



Etude d'un écoulement en précession. Transition vers la turbulence et application à l'effet dynamo.

Waleed Mouhali

► To cite this version:

Waleed Mouhali. Etude d'un écoulement en précession. Transition vers la turbulence et application à l'effet dynamo.. Astrophysique [astro-ph]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2009. Français. NNT: . tel-00490477

HAL Id: tel-00490477

<https://theses.hal.science/tel-00490477>

Submitted on 8 Jun 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PARIS VII - U.F.R. DE PHYSIQUE

LABORATOIRE UNIVERS ET THÉORIES

THÈSE DE DOCTORAT

Ecole doctorale: **MATIÈRE CONDENSÉE ET INTERFACES**

Spécialité: **Fluides, granulaires, acoustique**

présentée par

Waleed Mouhali

le 25 Novembre 2009

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS VII

Sujet **Étude d'un écoulement en
précession**

**Transition vers la turbulence et applications à l'effet
dynamo**

Jury composé de:

Président du jury : *Michel Rieutord*

Rapporteur : *Philippe Cardin*

Rapporteur : *Patrice Meunier*

Examineur : *Frédéric Moisy*

Directeur de thèse : *Roland Grappin*

Invité : *Jacques Léorat*

Il se peut que la prochaine grande ère de l'éveil de l'intelligence humaine crée une méthode pour comprendre le contenu qualitatif des équations. Aujourd'hui nous ne le pouvons pas.

Aujourd'hui nous ne pouvons pas voir que les équations du mouvement de l'eau contiennent des choses telles que la structure de la turbulence en forme d'enseigne de barbier que l'on observe entre deux cylindres tournants.

Aujourd'hui nous ne pouvons pas voir si l'équation de Schrodinger contient les grenouilles, les compositeurs de musique, ou la morale - ou si elle ne les contient pas.

Nous ne pouvons pas dire s'il faut ou non quelque chose comme Dieu, au delà de tout cela. Et ainsi nous pouvons tous nous permettre d'avoir des opinions bien arrêtées dans l'un ou l'autre sens.

Richard Feynman, Cours de Physique, Electromagnétisme

Nota Bene

Jacques Léorat a dirigé ma thèse d'octobre 2006 jusqu'à la soutenance le 25 novembre 2009. Roland Grappin a bien voulu accepter d'assumer la responsabilité administrative de ma thèse pendant la dernière année, Jacques Léorat ayant été rayé des cadres (la limite d'âge ayant été atteinte) pendant cette période, ce qui ne l'a nullement empêché d'assurer la responsabilité scientifique de ma thèse.

Remerciements

Je remercie l'ensemble des membres de la commission d'examen : Philippe Cardin et Patrice Meunier pour avoir accepté de lire et juger, sans fard, l'intégralité de ce manuscrit et Michel Rieutord pour avoir assuré la bienveillante présidence du jury ainsi que Frédéric Moisy pour son enthousiasme et les remarques fécondes qu'il a su disséminer tout au long de cette thèse.

Je remercie tous ceux qui ont eu la gentillesse de m'accorder leur temps et avec qui j'ai eu la chance de pouvoir partager des idées, des remarques, ou tout simplement le plaisir de la science bien faite. Je pense à Jacques Léorat, Thierry Lehner et René Vitry dont la patience, la pédagogie et la transmission de leur passion contagieuse m'ont permis une élévation toujours croissante vers l'aboutissement. Je remercie tous les membres du Laboratoire Univers et Théories de Meudon que j'ai eu le plaisir de côtoyer durant ces quelques années (trop courtes), et tout particulièrement les membres du groupe AME, les doctorants : Rui (mon compagnon de cellule), Cécile, Chinh, Nicolas, Jean Philippe, Noémie, Matthieu, Jean-Louis, Nessibe, Luc...pardon à ceux que j'aurais oubliés, les ITA qui contribuent à la tâche difficile d'assister des chercheurs en astrophysique...

Surtout un grand merci à Roland dont l'honnêteté et la fougue avec laquelle il a exercé son rôle difficile de directeur de thèse de derniers moments d'un étudiant légèrement farfelu permettant à ce travail d'avoir un supplément d'optimisation. Par ailleurs, ma route a croisé de nombreux sentiers, un merci à Raphael, Adolfo, Caroline, Wietze, Christophe, Pierre Lallemand, la communauté des Houches...

Je remercie ma famille, qui m'a soutenu et supporté en écoutant mes plaintes, mes complaints, mes humeurs, mes sautes d'humeur... Je remercie enfin le destin d'avoir croisé la route de Fatima un 3 janvier 2009 vers 18h36 dans un café Boulevard Saint Germain alors que je me demandai ce que je ferai en 2009 ou plutôt ce que 2009 ferait de moi...

Table des matières

Table des matières	2
1 Introduction	8
I PREMIERE PARTIE	
Etudes analytiques	22
2 Fluides incompressibles en rotation	23
2.1 Phénoménologie et équation des fluides en rotation	23
2.1.1 Nombres caractéristiques associés au fluide en rotation	23
2.1.2 Théorème de Taylor Proudman	25
2.1.3 Généralités sur les ondes inertielles en milieu non borné	26
2.1.4 Mise en évidence expérimentale des ondes inertielles	29
2.1.5 Fluide en rotation et couches limites	30
2.2 Equations de Poincaré généralisée	30
2.2.1 Présentation du problème	30
2.2.2 Cas d'une rotation rigide	32
2.2.3 Cas d'une rotation différentielle $\Omega_0(\vec{r}) = \Omega_0(r)$	33
3 Ondes inertielles en géométrie cylindrique et écoulement en précession	35
3.1 Ondes inertielles non visqueuses en géométrie cylindrique : Modes de Kelvin	35
3.1.1 Formulation	35
3.1.2 Calcul des modes de Kelvin	36
3.1.2.1 Cas du cylindre fini : résonance de cavité	39
3.2 Effet d'une faible précession : solution des équations linéarisées	40
3.2.1 Cinématique et dynamique d'un fluide en précession	40
3.2.1.1 rappels de cinématique d'un fluide en rotation	40
3.2.1.2 Applications au cas de la précession	40
3.2.2 Equations de la dynamique d'un fluide en précession	42
3.2.2.1 Angle de précession quelconque	42
3.2.2.2 Cas particulier d'ATER : axe de précession orthogonal à l'axe de rotation	44
3.3 Problème linéarisé : cas d'une faible précession	45
3.3.1 Le choix du flot de base	45
3.3.2 Solutions inviscides linéarisées autour de la solution de rotation rigide	45

3.3.3	Linéarisation autour de la solution de rotation solide avec cisaillement axial pour le cylindre infini	46
3.4	Vers une étude faiblement non-linéaire	47
3.4.1	Concept de familles modales	47
3.4.2	Motivations et présentation générale	48
3.5	Introduction à l'article Mode coupling analysis and differential rotation in a flow driven by a precessing cylindrical container	49
3.5.1	Flot de base et développement perturbatif	49
3.5.2	Alternative de Fredholm	51
3.5.3	Equations de Landau	51
3.5.4	Résolution ordre par ordre	52
3.6	Application astrophysique : les modes de Kelvin-Kepler avec cisaillement axial . . .	52
3.7	Conclusion	54
4	Mode coupling analysis and differential rotation in a flow driven by a precessing cylindrical container	55
II	DEUXIEME PARTIE	
	Etudes expérimentales	94
5	l'expérience ATER : montage et techniques expérimentales	95
5.1	Objectifs et motivations	95
5.1.1	Aperçu historique	95
5.1.2	Objectifs	97
5.2	Description de l'instrument	98
5.2.1	Description géométrique	100
5.2.2	L'éclairage	101
5.2.3	La caméra CCD	102
5.2.4	Contrôle et pilotage	103
5.2.5	L'ensemencement	103
5.3	Vélocimétrie par imagerie de particules : PIV	104
5.3.1	Généralités sur les techniques de visualisation en mécanique des fluides . . .	104
5.3.2	Principes de la PIV	105
5.3.2.1	Fonction de corrélation	105
5.3.2.2	Limitations	106
5.3.2.3	L'algorithme DPIVsoft	106
5.3.3	Calibration	107
5.4	Traitement des données issues de DPIVsoft	108
5.4.1	Interpolation numérique	108
5.4.2	Détail du traitement sur la grille polaire	108
5.5	Quelques résultats préliminaires de visualisation	109
5.5.1	Les bulles d'air	109
5.5.2	Description qualitative et phénoménologique de l'écoulement	110
6	Régime linéaire dominé par la rotation d'ensemble : onde tournante $m=1$	113
6.1	Observation des trajectoires de particules : PTV	113

6.2	Champs de vitesse et vorticité par PIV	114
6.3	Profils radiaux de la vitesse azimutale du mode $m=0$	114
6.4	Profil azimutal de la vitesse radiale et identification des modes azimutaux $m=1$. . .	117
6.5	Evolution de l'amplitude du mode $m=1$ en fonction du forçage	122
6.5.1	Discussion et conclusion	123
7	Instabilité et régime de tourbillons cycloniques	124
7.1	Présentation des observations	124
7.2	Etude du régime permanent des tourbillons cycloniques	127
7.2.1	Champs de vitesse et vorticité instantanés	127
7.2.2	Trajectoire des structures tourbillonnaires	127
7.3	Profils de vitesse	129
7.4	Recherche d'hystérésis: rampe descendante	134
7.5	Disparition des cyclones et retour du mode $m = 1$ $\varepsilon \sim \varepsilon_t$	135
7.6	Effet de la résonance	138
7.7	Observations dans le plan $x=0$	139
7.7.1	La circulation axiale	139
7.7.2	Régime turbulent	139
7.8	Discussion des mécanismes possibles à l'origine de l'instabilité de l'écoulement en précession	141
7.8.1	Instabilités sous-critiques et supercritiques en hydrodynamique	141
7.8.2	écoulement de Couette-Taylor	142
7.8.3	Critère de stabilité des fluides en rotation	142
7.8.4	Critère de stabilité pour les modes non axisymétriques et applications au cas de l'écoulement en précession	145
7.8.5	Applications à l'écoulement en précession	146
7.8.6	Vorticité cyclonique	149
7.9	Conclusion de la partie expérimentale	150
 III TROISIEME PARTIE		
	Développements en cours, simulations et diffusion acoustique	151
8	Quelques considérations sur les effets de la viscosité	152
8.1	Fluide en rotation pure	152
8.1.1	Le « problème » de la viscosité	152
8.1.2	Pompage d'Ekman : solution à $\varepsilon = 0$	153
8.1.2.1	Présentation et formulation du problème	153
8.1.2.2	Solution dans la couche limite et circulation d'Ekman	155
8.2	Perspectives sur la couche d'Ekman en précession	157
8.3	Perspectives concernant le couplage de modes en présence de viscosité	157
8.4	Effet de la viscosité sur la rotation différentielle : simulations numériques	158
8.4.1	Présentation	158
8.4.2	Résultats	159
8.5	Conclusion	160
9	La précession illustrée par des simulations numériques	162

9.1	Simulations hydrodynamiques	162
9.1.1	Vitesse fluctuante à Reynolds faible (modes $m > 0$)	163
9.1.2	Lignes de courant et vorticité axiale	163
9.1.3	écoulement dans la région centrale	163
9.1.4	Circulation axiale	165
9.1.5	Rotation différentielle	166
9.1.6	Distribution de l'énergie	166
9.2	Perspectives MHD : Dynamo en précession avec tourbillons cycloniques	167
9.2.1	Modélisation des cyclones	167
9.2.2	Transformée de Fourier et filtrage	169
9.2.3	Implémentation du régime des vortex dans un code dynamo cinématique	170
9.3	Conclusion	171
10	Diffusion acoustique dans un écoulement turbulent	172
10.1	Principe et motivations de notre étude	172
10.1.1	Présentation	172
10.1.2	Phénoménologie de la turbulence	173
10.1.3	Turbulence en rotation	173
10.2	Principe du couplage son-vorticité	174
10.2.1	Dispositif expérimental	176
10.3	Traitement des données	177
10.3.1	Spectre du signal brut	177
10.3.2	Spectre du signal dérivé	177
10.3.3	Ajustement de la partie gaussienne	178
10.3.4	Extraction par filtrage passe-bas de la partie "Gaussienne" du signal dérivé	179
10.4	Interprétation des résultats	179
10.4.1	Phase et amplitude	179
10.4.2	Dynamique des vortex	180
10.4.3	Un résultat préliminaire	181
10.5	Conclusion	182
11	Conclusion et perspectives	184
	Table des figures	187
	Bibliographie	194

Résumé

Cette thèse porte sur l'étude du forçage d'un écoulement par précession en vue de contribuer à une étude de faisabilité d'une nouvelle génération de dynamos fluides expérimentales. Trois expériences ont montré récemment que l'on pouvait obtenir en laboratoire l'effet dynamo, qui est la cause des champs magnétiques observés en astro- et géophysique. Pour étudier le régime de saturation non linéaire qui conduit à des dynamos stationnaires, chaotiques (la Terre) ou quasi-périodiques (le Soleil), on souhaite disposer d'une configuration proche de celles des dynamos naturelles en évitant la présence de parois internes qui canalisent l'écoulement ou des turbines contra-rotatives ou l'utilisation de fer doux. Le forçage par précession a été évoqué depuis longtemps pour le champ géomagnétique (Bullard 1949), mais jamais appliqué aux dynamos fluides expérimentales à l'exception d'une tentative de Gans (1970). Dans cette thèse, on considère la première étape, purement hydrodynamique de ce projet.

L'instrument ATER ("Agitateur pour la Turbulence en Rotation") consiste en un réservoir cylindrique en précession entraînant un fluide (eau). Il a été conçu, réalisé avec son instrumentation pour la PIV à l'Observatoire de Paris-Meudon. Cette thèse rapporte une étude expérimentale réalisée à l'aide de cet instrument, ainsi que des études analytiques et numériques faites dans la même géométrie cylindrique. Le choix de la symétrie cylindrique est justifié, d'une part, par la possibilité de comparer les solutions analytiques linéarisées (basées sur les modes de Kelvin, 1880) avec les résultats expérimentaux et, d'autre part, par la commodité du montage de l'éclairage pour la pratique de la PIV. Un équipement original utilisant deux lampes flash a été réalisé, les lasers généralement utilisés étant peu propices à être embarqués. La validation du traitement des données repose en particulier sur la comparaison avec les expériences de Weidman concernant le spin-up d'un cylindre. L'expérience contemporaine de l'IRPHE (Institut de recherche des phénomènes hors équilibre) comporte aussi un cylindre en précession, mais se concentre sur le régime des forçages faibles, dans des conditions de résonance, avec une caméra fixée dans le référentiel en précession alors que la nôtre peut être fixée dans le référentiel en rotation. L'allongement a d'ATER ($a = \frac{L}{2R}$) est ajustable entre 1 et 1.34, avec un angle de précession fixé à 90 degrés, qui est l'autre différence majeure avec l'IRPHE, où cet angle reste inférieur à 10 degrés. Le nombre de Reynolds typique (basé sur la vitesse des parois) est d'environ 150 000, et le nombre d'Ekman est proche de 610^{-6} .

La première partie de la thèse est consacrée aux approches analytiques à Reynolds infini. Notre étude du couplage faiblement non linéaire, non visqueux à la Landau en résonance triadique entre l'écoulement moyen et les modes de Kelvin forcés par la précession a permis de mettre en évidence des profils de rotation différentielle directement comparables aux résultats expérimentaux. Il y a un bon accord entre les prédictions théoriques et ces derniers, décrits dans la deuxième partie.

Trois régimes d'écoulement ont été identifiés, selon le taux de précession ε , rapport des vitesses angulaires de précession et de rotation.

(i) aux faibles taux de précession, l'écart par rapport à la rotation solide est faible et les équations linéarisées sont pertinentes. L'analyse de celles-ci dans la limite du fluide parfait (sans viscosité) montre l'existence d'une solution stationnaire dans le référentiel en précession. Celle-ci est l'analogue du mode dit de spin-over des réservoirs ellipsoïdaux en précession, mode identifié notamment par Poincaré. Cette solution, qui est en fait une onde inertielle en contra-rotation, sur le mode azimutal $m=1$, est bien mise en évidence expérimentalement. Son amplitude présente un maximum dans la région centrale (en s'annulant à la paroi) et elle varie linéairement avec ε .

(ii) pour des taux de précession intermédiaires, un régime de tourbillons cycloniques a été mis en

évidence expérimentalement. Ce régime est nouveau : il n’a jamais été obtenu dans les simulations numériques directes aux nombres de Reynolds inférieurs à 5000, ce qui suggère que la viscosité joue un rôle important pour l’amortissement de ces fluctuations. Il n’a jamais été observé avec des réservoirs ellipsoïdaux en précession, mais cela peut être dû aux méthodes de visualisation : comme les tourbillons sont advectés par la rotation globale, ils sont plus facilement identifiés avec notre caméra en co-rotation. Un montage utilisant un réservoir ellipsoïdal prêté par le LGIT (Laboratoire de Géophysique et Tectonophysique) est prêt à être utilisé pour vérifier si ce régime peut être généralisé dans ce cas.

Les tourbillons sont en nombre variable, environ 3 ou 4, avec une durée de vie longue par rapport au temps de rotation et ils sont advectés par la rotation globale à un rayon effectif d’environ la moitié du rayon du réservoir. La vorticité centrale est très forte, comparable à la vorticité d’entraînement et elle est concentrée sur un disque de rayon comparable au $1/10$ du rayon du réservoir. La structure axiale n’a pas pu être mise en évidence mais les observations sont compatibles avec une configuration en forme de tubes axiaux, c’est à dire quasi-géostrophiques. Dans ce régime de tourbillons cycloniques, on note l’occurrence d’une rotation différentielle importante, avec rotation au centre plus faible qu’à la paroi. Cette tendance se poursuit dans le régime suivant qui voit la disparition de la concentration cyclonique de vorticité.

Deux facteurs qui peuvent être importants pour l’effet dynamo sont présents dans ce régime : rotation différentielle et brisure de la symétrie centrale.

(iii) lorsque le taux de précession dépasse une valeur critique (selon l’allongement choisi pour le réservoir), on obtient un régime de turbulence développée, très intéressant a priori par ses propriétés de quasi-homogénéité, mais pour l’étude duquel la PIV dispose d’un échantillonnage temporel trop faible, $1/6$ s, alors que les périodes de rotation typiques sont inférieures à la seconde. En accroissant le taux de précession, la rotation globale qui est forcée par les tensions visqueuses aux parois, est pratiquement inhibée.

Pour tenter de remédier à ces inconvénients (bien connus) de la PIV, une technique d’interférométrie acoustique a été mise en place (dans notre laboratoire) dans une soufflerie placée au sein d’une enceinte cylindrique fermée (de dimensions identiques à celle d’ATER) créant un écoulement à la “Von Karman” à l’aide d’une turbine rotative. Une procédure de traitement des données permet de calculer des spectres d’entrophie (résultats préliminaires) et mieux caractériser la turbulence en rotation. L’objectif est d’adapter ce système de mesure au cas de l’écoulement de la précession, en utilisant l’air comme fluide.

Ces études expérimentales ont été accompagnées de simulations numériques réalisées par Pierre Lallemand à l’aide d’un code «Boltzman sur réseau» et par Raphael Laguerre avec un code à éléments finis, qui ont montré la possibilité d’engendrer, au moyen de la précession, un état de rotation différentielle dans un fluide initialement en état de rotation solide, mais sans évidence pour le régime cyclonique (ii). Bien que nous n’ayons pas directement collaboré à ces travaux, ces résultats (non publiés) sont présentés dans un chapitre à part (chapitre 10) afin d’aider le lecteur à visualiser les caractéristiques de l’écoulement.

Chapitre 1

Introduction

Avant d'aborder le sujet principal de cette thèse, il semble utile de situer de façon assez générale son contexte, qui est celui des dynamos fluides expérimentales. En raison des nombreuses difficultés tant fondamentales que techniques qu'elles présentent, il n'existe à ce jour que trois illustrations de ce type d'expérience, et elles seront détaillées plus bas.

Les dynamos industrielles convertissent l'énergie mécanique en énergie électrique depuis plus de cent ans (W. Siemens, 1866). Elles constituent un dispositif physique de grande qualité, remarquable par son rendement, sa robustesse, sa durée de vie, etc... On verra ci-dessous que les observations des champs magnétiques d'intérêt astrophysique montrent qu'une telle conversion doit se produire dans une majorité d'objets astrophysiques, en commençant par la Terre. En ce qui concerne ces dynamos fluides, on peut noter que le tableau des connaissances est encore dans un état rudimentaire: on ne sait pas démontrer pourquoi la Terre a un champ magnétique et pas la planète Vénus qui a la même structure interne, on ne sait pas pourquoi ce champ est d'environ 0.5 gauss actuellement avec une structure dipolaire dominante au lieu d'un quadrupole de 1000 gauss, ni pourquoi et comment il s'est inversé au cours de son existence ...

L'effet dynamo : De la boussole à la MHD

Comme la motivation principale de cette étude hydrodynamique est son application à la génération de champ magnétique, il semble utile de situer brièvement cette problématique scientifique avec le rappel de quelques-unes de ses étapes historiques. Dans les Sciences, les interrogations concernant le magnétisme sont sans doute parmi les plus anciennes qui aient été enregistrées. Ainsi, Thalès (vers -600) attribuait une âme à l'aimant puisqu'il était capable de créer le mouvement. Les boussoles sont décrites en tant qu'instrument de navigation vers l'an 1000 en Chine, puis en Europe mais elles sont utilisées depuis plus longtemps et on en trouve aussi à Sumer et en Amérique centrale. Les pierres magnétiques (en magnétite) sont rares à cette époque car leur magnétisation est due aux courants induits par la foudre.

Avec le physicien anglais Gilbert (1600), qui énonce que la Terre est semblable à un aimant, on passe du stade de technique utilitaire à celui de la modélisation. La cartographie du champ magnétique terrestre commence vers 1698 avec un astronome anglais, Halley. La recherche du lien entre électricité et magnétisme se poursuit tout au long du XVIII-ème siècle. La révolution électromagnétique au XIX-ème siècle est bien connue : elle commence avec la fameuse expérience d'Oersted (1820), qui illustre l'action d'un courant sur un aimant, les expériences d'Ampère, elle se poursuit avec les expériences d'induction électromagnétique de Faraday (1831) et la formulation des

lois de l'électro-magnétisme par Maxwell (1864-1873) aboutissant à la relativité restreinte (après des échecs expérimentaux cherchant à mettre en évidence l'éther). On notera ici le rôle des modèles mécaniques de l'éther visant à justifier les équations de l'électro-magnétisme. Le XXème siècle voit le déplacement des découvertes vers la structure de la matière (avec la mécanique quantique).

Dans le domaine du magnétisme, il est facile de trouver des exemples ponctuant le développement des connaissances et il suffit de citer la magnéto-résistance géante (Albert Fert et Peter Grünber, 1980) pour montrer que le magnétisme des matériaux reste depuis 2000 ans un domaine privilégié d'applications pratiques (ici, les disques durs). Le contraste avec le magnétisme terrestre n'en est que plus visible : il est décrit par des équations classiques (vérifiant l'invariance galiléenne), ni relativistes, ni quantiques. On a fait certes des avancées remarquables concernant ses variations géographiques et son histoire (renversements), mais, pas plus qu'au temps de Gilbert, on ne sait pas expliquer ses caractéristiques de base : moment dipolaire, orientation, etc ... Ce n'est pas l'électromagnétisme qui est à l'origine de cette ignorance, mais une discipline fondée au 18-eme siècle, l'hydrodynamique : on sait peu de choses de l'écoulement fluide qui crée ce champ géomagnétique. Non seulement sa topologie est inconnue, mais son origine reste ouverte à la discussion. Trois hypothèses sont actuellement en compétition : - convection thermique (selon la distribution du chauffage radio-actif) -convection compositionnelle (solidification du noyau ou graine centrale) - la précession (Bullard 1949)

Nous souhaitons contribuer à l'étude de ce dernier mécanisme, non pas dans le cadre du problème terrestre, mais dans le cadre du forçage d'une dynamo fluide expérimentale. Le point commun entre le problème géophysique et celui du laboratoire est important : il s'agit dans les deux cas d'écoulements en rotation rapide (la vitesse locale est très petite par rapport à la vitesse d'entraînement), hors de portée des simulations numériques directes. Néanmoins, pour revenir au problème de la réalisation d'une dynamo de type planétaire, il semble que nous ayons besoin de peu d'ingrédients :

Tout d'abord, il faut un volume de fluide conducteur d'une taille suffisamment grande : Les corps de type terrestre (Mercure, Venus, Terre, Mars, Io) ont un intérieur partiellement liquide dont la composition est estimée riche en Fe et S , ce qui donne au fluide sa conductivité électrique. Dans les géantes gazeuses (Jupiter, Saturne), les éléments légers H et He existent dans un état métallique à cause des fortes pressions. Pour les Géants de glace (Neptune, Uranus), les choses se révèlent assez différentes puisque la conductivité électrique est plutôt assurée par un manteau principalement composé H_2O , NH_3 et CH_4 .

D'autre part, (et c'est ce qui va nous concerner tout au long de cette étude), une rotation rapide est nécessaire car fréquente dans les objets astrophysiques, mais il faut comprendre comment lui superposer des écoulements secondaires tridimensionnels.

Formulation du problème MHD

L'étude de ces dynamos relève de l'approximation magnétohydrodynamique (MHD), régie par un système d'équations couplant le champ de vitesse $\vec{u}$ de l'écoulement et le champ magnétique. Le problème se formule de la manière suivante : supposons un métal liquide incompressible, de densité ρ , de perméabilité μ et de conductivité électrique σ . Les équations de la MHD décrivant l'évolution d'un champ de vitesse de l'écoulement et d'un champ magnétique dans le volume s'écrivent :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{\vec{\nabla}(p)}{\rho} - \frac{1}{\rho\mu}(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \nu \Delta \vec{u} + \vec{F} \quad (1.1)$$

	L (m)	V(m/s)	$\mu\sigma$	R_m
Soleil	2.10^8	10^3	10^{-3} (plasma)	2.10^8
Terre	3.10^6	4.10^{-4}	0.3 (fer liquide)	400

TABLE 1.1: Différents paramètres physiques associés à la dynamo solaire et géophysique

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \frac{1}{\sigma\mu} \Delta \vec{B} \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.4)$$

On reconnaît la force de Laplace dans l'équation pour la quantité de mouvement. L'équation pour la dynamique du champ magnétique est appelée l'équation d'induction, et se déduit des équations de Maxwell accompagnées de la loi d'Ohm. L'approximation MHD consiste en un filtrage des ondes électromagnétiques se propageant beaucoup plus vite que tous les écoulements ou toutes les ondes possédant un intérêt en géo ou astrophysique. Ces équations sont très bien adaptées pour d'écrire la dynamique des métaux liquides, un peu moins pour les plasmas où elles restent cependant une bonne approximation. En adimensionnant les équations (1.1-1.2-1.3-1.4) avec des dimensions caractéristiques : L (longueur caractéristique), V (vitesse caractéristique), il apparaît deux paramètres sans dimension : le nombre de Reynolds $R_e = \frac{VL}{\nu}$ et le nombre de Reynolds magnétique $R_m = \mu\sigma VL$.

Nous reconnaissons que l'équation d'induction est linéaire dans la variable $\vec{B}$ du champ magnétique et possède la structure d'une équation de type diffusion-advection pour un champ vectoriel, accompagnée d'un terme source correspondant à un étirement du champ magnétique : $(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$ qui se révèle être un terme fondamental pour l'effet dynamo.

On vérifie alors qu'une dynamo est possible si la diffusion ne domine pas la dynamique du champ magnétique (cas des R_m grand). La diffusion magnétique étant typiquement 10^5 plus forte que la diffusion visqueuse dans les métaux liquides, il faut donc avoir dans les expériences de laboratoire des vitesses très élevées. Dans les systèmes astrophysiques, c'est la grande taille des objets qui permet de réduire le rôle de la dissipation ohmique (voir Tableau 1.1). Imaginons alors que l'on a identifié une dynamo, et obtenu la croissance d'un germe de champ magnétique. La croissance de ce champ rend la force de Lorentz de plus en plus importante et celle-ci modifie l'écoulement jusqu'à saturer l'instabilité. Si cela se produit, on parle d'une dynamo non linéaire, régime a priori aussi difficile à décrire que le problème de la turbulence fluide. De ce fait, on a d'abord cherché à résoudre un problème simplifié où le champ de vitesse est supposé connue et il ne reste qu'à résoudre l'équation d'induction linéaire : c'est le problème de la dynamo cinématique.

Dynamo cinématique : principes et généralités

Le problème de la dynamo cinématique est d'essayer de trouver des solutions instables de cette équation pour un écoulement u donné et fixe. Comme $\vec{B} = \vec{0}$ est aussi solution du problème, la dynamo cinématique est en réalité une instabilité du champ magnétique de paramètre de contrôle

R_m . Pour autant, elle n'est pas obtenue avec n'importe quel écoulement de fluide conducteur. Ainsi, un écoulement stationnaire et uniforme ne pourra jamais conduire à un effet dynamo. Si l'on ne connaît pas de conditions suffisantes sur la topologie du champ de vitesse pour qu'il conduise à une dynamo, on a en revanche pu démontrer que certaines symétries de l'écoulement rendaient la dynamo impossible. Ces théorèmes sont rappelés par exemple dans l'ouvrage de Moffatt [101]. Nous en citons quelques uns parmi les plus utiles¹.

- Théorème de Cowling : un écoulement axisymétrique ne peut pas entretenir un champ magnétique axisymétrique.
- Théorème 2D (Zeldovich) : un champ magnétique bidimensionnel, c'est à dire indépendant d'une des coordonnées dans un repère cartésien, ne peut être auto-entretenu par effet dynamo.
- Théorème toroïdal : un écoulement purement toroïdal ne peut engendrer un champ magnétique par effet dynamo.
- Ecoulement plan (en réalité conséquence du théorème 2D) : un écoulement plan ne peut produire un effet dynamo.
- Ecoulement radial : Un écoulement radial de fluide compressible, de la forme $\vec{u} = f(x)\hat{e}_r$, ne peut produire un effet dynamo.

La recherche de théorèmes anti-dynamo ou de contre-exemples est toujours un sujet de débat parmi les théoriciens. Les écoulements capables d'engendrer une dynamo sont donc a priori relativement compliqués par leur défaut de symétrie.

Cependant, certains mécanismes de base de cet effet ont pu être identifiés. Nous allons en présenter deux de façon qualitative. Ces mécanismes permettent de comprendre le bouclage possible entre des champs magnétiques poloïdaux et des champs magnétiques toroïdaux. Nous allons résumer ici les effets dits Ω et α .

L'effet Ω est un mécanisme linéaire traduisant la création d'un champ magnétique toroïdal à partir d'un champ magnétique poloïdal. Considérons un champ magnétique poloïdal dans un écoulement toroïdal de fluide. D'après le théorème dit « du champ gelé » qui découle des équations de Maxwell (les lignes de champ magnétiques dans un fluide parfaitement conducteur sont transportées comme des lignes matérielles dans l'écoulement), les lignes de champ dirigées selon la direction axiale sont déformées par le champ de vitesse dirigé suivant la direction azimutale, de telle sorte qu'une composante azimutale du champ magnétique est créée. La figure (1.1) présente le cas d'une sphère de fluide conducteur en mouvement toroïdal soumis à un champ magnétique : dans la sphère, sous l'effet de la rotation différentielle, le champ magnétique $\mathbf{B}_{\text{pol}}$ est déformé par les gradients de vitesse azimutale et crée une composante toroïdale $\mathbf{B}_{\text{tor}}$.

L'effet α est un mécanisme quadratique décrivant la création d'un champ magnétique poloïdal à partir d'un champ magnétique toroïdal, ou l'inverse, par l'intermédiaire d'un courant $\mathbf{j}$ parallèle au champ initial. Ce mécanisme est bien plus compliqué que l'effet Ω et il existe plusieurs approximations pour le décrire. La figure du bas de (1.1) propose une explication graphique de cet effet. Cet effet apparaît pour un écoulement d'hélicité non nulle. Il peut être engendré par les fluctuations non-axisymétriques de l'écoulement.

1. Ces théorèmes ne s'appliquent qu'à des écoulements incompressibles

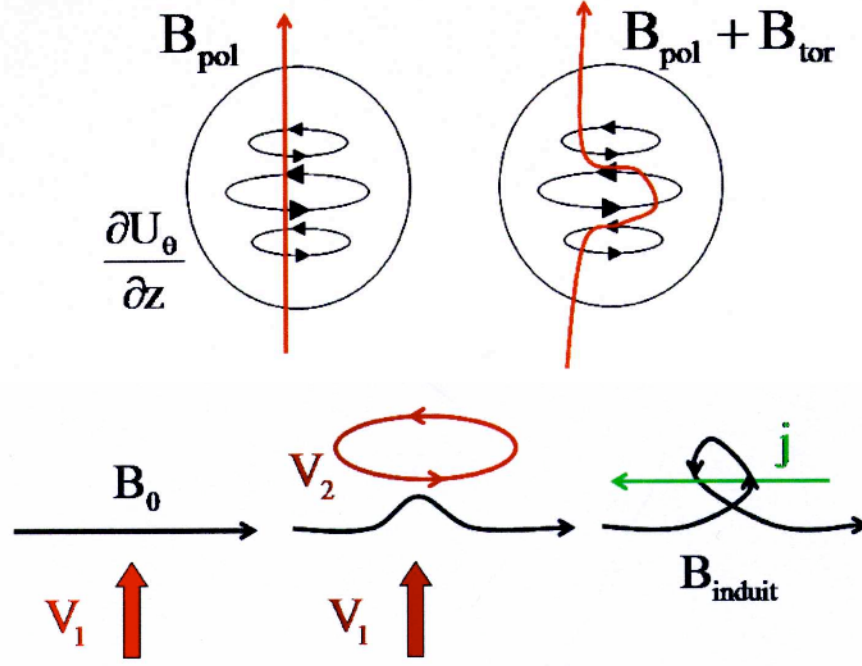


FIGURE 1.1: En haut, on schématise la construction d'une composante toroïdale $\mathbf{B}_{\text{tor}}$ à partir d'un champ initial $\mathbf{B}_{\text{pol}}$ soumis à l'action d'un cisaillement azimutal $\frac{\partial U_\theta}{\partial z}$. C'est l'effet Ω . En bas, nous tentons une explication graphique de l'effet α : un premier champ induit est généré par effet Ω à partir du champ de vitesse $\mathbf{V}_1$. Une boucle de champ se forme ensuite en raison de la rotation $\mathbf{V}_2$ et on aboutit ainsi à un courant induit $\mathbf{j}$ parallèle au champ initial $\mathbf{B}_0$.

Parmi les modèles de dynamo intermédiaires entre les dynamos homogènes fluides et les équipements industriels, on peut citer deux exemples :

- La dynamo homopolaire (Bullard, la plus simple) est composée d'un disque solide en rotation autour de son axe, placé à l'intérieur d'une bobine. L'une des extrémités de la bobine est connectée sur l'axe du disque, et l'autre, au niveau de la périphérie du disque. Il s'agit d'un dispositif très contraint, où le mouvement du conducteur est un mouvement de corps solide, et où les courants électriques sont astreints à adopter une topologie particulière.
- La dynamo de Lowes et Wilkinson : il s'agit toujours d'une dynamo solide. [103]. Deux rotors conducteurs tournent dans une masse du même métal, et les axes de rotation ne sont pas alignés. Dans cette configuration, le mouvement des rotors est toujours contraint mais les courants électriques sont moins contraints. Notons que pour des raisons pratiques, les matériaux utilisés sont des matériaux ferromagnétiques, dont la perméabilité magnétique très élevée rend l'expérience possible à l'échelle du laboratoire. Ces matériaux conduisent à des mécanismes de saturation dus à la rémanence et donc sans lien avec les problèmes considérés plus bas.

Pour terminer, notons que le cadre formel de la dynamo cinématique est loin de répondre à toutes les questions de magnétisme en astrophysique. Dans le cas des disques d'accrétion, on commence par mettre en évidence une instabilité magnéto-rotationnelle [19], MRI, (linéaire) couplant champ

de vitesse et champ magnétique avant d'aborder le régime non linéaire de la dynamo : le champ de vitesse excité par la MRI n'est pas utilisable dans un cadre d'études purement cinématiques.

Dynamos fluides expérimentales

En raison des difficultés de résolution numérique qu'il n'y a pas lieu d'expliciter ici, on peut penser aborder ce phénomène fondamental de l'effet dynamo avec des réalisations expérimentales, de la même façon que les souffleries se révèlent toujours utiles pour faire progresser nos connaissances en hydrodynamique. Les défis à surmonter sont de divers ordres, mais il faut répondre en premier lieu à des questions telles que : *quels sont les écoulements efficaces pour l'effet dynamo ? comment les produire ? etc ...*

La dynamo Ponomarenko et son application à Riga :

L'écoulement de Ponomarenko [134] est un écoulement très simple qui est instable vis à vis de l'effet dynamo pour un nombre de Reynolds magnétique assez faible, de l'ordre de la vingtaine. Cette expérience, comme l'expérience de Karlsruhe, est très contrainte, au moyen de tubes et d'hélices. On observe sur la figure (1.2b) que le fluide est entraîné en translation, puis en rotation à l'aide d'une hélice, dans un tube, et qu'il est ensuite redirigé vers l'entrée du tube dans une couche entourant le cylindre, l'ensemble étant immergé dans du sodium au repos. Les études préliminaires, et l'optimisation de la configuration retenue ont été réalisées par Stefani et al. à l'aide de simulations numériques. L'effet dynamo y a été observé en 1999 pour des valeurs du nombre de Reynolds magnétique très proches du seuil cinématique calculé. Il s'agit d'une bifurcation de Hopf vers un mode neutre tournant de forme hélicoïdale.

La dynamo de G. O. Roberts et son application à Karlsruhe : Cette expérience utilise l'écoulement analytique de G.O. Roberts [99], écoulement périodique $\vec{U}$ indépendant de la variable axiale, dont l'expression est $\vec{U} = \sin(y)\hat{e}_x + \sin(x)\hat{e}_y + (\cos(x) - \cos(y))\hat{e}_z$. La réalisation expérimentale de ce modèle consiste en un ensemble d'écoulements hélicoïdaux de composantes axiales opposées, engendrés dans un réseau de tubes à l'aide de pompes. La figure (1.2a) montre le dispositif. Un champ magnétique stationnaire qui consiste en un dipôle perpendiculaire à l'axe des tubes, a été observé pour la première fois en novembre 1999. La valeur du champ à saturation est de l'ordre de 250 G, pour un nombre de Reynolds magnétique supérieur de 10% à la valeur critique.

Dynamos sphériques (projets en cours) : Deux expériences consistent en une sphère contenant du sodium liquide et où le fluide est mis en mouvement à l'aide de deux hélices coaxiales et contrarotatives. C'est donc une situation qui se rapproche fortement de la situation d'un écoulement de Von Karman. Ces expériences sont basées sur des écoulements « s2t2 » qui sont connus pour leur capacité à générer un effet dynamo. L'expérience de l'équipe de C. B. Forest (Wisconsin, Etats-Unis) a un diamètre de 1 m pour une puissance de 150 kW. L'équipe de D. P. Lathrop (Maryland, Etats-Unis) utilise quant à elle une sphère de 3 m de diamètre.

L'expérience de Perm (Russie) : Cette expérience est actuellement en développement. Elle est basée sur un écoulement de sodium liquide produit dans un tore par une hélice. Le tore de 1 mètre de diamètre est entraîné en rotation rapide puis brusquement arrêté en un dixième de seconde. Le fluide contenu dans le tore est alors entraîné en rotation par inertie et forme un écoulement hélicoïdal à l'aide de « déviateurs » internes. L'écoulement est un écoulement de vissage en déclin, et on espère obtenir une dynamo pendant ce déclin.

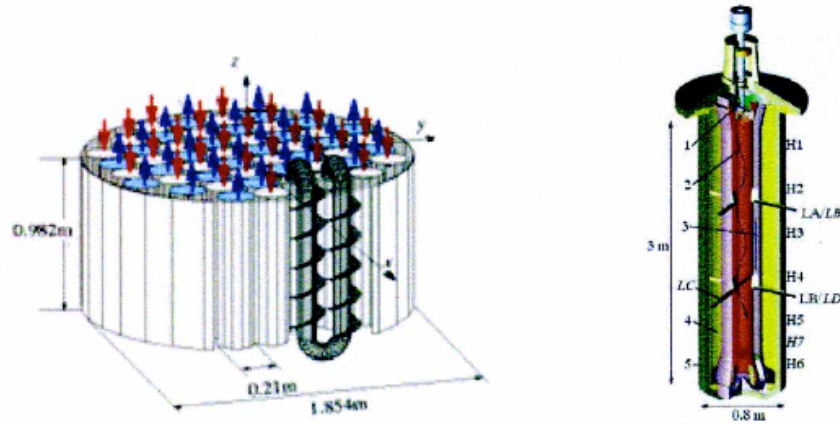


FIGURE 1.2: Schémas de deux expériences dynamo :

- a) (à gauche) dynamo de Riga
- b) (à droite) dynamo de Karlsruhe

La dynamo de Von Karman Sodium (VKS) Cette expérience est menée conjointement par des équipes du CEA Saclay, du CEA Cadarache et des Ecoles Normales Supérieures de Paris et de Lyon. Il met en oeuvre l'écoulement de Von Karman dans du sodium liquide. La configuration correspond à un cylindre de rapport de forme $a = \frac{H}{R} = 1.8$ avec H la hauteur et R le rayon du cylindre. L'écoulement est forcé par la contra-rotation des disques du cylindre, qui sont munis de pales dans l'expérience. L'écoulement engendré, pour de grandes valeurs du nombre de Reynolds, est très turbulent et apparemment très hélicitaire. L'effet dynamo a été obtenu en octobre 2006 et pour la première fois, dans une expérience d'une telle envergure, on a pu observer des retournements de champ magnétique en présence de pales ferromagnétiques.

On a vu que les deux premières dynamos fluides réussies de 1999 sont basées sur des dynamos «théoriques», publiées plus de trente ans auparavant, périodique (G.O. Roberts) [99] ou invariante selon une direction (Ponomarenko, 1973) [134]. Pour se rapprocher de ces flots définis analytiquement et donc de caractère plutôt académique, les expérimentateurs ont été amenés à utiliser des réservoirs avec des parois internes. Pour éviter ce type de contraintes non naturelles, et avec l'incitation d'expériences hydrodynamiques montrant une forte concentration de la vorticité, des turbines contra-rotatives aux extrémités d'un cylindre sont utilisées dans l'expérience de Cadarache, qui a obtenu l'effet dynamo en 2006. Dans ce cas, il n'y a plus de parois internes, mais on aboutit à un forçage artificiel si on le compare aux écoulements naturels. Dans ce type de forçage, qui évoque plutôt un dispositif industriel de type transmetteur de couple, chaque axe d'entraînement travaille contre l'autre et 300 kW sont nécessaires pour dépasser de peu un seuil de déclenchement de l'effet dynamo. Il s'agit bien du seuil d'un mode particulier car l'effet dynamo n'est obtenu qu'avec des turbines en fer doux, et il est prématuré de vouloir conclure sur les propriétés dynamos générales de cet écoulement.

Ces brefs rappels d'événements contemporains montrent que les flots dynamogènes représentent de nos jours un vaste espace à explorer, pour lequel les performances actuelles ou espérées des ordinateurs sont d'un secours marginal. Chaque expérience de dynamo mentionnée précédemment possède son écoulement particulier lié à un forçage particulier. C'est dans cette perspective que nous avons étudié une proposition de Bullard (1949) reprise par Malkus [68], concernant les écoulements

forcés par précession. Du point de vue astrophysique, les symétries de ce forçage peuvent être critiquées. Du point de vue de la dynamo, son intérêt est évident puisqu'il s'agit d'un forçage à la plus grande échelle disponible, ce qui favorise la génération par rapport à la dissipation ohmique. Son point faible est a priori de nature hydrodynamique : les caractéristiques des écoulements ainsi réalisables sont en effet très mal connus. En effet, Malkus et ses successeurs n'ont pas eu l'opportunité de mettre en oeuvre une méthode de vélocimétrie telle que la PIV, qui permet de visualiser des sections du champ de vitesse.

Mécanisme de forçage des écoulements en rotation : déclenchement des écoulements secondaires dans les système en rotation

Dans le cas de la convection thermique, le mouvement résulte d'un déséquilibre gravitationnel. Les instabilités inertielles quant à elles puisent leur énergie dans la rotation de la planète. A l'heure actuelle, la convection thermosolutale est la mieux placée pour expliquer l'origine des champs magnétiques planétaires (en tout cas pour la Terre). Combinant les effets déstabilisants d'un gradient thermique, d'un gradient de composition dans le champ de gravité de la Terre, la convection met en place des écoulements sous la forme de rouleaux bidimensionnels à cause de la rotation rapide. Les colonnes dérivent lentement dans le temps sous l'action des parois inclinées, ce qui donne lieu à des vents thermiques, équivalents aux ondes de Rossby. La dynamo cinématique de ces écoulements a d'abord été démontrée théoriquement avec des approches de type champ moyen. Avec l'arrivée des fortes capacités de calcul numérique, les premières simulations de dynamos entretenues par des écoulements convectifs ont trouvé des champs magnétiques majoritairement dipolaires avec une dynamique complexe et des renversements, tout comme pour le champ magnétique terrestre. Les simulations de la géodynamo non linéaire demandent des ressources informatiques importantes, et il est important de remarquer que des simulations avec des jeux de paramètres loin de la réalité arrivent finalement bien à représenter l'essentiel de la géodynamo. Aujourd'hui on se rapproche de paramètres de plus en plus réalistes. Notons cependant que les toutes dernières simulations à la plus grande résolution, semblent indiquer que les rouleaux de convection alignés avec l'axe de rotation font place à une convection sous forme de panaches. Ces écoulements continuent à être des écoulements très efficaces pour produire des dynamos, et ils ont également été observés dans des expériences hydrodynamiques de convection en présence de rotation rapide loin du seuil de l'instabilité convective. La convection est aujourd'hui le mécanisme dominant pour expliquer l'origine du champ magnétique, mais pas nécessairement pour toutes les planètes. On pense aujourd'hui par exemple que le champ magnétique terrestre existe depuis plus longtemps qu'une convection suffisamment forte pour entretenir la dynamo. Il est donc intéressant et nécessaire de poursuivre l'étude vers d'autres mécanismes d'excitation.

La rotation rapide des écoulements planétaires domine largement les perturbations qui s'y superposent. Typiquement pour la Terre, on a estimé que l'amplitude de ces perturbations est de l'ordre de 10^{-7} fois plus petite que l'écoulement de rotation, si l'on considère que les variations lentes du champ magnétique correspondent à l'échelle de vitesse de l'écoulement. Dans ce cas, la rotation dominante influence fortement les perturbations à travers la force de Coriolis. Les propriétés des écoulements en rotation rapide sont discutés en détail dans le livre de Greenspan [34] et résumés au chapitre 1 de ce manuscrit. Rappelons ici quelques aspects importants des solutions

linéarisées par rapport à un état de rotation donné.

On sépare les perturbations de la rotation rapide en deux classes : les écoulements géostrophiques et les ondes inertielles.

Les écoulements géostrophiques sont les solutions stationnaires dans le repère tournant, résultant de l'équilibre entre la force de Coriolis équilibre et les gradients de pression dans le fluide. En prenant le rotationnel de l'équation d'équilibre, dit géostrophique, on obtient le *théorème de Taylor-Proudman* : les écoulements géostrophiques sont indépendants de la coordonnée le long de l'axe de rotation. En présence de parois courbées, on doit abandonner la situation idéale du théorème et admettre qu'une indépendance parfaite de la coordonnée z ne permet pas de respecter les conditions aux limites. Ceci donne lieu à la classe des écoulements *quasi-géostrophiques*. Malgré une faible dépendance en z , ces écoulements restent majoritairement organisés en colonnes. La « relâchement » de la contrainte de Taylor-Proudman est accompagné d'une fréquence faible. Les écoulements quasi-géostrophiques varient lentement dans le temps par rapport à la période de rotation rapide du fluide Ω^{-1} . Ces écoulements sont souvent appelés les *ondes de Rossby*. Si on continue à relâcher la contrainte de Taylor-Proudman (on autorise des variations le long de z), on s'aperçoit que la variation dans le temps de l'écoulement devient de plus en plus rapide. L'inertie du fluide ($\rho \partial_t u$) devient importante et atteint le même ordre de grandeur que la force de Coriolis, si l'écoulement varie sur une période de rotation. Dans cette limite, les écoulements ne sont plus du tout indépendants de z , mais plutôt 3D. On parle alors d'*ondes inertielles*. De ce point de vue, les ondes de Rossby ne sont donc en réalité que des ondes inertielles lentes. Les écoulements géostrophiques permettent à une particule fluide de se déplacer sur des grandes distances sur des échelles de temps lentes, alors qu'une onde inertielle fait osciller les particules de fluide autour d'une position d'équilibre sur des échelles de temps rapide.²

En géométrie infinie on peut donner des expressions exactes pour les relations de dispersion des ondes planes, ou des ondes tournantes (de la forme $f(\varphi - \omega t)$). Dans un réservoir fini les ondes ont des vitesses de propagation rapide (typiquement reliées à la vitesse de rotation), et les effets du confinement se font rapidement sentir dans tout le fluide. Plusieurs propriétés générales des ondes inertielles confinées sont discutées dans le livre de Greenspan. Lord Kelvin, en 1880, a été le premier à trouver une famille d'ondes inertielles dans un cylindre en rotation rapide. Le confinement des ondes mène à un spectre discret de fréquences, d'une manière identique aux vibrations d'une corde élastique encastrée. Des solutions analytiques et des fréquences propres pour les ondes inertielles sont également connues en géométrie sphérique et sphéroïdale.

D'une manière générale, peu de solutions sont connues pour les ondes inertielles dans d'autres géométries, mais on pourrait toujours penser que le confinement des ondes mène à un spectre discret de modes globaux. Il s'avère en fait que ceci n'est pas toujours aussi simple à cause d'une particularité mathématique : dans des volumes de fluide de forme générale, le problème des ondes inertielles est mal posé et l'écoulement forcément plus complexe. Par exemple, dans une coquille sphérique, les ondes se focalisent sur des caractéristiques et les mouvements de fluide deviennent très localisés dans des couches de cisaillement internes ([95],[126, 84, 97]).

De toute manière, quelle que soit la géométrie, il s'avère que le fluide confiné en rotation est sensible aux excitations extérieures. Ceci ouvre la voie à des mécanismes d'excitation des ondes inertielles par phénomène de résonance, tels que la précession, la libration ou l'instabilité elliptique. L'état de base d'un corps céleste est bien plus complexe qu'une simple rotation rigide³.

2. Ceci ne veut pas dire que les ondes inertielles ne peuvent pas avoir une grande longueur d'onde.

3. La présence d'une stratification fait intervenir la poussée d'Archimède, qui peut être déstabilisante et entraîner

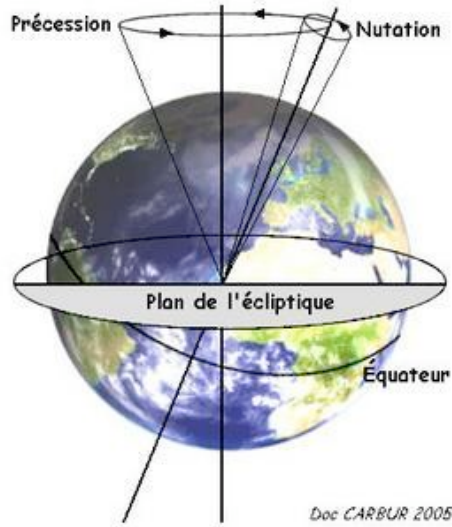


FIGURE 1.3: Précession de la Terre.

Au cours de notre étude, nous nous intéresserons au mouvement de la précession.

Le mouvement de précession

La précession désigne le mouvement où l'axe de rotation principal Ω_R tourne lui-même autour d'un autre axe Ω_P . Dans son aspect géophysique, elle trouve son origine dans l'aplatissement de la Terre due à la rotation rapide de celle-ci et dans le couple créé par l'interaction gravitationnelle avec le Soleil. Pour la Terre (fig.(1.3)), l'angle entre les deux axes de rotation est grand, $\alpha = 23.5^\circ$, et la précession est très lente : une période de précession vaut environ 25800 années. Ce temps est cependant assez court du point de vue géophysique⁴. L'intérêt pour ce phénomène remonte à la fin du XIX^{ème} siècle. Dans les années 1950, le fait que la précession ait été proposée comme source de mouvement pour la géodynamo a motivé un bon nombre d'études hydrodynamiques ainsi qu'une première étude expérimentale. Toutes ces expériences ont montré un écoulement fortement turbulent. Si la même chose se passait dans la Terre, une dynamo en précession serait alors envisageable.

En effet, dans son article de 1968, Malkus estimait par des estimations sur les bilans énergétiques (pour un écoulement laminaire) que la précession terrestre était un mécanisme dynamogène plausible. La puissance minimale nécessaire à l'entretien du champ magnétique terrestre est estimée proche de 10^{11} W (pertes ohmiques). De la diminution du nombre de jours par année (depuis 850 millions d'années, 435 jours), on peut estimer la variation d'énergie de rotation terrestre et la puissance ainsi dissipée à environ $3,5 \cdot 10^{12} \text{ W}$. Cette quantité est dix fois inférieure au flux de chaleur de la Terre, soit $4 \cdot 10^{13} \text{ W}$, qui intègre toutes les sources internes d'énergie thermique. Une partie de cette énergie de rotation pourrait être prélevée par la précession pour forcer un écoulement engendrant la dynamo terrestre.

Plus tard, des nouvelles séries d'expériences ont été réalisées. Une borne supérieure a alors été dérivée sur la dissipation turbulente pour un écoulement de précession [60], ce qui prouve qu'il n'y a pas d'arguments pour exclure cette instabilité comme source d'énergie dans le noyau

de la convection, ou stabilisante permettant alors l'existence d'ondes internes.

4. En anticipant la suite, on calcule le taux de précession pour la Terre : $\varepsilon = \frac{\Omega_P}{\Omega_R} \sim 10^{-11}$

interne. Il n'est pas encore expliqué comment ces écoulements variant sur des échelles de temps aussi rapides (le jour) seraient capables d'exciter une dynamo qui croît et varie sur des temps diffusifs (~ 10000 ans). Une étude expérimentale (sur laquelle on reviendra plus précisément par la suite) d'un écoulement de Sodium liquide en précession a été faite en 1971 [31]. Une dynamo n'a pas été observée, mais le champ imposé a été amplifié d'un facteur 3, signe d'un mécanisme constructif précurseur à la création d'un effet dynamo. Une expérience de plus grande taille pourrait probablement créer une dynamo. Plus récemment, la question de la dynamo de précession a trouvée une série de réponses. Il a en effet été montré numériquement que la précession peut exciter des dynamos ([124, 123, 65, 64, 122, 132]). Il faut cependant noter que les domaines des paramètres proches de ceux de la Terre sont encore hors de portée des calculs numériques. Le mouvement de précession a été abondamment étudié en mécanique des solides et nous en présentons quelques aspects ci après.

Mécanique des solides et Précession

La dynamique d'un corps solide est un problème à six degrés de liberté :

- les coordonnées du centre de masse,
- les trois angles d'Euler déterminant l'orientation du solide dans l'espace tridimensionnel, définie par ses axes principaux d'inertie.

Lorsque le corps est isolé, les équations du mouvement prennent une forme remarquable dans le référentiel des axes d'inertie: ce sont les équations d'Euler:

$$d\omega_i/dt + C_{ikl}\omega_k\omega_l = 0 \quad (1.5)$$

avec ω_i la vitesse angulaire définie pour un point matériel , $i = 1, 2, 3$ et $C_{ikl} = \frac{(I_l - I_k)}{I_i}$

Les symétries des coefficients de couplage rendent manifestes les conservations du moment angulaire $L = \sum I_i \omega_i$ et de l'énergie $E = 1/2 \sum I_i \omega_i^2$. En utilisant ces propriétés de conservation, on peut obtenir les solutions de ce système de trois équations non linéaires :

- si l'axe de rotation initial ne coïncide pas avec un des axes d'inertie, le mouvement se décompose en une rotation et une précession/nutation,
- lorsque l'axe de rotation initial coïncide avec un axe d'inertie, on montre la stabilité du mouvement de rotation initial autour de l'axe de plus grande inertie, comme autour de l'axe de plus petite inertie.
- lorsque le corps est soumis à un couple, on retrouve le mouvement de précession.

On appelle très généralement «précession» le changement d'orientation de l'axe de rotation instantané d'un objet. L'origine physique de la précession peut être très variée.

Il convient, alors, à ce stade de notre étude d'éclaircir un peu le vocabulaire utilisé par la suite. Dans cette thèse, on appellera précession la composition de deux rotations dont les axes concourent

en un point fixe. C'est le mouvement le plus simple si l'on souhaite forcer un écoulement par les parois du réservoir: le réservoir tourne autour d'un axe, le tout étant placé sur une table en rotation. Il se trouve que la composition de deux rotations est une opération qui a diverses applications en physique et il n'est pas inutile d'en esquisser une liste ici.

Les non-linéarités quadratiques des équations d'Euler font que le système (1.5) peut être considéré comme «de type hydrodynamique», dans la mesure où, avec des conditions aux limites périodiques, les équations de Navier -Stokes peuvent s'écrire dans l'espace de Fourier sous la forme :

$$\frac{d\vec{u}_n}{dt} + i \sum_{p+q=n} C_{npq} \vec{u}_p \vec{u}_q - \nu n^2 \vec{u}_n = \vec{0} \quad (1.6)$$

où les u_n sont des composantes (complexes, 3D) de Fourier de la vitesse et n, p, q désignent dans ce cas des vecteurs d'onde. Les *constantes* de couplage traduisent la géométrie de la triade de vecteurs d'onde.

On peut aussi s'intéresser à une extension des équations d'Euler avec un nombre fini de degrés de liberté. C'est le problème du «gyrostat»⁵.

Cependant, le mouvement de précession intéresse tout particulièrement les astrophysiciens étant donné le nombre d'objets astrophysiques en précession (étoiles à neutron, disque d'accrétion, étoiles, planètes, astéroïdes,...). Dans la mesure où il est rigide et exempt de frottement, la dynamique d'un astéroïde devrait vérifier le mouvement de précession prédit par les équations d'Euler. Les courbes de lumière de ces objets montrent que c'est bien le cas.

Pour conclure cette section, on peut rappeler ici sans autres commentaires que certaines études sur le forçage par précession sont aussi motivées par des applications aux vols spatiaux (réservoir à fuel des fusées), sans parler des projectiles avec réservoir de liquide (bombes au phosphore...), qui mettent en jeu des réservoirs de fluide en rotation. Une illustration plus pacifique du couplage entre fluide et réservoir serait de comparer les propriétés de rotation d'un oeuf (selon qu'il est frais ou dur).

L'autre motivation de notre étude concerne la caractérisation de la réponse d'un fluide en rotation à un changement d'axe de rotation. Dans son aspect hydrodynamique «pur», ce problème concerne directement la dynamique d'un fluide en rotation qui intervient dans plusieurs domaines que nous allons présenter dans la prochaine section.

Présentation générale des écoulements de fluide en rotation

Outre l'effet dynamo, le contexte de notre étude s'insère directement dans la thématique générale des fluides en rotation. Nous rappelons (et nous nous y attarderons longuement au chapitre 1) que les équations de la dynamique des fluides en rotation font apparaître deux termes supplémentaires par rapport au cas sans rotation :

- la force centrifuge qui se traduit par une déviation de la gravité apparente et de ce fait ne joue pas de rôle significatif, si la densité est uniforme.
- la force de Coriolis, qui joue un rôle majeur dans la dynamique à grande échelle⁶ des écoulements géophysiques. Elle influe également sur l'organisation météorologique en cyclones et

5. Ce problème a préoccupé bon nombre d'illustres physiciens du XIXème siècle (Maxwell,...) concernant une représentation mécanique de l'éther.

6. Un cyclone peut atteindre des diamètres de l'ordre de 1000 km et un tourbillon océanique, 100 km.

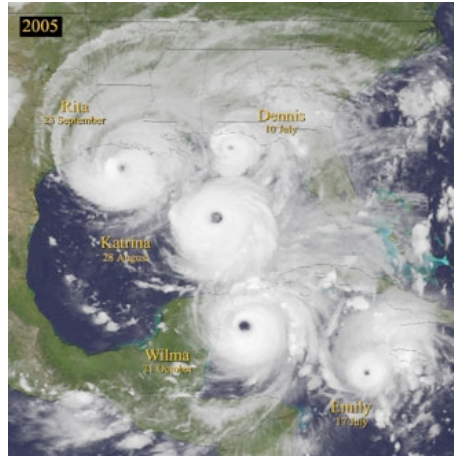


Figure 1.4: Série de cyclones ayant touché le continent américain en 2005.

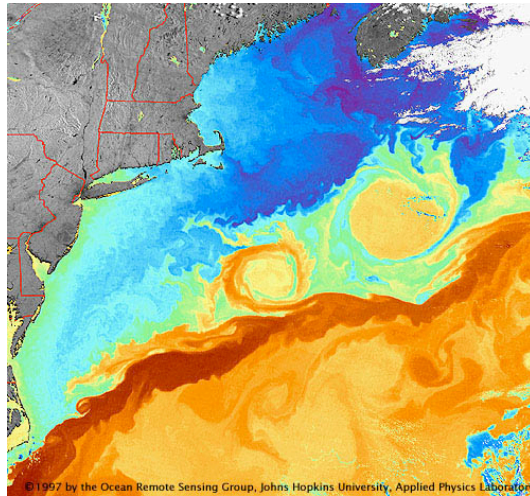


Figure 1.5: Vortex cycloniques dans le Gulf Stream.

anticyclones et sur la formation de structures tourbillonnaires au sein des océans. De plus, on dit souvent que cette force tend à bidimensionnaliser les écoulements et de fait, joue un rôle prépondérant pour l'étude de la turbulence en rotation.

La vorticité, définie comme le rotationnel de la vitesse, peut être vue comme un taux de rotation locale au sein de l'écoulement et devient une grandeur importante et pertinente du point de vue de la dynamique d'un fluide en rotation. Par ailleurs, de nombreux travaux semblent montrer qu'une bonne partie de la dynamique de la turbulence se joue à travers ces structures tourbillonnaires dont on connaît mal les mécanismes de formation et les instabilités susceptibles d'être générées.

Nous proposons au cours de cette étude de caractériser l'influence de la force de Coriolis sur une colonne de fluide en rotation [67], ce qui représente un intérêt pour la dynamique des écoulements :

- géophysiques (atmosphériques et océaniques)⁷ [86, 109, 20, 111, 108].
- astrophysiques (atmosphères de planète, disque d'accrétion, galaxies..) [22, 51, 114, 99]

7. Il faut néanmoins rappeler qu'une telle étude est délicate dans la mesure où de nombreux paramètres physiques (stratification, température, humidité,...) sont à considérer.

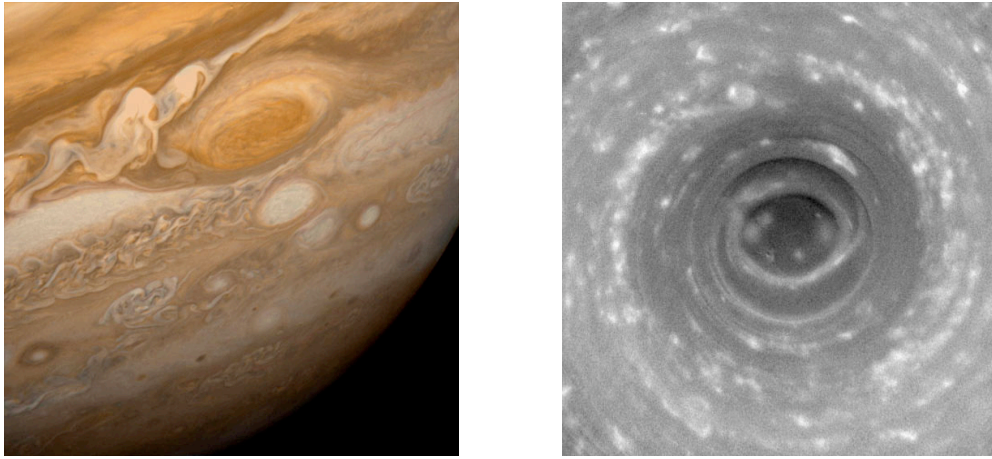


Figure 1.6: Tâche rouge de Jupiter et cyclone au pôle sud de Saturne.

- industriels (turbomachines à l'origine de turboréacteurs et turbo propulseurs).

Plan du manuscrit Dans le chapitre 2, après avoir brièvement rappelé les caractéristiques des fluides en rotation incompressible, nous allons écrire et dériver les équations de Poincaré généralisées caractéristiques des fluides en rotation. Nous nous référerons à ces équations tout au long de cette étude, équations qui finalement n'ont pas été si souvent explicitées.

Le chapitre 3 est consacré aux ondes inertielles (présentées au chapitre 1) en géométrie cylindrique communément appelées les modes de Kelvin. Puis, nous détaillerons la dynamique d'un fluide en précession et nous en verrons les effets sur les modes de Kelvin.

Le couplage faiblement non linéaire de deux modes avec le flot de base est étudié au chapitre 4. Elle permet de démontrer un résultat important qui est la génération d'une rotation différentielle dans l'écoulement en précession, ce qui dans un contexte expérimental de dynamo cinématique représente un intérêt majeur.

La description complète de l'expérience ATER et du système de mesure associé, ainsi que quelques résultats préliminaires de visualisation sont relatés au chapitre 5.

Les chapitre 6 et 7 sont consacrés aux résultats expérimentaux qui ont permis de mettre en évidence plusieurs régimes d'écoulement, l'un qualifié de linéaire (abordé au chapitre 5) et l'autre (abordé au chapitre 6) issu d'une instabilité dont on étudiera le mécanisme au chapitre 7.

L'effet de la viscosité est analysé au chapitre 8. Le problème ne sera pas traité directement et l'on ouvrira des perspectives dans ce domaine.

Le chapitre 9 explore l'angle de l'écoulement en précession au travers des simulations numériques. Il reprend, notamment, les résultats expérimentaux du chapitre 6 en vue d'une modélisation numérique implémentée dans un code dynamo cinématique afin de mettre en évidence un éventuel effet dynamo avec l'expérience ATER.

Le chapitre 10 est consacré à une étude par interférométrie acoustique d'un écoulement turbulent. Une mise au point de la procédure de traitement de données est expliquée et on se bornera à ouvrir quelques perspectives dans ce domaine.

Première partie

PREMIERE PARTIE

Etudes analytiques

Chapitre 2

Fluides incompressibles en rotation

Dans ce chapitre, après avoir rappelé quelques généralités concernant les fluides en rotation, nous allons considérer les équations de la dynamique d'un fluide visqueux en situation de rotation différentielle quelconque $\vec{\Omega}(\vec{r})$ en présence des termes non linéaires. On montre notamment comment obtenir une équation sur la pression, l'équation de Poincaré obtenue pour la première fois en 1910 dans un cas de rotation homogène, non visqueux [89]. Le problème consiste alors à écrire une équation prenant en compte les cas visqueux (obtenue par Kudlick [53]) et de rotation différentielle afin de généraliser l'approche de Poincaré et que nous reprendrons à certains endroits du manuscrit.

2.1 Phénoménologie et équation des fluides en rotation

En préambule de son ouvrage de référence, Greenspan [34] insistait sur la phénoménologie originale, diverse et passionnante qu'offre l'étude des fluides en rotation. En effet, ces écoulements sont le siège de mécanismes assez complexes car souvent éloignés de l'intuition. Au cours de cette section, nous insisterons essentiellement sur deux notions mentionnées brièvement en introduction de ce manuscrit : l'*écoulement géostrophique* et les *ondes inertielles*.

2.1.1 Nombres caractéristiques associés au fluide en rotation

Considérons un repère à symétrie cylindrique tournant à la vitesse angulaire Ω . Ce repère n'étant pas inertiel, il apparaît deux forces d'inertie aux effets physiques différents :

$$\left(\frac{D\vec{u}}{Dt}\right)_{inertiel} = \left(\frac{D\vec{u}}{Dt}\right)_{relatif} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{u} \quad (2.1)$$

avec $\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})$ l'accélération centrifuge dont l'effet est de « pousser » la particule fluide radialement vers l'extérieur et $2\vec{\Omega} \wedge \vec{u}$ l'accélération de Coriolis dont le rôle est, justement, d'accélérer la particule orthogonalement à sa vitesse relative dans le repère co-mobile et orthogonalement à l'axe de rotation. Cette expression sera justifiée et commentée plus précisément en section 2.2.1 lorsqu'on s'intéressera à la cinématique d'un fluide en précession.

Il est important de noter que l'accélération centrifuge dérive d'un potentiel qui peut donc être joint au gradient de pression, formant ainsi une pression « efficace » Π . En supposant la densité

du fluide indépendante des coordonnées spatiales, nous pouvons écrire¹ :

$$\Pi = \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2} |\Omega \wedge r|^2 \quad (2.2)$$

L'équation de Navier-Stokes dans le cas d'un fluide en rotation s'écrit donc :

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla}(\Pi) - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{u} + \nu \Delta \vec{u} \quad (2.3)$$

Dans le cas d'une rotation rigide pure (i.e pas de vitesse relative dans le repère tournant), cette équation se résume à : $\vec{\nabla}\Pi = 0 \Rightarrow \Pi = \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}(\Omega r)^2 = \frac{p_0}{\rho}$ qui traduit l'équilibre entre force de pression (dirigée vers l'intérieur) et force d'inertie centrifuge (dirigée vers l'extérieur).

Réécrivons l'équation (1.3) en renommant la pression efficace p et en faisant apparaître plus explicitement la condition d'incompressibilité :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla}p - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{u} + \nu \Delta \vec{u} \quad (2.4)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.5)$$

En notant L , la dimension caractéristique du problème (au choix rayon ou longueur du cylindre) ; U , la vitesse relative caractéristique ; $T=1/(2\Omega)$, l'échelle de temps (choix naturel dans le cas d'une rotation, le facteur $\frac{1}{2}$ permet de s'affranchir du facteur 2 de la force de Coriolis), les équations (2.4-2.5) se réécrivent :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + Ro(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla}p - \frac{\vec{\Omega}}{|\vec{\Omega}|} \wedge \vec{u} + E \Delta \vec{u} \quad (2.6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.7)$$

L'adimensionnement permet donc de faire apparaître deux nombres adimensionnels :

- le nombre d'Ekman : $E = \frac{\nu}{2\Omega L^2} = \frac{\frac{\nu U}{L^2}}{2\Omega U} = \frac{\text{Forces visqueuses}}{\text{Forces de Coriolis}}$ qui a la même valeur que l'inverse d'un nombre de Reynolds ($E = Re^{-1}$) et qui mesure l'importance relative des forces de Coriolis par rapport aux forces visqueuses. La faible valeur de la viscosité cinématique de l'eau ($\nu \cong 10^{-6} m.s^{-2}$) fait que les Reynolds expérimentaux atteignent 10^5 .
- La faible viscosité (mesurée par le nombre d'Ekman en facteur du laplacien $\Delta \vec{u}$) entraîne la formation au sein de l'écoulement de zones à variations spatiales très rapides nommées *couches limites* en raison de leur localisation au niveau des parois. C'est à l'intérieur de ces couches que la viscosité, même petite, joue un rôle significatif en permettant de raccorder l'écoulement à la condition d'adhérence aux parois ($\vec{u} = \vec{0}$).

1. l'introduction d'une pression efficace n'est possible que si le fluide est incompressible à densité uniforme et si les conditions aux limites ne font pas intervenir la pression

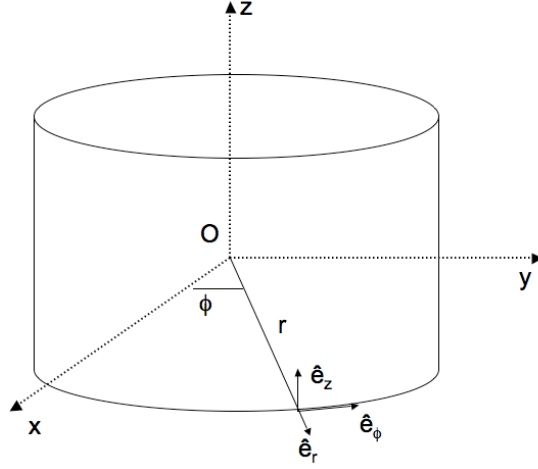


FIGURE 2.1: Repère et système de coordonnées cylindriques

- le nombre de Rossby : $Ro = \frac{U}{2\Omega L} = \frac{\frac{U^2}{L}}{2\Omega U} = \frac{\text{Forces convectives non-linéaires}}{\text{Forces de Coriolis}}$ qui mesure l'importance des effets non linéaires par rapport aux forces de Coriolis. Lorsque $Ro \ll 1$, l'écoulement est dominé par la rotation et on peut simplifier le problème en linéarisant les équations.

2.1.2 Théorème de Taylor Proudman

Supposons que la force de Coriolis a un effet dominant par rapport au terme de convection (terme non linéaire) et devant le cisaillement dû à la viscosité, c'est-à-dire :

$|(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}| \ll |\vec{\Omega} \wedge \vec{u}|$ et $|E \Delta \vec{u}| \ll |\vec{\Omega} \wedge \vec{u}|$ (où $E \ll 1$, $Ro \ll 1$), qui traduit le cas d'un écoulement linéaire et non visqueux.

Les équations (1.6) et (1.7) se réécrivent :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p - \frac{\vec{\Omega}}{|\Omega|} \wedge \vec{u} \quad (2.8)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.9)$$

qui deviennent dans le cas stationnaire :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{\nabla} p = -\frac{\vec{\Omega}}{|\Omega|} \wedge \vec{u} \end{cases} \quad (2.10)$$

Cette situation traduit le cas où la force de Coriolis équilibre de manière exacte la gradient de pression. Ce type d'écoulement est nommé *géostrophique*.

A ce niveau, nous allons considérer une géométrie quelconque définie dans un repère cylindrique $(\hat{e}_r, \hat{e}_\phi, \hat{e}_z)$ décrit par le système de coordonnées (r, ϕ, z) (fig.2.1) et nous prendrons : $\vec{\Omega} = \Omega \hat{e}_z$

En appliquant l'opérateur rotationnel à la dynamique géostrophique, on démontre l'invariance des trois composantes du champ de vitesse suivant l'axe de rotation. Ce résultat important est connu sous le nom de *théorème de Taylor-Proudman* :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$$

Pour un écoulement à géométrie cylindrique présentant des parois perpendiculaires à l'axe de rotation, la composante du champ de vitesse parallèle à l'axe de rotation est nulle dans tout l'écoulement. On a : $\vec{u} = (u_1 \ u_2 \ u_3)$ et $\frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{\partial u_2}{\partial z} = u_3 = 0$

Un écoulement géostrophique peut être vu comme le déplacement d'un ensemble (nous utiliserons le terme de colonne) de lignes parallèles à l'axe de rotation. La hauteur de ces colonnes ne peut varier en raison de la condition de stationnarité sinon l'intensité des tubes de vorticité ne serait pas constante. Dans le cas d'une géométrie sphérique, les lignes de fluide suivent des contours de hauteur constante nommés *contours géostrophiques*². C'est la géométrie du réservoir qui détermine les contours géostrophiques. Une demi-sphère ou un cylindre tronqué (par exemple avec une des parois non perpendiculaire à l'axe de rotation) ne présenteront pas de modes géostrophiques mais seront remplacés par un type particulier d'ondes d'importance fondamentale pour des problèmes géophysiques ou météorologiques, les *ondes de Rossby*. On ne s'intéressera pas au cas de ces ondes ici puisque du point de vue expérimental, même si quelques défauts de fabrication concernant la géométrie cylindrique existent sans nul doute, on peut considérer comme relativement faible l'amplitude des ondes de Rossby associées.

Nous abordons, dans la section suivante, les solutions instationnaires de (2.8).

2.1.3 Généralités sur les ondes inertielles en milieu non borné

Avant de s'intéresser directement au cas des ondes inertielles, il est intéressant de considérer l'équation sur la vorticité donnée par l'application du rotationnel sur l'  q.(2.6) :

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + R_O(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} = R_O(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} + E \Delta \vec{\omega}$$

Si l'on s'intéresse à une forme simplifiée en négligeant les termes non linéaires :

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} + E \Delta \vec{\omega} \quad (2.11)$$

On peut remarquer qu'outre le terme de dissipation visqueuse $E \Delta \vec{\omega}$, l'évolution temporelle de la vorticité en un point de l'écoulement est reliée au terme $\frac{\partial \vec{u}}{\partial z}$, terme caractéristique de la dynamique géostrophique, traduisant un étirement préférentiel des lignes de vorticité selon l'axe de rotation $\hat{e}_z$.

- Remarque : en projetant respectivement les   qs.(2.6) et (2.11) sur l'axe de rotation et en remarquant que l'application de la divergence sur l'eq.(2.6) donne $\Delta p = \omega_z$ (  quation de Poisson sur la pression ayant pour terme source la composante axiale de la vorticité), on aboutit à l'équation fondamentale des ondes inertielles aussi appelée *  quation de Poincaré* :

2. Tout contour tracé sur une surface perpendiculaire à l'axe de rotation est un contour géostrophique.

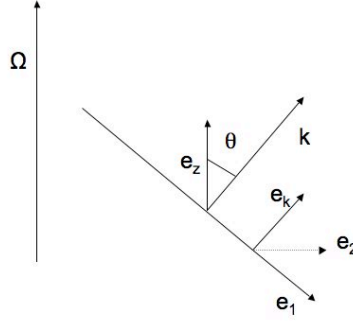


FIGURE 2.2: Géométrie de la propagation des ondes inertielles

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - E\Delta\right)^2 \Delta p + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (2.12)$$

Les conditions aux limites peuvent aussi s'exprimer seulement avec la pression. Cette équation est de type hyperbolique, et on veut l'utiliser dans un réservoir borné. Dans certaines conditions particulières, les conditions aux limites sont telles que le problème est mal posé (coquilles sphériques), mais cela ne se produira pas avec le cylindre.

On cherche des solutions sous forme d'ondes planes en milieu infini ($\vec{k}$ et ω sont respectivement le vecteur d'onde et la pulsation de ces ondes) :

$$p = P_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (2.13)$$

$$\vec{u} = \vec{U}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (2.14)$$

aux équations :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p - \hat{e}_z \times \vec{u} + E\Delta \vec{u}$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

Nous décidons de garder les termes visqueux afin d'adopter un point de vue général. En injectant tour à tour les solutions en pression et en vitesse, nous mettrons en évidence différentes caractéristiques des ondes inertielles.

En injectant l'expression (2.13) dans l'eq.(2.12), on obtient la relation de dispersion générale :

$$\omega = -iEk^2 \pm \omega_0 \quad (2.15)$$

avec

$$\omega_0 = \cos(\theta) \quad (2.16)$$

où $\theta = (\hat{e}_k, \hat{e}_z)$.

Dans (2.15), en raison du terme visqueux, on voit que la particule fluide décrit une spirale en convergeant vers son centre dans un plan normal à $\mathbf{k}$. L'amortissement est fonction du nombre de Reynolds et du module de $\mathbf{k}$, et non de son orientation.

On s'intéresse maintenant à la relation de dispersion dans le cas non visqueux. L'égalité (2.16) montre une caractéristique fondamentale des ondes inertielles, à savoir que les pulsations sont comprises dans l'intervalle $[-1; 1]$ ($[-2\Omega, 2\Omega]$ dans le cas dimensionné). En milieu confiné, Greenspan [53] montre qu'il faut éliminer les bords ± 1 de l'intervalle. La vitesse de phase est donnée par :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} \hat{e}_k = \frac{\pm \cos(\theta)}{k} \hat{e}_k \quad (2.17)$$

La vitesse de groupe (vitesse liée à la propagation de l'énergie) est donnée par :

$$v_g = \nabla_k \omega = \frac{\pm \sin(\theta)}{k} \hat{e}_1 \quad (2.18)$$

Une caractéristique fondamentale des ondes inertielles est que vitesse de groupe et vitesse de phase sont orthogonales. L'énergie se propage perpendiculairement au vecteur d'onde qui porte la vitesse de phase. Les particules-fluides vont donc osciller dans des plans orthogonaux à $\hat{e}_k$. Contrairement aux ondes acoustiques se propageant de manière isotrope dans un milieu homogène au repos pour lesquelles vitesse de groupe et vitesse de phase sont confondues, les ondes inertielles sont purement transverses et la dépendance de ω en fonction de la direction du vecteur d'onde les rend dispersives et anisotropes.

Etudions à présent les cas limites : $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$:

– cas $\theta = 0$

Vecteur d'onde et axe de rotation ont même direction. La vitesse de phase est maximale et vaut $v_\varphi = \frac{1}{k} \hat{e}_k$. La vitesse de groupe, quand à elle, est nulle, il ne se propage aucune énergie, et les particules reviennent à leur position initiale suivant des cercles. Ce résultat n'est pas si contre-intuitif qu'il en a l'air : les particules oscillent dans des plans perpendiculaires à $\mathbf{k}$ en décrivant des cercles (le chapitre 5 illustrera expérimentalement cette caractéristique). Entre ces différents plans (pour ce cas-ci orthogonaux à l'axe de rotation confondu avec $\mathbf{k}$) il y a un déphasage continu de ces oscillations mais aucune propagation physique. Cette situation correspond au cas $R_O = 1$ si l'on prend comme définition $R_O = \frac{\omega}{2\Omega}$

– cas $\theta = \frac{\pi}{2}$

Vecteur d'onde perpendiculaire à l'axe de rotation. Vitesse de phase et pulsation sont nulles contrairement à la vitesse de groupe qui, elle, est maximale : l'énergie se propage verticalement de façon stationnaire le long de l'axe de rotation. Les particules fluides n'oscillent plus. Les cônes caractéristiques de propagation (fig.2.2) sont refermés suivant la verticale et correspondent aux colonnes de Taylor-Proudman, signature des écoulements géostrophiques. En conclusion, pour le cas $\theta = \frac{\pi}{2}$, les ondes inertielles sont géostrophiques, le terme de Coriolis est équilibré par la pression. Ce cas correspond à la situation $R_O \ll 1$.

Le cas $Ro \gg 1$ correspond à un écoulement où la rotation ne domine pas, par conséquent les modes

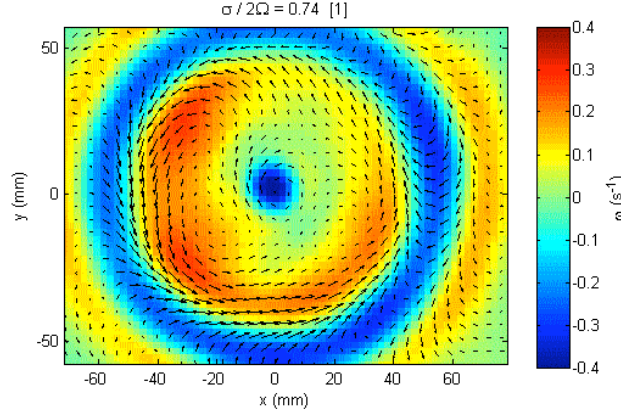


FIGURE 2.3: Mise en évidence par PIV des ondes inertielles (Messio et al, 2008)

inertiels ne seront pas visibles.

Enfin, une dernière caractéristique des ondes inertielles concerne leur hélicité. On rappelle l'expression de la solution en onde plane (eq.(2.14)). L'équation de continuité a pour conséquence :

$$\vec{k} \cdot \vec{U}_0 = 0 \quad (2.19)$$

On en déduit que $\vec{U}_0$ appartient au plan contenant les vecteurs $\hat{e}_1$ et $\hat{e}_2$ (on vérifie que les ondes inertielles sont des ondes transverses). En projetant dans le plan perpendiculaire au vecteur d'onde, et en utilisant l'équation de dispersion, on obtient l'expression du champ de vitesse :

$$\vec{u} = U_0 e^{-Etk^2} \begin{pmatrix} \mp \cos \left(\vec{k} \cdot \vec{x} \mp \omega_0 t \right) \\ \mp \sin \left(\vec{k} \cdot \vec{x} \mp \omega_0 t \right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Deux états de polarisation sont possibles. Ces deux états correspondent aux deux signes de l'hélicité.

2.1.4 Mise en évidence expérimentale des ondes inertielles

Nous terminons cette section en mentionnant quelques mises en évidence expérimentale des ondes inertielles.

De nombreuses expériences ont été réalisées dans différentes géométries. Citons pour le cylindre (Oser, 1958 ; Fultz, 1959, Mc Ewan, 1970 ; Ito, et al., 1984 ; Manasseh, 1996 ; Duguet, 2006, Meunier et al., 2008) pour les sphéroïdes (Malkus, 1968) et des géométries plus complexes (Manders and Maas, 2003).

L'expérience qui apparaît pionnière dans le domaine est celle de Fultz [27]. Le même dispositif a été repris par une équipe du FAST (Fluides, Automatique et Systèmes thermiques) pour des études PIV qui ont permis de bien mettre en évidence les ondes inertielles comme le montre la fig.(2.3).

2.1.5 Fluide en rotation et couches limites

Dans ce paragraphe, nous ne faisons que mentionner quelques généralités concernant les couches limites en rotation. Une étude plus détaillée sera faite au chapitre 8.

Dans les écoulements en rotation en géométrie fermée, la viscosité a un rôle déterminant. elle peut générer des effets dynamiques dont les amplitudes peuvent être comparables à l'écoulement de base en volume, sur des échelles de temps plus grandes que celle imposée par la rotation (Ω^{-1}). Même pour des grands nombres de Reynolds (autrement dit, pour de faibles viscosités), les couches limites en présence de rotation sont à considérer. Elles induisent des écoulements secondaires en volume à des échelles caractéristiques du fluide. Le *pompage d'Ekman* est un bon exemple d'écoulements secondaires induits par la rotation et la viscosité. Le pompage est responsable du fait qu'une mise en rotation (spin-up) d'un réservoir ne se fait pas sur des échelles de temps de l'ordre $\mathcal{O}(E^{-1})$ associé à la simple diffusion visqueuse comme on pourrait le prévoir, mais sur un temps de l'ordre $\mathcal{O}(E^{-\frac{1}{2}})$ temps lié au pompage d'Ekman.

Notons que la viscosité peut être un acteur direct, par exemple, en tant que mécanisme déstabilisant par diffusion de la quantité de mouvement (écoulement de Poiseuille) ou alors en tant que effet dissipatif pouvant ainsi retarder le déclenchement d'une instabilité.

2.2 Equations de Poincaré généralisée

La philosophie de cette section est de formaliser tous les cas possibles (viscosité, rotation différentielle, ...) concernant les fluides en rotation au travers d'un ensemble d'équations aux dérivées partielles fermées sur la pression qui généralise l'équation de Poincaré mentionnée à la section 1.1.2. En anticipant sur la suite, il est important de faire remarquer que c'est le caractère incompressible du fluide qui permet d'aboutir à cette formulation.

2.2.1 Présentation du problème

On part des équations de Navier-Stokes dans un référentiel en rotation définies en section 2.2 (équ.(2.4-2.5)) :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla}(p) - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{u} + \nu \Delta \vec{u} + \vec{f} \quad (2.21)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \text{ et } CL(\vec{u}, \partial \vec{u}) \quad (2.22)$$

Indépendamment des symétries liées à la géométrie du problème, et comme les termes de l'équation (2.21) ne dépendent explicitement du temps, on pose : $\vec{u} = \vec{V} e^{-i\omega t}$. (NB Dans la suite on continuera à noter $\vec{u}$ et non $\vec{V}$). On réécrit alors l'équation (2.21) sous la forme :

$$(-i\omega + 2\vec{\Omega} \wedge) \vec{u} = -\vec{\nabla}(p) + \nu \Delta \vec{u} + \vec{f} + \vec{N} \quad (2.23)$$

avec $\vec{N} = -(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$. On obtient :

$$L_0(\vec{u}) = \vec{S} \quad (2.24)$$

avec

$$L_0 = -i\omega + 2\vec{\Omega} \wedge$$

$$\vec{S} = -\vec{\nabla}(p) - \nu\Delta\vec{u} + \vec{f} + \vec{N} \quad (2.25)$$

On va utiliser une formule d'inversion connue des plasmiciens (Physique des Plasmas, Abraham Bers) comme étant la formule d'inversion dite « cyclotron ». On part de l'équation vérifiée par $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{S}$:

$$\alpha\vec{a} + \vec{\beta} \wedge \vec{a} = \vec{S}$$

qui se résoud comme :

$$\vec{a} = \frac{1}{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{\beta}} \left[\frac{\vec{S}}{\alpha} + \vec{\beta} \wedge \frac{\vec{S}}{\alpha} - \frac{\vec{\beta}}{\alpha^2} (\vec{\beta} \cdot \vec{S}) \right] \quad (2.26)$$

– Remarque : ici, même si $\vec{S}$ est une fonction explicite quelconque (linéaire ou non linéaire) de $\vec{a}$, cette formule reste valable puisque la formulation est vectorielle.

On applique (2.26) à notre cas avec : $\alpha = -\frac{1}{i\omega}$, $\vec{\beta} = \vec{\Omega}(\vec{r})$ et $\vec{S}$ définie par (2.25). On introduit une perturbation³ $(\vec{v}, p)$. On linéarise autour du flot de base⁴ $(\vec{V}_0, P_0)$ solution des équations (2.21, 2.22). Les équations vérifiées par $(\vec{v}, p)$ sont :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{V}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_0 + 2\vec{\Omega}(\vec{r}) \wedge \vec{v} = -\vec{\nabla}(p) + N(\vec{v}, \vec{v}) + \nu\Delta\vec{v} + \vec{f} \quad (2.27)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 + CL(\vec{v}, \partial \vec{v}) \quad (2.28)$$

On réécrit (2.27, 2.28) de manière analogue à (2.24) avec

$$L_0(\vec{v}) = \vec{S} \quad (2.29)$$

$$L_0(\vec{v}) = i\tilde{\Phi}(r) + 2\vec{\Omega}(\vec{r}) \wedge \vec{v} \quad (2.30)$$

avec $i\tilde{\phi}(r) = -i\omega\vec{v} + (\vec{V}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_0$

En appliquant (2.26), on a :

$$\vec{v} = \frac{1}{i\tilde{\Phi}(r)} \frac{1}{1 - \frac{4(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega})}{\tilde{\Phi}^2}} \vec{w} \quad (2.31)$$

avec

$$\vec{w} = \vec{S} - \frac{2}{i\tilde{\Phi}(r)} \vec{\Omega}(\vec{r}) \wedge \vec{S} - \frac{4}{\tilde{\Phi}^2} \vec{\Omega} \cdot (\vec{\Omega} \cdot \vec{S}) \quad (2.32)$$

3. Nous ne sommes pas obligés à ce niveau-ci de considérer une perturbation infinitésimale

4. On définira plus précisément le concept de flot de base au chapitre 3

où $\vec{S}$ est toujours définie par (2.25).

C'est la condition d'incompressibilité qui va nous permettre d'écrire une équation fermée pour la pression. On va alors obtenir deux contributions :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{i\tilde{\Phi}(r)} \frac{1}{1 - \frac{4(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega})}{\tilde{\Phi}^2}} \right) \cdot \vec{w} + \left(\frac{1}{i\tilde{\Phi}(r)} \frac{1}{1 - \frac{4(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega})}{\tilde{\Phi}^2}} \right) \vec{\nabla} \cdot \vec{w} = 0 \quad (2.33)$$

Nous allons donc diviser l'étude en deux cas

1. sans rotation différentielle : $\vec{\Omega}(\vec{r}) = \vec{\Omega}_0$, la rotation rigide, $\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{i\tilde{\Phi}(r)} \frac{1}{1 - \frac{4(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega})}{\tilde{\Phi}^2}} \right) = \vec{0}$. En effet, $\vec{V}_0 = r\Omega_0\hat{e}_\phi$ donc $\tilde{\Phi} = -\omega - i\Omega_0\partial_\phi$ et Φ est indépendant de r .
2. avec rotation différentielle⁵ : $\vec{\Omega}(\vec{r}) = \vec{\Omega}(r)$. Les écoulements en rotation différentielle interviennent très souvent en astrophysique (disque d'accrétion, intérieurs stellaires,...)

2.2.2 Cas d'une rotation rigide

On doit résoudre :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{w} = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{S} + \frac{2}{i\tilde{\Phi}(r)} \vec{\Omega}_0 \wedge \vec{S} - \frac{4}{\tilde{\Phi}^2} \vec{\Omega}_0 \cdot (\vec{\Omega}_0 \cdot \vec{S}) \right) = 0 \quad (2.34)$$

Le terme $\vec{\nabla} \cdot \vec{S}$ est trivial à calculer et donne : $\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\Delta p + \vec{\nabla} \cdot \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \vec{N}$. En utilisant les formules d'identités vectorielles, nous avons.

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\Omega}_0 \wedge \vec{S}) = -\vec{\Omega}_0 \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{S}) \quad (2.35)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\Omega}_0 \cdot (\vec{\Omega}_0 \cdot \vec{S})) = \vec{\Omega}_0 \cdot \vec{\nabla} (\vec{\Omega}_0 \cdot \vec{S}) = \vec{\Omega}_0 \cdot ((\vec{\Omega}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{S} + \vec{\Omega}_0 \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{S}) \quad (2.36)$$

En développant et regroupant les termes, nous obtenons une équation fermée sur la pression :

$$-\Delta p + \left(\frac{2\vec{\Omega}_0 \cdot \vec{\nabla}}{\tilde{\Phi}} \right)^2 p + R = 0 \quad (2.37)$$

avec :

$$R = R_1(\nu \Delta \vec{w}, \nu \Delta \vec{w}) + R_2(\vec{N}) + R_3(\vec{f}) \quad (2.38)$$

Rappelons que $\vec{w}$ est la vorticité et $\vec{w}$ est une expression complexe définie plus haut (2.32). Dans le cas non visqueux ($R_1 = 0$), en négligeant les effets non-linéaires, ($R_2 = 0$), et en considérant le cas sans forces extérieures ($\vec{f} = \vec{0}$) ($R_3 = 0$), ce qui correspond à $R = 0$, on retrouve l'équation de Poincaré usuelle :

$$-\Delta p + \left(\frac{2\vec{\Omega}_0 \cdot \vec{\nabla}}{\tilde{\Phi}} \right)^2 p = 0 \quad (2.39)$$

5. r , à ce stade, est la distance à l'axe de rotation dans un plan normal à celui-ci.

En prenant : $\vec{\Omega}_0 = \Omega_0 \hat{e}_z$, on retrouve l'équation (2.12) pour $R_e = 0$ et $\tilde{\Phi} = -\omega - i\Omega_0 \partial_\phi$.
 Nous allons maintenant considérer le cas visqueux. Il nous faut dériver explicitement l'expression de R_1
 De (2.35, 2.36), on déduit que :

$$R_1 = \nu \left(-\frac{2}{i\tilde{\Phi}} \left(\vec{\Omega}_0 \cdot \Delta \vec{\omega} \right) - \frac{4}{\tilde{\Phi}^2} \left(\vec{\Omega}_0 \cdot \left(\vec{\Omega}_0 \cdot \vec{\nabla} \right) \Delta \vec{\omega} \right) \right) \quad (2.40)$$

Afin d'exprimer ce terme uniquement en fonction de la pression, il convient de réaliser plusieurs étapes de calcul.

La divergence de (2.29) permet d'obtenir une expression explicite du terme : $2\vec{\Omega}_0 \cdot \vec{\omega}$. En prenant le laplacien, on obtient le terme :

$$2\vec{\Omega}_0 \cdot \Delta \vec{\omega} = -\Delta^2 p + \Delta \left(\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{f} + \vec{N} \right) \right) \quad (2.41)$$

Le rotationnel de (2.29) permet d'obtenir une expression explicite du terme : $\left(2\vec{\Omega}_0 \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{\omega}$. En prenant le laplacien et en réalisant le produit scalaire avec $\vec{\Omega}_0$, on a :

$$\vec{\Omega}_0 \cdot \left(\left(2\vec{\Omega}_0 \cdot \vec{\nabla} \right) \Delta \vec{\omega} \right) = \nu \vec{\Omega}_0 \cdot \Delta \vec{\omega} + \nu \vec{\Omega}_0 \cdot \Delta^2 \vec{\omega} + \vec{\Omega}_0 \cdot \left(\Delta \left(\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{f} + \vec{N} \right) \right) \right) \quad (2.42)$$

Il apparaît les termes $\vec{\Omega}_0 \cdot \Delta \vec{\omega}$ (qu'on a précédemment calculé (2.41)) et $\vec{\Omega}_0 \cdot \Delta^2 \vec{\omega}$ que l'on calcule en prenant le laplacien de (2.41).

En regroupant un à un les termes des différents calculs effectués (2.41, 2.42), on peut écrire une expression de R_1 en fonction de la pression :

$$R_1 = \nu \left(-\frac{1}{i\tilde{\Phi}} \left(-\Delta^2 p + \Delta \left(\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{f} + \vec{N} \right) \right) \right) \right) \quad (2.43)$$

$$- \nu \frac{4}{\tilde{\Phi}^2} \left(-\nu \Delta^2 p + \nu \Delta \left(\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{f} + \vec{N} \right) \right) \right) \quad (2.44)$$

$$- \nu \frac{4}{\tilde{\Phi}^2} \left(-\nu \Delta^3 p + \nu \Delta^2 \left(\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{f} + \vec{N} \right) \right) + \vec{\Omega}_0 \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{f} + \vec{N} \right) \right) \right) \quad (2.45)$$

On peut alors écrire l'équation de Poincaré généralisée au cas visqueux qui est déjà obtenue sans démonstration explicite dans la thèse de Kudlick (1966) :

$$-\Delta p + \left(\frac{2\vec{\Omega}_0 \cdot \vec{\nabla}}{\tilde{\Phi}} \right)^2 p + \frac{\nu^2 \Delta^3 p}{\tilde{\Phi}^2} + 2\nu \frac{\Delta^2 p}{i\tilde{\Phi}} = 0 \quad (2.46)$$

ou encore la version originale de la thèse :

$$-\tilde{\Phi}^2 \Delta p + \left(2\vec{\Omega}_0 \cdot \vec{\nabla} \right)^2 p + \nu^2 \Delta^3 p - 2i\nu \tilde{\Phi} \Delta^2 p = 0 \quad (2.47)$$

2.2.3 Cas d'une rotation différentielle $\Omega_0(\vec{r}) = \Omega_0(r)$

Pour considérer ce cas, il faut développer le terme non nul dans ce cas : $\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{i\tilde{\Phi}(r)} \frac{1}{1 - \frac{1}{4(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega})}} \right)$.

Etant donné la complexité du calcul, nous donnons le résultat, sans le détail du calcul.

$$\begin{aligned}
& -iL_0(p) + \left(1 - \left(\frac{4(\vec{\Omega}_0 \cdot \vec{\Omega}_0)}{\tilde{\Phi}^2}\right)^2\right) [\vec{A} \cdot (-\tilde{\Phi} \vec{\nabla} p + 2i\vec{\Omega}_0 \wedge \vec{\nabla} p + 4\vec{\Omega}_0 \cdot (\vec{\Omega}_0 \cdot \vec{\nabla} p)) - \\
& \frac{2}{\tilde{\Phi}} \vec{\nabla} p \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{\Omega}_0) - 2i \frac{\vec{\nabla} \tilde{\Phi}}{\tilde{\Phi}} \cdot (\vec{\Omega}_0 \wedge \vec{\nabla} p) + B(p, \vec{\Omega}_0)] = 0
\end{aligned} \tag{2.48}$$

avec

$$\vec{A}(\vec{\Omega}_0) = \left(\frac{1}{1 - \frac{4(\vec{\Omega}_0 \cdot \vec{\Omega}_0)}{\tilde{\Phi}^2}}\right) \left(\frac{1}{i\tilde{\Phi}^2}\right) \left[-\vec{\nabla} \tilde{\Phi} \left(1 + \frac{8\Omega_0^2}{1 - \frac{4(\vec{\Omega}_0 \cdot \vec{\Omega}_0)}{\tilde{\Phi}^2}}\right) + 8i \left(\frac{(\vec{\Omega}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{\Omega}_0 + \vec{\Omega}_0 \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{\Omega}_0)}{1 - \frac{4(\vec{\Omega}_0 \cdot \vec{\Omega}_0)}{\tilde{\Phi}^2}}\right)\right] \tag{2.49}$$

et

$$B(p, \vec{\Omega}_0) = \frac{4}{\tilde{\Phi}^2} \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{\Omega}_0) (\vec{\Omega}_0 \cdot \vec{\nabla} p) - \frac{2}{\tilde{\Phi}} \vec{\nabla} \tilde{\Phi} \cdot (\vec{\Omega}_0 \cdot \vec{\nabla} (\vec{\Omega}_0 \cdot \vec{\nabla} p) + \vec{\Omega}_0 \cdot ((\vec{\nabla} p \cdot \vec{\nabla}) \vec{\Omega}_0) + \vec{\nabla} p \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{\Omega}_0)) \right] \tag{2.50}$$

Comme cas particulier, on s'intéressera à un écoulement en rotation différentielle avec cisaillement axial :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} U = 0 \\ V = V(r) \\ W = W(r) \end{pmatrix} \tag{2.51}$$

d'utilité dans le cadre de nos applications astrophysiques .

On retrouve ainsi l'équation de Poincaré avec rotation différentielle et cisaillement axial (Lacaze & Le Dizès, 2005)[76]

$$\frac{d^2 p}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{dr}\right) \frac{dp}{dr} + \left(\frac{2m}{r\Phi\Delta} \left(\Delta \frac{d\Omega}{dr} - \Omega \frac{d\Delta}{dr}\right) - \frac{m^2}{r^2} - \frac{2mk\Omega}{r\Phi^2} \frac{dW}{dr}\right) p = 0 \tag{2.52}$$

avec les notations suivantes : $\Delta(r) = 2\Omega_z(r)\Omega(r) - \tilde{\Phi}^2(r)$, et Ω_z la vorticité axiale.

Cas général : rotation différentielle en présence de viscosité Il est possible d'écrire une équation généralisant l'approche de Kudlick pour une rotation différentielle en présence de viscosité par une approche vectorielle. Ceci ne sera pas plus développé dans cette thèse. Néanmoins, le cas non visqueux avec dépendance azimutale de la rotation différentielle sera évoquée au chapitre 7. Après avoir rappelé quelques caractéristiques des fluides en rotation concernant les écoulements géostrophiques et les ondes inertielles, nous allons considérer le cas des ondes en géométrie cylindrique motivés par l'expérience ATER que nous expliquerons au chapitre 4.

Chapitre 3

Ondes inertielles en géométrie cylindrique et écoulement en précession

3.1 Ondes inertielles non visqueuses en géométrie cylindrique : Modes de Kelvin

3.1.1 Formulation

Comme il a été indiqué au chapitre précédent, les ondes inertielles constituent un mécanisme de propagation fondamental dans les écoulements en rotation à faible nombre de Rossby. Si l'on souhaite étudier une configuration réaliste, il faut tenir compte des conditions aux limites liées au choix de la géométrie. Le but de cette section est la compréhension et la formulation du problème des ondes inertielles en géométrie cylindrique, un problème vieux de plus d'un siècle et intéressant du fait de l'existence de solutions analytiques non visqueuses étudiées pour la première fois par Lord Kelvin en 1880 : les perturbations d'un fluide en rotation solide s'expriment sous la forme de modes inertiels discrets appelés *modes de Kelvin*.

L'écoulement est décrit par l'ensemble d'équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p - \hat{e}_z \wedge \vec{u} \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

où on a choisi $\hat{e}_z$ comme vecteur unitaire portant l'axe de rotation (fig.2.1). Le fait d'être dans un écoulement confiné implique la condition $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, traduisant l'imperméabilité de la frontière. Cette condition est valable sur toute la surface délimitant le volume. Les coefficients étant indépendants du temps, on peut chercher des solutions périodiques en temps. Les modes d'oscillation d'un fluide (ici non visqueux) enfermés dans une enceinte cylindrique en rotation sont un cas particulier d'onde inertielle nommés *modes de Kelvin*.

On définit alors les modes inertiels comme les solutions du système (3.1) :

$$\vec{u} = \vec{u}_\alpha(\vec{x}) e^{-i\omega_\alpha t} \quad (3.2)$$

$$p = \mu_\alpha(\vec{x}) e^{-i\omega_\alpha t} \quad (3.3)$$

Le problème modal vérifié par ces modes est le suivant :

$$\begin{cases} -i\omega_\alpha \vec{u}_\alpha = -\nabla \mu_\alpha - \hat{e}_z \wedge \vec{u}_\alpha \\ \nabla \cdot \vec{u}_\alpha = 0 \\ \vec{u}_\alpha \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Comme l'opérateur des ondes inertielles est hermitien, les vecteurs propres forment une base orthogonale.

3.1.2 Calcul des modes de Kelvin

Nous allons considérer un cylindre de rayon R et de longueur L .

Pour trouver l'expression analytique des modes de Kelvin, nous allons utiliser une dérivation en termes de potentiels utilisée par Raczy [94]. On décompose le champ de vitesse en une partie orthogonale et une partie parallèle à l'axe de rotation : $\vec{u}_\perp = (\vec{u}_r; \vec{u}_\phi)$ et $\vec{u}_\parallel = u_z \hat{e}_z$

La décomposition s'écrit explicitement :

$$\vec{u} = \vec{u}_\perp + \vec{u}_\parallel = \vec{u}_\perp + u_z \hat{e}_z \quad (3.5)$$

On considère un mode de Fourier dans la direction z :

$$\vec{u}_\perp = \widetilde{\vec{u}}_\perp(r, \phi, t) \sin(l_n z) \quad (3.6)$$

$$u_z = \widetilde{u}_z(r, \phi, t) \cos(l_n z) \quad (3.7)$$

$$\mu = \widetilde{\mu}(r, \phi, t) \sin(l_n z) \quad (3.8)$$

On a défini le nombre d'onde axial $l_n = \frac{n\pi}{L}$. Les équations du mouvement (3.1) s'écrivent alors :

$$\frac{\partial \vec{u}_\perp}{\partial t} = -\nabla_\perp \mu - \hat{e}_z \wedge \vec{u}_\perp \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = l_n \mu \quad (3.10)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{u}_\perp + l_n \widetilde{u}_z = 0 \quad (3.11)$$

avec des conditions aux limites à spécifier. Grâce à la relation d'incompressibilité, on peut décomposer les champs $\widetilde{\vec{u}}_\perp$ et $\widetilde{u}_z$ en une partie dérivant d'un gradient et une autre dérivant d'un rotationnel.

$$\widetilde{\vec{u}}_\perp(r, \phi, t) = \vec{\nabla}_\perp \Gamma - \vec{\nabla}_\perp \wedge (\Lambda \hat{e}_z)$$

où $\Gamma(r, \phi, t)$ et $\Lambda(r, \phi, t)$ sont des potentiels scalaires. On a :

$$\widetilde{\vec{u}}_{\perp}(r, \phi, t) = \vec{\nabla}_{\perp} \Gamma + \hat{e}_z \wedge \vec{\nabla}_{\perp} \Lambda \quad (3.12)$$

ce qui se réécrit en termes de composantes :

$$\widetilde{\vec{u}}_{\perp}(r, \phi, t) = \tilde{u}_r \hat{e}_r + \tilde{u}_{\phi} \hat{e}_{\phi} = (\nabla_r \Gamma - \nabla_{\phi} \Lambda) \hat{e}_r + (\nabla_{\phi} \Gamma + \nabla_r \Lambda) \hat{e}_{\phi} \quad (3.13)$$

où le gradient s'écrit en coordonnées cylindriques $\vec{\nabla} = (\nabla_r, \nabla_{\phi}, \nabla_z)$, En établissant la correspondance entre l'éq. (3.9) et la dérivée temporelle de (3.12), on a :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \Lambda - \mu \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial t} = -\Gamma \quad (3.15)$$

qui décrivent l'évolution temporelle des 2 potentiels scalaires. En outre, en calculant explicitement $\vec{\nabla}_{\perp} \cdot \vec{u}_{\perp}$, avec $\vec{u}_{\perp}$ donné par l'expression (3.12) et en notant, de plus, que $\vec{\nabla}_{\perp} \cdot (\hat{e}_z \times \vec{\nabla}_{\perp} \Lambda) = 0$, nous avons :

$$\Delta_{\perp} \Gamma = -l_n z \tilde{u}_z \quad (3.16)$$

On voit que l'évolution spatiale du potentiel Γ est directement reliée à la vitesse axiale dans le cas $n \neq 0$.

En combinant les équations (3.9), (3.14), (3.15) et (3.16), on peut déterminer l'équation d'évolution de Λ :

$$\Delta_{\perp} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = (l_n)^2 \left(\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} + \Lambda \right) \quad (3.17)$$

On retrouve donc en terme de potentiel l'équation de Poincaré obtenue au chapitre 1 par une approche vectorielle.

La condition aux limites est $\widetilde{\vec{u}}_r = \vec{0}$ en $r = 1$, on en déduit par (3.13) que $\nabla_r \Gamma = \nabla_{\phi} \Lambda$, et d'après (3.15) on a :

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial r \partial t} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi} = 0 \quad (3.18)$$

Les solutions se trouvent en résolvant en cascade les équations suivantes : en se donnant une solution de (3.17), on obtient Γ à partir de (3.15), μ avec (3.14), $\widetilde{\vec{u}}_{\perp}$ est déduit de (3.12) et $\widetilde{\vec{u}}_{||}$ de (3.16).

Pour trouver des solutions de type onde plane à l'équation (3.17) on écrit $\Lambda = \Lambda_0 e^{i(\vec{k}_{\perp} \cdot \vec{x}_{\perp} - \omega t)}$, d'où :

$$\omega_{\alpha} = \pm 2 \left(1 + \left(\frac{k_{\perp, \alpha}}{l_n} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = \pm \cos \theta_k \quad (3.19)$$

où θ_k correspond à l'angle entre la direction de propagation de l'onde inertielle et l'axe de rotation (2.16). On a défini $k_{\perp}$ (qu'on renommera k par la suite) comme le nombre d'onde orthogonal à l'axe de rotation. On retrouve donc la relation de dispersion des ondes inertielles exprimée

au chapitre précédent. L'indice α sera explicité en exprimant les conditions aux limites radiales ci-dessous.

Etant donné que le système est périodique en ϕ , on peut considérer un mode de Fourier azimutal :

$$\Lambda_\alpha = \Lambda_{0\alpha}(r) e^{i(m\phi - \omega_\alpha t)}$$

En injectant cette expression dans (3.17), on obtient par séparation de variables une équation aux dérivées partielles à dépendance radiale :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left(k_\alpha^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \right) \Lambda_{0\alpha} = 0 \quad (3.20)$$

qui se trouve être une équation de Bessel où l'on a défini $k_\alpha = \frac{n\pi}{2L} \left(\frac{1}{\omega_\alpha^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}$, nombre d'onde transverse à l'axe.

En se restreignant à l'ensemble des solutions de (3.20) non singulières en $r = 0$, on a :

$$\Lambda_\alpha = J_m(k_\alpha r) e^{i(m\phi - \omega_\alpha t)} \quad (3.21)$$

En injectant la solution (3.21) dans l'équation (3.18) donnée par la condition de non-pénétration à la paroi $r = 1$, on a :

$$J_m(k_\alpha) = \frac{\omega_\alpha k_\alpha}{m} \frac{dJ_m(k_\alpha)}{dr} \Big|_{r=1} \quad (3.22)$$

qui permet de calculer numériquement les k_α , en rappelant d'après la définition de k_α que ce terme est relié à ω_α , la pulsation est donc définie aussi.

L'expression (3.21) du potentiel scalaire Λ ainsi que les relations (3.13) et (3.9) permettent de déterminer la forme des modes de Kelvin :

$$u_{r,\alpha} = i \left[\omega_\alpha k_\alpha \frac{dJ_m(k_\alpha r)}{dr} - \frac{2m}{r} J_m(k_\alpha r) \right] \sin(l_n z) e^{i(m\phi - \omega_\alpha t)} \quad (3.23)$$

$$u_{\phi,\alpha} = \left[2k_\alpha \frac{dJ_m(k_\alpha r)}{dr} - \frac{m\omega_\alpha}{r} J_m(k_\alpha r) \right] \sin(l_n z) e^{i(m\phi - \omega_\alpha t)} \quad (3.24)$$

$$u_{z,\alpha} = \frac{\omega_\alpha k_\alpha^2 h}{l_n \pi} \cos(l_n z) e^{i(m\phi - \omega_\alpha t)} \quad (3.25)$$

$$\mu_\alpha = (1 - \omega_\alpha^2) J_m(k_\alpha r) \sin(l_n z) e^{i(m\phi - \omega_\alpha t)} \quad (3.26)$$

Ces 4 équations forment la base fondamentale de projection des modes de Kelvin. En utilisant les relations entre les fonctions de Bessel et leurs dérivées

$$J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$$

$$J_{n+1}(x) - J_{n-1}(x) = -\frac{dJ_n(x)}{dx}$$

on peut réécrire les modes de Kelvin. La solution générale est définie par une somme sur des triplets $\{\alpha mn\}$ de la manière suivante¹ :

$$u_r = i \sum_{\alpha mn} k_\alpha a_{\alpha mn} [-(2\omega_\alpha + 1) J_{m+1}(k_\alpha r) + (2\omega_\alpha - 1) J_{m-1}(k_\alpha r)] \sin(l_n z) e^{i(m\phi - \omega_\alpha t)} \quad (3.27)$$

$$u_\phi = \sum_{\alpha mn} k_\alpha a_{\alpha mn} [(\omega_\alpha + 2) J_{m+1}(k_\alpha r) - (\omega_\alpha - 2) J_{m-1}(k_\alpha r)] \sin(l_n z) e^{i(m\phi - \omega_\alpha t)} \quad (3.28)$$

$$u_z = \sum_{\alpha mn} a_{\alpha mn} \frac{\omega_\alpha k_\alpha^2 L}{l_n \pi} J_m(k_\alpha r) \cos(l_n z) e^{i(m\phi - \omega_\alpha t)} \quad (3.29)$$

$$\mu_\alpha = \sum_{\alpha mn} a_{\alpha mn} (1 - \omega_\alpha^2) J_m(k_\alpha r) \sin(l_n z) e^{i(m\phi - \omega_\alpha t)} \quad (3.30)$$

On peut remarquer qu'une des propriétés des modes de Kelvin est d'appartenir à la classe des flots dits de «Beltrami». En effet, si l'on calcule le rotationnel d'une projection des modes de Kelvin (soit pour un mode de Kelvin), composantes par composantes (3.27, 3.28, 3.29), on peut montrer que :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \frac{2k}{\omega} \vec{u} \quad (3.31)$$

Les écoulements de Beltrami (les écoulements ABC par exemple) présentent un chaos lagrangien. Les propriétés dynamogènes de l'écoulement de Beltrami dans une sphère ont été étudiées dans [134].

3.1.2.1 Cas du cylindre fini : résonance de cavité

On peut montrer que la condition aux limites axiale peut faire apparaître des résonances de cavité. En considérant un mode de Kelvin indicé par les trois nombres caractéristique $\{\alpha mn\}$, on peut déterminer une valeur de l'allongement pour laquelle ce mode est en résonance avec l'allongement de la cavité. A la section suivante, on présentera le calcul d'une résonance pour un cas stationnaire (d'après (3.19), cela signifie que nombre d'onde axial et nombre d'onde radial sont égaux) et pour la valeur particulière $m = 1$ reliée à notre forçage. Les valeurs de $\{k_\alpha\}$ sont déduites de la condition aux limites radiale (3.22).

1. On note la structure du champ de vitesse en (iu_r, u_ϕ, u_z) .

3.2 Effet d'une faible précession : solution des équations linéarisées

3.2.1 Cinématique et dynamique d'un fluide en précession

3.2.1.1 rappels de cinématique d'un fluide en rotation

Notation : dans cette sous-section consacrée à la cinématique d'une particule fluide dans un mouvement de précession, les vecteurs seront notés en gras.

L'expérience montre que pour exprimer les équations de la dynamique de la précession dans les différents référentiels qui peuvent être utilisés pour décrire le mouvement, inertiel (I), précession (P) ou du réservoir (R), il est très utile de redéfinir tous les termes avec soin, en partant du problème général.

Le mouvement imposé au réservoir, dénommé dans la suite pour être concis «forçage par précession», est en fait la composition de deux rotations d'axes concurrents en O. Ce mouvement est un cas particulier du mouvement d'un solide gardant un point fixe. Il correspond en fait à une liaison mécanique élémentaire dénommée «rotule». Si F est le référentiel lié au solide mobile dont le vecteur rotation instantané est $\mathbf{\Omega}(t)$, l'expression de la vitesse d'un point M du solide dans I sera en toute généralité, et ceci par définition de $\mathbf{\Omega}(t)$,

$$\left[\frac{d\mathbf{OM}}{dt} \right]_{F/I} = \mathbf{\Omega}(t) \wedge \mathbf{OM} \quad (3.32)$$

Si le point M est une particule fluide, il a lui même une vitesse relative dans F et la vitesse dans le référentiel inertiel sera donnée par la composition galiléenne des vecteurs

$$\left[\frac{D\mathbf{OM}}{Dt} \right]_{/I} = \left[\frac{D\mathbf{OM}}{Dt} \right]_{/F} + \left[\frac{d\mathbf{OM}}{dt} \right]_{F/I} = \left[\frac{D\mathbf{OM}}{Dt} \right]_{/F} + \mathbf{\Omega}(t) \wedge \mathbf{OM} \quad (3.33)$$

Le symbole $\frac{D}{Dt}$ représente toujours la dérivée lagrangienne (en suivant le mouvement de la particule fluide) utilisée dans la section 1.1 du chapitre 1, (la vitesse eulérienne coïncide avec la vitesse lagrangienne, contrairement aux accélérations).

On obtient ensuite l'accélération de la particule fluide en dérivant la vitesse par rapport au temps:

$$\left[\frac{D^2\mathbf{OM}}{Dt^2} \right]_{/I} = \left[\frac{D^2\mathbf{OM}}{Dt^2} \right]_{/F} + 2\mathbf{\Omega}(t) \wedge \left[\frac{D\mathbf{OM}}{Dt} \right]_{/F} + \mathbf{\Omega}(t) \wedge [\mathbf{\Omega}(t) \wedge \mathbf{OM}] + \frac{d\mathbf{\Omega}(t)}{dt} \wedge \mathbf{OM} \quad (3.34)$$

Outre les accélérations absolue, relative, de Coriolis et centrifuge, il apparaît un nouveau terme souvent appelée accélération de Poincaré et qui doit son existence au fait que $\frac{d\mathbf{\Omega}(t)}{dt} \neq \mathbf{0}$. On reviendra plus spécialement sur ce terme par la suite.

3.2.1.2 Applications au cas de la précession

On appliquera cette formule générale au forçage par précession, en choisissant pour référentiel mobile F, soit le référentiel de précession (P), soit celui du réservoir (R). Comme le produit de deux rotations ne commute pas, il faut définir sans ambiguïté les axes du forçage. L'axe de la première application sera nommé "axe de rotation": c'est une rotation "rapide" autour de l'axe de symétrie du réservoir dans le cas d'ATER. L'axe de la deuxième sera appelé "axe de précession". Dans les axes inertiels, le vecteur rotation instantané se décompose:

$$\mathbf{\Omega}(t) = \mathbf{\Omega}_p + \mathbf{\Omega}_r(t) = \Omega_p \mathbf{e}_p + \Omega_r \mathbf{e}_r(t) \quad (3.35)$$

avec $d\mathbf{e}_r/dt = \mathbf{\Omega}_p \wedge \mathbf{e}_r(t)$

La notation souligne que l'axe de rotation $\hat{\mathbf{e}}_r$ a une orientation variable et une intensité constante alors que celui de la précession $\hat{\mathbf{e}}_p$ a une direction et une intensité constantes dans un référentiel inertiel.

Si le référentiel d'étude choisi est celui de la précession, soit (P) , le vecteur rotation instantané de (P) est $\mathbf{\Omega}_p$ et il est constant dans le temps:

$$\left[\frac{D^2 \mathbf{OM}}{Dt^2} \right]_{/I} = \left[\frac{D^2 \mathbf{OM}}{Dt^2} \right]_{/P} + 2\mathbf{\Omega}_p \wedge \left[\frac{D\mathbf{OM}}{Dt} \right]_{/P} + \mathbf{\Omega}_p \wedge [\mathbf{\Omega}_p \wedge \mathbf{OM}] \quad (3.36)$$

où dans le membre de droite apparaissent l'accélération relative, $\mathbf{a}_r = \left[\frac{D^2 \mathbf{OM}}{Dt^2} \right]_{/P}$, de Coriolis, $\mathbf{a}_c = 2\mathbf{\Omega}_p \wedge \left[\frac{D\mathbf{OM}}{Dt} \right]_{/P}$, et centrifuge, $\mathbf{a}_e = \mathbf{\Omega}_p \wedge [\mathbf{\Omega}_p \wedge \mathbf{OM}]$.

Si le référentiel choisi est celui du réservoir, soit (R) , son vecteur rotation instantané est $\mathbf{\Omega}(t)$:

$$\left[\frac{D^2 \mathbf{OM}}{Dt^2} \right]_{/I} = \left[\frac{D^2 \mathbf{OM}}{Dt^2} \right]_{/R} + 2\mathbf{\Omega}(t) \wedge \left[\frac{D\mathbf{OM}}{Dt} \right]_{/R} + \mathbf{\Omega}(t) \wedge [\mathbf{\Omega}(t) \wedge \mathbf{OM}] + \frac{d\mathbf{\Omega}(t)}{dt} \wedge \mathbf{OM} \quad (3.37)$$

où le dernier terme dans le membre droite est parfois appelé l'accélération de Poincaré, $\mathbf{a}_p = \frac{d\mathbf{\Omega}(t)}{dt} \wedge \mathbf{OM}$

On ne se préoccupera pas de l'accélération centrifuge car elle dérive dans tous les cas d'un potentiel qui s'incorpore à la pression:

$$-\mathbf{\Omega} \wedge [\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{OM}] = -(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{OM})\mathbf{\Omega} + \Omega^2 \mathbf{OM} = + \frac{\Omega^2 \nabla s^2(M)}{2}$$

où $s(M)$ est la distance du point M à l'axe de rotation $\mathbf{\Omega}$.

En résumé, le forçage par précession peut être décrit en principe dans trois référentiels:

1. dans le référentiel inertiel (I), l'axe de rotation $\mathbf{e}_r$ décrit un cône de demi-angle α autour de l'axe de précession, avec la pulsation Ω_p . Les conditions aux limites sont particulièrement difficiles à manipuler, car il faut savoir où se trouve la paroi à tout instant.
2. dans le référentiel de la précession, (P), l'orientation du réservoir est fixée et ses parois tournent avec la pulsation Ω_r ; l'origine de l'angle azimutal φ (axe ox) est choisie dans le plan formé par les deux axes de précession et de rotation.
3. dans le référentiel de la rotation, (R), c'est l'axe de précession qui tourne autour de oz à la pulsation Ω_r , alors que les parois du cylindre sont immobiles.

Pour une approche analytique, le référentiel (P) semble préférable a priori puisque les axes de rotation et précession sont fixes alors que (R) semble plus approprié pour une approche numérique puisque la vitesse aux parois est nulle et le flot est engendré par des accélérations en volume. Cette vue est sans doute trop naïve car la mise en rotation est due aux forces visqueuses et lorsque le

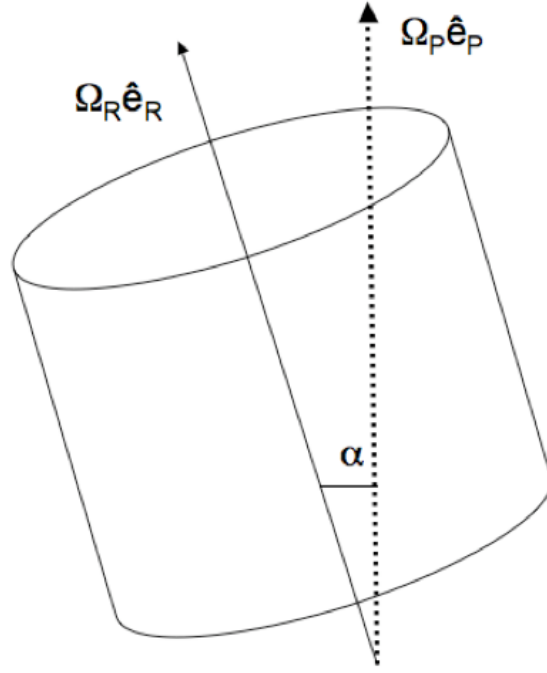


FIGURE 3.1: Schéma du cylindre en précession avec angle quelconque.

nombre de Reynolds croît, la limite de résolution spatiale sera atteinte en raison de l'apparition de cette couche limite visqueuse, la même dans (P) ou dans (R). On évite la formation d'une couche limite visqueuse si l'on peut adopter des conditions aux limites de glissement. C'est en principe possible si la rotation est forcée de façon inertielle, à l'aide de pales fixes dans le réservoir, qui peuvent être modélisées dans le calcul par des forces volumiques. Dans ce cas, qui a été expérimenté sur ATER et qui présente des performances de forçage intéressantes, le référentiel (R) semble le plus efficace pour les simulations, mais il n'a pas été testé pour ATER. Expérimentalement, les mesures ont été faites dans les deux référentiels, celui du réservoir et celui de la précession. Le réservoir d'ATER étant cylindrique, on choisit des coordonnées cartésiennes ou cylindriques dont l'axe z coïncide avec l'axe du cylindre (axe de rotation). Cet axe fait un angle α constant ($0 < \alpha < \pi$) avec l'axe de précession. Cet angle étant fixé, on verra que le seul paramètre de contrôle du forçage est le rapport $\varepsilon = \frac{\Omega_p}{\Omega_r}$, dénommé *taux de précession*.

3.2.2 Equations de la dynamique d'un fluide en précession

Nous allons étudier la réponse de l'écoulement en rotation solide à symétrie cylindrique soumis à une faible précession. Nous commençons par dériver les équations dans le cas d'un angle de précession quelconque et nous appliquerons au cas de l'orthogonalité entre axe de rotation et précession puisque c'est le cas de l'expérience ATER dont le schéma est représenté en fig.(3.2)

3.2.2.1 Angle de précession quelconque

Comme précédemment, nous appellerons Ω_R et Ω_P respectivement les vitesses angulaires de rotation et précession (fig.3.1). On définit les axes de rotation et précession par :

$$\vec{\Omega}_R = \Omega_R(t) \hat{e}_R$$

$$\vec{\Omega}_P = \Omega_P(t) \hat{e}_P$$

Dans le référentiel inertiel (dit du laboratoire), on rappelle que la vitesse angulaire de rotation instantanée $\vec{\Omega}(t)$ est donnée par :

$$\vec{\Omega}(t) = \vec{\Omega}_R + \vec{\Omega}_P \quad (3.38)$$

Dans le repère du cylindre, les équations de Navier Stokes décrivant la dynamique d'un fluide en précession s'écrivent :

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -2\vec{\Omega} \wedge \vec{u} - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) - \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}(p) + \nu \Delta \vec{u} + \vec{f} \quad (3.39)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.40)$$

$$\vec{u} \cdot \hat{n} = 0 \quad (3.41)$$

On retrouve dans le deuxième membre de (3.39) les termes habituels rencontrés à la section consacrée à la cinématique, à savoir l'accélération de Coriolis, l'accélération centrifuge et l'accélération de Poincaré.

En procédant comme Meunier et.al [78], on choisit d'adimensionner ces équations en prenant pour temps caractéristique la projection sur l'axe de rotation du vecteur rotation instantané :

$$\tau = \left(\vec{\Omega} \cdot \hat{e}_R \right)^{-1} = (\Omega_R + \Omega_P \cos(\alpha))^{-1}$$

et de prendre le rayon comme échelle spatiale caractéristique. On réécrit les équations de Navier Stokes en tenant compte de ces adimensionnements, en développant explicitement $\vec{\Omega}(t)$ avec (3.38) et en écrivant les termes non linéaires sous la forme : $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \vec{\nabla} \left(\frac{u^2}{2} \right) - \vec{u} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u})$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -2\hat{e}_R \wedge \vec{u} - 2\varepsilon \hat{e}_\perp \wedge \vec{u} - 2\varepsilon \zeta \omega r \cos(\omega t + \varphi) \hat{e}_R + \vec{u} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) - \vec{\nabla}(\Pi) + E \Delta \vec{u} \quad (3.42)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.43)$$

$$\vec{u} = 0 \mid_{r=1, \phi, z}, \vec{u} \mid_{r, \phi, z=0, L} = \vec{0} \quad (3.44)$$

Les conditions aux limites sont celles de non glissement aux parois.

avec :

$$\omega = \frac{\Omega_R}{\Omega_R + \Omega_P \cos(\alpha)} ; \varepsilon = \frac{\Omega_P \sin(\alpha)}{\Omega_R + \Omega_P \cos(\alpha)} ; \hat{e}_\perp = \cos(\omega t) \hat{e}_{\perp,1} - \sin(\omega t) \hat{e}_{\perp,2} ; E = \frac{1}{Re} = \frac{\nu}{(\Omega_R + \Omega_P \cos(\alpha)) R^2}$$

La pression efficace s'écrit :

$$\Pi = \frac{p}{\rho R^2 (\Omega_R + \Omega_P \cos(\alpha))^2} - \frac{r^2}{2} + \varepsilon |1 - \omega| r z \cos(\omega t + \varphi) - \frac{\varepsilon^2}{2} (z^2 + (r \cos(\omega t + \varphi))^2) + \frac{u^2}{2} \quad (3.45)$$

L'effet de la précession apparaît dans deux termes : ω et ε .

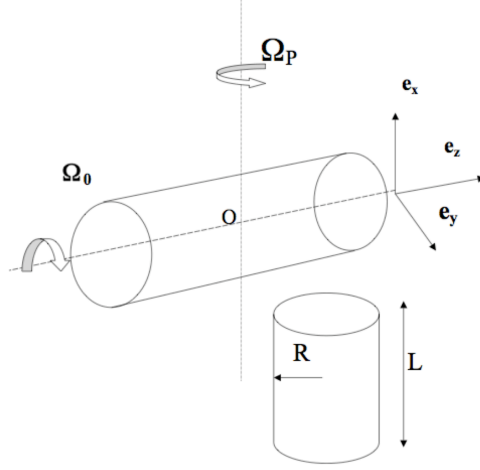


FIGURE 3.2: Schéma de la configuration ATER

On peut faire remarquer qu'une faible précession peut être obtenue par deux moyens : un angle de précession α petit ou une vitesse angulaire de précession, Ω_P faible. En effet, si l'on considère un angle de précession faible $\alpha \rightarrow 0$, justifiant ainsi un développement limité, on peut écrire que :

$$\omega \simeq 1 - \frac{\Omega_P}{\Omega_R} - \frac{\Omega_P}{\Omega_R} \alpha^2 + \mathcal{O}(\alpha^3)$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{1 + \left(\frac{\Omega_P}{\Omega_R}\right)^{-1} + \alpha^2} + \mathcal{O}(\alpha^3)$$

Dans le cas d'un angle fixé, on voit apparaître le paramètre $\frac{\Omega_P}{\Omega_R}$ qui est important pour notre étude. De plus, en supposant $\frac{\Omega_P}{\Omega_R} \rightarrow 0$, on a $\varepsilon \sim \alpha \frac{\Omega_P}{\Omega_R}$ (rappelons que nous utilisons dans cette section une définition alternative du coefficient ε). Si $\alpha < 10^\circ$ (expérience IRPHE, non présentée), alors le paramètre $\varepsilon < \frac{1}{6} \frac{\Omega_P}{\Omega_R}$ pour le cas des faibles taux de précession. Il faut tenir compte de cette inégalité pour comparer les résultats d'ATER et de l'IRPHE pour un taux de précession donné.

3.2.2.2 Cas particulier d'ATER : axe de précession orthogonal à l'axe de rotation

Comme il sera expliqué plus précisément au chapitre 4, l'angle de précession de notre configuration expérimentale est $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Nous allons donc par la suite nous restreindre à ce cas particulier. Cela implique :

$$\omega = 1; \varepsilon = \frac{\Omega_P}{\Omega_R}; E = \frac{1}{Re} = \frac{\nu}{\Omega_R R^2}; \hat{e}_\perp = \hat{e}_P \text{ et } \hat{e}_R = \hat{e}_z, \hat{e}_P = \hat{e}_x$$

Nous allons exprimer à la manière de Gans ([31], [59, 60]) les équations de la dynamique dans le référentiel en précession (référentiel dans lequel le système de coordonnées est en rotation autour de $\vec{\Omega}_P = \Omega_P \hat{e}_x$). Les équations (3.42), (3.43), et (3.44) se réécrivent :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -2\varepsilon \hat{e}_x \wedge \vec{u} - \vec{u} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{u} \right) - \vec{\nabla}(P) + E \Delta \vec{u} \quad (3.46)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.47)$$

Les conditions aux limites changent en fonction du référentiel considéré et dans celui de la précession, les parois sont en rotation solide autour de $\vec{\Omega}_R$. Par conséquent on a :

$$\vec{u} \big|_{r=1, \phi=2\pi, z=0, L} = \hat{e}_z \wedge \vec{r} \quad (3.48)$$

En décomposant $\vec{u}$ selon chaque composante (u, v, w) , on a :

$$u \big|_{r=1, \phi, z} = 0, w \big|_{r, \phi, z=0, L} = 0 \quad (3.49)$$

La pression efficace s'écrit maintenant :

$$P = \frac{p}{\rho (R\Omega_R)^2} - \frac{r^2}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2} z^2 + \frac{u^2}{2} \quad (3.50)$$

3.3 Problème linéarisé : cas d'une faible précession

3.3.1 Le choix du flot de base

Tout d'abord, il nous faut choisir des solutions stationnaires autour de laquelle la linéarisation va s'opérer. Nous considérons ici dans le cas du cylindre infini les deux flots de base suivants :

- la rotation rigide : $\vec{V}_{bf1} = r\Omega_R \hat{e}_z \wedge \hat{e}_r = \vec{V}_0$; $P_{bf1} = P_0$
- la rotation solide avec cisaillement axial que nous appellerons flot de Mahalov (Mahalov, 1993): $\vec{V}_{bf2} = r\Omega_R \hat{e}_z \wedge \hat{e}_r - 2\varepsilon r \sin \phi \hat{e}_z = \vec{V}_0 + \varepsilon \vec{V}_1$;

3.3.2 Solutions inviscides linéarisées autour de la solution de rotation rigide

Le développement perturbatif consiste à considérer la précession comme une perturbation. En introduisant la perturbation de la manière suivante $\left(\vec{V} = \vec{V}_{bf1} + \vec{v}, P = P_{bf1} + p \right)$, on obtient les équations vérifiées par les perturbations :

$$L_0(\vec{v}) + \nabla p - N(\vec{v}, \vec{v}) = 2\varepsilon(r \cos(\phi) \hat{e}_z + \hat{\mathbf{e}}_x \wedge \vec{v}) + \nu \Delta \vec{v} \quad (3.51)$$

$$L_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \phi} + 2\mathbf{e}_z \wedge \quad (3.52)$$

$$N(\vec{v}, \vec{v}) = (-\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) \quad (3.53)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.54)$$

L_0 représente l'opérateur dont les vecteurs propres sont les modes de Kelvin décrits à la section 2. Le terme $2\varepsilon r \cos(\phi) \hat{e}_z$ correspond au forçage par la précession. La présence du $\cos(\phi)$ fait apparaître un forçage préférentiel des modes $m = \pm 1$. Il est courant de voir des ondes inertielles forcées par des surfaces ad hoc tournant à une fréquence ajustable distincte de la fréquence de

rotation, par exemple, pour le cas d'un disque interne à un écoulement en rotation (Fultz, 1959) [27], ou un couvercle incliné (Mac Ewan, 1970) [75]. Dans ce dernier cas, on peut faire remarquer que les modes $m = 1$ sont excités par la condition aux limites axiale en $z = L$, qui nécessite que la vitesse axiale soit proportionnelle à $r \cos(\phi)$ dans le référentiel du couvercle, ce qui, de fait, est directement comparable à la précession.

A la manière de ce qui a été fait en section 1 de ce chapitre, nous pouvons écrire l'expression des modes de Kelvin forcés par la précession. Nous ne détaillerons pas le calcul et nous nous contenterons de les écrire de manière explicite en ne considérant que les modes forcés $m = 1$.

En anticipant un peu, on peut d'ores et déjà faire remarquer qu'aux faibles taux de précession les simulations numériques et les expériences ont vérifié l'existence d'une solution stationnaire dans le référentiel en précession. Pour l'obtenir analytiquement, il faut considérer les modes de Kelvin tels que : $\{\omega = 0; m = \pm 1\}$

$$u_r = -i \sin(\phi) \sum_{\alpha} A_{\alpha} [3J_2(k_{\alpha}r) + 2J_0(k_{\alpha}r)] \sin\left(\frac{k_{\alpha}}{\sqrt{3}}z\right) \quad (3.55)$$

$$u_{\phi} = \cos(\phi) \sum_{\alpha} A_{\alpha} [3J_0(k_{\alpha}r) - 2J_2(k_{\alpha}r)] \sin\left(\frac{k_{\alpha}}{\sqrt{3}}z\right) \quad (3.56)$$

$$u_z = -2\varepsilon r \sin(\phi) + \sin(\phi) \sum_{\alpha} A_{\alpha} \frac{\omega_{\alpha} k_{\alpha}^2 L}{\pi} J_1(k_{\alpha}r) \cos\left(\frac{k_{\alpha}}{\sqrt{3}}z\right) \quad (3.57)$$

$$\mu = \sum_{\alpha} A_{\alpha} (1 - \omega_{\alpha}^2) J_m(k_{\alpha}r) \sin\left(\frac{k_{\alpha}}{\sqrt{3}}z\right) \quad (3.58)$$

Grâce à la condition aux limites radiales, on peut déterminer les valeurs de k pour $m = 1$.

Dans le cas d'un cylindre fini, la solution doit vérifier la condition de non pénétration axiale ($u_z(r, \phi, z = 0, z = L) = 0$). Cette condition va s'appliquer à la solution générale, superposition de la solution de l'équation inhomogène (flot de Mahalov) et des solutions de l'équation homogène (modes de Kelvin). La condition de non-pénétration prend la forme d'un développement de Dini :

$$\sum_{\alpha} A_{\alpha} \frac{\omega_{\alpha} k_{\alpha}^2 h}{\pi} J_1(k_{\alpha}r) \cos\left(\frac{k_{\alpha}}{\sqrt{3}}L\right) = 2\varepsilon r \quad (3.59)$$

Ce développement met en évidence des allongements L pour lesquels il y a résonance : ce sont les zéros de $\cos\left(\frac{k_{\alpha}}{\sqrt{3}}L\right)$. Sans entrer dans les détails du calcul, on peut montrer que la première résonance ($\alpha = 1$) du mode $m = 1$ est trouvée pour un allongement $\frac{L}{2R} = 0.9949$. Cette valeur sera rencontrée dans les applications expérimentales comme on le verra dans la deuxième partie.

3.3.3 Linéarisation autour de la solution de rotation solide avec cisaillement axial pour le cylindre infini

Ce flot de base a été introduit par Mahalov dans un article de 1993. On peut vérifier qu'il est solution stationnaire des équations de Navier-Stokes écrites dans le référentiel en précession. En introduisant comme précédemment la perturbation, on obtient de même les équations vérifiées par les perturbations :

$$L_0(\vec{v}) + \nabla p - N(\vec{v}, \vec{v}) = -\varepsilon D(\vec{v}) \quad (3.60)$$

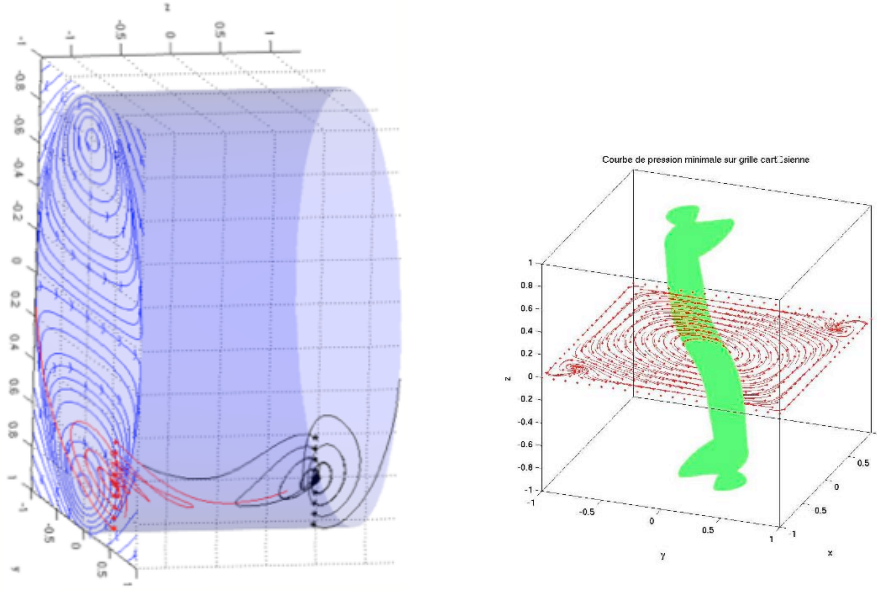


Figure 3.3: Solution linéarisée du mode $m=1$ eqs.(3.55 à 3.58). Champ de vitesse (à gauche). Champ de pression (à droite). Le champ de vitesse fait apparaître une circulation dans le plan normal à l'axe de rotation (le plan transverse) sous la forme de deux vortex contra-rotatifs. Le champ de pression fait apparaître un «vortex ondulé» caractéristique du forçage par précession.

$$D(\vec{v}) = 2\hat{\mathbf{e}}_x \times \vec{v} + (\vec{V}_1 \cdot \nabla) \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{V}_1 \quad (3.61)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.62)$$

Nous nous servons de ce flot de base dans la prochaine section lors de l'étude du couplage faiblement non-linéaire entre un flot de base et deux modes de Kelvin forcés par la précession.

3.4 Vers une étude faiblement non-linéaire

3.4.1 Concept de familles modales

A la manière de Racz [94], nous pouvons évoquer trois grandes classes de modes inertiels qui vont introduire le concept de *familles modales*. La déstabilisation de l'écoulement correspond à la croissance sur un temps lent caractéristique de notre problème de modes inertiels choisis dans tout le spectre de modes propres possibles. Cependant, l'étude linéaire apparaîtra limitée au bout d'un certain temps associé à la croissance préférentielle de certains modes qui signifie les limites de l'approximation linéaire. Une étude faiblement linéaire est l'étape qui succède au cas linéaire. Le couplage avec la précession force préférentiellement un type de mode de Kelvin. Or, une propriété essentielle du couplage réside dans le fait que l'interaction des modes ne se fait qu'à l'intérieur d'une même famille modale. On définit alors une famille par :

$$\mathcal{F}_{k,m,n} = \left\{ (\vec{u}_k, \mu_k)_{(m,l)} \right\} \quad (3.63)$$

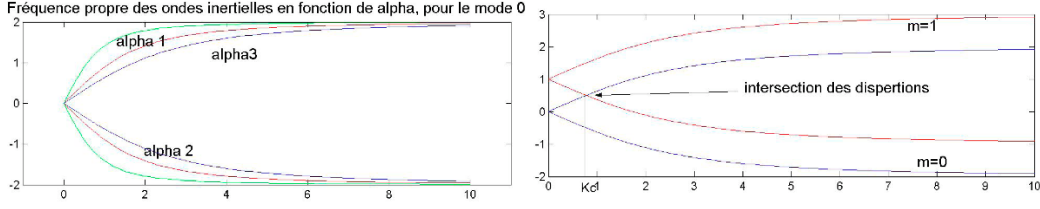


FIGURE 3.4: Relations de dispersion des modes de Kelvin et mise en évidence de points de couplage entre les modes $m=0$ et $m=1$

Les indices correspondent toujours respectivement à k : nombre d'onde radial ($k \in \mathbb{N}$), m : nombre d'ondes azimutal (m est fixé), l : nombre d'onde axial (l est fixé). L'étape qui succède naturellement à la présentation du problème réalisée au cours de ce chapitre est une étude faiblement non-linéaire de l'évolution des modes de Kelvin dans l'écoulement en précession. En regardant attentivement la représentation graphique de la relation de dispersion, on peut faire remarquer qu'il existe des points de couplage particuliers où le mode axisymétrique « résonne » avec les modes forcés par la précession.

3.4.2 Motivations et présentation générale

Etudes de stabilité linéaire dans les réservoirs en précession Kerswell, en 1993, a étudié dans un ellipsoïde en précession la stabilité linéaire de la solution de Poincaré (champ de vitesse associé à une vorticité spatialement uniforme dépendant du temps pour un fluide supposé parfait). L'équation d'Euler est linéarisée autour de cette solution. On réalise un développement perturbatif en fonction du taux de précession ε , ce qui fait apparaître des ondes inertielles dont certains vecteurs d'onde $\vec{k}$ peuvent être résonnants. La condition de stabilité est alors obtenue en calculant des taux de croissance. Il a été mis en évidence que la stabilité des vecteurs d'onde dépend de l'angle α entre ces derniers et l'axe de rotation principale de la coquille ellipsoïdale. Par ailleurs, cette étude met l'accent sur la possibilité de générer une instabilité paramétrique lorsque deux ondes de nombres azimutaux m et $m+1$ entrent en résonance avec le forçage ici $m = 1$ engendré par la précession. On peut alors exprimer des régions de paramètre pour lesquelles il y a instabilité ou non en fonction du signe du taux de croissance de la relation : $\vec{k}(\alpha)$. Ces gammes de paramètres sont d'épaisseur croissante avec le taux de précession et n'existent que pour $\varepsilon > 0$. Enfin, il est intéressant de remarquer que l'occurrence des instabilités ne dépend pas de la norme des vecteurs d'onde ce qui a pour conséquence le fait qu'aucune échelle n'est privilégiée.

Le cas du cylindre infini a été étudié par Mahalov en 1993. Dans les travaux cités, l'instabilité mise en évidence est de type paramétrique.

Objectifs et originalité de notre étude Dans cette étude, nous présentons une analyse faiblement non linéaire de la dynamique d'un fluide non visqueux en rotation solide soumis à un mouvement de précession en géométrie cylindrique infinie, en considérant le couplage de deux modes de Kelvin avec un flot de base pour des conditions de résonance de phase visible sur le graphique représentant les relations de dispersion des modes $m = 0$ et $m = 1$ en fig.(3.5)

C'est un fait connu que ce genre de système peut générer une instabilité de type paramétrique. Il devient intéressant, alors, d'étudier la saturation de cette instabilité à des ordres plus grands du développement de l'équation de Navier-Stokes en considérant le taux de précession suffisamment petit pour permettre un tel développement perturbatif et en dérivant les deux équations de Landau

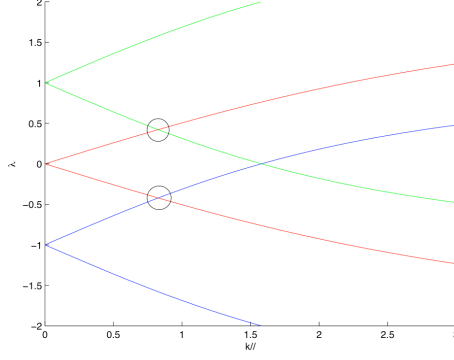


Figure 3.5: Relation de dispersion des modes $m = 0$ et $m = 1$ faisant apparaître les points de couplage motivant notre étude non linéaire.

couplées appropriées pour décrire la dynamique des modes à l'aide de la méthode de séparation des échelles de temps.

Le résultat fondamental réside dans la possibilité de générer un état de rotation différentielle en invoquant ce couplage de mode et en excluant tous effets visqueux éventuels, qui pour des objets astrophysiques, ne sont pas pertinents. Ces résultats théoriques sont comparés avec des expériences en eau où les effets de viscosité peuvent être considérés comme secondaires.

3.5 Introduction à l'article Mode coupling analysis and differential rotation in a flow driven by a precessing cylindrical container

3.5.1 Flot de base et développement perturbatif

Un état de base $V_{bf}(x, t)$ est dit *stable au sens de Lyapunov* si $\forall \zeta > 0, \exists \delta(\zeta)$ tel que si $\|V(x, t = 0) - V_{bf}(x, t = 0)\| \leq \delta$, alors $\forall t \geq 0, \|V(x, t) - V_{bf}(x, t)\| \leq \zeta$ où la norme $\|\dots\|$ de l'espace physique (l'espace des phases) est définie par : $\|V(x, t) - V_{bf}(x, t)\| = \max |V(x, t) - V_{bf}(x, t)|$. Dans le cas où, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|V(x, t) - V_{bf}(x, t)\| = 0$, on qualifie le flot de base d'*asymptotiquement stable*.

Enfin, on parle de *stabilité globale* pour un état de base asymptotiquement stable avec $\delta = \infty$. Dit autrement, cela signifie que le bassin d'attraction de l'écoulement de base coïncide avec l'espace des phases entier.

Dans cette étude, le flot de base considéré est celui de Mahalov mentionné au chapitre précédent et défini plus explicitement ici comme : ²

2. On anticipe les notations de la section suivante concernant le développement à deux paramètres en écrivant (V_{00}, V_{01})

$$V_{bf} = V_{00} + \varepsilon V_{10} = \begin{pmatrix} 0 \\ r\Omega_0(r) \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2r \sin \phi \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

$$p_{bf} = P_{00} + \varepsilon^2 P_{20} = \int \frac{(r\Omega_0(r))^2}{r} dr - 2\varepsilon^2 (r\Omega_0(r) \sin \phi)^2 \quad (3.65)$$

On réécrit les équations du problème pour une perturbation (v, p) :

$$L_0(\mathbf{v}) + \varepsilon D(\mathbf{v}) + \nabla p = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

avec $L_0(\mathbf{v}) = \partial_t \mathbf{v} + \partial_\phi \mathbf{v} + 2\hat{e}_z \times \mathbf{v}$ l'opérateur traduisant la linéarisation d'un écoulement en rotation (modes de Kelvin) autour d'un flot de base type rotation solide donc lié à la partie (V_{00}, P_{00}) de l'écoulement de base défini en (3.64, 3.65) et où $D(\mathbf{v}) = 2\hat{e}_x \times \mathbf{v} + (V_{10} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) V_{10}$ est l'opérateur intervenant à l'ordre ε lié à la force de Coriolis due à la précession et à la contribution du terme non-linéaire dû à la composante (d'ordre ε) V_{01} du flot de base.³

On distingue le forçage direct (ou mécanique) et le forçage paramétrique (ou ondulatoire) qui sont deux mécanismes physiques distincts à l'origine d'effets différents. Ces notions sont à l'origine du développement perturbatif à deux paramètres expliqué plus bas.

Le forçage extérieur est représenté dans les équations par ε , le taux de précession. Ce forçage direct va perturber le flot de base et générer des ondes inertielles qui, dans notre géométrie, s'apparentent aux modes de Kelvin. La précession va alimenter les modes inertiels. Une première voie d'interaction consiste en une résonance directe : l'onde est forcée à sa fréquence propre et croît linéairement avant qu'un quelconque effet visqueux ou non-linéaire vienne modifier son évolution. On peut classer ce forçage dans la famille des systèmes alimentés périodiquement par une source d'énergie extérieure avec amortissement. Un exemple est le circuit RLC ou système {masse, ressort, frottements}. La croissance de l'amplitude de la réponse est linéaire en temps et ne nécessite pas la présence d'une perturbation extérieure ou interne pour se mettre en place.

Nous nous intéresserons à un autre type de résonance lié à un autre type de forçage : l'interaction d'une excitation externe et de deux modes inertiels. Il s'agit de la création de conditions favorables à l'amplification paramétrique de modes de Kelvin dans une colonne de fluide en rotation.

On introduit le développement perturbatif à 2 paramètres :

$$V = \sum_{ij} \varepsilon^i \varepsilon'^j V_{i,j}^{(i+j)}, V = V_{bf} + \left\{ \varepsilon' V_{01}^{(1)} \right\} + \left\{ \varepsilon'^2 V_{02}^{(2)} + \varepsilon \varepsilon' V_{11}^{(2)} \right\} + \left\{ \varepsilon'^3 V_{03}^{(3)} + \varepsilon \varepsilon'^2 V_{12}^{(3)} \right\} + \dots \quad (3.66)$$

où l'on définit ε et ε' comme respectivement, le taux de précession vu comme un forçage externe et un paramètre lié au forçage paramétrique.

Il reste à définir le flot de base au sens de Lyapunov du terme.

Précession et rotation étant indépendantes l'une de l'autre et chacune possédant un temps caractéristique propre (que nous appellerons respectivement t pour la rotation et $T = \frac{t}{\varepsilon}$ pour la précession), on peut appliquer la méthode de développement en échelles de temps multiples, méthode qui sera directement impliquée dans la dérivation des équations d'amplitude

Plaçons nous dans un cas où $t \ll T$ (motivé par le fait que $\varepsilon \ll 1$). Dans notre système, on peut introduire naturellement 3 temps d'évolution bien distincts :

3. On pourrait aussi envisager un traitement non perturbatif en ε et définir ainsi des modes propres globaux de l'écoulement en précession. Cette approche ne sera pas poursuivie ici.

- un temps imposé par l'échelle de rotation t
- un temps imposé par la précession $T = \frac{t}{\varepsilon}$
- un temps associé à la dynamique des ondes inertielles $T' = \frac{t}{\varepsilon'}$

En écrivant plus généralement : $T_{i,j} = \varepsilon^i \varepsilon'^j t$, on a :

$$\frac{d}{dt} V(t, T_{10}, T_{01}, \dots) = \sum_i \sum_j \varepsilon^i \varepsilon'^j \frac{\partial V}{\partial T_{ij}}$$

3.5.2 Alternative de Fredholm

Cette procédure s'applique dans les problèmes du type : $L(V) = S$ où L est un opérateur linéaire et S un terme source. Deux situations s'opposent alors :

1. S est tel que : $L(S) = 0$ on ne peut pas inverser l'opérateur, S est dit « résonnant », il est donc mode propre de L .
2. S est tel que : $L(S) \neq 0$ on peut, alors, inverser l'opérateur, $V = L^{-1}(S)$

Au cours de cette analyse, on se retrouve le plus souvent dans la deuxième situation. Une méthode consiste alors à régulariser l'opérateur en les valeurs propres du noyau de celui ci.

Cette procédure connue comme *l'alternative de Fredholm* sera détaillée dans l'appendice B de l'article qui composera le prochain chapitre.

3.5.3 Equations de Landau

Nous présentons ici un bref rappel de l'origine des équations de Landau :

Selon la théorie de stabilité linéaire, une perturbation d'un écoulement de base peut s'écrire comme une somme de modes propres, chacun pouvant s'écrire :

$$u(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} (A(t) \mathbf{f}(\mathbf{x}) + cc)$$

où $f(x)$ décrit la structure spatiale du mode et $A(t)$ son évolution temporelle.

Une étude de stabilité linéaire permet donc d'établir un critère de stabilité et, le cas échéant, de déterminer le plus amplifié. Néanmoins, la validité de ces prédictions ne concerne que les perturbations de faible amplitude, argument fondamental pour rendre négligeable les effets non linéaires. Une étude de « stabilité non linéaire » permettrait de prédire ce qui se passe au-delà de la croissance initiale, lorsque les effets non-linéaires deviennent significatifs. Une théorie générale permettant de prendre en compte ces effets n'existe pas. Diverses approches ont été développées, et, parmi elles, celle qui va nous concerner directement dans cette étude : le couplage faiblement non linéaire. On doit cette idée à Lev Landau (1944). Elle consiste à remarquer, tout d'abord, que d'un point de vue stabilité linéaire, l'amplitude $A(t)$ d'un mode propre est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dA}{dt} = \sigma A$$

où σ représente le taux de croissance linéaire.

Pour A petit, cette équation peut être vue comme le développement de Taylor du taux de croissance $\frac{dA}{dt}$ en puissances de l'amplitude, tronqué au 1er ordre. Il semble naturel de compléter cette équation en incluant les non-linéarités, c'est-à-dire les termes d'ordre supérieur : quadratiques (A^2, AA^*, A^{*2}), cubiques ($A^3, A^2 A^*, \dots$). Ce sont les symétries du problème qui permettent de

considérer les termes pertinents.

Considérons, par exemple, l'invariance dans le temps. Les rotations d'angle φ dans le plan complexe $A \rightarrow Ae^{i\varphi}$ laissent invariante l'équation pour le mode A. Le terme de plus bas degré vérifiant cette condition est $|A|^2 A$. L'équation de Landau liée à cette invariance s'écrit :

$$\frac{dA}{dt} = \sigma A - \mu |A|^2 A$$

Cette équation est connue comme *équation d'amplitude de Landau*. Elle fait intervenir un nouveau coefficient noté ici μ complexe comme A et σ . Cette approche s'est avérée fructueuse dans l'étude de certaines instabilités hydrodynamiques comme celle de Couette-Taylor, mais aussi Rayleigh-Bénard où il a pu être démontré que cette instabilité était super-critique (la partie réelle de μ du mode marginal est positive et, de fait, le terme non linéaire cubique sature l'instabilité).

Néanmoins, cette approche reste limitée. L'écoulement de Poiseuille en est un des exemples les plus significatifs. L'instabilité liée à cet écoulement est sous-critique (le terme non-linéaire cubique ne sature pas l'instabilité en raison de la négativité de la partie réelle de μ). L'équation de Landau apporte peu de choses et le calcul des termes d'ordres supérieurs est trop laborieux.

3.5.4 Résolution ordre par ordre

Nous donnons finalement les termes regroupés à un ordre $i + j$ donné du développement :

Ordre $i + j = 1$

- ordre ε' ($i = 0, j = 1$) : $L_0(\mathbf{V}_{01}) + \nabla P_{01} = 0$

Cette équation linéaire et homogène définit les modes propres de Kelvin déjà rencontrés et calculés au chapitre 3.

Ordre $i + j = 2$

- ordre $\varepsilon\varepsilon'$ ($i = 1, j = 1$) : $L_0(\mathbf{V}_{11}) + \nabla P_{11} = -D(\mathbf{V}_{01}) - \varepsilon\varepsilon' \frac{\partial \mathbf{V}_{01}}{\partial T}$
- ordre ε'^2 ($i = 0, j = 2$) : $L_0(\mathbf{V}_{02}) + \nabla P_{02} = -(\mathbf{V}_{01} \cdot \nabla) \mathbf{V}_{01}$

Ordre $i + j = 3$

- ordre ε'^3 ($i = 0, j = 3$) : $L_0(\mathbf{V}_{03}) + \nabla P_{03} + \frac{\partial \mathbf{V}_{01}}{\partial T'} = -(\mathbf{V}_{02} \cdot \nabla) \mathbf{V}_{01} - (\mathbf{V}_{01} \cdot \nabla) \mathbf{V}_{02}$
- ordre $\varepsilon\varepsilon'^2$ ($i = 1, j = 2$) : $L_0(\mathbf{V}_{12}) + \nabla P_{12} + \frac{\partial \mathbf{V}_{02}}{\partial T'} = -D(\mathbf{V}_{02}) - (\mathbf{V}_{11} \cdot \nabla) \mathbf{V}_{01} - (\mathbf{V}_{01} \cdot \nabla) \mathbf{V}_{11}$

3.6 Application astrophysique : les modes de Kelvin-Kepler avec cisaillement axial

Les écoulements astrophysiques en rotation différentielle tels que les disques d'accrétion ou les intérieurs stellaires sont stables vis-à-vis du critère de Rayleigh sur la circulation et du théorème d'inflexion (le chapitre 6 fera une étude plus détaillée de ce sujet). Les instabilités de type centrifuge ne sont donc pas pertinentes pour ces systèmes qui surnommés « *Rayleigh-stable* ».

L'origine de la turbulence dans les disques d'accrétion a été d'abord considérée par Shakura & Sunyaev qui en 1973 proposèrent la rotation différentielle comme source possible. Les nombres de Reynolds étant élevés dans les disques, il paraissait en effet peu probable qu'un tel écoulement reste laminaire. D'un autre côté, la stabilité linéaire de la rotation képlérienne cumulée au manque d'observations expérimentales d'instabilités non-linéaires semèrent le doute dans les esprits. C'est

ainsi qu'en 1991, Balbus & Hawley reprirent l'instabilité magnéto-rotationnelle d'abord étudiée par Chandrasekhar en 1960 ; cette instabilité naît du couplage entre un champ magnétique faible et un écoulement cisailé. Dans cette section nous considérons une autre possibilité : la précession comme source possible d'instabilité dans des systèmes astrophysiques, plus précisément les disques d'accrétion.

Le modèle standard utilisé pour la modélisation des disques d'accrétion est un modèle stationnaire unidimensionnel en équilibre hydrostatique. Dans l'hypothèse où le disque est mince, c'est-à-dire si sa hauteur $H(r)$ est petite devant le rayon local ($H \ll r$), il peut être considéré en première approximation comme étant en rotation képlerienne circulaire. Sa vitesse azimutale V_ϕ est donné par l'équilibre des forces centrifuge et de gravité :

$$\frac{V_\phi^2}{r} = \frac{GM}{r^2} \quad (3.67)$$

où G est la constante de gravitation universelle et M la masse de l'objet centrale. La vitesse angulaire $\Omega(r)$ du disque s'écrit :

$$\Omega(r) = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \quad (3.68)$$

Pour supprimer la singularité en $r=0$, nous considérons le profil modifié :

$$\Omega(r) = \frac{\Omega_0}{1 + \sqrt{\frac{GM}{r^3}}} \quad (3.69)$$

Le flot de base est en coordonnées cylindriques :

$$\mathbf{V}_{bf} = \begin{pmatrix} U_{bf} = 0 \\ V_{bf} = V(r) \\ W_{bf} = W(r) \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

On définit, respectivement, la vitesse angulaire Ω et la vorticité axiale Ω_z liées à cet écoulement :

$$\Omega(r) = \frac{V(r)}{r} \quad (3.71)$$

$$\Omega_z = \frac{1}{r} \frac{d(rV)}{dr} \quad (3.72)$$

On va perturber ce flot par des perturbations $\mathbf{V}_P$ de type : $(\mathbf{V}_P, P) = (u, v, w, p) e^{i(kz+m\phi-\omega t)}$, avec k , m et ω définis respectivement comme le nombre d'onde axial, le nombre d'onde azimutal et la pulsation. Les équations d'Euler vérifiées par ces perturbations s'écrivent :

$$i\psi u - 2\Omega v = -\frac{dp}{dr} \quad (3.73)$$

$$i\psi v + \Omega_z u = -\frac{imp}{r} \quad (3.74)$$

$$i\psi w + \frac{dW}{dr} w = -ikp \quad (3.75)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} + \frac{imv}{r} + ikw = 0 \quad (3.76)$$

où l'on définit le potentiel scalaire $\psi(r) = -\omega + m\Omega(r) + kW(r)$.

On peut tirer de ces équations l'équation de Poincaré généralisée établie au chapitre 1. L'objectif est ensuite de se placer dans l'approximation WKB et d'obtenir une solution pour la pression qui nous donnera les modes de Kepler-Kelvin qui seraient l'analogue des modes de Kelvin dans le cas où le flot de base est une rotation képlerienne. Cette étude est en cours et nous n'irons pas plus loin ici.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons calculé et exprimé les modes de Kelvin correspondant aux ondes inertielles en géométrie cylindrique. Puis, nous avons considéré la dynamique d'un fluide en précession dans le cas d'un angle de précession quelconque et pour le cas orthogonal qui nous intéresse ici puisque c'est le cas de notre expérience ATER que nous étudierons dans la deuxième partie. L'effet de la précession est d'exciter préférentiellement des modes à nombre azimutal $m = \pm 1$ au travers d'un terme de forçage axial.

La dernière partie du chapitre a introduit les différents éléments intervenant dans notre étude des couplages non linéaires qui apparaîtront au chapitre 4.

Avant de conclure, nous avons ouvert le sujet sur une application astrophysique (disques d'accrétion). Le cisaillement par précession peut être un candidat potentiel de mécanisme source d'instabilité dans ce genre de système.

Chapitre 4

Mode coupling analysis and differential rotation in a flow driven by a precessing cylindrical container

Le développement à 2 paramètres a été introduit au chapitre précédent pour découpler les effets dus à la précession et à la dynamique des modes de Kelvin. Nous avons alors étudié le couplage par l'opérateur précession.

Le couplage par l'opérateur de précession $D(\mathbf{V}_{ij})$ et les termes non-linéaires $N(V_{ij}, V_{ij}) = (\mathbf{V}_{ij} \cdot \nabla) \mathbf{V}_{ij}$ vont coupler le flot de base avec les modes forcés par la précession. La méthode de séparation en échelle de temps et l'alternative de Fredholm permettent d'écrire les équations d'amplitude à la Landau.

A l'ordre 2 de ce développement (ordre $\varepsilon\varepsilon'$), on retrouve l'instabilité paramétrique mise en évidence par Kerswell et Mahalov, et qui crée des régions dans l'espace des paramètres où le système est stable ou instable, nommées *langues d'instabilité*. En étudiant la saturation à l'ordre 3, nous avons mis en évidence la possibilité d'obtenir des profils de rotation différentielle sur le flot de base considéré à l'ordre 3 à partir de la conservation de l'énergie (puisque cette étude est non visqueuse). L'étude du système dynamique à l'ordre 3 montre comment les termes créés à cet ordre contribuent à saturer l'instabilité paramétrique quand on se trouve dans une région instable. L'étude du système dynamique à l'ordre 3 fait apparaître un nouveau mode (noté C) qui représente la correction au flot de base et qu'on assimile à la rotation différentielle. Ce terme évolue sur l'échelle de temps de la précession, on peut donc dire que c'est la précession qui crée la rotation différentielle.

Ce résultat prouve que le forçage par précession, en couplant le flot de base d'un écoulement en rotation avec un mode forcé est à l'origine de la rotation différentielle.

En astrophysique, la notion de rotation différentielle est très importante et concerne de nombreux systèmes. Nous tentons ici une application concernant les disques d'accrétion dont il a été admis qu'ils pouvaient être fortement concernés par le mouvement de précession.

Dans le cadre d'une étude dynamo, cette dernière est associée à l'effet Ω discuté en introduction. Cela ouvre donc de nombreuses perspectives dans ce domaine.

Mode coupling analysis and differential rotation in a flow driven by a precessing cylindrical container

THIERRY LEHNER, WALEED MOUHALI, JACQUES LEORAT ^a and ALEX MAHALOV ^b

(Received 00 Month 200x; final version received 00 Month 200x)

^aLuth,Cnrs,UMR8102, Observatoire de Paris-Meudon, 92195 Meudon, France

^b Arizona State University Tempe, AZ85287-1804, USA

We present a theoretical weakly non linear analysis of the dynamics of an inviscid flow submitted to both rotation and precession of an unbounded cylindrical container, by considering the coupling of two Kelvin (inertial) waves. The parametric centrifugal instability known for this system is shown to saturate when one expands the Navier-Stokes equation to higher order in the assumed small precession parameter (ratio of precession to rotation frequencies) with the derivation of two coupled Landau equations suitable to describe the dynamics of the modes. It is shown that an azimuthal mean flow with differential rotation is generated by this modes coupling. The time evolution of the associated dynamical system is studied. These theoretical results can be compared with water experiments and also to some numerical simulations where viscosity and finite length effects cannot be neglected.

Keywords : weakly non linear analysis, hydrodynamics, mode coupling, rotation, precessing flows

1. Introduction

It has been pointed out that buoyancy can trigger planetary and stellar dynamos. Bullard (1949) and after him, Malkus (1968) have suggested on purely energetic grounds that precession can be a viable driving mechanism for the geodynamo. For the special case of a precessing sphere, it is known that differential rotation which is a fundamental feature for powering dynamo action, may be induced by a balance between viscosity and nonlinear effects (Zhang et al. 2003). However, it remains an open question to know whether precession driven flow has a suitable structure for magnetic field generation (Tilgner 2005). But, recently, Wu & Roberts (2008) seem to have obtained numerically dynamo action in precessing spheroids. This result stimulates new interests for this topic in general but also for finding driving mechanisms suitable for laboratory experiments scale dynamo which still remains a challenge (Gailitis 2003).

In the present study, we focus on the non linear wave coupling effects in an inviscid precessing cylinder flow filled with water, motivated by our own experimental results. The solutions of the linearized fluid equations for incompressible flows in an uniformly rotating tank are well known since Kelvin (Lord Kelvin 1880) and are called the Kelvin inertial modes (in the case of a cylinder). They are damped by viscosity and, in absence of energy sources, any given initial flow will stabilize

*Corresponding author. Email: thierry.lehner@obspm.fr

towards a rigid body rotation at the tank angular speed. If the rotation axis of the container rotates also non uniformly, i.e. precesses, it amounts to a source term for waves on the azimuthal wave number $m=1$ and one obtains various dynamical states where the non linear mode couplings of the inertial waves play a major role. This type of forcing is met frequently in astrophysical objects including the Earth (Gans 1970 ; Leorat et al. 2003 ; Leorat 2006).

We have chosen to study the following configuration : the cylinder lies in a horizontal plane with a vertical precession axis orthogonal to the rotation axis. The main control parameter of the experiment is the precession rate, ε , defined by the ratio of the precession to the rotation frequencies. It measures the amplitude of the forcing for a given aspect ratio. When the precession rate is small, linearized equations may be written down. In the precessing frame, the Coriolis acceleration appears as a time independent contribution (supposing the rigid body rotation to be invariant) and proportional to the precession rate which then appears as a $m=1$ forcing term in the inertial waves equation. Such flows are called laminar since they contain only large scales (the ones of the tank) and are steady in the precession frame. When ε reaches a critical value, time and parity invariance are broken, and turbulence sets in, with the occurrence of flow at smaller scales. When viscosity effects can be neglected, one obtains a stationary solution in the precession frame whose amplitude is fixed by ε , and is parity invariant ($r \rightarrow -r$). For a cylinder of finite length, the condition of zero axial velocity at the endwalls of the cylinder allows to find linearized solutions by making a Dini expansion of the solution (Gans 1970). In this paper we are interested by the description of the laminar regime in terms of wave mode couplings. We do not describe the temporal fluctuations and the transition to turbulence by this mode coupling approach, since this paper is based on the study of a single resonant triad including the basic flow. The resulting system is not chaotic but is aimed at describing the saturation of the linear centrifugal parametric instability by going to higher order than quadratic in the mode coupling analysis. The method used is valid for any pair of eigenmodes such that their azimuthal numbers differ by $\Delta m=1$, to be compared with the better studied linear elliptical instability for which $\Delta m=2$, see for example Kerswell (1993). The present method is inspired by a paper by Sipp (2000) who has developped an interesting two parameters expansion suitable for rotating flows (in particular in a study about the Widnall instability). Our main interest, here, is to examine the generation of induced differential rotation of the basic flow by the mode coupling, by studying the case of axially periodic flows compatible with an unbounded cylinder. This differential rotation is indeed observed in experiments and in simulations using a finite container, it may also have peculiar geophysical and astrophysical consequences and deserves thus a specific analysis. This generation has a purely nonlinear origin, to be contrasted with other possible generation induced by viscous effects.

The linear analysis of this problem has been considered previously by Mahalov (1993) and Kerswell (1993). We extend their analysis here to describe higher order mode couplings.

This paper is organized as follows. In the first part, we describe briefly the hydrodynamical system and the basic flow under consideration. In the second part we recall the linear analysis in terms of Kelvin inertial modes for rotating fluids. In the third part we derive the mode coupling equations by using an asymptotic expansion into two small parameters (putting aside detailed computations in appendices) and the relevant dynamical system and compute the mean flow induced differential rotation required to insure energy conservation. In section 4 we study the associated mode amplitude dynamical system. In section 5 we compare our

analytical results with some of our experiments. Section 6 gives the discussion and conclusions.

2. The hydrodynamical system and basic flow

2.1. Formulation

We consider an incompressible and inviscid flow within an unbounded cylinder of radius R , which is put into rotation about its symmetry axis (z -axis), with a frequency Ω_0 and into precession along the x -axis perpendicular to the z axis with a frequency Ω_P (see figure 1). First, we recall the general form of the Navier-Stokes equation (NS hereafter) in a rotating frame for a given angular velocity $\Omega(t)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{V} \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \end{cases} + BC \quad (1)$$

A convenient frame simplifying the problem here is the precessing frame. In the following, we shall use normalized units with R as length unit and the axial rotation speed Ω_0 as frequency unit ($\Omega_0 = 1$).

Futhermore, in this study, we consider mainly the inviscid case so we shall set $\nu = 0$. The equation reads then:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + 2\varepsilon \mathbf{e}_x \times \mathbf{V} = -\nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \end{cases} + BC \quad (2)$$

where $\varepsilon = \frac{\Omega_P}{\Omega_0}$ is the *precession rate* and BC stands for boundary conditions for an infinite length cylinder (to be defined below). Recalling that $\mathbf{e}_x = \cos(\phi)\mathbf{e}_r - \sin(\phi)\mathbf{e}_\phi$, we write the coupled system of equations in cylindrical coordinates (r, ϕ, z) for $V = (u, v, w)$ as :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r} + 2\varepsilon w \sin(\phi) + N(u, \cdot) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + 2\varepsilon w \cos(\phi) + N(v, \cdot) \\ \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + 2\varepsilon(u \sin(\phi) + v \cos(\phi)) + N(w, \cdot) \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ N(u, \cdot) = (-\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V})_u = -u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} - w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{v^2}{r} \\ N(v, \cdot) = (-\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V})_v = -u \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} - w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{uv}{r} \\ N(w, \cdot) = (-\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V})_w = -u \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \phi} - w \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (3)$$

In a real experiment, besides ε , two other control parameters enter the problem (for a given precession angle) : the Ekman number E (defined as the inverse of the Reynolds number, $E = \frac{\nu}{\Omega_0 r^2}$) which is very small in our experiments (of order 10^{-5}) but can be hardly below 10^{-4} in simulations, and the aspect ratio $\frac{L}{2R}$ that is varied from 1 to $\frac{4}{3}$ in our experiment. Note that a transition from laminar to

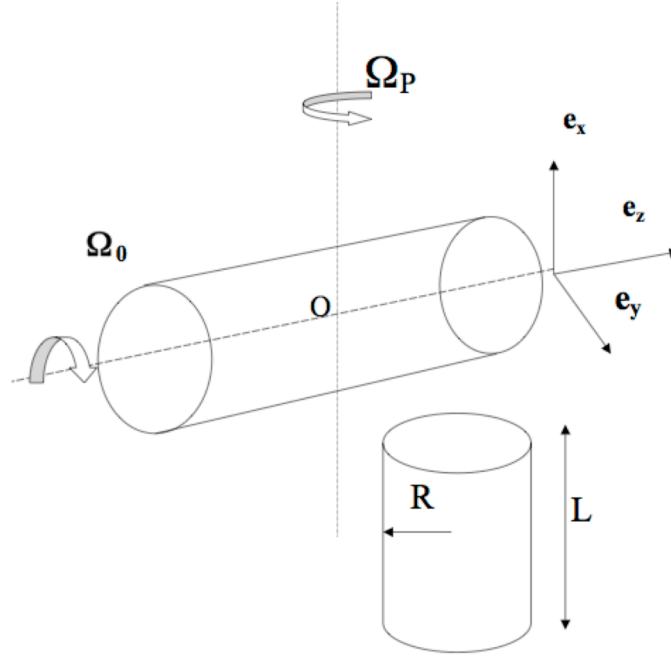


Figure 1. Cylindrical container with its rotation and precession axis

turbulent regime is observed when the precession rate exceeds a critical value, with the observation of a hysteresis cycle but we shall assume here that ε will remain below this critical threshold.

In the present analytical study, we assume that the fluid remains inviscid. Thus, on the lateral curved wall at $r=1$, the flow is tangential with the impermeability condition that reads $u(r=1, \phi, z) = 0$. In the infinite cylinder, we shall assume axially periodic solutions for the velocity and the pressure along the z axis, with a period multiple of L . Using the cylinder radius as length unit, this leads to define a second parameter, the aspect ratio $a = \frac{L}{2R}$, such that $\mathbf{V}(r, \phi, z + 2a) = \mathbf{V}(r, \phi, z)$. To avoid repetition at each equation, we denote these periodic cylinder boundary conditions by BC. In the inviscid limit, there is no connection between the flow angular speed Ω_0 at boundary ($r=1$) and the actual angular rotation of the cylindrical container which does not appear in the dynamical equations.

2.2. A two parameters expansion

Aside from ε which is an external forcing control parameter, we introduce a second parameter noted ε' that characterizes the internal response of the system, in particular the eigenmodes amplitudes. We shall see the relationship between these two parameters. The total flow is then decomposed into basic flow and perturbations (including waves). Supposing ε and ε' to be small enough we expand into them the velocity and pressure and we examine the various couplings terms at a given order $i+j$ corresponding to powers series in $\varepsilon^i \varepsilon'^j$.

We thus write the velocity and pressure as the sum of basic flow V_{bf} plus per-

turbations V ($v = V_{bf} + V$) :

$$V = \sum_{i,j} \varepsilon^i \varepsilon'^j V_{i,j}^{(i+j)} \quad (4)$$

$$v = V_{bf} + \left\{ \varepsilon' V_{01}^{(1)} \right\} + \left\{ \varepsilon'^2 V_{02}^{(2)} + \varepsilon \varepsilon' V_{11}^{(2)} \right\} + \left\{ \varepsilon'^3 V_{03}^{(3)} + \varepsilon \varepsilon'^2 V_{12}^{(3)} \right\} + \dots \quad (5)$$

where in eq.(5) the series in ε represents only the expression of the mean flow, the series in ε' the one of the waves, and the terms involving $\varepsilon \cdot \varepsilon'$ their cross-couplings. The basic flow term V_{bf} and the equations verified by perturbations terms will be written down below. The selected order of the development is specified by the index $(i + j)$.

2.2.1. The basic flow

The basic flow $V_{bf} = (U_{bf}, V_{bf}, W_{bf})$ is defined as being a non linear and stationary solution of eq.(2). It can be computed exactly in the case of an infinite cylinder as :

$$V_{bf} = V_{00}^{(0)} + \varepsilon V_{10}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ r\Omega_0(r) \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\Omega_0(r)r \sin \phi \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$P_{bf} = P_{00}^{(0)} + \varepsilon^2 P_{20}^{(2)} = \int \frac{(r\Omega_0(r))^2}{r} dr - 2\varepsilon^2 (r\Omega_0(r) \sin \phi)^2 \quad (7)$$

We note, here, the presence of an axial flow due to the precession term at order one in ε in the expansion. Accordingly, in the pressure term there are two terms arising from the primary rotation at zero order (giving the standard centrifugal force) and at second order due to precession. Moreover, the solution given by eqs.(6-7) is an exact one for the nonlinear inviscid NS equation, in this case of an infinite length cylinder. This solution is no longer valid in the finite length L case since it does not match the axial boundary condition : $w(z = \pm a) = 0$. No closed analytic form is known for the basic flow for a finite length cylinder. But it can be studied by using a Dini expansion for the Kelvin eigenmodes for their radial dependence (Gans 1970). The result will be the participation of several eigenmodes in order to match the axial boundary condition.

If the viscosity is taken into account, for the case of a pure rotation, viscous layers known as Ekman layers can induce secondary flow circulation (Ekman 1905) at the endwalls for finite length L , while Stewartson shear layer (Stewartson 1957) develop on the cylinder lateral walls. A proper boundary layer treatment would be required in order to match inner and outer solutions of the NS equation. One expects similar behaviours in the relevant direction when the precession is set on with the presence of a radial Ekman boundary layer and a Stewartson axial shear layer (for finite length L).

2.2.2. Equations for perturbations

We use the basic flow as given by eqs.(6-7) in the infinite cylinder case, so that the perturbed velocity V_p and pressure P_p are solutions of the following NS system

:

$$\left[L_0 + \varepsilon(e^{i\phi}L_1 + e^{-i\phi}L_1^*) + \varepsilon(e^{i\phi}E_1 + e^{-i\phi}E_1^*) \right] (\mathbf{V}_p) + \nabla P_p = N(\mathbf{V}_p, \mathbf{V}_{10}^{(1)}) \quad (8a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_p = 0 \quad (8b)$$

Where we have introduced the operators L_0 , L_1 , E_1 and D such as :

$$L_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \Omega_0 \frac{\partial}{\partial \phi} + 2\Omega_0 \mathbf{e}_z \times \quad (9)$$

The L_1 operator is defined by :

$$-\varepsilon(e^{i\phi}L_1 + cc)(\mathbf{V}_p) = -(\mathbf{V}_p \cdot \nabla) \mathbf{V}_{10}^{(1)} - (\mathbf{V}_{10}^{(1)} \cdot \nabla) \mathbf{V}_p \quad (10)$$

L_1 can also be rewritten as :

$$-L_1(\mathbf{V}_p) = -ir \frac{\partial v}{\partial z} + \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (u, v, w) \mathbf{e}_z \quad (11)$$

while the precession contribution enters in the operator E_1 as :

$$\varepsilon(e^{i\phi}E_1 + e^{-i\phi}E_1^*)(\mathbf{V}_p) = 2\varepsilon \mathbf{e}_x \times (\mathbf{V}_p) \quad (12)$$

$$-E_1(\mathbf{V}_p) = \begin{pmatrix} iw \\ -w \\ -iu + v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & -1 \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (13)$$

We shall use the D operator specific of precession, defined by :

$$D(\mathbf{V}_p) = -\varepsilon(e^{i\phi}(E_1 + L_1) + e^{-i\phi}(E_1 + L_1)^*)(\mathbf{V}_p) \quad (14)$$

$$D(\mathbf{V}_p) = -\varepsilon e^{i\phi} \begin{pmatrix} k_{//}ru + iw \\ k_{//}rv - w \\ k_{//}rw \end{pmatrix} + cc \quad (15)$$

where V is taken in $e^{ik_{//}z}$, $k_{//}$ being the axial wavenumber. Note the cancelation of the terms in the expression of D in the z direction for the w component since there is here an exact compensation of the two terms coming from E_1 and L_1 .

2.3. Linear expansion : the eigenmode analysis

- First order in ε'

At this order we get from eq.(8a) the following equations for the eigenmodes (V_{01}, P_{01}) :

$$L_0(V_{01}^{(1)}) + \nabla(P_{01}^{(1)}) = 0 \quad (13a)$$

$$\nabla \cdot (V_{01}^{(1)}) = 0 \quad (13b)$$

whose solutions are the well known Kelvin inertial modes whose expressions are recalled as :

$$V_{01}^{(1)} = (u_i^{(1)}) = \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ v^{(1)} \\ w^{(1)} \end{pmatrix}, u_i^{(1)} = \sum_{m,n} u_{m,n}^{(1)}(r) e^{i(m\phi + \omega_{m,n}t + k_{//}z)} + cc \quad (17)$$

$$p_{01}^{(1)} = \sum_{m,n} p_{m,n}^{(1)}(r) e^{i(m\phi + \omega_{m,n}t + k_{//}z)} + cc \quad (18)$$

For $\omega = \omega_{m,n}$, $\Delta = 2(4 - \sigma^2)$, $\sigma_{m,n} = \pm\omega + m$:

For the following choice of the pressure $p_{m,n}^{(1)} = J_m(k_{\perp}r)$ we get : (19)

$$\begin{pmatrix} u_{m,n}^{(1)} \\ v_{m,n}^{(1)} \\ w_{m,n}^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} i((\sigma + 2)J_{m-1}(k_{\perp}r) - (\sigma - 2)J_{m+1}(k_{\perp}r)) \\ -((\sigma + 2)J_{m-1}(k_{\perp}r) + (\sigma - 2)J_{m+1}(k_{\perp}r)) \\ \frac{-k_{//}}{\sigma} \Delta J_m(k_{\perp}r) \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\sigma = \pm \frac{2}{(1 + (\frac{k_{\perp}}{k_{//}})^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (21)$$

BC : $k_{\perp}$ is given by the radial boundary condition : $u(r = 1) = 0$ which yields ordered roots $k_{\perp n,m}$ in n, for a given m, solutions of the equation :

$$k_{\perp} J'_m(k_{\perp}) + \frac{2m}{\pm\omega + m} J_m(k_{\perp}) = 0 \quad (22)$$

Eqs.(19-20) yield the velocity and pressure components, while eq.(21) stands for the dispersion relation. On figure 2 are shown several branches of the dispersion relation $\omega(k_{//})$ for these inertial waves. The radial boundary condition brings a quantification of the transverse wavenumber $k_{\perp}$ (hence of the frequency ω/Ω_0 of the modes). While in the finite cylinder case or with axial periodicity one has an additional quantification of the axial wavenumber $k_{//}$, coming from the axial boundary condition $w(\pm a) = 0$, as $k_{//} = l\pi a$, the frequency $\omega = \omega_{m,n,l}$ is depending now on three integers (l,m,n).

When the precession is small enough, it shifts merely the eigenmodes in k and ω , without altering their nature but allowing them to couple, see the forthcoming analysis.

3. Non linear analysis expansion : the amplitude equations

3.1. Introduction

From now on we consider the interactions of three modes only : the basic flow (zero mode with $k = 0$ and $\omega = 0$), the forced mode ($m=1$) and the least damped mode ($m=0$), m being the azimuthal phase wavenumber. The linear part of these modes

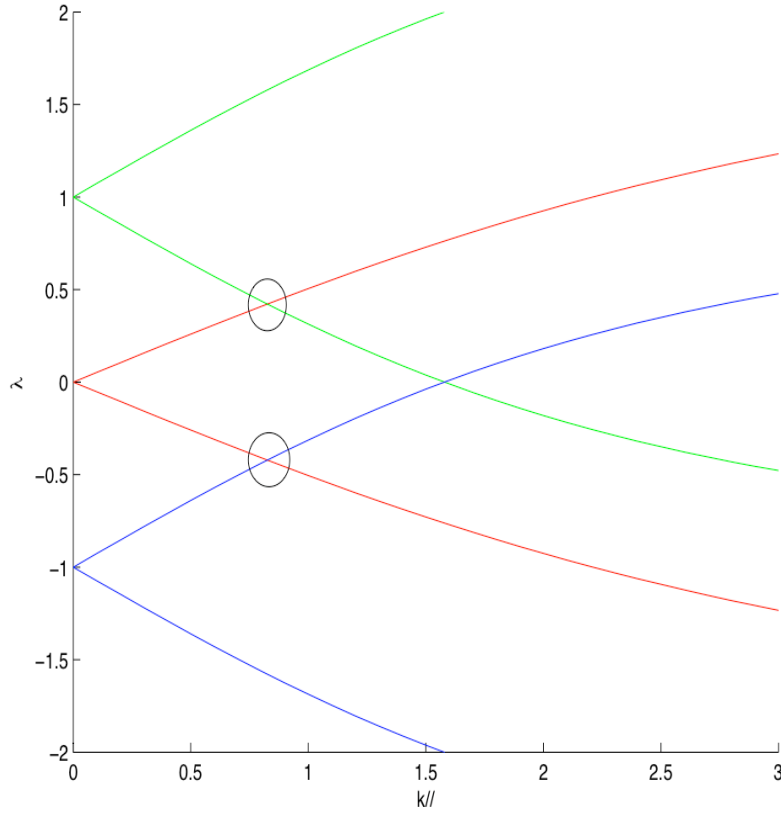


Figure 2. Dispersion relation $\omega(k_{//})$ in the precession frame. The curves correspond to modes $m=0$ et $m=\pm 1$ for the two different $k_{\perp}$ solution of the corresponding radial BC. Non linear coupling of these modes occurs at the crossing points marked with a circle.

are solutions of the first order problem in ε' as recalled in section 2. The basic non-linear process is the coupling of these two Kelvin modes with the basic flow and with each other through the non-linearities and the precession terms. An efficient coupling will be achieved if there is a resonant phase matching between the modes (see the crossing points on figure 2). In appendix A we select numerically suitable coupling point. To study this mechanism we undertake a Taylor expansion of the modes amplitudes in order to derive the coupled equations. When there is only a single expansion parameter, this is known as central manifold reduction technique (when the zero eigenvalue is present in the spectrum). Here, we use a more general method with a priori two independent parameters. Starting from the NS equations one can derive coupled Ginzburg-Landau equations by this amplitude expansion, but the assumption of multiple time scales is also required. Thus, we use :

-the basic flow that has been given by eqs.(6-7)

-a Kelvin axisymmetric mode ($m=0$) :

This mode is written with a phase $\phi_1(z, t) = k_1 z - \omega_1 t$:

$$A_1(t)e^{i\phi_1} \begin{pmatrix} V_1(r) \\ p_1(r) \end{pmatrix} + cc \quad (23)$$

-a Kelvin bending (or helical) mode ($m=1$ or $m=-1$):

This mode is written, with a phase $\phi_2(z, t) = \phi + k_2 z - \omega_2 t$:

$$A_2(t)e^{i\phi_2} \begin{pmatrix} V_2(r) \\ p_2(r) \end{pmatrix} + cc \quad (24)$$

For example, the near resonant coupling of modes $m = 0$ and $m = 1$ on the basic flow is achieved when :

$$k_2 - k_1 = \Delta k \simeq 0, \omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega \simeq 0$$

The radial part of these two modes have been given by eqs.(19-20) at the linear stage. We shall be concerned with the time evolution of their amplitudes A_1 and A_2 . We now substitute these modes expressions into the Navier Stokes equation to a given order in ε and ε' in order to find the coupling coefficients and to derive the amplitude equations. In general for fixed phases the amplitudes will be solutions of inhomogenous differential equations subject to compatibility conditions in order to avoid secular divergence (the Fredholm alternative).

3.2. Second order expansion

3.2.1. Expansion to second order in $\varepsilon \cdot \varepsilon'$

At this order we obtain the following inhomogenous equation for the modes which are labelled as $(V_{11}, p_{11})^{(2)}$:

$$L_0(\mathbf{V}_{11}^{(2)}) + \nabla p_{11}^{(2)} = D(\mathbf{V}_{01}^{(1)}) \quad (25)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{V}_{11}^{(2)}) = 0 \quad (26)$$

We write here $V_{01}^{(1)} = (V_{01}^{(1)})_{(m=0)} + (V_{01}^{(1)})_{(m=1)} + cc$, with a shortened notation :

$$(V_{01}^{(1)})_{(m=0)} = V_1^{(1)}, (V_{01}^{(1)})_{(m=1)} = V_2^{(1)}$$

Then, the r.h.s of eq.(25) is built up with a sum of four terms with different phases as :

$$(\varepsilon) \left(\begin{array}{l} (A_1 e^{i(\phi+\phi_1)}) F_1(V_1(r))^{(1)} + (A_2 e^{i(\phi+\phi_2)}) F_2(V_2(r))^{(1)} \\ (A_1 e^{i(-\phi+\phi_1)}) F_3(V_1(r))^{(1)} + (A_2 e^{i(-\phi+\phi_2)}) F_4(V_2(r))^{(1)} \end{array} \right) + cc \quad (27)$$

where the $F_k(V_l(r))$ (with $k = (1, 2, 3, 4)$ and $l = (1, 2)$) are given by :

$$A_l F_k(V_l(r)) = D_l^\pm(V_l) \quad (28)$$

with the notation $D_+ = D(e^{i\phi})$ and $D_- = D(e^{-i\phi})$.

We look for separable solutions for the $V_{11}^{(2)}$ corresponding to the various phases :

$$V_{11}^{(2)}(r, \phi, z, t) = (A_1(t)e^{i\phi_1} V_1(r))^{(2)} + (A_2(t)e^{i\phi_2} V_2(r))^{(2)}$$

$$V_{11}^{(2)} = \left(\begin{array}{l} (A_1(t)e^{i(\phi+\phi_1)})(V_1^{(2)}(r))|_{(k=1)} + (A_2(t)e^{i(\phi+\phi_2)})(V_2^{(2)}(r))|_{(k=2)} \\ (A_1(t)e^{i(-\phi+\phi_1)})(V_1^{(2)}(r))|_{(k=3)} + (A_2(t)e^{i(-\phi+\phi_2)})(V_2^{(2)}(r))|_{(k=4)} \end{array} \right) + cc \quad (29)$$

where each $V_{l(11)}^{(2)}(r)|_{(k)}$ is a solution of a radial linear inhomogeneous equation as :

$$(-i\omega_l + im_l\Omega_0 + 2(\Omega_0)\hat{e}_z \times)V_l^{(2)}|_{(k)} + \nabla_l p_l^{(2)}(r)|_{(k)} = F_k(V_l^{(1)})|_{(k)} \quad (30)$$

$$\nabla_l \cdot (V_l^{(2)})|_{(k)} = 0 + BC \quad (31)$$

where $m_l = \pm m_1$ or $\pm m_2$ and idem for ω_l and for k_l . The subscript l is taken with the suitable sign to fit one of the four phase terms entering in expression (29). Thanks to the phase matching relation : $\phi + \phi_1 = \phi_2$ there is a possible resonance between the basic flow (via its axial component) and eigenmode 1 to generate eigenmode 2, and also between eigenmode 2 and the basic flow to generate eigenmode 1. But since V_1 and V_2 are eigenmodes of the linear operator L_0 , the rhs of eq.(25) might be singular with respect to L_0 which requires a compatibility condition. The $V_l^{(2)}$ are the solutions of a regularized problem involving the adjoint operator in the case of resonant phase (see appendix B). In the non-resonant phase case (involving here 2 terms out of 4) the problem is non degenerate and has a unique solution without need for a regularization.

To insure the compatibility condition we need to add an extra term to the r.h.s of eq.(25). This is provided by allowing a slow time dependence in $T = \varepsilon t$ in the mode amplitudes A_i . Additional terms now arise from the time derivative $\frac{d}{dt}$ in the operator L_0 as : $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T} + \dots$:

$$L_0(\mathbf{V}_{11}) + \nabla p_{11} + \partial_t(V_{01}(T)) = D(V_{01}) \quad (32)$$

since $\partial_t(V_{01}(T)) \approx d_t(A_i(T = \varepsilon t)) \approx \varepsilon A_i \approx \mathcal{O}(\varepsilon \varepsilon')$ is of the same order as the involved source term $D(V_{01})$.

The compatibility conditions yield the amplitude equations at second order in $\varepsilon \cdot \varepsilon'$ by collecting the terms of the same phase than ϕ_1 and than ϕ_2 , as :

$$\frac{dA_1}{dT} V_1(r) = e^{-i\phi_1} (H_1^{(1)}(r, \phi, z)) \quad (33)$$

$$\frac{dA_2}{dT} V_2(r) = e^{-i\phi_2} (H_2^{(1)}(r, \phi, z)) \quad (34)$$

where $H_i^{(1)}(r, \phi, z)$ is the inhomogeneous term in the r.h.s of the NS equation as given by eq.(32). This system (33-34) describes the linear parametric instability that will be considered further in section 4. We rewrite these equations by taking the scalar (or inner) product of the velocity V in eqs.(33-34) with their adjoint eigenmode $V^\dagger$ being solution of the corresponding adjoint problem. For example, the scalar product of V_1 and V_2 is defined by :

$$\langle V_1 \cdot V_2 \rangle = \int_0^{\frac{2\pi}{k}} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 r dr (u_1^* u_2 + v_1^* v_2 + w_1^* w_2) \quad (35)$$

By averaging, we finally obtain the following first order system :

$$\frac{dA_1}{dT} = \varepsilon p A_2; \varepsilon p = \frac{\langle V_1^\dagger \cdot D_{(\phi_1)}^*(V_2) \rangle}{\langle V_1^\dagger \cdot V_1 \rangle} \quad (36)$$

$$\frac{dA_2}{dT} = \varepsilon q A_1; \varepsilon q = \frac{\langle V_2^\dagger \cdot D_{(\phi_2)}^*(V_1) \rangle}{\langle V_2^\dagger \cdot V_2 \rangle} \quad (37)$$

where we have used the notation $D_{(\phi_1)}$ = coefficient of $e^{i\phi_1}$ in $D(V_{01})$ and idem for $D_{(\phi_2)}$. The numerical computation of the coefficients p and q is done in appendix A. The corresponding velocities $V_{ij}^{(2)}$ are solutions of regularized problems (see appendix B).

- Instead of solving explicitly for each V_{ij} component at order $\varepsilon^i \varepsilon'^j$, we prefer writing a Poincaré equation for the pressure alone. We first solve this Poincaré equation and then we inject the pressure expression in the velocity components equations to derive the velocity.

3.2.2. Expansion to second order in $\varepsilon' \cdot \varepsilon'$

We compute now the mode couplings to other relevant orders using the same procedure as above. One notices first the absence of second order terms of the same phase than the ones of ϕ_1 or ϕ_2 . This is obvious here since terms like $|A_1|^2$ and $|A_2|^2$ have zero phase, but a term of the kind $A_1 \cdot A_2^*$ can have the phase ϕ of the basic flow, and indeed it would modify the mean flow ; see the third order analysis in section 3.3. There are also other terms in $A_1 \cdot A_1$ and $A_2 \cdot A_2$ whose phases are second harmonic ones, and so on. We shall examine below which terms among $N(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$ and $N(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i^*)$ are relevant (non vanishing). We need to implement and compute the present second order terms in order to evaluate next the relevant coefficients at third order. The general equation we work with is still of the same kind as eq.(2).

- Notation : we shall use in the following a compact expression for the non linear term $N(v, v)$. We restrict to harmonic dependence in $e^{ikz} e^{im\phi}$, and thus we have : $\nabla_\phi \rightarrow im$ and $\nabla_z \rightarrow ik$ in the derivatives. We shall note $\nabla_{r,m,k}$ for the full gradient operator $\nabla_{r,\phi,z}$.

For example, we write down the N term explicitly for $N^{(2)}(\mathbf{v}_1^{(1)}, \mathbf{v}_2^{(1)}) = -(v_1^{(1)} \cdot \nabla) v_2^{(1)}$. For $v_i = (iu_i, v_i, w_i)$, we get the expression (dropping the superscript ¹):

$$N(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} N(u_1, u_2) \\ N(v_1, v_2) \\ N(w_1, w_2) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} u_1 \partial_r u_2 + (\frac{v_1}{r})(\partial_\phi u_2 - v_2) + iw_1 \partial_z u_2 \\ iu_1 \partial_r v_2 + (\frac{v_1}{r})(\partial_\phi v_2 + iu_2) + w_1 \partial_z v_2 \\ iu_1 \partial_r w_2 + (\frac{v_1}{r})(\partial_\phi w_2) + w_1 \partial_z w_2 \end{pmatrix} \quad (38)$$

We shall use for $N(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ the notation : $\{v_i, v_j\}$ or $\{v_i, v_j, m_j, k_j\}$ and $\{v_i, v_j^*\} = \{v_i, v_j^*, -m_j, -k_j\}$, in the following.

Thus we start by writing the general equation (2) for the order two in ε' as :

$$(L_0(\mathbf{v}) + \nabla p)^{(2)} = N(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)^{(2)} + R_{res} \quad (39)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{v})^{(2)} = 0 \quad (40)$$

with $v_1 = V_{01}$, $v_2 = V_{02}$, $p^{(2)} = p_{02}$ and R_{res} in (39) means a possible regularization for resonant cases. We write again $V_{01}^{(1)} = V_1^{(1)} + V_2^{(1)} + \text{cc}$ in the r.h.s of

eq.(39) to find :

$$N(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)^{(2)} = \sum_{i,j} N_{i,j}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)^{(2)}$$

$$\begin{aligned} N(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)^{(2)} &= A_1^2 e^{2i\phi_1} \{v_1, v_1, m_1, k_1\} + A_2^2 e^{2i\phi_2} \{v_2, v_2, m_2, k_2\} + \\ &A_1 A_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)} (\{v_1, v_2, m_2, k_2\} + \{v_2, v_1, m_1, k_1\}) + \\ &\frac{|A_1|^2}{2} (\{v_1, v_1^*, -m_1, -k_1\} + \{v_1, v_1^*, -m_1, -k_1\}^*) + \\ &\frac{|A_2|^2}{2} (\{v_2, v_2^*, -m_2, -k_2\} + \{v_2, v_2^*, -m_2, -k_2\}^*) + \\ &A_1 A_2^* e^{i(\phi_1 - \phi_2)} (\{v_1, v_2^*, -m_2, -k_2\} + \{v_2^*, v_1, m_1, k_1\}) + cc \end{aligned} \quad (41)$$

Compatibility conditions depending on the selected phase might appear again here. We always seek for solutions in separate variables form for the set $(V_{02}^{(2)}, p_{02}^{(2)})$ as :

$$\begin{aligned} v^{(2)}(r, \phi, z, t) &= A_1^2 e^{2i\phi_1} v_{1,1}(r) + A_2^2 e^{2i\phi_2} v_{2,2}(r) \\ &+ A_1 A_2^* e^{i(\phi_1 - \phi_2)} v_{1,2*}(r) + A_1 A_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)} v_{1,2}(r) \\ &+ |A_1|^2 v_{1,1*}(r) + |A_2|^2 v_{2,2*}(r) + cc \end{aligned} \quad (42)$$

Among these six terms, we are first interested by the zero phase terms at this order. The two relevant coefficients are $v_{1,1*}$ and $v_{2,2*}$ which are solutions of the following equation (for $i=1,2$) :

$$L_0(\mathbf{v}_{i,i*}(\mathbf{r})) + \nabla_{\mathbf{m},\mathbf{k}} p_{i,i*}(r) = N_{tot}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) = \frac{1}{2} (\{v_i, v_i^*\} + \{v_i, v_i^*\}^*) \quad (43)$$

We have $\nabla_{m,k}(v_{i,i*}) = 0$, since here $m=0$ and $k=0$. Note that this source term has the following property, thanks to the structure of the Kelvin modes : for $V = (iu, v, w)$ with (u, v, w) real numbers and $V^* = (-iu, v, w)$: their phases are conjugated. The structure of the N_{tot} term is : $N_{tot} = (U_n, 0, 0)$ because we have $N(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) = (U_n, iV_n, iW_n)$ with U_n, V_n, W_n being real numbers. Equation (43) can be projected on the velocity as (for example for $i = 1$) :

$$-2v_{1,1*} + \partial_r p_{1,1*} = N \cdot \hat{e}_r = N_r \quad (44)$$

$$2u_{1,1*} = N \cdot \hat{e}_\phi = N_\phi \quad (45)$$

$$0 = N \cdot \hat{e}_z = N_z \quad (46)$$

$$\frac{\partial_r(r u_{1,1*})}{r} = 0 \quad (47)$$

Hence Eqs.(44-47) imply two compatibility conditions : $N_z = 0$ and then, since $u_{i,i*} = 0$ from $\nabla \cdot v = 0$, we must also fulfill the condition $N_\phi = 0$. But from the structure of the N term by symmetry, as just seen, these two conditions are automatically satisfied, while the $N_{tot,r}$ radial term is not in general vanishing for arbitrary Kelvin modes. We complete this system

(44-47) by a Poincaré equation on $p_{1,1*}$ (see next section) as follows :

$$L_B(p_{11*}(r)) = N_{p_{11*}}, \quad N_{p_{11*}} = N'_r + b \frac{N_r}{r} \quad (48)$$

with $b = 1$. From this system, we may conclude that $u_{11*} = 0$, w_{11*} is arbitrary and we have a coupled system between v_{11*} and p_{11*} . But the Kelvin modes are known to have the Beltrami property. From the expressions of the velocity and pressure components of these modes (19-20), one can show the relation : $\text{curl}(V) = d \frac{\partial V}{\partial z}$ where d is a constant. For harmonic dependence, we have : $\frac{\partial}{\partial z} = ik_{//}$ and $d = \frac{2k_{//}}{\omega}$. Since $N(v, v) = v \times \text{curl}(v) - \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right)$, the term $v \times \text{curl}(v)$ vanishes here and $N(v, v)$ reduces to $-\nabla \left(\frac{v^2}{2} \right)$. Thus we have only a possible pressure correction but the velocity at second order is not affected by this source term. The consequence is that a single mode cannot resonantly couple with itself. Thus at this order we can choose $v_{1,1*}$ and $v_{2,2*}$ to be zero : the amplitude equations are not modified at this second order in their exchange with the zero mode, the forcing of a geostrophic mode by this source term is not possible. This result is in agreement with (Greenspan 1969; Waleffe 1989), (aside from the involved time scales) for resonant coupling since their result apply also for a single mode. The quoted Greenspan paper (see in Greenspan 1969) was dealing with a finite container where a given Kelvin mode is stationary by reflexion on the axial end walls with two phases : (ω, m, k) and $(\omega, m, -k)$. The auto coupling of this stationary mode can thus give birth to the two components $(0, 0, 2k)$ and $(2\omega, 2m, 0)$, that are not resonant with the geostrophic mode which has a harmonic phase : $(\omega, m, k) = (0, 0, 0)$.

For the equations involving the coefficients $N_{tot}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$, we have the same structure $N_{tot} = (U_n, 0, 0)$ at the second harmonic. But now, all the components of the solution V_{ii} are a priori non vanishing. However by the same argument of Beltrami property the second order coupling yields again $v_{1,1} = 0$ and $v_{2,2} = 0$. In the general case, we must solve instead a radial equation for the intermode couplings for $v_{1,2}$, $v_{2,1}$ and for $v_{1,2*}$, and for their complex conjugated, now with nonzero phase terms. The equation to be solved is now similar to eq.(43) but with non zero m and k :

$$L_{0,m,k}(\mathbf{v}_{i,j}(\mathbf{r})) + \nabla_{\mathbf{m},k} p_{i,j}(r) = N_{i,j} \quad (49)$$

$$\nabla_{m,k} v_{i,j} = 0 + BC \quad (50)$$

It is convenient to project this kind of equation and to solve in components for $V = (iu, v, w)$. In particular we can eliminate v and w and then solve for u and p . Another useful approach is to get w from the projection of eq.(49) on the axial direction and then to use the divergence-free condition (eq.(50)) to eliminate v , and finally to work with the Poincaré equation on the pressure p itself as :

$$L_B(p_{ij}(r)) = N_{p_{ij}} \quad (51a)$$

$$p_{ij} = L_B^{-1}(N_{p_{ij}}) \quad (51b)$$

$$L_B(p(r)) = p'' + \frac{1}{r}p' + (\beta^2 - \left(\frac{m}{r}\right)^2)p \quad (52)$$

$$N_{p_{ij}} = N'_r + \frac{N_r}{r(1 - \frac{2m}{\sigma})} + \frac{2N'_\phi}{i\sigma} + \frac{N_\phi}{i\sigma r}(2 - m\sigma) + \left(\frac{kN_z}{i\sigma^2}\right)(4 - \sigma^2) \quad (53)$$

where the $\beta_{i,j}$ radial argument is determined from the BC for specified $m, \sigma(\pm\omega + m)$ and k in each cases :

$$u(\beta_{i,j}r) = \frac{-i\sigma \frac{dp}{dr} + N_r + \frac{mp}{r}}{4 - \sigma^2}, \text{ with } u(\beta_{i,j}) = 0 \quad (54)$$

Note that we can no longer take the usual (linear) dispersion relation in this non linear case to determine $\beta_{i,j}$ (which would wrongly give $\beta^2 = \frac{4k^2\sigma^2}{4-\sigma^2}$).

The L_B differential operator in eq.(51a) has in its kernel the set of Bessel functions and thus a formal solution for this equation reads :

$$p_{ij}(r) = c_1 J_m(r) + c_2 Y_m(r) + \frac{\pi}{2} (Y_m(r) \int_{c_3}^r r N_{p_{i,j}}(r) J_m(r) dr - J_m(r) \int_{c_4}^r r N_{p_{i,j}}(r) Y_m(r) dr) \quad (55)$$

where the J_m and Y_m are the m order Bessel functions of first kind and c_1, c_2, c_3, c_4 are constants. This formulation will be useful for the numerical computations. Then each component of the velocity $V_{i,j}$ is determined by projection using the known expression for the pressure. Here there are four equations to solve, each of the same kind as eq.(49) for the various $V_{i,j}$ and $p_{i,j}$. We compute first the source terms $N_{p_{i,j}}$ in eq.(53) and then we determine the pressure by eq.(55) with the choice $c_i = 0$, for $i = 1, \dots, 4$.

For all these involved coefficients the triplet of numbers (ω, m, k) cannot be resonant with the linear phase involved in the operator L_0 : because the dispersion relation $\omega(k)$ is here non-linear and the linear phase cannot be matched. The inversion of the operator L_0 is then regular and non degenerate with unique solutions for these $v_{i,j}$ and $p_{i,j}$ (see appendix B for some results and numerical calculations).

No special solutions are found at order ε^2 . However there is a component of the pressure $p^{(2)}$ of the basic flow at this order as already seen in section 2.2.1.

3.3. Third order expansion

Now we wish to compute terms at third order. We first need to collect the contributions of the relevant second order terms since there are several possible terms. We shall be mainly concerned by terms of the same phase as the linear eigenmodes such as $A_1 |A_1|^2$, $A_1 |A_2|^2$, $A_2 |A_1|^2$ and $A_2 |A_2|^2$. For example, the term $A_1 |A_1|^2$ can come from two different contributions :

- a) terms in $v_1(v_{1,1}^*)$ which is proportional to $A_1 |A_1|^2$
- b) terms in $v_{1,1}(v_1^*)$ which is proportional to $(A_1 A_1) A_1^*$

At third order the non linear expansion now yields :

$$(L_0(\mathbf{v}) + \nabla p)^{(3)} = N(v^{(1)}, v^{(2)}) + N(v^{(2)}, v^{(1)}) + D(v^{(3)}) + R_{res} \quad (56)$$

$$\nabla \cdot v^{(3)} = 0 + BC \quad (57)$$

Here, we are not directly interested to solve explicitly for $v^{(3)}$ in eq.(56) but rather by the possible compatibility conditions arising from this equation. There are several third order terms to consider since the velocity (and pressure) could be of either type : $V_{03}, V_{30}, V_{12}, V_{21}$ but we focus here mainly on the terms of order ε'^3 (term V_{03}) and of order $\varepsilon \cdot \varepsilon'^2$ (term V_{12}).

3.3.1. Expansion to order ε'^3

We consider equation (56) for $v^{(3)} = V_{03}$; its r.h.s is written explicitly by collecting all the terms of the same selected phase. Thus, by writing $\Gamma = N(v^{(1)}, v^{(2)}) + N(v^{(2)}, v^{(1)})$, we have :

$$\begin{aligned} \Gamma = & e^{i\phi_1} A_1 [|A_1|^2 (\{v_{1*}, v_{1,1}, 2m_1, 2k_1\} + \{v_{1,1}, v_{1*}, -m_1, -k_1\}) + \\ & |A_2|^2 (\{v_{2*}, v_{1,2}, m_1 + m_2, k_1 + k_2\} + \{v_{1,2}, v_{2*}, -m_2, -k_2\} + \\ & \{v_2, v_{1,2*}, m_1 - m_2, k_1 - k_2\} + \{v_{1,2*}, v_2, m_2, k_2\})] + \\ & e^{i\phi_2} A_2 [|A_2|^2 (\{v_{2*}, v_{2,2}, 2m_2, 2k_2\} + \{v_{2,2}, v_{2*}, -m_2, -k_2\}) + \\ & |A_1|^2 (\{v_1, (v_{1,2*})^*, m_2 - m_1, k_2 - k_1\} + \{(v_{1,2}^*), v_{1*}, -m_1, -k_1\} + \\ & \{v_{1*}, v_{1,2}, m_1 + m_2, k_1 + k_2\} + \{v_{1,2}, v_{1*}, -m_1, -k_1\})] + \\ & e^{i3\phi_1} A_1^3 (\dots) + e^{i3\phi_2} A_2^3 (\dots) + \left(e^{i(\pm 2\phi_1 \pm 2\phi_2)} + e^{i(\pm \phi_1 \pm 2\phi_2)} + (1 \rightarrow 2) \right) + cc \quad (58) \end{aligned}$$

We are looking in particular at terms of third order with the same linear phase than the one of the two initial eigenmodes. We see that the r.h.s of eq.(58) may be resonant with respect to the linear operator L_0 , and singular inversion may occur again. To ensure the associated compatibility conditions we must now fulfill new conditions at third order. By introducing another long time scale $T' = \varepsilon'^2 t$ dependence in the amplitudes $A_i(T, T')$ for purpose of regularization, the r.h.s of eq.(56) reads :

$$\{N(v^{(1)}, v^{(2)}) + N(v^{(2)}, v^{(1)})\}_{res} + R_{res} = 0 \text{ with } R_{res} = -\partial_{T'} V_{01}.$$

- Remark : the chosen regularization term in eq.(56) is proportional to ε'^3 . We have introduced two a priori distinct long time scales with $T(=\varepsilon t)$ and $T' (= \varepsilon'^2 t)$ in this analysis at this stage.

We thus get the amplitudes equations at third order as :

$$\frac{dA_1}{dT'} = iA_1(s_{11}|A_1|^2 + s_{12}|A_2|^2) \quad (59)$$

$$\frac{dA_2}{dT'} = iA_2(s_{21}|A_1|^2 + s_{22}|A_2|^2) \quad (60)$$

where the coefficients s_{ij} are given in explicit form by:

$$is_{11} = \frac{\langle v_1^\perp \cdot (\{v_{1*}, v_{1,1}, 2m_1, 2k_1\} + \{v_{1,1}, v_{1*}, -m_1, -k_1\}) \rangle}{\langle v_1^\perp \cdot v_1 \rangle} \quad (61)$$

$$is_{22} = \frac{\langle v_2^\perp \cdot (\{v_{2*}, v_{2,2}, 2m_2, 2k_2\} + \{v_{2,2}, v_{2*}, -m_2, -k_2\}) \rangle}{\langle v_2^\perp \cdot v_2 \rangle} \quad (62)$$

$$is_{12} = \frac{1}{\langle v_1^\perp \cdot v_1 \rangle} < v_1^\perp \cdot (\{v_{2*}, v_{1,2}, m_1 + m_2, k_1 + k_2\} +$$

$$\{v_{1,2}, v_{2*}, -m_2, -k_2\} + \{v_2, v_{1,2*}, m_1 - m_2, k_1 - k_2\} + \{v_{1,2}, v_2, m_2, k_2\}) > (63)$$

$$is_{21} = \frac{1}{\langle v_2^\perp \cdot v_2 \rangle} < v_2^\perp \cdot (\{v_{1*}, v_{1,2}, m_1 - m_2, k_1 - k_2\} +$$

$$\{(v_{1,2*})^*, v_1, m_1, k_1\} + \{v_{1*}, v_{1,2}, m_1 + m_2, k_1 + k_2\} + \{v_{1,2}, v_{1*}, -m_1, -k_1\}) > (64)$$

However as seen above with the Beltrami property we have : $v_{1,1} = v_{2,2} = 0$, with the simplification $s_{11} = s_{22} = 0$. In the present inviscid case all the coefficients s_{ij} are reals since we recall that the structure of the N term is $N(V, V) = (X, iY, iZ)$ with s_{ij} scaling like $\langle V \cdot N \rangle$. The equations (59-60) are the amplitude equations at third order in ε . If we take now into account the previous second order expansion (with eqs.(36, 37)) giving the parametric instability we get the following dynamical system (a special case of two coupled Landau equations without spatial dependence), where h.o.t means higher order terms, as :

$$\frac{dA_1}{dT} = i\omega_1 A_1 + \varepsilon p A_2 + iA_1(s_{11} |A_1|^2 + s_{12} |A_2|^2) + h.o.t \quad (65)$$

$$\frac{dA_2}{dT} = i\omega_2 A_2 + \varepsilon q A_1 + iA_2(s_{21} |A_1|^2 + s_{22} |A_2|^2) + h.o.t \quad (66)$$

These equations, with different coefficients below, but keeping the same structure, constitute our final dynamical system.

Important remark : for the various slow terms occuring in the r.h.s of eqs.(65, 66) to evolve at the same dynamical long time one requires the scaling $\varepsilon = \varepsilon'^2$ (see also later on) in order to get $T = T'$.

3.3.2. Expansion at order $\varepsilon \cdot \varepsilon'^2$

The D precession operator (as defined in section 2.2.2) proportional to ε now enters in the result at this order. The relevant inhomogeneous equation to solve reads :

$$(L_0(\mathbf{v}_{12}) + \nabla p_{12})^{(3)} = N^{(3)}(v, v) + D^{(3)}(v_{02}^{(2)}) + Reg \quad (67)$$

with : $Reg = -\partial_{(T=\varepsilon t)} V^{(2)}$, where the relevant non linear terms are :

$$N^{(3)}(v, v) = N(v_{01}^{(1)}, v_{02}^{(2)}) + N(v_{02}^{(2)}, v_{01}^{(1)}) + cc \quad (68)$$

Again there is a compatibility condition for solving eq.(67) for the resonant terms. We add a regularization with the last term in the r.h.s of eq.(67) coming again from the multiple time scale expansion.

- Remark : at this order the possible regularizing terms could be of two different kind (if T and T' still differ) : $Reg = -\partial_T V_{02} \approx \varepsilon \varepsilon'^2$ but also we may have $Reg' = -\partial_{T'} V^{(1)} \approx \varepsilon \varepsilon'^2$, for $v^{(1)} \approx v_{10} \approx \varepsilon$. However since the basic flow is supposed to remain stationary even on long time this last term Reg' will not be considered.

The only terms which might be resonant (there are no terms here at the initial phases ϕ_1 and ϕ_2) are obtained by inspecting more precisely the r.h.s of eq.(67).

The relevant terms are at zero phase at this order (like in the previous analysis at order ε'^2) and bring resonant contribution as :

$$N_{res}^{(3)}(v, v) = N(v_{01}^{(1)}, v_{11}^{*(2)}) + N(v_{11}^{*(2)}, v_{01}^{(1)}) + cc, D_{res}^{(3)}(v_{02}^{(2)}) = D(v_{12*}^{(2)}) + cc \quad (69)$$

where the second order velocity terms are to be taken respectively from the relevant equations of section 3.2.1 for $D(V_{02}^{(2)})$ with $V_{02}^{(2)}$ scaling like $L_0^{-1}(N(V_{01}^{(1)}, V_{01}^{(1)}))$ and from section 3.2.2 for $N(V_{11}^{(2)*}, V_{01}^{(1)})$ and $N(V_{01}^{(1)}, V_{11}^{(2)*})$, with $V_{11}^{(2)}$ scaling itself like $L_0^{-1}(D(V_{01}^{(1)}))$. Then, as for the previous zero phase case seen in section 3.2.2, two compatibility conditions are to be fulfilled :

$$(N(v_{01}^{(1)}, v_{11}^{*(2)}) + N(v_{11}^{*(2)}, v_{01}^{(1)}) + D_{res}^{(3)}(v_{12*}^{(2)})) \cdot \hat{e}_z + cc = F_{D_z}(A_1 A_2^* + A_1^* A_2) \neq 0 \quad (70)$$

$$(N(v_{01}^{(1)}, v_{11}^{*(2)}) + N(v_{11}^{*(2)}, v_{01}^{(1)}) + D_{res}^{(3)}(v_{12*}^{(2)})) \cdot \hat{e}_\phi + cc = F_{D_\phi}(A_1 A_2^* + A_1^* A_2) \neq 0 \quad (71)$$

Here we suppose, instead of taking a former $V^{(2)}$ already solution at second order, that these equations (70-71) determine a new velocity at order ε'^2 in the expansion of the mean flow (term at the same level than V_{02}) but now induced by the coupling of the two initial eigenmodes. We write this new term as :

$$\mathbf{V}_{bf(02)}^{(2)} = C(T)\mathbf{C}(r) = C(T)(0, C_\phi(r), C_z(r)) \quad (72)$$

Where bf stands for basic flow and the subscript 02 is to remind that it is of order ε'^2 . This new term may come from two different sources involved in eqs.(70, 71). The contribution of the term $-\partial_T C(T)C(r)$ is also put into the r.h.s of eqs.(70, 71) and we get the following equation since the 3 source terms have the same structure in (iU, V, W) , with hence $C=C_2$ (see appendix C) :

$$\partial_T C_2(T) = (A_1 A_2^* + A_1^* A_2); (0, C_{2\phi}, C_{2z}) = (0, F_{D_\phi}, F_{D_z}) \quad (73)$$

Where the radial coefficients F_{D_ϕ} and F_{D_z} have been defined with eqs.(70, 71).

3.4. Mean flow modification : Induced azimuthal differential rotation

By writting $C_{2\phi}(r) = r\Omega'(r)$, we see that it is possible even in the inviscid case to induce a differential rotation $\Omega'(r)$ of the mean flow (in particular in the axial direction) due here to the two Kelvin modes non linear inter coupling. It is evolving on the slow time scale T (slow with respect to the modes fast periods and possible detuning), and its amplitude will be of order ε'^2 . This generation of differential rotation allows the conservation of energy at any given order.

3.4.1. Modification of the dynamical system

Since the $V_{bf}^{(2)}$ term is of the same order in $(\varepsilon')^2$ as the V_{02} previously computed, we see that our former dynamical system at order $\varepsilon.\varepsilon'^2$ has now to be modified to include this new contribution.

The term $N(v^{(1)}, v^{(2)}) + N(v^{(2)}, v^{(1)})$ enters now but with $v^{(2)} = V_{02} + V_{bf}^{(2)}$ instead

of $v^{(2)} = V_{02}$ alone. The new non vanishing terms are $N(v^{(1)}, V_{bf}^{(2)}) + N(V_{bf}^{(2)}, v^{(1)})$ which leads to the new system :

$$\frac{dA_1}{dT} = i\omega_1 A_1 + \varepsilon p A_2 + iA_1(s_{11}|A_1|^2 + s_{12}|A_2|^2 + c_{A_1}C) \quad (74)$$

$$\frac{dA_2}{dT} = i\omega_2 A_2 + \varepsilon q A_1 + iA_2(s_{21}|A_1|^2 + s_{22}|A_2|^2 + c_{A_2}C) \quad (75)$$

$$\frac{dC}{dt} = \varepsilon(A_1 A_2^* + A_1^* A_2) \quad (76)$$

with the additional coefficients :

$$ic_{A_1} = \frac{\langle v_1^\perp \cdot \left(\left\{ N(v_1, V_{bf}^{(2)}) + N(V_{bf}^{(2)}, v_1) \right\} \right) \rangle}{\langle v_1^\perp \cdot v_1 \rangle} \quad (77)$$

$$ic_{A_2} = \frac{\langle v_2^\perp \cdot \left(\left\{ N(v_2, V_{bf}^{(2)}) + N(V_{bf}^{(2)}, v_2) \right\} \right) \rangle}{\langle v_2^\perp \cdot v_2 \rangle} \quad (78)$$

Again, all the coefficients s_{ij} in eqs.(74, 75), including c_{A_1} and c_{A_2} are real. This can be checked directly since we have the structure $C = (iu, v, w)$ and then $N(v1, C) = (X, iY, iZ)$ hence ic_{A_1} and ic_{A_2} are proportional to $\langle v1.N \rangle$ giving purely imaginary numbers. Now for the various terms to evolve at the same time scale in the dynamical system it is required again that ε' scales like $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. For this scaling, the modes amplitudes are predicted to grow like ε' for small enough ε' , while the differential rotation C amplitude scales like $\varepsilon'^2 = \varepsilon$.

- Remark : for finite cylinder only, the viscosity is to be taken into account and the r.h.s of eq.(76) has to be modified as follows :

$$\frac{dC}{dt} = \varepsilon(A_1 A_2^* + A_1^* A_2) + d_1 |A_1|^2 + d_2 |A_2|^2$$

where d_1, d_2 are coefficients connected to viscosity. They are made of two terms, one is a surface effect proportional to $Re^{-\frac{1}{2}}$ and the other one is a volume effect proportional to Re^{-1} see (Racz & Scott 2008). In our case, the non linear term will dominate if $\varepsilon > \sup \left(Re^{-\frac{1}{2}}, Re^{-1} \right)$. This will be achieved in our experiments (see section 5). Viscosity effects can be dominant in particular in the context of inertial convection involving also Kelvin modes, it has been studied by using asymptotic analysis in (Zhang et al. 2007).

3.5. Total flow energy conservation

In this section we require the energy to be conserved not only to all orders but also order by order separately. We consider the total flow that is built up with the following velocities :

$$\begin{aligned} V = & V_0 + \varepsilon V_{10} + \varepsilon' V_{01} + \varepsilon^2 V_{20} + \varepsilon \varepsilon' V_{11} + \varepsilon'^2 (V_{02} + V_{bf}^{(2)}) + \\ & \varepsilon'^3 V_{03} V_{11} + \varepsilon \varepsilon'^2 V_{12} + \varepsilon^2 \varepsilon' V_{21} + \dots \end{aligned} \quad (79)$$

The kinetic energy is $(\frac{1}{2}(\rho))V^2$. It can be computed with the help of the scalar product recalled here as : $\langle V_1 \cdot V_2 \rangle = \int_0^{\frac{2\pi}{k}} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 r dr (u_1^* u_2 + v_1^* v_2 + w_1^* w_2)$

We shall examine energy conservation order by order here :

- to order 0 : the V_0 term is stationary, hence the energy $\langle V_0 \cdot V_0 \rangle$ is conserved with time.
- to order ε' : the energy is also conserved to this order since the interaction between the basic flow and the inertial modes 1 and 2 is given by $\langle V_0 \cdot V_{01}^l \rangle = 0$ for $l = 1$ or $l = 2$ since the average over a non zero (azimuthal) phase in the scalar product yields zero.
- to order ε : the relevant term is now : $2\varepsilon \langle V_0 \cdot V_{01} \rangle = 0$ since these two components are orthogonal here.
- to order ε'^2

(1) a) for $C = 0$ (no differential rotation)

The energy of the system is distributed into basic flow and the two Kelvin modes of amplitudes A_1, A_2 as :

$$E_{\varepsilon'^2} = \varepsilon'^2 \langle V_{01} \cdot V_{01} \rangle + 2\varepsilon \langle V_0 \cdot V_{10} \rangle + 2\varepsilon'^2 \langle V_0 \cdot V_{02} \rangle \quad (80)$$

and we have : $2\varepsilon \langle V_0 \cdot V_{01} \rangle = 0$, $2\varepsilon'^2 \langle V_0 \cdot V_{02} \rangle = 0$, but $2\varepsilon'^2 \langle V_{01} \cdot V_{01} \rangle \neq 0$:
 $\langle V_{01} \cdot V_{01} \rangle = \frac{2\pi}{k} (2\pi) \left(2|A_1|^2 \langle V_{01}^{l=1}(r) \cdot V_{01}^{l=1}(r) \rangle + 2|A_2|^2 \langle V_{01}^{l=2}(r) \cdot V_{01}^{l=2}(r) \rangle \right)$.
 Since the eigenmodes are orthogonal, we have : $\langle V_{01}^{l=1}(r) \cdot V_{01}^{l=2}(r) \rangle = 0$. The second order energy writes :

$$E_{\varepsilon'^2} = \varepsilon'^2 \left(K_1 |A_1|^2 + K_2 |A_2|^2 \right) \quad (81)$$

$$K_1 = \frac{8\pi^2}{k_1} \langle V_{01}^{l=1}(r) \cdot V_{01}^{l=1}(r) \rangle; K_2 = \frac{8\pi^2}{k_2} \langle V_{01}^{l=2}(r) \cdot V_{01}^{l=2}(r) \rangle \quad (82)$$

$$\langle V_{01}^{l=j}(r) \cdot V_{01}^{l=j}(r) \rangle = \int_0^1 r dr \left(\sum_{i=1}^3 |u_i^j(r)|^2 \right).$$

From the dynamical system evolution, rescaled such that $\omega_1 = \omega_2$ for $C=0$, the energy time derivative is given by the expression :

$$\frac{dE_{\varepsilon'^2}}{dt} = \varepsilon \varepsilon'^2 (pK_1 + qK_2) (A_1 A_2^* + A_1^* A_2) + h.o.t \quad (83)$$

This last term may be in general not zero and the energy at this order is hence not conserved.

(2) b) for C included

There is now another contribution to the energy at the same order due to $V_{bf}^{(2)}$. As $2\varepsilon'^2 \langle V_0 \cdot V_{bf}^{(2)} \rangle \neq 0$, we have :

$$E_{\varepsilon'^2} = \varepsilon'^2 \langle V_{01} \cdot V_{01} \rangle + 2\varepsilon \langle V_0 \cdot V_{10} \rangle + 2\varepsilon'^2 \langle V_0 \cdot V_{02} \rangle + 2\varepsilon'^2 \langle V_0 \cdot V_{bf}^{(2)} \rangle \quad (84)$$

$$E_{\varepsilon'^2} = K_C C + K_1 |A_1|^2 + K_2 |A_2|^2 \quad (85)$$

$$K_C = \frac{8\pi^2}{k} \langle V_0(r) \cdot C_2(r) \rangle \quad (86)$$

Using eqs.(74-75-76),the energy time derivative is now given by :

$$\frac{dE_{\varepsilon'^2}}{dt} = \varepsilon \varepsilon'^2 (pK_1 + qK_2 + K_C) (A_1 A_2^* + A_1^* A_2) + h.o.t \quad (87)$$

Now it is possible to conserve the energy if the following condition is fulfilled :

$$pK_1 + qK_2 + K_C = 0 \quad (88)$$

From the dynamical system, we can derive an energy invariant at this order as :

$$-2pqC + q|A_1|^2 + p|A_2|^2 = K_0 + h.o.t \quad (89)$$

If we make the comparison between eq.(85) and eq.(89) we get the following necessary condition to fulfill in order to insure energy conservation :

$$\frac{K_1}{q} = \frac{K_2}{p} = \frac{K_C}{-2pq} \quad (90)$$

$$\left(\frac{\langle V_{01}^{l=1}(r) \cdot V_{01}^{l=1}(r) \rangle}{q} = \frac{\langle V_{01}^{l=2}(r) \cdot V_{01}^{l=2}(r) \rangle}{p} = \frac{\langle V_0(r) \cdot C_2(r) \rangle}{-2pq} \right) \quad (91)$$

These conditions allow to check the numerical results as well for computing the required C differential rotation term. One can also compute the vorticity of the involved Kelvin modes and of the modified basic flow. We compute numerically in appendix C to third order the azimuthal velocity $V_\varphi(r)$ and its associated axial vorticity $\Omega_z(r)$ defined as $\Omega_z(r) = \frac{1}{r} \frac{d(rV_\varphi(r))}{dr}$ as a function of the radius for the correction to the basic flow for a selected coupling point between the two Kelvin eigenmodes (see appendix A). The results are shown on figures 3 and 4 respectively. We can observe in the azimuthal velocity profile an inflexion point that may lead to an inflectional instability.

4. Dynamical system analysis

From the energy conservation in particular at order $\varepsilon = \varepsilon'^2$ we use the relation (89) to substitute the value of C as a function of the two amplitudes A_1 and A_2 restoring non zero coefficient s'_{11} and s'_{22} in the following. This leads to the modified dynamical system as :

$$\frac{dA_1}{dT} = i\omega'_1 A_1 + \varepsilon p A_2 + iA_1 (s'_{11} |A_1|^2 + s'_{12} |A_2|^2) \quad (92)$$

$$\frac{dA_2}{dT} = i\omega'_2 A_2 + \varepsilon q A_1 + iA_2 (s'_{21} |A_1|^2 + s'_{22} |A_2|^2) \quad (93)$$

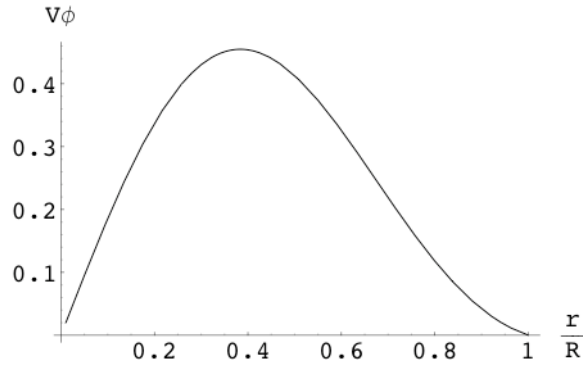


Figure 3. radial azimuthal velocity profile V_ϕ for the corrected basic flow C to third order. V_ϕ is normalized to the solid rotation velocity.

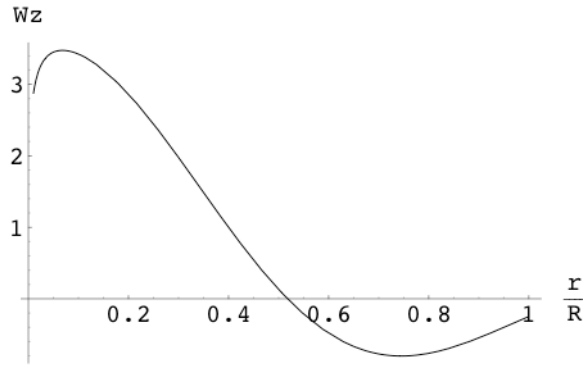


Figure 4. Associated axial vorticity radial profile $\Omega_z(r)$. $\Omega_z(r)$ is in a.u.

with the new coefficients :

$$\omega'_1 = \omega_1 - \frac{K_0 c_{A_1}}{2pq}, \quad \omega'_2 = \omega_2 - \frac{K_0 c_{A_2}}{2pq} \quad (94)$$

$$s'_{11} = \frac{c_{A_1}}{2p}, \quad s'_{12} = s_{12} + \frac{c_{A_1}}{2q}, \quad s'_{21} = s_{21} + \frac{c_{A_2}}{2p}, \quad s'_{22} = \frac{c_{A_2}}{2q} \quad (95)$$

c_{A_1} and c_{A_2} have been given by eqs.(77-78) in section 3.4.

If the energy constant K_0 is not zero in eq.(89) we have also to modify the ω_1 and ω_2 frequencies according to eq.(94).

It is well known that there are two invariants for such dynamical system : the energy and the action $\frac{|A_i|^2}{\omega_i}$ as given by the Manley-Rowe relations. If we introduce

a detuning parameter denoted by $\gamma = \omega_1 - \omega_2$ (γ is real) and performing a rotation by changing (A_1, A_2) into $(A_1, A_2)e^{i\omega_2 t}$, we see that the dynamical system can be parametrized by γ and ε (for the given s_{ij}) and it now reads :

$$\frac{dA_1}{dT} = i\gamma A_1 + \varepsilon p A_2 + iA_1(s'_{11}|A_1|^2 + s'_{12}|A_2|^2) \quad (96)$$

$$\frac{dA_2}{dT} = \varepsilon q A_1 + iA_2(s'_{21}|A_1|^2 + s'_{22}|A_2|^2) \quad (97)$$

We now wish to describe the dynamics for the different possible (γ, ε) parameters. It has been previously developed (Guckenheimer & Mahalov 1992; Knobloch et al. 1994) that for a precessing flow with a basic solid rotation ($V_0 = r\Omega_0$) one has $pq \geq 1$ corresponding to an instability of the basic state. By rescaling (A_1, A_2, ε) and the s'_{ij} , but keeping the same notation, we can set $p = q = 1$. We are then in the splitting case as opposed to the passing case ($pq < 1$).

Linear parametric instability

The corresponding linear system reads :

$$\frac{dA_1}{dT} = i\gamma A_1 + \varepsilon p A_2 \quad (98a)$$

$$\frac{dA_2}{dT} = \varepsilon q A_1 \quad (98b)$$

It is easy to see that this system is stable for $\gamma > \gamma_0$ (with $\gamma_0 = 2\varepsilon(pq)^{\frac{1}{2}}$ being the instability threshold) and unstable otherwise positive exponential temporal growth rate. We obtain a resonant tongue inside which the system is unstable in the plane (γ, ε) (see fig. 5a). For reference, the numerical value as computed by (Kerswell 1993) for the maximum temporal growth rate is $\frac{5\varepsilon}{32}$ for this centrifugal parametric instability.

Non linear case

We can simplify further our total system by performing the following phase transformation (for $i = 1, 2$) :

$$A_i(t) = B_i(t)e^{i\psi(t)}, \psi(t) = \int_0^t (s'_{21}|B_1|^2 + s'_{12}|B_2|^2)dt' \quad (99)$$

The new system for the amplitudes (B_1, B_2) reads :

$$\frac{dB_1}{dT} = i\gamma B_1 + \varepsilon B_2 + i(s'_{11} - s'_{12})B_1|B_1|^2 \quad (100)$$

$$\frac{dB_2}{dT} = \varepsilon B_1 - i(s'_{12} - s'_{22})B_2|B_2|^2 \quad (101)$$

By rescaling (B_1, B_2) , we can set one of the two remaining parameters $(s'_{11} - s'_{12}), (s'_{21} - s'_{22})$, equal to one, for example we can choose the first one. The final system is then obtained as

$$\frac{dB_1}{dT} = i\gamma B_1 + \varepsilon B_2 + iB_1|B_1|^2 \quad (102a)$$

$$\frac{dB_2}{dT} = \varepsilon B_1 + icB_2 |B_2|^2 \quad (102b)$$

with

$$(B'_1, B'_2) = \delta(B_1, B_2); \delta^2 = s'_{11} - s'_{21}; c = \frac{s'_{22} - s'_{12}}{s'_{11} - s'_{21}} \quad (103)$$

in terms of the original variables. Now we can describe all possible solutions of system (102a-102b) as a function of the (γ, ε) parameters. Using techniques previously developed (Gluckenheimer & Mahalov 1992) one can show that this system is Hamiltonian (by checking that the necessary conditions are verified). It is then convenient to analyze this system using the new variables denoted as η, κ, λ and μ with :

$$\eta = (|B_1|^2 + |B_2|^2), \kappa + i\lambda = 2\bar{B}_1 B_2, \mu = (|B_1|^2 - |B_2|^2) \quad (104)$$

These variables are independent since we have the relationship :

$$\eta^2 = \kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2 \quad (105)$$

The dynamical equations from (102a-102b) are thus cast in the desired normal form. There are two invariants μ (action) and H (energy), where H stands for the Hamiltonian :

$$H = \frac{\gamma\eta}{2} + \frac{\eta^2(1-c)}{8} + \frac{\eta\mu(1-c)}{4 \pm \varepsilon\lambda} \quad (106)$$

$$\lambda = \sqrt{\eta^2 - \kappa^2 - \mu^2} \quad (107)$$

The Hamiltonian equations in the variables κ and η take the form :

$$\begin{cases} \frac{d\kappa}{dt} = 2\lambda \frac{\partial H}{\partial \eta} \\ \frac{d\eta}{dt} = -2\lambda \frac{\partial H}{\partial \kappa} \end{cases} \quad (108)$$

We can also write λ as a function of H to obtain the system :

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dt} = 2\varepsilon\kappa \\ \frac{d\kappa}{dt} = \lambda \left(\gamma + \frac{\eta(1-c)}{2} + \frac{\mu(1+c)}{2} \right) + 2\varepsilon\eta \\ \frac{d\lambda}{dt} = -\kappa \left(\gamma + \frac{\eta(1-c)}{2} + \frac{\mu(1+c)}{2} \right) \end{cases} \quad (109)$$

Because of its two invariants H and μ , this system reduces to the following :

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dt} = 2\tilde{\kappa} \\ \frac{d\tilde{\kappa}}{dt} = P_3(\eta) \end{cases} \quad (110)$$

$$\text{with } P_3(\eta) = \sum_{i=1}^3 g_i \eta^i; \tilde{\kappa} = \varepsilon \kappa; \tilde{\gamma} = \gamma + \frac{\mu(1+c)}{2}; g = \begin{pmatrix} g_0 = \tilde{\gamma} H \\ g_1 = \frac{H(1-c)}{2} + \frac{(4\varepsilon^2 - \tilde{\gamma}^2)}{2} \\ g_2 = \frac{3\tilde{\gamma}(1-c)}{8} \\ g_3 = \frac{-(1-c)^2}{16} \end{pmatrix}$$

The phase portrait of this system with only two degrees of freedom depends on the number of real roots of the cubic equation : $P_3(\eta)=0$. There are one or three real roots. In the case of one real root, the phase portrait is topologically equivalent to a circle, while in the case of three roots it is equivalent to an eight figure (see figure 5b), with periodic orbits and possible stable equilibria around these orbits in the middle region of the previous linearly unstable tongue. Mixed modes arising from the coupling of axisymmetric ($m = 0$) and bending modes ($m = 1$) participate in these equilibria. Inside the resonant tongue we can expect motions with three different frequencies. The typical slow time dependence of the $C(T)$ term can be seen directly on the following expression :

$$C(t) = \int dt' (B_1^*(t')B_2(t') + cc) \quad (111)$$

It can be explicitly computed by using a simple Runge-Kutta algorithm to solve the coupled system (102a-102b). It is easy to deduce from the dynamical equations and the invariant (89) that $C(t)$ saturates in time.

- Remark : the above analysis has been performed for the selected basic flow state $(0, V_{0\phi}, V_{1z})$ which is valid for an infinite length cylinder. However the form (but obviously not the coefficients) of the amplitude equations might be similar for a finite cylinder with a solution obtained from the expansion of r into a Dini series (Gans 1970). However, to fulfill the axial boundary condition at the endwalls $V_z(r, z = \pm \frac{L}{2}) = 0$, many eigenmodes will participate. The amplitudes of these eigenmodes might become divergent for resonant cylinders when the aspect ratio $a = \frac{L}{2R}$ is such that $k_{//}a = (2p+1)\pi$, with $p \in \mathbb{N}$.

5. Comparison with experiments

To be able to predict the main characteristics of the flow that may be achieved under precession driving with a limited amount of mechanical power, we have built a water experiment named ATER ("Agitateur pour la Turbulence En Rotation"). We have chosen a cylindrical container (300 mm diameter), for theoretical (same symmetries as rotation) and also for practical simplicity reasons. Using a piston, this geometry allows to easily change the aspect ratio of the container ($a = \frac{L}{2R}$), from $a = 1$ to $a = \frac{4}{3}$ (maximum volume = 28 liters). Precession and rotation axes are orthogonal, so that the Coriolis acceleration is maximal on the toroidal component of the flow. Instrumentation includes a torque meter on the rotation axis and a Particle Image Velocimetry (PIV) device (using advected particles, an ad-hoc flash lightning device and a CCD camera co-rotating with the container). The PIV technique allows to measure the induced differential rotation both in the laminar and turbulent regimes. By a PIV cross correlation algorithm, we calculate the velocity field (u, v) in a cross section of the cylinder and deduce the axial component of the vorticity (Ω_z) . On figure 6 are shown experimental radial profiles of the azimuthal velocity for the correction to the basic flow in the container frame for various precession parameters ε . However, since the external domain ($r/R > 0.8$) is outside the field seen by the CCD camera, the velocity at the right boundary cannot be observed. On figure 6 are shown the corresponding azimuthal velocity

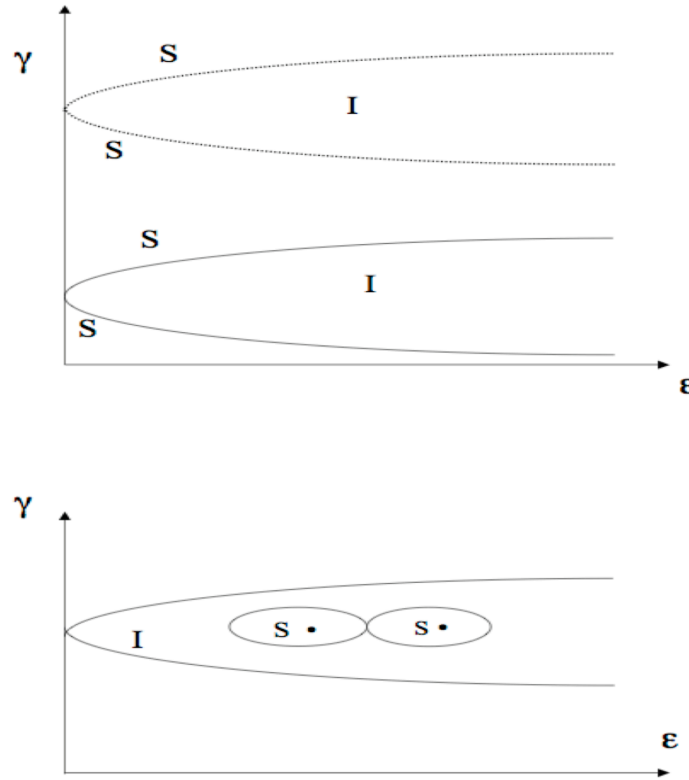


Figure 5. In the plane (γ, ϵ) , (with $\gamma = \omega_1 - \omega_2$, the detuning parameter) parametric instability tongues (I) cross the linear stability domain denoted by (S). Nonlinear coupling at third order shows that a partial stabilisation happens in the domain symbolized with the eight figure.

radial profiles. On figure 7 the axial vorticity is drawn as a function of the precession parameter ϵ taken at its maximal amplitude value (as a function of the radius) which is also found to depend on ϵ . In our experiments, the Reynolds number (inverse of the Ekman number) Re is very high, with $Re = \frac{R^2 \Omega_0}{\nu}$ and Re is ranging here from 10^5 to 10^6 with $a = 1.16$. In this series of the experiments the resonant cylinder condition is not satisfied for a , and the position of the measurement is taken in the cross section at $\frac{2}{3}$ of the total length L . These high values of Re allow to justify why we restrict to the inviscid case for the analysis, except in the case of very small ϵ see below. For fixed Re and a we increase the ϵ value : different regimes are then observed. For $\epsilon < \epsilon_1 = 0.025$, we are in a linear regime with dominance of the forced $m = 1$ mode. For $\epsilon_1 < \epsilon < \epsilon_2 = 0.06$, we enter into a weakly nonlinear regime. For $\epsilon_2 < \epsilon < \epsilon_3 = 0.1$, a strong differential rotation is observed with still the predominance of the $m = 1$ mode. For $\epsilon > \epsilon_3$, we enter in a turbulent regime with small spatial scales involved. On figures 6 and 7, the transition from the linear to the weakly non linear regime can be clearly seen on the velocity and vorticity profiles. On figure 6, the measured shape of velocity can be compared to the one shown on figure 3 in the weakly non linear regime. The linear scaling in ϵ (within the large error bars) is in qualitative agreement with the theoretical predictions shown on figures 3 and 4 in the laminar regime. Note however the difference of radial behavior for the velocity on figure 6 for small as opposed to high value of ϵ , this might be due to the influence of viscous effects for

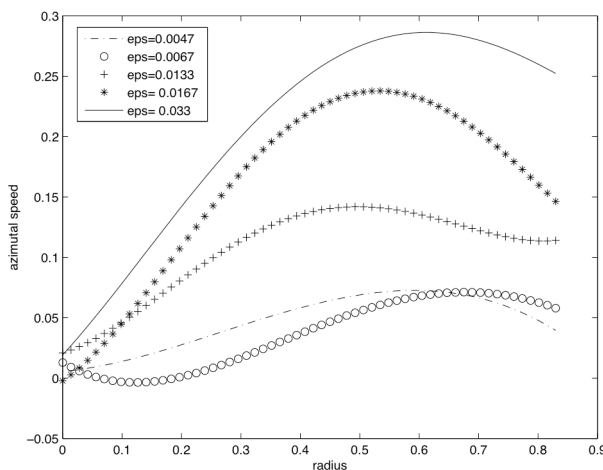


Figure 6. Experimental radial profiles of differential rotation azimuthal velocity for different precession rates

small ε . These effects are present in the finite cylinder case but are not covered by the present analysis undertaken only for the infinite length cylinder case.

6. Discussion and Conclusions

We have shown that the non linear coupling of the Kelvin eigenmodes of a flow driven by precession can lead to modification of the basic flow and in particular to the generation of differential rotation. Besides we have also studied the stability/instability domains of the resulting dynamical system. The inclusion of third order terms lead to a saturation of the linear parametric centrifugal instability. We have computed these effects in the inviscid case and for an infinite length cylinder. Despite the configuration differences (slightly viscous flow since $Re \simeq 10^5 - 10^6$ and finite container), the experimental results show rather close similarities with the analytical approach. In particular the differential rotation may have a significant impact on dynamo action, but verification of this last assertion needs relevant computational resources. The currently studied mechanism is a special case of a more general situation for non-linear mode coupling that has been first considered by Racz and Scott (2006, 2007a, 2007b) who have derived general amplitude equations including also the viscous case. They have shown also the non trivial coupling of the viscosity with the inviscid eigenmodes in the non-linear case (as opposed to the phenomenological damping term that is used in the linear case). This new coupling that creates swirl from the endwall boundary layers can compete (constructively or destructively) with the non-linear coupling of eigenmodes as considered here. This issue would deserve a separate investigation using our specific configuration. This non linear viscous coupling has been already studied in some related studies, for example by (Eloy et al. 2003) using the quoted Scott-Racz formalism. Note also, as recalled in the introduction, other studies including viscosity have been performed for example in (Zhang et al. 2003) leading to the generation of differential rotation in the case of a precessing sphere (for the purpose of astrophysical applications). Numerical simulations of precessing flows at large Reynold numbers are difficult due to the well known increasing needs for spatial resolution. Many features of the precessing flow in a finite cylindrical container, including differential rotation

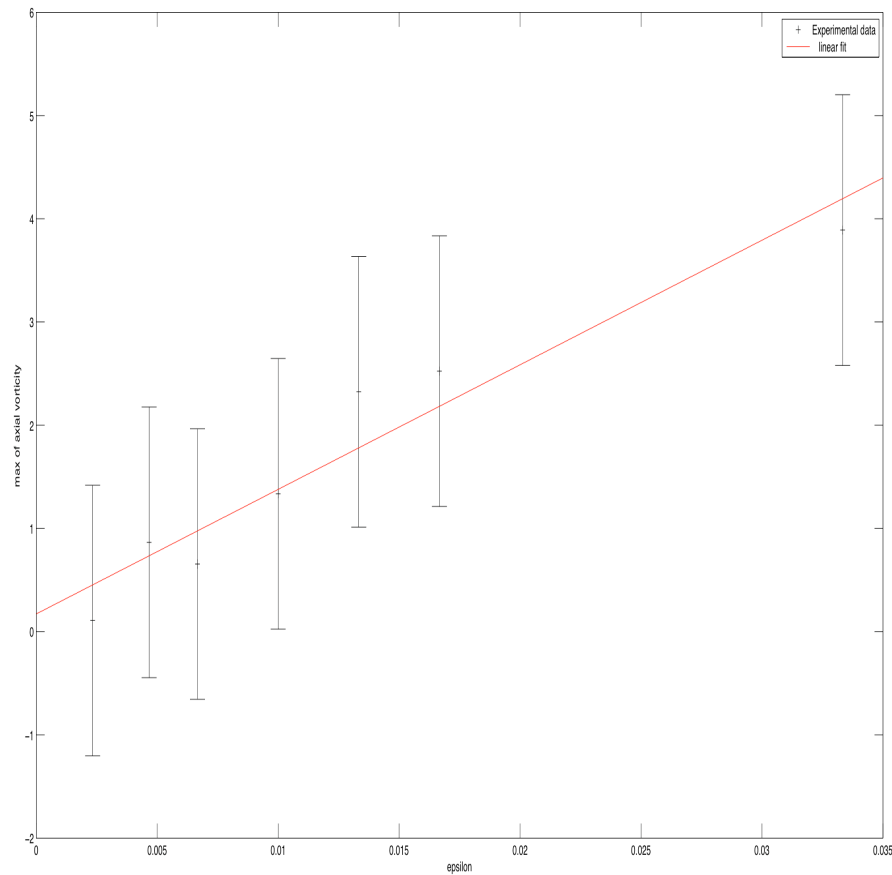


Figure 7. Experimental scaling of axial vorticity (taken at its maximum in radius with the precession rate)

and resonance, have been obtained by P. Lallemand (priv. com.) using a lattice Boltzmann code, but with maximum Reynolds numbers of the order of a few 10^3 . In particular, this code has also shown (in accordance with our computations) an ϵ scaling of the perpendicular energy of the flow. The development of the numerical approach will hopefully contribute to get a wider understanding of the non linear aspects of the precessing flows which have been met in the present work. Recently, related analytical and experimental work for a precessing cylinder including also the viscosity have been performed (Meunier et al. 2008) with Reynolds number ranging from 10^3 to 10^5 . For $Re = 10^5$ they have shown that viscous effects are not significant and the flow is then mainly dominated by the nonlinearities as in our case. Note however in fig.6 the discrepancy of the behaviour for low and high values of the forcing parameter ϵ . At low forcing, the azimuthal velocity might be dominated by viscosity effects as already noted at the end of section 3.4.

References

- Barnes, D.R. and Kerswell, R.R., New results in rotating Hagen-Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.* 2000, **417**, 103-126.
- Bullard, E.C., The Magnetic Field within the Earth, *Proc. of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences.* 1949, **197**, 433-453.
- Ekman, V., On the influence of the earth's rotation on ocean currents. *Arkiv. Matem. Atr. Fysik. Stockholm.* 1905, **2** (vol 11).
- Eloy, C., Elliptic and triangular instabilities in rotating cylinders, *J. Fluid Mech.* 2003, **476**, 357388.
- Gailitis, A., Lielausis, O., Platadis, E., Gerbeth, G. and Stefani, F., Colloquium: Laboratory experiments on hydromagnetic dynamos. *Reviews of Modern Physics.* 2002, **74**, 973990.
- Gans, R.F., On the precession of a resonant cylinder. *J. Fluid Mech.* 1970, **4**, 865872.
- Greenspan, H., *The Theory of Rotating Fluid.* 1969, Cambridge University Press.

- Guckenheimer, J. and Mahalov, A., Resonant triad interactions in symmetric systems. *Physica D, Nonlinear Phenomena*. 1992, **54**, 267310.
- Kerswell, R., The instability of precessing flow, *Geophy. Astrophys. Fluid. Dyn.* 1993, **72**, 107144.
- Knobloch, E., Mahalov, A. and Marsden, J.E., Normal forms for three-dimensional parametric instabilities in ideal hydrodynamics. *Physica D, Nonlinear Phenomena*. 1993, **73**, 4981.
- Kobine, J.J., Inertial wave dynamics in a rotating and precessing cylinder, *J. Fluid Mech.* 1995, **303**, 233252.
- Lallemand, P., Private communication. 2008.
- Leorat, J., Large scales features of a flow driven by precession. *Magnetohydrodynamics*. 2003, **39**, 321326.
- Leorat, J., Dissipation in a flow driven by precession and application to the design of a MHD wind tunnel. *Magnetohydrodynamics*. 2006, **42**, 143151.
- Lord Kelvin, Vibrations of a columnar vortex. *Phil Mag.* 1880, **10**, 155-168.
- Mahalov, A., The instability of rotating fluid columns subjected to a weak external Coriolis force. *Physics of Fluids A*. 1993, **5**, 891900.
- Malkus, W.V., Precession of the Earth as the cause of geomagnetism: Experiments lend support to the proposal that precessional torques drive the Earth's dynamo. *Science*. 1968, **160**, 259264.
- Meunier, P., Eloy, C., Lagrange, R., and Nadal, F., A rotating fluid cylinder subject to weak Precession. *J. Fluid Mech.* 2008, **599**, 405440.
- Racz, J.P., *Instabilit parametrique dans un cylindre de gaz en rotation soumis la compression priodique dun piston* PhD Thesis. 2006, Ecole Centrale de Lyon.
- Racz, J.P. and Scott, J.F., Parametric instability in a rotating cylinder of gas subject to a sinusoidal axial compression. Part 1. Linear theory. *J. Fluid Mech.* 2007 a, **595**, 265290.
- Racz, J.P., and Scott, J.F., Parametric instability in a rotating cylinder of gas subject to sinusoidal axial compression. Part 2. Weakly nonlinear theory. *J. Fluid Mech.* 2007 b, **595**, 291321.
- Sipp, D., Weakly nonlinear saturation of short-wave instabilities in a strained Lamb-Oseen vortex. *Physics of Fluids*. 2000, **12**, 17151729.
- Stewartson, K., On almost rigid rotations. *J. Fluid Mech.* 1957, **3**, 1726.
- Tilgner, A., Precession driven dynamos. *Physics of Fluids*. 2005, **17**, 034104.
- Waleffe, F., *The 3D instability of a strained vortex and its relation to turbulence*. PhD Thesis. 1989, MIT.
- Wu, C., and Roberts, P.H., Precessionally-driven dynamo in a spheroid, *AGU Fall Meeting*. 2008, Abstracts, A707+.
- Zhang, K., Liao, X. and Li, L., Differential rotation driven by precession. *Celestial Mech. and Dyn. Astronomy*. 2003, **87**, 3951.
- Zhang, K., Liao, X., and Busse, F.H., Asymptotic theory of inertial convection in a rotating cylinder. *J. Fluid Mech.* 2007, **575**, 449471.

Appendix A. Computation of the coefficients p and q for parametric instability

We use eqs.(36-37) (see section 3.2.1) to compute the coefficients p and q. The $V_1^{l(\dagger)}$ and $V_2^{l(\dagger)}$ are the adjoint of the first order eigenmodes velocities noted here V_1 and V_2 . The coefficients p and q are given by :

$$\varepsilon p = \frac{\langle V_1^\dagger \cdot D_{(\phi_1)}^* (V_2) \rangle}{\langle V_1^\dagger \cdot V_1 \rangle} \quad (\text{A1})$$

$$\varepsilon q = \frac{\langle V_2^\dagger \cdot D_{(\phi_2)}^* (V_1) \rangle}{\langle V_2^\dagger \cdot V_2 \rangle} \quad (\text{A2})$$

Remark : the $D(V)$ expression keeps the symmetry of the V components : if V is of the form (iu, v, w) then $D(V)$ will be also of the same form in (iu_D, v_D, w_D) , contrary to the non linear operator $N(V, V)$ which transforms into the form (iu_N, v_N, w_N) .

A.1. Numerical application for the computations of p and q

We start with the selection of a resonant coupling point such that $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ (frequency) and $k_1 = k_2 = k$ (axial wavenumber), a (small) possible detuning being possible. We take $k=0.878$ as in (Mahalov 1993) and (Kerswell 1993). From the

dispersion relation for mode 1 ($m=0$), we choose to select $k_{\perp,1}$ (or β_1) = 3.83 i.e the first zero of the dispersion relation suitable to set $u_1(r=1)=0$ for this mode, and this gives $\omega = 0.45$. For mode 2 we select the compatible root as $k_{\perp,2}$ (or β_2) = 3.05 to insure $u_2(r=1)=0$ for $m=1$.

We can compute p and q in two steps :

- a) by considering only the L_1 operator
- b) by considering $L_1 + E_1$ (with the precession term included in addition)

We evaluate numerically the corresponding radial integrals :

- case a

$$N_0 p_1 = \int_0^1 r dr (u'_1 \cdot (kru'_2) + v_1 \cdot (krv_2) + w_1 (-u'_2 + v_2 + krw_2)) \quad (\text{A.3a})$$

$$N_0 q_1 = \int_0^1 r dr (u'_2 \cdot (kru'_1) + v_2 \cdot (krv_1) + w_2 (-u'_1 + v_1 + krw_1)) \quad (\text{A.3b})$$

- case b

$$N_0 p = \int_0^1 r dr (u'_1 \cdot (kru'_2 - w_2) + v_1 \cdot (krv_2 - w_2 + u'_2) + w_1 (krw_2)) \quad (\text{A.4})$$

$$N_0 q = \int_0^1 r dr (u'_2 \cdot (kru'_1 - w_1) + v_2 \cdot (krv_1 - w_1 + u'_1) + w_2 (krw_1)) \quad (\text{A.5})$$

$$(\text{with } N_0 = \int_0^1 r dr \sum_{j=1}^3 u_{i,j}^2)$$

Where the components have an argument $k_{\perp,1}(\beta_1).r$ for mode 1 and argument $k_{\perp,2}(\beta_2)r$ for mode 2. We remind here the relevant velocity components for the given m ($m=0$ or $m=1$) modes.

- for mode 1 ($m=0$) we have :

$$u'_1 = \frac{-4\sigma_1 J_1(\beta_1 r)}{4 - \sigma_1^2}, v_1 = \frac{2\sigma_1 J_1(\beta_1 r)}{4 - \sigma_1^2}, w_1 = \frac{k}{\beta_1 \sigma_1} J_0(\beta_1 r)$$

$$\sigma_1 = \omega_1, k = 0.878, \beta_1 = 3.83 \rightarrow \omega_1 = 0.45$$

- for mode 2 ($m=1$) we have :

$$u'_2 = \frac{(\sigma_2 + 2)J_0(\beta_2 r) - (\sigma_2 - 2)J_2(\beta_2 r)}{4 - \sigma_2^2}, v_2 = -\frac{(\sigma_2 + 2)J_0(\beta_2 r) - (\sigma_2 - 2)J_2(\beta_2 r)}{4 - \sigma_2^2}, w_2 = \frac{k}{\beta_2 \sigma_2} J_1(\beta_2 r)$$

$$\sigma_2 = (\omega_1 \pm m_2) \neq \sigma_1, k = 0.878, \beta_1 = 3.05$$

A.2. Precisions on the computations of the k and frequency values at the coupling point

For β_1 we have selected the first root 3.83 for $J_1(\beta_1) = 0$, and $\sigma_1 = \pm \frac{2}{(1 + (\frac{\beta_1}{k})^2)^{\frac{1}{2}}}$.

For β_2 , we have the condition (from the boundary condition) :

$\frac{\beta_2(J_0(\beta_2)) - J_2(\beta_2)}{2} + \frac{2m}{\sigma_2} J_1(\beta_2) = 0$ with $\sigma_2 = \pm \frac{2}{(1 + (\frac{\beta_2}{k})^2)^{\frac{1}{2}}}$. Now to determine β_2 from this last equation we must know k or add a second equation (such as the equality of the two frequencies see below).

Another way to do is to set : $\beta_2 = \frac{k\sqrt{4-\sigma_2^2}}{\sigma_2}$ and also $\beta_1 = \frac{k\sqrt{4-\sigma_1^2}}{\sigma_1}$; thus :

$$\beta_2 = \beta_1 \frac{\sigma_1 \sqrt{4-\sigma_2^2}}{\sigma_2 \sqrt{4-\sigma_1^2}} \quad (\text{A.6})$$

we must now set $\omega_1 = \omega_2$ which determines first the value of β_2 :

$$\beta_2(k) = 3.83 \left(\frac{\omega_1(k)}{\omega_1(k) + m} \right) \left(\frac{4 - (\omega_1(k) + m)^2}{\sqrt{4 - \omega_1(k)^2}} \right) \quad (\text{A.7})$$

and then the value of k is obtained from the dispersion relation :

$$\frac{\pm 2}{\left(1 + \left(\frac{\beta_2(k)}{k}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \mp m_2 = \frac{\pm 2}{\left(1 + \left(\frac{\beta_1}{k}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{A.8})$$

We report the value of k in eq.(A.7) to get β_2 but the result should be also compatible with eq.(A.8). The condition (A.8) is possible only in the two cases below : (from the dispersion relation branches) and it imposes to set $m=-1$ instead of $m=+1$ in the definition of σ_2 (or to change its definition into $\sigma_2 = \omega - m$ while keeping $m=1$ instead of $\sigma_2 = \omega + m$ with $m = 1$) :

$$\frac{2}{\left(1 + \left(\frac{\beta_2(k)}{k}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} - m_2 = \frac{2}{\left(1 + \left(\frac{\beta_1}{k}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{A.9a})$$

$$\frac{2}{\left(1 + \left(\frac{\beta_2(k)}{k}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} + m_2 = \frac{2}{\left(1 + \left(\frac{\beta_1}{k}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{A.9b})$$

This procedure allows to find $k=0.878$ which determines β_2 from the BC and then $\omega_1 = \omega_2 = 0.45$ and finally $\sigma_2 = \pm 0.55$. More precisely for k fixed (with $k=0.878$) one finds from eq.(A.6) +BC the value of β_2 ($=3.05$) which is compatible provided σ_2 takes the right value (0.55 and not 1.45 which would gives $\beta_2=0.84$ hence incompatible with BC). On the opposite if $\beta_2=3.05$ we check from for example with eq.(A.7) or eq.(A.8) that k equals also 0.878. In the general case we get here two equations and then a compatibility condition for the determination of k and β_2 . Indeed one gets here an unique solution for k .

Comment : in practice a real experiment selects the value of k that is proportional to $1/L$ for given length, or for periodic cylinder, and the dispersion relation together with the choice of the coupling point fixes the frequency. Note that we have two possibles couplings points here for the same value of k but with $+\omega$ or $-\omega$ (reverse sign). They correspond to eqs.(A.9a) and (A.9b) respectively that giving the same condition but with either $\omega_1 > 0$ and $\sigma_2 < 0$ or $\omega_1 < 0$ and $\sigma_2 > 0$.

But the values of the associated velocity components and hence of the coupling coefficients differ in each case.

A.3. Numerical results

We insert the relevant mode velocity components values into the expressions for p and q to find :

- Case a : $p_1 = -0.18$; $q_1 = -0.24$ for the first coupling point defined by : $\omega_1 = 0.45 > 0$ and $\sigma_2 < 0$ (-0.55), the rate of temporal growth is proportional to $\sqrt{pq}$, thus we find $\sqrt{p_1 q_1} = 0.21$. (For parametric instability to occur one needs $pq > 0$: thus $p > 0$ and $q > 0$ or $p < 0$ and $q < 0$)
- For the second coupling point defined by : $\omega_1 < 0$ and $\sigma_2 > 0$ we get now $p_2 = 0.7$, $q_2 = 0.61$ and $\sqrt{p_2 q_2} = 0.65$.
- Case b : we find now for the first coupling point : $p_1 = 0.29$; $q_1 = -0.32$, $\sqrt{-p_1 q_1} = 0.30$, we have a problem of sign now in this case, there is no instability. While for the second coupling point we obtain : $p_2 = 0.94$; $q_2 = 0.74$, $\sqrt{p_2 q_2} = 0.83$.
- We have selected this last coupling point in this study.

Appendix B. Equations and compatibility conditions to second order

B.1. Equations to second order in $\varepsilon, \varepsilon'$

We recall from the main text the relevant amplitude equations that may bring solvability conditions (for $V_l^{(2)} = V_{11}^{(2)}(l)$):

$$(-i\omega_l + im_l + 2(\Omega_0)\hat{e}_Z \times) V_l^{(2)}(r) |_{(k)} + \nabla_i p_l^{(2)}(r) |_{(k)} = F_k(V_{01}^1)(r) |_{(k)} \quad (\text{B.1})$$

$$\nabla_l \cdot (V_l^{(2)} |_{(k)}) = 0 + BC \quad (\text{B.2})$$

where $m_l = \pm m_1$ or $\pm m_2$ and idem for ω_l and for the axial wave number k_l .

There are two regular terms $(V_{11}^{l=1})^-$ and $(V_{11}^{l=2})^+$ and two resonant terms $(V_{11}^{l=1})^+$ and $(V_{11}^{l=2})^-$

- Non resonant terms

In all cases we solve the corresponding Poincaré equation on the related pressure with an argument β such that $u(\beta) = 0$ for $r = 1$.

- Resonant terms

These terms need a regularization as explained in main text. For example we need to solve the equation for V_{111+} with an extra term in its r.h.s involving the adjoint velocity in addition to the normal term in $D(V_2^{(1)})$, we regularize the r.h.s by making the transformation : $\text{r.h.s} \rightarrow \text{r.h.s} + (\text{r.h.s})'$ with :

$$(\text{r.h.s})' = -V_1^{(1)} \left(\frac{\langle V_1^{(1),\perp} \cdot D_{\varphi_1}(V_2^{(1)}) \rangle}{\langle V_1^{(1),\perp} \cdot V_1^{(1)} \rangle} \right) \quad (\text{B.3})$$

The corresponding Poincaré equation for the pressure is solved with a suitable β argument.

- Important remark on the structure of the $V^{(2)}$ terms:

The $D(V)$ transformation keeps the symmetry of the initial components of V : if V is of the form (iu, v, w) then $D(V)$ also. But the inversion of the L_0 operator yields a different result ; by solving explicitly the above system one gets the following solution (M is the L_0 operator written in matrix form):

$$(i\sigma I_d + M)(V) = S, S = \begin{pmatrix} S_{rr} + iS_{ri} - dp/dr \\ S_{\varphi r} + iS_{\varphi i} - imp/r \\ S_{zr} + iS_{zi} - ikp \end{pmatrix} \quad (B.4)$$

$$V = \begin{pmatrix} i\sigma(S_{rr} + iS_{ri} - dp/dr) + 2(\Omega_0)(S_{\varphi r} + iS_{\varphi i} - imp/r) \\ -i\sigma(S_{\varphi r} + iS_{\varphi i} - imp/r) + 2(\Omega_0)(S_{rr} + iS_{ri} - dp/dr) \\ (4 - \sigma^2)(S_{zr} + iS_{zi} - ikp)/i\sigma \end{pmatrix} / (4 - \sigma^2) \quad (B.5)$$

Now the symmetry of the (V, p) solution will depend on structure of the source terms. If the source S is of the type $D(V)$: by inspection of the corresponding source S'_p term for the pressure p we find $S_{p'} = iS_p$ with S_p real, thus we have also $p = ip'$ (with p' real) since the Bessel operator L_B is real, with : $L_B(p) = S_p$. Using the above solution for V we find now that the solution is of the form : (U, iV, iW, iP) : the inversion of the operator L_0 modifies the initial structure of the source in terms of its components.

- Summary of the numerical procedure

Using the first order eigenmodes velocity expressions we compute first the velocity source terms, and the pressure source term $S_{p'}$ for the four equations to be solved. Then we solve the corresponding Poincaré equations for their pressures, and compute the velocity components by projection, since the pressure is usually solvable in terms of quadratures as seen in the main text. From the knowledge of p we compute the corresponding radial velocity u and implement the radial boundary condition $u(\beta) = 0$ for $r=1$ to get the relevant β argument. We then recompute the pressure with this new β value expression and obtain the other velocity components after again a projection. One can also implement the Fredholm alternative, when it is needed.

B.2. Expansion to second order in ε' . ε'

We start with the general equation written at order two in ε' as :

$$(L_0(\mathbf{v}) + \nabla p)^{(2)} = N(\mathbf{v}, \mathbf{v})^{(2)} + R_{res} \quad (B.6)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{v})^{(2)} = 0 + BC \quad (B.7)$$

- Remark : structure of the non linear term $N(\mathbf{v}, \mathbf{v})$

One should note that for a given velocity structure $V=(iu, v, w)$ the application of the operator $N(V, V)$ will change the structure. At this level there is only one term to consider, see appendix C for the next terms. For v_1 and v_2 in (iu, v, w) one can see that the $N(v_1, v_2)$ term is of the form (U_n, iV_n, iW_n) .

Now by expanding the non linear term $N(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ we find the equations to be solved as explained in the main text. There are 6 equations to consider here for the radial amplitudes equations corresponding to a given phase. Compatibility conditions depending on the selected phase (resonant case or not) might appear again here. The two zero phase solutions for $v_{1,1}^*$ and $v_{2,2}^*$ have been already examined in

the main text and found to be zero here.

- Other velocity components

In the general case we must solve a radial equation for $v_{1,1}$, $v_{2,2}$, for $v_{1,2}$, $v_{2,1}$ and $v_{1,2}^*$ and for their complex conjugated counterparts (see section 3.2.2). For example the equation for the amplitude $v_{1,1}$ reads :

$$L_{0,2m_1,2\omega_1}(v_{1,1}(r)) + \nabla_{2m_1,2\omega_1} p_{1,1}(r) = N_{11} = \{v_1, v_1, m_1, k_1\} \quad (\text{B.8})$$

$$\nabla_{2m_1,2\omega_1} v_{1,1} = 0 + BC \quad (\text{B.9})$$

Also, $L_B(p_{11}(r)) = N_{p_{11}}$ with $m = 2m_1$, $\omega = 2\omega_1$. We compute first the source term $S_{p_{11}}$ and then the pressure again by its Poincaré equation; we do similarly for the other equations corresponding to the other radial amplitudes. We have also seen in the main text that the coefficients $v_{1,1}$ and $v_{2,2}$ vanish.

- Structure of the second order velocity terms

Now since the source term in N is of the form (u, iv, iw) , the solution of the inversion by L_0 will be of the form (iU, V, W) , since, we have now $S_{ri} = S_{\varphi r} = S_{zr} = 0$ for the velocity source terms and then the pressure source term S_p is now real. The final structure of the $v_{i,j}$ and $p_{i,j}$ thus depends of the sources terms, which are themselves of different structure for the two second order expansion in $\varepsilon.\varepsilon'$ and in $\varepsilon'.\varepsilon'$.

- Summary of the numerical procedure

Again using the first order eigenmode velocity values one computes first the $N_{i,j}$ components for the different equations to be solved. Then we determine the source term $S_{p_{i,j}}$ for the pressure $p_{i,j}$ in the Poincaré equation and we solve it. It turns out that it is easier to use the explicit integration than to solve numerically the differential equation for p . We compute numerically the integrals involved. Then we use the solution for $p_{i,j}$ for getting the radial velocity $u_{i,j}$ with suitable radial argument given by the boundary condition $u_{i,j}(\beta) = 0$. Finally we recompute the final expressions for $p_{i,j}$ and for the other velocity components using this β value.

Appendix C. Generation of induced differential rotation and expansion at third order in $\varepsilon\varepsilon'^2$

In this appendix we give some precisions about the main result of this paper i.e the computation of induced differential rotation of the basic flow due to the non linear (NL) coupling of the two Kelvin eigenmodes by the precession. The NL coupling could exist a priori also without precession, due to the two terms from $N^{(3)}(v, v)$ ($N(v^{(1)}, v^{(2)}) + N(v^{(2)}, v^{(1)})$), but here there are equal to zero. The precession term D is proportionale to the parameter ε and gives the main contribution. The relevant inhomogeneous equation to be solved reads now :

$$(L_0(\mathbf{v}_{12}) + \nabla p_{12})^{(3)} = N^{(3)}(v, v) + D^{(3)}(v_{02}^{(2)}) + R_{reg} \quad (\text{C.1})$$

$$R_{reg} = -\partial_{(T=\varepsilon t)} V^{(2)} \quad (\text{C.2})$$

The non linear relevant terms are reduced now to the term $D^{(3)}(v_{02}^{(2)})$ with $v_{02}^{(2)} =$

$L_0^{-1}(N(v_1, v_2))$, since :

$$N^{(3)}(v, v) = N(v_{01}^{(1)}, v_{02}^{(2)}) + N(v_{02}^{(2)}, v_{01}^{(1)}) + cc = 0 \quad (C.3)$$

Again compatibility conditions may arise for solving this equation due to possible resonant terms. We add a regularization R_{reg} with the last term in the r.h.s of eq.(C.1), that is coming again from the multiple time scale expansion. The only relevant terms which might be resonant are of zero phase at this order (like in the previous analysis at order ε'^2). They give the two compatibility conditions by projection in the azimuthal and axial directions (see eqs.(65-66)).

- Structure of the source terms

The new mean flow may be in fact the sum of two different terms owing to the possible different structure of the three source terms involved in the equations (70-71). Indeed the N terms can yield different structures : we have seen before that for v in (iu, v, w) we have $N(v, v)$ in (U, iV, iW) . But now since the $V_{i,j}$ velocities at second order have a structure in (u, iv, iw) we get that $N(V_{0,1}^1, V_{1,1}^{(2)*})^{(3)}$ is in (iU, V, W) .

For reference at 4th order we get $N(V_{1,1}^{(2)}, V_{1,1}^{(2)*})^{(4)}$ in (U, iV, iW) .

On the opposite the term in $D(V_{0,2}^{(2)})$ is of the form (iU, V, W) . Thus we split the C term into two components :

$$C(T)C(r) = C_1(T)C_1(r) + C_2(T)C_2(r)$$

The possible source terms in (U, iV, iW) would yield a time evolution for $C=C_1$ as :

$$\frac{d(C_1(T))}{dt} = i(A_1(T)A_2(T)^* + cc)$$

Instead the source term in (iU, V, W) yields a different time evolution for $C=C_2$ as :

$$\frac{d(C_2(T))}{dt} = (A_1(T)A_2(T)^* + cc)$$

By inspection of our remaining source term here we find that the structure is in (iU, V, W) thus $C = C_2$ only.

- sketch of the final numerical procedure

Following appendix B we first compute the required second order velocities $V_{02}^{(2)}$ and $V_{11*}^{(2)}$. Then we compute the quantity $D(V_{02}^{(2)})$. We then draw the radial dependence of the corrected mean flow as shown for the azimuthal velocity $V_\varphi(r)$ and its axial associated vorticity $\Omega_z(r)$ in the main text.

Part II

DEUXIEME PARTIE Etudes expérimentales

Chapitre 5

l'expérience ATER : montage et techniques expérimentales

5.1 Objectifs et motivations

5.1.1 Aperçu historique

Les premiers travaux sur les écoulements forcés par précession d'un réservoir sont dus à Sloudski [104] en 1895, suivis par ceux d'H. Poincaré (1910), qui a notamment donné son nom à l'équation vérifiée par la pression des ondes inertielles (équations du mouvement linéarisées par rapport à la rotation rigide). Il s'agissait de réservoirs ellipsoïdaux. Cette géométrie a la particularité d'admettre des solutions à vorticité uniforme qui satisfont à la condition de vitesse normale nulle à la surface pour les écoulements non visqueux. On peut obtenir ainsi l'orientation du vecteur vorticité par rapport aux axes de rotation et de précession. Roberts et Stewartson (1963, 1965) ont étendu cette solution où le mode azimutal $m = 1$ est excité au cas des fluides visqueux en raccordant ce mode dénommé aussi «flip over» à une couche limite qui satisfait à la condition de non-glissement.

Dans le cas d'un réservoir cylindrique fini, on ne peut trouver une solution de vorticité uniforme satisfaisant aux conditions aux limites (L. Johnson, Notes Woods Hole 1967). On retrouve bien une solution stationnaire sur le mode $m = 1$ (bending mode), décrite dans la première partie (étude analytique).

Une liste chronologique des expériences de précession dont nous avons eu connaissance est répertoriée dans le tableau (5.1).

Dans les configurations expérimentales, le choix de la géométrie du réservoir est en principe peu guidé par les solutions analytiques existantes, qui ne sont applicables que dans la limite des faibles perturbations de la rotation solide. Il peut par contre être influencé par l'existence d'outils numériques adaptés. Il se trouve que pour les deux géométries en concurrence (ellipsoïde et cylindre), ceux-ci n'existaient pas au moment de la conception de l'expérience ATER.

Expériences dynamo Comme rappelé en introduction, en voulant comprendre l'origine des champs magnétiques des tâches solaires, Larmor, en 1919, fait l'hypothèse qu'une partie de l'énergie de circulation de la partie interne liquide du soleil est à l'origine du maintien du champ magnétique solaire par *effet dynamo*. Les expériences ne viendront qu'à partir de la seconde moitié du XX^{ème} siècle.

On peut attribuer à Lehnert le titre de pionner dans ce domaine. En 1958, en faisant tourner

Ellipsoïde	Cylindre
Malkus, 1968	Gans, 1970
Vanyo, 1995	Vladimirov & Tarrasov, 1984
Noir, Cardin 2001	Manasseh, 1993 Kobine, 1995
Goto (Sphère) 2008	Meunier, 2008

Table 5.1: Différentes expériences d'écoulement en précession en géométrie ellipsoïdale ou cylindrique

dans une sphère creuse un volume de sodium liquide à l'aide d'un disque à ailettes, il a réussi à convertir une partie de la composante poloïdale du champ magnétique (partie orientée selon un plan orthogonal à l'équateur) en champ toroïdal.

Cinq ans plus tard, Lowes and Wilkinson [103] parviennent à amplifier un champ magnétique incident en mettant en rotation désaxée de $\frac{\pi}{2}$, deux cylindres ferromagnétiques solides. Bien qu'il ne s'agisse pas d'une expérience avec fluide, cette expérience est la première preuve qu'un effet dynamo homogène est possible à $R_m = 200$.

Malkus en 1968[68], Gans en 1970[31], furent les premiers à utiliser la précession comme forçage expérimental. Le premier utilisait un ellipsoïde et le suivant un cylindre où axe de précession et axe de rotation sont orthogonaux. Le diamètre du cylindre valait $\varnothing=15$ cm et la longueur pouvait être changée (variation autour de 15 cm pour l'étude de cas résonnant). Nos travaux s'inscrivent donc tout droit dans la lignée de ceux de Gans qui a mesuré en particulier les écarts de la ligne contenant les points à pression nulle de l'écoulement avec l'axe de rotation du cylindre. Il montre ainsi que pour des faibles valeurs du taux de précession, cet écart croît linéairement avec la vitesse angulaire de rotation, effet prévu par des considérations analytiques sur le pompage d'Ekman en volume en présence de précession. Par ailleurs, il a observé une transition brutale vers la turbulence et une boucle d'hystérésis. Enfin, le cas hydrodynamique a permis de mettre en évidence un régime de vortex localisés proches de l'axe de rotation qui va nous intéresser particulièrement ici.

L'expérience hydromagnétique [31] consiste en un cylindre de diamètre ($\varnothing=20$ cm) rempli de sodium liquide et soumis à un champ magnétique axisymétrique afin d'étudier les effets d'induction de l'écoulement. Gans a ainsi pu montrer (avant que son expérience ne soit interrompue pour des raisons administratives de sécurité) que l'amplification du champ dépend très sensiblement de l'allongement du cylindre lié au phénomène de résonance de cavité. Il a obtenu une amplification d'un facteur 3 du champ incident au moyen de l'écoulement en précession.

Expériences d'hydrodynamique en précession Nous nous limiterons à rappeler les différentes expériences en précession en géométrie cylindrique. Les études expérimentales concernant les fluides en rotation dans un cylindre datent de Lord Kelvin qui, le premier, a suggéré que des perturbations de fluide non visqueux en rotation pouvaient se décomposer en modes normaux (modes de Kelvin, 1ere partie, chapitre 3). Aucune mise en évidence de ces modes n'a été constatée jusqu'à Fultz et son expérience de 1959.

Suivirent, respectivement en 1966 et 1968, les études analytiques de Kudlick [53] et Greenspan [34] prenant en compte le traitement de la couche limite due à la géométrie finie. Une série d'études numériques et expérimentales vit le jour, retrouvant les expressions exactes des fréquences avec viscosité.

Un autre point important concernant les fluides en rotation réside dans la possibilité de générer

des instabilités et des transitions vers des régimes désordonnés avec des comportements chaotiques. Les expériences de Mc Ewan [75] sont les premières à mettre en évidence cet aspect qu’il surnomme « *resonant collapse* » : si l’on considère un mode de Kelvin résonnant (au sens de la résonance de cavité expliquée au chapitre 2) forcé, il a observé que pour une valeur du forçage, celui-ci pouvait dégénérer en un écoulement désordonné à petite échelle qui pouvait se relaminariser en rotation solide et donner lieu à un cycle d’instabilité, transition vers le désordre, suivi de relaminarisation.

Dans leurs expériences de cylindre en précession, Manasseh [133, 119] (1993) et Kobine [51] (1996) confirmeront ce comportement. Manasseh a d’ailleurs soigneusement décrit les transitions vers la turbulence caractéristique d’un mode forcé par la précession dans le régime linéaire. Le mode est sélectionné en fonction des résonances paramétriques et, par visualisation directe, il observe comment le mode se déstabilise puis « s’effondre » vers la turbulence. Kobine, quand à lui, s’est intéressé via des mesures de vélocimétrie Laser à la distribution de vitesse azimutale du flot géostrophique.

Par analogie avec l’instabilité elliptique, Kerswell a proposé en 1999 qu’un mode de Kelvin, pouvait déclencher une instabilité triadique par résonance avec deux autres modes de Kelvin, générant ainsi une cascade de bifurcations liées à des instabilités secondaire, tertiaire etc... pouvant conduire à la transition vers la turbulence observée expérimentalement. Le scénario proposé par Kobine se focalise sur l’écoulement géostrophique : quand les effets non-linéaires sont importants, il peut y avoir un écoulement géostrophique à l’origine d’un ralentissement de la rotation solide, modifiant ainsi cette dernière, créant une rotation différentielle suffisamment importante pour causer une instabilité centrifuge conduisant aux cascades de bifurcations. Un scénario alternatif est basé sur une instabilité de couche limite près des parois.

Enfin, l’étude du cylindre en précession la plus aboutie est celle de Meunier et.al (2008) ; elle fait état d’études analytiques et expérimentales réalisées pour la première fois par PIV. Il a ainsi été montré qu’on pouvait distinguer deux cas :

- le cas où la fréquence du forçage n’est pas égale à la fréquence naturelle d’un mode de Kelvin (cas non résonnant) qui peut être traité par une théorie non visqueuse linéaire pour de faibles taux de précession et à grand Reynolds.
- le cas où la fréquence du forçage est égale à la fréquence naturelle d’un mode de Kelvin (cas résonnant) ; il doit être décrit par une théorie prenant en compte les effets visqueux et non linéaires pour prédire les valeurs finies des amplitudes des modes qui divergeraient dans le cas d’une théorie linéaire non visqueuse. Le cas résonnant peut être décrit par deux régimes d’écoulement différents dépendant du nombre de Reynolds.

5.1.2 Objectifs

Nos principaux objectifs dans l’étude expérimentale du forçage d’un écoulement par précession avec axe de précession orthogonal à l’axe de rotation sont les suivantes :

- étudier un écoulement susceptible de donner lieu à une réalisation de dynamo fluide expérimentale dans une configuration proche des dynamos naturelles
- exploiter la vélocimétrie PIV, jamais utilisée dans ce type de configuration d’écoulement au moment de la construction d’ATER
- comparer nos résultats à des résultats de simulations numériques (à faibles Reynolds).

Nous avons insisté sur la simplicité de ce forçage, réalisable en principe avec un simple réservoir de format arbitraire, étanche, en rotation autour d’un axe et placé sur une table tournant autour d’un autre axe. Au delà de la réalisation d’un tel flot, il faut aussi être capable aussi d’examiner les propriétés caractéristiques du champ de vitesse ainsi engendré et c’est à ce stade que des choix

techniques et des compromis deviennent nécessaires.

La vélocimétrie PIV demande la réalisation d'un mince plan de lumière, dans lequel on mesurera le déplacement de particules advectées par le flot. Si la source de lumière est dans l'air, les sauts d'indice entre l'air, le réservoir transparent et le fluide utilisé (eau, par exemple) sont responsables d'effets optiques susceptibles de perturber le plan de lumière créé. Cela explique que la PIV n'ait pas été appliquée jusqu'à présent à des réservoirs ellipsoïdaux, qui sont pourtant a priori de géométrie comparable à celle d'objets astrophysiques [127, 84, 126, 115]. Nous avons choisi pour cette raison optique un réservoir cylindrique, qui peut être éclairé dans une section droite avec un minimum de soucis. C'est le choix qui a aussi été fait à l'IRPHE [55], avec en vue l'application possible à des écoulements dans des réservoirs réels de combustible liquide (fusées et satellites).

Nous avons aussi choisi de faire coïncider l'axe de rotation avec l'axe du cylindre. Cela a l'avantage de permettre à la source lumineuse d'être fixée sur la table tournante et de simplifier ainsi son alimentation et son contrôle (synchronisation avec la caméra). En contrepartie, le forçage de la rotation est dû aux tensions visqueuses générées par le cisaillement sur la paroi courbe, là où la vitesse de la paroi est tangente à celle-ci. Le cas limite est un réservoir sphérique en précession dont l'écoulement est produit par les forces visqueuses sur la paroi [33]. On peut s'interroger sur l'efficacité pratique de cette dernière configuration alors qu'a priori l'optimisation du transfert d'énergie entre paroi et fluide demande que le déplacement de la paroi soit plutôt dans sa direction normale.

En toute généralité, si la source lumineuse était liée au cylindre, ce dernier pourrait tourner autour d'un axe quelconque, réduisant ainsi l'importance des tensions visqueuses au profit du forçage inertiel. En conservant la forme cylindrique du réservoir, on pourrait comme axe de rotation, par exemple, choisir un diamètre passant par le centre. Cela représente déjà une configuration non standard pour le problème de spin up («est-ce que le temps de mise en rotation est commun avec celui des réservoirs axisymétriques ?») et l'étude du forçage par précession obtenu en plaçant ce rotor sur une table tournante reste à faire¹.

Ayant choisi la forme géométrique du réservoir et son axe de rotation, le seul paramètre géométrique restant à fixer est l'angle de ce dernier avec l'axe de précession. Il reste petit dans l'expérience de l'IRPHE, en accord avec des situations pratiques concernant des réservoirs de fluide en rotation (applications en astronautique). Dans le cas d'ATER, il a été choisi égal à $\pi/2$, ce qui maximise les effets de l'accélération de Coriolis et les effets de la précession.

Il est important de remarquer qu'outre l'application éventuelle à une expérience dynamo, le projet ATER permet l'observation de turbulence et autres phénomènes associés dans un fluide en rotation.

5.2 Description de l'instrument

L'instrumentation a été réalisée pour l'essentiel à l'Observatoire de Paris-Meudon (Pôle Instrumental du GEPI). Les figures (5.1) et (5.2) montrent respectivement l'expérience ATER selon le point de vue du plan de montage et des clichés photo de la manip.

1. Si l'intérêt astrophysique de cette configuration semble mince, son application comme mélangeur a peut-être un avenir.

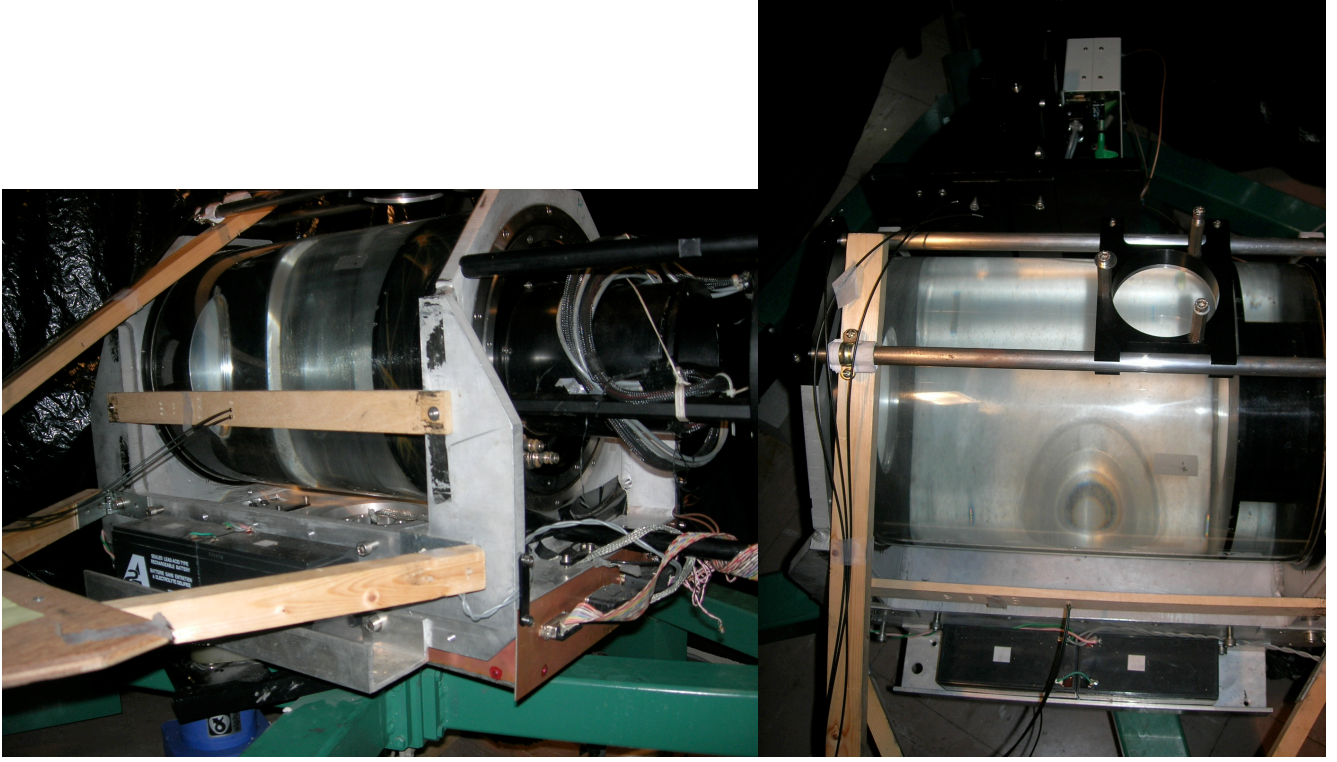


Figure 5.2: Expérience ATER vue oblique (à gauche) et de face (à droite). On voit ainsi les différents équipements qui vont servir aux mesures expérimentales.

5.2.1 Description géométrique

L'expérience ATER est composée d'un cylindre droit en PMMA (plexiglas) de longueur maximale interne $L = 390$ mm et de rayon $R = 145$ mm (les parois ont une épaisseur de 5 mm). Afin d'étudier des caractéristiques de l'écoulement, on peut ajuster la longueur de telle façon que l'allongement défini par $a = \frac{L}{2R}$ appartienne à l'intervalle $[1, 1.34]$. Le cylindre a une capacité de 28 Litres. Sur les faces circulaires ont été placés deux hublots de diamètre $d = 116$ mm :

- l'un qui sert au remplissage et ensemencement du fluide dans le cylindre d'une part et accessoirement à l'accrochage de trois fibres optiques utilisées pour le repérage de la verticale dans le traitement d'image.
- l'autre permettant à la caméra d'avoir une vue de l'écoulement et d'enregistrer les clichés (la technique de mesure PIV sera expliquée dans la prochaine section)

En résumé, les paramètres expérimentaux pertinents du problème sont :

- géométrique : R, L . On définit l'allongement expérimental : $a = \frac{L}{2R}$
- dynamique : Ω_R, Ω_P . On définit le taux de précession expérimental : $\varepsilon = \frac{\Omega_P}{\Omega_R}$
- fluide : ν (on utilisera toujours de l'eau à 20° , par conséquent la viscosité change très peu), on définit le nombre de Reynolds expérimental : $R_e = \frac{R^2 \Omega_R}{\nu}$

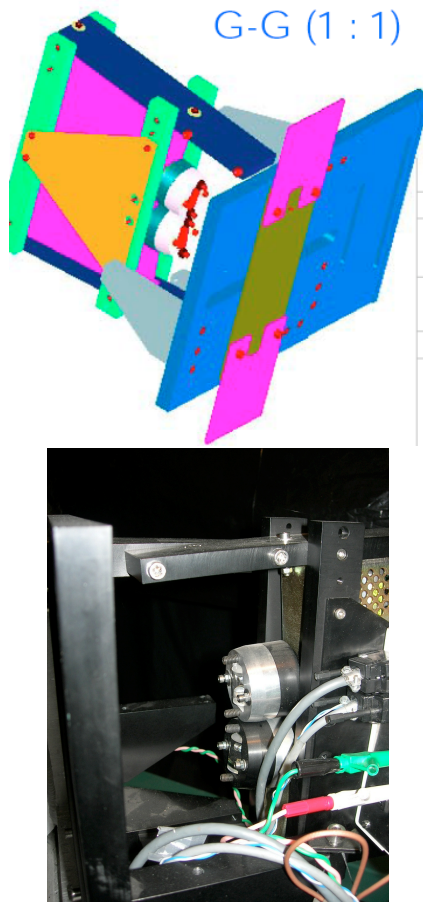


FIGURE 5.3: Eclairage déplaçable en bloc selon le plan de mesures souhaité avec ses deux optiques superposées et ses deux lampes flash.

a) en haut, vue graphique

b) cliché photo

Les deux lampes flash sont montées l'une au-dessus de l'autre avec des axes optiques de sortie pointant vers le centre du réservoir. La lumière de chaque lampe est collectée par une lentille cylindrique. Les deux optiques définissent un plan de lumière éclairé avec un décalage temporel ajustable (à partir d'une ms).

5.2.2 L'éclairage

Le but de cette instrumentation étant la faisabilité de mesures PIV 2D, il faut éclairer des plans de l'écoulement à l'aide d'une «tranche» de lumière la plus homogène possible (le faisceau doit avoir une largeur caractéristique supérieure au diamètre et à la longueur du cylindre) avec une épaisseur la plus fine possible (de l'ordre de quelques mm) afin de ne contenir dans les images que les déplacements des particules dans le plan. De plus, on peut décider de faire de l'éclairage constant pour des visualisations directes de l'écoulement ou en mode flash stroboscopique pour des traitements PIV.

Pourquoi ne pas utiliser un laser ? Le coût financier élevé et le fait de vouloir faire des mesures embarquées sont les deux obstacles majeurs à l'utilisation d'un laser.

Les sources de lumière utilisées au cours de nos expériences sont composées de deux lampes flash au Xénon (fig.(5.3)).

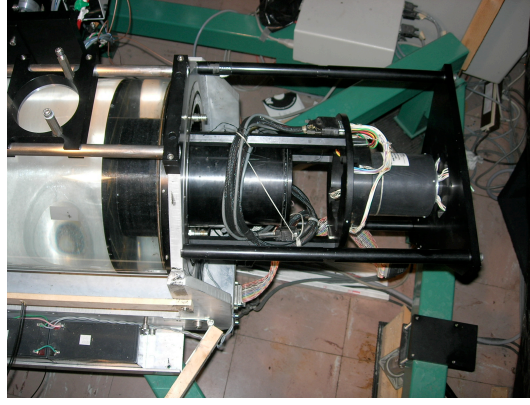


Figure 5.4: Vue du piston permettant de faire varier et d'ajuster l'allongement du cylindre. La caméra se trouve dans le piston.

Afin d'obtenir une tranche de lumière d'épaisseur $\simeq 5mm$, un boîtier optique ainsi qu'un système de focalisation de la lumière avec une lentille convergente doivent être installés. Les conditions de l'écoulement font que plusieurs plans d'étude sont intéressants à analyser: sur un des côtés du cylindre, un système permet de déplacer le système de flash utilisé sur une distance horizontale de 240 mm. Sur l'autre côté du cylindre est placé le dispositif permettant l'accrochage des 3 fibres optiques qui récupèrent l'éclairage issu des flashes et le transporte jusqu'à l'une des faces circulaires du cylindre mentionnées plus haut pour le repérage de l'orientation des clichés.

La caméra est placée dans une enceinte solidaire d'un piston qui permet d'ajuster la longueur du réservoir (fig.(5.4)).

5.2.3 La caméra CCD

Placées au foyer d'un télescope, les caméras CCD sont très souvent utilisées pour des observations astronomiques. Marquée par une sensibilité à la lumière importante, une grande résolution et une stabilité de l'image, elles ont contribué à de nombreux progrès dans le domaine de l'enregistrement de données en vue de traitement d'images dans l'industrie et dans différentes branches scientifiques. Nous avons utilisé une caméra analogique, de type caméra de surveillance, moins sensible et de moins bon rapport signal/bruit que celles utilisées en astronomie, mais bien adaptées pour analyser les déplacements. La caméra utilisée ici est de marque JAIM1, qui génère des clichés de taille 1296×1026 pixels et fonctionne à 12 images/s, ce qui se révélera trop juste pour l'étude du régime turbulent.

Plusieurs positions de caméra sont possibles mais, au cours de notre étude, seules deux orientations seront étudiées :

- L'axe de rotation principal est confondu avec l'axe optique de la caméra (fig.(5.5a)). Les études sont réalisées dans le référentiel dit «en rotation».
- L'axe de précession est parallèle avec l'axe optique de la caméra (fig.(5.5b)). Le plan de lumière est le plan méridien du cylindre. Les études sont réalisées dans le référentiel dit «en précession».

La caméra CCD fonctionne avec le logiciel CamControl qui permet l'enregistrement des images au format choisi. Pour des raisons de mémoire vive, nous ne pouvons pas stocker plus de 120 paires de clichés (240 photos), ce qui limite les études de dynamique à temps long.

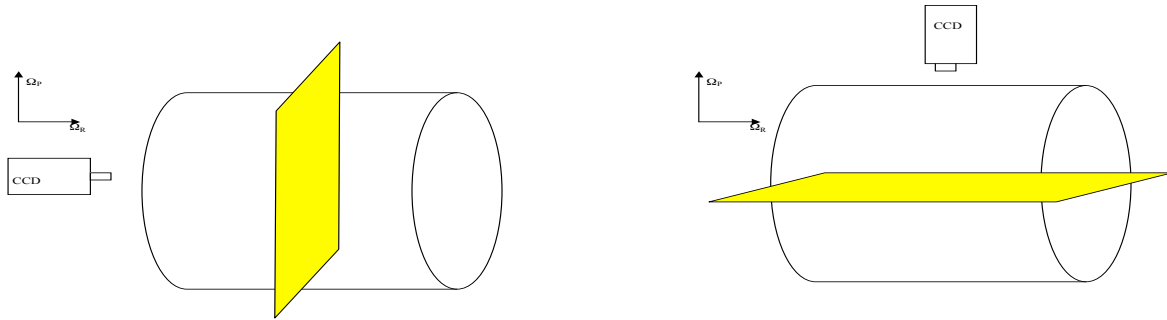


FIGURE 5.5: Différentes positions de la caméra CCD pour l'enregistrement des données. a) Vue du plan transverse à l'axe de rotation. b) Vue du plan transverse à l'axe de précession

5.2.4 Contrôle et pilotage

Le cylindre doit être mis en mouvement de rotation sur son axe principal et en précession sur un axe perpendiculaire. Pour cela, il faut deux moteurs, pilotables indépendamment. Les vitesses de ces moteurs peuvent être modifiées par l'ordinateur de pilotage au moyen d'une liaison RS232. Pour cela, un programme de pilotage machine par interface graphique (écrit en Python) a été réalisé par René Vitry. Les paramètres d'entrée sont les vitesses de rotation et de précession finales, les valeurs des rampes linéaires associées à chaque mouvement, le temps de déclenchement d'un chronomètre. A l'aide d'un autre logiciel de commandes, on peut choisir à l'écran le temps de déclenchement entre deux flashes. Le logiciel d'enregistrement des données est CamControl.

La figure (5.6) représente une capture d'écran qui montre l'interface de pilotage.

5.2.5 L'ensemencement

La qualité des mesures est très fortement dépendante de la qualité des images enregistrées qui elle même est fonction d'un bon ensemencement (avec une bonne illumination). De fait, le choix des particules et de leur concentration a été critique pour arriver à un bon fonctionnement de la PIV. Le choix s'est finalement porté sur des billes de polystyrène (fabriquées par «Optimage») de $250\text{ }\mu\text{m}$ de diamètre et de densité 1.03 g/cm^3 . Le volume des particules vaut 1.2510^{-4} celui du fluide.

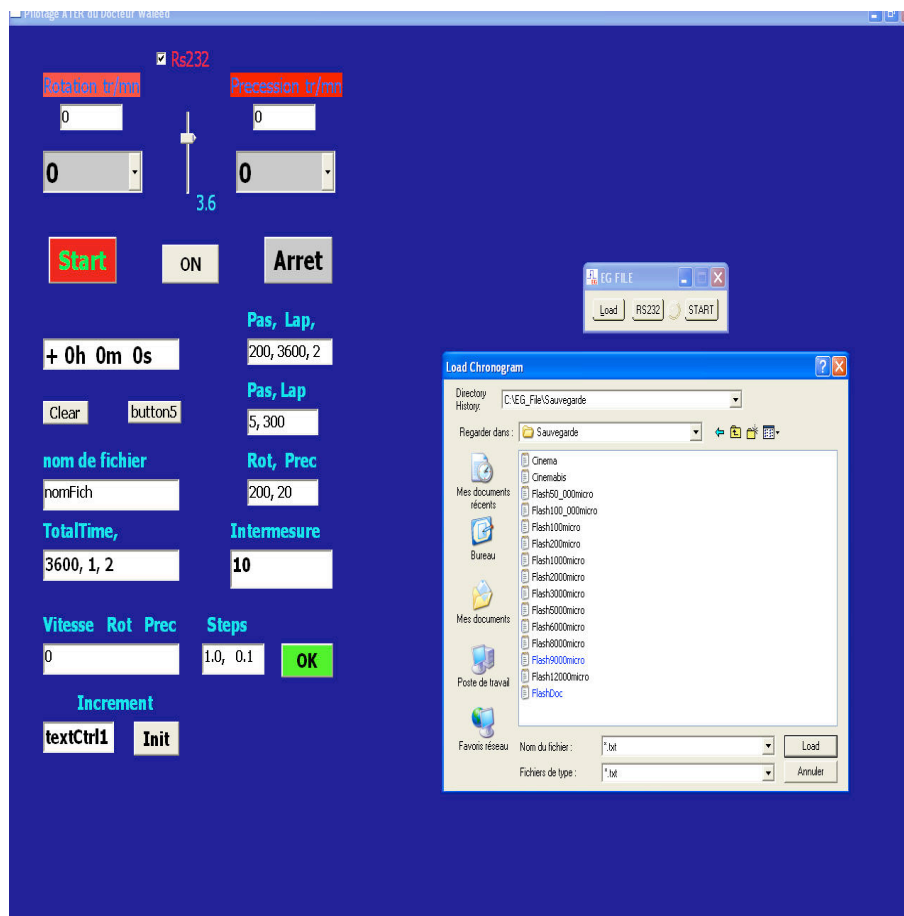


Figure 5.6: Ecran de contrôle d'ATER. On envoie les commandes par RS232 et on communique les informations à l'aide d'un programme de pilotage écrit en Python. On doit sélectionner les vitesses finales de rotation et précession ainsi que les rampes linéaires de rotation et précession. Il faut aussi sélectionner le temps entre deux déclenchements de flash possible.

5.3 Vélocimétrie par imagerie de particules : PIV

5.3.1 Généralités sur les techniques de visualisation en mécanique des fluides

Les techniques classiques de visualisation, en mécanique des fluides, utilisent des traceurs se déplaçant en suivant l'écoulement. D'autres techniques tirent parti d'éventuelles variations d'indice optique résultant de changements de densité ou de variations de température induites par l'écoulement.

Il se pose alors la question de la pertinence des données quantitatives pouvant être mesurées. Comment interpréter une mesure (de pression ou de température par exemple) en un point de l'écoulement par rapport à celle effectuée globalement ? D'autre part, une mesure réalisée en introduisant un système intrusif au sein de l'écoulement ne perturbera-t-il pas ce dernier jusqu'à une certaine échelle ? Depuis quelques années, de nombreux efforts ont été faits pour réduire la taille des appareils de mesure et améliorer l'aspect quantitatif des mesures par des visualisations d'écoulement et des méthodes optiques.

On peut classer ces méthodes selon 4 groupes :

- les techniques nécessitant l'introduction dans l'écoulement d'un matériau (liquide ou gazeux) étranger (colorant, par exemple) visible et composé de particules de taille suffisamment petite pour assimiler leur dynamique à celle de l'écoulement considéré en direction et en intensité du champ de vitesse. Ces méthodes donnent d'excellents résultats pour des flots quasi-stationnaires, mais de grandes erreurs peuvent être faites pour des écoulements instables et non stationnaires. Il est à noter que les propriétés thermodynamiques du matériau étranger sont différentes de celles du fluide considéré même si leur densité sont les mêmes.
- les techniques optiques peuvent mettre en évidence des variations de densité caractéristiques des fluides compressibles
- la troisième technique est un hybride des deux précédentes, à la différence que le corps étranger introduit au sein du fluide est de l'*énergie* (le plus souvent sous forme de chaleur ou de charges électriques). Les déplacements mis en jeu doivent être mesurés par une méthode optique
- les techniques de traitement d'image

L'apparition des lasers a constitué une véritable révolution dans tous les domaines de l'optique et, depuis une trentaine d'années, le développement d'outils de mesure non intrusifs pour la mécanique des fluides tels que la vélocimétrie laser doppler, la tomographie laser, la diffusion Raman, les techniques de fluorescence... Cependant, aucune méthode n'aboutissait à une technique de mesure qui donnerait accès au champ instantané des vitesses d'un écoulement. Il a fallu attendre l'apparition des capteurs CCD de haute résolution et de bonne sensibilité pour permettre le développement de la mesure PIV (Particle Image Velocimetry) qui est devenue au fil du temps un outil incontournable ouvrant de nouveaux espaces d'investigation.

5.3.2 Principes de la PIV

5.3.2.1 Fonction de corrélation

La vélocimétrie par images de particules (PIV) est une méthode de mesure de vitesse non intrusive, instantanée et bidimensionnelle. Elle permet d'obtenir une cartographie instantanée des vitesses d'un écoulement. La mise en œuvre d'une telle technique repose sur quatre étapes distinctes : l'ensemencement de l'écoulement, la création d'un plan lumineux laser, l'acquisition d'images et le traitement des données.

La technique de visualisation consiste à rendre visible le déplacement du fluide en y ajoutant des traceurs. Par conséquent, on ne mesure pas directement la vitesse de l'écoulement mais plutôt celle de particules en suspension dans celui-ci. Les traceurs doivent évidemment être de petite taille afin de ne pas perturber l'écoulement, suffisamment gros pour être observés et de masse volumique le plus proche possible du fluide. Les champs de vitesse mesurés par PIV correspondent à la projection d'un champ tridimensionnel dans un plan.

Le principe consiste à enregistrer deux images successives à deux instants t et $t + \Delta t$. La caméra CCD est déclenchée en synchronisation avec chaque impulsion du laser ou de la source lumineuse. L'intervalle de temps Δt entre deux plans lumineux est réglable et doit être ajusté en fonction des vitesses rencontrées dans l'écoulement. Pour pouvoir mesurer les petites échelles

de l'écoulement, il est nécessaire d'utiliser un très grand nombre de particules. Par conséquent, il est difficile de suivre individuellement chaque particule. Chaque image est alors divisée en petites régions carrées, que l'on nomme fenêtres d'interrogation.

L'algorithme de PIV consiste à calculer la fonction de corrélation d'intensité lumineuse $C(\Delta x, \Delta y)$, par transformée de Fourier, entre deux fenêtres d'interrogation identiques d'une image à l'autre séparées par un intervalle de temps Δt . Si toutes les particules présentes dans la fenêtre d'interrogation ont une vitesse égale à $\vec{u} = v_x e_x + v_y e_y$ à l'instant t , leur déplacement selon x et y pendant Δt vaut $\Delta x = v_x \Delta t$ et $\Delta y = v_y \Delta t$. Ainsi, la fonction de corrélation, qui s'écrit :

$$C(\Delta x, \Delta y) = \int x, y I(t; x, y) I(t + \Delta t; x - \Delta x, y - \Delta y) dx dy, \quad (5.1)$$

est maximale et vaut I_{max}^2 pour le déplacement $(\Delta x, \Delta y)$ réel des particules et prend des valeurs idéalement petites pour les autres. Cette fonction de corrélation présente donc un pic de corrélation dont la position par rapport au centre de la fenêtre permet d'accéder au vecteur vitesse.

5.3.2.2 Limitations

De toutes les études menées en PIV (Raffel et al., 1998), la méthode basée sur les corrélations entre deux clichés reste la plus précise pour les écoulements presque uniformes et cela, en dépit des incertitudes liées à des paramètres tels que densité de particules par image, diamètre des particules, taille de la fenêtre de corrélation, bruit relatif au cliché, amplitude de déplacement d'une image à l'autre.

La méthode est beaucoup moins bonne en présence de gradients forts comme dans les écoulements turbulents ou les écoulements de couche limite. On peut alors utiliser une méthode de « déformation de fenêtre de corrélation » selon une estimation de l'intensité du gradient de vitesse (Huang et al., 1993) ou par déformation l'image de la particule sur le cliché. Une autre source d'erreur est la variation temporelle. On calcule le champ de vitesse en faisant l'hypothèse que durant le court intervalle de temps entre chaque cliché, la vitesse est constante le long de la trajectoire (ce qui n'est pas vrai si les gradients de vitesse sont forts). Si ce n'est pas le cas, la valeur moyenne de cette vitesse peut diverger de celle estimée. Beaucoup d'algorithmes sont bâtis sur le premier terme du développement de Taylor du champ de vitesse ($\Delta r \approx v \Delta t$). Pour réduire l'erreur, on peut réduire le temps Δt entre deux clichés ou aller plus loin dans le développement.

5.3.2.3 L'algorithme DPIVsoft

Nous ne mentionnerons que quelques aspects de l'algorithme. Tout lecteur intéressé pourra consulter [81]. L'algorithme DPIVsoft est écrit en langage Matlab². C'est une somme de sous-routines qui communiquent entre elles par appel de fonctions. Il a été développé par P. Meunier et T. Leweke de l'IRPHE, et remédie aux problèmes mentionnés plus haut. Le principe est standard : celui d'une PIV basée sur des corrélations croisées. Le programme sélectionne une petite fenêtre d'interrogation (la taille de la fenêtre est estimée selon le nombre de particules dans un cliché photo) autour d'un vecteur vitesse et y calcule la fonction d'intercorrélation en intensité entre deux clichés. Le pic de corrélation donne alors le déplacement moyen des particules pour une fenêtre donnée. Pour accélérer la procédure, les fonctions de corrélation sont calculées par Transformée de Fourier rapide. Dans un second temps, pour limiter les erreurs dues à la perte de particules d'un cliché à l'autre (cas où des particules quittent le plan de mesure), on translate

2. Par conséquent, tous nos programmes de traitement seront écrits en Matlab

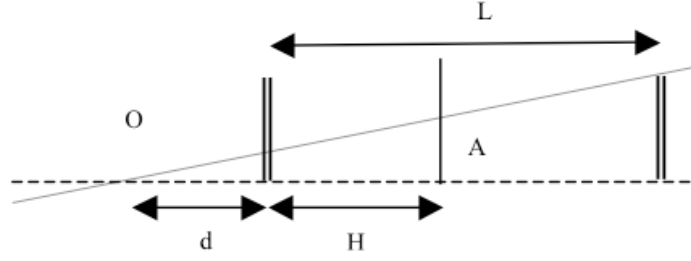


Figure 5.7: Schéma des trajets lumineux reçus par la caméra

les fenêtres d'interrogation. Pour corriger les erreurs, on va plus loin dans le développement de Taylor du champ de vitesse et on va considérer un déplacement systématique de la fenêtre de corrélation basée sur une estimation du cisaillement moyen : ce sont les deux principes de base du fonctionnement de cet algorithme.

Le calcul se fait en plusieurs étapes. Une étape importante est l'augmentation «numérique» de la taille des particules réalisé en appliquant un filtre gaussien de l'image. L'intensité du filtrage est un paramètre qui s'avère être très important pour réduire l'estimation de vecteurs erronés lors du traitement. On convolue alors sur tout le cliché l'intensité avec ce filtre. Plusieurs avantages découlent de cette façon de faire :

- on peut choisir des particules de taille raisonnable car le grossissement est numérique,
- le bruit éventuel dû à l'enregistrement est lissé - on peut utiliser de grandes fenêtres de corrélation tout en gardant un nombre suffisant de particules.

DPIVsoft permet d'obtenir un post-traitement : la vorticité (dont on se servira beaucoup) est calculée par éléments finis à partir du champ de vitesse calculé sur une grille. Nous n'en dirons pas plus sur l'algorithme DPIVsoft si ce n'est qu'il fonctionne avec deux paramètres : le temps entre les deux clichés photos lus et gardés en mémoire et le coefficient de calibration qui permet la conversion de mm en pixel.

5.3.3 Calibration

L'analyse par PIV produit des vitesses en cm/s à condition de connaître la calibration γ_A en pixels par cm dans le plan lumineux A . La position du plan lumineux est variable, ainsi que la longueur du cylindre. On utilise un modèle optique simplifié, en négligeant le déplacement des rayons dans la traversée du hublot séparant l'eau de l'air (erreur de quelques pourcents) et en confondant le centre optique O avec la face d'entrée de l'optique. Soit d la distance du centre optique au réservoir, H la distance du hublot de gauche (sortie des rayons) au plan d'analyse A , et L la longueur du réservoir. Le diamètre D connu du hublot de droite, rendu visible en lumière rasante, correspond à p pixels. Ceux-ci recouvrent dans le plan A un diamètre connu (triangles semblables), ce qui permet d'obtenir la calibration recherch e en A :

$$\gamma_A = \frac{(\frac{p}{D})(d + L)}{(d + H)} \quad (5.2)$$

On détaille la procédure sur un exemple : sachant que le rayon du cylindre est de 145 mm, en mesurant et moyennant plusieurs rayons en pixels à l'aide du logiciel de traitement d'images

GIMP, on aboutit à un rayon de 1000 pixels. Pour une distance $h = 195$ mm, on trouve $\gamma = 0.127$ mm/px.

plan de mesure	γ (mm/px)
plan $z = \frac{L}{2}$, plan médian du cylindre	0.127
plan $z = \frac{2L}{3}$	0.192
plan $z = \frac{3L}{4}$	0.199

5.4 Traitement des données issues de DPIVsoft

5.4.1 Interpolation numérique

En analyse numérique, l'interpolation est une opération mathématique permettant de construire une courbe continue à partir de la donnée d'un nombre fini de points. La solution du problème d'interpolation passe par les points prescrits, et, suivant le type de l'interpolation, on demande de vérifier des propriétés supplémentaires. Ainsi le type le plus simple d'interpolation est l'interpolation linéaire, qui consiste à "joindre les points" donnés par des segments de droite.

Pour nos traitements de données, nous allons utiliser une méthode d'interpolation de type «cubique». Comme son nom l'indique, on utilise ici une équation polynômiale d'ordre 3 pour modéliser localement la courbe. Un tel polynôme est déterminé par quatre points (nécessaires pour évaluer la fonction qui remplace la courbe discrète). Selon les conditions de continuité utilisées, la détermination de la cubique peut varier et donner une interpolation différente (interpolation cubique splines basé sur la continuité des tangentes aux points de la courbe).

5.4.2 Détail du traitement sur la grille polaire

Le programme de traitement d'image nous permet d'estimer les déplacements moyens en pixels et d'estimer la position du centre (x_O, y_O).

Le logiciel DPIVsoft fournit, après traitement, un champ de vitesse en coordonnées cartésiennes $u(60, 60)$ et $v(60, 60)$ défini sur une grille cartésienne (avec u vitesse selon l'axe Ox et v vitesse selon l'axe Oy). Le champ est défini sous la forme d'un tableau qui parcourt toute la surface du cliché et permet de donner une valeur de la vitesse en tout point de l'écoulement.

On peut se repérer par les coordonnées du cliché en pixels: x_P (60×60) et y_P (60×60) correspondant au découpage des clichés photos initiaux en fenêtre de corrélation. Les coordonnées x_P et y_P représentent les pixels permettant de se repérer sur le cliché. On a : $x_P \in [27, 1269]$ et $y_P \in [27, 999]$.

En raison de la symétrie cylindrique naturelle de l'écoulement, on souhaite exprimer les résultats dans un système de coordonnées polaires.

On veut réaliser l'opération suivante :

$$(x(60, 60); y(60, 60)) \longleftrightarrow (r(l_{max}, m_{max}), \phi(l_{max}, m_{max})) \quad (5.3)$$

On définit une grille polaire indicée par un nombre radial (l) et azimuthal (m) qui permettront de se positionner sur les clichés. On fabrique deux tableaux à une dimension $x_{aa}(l_{max}, m_{max})$ et $y_{aa}(l_{max}, m_{max})$ exprimant les positions des points de la grille polaire (r, φ), à l'aide de la fonction *interpol* de Matlab qui, comme nous l'avons dit, sera de type cubique. On a :

$$x_{aa} = x_O + r(l) \cos(\phi(m)) \quad (5.4)$$

$$y_{aa} = y_O + r(l) \sin(\phi(m)) \quad (5.5)$$

avec $r \in [0 ; R=14,5 \text{ cm}]$ et $\varphi \in [0 ; 2\pi]$. On va interpoler sur cette grille polaire les vitesses issues du traitement PIV sur une grille cartésienne afin d'obtenir les vitesses radiale et tangentielle qui sont significatives pour l'analyse du problème.

Ce traitement permet d'obtenir les distributions des vitesses radiales et azimutale ainsi que la distribution de vorticité en fonction des coordonnées cylindriques (r, ϕ) dans un plan de mesure. Compte-tenu des paramètres du problème, il est possible d'établir les évolutions des variables originales (vitesse, vorticité) et déduites (fonction de courant, énergie, enstrophie) en fonction des variables spatiales (r, ϕ) , du temps, du forçage (ε), de l'allongement du cylindre (a). Les différents régimes de l'écoulement for   par précession seront étudiés du point de vue de l'évolution de ces paramètres.

5.5 Quelques résultats préliminaires de visualisation

5.5.1 Les bulles d'air

Nous sommes dans une situation où la rotation est assez rapide pour dominer les effets de la poussée d'Archimède (qui aurait tendance à «s dimer» tout fluide de densité inférieure à l'eau). Par conséquent, des bulles d'air, introduites dans l'écoulement vont se positionner selon les minima de pression. Dans le cas d'un fluide en rotation pure, la pression s'écrit : $\Pi = \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}(\Omega r)^2$ les bulles d'air ont donc tendance à se positionner sur l'axe de rotation ($r = 0$).

Les choses changent lorsqu'on ajoute le forçage par précession. Pour le comprendre, il est utile de comparer le vortex engendré par la rotation pure et celui qui résulte de la précession. Une première étude consiste donc en l'étude à taux de précession croissant de la courbe de minima de pression. Ainsi, le fluide est ensemencé de bulles, cr  es assez facilement lors du remplissage du cylindre. Aussi, à l'aide d'un éclairage continu dont l'intensité est réglable et un caméscope placé latéralement mais dans le référentiel qui ne tourne pas en rotation avec le cylindre, on a accès à une coupe transversale de l'écoulement. Afin d'éviter la saturation lumineuse due à un grand nombre de particules éclairées, un papier opaque noir recouvre l'arrière du cylindre. Le forçage est alors incrémenté jusqu'à une valeur critique au-delà de laquelle le vortex laminaire dont le centre correspond au minimum de pression éclate et donne naissance à une distribution de particules homogène et désordonnée occupant tout l'espace. On peut d'ores et déjà faire remarquer que le comportement de l'ensemble de ces particules est indiscernable entre deux acquisitions différentes, c'est la signature de mouvement à petites échelles.

La solution linéaire montre aussi l'existence d'un vortex ondulé correspondant au forçage axial du mode $m=1$. La distribution du minimum de pression suit cette trajectoire.

On retrouve expérimentalement la forme du vortex ondulé donné par la solution linéarisée et les simulations numériques. On retrouve un comportement similaire dans les expériences de Vladimirov et Tarasov qui consiste en un long tube (en rotation autour de son axe principal) auquel on applique un demi-tour autour d'un axe orthogonal à l'axe principal de rotation. Les auteurs ont pu observer un tourbillon onduler sur plusieurs longueurs d'onde étant donné la grande longueur de leur tube.

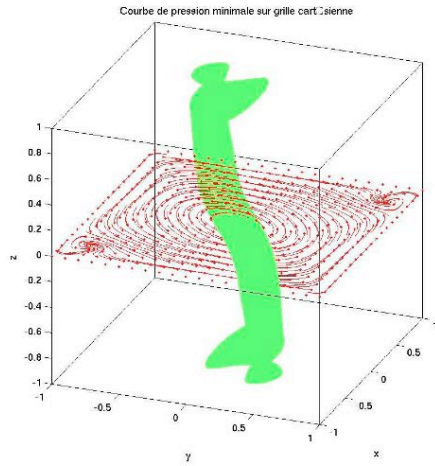


Figure 5.8: Comparaison entre simulation numérique de la distribution de la pression du mode forcé par la précession (à gauche) et la visualisation directe de l'écoulement par bulles d'air (à droite). On a volontairement tourné de $\frac{\pi}{2}$ l'image de droite par soucis de clarté mais le vortex s'aligne sur celui de l'axe de rotation.

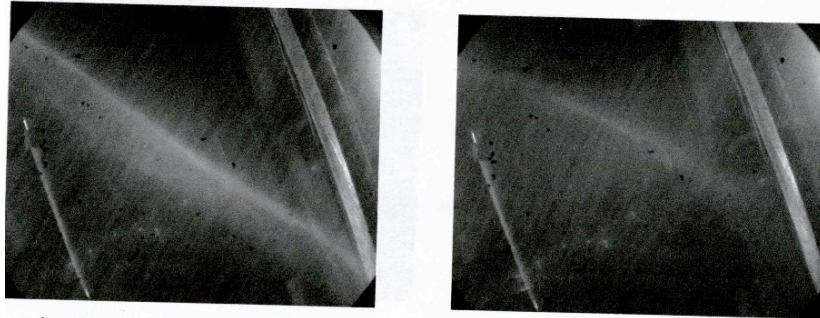


Figure 5.9: Photos du vortex ondulé avec deux forçages différents $\varepsilon = 0.076$ (à gauche) et $\varepsilon = 0.082$ (à droite). prises latéralement. En rotation solide, l'axe de rotation du fluide est aligné avec celui du cylindre représenté ici par l'axe «lumineux» du cliché.

La précession «courbe» l'axe de rotation du fluide, ce qui donne cette impression de vortex ondulé.

Ici, l'ondulation marque la signature du forçage du mode $m=1$ comme mentionné dans le chapitre 2. Ces résultats seront discutés au prochain chapitre dédié au régime linéaire. D'après les résultats analytiques de la première partie, l'amplitude de cette onde devrait croître linéairement avec le taux de précession.

5.5.2 Description qualitative et phénoménologique de l'écoulement

Avant de rendre compte des observations issues du traitement PIV de l'écoulement, il est utile de commenter l'évolution de la composante transverse du flot dans une rampe de précession. Le

commentaire est basé sur un film enregistré par un camescope filmant l'écran de l'ordinateur relié à la caméra CCD en corotation avec le réservoir. Le plan d'éclairage est situé aux trois quart de la longueur du cylindre en mode stroboscopie c'est à dire réglé à la fréquence d'enregistrement des images du CCD soit 12 flashes/secondes. Il a été vérifié empiriquement que cette vision stroboscopique est bien adaptée à l'échelle de temps caractéristique de la dynamique de l'écoulement. Cette section ne sera pas agrémentée d'illustrations qui, elles, figureront dans les deux prochains chapitres.

Après un temps de repos de plusieurs heures, certaines particules sont en suspension dans le fluide, d'autres sur la paroi en équilibre, soit en bas, soit en haut du réservoir. Cette sédimentation traduit le fait qu'il y a une distribution de la densité effective des particules autour de la densité de l'eau. On active alors la mise en rotation dans le fluide. Au bout de 15 mn à $\Omega_R = 60 \text{tr/min}$, la caméra en corotation fait apparaître la stationnarité des particules dans le volume signifiant que le régime de rotation rigide est pleinement établi.

Il est à noter que cette rotation rigide peut être facilement destabilisée par des perturbations apparemment annexes mais aux conséquences non négligeables. Par exemple, une bulle d'air de quelques mm de diamètre engendre une colonne de Taylor liée à la présence de celle-ci qui ne tourne pas à la vitesse du réservoir et crée dans le plan de mesure un vortex instationnaire empêchant la rotation solide de s'établir. Il en est de même pour une série de mesures réalisées au moment des travaux de réaménagement des locaux se situant à proximité du réservoir et créant des vibrations parasites.

La rotation étant atteinte et maintenue constante, le moteur de précession est enclenché à l'aide d'une rampe linéaire ($\frac{d\Omega_P}{dt} = 0.03 \text{tr/m/s}$). Nous faisons varier la vitesse angulaire de précession de 0 tpm à 12 tpm.

La phénoménologie observée consiste en 3 régimes successifs séparés par deux états intermédiaires. Cette phénoménologie est la même pour tous les allongements étudiés et l'effet de l'allongement ne concerne que les valeurs seuil d'apparition des différents régimes d'écoulement mentionnés ci-après.

- Propagation d'ondes inertielles tournantes sur le mode azimutal $m = 1$ (solution stationnaire dans le référentiel en précession) : $\varepsilon \in [0; \varepsilon_c]$

Pour de faibles forçages, le film montre très distinctement l'apparition (au sein de l'écoulement initialement en rotation solide donc, rappelons le, immobile dans le référentiel en co-rotation) de trajectoires elliptiques de certaines particules illuminées à la même fréquence. Ce mouvement est en sens contraire à la rotation solide, on parlera de trajectoires anticycloniques. L'amplitude de cette vibration d'ensemble décroît à partir du centre.

- Régime de transition : $\varepsilon \approx \varepsilon_c$

Des structures identifiables sous la forme de jets radiaux centripètes pénètrent le coeur de l'écoulement. La tête de ces jets prend la forme de champignons qui s'enroulent autour des structures tourbillonnaires mentionnées plus haut. Ces tourbillons restent localisés près de la paroi. En augmentant le taux de précession, l'advection de ces derniers change.

- Tourbillons cycloniques et rotation différentielle : $\varepsilon \in [\varepsilon_c; \varepsilon_t]$

La rotation différentielle commence à affecter le mouvement. L'écoulement est alors composé de 4 vortex cycloniques bien délimités en rotation différentielle les uns par rapport aux autres dont

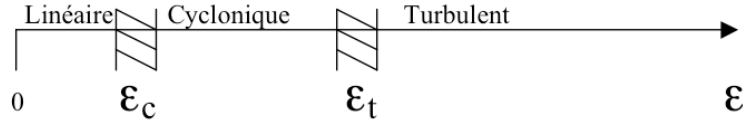


FIGURE 5.10: Diagramme de phase du système établi à partir des observations directes de l'écoulement

la position est repérable par un défaut de concentration de particules en leur centre de rotation. Tout en restant général à ce niveau de l'étude, il est à noter que les vortex apparaissent d'autant plus intenses et bien confinés que l'allongement est grand.

- Régime de transition : $\varepsilon \approx \varepsilon_t$

A cette valeur du forçage, on peut constater la disparition des vortex au profit d'un vortex unique avec le diamètre du cylindre comme taille caractéristique. La position du centre du vortex dépend du temps et parcourt un cercle entier sur un temps caractéristique de rotation, ce qui semble être la signature du mode forcé $m=1$ en présence de forte rotation différentielle. A l'écran ce régime apparaît comme une oscillation globale au centre de l'écoulement mêlée à une forte agitation près des parois.

- Turbulence homogène $\varepsilon > \varepsilon_t$

Comme l'apparition de la turbulence va de pair avec la disparition de la rotation rigide, il apparaît alors une rotation d'ensemble dans le référentiel tournant de la caméra. Cette oscillation du centre du vortex disparaît et laisse place au régime de turbulence détectable par l'impression d'une rotation d'ensemble due à l'arrêt de la rotation rigide de l'écoulement.

Chapitre 6

Régime linéaire dominé par la rotation d'ensemble : onde tournante $m=1$

6.1 Observation des trajectoires de particules : PTV

Au cours de ce chapitre, nous décrivons les différents résultats obtenus pour les faibles taux de précession.

Comme expliqué au chapitre 1, les écoulements en rotation donnent lieu à la propagation d'ondes particulières appelées ondes inertielles (et modes de Kelvin dans le cas d'une géométrie cylindrique) conférant aux particules-fluide une trajectoire circulaire. Le forçage par précession envisagé au chapitre 2 apparaît comme un forçage d'ondes inertielles dont le nombre d'onde azimutal m est égal à 1. L'étude des trajectoires des particules va alors nous permettre de mieux caractériser l'écoulement aux faibles taux de précession.

Dans le film décrit dans le chapitre précédent, on voit les particules oscillant en phase avec une amplitude croissante avec le taux de précession. Pour obtenir des résultats quantitatifs sur ces trajectoires, on va superposer une série de clichés de ce film selon une technique connue sous le nom de Particle Tracking Velocimetry (PTV). On pourra ainsi déterminer les plans de phase de ces ondes.

On a conçu un programme sous Matlab permettant de convertir les images issues du CCD en image binaire puis de les filtrer en connectant les 8 plus proches voisins reliés par minima d'intensité constante. On établit un suivi en marquant une seule particule. La faible densité de particules héritée du régime initial de rotation sans précession fait que les particules sont essentiellement localisées près des parois. Ceci rend le suivi d'une particule individuelle possible. Cette technique a permis de mettre en évidence des mouvements relatifs de particule fluide essentiellement localisés au centre pour de faibles valeurs du forçage.

Les résultats obtenus pour deux forçages différents sont présentés sur la figure (6.1). Le rayon des trajectoires croît avec le taux de précession. De plus, les trajectoires apparaissent quasi-circulaires et anticycloniques. Ce mouvement décroît en allant vers les parois.

Ces constatations s'expliquent facilement avec les propriétés de la solution linéarisée $m = 1$, stationnaire dans le référentiel en précession. Dans le référentiel du réservoir et de la caméra, elle tourne dans le sens opposé à la rotation. Considérons un champ tournant simplifié, uniforme dans le plan (Ox, Oy) tournant à la vitesse ω : $\vec{u} = V_0 (\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0)$. Une particule située en $\vec{R} = (X, Y, Z)$ et affectée par ce flot vérifie $\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{u}$. L'intégration de cette équation donne

immédiatement la trajectoire : $\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \frac{V_0}{\omega} (\sin(\omega t), -\cos(\omega t), 0)$. Les particules décrivent des cercles de rayon $\frac{V_0}{\omega}$ à la pulsation ω et les trajectoires sont parcourues dans le sens de rotation du champ. Cette analyse est directement applicable au cas de l'onde tournante $m = 1$.

Il est possible à l'aide d'un programme écrit sous Matlab de retranscrire la dynamique non visqueuse d'une particule fluide dont le mouvement est la somme d'un mode de Kelvin $m = 1$ inviscide et d'une vitesse de rotation rigide étudiée dans le référentiel du cylindre. Comme le montre la figure (6.2) et pour un forçage donné, en l'occurrence ($\varepsilon = 210^{-3}$), les trajectoires s'applatissent lorsqu'on s'approche des parois. Le centre de l'écoulement est donc dominé par la dynamique de l'onde inertielle et près des parois par la rotation rigide. Ce programme permet d'établir la correspondance entre le rayon des trajectoires et l'amplitude du mode $m = 1$.

Expérimentalement, pour mener une telle étude, il faudrait étudier pour une trajectoire donnée le temps mis à se reboucler entièrement pour faire un cercle entier. On pourrait ainsi estimer la fréquence de l'onde. Malheureusement, étant donné la trop grande disparité de rebouclage des trajectoires proches du centre, aucun résultat significatif n'a pu être trouvé.

Une donnée caractéristique directement exploitable de l'effet du forçage est le diamètre des trajectoires bouclées, le forçage ayant tendance (qualitativement) à augmenter le diamètre en réponse à l'augmentation du forçage. On peut tracer ces deux paramètres et vérifier qu'une loi linéaire les unit, ce qui permet de qualifier ce régime d'écoulement de « linéaire ».

Afin de caractériser quantitativement ces ondes en présence de faible précession, nous avons mené une étude PIV.

6.2 Champs de vitesse et vorticité par PIV

Nous allons maintenant caractériser ce régime linéaire à l'aide de la PIV. Les champs de vitesse obtenus par PIV permettent de mettre en évidence et de préciser ce qui a été dit précédemment. Nous présenterons les résultats dans l'ordre suivant :

- profil radial des composantes de la vitesse en coordonnées polaires afin de caractériser la rotation différentielle,
- profils azimutaux des composantes de la vitesse en coordonnées polaires en fonction de l'azimuth et identification du mode $m=1$ par un ajustement permettant d'obtenir l'amplitude et la phase,
- variation en fonction du taux de précession.

6.3 Profils radiaux de la vitesse azimutale du mode $m=0$

L'étude de la moyenne azimutale (le mode $m = 0$) de la vitesse azimutale permet de caractériser la présence de rotation différentielle pour le mode axisymétrique. Les graphes représentés en (6.4) montrent l'évolution de la vitesse azimutale en fonction du rayon pour différentes forçages.

Ce graphe résume beaucoup de ce qui a été dit précédemment. Tout d'abord, pour des rayons proches du centre, on observe un pic caractéristique de l'agitation affectant cette région. Les profils, représentés à 3 instants différents séparés consécutivement d' $\frac{1}{6}^{ème}$ s, montrent un très faible écart par rapport à la rotation des parois (de l'ordre de 1 pour 1000). L'écoulement moyen est donc

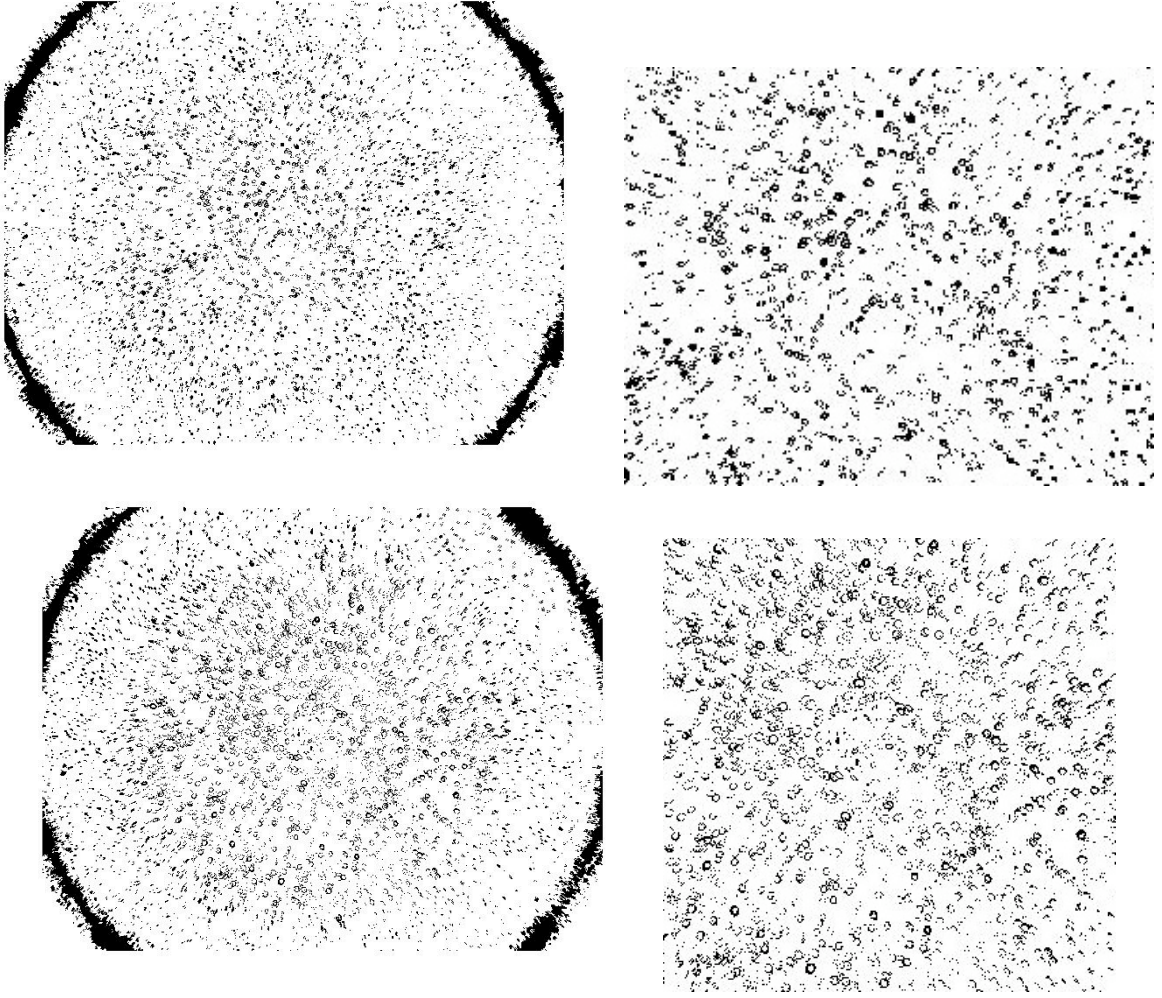


FIGURE 6.1: ($a = 1.17$, $R_e = 140806$) forçage $\varepsilon = 1,2.10^{-3}$ en haut et $\varepsilon = 2,3.10^{-3}$ en bas. Trajectoire de particules dans un écoulement en précession à partir de la solution stationnaire linéarisée pour une faible valeur du taux de précession. Les particules, au centre, ont tendance à avoir un mouvement circulaire caractéristique de la dynamique des ondes inertielles. L'amplitude de ce mouvement s'atténue par viscosité lorsqu'on s'approche des parois.

proche d'une rotation solide que nous ne pouvons pas comparer avec les profils prévus par le couplage faiblement non linéaire.

La PTV a permis de mettre en évidence deux régions différentes au sein de l'écoulement à faible précession et notamment une « agitation » localisée au coeur de l'écoulement. La PIV permet d'identifier plus précisément ce qui est en jeu : l'agitation centrale est en fait un dipôle caractéristique d'un mode à symétrie $m=1$, conséquence directe du forçage par précession. La distribution de vorticité de la fig.(6.7) montre ce dipôle de manière probante. On avait déjà mis en exergue que le mouvement central était dominé par les ondes inertielles mais la PIV permet d'identifier cet écoulement à celui de modes inertiels à nombre d'onde azimutale $m=1$.

Le même programme traduisant la dynamique du mode mode $m=1$ auquel on ajoute une rotation rigide dans le référentiel du cylindre est topologiquement comparable aux clichés PIV, comme le montre la figure (6.6a et 6.6b). L'écoulement bien qu'inviscide fait apparaître deux régions, l'une centrale, l'autre près des parois. Néanmoins, ce champ de vitesse ne fait pas apparaître ce qui a

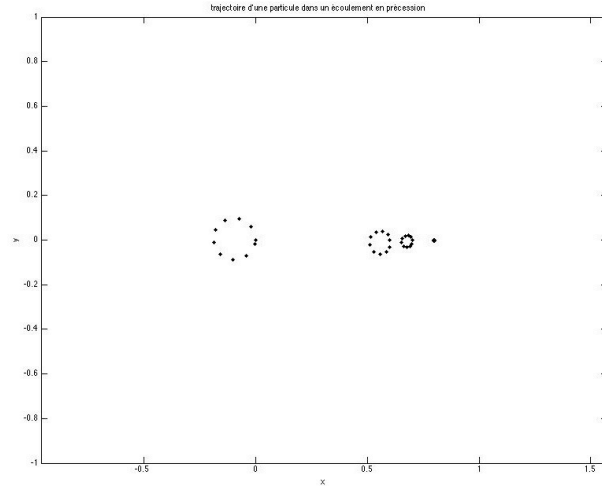


FIGURE 6.2: trajectoire des particules fluides obtenues à partir de la solution analytique stationnaire (modes de Kelvin forcée par la précession dans le référentiel du cylindre)

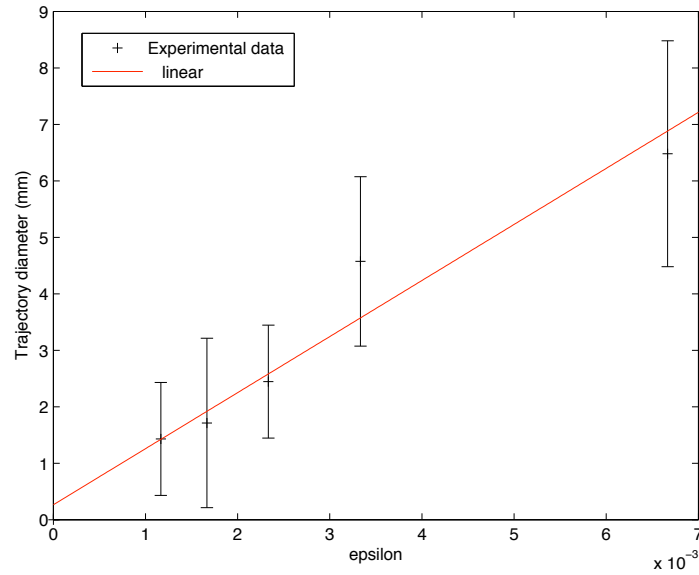


FIGURE 6.3: ($a = 1.17$, $R_e = 140806$) Evolution du diamètre des trajectoires fermées des particules fluides en fonction du forçage dans l'écoulement à faible précession dont les mesures sont réalisées dans le référentiel du cylindre. Les trajectoires sont réalisées après le traitement PTV dans la région centrale où les trajectoires sont le mieux distinguées.

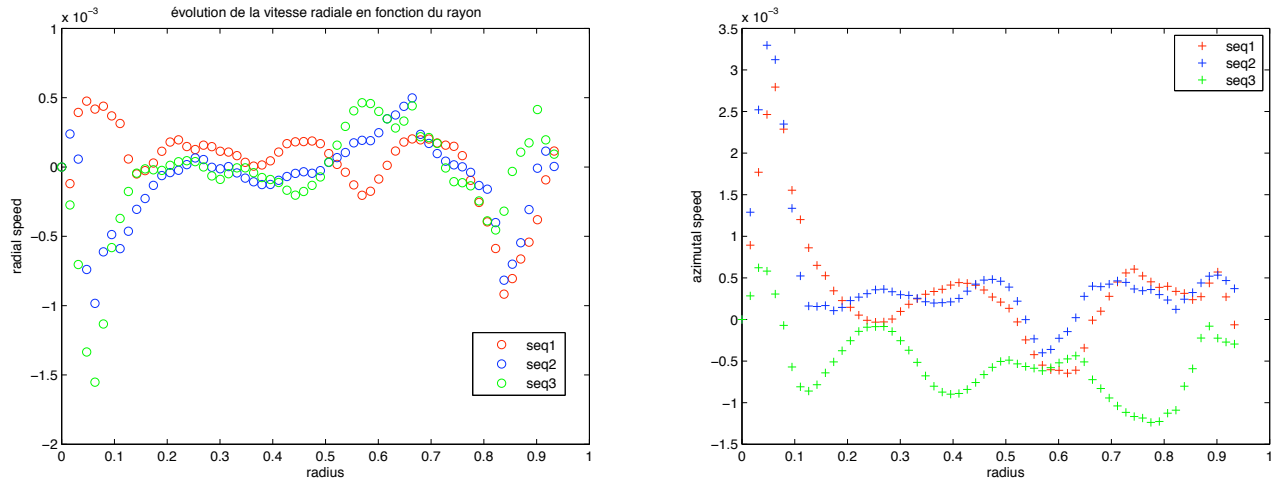


FIGURE 6.4: ($a = 1.17$, $R_e = 140806$, $\varepsilon = 6.67 \cdot 10^{-3}$) évolution de la vitesse radiale (à gauche) et de la vitesse azimutale (à droite) (toutes deux moyennées sur ϕ) en fonction du rayon pour 3 séquences séparées d' $\frac{1}{6}$ s. Chaque cliché étant déphasé de $\frac{\pi}{3}$, on retrouve ce décalage dans la dynamique temporelle qui n'existerait pas si on était dans le référentiel en précession. Note Bene : les vitesses sont normalisées par la vitesse de la paroi, sauf indication contraire

été décrit comme une agitation centrale.

Quant à la distribution de vorticité, le forçage se traduit par une concentration de celle-ci en des zones localisées. Les zéros de vorticité permettent de déterminer le nombre d'onde radial. La vorticité étant vue comme la quantification d'un taux de rotation local, et étant donné, les faibles valeurs observées il existe très peu de rotation différentielle. Par ailleurs, on voit sur les graphes montrant l'évolution de la vitesse azimutale en fonction du rayon que celle-ci double en amplitude lorsqu'on double le forçage, ce qui explique le qualificatif de linéaire à propos de ce régime. Les caractéristiques décrites ici se retrouvent si on double la vitesse de rotation.

On peut obtenir l'évolution du champ de vitesse en coordonnées polaires. On représente la vitesse radiale en fonction du rayon pour 3 valeurs du forçages. L'iso-contour de la fonction courant permet aussi de rendre compte de l'observation du mode $m = 1$.

6.4 Profil azimutal de la vitesse radiale et identification des modes azimutaux $m=1$

Resituons le problème : dans la limite des faibles taux de précession, la solution des équations linéarisées est supposée être une bonne approximation de l'écoulement. Les études menées au chapitre 2 ont mis en évidence qu'une solution possible est une solution stationnaire dans le référentiel en précession dont l'amplitude est proportionnelle au forçage. Le noeud du problème est donc de déterminer un taux de précession critique où ces solutions ne seront plus valables et le système devra alors être décrit par d'autres arguments.

L'analyse de ces solutions aux équations linéarisées met en évidence le forçage des ondes inertielles sur le mode azimutal $m = 1$, (ondes en rotation égale et opposée à la rotation du réservoir autour de son axe et donc de phase stationnaire dans le référentiel de la précession). Comme la caméra utilisée pour les clichés PIV est en co-rotation avec le réservoir, ce mode forcé $m = 1$

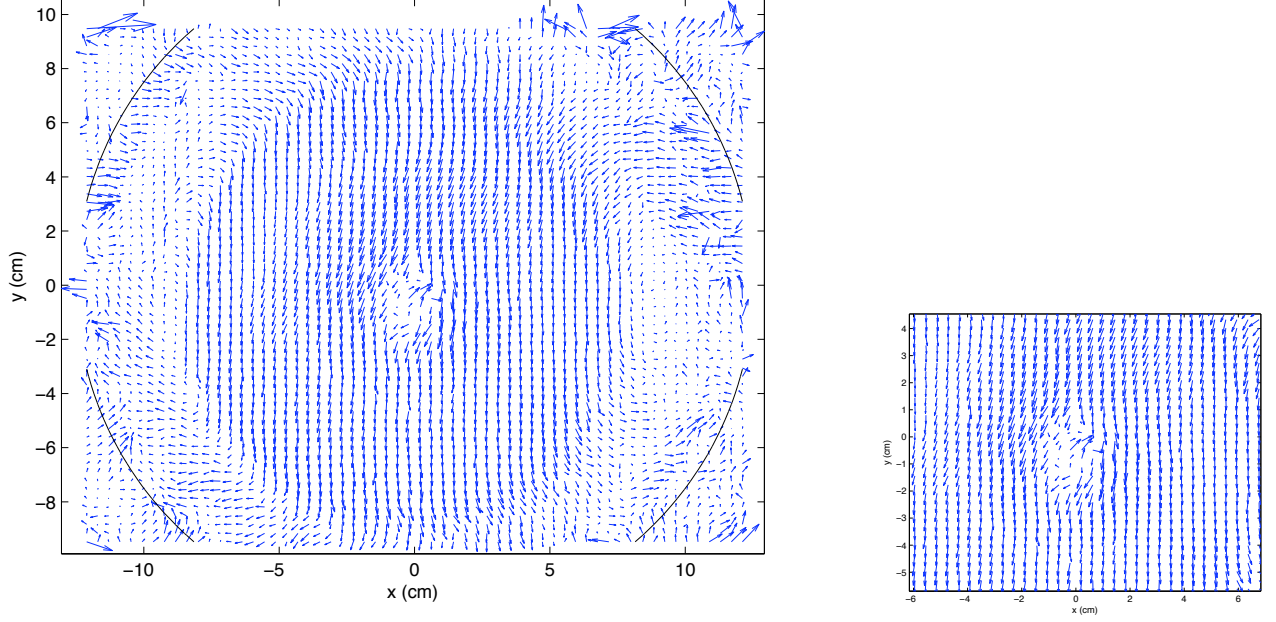


FIGURE 6.5: ($a = 1.17$, $R_e = 140806$, $\varepsilon = 1.67 \cdot 10^{-3}$) Champ de vitesse obtenu par PIV et zoom sur la région centrale. Ces résultats rendent compte du mouvement net des particules fluides au centre observé par PTV

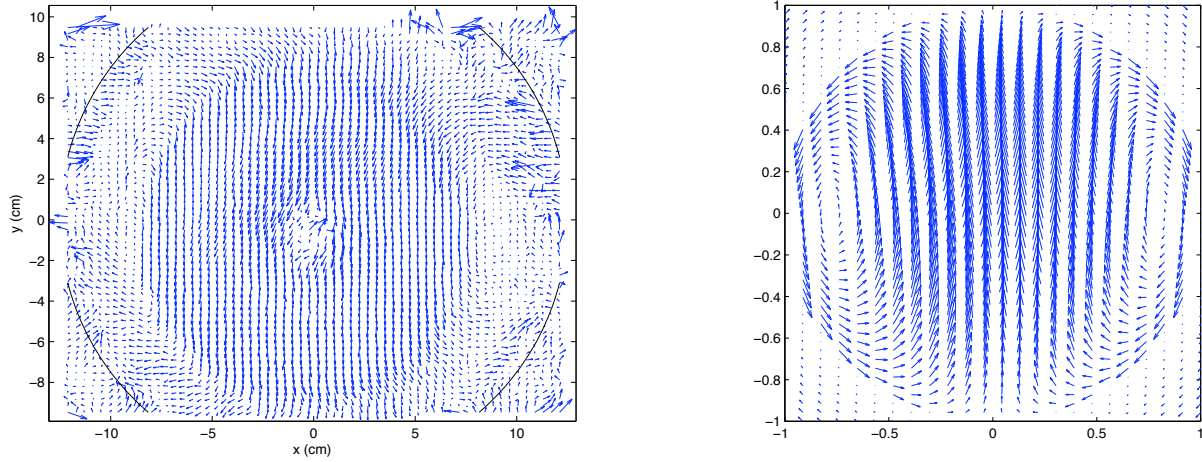


FIGURE 6.6: Comparaison entre le champ de vitesse issu du traitement PIV (à gauche) et la topologie du champ de vitesse dans le référentiel du cylindre (à droite) : somme d'une rotation solide azimuthale et du mode de Kelvin fondamental ($m=1$) dans le référentiel du cylindre pour $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$. On rappelle ici le champ de vitesse issu de la solution aux équations linéarisées.

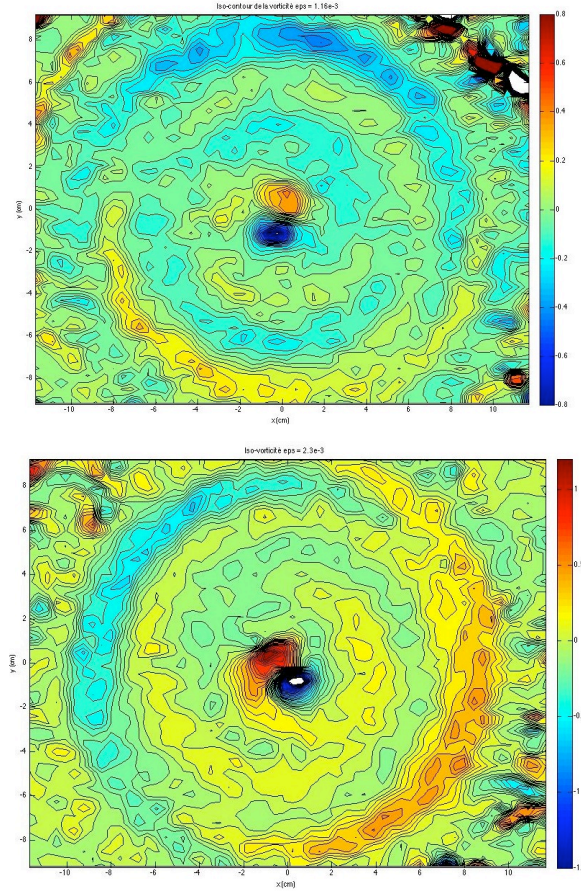


FIGURE 6.7: ($a = 1.17$, $R_e = 141000$, $\varepsilon = 2.17 \cdot 10^{-3}$ et $\varepsilon = 4.32 \cdot 10^{-3}$) champ de vorticité pour 2 forçages différents permettent de mettre en évidence le dipôle dont l'orientation est décalé de $\frac{\pi}{3}$ à chaque mesure.

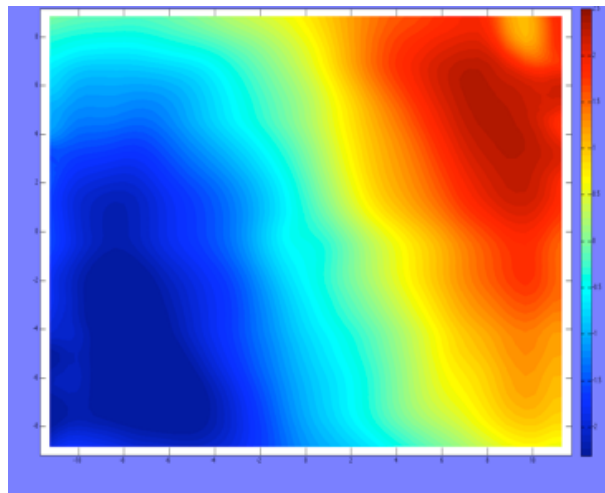


FIGURE 6.8: ($a = 1.17$, $R_e = 141000$, $\varepsilon = 2.17 \cdot 10^{-3}$) Iso-contour de la fonction de courant pris au $3/4$ de la longueur du cylindre.

n'est pas directement visible (ni les autres modes azimutaux excités auxquels on ne s'intéresse pas ici) ou plus exactement pas directement comparable aux simulations numériques réalisées dans le référentiel en précession. Dans le but de mettre en évidence cet aspect, nous avons établi un programme qui se décline de la manière suivante :

- conversion du champ de vitesse en coordonnées cartésiennes sur une grille cartésienne 60*60 (issu de DPIV) en composantes polaires (var, vaz) sur une grille polaire de résolution variable (par exemple 60 points radiaux $\times$ 128 points azimutaux). Cette opération est expliquée au chapitre 4 (Description de l'expérience ATER).
- En régime laminaire, pour un rayon donné, le profil azimutal attendu pour chaque composante de vitesse est la superposition d'une constante (mode $m=0$, cf rotation différentielle) et d'une sinusoïde de période 2π (mode $m = 1$). Par régression linéaire, on peut donc ajuster le profil mesuré expérimentalement avec celui prédit théoriquement. Cela permet de déterminer pour chacune des composantes radiale et azimutale, la vitesse moyenne, l'amplitude du mode $m = 1$ à l'instant considéré et la phase.

Considérant une structure stationnaire dans le référentiel en précession, si le réservoir tourne à n tours par secondes, comme les champs de vitesse sont échantillonnés avec un intervalle de $1/6$ s lié à la caméra (qui fonctionne à 12 images par seconde), on s'attend à des phases décalées de $\frac{2n\pi}{6}$ entre clichés consécutifs. On s'attend aussi à une variation de chaque composante de la vitesse en un point de manière sinusoïdale au cours du temps. En prenant des clichés consécutifs, on peut obtenir l'amplitude du mode $m = 1$ pour le taux de précession choisi par régression linéaire dans le temps avec une sinusoïde de période égale à la période de rotation, (échelle de temps caractéristique des ondes inertielles).

L'analyse de la rotation différentielle (mode $m = 0$) est évidemment basée sur la composante azimutale de la vitesse. Pour le mode $m = 1$, on peut utiliser les deux composantes (azimutale et radiale), mais dans ce qui suit, on se borne à présenter les résultats obtenus avec la composante radiale.

Comme la rotation différentielle est minimale dans la région centrale (avec un maximum de vitesse azimutale au delà de $r=0.5$), c'est dans cette région que le mode $m = 1$ devrait être plus facilement observable. En pratique, on utilise les mesures à l'intérieur du rayon $r = 0.1$.

Les champs de vitesse utilisés dans cet exemple sont toujours situés dans le plan $z = \frac{3L}{4}$ et à cinq instants consécutifs¹.

La figure 6.9 montre le profil azimutal de la vitesse radiale pour un rayon fixé à $r = 0.1$ (courbe en rouge) et son ajustement par une sinusoïde (courbe en bleu), qui suggère un écoulement relativement uniforme dans la région choisie, qui est la signature du mode $m=1$. Le balayage de la région centrale par différents rayons confirme cette idée. Le tableau 6.1 montre en effet que les fluctuations d'amplitude et de phase des sinusoïdes calculées pour ces rayons restent faibles.

1. A un rayon donné, la moyenne azimutale de la vitesse radiale mesure l'intégrale de la divergence de la projection du champ de vitesse dans un plan transverse. Si la divergence tridimensionnelle doit être évidemment nulle en tout point (écoulement incompressible), ce n'est pas le cas de la divergence bi-dimensionnelle puisqu'on sait que la vitesse axiale de la solution linéarisée dépend de z .

$\frac{r}{R}$	$\langle \text{var} \rangle$	A	p
0.05	0.1461	0.9596	2.1037
0.1	0.1656	1.0548	2.0834
0.15	0.1825	1.2977	2.0781
0.2	0.1973	1.1850	2.1335
0.25	0.2108	0.9412	2.2578

Table 6.1: ($a = 1.17$, $R_e = 140806$, $\varepsilon = 2.27 \cdot 10^{-3}$) Tableau représentant la valeur moyenne azimutale de la vitesse radiale pour cinq rayons dans la région centrale, son amplitude et sa phase. On en déduit que la phase est stationnaire, et que l'amplitude du mode croît avec le rayon.

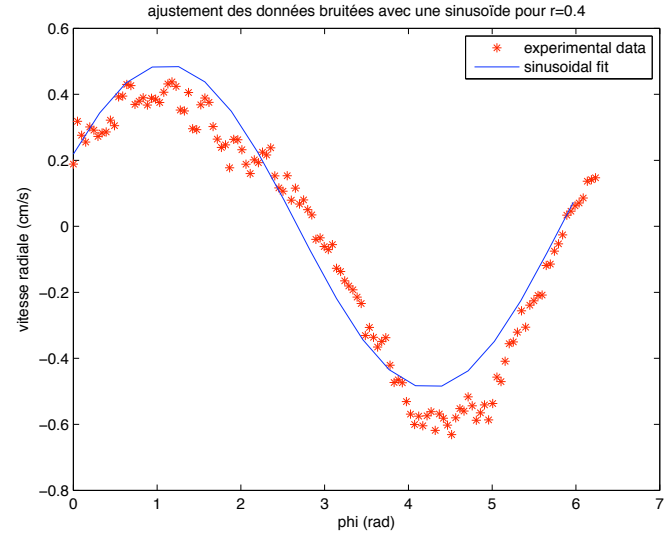
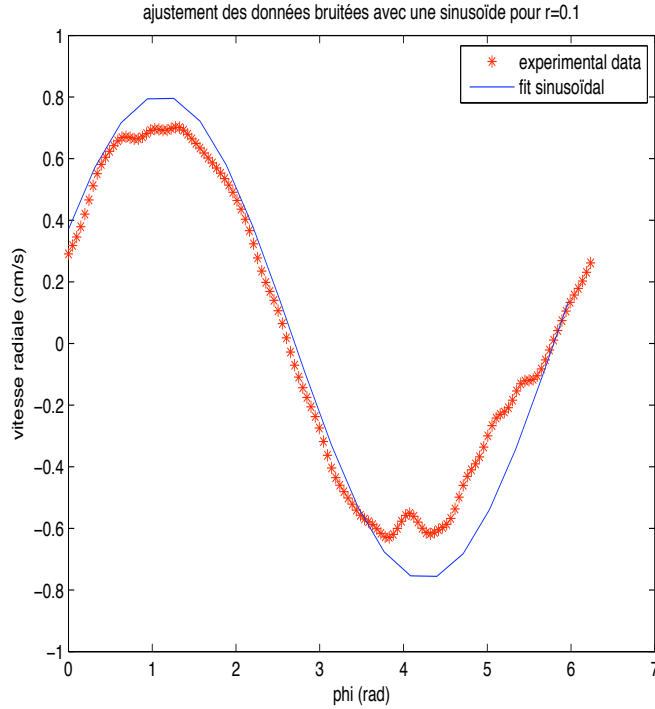


Figure 6.9: ($a = 1.17$, $R_e = 140806$, $\varepsilon = 2.27 \cdot 10^{-3}$) Ajustement des données expérimentales avec une sinusoïde pour 2 rayons, l'un proche du centre, l'autre proche des parois

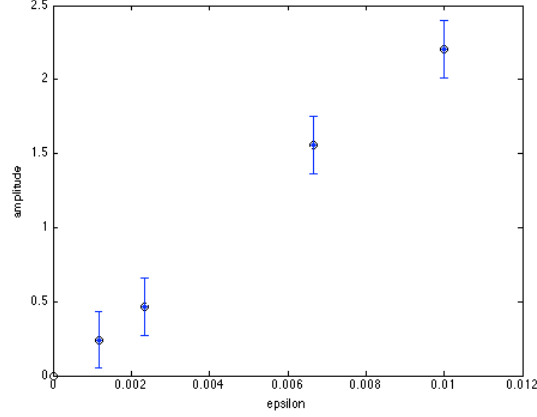


Figure 6.10: ($a = 1.17$, $R_e = 140806$) Evolution de l'amplitude moyenne du mode $m=1$ en fonction du taux de précession

6.5 Evolution de l'amplitude du mode $m=1$ en fonction du forçage

Dans ce chapitre, le taux de précession ($\epsilon < 0.01$) et le nombre d'Ekman ($E < 710^{-6}$) sont très inférieurs à l'unité: ces paramètres expérimentaux sont compatibles avec les hypothèses validant la linéarisation des équations dynamiques inviscides. On s'attend donc à retrouver la solution linéarisée, stationnaire dans le référentiel en précession, sous forme d'une onde tournante dans le sens anticyclonique à la fréquence de rotation. Le bilan des observations est mitigé: d'une part, la structure radiale étendue du mode $m=1$ n'est pas clairement observée dans tous les clichés et le mode $m=1$ est visible plutôt comme un "mode central" $m=1$, alors que, d'autre part, l'amplitude du champ de vitesse suit bien la prédiction de l'approximation linéaire. Dans ce cadre, la précession apparaît comme un terme de forçage au second membre de l'équation des ondes inertielles et, en dehors des allongements résonnants, la vitesse de l'écoulement perturbé doit varier comme ϵ avec un maximum au centre (mode $m=1$). Ce maximum dépend de l'allongement, qui détermine la valeur de cet extremum à partir du spectre des modes de Kelvin réalisant la condition aux limites radiale de vitesse nulle aux extrémités du cylindre (cf développement de Dini). La figure 6.10 obtenue avec l'allongement $\frac{L}{2R} = 1.17$ (non résonnant), $R = 14.5\text{cm}$ et $\Omega_R = 60\text{ t/min}$ montre bien une variation linéaire de la vitesse dans la région centrale en fonction du taux de précession. Elle est telle que

$$u_{max} = A\epsilon R\Omega_R$$

avec A proche de 2.4. On obtient une valeur de A comparable en utilisant les résultats de la PTV qui montrent que le diamètre des trajectoires des traceurs varie linéairement avec le taux de précession. Pour visualiser la variation de A avec l'allongement, on pourra par exemple se reporter à la figure 6 de l'article cité en [78].

On peut alors appliquer ce traitement afin d'étudier l'évolution de l'amplitude $m = 1$ en fonction du taux de précession. Le tableau 6.1 a permis de limiter la zone d'amplitude stable en fonction du rayon. On va alors moyenner sur cette zone et pendant une période de rotation. Nous pourrions alors établir l'évolution de l'amplitude moyenne en fonction de quatre valeurs du forçage.

Ces résultats confirment que l'amplitude du mode forcé varie bien linéairement en fonction du taux de précession. On peut alors dire que l'énergie injectée au sein de l'écoulement sous forme de

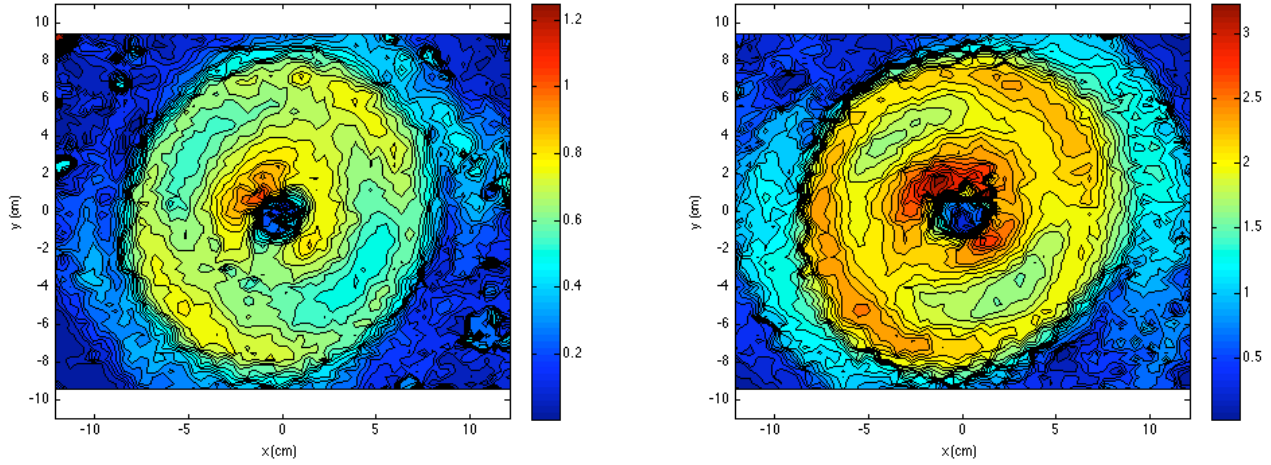


FIGURE 6.11: ($a = 1.17$, $R_e = 141000$, $\varepsilon = 1.17.10^{-3}$ et $\varepsilon = 3.3267.10^{-3}$) Distribution spatiale de la norme de la vitesse à $\varepsilon = 1.17.10^{-3}$ (gauche) et $\varepsilon = 3.33.10^{-3}$. La zone de forte vitesse s'étend du centre vers les parois en fonction du forçage.

précession concerne essentiellement la croissance linéaire du mode $m=1$ dans le régime linéaire.

Une quantité pertinente qui rend compte de l'évolution du système en fonction du forçage est l'intensité du champ de vitesse. Les figures (6.11) montrent que l'agitation centrale gagne l'ensemble du fluide. Le forçage des ondes inertielles devient de plus forte amplitude. Cependant, à partir d'une certaine valeur, aucune étude PIV n'a pu être validée. Il n'a pas été possible d'étudier l'évolution et l'identification exactes de modes de Kelvin telles que cela a été fait dans les travaux de Mannasseh (1992) [133, 119] et Meunier et al. (2008).

L'étude du régime linéaire est alors limitée par la résolution de notre appareil de mesure.

6.5.1 Discussion et conclusion

Dans ce chapitre, les paramètres expérimentaux sont compatibles avec les hypothèses validant la linéarisation des équations dynamiques inviscides : le taux de précession ($\varepsilon < 0.01$) et le nombre d'Ekman ($E < 710^{-6}$) sont très inférieurs à l'unité. On s'attendait donc à retrouver la solution linéarisée, stationnaire dans le référentiel en précession, sous forme d'une onde tournante dans le sens anticyclonique à la fréquence de rotation. Le bilan est mitigé : la structure radiale étendue du mode $m=1$ n'est pas clairement observée dans tous les clichés et le mode $m = 1$ est visible plutôt comme un mode central, alors que, d'autre part, l'amplitude du champ de vitesse suit bien la prédiction de l'approximation linéaire. On rappelle que selon celle-ci, la précession agit comme un terme de forçage dans l'équation des ondes inertielles et, en dehors des allongements résonnants, la vitesse de l'écoulement perturbé varie comme $\varepsilon R \Omega_R$ et elle est maximale au centre. Pour l'allongement $L/2R = 1.17$ (non résonnant), la figure 6.10 montre bien une variation linéaire de la vitesse dans la région centrale telle que $u_{max} = 2\varepsilon R \Omega_R$ (par exemple, pour $R = 14.5$ cm et $\Omega_R = 2\pi$ rad/s, $u_{max} = 2$ cm/s à $\varepsilon = 0.009$). Une relation analogue est trouvée à partir de l'analyse des trajectoires par la méthode PTV (Particle tracking velocimetry).

Chapitre 7

Instabilité et régime de tourbillons cycloniques

7.1 Présentation des observations

On a décrit au chapitre 4 les différents régimes d'écoulement, et on a montré qu'à partir d'un certain taux de précession, ε_C , les trajectoires des particules fluide deviennent désordonnées. Les fluctuations temporelles sont importantes et la PIV n'a pas donné de résultats utilisables pour ce régime de transition, l'exploration du choix du pas de temps optimum pour une PIV avec un minimum de bruit n'ayant pas abouti pour le moment.

Les observations sont facilitées par une forte concentration de particules près des bords héritée de l'étape de mise en rotation du cylindre.

Dans le régime qui s'établit ensuite, on observe un certain nombre (souvent 3 ou 4) de vortex localisés dont le centre est stationnaire dans le référentiel de la caméra, ce qui donne l'impression que ces tourbillons font du « sur place » cela signifie que le centre de ces tourbillons est animé du mouvement de rotation solide.

La figure (7.1) illustre ce que nous disons. Une forte concentration de particules se situe vers les parois et certaines d'entre elles viennent s'enrouler autour des tourbillons. Les vortex apparaissent plus clairement sur la figure (7.2) qui montre l'analyse PIV de la figure (7.1).

On appellera par la suite « *éruption* » l'ensemble de particules qui viennent des parois et s'enroulent autour des vortex. En moyenne, ces jets sont au nombre de 6 ou 7.

Comme dans le problème de la mise en rotation, le système dépend fortement de la rampe du forçage. Il manifeste de l'hysteresis. On appellera rampe *ascendante* (resp. *descendante*), le cas $\frac{d\varepsilon}{dt} > 0$ (resp. $\frac{d\varepsilon}{dt} < 0$). Comme pour bon nombre d'écoulements, on peut faire remarquer à ce stade que les structures observées ne dépendent pas seulement de la valeur des paramètres de contrôle, mais aussi du chemin suivi pour atteindre ces valeurs : l'écoulement correspondant (à jeu de paramètres donnés) n'est pas unique mais dépend de l'histoire de celui-ci.

Les différentes étapes de cette instabilité sont commentées et détaillées sur la figure (7.3). Elles sont, à chaque fois, illustrées par des clichés issus directement de l'enregistrement de la caméra CCD de l'écoulement dans un cas $\varepsilon = 0.024 - 0.025$ $a = 1.32$ $R_e = 1.4 \cdot 10^5$. Les visualisations ont été faites dans un plan situé au $\frac{3}{4}$ de la longueur. Cette instabilité a été observée pour différentes vitesses de rotation et différents allongements. Comme le montre la fig.(7.4) La variation du seuil ε^* est constatée pour différents allongements mais ne dépend pas de la vitesse de rotation considérée.

Suite à l'éruption, les jets sont advectés par le fluide essentiellement dominé par la rotation

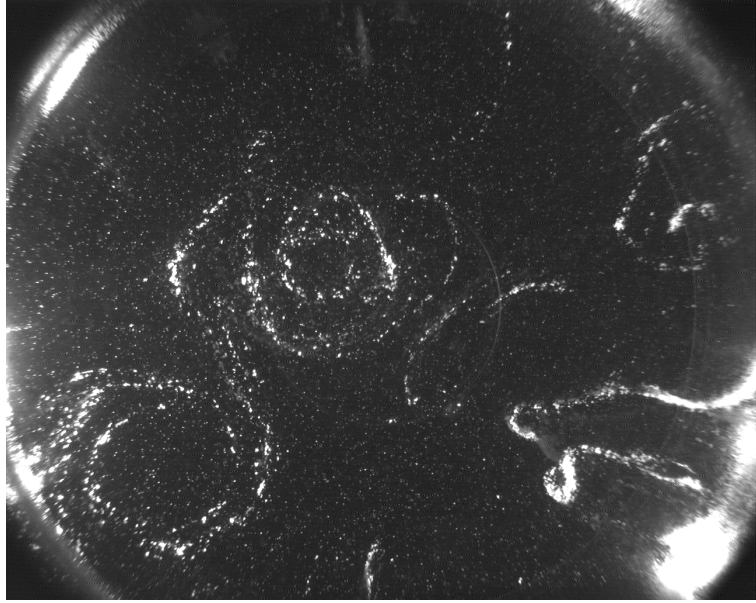


Figure 7.1: Observation du changement d'état de l'écoulement. On peut distinguer les vortex localisés près des parois. A une certaine valeur du forçage, des jets radiaux provenant des parois latérales pénètrent dans le coeur de l'écoulement dominé par la rotation solide et le forçage des modes azimuthaux $m=1$. Les jets deviennent des structures en champignon qui s'enroulent pour former des vortex.

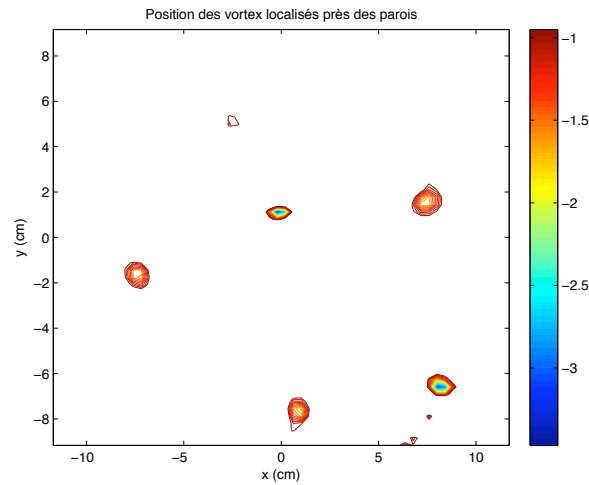


Figure 7.2: Distribution de la vorticité à la transition entre le régime de l'onde tournante (dominance du mode $m = 1$) et le régime de tourbillons cycloniques. Ce graphique représente l'analyse PIV du cliché (7.1) et met en évidence les tourbillons (bien localisés) où vont s'enrouler au fur et à mesure du développement de l'instabilité, les éruptions de fluide provenant des couches proches des parois. La vorticité est négative comme la rotation qui est dans le sens horaire. En régime stationnaire, la vorticité caractéristique d'un tourbillon est légèrement supérieure à celle de l'entraînement par rotation rigide.

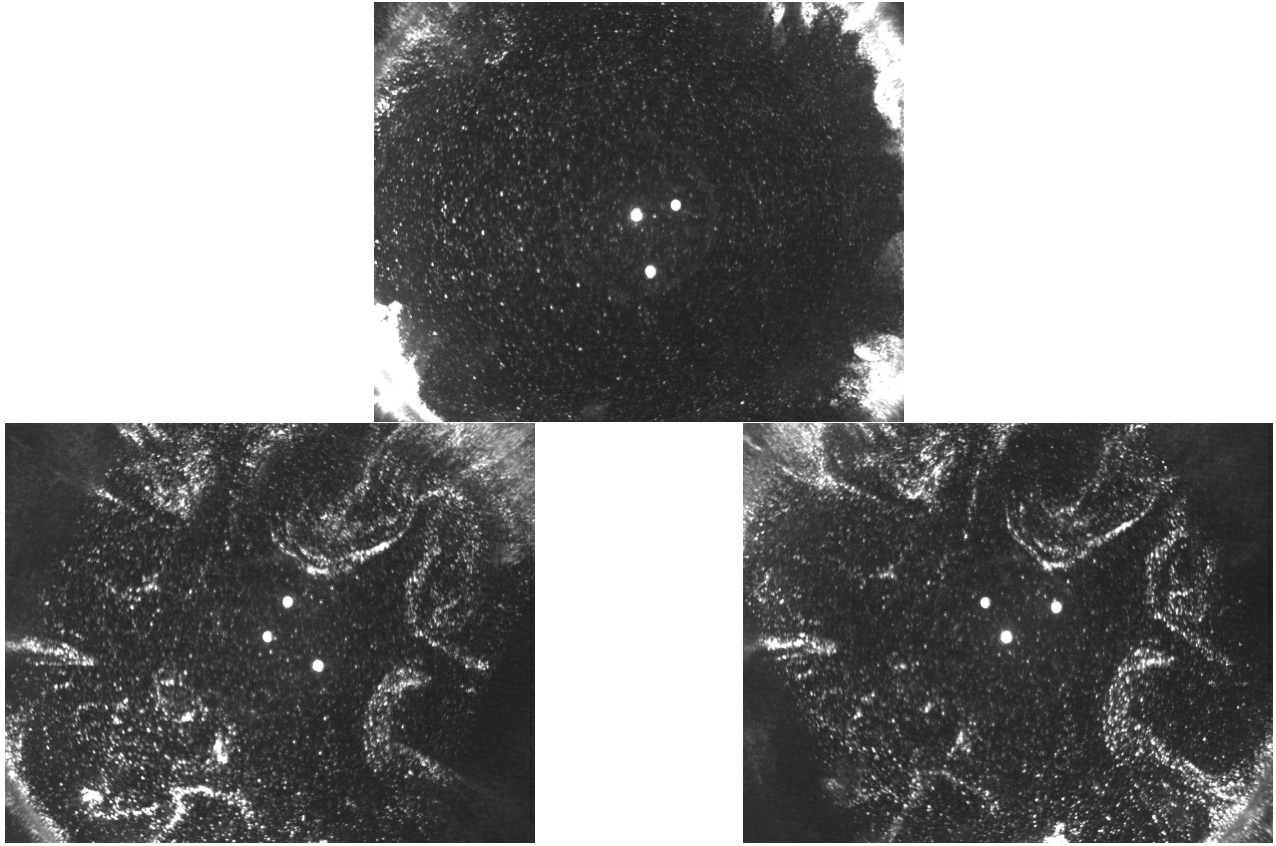


FIGURE 7.3: Le cliché du haut illustre le mouvement d'éruption dont l'origine se situe dans les zones d'accumulation de particules mentionnées dans le texte. On parle d'*éruption* en raison de la trajectoire en forme de jets des particules fluides entraînées vers l'intérieur de l'écoulement. Comme le montrent les clichés suivants, ces jets ne sont pas tous semblables.

Les deux clichés du bas sont séparés d' $\frac{1}{6}$ ème de seconde. On voit les trois fibres optiques servant au repérage qui ont bien tourné de $\frac{\pi}{3}$. Par ailleurs, on observe l'entraînement par le mouvement moyen des structures filamenteuses, et surtout la pénétration dans le coeur de l'écoulement de ces éruptions qui vont aboutir à la formation de 3 ou 4 cyclones.

d'ensemble. On voit alors apparaître des structures en forme de tête de champignons dont la taille varie d'un motif à l'autre.

Les questions que nous pouvons nous poser à ce stade sont les suivantes : Quelle est l'origine de cette instabilité excitant des modes $m = 6, 7$ à la paroi ? Quel est le rapport avec le régime permanent qui lui succède ? Peut-on mettre en parallèle cette instabilité avec celle observée dans l'expérience de l'IRPHE [55] où sont clairement identifiés des modes $m = 5, 6$? Ces 6, 7 jets peuvent-ils correspondre à des modes de Kelvin $m = 6, 7$? Notons qu'une interprétation alternative des jets issus de la paroi est possible: des tourbillons existant au sein du fluide peuvent engendrer de tels jets radiaux au moment où ils viennent à s'approcher de la paroi, du moment que des traceurs s'y trouvent sédimentés en nombre suffisant.

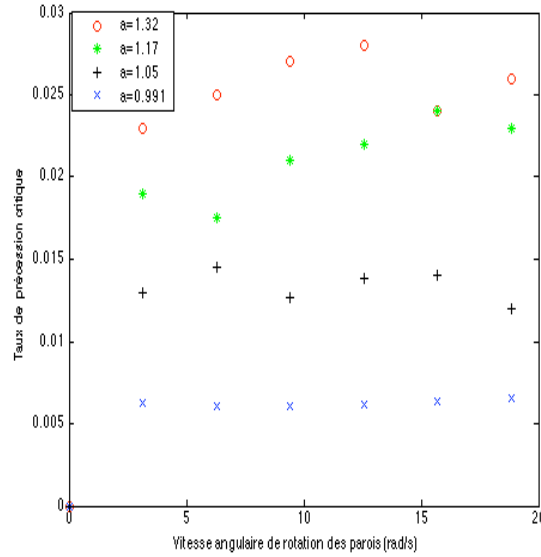


FIGURE 7.4: Evolution du taux de précession critique ε_c en fonction de la vitesse de rotation pour différents allongements.

7.2 Etude du régime permanent des tourbillons cycloniques

7.2.1 Champs de vitesse et vorticité instantanés

L'écoulement est composé de 3 ou 4 tourbillons bien délimités et de forme circulaire comme le montre la figure (7.5a).

Ces tourbillons concentrent la vorticité relative de manière spectaculaire (7.5b), ce qui signifie qu'ils sont en rotation rapide. Nous observons qu'ils se situent dans une zone de rayons intermédiaires entre le tiers et les deux tiers du rayon du cylindre. Nous présentons en Fig.7.6 les distributions spatiales du champ de vitesse et la norme de celui-ci. La figure (7.6a) donne la topologie du champ de vitesse dans le plan (r, ϕ) ou (x, y) en coordonnées cartésiennes. On peut constater que ces vortex tournent dans le même sens que la rotation des parois : ce sont des vortex cycloniques¹ (que nous appellerons par commodité *cyclone*). De prime abord, nous constatons que l'écoulement inter-vortex dépend très fortement et de façon non triviale de l'intensité du tourbillon considéré qui perturbe son voisinage proche. Sur la figure (7.6b) est représentée la distribution de magnitude qui permet de repérer le cyclone le plus intense.

Le champ de vitesse défini sur la grille PIV donne accès à la topologie. La norme quantifie l'intensité des tourbillons et la vorticité mesure le «taux de rotation» et donne une estimation plus réaliste de l'étendue d'un vortex.

7.2.2 Trajectoire des structures tourbillonnaires

La figure (7.7) montre des distributions de vorticité séparées d'une seconde (donc un tour de rotation du cylindre) les unes des autres. On met ainsi en évidence la très lente dynamique des cyclones qui sont advectés par la rotation du cylindre. Pour étudier plus précisément la nature des

1. Ces structures tourbillonnaires ressemblent à celles rencontrées dans les océans [76]

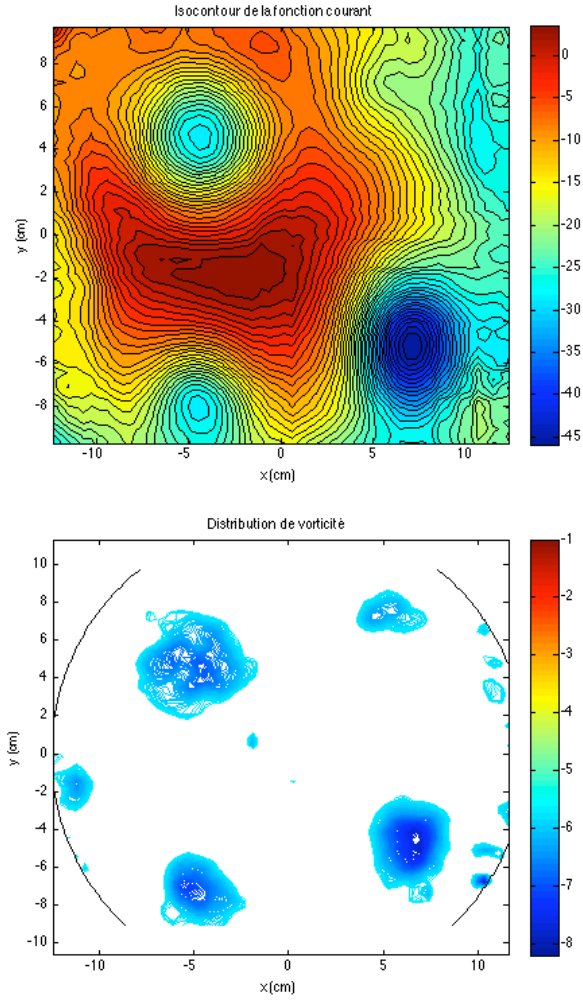


Figure 7.5: ($a = 1.16, \varepsilon = 0.033, R_e = 140806$)

a) Distribution des niveaux iso-contour de la fonction de courant. On voit très nettement la présence des vortex.

b) Distribution de la vorticité instantanée. Les tourbillons concentrent fortement la vorticité qui devient comparable à celle des parois qui seraient calculées dans le référentiel du laboratoire :

$$\omega_{Z,paroi} = 2\Omega_R = 4\pi$$

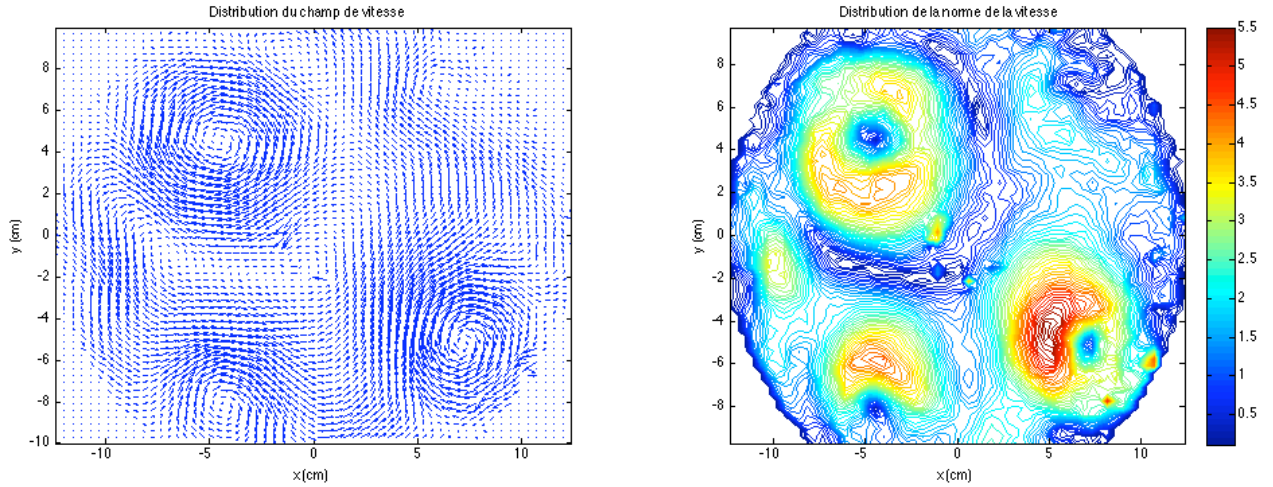


Figure 7.6: ($a = 1.16, \varepsilon = 0.033, Re = 140806$) a) Distribution du champ de vitesse. Les vortex sont de sens cyclonique car ils tournent dans le même sens que la rotation du cylindre. b) Distribution de la norme du champ de vitesse. La norme du champ de vitesse permet de repérer les cyclones les plus énergétiques et les plus intenses. On vérifie par ailleurs qu'ils ont une distribution à peu près équivalente avec un coeur identifiable.

trajectoires, on choisit de suivre le cyclone le plus étendu (celui pour lequel, on peut facilement repérer un centre par le minimum de vorticité).

On peut néanmoins mettre en exergue un fait important : les structures cycloniques sont animées d'un mouvement global en sens contraire de la rotation. Outre la présence de rotation différentielle d'une importance majeure en soi, ce régime semble être en sous rotation par rapport à la rotation des parois.

La figure (7.8) montre une trajectoire d'apparence lente cycloïdale : la rotation différentielle semble être perturbée par le passage de l'onde tournante toutes les secondes ($\Omega_R = 1tr/s$).

7.3 Profils de vitesse

Nous allons considérer dans cette section la distribution des composantes du champ de vitesse. Nous allons d'abord considérer les profils en fonction de la coordonnée radiale et moyennée en ϕ .

Tout d'abord, la fig. 7.9 montre que l'écoulement est essentiellement azimutal au sens ou l'amplitude de la vitesse radiale moyennée sur une période de rotation est très faible comparée à la vitesse azimutale. La présence des structures tourbillonnaires change donc de manière importante la dynamique de l'écoulement. On a d  j signalé au cours du commentaire sur le film en section 5.5.2 l'observation d'une rotation différentielle qui affecte l'advection des cyclones.

Cette rotation différentielle est visible sur la moyenne azimutale du profil de vitesse azimutale en 7.10b. Il est à noter tout de fois que l'amplitude de la rotation différentielle, à forçage donné, dépend de l'allongement comme il sera montré dans la section 7.6.

Nous avons représenté dans la figure 7.10a la vitesse azimutale instantanée pour 6 instants séparés d'1/6  me s (limite de la résolution temporelle). Ce graphique permet de montrer que la distribution de cette vitesse dépend de l'advection des cyclones donc de la distribution spatiale de

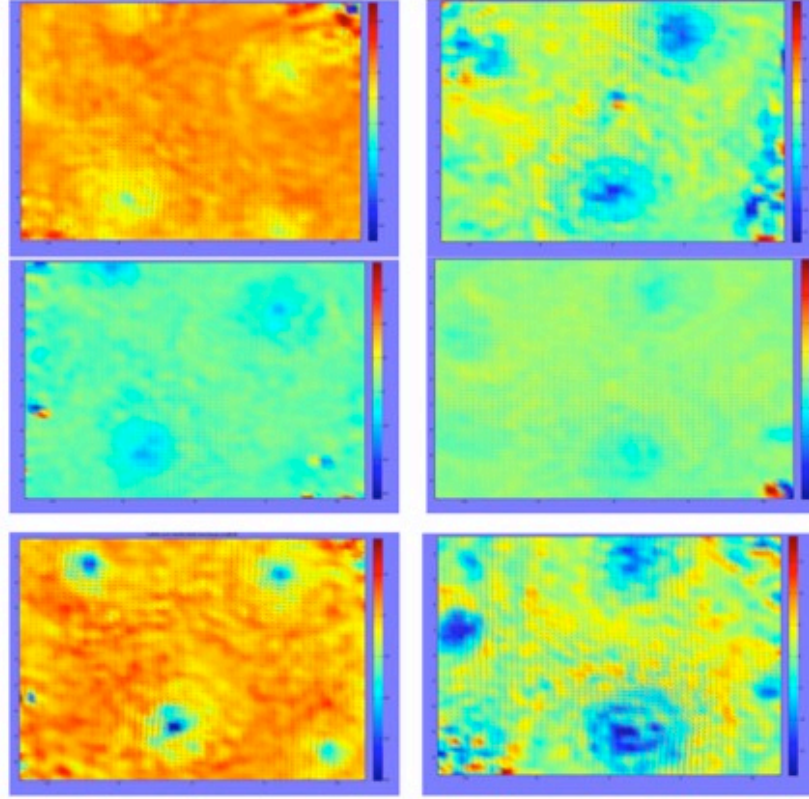


Figure 7.7: ($a = 1.26, \varepsilon = 0.033, R_e = 140806$) Séquence d'évolution des tourbillons dans l'écoulement. L'intervalle entre deux clichés est de 1 seconde. Le sens chronologique est de haut en bas. (Le premier cliché de séquence est en haut à gauche. Le suivant est situé en bas à gauche, etc...). On constate la stabilité de ce régime : il ne peut pas être considéré comme un simple régime transitoire mais bel et bien un état d'équilibre du système. Si on laisse à un forçage constant ce système, on retrouve l'écoulement de tourbillons cycloniques. Pour cette série de clichés, la table des couleurs change à chaque graphique

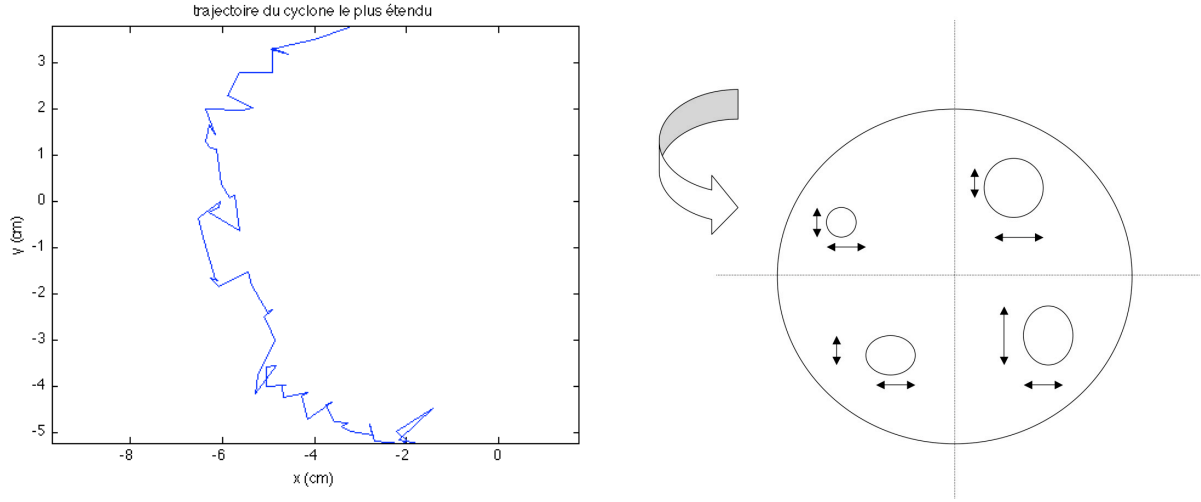


Figure 7.8: ($a = 1.26, \varepsilon = 0.033, R_e = 140806$) Trajectoire d'un cyclone (le plus étendu) en fonction du temps. Le centre du tourbillon est repéré par le minimum de vorticité. Cette figure évoque une cycloïde sous-échantillonnée. Les échelles ne sont pas similaires mais le mouvement a une tendance nette à la spirale, ce qui indique que la dynamique de ces structures est influencée par l'interaction entre la rotation d'ensemble (assimilée au mode $m=0$) et le forçage (assimilée au mode $m=1$) comme le montre le graphe illustrant cette idée.

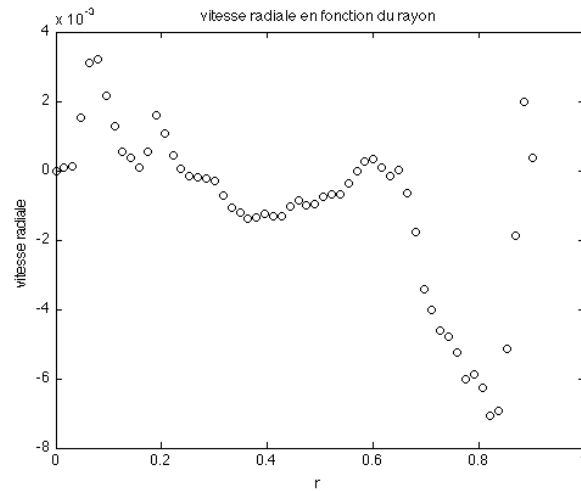


Figure 7.9: ($a = 1.16, \varepsilon = 0.033, R_e = 140806$) Profil de vitesse radiale moyennée sur une période de rotation. La très faible amplitude permet de conclure que la dynamique de l'écoulement est essentiellement azimutale.

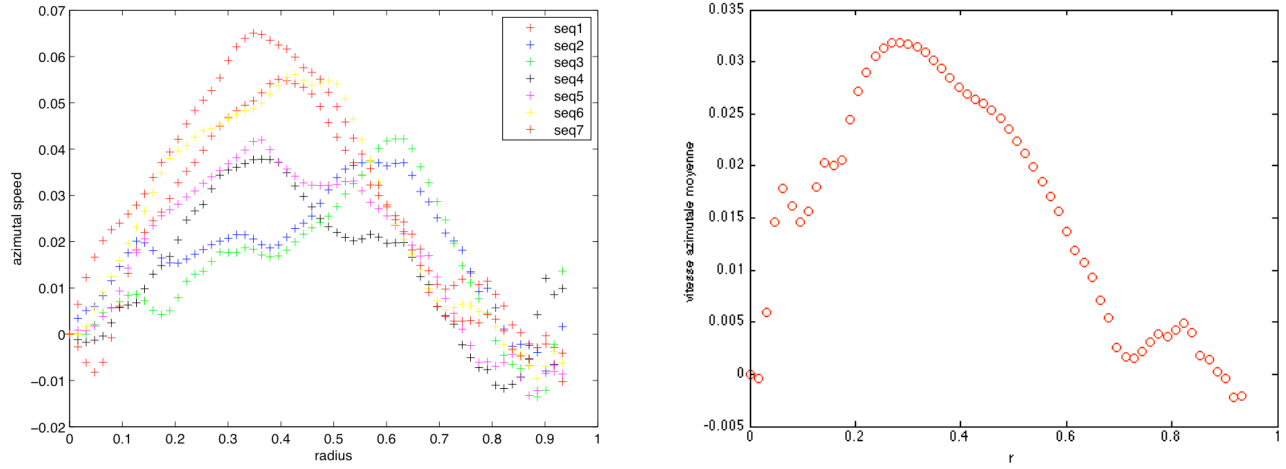


Figure 7.10: Profil de distribution de la vitesse azimutale en fonction du rayon pour une séquence, et moyennée sur une séquence parcourant 1 tour de rotation.

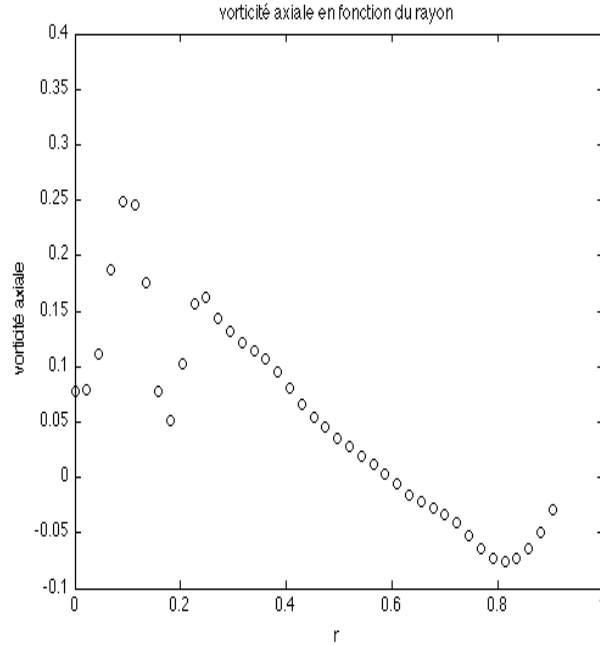


Figure 7.11: Vorticité axiale en fonction du rayon.

ces derniers qui est reliée à la rotation différentielle.

On peut d'ailleurs faire remarquer que le maximum de la distribution se déplace en fonction du temps.

La vorticité axiale moyennée en ϕ et sur une période de rotation, représentée en fig.7.11 permet de montrer un autre aspect de cette rotation différentielle.

Sur la fig.(7.12), est tracée la distribution selon ϕ des vitesses radiale et azimutale moyennées

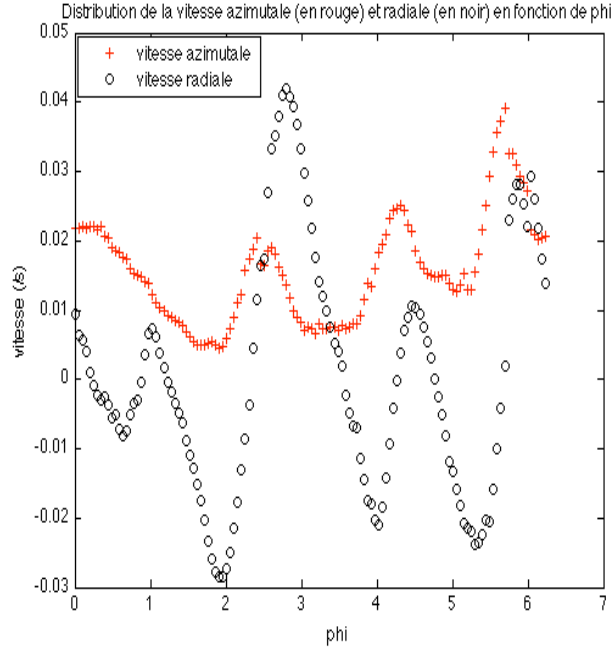


FIGURE 7.12: Distribution des vitesse azimutale (en rouge) et radiale (en noir) en fonction de ϕ . Chaque extremum indique un cyclone.

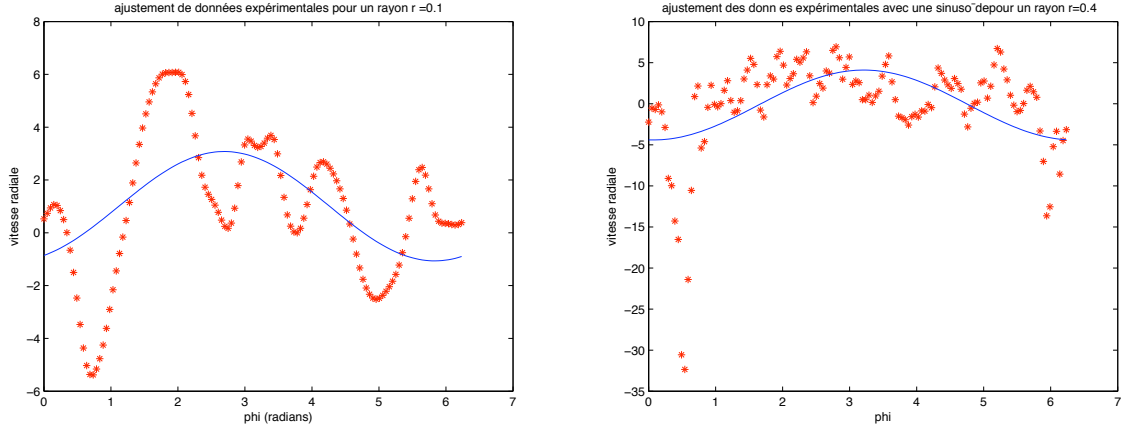


Figure 7.13: Brisure de symétrie du mode $m=1$. Vitesse radiale (en cm/s) pour deux rayons différents. Noter l'impossibilité d'ajuster les données par une sinusoïde

sur la composante radiale. Il est clairement montré que la présence des cyclones crée une anisotropie en ϕ . Chaque extremum local peut être identifié à la présence d'un cyclone.

Comme dans le cas du régime linéaire, on peut tracer l'évolution des composantes polaires du champ de vitesse en fonction de l'azimuth. Si l'on choisit une dizaine de rayon proche du centre, là où le mode $m=1$ a pu être identifié clairement, comme le montre la figure 7.13, on met en évidence une brisure de symétrie centrale.

On peut aussi tracer la variation de la vitesse azimutale en fonction de ϕ pour des rayons compris entre le tiers et le deux tiers du rayon du cylindre. On peut ainsi repérer la position de chaque cyclone (fig.(7.14))

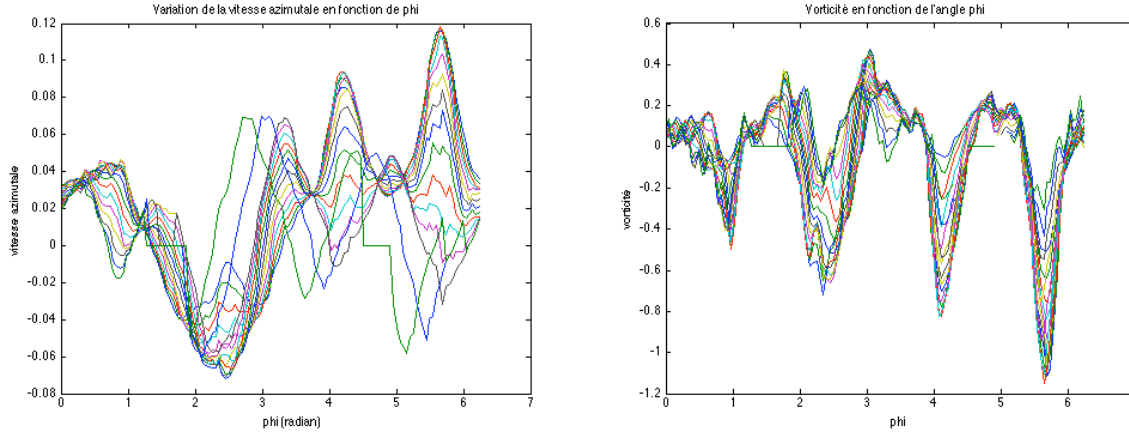


Figure 7.14: Variation de la vitesse azimutale (à gauche) adimensionnée sur la vitesse des parois et de la vorticité (à droite) adimensionnée sur celle des parois en fonction de ϕ . On peut positionner les cyclones à chaque pic. On voit que la vitesse est concentrée en chaque zone contenant un vortex et chacun d'entre eux est en sur rotation. La très forte concentration de vorticité est très impressionnante puisque le cyclone le plus intense est du même ordre de grandeur que la vorticité des parois.

7.4 Recherche d'hystérésis: rampe descendante

Cette campagne de mesures est destinée à répondre à deux questions qui se posent naturellement :

1. Si l'on part d'un état de base turbulent, en faisant décroître le taux de précession à l'aide d'une rampe descendante $\beta_- = \frac{d\Omega_P}{dt} < 0$ linéaire pour se retrouver dans un intervalle de forçage correspondant au régime des tourbillons : retrouvera-t-on ce régime ? Peut-on mettre en évidence une hystérésis ?
2. Une fois ce régime pleinement atteint (soit en rampe ascendante $\beta_+ > 0$, soit en rampe descendante $\beta_- < 0$), en faisant décroître le forçage jusqu'à une valeur nulle, comment retrouve-t-on l'état de base de rotation rigide ?

1) On retrouve le régime avec cyclones en rampe descendante, mais pas toujours. En effet, le système est très sensible à la valeur de la rampe. Par exemple, on observe un retour des vortex pour $\beta_- = 0.01 tr/mn/s$ et aucun vortex pour $\beta_- = 0.02 tr/mn/s$. Un nouveau temps caractéristique doit être pris en compte, le temps de déclin de la turbulence. Un état moins perturbé s'instaure après le déclin de la turbulence, et une rotation différentielle devient nettement visible. Le mouvement vibratoire déjà décrit, lié à l'onde tournante, apparaît et les tourbillons réapparaissent, créés comme dans la rampe ascendante, par des éruptions de jets (plus fins et plus rapides que dans la phase ascendante). Cette description sommaire suggère de comparer les profils de rotation différentielle suivant la valeur et le signe de la rampe qui a donné naissance à ce régime.

Le régime de vortex, lorsqu'il est atteint de nouveau en rampe descendante, subsiste lorsqu'on arrête la rampe. La figure (7.16) montre quelques caractéristiques, qui différencient ce régime des régimes cycloniques précédents (en rampe montante). Le nombre de tourbillons n'est plus au nombre de 3 ou 4 mais de 2 avec un coeur de l'écoulement (région centrale) dominé par une vorticité positive (anti-cyclonique). Les vortex cycloniques sont en rotation différentielle par rapport à la caméra, ils ont une forme très circulaire et, contrairement au cas de la rampe ascendante, ils

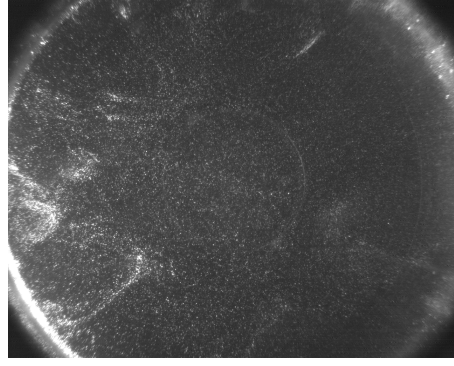


Figure 7.15: Eruption de jets après le déclin de la turbulence et le retour de l'onde tournante.

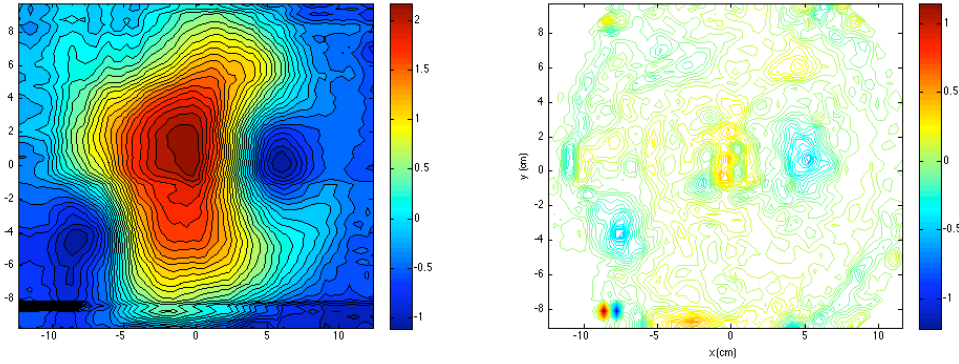


Figure 7.16: ($a = 1.17$, $R_e = 281612$, $\varepsilon = 0.033$, $\beta_- = 0.005tr/mn/s$) Iso-contour de la fonction courant et distribution de la vorticité.

concentrent faiblement la vorticité.

2) Lorsque l'on annule complètement la précession à partir de ε fini, il apparaît un régime transitoire de déclin et de fusion des cyclones assez long (si on a retrouvé les régime cyclonique). Sinon, on observe un retour à la rotation solide à partir d'un écoulement tri-dimensionnel. Ce processus de déclin est plus complexe que le spin-down classique et demanderait une étude spécifique.

7.5 Disparition des cyclones et retour du mode $m = 1$ $\varepsilon \sim \varepsilon_t$

Ce régime d'écoulement a été difficile à mettre en évidence. Il représente l'ultime étape avant la transition « brutale » vers la turbulence. Pourtant, expérimentalement, nous n'avons jamais pu obtenir sa valeur. Ce seuil correspond en fait à la disparition des cyclones et à l'établissement d'un point particulier de l'écoulement où la vitesse est nulle. Ce point possède sa dynamique propre qui d'ailleurs semble liée à la dynamique d'un mode $m=1$. Nous sommes toujours dans un régime laminaire de l'écoulement puisque qu'une échelle caractéristique est toujours visible. L'écoulement est dominé par un vortex dont le centre est en rotation autour d'un centre proche du centre du cylindre. De tels vortex en précession ont déjà été observés [74]. Il semble raisonnable de comparer et mettre en parallèle ce tourbillon avec le vortex ondulé montré au chapitre 4 lors de la visualisation de l'écoulement avec des traceurs bulle d'air. Ce vortex ondulé est stationnaire dans le référentiel en précession. Dans notre référentiel d'étude qui est celui du cylindre, il est donc normal de voir

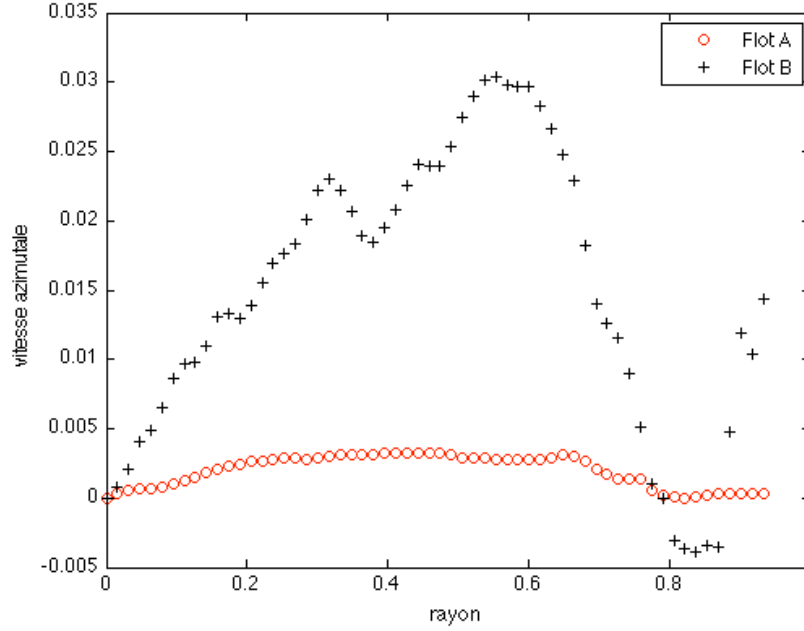


Figure 7.17: Comparaison entre les profils radiaux de vitesse azimutale pour 2 cas correspondant à $(a = 1.17, R_e = 281612, \varepsilon = 0.033, \beta_- = -0.005 \text{ tr}/mn/s \text{ (Flot A)}, \beta_+ = 0.005 \text{ tr}/mn/s \text{ (Flot B)})$. Le flot A est obtenu en rampe descendante et le flot B en rampe ascendante.

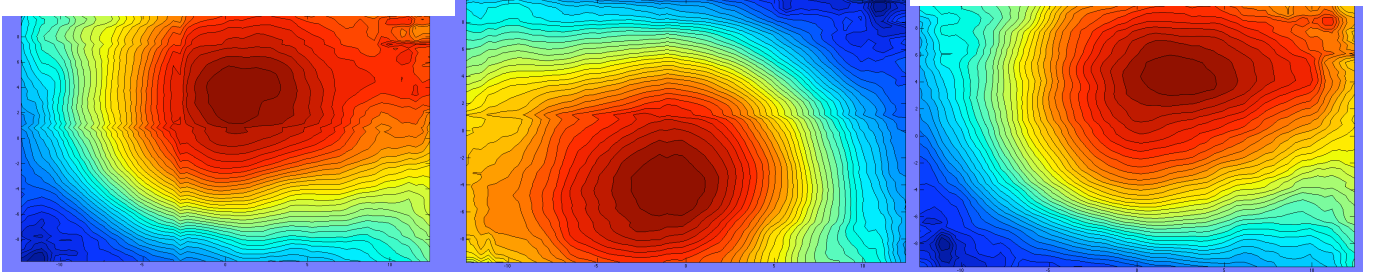


FIGURE 7.18: $(a = 1.16, R_e = 140806, \varepsilon = 0.066)$ Iso contour de la fonction courant permettant de repérer la domination de l'écoulement par un vortex dont le centre est délocalisé.

le centre du vortex faire un tour complet sur une période de rotation du cylindre.

Une autre caractéristique intéressante de ce « régime » en est l'augmentation de la rotation différentielle par rapport au régime des cyclones, ce qui explique peut être pourquoi ces derniers disparaissent à un taux de précession donné. On représente sur la fig.(7.20) la moyenne azimutale de la vitesse azimutale en fonction du rayon, moyennée sur une période de rotation. On constate qu'en doublant le taux de précession on a bien plus que doublé l'amplitude de la vitesse azimutale.

En augmentant encore le forçage, on observe la transition vers la turbulence. Les études dans ce plan montrent une rotation solide, en réalité, c'est la limite de l'acquisition vidéo qui est en cause. Les temps d'évolution des structures sont en effet trop lents par rapport au temps imposé par la rotation.

Néanmoins, une étude est possible dans le plan d'observation $x = 0$, lié au référentiel en précession. On observe le plan normal à l'axe de précession. Cette étude est résumée dans la section 6.8.

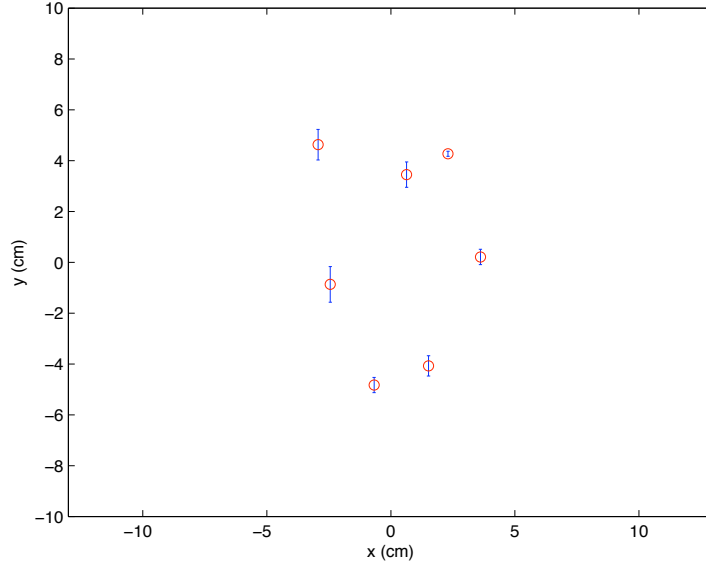


FIGURE 7.19: ($a = 1.16, R_e = 140806, \varepsilon = 0.066$) Position du centre du vortex (repéré par le point de vitesse nulle) tous les 1/ème de seconde, soit 7 points pour faire un tour complet. Le premier point de la série est le plus haut et le plus à gauche. La dynamique anticyclonique du mode $m = 1$ domine l'écoulement et le trajet du centre de ce vortex est dans le sens contraire à la rotation des parois donc le sens trigonométrique.

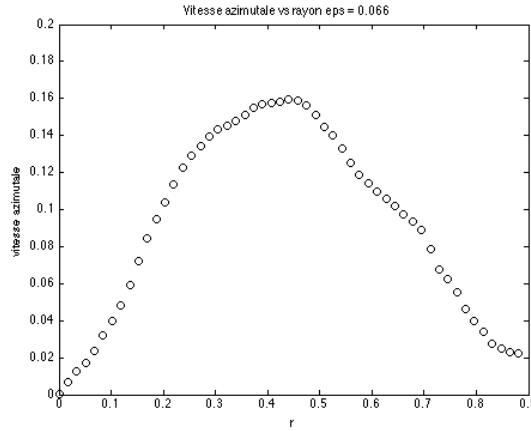


FIGURE 7.20: ($a = 1.16, R_e = 140806, \varepsilon = 0.066$) Moyenne azimutale de la vitesse azimutale sur une période de rotation en fonction du rayon. On met en évidence un accroissement de la rotation différentielle sans doute responsable de la disparition des cyclones par cisaillement. On notera la distribution centrée sur $r=0.5$.

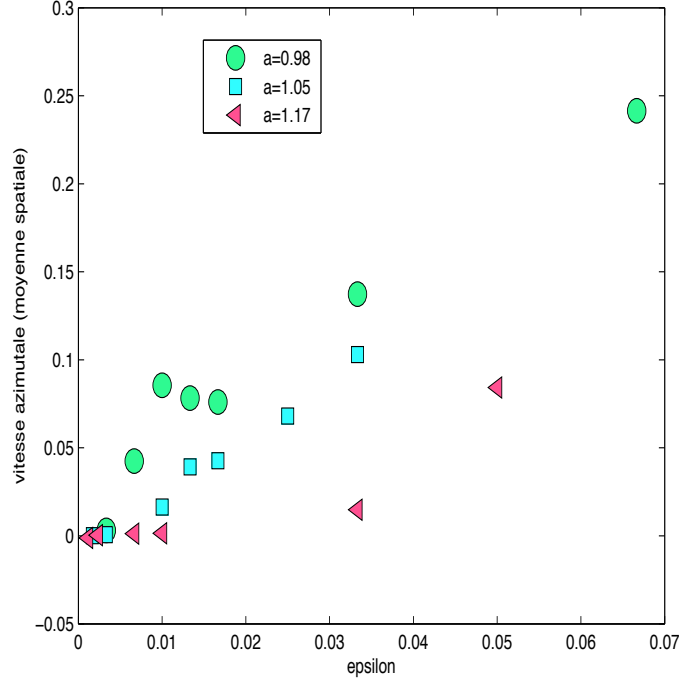


Figure 7.21: $R_e = 140806$ Etude de la moyenne spatiale de la vitesse azimutale en fonction du taux de précession pour différents allongements.

7.6 Effet de la résonance

Lors de la présentation des modes de Kelvin en précession au chapitre 1, il a été mentionné la possibilité d'avoir un phénomène de résonance de cavité pour le mode $m=1$. Les calculs montrent que pour $a = 1$, cette résonance est possible. Est ce que la résonance modifie les résultats précédents ?

En fait, la phénoménologie de l'écoulement reste la même. Seuls changent les seuils critiques d'apparition des phénomènes. L'amplitude des ondes inertielles forcées dépend de l'allongement. On présente sur la fig. 7.21 l'évolution de la moyenne intégrée sur toute la surface du plan transverse à l'axe de rotation de la vitesse azimutale en fonction du forçage pour trois allongements du cylindre.

Il est aussi intéressant de comparer la topologie du régime des cyclones en fonction de l'allongement. Une différence illustrée par les deux cas limites $a = 0.98$, le cas dit au forçage «résonnant» et $a = 1.3$, le cas le plus éloigné du cas résonnant. Comme le montre la figure (7.22), dans le cas résonnant, les vortex ont une étendue plus faible que dans l'autre cas. De plus, ces derniers dans le cas résonnant ont une extension parfaitement définie et une forme bien circulaire avec un coeur bien localisé. Pour l'injection de nos vortex dans le code de dynamo cinématique, nous choisirons la topologie du cas non résonnant.

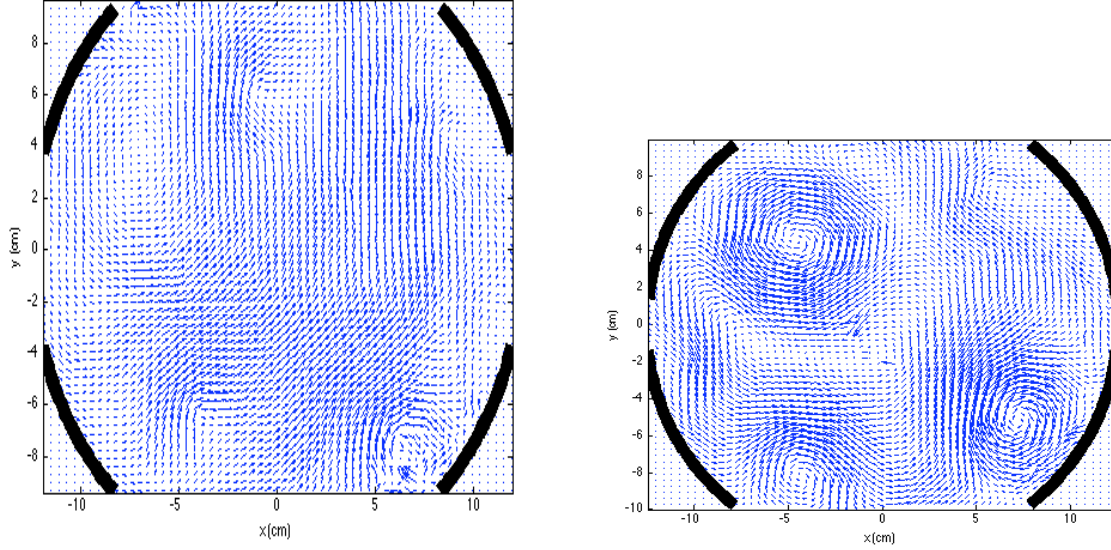


Figure 7.22: Comparaison de la topologie des vortex créés par l'instabilité cas forçage « résonnant » ($\varepsilon = 0.01$, $R_e = 140806$) à gauche et cas « non résonnant » à droite

7.7 Observations dans le plan $x=0$

7.7.1 La circulation axiale

Outre le fait d'être dans le référentiel en précession, l'intérêt majeur de l'étude dans le plan $x = 0$ réside dans la possibilité d'obtenir l'évolution de la vitesse axiale en fonction du forçage dans le plan équatorial. Il devient intéressant de comprendre la topologie de l'écoulement après cette instabilité observée. Comme le montre la fig.(7.23), la circulation axiale n'est pas observée pour un forçage appartenant à l'intervalle $[0, \varepsilon_C]$ mais pour des taux de précession compris dans le régime des vortex cycloniques.

Nous avons alors étudié la moyenne spatiale de la vitesse axiale sur le domaine $[0, \frac{R}{2}]$ en fonction du forçage ε . La vitesse axiale est adimensionnée par la vitesse des parois.

La figure 7.24 résume à elle seule la phénoménologie de l'écoulement. Aucune vitesse axiale n'a été constatée pour le régime linéaire. En revanche, pour une valeur assez proche de ε_C (pour l'allongement considéré), on peut obtenir une vitesse moyenne axiale définie.. On peut séparer le régime linéaire en deux régions puisqu'on peut observer sur ce graphe deux pentes différentes dans l'évolution linéaire de cette vitesse. L'arrêt net de cette croissance linéaire marque l'apparition de la transition vers la turbulence dont nous allons évoquer quelques points à la prochaine section suivante.

7.7.2 Régime turbulent

En régime turbulent, les champs de vitesse instantanés donnent une représentation très insuffisante des phénomènes. Une animation est beaucoup plus adéquate en pratique (acquisition d'un film à 12 images/seconde). En visée axiale, les mesures sont dominées par la rotation différentielle qui empêche l'observation des petites échelles. En visée radiale, qui est celle choisie pour la figure 7.24, on voit clairement l'excitation d'un spectre d'échelles spatiales et temporelles. Faute

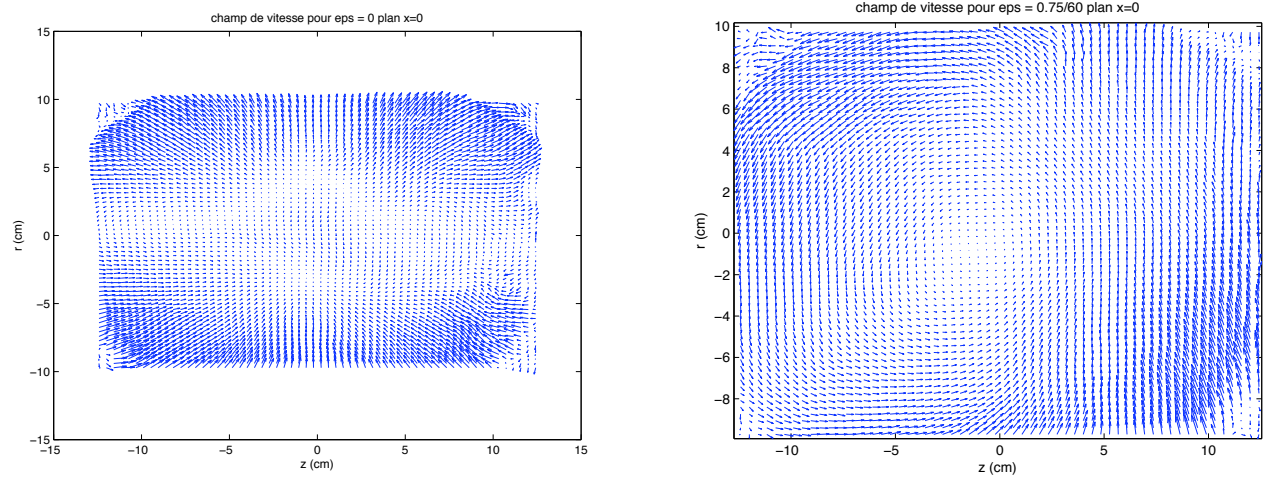


Figure 7.23: Topologie du champ de vitesse pour $\varepsilon = 2, 3 \cdot 10^{-3}$ (à gauche) et $\varepsilon = 3, 3 \cdot 10^{-2}$. On représenté le champ de vitesse pour deux forçages, l'un dans le régime linéaire et l'autre dans le régime des vortex issus de l'instabilité.

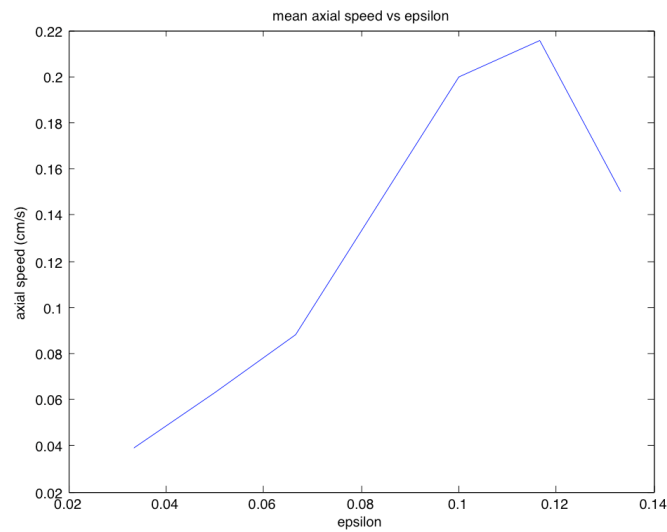


Figure 7.24: Evolution de l'amplitude la moyenne spatiale de la vitesse axiale adimensionnée par la vitesse des parois.

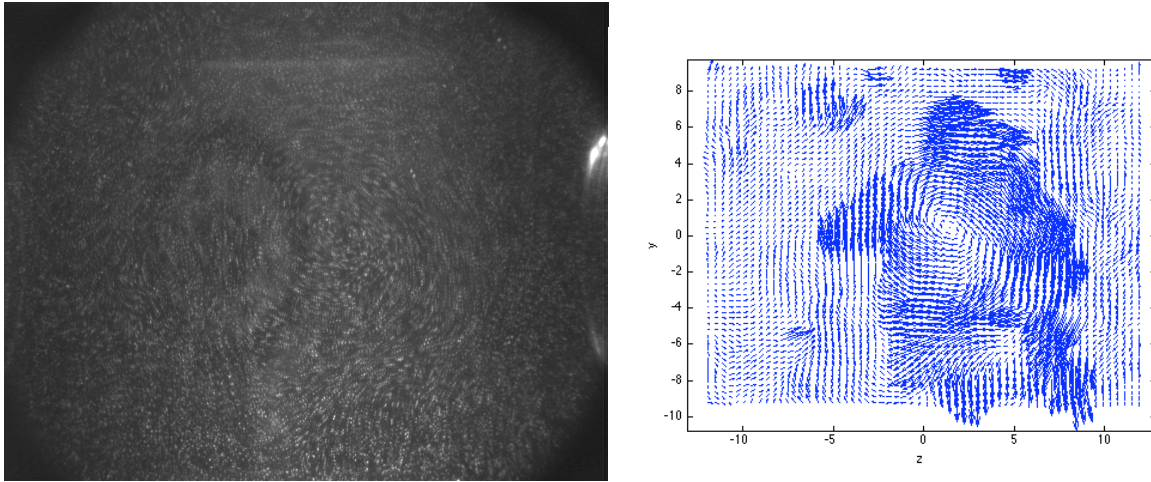


FIGURE 7.25: Champ de vitesse turbulent dans un plan méridien ($a = 0.99, \varepsilon = 0.16, R_e = 141000$). A gauche : on voit un cliché instantané de l'écoulement ; le traitement PIV correspondant est à droite. On notera l'excitation des petites échelles spatiales.

de temps, ce régime n'a pas été étudié plus en détail. Pour obtenir un traitement quantitatif plus satisfaisant, il faudrait accéder à une période d'échantillonnage plus resserrée que le $1/6$ s de la PIV actuelle.

7.8 Discussion des mécanismes possibles à l'origine de l'instabilité de l'écoulement en précession

Dans cette section, on tente de proposer plusieurs idées de scénario expliquant l'instabilité aboutissant à un régime permanent de vortex en rotation observée précédemment. Après des généralités concernant les instabilités en hydrodynamique, nous rappelons un critère généralisant aux modes non axisymétriques le critère d'instabilité de Rayleigh pour les fluides en rotation. A partir des prédictions de rotation différentielle dans le cadre de nos calculs non-linéaires (chapitre 4), nous proposons ici un scénario expliquant l'instabilité observée.

7.8.1 Instabilités sous-critiques et supercritiques en hydrodynamique

En mécanique des fluides, l'état d'équilibre de référence est, par définition, l'état où les lignes de courant sont stationnaires et varient peu spatialement. On parle d'*écoulement laminaire*. Le flot sera instable si on peut trouver une perturbation telle qu'il ne retourne pas dans l'état laminaire. Ces notions doivent être nuancées par le fait que le fluide peut toujours retrouver un nouvel état d'équilibre, instationnaire et plus ou moins complexe.

Il convient, à ce stade, d'expliquer les notions d'instabilités *sous-critiques* et *super-critiques*. Ces concepts diffèrent au niveau du seuil de déclenchement de l'instabilité. Ainsi, une instabilité de type sous-critique si elle nécessite une amplitude minimum (fonction du nombre de Reynolds associé à l'écoulement) pour apparaître. On parle souvent d'écoulement *métastable*. Au contraire, une instabilité est dite super-critique lorsque l'écoulement laminaire devient instable à partir d'un certain Reynolds, et ce, *quelque soit* l'amplitude de la perturbation appliquée à l'écoulement. Le

fait que ce type d'instabilité puisse exister pour des amplitudes arbitrairement faibles permet une étude analytique faite en linéarisant les équations de la dynamique associées. Cette étude permet dans certains cas d'obtenir des modes propres dont la croissance spontanée caractérise l'instabilité. De ce fait, les instabilités super-critiques sont aussi appelées *linéaires*.

Concernant les instabilités sous-critiques, la linéarisation est impossible. Il devient obligatoire de considérer les termes non-linéaires des équations. Les modes propres étant stables, l'origine de l'instabilité devient, non plus la croissance spontanée d'un mode mais résulte d'un couplage non-linéaire entre plusieurs modes propres. Pour cela, on qualifie ce type d'instabilités comme étant *non-linéaire*. Le modèle standard de l'instabilité super-critique par essence est l'écoulement de Couette-Taylor², appartenant à la classe des écoulements cisailés à symétrie azimutale, axisymétrique.

7.8.2 Ecoulement de Couette-Taylor

Il s'agit d'un écoulement confiné entre deux cylindres tournant dans des directions opposées engendrant ainsi un cisaillement moyen de l'écoulement. Au sens linéaire du terme, cet écoulement est stable. Toutefois, il a été clairement démontré expérimentalement, numériquement puis, finalement analytiquement que ce type d'écoulements génère des instabilités super-critiques dont les mécanismes sont bien expliqués aujourd'hui. La première structure issue de l'instabilité à avoir été mise en évidence est celle en forme de stries qui sont en fait le résultat d'un processus d'advection du cisaillement moyen par une des composantes de la perturbation. En particulier, on pourra remarquer la présence de rouleaux (fig.7.26).

Cette instabilité centrifuge de Couette-Taylor est fondamentale, et cela pour au moins deux raisons.

D'une part, elle a un caractère « générique » du fait qu'elle est susceptible d'apparaître dans tout écoulement dévié par une paroi créant un gradient de pression normal aux lignes de courant. On peut mentionner l'instabilité de Görtler ([103]) survenant pour tout écoulement de couche limite sur une paroi courbe concave conduisant à la formation de tourbillons (dits de Görtler) alignés dans la direction de l'écoulement. L'écoulement de Poiseuille dans une conduite courbe conduit à des tourbillons de Dean assez similaires.

D'autre part, l'instabilité de Couette-Taylor se révèle cruciale puisqu'elle présente de nombreux points communs avec la convection thermique de Rayleigh-Bénard pour ce qui est de la « route vers le chaos ». En effet, au-delà de la première bifurcation (bifurcation fourche super-critique liée à la brisure de l'invariance par translation selon l'axe de rotation des cylindres) qui conduit aux célèbres rouleaux de Taylor³, une succession de bifurcations très riche engendre des écoulements de plus en plus complexes pour finalement conduire à la turbulence.

A partir des équations linéarisées du problème, on peut réaliser des calculs de stabilité en considérant des perturbations axisymétriques ($m = 0$) ou non ($m \neq 0$). Il a été montré que ces dernières sont plus stables que le cas ($m = 0$), lequel est instable si et seulement si le critère de Rayleigh est satisfait. Nous proposons de présenter ce critère dans la section suivante.

7.8.3 Critère de stabilité des fluides en rotation

Théorème du point d'inflexion de Rayleigh Le théorème de Rayleigh a été énoncé sous sa première forme en 1880. Ce résultat est, à la fois, très simple et de grande portée.

L'existence d'un point d'inflexion dans le profil de vitesse de l'écoulement de base est une condition

2. L'écoulement de Couette-Taylor est la version cylindrique de l'écoulement plan cisailé de Couette.

3. Une deuxième bifurcation observée est associée quand à elle à l'invariance par rotation azimutale.

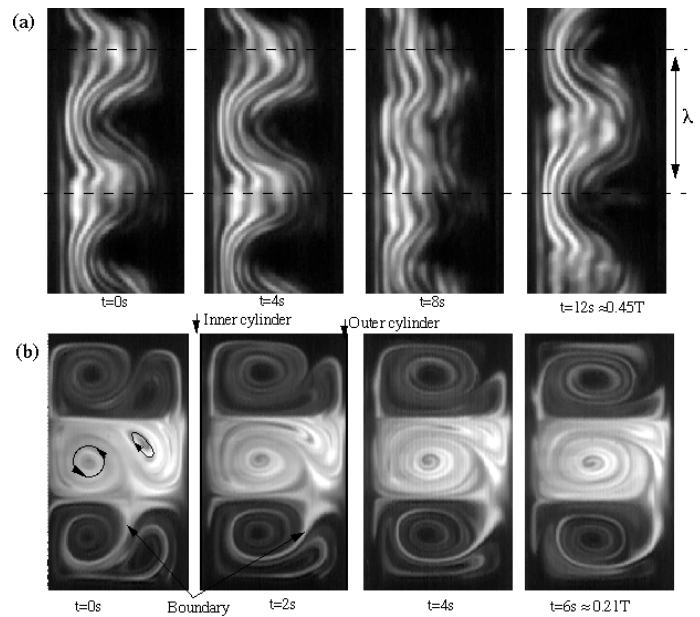
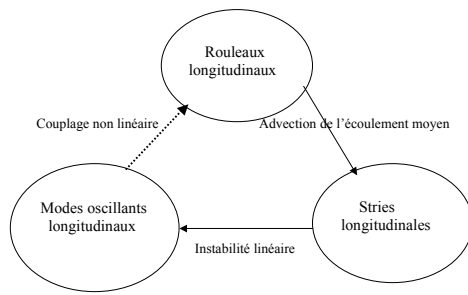
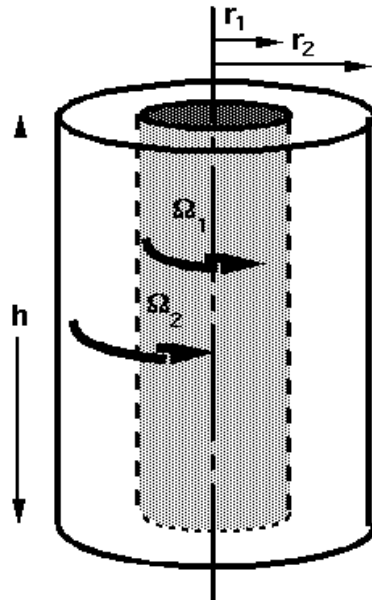


FIGURE 7.26: Écoulement de Couette-Taylor : Schéma du dispositif de Couette Taylor. Différentes observations concernant les régimes d'écoulement dans l'écoulement de Couette plan. Visualisation des rouleaux de Taylor. (cité dans [108])

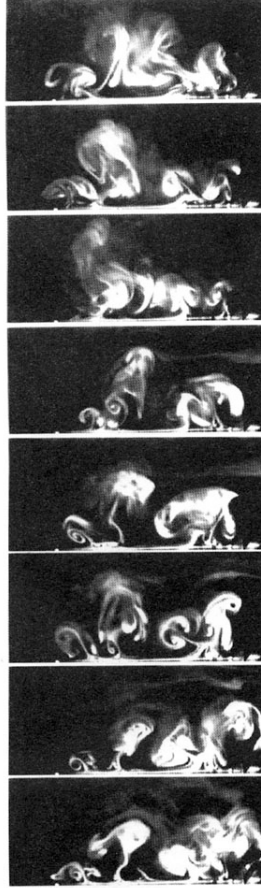


Figure 7.27: Les tourbillons de Görtler sont des écoulements secondaires apparaissant dans un écoulement de couche limite le long d'une paroi concave. Si la couche limite est mince comparativement à celle du rayon de courbure de la paroi, la pression reste constante à travers la couche limite. D'autre part, si l'épaisseur de la couche limite est comparable à celle du rayon de courbure, l'action centrifuge crée une variation de pression à travers la couche limite. Cela conduit à l'instabilité centrifuge (instabilité Görtler) de la couche limite visqueuse et de formation consécutive de tourbillons de Görtler. On peut définir un nombre de Görtler : $G_a = \frac{U_e \delta}{\nu} \left(\frac{\delta}{R} \right)^{\frac{1}{2}}$ où U_e est la vitesse extérieure, δ l'épaisseur de la couche limite, R le rayon de courbure et ν la viscosité cinématique. Il a souvent été observé expérimentalement que l'instabilité se déclenche pour $G_a > 0.3$.

nécessaire mais non suffisante d'instabilité.

Ce critère a été reformulé et précisé par le théorème de Fjortoft (1950), (Huerre & Rossi, 1998), (Schmid & Henningson, 2001). Ce théorème indique en particulier que, pour un profil de vitesse monotone, une condition nécessaire (mais toujours pas suffisante) d'instabilité est que le point d'inflexion corresponde à un maximum de vorticité.

Le théorème de Rayleigh permet de conclure que des écoulements fondamentaux comme l'écoulement de Poiseuille plan et celui d'une couche limite sur une plaque plane sont linéairement stables étant donné l'absence de point d'inflexion, mais les effets visqueux sur les perturbations, eux, ne sont pas pris en compte. Or, les expériences montrent que les écoulements visqueux peuvent être instables, et que la viscosité est un acteur majeur vis à vis de l'instabilité.

Plus précisément, les effets visqueux sont de deux ordres :

- un effet dissipatif stabilisant
- un effet déstabilisant, lié à un couplage entre l'inertie et les conditions aux limites d'adhérence à la paroi

Bien que nous nous intéressions avant tout aux systèmes astrophysiques et donc très peu au rôle des termes visqueux, nous étudierons ces effets au prochain chapitre dans le but d'élargir la discussion concernant l'origine de cette instabilité.

Application aux fluides en rotation : critère sur la circulation de Rayleigh Concernant le cas des écoulements en rotation, Rayleigh dérive un théorème sur la circulation.

Pour un écoulement non visqueux en rotation, une condition nécessaire d'instabilité est la décroissance de la circulation : $\phi(r) = \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} (r^2 \Omega)^2 > 0$, en un point quelconque du domaine

Si ce critère est vérifié pour un écoulement donné, on parle d'instabilité centrifuge. Des arguments physiques simples permettent de comprendre cette condition puisqu'elle est directement reliée à la conservation du moment cinétique. Le raisonnement de Rayleigh consiste à évaluer la variation d'énergie cinétique lors de la permutation de deux anneaux de fluide conservant leur moment cinétique (Théorème de Kelvin). On conclut alors que l'écoulement est potentiellement instable si la permutation conduit à une augmentation de l'énergie cinétique.

7.8.4 Critère de stabilité pour les modes non axisymétriques et applications au cas de l'écoulement en précession

Ce critère est inspiré de (Billant et Gallaire, JFM, 2005) où est généralisé le critère de Rayleigh aux perturbations non axisymétriques.

Pour un mode axisymétrique (noté $m = 0$ dans les notations de notre problème), l'écoulement est considéré comme instable si la partie réelle du taux de croissance temporelle σ est positive.

Ce taux est défini de la façon suivante :

$$\sigma_0(r^*) = -im\Omega_0(r^*) + \sqrt{-\phi(r^*)} \quad (7.1)$$

où r^* est le point solution de : $\frac{d\sigma(r^*)}{dr} = 0$.

On nommera la partie imaginaire de cette expression : contribution oscillante du taux. Il apparaît immédiatement que la croissance de l'instabilité est liée à la condition : $-\phi(r^*) > 0$.

L'extension du critère de Rayleigh aux modes non axisymétriques ($m \neq 0$) est d'un intérêt fondamental pour notre étude, étant donné le forçage $m = 1$ des ondes inertielles dues à la précession. Le critère généralisé s'énonce de la manière suivante :

Une condition suffisante d'instabilité pour une perturbation avec un nombre d'onde azimutal m est que $\text{Re}(\sigma_0(r_0)) > 0$ avec r_0 ($r_0 \in \mathbb{C}$) la valeur du rayon pour laquelle on a :

$$\phi'(r_0) = -2i\Omega'(r_0) \sqrt{-\phi(r_0)} \quad (7.2)$$

r_0 étant un point double tournant. Comme cette valeur est complexe, il apparaît un phénomène de Stokes lorsqu'on veut raccorder cette valeur avec l'espace réel. Nous n'entrerons pas dans les détails de ce problème mathématique qui dépasse le cadre du propos.

Dans l'article de Billant et Gallaire, une application de ce critère est faite pour les vortex de Carton-Mac Williams et l'écoulement de Taylor-Couette. On peut ainsi étudier la compétition entre instabilité centrifuge et instabilité de cisaillement et l'incidence sur la déstabilisation préférentielle de certains modes azimutaux.

7.8.5 Applications à l'écoulement en précession

Dans notre article commenté au chapitre 4, le calcul du couplage faiblement non linéaire a permis d'établir des profils de vitesse azimutale mettant en évidence la possibilité d'avoir une rotation différentielle due à la correction du flot de base à l'ordre 3 du développement à deux paramètres. Nous allons d'abord considérer les profils de rotation différentielle à dépendance exclusivement radiale. Les profils expérimentaux (sans doute à cause des effets de géométrie finie) ont montré une anisotropie azimutale.

L'idée principale repose sur le fait que par interaction non-linéaire avec les modes de Kelvin forcés, le flot de base fabrique une rotation différentielle pouvant générer des instabilités de type inflexionnelle ou de cisaillement pour les modes $m=1$.

Afin d'appliquer le critère de Rayleigh pour étudier la stabilité de nos profils, il faudrait se servir en principe des profils calculés numériquement (fig.7.28).

Nous proposons plus simplement de modéliser analytiquement le profil radial de vitesse azimutale. En première approximation, et en s'inspirant des résultats du couplage de mode, on décide de modéliser la vitesse par une Gaussienne.

$$V_\phi = r\Omega_\phi = r\Omega_{\phi 0} e^{-\left(\frac{r-r_0}{\Delta r_0}\right)^2} \quad (7.3)$$

On déduit alors la vitesse angulaire de rotation :

$$\Omega_\phi = \Omega_{\phi 0} e^{-\left(\frac{r-r_0}{\Delta r_0}\right)^2} \quad (7.4)$$

où Δr_0 représente la largeur à mi-hauteur de la gaussienne.

On choisira, pour la simplicité des calculs : $V_{\phi 0} = 1$ et $\Omega_{\phi 0} = 1$, et on prendra une gaussienne réduite et centrée.

Les expressions (7.3-7.4) deviennent :

$$V_\phi = r e^{-r^2} \quad (7.5)$$

$$\Omega_\phi = e^{-r^2} \quad (7.6)$$

L'objectif est de mettre en évidence les effets qui seraient dus à une instabilité de cisaillement en surface et ceux liés à l'instabilité inflexionnelle en volume. Une telle étude a été réalisée dans le cas

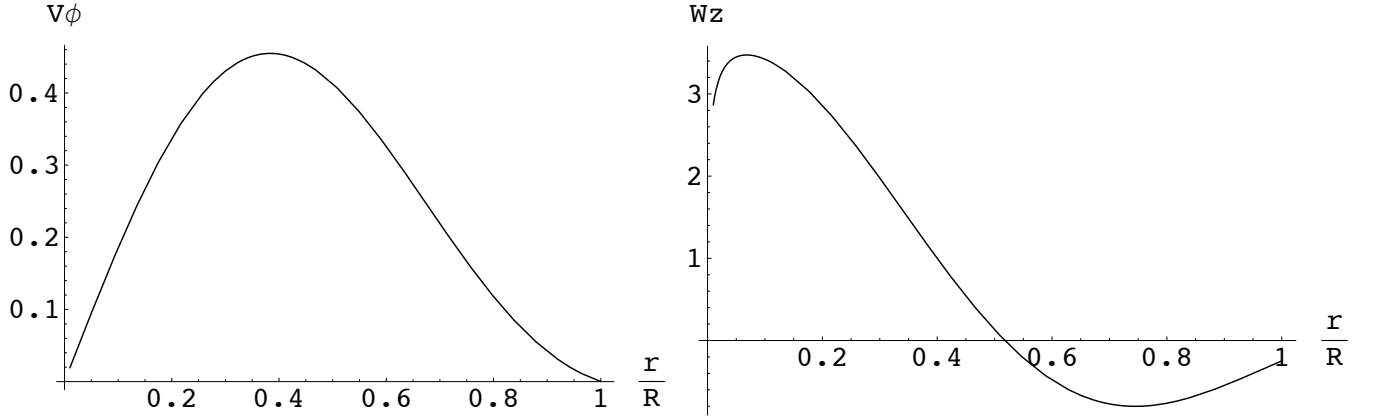


FIGURE 7.28: Profils de vitesse azimutale et vorticité axiale moyenné en fonction du rayon issu du couplage de mode

d'un vortex de Carton-Mc Williams (avec $\alpha = 8$, correspondant au cas où l'instabilité centrifuge devrait apparaître la plus instable pour $m = 0$) dont le flot de base est une vitesse azimutale définie comme : $U_\phi = r \exp(-r^\alpha)$. La courbe montrant la compétition entre instabilités de cisaillement et centrifuge dans le plan (m, σ) est donnée en fig.(7.29). Cette figure permet de montrer que le mode $m = 1$ est marginalement instable vis-à-vis de l'instabilité de cisaillement (pour le cas $\alpha = 8$)

L'écoulement de rotation solide est dominé par le mode géostrophique tel que $(m = 0, \omega = 0, k = 0)$. L'ajout de la précession va faire apparaître le forçage du mode $m=1$. Deux modes sont alors majoritairement présents dans l'écoulement, le mode $m=0$, on notera son amplitude $\mathcal{A}_1$, et le mode $m=1$, on notera son amplitude $\mathcal{A}_2$.

Le couplage faiblement non linéaire quadratique (car d'ordre 2 dans le développement en $\varepsilon' \cdot \varepsilon$) et en résonance de phase entre ces deux modes donne lieu à l'instabilité paramétrique. Les termes non-linéaires de l'ordre 3 du développement saturant cette instabilité et créent une rotation différentielle au sein de l'écoulement, modifiant ainsi le mode géostrophique. La dynamique des modes est alors modifiée par leur propre rotation différentielle fabriquée par le couplage.

Le critère de Rayleigh étendu aux cas non axisymétriques (critère de Billant eq.(7.1)) est vérifié pour le mode $m = 1$, avec le profil de rotation différentielle de type gaussien et il y a alors création d'une instabilité de type inflexionnelle. par le biais de ce mécanisme. Ce scénario rejoint, en l'affinant un peu, l'idée de Kobine [51, 52] .

Un autre scénario consisterait à invoquer une instabilité de type cisaillement 2D ($k = 0$). Ce mécanisme est suggéré par l'examen de la fig.(7.29) qui indique que (pour un vortex de Carton-Mac Williams avec $\alpha = 8$) le mode $m = 1$ est un mode marginalement stable vis-à-vis de l'instabilité inflexionnelle. Etant donné les réflexions à la paroi des ondes, on peut s'attendre à fabriquer des ondes stationnaires de nombre d'onde axial $k = 0$ qui vont s'accumuler en surface près des parois latérales du cylindre et générer l'instabilité observée expérimentalement que nous avons surnom-

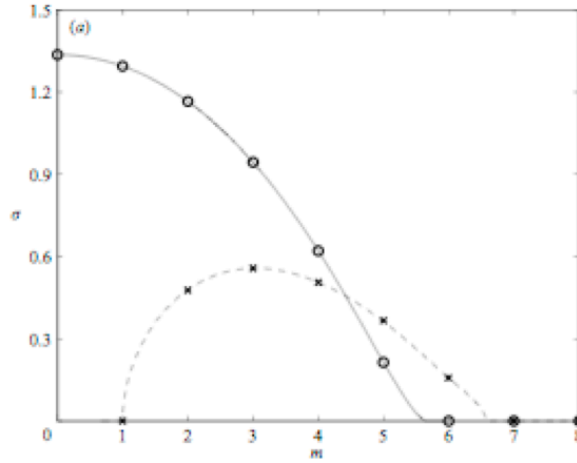


FIGURE 7.29: Taux de croissance de l'instabilité de cisaillement (en pointillé) pour un nombre d'onde axial tendant vers 0 et taux de croissance de l'instabilité inflectionnelle (en trait plein) pour un nombre d'onde axial tendant vers ∞ pour un vortex de Carton-Mac Williams pour $\alpha = 8$ (valeur particulière pour laquelle l'instabilité centrifuge devrait apparaître la plus instable pour $m = 0$). Le calcul est fait dans l'approximation WKB

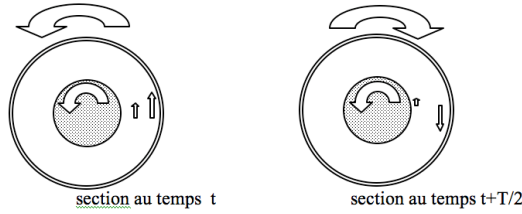


FIGURE 7.30: Modèle schématisant les liens entre la rotation différentielle et les effets visqueux.

mée « mushroom jets » en raison de la forme des éruptions.

Ces jets contiennent une partie cyclonique et une partie anticyclonique. Cette dernière va se déstabiliser. C'est le fameux problème d'asymétrie cyclone/anticyclone qui est naturellement lié au nombre de Rossby [12, 21, 82, 86]. La partie cyclonique va amplifier et nourrir les vortex localisés près des parois comme mentionné dans la section précédente. On obtient alors le régime cyclonique évoqué précédemment. C'est le cisaillement du mode $m = 1$ qui va, en concentrant la vorticité près des parois, se traduire par une vorticité cyclonique se développant dans les cyclones.

Un dernier scénario fait appel aux effets visqueux. Nous en parlerons plus précisément au prochain chapitre, ici nous nous limiterons à invoquer un modèle simple.

On peut illustrer la question avec l'expérience de pensée suivante : on considère un réservoir cylindrique contenant un fluide visqueux et en son centre une sphère solide, de diamètre inférieur à celui du réservoir et totalement libre de se mouvoir autour de son centre. En imposant d'abord un simple mouvement de rotation au réservoir autour de son axe (sans précession), le fluide puis la sphère vont être entraînés par cisaillement visqueux (et des couches limites d'Ekman) en rotation rigide, et la même vitesse angulaire sera finalement partagée par le réservoir, le fluide et la sphère. On impose alors au réservoir un mouvement de précession, c'est-à-dire une rotation autour d'un

axe passant par un diamètre (orthogonal à l'axe de rotation qui coïncide avec l'axe du cylindre). La figure représente la section médiane du réservoir vue dans le référentiel inertiel (du laboratoire) à deux instants séparés d'une demi-période ($\frac{T}{2}$). La paroi du réservoir a alors changé de sens de rotation, mais quel est le mouvement de la sphère centrale? Elle est soumise sur sa surface aux seules tensions visqueuses, qui ont changé de sens au bout d'un demi-tour. En leur absence, la sphère centrale conserverait son moment angulaire, celui induit par le régime initial de rotation pure. Si la viscosité est très forte, au contraire, la sphère centrale sera fortement couplée au réservoir et suivra sa rotation. Ce modèle simpliste, où un solide remplace le fluide central, suggère que l'écart par rapport à la rotation solide, la rotation différentielle, croît lorsque la viscosité (le nombre d'Ekman) croît. Il ne tient pas compte des termes inertiels qui sont tout aussi importants que les termes de viscosité. Ces derniers sont étudiés plus précisément au prochain chapitre.

7.8.6 Vorticité cyclonique

Une question se pose : pourquoi la vorticité des perturbations est-elle cyclonique plutôt qu'anticyclonique ?

Il existe une littérature abondante sur le sujet de l'asymétrie entre la distribution de cyclones et anticyclones dans les fluides en rotation. Dans les écoulements en rotation en eau peu profonde, régis par les équations de St-Venant, ce sont les anticyclones qui dominent.

L'étude analytique de la stabilité des structures cycloniques observées dans ATER n'a pas été réalisée, car elle demanderait une analyse non-linéaire que l'on ne sait pas effectuer. On peut par contre se convaincre que pour des nombres de Rossby proches de un, les tourbillons anticycloniques peuvent être instables alors que les cycloniques sont linéairement stables. L'argument est de nature phénoménologique (Tritton et Davies [108]) et il peut s'appliquer dans le cas le plus simple à un écoulement linéaire cisailé $u = (V(y), 0, 0)$. Cet écoulement peut être instable sans rotation, mais on ne considèrera ici que l'effet sur la stabilité d'une rotation Ω d'axe oz. On suppose que cet écoulement non visqueux est une solution stationnaire dans le repère en rotation, tel que l'accélération de Coriolis $a_y = 2\Omega V(y)$ compense la résultante du gradient de pression au point y. Pour déterminer la stabilité, on détermine les conséquences sur l'écoulement de l'échange de deux lignes de courant passant aux points y_o , et $y_o + dy$. Pour aboutir à cette nouvelle configuration, il faut imposer à la première ligne de courant une vitesse $c(t)$ selon la direction y. Il se produit alors une accélération de Coriolis dans la direction x (soit $2\Omega c(t)$) dont la résultante est la vitesse finale V' au point $y_o + dy$: $V'(y_o + dy) = V(y_o) + \int 2\Omega c(t)dt = V(y_o) + 2\Omega dy$. En ce point $y_o + dy$, le gradient de pression selon y n'a pas changé et produit donc toujours dans la direction y l'accélération $-2\Omega V(y_o + dy) = -2\Omega (V(y_o) - dy 2\Omega dV/dy)$, alors que l'accélération de Coriolis dans cette direction est devenue $2\Omega V'(y_o + dy) = 2\Omega V(y_o) + 4\Omega^2 dy$ et la résultante est donc $2\Omega(2\Omega - dV/dy)dy$. Dans cette expression $2\Omega + \omega_z$ est la vorticité absolue ($\omega_z = -dV/dy$ est la vorticité relative). Lorsque la rotation est du même signe que la vorticité absolue, l'accélération de Coriolis produit donc une force de rappel. C'est toujours vrai dans le cas de la vorticité cyclonique, telle que ω_z a le même signe que Ω . Si la vorticité est anticyclonique, on obtient une déstabilisation dans le cas $\Omega > 0$ lorsque $\omega_z < -2\Omega$ (nombre de Rossby proche de 1) et on ne retrouve la stabilisation que pour les valeurs élevées de la rotation (nombre de Rossby $\ll 1$).

7.9 Conclusion de la partie expérimentale

Dans le chapitre 6, nous avons mis en évidence que la dynamique de l'écoulement aux faibles taux de précession était dominé par une onde tournante $m = 1$.

Lorsque le taux de précession croît, nous avons mis en évidence un régime de tourbillons cycloniques faisant suite à une instabilité et nous avons proposé quelques pistes d'explications.

Cet écoulement présente un comportement d'hystérésis ce qui suggère une bifurcation sous-critique comme on en observe dans de nombreux écoulements hydrodynamiques. Cette bifurcation serait associée à une perte de symétrie azimutale qu'on peut relier à notre forçage.

Du point de vue de la dynamo cinématique, il est clair que ce régime est intéressant car il est marqué par une rotation différentielle (effet Ω); les vortex concentrent fortement la vorticité perturbant l'écoulement jusqu'à lui faire perdre sa symétrie. Notons que les pertes de symétrie sont favorables pour l'effet dynamo.

C'est la première fois que ce régime est décrit de façon quantitative grâce à la PIV. Il a sans doute été observé dans l'expérience hydrodynamique de Gans, similaire à la nôtre. La phrase suivante, extraite de l'article, le montre [31] :

« In the purely hydrodynamic case the first departure from the steady-state flow given by the linear theory is a set of vortices which are generated near the axis of the flow, ejected to some two thirds of the radius where they remain for many rotation periods before collapsing again to the centre. These have been observed in both resonant and non-resonant containers. (...) From one to four of these vortices can exist at once. »

Dans la troisième partie qui résume des travaux en cours, nous allons nous intéresser aux effets non triviaux de la viscosité. Nous présenterons des calculs numériques simulant l'expérience hydrodynamique et nous introduirons une étude numérique de modélisation d'écoulement cyclonique à l'intérieur d'un code de dynamo cinématique.

Enfin, nous présentons un diagnostic de turbulence par diffusion des ultra-sons destiné à être incorporé à l'expérience ATER, afin de pallier à l'insuffisance de définition temporelle de la PIV en régime turbulent.

Part III

TROISIEME PARTIE

Développements en cours, simulations et
diffusion acoustique

Chapitre 8

Quelques considérations sur les effets de la viscosité

Comme mentionné précédemment, les effets de la viscosité sont mesurés par le nombre de Reynolds. Dans le cas des fluides en rotation, on préfère utiliser le nombre d'Ekman qui caractérise le forçage. Bien que sa valeur soit très petite devant l'unité pour notre étude expérimentale, la viscosité a un rôle important dans les zones de fort gradient de vitesse, les couches limites. Dans ce chapitre, nous allons d'abord considérer les effets visqueux dans le cas d'une rotation pure, la couche d'Ekman résulte alors principalement de l'équilibre entre force de Coriolis et force visqueuse. Puis nous allons considérer l'effet de la rotation différentielle au travers de l'équation de Kudlick, déjà vue comme une généralisation de l'équation de Poincaré au cas visqueux. Nous allons tenir compte des effets de la précession sur cette équation et enfin, nous illustrerons les effets de la viscosité par des simulations déjà évoquées au chapitre 2, étant donné la difficulté expérimentale pour une telle étude.

8.1 Fluide en rotation pure

8.1.1 Le « problème » de la viscosité

Les travaux de Kerswell & Barenghi [44] montrent que la viscosité rend l'écoulement en cylindre fini moins résonnant, ce qui permet d'éviter la pathologie associée aux valeurs interdites de la densité des pulsations. Cependant, l'introduction de la viscosité apporte un certain nombre de difficultés, qu'on va détailler dans la suite. Notons tout d'abord les résultats sur les facteurs d'amortissement des modes donnés dans la littérature sont très dispersés. Par exemple, les travaux de Greenspan [34] et Kudlick donnent bien des résultats analytiques [53], mais ces résultats ne sont applicables qu'à des réservoirs sans coin [94].

Reprenons les équations linéarisées du chapitre 2 en introduisant cette fois-ci la viscosité. Le problème est défini par :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p - \hat{e}_z \wedge \vec{u} + Re^{-1} \Delta \vec{u} \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \quad (8.1)$$

Le problème en termes de mode indicé par α s'écrit :

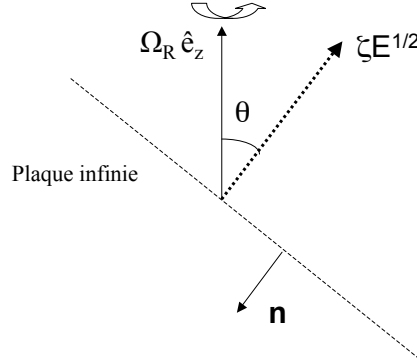


FIGURE 8.1: Schéma du système de couche limite située à proximité d'une paroi plane infinie.

$$\begin{cases} -i\omega_\alpha \vec{u}_\alpha = -\nabla \mu_\alpha - \hat{e}_z \wedge \vec{u}_\alpha + Re^{-1} \Delta \vec{u}_\alpha \\ \nabla \cdot \vec{u}_\alpha = 0 \\ \vec{u}_\alpha \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \quad (8.2)$$

Cette fois ci, on a : $\omega_\alpha \in \mathbb{C}$, et, par identification, il apparaît clairement que $Im(\omega_\alpha)$ représente le facteur d'amortissement visqueux.

On définit de manière analogue à ce que l'on a fait dans le cas non visqueux un opérateur :

$$L_{0\nu} = -\nabla \mu_\alpha - \hat{e}_z \wedge + Re^{-1} \Delta = L_0 + L_\nu \quad (8.3)$$

Dans le cas non visqueux, l'opérateur linéaire $L_0 = -\frac{1}{2} \nabla \mu_\alpha - \hat{e}_z \wedge$ était auto-adjoint ce qui faisait des modes de Kelvin une base orthogonale de vecteurs propres. Toute projection modale se réalisait uniquement en ayant besoin d'une seule base. Dans le cas visqueux, cette base devient incomplète, il faut la compléter, or l'expression explicite de cette base est peu utilisable dans la pratique (travaux de [93]).

8.1.2 Pompage d'Ekman : solution à $\varepsilon = 0$

8.1.2.1 Présentation et formulation du problème

Le système d'étude (fig.8.1) est le suivant : une couche limite située à proximité d'une paroi plane infinie inclinée d'un angle θ quelconque par rapport à l'axe de rotation dirigé comme précédemment selon l'axe $\hat{e}_z$. L'ensemble {fluide + paroi} est en rotation. Les notations $\perp$ et $\parallel$ font référence à des cas respectivement, perpendiculaire et parallèle à la plaque plane.

La méthode de résolution du problème est celle commune à toute étude d'écoulement de couche limite (écoulement de Blasius). On réalise un développement des solutions des équations de Navier-Stokes en puissance du petit paramètre qu'est l'épaisseur sans dimension associée à la couche limite $\delta = \sqrt{E}$:

$$\vec{v} = \vec{V}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sqrt{E} \right)^i \vec{v}_i \quad (8.4)$$

$$p = P_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sqrt{E} \right)^i p_i \quad (8.5)$$

On décompose le problème en : $\vec{v} = \bar{v} + \tilde{v}$ rassemblant les termes hors couche limite ($\bar{v}$) et les termes présents dans celle-ci ($\tilde{v}$). On peut déterminer ordre par ordre les équations régissant chaque terme, ce qui représente une simplification majeure par rapport à la résolution de l'équation générale.

Sans aucune perturbation, l'écoulement de base $(\vec{V}_0, P_0)$ de ce système serait une rotation solide pure en équilibre géostrophique. Nous projetons les perturbations sur la base des ondes inertielles. La perturbation est une onde inertielle plane écrite sous la forme :

$$\tilde{v} = \tilde{V} e^{i\omega t} \quad (8.6)$$

$$\tilde{p} = \tilde{P} e^{i\omega t} \quad (8.7)$$

On va définir la coordonnée locale dans la couche limite ς tel que : $\varsigma = z\sqrt{E}$. On déduit alors une des premières caractéristiques de l'écoulement de couche limite par l'équation de conservation de la masse :

$$\nabla \cdot \tilde{v} = \nabla_{\parallel} \cdot \tilde{V}_{\parallel} + \nabla_{\perp} \cdot \tilde{V}_{\perp} = 0 \quad (8.8)$$

$$\nabla_{\parallel} \cdot \tilde{V} = -E^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \tilde{V}_{\varsigma}}{\partial \varsigma} \quad (8.9)$$

La condition au limite à la paroi s'écrit ici : $\tilde{V}_{\varsigma} = 0$. On peut déduire de l'équation (8.9) que :

$$\tilde{V}_{\varsigma} = \mathcal{O} \left(\sqrt{E} \left| \tilde{V}_{\parallel} \right| \right) \quad (8.10)$$

Etant donné notre hypothèse de petitesse du nombre d'Ekman, nous pouvons dire que l'écoulement est essentiellement parallèle à la paroi dans la couche limite.

Ecrivons alors la conservation de la quantité de mouvement pour la composante parallèle de l'écoulement de couche d'Ekman :

$$-i\omega \tilde{V}_{\parallel} + \left(\hat{e}_z \wedge \tilde{V} \right)_{\parallel} = \nabla_{\parallel} \tilde{P} + E \Delta_{\perp} \tilde{V}_{\parallel} + \frac{\partial^2 \tilde{V}_{\parallel}}{\partial \varsigma^2} \quad (8.11)$$

Le terme $E \Delta_{\perp} \tilde{V}_{\parallel}$ est négligeable ; de plus, l'écoulement est essentiellement parallèle à la paroi. Donc, la composante parallèle de la force de Coriolis peut se réécrire : $\left(\hat{e}_z \wedge \tilde{V} \right)_{\parallel} = \hat{e} \wedge \tilde{V}_{\parallel}$ où $\hat{e}$ est un vecteur unitaire défini par : $\hat{e} = (\hat{e}_z \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$, et représente donc la projection sur la normale

aux parois portée par celle-ci. On obtient alors l'équation vérifiée par la composante parallèle du champ de vitesse dans la couche limite :

$$\frac{\partial^2 \tilde{V}_{\parallel}}{\partial \varsigma^2} + i\omega \tilde{V}_{\parallel} - \hat{e} \wedge \tilde{V}_{\parallel} = \nabla_{\parallel} \tilde{P} \quad (8.12)$$

L'équation de la conservation de la quantité de mouvement sur la composante perpendiculaire à la paroi s'écrit :

$$-i\omega \tilde{V}_{\varsigma} + \left(\hat{e}_z \wedge \tilde{V} \right)_{\varsigma} = \nabla_{\perp} \tilde{P} + E \Delta_{\perp} \tilde{V}_{\varsigma} + \frac{\partial^2 \tilde{V}_{\varsigma}}{\partial \varsigma^2} \quad (8.13)$$

Ceci permet de mettre en évidence le fait suivant : comme $\nabla_{\perp} \tilde{P} = E^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \varsigma}$, on a : $\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \varsigma} = \mathcal{O} \left(E^{\frac{1}{2}} \right)$ et le terme $\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial \varsigma^2}$ est négligeable. On réécrit : $\tilde{P}(\mathbf{x}_{\parallel}, \varsigma) = \tilde{P}(\mathbf{x}_{\parallel})$, ce qui veut dire que la pression dans la couche limite est imposée depuis l'extérieur de celle-ci. On peut aussi écrire que : $\frac{\partial \nabla_{\parallel} \tilde{P}}{\partial \varsigma} = \mathbf{0}$.

8.1.2.2 Solution dans la couche limite et circulation d'Ekman

Nous allons chercher les solutions à l'équation (8.12) associées aux conditions aux limites $\tilde{V}_{\parallel}|_{\varsigma=0} = \mathbf{0}$ et $\tilde{V}_{\parallel}$ est borné pour le cas asymptotique $\varsigma \rightarrow \infty$. Pour cela, nous décomposons le champ de vitesse en : $\tilde{V}_{\parallel} = \tilde{V}_0 + \tilde{u}$ avec $\tilde{V}_0$ est la solution de l'équation :

$$i\omega \tilde{V}_0 - \hat{e} \wedge \tilde{V}_0 = \nabla_{\parallel} \tilde{P}$$

vue comme le champ de vitesse obtenu hors couche limite et extrapolée à la paroi.

Il nous faut alors résoudre :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varsigma^2} + i\omega \tilde{u} - \hat{e} \wedge \tilde{u} = \mathbf{0} \quad (8.14)$$

$$\tilde{u}|_{\varsigma=0} = \mathbf{0} \text{ et } \tilde{u}|_{\varsigma \rightarrow \infty} = \mathbf{0} \quad (8.15)$$

De manière analogue à la procédure de résolution du problème des ondes inertielles, nous décomposons $\tilde{u}$ de la manière suivante :

$$\tilde{u} = F(\varsigma) \tilde{V}_0 + G(\varsigma) \hat{e} \wedge \tilde{V}_0 \quad (8.16)$$

ce qui permet de découpler le problème de la façon suivante :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varsigma^2} + i\omega F + \|\hat{e}\|^2 G = 0 \quad (8.17)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \varsigma^2} + i\omega G - F = 0 \quad (8.18)$$

Les conditions aux limites se réécrivent : $F(0) = -1$ et $G(0) = F(\infty) = G(\infty) = 0$

En exprimant G (resp. F) en fonction de F (resp. G) à partir de (8.17) (resp. (8.18)) et en l'injectant dans (8.18) (resp. (8.17)), on obtient une équation différentielle du 4ème ordre à coefficients constants sur F et G :

$$\frac{d^4 F}{d\varsigma^4} + 2i\omega \frac{d^2 F}{d\varsigma^2} - (\omega^2 - \|\hat{e}\|^2) F = 0 \quad (8.19)$$

$$\frac{d^4 G}{d\varsigma^4} + 2i\omega \frac{d^2 G}{d\varsigma^2} - (\omega^2 - \|\hat{e}\|^2) G = 0 \quad (8.20)$$

Les solutions de ce système sont :

$$F = \frac{-1}{2} (\exp(-\kappa^+ \varsigma) + \exp(-\kappa^- \varsigma)) \quad (8.21)$$

$$G = \frac{-i}{2 \|\hat{e}\|} (\exp(-\kappa^+ \varsigma) - \exp(-\kappa^- \varsigma)) \quad (8.22)$$

avec $\kappa^\pm$ les 2 racines du polynôme caractéristique associé aux équations différentielles, on a : $\kappa^\pm = \sqrt{-i(\omega \pm \|\hat{e}\|)}$.

A ce stade du calcul, il nous faut rappeler que nous cherchons une solution dans la couche limite notée $\tilde{v}$.

Il nous faut évaluer la composante normale aux parois du champ de vitesse. Celle-ci s'obtient grâce à l'équation (8.9) et il nous faut donc expliciter le terme $\nabla_{\parallel} \cdot \tilde{V}$, qui avec la nouvelle décomposition s'écrit :

$$\nabla_{\parallel} \cdot \tilde{V} = \nabla_{\parallel} \cdot \tilde{V}_0 + \nabla_{\parallel} \cdot \tilde{u} \quad (8.23)$$

où l'on a : $\nabla_{\parallel} \cdot \tilde{u} = F(\varsigma) \nabla_{\parallel} \cdot \tilde{V}_0 + G(\varsigma) \nabla_{\parallel} \cdot (\hat{e} \times \tilde{V}_0)$

Pour trouver $\tilde{V}_\varsigma$, il faut intégrer l'équation (8.23) de conservation de la masse :

$$\tilde{V}_\varsigma = -\sqrt{E} \int_0^\infty [\nabla_{\parallel} \cdot \tilde{V}_0 + F(\varsigma) \nabla_{\parallel} \cdot \tilde{V}_0 + G(\varsigma) \nabla_{\parallel} \cdot (\hat{e} \wedge \tilde{V}_0)] d\varsigma \quad (8.24)$$

ce qui donne :

$$\tilde{V}_\varsigma \simeq -\sqrt{E} \left[\varsigma \nabla_{\parallel} \cdot \tilde{V}_0 + \left(\nabla_{\parallel} \cdot \tilde{V}_0 \right) \int_0^\infty F(\varsigma) d\varsigma + \left(\nabla_{\parallel} \cdot (\hat{e} \wedge \tilde{V}_0) \right) \int_0^\infty G(\varsigma) d\varsigma \right] \quad (8.25)$$

Les intégrales $\int_0^\infty F(\varsigma) d\varsigma$ et $\int_0^\infty G(\varsigma) d\varsigma$ s'obtiennent grâce aux équations (8.21) et (8.22). On a :

$$\int_0^\infty F(\varsigma) d\varsigma = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa^+} + \frac{1}{\kappa^-} \right) \quad (8.26)$$

$$\int_0^\infty G(\varsigma) d\varsigma = -\frac{i}{2 \|\hat{e}\|} \left(\frac{1}{\kappa^+} - \frac{1}{\kappa^-} \right) \quad (8.27)$$

On peut donc écrire la composante normale à la couche limite de la vitesse :

$$\tilde{v} \cdot \mathbf{n} = \tilde{v}_\perp = -\frac{1}{2} \sqrt{E} \left(\left(\frac{1}{\kappa^+} + \frac{1}{\kappa^-} \right) \nabla_{\parallel} \cdot \tilde{v} + \frac{i}{\|\hat{e}\|} \left(\frac{1}{\kappa^+} - \frac{1}{\kappa^-} \right) \nabla_{\parallel} \cdot (\hat{e} \wedge \tilde{v}) \right) \quad (8.28)$$

connue sous le nom de pompage d'Ekman.

Cette solution est similaire au pompage qui apparaît dans le problème d'une couche limite sans rotation (équation de Blasius). Cependant, ici, deux aspects caractérisent la couche d'Ekman : selon la vorticité locale, la couche aspire ou éjecte de la matière. Ce pompage d'Ekman fait apparaître une circulation en volume appelée de fait circulation d'Ekman ; elle joue un rôle prépondérant dans la dynamique à grande échelle d'un fluide en rotation.

8.2 Perspectives sur la couche d'Ekman en précession

Dans cette section, nous allons présenter la philosophie du calcul analytique prenant en compte les effets de la précession sur la couche d'Ekman. On rappelle les équations de la dynamique dans le référentiel en précession :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -2\varepsilon \hat{e}_x \wedge \vec{u} - \vec{u} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) - \vec{\nabla}(P) + E \Delta \vec{u} \quad (8.29)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (8.30)$$

$$\vec{u} = \hat{e}_z \wedge \vec{r} \big|_{r=1, \pm \frac{h}{2}} \quad (8.31)$$

A la manière du couplage de modes non visqueux, nous allons introduire un développement à 2 paramètres, ε , le taux de précession mesurant le forçage par précession et ε'' , le terme mesurant les effets visqueux. On a : $\varepsilon'' = \sqrt{E}$, longueur caractéristique de la couche limite. Le développement perturbatif généralise l'équation (8.4) pour la perturbation de vitesse v par rapport à la rotation solide :

$$\vec{v} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^i \varepsilon''^j \vec{v}_{ij} \quad (8.32)$$

Ainsi, l'ordre $i = 1; j = 0$ représente le flot de base expliquée en section 3.3.1. L'ordre $i = 0; j = 1$ représente le pompage d'Ekman axial calculé dans la section précédente. On considère toujours le flot de base de Mahalov défini au chapitre 3 et utilisé comme flot de base pour l'étude faiblement non linéaire du chapitre 4. Nous ne ferons pas le calcul explicitement mais nous pouvons dire que l'effet de la précession est d'introduire une anisotropie en ϕ car l'axe de précession est porté par $\hat{e}_x = \cos(\phi) \hat{e}_r - \sin(\phi) \hat{e}_\phi$. En supposant la rotation autour de l'axe $\hat{e}_x$ indépendante de la rotation autour de $\hat{e}_z$, il est possible de générer une couche d'Ekman cette fois-ci sur les parois latérales.

8.3 Perspectives concernant le couplage de modes en présence de viscosité

Cette brève section présente un modèle incluant les termes visqueux dans le système dynamique défini au chapitre 4. Les équations d'amplitude des modes (A_1, A_2, C) couplés trouvées au chapitre 4 sont :

$$\frac{dA_1}{dT} = i\gamma_1 A_1 + \varepsilon p A_2 + iA_1(s_{11} |A_1|^2 + s_{12} |A_2|^2) \quad (8.33)$$

$$\frac{dA_2}{dT} = i\gamma_2 A_2 + \varepsilon q A_1 + iA_2(s_{21}|A_1|^2 + s_{22}|A_2|^2) \quad (8.34)$$

$$\frac{dC}{dT} = (A_1 A_2^* + A_1^* A_2) \quad (8.35)$$

C'est un système non dissipatif et aucun comportement chaotique ne peut être mis en évidence. On ajoute les termes d'amortissement *ad hoc* représentant les termes visqueux :

$$\frac{dA_1}{dT} = i\gamma_1 A_1 - a_1 A_1 + \varepsilon p A_2 + iA_1(s_{11}|A_1|^2 + s_{12}|A_2|^2) \quad (8.36)$$

$$\frac{dA_2}{dT} = i\gamma_2 A_2 - a_{12} A_2 + \varepsilon q A_1 + iA_2(s_{21}|A_1|^2 + s_{22}|A_2|^2) \quad (8.37)$$

$$\frac{dC}{dT} = -a_C C + (A_1 A_2^* + A_1^* A_2) + d(s'_{11}|A_1|^2 + s'_{22}|A_2|^2) \quad (8.38)$$

Les termes a_1, a_2, a_C sont proportionnels à $E = R_e^{-1}$ tandis que $d \sim E^2$. On n'explicitera pas les coefficients ici. Des études préliminaires de ce système dissipatif ont montré qu'il pouvait engendrer des comportements chaotiques.

8.4 Effet de la viscosité sur la rotation différentielle : simulations numériques

L'objectif de cette section est d'étudier au moyen de simulations numériques à $R_e = 1000$, (soit 100 fois moins que nos études expérimentales) l'influence de la viscosité sur les profils de rotation différentielle en comparant les équations de Stokes et Navier-Stokes pour trois valeurs du taux de forçage.

8.4.1 Présentation

Pour simuler numériquement l'écoulement forcé par précession, on a le choix entre trois référentiels, qui déterminent des conditions aux limites bien différentes. Dans le référentiel du laboratoire, on doit traiter les équations de Navier-Stokes standard, mais avec des conditions aux limites dépendant du temps d'une façon complexe et peu attractive. Dans le référentiel de la précession, on doit ajouter l'accélération de Coriolis et vérifier que la vitesse du flot sur les parois est celle de la rotation du réservoir. Enfin, on peut aussi choisir le référentiel du réservoir, ce qui demande d'ajouter deux termes dans les équations, les accélérations de Poincaré et de Coriolis, en vérifiant que la vitesse sur les parois est nulle. Cette dernière formulation peut sembler la plus avantageuse numériquement, mais l'interprétation des résultats par comparaison avec la solution linéarisée est moins directe que dans le cas du référentiel de la précession. C'est ce dernier qui a été privilégié par P. Lallemand pour réaliser des simulations de ce problème avec une méthode de gaz de Boltzmann sur réseau. D'autres simulations ont été réalisées ensuite par Raphael Laguerre avec le code SFEMaNS qui est un code hybride, éléments finis triangulaires dans une section méridienne et spectrale (Fourier) dans la direction azimutale. L'avantage de ce dernier code est qu'il existe en

version MHD, adaptée au problème de l'effet dynamo. Nous consacrerons le prochain chapitre à une discussion de ces simulations.

En restant général ici, on peut dire que quelles que soient les méthodes numériques, les capacités en mémoire des ordinateurs limitent très sévèrement la résolution spatiale, et donc le nombre de Reynolds, $R_e = \frac{V_{max} L_{max}}{\nu} = 2\pi\Omega_R R^2$ qui dépasse en pratique difficilement 5 000 dans les simulations directes. Les méthodes de simulation des grandes échelles ne sont pas encore universellement validées pour la description d'écoulement à des Reynolds expérimentaux. On peut noter qu'avec de l'eau comme fluide, $\nu = 10^{-6}$, et rayon $R = 0.145$ m (expérience ATER), un nombre de Reynolds $Re = 5000$ correspondrait à une fréquence de rotation ridiculement faible de 0.038 tours par seconde ! Les mesures sont en général effectuées avec un minimum de $\Omega_R = 1 \text{ tr/s}$, soit un nombre de Reynolds 26 fois plus élevé.

Les calculs ont été réalisés avec la géométrie cylindrique de l'expérience et un axe de précession orthogonal à l'axe de rotation qui concide avec l'axe du cylindre. Un avantage majeur des simulations par rapport aux expériences est de pouvoir changer facilement l'allongement, l'autre avantage étant bien sûr d'obtenir la totalité du champ de vitesse tridimensionnel en fonction du temps.

Cas des solutions périodiques L'approche numérique permet d'étudier les solutions périodiques pour un tube infini, ce qui est bien sûr hors de portée des expériences, mais permet des comparaisons avec les approches analytiques de Mahalov (1993) [67] et Kerswell (1993) [44]. Dans un tube infini, on montre dans le cas non visqueux qu'il existe une solution de base exacte du champ de vitesse $(0, r\Omega, -2\epsilon r \sin\varphi)$ (dans les coordonnées cylindriques (r, φ, z)). En linéarisant par rapport à cette solution, ces auteurs montrent que l'écoulement subit une instabilité paramétrique lorsque le taux de précession atteint une valeur critique et pour des nombres d'ondes axiaux donnés par une équation de type Matthieu. Les simulations numériques ne montrent pas ces résonances, ce que nous expliquons par des Reynolds trop bas.

Cas du réservoir fini Pour satisfaire à la condition aux limites de vitesse axiale nulle sur les deux couvercles, on doit superposer à la solution de base vue ci-dessus $(0, r\Omega, -2\epsilon r \sin\varphi)$ une série infinie de modes de Kelvin sur le mode azimutal $m=1$, formant un développement de Dini de la fonction radiale r . Lorsque la demi-longueur d'onde coïncide avec la longueur du cylindre, on obtient une résonance, l'amplitude finale étant réglée par les interactions non-linéaires et la viscosité.

Dans ces simulations, le régime linéaire d'onde tournante et une rotation différentielle du profil azimutal moyen ont été obtenus pour un certain taux du forçage. Insistons sur le fait qu'aucune simulation numérique n'a mis en évidence notre régime de tourbillons cycloniques observés expérimentalement.

8.4.2 Résultats

Afin de mettre en évidence l'importance des effets visqueux par rapport aux effets non-linéaires, une série de simulations comparées des équations de Stokes et Navier-Stokes a été réalisée pour un allongement correspondant à la première résonance du mode $m = 1$ pour différents taux de forçage, avec $R_e = 1000$. Nous nous intéresserons à la moyenne azimutale de la vitesse azimutale pour comparer ensuite aux mesures expérimentales.

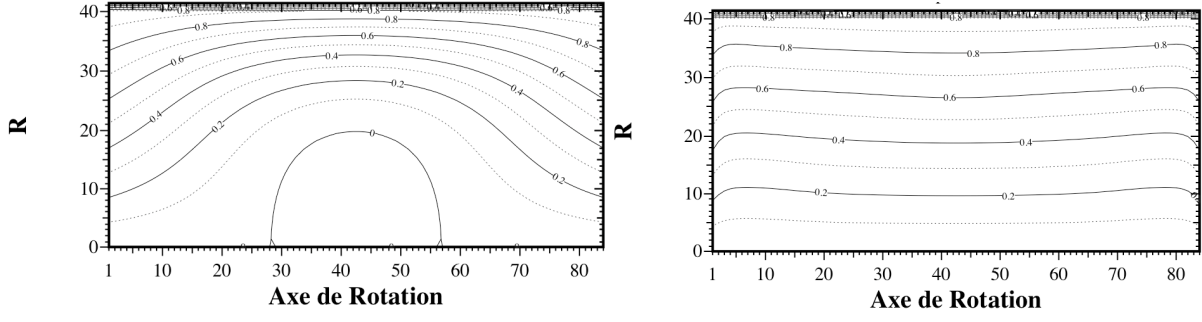


FIGURE 8.2: Simulations numériques de l'équation de Stokes (à gauche) et Navier-Stokes (à droite) à $\varepsilon = 0.02$

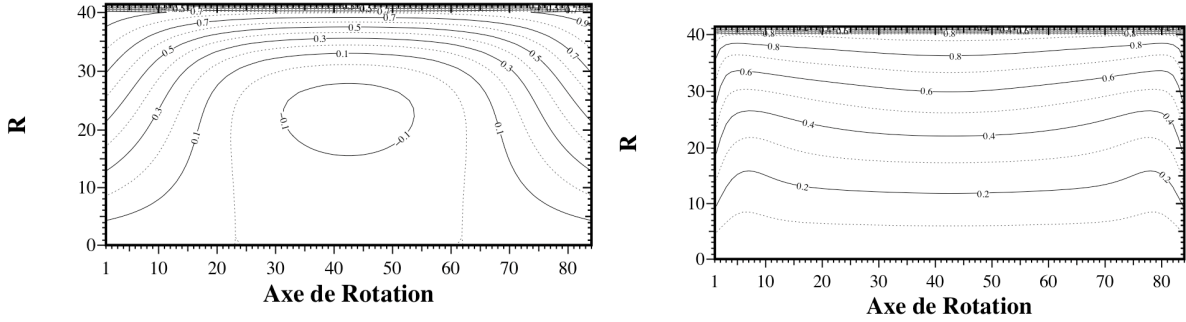


FIGURE 8.3: Simulations numériques de l'équation de Stokes (à gauche) et Navier-Stokes (à droite) à $\varepsilon = 0.05$

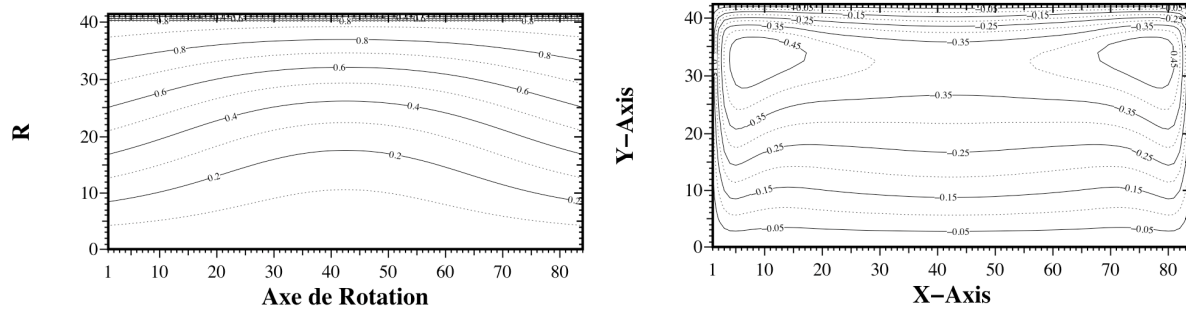


FIGURE 8.4: Simulations numériques de l'équation de Stokes (à gauche) et Navier-Stokes (à droite) à $\varepsilon = 0.1$.

Les figures (8.2-8.3-8.4) montrent que la rotation différentielle (sous-rotation) est plus accentuée dans le cas purement visqueux. Donc les termes non-linéaires sont essentielles pour l'entraînement du centre.

8.5 Conclusion

Nous avons introduit la viscosité dans le système dynamique formé par les équations de Ginzburg-Landau pour les amplitudes avec couplage faiblement non linéaire. Cette approche est similaire à celle de Racz et Scott [92, 110, 93]. Des simulations préliminaires ont montré la possibilité

de générer un chaos et des attracteurs qu'il faudra caractériser plus précisément.

Nous avons ensuite rappelé la solution connue sous le nom de pompage d'Ekman qui induit dans le cas d'un fluide en rotation une circulation secondaire en volume. Nous avons étudié alors le couplage faiblement non linéaire à deux paramètres introduit au chapitre 3.

Enfin nous avons comparé la dynamique des équations de Stokes et Navier-Stokes et leur effet sur la rotation différentielle. Le prochain chapitre tentera d'illustrer l'écoulement en précession au travers des simulations numériques.

Chapitre 9

La précession illustrée par des simulations numériques

9.1 Simulations hydrodynamiques

Il est bien connu que la résolution spatiale limitée de l'intégration numérique des équations d'évolution de la MHD ("simulations numérique directes") permet de décrire des écoulements à des nombre de Reynolds dépassant difficilement 5000, alors que les expériences en eau dépassent couramment 100 fois cette valeur. L'avantage majeur de l'approche numérique sur les mesures expérimentales est évidemment que la solution (vitesse et pression) peut être suivie en tout point et à tout instant. La particularité du forçage par précession est le rôle dévolu aux parois qui sont la source d'énergie cinétique. Dans la quasi-totalité des autres configurations d'origines expérimentales, cette injection (turbines, écoulements ouverts, etc....) doit se traduire numériquement par une modélisation ad-hoc, ceci dès lors que le domaine de calcul ne coïncide pas avec le volume de l'écoulement. Par exemple, si le traitement du flot de Taylor-Couette en géométrie sphérique est comparable de ce point de vue à celui de la précession, on sait que dans le cas du Taylor-Couette cylindrique, qui est une configuration classique, l'influence des frontières fixant la longueur du cylindre sont à l'origine de beaucoup de soucis. Les paramètres numériques seront les mêmes que ceux utilisés pour les expériences : allongement $a = \frac{L}{2R}$, $E = \frac{\nu}{\Omega_r^2 R}$ (on note $R_e = \frac{1}{E}$), et taux de précession $\varepsilon = \frac{\Omega_p}{\Omega_r}$.

Dans ce chapitre nous présentons quelques illustrations provenant de simulations numériques, afin d'aider à se familiariser avec certaines propriétés des écoulements forcés par précession, tout en s'abstenant de présenter les méthodes numériques. Les simulations numérique proviennent de deux sources, notées respectivement *[PL]* et *[RL]* sur les figures qui suivent. Les premières simulations ont été faites par Pierre Lallemand (laboratoire ASCI, puis LIMSI), qui a utilisé son code d'intégration de l'équation de Boltzman sur réseau. Ces calculs ont été faits avec cylindre fini et infini (solutions axialement périodiques), en se concentrant sur les aspects hydrodynamiques, avec une résolution utilisant une grille spatiale d'environ 80^3 points. Ces simulations ont été extrêmement utiles dans la phase de préparation d'ATER. Les secondes simulations ont été faites à l'aide du code non linéaire MHD (SFEMaNS) par Raphael Laguerre, avec l'objectif principal de rechercher les conditions favorables à l'effet dynamo. Elles sont limitées ici au cas hydrodynamique.

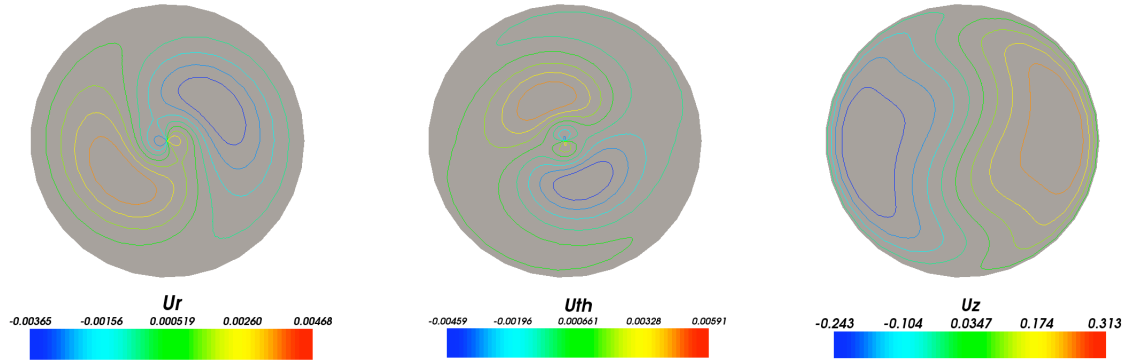


Figure 9.1: Fluctuations des vitesses radiale, azimuthale et axiale (modes $m > 0$), sections en $z = \frac{L}{2}$ $\{L/2R = 1, \varepsilon = 0.1, Re = 100 [RL]\}$

9.1.1 Vitesse fluctuante à Reynolds faible (modes $m > 0$)

Dans les chapitres antérieurs, nous avons utilisé la solution linéarisée non visqueuse pour interpréter les résultats expérimentaux ($Re > 150\,000$). Il est intéressant de montrer à titre de comparaison le régime à Reynolds faible ($Re = 100$), qu'il serait délicat de réaliser au laboratoire en raison des sources de bruit divers (effets de flottaison des particules advectées notamment), mais qu'il est très facile d'obtenir numériquement.

On montre sur la figure 9.1 les trois composantes des fluctuations du champ de vitesse par rapport à la rotation rigide (le mode $m = 0$ est soustrait). On constate le forçage sur le mode $m = 1$, et on peut identifier les couches limites visqueuses sur la paroi (via les extrema de vorticité). On voit aussi le glissement en azimuth de la solution analytique inviscide.

9.1.2 Lignes de courant et vorticité axiale

La solution linéarisée inviscide, et en particulier la vitesse axiale, est proportionnelle au taux de précession. Dans le cas des taux faibles, on obtient un tourbillon avec une inclinaison qui peut être mesurée au centre du réservoir. On a représenté sur la figure 9.2, à gauche, les lignes de courant obtenues pour un taux de précession faible ($\varepsilon = 0.06$), qui sont circulaires et coaxiales à précession nulle, et à droite les lignes de niveau de la composante axiale de la vorticité dans le plan médian ($\varepsilon = 0.05$). Pour ces valeurs du forçage, on vérifie que la solution numérique (à faible nombre de Reynolds) conserve la symétrie centrale du forçage et du réservoir.

La figure 9.3 compare les lignes de courant obtenues pour un nombre de Reynolds plus élevé ($Re = 1000$) et deux taux de précession. En comparant avec la figure précédente de même taux de précession $\varepsilon = 0.15$, l'effet du nombre de Reynolds sur la topologie des trajectoires est clairement visible, ainsi que l'influence du taux de précession pour un Reynolds fixé. Cette dernière question est reprise de façon quantitative dans le paragraphe suivant.

9.1.3 Ecoulement dans la région centrale

En utilisant des bulles d'air qui se placent par effet de flottaison sur la zone de pression et vitesse minimales, on obtient une courbe dans l'espace dont l'inclinaison suit les variations du taux de précession tant que celui-ci reste faible. A la transition turbulente, ce tourbillon commence par

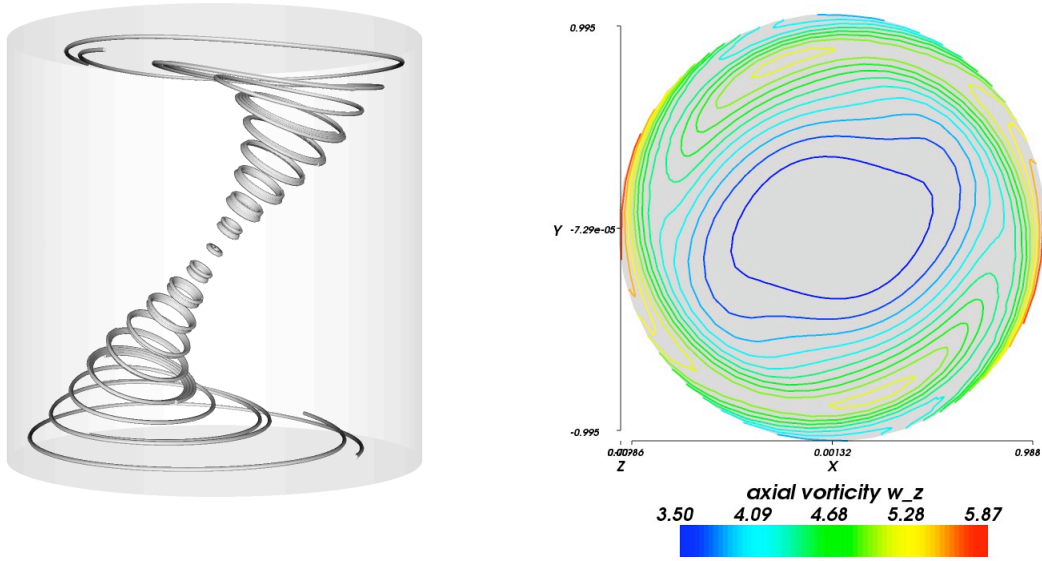


Figure 9.2: lignes de courant et vorticité médiane à précession faible $[RL]$

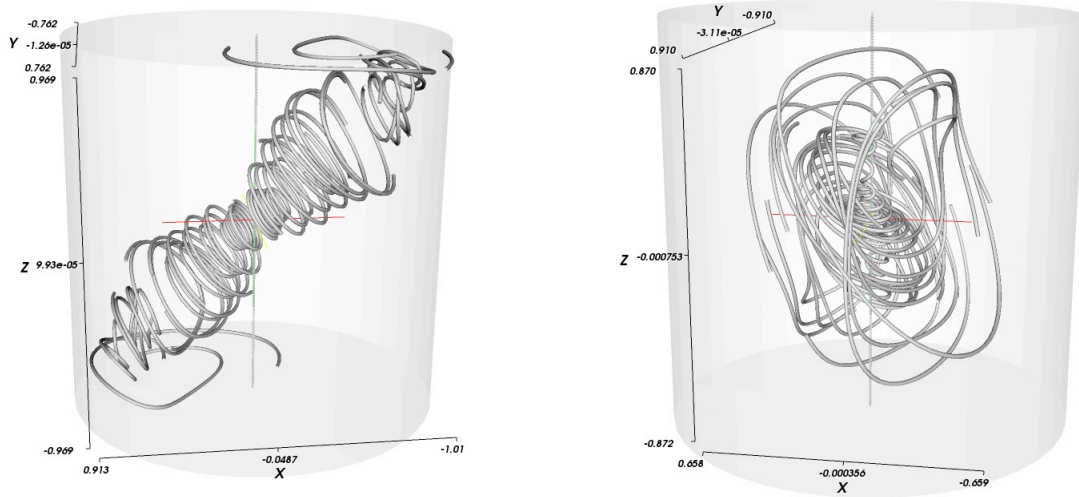


Figure 9.3: lignes de courant pour deux taux de précession $\varepsilon = 0.1$ et $\varepsilon = 0.15$. $\{Re = 1000[RL]\}$

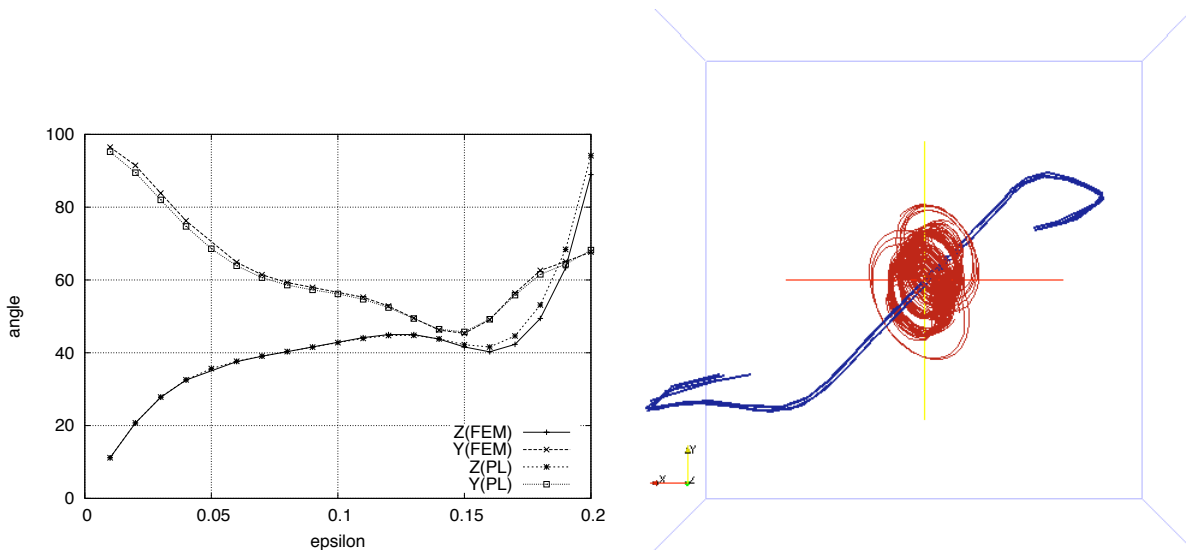


Figure 9.4: Inclinaison de la vorticité centrale ($Re= 400$). Figure de gauche : effet du taux de précession (angle Z avec l'axe de rotation et l'angle Y avec l'axe de précession dans le plan équatorial, comparaison $[PL]$ $[RL]$). Figure de droite: lignes de vorticité passant par le centre, en bleu) et lignes de courant au voisinage de centre (en rouge), en projection sur une section droite du cylindre (vue selon l'axe de rotation, $\varepsilon= 0.15$) $[RL]$

vibrer autour de sa position moyenne avant de disparaître brusquement à la turbulence, qui voit s'effondrer en même temps la rotation moyenne. Les simulations numériques permettent de tracer avec précision la variation de l'orientation du vortex central (soit l'angle Z avec l'axe de rotation et l'angle Y avec l'axe de précession dans le plan équatorial), voir la figure 9.4.

La vorticité centrale (non représentée ici) passe par un minimum proche de 1.55 pour $\varepsilon=0.15$ (elle vaut 2 pour la rotation rigide), qui correspond ainsi à une rotation différentielle extr male. On peut noter que dans les expériences, la turbulence se produit vers $\varepsilon= 0.1$ alors que dans les simulations numériques à $Re= 400$, la solution est toujours stationnaire pour $\varepsilon=0.2$.   ce niveau de précession, la ligne de vorticité centrale perd sa linéarité et devient sinueuse ce qui dénote l'excitation d'échelles de plus en plus petites. Ces visualisations suggèrent un examen plus approfondi de cette zone et de ce régime de forçage pour l'étude de la transition à la turbulence, en mettant l'accent sur la perte d'invariance de symétrie centrale de l'écoulement.

9.1.4 Circulation axiale

La solution stationnaire linéarisée comporte un écoulement axial dominant dans le plan méridien orthogonal à l'axe de précession. Dans le cas visqueux sélectionné ($Re= 400$), avec un taux de précession de 0.06, relativement faible, la figure 9.5 montre que l'on obtient des vitesses axiales ou radiales de l'ordre du tiers de la vitesse de la paroi (NB: la table de couleur de la figure se réfère au module de la vitesse et non à son carré)

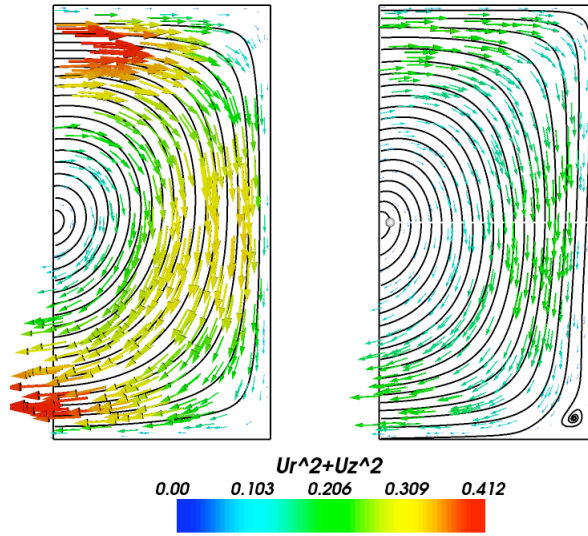


Figure 9.5: circulation méridienne dans le plan $x=0$ (à gauche) et $y=0$ (à droite) [RL]

9.1.5 Rotation différentielle

Il s'agit en fait d'évaluer l'écart du mode $m=0$ de la vitesse azimutale à la rotation rigide. Dans un écoulement stationnaire, cette quantité dépendra de r et z . la figure 9.6 représente, dans le plan r (du centre à la paroi, en ordonnée) et z (de 0 à $H/2$ en abscisse), les isocontours du rapport de la vitesse azimutale, moyennée sur les angles polaires $(0, 2\pi)$, à $r \Omega_r$. Dans la région centrale de l'écoulement, on constate un écart à la rotation rigide atteignant 20% dans deux domaines coaxiaux proches du plan médian. L'amplitude de cet écart est une fonction croissante de ε en régime laminaire et devrait se rapprocher de 100% en régime turbulent, régime non atteint par les simulations numériques.

9.1.6 Distribution de l'énergie

Lorsque le taux de précession croît à partir de zéro, l'énergie cinétique de rotation décroît au profit de la circulation axiale. La figure 9.7 montre comment se répartit l'énergie totale lorsque le taux de précession ε varie entre 0 et 0.1, en normalisant les énergies par celle de la rotation rigide à précession nulle. Le calcul est fait en coordonnées cartésiennes : oy est l'axe de précession et oz l'axe de rotation.

Les 6 courbes peuvent s'identifier par leur ordre d'amplitude décroissante en $\varepsilon = 0.1$:

- rotation (énergie tangentielle : T_a , qui décroît à partir de 1)
- composante x (décroît à partir de $1/2$)
- composante y (décroît à partir de $1/2$)
- tangentielle relative (rotation rigide soustraite, T_r)
- composante z (axiale, croît à partir de 0)

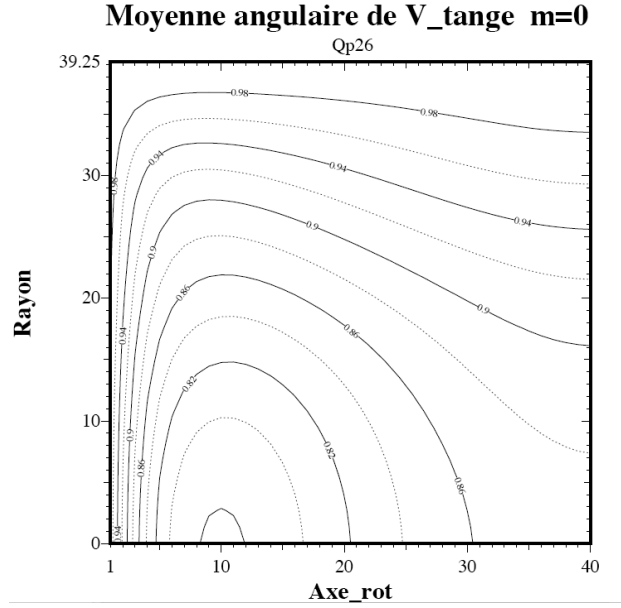


Figure 9.6: rotation différentielle ($L/2R = 0.98$ $Re=200$, $\varepsilon=0.1$, [PL])

Solution dépendant du temps Lorsque le Reynolds et le taux de précession croissent, l'écoulement devient instationnaire. On se borne ici à présenter l'évolution de deux modes sur la figure 9.8 alors que la dynamique concerne tout le spectre.

9.2 Perspectives MHD : Dynamo en précession avec tourbillons cycloniques

9.2.1 Modélisation des cyclones

Il s'agit de modéliser le régime des vortex (trois ou quatre) obtenus expérimentalement dans ATER. On a constaté la présence de tourbillons cycloniques quasi-circulaires dont la vorticité relative ω_C (dans le référentiel du cylindre) était le quart de celle de la rotation solide et de rayon caractéristique a_C = un dixième du rayon du cylindre, à une distance typique R proche du tiers du rayon du cylindre. Comme ces tourbillons sont bidimensionnels et incompressibles, on va les décrire à l'aide d'une fonction de courant Ψ . On sait que des tourbillons axisymétriques placés au centre du référentiel peuvent être représentés par différentes fonctions de courant (Burgers, Lamb Oseen, on pourra consulter [101, 102]):

Ici, notre choix se porte sur $\Psi = Ae^{-\frac{r^2}{2a^2}}$ (ψ dépend d'une seule variable) et il sera donc utilisé dans le cadre de la simulation dynamo cinématique avec un champ de vitesse modélisé qui n'est pas solution exacte de Navier Stokes. Il reste maintenant à faire un changement d'origine pour avoir une représentation satisfaisante du régime d'écoulement observé. Etant donné la symétrie cylindrique, les formules analytiques décrivant les tourbillons seront écrites en coordonnées polaires $\{r, \varphi\}$ centrées sur le centre du cylindre, le point courant ayant la position $\{S, \Phi\}$ dans le référentiel centré au centre du tourbillon.

Par conséquent, la fonction de courant choisie $\Psi = Ae^{-\frac{S^2}{2a^2}}$ devient une fonction explicite de (r et φ) avec : $S = \sqrt{(R^2 + r^2 - 2R \cdot r \cos(\varphi - \Phi))}$

ENER

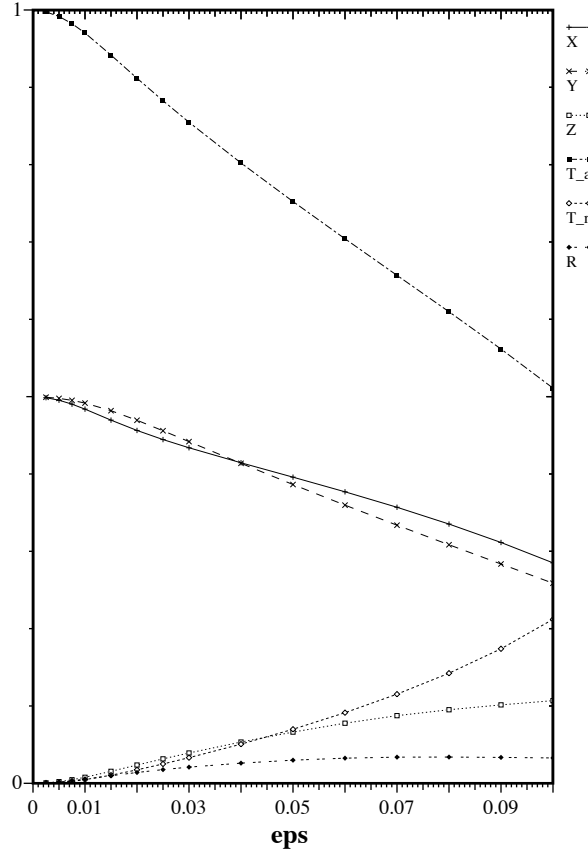


Figure 9.7: distribution des énergies en fonction du taux de précession ($L=2R$, $Re=1000$ [PL])

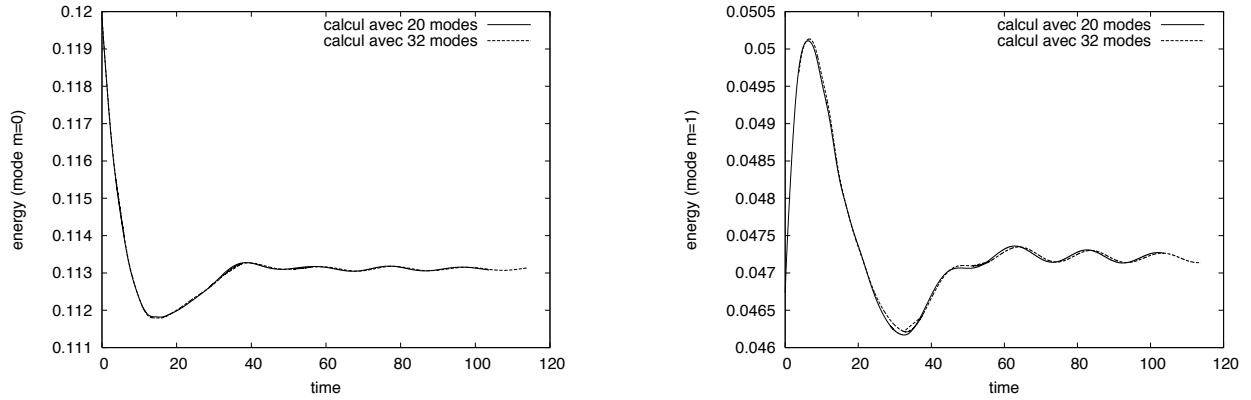


Figure 9.8: évolution temporelle de l'énergie des modes $m=0$ et $m=1$ ($Re= 1000$ et $\varepsilon= 0.15, [RL]$)

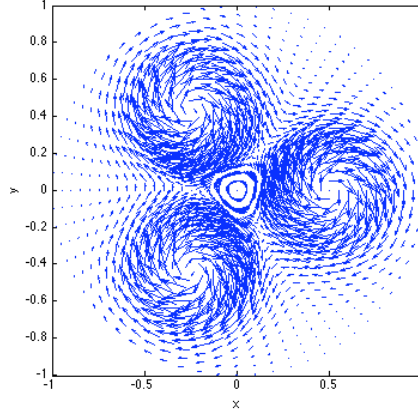


FIGURE 9.9: Trois cyclones

On déduit les vitesses radiales et azimutales par les formules suivantes : $\mathbf{V} = (u, v) = \text{rot}(\Psi \mathbf{e}_z) = -\mathbf{e}_z \wedge \nabla(\Psi)$

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dS} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right) = \frac{-r}{a^2} \Psi \sin(\varphi - \Phi) \quad (9.1)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{d\psi}{dS} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right) = \frac{-1}{a^2} \Psi (R - r \cos(\varphi - \Phi)) \quad (9.2)$$

La constante de normalisation A est définie par la vorticité centrale $\omega_C = \nabla \times \mathbf{V} = -\Delta \Psi = \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial S} (S \frac{\partial \Psi}{\partial S})_{S \rightarrow 0} = \frac{2A}{a^2}$, soit, finalement, $\Psi = \frac{a^2 \omega_C}{2} e^{-\frac{S^2}{2a^2}}$.

Pour avoir le champ de vitesse résultant de plusieurs cyclones, il suffit de superposer les fonctions de courant liées à chacun des cyclones.

Pour comparer directement avec les champs de vitesse PIV, nous allons décrire le problème en coordonnées cartésiennes $\{x, y\}$. On représente sur la grille cartésienne le champ de vitesse ainsi obtenu (fig.(9.9)).

9.2.2 Transformée de Fourier et filtrage

Le champ de vitesse défini analytiquement peut être représenté dans l'espace de Fourier avec une résolution quelconque en r et φ . Dans le code dynamo, la résolution azimutale est limitée pour réduire les temps de calcul. Il faut donc fournir au code SFEMANS un nombre de modes réduit, typiquement de l'ordre de 16. Nous montrons ici les étapes de cette procédure réalisée sous Matlab.

Premièrement, nous calculons les modes azimuthaux de Fourier des vitesses azimutales et radiales de dimension 64 en φ et 21 en r . Puis, nous effectuons une troncature des modes $m > 15$, les sorties sont représentées par les composantes en cosinus et sinus, respectivement C_{rad} , S_{rad} pour la composante radiale et C_{az} , S_{az} pour la composante azimuthale.

La vérification se fait en repassant dans l'espace physique. On projette les composantes de Fourier en sommant toutes les contributions allant de $m_i = 0$ à m_{trunc} sur une base $\{\cos(m_i \phi_{trunc}); \sin(m_i \phi_{trunc})\}$.

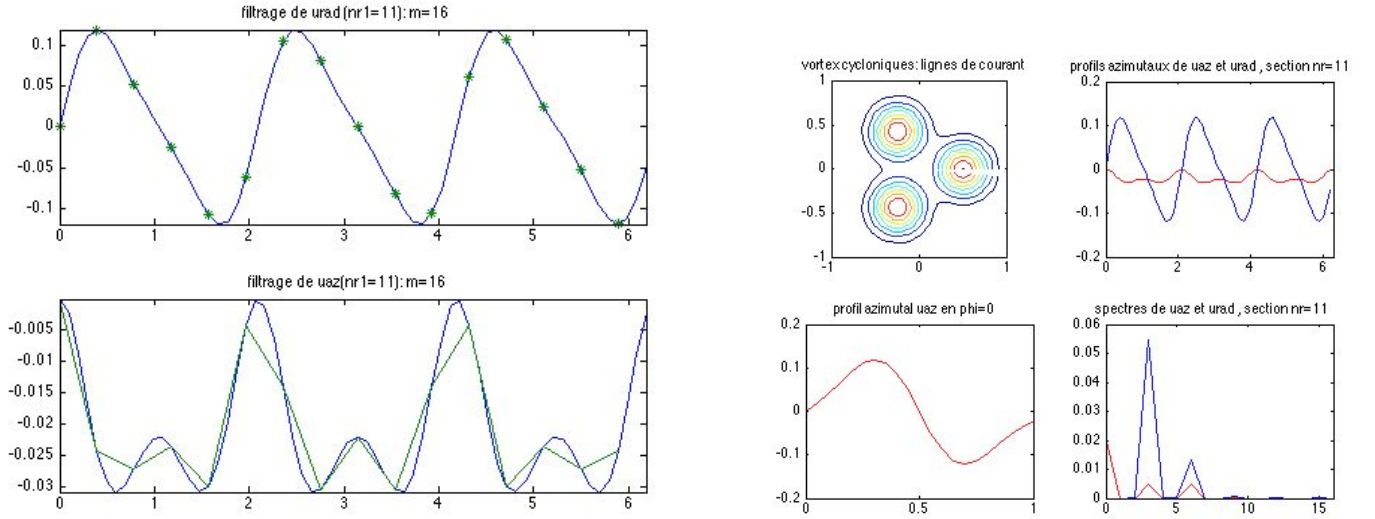


FIGURE 9.10: Filtrage spectral avec 16 modes, à mi-distance de la paroi. Deux figures du haut : vitesses radiale et azimuthale en fonction de ϕ . Figures du bas : en haut à gauche, isocontours de la fonction courant dans le plan (R, ϕ) ; en haut à droite, profils azimuthaux des vitesse radiale et azimuthale (à mi-distance de la paroi) ; en bas à gauche, profil radial de la vitesse azimuthale ($\phi=0$) ; en bas à droite, spectres des vitesses azimuthale et radiale.

On représente graphiquement le résultant en adaptant le nombre de points nécessaire pour comparer les courbes filtrées avec les courbes non filtrées

9.2.3 Implémentation du régime des vortex dans un code dynamo cinématique

Pour une description précise du code Sfemans, on pourra consulter [56]. On dispose du champ de vitesse des tourbillons cycloniques à l'instant $t=0$ et on veut utiliser ses composantes à l'instant t dans un code de dynamo cinématique, sachant qu'il a tourné en bloc de l'angle Ωt . Comme l'écoulement est de période 2π en azimuth ϕ , on utilise une représentation à base de séries de Fourier dans le code de dynamo et les composantes du champ de vitesse sont exprimées en coordonnées polaires (r, ϕ) . Les tourbillons ne dépendent pas de z , mais de r, ϕ et t . L'expérience montre que la dérivation des formules décrivant cette rotation globale n'est pas intuitive, il n'est donc pas inutile de la présenter en détail.

A l'instant t , le point $M_1(r, \phi_1)$ est le point qui était en $M_0(r, \phi_0)$, à l'instant 0, avec $\phi_0 = \phi_1 - \Omega t$. Comme la rotation du champ de vitesse est en bloc autour de l'origine des coordonnées, les composantes polaires en M_1 à l'instant sont identiques aux composantes polaires en M_0 à l'instant zero: $u_r(M_1) = u_r(M_0)$ $u_\phi(M_1) = u_\phi(M_0)$

On cherche les coefficients u_{rc} et u_{rs} (au point $M_1(r, \phi_1, t)$), tels que

$$u_r(r, \phi_1, t) = \sum_m u_{rc}(r, t) \cos(m\phi_1) + u_{rs}(r, t) \sin(m\phi_1)$$

$$u_\phi(r, \phi_1, t) = \sum_m u_{rc}(r, t) \cos(m\phi_1) + u_{rs}(r, t) \sin(m\phi_1)$$

On connaît $u_r(M_0)$ et $u_t(M_0)$, c'est-à-dire les coefficients u_{rc} et u_{rs} au point $M_0(r, \phi_1 - \Omega t)$, tels que:

$$u_r(M_0) = u_r(\phi_1 - \Omega t, t=0) = \sum_m u_{rc}(r,0) [\cos(m\phi_1) \cos(m\Omega t) + \sin(m\phi_1) \sin(m\Omega t)] + u_{rs}(r,0) [\sin(m\phi_1) \cos(m\Omega t) - \cos(m\phi_1) \sin(m\Omega t)]$$

$$u_\phi(M_0) = u_\phi(\phi_1 - \Omega t, t=0) = \sum_m u_{\phi c}(r,0) [\cos(m\phi_1) \cos(m\Omega t) + \sin(m\phi_1) \sin(m\Omega t)] + u_{\phi s}(r,0) [\sin(m\phi_1) \cos(m\Omega t) - \cos(m\phi_1) \sin(m\Omega t)]$$

En écrivant que:

$$u_r(r, \phi_1, t) = u_r(r, \phi_0, 0)$$

$$u_\phi(r, \phi_1, t) = u_\phi(r, \phi_0, 0),$$

on en déduit $u_{rc}(r, t)$, u_{rs} , $u_{\phi c}$ à l'instant t en fonction de leurs valeurs à $t=0$.

9.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'écoulement hydrodynamique en précession en cylindre fini de manière numérique pour des nombre de Reynolds limité. Nous avons retrouvé la solution linéaire et mis en évidence une rotation différentielle (avec une loi d'échelle en ε^α avec α légèrement inférieur à 2) et mieux caractérisé la circulation axiale qui est un effet de la précession.

La deuxième section de ce chapitre est consacrée à l'implémentation du régime des cyclones décrits au chapitre 7 dans l'écoulement hydrodynamique décrit à la première section. Ce travail est le premier jalon d'une étude MHD en vue de l'obtention possible d'une dynamo étant donné les caractéristiques intéressantes du régime des cyclones.

Chapitre 10

Diffusion acoustique dans un écoulement turbulent

10.1 Principe et motivations de notre étude

10.1.1 Présentation

Les écoulements turbulents sont, en général, étudiés expérimentalement au moyen de sondes locales : la vitesse de l'écoulement ou la pression en un point sont enregistrées au cours du temps (anémométrie à fil chaud, anémométrie à laser,...). Avec de tels systèmes de mesure, on utilise des sondes aussi petites que possible pour résoudre les plus petites échelles de l'écoulement ($\sim 100\mu m$). Pour convertir l'information temporelle en information d'échelle (gradients de vitesse spatiaux), on a habituellement recours à l'hypothèse de Taylor consistant à identifier les incréments temporels τ et spatiaux l à l'aide de la relation suivante :

$$V(t, x + r) - V(t, x) = V(t - \tau, x) - V(t, x)$$

avec $r = \langle V \rangle \tau$

L'hypothèse de Taylor représente une approximation au premier ordre, applicable donc préférentiellement aux écoulements peu turbulents.

La turbulence est souvent le siège de phénomènes intermittents. On attribue généralement l'intermittence à la présence dans l'écoulement de structures organisées, localisées temporellement et spatialement. Ces structures apparaissent le plus souvent sous la forme de vorticités filamentaire de durée de vie limitée. La détection de ces objets est délicate et on ne dispose d'aucune méthode systématique ou de critères pour les identifier. En effet, la probabilité d'intersection de ces structures filamenteuses avec une sonde ponctuelle est, en toute rigueur, nulle. Au mieux, on peut envisager une détection indirecte de ces tourbillons en analysant une éventuelle signature de leur contribution au champ de vitesse lorsque ceux-ci sont advectés au voisinage de la sonde par un le champ de vitesse moyen.

La vorticité est un paramètre important pour l'étude de la turbulence pour, au moins, trois raisons :

- l'introduction d'un cisaillement, donc de gradients transversaux de vitesse, au sein d'un écoulement est source de turbulence.
- aux effets de diffusion visqueuse près, les lignes de vorticité sont confondues avec les trajectoires de particule fluide, et en étudiant la vorticité, on peut avoir accès à l'évolution de

certaines structures.

- l'étirement des vortex joue un rôle fondamental dans le processus de transfert d'énergie au sein de la cascade turbulence.

Bien que le rôle de la vorticité soit reconnu dans le développement de la turbulence, les propriétés caractéristiques liées à cette grandeur sont encore mal connues. Une des raisons r s de dans la difficulté à la mesurer avec les techniques expérimentales usuelles. L'article de revue de Wallace et al. fait un état des lieux des différents dispositifs expérimentaux permettant d'accéder au champ de vorticité. L'anémométrie à fil chaud avec plusieurs sondes est la technique la plus employée. Néanmoins, les inconvénients résident dans le fait que ce sont des méthodes intrusives et le champ de vorticité est mesuré indirectement ce qui est une source de bruit.

La méthode présentée dans ce chapitre (fig.1) , connue depuis une vingtaine d'années, permet d'effectuer une analyse spatiale directe (sélection d'échelle). Elle est basée sur la diffusion cohérente d'ondes acoustiques. La méthode acoustique est donc directement sensible au champ de vorticité, paramètre fondamental en turbulence. Le caractère spectral du phénomène de diffusion acoustique permet un processus de sélection d'échelle spatiale (*filtrage passe-bande*). Le choix d'un angle de diffusion et d'une fréquence de l'onde acoustique incidente fixe la sélection en module et en direction d'un vecteur d'onde spatial de diffusion.

Ainsi, nous aurons directement accès à l'évolution temporelle du champ de vorticité dans l'espace de Fourier. La méthode est non intrusive puisque les ondes acoustiques sont de faible amplitude et ne perturbent donc pas l'écoulement. D'autre part, le champ de pression diffusé mesuré est relié directement au champ de vorticité. Enfin, elle permet une mesure locale dans l'espace spectral.

10.1.2 Phénoménologie de la turbulence

Un écoulement turbulent met en jeu un continuum d'échelles comprises entre la plus grande, l'échelle intégrale L_I (taille typique de l'écoulement) et la plus petite, l'échelle de Kolmogorov, Λ . ( chelle de dissipation visqueuse). La détermination expérimentale des différentes échelles caractéristiques nécessite de prendre en compte la distribution spatiale du champ de vitesse à un instant donné, $u(x, t_0)$.

La phénoménologie classique de turbulence 3D s'exprime sous la forme d'une cascade. (voir fig.10.1). L'énergie turbulente est produite à grande échelle (L_I) au travers des gradients du champ de vitesse moyen puis est transférée, via une cascade, des grandes échelles vers les petites échelles (Λ) où elle est dissipée sous forme de chaleur. Entre ces deux échelles, il existe une zone intermédiaire, appelée zone inertielle, où le transfert d'énergie d'une échelle à l'autre est lié au processus d'étirement local des structures à une certaine échelle l . On introduit également l'échelle de Taylor, λ , intermédiaire entre les deux précédentes.

10.1.3 Turbulence en rotation

On pourra trouver une bonne revue de ce domaine dans [115]. On dit souvent que la rotation a tendance à bidimensionnaliser les écoulements turbulents par les effets non-linéaires des ondes inertielles, conséquence directe de l'anisotropie de la propagation de ces ondes (les ondes de faible fréquence propagent l'énergie plus « rapidement » que les ondes à grande fréquence). D'autres études (notamment, Davidson [21]) ont montré que les effets linéaires tendent à propager l'énergie le long de l'axe de rotation. Aucun consensus ne s'est fait jusqu'à nos jours et de nombreuses expériences (en cuve,[82, 40, 108][39]) et études numériques ([133, 119]) ont tenté de mettre en évidence des exposants critiques liés à la turbulence en rotation.

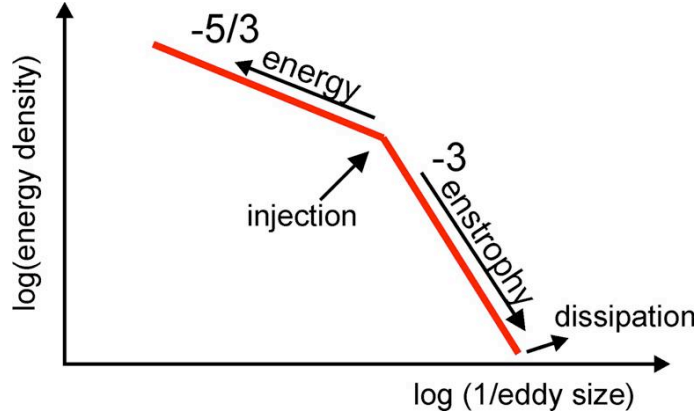


FIGURE 10.1: schéma symbolisant la cascade turbulente

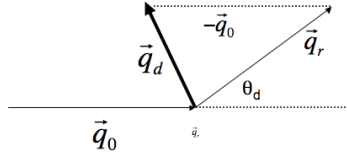


FIGURE 10.2: Principe de la diffusion acoustique

10.2 Principe du couplage son-vorticité

Considérons une onde acoustique plane se propageant avec une célérité c dans un milieu au repos. Les caractéristiques spatio-temporelles de cette onde (que l'on qualifiera d'incidente par la suite) sont : sa fréquence f reliée à la pulsation ω par $\omega = 2\pi f$, sa longueur d'onde λ définie comme $\lambda = \frac{c}{f}$ et sa direction de propagation matérialisée par le vecteur unitaire $\vec{n}$.

Le phénomène de diffusion ultrasonore résulte de l'interaction d'une onde incidente avec un milieu fluide turbulent. Le résultat de cette interaction se retrouve sous la forme d'une onde diffusée qui se propage dans tout l'espace. Autrement dit, la mesure du champ de pression diffusé porte une empreinte du champ turbulent. C'est en 1953 que Kraichnan posa les bases théoriques permettant de relier la diffusion ultrasonore aux propriétés d'un écoulement cisailé simple et d'une turbulence homogène isotrope. Dans son étude, il décompose le champ de vitesse en deux parties aux propriétés physiques différentes. En isotherme, la vitesse peut être décrite comme la superposition d'un champ de vitesse irrotationnel compressible relié aux fluctuations et d'un autre rotationnel incompressible propre à la vorticité. A partir de cette décomposition et d'un développement au premier ordre, Kraichnan démontre que ce sont les termes non linéaires (intervenant dans les équations du mouvement) couplant les deux champs de vitesse fluctuant qui sont à l'origine du processus de diffusion. L'étude d'un écoulement chauffé compressible turbulent (réalisé par Chu et al.) a

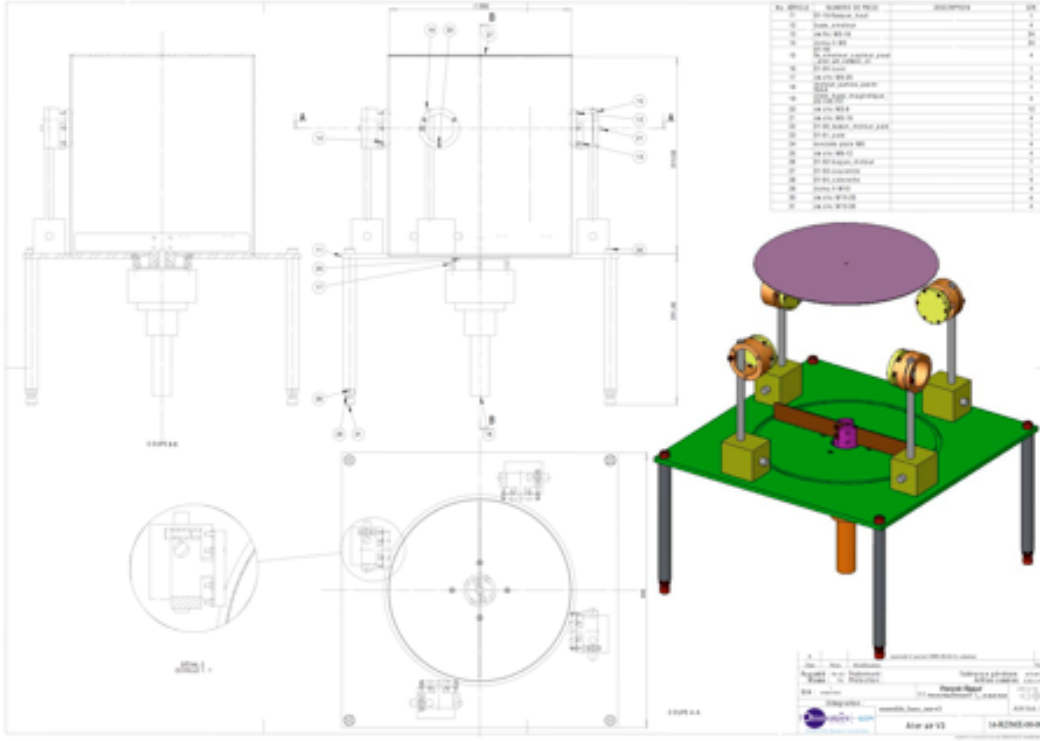


FIGURE 10.3: Schéma 3D du banc d'essai d'ATER air.

permis de progresser davantage et surtout de décomposer chaque paramètre physique du problème (vitesse, pression,...) sur la base de trois modes indépendants en compétition.

La figure (10.2) résume le principe de la méthode. Il est à remarquer que l'onde incidente possède une direction de propagation définie par $\vec{n}$ et l'onde diffusée se propage dans toutes les directions de l'espace. Les études de Kraichnan, Fabrikant ou Lund et al. ont introduit un facteur angulaire lié au fait que l'énergie diffusée n'est pas répartie de façon isotrope dans l'espace. Ces hypothèses ont d'ailleurs été validées expérimentalement (Baerg et al.). On définit l'angle de diffusion θ_d comme l'angle entre la direction de propagation de l'onde incidente et la direction de l'onde diffusée observée matérialisée expérimentalement par la position du récepteur acoustique. Le vecteur d'onde diffusé est obtenu par :

$$\vec{q}_d = \vec{q}_r - \vec{q}_0 \quad (10.1)$$

En supposant, dans la limite des écoulements à faible nombre de Mach, que la fréquence f de l'onde diffusée est très proche de la fréquence de l'onde incidente, on obtient :

$$\vec{q}_d = \frac{4\pi f_0}{c} \sin\left(\frac{\theta_d}{2}\right) (\vec{n}_r - \vec{n}_0) \quad (10.2)$$

Une onde acoustique est émise à une fréquence donnée par un premier capteur et on cherche à détecter l'onde sonore correspondante qui est diffusée par la vorticité notée Ω présente dans l'écoulement. La formule de Lund donne la pression diffusée p_d (en fait sa TF en temps) en fonction de la pression incidente p_i et de la (TF) en espace et en temps de la vorticité soit (q, ω) :

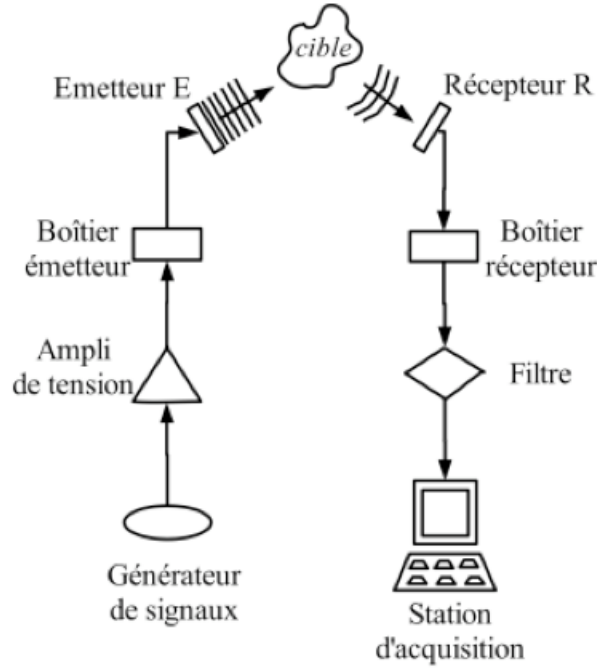


FIGURE 10.4: Schéma de la chaîne de mesure utilisée pour les acquisitions

$$p_d(\vec{r}, f) \sim P_0(\vec{r}, f_0) \cdot \mathcal{L}(\theta_d) \frac{i\pi^2 f e^{if \frac{|x|}{c}}}{c^2 |x|} \left[(\vec{n}_0 \wedge \vec{n}_r) \cdot \vec{\Omega}(\vec{q}_d, f - f_0) \right] \quad (10.3)$$

avec le facteur de Lund $\mathcal{L}(\theta_d)$, un facteur angulaire donné en (10.4) qui prend en compte l'anisotropie de l'énergie diffusée :

$$\mathcal{L}(\theta_d) = \frac{-\sin \theta_d \cos \theta_d}{1 - \cos \theta_d} \quad (10.4)$$

10.2.1 Dispositif expérimental

Pour se placer dans le cadre de la théorie de Lund, il faut produire une onde acoustique plane de fréquence f_0 . Pour cela, nous utilisons un générateur de signaux sinusoïdaux ayant des fréquences comprises entre 10 kHz et 300 kHz. L'acquisition et le signal incident sont synchronisés au moyen d'un générateur fixant la phase de référence.

En raison du fait qu'au niveau de la membrane des capteurs acoustiques, la conversion d'énergie électrique en énergie mécanique n'est pas parfaite et il est indispensable d'amplifier le signal de tension produit.

La polarisation des émetteurs ne sera pas discutée.

Afin de limiter les inconvénients de bruit qu'ils soient d'origine électronique ou autres, il est indispensable de filtrer le signal physique avant de le numériser.

L'acquisition des données se fait avec Matlab.

Quelques remarques :

- La sensibilité du capteur de pression limite la pression appliquée détectable et varie d'un type de capteur à un autre (comparer un piézzo-électrique à bande de résonance étroite avec un capteur Sell à réponse plate large bande dans leur domaines respectifs de fréquence), tandis

qu'un analyseur de spectre fait intervenir la bande passante finie d'analyse. Si on peut gagner de la dynamique (si par exemple on peut aller jusqu'à une sensibilité de -100dB) on gagnera d'autant sur le niveau de vorticité détectable. Il faut remarquer que l'estimation ci-dessus donne une limite "maximale" atteinte dans le cas cohérent ou uniforme pour lequel la phase de la vorticité resterait identique dans tout le volume de diffusion. De même on va avoir dans l'espace réciproque, si on connaît $\Omega(q, \omega)$ avec un analyseur de spectre qui fait la TF en temps (tandis que la diffusion réalise la TF en espace).

- En fait la mesure réelle fait intervenir une convolution par le profil spatial du faisceau acoustique incident que l'on a supposé ci-dessus uniforme sur toute sa section de diamètre D. Le vrai signal est alors défini avec une résolution finie en q , soit Δq qui tient compte de ce profil (voir plus loin l'analogie dans le cas électromagnétique).
- Les variables à détecter peuvent être des quantités fluctuantes dont la définition sera alors prise comme la racine carrée de la valeur quadratique moyenne des fluctuations (voir plus bas valeurs rms).
- Il existe en compétition avec la diffusion par la vorticité une autre diffusion dans le milieu qui est due aux fluctuations de température.

s

Nous allons aborder maintenant le problème du traitement des données qui permettront le diagnostic de la turbulence.

10.3 Traitement des données

10.3.1 Spectre du signal brut

On distingue deux parties dans le spectre (en fait 3, en comptant le pic très étroit à la fréquence d'émission-fréquence Doppler nulle) :

- un pic large centré à peu près autour de la fréquence d'émission associée à des fréquence Doppler basses.
- un pic plus large, autour d'une fréquence Doppler moyenne de l'ordre de 1 kHz.

Ces deux pics distincts pourraient être associés à la présence de deux zones d'écoulements distinctes : une première avec une distribution de vitesse presque centrée sur zéro et une autre avec une distribution de vitesses centrée autour d'une vitesse moyenne correspondant à la fréquence Doppler de ~ 1000 Hz. Vu la façon dont les capteurs sont positionnés dans l'expérience, il est raisonnable de faire correspondre la zone de basse vitesses (positives et négatives) avec le centre des disques.

10.3.2 Spectre du signal dérivé

On peut tenter une étude séparée des deux pics « Doppler ». Pour cela il faut sélectionner chaque domaine de fréquences Doppler : par exemple par filtrage. L'opération de dérivation, qui est, en réalité, un filtrage passe-haut, nous permet d'éliminer le domaine des fréquences centrées autour de zéro. Pour la suite, nous faisons l'hypothèse que la zone de vitesse qui nous intéresse (celle que l'on "vise", compte tenu de la position et de l'orientation des deux capteurs acoustiques) est

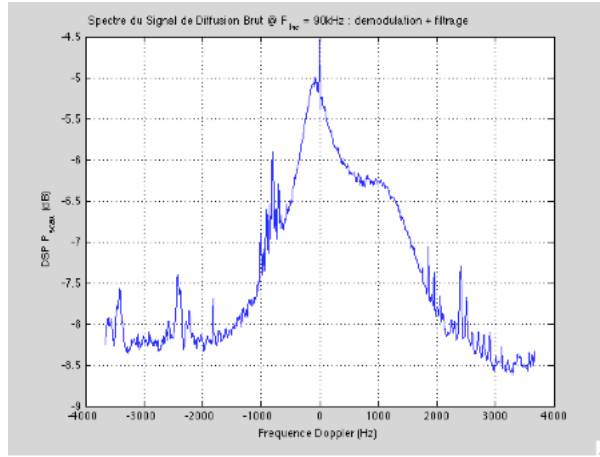


FIGURE 10.5: Spectre brut sur le signal du récepteur

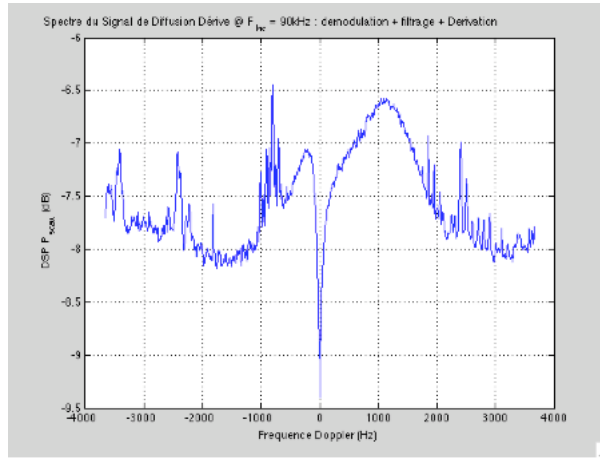


FIGURE 10.6: Spectre dérivé permettant un filtrage du pic central

bien celle située entre le centre des disques et leur périphérie, à l'intérieur de laquelle on s'attend à ce que la vitesse de l'écoulement a un signe à peu près constant (la vitesse peut être essentiellement considérée comme azimutale).

10.3.3 Ajustement de la partie gaussienne

Comme on le voit sur la figure (10.6), la dérivation du signal ne suffit pas à éliminer les basses fréquences Doppler autour du pic central. Nous allons appliquer une autre opération de filtrage passe-bande. Plutôt qu'un filtrage passe-bande centré sur 1000 Hz, il paraît plus judicieux de translater en fréquence d'abord le signal pour amener le pic Doppler à la fréquence nulle (il suffit de multiplier le signal par $e^{-i2\pi f_{Dopp}}$ avec $f_{Dopp} = 1000 \text{ Hz}$, la fréquence Doppler moyenne du pic Gaussien ce qui revient, en fait, à réaliser une seconde démodulation).

En pratique cette translation peut s'interpréter comme un changement de repère : on se place ainsi dans le repère de l'écoulement moyen, se déplaçant à la vitesse moyenne correspondant à $f_{Dopp} \approx 1000 \text{ Hz}$. Pour déterminer la fréquence Doppler moyenne f_{Dopp} il nous faut chercher un

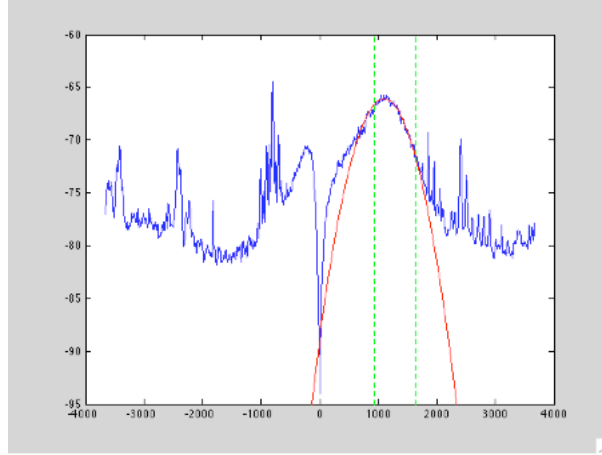


FIGURE 10.7: ajustement gaussien (en rouge) sur la partie intéressante du spectre dérivé. En vert figurent les 2 fréquences retenues pour le choix de l'ajustement

ajustement Gaussien du pic qui nous intéresse. L'ajustement, pour ce cas précis, nous donne : $moy = f_{Dopp} = 1096Hz$ et $var = \delta f_{Dopp} = 339Hz$ soit un "taux de turbulence" , τ :

$$\tau = \frac{\delta V}{\langle V \rangle} = \frac{V_{rms}}{\langle V \rangle} = \frac{\delta f_{Dopp}}{f_{Dopp}} = 31\%$$

On retrouve les ordres de grandeur observées dans l'étude des jets (Baudet et al.). Nous allons utiliser ces deux valeurs pour réaliser l'opération de filtrage.

10.3.4 Extraction par filtrage passe-bas de la partie "Gaussienne" du signal dérivé

Il ne nous reste plus qu'à appliquer un filtrage passe-bas. Il nous faut procéder par approximations successives pour choisir la bande passante (typiquement $f_{Dopp} = 700Hz$), la nature (Butterworth) et l'ordre du filtre. Pour "rétablir" le signal complexe (donc l'information de phase), on applique une translation de fréquence opposée à celle réalisée à l'étape précédente. Le spectre du signal obtenu après cette nouvelle opération de filtrage paraît à l'oeil contenir les fréquences qui nous intéressent.

10.4 Interprétation des résultats

10.4.1 Phase et amplitude

On peut extraire 2 types d'information du signal complexe en utilisant les fonctions Matlab `abs` (module) et `angle(z)`. Comme : $z(t) = A(t)e^{i\varphi(t)} \sim \Omega_z(\vec{q}_d, t)$, on a : $A(t) = abs(z)$ et $\varphi(t) = unwrap(angle(z))$ où `abs` représente la fonction valeur absolue et `unwrap` une fonction Matlab qui permet de résoudre les sauts de phase de 2π . Ce sont, toutes deux, des fonctions intégrées dans Matlab.

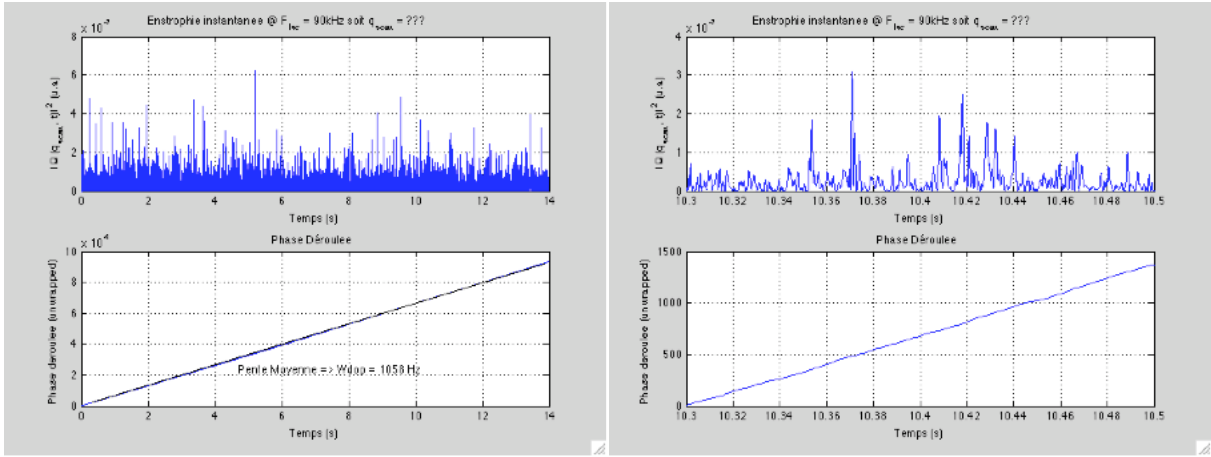


FIGURE 10.8

Le carré de l'amplitude instantannée donne une image de l'enstrophie : $\Omega(t) = |\Omega_z(\vec{q}_d, t)|^2$. La phase instantannée $\varphi(t)$ est associée au mouvement des structures vorticitaires par la relation suivante :

$$\omega_{Dopp}(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \vec{q}_d \cdot \overrightarrow{V_{vortex}}(t)$$

On en déduit : $\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \vec{q}_d \cdot \overrightarrow{V_{vortex}}(u) du = \varphi(0) + \int_0^t \vec{q}_d dx(t)$

L'évolution temporelle de ces deux quantités (phase et amplitude du signal complexe) est représentée sur la figure (10.8a) sur la durée totale de l'acquisition (environ 14 s). On peut ainsi étudier l'évolution à temps long du signal complexe $z(t)$. On remarque que le signal d'enstrophie $|z(t)|^2$ "s'organise" en événements successifs et relativement localisés dont la durée moyenne peut être quantifiée en calculant la fonction de corrélation de l'amplitude : on peut parler alors de "diffusion acoustique dynamique" (en référence à ce que l'on fait habituellement en "diffusion dynamique de la lumière" pour étudier, par exemple la dynamique des solutions de polymères). L'évolution de la phase $\varphi(t)$ est caractérisée par une évolution à peu près linéaire, associée à une advection des vortex par une vitesse moyenne auquel il faut ajouter des fluctuations autour de cette valeur moyenne. Un ajustement par une loi linéaire donne d'ailleurs $\frac{d\varphi(t)}{dt} = 2\pi f_{Dopp}$ avec $f_{Dopp} = 1058 Hz$ très proche de la valeur obtenue par l'ajustement Gaussien sur le spectre. On peut ensuite regarder plus en détail en effectuant un zoom sur la figure (10.8a) par exemple entre $t = 10.30$ et 10.50 s soit sur une durée de 20 ms. On obtient la figure (10.8b)

10.4.2 Dynamique des vortex

A partir de la fonction de corrélation de l'amplitude, on accède à des informations statistiques (moyennes sur la durée de la mesure) sur les temps caractéristiques de la dynamique du champ de vorticité.

On observe une décroissance rapide de cette fonction de corélation autour du retard nul dont le temps caractéristique (par exemple largeur à 1/e) peut s'interpréter comme une mesure de la "durée de vie" des   v  nements de vorticité (supposée localisés en temps). Typiquement, ce temps est de l'ordre de 1 ms fig.(10.9), à comparer à la figure représentant un détail de l'évolution temporelle

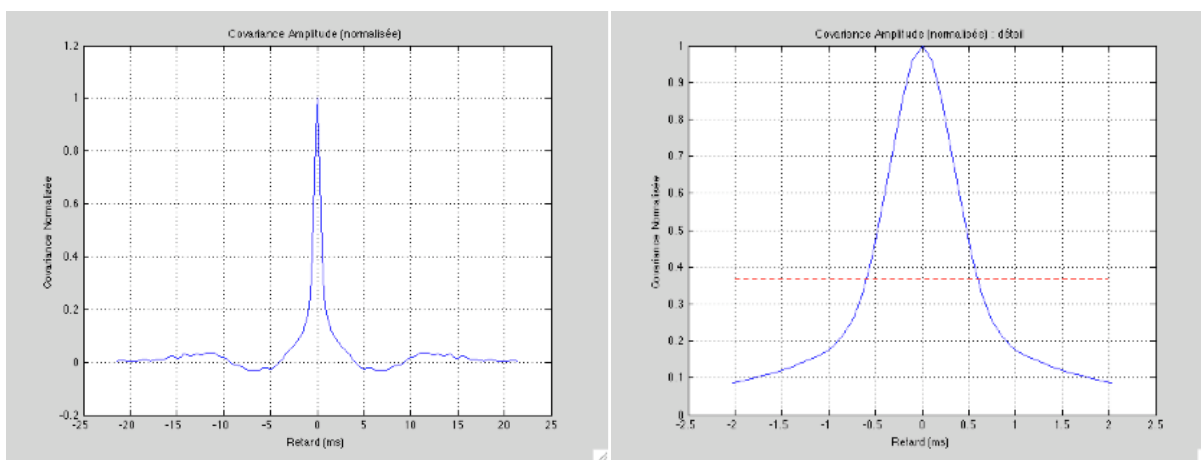


FIGURE 10.9: Covariance et covariance normalisée

de l'enstrophie (??).

La fonction de corrélation révèle d'autres temps caractéristiques. Par exemple, celui associé à l'oscillation autour de $y = 0$, avec une période de l'ordre de 10 ms, qui pourrait être associée à la périodicité dans le temps de l'apparition des vortex dans le volume de mesure. La fréquence est de l'ordre de 100 Hz, qu'il serait intéressant de comparer à la fréquence de rotation des disques.

Ces premiers résultats sont encourageants : allure du signal d'enstrophie (module) et allure de la phase (il faudra vérifier que la vitesse moyenne estimée correspond bien à la vitesse de rotation des disques). Cela valide les procédures d'acquisition et de pré-traitement des signaux (démodulation et filtrage). La fonction de corrélation d'amplitude a un comportement raisonnable : analogue à ce que nous avons observé dans des turbulences plus classiques, de type jet ou grille. Il serait intéressant de comparer la durée de vie (de l'ordre de 1 ms), au temps de vol dans le volume de mesure (longueur dans la direction parallèle au vecteur d'onde/vitesse moyenne). Il faut espérer que cette durée de vie est plus courte que le temps de vol ce qui indiquerait que nous « résolvons » correctement la dynamique des vortex détectés.

Il serait intéressant de relier la forme de la fonction de corrélation aux paramètres de l'expérience (fréquence de rotation des disques, notamment). Il y a peut être des informations pertinentes à extraire de la partie centrale du spectre, en particulier s'il se confirme que celle-ci est associée à la zone de l'écoulement au voisinage de l'axe des disques. Une solution pourrait d'ailleurs consister à déplacer le volume de mesure pour le centrer sur l'axe de rotation (pour privilégier la zone axiale de l'écoulement).

10.4.3 Un résultat préliminaire

Pour avoir les spectres d'enstrophie en fonction du vecteur d'onde spatial, il faut intégrer la gaussienne issue de l'ajustement.

Nous présentons des résultats limités par le fait que notre filtre passe-haut ne permet l'acquisition que de 5 ou 6 points. Néanmoins, sur ces deux forçages différents, on peut entrevoir une relation permettant de prédire certains exposants (fig.(10.11)). Nous ne discuterons pas les résultats ici. L'objectif est d'améliorer la qualité de notre filtre et de faire des acquisitions sur plusieurs fréquences.

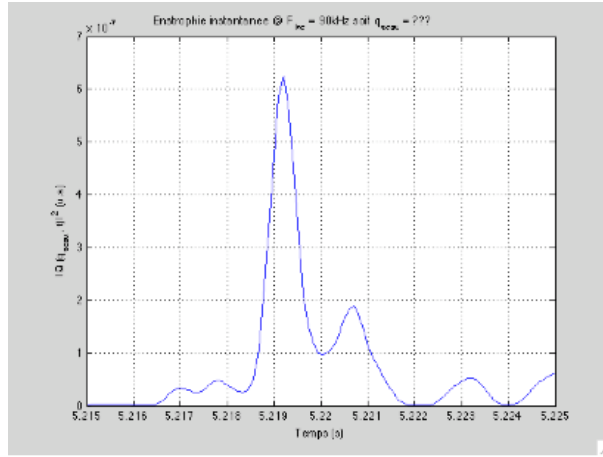


FIGURE 10.10: Enstrophie instantanée en fonction du temps pour un événement de l'ordre de 1ms

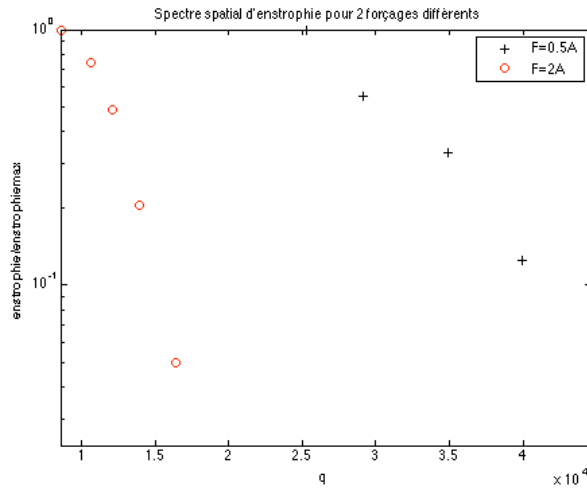


FIGURE 10.11: Spectre spatial d'enstrophie issu de l'intégration sur le domaine d'interférence de l'ajustement gaussien pour 2 valeurs du forçage des pales différentes. On a divisé chaque distribution par son maximum correspondant.

10.5 Conclusion

Nous avons proposé pour mesurer la vorticité dans un écoulement turbulent de développer une technique basée sur la diffusion du son par la vorticité. L'interaction entre un champ acoustique incident et un champ de vorticité génère un champ de pression diffusé qui représente, en fait, la modulation du champ acoustique incident par la vorticité.

Cette technique permet d'avoir accès à la transformation de Fourier spatiale d'une composante du champ de vorticité. Cette expérience de diffusion est caractérisée par un volume de mesure acoustique dont les dimensions typiques dépendent de plusieurs paramètres. Les effets de volume d'intégration se font surtout sentir sur la mesure du champ d'advection de la vorticité accessible à partir de l'effet Doppler. Ce travail a été difficile à mettre en place et nous avons insisté sur le problème de l'analyse de données qui est capitale.

L'analyse de la corrélation temporelle des signaux de vorticité met en évidence le phénomène

d'advection par l'écoulement moyen. Nous espérons que le raffinement de cette technique permettra d'accéder à la dynamique de la vorticité dans un écoulement 3D turbulent en rotation.

Nous avons retrouvé que les propriétés statistiques de la vorticité étaient similaires à celles des jets tournants et de la turbulence de grille.

Enfin, nous avons montré un spectre d'ensrophie, ébauche d'études plus affinées. Nous avons fait l'acquisition d'un filtre donnant accès à plus de points pour le spectre, pour des études ultérieures. Nous projetons d'étudier plus en détail les effets d'anisotropie en nous focalisant sur l'étude des corrélations spatiales dans deux directions différentes.

Chapitre 11

Conclusion et perspectives

Nous avons étudié les propriétés et les caractéristiques d'un écoulement en rotation soumis à une force de Coriolis associée à un axe de rotation orthogonal à l'axe de rotation de l'écoulement. Nous avons qualifié ce système d'« écoulement forcé par précession ». L'objectif final est d'étudier sa pertinence et son intérêt vis-à-vis de l'effet dynamo. Ce système est un exemple de fluide en rotation dont l'étude représente un intérêt majeur en géophysique, dynamique de l'atmosphère. Dans cette conclusion, nous rappelons brièvement les résultats obtenus et proposons quelques perspectives.

Approche analytique

Nous avons rappelé les notions d'écoulement géostrophique et d'ondes inertielles associées aux fluides en rotation, en nous focalisant sur ces dernières, prépondérantes à notre étude. Nous avons montré que dans le cas d'un fluide incompressible, on pouvait dériver une équation assez simplement, l'équation de Poincaré, qui ne prend pas en compte les termes visqueux. Nous avons, alors, proposé de formuler le problème de façon générale à l'aide d'une formule d'inversion, qui nous a permis d'obtenir l'équation de Kudlick (avec termes visqueux) et une équation qui prend en compte un profil de rotation différentielle pouvant intervenir dans des problèmes de dynamique des fluides astrophysiques.

Motivés par l'expérience ATER, qui est à géométrie cylindrique, nous avons défini le problème des ondes inertielles nommées dans cette géométrie modes de Kelvin, qui présentent des situations de résonance de cavité.

En appliquant la dynamique d'un fluide en précession (avec angle de précession quelconque) à notre cas où les deux axes de rotation sont orthogonaux, nous avons pu mettre en évidence que la précession force les modes de Kelvin à nombre d'onde azimutal $m = \pm 1$.

L'existence de points de couplage (pris au sens de résonance de phase de deux modes) dérivant de la relation de dispersion des ondes a motivé une étude de couplage de modes non linéaire. Des études analytiques antérieures en cylindre infini ont conduit à la mise en évidence d'une instabilité de type paramétrique. Nous avons ici proposé un développement à deux paramètres indépendants, l'un prenant en compte le forçage externe de la précession et l'autre la dynamique des modes inertiels. Ayant retrouvé par ce formalisme l'instabilité paramétrique, notre but était d'étudier la saturation. Finalement, nous avons mis en évidence la possibilité de générer une rotation différentielle dans un flot de base (défini comme la somme d'une rotation solide et d'un cisaillement axial) à l'ordre qui suit l'apparition de l'instabilité.

Nous souhaitons étendre ce formalisme à une situation où le flot de base est la somme d'une rotation de type Képlerienne et d'un cisaillement axial (vu comme l'effet d'une précession) dans une géométrie de disque en vue d'applications astrophysiques aux instabilités des disques d'accrétion.

Approches expérimentales

Afin de caractériser l'écoulement forcé par précession, nous avons exploité l'expérience ATER qui est un réservoir cylindrique à la longueur variable par un piston permettant d'être en situation de résonance de cavité. Une instrumentation comprenant une caméra CCD, une source lumineuse et un système de pilotage mécanique de rotation/précession par rampe linéaire a été conçu dans le but de réaliser des mesures PIV dans deux plans possibles, un plan transverse à l'axe de rotation et un plan transverse à l'axe de précession. Cette expérience a pu mettre en évidence que le régime laminaire est composé de trois régimes d'écoulement aux propriétés différentes qui apparaissent à mesure que le forçage augmente :

- un régime linéaire où l'on observe les modes de Kelvin directement en PIV et l'onde tour-nante par PTV. L'écoulement est dominé au centre par le mode forcé $m = 1$.
- un régime de tourbillons cycloniques advectés par une rotation différentielle à la suite d'une instabilité de parois créant des jets dirigés vers le centre de l'écoulement. Ces cyclones concentrent très fortement la vorticité créant par conséquent une distribution inhomogène de celle-ci, source de brisure de symétrie centrale, autant d'éléments favorables à un effet dynamo.
- un régime turbulent après un régime transitoire où les cyclones disparaissent sans doute en raison d'un fort accroissement de rotation différentielle et laissent place à un écoulement dominé par un vortex dont le centre est animé d'une rotation anticyclonique autour du centre du cylindre et fait un tour complet en une période de rotation.

Les mouvements désordonnés sont difficilement caractérisés par PIV, en raison de l'échantillonnage imposé par le CCD. Les études menées dans le plan transverse à l'axe de précession permettent une meilleure observation de la transition vers la turbulence au travers de l'évolution de la circulation axiale en fonction du forçage.

Les limitations de la PIV nous ont motivés à mettre en place un banc d'essai pour des diagnostics acoustiques de diffusion d'ultra-son par la vorticité dans un milieu turbulent. Dans un réservoir cylindrique fermé, (la turbulence est créée par une pale tournante pilotée mécaniquement), des ondes acoustiques de type ultra-son sont émises dans le milieu turbulent. Le principe consiste à récupérer dans le signal reçu par les capteurs l'effet de la turbulence se manifestant comme un «   cho Doppler ». De ce spectre du signal, on peut déduire des spectres d'entrophie permettant de caractériser la turbulence en rotation. Les résultats sont encore préliminaires en raison de notre filtre passe-haut qui doit être amélioré.

L'étude de ces régimes d'écoulement a montré la grande variété de flots généré par ce type de forçage. Une première perspective de poursuite de ce travail réside dans l'amélioration de l'échantillonnage d'enregistrement des données. Un CCD plus rapide serait donc le bienvenu.

Une autre perspective réside dans une modification de la géométrie du récipient : un ellipsoïde serait adapté à des applications directes en géophysique et astrophysique. Nous avons fait l'acqui-



FIGURE 11.1: Ellipsoïde pour des études en précession.

sition d'un ellipsoïde prêté par le LGIT photographié en fig.(11.1). Nous souhaitons remplacer le cylindre par cet ellipsoïde et adapter le même dispositif PIV. Le défi majeur à relever consiste à corriger les multiples réflexions dues à la géométrie.

Nous espérons avoir pu faire progresser les connaissances dans ce domaine au cours de cette thèse, dans la perspective d'application à une réalisation de dynamo fluide expérimentale. De ce point de vue, nous notons avec intérêt qu'un dispositif de ce type vient d'être inscrit en 2009 dans le programme de travail pluri-annuel du centre de recherches de Rossendorf à Dresde (FZR).

Etudes numériques

Nous avons présenté des simulations numériques hydrodynamiques et magnétohydrodynamiques de l'écoulement en précession, réalisées par Pierre Lallemand et Raphaël Laguerre. Le nombre de Reynolds de ces simulations (3D) est limité à 5000, ce qui explique sans doute pourquoi on ne voit le régime des vortex. Or ces cyclones ont une structure principalement bidimensionnelle. Les simulations 2D étant, elles, capables d'atteindre des Reynolds dix fois plus élevés, il semble intéressant d'examiner s'il y a des mécanismes possibles d'entretien de tourbillons via des simulations 2D.

Les ingrédients de base du problème sont la rotation différentielle du mode $m = 0$ et l'onde tournante $m = 1$, tous deux engendrés par l'effet de la précession. Il est possible d'introduire ces deux éléments dans un code 2D et de chercher si, lorsqu'on augmente l'amplitude de l'onde, le cisaillement à la paroi peut devenir instable. On pourrait suivre l'évolution dans le régime non linéaire des composantes cycloniques et anticycloniques de l'écoulement perturbé.

Terminons par une anecdote. A première vue, le forçage par précession peut sembler une idée exotique, mais l’aventure suivante survenue très récemment pourra aider le lecteur à changer d’avis. Dans le cadre des études en cours concernant les dynamos fluides expérimentales, Dan Lathrop (Nonlinear dynamics laboratory group, Maryland) a installé un réservoir sphérique de 3 m de diamètre, capable de tourner en bloc autour d’un axe vertical. Pour s’assurer du bon fonctionnement de l’appareil, il a voulu commencer par tester la mise en rotation rigide avec de l’eau dans le réservoir ($\simeq 1tr/s$) et il a constaté que cet état était impossible à atteindre, malgré des temps de rotation uniforme très supérieurs au temps théorique de spin-up. Il a alors réalisé que cette expérience était en fait entraînée par la rotation de la Terre, et qu’il avait, sans le vouloir, réalisé une expérience de précession. Le taux de précession (environ $1/86400$) est faible, mais suffisant pour engendrer un flot secondaire mesurable ($u \sim 0.01m/s$) avec un nombre de Reynolds proche de 15000, non réalisable par simulation numérique directe !

Table des figures

1.1	En haut, on schématise la construction d’une composante toroïdale $\mathbf{B}_{tor}$ à partir d’un champ initial $\mathbf{B}_{pol}$ soumis à l’action d’un cisaillement azimuthal $\frac{\partial U_\theta}{\partial z}$. C’est l’effet Ω . En bas, nous tentons une explication graphique de l’effet α : un premier champ induit est généré par effet Ω à partir du champ de vitesse $\mathbf{V}_1$. Une boucle de champ se forme ensuite en raison de la rotation $\mathbf{V}_2$ et on aboutit ainsi à un courant induit $\mathbf{j}$ parallèle au champ initial $\mathbf{B}_0$	12
1.2	Schémas de deux expériences dynamo : a) (à gauche) dynamo de Riga b) (à droite) dynamo de Karlsruhe	14
1.3	Précession de la Terre.	17
1.4	Série de cyclones ayant touché le continent américain en 2005.	20
1.5	Vortex cycloniques dans le Gulf Stream.	20
1.6	Tâche rouge de Jupiter et cyclone au pôle sud de Saturne.	21
2.1	Repère et système de coordonnées cylindriques	25
2.2	Géométrie de la propagation des ondes inertielles	27
2.3	Mise en évidence par PIV des ondes inertielles (Messio et al, 2008)	29
3.1	Schéma du cylindre en précession avec angle quelconque.	42
3.2	Schéma de la configuration ATER	44
3.3	Solution linéarisée du mode $m=1$ eqs.(3.55 à 3.58). Champ de vitesse (à gauche). Champ de pression (à droite). Le champ de vitesse fait apparaître une circulation dans le plan normal à l’axe de rotation (le plan transverse) sous la forme de deux vortex contra-rotatifs. Le champ de pression fait apparaître un «vortex ondulé» caractéristique du forçage par précession.	47

3.4	Relations de dispersion des modes de Kelvin et mise en évidence de points de couplage entre les modes $m=0$ et $m=1$	48
3.5	Relation de dispersion des modes $m = 0$ et $m = 1$ faisant apparaître les points de couplage motivant notre étude non linéaire.	49
5.1	Vue d'ensemble de la structure ATER : a) en haut, plan du montage ATER b) Vue en perspective du montage. Le réservoir cylindrique est au centre, en noir (diamètre externe 300 mm). L'axe de précession est vertical et l'axe de rotation, qui coïncide avec l'axe du cylindre balaie un plan horizontal. Le dispositif d'éclairage (en bleu, schéma symbolique) peut être placé dans deux positions : éclairage d'une section transverse ou d'un plan méridien. La caméra (parallélépipède rouge) peut être placée dans trois positions : visée diamétrale ou visée axiale, soit en corotation (dans le cylindre rouge, solidaire d'un piston fixant l'allongement), soit fixée dans le référentiel en précession.	99
5.2	Expérience ATER vue oblique (à gauche) et de face (à droite). On voit ainsi les différents équipements qui vont servir aux mesures expérimentales.	100
5.3	Eclairage déplaçable en bloc selon le plan de mesures souhaité avec ses deux optiques superposées et ses deux lampes flash. a) en haut, vue graphique b) cliché photo Les deux lampes flash sont montées l'une au-dessus de l'autre avec des axes optiques de sortie pointant vers le centre du réservoir. La lumière de chaque lampe est collectée par une lentille cylindrique. Les deux optiques définissent un plan de lumière éclairé avec un décalage temporel ajustable (à partir d'une ms).	101
5.4	Vue du piston permettant de faire varier et d'ajuster l'allongement du cylindre. La caméra se trouve dans le piston.	102
5.5	Différentes positions de la caméra CCD pour l'enregistrement des données. a) Vue du plan transverse à l'axe de rotation. b) Vue du plan transverse à l'axe de précession . . .	103
5.6	Ecran de contrôle d'ATER. On envoie les commandes par RS232 et on communique les informations à l'aide d'un programme de pilotage écrit en Python. On doit sélectionner les vitesses finales de rotation et précession ainsi que les rampes linéaires de rotation et précession. Il faut aussi sélectionner le temps entre deux déclenchements de flash possible.	104
5.7	Schéma des trajets lumineux reçus par la caméra	107
5.8	Comparaison entre simulation numérique de la distribution de la pression du mode forcé par la précession (à gauche) et la visualisation directe de l'écoulement par bulles d'air (à droite). On a volontairement tourné de $\frac{\pi}{2}$ l'image de droite par soucis de clarté mais le vortex s'aligne sur celui de l'axe de rotation.	110
5.9	Photos du vortex ondulé avec deux forçages différents $\varepsilon = 0.076$ (à gauche) et $\varepsilon = 0.082$ (à droite). prises latéralement. En rotation solide, l'axe de rotation du fluide est aligné avec celui du cylindre représenté ici par l'axe «lumineux» du cliché. La précession «courbe» l'axe de rotation du fluide, ce qui donne cette impression de vortex ondulé.	110
5.10	Diagramme de phase du système établi à partir des observations directes de l'écoulement	112

6.1	($a = 1.17$, $R_e = 140806$) forçage $\varepsilon = 1, 12 \cdot 10^{-3}$ en haut et $\varepsilon = 2, 3 \cdot 10^{-3}$ en bas. Trajectoire de particules dans un écoulement en précession à partir de la solution stationnaire linéarisée pour une faible valeur du taux de précession. Les particules, au centre, ont tendance à avoir un mouvement circulaire caractéristique de la dynamique des ondes inertielles. L'amplitude de ce mouvement s'atténue par viscosité lorsqu'on s'approche des parois.	115
6.2	trajectoire des particules fluides obtenues à partir de la solution analytique stationnaire (modes de Kelvin forcée par la précession dans le référentiel du cylindre)	116
6.3	($a = 1.17$, $R_e = 140806$) Evolution du diamètre des trajectoires fermées des particules fluides en fonction du forçage dans l'écoulement à faible précession dont les mesures sont réalisées dans le référentiel du cylindre. Les trajectoires sont réalisées après le traitement PTV dans la région centrale où les trajectoires sont le mieux distinguées. . .	116
6.4	($a = 1.17$, $R_e = 140806$, $\varepsilon = 6.67 \cdot 10^{-3}$) évolution de la vitesse radiale (à gauche) et de la vitesse azimutale (à droite) (toutes deux moyennées sur ϕ) en fonction du rayon pour 3 séquences séparées d' $\frac{1}{6}$ s. Chaque cliché étant déphasé de $\frac{\pi}{3}$, on retrouve ce décalage dans la dynamique temporelle qui n'existerait pas si on était dans le référentiel en précession. Note Bene : les vitesses sont normalisées par la vitesse de la paroi, sauf indication contraire	117
6.5	($a = 1.17$, $R_e = 140806$, $\varepsilon = 1.67 \cdot 10^{-3}$) Champ de vitesse obtenu par PIV et zoom sur la région centrale. Ces résultats rendent compte du mouvement net des particules fluides au centre observé par PTV	118
6.6	Comparaison entre le champ de vitesse issu du traitement PIV (à gauche) et la topologie du champ de vitesse dans le référentiel du cylindre (à droite) : somme d'une rotation solide azimutale et du mode de Kelvin fondamental ($m=1$) dans le référentiel du cylindre pour $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$. On rappelle ici le champ de vitesse issu de la solution aux équations linéarisées.	118
6.7	($a = 1.17$, $R_e = 141000$, $\varepsilon = 2.17 \cdot 10^{-3}$ et $\varepsilon = 4.32 \cdot 10^{-3}$) champ de vorticité pour 2 forçages différents permettent de mettre en évidence le dipôle dont l'orientation est décalé de $\frac{\pi}{3}$ à chaque mesure.	119
6.8	($a = 1.17$, $R_e = 141000$, $\varepsilon = 2.17 \cdot 10^{-3}$) Iso-contour de la fonction de courant pris au $3/4$ de la longueur du cylindre.	119
6.9	($a = 1.17$, $R_e = 140806$, $\varepsilon = 2.27 \cdot 10^{-3}$) Ajustement des données expérimentales avec une sinusoïde pour 2 rayons, l'un proche du centre, l'autre proche des parois	121
6.10	($a = 1.17$, $R_e = 140806$) Evolution de l'amplitude moyenne du mode $m=1$ en fonction du taux de précession	122
6.11	($a = 1.17$, $R_e = 141000$, $\varepsilon = 1.17 \cdot 10^{-3}$ et $\varepsilon = 3.3267 \cdot 10^{-3}$) Distribution spatiale de la norme de la vitesse à $\varepsilon = 1.17 \cdot 10^{-3}$ (gauche) et $\varepsilon = 3.33 \cdot 10^{-3}$. La zone de forte vitesse s'étend du centre vers les parois en fonction du forçage.	123
7.1	Observation du changement d'état de l'écoulement. On peut distinguer les vortex localisés près des parois. A une certaine valeur du forçage, des jets radiaux provenant des parois latérales pénètrent dans le coeur de l'écoulement dominé par la rotation solide et le forçage des modes azimutaux $m=1$. Les jets deviennent des structures en champignon qui s'enroulent pour former des vortex.	125

7.2	Distribution de la vorticité à la transition entre le régime de l'onde tournante (dominance du mode $m = 1$) et le régime de tourbillons cycloniques. Ce graphique représente l'analyse PIV du cliché (7.1) et met en évidence les tourbillons (bien localisés) où vont s'enrouler au fur et à mesure du développement de l'instabilité, les éruptions de fluide provenant des couches proches des parois. La vorticité est négative comme la rotation qui est dans le sens horaire. En régime stationnaire, la vorticité caractéristique d'un tourbillon est légèrement supérieure à celle de l'entraînement par rotation rigide.	125
7.3	Le cliché du haut illustre le mouvement d'éruption dont l'origine se situe dans les zones d'accumulation de particules mentionnées dans le texte. On parle d' <i>��ruption</i> en raison de la trajectoire en forme de jets des particules fluides entraînées vers l'intérieur de l'écoulement. Comme le montrent les clichés suivant, ces jets ne sont pas tous semblables. Les deux clichés du bas sont séparés d' $\frac{1}{6}$ ��me de seconde. On voit les trois fibres optiques servant au repérage qui ont bien tourné de $\frac{\pi}{3}$. Par ailleurs, on observe l'entraînement par le mouvement moyen des structures filamenteuses. et surtout la pénétration dans le coeur de l'écoulement de ces éruptions qui vont aboutir à la formation de 3 ou 4 cyclones.	126
7.4	Evolution du taux de précession critique ε_c en fonction de la vitesse de rotation pour différents allongements.	127
7.5	($a = 1.16, \varepsilon = 0.033, R_e = 140806$) a) Distribution des niveaux iso-contour de la fonction de courant. On voit très nettement la présence des vortex. b) Distribution de la vorticité instantanée. Les tourbillons concentrent fortement la vorticité qui devient comparable à celle des parois qui seraient calculées dans le référentiel du laboratoire : $\omega_{Z,paroi} = 2\Omega_R = 4\pi$	128
7.6	($a = 1.16, \varepsilon = 0.033, R_e = 140806$) a) Distribution du champ de vitesse. Les vortex sont de sens cyclonique car ils tournent dans le même sens que la rotation du cylindre. b) Distribution de la norme du champ de vitesse. La norme du champ de vitesse permet de repérer les cyclones les plus énergétiques et les plus intenses. On vérifie par ailleurs qu'ils ont une distribution à peu près équivalente avec un coeur identifiable.	129
7.7	($a = 1.26, \varepsilon = 0.033, R_e = 140806$) Séquence d'évolution des tourbillons dans l'écoulement. L'intervalle entre deux clichés est de 1 seconde. Le sens chronologique est de haut en bas. (Le premier cliché de séquence est en haut à gauche. Le suivant est situé en bas à gauche, etc...). On constate la stabilité de ce régime : il ne peut pas être considéré comme un simple régime transitoire mais bel et bien un état d'équilibre du système. Si on laisse à un forçage constant ce système, on retrouve l'écoulement de tourbillons cycloniques. Pour cette série de clichés, la table des couleurs change à chaque graphique	130
7.8	($a = 1.26, \varepsilon = 0.033, R_e = 140806$) Trajectoire d'un cyclone (le plus étendu) en fonction du temps. Le centre du tourbillon est repéré par le minimum de vorticité. Cette figure évoque une cycloïde sous-échantillonnée. Les échelles ne sont pas similaires mais le mouvement a une tendance nette à la spirale, ce qui indique que la dynamique de ces structures est influencée par l'interaction entre la rotation d'ensemble (assimilée au mode $m=0$) et le forçage (assimilé au mode $m=1$) comme le montre le graphe illustrant cette idée.	131
7.9	($a = 1.16, \varepsilon = 0.033, R_e = 140806$) Profil de vitesse radiale moyennée sur une période de rotation. La très faible amplitude permet de conclure que la dynamique de l'écoulement est essentiellement azimutale.	131

7.10	Profil de distribution de la vitesse azimutale en fonction du rayon pour une séquence, et moyennée sur une séquence parcourant 1 tour de rotation.	132
7.11	Vorticité axiale en fonction du rayon.	132
7.12	Distribution des vitesse azimutale (en rouge) et radiale (en noir) en fonction de ϕ . Chaque extremum indique un cyclone.	133
7.13	Brisure de symétrie du mode $m=1$. Vitesse radiale (en cm/s) pour deux rayons différents. Noter l'impossibilité d'ajuster les données par une sinusoïde	133
7.14	Variation de la vitesse azimutale (à gauche) adimensionnée sur la vitesse des parois et de la vorticité (à droite) adimensionnée sur celle des parois en fonction de ϕ . On peut positionner les cyclones à chaque pic. On voit que la vitesse est concentrée en chaque zone contenant un vortex et chacun d'entre eux est en sur rotation. La très forte concentration de vorticité est très impressionnante puisque le cyclone le plus intense est du même ordre de grandeur que la vorticité des parois.	134
7.15	Eruption de jets après le déclin de la turbulence et le retour de l'onde tournante.	135
7.16	($a = 1.17, R_e = 281612, \varepsilon = 0.033, \beta_- = 0.005tr/mn/s$) Iso-contour de la fonction courant et distribution de la vorticité.	135
7.17	Comparaison entre les profils r adiaux de vitesse azimutale pour 2 cas correspondant à ($a = 1.17, R_e = 281612, \varepsilon = 0.033, \beta_- = -0.005tr/mn/s$ (Flot A), $\beta_+ = 0.005tr/mn/s$ (Flot B)) . Le flot A est obtenu en rampe descendante et le flot B en rampe ascendante.	136
7.18	($a = 1.16, R_e = 140806, \varepsilon = 0.066$) Iso contour de la fonction courant permettant de repérer la domination de l'écoulement par un vortex dont le centre est délocalisé.	136
7.19	($a = 1.16, R_e = 140806, \varepsilon = 0.066$) Position du centre du vortex (repéré par le point de vitesse nulle) tous les $1/8$ ème de seconde, soit 7 points pour faire un tour complet. Le premier point de la série est le plus haut et le plus à gauche. La dynamique anticyclonique du mode $m = 1$ domine l'écoulement et le trajet du centre de ce vortex est dans le sens contraire à la rotation des parois donc le sens trigonométrique.	137
7.20	($a = 1.16, R_e = 140806, \varepsilon = 0.066$) Moyenne azimutale de la vitesse azimutale sur une période de rotation en fonction du rayon. On met en évidence un accroissement de la rotation différentielle sans doute responsable de la disparition des cyclones par cisaillement. On notera la distribution centrée sur $r=0.5$	137
7.21	$R_e = 140806$ Etude de la moyenne spatiale de la vitesse azimutale en fonction du taux de précession pour différents allongements.	138
7.22	Comparaison de la topologie des vortex créés par l'instabilité cas forçage "résonnant" ($\varepsilon = 0.01, R_e = 140806$) à gauche et cas "non résonnant" à droite	139
7.23	Topologie du champ de vitesse pour $\varepsilon = 2, 3.10^{-3}$ (à gauche) et $\varepsilon = 3, 3.10^{-2}$. On représenté le champ de vitesse pour deux forçages, l'un dans le régime linéaire et l'autre dans le régime des vortex issus de l'instabilité.	140
7.24	Evolution de l'amplitude la moyenne spatiale de la vitesse axiale adimensionnée par la vitesse des parois.	140
7.25	Champ de vitesse turbulent dans un plan méridien ($a = 0.99, \varepsilon = 0.16, R_e = 141000$). A gauche: on voit un cliché instantané de l'écoulement; le traitement PIV correspondant est à droite. On notera l'excitation des petites échelles spatiales.	141
7.26	Ecoulement de Couette-Taylor : Schéma du dispositif de Couette Taylor. Différentes observations concernant les régimes d'écoulement dans l'écoulement de Couette plan. Visualisation des rouleaux de Taylor. (cité dans [108])	143

7.27	Les tourbillons de Görtler sont des écoulements secondaires apparaissant dans un écoulement de couche limite le long d'une paroi concave. Si la couche limite est mince comparativement à celle du rayon de courbure de la paroi, la pression reste constante à travers la couche limite. D'autre part, si l'épaisseur de la couche limite est comparable à celle du rayon de courbure, l'action centrifuge crée une variation de pression à travers la couche limite. Cela conduit à l'instabilité centrifuge (instabilité Görtler) de la couche limite visqueuse et de formation consécutive de tourbillons de Görtler. On peut définir un nombre de Görtler : $G_a = \frac{U_e \delta}{\nu} \left(\frac{\delta}{R} \right)^{\frac{1}{2}}$ où U_e est la vitesse extérieure, δ l'épaisseur de la couche limite, R le rayon de courbure et ν la viscosité cinématique. Il a souvent été observé expérimentalement que l'instabilité se déclenche pour $G_a > 0.3$	144
7.28	Profils de vitesse azimutale et vorticité axiale moyenné en fonction du rayon issu du couplage de mode	147
7.29	Taux de croissance de l'instabilité de cisaillement (en pointillé) pour un nombre d'onde axial tendant vers 0 et taux de croissance de l'instabilité inflexionnelle (en trait plein) pour un nombre d'onde axial tendant vers ∞ pour un vortex de Carton-Mac Williams pour $\alpha = 8$ (valeur particulière pour laquelle l'instabilité centrifuge devrait apparaître la plus instable pour $m = 0$). Le calcul est fait dans l'approximation WKB	148
7.30	Modèle schématisant les liens entre la rotation différentielle et les effets visqueux. . . .	148
8.1	Schéma du système de couche limite située à proximité d'une paroi plane infinie. . . .	153
8.2	Simulations numériques de l'équation de Stokes (� gauche) et Navier-Stokes (� droite) � $\varepsilon = 0.02$	160
8.3	Simulations numériques de l'équation de Stokes (� gauche) et Navier-Stokes (� droite) � $\varepsilon = 0.05$	160
8.4	Simulations numériques de l'équation de Stokes (� gauche) et Navier-Stokes (� droite) � $\varepsilon = 0.1$	160
9.1	Fluctuations des vitesses radiale, azimutale et axiale (modes $m > 0$), sections en $z = \frac{L}{2}$ $\{L/2R = 1, \varepsilon = 0.1, Re = 100 [RL]\}$	163
9.2	lignes de courant et vorticité médiane à précession faible $[RL]$	164
9.3	lignes de courant pour deux taux de précession $\varepsilon = 0.1$ et $\varepsilon = 0.15$. $\{Re = 1000 [RL]\}$. .	164
9.4	Inclinaison de la vorticité centrale ($Re = 400$). Figure de gauche : effet du taux de précession (angle Z avec l'axe de rotation et l'angle Y avec l'axe de précession dans le plan équatorial, comparaison $[PL] [RL]$). Figure de droite: lignes de vorticité passant par le centre, en bleu) et lignes de courant au voisinage de centre (en rouge), en projection sur une section droite du cylindre (vue selon l'axe de rotation, $\varepsilon = 0.15$) $[RL]$	165
9.5	circulation méridienne dans le plan $x=0$ (� gauche) et $y=0$ (� droite) $[RL]$	166
9.6	rotation différentielle ($L/2R = 0.98$ $Re=200$, $\varepsilon=0.1$, $[PL]$	167
9.7	distribution des énergies en fonction du taux de précession ($L=2R$, $Re=1000$ $[PL]$) . .	168
9.8	évolution temporelle de l'énergie des modes $m=0$ et $m=1$ ($Re = 1000$ et $\varepsilon = 0.15$, $[RL]$) .	168
9.9	Trois cyclones	169
9.10	Filtrage spectral avec 16 modes, à mi-distance de la paroi. Deux figures du haut: vitesses radiale et azimutale en fonction de ϕ . Figures du bas: en haut à gauche, isocontours de la fonction courant dans le plan (R, ϕ) ; en haut à droite, profils azimutaux des vitesses radiale et azimutale (� mi-distance de la paroi); en bas à gauche, profil radial de la vitesse azimutale ($\phi=0$); en bas à droite, spectres des vitesses azimutale et radiale.	170

10.1 schéma symbolisant la cascade turbulente	174
10.2 Principe de la diffusion acoustique	174
10.3 Schéma 3D du banc d'essai d'ATER air.	175
10.4 Schéma de la chaîne de mesure utilisée pour les acquisitions	176
10.5 Spectre brut sur le signal du récepteur	178
10.6 Spectre dérivé permettant un filtrage du pic central	178
10.7 ajustement gaussien (en rouge) sur la partie intéressante du spectre dérivé. En vert figurent les 2 fréquences retenues pour le choix de l'ajustement	179
10.8	180
10.9 Covariance et covariance normalisée	181
10.10 Enstrophie instantanée en fonction du temps pour un événement de l'ordre de 1ms . . .	182
10.11 Spectre spatial d'enstrophie issu de l'intégration sur le domaine d'interférence de l'ajus- tement gaussien pour 2 valeurs du forçage des pales différentes. On a divisé chaque distribution par son maximum correspondant.	182
11.1 Ellipsoïde pour des études en précession.	186

Bibliographie

- [1] Y. D. Afanasyev, “Experiments on instability of columnar vortex pairs in rotating fluid,” *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 96, 31 (2002).
- [2] Agrawal, B. N. 1993 Dynamics characteristics of liquid motion in partially filled tanks of a spinning spacecraft. *J. Guid. Control Dyn.* 16, 636–640.
- [3] Aldridge, K. D. & Toomre, A. 1969 Axisymmetric inertial oscillations of a fluid in a rotating spherical container. *J. Fluid Mech.* 37, 307–323.
- [4] Aldridge KD, Lumb L (1987) Inertial waves identified in the earth’s fluid core. *Nature* 325 :421423
- [5] Bao, G. W. & Pascal, M. 1997 Stability of a spinning liquid filled spacecraft. *Arch. Appl. Mech.* 67, 407–421.
- [6] B. J. Bayly, "Three-dimensional centrifugal-type instabilities in inviscid two-dimensional flows," *Phys. Fluids* 31, 56 (1988).
- [7] MA, A. (1991), “Vortices on accretion disks.,” *Nature*, 356, 41.
- [8] Barnes, D.R., and Kerswell, R.R. (2000), “New results in rotating Hagen-Poiseuille flow,” *Journal of Fluid Mechanics*, 417(-1), 103–126.
- [9] Berhanu, M., Magnétohydrodynamique turbulente dans les métaux liquides, 2008, Phd Thesis, Ens Paris
- [10] M. Berhanu, R. Monchaux, S. Fauve, N. Mordant, F. Petrelis, A. Chiaudel, F. Daviaud, , B. Dubrulle, L. Marie, F. Ravelet, M. Bourgoin, Ph. Odier, J.-F. Pinton, and R. Volk. Magnetic eld reversals in an experimental turbulent dynamo. *Europhys. Lett.*, 77 :59001, 2007
- [11] G. P. Bewley, D. P. Lathrop, and K. R. Sreenivasan, “Visualizing quantized vortices,” *Nature (London)* 441, 588 (2006)
- [12] L.Bourouiba and P.Bartello“The intermediate Rossby number range and two-dimensional–three-dimensional transfers in rotating decaying homogeneous turbulence,” *J. Fluid Mech.* 587, 139 (2007).
- [13] D. L. Boyer and M. L. Kmetz, “Vortex shedding in rotating flows,” *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 26, 51 (1983).
- [14] Bullard, E.C. (1949), “The Magnetic Field within the Earth,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 197(1051), 433–453.
- [15] F. H. Busse, “Steady fluid flow in a precessing spheroidal shell,” *J. Fluid Mech.* 33, 739 (1968).

- [16] F. H. Busse. Homogeneous dynamos in planetary cores and in the laboratory. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 32 :383{408, 2000
- [17] G. F. Carnevale, M. Briscolini, R. C. Kloosterziel, and G. K. Vallis, "Three-dimensionally perturbed vortex tubes in a rotating flow," *J. Fluid Mech.* 341, 127 (1997).
- [18] P. Cardin and L. G. Cugliandolo, editors. *Dynamos : Lecture Notes of the Les Houches Summer School 2007*. Elsevier, New-York, 2008
- [19] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Oxford University Press, London, 1961), Sec. 23.
- [20] D. B. Chelton, M. G. Schlax, R. A. Samelson, and R. A. deSzoeke, "Global observations of large ocean eddies," *Geophys. Res. Lett.* 34, L15606, DOI : 10.1029/2007GL030812 (2007)
- [21] P. A. Davidson, P. J. Staplehurst, and S. B. Dalziel, "On the evolution of eddies in a rapidly rotating system," *J. Fluid Mech.* 557, 135 (2006).
- [22] B. Dintrans, R. Ouyed , On Jupiter's inertial mode oscillations, *A&A* 375 3 (2001)
- [23] Duguet, Y., Scott, J. & Le Penven, L. 2005 Instability inside a rotating gas cylinder subject to axial periodic strain. *Phys. Fluids* 17, 114103.
- [24] Eloy, C.. (2003), "Elliptic and triangular instabilities in rotating cylinders," *Journal of Fluid Mechanics*, 476(-1), 357–388.
- [25] Fabre, D., Sipp, D. & Jacquin, L. 2006 Kelvin waves and the singular modes of the Lamb–Oseen vortex. *J. Fluid Mech.* 551, 235–274.
- [26] D.R. Fearn. Hydromagnetic flow in planetary cores. *Rep. Prog. Phys.*, 61 :175{235, 1998
- [27] Fultz, D. 1959 A note on overstability and elastoid-inertia oscillations of Kelvin, Solberg and Bjerknes. *J. Met.* 16, 199–208.
- [28] A. Gailitis, O. Lielausis, E. Platacis, S. Dement'ev, A. Cifersons, G. Gerbeth, T. Gundrum, F. Stefani, M. Christen, and G. Will. Magnetic field saturation in the riga dynamo experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 86(14) :3024{3027, Apr 2001.
- [29] Gailitis, A., Lielausis, O., Platacis, E., Gerbeth, G., and Stefani, F. (2002), "Colloquium : Laboratory experiments on hydromagnetic dynamos," *Reviews of Modern Physics*, 74, 973–990
- [30] Gans, R.F. (1970), "On the precession of a resonant cylinder," *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 41(04), 865–872.
- [31] R. F. Gans, "On hydromagnetic precession in a cylinder," *J. Fluid Mech.* 45, 111 (1970).
- [32] P. Goldreich and S. J. Peale. Dynamics of planetary rotations. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 6 :287, 1968.
- [33] Goto, S., Ishii, N., Kida, S. & Nishioka, M. 2007 Turbulence generator using a precessing sphere. *Phys. Fluids* 19, 061705.
- [34] Greenspan, H. P. 1969 *The Theory of Rotating Fluids*. Cambridge University Press.
- [geophysik] D. Gubbins, A. L. Jones, and C. C. Finlay. Fall in Earth's Magnetic Field Is Erratic. *Science*, 312(5775) :900{902, 2006

- [35] Guckenheimer, J., and Mahalov, A. (1992), "Resonant triad interactions in symmetric systems," *Physica D Nonlinear Phenomena*, 54, 267–310
- [36] J. E. Hart, "Instability and secondary motion in a rotating channel flow," *J. Fluid Mech.* 45, 341 (1971)
- [37] Herreman, W. (2009), "Instabilite elliptique sous champ magnetique et Dynamo d'ondes inertielles," Phd Thesis, Université de Provence Aix Marseille I
- [38] R. Hollerbach and R. R. Kerswell, "Oscillatory internal shear layers in rotating and precessing flows," *J. Fluid Mech.* 298, 327 (1995).
- [39] E. J. Hopfinger and G. J. F. van Heijst, "Vortices in rotating fluids," *Annu. Rev. Fluid Mech.* 25, 241 (1993).
- [40] E. J. Hopfinger, F. K. Browand, and Y. Gagne, "Turbulence and waves in a rotating tank," *J. Fluid Mech.* 125, 505 (1982)
- [41] A. Ibbetson and D. J. Tritton, "Experiments on turbulence in a rotating fluid," *J. Fluid Mech.* 68, 639 (1974).
- [42] J. A. Johnson, "The stability of shearing motion in a rotating fluid," *J. Fluid Mech.* 17, 337 (1963)
- [43] D. D. Joseph. Hydrodynamic stability and bifurcation. In H. L. Swinney and J. P. Gollub, editors, *Hydrodynamic instabilities and the transition to turbulence*. Springer Verlag, 1981
- [44] Kerswell, R. R. & Barenghi, C. F. 1995 On the viscous decay rates of inertial waves in a rotating cylinder. *J. Fluid Mech.* 285, 203–214.
- [45] R.R. Kerswell. Upper bounds on the enrgy dissipation in turbulent precession. *J. Fluid Mech.*, 321 :335{ 370, 1996
- [46] R. R. Kerswell, "Secondary instabilities in rapidly rotating fluids : Inertial wave breakdown," *J. Fluid Mech.* 382, 283 (1999).
- [47] R. R. Kerswell, "Elliptical instability," *Annu. Rev. Fluid Mech.* 34, 83 (2002).
- [48] Streamline tori in a precessing sphere at small Reynolds numbers,
- [49] R. C. Kloosterziel and G. F. Carnevale, "Formal stability of circular vortices," *J. Fluid Mech.* 242, 249 (1992)
- [50] Knobloch, E., Mahalov, A., and Marsden, J.E. (1994), "Normal forms for three-dimensional para- metric instabilities in ideal hydrodynamics," *Physica D Nonlinear Phenomena*, 73, 49–81
- [51] J. J. Kobine, "Azimuthal flow associated with inertial wave resonance in a precessing cylinder," *J. Fluid Mech.* 319, 387 (1996).
- [52] J. J. Kobine, "Inertial wave dynamics in a rotating and precessing cylinder," *J. Fluid Mech.* 303, 233 (1995)
- [53] Kudlick, M. 1966 On the transient motions in a contained rotating fluid. PhD thesis, MIT.
- [54] Le Dizès, S. & Lacaze, L. 2005 An asymptotic description of vortex Kelvin modes. *J. Fluid Mech.* 542, 69–96.

- [55] Lagrange, R., Eloy, C., Nadal, F., and Meunier, P. (2008), "Instability of a fluid inside a precessing cylinder," *Physics of Fluids*, 20(8), 081701.
- [56] Laguerre, R. Approximation des équations de la MHD par une méthode hybride spectrale-éléments finis nodaux : application à l'effet dynamo, Thèse de Doctorat de l'Université Paris 7
- [57] S. J. Larmor. How could a rotating body such as the sun become a rotating magnet ? Rep. Britt. Assoc. Adv. Sci., 1919
- [58] S. Leblanc and C. Cambon, "On the three-dimensional instabilities of plane flows subjected to Coriolis force," *Phys. Fluids* 9, 1307 (1997).
- [59] Leorat, J.. (2003), "Large scales features of a flow driven by precession," *Magnetohydrodynamics*, 39(3), 321–326.
- [60] Leorat, J. (2006), "Dissipation in a flow driven by precession and application to the design of a MHD wind tunnel," *Magnetohydrodynamics*, 42(2/3), 143–151.
- [61] Lighthill J (1978) *Waves in fluids*. Cambridge University Press, London
- [62] D. E. Loper, "Torque balance and energy budget for the precessionally driven dynamo," *Phys. Earth Planet. Inter.* 11, 43 (1975).
- [63] Lord Kelvin. Vibrations of a columnar vortex. *Phil. Mag.*, 10 :155{168, 1880
- [64] S. Lorenzani and A. Tilgner, "Inertial instabilities of fluid flow in precessing spheroidal shells," *J. Fluid Mech.* 492, 363 (2003).
- [65] S. Lorenzani and A. Tilgner, "Fluid instabilities in precessing spheroidal cavities," *J. Fluid Mech.* 447, 111 (2001).
- [66] F. J. Lowes & I. Wilkinson, *Geomagnetic Dynamo : A Laboratory Model*, *Nature* 198, 1158 - 1160 (1963)
- [67] A. Mahalov, "The instability of rotating fluid columns subjected to a weak external Coriolis force," *Phys. Fluids A* 5, 891 (1993).
- [68] W. V. R. Malkus, "Precession of the earth as the cause of geomagnetism," *Science* 160, 259 (1968).
- [69] W. V. R. Malkus, "An experimental study of global instabilities due to tidal (elliptical) distortion of a rotating elastic cylinder," *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 48, 123 (1989).
- [70] R. Manasseh, "Breakdown regimes of inertia waves in a precessing cylinder," *J. Fluid Mech.* 243, 261 (1992).
- [71] R. Manasseh, "Distortions of inertia waves in a rotating fluid cylinder forced near its fundamental mode resonance," *J. Fluid Mech.* 265, 345 (1994).
- [72] R. Manasseh, "Nonlinear behaviour of contained inertia waves," *J. Fluid Mech.* 315, 151 (1996).
- [73] A. M. M. Manders and L. R. M. Maas, "Observations of inertial waves in a rectangular basin with one sloping boundary," *J. Fluid Mech.* 493, 59 (2003).
- [74] Marques, F., and Lopez, J.M. (2001), "Precessing vortex breakdown mode in an enclosed cylinder flow," *Physics of Fluids*, 13(6), 1679–1682.

- [75] A.D. McEwan, "Inertial oscillations in a rotating fluid cylinder," *J. Fluid Mech.* 40, 603 (1970)
- [76] L. Messio, C. Morize, M. Rabaud and F. Moisy, « Experimental observation using particle image velocimetry of inertial waves in a rotating fluid », *Exp. in Fluids*,
- [77] Meunier, P. & Leweke, T. 2003 Analysis and minimization of errors due to high gradients in particule image velocimetry. *Exps. Fluids* 35, 408–421.
- [78] P. Meunier, C. Eloy, R. Lagrange, and F. Nadal, "A rotating fluid cylinder subject to weak precession," *J. Fluid Mech.* 599, 405 (2008).
- [79] A. Michalke, "Vortex formation in free boundary layer according to stability theory," *J. Fluid Mech.* 22, 371 (1965)
- [80] H. K. Moffatt. Magnetic field generation in electrically conducting fluids. Cambridge University Press, Cambridge, 1978
- [81] F. Moisy, C. Morize, M. Rabaud and J. Sommeria. « Anisotropy and cyclone-anticyclone asymmetry in decaying rotating turbulence ». *J. Fluid Mech.* (submitted 2009).
- [82] C. Morize, F. Moisy, and M. Rabaud, "Decaying grid-generated turbulence in a rotating tank," *Phys. Fluids* 17, 095105 (2005).
- [83] C. Morize, De la turbulence 3D à la turbulence anisotrope dominée par la rotation, Thèse de Doctorat de l'Université Paris VII.
- [84] J. Noir, D. Jault, and P. Cardin, "Numerical study of the motions within a slowly precessing sphere at low Ekman number," *J. Fluid Mech.* 437, 282 (2001).
- [85] G. Perret, A. Stegner, M. Farge, and T. Pichon, "Cyclone-anticyclone asymmetry of large-scale wakes in the laboratory," *Phys. Fluids* 18, 036603 (2006).
- [86] Pedlosky J (1987) Geophysical fluid dynamics. Springer, Heidelberg
- [87] O.M Phillips, Energy Transfer in Rotating Fluids by Reflection of Inertial Waves, *Phys. Fluids* 6, 513 (1963)
- [88] R. T. Pierrehumbert, "Universal short-wave instability of two-dimensional eddies in an inviscid fluid," *Phys. Rev. Lett.* 57, 2157 (1986)
- [89] H. Poincaré, "Sur la précession des corps déformables," *Bull. Astron.* 27, 321 (1910).
- [90] Yu. B. Ponomarenko. Theory of the hydromagnetic generator. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 14 :775, 1973
- [91] P. G. Potylitsin and W. R. Peltier, "Three-dimensional destabilisation of Stuart vortices : The influence of rotation and ellipticity," *J. Fluid Mech.* 387, 205 (1999).
- [92] Racz, J.P., and Scott, J.F. (2008a), "Parametric instability in a rotating cylinder of gas subject to sinusoidal axial compression. Part 1. Linear theory," *Journal of Fluid Mechanics*, 595(-1), 265–290.
- [93] Racz, J.-P. & Scott, J. F. 2008 Parametric instability in a rotating cylinder of gas subject to sinusoidal axial compression. Part 2. Weakly nonlinear theory. *J. Fluid Mech.* 595, 291–321.
- [94] Racz, J.P. (2006), "Instabilité paramétrique dans un cylindre de gaz en rotation soumis la compression périodique d'un piston," Thèse de doctorat de l'Ecole Centrale de Lyon

- [95] M. Rieutord, B. Georgeot, and L. Valdetaro. Inertial waves in a rotating spherical shell : attractors and asymptotic spectrum. *J. Fluid Mech.*, 435 :103{144, 2001
- [96] M. Rieutord and L. Valdetaro. Inertial waves in a rotating spherical shell. *J. Fluid Mech.*, 341 :77{99, 1997.
- [97] Rieutord, M. 1991 Linear theory of rotating fluids using spherical harmonics. Part II, time-periodic flows. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 59, 185–208
- [98] P. H. Roberts and K. Stewartson, "On the motion of a liquid in a spheroidal cavity of a precessing rigid body. II," *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 61, 279 (1965).
- [99] G. O. Roberts. Dynamo action of fluid motions with two-dimensional periodicity. *Phil. Trans.Roy. Soc. London A*, 271 :411, 1972.
- [100] M. G. Rochester, J. A. Jacobs, D. E. Smylie, and K. F. Chong. Can precession power the geomagnetic dynamo ? *Geophys. J. Int.*, 43 :661{678, 1975
- [101] M.Rossi, *Of Vortices and Vortical Layers : An Overview* , Springer, 2008
- [102] P. G. Saffman, *Vortex Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
- [103] Saric, W. S., Görtler vortices, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 26, p. 379 (1994).
- [104] Th. Sloudsky "De la rotation de la terre supposée fluide à son intérieur," *Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes* 9, 285 (1895).
- [105] Stergiopoulos, S. & Aldridge, K. D. 1982 Inertial waves in a fluid partially filled cylindrical cavity during spin-up from rest. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 21, 89–112.
- [106] David J. Stevenson. Planetary magnetic elds. *Earth and Planetary Science Letters*, 208(1-2) :1 { 11, 2003.
- [107] K. Stewartson and P. H. Roberts, "On the motion of a liquid in a spheroidal cavity of a precessing rigid body," *J. Fluid Mech.* 17, 1 (1963).
- [108] D. Tritton, "Turbulence in rotating fluids," in *Rotating Fluids in Geophysics*, edited by P. H. Roberts and A. M. Soward (Academic, London, 1978) pp. 106–138.
- [109] D. J. Tritton and P. A. Davies, "Instabilities in geophysical fluid dynamics," in *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*, edited by H. L. Swinney and J. P. Gollub (Springer-Verlag, Berlin, 1985), p. 229.
- [110] Racz, J.P. (2006), "Instabilité parametrique dans un cylindre de gaz en rotation soumis la compression periodique d'un piston," *Phd Thesis*, Ecole Centrale de Lyon
- [111] T. Radko and M. E. Stern, "On the propagation of oceanic mesoscale vortices," *J. Fluid Mech.* 380, 39 (1999).
- [112] Richard, D. 2002 Instabilités hydrodynamiques dans les écoulements en rotation différentielle. *PhD thesis*, Observatoire de Meudon
- [113] M. G. Rochester, J. A. Jacobs, D. E. Smylie, and K. F. Chong, "Can precession power the geomagnetic dynamo ?" *Geophys. J. R. Astron. Soc.* 43, 661 (1975).
- [114] G. Ruediger, *Differential Rotation and Stellar Convection* (Gordon and Breach, New York, 1989).

- [115] P.Sagaut, C.Cambon, « Homogeneous turbulence dynamics » Cambridge Press University.
- [116] A.Salhi and C.Cambon Precessing rotating flows with additional shear : Stability analysis, Phys. Rev. E 79, 036303 (2009)
- [117] D. Sipp and L. Jacquin, "Three-dimensional centrifugal-type instabilities of two-dimensional flows in rotating systems," Phys. Fluids 12, 1740 (2000).
- [118] Sipp, D. 2000 Weakly nonlinear saturation of short-wave instabilities in a strained Lamb-Oseen vortex. Phys. Fluids 12, 1715–1729.
- [119] L.M. Smith et F. Waleffe, “Transfer of energy to two-dimensional large scales in forced, rotating three-dimensional turbulence,” Phys. Fluids 11 (6), 1608-1622 (1999).
- [120] Stewartson, K. 1958 On the stability of a spinning top containing liquid. J. Fluid Mech. 5, 577–592.
- [121] Thompson, R. (1970), “Diurnal tides and shear instabilities in a rotating cylinder,” Journal of Fluid Mechanics Digital Archive, 40(04), 737–751.
- [122] A. Tilgner and F. H. Busse, “Fluid flows in precessing spherical shells,” J. Fluid Mech. 426, 387 (2001).
- [123] A. Tilgner, "Magnetohydrodynamic flow in precessing spherical shells," J. Fluid Mech. 379, 303 (1999).
- [124] A. Tilgner, "Towards experimental fluid dynamos," Phys. Earth Planet. Inter. 117, 171 (2000).
- [125] A.Tilgner, Precession driven dynamos, Phys. Fluids 17, 034104 (2005)
- [126] J. Vanyo, P. Wilde, P. Cardin, and P. Olson, “Experiments on precessing flows in the Earth’s liquid core,” Geophys. J. Int. 121, 136 (1995).
- [127] J. P. Vanyo, "A geodynamo powered by luni-solar precession," Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 59, 209 (1991).
- [128] J. P. Vanyo and J. R. Dunn, “Core precession : flow structures and energy,” Geophys. J. Int. 142, 409 (2000).
- [129] F. Waleffe, "On the three-dimensional instability of strained vortices," Phys. Fluids A 2, 76 (1990).
- [130] Waleffe, F. 1989 The 3D instability of a strained vortex and its relation to turbulence. PhD thesis, MIT.
- [131] Wood, W. W. 1965 Properties of inviscid, recirculating flows. J. Fluid Mech. 22, 337–346.
- [132] Wu, C., and Roberts, P.H. (2008), “Precessionally-Driven Dynamo in a Spheroid,” AGU Fall Meeting Abstracts, pp. A707+.
- [133] P.K. Yeung et Y. Zhou, “Numerical study of rotating turbulence with external forcing,” Phys. Fluids 10 (11), 2895 (1998).
- [134] V. A. Zeligovsky, A kinematic magnetic dynamo sustained by a Beltrami flow in a sphere. Geophysical fluid dynamics
- [135] Zhang, K., Liao, X., and Li, L. (2003), “Differential Rotation Driven by Precession,” Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 87, 39–51.