurs, l'action de G sur X se prolonge en une action par isométries de \bar{G} sur \bar{X} qui est propre et co-compacte.

La théorie de la petite simplification usuelle est un cas particulier du théorème 5. Si $G = \langle S | R \rangle$ est une présentation satisfaisant la condition $C'(\lambda)$, on choisit comme espace X le graphe de Cayley du groupe libre engendré par S - qui est un arbre. Pour toute relation r , on note Y_r la géodésique bi-infinie qui relie les deux points du bord de X fixés par r . La famille de rotations à considérer est

$$\mathcal{F} = \{ (gY_r, \langle grg^{-1} \rangle) / r \in R, g \in G \}$$

L'hypothèse $\frac{\Delta(\mathcal{F})}{r_{inj}(\mathcal{F})} \leq \lambda$ est alors équivalente à la condition $C'(\lambda)$. Le théorème 5 est ainsi un analogue du résultat suivant : les groupes dont une présentation satisfait la condition $C'(\frac{1}{6})$ sont hyperboliques [31].

Le théorème 5 généralise ainsi plusieurs aspects de la théorie usuelle. Tout d'abord on ne considère plus le quotient d'un groupe libre mais d'un groupe hyperbolique. On retrouve ainsi la théorie de la petite simplification pour des groupes hyperboliques esquissée dans [31] et développée entre autres dans [16], [17], [21] et [50]. D'autre part, le noyau de l'application $G \rightarrow \bar{G}$ est décrit comme un sous-groupe normal de G engendré par une famille de groupes qui ne sont pas nécessairement cycliques. Ce point de vue recouvre en particulier la petite simplification à graphe introduite par E. Rips et Y. Segev dans [57]. puis indépendamment par M. Gromov dans [34]. Une approche détaillée de la petite simplification à graphe figure dans [47].

La démonstration du théorème 5 repose sur une application du théorème de Cartan-Hadamard. Les conditions de petite simplification permettent en effet d'équiper le quotient $\bar{P} = \bar{X}/\bar{G}$ d'une structure d'orbi-espace dont les cartes sont localement hyperboliques. Une version du théorème de Cartan-Hadamard pour les orbi-espaces, démontrée dans [22], assure alors que l'espace \bar{P} est développable et que son revêtement universel \bar{X} est globalement hyperbolique.

Revenons maintenant aux automorphismes du groupe de Burnside. Les énoncés démontrés ici (théorèmes 1, 3 et 4) sont essentiellement qualitatifs. Ils stipulent en effet l'existence d'un exposant n_0 suffisamment grand pour lequel les résultats s'appliquent. On ne cherchera pas à donner d'estimation numérique de n_0 , mais seulement à savoir de quels autres paramètres il peut dépendre. Ce parti pris est une conséquence directe de la forme asymptotique du théorème 5. Ce dernier assure l'existence d'une constante de petite simplification λ sans pour

autant donner sa valeur. Dans notre cas, les relations considérées sont toujours des puissances n -ièmes. En augmentant l'exposant n , on augmente la taille des relations, sans toucher à la taille des pièces. Ainsi, quitte à choisir n suffisamment grand, on peut s'assurer que les hypothèses du théorème 5 sont vérifiées à la première étape de la construction. Le quotient ainsi obtenu est un groupe hyperbolique. On peut donc réitérer le procédé. Dans [31] M. Gromov utilise déjà cette technique pour produire des groupes de torsion infini. Toutefois il précise que cet argument n'est pas suffisant pour traiter le cas du groupe de Burnside. La difficulté est en effet de borner l'ordre des éléments du groupe de torsion obtenu. Autrement dit il faut s'assurer que le même exposant convient pour toutes les étapes de la construction. A ce titre, il est important de noter que les constantes δ_0 , δ_1 et λ fournies par le théorème 5 de dépendent ni de X ni de la famille \mathcal{F} . Cependant ce constat n'est pas suffisant. À la manière de [22], on doit en outre contrôler à chaque étape deux invariants sur les groupes G_p . Notre construction requiert toutefois des invariants plus fins que ceux de T. Delzant et M. Gromov. Cela provient du fait qu'on cherche à tuer des puissances d'éléments contenus dans un sous-groupe normal de G (cf. théorème 2).

De nombreuses questions restent ouvertes sur les automorphismes du groupe de Burnside libre. Dans ce travail, nous avons montré que les automorphismes hyperboliques du groupe libre induisent des éléments d'ordre infini du groupe $\text{Out}(\mathbf{B}_r(n))$. Toutefois ce ne sont pas les seuls. Comme on l'a rappelé au début de l'introduction, l'automorphisme φ de $\mathbf{F}(a, b)$ défini par $\varphi(a) = ab$ et $\varphi(b) = a$ a la même propriété. On cherche un critère qui assure que l'image d'un élément de $\text{Out}(\mathbf{F}_r)$ dans $\text{Out}(\mathbf{B}_r(n))$ est d'ordre infini. Un début de réponse figure à la fin du chapitre IV. On montre en effet que les automorphismes du groupe libre à *croissance polynômiale* induisent toujours des automorphismes d'ordre *fini* du groupe de Burnside. Ce résultat généralise le fait observé sur les twists de Dehn en rang deux. À l'inverse, on peut se poser les questions suivantes :

- ▶ Est-ce qu'un automorphisme du groupe libre induit par un homéomorphisme pseudo-Anosov d'une surface à bord définit un automorphisme d'ordre infini pour un groupe de Burnside d'exposant suffisamment grand ?
- ▶ Plus généralement, est-ce qu'un automorphisme du groupe libre à croissance exponentielle induit un automorphisme d'ordre infini pour un groupe de Burnside d'exposant suffisamment grand ?

L'application naturelle $\text{Out}(\mathbf{F}_r) \rightarrow \text{Out}(\mathbf{B}_r(n))$ n'est pas surjective. Soient p et n deux entiers premiers entre eux, tels que p ne soit pas congru à 1 ou -1 modulo n . Considérons par exemple le morphisme de groupe φ de $\mathbf{F}(a, b)$ défini par $\varphi(a) = a^p$ et $\varphi(b) = b$. Cette application définit un automorphisme de $\mathbf{B}_2(r)$ qui ne peut se relever en un automorphisme de \mathbf{F}_2 . Les points suivants restent ouverts. Existe-t-il un critère pour décider si un élément de $\text{Out}(\mathbf{B}_r(n))$ est dans l'image de $\text{Out}(\mathbf{F}_r)$ ou non ? L'image de $\text{Out}(\mathbf{F}_r)$ est-elle un sous-groupe d'indice fini de $\text{Out}(\mathbf{B}_r(n))$? Est-ce que le groupe $\text{Out}(\mathbf{B}_r(n))$ est de type fini ou non ?

Dans notre étude, nous nous sommes contentés d'équiper l'espace \bar{X} construit grâce à la théorie de la toute petite simplification d'une métrique hyperbolique (cf. Théorème 5). En fait, il jouit d'une structure plus fine : c'est un exemple

d'espace localement $\text{CAT}(-1, \varepsilon)$ tels que les a introduits M. Gromov dans [32]. Ces espaces ont la propriété suivante : il existe un rayon r_0 , grand devant ε , tel que toutes les boules de rayon r_0 satisfont l'inégalité $\text{CAT}(-1)$ avec une erreur d'au plus ε . La construction par récurrence des approximations G_p du groupe de Burnside, fournit, à chaque étape, un espace $\text{CAT}(-\kappa_p, \varepsilon_p)$ sur lequel le groupe hyperbolique G_p agit par isométries, et où (κ_p) est une suite qui tend vers 0 [22]. Par ailleurs, étant donné un automorphisme d'ordre infini φ d'un groupe hyperbolique G , F. Paulin explique dans [54] comment construire un cône asymptotique de G sur lequel ce dernier agit sans point fixe. En utilisant un automorphisme d'ordre infini du groupe de Burnside, combiné avec la structure d'espace $\text{CAT}(-\kappa, \varepsilon)$, est-il possible de construire une action sans point fixe du groupe de Burnside sur un espace $\text{CAT}(0)$?

En plus des résultats sur les automorphismes du groupe de Burnside, nous avons exploité la théorie de la toute petite simplification pour construire de nouveaux exemples de complexes simpliciaux asphériques. Le principe est le suivant : on considère un complexe simplicial asphérique P et un sous-complexe Q de P . L'espace \bar{P} est obtenu en attachant sur P un cône de base Q . On cherche des conditions pour que ce nouveau complexe \bar{P} reste asphérique. Ce type de situation a déjà été abordé par J.H.C. Whitehead dans les années quarante. Dans [63] et [64], il étudie le second groupe d'homotopie d'un espace \bar{P} obtenu en attachant des cellules de dimension deux sur un complexe cellulaire P . Il y démontre que $\pi_2(\bar{P})$ décrit les identités entre les relations qui définissent la projection $\pi_1(P) \rightarrow \pi_1(\bar{P})$ (voir aussi [52]). Notre construction utilise des cellules de dimension supérieure.

Notre exemple principal est le suivant. Soit $\mathbf{H}_n(\mathbf{C})$ l'espace hyperbolique complexe de dimension n . On considère $SO(n, 1)$ comme le stabilisateur d'un plongement isométrique du plan hyperbolique réel $\mathbf{H}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{H}_n(\mathbf{C})$. Soit G un réseau uniforme réel de $SU(n, 1)$, c'est à dire un réseau uniforme de $SU(n, 1)$ dont l'intersection avec $SO(n, 1)$ est encore un réseau uniforme. Un tel exemple de réseau est donné par l'ensemble des matrices de $GL(n+1, \mathbf{Z}[\sqrt{2}, i])$ qui préservent la forme sesquilinéaire $q(x, y) = -\sqrt{2}x_0\bar{y}_0 + x_1\bar{y}_1 + \dots + x_n\bar{y}_n$. On s'intéresse au quotient de G par le sous-groupe normal engendré par $G \cap SO(n, 1)$.

Théorème 6. *Il existe un sous-groupe d'indice fini G' de G ayant la propriété suivante. On note H' le groupe $G' \cap SO(n, 1)$. Soit \bar{P} l'espace obtenu en attachant un cône de base $\mathbf{H}_n(\mathbf{R})/H'$ sur l'espace $\mathbf{H}_n(\mathbf{C})/G'$. Le complexe \bar{P} est un espace classifiant du groupe $\bar{G}' = G'/\ll H' \gg$.*

Un réseau de $SU(n, 1)$ est dit réel, s'il est invariant par conjugaison complexe. Ce théorème se reformule d'un point de vue topologique de la manière suivante.

Corollaire 7. *Soit M une variété hyperbolique complexe réelle de dimension n , c'est à dire dont le groupe fondamental est un réseau réel. On appelle N la sous-variété de M formée des points invariants par la conjugaison complexe. Il existe un revêtement \tilde{M} de M ayant la propriété suivante. On note $\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \dots$*

les relevés totalement géodésiques de N dans \widetilde{M} . L'espace obtenu en attachant sur \widetilde{M} des cônes de base \widetilde{N}_i est un espace hyperbolique contractile.

Ce résultat est une forme homotopique inspirée du théorème de Lefschetz démontré par N. Bergeron dans [5] ou [6]. On établit des résultats analogues au théorème 6 pour les paires $(SO(n, 1), SO(k, 1))$, $(SU(n, 1), SU(k, 1))$ et $(Sp(n, 1), Sp(k, 1))$.

Le résultat qui suit, nécessaire à la démonstration du théorème 6 est un analogue du fait suivant : si $\langle S|R \rangle$ est une présentation de groupe satisfaisant la condition $C'(\frac{1}{6})$ alors le complexe de Cayley qui lui est associé est asphérique [49].

Théorème 8. *Soit X un espace géodésique, propre, hyperbolique et G un groupe d'isométries de X dont l'action est propre et co-compacte. Soit $\mathcal{F} = (Y_i, H_i)_{i \in I}$ une famille de rotations qui satisfait les hypothèses du théorème de toute petite simplification 5. On suppose que les boules de X et de Y_i sont contractiles dans un voisinage approprié. Alors l'espace \bar{X} , quotient du cone-off de X par le sous-groupe normal N engendré par les H_i , est aussi contractile.*

Grâce au théorème 5, l'espace \bar{X} s'interprète comme le revêtement universel d'un orbi-espace localement hyperbolique. On utilise alors un résultat observé par E. Rips : un espace hyperbolique localement contractile est globalement contractile. Il suffit donc de montrer que les cartes qui décrivent cet orbi-espace sont localement contractiles. Ces dernières sont de deux natures : un cone-off et des cônes. A l'instar du cône sur un anneau hawaïen, le cône topologique d'un espace n'est pas nécessairement localement contractile. L'hypothèse de contractibilité sur les espaces de base X et Y_i permet de s'affranchir de cet obstacle. La stratégie pour démontrer le théorème 6 est maintenant la suivante. On choisit pour X l'espace hyperbolique $\mathbf{H}_n(\mathbf{C})$. On introduit ensuite une famille de rotations de la forme ci-dessous :

$$\mathcal{F} = (g\mathbf{H}_n(\mathbf{R}), gG \cap SO(n, 1)g^{-1})_{g \in G/G \cap SO(n, 1)}$$

Passer à un sous-groupe d'indice fini G' de G permet d'assurer que la famille \mathcal{F} satisfait les hypothèses de toute petite simplification. L'espace \bar{P} s'interprète alors comme un orbi-espace développable dont le groupe fondamental est $\bar{G}' = G'/\ll H' \gg$ et dont le revêtement universel est contractile.

La théorie de la petite simplification pour des familles de rotations fournit un cadre d'étude pour des groupes ayant des similarités avec les groupes vérifiant une condition $C'(\lambda)$. L'asphéricité du complexe de Cayley en est un exemple. Toutefois ces nouveaux groupes peuvent avoir un comportement très différent. Étant donné un groupe à petite simplification $C'(\frac{1}{6})$, D. Wise construit dans [65] une action propre discontinue et co-compacte de celui-ci sur un complexe cubique CAT(0). En particulier il ne peut pas avoir la propriété (T) de Kazhdan. A l'opposé M. Gromov utilise dans [34] (voir aussi [3]) la théorie de la petite simplification à graphe pour fabriquer des groupes de Kazhdan. Pour ce faire, il plonge des graphes marqués aléatoirement dans le graphe de Cayley d'un groupe. Il est donc naturel de se demander s'il existe d'autres manières de produire par

petite simplification des groupes satisfaisant la propriété (T). En particulier, le groupe $\tilde{G}' = G' / \ll H' \gg$ construit dans le théorème 6 est-il un groupe de Kazhdan ?

Le texte qui suit est divisé en quatre parties. Les chapitres II et III sont l'objet d'un article soumis en août 2009 [20]. Dans le premier chapitre, on rappelle les principaux résultats sur les espaces hyperboliques au sens de Gromov. En particulier on insiste sur le lien entre espace hyperbolique et limite d'espaces métriques suivant un ultra-filtre. Par ailleurs, on y donne une démonstration d'un théorème de E. Rips : un espace hyperbolique, localement contractile est globalement contractile (cf. Théorème I.3.1).

Le second chapitre est consacré à la théorie asymptotique de la toute petite simplification. Ce point de vue a été introduit par M. Gromov dans [32] et utilisé dans [22]. Pour l'agrément du lecteur, nous proposons ici une preuve détaillée du théorème 5. Dans un premier temps, on explique comment munir le cône d'un espace hyperbolique d'une structure métrique hyperbolique (cf. Section II.1). Dans le cas où l'espace de base est un arbre réel, ce résultat est une application directe d'un théorème de Berestovskii. Le cas général en découle par un argument limite (cf. Théorème II.1.18). On démontre en outre que, sous une hypothèse de contractibilité locale de la base, ce cône est localement contractile (cf. Section II.1.c). Dans un second temps, on se penche sur le cone-off d'un espace hyperbolique X (cf. Section II.2). Cet espace est obtenu en attachant sur X des cônes dont la base est une partie quasi-convexe. La stratégie pour les étudier est similaire à celle employée pour les cônes. On montre d'abord que le cone-off sur un arbre réel est un espace CAT(-1). Grâce à un argument limite, on en déduit que le cone-off sur un espace hyperbolique est localement hyperbolique (cf. Théorème II.2.31). Toutefois, pour utiliser ce procédé, on a besoin d'intervertir partiellement les constructions de cone-off et de limite selon un ultra-filtre. Ce point, plutôt technique, est détaillé dans la section II.2.e. En outre, on montre que celui-ci est localement contractile (cf. Section II.2.c). La fin du chapitre est consacrée à la théorie de la toute petite simplification à proprement parlé (cf. Section II.3). Après avoir effectué quelques rappels sur les orbi-espaces, on introduit la notion de famille de rotations puis on démontre les théorèmes 5 et 8. Dans le cas de la petite simplification usuelle, on explique comment maîtriser les invariants nécessaires pour l'étude des automorphismes de $\mathbf{B}_r(n)$ (cf. Section II.3.d).

Dans le troisième chapitre, on construit grâce à la topologie profinie des exemples de familles de rotations qui ne relèvent ni de la petite simplification usuelle, ni de la petite simplification à graphes. Ces exemples nous permettent de démontrer le théorème 6.

Le dernier chapitre porte sur les automorphismes du groupe de Burnside. On commence par démontrer un lemme de récurrence, généralisant le lemme 6.2.1 de [22], qui permet de construire les approximations successives de $\mathbf{B}_r(n)$ (cf.

Lemme IV.1.1). Les points clefs de ce lemme, d'apparence technique, sont les suivants.

- ▶ Grâce au contrôle des invariants sur les groupes hyperboliques, on peut choisir un exposant n , unique, de sorte qu'à chaque étape de la construction, le nouveau système de relations considéré sera constitué de puissances n -ième et satisfera les hypothèses du théorème de toute petite simplification.
- ▶ Au contraire du lemme 6.2.1 de [22], ce résultat permet de se restreindre à des puissances n -ièmes contenues dans un sous-groupe normal du groupe de départ.

Une fois le théorème 2 démontré, on en donne plusieurs applications. Les premières concernent les groupes de Burnside construits sur un groupe de surface. Les secondes, le groupe de Burnside libre (théorèmes 1 et 3). On s'intéresse ensuite à l'existence de sous-groupes abéliens libres dans le groupe des automorphismes extérieurs de $\mathbf{B}_r(n)$ (cf. Section IV.5). La section IV.4 résume les résultats connus sur le lien entre la croissance d'un automorphisme du groupe libre et son ordre en tant qu'automorphisme du groupe de Burnside libre.

Appendice : Les démonstrations de la stabilité des quasi-géodésiques dans un espace δ -hyperbolique que l'on peut trouver dans la littérature présentent le défaut suivant : la majoration de la distance entre quasi-géodésique et géodésique n'est pas homogène en δ . Pourtant, dans ce texte, on a besoin de rendre cette distance arbitrairement petite en réduisant la constante d'hyperbolicité δ . Pour cette raison, on propose en annexe une démonstration asymptotique de ce résultat majeur de la théorie des espaces hyperbolique, qui corrige cette lacune.

PRÉLIMINAIRES DE GÉOMÉTRIE
HYPERBOLIQUE

Dans ce chapitre on rappelle quelques propriétés des espaces hyperboliques au sens de Gromov. Pour plus de détails, on pourra se reporter à l'article original de M. Gromov [31] ou à [26] et [19].

I.1 Espaces hyperboliques

I.1.a Définition et premières propriétés

Soient x, y deux points d'un espace métrique X . On note $|x - y|_X$ (ou simplement $|x - y|$ lorsqu'aucune confusion n'est possible) la distance entre ces deux points. Si elle existe, bien qu'elle ne soit pas unique, $[x, y]$ désigne une géodésique reliant x et y . Si r est un réel positif, on note $B(x, r)$ et $\bar{B}(x, r)$ les boules respectivement ouverte et fermée de rayon r et de centre x . Soit Y une partie de X et α un réel positif. L'ensemble $Y^{+\alpha}$ est le α -voisinage de Y , c'est à dire l'ensemble des points de X situés à une distance qu plus α de Y . Le produit de Gromov de trois points x, y et z pris dans X est défini par

$$\langle x, y \rangle_z = \frac{1}{2} (|x - z| + |y - z| - |x - y|)$$

Soit δ un réel positif. On rappelle que X est δ -hyperbolique si quelques soient x, y, z et t quatre points de X on a

$$\langle x, z \rangle_t \geq \min \{ \langle x, y \rangle_t, \langle y, z \rangle_t \} - \delta$$

On note alors ∂X le bord à l'infini de X (cf. [19, Chap 2. § 1]).

Dans le cas des espaces géodésiques, l'hyperbolicité est caractérisée par la forme des triangles. Un triangle géodésique T de X est dit δ -fin, si chaque coté de T est contenu dans le δ -voisinage de la réunion des deux autres.

Proposition I.1.1 (cf. [19, Chap. 1 Prop. 3.6]). *Soit X un espace géodésique.*

- (i) *Si X est δ -hyperbolique, alors tous les triangles géodésiques de X sont 4δ -fins.*
- (ii) *Si tous les triangles géodésiques de X sont δ -fins, alors X est 8δ -hyperbolique.*

Les arbres réels et les espaces CAT(-1) (cf. infra) sont deux exemples d'espaces hyperboliques auxquels nous aurons recours.

Définition I.1.2 (Arbre réel). *Un arbre réel est un espace à la fois géodésique et 0-hyperbolique.*

Proposition I.1.3 (cf. [19, Chap. 3 Th. 4.1]). *Soit X un espace géodésique. L'espace X est un arbre réel si et seulement si deux points quelconques de X sont reliés par un unique chemin continu injectif.*

Soit T un triangle géodésique de X . Il existe un triangle géodésique T^* du plan hyperbolique \mathbf{H}_2 , unique à isométrie près, ayant des cotés de même longueur que ceux de T . On définit alors l'application de comparaison c comme l'unique application de T^* dans T , dont la restriction à chaque coté de T^* est un isométrie.

Définition I.1.4 (Espace CAT(-1)). *On dit que X est CAT(-1) si quelques soient T un triangle géodésique de X et p, q deux points de T^* , $|c(p) - c(q)|$ est inférieur à $|p - q|$.*

Proposition I.1.5 (cf. [19, Chap. 1 Prop 4.3]). *Un espace CAT(-1) est δ -hyperbolique avec $\delta = \ln 3$.*

L'ouvrage de M. R. Bridson et A. Haefliger [13] propose une étude approfondie des espaces CAT(0).

I.1.b Quasi-isométries et quasi-géodésiques

Définition I.1.6. (Quasi-isométrie) *Soient $k \geq 1$, $l \geq 0$ et $L > 0$ trois réels. Soit f une application entre deux espaces métriques X et X' .*

(i) *L'application f est une (k, l, L) -quasi-isométrie locale si pour tout x, y appartenant à X tels que $|x - y| \leq L$ on a*

$$k^{-1}|x - y| - l \leq |f(x) - f(y)| \leq k|x - y| + l$$

(ii) *L'application f est une (k, l) -quasi-isométrie si pour tout x, y appartenant à X on a*

$$k^{-1}|x - y| - l \leq |f(x) - f(y)| \leq k|x - y| + l$$

Définition I.1.7. (Quasi-géodésique) *Soient $k \geq 1$, $l \geq 0$ et $L > 0$ trois réels. Soit X un espace métrique.*

(i) *Une (k, l, L) -quasi-géodésique locale est une (k, l, L) -quasi-isométrie locale d'un intervalle de \mathbf{R} dans X .*

(ii) *Une (k, l) -quasi-géodésique est une (k, l) -quasi-isométrie d'un intervalle de \mathbf{R} dans X .*

Les deux propositions qui suivent sont des résultats essentiels de la géométrie hyperbolique.

Théorème I.1.8 (Stabilité des quasi-géodésiques). *Soient $k \geq 1$, $D > 0$, $L > 0$ et $k' > k$ quatre réels. Il existe des constantes $l > 0$ et $\delta > 0$ satisfaisant les propriétés suivantes. Soit X un espace géodésique, δ -hyperbolique. Soient x et x' deux points de $X \cup \partial X$ et $f : I \rightarrow X$ une (k, l, L) -quasi-géodésique locale entre x et x' .*

(i) *La distance de Hausdorff entre l'image de f et toute géodésique joignant x et x' n'excède pas D .*

(ii) *Le chemin f est aussi une (k', l) -quasi-géodésique.*

Remarque : On peut trouver dans [26] ou [19] des estimations quantitatives des constantes D , k' et L en fonction de δ , k et l . Toutefois celles-ci ne sont pas homogène en δ . On ne peut donc pas les utiliser pour fixer une distance D arbitrairement petite. Une démonstration asymptotique de ce théorème fondamental est proposée en annexe (cf. Th. A.1.3).

Proposition I.1.9. *Soient $k \geq 1$ et $\delta > 0$ deux réels. Il existe deux constantes $l > 0$ et $\delta' > 0$ ayant la propriété suivante. Soit $f : X \rightarrow X'$ une (k, l) -quasi-isométrie entre deux espaces géodésiques. Si X' est δ' -hyperbolique alors X est δ -hyperbolique.*

Remarque : La preuve de cette proposition utilise la stabilité des quasi-géodésiques. Si on souhaite utiliser les estimations de [26] ou [19], on est à nouveau confronté au problème d'homogénéité. Une preuve alternative de cette proposition figure en annexe (cf. Th. A.2.3).

I.1.c Parties quasi-convexes

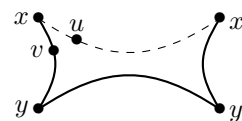
Dans toute cette partie, on suppose que X est un espace géodésique, δ -hyperbolique.

Définition I.1.10 (Quasi-convexe). *Soit Y une partie de X et α un réel positif. On dit que Y est α -quasi-convexe si toute géodésique joignant deux points de Y reste dans le α -voisinage de Y .*

Soient Y une partie de X , η un réel positif et x un point de X . On dit qu'un point y de Y est une projection à η près de x sur Y si $|x - y| \leq d(x, Y) + \eta$.

Lemme I.1.11. *Soient x, x', y et y' quatre points de X . Soit u un point de $[x, x']$. Si $|x - u| > |x - y| + 8\delta$ et $|x' - u| > |x' - y'| + 8\delta$, alors u est dans le 8δ -voisinage de $[y, y']$.*

Démonstration. Par hyperbolicité, il existe v sur $[x, y] \cup [y, y'] \cup [y', x']$ tel que $|u - v| \leq 8\delta$. Supposons que v appartienne à $[x, y]$ (cf. Fig. I.1). (Le cas où $v \in [y', x']$ est symétrique.) L'inégalité triangulaire impose la relation suivante.



$$|x - u| \leq |x - v| + |v - u| \leq |x - y| + 8\delta$$

FIG. I.1

Contradiction. Finalement $v \in [y, y']$. Donc u est 8δ -proche de $[y, y']$. \square

Proposition I.1.12 (cf. [22, Lemme 2.2.2]). *Soient Y et Z des parties de X respectivement α et β -quasi-convexes. Pour tout réel positif A on a*

$$\text{diam}(Y^{+A} \cap Z^{+A}) \leq \text{diam}(Y^{+\alpha+10\delta} \cap Z^{+\beta+10\delta}) + 2A + 20\delta$$

Démonstration. Soient x et x' deux points de $Y^{+A} \cap Z^{+A}$. Supposons que la distance de x à x' soit supérieure à $2A + 20\delta$. On introduit alors les points suivants (cf. Fig. I.2).

- ▶ t (respectivement t') est situé sur la géodésique $[x, x']$ à distance $A + 10\delta$ du point x (respectivement x').
- ▶ y (respectivement y') est une projection à δ -près de x (respectivement x') sur Y .

Le lemme I.1.11 assure alors que la distance qui sépare t de la géodésique $[y, y']$ n'excède pas 8δ . Comme Y est α -quasi-convexe, t est dans le $(\alpha + 8\delta)$ -voisinage de Y . On montre de la même manière que t' appartient à $Y^{+\alpha+10\delta}$, puis que t et t' appartiennent à $Z^{+\beta+10\delta}$. Par conséquent, on a

$$|x - x'| - 2A - 20\delta = |t - t'| \leq \text{diam}(Y^{+\alpha+10\delta} \cap Z^{+\beta+10\delta})$$

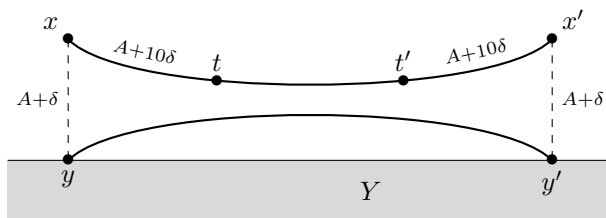


FIG. I.2

Cette inégalité reste vraie si la distance entre x et x' est inférieure $2A + 20\delta$. En passant à la borne supérieure sur tous les x, x' appartenant à $Y^{+A} \cap Z^{+A}$, on obtient

$$\text{diam}(Y^{+A} \cap Z^{+A}) \leq \text{diam}(Y^{+\alpha+10\delta} \cap Z^{+\beta+10\delta}) + 2A + 20\delta$$

□

Proposition I.1.13 (cf. [19, Chap. 10, Prop. 2.1]). *Soit Y une partie α -quasi-convexe de X . Soient x et x' deux points de X . Soient y et y' des projections à η près, respectivement de x et x' sur Y . Alors*

$$|y - y'| \leq \max \left\{ 0, |x - x'| - |x - y| - |x' - y'| \right\} + 12\delta + 2\alpha + 2\eta$$

Pour les besoins de la toute petite simplification, on introduit une version plus forte de la quasi-convexité.

Définition I.1.14. *Soit Y une partie de X . On dit que Y est fortement α -quasi-convexe si quelques soient y et y' deux points de Y , il existe p et p' appartenant à Y et des géodésiques $[y, p]$, $[p, p']$, $[p', y']$ contenues dans Y tels que $|y - p| \leq \alpha$ et $|y' - p'| \leq \alpha$.*

Remarque : Soit Y une partie fortement α -quasi-convexe de X . Puisque les triangles géodésiques de X sont 4δ -fins, Y est 8δ -quasi-convexe. Par ailleurs, quelques soient y et y' deux points de Y , Y contient un chemin entre y et y' dont la longueur est majorée par $|y - y'| + 4\alpha$. Par conséquent, si on munit Y de la structure de longueur induite par la restriction à Y de la distance de X , l'injection canonique $(Y, | \cdot |_Y) \hookrightarrow (X, | \cdot |_X)$ est une $(1, 4\alpha)$ -quasi-isométrie.

La construction de cylindre, présentée ci-dessous, donne une manière de remplacer une partie quasi-convexe de X par une partie fortement quasi-convexe, ayant ayant peu ou prou les mêmes propriétés.

Définition I.1.15. *Soit Y une partie de $X \cup \partial X$. On appelle cylindre de Y , et on note $\text{cyl}(Y)$, l'ensemble des points de X situés à une distance au plus 50δ d'une géodésique reliant deux points de Y .*

Remarque : Le cylindre d'une partie de X est en fait un voisinage de son enveloppe convexe. On a toutefois préféré garder le terme utilisé dans la littérature. Le terme de cylindre a été introduit à l'origine dans [22]. Dans cet article les auteurs considèrent l'enveloppe convexe d'une géodésique infinie. Le terme de cylindre prend alors tout son sens.

Remarque : Si Y est une partie α -quasi-convexe de X , alors $\text{cyl}(Y)$ est contenu dans le $(\alpha + 50\delta)$ -voisinage de Y .

Proposition I.1.16. *Soit Y une partie de X . Le cylindre $\text{cyl}(Y)$ est fortement 50δ -quasi-convexe.*

Démonstration. Soient x et x' deux points de $\text{cyl}(Y)$. Par définition, il existe quatre points y, y', z et z' appartenant à Y ainsi que p et p' des projections respectives de x et x' sur $[y, z]$ et $[y', z']$ tels que $|x - p| \leq 50\delta$ et $|x' - p'| \leq 50\delta$ (cf. Fig. I.3). Les deux géodésiques $[x, p]$ et $[x', p']$ sont contenues dans $\text{cyl}(Y)$. En outre, par hyperbolicité, $[p, p']$ est contenue dans le 48δ -voisinage de la réunion de $[p, y]$, $[y, y']$ et $[y', p']$ (cf [19, Chap. 2, Prop. 3.1]). Or $[p, y]$, $[y, y']$ et $[y', p']$ sont des fragments de géodésiques joignant des points de Y . Aussi tout point de $[p, p']$ appartient à $\text{cyl}(Y)$. Finalement le chemin $[x, p] \cup [p, p'] \cup [p', y']$ est contenu dans $\text{cyl}(Y)$. \square

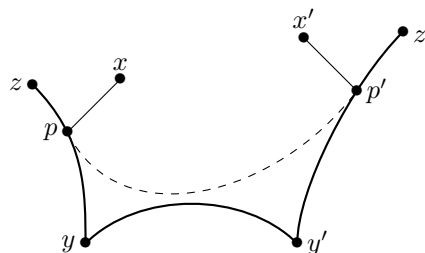


FIG. I.3

I.2 Limite d'espaces métriques suivant un ultra-filtre

Dans cette partie, on rappelle la définition de limite d'espaces métriques suivant un ultra-filtre et ses liens avec les espaces hyperboliques. Pour plus de détails sur cette notion, on consultera [23], [24] ou encore [25].

I.2.a Définition

Un ultra-filtre non principal est une application $\omega : \mathcal{P}(\mathbf{N}) \rightarrow \{0; 1\}$ finiment additive ayant les propriétés suivantes : ω s'annule sur toute partie finie de \mathbf{N} et $\omega(\mathbf{N}) = 1$. Une propriété \mathcal{P}_n , dépendant d'un entier n , est dite vraie ω -presque sûrement (ω -ps) si $\omega(\{n \in \mathbf{N} / \mathcal{P}_n \text{ est vraie}\}) = 1$. Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) est ω -essentiellement borné (ω -eb) s'il existe un réel M tel que $|u_n| \leq M$ ω -ps. Soit l un nombre réel. La suite (u_n) admet l pour limite suivant ω si pour tout $\varepsilon > 0$, $|u_n - l| \leq \varepsilon$, ω -ps. On note alors $\lim_{\omega} u_n = l$. Toute suite réelle ω -eb, admet une limite suivant ω (cf. [12]).

On considère maintenant une suite d'espaces métriques pointés (X_n, x_n^0) . Le produit restreint des X_n est défini de la manière suivante.

$$\Pi_{\omega} X_n = \left\{ (x_n) / \forall n \in \mathbf{N}, x_n \in X_n \text{ et } (|x_n - x_n^0|) \text{ est } \omega\text{-eb} \right\}$$

La quantité $\lim_{\omega} |x_n - y_n|$ définit une pseudo-distance entre deux suites (x_n) et (y_n) du produit restreint $\Pi_{\omega} X_n$.

Définition I.2.1 (Limite d'espaces métriques suivant un ultra-filtre). Soient (X_n, x_n^0) une suite d'espaces métriques pointés et ω un ultra-filtre non principal. La limite selon ω de (X_n, x_n^0) , notée $\lim_\omega (X_n, x_n^0)$ (ou simplement $\lim_\omega X_n$) est le quotient du produit restreint $\Pi_\omega X_n$ par la relation d'équivalence qui identifie deux points à distance nulle.

Remarque : Par construction, la pseudo-distance définie sur $\Pi_\omega X_n$ induit une distance sur $\lim_\omega X_n$.

Notations : Soit (x_n) un élément de $\Pi_\omega X_n$. Son image dans $\lim_\omega X_n$ est notée $\lim_\omega x_n$. Pour tout entier n , on se donne une partie Y_n de X_n . L'ensemble $\lim_\omega Y_n$ est la partie de $\lim_\omega X_n$ définie comme suit.

$$\lim_\omega Y_n = \left\{ \lim_\omega y_n / (y_n) \in \Pi_\omega X_n \text{ et } y_n \in Y_n \text{ } \omega\text{-ps} \right\}$$

I.2.b Lien avec les espaces hyperboliques

Lemme I.2.2. Soient ω un ultra-filtre non principal et (X_n, x_n^0) une suite d'espaces de longueur pointés. Alors l'espace $X = \lim_\omega X_n$ est géodésique.

Démonstration. L'espace X est complet (cf. [53]). Il suffit de montrer que pour tout $x, x' \in X$, il existe un point à mi-distance de x et x' . On considère donc deux points de X , notés $x = \lim_\omega x_n$ et $x' = \lim_\omega x'_n$. Puisque X_n est un espace de longueur, pour tout entier n , il existe un chemin $\sigma_n : [0; 1] \rightarrow X_n$ entre x_n et x'_n paramétré proportionnellement à la longueur d'arc et dont la longueur est inférieure à $|x'_n - x_n| + \frac{1}{n}$. En particulier le point $m_n = \sigma_n(\frac{1}{2})$ satisfait les relations suivantes :

$$\left| |m_n - x_n| - \frac{1}{2} |x'_n - x_n| \right| \leq \frac{1}{n} \text{ et } \left| |m_n - x'_n| - \frac{1}{2} |x'_n - x_n| \right| \leq \frac{1}{n}$$

Ainsi la suite (m_n) définit un point $m = \lim_\omega m_n$ de l'espace limite X tel que $|x - m| = |x' - m| = \frac{1}{2} |x' - x|$. \square

Lemme I.2.3. Soient ω un ultra-filtre non principal et (X_n, x_n^0) une suite d'espaces métriques pointés. On suppose que pour tout entier n , X_n est δ_n -hyperbolique avec $\lim_\omega \delta_n = \delta$. Alors l'espace $\lim_\omega X_n$ est δ -hyperbolique.

Démonstration. On considère quatre points de $\lim_\omega X_n$, notés $x = \lim_\omega x_n$, $y = \lim_\omega y_n$, $z = \lim_\omega z_n$ et $t = \lim_\omega t_n$. Puisque, X_n est δ_n -hyperbolique, on a

$$\langle x_n, z_n \rangle_{t_n} \geq \min \left\{ \langle x_n, y_n \rangle_{t_n}, \langle y_n, z_n \rangle_{t_n} \right\} - \delta_n$$

Ainsi en passant à la limite on obtient

$$\langle x, z \rangle_t \geq \min \left\{ \langle x, y \rangle_t, \langle y, z \rangle_t \right\} - \delta$$

On reconnaît la condition vérifiée par les espaces δ -hyperboliques. \square

Proposition I.2.4. Soient ω un ultra-filtre non principal et (X_n, x_n^0) une suite d'espaces de longueur pointés. On suppose que pour tout entier n , X_n est δ_n -hyperbolique avec $\lim_\omega \delta_n = 0$. Alors l'espace $\lim_\omega X_n$ est un arbre réel.

Démonstration. Les lemmes I.2.2 et I.2.3 assurent que $\lim_\omega X_n$ est un espace géodésique et 0-hyperbolique. Donc $\lim_\omega X_n$ est un arbre réel. \square

La proposition qui suit est la réciproque du lemme I.2.3. On l'utilisera très souvent pour prouver que certains espaces sont hyperboliques.

Proposition I.2.5. *Soient ω un ultra-filtre non principal et (X_n, x_n^0) une suite d'espaces métriques pointés. On suppose que l'espace limite $X = \lim_{\omega} X_n$ est δ -hyperbolique. Alors pour tout $\delta' > \delta$, pour tout $r > 0$, et pour tout $(c_n) \in \Pi_{\omega} X_n$, la boule $B(c_n, r) \subset X_n$ est δ' -hyperbolique ω -ps.*

Démonstration. Soient $\delta' > \delta$, $r > 0$ et $(c_n) \in \Pi_{\omega} X_n$. On raisonne par l'absurde. Supposons que la proposition soit fausse. Pour tout entier n , on peut alors trouver quatre points x_n, y_n, z_n et t_n dans $B(c_n, r)$ tels que

$$\langle x_n, z_n \rangle_{t_n} < \min \{ \langle x_n, y_n \rangle_{t_n}, \langle y_n, z_n \rangle_{t_n} \} - \delta' \quad \omega\text{-ps}$$

Par construction, la suite $(|c_n - x_n|)$ est bornée. Ainsi $x = \lim_{\omega} x_n$ définit un point de $X = \lim_{\omega} X_n$. On définit de même trois autres points notés $y = \lim_{\omega} y_n$, $z = \lim_{\omega} z_n$ et $t = \lim_{\omega} t_n$. Le passage à la limite dans l'inégalité précédente donne

$$\langle x, z \rangle_t \leq \min \{ \langle x, y \rangle_t, \langle y, z \rangle_t \} - \delta' < \min \{ \langle x, y \rangle_t, \langle y, z \rangle_t \} - \delta$$

Cette inégalité contredit le fait que X est δ -hyperbolique. \square

Proposition I.2.6. *Soient ω un ultra-filtre non principal et (X_n, x_n^0) une suite d'espaces métriques pointés. On suppose que pour tout $n \in \mathbf{N}$, X_n est géodésique et δ_n -hyperbolique avec $\lim_{\omega} \delta_n = 0$. Pour tout entier n , on se donne Y_n et Z_n des parties de X_n respectivement α_n et β_n -quasi-convexe. On note X, Y et Z les espaces suivants : $X = \lim_{\omega} (X_n, x_n^0)$, $Y = \lim_{\omega} Y_n$ et $Z = \lim_{\omega} Z_n$. On a alors*

$$\text{diam}(Y \cap Z) \leq \lim_{\omega} \text{diam}(Y_n^{+\alpha_n+10\delta_n} \cap Z_n^{+\beta_n+10\delta_n})$$

Remarque : Sans hypothèse supplémentaire, on n'a pas nécessairement égalité. En effet $Y \cap Z$ peut être vide sans que $\text{diam}(Y_n^{+\alpha_n+10\delta_n} \cap Z_n^{+\beta_n+10\delta_n})$ ne tende vers zéro. Cette situation peut se produire dès lors que les distances $d(x_n^0, Y_n)$ et $d(x_n^0, Z_n)$ ne sont pas bornées.

Démonstration. Soient x et x' deux points de $Y \cap Z$. Par définition, il existe deux suites (x_n) et (x'_n) dans $\Pi_{\omega} X_n$ telles que $x = \lim_{\omega} x_n$, $x' = \lim_{\omega} x'_n$. Soit $A > 0$. Puisque x et x' sont des éléments de $Y \cap Z$, x_n et x'_n appartiennent à $Y_n^{+A} \cap Z_n^{+A}$ ω -ps. En utilisant la proposition I.1.12, on en déduit que

$$\begin{aligned} |x_n - x'_n| &\leq \text{diam}(Y_n^{+A} \cap Z_n^{+A}) \\ &\leq \text{diam}(Y_n^{+\alpha_n+10\delta_n} \cap Z_n^{+\beta_n+10\delta_n}) + 2A + 20\delta_n \end{aligned}$$

Par passage à la limite on obtient

$$|x - x'| \leq \lim_{\omega} \text{diam}(Y_n^{+\alpha_n+10\delta_n} \cap Z_n^{+\beta_n+10\delta_n}) + 2A$$

Cette dernière inégalité est valable pour tout $x, x' \in Y \cap Z$ et $A > 0$. Ainsi, le diamètre de $Y \cap Z$ est majoré par $\lim_{\omega} \text{diam}(Y_n^{+\alpha_n+10\delta_n} \cap Z_n^{+\beta_n+10\delta_n})$. \square

I.3 Condition de contractibilité pour un espace hyperbolique

Dans cette partie on démontre un résultat de topologie observé par E. Rips : un complexe simplicial hyperbolique qui est localement contractile est globalement contractile. Plus précisément on donne une preuve du théorème suivant.

Théorème I.3.1. *Soit X un complexe simplicial de dimension n , δ -hyperbolique. On suppose que pour tout $x \in X$, pour tout $r \in [0; 2(n+1)(4\delta+1)]$, la boule fermée $\bar{B}(x, r)$ est contractile dans $B(x, r+4\delta+1)$. Alors tous les groupes d'homotopies de X sont triviaux. En particulier X est contractile.*

On démontre ce théorème en deux étapes. Dans un premier temps, on établit un lien topologique entre un complexe simplicial localement contractile et son polyèdre de Rips. Ensuite on utilise le fait que le polyèdre de Rips d'un espace hyperbolique est contractile (cf. [31, Section 2.2]).

Soit X un espace métrique et d un nombre réel positif. Le polyèdre de Rips de X , noté $P_d(X)$, est le complexe simplicial dont les simplexes sont les parties finies de X de diamètre inférieur à d .

On fixe maintenant un complexe simplicial X de dimension n et un réel $d \geq 1$. Le squelette de dimension k de X est noté $X^{(k)}$. Pour alléger les expressions, on désigne par P le squelette de dimension $n+1$ de $P_d(X^{(0)})$. Tout simplexe de X a un diamètre inférieur à 1. On définit donc une application simpliciale $f : X \rightarrow P$ de la manière suivante : pour tout simplexe σ de X , f envoie σ sur $\sigma^{(0)}$. On souhaite maintenant construire une application $g : P \rightarrow X$ de telle sorte que $g \circ f$ soit homotope à l'identité. Dans ce but, on fait une hypothèse de contractibilité locale. Plus précisément on suppose que X satisfait la condition ci-dessous.

Condition (CL) Pour tout $r \in [0; 2(n+1)d]$, pour tout $x \in X$, la boule fermée $\bar{B}(x, r)$, contenue dans X , est contractile dans $B(x, r+d)$.

Lemme I.3.2. *Pour tout $k \in [0; n+1]$, il existe une application continue $g^{(k)} : P^{(k)} \rightarrow X$ satisfaisant la condition suivante. Pour tout $l \leq k$, pour tout simplexe σ de $P^{(k)}$ de dimension l , pour tout sommet x de σ , $g^{(k)}(\sigma)$ est contenu dans la boule fermée $\bar{B}(g^{(k)}(x), 2ld)$.*

Démonstration. On démontre ce lemme par récurrence.

Initialisation : L'application $g^{(0)} : P^{(0)} \rightarrow X$ est définie de la manière suivante : $\forall x \in X^{(0)}, g^{(0)}(\{x\}) = x$.

Hérédité : Soit $k \in [0; n]$. On suppose donnée une application $g^{(k)}$ de $P^{(k)}$ dans X satisfaisant les propriétés du lemme. Soit σ un simplexe de dimension $k+1$ de P et x un sommet de σ (c'est à dire un point $X^{(0)}$). On note $\sigma_0, \dots, \sigma_{k+1}$ les faces de σ . Leur réunion, $\partial\sigma$, est une sphère topologique de dimension k . Par

construction $g^{(k)}$ envoie $\partial\sigma$ dans la boule fermée $\bar{B}(g^{(k)}(x), (2k+1)d)$. La condition (CL) impose que cette boule soit contractile dans $B(g^{(k)}(x), (2k+2)d)$. Le choix d'une homotopie, qui contracte $g^{(k)}(\partial\sigma)$ en un point définit une application $g^{(k+1)} : \sigma \rightarrow X$ qui coïncide avec $g^{(k)}$ sur $\partial\sigma$ (cf. Fig. I.4). En outre, $g^{(k+1)}(\sigma)$ est contenu dans $\bar{B}(g^{(k+1)}(x), (2k+2)d)$. En procédant de même pour tous les simplexes de dimension $k+1$ on définit une application $g^{(k+1)} : P^{(k+1)} \rightarrow X$ qui coïncide avec $g^{(k)}$ sur $P^{(k)}$ et qui satisfait les propriétés du lemme. \square

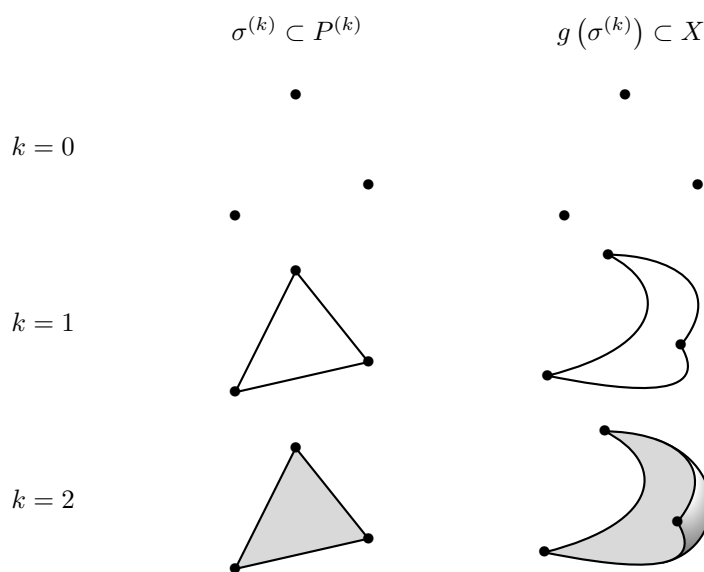


FIG. I.4 – Construction de l'application g

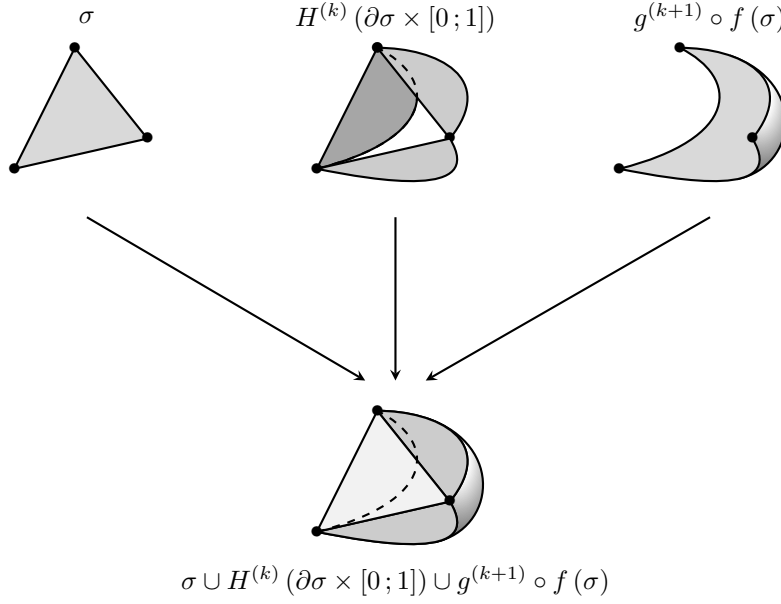
Lemme I.3.3. *Pour tout $k \in \llbracket 0; n+1 \rrbracket$, il existe une application continue $H^{(k)} : X^{(k)} \times [0; 1] \rightarrow X$ satisfaisant les conditions suivantes.*

- (i) *Les restrictions de $H^{(k)}$ à $X^{(k)} \times \{0\}$ et $X^{(k)} \times \{1\}$ coïncident respectivement avec $\text{id}_{X^{(k)}}$ et $g^{(k)} \circ f$.*
- (ii) *Pour tout $l \leq k$, pour tout simplexe σ de $X^{(k)}$ de dimension l , pour tout sommet x de σ , $H^{(k)}(\sigma \times [0; 1])$ est contenu dans la boule fermée $\bar{B}(x, (2l+1)d)$.*

Démonstration. On montre à nouveau ce lemme par récurrence.

Initialisation : Par construction, $g^{(0)} \circ f$ est l'identité de $X^{(0)}$. Aussi pour tout $t \in [0; 1]$, pour tout $x \in X^{(0)}$, on pose $H^{(0)}(x, t) = x$.

Hérédité : Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. On suppose donnée une application $H^{(k)}$ de $X^{(k)} \times [0; 1]$ dans X satisfaisant les propriétés du lemme. Soient σ un simplexe de X de dimension $k+1$ et x un sommet de σ . On note $\sigma_0, \dots, \sigma_{k+1}$ les faces de σ et $\partial\sigma$ leur réunion. Par construction $f(\sigma)$ est un simplexe de P et $\{x\}$ un sommet de $f(\sigma)$. Ainsi $g^{(k+1)} \circ f(\sigma)$ est contenu dans la boule fermée $\bar{B}(x, (2k+2)d)$.

FIG. I.5 – Construction de l’homotopie $H^{(k+1)}$

Par hypothèse de récurrence, $H^{(k)}(\partial\sigma \times [0; 1]) \subset \bar{B}(x, (2k+2)d)$. Ainsi l’ensemble $\sigma \cup H^{(k)}(\partial\sigma \times [0; 1]) \cup g^{(k+1)} \circ f(\sigma)$, contenu dans $\bar{B}(x, (2k+2)d)$, est l’image dans X d’une sphère topologique de dimension $k+1$ (cf. Fig I.5). La condition (CL) impose que la boule $\bar{B}(x, (2k+2)d)$ soit contractile dans $B(x, (2k+3)d)$. Le choix d’une homotopie qui la contracte en un point définit une application $H^{(k+1)} : \sigma \times [0; 1] \rightarrow X$ qui coïncide avec $H^{(k)}$ sur $\partial\sigma \times [0; 1]$. On procède de même pour tous les simplexes de dimension $k+1$. On définit ainsi une application $H^{(k+1)} : X^{(k+1)} \times [0; 1] \rightarrow X$ qui coïncide avec $H^{(k)}$ sur $X^{(k)} \times [0; 1]$ et qui satisfait les propriétés du lemme. \square

Les deux derniers lemmes réunis démontrent la propriété suivante.

Proposition I.3.4. *Soit X un complexe simplicial de dimension n . Soit d un réel supérieur à 1. On suppose que pour tout $r \in [0; 2(n+1)d]$, pour tout $x \in X$, la boule fermée $\bar{B}(x, r)$ est contractile dans $B(x, r+d)$. Alors il existe deux applications $f : X \rightarrow P_d^{(n+1)}(X^{(0)})$ et $g : P_d^{(n+1)}(X^{(0)}) \rightarrow X$ telles que $g \circ f$ soit homotope à l’identité.*

Démonstration. On choisit pour g l’application $g^{(n+1)}$ construite au lemme I.3.2 et pour homotopie l’application $H^{(n+1)}$ construite au lemme I.3.3. \square

Pour démontrer le théorème I.3.1, on utilise la proposition suivante.

Proposition I.3.5 (cf. [19, Chap. 5, Prop 1.1 et Prop 2.2]). *Soit X un complexe simplicial, δ -hyperbolique. Soit d un réel supérieur à $4\delta+1$ et n un entier. Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, le k -ième groupe d’homotopie de $P_d^{(n+1)}(X^{(0)})$ est trivial.*

Démonstration du théorème I.3.1. On fixe $d = 4\delta + 1$. On rappelle que P désigne le complexe simplicial $P_d^{(n+1)}(X^{(0)})$. La proposition I.3.4 donne deux application $f : X \rightarrow P$ et $g : P \rightarrow X$ telles que $g \circ f$ soit homotope à l'identité. En particulier, pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, f induit une injection de $\pi_k(X)$ dans $\pi_k(P)$, les k -ième groupes d'homotopie de X et P . Puisque X est δ -hyperbolique, pour tout $k \leq n$, $\pi_k(P)$, et donc $\pi_k(X)$, est trivial (cf. proposition I.3.5). Or X est de dimension n . D'après le théorème d'Hurewicz, tous les groupes d'homotopies de dimension supérieure de X sont aussi triviaux. \square

I.4 Groupes hyperboliques

Dans toute cette partie, X désigne un espace géodésique, propre et δ -hyperbolique. Par propre on entend que toute boule fermée de X est compacte. On rappelle que le bord à l'infini de X est noté ∂X .

I.4.a Isométries d'un espace hyperbolique

Soit x un point de X . Une isométrie g de X est

- ▶ *elliptique* si l'orbite de x par g est bornée,
- ▶ *parabolique* si l'orbite de x sous l'action de g admet exactement un point d'accumulation dans ∂X ,
- ▶ *hyperbolique* si l'orbite de x sous l'action de g admet exactement deux points d'accumulation dans ∂X .

On remarquera que ces définitions ne dépendent pas du choix de x . Si g est hyperbolique, son action sur le bord ∂X fixe exactement deux points (les deux points d'accumulation de $(g^n x)_{n \in \mathbf{Z}}$). Ces points sont notés g^- et g^+ . Toute isométrie de X est nécessairement elliptique, parabolique ou hyperbolique (cf. [19, Chap. 9, Th. 2.1]). Pour « mesurer » l'action d'une isométrie on lui associe deux longueurs de translation.

Définition I.4.1 (Longueurs de translation). *Soit g une isométrie de X .*

- ▶ *La longueur de translation de g , notée $[g]_X$ (ou simplement $[g]$) est définie par*

$$[g] = \inf_{x \in X} |gx - x|$$

- ▶ *La longueur stable de g , notée $[g]_X^\infty$ (ou simplement $[g]^\infty$) est définie par*

$$[g]^\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} |g^n x - x|$$

La longueur stable est bien définie et ne dépend pas du point x (cf. [19, Chap. 10, Prop. 6.1]). Ces deux longueurs sont reliées par l'inégalité suivante.

Proposition I.4.2 (cf. [19, Chap. 10, Prop. 6.4]). *Pour toute isométrie g de X , on a*

$$[g]^\infty \leq [g] \leq [g]^\infty + 32\delta$$

Proposition I.4.3 (cf. [19, Chap. 10, Prop. 6.3]). *Soit g une isométrie de X . La longueur stable de g est strictement positive si et seulement si g est hyperbolique. En particulier si $[g] \geq 40\delta$ alors g est hyperbolique.*

Axe d'une isométrie

Définition I.4.4. Soit g une isométrie de X . L'axe de g , noté A_g est la partie de X définie de la manière suivante

$$A_g = \left\{ x \in X \mid |gx - x| = \max \{[g], 40\delta\} \right\}$$

Remarque : L'espace X étant propre, l'axe d'un isométrie n'est jamais vide. Par ailleurs A_g est invariant sous l'action de $\langle g \rangle$.

Lemme I.4.5. Soit g une isométrie de X . Quelque soit x un point de A_g , la géodésique $[x, gx]$ est contenue dans A_g .

Démonstration. Soit y un point sur $[x, gx]$. L'inégalité triangulaire donne

$$|gy - y| \leq |gy - gx| + |gx - y| = |x - y| + |y - gx| = |gx - x|$$

En particulier $|gy - y| \leq \max \{[g], 40\delta\}$. □

Proposition I.4.6 (cf. [22, Prop. 2.3.3]). Soit g une isométrie de X .

- (i) Pour tout $x \in X$, on a $|gx - x| \geq 2d(x, A_g) + [g] - 20\delta$.
- (ii) Pour tout $x \in X$, pour tout réel positif A , si $|gx - x| \leq [g] + A$ alors la distance de x à A_g est inférieure à $\frac{1}{2}A + 10\delta$.
- (iii) L'ensemble A_g est 40δ -quasi-convexe.

Démonstration.

Point (i) Si x est un point de A_g , le point (i) est évident, on peut donc supposer que x n'appartient pas à A_g . On note alors y une projection de x sur A_g . La géodésique $[y, gy]$ est contenue dans A_g (cf. lemme I.4.5). Par conséquent, y et gy sont des projections respectives de x et gx sur $[y, gy]$, qui est 4δ -quasi-convexe. La proposition I.1.13 donne alors

$$|gy - y| \leq \max \{0, |gx - x| - 2|x - y|\} + 20\delta$$

Soit z un point de $[x, y]$ distinct de y . Comme y est une projection de x sur A_g , z ne peut être dans A_g . En particulier $|gz - z|$ est supérieure à 40δ . En faisant tendre z vers y , on en déduit que la distance de y à gy est supérieur à 40δ . Ce qui amène à la conclusion suivante.

$$|gx - x| \geq 2|x - y| + |gy - y| - 20\delta \geq 2d(x, A_g) + [g] - 20\delta$$

Point (ii) Soit x un point de X tel que $|gx - x| \leq [g] + A$. Le point (i) assure que $d(x, A_g) \leq \frac{1}{2}(|gx - x| - [g] + 20\delta) \leq \frac{1}{2}A + 10\delta$.

Point (iii) Soient x et x' deux points de A_g . La fonction distance dans un espace δ -hyperbolique est 8δ -quasi-convexe (cf. [19, Chap. 10, Cor. 5.3]). Par conséquent pour tout point y de $[x, x']$,

$$|gy - y| \leq \max \{|gx - x|, |gx' - x'|\} + 8\delta \leq [g] + 48\delta$$

Grâce au point (ii), la distance de y à A_g n'excède pas 34δ . □

Proposition I.4.7. *Soit g une isométrie hyperbolique de X . Soit σ une géodésique bi-infinie reliant g^- et g^+ . Si Y est une partie α -quasi-convexe de X , invariante sous l'action de g , alors σ est contenue dans le $(\alpha + 8\delta)$ -voisinage de Y .*

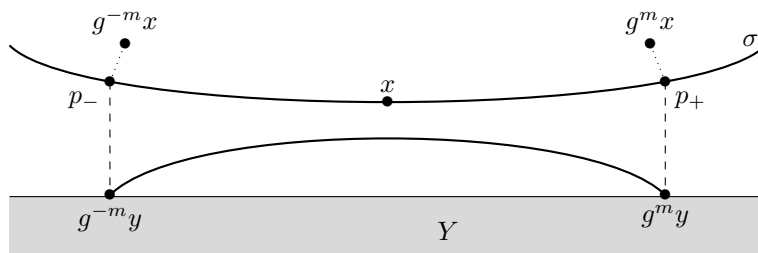


FIG. I.6

Démonstration. Soit x un point de σ . On note d la distance qui le sépare de Y et y une projection de x à δ près sur Y . Puisque g est hyperbolique, il existe un entier m satisfaisant l'inégalité suivante : $|g^m x - g^{-m} x| \geq 2d + 100\delta$. On note respectivement p_- et p_+ des projections de $g^{-m}x$ et $g^m x$ sur σ . Les géodésiques $g^m \sigma$ et σ ont les mêmes extrémités, elles restent donc 8δ -proches l'une de l'autre (cf. [19, Chap. 2, Prop. 2.2]) En particulier, $|g^{-m}x - p_-|$ et $|g^m x - p_+|$ n'excèdent pas 8δ . Remarquons que x est nécessairement sur la portion de σ délimitée par p_- et p_+ (cf. Fig I.6). En effet, si tel n'était pas le cas on aurait

$$\begin{aligned} |g^m x - g^{-m} x| - 16\delta &\leq |p_+ - p_-| \leq \left| |p_+ - x| - |p_- - x| \right| \\ &\leq \left| |g^m x - x| - |g^{-m} x - x| \right| + 16\delta \\ &\leq 16\delta \end{aligned}$$

Contradiction. En outre on a,

$$|p_+ - x| \geq |g^m x - x| - 16\delta \geq \frac{1}{2} |g^{-m} x - g^m x| - 16\delta \geq d + 30\delta$$

De même, $|p_- - x|$ est supérieure à $d + 30\delta$. Le lemme I.1.11 assure alors que la distance qui sépare x de $[g^{-m}y, g^m y]$ n'excède pas 8δ . Or $g^{-m}y$ et $g^m y$ sont deux points de Y qui est α -quasi-convexe. Ainsi x est dans le $(\alpha + 8\delta)$ -voisinage de Y . \square

Corollaire I.4.8. *Soit g une isométrie hyperbolique de X . Si σ est une géodésique bi-infinie reliant g^- et g^+ , alors σ est contenue dans le 113δ -voisinage¹ de A_g .*

Démonstration. On applique la proposition précédente I.4.7 à A_g qui est 40δ -quasi-convexe. \square

¹Dédicace spéciale aux doctorants du bureau 113!

I.4.b Groupes hyperboliques

Soit G un groupe d'isométries de X . On suppose que son action est propre et co-compacte. Par propre, on entend le fait suivant : pour tout point x appartenant à X , il existe un rayon strictement positif r , tel que l'ensemble g de G satisfaisant $gB(x, r) \cap B(x, r) \neq \emptyset$ est fini. Dans ce cas, les éléments de G sont soit d'ordre fini (donc elliptique) soit hyperboliques (cf. [19, Chap. 9, Th. 3.4]). En particulier G ne contient pas d'élément parabolique. Par ailleurs un sous-groupe de G qui n'est pas virtuellement cyclique (fini ou infini) contient une copie du groupe libre \mathbf{F}_2 (cf. [26, Chap. 8, Th. 37]). Un sous-groupe de G qui est virtuellement cyclique est dit élémentaire. Par exemple, si g est un élément hyperbolique de G , son normalisateur est un sous-groupe élémentaire (cf. [19, Chap. 10, Prop. 7.1]).

Définition I.4.9. Soit H un sous-groupe de G , le rayon d'injectivité de H sur X , noté $r_{inj}(H, X)$, est défini de la manière suivante

$$r_{inj}(H, X) = \inf \left\{ [h]^\infty / h \in H \text{ est hyperbolique.} \right\}$$

On dira que G satisfait l'hypothèse des petits centralisateurs si G est non élémentaire et tous ses sous-groupes élémentaires sont cycliques.

Lemme I.4.10. Soit H un sous-groupe normal non trivial de G . Si G satisfait l'hypothèse des petits centralisateurs, alors H est non élémentaire.

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Supposons que H soit élémentaire. C'est donc un groupe cyclique engendré par un élément non trivial h . Si h est hyperbolique, alors G qui est le normalisateur de H est aussi un groupe élémentaire (cf. [19, Chap. 10, Prop. 7.1]). Ce qui n'est pas le cas. L'élément h est donc elliptique. Soit g un élément de $G \setminus \{1\}$. Pour tout entier n , $g^n h g^{-n}$ appartient à $H = \langle h \rangle$. Comme h est d'ordre fini, il existe un entier n , non nul, tel que $g^n h g^{-n} = h$. Ainsi g^n et h engendrent un groupe élémentaire, qui est par conséquent cyclique. Comme h est non trivial, il existe $(p, q) \in \mathbf{Z}^* \times \mathbf{Z}$ tels que $g^{np} = h^q$. Il en résulte que g est d'ordre fini. Or un groupe hyperbolique, dont tous les éléments sont d'ordre fini, est fini (cf. [26, Chap. 8, Cor. 36]). Donc G est un groupe élémentaire. Absurde. \square

Suivant l'exemple de T. Delzant et M. Gromov dans [22], on introduit maintenant un paramètre $\Delta(G, X)$ qui permet d'étudier les groupes satisfaisant l'hypothèse des petits simplificateurs.

Définition I.4.11. Soient g et g' deux éléments de G . On pose

$$\Delta(g, g') = \text{diam} \left(A_g^{+50\delta} \cap A_{g'}^{+50\delta} \right)$$

L'invariant $\Delta(G, X)$ est la borne supérieure des $\Delta(g, g')$ quand g et g' parcourent l'ensemble des éléments de G dont la longueur de translation est inférieure à 100δ et qui engendrent un sous-groupe non élémentaire.

THÉORIE DE LA TOUTE PETITE
SIMPLIFICATION

II.1 Cône d'un espace métrique

II.1.a Définition et métrique

Dans tout ce qui suit Y est un espace métrique et r_0 un réel strictement positif.

Définition II.1.1. *Le cône de base Y et de rayon r_0 , noté $C(Y, r_0)$ (ou simplement $C(Y)$) est le quotient de $Y \times [0; r_0]$ par la relation d'équivalence qui identifie tous les points de la forme $(y, 0)$.*

Notation : La classe d'équivalence de $(y, 0)$, notée v , est appelée *sommet* du cône. Pour alléger les notations, on ne distinguera pas les points de $Y \times [0; r_0]$ et leurs images dans $C(Y)$.

Suivant l'exemple de M. R. Bridson et A. Haefliger dans [13, Chap. I.5], on définit une distance sur $C(Y)$ de la manière suivante. Étant donnés deux points y et y' de Y , leur *angle au sommet* est $\theta(y, y') = \min \left\{ \pi, \frac{|y - y'|}{\text{sh } r_0} \right\}$.

Proposition II.1.2 (cf. [13, Chap I.5, Prop 5.9(1)]). *L'application $|\cdot|_{C(Y)}$, caractérisée par la relation ci-dessous, est une distance sur $C(Y)$.*

$$\forall x, x' \in C(Y), \text{ch}(|x - x'|_{C(Y)}) = \text{ch } r \text{ch } r' - \text{sh } r \text{sh } r' \cos(\theta(y, y'))$$

Remarques : La distance dans le cône est modélée sur la distance dans le plan hyperbolique \mathbf{H}_2 : Soient $x = (y, r)$ et $x' = (y', r')$ deux points de $C(Y)$. La distance qui les sépare est exactement la distance entre deux points \tilde{x} et \tilde{x}' de \mathbf{H}_2 respectivement à distance r et r' de l'origine O et formant un angle en O égal à $\theta(y, y')$ (cf. Fig. II.1). On notera en particulier que $|x - x'| = r + r'$ si et seulement si $\theta(y, y') \geq \pi$ si et seulement si $|y - y'| \geq \pi \text{sh } r_0$.

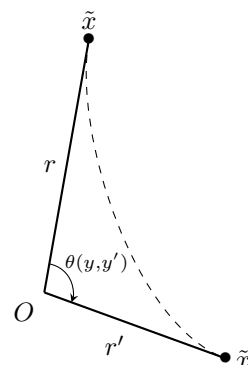


FIG. II.1

Le cône $C(Y)$ défini ci-dessus correspond à la boule de centre v et de rayon r_0 de l'espace $C_{-1} \left(\frac{Y}{\text{sh } r_0} \right)$ étudié dans [13, Chap. I.5].

Exemples :

- ▶ Si Y est un cercle de périmètre $2\pi \text{sh } r_0$, muni de sa structure de longueur, alors $C(Y)$ est le disque hyperbolique de \mathbf{H}_2 de rayon r_0 .
- ▶ Si Y est la droite réelle, alors $C(Y) \setminus \{v\}$ est le revêtement universel du disque hyperbolique épointé de rayon r_0 .

II.1.b Relation entre le cône et sa base

Dans cette partie, on s'intéresse au lien entre la géométrie du cône et celle de sa base. Dans ce but, on introduit deux applications.

$$\begin{array}{ccc} \iota : Y & \hookrightarrow & C(Y) \\ y & \mapsto & (y, r_0) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} p : C(Y) \setminus \{v\} & \twoheadrightarrow & Y \\ (y, r) & \mapsto & y \end{array}$$

Proposition II.1.3 (cf. [13, Chap. I.5, Prop 5.10]). *Soient $x = (y, r)$ et $x' = (y', r')$ deux points du cône $C(Y)$.*

(i) *Si $r, r' > 0$ et $\theta(y, y') < \pi$ alors $p : C(Y) \setminus \{v\} \rightarrow Y$ induit une bijection entre les géodésiques de $C(Y)$ reliant x et x' et les géodésiques de Y reliant $y = p(x)$ et $y' = p(x')$.*

(ii) *Dans tous les autres cas, il existe une unique géodésique reliant x et x' .*

Proposition II.1.4 (cf. [13, Chap I.5, Cor. 5.11 et Ex. 5.12]).

(i) *Si Y est muni d'une structure de longueur, alors $C(Y)$ aussi.*

(ii) *Si Y est géodésique, alors $C(Y)$ aussi.*

Proposition II.1.5. *Soient $x = (y, r)$ et $x' = (y', r')$ deux points du cône $C(Y)$. La distance entre x et x' est majorée de la manière suivante.*

$$|x - x'| \leq |r - r'| + \sqrt{\text{sh } r \text{ sh } r' \theta(y, y')}$$

Démonstration. En utilisant les formules de trigonométrie hyperbolique usuelles on a

$$|x - x'| = \text{argch} \left(\text{ch}(r - r') + \text{sh } r \text{ sh } r' (1 - \cos \theta(y, y')) \right)$$

L'inégalité provient alors du fait suivant.

$$\forall a \geq 1, \forall t \geq 0, \text{argch}(a + t) \leq \text{argch}(a) + \sqrt{2t}$$

□

On s'intéresse maintenant à l'application ι qui plonge la base Y dans le cône. Pour cela on introduit une fonction auxiliaire $\mu : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$. Elle nous permettra d'écrire certaines inégalités métriques en s'affranchissant du contexte de Y . Cette application est caractérisée ainsi :

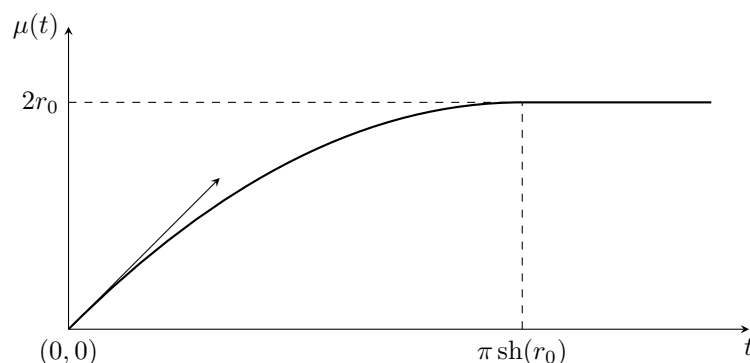
$$\forall \epsilon \in \mathbf{R}_+, \text{ch}(\mu(t)) = \text{ch}^2 r_0 - \text{sh}^2 r_0 \cos \left(\min \left\{ \pi, \frac{t}{\text{sh } r_0} \right\} \right)$$

Une allure du graphe de la fonction μ est donnée Fig. II.2

Proposition II.1.6. *La fonction μ est continue, croissante, concave, nulle en zéro et satisfait les propriétés suivantes.*

(i) $\forall t \in \mathbf{R}_+, t - t^3 \leq \mu(t) \leq t.$

(ii) $\forall y, y' \in Y, |\iota(y) - \iota(y')| = \mu(|y - y'|).$

FIG. II.2 – Graphe de la fonction μ .

Démonstration. La fonction μ peut s'écrire

$$\mu(t) = \operatorname{argch} \left(\operatorname{ch}^2 r_0 - \operatorname{sh}^2 r_0 \cos \left(\min \left\{ \pi, \frac{t}{\operatorname{sh} r} \right\} \right) \right)$$

Elle est C^∞ sur $]0, \pi \operatorname{sh} r_0[$ et constante sur $[\pi \operatorname{sh} r_0, +\infty[$. Le calcul de ses dérivées première et seconde montre que la fonction $t \rightarrow \operatorname{argch} (\operatorname{ch}^2 r_0 - \operatorname{sh}^2 r_0 \cos(t))$ est croissante et concave sur $[0; \pi]$. Le premier point provient d'un développement en série entière de μ en 0. Le second point découle directement de la définition de la distance dans le cône. \square

Remarques : L'application μ étant croissante, concave, nulle en 0, elle vérifie aussi les inégalités suivantes.

- (i) $\forall t, t' \in \mathbf{R}_+, \mu(t + t') \leq \mu(t) + \mu(t')$ (sous-additivité).
- (ii) $\forall t \in \mathbf{R}_+, \min \left\{ 2r_0, \frac{2r_0}{\pi \operatorname{sh} r_0} t \right\} \leq \mu(t)$.

II.1.c Cône et homotopies

Soit Y un espace métrique et r_0 un réel strictement positif. À l'instar du cône sur un anneau hawaïen, $C(Y)$ n'est pas nécessairement localement contractile. Pour pallier ce problème on introduit une hypothèse géométrique supplémentaire sur la base Y .

Hypothèse H(1) : Pour tout $y \in Y$, pour tout $r \geq 0$, il existe une homotopie $h : \bar{B}(y, r) \times [0; 1] \rightarrow Y$ qui contracte la boule fermée $\bar{B}(y, r)$ sur $\{y\}$ et telle que pour tout $y' \in \bar{B}(y, r)$, pour tout $t \in [0; 1]$, $|h(y', t) - y| \leq |y' - y| + t$.

Lemme II.1.7. Soit x un point un point du cône $C(Y)$ et r_1 un réel positif. Si la boule fermée $\bar{B}(x, r_1)$ contient le sommet v du cône alors elle est contractile dans $\bar{B}(x, r_1)$.

Démonstration. On appelle H l'homotopie $\bar{B}(x, r_1) \times [0; 1] \rightarrow C(Y)$ définie de la manière suivante : pour tout point $x' = (y', r')$ appartenant à $\bar{B}(x, r_1)$, pour tout $t \in [0; 1]$, $H(x', t) = (y', (1 - t)r')$. Elle contracte $\bar{B}(x, r_1)$ sur $\{v\}$. Soit x'

un point de $\bar{B}(x, r_1)$. Comme on l'a vu, la distance entre deux points du cône s'interprète comme une distance dans \mathbf{H}_2 . Or cette dernière est convexe. Ainsi la fonction $t \rightarrow |x - H(x', t)|$ est convexe. En particulier, pour tout $t \in [0; 1]$,

$$\begin{aligned} |x - H(x', t)| &\leq \max \{|x - H(x', 0)|, |x - H(x', 1)|\} \\ &\leq \max \{|x - x'|, |x - v|\} \leq r_1 \end{aligned}$$

Par conséquent, H est à valeur dans $\bar{B}(x, r_1)$. \square

Proposition II.1.8. *Soit x un point du cône $C(Y)$ et r_1 un réel positif. Sous l'hypothèse $H(l)$, $\bar{B}(x, r_1)$ est contractile dans $B(x, r_1 + l)$.*

Démonstration. On note (y, r) le point x et \bar{B} la boule fermée $\bar{B}(x, r_1)$. Le cas où le sommet v appartient à \bar{B} a déjà été traité dans le lemme II.1.7. On peut donc supposer que r_1 est strictement inférieur à r . En particulier, pour tout point (y', r') dans la boule \bar{B} , on a $|y - y'| \leq \pi \operatorname{sh} r_0$. Par hypothèse il existe une homotopie $h : \bar{B}(y, \pi \operatorname{sh} r_0) \times [0; 1] \rightarrow Y$ qui contracte $\bar{B}(y, \pi \operatorname{sh} r_0)$ sur $\{y\}$ telle que pour tout $y' \in \bar{B}(y, \pi \operatorname{sh} r_0)$, pour tout $t \in [0; 1]$, $|h(y', t) - y| \leq |y' - y| + l$. On définit alors une application continue H de la manière suivante.

$$\begin{aligned} H : \bar{B} \times [0; 1] &\rightarrow C(Y) \\ ((y', r'), t) &\rightarrow (h(y', t), r') \end{aligned}$$

L'application H contracte \bar{B} sur $\{y\} \times [r - r_1; \min\{r_0, r + r_1\}]$.

Soit $x' = (y', r')$ un point de \bar{B} . Soit $t \in [0; 1]$. Par construction, $\theta(y, h(y', t))$ est inférieur à $\theta(y, y') + d\theta$ avec $d\theta = \min \left\{ \frac{l}{\operatorname{sh} r_0}, \pi - \theta(y, y') \right\}$. Ce qui donne,

$$\begin{aligned} |H(x', t) - x| &= \operatorname{argch} (\operatorname{ch} r \operatorname{ch} r' - \operatorname{sh} r \operatorname{sh} r' \cos \theta(y, h(y', t))) \\ &\leq \operatorname{argch} (\operatorname{ch} r \operatorname{ch} r' - \operatorname{sh} r \operatorname{sh} r' \cos (\theta(y, y') + d\theta)) \end{aligned}$$

Cette dernière quantité est exactement la distance entre deux points \tilde{x} et \tilde{z} du plan \mathbf{H}_2 respectivement à distance r et r' de l'origine O et formant un angle en O égal à $\theta(y, y') + d\theta$ (cf. Fig. II.3). L'inégalité triangulaire dans \mathbf{H}_2 donne alors

$$|H(x', t) - x| \leq |x - x'| + \operatorname{argch} (\operatorname{ch}^2 r' - \operatorname{sh}^2 r' \cos d\theta) \leq |x' - x| + \operatorname{sh} r' d\theta$$

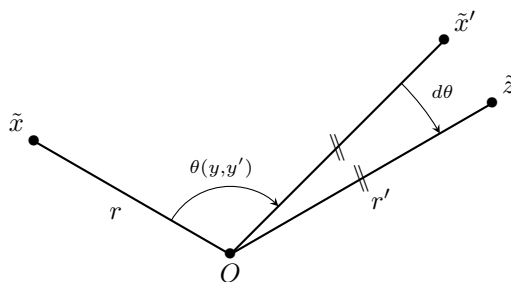


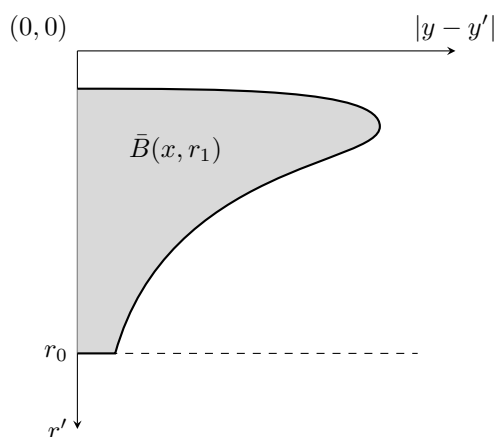
FIG. II.3

Ainsi $|H(x', t) - x| \leq r_1 + l$. Donc H prend ses valeurs dans $B(x, r_1 + l)$. On conclut en remarquant que $\{y\} \times [r - r_1; \min\{r_0, r + r_1\}]$ se contracte sur un point dans $B(x, r_1 + l)$. \square

La proposition qui suit fournit une manière de contracter des boules sur la base, tout en laissant celle-ci invariante.

Proposition II.1.9. *Soit $x = (y, r)$ un point de $C(Y)$ tel que $2r > r_0$. Soit $r_1 \in]r_0 - r, r[$. Sous l'hypothèse $H(l)$, il existe une homotopie $H : \bar{B}(x, r_1) \times [0; 1] \rightarrow B(x, r_1 + 3l)$ qui contracte la boule fermée $\bar{B}(x, r_1)$ sur une partie de $\iota(Y)$ telle que pour tout $x' \in \bar{B}(x, r_1) \cap \iota(Y)$, pour tout $t \in [0; 1]$, $H(x', t) = x'$.*

Remarque : La première idée qui vient à l'esprit pour homotoper $\bar{B}(x, r_1)$ sur la base est d'utiliser la projection p . Toutefois cette méthode ne permet pas de rester dans un voisinage approprié de $\bar{B}(x, r_1)$. La figure II.4, représentant la forme d'une boule dans le cône, permet de visualiser ce problème. Pour contourner cette difficulté, on procède en deux temps. D'abord on contracte horizontalement la boule en utilisant une homotopie de Y , ensuite seulement on projette celle-ci sur la base (cf. Fig. II.5).



Les points (y', r') qui appartiennent à $\bar{B}(x, r_1)$ sont dans la partie grise.

FIG. II.4 – Forme de la boule $\bar{B}(x, r_1)$.

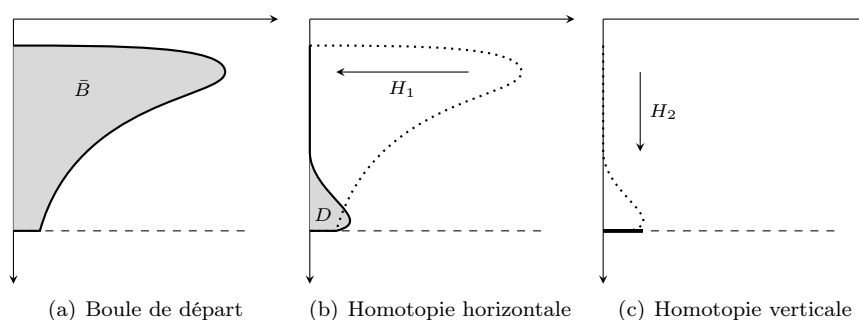


FIG. II.5 – Homotopie de $\bar{B}(x, r_1)$.

Démonstration. On note \bar{B} la boule fermée $\bar{B}(x, r_1)$. Comme $r_1 < r$, pour tout point (y', r') de \bar{B} , la distance $|y - y'|$ est inférieure à $\pi \operatorname{sh} r_0$. Par hypothèse, il existe une homotopie $h : \bar{B}(y, \pi \operatorname{sh} r_0) \times [0; 1] \rightarrow Y$ qui contracte $\bar{B}(y, \pi \operatorname{sh} r_0)$ sur $\{y\}$ telle que pour tout $y' \in \bar{B}(y, \pi \operatorname{sh} r_0)$, pour tout $t \in [0; 1]$, on a $|h(y', t) - y| \leq |y' - y| + l$.

Par ailleurs, il existe une fonction continue L , ayant la propriété suivante : un point (y', r') de $C(Y)$ appartient à \bar{B} si et seulement si la distance de y' à y est inférieure à $L(r')$. La fonction L peut-être calculée explicitement. On obtient :

$$L(r') = \arccos \left(\frac{\operatorname{ch} r' \operatorname{ch} r - \operatorname{ch} r_1}{\operatorname{sh} r \operatorname{sh} r'} \right)$$

Puisque $r_1 > r_0 - r$, on notera que $L(r_0)$ est strictement positif. Par ailleurs, L étant continue, il existe $r_2 < r_0$ tel que pour tout $r' \in [r_2; r_0]$, $L(r') \leq L(r_0) + l$. On considère alors l'application suivante

$$\begin{aligned} H_1 : \bar{B} \times [0; 1] &\rightarrow C(Y) \\ ((y', r'), t) &\rightarrow (h(y', t), r') && \text{si } r' \leq r_2 \\ ((y', r'), t) &\rightarrow \left(h \left(y', \frac{r_0 - r'}{r_0 - r_2} t \right), r' \right) && \text{si } r' > r_2 \end{aligned}$$

L'application H_1 est continue. En outre pour tout $x' \in \bar{B} \cap \iota(Y)$, pour tout $t \in [0; 1]$, $H_1(x', t) = x'$. Par ailleurs, comme dans la proposition précédente, on montre que H_1 prend ses valeurs dans la boule $B(x, r_1 + l)$. On note D l'image de $\bar{B} \times \{1\}$ par H_1 .

Lemme II.1.10. *Pour tout élément $x' = (y', r')$ de D on a $|y' - y| \leq L(r_0) + 2l$.*

Démonstration. Soit $x' = (y', r')$ un point de \bar{B} . On distingue deux cas. Si $r' \leq r_2$, alors $H(x', 1) = ((h(y', 1), r'))$. Or $h(y', 1)$ est exactement le point y . L'inégalité annoncée est donc satisfaite. Supposons maintenant que $r' > r_2$. Par définition, $H(x', 1)$ est le point $\left(h \left(y', \frac{r_0 - r'}{r_0 - r_2} \right), r' \right)$. Les hypothèses sur h assurent que

$$\left| h \left(y', \frac{r_0 - r'}{r_0 - r_2} \right) - y \right| \leq |y' - y| + l$$

Or x' étant un point de \bar{B} , $|y' - y| \leq L(r') \leq L(r_0) + l$. Finalement on a

$$\left| h \left(y', \frac{r_0 - r'}{r_0 - r_2} \right) - y \right| \leq L(r_0) + 2l$$

□

Fin de la preuve de la proposition II.1.9. On considère maintenant une seconde homotopie définie de la manière suivante.

$$\begin{aligned} H_2 : D \times [0; 1] &\rightarrow C(Y) \\ ((y', r'), t) &\rightarrow (y', (1 - t)r' + tr_0) \end{aligned}$$

L'application H_2 contracte D sur une partie de $\iota(Y)$. Par ailleurs, pour tout $x' \in D \cap \iota(Y)$, pour tout $t \in [0; 1]$, $H_2(x', t) = x'$. Soit $x' = (y', r')$ un point de D . D'après le lemme précédent $|y' - y| \leq L(r_0) + 2l$. Ainsi x' et $\iota(y')$ sont deux

points de $B(x, r_1 + 2l)$. En utilisant le même argument de convexité que dans la preuve de la proposition II.1.8, on obtient

$$\forall t \in [0; 1], |H_2(x', t) - x| \leq \max \left\{ |x' - x|, |\iota(y') - x| \right\} \leq r_1 + 2l$$

Par conséquent H_2 prend ses valeurs dans $B(x, r_1 + 2l)$. L'homotopie H annoncée dans la proposition est obtenue en appliquant successivement H_1 et H_2 . \square

II.1.d Action de groupe sur un cône

On se donne toujours un espace métrique Y et un réel strictement positif r_0 . Soit H un groupe agissant proprement par isométries sur Y . On note \bar{Y} le quotient Y/H . L'image d'un point y de Y par la projection canonique $Y \rightarrow \bar{Y}$ est notée \bar{y} . L'espace \bar{Y} est muni d'une distance caractérisée par la propriété suivante.

$$\forall y, y' \in Y, |\bar{y} - \bar{y}'| = \inf_{h \in H} |hy - y'|$$

Par homogénéité, on étend l'action de H au cône en entier. Plus précisément, si $x = (y, r)$ et h appartiennent respectivement à $C(Y)$ et H , le point hx est défini par $hx = (hy, r)$. Le groupe H agit ainsi par isométries sur $C(Y)$. Pour tout point $x \in C(Y)$, on note \bar{x} son image par l'application $C(Y) \rightarrow C(Y)/H$. L'action de H sur le cône n'est pas nécessairement propre. En effet le sommet v du cône est fixé par tous les éléments de H . Toutefois l'action de H sur $C(Y) \setminus \{v\}$ l'est. Ainsi $C(Y)/H$ hérite d'une distance quotient caractérisée par le fait suivant.

$$\forall x, x' \in C(Y), |\bar{x} - \bar{x}'| = \inf_{h \in H} |hx - x'|$$

Proposition II.1.11. *Les espaces $C(Y)/H$ et $C(Y)/H$ sont isométriques.*

Démonstration. On appelle f l'application de $C(Y)$ dans $C(\bar{Y})$ qui envoie le point (y, r) sur (\bar{y}, r) . La fonction f induit une bijection \bar{f} entre $C(Y)/H$ et $C(Y)/H$. Considérons maintenant deux points $x = (y, r)$ et $x' = (y', r)$ pris dans le cône $C(Y)$.

$$\begin{aligned} |\bar{x} - \bar{x}'| &= \inf_{h \in H} |hx - x'| \\ &= \inf_{h \in H} \operatorname{argch} \left(\operatorname{ch} r \operatorname{ch} r' - \operatorname{sh} r \operatorname{sh} r' \cos \left(\min \left\{ \pi, \frac{|hy - y'|}{\operatorname{sh} r_0} \right\} \right) \right) \end{aligned}$$

Or la fonction $t \rightarrow \operatorname{argch} \left(\operatorname{ch} r \operatorname{ch} r' - \operatorname{sh} r \operatorname{sh} r' \cos \left(\min \left\{ \pi, \frac{t}{\operatorname{sh} r_0} \right\} \right) \right)$ est croissante continue. Par conséquent on a

$$\begin{aligned} |\bar{x} - \bar{x}'| &= \operatorname{argch} \left(\operatorname{ch} r \operatorname{ch} r' - \operatorname{sh} r \operatorname{sh} r' \cos \left(\min \left\{ \pi, \frac{\inf_{h \in H} |hy - y'|}{\operatorname{sh} r_0} \right\} \right) \right) \\ &= |(\bar{y}, r) - (\bar{y}', r)| \\ &= |\bar{f}(\bar{x}) - \bar{f}(\bar{x}')| \end{aligned}$$

Donc f est une isométrie. \square

II.1.e Courbure d'un cône

Théorème II.1.12 (Berestovskiï, cf. [13, Chap. II.3, Th. 3.14]). *Soit Y un espace métrique et r_0 un réel strictement positif. Le cône $C(Y, r_0)$ de base Y et de rayon r_0 est $CAT(-1)$ si et seulement si l'espace renormalisé $\frac{1}{\text{sh } r_0}Y$ est $CAT(1)$*

Corollaire II.1.13. *Soit Y un espace métrique et r_0 un réel strictement positif. On suppose que toute boule de rayon $\pi \text{sh } r_0$ de Y est un arbre réel. Alors le cône $C(Y, r_0)$ de base Y et de rayon r_0 est $CAT(-1)$. En particulier il est $\ln 3$ -hyperbolique.*

Démonstration. Soit T un triangle géodésique de $\frac{1}{\text{sh } r_0}Y$ de périmètre strictement inférieur à $2\pi \text{sh } r_0$. Ce triangle est nécessairement contenu dans une boule B de rayon π de $\frac{1}{\text{sh } r_0}Y$. Or par hypothèse B est un arbre réel. Il en résulte que T satisfait l'inégalité $CAT(1)$. Ainsi $\frac{1}{\text{sh } r_0}Y$ est un espace $CAT(1)$. Le théorème de Berestovskiï (Théorème II.1.12) permet alors de conclure. \square

On prouve maintenant que si Y est un espace de longueur hyperbolique, ce résultat reste vrai modulo une « petite erreur ». Pour la démonstration, on adopte un point de vue asymptotique, mettant en jeu des limites suivant un ultra-filtre. Le premier lemme explique comment intervertir les constructions de cônes et de limites.

Lemme II.1.14. *Soit ω un ultra-filtre non principal. Soit r_0 un réel strictement positif. Soit (Y_n) une suite d'espaces métriques dont le diamètre est uniformément borné. Les espaces $C(\lim_\omega Y_n, r_0)$ et $\lim_\omega C(Y_n, r_0)$ sont isométriques.*

Démonstration. On note Y l'espace limite $Y = \lim_\omega Y_n$. On introduit alors l'application $f : C(Y) \rightarrow \lim_\omega C(Y_n)$ définie la manière suivante. Si $y = \lim_\omega y_n$ est un point de Y , on pose $f(y, r) = \lim_\omega (y_n, r)$. Puisque la formule qui définit la distance dans un cône est continue, l'application f préserve les distances.

Reste donc à montrer que f est surjective. Soit $x = \lim_\omega (y_n, r_n)$ un point de $\lim_\omega C(Y_n)$. Par définition la suite (r_n) est bornée. Elle admet donc une limite suivant ω , notée r . Par ailleurs on a supposé que le diamètre des Y_n était borné. La suite (y_n) définit donc un point $y = \lim_\omega y_n$ de Y . On a alors

$$|f(y, r) - x| = \lim_\omega |(y_n, r) - (y_n, r_n)| = \lim_\omega |r - r_n| = 0$$

Par conséquent $f(y, r) = x$. \square

Proposition II.1.15. *Soient ε et r_0 deux réels strictement positifs. Il existe trois constantes strictement positives δ_0 , α_0 et β_0 ayant la propriété suivante. Soit Y un espace de longueur dont toute boule de rayon $\pi \text{sh } r_0$ de Y est δ_0 -hyperbolique. Par ailleurs, on fait une hypothèse de quasi-convexité locale : on suppose que quelques soient y et y' pris dans une boule B de rayon $\pi \text{sh } r_0$, il existe une $(1, \alpha_0)$ -quasi-géodésique entre y et y' qui reste dans le β_0 -voisinage de B . Alors le cône $C(Y, r_0)$ de base Y et de rayon r_0 est $(\ln 3 + \varepsilon)$ -hyperbolique.*

Démonstration. On suppose que cette proposition est fautive. Pour tout entier n , on peut alors trouver un espace métrique Y_n ayant les propriétés suivantes.

- (i) Toute boule de rayon $\pi \operatorname{sh} r_0$ de Y_n est δ_n -hyperbolique avec $\delta_n = o(1)$.
- (ii) Quelques soient y, y' pris dans une boule B de rayon $\pi \operatorname{sh} r_0$ de Y_n , il existe une $(1, \alpha_n)$ -quasi-géodésique entre y et y' qui reste dans le β_n -voisinage de B avec $\alpha_n, \beta_n = o(1)$.
- (iii) Le cône $C(Y_n)$ n'est pas $(\ln 3 + \varepsilon)$ -hyperbolique.

On fixe un ultra-filtre non principal ω . Pour tout entier n , on note \tilde{Y}_n l'espace métrique Y_n muni de la distance suivante.

$$\forall y, y' \in \tilde{Y}_n, |y - y'|_{\tilde{Y}_n} = \min \{ \pi \operatorname{sh} r_0, |y - y'|_{Y_n} \}$$

On appelle \tilde{Y} l'espace limite $\tilde{Y} = \lim_{\omega} \tilde{Y}_n$. Soit $y = \lim_{\omega} y_n$ un point de \tilde{Y} . On note B la boule ouverte $B(y, \pi \operatorname{sh} r_0)$.

Lemme II.1.16. *La boule B est 0-hyperbolique.*

Démonstration. Par hypothèse, pour tout entier n , la boule $B(y_n, \pi \operatorname{sh} r_0)$ est δ_n -hyperbolique. Donc d'après le lemme I.2.3, $B = \lim_{\omega} B(y_n, \pi \operatorname{sh} r_0)$ est 0-hyperbolique. \square

Lemme II.1.17. *La boule B est géodésique.*

Démonstration. Soient $x = \lim_{\omega} x_n$ et $x' = \lim_{\omega} x'_n$ deux points distincts de B . Par hypothèse pour tout entier n , il existe une $(1, \alpha_n)$ -quasi-géodésique $\sigma_n : [0; L_n] \rightarrow Y_n$ entre x_n et x'_n qui reste dans le β_n -voisinage de $B(y_n, \pi \operatorname{sh} r_0)$. On remarquera que (L_n) est une suite bornée. Sa limite L selon ω est exactement la distance entre x et x' . On considère l'application $\sigma : [0; L] \rightarrow \tilde{Y}$ définie ainsi : pour tout $t \in [0; L]$, $\sigma(t) = \lim_{\omega} \sigma_n(t \frac{L_n}{L})$. On vérifie alors que σ est une géodésique paramétrée par longueur d'arc, qui reste dans B . \square

Finalement toute boule de rayon $\pi \operatorname{sh} r_0$ de \tilde{Y} est un arbre réel. Le corollaire II.1.13 assure alors que $C(\tilde{Y})$ est un espace $\ln 3$ -hyperbolique. Or le diamètre des espaces \tilde{Y}_n est uniformément borné. On peut donc appliquer le lemme II.1.14. L'espace limite $\lim_{\omega} C(\tilde{Y}_n)$ est $\ln 3$ -hyperbolique. En outre, les cônes $C(\tilde{Y}_n)$ et $C(Y_n)$ sont isométriques. On en déduit que $C(Y_n)$ est $(\ln 3 + \varepsilon)$ -hyperbolique ω -ps (cf. proposition I.2.5). Contradiction. \square

Théorème II.1.18 (Premier théorème de courbure). *Soit ε et r_0 deux réels strictement positifs. Il existe une constante strictement positive δ_0 ayant la propriété suivante. Soit Y un espace de longueur δ_0 -hyperbolique. Soit H un groupe agissant par isométries sur Y . On suppose que la longueur de translation d'un élément non trivial de H est supérieure à $3\pi \operatorname{sh} r_0$. Alors l'espace $C(Y, r_0)/H$ est $(\ln 3 + \varepsilon)$ -hyperbolique.*

Démonstration. Soit Y un espace de longueur δ -hyperbolique. Soient y un point de Y , x et x' deux points de la boule $B(y, \pi \operatorname{sh} r_0)$. Comme Y est un espace de longueur, il existe une $(1, \delta)$ -quasi-géodésique σ entre x et x' . Un point u de σ satisfait l'inégalité suivante : $|x - u| + |u - x'| \leq |x - x'| + 3\delta$. Aussi par hyperbolicité on a (cf. [19, Chap. 1, Prop 2.3])

$$\begin{aligned} |u - y| + |x - x'| &\leq \max \left\{ |y - x| + |u - x'|, |y - x'| + |u - x| \right\} + 2\delta \\ &\leq \max \left\{ |y - x|, |y - x'| \right\} + |x - x'| + 5\delta \end{aligned}$$

Ainsi la distance de u à $B(y, \pi \operatorname{sh} r_0)$ n'excède pas 5δ . Or pour tout $h \in H$, on a $[h]_X \geq 3\pi \operatorname{sh} r_0$. Quitte à choisir δ petit devant $\pi \operatorname{sh} r_0$, on peut donc supposer que toutes les boules de rayon $\pi \operatorname{sh} r_0$ de Y/H sont δ -hyperboliques et que quelques soient x, x' pris dans une boule B de rayon $\pi \operatorname{sh} r_0$ de Y/H il existe une $(1, \delta)$ -quasi-géodésique entre ces points qui reste dans le 5δ -voisinage de B . On applique alors la proposition II.1.15. On peut trouver δ_0 ne dépendant que de ε et r_0 tel que, si δ est inférieur à δ_0 alors $C(Y/H)$ est $(\ln 3 + \varepsilon)$ -hyperbolique. On conclut grâce la proposition II.1.11 qui assure que $C(Y/H)$ et $C(Y)/H$ sont isométriques. \square

Corollaire II.1.19. *Soit ε et r_0 deux réels strictement positifs. Il existe δ ayant la propriété suivante. Soit X un espace δ -hyperbolique. Soit Y une partie fortement 50δ -quasi-convexe de X . Soit H un groupe agissant par isométries sur Y . On suppose que la longueur de translation d'un élément non trivial de H est supérieure à $3\pi \operatorname{sh} r_0$. La métrique de longueur de Y , induite par la restriction de $|\cdot|_X$ à Y , est notée $|\cdot|_Y$. On considère le cône de rayon r_0 sur l'espace $(Y, |\cdot|_Y)$, noté $C(Y, r_0)$. Le quotient $C(Y, r_0)/H$ est $(\ln 3 + \varepsilon)$ -hyperbolique.*

Démonstration. On introduit $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, r_0)$ et $\alpha_0 = \alpha_0(\varepsilon, r_0)$ les constantes données par le théorème II.1.18. Comme Y est fortement 50δ -quasi-convexe, l'injection canonique $(Y, |\cdot|_Y) \hookrightarrow (X, |\cdot|_X)$ est une $(1, 200\delta)$ -quasi-isométrie. Aussi, quitte réduire δ , $(Y, |\cdot|_Y)$ est un espace de longueur δ_0 -hyperbolique (cf. proposition I.1.9). On applique alors le théorème précédent. \square

II.2 Cone-off d'un espace métrique

Dans toute cette partie, X désigne un espace géodésique et $Y = (Y_i)_{i \in I}$ une famille de parties de X connexes par arcs rectifiables. On se donne en outre un réel strictement positif r_0 .

II.2.a Définition et distance

Pour tout $i \in I$, on introduit les objets suivants.

- (i) $|\cdot|_{Y_i}$ est la métrique de longueur sur Y_i , induite par la restriction à Y_i de la distance sur X .
- (ii) C_i est le cône de rayon r_0 sur l'espace $(Y_i, |\cdot|_{Y_i})$ et v_i son sommet.
- (iii) $\iota_i : Y_i \rightarrow C_i$ et $p_i : C_i \setminus \{v_i\} \rightarrow Y_i$ sont les deux applications, définies dans la partie précédente, qui lient le cône et sa base (cf. Section II.1.b).

Définition II.2.1 (Cone-off). *Le cone-off de X de rayon r_0 , relativement à Y est l'espace topologique obtenu en recollant, pour tout $i \in I$, le cône C_i le long de Y_i suivant ι_i . On le note $\dot{X}(Y, r_0)$ (ou simplement \dot{X}).*

En d'autres termes, le cone-off de X est obtenu comme quotient de l'union disjointe $X \sqcup (\bigsqcup_{i \in I} C_i)$ par la relation d'équivalence qui pour tout $i \in I$ identifie les points de Y_i avec leurs images par ι_i .

Remarque : Pour simplifier les notations, dans tout ce qui suit on ne fera pas la distinction entre les points de $X \sqcup (\bigsqcup_{i \in I} C_i)$ et leurs images dans le cone-off \dot{X} .

On souhaite maintenant équiper \dot{X} d'une structure de longueur héritée de $|\cdot|_X$ et $|\cdot|_{Y_i}$. Pour cela on munit l'union disjointe $X \sqcup (\bigsqcup_{i \in I} C_i)$ de la distance induite par $|\cdot|_X$ et $|\cdot|_{Y_i}$. (Cette distance peut prendre des valeurs infinies entre deux points dans des composantes distinctes.) Le passage au quotient permet ensuite de définir une pseudo-distance sur \dot{X} (cf. [13, Chap. I.5, 5.19]). Plus précisément on procède de la manière suivante.

Définition II.2.2. Soient x et x' deux points du cone-off \dot{X} . La quantité $\|x - x'\|$ est la distance minimale qui sépare deux points de $X \sqcup (\bigsqcup_{i \in I} C_i)$ ayant respectivement x et x' pour images dans \dot{X} .

Remarque : On rappelle que la fonction $\mu : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$, définie dans la partie II.1.b, est caractérisée par la relation ci-dessous.

$$\forall t \geq 0, \operatorname{ch}(\mu(t)) = \operatorname{ch}^2 r_0 - \operatorname{sh}^2 r_0 \cos \left(\min \left\{ \pi, \frac{t}{\operatorname{sh} r_0} \right\} \right)$$

- (i) Soit $i \in I$. Soient x et x' deux points de C_i , $\|x - x'\|$ est inférieur à $|x - x'|_{C_i}$ avec égalité si x n'appartient pas à Y_i .
- (ii) Soient x et x' deux points de X . Deux cas de figure sont possibles. Soit $\|x - x'\|$ et $|x - x'|_X$ sont égaux. Soit il existe $i \in I$ tel que x et x' appartiennent à Y_i et $\|x - x'\| = \inf \{ \mu(|x - x'|_{Y_i}) / i \in I \text{ tel que } x, x' \in Y_i \}$. En particulier, on a toujours les inégalités suivantes :

$$|x - x'|_X \geq \|x - x'\| \geq \mu(|x - x'|_X)$$

- (iii) Si x et x' sont deux points dans des composantes distinctes de $X \sqcup (\bigsqcup_{i \in I} C_i)$ alors $\|x' - x\|$ est infini.

La quantité $\|\cdot\|$ n'est pas une distance. En effet, elle ne satisfait pas l'inégalité triangulaire. Pour pallier cette lacune on a recours à des chaînes de points.

Définition II.2.3 (Chaîne de points). Soient x et x' deux points du cone-off \dot{X} . Une chaîne de x vers x' est une suite finie $C = (z_1, \dots, z_m)$ de points de \dot{X} , dont les extrémités sont respectivement x et x' . Sa longueur est $l(C) = \sum_{j=1}^{m-1} \|z_{j+1} - z_j\|$.

Proposition II.2.4 (Pseudo-distance cf. [13, Chap. I.5, 5.19]). L'application ci-dessous définit une pseudo-distance sur \dot{X}

$$\begin{aligned} \dot{X} \times \dot{X} &\rightarrow \mathbf{R}_+ \\ (x, x') &\rightarrow |x - x'|_{\dot{X}} = \inf \{ l(C), C \text{ chaîne de } x \text{ vers } x' \} \end{aligned}$$

On montre maintenant que $|\cdot|_{\dot{X}}$ satisfait l'axiome de positivité d'une distance.

Lemme II.2.5. Soient x et x' deux points du cone-off \dot{X} . Pour tout $\eta > 0$, il existe une chaîne $C = (z_1, \dots, z_m)$ de x vers x' telle que $l(C) \leq |x - x'|_{\dot{X}} + \eta$ et pour tout $j \in \llbracket 2; m-1 \rrbracket$, $z_j \in X$.

Démonstration. Soit $\eta > 0$. Par définition, il existe une chaîne $C = (z_1, \dots, z_m)$ de x vers x' telle que $l(C) \leq |x - x'|_{\dot{X}} + \eta$. Supposons qu'il existe $j \in \llbracket 2; m-1 \rrbracket$

tel que $z_j \notin X$. Dans ce cas, z_j est contenu dans l'un des cônes $C_i \setminus Y_i$. Puisque $l(C)$ est finie, z_{j-1} et z_{j+1} sont nécessairement des points de C_i . L'inégalité triangulaire donne alors

$$\begin{aligned} \|z_{j+1} - z_{j-1}\| &\leq |z_{j+1} - z_{j-1}|_{C_i} \leq |z_{j+1} - z_j|_{C_i} + |z_j - z_{j-1}|_{C_i} \\ &= \|z_{j+1} - z_j\| + \|z_j - z_{j-1}\| \end{aligned}$$

Ainsi en ôtant le point z_j , on diminue la longueur de C . Finalement, en retirant de C tous les points qui ne sont pas dans X (exceptés bien sûr les extrémités de C) on obtient la chaîne annoncée dans le lemme. \square

Lemme II.2.6. *Soit $i \in I$. Soit $x = (y, r)$ un point de $C_i \setminus Y_i$. Soit x' un point de \dot{X} . Si $|x - x'|_{\dot{X}} < r_0 - r$ alors $x' \in C_i$. En outre $|x - x'|_{\dot{X}} = |x - x'|_{C_i}$.*

Remarque : Ce lemme traduit le fait que $|\cdot|_{\dot{X}}$ et $|\cdot|_{C_i}$ coïncident localement.

Démonstration. On se donne un réel strictement positif η tel que $|x - x'|_{\dot{X}} + \eta < r_0 - r$. Grâce au lemme précédent, il existe une chaîne C de x vers x' telle que $l(C) \leq |x - x'|_{\dot{X}} + \eta$ et dont tous les points (exceptés peut-être les extrémités) sont dans X . Si la chaîne C comporte plus de trois points, alors elle ressort du cône C_i . Sa longueur est donc supérieure à $r_0 - r$. On a ainsi

$$r_0 - r \leq l(C) \leq |x - x'|_{\dot{X}} + \eta < r_0 - r$$

Absurde. Donc C ne contient que deux points, nécessairement dans C_i . On a alors

$$|x - x'|_{\dot{X}} \leq |x - x'|_{C_i} = l(C) \leq |x - x'|_{\dot{X}} + \eta$$

Cette inégalité reste vraie pour tout $\eta > 0$. Par conséquent, les distances $|x - x'|_{\dot{X}}$ et $|x - x'|_{C_i}$ sont les mêmes. \square

Lemme II.2.7. *Pour tout $x, x' \in X$, on a $|x - x'|_{\dot{X}} \geq \mu(|x - x'|_X)$.*

Démonstration. Soit $\eta > 0$. D'après le lemme II.2.5, il existe une chaîne de x vers x' , notée $C = (z_1, \dots, z_m)$, dont tous les points sont dans X et telle que $l(C) \leq |x - x'|_{\dot{X}} + \eta$. En utilisant la sous-additivité de μ on obtient

$$\mu(|x - x'|_X) \leq \sum_{j=1}^{m-1} \mu(|z_{j+1} - z_j|_X) \leq \sum_{j=1}^{m-1} \|z_{j+1} - z_j\| = l(C)$$

Ainsi pour tout $\eta > 0$, on a $\mu(|x - x'|_X) \leq |x - x'|_{\dot{X}} + \eta$. D'où le résultat. \square

Proposition II.2.8. *Soient x et x' deux points du cone-off \dot{X} . La distance $|x - x'|_{\dot{X}}$ est nulle si et seulement si $x = x'$.*

Démonstration. Supposons que $|x - x'|_{\dot{X}} = 0$. On distingue deux cas.

- (i) Il existe $i \in I$ tel que x appartienne à $C_i \setminus Y_i$. En appliquant le lemme II.2.6, il vient que x' appartient à C_i et $|x - x'|_{C_i} = |x - x'|_{\dot{X}} = 0$. Puisque $|\cdot|_{C_i}$ est une distance sur C_i , on a $x = x'$.
- (ii) Les points x et x' sont tous deux dans X . Dans ce cas, le lemme II.2.7 assure que $\mu(|x - x'|_X) \leq |x - x'|_{\dot{X}} = 0$. Ce qui impose $|x - x'|_X = 0$. Aussi $x = x'$.

La réciproque est évidente. \square

Cette dernière proposition assure que $|\cdot|_{\dot{X}}$ est bien une distance sur le cone-off \dot{X} .

Proposition II.2.9. *La distance $|\cdot|_{\dot{X}}$ muni le cone-off \dot{X} d'une structure de longueur.*

Démonstration. L'espace $(X, |\cdot|_X)$ étant géodésique, il possède une structure de longueur. Par ailleurs, pour tout $i \in I$, on a supposé que Y_i était connexe par arcs rectifiables. Il en résulte que $(Y_i, |\cdot|_{Y_i})$ possède aussi une structure de longueur. La proposition II.1.4 assure qu'il en est de même pour $(C_i, |\cdot|_{C_i})$. Finalement le cone-off \dot{X} est obtenu en recollant des espaces de longueur. Il en découle que $(\dot{X}, |\cdot|_{\dot{X}})$ est aussi un espace de longueur (cf. [13, Chap. I.5, Lemma 5.20]). \square

II.2.b Projection du cone-off sur sa base

On définit $p : \dot{X} \setminus \{v_i, i \in I\} \rightarrow X$ comme l'unique application dont la restriction à X (respectivement au cône épointé $C_i \setminus \{v_i\}$) est l'identité (respectivement la projection $p_i : C_i \setminus \{v_i\} \rightarrow Y_i$ introduite dans la partie II.1.b). Si x est un point du cone-off \dot{X} , on mesure la distance de x aux sommets de \dot{X} grâce à la quantité $r(x) = \min \{r_0, |x - v_i|_{\dot{X}} / i \in I\}$.

Lemme II.2.10. *Soit $i \in I$. Soient $x = (y, r)$ et $x' = (y', r')$ deux points du cône C_i . On suppose que x n'appartient pas à Y_i . Si $\|x - x'\| < r + r'$ alors $|y - y'|_X \leq \pi \operatorname{sh} r_0$.*

Démonstration. Par hypothèse, x est un point de $C_i \setminus Y_i$. Aussi $|x - x'|_{C_i} = \|x - x'\|$. Puisque $\|x - x'\| < r + r'$, on a nécessairement $|y - y'|_{Y_i} < \pi \operatorname{sh} r_0$. Finalement

$$|y - y'|_X \leq |y - y'|_{Y_i} < \pi \operatorname{sh} r_0$$

\square

Lemme II.2.11. *Soient x et x' deux points de X . Si $\|x - x'\| < 2r_0$, alors $|x - x'|_X \leq \frac{\pi \operatorname{sh} r_0}{2r_0} \|x - x'\|$.*

Démonstration. Si $\|x - x'\| = |x - x'|_X$, il n'y a rien à démontrer. On suppose donc que $\|x - x'\| = \inf \{\mu(|x - x'|_{Y_i}) / i \in I \text{ tel que } x, x' \in Y_i\}$. La fonction μ étant concave, pour tout $i \in I$ tels que $x, x' \in Y_i$, on a

$$\min \left\{ 2r_0, \frac{2r_0}{\pi \operatorname{sh} r_0} |x - x'|_X \right\} \leq \mu(|x - x'|_X) \leq \mu(|x - x'|_{Y_i})$$

Il en découle que $\min \left\{ 2r_0, \frac{2r_0}{\pi \operatorname{sh} r_0} |x - x'|_X \right\} \leq \|x - x'\| < 2r_0$. Nécessairement, on a $\frac{2r_0}{\pi \operatorname{sh} r_0} |x - x'|_X \leq \|x - x'\|$. \square

Proposition II.2.12. *Soient x et x' deux points de X . Si $|x - x'|_{\dot{X}} < 2r_0$, alors*

$$|x - x'|_X \leq \frac{\pi \operatorname{sh} r_0}{2r_0} |x - x'|_{\dot{X}}$$

Remarque : L'application $(X, | \cdot |_X) \hookrightarrow (\dot{X}, | \cdot |_{\dot{X}})$ est donc une $(\kappa, 0, 2r_0)$ -quasi-isométrie locale, avec $\kappa = \frac{\pi \operatorname{sh} r_0}{2r_0}$.

Démonstration. Soit $\eta > 0$ tel que $|x - x'|_{\dot{X}} + \eta < 2r_0$. D'après le lemme II.2.5, il existe une chaîne entre x et x' , notée $C = (z_1, \dots, z_m)$, dont la longueur est inférieure à $|x - x'|_{\dot{X}} + \eta$ et pour tout $j \in \llbracket 1; m \rrbracket$, $z_j \in X$. Soit $j \in \llbracket 1; m-1 \rrbracket$. On a alors $\|z_{j+1} - z_j\| \leq l(C) < 2r_0$. En appliquant le lemme II.2.11, on obtient $|z_{j+1} - z_j|_X \leq \frac{\pi \operatorname{sh} r_0}{2r_0} \|z_{j+1} - z_j\|$. En sommant ces inégalités, on en déduit

$$|x - x'|_X \leq \sum_{j=1}^{m-1} |z_{j+1} - z_j|_X \leq \frac{\pi \operatorname{sh} r_0}{2r_0} l(C) \leq \frac{\pi \operatorname{sh} r_0}{2r_0} (|x - x'|_{\dot{X}} + \eta)$$

Cette dernière égalité étant vraie pour tout $\eta > 0$, on a finalement

$$|x - x'|_X \leq \frac{\pi \operatorname{sh} r_0}{2r_0} |x - x'|_{\dot{X}}$$

□

Corollaire II.2.13. Soient x et x' deux points du cone-off \dot{X} . Supposons que $|x - x'|_{\dot{X}} < r(x) + r(x')$, alors $|p(x) - p(x')|_X \leq 3\pi \operatorname{sh} r_0$.

Démonstration. On notera que ni x , ni x' ne peut être le sommet d'un cône. Par conséquent, les projections $p(x)$ et $p(x')$ sont bien définies. Soit $\eta > 0$ tel que $|x - x'|_{\dot{X}} + \eta < r(x) + r(x')$. D'après le lemme II.2.5, il existe une chaîne $C = (z_1, \dots, z_m)$ entre x et x' telle que $l(C) \leq |x - x'|_{\dot{X}} + \eta$ et pour tout $j \in \llbracket 2; m-1 \rrbracket$, $z_j \in X$. Si $m = 2$, le lemme II.2.10 ou le lemme II.2.11 fournit le résultat. Si $m \geq 3$, on a,

$$\|z_1 - z_2\| + \|z_2 - z_{m-1}\|_{\dot{X}} + \|z_{m-1} - z_m\| \leq |x - x'|_{\dot{X}} + \eta < r(x) + r(x') \leq 2r_0$$

En particulier, $\|z_1 - z_2\| < r(z_1) + r(z_2)$. Le lemme II.2.10 assure alors que $|p(z_1) - p(z_2)|_X \leq \pi \operatorname{sh} r_0$. De même, on a $|p(z_{m-1}) - p(z_m)|_X \leq \pi \operatorname{sh} r_0$. Enfin z_2 et z_{m-1} sont des points de la base X . D'après le lemme II.2.12,

$$|p(z_2) - p(z_{m-1})|_X = |z_2 - z_{m-1}|_X \leq \frac{\pi \operatorname{sh} r_0}{2r_0} |z_2 - z_{m-1}|_{\dot{X}} \leq \pi \operatorname{sh} r_0$$

Finalement, on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned} |p(x) - p(x')| &\leq |p(z_1) - p(z_2)| + |p(z_2) - p(z_{m-1})| + |p(z_{m-1}) - p(z_m)| \\ &\leq 3\pi \operatorname{sh} r_0 \end{aligned}$$

□

II.2.c Cone-off et homotopies

Dans cette section, on fait l'hypothèse supplémentaire suivante. L'espace X satisfait la condition $H(l)$ énoncée ci-dessous.

Hypothèse H(1) : Pour tout $x \in X$, pour tout $r \in \mathbf{R}_+$, il existe une homotopie $h : \bar{B}(x, r) \times [0; 1] \rightarrow X$ qui contracte la boule fermée $\bar{B}(x, r)$ sur $\{x\}$ et telle que pour tout $x' \in \bar{B}(x, r)$, pour tout $t \in [0; 1]$, $|h(x', t) - x| \leq |x' - x| + t$.

Pour tout $i \in I$, on suppose en outre que $(Y_i, | \cdot |_{Y_i})$ satisfait aussi l'hypothèse $H(l)$.

Proposition II.2.14. *Soient x un point de \dot{X} et r un réel positif. On suppose que $r(x) > r$. La boule fermée $\bar{B}(x, r)$ de \dot{X} est contractile dans $B(x, r + 3l)$.*

Démonstration. On note \bar{B} la boule $\bar{B}(x, r)$. S'il existe $i \in I$ tel que \bar{B} soit contenue dans le cône $C(Y_i) \setminus Y_i$, on applique la proposition II.1.8. Ainsi \bar{B} est contractile dans $B(x, r + l)$. Si ce n'est pas le cas, $\bar{B}(x, r)$ rencontre X . Autrement dit $r(x) + r > r_0$. En particulier $2r(x) > r_0$. On procède alors de la manière suivante. Soit $i \in I$. On suppose que $\bar{B} \cap C(Y_i)$ est non vide. Puisque $2r(x) > r_0$, la proposition II.1.9 fournit une application continue $H_i : \bar{B} \times [0; 1] \rightarrow B(x, r + 2l)$ ayant les propriétés suivantes.

- (i) H_i contracte $\bar{B} \cap C(Y_i)$ sur une partie de Y_i .
- (ii) Pour tout $x' \in \bar{B} \cap Y_i$, pour tout $t \in [0; 1]$, $H_i(x', t) = x'$.

On peut alors définir une application continue $H : \bar{B} \times [0; 1] \rightarrow B(x, r + 2l)$ dont la restriction à $\bar{B} \cap C(Y_i) \times [0; 1]$ est H_i et telle que pour tout $x' \in \bar{B} \cap X$, pour tout $t \in [0; 1]$, $H(x', t) = x'$. Il en découle que H homotope \bar{B} sur une partie P de $B(x, r + 2l) \cap X$. Les hypothèses sur X assurent alors que P est contractile dans $B(x, r + 3l)$. \square

II.2.d Approximation uniforme de la distance

Comme pour les cônes dans la partie précédente, on souhaite étudier la courbure du cone-off d'un espace hyperbolique par des méthodes asymptotiques. Dans ce but, on a besoin d'approcher la distance entre deux points du cone-off \dot{X} par une chaîne, dont le nombre de points ne dépend pas de l'espace de base X , mais seulement de l'erreur commise. Plus précisément, on démontre le résultat suivant.

Proposition II.2.15. *Soit ε un réel strictement positif. Soit C une chaîne de points de X . Il existe une constante M , qui ne dépend que de r_0 et ε , ainsi qu'une sous-chaîne C' de C ayant les propriétés suivantes. La chaîne C' a les mêmes extrémités que C . Elle contient au plus $Ml(C) + M$ points. En outre, sa longueur est inférieure à $(1 + \varepsilon)l(C) + \varepsilon$.*

Démonstration. On note $C = (z_1, \dots, z_n)$ la chaîne considérée. Soit $\eta \in]0, r_0[$. On construit une sous chaîne de C , notée $C_\eta = (z_{j_1}, \dots, z_{j_m})$, de la manière suivante.

- (i) On pose $j_1 = 1$.
- (ii) Soit $k \geq 1$. On définit j_{k+1} à partir de j_k .
 - Si $j_k < n$ et $\|z_{j_k+1} - z_{j_k}\| > \eta$, alors on pose $j_{k+1} = j_k + 1$.
 - Si $j_k < n$ et $\|z_{j_k+1} - z_{j_k}\| \leq \eta$, alors j_{k+1} est le plus grand entier $j \in [j_k + 1; n]$ tel que $\sum_{l=j_k}^{j-1} \|z_{l+1} - z_l\| \leq \eta$.

Le processus s'arrête lorsque $j_k = n$. En procédant de la sorte, on enlève de C les « petits passages » dans un cône. Cette opération perturbe peu la longueur des chaînes.

Lemme II.2.16. *Les longueurs des chaînes C_η et C sont reliées par l'inégalité suivante : $l(C_\eta) \leq l(C) + \kappa^3 m \eta^3$, où m est le nombre de points de C_η et $\kappa = \frac{\pi \operatorname{sh} r_0}{2r_0}$ est la constante de quasi-isométrie introduite dans la proposition II.2.12*

Démonstration. Soit $k \in \llbracket 1; m-1 \rrbracket$. On distingue deux cas.

Cas 1. Supposons que $\|z_{j_{k+1}} - z_{j_k}\| \leq \eta$. On a vu que la fonction μ , introduite précédemment, satisfaisait l'inégalité suivante : $\forall t \in \mathbf{R}_+, \mu(t) \geq t - t^3$. En utilisant la sous-additivité de μ on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{l=j_k}^{j_{k+1}-1} \|z_{l+1} - z_l\| &\geq \sum_{l=j_k}^{j_{k+1}-1} \mu(|z_{l+1} - z_l|_X) \geq \mu(|z_{j_{k+1}} - z_{j_k}|_X) \\ &\geq |z_{j_{k+1}} - z_{j_k}|_X - |z_{j_{k+1}} - z_{j_k}|_X^3 \end{aligned}$$

Or, d'après le lemme II.2.11, $|z_{j_{k+1}} - z_{j_k}|_X$ est inférieure à $\kappa \|z_{j_{k+1}} - z_{j_k}\|$. Finalement on a

$$\sum_{l=j_k}^{j_{k+1}-1} \|z_{l+1} - z_l\| \geq \|z_{j_{k+1}} - z_{j_k}\| - \kappa^3 \eta^3$$

Cas 2. Supposons que $\|z_{j_{k+1}} - z_{j_k}\| > \eta$. Par construction, j_{k+1} est égal à $j_k + 1$. L'inégalité du premier cas reste donc vraie.

En sommant ces inégalités, on obtient $l(C_\eta) \leq l(C) + \kappa^3 m \eta^3$. \square

Lemme II.2.17. *Le nombre de points de C_η est majoré par $2 \frac{l(C)}{\eta} + 3$.*

Démonstration. Par construction, pour tout $k \in \llbracket 1; m-2 \rrbracket$, on a

$$\sum_{l=j_k}^{j_{k+2}-1} \|z_{l+1} - z_l\| \geq \eta$$

En sommant ces inégalités on a $\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor \eta \leq l(C)$. \square

Fin de la démonstration de la proposition. En combinant les deux lemmes précédents on a $l(C_\eta) \leq (1 + 2\kappa^3 \eta^2) l(C) + 3\kappa^3 \eta^3$. Il existe donc η , ne dépendant que de r_0 et ε , tel que $l(C_\eta) \leq (1 + \varepsilon) l(C) + \varepsilon$. Par ailleurs, le nombre de points de C_η est inférieur à $2 \frac{l(C)}{\eta} + 3$. \square

Corollaire II.2.18. *Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Soient x et x' deux points du cone-off \dot{X} . Il existe une constante M , qui ne dépend que de r_0 et ε , ainsi qu'une chaîne C entre x et x' contenant au plus $M |x - x'|_{\dot{X}} + M$ points et telle que $l(C) \leq (1 + \varepsilon) |x - x'|_{\dot{X}} + \varepsilon$.*

Démonstration. Le lemme II.2.5 assure qu'il existe une chaîne $C = (z_1, \dots, z_n)$ entre x et x' dont la longueur est majorée par $|x - x'|_{\dot{X}} + \frac{1}{2}\varepsilon$ et telle que pour tout $j \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket$, $z_j \in X$. On applique le résultat précédent à la chaîne $C_1 = (z_2, \dots, z_{n-1})$. Il existe une constante M , qui ne dépend que de r_0 et ε , ainsi qu'une sous-chaîne de C_1 , notée C_2 , ayant les propriétés suivantes. La chaîne C_2 a les mêmes extrémités que C_1 . Elle contient au plus $M l(C_1) + M$ points. En outre, $l(C_2) \leq (1 + \varepsilon) l(C_1) + \frac{1}{2}\varepsilon$. On prolonge alors C_2 en ajoutant respectivement z_1 et z_n en début et en fin de chaîne. La longueur de la chaîne C' ainsi obtenue n'excède pas $(1 + \varepsilon) |x - x'|_{\dot{X}} + \varepsilon$. Par ailleurs son nombre de points est inférieur à $M |x - x'|_{\dot{X}} + M(\varepsilon + 1) + 2$. \square

II.2.e Limite d'une famille de cone-off suivant un ultra-filtre

Dans cette partie, on étudie le comportement des limites suivant un ultra-filtre vis à vis d'un cone-off. On verra notamment qu'on peut « partiellement » permuter les deux constructions : cone-off et limite. Le cadre de cette étude est le suivant. On fixe un réel strictement positif r_0 . Pour tout entier n , on se donne

► un espace géodésique pointé (X_n, x_n^0) .

► une famille $Y_n = (Y_{n,i})_{i \in I_n}$ de parties de X_n connexes par arcs rectifiables.

La métrique de longueur sur $Y_{n,i}$, induite par la restriction de $|\cdot|_{X_n}$ à $Y_{n,i}$ est notée $|\cdot|_{Y_{n,i}}$. On suppose que l'injection $(Y_{n,i}, |\cdot|_{Y_{n,i}}) \hookrightarrow (X_n, |\cdot|_{X_n})$ est une $(1, l_n)$ -quasi-isométrie avec $l_n = o(1)$. Le cone-off de X_n , de rayon r_0 , relativement à Y_n est noté \dot{X}_n . Enfin, p_n désigne la projection de \dot{X}_n privé des sommets $v_{n,i}$ sur X_n (cf. Section II.2.b).

Soit ω un ultra-filtre non principal. On note I le quotient du produit $\prod_{n \in \mathbf{N}} I_n$ par la relation d'équivalence suivante : deux éléments $i = (i_n)$ et $j = (j_n)$ de $\prod_{n \in \mathbf{N}} I_n$ sont équivalents si $i_n = j_n$ ω -ps. On désigne par X l'espace limite $X = \lim_{\omega} (X_n, x_n^0)$. Par ailleurs, pour tout $i \in I$, on introduit $Y_i = \lim_{\omega} Y_{n,i}$. Puisque $(Y_{n,i}, |\cdot|_{Y_{n,i}}) \hookrightarrow (X_n, |\cdot|_{X_n})$ est une $(1, l_n)$ -quasi-isométrie, Y_i est une partie convexe de X . Par convexe on entend ici que quelques soient y et y' des points de Y_i , il existe une géodésique joignant y et y' contenue dans Y_i . On appelle $C(Y_i)$ le cône de rayon r_0 sur Y_i . Le cone-off de X , de rayon r_0 relativement à $Y = (Y_i)_{i \in I}$ est noté \dot{X} .

On cherche à comparer les espaces \dot{X} et $\lim_{\omega} (\dot{X}_n, x_n^0)$. Dans ce but, on introduit deux types d'applications.

$$\begin{array}{lcl} \psi : X & \rightarrow & \lim_{\omega} \dot{X}_n \\ \lim_{\omega} x_n & \rightarrow & \lim_{\omega} x_n \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{lcl} \psi_i : C(Y_i) & \rightarrow & \lim_{\omega} \dot{X}_n \\ (\lim_{\omega} y_n, r) & \rightarrow & \lim_{\omega} (y_n, r) \end{array}$$

On vérifie que ces applications sont bien définies. (En particulier elles ne dépendent pas du choix des suites (x_n) ou (y_n) .) Par ailleurs, pour tout $i \in I$, ces applications coïncident sur Y_i . Ainsi ψ et les ψ_i induisent une application $\dot{\psi} : \dot{X} \rightarrow \lim_{\omega} \dot{X}_n$ dont la restriction à X (respectivement à $C(Y_i)$) est ψ (respectivement ψ_i). On va maintenant montrer que $\dot{\psi}$ induit une isométrie locale du cone-off \dot{X} vers la limite $\lim_{\omega} \dot{X}_n$. Pour cela on procède en deux étapes. La première permet de comprendre le comportement de $\|\cdot\|$ vis à vis des limites suivant ω . Ensuite, on montre que $\dot{\psi}$ induit une isométrie locale.

On rappelle que pour tout point x de \dot{X} , $r(x)$ mesure la distance de x aux sommets du cône-off \dot{X} . Il est défini par $r(x) = \min \{r_0, |x - v_i|_{\dot{X}} / i \in I\}$.

Première étape : Comportement de $\|\cdot\|$ par rapport aux limites suivant ω .

Lemme II.2.19. *Soit x un point du cone-off $\dot{X} \setminus \{v_i, i \in I\}$. Soit (z_n) un élément du produit restreint $\prod_{\omega} \dot{X}_n$ tel que $\dot{\psi}(x) = \lim_{\omega} z_n$. Alors $(p_n(z_n))$ est un élément de $\prod_{\omega} X_n$ et $(p_n(z_n))$ converge dans X vers $p(x)$. En outre $\lim_{\omega} r(z_n) = r(x)$.*

Démonstration. On distingue deux cas.

Cas 1. Il existe $i \in I$ tel que x soit un point du cône $C(Y_i) \setminus Y_i$ de la forme $x = (\lim_{\omega} y_n, r)$. Dans ce cas, $\dot{\psi}(x) = \lim_{\omega} (y_n, r)$. Les distances dans \dot{X}_n et $C(Y_{n,i_n})$ coïncident localement (cf. lemme II.2.6). Puisque $\lim_{\omega} |(y_n, r) - z_n|_{\dot{X}_n}$ est nulle, z_n est un point du cône $C(Y_{n,i_n})$ de la forme $(p_n(z_n), r(z_n))$ ω -ps. En outre la distance dans le cône $C(Y_{n,i_n})$ entre (y_n, r) et z_n tend vers 0 selon ω . Il en découle que les suites $(|p_n(z_n) - y_n|_{X_n})$ et $(|r(z_n) - r|)$ tendent vers 0 selon ω . En d'autres termes on a dans X l'égalité suivante $\lim_{\omega} p_n(z_n) = \lim_{\omega} y_n = p(x)$. Par ailleurs, $\lim_{\omega} r(z_n) = r = r(x)$.

Cas 2. Le point x est un élément de X de la forme $x = \lim_{\omega} x_n$. Dans ce cas $\dot{\psi}(x)$ est le point de $\lim_{\omega} \dot{X}_n$ défini par $\lim_{\omega} x_n$. D'après l'inégalité triangulaire, pour tout entier n , pour tout $i \in I_n$, on a

$$|z_n - v_{n,i}|_{\dot{X}_n} \geq |x_n - v_{n,i}|_{\dot{X}_n} - |z_n - x_n|_{\dot{X}_n} \geq r_0 - |z_n - x_n|_{\dot{X}_n}$$

Il en découle que $\lim_{\omega} r(z_n) = r_0 = r(x)$. Par ailleurs ;

$$|x_n - p_n(z_n)|_{\dot{X}_n} \leq |x_n - z_n|_{\dot{X}_n} + |z_n - p_n(z_n)|_{\dot{X}_n} \leq |x_n - z_n|_{\dot{X}_n} + (r_0 - r(z_n))$$

Par conséquent la suite $(|x_n - p_n(z_n)|_{\dot{X}_n})$ tend vers 0 selon ω . La proposition II.2.12, assure alors que $(|x_n - p_n(z_n)|_{X_n})$ converge vers 0 selon ω . En d'autres termes, on a l'égalité suivante dans X : $\lim_{\omega} p_n(z_n) = \lim_{\omega} x_n = p(x)$. \square

Lemme II.2.20. Soient x et x' deux points de $X = \lim_{\omega} (X_n, x_n^0)$. Soient (z_n) et (z'_n) deux éléments du produit restreint $\Pi_{\omega} \dot{X}_n$, tels que $\psi(x) = \lim_{\omega} z_n$ et $\psi(x') = \lim_{\omega} z'_n$. On a alors

$$|\psi(x) - \psi(x')| \leq \|x - x'\| \leq \lim_{\omega} \|z_n - z'_n\|$$

Démonstration. En tant que points de X , x et x' s'identifient à deux limites $x = \lim_{\omega} x_n$ et $x' = \lim_{\omega} x'_n$, où (x_n) et (x'_n) sont des éléments de $\Pi_{\omega} X_n$. Le lemme II.2.19 assure que $(p_n(z_n))$ et $(p_n(z'_n))$ convergent respectivement dans X vers x et x' . En outre $(r(z_n))$ et $(r(z'_n))$ tendent vers 0 selon ω . En particulier $\lim_{\omega} \|z'_n - z_n\| \geq \lim_{\omega} \|p(z'_n) - p(z_n)\|$. On distingue alors deux cas.

Cas 1. Il existe $i \in I$ tel que $x, x' \in Y_i$. Puisque Y_i est convexe dans X , on a

$$\|x - x'\| = \mu(|x - x'|_X) = \lim_{\omega} \mu(|x_n - x'_n|_{X_n})$$

Par définition, x_n, x'_n appartiennent à Y_{n,i_n} ω -ps. Ainsi on a

$$|x_n - x'_n|_{\dot{X}_n} \leq |x_n - x'_n|_{C(Y_{n,i_n})} = \mu(|x_n - x'_n|_{Y_{n,i_n}}) \leq \mu(|x_n - x'_n|_{X_n}) + l_n$$

En passant à la limite, on obtient $|\psi(x) - \psi(x')| \leq \|x - x'\|$. Pour la seconde inégalité, on remarquera que pour tout entier n , $\|p_n(z'_n) - p_n(z_n)\|$ est supérieur à $\mu(|p_n(z'_n) - p_n(z_n)|_{X_n})$. En passant à la limite selon ω , on a

$$\lim_{\omega} \|z'_n - z_n\| \geq \lim_{\omega} \|p_n(z'_n) - p_n(z_n)\| \geq \mu(|x - x'|_X) = \|x - x'\|$$

Cas 2. Quelque soit $i \in I$, x et x' n'appartiennent pas tous les deux à Y_i . Dans ce cas, on a

$$\|x - x'\| = |x - x'|_X = \lim_{\omega} |x_n - x'_n|_{X_n}$$

Or par construction $|x_n - x'_n|_{\dot{X}_n} \leq |x_n - x'_n|_{X_n}$. En passant à la limite selon ω , on obtient $|\psi(x) - \psi(x')| \leq \|x - x'\|$. Par ailleurs $(p_n(z_n))$ et $(p_n(z'_n))$ convergent respectivement dans X vers x et x' . Par conséquent quelque soit $i \in I$, $p_n(z_n)$ ou $p_n(z'_n)$ n'est pas un point de Y_{n,i_n} ω -ps. Il en résulte que $\|p_n(z'_n) - p_n(z_n)\| = |p_n(z'_n) - p_n(z_n)|_{X_n}$ ω -ps. En passant à la limite selon ω on a

$$\|x - x'\| = |x - x'|_X = \lim_{\omega} \|p_n(z'_n) - p_n(z_n)\| \leq \lim_{\omega} \|z'_n - z_n\|$$

□

Lemme II.2.21. Soit $i \in I$. Soient x et x' des points de $C(Y_i)$. On suppose que x n'appartient pas à Y_i . Soient (z_n) et (z'_n) deux éléments du produit restreint $\Pi_{\omega} \dot{X}_n$ tels que $\psi_i(x) = \lim_{\omega} z_n$ et $\psi_i(x') = \lim_{\omega} z'_n$. On a alors

$$|\psi_i(x) - \psi_i(x')| \leq \|x - x'\| \leq \lim_{\omega} \|z_n - z'_n\|$$

Démonstration. Par définition, x et x' sont des points de la forme $x = (\lim_{\omega} y_n, r)$ et $x' = (\lim_{\omega} y'_n, r')$, avec $y_n, y'_n \in Y_{n,i_n}$ ω -ps. Par continuité on a

$$\begin{aligned} |\dot{\psi}(x') - \dot{\psi}(x)| &= \lim_{\omega} |(y'_n, r') - (y_n, r)|_{\dot{X}_n} \leq \lim_{\omega} |(y'_n, r') - (y_n, r)|_{C(Y_{n,i_n})} \\ &= |x - x'|_{C(Y_i)} = \|x - x'\| \end{aligned}$$

Par hypothèse, on a $\psi_i(x) = \lim_{\omega} z_n$. Or x n'appartient pas à Y_i . Le lemme II.2.6 assure alors que $z_n \in C(Y_{n,i_n}) \setminus Y_{n,i_n}$ ω -ps. Par ailleurs on peut supposer que $z'_n \in C(Y_{n,i_n})$ ω -ps. En effet dans le cas contraire $\lim_{\omega} \|z'_n - z_n\| = +\infty$, la seconde inégalité est donc toujours vraie. Puisque z_n n'appartient pas à Y_{n,i_n} on a les inégalités suivantes. (Les distances sont prises dans $C(Y_{n,i_n})$.)

$$\begin{aligned} \left| \|z_n - z'_n\| - |(y_n, r) - (y'_n, r')| \right| &= \left| |z_n - z'_n| - |(y_n, r) - (y'_n, r')| \right| \\ &\leq |z_n - (y_n, r)| + |z'_n - (y'_n, r')| \end{aligned}$$

Or par hypothèse $\psi_i(x) = \lim_{\omega} z_n$. Les distances dans \dot{X}_n et $C(Y_{n,i_n})$ coïncident localement. On a donc $\lim_{\omega} |z_n - (y_n, r)|_{C(Y_{n,i_n})} = 0$. De même avec x' . Il vient alors $\lim_{\omega} \|z_n - z'_n\| = \|x - x'\|$. □

Lemme II.2.22. Soit $C = (z^1, \dots, z^m)$ une chaîne entre deux points de \dot{X} . Pour tout $j \in \llbracket 1; m \rrbracket$, on se donne un élément (z_n^j) du produit restreint $\Pi_{\omega} \dot{X}_n$ tel que $\dot{\psi}(z^j) = \lim_{\omega} z_n^j$. Pour tout entier n , on note C_n la chaîne de \dot{X}_n définie par $C_n = (z_n^1, \dots, z_n^m)$. On a alors $l(C) \leq \lim_{\omega} l(C_n)$.

Démonstration. D'après les lemmes II.2.20 et II.2.21, pour tout $j \in \llbracket 1; m-1 \rrbracket$, $\|z^{j+1} - z^j\|$ est inférieur à $\lim_{\omega} \|z_n^{j+1} - z_n^j\|$. En sommant sur j , on obtient l'inégalité annoncée. □

Deuxième étape : L'application $\dot{\psi}$ est une isométrie locale. Plus précisément, on démontre la proposition suivante, dont la preuve est fournie à la fin du paragraphe.

Proposition II.2.23. *Soit x un point du cone-off \dot{X} . L'application $\dot{\psi}$ induit une isométrie de $B\left(x, \frac{r(x)}{3}\right)$ sur $B\left(\dot{\psi}(x), \frac{r(x)}{3}\right)$.*

Proposition II.2.24. *L'application $\dot{\psi}$ est 1-lipschitzienne.*

Démonstration. Soient x et x' deux points du cone-off \dot{X} . Soit $C = (z_1, \dots, z_m)$ une chaîne de points entre x et x' . Les lemmes II.2.20 et II.2.21 assurent que

$$\left| \dot{\psi}(x) - \dot{\psi}(x') \right| \leq \sum_{j=1}^{m-1} \left| \dot{\psi}(z_{j+1}) - \dot{\psi}(z_j) \right| \leq \sum_{j=1}^{m-1} \|z_{j+1} - z_j\| = l(C)$$

En prenant la borne inférieure sur toutes les chaînes entre x et x' on conclut que $\left| \dot{\psi}(x) - \dot{\psi}(x') \right| \leq |x - x'|_{\dot{X}}$. \square

Remarque : L'application $\dot{\psi}$ n'est pas a priori surjective. Considérons par exemple un point $z = \lim_{\omega} (y_n, r_n)$ dans $\lim_{\omega} \dot{X}_n$, proche du sommet d'un cône. Si (y_n, r_n) reste toujours à distance bornée de x_n^0 dans \dot{X}_n , il se peut que la suite $\left(|y_n - x_n^0|_{X_n} \right)$ diverge. Ainsi (y_n) ne définit pas un point de l'espace limite X . Dans ce cas le point z ne peut avoir d'antécédent. Le lemme qui suit propose une caractérisation de l'image de \dot{X} par $\dot{\psi}$.

Lemme II.2.25. *Soit $z = \lim_{\omega} z_n$ un point de l'espace $\lim_{\omega} \dot{X}_n$. On suppose que z n'est pas l'image par $\dot{\psi}$ d'un sommet de \dot{X} . Alors, z appartient à $\dot{\psi}(\dot{X})$ si et seulement si la suite $\left(|p_n(z_n) - x_n^0|_{X_n} \right)$ est ω -eb.*

Démonstration. Puisque z n'est pas l'image d'un sommet de \dot{X} , z_n n'est pas un sommet de \dot{X}_n ω -ps. On suppose que la suite $\left(|p_n(z_n) - x_n^0|_{X_n} \right)$ est ω -eb. Ainsi $y = \lim_{\omega} p_n(z_n)$ définit un point de X . On distingue alors deux cas. Si z_n appartient à X_n ω -ps, alors $\dot{\psi}(y) = z$. Dans l'autre cas, il existe $i \in I$ tel que z_n appartienne à $C(Y_{n,i_n})$ ω -ps. Le point z_n est donc de la forme $(p(z_n), r(z_n))$. La suite $(r(z_n))$ étant bornée, on désigne par r sa limite suivant ω . Le point (y, r) de $C(Y_i)$ est un antécédent de z par $\dot{\psi}$. La réciproque découle du lemme II.2.19. \square

Lemme II.2.26. *Soit x un point du cone-off \dot{X} . Tout point de la boule ouverte $B\left(\dot{\psi}(x), r(x)\right)$ admet un antécédent par $\dot{\psi}$.*

Démonstration. Soit $z = \lim_{\omega} z_n$ un point de la boule $B\left(\dot{\psi}(x), r(x)\right)$. Quelque soit x dans la base X ou dans un cône $C(Y)$, son image par $\dot{\psi}$ est définie comme la limite dans $\lim_{\omega} \dot{X}_n$ d'une suite (x_n) ayant la propriété suivante : pour tout entier n , $r(x_n) = r(x)$ ω -ps. En outre $(p_n(x_n))$ converge vers $p(x)$ dans X . Or z appartient à la boule $B\left(\dot{\psi}(x), r(x)\right)$. Donc, $|x_n - z_n|_{\dot{X}_n} < r(x) \leq r(x_n) + r(z_n)$ ω -ps. En utilisant la proposition II.2.13, on en déduit que la suite $\left(|p_n(x_n) - p_n(z_n)|_{X_n} \right)$ est ω -eb. Donc z est dans l'image de $\dot{\psi}$. \square

Il reste maintenant à montrer que $\dot{\psi}$ est une isométrie locale. Cette démonstration utilise l'approximation uniforme de la distance dans le cone-off par des chaînes (corollaire II.2.18).

Lemme II.2.27. *Soit x un élément du cone-off \dot{X} . On considère u et u' deux points de \dot{X} , dont les images par $\dot{\psi}$ sont contenues dans $B\left(\dot{\psi}(x), \frac{r(x)}{3}\right)$. On a alors $|\dot{\psi}(u) - \dot{\psi}(u')| = |u - u'|_{\dot{X}}$.*

Démonstration. Les points $\dot{\psi}(u)$ et $\dot{\psi}(u')$ sont tous les deux dans $B\left(\dot{\psi}(x), \frac{r(x)}{3}\right)$. On se donne $\varepsilon > 0$ tel que $|\dot{\psi}(u) - \dot{\psi}(u')| + \varepsilon < \frac{2}{3}r(x)$. Il existe (z_n) et (z'_n) deux éléments du produit restreint $\Pi_\omega \dot{X}_n$ tels que $\dot{\psi}(u) = \lim_\omega z_n$ et $\dot{\psi}(u') = \lim_\omega z'_n$. En particulier, $|z_n - z'_n|_{\dot{X}_n} < |\dot{\psi}(u) - \dot{\psi}(u')| + \frac{\varepsilon}{2}$ ω -ps. D'après la proposition II.2.18, il existe un entier m et pour tout entier n , une chaîne de \dot{X}_n entre z_n et z'_n , notée $C_n = (z_n^1, \dots, z_n^m)$, telle que $l(C_n) \leq |z_n - z'_n|_{\dot{X}_n} + \frac{\varepsilon}{2}$. On remarquera que pour tout $j \in \llbracket 1; m \rrbracket$, $|z_n^j - z_n^j|_{\dot{X}_n}$ est inférieur à $\frac{2}{3}r(x)$ ω -ps. Aussi la suite (z_n^j) définit un point $z^j = \lim_\omega z_n^j$ de $\lim_\omega \dot{X}_n$ tel que $|z^j - \dot{\psi}(u)| < \frac{2}{3}r(x)$ ω -ps. Il en découle que z^j appartient à $B\left(\dot{\psi}(x), r(x)\right)$. D'après la proposition II.2.26, z^j est l'image par $\dot{\psi}$ d'un point u^j de \dot{X} . On peut toujours choisir $u^1 = u$ et $u^m = u'$. La suite $C = (u^1, \dots, u^m)$ définit une chaîne de \dot{X} entre u et u' . Le lemme II.2.22 assure que $l(C) \leq \lim_\omega l(C_n)$. Or par construction $l(C_n) \leq |\dot{\psi}(u) - \dot{\psi}(u')| + \varepsilon$ ω -ps. Donc $|u - u'|_{\dot{X}} \leq |\dot{\psi}(u) - \dot{\psi}(u')| + \varepsilon$ et ce pour tout $\varepsilon > 0$. Il en résulte que $|u - u'|_{\dot{X}} \leq |\dot{\psi}(u) - \dot{\psi}(u')|$. L'autre inégalité provient du caractère lipschitzien de $\dot{\psi}$ (cf. proposition II.2.24). \square

Démonstration de la proposition II.2.23. Soient u et u' deux points de la boule $B\left(x, \frac{r(x)}{3}\right)$. Comme $\dot{\psi}$ est 1-lipschitzienne, $\dot{\psi}(u)$ et $\dot{\psi}(u')$ sont des points de $B\left(\dot{\psi}(x), \frac{r(x)}{3}\right)$. La proposition précédente (II.2.27) assure alors que les quantités $|\dot{\psi}(u) - \dot{\psi}(u')|$ et $|u - u'|_{\dot{X}}$ sont égales. Aussi la restriction de $\dot{\psi}$ à $B\left(x, \frac{r(x)}{3}\right)$ préserve les distances. Il reste donc à montrer qu'elle est surjective. Considérons un point v de $B\left(\dot{\psi}(x), \frac{r(x)}{3}\right)$. D'après la proposition II.2.26, v est l'image par $\dot{\psi}$ d'un point u de \dot{X} . Puisque $\dot{\psi}(x)$ et $\dot{\psi}(u) = v$ appartiennent tous les deux à $B\left(\dot{\psi}(x), \frac{r(x)}{3}\right)$, la proposition II.2.27 assure que $|x - u|_{\dot{X}} = |\dot{\psi}(x) - v| < \frac{r(x)}{3}$. Donc $u \in B\left(x, \frac{r(x)}{3}\right)$. Ainsi, la restriction de $\dot{\psi}$ à $B\left(x, \frac{r(x)}{3}\right)$ induit une bijection entre $B\left(x, \frac{r(x)}{3}\right)$ et $B\left(\dot{\psi}(x), \frac{r(x)}{3}\right)$. \square

II.2.f Courbure du cone-off d'un espace hyperbolique

On démontre dans cette partie que le cone-off d'un espace hyperbolique est localement hyperbolique. Dans un premier temps on s'intéresse au cas du cone-off sur un arbre réel, dont découle le cas général.

On introduit un paramètre qui mesure le recouvrement entre deux parties quasi-convexes.

Définition II.2.28. Soit X un espace géodésique, propre, δ -hyperbolique. Soit $Y = (Y_i)_{i \in I}$ une famille de parties de X fortement 50δ -quasi-convexes de X . Le recouvrement maximal de Y , noté $\Delta(Y)$, est défini comme suit.

$$\Delta(Y) = \sup_{i \neq j} \text{diam} (Y_i^{+20\delta} \cap Y_j^{+20\delta})$$

Proposition II.2.29. Soit r_0 un réel strictement positif. Soit X un arbre réel et $Y = (Y_i)_{i \in I}$ une famille de sous-arbres de X . On suppose que deux éléments distincts de Y ont au plus un point en commun. Alors le cone-off $\dot{X}(Y, r_0)$ est un espace $\ln 3$ -hyperbolique.

Cette proposition est la conséquence du cas particulier qui suit.

Lemme II.2.30. Soit r_0 un réel strictement positif. Soient X un arbre simplicial fini et $Y = (Y_i)_{i \in I}$ une famille finie de sous-arbres de X . On suppose que deux éléments distincts de Y ont au plus un point en commun. Alors le cone-off $\dot{X}(Y, r_0)$ est un espace $CAT(-1)$. En particulier, il est $\ln 3$ -hyperbolique.

Démonstration. Puisque chaque partie Y_i est un arbre, les cônes $C(Y_i)$ sont des espaces $CAT(-1)$ (cf. corollaire II.1.13). Par conséquent, \dot{X} est obtenu en recollant un nombre fini d'espaces $CAT(-1)$ ayant deux à deux au plus un point en commun. Ces espaces sont les cônes $C(Y_i)$ et les fermetures des composantes connexes de $X \setminus \bigcup_{i \in I} Y_i$. Il en résulte que \dot{X} est $CAT(-1)$ (cf. [13, Chap. II.11, Th. 11.1]). \square

Démonstration de la proposition II.2.29. Soient x, y, z et t quatre points de \dot{X} . Pour tout entier n , on peut trouver un sous-arbre simplicial fini X_n de X et une famille finie Y^n de sous-arbres de X_n ayant les propriétés suivantes.

- (i) Deux éléments distincts de Y^n partagent au plus un point.
- (ii) Les points x, y, z et t appartiennent à $\dot{X}_n(Y^n, r_0) \subset \dot{X}(Y, r_0)$.
- (iii) Pour tout $u, v \in \{x, y, z, t\}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u - v|_{\dot{X}_n} = |u - v|_{\dot{X}}$.

D'après le lemme précédent (lemme II.2.30) l'espace \dot{X}_n est $\ln 3$ -hyperbolique. Par conséquent les points x, y, z et t satisfont dans \dot{X}_n , la condition d'hyperbolicité. En passant à la limite, on obtient alors dans \dot{X} l'inégalité suivante :

$$\langle x, z \rangle_t \geq \min \left\{ \langle x, y \rangle_t, \langle y, z \rangle_t \right\} - \ln 3$$

\square

Le théorème qui suit est une perturbation de la proposition précédente. On travaille en effet avec un espace de base X hyperbolique. Par ailleurs on autorise des petits recouvrements dans la famille Y . Ce résultat est dû à M. Gromov (cf. [32, 7.B. Hyperbolic Coning Lemma]). On en propose ici une preuve asymptotique.

Théorème II.2.31 (Second théorème de courbure). *Soient ε et r_0 deux réels strictement positifs. Il existe deux constantes strictement positives δ_0 et Δ_0 satisfaisant les propriétés suivantes. Soient X un espace propre, géodésique, δ_0 -hyperbolique et $Y = (Y_i)_{i \in I}$ une famille de parties de X fortement $50\delta_0$ -quasi-convexes telle que $\Delta(Y) \leq \Delta_0$. Si x est un point de du cone-off $\dot{X}(Y, r_0)$ alors la boule $B(x, \frac{r_0}{6})$ est $(\ln 3 + \varepsilon)$ -hyperbolique.*

Démonstration. On peut commencer par la remarque suivante. Si la distance de x à un sommet du cone-off \dot{X} est inférieure à $\frac{r_0}{2}$, alors la boule $B(x, \frac{r_0}{6})$ est entièrement contenue dans un des cônes $C(Y_i)$. Le résultat découle alors de la proposition II.1.15. Pour les autres cas, on raisonne par l'absurde. Si le théorème est faux, alors, pour tout entier n , on peut trouver

- ▶ un espace géodésique, propre, δ_n -hyperbolique X_n , avec $\delta_n = o(1)$.
- ▶ une famille $Y_n = (Y_{n,i})_{i \in I_n}$ de parties de X_n fortement $50\delta_n$ -quasi-convexes de X_n , avec $\Delta(Y_n) = o(1)$.
- ▶ un point x_n appartenant à \dot{X}_n dont la distance à tous les sommets de \dot{X}_n est supérieure à $\frac{r_0}{2}$ et tel que la boule $B(x_n, \frac{r_0}{6})$ n'est pas $(\ln 3 + \varepsilon)$ -hyperbolique.

On fixe un ultra-filtre non principal ω . Pour tout entier n , on note x_n^0 la projection de x_n sur X_n . On introduit alors les objets suivants.

- ▶ X est l'espace limite $\lim_{\omega} (X_n, x_n^0)$.
- ▶ x est le point de $\lim_{\omega} (\dot{X}_n, x_n^0)$ défini par $x = \lim_{\omega} x_n$.
- ▶ I est le quotient de $\prod_{n \in \mathbf{N}} I_n$ par la relation d'équivalence suivante : i et j sont deux suites équivalentes si $i_n = j_n$ ω -ps.
- ▶ Pour tout $i \in I$, Y_i est le sous-espace de X défini par $Y_i = \lim_{\omega} Y_{n,i_n}$.

On remarquera que X est un arbre réel (cf. proposition I.2.4). En outre pour tout $i \in I$, Y_i est un sous-arbre de X . Considérons i et j deux éléments distincts de I . Par définition, $i_n \neq j_n$ ω -ps. On a alors

$$\text{diam} \left(Y_{n,i_n}^{+20\delta_n} \cap Y_{n,j_n}^{+20\delta_n} \right) \leq \Delta(Y_n) \text{ } \omega\text{-ps}$$

La proposition I.2.6, assure alors que $\text{diam}(Y_i \cap Y_j) = 0$. En particulier Y_i et Y_j partagent au plus un point. L'espace X et la famille $Y = (Y_i)_{i \in I}$ satisfont donc les hypothèses de la proposition II.2.29. On en déduit que le cone-off $\dot{X}(Y, r_0)$ est $\ln 3$ -hyperbolique. Cependant, on a vu précédemment comment construire une isométrie locale du cone-off \dot{X} vers la limite $\lim_{\omega} \dot{X}_n$. En particulier, il existe un point $u \in \dot{X}$ et une isométrie entre $B(u, \frac{r_0}{6})$ et $B(x, \frac{r_0}{6})$ (corollaire II.2.23). Par conséquent, la boule $B(x, \frac{r_0}{6}) = \lim_{\omega} B(x_n, \frac{r_0}{6})$ est $\ln 3$ -hyperbolique. La proposition I.2.5 assure alors que $B(x_n, \frac{r_0}{6})$ est $(\ln 3 + \varepsilon)$ -hyperbolique ω -ps. Contradiction. \square

II.3 Théorie de la toute petite simplification

II.3.a Rappels sur les orbi-espaces

Dans cette section, on rappelle la définition d'un orbi-espace, ainsi que le vocabulaire associé. Pour plus de détails, on pourra consulter [13, Part III \mathcal{G}] ou [22, § 4]

Définition et structure de longueur

L'action d'un groupe G sur un espace topologique X est dite *rigide*, si un élément de G est trivial dès lors qu'il agit comme l'identité sur un ouvert de X .

Définition II.3.1 (Orbi-espace). *Soit Q un espace topologique. Une structure d'orbi-espace sur Q est la donnée d'une famille $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ où U_i est un espace topologique et φ_i une application continue de U_i dans Q , satisfaisant les conditions ci-dessous.*

- (i) *L'espace Q est recouvert par les $\varphi_i(U_i)$.*
- (ii) *Pour tout $q \in \varphi_i(U_i)$, pour tout $x \in \varphi_i^{-1}(\{q\})$, il existe un groupe fini, rigide d'homéomorphismes de U_i noté G_x , ayant les propriétés suivantes. G_x fixe x . Pour tout élément g de G_x , on a $\varphi_i \circ g = \varphi_i$. Enfin, la restriction de φ_i à un voisinage V_x de x induit un homéomorphisme de V_x/G_x sur son image.*
- (iii) *Pour tout $x_i \in U_i$, pour tout $x_j \in U_j$, tels que $\varphi_i(x_i) = \varphi_j(x_j)$, il existe un homéomorphisme $\theta_{j,i}$ allant d'un voisinage de x_i dans un voisinage de x_j tel que $\varphi_j \circ \theta_{j,i} = \varphi_i$.*
- (iv) *φ_i relève les chemins et les homotopies : si $c : [0; 1] \rightarrow Q$ est un chemin continu (respectivement $h : [0; 1] \times [0; 1] \rightarrow Q$ est une homotopie), il existe une subdivision $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ de $[0; 1]$ (respectivement deux subdivisions $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ et $0 = s_0 < \dots < s_m = 1$ de $[0; 1]$) telle que la restriction de c à $[t_k; t_{k+1}]$ (respectivement la restriction de h à $[t_k; t_{k+1}] \times [s_l; s_{l+1}]$) se relève dans l'un des U_i .*

Vocabulaire : Le couple (U_i, φ_i) est une *carte* de Q . L'ensemble des cartes forme un *atlas*. L'application $\theta_{j,i}$ est appelée *changement de carte*. Enfin, le groupe G_x est le *groupe d'isotropie* de x .

Définition II.3.2 (Structure de longueur sur un orbi-espace). *La structure d'orbi-espace définie précédemment est une structure de longueur, si elle satisfait les hypothèses ci-dessous.*

- (i) *Les espaces U_i sont équipés d'une structure de longueur.*
- (ii) *Pour tout $x \in U_i$, le groupe d'isotropie de x , est un groupe d'isométries pour la structure de longueur de U_i .*
- (iii) *Les changements de cartes $\theta_{j,i}$ sont des isométries pour les structures de longueur respectives de U_i et U_j .*

Remarque : Une telle structure permet d'équiper Q d'une structure de longueur : si $c : [0; 1] \rightarrow Q$ est un chemin dans Q , il existe une subdivision $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ de $[0; 1]$ telle que la restriction de c à $[t_k; t_{k+1}]$ se relève dans une carte en un chemin \tilde{c}_k . La longueur de c est alors obtenu en additionnant les longueurs des relevés \tilde{c}_k .

Définition II.3.3 (Structure de longueur utile à l'échelle σ). *Soit σ un nombre réel strictement positif. La structure de longueur définie précédemment est dite utile à l'échelle σ si pour tout $q \in Q$, il existe une carte (U_i, φ_i) et un point $x \in \varphi_i^{-1}(\{q\})$ satisfaisant les conditions ci-dessous.*

- (i) La restriction de φ_i à $B(x, \sigma)$ induit une surjection sur $B(q, \sigma)$.
- (ii) Cette restriction relève les chemins d'origine q dont la longueur n'excède pas $\frac{\sigma}{2}$.
- (iii) Cette restriction relève les homotopies $h : [0; 1] \times [0; 1] \rightarrow Q$ telles que $h(0, 0) = q$ et pour tout $t_0 \in [0; 1]$ (respectivement pour tout $s_0 \in [0; 1]$) la longueur du chemin $s \rightarrow h(t_0, s)$ (respectivement $t \rightarrow h(t, s_0)$) est inférieure à $\frac{\sigma}{2}$.

Le triplet (U_i, φ_i, x) est alors appelé carte utile à l'échelle σ

Définition II.3.4 (Structure δ -hyperbolique à l'échelle σ). Soient σ et δ deux réels strictement positifs. La structure de longueur utile à l'échelle σ définie ci-dessus est dite δ -hyperbolique à l'échelle σ si pour tout $q \in Q$ il existe une carte utile à l'échelle σ , notée (U_i, φ_i, x) telle que la boule $B(x, \sigma)$ soit δ -hyperbolique.

Développabilité et groupe fondamental

On considère un espace métrique propre X . Soit G un groupe d'isométries de X , dont l'action est rigide et propre. L'espace des orbites $Q = X/G$ peut être muni une structure d'orbi-espace. Pour cela, on note φ la projection canonique de X sur Q . Soient q un point de Q et x un antécédent de q par φ . L'action de G sur X étant propre, il existe $r > 0$ tel que l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que $gB(x, r) \cap B(x, r) \neq \emptyset$ est fini. En particulier le stabilisateur G_x de x est fini. En outre, quitte à diminuer r , on peut supposer que pour tout $g \in G$, $gB(x, r) \cap B(x, r)$ est non vide si et seulement si g appartient à G_x . Ainsi, la restriction de φ à $B(x, r)$ induit un homéomorphisme de $B(x, r)/G_x$ sur son image. L'ensemble $\{(X, \varphi)\}$ est un atlas de Q ne contenant qu'une seule carte.

Définition II.3.5. On dit qu'un orbi-espace Q est développable s'il existe un espace métrique propre, simplement connexe X et une action rigide, propre par isométries d'un groupe G sur X tel que Q s'identifie à X/G muni de la structure d'orbi-espace définie ci-dessus. L'espace X est appelé revêtement universel de Q et G groupe fondamental (au sens des orbi-espace) de Q . On le note $\pi_1^{orb}(Q)$.

Remarque : Le groupe fondamental d'un orbi-espace Q peut aussi se définir comme l'ensemble des classes d'homotopies des \mathcal{G} -chemins pointés munis de la concaténation(cf. [13, Chap III \mathcal{G}] ou [22]).

Théorème II.3.6 (Théorème de Cartan-Hadamard, cf. [22, Th. 4.3.1]). Soit δ un nombre réel strictement positif. Soit $\sigma > 10^5\delta$. Soit Q un espace topologique muni d'une structure d'orbi-espace δ -hyperbolique à l'échelle σ . Alors Q est développable et son revêtement universel X est 200δ -hyperbolique. Par ailleurs si (U, φ, u) est une carte utile à l'échelle σ et x un antécédent de $\varphi(u)$ dans X , alors l'application développante $(U, u) \rightarrow (X, x)$ induit une isométrie de $B(u, \sigma)$ sur son image.

II.3.b Toute petite simplification pour une famille de rotations

Dans cette section, X est un espace géodésique, propre, simplement connexe, δ -hyperbolique et G un groupe d'isométries de X dont l'action est propre et co-compacte.

Action de groupe sur le cone-off

On définit maintenant la notion de famille de rotations introduite par M. Gromov dans [33] et [34].

Définition II.3.7 (Famille de rotations). *Soit $(H_i, Y_i)_{i \in I}$ une famille où H_i est un sous-groupe de G dont tous les éléments sont hyperboliques et Y_i une partie fermée fortement 50δ -quasi-convexe de X (cf. définition I.1.14). On dit que (H_i, Y_i) est une famille de rotations si elle satisfait les conditions ci-dessous.*

- (i) *Pour tout $i \in I$, H_i est un sous-groupe normal d'indice fini de $\text{Stab}(Y_i)$. Son action sur Y_i est co-compacte.*
- (ii) *Il existe une action de G sur I qui est compatible avec l'action de G sur X , c'est à dire, pour tout $g \in G$, et pour tout $i \in I$, $Y_{gi} = gY_i$ et $H_{gi} = gH_i g^{-1}$.*
- (iii) *Le quotient I/G est fini.*

On se donne maintenant une famille de rotations $\mathcal{F} = (H_i, Y_i)_{i \in I}$. Par analogie avec la petite simplification usuelle, on introduit les deux paramètres suivants.

- (i) La *taille de la plus petite relation* est $r_{inj}(\mathcal{F}) = \inf_{i \in I} r_{inj}(H_i, X)$.
- (ii) La *taille de la plus grande pièce* est $\Delta(\mathcal{F}) = \sup_{i \neq j} \text{diam}(Y_i^{+20\delta} \cap Y_j^{+20\delta})$.

On fixe un réel r_0 strictement positif, et on appelle \dot{X} le cone-off de X de rayon r_0 relativement à la famille $(Y_i)_{i \in I}$.

Lemme II.3.8. *L'action de G sur X se prolonge en une action par isométries de G sur \dot{X} .*

Démonstration. Soit g un élément de G et x un point de \dot{X} qui n'est pas dans la base X . Il existe $i \in I$, $y \in Y_i$ et $r \in [0; r_0]$ tel que x soit le point (y, r) du cône $C(Y_i)$. Dans ce cas, gx est le point de $C(Y_{gi})$ défini par $gx = (gy, r)$. On vérifie que pour tout $g \in G$, pour tout $x, x' \in \dot{X}$, $\|gx - gx'\| = \|x - x'\|$. Il en résulte que l'action de G sur \dot{X} préserve la longueur des chaînes et donc les distances. \square

L'action de G sur le cone-off n'est pas nécessairement propre. En effet pour tout $i \in I$, le sous-groupe H_i fixe le sommet v_i du cône $C(Y_i)$. En particulier, les stabilisateurs des sommets peuvent être infinis.

On rappelle que pour tout point x de \dot{X} , $r(x)$ mesure la distance de x aux sommets du cône-off \dot{X} . Il est défini par $r(x) = \min \{r_0, |x - v_i|_{\dot{X}} / i \in I\}$.

Lemme II.3.9. *Soit $x \in \dot{X} \setminus \{v_i, i \in I\}$. On note $D(x)$ l'ensemble défini ci-dessous*

$$D(x) = \left\{ x' \in \dot{X} / |x - x'|_{\dot{X}} < r(x) + r(x') \right\}$$

Il existe un nombre fini seulement d'isométries g appartenant à G telles que $gD(x) \cap D(x)$ est non vide. En particulier, l'action de G sur $\dot{X} \setminus \{v_i, i \in I\}$ est propre.

Démonstration. On note E l'ensemble des éléments g appartenant à G tels que $gD(x) \cap D(x)$ soit non vide. D'après le corollaire II.2.13, $p(D(x))$, projection de $D(x)$ sur la base X est contenue dans la boule de X de centre $p(x)$ et de rayon $3\pi \operatorname{sh} r_0$. Or l'action de G sur X est propre. L'ensemble $E' = \{g \in G / gp(D(x)) \cap p(D(x)) \neq \emptyset\}$ est donc fini. La projection p étant équivariante, E est une partie de E' . En particulier E est fini.

Puisque x n'est pas un sommet de \dot{X} , $r(x)$ est strictement positif. Or la boule $B(x, r(x))$ est contenue dans $D(x)$. Ainsi, il existe un nombre fini seulement d'isométries g appartenant à G telles que $gB(x, r(x)) \cap B(x, r(x))$ est non vide. Donc l'action de G sur $\dot{X} \setminus \{v_i, i \in I\}$ est propre. \square

On note N le sous-groupe normal de G engendré par les H_i et \bar{G} le quotient de G par N . La projection naturelle $G \rightarrow \bar{G}$ est notée π . On appelle \bar{X} le quotient du cone-off \dot{X} par l'action de N . Si x est un point de \dot{X} , on note \bar{x} son image dans \bar{X} . On équipe \bar{X} d'une pseudo-distance caractérisée par la propriété suivante.

$$\forall x, x' \in \dot{X}, |\bar{x} - \bar{x}'|_{\bar{X}} = \inf_{g \in N} |gx - x'|_{\dot{X}}$$

Lemme II.3.10. *Pour tout $x, x' \in \dot{X}$, si $|\bar{x} - \bar{x}'| < \frac{r_0}{10}$, alors il existe $g \in N$ tel que $|x - gx'| = |\bar{x} - \bar{x}'|$.*

Démonstration. Soient x et x' deux points de \dot{X} tels que $|\bar{x} - \bar{x}'| < \frac{r_0}{10}$. Par définition, il existe une suite (h_n) d'éléments de N tels que la suite $(|x - h_n x'|)$ converge vers $|\bar{x} - \bar{x}'|$.

Supposons que $|\bar{x} - \bar{x}'| < r(x) + r(x')$. Il existe un entier m tel que pour tout entier $n \geq m$, $|x - h_n x'| \leq r(x) + r(x') = r(x) + r(h_n x')$. Ainsi, $h_n h_m^{-1}$ appartient à l'ensemble fini E défini ci dessous (cf. lemme II.3.9).

$$E = \{g \in N / gD(x) \cap D(x) \neq \emptyset\}$$

Il existe donc une sous-suite de (h_n) constante, égale à un élément $g \in N$. Par conséquent, $|x - gx'| = |\bar{x} - \bar{x}'|$.

Supposons maintenant que $|\bar{x} - \bar{x}'| \geq r(x) + r(x')$. Puisque $|\bar{x} - \bar{x}'| \leq \frac{r_0}{10}$, il existe $i, i' \in I$ tels que x et x' soient respectivement des points des cônes $C(Y_i)$ et $C(Y_{i'})$ de la forme $x = (y, r(x))$ et $x' = (y', r(x'))$. Par ailleurs, il existe un entier m tel que pour tout $n \geq m$,

$$|v_i - h_n v_{i'}| \leq |v_i - x| + |x - h_n x'| + |h_n x' - h_n v_{i'}| \leq \frac{r_0}{2}$$

L'image du sommet d'un cône par un élément de N est le sommet d'un autre cône. Or les sommets de deux cônes distincts sont séparés par une distance supérieur à $2r_0$. Par conséquent $h_n v_{i'} = v_i$. Ainsi, quitte à extraire une sous-suite de (h_n) , on peut supposer que $h_n x'$ appartient à $C(Y_i)$. On a alors pour tout entier n ,

$$|\bar{x} - \bar{x}'| \geq r(x) + r(x') = r(x) + r(h_n x') \geq |x - h_n x'|_{\dot{X}} \geq |\bar{x} - \bar{x}'|$$

Il en découle que pour tout entier n , $|x - h_n x'|_{\dot{X}} = |\bar{x} - \bar{x}'|$. \square

Corollaire II.3.11. *La pseudo-distance sur \bar{X} définie précédemment est une distance.*

Démonstration. Soit x et x' deux points de \dot{X} tels que $|\bar{x} - \bar{x}'| = 0$. D'après le lemme précédent, il existe $g \in N$, tel que $0 = |\bar{x} - \bar{x}'| = |gx - x'|$. Par conséquent $x' = gx$. Donc $\bar{x} = \bar{x}'$. \square

Proposition II.3.12. *L'action de G sur \dot{X} induit une action par isométries de \bar{G} sur \bar{X} qui est propre et co-compacte .*

Démonstration. Le fait que \bar{G} agisse par isométries sur \bar{X} découle directement de la définition de la distance sur \bar{X} . Soit x un point de \dot{X} . On distingue deux cas.

Cas 1. Il existe $i \in I$ tel que x est le sommet v_i du cône $C(Y_i)$. On note B la boule $B(\bar{v}_i, \frac{r_0}{10})$. Soit g un élément de G tel que $\bar{g}B \cap B$ soit non vide. Par définition, il existe $x' \in \dot{X}$ tel que $|\bar{x}' - \bar{v}_i| < \frac{r_0}{10}$ et $|\bar{g}\bar{x}' - \bar{v}_i| < \frac{r_0}{10}$. En particulier $|\bar{g}^{-1}\bar{v}_i - \bar{v}_i| \leq \frac{r_0}{5}$. Comme dans le lemme II.3.10, on en déduit qu'il existe $h \in N$ tel que $g^{-1}v_i = hv_i$. En particulier $gh \in \text{Stab}(Y_i)$, donc \bar{g} appartient à l'image par π de $\text{Stab}(Y_i)$. Or l'application $\pi : G \rightarrow \bar{G}$ induit une surjection de $\text{Stab}(Y_i)/H_i$ sur $\pi(\text{Stab}(Y_i))$. Donc $\pi(\text{Stab}(Y_i))$ est fini. Finalement, l'ensemble $\{\bar{g} \in \bar{G}/\bar{g}B \cap B \neq \emptyset\}$ est fini.

Cas 2. Le point x n'est pas le sommet d'un cône. D'après le lemme II.3.10, pour tout $x' \in \dot{X}$, si $|\bar{x} - \bar{x}'| < \frac{r_0}{10}$ alors il existe $h \in N$ tel que $|\bar{x} - \bar{x}'| = |hx - x'|$. En outre l'action de G sur $\dot{X} \setminus \{v_i, i \in I\}$ est propre. Donc il existe $r \in]0, \frac{r_0}{10}[$ tel que l'ensemble $E = \{g \in G/gB(x, 2r) \cap B(x, 2r) \neq \emptyset\}$ est fini. Soit $g \in G$, tel que $\bar{g}B(\bar{x}, r) \cap B(\bar{x}, r) \neq \emptyset$. Il existe $x' \in \dot{X}$ tel que $|\bar{x}' - \bar{x}| < r$ et $|\bar{g}\bar{x}' - \bar{x}| < r$. Par conséquent, il existe $h, h' \in N$ tels que $|x' - hx| < r$ et $|gx' - h'x| < r$. Donc $|hx - g^{-1}h'x| < 2r$. Aussi $h'^{-1}gh \in E$. Donc \bar{g} est dans l'image de E par la projection canonique $G \rightarrow \bar{G}$. En particulier, l'ensemble $\{\bar{g} \in \bar{G}/\bar{g}B(\bar{x}, r) \cap B(\bar{x}, r) \neq \emptyset\}$ est fini.

Finalement l'action de \bar{G} sur \bar{X} est propre. Par ailleurs \bar{X}/\bar{G} est obtenu en recollant sur X/G les quotients des cônes $C(Y_i)$ par H_i . Par hypothèse, l'action de H_i sur Y_i est co-compacte, donc $C(Y_i)/H_i$ est compact. En outre, I/G est fini. Finalement \bar{X}/\bar{G} est une réunion finie de compacts. L'action de \bar{G} sur \bar{X} est donc co-compacte. \square

Corollaire II.3.13. *L'espace \bar{X} est propre et géodésique.*

Démonstration. L'espace \bar{X} est un espace métrique, muni d'une action propre co-compacte du groupe \bar{G} . Il en découle que \bar{X} est complet et localement compact (cf. [13, Chap. I.8, Ex. 8.4(1)]). Par ailleurs, \dot{X} (et donc \bar{X}) est un espace de longueur (cf. proposition II.2.9). Le théorème de Hopf-Rinow (cf. [13, Chap.1, Prop. 3.7]) assure alors que \bar{X} est propre et géodésique. \square

Théorème de la toute petite simplification

Théorème II.3.14 (Toute petite simplification). *Il existe des réels strictement positifs r_0 , δ_0 , δ_1 et Δ_0 , qui ne dépendent ni de X ni de la famille \mathcal{F} ayant les propriétés suivantes. Si $\delta \leq \delta_0$, $\Delta(\mathcal{F}) \leq \Delta_0$ et $r_{inj}(\mathcal{F}) \geq 3\pi \operatorname{sh} r_0$, alors \bar{X} , quotient du cone-off $\dot{X}(Y, r_0)$ par N , est un espace δ_1 -hyperbolique. En particulier \bar{G} est un groupe hyperbolique.*

Construction d'un orbi-espace La preuve de ce théorème comporte deux grandes étapes. Dans un premier temps, on construit un orbi-espace localement hyperbolique. Ensuite on applique le théorème de Cartan-Hadamard pour montrer que sont revêtement universel \bar{X} est hyperbolique.

On pose $\delta_1 = 400 \ln 3$ et $r_0 = 10^4 \ln 3$. D'après les deux théorèmes de courbure (corollaire II.1.19 et théorème II.2.31), il existe deux constantes strictement positives δ_0 et Δ_0 , qui ne dépendent ni de X ni de la famille \mathcal{F} ayant les propriétés suivantes. Si $\delta \leq \delta_0$, $\Delta(\mathcal{F}) \leq \Delta_0$ et $r_{inj}(\mathcal{F}) \geq 3\pi \operatorname{sh} r_0$, alors

- (i) toute boule de rayon $\frac{r_0}{6}$ du cone-off \dot{X} est $2 \ln 3$ -hyperbolique.
- (ii) pour tout $i \in I$, le cône $C(Y_i)/H_i$ est $2 \ln 3$ -hyperbolique.

A partir de maintenant, on supposera donc que $\delta \leq \delta_0$, $\Delta(\mathcal{F}) \leq \Delta_0$ et $r_{inj}(\mathcal{F}) \geq 3\pi \operatorname{sh} r_0$.

Puisque G agit par isométries sur \dot{X} , on note Q le quotient de \dot{X} par G et φ la projection naturelle $\dot{X} \rightarrow Q$. On définit alors deux types de cartes :

- On note U , l'espace \dot{X} privé des sommets de tous les cônes. La première carte est (U, φ) .
- Soit $i \in I$. On note U_i le quotient par H_i de l'espace $C(Y_i) \setminus Y_i$. La composée $C(Y_i) \hookrightarrow \dot{X} \rightarrow Q$ induit une application $\varphi_i : U_i \rightarrow Q$. Le second type de carte est (U_i, φ_i) .

Lemme II.3.15. *Les cartes (U, φ) et (U_i, φ_i) définissent une structure d'orbi-espace sur Q .*

Démonstration. L'action de G sur U est propre. De même, l'action du groupe $\operatorname{Stab}(Y_i)/H_i$ sur la carte U_i est propre. On vérifie alors que les cartes (U, φ) et (U_i, φ_i) définissent une structure d'orbi-espace. \square

Propriétés de l'orbi-espace

Lemme II.3.16. *Les cartes (U, φ) et (U_i, φ_i) munissent Q d'une structure d'orbi-espace $2 \ln 3$ -hyperbolique à l'échelle $\frac{r_0}{6}$.*

Démonstration. On remarque que la structure d'orbi-espace est utile à l'échelle $\frac{r_0}{6}$. En outre, les constantes δ_0 et Δ_0 ont été choisies de telle sorte que toute boule de rayon $\frac{r_0}{6}$ contenue dans une carte soit $2 \ln 3$ -hyperbolique. (corollaire II.1.19 et théorème II.2.31). Ainsi la structure d'orbi-espace est $2 \ln 3$ -hyperbolique à l'échelle $\frac{r_0}{6}$. \square

Corollaire II.3.17. *L'orbi-espace Q est développable, et son revêtement universel au sens des orbi-espaces est δ_1 -hyperbolique.*

Démonstration. On vient de voir (lemme II.3.16) que Q était équipé d'une structure d'orbi-espace $2\ln 3$ -hyperbolique à l'échelle $\frac{r_0}{6}$. Or $r_0 = 10^{10} \ln 3$. Ainsi Q satisfait les hypothèses du théorème de Cartan-Hadamard. Non seulement Q est développable, mais son revêtement universel est δ_1 -hyperbolique. \square

Lemme II.3.18. *L'espace $\bar{X} = \dot{X}/N$ est le revêtement universel au sens des orbi-espaces de Q . En particulier \bar{X} est δ_1 -hyperbolique.*

Démonstration. L'espace \bar{X} peut se décomposer en deux types d'espaces. D'une part U/N qui est homotope à X/N et dont le groupe fondamental est N . D'autre part les cônes $C(Y_i)/H_i$ qui sont simplement connexes. En appliquant le théorème de Van-Kampen on en déduit que \bar{X} est simplement connexe. Par ailleurs, par construction $Q = \dot{X}/G$ s'identifie à \bar{X}/\bar{G} . Finalement Q est le quotient de \bar{X} , simplement connexe, par l'action de \bar{G} , qui est propre. Donc \bar{X} est le revêtement universel de Q . \square

Ce dernier résultat termine la preuve du théorème de toute petite simplification.

II.3.c Contractibilité de l'espace \bar{X}

Dans le cadre de la théorie usuelle, on sait que sous des hypothèses de petite simplification $C'(\frac{1}{6})$ le complexe de Cayley du groupe quotient est asphérique (cf. [50]). Par analogie, on se propose de montrer que sous quelques hypothèses supplémentaires l'espace \bar{X} , précédemment construit, est contractile.

Hypothèse $H(\delta_1)$: On rappelle que X vérifie l'hypothèse $H(\delta_1)$ si pour tout $x \in X$, pour tout $r \in \mathbf{R}_+$, il existe une homotopie $h : \bar{B}(x, r) \times [0; 1] \rightarrow X$ qui contracte la boule fermée $\bar{B}(x, r)$ sur $\{x\}$, telle que pour tout $x' \in \bar{B}(x, r)$, pour tout $t \in [0; 1]$, $|h(x', t) - x| \leq |x' - x| + \delta_1$.

Théorème II.3.19. *On suppose que X est un complexe simplicial de dimension n avec $8(n+1)(4\delta_1+1) \leq \frac{r_0}{100}$. Si X et les $(Y_i, | \cdot |_{Y_i})$ satisfont l'hypothèse $H(\delta_1)$. Alors l'espace \bar{X} est contractile.*

Démonstration. L'espace \bar{X} , est δ_1 hyperbolique. D'après le théorème de Rips (cf. théorème I.3.1) il est suffisant de montrer que pour tout $\bar{x} \in \bar{X}$, pour tout $r \in [0; 8(n+1)(4\delta_1+1)]$, la boule fermée $\bar{B}(\bar{x}, r)$ est contractile dans $B(\bar{x}, r + 4\delta_1 + 1)$. Soit \bar{x} un point de \bar{X} et $r \in [0; 8(n+1)(4\delta_1+1)]$. On note \bar{B} la boule fermée de centre \bar{x} et de rayon r . D'après le théorème de Cartan-Hadamard, il existe un carte pointée de l'orbi-espace Q , notée (V, x) , telle que l'application développante $(V, x) \rightarrow (\bar{X}, \bar{x})$ induise une isométrie de $\bar{B}(x, \frac{r_0}{60})$ sur $\bar{B}(\bar{x}, \frac{r_0}{60})$. Ainsi la boule \bar{B} se relève en une boule $\bar{B}(x, r)$ dans l'une des cartes de Q .

- (i) Soit cette carte est U on applique alors la proposition II.2.14. Ainsi $\bar{B}(x, r)$ est contractile dans $B(x, r + 2\delta_1)$.
- (ii) Soit cette carte est l'un des U_i . On distingue alors deux cas. Si $\bar{B}(x, r)$ contient le sommet du cône $C(Y_i/H_i)$. On peut alors contracter $\bar{B}(x, r)$ sur le sommet (cf lemme II.1.7). Dans le cas contraire, la boule $\bar{B}(x, r)$ se relève en une boule de rayon r dans le cône $C(Y_i)$. La proposition II.1.8 assure alors que $\bar{B}(x, r)$ est contractile dans $B(x, r + \delta_1)$.

\square

II.3.d Cas de la petite simplification usuelle

On revient ici sur la théorie usuelle de la petite simplification dans un groupe hyperbolique, c'est à dire lorsque les groupes H_i de la famille de rotations sont infinis et cycliques. Dans cette partie X désigne toujours un espace géodésique, propre, δ -hyperbolique, simplement connexe, et G un groupe d'isométries de X dont l'action est propre et co-compacte. On suppose que G satisfait l'hypothèse des petits centralisateurs (cf. section I.4.b) : G est non élémentaire et tous ses sous-groupes élémentaires sont cycliques.

On fixe un sous-groupe normal H de G . Soit $P = (\rho_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments hyperboliques de H . On suppose qu'il existe une action de G sur I ayant les propriétés suivantes

- (i) Pour tout $g \in G$, pour tout $i \in I$, $\rho_{gi} = g\rho_i g^{-1}$
- (ii) Le quotient I/G est fini.

Soit $i \in I$. On rappelle que ρ_i^- et ρ_i^+ désignent les points du bord ∂X fixés par ρ_i . On note Y_i le cylindre de $\{\rho_i^-, \rho_i^+\}$, i.e. l'ensemble des points situés à une distance inférieure à 50δ d'une géodésique reliant ρ_i^- et ρ_i^+ . Pour alléger les notations, E_i désigne $\text{Stab}(Y_i)$, le stabilisateur de Y_i . L'action de E_i sur Y_i est co-compacte. On sait que le sous-groupe engendré par ρ_i (noté $\langle \rho_i \rangle$) est un sous-groupe d'indice fini de E_i (cf. [19, Chap. 10, Prop. 7.1]). En particulier, E_i est un sous-groupe élémentaire, donc cyclique, de G . Ainsi $\langle \rho_i \rangle$ est un sous-groupe normal de E_i . Autrement dit $\mathcal{F} = (Y_i, \langle \rho_i \rangle)_{i \in I}$ est une famille de rotations.

On note r_0 , δ_0 , δ_1 et Δ_0 les constantes données par le théorème de toute petite simplification II.3.14. Comme précédemment, on note N le sous-groupe normal de G engendré par P , \bar{G} le quotient de G par N et \bar{H} , l'image de H par la projection canonique $\pi : G \rightarrow \bar{G}$. \bar{X} désigne le cone-off sur X de rayon r_0 , relativement à $(Y_i)_{i \in I}$ et \bar{X} le quotient de \bar{X} par N . On suppose en outre que $\delta \leq \delta_0$, $\Delta(\mathcal{F}) \leq \Delta_0$ et $r_{inj}(\mathcal{F}) \geq 3\pi \text{sh } r_0$. Ainsi, \bar{X} est un espace géodésique, propre, δ_1 -hyperbolique.

Pour pouvoir itérer la petite simplification, on a besoin de contrôler la taille de la plus petite relation et de la plus grande pièce d'une famille de rotations de (\bar{X}, \bar{G}) . Pour cela on utilise des estimations des paramètres $r_{inj}(\bar{H}, \bar{X})$ et $\Delta(\bar{G}, \bar{X})$.

Estimation du rayon d'injectivité de \bar{H}

On désigne par ν l'application $\bar{X} \rightarrow \bar{X}$. L'espace \bar{X} est obtenu en recollant des cônes de grand rayon sur l'espace $\nu(X)$. Cette construction s'apparente à une décomposition de Margulis. Les cônes jouent le rôle de la partie épaisse : un point pris dans un cône et son image par une isométrie hyperbolique sont très éloignés. Pour étudier la partie fine $\nu(X)^{+100\delta_1}$, on se ramène à $\nu(X)$, par la projection radiale $\nu(X)^{+100\delta_1} \rightarrow \nu(X)$. En utilisant ce point de vue, T. Delzant et M. Gromov, ont démontré les résultats suivants.

Lemme II.3.20 (cf. [22, Lemm. 5.9.3]). *Soit \bar{g} un élément de \bar{G} tel que $[\bar{g}] \leq 200\delta_1$. Si pour tout $i \in I$, \bar{g} n'est pas dans $\bar{E}_i = \pi(E_i)$, alors $A_{\bar{g}} \subset \nu(X)^{+100\delta_1}$ et $A_{\bar{g}} \cap \nu(X) \neq \emptyset$.*

Lemme II.3.21 (cf. [22, Lemm. 5.10.1]). *Soit \bar{C} une partie $40\delta_1$ -quasi-convexe de $\nu(X)^{+100\delta_1}$. Il existe une partie C de \dot{X} ayant les propriétés suivantes.*

- (i) *La projection $\nu : \dot{X} \rightarrow \bar{X}$ induit une isométrie de C sur \bar{C} .*
- (ii) *La projection $\pi : G \rightarrow \bar{G}$ induit un isomorphisme entre $\text{Stab}(C)$ et $\text{Stab}(\bar{C})$.*

Théorème II.3.22. *Le rayon d'injectivité de \bar{H} sur l'espace \bar{X} est supérieur à $\min\{\frac{l}{4\kappa}, \delta_1\}$, où l est la plus petite longueur stable d'un élément hyperbolique de H qui n'appartient à aucun des E_i et $\kappa = \frac{\pi \text{sh } r_0}{2r_0}$ la constante de quasi-isométrie introduite dans la proposition II.2.12*

Remarque : Cette proposition généralise le lemme 5.11.1 de [22]. Dans leur article, T. Delzant et M. Gromov proposent une estimation du rayon d'injectivité de \bar{G} . Pour étudier les automorphismes du groupe de Burnside on a besoin d'un résultat plus fin : une minoration du rayon d'injectivité d'un sous-groupe normal contenant toutes les relations.

Démonstration. On note m le plus grand entier satisfaisant la propriété suivante : $m \min\{\frac{l}{4\kappa}, \delta_1\} \leq 40\delta_1$. Soit \bar{h} un élément hyperbolique de \bar{H} . On suppose que $[\bar{h}^m] \leq m \min\{\frac{l}{4\kappa}, \delta_1\} + 40\delta_1$. On appelle \bar{C} l'axe de \bar{h}^m qui est $40\delta_1$ -quasi-convexe. Puisque $[\bar{h}^m] \leq 80\delta_1$, le lemme II.3.20 assure que \bar{C} est contenu dans $\nu(X)^{+100\delta_1}$. On applique alors le lemme II.3.21. Ainsi il existe une partie C de \dot{X} telle que

- (i) l'application $\nu : \dot{X} \rightarrow \bar{X}$ induit une isométrie de C sur \bar{C} ,
- (ii) la projection $\pi : G \rightarrow \bar{G}$ induit un isomorphisme de $\text{Stab}(C)$ sur $\text{Stab}(\bar{C})$.

Or \bar{h} est dans le stabilisateur de \bar{C} . On note alors h son antécédent dans $\text{Stab}(C)$ par la projection π . Puisque \bar{h} est hyperbolique, h est nécessairement hyperbolique, et ne peut appartenir à l'un des E_i . On notera aussi que toutes les relations ρ_i ont été choisies dans H , aussi $N \subset H$. Il en résulte que h est un élément de H . Par définition, on a donc $[h]^\infty \geq l$.

Par ailleurs, en utilisant le second point du lemme II.3.20, $\bar{C} \cap \nu(X) \neq \emptyset$. On choisit donc un point \bar{x} dans l'intersection $\bar{C} \cap \nu(X)$. On appelle x son antécédent dans C par ν . L'application $\nu : C \rightarrow \bar{C}$ étant une isométrie équivariante on a

$$|h^m x - x|_{\dot{X}} = |\bar{h}^m \bar{x} - \bar{x}|_{\bar{X}} \leq \max\{[\bar{h}^m], 40\delta_1\} \leq 80\delta_1$$

La proposition II.2.12, nous donne alors $|h^m x - x|_X \leq \kappa |h^m x - x|_{\dot{X}}$. Finalement on a les inégalités suivantes

$$ml \leq m[h]_X^\infty \leq [h^m]_X \leq |h^m x - x|_X \leq 80\kappa\delta_1$$

Ainsi, $m\frac{l}{4\kappa}$ est inférieur à $20\delta_1$. En particulier $m \min\{\frac{l}{4\kappa}, \delta_1\} \leq 20\delta_1$, ce qui contredit le fait que m est le plus grand entier tel que $m \min\{\frac{l}{4\kappa}, \delta_1\} \leq 40\delta_1$. Par conséquent, $[\bar{h}^m] \geq m \min\{\frac{l}{4\kappa}, \delta_1\} + 40\delta_1$.

On utilise alors la relation qui lie longueur de translation et longueur stable (cf. proposition I.4.2).

$$m[\bar{h}]^\infty = [\bar{h}^m]^\infty \geq [\bar{h}^m] - 32\delta_1 \geq m \min \left\{ \frac{l}{4\kappa}, \delta_1 \right\}$$

Cette dernière inégalité reste vraie pour tous les éléments hyperboliques de \bar{H} , aussi $r_{inj}(\bar{H}, \bar{X}) \geq \min \left\{ \frac{l}{4\kappa}, \delta_1 \right\}$. \square

Autres propriétés de \bar{G} et \bar{X}

On rappelle ici d'autres propriétés de \bar{G} et \bar{X} démontrées par T. Delzant et M. Gromov dans [22]. La première proposition donne une majoration de $\Delta(\bar{G}, \bar{X})$ en fonction de $\Delta(G, X)$. La seconde concerne les sous-groupes élémentaires de \bar{G} . La dernière permet de calculer la caractéristique d'Euler de \bar{G} .

Proposition II.3.23 (cf. [22, Lemm. 5.10.3]). *La constante $\Delta(\bar{G}, \bar{X})$ est majorée de la manière suivante*

$$\Delta(\bar{G}, \bar{X}) \leq \Delta(G, X) + 1000\delta_1 e^{350\delta_1}$$

Proposition II.3.24 (cf. [22, Lemm. 5.10.2 et 5.10.3]). *Si tout élément de P est une puissance impaire d'un élément de G qui n'est pas une puissance propre, alors \bar{G} satisfait les propriétés suivantes.*

- (i) *Tous les sous-groupes élémentaires de \bar{G} sont cycliques.*
- (ii) *Soit \bar{F} un sous-groupe fini de \bar{G} . Si F n'est pas l'image par π d'un groupe fini de G , alors il existe $i \in I$ tel que \bar{F} soit un sous-groupe de $\bar{E}_i = \pi(E_i)$.*

Proposition II.3.25 (cf. [22, Th. 5.7.1]). *La caractéristique d'Euler à coefficients rationnels de \bar{G} satisfait la relation suivante : $\chi(\bar{G}, \mathbf{Q}) = \chi(G, \mathbf{Q}) + |I/G|$, où $|I/G|$ est le nombre d'éléments de I/G .*

EXEMPLES DE COMPLEXES
SIMPLICIAUX ASPHÉRIQUES

Dans ce chapitre, on explique comment produire des exemples de famille de rotations satisfaisant les hypothèses de toute petite simplification.

III.1 Construction d'une famille de rotations

Soit X un espace propre, géodésique, δ -hyperbolique et Y une partie fermée fortement 50δ -quasi-convexe de X (cf. définition I.1.14). Soit G un groupe d'isométries de X dont l'action est propre et co-compacte. On suppose aussi que l'action de $\text{Stab}(Y)$ sur Y est co-compacte. Soit H un sous-groupe de $\text{Stab}(Y)$. On s'intéresse à une famille de rotations de la forme suivante

$$\mathcal{F} = (gY, gHg^{-1})_{g \in G/\text{Stab}(Y)}$$

A priori, $\Delta(\mathcal{F}) = \sup_{g \in G/\text{Stab}(Y)} \text{diam}(gY^{+20\delta} \cap Y^{+20\delta})$ n'est pas nécessairement fini. Toutefois dans de nombreuses situations ce problème peut être contourné en remplaçant G par un sous-groupe d'indice fini. Cette opération, formulée dans le lemme qui suit, utilise la topologie profinie.

Lemme III.1.1. *On suppose que $\text{Stab}(Y)$ est fermé dans G pour la topologie profinie. Soit Δ un réel positif. Il existe un sous-groupe G' d'indice fini de G , contenant $\text{Stab}(Y)$ ayant la propriété suivante. Pour tout $g \in G'$, g appartient à $\text{Stab}(Y)$ si et seulement si $\text{diam}(gY^{+20\delta} \cap Y^{+20\delta}) > \Delta$.*

Démonstration. On considère un domaine fondamental compact K pour l'action de $\text{Stab}(Y)$ sur Y . Puisque l'action de G est propre, l'ensemble E défini ci-dessous est fini.

$$E = \{g \in G/\text{Stab}(Y) \mid \text{diam}(gK^{+\Delta+30\delta} \cap K^{+\Delta+30\delta}) > \Delta\}$$

On a supposé que $\text{Stab}(Y)$ était fermé dans G pour la topologie profinie. En d'autres termes on a

$$\text{Stab}(Y) = \bigcap_{\substack{N \triangleleft G \\ [G:N] < +\infty}} \text{Stab}(Y) \cdot N$$

En particulier, il existe un sous groupe normal N d'indice fini de G tel que $E \cap \text{Stab}(Y)N \subset \text{Stab}(Y)$. On note alors G' le groupe $\text{Stab}(Y)N$. C'est un sous-groupe d'indice fini de G contenant $\text{Stab}(Y)$. Considérons maintenant un élément g de G' tel que $\text{diam}(gY^{+20\delta} \cap Y^{+20\delta}) > \Delta$. Par définition, K est un domaine fondamental pour l'action de $\text{Stab}(Y)$ sur Y . Il existe donc quatre points $x, x', y, y' \in K^{+\Delta+30\delta}$ et deux éléments $h, h' \in \text{Stab}(Y)$ satisfaisant les propriétés suivantes.

- (i) $hx = gh'x'$ et $y = gh'y'$
- (ii) $|y - x| = |y' - x'| > \Delta$

Ainsi $h^{-1}gh'$ est un élément de $E \cap G' \subset \text{Stab}(Y)$. Or h et h' appartiennent à $\text{Stab}(Y)$, donc g aussi. \square

Le résultat suivant de N. Bergeron, donne des exemples de sous-groupes fermés pour la topologie profinie. Il généralise le fait suivant, démontré par A. Malcev (cf. [41]) : tout groupe linéaire de type fini est résiduellement fini.

Proposition III.1.2 (cf. [4, Lemme principal]). *Soit Λ un sous-groupe algébrique de $GL_n(\mathbf{R})$ et G un sous-groupe de type fini de $GL_n(\mathbf{R})$. Alors $\Lambda \cap G$ est un sous-groupe fermé de G pour la topologie profinie.*

Le second lemme explique comment trouver un sous-groupe H de $\text{Stab}(Y)$ dont le rayon d'injectivité est arbitrairement grand.

Lemme III.1.3. *On suppose que G est résiduellement fini. Pour tout $\rho > 0$, il existe un sous-groupe normal H d'indice fini de $\text{Stab}(Y)$ tel que $r_{inj}(H, X) \geq \rho$.*

Démonstration. Soit K un domaine fondamental compact pour l'action de G sur X . Puisque l'action de G est propre, l'ensemble E défini ci-dessous est fini.

$$E = \{g \in G/gK^{+\rho+40\delta} \cap K^{+\rho+40\delta} \neq \emptyset\}$$

Or G est résiduellement fini. Par conséquent il existe un sous-groupe normal N d'indice fini de G tel que $E \cap N = \{1\}$. Soient $g \in N \setminus \{1\}$ et x un point de X . Par définition, il existe $h \in G$ tel que $hx \in K$. Or hgh^{-1} appartient à $N \setminus \{1\}$. Donc $(hgh^{-1})K^{+\rho+40\delta} \cap K^{+\rho+40\delta} = \emptyset$. Il en découle que $|gx - x| = |(hgh^{-1})hx - hx| \geq \rho + 40\delta$. Ainsi $[g] \geq \rho + 40\delta$. En appliquant la proposition I.4.2, on obtient $[g]^\infty \geq [g] - 32\delta \geq \rho$. Cette dernière inégalité reste vraie pour tout g dans $N \setminus \{1\}$. Donc $r_{inj}(H, X) \geq \rho$. On choisit pour H le groupe $N \cap \text{Stab}(Y)$. \square

Grâce aux lemmes III.1.1 et III.1.3 on peut donc choisir $r_{inj}(\mathcal{F})$ arbitrairement grand devant $\Delta(\mathcal{F})$. Ainsi la famille de rotations \mathcal{F} satisfait les hypothèses de toute petite simplification.

III.2 Exemples d'applications

Théorème III.2.1. *On appelle \mathbf{H}_n l'espace hyperbolique réel (respectivement complexe, quaternionique) de dimension n et δ sa constante d'hyperbolicité. On considère $\Lambda_k = SO(k, 1)$ (respectivement $SU(k, 1)$, $Sp(k, 1)$) comme le stabilisateur de \mathbf{H}_k dans \mathbf{H}_n . Soit G un réseau uniforme de $\Lambda_n = SO(n, 1)$ (respectivement $SU(n, 1)$, $Sp(n, 1)$). On suppose que $G \cap \Lambda_k$ est encore un réseau uniforme de Λ_k .*

(i) *Il existe un sous-groupe G' d'indice fini de G tel que l'ensemble ci-dessous soit borné.*

$$\{\text{diam}(g\mathbf{H}_k^{+20\delta} \cap \mathbf{H}_k^{+20\delta}), g \in G' \setminus \Lambda_k\}$$

(ii) *Soit \bar{Q} l'espace obtenu en recollant un cône de base $\mathbf{H}_k/G' \cap \Lambda_k$ sur \mathbf{H}_n/G' . Il existe un sous-groupe H d'indice fini de $G' \cap \Lambda_k$ et un espace contractile hyperbolique \bar{X} sur lequel $\bar{G}' = G'/\ll H \gg$ agit par isométries de manière propre et co-compacte. En outre on a $\bar{Q} = \bar{X}/\bar{G}'$.*

Démonstration. La proposition III.1.2 assure que $G \cap \Lambda_k$ est fermé dans G pour la topologie profinie. Le premier point découle du lemme III.1.1. On note alors Δ la borne supérieure l'ensemble ci-dessous.

$$\{\text{diam}(g\mathbf{H}_k^{+20\delta} \cap \mathbf{H}_k^{+20\delta}), g \in G' \setminus \Lambda_k\}$$

Soit $r_0 > 10^{10} \ln 3$. On se donne ρ tel que $\frac{3\pi \text{sh } r_0}{\rho} \delta \leq \delta_0$ et $\frac{3\pi \text{sh } r_0}{\rho} \Delta \leq \Delta_0$, où δ_0 et Δ_0 sont les constantes données par le théorème de toute petite simplification (cf théorème II.3.14). On sait qu'un sous-groupe de type fini de Λ_n est résiduellement fini. En appliquant le lemme III.1.3 on peut alors trouver un sous-groupe normal H de $G' \cap \Lambda_k$ dont le rayon d'injectivité est plus grand que ρ . En se plaçant dans l'espace renormalisé $X = \frac{3\pi \text{sh } r_0}{\rho} \mathbf{H}_n$, la famille de rotations $(g\mathbf{H}_k, gHg^{-1})_{g \in G'/G' \cap \Lambda_k}$ satisfait les hypothèses du théorème de toute simplification. Par conséquent, il existe un espace propre, géodésique, hyperbolique \bar{X} sur lequel $\bar{G}' = G'/\ll H \gg$ agit par isométries de manière propre, co-compacte et tel que $\bar{Q} = \bar{X}/\bar{G}'$. En outre toutes les boules de \mathbf{H}_n ou \mathbf{H}_k sont convexes. Elles sont en particulier contractiles. Le théorème II.3.19 assure donc que \bar{X} est contractile. \square

Le résultat qui suit se démontre exactement de la même manière. Seul change le type de sous-espace convexe de \mathbf{H}_n qu'on considère.

Théorème III.2.2. *On note $\mathbf{H}_n(\mathbf{C})$ l'espace hyperbolique complexe de dimension n et δ sa constante d'hyperbolicité. On considère $SO(n, 1)$ comme le stabilisateur de l'espace hyperbolique réel de dimension n , noté $\mathbf{H}_n(\mathbf{R})$, dans $\mathbf{H}_n(\mathbf{C})$. Soit G un réseau uniforme de $SU(n, 1)$. On suppose que $G \cap SO(n, 1)$ est encore un réseau uniforme de $SO(n, 1)$.*

- (i) *Il existe un sous-groupe G' d'indice fini de G tel l'ensemble ci-dessous soit borné.*

$$\{\text{diam}(g\mathbf{H}_k^{+20\delta} \cap \mathbf{H}_k^{+20\delta}), g \in G' \setminus SO(n, 1)\}$$

- (ii) *Soit \bar{Q} l'espace obtenu en recollant un cône de base $\mathbf{H}_n(\mathbf{R})/G' \cap SO(n, 1)$ sur $\mathbf{H}_n(\mathbf{C})/G'$. Il existe un sous-groupe H d'indice fini de $G' \cap SO(n, 1)$ et un espace contractile hyperbolique \bar{X} sur lequel $\bar{G}' = G'/\ll H \gg$ agit par isométries de manière propre et co-compacte. En outre on a $\bar{Q} = \bar{X}/\bar{G}'$.*

**AUTOMORPHISMES
EXTÉRIEURS DU GROUPE DE
BURNSIDE**

Soit H un groupe de type fini. On note H^n le sous-groupe de H engendré par les puissances n -ièmes de tous ses éléments. On appelle *groupe de Burnside sur H d'exposant n* le quotient H/H^n . Si H est le groupe libre de rang r , alors H/H^n est le *groupe de Burnside libre de rang r et d'exposant n* , noté $\mathbf{B}_r(n)$. On s'intéresse ici au groupe des automorphismes extérieurs de H/H^n . Le théorème principal de ce chapitre est le suivant.

Théorème IV.1. *Soit $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow 1$ une suite exacte courte de groupes. On suppose que H est de type fini, G hyperbolique, non-élémentaire, sans torsion, et F sans torsion. Il existe un entier n_0 , tel que pour tout entier n impair supérieur à n_0 , l'application naturelle $F \rightarrow \text{Out}(H)$ induit un morphisme injectif $F \hookrightarrow \text{Out}(H/H^n)$.*

La première partie du chapitre est consacrée à la démonstration de ce théorème. Dans les parties qui suivent, on verra comment exploiter ce résultat pour étudier entre autres le groupe des automorphismes extérieurs du groupe de Burnside libre.

IV.1 Un lemme de récurrence

On rappelle que le paramètre $\Delta(G, X)$ (cf. Définition I.4.11) mesure le recouvrement maximal entre les axes de petits éléments de G . Le rayon d'injectivité $r_{inj}(H, X)$ (cf. Définition I.4.9) désigne la plus petite longueur stable d'un élément hyperbolique de H dans X .

Lemme IV.1.1 (Lemme de récurrence). *Il existe des constantes $\delta_1, \Delta_1, l_1, l_2, l_3$ appartenant à \mathbf{R}_+^* , et un entier n_0 ayant les propriétés suivantes. Soit n un entier impair supérieur à n_0 . Soient X un espace géodésique, propre, δ_1 -hyperbolique, simplement connexe et G un groupe d'isométries de X dont l'action est propre et co-compacte. Soit H un sous-groupe normal de G . On appelle R l'ensemble de éléments hyperboliques de H , qui ne sont pas des puissances propres de G et donc la longueur stable est inférieure à l_1 . Soit N le sous-groupe normal de G engendré par $\{h^n, h \in R\}$, \bar{G} le quotient de G par N et \bar{H} l'image de H par la projection canonique $\pi : G \rightarrow \bar{G}$. On fait les hypothèses suivantes.*

(i) *Le groupe G n'est pas élémentaire. Tous les sous-groupes élémentaires de G sont cycliques, infinis ou finis d'ordre divisant n .*

(ii) $\Delta(G, X) \leq \Delta_1$

(iii) $r_{inj}(H, X) \geq \frac{l_2}{\sqrt{n}}$.

(iv) $\chi(G, \mathbf{Q}) + \frac{1}{2} |R/G| > 0$ où $|R/G|$ est le nombre de classes de conjugaisons de R .

Alors, il existe un espace géodésique, propre, δ_1 -hyperbolique, simplement connexe \bar{X} muni d'une action propre, co-compacte, par isométries de \bar{G} . En outre \bar{G}, \bar{H} et \bar{X} satisfont les points (i), (ii) et (iii). La caractéristique d'Euler à coefficients rationnels de \bar{G} , $\chi(\bar{G}, \mathbf{Q})$ est strictement positive. Enfin pour tout $g \in G$, $[\pi(g)]_{\bar{X}}^\infty \leq \frac{l_3}{\sqrt{n}} [g]_X^\infty$.

Remarque : Comme on le verra dans la preuve, les estimations (ii) et (iii) assurent que le quotient $G \rightarrow \bar{G}$ est à petite simplification. Ce lemme donne un contrôle sur $\Delta(\bar{G}, \bar{X})$ et $r_{inj}(\bar{H}, \bar{X})$ du groupe \bar{G} , obtenu en tuant les puissances n -ièmes d'éléments ayant une petite longueur stable. Les points (i) et (iv) imposent entre autres que les groupes G et \bar{G} sont non élémentaires. En particulier le groupe G ne « s'effondre » pas lors du passage au quotient. Ces éléments permettront par la suite d'itérer la construction.

En prenant pour H le groupe G tout entier, on retrouve le lemme 6.2.1 de [22]. T. Delzant et M. Gromov utilisent ce résultat pour montrer que le groupe de Burnside n'est pas de présentation finie. Au contraire du lemme 6.2.1 de [22], notre énoncé permet de se restreindre aux puissances n -ièmes d'éléments pris dans un sous-groupe normal H de G . Il nous servira pour étudier le groupe de Burnside construit sur un sous-groupe normal de G .

Vocabulaire : Soit n un entier impair supérieur à n_0 . Soient G un groupe agissant par isométries sur un espace métrique X et H un sous-groupe normal de G . Si ces objets satisfont les conditions du lemme ci-dessus on dira que (G, H, X) vérifie les hypothèses de petite simplification pour l'exposant n .

Démonstration du lemme de récurrence. Les constantes r_0 , δ_0 , δ_1 et Δ_0 sont celles données par le théorème de toute petite simplification II.3.14. La constante $\kappa = \frac{\pi \operatorname{sh} r_0}{2r_0}$ est définie à la suite de la proposition II.2.12. Soit n un entier impair.

On définit un paramètre de renormalisation $L(n) = \sqrt{\frac{5n\delta_1}{6\kappa\pi \operatorname{sh} r_0}}$. La suite $(L(n))$ est croissante et diverge. Quitte à choisir n_0 assez grand, on peut supposer que,

$$\begin{aligned} \frac{2000\delta_1 e^{350\delta_1} + 300\delta_1}{L(n_0)} &\leq \min \{ \Delta_0, 1000\delta_1 e^{350\delta_1} \} \\ \frac{\delta_1}{L(n_0)} &\leq \delta_0 \\ \frac{5\delta_1}{2\kappa L(n_0)} &\leq \delta_1 \end{aligned}$$

On remarquera que la valeur de n_0 ne dépend que de δ_1 et r_0 . Munit de ces constantes, on pose

$$\Delta_1 = 2000\delta_1 e^{350\delta_1}, \quad l_1 = 10\delta_1, \quad l_2 = \sqrt{\frac{15\pi \operatorname{sh} r_0 \delta_1}{2\kappa}}, \quad \text{et } l_3 = \sqrt{\frac{6\kappa\pi \operatorname{sh} r_0}{5\delta_1}}$$

Soit n un entier impair, supérieur à n_0 . On se place sous les hypothèses du lemme. On considère alors l'action de G sur l'espace renormalisé $\frac{1}{L(n)}X$ qui est δ_0 -hyperbolique. On note R_0 le quotient de R par la relation d'équivalence qui identifie un élément et son inverse. Pour tout $h \in R$, on appelle Y_h le cylindre de $\{h^-, h^+\}$. On s'intéresse à la famille de rotations $\mathcal{F} = (Y_h, \langle h^n \rangle)_{h \in R_0}$. Soient h_1 et h_2 deux éléments de R ayant des images distinctes dans R_0 . D'après le corollaire I.4.8, Y_{h_1} et Y_{h_2} sont respectivement contenus dans le $113\delta_0$ voisinage

de A_{h_1} et A_{h_2} . La proposition I.1.12 donne alors

$$\begin{aligned} \text{diam} \left(Y_{h_1}^{+20\delta_0} \cap Y_{h_2}^{+20\delta_0} \right) &\leq \text{diam} \left(A_{h_1}^{+133\delta_0} \cap A_{h_2}^{+133\delta_0} \right) \\ &\leq \text{diam} \left(A_{h_1}^{+50\delta_0} \cap A_{h_2}^{+50\delta_0} \right) + 286\delta_0 \end{aligned}$$

Supposons que h_1 et h_2 engendrent un sous-groupe élémentaire. Celui-ci doit être cyclique. Puisque h_1 et h_2 ne sont pas des puissances propres, ils sont donc soit égaux, soit inverses l'un de l'autre. Contradiction. Par ailleurs les longueurs stables de h_1 et h_2 sont inférieures à $10\delta_0$. Par définition de l'invariant Δ (cf. définition I.4.11), on a donc

$$\text{diam} \left(Y_{h_1}^{+20\delta_0} \cap Y_{h_2}^{+20\delta_0} \right) \leq \Delta \left(G, \frac{1}{L(n)} X \right) + 300\delta_0 \leq \frac{2000\delta_1 e^{350\delta_1} + 300\delta_1}{L(n)}$$

Il en découle que $\Delta(\mathcal{F}) \leq \Delta_0$ (cf. page 56). Par ailleurs, le rayon d'injectivité de H sur $\frac{1}{L(n)}X$ est supérieur à

$$\frac{1}{L(n)} \frac{l_2}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{6\kappa\pi \text{sh } r_0}{5n\delta_1}} \sqrt{\frac{15\pi \text{sh } r_0 \kappa \delta_1}{2\kappa n}} = \frac{3\pi \text{sh } r_0}{n}$$

En particulier, pour tout $h \in R$, $[h^n]^\infty \geq 3\pi \text{sh } r_0$. Finalement la famille de rotations \mathcal{F} satisfait les hypothèses du théorème de toute petite simplification. Par conséquent, il existe un espace géodésique, propre, δ_1 -hyperbolique, simplement connexe \bar{X} équipé d'une action propre, co-compacte, par isométries de \bar{G} .

Point (i) : Tous les éléments de $\{h^n, h \in R\}$ sont des puissance impaires d'un élément de G qui n'est pas une puissance propre. Le lemme II.3.24 montre que tous les sous-groupes élémentaires de \bar{G} sont cycliques. Soit \bar{F} est un sous-groupe fini de \bar{G} . Le même lemme assure que \bar{F} est dans l'image par $G \rightarrow \bar{G}$ d'un sous-groupe fini de G ou d'un sous-groupe de la forme $\langle h \rangle$ avec $h \in R$. Or l'ordre d'un sous-groupe fini de G divise n . Il en résulte que l'ordre de \bar{F} divise n .

Point (ii) : Grâce à la proposition II.3.23, on a la majoration suivante

$$\Delta(\bar{G}, \bar{X}) \leq \Delta \left(G, \frac{1}{L(n)} X \right) + 1000\delta_1 e^{350\delta_1}$$

Or par hypothèse $\Delta \left(G, \frac{1}{L(n)} X \right) \leq \frac{2000\delta_1 e^{350\delta_1}}{L(n)} \leq 1000\delta_1 e^{350\delta_1}$. Donc $\Delta(\bar{G}, \bar{X})$ est inférieur à $\Delta_1 = 2000\delta_1 e^{350\delta_1}$.

Point (iii) : Soit g un élément hyperbolique de H . On suppose que g n'appartient à aucun des sous-groupes de G de la forme $\langle h \rangle$, avec $h \in R$. Sa longueur stable dans $\frac{1}{L(n)}X$ est donc supérieure à $\frac{l_1}{L(n)} = \frac{10\delta_1}{L(n)}$. Le théorème II.3.22, assure alors que

$$r_{inj}(\bar{H}, \bar{X}) \geq \min \left\{ \frac{5\delta_1}{2\kappa L(n)}, \delta_1 \right\} = \frac{5\delta_1}{2\kappa L(n)} = \sqrt{\frac{15\pi \text{sh } r_0 \delta_1}{2\kappa n}} = \frac{l_2}{\sqrt{n}}$$

Point (iv) : Puisque les sous-groupes élémentaires de G sont cyclique, un élément hyperbolique de G ne peut être conjugué à son inverse. En particulier $|R_0/G| = \frac{1}{2}|R/G|$. La proposition II.3.25 assure que la caractéristique d'Euler $\chi(G, \mathbf{Q})$ est strictement positive. En particulier, G n'est pas un groupe élémentaire. Pour terminer on notera que l'application $\frac{1}{L(n)}X \rightarrow \bar{X}$ contracte les distances. Il en résulte que pour tout $g \in G$, $[\pi(g)]_{\bar{X}}^\infty \leq \frac{1}{L(n)}[g]_X^\infty = \frac{l_3}{\sqrt{n}}[g]_X^\infty$. \square

IV.2 Plongement d'un groupe dans $\text{Out}(H/H^n)$

Soit $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow 1$ une suite exacte courte de groupes. On considère la fonction $G \rightarrow \text{Aut}(H)$ qui à tout élément de g de G associe, la conjugaison par g . Cette application induit un morphisme de groupes $F \rightarrow \text{Out}(H)$ qui fait commuter le diagramme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Aut}(H) & \longrightarrow & \text{Out}(H) \end{array}$$

Proposition IV.2.1. *Soit $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow 1$ une suite exacte courte de groupes. On suppose que G est hyperbolique, non-élémentaire, sans torsion, et F sans torsion. Il existe un entier n_0 ayant la propriété suivante. Soit n un entier impair supérieur à n_0 . Pour tout entier k , il existe une suite exacte courte de groupes $1 \rightarrow H_k \rightarrow G_k \rightarrow F \rightarrow 1$ telle que.*

- (i) H_{k+1} et G_{k+1} sont des quotients respectifs de H_k et G_k .
- (ii) G_k est un groupe hyperbolique, non-élémentaire. Tout sous-groupe élémentaire de G_k est cyclique, soit infini, soit fini d'ordre divisant n .
- (iii) Le diagramme ci-dessous commute.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & G & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\ 1 & \longrightarrow & H_k & \longrightarrow & G_k & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

En outre les groupes $\varinjlim H_k$ et H/H^n sont isomorphes.

Démonstration. Le preuve se déroule en deux étapes. Dans un premier temps, on construit par récurrence les suites (H_k) et (G_k) satisfaisant les points (i), (ii) et (iii). Ensuite on démontre que $\varinjlim H_k = H/H^n$. Les constantes n_0 , δ_1 , Δ_1 , l_1 , l_2 et l_3 sont celles données par le lemme de récurrence IV.1.1. Quitte à augmenter n_0 , on peut toujours supposer que $\frac{l_3}{\sqrt{n_0}} < 1$. Soit n un entier impair supérieur à n_0 .

Initialisation. On pose $H_0 = H$ et $G_0 = G$. On se donne un espace propre, géodésique, simplement-connexe et hyperbolique X sur lequel le groupe G agit par isométries de manière propre et co-compacte. On peut choisir par exemple le polyèdre de Rips $P_d(G)$ où d est un réel suffisamment grand (cf. [19, Chap. 5]). Quitte à renormaliser X on peut supposer que

- (i) X est δ_1 -hyperbolique,
- (ii) $\Delta(G, X) \leq \Delta_1$,
- (iii) le nombre de classes de conjugaison de l'ensemble $\{g \in H/[g]^\infty \leq l_1\}$ est strictement supérieur à $-2\chi(G, \mathbf{Q})$.

Puisque G est un groupe sans torsion, H a un rayon d'injectivité positif (cf. [21]). Aussi, quitte à remplacer n_0 par un entier plus grand on peut toujours supposer que $r_{inj}(H, X) \geq \frac{l_2}{\sqrt{n_0}} \geq \frac{l_2}{\sqrt{n}}$. Finalement (G, H, X) satisfait les hypothèses de petite simplification pour l'exposant n .

Hérédité. Soit k un entier. Soit $1 \rightarrow H_k \rightarrow G_k \rightarrow F \rightarrow 1$ une suite exacte courte de groupes, et X_k un espace métrique. On suppose que (G_k, H_k, X_k) satisfait les hypothèses de petite simplification pour l'exposant n . On considère alors l'ensemble R_k , composé des éléments hyperboliques de H_k , qui ne sont pas une puissance propre de G_k et dont la longueur stable est inférieure à l_1 . On introduit les objets suivants :

- N_k est le sous-groupe normal de G_k engendré par $\{h^n, h \in R_k\}$,
- G_{k+1} est le quotient de G_k par N_k ,
- H_{k+1} est l'image de H_k par la projection canonique $\pi_k : G_k \rightarrow G_{k+1}$.

Puisque R_k est une partie de H_k , N_k est un sous-groupe normal de H_k . Il en résulte que H_{k+1} est isomorphe à H_k/N_k . En appliquant le lemme IV.1.1, on construit un espace X_{k+1} muni d'une action par isométries de G_{k+1} de telle sorte que $(G_{k+1}, H_{k+1}, X_{k+1})$ satisfait les hypothèses de petite simplification pour l'exposant n . En particulier G_{k+1} est un groupe hyperbolique, non-élémentaire. Tous ses sous-groupes élémentaires sont cyclique infinis, ou finis, d'ordre divisant n . En outre, pour tout $g \in G_k$, on a $[\pi_k(g)]_{X_{k+1}}^\infty \leq \frac{l_3}{\sqrt{n}} [g]_{X_k}^\infty$.

Lemme IV.2.2. *L'application $G_k \rightarrow F$ induit un morphisme de groupes de G_{k+1} dans F . En outre le diagramme ci-dessous commute et ses lignes sont des suites exactes courtes.*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 1 & \longrightarrow & H_k & \longrightarrow & G_k & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \pi_k & & \parallel & & \\
 1 & \longrightarrow & H_{k+1} & \longrightarrow & G_{k+1} & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 1
 \end{array}$$

Démonstration. Par construction, N_k est un sous-groupe normal de H_k , noyau de l'application $G_k \rightarrow F$. Par conséquent, $G_k \rightarrow F$ induit un morphisme de groupes $G_{k+1} \rightarrow F$ qui fait commuter le diagramme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc}
 G_k & & \\
 \downarrow \pi_k & \searrow & \\
 & & F \\
 G_{k+1} & \nearrow &
 \end{array}$$

Puisque π_k est surjective, H_{k+1} - l'image de H_k par π_k - est exactement le noyau de $G_{k+1} \rightarrow F$. La deuxième ligne du diagramme est donc aussi une suite exacte courte. \square

Le dernier point à démontrer est $\varinjlim H_k = H/H^n$. Dans ce but, on introduit deux applications : $\beta : H \rightarrow H/H^n$ et $\lambda : H \rightarrow \varinjlim H_k$. Pour simplifier les preuves, quelque soit h appartenant à H on notera encore h , son image dans H_k , $\varinjlim H_k$ ou H/H^n .

Lemme IV.2.3. *L'application $\beta : H \rightarrow H/H^n$ induit un morphisme de groupes $\beta_\infty : \varinjlim H_k \rightarrow H/H^n$ tel que $\beta_\infty \circ \lambda = \beta$.*

Démonstration. On construit par récurrence une suite de morphismes de groupes $\beta_k : H_k \rightarrow H/H^n$ tels que pour tout entier k , $\beta_{k+1} \circ \pi_k = \beta_k$. Pour cela, on choisit $\beta_0 = \beta$. Soit k un entier. On suppose qu'on a déjà construit β_k . Tout élément du groupe H/H^n a un ordre fini divisant n . Aussi N_k est contenu dans le noyau de β_k . Or H_{k+1} est le quotient de H_k par N_k . Par conséquent β_k induit une application $\beta_{k+1} : H_{k+1} \rightarrow H/H^n$ telle que $\beta_{k+1} \circ \pi_k = \beta_k$. Par définition de la limite directe $\varinjlim H_k$, la suite d'applications (β_k) définit un morphisme $\beta_\infty : \varinjlim H_k \rightarrow H/H^n$ tel que $\beta_\infty \circ \lambda = \beta$. \square

Lemme IV.2.4. *L'application $\lambda : H \rightarrow \varinjlim H_k$ induit un morphisme de groupes $\lambda_\infty : H/H^n \rightarrow \varinjlim H_k$ telle que $\lambda_\infty \circ \beta = \lambda$.*

Démonstration. Soit $h \in H \setminus \{1\}$. On sait que pour tout entier k ,

$$[h]_{X_k}^\infty \leq \left(\frac{l_3}{\sqrt{n}}\right)^k [h]_X^\infty \leq \left(\frac{l_3}{\sqrt{n_0}}\right)^k [h]_X^\infty$$

Or, on a choisit n_0 de telle sorte que $\frac{l_3}{\sqrt{n_0}} < 1$. Par conséquent, il existe un entier k tel que $[h]_{X_k}^\infty < \frac{l_2}{\sqrt{n}}$. Par ailleurs G_k est un groupe hyperbolique, dont tous les sous-groupes élémentaires sont cycliques. Par conséquent, il existe un élément r de G_k qui n'est pas une puissance propre et un entier non nul m tel que $h = r^m$ dans G_k (cf. [19, Chap. 10, Prop. 7.1]). Puisque h appartient à H_k , l'image de r^m dans F est triviale. Toutefois F est un groupe sans torsion. Il en résulte que r est aussi dans H_k . En outre sa longueur stable est strictement inférieure à $\frac{l_2}{\sqrt{n}}$. Or, par construction, $r_{inj}(H_k, X_k) \geq \frac{l_2}{\sqrt{n}}$. Par conséquent, l'ordre de r est fini et divise n . Aussi l'image de h^n dans H_k est triviale. Finalement H^n est contenue dans le noyau de λ . Il en résulte que $\lambda : H \rightarrow \varinjlim H_k$ induit un morphisme $\lambda_\infty : H/H^n \rightarrow \varinjlim H_k$ telle que $\lambda_\infty \circ \beta = \lambda$. \square

Lemme IV.2.5. *Les groupes H/H^n et $\varinjlim H_k$ sont isomorphes.*

Démonstration. En utilisant les deux derniers lemmes on a $\beta_\infty \circ \lambda_\infty \circ \beta = \beta_\infty \circ \lambda = \beta$. Puisque β est surjective, on en déduit que $\beta_\infty \circ \lambda_\infty = \text{id}$. De même, on montre que $\lambda_\infty \circ \beta_\infty = \text{id}$. Finalement β_∞ est un isomorphisme dont la réciproque est λ_∞ . \square

Ce dernier lemme termine la preuve de la proposition IV.2.1. \square

Démonstration du théorème IV.1. On note S une partie génératrice finie de H . La constante n_0 est donnée par la proposition IV.2.1. Soit n un entier impair supérieur à n_0 . En appliquant cette même proposition, on construit pour tout entier k , une suite exacte courte de groupes $1 \rightarrow H_k \rightarrow G_k \rightarrow F \rightarrow 1$ ayant les propriétés suivantes.

- (i) G_k est un groupe hyperbolique, non-élémentaire. Tout sous-groupe élémentaire de G_k est cyclique.
- (ii) Le diagramme ci-dessous commute.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & G & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\ 1 & \longrightarrow & H_k & \longrightarrow & G_k & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

En outre, les groupes $\varinjlim H_k$ et H/H^n sont isomorphes. Soit f un élément de F . On note g une pré-image de f par la flèche $G \rightarrow F$. L'image de f par l'application $F \rightarrow \text{Out}(H)$ est l'automorphisme extérieur induit par le morphisme suivant.

$$\varphi : \begin{array}{ccc} H & \rightarrow & H \subset G \\ h & \rightarrow & ghg^{-1} \end{array}$$

Supposons que φ induise un automorphisme intérieur de $H/H^n = \varinjlim H_k$. Il existe alors $l \in H$ tel que pour tout $h \in H$, $\varphi(h)$ et lhl^{-1} s'identifient dans $\varinjlim H_k$. En particulier, puisque S est fini, il existe un entier k tel que pour tout $s \in S$, $\varphi(s)$ et lsl^{-1} ont même image dans H_k . Or S est une partie génératrice de H_k . Ainsi l'automorphisme de H_k induit par φ est exactement la conjugaison par l . En utilisant le diagramme commutatif ci-dessus on en déduit que pour tout $h \in H_k$, ghg^{-1} et lgl^{-1} s'identifient dans G_k . Ainsi $l^{-1}g$ commute avec tous les éléments de H_k . Toutefois, H_k est un sous-groupe non élémentaire (cf. lemme I.4.10). En particulier il existe un élément $h \in H$ d'ordre infini dans H_k . Les éléments $l^{-1}g$ et h engendrent un groupe élémentaire de G_k . Par construction celui-ci est nécessairement cyclique. Donc il existe $(p, q) \in \mathbf{Z}^* \times \mathbf{Z}$ tels que $(l^{-1}g)^p = h^q$. En utilisant à nouveau le diagramme commutatif précédent, on pousse cette égalité dans F . On obtient alors $f^p = 1$. Puisque F est sans torsion, f est trivial. \square

IV.3 Exemples d'applications

Dans cette partie on propose deux types d'applications du théorème IV.1. Les premiers proviennent de la géométrie des surfaces, les seconds concernent le groupe de Burnside libre.

IV.3.a Groupe de Burnside construit sur un groupe de surface

Dans ce paragraphe, S désigne une surface compact orientée de genre supérieur à 2 et Σ son groupe fondamental.

Théorème IV.3.1 (Hyperbolisation de Thurston cf. [62] ou [51]). *Soit f un homéomorphisme pseudo-Anosov de S . Le tore de suspension de f sur S est une variété hyperbolique de dimension trois.*

Corollaire IV.3.2. *Soit f un homéomorphisme pseudo-Anosov de S . Il existe un entier n_0 , tel que pour tout entier impair n supérieur à n_0 , f induit un automorphisme extérieur de Σ/Σ^n d'ordre infini.*

Démonstration. L'homeomorphisme f induit un automorphisme de Σ noté φ . On note M_f le tore de suspension de f sur S . Son groupe fondamental est le produit semi-direct $\Gamma_f = \Sigma \rtimes_{\varphi} \mathbf{Z}$. Puisque M_f est une variété compacte, Γ_f est un groupe hyperbolique. Il est en outre non-élémentaire, sans torsion. Par ailleurs, on a une suite exacte courte de groupes $1 \rightarrow \Sigma \rightarrow \Gamma_f \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow 1$. L'application $\mathbf{Z} \rightarrow \text{Out}(\Sigma)$ est celle qui à n associe φ^n . Le théorème IV.1 assure alors qu'il existe n_0 tel que pour tout entier impair n supérieur à n_0 , le morphisme $\mathbf{Z} \rightarrow \text{Out}(\Sigma)$ induit une injection $\mathbf{Z} \hookrightarrow \text{Out}(\Sigma/\Sigma^n)$. En particulier l'automorphisme extérieur de Σ/Σ^n induit par φ est d'ordre infini. \square

Soient f_1 et f_2 deux homéomorphismes de S . On note respectivement M_1 et M_2 les plus grands sous-groupes virtuellement abéliens du groupe modulaire de S contenant les images de f_1 et f_2 . Les homéomorphismes f_1 et f_2 sont dits *indépendants* si l'intersection $M_1 \cap M_2$ est triviale (cf. [11]).

Théorème IV.3.3 (cf. [42]). *Soient f_1 et f_2 deux homéomorphismes de S . On suppose que f_1 et f_2 sont pseudo-Anosov et indépendantes. Il existe un entier m tel que f_1^m et f_2^m engendrent un groupe libre et tel que le produit semi-direct $\Sigma \rtimes \mathbf{F}_2$ défini par f_1^m et f_2^m soit hyperbolique.*

Corollaire IV.3.4. *Il existe un entier n_0 , tel que pour tout entier n impair, supérieur à n_0 , le groupe $\text{Out}(\Sigma/\Sigma^n)$ contient un sous-groupe isomorphe à \mathbf{F}_2 .*

Démonstration. Le théorème de Mosher IV.3.3 permet de construire une suite exacte courte $1 \rightarrow \Sigma \rightarrow \Sigma \rtimes \mathbf{F}_2 \rightarrow \mathbf{F}_2 \rightarrow 1$, où $\Sigma \rtimes \mathbf{F}_2$ est un groupe hyperbolique, non-élémentaire, sans torsion. Le théorème IV.1 donne alors le résultat. \square

IV.3.b Groupe de Burnside libre

Définition IV.3.5. *Soit G un groupe hyperbolique muni de la métrique du mot, relative à un système de générateurs. Un automorphisme φ de G est dit hyperbolique, s'il existe un entier m et $\lambda > 1$ tels que pour tout $g \in G$*

$$\lambda |g| \leq \max \{ |\varphi^m(g)|, |\varphi^{-m}(g)| \}$$

Un homéomorphisme pseudo-Anosov sur une surface compacte orientée S définit un automorphisme hyperbolique de son groupe fondamental $\pi_1(S)$. Étant donné un automorphisme du groupe libre \mathbf{F}_r , noté φ , on regarde les orbites sous l'action de φ des classes de conjugaison de \mathbf{F}_r . Si φ n'a pas d'orbite périodique non triviale alors φ est hyperbolique (cf. [10]). On notera que $\text{Aut}(\mathbf{F}_2)$ ne contient pas d'automorphisme hyperbolique. En effet $\text{Out}(\mathbf{F}_2)$ s'identifie au groupe modulaire du tore privé d'un point T^* . Tout élément de $\text{Out}(\mathbf{F}_2)$ doit donc préserver la classe de conjugaison correspondant à la composante de bord de T^* .

Théorème IV.3.6 (cf. [7]). *Soit G un groupe hyperbolique et φ un automorphisme de G . Si φ est hyperbolique alors le produit semi-direct $G \rtimes_{\varphi} \mathbf{Z}$ est un groupe hyperbolique.*

Si G est le groupe fondamental d'une surface compacte, on retrouve le théorème IV.3.1 déjà cité. Si G est un groupe libre, la même preuve que celle du corollaire IV.3.2 permet d'obtenir le résultat suivant.

Théorème IV.3.7. *Soit $r \geq 3$. Soit φ un automorphisme hyperbolique du groupe libre \mathbf{F}_r . Il existe un entier n_0 tel que pour tout entier impair n supérieur à n_0 , φ induit un automorphisme extérieur d'ordre infini du groupe de Burnside libre $\mathbf{B}_r(n)$.*

Le théorème suivant, démontré par M. Bestvina, M. Feighn et M. Handel, fournit un analogue du théorème IV.3.3 pour le groupe des automorphismes du groupe libre.

Théorème IV.3.8 (cf. [10]). *Soit $r \geq 3$. Soient φ_1 et φ_2 deux automorphismes hyperboliques de \mathbf{F}_r . On suppose que φ_1 et φ_2 induisent des automorphismes extérieurs de \mathbf{F}_r n'ayant pas de puissance commune. Il existe un entier m tel que φ_1^m et φ_2^m génèrent un groupe libre et tel que le produit semi-direct $\mathbf{F}_r \rtimes \mathbf{F}_2$ défini par φ_1^m et φ_2^m est un groupe hyperbolique.*

Comme dans le cas des groupes de surface, on en déduit le résultat suivant.

Théorème IV.3.9. *Soit $r \geq 3$. Il existe un entier n_0 , tel que pour tout entier n impair supérieur à n_0 , $\text{Out}(\mathbf{B}_r(n))$ contient un sous-groupe isomorphe à \mathbf{F}_2 .*

IV.4 Vers une caractérisation de la croissance des automorphismes du groupe libre

On s'intéresse ici à la question suivante : quels sont les éléments de $\text{Out}(\mathbf{F}_r)$ dont l'image par l'application $\text{Out}(\mathbf{F}_r) \rightarrow \text{Out}(\mathbf{B}_r(n))$ est d'ordre infini ? On a vu que les automorphismes hyperboliques du groupe libre satisfaisaient cette condition. Toutefois, ce ne sont pas les seuls. Considérons par exemple l'automorphisme de $\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}(a, b)$ défini ci-dessous.

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbf{F}_2 &\rightarrow \mathbf{F}_2 \\ a &\rightarrow ab \\ b &\rightarrow a \end{aligned}$$

Cet automorphisme n'est pas hyperbolique. En effet φ^2 laisse invariant le commutateur $[a^{-1}, b^{-1}] = a^{-1}b^{-1}ab$. Pourtant on a le résultat suivant.

Proposition IV.4.1. *Il existe un entier n_0 , tel que pour tout entier n impair supérieur à n_0 , φ induit un automorphisme extérieur d'ordre infini de $\mathbf{B}_2(n)$.*

Démonstration. Observons la suite des itérés de a .

$$\begin{aligned} \varphi^0(a) &= a & \varphi^4(a) &= abaababa \\ \varphi^1(a) &= ab & \varphi^5(a) &= abaababaabaab \\ \varphi^2(a) &= aba & \varphi^6(a) &= abaababaabaababaababa \\ \varphi^3(a) &= abaab & & \dots \end{aligned}$$

Cette suite converge vers un mot infini à droite

$$\varphi^\infty(a) = abaababaabaababaababaababaabaab \dots$$

ayant la propriété suivante. Quelque soit u un mot en a et b , u^4 n'est pas un sous mot de $\varphi^\infty(a)$ (cf [43]). Soit n un entier impair supérieur à 10 000. Pour montrer que le groupe de Burnside d'exposant suffisamment grand est infini, P. S. Novikov et S. I. Adian utilisent le fait suivant (cf. [1, IV. 2.16.] ou [2, Statement 1]) : si m est un mot réduit en a et b qui ne contient pas de puissance quatrième, alors m définit un élément non trivial du groupe de Burnside libre $\mathbf{B}_2(n)$. En particulier, $(\varphi^p(a))$ donne lieu à une suite d'éléments deux à deux distincts dans $\mathbf{B}_2(n)$. L'application φ induit donc un automorphisme d'ordre infini de $\mathbf{B}_2(n)$. Puisque tous les éléments de $\mathbf{B}_2(n)$ sont d'ordre fini, φ induit un élément d'ordre infini de $\text{Out}(\mathbf{B}_2(n))$. \square

À l'inverse les automorphismes du groupe libre à croissance polynômiale induisent toujours un automorphisme d'ordre fini du groupe de Burnside. On développe ici une idée suggérée par G. Levitt. Si x est la classe de conjugaison d'un élément de \mathbf{F}_r , sa longueur $|x|$ est la longueur d'un mot cycliquement réduit qui représente x . Étant donné un automorphisme extérieur Φ du groupe libre, on peut regarder l'action de Φ sur les classes des conjugaison de \mathbf{F}_r .

Proposition IV.4.2 (Croissance d'un automorphisme). *Soit Φ un automorphisme extérieur du groupe libre \mathbf{F}_r . L'une des deux assertions suivantes est vraie.*

- (i) *Pour toute classe de conjugaison x de \mathbf{F}_r , la suite $(|\Phi^n(x)|)$ croît polynomialement.*
- (ii) *Il existe une classe de conjugaison x de \mathbf{F}_r tel que $(|\Phi^n(x)|)$ croît exponentiellement.*

Dans le premier cas, on dit que Φ est à croissance polynomiale. Dans le second cas, Φ est à croissance exponentielle. Par exemple, l'automorphisme φ défini précédemment croît exponentiellement.

Proposition IV.4.3 (cf. [39]). *Soit Φ un automorphisme extérieur de \mathbf{F}_r à croissance polynômiale. Quitte à remplacer Φ par une de ses puissances, il satisfait l'un des deux énoncés ci-dessous*

- (i) *Il existe $\varphi \in \text{Aut}(\mathbf{F}_r)$ dont l'image dans $\text{Out}(\mathbf{F}_r)$ est Φ et qui laisse invariants les facteurs F_1 et F_2 d'une décomposition en produit libre de $\mathbf{F}_r = F_1 * F_2$.*
- (ii) *Il existe une décomposition en produit libre de $\mathbf{F}_r = F_1 * \langle t \rangle$, un automorphisme $\varphi \in \text{Aut}(\mathbf{F}_r)$ dont l'image dans $\text{Out}(\mathbf{F}_r)$ est Φ , et un élément $f \in F_1$ satisfaisant les conditions suivantes : F_1 est invariant sous l'action de φ et $\varphi(t) = tf$.*

Proposition IV.4.4. *Soit $r \geq 1$. Soit Φ un automorphisme extérieur de \mathbf{F}_r . Si Φ est à croissance polynomiale, alors, pour tout entier non nul n , Φ induit un automorphisme extérieur d'ordre fini de $\mathbf{B}_r(n)$.*

Démonstration. On démontre ce résultat par récurrence sur le rang. Le groupe des automorphismes extérieurs de \mathbf{F}_1 est trivial. Le résultat est donc vrai pour les groupes de rang 1. Soit $r \geq 1$. On suppose maintenant que la proposition est vraie pour les groupes libres de rang inférieur à r . Soit Φ un automorphisme extérieur de \mathbf{F}_{r+1} à croissance polynômiale. Soit n un entier non nul. Suivant la proposition précédente, on distingue deux cas.

Cas 1. Il existe une décomposition en produit libre $\mathbf{F}_{r+1} = F_1 * F_2$ et un automorphisme φ de \mathbf{F}_{r+1} représentant Φ^k , tel que F_1 et F_2 sont invariants par φ . On note alors φ_i la restriction de φ à F_i . Par récurrence il existe p_i tel que $\varphi_i^{p_i}$ induise un automorphisme intérieur de F_i/F_i^n . Il en découle que $\varphi_i^{n p_i} = 1$ dans $\text{Aut}(F_i/F_i^n)$. Par conséquent $\varphi^{n^2 p_1 p_2} = 1$ dans $\text{Aut}(\mathbf{B}_{r+1}(n))$. Donc Φ induit un automorphisme de $\mathbf{B}_{r+1}(n)$ d'ordre fini.

Cas 2. Il existe une décomposition en produit libre $\mathbf{F}_{r+1} = F_1 * \langle t \rangle$, un automorphisme φ de \mathbf{F}_{r+1} représentant Φ^k et un élément f de F_1 tels que F_1 soit invariant par φ et $\varphi(t) = tf$. On note alors φ_1 la restriction de φ à F_1 . Par récurrence, il existe p_1 tel que $\varphi_1^{p_1}$ induise un automorphisme intérieur de F_1/F_1^n . En particulier $\varphi_1^{n p_1} = 1$ dans $\text{Aut}(F_1/F_1^n)$. Par ailleurs pour tout entier q on a $\varphi^q(t) = t f \varphi_1(f) \dots \varphi_1^{q-1}(f)$. En particulier l'identité ci-dessous est satisfaite dans $\mathbf{B}_{r+1}(n)$

$$\varphi^{n^2 p_1}(t) = t \left[f \varphi_1(f) \dots \varphi_1^{n p_1 - 1}(f) \right]^n = t$$

Il en découle que $\varphi^{n^2 p_1} = 1$ dans $\text{Aut}(\mathbf{B}_{r+1}(n))$. Donc Φ induit un automorphisme de $\mathbf{B}_{r+1}(n)$ d'ordre fini. \square

IV.5 Sous-groupe abéliens de $\text{Out}(\mathbf{B}_r(n))$

La construction présentée ci-dessous explique comment l'application naturelle $\text{Out}(\mathbf{F}_r) \rightarrow \text{Out}(\mathbf{B}_r(n))$ permet de transporter certains sous-groupes abéliens de $\text{Out}(\mathbf{F}_r)$.

Soient G_1 et G_2 deux groupes sans torsion. On considère le produit libre $G = G_1 * G_2$. On sait en particulier que G est un groupe sans torsion (cf. [59, Chap. I, Cor. 2])

Lemme IV.5.1. *Soit $g \in G$. S'il existe un entier non nul k tel que $g^k \in G_1$, alors $g \in G_1$.*

Démonstration. Puisque G est sans torsion, on peut supposer que g^k est non trivial. On utilise alors la théorie des groupes agissant sur un arbre (cf. [59]). Il existe un arbre simplicial T , et une action simpliciale sans inversion de G sur T ayant les propriétés suivantes. Les stabilisateurs des sommets sont les conjugués de G_1 et G_2 . Les stabilisateurs des arrêtes de T sont triviaux. Si $g^k \in G_1$, alors g^k fixe un unique point x de T , dont le stabilisateur est G_1 . En particulier g est un élément elliptique de G . Aussi, g fixe un point x' de T (cf. [19, Chap. 9, Lemm. 3.1]) Puisque g^k fixe un unique point de T , x et x' sont nécessairement confondus. Par conséquent g appartient au stabilisateur de x qui est G_1 . \square

Lemme IV.5.2. *Soit n un entier. L'injection canonique $G_1 \hookrightarrow G$ induit un morphisme injectif $G_1/G_1^n \hookrightarrow G/G^n$.*

Démonstration. D'après le lemme précédent (IV.5.1) on a $G_1 \cap G^n = G_1^n$. Par conséquent l'injection canonique $G_1 \hookrightarrow G$ induit un morphisme de groupes injectif $G_1/G_1^n \hookrightarrow G/G^n$. \square

Proposition IV.5.3. *Soit n un entier. Soit φ un automorphisme de G qui laisse invariant le facteur G_1 . On note alors φ_1 la restriction de φ à G_1 . Si φ_1 induit un automorphisme extérieur d'ordre infini de G_1/G_1^n , alors l'image de φ dans $\text{Out}(G/G^n)$ est aussi d'ordre infini.*

Démonstration. On note respectivement $\bar{\varphi}$ et $\bar{\varphi}_1$ les automorphismes de G/G^n et G_1/G_1^n induits par φ et φ_1 . On démontre cette proposition par contraposée. Supposons que $\bar{\varphi}$ soit d'ordre fini dans $\text{Out}(G/G^n)$. Il existe donc un entier non nul k tel que $\bar{\varphi}^k$ soit un automorphisme intérieur de G/G^n . Or, tous les éléments de G/G^n sont d'ordre fini divisant n . Il en découle que $\bar{\varphi}^{nk} = \text{id}$. Par construction, le diagramme ci-dessous commute. Ses flèches horizontales sont injectives (cf. lemme IV.5.2)

$$\begin{array}{ccc} G_1/G_1^n & \hookrightarrow & G/G^n \\ \bar{\varphi}_1 \downarrow & & \downarrow \bar{\varphi} \\ G_1/G_1^n & \hookrightarrow & G/G^n \end{array}$$

Il en résulte que $\bar{\varphi}_1^{nk} = \text{id}$. Ainsi $\bar{\varphi}_1$ est d'ordre fini dans $\text{Aut}(G_1/G_1^n)$ et donc a fortiori dans $\text{Out}(G_1/G_1^n)$ \square

Théorème IV.5.4. *Soit $r \geq 2$. Il existe un entier n_0 tel que pour tout entier n impair, supérieur à n_0 , $\text{Out}(\mathbf{B}_{2r}(n))$ contient un sous-groupe isomorphe à \mathbf{Z}^r .*

Démonstration. On considère l'automorphisme φ défini dans la section IV.4. D'après la proposition IV.4.1, il existe un entier n_0 tel que pour tout entier n impair, supérieur à n_0 , φ induit un automorphisme extérieur d'ordre infini de $\mathbf{B}_2(n)$. On se donne un tel entier n .

On considère \mathbf{F}_{2r} comme le produit libre de r copies de \mathbf{F}_2 : $\mathbf{F}_{2r} = F_1 * \dots * F_r$. Pour tout $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, on définit un automorphisme φ_i de \mathbf{F}_{2r} de la manière suivante

- (i) la restriction de φ_i à F_i est l'automorphisme φ .
- (ii) pour tout $j \neq i$, la restriction de φ_i à F_j est l'identité.

On note respectivement $\bar{\varphi}_i$ et $\bar{\varphi}$ les automorphismes de $\mathbf{B}_{2r}(n)$ et $\mathbf{B}_2(n)$ induits par φ_i et φ . Par construction les $\bar{\varphi}_i$ engendrent un groupe abélien.

Supposons maintenant que les $\bar{\varphi}_i$ sont liés par une relation dans $\text{Out}(\mathbf{B}_{2r}(n))$. Il existe alors k_1, \dots, k_r des entiers, non tous nuls, tels que l'automorphisme $\bar{\varphi}_1^{k_1} \dots \bar{\varphi}_r^{k_r}$ soit intérieur. Puisque tous les éléments $\mathbf{B}_{2r}(n)$ sont d'ordre fini, il en résulte que $\bar{\varphi}_1^{k_1} \dots \bar{\varphi}_r^{k_r}$ est un automorphisme d'ordre fini. Il existe $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ tel que $k_i \neq 0$. L'automorphisme $\bar{\varphi}_1^{k_1} \dots \bar{\varphi}_r^{k_r}$ de \mathbf{F}_{2r} laisse le facteur F_i invariant.

En outre la restriction de $\varphi_1^{k_1} \dots \varphi_r^{k_r}$ à $F_i \equiv \mathbf{F}_2$ est exactement φ^{k_i} . La proposition IV.5.3 assure que φ^{k_i} un est automorphisme d'ordre fini de $\text{Out}(\mathbf{B}_2(n))$. Contradiction. Finalement les φ_i engendrent un groupe abélien libre de rang r . \square

STABILITÉ DES QUASI-GÉODÉSIQUES LOCALES

A.1 Une preuve asymptotique

Lemme A.1.1. *Soient (X_n, x_n^0) une suite d'espaces métriques pointés et ω un ultra-filtre non principal. Pour tout entier n , on se donne une partie Y_n de X_n . Soit $x = \lim_{\omega} x_n$ un point de $\lim_{\omega} X_n$. L'espace limite $Y = \lim_{\omega} Y_n$ est non vide si et seulement si la suite $(d(x_n, Y_n))$ est ω -eb. Dans ce cas, la distance de x à Y est $\lim_{\omega} d(x_n, Y_n)$.*

Démonstration. Si Y est non vide, alors il contient un point $y = \lim_{\omega} y_n$. On a alors $d(x_n, Y_n) \leq |x_n - y_n|$ ω -ps. En particulier la suite $(d(x_n, Y_n))$ est ω -eb. Par ailleurs en passant à la limite on a $\lim_{\omega} d(x_n, Y_n) \leq |x - y|$. Cette inégalité reste vraie pour tout point de Y , donc $\lim_{\omega} d(x_n, Y_n) \leq d(x, Y)$.

Supposons maintenant que la suite $(d(x_n, Y_n))$ est ω -eb. Il existe un réel M tel que $d(x_n, Y_n) \leq M$ ω -ps. Soit $\eta > 0$. Pour tout entier n , il existe un point $y_n \in Y_n$ tel que $|x_n - y_n| \leq d(x_n, Y_n) + \eta$. Ainsi la suite $|x_n - y_n|$ est ω -eb. La suite (y_n) définit donc un point $y = \lim_{\omega} y_n$ contenu dans Y . L'espace Y est donc non vide. En outre en passant à la limite on a $d(x, Y) \leq |x - y| \leq \lim_{\omega} d(x_n, Y_n) + \eta$. Cette dernière égalité est vraie pour tout $\eta > 0$, donc $d(x, Y) \leq \lim_{\omega} d(x_n, Y_n)$. \square

Lemme A.1.2. *Soit X_n une suite d'espace métriques et ω un ultra-filtre non principal. Soient $k > 1$, $L > 0$. Soit (l_n) une suite de réels admettant une limite suivant ω notée l . Pour tout entier n on se donne un intervalle I_n de \mathbf{R} contenant 0 et une (k, l_n, L) -quasi-géodésique locale $f_n : I_n \rightarrow X_n$.*

On note I l'intervalle de \mathbf{R} caractérisé de la manière suivante : pour tout $t \in \mathbf{R}$, t appartient à I si t appartient à I_n , ω -ps. L'application f ci-dessous est bien définie et est une (k, l, L) -quasi-géodésique.

$$\begin{aligned} f : I &\rightarrow \lim_{\omega} (X_n, f_n(0)) \\ t &\rightarrow \lim_{\omega} f_n(t) \end{aligned}$$

Démonstration. Soit t un point de I . On note $t_0 < \dots < t_k$ une subdivision de l'intervalle entre 0 et t telle que pour tout $j \in \llbracket 0; k-1 \rrbracket$, $|t_{j+1} - t_j| \leq L$. Puisque f_n est une (k, l_n, L) -quasi-géodésique locale, l'inégalité suivante est alors vraie ω -ps.

$$|f_n(0) - f_n(t)| \leq \sum_{j=0}^{k-1} |f_n(t_{j+1}) - f_n(t_j)| \leq kL + kl_n$$

En particulier $(|f_n(0) - f_n(t)|)$ est ω -eb. Donc $f(t)$ est bien définie.

Considérons maintenant s et t dans I tels que $|s - t| \leq L$. L'inégalité ci-dessous est vérifiée ω -ps.

$$k^{-1} |s - t| - l_n \leq |f_n(s) - f_n(t)| \leq k |s - t| + l_n$$

En passant à la limite, on obtient,

$$k^{-1} |s - t| - l \leq |f(s) - f(t)| \leq k |s - t| + l$$

Donc f est une (k, l, L) -quasi-géodésique. \square

Théorème A.1.3. *Soient $k \geq 1$, $L > 0$ et $D > 0$ trois réels. Il existe $\delta > 0$ et $l > 0$ satisfaisant la propriété suivante. Soit X un espace géodésique, δ -hyperbolique. Toute (k, l, L) -quasi-géodésique locale entre deux points de X , reste dans le D -voisinage de n'importe quelle géodésique ayant les mêmes extrémités.*

Démonstration. On suppose que la proposition est fautive. Pour tout entier n , on peut donc trouver

- (i) un espace géodésique, δ_n -hyperbolique X_n avec $\delta_n = o(1)$.
- (ii) une (k, l_n, L) -quasi-géodésique $f_n : [a_n ; b_n] \rightarrow X_n$ avec $l_n = o(1)$.
- (iii) une géodésique $\sigma_n : [\alpha_n ; \beta_n] \rightarrow X_n$ ayant les mêmes extrémités que f_n dans X_n

tels que $D_n = \sup_{t \in [a_n ; b_n]} d(f_n(t), \sigma_n) > D$. On fixe ω un ultra-filtre non principal.

Lemme A.1.4. *Quitte à restreindre f_n , on peut supposer que $D_n \leq D + 3l_n + 8\delta_n$ ω -ps. En particulier $\lim_\omega D_n = D$.*

Démonstration. Puisque (l_n) converge vers 0, on a $\frac{2l_n}{k} \leq L$ ω -ps. Soit n un entier, tel que $\frac{2l_n}{k} \leq L$. On distingue deux cas. Si $b_n - a_n \leq \frac{2l_n}{k}$, alors pour tout $t \in [a_n ; b_n]$, on a

$$d(f_n(t), \sigma_n) \leq |f_n(t) - f_n(0)| \leq kt + l_n \leq 3l_n$$

Par conséquent $D_n \leq 3l_n$.

Supposons maintenant que $b_n - a_n > \frac{2l_n}{k}$. Si la restriction de f_n à l'intervalle $[a_n + \frac{l_n}{k} ; b_n - \frac{l_n}{k}]$ n'est pas contenu dans le D -voisinage de la géodésique $[f_n(a_n + \frac{l_n}{k}), f_n(b_n - \frac{l_n}{k})]$ alors on remplace f_n par sa restriction à $[a_n + \frac{l_n}{k} ; b_n - \frac{l_n}{k}]$. Dans le cas contraire, on utilise le fait que la distance dans X_n est $8\delta_n$ -quasi-convexe (cf. [19, Chap 10, Cor. 5.3]). Par conséquent pour tout $t \in [a_n ; b_n]$, on a

$$\begin{aligned} d(f_n(t), \sigma_n) &\leq d\left(f(t), \left[f_n\left(a_n + \frac{l_n}{k}\right), f_n\left(b_n - \frac{l_n}{k}\right)\right]\right) + 2l_n + 8\delta_n \\ &\leq D + 2l_n + 8\delta_n \end{aligned}$$

En particulier $D_n \leq D + 2l_n + 8\delta_n$. □

Quitte à reparamétriser f_n et σ_n , on peut toujours supposer que $D_n - \delta_n \leq |f_n(0) - \sigma_n(0)| \leq D_n$.

On note X l'espace limite $X = \lim_\omega (X_n, f_n(0))$. Puisque δ_n converge vers 0, X est un arbre réel (cf. proposition I.2.4). On considère alors les deux applications ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} f : I & \rightarrow & X \\ t & \rightarrow & \lim_\omega f_n(t) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \sigma : J & \rightarrow & X \\ t & \rightarrow & \lim_\omega \sigma_n(t) \end{array}$$

D'après le lemme A.1.2 f est une $(k, 0, L)$ -quasi-géodésique locale et σ est une géodésique. En particulier f est continue et localement injective. Puisque X est un arbre réel, f est donc injective.

Lemme A.1.5. *Pour tout $t \in I$, $d(f(t), \sigma) \leq D$ avec égalité si $t = 0$.*

Démonstration. Soit $t \in I$. La majoration $d(f(t), \sigma) \leq D$ est une application directe du lemme A.1.1. Si $t = 0$, on a $d(f_n(0), \sigma_n) \geq D_n - \delta_n$. En passant à la limite on a alors $d(f(0), \sigma) = \lim_{\omega} d(f_n(0), \sigma_n) \geq D$. \square

Fin de la preuve du théorème. Trois cas peuvent alors se produire (suivant que l'intervalle I est bornée ou non)

- (i) f et σ sont deux chemins injectifs, ayant les mêmes extrémités.
- (ii) f et σ sont deux rayons injectifs, ayant même origine et à distance de Hausdorff bornée.
- (iii) f et σ sont deux chemins bi-infinis injectifs, à distance de Hausdorff bornée.

Puisque X est un arbre réel, f et σ doivent être nécessairement confondus. Ce qui contredit le fait que $d(f(0), \sigma) = D > 0$. \square

A.2 Conséquences

A.2.a Quasi-géodésiques infinies

Corollaire A.2.1. *Soient $k \geq 1$, $L > 0$ et $D > 0$ trois réels. Il existe des constantes $l > 0$ et $\delta > 0$ satisfaisant la propriété suivante. Soit X un espace géodésique, δ -hyperbolique. Soit f une (k, l, L) -quasi-géodésique locale entre deux points de X et σ une géodésique ayant les mêmes extrémités. La distance de Hausdorff entre f et σ est inférieure à D .*

Démonstration. D'après la proposition A.1.3, il existe $\delta > 0$ et $l > 0$ qui ne dépendent que de k , L et D ayant la propriété suivante. Soit f une (k, l, L) -quasi-géodésique locale entre deux points d'un espace δ -hyperbolique X . Soit σ une géodésique de X ayant les mêmes extrémités que f . Le chemin f est contenu dans le $\frac{D}{2}$ -voisinage de σ . Comme σ est une géodésique, σ est contenu dans le D -voisinage de f (cf. [19, Chap. 3, Lemm. 1.11]). \square

Ce résultat se généralise pour des quasi-géodésiques infinies (cf. [19, Chap. 3, §3]).

Proposition A.2.2. *Soient $k \geq 1$, $L > 0$ et $D > 0$ trois réels. Il existe des constantes $l > 0$ et $\delta > 0$ satisfaisant la propriété suivante. Soit X un espace géodésique, propre, δ -hyperbolique. La distance de Hausdorff entre une (k, l, L) -quasi-géodésique locale reliant deux points de $X \cup \partial X$ et toute géodésique ayant les mêmes extrémités est inférieure à D .*

A.2.b Passage du local au global

Proposition A.2.3. *Soit $k > 0$, $k' > k$ et $L > 0$ trois réels. Il existe δ et l deux constantes strictement positives ayant la propriété suivante. Toute (k, l, L) -quasi-géodésique locale d'un espace géodésique, δ -hyperbolique est une (k', l) -quasi-géodésique.*

Démonstration. On propose à nouveau une preuve par l'absurde utilisant des limites suivant un ultra-filtre. Supposons que la proposition soit fautive. Pour tout entier n , on peut donc trouver

- (i) un espace géodésique, δ_n -hyperbolique X_n avec $\delta_n = o(1)$.
- (ii) une (k, l_n, L) -quasi-géodésique $f_n : I_n \rightarrow X_n$ avec $l_n = o(1)$.

tels que f_n n'est pas une (k', l_n) -quasi-géodésique. On fixe ω un ultra-filtre non principal.

Pour tout entier n , on note alors L_n le plus grand réel tel que f_n soit une (k', l_n, L_n) -quasi-géodésique locale. Puisque f_n est une (k, l_n, L) -quasi-géodésique locale, $L_n \geq L$. L'application f_n n'étant pas une (k', l_n) -quasi-géodésique, quitte à reparamétriser f_n , on peut toujours supposer qu'il existe $t_n \in [L_n; 2L_n]$ tel que $|f_n(0) - f_n(t_n)| \geq k't_n$ ou $k'|f_n(0) - f_n(t_n)| \geq t_n$. Après extraction d'une sous-suite, on supposera que pour tout n , $|f_n(0) - f_n(t_n)| \geq k't_n$. On considère alors l'espace limite $X = \lim_{\omega} \left(\frac{1}{L_n} X_n, f_n(0) \right)$, où $\frac{1}{L_n} X_n$ est obtenu en renormalisant X_n . L'espace $\frac{1}{L_n} X_n$ est $\frac{\delta_n}{L_n}$ -hyperbolique. Par conséquent X est un arbre réel (cf. proposition I.2.4). On introduit maintenant l'application suivante.

$$\begin{aligned} f : I &\rightarrow X \\ t &\rightarrow \lim_{\omega} f_n(tL_n) \end{aligned}$$

D'après le lemme A.1.2, f est une $(k, 0, 1)$ -quasi-géodésique locale de X . Puisque X est un arbre réel, f est donc une $(k, 0)$ -quasi-géodésique. Toutefois, par construction, pour tout entier n on a $|f_n(0) - f_n(t_n)| \geq k't_n$. Par conséquent il existe $t \in [1; 2]$ tel que $kt \geq |f(0) - f(t)| \geq k't$. Contradiction. \square

A.2.c Transport de l'hyperbolicité

Proposition A.2.4. *Soit $k \geq 1$ et $\delta > 0$ deux réels. Il existe deux constantes $l > 0$ et $\delta' > 0$, ayant la propriété suivante. Soit $f : X \rightarrow X'$ une (k, l) -quasi-isométrie entre deux espaces géodésiques. Si X' est δ' -hyperbolique alors X est δ -hyperbolique.*

Démonstration. On fixe un réel D strictement positif et inférieur à $\frac{k\delta}{10}$. D'après le théorème A.1.3, il existe deux constantes $\delta' > 0$ et $l > 0$, qui ne dépendent que de D , k et L , ayant la propriété suivante. La distance de Hausdorff entre une (k, l) -quasi-géodésique de X' et une géodésique ayant les mêmes extrémités n'excède pas D . Quitte à diminuer δ' et l on peut toujours supposer que $k^{-1}(D + 4\delta') - l < \frac{\delta}{10}$. Soient x, y et z trois points de X . Puisque f est une (k, l) -quasi-isométrie, l'image par f de la géodésique $[x, y]$ est une (k, l) -quasi-géodésique. En particulier, la distance de Hausdorff entre $[f(x), f(y)]$ et $f([x, y])$ est inférieure à D . De même pour les géodésiques $[y, z]$ et $[z, x]$. Or les triangles géodésiques de X' sont $4\delta'$ -fins. Par conséquent tout point de $f([x, z])$ est situé à une distance au plus $4\delta' + 2D$ d'un point de $f([x, y]) \cup f([y, z])$. Donc la distance entre un point de $[x, z]$ et $[x, y] \cup [y, z]$ est inférieure à $k^{-1}(D + 4\delta') - l \leq \frac{\delta}{10}$. Les triangles géodésiques de X sont donc $\frac{\delta}{10}$ -fins. D'après la proposition I.1.1, X est δ hyperbolique. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. I. Adian. *The Burnside problem and identities in groups*, volume 95 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas]*. Springer-Verlag, Berlin, 1979. Translated from the Russian by John Lennox and James Wiegold.
- [2] S. I. Adian and I. G. Lysenok. The method of classification of periodic words and the Burnside problem. In *Proceedings of the International Conference on Algebra, Part 1 (Novosibirsk, 1989)*, volume 131 of *Contemp. Math.*, pages 13–28, Providence, RI, 1992. Amer. Math. Soc.
- [3] G. N. Arzhantseva and T. Delzant. Examples of random groups. preprint, <http://www.unige.ch/math/folks/arjantse/Abs/random.pdf>, november 2008.
- [4] N. Bergeron. Premier nombre de Betti et spectre du laplacien de certaines variétés hyperboliques. *Enseign. Math. (2)*, 46(1-2) :109–137, 2000.
- [5] N. Bergeron. Lefschetz properties for arithmetic real and complex hyperbolic manifolds. *Int. Math. Res. Not.*, (20) :1089–1122, 2003.
- [6] N. Bergeron. Propriétés de Lefschetz automorphes pour les groupes unitaires et orthogonaux. *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)*, (106) :vi+125, 2006.
- [7] M. Bestvina and M. Feighn. A combination theorem for negatively curved groups. *J. Differential Geom.*, 35(1) :85–101, 1992.
- [8] M. Bestvina and M. Feighn. Addendum and correction to : “A combination theorem for negatively curved groups” [J. Differential Geom. **35** (1992), no. 1, 85–101 ; MR1152226 (93d :53053)]. *J. Differential Geom.*, 43(4) :783–788, 1996.
- [9] M. Bestvina, M. Feighn, and M. Handel. Erratum to : “Laminations, trees, and irreducible automorphisms of free groups” [Geom. Funct. Anal. **7** (1997), no. 2, 215–244 ; MR1445386 (98c :20045)]. *Geom. Funct. Anal.*, 7(6) :1143, 1997.
- [10] M. Bestvina, M. Feighn, and M. Handel. Laminations, trees, and irreducible automorphisms of free groups. *Geom. Funct. Anal.*, 7(2) :215–244, 1997.
- [11] J. S. Birman, A. Lubotzky, and J. McCarthy. Abelian and solvable subgroups of the mapping class groups. *Duke Math. J.*, 50(4) :1107–1120, 1983.
- [12] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Topologie générale. Chapitres 1 à 4*. Hermann, Paris, 1971.
- [13] M. R. Bridson and A. Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

- [14] P. Brinkmann. Hyperbolic automorphisms of free groups. *Geom. Funct. Anal.*, 10(5) :1071–1089, 2000.
- [15] W. Burnside. On an unsettled question in the theory of discontinuous groups. *Quart.J.Math.*, 33 :230–238, 1902.
- [16] C. Champetier. Cocroissance des groupes à petite simplification. *Bull. London Math. Soc.*, 25(5) :438–444, 1993.
- [17] C. Champetier. Petite simplification dans les groupes hyperboliques. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 3(2) :161–221, 1994.
- [18] E. A. Cherepanov. Free semigroup in the group of automorphisms of the free Burnside group. *Comm. Algebra*, 33(2) :539–547, 2005.
- [19] M. Coornaert, T. Delzant, and A. Papadopoulos. *Géométrie et théorie des groupes*, volume 1441 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1990. Les groupes hyperboliques de Gromov. [Gromov hyperbolic groups], With an English summary.
- [20] R. Coulon. Asphericity and small cancellation theory for rotation family of groups. (arxiv :0907.4577). preprint, 2009.
- [21] T. Delzant. Sous-groupes distingués et quotients des groupes hyperboliques. *Duke Math. J.*, 83(3) :661–682, 1996.
- [22] T. Delzant and M. Gromov. Courbure mésoscopique et théorie de la toute petite simplification. *J. Topol.*, 1(4) :804–836, 2008.
- [23] C. Druţu. Cônes asymptotiques et invariants de quasi-isométrie pour des espaces métriques hyperboliques. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 51(1) :81–97, 2001.
- [24] C. Druţu. Quasi-isometry invariants and asymptotic cones. *Internat. J. Algebra Comput.*, 12(1-2) :99–135, 2002. International Conference on Geometric and Combinatorial Methods in Group Theory and Semigroup Theory (Lincoln, NE, 2000).
- [25] C. Druţu and M. Sapir. Tree-graded spaces and asymptotic cones of groups. *Topology*, 44(5) :959–1058, 2005. With an appendix by Denis Osin and Sapir.
- [26] É. Ghys and P. de la Harpe. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990. Papers from the Swiss Seminar on Hyperbolic Groups held in Bern, 1988.
- [27] M. Greendlinger. Dehn's algorithm for the word problem. *Comm. Pure Appl. Math.*, 13 :67–83, 1960.
- [28] M. Greendlinger. On Dehn's algorithms for the conjugacy and word problems, with applications. *Comm. Pure Appl. Math.*, 13 :641–677, 1960.
- [29] M. Greendlinger. An analogue of a theorem of Magnus. *Arch. Math.*, 12 :94–96, 1961.
- [30] R. I. Grigorčuk. On Burnside's problem on periodic groups. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 14(1) :53–54, 1980.
- [31] M. Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, volume 8 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 75–263. Springer, New York, 1987.

- [32] M. Gromov. Mesoscopic curvature and hyperbolicity. In *Global differential geometry : the mathematical legacy of Alfred Gray (Bilbao, 2000)*, volume 288 of *Contemp. Math.*, pages 58–69. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [33] M. Gromov. $\text{CAT}(\kappa)$ -spaces : construction and concentration. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 280(Geom. i Topol. 7) :100–140, 299–300, 2001.
- [34] M. Gromov. Random walk in random groups. *Geom. Funct. Anal.*, 13(1) :73–146, 2003.
- [35] M. Hall, Jr. Solution of the Burnside problem of exponent 6. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 43 :751–753, 1957.
- [36] S. V. Ivanov. The free Burnside groups of sufficiently large exponents. *Internat. J. Algebra Comput.*, 4(1-2) :ii+308, 1994.
- [37] S. V. Ivanov and A. Y. Ol’shanskii. Hyperbolic groups and their quotients of bounded exponents. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348(6) :2091–2138, 1996.
- [38] F. Levi and B. van der Waerden. über eine besondere klasse von gruppen. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 9(1) :154–158, Dec 1933.
- [39] G. Levitt. Counting growth types of automorphisms of free groups. *Geom. Funct. Anal.*, 19(4) :1119–1146, 2009.
- [40] I. G. Lysenok. Infinite Burnside groups of even period. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 60(3) :3–224, 1996.
- [41] A. Malcev. On isomorphic matrix representations of infinite groups. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, 8 (50) :405–422, 1940.
- [42] L. Mosher. A hyperbolic-by-hyperbolic hyperbolic group. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 125(12) :3447–3455, 1997.
- [43] B. Mossé. Puissances de mots et reconnaissabilité des points fixes d’une substitution. *Theoret. Comput. Sci.*, 99(2) :327–334, 1992.
- [44] P. S. Novikov and S. I. Adjan. Infinite periodic groups. I. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 32 :212–244, 1968.
- [45] P. S. Novikov and S. I. Adjan. Infinite periodic groups. II. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 32 :251–524, 1968.
- [46] P. S. Novikov and S. I. Adjan. Infinite periodic groups. III. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 32 :709–731, 1968.
- [47] Y. Ollivier. On a small cancellation theorem of Gromov. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 13(1) :75–89, 2006.
- [48] A. Y. Ol’shanskii. The Novikov-Adyan theorem. *Mat. Sb. (N.S.)*, 118(160)(2) :203–235, 287, 1982.
- [49] A. Y. Ol’shanskii. *Geometry of defining relations in groups*, volume 70 of *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991. Translated from the 1989 Russian original by Yu. A. Bakhturin.
- [50] A. Y. Ol’shanskii. Periodic quotient groups of hyperbolic groups. *Mat. Sb.*, 182(4) :543–567, 1991.

- [51] J.-P. Otal. Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3. *Astérisque*, (235) :x+159, 1996.
- [52] C. D. Papakyriakopoulos. Attaching 2-dimensional cells to a complex. *Ann. of Math. (2)*, 78 :205–222, 1963.
- [53] P. Papasoglu. On the asymptotic cone of groups satisfying a quadratic isoperimetric inequality. *J. Differential Geom.*, 44(4) :789–806, 1996.
- [54] F. Paulin. Outer automorphisms of hyperbolic groups and small actions on \mathbf{R} -trees. In *Arboreal group theory (Berkeley, CA, 1988)*, volume 19 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 331–343. Springer, New York, 1991.
- [55] J.-P. Petit. *Le géométricon*. Les aventures d'Anselme Lanturlu. Belin, 1980.
- [56] J.-P. Petit. *Le topologicon*. Les aventures d'Anselme Lanturlu. Belin, 1985.
- [57] E. Rips and Y. Segev. Torsion-free group without unique product property. *J. Algebra*, 108(1) :116–126, 1987.
- [58] I. N. Sanov. Solution of Burnside's problem for exponent 4. *Leningrad State Univ. Annals [Uchenye Zapiski] Math. Ser.*, 10 :166–170, 1940.
- [59] J.-P. Serre. *Arbres, amalgames, SL_2* . Société Mathématique de France, Paris, 1977. Avec un sommaire anglais, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass, Astérisque, No. 46.
- [60] Stendhal. *Vie de Rossini*. Folio classique, 1823.
- [61] V. A. Tartakovskii. Solution of the word problem for groups with a k -reduced basis for $k > 6$. *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 13 :483–494, 1949.
- [62] W. P. Thurston. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 19(2) :417–431, 1988.
- [63] J. H. C. Whitehead. On adding relations to homotopy groups. *Ann. of Math. (2)*, 42 :409–428, 1941.
- [64] J. H. C. Whitehead. Note on a previous paper entitled "On adding relations to homotopy groups.". *Ann. of Math. (2)*, 47 :806–810, 1946.
- [65] D. T. Wise. Cubulating small cancellation groups. *Geom. Funct. Anal.*, 14(1) :150–214, 2004.

Orthographe originale des noms translittérés

- ▶ Adian, S. I. : Адян, С. И.
- ▶ Arzhantseva, G. N. : Аржанцева, Г. Н.
- ▶ Cherepanov, E. A. : Черепанов, Е.А.
- ▶ Berestovskii, V. N. : Берестовкий, В. Н.
- ▶ Grigorčuk, R. I. : Григорчук, Р. И.
- ▶ Gromov, M. L. : Громов, М. Л.
- ▶ Ivanov, S. V. : Иванов, С. В.
- ▶ Lysenok, I. G. : Лысенок, И. Г.
- ▶ Maclev, A. I. : Мальцев, А. И.
- ▶ Novikov, P. S. : Новиков, П. С.
- ▶ Parakyriakopoulos, C. D. : Παπακυριακόπουλος, Χ. Δ.
- ▶ Ol'shanskiĭ, A. Y. : Ольшанский, А. Ю.
- ▶ Kazhdan, A. D. : Каждан, А. Д.
- ▶ Rips, E. : ריפס, ע
- ▶ Sapir, M. V. : Сапир, М. В.
- ▶ Sanov, I. N. : Санов, И. Н.
- ▶ Tartakovskii, V. A. : Тартаковский, В. А.