



**HAL**  
open science

# L'EFFICIENCE BRUITÉE. UNE ANALYSE NON LINÉAIRE DU MARCHÉ FRANÇAIS DES ACTIONS

Herve Alexandre

► **To cite this version:**

Herve Alexandre. L'EFFICIENCE BRUITÉE. UNE ANALYSE NON LINÉAIRE DU MARCHÉ FRANÇAIS DES ACTIONS. Sciences de l'Homme et Société. Université de Bourgogne, 1994. Français. NNT: . tel-00490273

**HAL Id: tel-00490273**

**<https://theses.hal.science/tel-00490273>**

Submitted on 8 Jun 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE  
FACULTÉ DE SCIENCES ÉCONOMIQUE ET DE GESTION

**L'EFFICIENCE BRUITÉE.  
UNE ANALYSE NON LINÉAIRE  
DU MARCHÉ FRANÇAIS DES ACTIONS**

*Thèse présentée par*

**Hervé ALEXANDRE**

*en vue de l'obtention du*

Doctorat ès Science de Gestion  
Mention Finance

5 Janvier 1994

Jury :

M. Gérard CHARREAUX	Professeur à l'Université de Bourgogne, Directeur de thèse
M. Patrice FONTAINE	Professeur à l'Université de Grenoble II, Pré-rapporteur
M. Georges GALLAIS-HAMONNO	Professeur à l'Université d'Orléans, Pré-rapporteur
Mlle Marie-Claude PICHERY	Professeur à l'Université de Bourgogne



UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE  
FACULTÉ DE SCIENCES ÉCONOMIQUE ET DE GESTION

**L'EFFICIENCE BRUITÉE.  
UNE ANALYSE NON LINÉAIRE  
DU MARCHÉ FRANÇAIS DES ACTIONS**

*Thèse présentée par*

**Hervé ALEXANDRE**

*en vue de l'obtention du*

Doctorat ès Science de Gestion  
Mention Finance

5 Janvier 1994

Jury :

M. Gérard CHARREAUX	Professeur à l'Université de Bourgogne, Directeur de thèse
M. Patrice FONTAINE	Professeur à l'Université de Grenoble II, Pré-rapporteur
M. Georges GALLAIS-HAMONNO	Professeur à l'Université d'Orléans, Pré-rapporteur
Mlle Marie-Claude PICHERY	Professeur à l'Université de Bourgogne



*“La faculté n'entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans les thèses : ces opinions doivent être considérées comme propres à leurs auteurs.”*

## Remerciements

Je tiens à remercier vivement le Professeur Gérard CHARREAUX pour son enthousiasme et pour avoir suivi et souvent précédé mon travail par la recherche constante de nouvelles idées, de nouveaux articles.

Toute ma reconnaissance va au Professeur Marie-Claude PICHERY qui a suivi avec une attention toute particulière la partie économétrique de cette thèse.

Je souhaite également témoigner ma reconnaissance au Professeur Herman VAN DIJK (Université de Rotterdam) dont les commentaires et les conseils m'ont été très précieux lors de l'utilisation des réseaux de neurones.

Enfin, je remercie François LONGIN et Cem ERTUR qui m'ont permis de mieux profiter de l'intérêt de leurs travaux au cours de discussions et d'échanges d'idées, ainsi que mes collègues doctorants pour l'aide qu'ils n'ont pas hésité à m'apporter.

à Marie-Pierre



## RÉSUMÉ

L'introduction récente, dans la littérature financière, d'agents aux comportements imparfaits permet une représentation des marchés d'actions plus proche de la réalité. Nous pensons surtout au concept de bruiteurs qui insiste sur l'impuissance de certains agents rationnels à posséder et utiliser toute l'information disponible et pertinente. Cette thèse consiste en une description de l'impact de ces agents sur les marchés financiers et la recherche d'outils adéquats pour mesurer les conséquences de leur présence sur l'efficacité des marchés.

La première vision théorique des marchés financiers composés de froids calculateurs parfaitement rationnels et homogènes laisse la place à l'intégration d'agents aux anticipations hétérogènes. Les changements intervenant dans les hypothèses de comportements se sont accompagnés d'une modification du modèle testable dérivé (marche aléatoire, martingale). Mais tout cela s'effectue au sein de ce que nous appelons le paradigme probabiliste de l'investisseur rationnel même si l'introduction de modèles non linéaires (ARCH ...) permet une avancée significative.

Le chaos déterministe offre une autre voie de développement de la non linéarité qui permet en plus de se libérer de la contrainte inhérente à l'emploi de modèles probabilistes. Nous montrons qu'une révision des tests d'efficacité découle de ces techniques du chaos avec notamment l'emploi du test BDS que nous interprétons ici comme un test de l'efficacité "classique" des marchés contre une hypothèse que nous appelons Efficacité Bruitée.

L'Efficacité Bruitée définit un marché où coexistent agents rationnels parfaitement informés et bruiteurs. L'étude empirique menée sur le marché français des actions semble confirmer le bien fondé de notre concept. Elle met à jour les insuffisances des tests et modèles qui reposent sur la linéarité pour décrire la grande diversité des investisseurs présents sur les marchés financiers.

Mots-clés : Efficacité des marchés financiers, bruiteurs, test BDS, chaos déterministe, processus ARCH.

## SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION.</b> .....	<b>1</b>
<b>PREMIÈRE PARTIE : LE PARADIGME PROBABILISTE DE L'INVESTISSEUR RATIONNEL</b> .....	<b>9</b>
<b>CHAPITRE 1 : DE L'HYPOTHESE DE RATIONALITE AU MODELE TESTABLE.</b> .....	<b>12</b>
<b>Section 1. Comportements et mécanismes.</b> .....	<b>12</b>
I. Les comportements.....	17
1. <i>L'investisseur rationnel.</i> .....	17
2. <i>L'investisseur irrationnel.</i> .....	18
II. Les mécanismes d'évolution des prix.....	22
1. <i>Analogie avec un marché de concurrence pure et parfaite.</i> .....	23
2. <i>L'impossibilité du profit par arbitrage.</i> .....	26
3. <i>Anomalies et irrationalité collective.</i> .....	27
4. <i>Et pourtant, on parle toujours d'efficience.</i> .....	32
<b>Section 2. L'analyse statistique des marchés.</b> .....	<b>34</b>
I. Une question de loi.....	35
1. <i>Le modèle de OSBORNE (1964).</i> .....	35
2. <i>Abandon de la normalité.</i> .....	36
<u>A. Lois stables : description et caractéristiques.</u> .....	37
<u>B. Tests sur la nature de la loi stable.</u> .....	38
II. Un modèle pour les cours boursiers.....	42
1. <i>La marche aléatoire.</i> .....	42
2. <i>La martingale.</i> .....	44
3. <i>La sous-martingale.</i> .....	45
4. <i>Test de la marche aléatoire.</i> .....	46
5. <i>Test de la martingale.</i> .....	49
III Les modèles de variance.....	51
1. <i>Modèles de HSU (1977).</i> .....	51
2. <i>Variances markoviennes.</i> .....	52
<b>Section 2. L'analyse statistique des marchés.</b> .....	<b>54</b>

I. Une question de loi.....	55
1. <i>Le modèle de OSBORNE (1964)</i> .....	55
2. <i>Abandon de la normalité</i> .....	57
A. <u>Lois stables : description et caractéristiques</u> .....	57
B. <u>Tests sur la nature de la loi stable</u> .....	59
II. Un modèle pour les cours boursiers.....	62
1. <i>La marche aléatoire</i> .....	62
2. <i>La martingale</i> .....	64
3. <i>La sous-martingale</i> .....	66
4. <i>Test de la marche aléatoire</i> .....	66
5. <i>Test de la martingale</i> .....	69
III Les modèles de variance.....	71
1. <i>Modèles de HSU (1977)</i> .....	72
2. <i>Variances markoviennes</i> .....	73
<b>CHAPITRE 2 : BRUIT, SPECULATION ET SPECIALISTES.</b> .....	75
<b>Section 1. Une grande diversité de comportements.</b> .....	76
I. L'arbitragiste.....	76
II. Le spéculateur.....	79
III. Le bruiteur.....	83
1. <i>Les règles de décisions</i> .....	84
2. <i>Le mimétisme</i> .....	85
3. <i>Les bruiteurs</i> .....	86
<b>Section 2. Un modèle de comportement avec bruit.</b> .....	92
I. Hypothèses du modèle.....	92
II. Détermination du prix d'équilibre.....	93
III. Différence de rentabilité selon la stratégie.....	97
IV. Les bruiteurs et l'évolution des prix.....	100
V. Ouvertures statistiques possibles du modèle de DSSW.....	100
VI. Quelle stratégie adopter en présence de bruiteurs ?.....	102
<b>CHAPITRE 3 : DE NOUVELLES VOIES STATISTIQUES DE</b>	
<b>MODELISATION DES MARCHES FINANCIERS.</b> .....	106
<b>Section 1. Dépendance de long terme.</b> .....	107
I. La persistance et la statistique R/S.....	108
1. <i>Exposant de HURST</i> .....	108
2. <i>H et le rejet de l'efficience</i> .....	111
3. <i>Révision de l'analyse R/S</i> .....	112

4. <i>Des cycles non périodiques</i> .....	115
II. Le retour en espérance. ....	117
1. <i>Modèle de retour en espérance</i> .....	117
2. <i>Etude empirique et implications</i> . ....	120
<b>Section 2. L'hétéroscédasticité conditionnelle.</b> .....	122
I. Le modèle ARCH. ....	124
II. Modèles dérivés et applications. ....	127
III. La théorie des valeurs extrêmes. ....	131
1. <i>Distribution des valeurs extrêmes</i> .....	132
2. <i>Distribution de la série</i> .....	133
<b>CONCLUSION DE LA PREMIÈRE PARTIE</b> .....	137
<b>CHAPITRE 4 : REPRESENTATION DETERMINISTE DU MONDE</b> .....	143
<b>Section 1. Le déterminisme représenté par des probabilités</b> .....	143
I. Déterminismes et notion de cause. ....	144
1. <i>Le causalisme leibnizien</i> . ....	144
2. <i>Déterminisme et libre arbitre</i> . ....	146
3. <i>Le déterminisme méthodologique</i> . ....	146
II. Le désordre : probabilités ou déterminisme .....	148
1. <i>Les probabilités comme description du déterminisme</i> .....	148
2. <i>Le désordre ordonné</i> . ....	150
<b>Section 2. Le chaos déterministe.</b> .....	152
I. Analyse géométrique des systèmes.....	154
1. <i>Définitions</i> .....	154
2. <i>Différentes voies vers le chaos</i> .....	157
II. Chaos déterministe et attracteurs étranges. ....	160
1. <i>Définition du chaos</i> . ....	160
2. <i>Les attracteurs apériodiques</i> . ....	163
<b>Section 3. Mesure de la dimension des attracteurs.</b> .....	164
I. Les objets fractals. ....	164
II Mesure de la dimension fractale. ....	171
1. <i>Dimension d'un objet fractal</i> .....	171
2. <i>Reconstruction de l'attracteur</i> . ....	174
<b>Conclusion.</b> .....	175
<b>CHAPITRE 5 : UN NOUVEAU TEST DE LA MARCHE</b>	
<b>ALEATOIRE.</b> .....	177
<b>Section 1. Test BDS (BROCK, DECHERT et SCHEINKMAN, 1987).</b> .....	178

I. Le test.....	179
II. Conditions d'utilisations.....	180
<b>Section 2. Non stationnarité et racine unitaire.....</b>	<b>183</b>
I. Deux types de non stationnarité et premiers tests.....	184
1. Non stationnarité déterministe.....	185
2. Non stationnarité stochastique.....	185
3. Test de LJUNG-BOX (1978).....	187
II. Tests de DICKEY et FULLER (1979).....	188
1. Elaboration du test.....	188
2. Les différents modèles et les tests associés.....	189
3. Stratégies de tests.....	190
<b>Section 3. Processus stochastiques non linéaires.....</b>	<b>191</b>
I. Différents modèles.....	192
III. Test du moment de troisième ordre.....	193
<b>Section 4. Le chaos déterministe.....</b>	<b>195</b>
I. Le plus grand exposant de LYAPUNOV.....	196
II. Algorithme de WOLF.....	199
III. Les réseaux de neurones.....	201
<b>Conclusion.....</b>	<b>206</b>
<b>CHAPITRE 6 : MODELES DE MARCHÉ FINANCIER AVEC</b>	
<b>BRUIT.....</b>	<b>208</b>
<b>Section 1. Les bruiteurs comme cause de persistance.....</b>	<b>210</b>
I. Les difficultés d'une représentation non stationnaire de l'innovation.....	210
II. La persistance fractale.....	213
1. Les mouvements browniens fractals.....	213
2. Le coefficient de HURST comme signal des bruiteurs.....	214
<b>Section 2. La non linéarité stochastique pour décrire le bruit.....</b>	<b>216</b>
I. D'où provient l'effet GARCH ?.....	217
II. Modélisation des bruiteurs et processus ARCH.....	221
1. Hypothèses sur le comportement des investisseurs.....	221
2. Stratégie des investisseurs.....	223
3. Evolution du prix et de l'innovation.....	224
<b>Section 3. Les bruiteurs génèrent du chaos.....</b>	<b>226</b>
I. Différents investisseurs.....	227
1. Les fundamentalistes (investisseurs $\alpha$ ).....	228
2. Les bruiteurs (investisseurs $\beta$ ).....	229

3. Les contrepartistes.....	231
II. Evolution du prix des actifs.....	232
<b>Conclusion.</b> .....	238
<b>CHAPITRE 7 : TESTS CLASSIQUES ET NOUVELLE STRATEGIE DU TEST D'EFFICIENCE.</b> .....	247
<b>Section 1. Des tests classiques d'efficience...</b> .....	248
<b>Section 2. ... au test du Bruiteur Déecté Statistiquement.</b> .....	251
<b>CHAPITRE 8 : DESCRIPTION DES BRUITEURS.</b> .....	256
<b>Section 1. Test de persistance.</b> .....	256
I. Tests de racine unitaire.....	256
II. Test de dépendance de long terme. ....	258
<b>Section 2. Test de non linéarité stochastique.</b> .....	259
I. La modélisation ARCH.....	261
II. La modélisation GARCH.....	265
<b>Section 3. Le bruit est-il chaotique ?</b> .....	267
I. Dimension et reconstruction de l'attracteur. ....	268
II. Exposant de LYAPUNOV. ....	270
1. <i>Algorithme de WOLF.</i> .....	271
2. <i>Méthode des réseaux de neurones.</i> .....	271
<b>Conclusion.</b> .....	274
<b>CHAPITRE 9 : L'EFFICIENCE BRUITEE A LA BOURSE DE PARIS.</b> .....	276
<b>Section 1. Les bruiteurs et le marché boursier français.</b> .....	276
I. Que nous disent les résultats ?.....	277
II. La non linéarité comme signal offert par les bruiteurs. ....	280
<b>Section 2. Une nouvelle vision de l'efficience.</b> .....	282
I. L'Efficience Bruitée.....	283
II. L'apport du test BDS.....	285
<b>Conclusion.</b> .....	286

## TABLEAUX

Tableau 1.1. Valeurs seuils du test de LO	page 94
Tableau 1.2. Valeurs de H et durée moyenne des cycles sur le marché américain des actions	page 96
Tableau 2.1. Tests de DICKEY et FULLER	page 169
Tableau 3.1. Tests d'autocorrélations linéaires	page 227
Tableaux 3.2.a-3.2.e. Test BDS	page 231
Tableaux 3.3. Tests de racine unitaire	page 235
Tableaux 3.4. Test de LO	page 237
Tableau 3.5. Test de HSIEH	page 239
Tableau 3.6. Kurtosis des rentabilités	page 240
Tableau 3.7. Tests ARCH	page 241
Tableau 3.8. Régressions ARCH	page 242
Tableau 3.9. Régressions GARCH (1,1)	page 243
Tableau 3.10. Dimensions des attracteurs	page 246
Tableau 3.11. Exp de LYAPUNOV (algorithme de WOLF)	page 249
Tableau 3.12. Exposants de LYAPUNOV (algorithme de KAASHOEK et VAN DIJK)	page 251

## GRAPHIQUES

Graphique 2.1.	Corrélogramme de la fonction logistique	page 133
Graphique 2.2.	Avant la bifurcation	page 135
Graphique 2.3.	Après la bifurcation	page 135
Graphique 2.4.	La poussière de CANTOR	page 146
Graphique 2.5.	Le flocon de neige de VON KOCH	page 146
Graphique 2.6.	Attracteur de LORENZ	page 148
Graphique 2.7.	Attracteur de HENON	page 149
Graphique 2.8.	Configuration d'un réseau de neurones	page 181
Graphique 2.9.	Un exemple de prix simulé par le modèle de DAY et HUANG	page 212
Graphique 2.10.	Innovation par le modèle de DAY et HUANG	page 213
Graphique 2.11.	Distribution de l'innovation du processus	page 214
Graphique 2.12.	Attracteur de l'innovation en dimension deux	page 214
Schéma 3.1.	Stratégie de test de l'Efficiencia Bruitee	page 224
Graphique 3.1.	Deux caractéristiques financière et économique des cinq sociétés	page 230
Graphique 3.2.a - 3.2.e.	Corrélogrammes des carrés des rentabilités	page 240
Graphique 3.3.	Dimensions de corrélation	page 247



## ANNEXES

### **Annexes 1. Fractals**

- a. Volutes
- b. Vaguelettes
- c. L'ensemble de MANDELBROT
- d. Le pont

### **Annexes 2. Stratégies de tests de racine unitaire (ERTUR, 1991)**

### **Annexes 3. Principales fonctions de transfert des réseaux de neurones**

### **Annexes 4. Graphiques des rentabilités quotidiennes**

- a. Accor
- b. Carnaud MetalBox
- c. Lafarge Coppée
- d. Peugeot SA
- e. Valéo

### **Annexes 5. Calcul de la dimension de corrélation. $\text{Log}(C(r)) / \text{Log}(r)$**

- a. Accor
- b. Carnaud MetalBox
- c. Lafarge Coppée
- d. Peugeot SA
- e. Valéo

### **Annexes 6. Convergence des algorithmes de calcul de l'exposant de LYAPUNOV**

- a. Accor
- b. Carnaud MetalBox
- c. Lafarge Coppée
- d. Peugeot SA
- e. Valéo

## ***INTRODUCTION***

Chassez l'intrus parmi les mots proposés ci-après :

“spéculateur”, “bon père de famille”, “groupe financier”, “organisme de placement collectif”, “comportement animal”, “chevalier blanc”, “chevalier noir”, “arbitragiste”, “contrepartiste”, “investisseur rationnel”, “gourous”.

Ce petit jeu est malheureusement sans solution car les expressions proposées sont issues d'un même univers qui est celui de la finance, des marchés boursiers. Elles représentent des noms ou surnoms donnés à différents intervenants sur les marchés financiers. Ils ont tous en commun le désir de vouloir réduire l'incertitude entourant l'avenir et surtout l'envie de réaliser des profits justifiant leur présence à la Bourse, de rémunérer le risque qu'ils prennent en investissant sur les marchés financiers.

De ce fait, l'évolution du prix des actifs cotés en Bourse intéresse de nombreuses personnes qui peuvent être classées en deux catégories différentes. Cette distinction s'effectue selon la raison qui les pousse à analyser toute information, quelle soit économique, financière, politique ou statistique.

La première est composée des acteurs mêmes du marché financier qui cherchent à comprendre cette évolution pour l'intégrer dans leurs prévisions afin de réaliser des gains lors de transactions avec les autres acteurs. Le but est généralement d'estimer l'évolution future des cours et ainsi de se placer sur le marché pour en tirer un profit et ce sur la base d'informations passées et présentes. Cette catégorie, très hétérogène, regroupe aussi bien des investisseurs institutionnels que des petits porteurs en passant par toute une gamme d'individus dont les motifs sont la rémunération de leurs placements.

La seconde catégorie regroupe surtout les chercheurs qui tentent de déterminer la manière dont les prix transmettent l'information par l'intermédiaire des investisseurs présents sur le marché. Ils cherchent à élaborer des modèles qui leur permettront de comprendre l'évolution des cours boursiers, et éventuellement de

tester certaines hypothèses. Les investisseurs présents sur le marché ont longtemps été supposés tous rationnels. Ces travaux théoriques (par opposition à la finalité pratique des recherches effectuées par la première catégorie) utilisent tests, modèles et hypothèses de comportement des investisseurs.

Une autre différence entre les “praticiens” et les “théoriciens” des marchés financiers est que la seconde catégorie a longtemps considéré les investisseurs comme homogènes au sens où ils réalisent tous les mêmes anticipations. A l'inverse, les praticiens constatent qu'il est nécessaire, pour qu'un échange existe, que les anticipations des agents divergent les uns par rapport aux autres.

Notre travail va tenir compte de cette différence possible d'anticipations, sans abandonner la rationalité, qui est une hypothèse importante en finance comme en toute science humaine, afin d'apporter un éclairage nouveau sur l'étude formalisée des marchés financiers. Nous pensons que la rationalité des investisseurs n'est plus un concept monolithique, et que seuls de nouveaux outils statistiques et mathématiques vont permettre d'appréhender ces diverses rationalités dont la plus intéressante nous semble être celle présente chez les bruiteurs.

## **Bruiteurs et rationalité**

Le débat concernant les comportements théoriques des investisseurs sur les marchés financiers a longtemps été restreint à l'opposition rationalité “parfaite” et irrationalité (chapitre 1). Il s'agissait notamment de savoir si les sociétés de Bourse analysent correctement les données *fondamentales* concernant une entreprise et son environnement socio-économique, financier et politique. La rationalité selon les “fondamentalistes” était donc la possibilité qu'avait un investisseur de connaître toute l'information nécessaire et de pouvoir prédire alors la variation future du prix de l'action de l'entreprise concernée. Le temps que mettait le prix à atteindre la valeur fondamentale était un indicateur de la rationalité des investisseurs présents sur le marché.

Les techniciens, qu'ils soient théoriciens ou acteurs du marché financier, n'existent que parce qu'ils supposent plus ou moins implicitement que les cours des actifs financiers n'intègrent que très lentement l'information. Ils pensent alors pouvoir en profiter par une analyse, parfois graphique, de l'évolution passée du prix de ces actifs. Leurs méthodes, plus ou moins complexes, sont aujourd'hui encore utilisées sans qu'il ait été apporté la preuve de leur fiabilité.

A l'inverse, les quantitativistes défendent une vision rationaliste des marchés financiers dans laquelle l'information est intégrée immédiatement dans les prix par l'ensemble des acteurs du marché financier. Les agents rationnels qui composent ce marché, forment tous des anticipations homogènes. Seule une information nouvelle, inconnue jusqu'alors, peut faire varier ces anticipations. Il découle de ce schéma une évolution aléatoire des cours des actifs financiers.

Cette opposition quelque peu manichéenne a longtemps dominé la théorie des marchés financiers et ce n'est que depuis peu qu'une vision différente intègre d'autres types de rationalité et la cohabitation possible de différents agents sur les marchés financiers.

La discussion de la rationalité a évolué quelque peu en parallèle avec celle d'efficience des marchés financiers. FAMA (1970) définit l'efficience comme la propriété qu'aurait un marché dans lequel les prix intégreraient complètement et simultanément toute l'information disponible et pertinente. La généralité de cette définition pose le problème de pouvoir dériver une hypothèse testable cohérente qui permette sa vérification par des études empiriques. JENSEN, en 1978, donne une définition de l'efficience plus compatible avec la réalité. L'efficience est alors vérifiée si une information oubliée par les investisseurs ne permet pas la réalisation d'un profit suffisant pour couvrir les coûts d'information et de transaction. Cette définition, si elle est plus souple que la précédente ne facilite guère l'analyse empirique. De plus, l'opposition brutale entre tenants et opposants de l'hypothèse de rationalité parfaite des investisseurs accentue ces problèmes.

Une alternative structurée à l'hypothèse de rationalité a été élaborée par BLACK (1986) avec l'introduction du concept de bruiteurs (chapitre 2). SHLEIFER et SUMMERS (1990) nous montrent les multiples facettes des bruiteurs et l'intérêt

de ce concept. Cela permet, en effet, de regrouper une grande diversité d'investisseurs sur le seul critère commun d'une utilisation non parfaite de l'information. En effet, les bruiteurs sont des investisseurs qui ne répondent pas au schéma classique du froid calculateur parfaitement informé qu'est l'investisseur rationnel classique. Leur particularité réside dans l'utilisation qu'ils font de l'information dont ils disposent. Il semble possible d'effectuer une analogie avec la classification de SIMON (1978). Les investisseurs rationnels classiques posséderaient une rationalité substantielle alors que l'action des bruiteurs qui maximisent également leur espérance de rentabilité serait mue par une rationalité de type procédurale. Les limites des bruiteurs à la perfection sont internes : même s'ils disposent de toute l'information possible, ils sont dans l'incapacité de l'exploiter complètement. D'ailleurs, il est peu probable qu'ils puissent disposer de toute l'information disponible et pertinente. Cette vision ne doit pas nous limiter à n'envisager que la “veuve de Carpentras” comme agents bruiteurs. Nous montrerons que le comportement bruiteur est multiple ; il peut être celui, par exemple, d'un gros investisseur dont les nécessités professionnelles obligent à limiter le champ d'information et à faire juste aussi bien que les autres : comme certains gestionnaires de SICAV dont le but est avant tout de ne pas faire pire que les concurrents avec les outils disponibles.

### **Probabilité ou chaos**

Le formalisme des travaux théoriques en finance, outre l'abstraction qu'il permet, est dû aux premiers articles traitant du problème et dans lesquels les mathématiques et les statistiques ont une place importante. Nous consacrerons la première partie (chapitre un, deux et trois) de ce travail à développer cette méthodologie dominante issue des travaux de BACHELIER (1900) sur ce qui deviendra plus tard mouvement brownien. Repris par OSBORNE en 1964, cette modélisation statistique des cours va être rapidement liée à l'hypothèse selon laquelle les investisseurs sont rationnels et le marché efficient. Le débat va alors porter, à travers différents modèles, sur l'opposition entre des investisseurs

rationnels et d'autres dont l'irrationalité entraîne un dysfonctionnement important et continu du marché qui est décelable par l'analyse probabiliste. Cette opposition est le cadre de nombreuses discussions existant à l'intérieur de ce que nous appellerons maintenant *le paradigme probabiliste de l'investisseur rationnel*. Les désaccords sont nombreux au sein de ce paradigme, et portent autant sur les hypothèses de comportement que sur des résultats statistiques. Cependant, la question de la pertinence de l'utilisation des probabilités pour décrire les cours boursiers n'est que très rarement discutée.

Notre travail va consister à montrer que la présence de bruiteurs sur un marché financier n'est pas obligatoirement perceptible avec l'utilisation des outils statistiques permettant jusqu'alors de classer les marchés selon qu'ils sont ou non efficaces. En d'autres termes l'efficacité des marchés, au sens statistique, est elle réellement le signal de la rationalité des investisseurs ?

Pour répondre à cette question, nous nous appuyerons en partie sur les travaux de PETERS (1991) qui remettent en cause la méthodologie inhérente au paradigme probabiliste. Une brève revue historique permet en effet de montrer que l'investisseur rationnel classique est façonné de manière à justifier l'emploi des statistiques. Ces dernières ne sont donc pas la résultante de l'élaboration d'un modèle testable issu d'une description économique des marchés. Aussi, dans la deuxième partie, nous envisagerons la possibilité d'une analyse déterministe des marchés financiers afin de nous libérer de la contrainte imposée par l'emploi des statistiques. Cela n'est rendu possible que depuis les travaux de RUELLE et TAKENS (1971) qui introduisent le chaos déterministe et de MANDELBROT (1975) qui définit la notion d'objets fractals. Le chaos déterministe permet notamment de modéliser des phénomènes complexes à l'aide de modèles déterministes très simples. Il constitue une révolution scientifique (au sens donné par KUHN) et permet une méta-analyse des comportements en s'interrogeant maintenant sur le caractère aléatoire ou déterministe de l'évolution du prix des actifs financiers. Cette distinction ne doit pas être confondue avec la partie déterministe qu'il est possible d'extraire d'un phénomène supposé aléatoire en utilisant des méthodes de régression. Le déterminisme doit être vu ici comme l'explication exhaustive du phénomène. Mais il se distingue fortement du déterminisme

newtonien trop lisse et avide de régularités séculaires et qui est aujourd'hui profondément remis en cause. Le chaos déterministe va permettre une représentation a priori simple de phénomènes accidentés et irréguliers (le désordre apparent est le reflet de l'ordre sous-jacent). Il peut aider à décrire des évolutions là où les probabilités étaient un palliatif de notre incapacité à comprendre le monde. Cette vision des probabilités comme science de l'ignorant est celle de LAPLACE pourtant créateur de concepts fondamentaux en probabilité mais "déterministe" convaincu. Notre deuxième partie sera donc consacrée à la présentation du chaos et des propriétés mathématiques et statistiques qu'il possède. Nous pourrions alors proposer différentes modélisations du comportement des bruiteurs et de leur impact sur l'évolution des marchés financiers à l'aide du chaos déterministe. Nous utiliserons également des outils probabilistes récents que nous ne devons pas négliger et qui reposent sur les phénomènes non linéaires. En effet, le fait d'introduire la possibilité d'une étude déterministe des marchés financiers ne doit pas nous faire oublier l'intérêt du recours aux modèles statistiques. Il s'agit notamment des modèles de type ARCH dont l'intérêt en finance provient en grande partie de leur plus grand réalisme dans l'appréhension des caractéristiques vérifiées empiriquement de nombreuses fois sur de multiples séries financières. Nous envisagerons également la dépendance de long terme et la persistance qui permettent de ne pas limiter l'étude des cours et des rentabilités aux seules relations temporelles de court terme.

Dans une dernière partie, nous réaliserons une étude empirique concernant plusieurs actions cotées sur le marché boursier français. Nous utiliserons pour cela l'importante base de données AFFI-SBF qui porte sur une période allant de 1977 à 1991. La description *du marché français des actions* à partir de cette base de données a déjà été très importante à la suite des travaux de HAMON et JACQUILLAT (1992). Nous espérons, à partir de données quotidiennes portant sur vingt-quatre actions cotées à la bourse de Paris, compléter cette analyse en vérifiant la présence éventuelle des bruiteurs sur le marché français dont nous chercherons alors à détecter l'impact.

Ainsi, ce travail se donne pour objectif d'utiliser de nouvelles techniques statistiques et mathématiques pour mettre à jour l'existence de bruiteurs sur le



marché français des actions. Nous voulons surtout montrer que ces agents, possédant une rationalité procédurale, ne génèrent pas une inefficience marquée du marché. L'insuffisance des tests classiques dans l'étude des séries financières, présentées dans la première partie, nous oblige à envisager une autre méthodologie pour l'étude des bruiteurs. Nous emploierons pour cela le test BDS de BROCK, DECHERT et SCHEINKMAN (1987) que nous rebaptisons pour l'occasion test du *Bruiteur Détecté Statistiquement*. L'emploi de ce test va nous permettre d'apporter un éclairage nouveau sur la modélisation des marchés financiers. Nous allons l'utiliser comme un *test de l'efficience des marchés* contre l'hypothèse alternative de marché caractérisé par la présence de bruiteurs.

Les modélisations alternatives proposées par le test BDS comprennent notamment le chaos déterministe et les processus de type ARCH. L'imprévisibilité inhérente à ces deux représentations nous conduit à envisager la possibilité d'un marché bruité mais efficient. En effet, si les bruiteurs génèrent une mauvaise intégration de l'information dans les prix, leur caractère rationnel doit quand même transparaître dans la manière de modéliser leur comportement. En allant plus loin, nous définirons notre concept d'*Efficience Bruitée*. Nous entendons par là, un marché sur lequel des bruiteurs sont présents mais sur lequel il est impossible de profiter des biais qu'ils entraînent dans la fixation du prix. Ainsi, nous serions en présence d'agents rationnels (ce qui implique l'*Efficience...*) mais dont les caractéristiques en termes d'analyse de l'information rendent le marché imparfait (...*Bruitée*).

L'intérêt de notre étude empirique va être de vérifier la possibilité qu'une modélisation intégrant les bruiteurs soit cohérente avec les tests et mesures que nous effectuerons sur les rentabilités quotidiennes de plusieurs actions. Les bruiteurs ont été surtout envisagés par le biais de la représentation théorique. Nous nous appuyons bien entendu sur ces acquis théoriques mais nous cherchons à développer une *stratégie d'analyse empirique des bruiteurs*. Cette stratégie nécessite le recours à des méthodes récentes tant en statistique (tests BDS, modèles ARCH...) qu'en mathématiques (exposants de LYAPUNOV, réseaux de neurones...). Nous espérons néanmoins que la complexité des outils utilisés laissera la possibilité d'intégrer correctement les caractéristiques récemment envisagées des marchés financiers et

ne se révélera pas une sophistication gratuite de l'étude formalisée des séries financières.

La notion d'*Efficienc e Bruitée* va donc nous permettre d'offrir, grâce à l'emploi de modèles non linéaires, une prise en compte des bruiteurs sur le marché français des actions qui soit cohérente avec la rationalité procédurale qui les caractérise.

***PREMIERE PARTIE***

***LE PARADIGME PROBABILISTE  
DE L'INVESTISSEUR RATIONNEL***

La question de l'efficience des marchés financiers alimente depuis longtemps une part importante de la littérature théorique financière. Le débat reste ouvert et d'actualité car chaque accident boursier fait rejaillir cette problématique. Le problème de la nature de l'évolution du prix des actifs financiers découle du comportement supposé des investisseurs (sont-ils ou non rationnels?) et des mécanismes qui, déduits de ces comportements, engendrent la variation des prix. Depuis le début du siècle et l'article de BACHELIER (1900) l'analyse repose en majeure partie sur des modèles probabilistes plus ou moins complexes. C'est ce schéma intégrant Comportement, Mécanisme et Probabilité qui a servi de paradigme-étalon à toute la littérature financière concernant l'efficience. Cependant le contenant de chacune des trois composantes de ce cadre d'étude est à présent remis en cause.

Cette partie se propose donc de reprendre, dans un premier temps, l'historique de la notion d'efficience des marchés financiers. Cette hypothèse, centrale en finance, est liée à celle de rationalité des investisseurs. Nous voulons donc restituer l'évolution parallèle de ces deux concepts et leur lien avec la construction de modèles testables qui sont généralement la marche aléatoire et la martingale. Cette hypothèse a subi de nombreuses critiques qui visent plus ou moins directement l'hypothèse de rationalité. Cependant de nombreux obstacles sont venus atténuer les conclusions et nous obligent à nous interroger aujourd'hui encore. En effet, ces problèmes sont issus de critiques méthodologiques concernant la validité du lien entre l'hypothèse testée et le modèle utilisé et également le manque de réalisme d'une description des marchés financiers fondée sur l'homogénéité des anticipations des investisseurs.

Une des manières les plus probantes d'intégrer différents comportements sur un marché financier est développée par BLACK (1986) avec l'introduction du concept de "noisy investors" que nous avons traduit par "bruiteurs". Le chapitre deux de cette partie sera alors consacré à la présentation de ce type d'agent. Nous aurons auparavant présenté un rapide survol de la littérature concernant les spéculateurs afin de pouvoir bien mettre en avant les spécificités des bruiteurs. En effet, ces agents sont définis comme étant rationnels mais n'utilisant pas parfaitement toute l'information. Le modèle de DELONG, SHLEIFER, SUMMERS

et WALDMANN (1990) formalise l'action des bruiteurs sur les prix des actions. Il est un des premiers à intégrer ces agents dans l'étude statistique des marchés. Cependant leur modèle ne permet pas de distinguer les bruiteurs rationnels des agents irrationnels tels qu'ils sont classiquement définis.

Pour cette raison nous présenterons de nouvelles techniques de test et de modélisation (chapitre trois) qui ouvrent une première voie de réponse. Il s'agit notamment de l'utilisation des processus de type ARCH (ENGLE, 1982) et des phénomènes de persistance et de dépendance de long terme (SUMMERS, 1986, FAMA et FRENCH, 1988). Ces outils vont permettre de modéliser des comportements qui ne répondent pas aux critères de rationalité tel qu'ils ont été définis jusqu'alors. Ils vont surtout rendre possible la modélisation des comportements bruiteurs en les différenciant de ceux des agents irrationnels.

## **CHAPITRE 1 : DE L'HYPOTHESE DE RATIONALITE AU MODELE TESTABLE.**

Nous présentons, dans ce premier chapitre, l'évolution, depuis BACHELIER (1900), des travaux sur l'efficience des marchés financiers. Nous effectuons cet historique en parallèle à l'analyse du comportement des agents financiers car c'est l'interaction des divers acteurs qui crée un mécanisme d'évolution des prix. L'ensemble est alors étudié et testé, ainsi que les hypothèses qui l'ont engendré, par des modèles probabilistes<sup>1</sup>.

La première section est consacrée à l'étude des comportements et des mécanismes d'évolution des prix qui en découlent, alors que la section suivante est une présentation de la traduction probabiliste de ces phénomènes.

### **Section 1. Comportements et mécanismes.**

L'étude de l'évolution des prix des actifs financiers est, à ses débuts, surtout une analyse en termes de statistiques suite aux travaux de BACHELIER (1900). Mais ses travaux sont oubliés jusque dans les années trente (WORKING, 1934). Durant ces années, et notamment en 1936, KEYNES évoque le marché financier comme étant une sorte de gigantesque Casino. Dans cette description du marché, des acteurs à "l'esprit animal" jouent en réponse à certaines pulsions plus qu'ils n'agissent de manière rationnelle. Cette vision, certes caricaturale car négligeant le lien bourse-monde économique, permet néanmoins d'ouvrir le débat sur le thème

---

<sup>1</sup> Il faut noter ici que PETERS (1991) estime que les modèles probabilistes ont précédé les analyses des marchés en termes de comportements rationnels. Ces derniers auraient été en quelque sorte développés avec l'objectif de rendre utilisable les modèles probabilistes.

fondamental des travaux sur l'efficience : les agents financiers sont-ils ou non rationnels ?

Il nous paraît nécessaire, avant de continuer, de définir exactement ce que nous entendons par rationalité des investisseurs. Nous nous référerons pour cela à la définition traditionnellement utilisée en finance.

L'agent rationnel est celui qui maximise son espérance d'utilité sur la base des informations dont il dispose.
--

Cette définition nécessite d'être précisée et nous nous référons pour cela à la distinction élaborée par SIMON en 1978 entre la rationalité substantive et la rationalité procédurale. La première suppose une information parfaite ainsi qu'une utilisation optimale de cette information du fait d'une capacité infinie de connaissance de tous les états futurs possibles du monde. Un tel individu est alors capable de classer les conséquences de chacun de ses choix possibles et de sélectionner celui qui lui est le plus profitable, ici au sens de la maximisation de son espérance d'utilité. La rationalité procédurale s'appuie sur le fait que l'individu agit sur la base d'un processus de décision approprié mais ayant des limites internes à l'élaboration de son processus de décision. Il ne peut pas utiliser l'ensemble de l'information dont il dispose. Dans le cas de la finance, il peut s'agir d'un investisseur qui maximise son espérance d'utilité (processus de décision correcte) mais avec une utilisation insuffisante de l'information pour aboutir à une solution optimale au sens de la rationalité substantive. Nous considérerons l'investisseur comme agissant dans le cadre de la rationalité procédurale s'il élabore des choix en fonction du caractère raisonnable qu'il impose à sa procédure de décision. Son incapacité à utiliser l'ensemble de l'information fait qu'il ne connaît pas complètement l'impact qu'aura son choix sur sa richesse future. Cependant il agit dans un but de maximisation en utilisant des mécanismes et des logiques de décisions appropriés à son incapacité à utiliser toute l'information.

La vision keynésienne de la bourse assimilée à un casino suppose des agents n'agissant avec aucune des rationalités prédéfinies. En effet cela implique que les agents manquent d'information et ne cherchent pas à en acquérir. De plus ils sont

définis comme visant à réaliser des gains supérieurs aux autres mais faciles, sans chercher à mesurer l'impact sur leur richesse finale. Une des principales activités de ces agents irrationnels peut être d'essayer de copier certains autres intervenants. ORLEAN (1989) définit ainsi le mimétisme irrationnel. L'irrationalité provient du fait que rien ne garantit l'exactitude des informations dont dispose l'investisseur copié. Peut-être a-t-il lui-même copié un autre investisseur dont il ne sait rien ? Un tel marché devient rapidement irrationnel.

Le débat sur les comportements des investisseurs oppose à l'origine les fundamentalistes et les techniciens. Il porte déjà sur une opposition quelque peu manichéenne entre les défenseurs d'un comportement rationnel des investisseurs et les techniciens, défenseurs d'une logique selon laquelle la bourse est le lieu d'agissements d'agents non rationnels. La différence majeure entre ces deux groupes consiste en l'information qu'un investisseur rationnel devrait utiliser pour battre le marché. Les fundamentalistes estiment qu'il faut une analyse complète des valeurs fondamentales de la société cotée (endettement, croissance, étude des bilans et des comptes de résultats) : les techniciens pensent qu'une étude, parfois graphique de l'évolution passée des cours suffit à pouvoir battre le marché.

Durant les années cinquante, un troisième groupe est reconnu : les quantitativistes, héritiers des travaux de BACHELIER. Ils défendent une vision rationaliste des agents financiers mais s'opposent aux fundamentalistes sur de nombreux points. Les quantitativistes insistent notamment sur l'évolution aléatoire des cours dans le temps et vont promouvoir l'utilisation intensive des modèles probabilistes. Pour eux les investisseurs sont rationnels et forment des anticipations identiques quant à l'évolution future des actifs.

Le problème de la rationalité va s'avérer être un débat sur la manière dont les investisseurs recherchent et utilisent l'information pour agir. Une définition classique de l'efficience est donnée par FAMA (1970)<sup>2</sup> pour qui :

---

<sup>2</sup> Signalons que ROBERTS dans son article de 1959 établissait déjà une première différence entre l'étude, uniquement, des prix passés de l'actif ou bien le recours à l'analyse des fondamentaux ("développement de la compagnie, changements économiques, actions gouvernementales"). Cela induit deux natures de marchés financiers distinctes.



Un marché financier sera efficient s'il intègre  
simultanément et complètement toute l'information  
disponible et pertinente

ROGER (1988) analyse les problèmes liés au caractère trop général de cette formule. Tout d'abord, cela oblige FAMA à établir plusieurs niveaux de caractérisation des marchés efficients qui diffèrent selon la nature de l'information considérée. Il distingue alors trois formes d'efficience qui sont :

*- Marché faiblement efficient*

Un marché sera faiblement efficient si aucun investisseur ne peut battre le marché avec une stratégie basée uniquement sur les cours passés.

*- Marché à efficience semi-forte*

C'est un marché sur lequel il est impossible de réaliser des profits supérieurs en utilisant une stratégie tenant compte des cours passés de l'actif et de toute l'information publique disponible. Le problème ici réside dans l'absence d'une définition stricte de l'information publique.

*- Marché fortement efficient*

Sur un tel marché les prix intègrent même l'information privée. Cette information est celle possédée par les dirigeants d'entreprise, les contrepartistes et les gérants de portefeuille d'OPCVM d'après ROGER.

Cette distinction crée un premier degré de précision par rapport à la définition originelle de FAMA et un pas vers une plus grande testabilité, mais une carence demeure. En effet, comment vérifier la bonne intégration de l'information alors considérée dans les prix ? JENSEN (1978, page 96) apporte une première réponse en donnant une autre définition de l'efficience qui englobe celle de FAMA, ou plus exactement qui intègre mieux les possibilités des investisseurs sur un marché financier :

“Un marché est efficient, au regard de l'ensemble d'information  $\Theta_t$ , s'il est impossible de réaliser des profits économiques en agissant sur la base de cet ensemble d'information  $\Theta_t$ ”.

Cette définition répond au problème des coûts de transaction en les intégrant implicitement. En effet, le profit économique est le gain issu des transactions net de tout coût qu'il soit d'information ou de transaction. Ainsi avant de juger une stratégie a priori profitable, il faut retirer les coûts de transaction qu'elle a engendré. FAMA, en 1991, reprend la définition de JENSEN en la considérant comme "économiquement plus raisonnable". Les résultats de nombreuses études empiriques concernant l'efficience faible montrent qu'une part des rentabilités futures est explicable par les rentabilités passées. Cependant, FAMA (1991), s'appuyant sur la définition donnée par JENSEN, insiste surtout sur la très faible part des rentabilités futures qu'expliquent les rentabilités passées et présentes dans ces travaux empiriques. Il est alors impossible de battre le marché compte tenu des coûts d'information et de transaction. L'hypothèse d'efficience est ainsi respectée.

Le problème de savoir s'il est possible ou non de réaliser des profits nets et donc de battre le marché va être en fait lié étroitement au problème concernant le comportement des investisseurs. L'ensemble des investisseurs est-il rationnel auquel cas il est impossible de réaliser ces profits nets de tout coût, ou bien au contraire existe-t-il une irrationalité générale de la part de ces investisseurs dont il est possible de profiter ? ROGER (1988) souligne l'incompatibilité de cette description avec la réalité où des agents aux comportements et aux anticipations hétérogènes se rencontrent quotidiennement sur les marchés financiers. Pourtant, en reprenant FAMA (1991), nous utilisons encore cette définition théorique de l'efficience comme étant une description étalon à partir de laquelle il est possible d'élaborer différentes descriptions des marchés financiers.

La présence d'agents aux comportements particuliers engendre-t-elle une évolution des prix qui diffère fortement de celle que l'efficience suppose ? Nous allons, d'ailleurs, maintenant aborder rapidement la question du comportement telle qu'elle est considérée dans les différents courants de théorie financière.

## I. Les comportements.

### *1. L'investisseur rationnel.*

L'investisseur rationnel est une personne qui agit sur la base de toute l'information nécessaire qu'il sait interpréter à l'aide de probabilités objectives et subjectives établies de manière non biaisée, et concernant les différents états futurs de la nature. Son objectif lors de ce programme est la maximisation de son espérance d'utilité.

Supposons un actif dont le prix est aujourd'hui de 150 francs. L'investisseur rationnel connaît les scénarios possibles concernant l'évolution future de cet actif. Il existe d'après lui deux états possibles de la nature : bon ou mauvais. Si demain l'état de la nature est bon, l'actif cotera 161 francs, sinon il cotera 146 francs. Il sait affecter à ces différents états de la nature des probabilités de réalisation qui sont ici par exemple de 40% pour la première possibilité et 60% pour la seconde. La valeur future anticipée est alors de  $0,4 \cdot 161 + 0,6 \cdot 146 = 152$  francs. Anticipant donc le passage du prix de l'actif de 150 à 152 francs, l'investisseur achète l'actif afin de réaliser un profit de 2 francs auquel il faut cependant déduire les frais de transactions dus à cette opération.

Cet exemple illustre la logique de l'investisseur rationnel. Cependant, la théorie du portefeuille et l'analyse des comportements en termes d'espérance-variance (MARKOWITZ, 1952, 1959) vont donner à l'investisseur un autre rôle que celui de gérer selon la stratégie naïve décrite précédemment. Un actif, selon cette théorie, est caractérisé par son espérance de rendement et la variance de ce rendement qui représente le risque encouru par sa possession. L'investisseur, sous l'hypothèse qu'il est risquophobe, va donc construire un portefeuille composé de différents actifs afin de minimiser le risque encouru pour une espérance donnée.

LEROY (1989) rappelle le rôle de l'agent financier qui va se limiter à gérer ce portefeuille. Cela se compose de deux tâches qui sont la diversification et l'adaptation au risque. La diversification consiste à acheter un nombre important

d'actifs différents afin d'éliminer le risque spécifique. L'adaptation au risque fait revoir la composition du portefeuille afin de garder constant le niveau de risque souhaité du portefeuille. Le rôle de l'analyste ici se réduit à intégrer dans sa stratégie des variables économiques et politiques non pour battre le marché mais pour aider à l'adaptation du portefeuille aux conditions fluctuantes du marché. Il semble que dans un marché où les cours intègrent l'information de manière efficace, les agents soient relativement passifs en termes de stratégie. Leur rôle se limite à suivre le marché, ou plus exactement à se confondre à ce marché sans pouvoir le dominer.

Cette vision de l'investisseur n'est pas sans rappeler celle de l'homo œconomicus tant critiqué par nombre d'auteurs, et ce depuis la naissance de la science économique. MINGAT, SALMON et WOLFELSPERGER (1985, pages 412-433) donnent une vision globale de cette notion. Ce n'est pas tant son caractère égoïste (SMITH, 1776) ou sa motivation uniquement pécuniaire (MILL, 1844) qui nous intéresse ici, mais plutôt son rôle dans l'élaboration d'une théorie testable. Ce "calculateur froid" aurait d'ailleurs été introduit en théorie financière plus pour appuyer l'utilisation des modèles probabilistes par les quantitatifs que pour fonder la théorie de l'efficience (PETERS, 1991). Cependant, et pour reprendre l'argument de FAMA (1991, page 1575), la rationalité, et avec elle l'efficience du marché, est un excellent repère pour des travaux ultérieurs tentant de cerner les comportements sur les marchés financiers. De plus, si les coûts de transactions et d'information couvrent le profit que génère la connaissance d'une information supplémentaire, alors l'efficience est vérifiée au sens de JENSEN. Le but des opposants à cette vision des marchés financiers est de montrer qu'en postulant la non rationalité des investisseurs, il est possible de définir un modèle dont le pouvoir prédictif est supérieur à celui qui suppose la rationalité.

## *2. L'investisseur irrationnel.*

Les travaux de BACHELIER ayant été ignorés pendant un peu plus de trente ans, la vision de l'investisseur est, au début du siècle, plus proche de celle défendue par KEYNES (1936). Il n'est pas encore défini d'homo-financius à l'instar de l'agent

économique des auteurs classiques. Les agents financiers sont incapables d'utiliser correctement toute l'information pertinente (c'est à dire pouvant avoir un impact effectif sur le prix de l'actif) et il est alors possible à l'investisseur averti de profiter de ce mauvais fonctionnement du marché. Le débat porte alors sur la manière dont le dysfonctionnement est repérable et dont il est possible d'en tirer profit. Il oppose les techniciens et les fundamentalistes qui se basent notamment sur l'article de WILLIAMS (1938).

Les techniciens supposent que cette imperfection du marché va entraîner un trend dans la série des prix de l'actif et qu'il sera alors possible d'anticiper l'évolution future des cours par une simple étude, statistique ou graphique, des cours passés. ALEXANDER (1961) définit une stratégie du filtre qui utilise finalement cette caractéristique du marché de posséder un trend. Considérons par exemple, un filtre à  $x\%$ . L'investisseur achète si le cours augmente de  $x\%$  et ne vendra que lorsque le cours diminue de  $x\%$ . Il n'agit pas pour des variations cumulées d'ordre inférieur à  $x\%$ . ALEXANDER teste sa technique pour des filtres allant de 5 à 50 %. Les résultats sont peu concluants. FAMA (1965) montre que si l'on intègre les coûts de transactions, une stratégie fondée sur le filtre est un échec comparé à une technique naïve.

Une autre méthode utilisée par les techniciens est celle de la moyenne mobile. La moyenne mobile  $M_t(k)$  d'un cours  $C_t$  au temps  $t$  se construit par simple moyenne arithmétique des  $k$  cours passés. Un exemple simple de stratégie consiste à acheter l'actif quand son cours franchit à la hausse la moyenne mobile calculée sur les  $k$  valeurs antérieures et à vendre lorsque le cours franchit la moyenne mobile à la baisse. Les techniciens élaborent des techniques plus complexes par confrontation de différentes moyennes mobiles d'ordres différents. Le croisement du cours avec une moyenne mobile de long terme est alors toujours interprété comme un signal d'achat ou de vente. Mais cela dépend également d'une moyenne mobile de court terme et de son positionnement par rapport à la moyenne mobile de long terme. Le problème de ces techniques est l'importance trop grande donnée au seul indicateur moyenne mobile qui est une estimation sommaire de la valeur fondamentale de l'actif.

Enfin, une des méthodes les plus connues parmi celles employées par les techniciens est le chartisme. Cette méthode consiste en une analyse graphique, plus ou moins complexe, de l'évolution des cours grâce à laquelle il est possible de déceler les tendances. Le chartisme fonctionne énormément aussi avec le principe des moyennes mobiles.

Que ce soit avec la méthode du filtre, des moyennes mobiles ou l'analyse chartiste, les techniciens remettent en cause l'efficience à son niveau le plus faible. En effet ils fondent toutes leurs stratégies sur la possibilité de trouver dans les cours passés, une information dont l'utilisation engendre des profits significatifs.

Les fundamentalistes postulent eux aussi l'existence d'un trend, significatif de l'inefficience du marché. Ils travaillent sur les caractéristiques des marchés et postulent que des informations fondamentales d'une entreprise permettent d'aider à la prévision des cours. Il existe, selon eux, pour chaque actif une valeur fondamentale autour de laquelle évolue le prix ; cette valeur intrinsèque est égale à la somme actualisée des dividendes auxquels donne droit cet actif. Cependant les investisseurs n'utilisent pas de manière correcte toute l'information économique (macro-économique ou liée à la firme) et politique qui permet de déterminer cette valeur fondamentale d'un actif vers laquelle le prix va inéluctablement tendre. Une étude de ces variables omises permet alors de battre régulièrement le marché. Il suffit d'acheter lorsque le prix est inférieur à la valeur fondamentale et de vendre lorsque l'inverse se produit.

Parmi les travaux les plus récents des fundamentalistes, il y a ceux de OU et PENMAN qui, en 1989, établissent une mesure basée sur l'analyse financière et qui permet de réaliser des bénéfices que ne justifie pas uniquement la rémunération du risque. Cette mesure notée  $Pr$  est censée indiquer l'évolution des bénéfices de la société cotée et déterminer alors la stratégie à entreprendre. OU et PENMAN établissent la règle de décision suivante :

(1) Choisir par simple corrélation et sur la base d'une période passée et présente les variables permettant de connaître l'évolution à un an des bénéfices. Ces variables sont sélectionnées parmi celles qui sont susceptibles d'influencer les bénéfices d'une entreprise (stock, chiffre d'affaires, ratio d'endettement ...);

(2) Déterminer alors, à partir de cette information, la probabilité que les bénéfices annuels prochains augmentent ou diminuent. OU et PENMAN utilisent un modèle Logit de la forme :

$$Pr_{it} = \frac{\exp \{X'_{it}B\}}{(1 + \exp \{X'_{it}B\})} \quad (1.1)$$

où

$X_{it}$  est le vecteur des informations choisies lors de l'étape (1) au temps t et pour la société i.

B est le vecteur des coefficients inconnus à estimer

$Pr_{it}$  est la probabilité que les bénéfices de la société i augmentent en t+1;

(3) Calculer, après estimation des paramètres du modèle de l'étape (2), une probabilité de hausse des bénéfices pour chaque firme à l'horizon d'un an;

(4) La stratégie proposée par OU et PENMAN est de prendre une position longue lorsque  $\hat{Pr}_{it}$  est supérieure à 0,6 et courte lorsque  $\hat{Pr}_{it}$  est inférieure à 0,4. C'est à dire qu'en suivant cette stratégie, il faut acheter l'action cotée lorsque la probabilité de hausse des bénéfices à l'horizon d'un an est supérieure à 0,6.

Cette stratégie est typique de celles développées par les fundamentalistes. Elle suppose que l'information liée aux bénéfices est insuffisamment prise en compte par les investisseurs et qu'il est possible de réaliser des gains importants en l'intégrant dans sa stratégie. Implicitement, les auteurs supposent que le prix va tendre vers la valeur fondamentale déterminée en majeure partie par l'évolution des bénéfices (postulat majeur chez les fundamentalistes). STOBER (1992) conforte les travaux de OU et PENMAN en les comparant aux prévisions réalisées par les analystes disponibles sur I/B/E/S<sup>3</sup>. Cependant, cette mesure est rapidement critiquée puisque GREIG (1992) conteste la méthodologie employée par OU et PENMAN et conclut au risque que la mesure Pr ne soit rien d'autre qu'une mesure de l'effet taille de l'entreprise. Une prise en compte de la taille de l'entreprise réduit, voir annule, le rôle de la mesure Pr dans la réalisation de gains d'investissement.

SHILLER (1984) et SUMMERS (1986) montrent que le prix peut diverger durablement de la valeur fondamentale. Une telle situation rend alors inopérante

---

<sup>3</sup> Institutional Brokers Estimate System.

une stratégie qui mise sur un retour assez proche du prix vers la valeur. Une autre critique faite aux fundamentalistes en général correspond à la difficulté d'estimer sans biais la vraie valeur fondamentale. Cependant cette difficulté est inhérente au caractère fluctuant de l'économie et de la finance et justifie ainsi l'existence d'analystes financiers. Le rôle de ces derniers est d'interpréter l'information spécifique afin de pouvoir donner, sans erreur, la valeur intrinsèque de l'actif et de permettre l'élaboration d'une stratégie.

Il existe donc des professions (chartistes, analystes) au sein desquelles on essaie, grâce à des techniques plus ou moins complexes, d'anticiper les cours et de réaliser des profits fructueux sur la base de la méconnaissance des autres investisseurs. Cela suppose une vision selon laquelle les financiers sont considérés comme agissant de manière hétérogène et désordonnée. En effet, s'ils avaient agi selon une stratégie commune, ils constateraient rapidement les gains supérieurs des techniciens et des fundamentalistes et intégreraient cela dans leur propre stratégie.

Ces comportements induisent, comme nous l'avons entrevu précédemment, un mécanisme d'évolution des prix par les échanges d'actifs auxquels ils aboutissent. Selon la nature supposée des investisseurs, il en découle un comportement en rapport avec un marché de concurrence pure et parfaite, ou bien à l'inverse, un marché où des irrégularités dans l'évolution des prix vont être décelables.

## II. Les mécanismes d'évolution des prix.

La question de la rationalité des investisseurs concerne également les mécanismes conduisant à l'évolution des prix constatée empiriquement sur les marchés. L'hypothèse longtemps dominante est celle d'un fonctionnement similaire à celui d'un marché des biens de concurrence pure et parfaite. Appliquée à la finance, cette hypothèse empêche quiconque de battre le marché. Une grande majorité des travaux liés à l'efficiencia des marchés va s'attacher à découvrir des imperfections qui remettent en cause ce modèle idéal. Mais le lien avec l'idée



communément admise en économie d'existence d'un équilibre stable fait que le débat reste ouvert et l'efficiencia possède encore beaucoup de défenseurs.

### *1. Analogie avec un marché de concurrence pure et parfaite.*

La science économique développe le modèle du marché de concurrence pure et parfaite très tôt. Ce modèle repose sur six axiomes que le marché financier vérifie complètement et dont le principal est celui d'atomicité qui permet d'expliquer de quelle manière la rationalité de chacun permet d'aboutir à la fixation du prix à son équilibre. SAMUELSON (1965) évoque un marché où les agents ont des préférences communes et constantes dans le temps, calculent des probabilités communes et sont neutres face au risque. Le très grand nombre d'acheteurs et de vendeurs qui agissent chaque jour en Bourse sont donc supposés émettre des anticipations communes. Cette atomicité garantit la rationalité de l'ensemble par le principe du "Safety in numbers" comme l'explique PETERS (1991). La présence d'un grand nombre d'acteurs garantit une rationalité collective en ce sens qu'il paraît impossible qu'un si grand nombre d'agents se trompe. Et dans le cas où certains commettent régulièrement des erreurs, ils sont alors éliminés du marché. La rationalité collective est donc implicitement liée à la rationalité individuelle. Les investisseurs arrivent à fixer le prix à son équilibre par leurs actions communes. Cette dernière propriété est la suite logique du caractère rationnel des agents. En effet si chacun sait, sans erreur, interpréter l'information disponible, les résultats sont identiques pour tous les investisseurs. Comme le souligne LEROY (1984), la théorie de l'efficiencia est une extension de la concurrence pure et parfaite appliquée à la finance. La bourse permet donc d'atteindre un équilibre concurrentiel avec des agents rationnels. Le problème est de savoir de quel équilibre il s'agit.

Les fondamentalistes défendent l'idée selon laquelle le prix d'équilibre est

celui qui égalise l'offre et la demande sur la base de toute l'information économique et politique utilisable. Le prix tend donc à être simplement la valeur fondamentale. Si cette dernière varie dans le temps (univers économique changeant), il y aura adaptation des anticipations et donc des périodes transitoires de déséquilibre qui dépendront de l'état du marché autant que des conditions économiques (BEJA et GOLDMAN, 1980). L'état du marché va déterminer la rapidité avec laquelle l'information va être intégrée au cours de l'actif. Plus cela se fait rapidement, plus vite le marché peut être défini comme à l'équilibre. Le problème soulevé par les fondamentalistes vis-à-vis de l'efficacité du marché est la lenteur éventuelle de l'ajustement du prix à l'information et donc du rapprochement entre le prix et la valeur.

Ce sont les quantitatifs qui imposent la condition de rapidité comme possible et nécessaire à l'efficacité du marché. Ils justifient cela par le fait que sur un marché efficace il doit être impossible d'effectuer des arbitrages générateurs de profits réguliers. Les travaux de WORKING<sup>4</sup> (1934) confirmés par KENDALL (1953) ont montré le caractère aléatoire de l'évolution des prix. L'article empirique de KENDALL effectué sur 22 séries de prix hebdomadaires (séries allant de 1928 à 1938) et mensuelles (1883-1934 et 1816-1951) met à jour une composante aléatoire importante dans l'évolution de ces séries. Il appuie cela par la faible autocorrélation constatée dans les prix. A partir de là, le caractère aléatoire de l'évolution des prix des actifs financiers est établi. ROBERTS (1959) fournit ensuite une justification théorique à ce caractère aléatoire. D'abord il détruit l'argumentation des techniciens en montrant qu'une série générée de manière aléatoire peut présenter elle aussi un caractère se prêtant aux multiples interprétations chartistes. Cependant, la méfiance des financiers vis-à-vis du caractère aléatoire de l'évolution des prix rend ROBERTS prudent et le pousse à envisager la possibilité de réaliser des prédictions : "It might be still possible to attain a degree of predictability better than that given by knowledge of past relative frequencies". De plus comment justifier la rationalité des investisseurs en prônant une évolution non contrôlée ?

---

<sup>4</sup> WORKING insiste sur le caractère aléatoire des changements de prix entre deux périodes. Les prix seraient alors l'accumulation de mouvements aléatoires.

La réponse est que les cours intègrent l'information si rapidement que seule une nouvelle information non déjà prise en compte peut générer un mouvement futur des prix. L'évolution aléatoire des prix est donc la preuve d'une parfaite efficacité des marchés. En effet s'il était possible d'utiliser une part même infime de l'information passée dans la stratégie de prévision élaborée aujourd'hui, ce serait le fait d'une irrationalité de la part des investisseurs dans leur ensemble.

Rappelons cependant que BROWN, HARLOW, TINIC (1988) développent un modèle (Uncertain Information Hypothesis) où la rationalité ne suppose pas obligatoirement une intégration immédiate de l'information dans les prix. Ils posent quatre hypothèses à leur théorie :

- les investisseurs sont rationnels et forment des anticipations rationnelles;
- ils sont risquophobes;
- le marché intègre toute l'information utile rapidement;
- les surprises les plus importantes sont classées comme bonnes ou mauvaises mais leur impact complet sur les prix est incertain.

Une mauvaise nouvelle provoquera ce qui semble être une surréaction, alors qu'une bonne nouvelle fera croire à une sous-réaction. Dans les deux cas l'actif sera sous-coté par rapport à l'influence normale que devrait avoir l'information. Une mauvaise information fait peur et une bonne information est intégrée, mais avec méfiance. Or, à la différence de DEBONDT et THALER (1985), il n'est pas question ici de surréactions régulières imputables à l'inefficacité du marché. Dans le modèle de DEBONDT et THALER, le marché surévalue l'impact d'une bonne nouvelle (le prix est alors trop élevé) comme d'une mauvaise nouvelle (le prix est alors trop bas). Un rattrapage s'opère ensuite pour effacer cette première surréaction. Dans le modèle de BROWN, HARLOW et TINIC, il s'agit simplement d'une variation du risque systématique induite par le caractère incertain de l'information. Cette augmentation du risque entraîne une hausse de la rentabilité requise par les investisseurs de nature risquophobe. Le prix évolue alors jusqu'à retrouver le niveau qui aurait dû être le sien si l'information n'avait pas été incertaine. Le problème de ce modèle est qu'il suppose un délai dans l'analyse de l'information par les investisseurs. Et en supposant la rationalité de ces derniers, comment une information même incertaine peut-elle enrayer leurs calculs ?

Le paradigme dominant reste le modèle d'un marché de concurrence pure et parfaite où agissent une infinité d'agents rationnels qui forment des anticipations homogènes.

## *2. L'impossibilité du profit par arbitrage.*

Une des caractéristiques d'un marché efficient est l'impossibilité de réaliser des profits d'arbitrage sans risque. Autrement dit, il n'est pas envisageable de battre le marché en profitant d'une information dont le marché n'a pas eu connaissance. Dans le cas inverse cela signifierait que l'ensemble du marché ignore une information excepté l'arbitragiste qui va alors en profiter. L'information regroupe ici différents contenus selon la nature de l'efficience étudiée (faible, semi-forte ou forte). Cette possibilité d'arbitrage est parfaitement contraire à l'hypothèse d'efficience.

MANDELBROT (1971) définit les conditions nécessaires à l'existence d'un marché parfaitement arbitré. Pour cela il suppose que  $P_0(t)$ , la série des prix résumant les effets de l'offre et de la demande en l'absence d'arbitrage, est un processus stationnaire à variance finie. Cette série est même supposée suivre une martingale<sup>5</sup>. Le but de l'arbitrage est, d'après MANDELBROT, de remplacer  $P_0(t)$  par une série  $P(t)$  qui est aussi une martingale et qui possède la propriété que  $|P_0(t) - P(t)|$  est bornée. De plus, la variance de cette différence est également bornée et aussi petite que possible et  $P(t)$  est liée linéairement à  $P_0(t)$ . Avec cela une condition suffisante à l'existence de  $P(t)$  (donc la possibilité d'un arbitrage efficient) est que la dépendance statistique entre  $P_0(t)$  et  $P_0(t+s)$  décroisse rapidement. La série des prix non arbitrés est inobservable. MANDELBROT montre qu'il suffit que les variations de la série des prix arbitrés soit non corrélées pour que la martingale soit acceptée. Sous une autre forme, on retrouve ici le fait que sur un marché efficient, l'arbitrage doit se faire sans permettre de profit et que la série des prix doit présenter une corrélation s'annulant très rapidement. Autrement dit l'information doit être intégrée

---

<sup>5</sup>  $P_t$  est une martingale si  $E(P_{t+1}/I_{t+1}) = P_t$

dans les prix immédiatement. Cependant GROSSMAN et STIGLITZ (1976) soulèvent le problème du coût de l'arbitrage. Ils déduisent que l'arbitrage n'est en effet possible que s'il est gratuit. Nous préférons nous référer à la définition de JENSEN (1978) pour qui un marché efficient est celui pour lequel le coût de la recherche d'information supplémentaire est égal au gain qui en découle.

Un marché efficient tel qu'il est décrit suppose qu'aucune information n'est utilisable pour battre le marché. La critique de l'efficience va se faire justement sur cette recherche d'une information non prise en compte.

### *3. Anomalies et irrationalité collective.*

Les mécanismes par lesquels les transactions des investisseurs transmettent des informations reflétées par les prix ont été explicités dans le cas d'investisseurs rationnels. De nombreux chercheurs cependant ont voulu établir l'éventuel biais de cette théorie de l'efficience des marchés. LEROY (1989) souligne d'ailleurs le problème méthodologique qui consiste à publier surtout des travaux falsifiant, au sens poppérien du terme, une théorie établie plutôt que des travaux la confortant. Malgré ce biais, il semble nécessaire d'effectuer une étude succincte de ces critiques qui, comme l'élaboration même de l'efficience, sont constructives (FAMA, 1991).

Ces anomalies par rapport au schéma idéal du marché efficient sont de deux types. Les premières s'appuient sur les variables économiques qui semblent ne pas être prises en compte par les investisseurs. Les secondes relatent les effets particuliers constatés dans l'évolution du prix des actifs et qui sont le symbole d'une imperfection du marché. Nous nous situons ici plus particulièrement dans ce que FAMA (1991) appelle les tests pour la prédictabilité des taux de rendements dans sa nouvelle classification des tests d'efficience. Nous verrons très rapidement un exemple de critiques de l'efficience basées sur l'étude événementielle.

Il est cependant difficile de conclure à partir de ces travaux car ils supposent qu'une information n'est pas prise en compte à partir du moment où elle provoque un rendement anormal par rapport à un taux de rendement espéré. BROWN et

WARNER (1980) définissent différentes “rentabilités anormales” en insistant sur les différentes formes existantes de rentabilités normales. Un tel test sera donc basé sur l'équation :

$$R_t = E_{t-1}(R_t) + \varepsilon_t \quad (1.2)$$

Cette équation compare un taux de rentabilité espéré a priori à un taux effectif connu a posteriori. L'hypothèse de taux de rendement anticipé constant ( $R_t = r + \varepsilon_t$ ) étant très peu utilisée, on définit un modèle d'évolution de ce taux.

#### ➡ Rentabilités ajustées au risque et au marché

L'espérance de rentabilité a priori est établie le plus souvent sur la base du MEDAF (Modèle d'Equilibre Des Actifs Financiers) de SHARPE (1964) et LINTNER (1965) qui est de la forme :

$$E(R_{it}) = r_f + \beta [E(R_{mt}) - r_f] \quad (1.3)$$

où

$r_f$  : taux sans risque

$R_{mt}$  : taux de rentabilité du portefeuille de marché

$R_{it}$  : taux de rentabilité de l'actif  $i$  au temps  $t$

$\beta$  : Coefficient de sensibilité

L'emploi de ce modèle suppose que le  $\beta$  est la seule mesure du risque nécessaire pour expliquer l'espérance de rentabilité<sup>6</sup>. Or STAMBAUGH (1982) sur le NYSE de 1953 à 1976 puis FAMA et FRENCH (1991) sur le NYSE, l'AMEX et le NASDAQ de 1963 à 1990 constatent un très faible pouvoir explicatif du  $\beta$  sur la rentabilité moyenne.

#### ➡ Rentabilités ajustées au marché

Cet ajustement est un cas particulier du précédent qui suppose que le  $\beta$ , coefficient de volatilité, est égal à un pour tous les actifs  $i$ .

$$E(R_{it}) = E(R_{mt}) \quad (1.4)$$

#### ➡ Modèle APT (ROLL et ROSS, 1980)

---

<sup>6</sup> FAMA (1991) donne un résumé fort complet des différents problèmes liés à l'utilisation du modèle de SHARPE et LINTNER.

$$E(R_t) = \gamma_0 + \sum_{i=1}^p \gamma_i f_i \quad (1.5)$$

Dans le cas présent, l'espérance de rentabilité est fonction linéaire de plusieurs facteurs ( $f_i$ ) économiques et financiers notamment, et de  $\gamma_i$  qui sont les poids du facteur  $i$  dans l'explication de l'espérance de rentabilité. Ces facteurs explicatifs de l'espérance de rentabilité peuvent prendre en compte le risque mais également d'autres informations déterminées par une analyse factorielle (critiquée par SHANKEN, 1982), une analyse de variance ou la théorie financière. Cependant FAMA (1991) souligne qu'il est impossible de déterminer a priori le nombre de facteurs à inclure dans le modèle.

CHEN, ROLL et ROSS (1986) comparent les deux approches et constatent que l'inclusion du  $\beta$  dans un modèle à plusieurs facteurs n'apporte pas beaucoup et que le poids explicatif du  $\beta$  reste très faible. Cependant FAMA (1991, page 1595) s'interroge sur la fiabilité du modèle à plusieurs facteurs développé par CHEN, ROLL et ROSS et qui n'a malheureusement pas été testé hors de son échantillon d'estimation.

#### ➡ Efficiences faible

Pour un test d'efficiences faible, il faut supposer implicitement que l'espérance de rentabilité est nulle donc que  $E(R_t)=0$ . Le test porte sur la nature du résidu d'un modèle qui s'écrit alors  $P_t = P_{t-1} + \varepsilon_t$  <sup>7</sup> où  $P_t$  est le prix de l'actif.

L'analyse des séries financières et plus particulièrement le test d'efficiences semi-forte consiste en l'étude du comportement des prix comparativement à un modèle censé donner une représentation exhaustive de l'information publique. Cela permet d'étudier l'évolution du cours de l'actif une fois retirés les effets communs à toutes les actions. Nous sommes donc en présence d'un test joint qui, lorsqu'il réagit négativement, rejette soit l'efficiences, soit le modèle d'évaluation, soit les deux. Toute conclusion est alors sujette à caution, et ne permet pas véritablement de clore le débat.

---

<sup>7</sup> C'est depuis SAMUELSON (1965) que les travaux sur l'efficiences portent sur la nature de la rentabilité plutôt que sur la nature du prix.

Jusqu'en 1970 les critiques portées à la théorie des marchés efficients cherchaient surtout à mettre à jour la possibilité de prévoir les cours futurs sur la base des cours passés de l'actif. Depuis, de nombreux travaux tentent de prouver l'inefficience des marchés financiers par la non intégration dans les cours d'une information liée à certaines variables économiques ou par l'existence de saisonnalités qui ne semblent pas arbitrées puisque toujours présentes. Nous donnons ici quelques exemples de ces travaux contredisant l'efficience et les débats qu'ils ont créés. Ces exemples sont issus d'une littérature très riche sur le sujet qui nous empêche toute tentative d'exhaustivité.

### **Le ratio prix/bénéfice (PER).**

BASU (1977) constate sur le NYSE que les actions d'entreprises présentant un ratio PER faible ont un rendement significativement supérieur aux actions d'entreprises ayant un ratio élevé. Il conclut à une imperfection du marché qui n'intègre l'information liée au ratio que progressivement. Cela est vrai même lorsque les rentabilités sont ajustées au risque par un modèle d'évaluation de type MEDAF ou APT. DEBONDT et THALER (1985) confirment ces résultats et développent l'idée selon laquelle cet effet serait en grande partie le résultat d'un effet Janvier. Nous avons également déjà envisagé les travaux de OU et PENMAN pour lesquels le bénéfice (et les informations qui y sont liées) permettent d'obtenir de meilleures prévisions sur l'évolution du prix de l'actif.

HAMON et JACQUILLAT (1992) réalisent, entre autres, des tests pour mesurer cet effet PER sur le marché boursier parisien. Ils constatent un effet Bénéfice/Prix<sup>8</sup> quel que soit le niveau de la capitalisation de l'actif. Des portefeuilles constitués d'actifs à ratio B/P important ont une rentabilité plus élevée que des portefeuilles à faible ratio B/P.

### **La taille de l'entreprise.**

---

<sup>8</sup> HAMON et JACQUILLAT utilisent l'EPR le rapport bénéfice/capitalisation plutôt que le PER afin de ne pas biaiser les calculs en cas de bénéfices presque nuls.



BANZ (1981) montre que les petites firmes ont des taux de rentabilité ajustés au risque plus élevés que les grandes firmes. Il constate un problème de spécification car l'effet taille n'est pas linéaire. Pour lui, l'effet P/B ne signale en fait rien d'autre que l'effet taille. En effet, les firmes de petite taille génèrent moins d'information donc plus d'incertitude. Il s'ensuit un risque plus grand, donc une meilleure rentabilité. REINGANUM (1981) confirme cette dernière hypothèse et pense que les deux effets sont le signal d'un même ensemble de variables oubliées.

HAMON et JACQUILLAT mettent en évidence la présence d'un effet taille sur le marché français. Les entreprises de petite taille (faible capitalisation) ont une rentabilité plus forte que les entreprises de grande taille : est-ce la rémunération du risque ? Il faut souligner que contrairement à ce qui se passe sur le marché américain ce rapport est inversé en début d'année en France. Les entreprises à forte capitalisation présentent une plus forte rentabilité sur les cinq premières séances de l'année.

### **Les dividendes.**

Une manière de tester le manque de réaction du marché à une information est l'étude événementielle (FAMA, 1991). Il s'agit d'observer la réaction des cours à une annonce ou un événement particulier. C'est dans cette classe que se situe l'article de CHAREST (1978). Son étude révèle une réaction étalée dans le temps à l'annonce des dividendes par la société cotée en bourse. Il rejette l'efficience sur le New-York Stock Exchange pour la période 1947-1967. D'autres travaux utilisant différentes mesures du risque confortent la lenteur du NYSE à assimiler l'information liée aux dividendes. FAMA et FRENCH (1988a) travaillent aussi sur cette idée en insistant sur le fait que le ratio de dividende ( $\text{Div}(t)/\text{Prix}(t)$  ou  $\text{Div}(t)/\text{Prix}(t-1)$ ) a une influence croissante sur les cours au fur et à mesure que l'horizon augmente. Ils vérifient que les dividendes aident à prévoir, sur le NYSE de 1927 à 1986, 20 à 25 % du taux de rendement de l'indice pour un horizon de quatre ans. Or ce taux n'est que de 2 à 3 % pour la prévision mensuelle.

HAMON et JACQUILLAT constatent également la présence de cet effet sur le marché français par une étude événementielle. Le jour du paiement du dividende

la rentabilité est “en excès de 0,548 % en règlement mensuel et de 0,467 % au comptant”. Ils réalisent ce calcul sur la base de 4812 versements de dividendes et ces rentabilités en excès sont significativement non nulles.

### **Les saisonnalités.**

Nous passons ici rapidement en revue quelques uns des nombreux effets saisonniers présents dans la littérature financière. Le plus important est sans doute l'effet janvier mis en avant par KEIM (1983) et ROLL (1983). Les actions d'entreprises à faible capitalisation ont un rendement plus fort en janvier que les autres mois. DEBONDT et THALER (1985) confirment cela et le lient à l'effet taille. Citons également l'effet lundi (FRENCH, 1980) à cause duquel les rentabilités sont négatives le lundi et positives les autres jours.

Sur le marché français HAMON et JACQUILLAT montrent que la probabilité d'un détachement de coupon le lundi est supérieure à celle des autres jours (38,5 % contre 17,37 % en moyenne les autres jours). En mesurant l'effet lundi sur un indice avec dividendes réinvestis, l'effet lundi s'il n'est pas annulé est fortement réduit. Dans le cas de l'indice équipondéré il serait nécessaire d'effectuer un test supplémentaire afin de s'assurer que cet effet est bien significatif. En effet, dans le tableau de la page 173 de leur livre, HAMON et JACQUILLAT donnent comme coefficient 0,083 au lundi et 0,117 au mardi dans l'équation ayant les rentabilités de l'indice équipondéré avec réinvestissement de dividendes comme variable expliquée. Ces coefficients sont certes significativement non nuls mais aucun test ne précise s'ils sont significativement différents l'un de l'autre.

Ces effets, pour autant qu'ils soient présents dans la littérature financière, ne proposent pas réellement de justifications théoriques à ce qu'ils mettent à jour. Il s'agit de critiques d'un modèle établi sans que des modèles théoriques alternatifs soient présentés.

#### *4. Et pourtant, on parle toujours d'efficience.*

Malgré la multitude d'anomalies détectées, l'efficience reste un paradigme dominant en finance. Premièrement, les tests utilisés sont des tests joints. Le rejet de l'hypothèse nulle d'efficience des marchés n'est donc jamais certain quel que soit le résultat du test. KLEIDON (1988) montre que ces résultats ne signifient pas obligatoirement inefficience. En effet, la distorsion des prix par rapport à un modèle d'évaluation devrait surtout remettre en cause le modèle plutôt que l'hypothèse d'efficience. Dans les travaux sur les anomalies, le modèle de SHARPE-LINTNER utilisé s'avère biaisé car le  $\beta$  (coefficient de sensibilité) est un facteur de détermination de la rentabilité espérée insuffisant. Par exemple, BASU (1983) met à jour un lien entre le ratio prix/bénéfices et l'espérance de rentabilité que le  $\beta$  ne prend pas en compte. Ces remises en cause ont constitué une part importante des contradictions apportées au modèle d'évaluation idéal. Et pourtant elles ne sont pas concluantes. Progressivement, d'ailleurs, les critiques se sont portées sur d'autres terrains.

Partant du schéma de l'investisseur rationnel situé sur un marché de concurrence pure et parfaite, le marché financier semblait sinon une description parfaite, au moins une très bonne approximation de la réalité. De multiples travaux vont tenter d'affecter à une variable particulière, ou à un événement, un pouvoir prédictif sur les cours futurs et donc de mettre à jour différentes imperfections du marché. Nous avons jusqu'alors présenté (de manière non exhaustive) celles que FAMA (1970) classe parmi les contradictions à l'efficience semi-forte. Cette définition est la plus testée, celle à laquelle nombre d'auteurs s'attaquent sans succès définitif. Ces auteurs peuvent être rattachés à l'école fondamentaliste par leur volonté de lier les imperfections du marché à une mauvaise prise en compte de l'information économique affectant la valeur de l'actif. De nombreux travaux ont également porté sur l'efficience faible. Celle-ci s'appuie sur l'impossibilité pour un investisseur de réaliser des profits en utilisant une stratégie basée uniquement sur l'étude des cours passés. Les critiques portées à l'efficience faible sont généralement fondées sur une vision technique des marchés financiers. En effet les chartistes, par exemple, pensent qu'une étude graphique de l'évolution des prix dans le temps, où les cours passés constituent la seule information, permet de battre le marché. Ces

différentes critiques de l'efficience des marchés se heurtent à l'impact véritable de ces imperfections. En effet, permettent-elles vraiment d'élaborer une stratégie profitable, même en tenant compte des coûts de transactions et d'information ?

Outre le fait qu'ils permettent d'apporter une première réponse à ce débat, les modèles statistiques ont toujours été très liés au problème de la description des comportements et des mécanismes sur le marché financier. Pour cette raison ils requièrent donc une section à part dans ce chapitre.

## **Section 2. L'analyse statistique des marchés.**

L'étude des comportements et des mécanismes boursiers s'est toujours réalisée à l'aide d'outils statistiques et probabilistes. C'est pour cette raison que nous consacrons une section aux outils utilisés et à leur lien avec les hypothèses présentées dans la première section.

La première des études modernes sur l'évolution du prix des actifs est celle de BACHELIER (1900). OSBORNE (1964) reprend et développe ce modèle mathématique. C'est sur ces bases que va progresser l'étude statistique des cours. Le modèle de OSBORNE a été affiné ou contredit, mais toujours dans une optique probabiliste avec l'idée de mouvements aléatoires. Ce modèle, et tous ses dérivés, constituent le moyen d'apporter un éclairage à la question de l'efficience.

Le modèle de base autour duquel évoluent les travaux sur la nature des marchés financiers est le suivant. Soit  $X_t$  le cours (ou son logarithme) d'un actif au temps  $t$ . L'étude va se focaliser sur l'innovation  $\varepsilon_t$  c'est à dire sur la différence absolue ou relative (si les cours sont exprimés en logarithme) des prix de l'actif.

$$\boxed{\varepsilon_t = X_t - X_{t-1} \quad \text{ou} \quad \varepsilon_t = \ln(X_t/X_{t-1})} \quad (1.6)$$

Le marché financier idéal, au sens de l'efficience faible, suppose une innovation aléatoire puisque les cours intègrent rationnellement l'information dès sa

parution. Le seul prédicteur fiable pour la prévision de  $X_t$  est  $X_{t-1}$ . Les caractéristiques statistiques de l'innovation vont être établies par OSBORNE en 1964 qui conceptualise ce que BACHELIER avait analysé dans un premier temps. De critiques en affaiblissements, plusieurs voies de recherche se sont développées. Le trait d'union de tous ces travaux est de déterminer la nature aléatoire ou non de l'évolution des cours. A quelle loi statistique se rattacher ? Quel modèle utiliser ? Quels tests prendre en compte ? Pour vérifier quelle hypothèse exactement ?

## I. Une question de loi.

### *1. Le modèle de OSBORNE (1964).*

Dans ce modèle, l'innovation des prix est décrite par un mouvement brownien. OSBORNE développe plusieurs hypothèses qui, outre le caractère aléatoire de cette innovation, mettent l'accent sur son caractère gaussien. Ces hypothèses, au nombre de sept, sont :

- (1) Les prix varient par unité minimale d'un huitième de dollar;
- (2) Il y a un nombre fini et entier de transactions se déroulant par unité de temps;
- (3) Par analogie à la loi de WEBER et FECHNER<sup>9</sup>, OSBORNE postule que le prix stimule la sensation objective de la valeur dans l'esprit de l'investisseur comme l'intensité acoustique stimule une sensation chez l'être humain. Toujours par analogie avec les sciences physiques, OSBORNE pose qu'une variation du prix correspond à une variation égale de la valeur. C'est l'argument de ROBERTS (1959) pour lequel une évolution aléatoire serait le summum de l'efficience car le prix intègre immédiatement l'information (liée à la valeur ou autre). Le prix évoluerait de concert avec la valeur fondamentale. Cela va donc plus loin que l'idée défendue par les fundamentalistes;

---

<sup>1</sup> La loi de WEBER-FECHNER, à l'origine, lie une intensité acoustique  $I$  à la sensation procurée  $S$  par la relation :  $S = K \text{ Log } I$  où  $K$  est une constante. (Encyclopædia Universalis, éd. 1985, volume 1, page 199)

- (4) Une décision sera logique si entre deux actifs l'investisseur choisit celui présentant l'espérance de rentabilité la plus élevée. L'analyse en termes d'espérance-variance n'intervient pas ici;
- (5) Ni les acheteurs ni les vendeurs n'ont d'avantage les uns par rapport aux autres en termes d'espérance de gain. Il y a donc un prix d'équilibre lors de l'échange;
- (6) Sous les hypothèses précédentes il suit que la distribution de l'innovation ( $\text{Log}(P_{t+\tau}/P_t)$ ) est gaussienne d'espérance nulle et de variance  $\sigma_\varepsilon^2$ . Cette variance croît avec l'intervalle  $\tau$  et est de la forme  $\sigma\sqrt{\tau}$  ;
- (7) Supposons que  $\varepsilon_i$  soit l'innovation pour un temps très court, séparant par exemple deux échanges. Posons alors l'innovation quotidienne comme la somme de ces innovations  $\varepsilon_i$  définies pour un temps infiniment petit. Par le théorème central limite, il est montré que l'innovation quotidienne est distribuée selon une loi normale.

Le modèle de OSBORNE confirme le fait que l'innovation des cours sur un marché boursier est un processus aléatoire. Afin de rendre l'étude de ce processus possible, OSBORNE spécifie la loi statistique de distribution de cette innovation. Dans son article il justifie l'utilisation de la loi normale comme résultat logique des hypothèses qu'il a posées.

Cependant l'hypothèse de normalité de l'innovation est rapidement critiquée puisqu'un an auparavant, deux articles mettaient en avant le caractère erroné de cette hypothèse de normalité.

## *2. Abandon de la normalité.*

MANDELBROT (1963) et FAMA (1963) remettent en cause le caractère gaussien de l'innovation en s'appuyant notamment sur des études empiriques. MANDELBROT (1963) constate que le caractère leptokurtique des séries financières empêche d'utiliser sans biais la loi normale. L'histogramme de la distribution des changements mensuels de cotation des prix du coton de 1890 à

1937 montre une différence flagrante par rapport à la distribution théorique gaussienne notamment en ce qui concerne le coefficient d'aplatissement<sup>10</sup>. Il propose alors l'utilisation de la loi stable de PARETO décrite en 1925 par LEVY. Cette dernière présente une distribution unimodale, en forme de cloche mais avec un aplatissement pouvant être plus ou moins important. Elle a entre autres avantages d'être une généralisation de la loi de Gauss qu'elle englobe comme un cas particulier. Les lois stables possèdent la propriété d'invariance en loi par l'addition comme la loi normale qui est en revanche la seule loi connue à posséder cette propriété avec une variance finie. En effet, comme nous allons le voir avec les travaux de FAMA, les lois stables peuvent n'avoir ni deuxième ni premier moment fini. En 1963, FAMA donne une description détaillée des lois stables avec leurs principales caractéristiques puis, en 1965, il propose des tests permettant d'établir une discrimination entre la loi normale et les autres lois stables.

#### A. Lois stables : description et caractéristiques.

Une loi stable (appelée également loi de PARETO-LEVY) est une loi statistique telle que le logarithme de sa fonction caractéristique est donné par l'équation suivante :

$$\text{Log } f(t) = i \delta t - \gamma |t|^\alpha [1 - i \beta (|t|/t) w(t, \alpha)] \quad (1.7)$$

avec  $w(t, \alpha) = \text{tg } \pi\alpha/2$  si  $\alpha \neq 1$   
 $w(t, \alpha) = 2/\pi \log|t|$  sinon  
 $i$  : le nombre imaginaire

La distribution d'une loi Pareto stable se définit par quatre paramètres fondamentaux qui sont  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $\gamma$ .

L'exposant caractéristique ( $0 < \alpha \leq 2$ )

- Pour  $\alpha=2$ , la loi est une loi normale

---

<sup>10</sup> Le coefficient d'aplatissement (kurtosis) est le rapport du moment de quatrième ordre sur le carré du moment de deuxième ordre. Pour une série mésokurtique (loi normale) ce coefficient de kurtosis est de 3.

- Pour  $\alpha=1$ , la loi est une loi de Cauchy
- Pour  $\alpha$  compris entre 0 et 2 la loi est leptokurtique.

Plus  $\alpha$  se rapproche de 0, plus les queues de distribution sont épaisses et plus la probabilité d'événements rares est importante. Les krachs boursiers peuvent alors être mieux appréhendés. Lorsque  $\alpha$  est compris entre 1 et 2 le moment de second ordre est infini. Et si  $\alpha$  est inférieur à 1, alors le moment d'ordre 1 est également infini. Ce paramètre est le plus utilisé pour définir une loi stable particulière parmi l'infinité de lois stables existantes.

Le paramètre de symétrie ( $-1 \leq \beta \leq 1$ )

- Pour  $\beta = 0$ , la distribution est symétrique
- Pour  $\beta > 0$ , il y a asymétrie à droite
- Pour  $\beta < 0$ , il y a asymétrie à gauche

Le paramètre de localisation ( $\delta$ )

- Pour  $\alpha > 1$ ,  $\delta$  est l'espérance de la distribution
- Pour  $\alpha < 1$ ,  $\delta$  est un paramètre de position (la médiane si  $\beta=0$ )

Le paramètre d'échelle ( $\gamma$ )

- Pour  $\alpha = 2$  (loi normale),  $\gamma$  est la moitié de la variance du processus

Pour la loi normale centrée réduite, les paramètres sont :

$$\alpha = 2, \beta = 0, \gamma = 1/2, \delta = 0$$

Les distributions Pareto stables possèdent trois propriétés qui rendent leur utilisation très intéressante :

- les queues de distributions des lois stables suivent une loi de Pareto ;
- ces lois sont invariantes par l'addition<sup>11</sup>;
- elles sont les seules lois limites possibles pour la somme de variables iid.

## B. Tests sur la nature de la loi stable.

---

<sup>11</sup> Dans le cas de l'addition de n variables iid suivant une loi stable, les paramètres restent les mêmes sauf  $\delta$  et  $\gamma$  qui sont multipliés par n.



FAMA (1965) donne trois méthodes permettant de vérifier selon quelle loi stable une série est distribuée. Ces mesures consistent surtout en l'estimation du coefficient  $\alpha$  qui permet de choisir parmi l'infinité de lois stables existantes.

### *Méthode graphique.*

Si une variable aléatoire  $u$  suit une loi stable, alors ses queues de distribution sont telles que :

$$\Pr(u > \hat{u}) \rightarrow (\hat{u}/U_1)^{-\alpha} \quad \hat{u} > 0 \quad (1.8)$$

$$\Pr(u < \hat{u}) \rightarrow (|\hat{u}|/U_2)^{-\alpha} \quad \hat{u} < 0$$

où  $U_1$  et  $U_2$  sont des constantes

Il en est déduit

$$\text{Log } \Pr(u > \hat{u}) \rightarrow -\alpha (\text{Log } \hat{u} - \text{Log } U_1) \quad (1.9)$$

$$\text{Log } \Pr(u < \hat{u}) \rightarrow -\alpha (\text{Log } |\hat{u}| - \text{Log } U_2)$$

Il suffit de représenter sur le graphique d'abscisse  $\text{Log } |\hat{u}|$  et d'ordonnées  $\text{Log } \Pr(u > \hat{u})$  et  $\text{Log } \Pr(u < \hat{u})$  les points pour des valeurs croissantes de  $|\hat{u}|$ . Au fur et à mesure que  $|\hat{u}|$  augmente, les points forment une droite. L'opposé de la pente de cette droite nous donne  $\alpha$ . Pour calculer ce coefficient, il faut fixer les valeurs des autres qui peuvent être  $\delta=0$ ,  $\beta=0$  et  $\gamma=1$  par exemple, ce qui est assez arbitraire.

Le problème est que pour des valeurs de  $\alpha$  proches de 2, il faut un échantillon de très grande taille pour éviter un biais. Par exemple si la valeur réelle de ce coefficient est de 1,9 il faut 2000 données pour que cette valeur soit perçue graphiquement. Pour  $\alpha=1,99$  il faut un échantillon dont la taille excède 16667 données. Cette méthode semble donc adéquate pour de très grands échantillons ou pour détecter des valeurs de  $\alpha$  relativement faibles. Dans le cas contraire il subsiste un biais important dans le calcul de  $\alpha$ .

### *Analyse de l'étendue.*

Par la propriété d'invariance, la somme de  $n$  variables stables indépendantes est une variable stable avec un même coefficient  $\alpha$ . Cependant le coefficient

d'échelle  $\gamma$  est changé. Pour conserver la même échelle<sup>12</sup>, il faut diviser chacune des variables sommées par  $n^{1/\alpha}$ . L'échelle d'une somme de variables stables non pondérées est donc  $n^{1/\alpha}$  fois l'échelle de chacune des variables. L'étendue interfractile<sup>13</sup> de la distribution de la somme de  $n$  variables stables indépendantes et de même échelle est donc donnée par :

$$R_n = n^{1/\alpha} R_1 \quad (1.10)$$

où  $R_n$  est l'étendue interfractile de la somme des  $n$  variables

$R_1$  est l'étendue interfractile des variables non sommées

En résolvant ceci, il vient alors :

$$\alpha = \frac{\log n}{\log R_n - \log R_1} \quad (1.11)$$

Le calcul des différentes valeurs de  $\alpha$  peut s'effectuer en prenant plusieurs valeurs de  $n$  et différentes étendues interfractiles. Pour des données mensuelles, les étendues interfractiles de la distribution des variations de prix mensuelles peuvent se “comparer” aux étendues de la distribution des variations trimestrielles, semestrielles et annuelles. Afin d'obtenir une valeur unique de l'exposant caractéristique, il est possible ensuite de faire la moyenne (ou prendre la médiane) des différentes valeurs de  $\alpha$  calculées et d'en tirer une indication sur la nature de la série étudiée. FAMA soulève le problème du biais entraîné par l'emploi de cette méthode sur une série autocorrélée.  $\alpha$  sera en effet sous-évalué (surévalué) en cas de dépendance positive (négative) ; il est donc nécessaire de vérifier l'absence de corrélation dans la série avant d'utiliser l'analyse d'étendue pour déterminer  $\alpha$ .

### ***Calcul par la variance séquentielle.***

---

<sup>12</sup> En effet il faut une variable telle que  $n\gamma|z|^{\alpha} = \gamma|t|^{\alpha}$  On obtient  $z=n^{-1/\alpha}$

<sup>13</sup> FAMA(1965) donne comme intervalles :

Interquartile = fractile 0,75-fractile 0,25

Intersextile = fractile 0,83-fractile 0,17

Interdécile = fractile 0,9-fractile 0,1

fractile 0,95-fractile 0,05

fractile 0,98-fractile 0,02

La variance théorique d'une variable suivant une loi stable est infinie dès que  $\alpha$  est inférieur à 2, mais il est possible de calculer la variance empirique. FAMA utilise une propriété qu'il démontre en annexe. Prenons le cas d'une variable  $z$  distribuée selon une loi stable de paramètre de localisation nul ( $\delta=0$ ). Nous savons (propriétés d'invariance par la somme) que les distributions de  $z^2$  et de la somme pondérée par  $n^{-2/\alpha}$  de  $n$  variables  $y_i$  élevées au carré sont alors identiques. La variance empirique  $S^2$  de  $y_i$  après transformation permet d'écrire :

$$S^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n y_i^2 = n^{-1+2/\alpha} \left( n^{-2/\alpha} \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) = n^{-1+2/\alpha} z^2 \quad (1.12)$$

Il apparaît donc que la variance va croître avec la taille de l'échantillon. Supposons deux échantillons de dimensions respectives  $n_0$  et  $n_1$  (avec  $n_0 < n_1$ ) et d'écart-type respectifs  $S_0$  et  $S_1$ . La relation entre les deux variances empiriques est de la forme :

$$S_1^2 = S_0^2 \left( \frac{n_1}{n_0} \right)^{-1+2/\alpha} \quad (1.13)$$

De là,  $\alpha$  se déduit aisément :

$$\alpha = \frac{2 (\log n_1 - \log n_0)}{2 \log S_1^2 - 2 \log S_0^2 + \log n_1 - \log n_0} \quad (1.14)$$

Le problème va résider ici dans le choix arbitraire de  $n_0$  et  $n_1$ . Il faudra procéder par balayage en calculant  $\alpha$  pour différentes tailles des deux sous-échantillons.

Nous avons donc plusieurs méthodes permettant, sous l'hypothèse préalable que nous sommes en présence d'une variable distribuée selon une loi stable, de savoir si cette loi est le cas particulier de la loi normale ( $\alpha=2$ ) ou si nous sommes confrontés à une des lois stables dont l'utilisation demeure malheureusement bien difficile. Ces méthodes de calcul de  $\alpha$  restent assez frustrées mais permettent de préciser la valeur de l'exposant caractéristique.

En résumé, l'idée est que les lois stables permettent d'incorporer à l'étude des cours les valeurs extrêmes et de conserver une approximation statistique cohérente

du processus. Certes la loi normale est plus simple à utiliser mais elle semble inadaptée dans certains cas. Et dans un schéma probabiliste, la question se pose de savoir quelle est la meilleure loi pour l'étude des séries boursières. Des modèles ont donc été élaborés pour s'adapter au profil souhaité : marche aléatoire et martingale. Nous allons maintenant présenter ces modèles très importants en finance.

## II. Un modèle pour les cours boursiers.

La question du modèle idéal de description des marchés a connu une réponse des plus rapides. En effet, dès 1990, BACHELIER développe le modèle appelé plus tard processus de WIENER ou mouvement brownien. Ce modèle adapté aux séries continues verra en la marche aléatoire son alter ego pour l'étude des séries en temps discret<sup>14</sup>.

### *1. La marche aléatoire.*

Un processus  $\{X_t\}$  est une marche aléatoire si :

$$X_{t+1} = X_t + \varepsilon_{t+1} \quad (1.15)$$

$\varepsilon_t$  terme aléatoire indépendamment et identiquement distribué

Ce modèle statistique de l'évolution aléatoire des séries boursières est la traduction probabiliste de l'hypothèse de rationalité des investisseurs. Nous avons vu précédemment que les quantitativistes défendent cette hypothèse. Ils la traduisent en une forme testable, falsifiable pour se référer à la terminologie popérienne. WORKING (1934) et KENDALL (1953) sont, dans un premier temps, les principaux défenseurs de cette théorie. Cependant, la notion de marche aléatoire va

---

<sup>14</sup> Le passage de l'un à l'autre est expliqué par ROGER (1991).

être diversement interprétée dans l'histoire pour des raisons de commodités calculatoires ou afin de mieux cerner les résultats empiriques.

OSBORNE (1964) affirme qu'un actif financier suit une marche aléatoire si les innovations sont indépendantes et suivent une même distribution normale. Dans l'équation précédente cela signifie que  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc gaussien (noté également,  $\varepsilon_t$  est n.i.d<sup>15</sup>  $(0, \sigma^2)$ ).

FAMA (1963) reprend cette définition en supprimant la contrainte de normalité imposée jusqu'alors sur la loi de l'innovation. Il préconise pour cela l'emploi des lois stables de PARETO-LEVY ;  $\varepsilon_t$  doit alors être un bruit blanc. FAMA possède ici la même sensibilité que lorsqu'il donne la définition de l'efficience des marchés en 1970.

GRANGER et MORGENSTERN (1970) proposent une nouvelle définition qui est d'ailleurs la plus couramment utilisée actuellement (par exemple TAYLOR, 1986). Soit  $\{X_t\}$ , le processus stochastique défini par la relation (1.15). Il suit une marche aléatoire si et seulement si :

$$E(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_{t+\tau}) \quad \forall \tau, \text{ le nombre de période de décalage}$$

$$\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+\tau}) = 0 \quad \forall \tau \neq 0$$

L'abandon de l'hypothèse de normalité déjà posé par FAMA introduit une différence entre indépendance et nullité des autocovariances. La définition de GRANGER et MORGENSTERN est moins restrictive que celle de FAMA. Ils remplacent "distributions identiques" par "espérances identiques" et "indépendance" par "nullité des covariances". Le caractère moins restrictif de cette définition permet de l'envisager comme un moyen de tester l'efficience au sens de JENSEN (1978) reprise d'ailleurs par FAMA en 1991. Cependant il faut interpréter la nullité en covariance avec une certaine prudence. En effet, si une série financière présente des covariances empiriques non nulles, il faut regarder l'importance de ces covariances avant d'en déduire un rejet de l'efficience.

---

<sup>15</sup> n.i.d. : normalement et identiquement distribué.

Le débat autour du modèle s'est concentré sur deux points. Premièrement, il est discuté de la pertinence de l'hypothèse de normalité. Celle-ci est rapidement remise en cause mais des tests fondés sur cette hypothèse sont toujours utilisés. Deuxièmement, l'indépendance de l'innovation (évolution aléatoire dans le temps) est le point le plus testé, le plus controversé. C'est pour cette raison que SAMUELSON (1965) a introduit l'étude des martingales en finance afin de proposer une nouvelle spécification testable de l'hypothèse de rationalité des investisseurs.

## 2. La martingale.

LEROY (1989) explique que la marche aléatoire représente un modèle trop restrictif pour tester l'efficience des marchés. En effet, les caractéristiques de la marche aléatoire laissent peu de possibilité à celle-ci d'être générée par un modèle d'optimisation. La martingale permet justement une plus grande souplesse dans l'étude des marchés financiers tout en conservant les traits principaux du marché décrit par la marche aléatoire. Elle va permettre de se focaliser sur le fait que le cours présent est le meilleur prédicteur du cours futur en éliminant les restrictions imposées par la marche aléatoire. Notamment, il ne sera rien spécifié quant aux moments de deuxième ordre. Un processus  $\{X_t\}$  est une martingale si :

$$E(X_{t+1}|\Phi_t) = X_t. \quad (1.16)$$

$\Phi_t$  est l'information disponible au temps  $t$ . Cela se traduit par la nullité en espérance de l'innovation conditionnellement à l'information  $\Phi_t$ . L'innovation est alors une différence de martingale :

$$E(X_{t+1}-X_t|\Phi_t) = E(\varepsilon_t|\Phi_t) = 0 \quad (1.17)$$

Si le prix suit une martingale, aucune information n'est utilisable pour avoir une rentabilité anticipée non nulle (MANDELROT, 1971). Le test de l'efficience des marchés va alors consister en la recherche d'une information que les investisseurs n'auraient pas intégrée dans leurs stratégies de prévision; par exemple,

une information qui engendrerait une régularité dans le comportement de l'innovation. La martingale ne sera rejetée que s'il y a régularité dans le moment de premier ordre de l'innovation. Par opposition, la marche aléatoire suppose une indépendance vérifiable même en terme des moments d'ordre supérieur à un. SAMUELSON pose les conditions sous lesquelles le modèle de martingale est satisfaisant :

- préférences communes et constantes des agents
- probabilités communes sur les états futurs de la nature
- neutralité face au risque.

Une des critiques que LEROY (1989) adresse à la martingale est justement l'hypothèse de neutralité face au risque qu'elle nécessite. Il suppose que les agents ont plutôt une aversion pour le risque. En finance, depuis MARKOWITZ (1952), le principe de constitution d'un portefeuille par minimisation du risque pour une espérance de rentabilité donnée est la base de la majorité des théories. De plus une corrélation du moment d'ordre deux de l'innovation va engendrer un effet de grappe<sup>16</sup> (MANDELBROT, 1963). Dans le cas d'une augmentation du risque qui perdure, les investisseurs vont réclamer une rémunération plus élevée. Sur un marché inefficace, l'investisseur qui connaîtrait cette propriété de clustering (ignorée des autres) pourrait en profiter pour battre le marché. Aujourd'hui, pour sa simplicité et sa bonne approximation de la réalité, la martingale reste un modèle important dans le paradigme probabiliste en finance.

### *3. La sous-martingale.*

La sous-martingale permet de tenir compte de la rémunération minimale du risque qu'offre un actif risqué. Un processus  $\{X_t\}$  est une sous-martingale si :

$$E(X_{t+1}|\Phi_t) \geq X_t. \quad (1.18)$$

$\Phi_t$  est l'information disponible au temps  $t$ .

---

<sup>16</sup>Appelé également clustering : de larges (petites) variations des prix vont entraîner des variations de prix de mêmes grandeurs.

La sous-martingale est utilisée lorsqu'il est supposé qu'en espérance, l'actif risqué offre au moins le taux sans risque. L'espérance du prix futur de cet actif est alors le prix présent rémunéré au moins au taux sans risque. Ce modèle est nettement moins utilisé dans les travaux théoriques en finance.

Sur la base de ces modèles, différentes statistiques sont proposées afin de tester l'efficacité des marchés. Selon leur construction, les principaux tests porteront soit sur le modèle de la martingale, soit sur celui de la marche aléatoire. Nous les exposons succinctement car là n'est pas le but de ce travail. Cependant ils sont partie intégrante du paradigme probabiliste en finance.

#### *4. Test de la marche aléatoire.*

Nous présentons ici quelques uns des principaux tests de l'hypothèse d'efficacité des marchés réalisés lorsque le modèle testable de cette hypothèse est la marche aléatoire.

#### **Test d'autocorrélation** (test individuel)

L'hypothèse d'efficacité est respectée si l'innovation  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc. La manière la plus fréquente de le vérifier est de mesurer l'autocorrélation éventuelle dans le processus de l'innovation. L'autocorrélation du processus  $\varepsilon_t$  est de la forme :

$$\rho_\tau = \frac{\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+\tau})}{\sqrt{V(\varepsilon_t) V(\varepsilon_{t+\tau})}} \quad (1.19)$$

Quel que soit  $\tau$ , les propriétés asymptotiques de ce coefficient sont :

$$\sqrt{T-\tau} \rho_\tau \sim N(0,1) \quad (1.20)$$

Pour effectuer le test à l'ordre un, il suffit alors d'estimer empiriquement le coefficient d'autocorrélation et de tester l'hypothèse nulle  $\rho_1 = 0$  contre l'hypothèse alternative  $\rho_1 \neq 0$ . L'hypothèse nulle de bruit blanc sera acceptée si  $\sqrt{T}|\hat{\rho}_1| \leq 1,96$  au seuil de 5 % et rejetée sinon.



### Test “portmanteau”

BOX et PIERCE (1970) ont construit un test qui permet de tenir compte simultanément des corrélations de l'innovation pour plusieurs décalages. A la différence de la statistique élaborée précédemment, le test portmanteau intègre les corrélations jusqu'à k retards. Il est de la forme :

$$Q_k = T \sum_{\tau=1}^k \hat{\rho}_\tau^2 \quad (1.21)$$

où T est le nombre d'observations  
 $\hat{\rho}_\tau$  est la corrélation empirique d'ordre  $\tau$

Étant donné la distribution des autocorrélations,  $Q_k$  suit ici une loi du  $\chi^2$  à k-1 degrés de liberté. L'hypothèse nulle est ici l'indépendance de l'innovation contre l'hypothèse alternative de dépendance linéaire.

### Test du ratio de variance

Ce test, conçu par LO et MACKINLAY (1988), est basé sur le principe selon lequel la variance des différences des cours est une fonction linéaire de la période d'observation, c'est à dire :

$$\text{Var}(\Delta^\tau P) = \tau \text{Var}(\Delta P) \quad (1.22)$$

$\Delta$  est l'opérateur différence. Ce test est calculé à partir du ratio des variances pour une différence des cours de une période et de  $\tau$  périodes et nécessite la construction de la statistique suivante :

$$M(\tau) = \frac{\hat{\sigma}_b(\tau)^2}{\hat{\sigma}_a^2} - 1 \quad (1.23)$$

$$\text{avec } \hat{\sigma}_a^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{k=1}^T (\Delta y_k - \hat{\mu})^2 \quad (1.24)$$

$$\hat{\sigma}_b^2(\tau) = \frac{1}{\tau(T-\tau+1)\left(1-\frac{\tau}{T}\right)} \sum_{k=\tau}^T \left( \Delta y_k - \tau \hat{\mu} \right)^2 \quad (1.25)$$

$\hat{\mu}$  est l'estimateur de la moyenne des différences.

En cas d'égalité des variances, la statistique  $M_r(\tau)$  est égale à zéro. Cette statistique suit loi normale d'espérance nulle et de variance  $[2(2\tau-1)(\tau-1)/3\tau]$ . Elle est de la forme :

$$z_1(\tau) = \frac{\sqrt{n\tau} M_r(\tau)}{\sqrt{\frac{2(2\tau-1)(\tau-1)}{3\tau}}} \quad (1.26)$$

Cette dernière suit asymptotiquement une loi normale centrée réduite, le test de l'hypothèse nulle de bruit blanc est alors simple à composer. Cette hypothèse sera acceptée si  $z_1(\tau)$  est inférieur ou égal à 1,96 au seuil de 5 % et rejetée sinon.

Pour prendre en compte le cas où la distribution des innovations est hétéroscédastique, et en effectuant les corrections préconisées par FONTAINE (1990a) on modifie le test qui devient :

$$z_2(\tau) = \frac{M_r(\tau)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{\tau-1} \left[ \left( \frac{2(\tau-j)}{\tau} \right)^2 \hat{\delta}(j) \right]}} \quad (1.27)$$

$\hat{\delta}(j)$  est l'estimateur de la variance du coefficient d'autocorrélation de l'innovation d'ordre  $j$  :

$$\hat{\delta}(j) = \frac{\sum_{k=j}^T \left( \Delta y_k - \hat{\mu} \right)^2 \left( \Delta y_{k-j} - \hat{\mu} \right)^2}{\left[ \sum_{k=1}^T \left( \Delta y_k - \hat{\mu} \right)^2 \right]^2} \quad (1.28)$$

Le test de LO et MACKINLAY peut être réalisé par le biais d'une combinaison linéaire des  $\tau-1$  premiers coefficients d'autocorrélation qui suit une loi normale centrée réduite et est de la forme :

$$M_r(\tau) = \frac{2}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau-1} (\tau-i) \hat{\rho}_i \quad (1.29)$$

Le test est alors plus facilement utilisable. FONTAINE (1990a, 1990b) rappelle que ces tests sont plus puissants que le test de BOX-PIERCE notamment. Il montre également l'intérêt de l'emploi de ce test dans la recherche d'une réponse à la question de l'efficacité des marchés financiers.

Ces tests ont pour objet de vérifier la nature de bruit blanc de l'innovation et donc l'efficacité du marché qui est liée au fait que les cours suivent une marche aléatoire. Ils sont encore fréquemment utilisés (notamment le test d'autocorrélation). Cependant le modèle de martingale a supplanté, en théorie financière, celui de marche aléatoire. C'est pour cela que nous présentons maintenant un test de l'efficacité basé sur le modèle de la martingale.

### 5. Test de la martingale.

LEROY et PORTER (1981) et SHILLER (1981) ont proposé un test de l'efficacité des marchés qui permet une nouvelle approche à partir du modèle de martingale. Nous reprenons le développement de LEROY et PORTER (1981).

Sous l'hypothèse de martingale (efficacité des marchés) et en tenant compte des dividendes  $d_t$ , le prix d'un actif s'écrit alors :

$$p_t = \frac{E(p_{t+1} + d_{t+1} | \Phi_t)}{1+r} \quad (1.30)$$

$p_t$  peut alors être réécrit comme

$$p_t = \frac{p_{t+1} + d_{t+1} - \varepsilon_{t+1}}{1+r} \quad (1.31)$$

où :  $\varepsilon_{t+1} = p_{t+1} + d_{t+1} - E_t(p_{t+1} + d_{t+1})$  (1.32)

Ce qui devient si nous réécrivons l'équation (1.31) pour chaque période  $t+i$  :

$$\frac{p_{t+i}}{(1+r)^i} = \frac{p_{t+1+i} + d_{t+1+i} - \varepsilon_{t+1+i}}{(1+r)^{i+1}} \quad (1.33)$$

La sommation pour  $i$  allant de 1 à l'infini permet d'obtenir :

$$p_t^* = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{t+i}}{(1+r)^i} = p_t + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{t+i}}{(1+r)^i} = p_t + u_t \quad (1.34)$$

Dans un schéma tel que celui-ci,  $p_t^*$  est le prix qu'aurait l'actif si les dividendes futurs étaient connus avec certitude, et  $p_t$  est l'espérance conditionnelle de ce prix. De l'équation (1.31) il vient :

$$V(p_t^*) = V(p_t) + V(u_t) \quad (1.35)$$

De la propriété de positivité des variances, il découle :

$$V(p_t^*) \geq V(p_t) \quad (1.36)$$

La borne supérieure dépend uniquement du modèle de génération des dividendes. Il s'agit alors d'un test dont les résultats s'interprètent sans ambiguïté (LEROY, 1989).

Mais ce test va se heurter à plusieurs obstacles importants qui sont en premier lieu le problème inhérent au calcul de  $p_t^*$ . Ensuite, de nombreuses autres critiques contre ce test de "variance bornée" vont apparaître qui sont de différents ordres. FLAVIN (1983) estime que ce test est biaisé dans des petits échantillons. KLEIDON (1986) montre que ce test est biaisé même dans les échantillons de grande taille si le processus du dividende admet une racine unitaire. Pour cela, supposons que les dividendes suivent un processus autorégressif d'ordre  $p$  de la forme :

$$d_t = \alpha_1 d_{t-1} + \dots + \alpha_p d_{t-p} + u_t \quad u_t \text{ est iid } (0, \sigma^2) \quad (1.37)$$

Cela peut s'écrire :

$$(1 - \alpha_1 L - \dots - \alpha_p L^p) d_t = \alpha(L) d_t = u_t \quad (1.38)$$

Le processus comprend une racine unitaire si l'une des racines du polynôme de retard  $\alpha(L)$  est non significativement différente de un. Le processus est alors non stationnaire.

La critique la plus véhémente va venir d'une hypothèse forte posée dans ces tests : la constance des rendements futurs anticipés paraît aujourd'hui devoir être abandonnée car trop simpliste et ne reflétant pas la réalité.

Ces tests doivent présenter des hypothèses alternatives afin de ne pas être de simples critiques de ce qui existe. TAYLOR (1986) cite notamment les modèles de variance dont nous donnons ici deux exemples.

### III Les modèles de variance.

Le modèle de martingale adopté maintenant en finance va permettre le développement d'un nouveau type de modèle en conformité avec l'efficacité. En effet la martingale ne suppose rien quant au moment de deuxième ordre du processus de l'innovation. C'est pour cela que plusieurs modèles vont formaliser les cours boursiers en éliminant l'hypothèse de constance de la variance<sup>17</sup>. Plus ou moins complexes, ils sont fondés sur une analyse des cours en terme de probabilité.

#### 1. Modèles de HSU (1977).

HSU (1977) teste un modèle de variations de la variance par saut sur des données issues du Dow Jones. Supposons que l'innovation, conditionnellement à l'information, suit une loi normale d'espérance nulle et d'écart type  $v_t$ . Cette innovation va être de la forme :

$$\varepsilon_t = \sigma_1 U_t \quad \text{si } 1 \leq t \leq m \quad (1.39)$$

---

<sup>17</sup> Ces travaux sont les prémisses des modèles ARCH présentés lors du chapitre suivant.

$$\varepsilon_t = \sigma_2 U_t \quad \text{si } m+1 \leq t \leq T$$

$U_t$  est un bruit blanc gaussien d'espérance nulle et de variance unitaire. HSU (1982) propose de déterminer la valeur de  $m$  qui caractérise le changement de comportement du phénomène par une analyse bayésienne (HSU, 1982).

L'innovation générée par un tel processus est non stationnaire en variance<sup>18</sup> et présente une corrélation nulle. Bien entendu une telle modélisation de la variance est assez simplificatrice et suppose de plus la normalité du processus. Cependant elle peut être un bon moyen de modéliser une série financière présentant un caractère non stationnaire. Une illustration en est l'historique des cours des actifs cotés sur toutes les places boursières mondiales et qui ont suivi une évolution beaucoup plus agitée dans les années quatre-vingts qu'au cours des années soixante-dix. Dans ce cas là, le modèle de HSU permettra d'étudier ces deux décennies de cours boursiers en une seule analyse avec  $\sigma_2$  plus élevé que  $\sigma_1$ . Cela évite de scinder la série sur laquelle un travail empirique est effectué. Cela permet alors de moins s'éloigner des résultats asymptotiques qui servent de normes à de nombreux tests.

## 2. Variances markoviennes.

Dans ce modèle, la variance de l'innovation évolue à chaque période selon un processus markovien, entre deux valeurs possibles. A chaque période il existe une probabilité  $\alpha$  que l'écart type de l'innovation reste le même d'une période à l'autre et  $(1-\alpha)$  qu'il vaille  $\sigma_1$  s'il valait  $\sigma_2$  (ou inversement). Il serait possible de postuler qu'une des valeurs reflète un marché calme alors que l'autre variance est celle d'un marché agité. Un tel processus est stationnaire, non corrélé et de variance égale à :

$$\frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \tag{1.40}$$

---

<sup>18</sup> La stationnarité en variance d'un processus suppose que son moment d'ordre deux soit fini. MONFORT et GOURIEROUX (1990, page 152) rappellent qu'un tel processus doit être homoscédastique (variance constante). La forme de l'hétéroscédasticité présente ici implique donc la non stationnarité.

Ce modèle outre sa spécification intéressante de la variance présente l'avantage de générer une série leptokurtique conforme à ce qui est généralement constaté sur les marchés financiers. En effet sa kurtosis est de :

$$k = 3 \left[ 1 + \frac{\left( \sigma_1^2 - \sigma_2^2 \right)^2}{\left( \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \right)^2} \right] > 3 \quad (1.41)$$

Dans le cas présent, un modèle markovien simple de génération de la variance, permet de prendre en compte l'importance des queues de distribution (leptokurtosis) souvent observée sur les marchés financiers.

Certes ces modèles sont très simplificateurs de la réalité mais ils permettent de progresser en profitant des caractéristiques du modèle de martingale moins contraignant que celui de la marche aléatoire. Par exemple, HSU utilise son modèle sur le Dow Jones Industrial Average de juillet 1971 à août 1974 (données hebdomadaires). Il y est constaté une hausse significative de la variance à partir du milieu de mars 1973. HSU attribue ce changement à l'affaire Watergate révélée le 7 février 1973. Cette modélisation permet une approche intéressante car elle prend en compte un changement de structure au niveau de la volatilité sans obliger à scinder l'échantillon.

## Conclusion

L'investisseur rationnel reste l'hypothèse dominante en théorie financière et avec elle le modèle de la marche aléatoire puis de la martingale. Des premiers travaux de BACHELIER tout au début du siècle jusqu'aux articles de LEROY (1989) et FAMA (1991), la question de la rationalité des investisseurs a animé nombre de débats et de théories contradictoires. Cependant tout cela s'est effectué au sein du même paradigme probabiliste. Le modèle initial de BACHELIER a subi de nombreuses altérations depuis que KENDALL (1953) et OSBORNE (1964) l'ont remis au goût du jour. Ces remaniements ont permis une plus grande souplesse dans

l'étude statistique des marchés financiers et ont offert à la théorie de l'efficience des marchés un modèle testable. Néanmoins, seules les modalités statistiques du phénomène, avec souvent comme résultat final une opposition entre investisseurs rationnels et investisseurs irrationnels, ont été considérées.

Une voie structurée de recherche s'est développée au sein de ce paradigme qui cherche à modéliser l'impact sur les prix d'investisseurs qui n'entrent dans aucune des deux classes habituellement recensées. Cela amène la prise en compte d'une diversité importante de types d'agents. Le prochain chapitre sera donc consacré à la présentation rapide des arbitragistes et des spéculateurs avant d'envisager plus profondément l'impact des bruiteurs (BLACK, 1986), qui sont rationnels mais mal informés, sur les marchés financiers.

## **Section 2. L'analyse statistique des marchés.**

L'étude des comportements et des mécanismes boursiers s'est toujours réalisée à l'aide d'outils statistiques et probabilistes. C'est pour cette raison que nous consacrons une section aux outils utilisés et à leur lien avec les hypothèses présentées dans la première section.

La première des études modernes sur l'évolution du prix des actifs est celle de BACHELIER (1900). OSBORNE (1964) reprend et développe ce modèle mathématique. C'est sur ces bases que va progresser l'étude statistique des cours. Le modèle de OSBORNE a été affiné ou contredit, mais toujours dans une optique probabiliste avec l'idée de mouvements aléatoires. Ce modèle, et tous ses dérivés, vont constituer le moyen d'apporter un éclairage à la question de l'efficience des marchés.

Le modèle de base autour duquel évoluent les travaux sur la nature des marchés financiers est le suivant. Soit  $X_t$  le cours (ou son logarithme) d'un actif au



temps  $t$ . L'étude va se focaliser sur l'innovation  $\varepsilon_t$  c'est à dire sur la différence absolue ou relative (si les cours sont exprimés en logarithme) des prix de l'actif.

$$\varepsilon_t = X_t - X_{t-1} \quad \text{ou} \quad \varepsilon_t = \ln(X_t/X_{t-1})$$

Le marché financier idéal, au sens de l'efficience faible, suppose une innovation aléatoire puisque les cours intègrent rationnellement l'information dès sa parution. Le seul prédicteur fiable pour la prévision de  $X_t$  est  $X_{t-1}$ . Les caractéristiques statistiques de l'innovation vont être établies par OSBORNE en 1964 qui conceptualise ce que BACHELIER avait analysé dans un premier temps. De critiques en affaiblissements, plusieurs voies de recherche se sont développées. Le trait d'union de tous ces travaux est de déterminer la nature aléatoire ou non de l'évolution des cours. A quelle loi statistique se rattacher ? Quel modèle utiliser ? Quels tests prendre en compte ? Pour vérifier quelle hypothèse exactement ?

## I. Une question de loi.

### *1. Le modèle de OSBORNE (1964).*

Dans ce modèle, l'innovation des prix est décrite par un mouvement brownien. OSBORNE développe plusieurs hypothèses qui, outre le caractère aléatoire de cette innovation, mettent l'accent sur son caractère gaussien. Ces hypothèses, au nombre de sept, sont :

- (1) Les prix varient par unité minimale d'un huitième de dollar;
- (2) Il y a un nombre fini et entier de transactions se déroulant par unité de temps;
- (3) Par analogie à la loi de WEBER et FECHNER<sup>19</sup>, OSBORNE postule que le prix stimule la sensation objective de la valeur dans l'esprit de l'investisseur

---

<sup>1</sup> La loi de WEBER-FECHNER, à l'origine, lie une intensité acoustique  $I$  à la sensation procurée  $S$  par la relation :  $S = K \log I$  où  $K$  est une constante. (Encyclopædia Universalis, éd. 1985, volume 1, page 199)

comme l'intensité acoustique stimule une sensation chez l'être humain. Toujours par analogie avec les sciences physiques, OSBORNE pose qu'une variation du prix correspond à une variation égale de la valeur. C'est l'argument de ROBERTS (1959) pour lequel une évolution aléatoire serait le summum de l'efficience car le prix intègre immédiatement l'information (liée à la valeur ou autre). Le prix évoluerait de concert avec la valeur fondamentale. Cela va donc plus loin que l'idée défendue par les fundamentalistes;

- (4) Une décision sera logique si entre deux actifs l'investisseur choisit celui présentant l'espérance de rentabilité la plus élevée. L'analyse en termes d'espérance-variance n'intervient pas ici;
- (5) Ni les acheteurs ni les vendeurs n'ont d'avantage les uns par rapport aux autres en termes d'espérance de gain. Il y a donc un prix d'équilibre lors de l'échange;
- (6) Sous les hypothèses précédentes il suit que la distribution de l'innovation ( $\text{Log}(P_{t+\tau}/P_t)$ ) est gaussienne d'espérance nulle et de variance  $\sigma_\varepsilon^2$ . Cette variance croît avec l'intervalle  $\tau$  et est de la forme  $\sigma\sqrt{\tau}$  ;
- (7) Supposons que  $\varepsilon_i$  soit l'innovation pour un temps très court, séparant par exemple deux échanges. Posons alors l'innovation quotidienne comme la somme de ces innovations  $\varepsilon_i$  définies pour un temps infiniment petit. Par le théorème central limite, il est montré que l'innovation quotidienne est distribuée selon une loi normale.

Le modèle de OSBORNE confirme le fait que l'innovation des cours sur un marché boursier est un processus aléatoire. Afin de rendre l'étude de ce processus possible, OSBORNE spécifie la loi statistique de distribution de cette innovation. Dans son article il justifie l'utilisation de la loi normale comme résultat logique des hypothèses qu'il a posées.

Cependant l'hypothèse de normalité de l'innovation est rapidement critiquée puisqu'un an auparavant, deux articles mettaient en avant le caractère erroné de cette hypothèse de normalité.

## *2. Abandon de la normalité.*

MANDELBROT (1963) et FAMA (1963) remettent en cause le caractère gaussien de l'innovation en s'appuyant notamment sur des études empiriques. MANDELBROT (1963) constate que le caractère leptokurtique des séries financières empêche d'utiliser sans biais la loi normale. L'histogramme de la distribution des changements mensuels de cotation des prix du coton de 1890 à 1937 montre une différence flagrante par rapport à la distribution théorique gaussienne notamment en ce qui concerne le coefficient d'aplatissement<sup>20</sup>. Il propose alors l'utilisation de la loi stable de PARETO décrite en 1925 par LEVY. Cette dernière présente une distribution unimodale, en forme de cloche mais avec un aplatissement pouvant être plus ou moins important. Elle a entre autres avantages d'être une généralisation de la loi de Gauss qu'elle englobe comme un cas particulier. Les lois stables possèdent la propriété d'invariance en loi par l'addition comme la loi normale qui est en revanche la seule loi connue à posséder cette propriété avec une variance finie. En effet, comme nous allons le voir avec les travaux de FAMA, les lois stables peuvent n'avoir ni deuxième ni premier moment fini. En 1963, FAMA donne une description détaillée des lois stables avec leurs principales caractéristiques puis, en 1965, il propose des tests permettant d'établir une discrimination entre la loi normale et les autres lois stables.

### A. Lois stables : description et caractéristiques.

Une loi stable (ou loi de PARETO-LEVY) est une loi statistique telle que le logarithme de sa fonction caractéristique est :

$$\text{Log } f(t) = i \delta t - \gamma |t|^\alpha [1 - i \beta (|t| / t) w(t, \alpha)]$$

---

<sup>20</sup> Le coefficient d'aplatissement (kurtosis) est le rapport du moment de quatrième ordre sur le carré du moment de deuxième ordre. Pour une série mésokurtique (loi normale) ce coefficient de kurtosis est de 3.

avec  $w(t, \alpha) = \text{tg } \pi\alpha/2$  si  $\alpha \neq 1$   
 $w(t, \alpha) = 2/\pi \log|t|$  sinon  
 $i$  : le nombre imaginaire

Une distribution Pareto stable se définit par quatre paramètres fondamentaux qui sont  $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ .

L'exposant caractéristique ( $0 < \alpha \leq 2$ )

- Pour  $\alpha=2$ , la loi est une loi normale
- Pour  $\alpha=1$ , la loi est une loi de Cauchy
- Pour  $\alpha$  compris entre 0 et 2 la loi est leptokurtique.

Plus  $\alpha$  se rapproche de 0, plus les queues de distribution sont épaisses, plus la probabilité d'événements rares est importante. Lorsque  $\alpha$  est compris entre 1 et 2 le moment de second ordre est infini. Et si  $\alpha$  est inférieur à 1, alors le moment d'ordre 1 est également infini.

Le paramètre de symétrie ( $-1 \leq \beta \leq 1$ )

- Pour  $\beta = 0$ , la distribution est symétrique
- Pour  $\beta > 0$ , il y a asymétrie à droite
- Pour  $\beta < 0$ , il y a asymétrie à gauche

Le paramètre de localisation ( $\delta$ )

- Pour  $\alpha > 1$ ,  $\delta$  est l'espérance de la distribution
- Pour  $\alpha < 1$ ,  $\delta$  est un paramètre de position (la médiane si  $\beta=0$ )

Le paramètre d'échelle ( $\gamma$ )

- Pour  $\alpha = 2$  (loi normale),  $\gamma$  est la moitié de la variance du processus

Pour la loi normale centrée réduite, les paramètres sont :

$$\alpha = 2, \beta = 0, \gamma = 1/2, \delta = 0$$

Les distributions Pareto stables possèdent trois propriétés qui rendent leur utilisation très intéressante :

- les queues de distributions des lois stables suivent une loi de Pareto ;

- ces lois sont invariantes par l'addition<sup>21</sup>;
- elles sont les seules lois limites possibles pour la somme de variables iid.

### B. Tests sur la nature de la loi stable.

FAMA (1965) donne trois méthodes permettant de vérifier selon quelle loi stable une série est distribuée. Ces mesures consistent surtout en l'estimation du coefficient  $\alpha$  qui permet de choisir parmi l'infinité de lois stables existantes.

#### ***Méthode graphique.***

Si une variable aléatoire  $u$  suit une loi stable, alors ses queues de distribution sont telles que :

$$\begin{aligned} \Pr(u > \hat{u}) &\rightarrow (\hat{u}/U_1)^{-\alpha} & \hat{u} > 0 \\ \Pr(u < \hat{u}) &\rightarrow (|\hat{u}|/U_2)^{-\alpha} & \hat{u} < 0 \end{aligned}$$

où  $U_1$  et  $U_2$  sont des constantes

Il en est déduit

$$\begin{aligned} \text{Log } \Pr(u > \hat{u}) &\rightarrow -\alpha (\text{Log } \hat{u} - \text{Log } U_1) \\ \text{Log } \Pr(u < \hat{u}) &\rightarrow -\alpha (\text{Log } |\hat{u}| - \text{Log } U_2) \end{aligned}$$

Il suffit de représenter sur le graphique d'abscisse  $\text{Log } |\hat{u}|$  et d'ordonnées  $\text{Log } \Pr(u > \hat{u})$  et  $\text{Log } \Pr(u < \hat{u})$  les points pour des valeurs croissantes de  $|\hat{u}|$ . Au fur et à mesure que  $|\hat{u}|$  augmente, les points forment une droite. L'opposé de la pente de cette droite nous donne  $\alpha$ . Pour calculer ce coefficient, il faut fixer les valeurs des autres qui peuvent être  $\delta=0$ ,  $\beta=0$  et  $\gamma=1$  par exemple, ce qui est assez arbitraire.

Le problème est que pour des valeurs de  $\alpha$  proches de 2, il faut un échantillon de très grande taille pour éviter un biais. Par exemple si la valeur réelle de ce coefficient est de 1,9 il faut 2000 données pour que cette valeur soit perçue

---

<sup>21</sup> Dans le cas de l'addition de  $n$  variables iid suivant une loi stable, les paramètres restent les mêmes sauf  $\delta$  et  $\gamma$  qui sont multipliés par  $n$ .

graphiquement. Pour  $\alpha=1,99$  il faut un échantillon dont la taille excède 16667 données. Cette méthode semble donc adéquate pour de très grands échantillons ou pour détecter des valeurs de  $\alpha$  relativement faibles. Dans le cas contraire il subsiste un biais important dans le calcul de  $\alpha$ .

### *Analyse de l'étendue.*

Par la propriété d'invariance, la somme de  $n$  variables stables indépendantes est une variable stable avec un même coefficient  $\alpha$ . Cependant le coefficient d'échelle  $\gamma$  est changé. Pour conserver la même échelle<sup>22</sup>, il faut diviser chacune des variables sommées par  $n^{1/\alpha}$ . L'échelle d'une somme de variables stables non pondérées est donc  $n^{1/\alpha}$  fois l'échelle de chacune des variables. L'étendue interfractile<sup>23</sup> de la distribution de la somme de  $n$  variables stables indépendantes et de même échelle est donc donnée par :

$$R_n = n^{1/\alpha} R_1$$

où  $R_n$  est l'étendue interfractile de la somme des  $n$  variables  
 $R_1$  est l'étendue interfractile des variables non sommées

En résolvant ceci, il vient alors :

$$\alpha = \frac{\log n}{\log R_n - \log R_1}$$

Le calcul des différentes valeurs de  $\alpha$  peut s'effectuer en prenant plusieurs valeurs de  $n$  et différentes étendues interfractiles. Pour des données mensuelles, les étendues interfractiles de la distribution des variations de prix mensuelles peuvent se “comparer” aux étendues de la distribution des variations trimestrielles, semestrielles et annuelles. Afin d'obtenir une valeur unique de l'exposant caractéristique, il est possible ensuite de faire la moyenne (ou prendre la médiane)

---

<sup>22</sup> En effet il faut une variable telle que  $n\gamma|zt|^\alpha = \gamma|t|^\alpha$  On obtient  $z=n^{-1/\alpha}$

<sup>23</sup> FAMA(1965) donne comme intervalles :

Interquartile = fractile 0,75-fractile 0,25

Intersextile = fractile 0,83-fractile 0,17

Interdécile = fractile 0,9-fractile 0,1

fractile 0,95-fractile 0,05

fractile 0,98-fractile 0,02

des différentes valeurs de  $\alpha$  calculées et d'en tirer une indication sur la nature de la série étudiée. FAMA soulève le problème du biais entraîné par l'emploi de cette méthode sur une série autocorrélée.  $\alpha$  sera en effet sous-évalué (surévalué) en cas de dépendance positive (négative) ; il est donc nécessaire de vérifier l'absence de corrélation dans la série avant d'utiliser l'analyse d'étendue pour déterminer  $\alpha$ .

### *Calcul par la variance séquentielle.*

La variance théorique d'une variable suivant une loi stable est infinie dès que  $\alpha$  est inférieur à 2, mais il est possible de calculer la variance empirique. FAMA utilise une propriété qu'il démontre en annexe. Prenons le cas d'une variable  $z$  distribuée selon une loi stable de paramètre de localisation nul ( $\delta=0$ ). Nous savons (propriétés d'invariance par la somme) que les distributions de  $z^2$  et de la somme pondérée par  $n^{-2/\alpha}$  de  $n$  variables  $y_i$  élevées au carré sont alors identiques. La variance empirique  $S^2$  de  $y_i$  après transformation permet d'écrire :

$$S^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n y_i^2 = n^{-1+2/\alpha} \left( n^{-2/\alpha} \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) = n^{-1+2/\alpha} z$$

Il apparaît donc que la variance va croître avec la taille de l'échantillon. Supposons deux échantillons de dimensions respectives  $n_0$  et  $n_1$  (avec  $n_0 < n_1$ ) et d'écart-type respectifs  $S_0$  et  $S_1$ . La relation entre les deux variances empiriques est de la forme :

$$S_1^2 = S_0^2 \left( \frac{n_1}{n_0} \right)^{-1+2/\alpha}$$

De là,  $\alpha$  se déduit aisément :

$$\alpha = \frac{2 (\log n_1 - \log n_0)}{2 \log S_1^2 - 2 \log S_0^2 + \log n_1 - \log n_0}$$

Le problème va résider ici dans le choix arbitraire de  $n_0$  et  $n_1$ . Il faudra procéder par balayage en calculant  $\alpha$  pour différentes tailles des deux sous-échantillons.

Nous avons donc plusieurs méthodes permettant, sous l'hypothèse préalable que nous sommes en présence d'une variable distribuée selon une loi stable, de savoir si cette loi est le cas particulier de la loi normale ( $\alpha=2$ ) ou si nous sommes confrontés à une des lois stables dont l'utilisation demeure malheureusement bien difficile. Ces méthodes de calcul de  $\alpha$  restent assez frustrées mais permettent de préciser la valeur de l'exposant caractéristique.

En résumé, l'idée est que les lois stables permettent d'incorporer à l'étude des cours les valeurs extrêmes et de conserver une approximation statistique cohérente du processus. Certes la loi normale est plus simple à utiliser mais elle semble inadaptée dans certains cas. Et dans un schéma probabiliste, la question se pose de savoir quelle est la meilleure loi pour l'étude des séries boursières. Des modèles ont donc été élaborés pour s'adapter au profil souhaité : marche aléatoire et martingale. Nous allons maintenant présenter ces modèles très importants en finance.

## II. Un modèle pour les cours boursiers.

La question du modèle idéal de description des marchés a connu une réponse des plus rapides. En effet, dès 1990, BACHELIER développe le modèle appelé plus tard processus de WIENER ou mouvement brownien. Ce modèle adapté aux séries continues verra en la marche aléatoire son alter ego pour l'étude des séries en temps discret<sup>24</sup>.

### *1. La marche aléatoire.*

Un processus  $\{X_t\}$  est une marche aléatoire si :

$$X_{t+1} = X_t + \varepsilon_{t+1} \quad (1)$$

---

<sup>24</sup> Le passage de l'un à l'autre est expliqué par ROGER (1991).



$\varepsilon_t$  terme aléatoire indépendamment et identiquement distribué

Ce modèle statistique de l'évolution aléatoire des séries boursières est la traduction probabiliste de l'hypothèse de rationalité des investisseurs. Nous avons vu précédemment que les quantitativistes défendent cette hypothèse. Ils la traduisent en une forme testable, falsifiable pour se référer à la terminologie popérienne. WORKING (1934) et KENDALL (1953) sont, dans un premier temps, les principaux défenseurs de cette théorie. Cependant, la notion de marche aléatoire va être diversement interprétée dans l'histoire pour des raisons de commodités calculatoires ou afin de mieux cerner les résultats empiriquement constatés.

OSBORNE (1964) affirme qu'un actif financier suit une marche aléatoire si les innovations sont indépendantes et suivent une même distribution normale. Dans l'équation précédente cela signifie que  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc gaussien (noté également,  $\varepsilon_t$  est n.i.d<sup>25</sup>  $(0, \sigma^2)$ ).

FAMA (1963) reprend cette définition en supprimant la contrainte de normalité imposée jusqu'alors sur la loi de l'innovation. Il préconise pour cela l'emploi des lois stables de PARETO-LEVY ;  $\varepsilon_t$  doit alors être un bruit blanc. FAMA possède ici la même sensibilité que lorsqu'il donne la définition de l'efficience des marchés en 1970.

GRANGER et MORGENSTERN (1970) proposent une nouvelle définition qui est d'ailleurs la plus couramment utilisée actuellement (par exemple TAYLOR, 1986). Soit  $\{X_t\}$ , le processus stochastique définit par la relation (1). Il suit une marche aléatoire si et seulement si :

$$E(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_{t+\tau}) \quad \forall \tau, \text{ le nombre de période de décalage}$$

$$\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+\tau}) = 0 \quad \forall \tau \neq 0$$

L'abandon de l'hypothèse de normalité déjà posé par FAMA introduit une différence entre indépendance et nullité des autocovariances. La définition de GRANGER et MORGENSTERN est moins restrictive que celle de FAMA. Ils remplacent “distributions identiques” par “espérances identiques” et

---

<sup>25</sup> n.i.d. : normalement et identiquement distribué.

“indépendance” par “nullité des covariances”. Le caractère moins restrictif de cette définition permet de l'envisager comme un moyen de tester l'efficiencia au sens de JENSEN (1978) reprise d'ailleurs par FAMA en 1991. Cependant il faut interpréter la nullité en covariance avec une certaine prudence. En effet, si une série financière présente certaines de ces covariances empiriques non nulles, il faut regarder l'importance de ces covariances empiriques avant d'en déduire un rejet de l'efficiencia.

Le débat autour du modèle s'est concentré sur deux points. Premièrement, il est discuté de la pertinence de l'hypothèse de normalité. Celle-ci est rapidement remise en cause mais des tests fondés sur cette hypothèse sont toujours utilisés. Deuxièmement, l'indépendance de l'innovation (évolution aléatoire dans le temps) est le point le plus testé, le plus controversé. C'est pour cette raison que SAMUELSON (1965) a introduit l'étude des martingales en finance afin de proposer une nouvelle spécification testable de l'hypothèse de rationalité des investisseurs.

## *2. La martingale.*

LEROY (1989) explique que la marche aléatoire représente un modèle trop restrictif pour tester l'efficiencia des marchés. En effet, les caractéristiques de la marche aléatoire laissent peu de possibilité à celle-ci d'être générée par un modèle d'optimisation. La martingale permet justement une plus grande souplesse dans l'étude des marchés financiers tout en conservant les traits principaux du marché décrit par la marche aléatoire. Elle va permettre de se focaliser sur le fait que le cours présent est le meilleur prédictor du cours futur en éliminant les restrictions imposées par la marche aléatoire. Notamment, il ne sera rien spécifié quant aux moments de deuxième ordre. Un processus  $\{X_t\}$  est une martingale si :

$$E(X_{t+1}|\Phi_t) = X_t.$$

$\Phi_t$  est l'information disponible au temps  $t$ . Cela se traduit par la nullité en espérance de l'innovation conditionnellement à l'information  $\Phi_t$ . L'innovation est alors une différence de martingale :

$$E(X_{t+1}-X_t|\Phi_t) = E(\varepsilon_t|\Phi_t) = 0$$

Si le prix suit une martingale, aucune information n'est utilisable pour avoir une rentabilité anticipée non nulle (MANDELBROT, 1971). Le test de l'efficience des marchés va alors consister en la recherche d'une information que les investisseurs n'auraient pas intégrée dans leurs stratégies de prévision; par exemple, une information qui engendrerait une régularité dans le comportement de l'innovation. La martingale ne sera rejetée que s'il y a régularité dans le moment de premier ordre de l'innovation. Par opposition, la marche aléatoire suppose une indépendance vérifiable même en terme des moments d'ordre supérieur à un.

SAMUELSON pose les conditions sous lesquelles le modèle de martingale sera satisfaisant :

- préférences communes et constantes des agents
- probabilités communes sur les états futurs de la nature
- neutralité face au risque.

Une des critiques que LEROY (1989) adresse à la martingale est justement l'hypothèse de neutralité face au risque qu'elle nécessite. Il suppose que les agents ont plutôt une aversion pour le risque. En finance, depuis MARKOWITZ (1952), le principe de constitution d'un portefeuille par minimisation du risque pour une espérance de rentabilité donnée est la base de la majorité des théories. De plus une corrélation du moment d'ordre deux de l'innovation va engendrer un effet de grappe<sup>26</sup> (MANDELBROT, 1963). Dans le cas d'une augmentation du risque qui perdure, les investisseurs vont réclamer une rémunération plus élevée. Sur un marché inefficent, l'investisseur qui connaîtrait cette propriété de clustering (ignorée des autres) pourrait en profiter pour battre le marché. Aujourd'hui, pour sa simplicité et sa bonne approximation de la réalité, la martingale reste un modèle important dans le paradigme probabiliste en finance.

---

<sup>26</sup>Appelé également clustering : de larges (petites) variations des prix vont entraîner des variations de prix de mêmes grandeurs.

### *3. La sous-martingale.*

Un dernier modèle est utilisé en finance. Il s'agit de la sous-martingale qui permet de tenir compte de la rémunération minimale du risque qu'offre un actif risqué. Un processus  $\{X_t\}$  sera alors une sous-martingale si :

$$E(X_{t+1}|\Phi_t) \geq X_t.$$

$\Phi_t$  est l'information disponible au temps  $t$ . La sous-martingale est utilisée lorsqu'il est supposé qu'en espérance, l'actif risqué offre au moins le taux sans risque. L'espérance du prix futur de cet actif est alors le prix présent rémunéré au moins au taux sans risque. Ce modèle est nettement moins utilisé dans les travaux théoriques en finance.

Sur la base de ces modèles, différentes statistiques sont proposées afin de tester l'efficacité des marchés. Selon leur construction, les principaux tests porteront soit sur le modèle de la martingale, soit sur celui de la marche aléatoire. Nous les exposons succinctement car là n'est pas le but de ce travail. Cependant ils sont partie intégrante du paradigme probabiliste en finance.

### *4. Test de la marche aléatoire.*

Nous présentons ici quelques uns des principaux tests de l'hypothèse d'efficacité des marchés réalisés lorsque le modèle testable de cette hypothèse est la marche aléatoire.

#### **Test d'autocorrélation (test individuel)**

L'hypothèse d'efficience est respectée si l'innovation  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc. La manière la plus fréquente de le vérifier est de mesurer l'autocorrélation éventuelle dans le processus de l'innovation. L'autocorrélation du processus  $\varepsilon_t$  est de la forme :

$$\rho_\tau = \frac{\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+\tau})}{\sqrt{V(\varepsilon_t) V(\varepsilon_{t+\tau})}}$$

Quel que soit  $\tau$ , les propriétés asymptotiques de ce coefficient sont :

$$\sqrt{T-\tau} \rho_\tau \sim N(0,1)$$

Pour effectuer le test à l'ordre un, il suffit alors d'estimer empiriquement le coefficient d'autocorrélation et de tester l'hypothèse nulle  $\rho_1 = 0$  contre l'hypothèse alternative  $\rho_1 \neq 0$ . L'hypothèse nulle de bruit blanc sera acceptée si  $\sqrt{T}|\hat{\rho}_1| \leq 1,96$  au seuil de 5 % et rejetée sinon.

### Test “portmanteau”

BOX et PIERCE (1970) ont construit un test qui permet de tenir compte simultanément des corrélations de l'innovation pour plusieurs décalages. A la différence de la statistique élaborée précédemment, le test portmanteau intègre les corrélations jusqu'à  $k$  retards et est de la forme :

$$Q_k = T \sum_{\tau=1}^k \hat{\rho}_\tau^2$$

où  $T$  est le nombre d'observations  
 $\hat{\rho}_\tau$  est la corrélation empirique d'ordre  $\tau$

Étant donné la distribution des autocorrélations,  $Q_k$  suit ici une loi du  $\chi^2$  à  $k-1$  degrés de liberté. L'hypothèse nulle est ici l'indépendance de l'innovation contre l'hypothèse alternative de dépendance linéaire.

### Test du ratio de variance

Ce test, conçu par LO et MACKINLAY (1988), est basé sur le principe que la variance des différences des cours est une fonction linéaire de la période d'observation, c'est à dire :

$$\text{Var} (P_t - P_{t-\tau}) = \tau \text{Var} (P_t - P_{t-1})$$

En terme d'innovation :

$$\text{Var} \left( \Delta^\tau P \right) = \tau \text{Var} (\Delta P)$$

Ce test est calculé à partir du ratio des variances pour une différence des cours de une période et de  $\tau$  périodes et nécessite la construction de la statistique suivante :

$$M_r(\tau) = \frac{\hat{\sigma}_b(\tau)^2}{\hat{\sigma}_a^2} - 1$$

avec

$$\hat{\sigma}_a^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{k=1}^T \left( \Delta y_k - \hat{\mu} \right)^2$$

$$\hat{\sigma}_b(\tau)^2 = \frac{1}{\tau (T-\tau+1) \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)} \sum_{k=\tau}^T \left( \Delta^\tau y_k - \tau \hat{\mu} \right)^2$$

$\hat{\mu}$  est l'estimateur de la moyenne des différences.

En cas d'égalité des variances, la statistique  $M_r(\tau)$  est égale à zéro. Cette statistique suit loi normale d'espérance nulle et de variance  $[ 2(2\tau-1)(\tau-1)/3\tau ]$ . Elle est de la forme :

$$z_1(\tau) = \frac{\sqrt{n\tau} M_r(\tau)}{\sqrt{\frac{2(2\tau-1)(\tau-1)}{3\tau}}}$$

Cette dernière suit asymptotiquement une loi normale centrée réduite, le test de l'hypothèse nulle de bruit blanc est alors simple à composer. Cette hypothèse sera acceptée si  $z_1(\tau)$  est inférieur ou égal à 1,96 au seuil de 5 % et rejetée sinon.

Pour prendre en compte le cas où la distribution des innovations est hétéroscédastique, on modifie le test qui devient :

$$z_2(\tau) = \frac{M_r(\tau)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{\tau-1} \left[ \left( \frac{2(\tau-j)}{\tau} \right)^2 \widehat{\delta}(j) \right]}}$$

$\widehat{\delta}(j)$  est l'estimateur de la variance du coefficient d'autocorrélation de l'innovation d'ordre  $j$  :

$$\widehat{\delta}(j) = \frac{\sum_{k=j}^T (\Delta y_k - \widehat{\mu})^2 (\Delta y_{k-j} - \widehat{\mu})^2}{\left[ \sum_{k=1}^T (\Delta y_k - \widehat{\mu})^2 \right]^2}$$

Le test de LO et MACKINLAY peut être réalisé par le biais d'une combinaison linéaire des  $\tau-1$  premiers coefficients d'autocorrélation qui suit une loi normale centrée réduite et est de la forme :

$$M_r(\tau) = \frac{2}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau-1} (\tau-i) \widehat{\rho}_i$$

Le test est alors plus facilement utilisable. FONTAINE (1990a, 1990b) rappelle que ces tests sont plus puissants que le test de BOX-PIERCE notamment. Il montre également l'intérêt de l'emploi de ce test dans la recherche d'une réponse à la question de l'efficacité des marchés financiers.

Ces tests ont pour objet de vérifier la nature de bruit blanc de l'innovation et donc l'efficacité du marché qui est liée au fait que les cours suivent une marche aléatoire. Ils sont encore fréquemment utilisés (notamment le test d'autocorrélation). Cependant le modèle de martingale a supplanté, en théorie financière, celui de marche aléatoire. C'est pour cela que nous présentons maintenant un test de l'efficacité basé sur le modèle de la martingale.

### 5. Test de la martingale.

LEROY et PORTER (1981) et SHILLER (1981) ont proposé un test de l'efficience des marchés qui permet une nouvelle approche à partir du modèle de martingale. Nous reprenons le développement de LEROY et PORTER (1981).

Sous l'hypothèse de martingale (efficience des marchés) et en tenant compte des dividendes  $d_t$ , le prix d'un actif s'écrit alors :

$$p_t = \frac{E(p_{t+1} + d_{t+1} | \Phi_t)}{1+r}$$

$p_t$  peut alors être réécrit comme

$$p_t = \frac{p_{t+1} + d_{t+1} - \varepsilon_{t+1}}{1+r} \quad (1)$$

où :  $\varepsilon_{t+1} = p_{t+1} + d_{t+1} - E_t(p_{t+1} + d_{t+1})$

Ce qui devient si nous réécrivons l'équation (1) pour chaque période  $t+i$  :

$$\frac{p_{t+i}}{(1+r)^i} = \frac{p_{t+i+1} + d_{t+i+1} - \varepsilon_{t+i+1}}{(1+r)^{i+1}}$$

La sommation pour  $i$  allant de 1 à l'infini permet d'obtenir :

$$p_t^* = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{t+i}}{(1+r)^i} = p_t + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{t+i}}{(1+r)^i} = p_t + u_t$$

Dans un schéma tel que celui-ci,  $p_t^*$  est le prix qu'aurait l'actif si les dividendes futurs étaient connus avec certitude, et  $p_t$  est l'espérance conditionnelle de ce prix. De l'équation (1) il vient :

$$V(p_t^*) = V(p_t) + V(u_t)$$

De la propriété de positivité des variances, il découle :

$$V(p_t^*) \geq V(p_t)$$

La borne supérieure dépend uniquement du modèle de génération des dividendes. Il s'agit alors d'un test dont les résultats s'interprètent sans ambiguïté (LEROY, 1989).



Mais ce test va se heurter à plusieurs obstacles importants qui sont en premier lieu le problème inhérent au calcul de  $p_t^*$ . Ensuite, d'autres critiques contre ce test de "variance bornée" vont apparaître qui sont de différents ordres. FLAVIN (1983) estime qu'il est biaisé dans des petits échantillons. KLEIDON (1986) montre que ce test est biaisé même dans les échantillons de grande taille si le processus du dividende admet une racine unitaire. Pour cela supposons que les dividendes suivent un processus autorégressif d'ordre  $p$  de la forme :

$$d_t = \alpha_1 d_{t-1} + \dots + \alpha_p d_{t-p} + u_t \quad u_t \text{ est iid } (0, \sigma^2)$$

Cela peut s'écrire :

$$(1 - \alpha_1 L - \dots - \alpha_p L^p) d_t = \alpha(L) d_t = u_t$$

Le processus comprend une racine unitaire si l'une des racines du polynôme de retard  $\alpha(L)$  est non significativement différente de un. Le processus est alors non stationnaire.

La critique la plus véhémente va venir d'une hypothèse forte posée dans ces tests : la constance des rendements futurs anticipés paraît aujourd'hui devoir être abandonnée car trop simpliste et ne reflétant pas la réalité.

Ces tests doivent présenter des hypothèses alternatives afin de ne pas être de simples critiques de ce qui existe. TAYLOR (1986) cite notamment les modèles de variance dont nous donnons ici deux exemples.

### III Les modèles de variance.

Le modèle de martingale adopté maintenant en finance va permettre le développement d'un nouveau type de modèle en conformité avec l'efficacité. En effet la martingale ne suppose rien quant au moment de deuxième ordre du processus de l'innovation. C'est pour cela que plusieurs modèles vont formaliser les

cours boursiers en éliminant l'hypothèse de constance de la variance<sup>27</sup>. Plus ou moins complexes, ils sont fondés sur une analyse des cours en terme de probabilité.

### *1. Modèles de HSU (1977).*

HSU (1977) teste un modèle de variations de la variance par saut sur des données issues du Dow Jones. Supposons que l'innovation, conditionnellement à l'information, suit une loi normale d'espérance nulle et d'écart type  $v_t$ . Cette innovation va être de la forme :

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \sigma_1 U_t && \text{si } 1 \leq t \leq m \\ \varepsilon_t &= \sigma_2 U_t && \text{si } m+1 \leq t \leq T\end{aligned}$$

$U_t$  est un bruit blanc gaussien d'espérance nulle et de variance unitaire. HSU (1982) propose de déterminer la valeur de  $m$  qui caractérise le changement de comportement du phénomène par une analyse bayésienne (HSU, 1982).

L'innovation générée par un tel processus est non stationnaire en variance<sup>28</sup> et présente une corrélation nulle. Bien entendu une telle modélisation de la variance est assez simplificatrice et suppose de plus la normalité du processus. Cependant elle peut être un bon moyen de modéliser une série financière présentant un caractère non stationnaire. Une illustration en est l'historique des cours des actifs cotés sur toutes les places boursières mondiales et qui ont suivi une évolution beaucoup plus agitée dans les années quatre-vingts qu'au cours des années soixante-dix. Dans ce cas là, le modèle de HSU permettra d'étudier ces deux décennies de cours boursiers en une seule analyse avec  $\sigma_2$  plus élevé que  $\sigma_1$ . Cela évite de scinder la série sur laquelle un travail empirique est effectué. Cela permet alors de moins s'éloigner des résultats asymptotiques qui servent de normes à de nombreux tests.

---

<sup>27</sup> Ces travaux sont les prémisses des modèles ARCH présentés lors du chapitre suivant.

<sup>28</sup> La stationnarité en variance d'un processus suppose que son moment d'ordre deux soit fini. MONFORT et GOURIEROUX (1990, page 152) rappellent qu'un tel processus doit être homoscédastique (variance constante). La forme de l'hétéroscédasticité présente ici implique donc la non stationnarité.

## 2. Variances markoviennes.

Dans ce modèle, la variance de l'innovation évolue à chaque période selon un processus markovien, entre deux valeurs possibles. A chaque période il existe une probabilité  $\alpha$  que l'écart type de l'innovation reste le même d'une période à l'autre et  $(1-\alpha)$  qu'il vaille  $\sigma_1$  s'il valait  $\sigma_2$  (ou inversement). Il serait possible de postuler qu'une des valeurs reflète un marché calme alors que l'autre variance est celle d'un marché agité. Un tel processus est stationnaire, non corrélé et de variance égale à :

$$\frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Ce modèle outre sa spécification intéressante de la variance présente l'avantage de générer une série leptokurtique conforme à ce qui est généralement constaté sur les marchés financiers. En effet sa kurtosis est de :

$$k = 3 \left[ 1 + \frac{(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2} \right] > 3$$

Dans le cas présent, un modèle markovien simple de génération de la variance, permet de prendre en compte l'importance des queues de distribution (leptokurtosis) souvent observée sur les marchés financiers.

Certes ces modèles sont très simplificateurs de la réalité mais ils permettent de progresser en profitant des caractéristiques du modèle de martingale moins contraignant que celui de la marche aléatoire. Par exemple, HSU utilise son modèle sur le Dow Jones Industrial Average de juillet 1971 à août 1974 (données hebdomadaires). Il y est constaté une hausse significative de la variance à partir du milieu de mars 1973. HSU attribue ce changement à l'affaire Watergate révélée le 7 février 1973. Cette modélisation permet une approche intéressante car elle prend en compte un changement de structure au niveau de la volatilité sans obliger à scinder l'échantillon.

## **Conclusion**

L'investisseur rationnel reste l'hypothèse dominante en théorie financière et avec elle le modèle de la marche aléatoire puis de la martingale. Des premiers travaux de BACHELIER tout au début du siècle jusqu'aux articles de LEROY (1989) et FAMA (1991), la question de la rationalité des investisseurs a animé nombre de débats et de théories contradictoires. Cependant tout cela s'est effectué au sein du même paradigme probabiliste. Le modèle initial de BACHELIER a subi de nombreuses altérations depuis que KENDALL (1953) et OSBORNE (1964) l'ont remis au goût du jour. Ces remaniements ont permis une plus grande souplesse dans l'étude statistique des marchés financiers et ont offert à la théorie de l'efficience des marchés un modèle testable. Néanmoins, seules les modalités statistiques du phénomène, avec souvent comme résultat final une opposition entre investisseurs rationnels et investisseurs irrationnels, ont été considérées.

Une voie structurée de recherche s'est développée au sein de ce paradigme qui cherche à modéliser l'impact sur les prix d'investisseurs qui n'entrent dans aucune des deux classes habituellement recensées. Cela amène la prise en compte d'une diversité importante de types d'agents. Le prochain chapitre sera donc consacré à la présentation rapide des arbitragistes et des spéculateurs avant d'envisager plus profondément l'impact des bruiteurs (BLACK, 1986), qui sont rationnels mais mal informés, sur les marchés financiers.

## CHAPITRE 2 : BRUIT, SPECULATION ET SPECIALISTES.

L'analyse mathématique des marchés financiers est née avec BACHELIER en 1900 et avec lui s'impose rapidement le caractère supposé parfait de ces marchés modélisés par les notions de marche aléatoire et de martingale. Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, la discussion porte sur l'hypothèse de la rationalité des investisseurs.

Les tests et modèles proposés ont surtout cherché à examiner cette idée par le biais des statistiques mais sans jamais intégrer ce qu'est un investisseur rationnel et mal informé. La réponse paraissait simple : un tel individu, qui ne répond pas aux critères définis de rationalité (analyse complète et pertinente de toute l'information), est rapidement éliminé de la place financière du fait des pertes qu'il encourt suite aux erreurs de stratégie qu'il commet. Depuis la fin des années soixante-dix, une littérature de plus en plus abondante traite de ce sujet. Elle définit plusieurs types d'investisseurs tous rationnels mais qui se distinguent notamment par leur accès à l'information et par l'utilisation qu'ils en font. Cela permet d'envisager les marchés financiers autrement sans pour autant sacrifier l'hypothèse de rationalité des individus. De ces travaux sur les diverses manières de chercher et d'utiliser l'information, découle une nouvelle évolution du prix des actifs financiers qui reste décrite par des modèles probabilistes et s'intègre dans le paradigme dominant en finance. Ce chapitre traitera ces “nouveaux investisseurs”.

La première section présentera les principaux types d'investisseurs (arbitragistes, spéculateurs et bruiteurs) envisageables avec les caractéristiques qui leur sont propres. Nous insisterons sur les bruiteurs définis par BLACK en 1986 et dont la caractéristique principale est d'agir sans utiliser toute l'information ou en l'exploitant mais de manière non optimale et de transmettre au prix une information “bruitée”, imparfaite.

Des possibilités de modélisation de leurs comportements, notamment le modèle élaboré par DELONG, SHLEIFER, SUMMERS et WALDMANN en 1990, seront explicitées dans une seconde section. Nous verrons alors l'impact que ces

bruiteurs peuvent avoir sur l'évolution du prix des actifs financiers et l'imprécision des modèles classiques dans l'étude des prix sur un marché bruité.

### **Section 1. Une grande diversité de comportements.**

Jusqu'alors la littérature financière s'était bornée à débattre autour du modèle de l'investisseur rationnel. Ce dernier maîtrise toute l'information disponible et sait, par l'utilisation judicieuse des probabilités, déterminer la stratégie optimale à adopter face aux différents états du monde futur possible. Malheureusement les travaux et tests réalisés sur la base d'un tel comportement se sont avérés imprécis au moment de conclure. De nombreuses anomalies étaient détectées puis remises finalement en cause. Un changement important intervient lorsque de nouveaux comportements d'agents financiers sont envisagés. Dans cette section nous présentons les principales catégories d'investisseurs tels que les travaux les plus récents en finance nous permettent de l'entrevoir. Nous commencerons par l'arbitragiste qui semble être le descendant direct de l'investisseur rationnel jusqu'alors supposé être omniprésent sur les marchés. Puis nous présenterons le spéculateur et son rôle dans la détermination du prix d'équilibre. Nous terminerons par le "bruiteur". En effet, la définition qu'en donne BLACK (1986) laisse entrevoir d'importantes possibilités de représentation des marchés financiers. La relative imperfection caractérisant l'utilisation que ces investisseurs font de l'information permet d'englober de nombreux comportements que les théoriciens avaient du mal à conceptualiser jusqu'alors.

#### **I. L'arbitragiste.**

VONNEUMANN et MORGENSTERN (1953) définissent le choix rationnel d'un portefeuille d'actifs comme résultant d'un problème de maximisation d'une

espérance d'utilité fonction des taux de rentabilité futurs. La fonction d'utilité dépend des préférences de l'individu. Ceci peut tout à fait correspondre à un investisseur neutre face au risque et qui n'intègre donc pas ce dernier dans la détermination de sa fonction d'utilité. Cependant depuis les travaux de MARKOWITZ (1952), les stratégies théoriques d'investissement sont fondées sur une analyse espérance-variance du marché et en supposant l'aversion pour le risque. Cette analyse domine les études sur les marchés financiers et nous la reprenons pour caractériser l'arbitragiste. Il est l'investisseur très informé qui élabore sa stratégie en fonction de nombreux paramètres économiques, politiques et financiers tant au niveau international qu'à l'échelle de la firme dont il possède (ou désire posséder) une part des actifs. Il définit cette stratégie à l'aide de techniques économétriques, chartistes et d'analyse financière assez complexes. A l'aide de cette quantité importante d'informations, il intervient sur le marché financier à long terme en prenant des positions qui ajustent le risque de son portefeuille au niveau qu'il désire. Sa stratégie peut être résumée par une maximisation de la rentabilité anticipée sous la contrainte de risque minimal. Il est ce que KEYNES (1936) définit comme un "individu sérieux qui investit sur les anticipations du plus long terme qu'il puisse élaborer". Le fait qu'il agisse dans une stratégie de long terme implique qu'il détermine son action par rapport à la valeur fondamentale de l'actif que tôt ou tard le prix de l'actif considéré rejoindra. Il se rapproche en cela de la vision fondamentaliste des marchés financiers. Ainsi, lorsque le prix est inférieur à la valeur fondamentale estimée un tel investisseur sera acheteur net. Inversement lorsque le prix est supérieur à la valeur, il vendra afin d'anticiper la baisse prochaine du cours. Sa position gagnera en agressivité lorsque le prix s'écartera encore de la valeur fondamentale.

La gestion d'un portefeuille à long terme est telle que l'investisseur concerné ne cherche pas à battre le marché à court terme mais à obtenir une rentabilité désirée qui rémunère le risque qu'il prend. Il s'agit pour lui d'obtenir une rémunération au moins équivalente à celle qu'il réalise en investissant dans un actif sans risque plus une rémunération du risque pris en investissant une partie de son portefeuille dans des actifs risqués (le MEDAF est fondé sur cette maximisation de la rentabilité de l'investissement pour un risque donné).

Le spécialiste a un important besoin de s'informer et d'analyser cette information. Un tel investisseur s'entoure donc généralement de nombreux analystes qui dissèquent pour lui l'information. Le besoin même de recourir à une masse importante d'information pour se décider conforte l'hypothèse de risquophobie. En effet, l'arbitragiste décompose l'évolution future de l'actif entre une partie déterministe qu'il cherche à connaître et une partie aléatoire qu'il sait ne pouvoir complètement prendre en compte. La logique sous-jacente ici est que la part déterministe de l'évolution future du prix est une fonction positive de la quantité d'information analysée. Par cette démarche il prouve que l'importance de son intervention sur le marché des actifs risqués est d'autant plus forte qu'il arrive à éliminer l'aléa, donc le risque. D'ailleurs BAWA et KLEIN (1976) montrent que l'individu informé investira plus dans l'actif sans risque dès lors que la quantité d'information disponible décroît. Dans une telle situation la partie déterministe de l'évolution future est moindre et mieux vaut attendre d'être mieux informé avant de renforcer ses positions sur les actifs risqués.

SEYHUN (1990) décrit l'action des insiders<sup>29</sup> durant la période du krach d'octobre 1987. Ils sont les investisseurs les plus informés, au moins en ce qui concerne la firme qu'ils dirigent. SEYHUN constate qu'ils n'ont pas paniqué le 19 octobre 1987 même s'ils n'avaient pas anticipé le krach et qu'ils sont rapidement redevenus acheteurs nets d'actifs risqués. Ils avaient simplement constaté que le marché avait surréagi à la baisse et que cela entraînait une trop grande distorsion prix-valeur qui s'annulerait à plus ou moins long terme. SEYHUN montre également que les actifs dont le prix a le plus chuté durant la crise, ont eu de forts rendements dans la période qui a suivi. De plus, les actifs ayant eu les faveurs des dirigeants au lendemain du krach ont été plus rentables que les autres actifs. Cette étude du comportement d'investisseurs informés confirme qu'ils agissent à long terme sur des informations liées en majorité à la valeur de l'actif. Sur un marché où l'information paraissait faible et mauvaise, les dirigeants ont agi sur des critères "rationnels" économiques et financiers qui laissaient paraître le krach comme causé par la surréaction d'agents spéculateurs ou mal informés.

---

<sup>29</sup> SEYHUN (1986) définit les insiders comme regroupant les gros actionnaires, les membres du conseil d'administration, les présidents, les directeurs et les PDG.



Ce sont justement ces types d'investisseurs qui intéressent beaucoup les chercheurs en finance car leurs comportements peuvent expliquer certains phénomènes constatés sur les marchés (la survolatilité notamment) et que l'hypothèse d'agents parfaits ne parvient pas à expliquer.

## II. Le spéculateur.

La définition du spéculateur repose moins sur la nature de l'information qu'il utilise que sur son horizon et sa stratégie d'investissement. Supposons un marché composé uniquement d'investisseurs très informés et agissant dans le long terme. Les échanges seraient assez rares et causés simplement par un besoin d'adapter son portefeuille au risque créé par la nature informative du marché. HARRISON et KREPS (1978) définissent alors le comportement spéculatif par le fait d'être prêt à payer plus cher le droit de posséder un actif pour avoir le droit de le revendre au moment voulu. Le spéculateur agit donc à court terme dans le but de réaliser, après revente de l'actif, un profit immédiat.

Dans la définition que nous donnons du spéculateur, l'information utilisée dans l'élaboration de la stratégie n'est pas ici le critère discriminant. En effet, un spéculateur désire surtout un gain rapide. Surtout, s'il dispose de la même information que les spécialistes, il l'utilisera de manière différente car son objectif est de court terme. Il ne cherche pas à minimiser le risque encouru pour une espérance future désirée, il souhaite simplement maximiser l'espérance de rentabilité à court terme de son portefeuille. Une des stratégies traditionnellement évoquée en matière de spéculation est la stratégie des contraires. Le spéculateur agit sur le marché de manière opposée à celle de l'ensemble du marché. Il est vendeur net sur un marché haussier et inversement acheteur net sur un marché baissier. Cette vision quelque peu caricaturale met cependant en avant le caractère de franc-tireur attribué généralement au spéculateur. Il n'agit pas en conformité avec l'ensemble des investisseurs. L'attente du spéculateur est celle d'un rendement élevé à court terme.

A priori un tel investisseur déstabilise le marché par ses opérations à court terme dans lesquelles le lien économie-marché financier importe peu. Il est rationnel au sens de la maximisation de son espérance d'utilité mais avec une approche du marché différente de celle des investisseurs informés et risquophobes agissant à long terme par diversification du portefeuille.

SUMMERS (1986) explique que la différence entre le prix d'un actif et sa valeur fondamentale peut être durable sans que cette inefficience soit discernable par l'usage de tests économétriques classiques (autocorrélations...). Il impute cet écart à la présence de spéculateurs sur le marché qui agissent sans attendre obligatoirement que le prix se rapproche de la valeur qu'ils savent déterminer. La présence de spéculateurs sur un marché pourrait expliquer l'apparition de bulles spéculatives qui proviennent d'un écart durable entre prix et valeur d'un actif. Sur la base de cet article FAMA et FRENCH (1988b) établissent la notion de "mean reversion". Il serait alors possible de repérer la présence de spéculateurs par les autocorrélations des taux de rentabilité de long terme. Cependant, cette manière de démasquer la présence de spéculateurs sur un marché est très incertaine du fait de la difficulté d'estimer la valeur intrinsèque d'un actif et plus encore lorsqu'il s'agit d'un groupe d'actifs (portefeuilles, indices boursiers).

Un autre effet supposé de la présence de spéculateurs sur un marché financier est l'augmentation de la volatilité, donc du risque encouru par tous les investisseurs. SHILLER (1981) notamment constate que la volatilité présente sur les marchés financiers est trop forte pour provenir uniquement de l'arrivée de nouvelles informations affectant les dividendes futurs (par le biais de la valeur de la firme et de l'environnement économique). Pour cela, SHILLER utilise le test de martingale par la variance bornée. Il vérifie la trop forte volatilité qu'il impute aux spéculateurs. Cependant les problèmes liés à l'emploi du test de la variance bornée limitent les conclusions portées à l'encontre des spéculateurs.

Mais la trop importante volatilité des marchés peut être imputée à d'autres agents que les spéculateurs. LEROY et LACIVITA (1981) imputent cette volatilité aux agents risquophobes qui demandent un supplément important de rentabilité pour compenser le risque qu'ils prennent. Dans leurs simulations GROSSMAN et

SHILLER (1981) confortent cette idée. D'après leur modèle il faudrait une très forte aversion au risque des investisseurs pour expliquer la volatilité constatée sur les marchés financiers de 1889 à 1979.

D'un autre côté, certains défendent l'idée que c'est justement la présence de spéculateurs qui explique la forte volatilité des différentes places boursières mondiales. Les investisseurs neutres au risque, et agissant sans lien avec les réalités économiques, provoquent et profitent d'une évolution erratique des cours. S'ils sont très présents sur le marché, ils causent cette forte volatilité car leurs actions ne tendent en rien à rapprocher le prix de la valeur intrinsèque. De plus la recherche de profits à court terme amène un fort volume d'échange qui amplifie les mouvements du prix éventuellement autour de la valeur fondamentale. La question est donc de savoir s'il existe une différence entre un marché dominé par des spéculateurs et un marché dominé par des investisseurs risquophobes. ANG et SCHWARZ (1985) utilisent une méthode expérimentale pour y répondre considérant qu'une étude empirique des cours ne peut aider à connaître les responsables de la survolatilité constatée car elle oblige simultanément à <sup>30</sup>:

- Estimer l'attitude des investisseurs face au risque
- Vérifier le bien-fondé du modèle d'évaluation utilisé
- Tester l'efficience
- Mesurer le niveau de volatilité jugé comme correcte

Pour répondre à cela, ils réalisent une *expérience de laboratoire*. Ils sélectionnent 70 étudiants de la Florida State University. Leur attitude face au risque se détermine sur la base de tests psychologiques<sup>31</sup>. De ce groupe initial, deux groupes sont créés en fonction du niveau d'aversion au risque dont les étudiants ont fait preuve. ANG et SCHWARZ définissent le groupe des spéculateurs comme étant composé des éléments très faiblement averses au risque, voir neutres face au risque. Les participants reçoivent de l'information sous forme de cartes qu'ils sont seuls à connaître. Il se peut que rien n'apparaisse sur aucune carte à une certaine période, mais la distribution de cartes créé chez chacun l'illusion que les autres sont

---

<sup>30</sup> Contrairement à ANG et SCHWARZ nous pensons qu'il est possible d'intégrer cela dans une même étude en définissant un modèle complet de comportement.

<sup>31</sup> Les tests sont le "Jackson Personality Inventory" et le "Jackson, Houyrnay and Vidmar test".

peut-être plus informés. Le marché des spéculateurs apparaît effectivement plus volatil que le marché des risquophobes pour quatorze des vingt périodes que dure l'expérience : et ceci même avec la prime de risque demandée par les risquophobes. Ces derniers sont d'ailleurs très sensibles à l'état passé du marché puisqu'ils demandent une plus forte prime de risque consécutivement à un mauvais état du marché. Leur mémoire est plus longue que celle des spéculateurs qui réagissent, en termes de prime de risque, indifféremment à l'état passé du marché. Enfin, tout cela n'est aucunement lié aux volumes traités qui sont très proches sur les deux marchés.

Si la plus grande volatilité induite par les spéculateurs paraît logique, une nouvelle question se pose alors. Cette survolatilité de nature spéculative est-elle néfaste au marché? Il ressort de l'étude de ANG et SCHWARZ que plus les investisseurs sont informés plus ils possèdent d'actions à la fin des vingt périodes. Il ressort également que sur le marché spéculatif la répartition de la richesse se fait mieux que sur l'autre marché. En effet, sur le marché spéculatif, les détenteurs d'information arrivent à posséder plus d'actions que sur le marché des risquophobes c'est à dire qu'à la fin ils sont plus riches pour une dotation initiale identique. Le marché des agents risquophobes permet donc une moins bonne allocation des ressources. Le modèle de BEJA et GOLDMAN (1980) conforte cela en montrant qu'une convergence plus rapide du prix vers la valeur d'équilibre correspond à la présence de spéculateurs sur le marché.

Il existe, depuis le début des années quatre-vingts, un courant qui accorde aux spéculateurs la possibilité d'exister sur un marché sans que cela crée des dysfonctionnements comme ceux prévus par SUMMERS (1986). Les investisseurs neutres face au risque et dont la stratégie est élaborée à court terme ne nuisent pas obligatoirement au marché même si les fundamentalistes préfèrent imaginer un marché au sein duquel les échanges ont lieu entre personnes "rationnelles" fondant leur stratégie sur le long terme et dont l'action ramène le prix de l'actif à sa valeur d'équilibre. Il faut donc tenir compte de ces comportements qui peuvent tout à fait se fondre dans un marché efficient au sens de l'allocation des ressources. La spéculation a un aspect péjoratif depuis la crise de 1929 à Wall Street. Il ne faut pourtant pas oublier qu'étymologiquement spéculer signifie "observer" et que l'observation de toute information susceptible de présenter un quelconque intérêt est

un des fondements de la représentation du comportement de l'investisseur rationnel sur un marché efficient.

Enfin, une dernière catégorie d'agents rationnels mais à information plus limitée prend une part de plus en plus importante dans la littérature financière. Il s'agit des bruiteurs qui, comme nous allons le voir, ont un comportement excluant a priori toute possibilité de marché efficient à cause de leur manque d'information et de leur incapacité à maîtriser l'information qu'ils possèdent.

### III. Le bruiteur.

La possibilité de l'existence d'investisseurs rationnels autres que les investisseurs parfaitement informés, ou à la rigueur les spéculateurs, a longtemps heurté les financiers. En effet, l'analogie du marché boursier avec un marché de concurrence pure et parfaite aboutissant à un équilibre walrasien et une répartition optimale des ressources à l'équilibre est intéressante. Le modèle de marché efficient à investisseurs rationnels s'il peut être remis en cause lors de sa confrontation avec la réalité reste une excellente approximation de la réalité (FAMA, 1991). De plus les quantitativistes y trouvent un champ d'applications de nombreux modèles statistiques et économétriques. Il faut attendre l'article de BLACK (1986) pour que soit conceptualisée et acceptée la possibilité d'un investisseur rationnel en finance mais n'utilisant pas toute l'information parfaitement. Il s'agit du "noisy investor" que nous traduisons par bruiteur et dont le comportement suit une rationalité procédurale. Cette dénomination provient de la manière dont cet investisseur utilise ce qu'il croit être de l'information et les distorsions qu'il transmet au marché par ses interventions.

Nous présentons tout d'abord les travaux de KAHNEMAN et TVERSKY (1973, 1974) qui ont envisagé des comportements imparfaits lors de la prise de décisions en incertitude par l'utilisation de "règles de décisions". Nous abordons ensuite le phénomène de mimétisme sur les marchés financiers développé par ORLEAN en 1989 et qui est une autre possibilité pour analyser les comportements

d'agents imparfaits. Ces deux descriptions de l'imperfection de certains investisseurs sont certes très intéressantes mais réduisent cette imperfection à un point particulier du raisonnement des agents imparfaits. Les bruiteurs offrent justement l'avantage de ne pas restreindre l'analyse des investisseurs dont le manque d'information entraîne un comportement rationnel mais imparfait.

### *1. Les règles de décisions.*

Le problème de la prise de décision en incertitude a longtemps été réduit à la maximisation de l'espérance d'utilité numériquement estimable de l'individu. Les prévisions sont réalisées à l'aide de probabilités calculées avec toute l'information possible et en toute connaissance des différentes règles statistiques. Cette vision quelque peu idyllique du comportement des individus en incertitude est remise en cause par KAHNEMAN et TVERSKY (1973, 1974). Ils montrent, en effet, à l'aide d'expériences de laboratoires que l'élaboration des probabilités lors du choix en incertitude était plutôt mue par un besoin d'élaborer des règles de décision propres à l'individu et fondées sur les deux principes suivants :

(1) l'apparence du résultat : il doit y avoir ressemblance entre l'événement incertain étudié et la population d'événements possibles dont il est issu. L'événement à prévoir ne doit pas paraître incongru;

(2) la formation de l'événement : il doit refléter les caractéristiques principales du processus par lequel il a été généré. L'événement à prévoir doit se profiler selon un mécanisme connu.

Les auteurs montrent que les individus agissent surtout en fonction de représentations qu'ils se font de la réalité. Cela se réalise aux dépens de probabilités posées a priori. L'incertitude les entraîne donc à se créer leurs propres règles de décision. Leur choix s'effectue alors sans passer par le calcul de probabilités et quelquefois sans même insérer des probabilités a priori, qu'ils connaissent éventuellement. Ainsi, le choix est surtout fondé sur un consensus établi par la répétition de la décision à prendre en incertitude. C'est donc au fil du temps que les probabilités a priori perdent de l'importance au profit des règles de décisions.

Une autre caractéristique prépondérante est le manque d'informations qui les fait agir plus selon l'habitude que selon un raisonnement liant information et anticipation. Ils interprètent le processus qui génère l'événement incertain par habitude et non par une connaissance approfondie des mécanismes d'évolution de ce processus. Au niveau du marché financier cela signifie qu'ils ne sont pas en mesure de collecter et d'interpréter l'information pertinente et disponible. Une telle utilisation de l'information est coûteuse en temps et en argent et n'est permise qu'à une partie des acteurs du marché financier. Leur stratégie va s'avérer être une tentative d'imitation de l'action des personnes qu'ils jugent informées et donc leur caractère sera moutonnier. A partir de là, la notion de mimétisme est une possibilité d'explication d'une partie des intervenants sur les marchés financiers.

## *2. Le mimétisme.*

ORLEAN présente, en 1989, un modèle de mimétisme sur les marchés financiers. Dans ce modèle, les nouveaux arrivants sur un marché financier copient l'action d'investisseurs qu'ils jugent plus expérimentés. Cependant ils déterminent aléatoirement les investisseurs qu'ils copient. Il se peut tout à fait qu'ils copient le comportement d'un agent lui même mal informé. La reproduction de ce comportement peut induire l'irrationalité du marché, et un accroissement trop important d'agents dont la stratégie est en grande partie fondée sur le comportement de la majorité qui n'a alors pas obligatoirement raison. Ce modèle est donc un peu réducteur en raison de l'irrationalité qu'il suppose même s'il permet d'envisager le mécanisme mimétique comme une partie intégrante des stratégies développées sur les marchés financiers.

D'ailleurs, ORLEAN, en 1991, reprend l'idée de mimétisme mais définit cette interaction entre agents comme une "règle de connexion entre agents, rationnellement fondée". Il emploie également l'expression de "procédures rationnelles de révision des croyances personnelles". Cela va dans le sens du modèle de BIKHCHANDANI, HIRSHLEIFER et WELCH (1992) dans lequel le mimétisme n'est pas obligatoirement le reflet de comportements irrationnels. Il

signale juste le fait que les derniers intervenants sur un marché intègrent le comportement des autres investisseurs comme une information. C'est d'après ce schéma que ARTUS et KAABI (1993) décrivent un modèle théorique de mimétisme qu'ils appliquent à la structure des taux d'intérêt. Le mimétisme n'est donc pas incompatible avec la rationalité des investisseurs mais il suppose un manque d'information, ou un manque de confiance en sa propre information (petits intervenants par rapport aux gros investisseurs).

Le problème de ces modèles est la spécificité qu'ils déterminent dans la description des agents imparfaits. Que ce soit l'utilisation de règles de décision ou le phénomène de mimétisme, il n'est décrit qu'une partie des comportements qui sont alors généralisés comme explicatifs de toute l'imperfection de certains investisseurs. Or nous pensons que le manque d'information induit tout un ensemble de comportements. Pour cette raison, nous nous intéressons maintenant particulièrement aux bruiteurs définis par BLACK en 1986. Nous allons voir que cette définition regroupe tous les investisseurs qui manquent d'information : il peut alors en découler mimétisme, règles de décision, mais également bien d'autres particularités.

### *3. Les bruiteurs*

L'appellation de bruiteur est une traduction imparfaite de l'anglais "noisy investors" qui ne transmet que l'action qu'ont ces investisseurs sur le marché en faisant se mélanger bruit et information. Elle ne rend pas compte de la manière dont est issue leur stratégie par utilisation du bruit, c'est-à-dire de la mauvaise information, dans la prévision qu'ils font de l'évolution future des actifs financiers. Nous ferons référence à l'article de BLACK (1986) qui définit exactement ce qu'est le bruit en finance : ce qui rend les observations imparfaites, mais également ce qui permet d'observer des échanges sur le marché. S'il n'y avait pas de bruit sur les marchés, les gens se contenteraient de diversifier rationnellement leur portefeuille pour ajuster le risque à la rentabilité anticipée. Il y aurait alors peu de transactions. Or, il est justement constaté de forts volumes d'échanges quotidiennement sur les



marchés. D'après BLACK cette activité intense provient de la présence des bruiteurs ; sur la base d'informations pas toujours pertinentes, ils vont participer au marché en échangeant avec les investisseurs informés qui pensent profiter ainsi de l'erreur des bruiteurs. Ces derniers ne diversifient pas leur portefeuille qui se compose d'un nombre réduit d'actifs voir d'un seul (LEASE, LEWELLEN et SCHLARBAUM, 1974). S'ils voulaient diversifier, il suffirait, à leurs yeux, d'investir par le biais de SICAV ou de FCP. La présence des bruiteurs semble, de plus, intuitivement confirmée par le fait que si deux personnes ont exactement la même information et établissent les mêmes prévisions, il est assez paradoxal qu'elles agissent de manière contraire dans l'échange. Il faut donc qu'un des participants à l'échange ait une information différente de l'autre ou utilise différemment une même information.

Une première tentative de résolution de ce problème est due à GROSSMAN et STIGLITZ (1980) qui ont développé un modèle où interviennent à la fois des investisseurs informés et des non-informés. Ce modèle étudie surtout la façon dont l'information circule des premiers aux seconds. Supposons qu'il y ait deux actifs sur le marché. Un actif sans risque qui offre un taux de rentabilité  $R$ , et un actif risqué dont le taux de rentabilité  $u$  est composé d'une partie  $\theta$  observable au prix  $c$  (coût de l'information) et de  $\varepsilon$  qui est lui inobservable.

$$u = \theta + \varepsilon \quad (1.42)$$

Les informés observent  $\theta$  et agissent en fonction de cela et du prix  $P$  de l'actif. Les autres investisseurs, en revanche, ne connaissent que le prix de l'actif. A l'équilibre le marché se définit comme :

$$\lambda D_I(p, \theta) + (1-\lambda) D_U(p) = \text{Offre} \quad (1.43)$$

où :

$\lambda$  : part des investisseurs qui sont informés

$D_I$  : demande formulée par les agents informés

$D_U$  : demande formulée par les agents non informés

GROSSMAN et STIGLITZ établissent sept conjectures sur le rôle de l'information et la nature du marché dont certaines concernent plus ou moins directement les bruiteurs. La troisième conjecture dit que le nombre d'investisseurs informés est inversement proportionnel au coût de l'information. La recherche et

l'analyse de celle-ci, étant sur le marché des actions très coûteuses, justifient ici la présence d'un nombre important de bruiteurs sur le marché. De plus GROSSMAN et STIGLITZ expliquent qu'en l'absence de bruit, les prix refléteraient bien toute l'information (conjecture 7). Il n'y aurait alors aucun intérêt à faire des recherches par ailleurs.

Ainsi, dans le cas d'existence de bruiteurs, le marché devient moins informatif et il est payant d'être informé. Ces deux conjectures montrent bien qu'il est inévitable de trouver, sur le marché, des investisseurs mal informés (conjecture 3) et que ce soient eux qui répondent au paradoxe de la conjecture 7<sup>32</sup>. Il semble donc établi que cohabitent sur le marché des investisseurs qui sont informés et d'autres non.

L'échange se fera donc parce qu'un des participants possède une information différente de l'autre. Ceci est en contradiction d'ailleurs avec VARIAN (1985) qui estime que l'échange a lieu car, sur une même information, les opinions divergent. BLACK pense que cette différence d'opinion est justement le fait d'une différence d'information. Les acteurs du marché financier semblent en effet assez hétérogènes surtout dans les moyens qu'ils ont d'acquérir (analyse de BLACK) et d'interpréter (analyse de VARIAN) l'information. Aussi motivée soit-elle, la “veuve de Carpentras” pourra difficilement égaler la puissance analytique des plus importants investisseurs de la place financière parisienne. D'ailleurs, ayant conscience de cela, le bruiteur va chercher à connaître l'action des autres investisseurs.

Le bruiteur sera celui qui, interprétant ce qu'il croit être de l'information (trend, analyse technique simplifiée, action des autres investisseurs), va participer au marché financier dans l'espoir de réaliser un gain raisonnable d'après lui, car il l'aura réalisé autrement qu'à pile ou face. L'existence de nombreux ouvrages expliquant les règles de base pour battre le marché ou spéculer sans risque prouvent que les bruiteurs cherchent à s'informer. Ils ont donc bien l'impression de ne pas participer au tirage du LOTO, mais d'agir en fonction de techniques qui leur semblent éprouvées. Il est donc question de bruit dans le sens d'information

---

<sup>32</sup> Si tout le monde est informé, les prix comprennent toute l'information. Il n'est alors plus nécessaire de se documenter plus puisque la connaissance du prix suffit. Mais si personne ne s'informe, les prix n'intègrent alors plus d'information...

incomplète mais jugée comme suffisante autant que dans le sens de mauvaise information. Les bruiteurs utilisent des règles de décision qui les amènent à établir des liens de causalité non fondés. Cela peut par exemple se révéler être la recherche d'un trend dans les cours (le lien de causalité est alors établi entre les cours passés et le cours futur) que le bruiteur va suivre espérant ainsi battre le marché. Ce comportement moutonnier qui consiste à prendre le train en marche plutôt que d'anticiper l'évolution des prix par une analyse complète de l'information est une caractéristique du bruiteur. L'information qu'il utilise est donc bruyante. En effet, le trend qu'il suit, s'il existe réellement, est insuffisant car son existence depuis plusieurs jours n'est aucunement l'assurance de son existence future ; et surtout la stratégie que le bruiteur adopte, si elle est effectuée par un nombre important d'investisseurs, va générer son propre trend. Ce dernier totalement factice est l'œuvre unique des bruiteurs et est, à l'origine, la cause de leur intervention. Cet exemple met en lumière le fait que les bruiteurs peuvent dominer le marché, en volume de transactions et, sur la base d'une illusion qu'ils prennent pour de l'information, se conforter ensuite dans l'idée qu'ils agissent rationnellement. Il semble pourtant assez paradoxal que de tels investisseurs ne soient pas rapidement évincés du fait des erreurs de stratégies qu'ils commettent.

L'idée selon laquelle les bruiteurs sont éliminés plus ou moins rapidement a été longtemps soutenue par les principaux chercheurs qui semblaient trop attachés au modèle du marché efficient à investisseurs rationnels pour intégrer de tels comportements dans leurs études. FAMA (1965) défend l'idée selon laquelle les bruiteurs seront écartés du fait qu'ils agissent par erreur avec des arbitragistes qui ont raison puisqu'ils sont bien informés. Donc à terme ces arbitragistes élimineront les non informés. Cependant ce raisonnement n'est valable que si les bruiteurs n'effectuent qu'une part infime des transactions et que leur action n'est donc pas prépondérante. De plus un tel résultat n'est possible qu'en ignorant les attitudes face au risque de chacun des deux types d'investisseurs. La question est alors de savoir par quel moyen les arbitragistes risquophobes vont pouvoir éliminer les bruiteurs. Il semble justement qu'en prenant en compte la réaction au risque, la survie des bruiteurs soit tout à fait concevable. DELONG, SHLEIFER, SUMMERS et WALDMANN (1990) développent quatre arguments alternatifs qui tendent à aller à

l'encontre de cette croyance en l'élimination inéluctable des bruiteurs (repreant d'ailleurs les travaux de BLACK).

Le premier argument repose sur l'incapacité des arbitragistes à prendre des risques suffisants pour écarter les bruiteurs. CAMPBELL et KYLE (1987) montrent que, même en raisonnant à l'infini, les arbitragistes hésiteront à supporter le risque spécifique causé par leurs actions à court terme contre les bruiteurs. L'aversion au risque des investisseurs informés rationnels limite la puissance de leur action et rend plus longue et aléatoire l'éviction des bruiteurs.

Le second argument tient à l'hésitation à agir des arbitragistes face au trend que les bruiteurs génèrent sans en avoir conscience. En effet, les arbitragistes connaissant cela, hésitent à vendre lorsque les bruiteurs achètent sur un marché qu'ils poussent à être haussier, car ils risquent une perte d'opportunité en vendant trop tôt. Sur un marché efficient dominé par des investisseurs rationnels le retour inévitable du prix vers la valeur fait qu'un marché haussier ne peut l'être très longtemps. En revanche, la présence des bruiteurs laisse courir le risque que la hausse soit durable. La peur de cette perte freine considérablement le pouvoir des arbitragistes. Le raisonnement est symétrique dans le cas d'un marché baissier avec un prix inférieur à la valeur. Cependant il faut relativiser la portée de cet argument car l'intervention des agents informés est de plus en plus massive au fur et à mesure que l'écart prix-valeur augmente; ils savent qu'une telle anomalie économique ne peut perdurer du fait que la bourse est fortement liée au monde économique extérieur ce qui se traduit par un rapprochement inévitable du prix et de la valeur. BLACK estime, par exemple, que le prix évolue dans un intervalle allant de la moitié de la valeur à deux fois la valeur. Ce qui d'après lui serait vérifié empiriquement dans 90% des cas.

Le troisième argument est simplement que les bruiteurs provoquent leur propre risque par un changement aléatoire de leur opinion majoritaire. Puisqu'ils agissent sur du bruit, leurs réactions dans l'avenir restent impossibles à connaître par les arbitragistes qui eux agissent sur de l'information. L'argument précédent provient du fait que les bruiteurs peuvent amener les cours à conserver sur plusieurs périodes leur caractère haussier ou baissier. Mais il est tout aussi probable que leur

opinion change pour une raison que l'information utilisée par les arbitragistes ne pouvait laisser augurer. Le risque des bruiteurs est que leur action ne repose sur rien de prévisible par l'investisseur informé. Il empêche donc ce dernier d'agir contre le bruiteur.

Enfin, le dernier argument provient plus de la stratégie propre des bruiteurs que de l'action des arbitragistes. Les arbitragistes, risquophobes et bien informés, n'achètent pas d'actifs risqués ou bien demandent une prime de risque élevée. Les bruiteurs, non conscients de tous les risques par manque d'information, investissent, sans le savoir, dans des actifs risqués qu'ils ont eux-mêmes participé à rendre risqués.

Nous sommes donc en présence d'investisseurs qui, agissant sur du bruit, génèrent du risque donc une rentabilité supérieure dont ils sont les principaux bénéficiaires. Ce type d'investisseur est souvent identifié aux petits actionnaires qui sont limités dans leur capacité financière et temporelle pour la recherche d'information. Mais il est possible également d'y adjoindre les gestionnaires de SICAV. En effet, la peur de présenter des résultats inférieurs à ceux des gestionnaires concurrents peut les pousser à adopter un comportement moutonnier qui alimente, au même titre que les bruiteurs, le trend évoqué précédemment. Afin d'éviter la confusion nous engloberons sous la dénomination de bruiteurs tous les investisseurs qui ne peuvent posséder et utiliser toute l'information pertinente et disponible. Ils agissent alors de manière souvent moutonnière avec la certitude cependant de pouvoir battre le marché.

Depuis quelques années, il devient possible de concevoir sur les marchés financiers des agents rationnels n'utilisant pas l'information de manière optimale sans qu'ils soient pour autant rapidement éliminés. BLACK (1986) en posant la définition rigoureuse du bruiteur permet d'intégrer un tel type de comportement dans l'étude des marchés financiers. Cet investisseur nouveau vient en supplément du spéculateur qui, bien qu'envisagé plus tôt, est introduit timidement dans les modèles décrivant les prix des actifs financiers.

La section deux de ce chapitre consiste en la présentation du modèle probabiliste de DELONG, SHLEIFER, SUMMERS et WALDMAN (1990) incluant

les bruiteurs à travers un modèle de comportement permettant d'envisager leur impact sur les prix des actifs risqués.

## **Section 2. Un modèle de comportement avec bruit.**

DELONG, SHLEIFER, SUMMERS et WALDMAN (1989 et 1990)<sup>33</sup> ont élaboré un modèle sur le principe d'intégration des bruiteurs dans l'ensemble des investisseurs présents sur un marché. Sous certaines hypothèses, ils définissent un schéma d'évolution des prix qui permet de connaître l'effet de la présence des bruiteurs sur le prix d'un actif et les bénéfices qu'ils retirent de leurs opérations.

### **I. Hypothèses du modèle.**

DSSW considèrent des agents sur deux périodes. Pendant la première, les investisseurs constituent leur portefeuille à l'aide d'une dotation initiale dont la détermination est exogène au modèle. Leur seule décision est le choix de la nature de leur portefeuille. Lors de la seconde période, ils soldent leurs positions et mesurent alors la rentabilité de leur stratégie. Apparaissent alors des investisseurs que DSSW appellent jeunes car étant en période de choix de portefeuille. Nous considérons pour notre part qu'un investisseur ne solde pas obligatoirement son portefeuille en seconde période et qu'il se retrouve alors avec un capital (son portefeuille constitué lors de la période précédente) qu'il replace en réaménageant son portefeuille. Ces agents rationnels sont scindés en deux catégories distinctes : premièrement les investisseurs "sophistiqués" (notés  $i$ ) et deuxièmement les bruiteurs (notés  $n$ ). Les agents d'un même groupe sont identiques en termes de

---

<sup>33</sup> Nous les référencerons maintenant par DSSW.

stratégie. Les bruiteurs représentent une part  $\mu$  des investisseurs, les autres une part  $1-\mu$ . Les individus de chaque groupe maximisent leur espérance d'utilité.

Deux actifs sont disponibles sur ce marché. Un actif sans risque (noté  $s$ ) qui offre un dividende certain  $r$  qui est donc le taux sans risque ; l'offre de cet actif est parfaitement élastique et DSSW en fixent le prix à 1. L'autre actif est l'actif risqué (noté  $u$ ) dont l'offre n'est pas élastique ; il offre une rentabilité égale à  $r+\varepsilon$  où  $\varepsilon$  est une variable aléatoire distribuée selon une loi normale d'espérance nulle et de variance constante. DSSW (1990) présentent d'abord un modèle sans aléas sur le taux de rentabilité ( $\varepsilon=0$ ), puis étudient les implications d'un tel risque qu'ils supposent non corrélé, d'espérance nulle et de variance constante. Nous préférons intégrer directement le risque fondamental pour un modèle paraissant plus proche de la réalité. Le prix de cet actif risqué noté  $p_t$  constitue la variable dont l'évolution va être étudiée ici. La stratégie des investisseurs consiste surtout à déterminer la part d'actif sans risque qu'ils désirent mettre dans leur portefeuille. L'étude porte donc sur l'influence de l'action des bruiteurs sur le prix  $p_t$  de cet actif.

Les agents, quel que soit leur type, maximisent une fonction d'espérance d'utilité exprimée en termes d'espérance-variance où apparaît leur degré d'aversion pour le risque. Dans leur modèle DSSW supposent que le coefficient d'aversion au risque est le même pour tous. La différence entre les deux groupes d'investisseurs se situe uniquement au niveau de l'erreur commise par les bruiteurs dans l'appréciation de l'information et de ses conséquences sur la demande qu'ils expriment. Cette erreur sera considérée comme étant une variable aléatoire normale  $\rho_t$  d'espérance  $\rho^*$  et d'écart-type  $\sigma_\rho$ . L'espérance d'utilité est de la forme<sup>34</sup> :

$$\bar{w} - \gamma \sigma_w^2 \quad (1.44)$$

où  $\gamma$  est l'aversion absolue au risque

$\bar{w}$  est la richesse finale anticipée

L'espérance d'utilité est ainsi fonction positive de la richesse finale anticipée et négative du risque encouru.

## II. Détermination du prix d'équilibre.

---

<sup>34</sup> Avec une fonction d'utilité  $U$  égale à  $-e^{-2\gamma w}$  et sous l'hypothèse de normalité des rentabilités.

A partir des hypothèses explicitées précédemment, il est possible d'élaborer un modèle de détermination du prix d'équilibre de l'actif risqué. Il permet de voir l'évolution du prix dans le temps et l'influence que les bruiteurs peuvent avoir sur ce prix.

☞ Pour les investisseurs rationnels, la richesse finale anticipée est :

$$\bar{w} = \lambda_t^i [r + E(p_{t+1}) - p_t(1+r)] \quad (1.45)$$

$$\sigma_w^2 = (\lambda_t^i)^2 (\sigma_{p_{t+1}}^2 + \sigma_\varepsilon^2) \quad (1.46)$$

avec  $\sigma_\varepsilon^2$  est le risque fondamental ; C'est la variation des rentabilités de l'actif risqué causée par un changement dans sa valeur fondamentale  
 $\lambda_t^i$  est la quantité d'actif risqué demandée en t par les agents informés  
 $\sigma_{p_{t+1}}^2 = E_t \{ [p_{t+1} - E(p_{t+1})]^2 \}$  est l'espérance faite en t de la variance de P à la période suivante

L'investisseur rationnel exprime une demande telle qu'elle maximise la fonction d'espérance d'utilité suivante par rapport aux quantités demandées d'actifs risqués :

$$c_0 + \lambda_t^i [r + E(p_{t+1}) - p_t(1+r)] - \gamma (\lambda_t^i)^2 (\sigma_{p_{t+1}}^2 + \sigma_\varepsilon^2) \quad (1.47)$$

$c_0$  représente le revenu du travail issu de la période t

☞ De la même manière le bruiteur maximise une fonction de la forme :

$$c_0 + \lambda_t^n [r + E(p_{t+1}) - p_t(1+r)] - \gamma (\lambda_t^n)^2 (\sigma_{p_{t+1}}^2 + \sigma_\varepsilon^2) + \lambda_t^n \rho_t \quad (1.48)$$

avec  $\lambda_t^n$  : quantité d'actif risqué demandée en t par les bruiteurs  
 $\rho_t$  : erreur commise par le bruiteur au temps t.

La maximisation des fonctions d'espérance d'utilité respectives (équations (1.47) et (1.48)) permet alors d'obtenir les quantités pour chacun des deux types d'agents présents sur le marché.



$$\lambda_t^i = \frac{[r + E_t(p_{t+1}) - p_t(1+r)]}{2 \gamma \left( \sigma_{p_{t+1}}^2 + \sigma_\varepsilon^2 \right)} \quad (1.49)$$

$$\lambda_t^n = \frac{[r + E_t(p_{t+1}) - p_t(1+r)]}{2 \gamma \left( \sigma_{p_{t+1}}^2 + \sigma_\varepsilon^2 \right)} + \frac{\rho_t}{2 \gamma \left( \sigma_{p_{t+1}}^2 + \sigma_\varepsilon^2 \right)} \quad (1.50)$$

Les quantités demandées par les bruiteurs (1.50) sont identiques à celles demandées par les investisseurs informés (1.49) à l'exception du terme où apparaît l'erreur commise par les bruiteurs dans l'estimation du taux de rentabilité anticipé de l'actif risqué. Au dénominateur apparaît le risque fondamental lié à l'environnement économique et financier de l'actif et le risque induit par la présence des bruiteurs qui permettent au marché d'exister et de ne pas être figé. Comme nous l'avons vu précédemment, sans leur présence, le marché verrait de faibles transactions dues uniquement à l'ajustement des portefeuilles au risque fondamental. Le risque causé par les bruiteurs affecte leur propre stratégie et celle des autres investisseurs. Dans leur modèle sans risque fondamental, DSSW justifient le bien-fondé de la présence des bruiteurs par le fait qu'ils créent un risque empêchant les investisseurs d'être capables de prendre des positions infinies. Le risque induit par les bruiteurs empêche le prix de revenir rapidement à la valeur fondamentale.

Les demandes exprimées par chacun des types d'agents permettent de déduire le mécanisme d'évolution du prix d'équilibre de l'actif risqué. En reprenant les équations (1.49) et (1.50) pour les sommer afin de déterminer la demande totale et en posant  $(1-\mu) \lambda^i + \mu \lambda^n = 1$ <sup>35</sup>, il vient :

$$p_t = \frac{1}{1+r} \left[ r + E_t(p_{t+1}) - 2 \gamma \left( \sigma_{p_{t+1}}^2 + \sigma_\varepsilon^2 \right) + \mu \rho_t \right] \quad (1.51)$$

En  $t+1$ , en termes d'espérance conditionnelle, et en supposant que la variance du prix est une constante (non dépendante du temps) :

$$E_t(p_{t+1}) = \frac{1}{1+r} \left[ r + E_{t+1}(p_{t+2}) - 2 \gamma \left( \sigma_p^2 + \sigma_\varepsilon^2 \right) + \mu \rho_{t+1} \right] \quad (1.52)$$

---

<sup>35</sup> Cette relation est une conséquence de l'hypothèse selon laquelle les investisseurs vendent en  $t$  tous leurs actifs en  $t+1$ . Ils ne sortent pas obligatoirement du marché mais en l'absence de coût de transaction certains vendent et rachètent simultanément leur portefeuille (opération blanche en réalité justifiée par les hypothèses théoriques du modèle de DSSW).

Il se déduit alors aisément :

$$\frac{(1+r) E_t(p_{t+1}) - E_{t+1}(p_{t+2})}{r} = 1 - \frac{2 \gamma (\sigma_p^2 + \sigma_\varepsilon^2) - \mu \rho_{t+1}}{r} \quad (1.53)$$

Donc :

$$E_t(p_{t+1}) + \frac{1}{r} [E_t(p_{t+1}) - E_{t+1}(p_{t+2})] = 1 - \frac{2 \gamma (\sigma_p^2 + \sigma_\varepsilon^2) - \mu \rho_{t+1}}{r} \quad (1.54)$$

En prenant l'espérance non conditionnelle, il est possible d'écrire :

$$E(p_{t+1}) = 1 - \frac{2 \gamma (\sigma_p^2 + \sigma_\varepsilon^2) - \mu \rho^*}{r} \quad (1.55)$$

En remplaçant cette valeur dans l'équation (1.51), on a une représentation de l'évolution du prix de l'actif risqué qui met en avant le rôle des bruiteurs :

$$p_t = 1 + \frac{\mu (\rho_t - \rho^*)}{1+r} + \frac{\mu \rho^*}{r} - \frac{2 \gamma}{r} (\sigma_{p_{t+1}}^2 + \sigma_\varepsilon^2) \quad (1.56)$$

La variance causée par la présence des bruiteurs peut être établie en fonction des caractéristiques de l'erreur commise par ces investisseurs :

$$\sigma_{p_{t+1}}^2 = \frac{\mu^2 \sigma_\rho^2}{(1+r)^2} \quad (1.57)$$

DSSW définissent ainsi l'évolution du prix de l'actif risqué en fonction de données qui permettent de mesurer l'impact des bruiteurs sur le marché :

$$\boxed{p_t = 1 + \frac{\mu (\rho_t - \rho^*)}{1+r} + \frac{\mu \rho^*}{r} - \frac{2 \gamma}{r} \left( \frac{\mu^2 \sigma_\rho^2}{(1+r)^2} + \sigma_\varepsilon^2 \right)} \quad (1.58)$$

Le deuxième terme de cette équation prend en compte le rôle du changement dans la nature de l'erreur d'appréciation des bruiteurs sur le prix de l'actif risqué. Par exemple si les bruiteurs estiment que le prix doit encore monter (du moins si leur optimisme est supérieur à l'erreur moyenne qu'ils commettent habituellement) ils pousseront le prix à la hausse, et ce d'autant plus fortement que leur présence sur le marché ( $\mu$ ) est importante.

Le troisième terme rend le prix de l'actif risqué fonction de la vision moyenne du marché qu'ont les bruiteurs. S'ils sont généralement optimistes ( $\rho^* > 0$ ), ils poussent le prix à être surévalué par rapport à son cours normal en l'absence de bruiteurs.

Enfin le dernier terme est considéré par DSSW comme le point le plus important de cette équation. Négligeons le risque fondamental pour insister sur le risque induit par les bruiteurs. Ce dernier consiste surtout en l'impossibilité de prévoir la réaction des bruiteurs dans le futur. Par exemple si ceux-ci poussent depuis plusieurs périodes le prix à la hausse, rien ne permet de dire que demain ils continueront cette action ou qu'ils changeront radicalement de comportement et influenceront le prix à la baisse. En effet, l'utilisation qu'ils font de l'information dont ils disposent ne leur est même pas connue à l'avance. Ce dernier terme met donc en valeur le fait qu'outre le risque fondamental, il existe un risque qui entraîne le prix à la baisse. Plus exactement les investisseurs confrontés à ces deux risques veulent payer moins cher l'actif risqué afin d'obtenir de plus forts rendements et ainsi compenser le risque qu'ils prennent. DSSW montrent que même en l'absence de risque fondamental ( $\sigma_\varepsilon = 0$ ), les bruiteurs créent leur propre "espace", c'est-à-dire qu'ils induisent par leur action un risque empêchant les investisseurs informés de les chasser du marché. Une autre raison de l'impossibilité de voir les bruiteurs disparaître du marché est que leurs erreurs leur procurent une rentabilité plus élevée que pour les investisseurs informés.

### III. Différence de rentabilité selon la stratégie.

Dans le modèle de DSSW aucune différence entre les types d'investisseurs ne dépend de l'attitude face au risque. La différence de rentabilité ( $\Delta R_{n-i}$ ) sera donc issue de la position prise sur l'actif risqué du fait de la mauvaise information qu'utilisent les bruiteurs. Elle sera de la forme :

$$\Delta R_{n-i} = \left( \lambda_t^n - \lambda_t^i \right) \left[ r + p_{t+1} - p_t (1 + r) \right] \quad (1.59)$$

$$\text{avec } \lambda_t^n - \lambda_t^i = \frac{\rho_t}{2 \gamma_t \sigma_{p_{t+1}}^2} \quad (1.60)$$

L'espérance conditionnelle du taux de rentabilité de l'actif risqué est :

$$E_t[r + p_{t+1} - p_t(1+r)] = r + E_t(p_{t+1}) - E_t(p_t(1+r)) \quad (1.61)$$

Or, nous avons vu précédemment (équation 1.53) que :

$$(1+r) E_t(p_{t+1}) - E_{t+1}(p_{t+2}) = r - 2 \gamma \left( \sigma_p^2 + \sigma_\varepsilon^2 \right) - \mu \rho_t \quad (1.62)$$

Par analogie :

$$E_t[r + p_{t+1} - p_t(1+r)] = 2 \gamma_t \sigma_{p_{t+1}}^2 - \mu \rho_t \quad (1.63)$$

Il est alors possible de calculer l'espérance conditionnelle de la différence de revenu entre les bruiteurs et les investisseurs informés :

$$E_t(\Delta R_{n-1}) = \frac{\rho_t}{2 \gamma_t \sigma_{p_{t+1}}^2} \left( 2 \gamma_t \sigma_{p_{t+1}}^2 - \mu \rho_t \right) = \rho_t - \frac{\mu \rho_t^2}{2 \gamma_t \sigma_{p_{t+1}}^2} \quad (1.64)$$

L'espérance de gain supplémentaire des bruiteurs s'écrit alors :

$$E(\Delta R_{n-1}) = \rho^* - \frac{\mu E(\rho_t^2)}{2 \gamma_t \sigma_{p_{t+1}}^2} = \rho^* - \frac{\mu \left[ (\rho^*)^2 + \sigma_\rho^2 \right]}{2 \gamma \left[ \frac{\mu^2 \sigma_\rho^2}{(1+r)^2} + \sigma_\varepsilon^2 \right]} \quad (1.65)$$

$$E(\Delta R_{n-1}) = \rho^* - \frac{\left[ (\rho^*)^2 + \sigma_\rho^2 \right]}{2 \gamma \left[ \frac{\mu \sigma_\rho^2}{(1+r)^2} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\mu} \right]} \quad (1.66)$$

Le premier terme de l'équation (1.66) montre clairement que les bruiteurs seront d'autant plus bénéficiaires du bruit qu'ils introduisent sur le marché que celui-ci est élevé et positif (optimisme). Plus ces investisseurs sont confiants en l'avenir plus les distorsions qu'ils introduisent sur le marché les confortent dans leurs choix erronés. Le paradoxe est là. Plus ils introduisent de la mauvaise information (si elle est optimiste) plus ils bénéficient des réactions du marché à cette mauvaise information. Ils achètent plus d'actifs risqués ( $\lambda^n > \lambda^i$ ) sur la base de mauvaises informations (*hold more effect*), mais ce risque qu'ils prennent est rémunéré. De

plus leur optimisme pousse le prix à la hausse. Ainsi, dans le cas où tous les investisseurs ont un horizon limité, les bruiteurs seront présents sur le marché car ils bénéficient des erreurs d'appréciation qu'ils font commettre à l'ensemble des investisseurs.

Le dénominateur du second terme de l'équation (1.66) prend en compte le fait que les bruiteurs en créant du risque propre à leur action se préservent des investisseurs informés. Ceux-ci étant risquophobes, ils hésitent à prendre des positions qui certes réduiraient le pouvoir des bruiteurs mais leur ferait courir des risques importants (*create space effect*). Ce risque vient s'ajouter au risque fondamental qui déjà affaiblit l'action des investisseurs informés. Pour l'instant l'action des bruiteurs semble être bénéfique sans limites. Alors pourquoi s'informer encore?

Les termes du numérateur du second membre de l'équation (1.66) représentent les limites du champ d'action des bruiteurs. Le premier terme au numérateur indique simplement que plus les bruiteurs achètent d'actifs risqués (plus ils sont optimistes) plus ils réduisent la rentabilité qui y est attachée (*price pressure effect*). Le second terme fait apparaître que plus la variabilité des croyances des bruiteurs est importante moins leur action leur est profitable car elle devient aléatoire même pour eux. La variabilité signifie également qu'ils achètent d'autant plus que d'autres bruiteurs achètent. Leur action étant guidée par une mauvaise information, les erreurs de stratégie seront d'autant plus graves qu'ils seront nombreux à les commettre (*Friedman effect*).

La position des bruiteurs dépend donc de facteurs qui se neutralisent, ou plus exactement qui agissent simultanément mais dans des directions opposées. Cela dépend de la valeur des paramètres du modèle. Il existe un intervalle de croyance des bruiteurs ( $\rho^*$ ) qui amène les bruiteurs à bénéficier de taux de rentabilité supérieurs à ceux des investisseurs informés. Il faut que  $\rho^*$  soit positif, donc que l'optimisme des bruiteurs entraîne le prix à la hausse, mais pas trop afin d'éviter la pression des prix qui diminue la rentabilité liée (*price pressure effect*,  $\rho^{*2}$ ). Les bruiteurs seront d'autant plus bénéficiaires que les agents seront risquophobes ( $\gamma$  apparaît au dénominateur).

#### IV. Les bruiteurs et l'évolution des prix.

Supposons l'absence de risque fondamental afin de mettre en évidence la volatilité induite par les bruiteurs. En l'absence de bruiteurs, le prix de  $u$  (actif risqué) est constant et égal à 1. Maintenant si une partie  $\mu$  des investisseurs est source de bruit alors nous avons vu précédemment que :

$$p_t = 1 + \frac{\mu}{1+r} (\rho_t - \rho^*) + \frac{\mu \rho^*}{r} - \frac{2}{r} \gamma \left( \frac{\mu^2 \sigma_\rho^2}{(1+r)^2} \right) \quad (1.67)$$

Les bruiteurs vont induire une variabilité du prix que les fondamentaux ne justifient pas (et pour cause, il n'existe pas dans ce cas de volatilité fondamentale). Cette variabilité excessive est de la forme :

$$\text{Var}(p_t) = \left( \frac{\mu}{1+r} \right)^2 \sigma_\rho^2 \quad (1.68)$$

L'arrivée de nouvelles informations ne justifie pas l'incertitude entourant le prix de l'actif. De SHILLER (1981) jusqu'à CAMPBELL et KYLE (1987), de nombreux travaux portant sur différents marchés financiers ont montré la présence d'une volatilité trop importante au regard de la valeur fondamentale. Ainsi, dans l'expression précédente, cette volatilité "bruyante" sera d'autant plus élevée que les bruiteurs seront nombreux (en proportion) sur le marché. Le caractère moutonnier les amène à agir de concert même dans de mauvaises directions. Or dans ce cas les investisseurs informés sont peu enclins à se positionner en contrepartie de l'échange avec les bruiteurs. Le mouvement de prix est alors très important, expliquant la forte volatilité des cours. Signalons également que cette dernière sera d'autant plus élevée que la variance du processus d'erreur commise par les bruiteurs est forte et que cela nuira à l'intervention des investisseurs rationnels.

#### V. Ouvertures statistiques possibles du modèle de DSSW.

L'étude statistique des phénomènes boursiers s'effectue souvent par le biais de l'innovation du processus. Dans le cas présent, elle s'écrit :

$$\varepsilon_t = p_t - p_{t-1} = \frac{\mu (\rho_t - \rho_{t-1})}{1+r} \quad (1.69)$$

Une des premières manières de tester la marche aléatoire consiste en l'étude des autocorrélations du processus d'innovation qui dans le cas présent est :

$$\text{Corr}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = \frac{\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1})}{\text{Var}(\varepsilon_t)} = \frac{-\left(\frac{\mu}{1+r}\right)^2 E[(\rho_t - \rho_{t-1})(\rho_{t-1} - \rho_{t-2})]}{\left(\frac{\mu}{1+r}\right)^2 [V(\rho_t) + V(\rho_{t-1}) - 2 \text{Cov}(\rho_t, \rho_{t-1})]} \quad (1.72)$$

$$\text{Corr}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = -\frac{E(\rho_t^2)}{2\sigma_\rho^2} = -\frac{\sigma_\rho^2 + \rho^{*2}}{2\sigma_\rho^2} \quad (1.71)$$

Donc, dans ce schéma, la présence de bruiteurs est facilement détectable par la présence d'autocorrélation dans l'innovation et nous serions ainsi à même de discriminer entre un marché parfait et un marché bruité. Le problème, non soulevé par DSSW qui ne lient pas bruiteurs et efficience dans leur article, réside dans le fait que les bruiteurs sont des agents rationnels. Or, dans le cas présent, il est impossible de choisir d'après la valeur de l'autocorrélation entre la présence de bruiteurs et la présence d'agents irrationnels.

Il faut noter également que l'impact de l'action des bruiteurs va varier avec la proportion de bruiteurs présents sur le marché ( $\mu$ ), leur nature tantôt optimiste, tantôt pessimiste ( $\rho^*$ ) et le changement de comportement par rapport à leur nature de base ( $\rho_t - \rho^*$  et  $\sigma_\rho$ ). Ces paramètres, fixes dans le modèle de DSSW, pourraient être posés comme variables et induire alors une meilleure prise en compte de la volatilité causée par le comportement des bruiteurs. Nous pensons notamment à la volatilité du processus qui, si elle était variable dans le modèle, permettrait sans doute une meilleure approche de l'impact des bruiteurs sur le marché. Une telle modélisation de la volatilité serait, en effet, mieux à même de rendre compte des

phénomènes moutonniers liés aux bruiteurs notamment de la force irrégulière de leurs interventions.

## VI. Quelle stratégie adopter en présence de bruiteurs ?

La présence de bruiteurs dont l'action est totalement imprévisible et d'investisseurs parfaitement informés dont l'action tend à rapprocher le prix de la valeur fondamentale est créatrice d'évolutions particulières du prix. Les bruiteurs guidés par exemple par un fort optimisme génèrent un marché haussier dont ils profitent. Cependant les investisseurs rationnels agissent en pensant que le prix va à plus ou moins long terme retourner à sa valeur fondamentale. La stratégie ne consiste plus alors simplement à diversifier son portefeuille mais à agir a contrario des bruiteurs (*market timing strategy*). Les investisseurs informés vont acheter lorsque les prix ont fortement baissé (et inversement après une forte hausse) espérant un retournement prochain de situation. C'est typiquement la stratégie prônée dès le début du siècle par les fundamentalistes. A long terme une telle stratégie rapportera à son initiateur. Cependant les faits (notés par DSSW) ont montré dans un passé récent qu'un tel retournement de situation pouvait se faire attendre et remettre en cause l'intérêt d'une telle stratégie pour les investisseurs informés. L'exemple du dollar dans le milieu des années quatre-vingt est le plus marquant. Le problème est que si le prix d'un actif semble surévalué aujourd'hui, rien ne prouve qu'il ne sera pas encore plus cher dans quelque temps. Si les investisseurs rationnels ont un horizon relativement limité, ils n'oseront pas prendre le risque d'agir à l'inverse des bruiteurs. Ils seront en revanche efficaces si leur horizon tend à l'infini, où le retour à la valeur fondamentale est obligé. Il semble que sur les marchés aujourd'hui l'horizon de la grande majorité des investisseurs soit limité à quelques mois, voire une ou deux années pour les plus rationnels d'entre eux.

Une autre manière de tenir compte des bruiteurs dans l'élaboration d'une stratégie est d'utiliser les mêmes sources d'information qu'eux (chartisme, études des volumes d'échange...) ou de les utiliser pour discerner leur caractère moutonnier.



SHLEIFER et VISHNY (1990) montrent qu'une telle attitude sera plus bénéfique que d'attendre le retour à la valeur fondamentale. Cependant, à l'inverse de DSSW, nous pensons que si les investisseurs informés utilisent le bruit créé par les bruiteurs pour éliminer cette distorsion, ils risquent au contraire de contribuer à la renforcer. Car même si leur stratégie est d'éviter de suivre aveuglément les bruiteurs, ils font cela en étudiant le bruit comme information. Certes ils sont conscients que ce n'est que du bruit et non de l'information, mais ils l'utilisent dans l'élaboration de leur stratégie. Il semble donc qu'une attitude rationnelle à long terme serait de profiter du retour inévitable du prix vers la valeur fondamentale, mais que l'horizon limité de nombreux investisseurs empêche que cette stratégie soit appliquée.

Le modèle de DSSW est un des exemples les plus complets de ce que l'introduction des bruiteurs dans la modélisation des prix des actifs financiers permet. Dans ce modèle la présence des bruiteurs explique notamment la forte volatilité constatée plusieurs fois empiriquement. L'introduction d'une mauvaise utilisation de l'information va amener le prix à s'écarter durablement de sa valeur fondamentale ce qui contredit la vision du marché efficient selon les quantitativistes et les fondamentalistes. Le modèle de DSSW intègre dans le processus de génération du prix de l'actif risqué des variables telles que la proportion de bruiteurs parmi les acteurs du marché, la nature de leur croyance en général (et à une époque t particulière) ainsi que la volatilité induite par leur présence. Il permet également de mesurer sous quelles conditions les bruiteurs réaliseront des bénéfices substantiels leur évitant d'être éliminés du marché. Cela est expliqué par plusieurs propriétés comme la création de leur propre espace de risque ou le fait de posséder plus d'actifs risqués. En contrepartie leur action est limitée par l'effet Friedman et l'effet pression des prix qui minore leur performance. Ces quatre particularités de l'action des bruiteurs apparaissent clairement dans le modèle.

Cependant le modèle de DSSW ne permet aucune explication quant à la nature de l'autocorrélation présente dans le résidu et sa provenance (bruiteurs ou investisseurs irrationnels) ce qui est une gêne importante dans le cas d'une étude empirique sur les marchés boursiers. De plus, il ne permet pas une analyse de la volatilité et de son évolution dans le temps.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une avancée importante dans l'étude et la modélisation des comportements des agents financiers. Avant l'article de BLACK (1986) seul le comportement de l'investisseur rationnel diversifiant son portefeuille pour l'adapter au risque était conceptualisé. En face de cela il n'existait que le comportement "non rationnel" dont les contours n'étaient pas clairement définis. Le test de l'efficacité des marchés amenait les financiers à s'interroger uniquement sur l'existence ou non de ce marché idéal. Le spéculateur a été introduit dans les travaux financiers afin d'expliquer la forte volatilité des marchés par l'horizon limité des spéculateurs notamment et pour être plus réaliste dans la description des marchés. Rien n'est réellement spécifié quant à la manière dont ces investisseurs collectent et utilisent l'information. SUMMERS (1986), par exemple, définit les spéculateurs comme des individus ne se souciant pas des réalités économiques. Le spéculateur est donc une personne qui privilégie l'action à très court terme. La question majeure est alors de chercher à savoir si cela est nuisible au marché. ANG et SCHWARZ (1985) répondent par la négative. La spéculation permet une convergence plus rapide vers le prix d'équilibre et une meilleure allocation des ressources. Une fois encore, un bon fonctionnement du marché est obtenu, et ce malgré la forte volatilité induite par les spéculateurs. Il semble donc que des anomalies soient régulièrement constatées sur les marchés boursiers et que les spéculateurs n'en soient finalement pas les auteurs.

La notion de bruiteurs, introduite par BLACK (1986), permet de formaliser un comportement rationnel mais caractérisant des agents mal informés et d'étudier son impact sur les prix des actifs financiers. Le bruiteur, comme le spéculateur, agit à court terme et sans intégrer toutes les informations dans sa stratégie. Mais à la différence de ce dernier, il le fait par méconnaissance des lois réelles du marché et en croyant utiliser de l'information alors que ce n'est que du bruit. Le bruit peut être défini comme l'ensemble des fausses informations qui apparaissent à divers moments. Ce peut être la lecture trop rapide d'un ouvrage de vulgarisation, la

conviction personnelle, le “tuyau” d'un ami, une étude économétrique, économique ou chartiste mal réalisée et sur laquelle le bruiteur fonde trop de certitudes. Ce sera aussi et surtout le comportement des autres agents qui semblent posséder une bonne information. Cette recherche de l'information par l'étude du comportement des autres conduit à un comportement dit moutonnier. Si plusieurs bruiteurs croient posséder une information permettant, à leurs yeux, de battre le marché, ils agiront rapidement et surtout seront suivis ou accompagnés par d'autres bruiteurs. Donc en plus d'agir sur du bruit, ils créent eux mêmes du bruit sous la forme d'une forte volatilité jusqu'alors imputée aux spéculateurs uniquement. Or il semble que les bruiteurs sont les responsables de cette forte volatilité observée sur les marchés.

Le modèle de DSSW montre que les bruiteurs peuvent être les principaux bénéficiaires des distorsions qu'ils créent car la risquophobie des investisseurs sophistiqués (bien informés) les empêche de réagir plus fermement. Les bruiteurs profitent donc de la forte rentabilité qu'offre un actif dont ils ont participé à augmenter le risque, donc la rentabilité. Il est maintenant possible de modéliser de tels comportements et de les intégrer dans une étude générale des mouvements boursiers. Ceci laisse présager un intérêt croissant pour les travaux prenant en compte des investisseurs de bien différente nature.

Cependant la non nullité du coefficient d'autocorrélation d'ordre un de l'innovation du processus résultant du modèle de DSSW ne permet pas de différencier la présence des bruiteurs de celle d'agents irrationnels. Pour cette raison il nous semble nécessaire de présenter d'autres outils économétriques qui vont permettre de mieux isoler l'effet des bruiteurs de l'effet des agents irrationnels. Dans le cadre du paradigme probabiliste, les modèles de type ARCH et la dépendance de long terme nous paraissent les mieux à même d'ouvrir une voie vers une modélisation particulière de la présence des bruiteurs sur un marché boursier. Pour cette raison, ces deux groupes de phénomènes probabilistes font l'objet du troisième chapitre de cette partie.

### **CHAPITRE 3 : DE NOUVELLES VOIES STATISTIQUES DE MODELISATION DES MARCHES FINANCIERS.**

Le chapitre 1 a mis l'accent sur l'omniprésence des statistiques dans la représentation des comportements sur les marchés boursiers. Partant d'un modèle simple (succession d'événements aléatoires) les tests sur l'efficience des marchés ont pu être posés sans problème. Mais l'intégration de comportements particuliers (spéculateurs et bruiteurs) dans la modélisation nécessite d'autres outils statistiques. Nous avons vu dans le chapitre 2 que le modèle de DELONG, SCHLEIFER, SUMMERS et WALDMANN (1990), s'il permet d'intégrer les bruiteurs dans l'étude statistique des marchés financiers, ne permet pas de différencier leur présence de celle d'agents irrationnels. Il nous semble donc nécessaire d'introduire de nouveaux outils qui permettent de généraliser la modélisation des comportements non standards sur les marchés financiers afin, entre autre, de faire mieux coïncider modèle et réalité.

Longtemps l'intérêt était focalisé sur les liens à court terme comme signe d'une imperfection du marché. Or il peut exister une dépendance à long terme qui remet en cause, elle aussi, et plus fortement l'efficience des marchés financiers. Nous verrons dans une première section que cette voie s'est fortement développée ces récentes années en finance. Deux sortes de travaux abordent ce phénomène; l'étude de la dépendance par le biais de l'analyse R/S<sup>36</sup> (MANDELBROT et WALLIS, 1968 et LO, 1991) et, plus récemment, les travaux sur le retour en espérance ou "mean reversion" (SUMMERS, 1986, FAMA et FRENCH, 1988b). Ces deux directions de recherche ne sont d'ailleurs pas sans lien comme nous le verrons au cours de ce chapitre.

Dans une seconde section, nous montrerons que l'analyse de la volatilité des cours constitue également un apport important à l'étude du comportement des marchés financiers. Ce sont les modèles économétriques ARCH (ENGLE, 1982) et

---

<sup>36</sup> R/S signifie Range/Standard déviation traduit par étendue standardisée

ses dérivés qui permettent de prendre en compte des phénomènes boursiers liés à la volatilité dont l'évolution est quelquefois très complexe. L'utilisation de tels processus peut être confirmée par l'analyse des valeurs extrêmes des cours. Nous verrons que l'utilisation des processus ARCH peut permettre de concilier l'efficience des marchés et la prise en compte des phénomènes non linéaires apparaissant dans la volatilité.

### **Section 1. Dépendance de long terme.**

La question posée est de savoir si les cours ou plus exactement les rentabilités sont autocorrélés. En référence aux modèles dominants de marche aléatoire et de martingale, la corrélation des rentabilités doit décroître exponentiellement dans le cas d'un marché efficient, plus lentement dans le cas d'un marché imparfait. Concernant le long terme, la question de la nullité des autocorrélations semblait en effet triviale. La dépendance de long terme a donc longtemps été ignorée.

MANDELBROT en 1968 avec WALLIS, adaptant à l'économie des travaux du climatologue HURST, s'interroge sur la persistance dans les séries économiques, c'est-à-dire l'existence d'une mémoire de long terme dans le processus de prix. Cette persistance peut être imputée à une intégration très lente de l'information. MANDELBROT et WALLIS utilisent, pour vérifier cette persistance, la statistique R/S.

Cette section s'attachera à montrer l'apport en finance d'une telle analyse. Elle exposera ensuite le modèle de SUMMERS (1986) qui, en introduisant le retour en espérance, présente l'avantage supplémentaire d'intégrer le comportement sous-jacent au modèle des investisseurs qui expliquerait la persistance sur les marchés financiers.

## I. La persistance et la statistique R/S.

### *1. Exposant de HURST.*

Lorsque Pharaon demande à Joseph d'interpréter ses rêves dans lesquels apparaissaient sept vaches grasses dévorées par sept vaches laides et maigres, puis sept beaux épis engloutis par sept épis noirs et desséchés, Joseph y voit un signe de Dieu. Et son interprétation permet au peuple égyptien de mieux traverser les sept années douloureuses que Pharaon avait entrevues dans son rêve prémonitoire. Pharaon ordonne que durant les sept premières années fertiles, il soit fait une quantité suffisante de réserves afin de pallier les insuffisances en nourriture qu'entraîneraient les sept années suivantes de sécheresse.<sup>37</sup>

Cette anecdote biblique nous conduit directement aux études hydrologiques de HURST (1951) portant sur le comportement du Nil. De plus, elle nous conduit à définir “l'effet Joseph” comme étant synonyme de persistance et de mémoire de long terme dans les séries temporelles. Le problème, que l'auteur tente de résoudre, consiste en la gestion de réservoirs alimentés par le Nil. Pour cela, il est obligé de mettre au point une nouvelle statistique appelée “Exposant de HURST”. Il doit calculer la taille des réservoirs à construire en déterminant les quantités minimales et maximales de contenance qui préservent à la sortie du réservoir un débit à peu près constant à travers les différentes époques. En reprenant l'exemple biblique, il faut que la contenance minimale du réservoir soit suffisante à la fin de la septième année pluvieuse pour assurer un minimum d'eau pour les sept années de sécheresse à venir. Pour déterminer cette contenance minimale, HURST a construit une mesure de persistance qui est calculée sur le principe des fluctuations maximales et minimales d'une série autour de sa moyenne temporelle. Il faut pour cela mesurer le ratio entre l'étendue de cette série (**Range**) et son l'écart type (**Standard deviation**).

L'étendue d'une série  $\varepsilon$  est :

---

<sup>37</sup> Cette allégorie est issue de l'Ancien Testament (Genèse, chapitre 41) et est reprise dans de nombreux articles traitant de la persistance.

$$R(T) = \text{Max}_{1 \leq t \leq T} \left[ \sum_{u=1}^t (\varepsilon_u - \bar{\varepsilon}_T) \right] - \text{Min}_{1 \leq t \leq T} \left[ \sum_{u=1}^t (\varepsilon_u - \bar{\varepsilon}_T) \right] \quad (1.72)$$

où

$\varepsilon_u$  est la valeur de la série au temps  $u$

$\bar{\varepsilon}_T$  est la moyenne des  $\varepsilon_u$  sur  $T$  périodes

Pour standardiser ce coefficient il faut le diviser par l'écart-type  $S(T)$ .  
L'étendue standardisée est alors :

$$R/S(T) = \frac{R(T)}{S(T)} = \frac{\text{Max}_{1 \leq t \leq T} \left[ \sum_{u=1}^t (\varepsilon_u - \bar{\varepsilon}_T) \right] - \text{Min}_{1 \leq t \leq T} \left[ \sum_{u=1}^t (\varepsilon_u - \bar{\varepsilon}_T) \right]}{\sqrt{\frac{1}{T} \sum_{u=1}^T (\varepsilon_u - \bar{\varepsilon}_T)^2}} \quad (1.73)$$

HURST, à partir des propriétés asymptotiques de ce coefficient, montre que sans poser d'hypothèse de normalité sur la distribution de la série étudiée, l'étendue standardisée possède une limite de la forme :

$$R/S \rightarrow cT^H$$

où  $c$  est une constante,  $T$  est l'intervalle de temps entre la première et la dernière donnée du sous-échantillon servant de base aux calculs et  $H$  l'exposant de HURST qui est compris entre 0 et 1. Cette propriété va permettre de déterminer ensuite  $H$ . Mais auparavant, il semble nécessaire de préciser les conclusions découlant des différentes valeurs possibles de  $H$ .

MANDELBROT (1975) décrit le comportement asymptotique du coefficient de HURST selon la nature de la série :

- si la série est indépendante alors  $H = 0,5$  ;
- si la série est un ARMA alors  $H = 0,5$  et la constante est différente du cas précédent. Dans un tel cas,  $H$  est influencé par la dépendance à court terme si la taille de l'échantillon est faible ce qui entraîne un biais.
- si la série est persistante alors  $H$  est différent de 0,5. Deux cas sont alors possibles :

- $0 \leq H \leq 0,5$  la série est antipersistante. A long terme, la “corrélation” de la série est négative. Il y a un phénomène de retour en espérance ;
- $0,5 \leq H \leq 1$  alors la série est positivement persistante. Cela peut se rapprocher de la présence d'un trend. Plus la valeur de H approche de 1, plus le trend est marqué, et moins le caractère aléatoire est présent.

L'utilisation de tels outils se montre plus robuste que les méthodes classiques d'étude des autocorrélations, des ratios de variance ou de décomposition spectrale (MANDELBROT, 1972). Le même auteur recommande, en 1975, de différencier la série afin d'éviter qu'une valeur de H proche de 1 ne soit le signe d'une éventuelle non-stationnarité. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de détecter des dépendances de long terme dans des séries à variance infinie (lois stables) alors que des tests reposant sur le calcul des autocorrélations nécessitent le calcul empirique du moment de deuxième ordre.

Un problème se pose au moment du calcul de H pour des valeurs cohérentes de T et du point initial. WALLIS et MATALAS (1970) établissent deux manières de calculer l'exposant de HURST. Il y a le coefficient F-HURST où il faut effectuer le calcul pour tous les points initiaux possibles et toutes les dimensions possibles de sous-échantillons. Cette procédure est très longue. Il est possible autrement de calculer le coefficient G-HURST où seuls quelques points initiaux et quelques tailles sont prises en compte. Bien entendu le biais dans le calcul de H diminue quand la taille minimale du sous-échantillon augmente, et est moins important pour le F-HURST que pour le G-HURST.

Pour estimer l'exposant de HURST, MANDELBROT et WALLIS (1969) suggèrent une méthode graphique qui consiste à poser Log T en abscisse et Log R/S en ordonnée. En effectuant le calcul pour différents points initiaux et différentes valeurs de T, il y a alors plusieurs points. Le coefficient de HURST est la pente de la droite constituée des différents exposants calculés; cette valeur est estimée par régression linéaire. PETERS (1991) explique qu'on ne peut effectuer de statistique inférentielle sur H dont les caractéristiques statistiques sont inconnues.

Ainsi, le caractère purement aléatoire ou non d'une série pourra être déterminé à partir d'une analyse relativement simple. Dans le cas où une persistance



serait mise à jour, l'importance du biais par rapport à l'évolution aléatoire est fonction de la valeur de  $H$  et notamment de l'ampleur de sa différence par rapport à 0,5.

## *2. H et le rejet de l'efficience.*

GREENE et FIELITZ (1977) réalisent une étude empirique utilisant l'analyse R/S sur une série de taux de rendement quotidiens de 200 actions cotées sur le New York Stock Exchange du 23 décembre 1963 au 29 novembre 1968. En utilisant le G-HURST, ils trouvent graphiquement une bonne détermination de l'exposant de HURST. En effet, le  $R^2$  des régressions<sup>38</sup> pour les différentes actions est en moyenne de 0,98. Les auteurs constatent que plus la taille minimale des sous-échantillons de calcul est grande, moins le biais est important. Ils utilisent aussi une analyse d'étendue à la place d'une analyse R/S qui est équivalente sous l'hypothèse de normalité de la série. L'avantage de l'analyse d'étendue est de dispenser du calcul de l'écart-type à chaque fois. Les résultats montrent l'existence d'une forte similitude entre les deux analyses. Un test de normalité de la série serait nécessaire pour vérifier que la similitude de résultat trouvée ici est bien due au caractère gaussien de la série. En effet, ces conclusions ne doivent pas provenir d'un biais causé par une éventuelle dépendance à court terme ou par une autre anomalie non détectée.

GREENE et FIELITZ supposent que leurs résultats sont peut-être biaisés à cause de la faible taille de leurs échantillons. La plus grande interrogation quant à la validité des résultats provient d'une éventuelle corrélation de court terme présente dans les petits échantillons et qui viendrait biaiser les valeurs estimées de l'exposant HURST. Les travaux de MATALAS et WALLIS (1970) modèrent cette critique et montrent qu'une corrélation de premier ordre de 0,3 sur une série de taille 1000 ne surestime  $H$  que de 0,08. Si cette corrélation est de -0,5, le biais n'est alors que de -0,03. GREENE et FIELITZ rappellent que la corrélation à court terme des cours boursiers, présente dans de nombreuses études empiriques, ne saurait expliquer que

---

<sup>38</sup> Les régressions sont celles de  $\log R/S$  sur  $\log T$  (avec différentes valeurs de  $T$  et du point initial).

des valeurs de H comprises entre 0,47 et 0,58. Une grande partie des valeurs trouvées dans leur article (allant de 0,38 à 0,706) semblent donc bien dues à une dépendance à long terme (persistance ou antipersistance). Ces résultats remettent en cause le modèle de la martingale donc l'hypothèse de rationalité des investisseurs. Si une corrélation est discernable dans les prix des actifs (plus exactement dans l'innovation des prix) alors les cours n'intègrent pas parfaitement l'information. Un arbitrage devient alors possible qui permet, sur la base de l'étude de ces corrélations, de battre le marché.

Les problèmes concernant la validité de l'analyse R/S entrevus par GREEN et FIELITZ sont relancés par LO (1991) et les conclusions doivent être modulées. Pour cette raison nous présentons maintenant la révision de l'analyse R/S par LO afin de corriger le biais causé par une éventuelle dépendance de court terme.

### 3. Révision de l'analyse R/S.

Le biais entraîné sur l'exposant H par la présence éventuelle de dépendance à court terme, bien que minimisé par GREENE et FIELITZ est suffisamment important et LO (1991) présente une révision de l'analyse R/S pour l'éliminer. Plutôt que de déterminer graphiquement H, LO élabore une statistique sur la base de l'étendue standardisée qui permettra d'effectuer des tests de persistance et qui corrige certains biais de l'analyse graphique de l'exposant de HURST.

Les propriétés asymptotiques de R/S(T) sous l'hypothèse que la série étudiée  $\varepsilon_t$  est i.i.d. sont :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{T}} R/S(T) = V \quad (1.74)$$

où V est l'étendue standardisée d'un mouvement brownien.

Le problème se pose dans le cas d'un processus où apparaît la dépendance à court terme. En effet dans le cas d'un processus AR(1) de coefficient d'autocorrélation  $\rho$ , les propriétés asymptotiques deviennent :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{T}} R/S(T) = \sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}} V \geq V \quad (1.75)$$

Pour un coefficient d'autocorrélation de 0,3 qui est courant dans l'analyse statistique des cours boursiers, l'espérance de la statistique est surestimée de 36 %. La distribution de la statistique s'est donc décalée à droite et il est alors plus probable de rejeter l'hypothèse nulle d'indépendance et d'accepter celle alternative de persistance, et ce à cause de la dépendance à court terme.

LO corrige donc ce biais en tenant compte dans le calcul de  $R/S(T)$  de la dépendance éventuellement présente à court terme. Le dénominateur de  $R/S(T)$  tient compte des moments croisés de deuxième ordre de la série. Ce qui s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(T) &= \frac{R(T)}{\tilde{S}(T)} = \frac{\text{Max}_{1 \leq t \leq T} \left[ \sum_{u=1}^t (\varepsilon_u - \bar{\varepsilon}_T) \right] - \text{Min}_{1 \leq t \leq T} \left[ \sum_{u=1}^t (\varepsilon_u - \bar{\varepsilon}_T) \right]}{\sqrt{\frac{1}{T} \sum_{u=1}^T (\varepsilon_u - \bar{\varepsilon}_T)^2 + \frac{2}{T} \sum_{i=j+1}^q \omega_j(q) \left( \sum_{i=j+1}^T (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}_T) (\varepsilon_{i-j} - \bar{\varepsilon}_T) \right)}} \\ &= \frac{R(T)}{\sqrt{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 + 2 \sum_{i=j+1}^q \omega_j(q) \hat{\gamma}_j}} \quad (1.76) \end{aligned}$$

avec

$\hat{\sigma}_\varepsilon^2$  : variance estimée de  $\varepsilon$ .

$\hat{\gamma}_j$  : autocovariance estimée de  $\varepsilon$ .

$$\omega_j(q) = 1 - \frac{j}{q+1}$$

$\omega_j$  est une pondération des autocovariances qui permet que  $S(T)$  soit toujours positive (NEWKEY et WEST, 1987).

Si le nombre de retards  $q$  pris en compte augmente avec  $T^{1/4}$ , alors  $Q(T)$  ajuste bien la dépendance à court terme.

La valeur de  $q$  peut être choisie arbitrairement ou selon le critère de ANDREWS (1991) qui donne :

$$q = k_T = \left(\frac{3T}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\hat{\rho}}{1 - \hat{\rho}^2}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (1.77)$$

$\hat{\rho}$  est l'autocorrélation de premier ordre du processus. Dans le cas où  $q$  est choisi par ce critère, les pondérations  $\omega_j$  deviennent :

$$\omega_j = 1 - \left|\frac{j}{k_T}\right| \quad (1.78)$$

Asymptotiquement, l'étendue standardisée modifiée tend vers l'étendue  $V$  d'un mouvement brownien. En effet, le maximum (minimum) des sommes partielles des déviations de la série converge vers le maximum (minimum) des sommes partielles des déviations d'un mouvement brownien. Or la fonction de densité de l'étendue d'un mouvement brownien est connue explicitement depuis KENNEDY (1976) et est de la forme :

$$F_V(v) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - 4k^2 v^2\right) e^{-2(kv)^2} \quad (1.79)$$

Le tableau 1.1. donne les valeurs critiques pour les tests fondés sur cette fonction.

**Tableau 1.1. Valeurs seuils du test de LO.**

P(V<v)	0,005	0,025	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,543
	0,721	0,809	0,861	0,927	1,018	1,090	1,157	1,223	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

P(V<v)	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,975	0,995
	1,294	1,374	1,473	1,620	1,747	1,862	2,098

LO (1991)

A l'aide de la statistique  $\tilde{Q}(T)$ , il est possible d'effectuer des tests de l'hypothèse nulle de processus indépendant contre l'hypothèse alternative de persistance (dépendance de long terme) sans que le test soit biaisé par une éventuelle dépendance à court terme. Plus exactement, la dépendance éventuelle à

court terme est prise en compte dans la construction même du test. LO démontre que son test est robuste pour toute série gaussienne dont la fonction d'autocovariance décroît progressivement quand l'écart augmente.

Les études antérieures des cours boursiers par l'analyse R/S se focalisaient plus sur l'exposant de HURST que sur R/S, ce qui entraîne un biais (DAVIES et HARTE, 1987). De plus l'analyse R/S(T) est biaisée par la dépendance à court terme. LO réalise une étude empirique sur des données quotidiennes et mensuelles provenant du Center for Research in Security Prices (CRSP). Dans de nombreux cas, la statistique R/S rejette l'hypothèse d'indépendance alors que la statistique Q l'accepte avec pour les données quotidiennes. Le biais engendré par l'emploi de la statistique R/S varie de 10 à 97 %. Des simulations confirment la robustesse du test pour détecter la dépendance de long terme tant pour l'hypothèse nulle de processus iid que pour celle de dépendance à court terme.

L'analyse R/S permet donc de déceler des phénomènes de persistance dans l'évolution des cours boursiers. De plus, comme nous allons le voir, elle permet également de mettre à jour l'existence de cycles non périodiques et de calculer la période moyenne de ces cycles.

#### *4. Des cycles non périodiques*

MANDELBROT (1972) met à jour une autre propriété de l'analyse R/S. Il est possible, à la différence de l'analyse spectrale, de déceler des cycles non périodiques. Cette notion semble à première vue difficilement concevable puisqu'un cycle est généralement le signal de la périodicité d'une série. La terminologie exacte consisterait plutôt à parler de durée moyenne des cycles. En d'autres termes il s'agit de la durée moyenne pendant laquelle subsiste une information. Il est possible de lier cette durée au degré de persistance de la série.

PETERS (1991) applique la méthodologie de MANDELBROT pour déterminer graphiquement la valeur de H. Il trouve un H de 0,78 pour une étude du Standards & Poors 500 (S&P 500) en données mensuelles de Janvier 1950 à Juillet

1988. Mais même s'il y a persistance, cette dernière disparaît bien à un moment donné. En construisant un graphique  $\text{Log}(R/S(T)) / \text{Log } T$ , à un moment donné la courbe des points calculés pour différentes valeurs de  $T$  s'écarte de la droite dont la pente donne  $H$  pour suivre la droite de pente  $H=0,5$ . Autrement dit, pour certaines valeurs de  $T$  la persistance disparaît, faisant place à une série non corrélée. La valeur de  $T$  pour laquelle ce changement s'opère, sera la valeur moyenne des cycles présents sur cette série. Plusieurs séries sont étudiées dont voici les résultats :

**Tableau 1.2. Valeurs de H et durée moyenne des cycles sur le marché américain des actions.**

Firmes	Périodes	H	Cycles(en mois)
S&P 500	1/50-7/88	0,78	48
Anheuser-Busch	1/53-12/89	0,64	48
Apple Computer	1/53-12/89	0,75	18
Coca-Cola	1/53-12/89	0,70	42
Consolidated Edison	1/53-12/89	0,68	90
IBM	1/53-12/89	0,72	18
McDonald's	1/53-12/89	0,65	45
Niagara Mohawk	1/53-12/89	0,69	72
Texas State Utilities	1/53-12/89	0,54	90
Xerox	1/53-12/89	0,73	18

Source : PETERS (1991, page 88)

Il semble donc que le marché américain des actions soit fortement persistant. La durée moyenne du cycle peut y être interprétée comme la durée qui, en moyenne, est nécessaire pour qu'une information donnée n'ait plus aucune influence (48 mois pour le S&P 500 par exemple). Cependant l'analyse graphique de détermination de l'exposant de HURST, la taille relativement petite des divers échantillons et la

méthodologie utilisée laissent suspecter un biais causé entre autres par la dépendance à court terme. Cette étude devrait être reconduite en utilisant la statistique de LO afin d'annuler ce biais.

La persistance remet complètement en cause l'hypothèse d'efficience des marchés puisqu'elle signale un délai nécessaire à l'intégration de l'information dans le cours. Un marché persistant serait un marché où l'information s'intègre très lentement. Sur un marché antipersistant l'intégration de l'information est très lente également, mais surtout à cause de surs réactions qui ne sont corrigées qu'au fil du temps. Nous sommes loin du marché idéal défini par les tenants de la rationalité des investisseurs. D'ailleurs, les travaux portant sur la notion de retour en espérance confortent cette idée d'un biais de long terme dans l'évolution des cours boursiers.

## II. Le retour en espérance.

L'efficience des marchés est généralement testée par la nature aléatoire des innovations de court terme. Par exemple, FAMA et FRENCH (1988b) constatent que les marchés sont très faiblement autocorrélés à court terme. Tout au moins cette autocorrélation, si elle est statistiquement significative, ne l'est pas économiquement. Mais d'après eux, il en va différemment à plus long terme. La plupart des travaux porte sur la corrélation à court terme mais n'arrivent pas à expliquer plus de 5 % de la variation future des cours. Or FAMA et FRENCH montrent que 25 à 40 % des variations des cours pour des horizons de 3 à 5 ans sont expliquées par les cours passés. Ils confortent ainsi le modèle de retour en espérance (*mean reversion*) développé par SUMMERS en 1986 et selon lequel les rentabilités à long terme des séries financières sont fortement et négativement autocorrélées à l'horizon de 4-5 ans alors que les rentabilités de court terme présentent une très faible corrélation.

### 1. Modèle de retour en espérance.

SUMMERS (1986) montre un biais dans l'utilisation des tests classiques d'efficience. Il suppose que les prix des actifs contiennent une composante stationnaire de forme AR ou ARMA qui expliquerait l'écart durable existant entre ce prix et la valeur fondamentale de l'actif. Dans son modèle, il pose que le taux de rentabilité espéré de l'actif est constant afin de faire porter les résultats de son test sur l'efficience même. Cependant, nous pensons que considérer l'espérance de rentabilité comme une constante revient à poser une hypothèse au même titre qu'un modèle d'équilibre et le problème du test joint (efficience-modèle d'évaluation) se retrouve posé. SUMMERS, bien qu'il s'en défende, teste l'efficience et en même temps le modèle  $E(R_t) = r^{39}$ . Pour cette raison nous retenons surtout de son étude le fait qu'il existe dans le prix une partie autre qu'une marche aléatoire pure et qui trompe les tests classiques d'efficience.

Développant l'idée de SUMMERS, FAMA et FRENCH (1988b) définissent un modèle d'évolution des prix dans lequel le logarithme de ce prix serait la somme d'une marche aléatoire avec dérive et d'une composante stationnaire :

$$p_t = q_t + z_t \quad (1.80)$$

où

$p_t$  est le logarithme du prix de l'actif

$q_t$  est la marche aléatoire

$$q_t = m + q_{t-1} + \eta_t \quad \eta_t \text{ est un bruit blanc}$$

$z_t$  est la composante stationnaire (un Ar(1) par exemple)

$$z_t = \Phi z_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \text{ est un bruit blanc}$$

$\Phi$  proche mais différent de 1

L'étude de l'efficience des marchés, et plus particulièrement sa version faible, est faite sur la base de la différence à court terme des cours  $r_{t,t+1} = p_{t+1} - p_t$ . Cependant l'étude de FAMA et FRENCH crée une avancée en étudiant justement les liens entre les taux de rentabilité à très longue échéance donc :

$$r_{t,t+T} = p_{t+T} - p_t = q_{t+T} - q_t + z_{t+T} - z_t \quad (1.81)$$

---

<sup>39</sup> Hypothèse à la structure simple, mais hypothèse tout de même. Si en réalité les taux de rentabilité anticipés varient dans le temps, cela biaise son analyse de l'efficience.



T peut valoir ici jusqu'à quatre ou cinq ans.

L'étude des liens entre les prix se fera par le calcul des autocorrélations du processus de taux de rendement. Les auteurs calculent la pente de la régression de  $r_{t,t+T}$  sur  $r_{t-T,t}$  afin de vérifier si le taux de rendement de longue durée présent peut aider à prévoir linéairement le taux de rendement futur à long terme. La pente de cette régression est de la forme :

$$\begin{aligned}
 \rho_T &= \frac{\text{Cov}(r_{t,t+T}, r_{t-T,t})}{\text{Var}(r_{t-T,t})} = \frac{-\text{Var}(z_t) + 2\text{Cov}(z_{t+T}, z_t) - \text{Cov}(z_{t+2T}, z_t)}{\text{Var}(r_{t-T,t})} \\
 &= \frac{-\sigma_z^2 + 2\text{Cov}(\Phi^T z_t, z_t) - \text{Cov}(\Phi^{2T} z_t, z_t)}{\text{Var}(r_{t-T,t})} = \frac{-\sigma_z^2 + 2\Phi^T \sigma_z^2 - \Phi^{2T} \sigma_z^2}{\sigma_{r_{t-T,t}}^2} \\
 &= \frac{-\sigma_z^2 (1 + 2\Phi^T - \Phi^{2T})}{\sigma_{r_{t-T,t}}^2} = \frac{-\sigma_z^2 (1 - \Phi^T)^2}{\sigma_{r_{t-T,t}}^2} \quad (1.82)
 \end{aligned}$$

La partie de la variation du taux de rendement futur expliquée par le taux de rendement présent est fonction de T (présence de  $\Phi^T$  au numérateur).

Pour  $T=1$ , et  $\Phi$  proche mais inférieur à 1, le numérateur tend vers 0. Les taux passés n'aident donc en rien à la prévision des taux futurs (à court terme) ce qui est conforme au cas d'un marché efficient. C'est également en conformité avec l'hypothèse d'efficience s'il n'y a pas de partie stationnaire (cas trivial).

En revanche, quand T augmente, le numérateur tend vers la variance de z et la pente de la régression est égale au rapport entre cette dernière et la variance du taux de rentabilité.

Elle est alors de la forme <sup>40</sup>:

$$\rho_T = \frac{-\sigma_z^2}{\sigma_{r_{t-T,t}}^2} = \frac{-\sigma_z^2}{\text{Var}(z_{t+T} - z_t) + \text{Var}(q_{t+T} - q_t)} = \frac{-\sigma_z^2}{2\sigma_z^2 + \text{Var}(q_{t+T} - q_t)} \quad (1.83)$$

<sup>40</sup>  $\text{Var}(z_{t+T} - z_t) = \text{Var}(z_{t+T}) + \text{Var}(z_t) - 2\text{Cov}(z_{t+T}, z_t) = 2\sigma_z^2$ . La covariance valant  $\Phi^T$ , elle s'annule donc quand T tend vers l'infini.

Donc en l'absence de la composante de marche aléatoire, la pente de la régression sera de -0,5 quand T augmente. Si les deux composantes sont présentes, il y aura une valeur de T pour laquelle la pente sera de -0,5 (la composante stationnaire prend le pas sur la composante aléatoire). Puis lorsque T augmente encore, la partie aléatoire domine, ramenant la pente à une valeur nulle comme pour T prenant des valeurs faibles.

Ce processus reflète une autocorrélation nulle d'après les méthodes de tests traditionnels qui s'intéressent aux autocorrélations à court terme. Il remet pourtant en cause l'évolution aléatoire des cours. Seule la prise en considération des liens de long terme permet de déceler cette imperfection. Il apparaît alors une autocorrélation négative des cours dans le temps, plus ou moins importante. Plusieurs études empiriques semblent confirmer ce modèle de retour en espérance.

## *2. Etude empirique et implications.*

FAMA et FRENCH testent leur modèle sur différents portefeuilles issus du New York Stock Exchange pour une période allant de 1926 à 1985. Le test de l'hypothèse de retour en espérance est établi à partir d'une régression linéaire du taux de rentabilité futur à long terme sur le taux de rentabilité présent à long terme.

$$r_{t,t+T} = a + b r_{t-T,t} + \varepsilon_t \quad (1.84)$$

où :

$r_{t,t+T}$  est la rentabilité de l'actif pour la période allant de t à t+T

Pour les portefeuilles liés aux entreprises industrielles, le coefficient de régression présenté précédemment est significatif seulement pour des valeurs de T de 3, 4 ou 5 ans. Cependant lorsque l'étude est réalisée sur un échantillon allant de 1941 à 1985 l'effet induit par le modèle de retour en espérance est nettement moins marqué. Les auteurs déterminent également que cette autocorrélation négative de long terme est surtout due à des facteurs macro-économiques communs à tous les actifs plutôt qu'à une composante spécifique à chacune des firmes. HAMON et

JAQUILLAT (1992) vérifient fortement cet effet sur le marché français des actions. Ils obtiennent ces résultats tant avec les indices qu'avec des données individuelles.

De nombreux travaux ont montré que les taux de rentabilité anticipés étaient positivement autocorrélés, ce qui semble peu conciliable, à première vue, avec l'autocorrélation négative trouvée dans les taux de rentabilité. L'explication tient au taux de rentabilité anticipé qui est en quelque sorte le taux d'actualisation reliant le prix courant de l'actif aux dividendes futurs anticipés. Il apparaît au dénominateur de l'expression du prix ; son effet est donc inversé lorsqu'il affecte le prix. POTERBA et SUMMERS (1986) ont montré que si la composante stationnaire  $z_t$  du processus de prix de l'actif est un AR(1) de paramètre  $\Phi$  positif, alors le taux de rentabilité anticipé est un AR(1) de paramètre  $\Phi$ . Ce dernier processus est corrélé de coefficient d'autocorrélation  $\Phi^T$  à l'horizon T. POTERBA et SUMMERS montrent que cette autocorrélation de long terme peut être causée soit par un comportement irrationnel des investisseurs (SUMMERS, 1986), soit par une variation du taux de rentabilité anticipé. Les deux interprétations amènent cependant une même évolution du prix de l'actif. BALL et KOTHARI (1989) démontrent que l'effet de retour en espérance est plutôt causé par des changements de niveau du risque qui entraînent une variation du taux de rentabilité espéré. Empiriquement, ils vérifient que les taux de rentabilité sont “mean reverting” mais que c'est également le cas des taux de rentabilité ajustés pour le risque spécifique de la firme (beta). Ils montrent aussi que le taux de rentabilité anormal (c'est à dire une fois ôtée la rémunération du risque systématique par l'emploi du MEDAF) est faible. Ils en déduisent ensuite que la corrélation à long terme, vérifiée empiriquement, provient de la variation du risque et ce par le biais de la variation du taux de rentabilité anticipé. En effet, une hausse de ce dernier causée par une augmentation du risque provoque une baisse de la valeur de marché de l'actif et donc un taux de rentabilité réalisé plus élevé (à dividendes anticipés constants).

Le modèle de retour en espérance rappelle que la dépendance dans les séries boursières ne se limite pas au court terme. De plus cette idée repose sur un modèle statistique cohérent et donne une explication aux problèmes rencontrés par les tests de l'efficience des marchés se limitant au court terme.

Il est possible de rapprocher l'analyse R/S du retour en espérance par l'accent qu'elles mettent sur la dépendance de long terme. Le modèle de FAMA et FRENCH correspond à ce que l'analyse R/S définit comme un processus antipersistant. Les deux études sont donc à mener en parallèle de façon à consolider les conclusions qui peuvent être apportées. De plus, ils vérifient empiriquement que la corrélation est la plus forte pour les horizons de 3 à 5 ans. Or PETERS trouve un cycle de durée non périodique de 48 mois en moyenne sur les dix séries analysées. Il y a donc une forte similitude de résultats entre les deux travaux. La différence majeure entre les deux études est que les tests de PETERS concluent à la persistance ce qui est en totale inadéquation avec le retour en espérance. Les deux travaux ne sont donc pas similaires mais recèlent un contenu qui autorise à prendre en réelle considération les phénomènes de long terme.

Dans les années quatre-vingts, l'étude de la persistance a ouvert de nouvelles voies de recherche. Cependant, cette voie n'est pas aussi importante que celle ouverte par l'utilisation des processus ARCH (ENGLE, 1982). Cet outil permet en effet de modéliser les variances des processus tout en conservant certaines propriétés nécessaires à l'étude financière.

## **Section 2. L'hétéroscédasticité conditionnelle.**

L'utilisation d'une loi standard comme la loi normale ne permet pas à DELONG, SHLEIFER, SUMMERS et WALDMANN (1990) de modéliser l'impact des bruiteurs sur un marché financier en les distinguant, au niveau des tests empiriques de l'efficience, des investisseurs irrationnels. Ce problème du choix de la loi statistique descriptive de l'évolution des prix des actifs risqués est assez ancien puisque MANDELBROT dès 1963 et FAMA en 1965 préconisent l'utilisation des lois stables pour pallier les lacunes de la loi normale. Ces lois ont l'avantage de présenter une distribution unimodale et symétrique et une kurtosis théorique élevée

qui correspond à celle qui est empiriquement constatée sur de nombreuses séries financières.

Les processus ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity) et les nombreuses variantes qui en découlent, vont reprendre ces caractéristiques, et notamment la kurtosis élevée des lois stables, mais avec une facilité d'utilisation nettement supérieure (il existe une infinité de lois stables qu'il est impossible de reconnaître aujourd'hui avec certitude). Cela permettra de nombreux tests empiriques, en particulier de l'efficience des marchés financiers. Ces processus sont, par ailleurs, bien plus souples que les modèles de variance décrits dans le chapitre un. Ils vont en plus permettre de modéliser un phénomène décrit par MANDELBROT (1963). L'auteur s'est, en effet, aperçu que sur les marchés boursiers des mouvements importants (faibles) sont généralement suivis de mouvements d'envergure similaire (phénomène de grappe ou *clustering*). Il est en effet constaté sur les marchés financiers la succession irrégulière de périodes d'agitation assez importante et de périodes de relative quiétude. De plus cela peut aider à formaliser le lien mis en évidence par FRENCH et ROLL (1986) entre la volatilité et les heures d'ouverture de la Bourse.

Une généralisation des modèles non linéaires apparaît progressivement dans la formalisation des phénomènes financiers. L'hypothèse de linéarité est en effet trop restrictive pour modéliser des événements tels que les krachs boursiers ou les fortes variations observées quelquefois. Les modèles non linéaires possèdent des caractéristiques répondant donc mieux aux attentes des financiers en matière de processus stochastiques.

Ainsi l'utilisation des processus ARCH se justifie car ils permettent un traitement simultané des effets de grappe et de non linéarité tout en conservant la leptokurtosis des lois stables sans en garder l'extrême complexité d'utilisation. Nous allons d'abord présenter ce modèle et ses propriétés qui en font tout l'intérêt. Puis rapidement nous verrons les principales variantes, ainsi que les applications de ces processus à la finance et plus particulièrement à l'efficience des marchés financiers. Nous exposerons enfin un test basé sur la théorie des valeurs extrêmes qui permet un choix entre les processus ARCH et les lois stables.

## I. Le modèle ARCH.

La représentation des phénomènes avec hétéroscédasticité conditionnelle est assez ardue à établir. ENGLE (1982) définit un processus prenant en compte cela et allant plus loin que les processus bilinéaires classiques<sup>41</sup>:

$$\varepsilon_t = u_t h_t \quad \text{où} \quad u_t \sim N(0,1)$$

avec

$$h_t = \sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2} \quad (1.85)$$

$p$  est l'ordre du processus ARCH. Il représente le nombre de retards maximum qui apparaissent dans  $h_t$ .

Une propriété intéressante en finance des processus ARCH est, qu'en termes non conditionnels, nous retrouvons des moments identiques à ceux d'un processus bruit blanc. En effet, sous l'hypothèse d'indépendance entre  $u_t$  et  $h_t$  :

$$E(\varepsilon_t) = E(u_t h_t) = E(u_t) E(h_t) = 0$$

La variance non conditionnelle se déduit comme suit :

$$V(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \alpha_0 + A(L)E(\varepsilon_t^2) \quad (1.86)$$

$$\sigma^2 = \alpha_0 + A(L) \sigma^2 = \alpha_0 + A(1) \sigma^2 \quad (1.87)$$

Donc

$$V(\varepsilon_t) = \sigma^2 = \alpha_0 / [1 - A(1)] \quad (1.88)$$

Les moments conditionnels d'un ARCH( $p$ ) sont :

$$E(\varepsilon_t / I_{t-1}) = 0 \quad (1.89)$$

$$V(\varepsilon_t / I_{t-1}) = h_t^2 = \alpha_0 + A(L)\varepsilon_t^2 \quad (1.90)$$

Un des intérêts de l'utilisation des processus ARCH( $p$ ) est qu'ils englobent le processus bruit blanc comme un cas particulier ( $p=0$ ). Par exemple, dans l'équation

---

<sup>41</sup> La bilinéarité définie par GRANGER et ANDERSEN (1978) est un modèle tel que la variance conditionnelle de  $\varepsilon_t$  dépend de ses réalisations passées  $\varepsilon_{t-1}$  avec :

$$\varepsilon_t = u_t \varepsilon_{t-1} \quad \text{où} \quad u_t \text{ est un bruit blanc } (0, \sigma^2)$$

$$E(\varepsilon_t / I_{t-1}) = 0 \text{ et } V(\varepsilon_t / I_{t-1}) = \sigma^2 \varepsilon_{t-1}^2$$

de marche aléatoire, l'innovation est un bruit blanc. Si l'innovation est un ARCH(p), il s'agit alors d'une extension de l'hypothèse et non d'une restriction. En effet, les processus ARCH présentent des propriétés non conditionnelles similaires à celles d'un bruit blanc.

L'intérêt d'utiliser les processus ARCH réside également dans sa kurtosis qui est réaliste par rapport à ce qui est généralement observé sur les différentes places boursières mondiales. En effet, lors d'une étude empirique, TAYLOR (1986) a montré que les séries de rendements financiers présentaient un aspect leptokurtique marqué. La kurtosis d'un processus ARCH(1) est :

$$k = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{E(\varepsilon_t^2)^2} = \frac{\frac{3\alpha_0^2}{(1-\alpha_1)^2} \cdot \frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2}}{\left(\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}\right)^2} = \frac{3(1-\alpha_1^2)}{1-3\alpha_1^2} \quad (1.91)$$

k est toujours supérieur à 3 qui est la kurtosis de la loi normale. Un processus ARCH a toujours une distribution leptokurtique ce qui permet de prendre en compte les événements rares avec plus de réalisme qu'avec l'emploi d'une loi mésokurtique. La probabilité de survenance d'un événement extrême est ainsi mieux appréhendée qu'avec la loi normale notamment.

Le premier stade est l'identification du nombre de retards apparaissant dans la variance conditionnelle (ici p). Il est possible d'exprimer la variance conditionnelle comme un AR(p) avec constante sur  $\{\varepsilon_t^2\}$ . Le choix de p se déduit de l'analyse de BOX et JENKINS (1970). Il sera calculé à partir des fonctions d'autocorrélations partielles de la série  $\varepsilon_t^2$ . Cette étude des termes élevés au carré permet de détecter des relations non linéaires (ici quadratiques) dans une série alors que l'étude de la série simple ne laisse pas apparaître de lien à travers le temps.

Soit  $r_i$ , l'autocorrélation partielle au rang i de  $\varepsilon_t^2$  ; le processus ARCH sera d'ordre p si  $r_i$  est nul, quel que soit  $i > p$ . Pour savoir si nous sommes bien en présence d'un ARCH(p), il faut tester l'hypothèse nulle de bruit blanc ( $\alpha_i = 0$  pour  $i = 1, \dots, p$ ) contre l'hypothèse alternative ( $\alpha_i$  non tous nuls). Supposons un modèle de régression de Y sur X avec  $\varepsilon$  le résidu dont nous cherchons à savoir s'il est un

processus ARCH. La procédure de test employant le score et la matrice d'information peut se résumer à cinq étapes :

- (1) régresser  $Y_t$  sur  $X_t$ ;
- (2) élever les résidus  $\varepsilon$  estimés au carré;
- (3) les régresser sur une constante et  $p$  retards;
- (4) calculer le produit du nombre d'observation par le coefficient de corrélation de cette dernière régression ( $TR^2$ );
- (5) tester  $TR^2$  par rapport à un chi-deux à  $p$  degrés de liberté.

Il existe plusieurs méthodes d'estimation. Les deux plus courantes sont d'une part celle utilisant le maximum de vraisemblance (algorithme du score, de BERNDT, HALL, HALL, HAUSMAN) et d'autre part celle des moindres carrés. ENGLE (1982) suggère l'utilisation de l'algorithme du score qui est une procédure itérative permettant d'atteindre la solution optimale pas à pas.

Les processus ARCH ont connu un grand succès en finance et ont été intégrés dans la plupart des grands modèles financiers (MEDAF, structure à terme des taux d'intérêt, marché des changes, modèles d'arbitrage, prise en compte du phénomène de grappe constaté par MANDELBROT en 1963). Leur application aux tests d'efficience permet d'utiliser un processus dont la distribution possède des caractéristiques proches de celles constatées sur les marchés financiers (distribution unimodale, symétrique et leptokurtique) tout en étant compatible avec les tests classiques d'efficience en raison de la nature de ses moments non conditionnels d'ordre un et deux identiques à ceux d'un bruit blanc.

Nous avons utilisé ces propriétés dans la représentation statistique des marchés financiers (ALEXANDRE, 1992) en développant la notion de Quasi Marche Aléatoire (QMA) pour laquelle il est postulé que l'innovation d'une série boursière est un processus ARCH. De là, nous avons constaté que l'hypothèse d'efficience est acceptée plus souvent si le modèle testable est la QMA que si c'est une marche aléatoire. Pour cela, il faut prendre la définition de GRANGER et MORGENSTERN (1970) qui pose qu'un processus  $X_t$  est une marche aléatoire si :

$$E[X_t - X_{t-1}] = E[X_{t+\tau} - X_{t+\tau-1}] \quad \text{pour tout } t \text{ et } \tau > 0 \quad (1.92)$$

$$\text{Cov}(X_t - X_{t-1}, X_{t+\tau} - X_{t+\tau-1}) = 0 \quad \text{pour tout } t \text{ et } \tau > 0 \quad (1.93)$$



Or, dans un modèle où l'innovation est un processus ARCH la première condition est vérifiée de par la nullité en espérance non conditionnelle d'un ARCH. La nullité de la covariance se vérifie aisément aussi. Une telle modélisation enrichit l'étude du phénomène sans être en opposition avec la notion d'efficience des marchés<sup>42</sup>. Cette modélisation va permettre de respecter les propriétés d'un marché efficient (QMA) tout en donnant une représentation plus réaliste de la variance conditionnelle. Cela est visible dans la prévision où nous montrons que, si elle reste la même qu'avec le modèle de marche aléatoire, son intervalle de confiance varie dans le temps et est un signal de l'état de nervosité du marché. De plus, tout en respectant l'hypothèse d'efficience des marchés l'utilisation des modèles ARCH peut guider lors de certaines stratégies d'utilisation des options où le niveau de variation compte plus que le sens de la variation (ALEXANDRE, 1992). La notion de QMA permet un plus grand réalisme des tests d'efficience des marchés financiers en ne cloisonnant pas les tests par une spécification trop restrictive des phénomènes statistiques.

## II. Modèles dérivés et applications.

Le succès des processus ARCH a amené de nombreux chercheurs à développer des modèles permettant de généraliser cette notion. Nous présentons rapidement ici les principaux modèles dérivés de ARCH qui sont utilisés en finance.

### **Processus GARCH.**

Ce processus a été introduit par BOLLERSLEV (1986) et constitue une “Généralisation” du processus ARCH. Un processus  $\varepsilon_t$  sera un GARCH (p,q) si :

$$\varepsilon_t / I_{t-1} \sim N(0, h_t^2)$$

avec

---

<sup>42</sup> La variance conditionnelle de l'innovation peut évoluer dans le temps sans que le processus d'innovation ne présente d'autocorrélation.

$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}^2 \quad (1.94)$$

Si  $q = 0$ ,  $\varepsilon_t$  est un processus ARCH(p); si  $p = q = 0$ ,  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc. Dans tous les autres cas, il s'agit d'un GARCH(p,q). La variance conditionnelle inclut le carré des  $p$  erreurs précédentes et les  $q$  variances conditionnelles passées ; elle évolue de période en période et intègre les erreurs les plus récentes de manière à constituer un mécanisme adaptatif. L'estimation du modèle est faite en employant l'algorithme de BERNDT, HALL, HALL et HAUSMAN (1974), basé sur le principe du maximum de vraisemblance.

Le modèle GARCH possède des propriétés similaires à celles d'un ARCH quant à ses propriétés adaptables à la finance. Il pourra être appliqué dans une étude de l'efficacité des marchés. BOLLERSLEV et ENGLE (1986) utilisent un GARCH (1,1) pour modéliser la prime de risque sur le marché des taux de change. Cependant BLACK (1976) avait mis à jour la corrélation négative existant entre les taux de rentabilité avec les changements de volatilité. Cette dernière augmente après une mauvaise nouvelle et diminue en cas de bonne nouvelle.

Malheureusement, une modélisation GARCH de l'innovation ne rend compte que de l'amplitude et aucunement du signe du lien éventuel entre volatilité et rentabilité. En effet, dans un GARCH (comme dans un ARCH d'ailleurs) la modélisation de la variance conditionnelle fait apparaître les innovations passées élevées au carré, donc sans tenir compte du signe de cette dernière. De plus les modèles GARCH imposent des contraintes de positivité sur les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  de la variance conditionnelle. NELSON (1991) définit le processus GARCH Exponentiel (EGARCH) qui permet de combler ces lacunes.

### **GARCH Exponentiel**

Un processus  $\{\varepsilon_t\}$  sera un EGARCH si :

$$\varepsilon_t / I_{t-1} \sim N(0, h_t^2)$$

avec

$$\ln(h_t^2) = \alpha + \phi \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{h_{t-1}} \right| + \delta \ln(h_{t-1}^2) + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{h_{t-1}} \quad (1.95)$$

Ce modèle permet à la variance conditionnelle d'être à la fois fonction de l'importance et du signe de l'innovation. NELSON (1991) teste EGARCH sur la période de Juillet 1962 à Décembre 1987 pour des données quotidiennes de la base du CRSP. Il vérifie l'asymétrie préconisée par BLACK dans la réaction en termes de volatilité des cours à une bonne ou mauvaise nouvelle. Ce modèle introduit une source supplémentaire de non linéarité qui permet de mieux prendre en compte les phénomènes complexes de finance. En outre, il ne nécessite pas de contraintes de positivité sur les paramètres ce qui simplifie le programme d'optimisation utilisé lors de l'estimation des paramètres.

#### **ARCH in Mean (ENGLE, LILIEN, ROBINS, 1987)**

Il peut s'avérer utile d'inclure la volatilité du processus (définie par un ARCH) comme une variable explicative dans l'équation structurelle. Par exemple, il est possible de définir la rentabilité d'un actif comme fonction du risque en ayant modélisé ce dernier comme un processus ARCH. Un tel modèle appelé ARCH-M se définit comme suit. Soit une équation de la forme  $\varepsilon_t = \zeta_t' b + u_t$  au temps  $t$ . Le processus  $\{u_t/I_{t-1}\}$  d'erreur définie conditionnellement à l'information passée est de la forme :

$$u_t/I_{t-1} \sim N(0, h_t^2)$$

Le processus  $\varepsilon_t$  sera un ARCH-M si :

$$\varepsilon_t = \zeta_t' b + f(h_t^2) + u_t \quad (1.96)$$

où  $u_t$  est un ARCH.

$f(\cdot)$  est une fonction quelconque.

Il est toujours tenu compte de l'hétéroscédasticité conditionnelle mais en plus l'expression de l'espérance conditionnelle inclut la variance conditionnelle. Ce processus peut être très utilisé en finance où il paraît logique de supposer que les cours boursiers sont fonction de leur volatilité. Comme, outre les informations

économiques et générales, l'étude des cours passés de la série permet d'aider certains investisseurs à la prévision, la volatilité est également une information qui peut les guider dans le choix de leur stratégie. Elle représente la nervosité du marché qui anticipe, par exemple, un retournement de tendance. Le processus GARCH-M est défini de la même manière avec comme seule différence que  $u_t$  est un GARCH au lieu d'être un ARCH.

### **GARCH-Difference in Mean**

Un problème similaire au précédent peut se poser à la différence près que la rentabilité soit fonction de la différence de volatilité entre deux périodes plutôt que de la volatilité même. Il faudra alors utiliser un processus nommé GARCH-DM, défini en 1990 par COCCO et PARUOLO. Un tel processus sera de la forme :

$$\varepsilon_t = \zeta_t' b + \delta (h_t^2 - h_{t-1}^2) + u_t \quad (1.97)$$

où  $h_t^2$  est la variance conditionnelle de  $u_t$  qui est un processus GARCH classique. Il s'agit donc d'un raffinement du modèle GARCH-M présenté auparavant.

### **GARCH-Distributed Lag in Mean**

Pour exprimer une variable en fonction de plusieurs réalisations de sa volatilité passée, il faut utiliser le processus GARCH-DLM (COCCO, PARUOLO, 1990) défini à partir d'un processus  $\{Y_t\}$  et représenté à la période  $t$  par l'équation suivante :

$$Y_t = \zeta_t' b + \sum_{i=1}^p \delta_i (h_{t-i}^2 - h_{t-i-1}^2) + u_t \quad u_t | I_{t-1} \sim N(0, h_t^2) \quad (1.98)$$

Il existe donc une gamme assez importante de dérivés du modèle ARCH initial qui permettent de moduler la modélisation en fonction des phénomènes étudiés.

### **Integrated GARCH**

Il peut arriver que le processus GARCH soit impossible à définir. C'est à ce problème que répondent les processus IGARCH.

$$\varepsilon_t / I_{t-1} \sim N(0, h_t^2)$$

$$E\left[\varepsilon_t^2 / I_{t-1}\right] = h_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}^2 \quad (1.99)$$

Si  $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ , alors la variance non conditionnelle  $\sigma^2$  n'existe pas ; il s'agit d'un processus caractérisé par le fait que le dénominateur de  $\sigma^2$  est nul. Dans cette situation, l'expression de la variance conditionnelle est la suivante :

$$h_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + (1 - \alpha_1) h_{t-1}^2 \quad (1.100)$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1 (\varepsilon_{t-1}^2 - h_{t-1}^2) + h_{t-1}^2 \quad (1.101)$$

Ces différents modèles permettent de donner à la volatilité des marchés une part plus importante et moins passive dans l'étude des cours boursiers. Depuis les travaux de MARKOWITZ (1952) le risque sur l'actif est une composante majeure de l'élaboration de stratégie en finance. Une prise en compte réelle de la volatilité s'imposait donc. Les modèles plus anciens de variance présentés au premier chapitre étant trop restrictifs, les processus ARCH marquent un progrès réel par la souplesse avec laquelle ils permettent de modéliser la volatilité des marchés. Mais un nombre quasi infini de lois stables possèdent également ces propriétés (notamment la kurtosis). Comment distinguer alors s'il faut employer plutôt une loi stable ou un processus de type ARCH ? La théorie des valeurs extrêmes permet de distinguer entre ces deux ensembles de lois, et parmi d'autres encore. Nous reprendrons pour cela l'article de LONGIN (1992a) qui décrit cette théorie permettant d'effectuer des tests afin de choisir la meilleure spécification.

### III. La théorie des valeurs extrêmes.

Une des discussions les plus âpres sur les statistiques des séries financières concerne la nature des queues de distributions. Le caractère mésokurtique semble nettement remis en cause et, comme nous l'avons déjà vu, différentes hypothèses ont

été proposées notamment les lois stables et les processus de type ARCH. La théorie des valeurs extrêmes va nous permettre de déterminer la distribution des valeurs extrêmes d'une série et de là, il sera possible de déterminer la distribution de la série dans son intégralité.

### 1. Distribution des valeurs extrêmes.

Soit  $\{\varepsilon_t\}$  le processus d'innovation d'un phénomène boursier c'est à dire la différence entre  $X_t$  et  $X_{t-1}$  qui sont les cours (ou le logarithme) d'un actif aux temps  $t$  et  $t-1$ . Appelons  $Y_n$  le maximum<sup>43</sup> des  $n$  variables aléatoires  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ . Alors la relation entre les fonctions de répartition est :

$$F_{Y_n}(g) = [F_\varepsilon(g)]^n \quad (1.102)$$

Les propriétés statistiques des valeurs extrêmes sont donc liées à celles de la série elle-même. C'est à partir de cette constatation qu'il va être possible de déterminer la loi de la série.

La théorie des valeurs extrêmes repose sur quatre hypothèses :

- (1) Les variables  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  sont aléatoires;
- (2) Elles sont indépendantes;
- (3) Elles sont identiquement distribuées;
- (4) Il existe une suite de coefficients  $a_n$  et  $b_n$  tels que la distribution limite de  $(Y_n - b_n)/a_n$  est non dégénérée (c'est à dire de variance non nulle).

LONGIN présente les trois seules distributions limites possibles pour les valeurs extrêmes et l'écriture générale de ces trois distributions :

*Distribution de Gumbel (type 1)*

$$F_Y(y) = \exp(-e^{-y}) \quad y \text{ un réel quelconque} \quad (1.103)$$

*Distribution de Fréchet (type 2)*

---

<sup>43</sup> De la sorte nous déterminerons la distribution des valeurs extrêmes positives. Pour déterminer la distribution des valeurs extrêmes négatives, il suffit d'opérer par symétrie en remplaçant maximum par minimum.

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= 0 && \text{si } y \leq 0 && (1.104) \\
&= \exp[-y^{-k}] && \text{si } y > 0 \text{ (} k > 0 \text{)}
\end{aligned}$$

*Distribution de Weibull (type 3)*

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \exp[-(-y)^k] && \text{si } y < 0 \text{ (} k > 0 \text{)} && (1.105) \\
&= 1 && \text{si } y \geq 0
\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse selon laquelle il existe  $a_n$  positif et  $b_n$  tels que la distribution de  $(y-b_n)/a_n$  soit non dégénérée, alors une distribution limite permet de caractériser les trois précédentes comme trois cas particuliers :

$$F_Y(y) = \exp[-(1-\tau y)^{1/\tau}] \quad (1.106)$$

Nous retrouvons les trois distributions précédentes selon le signe de  $\tau$  :

- $\tau < 0$  distribution de Fréchet
- $\tau = 0$  distribution de Gumbel
- $\tau > 0$  distribution de Weibull

## 2. Distribution de la série

Il est possible de déterminer la distribution de la série de l'innovation en connaissant la distribution limite de ces valeurs extrêmes. En effet si cette dernière est une distribution de Gumbel alors la distribution de la série sera celle d'une loi normale ou du mélange de plusieurs lois normales. Dans le cas d'une distribution de Weibull, la série est distribuée selon une loi uniforme.

Le cas qui nous intéresse ici plus particulièrement est celui où les valeurs extrêmes possèdent une distribution de Fréchet. Dans ce cas la série est leptokurtique, ce qui est empiriquement dominant en finance. Le critère déterminant ici va être le positionnement de la valeur de  $\tau$  autour de -0,5. Si  $\tau$  est inférieur à -0,5, alors l'hypothèse de distribution parétienne (lois stables) peut être acceptée. En revanche si  $\tau$  est compris entre -0,5 et 0, en étant significativement différent de 0, l'hypothèse de loi de Student ou de processus ARCH pour la distribution de l'innovation peut être acceptée. Ce critère est discriminant pour le choix entre les

processus de type ARCH et les lois stables. Il faut donc maintenant estimer  $\tau$  afin de pouvoir effectuer un test et conclure sur la nature de la série.

Nous supposons que l'échantillon disponible de la série  $\{\varepsilon\}$  est de taille  $nN$ . De là, le sous-échantillon  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  est extrait et plus particulièrement la valeur maximale. Il faut alors répéter cette opération pour les  $N$  sous-échantillons de taille  $n$  disponibles et classer ensuite la série de ces valeurs maximales par ordre croissant pour obtenir alors une série  $y_1, \dots, y_N$ . Nous calculons ensuite  $F_Y(y_m)$  (pour  $m$  allant de 1 à  $N$ ) qui est une variable aléatoire de distribution :

$$F_{F_Y(y_m)}(u) = \frac{N!}{(N-m)! m!} m u^{m-1} (1-u)^{N-m} \quad (1.107)$$

L'espérance de la  $m^{\text{ième}}$  fréquence est :

$$E[F_Y(y_m)] = \frac{m}{N+1} \quad (1.108)$$

Il est alors possible d'écrire :

$$F_Y(y_m) = E[F_Y(y_m)] + e_m = \frac{m}{N+1} + e_m \quad (1.109)$$

Il faut ensuite prendre deux fois consécutivement le logarithme de  $F_Y$  et de  $E(F_Y)$  et en transformant  $y_n$  en  $(y_n - b_n)/a_n$  il vient :

$$-\log \left[ -\log \left( \frac{m}{N+1} \right) \right] = \frac{1}{\tau} \log a_n - \frac{1}{\tau} \log \left[ a_n - \tau (y_m - b_n) \right] + u_m \quad (1.110)$$

C'est à partir de cette équation que LONGIN présente différentes manières d'estimer, de calculer  $\tau$ .

### *Détermination graphique*

Il est possible de résoudre graphiquement le problème en représentant à l'aide d'un repère cartésien  $-\text{Log}[-\text{Log}(m/(n+1))]$  contre  $y_m$ . La courbe obtenue permet de conclure quant à la distribution des valeurs extrêmes. Elle sera une droite dans le cas d'une distribution de Gumbel, convexe pour une distribution de Weibull et concave dans le cas d'une distribution de Fréchet.



*Estimation non paramétrique*

Cette méthode de détermination de  $\tau$  se fait par la formule suivante :

$$\tau = -\frac{1}{\log 2} \log \left( \frac{\varepsilon_{n-m+1}^n - \varepsilon_{n-2m+1}^n}{\varepsilon_{n-2m+1}^n - \varepsilon_{n-4m+1}^n} \right) \quad (1.111)$$

où

$$\varepsilon_1^n \check{\varepsilon} \varepsilon_2^n \check{\varepsilon} \check{\varepsilon} \varepsilon_n^n$$

Le problème de cette méthode est que le choix de  $m$  est arbitraire. LONGIN conseille l'emploi de simulations de Monte-Carlo pour déterminer la valeur de  $m$ .

*Estimation à partir de la distribution*

A l'instar de LONGIN, nous explicitons uniquement l'exemple de la distribution de Fréchet qui est le cas qui nous intéresse ici. Précédemment le modèle estimable avait pour forme générale l'équation (1.110). Une estimation des paramètres de cette équation nous permet, entre autres, d'obtenir une estimation de  $\tau$  qui permet de connaître la nature de la distribution des valeurs extrêmes. Selon le résultat obtenu, on peut alors estimer les paramètres de cette distribution des extrêmes. Si  $\tau < 0$ , les valeurs extrêmes suivent une distribution de Fréchet, nous posons  $a_n = (v_n - e_n)$  et  $b_n = v_n$ <sup>44</sup>. Ce qui amène :

$$F_Y(y) = 0 \quad \text{si } y \leq e_n \quad (1.112)$$

$$= \exp \left[ - \left( \frac{v_n - e_n}{y - e_n} \right)^k \right] \quad \text{si } y > e_n \quad (k > 0) \text{ et } v_n > e_n \quad (1.113)$$

L'estimation des équations (1.112) et (1.113) nous permet d'avoir la forme exacte de la distribution des valeurs extrêmes de la série étudiée. Le problème est que ce sont des résultats asymptotiques qui peuvent être remis en cause lors

---

<sup>44</sup>  $e_n$  est la borne inférieure (dans le cas où  $y$  est le maximum)

d'utilisation d'échantillons de tailles faibles. Cependant cela peut s'avérer fort utile pour conforter des résultats entrevus dans d'autres tests.

La modélisation des phénomènes financiers en termes de processus ARCH est actuellement très utilisée du fait de son adéquation avec la réalité et de sa simplicité d'utilisation. Un test construit sur la base de la théorie des valeurs extrêmes peut nous aider à vérifier que nous n'imputons pas le caractère leptokurtique de la série au phénomène ARCH plutôt qu'aux lois stables.

## **Conclusion**

L'introduction de la notion de persistance et la modélisation en termes d'hétéroscédasticité conditionnelle amène un renouveau dans l'étude statistique des marchés financiers, notamment pour les travaux sur le comportement des marchés financiers et l'efficience. Longtemps, seule la dépendance à court terme, décelée le plus souvent par une corrélation linéaire, a été prise en compte comme signe d'imperfection des marchés. Les outils développés dans ce chapitre permettent donc d'aller plus loin et d'offrir une gamme plus étendue de tests de la notion d'efficience. En effet nous pouvons aujourd'hui tester non seulement les hypothèses classiques d'imperfections, mais aussi vérifier que le marché conserve son caractère efficient à plus long terme et pour des moments autres que l'espérance du processus. Cela permet surtout d'être en mesure de modéliser une gamme plus riche de comportements des investisseurs plutôt que de se limiter au modèle de l'investisseur rationnel évoluant sur un marché parfait. Ces outils statistiques vont permettre de mieux pouvoir intégrer des comportements non standards dans les différents modèles.

## CONCLUSION DE LA PREMIÈRE PARTIE

Longtemps le marché financier a été traité par analogie avec les marchés de concurrence pure et parfaite permettant d'atteindre un équilibre walrasien où l'allocation est optimale. Nous avons vu dans le premier chapitre qu'une telle vision des marchés financiers a amené de nombreuses interrogations. La difficulté de tester l'efficience des marchés ne permet pas de répondre avec certitude. Les quantitativistes, héritiers de BACHELIER, ont modifié progressivement le modèle testable de l'efficience des marchés. La marche aléatoire puis la martingale ont ainsi été envisagées ; mais à chaque fois des anomalies étaient mises à jour qui remettaient en cause la vision d'un marché parfait et à travers elle la rationalité des individus opérant en bourse.

L'introduction dans la littérature financière de participants aux marchés financiers moins stéréotypés que ceux liés à la notion classique d'efficience se développe notamment avec la caractérisation générale des bruiteurs définis par BLACK (1986). SHLEIFER et SUMMERS (1990) soulignent que la “ligne entre les arbitragistes et les autres investisseurs peut être floue”. Les bruiteurs qui suivent certains “gourous” et qui croient à l'efficacité des “modèles populaires” (SHILLER, 1990) semblent pourtant plus proches des agents à l'esprit animal de KEYNES que des agents parfaitement rationnels. Mais SHLEIFER et SUMMERS expliquent que les bruiteurs ne sont pas éliminés automatiquement des marchés financiers. Ils les assimilent à des investisseurs réalisant un “arbitrage limité”. L'introduction de ces investisseurs dans les modèles de comportement permet donc une description plus souple des marchés financiers où interviennent des investisseurs rationnels, et d'autres mal informés.

Cette diversité d'acteurs des marchés enrichit donc les travaux et semble remettre en cause partiellement ou en totalité la notion d'efficience. Il apparaît, en effet, que l'idée d'un marché lisse où seule l'information amenait de l'incertitude semble balayée. Pourtant de nombreux travaux empiriques (la majorité même) ne rejettent pas l'hypothèse d'efficience pour différents marchés, différentes périodicités. JENSEN (1978, page 100) souligne l'importance du développement

des techniques dans le rejet de l'hypothèse d'efficience et “le fait qu'il y a des insuffisances dans l'état actuel de nos connaissances”. En ce qui concerne l'étude des bruiteurs, les travaux de DELONG, SHLEIFER, SUMMERS et WALDMANN (1990) les intègrent dans un modèle de comportement probabiliste. Conformément à SHLEIFER et SUMMERS, leur modèle aboutit à la reconnaissance des bruiteurs par les corrélations linéaires dans les rentabilités de court terme. Ce modèle est certes intéressant mais les outils statistiques employés ne permettent pas aux tests classiques de l'efficience des marchés de distinguer la présence de bruiteurs de celle d'agents irrationnels. Pour cette raison il faut envisager des outils de modélisation plus complexes afin de bien pouvoir connaître les effets de la présence des bruiteurs.

Une première manière d'améliorer la modélisation des bruiteurs est l'évolution extrêmement rapide de l'économétrie et de l'informatique qui ont permis d'affiner les études réalisées. Longtemps les capacités informatiques limitaient le traitement empirique aux modèles linéaires (les seuls dont la résolution était numériquement programmable). Depuis le milieu des années quatre-vingts, des modèles de type ARCH notamment permettent une étude empirique des phénomènes et des comportements jusqu'alors ignorés. Signalons, cependant, les travaux de LUCAS (1978) et de VAN DER PLOEG (1986) qui ont envisagé chacun l'élaboration d'un modèle d'équilibre non linéaire, mais dont les travaux demeurent purement théoriques. L'analyse d'étendue découverte dans les années cinquante mais longtemps inexploitée, hormis par MANDELBROT, permet aussi de déceler des phénomènes insoupçonnés par des outils basés sur la linéarité des relations et l'hypothèse de normalité des séries. Les méthodes économétriques récentes permettent donc une modélisation plus complexe et plus conforme des comportements sous-jacents aux phénomènes observés empiriquement.

Tous ces travaux se situent à l'intérieur du paradigme probabiliste. S'il apparaît que cela peut permettre la modélisation des bruiteurs, par exemple, il nous semble contraignant de se limiter à ce cadre. De plus nous avons vu que les bruiteurs peuvent générer des évolutions très brusques des prix que même un modèle ARCH ne pourra totalement prendre en compte. Une réponse éventuelle pourrait se trouver dans le développement récent de la notion de chaos déterministe

et l'élargissement du paradigme probabiliste pour passer à une étude des marchés soit déterministe, soit aléatoire. Le chaos déterministe qui intervient dans quasiment tous les domaines scientifiques aujourd'hui provoque, en effet, une révision en profondeur des notions pourtant bien établies comme l'équilibre, l'opposition aléa-déterminisme et la possibilité de modéliser des phénomènes très complexes à partir de modèles déterministes relativement simples.

La deuxième partie de ce travail va donc s'attacher à profiter des possibilités qu'offre le chaos déterministe pour analyser les comportements rationnels mais particuliers comme celui engendré par les bruiteurs. Nous allons tenter d'offrir un test plus particulier de l'hypothèse d'un marché bruité qui permettra de ne plus hésiter entre le bruit et l'irrationalité.

***DEUXIEME PARTIE***

***LE BRUITEUR INVISIBLE :  
CHAOS DETERMINISTE CONTRE  
APPROCHE PROBABILISTE***

Le problème de la détection des bruiteurs sur un marché financier nécessite l'emploi d'outils probabilistes particuliers. Mais peut-être met-il simplement à jour les lacunes des probabilités dans l'étude de certains phénomènes que l'on peut rencontrer sur les marchés financiers. Par exemple, le modèle de DELONG, SHLEIFER, SUMMERS et WALDMANN décrit parfaitement l'impact possible des bruiteurs mais ne parvient pas à le distinguer de celui traditionnellement supposé des agents irrationnels. Les progrès importants réalisés ces dernières années en statistique (processus ARCH) pallient les manques rencontrés jusqu'alors.

Une voie de recherche, considérant le caractère déterministe des phénomènes étudiés dans de nombreuses sciences, nous permet de repenser le problème des bruiteurs en nous libérant de la contrainte posée par l'emploi d'outils probabilistes. La théorie du chaos déterministe permet, en effet, depuis le milieu des années soixante-dix d'aborder certains problèmes sous un angle nouveau dans lequel la géométrie des phénomènes importe plus que les caractéristiques statistiques du processus. De plus les anciens clivages aléa-déterminisme dans la description du désordre sont fortement remis en cause.

Pour cette raison, le premier chapitre de cette partie (chapitre quatre) présente succinctement la théorie du chaos déterministe. Cette théorie relance l'utilisation du déterminisme dans la recherche scientifique et progressivement dans la théorie financière, car elle permet de retrouver une modélisation plus conforme à ce qu'historiquement de nombreux scientifiques ont toujours défendu : ce sont des lois déterministes qui régissent l'Univers. Nous présentons, de manière technique d'abord, le chaos déterministe qui offre aujourd'hui la seule alternative déterministe à l'utilisation des probabilités permettant de prendre en compte des phénomènes très complexes malgré une structure très simple. Ce chapitre va donc introduire, tant sur le plan méthodologique que technique, l'utilisation du chaos déterministe.

Le cinquième chapitre permettra de mettre en place la stratégie de test que nous avons choisie pour étudier les comportements bruiteurs en finance. Nous utiliserons pour cela le test BDS (BROCK, DECHERT et SCHEINKMAN, 1987) qui, en cas de rejet de l'hypothèse nulle selon laquelle la série étudiée est iid, offre différentes hypothèses alternatives dont le chaos déterministe et les processus

stochastiques non linéaires (ARCH ...) et la non-stationnarité ; notons au passage que ce test, s'il permet de justifier l'utilisation du chaos, ne rejette pas en bloc les outils statistiques. L'avantage de ce test est donc la diversité des hypothèses alternatives permettant de discerner plusieurs sortes de comportements, ou plus exactement d'envisager un même type de comportement mais sous plusieurs angles d'analyse.

Enfin, le sixième et dernier chapitre établira le lien entre les hypothèses alternatives du test BDS et l'idée développée, lors du chapitre deux, de la présence des bruiteurs sur les marchés financiers. En effet, nous verrons que l'analyse d'un seul phénomène (le bruit financier) peut se faire de la même manière selon un modèle déterministe ou stochastique. Nous pouvons alors préciser la notion de bruiteurs sans que les conclusions puissent être remises en cause par un cadre trop restreint d'analyse.



## **CHAPITRE 4 : REPRESENTATION DETERMINISTE DU MONDE**

La théorie du chaos déterministe, outre la curiosité technique qu'elle engendre, pose surtout la question du déterminisme en science. Dans le cas de la théorie financière, la question est d'autant plus cruciale que la description probabiliste des phénomènes est la règle.

Pour cette raison nous discuterons dans la première section de ce chapitre de la pertinence d'une description déterministe des phénomènes scientifiques en général, et financiers en particulier. Nous verrons également les raisons pour lesquelles cette théorie suscite autant de travaux. Elle permet, notamment, d'analyser des phénomènes très complexes à l'aide de modèles déterministes extrêmement simples.

La deuxième section sera une présentation du chaos déterministe avec notamment la notion d'attracteur étrange, de fractals et de caractérisation géométrique des séries temporelles. Cette manière de traiter les mathématiques par la géométrie, issue notamment des travaux de POINCARÉ et de MANDELBROT, a ouvert de nombreux horizons à la théorie du chaos déterministe.

Enfin, une troisième section exposera les différentes méthodes utilisées pour mesurer des dimensions d'attracteurs et la possibilité de mieux appréhender alors certaines variables financières autrement que par l'usage des probabilités.

### **Section 1. Le déterminisme représenté par des probabilités**

La description probabiliste en finance est dominante depuis BACHELIER qui, en 1900 dans l'introduction de son article, justifie l'utilisation des statistiques par le nombre infini de facteurs explicatifs des fluctuations des prix des actifs. Il

rejette clairement l'idée selon laquelle les prix seraient modélisables avec certitude dans une optique temporelle, mais, faute de mieux, les probabilités permettent de rendre compte de l'état du marché à un moment donné. L'analogie entre l'évolution des prix des actifs et un grand nombre de molécules (OSBORNE, 1964) qui conforte l'hypothèse de BACHELIER est d'ailleurs approximative. En effet, il aurait sans doute mieux valu établir une analogie entre le modèle descriptif de l'évolution du prix des actifs et le modèle représentatif des coordonnées d'un grand nombre de molécules. Il ne faut pas oublier qu'aujourd'hui encore certains scientifiques défendent l'idée selon laquelle l'évolution du monde est déterministe. Nous allons voir maintenant de quel déterminisme il est question.

## I. Déterminismes et notion de cause.

### *1. Le causalisme leibnizien.*

Le premier auteur en France à parler de déterminisme scientifique est BERNARD (1865). Il reprend les thèses de LEIBNIZ pour qui tout fait a une cause sans laquelle il ne pourrait pas exister. Il ne distingue aucunement les sciences physico-mathématiques des sciences de la vie lorsqu'il dit :

*“Il faut admettre comme un axiome expérimental que dans les êtres vivants aussi bien que dans les corps bruts les conditions d'existence de tout phénomène sont déterminées d'une manière absolue. (...) La négation de cette proposition ne serait rien autre chose que la négation de la science même.”*

Un siècle auparavant, LAPLACE (1774), connu pour ses travaux fondamentaux sur les probabilités, s'était posé également comme un défenseur du causalisme leibnizien (il n'employait alors pas le terme de déterminisme).

*“Nous devons envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui pour un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation*

*respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome.”*

Ici, rien ne peut arriver qui ne soit au préalable déterminé. Ce rattachement sans limites au causalisme va de pair avec l'utilisation des équations différentielles grâce auxquelles il est possible de décrire le monde par les mathématiques. La communauté scientifique est alors persuadée qu'à la suite de la loi de la gravitation universelle de NEWTON, la résolution d'équations différentielles permettra de représenter l'évolution de toute chose. Il suffit de bien connaître l'état d'un système au moment initial et les mathématiques pourront déterminer l'état de ce système à quelque moment que ce soit. Deux mathématiciens (LE VERRIER et ADAMS) ont réussi à découvrir une planète, Neptune en l'occurrence, par la simple utilisation de calculs, sans même observer le ciel. Lorsque Neptune est effectivement observable, la preuve semble faite que les progrès techniques permettront un jour de connaître le monde par le seul usage des mathématiques. Aujourd'hui encore, des scientifiques comme THOM (1990) défendent l'idée d'un déterminisme philosophique. D'après lui un échantillon devrait toujours être regardé comme la projection d'un phénomène déterministe ; il suffit d'augmenter le nombre de variables explicatives du phénomène pour en avoir une description parfaitement déterministe. GUITTON (1991) cite les travaux de biologistes qui ont établi que la probabilité pour qu'un millier d'enzymes différentes s'ordonnent pour former une cellule vivante était de l'ordre de  $1/10^{1000}$ . Le hasard semble également exclu de la formation d'une molécule d'ARN (Acide RiboNucléique) pourtant une des bases de notre système génétique.  $10^{15}$  années auraient été nécessaires à l'élaboration d'une molécule utilisable d'ARN, ce qui représente 100000 fois l'âge de l'univers. L'explication de ces phénomènes n'étant pas aléatoire, on retrouve les mêmes arguments que ceux de LAPLACE pour qui tout est déterministe à condition de connaître toutes les variables explicatives (causes).

Philosophiquement, cette solution ne fait pas l'unanimité car elle suppose l'absence du libre arbitre, ce qui n'est pas facile à accepter, surtout dans le domaine des sciences humaines et sociales.

## *2. Déterminisme et libre arbitre.*

BERNARD, dans son ouvrage de 1878, modifie sa description des phénomènes en adoptant une vision physiologique du déterminisme afin de résoudre cette dichotomie entre le monde scientifique et le monde réel dans lequel nous espérons avoir un libre arbitre. Il pose même le déterminisme physiologique comme garant des libertés de l'être humain par opposition au causalisme. D'après lui, un phénomène existe (ou n'existe pas) si certaines "conditions déterminantes" sont vérifiées. Dans ce cadre d'analyse l'homme garde la possibilité d'effectuer des choix qui influenceront sur ces conditions déterminantes et seront influencés par elles. Dans le cas des sciences humaines et sociales, les lois qui en sont issues (appréhendées également par les mathématiques) ne doivent pas être vues comme l'exacte représentation des faits réels, mais comme une norme à laquelle l'individu rationnel doit essayer de se conformer. Il sera libre s'il se rapproche de cette norme édictée dans le but d'un monde juste et ordonné (ISRAEL, 1992).

Le déterminisme physiologique laisse plus facilement envisager le déterminisme méthodologique. Celui-ci consiste à adopter le déterminisme comme description de la réalité, non parce qu'elle est effectivement régie par des lois de causalité directe mais parce que le déterminisme est dans ce cas un bon outil d'analyse.

## *3. Le déterminisme méthodologique.*

Dans tous les cas la notion de cause est centrale et tous ces développements reposent sur l'hypothèse sous-jacente selon laquelle une cause, si elle est minime, n'engendrera qu'un effet minime sur le phénomène. En effet, reprenons l'exemple de la connaissance du monde côté technique et non philosophique. D'après LAPLACE, une connaissance approfondie des multiples causes d'un phénomène nous permet

sans erreur de prévoir ce phénomène à l'aide des équations différentielles. Mais reprenons EKELAND (1984, page 85) qui, citant MAXWELL, explique que l'appréhension parfaite d'une cause ne sert pas la communauté scientifique, tout au moins en termes de capacité à prévoir, car jamais une cause strictement identique à celle parfaitement déterminée ne sera rencontrée deux fois. Il faut alors postuler qu'une petite cause produit toujours un petit effet. L'ensemble des causes précédemment établies se renouvellera bien approximativement à un moment quelconque, ce qui permettra de prévoir ne serait ce que de manière approchée le phénomène qui en découle. Cependant les causes infimes ne produisent pas toutes des effets minimes. GLEICK (1987) cite une allégorie folklorique donnant un exemple de cela :

*“Faute de clou, on perdit le fer;  
Faute de fer, on perdit le cheval;  
Faute de cheval, on perdit le cavalier;  
Faute de cavalier, on perdit la bataille;  
Faute de bataille, on perdit le royaume !”*

Derrière cet exemple qui peut faire sourire se dissimule un problème plus important. Il est impossible, dans de telles conditions, de négliger une cause aussi minime soit-elle. Nous savons que deux ensembles de causes identiques produisent deux effets identiques. Simplement l'approximation utilisée pour compenser le fait que jamais ne se présente deux fois exactement la même cause, ne fonctionne plus maintenant. En effet, les faits minimes ou apparemment éloignés (dans le temps comme dans l'espace) ne peuvent plus être négligés à chaque fois. Par exemple, le pendule de FOUCAULT possède un plan d'oscillation fixé sur des objets se trouvant “à des distances vertigineuses de la terre, à l'horizon de l'univers” (GUITTON, 1991). La connaissance des oscillations du pendule ne peut alors négliger aucune explication aussi minime paraisse-t-elle.

Ainsi se crée un paradoxe assez gênant : le monde est déterministe mais personne ne peut disposer d'assez d'informations pour l'appréhender. Et même si quelqu'un possédait toute l'information pour comprendre un phénomène particulier à partir d'un ensemble de causes bien défini, cet ensemble de causes ne se renouvellera jamais à l'identique. Les équations différentielles, outil de description

idéal du déterminisme, ne sont donc utiles que comme une approximation sujette à caution de la réalité. LAPLACE (1810) va proposer les probabilités comme méthode de connaissance du monde qu'il maintient pourtant déterministe.

## II. Le désordre : probabilités ou déterminisme

### *1. Les probabilités comme description du déterminisme.*

L'idée selon laquelle des lois probabilistes régissent l'univers a toujours effrayé le monde scientifique. VON NEUMANN (cité par ISRAEL, 1992), s'inquiétait, en 1955, à l'idée qu'une description de certains phénomènes biologiques puisse être réalisée à partir d'une démarche probabiliste, aléatoire. Pourtant la description probabiliste des événements ne signifie pas obligatoirement un renoncement au concept déterministe de ce qui nous entoure.

LAPLACE justifie l'utilisation des probabilités pour pallier notre ignorance quant à la réalité des phénomènes à expliquer. L'aléa engendré par les probabilités n'aurait donc aucune réalité en tant que représentation de l'indéterminisme du monde mais constituerait simplement une manière de progresser dans notre connaissance du monde. Plutôt que d'essayer de percer les lois de la nature, il faut arriver à maximiser la part de connaissance possible de chaque phénomène. Il n'est plus nécessaire de multiplier à l'infini le nombre de variables explicatives. Il suffit de mesurer la probabilité d'accepter un lien causal entre deux phénomènes. Si la probabilité d'acceptation est de beaucoup supérieure à la probabilité de rejet alors le lien causal peut raisonnablement être considéré comme établi. Finalement, LAPLACE crée l'inférence statistique où, à partir d'un échantillon, la cohérence d'une hypothèse va être "testée", cette dernière étant bien entendu déterministe. La question ne porte pas sur ce problème mais sur la vraisemblance de l'existence de cette relation déterministe. Le but maintenant est d'avoir suffisamment de données afin de limiter le risque de porter des conclusions erronées. En 1810, un article de LAPLACE fonde le théorème central limite. A travers cet article, ressort la

méthodologie de LAPLACE qui cherche, certes à l'aide d'outils reposant sur l'aléa, à connaître le mieux possible la relation déterministe sous-jacente au phénomène étudié. Face à cette projection aléatoire de la réalité déterministe, THOM (1990) prône la multiplication du nombre de variables explicatives. Mais dans le cas où cette technique est impossible, l'utilisation des probabilités semble la meilleure manière de procéder. EKELAND (1991) cite par exemple le lancer de dés. La représentation aléatoire qui en est faite<sup>45</sup> n'est là que pour combler l'impossibilité de maîtriser toutes les données inhérentes au lancement (position de la main, vitesse du lancer, surface ...). Et il paraît peu probable que la technique permette de dominer suffisamment toutes les données pour rendre le lancer du dé déterministe.

Les limites avérées des équations différentielles vont promouvoir l'utilisation des probabilités. Ces dernières sont donc justifiées par l'impossibilité faite à l'être humain de maîtriser toutes les composantes d'un événement. L'échec de la théorie newtonienne de la gravitation, dans le fait que la planète Vulcain découverte mathématiquement comme Neptune n'est, elle, jamais apparue, réduit fortement l'idée d'une représentation de ces phénomènes par des modèles déterministes.

Une autre raison de la désuétude progressive dans laquelle est tombée la résolution des problèmes à l'aide des équations différentielles est que pour représenter un phénomène complexe il fallait un système très compliqué d'équations quelquefois sans solution. Par exemple, POINCARÉ (1890) montre l'impossibilité de résoudre le système d'équations pour le problème des trois corps. Dès qu'il faut construire un modèle permettant de donner simultanément la position de trois corps dont les évolutions respectives sont interdépendantes, le système n'admet alors plus de solution. Or pour la représentation de l'Univers, trois corps paraissent bien peu de choses. Ainsi les systèmes déterministes ne peuvent rendre compte que de phénomènes simples, laissant alors aux probabilités l'étude de la complexité.

Dans une optique selon laquelle l'Univers est régi par des lois déterministes, il ne semblerait pourtant pas absurde de vouloir obtenir une modélisation à l'aide d'outils de même nature. Nous pouvons simplement reprendre l'idée de

---

<sup>45</sup> Il s'agit même de l'exemple par lequel sont abordées les notions d'aléa dans l'enseignement.

déterminisme méthodologique selon laquelle le modèle peut être déterministe simplement parce qu'il offre une bonne approximation de la réalité. Jusqu'à fort récemment le déterminisme était incapable de rendre compte des situations désordonnées ; situations pour lesquelles le recours aux probabilités s'imposait. Or, de récentes découvertes scientifiques ont brisé cette analyse manichéenne et montré le raffinement qu'il fallait atteindre pour connaître la nature des systèmes.

## *2. Le désordre ordonné.*

Dans le débat déterminisme-aléa, il était courant de croire que la différence entre un système présentant l'une ou l'autre de ces propriétés se faisait facilement. Mais en conduisant l'analyse comparative de deux systèmes dynamiques un peu plus loin, la question se pose alors de savoir s'ils sont identiques, autrement dit quelle est la mesure qui soit invariante par isomorphisme<sup>46</sup> ? Pendant longtemps les invariants utilisés pour classifier les systèmes étaient issus de la théorie ergodique.

Le théorème ergodique de BIRKHOFF montre que la moyenne temporelle d'un système aléatoire est en général égale à la moyenne spatiale. C'est-à-dire que la moyenne d'une trajectoire particulière (condition initiale particulière) va être égale à la moyenne de l'ensemble des trajectoires d'un système. Par exemple la valeur moyenne d'une fonction  $f$  d'une variable aléatoire  $x(t)$  (dépendant du temps) est indépendante du temps, puisqu'elle ne varie pas selon la condition initiale. Elle est un invariant. Tout cela découle en partie du fait qu'un système ergodique parcourt toutes les configurations possibles, il remplit l'espace entier au sein duquel il évolue et il existe des mesures statistiques invariantes représentatives du phénomène (DAY et PIANIGIANI, 1991). Cette propriété va être à la base des travaux sur l'analyse spectrale des systèmes.

Le problème est que la théorie ergodique fournit des invariants qui ne permettent pas toujours de distinguer certains systèmes isomorphes au système de

---

<sup>46</sup> Deux systèmes sont dits isomorphes s'ils sont liés par un isomorphisme, c'est-à-dire une fonction qui conserve les structures.



BERNOULLI (donc aléatoire) alors qu'ils sont déterministes. Il existe, par exemple, des systèmes présentant un spectre continu<sup>47</sup> mais issus d'un système déterministe (ARNOUX et CHEMLA, 1992). KOLMOGOROV (1958) va répondre à cette question en introduisant la notion d'entropie métrique d'un système qui est un invariant permettant de distinguer deux systèmes non isomorphes mais présentant tous les deux un spectre continu. L'entropie métrique d'un système est de la forme :

$$- \sum_{i=0}^n p_i \log p_i \quad (2.1)$$

où :

$p_i$  est la fréquence empirique de réalisation d'un état  $i$  du système.

$\log p_i$  est le logarithme en base 2 de  $p_i$ .

Un système possédant une entropie nulle sera un système parfaitement prévisible sur la base de la connaissance des états antérieurs du système. Plus l'entropie est positive et différente de zéro, plus cela signale un système désordonné et qui tend à se comporter comme un système aléatoire. L'entropie métrique, à la différence d'invariants fondés sur la théorie ergodique, va permettre de séparer des systèmes non isomorphes mais présentant des caractéristiques identiques en termes de spectre. La distinction entre un système déterministe et un système aléatoire présentant tous deux une entropie positive va s'effectuer à l'aide de la géométrie, plus exactement de l'analyse topologique des systèmes étudiés. Au début des années soixante-dix, la notion de chaos déterministe va permettre d'effectuer un nouveau pas en avant en posant les bases de l'analyse des systèmes déterministes à entropie positive donc désordonnés.

La théorie du chaos déterministe présente en effet cette particularité de pouvoir représenter des phénomènes complexes à l'aide de modèles simples, d'être compatible avec un phénomène apparemment aléatoire et de pouvoir représenter ce qui semble à première vue être le fait du désordre, tout cela en préservant une modélisation déterministe de phénomènes qui semblent être de même nature. En effet, KELSEY (1988) rappelle que si l'aléa est certes présent sur les marchés

---

<sup>47</sup> Le spectre est la transformée de Fourier de l'autocorrélogramme. Un spectre continu a longtemps été considéré comme révélateur d'une dynamique aléatoire. Il correspond à une fonction d'autocorrélation qui tend vers 0 de manière exponentielle.

boursiers, dans les anticipations notamment, les décisions finales que prennent les investisseurs sont conscientes, déterministes.

Cependant de nombreux pans de la théorie financière restent fondés sur la notion d'aléa. Aussi, dans ce travail, nous adoptons le chaos déterministe dans une optique méthodologique qui consiste à privilégier l'analyse topologique en lieu et place de la théorie probabiliste afin de rendre compte de phénomènes à entropie positive. Nous espérons donc parvenir à une description de la réalité sur des fondements théoriques nouveaux. Il nous paraît, en effet, intéressant de profiter du chaos déterministe pour modéliser l'évolution imprévisible des cours. En effet, le chaos est certes déterministe mais désordonné, et nous verrons les implications que cela peut avoir en finance.

Auparavant nous allons nous attacher à montrer, à l'aide de la géométrie, la possibilité de ce nouveau concept et les raisons du grand intérêt qu'il provoque au sein de toute la communauté scientifique.

## **Section 2. Le chaos déterministe.**

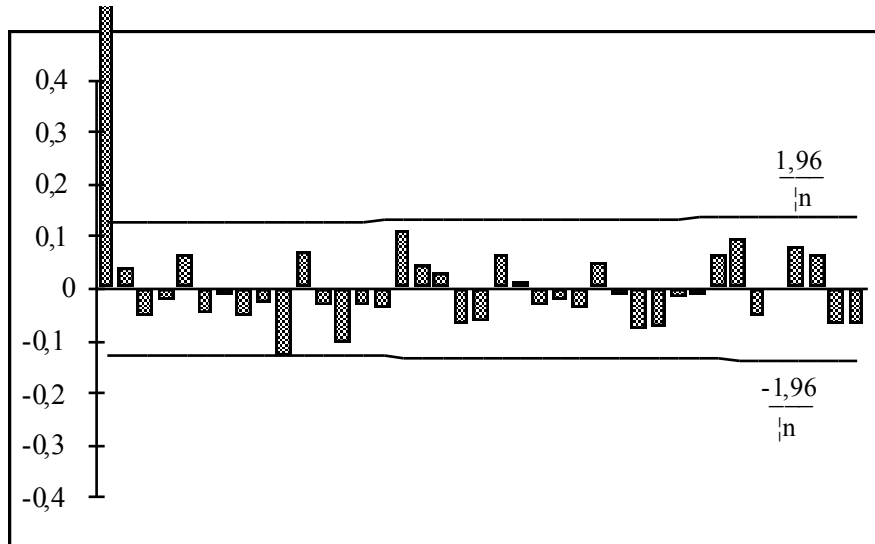
Nous avons présenté dans la section précédente, l'impuissance des statistiques à distinguer parmi les processus d'apparence aléatoire, ceux qui sont générés par un processus effectivement aléatoire et ceux qui proviennent d'un mouvement déterministe. Il faut donc recourir à l'analyse topologique des systèmes d'équations afin de combler cette lacune de l'analyse statistique. Pour illustrer cela nous avons choisi la fonction logistique, souvent retenue pour illustrer le chaos déterministe. Elle est définie de  $[0,1]$  dans  $[0,1]$  et, à la variable  $X$ , associe l'expression  $4 \mu X (1-X)$  où  $\mu$  est le paramètre de contrôle compris dans l'intervalle  $[0,1]$ . Cette fonction se représente sous la forme :

$$X_t = 4 \mu X_{t-1} (1-X_{t-1}) \quad (2.2)$$

Une manière classique d'en appréhender la nature éventuellement aléatoire est d'en calculer les autocorrélations. Le graphique 2.1. présente donc le corrélogramme empirique de la variable X pour une valeur de  $\mu = 0,9975$ .

**Graphique 2.1. Corrélogramme de la fonction logistique.**

L'histogramme représente les autocorrélations pour des décalages croissants  
 Les courbes continues figurent les seuils à 5% de l'hypothèse nulle  
 d'absence d'autocorrélation.



La conclusion issue de ce graphique est que l'évolution de la série présentant un tel corrélogramme est aléatoire. Et pourtant la variable X est générée de manière complètement déterministe. Simplement elle présente une entropie positive, donc une apparence désordonnée que ne décèle pas l'analyse de la série en termes d'autocorrélation.

Cette application est un des moyens les plus frappants et les plus couramment utilisé pour présenter les processus déterministes chaotiques. L'absence complète de corrélation fait que cette notion du chaos semble rejoindre celle donnée par Hésiode au VIIIème siècle avant Jésus-Christ dans la "Théogonie" lorsqu'il parle de la création de l'univers. Il associe au chaos les idées de confusion et de ténèbres. C'est un peu à ce niveau que se situait l'étude déterministe des processus aperiodiques en mathématiques jusqu'en 1971. Cette année là, RUELLE et TAKENS précisent la

notion de chaos<sup>48</sup> déterministe et permettent, par l'analyse topologique, une étude des processus présentant un caractère aléatoire mais étant déterministes.

Nous allons donc dans cette section aborder les différents critères qui définissent le chaos déterministe. Nous présenterons la caractérisation géométrique d'un système à l'aide de l'idée d'attracteur après avoir donné quelques définitions nécessaires à l'analyse géométrique des séries. En effet l'angle d'approche est totalement différent de celui retenu pour les études statistiques des séries. Il paraît donc nécessaire d'explicitier le vocabulaire et les concepts inhérents à cette description topologique afin de pouvoir clairement motiver l'attrait que cela peut représenter dans l'étude des comportements financiers. Enfin la notion d'objet fractal nous permettra d'exposer le fondement de l'étude du chaos déterministe qu'est l'attracteur étrange. Nous verrons que seul ce dernier permet l'existence de processus déterministe à entropie positive.

## I. Analyse géométrique des systèmes.

Avant de pouvoir décrire le chaos déterministe, il paraît nécessaire de donner plusieurs définitions permettant son étude. Nous pourrons alors aborder la théorie de RUELLE et TAKENS concernant l'apparition du chaos, ses caractéristiques et ses diverses implications.

### *1. Définitions.*

Pour illustrer les différentes définitions données ici nous utiliserons la fonction logistique de forme  $X_t = 4 \mu X_{t-1} (1-X_{t-1})$  reprise par de nombreux auteurs dans l'illustration des propriétés du chaos déterministe.

---

<sup>48</sup> Le terme de chaos peut prêter à confusion car il fait appel traditionnellement au désordre alors qu'ici nous verrons qu'il s'applique à l'ordre sous-jacent au désordre apparent.

**Attracteur** : Ensemble compact de volume nul dans l'espace des phases mais possédant un “bassin” d'attraction de volume fini vers lequel va tendre le processus si ce dernier est dissipatif (voir définition). Les attracteurs les plus simples sont :

- le point : il est l'attracteur d'un processus indépendant du temps (la série est de périodicité 1) ;

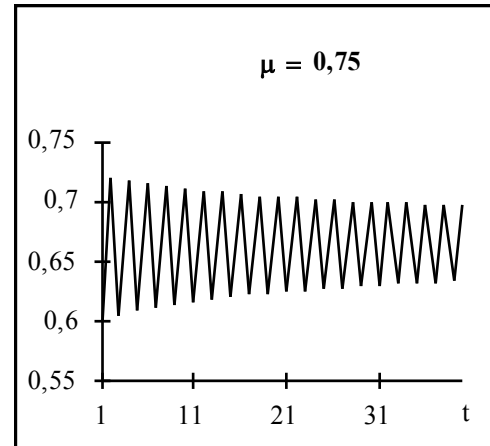
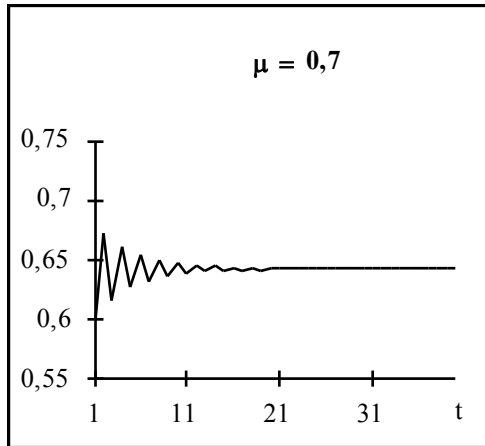
- le cycle limite : quelle que soit la valeur d'origine du processus, ce dernier va converger vers une solution périodique. Dès qu'il y a cycle limite une observation quelconque  $X_t$  reflète toujours une dépendance du temps de forme sinusoïdale et la prévision en est facilement réalisable ;

- le tore ( $T^r$ ) : c'est l'attracteur d'un processus quasi-périodique, c'est à dire présentant des périodicités multiples. BERGE, POMEAU et VIDAL (1988) donnent l'exemple de la position astronomique d'un point quelconque de la surface de la terre. Cette position est fonction des trois paramètres : la rotation de la terre autour du soleil (période de 365,24 jours), la rotation de la terre sur elle-même (période de 24 h) et le mouvement de précession de l'axe de rotation de la terre (période de 25800 ans). L'attracteur d'un tel processus sera un tore d'ordre 3 ( $T^3$ ).

**Bifurcation** : Il y a bifurcation lorsque pour une valeur donnée du paramètre d'une équation la solution de cette équation change qualitativement. La bifurcation a lieu pour une valeur du paramètre appelée “valeur critique”. Pour la fonction logistique une première bifurcation a lieu pour  $\mu = 0,75$ . En effet pour  $\mu < 0,75$  l'application converge assez rapidement vers un point fixe (cf graphique 2.2 avec  $\mu = 0,70$ ). Mais dès que le paramètre atteint la valeur critique (cf graphique 2.3. avec  $\mu = 0,75$ ) l'application converge alors vers un cycle limite et est alors de période 2.

**Graphique 2.2.**  
**Avant la bifurcation**

**Graphique 2.3.**  
**Après la bifurcation**



La bifurcation présentée ici (passage d'un point fixe à un cycle limite) est une bifurcation de HOPF. A chaque bifurcation un doublement de la périodicité du processus se produit. D'autres bifurcations ont lieu pour différentes valeurs de  $\mu$ . Elles amèneront le processus à passer de période 2 à période 4 puis 8... puis à un nombre de périodes si important qu'il deviendra impossible d'en distinguer le caractère déterministe.

**Cascade sous-harmonique** : c'est le phénomène de répétition des bifurcations amené par une augmentation de la valeur critique du système entraînant la multiplication des périodes du processus par deux à chaque bifurcation. Lors d'une cascade sous-harmonique, pour n'importe quelle fonction présentant un extremum quadratique, les valeurs critiques pour lesquelles s'effectue le doublement de périodicité sont liées par la relation suivante :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{\mu_{i+1} - \mu_i} \quad (2.3)$$

où  $\mu_i$  est le paramètre pour lequel à lieu la  $i^{\text{ème}}$  bifurcation.

Cette limite est un nombre universel appelé constante de FEIGENBAUM. Elle est égale à 4,669 201 609 102 990... Ce nombre est identique pour toute application dont la fonction possède un extremum quadratique, ce qui assure la non-linéarité de la fonction (BERGE, POMEAU, VIDAL 1988, page 209).

**Degré de liberté d'un processus** : c'est le nombre minimum de paramètres indépendants définissant la condition initiale du processus et donnant la dimension nécessaire à une représentation de l'évolution du système dans l'espace des phases.

Dans le cas d'un processus déterministe la connaissance des conditions initiales va déterminer tout le reste du système.

**Dissipatif** : un système est dissipatif s'il est fonction du temps et si un choc intervenu pendant la période  $t$  lui fait quitter définitivement son cours précédent.

**Espace des phases** : c'est l'espace où sont représentées les trajectoires du processus. Sa dimension est celle du nombre de degrés de liberté du processus. Dès que le nombre de degrés de liberté augmente trop, il faut utiliser l'analyse probabiliste avec l'hypothèse sous-jacente que le processus est aléatoire (même s'il est la représentation d'un système déterministe). Le chaos déterministe à faible degré de liberté permet, comme nous allons le voir, de représenter des phénomènes très complexes à partir de seulement trois degrés de liberté. Trois variables indépendantes peuvent suffire à définir un système à l'évolution très complexe et d'apparence aléatoire.

**Non-linéarité** : nous avons vu que l'existence d'une cascade sous-harmonique amenant au chaos nécessitait la non-linéarité. Intuitivement, l'incapacité des systèmes linéaires à permettre une représentation très riche des phénomènes étudiés est bien perçue. BAUMOL et BENHABIB (1989) expliquent que des processus linéaires ne pouvaient générer que quatre types de trajectoires :

- oscillatoires et stables
- oscillatoires et explosives
- non-oscillatoires et stables
- non-oscillatoires et explosives

A l'inverse de cela, les équations non linéaires permettent de générer des trajectoires beaucoup plus complexes. Mais elles ont longtemps été ignorées à cause, entre autres, des problèmes liés à leur estimation en économétrie. La non linéarité permet d'appréhender la succession de variations de forte amplitude suivies de variations de faible amplitude. La découverte récente du chaos déterministe a accru l'intérêt des économistes pour les phénomènes non linéaires.

## *2. Différentes voies vers le chaos.*

Le passage d'un système possédant un point fixe, un cycle limite ou un tore comme attracteur à un système d'apparence désordonnée n'a pas toujours lieu de la même manière. En fait, il existe différents modes d'apparition du chaos déterministe dans un système d'équations qui dépendent de la nature de la bifurcation déformant l'attracteur. Ces voies d'apparition du chaos peuvent être classifiées en utilisant la théorie de Floquet. Pour cela, nous supposons un processus  $X$  de dimension  $m$  non linéaire, périodique de période  $T$ . Pour l'étude de la stabilité de la solution périodique du système, il suffit de voir ce qu'il advient d'un petit écart autour de cette solution. Après linéarisation du processus, la condition initiale  $\vec{X}_0 + \vec{\delta X}$  (avec  $\vec{\delta X}$  très petit) devient  $\vec{X}_0 + M \vec{\delta X}$  au bout de  $T$  périodes.  $M$  est appelée la matrice de Floquet (dimension  $m \times m$ ). La solution du système sera linéairement stable si toutes les valeurs propres de  $M$  sont à l'intérieur du cercle unité dans le plan complexe. La perte de stabilité de la solution périodique, par variation continue de la valeur de  $\mu$ , correspond au passage du cercle unité par l'une au moins de ces valeurs propres.

Pour des systèmes d'au moins trois dimensions, la perte éventuelle de stabilité linéaire aura trois explications possibles selon la valeur à laquelle les valeurs propres traversent le cercle unité :

- croisement par la valeur +1
- croisement par la valeur -1
- croisement simultané par les valeurs complexes conjuguées  $\alpha \pm i \beta$

### **Bifurcation nœud-col (Croisement par +1).<sup>49</sup>**

C'est le cas d'une *intermittence de type 1* où se succèdent périodes régulières et bouffées turbulentes. L'amplitude du régime périodique croît continuellement jusqu'à un seuil où il y a explosion puis retour à une évolution régulière. Les périodes régulières apparaissent de manière aléatoire et leur durée est également aléatoire. Dans le cas de la théorie financière un tel régime pourrait expliquer que certains chercheurs trouvent des corrélations significatives entre les taux de

---

<sup>49</sup> Pour les bifurcations, nous nous sommes référés à BERGE, POMEAU et VIDAL (1988) et BERGE et DUBOIS (1992).



rentabilité des actifs et que d'autres confirment la marche aléatoire ou la martingale. Ces résultats seraient dépendants du régime (régulier ou explosif) qui caractérise l'échantillon sur la période ayant servi aux tests.

### **Bifurcation sous-harmonique (croisement par -1).**

Il faut différencier selon que la bifurcation est normale ou inverse.

Dans le cas d'une bifurcation inverse<sup>50</sup>, nous sommes en présence d'une intermittence appelée *intermittence de type 3*, avec, là aussi, une succession de phases régulières et de périodes chaotiques. Simplement dans le cas d'une intermittence de type 3, les termes faiblement non linéaires renforcent la perte de stabilité à la différence du cas précédent.

En revanche si la cascade sous-harmonique engendrée par le croisement par la valeur -1 est normale<sup>51</sup>, le schéma est celui de la *transition au chaos par doublement de période*. Les doublements de période successifs issus des différentes bifurcations génèrent le phénomène de cascade sous-harmonique présenté dans les définitions. Le doublement de périodicité s'il est suffisamment répété conduit à un processus chaotique de périodicité infinie et dont le caractère déterministe n'est pas décelable avec les outils classiques.

### **Bifurcation de Hopf (croisement par $\alpha \pm i \beta$ ).**

Il faut distinguer selon que la bifurcation est inverse ou normale.

Dans le premier cas, il s'agit d'une *intermittence de type 2* avec succession de phases régulières et de périodes chaotiques. Mais les fréquences d'apparition de périodes instables sont fonction du rapport  $\alpha/\beta$  et non plus de la fréquence du cycle limite initial.

Dans le cas d'une bifurcation sur-critique, il y a *transition au chaos par la quasi-périodicité*. Une première bifurcation de HOPF induit le remplacement du cycle limite par un tore  $T^2$ . D'après le mécanisme imaginé par LANDAU (1971), il fallait une multitude de bifurcations de HOPF pour arriver à la turbulence.

---

<sup>50</sup> Dans le cas d'une bifurcation inverse, les termes d'ordre 2 et 3 de la forme non linéaire renforcent l'effet d'instabilité inauguré par le terme d'ordre moins élevé.

<sup>51</sup> Les termes d'ordre 2 et 3 de la forme non linéaire ont un effet opposé à l'instabilité provoquée par le terme d'ordre moins élevé.

RUELLE et TAKENS (1971) démontrent que cette dernière pouvait apparaître après un nombre relativement restreint (trois) de bifurcations de HOPF. RUELLE, TAKENS et NEWHOUSE (1978) ont montré que certaines perturbations détruisaient le Tore  $T^3$  (il est même possible que de la destruction d'un tore  $T^2$  naisse le chaos). Elles le transforment en attracteur étrange qui est stable et robuste vis-à-vis des futures perturbations pouvant intervenir après cette transition. LI et YORKE confirment ces résultats en 1975.

De toutes ces routes vers le chaos, celle qui a entraîné le plus fort intérêt est celle inaugurée par RUELLE et TAKENS qui montrent que la turbulence, le désordre, peuvent naître de systèmes déterministes très simples. L'apport de RUELLE et TAKENS a surtout consisté en un rapprochement entre le chaos et la notion d'attracteurs étranges issus de l'idée de fractal développée par MANDELBROT (1975).

## II. Chaos déterministe et attracteurs étranges.

Le chaos déterministe est fortement lié à la notion d'attracteur étrange. Nous allons montrer comment ce lien est fait à partir d'une définition issue entre autres de BERGE, POMEAU et VIDAL (1988). Trois critères fondamentaux de détermination du chaos ressortent, dont l'un nous servira à présenter ensuite les attracteurs étranges, outil ayant permis de mettre à jour le chaos déterministe à faible degré de liberté.

### *1. Définition du chaos.*

Il n'existe pas de définition formelle unique du chaos déterministe, mais de multiples notions qui découlent du chaos sont mises en avant tour à tour. Nous avons relevé dans l'ouvrage de GLEICK (1987, traduction 1989) l'idée que différents scientifiques voulaient privilégier dans le chaos déterministe :

“une forme d'ordre sans périodicité” (BAI-LIN).

“un comportement récurrent apparemment aléatoire dans un système déterministe (de type mécanique) élémentaire” (STEWART).

“un comportement imprévisible, irrégulier de systèmes dynamiques déterministes, non linéaires” (JENSEN)

“une dynamique à entropie métrique positive mais finie. La traduction dans le langage naturel de cette formulation mathématique est : comportement générant de l'information [...] sans être totalement prévisible” (CRUTCHFIELD).

Toutes ces définitions, plus ou moins intuitives, insistent sur l'impossibilité de prévoir, sur la création d'information, sur l'ordre latent du système. Nous avons choisi une présentation formelle du chaos déterministe issue de l'ouvrage de BERGE, POMEAU, VIDAL (1988).

Un système défini par une application  $F$  sera dit chaotique si :

- (1) la fonction d'autocorrélation s'annule pour un retard très court
- (2) il y a Sensibilité aux Conditions Initiales (SCI)
- (3) l'attracteur du système dans l'espace des phases est un attracteur étrange (ou objet fractal)

La condition (1) reprend l'hypothèse d'entropie positive du système qui, malgré son caractère déterministe, présente alors un aspect désordonné gênant la prévision. L'intérêt du chaos est justement ce caractère désordonné obtenu à partir de systèmes d'équations très simples.

La condition (2) démontre la difficulté de prévoir en présence du chaos. En effet, la SCI traduit le fait qu'en présence d'un attracteur étrange, deux trajectoires presque confondues à un temps  $t=0$  vont diverger exponentiellement quand  $t$  augmente. Cette propriété de SCI est d'autant plus importante qu'elle a été présente dès la création de l'univers au moment du Big Bang. En effet si la densité originelle de l'univers s'était écartée de son niveau de l'ordre de  $10^{-40}$ , l'univers tel que nous le connaissons n'aurait jamais existé (GUITTON, 1991). La prévision s'avère alors presque impossible car elle dépend beaucoup trop de la valeur donnée à l'observation initiale qui peut difficilement être connue à la perfection. La météorologie s'intéresse de plus en plus au chaos déterministe (surtout depuis les

travaux de LORENZ en 1963 qui découvre le premier attracteur étrange en météorologie). Pour illustrer la SCI, une anecdote bien connue raconte que le bruissement des ailes d'un papillon dans la baie de Sidney peut faire se tromper les météorologues de l'ouest des États-Unis. Plus techniquement, des simulations numériques ont montré qu'une erreur à la troisième décimale dans l'évaluation de la condition initiale peut faire échouer toute tentative de prévision (BAUMOL et BENHABIB 1989 et LI et YORKE, 1975). Dans un régime apériodique, la fonction d'autocorrélation s'annule pour un retard assez court. Il y a perte de la mémoire des conditions initiales, et même perte de mémoire pour un temps donné par rapport à une période précédente peu éloignée dans le temps. Ceci semble caractériser les phénomènes aléatoires ne possédant pas d'attracteur. Il y a contraction des aires (perte de mémoire) et en conséquence un appauvrissement de l'information. Mais, à la différence d'autres processus apériodiques, le chaos déterministe - dont la fonction d'autocorrélation s'annule rapidement - conserve l'information. Cela provient de la propriété de Sensibilité aux Conditions Initiales qui conduit des trajectoires voisines à diverger de manière exponentielle ; par ailleurs, le fait que le système possède un attracteur, amène deux trajectoires voisines à converger. Ce paradoxe entre l'attraction (destructrice d'information) et la divergence (créatrice d'information) est, en effet, résolu avec l'apparition du chaos déterministe et à travers le concept d'hyperbolicité définissable uniquement dans un espace de phases de taille au moins égale à  $3^{52}$ .

La condition (3) définit l'attracteur d'un processus chaotique comme ayant des caractéristiques topologiques particulières et contribuant pour beaucoup à l'explication du chaos. De tels attracteurs ont été introduits par RUELLE et TAKENS<sup>53</sup>. Une de leurs implications majeures est de pouvoir créer du désordre à partir d'un système déterministe à seulement trois conditions initiales indépendantes, donc une représentation simple, ce qui semblait impossible jusqu'alors. Une autre implication est la possibilité de prendre en compte à la fois l'effet Joseph (qui correspond à la persistance d'un système) que nous avons abordé

---

<sup>52</sup> En effet l'hyperbolicité est le phénomène qui amène une contraction des trajectoires dans un sens (vertical par exemple) ainsi qu'une divergence dans un autre sens (horizontal), plus le temps comme troisième dimension.

<sup>53</sup> En réalité LORENZ (1963) avait déjà introduit cette notion, mais ses travaux sont longtemps restés ignorés.

dans la première partie de ce travail mais également l'effet Noé. Ce dernier résume les fortes discontinuités qui peuvent exister dans certains systèmes, par analogie au déluge (Genèse, chapitre 7). Ce dernier symbolise la discontinuité. Un système, même déterministe, peut être soumis à de très fortes variations. MANDELBROT (1963), travaillant alors sur l'étude probabiliste des phénomènes économiques, souligne la possibilité de la présence d'un effet Noé qui expliquerait le caractère leptokurtique de nombreuses séries financières.

La théorie du chaos va, par le biais de la caractérisation des séries en termes d'attracteurs fractals, prendre en compte ces effets Joseph et Noé. C'est pour cela qu'il nous semble impossible de présenter le chaos sans accorder une part importante à l'étude des attracteurs étranges et de leur caractère fractal.

## *2. Les attracteurs apériodiques.*

Nous avons vu les attracteurs de systèmes périodiques (point fixe, cycle limite) et quasi-périodique (Tore). Ces attracteurs, comme tout attracteur  $A$  d'une série  $X$ , possèdent les propriétés suivantes définies dans l'espace des phases :

- compacité de  $A$  dans l'espace des phases
- invariance de  $A$  par action de la trajectoire
- volume nul de  $A$
- inclusion de  $A$  dans  $B$  qui est son bassin d'attraction.  $B$  est de volume non nul et attire toute trajectoire issue de  $A$  lorsque  $t$  tend vers l'infini.

L'attracteur étant de dimension nulle dans l'espace des phases, sa dimension  $d$ , doit être strictement inférieure à celle de cet espace des phases. Un flot chaotique évoluant dans un espace des phases tridimensionnel aura donc un attracteur de dimension strictement inférieure à 3. Pour qu'il y ait un processus chaotique déterministe, la trajectoire doit évoluer dans un espace de dimension strictement supérieure à 2 afin de permettre l'hyperbolicité et donc la Sensibilité aux Conditions Initiales (BERGE, POMEAU, VIDAL, 1988). Donc :

Pour représenter un régime chaotique avec trois degrés de liberté, la dimension  $n$  de l'attracteur doit être telle que :

$$2 < n < 3$$

Il n'existe aucune forme topologique de cette dimension en métrique euclidienne. C'est pour cela que l'attracteur d'un régime chaotique doit être un objet fractal. RUELLE et TAKENS ont défini un tel attracteur comme étant un *attracteur étrange*. La découverte de cette notion amène une quasi révolution méthodologique car elle va de pair avec celles de fractal et d'objet à dimension non entière, définies en 1975, par MANDELBROT.

Dans la section suivante de ce chapitre nous développons la notion d'objet fractal et les différentes manières de mesurer la dimension d'un tel objet. Ceci nous permettra alors de caractériser l'attracteur d'une série et de discerner parmi les systèmes à entropie positive, ceux qui possèdent un attracteur à dimension non entière et qui sont donc des systèmes chaotiques déterministes.

### **Section 3. Mesure de la dimension des attracteurs.**

Un des attraits de la théorie du chaos déterministe est de proposer une étude de l'évolution des systèmes par le biais de la géométrie et non de la statistique. Aussi dans cette section, nous focaliserons notre attention sur la connaissance des fractals et sur les différentes manières de mesurer leur dimension, ou même de reconstruire, sur la base d'une série univariée, l'attracteur fractal d'un système dans un espace des phases de dimension pertinente.

#### **I. Les objets fractals.**

C'est en constatant que la plupart des choses qui nous entourent ne sont pas descriptibles à l'aide de la géométrie euclidienne que MANDELBROT tente de définir une nouvelle géométrie représentative de l'organisation de la nature. Elle doit être celle des objets aux contours irréguliers, fragmentés ne présentant pas l'extrême régularité des cubes, sphères et autres formes fondamentales sur lesquelles repose la géométrie classique. Ces objets fractals ont notamment la particularité d'être de dimension fractionnaire, non entière : les fractals pourraient être vus comme l'ensemble des objets de dimension non entière. Ces objets présentent une telle richesse, une telle complexité qu'il est difficile d'en donner une aussi rapide définition. Dans son livre de 1975, MANDELBROT (page 154 de la troisième édition) donne les caractéristiques qui définissent un objet fractal :

- la self-similarité (ou invariance d'échelle) qui est le fait que chaque partie de l'objet est équivalente au tout à un coefficient d'échelle près. C'est le phénomène d'homothétie interne ;

- la forme irrégulière constatée quelle que soit l'échelle avec laquelle l'objet est observé ;

- l'apparition d'éléments distinctifs à différentes échelles.

En 1982, MANDELBROT caractérise les fractals comme des objets dont la dimension est non entière alors qu'en 1986 il insiste sur l'invariance d'échelle. Il n'existe donc pas de définition mathématique et rigoureuse des fractals. Aussi, nous préférons donner quelques exemples permettant de mieux saisir le concept de fractals comme objet et comme attracteur d'un système dynamique. Nous utilisons pour cela des fractals comme la poussière de CANTOR, le flocon de VON KOCH, les attracteurs de LORENZ et de HENON. De plus, nous présentons en annexe 1a à 1d, quatre exemples d'objets fractals qui permettent de mettre en lumière leur complexité.

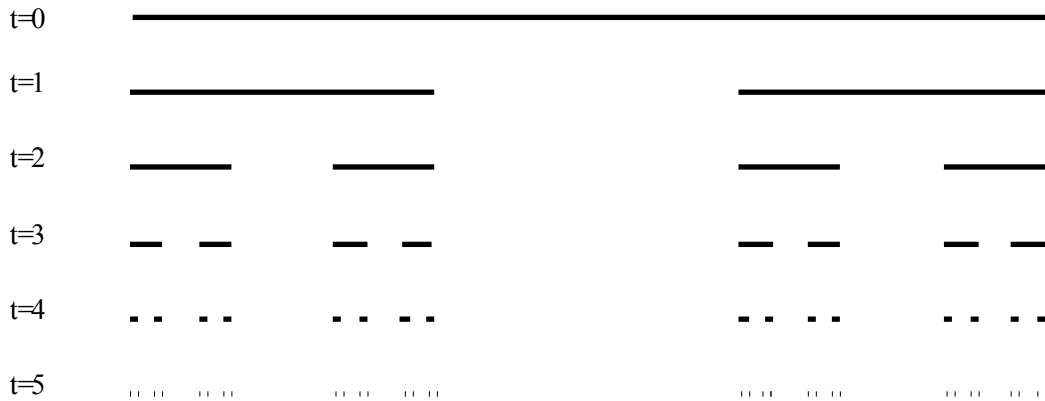
### **La poussière de CANTOR (1932)**

Prenons un segment de longueur unitaire. Enlevons lui son tiers central ( $t=1$ ). Puis répétons cette opération sur les deux segments restant. En répétant cela  $n$  fois, nous obtenons  $2^n$  segments. A l'infini, il reste une infinité de points disjoints. La

dimension d'une telle forme n'est donc pas un, mais n'est pas non plus zéro ; L'ensemble triadique de CANTOR a une dimension comprise entre zéro et un. C'est un fractal. La propriété de self-similarité notamment se constate sur le graphique 2.4. En  $t=5$ , une partie de l'ensemble aura exactement la même forme que la totalité en  $t=1$ , à un facteur d'échelle près.

**Graphique 2.4. La poussière de CANTOR.**

Représentation à cinq niveaux successifs de construction.



Un autre fractal construit de manière récursive comme la poussière de CANTOR est le flocon de neige de VON KOCH.

**Le flocon de neige de VON KOCH (1904)**

Prenons un triangle équilatéral. De chaque côté retirons le tiers central, et mettons y un triangle équilatéral comme sur la figure 2 du graphique 2.5. Répétons cette opération (figure 3) puis jusqu'à l'infini. Dans ce cas aussi nous aurons self-similarité. Mais là encore, la méthode récursive de construction ne rend pas étonnant ce résultat.

**Graphique 2.5. Le flocon de neige de VON KOCH.**

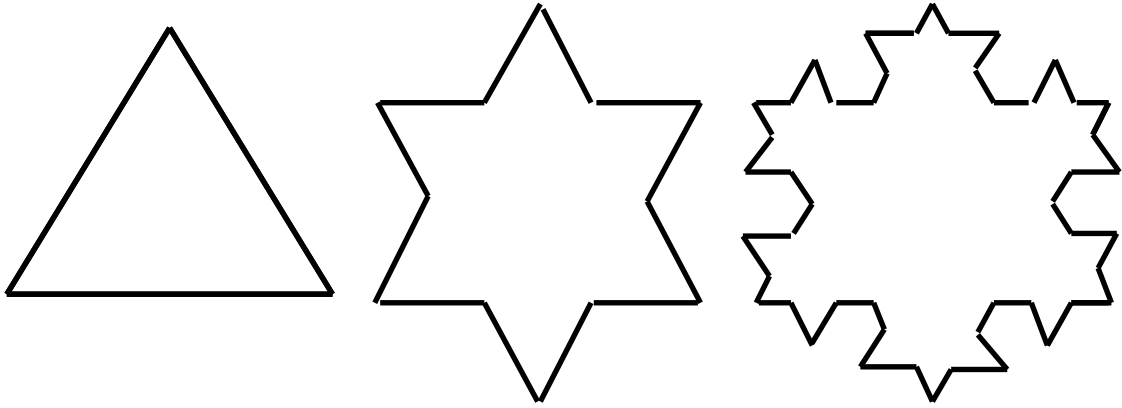
Représentation à trois niveaux successifs de construction.

Figure 1

Figure 2

Figure 3





Cet objet fractal possède comme particularité d'avoir un périmètre infini compris dans une aire finie. En effet, le flocon de neige reste inscrit à l'intérieur d'un cercle de dimension finie alors que son périmètre va croître de manière infinie (chaque étape multiplie sa longueur par  $4/3$ ). Le flocon de neige de VON KOCH est un exemple représentatif du caractère irrégulier des fractals et de la propriété importante qui fait qu'ils ne remplissent pas l'espace qui leur est alloué. Nous verrons d'ailleurs que la mesure de la dimension d'un fractal correspond à la mesure de la part d'espace que l'objet remplit.

Il existe de nombreux autres objets fractals (citons notamment le tracé des côtes bretonnes, la distribution des galaxies dans l'espace, les cratères de la lune, MANDELBROT, 1975). Dans notre cas, l'intérêt est porté sur l'objet fractal en tant qu'attracteur d'un système chaotique. RUELLE et TAKENS se sont interrogés sur la possibilité de trouver, dans un espace de faible dimension, un système non périodique qui puisse posséder un attracteur contenu dans un espace limité. Il faut que cet attracteur soit de longueur infinie et de surface finie. Cependant les fractals en tant qu'attracteurs de systèmes ne sont pas générés par une construction récursive comme ceux que nous venons de présenter. Pour cette raison nous montrons ici deux objets fractals qui constituent des exemples typiques (car connus depuis longtemps) d'attracteurs étranges : l'attracteur de LORENZ et l'attracteur de HENON.

### **L'attracteur de LORENZ (1963)**

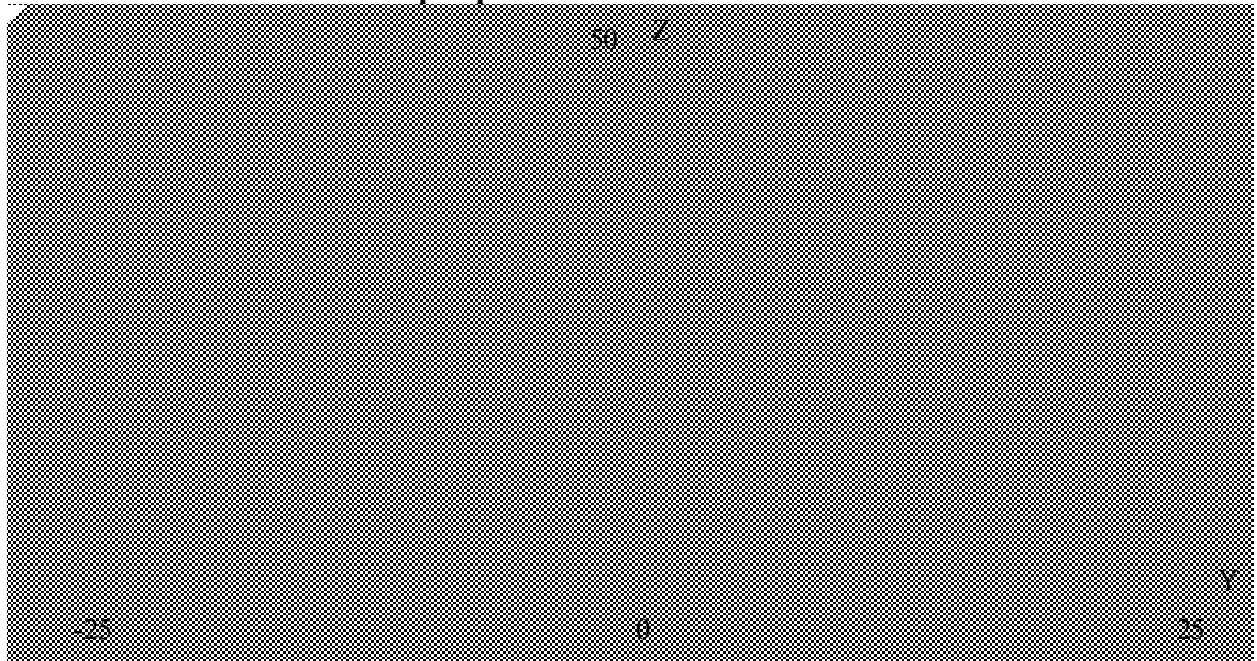
Lors d'une étude sur l'atmosphère, LORENZ a construit un modèle où il tente de formaliser le climat à partir d'un système de trois équations déterministes très simples. LORENZ travaillait sous l'hypothèse newtonienne implicite selon laquelle une approximation des conditions initiales permettait une description approximative mais correcte du système. Lors des simulations informatiques de son modèle de climat, il perçoit la forte Sensibilité aux Conditions Initiales. En effet, l'approximation des conditions initiales à  $1/1000^{\text{ème}}$  qu'il réalise fait complètement diverger son système par rapport aux résultats établis précédemment. Cette découverte s'accompagne en 1963 de celle du premier

attracteur étrange d'un système qui est de la forme suivante :

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= a(Y - X) \\ \frac{dY}{dt} &= -XZ + cX - Y \\ \frac{dZ}{dt} &= XY - bZ\end{aligned}\tag{2.4}$$

Généralement  $a = 10$ ,  $b = 8/3$ . Le paramètre de contrôle,  $c$ , détermine la nature du système. Nous avons représenté ci-après l'attracteur de LORENZ en deux dimensions avec  $Y$  en abscisses et  $Z$  en ordonnées pour  $c=28$ <sup>54</sup>.

**Graphique 2.6. Attracteur de LORENZ.**



Quelles que soient les conditions initiales, les trajectoires du système finiront inexorablement sur l'attracteur. Sa forme particulière empêche la prévision car il est impossible, en pratique de déterminer le moment précis où la trajectoire va passer d'une aile à l'autre du papillon. L'impact scientifique de l'attracteur de LORENZ n'a été réel qu'avec les travaux de RUELLE et TAKENS (1971) et MANDELROT (1975). Depuis tout ouvrage traitant du chaos déterministe le fait apparaît. C'est pourquoi nous tenions à présenter ce symbole des attracteurs étranges de systèmes chaotiques.

---

<sup>54</sup> Ce graphique a été réalisé en discrétisant le système de LORENZ à l'aide de l'algorithme de ADAMS-BASHFORTH décrit dans le livre de CHUA et PARKER (1989).

## L'attracteur de HENON (1976)

En discrétisant un système continu, il est possible de réaliser une représentation pour des intervalles réguliers. Sur la base de cette idée, POINCARÉ introduit le principe de la section de POINCARÉ qui permet de représenter des systèmes de dimension  $n$  discrétisés et donc en dimension  $n-1$ . Ceci permet d'économiser une dimension.

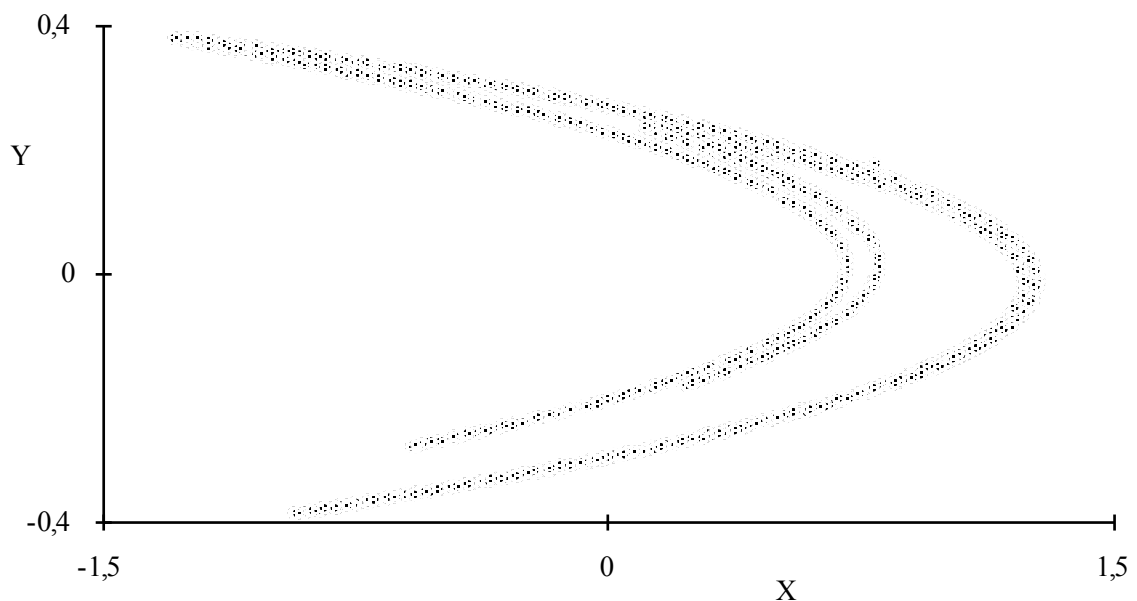
Un système chaotique doit être tridimensionnel au moins pour permettre la SCI. HENON (1976) propose une application du plan dans lui-même qui peut être considérée comme la section de POINCARÉ d'un flot tridimensionnel<sup>55</sup>. Son système s'écrit :

$$\begin{cases} X_{t+1} = Y_t + 1 - \alpha X_t^2 \\ Y_{t+1} = \beta X_t \end{cases} \quad (2.5)$$

L'attracteur de ce système est donné par le graphique 2.7.

### Graphique 2.7. Attracteur de HENON.

$\alpha=1,4$  et  $\beta=0,3$



<sup>55</sup> Pour éviter d'avoir à représenter un système de trois dimensions dans l'espace, nous représentons sa coupe (ou section) de POINCARÉ c'est-à-dire les intersections de sa trajectoire dans un plan qui correspond à une valeur fixée d'un des trois paramètres de la série. (Pour un flot de dimension  $N$ , la section de POINCARÉ est de dimension  $N-1$ ).

L'attracteur de HENON, de par la simplicité extrême du système sous-jacent et la particularité de son attracteur, est lui aussi un exemple très utilisé pour illustrer la notion d'attracteur fractal.

La connaissance de l'attracteur de certaines séries chaotiques ne suffit bien entendu pas à connaître l'attracteur d'une série quelconque supposée chaotique. Aussi, il a été développé toute une palette de techniques qui permettent de mesurer la dimension d'un objet fractal et cela même si la forme structurelle de la fonction génératrice est inconnue.

## II Mesure de la dimension fractale.

### *1. Dimension d'un objet fractal.*

La dimension topologique, toujours entière, ne peut absolument pas servir à mesurer des objets dont la caractéristique est justement d'être de dimension non entière. Pour cette raison, il faut faire appel à des dimensions qui permettent de prendre en compte la possibilité d'existence et de mesure d'objets dont les dimensions sont particulières (à moins que ce ne soit une dimension entière qui soit un cas particulier).

Considérons un objet situé dans un espace à  $p$  dimensions. Pour recouvrir cet objet il faudra  $N(\varepsilon)$  hypercubes<sup>56</sup> de côtés  $\varepsilon$ . La dimension fractale de l'objet, appelée également dimension de HAUSDORFF-BESICOVITCH<sup>57</sup> est :

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln [N(\varepsilon)]}{\ln (1/\varepsilon)} \quad (2.6)$$

Si l'objet est un point, il suffit d'un hypercube pour le recouvrir.  $D$  est donc égale à 0. Si l'objet est un segment de longueur  $L$ , alors  $N(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}$ , donc  $D$  égal 1.

---

<sup>56</sup> Un hypercube est à la dimension  $n$  ce qu'un cube est à la dimension 3.

<sup>57</sup> Cette dimension a été établie par HAUSDORFF (1919) puis améliorée par BESICOVITCH (1935).

Pour des objets de forme géométrique classique, la dimension d'HAUSDORFF est la même que la dimension euclidienne.

En revanche, pour un fractal comme l'ensemble triadique de CANTOR, cette dimension va trouver ici son réel intérêt. Nous avons vu que la dimension d'une poussière de CANTOR est comprise entre 0 et 1.

Si  $\varepsilon = 1/3$ , le nombre minimal d'hypercubes (ici des segments) nécessaires pour recouvrir l'ensemble de CANTOR est  $N(1/3) = 2$ .

Si  $\varepsilon = 1/9$ ,  $N(1/9) = 4$ .

Si  $\varepsilon = (1/3)^m$ ,  $N(\varepsilon) = 2^m$ .

La dimension d'HAUSDORFF est alors :

$$D = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^m)}{\ln(3^m)} = 0,63$$

L'objet triadique de CANTOR est un objet fractal, sa dimension n'est effectivement pas entière. En utilisant la même méthode, la dimension du flocon de VON KOCH est  $D = \ln 4 / \ln 3 = 1,26$ .

Mais dans de nombreux cas cette méthode de calcul de la dimension d'un objet fractal s'est révélée insuffisante. En effet, la poussière de CANTOR et le flocon de VON KOCH sont construits de manière récursive. Autrement, il est nécessaire de faire appel à une autre méthode permettant d'évaluer rapidement une dimension fractale  $\nu$ . Cette dernière est inférieure mais proche de  $D$ . La valeur de  $D$  est basée sur la constitution géométrique de l'attracteur et donne une mesure maximale de la dimension de l'attracteur alors que  $\nu$ , au contraire, dépend de la densité des points sur l'attracteur.

Supposons un ensemble de points répartis uniformément sur un plan.  $N(r)$  est le nombre de points de cet ensemble contenu dans un cercle de rayon  $r$ . La dimension  $\nu$  est déterminée par la définition même de la dimension fractale. En effet, celle-ci décrit la façon dont un objet emplit l'espace dans lequel il est situé. Donc  $\nu$  va se calculer en fonction de la variation de  $N(r)$  avec  $r$ . Par exemple, si les points se situent sur une courbe (dimension 1) alors :

$N(r) \sim r$  ou bien  $N(r) \sim r^\nu$  avec  $\nu = 1$

Si les points sont uniformément répartis sur un plan (dimension 2) alors :

$$N(r) \sim r^2 \quad \nu = 2$$

Il a été proposé, sur la base de cette méthode, un calcul de caractérisation géométrique d'un objet fractal dont l'explication est donnée dans BERGE, POMEAU, VIDAL (1988). Considérons un processus  $\{X_t\}$  chaotique. Il n'y a alors aucune corrélation significative entre cette variable à un temps  $t$  et à un temps  $t-\tau$ . Cependant tous les points sont situés sur le même attracteur et il existe entre eux une certaine corrélation spatiale prise en compte de la manière suivante :

$$C(r) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \sum_{t,s=1}^m H \left( r - \left| \vec{x}_t - \vec{x}_s \right| \right) \quad (2.7)$$

où  $H$  est la fonction de Heaviside qui vaut :

1	si $\left  \vec{x}_t - \vec{x}_s \right  < r$
0	sinon.

$C(r)$  est aussi  $N(r)$  compté dans des hypersphères centrées sur tous les points de l'attracteur ce qui rend ce calcul plus long mais beaucoup plus précis.  $C(r)$  est par conséquent proportionnelle à  $N(r)$  et donc :

$$C(r) \sim r^\nu \quad (2.8)$$

GRASSBERGER et PROCACCIA (1983) définissent sur cette base la dimension de l'attracteur comme étant :

$$\boxed{\nu = \frac{\log C(r)}{\log r}} \quad (2.9)$$

Le résultat dépend trop fortement de la valeur attribuée à  $r$  pour pouvoir tirer des résultats fiables de ce calcul. Si  $r$  est trop grand alors quasiment tous les points sont pris en compte et  $C(r)$  tend vers 1. A l'inverse si  $r$  est trop petit alors peu de points vont être pris en compte et le calcul de  $C(r)$  est mauvais également car trop faible ici. RAMSEY et YUAN (1987) ont montré que la valeur trouvée pour  $\nu$  peut être biaisée sur des échantillons de 2000 observations.

Une solution proposée est de calculer cette dimension pour différentes valeurs de  $r$ . Il convient de représenter alors les différentes valeurs de  $\nu$  trouvées

dans un repère cartésien avec  $\text{Log}(r)$  en abscisse et  $\text{Log}(C(r))$  en ordonnée. La pente de la droite obtenue avec ces différents points va fournir une estimation de la dimension de recouvrement. Cependant, il n'existe pas de renseignement a priori sur la dimension de l'espace des phases dans lequel évolue le système, puisque la seule information disponible est une série unidimensionnelle de valeurs  $x_t$ . Sur la base de cette série il faut construire des vecteurs  $\vec{x}_1 = (x_1, \dots, x_p)$ , et calculer alors  $C(r)$  pour des tailles croissantes de ce vecteur. A chaque fois, le calcul de la pente s'établit sur la partie linéaire des points trouvés dans le repère cartésien défini précédemment. Dans le cas, par exemple, d'un bruit blanc, la pente trouvée augmentera indéfiniment avec la taille donnée au vecteur. Cela traduit le fait qu'un bruit blanc est aléatoire et qu'il faut un espace des phases de dimension infinie pour le représenter (une infinité de conditions initiales). Dans le cas d'un système possédant un attracteur fractal de taille finie, la dimension  $\nu$  devient indépendante de  $p$  qui est la "dimension de plongement". Même lorsque  $p$  augmente, la pente  $\nu$  reste constante. Cette pente constante est la dimension de l'attracteur. Si la valeur de  $\nu$  est non entière, cela signifie que l'attracteur est fractal, et donc que la série est chaotique.

Le problème est qu'il n'y a aucune théorie de statistique inférentielle derrière cela. SCHEINKMAN et LEBARON (1989) constatent par exemple que dans le cas d'un processus ARCH, la pente ainsi calculée augmente moins vite que la dimension de plongement. Un tel cas pourrait conduire à conclure à la présence d'un chaos à degré de liberté relativement élevé à tort. C'est pour cette raison que dans le chapitre 5, nous présentons un test statistique issu de cette méthode de caractérisation d'une série par la dimension de son attracteur.

Mais auparavant nous voulons présenter une autre méthode de caractérisation géométrique des séries. Elle consiste à essayer de reconstruire l'attracteur dans l'espace des phases aux dimensions appropriées à partir d'une série univariée.

## *2. Reconstruction de l'attracteur.*



Supposons que nous ne disposions comme information que des valeurs d'une série en fonction du temps. Comme précédemment il faut former des vecteurs de dimension  $p$ ,  $\vec{x}_1 = (x_1, \dots, x_p) = X_1$  ; par exemple, un vecteur à trois dimensions ce qui permet une représentation graphique. Nous sommes alors en présence d'une nouvelle série temporelle, mais tridimensionnelle cette fois. La trajectoire de la série peut se représenter dans un espace à trois dimensions où chacune des composantes du vecteur  $X_t$  constitue une dimension de l'espace des phases ainsi reconstitué. Ce travail est réalisé pour différents intervalles de temps. La figure géométrique ainsi obtenue nous donne un renseignement quant à la forme de l'attracteur du système. ECKMANN (1992, pages 101-102) reconstruit ainsi l'attracteur de LORENZ à partir uniquement de l'évolution temporelle de la variable univariée  $Y$ .

Cette méthode repose plus sur l'intuition que sur un raisonnement mathématique. Mais comme le souligne MANDELBROT (1989, troisième édition) la notion de fractal est assez intuitive elle aussi. Nous pensons donc qu'il ne faut aucunement négliger des solutions qui peuvent permettre d'avancer même si leur fondement paraît bien intuitif.

## **Conclusion.**

Le débat sur la nature déterministe ou aléatoire des phénomènes qui nous entourent s'est longtemps limité à une constatation des limites flagrantes de l'outil déterministe. Les équations différentielles ont supporté pourtant longtemps la vision d'un monde déterministe mais les probabilités ont progressivement pris leur place dans de nombreux travaux scientifiques. Or depuis le milieu des années soixante-dix, la théorie du chaos à faible degré de liberté permet d'entrevoir une description déterministe du monde tout en conservant des propriétés essentielles telles que le désordre et la discontinuité. Cela est rendu possible par l'approche géométrique, et non mathématique ou probabiliste, des phénomènes. L'intérêt pour ce type de recherche va de concert avec les travaux de MANDELBROT sur les objets fractals longtemps considérés comme des monstres mathématiques.

Pour notre part, nous privilégions une utilisation méthodologique du chaos. Il sera préféré à d'autres modèles s'il permet une meilleure représentation de la réalité et non pas comme une vision déterministe du monde. Dans le cas qui nous intéresse ici - l'évolution des cours boursiers - la prévisibilité des cours est la question centrale. L'efficience, par le mécanisme aléatoire d'évolution des rentabilités qu'il suppose, semblait difficilement compatible avec l'idée d'une modélisation déterministe. Cependant si cette dernière entraîne une incapacité à prévoir, alors l'antagonisme classique efficience-déterminisme doit être reconsidéré (chapitre 5). De plus il nous apparaît intuitivement que les notions de chaos et de bruiteurs sont liées d'une manière que nous approfondirons dans la suite de ce travail (chapitre 6).

## CHAPITRE 5 : UN NOUVEAU TEST DE LA MARCHE ALEATOIRE.

Ce chapitre va être consacré à la présentation d'une nouvelle stratégie du test d'efficacité des marchés financiers qui repose sur la caractérisation géométrique de l'attracteur d'une série de rentabilités. Cependant l'information délivrée par ce type de caractérisation est incomplète du fait du manque de fiabilité des méthodes proposées. Par exemple, la dimension de GRASSBERGER et PROCACCIA (1983) permet de caractériser la dimension éventuellement non entière d'un attracteur et donc la nature chaotique d'un processus. Le problème de cette mesure est justement qu'elle n'est qu'une mesure et ne possède pas de théorie statistique sous-jacente. Que conclure si après l'étude de la dimension par le graphique (différentes valeurs de  $r$  et de la taille supposée de l'espace des phases) la dimension obtenue est 5,999 ? Devons-nous en déduire la présence d'un attracteur fractal ou simplement hésiter devant une erreur de calcul éventuelle de mesure de l'attracteur qui serait en réalité de dimension 6 et révélateur ainsi d'un processus certes déterministe mais non chaotique ? Surtout, une taille trop faible des séries (inférieure à 2000) crée un biais dans l'évaluation de la dimension de GRASSBERGER-PROCACCIA comme l'ont montré RAMSEY et YUAN (1987).

Cette même année, BROCK, DECHERT et SCHEINKMAN ont résolu, semble-t-il, ce problème en introduisant un test statistique basé sur cette dimension (section 1). Ils ont construit un test non-paramétrique autour du calcul de la corrélation intégrale (ou corrélation spatiale). Plutôt que de tenter de faire la différence entre un processus chaotique et un processus stochastique, leur test va opposer l'hypothèse selon laquelle une série est iid contre l'hypothèse alternative d'une dépendance non linéaire déterministe ou stochastique. Il est nécessaire, après avoir présenté le test BDS, d'explicitier les différents tests permettant de connaître la cause du rejet de l'hypothèse de série iid.

HSIEH (1989,1991) a montré, par simulation, que le test BDS était également robuste contre la non-stationnarité. Il nous faut donc, dans la section 2,

présenter les différents types de non-stationnarités avant de préciser les tests à effectuer et les stratégies affectées à chacun de ces tests.

La section 3 sera consacrée aux tests de la non-linéarité stochastique. Ceux-ci ont déjà été abordés dans la section 2 du chapitre 2 mais nous les affinerons et les préciserons. Le test du moment de troisième ordre permet de connaître le type de non linéarité (multiplicative ou additive) auquel on est confronté avant de tenter de le modéliser.

Enfin la quatrième section traitera des méthodes de calcul de l'exposant de LYAPUNOV. Nous verrons d'abord ce qu'est cet exposant et en quoi il permet de caractériser les séries chaotiques déterministes. Ensuite nous présenterons l'algorithme de WOLF (WOLF, SWIFT, SWINNEY et VASTANO, 1985) qui est le plus souvent utilisé pour déterminer cet exposant. Nous terminerons par la méthode des réseaux de neurones (KAASHOEK et VAN DIJK, 1991) qui permet d'éviter certains problèmes liés à l'algorithme de WOLF dans le calcul de l'exposant de LYAPUNOV.

### **Section 1. Test BDS (BROCK, DECHERT et SCHEINKMAN, 1987).**

Nous avons vu précédemment que GRASSBERGER et PROCACCIA (1983) définissent la dimension de l'attracteur comme étant  $\nu = \text{Log}C(r)/\text{Log}(r)$  où  $C(r)$  est la corrélation spatiale calculée pour des hypersphères de diamètre  $r$ . Le biais que ce calcul peut causer, même sur des échantillons importants, a entraîné la construction d'un test. Ce dernier développé par BROCK, DECHERT et SCHEINKMAN en 1987 permet, à partir de l'idée d'analyse géométrique des systèmes d'en caractériser la nature. Ce test comble ainsi les lacunes de la mesure de GRASSBERGER-PROCACCIA car il procure la possibilité d'effectuer de l'inférence statistique à partir des résultats obtenus.

## I. Le test.

BROCK, DECHERT et SCHEINKMAN (1987) ont, à partir de cette notion, élaboré une statistique permettant de tester l'hypothèse de bruit blanc contre les hypothèses de chaos déterministe et de non linéarité stochastique. Ils reprennent le concept de corrélation intégrale en posant  $T(T-1)$  au dénominateur pour des raisons de convergence asymptotique :

$$C(r) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T(T-1)} \sum_{t < s}^T H(r - |x_t - x_s|) \quad (2.10)$$

où  $H$  est la fonction de HEAVISIDE

La statistique BDS réalisée pour une série  $X_t$  ( $t=1$  à  $T$ ) d'observations a priori aléatoire va permettre d'opposer à l'hypothèse nulle de processus iid, l'hypothèse de non linéarité. Sur la base de cette série d'observations, des sous-échantillons de taille  $N$  (ou "N-historiques") sont extraits et notés  $x_t^N$ .

La corrélation intégrale de ces sous-échantillons est :

$$C_N(r, T) = \frac{1}{(T_N(T_N-1))} \sum_{t < s} H(r - |x_t^N - x_s^N|) \quad (2.11)$$

où  $T_N = T - N + 1$

$C_N(r, T)$  est considérée comme la probabilité que  $|x_{t+i} - x_{t-i}|$  soit inférieure à  $r$  pour tous les  $i$  allant de 0 à  $N-1$ . Si les  $x_t$  sont indépendants alors, lorsque  $T$  tend vers l'infini :

$$C_N(r, T) \rightarrow \prod_{i=0}^{N-1} \text{prob} \left\{ |x_{t+i} - x_{s+i}| < r \right\} \quad (2.12)$$

BROCK, DECHERT et SCHEINKMAN (1987) démontrent que sous l'hypothèse nulle selon laquelle  $\{X_t\}$  est iid, alors :

$$C_N(r, T) \rightarrow C_1(r)^N \text{ lorsque } T \text{ tend vers l'infini.} \quad (2.13)$$

De ce résultat, il vient :

$$\sqrt{T} \left( C_N(r, T) - C_1(r)^N \right) \sim N \left( 0, \sigma_N^2(r) \right) \quad (2.14)$$

avec :

$$\sigma_N^2(r) = 4 \left[ K^N + 2 \sum_{j=1}^{N-1} K^{N-j} C^{2j} + (N-1)^2 C^{2N} - N^2 K C^{2N-2} \right] \quad (2.15)$$

La variance empirique va être déduite de la vraie variance en estimant  $C(r)$  par  $C(r, T)$  et  $K(r)$  par  $K(r, T)$

$$K(r, T) = \frac{1}{[T_N (T_N - 1) (T_N - 2)]} \sum_{t < s < r} H \left( 1 - \left| x_t^N - x_s^N \right| \right) H \left( 1 - \left| x_s^N - x_r^N \right| \right) \quad (2.16)$$

La statistique BDS, sous l'hypothèse nulle que les  $x_t$  sont iid, est :

$$w_N(r, T) = \sqrt{T} \left( C_N(r, T) - C_1(r)^N \right) / \sigma_N(r, T) \quad (2.17)$$

$w_N(r, T)$  suit une loi normale centrée réduite. HSIEH (1991) vérifie la propriété de normalité asymptotique de cette statistique sur des échantillons de taille finie par des simulations de Monte-Carlo (2000 échantillons de taille 1000). Cette statistique va surtout permettre de tester les processus supposés iid a priori. Elle offre l'avantage de proposer une gamme d'hypothèses alternatives incluant les plus récentes avancées concernant la modélisation des phénomènes économiques et financiers.

## II. Conditions d'utilisations.

La statistique BDS est très sensible à la linéarité. Il serait dommage de ne l'utiliser que pour déceler des dépendances linéaires ; il existe pour cela d'autres outils. Afin de profiter des nouvelles possibilités qu'offre le test BDS, BROCK (1986) préconise le filtrage linéaire de la série testée afin d'enlever tout effet linéaire. Il explique dans cet article que la valeur de la statistique est la même sur les données originales et sur les résultats du filtrage. Plus exactement, il montre que l'attracteur d'une série mue par un processus déterministe possède la même

dimension que la série issue du filtrage linéaire de la série initiale. Cela découle du fait que la dimension de GRASSBERGER-PROCACCIA est un invariant qui permet de regrouper des systèmes dynamiques isomorphes. Or le filtrage linéaire est un isomorphisme de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui à une série  $\{x_t\}$  associe la série filtrée  $\{e_t\}$ .

Dans notre cas, le test BDS va être appliqué sur des données présentant une autocorrélation s'annulant très rapidement. Jusque là, en effet, les tests de l'efficacité des marchés ne cherchaient à opposer à l'efficacité des marchés qu'une corrélation *linéaire* dans l'évolution des cours. A cette corrélation, il est en général associé un dysfonctionnement des marchés financiers. En cas de rejet de l'hypothèse d'indépendance, il faut conclure alors à l'existence d'une partie déterministe dans l'évolution des cours, ce qui traduit la possibilité d'utiliser une information non encore intégrée dans le cours pour battre le marché. Ce schéma apparaît un peu restrictif, en raison de l'utilisation exclusive de la linéarité. Cependant, au milieu des années 80, avec l'introduction de processus stochastiques non linéaires (ARCH, GARCH ...) et surtout l'apparition du chaos déterministe (également non linéaire) un bouleversement est apparu dans l'étude statistique et mathématique des séries financières. La non linéarité va permettre de modéliser des phénomènes pour lesquels l'usage de la linéarité est insuffisante.

HSIEH (1989, 1991) a recensé les différentes alternatives contre lesquelles la statistique BDS était robuste. Elles sont au nombre de quatre :

- la dépendance linéaire
- la non stationnarité
- les processus stochastiques non linéaires
- le chaos déterministe

### **Dépendance linéaire**

Les simulations montrent que le test BDS parvient à rejeter 99,75 fois sur 100 (selon différentes valeurs de  $r$  et pour différentes dimensions supposées de l'espace des phases) l'hypothèse de distribution iid lorsque celle-ci est en fait un processus autorégressif ou moyenne mobile d'ordre un. C'est la confirmation de la forte robustesse du test à l'hypothèse de dépendance linéaire.

## Non stationnarité

HSIEH teste la robustesse de la statistique BDS contre deux processus non stationnaires ; le premier est la non stationnarité en espérance. Pour cela, il simule des séries indépendamment distribuées mais ayant une espérance de -1 pour les cinq cents premiers termes et de +1 pour les cinq cents derniers (la variance est de 1 pour tout l'échantillon). Il simule également des processus non stationnaires en variance. D'espérance 0, ils sont de variance 1 pour les cinq cents premiers et 2 pour les cinq cents derniers. Dans les deux cas le test BDS rejette fortement l'hypothèse iid. Le rejet atteint 100 % pour la non stationnarité en espérance (quelle que soit la valeur de  $r$  :  $0,5\sigma$ ,  $\sigma$ ,  $1,5\sigma$  et  $2\sigma^{58}$ ). Pour la non stationnarité en variance le rejet est au pire de 92,65 %. Là aussi il semble que la statistique BDS est extrêmement robuste contre l'hypothèse de non-stationnarité.

## La non linéarité stochastique

Les simulations sont réalisées pour le modèle autorégressif par morceaux TAR (Treshold AutoRegressive) de TONG et LIM (1980). Dans l'article de HSIEH il est choisi :

$$\begin{aligned}x_t &= -0,4 x_{t-1} + u_t && \text{si } x_{t-1} < 1 \\x_t &= 0,5 x_{t-1} + u_t && \text{si } x_{t-1} \geq 1\end{aligned}\tag{2.18}$$

où  $u_t$  est n.i.d.

Les simulations sont également effectuées sur des ARCH(1) et GARCH(1,1) ainsi que sur le modèle EGARCH défini par NELSON (1991). Dans tous les cas, le test BDS rejette fortement l'hypothèse iid lorsqu'il y a présence d'un de ces phénomènes. La robustesse est moins forte pour les processus GARCH avec des dimensions faibles de l'espace des phases (N-historiques de taille faible). Le problème est plus important en ce qui concerne le processus EGARCH. D'après les simulations, le test BDS ne rejette l'hypothèse iid en cas de EGARCH que 50 % des fois. Le risque de croire en l'hypothèse iid à tort est non négligeable et ainsi peut

---

<sup>58</sup>  $\sigma$  est l'écart type des données.



empêcher de modéliser à l'aide d'un processus pourtant très intéressant. Afin de résoudre cela, HSIEH fournit une table des valeurs critiques pour appliquer le test BDS en cas de présence supposée d'un effet EGARCH.

### **Le chaos déterministe**

HSIEH assure la robustesse du test BDS contre plusieurs types de processus chaotiques, mais ne présente que les résultats concernant l'équation de MACKLEY-GLASS (1977) :

$$\frac{dx_t}{dt} = \frac{ax_{t-c}}{1 + x_{t-c}^{10}} - bx_t \quad (2.19)$$

avec :  $a=0,2$ ,  $b=0,1$  et  $c=100$

Le choix de cette équation tient au fait qu'elle génère un chaos à relativement haute dimension (7,5). A priori un tel chaos est moins facilement détectable. Si BDS détecte ce type de chaos, il n'en sera que plus fiable dans la détection des chaos à plus faible degré de liberté. HSIEH suppose ici implicitement que si le test BDS est robuste contre un tel type de chaos, il sera robuste contre des chaos à plus faible degré de liberté. Les résultats sont spectaculaires puisque le test détecte 100 % des processus générés à partir de cette équation pour toutes les valeurs de  $r$  testées et pour des historiques de tailles 2 à 5. Le chaos semble donc aisément détectable à l'aide de la statistique BDS.

Cependant, les résultats issus du test BDS ne disent rien en ce qui concerne la nature du rejet de l'hypothèse nulle de série iid. Il est nécessaire d'effectuer différents tests qui vont nous permettre de connaître les causes de ce rejet selon qu'il s'agit de la non stationnarité, de la non linéarité stochastique ou du chaos déterministe.

### **Section 2. Non stationnarité et racine unitaire.**

L'hypothèse de stationnarité peut être définie comme la propriété que possède un processus stochastique dont les moments du premier et du deuxième ordre sont constants quelle que soit la période étudiée. Cette hypothèse a longtemps été privilégiée car elle facilitait grandement l'étude statistique des séries temporelles. L'interprétation économique est que la série étudiée ne subit pas de changements brusques et durables de comportement. L'hypothèse alternative de non stationnarité est liée à un changement statistiquement significatif dans la valeur d'un des moments de la série, donc un changement de nature. La non stationnarité dans un processus stochastique fut envisagée car inévitable en macro-économie dans un premier temps. Les séries macro-économiques sont caractérisées par un taux de croissance positif en moyenne et donc une variation de l'espérance de la série. Dans le cas de la finance, HSIEH (1991) ne trouve pas de justification théorique, sur l'échantillon qu'il teste, au rejet de l'hypothèse de stationnarité. Cependant c'est une hypothèse que nous ne voulons pas négliger pour l'étude d'autres séries financières.

Dans un premier temps nous présenterons une définition formelle des deux types de non stationnarité envisagés, stochastique (présence d'une racine unitaire dans le processus) ou déterministe (existence d'un trend). Selon la classification de NELSON et PLOSSER (1982), c'est un problème important de traitement de chacun des deux types de non stationnarité qui nécessite notamment des stratégies de tests spéciales afin d'opter pour le bon choix (ERTUR, 1991 et 1992). Ceci est réalisé afin de connaître la méthode adaptée de stationnarisation. Pour notre part, il importe d'effectuer cela pour modéliser avec justesse les comportements qui engendreraient l'éventuelle non stationnarité. Cela nous permettra de distinguer l'impact des chocs apparaissant sur le processus.

La part principale de cette section sera consacrée à la présentation de plusieurs tests statistiques de non stationnarité à partir de la présence ou non de racine unitaire dans le processus de l'innovation  $\{\varepsilon_t\}$  de la série de prix d'un actif, c'est-à-dire de la différence en logarithme de ces prix.

### I. Deux types de non stationnarité et premiers tests.

### 1. Non stationnarité déterministe.<sup>59</sup>

Dans le cas présent l'innovation va s'écrire comme la somme d'une fonction déterministe  $f(t)$  du temps et d'un processus stationnaire nul en espérance.

$$\varepsilon_t = f(t) + u_t \quad u_t \text{ est un ARMA } (p,q) \text{ stationnaire} \quad (2.20)$$

L'espérance de  $\varepsilon_t$  est égale à  $f(t)$  et donc fonction du temps. Le processus d'innovation est alors non stationnaire. Nous délaierons quelque peu ce type de non stationnarité car dans notre cas, l'innovation étant un taux de rentabilité, nous pensons que cela n'est guère un processus favorable à la présence d'une non stationnarité de type déterministe. Il faudra néanmoins s'assurer de la justesse de cette hypothèse. Nous verrons que cela est possible par l'utilisation des tests de DICKEY et FULLER (1979). Avant d'aborder ces tests, nous tenons à présenter la non stationnarité de nature stochastique ainsi qu'un test de cette hypothèse développé par LJUNG et BOX (1978).

### 2. Non stationnarité stochastique.<sup>61</sup>

Cette forme de non stationnarité caractérise des processus qui sont stationnaires par différenciation. Ils se notent sous la forme :

$$\Delta\varepsilon_t = u_t \quad u_t \text{ est un ARMA } (p,q) \text{ stationnaire } (0, \sigma^2) \quad (2.21)$$

Ce qui s'écrit aussi

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t \quad \text{avec } \rho = 1 \quad (2.22)$$

$$\text{ou } \varepsilon_t = \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^t u_i \quad (2.23)$$

---

<sup>59</sup> Ce processus est appelé Trend Stationary (TS) par NELSON et PLOSSER (1982).

<sup>60</sup> Ce processus est appelé Trend Stationary (TS) par NELSON et PLOSSER (1982).

<sup>61</sup> Ce processus est appelé Difference Stationary (DS) par NELSON et PLOSSER (1982).

<sup>62</sup> Ce processus est appelé Difference Stationary (DS) par NELSON et PLOSSER (1982).

Le processus étudié est la somme de termes iid. Les moments de l'innovation sont alors :

$$E(\varepsilon_t) = \varepsilon_0$$

$$V(\varepsilon_t) = t\sigma^2$$

$$\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \sigma^2 \min(t, s)$$

La variance du processus est fonction du temps. Cette non stationnarité est générée par la présence d'une racine unitaire ( $\rho=1$ ). La différenciation permet d'éliminer la non stationnarité stochastique qui caractérise ce processus. Nous sommes ici en présence d'un processus DS d'ordre 1. Dans le cas d'un processus DS d'ordre  $p$ , il y aurait  $p$  racines unitaires et  $p$  différenciations seraient nécessaires pour stationnariser la série.

Outre la méthode de stationnarisation, une différence dans la nature de la non stationnarité entraîne de fortes disparités au niveau de la prévision. Dans le cas du modèle TS, les chocs aléatoires frappant le processus étudié sont transitoires. La série retrouvera, après le choc, sa trajectoire de long terme. La prévision n'est alors pas totalement incertaine. En revanche, dans le cas des modèles DS les chocs aléatoires ont un effet permanent (la série est exprimée en termes d'une somme de termes aléatoires). Cette persistance va entraîner une forte incertitude sur la prévision. Il est clair que la nature de la non stationnarité amène à considérer deux modèles bien distincts. Dans le premier (TS) il est possible de distinguer la tendance de long terme des chocs aléatoires de court terme. Dans le cas du modèle DS, l'effet des chocs est permanent et la tendance de long terme ne se sépare plus des fluctuations du court terme.

L'intérêt croissant pour ce type d'étude est dû notamment au fait qu'en cas de non stationnarité causée par une racine unitaire, les tests classiques de significativité ne possèdent plus les mêmes valeurs seuils : les estimateurs de  $\rho$  ne sont pas distribués selon une loi Normale. Les statistiques des tests ne suivent donc plus des lois de Student. Il faut alors, pour pallier cet inconvénient, déterminer ces valeurs seuils par simulations ; de plus les valeurs des tests et du coefficient estimé de  $\rho$  sont très sensibles au voisinage de l'hypothèse nulle de racine unitaire ce qui nécessite une grande rigueur dans l'élaboration des tests de non stationnarité stochastique.

Cette dernière peut être décelée de différentes manières. La première part du constat que si une série temporelle est non-stationnaire du fait de la présence d'une racine unitaire, alors les différences premières de cette série doivent être un bruit blanc ; les autres approches, plus puissantes et développées par DICKEY et FULLER, s'attachent à vérifier la valeur unitaire de  $\rho$ .

### 3. Test de LJUNG-BOX (1978).

La première manière d'appréhender l'éventuelle non stationnarité présente dans une série temporelle est de tester<sup>63</sup> l'hypothèse de bruit blanc (stationnaire) pour la série différenciée, donc l'hypothèse de marche au hasard pour la série non différenciée. Dans notre modèle précédent, si  $u_t$  est bien un bruit blanc, cela signifie que  $\varepsilon_t$  est non stationnaire du fait de la présence d'une racine unitaire dans son processus autorégressif.

La statistique de LJUNG-BOX (1978) est une modification de la statistique de BOX-PIERCE (1970, présentée au chapitre un) qui tente d'intégrer les autocorrélations en fonction décroissante de leurs retards. Elle se présente sous la forme suivante :

$$Q_k = T(T+2) \sum_{\tau=1}^k \frac{\hat{\rho}_\tau^2}{(T-\tau)} \quad (2.24)$$

Le problème de cet ensemble de statistiques est de ne tester que l'hypothèse nulle de racine unitaire contre une hypothèse alternative non clairement définie. De plus DICKEY et FULLER (1979) montrent à l'aide de simulations, la faible puissance de ces tests. Ils proposent alors une gamme de tests plus puissants et mieux à même de différencier les non-stationnarités déterministe et stochastique. Ces tests vont porter directement sur la valeur de  $\rho$ .

---

<sup>63</sup> ERTUR (1992) souligne le fait que les hypothèses alternatives de ces tests n'ont jamais été réellement spécifiées.

## II. Tests de DICKEY et FULLER (1979).

### 1. Elaboration du test.

L'idée va être de construire un modèle général dans lequel les processus TS et DS seraient des cas particuliers. Ce modèle s'écrit :

$$\varepsilon_t = \alpha + \beta t + u_t \quad \text{où } A(L) u_t = B(L) w_t \quad w_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2) \quad (2.25)$$

où  $A(L)$  et  $B(L)$  sont des polynômes de retards d'ordre respectifs  $p$  et  $q$ .  $u_t$  est donc un processus ARMA( $p, q$ )<sup>64</sup>. En posant  $\rho$  comme la plus grande racine du processus autorégressif  $A(L)$ , ERTUR (1992) montre que ce modèle peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= (1-\rho) \alpha + \rho \beta + (1-\rho) \beta t + \rho \varepsilon_{t-1} + (1-\rho) u_t \\ &= (1-\rho) \alpha + \rho \beta + (1-\rho) \beta t + \rho \varepsilon_{t-1} + v_t \end{aligned} \quad (2.26)$$

avec  $A_1(L) v_t = B(L) w_t$ <sup>65</sup>  $w_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$

A partir de cette équation, il est possible de définir les modèles TS et DS comme deux cas particuliers qui vont dépendre de la valeur du coefficient autorégressif  $\rho$ .

$$|\rho| = 1$$

L'équation (2.26) devient :

$$\varepsilon_t = \beta + \varepsilon_{t-1} + v_t \quad A_1(L) v_t = B(L) w_t \quad (2.27)$$

En différenciant, il vient :

$$\Delta \varepsilon_t = \beta + v_t \quad (2.28)$$

Nous sommes alors en présence d'un processus stationnaire en différence première. Il s'agit d'un processus DS d'ordre 1 causé par une non stationnarité de nature stochastique.

<sup>64</sup>  $A(L) = 1 - a_1 L - a_2 L^2 - \dots - a_p L^p$  et  $B(L) = 1 - b_1 L - b_2 L^2 - \dots - b_q L^q$

<sup>65</sup>  $A_1(L) = A(L)/(1-\rho L)$

$$|\rho| < 1$$

L'équation (2.26) est celle d'un processus TS. Dans le cas d'absence de racine unitaire, ce modèle général est synonyme d'une non stationnarité de type déterministe.

Nous voyons donc qu'il est possible de discriminer entre les deux types de non stationnarité à travers une équation les contenant comme cas particulier. Dans notre étude, la non stationnarité éventuelle se situerait dans le processus d'innovation. Or ce dernier est la différence en logarithme du prix de l'actif, il existe relativement peu de chance a priori que la non stationnarité soit causée par un trend déterministe fonction du temps. Afin de ne négliger aucune possibilité nous utiliserons consécutivement les trois modèles décrits par DICKEY et FULLER (1979, 1981) pour tester les différentes hypothèses et nous assurer que nous respectons une bonne stratégie de test.

## *2. Les différents modèles et les tests associés.*

Les tests de racine unitaire de DICKEY et FULLER (1979, 1981) vont porter sur les coefficients estimés par les Moindres Carrés Ordinaires de trois modèles. Le problème va résider dans le choix du plus pertinent de ces modèles. L'hypothèse nulle de racine unitaire n'entraîne pas toujours la même réalisation selon le modèle employé pour effectuer le test. L'hypothèse alternative non plus, mais elle permet d'envisager la possibilité de processus autorégressifs avec ou sans constante et les processus de type TS dont la non stationnarité ne provient pas de la présence d'une racine unitaire. Nous présentons dans le tableau suivant ces différents modèles ainsi que la nature du processus qui résulte des hypothèses nulles et alternatives sous-jacentes.

**Tableau 2.1. Tests de DICKEY et FULLER**

Modèles (1), (2) et (3) sur lesquels s'effectuent les tests

Modèles	Hypothèse nulle $ \rho  = 1$	Hypothèse alternative $ \rho  < 1$
$(1-\rho L)\varepsilon_t = u_t$ $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$	$\Delta\varepsilon_t = u_t$ modèle DS	$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$ AR(1) stationnaire sans constante
$(1-\rho L)(\varepsilon_t - \mu) = u_t$ $\varepsilon_t = c + \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$ <sup>66</sup>	$\Delta\varepsilon_t = u_t$ modèle DS	$\varepsilon_t = c + \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$ AR(1) stationnaire avec constante
$(1-\rho L)(\varepsilon_t - \alpha - \beta t) = u_t$ $\varepsilon_t = c + bt + \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$ <sup>67</sup>	$\varepsilon_t = \beta + \varepsilon_{t-1} + u_t$ modèle DS avec constante	$\varepsilon_t = c + bt + \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$ modèle TS

Le problème maintenant va être de déterminer une stratégie de test qui permette le choix optimal de la séquence de tests à effectuer.

### 3. Stratégies de tests.

ERTUR (1991, 1992) relève différentes stratégies de tests de la racine unitaire et en propose une synthèse lui permettant de mettre en place une nouvelle stratégie. Il expose celles de DICKEY, BELL et MILLER (1986), PERRON (1988), HENIN et JOBERT (1990) et ERTUR (1991). Ces stratégies font intervenir les différents modèles à tour de rôle par tests successifs.

Pour notre part nous retiendrons la stratégie de ERTUR qui reprend les deux stratégies les plus récentes et tente d'en faire une synthèse exhaustive. Il préconise de vérifier à chaque étape le caractère iid du résidu (test de LJUNG-BOX) afin d'être certain que les résultats de la procédure de DICKEY et FULLER sont justifiés. Le principe du test est de commencer par le troisième modèle et de

<sup>66</sup>  $c = (1-\rho)\mu$

<sup>67</sup>  $c = (1-\rho)\alpha + \rho\beta$  et  $b = (1-\rho)\beta$



déterminer la présence ou l'absence de racine unitaire. Dans ce cas, il faut tester alors l'hypothèse d'un processus TS. Pour cela il est nécessaire d'effectuer un test classique de significativité du coefficient  $b$  lié au trend fonction du temps. Dans le cas du rejet de la significativité non nulle de  $b$ , il s'agit d'un processus autorégressif d'ordre un. La présence éventuelle d'une constante est testée à l'aide du deuxième modèle. Dans le cas d'une racine unitaire dans le troisième modèle, différents tests sont effectués sur les premier et deuxième modèles afin de confirmer ou d'infirmer la racine unitaire. C'est en effet nécessaire car le test de racine unitaire dans le modèle (3) peut être biaisé sous l'hypothèse nulle, car rien ne dit a priori que la tendance déterministe est linéaire. Pour plus de précision sur le déroulement de ce test, nous proposons de se référer à l'annexe 2 qui donne l'organigramme de la stratégie de ERTUR (1991).

Les tests de racine unitaire basés directement sur les travaux de DICKEY et FULLER semblent suffisamment puissants pour obtenir des résultats fiables quant à la présence ou l'absence de non stationnarité dans l'innovation des prix d'un actif financier ; ceci est une des causes possibles du rejet de l'hypothèse selon laquelle cette innovation serait iid par l'emploi du test BDS.

Pour cette raison, nous allons maintenant présenter différents tests de non linéarité stochastique. Cette dernière est une autre hypothèse pouvant amener le rejet de l'hypothèse iid par l'emploi de la statistique BDS. Ces tests complètent les conclusions apportées avec la théorie des valeurs extrêmes (chapitre 3, section 2).

### **Section 3. Processus stochastiques non linéaires.**

L'hypothèse de non linéarité a longtemps été ignorée, pour des raisons techniques notamment. Les progrès informatiques couplés aux progrès en économétrie permettent aujourd'hui de modéliser les phénomènes complexes autrement qu'en se restreignant à la linéarité. Cette dernière, en effet, ne permet pas de prendre en compte des mouvements brusques de la série. L'un des intérêts du test BDS est qu'une des hypothèses alternatives est justement la non linéarité

stochastique : les modèles de type ARCH notamment qui reprennent les principales propriétés vérifiées empiriquement sur les marchés financiers.

Dans cette section, nous abordons donc les modèles économétriques non linéaires de type ARCH qui sont les plus utilisés en finance. Nous présentons ensuite le test du moment de troisième ordre de HSIEH (1989) qui permet de reconnaître différentes non linéarités stochastiques selon qu'elles sont additives ou multiplicatives.

### I. Différents modèles.

Il existe bien entendu une infinité de processus stochastiques non linéaires qui peuvent être une bonne approximation de diverses séries financières ou de divers phénomènes constatés sur les marchés financiers. Nous en présentons quelques uns parmi les plus utilisés.

- Processus ARCH (ENGLE, 1982) :

$$\varepsilon_t = u_t h_t \quad \text{où} \quad u_t \sim N(0,1) \quad (2.29)$$

avec

$$h_t = \sqrt{\alpha_1 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2}$$

- Processus GARCH (BOLLERSLEV, 1986) :

$$\varepsilon_t = u_t h_t \quad \text{où} \quad u_t \sim N(0,1) \quad (2.30)$$

avec

$$h_t = \sqrt{\alpha_1 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}^2}$$

- Processus EGARCH (NELSON, 1991) :

$$\varepsilon_t = u_t h_t \quad \text{où} \quad u_t \sim N(0,1) \quad (2.31)$$

avec

$$\ln \left( \frac{h_t^2}{h_{t-1}^2} \right) = \alpha + \phi \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{h_{t-1}} \right| + \delta \ln \left( \frac{h_{t-1}^2}{h_{t-2}^2} \right) + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{h_{t-1}}$$

L'effet de grappe mentionné par MANDELBROT (1963) est, par exemple, fort bien pris en compte par ces trois modèles avec cependant divers degrés de précision. Mais les modèles stochastiques non linéaires permettent bien d'autres choses. Les modèles suivants ne doivent pas être négligés car ils peuvent servir de support à la modélisation de l'asymétrie (informationnelle ou liée aux prix) sur les marchés financiers ou à la modélisation de la dépendance sérielle en se libérant de la contrainte de linéarité.

- Processus AutoRégressif Non Linéaire (PEMBERTON et TONG, 1981) :

par exemple

$$\varepsilon_t = [\alpha + \beta u_{t-1}] \varepsilon_{t-1} + u_t \quad \text{avec } u_t \text{ un bruit blanc } (0, \sigma^2) \quad (2.32)$$

- Processus Treshold AutoRegressive (TONG et LIM, 1980) :

par exemple

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \alpha \varepsilon_{t-1} + u_t & \text{si } \varepsilon_{t-1} < 1 \\ \varepsilon_t &= \beta \varepsilon_{t-1} + u_t & \text{si } \varepsilon_{t-1} > 1 \end{aligned} \quad \text{avec } u_t \text{ un bruit blanc } (0, \sigma^2) \quad (2.33)$$

- Processus Moyenne Mobile Non Linéaire (ROBINSON, 1977) :

par exemple

$$\varepsilon_t = u_t + \delta u_{t-1} u_{t-2} \quad \text{avec } u_t \text{ un bruit blanc } (0, \sigma^2) \quad (2.34)$$

Avant d'effectuer des études empiriques sur ces modèle, il convient de déterminer, quel type de non linéarité est la cause du rejet de l'hypothèse iid par le test BDS. Nous allons, pour cela, présenter le test du moment de troisième ordre de HSIEH (1989). Il nous renseigne sur la nature de la non linéarité, et permet de n'hésiter plus qu'entre un nombre restreint de modèles non linéaires.

### III. Test du moment de troisième ordre.

Le test présenté ici s'inspire du test de TSAY (1986). Il s'agit de déterminer si la non linéarité dans la série est de type additive comme les processus moyennes mobiles non linéaires et les modèles TAR avec un schéma général de la forme :

$$u_t = v_t + f(\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-k}, u_{t-1}, \dots, u_{t-k}) \quad (2.35)$$

ou multiplicative comme les processus de type ARCH avec un schéma général de la forme :

$$u_t = v_t \cdot f(\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-k}, u_{t-1}, \dots, u_{t-k}) \quad (2.36)$$

$u_t$  est la série issue du filtrage de  $\varepsilon_t$  ;

$v_t$  est une variable aléatoire iid d'espérance nulle ;

$f(\cdot)$  est une fonction non linéaire quelconque.

Une non linéarité de forme additive n'apparaît que dans l'espérance du processus (PRIESTLEY, 1980). Par opposition une non linéarité multiplicative se manifestera à travers la variance uniquement. Les deux types de non linéarité impliquent que le processus  $u_t$  élevé au carré est autocorrélé. HSIEH (1989) utilise un autre résultat pour élaborer sa démonstration :

$$\text{L'équation (2.35) implique } E[u_t | x_{t-1}, \dots, x_{t-k}, u_{t-1}, \dots, u_{t-k}] = 0 \quad (2.37)$$

$$\text{L'équation (2.36) implique } E[u_t | x_{t-1}, \dots, x_{t-k}, u_{t-1}, \dots, u_{t-k}] \neq 0 \quad (2.38)$$

L'assertion (2.37) signifie que  $u_t$  n'est corrélé avec aucune de ses réalisations passées, ni avec celles de  $x_t$ . En revanche, pour ce qui est de la non linéarité multiplicative,  $u_t$  est corrélé avec au moins une de ces réalisations. Le test va poser la non linéarité multiplicative comme hypothèse nulle contre l'hypothèse alternative de non linéarité additive. Il se construit à partir d'un moment croisé d'ordre trois de la série :

$$\rho_{uuu}(ij) = \frac{E(u_t u_{t-i} u_{t-j})}{\rho_u^3} \quad (2.39)$$

où  $\rho_u$  est le coefficient d'autocorrélation d'ordre un du processus  $\{u_t\}$ .

L'hypothèse nulle de non linéarité multiplicative implique  $\rho_{uuu} = 0$  contre  $\rho_{uuu} \neq 0$ . La valeur de  $\rho_{uuu}(ij)$  est estimée par :

$$r_{uuu}(ij) = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=j}^T \hat{u}_t \hat{u}_{t-i} \hat{u}_{t-j}}{\left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2 \right]^{1,5}} \quad (2.40)$$

$r_{uuu} (i,j)$  est un gaussien d'espérance nulle et dont la variance asymptotique est estimée par :

$$\frac{\frac{1}{T} \sum_{t=j}^T \hat{u}_t^2 \hat{u}_{t-i}^2 \hat{u}_{t-j}^2}{\left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2 \right]^3} \quad (2.41)$$

Il suffit ensuite de standardiser  $r_{uuu} (i,j)$  pour effectuer les tests comparativement aux valeurs de la loi normale standard (1,96 à 5 %).

Les différents tests de non linéarité se développent rapidement du fait de la possibilité offerte aujourd'hui aux chercheurs de construire et d'estimer des modèles non linéaires complexes. Mais il existe une infinité de non linéarités qui obligent à employer plusieurs tests avant de s'engager dans la voie de la modélisation du phénomène étudié. La robustesse de la plupart de ces tests est mesurée à partir de simulations et non de résultats purement théoriques. Aussi serons-nous très prudent dans les conclusions que nous tirerons.

La représentation non linéaire des phénomènes financiers ne remet pas obligatoirement en cause l'hypothèse d'efficacité des marchés (ALEXANDRE, 1992). Cela permet plutôt de mieux approfondir l'analyse du comportement étudié afin d'éviter certaines restrictions dans la spécification des modèles financiers. Un autre type de non linéarité cause le rejet de l'hypothèse nulle par le test BDS : le chaos déterministe.

#### **Section 4. Le chaos déterministe.**

La notion de chaos est née de la possibilité d'être face à des processus déterministes mais présentant une entropie positive, un désordre apparent. Nous avons vu précédemment que ce dernier dépend de la nature très particulière des

attracteurs de ces séries. Les propriétés statistiques classiques ayant montré leurs limites dans la description du désordre, la mesure de l'entropie d'un système est l'unique moyen permettant de discerner un ordre sous-jacent à une dynamique d'apparence aléatoire. L'exposant de LYAPUNOV va permettre cette mesure en se basant notamment sur les notions de Sensibilité aux Conditions Initiales et de divergence exponentielle de trajectoires voisines.

Nous présenterons plus précisément, dans cette section, l'exposant de LYAPUNOV avant de décrire deux algorithmes de calcul de la valeur de cet exposant. Le premier, développé par WOLF, SWIFT, SWINNEY et VASTANO (1985), est le plus utilisé dans la mesure de l'exposant de LYAPUNOV. Cependant sa relative complexité et sa fiabilité non démontrée créent le besoin d'un nouvel algorithme. KAASHOEK et VAN DIJK (1991) utilisent les réseaux de neurones dans le calcul de cet exposant. Leurs simulations montrent une meilleure robustesse de leur algorithme dans la discrimination aléa-déterminisme au sein de systèmes désordonnés.

### I. Le plus grand exposant de LYAPUNOV.

Les travaux sur la stabilité<sup>68</sup> ou l'instabilité d'un système dynamique ont entraîné la création d'outils capables de rendre compte du comportement de la trajectoire d'un système dynamique. POINCARÉ (1890), le premier, analyse la stabilité d'un système, non au voisinage d'un point pour des conditions particulières, mais pour un ensemble de trajectoires. En effet, jusqu'alors n'était étudiée que la stabilité d'un système pour une solution particulière. Il était possible de définir pour un même système, différentes stabilités mais en un nombre fini de solutions (excepté bien entendu pour les systèmes linéaires simples).

L'analyse géométrique des systèmes inaugurée par POINCARÉ, et dont nous avons montré la pertinence pour l'étude du chaos déterministe au chapitre précédent,

---

<sup>68</sup> Pour plus de compléments sur la notion de stabilité et ses applications en économie et finance, se référer à l'ouvrage de BROCK et MALLIARIS (1989).

permet de s'intéresser à la stabilité d'un ensemble de trajectoires d'un système. Les méthodes que POINCARÉ développe vont aider à la visualisation des attracteurs et plus particulièrement aux dynamiques des trajectoires sur les attracteurs. Les dynamiques hyperboliques nous concernent plus particulièrement car elles présentent les propriétés définies sous le nom de Sensibilité aux Conditions Initiales. Deux trajectoires voisines vont tendre à converger et diverger simultanément, mues par des forces antagonistes. Cette hyperbolicité, vérifiable par l'existence dans le système de la SCI, est liée au fait qu'à chaque instant  $t$ , le système crée de l'information supplémentaire. L'entropie d'information de KOLMOGOROV mesure exactement cela : la création d'information amenée par la connaissance d'une donnée supplémentaire<sup>69</sup>. Ainsi, dans les systèmes instables, le nombre de trajectoires distinctes croît exponentiellement avec la taille des observations. L'exposant de cette exponentielle dépend directement de l'entropie du système (SINAI, 1992). Exprimé autrement cela signifie qu'une différence entre deux trajectoires va croître au fil du temps comme  $e^\lambda$ . Cette valeur  $\lambda$  n'est rien d'autre que l'exposant de LYAPUNOV qui est donc, lui aussi, une mesure de l'entropie d'un système. Plus rigoureusement, il y aura autant d'exposants de LYAPUNOV que de dimensions du système ; chacun mesure la force de contraction ou d'étirement qui est exercée par une dimension sur le système. Par exemple dans le cas d'un point fixe comme attracteur d'un système évoluant dans un espace de phases à  $N$  dimensions, les  $N$  exposants de LYAPUNOV seront tous négatifs. Cela reflète le resserrement que subissent deux trajectoires voisines dans le bassin d'attraction. Pour un cycle limite ou un Tore, le plus grand exposant de LYAPUNOV sera nul car un décalage le long de la trajectoire ne sera ni amplifié ni réduit au cours du temps. En revanche, le plus grand exposant dans le cas d'un système possédant un attracteur étrange (donc un système chaotique déterministe) sera positif traduisant l'entropie, la création d'information. Le problème, maintenant va être d'introduire une méthode de calcul de cet exposant pour des trajectoires dont la forme structurelle sous-jacente est inconnue.

Pour cela, supposons  $x_{t+1} = F(x_t)$  un système de dimension  $N$ . Posons  $x_0$  comme condition initiale. Nous allons étudier le comportement de la trajectoire

---

<sup>69</sup> Ceci explique que même pour un système déterministe, l'entropie empêche la prévision à long terme.

pour une condition initiale  $y_0$  proche de  $x_0$ . Afin d'exprimer l'évolution comparée des deux trajectoires, il suffit d'exprimer le développement de TAYLOR d'ordre 1 au voisinage de  $x_t$  :

$$F(y_t) = F(x_t) + D_x F(x_t) (y_t - x_t) + \text{reste} \quad (2.42)$$

où  $D_x F(x_t)$  est la matrice carrée d'ordre  $N$  des dérivées premières à l'instant  $t$

L'approximation linéaire, nous permet d'écrire :

$$F(y_t) - F(x_t) = D_x F(x_t) (y_t - x_t) \quad (2.43)$$

En posant  $y_t - x_t = u_t$  et donc  $F(y_t) - F(x_t) = u_{t+1}$ , l'équation (2.43) s'écrit :

$$u_{t+1} = D_x F(x_t) u_t \quad (2.44)$$

Dans le cas où la matrice des dérivées premières ne dépend pas du temps, les propriétés de stabilité du système vont se déduire des valeurs propres<sup>70</sup> de cette matrice. Mais ici la matrice est fonction du temps, il faut donc travailler avec des valeurs moyennes afin de pouvoir tirer des conclusions. En normant l'équation (2.44), il vient :

$$\|u_{t+1}\| = \|D_x F(x_t) u_t\| \quad (2.45)$$

Il est possible, en modifiant l'écriture, de faire apparaître le taux local d'expansion. Il suffit pour cela de poser :

$$\|u_{t+1}\| = \frac{\|D_x F(x_t) u_t\|}{\|u_t\|} \|u_t\| = L(t) \|u_t\| \quad (2.46)$$

$L(t)$  est le taux local d'expansion ; il mesure le taux d'expansion le long de la trajectoire au temps  $t$ , dans la direction  $u_t$ . Cette grandeur permet d'obtenir une valeur caractérisant la déviation au temps  $t$  de deux trajectoires proches l'une de l'autre initialement. Il faut alors calculer le taux d'expansion moyen qui est l'exposant de LYAPUNOV :

$$\lambda(T) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln \frac{\|D_x F(x_{t-1}) u_{t-1}\|}{\|u_{t-1}\|} \quad (2.47)$$

avec

$$u_{t+1} = D_x F(x_t) u_t \quad \text{et} \quad \|u_0\| = 1$$

---

<sup>70</sup> BERGE, POMEAU et VIDAL (1988) expliquent cela par référence à la matrice de FLOQUET d'un système (pages 70 et 302-303).



Le problème est que généralement seule la série chronologique de la variable étudiée est disponible,  $F$  est inconnue. Il faut donc pouvoir calculer les dérivées premières d'une fonction sans en connaître la forme structurelle. Les premiers à tenter de résoudre ce dilemme sont WOLF, SWIFT, SWINNEY et VASTANO en 1985<sup>71</sup>. Nous allons donc maintenant présenter l'algorithme qu'ils ont mis en place pour calculer le plus grand exposant de LYAPUNOV.

## II. Algorithme de WOLF.

Supposons que nous disposions des valeurs d'une série temporelle  $\{x_t\}_{t=1}^T$  pour  $T$  périodes et que cela soit notre seule information. Sur la base de cette série, nous construisons des sous-séries  $x_t^m$  de taille  $m$ , ceci afin de représenter la dimension de plongement de la série<sup>72</sup>. De cette manière, l'exposant de LYAPUNOV peut se calculer pour différentes dimensions de l'espace des phases dans lequel la série est supposée a priori évoluer. Cependant, pour résoudre le problème de la dimension d'évolution de la série étudiée, nous nous référons à TAKENS (1981) qui fournit un outil de reconstruction de la série. Posons :

$$x_t^M = (x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+M-1}) \quad (2.48)$$

où  $M$  est la dimension de plongement.

L'application  $\Psi^M$ , définie de  $R^M$  dans  $R^M$ , représente l'évolution du système :

$$\Psi^M(x_t^M) = x_{t+1}^M \quad (2.49)$$

TAKENS montre que pour  $M \geq 2N+1$  ( $N$  est la dimension du système déterministe dont  $x_t$  est une représentation univariée), les propriétés de la fonction  $\Psi^M$  sont identiques à celle de  $F$  qui est inconnue. Ainsi en reconstruisant la série dans différentes dimensions de plongement  $M$ , il est possible de connaître les

<sup>71</sup> Les références seront faites à partir de maintenant à l'algorithme de WOLF.

<sup>72</sup> WOLF et al.(1985, page 297) conseillent de choisir la dimension de plongement comme étant supérieure à 1 plus deux fois la dimension calculée de l'attracteur. Ceci afin d'éviter que le bruit statistique présent dans la série ne biaise le calcul (si  $m$  est trop grand) et qu'un problème important dans le choix du point de remplacement n'empêche le calcul ( $m$  trop petit).

propriétés de  $F$ . Par exemple, si  $F$  est chaotique alors  $\Psi^M$  traduit ce caractère chaotique et possède un exposant de LYAPUNOV positif.

L'algorithme de WOLF utilise une procédure itérative basée sur la comparaison entre le comportement de la série et celui d'une série possédant une condition initiale très proche. L'algorithme fonctionne comme suit.

*1ère itération.*

Il faut calculer  $d_1^{(1)} = \left\| x_{t_1}^m - x_1^m \right\|$  qui est la différence entre la première valeur du sous-échantillon et la valeur la plus proche. Il faut ensuite sélectionner un entier  $q$  le plus petit possible et calculer  $d_2^{(1)} = \left\| x_{t_1+q}^m - x_{1+q}^m \right\|$ .  $q$  est choisi arbitrairement sachant que s'il est trop petit ou trop grand nous perdons la reconnaissance de l'attracteur dans l'espace des phases (WOLF et al., 1985, page 298-299). Posons  $g_1(q) = d_2^{(1)} / d_1^{(1)}$  qui va rendre compte de la manière dont deux trajectoires proches sur l'attracteur vont diverger.

*2ème itération.*

Un nouveau sous-échantillon  $x_{t_2}^m$  est choisi proche de  $x_{1+q}^m$  et tel que l'angle  $\theta(x_{t_2}^m - x_{1+q}^m, x_{t_1+q}^m - x_{1+q}^m)$  soit proche de zéro. BROCK (1986) conseille de choisir  $t_2$  tel qu'il minimise :

$$\left\| x_{t_2}^m - x_{1+q}^m \right\| + w \left| \theta(x_{t_2}^m - x_{1+q}^m, x_{t_1+q}^m - x_{1+q}^m) \right| \quad (2.50)$$

Il vient alors :

$$d_1^{(2)} = \left\| x_{t_2}^m - x_{1+q}^m \right\| \quad d_2^{(2)} = \left\| x_{t_2+q}^m - x_{1+2q}^m \right\| \quad (2.51)$$

et  $g_2(q) = d_2^{(2)} / d_1^{(2)}$  pour le taux de divergence des deux trajectoires :

*kème itération.*

De la même manière, le calcul se poursuit :

$$d_1^{(k)} = \left\| x_{t_k}^m - x_{1+(k-1)q}^m \right\| \quad d_2^{(k)} = \left\| x_{t_k+q}^m - x_{1+kq}^m \right\| \quad g_k(q) = d_2^{(k)} / d_1^{(k)} \quad (2.52)$$

Cette opération doit être itérée jusqu'à ce que  $k = K = \max \{k / 1+kq < Tm\}$  permettant alors le calcul du plus grand exposant de LYAPUNOV  $\lambda_q$ .

$$\hat{\lambda}_q = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{\ln(g_k(q))}{q} \quad (2.53)$$

Une forme parfaite de l'algorithme de WOLF converge vers le plus grand exposant de LYAPUNOV. Le terme de “parfait” est employé car cet algorithme dépend énormément de  $q$  (appelée dimension de plongement) et du choix du nouveau sous-échantillon à chaque itération. BROCK (1986) montre qu'une “version idéale de l'algorithme de WOLF” converge vers le plus grand exposant de LYAPUNOV lorsque celui-ci est positif. Mais comment s'assurer que nous utilisons cette version idéale ?

Pour cette raison, d'autres choix sont préférés pour l'estimation du plus grand exposant de LYAPUNOV et en particulier l'utilisation des réseaux neuronaux qui nécessite la fixation arbitraire de moins de paramètres et semble plus robuste dans la détection du chaos.

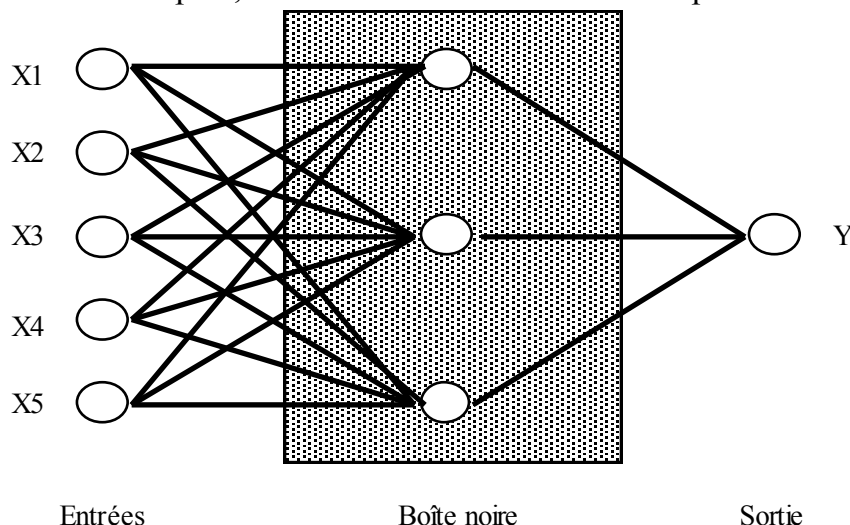
### III. Les réseaux de neurones.

Un des problèmes majeurs inhérent à l'estimation du plus grand exposant de LYAPUNOV est que la fonction  $F$  est inconnue. KAASHOEK et VAN DIJK (1991) proposent l'utilisation des réseaux neuronaux, non pour estimer les coefficients de la forme structurelle de  $F$  mais pour estimer sa matrice des dérivées premières qui nous intéresse pour calculer l'exposant de LYAPUNOV.

La méthode des réseaux de neurones consiste plus en un apprentissage qu'en une programmation. L'ordinateur va apprendre par associations d'inputs (entrées) et d'outputs (sorties). Le programme ne contraint pas l'ordinateur par une forme spécifique de la relation, mais lui laisse apprendre par la méthode dite de rétro-propagation du gradient. Le graphique suivant est un exemple de réseaux de neurones comportant cinq entrées ( $X_1, \dots, X_5$ ), une sortie ( $Y$ ) et une boîte noire comme est communément appelé l'ensemble des neurones (ou cellules) faisant le lien entre les entrées et les sorties par les “connexions” (il y en a ici  $5 \cdot 3 + 3 = 18$ ).

### Graphique 2.8. Configuration d'un réseau de neurones.

Le réseau présenté ici comporte  
5 inputs, 3 cellules cachées et un seul output.



Signalons que le réseau présenté ici est un réseau (5,3,1). Il est possible de construire une infinité de réseaux à partir d'un même échantillon en faisant varier le nombre d'entrées, de sorties et même la structure de la boîte noire (plusieurs colonnes de cellules et différents nombres de cellules par colonne). La méthode de la rétro-propagation par association fonctionne alors comme suit.

L'ordinateur prend les entrées et les transmet aux cellules de la boîte noire à l'aide des quinze premières connexions et en les transformant à l'aide d'une fonction  $g()$  appelée fonction d'activation dont nous présentons quatre exemples en annexe 3. Chaque cellule de la boîte noire reçoit donc un signal d'une valeur de :

$$g \left( \sum_{i=1}^5 a_{hi} X_i + b_{h'} \right) \quad (2.54)$$

où  $a_{hi}$  est le poids accordé à la connexion reliant l'entrée  $i$  à la cellule  $h$  de la boîte noire et  $b_{h'}$  est le signal transmis par une cellule d'entrée pour laquelle le programmeur n'intervient aucunement.

Ce signal est alors transmis des cellules de la boîte noire à la cellule de sortie (que nous supposons unique ici) qui reçoit donc :

$$z_t = \text{output} = \sum_{h=1}^3 c_h g \left( \sum_{i=1}^5 a_{hi} X_i + b_{h,t} \right) \quad (2.55)$$

où  $c_h$  est le poids de la connexion reliant la cellule  $h$  de la boîte noire à l'output.

La sortie ainsi calculée est une estimation de la sortie réelle. Pour chaque élément  $t$  de l'échantillon, il est possible de déterminer une erreur d'estimation (signal d'apprentissage) :

$$e_t = z_t - y_t \quad (2.56)$$

La rétro-propagation consiste à minimiser la somme des carrés des erreurs par rapport aux connexions. La procédure, dirigée uniquement par la machine, va remplacer les coefficients  $a_{hi}$  et  $c_h$  jusqu'à atteindre une certaine valeur de convergence, définie à l'avance, de la somme des carrés des erreurs.

Il n'est donc pas besoin de définir une forme structurelle de la fonction  $F$ . Seule la fonction de transfert  $g()$ , qui envoie les valeurs des inputs aux cellules cachées, est définie et permet d'introduire la non linéarité dans la relation entre les entrées et les sorties.

Dans le cas qui nous concerne, nous ne possédons comme information que la série univariée  $\{x_t\}$  comme représentation temporelle d'un phénomène dont la forme de la fonction  $F$  sous-jacente est ignorée. L'estimation de l'exposant de LYAPUNOV de cette fonction passe par la connaissance des dérivées premières. L'algorithme de WOLF travaille directement sur une estimation des dérivées de la fonction inconnue. Les réseaux de neurones vont nous fournir une méthode de calcul qui se révèle meilleure que l'algorithme de WOLF d'après les simulations de KAASHOEK et VAN DIJK (1991). Ces derniers préconisent pour cela une estimation de la fonction  $F$  qui va leur permettre ensuite de déduire les dérivées. Ils réalisent cela à l'aide des réseaux de neurones qui n'obligent pas à spécifier de forme structurelle de  $F$  a priori. C'est un avantage très important car dans le domaine de la non linéarité, il est très difficile, quasiment impossible même, de déterminer cette forme. Les réseaux de neurones dépassent cette difficulté et permettent un nouveau mode de détermination de l'exposant de LYAPUNOV.

Reprenons la méthode de reconstruction d'une série de TAKENS :

$$\begin{aligned}
 \{x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_{t+M}\} &= x_{t+1} = \Psi^M(x_t) \\
 &= \Psi^M(x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+M-1}) \\
 &= (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M)
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

Alors  $\psi_m(x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+M-1}) = x_{t+m}$  (2.58)

En prenant M entrées qui sont  $x_t, \dots, x_{t+M-1}$  et en prenant comme sortie  $x_{t+M}$ , les réseaux vont déterminer une relation de la forme :

$$\widehat{\Psi_M(x)} = \widehat{x}_{t+M} = \prod_{h=1}^H \left[ \widehat{c}_h \cdot g \left( \prod_{m=1}^M \widehat{a}_{hm} x_{t+m-1} + \widehat{b}_{hr} \right) \right] \tag{2.59}$$

Le calcul de l'exposant de LYAPUNOV implique la connaissance de la matrice jacobienne de la fonction F. Cette matrice s'écrit :

$$D_x \Psi^M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \alpha_{M1} & \alpha_{M2} & \dots & \dots & \alpha_{MM-1} & \alpha_{MM} \end{pmatrix} \tag{2.60}$$

où  $\alpha_{Mk}$  est estimé par :

$$\widehat{\alpha}_{Mk} = \frac{\partial \widehat{\Psi_M}(x)}{\partial x_{t+k-1}} \quad k = 1, \dots, M \tag{2.61}$$

Le cas le plus utilisé est celui où  $g()$  est la fonction sigmoïdale dont la forme générale est :

$$g(x) = \frac{e^{kx}}{e^{kx} + 1} \tag{2.62}$$

Posons  $k = 1$ , les dérivées partielles de  $\psi_M$  s'écrivent alors :

$$\widehat{\alpha}_{Mk} = \frac{\partial \widehat{\Psi}_M}{\partial x_{t+k-1}}(x_t) = \prod_{h=1}^H \left[ \widehat{c}_h \widehat{a}_{hk} \frac{\exp^{X'A_h}}{(\exp^{X'A_h} + 1)^2} \right] \quad k = 1, \dots, M \quad (2.63)$$

avec

$$X'A_h = \prod_{m=1}^M \left\{ \widehat{a}_{hm} x_{t+m-1} + \widehat{b}_{h,m} \right\} \quad (2.64)$$

La formule du plus grand exposant de LYAPUNOV s'obtient à l'aide des deux formules suivantes :

$$\lambda(T) = \frac{1}{T} \prod_{t=1}^T \ln \left\| D_x \Psi^M(x_{t-1}) \frac{u_{t-1}}{\|u_{t-1}\|} \right\| \quad (2.65)$$

$$u_t = D_x \Psi^M(x_{t-1}) u_{t-1} \quad \text{avec } \|u_0\| = 1 \quad (2.66)$$

Le calcul va alors s'effectuer comme suit :

(1) Estimation des  $c_h$ ,  $a_{hm}$  et  $b_h$  à l'aide des réseaux de neurones;

(2) Démarrage en  $t=0$ , SOMME=0;

(3) Calcul de la matrice jacobienne au temps  $t$  en estimant les  $\widehat{\alpha}_{Mk} = \frac{\partial \widehat{\Psi}_M}{\partial x_{t+k-1}}(x_t)$  ;

(4) Calcul de  $u_{t+1} = D_x \Psi^M(x_t) u_t$  ;

(5) SOMME = SOMME +  $\text{Log} \frac{\|u_{t+1}\|}{\|u_t\|}$  ;

(6)  $u_{t+1} = \frac{u_t}{\|u_t\|}$  ;

(7) Si  $t=T$  alors  $\lambda(T) = \text{SOMME}/T$   
sinon  $t=t+1$  et reboucler au niveau (3) ;

$\lambda(T)$  est une estimation du plus grand exposant de LYAPUNOV.

KAASHOEK et VAN DIJK simulent cet algorithme et celui de WOLF sur différentes séries aléatoires ou chaotiques d'une taille de 200. L'algorithme de WOLF se révèle incapable de discerner entre un bruit blanc et un processus chaotique (la fonction logistique en l'occurrence) pour des dimensions de plongement allant de un à dix. En revanche, l'emploi des réseaux neuronaux permet

d'obtenir des exposants de LYAPUNOV positifs pour des séries chaotiques et négatifs pour des séries purement aléatoire. Dans ce dernier cas, le réseau ne peut apprendre la structure sous-jacente à la série. Pour des processus ayant une composante aléatoire et une composante chaotique, les réseaux permettent de signaler cette dernière et donc le caractère en partie chaotique du processus. L'intérêt de l'emploi des réseaux de neurones dans le calcul de l'exposant de LYAPUNOV est qu'il pallie les insuffisances de l'algorithme de WOLF pour des petits échantillons qui sont courants en science économique et encore maintenant quelquefois en finance.

Les fondements de mesure empirique du plus grand exposant de LYAPUNOV sont plus heuristiques que théoriques, du fait notamment du nombre important de paramètres arbitrairement fixés dans l'élaboration des algorithmes. Cependant, l'algorithme de WOLF cherche à mesurer l'exposant de LYAPUNOV directement à partir des différences finies, alors que l'algorithme de KAASHOEK et VAN DIJK estime le processus de génération de la série et en déduit les différences finies qui permettent le calcul de l'exposant. Le second algorithme utilisant les réseaux de neurones semble plus stable même sur des échantillons de taille réduite et aura notre préférence pour l'établissement des conclusions concernant la présence ou l'absence du chaos déterministe pour les séries étudiées.

## **Conclusion.**

L'emploi du test BDS va permettre d'ouvrir de nouvelles voies dans l'étude des processus stochastiques. Il offre notamment une variété d'hypothèses alternatives (non stationnarité, non linéarité stochastique, chaos déterministe) qui sont autant de nouveautés statistiques et mathématiques permettant d'aborder d'une nouvelle manière les questions économiques et financières auxquelles les chercheurs sont confrontés. La résolution de ces problèmes est un réel apport car elle permet de surmonter des obstacles techniques liés à la nouveauté de ces modèles. Le but de ces progrès scientifiques est de mieux appréhender les différents



phénomènes économiques et il ne faut pas oublier que l'outil statistique est là pour nous aider à répondre aux questions financières.

Le cas des bruiteurs sur les marchés financiers n'avait été abordé que par le biais de l'analyse des prix des actifs et des stratégies en termes de probabilité (par exemple le modèle de DELONG, SHLEIFER, SUMMERS et WALDMANN , 1990). L'universalité d'une description des phénomènes par l'aléa étant remise partiellement en cause, il nous a semblé intéressant de nous attacher à ce problème particulier des bruiteurs en y liant les nouveautés statistiques mieux à même de modéliser ces particularités. Au modèle classique de marche aléatoire correspond une description monolithique de l'investisseur rationnel et froid calculateur. A l'inverse, la notion de bruiteur et ses actes sur le marché financier semblent plus complexes. Intuitivement, nous cherchons à modéliser la complexité qu'induit cette présence sur le marché par d'autres modèles.

Le test BDS va nous permettre d'opposer le froid calculateur (hypothèse iid du test) aux bruiteurs (à travers la non stationnarité, la non linéarité stochastique et le chaos déterministe) à travers différents modèles qui sont développés dans le chapitre six.

## CHAPITRE 6 : MODELES DE MARCHÉ FINANCIER AVEC BRUIT.

Le comportement (rationnel ou non) des divers agents sur les marchés financiers constitue une hypothèse sous-jacente à la plupart des théories financières. Nous avons vu dans la première partie de ce travail, que l'investisseur avait longtemps été considéré comme un être rationnel au sens où il maximise l'espérance d'utilité de ses décisions. Il réalise cela en ayant connaissance de tous les paramètres intéressants et en étant capable d'en tirer des prévisions pertinentes, tout au moins les meilleures possibles. Depuis MARKOWITZ (1952), les modèles supposent que l'investisseur rationnel raisonne selon une stratégie d'espérance-variance. Il cherche à minimiser le risque encouru pour une certaine rentabilité espérée, ou à maximiser la rentabilité espérée pour un risque donné. L'opération issue de cette logique est la diversification du portefeuille dans une optique de long terme (LEROY, 1989). Si tous les investisseurs présents à un moment donné sur un marché ont ces mêmes comportements, le marché est alors efficient. Nous avons vu que le modèle statistique qui découle de telles hypothèses, la marche aléatoire ou la martingale, est fortement imprégné de la condition d'évolution aléatoire du prix des actifs financiers. Cette dernière a d'ailleurs précédé la description des comportements et a instauré un paradigme dans lequel l'étude des marchés financiers s'est toujours réalisée à partir des probabilités. Or même s'il faut reconnaître que les anticipations sont fondées sur une étude probabiliste de l'avenir, la décision finale que prend l'investisseur est consciente, déterministe. Il ne faut donc pas négliger cette piste.

Cette vision de l'évolution aléatoire, parfaite des marchés, est remise en cause régulièrement ; tout au moins la discussion porte sur son universalité. FAMA (1991) considère l'efficience plutôt comme un étalon de mesure permettant à la recherche en finance de progresser, que comme une description de la réalité. En effet, un modèle financier sera un bon modèle si son pouvoir prédictif bat significativement celui de la marche aléatoire. Cet affaiblissement de l'hypothèse d'efficience correspond à celui de la rationalité totale des investisseurs. BLACK (1986), notamment, introduit le concept de bruiteurs et amène une remise en cause

de la vision selon laquelle le marché financier ne serait animé que par de parfaits calculateurs. D'après lui certains investisseurs n'ont ni le temps ni les moyens financiers d'une analyse complète des valeurs boursières dans lesquelles ils désirent investir. Dans le chapitre 2 nous avons précisé les caractéristiques de tels agents financiers et présenté un modèle (DELONG, SHLEIFER, SUMMERS et WALDMANN, 1990) dans lequel est décrit l'impact des bruiteurs sur le marché. Nous avons également présenté le problème de ce modèle qui ne permet pas de distinguer un bruiteur d'un agent irrationnel lors d'études empiriques éventuelles sur les marchés boursiers. De plus, un modèle probabiliste classique ne saura pas obligatoirement rendre compte des brusques mouvements que peut entraîner la présence des bruiteurs. Nous préférons donc élaborer des modèles intégrant ces bruiteurs à partir d'outils plus complexes dans les relations qu'ils permettent de décrire, à l'aide notamment de la non linéarité. Les modélisations employées sont telles qu'elles correspondent aux hypothèses alternatives du test BDS et qui sont la non stationnarité, la non linéarité stochastique, et déterministe (théorie du chaos). Ces trois représentations de la réalité vont en effet être les supports d'une description de l'effet des bruiteurs sur les marchés financiers.

Nous verrons dans la première section comment la non stationnarité des rentabilités des actifs financiers peut s'expliquer par l'action changeante des bruiteurs. Le caractère moutonnier de ces derniers peut engendrer de brusques changements dans la nature du prix d'un actif (racine unitaire) mais également une moins bonne intégration de l'information et donc une persistance dans l'évolution des rentabilités (retour en espérance et aide de l'analyse R/S).

La deuxième section sera axée sur la non linéarité stochastique et les raisons pour lesquelles c'est une bonne description de l'action des bruiteurs sur le marché. Il sera décrit un modèle où, partant de l'hypothèse selon laquelle la valeur fondamentale suivrait un processus GARCH, et en présence de bruiteurs, les prix suivraient un processus de type GARCH (LONGIN, 1992b).

Enfin, dans la troisième section, nous envisagerons le modèle de DAY et HUANG (1990) où les bruiteurs influencent le marché en créant, selon l'importance

de leur action, les conditions propices à une évolution chaotique des prix des actifs financiers.

## **Section 1. Les bruiteurs comme cause de persistance**

Nous avons regroupé ici deux phénomènes assez proches l'un de l'autre au sens où une cause qui apparaît à l'instant  $t$  aura un effet très long. Le problème de la persistance va être ici scindé en deux parties qui sont la non stationnarité et les mouvements browniens fractals.

Dans notre étude, l'attention se porte sur l'innovation des actifs financiers et non sur le prix. Si le test BDS rejette l'hypothèse d'une innovation iid, une des hypothèses alternatives est la non stationnarité. Nous allons voir, dans cette section, si une représentation du marché avec bruiteurs peut provoquer la non stationnarité de l'innovation.

Les mouvements browniens fractals sont liés, quant à eux, à des lois stables que nous avons présentées dans le chapitre 1, section 2. WALTER (1989) et PETERS (1991) font le lien entre les lois stables et la persistance. PETERS montre qu'il est possible d'utiliser l'analyse R/S afin de mesurer l'exposant caractéristique des lois stables. Mais surtout les auteurs expliquent que cet exposant n'est rien d'autre que l'inverse du coefficient  $H$  de HURST. Nous verrons donc après la non stationnarité, l'explication de certains phénomènes financiers à travers le concept de persistance fractale.

### **I. Les difficultés d'une représentation non stationnaire de l'innovation.**

Si l'hypothèse de non stationnarité avec présence d'une racine unitaire dans les prix des actifs financiers semble admise, il en va différemment en ce qui

concerne l'innovation. La différenciation est censée stationnariser la série et il semble peu probable de trouver à nouveau une racine unitaire dans le processus d'innovation qui est la différence première du prix. Deux justifications viennent renforcer cette idée ; la première est d'ordre statistique et méthodologique. La seconde est plus en rapport avec la nature du marché financier.

La première raison tient au fait que l'hypothèse selon laquelle le processus d'innovation possède une racine unitaire se traduit par la présence d'au moins deux racines unitaires dans le processus de prix de l'actif. Il nous semble peu probable qu'un tel phénomène existe sur le marché financier (comme sur quasiment toutes les séries exprimées en niveau). Surtout, il nous paraît hasardeux de tenter de définir un modèle avec bruiteurs dans lequel le prix aurait deux racines unitaires.

La seconde raison est donnée par HSIEH (1991) qui, le premier, a constaté que la non stationnarité pouvait être, statistiquement, une des causes du rejet de l'hypothèse nulle de processus iid par la statistique BDS. HSIEH réalise le test BDS sur des données hebdomadaires, quotidiennes et enfin relevées tous les quarts d'heure. A chaque fois le test BDS rejette l'hypothèse nulle. Le problème est que la non stationnarité est synonyme de changements structurels brusques et persistants de chocs affectants la série. Il semble impossible qu'un changement de structure opère sur des données relevées quatre fois par heure pendant trois mois. Et si tel est le cas HSIEH souligne que “le travail économétrique sur des données économiques et financières est virtuellement impossible”.

Cependant HSIEH montre par simulation que le rejet de l'hypothèse de distribution iid par le test BDS peut être causé par la non stationnarité. Pour cette raison, nous effectuerons les tests de racine unitaire en cas de rejet de l'hypothèse nulle par le test BDS. Il nous semble intuitivement que la présence des bruiteurs semble bien de nature à troubler les chercheurs travaillant sur les régularités structurelles ou même conjoncturelles en finance. La période financière agitée des années quatre-vingts provient, en partie bien sûr, à la fin de “l'argent sale” et à l'attrait que la bourse a eu sur des investisseurs peu habitués jusqu'alors aux spécificités du marché des actions. Il semble plausible de poser comme hypothèse que l'arrivée massive de nouveaux investisseurs correspond en grande partie à une

arrivée des bruiteurs qui ont fondamentalement modifié la structure des marchés. Ils sont entrés sur le marché des actions au début des années quatre-vingts, attirés par l'apparente facilité de réaliser des gains importants. Ce sont des investisseurs qui, faute d'autres informations, ont interprété le trend observable de manière uniquement empirique comme une véritable information. L'arbitrage entre rentabilité et risque, pour les bruiteurs, s'est alors transformé en une stratégie où seule intervenait l'information liée à la rentabilité puisque le risque semblait momentanément absent. La présence d'une racine unitaire dans le processus autorégressif engendrant l'innovation des séries financières peut être le signal de ce changement de structure.

Un modèle simple formalisant le phénomène de non stationnarité causée par les bruiteurs peut être, par exemple, le suivant :

$$\begin{aligned} p_{t+1} - p_t &= \mu_1 + \varepsilon_t && \text{si } t < k \\ p_{t+1} - p_t &= \mu_2 + \varepsilon_t && \text{si } t > k \end{aligned} \quad (2.67)$$

où :

$p_t$  est le logarithme du prix de l'actif au temps  $t$

$\mu_1$  et  $\mu_2$  sont des constantes de valeurs différentes

$\varepsilon_t$  est un bruit blanc  $(0, \sigma^2)$

Ainsi, dans ce modèle, l'espérance de la différence première du prix est égale à la constante  $\mu_1$  ou  $\mu_2$  selon que la période se situe avant ou après la période  $k$ , date du changement de structure. Ces deux constantes représentent le taux de rentabilité de l'actif respectivement pour la première et la seconde période. Elles peuvent être nulles, auquel cas il s'agit d'un processus de marche aléatoire pour le prix (avec la différence première égale à l'innovation qui est un bruit blanc). Dans le cas contraire, la différence entre les deux coefficients est le signal d'un choc exogène au processus de prix qui est intervenu à la date  $k$  et entraîne la non stationnarité. Dans notre étude,  $k$  est la date à laquelle l'entrée des bruiteurs sur le marché financier amène un changement structurel dans l'évolution de la rentabilité de l'actif. Nous pouvons situer cette date au début des années quatre-vingts. Nous la situerons avec plus de précisions en utilisant une méthode de balayage. Pour cela nous essaierons exhaustivement toutes les dates comprises entre janvier 1980 et décembre 1983, et pour chaque  $k$ , nous comparerons les coefficients  $\mu_1$  et  $\mu_2$ .

Ce modèle reste très simple. Mais le fait que les simulations réalisées par HSIEH posent la non stationnarité comme une cause possible du rejet par le test BDS de l'hypothèse de série iid, nous interdit de négliger cette piste, même si nous ne pouvons donner un modèle explicatif plus complet de la présence d'une racine unitaire en termes de bruiteurs. Pour cette raison, nous proposons une autre explication de la persistance éventuellement présente dans l'innovation des cours boursiers.

## II. La persistance fractale.

Le caractère fractal d'une série ne détermine plus ici son attracteur mais son degré d'irrégularité. WALTER (1989) et PETERS (1991) établissent cela en rapport avec les lois stables dont le logarithme de la fonction de densité est :

$$\text{Log } f(t) = i \delta t - \gamma |t|^\alpha [1 - i \beta (|t|/t) w(t, \alpha)] \quad (2.68)$$

où

$w(t, \alpha) = \text{tg } \pi\alpha/2$	si $\alpha \neq 1$
$w(t, \alpha) = 2/\pi \text{Log} t $	sinon

$i$  est le nombre imaginaire

Une distribution Pareto stable possède quatre paramètres fondamentaux ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $\gamma$ ). Nous sommes particulièrement intéressés par l'exposant caractéristique ( $0 < \alpha \leq 2$ ) dont les cas particuliers sont  $\alpha=2$  pour la loi normale et  $\alpha=1$  pour la loi de Cauchy.

### 1. Les mouvements browniens fractals.

Sur cette base,  $X_t$  est un mouvement brownien fractal qui est tel que les distributions de  $X_t$  et  $X_{t+r} / r^{1/\alpha}$  sont statistiquement identiques<sup>73</sup>. PETERS et

---

<sup>73</sup> C'est un résultat connu dans le cas d'un mouvement brownien avec  $\alpha = 2$ .

WALTER définissent  $\alpha$  comme la dimension fractale de la série. Cette dimension va permettre de rendre compte du caractère désordonné de la série ou, plus exactement, de la force que peuvent avoir les fluctuations de la série. WALTER parle de hasard parétien en lieu et place du hasard laplacien où, à long terme, les fluctuations se neutralisent entre elles. Dans le cas des séries browniennes fractales, les fluctuations peuvent avoir une importance telle qu'elles ne seront ni bénignes ni gommées dans le temps. Nous retrouvons ici la notion de persistance liée à la non disparition de l'effet d'un choc éloigné dans le temps.

Une des difficultés de l'utilisation des lois stables réside dans l'estimation des paramètres d'une loi stable. PETERS (page 108) résout en partie ceci en donnant l'exposant caractéristique d'une loi stable comme l'inverse du coefficient de HURST. Pour déterminer l'exposant caractéristique d'une série (son degré d'irrégularité), il suffit de déterminer la valeur du coefficient de HURST par l'analyse R/S. Si  $1/2 < H < 1$ , la série est persistante, l'irrégularité est relativement faible ( $1 < \alpha < 2$ ). Plus H est proche de un, plus la série est régulière et moins ses mouvements sont brusques. Si  $H = 1/2$ , la série est aléatoire, la connaissance du passé ne permet aucune connaissance de l'avenir et les fluctuations disparaissent rapidement ( $\alpha = 2$ , mouvement brownien classique). Nous allons voir que le coefficient H peut être utilisé pour caractériser l'importance du rôle des bruiteurs sur un marché financier.

## 2. Le coefficient de HURST comme signal des bruiteurs.

Nous pensons que le coefficient H peut être envisagé comme le signal de la présence de bruiteurs qui, de par leurs actions, génèrent un trend plus ou moins fort dans la série. Si nous supposons que les bruiteurs, dans leur ensemble, ont un comportement moutonnier, plus ils seront nombreux, plus leur action sera prépondérante. En leur absence, le marché pourrait paraître plus irrégulier mais le prix évoluerait plus près de la valeur réelle de l'actif. Les bruiteurs vont générer un trend non fondé sur de l'information obligatoirement pertinente. PETERS calcule les valeurs de H pour différents actifs du marché américain. Il constate que l'indice



S&P 500 possède un exposant de HURST le plus élevé (0,78) comparativement aux actions (0,73 à 0,54). L'indice semble donc plus intéresser les bruiteurs (persistance plus importante) que les actions simples. Dans le cas de l'indice, les bruiteurs agissent comme certains gestionnaires d'OPCVM dont le but est de faire au moins aussi bien que l'indice dont la croissance est une information publique connue de tous les investisseurs. Cette stratégie de réplication entraîne des agissements moutonniers dans lesquels le but est de copier l'indice afin d'en obtenir les performances. L'information recherchée est moindre. Il suffit d'acheter quand l'indice augmente afin de profiter comme tout le monde de la hausse, et de vendre à la baisse afin de ne pas voir fondre le cours de l'OPCVM. Ces pratiques vont pousser le prix à s'écarter durablement de sa valeur. Cependant les bruiteurs ont un comportement imprévisible du fait qu'ils agissent sur du bruit et non sur de l'information ; il est donc possible qu'ils oublient progressivement les informations passées. Ceci a pour effet d'annuler le trend. Le mouvement est accentué encore par les investisseurs informés qui veulent profiter du rapprochement entre le prix et la valeur de l'actif qu'ils connaissent. Un tel mécanisme est incompatible avec la vision classique du marché efficient car les cours intègrent l'information très lentement du fait des bruiteurs. Cette lenteur va entraîner le phénomène de persistance. Mais cette persistance n'est pas perceptible par les tests classiques d'efficience et c'est pour cette raison qu'elle figure comme une possibilité de refléter la présence des bruiteurs.

Cette persistance disparaît au bout d'un certain temps. Nous avons d'ailleurs présenté, lors du chapitre 2, la notion de cycles non périodiques introduite par MANDELROT en 1972. La durée moyenne de ces cycles non périodiques peut alors être interprétée comme le temps moyen de disparition de l'effet persistant dans la série. Signalons que le calcul de la durée moyenne de cycles non périodiques n'a de justification qu'avec une série très longue dans le temps (plusieurs décennies). En effet PETERS (1991, page 88) calcule des durées moyennes de cycles allant jusqu'à 90 mois sur plusieurs actions américaines et différents indices boursiers internationaux. Cette valeur n'a donc de pertinence que si la série possède plusieurs fois 90 mois. Des données sur 20 ans (240 mois) ne permettraient d'avoir que deux à trois cycles de périodes différentes permettant d'aboutir à une moyenne de 90 mois.

La justification d'un temps aussi long est cohérente avec une des composantes essentielles du comportement des bruiteurs : la rumeur ou plus exactement la réputation. Ce type d'information, s'il n'est ni mesurable ni pertinent a priori, est considéré par les bruiteurs comme une information dont ils pensent devoir tenir compte. Cette information agit sur leur stratégie de manière informelle, inconsciente et provoque cette persistance dans leurs décisions qui se répercute dans l'évolution du taux de rentabilité du prix de l'actif. Si la réputation est bonne, les bruiteurs surévalueront le prix futur et pousseront donc le prix à la hausse. Ce phénomène est perceptible à travers l'analyse R/S qui va nous permettre de déterminer quelle est la durée moyenne de vie d'une rumeur dans la prise de position des bruiteurs.

La persistance est certes une possibilité intéressante de modélisation du comportement des bruiteurs mais elle n'est pas la seule. Nous effectuerons, avant toute tentative de mesure du degré de persistance, le test de LO qui vérifie la présence de cet effet. Le test BDS va nous permettre d'envisager deux autres types de formalisation dont la non linéarité stochastique.

## **Section 2. La non linéarité stochastique pour décrire le bruit.**

Nous avons souligné l'importance croissante de l'utilisation des modèles de type ARCH dans la littérature financière. Ceci provient notamment des caractéristiques statistiques générées par ces modèles. Les financiers y voient la possibilité de prendre en compte dans la modélisation du prix des actifs boursiers le caractère leptokurtique (queue de distribution épaisse) empiriquement vérifié de nombreuses fois. Ces modèles, de par leur structure, aident à la modélisation de l'effet de grappe constaté par MANDELBROT (1963). En effet, des périodes de quiétude boursière pour lesquelles de faibles variations de prix succèdent à de faibles variations de prix précèdent des périodes plus ou moins longues au cours desquelles les marchés semblent agités. Les processus de type ARCH, en modélisant cela, comblent, en analyse financière, la lacune due à l'hypothèse de

constance de la variance. Les raisons de la bonne adéquation entre les modèles ARCH et la réalité ne sont malheureusement pas toujours soutenues par l'analyse théorique. On cherche plus souvent à vérifier le pouvoir explicatif du modèle<sup>74</sup> qu'à fournir une explication du comportement sous-jacent supposé. L'article de LONGIN (1992b) évite ce travers en déduisant l'évolution du prix selon un processus ARCH à partir de la structure du marché en termes du nombre d'agents informés.

De manière un peu similaire, la présence de bruiteurs sur les marchés financiers nous semble être une cause possible de cet effet ARCH qui proviendrait d'une arrivée irrégulière de l'information et des impacts que cela induit sur la stratégie des bruiteurs. C'est pour cette raison que nous développons au cours de cette section une représentation du marché en termes de bruiteurs qui trouve son aboutissement dans les modèles ARCH et GARCH.

### I. D'où provient l'effet GARCH ?

Le but est d'expliquer pourquoi les marchés montrent une volatilité variable dans le temps. LONGIN (1992b) propose plusieurs explications de la présence d'un tel effet dans les prix, en distinguant les raisons possibles de cette présence en deux groupes selon qu'elles sont endogènes ou exogènes. Ces différentes explications ont en commun d'être fondées sur la nature de l'information et la manière dont cette dernière est transmise et interprétée par le marché.

#### **Explications exogènes**

A l'exception d'informations mineures ou non pertinentes, les marchés boursiers sont caractérisés par une arrivée irrégulière d'information qui peut être formalisée par un GARCH. Sur les marchés financiers, l'arrivée subite d'une quantité importante d'information (beaucoup d'échanges, forte volatilité) succède à

---

<sup>74</sup> Nous ne cherchons aucunement à critiquer cette méthodologie qui reste fondamentale dans l'établissement des relations entre les travaux théoriques et empiriques.

une période d'information moins prolifique pendant laquelle l'actif est moins échangé, moins volatil. Il n'est pas besoin que l'information soit aussi cruciale que l'annonce d'une tentative d'OPA. Prenons l'exemple du cours de l'action Alcatel Alsthom au début de l'année 1993<sup>75</sup>. L'année 1992 s'est soldée par un profit de 7 milliards en hausse de 13 % par rapport à l'année précédente et pourtant le titre a perdu 6 % entre janvier et mars 1993. Ceci s'explique entre autres par la transformation d'obligations convertibles en actions. Mais cela a focalisé momentanément l'attention des analystes financiers qui constatent par ailleurs une baisse de la demande européenne en matériel de communication. Une étude financière britannique montre que cela est dangereux pour une société comme Alcatel Alsthom qui réalise 70 % de son chiffre d'affaires dans ce secteur. De plus, une annonce de la stagnation du résultat en 1993 conforte ce flot d'informations négatives. Au vu de ces informations certains analystes réitèrent cependant leur confiance en ce titre en raison de la solidité financière du groupe, sa bonne diversification géographique et les bons résultats de sa filiale à 50 %, GEC Alsthom. Les investisseurs sont alors confrontés à une masse importante et quelque peu contradictoire d'information qui va générer une forte activité sur le titre du groupe. Mais il n'y aura pas de flot continu d'information de cette ampleur sur ce titre. Dans d'autres périodes l'évolution du titre sera moins heurtée car moins d'informations viendront créer de l'activité autour de l'action Alcatel Alsthom. Il semble donc possible de modéliser l'arrivée d'information à l'aide d'un modèle de type ARCH, ce qui peut se répercuter sur l'évolution du prix de l'actif.

Une autre cause exogène de la présence d'effets ARCH sur le marché financier est la manière dont varie la qualité de l'information. Une information est de bonne qualité si son importance est jugée de la même manière par tous les investisseurs. Dans le cas d'une information de bonne qualité, l'intégration dans le cours est rapide et cause une moindre volatilité du fait de l'accord qui se dégage des anticipations de chacun. En revanche, une information diversement appréciée fait douter les investisseurs et engendre de la volatilité. Dans l'exemple précédent, les investisseurs s'interrogent sur la démarche à suivre compte tenu des informations multiples et contradictoires qui arrivent sur le marché. Concernant l'action Alcatel

---

<sup>75</sup> Cet exemple est issu d'une revue économique et financière (Nouvel Economiste, 26/03/93).

Alsthom, l'article conclut à une différence de stratégie des cabinets d'analyse financière britanniques et français. Leurs points de vue sont fortement divergents : les cabinets français privilégient le long terme, la logique industrielle alors que les cabinets britanniques sont plus à l'affût d'une bonne affaire. Cela suscite un doute de la part des investisseurs et une volatilité accrue du titre.

### **Explications endogènes**

Ces explications proviennent de la nature même du fonctionnement du marché et la manière dont ce dernier intègre l'information.

Un premier problème réside dans la difficulté rencontrée au moment de l'intégration d'une information importante dans la stratégie. Des ajustements postérieurs à l'information seraient alors nécessaires. La prise en compte de cette idée dans la modélisation du prix des actifs financiers n'est pas à négliger mais ne pourra pas être le fondement de notre modélisation. Nous cherchons, en effet, à montrer que la présence de bruiteurs sur le marché peut ne pas être décelable compte tenu des tests classiques d'efficience. Ces derniers cherchent à vérifier l'éventuelle présence d'information qui aurait échappé aux investisseurs "parfaits". L'hypothèse alternative en est souvent la présence d'un trend dans l'évolution des prix et le rejet de l'hypothèse de rationalité substantielle des investisseurs. Or les bruiteurs, à la rationalité uniquement procédurale génèrent une activité qui semble conforme à celle d'un marché parfait. Le rejet de ce dernier, dans notre modélisation, ne doit donc pas être causé par la lenteur de l'intégration de l'information mais uniquement par l'existence de bruiteurs. Au contraire, l'exemple de la Quasi Marche Aléatoire (ALEXANDRE, 1992) illustre cette possibilité de non rejet de l'efficience par les tests classiques avec une modélisation de l'innovation par un processus ARCH. L'approfondissement de cette idée va nous permettre de modéliser l'action des bruiteurs et d'expliquer entre autres les effets de grappe constatés sur les marchés financiers.

LONGIN évoque également le manque d'information des investisseurs de liquidité comme cause de ces effets. Les bruiteurs ne peuvent évaluer la valeur

réelle d'un actif qu'avec beaucoup de difficultés, et les hésitations que cela induit, peuvent faire varier la volatilité de l'actif.

Ces causes de la présence d'effets ARCH sont à intégrer dans notre modèle. L'arrivée irrégulière d'information, en quantité et en qualité, va agir fortement sur l'action des bruiteurs et créer les conditions favorables à une évolution particulière des prix. LONGIN développe un modèle qui permet de prendre en compte différentes asymétries possibles des marchés financiers. Il est l'exemple le plus abouti de justification théorique de l'effet ARCH dans les prix des actifs financiers. Dans son modèle, il déduit la variance conditionnelle des rentabilités en fonction de deux choses :

- “un processus GARCH reflète bien le fait que l'information a tendance à arriver par vagues”;

- La structure du marché (nombre d'investisseurs informés et d'investisseurs de liquidité) détermine la nature du processus GARCH reflétant l'évolution différences premières des prix ( $P_t - P_{t-1}$ ). Les agents de liquidité sont des agents qui échangent sur les marchés pour des raisons exogènes au marché (besoin de consommer ...)

LONGIN en annexe démontre que dans le cas où l'acquisition d'information est exogène, la variance conditionnelle des changements de prix s'écrit :

$$h_t^2 = E \left[ (P_t - P_{t-1})^2 / I_t \right] = \alpha_{0,t} + \alpha_{1,t} (P_{t-1} - P_{t-2})^2 + \beta_{1,t} h_{t-1}^2 \quad (2.69)$$

Les coefficients sont variables dans le temps. Le paramètre de volatilité  $\alpha_{1,t}$  s'écrit sous la forme générale :

$$\alpha_{1,t} = \left[ \frac{1}{n_{t-1} + 1} + \frac{n_t}{n_t + 1} (\alpha_1 + \beta_1) \right] \alpha_1 \quad (2.70)$$

$\alpha_1$  et  $\beta_1$  sont les coefficients de la variance conditionnelle définissant le processus d'arrivée de l'information. LONGIN distingue maintenant différents cas selon le nombre ( $n_t$ ) d'agents informés au temps  $t$ .

- Si aucun agent n'est informé, alors le processus de différence de prix est identique à celui d'arrivée de l'information.

- Si le nombre d'agents informés est infini, alors le processus de différence de prix est un GARCH de variance conditionnelle telle que :

$$\alpha'_{0,t} = \alpha_0 (1 + \alpha_1) \quad (2.71)$$

$$\alpha'_{1,t} = \alpha_1 (\alpha_1 + \beta_1) < \alpha_1 \quad (2.72)$$

- Si le nombre d'agents est constant et égal à  $n$ , le processus de différence de prix est un GARCH dont les coefficients sont :

$$\alpha'_{0,t} = \alpha_0 \frac{1 + n(1 + \alpha_1)}{1 + n} \quad (2.73)$$

$$\alpha'_{1,t} = \alpha_1 \frac{1 + n(\alpha_1 + \beta_1)}{1 + n} < \alpha_1 \quad (2.74)$$

Dans le cas présent, nous nous inspirons de l'article de LONGIN notamment en ce qui concerne les relations entre l'arrivée d'information et le processus d'évolution des prix ou des rentabilités. Mais LONGIN suppose que son marché est composé d'agents informés, d'agents de liquidité et d'un "market maker" qui régule le marché. Les agents de liquidité ne sont pas à proprement parler des bruiteurs et son modèle n'est donc pas directement adaptable à notre problématique. Nous partons donc du modèle développé par DELONG SHLEIFER, SUMMERS et WALDMANN (DSSW, 1990) en ce qui concerne la structure du marché et pour lequel nous allons reprendre des hypothèses inhérentes au modèle de LONGIN. Cela permet une description de l'effet des bruiteurs et de la manière dont le rythme d'arrivée de l'information les influence.

## II. Modélisation des bruiteurs et processus ARCH.

### 1. Hypothèses sur le comportement des investisseurs.

Le modèle de DSSW intègre, dans une représentation du marché financier, l'effet de la présence de bruiteurs. Statistiquement le biais commis par ces derniers

dans le calcul du prix futur de l'actif est engendré par une erreur  $\rho_t$ . Cette erreur provient du manque d'accès à l'information ainsi que par une possibilité limitée de l'utilisation de cette information. DSSW suppose que cette erreur est aléatoire et distribuée selon une loi normale d'espérance  $\rho^*$  et d'écart-type  $\sigma_\rho$ .

Ce que nous voulons modifier dans cette formulation repose justement sur la représentation de l'erreur commise par les bruiteurs. Nous avons vu qu'il était plausible de considérer que l'information arrivait par rafales et suivait un processus ARCH. Les investisseurs bien informés et aux méthodes de prévisions puissantes et pertinentes ne sont pas perturbés par ce mode d'arrivée de l'information car ils fondent leur estimation sur des données concernant le long terme. Ces dernières sont supposées être plus régulières dans leur mode d'arrivée. Elles concernent la publication des résultats annuels ainsi que les grandes orientations financières et stratégiques de l'entreprise.

En revanche, l'information qui arrive en rafales peut contribuer à modifier la stratégie des bruiteurs car elle est de nature plus spéculative et plus difficile à intégrer dans les prévisions. Dans l'exemple d'Alcatel Alsthom, l'importance dans le chiffre d'affaires d'un secteur en stagnation est une information spéculative provoquant l'inquiétude des investisseurs mal informés (les bruiteurs) ; cela coïncide avec la transformation des obligations convertibles, raison certes plus technique mais qui renforce, dans leurs inquiétudes, les investisseurs trop sujets à n'observer que les trends dans les séries de prix. Une analyse plus poussée permet de constater la solidité financière du groupe, sa bonne stratégie de diversification, sa faible sensibilité à la conjoncture ainsi qu'une prévision de hausse des bénéfices sur les trois années à venir. Or ceci est en contradiction avec l'évolution du cours de l'action depuis le début de l'année. La baisse observée peut donc être perçue comme le fait d'investisseurs agissant à court terme par manque d'information notamment. Ceci caractérise parfaitement le comportement des bruiteurs.

Le processus d'erreur des bruiteurs  $\rho_t$ , et plus particulièrement celui de sa différence, peut, dans ces circonstances, être représenté de la manière suivante :

$$\kappa_t = \rho_t - \rho_{t-1} \sim N(0, h_t^2) \quad (2.75)$$



L'espérance du processus  $\kappa_t$  est nulle. En effet, la différence  $\rho_t - \rho_{t-1}$  représente l'évolution de l'erreur commise par les bruiteurs. Il n'y a aucune raison de postuler qu'elle soit une constante non nulle positive ou négative sur l'ensemble de la période. Si  $\kappa_t$  est positive, cela signifie qu'une information augmente l'optimisme non fondé des bruiteurs. Nous entendons par cela une information, pas obligatoirement pertinente, mais interprétée par les bruiteurs comme le signal d'une hausse future du prix de l'actif (ou d'un arrêt de la baisse du prix). Cela entraîne une surestimation (ou une moindre sous-estimation du prix futur).

Les bruiteurs étant définis ici comme sujets à l'illusion procurée par l'effet ARCH dans l'information, cela va avoir un impact sur l'évolution du prix de l'actif étudié différent de celui proposé par DSSW. Nous devons pour décrire cette évolution, présenter le marché sur lequel nous nous situons ainsi que les acteurs présents et leurs stratégies respectives.

## 2. Stratégie des investisseurs.

Soit un actif sans risque qui offre une rentabilité de  $r$ , et un portefeuille d'actifs risqués de prix  $p_t$  qui offre un revenu fixe de  $r$  mais dont le prix n'est pas fixe. Chaque agent maximise une fonction d'utilité dont l'espérance est donnée par DSSW et est de la forme

$$E\{U\} = \bar{w} - \gamma \sigma_w^2 \quad (2.76)$$

où :

$\bar{w}$  est la richesse anticipée de l'individu

$\gamma$  est le coefficient d'aversion absolue au risque

$\sigma_w^2$  : Volatilité historique de la richesse

Sur le marché, il existe deux types d'agents classés selon leur relation avec l'information : les investisseurs informés et les bruiteurs qui utilisent moins bien une information qu'ils ont en quantité limitée. Cela se traduit, dans l'écriture de

l'espérance d'utilité de la détention d'un montant  $\lambda$  de l'actif risqué pour chacun des types d'investisseurs, par :

- Investisseurs informés

$$E(U) = \lambda_t^i [r + E_t(p_{t+1}) - (1+r) p_t] - \gamma (\lambda_t^i)^2 (\sigma_p^2) \quad (2.77)$$

- Bruiteurs

$$E(U) = \lambda_t^n [r + E_t(p_{t+1}) - (1+r) p_t] - \gamma (\lambda_t^n)^2 (\sigma_p^2) + \lambda_t^n \rho_t \quad (2.78)$$

où :

$\lambda_t^n$  : Somme investie dans l'actif risqué

$\sigma_p^2$  : Volatilité historique de l'actif risqué (constante à court terme)

L'objectif de maximisation de l'espérance d'utilité permet de déterminer les quantités demandées par chacun des types d'investisseurs :

- Investisseurs informés

$$\lambda_t^i = \frac{r + E_t(p_{t+1}) - (1+r) p_t}{2 \gamma (\sigma_p^2)} \quad (2.79)$$

- Bruiteurs

$$\lambda_t^n = \frac{r + E_t(p_{t+1}) - (1+r) p_t + \rho_t}{2 \gamma (\sigma_p^2)} \quad (2.80)$$

### 3. Evolution du prix et de l'innovation.

Nous avons défini les demandes exprimées par chaque type d'investisseur. Nous supposons que le marché est composé d'une proportion  $\mu$  de bruiteurs et de  $1-\mu$  d'investisseurs informés. De la même manière que dans le modèle de DSSW, nous dérivons alors l'équation de génération du prix de l'actif qui est alors fonction entre autres de l'espérance du prix futur et de l'erreur commise par les bruiteurs

$$p_t = \frac{1}{1+r} [r + E_t(p_{t+1}) - 2 \gamma \sigma_p^2 + \mu \rho_t] \quad (2.81)$$

En prenant la différence première (innovation), il vient :

$$p_t - p_{t-1} = \frac{\mu}{1+r} (p_t - p_{t-1}) \quad (2.82)$$

La différence de l'erreur commise par les bruiteurs est un processus ARCH qui s'explique par :

$$\kappa_t = p_t - p_{t-1} = u_t h_t = u_t \sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (p_t - p_{t-1})^2} \quad (2.83)$$

Dans le cas présent, la différence des prix de l'actif est fonction de ce processus ARCH mais multiplié par une constante. Nous devons alors écrire :

$$p_t - p_{t-1} = \frac{\mu (p_t - p_{t-1})}{1+r} = u_t h'_t = u_t \sqrt{\frac{\mu^2 \alpha_0}{(1+r)^2} + \sum_{i=1}^p \frac{\mu^2 \alpha_i}{(1+r)^2} (p_t - p_{t-1})^2} \quad (2.84)$$

L'innovation est un processus ARCH de même ordre  $p$  que celui de l'évolution des erreurs commises par les bruiteurs mais dont les coefficients ont une valeur différente. Le passage de la valeur des paramètres d'un processus à l'autre se fait en posant :

$$\tilde{\alpha}_i = \frac{\mu^2 \alpha_i}{(1+r)^2} \quad i = 0, \dots, p \quad (2.85)$$

Nous pouvons donc représenter le processus d'innovation par un ARCH pour un marché dont les agents ont un comportement tel que celui décrit dans ce modèle. L'estimation s'effectue à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance. Or nous savons que l'innovation d'un actif financier modélisée de la sorte (processus ARCH) trompe les tests classiques d'efficience (ALEXANDRE, 1992). Dans ce cas, en effet, le prix suit une Quasi Marche Aléatoire appelée de la sorte car elle répond aux tests d'efficience de manière similaire à un prix suivant une marche aléatoire. Ainsi il est possible que les bruiteurs coexistent sur un marché financier avec des investisseurs informés sans que les tests usuels les détectent.

Le test BDS résout cette ambiguïté en rejetant l'hypothèse statistique nulle liée à la notion d'efficience des marchés. Il offre comme alternative possible celle des processus ARCH. Nous pourrions donc devant une telle situation offrir ce modèle comme description du marché.

Nous tenons à ajouter que la Quasi Marche Aléatoire est définie pour des processus de la même famille notamment le processus GARCH. Nous effectuerons les tests et les régressions pour ces processus et nous les comparerons tant au niveau de la qualité de l'ajustement que du pouvoir prédictif. En effet l'hypothèse d'un effet de type ARCH dans l'arrivée de l'information n'exclut aucunement celle d'un GARCH. Il nous paraît, dans l'état actuel des connaissances, impossible de discriminer entre ces deux types de processus a priori. Il est possible de rapprocher de chacun une intégration et une prise en compte différente de l'information.

Dans le cas d'un GARCH, l'idée implicite est que l'information arrive par vagues mais qu'en plus, l'importance (quantité et qualité) de l'information précédente est elle-même une information qu'exploiteront les bruiteurs. Nous réaliserons les deux modélisations et notre critère de choix sera heuristique car il consistera à privilégier le meilleur outil de représentation d'un marché avec bruiteurs et information à effet de type ARCH.

Le test BDS propose une dernière hypothèse alternative : la non linéarité déterministe et plus précisément le chaos déterministe. Là aussi, nous allons voir qu'il est possible de modéliser la présence des bruiteurs et d'aboutir à une génération de l'innovation correspondant à une hypothèse alternative du test BDS.

### **Section 3. Les bruiteurs génèrent du chaos.**

Nous avons vu, dans les chapitres précédents, qu'un processus chaotique déterministe pouvait présenter les caractéristiques d'un mouvement aléatoire. Ceci est fondamental au regard des tests traditionnellement utilisés pour vérifier ou rejeter l'hypothèse d'efficience des marchés financiers à travers le modèle de marche aléatoire ou de martingale. Dans cette section, nous cherchons à montrer qu'un marché où coexistent des agents rationnels et des bruiteurs peut donner l'illusion d'un marché efficient où seule est décelable la présence des investisseurs rationnels.

Dans le cas du rejet par le test BDS de l'hypothèse selon laquelle l'innovation serait iid, nous essaierons, de savoir dans quelle mesure ce rejet peut être causé par le chaos déterministe. Si tel était le cas, il y aurait en quelque sorte une remise en cause du lien traditionnel entre l'hypothèse d'efficience des marchés et sa testabilité par les processus aléatoires.

Nous serons peut être alors conduits à nous interroger sur la nature même de l'efficience des marchés. Est-elle le symbole de la rationalité des investisseurs où bien la simple constatation de l'impossibilité de battre le marché ? En effet le chaos ne permet pas (BAUMOL et QUANDT, 1985) une meilleure prévision qu'un processus aléatoire. Cette absence de possibilité de prévoir (due à la Sensibilité aux Conditions Initiales) empêche, même dans le cas déterministe, de battre le marché et celui-ci peut donc être considéré comme efficient. Simplement cela doit nous faire réfléchir sur le lien traditionnel efficience-aléa qui semble aujourd'hui dépassé par les connaissances scientifiques. Le test BDS permet de tester le comportement des marchés sans effectuer ce lien.

Comme pour les autres alternatives possibles liées au rejet de l'hypothèse de série iid par le test BDS nous nous intéressons maintenant à la modélisation du comportement des bruiteurs à l'aide du chaos déterministe.

## I. Différents investisseurs

La modélisation théorique des comportements des investisseurs sur les marchés financiers s'est généralement opérée à l'aide de modèles probabilistes. DAY et HUANG, quant à eux, insèrent dans un modèle déterministe trois grands types d'investisseurs selon leurs stratégies propres et surtout les raisons de ces stratégies. Ils distinguent les fondamentalistes, les bruiteurs et les contrepartistes. Chacun agit sur la base d'anticipations plus ou moins complexes du fait de la différence d'accès à l'information. Il existe également entre eux une différence de stratégie liée au comportement par rapport au risque et à leur horizon temporel d'action.

## 1. Les fundamentalistes (investisseurs $\alpha$ ).

### **Stratégie**

Ils peuvent être considérés comme agissant en fonction de la valeur fondamentale de l'actif financier sur lequel ils prennent une décision de vente ou d'achat. Nous pouvons les considérer un peu comme les froids calculateurs qui en parfaite connaissance de l'information ajustent leur portefeuille au risque dans une optique de long terme (comme les sociétés d'assurance par exemple). Dans ce but, leur stratégie est basée sur une étude approfondie et quasi exhaustive des données économiques de tout ordre dans l'estimation de la valeur fondamentale future de l'actif (valeur d'investissement). Ils utilisent pour cela des techniques comme l'économétrie (paramètres de choix établis grâce au modèle de OU et PENMAN, 1989), l'étude de variables économiques, industrielles, politiques, de performance des entreprises. De chaque information qu'ils jugent pertinente, ils déduisent une éventuelle variation de leurs anticipations. Cela provient très souvent du fait de la quantité importante d'informations alimentant les marchés financiers. Leur stratégie reposant sur le long terme, chaque information est certes intégrée mais n'a pas obligatoirement d'effet important dans la recomposition du portefeuille. Cependant cette recherche constante de la meilleure et de la plus récente information limite le nombre d'investisseurs agissant de la sorte. Cela est imputable aux montants des ressources dont il faut disposer pour induire de telles anticipations et des quantités d'actifs qu'il faut traiter pour couvrir les différents coûts liés à la transaction.

Ils n'agissent pas que sur la valeur d'investissement mais également sur l'écart entre valeur et prix. Ils définissent pour cela une fonction de chance  $f(p)$  qui est fonction de l'écart entre le cours présent de l'actif ( $p$ ) et la valeur d'investissement ( $u$ ) vers laquelle tend ce prix. La fonction de chance est bornée et définie sur  $[m, M]$ . Cet intervalle est borné par les cours extrêmes qu'ils jugent possibles. La fonction de chance est bimodale avec ses maxima pour  $p=m$  et  $p=M$ . Plus le prix se rapproche de  $m$  ou  $M$ , donc s'écarte de  $u$ , plus leur demande, ou leur offre d'actif va être élevée. Cette stratégie est communément appelée "*buy low, sell high*". En effet,

la fonction de chance les renseigne sur l'écart existant entre la valeur fondamentale et le prix au comptant. D'après eux, cet écart doit inexorablement décroître même s'il faut pour cela attendre le long terme ; ils agissent donc pour en profiter au maximum selon la règle suivante :

- Achats.

Plus  $p < u$ , plus ils anticipent de fortes chances de gains et entrent donc en nombre sur le marché en achetant.

- Ventes.

A l'inverse si  $p > u$  ils anticipent une chance de perte (plus ou moins élevée selon la valeur de  $p-u$ ) et vont donc quitter le marché.

### **Fonction d'excès de demande $\alpha(p)$**

Selon l'estimation de  $u$ , et plus précisément de l'écart  $u-p$ , la fonction d'excès de demande  $\alpha()$  des fundamentalistes se modélise comme suit :

$$\alpha(p) = \begin{cases} a(u-p) f(p) & \text{si } m < p < M \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.86)$$

où 'a' est un paramètre qui mesure l'agressivité de l'action des fundamentalistes sur le marché, la force de la demande qu'expriment les investisseurs  $\alpha$ . Ces derniers seront d'autant plus fermes dans leur action que le prix sera éloigné de la valeur d'investissement (BLACK, 1986).

## 2. Les bruiteurs (investisseurs $\beta$ ).

### **Stratégie.**

Elle est beaucoup plus sommaire que celle des investisseurs  $\alpha$ . Nous avons décrit les bruiteurs comme maximisant leur espérance d'utilité, mais sans avoir accès à toute l'information par manque de temps et de moyens financiers. Dans le

modèle de DAY et HUANG, l'estimation de  $u$  est faite par les bruiteurs sur la base d'un modèle mathématique très simple de la forme :

$$u_{t+1} = p_t + \varphi (v_t - u_t) + \gamma (p_t - v_t) \quad (2.87)$$

où  $v_t$  est la valeur fondamentale courante que BLACK (1986) définit comme pouvant être le produit du bénéfice de la société étudiée et d'un PER moyen (du secteur ou de la place boursière). Il s'agit d'une approximation assez pauvre de la valeur fondamentale réelle.

Nous pouvons supposer, sans perte de contenu, que l'écart entre la valeur d'investissement et cette valeur fondamentale courante est d'un effet très limité dans les prévisions des bruiteurs. Le manque d'information ne leur permet pas d'utiliser dans leurs prévisions la différence entre leur estimation sommaire de la valeur fondamentale et une estimation plus rigoureuse que d'ailleurs ils ignorent. Leur prévision de la valeur future de l'actif risqué peut donc s'exprimer sous la forme suivante :

$$u_{t+1} = p_t + \gamma (p_t - v_t) \quad (2.88)$$

Il n'apparaît pas dans la stratégie des bruiteurs de fonction de chance. Les bruiteurs agissent surtout en termes d'évolution future du cours plus qu'en risque d'un retournement de situation rapide en cas de trop fort écart entre le prix et la valeur. Si le prix est supérieur à la valeur sommaire ( $v_t$ ) qu'ils ont calculé, alors ils anticipent une hausse de la valeur fondamentale ( $u_t$ ) et donc ils estiment avoir intérêt à profiter de cette future évolution qu'ils amplifient. Ils entrent donc sur le marché lorsqu'une hausse des cours laisse espérer d'autres hausses et ils vendent quand une baisse leur fait craindre d'autres baisses futures, se fiant au peu d'informations qu'ils détiennent.

### **Fonction d'excès de demande $\beta(p)$**

Leur fonction de chance étant constante (et égale à l'unité), leur fonction d'excès de demande peut être estimée par :

$$\beta(p) = b(p - v) \quad (2.89)$$

où 'b' est la force de leur réponse au signal donné par les prix.



A l'inverse des fundamentalistes, plus le prix est supérieur à la valeur fondamentale estimée, plus leur demande est élevée.

Les “contrarians”<sup>76</sup> et les “assureurs en portefeuille” vont par exemple accompagner le mouvement des bruiteurs. Mais cela part d'une démarche plus professionnelle, notamment pour les investisseurs pratiquant l'assurance en portefeuille. Ces derniers cherchent à préserver un rendement minimal à leur portefeuille d'actions tout en profitant de la hausse éventuelle de l'indice boursier auquel ils se réfèrent (BLACK et JONES, 1986, BERTHON et GALLAIS-HAMONNO, 1989). Ils s'assurent contre le risque de forte chute des cours. Cela se réalise en combinant portefeuille d'actifs risqués et actifs sans risque selon différentes techniques (*stop-loss* ou technique du coussin). En cas de baisse, ils se désengagent du marché d'actions en investissant en Bons du Trésor par exemple afin de se prémunir contre cette tendance baissière : et en cas de hausse, ils réinvestissent dans le portefeuille d'actions afin de bénéficier de cette hausse. Ces investisseurs ne sont pas à confondre avec les bruiteurs au sens de la méconnaissance du marché.

### 3. Les contrepartistes.

#### **Stratégie.**

Ce sont les intermédiaires du marché qui tentent de répondre aux offres (demandes) des deux autres groupes d'investisseurs en :

- Ramenant les transactions à l'équilibre ;
- Stabilisant le marché ;
- Gardant des stocks d'actifs convenables.

Leur stratégie est commandée par leur rôle de stabilisateur. Ils achètent lorsque les ventes des autres investisseurs sont trop élevées et vendent quand les

---

<sup>76</sup> Les “contrarians” établissent leur stratégie en postulant qu'il est plus intéressant d'agir à l'inverse de l'ensemble du marché, afin de pouvoir le battre.

autres investisseurs offrent trop d'actifs. Les contrepartistes n'étant pas présents sur tous les marchés et à toute époque nous n'insisterons pas trop sur leur rôle.

L'offre d'actif de la part des contrepartistes est égale à la somme des demandes excessives des investisseurs  $\alpha$  et  $\beta$  qui est :

$$E(p) = \alpha(p) + \beta(p) \quad (2.90)$$

Leur stock d'actif  $V_t$  varie donc en rapport avec la demande  $E(p)$  :

$$V_{t+1} = E(p_t) + V_t \quad (2.91)$$

Les changements dans les prix de l'actif vont être :

$$p_{t+1} - p_t = c\gamma[E(p_t)] \quad (2.92)$$

ou  $\gamma(\cdot)$  est une fonction continue monotone et croissante. Nous pouvons très bien considérer la fonction identité. L'évolution des prix de l'actif est alors :

$$p_{t+1} = p_t + cE(p_t) = p_t + c[\alpha(p_t) + \beta(p_t)] \quad (2.93)$$

Les contrepartistes interviennent dans le modèle de DAY et HUANG. Il nous semble possible de ne pas les inclure dans le modèle en supposant que  $c\gamma(\cdot)$  mesure l'effet de l'action des deux premiers groupes d'investisseurs sur le prix de l'actif. Ceci est conforme à la structure du marché français des actions qui est dominée par des donneurs d'ordres directs sans contrepartistes.<sup>77</sup>

## II. Evolution du prix des actifs

DAY et HUANG ont élaboré un premier modèle d'évolution des prix en intégrant ces différents comportements. Ils considèrent cependant un grand nombre de paramètres comme étant constants ( $u, m, M, a, b, c, v, d1$  et  $d2$ ). Entre autres ils définissent la fonction de chance comme étant de la forme :

$$f(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < m \\ \frac{1}{\sqrt{|p - m + e|} \sqrt{-p + M + e}} & \text{si } m \leq p \leq M \end{cases} \quad (2.94)$$

<sup>77</sup> Signalons que sur le MONEP, le fonctionnement est similaire à celui du NYSE avec des contrepartistes.

= 0

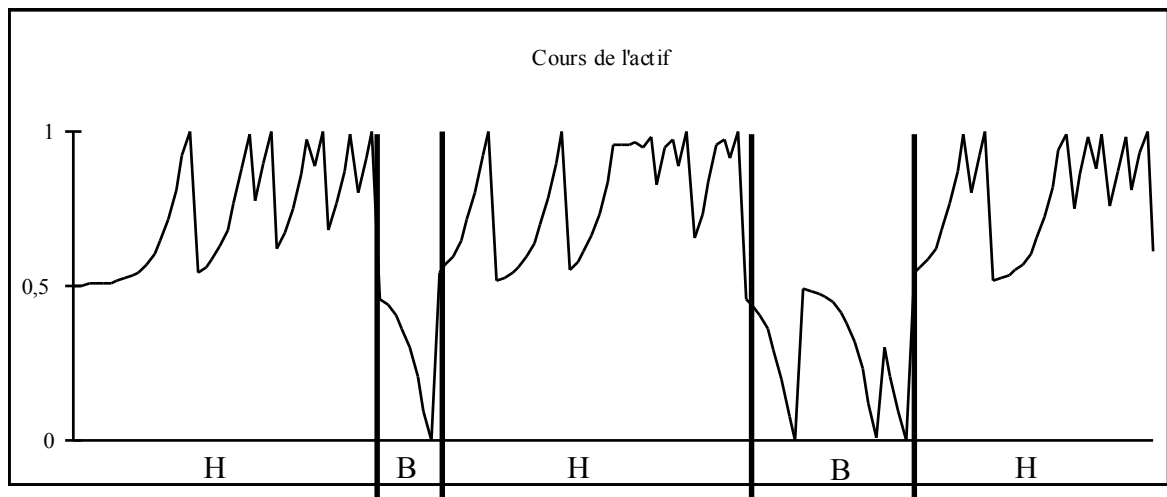
si  $p > M$

De cette manière, les auteurs simulent l'évolution du prix d'un actif financier. Bien entendu l'état statique de nombreuses variables entraîne une ressemblance assez limitée avec l'évolution réelle du prix d'un actif financier comme le montre le graphique suivant :

### Graphique 2.9. Un exemple de prix simulé par le modèle de DAY et HUANG.

Cette simulation est réalisée avec :

$a=0,2$ ,  $b=0,88$ ,  $u=v=0,5$  et  $c =0,993216$ ,  $m=0$  et  $M=1$



Deux états possibles du marché sont représentés ici :

- En H, le marché est haussier. Le prix de l'actif monte lentement. Cette hausse provient des achats des bruiteurs, peu à peu les investisseurs  $\alpha$  se retirent du marché, anticipant un retour brusque du prix vers la valeur d'investissement. Mais l'action des  $\beta$  est de plus en plus forte et génère ce trend haussier. Cependant à une certaine valeur, l'anticipation de perte est si marquée chez les investisseurs  $\alpha$ , qu'ils quittent le marché brusquement. Il y a alors réajustement à la baisse du prix jusqu'à ce que le processus de trend croissant reprenne.

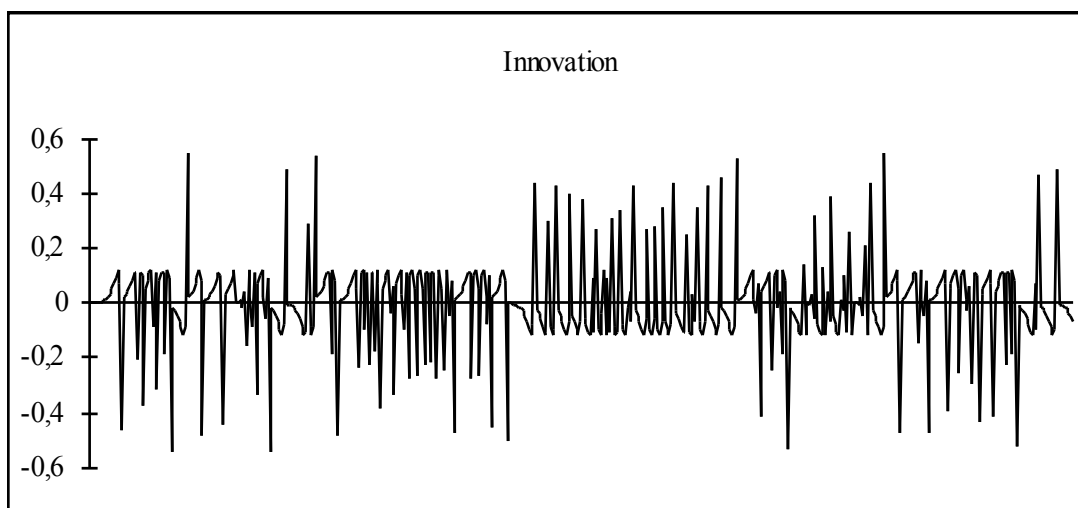
- En B, le marché est baissier. Le phénomène est le même avec un trend décroissant ; à un certain moment, après que les  $\beta$  aient alimenté ce trend, les  $\alpha$  (trouvant là une possibilité de réaliser de forts gains) entrent en masse sur le marché ce qui fait augmenter brusquement le prix. Le passage d'un marché baissier à un marché haussier semble aléatoire et est en quelque sorte le reflet de la présence du chaos

déterministe. En effet, il ne faut pas oublier que ce cours fictif est créé à partir d'équations purement déterministes.

Le problème de ce modèle expérimental est le trop grand nombre de paramètres constants (sept au total). SCHEINKMAN et LEBARON (1989) pensent que les marchés financiers sont compatibles avec un chaos de dimension 6 à 8. Ce qui signifie que 6 à 8 variables d'état dans un modèle financier sont compatibles avec la théorie. Malgré tout, le cours simulé ne nous paraît pas très conforme à la réalité. Les tests que nous effectuons portent sur l'innovation du processus de prix. Dans le cas présent du modèle de DAY et HUANG nous avons voulu considérer également l'innovation. Dans le graphique suivant, nous avons représenté l'évolution dans le temps de l'innovation de la série simulée par le modèle de DAY et HUANG pour une période plus longue. En effet, nous voulons insister ici sur la ressemblance avec des rentabilités empiriquement constatées sur les marchés financiers plutôt que de bien décrire le mécanisme de fonctionnement du modèle comme précédemment.

### **Graphique 2.10. Innovation par le modèle de DAY et HUANG**

Différence première des prix simulés qui apparaissent au graphique 2.9.

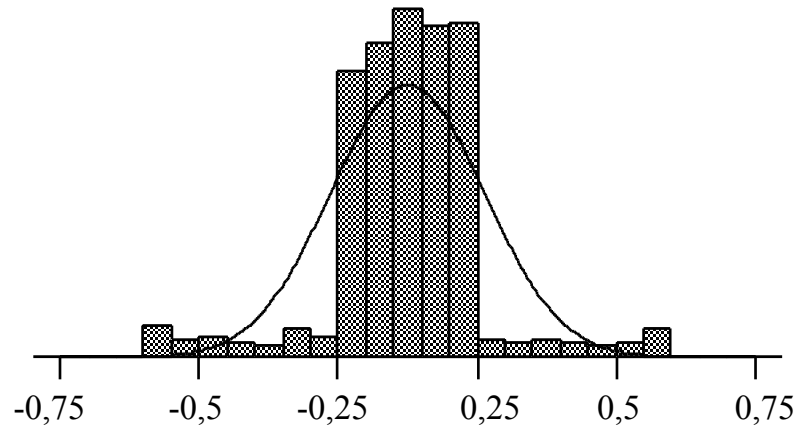


Afin de conforter cette opinion, nous représentons dans le graphique 2.11 la distribution de l'innovation que le modèle de DAY et HUANG peut générer.

### **Graphique 2.11. Distribution de l'innovation du processus.**

L'histogramme est celui des innovations simulées.

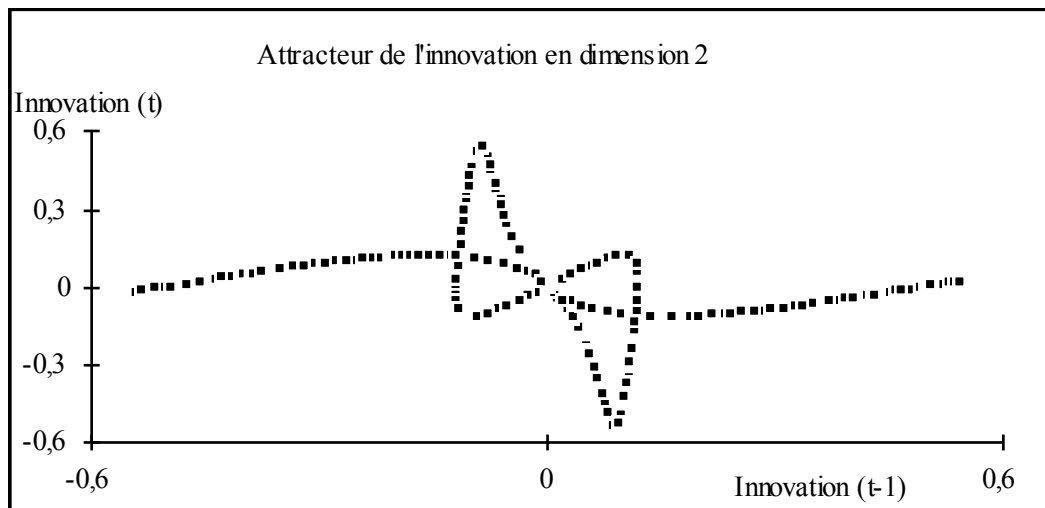
La courbe continue représente la distribution de la loi normale.



Il s'agit bien d'une distribution unimodale, symétrique (coefficient de symétrie de -0,054), et leptokurtique (kurtosis de 3,253) comme la plupart des innovations de séries financière. Au vu de sa distribution, cette série a les caractéristiques d'une série aléatoire. Or elle est générée par un mécanisme purement déterministe. Pour illustrer cela, nous avons reconstruit dans un espace de dimension 2 une représentation de son attracteur :

### Graphique 2.12. Attracteur de l'innovation en dimension deux

L'attracteur a été reconstruit dans un espace des phases de dimension 2 selon la méthode proposée par ECKMANN (1992)



Seule l'analyse graphique (réalisée à partir de 2000 innovations consécutives), nous permet donc de mettre à jour la structure déterministe sous-jacente à ce processus. Dans le cas d'un processus aléatoire, les réalisations de

l'innovation rempliraient entièrement l'espace à deux dimensions. Or ici il n'en est rien.

L'idée d'une modélisation des marchés financiers à l'aide du chaos déterministe, abordée par BROCK et MALLIARIS (1989) semble donc intéressante. Plusieurs articles récents confortent empiriquement l'intérêt du développement de ce sujet en finance.

LEBARON (1989) utilise le test BDS et mesure les dimensions des attracteurs des rentabilités hebdomadaires du portefeuille pondéré du CRSP. Le test BDS rejette fortement l'hypothèse nulle de processus iid. Les dimensions calculées de l'attracteur sont non entières (5,7-5,9). LEBARON met en avant la difficulté de conclure suite à ses résultats ; néanmoins la dimension non entière semble pencher en faveur de l'hypothèse de chaos déterministe. Mais il faut souligner que seul l'exposant de LYAPUNOV est une mesure du caractère chaotique d'une série. LEBARON ne calcule pas cet exposant. Les conclusions concernant la nature de la non linéarité, déterministe ou aléatoire, détectée dans la série sont donc moins exploitables.

PETERS (1991) calcule les exposants de LYAPUNOV sur différents indices boursiers (base Morgan Stanley Capital International) de janvier 1959 à février 1990. Il trouve :

0,0241 pour l'indice S&P 500

0,028 pour l'indice MSCI de la bourse japonaise

0,0168 pour l'indice MSCI de la bourse allemande

Ces valeurs sont certes faibles mais positives et laissent envisager la présence du chaos déterministe sur ces marchés.

HSIEH (1991) arrive à des résultats plutôt en faveur de la non linéarité stochastique après l'emploi du test BDS sur des données issues de la base CRSP de début 1963 à fin 1987. Cette conclusion est valable pour des données hebdomadaires, quotidiennes et relevées tous les quarts d'heures.

GIRERD-POTIN et TARAMASCO (1992) utilisent le test BDS sur l'indice SBF issu de la base AFFI. Ils trouvent un exposant de LYAPUNOV de l'ordre de 0,04 pour des rentabilités hebdomadaires après avoir mesuré la dimension de

l'attracteur sous-jacent égale à 2,6. Cependant ils constatent que l'exposant de LYAPUNOV d'un processus GARCH(1,1) simulé est de 0,02 à 0,03. La différence entre chaos et GARCH n'est pas suffisante à leurs yeux pour conclure à l'évolution chaotique de l'indice SBF.

ACZEL et JOSEPHY (1991) analysent cinq taux de change et aboutissent à des dimensions de corrélation non entière pour chaque série. Mais la taille trop faible de leur échantillon (115 observations à chaque fois) empêche toute conclusion.

BLANK (1991) mesure l'exposant de LYAPUNOV de séries portant sur les contrats à terme du S&P 500 et du soja. Les exposants qu'il trouve pour différentes dimensions de plongement varient de -0,0012 à 0,0613 avec une moyenne de 0,0201 pour les contrats sur le soja. Les résultats vont de -0,0027 à 0,0978 avec une moyenne de 0,0284 pour les contrats sur S&P 500. BLANK montre que des simulations effectuées sur des séries purement aléatoires donnent des exposants de LYAPUNOV inférieurs. Il conclut donc à la possibilité d'existence du chaos sur ces deux actifs.

DECOSTER, LABYS et MITCHELL (1992) travaillent également sur les marchés à termes. Ils étudient des contrats concernant du café, du cacao, du sucre et de l'argent avec des tailles d'échantillon supérieures à 4000 observations à chaque fois (séries quotidiennes allant de 1968 à 1989). Ils mesurent la dimension de GRASSBERGER-PROCACCIA sur les rentabilités quotidiennes, les rentabilités après filtrage linéaire et "filtrage" par un processus ARCH(10). Ils concluent à la présence de non linéarités que ne reflète pas entièrement l'hétéroscédasticité conditionnelle. L'absence de mesure du plus grand exposant de LYAPUNOV les empêche de conclure réellement en ce qui concerne le chaos (le titre de leur article est alors assez surprenant). De plus, ils interprètent l'éventualité du chaos comme une remise en cause de l'efficience, alors que le chaos ne permet pas obligatoirement l'élaboration de stratégies conduisant à un profit significatif.

BROSEN et YANG (1993) utilisent une méthodologie identique dans la mesure du chaos sur différents marchés à terme des matières premières. Ils travaillent sur des données quotidiennes allant de janvier 1979 à décembre 1988

(plus de 2500 observations). Ils calculent les dimensions de corrélations qui ne sont pas probantes quant à la présence éventuelle du chaos sur ces séries, sauf pour le contrat sur l'argent. L'utilisation de la régression GARCH réduit très fortement la kurtosis. Sur les résidus de ces régressions le test BDS rejette alors huit fois sur quinze l'hypothèse nulle de processus iid. Ils en concluent à la présence du chaos, ce qui est discutable car il est possible que GARCH ne soit pas la modélisation appropriée pour ces séries parmi l'ensemble des processus de type ARCH. De plus, l'absence d'une mesure du plus grand exposant de LYAPUNOV limite les conclusions concernant le chaos déterministe.

Les études empiriques sur la présence du chaos sur les marchés financiers sont assez récentes et n'apportent pas de réponses tranchées. Notons qu'aucun de ces travaux ne rejette l'éventualité de la présence du chaos sur les marchés financiers. En effet, il est difficile de conclure alors que les algorithmes de mesure utilisés ne sont pas toujours très fiables. Par exemple, la mesure de l'exposant de LYAPUNOV par l'algorithme de WOLF ne converge vers la vraie valeur que lorsque celle-ci est positive. Aussi les conclusions doivent-elles être avancées prudemment dans un cas comme dans l'autre.

## **Conclusion.**

Ce chapitre offre une explication en termes de bruiteurs à chaque hypothèse alternative possible en cas de rejet par le test BDS de l'hypothèse selon laquelle l'innovation du prix d'un actif serait un bruit blanc. Les modélisations décrites ne se veulent pas une réplique exacte du marché mais la démonstration que la rationalité uniquement procédurale des bruiteurs peut être dissimulée au regard des tests classiques de marche aléatoire et donc d'efficience des marchés financiers.

Le phénomène de persistance reprend notamment le fait que les bruiteurs induisent une forte inertie dans l'évolution du prix des actifs financiers en intégrant les effets de leurs actions passées comme de l'information. Ces investisseurs vont ainsi générer une sorte de trend qui n'est pas obligatoirement perçu par les tests



focalisés sur l'absence ou non d'une simple corrélation linéaire dans l'innovation à court terme.

La non linéarité stochastique permet d'envisager les bruiteurs comme très sensibles à la manière dont arrive l'information sur le marché. Ne disposant pas de repères informatifs constants et solides, ils agissent par à-coups en subissant le rythme d'arrivée de l'information, pertinente ou non, sur le marché.

Le chaos déterministe aide à décrire le bruiteur comme un agent qui cherche à investir en s'informant du mieux possible mais dont les méthodes frustrées d'information lui permettent simplement de suivre une évolution qu'il a lui même renforcé.

Le bruiteur est donc bien perçu à l'aide de ces différents modèles comme un investisseur qui cherchant à être un acteur informé en Bourse se trouve confronté à un manque de temps et de moyen. Il génère une évolution particulière, perceptible dans les taux de rentabilité des actifs financiers. Cette description nécessite l'emploi d'outils statistiques et mathématiques particuliers pour mesurer ce que les tests classiques n'arrivent pas à déceler. Il faut bien prendre en compte le fait que le bruiteur ne disparaît pas du marché, car son comportement intègre du bruit dans le prix de l'actif qui est aussi biaisé que l'information utilisée (BLACK, 1986 et SHLEIFER et SUMMERS, 1990).

Ainsi nous sommes en présence de trois descriptions des marchés financiers où le comportement des bruiteurs est envisagé mais que les tests classiques ne détectent pas. La rationalité procédurale va alors être bien plus dissimulée que l'irrationalité et les modèles présentés dans ce chapitre intègrent parfaitement cela.

## CONCLUSION DE LA DEUXIEME PARTIE

La révolution scientifique que permet le chaos déterministe dans de nombreux domaines ne peut laisser indifférents ceux qui cherchent à modéliser les comportements des agents et des prix sur les marchés financiers. Le chaos déterministe est fondamental car il offre la possibilité de modéliser des phénomènes apparemment très complexes à l'aide de modèles déterministes non linéaires très simples. Une présentation technique du chaos nous est apparue nécessaire afin de pouvoir aborder ses apports en termes d'aide à la description des événements. La représentation géométrique des systèmes étudiés, incontournable dans l'analyse du chaos, permet une toute autre approche des séries financières, ainsi que la découverte de nouveaux phénomènes.

De l'analyse géométrique des systèmes, il découle un test développé par BROCK, DECHERT et SCHEINKMAN (1987) qui va opposer à l'hypothèse nulle de séries iid, des hypothèses conciliables avec une représentation nouvelle des séries. Cette représentation inclut divers outils statistiques et mathématiques parmi les plus performants en ce qui concerne la description des complexités rencontrées sur les marchés financiers. HSIEH a, par simulations, dénombré trois grands axes d'hypothèses alternatives possibles : la non stationnarité, la non linéarité stochastique et le chaos déterministe. La dépendance linéaire peut être également détectée à l'aide du test BDS. Mais ce dernier est surtout utile pour les trois alternatives précitées.

Le but de notre travail est de profiter de ces outils pour montrer qu'il est possible de décrire le rôle des bruiteurs sur le marché d'une manière qui ne soit pas détectable par les tests classiques d'efficience. Ceux-ci sont fondés sur l'existence éventuelle d'une corrélation linéaire dans le processus d'innovation du prix de l'actif. Or le test BDS va nous permettre d'envisager comme alternative à la pure marche aléatoire des processus, des liens temporels autres que simplement linéaires. Les modélisations correspondantes aux trois hypothèses alternatives du test BDS sont justement issues de modèles qui trompent les tests classiques d'efficience. C'est ce

que nous tentons de vérifier dans la troisième partie, où nous réalisons une étude empirique du phénomène des bruiteurs sur le marché français des actions grâce à la banque de données AFFI-SBF.

***TROISIEME PARTIE***

***LE MARCHE FRANÇAIS DES ACTIONS***

***EST-IL BRUITÉ ?***

***UNE ETUDE EMPIRIQUE***

La présence d'agents bruiteurs sur le marché français des actions semble être un fait incontournable, surtout depuis le début des années quatre-vingts où le très fort développement de la place parisienne a attiré de nombreux investisseurs parfois mal informés. Cette intuition ne suffit pas, et la présence de ce type d'agents doit être vérifiée, testée à l'aide de représentations non linéaires. Or, longtemps, de tels tests sont restés impossibles à utiliser pour des raisons plus techniques que théoriques. En effet, la modélisation des comportements sur les marchés financiers et les concepts liés à l'efficacité des marchés ont été réalisés avec une contrainte plus ou moins latente de linéarité. Depuis, de nouvelles techniques économétriques et les progrès informatiques ont permis de revoir cette question. D'ailleurs, l'intérêt croissant pour l'analyse des bruiteurs s'est justement accompagné d'un essor des modélisations non linéaires qu'elles soient déterministes ou probabilistes.

Dans cette troisième partie, nous proposons donc une étude de la présence éventuelle de comportements bruiteurs sur le marché français des actions à l'aide d'une modélisation non linéaire. Nous voulons surtout mettre en avant l'impact de ces agents sur l'efficacité du marché. Plutôt que remettre ou non en cause l'hypothèse d'efficacité du marché français des actions, nous voulons montrer qu'une analyse statistique structurée autour des agents bruiteurs permet de les distinguer parmi tous les agents présents sur ce marché.

Nous espérons vérifier l'incapacité des tests usuels de l'hypothèse d'efficacité, fondés sur la corrélation linéaire, à détecter autre chose que la rationalité substantielle ou son opposé, l'irrationalité. Pour répondre à cette carence, notre stratégie est d'utiliser le test BDS comme un test de l'hypothèse nulle d'efficacité des marchés financiers contre l'hypothèse alternative selon laquelle des bruiteurs seraient présents sur ce marché. Il s'agirait en quelque sorte d'un test du *Bruiteur Détecté Statistiquement*.

Nous opérons sur un ensemble choisi aléatoirement de sociétés cotées aujourd'hui sur le Règlement Mensuel à la Bourse de Paris et dont les séries de cours quotidiens sont issues de la banque de données AFFI-SBF. Nous retenons des sociétés apparaissant dans le CAC 40 qui sont donc connues de tous et pour lesquelles l'information est abondante et la liquidité importante. Nous pensons que

si les bruiteurs sont présents sur un marché, ils opèrent plutôt sur des actifs pour lesquels l'information, si elle est abondante, leur paraît à même de receler la possibilité de construire des stratégies qu'ils jugent pertinentes. En effet, ils estiment être bien informés devant la quantité relativement importante d'information qu'ils possèdent sur un actif connu. Ils ignorent qu'une quantité éventuellement aussi importante leur échappe et nuit à la qualité de leurs prévisions. Cette contrainte d'appartenance au CAC 40 ne réduit pas la portée des tests qui suivent, car ces actions restent une référence sur le marché financier français. De plus, elle permet une certaine homogénéité de la période d'étude, car ces sociétés sont cotées depuis le début de la banque de données AFFI-SBF, c'est à dire janvier 1977, jusqu'à la fin qui est en juin 1991. Nous disposons donc de quatorze années et demie de données quotidiennes ce qui représente approximativement 3500 rentabilités calculables.

Cette partie sera composée d'un premier chapitre (chapitre 7) au cours duquel nous réaliserons les tests classiques d'efficacité fondés sur la corrélation linéaire dont nous pourrions tirer des premières conclusions. Nous aborderons alors la stratégie de test d'efficacité induite par l'emploi du test BDS et centrée sur l'étude des comportements bruiteurs. Ce dernier test portera uniquement sur les séries ne présentant pas d'autocorrélation. En effet, nous voulons vérifier, en plus de l'éventuelle présence des bruiteurs sur un marché, la possibilité que ces bruiteurs ne soient pas détectés par une simple autocorrélation linéaire.

En cas de rejet de l'hypothèse de processus iid (liée à l'efficacité) par le test BDS, nous envisagerons dans le chapitre suivant les différents tests complémentaires nécessaires pour affiner notre étude des bruiteurs. Nous réaliserons cela à l'aide d'une analyse en termes de non linéarités stochastiques ou déterministes. Nous testerons également la non stationnarité afin de vérifier qu'elle n'est pas la cause de rejet de l'hypothèse de processus iid par le test BDS, mais elle n'est pas une éventualité fondamentale dans notre étude. Les modèles vus au chapitre 6 et réalisés à partir de ces propriétés de non linéarité, permettent en effet d'envisager les bruiteurs sans qu'ils soient détectables par autocorrélation linéaire.

Dans l'éventualité de la présence effective de bruiteurs, nous pourrions alors déterminer la modélisation la mieux à même d'en rendre compte. Nous discuterons

ensuite, dans un dernier chapitre, de l'impact que les bruiteurs ont sur l'efficience et sur ce qu'il faut en conclure quant à la nature du marché français des actions.

Le schéma suivant récapitule l'ensemble des tests que nous allons effectuer et les liens existant entre eux. En haut de ce schéma apparaissent les tests classiques d'efficience auxquels succède le test BDS effectué uniquement sur les séries non corrélées linéairement. La partie grisée contient tous les tests à effectuer afin de préciser la cause du rejet éventuel de l'hypothèse nulle de processus iid par le test BDS. Le modèle de comportement associé à chacun de ces tests est également présenté. Nous aurons alors à choisir le meilleur de ces modèles dans la représentation des bruiteurs sur le marché français et cela nous conduira à notre notion d'*Efficience Bruitée*.





## CHAPITRE 7 : TESTS CLASSIQUES ET NOUVELLE STRATEGIE DU TEST D'EFFICIENCE.

Notre choix, effectué de manière aléatoire, a porté sur vingt-quatre sociétés cotées au Règlement Mensuel à Paris de janvier 1977 à juin 1991. Nous disposons dans la banque de données AFFI-SBF des cours boursiers quotidiens  $P_t$ , des versements de dividendes  $D_t$  ainsi que des modifications de capital auxquels sont affectés des coefficients correcteurs  $CO_t$ . Notre analyse de l'efficience porte sur la nature de l'innovation  $\varepsilon_t$  du processus générant les prix exprimés dans l'équation :

$$P_t = P_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.1)$$

Tester la marche aléatoire revient alors à s'interroger sur la nature de cette innovation. En exprimant les prix par leur logarithme, l'innovation (différence première des prix) est alors le taux de rentabilité de l'actif. En prenant en compte les dividendes ainsi que les modifications de capital, la rentabilité  $R_t$  d'un actif se calcule alors ainsi:

$$R_{t-1} = \text{Log} \left( \frac{\frac{P_t + D_t}{CO_t}}{P_{t-1}} \right) \quad (3.2)$$

$CO_t$  est fixé à 1 lorsque aucune modification de capital n'entraîne de correction, et les dividendes sont fixés à 0 pour les jours où aucun dividende n'est versé. Les cours de la base de données AFFI-SBF étant des cours d'ouverture, la rentabilité en  $t-1$  est l'évolution du prix à l'ouverture en  $t-1$  jusqu'au cours d'ouverture en  $t$ . Les dividendes versés et les corrections éventuelles sont affectés au jour  $t$ .

Dans la première section, nous réalisons, sur les rentabilités quotidiennes des actifs des vingt-quatre sociétés de notre échantillon, des tests classiques d'autocorrélation. Il s'agit du test du coefficient d'autocorrélation d'ordre un, ainsi que du test du ratio de variance de LO et MACKINLAY explicités dans le chapitre

1. Ces tests représentent la tendance traditionnelle de tentative de détection d'une éventuelle inefficience du marché.

La seconde section consiste également en un test d'efficience mais réalisé à l'aide du test BDS et dont le but est de détecter des individus bruiteurs. Nous appliquerons ce test uniquement sur les séries qui, à l'issue des tests classiques, paraîtront ne pas être corrélées, signe d'une efficience parfaite.

### **Section 1. Des tests classiques d'efficience...**

Un moyen classique de tester la marche aléatoire consiste à vérifier l'absence de corrélation linéaire caractérisant le processus d'innovation. Le caractère aléatoire de cette innovation assure l'impossibilité de développer une stratégie fondée sur les cours passés de l'actif pour battre le marché. L'aléa exprime alors le fait que toute l'information, ici l'ensemble des prix passés, est intégrée dans le cours présent et qu'une étude plus approfondie ne sert à rien pour battre le marché.

Le tableau suivant récapitule les résultats obtenus pour les vingt-quatre sociétés de notre échantillon. La taille de l'échantillon est indiquée (colonne 2) pour information et permet de vérifier la relative homogénéité temporelle de notre échantillon comme nous l'avons dit précédemment. Les tailles varient en effet de 3409 pour Havas à 3575 pour BSN. Le test d'autocorrélation (colonne 3) permet de détecter une corrélation linéaire significative au premier ordre. En revanche, le test de LO et MACKINLAY (colonne 4, 5 et 6) envisage l'existence de corrélations significatives respectivement aux 2, 3 et 4 premiers retards. Le seuil à 5 % de ces statistiques est identique et égal à 1,96. En effet, elles sont toutes asymptotiquement distribuées selon une loi normale centrée réduite. Les résultats des statistiques qui rejettent l'hypothèse de marche aléatoire à cause de la présence d'autocorrélations linéaires significatives sont suivies d'une astérisque.

**Tableau 3.1. Tests d'autocorrélations linéaires.**

Test de l'autocorrélation d'ordre un et test de LO et MACKINLAY.

	Taille	$\sqrt{T} \hat{\rho}_1$	LM2	LM3	LM4
Air liquide	3565	1,267	0,915	2,050*	2,130*
Accor	3495	1,373	0,843	1,509	1,480
B.S.N.	3575	2,101*	1,504	3,786*	3,811*
Carrefour	3572	4,629*	2,709*	5,169*	4,827*
Casino	3571	5,124*	3,046*	4,999*	4,723*
Chargeurs	3560	2,192*	1,742	3,210*	3,274*
Ciments	3553	2,041*	1,534	2,864*	2,240*
Club Méd.	3570	1,569	1,039	2,812*	3,029*
C.M.B.	3509	1,180	0,814	1,754	2,003*
Essilor	3563	2,423*	1,668	3,591*	2,768*
Hachette	3565	1,312	1,053	3,716*	3,818*
Havas	3409	5,618*	4,435*	6,488*	4,939*
Lafarge Coppée	3566	1,508	0,907	2,076*	1,959
Legrand	3569	6,050*	4,248*	7,303*	6,393*
Lyonnaise des eaux	3569	4,254*	2,943*	4,642*	4,381*
Métaleurop	3552	3,737*	2,836*	4,544*	4,537*
L'Oréal	3573	2,323*	1,462	3,267*	3,214*
Pechelbronn	3566	3,7468*	2,309*	3,563*	3,605*
Pernod-Ricard	3479	2,257*	1,513	3,072*	3,337*
Perrier	3567	3,489*	2,752*	4,372*	3,759*
Peugeot S.A.	3569	1,406	0,767	1,433	1,517
Schneider	3433	2,991*	1,795	3,735*	2,834*
Saint-Louis	3561	3,868*	2,512*	4,503*	4,239*
Valéo	3544	0,301	0,230	1,084	1,946

Comme nous pouvons le constater rapidement, un nombre important de cours ne vérifient pas l'hypothèse d'efficience au sens restrictif de la marche aléatoire et d'une évolution iid de la rentabilité. Cinq sociétés (sur un total de vingt-quatre) vérifient cette hypothèse. Ce sont Accor, Cmb Packaging, Lafarge Coppée, Peugeot

SA et Valéo<sup>78</sup>. Notre étude va, à partir de maintenant, être réalisée sur les cours de ces cinq sociétés.

A l'issue des tests classiques, la conclusion est que l'efficience est vérifiée pour ces cinq cours, et que seuls des investisseurs rationnels agissaient sur ces sociétés. Tout au moins, la présence des agents rationnels usant correctement de toute l'information disponible et pertinente était beaucoup plus forte que celle des agents irrationnels rapidement éliminés. Les dix-neuf autres sociétés sont suspectées d'être le lieu d'intervention d'investisseurs irrationnels empêchant le prix d'être un signal non biaisé de l'information.

Cette vision manichéenne des marchés financiers ne tient pas compte de la présence éventuelle des bruiteurs tels qu'ils ont été défini par BLACK en 1986. Avec le modèle de DELONG, SHLEIFER, SUMMERS et WALDMANN (1990) l'autocorrélation peut être le signal de la présence des bruiteurs. Cependant cette interprétation n'est pas satisfaisante car elle ne permet pas de distinguer les agents irrationnels des bruiteurs qui, eux, sont rationnels mais n'utilisent pas correctement toute l'information. Il nous faut donc modéliser le comportement des bruiteurs d'une manière différente afin de bien les distinguer des autres types d'investisseurs. La non linéarité, stochastique ou déterministe, permet cela. Pour cette raison, et afin d'intégrer les bruiteurs dans l'étude de l'efficience des marchés, nous allons recourir au test BDS comme nouvelle stratégie d'étude de l'efficience des marchés financiers. L'hypothèse nulle d'évolution aléatoire de l'innovation du processus de prix (taux de rentabilité) sera identique à celle des tests précédents et conforme à l'efficience. En revanche, les hypothèses alternatives sont non seulement cohérentes avec la modélisation des marchés intégrant les comportements bruiteurs mais en plus, et c'est là le plus important, elles ne sont pas détectées à travers la corrélation linéaire. Ainsi, par abus de sigle, nous surnommons le test BDS "test du Bruiteur Détecté Statistiquement".

---

<sup>78</sup> Les graphiques des rentabilités quotidiennes de ces cinq sociétés figurent en annexe 4a à 4e.

## Section 2. ... au test du Bruiteur Détecté Statistiquement.

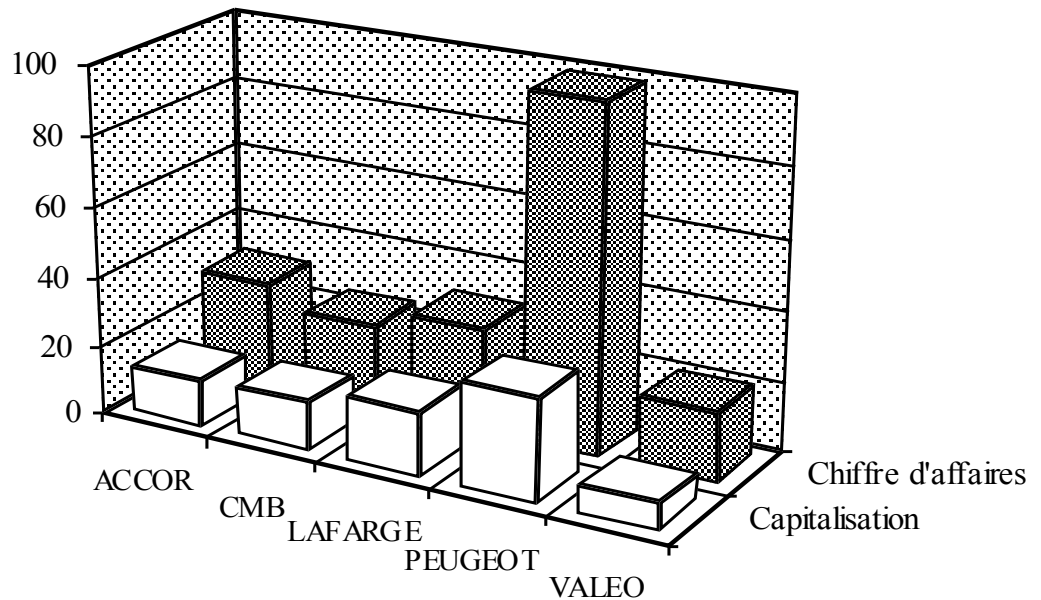
L'évolution des cours concernant les sociétés Accor, Cmb, Lafarge, Peugeot et Valéo est aléatoire... ou plus exactement, il n'existe pas de corrélation linéaire significative dans l'innovation de chacun de ces actifs. Nous allons donc pouvoir effectuer sur ces cinq actifs financiers des tests permettant de vérifier la présence ou l'absence de bruiteurs. Le fait de ne pas avoir conservé les séries corrélées pour la suite des tests permet d'éliminer la possible existence d'investisseurs irrationnels. De cette manière, le test qui sera alors effectué permettra de discriminer entre une bonne et une mauvaise utilisation de l'information par des agents pourtant supposés rationnels.

Nous avons déjà souligné l'homogénéité temporelle de notre échantillon. Nous voulons maintenant nous assurer que le comportement des cinq sociétés retenues vis à vis des tests de corrélation linéaire ne dépend pas d'une ressemblance d'ordre économique ou financière trop marquée qui biaiserait les conclusions concernant le comportement des investisseurs. Nous avons vérifié que les cinq sociétés appartiennent bien à des secteurs économiques distincts qui sont en l'occurrence :

Accor	Hôtellerie-restauration
Cmb	Emballages
Lafarge-Coppée	Matériaux de construction
Peugeot SA	Automobile
Valéo	Équipement automobile

Nous nous sommes également intéressés à la capitalisation boursière et au chiffre d'affaires de chacune de ces sociétés. Le graphique suivant nous donne une idée des différences existant entre chacune des sociétés tant au niveau du chiffre d'affaires que de la capitalisation boursière. Les données ayant permis la construction de ce graphique sont exprimées en milliards de francs et sont celles de l'exercice 1992.

**Graphique 3.1. Deux caractéristiques financière et économique des cinq sociétés en 1992.**



Source : le Nouvel Économiste (Numéro spécial du 2 juillet 1993)

Le graphique met à jour des différences marquées existant entre chacune des sociétés. Le chiffre d'affaires varie dans un rapport de un à cinq (98,8 milliards de francs pour Peugeot contre 20,6 milliards pour Valéo). La capitalisation boursière se situe dans une fourchette de rapport un à trois et demi (29,5 milliards de francs pour Peugeot contre 8,1 milliards pour Valéo). Le rejet de l'hypothèse de distribution iid peut donc être recherché ailleurs et notamment dans l'éventuelle présence d'agents bruiteurs.

Nous allons donc pour cela avoir recours au test BDS qui est de la forme :

$$w_N(r, T) = \sqrt{T} \left( C_N(r, T) - C_1(r)^N \right) / \sigma_N(r, T) \quad (3.3)$$

$C_N(r, T)$  est la corrélation intégrale pour une représentation du processus reconstruit dans un espace à  $N$  dimensions (voir chapitre 5),  $r$  est le rayon des hypersphères servant au calcul de cette corrélation et  $T$  la taille de la série :

$$C_N(r, T) = \frac{1}{(T_N(T_N-1))} \sum_{t < s} H \left( r - |x_t^N - x_s^N| \right) \quad (3.4)$$

où :  $T_N = T - N + 1$

$H()$  est la fonction de Heaviside qui vaut 1 si  $|x_t^N - x_s^N| < r$  et 0 sinon

La statistique  $w_N(r,T)$  est asymptotiquement distribuée selon une loi normale centrée réduite. Le seuil à 5 % est donc 1,96. Puisque la dimension effective de représentation du processus dans l'espace des phases est inconnue a priori, il faut réaliser pour chacune des cinq sociétés le test avec des dimensions de plongement allant de 2 à 9. BROCK (1986) préconise le filtrage linéaire de la série afin de ne pas causer le rejet de l'hypothèse nulle par une dépendance linéaire. Dans notre cas, les séries ont justement été choisies car elles ne présentent pas de dépendance linéaire ; nous n'avons donc pas besoin d'effectuer ce filtrage.

Le test utilisé est donc un test de l'hypothèse nulle d'innovation du processus de prix iid (lié à l'efficacité des marchés) contre l'hypothèse alternative de processus caractérisé par des dépendances de type non linéaire, liées à la présence de bruiteurs sur le marché de cotation de l'actif. Les résultats sont présentés société par société. Chaque colonne représente une dimension de plongement (D) pour laquelle a été réalisé le test, et chaque ligne est une valeur de r établie en fonction de l'écart-type de la série. r vaut successivement  $0,75 \sigma$ ,  $1 \sigma$  et  $1,25 \sigma$ . Ces valeurs de r sont choisies de manière à trouver une sorte de norme de calcul indépendante des caractéristiques propres à chaque série étudiée.

### Tableaux 3.2.a - 3.2.e. Test BDS.

Test effectué pour des dimensions de plongement allant de 2 à 9.

#### ACCOR

$r/\sigma \setminus D$	2	3	4	5	6	7	8	9
0,75	0,70	1,72	3,51	9,92	30,49	82,07	161,21	313,46
1	0,84	1,77	4,39	9,89	23,33	58,84	115,37	235,33
1,25	1,09	2,05	4,17	8,33	17,39	38,13	77,24	127,80

#### C.M.B. PACKAGING

$r/\sigma \setminus D$	2	3	4	5	6	7	8	9
0,75	0,56	2,24	4,51	9,06	18,94	42,15	98,11	239,99
1	0,82	2,09	3,78	6,85	12,89	25,52	52,32	110,85
1,25	1,00	2,05	3,46	5,96	10,64	19,81	38,18	75,55

### LAFARGE-COPPEE

$r/\sigma \setminus D$	2	3	4	5	6	7	8	9
0,75	0,41	1,87	3,72	7,05	13,82	27,87	57,97	128,37
1	0,78	1,97	3,53	6,25	11,45	21,65	42,21	85,85
1,25	1,01	2,02	3,39	5,74	10,09	18,35	34,34	66,40

### PEUGEOT

$r/\sigma \setminus D$	2	3	4	5	6	7	8	9
0,75	0,25	1,54	2,98	5,43	10,16	19,56	38,21	76,90
1	0,69	1,79	3,14	5,45	9,78	18,12	34,48	66,86
1,25	0,95	1,91	3,17	5,33	9,29	16,73	30,94	58,58

### VALEO

$r/\sigma \setminus D$	2	3	4	5	6	7	8	9
0,75	0,45	1,95	3,84	7,27	14,37	29,44	62,97	142,67
1	0,79	2,00	3,58	6,40	11,89	22,87	45,72	95,13
1,25	0,99	2,01	3,38	5,77	10,22	18,73	35,53	69,53

Les résultats sont clairement en faveur du rejet de l'hypothèse nulle de processus iid, excepté pour  $D=2$  et 3 certaines fois. Pour des valeurs de  $D$  supérieures, le rejet est plus marqué. Les valeurs calculées de la statistique sont même étonnamment élevées. HSIEH (1989) montre qu'un tel comportement est compatible avec l'existence d'un processus ARCH. Toutes les études antérieures utilisant le test BDS aboutissent, pour des valeurs croissantes de  $D$ , à des valeurs croissantes et très élevées pour la statistique BDS.

Le test BDS appliqué aux rentabilités quotidiennes de chacune des cinq sociétés conduit à des conclusions identiques quant à la présence d'une dépendance de type non linéaire ou de la non stationnarité. Nous sommes alors en mesure de conclure au rejet de l'hypothèse de processus iid, ce que n'avaient pas détecté les tests fondés sur la corrélation linéaire. Ainsi, les séries étudiées présentent des propriétés particulières qu'il reste à définir. En effet, nous savons que les rentabilités



ne peuvent être caractérisées par une évolution purement aléatoire telle que le courant quantitativiste, défenseur de l'efficience, le suppose.

La nature exacte de ce qui cause le rejet de l'hypothèse initiale doit être précisée à l'aide de tests plus spécifiques portant sur chacune des hypothèses responsables éventuellement de ce rejet. Ceci constitue le contenu du chapitre suivant.

## CHAPITRE 8 : DESCRIPTION DES BRUITEURS.

Ce chapitre se compose de trois sections qui reprennent les causes possibles du rejet, par le test BDS, de l'hypothèse de processus iid : la non stationnarité, la non linéarité stochastique et le chaos déterministe. Nous espérons, grâce à ces tests, pouvoir définir avec assez de précision la description adéquate qui permettra de prendre en compte les bruiteurs présents lors des transactions sur ces actifs.

### Section 1. Test de persistance.

La stratégie de tests de non stationnarité est celle des tests de racine unitaire. Notre but est de savoir si l'innovation  $\varepsilon_t$  du processus de prix des actifs étudiés est caractérisée par une racine unitaire. Cette dernière implique la non stationnarité de l'innovation et le rejet de l'hypothèse de série iid par le test BDS.

La non stationnarité est synonyme de persistance dans la série. En effet la présence d'une racine unitaire dans un processus stochastique implique la persistance d'un choc frappant la série. C'est pour cette raison que nous appliquons également un test de persistance développé par LO en 1991.

#### I. Tests de racine unitaire.

La stratégie du test nous conduit à travailler d'abord sur le modèle avec constante et tendance de la forme :

$$\varepsilon_t = c + bt + \rho \varepsilon_{t-1} + u_t \quad u_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2) \quad (3.5)$$

Selon le rejet ou l'acceptation de l'hypothèse de racine unitaire ( $\rho=1$ ), d'autres tests sont à effectuer. Le tableau suivant restitue les résultats des tests appliqués avec cette équation sur les cinq rentabilités étudiées. Les valeurs estimées de la constante ainsi que la valeur de la statistique de Student qui y est affectée figurent dans la deuxième colonne. La troisième colonne concerne le coefficient de la tendance. La quatrième colonne est la valeur de  $\rho$  et le t de Student permettant le test de significativité. Enfin, la dernière colonne donne pour chaque série la valeur du test de racine unitaire.

**Tableaux 3.3. Tests de racine unitaire.**

Tests effectués sur le modèle (3) avec constante et tendance.

	c	b	$\rho$	seuil DF
Accor	-0,46E-3 (0,58)	0,51E-6 (1,27)	-0,23E-1 (1,40)	-60,57
C.M.B.	0,13E-2 (1,61)	-0,62E-7 (0,16)	0,19E-1 (1,18)	-58,03
Lafarge Coppée	0,73E-3 (1,07)	0,88E-8 (0,03)	-0,25E-1 (1,51)	-61,21
Peugeot S.A.	-0,35E-3 (0,43)	0,13E-6 (0,35)	-0,23E-1 (1,41)	-61,13
Valéo	-0,19E-3 (0,24)	0,29E-7 (0,07)	0,51E-2 (0,31)	-59,17

Le problème principal posé par le test de DICKEY et FULLER (1979) réside dans le fait que l'estimateur de  $\rho$  sous l'hypothèse nulle de racine unitaire ne suit pas une loi normale. La statistique du test de racine unitaire de  $\rho$  ne suit alors pas une loi de Student. Il faut donc recourir à des valeurs critiques calculées par FULLER après des simulations de Monte-Carlo. La distribution de cette statistique n'est pas symétrique. La valeur seuil à gauche à 5% pour la racine unitaire avec ce modèle est de -1,79. L'hypothèse nulle est alors fortement rejetée dans tous les cas au profit de l'hypothèse selon laquelle  $\rho$  est significativement inférieur à 1. Il n'est pas

nécessaire d'effectuer les tests suivants, car  $\rho$  n'est pas significativement différent de 0 ce qui rend les autres tests redondants.

Le rejet de l'hypothèse de processus iid en ce qui concerne l'innovation par le test BDS ne peut être imputable à la non stationnarité pour aucune des cinq séries étudiées. Il faut donc chercher ailleurs les causes du comportement de la statistique BDS constatée auparavant. Mais avant d'envisager les non linéarités stochastiques ou déterministes comme explication, il nous a semblé intéressant de vérifier l'existence éventuelle de dépendances de long terme dans les rentabilités à l'aide du test de LO (1991). En effet la notion de dépendance de long terme est proche de celle de persistance qui est à la base des tests de non stationnarité.

## II. Test de dépendance de long terme.

LO (1991) améliore l'analyse R/S développée par HURST en 1951 puis MANDELBROT en 1975 (chapitre 3) <sup>79</sup>. Il modifie ce test en éliminant, lors de l'élaboration de sa statistique, la possibilité qu'une dépendance de court terme, aussi faible soit-elle, ne biaise le test en faveur de l'hypothèse de dépendance de long terme. La statistique qu'il développe est de la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(T) &= \frac{R(T)}{\tilde{S}(T)} = \frac{\text{Max}_{1 \leq t \leq T} \left[ \sum_{u=1}^t (\varepsilon_u - \bar{\varepsilon}_T) \right] - \text{Min}_{1 \leq t \leq T} \left[ \sum_{u=1}^t (\varepsilon_u - \bar{\varepsilon}_T) \right]}{\sqrt{\frac{1}{T} \sum_{u=1}^T (\varepsilon_u - \bar{\varepsilon}_T)^2 + \frac{2}{T} \sum_{j=1}^q \omega_j(q) \left\{ \sum_{i=j+1}^T (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}_T) (\varepsilon_{i-j} - \bar{\varepsilon}_T) \right\}}} \\ &= \frac{R(T)}{\sqrt{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 + 2 \sum_{j=1}^q \omega_j(q) \hat{\gamma}_j}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Par rapport aux études R/S de MANDELBROT, LO fait intervenir au dénominateur les  $q$  premiers moments croisés d'ordre deux du processus, pondérés

<sup>79</sup> C'est pour cette raison que nous n'avons pas jugé utile de reprendre ici l'analyse R/S.

par des poids  $\omega_j(q)=1-j/(q+1)$ . Il permet à son test d'éliminer les effets induits par une dépendance de court terme et qui biaise l'analyse R/S en faveur de la dépendance de long terme. Dans le tableau 3.4., le test de LO est effectué pour les cinq séries de rentabilité. Les colonnes deux à cinq donnent le résultat du test pour des valeurs de  $q$  choisies arbitrairement. Pour  $q=0$ , nous retrouvons les résultats issus du test de MANDELROT. La dernière colonne donne les résultats obtenus avec le calcul de  $q$  par le critère de ANDREWS (1991) : le premier nombre est la valeur du test de LO et le second est la valeur calculée de  $q$  par ce critère.

**Tableaux 3.4. Test de LO.**

	q=0	q=5	q=10	q=50	Q(T)	q
Accor	0,82	0,86	0,78	1,16	0,83	2,2
C.M.B.	1,35	1,31	1,21	0,93	1,33	2
Lafarge Coppée	0,95	1,01	0,94	1,08	0,97	2,4
Peugeot S.A.	1,09	1,18	1,02	0,92	1,1	2,3
Valéo	0,88	0,90	0,82	0,96	0,88	0,82

La valeur seuil de ce test, qui ne suit pas une loi classique, à 5 % est donnée par LO et vaut 1,862. Il apparaît clairement qu'il n'est détecté de dépendance de long terme dans aucune des séries étudiées.

Nous avons pu découvrir dans cette section que le rejet de l'hypothèse de processus iid par le test BDS n'est pas dû à la non stationnarité. Un test sur la persistance confirme ce résultat, et la modélisation des bruiteurs par cette voie n'est pas pertinente. Il faut donc envisager d'autres modèles de comportements.

## **Section 2. Test de non linéarité stochastique.**

L'hypothèse selon laquelle les rentabilités d'un actif financier sont générées par un processus stochastique non linéaire est assez récente. Le problème réside

maintenant dans la discrimination entre les diverses formes de non linéarités. Pour cette raison, et avant de réaliser l'estimation de modèles non linéaires, nous avons souhaité effectuer un premier test qui permette de choisir entre l'existence de non linéarité additive :

$$u_t = v_t + f(\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-k}, u_{t-1}, \dots, u_{t-k}) \quad (3.7)$$

ou multiplicative :

$$u_t = v_t \cdot f(\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-k}, u_{t-1}, \dots, u_{t-k}) \quad (3.8)$$

$u_t$  est la série issue du filtrage de  $\varepsilon_t$

$v_t$  est une variable aléatoire iid d'espérance nulle

$f(\cdot)$  est une fonction non linéaire quelconque

Cette différence est importante car elle permet de vérifier si la non linéarité détectée par le test BDS est de type additive ou multiplicative. Dans le dernier cas, nous retrouvons les processus de type ARCH et donc la possibilité de modéliser à l'aide du modèle de DSSW revu à partir du modèle de LONGIN. Cela induit une évolution de type Quasi Marche Aléatoire.

Nous utilisons, pour cela, le test de HSIEH (1989) basé sur le calcul du moment croisé d'ordre trois de la série (cf chapitre 5) qui est estimé par :

$$r_{uuu}(i,j) = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=j}^T \hat{u}_t \hat{u}_{t-i} \hat{u}_{t-j}}{\left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2 \right]^{1,5}} \quad (3.9)$$

Ce test pose comme hypothèse nulle l'existence de non linéarité multiplicative contre l'hypothèse alternative de non linéarité additive. La statistique de HSIEH suit asymptotiquement une loi normale centrée réduite (il suffit de standardiser  $r_{uuu}(i,j)$ ). Le seuil d'acceptation à 5% est donc 1,96. Dans le tableau suivant, chaque colonne représente les résultats du test pour un couple (i,j) de valeurs données.

**Tableau 3.5. Test de HSIEH.**

Tests effectués pour des valeurs de i et j allant de 1 à 4.

	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(3,3)	(3,4)	(4,4)
Accor	0,012	0,017	0,002	0,031	-0,010	0,029	0,012	0,008	-0,002	-0,015
C.M.B.	0,013	-0,002	0,011	0,006	0,005	-0,004	0,001	0,006	0,001	0,001
Lafarge	0,010	0,001	-0,008	0,003	0,006	0,005	0,008	-0,010	-0,001	0,007
Peugeot	0,026	0,009	-0,023	0,010	-0,002	0,011	-0,005	-0,004	0,018	0,002
Valéo	0,079	0,022	0,073	-0,061	-0,023	0,041	0,033	-0,004	0,024	-0,10

Les résultats sont à l'unanimité en faveur de l'hypothèse nulle de non linéarité multiplicative, quelle que soit la série. L'hypothèse de non linéarité additive (moyenne mobile non linéaire, modèle TAR) ne peut absolument pas être acceptée. Nous allons donc pouvoir maintenant envisager les modèles de non linéarité multiplicative et notamment les modèles de type ARCH. Nous n'employons pas ici le test des valeurs extrêmes du fait de la méthodologie adoptée. Nous sommes en présence d'un processus non linéaire. S'il est stochastique nous voulons en connaître la nature. Il ne s'agit pas ici de discriminer deux processus leptokurtiques, même si cette dernière caractéristique peut nous conforter dans notre choix des processus ARCH.

#### I. La modélisation ARCH.

Les modèles ARCH permettent de prendre en compte la forme particulière de la distribution des séries financières (distribution symétrique, unimodale et à queues de distribution épaisses ou leptokurtique) vérifiée empiriquement de très nombreuses fois sur des rentabilités d'actifs financiers. Dans notre cas, les cinq séries de rentabilités présentent bien une distribution leptokurtique comme le montre le tableau 3.6.

**Tableau 3.6. Kurtosis des rentabilités.**

La valeur pour la loi normale est 3.

	Kurtosis
Accor	5,619
C.M.B.	6,956
Lafarge	6,657
Peugeot	6,723
Valéo	5,762

Les modèles ARCH se présentent comme suit :

$$\varepsilon_t = u_t h_t \quad \text{où} \quad u_t \sim N(0,1) \quad (3.10)$$

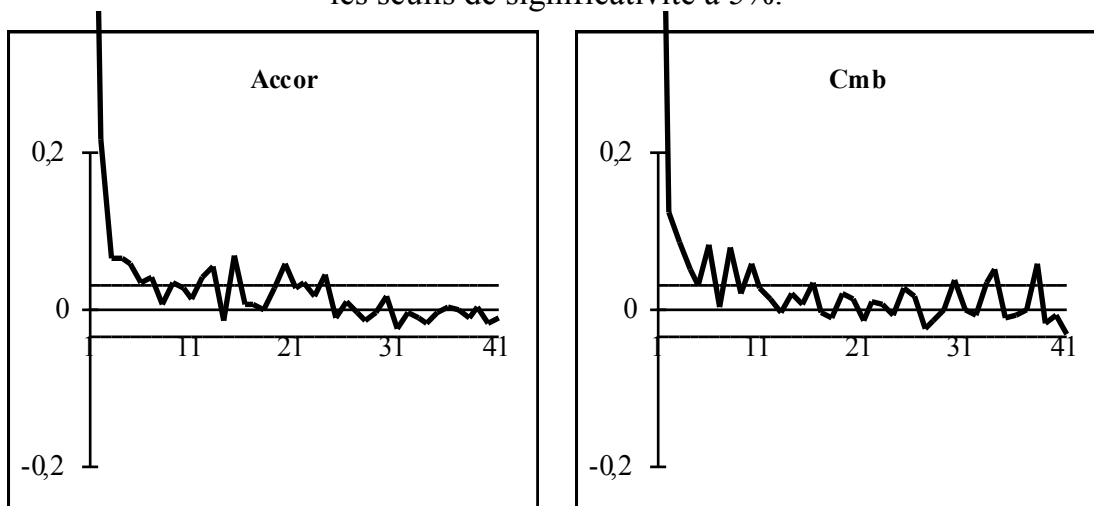
avec

$$h_t = \sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2}$$

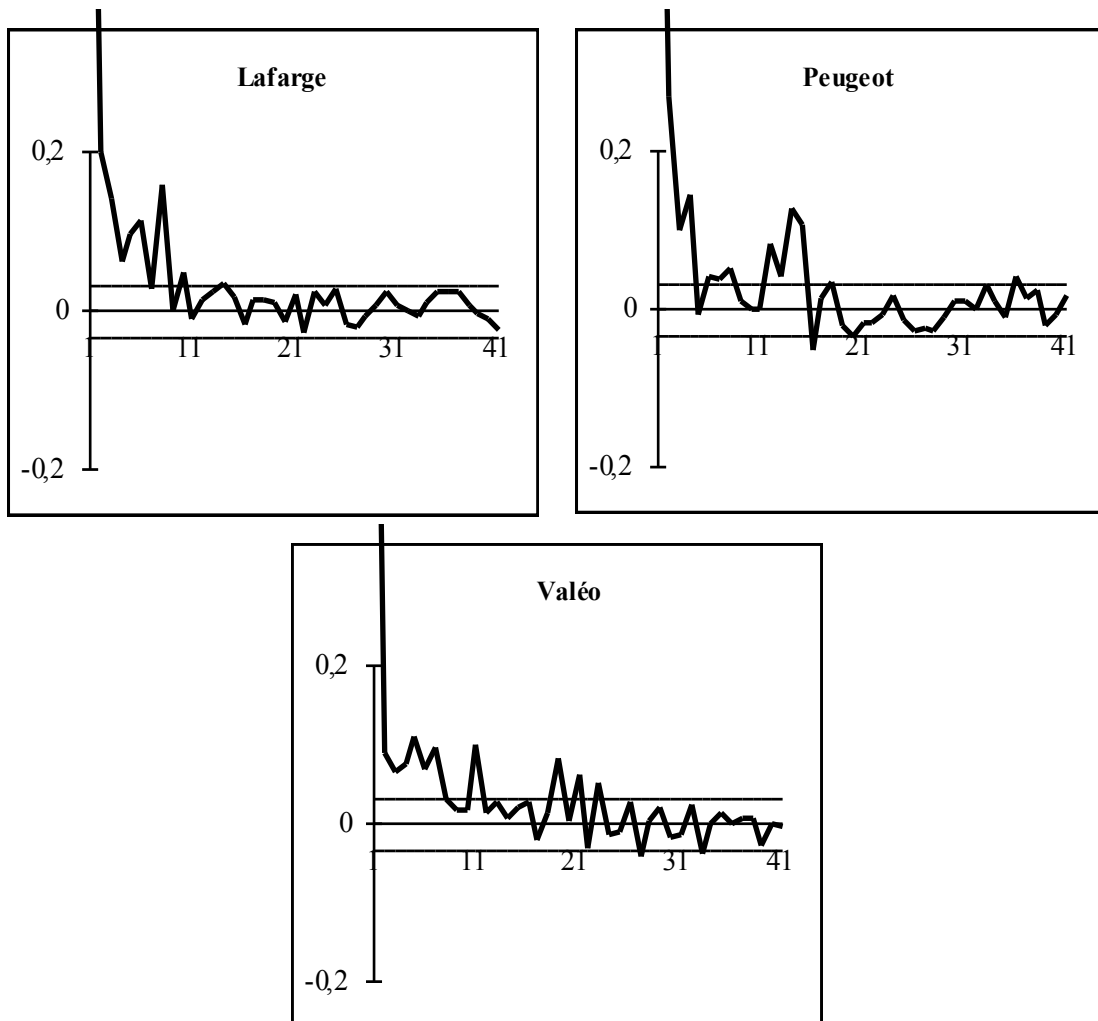
$\varepsilon_t$  suit ici un processus ARCH d'ordre  $p$ . La première étape va consister à déterminer  $p$  par un test portant sur les autocorrélations des  $\varepsilon_t$  élevés au carré. Les cinq graphiques suivants présentent les corrélogrammes de ces innovations élevées au carré. Cela nous permet de connaître  $p$  (premier retard pour lequel l'autocorrélation n'est plus significativement non nulle) et de tester ensuite s'il s'agit bien d'un processus ARCH d'ordre  $p$  sur les séries.

**Graphique 3.2.a - 3.2.e. Corrélogrammes des carrés des rentabilités.**

Les droites autour de l'axe des abscisses représentent les seuils de significativité à 5%.







Dès que la courbe en gras est dans la bande située autour de l'axe des abscisses on accepte l'hypothèse nulle d'absence de corrélation pour le retard considéré. La présence indiscutable de corrélation quadratique conduit à réaliser un test ARCH. La statistique est distribuée selon un  $\chi^2$  à  $p$  degrés de liberté. Les deux dernières colonnes donnent la valeur calculée et, la valeur théorique.

**Tableau 3.7. Tests ARCH.**

	Retards	test ARCH	Seuil à 5%
Accor	4	207,8	9,48
C.M.B.	4	95,1	9,48
Lafarge	5	304,1	11,07
Peugeot	3	364,8	7,81
Valéo	6	159,3	12,59

La présence d'un effet ARCH ne peut être rejetée, et cela très fortement pour les retards donnés dans ce tableau. Ainsi, le rejet de l'hypothèse de processus iid par le test BDS peut donc être imputé au processus ARCH. Les résultats des estimations (maximum de vraisemblance) figurent dans le tableau suivant.

**Tableau 3.8. Régressions ARCH.**

	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$
Accor	0,251E-3 (0,99)	0,290 (14,21)	0,197 (9,54)	0,060 (2,15)	0,088 (3,57)	—	—
C.M.B.	0,279E-3 (1,33)	0,252 (12,99)	0,112 (5,03)	0,034 (1,25)	0,133 (9,37)	—	—
Lafarge	0,205E-3 (0,98)	0,120 (4,66)	0,102 (5,70)	0,110 (4,89)	0,121 (6,54)	0,059 (2,49)	—
Peugeot	0,333E-3 (1,52)	0,228 (12,26)	0,083 (3,60)	0,104 (6,01)	—	—	—
Valéo	0,246E-3 (0,97)	0,163 (7,36)	0,137 (7,97)	0,063 (2,69)	0,097 (6,16)	0,051 (2,07)	0,076 (3,69)

(entre parenthèse, figurent les valeurs des t de Student pour chaque coefficients)

Les conditions de positivité des coefficients sont respectées ainsi que la condition de stationnarité du processus qui impose que la somme des coefficients soit inférieure à l'unité. Ces sommes sont respectivement de 0,635 pour Accor, 0,531 pour Cmb, 0,512 pour Lafarge, 0,415 pour Peugeot et 0,587 pour Valéo.

La modélisation ARCH enrichit l'étude de l'efficacité des marchés et conforte l'idée d'une représentation qui intègre les bruiteurs sans que cela soit

défecté par les tests classiques d'efficience fondés sur les corrélations linéaires. Néanmoins, il nous a semblé intéressant d'envisager une modélisation GARCH qui possède ces mêmes qualités en terme de représentation des marchés financiers mais offre une alternative intéressante en intégrant dans l'équation de variance conditionnelle les variances conditionnelles passées. Nous nous sommes limités au processus GARCH(1,1) car il est le plus utilisé et qu'il s'agit surtout pour nous d'illustrer empiriquement le bien fondé de la représentation de l'effet des bruiteurs sur le marché français des actions par les modèles de ce type.

## II. La modélisation GARCH.

Nous avons voulu estimer un éventuel effet GARCH présent dans les séries de rentabilités. Plus exactement nous avons estimé un processus GARCH (1,1) sur les rentabilités  $\varepsilon_t$  qui serait de la forme :

$$\varepsilon_t = u_t h_t \quad \text{où} \quad u_t \sim N(0,1) \quad (3.11)$$

avec

$$h_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}^2$$

L'estimation est réalisée par le maximum de vraisemblance en partant du fait qu'un GARCH peut être considéré comme un ARMA sur le carré du processus (BOLLERSLEV, 1986 et GOURIEROUX, 1990).

**Tableau 3.9. Régressions GARCH (1,1).**

	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\beta_1$
Accor	0,919E-4 (5,28)	0,138 (16,18)	0,697 (19,07)
C.M.B.	0,354E-4 (3,70)	0,071 (10,41)	0,864 (37,50)
Lafarge	0,232E-4 (4,27)	0,107 (14,97)	0,837 (46,38)

Peugeot	0,104E-3 (5,99)	0,188 (21,63)	0,633 (19,15)
Valéo	0,171E-4 (3,31)	0,057 (10,17)	0,912 (64,51)

(entre parenthèse, figurent les valeurs des t de Student pour chaque coefficient)

La représentation de chacune des cinq séries de rentabilités par un processus GARCH est parfaitement pertinente. La question de la meilleure des représentations entre ARCH et GARCH n'est pas ici le centre principal d'intérêt.

La présence des bruiteurs lors des transactions portant sur les actions de ces cinq sociétés aboutit à une évolution de type ARCH ou GARCH. Le changement que nous avons apporté au modèle de DELONG, SHLEIFER, SUMMERS et WALDMANN (chapitre 6) est donc une représentation possible des bruiteurs sur le marché financier français. Dans notre modèle, le rythme d'arrivée des informations sur le marché influence les bruiteurs (LONGIN, 1992b). La Quasi Marche Aléatoire en est la résultante statistique. Le fait que les rentabilités évoluent selon un schéma ARCH ou GARCH, permet donc de corroborer le modèle de bruiteurs développé au chapitre 6. Ces agents rationnels mais n'utilisant pas correctement l'information ne sont pas détectés par les tests classiques d'efficience du fait de leur rationalité. En outre, leur mauvaise utilisation de l'information permet à des tests plus élaborés (test BDS) de déceler leur existence.

L'apport des processus stochastiques non linéaires, et particulièrement ceux de type ARCH, apparaît clairement à travers cette étude empirique. Cependant notre travail veut également se libérer de la contrainte posée par l'emploi des modèles statistiques en finance. PETERS (1991), entre autres, a montré l'intérêt d'une analyse des marchés financiers par le biais du chaos. Le modèle de DAY et HUANG (1990) est un exemple des possibilités offertes par le chaos déterministe dans l'étude des comportements des investisseurs. Il permet d'appliquer aux marchés financiers l'imprévisibilité inhérente à ces systèmes déterministes. Pour ces raisons, une dernière section va être consacrée à la vérification du caractère déterministe et surtout chaotique des rentabilités des cinq actifs

### Section 3. Le bruit est-il chaotique ?

Le chaos déterministe est un champ d'investigation récent pour la majorité des chercheurs. Les tests et mesures permettant de l'appréhender manquent quelquefois de fiabilité mais permettent d'apporter une première réponse à la question du caractère déterministe d'une série. Nos conclusions devront, pour cette raison, rester mesurées à partir des résultats que nous obtiendrons concernant ces systèmes déterministes et non linéaires. Nous pouvons scinder la mesure des systèmes chaotiques en deux groupes comme le préconise ECKMANN (1992).

Le premier groupe part de l'idée de reconstruction de l'attracteur de la série, après avoir calculé la dimension fractale de cet attracteur. En effet, les séries univariées dont nous disposons ne sont que le signal apparent d'un système à plusieurs dimensions. ECKMANN explique qu'il est alors possible de reconstruire l'attracteur de la série à partir de cette série univariée (chapitre 4). Afin de pouvoir obtenir une représentation cohérente de l'attracteur, il est nécessaire d'en connaître la dimension. Nous mesurons donc d'abord les dimensions des attracteurs de chacune des séries de rentabilités avant de tenter d'en reconstruire les attracteurs.

Le second groupe analyse le chaos à travers la mesure de l'entropie du système sous-jacent à la série. Cette mesure s'obtient à l'aide du calcul de l'exposant de LYAPUNOV<sup>80</sup>. Cet invariant est le seul qui permette de caractériser mathématiquement la nature chaotique d'un système. Le problème est que pour des systèmes dont la forme analytique est inconnue (ce qui est le cas ici), il est très difficile d'obtenir une valeur de cet exposant. L'algorithme de WOLF (1985) est le plus couramment utilisé mais il n'est fiable que lorsque l'exposant de LYAPUNOV est positif. Néanmoins il permet de rejeter le caractère chaotique d'un système générant une série univariée dans le cas où l'exposant calculé est négatif. Nous

---

<sup>80</sup> Il s'agit en réalité du plus grand exposant de LYAPUNOV. En effet, comme nous l'avons vu au chapitre 5, un système à N dimensions possède N exposants de LYAPUNOV. Un système chaotique est un système dont le plus grand exposant est positif (cet exposant est nul pour un attracteur cycle limite ou tore et négatif dans le cas où l'attracteur est un point fixe).

utiliserons une autre méthode avec le principe des réseaux de neurones selon l'algorithme de KAASHOEK et VAN DIJK (1991).

### I. Dimension et reconstruction de l'attracteur.

Le calcul de la dimension de l'attracteur part de la mesure de la corrélation spatiale de la série. Si la série possède un attracteur, certains points de la série sont au voisinage de certains autres mais pas à périodicité régulière. La corrélation intégrale (équation (3.12)) permet de mesurer la proximité des points dans l'espace des phases.

$$C(r) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \sum_{t,s=1}^m H \left( r - \left| \vec{x}_t - \vec{x}_s \right| \right) \quad (3.12)$$

où H est la fonction de HEAVISIDE qui vaut : 1 si  $\left| \vec{x}_t - \vec{x}_s \right| < r$   
0 sinon.

Il faut alors déterminer cette mesure pour plusieurs valeurs de r, afin de ne pas biaiser le calcul par une valeur trop petite ou trop grande de r. La pente obtenue avec ces points sur un graphique ayant Log(r) comme abscisse et Log(C(r)) comme ordonnée nous donne la dimension fractale de l'attracteur, c'est à dire une idée de la manière dont l'attracteur remplit l'espace. Comme la dimension de cet espace des phases dans lequel est situé l'attracteur est inconnue a priori, il faut répéter cette opération pour plusieurs dimensions (taille des vecteurs  $x_t$  et  $x_s$ ). Dans le tableau suivant figurent les pentes obtenues pour chacune des séries pour des dimensions de reconstruction de la série (dimension supposée de l'espace des phases) allant de 1 à 7. Les points ayant servi au calcul de ces pentes figurent en Annexe 5a à 5e.

#### **Tableau 3.10. Dimensions des attracteurs.**

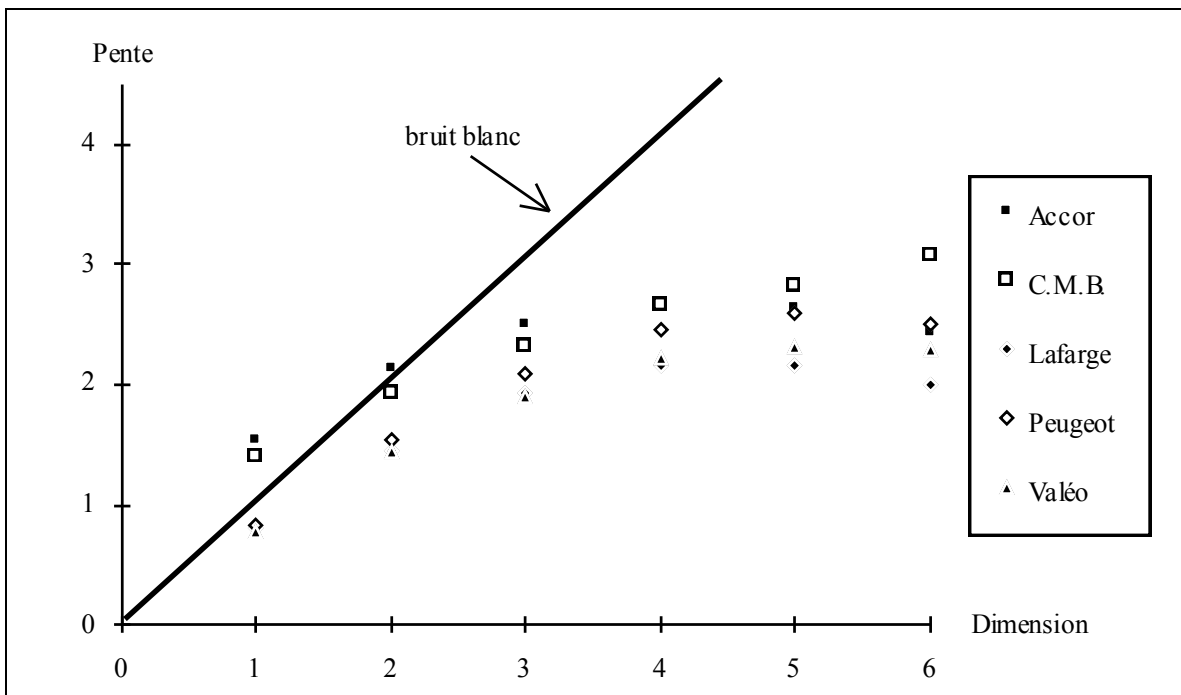
Calculées pour différentes dimensions de plongement.

	1	2	3	4	5	6	7
Accor	1,55	2,13	2,51	2,67	2,64	2,43	2,14
C.M.B.	1,41	1,93	2,33	2,67	2,83	3,08	2,67
Lafarge	0,80	1,45	1,92	2,15	2,16	2,00	1,70
Peugeot	0,82	1,53	2,09	2,46	2,60	2,51	2,24
Valéo	0,79	1,44	1,91	2,22	2,32	2,29	2,09

Lorsque la dimension de l'espace croît mais que la pente calculée croît moins rapidement, voire se stabilise, l'hypothèse d'une série aléatoire est rejetée. Dans le graphique suivant, apparaissent les valeurs des pentes en fonction de la dimension de calcul.

### Graphique 3.3. Dimensions de corrélation.

Ce graphique donne l'évolution de la pente selon la dimension de plongement calculée pour les cinq séries et théorique pour un bruit blanc.



Dans le cas d'un bruit blanc, la pente croît à la même vitesse que la dimension. Un bruit blanc nécessite une infinité de degrés de liberté et donc un espace des phases de dimension infini rempli par l'attracteur. Pour les séries des rentabilités, les pentes se stabilisent rapidement pour des valeurs qui sont

respectivement de 2,6 pour Accor, 3,1 pour Cmb, 2,1 pour Lafarge, 2,6 pour Peugeot et 2,3 pour Valéo.

Lorsque la dimension de plongement augmente, les pentes se stabilisent progressivement à une valeur qui est la dimension de l'attracteur. Ainsi, les séries semblent posséder un attracteur dont la dimension est non entière. Les seuls attracteurs dont la dimension est non entière sont les fractals, attracteurs de séries chaotiques déterministes. Nous avons tenté de reconstruire l'attracteur des séries de nombreuses façons. Mais nous n'avons jamais obtenu autre chose qu'un amas informe de points qui ne laissent aucunement penser à un attracteur étrange. Nous ne les faisons donc pas figurer dans ce travail pour le manque d'intérêt qu'ils présentent. Cette caractérisation des séries chaotiques est donc insuffisante et nous devons recourir au calcul de l'exposant de LYAPUNOV de chacune des séries afin de pouvoir réellement conclure sur le caractère chaotique ou non des cinq séries de rentabilités quotidiennes.

## II. Exposant de LYAPUNOV.

Le calcul du plus grand exposant de LYAPUNOV d'une série dont l'équation structurelle est inconnue est un exercice assez ardu. Nous allons pour cela utiliser deux méthodes différentes exposées au chapitre 5 qui sont l'algorithme de WOLF et la méthode des réseaux de neurones. Avant d'effectuer ces calculs nous devons reconstruire la série dans une dimension que TAKENS (1981) préconise comme devant être proche de  $2N+1$ , où  $N$  est la dimension fractale calculée précédemment. La reconstruction de la série consiste en la transformation des données univariées  $\{x\}$  de taille  $T$  redispesées en une série  $\{y\}$  de dimension  $M$  (entier proche mais inférieur à  $2N+1$ ) :

$$\begin{aligned}
 y_1 &= (x_1, \dots, x_M) \\
 y_2 &= (x_{M+1}, \dots, x_{2M}) \\
 &\dots \\
 y_{T/M} &= (x_{T-M+1}, \dots, x_T)
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$



Il est possible, à présent, d'appliquer à cette série reconstruite l'une des deux méthodes, afin de déterminer la valeur de l'exposant de LYAPUNOV. Nous présentons (Annexes 6a à 6e) la rapidité de convergence de l'exposant de LYAPUNOV à mesure que l'échantillon avance, pour chacune des deux méthodes.

### 1. Algorithme de WOLF.

Dans le tableau suivant figurent les résultats obtenus par l'algorithme de WOLF. Ils sont donnés par actif avec la dimension de plongement qui a servi à la reconstruction de la série nécessaire à ce calcul.

**Tableau 3.11. Exposants de LYAPUNOV (algorithme de WOLF).**

	$\hat{\lambda}_1$	Dimension de plongement
Accor	0,0505	7
C.M.B.	0,0326	8
Lafarge	0,0628	6
Peugeot	0,0429	7
Valéo	0,0648	6

Les exposants de LYAPUNOV calculés par l'algorithme de WOLF sont tous positifs. Il semble donc possible de conclure à l'hypothèse selon laquelle les séries sont générées de manière déterministe chaotique. L'étude de GIRERD-POTIN et TARAMASCO (1992) oblige à nuancer ce résultat. Ils expliquent, en effet, qu'après simulations, ils trouvent avec cet algorithme des exposants de LYAPUNOV de 0,02 à 0,03 pour un bruit blanc gaussien et un GARCH (1,1). Cependant nous trouvons des coefficients supérieurs à 0,06 pour deux séries. L'hypothèse du chaos ne peut pas être remise en cause, mais il est évident que le manque de fiabilité de l'algorithme employé doit nous rendre méfiant pour l'interprétation de nos résultats.

### 2. Méthode des réseaux de neurones.

Il est possible de conforter le résultat précédent en calculant à nouveau les exposants de LYAPUNOV, mais à l'aide d'un algorithme fondé sur les réseaux de neurones et développé par KAASHOEK et VAN DIJK en 1991. Cet algorithme (chapitre 5, section 4) fonctionne en deux étapes.

La première utilise les réseaux de neurones par confrontation de données. Dans le cas d'une dimension de plongement  $N$ , le réseau confronte  $N$  données consécutives (les inputs), issues de la série univariée sur laquelle il effectue le calcul, à la  $N+1^{\text{ème}}$  (l'output), et ceci pour toute la série. L'algorithme s'effectue donc avec un réseau  $(N, 2N+1, 1)$ , c'est à dire  $N$  neurones en input,  $2N+1$  cellules intermédiaires (la boîte noire) et une cellule output. Les connexions reliant les inputs aux cellules intermédiaires (associées à une fonction de transfert), puis celles-ci à l'output sont au nombre de  $N(2N+1)+(2N+1)$ . Un coefficient est affecté à chaque connexion du réseau. La série est donc paramétrée par  $(N+1)(2N+1)$  coefficients.

La deuxième étape est ensuite une mise en œuvre des coefficients obtenus et de la fonction de transfert qui nous permet alors d'estimer la fonction sous-jacente. En recalculant alors pas à pas la fonction estimée, il est possible de déterminer l'exposant de LYAPUNOV (chapitre 5, section 4, III).

Le problème que nous avons rencontré réside dans la longueur des séries. Les réseaux de neurones confrontaient à chaque tour plus de trois mille outputs avec les réalisations effectives correspondantes dans la série. La comparaison entre la vraie valeur et le résultat obtenu par le réseau est considérée comme bonne si la différence entre les deux n'excède pas  $\delta$  qui est exprimé en pourcentage de la différence entre le minimum et le maximum de la série. Pour nos séries, les différences entre la rentabilité maximale et la rentabilité minimale sont de l'ordre de 0,35. Si la valeur de  $\delta$  est de 5 %, cela correspond à l'acceptation du calcul effectué par le réseau si la différence de la valeur de l'output avec la réalité n'excède pas 0,0175. Or un ordre de grandeur de 1,75 % par jour pour la rentabilité d'un actif financier est important. Le problème est que même à ce niveau là, les réseaux ne convergent pas parfaitement. Au bout de plusieurs heures de calcul (37 heures pour

Accor par exemple), 10 à 12 % seulement des rentabilités ne sont pas correctement estimées. Le fait que 90% des rentabilités soient bien calculées par le réseau (même si ici la notion de bon calcul est large) nous a permis de nous contenter de ce résultat<sup>81</sup>. Le tableau suivant donne les exposants de LYAPUNOV obtenus à l'issue de l'utilisation de l'algorithmes des réseaux de neurones.

**Tableau 3.12. Exposants de LYAPUNOV.**  
(algorithme de KAASHOEK et VAN DIJK).

	$\hat{\lambda}_1$	Dimension de plongement
Accor	-0,0408	7
C.M.B.	0,7609	8
Lafarge	1,1681	6
Peugeot	0,6012	7
Valéo	0,4238	6

Les résultats présentés ici renforcent l'idée d'une évolution chaotique des rentabilités, excepté pour Accor dont la valeur négative de l'exposant de LYAPUNOV nous amène à rejeter l'éventualité du chaos. La valeur théorique de l'exposant de LYAPUNOV d'une série aléatoire est infinie mais les simulations effectuées par KAASHOEK et VAN DIJK sur des données aléatoires aboutissent à des résultats identiques. En ce qui concerne les quatre autres séries les valeurs trouvées sont importantes et signalent une très forte entropie. Pour référence, signalons que les plus grands exposants de LYAPUNOV sont de 0,603 et 2,16 respectivement pour les systèmes de HENON et de LORENZ. Dans le cas des rentabilités de la société Lafarge-Coppée, l'exposant de LYAPUNOV est de 1,1681. Cet exposant peut s'interpréter comme l'inverse de la rapidité de perte d'information<sup>82</sup>. Si, par exemple, la valeur d'une rentabilité quotidienne est connue à

<sup>81</sup> Lors du colloque de l'AEA en Octobre 1993, le professeur VAN DIJK nous a expliqué qu'un problème de convergence pouvait provenir d'un nombre trop important de cellules constituant le réseau. Divers essais avec un réseau plus réduit n'ont malheureusement pas permis d'accroître significativement la convergence.

<sup>82</sup> PETERS (1985), GIRERD-POTIN et TARAMASCO (1992) appliquent cette vision de l'exposant de LYAPUNOV en finance.

un bit d'information près, c'est à dire avec une précision quasi absolue, alors l'information contenue dans cette rentabilité disparaîtra au bout de  $1/1,1681=0,856$  jour (1,314 jour pour Cmb, 1,663 pour Peugeot et 2,359 pour Valéo). L'information serait donc détruite, intégrée en moins d'une journée ou en à peine plus. Ceci conforterait l'intuition première, découlant de l'analyse des corrélations et concernant la disparition rapide de l'information. Nous sommes bien en présence de séries chaotiques déterministes, hormis Accor. Mais la rapidité de destruction d'information sur ces séries nous empêche de profiter de ce déterministe. De plus, GIRERD-POTIN et TARAMASCO (1992) soulignent qu'avec un faible exposant de LYAPUNOV "la précision des données n'est pas un problème crucial pour la prévision". Or les exposants que nous avons calculés sont très élevés et pour aussi précises que soient les données dont nous disposons, il est peu probable que la précision soit absolue. Cela réduit encore la possibilité de prévision qu'offre le caractère pourtant déterministe de la série. Ainsi, nous nous trouvons face à des séries déterministes chaotiques, mais dont l'importance de l'exposant de LYAPUNOV nous empêche de pouvoir profiter. Le modèle de DAY et HUANG (sous réserve de limiter le nombre de degrés de liberté) est une bonne voie de recherche de modélisation des marchés financiers où apparaissent des comportements bruiteurs. Cependant l'impossibilité d'utiliser le caractère déterministe pour la prévision, déjà entrevu par BAUMOL et QUANDT (1985), est ici renforcée par la valeur des exposants de LYAPUNOV.

## **Conclusion.**

Notre étude empirique permet une première conclusion quant à la nature du marché des actions. La non stationnarité et la persistance ne sont pas les causes du rejet de l'hypothèse nulle de processus iid par le test BDS. Ce rejet est causé par une non linéarité stochastique ou déterministe. Les valeurs de l'exposant de LYAPUNOV obtenues par l'algorithme de KAASHOEK et VAN DIJK et l'impossibilité de reconstruire un attracteur pour les séries sont en faveur de la présence d'un chaos à forte entropie excepté pour Accor. La non linéarité

déterministe s'accompagne d'un désordre important qui empêche une utilisation en termes de prévision. Par ailleurs, les régressions effectuées sur des modèles ARCH et GARCH conduisent à des résultats qui confortent ces modèles comme une bonne mesure de l'effet des bruiteurs sur le marché.

Le chaos à forte entropie ou l'utilisation des processus ARCH met à jour le très faible pouvoir de prévision des non linéarités induites par les bruiteurs. Pour cette raison il nous semble intéressant de développer maintenant notre concept d'Efficienne Bruitée afin de concilier bruiteurs, non linéarité et impossibilité d'effectuer des prévisions dont il soit possible de tirer un profit significatif.

## **CHAPITRE 9 : L'EFFICIENCE BRUITEE A LA BOURSE DE PARIS.**

Les résultats obtenus au cours des deux chapitres précédents vont nous permettre de nous interroger sur l'existence de bruiteurs sur le marché français des actions. Ce chapitre sera, dans un premier temps, consacré à l'étude statistique des résultats obtenus, puis à celle de leur cohérence avec les modèles de bruiteurs décrits dans le chapitre 6. Les tests nous apportent des premières conclusions, mais il nous faut, en effet, vérifier à travers eux la validité des modèles développés auparavant. L'étude empirique apporte plusieurs renseignements concernant les bruiteurs sur le marché boursier français. En relation avec les modèles de bruiteurs, elle nous permet de proposer une révision de la notion d'efficacité. Plus exactement, il est possible d'envisager une nouvelle stratégie des tests d'efficacité des marchés financiers avec l'emploi du test BDS. Ce sera un approfondissement des tests classiques qui débouche sur la notion d'Efficiency Bruitée que nous présenterons mieux dans la seconde section de ce chapitre. Nous n'envisageons pas d'affaiblir la notion traditionnelle d'efficacité existant de FAMA et JENSEN à LEROY. Nous cherchons seulement à montrer, en accord avec la majorité des définitions de l'efficacité, comment les agissements des bruiteurs peuvent s'insérer dans une évolution des prix des actifs en termes statistiques.

### **Section 1. Les bruiteurs et le marché boursier français.**

Cette section comporte une analyse, statistique et mathématique des résultats, et une étude de leur cohérence avec la représentation des marchés par un des modèles de bruiteurs décrits au chapitre 6. Il s'agit de vérifier que, sur certains actifs du marché français, des bruiteurs agissent et engendrent une évolution particulière des rentabilités de ces actifs.

## I. Que nous disent les résultats ?

Nous avons voulu séparer deux méthodes d'appréhension statistique des problèmes d'efficience des marchés en distinguant la démarche classique des tests d'efficience et une démarche alternative que nous proposons pour bien rendre compte des comportements bruiteurs. Notre étude a porté sur les rentabilités quotidiennes de 24 sociétés cotées à la Bourse de Paris et choisies aléatoirement. La seule entorse au caractère aléatoire réside dans le fait que toutes ces sociétés appartiennent au portefeuille qui détermine le CAC 40. Nous avons imposé cette contrainte afin d'effectuer notre test sur les actifs de sociétés connues et pour lesquelles il circule beaucoup d'information.

La première méthode nous a conduit à rechercher d'éventuelles corrélations linéaires dans les taux de rentabilités quotidiens (différence première des prix exprimés en logarithme). Le test de l'autocorrélation de premier ordre et le test de LO et MACKINLAY concordent dans une grande majorité des cas. La méthode la mieux adaptée, et la plus utilisée, pour vérifier que la rentabilité est iid, donc que les prix suivent une marche aléatoire, consiste à envisager la présence d'autocorrélation dans le processus des rentabilités. En ce qui nous concerne, la réponse est affirmative pour 19 des 24 sociétés étudiées. En respectant la logique classique, la corrélation linéaire des rentabilités conduit à rejeter l'hypothèse de bruit blanc et donc celle de marche aléatoire pour les prix. Il existe par conséquent une part des rentabilités futures qui est fonction des rentabilités passées. L'évolution des rentabilités n'est alors qu'en partie imprévisible. Cependant, il faut relativiser l'importance de cette prévisibilité. Prenons l'exemple de la société LEGRAND pour laquelle la présence d'une corrélation linéaire est la plus probable (valeur du test de corrélation égal à 6,05). En régressant la rentabilité présente sur une constante et la rentabilité de la période précédente, il vient certes des coefficients significativement non nuls, mais le  $R^2$  n'est que de 0,0102. Dans le cas de la société LEGRAND, la rentabilité du jour présent permet de prévoir la rentabilité de la prochaine séance boursière mais à hauteur de seulement 1,02 % de la variation totale de celle-ci. L'efficience des marchés est ainsi rejetée au sens de FAMA mais acceptée au sens

de JENSEN. En effet, prévoir 1,02 % des rentabilités futures d'un actif ne permet aucunement de couvrir les frais de la moindre transaction que la connaissance de cette information entraîne. De plus, le test de LO et MACKINLAY effectué pour des retards allant jusqu'à 4 rejette lui aussi fortement l'hypothèse de série iid pour ces 19 rentabilités. Dans une logique qui est celle de FAMA (1970), l'efficience est rejetée pour ces sociétés même si en 1991, l'auteur modifie sa vision de l'efficience au vu de la faiblesse des autocorrélations mesurées empiriquement. Avec la définition de JENSEN, il faut auparavant vérifier l'apport effectif, en termes de stratégie, des corrélations qui causent ces réactions du test de LO et MACKINLAY. Pour notre part, nous avons préféré garder pour la suite de notre étude empirique, uniquement les sociétés dont l'absence de corrélation linéaire paraît indiscutable. Nous allons ainsi pouvoir observer l'éventualité de la présence des bruiteurs pour des sociétés dont les rentabilités laissent croire en l'existence d'une évolution parfaitement aléatoire, sujette à aucune distorsion.

Nous avons donc, sur ces cinq sociétés, appliqué la nouvelle stratégie de test d'efficience qui, à l'aide de la statistique BDS, envisage comme alternative à l'efficience "pure" la présence de bruiteurs. Pour les cinq séries de rentabilités quotidiennes le test BDS rejette fortement l'hypothèse nulle de processus iid. Ainsi, l'absence de corrélations linéaires significatives ne suffisait aucunement à caractériser les rentabilités en ce qu'elles sont purement aléatoires. L'efficience est rejetée par le test BDS et nous cherchons maintenant à connaître la cause de ce rejet. Pour cela, nous avons utilisé plusieurs tests afin de spécifier la nature de la non linéarité détectée. Est-ce une non linéarité stochastique ou déterministe ? Faut-il envisager la présence de persistance, de non stationnarité sur ce marché.?

Il apparaît clairement que la non stationnarité est totalement absente des processus de rentabilité. Cela correspond à l'intuition née du fait que les taux de rentabilité sont issus des cours par différence première, ce qui enlève déjà le "niveau" de non stationnarité effectivement présente dans les cours (ALEXANDRE et ERTUR, 1993). Le test de LO élimine, quant à lui, l'hypothèse d'une dépendance de long terme dans les rentabilités quotidiennes. Son test, qui évite le biais engendré par une éventuelle corrélation de court terme, est plus performant que l'analyse traditionnelle R/S que nous n'avons alors pas utilisée.



Pour la non linéarité stochastique nous avons d'abord eu recours au test de HSIEH afin de déterminer la nature de cette non linéarité. Elle est multiplicative et les résultats du test sont formels. Il en découle bien évidemment l'idée d'une représentation de type ARCH ou GARCH des rentabilités. En effet ces processus sont de plus en plus utilisés lors de nombreuses études empiriques et répondent aux problèmes posés par la distribution à queues épaisses et l'effet de grappe qui sont omniprésents sur les marchés financiers. L'estimation de ces deux modèles est concluante pour les cinq séries. Nous préférons la modélisation GARCH qui permet une représentation moins restrictive de l'effet du passé.

Enfin, nous avons envisagé la non linéarité déterministe. Pour cela, nous avons calculé le plus grand exposant de LYAPUNOV à l'aide de la méthode des réseaux de neurones. Les résultats mettent à jour une évolution chaotique pour toutes les séries à l'exception d'Accor. Ce résultat est a priori en désaccord avec celui précédemment trouvé concernant les processus ARCH et GARCH. Néanmoins, la très forte valeur de ces exposants entraîne un comportement à très forte entropie. Le désordre y est très important et la nature déterministe va donc s'avérer inutilisable. De plus les problèmes de convergence rencontrés lors de l'utilisation des réseaux de neurones nous empêche de nous fier aveuglément aux résultats obtenus.

Les relations non linéaires présentes dans les rentabilités semblent évidentes ; ce qui l'est moins c'est la nature particulière de ces non linéarités qui empêche d'élaborer des stratégies susceptibles de permettre des gains anormalement élevés. Les processus de type ARCH ne servent à rien dans l'élaboration de prévision de la valeur de la rentabilité future d'une action (ALEXANDRE, 1992). Le chaos présente ici une si forte entropie qu'il ne permet pas, lui non plus, de dégager une stratégie rémunératrice. Il s'agit donc d'une modélisation qui n'a qu'un très faible pouvoir opérationnel au sens d'une aide à la prévision. Néanmoins, elle constitue un support réel au contenu théorique développé sur la modélisation des bruiteurs d'une part et pour le développement de la notion d'efficacité d'autre part. Nous allons d'abord envisager la modélisation, les changements intervenant dans l'étude de l'efficacité méritant une section à part.

## II. La non linéarité comme signal offert par les bruiteurs.

Le problème de la représentation des bruiteurs se pose par la difficulté de prendre en compte, sur la base d'outils linéaires, les particularités qu'engendrent les décisions de ces investisseurs sur les prix des actifs. Il nous est donc apparu pertinent de privilégier l'analyse non linéaire dans l'optique notamment d'isoler les comportements bruiteurs, ou plus exactement de pouvoir les différencier des autres investisseurs. Nous avons pour cela porté notre attention sur le modèle de DELONG, SHLEIFER, SUMMERS et WALDMANN (1990). Nous avons introduit, dans ce modèle, une représentation ARCH des rentabilités en conformité avec le schéma défini par LONGIN (1992b) concernant les relations entre la nature de l'information (quantité et qualité) et l'impact que cela avait sur l'évolution des prix, et donc des rentabilités. DAY et HUANG (1990) ont développé un modèle dans lequel l'action des bruiteurs se signale par une évolution chaotique des prix. Ces deux modèles sont présentés au sixième chapitre de ce travail.

La rentabilité évoluant selon un processus ARCH suppose une interprétation particulière de l'information par les bruiteurs. L'hypothèse est en deux temps : d'abord, l'information concernant un actif financier arrive par rafales et ensuite les bruiteurs sont sensibles au rythme d'arrivée de l'information. Le processus GARCH permet de rajouter à cela le phénomène qui consiste à considérer l'importance de l'information précédente comme une information en soi. Ainsi, le processus GARCH modélise la volatilité qu'induit la présence de bruiteurs en intégrant l'effet grappe dans la quantité et la qualité de l'information, comme le fait le modèle ARCH. Il intègre en plus le manque d'informations des bruiteurs et la déstabilisation qu'entraîne l'arrivée de trop d'informations au cours de la période précédente. Le modèle de DSSW considère les bruiteurs comme des investisseurs rationnels mais qui manquent d'information et de capacité à utiliser l'information dont ils disposent. De ce fait, ils déterminent de manière biaisée la quantité d'actif risqué à acheter ou à vendre. C'est la notion de rationalité procédurale introduite au tout début du chapitre 1 et considérée comme la caractérisation principale des bruiteurs. Mais le modèle de DSSW aboutissait à une impasse statistique de par

l'impossibilité qu'il y avait à différencier bruiteurs et agents irrationnels. L'introduction du modèle GARCH permet cette différenciation en intégrant les particularités décrites plus haut. Concernant les rentabilités des cinq sociétés étudiées, la significativité des coefficients affectés au rôle de l'importance de l'information passée ne laisse aucun doute. La volatilité induite par les bruiteurs va effectivement être en grande partie due à la volatilité passée, elle-même conditionnée par l'importance de l'information passée.

L'introduction de GARCH dans le modèle de DSSW permet donc d'insister sur l'inertie qu'apportent les bruiteurs. Il ne s'agit cependant pas d'une inertie détectable par un test classique de marche aléatoire et d'ailleurs l'existence d'un processus GARCH<sup>83</sup> n'améliore pas la connaissance de la valeur des rentabilités futures. Nous allons voir que l'existence du chaos déterministe comme processus générateur des rentabilités n'aide pas plus à la prévision surtout lorsqu'il s'agit comme dans notre cas d'un chaos à très forte entropie.

Les exposants de LYAPUNOV obtenus pour chacune des rentabilités à l'aide de l'algorithme utilisant les réseaux de neurones sont positifs et très élevés (à l'exception de la société Accor dont la négativité de l'exposant nous fait rejeter l'hypothèse de chaos déterministe). Cette très forte entropie empêche la prévision dès lors que les valeurs ne sont pas données avec suffisamment de précision. Dans le cas présent, les rentabilités calculées entre les cours d'ouverture vont être arrondies. Cela nuit fortement à la précision requise pour pouvoir utiliser le chaos du fait de la Sensibilité aux Conditions Initiales, même si l'arrondi se fait à un nombre important de décimales.

Le modèle de DAY et HUANG met en avant le manque de capacité technique des bruiteurs dans l'élaboration de leur stratégie. De là il découle un modèle où la confrontation d'agents parfaitement informés et de bruiteurs peut générer une évolution chaotique déterministe de la rentabilité de l'actif. Cependant, leur modèle suppose la fixité d'un nombre important de paramètres, c'est à dire que l'espace des phases dans lequel évolue la série est de dimension neuf. Les

---

<sup>83</sup>Les processus ARCH et GARCH renseignent uniquement sur l'évolution de la volatilité. Sa connaissance peut donc être utile pour une stratégie jouant sur les volatilités comme cela est parfois le cas sur les marchés d'option.

dimensions calculées de l'attracteur de chacune de nos séries sont comprises entre 2 et 3. Il suffit donc de fixer la valeur de trois paramètres seulement pour décrire un système déterministe. Le modèle de DAY et HUANG qui nécessite un nombre plus important de paramètres ne constitue donc pas une bonne explication du chaos existant sur le marché français. Il paraît néanmoins tout à fait possible de laisser tomber l'hypothèse de fixité de certains paramètres. Le problème réside alors dans l'extrême sensibilité des systèmes chaotiques à tout changement de la valeur des paramètres. Rapidement, apparaît la difficulté qui réside dans l'emploi du chaos sur des données dont le système sous-jacent est inconnu. En effet, l'état actuel des connaissances concernant le chaos déterministe nous permet de déterminer la nature chaotique ou non d'un système, mais ne nous permet pas encore d'envisager une représentation de la forme structurelle de ce système s'il est inconnu a priori.

Nous avons vu au cours de cette section la possibilité d'une représentation non linéaire des rentabilités dont l'analyse statistique classique laissait conclure à une évolution purement aléatoire. Les non linéarités envisagées dans ce travail ont la particularité de ne pas être détectées par les tests usuels d'efficacité et de correspondre à une description des comportements bruiteurs. Nous allons voir dans la section suivante qu'une telle représentation des bruiteurs accompagnée de l'emploi du test BDS pour l'efficacité, peut s'intégrer dans les différentes définitions de l'efficacité et permet ainsi de définir une nouvelle notion : l'Efficacité Bruitée.

## **Section 2. Une nouvelle vision de l'efficacité.**

La notion d'efficacité des marchés financiers a évolué depuis celle que FAMA développe en 1970. L'intégration de l'information dans les prix est devenue, depuis cet article, un problème central en finance. Les définitions conduisant à un modèle testable sont diverses du fait du caractère général de la définition de FAMA qui laisse une grande liberté d'interprétation. Il est donc possible d'entrevoir des modélisations qui, tout en permettant de conserver les propriétés d'efficacité,

renouvellent l'étude des comportements des investisseurs. Dans notre cas, certains modèles non linéaires permettent de caractériser les bruiteurs présents sur les marchés (générateurs de distorsion dans la fixation des prix des actifs financiers) tout en respectant pourtant les conditions d'efficience. Pour renforcer cela, le test BDS peut alors être interprété en finance comme un test de l'hypothèse nulle d'efficience des marchés contre l'hypothèse alternative d'efficience bruitée.

## I. L'Efficience Bruitée

Les bruiteurs sont des agents qui, partant d'une démarche rationnelle de maximisation de l'espérance d'utilité, sont limités par leur capacité à collecter et à analyser l'information. Ils empêchent les prix d'être un signal parfait de l'information et pourtant les distorsions qu'ils introduisent ne permettent pas de déduire une quelconque information concernant l'évolution future des cours et des rentabilités.

La définition de JENSEN (reprise par FAMA en 1991) nous dit qu'un marché est efficient si les profits réalisés par l'introduction d'une information supplémentaire dans l'élaboration d'une stratégie couvrent juste le coût de cette information. Cette définition est moins restrictive que celle de FAMA en 1970, mais elle exclut néanmoins du champ des marchés efficients, un marché dans lequel des bruiteurs créeraient une distorsion profitable aux agents rationnels bien informés. Or DELONG, SHLEIFER, SUMMERS et WALDMANN soulignent justement que les bruiteurs entraînent un biais dans l'établissement du prix mais que les agents rationnels sont incapables d'en profiter. SHLEIFER et SUMMERS (1990) dénombrent deux phénomènes empêchant les investisseurs bien informés de profiter de ce biais :

- le risque fondamental lié aux réalités économiques et financières ;
- l'horizon limité de ces investisseurs.

Les bruiteurs introduisent donc un biais dans la fixation du prix. Leurs actions sont de nature à créer des distorsions dans l'estimation de la valeur

fondamentale par le prix qui ne sont pas forcément temporaires. Cependant, les agents rationnels informés risquophobes ne peuvent pas profiter des distorsions introduites par les bruiteurs du fait du risque que ces derniers induisent. Ceci est confirmé par le fait que le biais introduit par les bruiteurs n'est pas toujours détectable par l'analyse classique des marchés financiers fondée en majeure partie sur la linéarité des relations temporelles. De plus, l'horizon limité des investisseurs informés et le risque fondamental n'expliquent pas la non prise en compte d'une information aussi triviale que la corrélation linéaire dans l'historique des rentabilités. Dans les cinq actions que nous avons sélectionnées aucune ne présente d'autocorrélations significatives. Le modèle de DSSW n'est pas adapté à la vision intuitive que nous avons des bruiteurs. Nous n'essayons pas non plus de définir les bruiteurs comme des agents dont l'intervention ne gêne pas l'agrégation des informations dans le prix.

Ce que nous voulons proposer à partir des modèles exposés et de l'étude empirique c'est la notion de *marché bruité efficient*. Un tel marché est composé d'agents rationnels, certains étant mieux informés que d'autres. L'interaction entre ces agents empêche de faire du prix un parfait signal de l'information. Personne ne profite de cette mauvaise transmission pour battre le marché. ROLL (1988) sur les actions et CUTLER, POTERBA et SUMMERS (1989) sur des portefeuilles d'actions montrent que les jours au cours desquels les prix varient le plus ne sont pas obligatoirement ceux pendant lesquels l'information fondamentale est la plus importante. L'accent est bien mis ici sur la différence entre les mouvements de prix et ceux de la valeur fondamentale. Cela confirme le fait que les bruiteurs n'agissent pas uniquement sur de l'information fondamentale. Nous avons vu que l'interprétation que les bruiteurs font du rythme d'arrivée de l'information (LONGIN, 1992b) justifie la modélisation ARCH, mais il ne s'agit pas uniquement de l'information fondamentale. Le modèle de DSSW permet certes de bien comprendre l'impact des bruiteurs mais il était nécessaire de lui adjoindre l'hypothèse selon laquelle le rythme d'arrivée de l'information influence fortement l'activité de ces agents mal informés.

La justification du modèle ARCH, tout autant d'ailleurs que l'évolution chaotique déterministe vérifiée sur notre échantillon, conduit à définir une nouvelle

forme d'efficience. Ces deux formes de non linéarités, stochastique ou déterministe, ne sont pas détectables par analyse des corrélations linéaires et n'apportent aucune information sur les prix passés permettant d'espérer battre le marché. Nous sommes alors en présence d'un marché efficient. Mais ces non linéarités reflètent la présence de bruiteurs, qui génèrent des distorsions plus ou moins importantes et empêchent le prix d'être un signal non biaisé de l'information, ce qui est alors un marché a priori inefficient. La résolution de ce paradoxe a lieu avec l'introduction de la notion d'Efficience Bruitée qui caractérise un marché dans lequel les bruiteurs gênent la transmission parfaite de l'information par les arbitragistes. Mais sur un tel marché, il est impossible de déterminer une quelconque information de l'évolution future des rentabilités à partir de la connaissance des rentabilités passées.

Nous allons examiner maintenant l'apport du test BDS qui permet de déterminer l'éventuelle présence de bruiteurs sur un marché.

## II. L'apport du test BDS.

L'emploi du test BDS s'est révélé pertinent dans l'analyse des bruiteurs car il propose, par le biais des hypothèses alternatives, des possibilités de modélisation des comportements bruiteurs qui correspondent à "l'impalpabilité" intuitive de leur action. Le chaos déterministe et les processus ARCH ou GARCH n'offrent en effet guère de prise à l'élaboration d'une stratégie dont les investisseurs pourraient tirer profit. Cependant le biais que les bruiteurs introduisent dans la fixation du prix ne permet pas de classer les marchés où ils interviennent comme des marchés "parfaitement" efficients. L'utilisation du test BDS nous permet de tester l'efficience au sens d'une évolution iid des rentabilités (les prix suivent alors une marche aléatoire) contre l'hypothèse d'une efficience bruitée dont personne ne peut tirer profit.

Si les rentabilités étudiées sont linéairement autocorrélées, nous devons nous interroger sur la stratégie à adopter. Dans le cas présent, nous n'avons pas retenu les séries présentant une autocorrélation linéaire significative afin de bien mettre en

avant les particularités de l'impact statistique des bruiteurs sur des séries évoluant a priori de manière parfaitement aléatoire. De manière plus générale, si la série des rentabilités présente une autocorrélation significative que conclure et quelle démarche utiliser pour détecter d'éventuels bruiteurs ? Déjà, la présence d'agents irrationnels n'est pas incompatible avec celle de bruiteurs. Ils constituent seulement des groupes distincts d'agents. De plus, l'extrême faiblesse des autocorrélations empiriques sur des données quotidiennes ne permet pas d'élaborer une stratégie générant un réel profit après déduction des coûts de transaction. Nous pouvons supposer la présence d'autres effets que cette faible corrélation. Nous sommes en droit de nous interroger sur l'existence de non linéarités dans le processus de rentabilité et donc sur la présence de bruiteurs par l'utilisation du test BDS. Si le rejet de l'hypothèse nulle par le test BDS sur la série filtrée est admis, on vérifie ainsi la présence de bruiteurs sur le marché.

### **Conclusion.**

Ainsi, la notion d'efficience bruitée ne prétend aucunement englober tous les cas de figure possibles et à être une sorte de représentation absolue des marchés financiers. Elle ne concerne que les marchés a priori efficaces et au sein desquels nous cherchons à détecter la présence de bruiteurs. Ces derniers, s'ils nuisent à l'agrégation de l'information à travers le prix, sont tout de même des agents rationnels et ne créent pas de distorsions suffisantes pour enrayer l'efficience du marché. Il est donc intéressant de bien les distinguer d'autres agents irrationnels comme ceux qu'ORLEAN regroupe par le phénomène de mimétisme. L'efficience bruitée est, par conséquent, plutôt une précision supplémentaire apportée à la notion d'efficience dont le caractère très général freine l'élaboration d'hypothèses testables. Elle doit permettre, grâce à l'emploi du test BDS, d'aller plus loin dans la caractérisation des marchés financiers.

### **CONCLUSION DE LA TROISIEME PARTIE**



L'étude réalisée sur le marché français des actions a permis de mettre en avant la présence d'agents bruiteurs sur des actions dont les tests classiques laissaient supposer une évolution parfaitement aléatoire.

Cette étude empirique voulait surtout vérifier l'hypothèse qui permet d'envisager un ensemble de modélisations centrées autour des comportements bruiteurs. L'emploi du test BDS est ainsi justifié par les hypothèses alternatives qu'il propose à l'hypothèse nulle de processus iid. Ces hypothèses alternatives regroupent, en effet, des représentations statistiques et mathématiques qui permettent de mieux décrire les comportements bruiteurs. Ces représentations, non linéarités stochastiques et chaos déterministe, ne sont pas être discernables par l'emploi des tests classiques cherchant à vérifier ou infirmer l'hypothèse d'efficience des marchés financiers et fondés sur la recherche de corrélations linéaires dans les rentabilités.

Nous avons ainsi pu établir la notion d'Efficience Bruitée qui définit un marché efficient au sens de JENSEN, mais au sein duquel il est possible de préciser la présence d'agents à la rationalité procédurale (les bruiteurs) et pas uniquement des arbitragistes supposés être dotés d'une rationalité substantielle.

## ***CONCLUSION***

L'intérêt croissant des chercheurs en finance pour le concept de bruiteurs se situe dans un environnement surtout marqué par une nette dichotomie entre les investisseurs rationnels de manière substantielle et d'autres agents irrationnels. L'éventualité d'une rationalité procédurale sur les marchés financiers est assez récente (BLACK, 1986). Mais depuis peu, les articles qui décrivent et modélisent les comportements d'agents à la rationalité procédurale se multiplient. Les bruiteurs, puisque c'est d'eux qu'il s'agit, ouvrent ainsi une voie alternative à l'étude des investisseurs présents sur les marchés financiers. L'imperfection de leur comportement, sans être outrancière, permet de se rapprocher sensiblement des réalités observées sur tous les marchés financiers mondiaux. Le titre de l'article de SHLEIFER et SUMMERS (1990) résume à lui seul l'intérêt d'une telle démarche : "The Noise Trader Approach to Finance". Le sentiment de pouvoir décrire au mieux la réalité a aidé au développement d'une approche des marchés financiers en termes de bruiteurs. Comme pour l'efficience, le problème se pose alors de déterminer un modèle testable qui permette de vérifier la présence des bruiteurs sur un marché donné. Notre travail s'est donc attaché à organiser un regroupement de différentes modélisations des bruiteurs au sein du concept d'efficience bruitée et surtout d'offrir une stratégie de test permettant de déterminer la présence de ces agents rationnels mais mal informés sur un marché.

L'approche des marchés financiers par l'efficience est aujourd'hui bien établie. FAMA (1970) a défini ainsi un axe de caractérisation des marchés par la façon dont les prix intégraient l'information disponible et pertinente. Ce cadre d'étude large a ouvert la voie à de multiples interprétations d'où découlent différentes hypothèses testables. Progressivement la définition a surtout été fondée sur le profit éventuel qu'il était possible de tirer d'une information oubliée (JENSEN, 1978). Les modèles permettant l'élaboration d'hypothèses testables sont la martingale et la marche aléatoire. Mais le débat s'est ancré dans une discussion où les choix possibles étaient la rationalité substantielle ou l'irrationalité pure et simple. La possibilité théorique de la présence de spéculateurs est une première brèche dans cette dichotomie quelque peu rigide. Une réelle ouverture est finalement réalisée depuis que les bruiteurs, définis comme des investisseurs dotés d'une rationalité procédurale, sont introduits dans l'étude des comportements sur les marchés

financiers. Plusieurs modèles intègrent ces comportements. Les bruiteurs sont alors supposés agir sur un marché où existent également des agents dotés, eux, de la rationalité substantielle. Les modèles de DAY et HUANG (1990) et de DELONG, SHLEIFER, SUMMERS et WALDMANN (1990) formalisent de tels marchés. Ils aboutissent à une évolution du prix de l'actif qui diffère d'un modèle à l'autre mais qui ne permet pas toujours de différencier les bruiteurs des agents irrationnels. La question réside alors dans la démarche à adopter afin de pouvoir vérifier la présence de bruiteurs sur un marché. Quel modèle pour quelle hypothèse testable ? Quels tests appliquer ?

La réponse à la première question réside dans l'emploi de modèles non linéaires qui permettent de rendre compte des effets particuliers des bruiteurs. Afin de ne pas nous auto-limiter dans notre modélisation nous avons envisagé les non linéarités déterministes (chaos déterministe) autant que les non linéarités stochastiques (processus ARCH et GARCH). Les premières se retrouvent à travers le modèle de DAY et HUANG alors que les secondes ont nécessité que nous révisions le modèle de DELONG, SHLEIFER, SUMMERS et WALDMANN afin de l'adapter à notre vision des bruiteurs. La théorie du chaos déterministe mérite toute notre attention car son développement récent a remis en cause les distinctions déterminisme-aléa et surtout le lien établi depuis LAPLACE entre le déterminisme et la connaissance parfaite du futur. Cette dernière propriété des systèmes à entropie positive est cruciale dans notre représentation des bruiteurs. Nous avons ainsi pu développer, grâce aux propriétés de l'une et l'autre de ces voies de modélisation, l'idée selon laquelle les bruiteurs ne seraient pas détectables à l'aide des seuls tests classiques d'efficience fondés sur la corrélation linéaire. De plus ces non linéarités, lorsqu'elles sont présentes dans les processus de rentabilité ne permettent pas l'élaboration d'une stratégie profitable : l'efficience selon JENSEN est alors conservée, ce qui correspond au caractère rationnel des bruiteurs. Cependant les caractéristiques qui sont propres à ces investisseurs, notamment le manque de capacité à s'informer, se traduisent par la non linéarité qui est alors un signal de leur présence. Nous avons ainsi caractérisé un tel marché comme vérifiant l'*efficience bruitée*. L'efficience est respectée, mais certaines particularités des participants au marché la distinguent de l'efficience classique. La double nature de la non linéarité,

déterministe ou stochastique, qui signale la présence des bruiteurs pose un dernier problème au niveau de l'élaboration d'un test unique de l'hypothèse d'efficience bruitée.

BROCK, DECHERT et SCHEINKMAN ont construit en 1987, un test traitant la non linéarité et issu des mesures établies pour définir le caractère chaotique déterministe d'un système. Appliqué à une série temporelle, ce test envisage l'hypothèse nulle selon laquelle la série est iid contre l'hypothèse alternative de non linéarité. HSIEH (1989, 1991) montre la robustesse de ce test contre la non linéarité stochastique, le chaos déterministe et la non stationnarité. Dans le cas des taux de rentabilité, ce test s'avère intéressant pour les deux premières hypothèses alternatives. Le test BDS peut donc être renommé test du *Bruiteur Détecté Statistiquement*. Il constitue, en effet, le test qui permet de déterminer la présence éventuelle de bruiteurs sur un marché.

Notre étude s'est employée à vérifier la présence de bruiteurs sur le marché français des actions. Nous avons surtout travaillé sur des actions dont les taux de rentabilité présentent une corrélation linéaire non significative et qui laissent ainsi à penser que les transactions s'effectuant sur ces actifs sont efficaces. Les résultats du test BDS sont nettement en faveur du rejet de l'hypothèse nulle de rentabilités iid au profit de la non linéarité. La distinction entre la non linéarité stochastique et la non linéarité déterministe ne permet de trancher que modérément. Pour la première, les estimations concernant les modèles ARCH et GARCH sont très satisfaisantes ; nous préférons cependant retenir le processus GARCH pour son pouvoir explicatif supérieur. Pour la seconde, les réseaux de neurones nous ont permis de calculer l'exposant de LYAPUNOV de chaque série. Cet exposant est la seule manière rigoureuse de mesurer le chaos. Il est positif dans la majorité des cas, signe d'une évolution chaotique déterministe. Mais le désordre important qu'il suppose, en plus de l'imprévisibilité liée au chaos, empêche toute tentative d'utilisation de cette structure déterministe.

La présence de bruiteurs sur le marché français semble établie. La notion d'efficience bruitée prend tout son sens à travers l'étude empirique. Cependant les

modalités de représentation sont encore difficiles à établir du fait, entre autres, du manque de connaissance dont nous disposons à l'heure actuelle concernant l'utilisation du chaos déterministe. L'avenir peut éventuellement remédier à ce problème. Mais avant cela, l'efficiencia bruitée a besoin, de mieux s'appuyer sur des modèles de comportement incluant les bruiteurs et sur la base desquels il sera possible de mieux expliquer les propriétés empiriques des marchés financiers.

## ***BIBLIOGRAPHIE***





**ACZEL A.D., JOSEPHY N.H.**, (1991), The chaotic behavior of foreign exchange rates, The American Economist, vol. 35, n° 2, pages 16-24

**ALEXANDER S.S.**, (1961), Price movements in Speculative Markets: Trend or Random Walk, Industrial Management Review, vol. 2, n° 2, pages 7-26

**ALEXANDRE H.**, (1992), La Quasi Marche Aléatoire, Finance, vol. 13, n°2, pages 5-21

**ALEXANDRE H., ERTUR K.C.** (1993), Impact de la fréquence d'échantillonnage sur les tests d'efficience : application au marché français des actions, document de travail

**ANDREWS D.**, (1991), Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation, Econometrica, vol. 59, pages 817-858

**ANG J.S., SCHWARZ T.**, (1985), Risk Aversion and Information Structure: An Experimental Study of Price Variability in the Securities Markets, Journal of Finance, vol. 40, n° 3, pages 825-841

**ARNOUX P., CHEMLA K.**, (1992), Systèmes dynamiques et théorie ergodique, dans l'ouvrage collectif Chaos et déterminisme, sous la direction de CHABERT J.L., CHEMLA K. et DAHAN DALMEDICO A., pages 41-67

**ARTUS P., KAABI M.**, (1993), Mimétisme : un modèle théorique simple et une application au cas de la structure des taux d'intérêt aux Etats-unis, en Allemagne et en France, Document de la Caisse des Dépôts et Consignations, 46 pages

**BACHELIER L.**, (1900), Theory of speculation repris en 1964 par COOTNER P. 'The random character of stock market prices', MIT Press, Massachussets, pages 17-78.

**BALL R., KOTHARI S.P.**, (1989), Nonstationary Expected Returns. Implications for Tests of Market Efficiency and Serial Correlation in Returns, Journal of Financial Economics, vol. 25, pages 51-74

**BANZ R.W.**, (1981), The Relationship between Return and Market Value of Common Stocks, Journal of Financial Economics, vol. 9, pages 3-18

**BASU S.**, (1977), Investment Performance of common Stocks in Relation to their Price-Earnings Ratios: A Test of the Efficient Market Hypothesis, Journal of Finance, vol. 32, n° 3, pages 663-682

**BASU S.**, (1983), The relationship between earnings yield, market value, and return for NYSE common stocks : further evidence, Journal of Financial Economics, vol. 12, pages 129-156

**BAUMOL W.J., BENHABIB J.**, (1989), Chaos: Significance, mechanism, and economic applications, Journal of Economic Perspectives, vol. 3, n° 1, pages 77-105

**BAUMOL W.J., QUANDT R.E.**, (1985), Chaos models and their implications for forecasting, Eastern Economic Journal, vol. 11, n° 1, pages 3-15

**BAWA R.W., KLEIN V.S.**, (1977), The effect of limited information and estimation risk on optimal portfolio Diversification, Journal of Financial Economics, vol. 5, pages 89-111

**BEJA A., GOLDMAN M.B.**, (1980), On The Dynamic Behavior of Prices in Disequilibrium, Journal of Finance, vol. 35, 2, pages 235-247

**BERGÉ P., DUBOIS M.**, (1992), Chaos déterministe expérimental et attracteurs étranges, dans l'ouvrage collectif Chaos et déterminisme, sous la direction de CHABERT J.L., CHEMLA K. et DAHAN DALMEDICO A., pages 115-169

**BERGÉ P., POMEAU Y., VIDAL C.**, (1988), L'ordre dans le chaos. Vers une approche déterministe de la turbulence, Hermann, 353 pages

**BERNARD C.**, (1865), Introduction à l'étude de la médecine expérimentale, Paris, Delagrave, réédition Flammarion, 1984

**BERNARD C.**, (1878), Leçons sur les phénomènes de la vie communs aux animaux et aux végétaux, Paris, Baillière

**BERTHON J., GALLAIS-HAMONNO G.**, (1989), L'assurance de portefeuille : Théorie et pratique, Analyse financière, 2è trimestre, pages 57-70

**BERNDT E.K., HALL B., HALL R.E., HAUSMAN J.A.**, (1974), Estimation inference in nonlinear structural models, Annals of Economic and Social Measure, vol. 4, pages 653-665

**BESICOVITCH A.S.**, (1935), On the sum of digits on real numbers represented in the dyadic system (on the sets of fractional dimension II), Mathematische Annalen, vol. 110, pages 321-330

**BIKHCHANDANI S., HIRSHLEIFER D., WELCH I.,** (1992), A theory of Fads, Fashion, Custom and Cultural Changes as Informational Cascades, Journal of Political Economy, vol. 100, n°5, pages 992-1026

**BLACK F.,** (1976), Studies of stock market volatility changes, Proceedings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section, pages 177-181

**BLACK F.,** (1986), Noise, Journal of Finance, vol. 41, 3, pages 529-543

**BLACK F., JONES R.** (1986), Simplifying Portfolio Insurance, Portfolio Strategy, Goldman Sachs

**BLANK S.C.,** (1991), “Chaos” in Futures Markets? A Nonlinear Dynamical Analysis, The Journal of Futures Markets, vol. 6, pages 711-728

**BOLLERSLEV T.,** (1986), Generalised AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity, Journal of Econometrics, vol. 31, pages 307-327.

**BOLLERSLEV T., ENGLE R.F.,** (1986), Modelling the persistence of conditional variances, Econometric Review, vol. 5, pages 1-50

**BOX G. JENKINS J.M.,** (1976), Time series analysis: forecasting and control, Holden-Day San-Francisco CA

**BOX G. PIERCE G.,** (1970), Distribution of residual autocorrelation in autoregressive integrated moving average time series models, Journal of the American Statistical Association, vol. 65, pages 1509-1529

**BROCK W.A.,** (1986), Distinguished random and deterministic systems, Journal of Economic Theory, vol. 40, pages 168-195

**BROCK W.A., DECHERT W., SCHEINKMAN J.,** (1987), A test for independence based on the correlation dimension, Document non publié, University of Wisconsin at Madison, University of Houston and University of Chicago.

**BROCK W.A., MALLIARIS A.G.,** (1989), Differential equations, stability and chaos in dynamics economics, North-Holland. Advanced textbooks in Economics, 389 pages

**BRORSEN B.W., YANG S.R.,** (1993), Nonlinear Dynamics of Daily Futures Prices : Conditional Heteroskedasticity or Chaos, The Journal of Futures Markets, vol. 13, n° 2, pages 175-191

**BROWN K.C., HARLOW W.V., TINIC S.M.,** (1988), Risk Aversion, Uncertain information, and Market Efficiency, Journal of Financial Economics, vol. 21, pages 355-386

**BROWN S.J., WARNER J.B.,** (1980), Measuring security price performance, Journal of Financial Economics, vol. 8, pages 205-258

**CAMPBELL J.Y., KYLE A.,** (1987), Smart Money, noise Trading, and Stock Price Behavior, Working paper. Princeton University,

**CANTOR G.,** (1932), Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, Editions Zermelo, Berlin

**CHAREST G.,** (1978), Dividend Information, Stock returns and Market Efficiency-II, Journal of Financial Economics, vol. 6, pages 297-330

**CHEN N.F., ROLL R., ROSS S.A.,**(1986), Economic forces and the stock market, Journal of Business, vol. 56, pages 383-403

**CHUA L.O., PARKER T.S.,**(1989), Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems, Springer-Verlag, 348 pages

**COCCO F. PARUOLO P.,** (1990), Volatility persistence and the Italian risk premium: parametric and non-parametric evaluation, Working paper, 30 pages

**COOTNER P.H.,** (1964), The Random Character of Stock Market Prices, MIT Press, 535 pages

**CUTLER D.M., POTERBA J.M., SUMMERS L.H.,**(1989), What Moves Stock Prices ?, The Journal of Portfolio Management, vol; 15,,pages 4-12

**DAVIES R., HARTE D.,** (1987), Tests for Hurst Effect, Biometrika, vol. 74, pages 95-101

**DAY R.H., HUANG W.,** (1990), Bulls, Bears and market Sheep, Journal of Economic Behavior and Organization, vol. 14, pages 299-329

**DAY R.H., PIANIGIANI G.,** (1991), Statistical dynamics and economics, Journal of Economic Behavior and Organization, vol. 16, pages 37-83

**DAY R.H., SHAFER W.**, (1987), Ergodic Fluctuations in deterministic economic models, Journal of Economic Behavior and Organization, vol. 8, pages 339-361

**DE BONDT W.F.M., THALER R.**, (1985), Does the stock market overreact ?, Journal of Finance, vol. 40, n°3, pages 793-805

**DECOSTER G.P., LABYS W.C., MITCHELL D.W.**, (1992), Evidence of Chaos in Commodity Futures Prices, The Journal of Futures Markets, vol. 12, n°3, pages 291-305

**DELONG J.B., SHLEIFER A., SUMMERS L.H., WALDMANN R.J.**, (1989), The size and the incidence of the losses from noise trading, Journal of Finance, vol. 44, n° 3, pages 681-696

**DELONG J.B., SHLEIFER A., SUMMERS L.H., WALDMANN R.J.**, (1990), Noise Trader Risk in Financial Markets, Journal of Political Economy, vol. 98, n° 4, pages 703-738

**DICKEY D., BELL W.R., MILLER R.B.**, (1986), Unit Roots in Time Series Models: Tests and Implications, The American Statistician, vol. 40, pages 12-26

**DICKEY D., FULLER W.**, (1979), Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root, Journal of the American Statistical Association, vol. 74, pages 427-431

**DICKEY D., FULLER W.**, (1981), Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root, Econometrica, vol. 49, pages 1057-1072

**DOUADY A.**, (1992), Déterminisme et indéterminisme dans un modèle mathématique, dans l'ouvrage collectif Chaos et déterminisme, sous la direction de CHABERT J.L., CHEMLA K. et DAHAN DALMEDICO A., pages 11-18

**ECKMANN. J.P.**, (1992), Mesures dans un système dynamique chaotique, dans l'ouvrage collectif Chaos et déterminisme, sous la direction de CHABERT J.L., CHEMLA K. et DAHAN DALMEDICO A., pages 91-114

**EKELAND I.**, (1984), Le calcul, l'Imprévu. Les figures du temps de KEPLER à THOM, Coll Sciences, Points, 166 pages

**EKELAND I.**, (1991), Au hasard. La chance, la science et le monde, Coll science ouverte, Seuil, 199 pages

**ENGLE R.F.**, (1979), A general approach to the construction of model diagnostic based upon the Lagrange Multiplier principle, Working paper, University of California, San Diego

**ENGLE R.F.**, (1982), Autoregressive Conditionnal Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. inflation, *Econometrica*, vol. 50, pages 987-1008

**ENGLE R.F., LILIEN D. M. ROBINS R.P.**, (1987), Estimating time varying premia in the term structure: the ARCH-M model, *Econometrica*, vol. 55, pages 391-407

**ERTUR K.C.**, (1991), Une stratégie de test de la racine unitaire, Cahier de l'IME, n° 9104, 38 pages

**ERTUR K.C.**, (1992), Tests de non stationnarité. Application au PIB réel, Thèse de doctorat, soutenue le 9 juin 1992 à Dijon, 298 pages

**FAMA E.F.**, (1963), Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis, *Journal of Business*, vol. 36, 4, pages 420-429

**FAMA E.F.**, (1965), The behaviour of stock market prices, *Journal of Business*, vol. 38, pages 34-105.

**FAMA E.F.**, (1970), Efficient capital markets: a review of theory and empirical work, *Journal of Finance* , vol. 25, pages 383-417

**FAMA E.F.**, (1991), Efficient capital markets: II, *Journal of Finance* , vol. 46, pages 1575-1615

**FAMA E.F., FRENCH K.R.**, (1988a), Dividend Yields and Expected Stock Returns, *Journal of Financial Economics*, vol. 22, pages 3-25

**FAMA E.F., FRENCH K.R.**, (1988b), Permanent and Temporary Components of Stock prices, *Journal of Political Economy*, vol. 96, 2, pages 246-273

**FAMA E.F., FRENCH K.R.**, (1991), The cross section of expected stock returns, Unpublished Manuscript, Graduate School of Business, University of Chicago

**FLAVIN M.A.**, (1983), Excess Volatility in the Financial Markets: A Reassessment of the Empirical Evidence, *Journal of Political Economy*, vol. 91, 6, pages 929-956

**FONTAINE P.**, (1990a), Les cours des marchés d'actions suivent-ils une marche au hasard ?, *Finance* , vol. 11, 1, pages 107-121

**FONTAINE P.**, (1990b), Peut-on prédire l'évolution des marchés d'actions à partir des cours et des dividendes passés ? (tests de marche au hasard et de co-intégration), Journal de la Société de Statistique de Paris , tome 131, n° 1, pages 16-36

**FRENCH K.R.**, (1980), Stock return and the weekend effect, Journal of Financial Economics, vol. 8, pages 55-69

**FRENCH K.R., ROLL R.**, (1986), Stock Return Variances. The Arrival of Information and the Reaction of Traders, Journal of Financial Economics, vol. 17, pages 5-26

**GIRERD-POTIN K.R., TARAMASCO R.**, (1992), Les rentabilités à la Bourse de Paris sont-elles chaotiques, Document non publié, 23 pages

**GLEICK J.**, (1987), La théorie du Chaos : vers une nouvelle science, traduit de l'anglais par C. JEANMOUGIN, Champs Flammarion, 431 pages

**GOURIEROUX C.**, (1990), Modèles ARCH. Applications financières et monétaires, CREST-CEPREMAP, 93 pages

**GOURIEROUX C., MONFORT A.**, (1990), Séries temporelles et modèles dynamiques, Collection "Economie et statistiques avancées", Economica, 780 pages

**GRANGER C.W., ANDERSEN A.**, (1978), An introduction to bilinear time-series models, Göttingen : Vandenhoeck and Ruprecht

**GRASSBERGER., PROCACCIA.**, (1983), Measuring the strangeness of strange attractors, Physica 9D, pages 189-208

**GRANGER C.W., MORGENSTERN O.**, (1970), Predictability of stock market prices, HEATH Lexington Massachussets

**GREENE M.T., FIELITZ B.D.**, (1977), Long-term Dependence in Common Stock returns, Journal of Financial Economics, vol. 4, pages 339-349

**GREIG A.C.**, (1992), Fundamental analysis and subsequent stock returns, Journal of Accounting and Economics, vol. 15, pages 413-442

**GROSSMAN S.J., SHILLER R.J.**, (1981), The Determinants of the Variability of Stock Market Prices, American Economic Review, vol. 71, pages 222-227

**GROSSMAN S.J., STIGLITZ J.E.,** (1976), Information and Competitive Price Systems, American Economic Review, vol. 66, 2, pages 246-253

**GROSSMAN S.J., STIGLITZ J.E.,** (1980), On the Impossibility of Informationally Efficient Markets, American Economic Review, vol. 70, 3, pages 393-408

**GUITTON J., BOGDANOV G., BOGDANOV I.,**(1991), Dieu et la science, Collection Grasset, 196 pages

**HAMON J., JACQUILLAT B.,** (1992), Le marché français des actions. Etudes empiriques 1977-1991, Coll Finance, PUF, 457 pages

**HARRISON J.M., KREPS D.M.,** (1978), Speculative Investor Behavior in a Stock Market with Heterogeneous, Quarterly journal of Economics, May 1978, pages 323-336

**HAUSDORFF F.,** (1919), Dimension und äusseres Mass, Mathematische Annalen, vol. 79, pages 157-179

**HENIN P.Y., JOBERT T.,** (1990), Persistance du chômage et hystérèse : une étude économétrique comparative, Modélisation du marché du travail, Actes du Colloque I, Association d'Econométrie Appliquée, Strasbourg, Décembre 1990, pages 235-250

**HENON M.,** (1976), A two-dimensionnal mapping with a strange attractor, Communications in Mathematical Physics, vol; 50, pages 69-77

**HSIEH D.A.,** (1989), Testing for nonlinear dependence in daily foreign exchange rates, Journal of Business, vol. 62, 3, pages 339-368

**HSIEH D.A.,** (1991), Chaos and nonlinear Dynamics : Application to Financial Markets, The journal of Finance, vol. 46, n° 5, pages 1839-1877

**HSU D.A.,** (1977), Test for Variance shift at an unknown time point, Applied Statistics, vol. 26, pages 279-284

**HSU D.A.,** (1982), A Bayesian robust detection of shift in the risk structure of stock market returns, Journal of the American Statistical Association, vol. 77, pages 29-39

**HURST H.,** (1951), Long-Term Storage Capacity of Reservoirs, Transactions of the American Society of Civil Engineers, vol. 116, pages 770-799



**ISRAEL G.**, (1992), L'histoire du principe du déterminisme et ses rencontres avec les mathématiques, dans l'ouvrage collectif Chaos et déterminisme, sous la direction de CHABERT J.L., CHEMLA K. et DAHAN DALMEDICO A., pages 249-273

**JENSEN M.C.**, (1978), Some Anomalous Evidence regarding Market Efficiency, Journal of Financial Economics, vol. 6, pages 95-101

**KAHNEMAN D., TVERSKY A.**, (1972), Subjective Probability: A Judgment of Representativeness, Cognitive Psychology, vol. 3, pages 430-454

**KAHNEMAN D., TVERSKY A.**, (1973), On the Psychology of Prediction, Psychological Review, vol. 80, pages 237-251

**KAHNEMAN D., TVERSKY A.**, (1974), Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases, Science, vol. 185, pages 1124-1131

**KAASHOEK J.F., VAN DIJK H.K.**, (1991), Evaluation and Application of numerical procedures to calculate Lyapunov exponents, cahier 9173/A, Erasmus University, Rotterdam, 38 pages

**KEIM D.B.**, (1983), Size-Related anomalies and Stock return Seasonality: Further Empirical Evidence, Journal of Financial Economics, vol. 12, pages 13-32

**KEIM D.B., STAMBAUGH R.F.**, (1986), Predicting Returns in the Stock and Bond Markets, Journal of Financial Economics, vol. 17, pages 357-390

**KELSEY D.**, (1988), The Economics of Chaos or the Chaos of Economics, Oxford Economic Papers, vol. 40

**KENDALL M.G.**, (1953), The analysis of Economic Time-Series- Part I: Prices, Journal of the Royal Statistical Society, vol. 96, pages 11-25

**KENNEDY D.**, (1976), The distribution of the Maximum Brownian Excursion, Journal of Applied Probability, vol. 13, pages 371-376

**KEYNES J.M.**, (1936), The General Theorie of Unemployment, Interest and Money, MacMillan. Londres

**KLEIDON A.W.**, (1986), Bias in Small Sample Tests of Stock Price Rationality, Journal of Business, vol. 59, 2, pages 237-261

**KLEIDON A.W.**, (1988), Bubbles, Fads and Stock Price Volatility Tests: A Partial Evaluation : Discussion, Journal of Finance, vol. 43, 3, pages 656-659

**KOLMOGOROV A.N.**, (1958), Doklady Akad. Naouk SSSR, t. 119, vol. 5, page 861.

**LACIVITA C.J., LEROY S.F.**, (1981), Risk Aversion and the Dispersion of Asset Prices, Journal of Business, vol. 54, 4, pages 535-547

**LANDAU L., LIFCHITZ L.**, (1971), Mécanique des fluides, Mir, Moscou

**LAPLACE P.S.**, (1774), Essais philosophiques sur les probabilités, réédition Bourgois, 1986, pages 32-33

**LAPLACE P.S.**, (1810), Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grand nombres, et leur application aux probabilités, Œuvres complètes, tome 12, page 301-353

**LEASE R.C., LEWELLEN W.G., SCHLARBAUM G.E.**, (1974), The Individual Investor : Attributes and Atitudes, Journal of Finance, vol. 29, pages 413-433

**LEBARON B.**, (1989), Nonlinear dynamics and stock returns, Journal of Business, vol. 62, n° 3, pages 311-337

**LEBARON B., SCHEINKMAN J.**, (1988), Nonlinear dynamics and stock return, Working paper, University of Chicago.

**LEIBNIZ G.W.**, (1721), Principe de la nature et de la grâce, fondés en raison. La Monadologie, A. Robinet, PUF, Paris, 1954

**LEROY S.F.**, (1984), Efficiency and the Variability of Asset Prices, American Economic Review, vol. 74, 2, pages 183-187

**LEROY S.F.**, (1989), Efficient Capital Markets and Martingales, Journal of Economic Literature, vol. 27, pages 1583-1621

**LEROY S.F., PORTER R.D.**, (1981), The Present-Value Relation : Tests Based on Implied Variance-Bounds, Econometrica, vol. 49, 3, pages 555-574

**LEVY P.**, (1925), Calcul des probabilités, Gauthier Villars, Paris

**LI T.Y., YORKE J.A.**, (1975), Period three implies chaos, American Mathematics Monthly, vol 82, pages 985-993

**LINTNER J.**, (1965), The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budget, Review of Economics and Statistics, vol. 47, 1, pages 13-37

**LJUNG G.M.,BOX G.E.P.**, (1978), On the measure of lack of fit in time series models, Biometrika, vol; 67, pages 297-303

**LO A.W.**, (1991), Long-Term Memory in Stock Market Prices, Econometrica, vol. 59, 5, pages 1279-1313

**LO A. MACKINLAY C.**, (1988), Stock market prices do not follow random walks: evidence from a simple specification test, The Review of Financial Studies, vol. 1, pages 41-66

**LONGIN F.**, (1992a), Booms and Crashes. Application of the Extreme Value Theory to the US stock Market, Working paper, University of New-York, 35 pages

**LONGIN F.**, (1992b), Asymmetry in volatility and asymmetry of information in financial markets, Working paper, University of New-York, 39 pages

**LORENZ H.W.**, (1963), Deterministic nonperiodic Flow, Journal of Atmospheric Science, vol. 20, pages 130-141

**LORENZ H.W.**, (1987), Strange attractors in a multisector business cycle model, Journal of Economic Behavior and Organization, vol. 8, pages 397-411

**LUCAS R.E.**, (1978), Asset prices in an exchange economy, Econometrica, vol. 46, n°6, pages 1429-1445

**MANDELBROT B.B.**, (1963), The Variation of Certain Speculative Prices, Journal of Business, vol. 36, n°4, pages 394-419

**MANDELBROT B.B.**, (1971), When can Price be arbitrated Efficiently ? A Limit to the Validity of the Random Walk and Martingale Models, Review of Economics and Statistics, vol. 53, pages 225-236

**MANDELBROT B.B.**, (1972), Statistical Methodology for Non-Periodic Cycles: From the Covariance to R/S analysis, Annals of Economic and Social Measurement, vol. 1, pages 259-290

**MANDELBROT B.B.**, (1975), Limit Theorems on the Self-Normalized Range for Weakly and Strongly Dependent Processes, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, vol. 31, pages 271-285

**MANDELBROT B.B.**, (1982), The fractal geometry of nature, W.H. FREEMAN, New-York.

**MANDELBROT B.B.**, (1986), Comment j'ai découvert les fractales, La Recherche, mars 1986, pages 420-424

**MANDELBROT B.B.**, (1989), Les objets fractals, Troisième édition, suivie de Survol du langage fractal, NBS Flammarion, 268 pages

**MANDELBROT B.B.**, WALLIS J., (1968), Noah, Joseph and Operational Hydrology, Water Resources Research, vol. 4, pages 909-918

**MANDELBROT B.B.**, WALLIS J., (1969), Robustness of the Rescaled Range R/S in the Measurement of Noncyclic Long Run Statistical Dependence, Water Resources Research, vol. 5, pages 967-988

**MARKOWITZ H. M.**, (1952), Portfolio selection, Journal of Finance, pages 77-91.

**MARKOWITZ H.M.**, (1959), Portfolio selection. Efficient diversification of investments, John Wiley and sons, 344 pages

**MATALAS N.C.**, WALLIS J.R., (1970), Small Sample Properties of H and K - Estimators of the Hurst coefficient h, Water Resources Research, vol. 6, pages 1583-1594

**MILL J.S.**, (1844), Essays on Some Unsettled Questions of political Economy, Collected Works, Toronto University Press

**MINGAT A.**, SALMON P., WOLFELSPERGER A., (1985), Méthodologie économique, PUF, Thémis, 576 pages

**NELSON D.B.**, (1991), Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach, Econometrica, vol. 59, n°2, pages 347-370

**NELSON C.R.**, PLOSSER C.I., (1982), Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series : Some Evidence and Implications, journal of Monetary Economics, vol. 10, pages 139-162

**NEWKEY W.K., WEST K.D.,** (1987), A Simple Positive definite Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix, *Econometrica*, vol. 55, pages 703-705

**NEWHOUSE., RUELLE D., TAKENS F.,** (1978), Occurrence of strange axiom-A attractors near quasi-periodic flows on  $T_m$ ,  $m \geq 3$ , *Communications in Mathematical Physics*, vol; 64, pages 35-61

**ORLEAN A.,** (1989), Comportements mimétiques et diversité des opinions sur les marchés financiers, dans “Théorie économique et crise des marchés financiers”, H. BOURGUIGNAT, *Economica*.

**ORLEAN A.,** (1991), Désordres financiers et comportements des investisseurs, *La Recherche*, Mai 1991

**OSBORNE M.F.M.,** (1964), Brownian Motion in the Stock Market, *Operations Research*, vol. 7, pages 145-173

**OU J.A., PENMAN S.H.,** (1989), Financial statement analysis and the prediction of stock returns, *Journal of Accounting and Economics*, vol. 11, pages 295-329

**PEMBERTON J., TONG H.,** (1981), A note on the distribution of non-linear autoregressive stochastic models, *Journal of Time Series Analysis*, vol. 2, n° 1, pages 49-52

**PERRON P.,** (1988), Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series, *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 12, pages 297-332

**PETERS E.E.,** (1991), Chaos and order in the capital market. A new view of cycles, prices, and market volatility, J. WILEY, 240 pages

**POINCARÉ H.,** (1890), Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, *Acta Mathematica*, tome 13, pages 1-270

**POTERBA J.M., SUMMERS L.H.,** (1986), The persistence of Volatility and Stock Market Fluctuations, *American Economic Review*, vol. 76, 5, pages 1142-1151

**PRIESTLEY M.B.,** (1980), State-dependent models : a general approach to non-linear time series analysis, *Journal of Time Series Analysis*, vol. 1, n° 1, pages 47-71

**RAMSEY J.B., YUAN H.J.,** (1987), The statistical properties of dimension calculations using small data sets, Unpublished manuscript, New-York, New-York University

**REINGANUM M.R.,** (1981), Misspecification of capital asset pricing : empirical anomalies based on earning yields and market values, Journal of Financial Economics, vol. 12, pages 89-104

**ROBERTS H.V.,** (1959), Stock-Market "Patterns" and financial analysis: Methodological Suggestions, Journal of Finance, vol. 14, 1, pages 1-10

**ROBINSON P.M.,** (1977), The estimation of a non-linear moving average model, Stochastic Processes and their Application, vol. 5, pages 81-90

**ROGER P.,** (1988), Théorie des marchés efficients et asymétrie d'information : une revue de la littérature, Finance, vol. 9, n°1, pages 57-97

**ROGER P.,** (1991), Les outils de la modélisation financière, PUF, 296 pages

**ROLL R.,** (1983), Was Ist Das ? The Turn-of-the-Year Effect and the Return Premia of Small Firms, Journal of Portfolio Management, vol. 9, 2, pages 18-28

**ROLL R.,** (1988), R-squared, Journal of Finance, vol. 43, pages 541-566

**ROLL R., ROSS S.A.,** (1980), An Empirical Investigation of the Arbitrage Pricing Theorie, Journal of Finance, vol. 35, pages 347-350

**RUELLE D., TAKENS F.,** (1971), On the nature of turbulence, Communications in Mathematical Physics, vol. 20, pages 167-192

**SAMUELSON P.A.,** (1965), Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly, Industrial Management Review, vol. 6, pages 41-49

**SCHEINKMAN J., LEBARON B.,** (1989), Nonlinear dynamics and stock returns, Journal of Business, vol. 62, pages 311-337

**SEYHUN H.N.,** (1986), Insiders' profits, costs of trading, and market efficiency, Journal of Financial Economics, vol. 16, pages 189-212

**SEYHUN H.N.,** (1990), Overreaction or Fundamentals: Some Lessons from insiders' Response to the Market Crash of 1987, Journal of Finance, vol. 45, 5, pages 1363-1388

- SHANKEN J.**, (1982), The Arbitrage pricing Theory : is it testable, Journal of Finance, vol. 37, pages 1129-1140
- SHARPE W.**, (1964), Capital asset prices. A theory of market equilibrium under conditions of risk, Journal of Finance, vol. 19, pages 425-442
- SHILLER R.J.**, (1981), The Use of Volatility Measure in Assessing Market Efficiency, Journal of Finance, vol. 36, 2, pages 291-304
- SHILLER R.J.**, (1984), Stock Prices and social dynamics, Brookings Papers on Economic Activity, vol 2, pages 457-510
- SHILLER R.J.**, (1990), Speculative Prices and Popular Models, Journal of Economic Perspectives, vol 4, n° 2, pages 55-65
- SHLEIFER A., SUMMERS L.H.**, (1990), The Noise Trader Approach to Finance, Journal of Economic Perspectives, vol. 4, n° 2, pages 19-33
- SHLEIFER A., VISHNY R.**, (1990), Equilibrium Short Horizons of Investors and Firms, A.E.R. Papers and Procedures, 80
- SIMON H.A.**, (1978), Rationality as process and as product of thought, American Economic Review, vol. 68
- SINAI Y.G.**, (1992), L'aléatoire du non-aléatoire, dans l'ouvrage collectif Chaos et déterminisme, sous la direction de CHABERT J.L., CHEMLA K. et DAHAN DALMEDICO A., pages 68-90
- SMITH A.**, (1776), Recherches sur la nature et les causes de la richesse des nations, Traduction française. Paris, Guillaumin
- STAMBAUGH R.F.**, (1982), On the exclusion of assets from tests of the two-parameters model : a sensitivity analysis, Journal of Financial Economics. vol. 10, pages 237-268
- STOBER T.L.**, (1992), Summary financial statement measures and analysts' forecasts of earnings, Journal of Accounting and Economics, vol.15, pages 347-372
- SUMMERS L.H.**, (1986), Does the Stock Market Rationally Reflect Fundamental Values ?, Journal of Finance, vol. 41, 3, pages 591-602
- TAKENS F.**, (1981), Detecting strange attractors in turbulence, in Dynamical systems and turbulence, D.A. RAND and L.S. YOUNG, Springer-Verlag, Berlin

**TAYLOR S.**, (1986), Modelling financial time series, John Wiley & sons , 268 pages.

**THOM R.**, (1990), La querelle du déterminisme, Gallimard, coll. “Le Débat”, Paris

**TONG H., LIM K.**, (1980), Treshold autoregression, limit cycles, and cyclical data, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, vol. 42, pages 245-292

**TSAY R.**, (1986), Nonlinearity tests for time series, Biometrika, vol. 73, pages 461-466

**VARIAN H.R.**, (1985), Divergence of opinion in complet markets : a Note, Journal of Finance, vol 40, n° 1, pages 309-317

**VAN DER PLOEG F.**, (1986), Rational expectations, risk and chaos in financial markets, Economic Journal, vol. 96, pages 151-162

**VON KOCH H.**, (1904), Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, vol. 1, pages 681-704

**VON NEUMANN J., MORGENSTERN O.**, (1953), Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press

**WALTER C.**, (1989), Les risques de marché et les distributions de LEVY, Analyse financière, 3<sup>e</sup> trimestre 1989, pages 40-50

**WILLIAMS J.B.**, (1938), The Theory of Investment Value, Harvard University Press

**WOLF A., SWIFT J.B., SWINNEY H.L., VASTANO J.A.**, (1985), Determining Lyapunov Exponents from a Time Serie, Physica 16D, pages 285-317

**WORKING H.**, (1934), A Random Difference Series for Use in the Analysis of Time Series, Journal of the American Statistical Association, vol. 29, pages 11-24

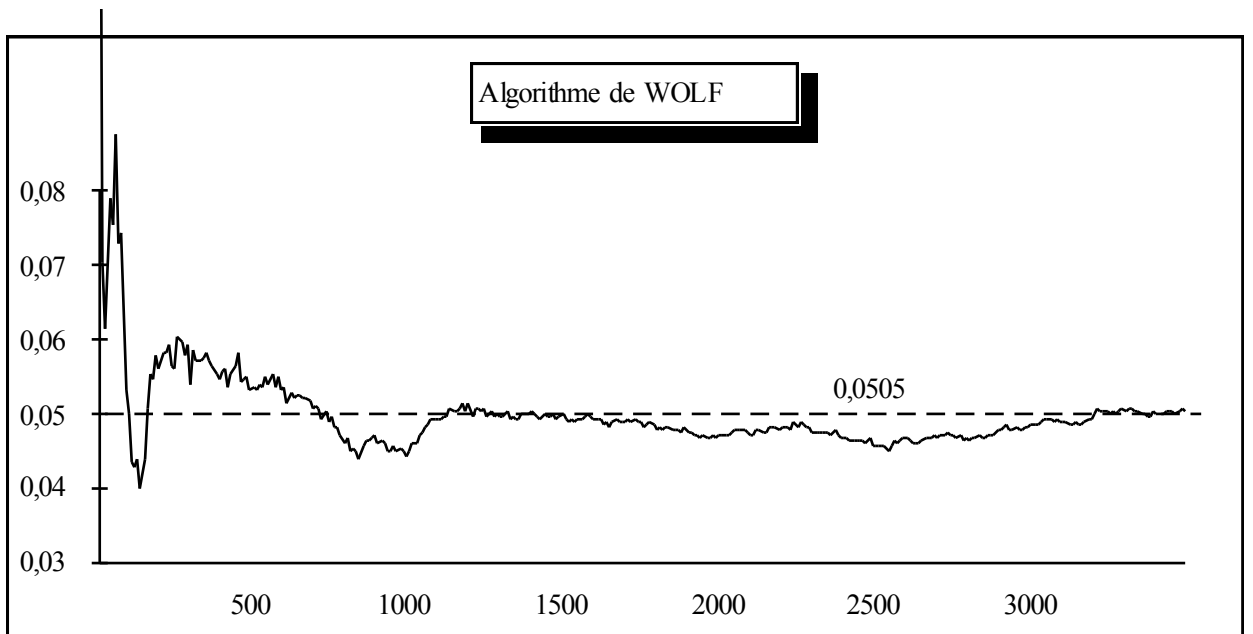
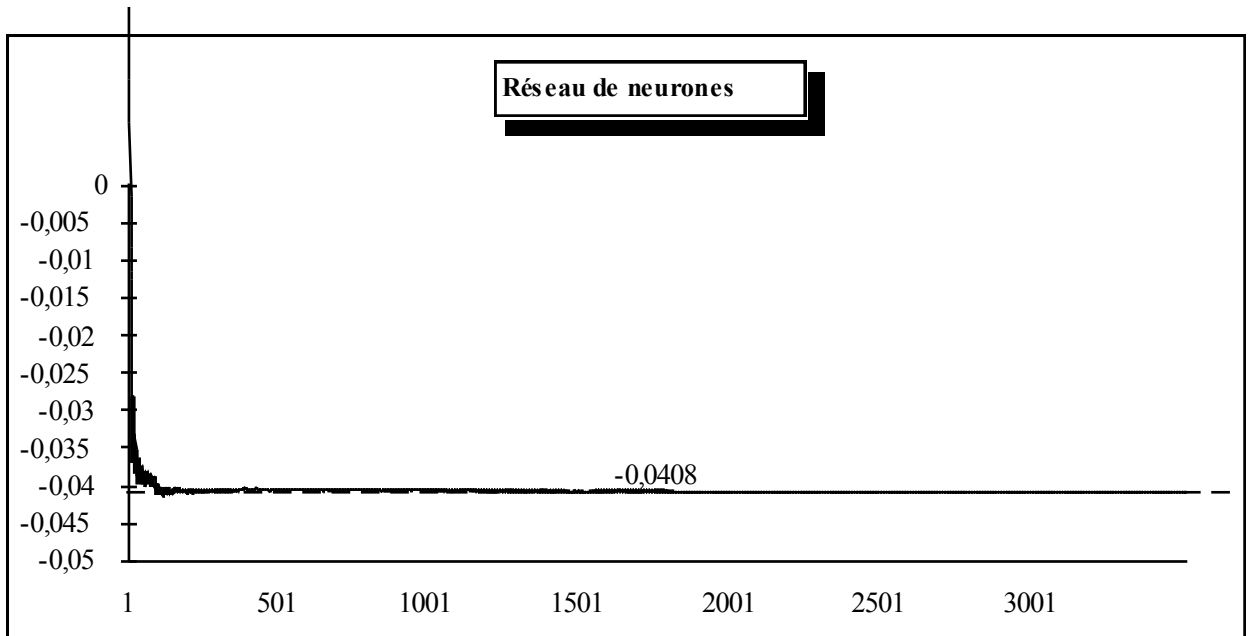


## ***ANNEXES***

Annexe 1a

EXPOSANT DE LYAPUNOV

Accor



## Annexe 2

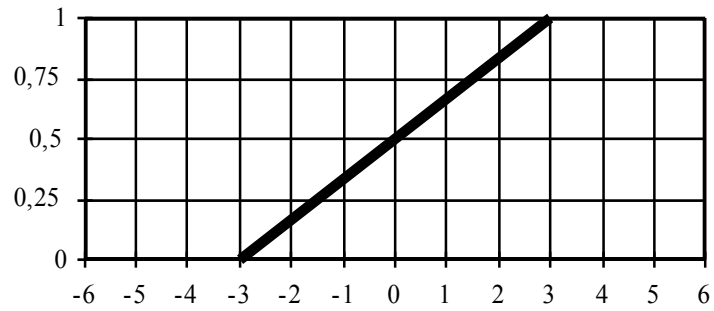
Stratégie de test de racine unitaire (ERTUR, 1991)

Avec l'autorisation de ERTUR (1991)

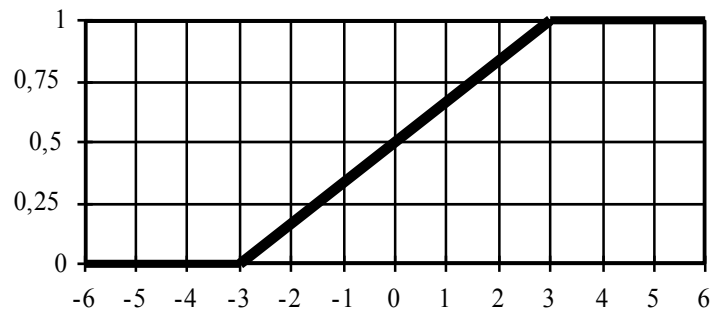
## Annexe 3

### Principales fonctions de transfert des réseaux de neurones

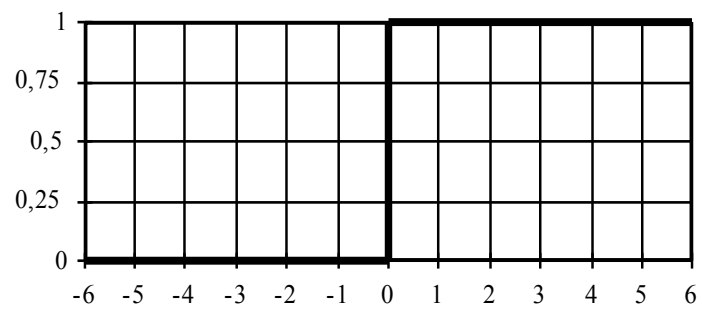
Fonction de transfert linéaire



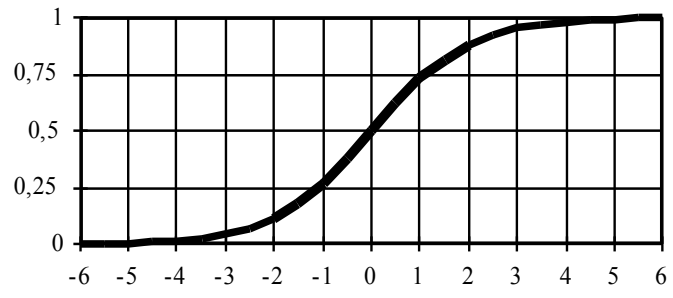
Fonction de transfert linéaire par morceaux



Fonction de transfert par pas

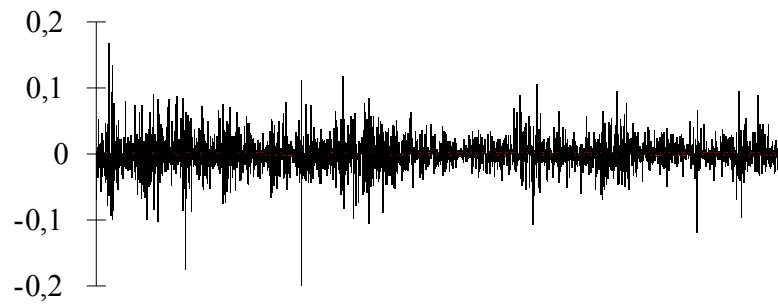


Fonction de transfert sigmoïdale



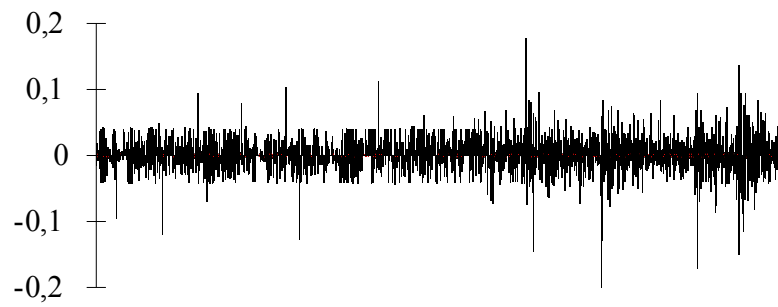
Annexe 4a

**Accor**



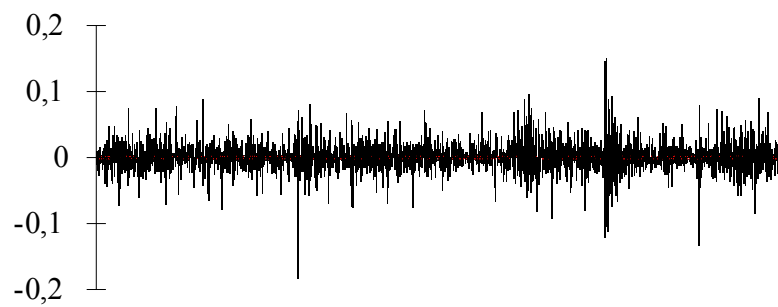
Annexe 4b

**Carnaud MetalBox**



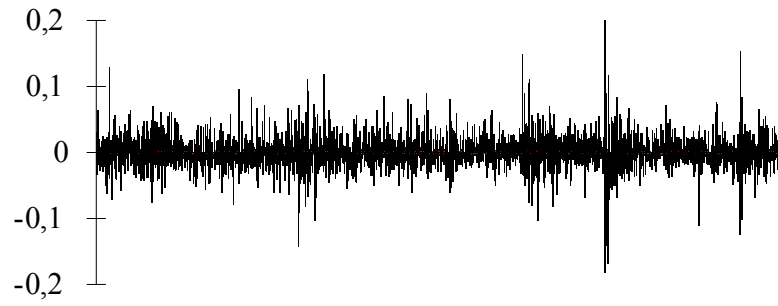
Annexe 4c

**Lafarge Coppée**



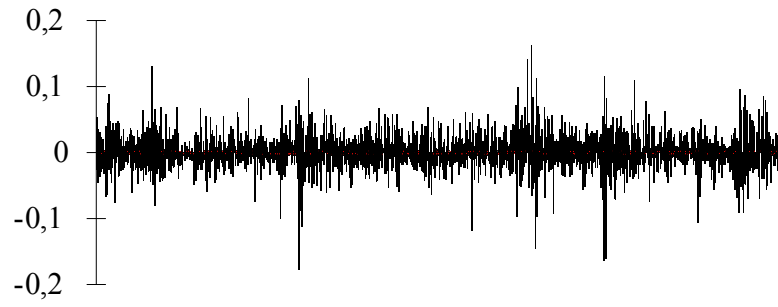
Annexe 4d

**Peugeot SA**



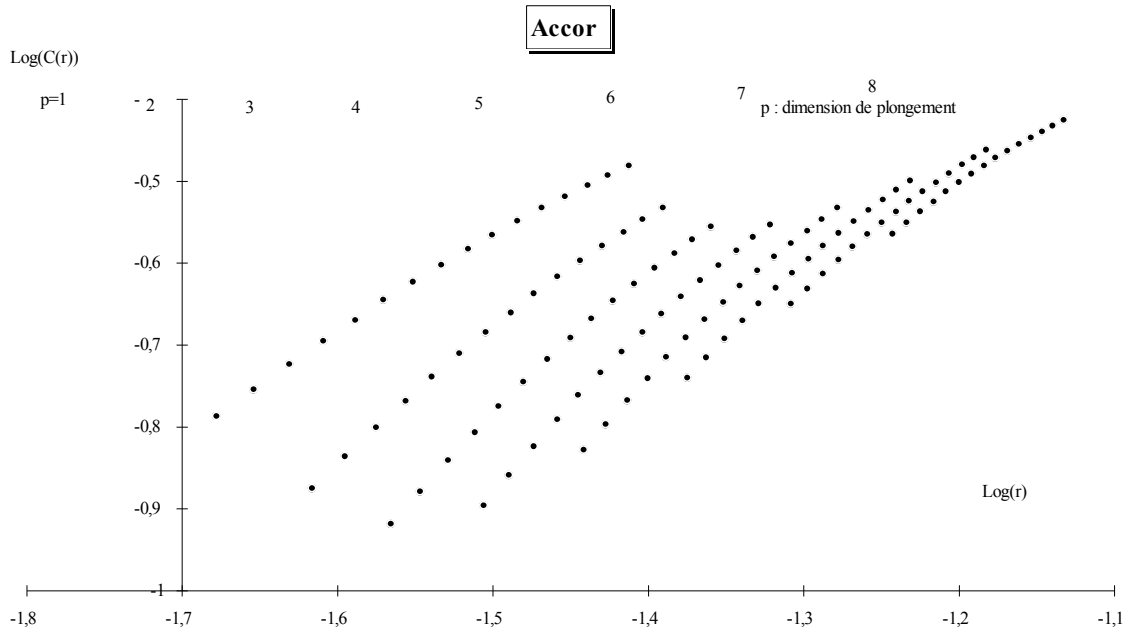
Annexe 4e

**Valéo**

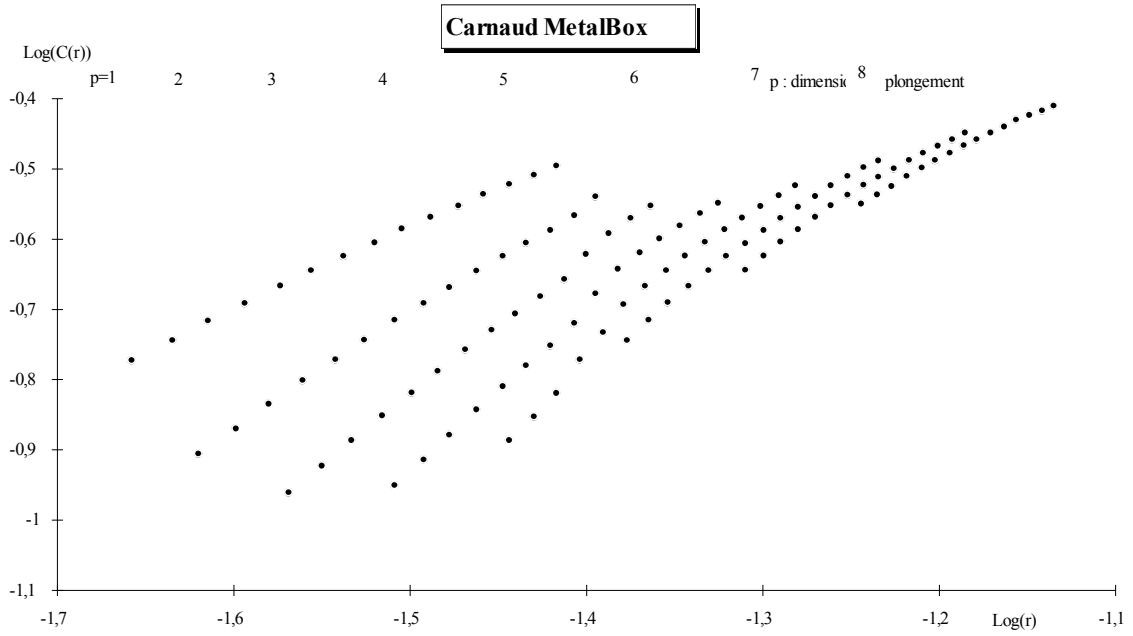




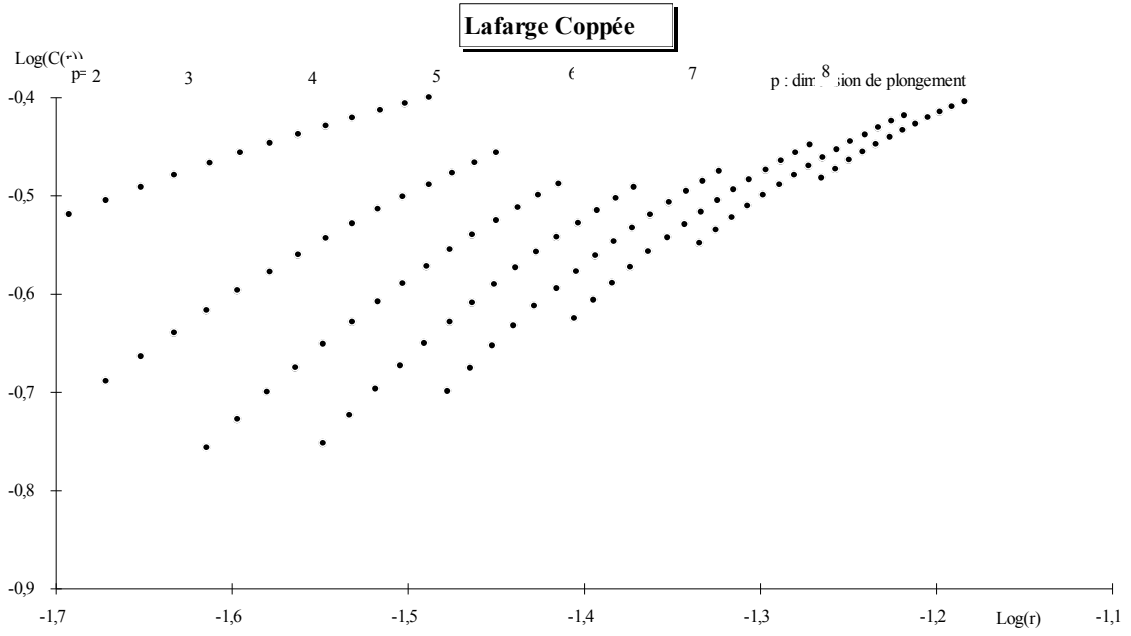
### Annexe 5a



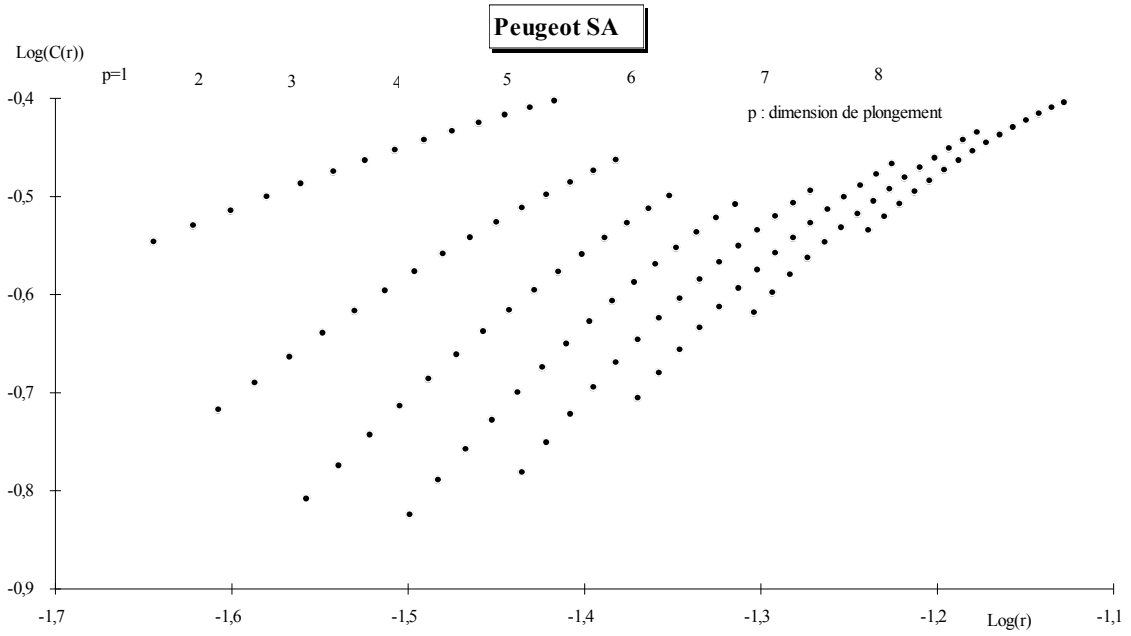
### Annexe 5b



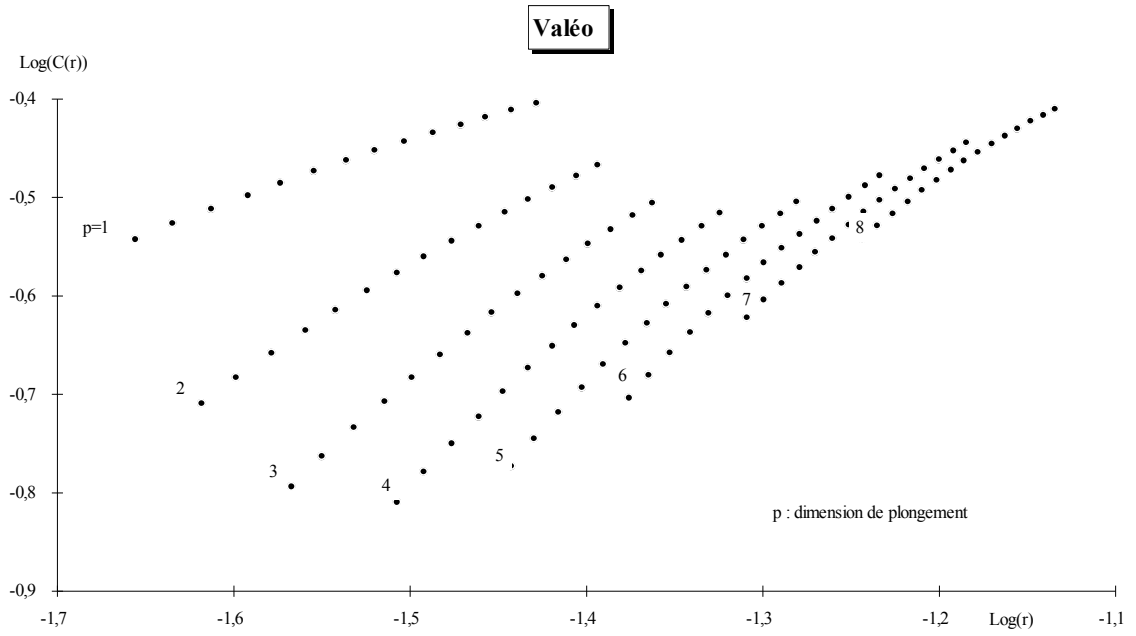
### Annexe 5c



### Annexe 5d



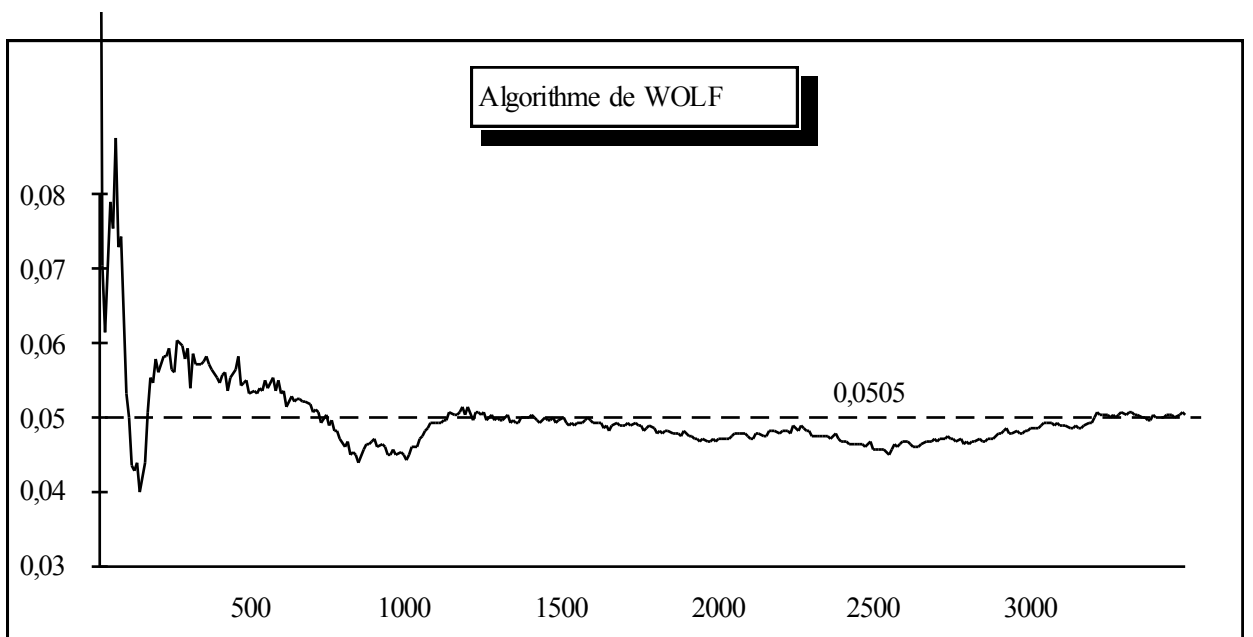
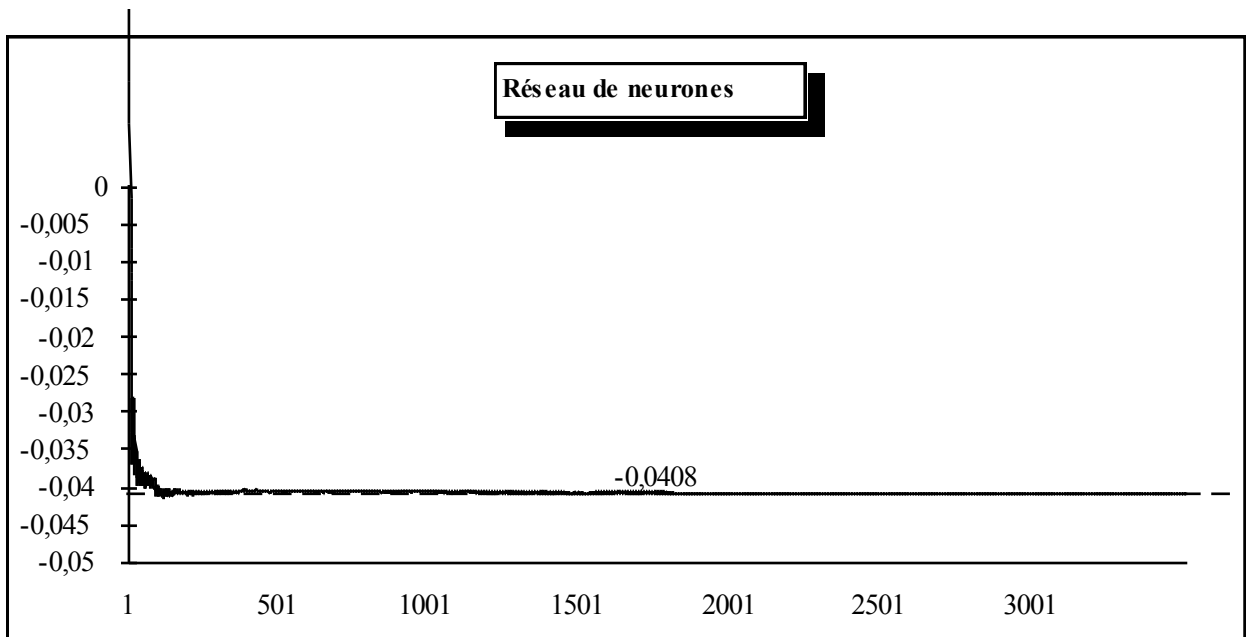
# Annexe 5e



Annexe 6a

EXPOSANT DE LYAPUNOV

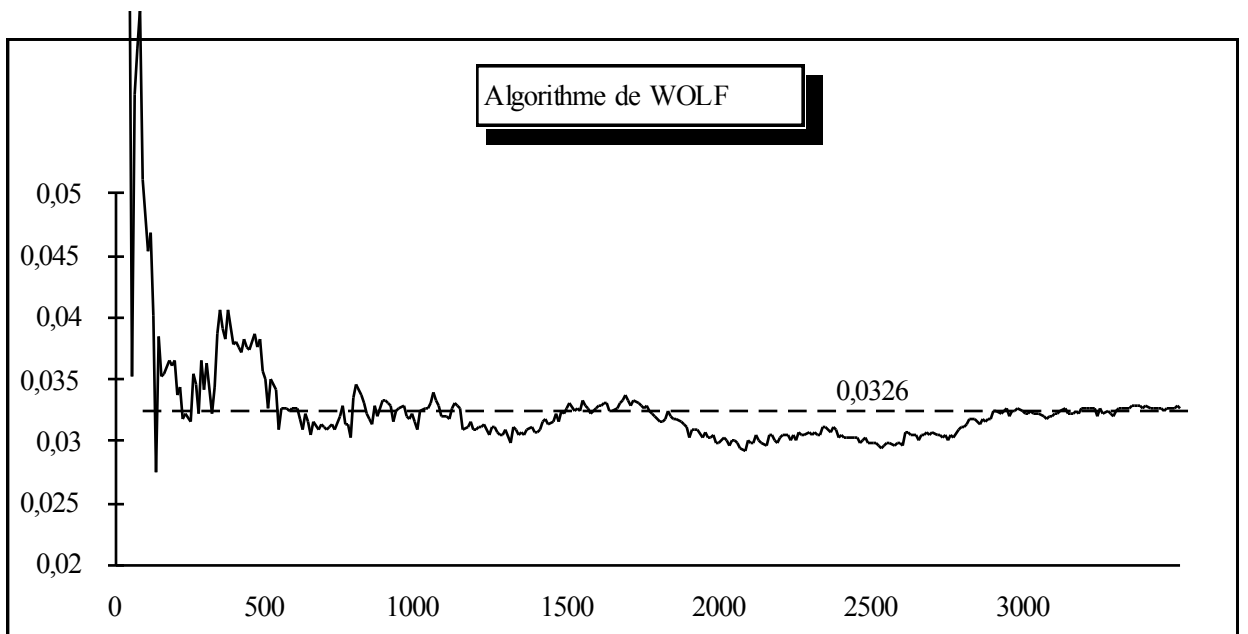
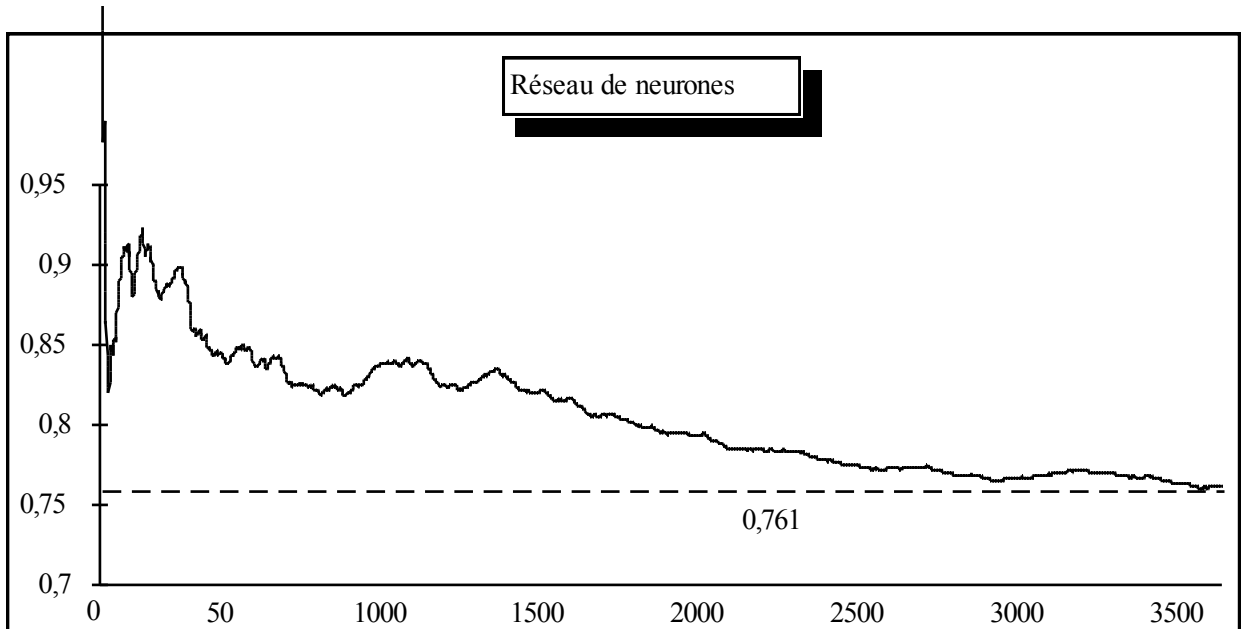
Accor



Annexe 6b

EXPOSANT DE LYAPUNOV

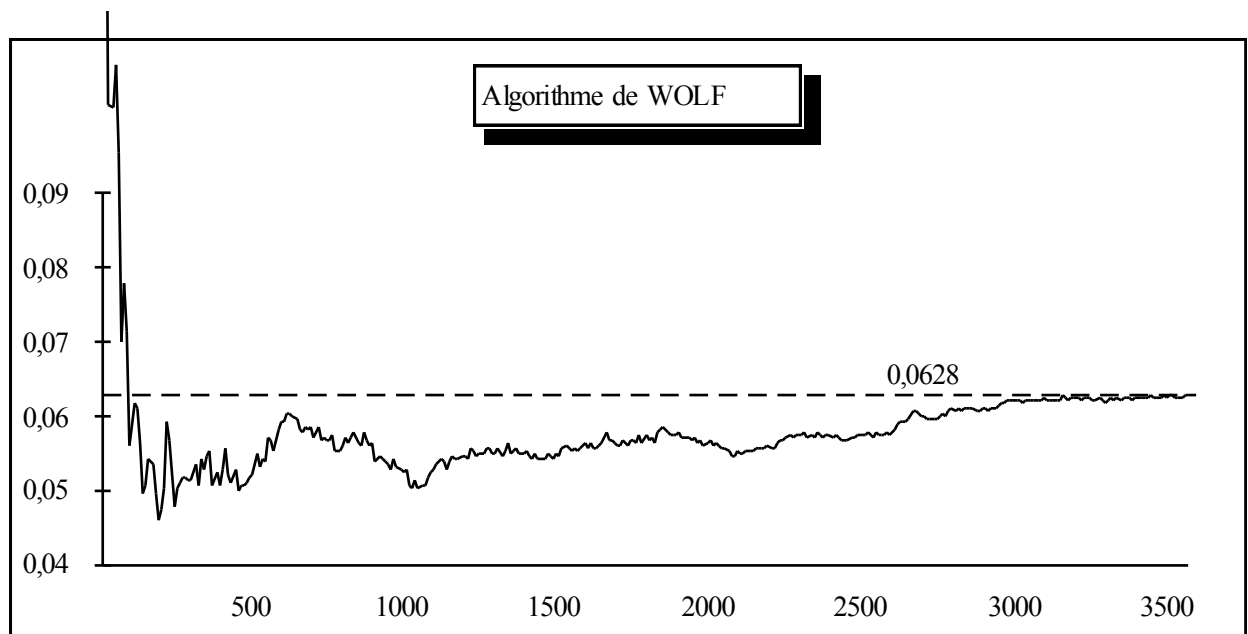
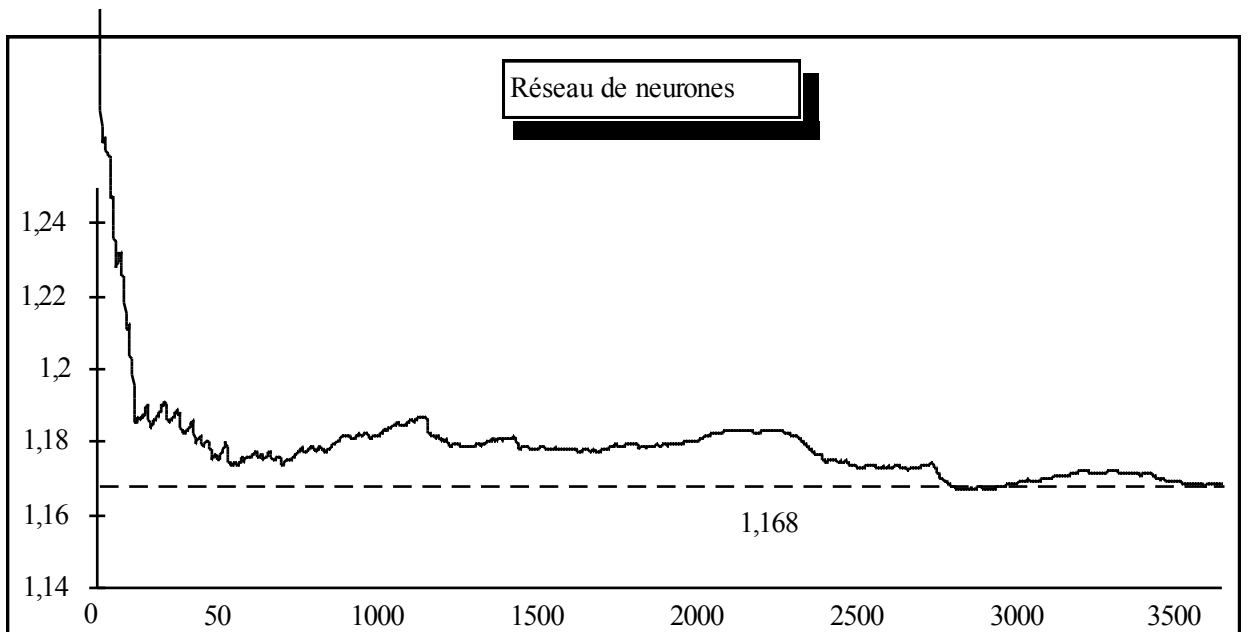
Carnaud MetalBox



Annexe 6c

EXPOSANT DE LYAPUNOV

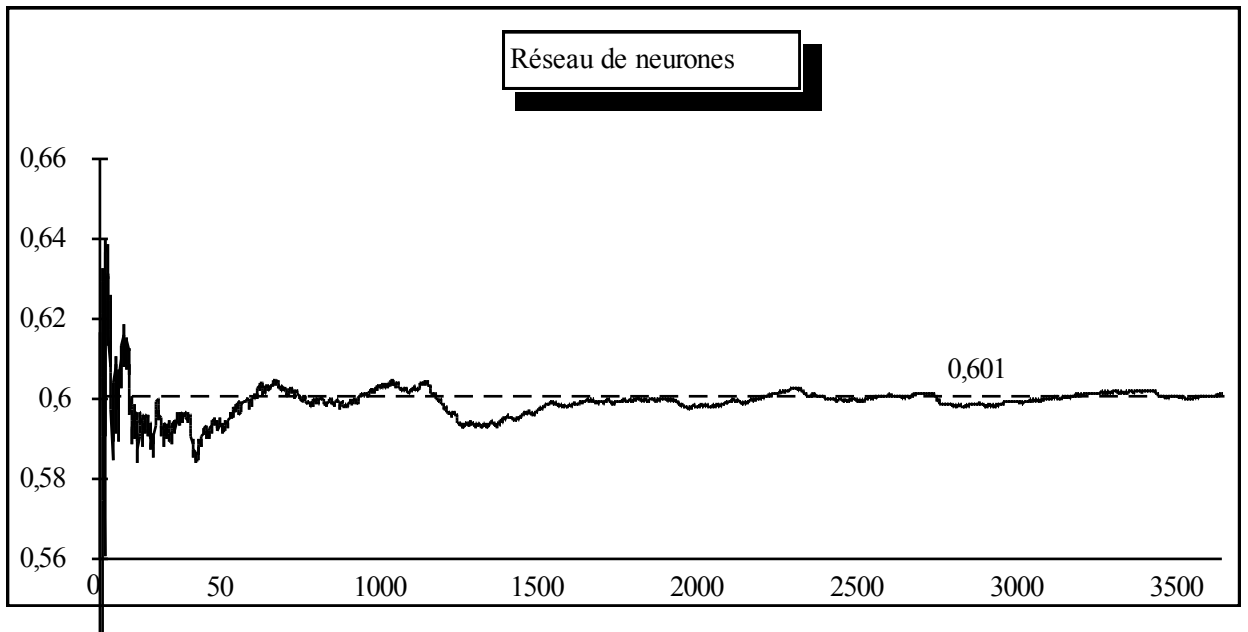
Lafarge-Coppée

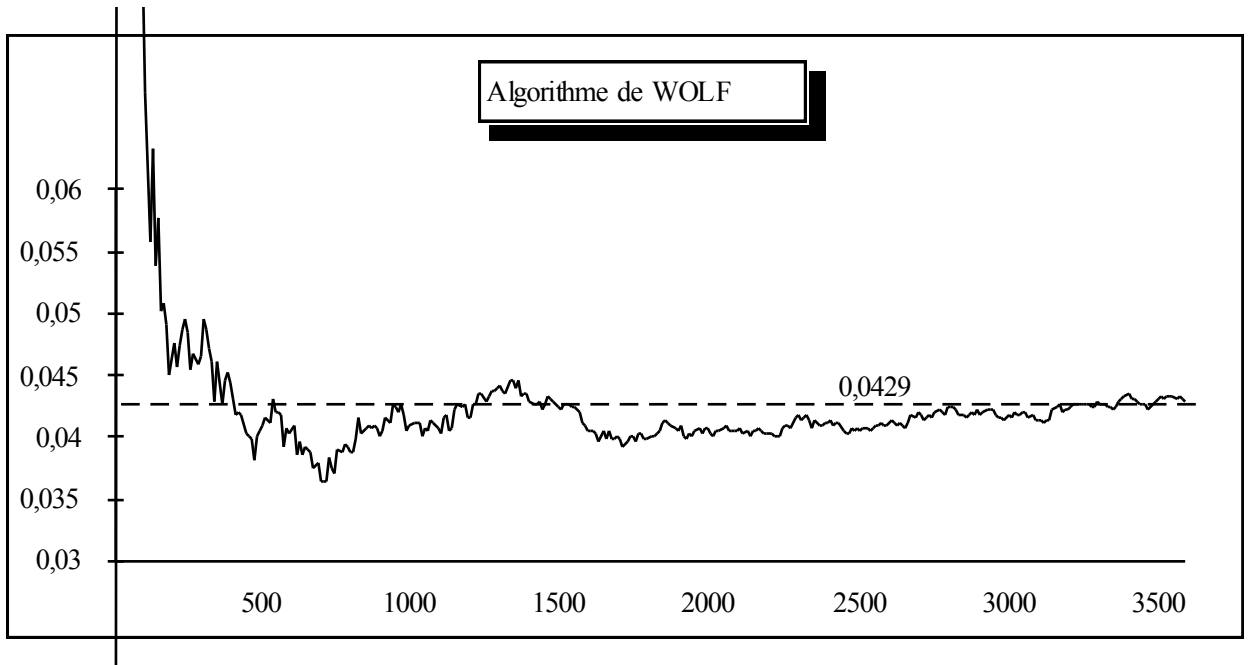


Annexe 6d

EXPOSANT DE LYAPUNOV

Peugeot SA





Annexe 6e

### EXPOSANT DE LYAPUNOV

Valéo

