HAL
open science

Rayonnement dans les convertisseurs d'électronique de puissance

Moez Youssef

To cite this version:

Moez Youssef. Rayonnement dans les convertisseurs d'électronique de puissance. Sciences de l'ingénieur [physics]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1998. Français. NNT : . tel-00491415

HAL Id: tel-00491415

https://theses.hal.science/tel-00491415v1

Submitted on 11 Jun 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

Présentée par

Moez YOUSSEF

Ingénieur ENSIEG

Pour obtenir le grade de DOCTEUR
de L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE
(Arrêté ministériel du 30 mars 1992)

(Spécialité: Génie Electrique)

Médiathèque L.E.G.
E.N.S.I.E.G.
26 JAN. 1999
577

******

Rayonnement dans Les Convertisseurs d'Electronique de Puissance

******

Date de soutenance: 21 Décembre 1998

Composition du jury

Messieurs	P. SAGUET	Président
	F. CANAVERO	Rapporteur
	A. NICOLET	Rapporteur
	J.N. FIORINA	Examinateur
	Y. MARECHAL	Examinateur
	J. ROUDET	Examinateur

A mes parents,

A Mohamed et Hajer.

AVANT PROPOS

Remerciements

Mes remerciements vont tout d'abord à James Roudet, professeur à l'UJF, qui a encadré cette thèse et avec qui j'ai eu grand plaisir à travailler, ainsi qu'à Yves Maréchal, maître de conférences à l'ENSIEG, qui a co-encadré ces travaux de thèse et qui m'a guidé dans le domaine de la modélisation et des méthodes numériques.

Je remercie également très sincèrement les membres de mon jury de thèse pour avoir tout d'abord accordé un peu de leur temps à la lecture de mon manuscrit, mais également pour leur présence et leurs remarques constructives lors de ma soutenance. Il s'agit de Messieurs:

- Pierre Saguet, professeur à l'ENSERG, président.
- Flavio Canavero, professeur du Polytechnico di Torino, rapporteur.
- André Nicolet, professeur à la Faculté Saint Jérome de Marseille, rapporteur.
- Jean Noël Fiorina, Ingénieur à MGE-UPS (Grenoble), examinateur.

Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur Jean Claude Sabonnadière, directeur du Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, pour m'avoir accueilli au sein de son laboratoire, me permettant ainsi de travailler dans de très bonnes conditions.

Je remercie également Monsieur Robert Perret, professeur à l'ENSIEG et chef de l'équipe Electronique de Puissance.

Je tiens aussi à exprimer mes sincères remerciements à Monsieur Jean Paul Ferrieux chef du département génie électrique à l'IUT de Grenoble pour m'avoir accueilli comme ATER pour cette année scolaire.

Je remercie également Jean Luc Schanen et Edit Clavel pour leurs précieux conseils.
Je ne voudrais pas oublier mes professeurs de l'IEG qui m'ont donnés la base nécessaire dans le domaine de l'Electrotechnique (et plus particulièrement Messieurs Marcel Ivanes, Daniel Roye, Jean Pierre Rognon, Jean Louis Coulomb, Gérard Meunier, Christian Masselot, Christian Schaffer, Jean Pierre Kéradec, Emmanuel Toutain, Seddik Bacha et Madame Elisabeth Rullière).

Je tiens à remercier particulièrement tous les copains du laboratoires:

- L'ambassadeur de la Roumanie à la salle Epte, Monsieur Radu Popescu, le génie de la salle Epte (Il est en train de développer une méthode qui va faire un BOOM dans le domaine des perturbations conduites) qui est mon meilleur copain avec qui je n'est pas de secrets.
- La communauté maghrébine du LEG, surtout Sami Ammari pour ces blagues ainsi que Rachid, Hassan, Basma, Rafika, Isabelle, Khaled et Jamel.
- Le chef spirituel de la salle Epte qui est Monsieur Jean Cristophe Crébier, qui avec ses cheveux créé du rayonnement en champ lointain.
- Le chef exécutif de la salle Epte, Monsieur Jean Schutz qui a une réponse à tous les problèmes.
- Pascal Doenlen DRT au LEG avec qui j'ai beaucoup travaillé (c'est un amateur de Kebab et des chansons de Faudel).
- Tous les autres adeptes de la salle Epte: Ambroise, Corinne, Pierre Olivier, Maxime, Jimmy...

Je tiens également à remercier tous les ingénieurs et techniciens, en particulier: Stéphane Catellani, Demba Diallo, Daniel Ogier, Claude Brun, Bruno Mallet, Eric Gentil, Jean Barbaroux (ça va péter, il faut mettre une capacité) et Marie Thérèse Loubinoux.

Enfin et surtout, un grand merci à mes parents, ma sœur Hajer et mon frère Mohamed pour leurs encouragements, un très grand merci à mon équipe de Foot l'Espérance Sportive de Tunis que j'aime depuis l'âge de trois ans et dont les victoires m'ont remonté le moral aux moments les plus difficiles.

Table des matières

	Pages
Avant Propos	**4**
Introduction générale	**14**
Partie I: Notions générales	**20**
I.1 Introduction	22
I.1.1 Généralités sur la Compatibilité électromagnétique	22
I.1.1.1 Les perturbations conduites	22
I.1.1.2 Les perturbations rayonnées	23
I.1.2 Spécificité de la CEM en électronique de puissance	24
I.2 Limites des méthodes quasi-statiques	25
I.3 Approche utilisée pour l'étude des antennes	26
I.3.1 Introduction	26
I.3.2 Rappel sur les équations de Maxwell	26
I.3.2.1 Forme locale des équations de Maxwell	26
I.3.2.2 Potentiel vecteur et potentiel scalaire	27
I.3.2.3 Relations constitutives	27
I.3.2.4 Equations d'onde	28
I.3.2.5 Résolution des équations d'onde	29
I.3.3 Notion de dipôle électrique	30
I.3.4 Rayonnement d'une antenne filaire isolée de longueur quelconque	35
I.3.4.1 Champ lointain créé par une antenne filaire	35
I.3.4.2 Bilan de puissance	37
I.3.4.3 Impédance propre d'une antenne filaire	39
I.3.4.4 Impédance mutuelle entre deux antennes	41
I.4 Conclusion	44
Partie II: Calcul du champ électromagnétique avec l'hypothèse du courant connu	**46**
II.1 Introduction	48
II.2 Principe du calcul	48
II.3 Champ proche.	50
II.3.1 Introduction	50

II.3.2 Cas d'un circuit filiforme 50
II.3.2.1 Calcul du champ crée par une boucle rectangulaire 50
II.3.2.2 Calcul du champ crée par une branche 54
II.3.2.3 Effet d'un plan de masse 56
II.3.3 Limites de l'hypothèse filiforme 56
II.3.3.1 Principe de calcul de la répartition de courant 57
II.3.3.2 Choix de la subdivision 57
II.3.3.3 Application à la boucle rectangulaire 59
II.3.3.4 Influence de la subdivision sur le champ 59
II.3.4 Conclusion 60
II.4 Capteurs de mesure en champ proche 61
II.4.1 Introduction 61
II.4.2 Principe de l'antenne magnétique 61
II.4.3 Adaptation d'impédance 65
II.4.4 Principaux paramètres de l'antenne magnétique 67
II.4.4.1 Schéma électrique équivalent de l'antenne boucle 67
II.4.4.2 Facteur d'antenne 68
II.4.5 Champ capté par une antenne magnétique 69
II.5 Application en champ proche 70
II.5.1 champ crée par un hacheur série de géométrie rectangulaire 70
II.5.1.1 Cas filiforme sans plan de masse 71
II.5.1.2 Cas filiforme avec plan de masse 73
II.5.1.3 Limite de l'approche filiforme 79
II.5.1.4 Effet de la commutation douce 81
II.5.2 Champ créé par un module de puissance 83
II.5.3 Conclusion 86
II.6 Champ électromagnétique non proche crée par un circuit électrique 87
II.6.1 Calcul direct du potentiel vecteur 87
II.6.1.1 Champ produit par une branche élémentaire 87
II.6.1.2 Champ produit par une boucle rectangulaire 89
II.6.2 Approche par la méthode des dipôles 91
II.6.3 Calcul du champ lointain à partir du champ proche 93
II.7 Conclusion 96

Partie III: Modélisation du câblage 98

III.1 Introduction 100

III.2 La méthode PEEC 101

III.2.1 Introduction 101

III.2.2 Mise en équation générale 102

III.2.2.1 Tension appliquée 103

III.2.2.2 Terme résistif 104

III.2.3 Terme inductif 104

III.2.3.1 Notion d'inductance partielle 105

III.2.3.2 Mutuelle partielle entre conducteurs filiformes 106

III.2.3.3 Mutuelle partielle entre deux rubans 107

III.2.3.4 Influence du retard sur le terme inductif 108

III.2.3.5 Exemple de calcul de résistance de rayonnement 109

III.2.3.6 Notion de résistance partielle de rayonnement 111

III.2.4 Terme capacitif 112

III.2.4.1 Définition des coefficients de capacité 114

III.2.4.2 Propriétés de la matrice c 114

III.2.4.3 Définition des coefficients de potentiel 116

III.2.4.4 Calcul du coefficient de potentiel entre deux surfaces 116

III.2.4.5 Notion de capacité partielle 117

III.2.5 Synthèse du circuit électrique équivalent 118

III.2.5.1 Hypothèse des états quasi-stationnaires: méthode PEEC 119

III.2.5.2 Cas non quasi-stationnaires: méthode rPEEC 121

III.2.5.3 Calcul des courants et des potentiels 124

III.2.6 Application des méthodes PEEC et rPEEC au cas de l'antenne 126

III.2.7 Conclusion 127

III.3 La méthode des moments 128

III.3.1 Introduction 128

III.3.2 Technique de la méthode des moments 128

III.3.3 Application de la méthode des moments à un circuit filiforme 139

III.3.4 Application à l'antenne 142

III.3.5 Application à une boucle circulaire 145

III.3.6 Conclusion 148

III.4 La méthode des lignes de transmission 149
III.4.1 Introduction 149
III.4.2 Equations des lignes 149
III.4.2.1 Schéma équivalent d'une ligne de transmission 149
III.4.2.2 Solution générale de l'équation en régime harmonique 150
III.4.2.3 Coefficients de réflexion et impédance 151
III.4.3 La matrice S ou matrice de dispersion 152
III.4.3.1 Définition 152
III.4.3.2 Intérêt des paramètres S 153
III.4.3.3 Paramètres S d'une ligne de transmission 153
III.4.4 La ligne microruban 154
III.5 Conclusion 156

Partie IV: Applications 158

IV.1 Introduction 160
IV.2 Cas d'une boucle rectangulaire 160
IV.2.1 Impédance d'entrée d'une boucle rectangulaire 162
IV.2.2 Schéma équivalent de la boucle 164
IV.2.3 Influence du retard sur le champ 165
IV.2.4 Conclusion 167
IV.3 Cas d'une ligne microruban 168
IV.3.1 Introduction 168
IV.3.2 Caractéristiques géométriques de la ligne microruban à étudier 168
IV.3.3 Calcul de ε_e et Z_c 168
IV.3.3.1 Calcul théorique 168
IV.3.3.2 Validation expérimentale 169
IV.3.4 Calcul de l'impédance d'entrée de la ligne 170
IV.3.4.1 Calcul de l'impédance d'entrée par la théorie des lignes 170
IV.3.4.2 Calcul de l'impédance d'entrée par la méthode rPEEC 172
IV.3.5 Conclusion 174
IV.4 Conclusion 175

Conclusion générale 176

Références bibliographiques 180

Annexes 188

Annexe 1: Résolution de l'équation de Poisson 190

Annexe 2: Résolution des équations d'ondes complètes 192

Annexe 3: Rayonnement du dipôle de Hertz 195

Annexe 4: Rayonnement d'une antenne filaire 197

Annexe 5: Impédance de rayonnement d'une antenne 199

INTRODUCTION GENERALE

La compatibilité électromagnétique est le grand sujet d'inquiétude concernant les appareils électriques depuis une bonne décennie. Les préoccupations ont majoritairement porté sur le passage ou non des normes rayonnées ou conduites. Il est donc bien naturel que l'électronique de puissance moderne n'y échappe pas tant son implication dans la vie industrielle et domestique est courante.

En revanche, concernant l'électronique de puissance, notre sujet d'intérêt, peu de travaux de fond ont été entrepris. Cependant, même en se focalisant sur les convertisseurs d'électronique de puissance le domaine est immense et chaque sujet le composant fait appel à des outils ou à des approches théoriques très différents. On peut presque considérer que chacun des sujets a pour objectif le respect d'une norme. Citons quelques exemples:

- La norme basse fréquence pour l'émission conduite où le principal du travail consiste à caractériser ou à trouver des structures de convertisseurs de puissance ou de nouveaux modes de commande.

- La norme radio fréquence en émission conduite, dont la principale spécificité se matérialise par l'étude de la commutation des semiconducteurs et la détermination des éléments parasites engendrés par la réalisation technologique. Il s'agit d'un point où notre groupe de recherche travaille depuis de longues années et un outil de caractérisation du câblage en est le reflet ainsi que le développement de modèles de semiconducteurs simples mais pertinents. En France, trois principaux laboratoires sont impliqués dans cette thématique (LESIR, CEGELY, LEG).

- La norme en émission rayonnée qui s'étend de 30MHz à 1GHz. Cette gamme de fréquence va constituer plus précisément le cadre de cette thèse avec à l'horizon la mise en œuvre de solutions concrètes pour qu'un convertisseur industriel d'électronique de puissance satisfasse cette norme sans l'aide de blindage. L'application de concepts ou de méthodes développées ici est largement repris dans le stage de DRT qu'effectue dans notre groupe P. Doenlen.

- Citons également les travaux effectués dans le domaine de la susceptibilité des composants électroniques (surtout les composants bas signaux, comme les transistors, les amplificateurs opérationnels, les portes numériques...) par l'équipe de B. Demoulin au LRPE de Lille, cette équipe s'attache à mieux caractériser la robustesse de ces composants immergés dans des milieux agressifs tel que par

exemple l'électronique de puissance. Ces travaux sont fondamentaux puisqu'ils débouchent sur la constitution de modèles de composants implantables dans SPICE dont on peut ensuite simuler le comportement en fonction de l'environnement et de l'agression.

Développons maintenant l'objectif qui a été le notre durant ces trois années de thèse et qui s'inscrit dans un cadre plus général d'une meilleure connaissance des convertisseurs d'électronique de puissance en vue de leur conception.
Les problèmes d'ordre CEM sont décomposés suivant le schéma maintenant classique de "source-chemin-victime", les travaux menés par J.L. Schanen et E. Clavel au cours de leurs thèses ont permis d'une part de valider un principe de modélisation des chemins de propagations et plus particulièrement des câblages. D'autre part le développement du logiciel InCa a quant à lui permis de valider l'efficacité de cette méthode de modélisation sur de nombreux exemples industriels. A l'heure actuel cet outil se tourne vers la résolution de problème de conduction bidimensionnelle dans les conducteurs larges et plats comme par exemple les bus barres utilisés en électronique de puissance.

Les modèles mis en œuvre aujourd'hui dans InCa, ne concernent que la modélisation inductive des interconnexions. Cette approche suffisante pour la conception des convertisseurs de forte puissance (traction ferroviaire, marine...) est malheureusement insuffisante pour l'étude des alimentations à découpage où la présence de transformateur tend souvent à occulter l'influence inductive du câblage alors que la détermination des capacités parasites entre pistes ou entre pistes et châssis devient incontournable afin de déterminer les courants de mode commun et par extension d'accéder à la signature CEM en mode conduit et en mode rayonné du dispositif.
La nécessité de déterminer les capacités de mode commun puis de prévoir le comportement en émission rayonnée des convertisseurs a nécessité de s'intéresser à l'extension en fréquence du domaine de validité des modèles de câblage jusqu'ici mis en œuvre. Le but de cette thèse est essentiellement exploratoire et doit permettre une prise de décision sur l'évolution future des méthodes utilisées dans InCa voir même d'InCa lui-même. En effet, nous avons voulu bien sûr examiner en premier la méthode rPEEC qui permet, comme la version PEEC en quasi-statique de représenter les phénomènes physiques par des composants électriques localisés. De cette manière nous avons dû faire le point sur les méthodes de calcul de capacités parasites les plus appropriées mais aussi sur la méthode des moments concurrente de la méthode rPEEC.

Le manuscrit de thèse s'articule autour de deux lignes directrices principales:

- La première consiste à évaluer les champs rayonnés à partir de la connaissance expérimentale du courant dans les différents conducteurs et à une comparaison expérimentale avec les signaux issus d'une sonde de champ.
- La deuxième partie traite des méthodes de modélisation du câblage afin d'être en mesure de déterminer le courant dans les conducteurs puis d'en déduire l'expression des champs rayonnés.

PARTIE I

NOTIONS GENERALES

I.1 Introduction:

I.1.1 Généralité sur la Compatibilité Electromagnétique:

La compatibilité électromagnétique est définie comme l'aptitude d'un appareil ou d'un système à fonctionner dans son environnement électromagnétique de façon satisfaisante et sans produire lui-même des perturbations électromagnétiques intolérables pour tout ce qui se trouve dans son environnement. Elle s'articule autour de trois axes qui sont:

- L'étude de la source de perturbation et la détermination des champs parasites qu'elle peut rayonner (degré d'émission).
- L'étude de la victime qui est caractérisée par son degré de susceptibilité à une agression extérieure sur un spectre de fréquence donné.
- L'étude des modes de couplages possibles entre la source de perturbation et le système victime.

En CEM, il existe deux moyens de propagation des perturbations:

- La propagation par conduction.
- La propagation par rayonnement.

I.1.1.1 Les perturbations conduites :

Les perturbations conduites se propagent à travers les câbles, les structures métalliques, la terre selon deux modes :

Le mode différentiel : Un courant de mode différentiel (I_{md}) est un courant parasite qui se superpose au signal utile I et va perturber le circuit victime par une tension de mode différentiel (cf figure I.1). Ces courants circulent par les conducteurs intentionnels, c'est à dire principalement les câbles d'alimentation ou les conducteurs.

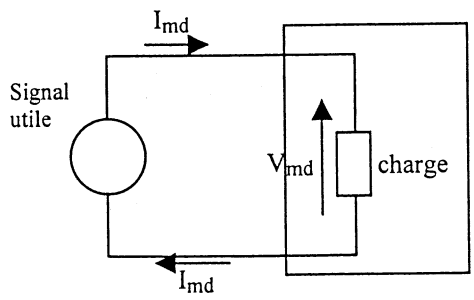


Figure I.1: courant de mode différentiel.

Le mode commun : Un courant de mode commun (I_{mc}) est un courant parasite qui circule sur un ensemble de câbles, et se referme par l'environnement à travers les capacités parasites (cf figure I.2) et plus généralement à travers la structure métallique du système si elle existe, les parois métalliques, les plans de masse, la terre...

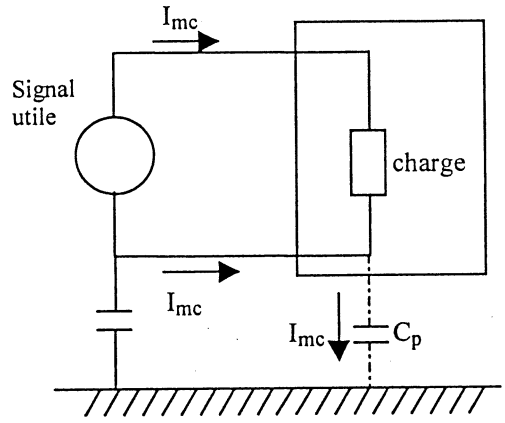


Figure I.2 : courant de mode commun

Ces capacités parasites peuvent être celles qui existent entre les pistes d'un circuit imprimé et le châssis de l'équipement ou bien celles entre un semiconducteur de puissance et son radiateur.

I.1.1.2 Les perturbations rayonnées :

Les perturbations rayonnées se propagent d'un système à l'autre sous forme d'onde électromagnétique.

- L'émission en champ magnétique (exprimée en A/m) est engendrée par un circuit électrique à basse impédance parcouru par un courant.
- L'émission en champ électrique (exprimée en V/m) est engendrée par un circuit électrique à haute impédance soumis à une différence de potentiel élevée.

Les moyens de couplage sont les organes essentiels dans la transmission des perturbations conduites et rayonnées. On peut les classer suivant cinq catégories :

- Par impédance de masse commune.
- Champ à câble en mode commun.
- Champ à câble en mode différentiel.
- Couplage par diaphonie inductive et capacitive.
- Couplage par l'alimentation.

I.1.2 Spécificité de la CEM en Electronique de Puissance :

Depuis quelques années, l'amélioration des performances dynamiques et énergétiques des convertisseurs statiques s'est accompagnée d'une augmentation de la fréquence de découpage. Cette tendance a été rendue possible par l'utilisation de composants plus rapides et faciles à commander (MOS, et surtout IGBT). De la sorte, on a pu réduire le volume des composants magnétiques et donc celui du convertisseur.

Toutefois la contrepartie de cette évolution se caractérise par une augmentation du niveau de pollution électromagnétique, ayant des répercussions dans plusieurs domaines :

- Problème d'auto-perturbation ou de perturbation des circuits dans l'environnement proche du convertisseur, et donc de fiabilité globale de l'équipement. Ce problème peut être traité en champ proche, c'est à dire en représentant les phénomènes avec une capacité ou un transformateur.
- Le respect des normes en vigueur, c'est à dire satisfaire notamment en rayonnement à des gabarits qui s'étendent de 30MHz à 1GHz. Le rayonnement est majoritairement produit par des courants de mode commun qui s'évacuent par les câblages d'alimentation ce qui nécessite un filtrage efficace afin d'éviter qu'une fois généré ils puissent sortir du convertisseur. En principe avec des enceintes métalliques (convertisseurs situés dans des armoires électriques) le rayonnement est annulé grâce au blindage que constitue le métal constituant l'enveloppe du produit. Cependant aujourd'hui, la tendance est de plus en plus forte à recourir au plastique qui est beaucoup moins coûteux, ainsi la modélisation des phénomènes rayonnés devient primordiale dans une optique de diminuer ces émissions dès la conception. On doit pouvoir donc évaluer le pouvoir perturbateur avant la réalisation d'un prototype.
- Le coût économique d'un problème de pollution électromagnétique peut devenir très important si celui ci apparaît en phase d'industrialisation.

L'objectif consistant à augmenter la fréquence et améliorer la sûreté de fonctionnement doit passer par la prise en compte initiale de concepts de compatibilité électromagnétique et envisager les différentes possibilités de minimisation des perturbations au stade initial de la conception d'un convertisseur.

I.2 Limites des méthodes quasi-statiques :

L'évaluation du pouvoir perturbateur avant la réalisation d'un prototype nécessite une modélisation précise de tous les elements constituant le convertisseur.

Aujourd'hui, il existe des simulateurs de formes d'onde globales, le plus souvent numériques. Ils permettent d'étudier assez précisément les structures de convertisseurs statiques utilisants des composants semiconducteurs relativement lents (thyristor, GTO...) pour lesquels l'aspect pertes ne remet pas en cause le choix de la structure. Cependant, avec l'utilisation de nouveaux composants comme l'IGBT, les fréquences de travail des structures d'Electronique de Puissance ne cessent d'augmenter, et par conséquent, ces simulateurs sont dans l'impossibilité de traiter correctement les phénomènes de commutations, si bien que la simulation numérique doit s'orienter vers deux nouveaux axes que sont: la simulation des semiconducteurs de puissance qui permet de prendre en compte leur comportement électrique (éventuellement électrothermique) et l'environnement électromagnétique de ceux-ci constitué par le câblage, les autres composants passifs inductances, condensateurs et bien sûr transformateurs. Ces deux axes constituent une partie importante du travail de recherche de l'équipe Electronique de Puissance du LEG. Les travaux menés par J.L. Schanen et E. Clavel au cours de leurs thèses ont permis le développement du logiciel InCa qui permet de modéliser le câblage par des composants électriques localisés. Cette modélisation repose sur la méthode PEEC qui a été développée par A.E. Ruehli. Cette méthode a connu plusieurs évolutions. Dans sa première version, uniquement le comportement inductif et résistif était inclus dans la modélisation des interconnexions. C'est cette version qui est implantée actuellement dans InCa. Dans une version postérieure, le comportement capacitif a été intégré. Ensuite A.E. Ruehli a fait évoluer la méthode PEEC vers une méthode conservant la même approche mais avec le calcul d'elements partiels retardés. Il s'agit de la méthode rPEEC, qui peut ainsi traiter des problèmes pour lesquels l'hypothèse quasi statique n'est pas vérifiée. Ce qui risque d'être le cas pour certaines alimentations à découpage. Par conséquent, la prise en compte des phénomènes capacitifs et de l'effet de la propagation deviennent impérative pour avoir une modélisation correcte des interconnexions. L'un des objectifs à court terme de l'équipe Electronique de Puissance sera l'intégration de ces différentes extensions dans le logiciel InCa, dans le but de faire de lui un logiciel de prédétermination des perturbations électromagnétiques au sein d'une structure de convertisseur statique.

Dans cette thèse, on fera le point sur un certain nombre de méthodes de modélisation de câblage déjà existantes. Les critères de choix seront l'applicabilité sur une large gamme de fréquence, la possibilité de couplage avec un logiciel de simulation, la rapidité...

D'autre part, comme on cherche à trouver des méthodes pouvant modéliser le câblage pour des fréquences pour lesquels l'hypothèse quasi statique n'est pas valable, il nous a été indispensable de faire le point sur les approches utilisées dans le domaine des hyperfréquences et plus particulièrement pour les antennes. Ceci fera l'objet du prochain paragraphe.

I.3 Approche utilisée pour l'étude des antennes:

I.3.1 Introduction:

Les antennes sont des éléments de base en CEM. Elles assurent la transformation de l'énergie électrique en énergie électromagnétique (antenne émettrice) ou réciproquement (antenne réceptrice).

Dans ce qui suit, on va rappeler la méthodologie générale pour calculer le champ électromagnétique rayonné par une antenne ainsi qu'un certain nombre de paramètres importants comme l'impédance d'entrée, le gain, la puissance rayonnée... Ceci nécessite d'avoir une relation directe entre le champ rayonné et ces sources, qui sont la densité de courant et la densité de charge. Ce qui revient à chercher une solution particulière aux équations de Maxwell vérifiant les conditions aux limites de l'antenne. [12, 13, 14]

I.3.2 Rappel sur les équations de Maxwell:

I.3.2.1 Forme locale des équations de Maxwell:

$$\text{div}\,\vec{D} = \rho \tag{I.1}$$

$$\text{div}\,\vec{B} = 0 \tag{I.2}$$

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{I.3}$$

$$\text{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{I.4}$$

avec: $\vec{E}$ (V/m): vecteur champ électrique

$\vec{H}$ (A/m): vecteur champ magnétique.

$\vec{D}$ (A.s/m^2): champ de déplacement.

$\vec{B}$ (Vs/m^2): vecteur induction magnétique.

$\vec{J}$ (A/m^2): vecteur densité de courant.

ρ(A.s/m^3): densité volumique de charges libres.

Si l'on prend la divergence de (I.4) et qu'on fait ensuite usage de (I.1), on obtient l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0 \qquad (I.5)$$

Cette équation spécifie la conservation des charges électriques.

I.3.2.2 Potentiel vecteur et potentiel scalaire:

Comme $\operatorname{div}\vec{B} = 0$, alors il existe un vecteur $\vec{A}$ tel que : $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$ (I.6)

Ce vecteur $\vec{A}$ est le potentiel vecteur magnétique. Cette relation ne permet pas de définir entièrement le potentiel vecteur. Pour qu'il soit complètement défini, il faut encore spécifier sa divergence, ainsi que certaines conditions aux limites.

Si maintenant on introduit (I.6) dans l'équation (I.3) on obtient :

$$\operatorname{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \qquad (I.7)$$

Puisque le rotationnel d'un gradient est toujours nul, on peut maintenant définir un potentiel scalaire électrique V tel que :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} V \qquad (I.8)$$

Ce potentiel est défini à une constante près.

I.3.2.3 Relations constitutives:

Dans la majorité des matériaux, il existe une simple proportionnalité entre $\vec{D}$ et $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{H}$:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} \qquad (I.9)$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} \qquad (I.10)$$

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \qquad (I.11)$$

avec ε_0=8.854.10^{-12}As/V.m $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ Vs/A.m,

ε: permittivité absolue ε_r: permittivité relative,

μ : perméabilité absolue μ_r : perméabilité relative.

I.3.2.4 Equations d'onde :

En utilisant I.6 et I.8, l'équation I.4 s'écrit:

$$\frac{1}{\mu}\text{rot}\left(\text{rot}\,\vec{A}\right)=\vec{J}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\text{grad}\ V\right) \tag{I.12}$$

Sachant que: $\text{rot}\left(\text{rot}\,\vec{A}\right)=\text{grad}\left(\text{div}\,\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}$, l'équation I.12 devient:

$$\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial^2 t}=-\mu\,\vec{J}+\text{grad}\left(\text{div}\,\vec{A}+\mu\,\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t}\right) \tag{I.13}$$

D'autre part, en utilisant I.8 dans I.1, on obtient:

$$\text{div}\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\text{grad}\ V\right)=-\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{I.14}$$

En utilisant le fait que: $\text{div}(\text{grad}\,V)=\nabla^2 V$ et en retranchant $\mu\varepsilon\frac{\partial^2 V}{\partial^2 t}$ aux deux membres de l'équation I.14, on obtient:

$$\nabla^2 V-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 V}{\partial^2 t}=-\frac{\rho}{\varepsilon}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\text{div}\,\vec{A}+\mu\,\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t}\right) \tag{I.15}$$

On peut imposer une condition supplémentaire aux potentiels $\vec{A}$ et V qui est la condition de Lorentz :

$$\text{div}\vec{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t}=0 \tag{I.16}$$

Les équations I.13 et I.15 deviennent :

$$\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial^2 t}=-\mu\,\vec{J} \tag{I.17}$$

$$\nabla^2 V-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 V}{\partial^2 t}=-\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{I.18}$$

Ces deux équations sont les équations d'onde.

I.3.2.5 Résolution des équations d'ondes:

Cherchons des solutions particulières de I.17 et I.18 vérifiant les conditions aux limites à l'infini suivantes :

$$\lim_{r\to\infty} A = 0, \quad \lim_{r\to\infty} V = 0 \tag{I.19}$$

Dans le cas statique, l'équation I.18 se réduit à l'équation de Poisson :

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{I.20}$$

qui a pour solution particulière (voir annexe 1) :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{\rho}{r} dv \tag{I.21}$$

Cette solution peut s'interpréter de la façon suivante :

Le potentiel en un point d'observation P du à un élément de charge $\rho\, dv$ situé à une distance r de P (figure I.3) est $dV = \frac{\rho\, dv}{4\pi\varepsilon r}$, et le potentiel total en P s'obtient par sommation des contributions de tous les éléments de charge.

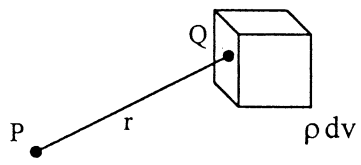


Figure I.3 : Potentiel en P dû à l'élément de charge $\rho\, dv$.

Supposons maintenant que ρ varie en fonction du temps. On sait que les effets électromagnétiques se propagent avec une vitesse finie u. Un temps $\frac{r}{u}$ est nécessaire pour que l'effet de l'élément de charge en Q soit observé en P. Par conséquent l'effet observé en P à l'instant t est dû à l'élément de charge : $\rho\left(Q, t - \frac{r}{u}\right) dv = [\rho] dv$ qui est donc la charge au point Q à l'instant $t - \frac{r}{u}$. Ici les crochets signifient qu'il s'agit de valeurs retardées.

En se basant sur cette interprétation physique, on peut prédire que :

$$V = V(P,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{[\rho]}{r} dv \qquad (I.22)$$

est la solution de l'équation I.18. De même la solution de I.17 est :

$$\vec{A} = \vec{A}(P,t) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{[\vec{J}]}{r} dv \qquad (I.23)$$

On note déjà que les potentiels donnés par I.22 et I.23 vérifient bien les conditions aux limites à l'infini I.19. Nous pouvons aussi vérifier que les expressions I.22 et I.23 sont bien des solutions des équations d'onde et qu'elles vérifient la condition de Lorentz. (voir annexe2).

Les solutions particulières I.22 et I.23 sont applicables dans le cas d'une antenne dans le vide $(\mu = \mu_0, \varepsilon = \varepsilon_0)$.

Pour étudier le rayonnement d'une antenne, deux approches différentes sont envisageables :

1ere approche :

On suppose une distribution donnée du courant le long de l'antenne, ensuite en appliquant I.22 et I.23, on peut déduire les potentiels en n'importe quel point de l'espace et ensuite les champs. Avec cette approche, on n'a pas à exprimer les conditions aux limites, par contre, on doit considérer qu'ils existent des forces mécaniques qui s'opposent aux forces électromagnétiques et qui permettent de maintenir la répartition de courant qu'on a supposée. [14]

2eme approche :

Dans un cas physique réel, on ne peut pas supposer une distribution donnée de courant. On doit appliquer les conditions aux limites pour trouver la répartition réelle du courant.

Dans ce qui suit, on va montrer comment on obtient les principaux paramètres d'une antenne (champ rayonné, puissance rayonné, impédance d'entrée...), par la première approche. La troisième partie de ce manuscrit sera consacrée à la deuxième approche.

I.3.3 Notion de dipôle électrique:

Un dipôle électrique ou dipôle de Hertz est un élément de courant filiforme avec deux charges opposées à ses extrémités (figure I.4).

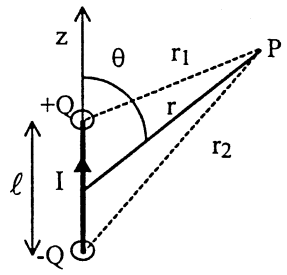


Figure I.4 : Dipôle de Hertz.

On suppose qu'on a un courant sinusoïdal $I = I_0\, e^{j\omega t}$ uniforme le long du filament.

En régime sinusoïdal, on a : $[\vec{J}] = [\vec{J}_0\, e^{j\omega t}] = \vec{J}_0\, e^{j\omega\left(t-\frac{r}{u}\right)} = \vec{J}\, e^{-j\beta r}$, par conséquent les équations I.22 et I.23 s'expriment d'une manière plus simple :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\rho\, e^{-j\beta r}}{r}\, dv \qquad \text{(I.24)}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \frac{\vec{J}\, e^{-j\beta r}}{r}\, dv \qquad \text{(I.25)}$$

Le dipôle est infiniment fin donc : $\int_v \vec{J}\, dv = I\ell\, \vec{e}_z$.

Grâce à l'équation I.25, on déduit le potentiel vecteur créé par le filament en un point P :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0\, I\ell}{4\pi}\frac{e^{-j\beta r}}{r}\vec{e}_z \qquad \text{(I.26)}$$

Les charges aux extrémités du filament ont pour valeur absolue : $Q = \frac{I}{j\omega}$, alors que la densité de charge est nulle le long du filament.

Grâce à l'équation I.24, on obtient le potentiel dû aux charges des deux extrémités du filament :

$$V = \frac{I}{j4\pi\varepsilon_0\,\omega}\left(\frac{e^{-j\beta r_1}}{r_1} - \frac{e^{-j\beta r_2}}{r_2}\right) \qquad \text{(I.27)}$$

En utilisant le fait que $\ell << r$ et $\beta\ell << 1$, on trouve (voir annexe.3) :

$$V = \frac{I\ell\cos\theta}{j4\pi\varepsilon_0\,\omega}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{j\beta}{r}\right)e^{-j\beta r} \qquad \text{(I.28)}$$

En utilisant les relations suivantes :

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}\,,\ \vec{E} = -j\omega\vec{A} - \mathrm{grad}\,V$$

On déduit les expressions de E et H en coordonnées sphériques (voir annexe.3) :

$$\vec{H} = \frac{I.\ell \sin\theta}{4\pi r} \cdot \left(\frac{1}{r} + j\beta\right) \cdot e^{-j\beta r} \cdot \vec{u}_\varphi \qquad (I.29)$$

$$E_r = \frac{Z_0.I.\ell \cos\theta}{2\pi.r} \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{j\beta r^2}\right) \cdot e^{-j\beta r} \qquad (I.30)$$

$$E_\theta = \frac{Z_0.I.\ell \sin\theta}{4\pi.r} \cdot \left(j\beta + \frac{1}{r} + \frac{1}{j\beta r^2}\right) \cdot e^{-j\beta r} \qquad (I.31)$$

Avec $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi$.

Le champ E se décompose en trois parties:

* Un terme en $1/r^3$: champ quasi-statique.
* Un terme en $1/r^2$: champ induit.
* Un terme en $1/r$: champ rayonné.

Par contre le champ H ne contient que les termes rayonné et induit.

* En champ proche ($r < \lambda/6$) on a :

$$E_r = \frac{Z_0.I.\ell.\cos\theta}{2\pi j\beta.r^3} \qquad E_\theta = \frac{Z_0.I.\ell.\sin\theta}{4\pi j\beta.r^3} \qquad (I.32)$$

$$H_\varphi = \frac{I.\ell \cdot \sin\theta}{4\pi.r^2} \qquad (I.33)$$

Dans le cas où $\theta = \pi/2$ on a : $$\left|\frac{E}{H}\right| = \frac{Z_0}{\beta r} \qquad (I.34)$$

*En champ lointain ($r >> \lambda/6$) on a :

$$E_\theta = j\beta \frac{Z_0.I.\ell \cdot \sin\theta}{4\pi r} \cdot e^{-j\beta r} \qquad (I.35)$$

$$H_\varphi = j\beta \frac{I.\ell \cdot \sin\theta}{4\pi r} \cdot e^{-j\beta r} \qquad (I.36)$$

On retrouve bien la relation: $E/H = Z_0$ (I.37)

Dans la Figure I.5, on représente la courbe qui donne les variations de l'impédance caractéristique en fonction du rapport $2\pi r/\lambda$.

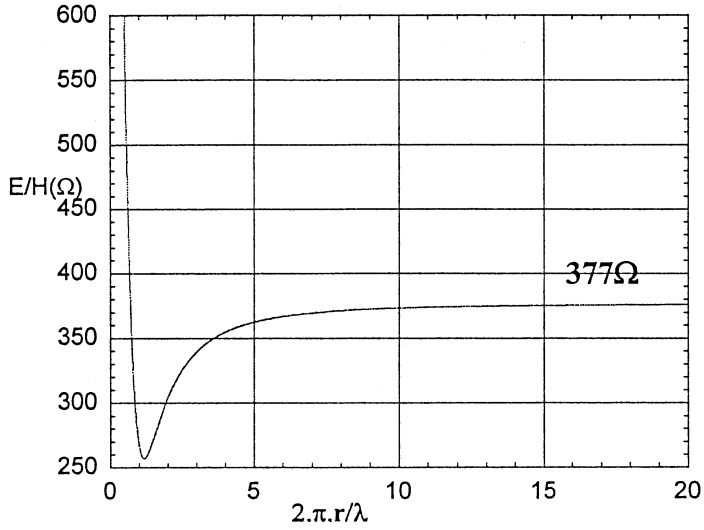


Figure I.5 : Impédance caractéristique.

Puissance rayonnée par le dipôle de Hertz :

Le vecteur de Poynting est définie par : $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{E} \times \vec{H}^*$ (I.38)

Ce qui donne dans notre cas:

$$S_r = \frac{Z_0 I^2 L^2}{8\lambda^2 r^2} \cdot \left[1 - j\left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^3\right] \cdot \sin^2\theta$$
$$S_\theta = \frac{Z_0 I^2 L^2}{8\lambda^2 r^2} \cdot 2j\left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right) \cdot \left[1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^2\right] \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \quad \text{(I.39)}$$

On obtient la puissance rayonnée en intégrant la partie réelle du vecteur de Poynting sur une sphère Σ dont le dipôle de Hertz est le centre. On obtient :

$$P_{rad} = \iint_{\Sigma} \mathrm{Re}(S_r) r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{Z_0 I_0^2 L^2}{8\lambda^2 r^2} \sin^2\theta \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$
$$= 80\pi^2 \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 I_{eff}^2 \quad \text{(I.40)}$$

Résistance de rayonnement :

Elle est définie par : $P_{rad} = R_{rad} \cdot I_{eff}^2$ (I.41)

Donc dans le cas du dipôle de Hertz : $R_{rad} = 80\pi^2 \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2$ (I.42)

Prenons l'exemple d'un fil de longueur 10cm. Sur la figure suivante, on a tracé l'évolution de la résistance de rayonnement en fonction de la fréquence.

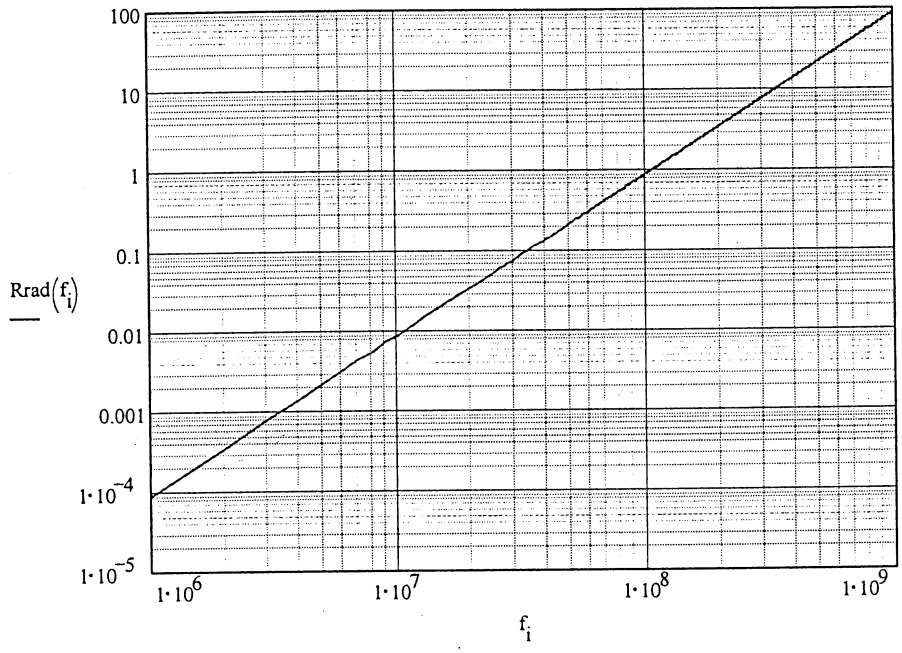


Figure I.6 : Evolution de R_{rad} en fonction de la fréquence pour L=10cm.

Dans le tableau suivant, on calcule à différentes fréquences le courant qui permet d'avoir une puissance rayonnée de 1W pour un fil de 10cm de longueur, ensuite pour ces courants, on calcule les champs E et H à 3m.

f(MHz)	1	10	50	100	200
$R_{rad}(\Omega)$	$8.77\ 10^{-5}$	0.009	0.219	0.877	3.51
Ieff(A)	107	10.7	2.14	1.07	0.534
E(dBμV/m)	175	134	127	127	127
H(dBμA/m)	100	81	76	76	76

Remarquons enfin à titre de comparaison que, pour une piste de longueur 10cm, de largeur 1cm et d'épaisseur 35μm, la résistance Joule est de l'ordre de 5mΩ, par conséquent pour une fréquence de quelques dizaines de MHz, l'effet de la résistance de rayonnement devient prépondérant devant la résistance Joule.

I.3.4 Rayonnement d'une antenne filaire isolée de longueur quelconque :

Pour une antenne filaire (figure I.7), on peut écrire : $\vec{J}\,dv = I(z,t)\,dz\,\vec{e}_z$, $\rho\,dv = q\,dz$ où $I(z,t) = I(z)\,e^{j\omega t}$ est le courant et q la densité linéique de charge.

L'équation de continuité relie le courant et la densité de charge :

$$\frac{\partial I}{\partial z} + j\omega q = 0 \qquad \text{(I.43)}$$

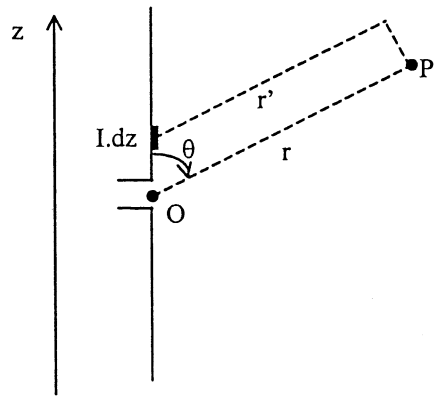


Figure I.7 : Antenne filaire.

Des résultats théoriques et expérimentaux ont montré qu'une distribution sinusoïdale de courant de la forme :

$$I(z) = I_0 \sin\left[\beta\left(\frac{\ell}{2} - |z|\right)\right] \qquad \text{(I.44)}$$

Constitue une bonne approximation de la distribution du courant dans une antenne de longueur ℓ. [13,14].

I.3.4.1 Champ lointain créé par une antenne filaire :

Le champ lointain créé par une antenne filaire peut être obtenu en considérant chaque élément de courant I.dz comme un dipôle de Hertz. Par conséquent, le champ lointain créé par l'élément I.dz peut être calculé grâce aux équations I.35 et I.36.

$$dH_\varphi = \frac{j\beta I\,dz \sin\theta}{4\pi r'} e^{-j\beta r'}, \quad dE_\theta = Z_0\,dH_\varphi.$$

Avec (voir figure I.7) : $r' \approx r - z\cos\theta$.

En champ lointain, on peut écrire : $\frac{1}{r'} \approx \frac{1}{r}$, $e^{-j\beta r'} = e^{-j\beta r}\,e^{j\beta z\cos\theta}$.

On trouve (voir annexe.4) :

$$H_\varphi = \frac{j\beta I_0 \ell_\theta \sin\theta}{4\pi r} e^{-j\beta r}, \qquad E_\theta = Z_0 H_\varphi \tag{I.45}$$

Où :

$$\ell_\theta = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{I(z)}{I_0} e^{j\beta z\cos\theta} dz \tag{I.46}$$

est la longueur effective de l'antenne. On trouve (voir annexe.3):

$$\ell_\theta = \frac{2}{\beta \sin^2\theta}\left[\cos\left(\frac{\beta\ell}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta\ell}{2}\right)\right] \tag{I.47}$$

En champ lointain, le vecteur de Poynting est réel et radial:

$$S_r = \frac{1}{2} E_\theta \cdot H_\varphi^* = \frac{1}{2} Z_0 \cdot |H_\varphi|^2 = \frac{15 I_0^2}{\pi r^2} \cdot \left[\frac{\cos\left(\frac{\beta\ell}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta\ell}{2}\right)}{\sin\theta}\right]^2 \tag{I.48}$$

La puissance rayonnée est obtenue en intégrant S_r sur une sphère de rayon r centrée sur l'antenne:

$$P_{rad} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} S_r(\theta,\varphi) r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{1}{2} R_{rad} I_0^2 \tag{I.49}$$

On déduit donc la résistance de rayonnement (voir annexe.4):

$$R_0 = 30[2(1+\cos\beta\ell)\mathrm{Cin}\beta\ell - \cos\beta\ell\,\mathrm{Cin}2\beta\ell - 2\sin\beta\ell\,\mathrm{Si}\beta\ell + \sin\beta\ell\,\mathrm{Si}\,2\beta\ell] \tag{I.50}$$

Avec :

$$\mathrm{Si}(u) = \int_0^u \frac{\sin x}{x} dx, \; \mathrm{Ci}(u) = -\int_u^\infty \frac{\cos x}{x} dx, \; \mathrm{Cin}(u) = \int_0^u \frac{1-\cos x}{x} dx,$$ Ces intégrales sont tablées.

Dans le cas de l'antenne demi-onde ($\ell = \frac{\lambda}{2}, \beta\ell = \pi$), on trouve :

En faisant le changement de variable $u = \cos\theta$ on obtient :

$$R_{rad} = 30\,\mathrm{Cin}\,2\pi = 73.1\,\Omega \tag{I.51}$$

Dans la figure I.8 on représente la variation de la résistance de rayonnement en fonction du rapport $x = \frac{\ell}{\lambda}$:

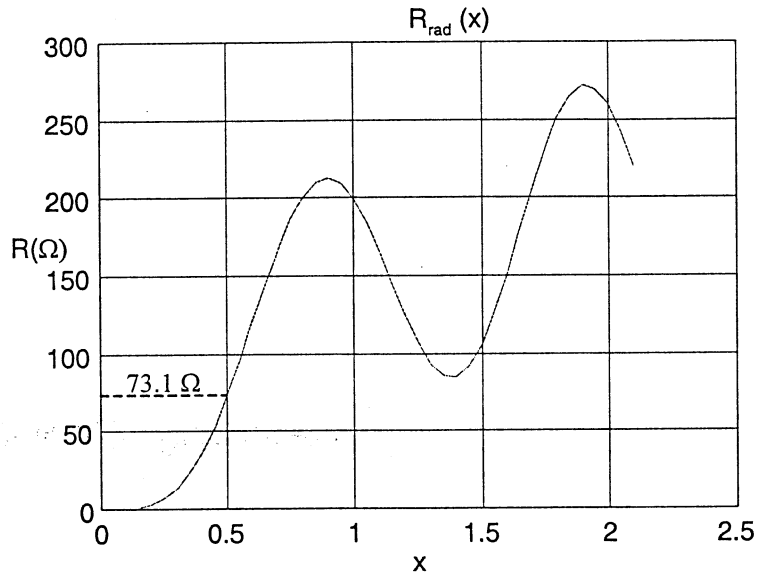


Figure I.8 : variation de la résistance de rayonnement en fonction de L/λ

I.3.4.2 *Bilan de puissance:*

On considère un champ électromagnétique dans une région conductrice de volume v_d entourée par une surface S, on suppose qu'il n'y a pas d'énergie qui rentre dans v_d à travers S.

Pour une antenne, une répartition sinusoïdale du courant constitue une bonne approximation de la répartition réelle. Avec cette approche, on évite les difficultés dues à l'application des conditions aux limites, mais on suppose que cette répartition existe sous la forme de filaments de courant maintenus ensemble par des forces mécaniques. On appelle v_g le volume de la région génératrice (région dans la quelle il y' a des forces mécaniques).

La force exercée sur un élément de charge ρ.dv se déplaçant à la vitesse u est donnée par la force de Lorentz:

$$d\vec{F} = \rho dv\left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}\right) \tag{I.52}$$

Dans la région génératrice cette force est compensée par une force mécanique $d\vec{F}_{mec} = -d\vec{F}$.

La puissance mécanique élémentaire vaut alors :

$$dP_{meca} = -d\vec{F} \cdot \vec{u} = -\rho dv\, \vec{E} \cdot \vec{u}. \tag{I.53}$$

La puissance mécanique totale est:

$$P_{meca} = \int_{v_g} -\left(\vec{E} \cdot \vec{J}\right) dv \tag{I.54}$$

En utilisant la relation:

$$\operatorname{div}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)=-\vec{E}\cdot\operatorname{rot}\vec{H}+\vec{H}\cdot\operatorname{rot}\vec{E}=-\vec{E}\cdot\left(\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)-\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{I.55}$$

On obtient:

$$-\vec{E}\cdot\vec{J}=\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\operatorname{div}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right) \tag{I.56}$$

En intégrant cette expression sur le volume $v=v_g+v_d$ et en appliquant le théorème de la divergence sur le dernier terme, on obtient:

$$P_{mec}=\frac{\partial}{\partial t}\left(W_m+W_e\right)+P_R+P_D \tag{I.57}$$

Les différents termes de cette équation sont définis comme suit:

- L'énergie magnétique et électrique instantanées: $W_{m_i}=\int_v \vec{H}\cdot\vec{B}\,dv$, $W_{e_i}=\int_v \vec{E}\cdot\vec{D}\,dv$.
- La puissance instantanée dissipée dans v_d: $P_{D_i}=\int_{v_d}\frac{J^2}{\sigma}dv$.
- La puissance instantanée qui sort de v: $P_{R_i}=\int_S \vec{E}\times\vec{H}\,ds$.

Dans le cas d'un régime sinusoïdal, on définit une puissance complexe:

$$P_{mec}=\frac{1}{2}\int_{v_g}\left(-\vec{E}\cdot\vec{J}^*\right)dv \tag{I.58}$$

L'équation I.56 s'écrit:

$$-\vec{E}\cdot\vec{J}^*=j\omega\left(\vec{B}\cdot\vec{H}^*-\vec{E}\cdot\vec{D}^*\right)+\operatorname{div}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right) \tag{I.59}$$

Et donc: $$P_{mec}=j\omega\left(W_m-W_e\right)+P_R+P_D \tag{I.60}$$

Avec l'énergie magnétique et électrique maximale emmagasinée dans v donnée par:

$$W_m=\frac{1}{2}\int_v \vec{B}\cdot\vec{H}^*\,dv,\ W_e=\frac{1}{2}\int_v \vec{E}\cdot\vec{D}^*\,dv \tag{I.61}$$

La puissance dissipée dans v_d est: $$P_D=\frac{1}{2}\int_{v_d}\frac{|J|^2}{\sigma}dv \tag{I.62}$$

La puissance sortante de S: $$P_R=\frac{1}{2}\int_S\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)\cdot\vec{n}\,ds \tag{I.63}$$

Dans le cas physique, l'antenne est constituée de conducteurs et elle est souvent alimentée par de l'énergie électrique à travers une ligne de transmission (figure I.9).

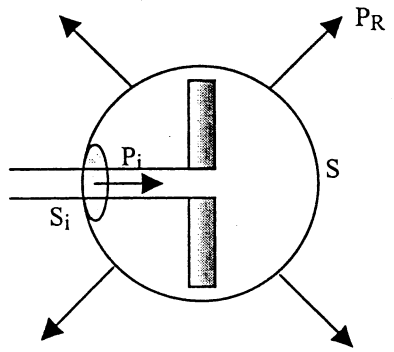


Figure I.9: Antenne excitée par une ligne de transmission.

Si les conducteurs sont parfaits, la condition au limite impose que $\vec{E}\cdot\vec{J}_S^* = 0$, donc il n'y a plus de sources mécaniques. On suppose que l'énergie électrique arrive par la ligne de transmission à travers une partie S_i de la surface S. Donc:

$$P_i = \frac{1}{2}\int_{S_i}\left(\vec{E}\cdot\vec{H}^*\right)\left(-\vec{n}\,dS\right) = j\omega\left(W_m - W_e\right) + P_R \qquad (I.64)$$

Avec:

$$P_R = \frac{1}{2}\int_{S-S_i}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)\cdot\vec{n}\,ds \qquad (I.65)$$

Si la distribution de courant qu'on a choisit est presque identique à la distribution réelle obtenue par l'application des conditions aux limites, on peut escompter que les expressions pour W_m, W_e et P_R dans les équations I.60 et I.64 sont presque identiques. Par conséquent:

$$P_i \approx P_{mec} \qquad (I.66)$$

I.3.4.3 Impédance propre d'une antenne filaire:

La majorité des antennes de transmission sont excitées à travers des lignes de transmission. Supposons que P_i est la puissance complexe fournie à l'antenne à travers la ligne de transmission. On a:

$$P_i = \frac{1}{2}Z_i\left|I_i\right|^2 = \frac{1}{2}Z_{11}\left|I_0\right|^2 \qquad (I.67)$$

Où Zi est l'impédance d'entrée de l'antenne vue par la ligne de transmission, $|I_i|$ est l'amplitude du courant d'entrée, $|I_0|$ est le courant maximal de l'antenne et:

$$Z_{11} = R_{11} + jX_{11} \overset{\text{def}}{=} \frac{2P_i}{|I_0|^2} \tag{I.68}$$

est définie comme l'impédance propre de l'antenne. De l'équation I.64 on déduit que:

$$X_{11} = \frac{2\omega(W_m - W_e)}{|I_0|^2}, \qquad R_{11} = \frac{2P_R}{|I_0|^2} \tag{I.69}$$

Si on connaît les répartitions de courant et de charge, on peut déterminer les champs à partir des potentiels donnés par les équations I.37 et I.38. Il est alors possible de calculer P_R, W_m et W_e grâce aux équations I.61 et I.62. De ces quantités, on peut calculer la puissance complexe P_i et ensuite Z_{11}. Par contre, l'évaluation des intégrales volumiques donnant W_m et W_e est une tâche difficile même si on connaît la répartition du courant.

Dans le cas de l'antenne, on sait qu'une distribution sinusoïdale est une bonne approximation. On suppose donc l'existence de forces mécaniques dont la puissance est donnée par l'équation I.58. En utilisant l'équation I.66, on peut déduire l'impédance propre par:

$$Z_{11} \approx \frac{2P_{mec}}{|I_0|^2} = -\frac{1}{|I_0|^2}\int_{v_g} \vec{E}\cdot\vec{J}^*\,dv \tag{I.70}$$

Appliquons la formule I.70 à l'antenne de la figure I.10.

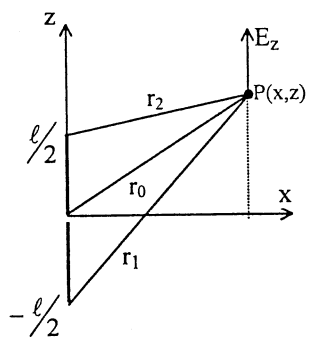


Figure I.10: Champ électrique créé par une antenne symétrique.

La répartition de courant est donnée par : $I(z) = I_0 \sin\left[\beta\left(\frac{\ell}{2} - |z|\right)\right]$.

Le champ électrique créé par l'antenne en un point P(x,z) est donné par (voir annexe.5):

$$E_z(x,z) = 30jI_0\left[\cos\frac{\beta\ell}{2}\,\frac{e^{-j\beta r_0}}{r_0} - \frac{e^{-j\beta r_1}}{r_1} - \frac{e^{-j\beta r_2}}{r_2}\right] \tag{I.71}$$

Avec: $r_0 = \sqrt{x^2+z^2}, r_1 = \sqrt{x^2 + \left(z+\frac{\ell}{2}\right)^2}, r_2 = \sqrt{x^2 + \left(z-\frac{\ell}{2}\right)^2}$.

En faisant x=0 dans I.71, on trouve la composante tangentielle du champ électrique le long de l'antenne. On constate que $E_z \neq 0$ le long de l'antenne. Donc cette expression de E_z ne vérifie pas la condition au limite $E_z = 0$ pour une antenne parfaitement conductrice. Par contre, pour chaque filament de courant l'effet de E_z est compensé par uen répartition de forces mécaniques.

La puissance mécanique totale complexe est:

$$P_{mec} = \frac{1}{2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} -E_z \cdot I^* \, dz = \int_{0}^{\ell/2} -E_z \cdot I^* \, dz \qquad (I.72)$$

En remplaçant I et E_z par leurs expressions, on constate que X_{11} diverge et que R_{11} a la même expression que celle donnée par I.50 (voir annexe.5).

Pour évaluer X_{11}, on doit tenir compte du rayon de l'antenne, ceci nous amène à introduire la notion d'impédance mutuelle entre deux antennes.

I.3.4.4 Impédance mutuelle entre deux antennes:

Considérons le cas de deux antennes (figure I.11), le couplage entre les deux antennes s'exprime grâce aux deux équations suivantes:

$$V_1 = Z_{11} I_{10} + Z_{12} I_{20} \qquad V_2 = Z_{21} I_{10} + Z_{22} I_{20} \qquad (I.73)$$

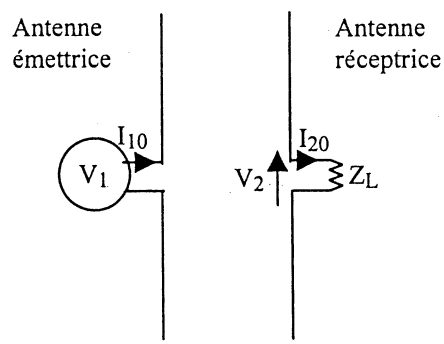


Figure I.11: Couplage entre deux antennes.

A partir des équations I.74, on peut déduire le schéma équivalent suivant:

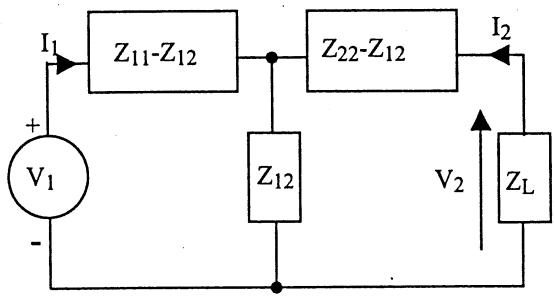


Figure I.12: Schéma équivalent de deux antennes couplées.

Z_{11} et Z_{22} sont les impédances propres, I_{k0} est le courant maximum de l'antenne k (k=1,2). Les impédances mutuelles Z_{12} et Z_{21} sont égales.

La puissance totale complexe s'exprime de la façon suivante:

$$P_i = \frac{1}{2} V_1 I_{10}^* + \frac{1}{2} V_2 I_{20}^* = \frac{1}{2} Z_{11} |I_{10}|^2 + \frac{1}{2} Z_{12} \left(I_{10}^* I_{20} + I_{10} I_{20}^*\right) + \frac{1}{2} Z_{22} |I_{20}|^2 \quad (I.74)$$

Comme dans le paragraphe précédant, on suppose une répartition sinusoïdale du courant sur les deux antennes. Ils existent donc des forces mécaniques qui permettent de maintenir la répartition du courant, la puissance mécanique totale est donnée par:

$$P_{mec} = \frac{1}{2} \int_{v_{g1}} \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right) \cdot \left(-\vec{J}_1^*\right) dv + \frac{1}{2} \int_{v_{g2}} \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right) \cdot \left(-\vec{J}_2^*\right) dv \quad (I.75)$$

En utilisant la relation I.66 et en identifiant les équations I.74 et I.75, on obtient:

$$Z_{12} \left(I_{10}^* I_{20} + I_{10} I_{20}^*\right) \approx \int_{v_{g1}} -\vec{E}_2 \cdot \vec{J}_1^* \, dv + \int_{v_{g2}} -\vec{E}_1 \cdot \vec{J}_2^* \, dv \quad (I.76)$$

La relation de réciprocité permet de déduire que: $\int_{v_{g1}} \vec{E}_2 \cdot \vec{J}_1 \, dv = \int_{v_{g2}} \vec{E}_1 \cdot \vec{J}_2 \, dv$ (I.77)

Si de plus les courants J_1 et J_2 sont réels, on obtient:

$$Z_{12} \approx \int_{v_{g2}} -\left(\frac{\vec{E}_1}{I_{10}}\right) \cdot \left(\frac{\vec{J}_2}{I_{20}}\right) dv \quad (I.78)$$

La distribution de courant pour les deux antennes est donnée par l'équation I.44, en utilisant la relation I.71, on obtient (voir annexe.5):

$$\frac{R_{12}}{30} = \sin\beta\ell\left(Six_2 - Six_1 - 2Siy_2 + 2Siy_1\right) - \cos\beta\ell\left(2Ciy_2 + 2Ciy_1 - 2Cix_0 - Cix_2 - Cix_1\right) - 2\left(Ciy_2 + Ciy_1 - 2Cix_0\right) \quad (I.79)$$

$$\frac{X_{12}}{30} = -\sin\beta\ell\left(2Ciy_2 - 2Ciy_1 + Cix_1 - Cix_2\right) - \cos\beta\ell\left(Six_2 + Six_1 + 2Six_0 - 2Siy_1 - 2Siy_2\right) + 2\left(Siy_2 + Siy_1 - 2Six_0\right) \tag{I.80}$$

avec:

$$x_0 = \beta d;\ x_1 = \beta\left(\sqrt{d^2 + \ell^2} - \ell\right);\ x_2 = \beta\left(\sqrt{d^2 + \ell^2} + \ell\right);$$

$$y_1 = \beta\left(\sqrt{d^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} - \frac{\ell}{2}\right);\ y_2 = \beta\left(\sqrt{d^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} + \frac{\ell}{2}\right)$$

Impédance propre d'une antenne cylindrique:

Afin d'obtenir l'impédance propre d'une antenne cylindrique de rayon a on applique les formules (I.79) et (I.80) avec d=a . Dans la figure I.13, on représente la variation de la partie imaginaire de l'impédance en fonction du rapport x = L/λ pour différents rayons.

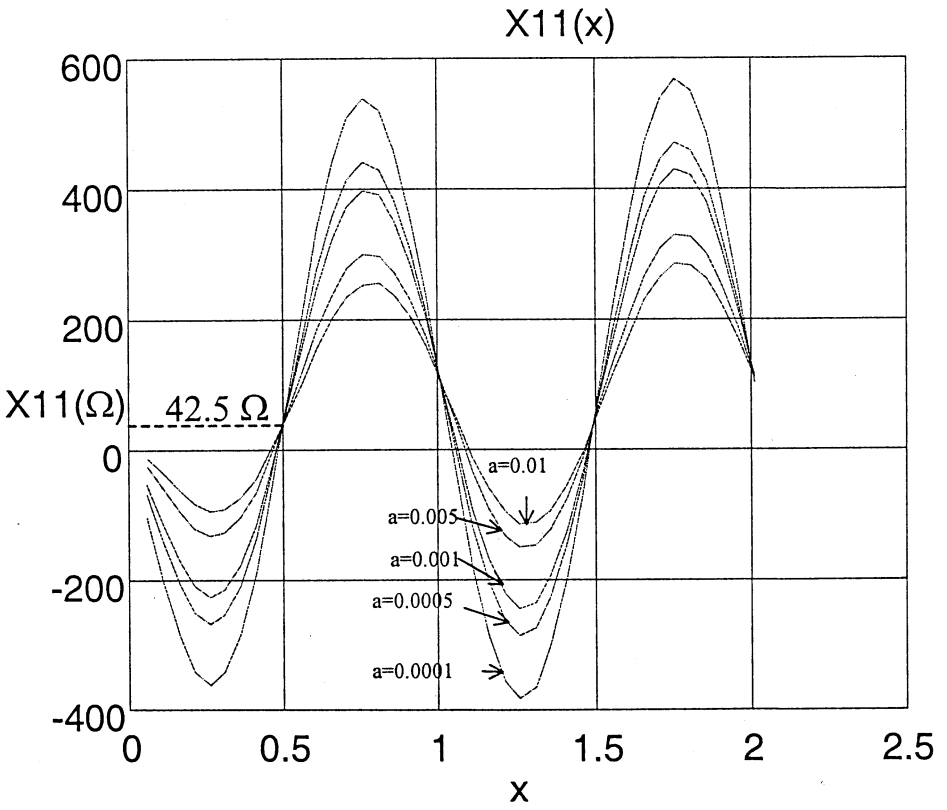


Figure I.13: Réactance de rayonnement d'une antenne de longueur L=x λ.

I.4 Conclusion:

Avec l'approche développée précédemment, on suppose une distribution donnée du courant, à partir de laquelle on peut déduire les champs rayonnés. Ceci est possible dans le cas de l'antenne où on sait qu'une distribution sinusoïdale du courant est une bonne approximation de la distribution réelle; ou bien dans le cas d'un conducteur dont les dimensions sont négligeables devant la longueur d'onde de sorte qu'on peut considérer que le courant est constant le long du conducteur. C'est ce dernier cas qu'on va développer dans le prochain chapitre.

Mais, dans le cas général, on ne connaît pas la distribution du courant, par conséquent, dans ce cas, la résolution des conditions aux limites devient indispensable pour déterminer la distribution réelle du courant. C'est cette approche qui va être adopter dans le troisième chapitre.

PARTIE II

CALCUL DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE AVEC L'HYPOTHESE DU COURANT CONNU

II.1 Introduction:

Dans un circuit d'électronique de puissance, les principales sources de rayonnement électromagnétique sont les fils de connexion et les pistes de circuits imprimés. En effet, la variation de la tension et du courant dans le circuit fait que les fils de connexion et les pistes de circuits imprimés se comportent comme des antennes rayonnantes en champ électrique et magnétique.

Dans ce chapitre, nous présentons une méthode de calcul analytique du champ électromagnétique rayonné par les circuits de l'électronique de puissance. Le circuit en question peut être décomposé topologiquement en différentes branches et mailles élémentaires.

Nous nous proposons d'étudier le champ électromagnétique rayonné par une maille et une branche élémentaire.

Le champ magnétique et le champ électrique s'expriment en fonction du potentiel vecteur magnétique.

Ce dernier est directement lié au courant. Dans ce chapitre on va partir du courant mesuré pour calculer le potentiel vecteur et ensuite déduire les champs.

II.2 Principe du calcul:

On a vu que les champs E et H s'expriment en fonction des potentiels A et Φ de la manière suivante:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{A} \tag{II.1}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \phi \tag{II.2}$$

De plus les potentiel A et Φ sont reliés par la jauge de Lorentz:

$$\operatorname{div} \vec{A} + \mu_0 \, \varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{II.3}$$

D'autre part l'équation d'onde en A s'exprime comme suit:

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \, \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \, \vec{J} \tag{II.4}$$

Dans le cas général, cette équation admet une solution de la forme:

$$\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{J}(r_1) \frac{e^{-j\beta R}}{R} \, dV \tag{II.5}$$

où V est le volume dans lequel circule le courant $\vec{J}$, $R = |r - r_1|$ est la distance entre le point d'observation M(r) et le point M1(r1) où circule le courant (figure II.1), $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ est le nombre d'onde, $\lambda = \frac{c}{f}$ est la longueur d'onde.

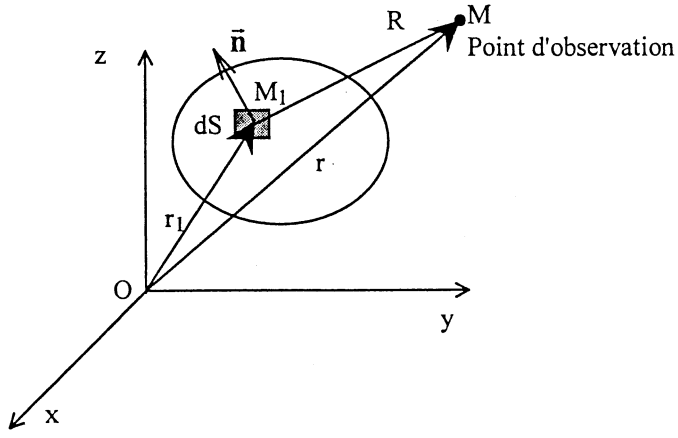


Figure II.1: Disposition du calcul.

Le terme $e^{-j\beta R}$ traduit l'effet de propagation. Lorsque $R << \lambda$ ce terme est pris égal à 1, on parle alors de champ proche et la formule II.5 se réduit à:

$$\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(r_1)}{R} dV \qquad \text{(II.6)}$$

De plus, si l'épaisseur du conducteur est petite devant R, on peut le considérer comme filiforme ainsi l'équation II.6 devient:

$$\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{i.d\vec{l}}{R} \qquad \text{(II.7)}$$

De plus, si la longueur du conducteur est négligeable devant la longueur d'onde, on peut considérer que le courant est constant le long du conducteur, ainsi l'équation II.7 devient:

$$\vec{A}(r) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{l}}{R} \qquad \text{(II.8)}$$

Dans ce chapitre, on se limite au cas où $L<<\lambda$, c'est à dire que le courant est constant sur un conducteur.

Dans le cas contraire, une résolution complète des équations de Maxwell est nécessaire pour déterminer la répartition du courant le long du conducteur.

Les différentes situations sont résumées par le tableau suivant:

R<<λ (champ proche)		R~λ (champ non proche)
cas filiforme :e<<R	e~R	$\vec{A}(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \vec{J}(r_1)\frac{e^{-j\beta R}}{R}\,dV$
$L\sim\lambda: \vec{A}(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_C \frac{i.d\vec{l}}{R}$	$\vec{A}(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{J}(r_1)}{R}\,dV$	
$L<<\lambda: \vec{A}(r)=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_C \frac{d\vec{l}}{R}$		

II.3 Champ proche:

II.3.1 Introduction:

Dans ce paragraphe, la méthode de calcul du champ proche créé par un convertisseur quelconque est exposée. Cette méthode consiste à décomposer le circuit en branches et boucles élémentaires dont on sait calculer facilement le champ rayonné.

Comme première étape, on partira avec l'hypothèse que le circuit est filiforme, mais il est évident que lorsqu'on veut calculer le champ en un point très proche du circuit, la connaissance de la répartition du courant sur l'épaisseur des pistes risque d'être indispensable.

II.3.2 Cas d'un circuit filiforme:

II.3.2.1 Calcul du champ crée par une boucle rectangulaire :

Considérons tout d'abord la boucle décrite par la figure II.2. Elle est parcourue par un courant i(t) et crée un champ électromagnétique en tout point de l'espace. Nous allons déterminer ces champs dans le cadre des hypothèses "circuit filiforme".

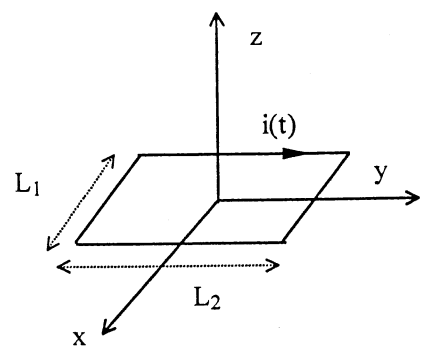


Figure II.2: Boucle rectangulaire parcourue par un courant i(t).

Le potentiel vecteur magnétique en un point P(x,y,z) s'exprime par :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_C \frac{i.d\vec{l}}{r} = A_x.\vec{e}_x + A_y.\vec{e}_y \qquad \text{(II.9)}$$

avec:

$$A_x = \frac{\mu_0.i}{4\pi}\left[\int_{-L_1/2}^{L_1/2} \frac{dx_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+\left(y-\frac{L_2}{2}\right)^2+z^2}} + \int_{L_1/2}^{-L_1/2} \frac{dx_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+\left(y+\frac{L_2}{2}\right)^2+z^2}}\right] \qquad \text{(II.10)}$$

$$A_y = \frac{\mu_0.\ i}{4\pi}\left[\int_{-L_2/2}^{L_2/2} \frac{dy_1}{\sqrt{\left(x+\frac{L_1}{2}\right)^2+(y-y_1)^2+z^2}} + \int_{L_2/2}^{-L_2/2} \frac{dy_1}{\sqrt{\left(x-\frac{L_1}{2}\right)^2+(y-y_1)^2+z^2}}\right] \qquad \text{(II.11)}$$

d'où:

$$A_x = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\ \mathrm{Log}\left\{\frac{a+F_1}{-b+F_2}\times\frac{-b+F_4}{a+F_3}\right\} \qquad \text{(II.12)}$$

$$A_y = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\ \mathrm{Log}\left\{\frac{c+F_2}{-d+F_4}\times\frac{-d+F_3}{c+F_1}\right\} \qquad \text{(II.13)}$$

avec:

$$a = \frac{L_1}{2} - x,\quad b = \frac{L_1}{2} + x,\quad c = \frac{L_2}{2} - y,\quad d = \frac{L_2}{2} + y$$

$$F_1 = \sqrt{\left(\frac{L_1}{2}-x\right)^2+\left(y-\frac{L_2}{2}\right)^2+z^2},\quad F_2 = \sqrt{\left(\frac{L_1}{2}+x\right)^2+\left(y-\frac{L_2}{2}\right)^2+z^2}$$

$$F_3 = \sqrt{\left(\frac{L_1}{2}-x\right)^2+\left(y+\frac{L_2}{2}\right)^2+z^2},\quad F_4 = \sqrt{\left(\frac{L_1}{2}+x\right)^2+\left(y+\frac{L_2}{2}\right)^2+z^2}$$

La jauge de Lorentz permet de déduire le potentiel électrique V :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{\mu\varepsilon}\left[\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}\right] \qquad \text{(II.14)}$$

Pour des raisons de symétrie on trouve $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$, donc on peut considérer que le potentiel électrique est nul en tout point de l'espace. Les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ se calculent en appliquant respectivement :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t},\ \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} \qquad \text{(II.15)}$$

On obtient alors :

$$E_x = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dI}{dt}\,\mathrm{Log}\left\{\frac{a+F_1}{-b+F_2}\times\frac{-b+F_4}{a+F_3}\right\} \tag{II.16}$$

$$E_y = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dI}{dt}\,\mathrm{Log}\left\{\frac{c+F_2}{-d+F_4}\times\frac{-d+F_3}{c+F_1}\right\} \tag{II.17}$$

$$H_x = -\frac{I.z}{4\pi}\left\{\frac{1}{(c+F_2)\cdot F_2}+\frac{1}{(-d+F_3)\cdot F_3}-\frac{1.}{(-d+F_4)\cdot F_4}-\frac{1.}{(c+F_1)\cdot F_1}\right\} \tag{II.18}$$

$$Hy = \frac{I.z}{4\pi}\left\{\frac{1.}{(a+F_1)\cdot F_1}+\frac{1}{(-b+F_4)\cdot F_4}-\frac{1.}{(-b+F_2)\cdot F_2}-\frac{1.}{(a+F_3)\cdot F_3}\right\} \tag{II.19}$$

$$H_z = \frac{I}{4\pi}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{b}{(c+F_2)\cdot F_2}-\dfrac{a}{(-d+F_3)\cdot F_3}-\dfrac{b}{(-d+F_4)\cdot F_4}+\dfrac{a}{(c+F_1)\cdot F_1}\\ +\dfrac{c}{(a+F_1)\cdot F_1}-\dfrac{d}{(-b+F_4)\cdot F_4}-\dfrac{c}{(-b+F_2)\cdot F_2}+\dfrac{d}{(a+F_3)\cdot F_3}\end{array}\right\} \tag{II.20}$$

On constate que H est proportionnel au courant alors que E est proportionnel à la dérivée du courant.

Carte champ:

On considère la boucle de la figure II.2 avec L_1=10cm et L_2=5cm parcourue par un courant sinusoïdal de fréquence 100MHz et d'amplitude 1A. On se propose de calculer le champ dans un plan parallèle à la boucle et situé à une hauteur h (figure II.3).

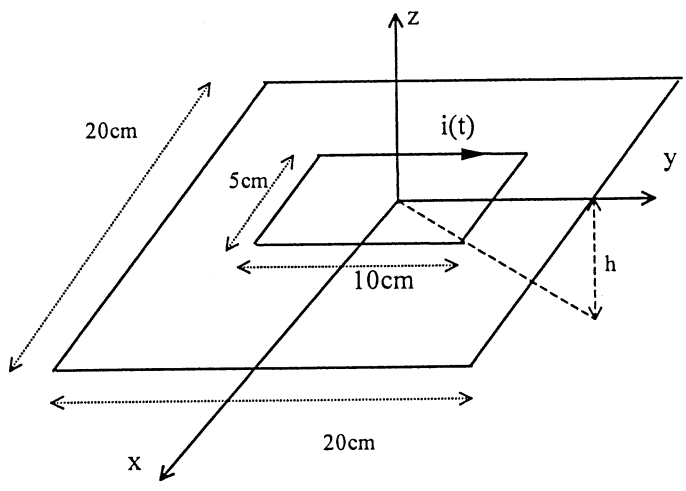
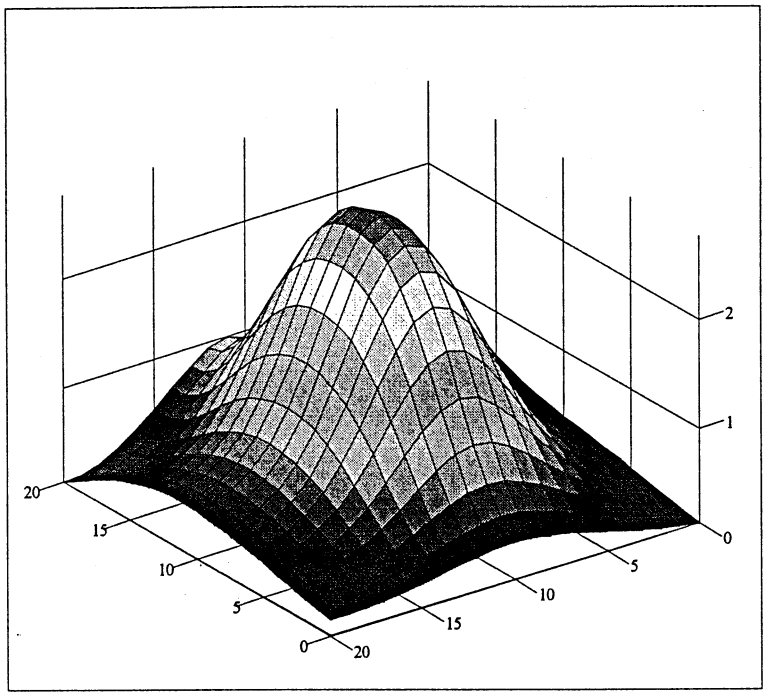


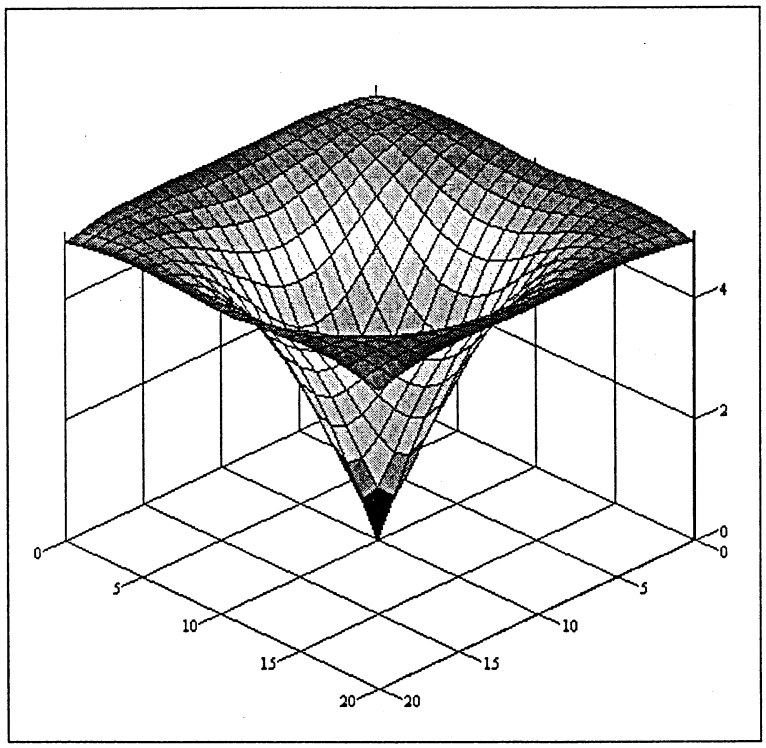
Figure II.3: Position du plan où le champ est calculé.



H1

Figure II.4: Champ H à 5cm du conducteur.

On voit bien que le champ H est maximum sur l'axe de la boucle.



E2

Figure II.5: Champ E à 15cm de la boucle.

On constate que le champ E est nul sur l'axe de la boucle.

II.3.2.2 Calcul du champ crée par une branche :

Pour pouvoir calculer le champ électromagnétique crée par un circuit de géométrie quelconque il faut le subdiviser en branches. On se propose donc de calculer le champ électromagnétique créé par une branche quelconque. On ne considère que des géométries dont les branches sont dirigées suivant les axes principaux ((ox), (oy), (oz)), on distingue ainsi trois cas :

1er cas : branche portée par (ox) dont les cordonnées des extrémités sont respectivement (xd,y1,z1) et (xf,y1,z1):

Le potentiel vecteur magnétique crée par cette branche en un point M(x,y,z) est donnée par:

$$A_x(x,y,z,xd,xf,y1,z1) = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_{xd}^{xf}\frac{dX}{\sqrt{(x-X)^2+(y-y1)^2+(z-z1)^2}} \qquad \text{(II.21)}$$

On trouve alors:

$$A_x(x,y,z,xd,xf,y1,z1) = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\mathrm{Ln}\left(\frac{xf-x+\sqrt{(xf-x)^2+(y-y1)^2+(z-z1)^2}}{xd-x+\sqrt{(xd-x)^2+(y-y1)^2+(z-z1)^2}}\right) \qquad \text{(II.22)}$$

En utilisant $H=1/\mu_0$ rot A on constate que cette branche crée un champ magnétique ayant deux composantes une selon (oy) et l'autre selon (oz) qui sont données successivement par :

$$Hx_y = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{i(z-z1)}{4\pi}\left[\frac{1}{\left[X-x+\sqrt{(X-x)^2+(y-y1)^2+(z-z1)^2}\right]\sqrt{(X-x)^2+(y-y1)^2+(z-z1)^2}}\right]_{X=xd}^{X=xf} \qquad \text{(II.23)}$$

$$Hx_z = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{-i(y-y1)}{4\pi}\left[\frac{1}{\left[X-x+\sqrt{(X-x)^2+(y-y1)^2+(z-z1)^2}\right]\sqrt{(X-x)^2+(y-y1)^2+(z-z1)^2}}\right]_{X=xd}^{X=xf} \qquad \text{(II.24)}$$

2^{eme}cas: branche portée par (oy) dont les cordonnées des extrémités sont respectivement (x1,yd,z1)et (x1,yf,z1):

Le potentiel vecteur magnétique crée par cette branche en un point M(x,y,z) est donnée par:

$$A_y(x,y,z,x1,yd,yf,z1)=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\mathrm{Ln}\left(\frac{yf-y+\sqrt{(x-x1)^2+(yf-y)^2+(z-z1)^2}}{yd-y+\sqrt{(x-x1)^2+(yd-y)^2+(z-z1)^2}}\right) \qquad (II.25)$$

Cette branche crée un champ magnétique ayant deux composantes une selon (ox) et l'autre selon (oz) qui sont données successivement par :

$$Hy_x=-\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial A_y}{\partial z}=-\frac{i(z-z1)}{4\pi}\left[\frac{1}{\left[Y-y+\sqrt{(x-x1)^2+(Y-y)^2+(z-z1)^2}\right]\sqrt{(x-x1)^2+(Y-y)^2+(z-z1)^2}}\right]_{Y=yd}^{Y=yf} \qquad (II.26)$$

$$Hy_z=\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial A_y}{\partial x}=\frac{i(x-x1)}{4\pi}\left[\frac{1}{\left[Y-y+\sqrt{(x-x1)^2+(Y-y)^2+(z-z1)^2}\right]\sqrt{(x-x1)^2+(Y-y)^2+(z-z1)^2}}\right]_{Y=yd}^{Y=yf} \qquad (II.27)$$

3^{eme}cas: branche portée par (oz) dont les cordonnées des extrémités sont respectivement (x1,y1,zd) et (x1,y1,zf):

Le potentiel vecteur magnétique crée par cette branche en un point M(x,y,z) est donnée par:

$$A_z(x,y,z,x1,y1,zd,zf)=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\mathrm{Ln}\left(\frac{zf-z+\sqrt{(x-x1)^2+(y-y1)^2+(z-zf)^2}}{zd-z+\sqrt{(x-x1)^2+(y-y1)^2+(z-zd)^2}}\right) \qquad (II.28)$$

Cette branche crée un champ magnétique ayant deux composantes une selon (ox) et l'autre selon (oy) qui sont données successivement par :

$$Hz_x=\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial A_z}{\partial y}=\frac{i(y-y1)}{4\pi}\left[\frac{1}{\left[Z-z+\sqrt{(x-x1)^2+(y-y1)^2+(z-Z)^2}\right]\sqrt{(x-x1)^2+(y-y1)^2+(z-Z)^2}}\right]_{Z=zd}^{Z=zf} \qquad (II.29)$$

$$Hz_y=-\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial A_z}{\partial x}=-\frac{i(x-x1)}{4\pi}\left[\frac{1}{\left[Z-z+\sqrt{(x-x1)^2+(y-y1)^2+(z-Z)^2}\right]\sqrt{(x-x1)^2+(y-y1)^2+(z-Z)^2}}\right]_{Z=zd}^{Z=zf} \qquad (II.30)$$

Pour calculer le champ magnétique crée par un circuit à géométrie complexe il faut le subdiviser en branches ensuite on écrit :

$H_x=\sum Hy_x+\sum Hz_x$ (on somme les contributions des branches portées par (oy) et (oz)), de même : $H_y=\sum Hx_y+\sum Hz_y$ et $H_z=\sum Hx_z+\sum Hy_z$

II.3.2.3 Effet d'un plan de masse :

En électronique de puissance un radiateur en aluminium (bon conducteur) est souvent placé sous les composants à des fins de refroidissement. La présence de ce plan conducteur sous les pistes de circuit imprimé est loin d'être insignifiante si celui-ci est proche. Des mesures antérieures ont montré qu'une technologie «circuit imprimé» où le plan de masse est situé à 1.5mm réduit considérablement les inductances si le radiateur servant à refroidir les composants est également placé sous les pistes.

Cet effet s'explique facilement par la méthode des images. Si le plan est considéré comme parfait, le problème d'un conducteur situé parallèlement à une distance d d'un plan de masse peut être remplacé par celui de deux conducteurs, distants de 2d, dont les courants sont opposés (figure II.6). Donc dans cette configuration, on doit retrancher le champ créé par l'image.

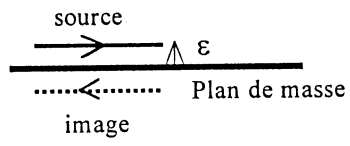


Figure II.6 : Conducteur parallèle à un plan de masse.

Par contre si le conducteur est perpendiculaire au plan de masse le courant dans l'image a le même sens que le courant dans la source (figure II.7). Donc les champs se rajoutent.

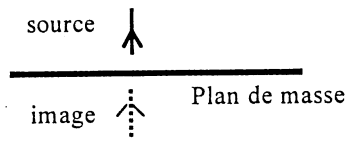


Figure II.7 : Conducteur perpendiculaire à un plan de masse.

II.3.3 Limites de l'approche filiforme:

Lorsque la distance entre le circuit et le point d'observation devient comparable à l'épaisseur des pistes, l'approche filiforme ne permet plus un calcul précis du champ rayonné. Dans ce cas, la connaissance de la distribution fine du courant est nécessaire.

Cependant, il est possible de se ramener au précédent, à savoir "approche filiforme" moyennant une subdivision du conducteur, comme nous allons le voir.

II.3.3.1. Principe de calcul dans le cas d'une distribution non uniforme de courant:

Considérons une piste de longueur L et d'épaisseur w parcourue par un courant total i. Il est toujours possible de la subdiviser en pistes élémentaires considérées comme filiformes et dont chacune est parcourue par un courant i_k.

Il est d'ailleurs intéressant de noter que la majorité des méthodes numériques font naturellement introduire cette subdivision. Ainsi la méthode PEEC par exemple (cf partie III) repose sur une telle subdivision pour déterminer la distribution effective de courant. Le calcul de champ est donc grandement facilité dans ce cas.

II.3.3.2 Choix de la subdivision:

La distribution du courant est modifiée lorsque la fréquence varie. Ainsi la densité de courant dans la section d'un conducteur passe d'une valeur constante à un profil en cuvette lorsque la fréquence varie du continu à quelques MHz. Il est donc intéressant de pouvoir adapter le maillage aux conditions de fonctionnement de la structure étudiée.

Selon la valeur de la fréquence il faudra subdiviser suffisamment de sorte que l'effet de peau soit correctement prise en compte.

Ainsi pour des fréquences peu élevées une subdivision uniforme de la section du conducteur semble appropriée. Cette subdivision consiste à générer des mailles de section identique (figure II.8-a). Cependant, avec cette méthode, le nombre d'éléments devient vite grand lorsque la fréquence augmente. On adoptera alors une subdivision géométrique qui permettra de concentrer les subdivisions sur les bords du conducteur et ainsi de mailler plus finement l'extérieur du conducteur (figure II.8-b). Le nombre de subdivisions ne sera pas augmenté alors que les renseignements concernant les caractéristiques électriques des connexions seront plus pertinents.

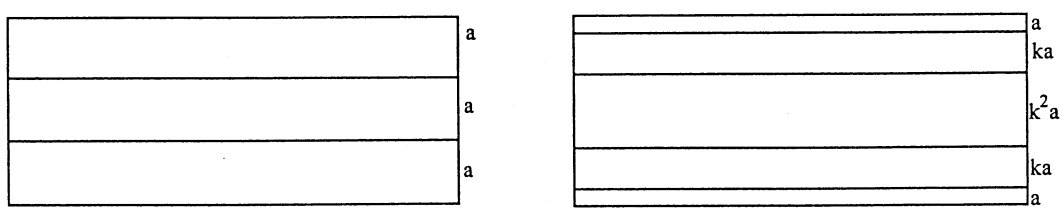


Figure II.8 : Exemple de subdivisions : a) uniforme, b) géométrique.

Exemple:

Considérons une piste de circuit imprimé de longueur 10cm et de largeur 1mm parcouru par un courant sinusoïdal d'amplitude 1A. Pour des fréquences peu élevées une subdivision uniforme suffit (figure II.9).

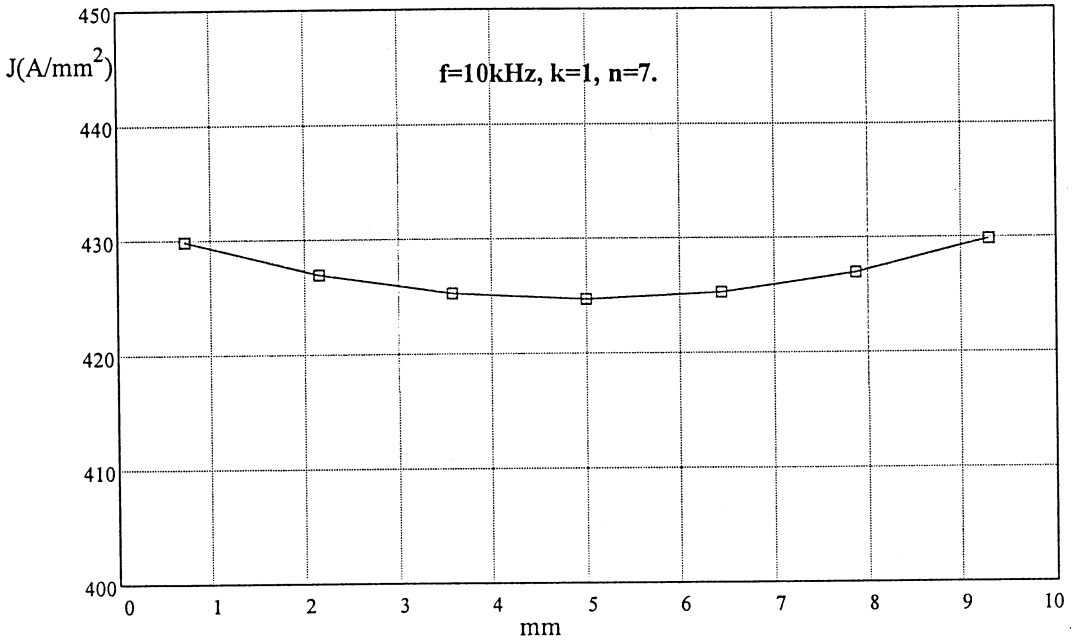


Figure II.9: Profil de la densité de courant à basse fréquence: subdivision uniforme.

Pour des fréquence plus élevées une subdivision géométrique s'avère indispensable. Pour f=10MHz, l'épaisseur de peau vaut $\delta = \mathbf{21.1\mu m}$. Avec un facteur de concentration k=4 et un nombre de subdivisions n=15, on arrive à placer 6 éléments dans l'épaisseur de peau, ce qui permet une bonne estimation de la densité de courant (figure II.10).

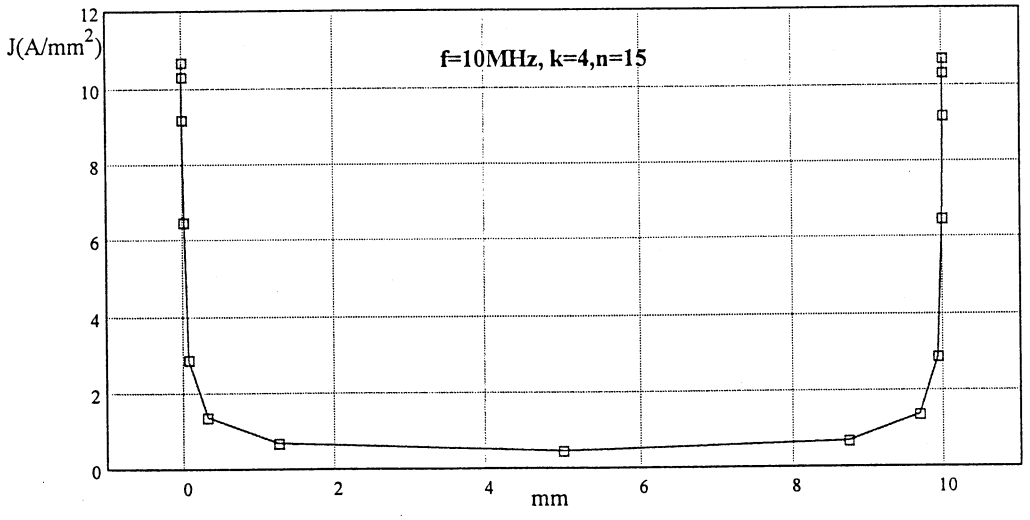


Figure II.10: Profil de la densité de courant en haute fréquence: subdivision géométrique.

II.3.3.3 Application à la boucle rectangulaire:

On applique la même approche à la boucle rectangulaire

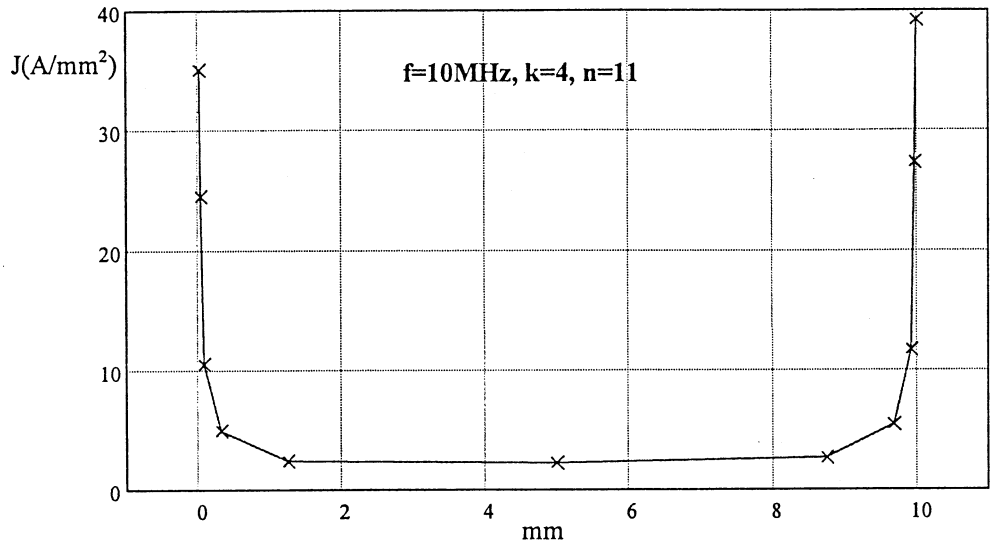


Figure II.11: Profil de la densité de courant : subdivision géométrique (cas de la boucle).

On voit bien l'effet de proximité qui consiste en une déformation du profil de densité de courant.

II.3.3.4 Influence de la subdivision sur le champ:

On considère la piste précédante avec une différence de potentiel 1V entre ses bornes, on se propose de calculer le champ crée par cette piste en un point de son axe situé à une hauteur z variable.(figure.II.12).

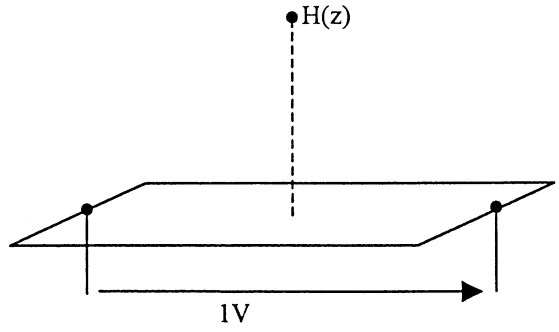


Figure II.12: Champ crée par une piste, limite de l'approche filiforme.

Pour mettre en évidence les limites de l'approche filiforme, on calculera le champ de deux manières:

1. En considérant que la piste est filiforme.

2. En subdivisant la piste comme le cas de la figure II.11 (avec f=10MHz, k=4, n=15). Dans la figure II.13, on trace l'écart relatif entre les deux champs en fonction de la hauteur.

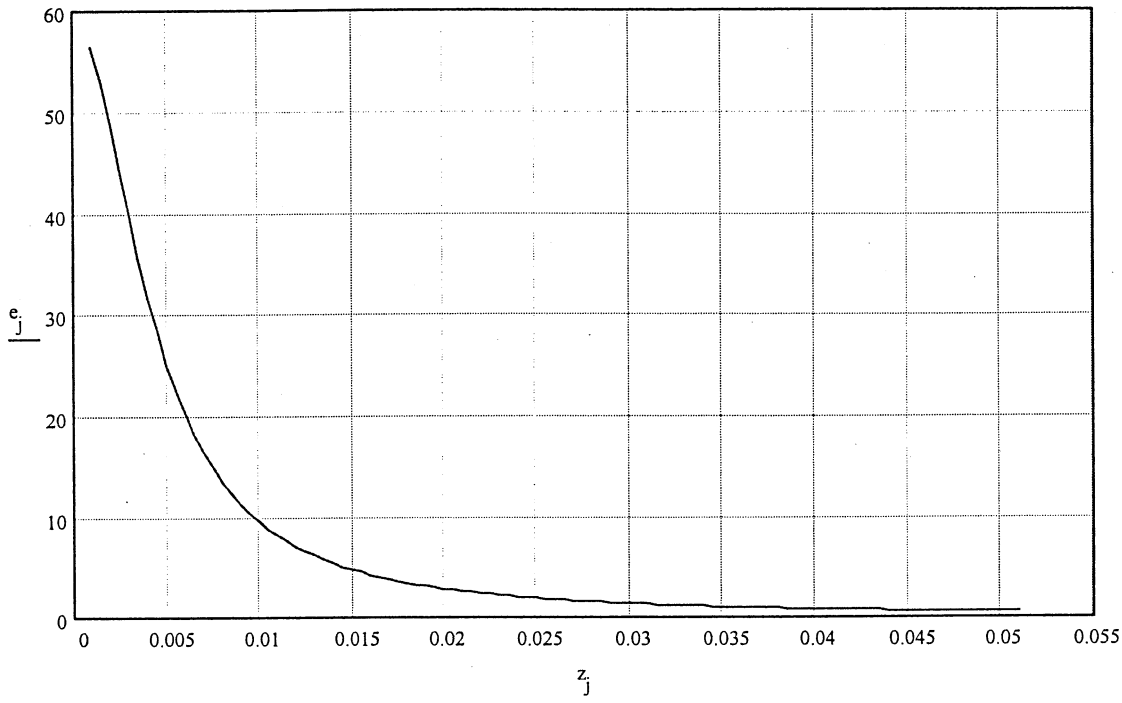


Figure II.13 : Influence de la subdivision sur le champ rayonné par une piste.

On constate que lorsque la distance entre le point d'observation et le centre de la piste devient inférieure à la largeur de la piste, l'application de l'approche filiforme induit une erreur relative supérieure à 10%.

II.3.4 Conclusion :

Dans ce paragraphe, la méthode générale de calcul du champ électromagnétique proche rayonné par un circuit est présentée. Tout d'abord, on a abordé le cas d'un circuit filiforme. Puis, par la méthode de subdivision, nous avons traité le cas où la distribution de courant était non uniforme dans la piste. Dans ce qui suit, on tachera de valider toutes ces méthodes théoriques de calcul. Pour cela, il faut tout d'abord présenter les capteurs de mesure de champ utilisés.

II.4 Capteurs de mesure en champ proche:

II.4.1 Introduction:

La mesure du champ électromagnétique rayonné par un système d'électronique de puissance est effectuée à l'aide d'antennes. Malgré leur diversité, le principe des antennes utilisées repose sur deux éléments de base : antenne dipôle (ou fouet) pour le champ électrique et antenne boucle pour le champ magnétique.

Il existe deux catégories d'antennes, selon la mesure que l'on désire réaliser :

- Les antennes en champ lointain, indépendantes de la nature et de la forme de la source. Dans ce cas, la connaissance de l'un des deux champs suffit, car $E_{loin}/H_{loin}=Z_0$.
- Les antennes en champ proche, qui doivent avoir des dimensions négligeables par rapport à la longueur d'onde correspondante aux fréquences étudiées. Dans le cas du champ proche, il n'y a pas de relation simple entre E et H, donc ils doivent être mesurés séparément. Par la suite, uniquement les mesures de champ magnétique seront effectuées.

II.4.2. Principe de l'antenne magnétique :

Ces capteurs sont généralement réalisés à l'aide d'une bobine monospire, leurs dimensions doivent être négligeables par rapport à la longueur d'onde du champ à mesurer pour avoir une distribution de courant constante dans la boucle. (Figure II.14).

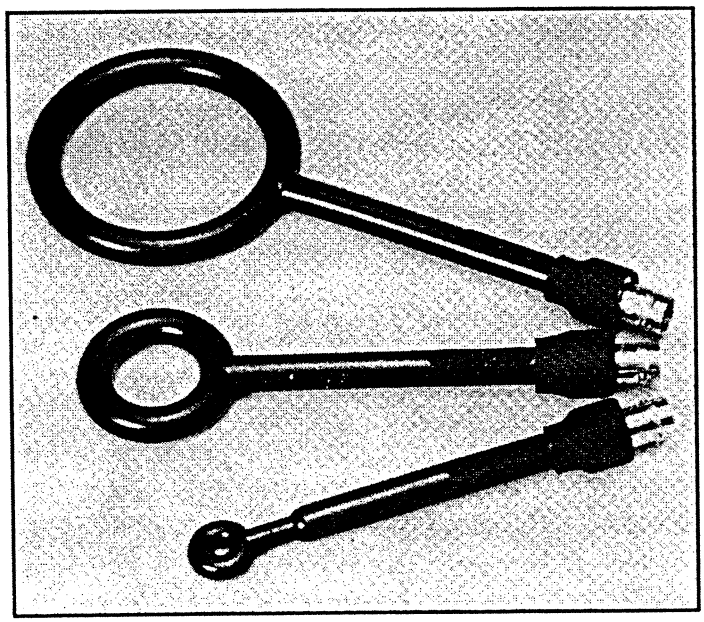


Figure II.14: Antenne magnétique.

Lorsque l'antenne magnétique est plongée dans un champ magnétique B, la tension entre ses bornes est donnée par : $e = \frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$, (S : surface de l'antenne) (II.32)

Dans nos mesures, nous utiliserons une antenne boucle blindée, qui a la particularité d'être insensible au champ électrique. Le blindage doit être coupé sinon la mesure sera faussée. (voir explication ci dessous). (Figure II.15)

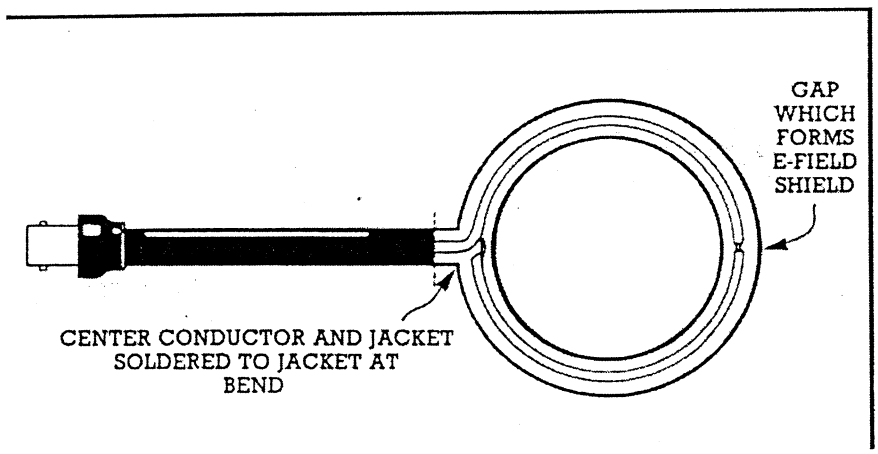


Figure II.15: Principe de la sonde magnétique.

Explication de la coupure du blindage :

On considère un conducteur coupable parcouru par un courant i_1, et un conducteur blindé dont le blindage est représenté par R_s-L_s et l'âme est parcourue par un courant i_2 .(voir figure II.16).

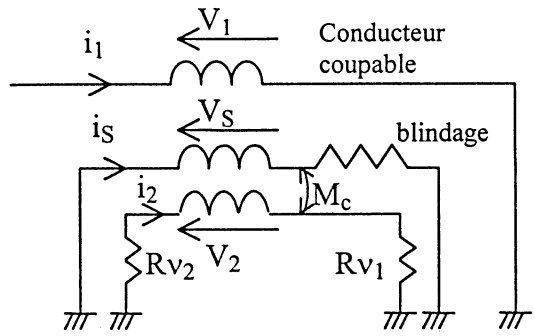


Figure II.16 : Effet d'un conducteur coupable sur un câble blindé.

On a :

$$\begin{aligned} V_S &= L_S\, p i_S + M_C p\, i_2 + M_{1S} p i_1 \\ V_2 &= L_2\, p i_2 + M_C p\, i_S + M_{12} p i_1 \\ V_S &+ R_S\, i_S = 0 \end{aligned} \qquad \text{(II.33)}$$

M_C étant la mutuelle entre l'âme et le blindage.

Le couplage est très fort entre l'âme et la tresse du câble donc :

$$L_S\, L_2 = M_C^2 \qquad \text{(II.34)}$$

On fait circuler un courant is dans le blindage, le flux du système vaut :

$$\phi_S = L_S\, i_S \qquad \text{(II.35)}$$

Le théorème d'Ampère appliqué sur un contour interne au blindage montre qu'il n'y a pas de champ à l'intérieur donc le flux ϕ_2 vu du conducteur 2 s'exprime par : $\phi_2 = M_C\, i_S$.

D'où : L_2=L_S=M_C. D'autre part, comme la distance est sensiblement la même entre le coupable et l'âme ou la tresse on déduit que : M_{12}=M_{1S} .

Supposons que i_2=0 et Rv_1 et Rv_2 >>1.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} V_2 &= L_S\, p i_S + M_{12} p i_1 \\ M_{12}\, p\, i_1 &+ L_S\, p\, i_S + R_S\, i_S = 0 \end{aligned} \Rightarrow i_S = -\frac{M_{12}\, p}{R_S + L_S p} i_1 \qquad \text{(II.36)}$$

On en déduit que :

$$\frac{V_2}{i_1} = -\frac{M_{12}\, R_S\, p}{R_S + L_S p} \qquad \text{(II.37)}$$

Le diagramme de la figure.II.17 ci dessous met bien en évidence l'effet du blindage :

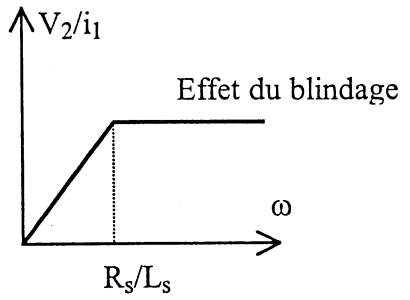


Figure II.17 : Effet du blindage.

Dans notre cas, on veut effectivement mesurer la fem engendrée par un circuit coupable dans notre antenne, donc il faut faire i_s=0, ce qui revient à couper la tresse, dans ce cas la première équation du système II.36 devient: $V_2 = p\, M_{12}\, i_1$.

Validation:

Afin de mettre en évidence la nécessité de couper le blindage, on effectue l'expérience suivante:
On fait circuler un courant sinusoïdal de fréquence 1MHz dans une boucle de circuit imprimé de dimensions L_1=10cm, L_2=5.2cm. On mesure le champ crée par cette boucle respectivement à l'aide d'une antenne blindée dont la tresse est coupée et d'une antenne blindée dont la tresse n'est pas coupée.(figure II.18).

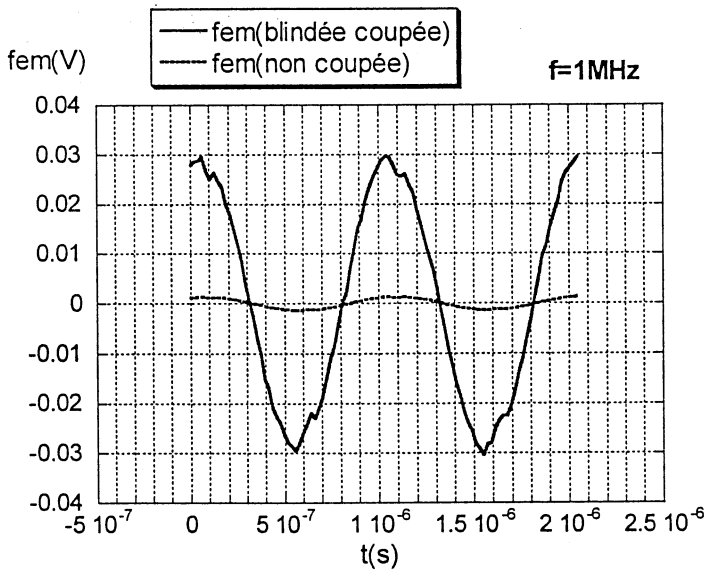


Figure II.18 : effet de la coupure du blindage.

Le blindage n'est pas indispensable pour des fréquences de l'ordre du MégaHertz, en effet pour la même boucle, si on compare la tension mesurée par une antenne blindée à celle mesurée par une spire circulaire de même diamètre, on constate une parfaite superposition entre les deux mesures. La comparaison est effectuée dans le cas où la boucle est parcourue par un courant sinusoïdal (de fréquence 1MHz ou 5MHz) (figure II.19).

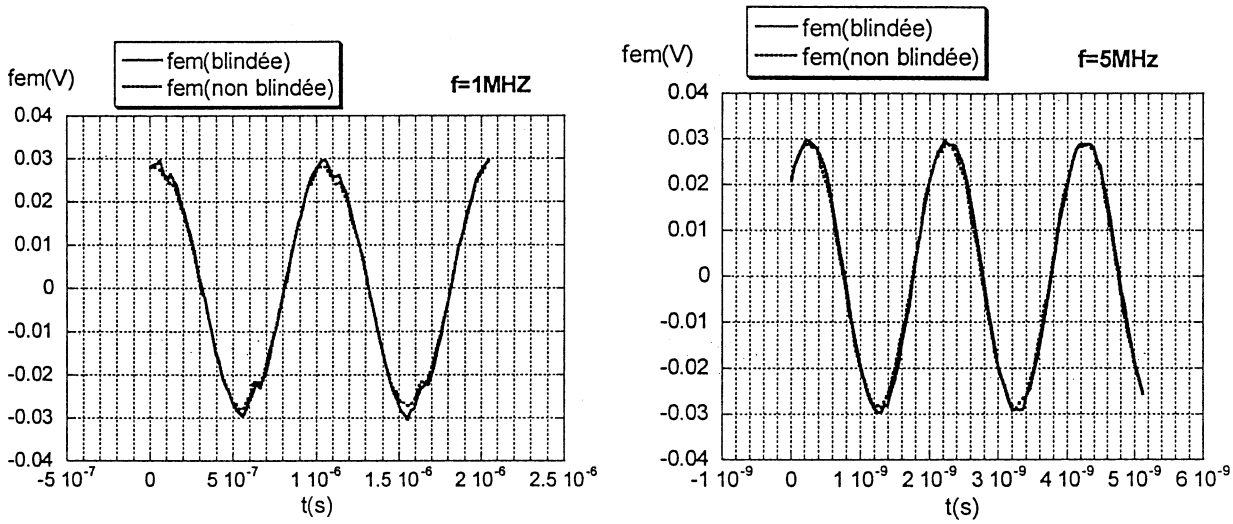


Figure II.19 : effet du blindage pour f=1MHz, f=5MHz.

II.4.3 Adaptation d'impédances:

Afin d'avoir des mesures fiables, il faut s'assurer de l'adaptation d'impédance entre l'impédance d'antenne, l'impédance de la ligne de transmission utilisée et l'impédance existant aux bornes de l'appareil de mesure (oscilloscope ou analyseur de spectre).

Toutes ces impédances doivent être égales afin que la presque totalité de la puissance électrique soit transmise aux bornes du récepteur.

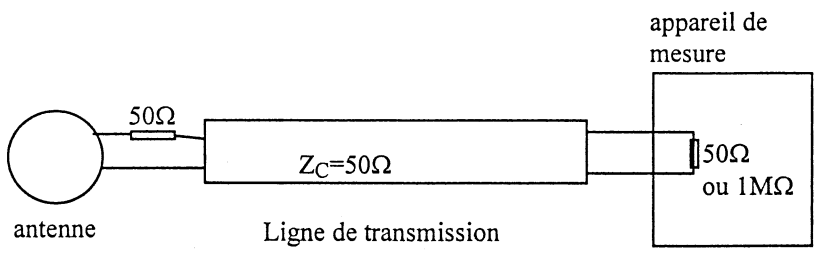


Figure II.20: Adaptation d'impédance antenne -ligne de transmission –appareil de mesure.

Afin de valider l'importance de l'adaptation d'impédance entre l'appareil de mesure et le câble coaxial (la ligne de transmission), les mesures seront effectuées respectivement avec une impédance de charge Z_L=50Ω et une impédance de 1MΩ.

Dans le cas où le courant source est sinusoïdal, on constate que pour des fréquences de quelques MHz l'adaptation des impédance n'est pas indispensable. (figure II.21).

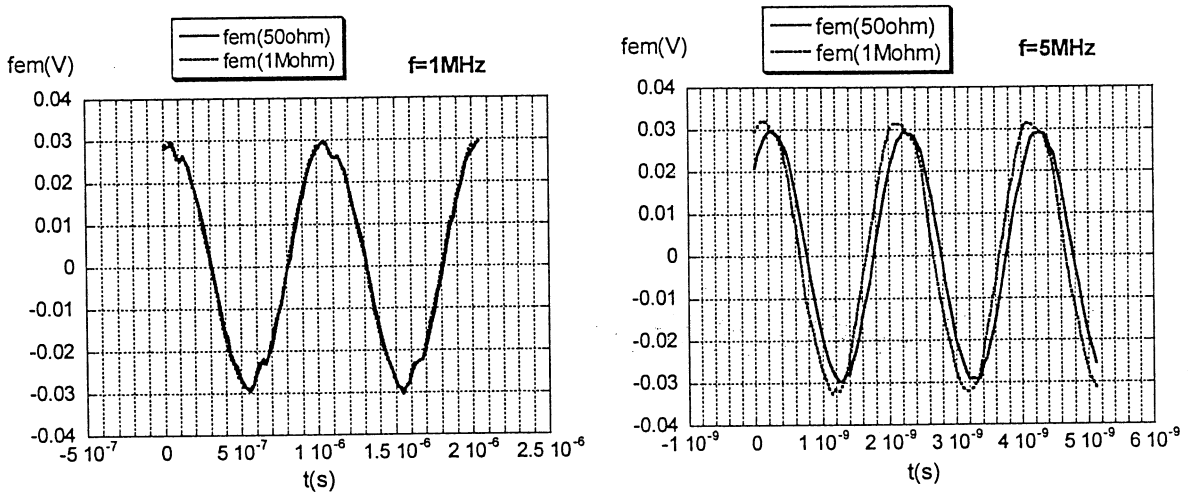


Figure II.21 : Comparaison fem(Z_L=50Ω)/fem(Z_L=1MΩ) pour f=1MHz et f=5MHz.

Pour aller plus loin en fréquence, on fait circuler dans la boucle un courant impulsionnel de fréquence 4.35kHz et de temps de montée t_m=20ns ($1/t_m$=50MHz). (figure II.22).

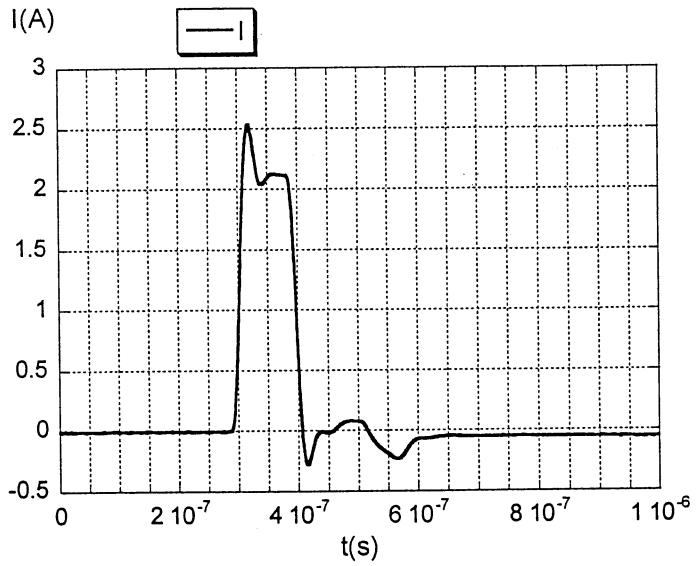


Figure II.22 : forme de l'impulsion de courant.

Dans la figure II.23 on compare la fem mesurée avec une impédance Z_L=50Ω à celle mesurée avec une impédance Z_L=1MΩ.

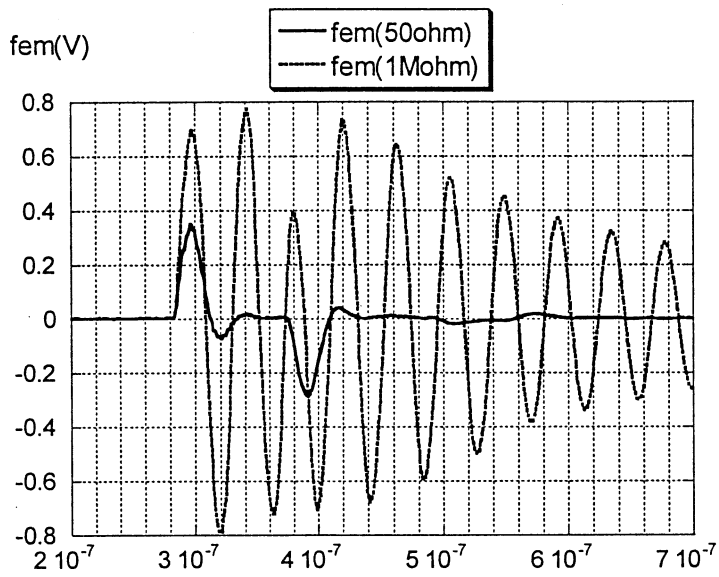


Figure II.23 : Comparaison fem(Z_L=50Ω)/fem(Z_L=1MΩ)

Cette figure met en evidence le phénomène de réflexion qui se produit lorsque l'impédance de l'appareil de mesure n'est pas égale à l'impédance caractéristique de la ligne.

II.4.4 Principaux paramètres de l'antenne magnétique:

II.4.4.1 Schéma électrique équivalent de l'antenne boucle :

Le schéma électrique équivalent de l'antenne boucle est donné par la figure II.24. Son impédance s'écrit alors:

$$Z_b = R_r + r + jL\omega \qquad \text{(II.38)}$$

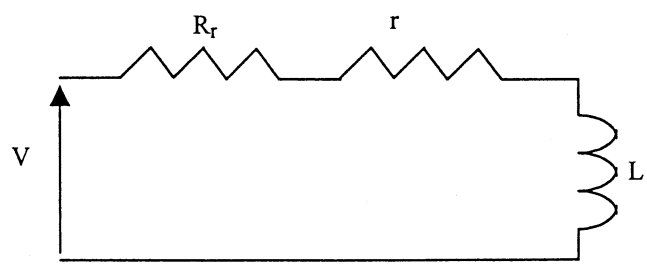


Figure II.24: Schéma électrique équivalent de l'antenne boucle.

Pour des antennes dont le diamètre est inférieur à 0.1 λ, la résistance de rayonnement (en Ω) est fonction du carré du rapport de la surface de la boucle A sur la longueur d'onde.

$$R_r = 31.2\left(\frac{A}{\lambda}\right)^2 \qquad \text{(II.39)}$$

En général, cette résistance est très faible (de l'ordre de 10^{-6} Ω).

L'expression analytique approchée de l'inductance (en H) est: $L = \mu_0\, b\left[\ln\left(\frac{8b}{a}\right) - 2\right]$ (II.40)

Où b est le rayon de la boucle et a est le rayon du conducteur.

II.4.4.2 Facteur d'antenne:

Il est défini comme le rapport entre le champ magnétique capté par l'antenne et la tension effective aux bornes de la boucle. Son expression (en dBm^{-1}) se met sous la forme:

$$F = 20\log\left(\frac{Z_0}{2\pi f\,\mu_0\,A}\right) \qquad \text{(II.41)}$$

Où Z_0 est l'impédance d'onde et vaut 377Ω, f la fréquence en Hz et A la surface de la boucle en m^2.

La figure II.25 représente le facteur d'antenne d'une boucle de diamètre 3cm donné par le constructeur.

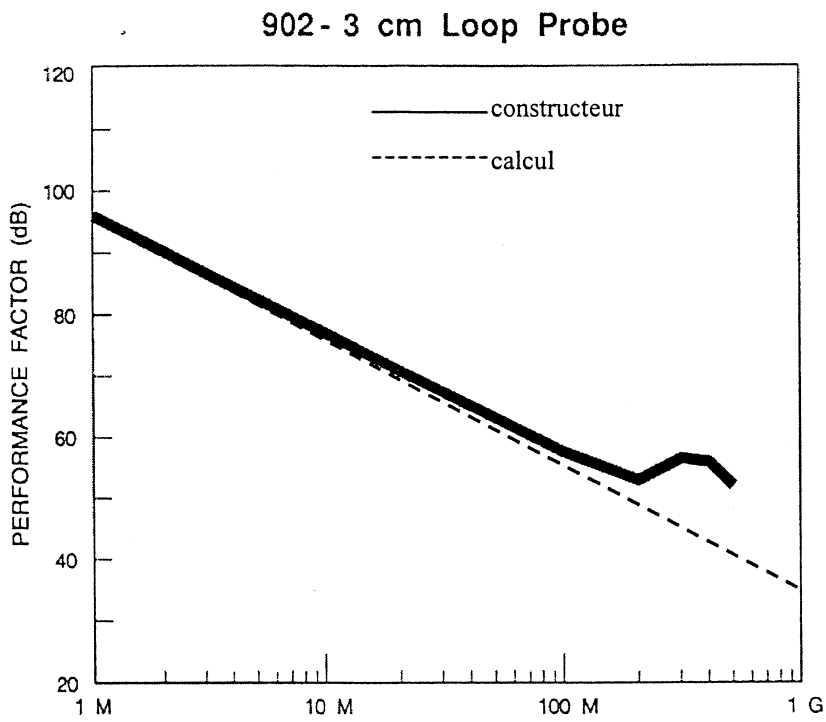


Figure II.25: Facteur d'antenne de la boucle de diamètre 3cm.

II.4.5 Champ capté par une antenne magnétique:

Aux bornes d'une antenne magnétique placée au voisinage de la boucle rectangulaire on retrouve la f.e.m engendrée par la variation du flux envoyé par la boucle rectangulaire sur l'antenne, cette f.e.m peut s'exprimer de deux façons différentes :

a. $$\text{fem} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\mu_0 H_z(xa, ya, za)\,\pi\, r^2\right] \qquad (II.42)$$

(xa,ya,za) sont les coordonnées du centre de l'antenne, r son rayon. Cette formule s'applique lorsque l'antenne est parallèle au circuit (voir figure.II.26).

b. $$\text{f.e.m} = \frac{d\phi}{dt} = M\frac{dI}{dt} \qquad (II.43)$$

où M est la mutuelle entre la boucle rectangulaire parcourue par le courant I et l'antenne.

M se calcule de la façon suivante: $$M = \frac{1}{I}\int_C \vec{A}\cdot d\vec{l} \qquad (II.44)$$

où C est le contour de l'antenne et A est le potentiel vecteur crée par la boucle rectangulaire.

On va effectuer le calcul dans le cas où la boucle et l'antenne appartiendraient à deux plans parallèles (voir figure II.26).

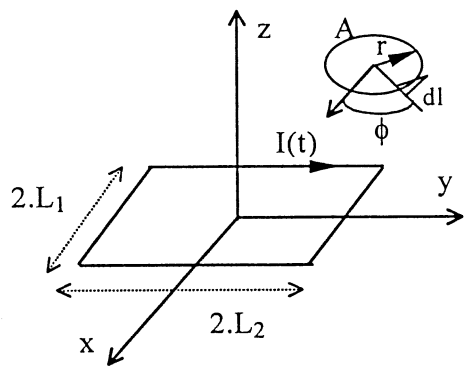


Figure II.26: Position de l'antenne par rapport au circuit.

L'équation II.36 peut s'écrire : $$M = \frac{1}{I}\left[\int_{-\pi}^{\pi} A_y(M)\cos\varphi\; d\varphi - \int_{-\pi}^{\pi} A_x(M)\,\sin\varphi\; d\varphi\right] \qquad (II.45)$$

Cette intégrale est incalculable analytiquement on va la transformer en une somme en subdivisant l'antenne en n morceaux égaux:

$$M = \frac{2\pi r}{nI}\left\{\sum_{i=1}^{n} A_y(x_0 + r\cos\varphi_i; y_0 + r\sin\varphi_i; z_0)\cdot\cos\varphi_i - A_x(x_0 + r\cos\varphi_i; y_0 + r\sin\varphi_i; z_0)\cdot\sin\varphi_i\right\}$$

(II.46)

Où x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées du centre de l'antenne et $\varphi_i = -\pi + (2 \cdot i - 1) \cdot \frac{\pi}{n}$ (II.47)

Lorsque le plan de l'antenne fait un angle θ avec le plan de la boucle, la mutuelle devient:

$$M' = M \cos\theta \qquad \text{(II.48)}$$

II.5 Applications en champ proche:

II.5.1 Champ crée par un hacheur série de géométrie rectangulaire:

L'utilisation des convertisseurs statiques de puissance est de plus en plus répandue. Travaillant à des fréquences de commutation de plus en plus élevées, ils imposent à leur environnement des contraintes électromagnétiques de plus en plus sévères. Les perturbations générées proviennent principalement de l'ouverture et de la fermeture des interrupteurs qui composent les convertisseurs. Afin d'étudier et de quantifier ces phénomènes de génération des perturbations rayonnées, nous sommes partis de l'exemple du hacheur série, représentatif des principaux modes de commutations en électronique de puissance.

Dans le but de faciliter l'étude, le circuit de commande est placé assez loin du circuit de puissance, une capacité de type CMS a été utilisée pour le découplage, on a utilisé un câble coaxial pour les fils de liaison à la charge.

Le montage qu'on a réalisé est représenté dans la figure II.27, l'antenne magnétique est placée parallèlement au plan du circuit de puissance comme le montre la figure II.28 où les dimensions du circuit de puissance sont indiquées.

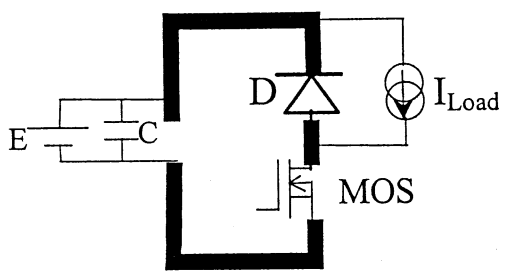


Figure II.27: Hacheur série.

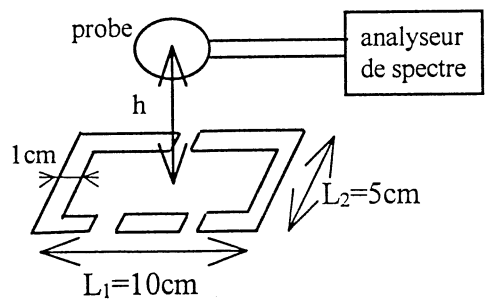


Figure II.28: Géométrie du montage

Dans un premier temps, on se placer dans les conditions de l'approche filiforme. Les effets d'un plan de masse et de la commutation douce seront étudiés. Ensuite, on se placera dans un cas où l'approche filiforme ne s'applique plus.

II.5.1.1 Cas filiforme sans plan de masse:

On fait fonctionner le hacheur précédant dans les conditions suivantes :

Une fréquence de fonctionnement f=50kHz, un rapport cyclique α=0.5, un courant de charge I=5A, une tension d'alimentation E=30V. L'antenne magnétique a pour rayon r=1.5cm, elle est placée à une hauteur h=4.9cm. Le circuit de puissance est donc une boucle rectangulaire parcourue par un courant i(t) dont la forme à la fermeture et à l'ouverture est représentée dans les figures II.29 et II.30.

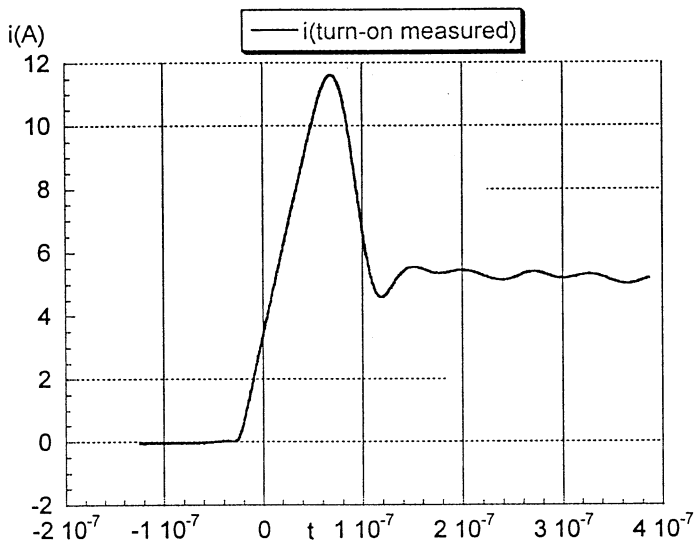


Figure II.29: Courant à la fermeture.

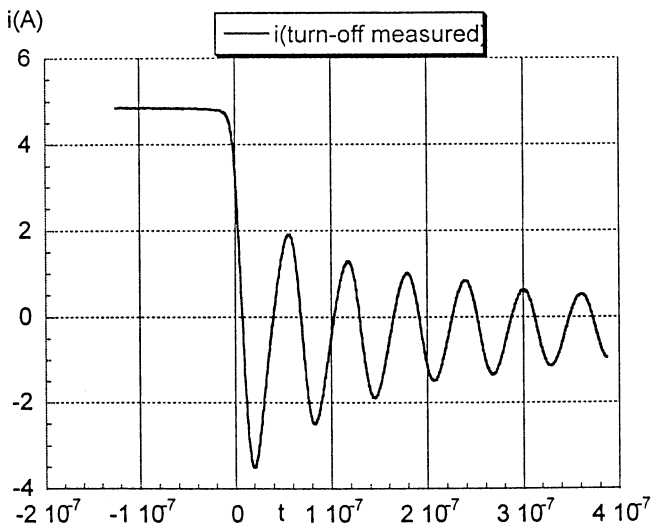


Figure II.30: Courant à l'ouverture.

Afin de valider notre approche de calcul, on compare la tension mesurée aux bornes de l'antenne à la fem calculée par : $\text{fem} = M\frac{di}{dt}$, M est la mutuelle entre la boucle de puissance et l'antenne est calculée suivant le principe du dans le paragraphe précédent. On trouve M=2.43 10^{-9} H.

Les figures II.31 et II.32 montrent que dans ces conditions cette approche simple donne des résultats assez précis.

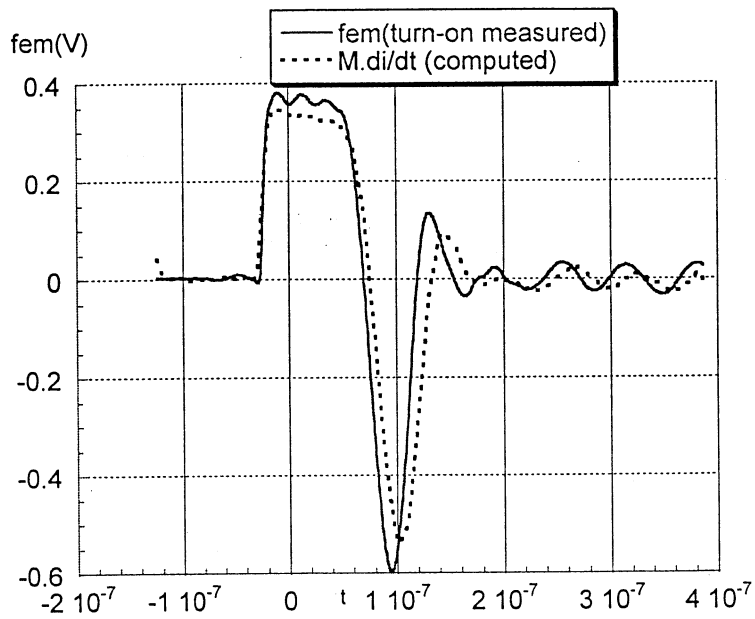


Figure II.31: fem calculée/mesurée à la fermeture.

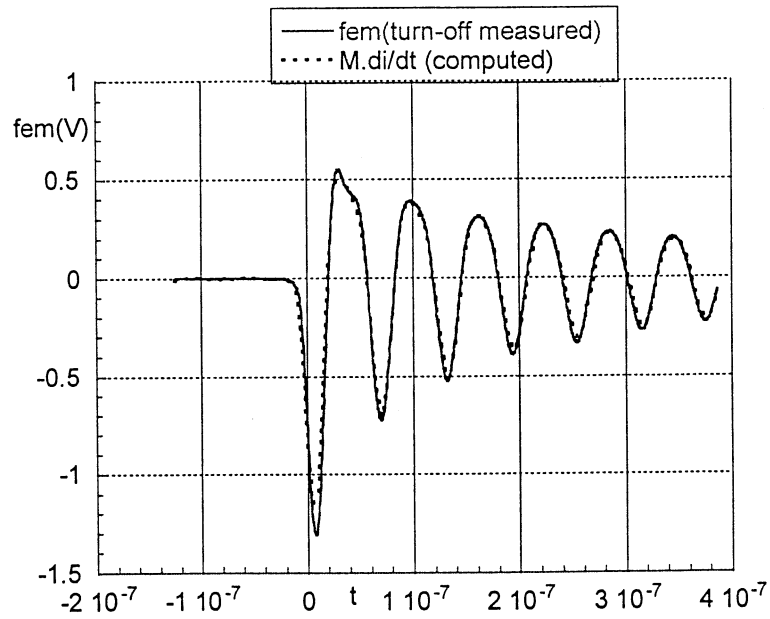


Figure II.32: fem calculée/mesurée à l'ouverture.

II.5.1.2 Cas filiforme avec plan de masse:

En mettant un plan de masse au-dessous de la boucle de puissance précédante, les inductances des pistes changent et donc le courant (figure II.33 et II.34).

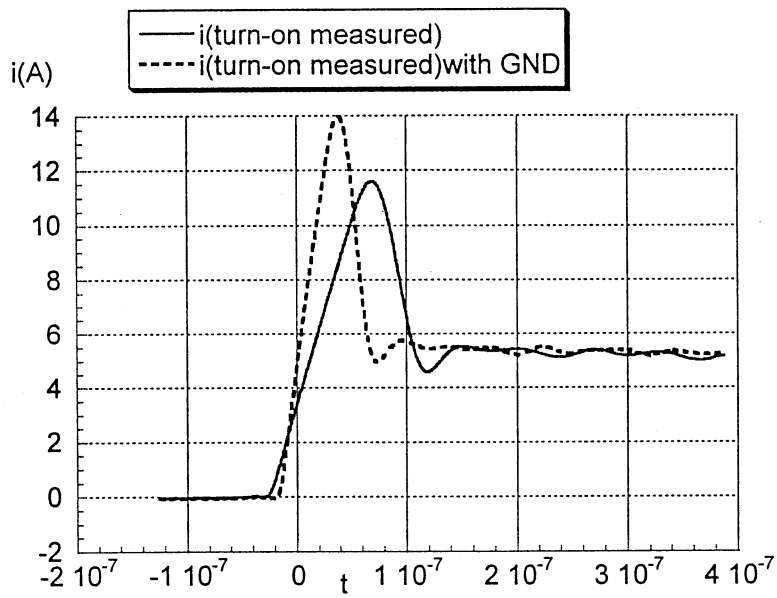


Figure II.33: Courant à la fermeture avec/sans plan de masse.

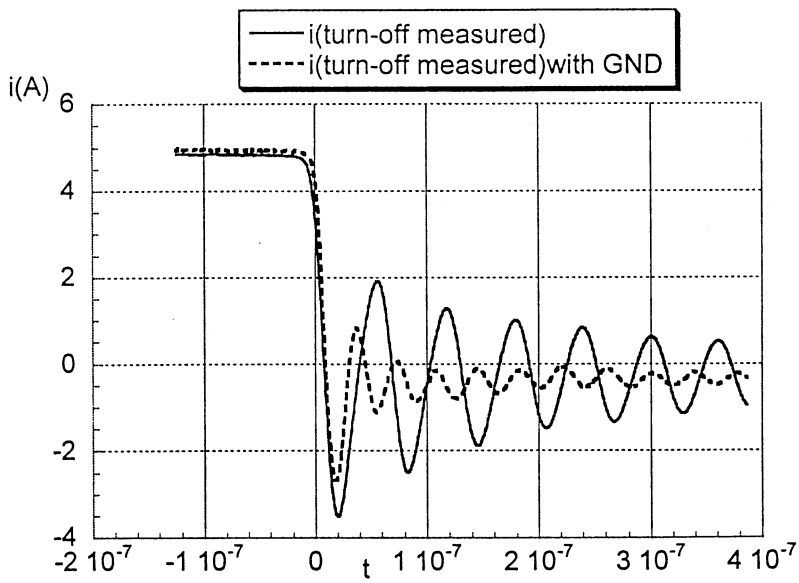


Figure II.34: Courant à l'ouverture avec/sans plan de masse.

En effet le plan de masse diminue l'inductance de maille ce qui a pour effet d'augmenter le di/dt dans le MOSFET et donc aussi dans la diode, cela provoque bien sûr un courant de recouvrement plus important que l'on note bien sur la figure II.33.

La diminution de l'inductance de maille provoque sur l'ouverture une modification de la fréquence de résonance mais aussi du facteur d'amortissement du circuit sollicité qui est un circuit série: $z = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$.

Donc lorsque L diminue z augmente, donc en présence du plan de masse on a des oscillations plus faibles (figure II.34), et par conséquent des champs plus faibles (figure II.35 et II.36).

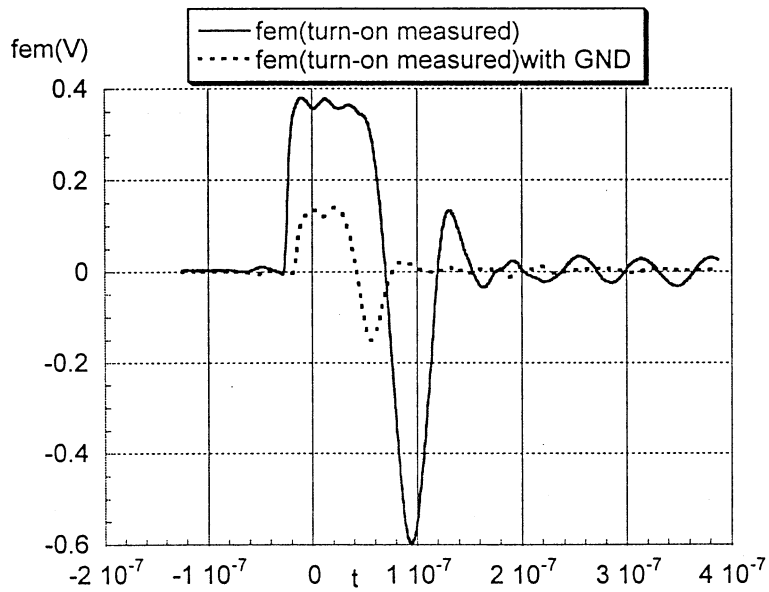


Figure II.35: fem à la fermeture avec/sans plan de masse.

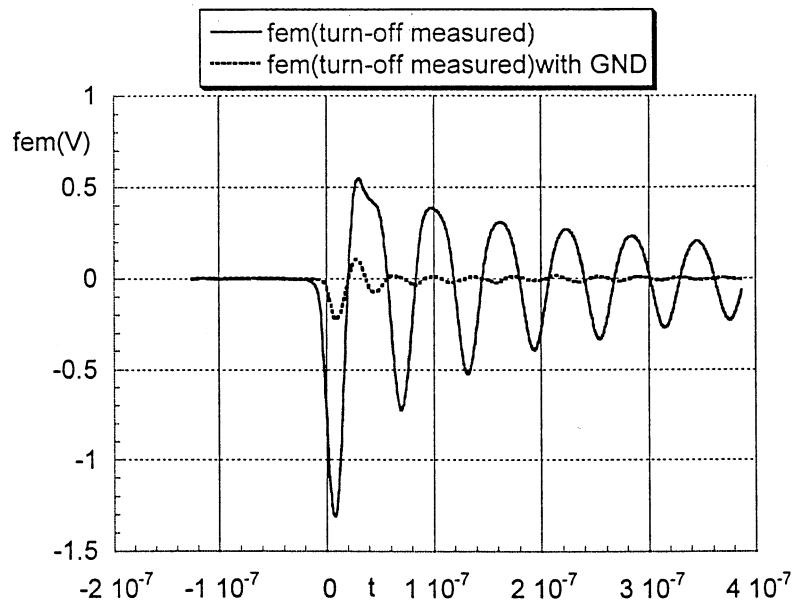


Figure II.36: fem à l'ouverture avec/sans plan de masse.

En fréquentielle, on constate une différence de l'ordre de 10dbμV. (figure II.37)

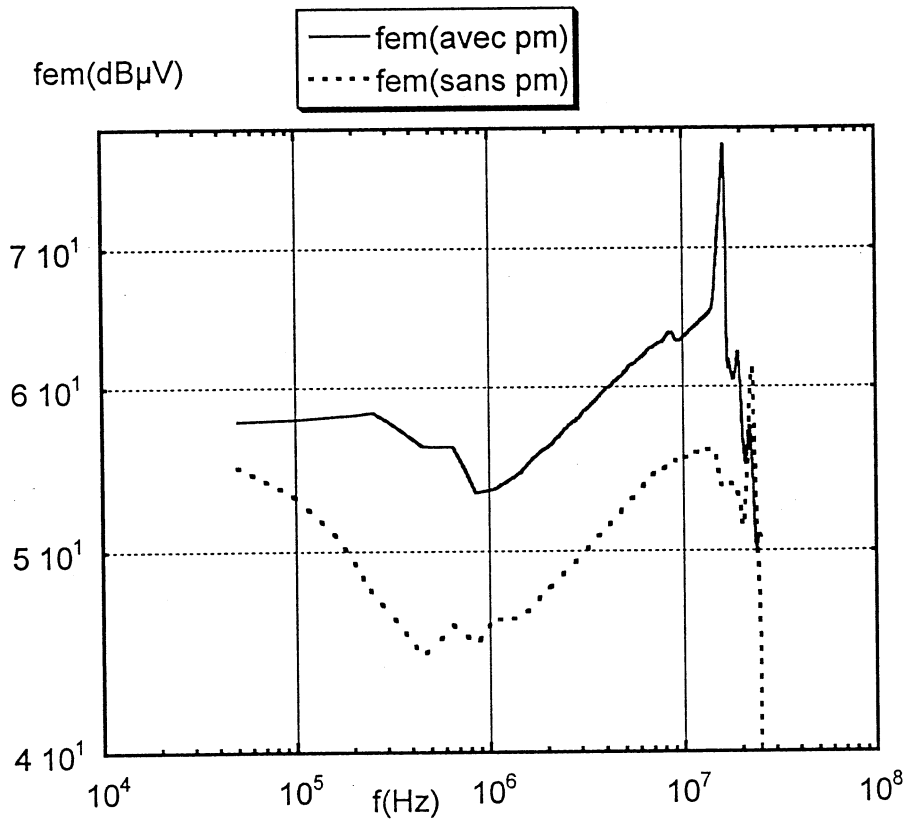


Figure II.37: Comparaison fréquentielle fem avec/sans plan de masse.

Pour calculer le champ en présence d'un plan de masse, appliquons la méthode des images.

Pour accéder à la valeur de la mutuelle entre un circuit C1 sur un plan de masse et une antenne A (figure II.38), il suffit de retrancher la mutuelle entre l'antenne et l'image de C1.:

$$M' = M_{A1} - M_{A2} \qquad \text{(II.49)}$$

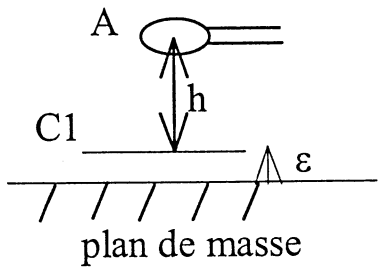


Figure II.38: Mutuelle entre le circuit et l'antenne en présence d'un plan de masse.

Comme $\varepsilon << h$, les deux mutuelles sont sensiblement égales, donc si on fait directement la différence, la précision du résultat ne sera pas bonne.

Pour résoudre ce problème, on a effectué un développement limité de H_1-H_2, où H_1 et H_2 sont respectivement les champs crées par le circuit et son image au point M centre de l'antenne.

On a :

$$H_1 = Hz(x=0;y=0;z=h) \tag{II.50}$$

$$H_2 = Hz(x=0;y=0;z=h+2\,\varepsilon) \tag{II.51}$$

En utilisant la formule (II.20) on obtient:

$$H_{total} = i.\frac{L_1 L_2\, h\varepsilon}{2\pi F}\left\{\frac{2}{\left(h^2+\frac{L_1^2}{4}\right)^2}+\frac{2}{\left(h^2+\frac{L_2^2}{4}\right)^2}+\frac{1}{\left(h^2+\frac{L_1^2}{4}\right)F^2}+\frac{1}{\left(h^2+\frac{L_2^2}{4}\right)F^2}\right\} \tag{II.52}$$

avec :

$$F = \sqrt{h^2+\frac{L_1^2}{4}+\frac{L_2^2}{4}} \tag{II.53}$$

Ensuite, on obtient la fem induite aux bornes de l'antenne par la relation :

$$fem = \mu_0 \frac{d}{dt}\left[H_{total}.\pi r^2\right] \tag{II.54}$$

soit :

$$fem = \mu_0 \pi r^2 \frac{L_1 L_2\, h\varepsilon}{2\pi F}\left\{\frac{2}{\left(h^2+\frac{L_1^2}{4}\right)^2}+\frac{2}{\left(h^2+\frac{L_2^2}{4}\right)^2}+\frac{1}{\left(h^2+\frac{L_1^2}{4}\right)F^2}+\frac{1}{\left(h^2+\frac{L_2^2}{4}\right)F^2}\right\}\frac{di}{dt} \tag{II.55}$$

Cette approche a été validée pour deux valeurs de ε.

Pour **ε=1.54mm**,

on trouve :

$$fem = 3.45\ 10^{-10}\ \frac{di}{dt} \tag{II.56}$$

Dans les figures II.39 et II.40, on compare la fem mesurée a celle calculée par la formule II.56.

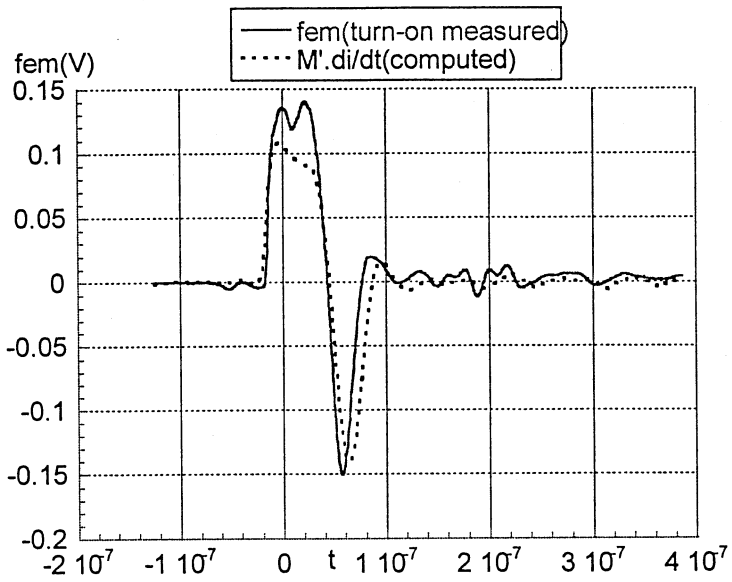


Figure II.39: Fem calculée/mesurée en présence d'un plan de masse.(fermeture)

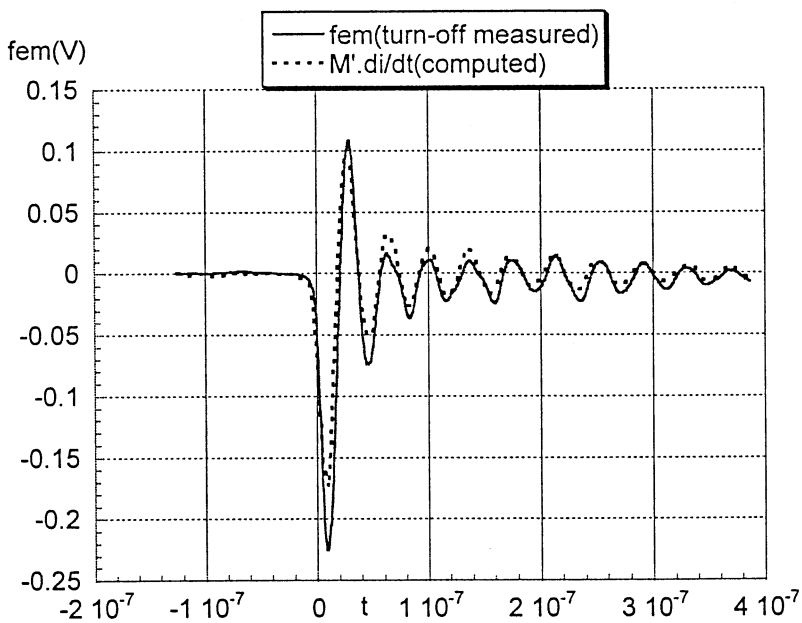


Figure II.40: Fem calculée/mesurée en présence d'un plan de masse.(ouverture)

Pour **<u>ε=3.1mm</u>**,

on trouve : $$\text{fem} = 7.19\ 10^{-10}\ \frac{di}{dt} \qquad \text{(II.57).}$$

La comparaison avec la mesure est représentée dans les figures II.41 et II.42.

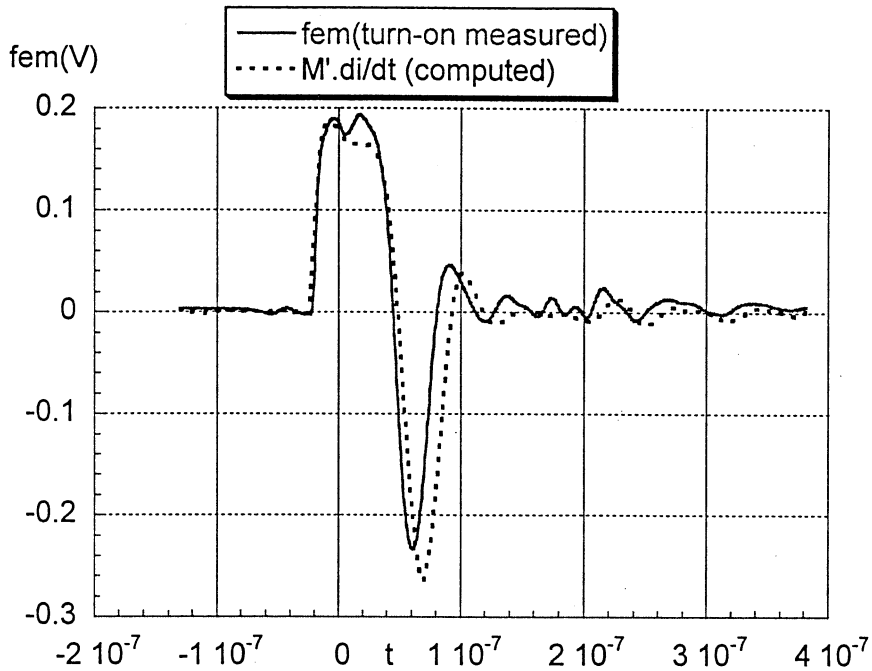


Figure II.41: Fem calculée/mesurée en présence d'un plan de masse.(fermeture)

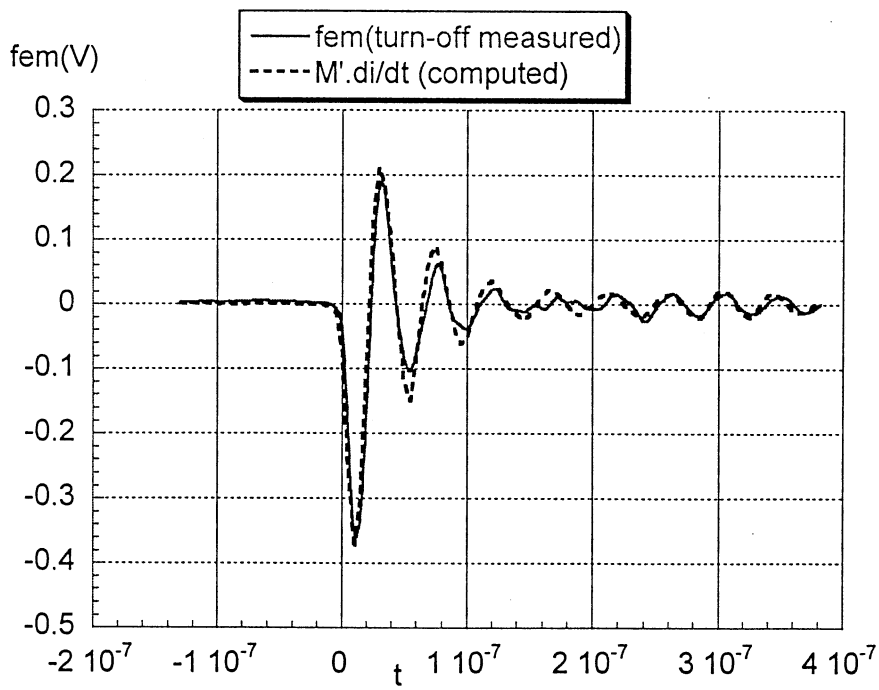


Figure II.42: Fem calculée/mesurée en présence d'un plan de masse.(ouverture)

II.5.1.3 Limite de l'approche filiforme:

Pour le hacheur série du paragraphe II.5.1.1, on place l'antenne dans une position très proche des pistes du circuit, par exemple (xa=6cm ; ya=2cm ; za=1cm).

Dans ce cas, la mutuelle entre l'antenne et le circuit vaut :

$$M=5.3\ 10^{-10}\ H.$$

Dans la figure II.43, la fem calculée par l'approche filiforme (fem=M.di/dt) est comparée à la fem mesurée.

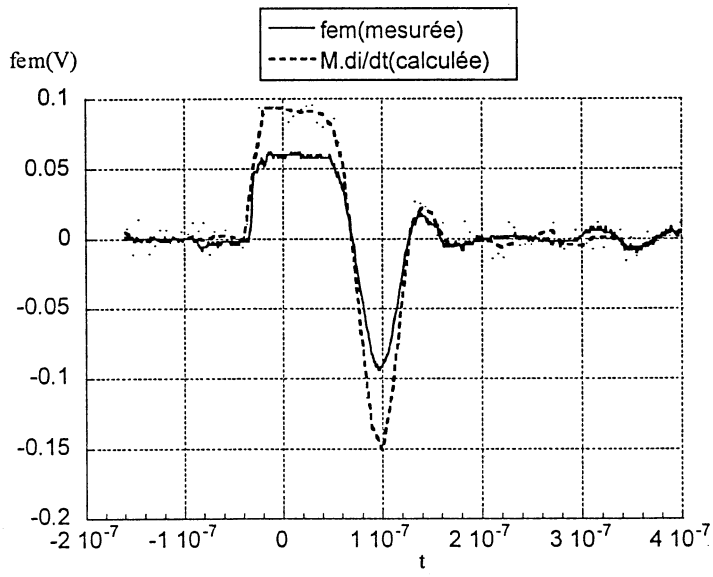


Figure II.43: Comparaison fem mesurée/calculée par l'approche filiforme.

On constate qu'il y'a une différence notable entre le calcul et la mesure.

Par conséquent, dans cette configuration on ne peut plus considérer le circuit comme filiforme, et il faut donc tenir compte de la variation du courant dans la section.

La distribution effective de courant n'est pas directement accessible par une mesure. Mais elle peut être déterminer, à partir de la valeur globale du courant, en utilisant une des méthodes présentée en partie III.

Afin de mettre en évidence l'effet de la subdivision, on appliquera successivement une subdivision uniforme et une subdivision géométrique afin de retrouver la fem obtenue par la mesure.

Dans le tableau suivant, on comparera les fem (en valeurs max) calculées à la fem mesurée.

f	150kHz	750kHz	1MHz	2MHz	5MHz
I(mA)	666	144	50.5	43.9	30.4
fem(filiforme)µV	332	360	168	293	507
écart/ fem mesurée	21%	23%	57%	56%	80%
fem(uniforme)µV	318	355	166	288	499
écart/ fem mesurée	16%	22%	55%	53%	78%
fem(géom)µV	290	292	135	230	380
écart/ fem mesurée	5.5%	1.4%	20%	22%	35%
fem(mesurée)µV	275	296	107	188	281

Le courant total I est mesuré grâce à l'analyseur de spectre.

- La fem (filiforme) est obtenue par la relation $\text{fem} = M\frac{di}{dt}$ avec M=5.3 10^{-10} H.
- La fem (uniforme) est obtenue en subdivisant le circuit en trois boucles de tailles identiques, elle s'obtient par la relation: $\text{fem} = \sum_k M_k i_k$, où M_k est la mutuelle entre la boucle k et l'antenne, i_k est le courant dans la boucle k obtenu par résolution du système II.31.
- La fem (géométrique) est obtenue en effectuant une subdivision géométrique avec k=4 et n=11, elle s'obtient par la même relation que la fem (uniforme).

Conclusion:

On constate qu'à partir de 500kHz, la subdivision uniforme n'apporte pas une meilleure précision que l'approche filiforme dans le calcul de la fem. En revanche, on note l'amélioration notable apportée par la subdivision géométrique jusqu'à quelques MégaHertz. Au delà de la dizaine de MHz, l'écart entre l'approche piste infiniment mince avec subdivision géométrique et la mesure devient notable, pour ces fréquences, on doit effectuer une subdivision dans l'épaisseur du conducteur. Dans notre cas, cette épaisseur vaut 35µm alors qu'à 10MHz, l'épaisseur de peau vaut: $\delta = 21\mu m$.

II.5.1.4 Effet de la commutation douce:

On reprend l'hacheur de la figure II.27, on réalise un hacheur de mêmes dimensions mais fonctionnant en commutation douce. Le schéma du circuit est donné par la figure II.44.

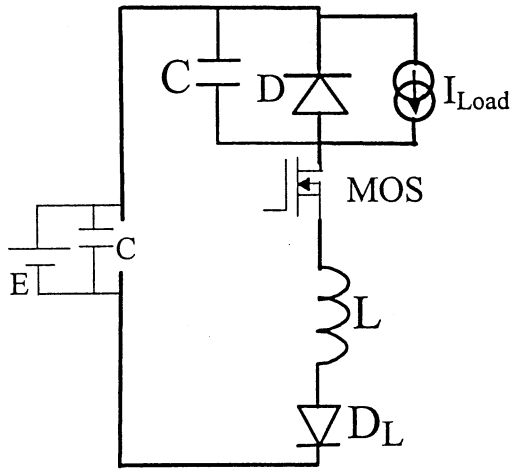


Figure II.44: Hacheur série en commutation douce.

Avec: E=32V, I_S=4A, f=20.8kHz, L=12.1μH et C=0.1μF.

L'allure du courant est donnée par la figure II.45:

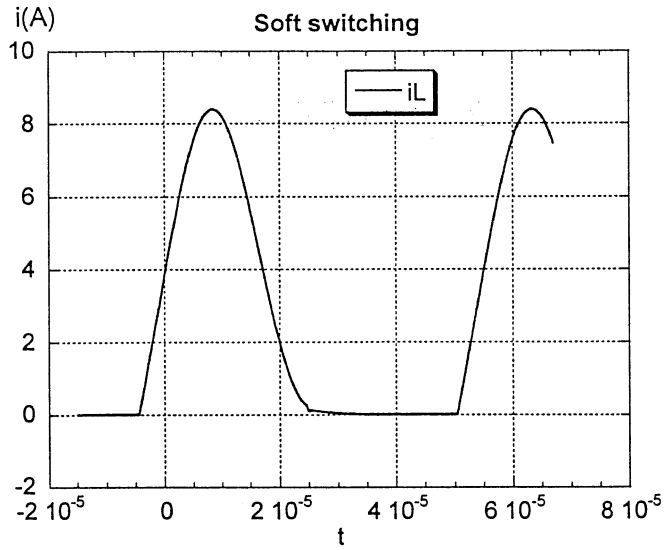


Figure II.45: Courant dans le MOS, en commutation douce.

On mesure la fem induite aux bornes d'une antenne magnétique de diamètre 3cm, placée à une hauteur h=5cm. Dans la figure II.46, on compare la fem mesurée à celle calculée par la même approche que pour la commutation dure.

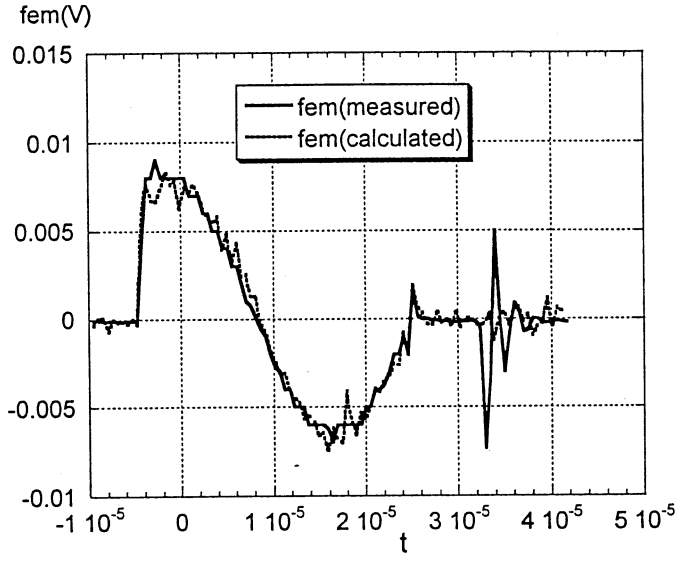


Figure II.46: Comparaison fem mesurée/calculée en commutation douce.

Pour se rendre compte de l'effet de la commutation douce sur le champ, on compare à courant de charge identique le champ crée par les deux montages.

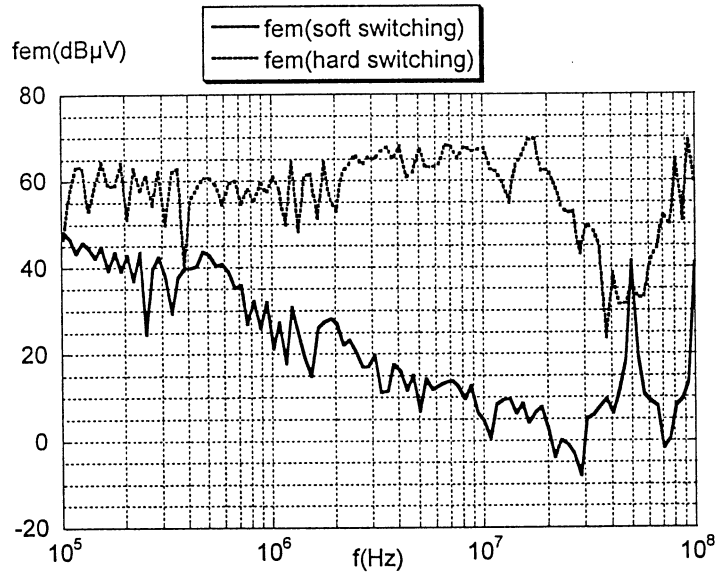


Figure II.47: Comparaison fem commutation dure/ commutation douce.

On constate une réduction notable du champ rayonné pouvant atteindre 60dBµV pour certaines fréquences.

II.5.2 Champ crée par un module de puissance:

La structure étudiée est toujours un hacheur série, mais cette fois ci, elle est réalisée à l'aide d'un module de puissance et d'un bus bar pour la connexion.(figure II.48).

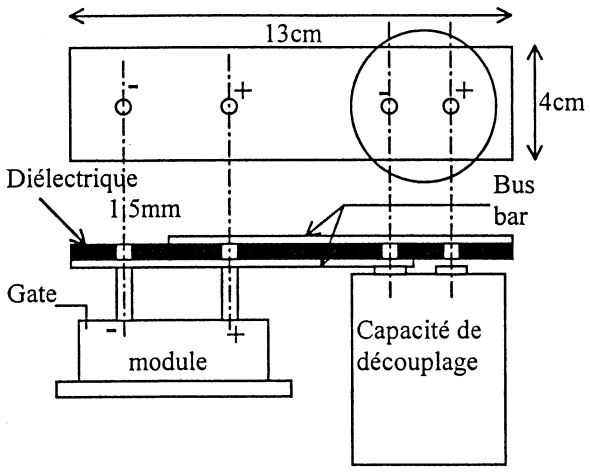


Figure II.48 : Géométrie de la structure.

Le bus bar consiste en deux conducteurs larges séparés par du diélectrique. Comme la distance qui les sépare est très petite et qu'ils sont traversés par des courants opposés, le champ crée par le bus bar est très faible.

Le module utilisé dans cette structure est le IRFK2D450. Il consiste en deux MOSFET dont l'un qui va servir de diode de roue libre. La géométrie du module est représentée dans la figure II.49.

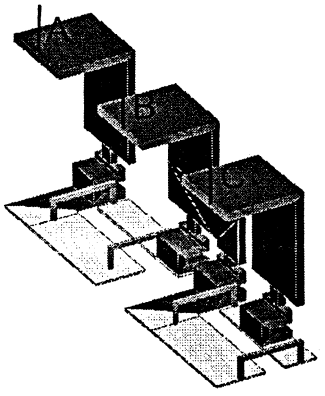


Figure II.49 : Géométrie du module.

Le champ est calculé comme indiqué au paragraphe II.3.2.2, l'effet du radiateur placé au-dessous du module doit être pris en compte.

Le champ est toujours calculé à partir du courant mesuré, dont la forme à la fermeture est représentée dans la figure II.50.

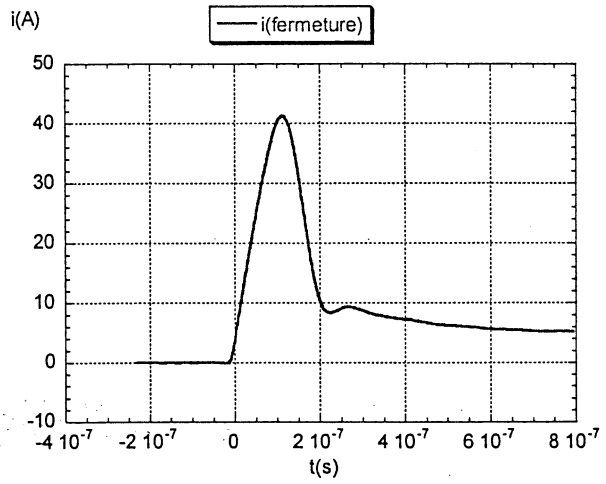


Figure II.50: Courant à la fermeture.

On note la très mauvaise qualité de la diode du MOSFET et la faiblesse de l'inducatnce de maille.

La fem induite aux bornes de l'antenne dans le cas où l'axe de celle ci est porté par (oy) est donnée par:

$$fem_{(oy)} = \mu_0 \frac{H_y(M)}{i} \pi r^2 \frac{di}{dt} \qquad \text{(II.58)}$$

Où $H_y(M)$ est la composante selon (oy) du champ crée au point M centre de l'antenne.

Dans la figure II.51, on compare la fem calculée à celle mesurée.

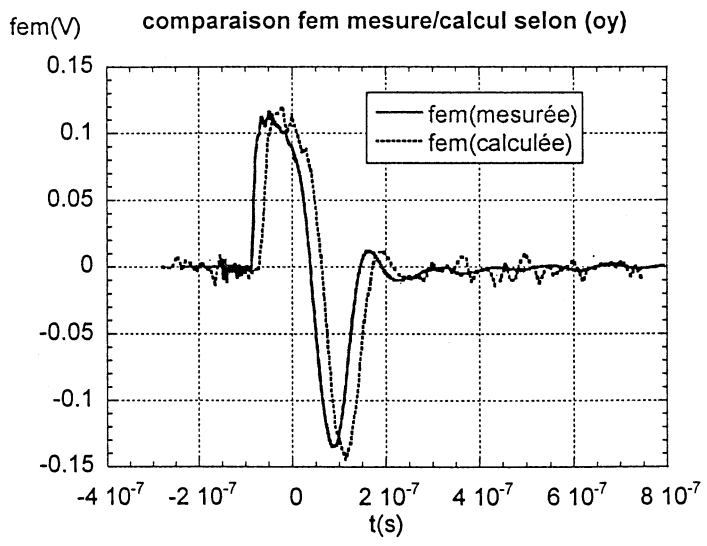


Figure II.51: Comparaison fem mesurée/calculée à la fermeture (axe de l'antenne=(oy))

De même:

$$fem_{(ox)} = \mu_0 \frac{H_x(M)}{i} \pi r^2 \frac{di}{dt} \tag{II.59}$$

$$fem_{(oz)} = \mu_0 \frac{H_z(M)}{i} \pi r^2 \frac{di}{dt} \tag{II.60}$$

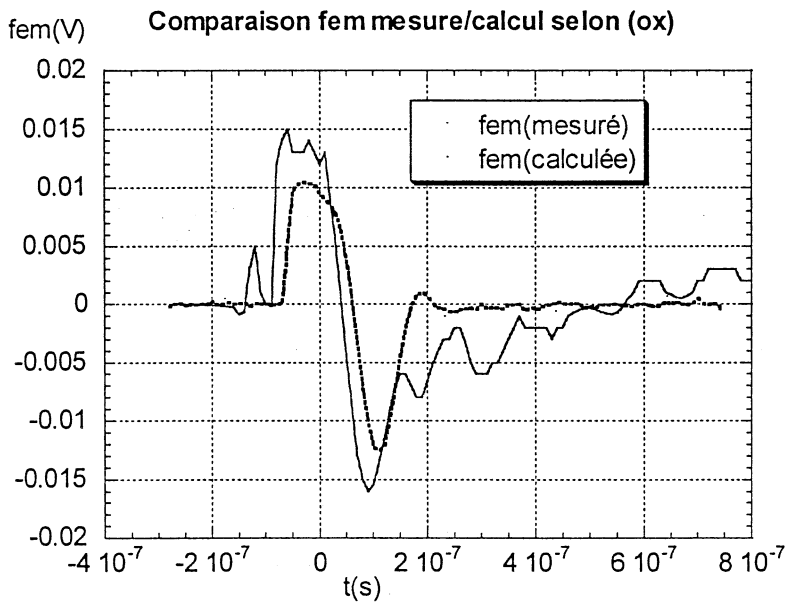


Figure II.52: Comparaison fem mesurée/calculée à la fermeture (axe de l'antenne=(ox))

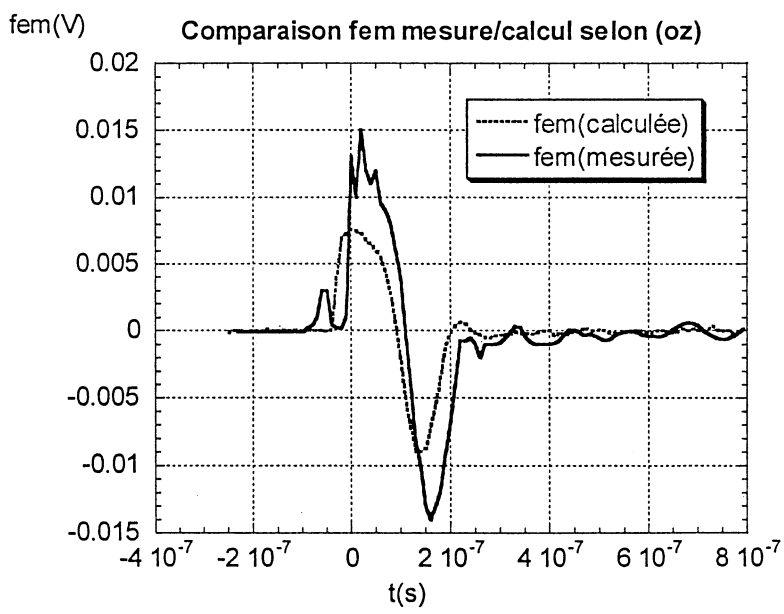


Figure II.53: Comparaison fem mesurée/calculée à la fermeture (axe de l'antenne=(oz))

On constate que la composante selon (oy) est 10 fois plus grande que les deux autres composantes, ce qui a pour conséquence une meilleure précision pour cette composante.

On voit bien que notre approche donne une bonne approximation pour la composante Y du champ, par contre pour les deux autres composantes le champ crée par le module est tellement faible qu'il devient comparable au champ crée par les autres parties du montage (circuit de commande, bus bar...).

Dans la figure II.54, on effectue une comparaison fréquentielle entre la fem mesurée et celle mesurée, dans le cas où l'axe de l'antenne est porté par (oy).

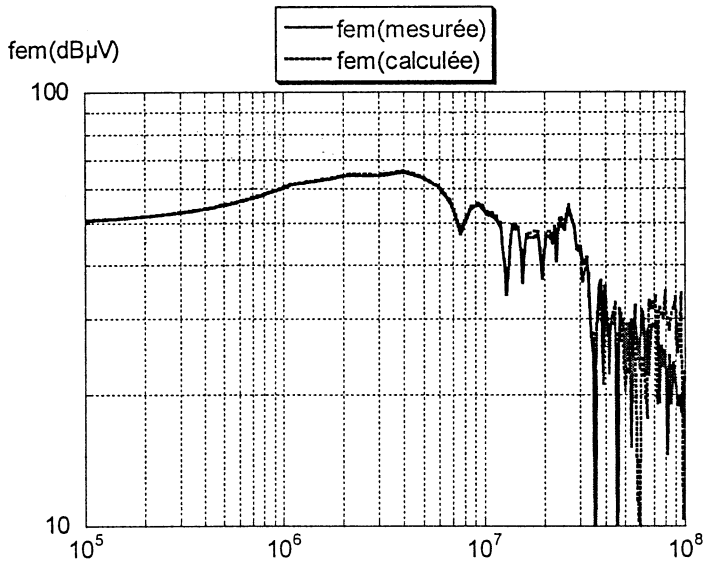


Figure II.54: Comparaison fréquentielle fem mesurée/calculée (axe de l'antenne=(oy)).

II.5.3 Conclusion:

Sur cet exemple industriel, nous avons validé l'ensemble de la chaîne: modélisation, calcul, mesure. En particulier, l'approche filiforme et son extension par subdivision semble particulièrement efficace, tant qu'on reste dans l'hypothèse "champ proche".

II.6 Champ électromagnétique non proche crée par un circuit électrique:

Dés que la distance entre la source et le point d'observation devient comparable à la longueur d'onde, l'effet du retard doit être pris en compte et ainsi les formules du II.2 ne sont plus applicables.

Tout comme pour le champ proche, on calculera les champs rayonnés par une branche et une maille élémentaires. Trois approches de calcul seront présentées dans cette section, la première consiste en un calcul direct du potentiel vecteur, la deuxième consiste à subdiviser le circuit en dipôles de Hertz dont on sait calculer le champ rayonné, la dernière approche consiste à déduire le champ lointain à partir du champ proche.

On fera cependant l'hypothèse que les dimensions du circuit sont négligeables devant la longueur d'onde, ce qui signifie que le courant est constant le long du conducteur.

II.6.1 Calcul direct du potentiel vecteur:

II.6.1.1 Champ produit par une branche élémentaire:

Considérons une branche parallèle à (ox) dont les coordonnées de ces extrémités sont respectivement (x_d,y_1,z_1) et (x_f,y_1,z_1) (figure II.55). Supposons que cette branche est parcourue par un courant sinusoïdal: $I(t) = I_m e^{j\omega t}$.

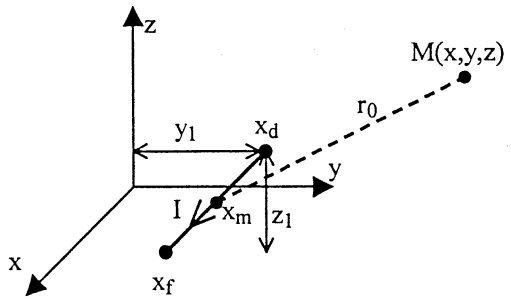


Figure II.55: Champ non proche crée par une branche parallèle à (ox).

Le potentiel vecteur magnétique crée par cette branche est portée par (ox), son expression est donnée par:

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{x_d}^{x_f} \frac{e^{-j\beta r}}{r} dx \qquad \text{(II.61)}$$

Par hypothèse r>>L, et donc on peut faire l'approximation suivante:

$$r \approx \sqrt{(x-x_m)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2} = r_0 \qquad \text{(II.62)}$$

avec: $x_m = \dfrac{x_d + x_f}{2}$

D'où:

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} I\, L \frac{e^{-j\beta r_0}}{r_0} \qquad \text{(II.63)}$$

Le champ H se déduit par: $\vec{H} = \dfrac{1}{\mu_0} \mathrm{rot}\,\vec{A}$. On trouve:

$$H_x = 0 \qquad \text{(II.64)}$$

$$H_y = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial A_x}{\partial z} = -\frac{IL(z-z_1)}{4\pi}\frac{1+j\beta r_0}{r_0^3} e^{-j\beta r_0} \qquad \text{(II.65)}$$

$$H_z = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{IL(y-y_1)}{4\pi}\frac{1+j\beta r_0}{r_0^3} e^{-j\beta r_0} \qquad \text{(II.66)}$$

Le champ E se déduit par: $\vec{E} = \dfrac{1}{j\omega\varepsilon_0} \mathrm{rot}\,\vec{H}$. On trouve:

$$E_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{IL}{4\pi j\omega\varepsilon_0}\frac{e^{-j\beta r_0}}{r_0^3}\left[2(1+j\beta r_0) - \frac{r_0^2-(x-x_m)^2}{r_0^2}\left(3+3j\beta r_0-\beta^2 r_0^2\right)\right] \qquad \text{(II.67)}$$

$$E_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{IL(y-y_1)(x-x_m)}{4\pi j\omega\varepsilon_0}\frac{e^{-j\beta r_0}}{r_0^5}\left(3+3j\beta r_0-\beta^2 r_0^2\right) \qquad \text{(II.68)}$$

$$E_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} = -\frac{IL(z-z_1)(x-x_m)}{4\pi j\omega\varepsilon_0}\frac{e^{-j\beta r_0}}{r_0^5}\left(3+3j\beta r_0-\beta^2 r_0^2\right) \qquad \text{(II.69)}$$

De même pour une branche parallèle à (oy), on a:

$$A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} I\, L \frac{e^{-j\beta r_0}}{r_0} \qquad \text{(II.70)}$$

Avec: $r_0 = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_m)^2+(z-z_1)^2}$.

Donc:

$$H_x = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{IL(z-z_1)}{4\pi}\frac{1+j\beta r_0}{r_0^3} e^{-j\beta r_0} \qquad \text{(II.71)}$$

$$H_y = 0 \qquad \text{(II.72)}$$

$$H_z = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial A_y}{\partial x} = -\frac{IL(x-x_1)}{4\pi}\frac{1+j\beta r_0}{r_0^3} e^{-j\beta r_0} \qquad \text{(II.73)}$$

Et:

$$E_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} = -\frac{IL(x-x_1)(y-y_m)}{4\pi j\omega\varepsilon_0}\frac{e^{-j\beta r_0}}{r_0^5}\left(3+3j\beta r_0-\beta^2 r_0^2\right) \quad \text{(II.74)}$$

$$E_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{-IL}{4\pi j\omega\varepsilon_0}\frac{e^{-j\beta r_0}}{r_0^3}\left[2(1+j\beta r_0)-\frac{r_0^2-(y-y_m)^2}{r_0^2}\left(3+3j\beta r_0-\beta^2 r_0^2\right)\right] \quad \text{(II.75)}$$

$$E_z = -\frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{IL(z-z_1)(y-y_m)}{4\pi j\omega\varepsilon_0}\frac{e^{-j\beta r_0}}{r_0^5}\left(3+3j\beta r_0-\beta^2 r_0^2\right) \quad \text{(II.76)}$$

II.6.1.2 Champ produit par une boucle rectangulaire:

Prenons maintenant une boucle rectangulaire parcourue par un courant sinusoïdal dont les dimensions sont négligeables devant la distance par rapport au point d'observation et devant la longueur d'onde.

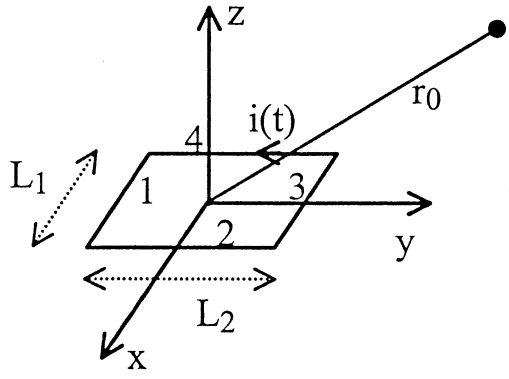


Figure II.56: Champ non proche crée par une boucle rectangulaire.

Le champ crée par le conducteur 1 est:

$$H_{y_1} = -\frac{IL_1 z}{4\pi}\frac{1+j\beta r_1}{r_1^3}e^{-j\beta r_1} \quad \text{(II.77)}$$

$$H_{z_1} = \frac{IL_1\left(y+\frac{L_2}{2}\right)}{4\pi}\frac{1+j\beta r_1}{r_1^3}e^{-j\beta r_1} \quad \text{(II.78)}$$

avec:

$$r_1 = \sqrt{x^2+\left(y+\frac{L_2}{2}\right)^2+z^2} \quad \text{(II.79)}$$

$$E_{x_1} = \frac{IL_1}{4\pi j\omega\varepsilon_0}\frac{e^{-j\beta r_1}}{r_1^3}\left[2(1+j\beta r_1) - \frac{r_1^2 - x^2}{r_1^2}\left(3 + 3j\beta r_1 - \beta^2 r_1^2\right)\right] \quad \text{(II.80)}$$

$$E_{y_1} = \frac{IL_1\left(y + \frac{L_2}{2}\right)x}{4\pi j\omega\varepsilon_0}\frac{e^{-j\beta r_1}}{r_1^5}\left(3 + 3j\beta r_1 - \beta^2 r_1^2\right) \quad \text{(II.81)}$$

$$E_{z_1} = -\frac{IL_1 xz}{4\pi j\omega\varepsilon_0}\frac{e^{-j\beta r_1}}{r_1^5}\left(3 + 3j\beta r_1 - \beta^2 r_1^2\right) \quad \text{(II.82)}$$

Pour obtenir le champ crée par le conducteur 3, il suffit d'utiliser les formules du conducteur 1 en inversant le signe et en remplaçant r_1 par $r_3 = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{L_2}{2}\right)^2 + z^2}$.

D'autre part le champ crée par le conducteur 2 est donné par:

$$H_{x_2} = \frac{IL_2 z}{4\pi}\frac{1 + j\beta r_2}{r_2^3}e^{-j\beta r_2} \quad \text{(II.83)}$$

$$H_{z_2} = -\frac{IL_2\left(x - \frac{L_1}{2}\right)}{4\pi}\frac{1 + j\beta r_2}{r_2^3}e^{-j\beta r_2} \quad \text{(II.84)}$$

$$E_{x_2} = \frac{IL_2\left(x - \frac{L_1}{2}\right)y}{4\pi j\omega\varepsilon_0}\frac{e^{-j\beta r_2}}{r_2^5}\left(3 + 3j\beta r_2 - \beta^2 r_2^2\right) \quad \text{(II.85)}$$

$$E_{y_2} = -\frac{IL_2}{4\pi j\omega\varepsilon_0}\frac{e^{-j\beta r_2}}{r_2^3}\left[2(1 + j\beta r_2) - \frac{r_2^2 - y^2}{r_2^2}\left(3 + 3j\beta r_2 - \beta^2 r_2^2\right)\right] \quad \text{(II.86)}$$

$$E_{z_2} = \frac{IL_2 yz}{4\pi j\omega\varepsilon_0}\frac{e^{-j\beta r_2}}{r_2^5}\left(3 + 3j\beta r_2 - \beta^2 r_2^2\right) \quad \text{(II.87)}$$

Pour obtenir le champ crée par le conducteur 4, il suffit d'utiliser les formules du conducteur 2 en inversant le signe et en remplaçant r_2 par $r_4 = \sqrt{\left(x + \frac{L_1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2}$

En définitif, on obtient le champ total crée par la boucle:

$$H_x = \frac{IL_2 z}{4\pi}\left[\frac{1 + j\beta r_2}{r_2^3}e^{-j\beta r_2} - \frac{1 + j\beta r_4}{r_4^3}e^{-j\beta r_4}\right] \quad \text{(II.88)}$$

$$H_y = \frac{IL_1 z}{4\pi}\left[\frac{1 + j\beta r_3}{r_3^3}e^{-j\beta r_3} - \frac{1 + j\beta r_1}{r_1^3}e^{-j\beta r_1}\right] \quad \text{(II.89)}$$

$$H_z = \frac{IL_1}{4\pi}\left[\left(y+\frac{L_2}{2}\right)\frac{1+j\beta r_1}{r_1^3}e^{-j\beta r_1} - \left(y-\frac{L_2}{2}\right)\frac{1+j\beta r_3}{r_3^3}e^{-j\beta r_3}\right] + \frac{IL_2}{4\pi}\left[\left(x+\frac{L_1}{2}\right)\frac{1+j\beta r_4}{r_4^3}e^{-j\beta r_4} - \left(x-\frac{L_1}{2}\right)\frac{1+j\beta r_2}{r_2^3}e^{-j\beta r_2}\right] \quad \text{(II.90)}$$

$$E_x = \frac{IL_1}{4\pi j\omega\varepsilon_0}\left\{\begin{array}{l}\frac{e^{-j\beta r_1}}{r_1^3}\left[2(1+j\beta r_1) - \frac{r_1^2-x^2}{r_1^2}\left(3+3j\beta r_1-\beta^2 r_1^2\right)\right] \\ -\frac{e^{-j\beta r_3}}{r_3^3}\left[2(1+j\beta r_3) - \frac{r_3^2-x^2}{r_3^2}\left(3+3j\beta r_3-\beta^2 r_3^2\right)\right]\end{array}\right\} + \frac{IL_2 y}{4\pi j\omega\varepsilon_0}\left\{\frac{\left(x-\frac{L_1}{2}\right)e^{-j\beta r_2}}{r_2^5}\left(3+3j\beta r_2-\beta^2 r_2^2\right) - \frac{\left(x+\frac{L_1}{2}\right)e^{-j\beta r_4}}{r_4^5}\left(3+3j\beta r_4-\beta^2 r_4^2\right)\right\} \quad \text{(II.91)}$$

$$E_y = \frac{IL_2}{4\pi j\omega\varepsilon_0}\left\{\begin{array}{l}\frac{e^{-j\beta r_4}}{r_4^3}\left[2(1+j\beta r_4) - \frac{r_4^2-y^2}{r_4^2}\left(3+3j\beta r_4-\beta^2 r_4^2\right)\right] \\ -\frac{e^{-j\beta r_2}}{r_2^3}\left[2(1+j\beta r_2) - \frac{r_2^2-x^2}{r_2^2}\left(3+3j\beta r_2-\beta^2 r_2^2\right)\right]\end{array}\right\} + \frac{IL_1 x}{4\pi j\omega\varepsilon_0}\left\{\frac{\left(y+\frac{L_2}{2}\right)e^{-j\beta r_1}}{r_1^5}\left(3+3j\beta r_1-\beta^2 r_1^2\right) - \frac{\left(y-\frac{L_2}{2}\right)e^{-j\beta r_3}}{r_3^5}\left(3+3j\beta r_3-\beta^2 r_3^2\right)\right\} \quad \text{(II.92)}$$

$$E_z = \frac{IL_1 xz}{4\pi j\omega\varepsilon_0}\left[\frac{e^{-j\beta r_3}}{r_3^5}\left(3+3j\beta r_3-\beta^2 r_3^2\right) - \frac{e^{-j\beta r_1}}{r_1^5}\left(3+3j\beta r_1-\beta^2 r_1^2\right)\right] + \frac{IL_2 yz}{4\pi j\omega\varepsilon_0}\left[\frac{e^{-j\beta r_2}}{r_2^5}\left(3+3j\beta r_2-\beta^2 r_2^2\right) - \frac{e^{-j\beta r_4}}{r_4^5}\left(3+3j\beta r_4-\beta^2 r_4^2\right)\right] \quad \text{(II.93)}$$

II.6.2 Approche par la méthode des dipôles :

Dans cette approche le circuit source est décomposé en dipôles de Hertz dont le principe a été détaillé dans le chapitre précédent. La longueur du dipôle doit être négligeable d'une part devant la longueur d'onde afin de considérer que le courant est uniforme le long du dipôle et d'autre part devant la distance entre le dipôle et le point d'observation.

On rappelle que le champ crée par un dipôle en un point M est donné par :

$$E_r = 2\frac{Idl}{4\pi}Z_0\beta^2\cos\theta\left(\frac{1}{\beta^2 r^2} - j\frac{1}{\beta^3 r^3}\right)e^{-j\beta r} \qquad (II.94)$$

$$E_\theta = \frac{Idl}{4\pi}Z_0\beta^2\sin\theta\left(j\frac{1}{\beta r} + \frac{1}{\beta^2 r^2} - j\frac{1}{\beta^3 r^3}\right)e^{-j\beta r} \qquad (II.95)$$

$$H_\varphi = \frac{Idl}{4\pi}\beta^2\sin\theta\left(j\frac{1}{\beta r} + \frac{1}{\beta^2 r^2}\right)e^{-j\beta r} \qquad (II.96)$$

Pour calculer le champ crée par la boucle de la figure II.2, il faut transformer la contribution de chaque dipôle en coordonnées cartésiennes.

L'avantage de cette méthode est qu'elle englobe aussi bien pour le calcul du champ proche que pour le champ lointain, et que d'autre part, elle s'applique dans le cas où les dimensions du circuit source deviendraient comparables à la longueur d'onde.

Dans chaque cas il faut choisir la longueur du dipôle qui vérifie les deux hypothèses citées au paravent ($L \ll \lambda$, $L \ll r$).

Cette méthode est plutôt utile en champ lointain, dans ce cas le terme $e^{-j\beta r}$ n'est plus égal à 1 et donc on ne peut plus calculer analytiquement A par l'intégrale comme on l'a fait dans le cas du champ proche.

D'autre part en champ lointain, on a besoin d'un nombre de subdivision plus faible qu'en champ proche.

Validation de la méthode des dipôles:

Comme les mesures sont plus simples à faire en champ proche, on va essayer de valider la méthode des dipôles en champ proche. En effet, on a placée l'antenne à une hauteur h=5cm du circuit, on choisit donc une longueur dl=0.5cm pour chaque dipôle.

On calcule la fem induite aux bornes de l'antenne par la formule :

$$E(f) = \mu_0\, 2\pi f\, H_M(f)\, \pi r^2 \qquad (II.97)$$

$H_M(f)$ est le champ crée au point M centre de l'antenne, il est calculé par la méthode des dipôles.

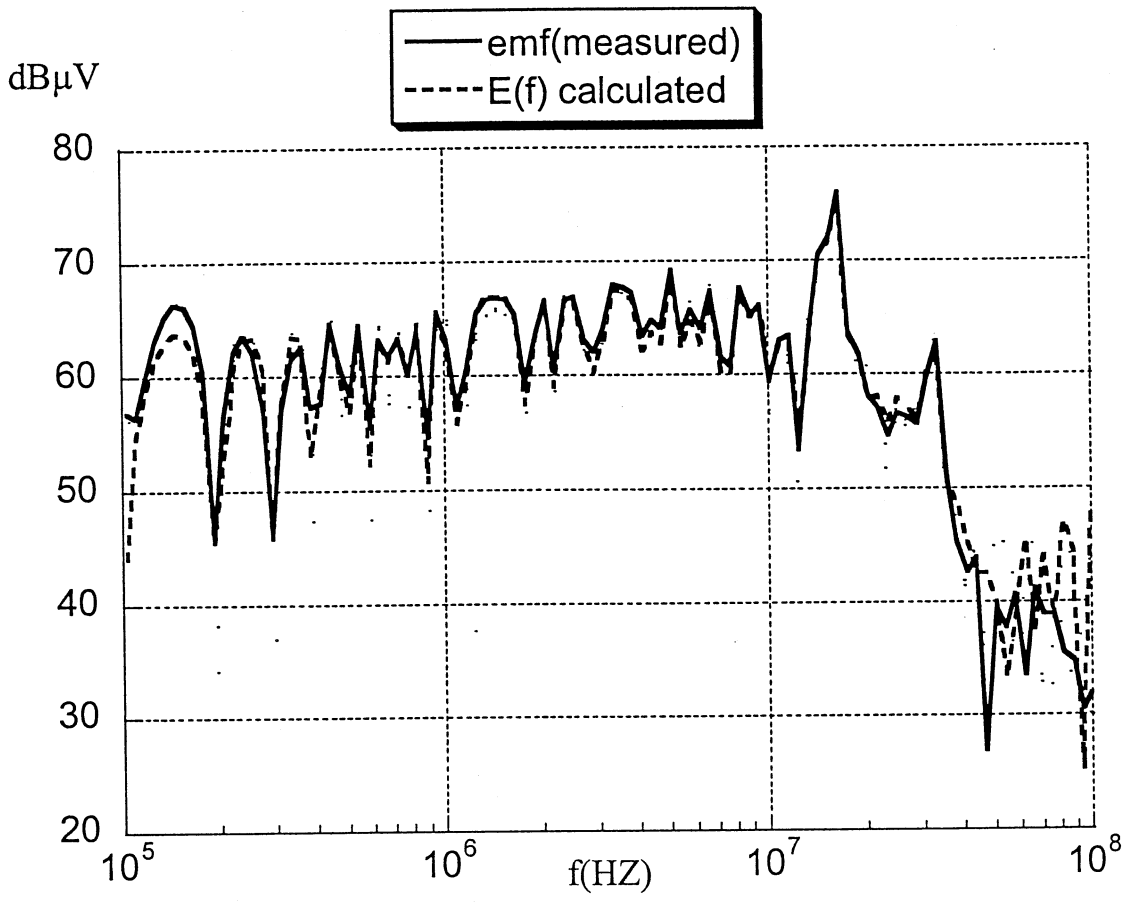


Figure II.57: validation de la méthode des dipôles.

On constate une bonne coïncidence entre la fem calculée et la fem mesurée, ce qui signifie qu'on a choisit la bonne dimension pour les dipôle (1/10 de la distance entre le circuit et le point d'observation).

II.6.3. Calcul du champ lointain à partir du champ proche:

On considère deux surfaces S_1 et S_2 entourant la source, S_1 étant situé dans une région proche de la source et S_2 à l'infinie, on appelle V le volume situé entre S_1 et S_2

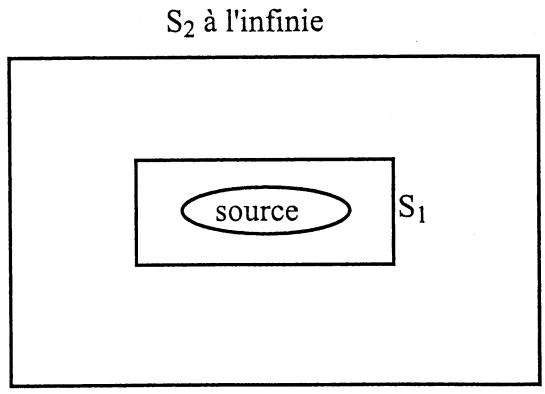


Figure II.58: Calcul du champ lointain à partir du champ proche.

On va démontrer que la connaissance du champ électromagnétique sur S_1 permet de déduire le champ en n'importe quel point de V.

La formule de Green pour deux scalaires quelconques s'écrit:

$$\iiint_V \left[V \cdot \nabla^2 U - U \cdot \nabla^2 V\right] \quad dv = \oiint_{S_1 \cup S_2} \left[V \cdot \frac{\partial U}{\partial n} - U \cdot \frac{\partial V}{\partial n}\right] dS \qquad \text{(II.98)}$$

avec: $\frac{\partial U}{\partial n} = \vec{n} \cdot \text{grad}\, U$, n étant le vecteur normal à la surface. On appelle r le vecteur qui définie la position du point de V où l'on veut calculer le champ.

On prend $U(r_1)=H_x(r_1)$ et $V(r,r_1) = \frac{e^{-jk|r-r_1|}}{|r-r_1|}$, on pose $R = |r - r_1|$.

On a: $\nabla^2 V = e^{-jkR}\left[\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{k^2}{R}\right]$, d'autre part on sait que $\nabla^2 H_x + k^2 H_x = 0$, donc le terme de gauche de (II.98) s'écrit:

$$\iiint_V \left[V.\nabla^2 U - U.\nabla^2 V\right] dv = \iiint_V -H_x\left[\nabla^2 V + k^2 V\right] dv = \iiint_V -H_x(r_1) e^{-jkR} \nabla^2\left(\frac{1}{R}\right) dv \qquad \text{(II.99)}$$
$$= -4\pi H_x(r)$$

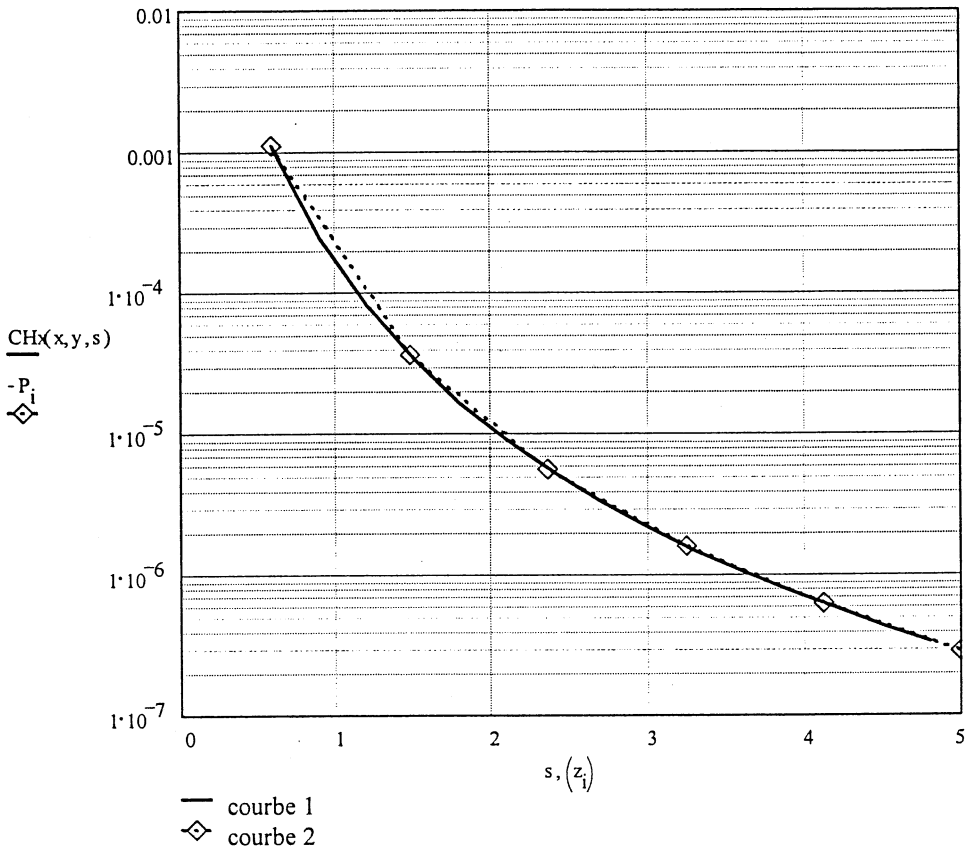
D'où:

$$H_x(r) = \frac{1}{4\pi} \oiint_{S_1} \left[H_x(r_1) \cdot \frac{\partial V(r,r_1)}{\partial n} - V(r,r_1) \cdot \frac{\partial H_x(r_1)}{\partial n}\right] \quad dS \qquad \text{(II.100)}$$

Pour une boucle rectangulaire (L_1=10cm, L_2=5cm), on compare le champ calculé à partir du champ proche (dont les expressions analytiques sont données dans le chapitre précédent) au champ calculé de la façon directe (méthode explicitée dans le paragraphe précédent).

On considère que la boucle est traversée par un courant sinusoïdal d'amplitude 1A et de fréquence 50kHz.

Concernant la position du point d'observation on garde x=15cm, y=10cm et on fait varier z de 0.6 à 5m.



c1: direct, c2: à partir du chp proche

Figure II.59: Comparaison entre la méthode directe et le calcul à partir du champ proche.

On constate que les deux méthodes sont parfaitement équivalentes.

II.7 Conclusion:

Grâce aux expressions analytiques développées dans ce chapitre, nous pouvons calculer le champ rayonné à partir des grandeurs électriques et géométriques des circuits constituant le convertisseur statique. Le calcul analytique a été effectué non seulement dans le cas du champ proche, mais aussi dans le cas du champ lointain. Ces résultats ont été comparés à ceux obtenus par la mesure, mais uniquement dans le cas du champ proche.

Comme première étape, les champs ont été calculés à partir du courant mesuré, les résultats obtenus sont satisfaisants. Par conséquent, la connaissance précise du courant permet un calcul exact du champ rayonné.

Il devient alors de plus en plus indispensable de disposer d'un outil de simulation performant. Ceci nécessite des modèles précis de semiconducteurs et de composants passifs. Ces derniers incluent selfs, condensateurs, résistances et câblage, qui aux fréquences impliquées (jusqu'à 200MHz), ne peuvent plus être considérés comme idéaux.

Dans le prochain chapitre, on va faire le point sur les différentes méthodes de modélisation de câblage, tout en essayant de montrer comment elles s'appliquent dans des cas classiques d'électronique de puissance.

PARTIE III

MODELISATION DU CABLAGE

III.1 Introduction :

Un nombre considérable de méthodes de modélisation électrique de la connectique existe actuellement. Cependant, les conditions spécifiques rencontrées dans les structures d'électronique de puissance nous permettent de constater que certaines méthodes sont plus appropriées à notre problème que d'autres. Ces conditions particulières sont dues à la faible longueur des conducteurs employés par rapport aux fréquences de répétition et celles équivalentes dues aux fronts (f<200MHz), et au fait que dans un premier temps, on peut négliger l'influence des champs électromagnétiques extérieurs (champs dont l'origine se trouve en dehors du montage étudié).

En outre, du fait que l'on veut étudier les phénomènes électromagnétiques avec des simulateurs électriques pour pouvoir introduire les modèles de semiconducteurs, on a une préférence pour les méthodes «orientées circuit», c'est à dire les méthodes qui représentent les phénomènes électromagnétiques par des réseaux de composants passifs (R-L-C).[3].

Les méthodes de modélisation les plus connues se classent en deux catégories suivant la manière avec laquelle on applique les équations de Maxwell :

- Les méthodes intégrales.
- Les méthodes différentielles.

Les méthodes qui seront employées dans ce chapitre font partie des méthodes intégrales.

Il s'agit de la méthode PEEC (Partial Element Equivalent Circuit), de la méthode des moments (MoM) et de la méthode des lignes de transmission (MTL).

Dans ce qui suit, ces différentes méthodes seront détaillées, dans un cadre général, puis dans leur faculté de traiter les aspects connectique en Electronique de Puissance.

III.2 La méthode PEEC:

III.2.1 Introduction:

La méthode PEEC est une méthode de modélisation d'interconnexions, issue d'une description de la géométrie par méthode intégrale. Chaque partie de la géométrie est représentée par une équation intégrale qui peut ensuite être interprétée en terme de composants électriques équivalents. Ces composants équivalents sont directement liés à une position physique des différentes parties de la géométrie. C'est pourquoi on appelle ces composants des éléments partiels.

Dans le cadre du régime quasi-stationnaire, les solutions données par C.Hoer et C.Love [45] donnent l'inductance partielle et la mutuelle partielle entre deux barres, et présentent l'avantage de rester valables lorsque la longueur de la barre devient petite devant sa hauteur ou sa largeur. Dans les expressions des inductances partielles des barres rectangulaires, il est présupposé que le courant est uniformément réparti sur une coupe transversale de la barre. C'est pourquoi la méthode prévoit une subdivision d'une interconnexion en plusieurs barres à répartition de courant uniforme si les effets de fréquence doivent être représentés. L'effet de la fréquence est alors représenté par l'inductance mutuelle entre les différentes barres de la subdivision.

La méthode PEEC généralise la notion de composant partiel "Partial Equivalent Element Circuit". Elle est l'œuvre de A.E.Ruehli.

Dans sa première version, uniquement le comportement inductif et résistif était inclus dans la modélisation des interconnexions [41]. Ensuite, les améliorations suivantes ont été apportées par ordre chronologique: le comportement capacitif idéal des interconnexions [50], combinaison des modèles inductifs et capacitifs [42], les interconnexions au dessus d'un plan de masse [47], l'effet du retard (méthode rPEEC) [44 et 29]. Les travaux antérieurs effectués par J.L.Schanen [1] et E.Clavel [2] sont basés sur la première version de la méthode PEEC qui tient compte uniquement du comportement inductif et résistif des interconnexions.

Dans ce chapitre, on tiendra compte des effets capacitifs et de l'effet du retard [44].

III.2.2 Mise en équation générale :

On considère un conducteur quelconque, le champ électrique total en un point du conducteur vérifie la loi d'Ohm:

$$\vec{E}_T = \frac{\vec{J}}{\sigma} \qquad \text{(III.1)}$$

où σ est la conductivité.

D'autre part, le champ total E_T se décompose en une composante appliquée E_0 et une composante induite E', cette dernière composante provient des charges et des courants du circuit lui-même.

On a donc:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_0 + \vec{E}' \qquad \text{(III.2)}$$

avec:

$$\vec{E}' = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad}\,\phi \qquad \text{(III.3)}$$

D'où:

$$\vec{E}_0 = \frac{\vec{J}}{\sigma} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{grad}\,\phi \qquad \text{(III.4)}$$

Pour une structure de K conducteurs, les potentiels sont donnés par [42]:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_{k=1}^{K} \frac{\mu}{4\pi} \int_{v_k} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{J}(\vec{r}',t')\,dv' \qquad \text{(III.5)}$$

$$\phi(\vec{r},t) = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{v_k} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} q(\vec{r}',t')\,dv' \qquad \text{(III.6)}$$

$\vec{r}$ est la position du point d'observation.

$\vec{r}'$ est la position de l'élément d'intégration.

t' est le temps retardé, donné par:

$$t' = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v} \qquad \text{(III.7)}$$

v étant la vitesse de propagation: $v = \dfrac{c}{\sqrt{\mu_r\,\varepsilon_r}}$.

L'équation III.4 s'écrit pour une structure à K conducteurs sous la forme III.8:

$$\vec{E}_0(\vec{r},t) = \frac{\vec{J}(\vec{r},t)}{\sigma} + \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\mu}{4\pi} \int_{v_k} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{J}(\vec{r}',t')\,dv'\right] + \sum_{k=1}^{K} \text{grad}\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{v_k} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} q(\vec{r}',t')\,dv'\right] \qquad \text{(III.8)}$$

La première étape dans la méthode PEEC consiste à subdiviser chaque conducteur en volumes élémentaires appelés mailles.

Les inconnus ($\vec{J}$ et q) seront supposées constantes sur chaque maille.

Prenons une base orthogonale $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, la densité de courant $\vec{J}$ s'écrit alors:

$$\vec{J} = J_x\,\vec{x} + J_y\,\vec{y} + J_z\,\vec{z}$$

Soit $N_{\gamma k}$ le nombre total de mailles dans la direction γ pour le conducteur k, où $\gamma = x, y, z$.

La projection de l'équation III.8 sur γ s'exprime de la manière suivante:

$$\vec{E}_{0\gamma}(\vec{r},t) = \frac{\vec{J}_\gamma(\vec{r},t)}{\sigma} + \sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{N_{\gamma k}}\left[\frac{\mu}{4\pi}\int_{v_{nk}}\frac{dv'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]\frac{\partial J_{\gamma nk}(t_n)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{K}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{v_k}\frac{q(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv'\right] \qquad \text{(III.9)}$$

où $t_n = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_n|}{v}$, $\vec{r}_n$ étant la position du centre de la maille n.

En intégrant l'équation III.9 sur la $l^{ième}$ maille et en divisant par a_ℓ la section de l'élément v_ℓ (a_ℓ est perpendiculaire à la direction de la ligne de courant), on obtient:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_\ell}\int_{v_\ell}E_{0\gamma}(\vec{r},t)\,dv_\ell = \frac{1}{\sigma a_\ell}\int_{v_\ell}J_\gamma(\vec{r},t)\,dv_\ell &+ \sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{N_{\gamma k}}\frac{\mu}{4\pi}\frac{1}{a_\ell}\left[\int_{v_\ell}\int_{v_{nk}}\frac{dv'dv_\ell}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]\frac{\partial J_{\gamma nk}(t_n)}{\partial t} \\ &+ \sum_{k=1}^{K}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a_\ell}\int_{v_\ell}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\int_{S_k}\frac{q(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}ds'\right]dv_\ell\end{aligned} \qquad \text{(III.10)}$$

Le terme de gauche est la tension appliquée, le premier terme de droite est un terme résistif, le deuxième est un terme inductif et le troisième est un terme capacitif.

Ces différents termes seront détaillés séparément dans ce qui suit.

III.2.2.1 Tension appliquée:

Le premier terme de III.10 est la tension appliquée, il n'est autre que l'intégrale du champ appliqué sur le circuit. Dans un circuit comme une antenne réceptrice (figure III.1.a), le champ appliqué est clairement distribué sur le circuit, la fem induite est donnée par:

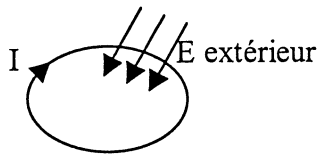
$$V_0 = \oint_C \vec{E}_0\,d\vec{l} \qquad \text{(III.11)}$$

Pour une source localisée (figure III.1.b), le champ appliqué peut être considéré comme un gradient d'un potentiel.[40]

La tension source est reliée au champ par:

$$V_0 = \int_{2\,(\text{circuit})}^{1} \vec{E}_0 \, d\vec{l} = - \int_{1\,(\text{source})}^{2} \vec{E}_0 \, d\vec{l} \qquad \text{(III.12)}$$

Les deux intégrales sont opposées car l'intégrale d'un gradient sur un circuit fermé est nul.



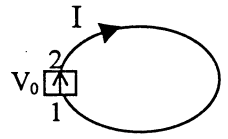


Figure III.1 (a): boucle attaquée par un E extérieur **(b):** boucle avec source localisée.

III.2.2.2 *Terme résistif:*

Comme on peut considérer que la densité de courant est constante dans une maille élémentaire, le premier terme de droite de l'égalité III.10 peut s'écrire sous la forme :

$$v_r = \frac{1}{\sigma a_\ell} \int_{v_\ell} J_\gamma(\vec{r},t)\, dv_\ell = \frac{I_{\gamma\ell}\, \Delta_{\gamma\ell}}{\sigma a_\ell} = R_{\gamma\ell}\, I_{\gamma\ell} \qquad \text{(III.13)}$$

Il s'agit donc de la chute de tension d'origine résistive sur la maille ℓ.

III.2.3 Terme inductif:

En remplaçant $J_{\gamma nk}$ par $\frac{I_{\gamma nk}}{a_{\gamma nk}}$ dans le deuxième terme de droite, on obtient:

$$v_L = \sum_{k=1}^{K} \sum_{n=1}^{N_{\gamma k}} \left[\frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{a_\ell\, a_{\gamma nk}} \int_{v_\ell} \int_{v_{nk}} \frac{dv'\, dv_\ell}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \frac{\partial I_{\gamma nk}(t_n)}{\partial t} \qquad \text{(III.14)}$$

Le terme entre accolades n'est autre que l'inductance partielle entre l'élément v_ℓ et l'élément v_{nk} [41], par conséquent le deuxième terme de gauche se met sous la forme:

$$v_L = \sum_{k=1}^{K} \sum_{n=1}^{N_{\gamma k}} Lp_{\ell,\gamma nk} \frac{\partial I_{\gamma nk}(t_n)}{\partial t} \qquad \text{(III.15)}$$

Le calcul de l'inductance partielle a fait l'objet de nombreux travaux. En particulier, suivant la complexité géométrique, des formules analytiques peuvent être calculées.

Dans ce qui suit un rappel des différentes définitions et formules concernant l'inductance partielle est présenté.

III.2.3.1 Notion d'inductance partielle:

On considère par exemple une boucle rectangulaire filiforme parcourue par un courant i (figure III.2), les dimensions de la boucle sont supposées négligeables devant la longueur d'onde, par conséquent le courant est constant le long de la boucle et le retard est négligeable (t'=t).

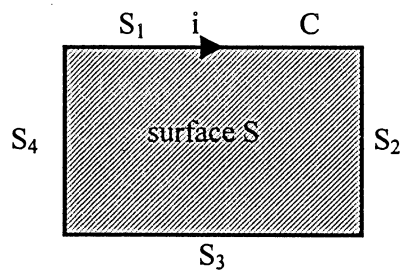


Figure III.2: Boucle rectangulaire filiforme.

D'après le théorème de Stokes, on peut écrire:

$$\oint_C \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\vec{l} = \frac{d}{dt}\oint_C \vec{A}.d\vec{l} = \frac{d}{dt}\iint_S \text{rot}\,\vec{A}\; d\vec{S} = \frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\; d\vec{S} = L_b \frac{di}{dt} \qquad \text{(III.16)}$$

où L_b est l'inductance externe de la boucle. Elle se calcule donc plus facilement à partir du potentiel vecteur par:

$$L_b = \frac{1}{i}\oint_C \vec{A}.d\vec{l} \qquad \text{(III.17)}$$

La notion d'inductance implique un circuit fermé, toutefois la circulation du potentiel vecteur le long de la boucle peut être décomposée sur chacun des quatre segments du circuit [1]. Ainsi:

$$L_b = \frac{1}{i}\left[\int_{S_1} \vec{A}.d\vec{l} + \int_{S_2} \vec{A}.d\vec{l} + \int_{S_3} \vec{A}.d\vec{l} + \int_{S_4} \vec{A}.d\vec{l}\right] \qquad \text{(III.18)}$$

De plus le potentiel vecteur peut être considéré comme la somme de la contribution de chaque segment:

$$\vec{A} = \vec{A}_{S_1} + \vec{A}_{S_2} + \vec{A}_{S_3} + \vec{A}_{S_4} \qquad \text{(III.19)}$$

D'où:

$$L_b = \frac{1}{i}\sum_{n=1}^{4}\sum_{m=1}^{4}\int_{S_n} \vec{A}_{S_m}.d\vec{l} \qquad \text{(III.20)}$$

L'inductance partielle d'un segment est alors définie par:

$$L_{p_n} = \frac{1}{i} \int_{S_n} \vec{A}_{S_n} . d\vec{l} \qquad \text{(III.21)}$$

De même la mutuelle partielle entre les segments n et m est définie par:

$$M_{p_{mn}} = \frac{1}{i} \int_{S_n} \vec{A}_{S_m} . d\vec{l} \qquad \text{(III.22)}$$

L'inductance de la boucle s'obtient par:

$$L_b = \sum_{n=1}^{4} \sum_{m=1}^{4} Mp_{ij} \qquad \text{(III.23)}$$

III.2.3.2 Mutuelle partielle entre conducteurs filiformes:

Soient deux conducteurs filiformes S_1 et S_2 disposés comme l'indique la figure III.3.

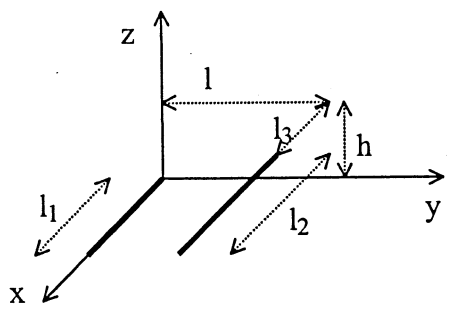


Figure III.3: Mutuelle partielle entre deux conducteurs filiformes.

La mutuelle partielle entre S_1 et S_2 est donnée par:

$$M_{p_{12}} = \frac{\mu}{4\pi}\left[f(l_3 - l_1, l, h) - f(l_3 + l_2 - l_1, l, h) + f(l_3 + l_2, l, h) - f(l_3, l, h)\right] \qquad \text{(III.24)}$$

avec:

$$f(x,l,h) = x\ln\left(x + \sqrt{x^2 + l^2 + h^2}\right) - \sqrt{x^2 + l^2 + h^2} \qquad \text{(III.25)}$$

En faisant $l_3=l=h=0$, $l_1=l_2$, on constate que M_{p12} diverge.

Pour un conducteur cylindrique, l'inductance partielle est définie comme étant la mutuelle partielle avec le pourtour interne [1].

A.N: L'inductance partielle d'un conducteur cylindrique de longueur 10cm et de diamètre 1cm, vaut: L_p=54.8 nH.

III.2.3.3 Mutuelle partielle entre deux rubans:

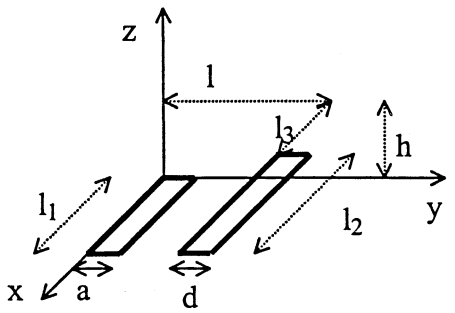


Figure III.4: Mutuelle partielle entre deux rubans.

La mutuelle entre les deux rubans de la figure III.4 est obtenue par intégrations de III.24:

$$Mpr_{12} = \frac{1}{ad}\int_0^a \int_l^{l+d} Mp_{12}\,dy_2\,dy_1 \qquad \text{(III.26)}$$

Mp_{12} étant donnée par III.24 avec $l=y_2-y_1$.[2].

On aboutit à :

$$Mpr_{12} = \frac{\mu}{4\pi ad}\begin{bmatrix} G(l_3+l_2,l+d,h) - G(l_3+l_2,l+d-a,h) - G(l_3+l_2,l,h) \\ + G(l_3+l_2,l-a,h) - G(l_3,l+d,h) + G(l_3,l+d-a,h) + G(l_3,l,h) \\ - G(l_3,l-a,h) - G(l_3+l_2-l_1,l+d,h) + G(l_3+l_2-l_1,l+d-a,h) \\ + G(l_3+l_2-l_1,l,h) - G(l_3+l_2-l_1,l-a,h) + G(l_3-l_1,l+d,h) \\ - G(l_3-l_1,l+d-a,h) - G(l_3-l_1,l,h) + G(l_3-l_1,l-a,h) \end{bmatrix} \qquad \text{(III.27)}$$

avec:

$$G(x,y,h) = \frac{y^2-h^2}{2}x\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) + \frac{x^2-h^2}{2}y\ln\left(y+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) - \frac{1}{6}\left(x^2-2h^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2} - hxy\,\mathrm{arctg}\left(\frac{xy}{h\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \qquad \text{(III.28)}$$

A.N: L'inductance partielle d'un ruban de longueur 10cm et de largeur 1cm, vaut: L_p=70.6nH.

III.2.3.4 Influence du retard sur le terme inductif:

Soit un conducteur quelconque de volume V parcouru par un courant de densité sinusoïdale $\vec{J}(\vec{r},t)=\vec{J}(\vec{r})\,e^{j\omega t}$, le potentiel vecteur crée par V en un point quelconque est donnée par:

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dv'$$

avec: $t'=t-\dfrac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}$, donc:

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}',t)\,e^{-j\beta|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dv' \qquad \text{(III.29)}$$

avec: $\beta=\dfrac{\omega}{v}$ (le nombre d'onde).

Le terme inductif s'écrit alors:

$$v_L=\int_V \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\,dv=j\omega\frac{\mu}{4\pi}\int_V\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}',t)\,e^{-j\beta|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dv'\,dv \qquad \text{(III.30)}$$

Si de plus on suppose que la densité de courant est uniforme sur V, III.30 devient:

$$\begin{aligned} v_L &= j\omega\frac{\mu}{4\pi}\vec{J}(t)\int_V\int_V \frac{e^{-j\beta|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dv'\,dv \\ &= j\omega\frac{\mu}{4\pi}\vec{J}(t)\left[\int_V\int_V \frac{\cos(\beta|\vec{r}-\vec{r}'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dv'\,dv - j\int_V\int_V \frac{\sin(\beta|\vec{r}-\vec{r}'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dv'\,dv\right] \end{aligned} \qquad \text{(III.31)}$$

On constate donc que le retard introduit un terme réel et modifie le terme réactif [40].

Le terme inductif est donc de la forme:

$$v_L=(R_r+jL\omega)I$$

Où R_r est la résistance de rayonnement.

Pour un circuit filiforme, la résistance de rayonnement est donnée par :

$$R_r=\frac{\omega\mu}{4\pi}\int_C\int_C \frac{\sin(\beta R)}{R}\,d\vec{l}\,d\vec{l}' \qquad \text{(III.32)}$$

En ce qui concerne l'inductance, en effectuant un développement limité on obtient :

$$L=\frac{\mu}{4\pi}\int_C\int_C \frac{1}{R}\left[1-\frac{\beta^2R^2}{2!}+\frac{\beta^4R^4}{4!}-\cdots\right]d\vec{l}\,d\vec{l}' \qquad \text{(III.33)}$$

Au premier ordre, on retrouve bien la formule de Neumann.

III.2.3.5 Exemples de calcul de résistance de rayonnement:

Exemple.1 : Boucle circulaire :

On considère une boucle circulaire de rayon a négligeable devant la longueur d'onde, sa résistance de rayonnement est donnée par:

$$R_{ray} = \omega \frac{\mu}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \beta R}{R} a^2 \cos(\phi_1 - \phi_2)\, d\phi_1\, d\phi_2 \qquad \text{(III.34)}$$

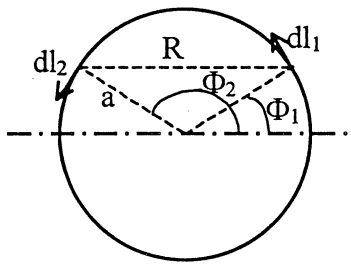


Figure III.5: Résistance de rayonnement d'une boucle circulaire.

Comme le rayon est petit devant la longueur d'onde βR<<1 et donc : $\sin \beta R \approx \beta R - \frac{\beta^3 R^3}{6}$

Avec :
$$R = 2a \left| \sin\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \right| \qquad \text{(III.35)}$$

(III.34) devient alors :

$$R_{ray} = \omega \frac{\mu}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\beta - \frac{\beta^3 R^2}{6}\right) a^2 \cos(\phi_1 - \phi_2)\, d\phi_1\, d\phi_2 \qquad \text{(III.36)}$$

L'intégrale du terme en β est nulle, il reste alors :

$$R_{ray} = \omega \frac{\mu}{6\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} -\beta^3\, a^4 \sin^2\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \cos(\phi_1 - \phi_2)\, d\phi_1\, d\phi_2 \qquad \text{(III.37)}$$

Or : $\sin^2\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\phi_1 - \phi_2)}{2}$, cette dernière relation devient alors :

$$R_{ray} = \frac{-\beta^3 \mu \omega\, a^4}{12\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(\phi_1 - \phi_2))\, \cos(\phi_1 - \phi_2)\, d\phi_1\, d\phi_2 \qquad \text{(III.38)}$$

La première partie de l'intégrale est nulle alors que la deuxième vaut $-2\pi^2$, on en déduit que :

$$R_{ray} = \frac{\pi \beta^3 \mu \omega a^4}{6} = \frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}(\beta a)^4 \qquad \text{(III.39)}$$

En définitive : $$R_{ray} = 20\pi^2 (\beta a)^4 \qquad \text{(III.40)}$$

A.N : pour a=0.05 λ: $\boxed{R_{ray}=1.537\ \Omega}$.

Exemple.2 : Boucle rectangulaire :

On considère une boucle rectangulaire de dimensions petites devant la longueur d'onde

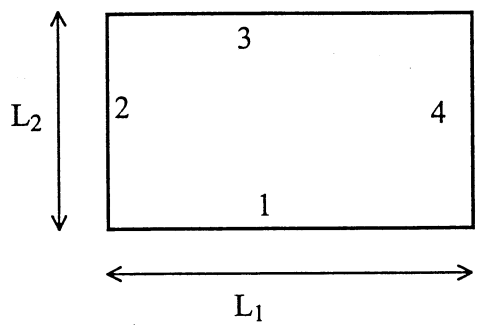


Figure III.6: Résistance de rayonnement d'une boucle rectangulaire.

Le développement limité au 3ème ordre de sa résistance de rayonnement donne:

$$R_{ray} = \frac{\omega\mu}{4\pi}\oint\oint\left(\beta - \frac{\beta^3 R^2}{6}\right) d\vec{l}_1 d\vec{l}_2 \qquad \text{(III.41)}$$

Ou encore:

$$R_{ray} = \frac{\mu\omega}{2\pi}\left\{\begin{array}{l} \int_1\int_1\left(\beta - \frac{\beta^3 R^2}{6}\right) dl_1\, dl_2 + \int_2\int_2\left(\beta - \frac{\beta^3 R^2}{6}\right) dl_1\, dl_2 \\ -\int_1\int_3\left(\beta - \frac{\beta^3 R^2}{6}\right) dl_1\, dl_2 - \int_2\int_4\left(\beta - \frac{\beta^3 R^2}{6}\right) dl_1\, dl_2 \end{array}\right\} \qquad \text{(III.42)}$$

La première intégrale vaut :

$$I_1 = \int_0^{L_1}\int_0^{L_1}\left[\beta - \frac{\beta^3}{6}(u-v)^2\right] du\, dv = \beta L_1^2 - \frac{\beta^3}{6}\int_0^{L_1}\left[\frac{(u-v)^3}{3}\right]_0^{L_1} dv$$

$$= \beta L_1^2 - \frac{\beta^3}{6}\int_0^{L_1}\left[\frac{(L_1-v)^3 + v^3}{3}\right] dv$$

On aboutit à : $$I_1 = \beta L_1^2 - \frac{\beta^3 L_1^4}{36}$$

De même : $$I_2 = \beta L_2^2 - \frac{\beta^3 L_2^4}{36}$$

La troisième intégrale vaut :

$$I_3 = \int_0^{L_1}\int_0^{L_1}\left[\beta - \frac{\beta^3}{6}\left[(u-v)^2 + L_2^2\right]\right] du\, dv = \beta L_1^2 - \frac{\beta^3}{6} L_1^2 L_2^2 - \frac{\beta^3}{6}\int_0^{L_1}\int_0^{L_1}(u-v)^2\, du dv$$

On aboutit à : $$I_3 = \beta L_1^2 - \frac{\beta^3}{6} L_1^2 L_2^2 - \frac{\beta^3}{36} L_1^4$$

De même : $$I_4 = \beta L_2^2 - \frac{\beta^3}{6} L_1^2 L_2^2 - \frac{\beta^3}{36} L_2^4$$

Après simplification on arrive à :

$$R_{ray} = 20\beta^4 L_1^2 L_2^2 \qquad \text{(III.43)}$$

Si on prend L_1, L_2 telles que : $L_1 L_2 = \pi a^2$, on retombe sur la formule (III.40) du cas circulaire.

III.2.3.6 Notion de résistance partielle de rayonnement:

Tout comme l'inductance, on peut définir une résistance partielle de rayonnement et une mutuelle résistance partielle.

La mutuelle partielle entre deux conducteurs filiformes S_1 et S_2 (Idem figure III.3) est donnée par:

$$MRp_{12} = \frac{\omega\mu}{4\pi}\int_{S_1}\int_{S_2}\frac{\sin(\beta R)}{R} dx_2\, dx_1' \qquad \text{(III.44)}$$

avec: $$R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + l^2}$$

En faisant un développement limité à l'ordre 3, on obtient:

$$\begin{aligned} MRp_{12} &= \frac{\omega\mu}{4\pi}\int_0^{l_1}\int_{l_3}^{l_2+l_3}\left[\beta - \frac{\beta^3 R^2}{6}\right] dx_2\, dx_1' \\ &= \frac{\omega\mu}{4\pi}\left[\beta l_1 l_2 - \frac{\beta^3}{6}\int_0^{l_1}\int_{l_3}^{l_2+l_3}\left[(x_2 - x_1)^2 + l^2\right] dx_2 dx_1\right] \end{aligned} \qquad \text{(III.45)}$$

Finalement on trouve:

$$MRp_{12} = 30\beta^2 l_1 l_2 \left[1 - \frac{\beta^2}{6} \left(\frac{l_1^2}{3} + \frac{l_2^2}{3} + l_3^2 + l^2 + l_3(l_2 - l_1) - \frac{l_1 l_2}{2} \right) \right] \quad \text{(III.46)}$$

Cette formule est convergente lorsque $l_1=l_2$; $l_3=l=0$, on obtient dans ce cas la résistance partielle de rayonnement d'un fil de longueur l_1:

$$Rr_p = 30\beta^2 l_1^2 \left(1 - \frac{\beta^2 l_1^2}{36} \right) \quad \text{(III.47)}$$

<u>AN:</u> l_1=10cm pour f=100MHz: Rr_p=1.314Ω.

La résistance de rayonnement de la boucle de la figure III.6 peut être calculée plus facilement comme suit:

$$R_b = \left(Rr_{p_1} + Rr_{p_2} + Rr_{p_3} + Rr_{p_4} - MRp_{13} - MRp_{31} - MRp_{24} - MRp_{42} \right) \quad \text{(III.48)}$$

On trouve alors:

$$R_B = 20\beta^4 L_1^2 L_2^2 \quad \text{(III.49)}$$

Ce qui est bien le même résultat que celui établi en III.43 en considérant la boucle comme un tout.

III.2.4 Terme capacitif:

Retournons à l'équation III.10 afin de montrer que son dernier terme représente l'ensemble des couplages capacitifs.

La tension correspondante s'écrit:

$$V_C = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{a_\ell} \int_{v_\ell} \frac{\partial}{\partial\gamma} \left[\int_{S_k} \frac{q(\vec{r}',t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds' \right] dv_\ell \quad \text{(III.50)}$$

où q représente la densité de charges surfaciques et γ la direction du courant.

On introduit un nouveau maillage. Sur chaque maille, la densité de charge sera considérée constante.

Soit M_k le nombre total de mailles pour le conducteur k, on note q_{mk} la charge de la $m^{ième}$ maille du conducteur k.

On définit une nouvelle fonction $F(\gamma)$ par: $$F(\gamma) = \int_{S_{mk}} \frac{q(\vec{r}',t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds' \quad \text{(III.51)}$$

Par conséquent:

$$V_C = \sum_{k=1}^{K} \sum_{m=1}^{M_k} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{a_\ell} \int_{v_\ell} \frac{\partial}{\partial\gamma}[F(\gamma)]dv_\ell \tag{III.52}$$

On fait l'approximation suivante:

$$\int_{v_\ell} \frac{\partial}{\partial\gamma}[F(\gamma)]dv_\ell = a_\ell\left[F\left(\gamma+\frac{\Delta\gamma}{2}\right)-F\left(\gamma-\frac{\Delta\gamma}{2}\right)\right] \tag{III.53}$$

a_ℓ étant la surface de la maille inductive, perpendiculaire à la direction du courant.

De cette formule, on voit que le maillage capacitif a la même taille que le maillage inductif mais décalé par la moitié d'une longueur de celle ci.

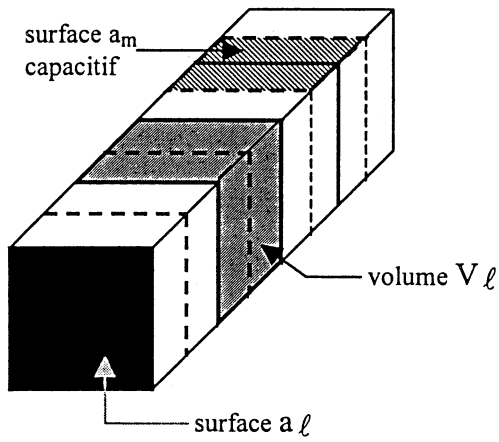


Figure III.7: Conducteur maillé.

De plus on peut écrire:

$$F\left(\gamma+\frac{\Delta\gamma}{2}\right) = q_{mk}(t_{mk}) \int_{S_{mk}} \frac{ds'}{\left|\vec{r}_\ell^{\,+} - \vec{r}'\right|} \tag{III.54}$$

$\vec{r}_\ell^{\,+}$ est la position de l'extrémité de la maille ℓ par laquelle sort le courant.

De même:

$$F\left(\gamma-\frac{\Delta\gamma}{2}\right) = q_{mk}(t_{mk}) \int_{S_{mk}} \frac{ds'}{\left|\vec{r}_\ell^{\,-} - \vec{r}'\right|} \tag{III.55}$$

$\vec{r}_\ell^{\,-}$ est la position de l'autre extrémité de la maille ℓ.

D'où: $$V_C = \sum_{k=1}^{K} \sum_{m=1}^{M_k} q_{mk}(t_{mk}) \frac{1}{4\pi\varepsilon} \left[\int_{S_{mk}} \frac{ds'}{|\vec{r}_\ell^{+} - \vec{r}'|} - \int_{S_{mk}} \frac{ds'}{|\vec{r}_\ell^{-} - \vec{r}'|} \right] \quad \text{(III.56)}$$

La charge totale de la m^{ième} maille est donnée par: $Q_{mk} = q_{mk}\, a_{mk}$, donc l'équation III.56 s'écrit sous la forme:

$$V_C = \sum_{k=1}^{K} \sum_{m=1}^{M_k} Q_{mk}(t_{mk}) \left[pp_{(mk)^+} - pp_{(mk)^-} \right] \quad \text{(III.57)}$$

avec: $$pp_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon a_j} \int_{S_j} \frac{ds'}{|\vec{r}_i - \vec{r}'|} \quad \text{(III.58)}$$

Il s'agit des coefficients de potentiel partiel [50].

Dans ce qui suit, on va présenter un bref rappel sur les coefficients de potentiel et les coefficients de capacité.

III.2.4.1 Définitions des coefficients de capacité:

On considère N conducteurs placés dans un milieu de constante diélectrique ε. Le but est de déterminer la charge sur chaque conducteur connaissant le potentiel électrostatique de chacun [55]. On prend le potentiel nul à l'infini.

Le principe de superposition permet d'exprimer la charge Q_i sur le i^{eme} conducteur par:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} c_{ij}\, \phi_j \quad \text{(III.59)}$$

où c est la matrice capacité de dimension N×N, ces éléments sont appelés les coefficients de capacité. L'équation III.59 permet une définition opérationnelle des éléments de la matrice capacité, en effet l'élément c_{ij} est la charge du conducteur i quand tous les conducteurs sont à la masse sauf le conducteur j qui est mis au potentiel unité.

III.2.4.2 Propriétés de la matrice c:

- La matrice c est symétrique: $c_{ij}=c_{ji}$ (III.60).

- Supposons que le i^{eme} conducteur est placé à un potentiel positif et que tous les autres conducteurs sont à la masse, pour que le i^{eme} conducteur soit à un potentiel positif il faut qu'il porte une charge positive, par conséquent: $c_{ii}>0$ (III.61).
- D'autre part, pour que les autres conducteurs soient au potentiel nul, ils doivent avoir une charge négative, par conséquent: $c_{ij}<0$ pour $i\neq j$ (III.62).
- Finalement, on considère la situation de N conducteurs placés au potentiel unité. Puisque les conducteurs sont au même potentiel, aucune ligne de champ ne peut partir d'un conducteur pour finir sur un autre. D'autre part, puisque le potentiel ne peut pas avoir un extremum dans le volume entre et au voisinage des conducteurs, par conséquent chaque conducteur est à un maximum de potentiel, ainsi les lignes de champs partent des charges positives sur chaque conducteurs et terminent à l'infini. La charge totale est donc positive dans chaque conducteur, l'équation III.59 s'écrit: $Q_i = \sum_{j=1}^{N} c_{ij}\,\phi > 0$

Comme $c_{ii}>0$ et $c_{ij}<0$ pour $i\neq j$:

$$c_{ii} > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} |c_{ij}| \qquad \text{(III.63)}$$

Il est plus commode d'exprimer les charges en fonction de la différence de potentiel entre chaque conducteur et la référence (dans ce cas le point de référence est à l'infini) $V_i=\Phi_i$, et des différences de potentiel entre conducteurs $V_{ij}=V_i-V_j$ ($i\neq j$). Le système d'équations décrit par III.59 devient:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= c_{11}\phi_1 + c_{12}\phi_2 + c_{13}\phi_3 \cdots + c_{1N}\phi_N \\
&= c_{11}\phi_1 + c_{12}(\phi_2-\phi_1) + c_{12}\phi_1 + c_{13}(\phi_3-\phi_1) + c_{13}\phi_1 + \ldots + c_{1N}(\phi_N-\phi_1) + c_{1N}\phi_1 \\
&= (c_{11}+c_{12}+\cdots+c_{1N})V_1 - c_{12}V_{12} - c_{13}V_{13}\cdots - c_{1N}V_{1N} \\
Q_2 &= (c_{21}+c_{22}+\cdots+c_{2N})V_2 - c_{21}V_{21} - c_{23}V_{23}\cdots - c_{2N}V_{2N} \\
&\vdots \\
Q_N &= (c_{N1}+c_{N2}+\cdots+c_{NN})V_N - c_{N1}V_{N1} - c_{N2}V_{N2}\cdots - c_{N\,N-1}V_{N\,N-1}
\end{aligned} \qquad \text{(III.64)}$$

On obtient une nouvelle matrice C, ces éléments sont donnés par:

$$C_{ii} = \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \qquad \text{(III.65)}$$

$$C_{ij} = -c_{ij} \qquad \text{pour } i\neq j \qquad \text{(III.66)}$$

III.55 s'écrit donc:

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11} V_1 + C_{12} V_{12} + C_{13} V_{13} \cdots + C_{1N} V_{1N} \\ Q_2 &= C_{21} V_{21} + C_{22} V_2 + C_{23} V_{23} \cdots + C_{2N} V_{2N} \\ &\vdots \\ Q_N &= C_{N1} V_{N1} + C_{N2} V_{N2} + C_{N3} V_{N3} \cdots + C_{NN} V_N \end{aligned} \qquad \text{(III.67)}$$

Avec ce système d'équations, on peut directement déduire le schéma capacitif équivalent (figure III.8):

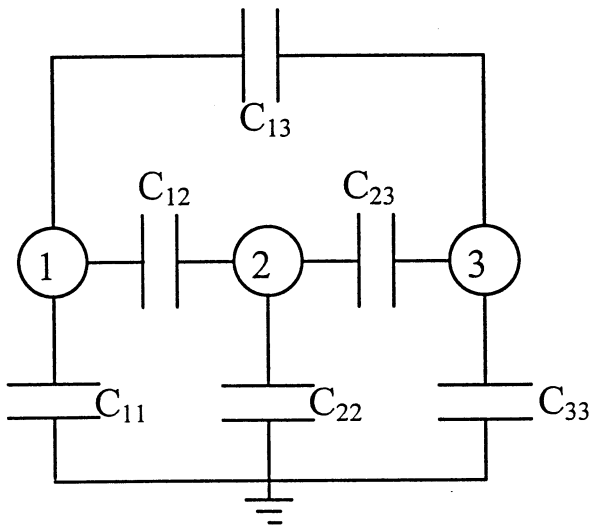


Figure III.8: Schéma équivalent capacitif d'un système de 3 conducteurs.

III.2.4.3. Définition des coefficients de potentiel:

En général, on connaît la répartition des charges sur les conducteurs et on doit déduire les potentiels:

$$\phi_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} Q_j \qquad \text{(III.68)}$$

Les p_{ij} sont les coefficients de potentiel, on définit ainsi une matrice p dite matrice potentiel qui vérifie la relation:

$$p = c^{-1} \qquad \text{(III.69)}$$

III.2.4.4 Calcul du coefficient de potentiel entre deux surfaces:

Soient deux conducteurs de surfaces S_1 et S_2, et de densités surfaciques de charges σ_1 et σ_2.

Le potentiel électrique crée par S_2 en un point M_1 de S_1 est donné par:

$$\phi(M_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{S_2} \sigma_2 \frac{e^{-j\beta|\vec{r}'-\vec{r}_1|}}{|\vec{r}'-\vec{r}_1|} ds' \qquad \text{(III.70)}$$

Supposons que σ_2 est constante sur S_2. La charge totale du conducteur S_2 vaut alors:

$$Q_2 = \sigma_2 S_2 \qquad \text{(III.71)}$$

L'équation III.70 devient alors:

$$\phi(M_1) = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon S_2} \int_{S_2} \frac{e^{-j\beta|\vec{r}'-\vec{r}_1|}}{|\vec{r}'-\vec{r}_1|} ds' \qquad \text{(III.72)}$$

Appelons ϕ_1 le potentiel moyen du conducteur S_1, on a:

$$\phi_1 = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} \phi(M_1) ds \qquad \text{(III.73)}$$

En remplaçant par III.72 dans III.73, on obtient:

$$\phi_1 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon S_1 S_2} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{e^{-j\beta|\vec{r}'-\vec{r}|}}{|\vec{r}'-\vec{r}|} ds' ds = p_{12} Q_2 \qquad \text{(III.74)}$$

D'où:

$$p_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon S_1 S_2} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{e^{-j\beta|\vec{r}'-\vec{r}|}}{|\vec{r}'-\vec{r}|} ds' ds \qquad \text{(III.75)}$$

On voit bien que ce terme est semblable à la mutuelle inductance (voir équation III.31). En effet, le coefficient de potentiel entre les deux rubans de la figure III.4 est relié à la mutuelle partielle par l'équation suivante :

$$p_{12} = \frac{1}{\mu\varepsilon\, l_1 l_2} Mpr_{12} \qquad \text{(III.76)}$$

III.2.4.5 Notion de capacité partielle:

Dans le cas de géométrie complexe, le calcul direct de capacité est difficile. Le concept de capacité partielle permet de remplacer le problème d'un conducteur à géométrie complexe par un problème multi-conducteurs de géométrie simple.[55]

La première étape est donc la subdivision du conducteur complexe en conducteurs simples. Prenons comme exemple le cas d'un conducteur en forme de L (figure III.9.a).

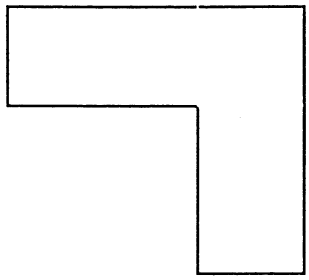


Figure III.9.a

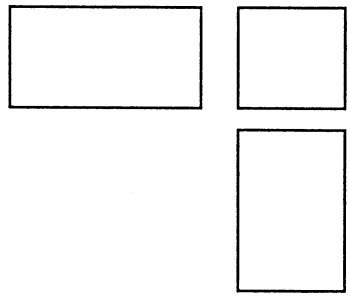


Figure III.9.b

Dans ce cas, les conducteurs partiels sont les rectangles de la figure III.9.b.

La deuxième étape consiste à déterminer la matrice c des trois conducteurs partiels (pour le moment on considère que les potentiels des conducteurs sont différents).

Dans ce cas la matrice des capacités partielles c^p est une matrice 3×3, la capacité pour le conducteur complexe s'obtient à partir de la matrice c^p en exprimant que les trois conducteurs partiels sont au même potentiel, on a donc:

$$Q_1 = c_{11}^p \phi_1 + c_{12}^p \phi_2 + c_{13}^p \phi_3 = \left(c_{11}^p + c_{12}^p + c_{13}^p\right)\phi \qquad \text{(III.77)}$$

De même:

$$Q_2 = \left(c_{21}^p + c_{22}^p + c_{23}^p\right)\phi \qquad Q_3 = \left(c_{31}^p + c_{32}^p + c_{33}^p\right)\phi \qquad \text{(III.78)}$$

D'où la charge totale:

$$Q = \left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}^p\right)\phi \qquad \text{(III.79)}$$

On en déduit la valeur de la capacité de court circuit du conducteur complexe:

$$c = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}^p \qquad \text{(III.80)}$$

III.2.5 Synthèse du circuit électrique équivalent:

La complexité du schéma électrique équivalent d'un conducteur dépend du rapport L/λ (L étant la dimension du conducteur, λ=c/f est la longueur d'onde).

Lorsque L<< λ, le retard est négligeable, on est dans le cadre de l'hypothèse des états quasi-stationnaires, on parle effectivement de la méthode PEEC, par contre dès que L devient comparable à λ , le retard n'est plus négligeable par conséquent la méthode PEEC ne sera plus applicable, une méthode plus complète a été développé pour ce genre de problème, il s'agit de la méthode rPEEC.

III.2.5.1 Hypothèse des états quasi-stationnaires : méthode PEEC:

Afin de comprendre le principe de la modélisation, commençons par un cas simple, qui est le cas du ruban de la figure III.10-a alimenté par une tension v entre ses extrémités.[44]

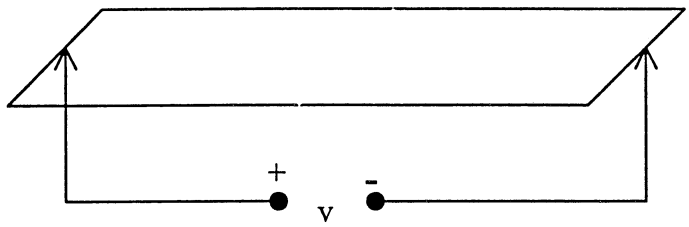


Figure III.10-a : Géométrie du conducteur.

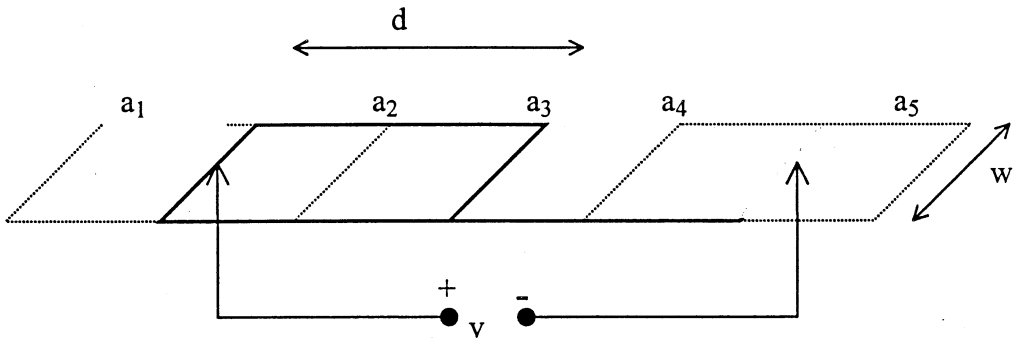


Figure III.10-b : Subdivision du ruban en 2 mailles inductives et 3 capacitives.

Ce conducteur va être subdivisé en deux mailles inductives (a_2 et a_4 qui sont représentées en continu sur la figure III.10-b) et trois mailles capacitives (a_1, a_3 et a_5 qui sont représentées en pointillé).

Les deux mailles inductives a_2 et a_4 ont des courants uniformes $i_2(t)$ et $i_4(t)$ alors que les mailles capacitives a_1, a_3 et a_5 ont respectivement comme potentiel $\phi_1(t)$, $\phi_3(t)$ et $\phi_5(t)$ et comme charge $q_1(t)$, $q_3(t)$ et $q_5(t)$.

Revenons à l'équation III.4, supposons que le champ appliqué est nul et que la densité de courant est portée par (ox). En intégrant cette équation sur la maille a_2, on obtient :

$$\int_{a_2} \frac{J_x(x_2,t)}{\sigma} d^2x_2 + \int_{a_2} \frac{\partial A_x(x_2,t)}{\partial t} d^2x_2 + \int_{a_2} \frac{\partial \phi(x_2,t)}{\partial x} d^2x_2 = 0 \qquad \text{(III.81)}$$

Le premier terme est :

$$\int_{a_2} \frac{J_x(x_2,t)}{\sigma} d^2x_2 = \frac{d}{\sigma} i_2(t) = R\,w\,i_2(t) \tag{III.82}$$

où w est la largeur de la maille, d sa longueur et R sa résistance.

Le deuxième terme s'écrit :

$$\int_{a_2} \frac{\partial A_x(x_2,t)}{\partial t} d^2x_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{w}\left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial i_2(t)}{\partial t}\displaystyle\int_{a_2}\int_{a_2} \frac{1}{|x_2 - x'_2|} d^2x_2\, d^2x'_2 \\ + \dfrac{\partial i_4(t)}{\partial t}\displaystyle\int_{a_2}\int_{a_4} \frac{1}{|x_2 - x_4|} d^2x_2\, d^2x_4 \end{array}\right] \tag{III.83}$$

Les deux intégrales doubles de la relation précédante sont similaires aux formules qui donnent l'inductance partielle d'un ruban et la mutuelle partielle entre deux rubans, ainsi l'équation III.68 se réduit à :

$$\int_{a_2} \frac{\partial A_x(x_2,t)}{\partial t} d^2x_2 = w\left[Lp_{22}\frac{\partial i_2(t)}{\partial t} + Lp_{24}\frac{\partial i_4(t)}{\partial t}\right] \tag{III.84}$$

Le troisième terme s'écrit :

$$\int_{a_2} \frac{\partial \phi(x_2,t)}{\partial x} d^2x_2 = \frac{\phi_3(t) - \phi_1(t)}{d} d\,w = w[\phi_3(t) - \phi_1(t)] \tag{III.85}$$

Si on rassemble III.82, III.84 et III.85 et on divise par w, on obtient :

$$R\,i_2(t) + Lp_{22}\frac{\partial i_2(t)}{\partial t} + Lp_{24}\frac{\partial i_4(t)}{\partial t} + \phi_3(t) - \phi_1(t) = 0 \tag{III.86}$$

De même pour la maille a_4, on obtient :

$$R\,i_4(t) + Lp_{24}\frac{\partial i_2(t)}{\partial t} + Lp_{44}\frac{\partial i_4(t)}{\partial t} + \phi_5(t) - \phi_3(t) = 0 \tag{III.87}$$

Le circuit électrique équivalent de ce circuit est présenté dans la figure III.11 .

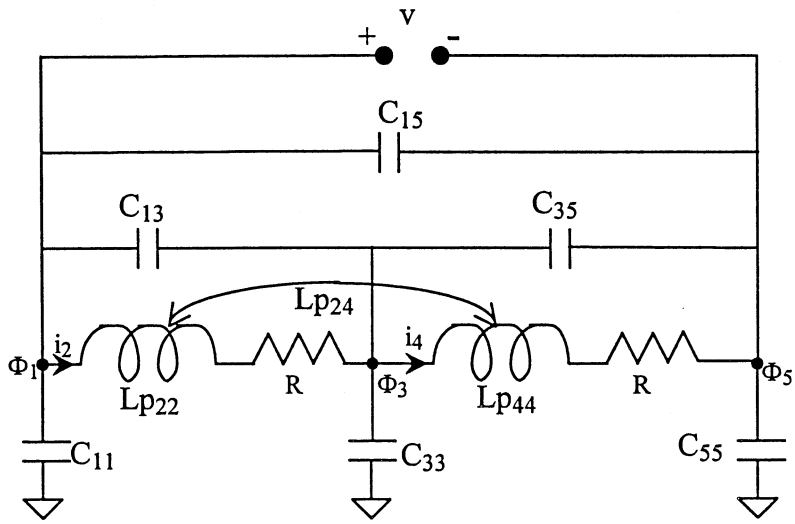


Figure III.11 : Circuit électrique équivalent.

Les capacités du schéma équivalent sont définies par :

$$C_{ii} = \sum_{j=1}^{3} c_{ij} \qquad \text{(III.88)}$$

$$C_{ij} = -c_{ij} \qquad \text{pour } i \neq j \qquad \text{(III.89)}$$

où c est la matrice des capacités de court circuit, qui peut se déduire de la matrice p par la relation : $c=P^{-1}$, P étant la matrice des coefficients de potentiel calculée grâce à III.75.

III.2.5.2 Cas non quasi-stationnaire : méthode rPEEC:

Maintenant, on tient compte du retard, les expressions de A et ϕ deviennent :

$$A(x,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J(x',t)e^{-j\beta|x-x'|}}{|x-x'|} d^3x' \qquad \text{(III.90)}$$

$$\phi(x,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(x',t)e^{-j\beta|x-x'|}}{|x-x'|} d^3x' \qquad \text{(III.91)}$$

Le terme inductif pour la maille a_2 s'écrit donc :

$$\int_{a_2} \frac{\partial A_x(x_2,t)}{\partial t} d^2x_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{w}\left[\begin{array}{l}\frac{\partial i_2(t)}{\partial t}\int_{a_2}\int_{a_2}\frac{1}{|x_2-x'_2|}d^2x_2\, d^2x'_2 \\ +\frac{\partial i_4(t)}{\partial t}\int_{a_2}\int_{a_4}\frac{e^{-j\beta|X_2-X_4|}}{|x_2-x_4|}d^2x_2\, d^2x_4\end{array}\right] \quad \text{(III.92)}$$

où X_2 et X_4 sont les coordonnées des centres des mailles a_2 et a_4.

On fait donc une approximation qui consiste à considérer que le retard est le temps de propagation du champ électromagnétique entre les centres des deux mailles.

Cette approximation est justifiée dans la mesure où la précision s'améliore lorsqu'on augmente le nombre de subdivisions.

On peut écrire tout simplement :

$$\int_{a_2} \frac{\partial A_x(x_2,t)}{\partial t} d^2x_2 = w\left[Lp_{22}\frac{\partial i_2(t)}{\partial t} + Lp_{24}\, e^{-j\beta|X_2-X_4|}\frac{\partial i_4(t)}{\partial t}\right] \quad \text{(III.93)}$$

De même pour le potentiel électrique, on obtient :

$$\phi_1 = P_{11}q_1 + P_{13}\, e^{-j\beta|X_1-X_3|}q_3 + P_{15}e^{-j\beta|X_1-X_5|}q_5 \quad \text{(III.94)}$$

D'une manière générale :

$$\phi_i = \sum_{j=1}^{N} P_{ij}\, e^{-j\beta|X_i-X_j|}q_j \quad \text{(III.95)}$$

Le schéma équivalent peut être présenter de deux façons :

<u>1ere solution :</u>

On garde le même schéma équivalent du paragraphe précédant avec des éléments complexes :

Les mutuelles inductances sont données par :

$$L'_{ij} = Lp_{ij}\, e^{-j\beta|X_i-X_j|} \quad \text{(III.96)}$$

Et les coefficients de potentiel sont donnés par :

$$P'_{ij} = P_{ij}\, e^{-j\beta|X_i-X_j|} \quad \text{(III.97)}$$

D'où la matrice c' : $c'=P'^{-1}$, et les éléments de la matrice C' qui figurent dans le schéma équivalent :

$$C'_{ii} = \sum_{j=1}^{N} c'_{ij} \qquad C'_{ij} = -c'_{ij} \quad \text{pour } i\neq j.$$

2eme solution :

On part de la relation III.95 qu'on écriera sous la forme :

$$\phi_i = P_{ii}\, q_i + \sum_{j\neq i} P_{ij}\, e^{-j\beta|X_i - X_j|}\, q_j \qquad \text{(III.98)}$$

Ce qui signifie que le potentiel par rapport à l'infini de la maille capacitive i de charge qi, n'est autre que la somme du potentiel d'une capacité $C'_i = \dfrac{1}{P_{ii}}$ et d'une source de tension due aux autres charges donnée par :

$$u_i^{(c)}(t) = \sum_{j\neq i} P_{ij}\, q_j(t)\, e^{-j\beta|X_i - X_j|} \qquad \text{(III.99)}$$

On a donc : $\phi_i = \phi'_i(t) + u_i^{(c)}(t)$, avec : $\phi'_i(t) = P_{ii}\, q_i(t)$ et :

$$u_i^{(c)}(t) = \sum_{j\neq i} P_{ij}\, q_j(t)\, e^{-j\beta|X_i - X_j|} = \sum_{j\neq i} \frac{P_{ij}}{P_{jj}} \phi'_j(t)\, e^{-j\beta|X_i - X_j|} \qquad \text{(III.100)}$$

Donc par cette approche, l'effet des capacités mutuelles est représenté par une source de tension. De même, on peut représenter l'effet des inductances mutuelles par une source de tension :

$$u_i^{(L)}(t) = \sum_{j\neq i} Lp_{ij} \frac{dI_j(t)}{dt} e^{-j\beta|X_i - X_j|} \qquad \text{(III.101)}$$

Comme la tension aux bornes de l'inductance partielle j est : $v'_j(t) = Lp_{jj} \dfrac{dI_j(t)}{dt}$, alors :

$$u_i^{(L)}(t) = \sum_{j\neq i} \frac{Lp_{ij}}{Lp_{jj}} v'_j(t)\, e^{-j\beta|X_i - X_j|} \qquad \text{(III.102)}$$

Pour le circuit précédant, le schéma équivalent est le suivant :

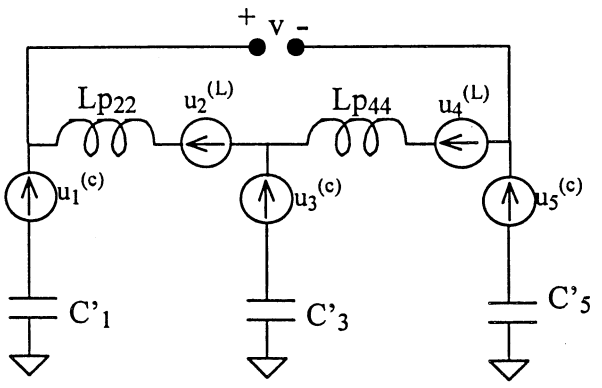


Figure III.12 : Circuit électrique équivalent avec sources liées.

Avec les deux solutions, on sera amener à résoudre une équation matricielle pour trouver les courant et les potentiels (voir paragraphe suivant), par conséquent on gardera la première solution.

III.2.5.3 Calcul des courants et des potentiels :

1ere approche:

On se place dans un cas général où on subdivise un conducteur en N mailles inductives et N+1 mailles capacitives. En exprimant la loi des mailles pour les N subdivisions inductives, on obtient pour $i \in [0,N-1]$:

$$\phi_{i+1} - \phi_i = e_i - j\omega \sum_{j=0}^{N-1} Lp_{ij}\, e^{-j\beta|X_i - X_j|}\, I(j) \qquad \text{(III.103)}$$

e_k étant la tension appliquée sur la maille k.

D'autre part, en exprimant la loi des nœuds, on obtient pour $k \in [0,N]$:

$$j\omega\, C_{ii}\, \phi(k) + j\omega \sum_{j \neq i} C_{ij} \left[\phi(i) - \phi(j)\right] = I(i-1) - I(i) \qquad \text{(III.104)}$$

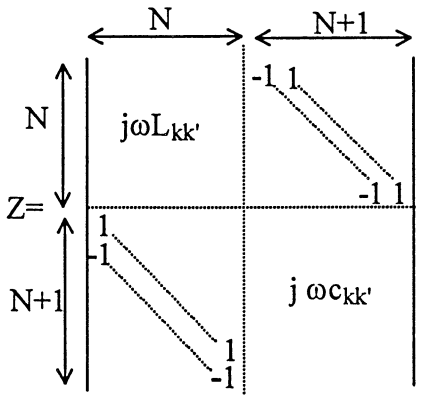
Comme $c_{ii} = \sum_{j=0}^{N} C_{ij}$ et $c_{ij} = -C_{ij}$ pour $i \neq j$, III.104 peut s'écrire:

$$j\omega \sum_{j=0}^{N} c_{ij}\, \phi(j) + I(i) - I(i-1) = 0 \qquad \text{(III.105)}$$

On obtient le système à 2N+1 équations 2N+1 inconnues suivant:

$$\begin{cases} \phi_{i+1} - \phi_i + j\omega \sum_{j=0}^{N-1} Lp_{ij}\, e^{-j\beta|X_i - X_j|}\, I(j) = e_i \\ j\omega \sum_{j=0}^{N} c_{ij}\, \phi(j) + I(i) - I(i-1) = 0 \end{cases} \qquad \text{(III.106)}$$

Les inconnues étant les courants et les potentiels. Ce système peut s'écrire sous forme matricielle: Z.X=V, avec: $X = \begin{bmatrix} I(0) \\ \vdots \\ I(N-1) \\ \phi(0) \\ \vdots \\ \phi(N) \end{bmatrix}$ et :



2eme approche:

On part du système suivant:

$$\begin{cases} \phi_{i+1} - \phi_i + j\omega \sum_{j=0}^{N-1} L'_{ij} I(j) = e_i & i \in [0, N-1] \\ \phi_i = \sum_{j=0}^{N} P'_{ij} q_j & i \in [0, N] \end{cases} \qquad \text{(III.107)}$$

On exprime l'équation de continuité de la manière suivante:

$$\lambda_j = -\frac{1}{j\omega} \frac{I(j) - I(j-1)}{\Delta} \qquad (\Delta = \frac{L}{N} = \text{longueur d'une maille}) \qquad \text{(III.108)}$$

Où λ est la densité linéique de charges, la charge dans une maille est donnée par: $q_j = \lambda_j \Delta$

En remplaçant q_j par son expression et en effectuant un changement d'indice, on obtient:

$$\phi_i = \frac{1}{j\omega} \sum_{j=0}^{N-1} I(j) \left(P'_{i,j+1} - P'_{i,j} \right) \qquad \text{(III.109)}$$

Par suite la première équation du système devient:

$$e_i = j\omega \sum_{j=0}^{N-1} L'_{ij} I(j) + \frac{1}{j\omega} \sum_{j=0}^{N-1} I(j) \left(P'_{i+1,j+1} - P'_{i+1,j} - P'_{i,j+1} + P'_{i,j} \right) \qquad i \in [0, N-1] \qquad \text{(III.110)}$$

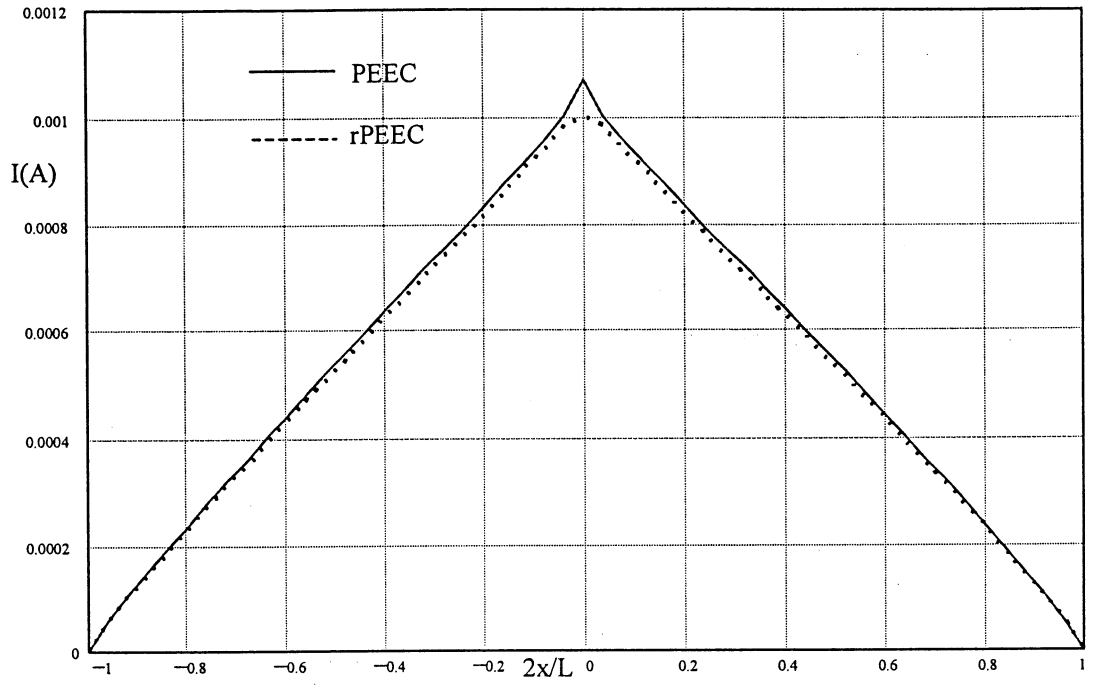
On aboutit alors à une équation matricielle de la forme Z.I=V, avec:

$$Z_{ij} = j\omega L'_{ij} + \frac{1}{j\omega} \left(P'_{i+1,j+1} - P'_{i+1,j} - P'_{i,j+1} + P'_{i,j} \right) \qquad \text{(III.111)}$$

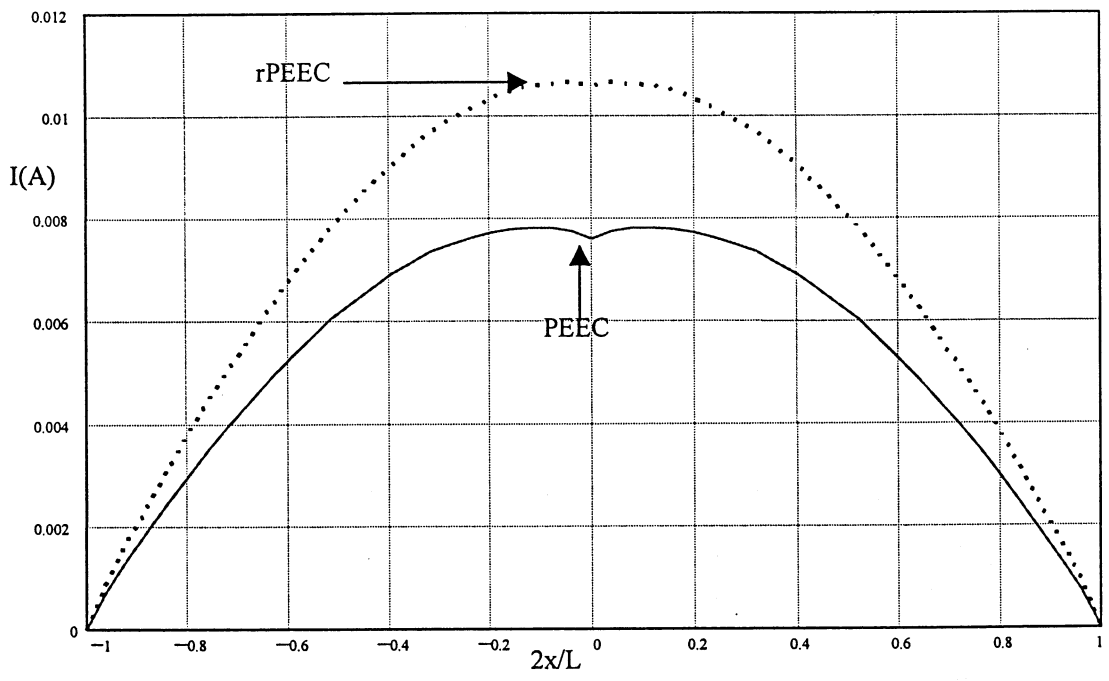
Avec cette approche, la matrice Z est de dimension NxN, de plus on n'a pas besoin d'inverser la matrice P, ce qui réduit le temps de calcul. C'est cette dernière approche qui va être utilisée dans la suite.

III.2.6 Application des méthodes PEEC et rPEEC au cas de l'antenne:

On applique l'approche précédente à une antenne de longueur L=x.λ , on appliquera successivement la méthode PEEC et rPEEC. Pour x faible l'effet du retard est négligeable donc les deux méthodes donnent des résultats identiques (figure III.13.a, x=0.2), par contre dès que x devient important l'écart entre les deux méthodes augmente (figure III.13.b).



(a)



(b)

Figure III.13: Courant dans une antenne (L=x.λ, 2a/L=0.001), (a) x=0.2, (b) x=0.5.

On compare ensuite l'impédance à l'entrée d'une antenne calculée grâce à la méthode PEEC à celle calculée à l'aide de la méthode rPEEC (figure III.14).

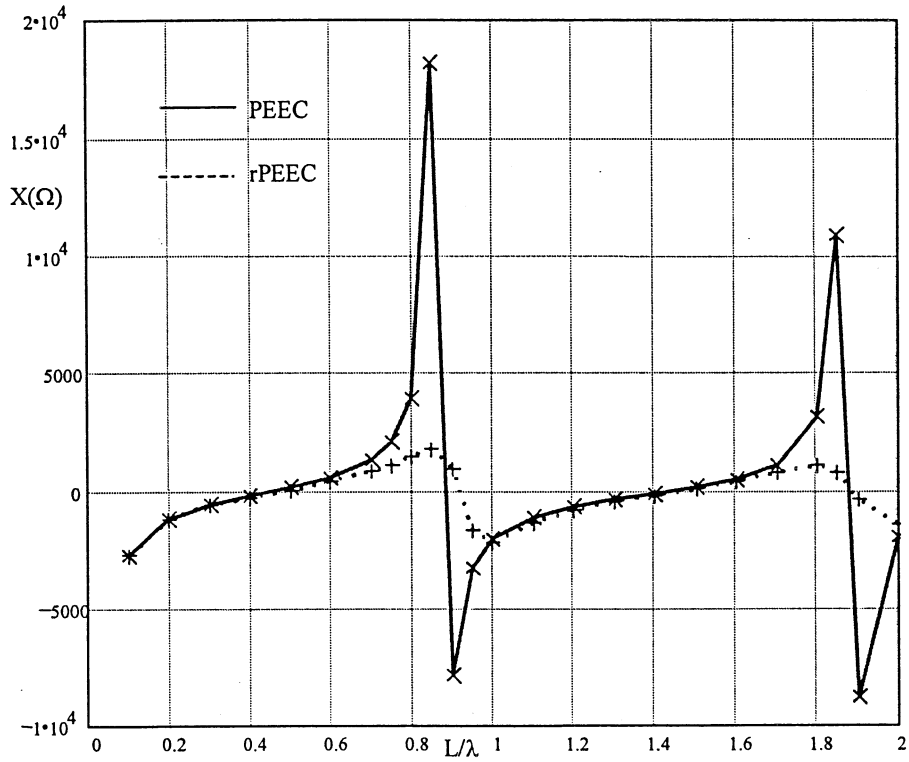


Figure III.14: Réactance d'entrée d'une antenne.

Avec la méthode PEEC, on obtient une impédance d'entrée imaginaire pure. L'absence de partie réelle explique la résonance obtenue.

D'autre part, on constate que l'écart relatif entre les deux parties imaginaires (obtenues respectivement par PEEC et rPEEC) devient supérieur à 10% à partir de x=0.3.

III.2.7 Conclusion:

La méthode PEEC permet une modélisation du câblage par des réseaux de composants passifs (R-L-C). Cette méthode n'est valable que dans le cadre de l'hypothèse des états quasi-stationnaires. La prise en compte du retard a permis l'élaboration d'une méthode similaire, il s'agit de la méthode rPEEC. On a constaté qu'avec les deux méthodes, on obtenait le même schéma équivalent, c'est uniquement les valeurs des éléments qui ont changé, en effet la prise en compte du retard introduit un terme réel dans les termes inductif et capacitif. Les deux méthodes ont été appliquées au cas simple de l'antenne, ce qui nous a permis de déduire pour une longueur donnée, la fréquence à partir de laquelle la méthode PEEC n'est plus applicable.

III.3 La méthode des moments :

III.3.1 Introduction :

La méthode des moments est généralement utilisée pour l'étude des antennes et de leurs applications. C'est une méthode fréquentielle basée sur la résolution d'une équation intégrale linéaire en courant. Elle permet de déterminer directement et de manière précise la distribution du courant dans les structures linéaires étudiées et de remonter ensuite au champ rayonné en tout point de l'espace.[6]

Dans cette section, nous expliquons comment on obtient l'équation intégrale à résoudre. Ensuite, nous proposons la résolution de cette équation par la méthode des moments.[13,61]

III.3.2 Technique de la méthode des moments:

La méthode des moments permet la résolution d'une équation intégrale de la forme :

$$L(f) = g \qquad \text{(III.112)}$$

où L est un opérateur linéaire, g est connue et f est l'inconnue.

Elle est basée sur la discrétisation de la fonction à résoudre f sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions bases f_j:

$$f = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j f_j \qquad \text{(III.113)}$$

où α_j sont des constantes qu'il faut déterminer.

L étant linéaire, alors :

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j L(f_j) = g \qquad \text{(III.114)}$$

On considère N fonctions test ω_i. On effectue le produit scalaire de l'équation III.114 par les fonctions tests ω_i ; pour tout $i \in [1,N]$:

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j < \omega_i, L(f_j) > = < \omega_i, g > \qquad \text{(III.115)}$$

Ces N équations peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[Z].[I]=[V] \qquad \text{(III.116)}$$

Avec : $Z_{ij} = < \omega_i, L(f_j) >$ $\quad I_j = \alpha_j$ $\quad V_j = < \omega_j, g >$ (III.117)

La solution s'obtient par : $[I]=[Z^{-1}].[V]$ (III.118)

Lorsque les fonctions bases sont égales aux fonctions tests ($\omega_n=f_n$), il s'agit de la méthode de Galerkin. La tâche la plus importante pour un problème donné est le choix des f_n et ω_n.

Les facteurs qui permettent de choisir f_n et ω_n sont :

- La précision de la solution désirée.
- La facilité de l'évaluation des éléments de la matrice Z.
- La taille de la matrice à inverser.
- Le conditionnement de la matrice Z.

Exemple simple :

On considère l'équation simple : $$-\frac{d^2f}{dx^2}=1+4x^2 \qquad \text{(III.119)}$$

On se propose de trouver f(x) sur l'intervalle [0,1] vérifiant les conditions aux limites: f(0)=f(1)=0. Evidemment, la solution de ce problème peut être déterminée analytiquement, la solution étant donnée par: $$f(x)=\frac{5x}{6}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{3} \qquad \text{(III.120)}$$

Essayons de retrouver la solution par la méthode des moments.

L'opérateur différentiel est : $L=-\frac{d^2}{dx^2}$, le produit scalaire utilisé est défini par :

$$<f,g>=\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx \qquad \text{(III.121)}$$

On choisit des fonctions de base de la forme : $$f_n=x-x^{n+1} \qquad \text{(III.122)}$$

On note que les fonctions de bases vérifient bien les conditions aux limites $f_n(0)=f_n(1)=0$.

On exprime f sous la forme d'une combinaison linéaire des f_n : $$f=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j f_j$$

On prend des fonctions tests égales aux fonctions bases : $\omega_n=f_n=x-x^{n+1}$.

Les éléments de la matrice Z sont donnés par :

$$Z_{mn}=<\omega_m,L(f_n)>=\int_0^1\left(x-x^{m+1}\right).\frac{-d^2}{dx^2}\left(x-x^{n+1}\right)dx \qquad \text{(III.123)}$$

On trouve : $$Z_{mn}=\frac{mn}{m+n+1} \qquad \text{(III.124)}$$

Les éléments de la matrice V sont donnés par :

$$V_m = <\omega_m, g> = \int_0^1 \left(x - x^{m+1}\right).\left(1 + 4x^2\right)dx \qquad \text{(III.125)}$$

On trouve : $$V_m = \frac{m(3m+8)}{2(m+2)(m+4)} \qquad \text{(III.126)}$$

Pour N=1 on a : $Z_{11} = \frac{1}{3}$ et $V_1 = \frac{11}{30}$, donc $\alpha_1 = \frac{11}{10}$ et $f(x) = \frac{11}{10}\left(x - x^2\right)$.

Pour N=2 L'équation matricielle s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{7}{12} \end{bmatrix}.$$

On trouve : $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ et donc : $f(x) = \frac{23}{30}x - \frac{1}{10}x^2 - \frac{2}{3}x^3$.

Pour N=3 L'équation matricielle s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} & 1 \\ \frac{3}{5} & 1 & \frac{9}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{7}{12} \\ \frac{51}{70} \end{bmatrix}.$$

On trouve : $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ et donc : $f(x) = \frac{5}{6}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^4$.

On constate que la solution du 3eme ordre est égale à la solution exacte.

Les différentes solutions sont représentées dans la figure III.15 :

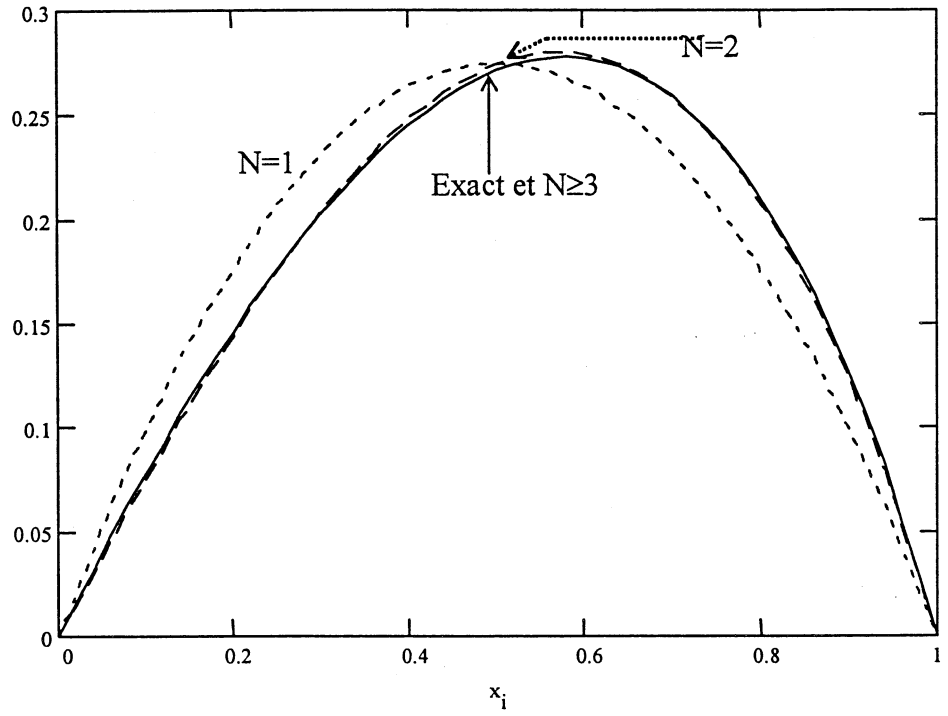


Figure III.15 : Solutions avec $f_n=x-x^{n+1}$, et la méthode de Galerkin.

Approximation des points :

L'évaluation analytique de $Z_{mn} =< \omega_m, L(f_n) >$ est souvent difficile dans les problèmes pratiques. Un moyen simple d'obtenir une solution approximative est d'imposer que l'équation III.114 est vérifiée en quelques points de la région qui nous intéresse. En terme de méthode des moments, ceci est équivalent à utiliser des fonctions de Dirac comme fonctions tests.

Prenons l'exemple précédant, III.114 s'écrit :

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \left[\frac{-d^2}{dx^2} \left(x - x^{n+1} \right) \right] = 1 + 4x^2 \qquad \text{(III.127)}$$

On prend les points uniformément espacés suivants :

$$x_m = \frac{m}{N+1} \qquad m=1,2,\ldots,N \qquad \text{(III.128)}$$

En imposant que III.105 est vérifiée pour tous les x_m, on obtient les élément de la matrice Z :

$$Z_{mn} = n(n+1)\left(\frac{m}{N+1}\right)^{n-1} \qquad \text{(III.129)}$$

Et de la matrice V : $$V_m = 1 + 4\left(\frac{m}{N+1}\right)^2 \qquad \text{(III.130)}$$

Ceci revient à prendre comme fonctions tests : $$\omega_m = \delta(x - x_m) \qquad \text{(III.131)}$$

Pour N=1, on obtient :$Z_{11}=2$, $V_1=2$ d'où $\alpha_1=1$.

et donc : $f(x)=x-x^2$. (III.132)

Pour N=2 : l'équation matricielle est :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 13/9 \\ 25/9 \end{bmatrix} \quad \text{(III.133)}$$

D'où :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/18 \\ 2/3 \end{bmatrix} \quad \text{(III.134)}$$

Et :

$$f(x)=\frac{13}{18}x-\frac{1}{18}x^2-\frac{2}{3}x^3 \quad \text{(III.135)}$$

Pour N=3 : l'équation matricielle est :

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & \frac{9}{2} & \frac{27}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 2 \\ \frac{13}{4} \end{bmatrix} \quad \text{(III.136)}$$

D'où :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix} \quad \text{(III.137)}$$

On retombe encore une fois sur la solution exacte : $f(x)=\frac{5}{6}x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^4$

Les différentes solutions sont représentées dans la figure III.16 :

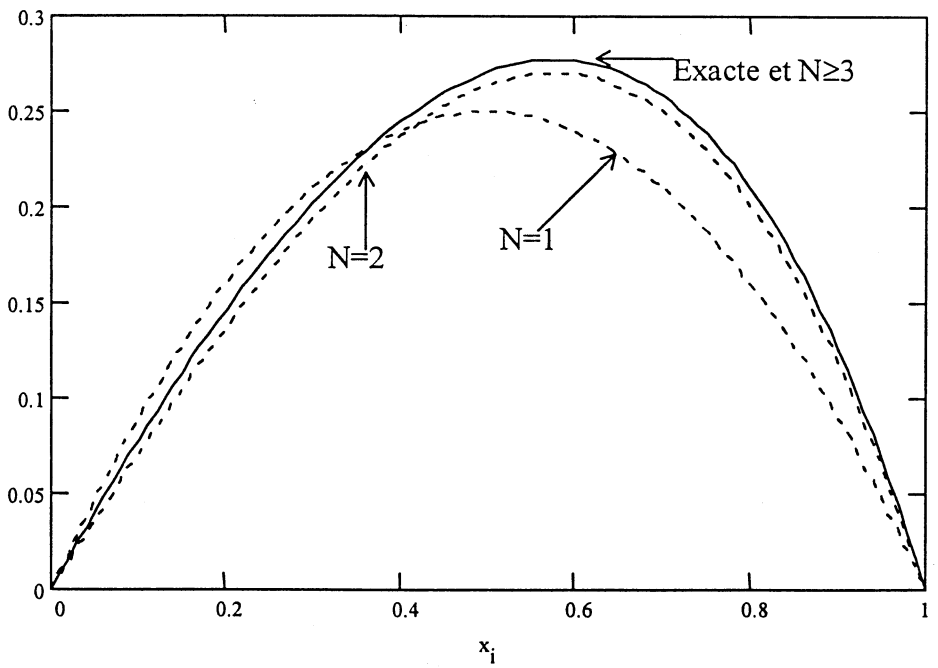


Figure III.16 : Solutions avec $f_n=x-x^{n+1}$, et $\omega_m=\delta(x-x_m)$.

Dans ce cas, on constate que la convergence de cette dernière solution est moins rapide que celle de Galerkin.

Fonctions de bases définies par morceaux :

Une autre approximation utile dans les problèmes pratiques est l'utilisation de fonctions bases définies uniquement sur un sous intervalle du domaine d'étude, ce qui permet d'obtenir des systèmes matriciels creux.

Pour l'exemple précédant, on prend N points uniformément espacés sur l'intervalle [0,1] définies par leurs abscisses $x_m = \frac{m}{N+1}$ m=1,2,...,N, un sous intervalle est centré en x_m et il a pour largeur $\frac{1}{N+1}$ (figure III.17)

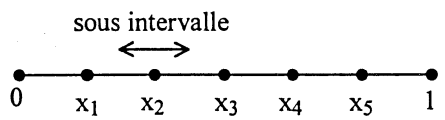


Figure III.17 : Points et sous intervalles (N=5).

Un exemple d'une fonction définie uniquement sur un intervalle est la fonction porte:

$$P(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{1}{2(N+1)} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2(N+1)} \end{cases} \qquad \text{(III.138)}$$

Il s'agit là de la porte centrée en 0 et de largeur $\frac{1}{N+1}$.

Pour N=5, la fonction $P(x-x_2)$ est représentée dans la figure III.18-a.

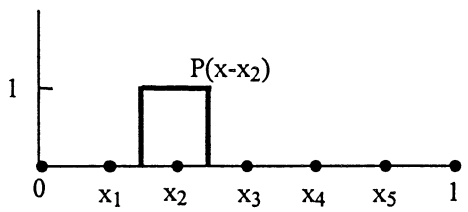


Figure III.18-a : fonction porte (N=5).

Une combinaison linéaire des fonctions $f_n=P(x-x_n)$ donne une approximation en escalier pour f (figure III.18-b).

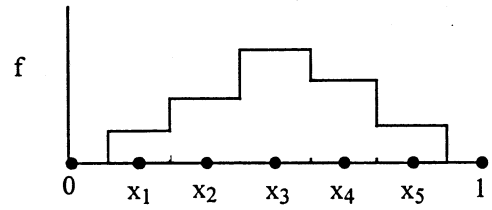


Figure III.18-b : Approximation en escalier (N=5).

Par contre, $-\frac{d^2}{dx^2}(P)$ n'est pas définie, par conséquent, on est obligé d'utiliser un opérateur approximatif:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{1}{\Delta x}\left[f\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)-f\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)\right] \qquad \text{(III.139)}$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} \approx \frac{1}{\Delta x}\left[f'\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)-f'\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)\right] \approx \frac{1}{(\Delta x)^2}\left[f(x-\Delta x)-2f(x)+f(x+\Delta x)\right] \qquad \text{(III.140)}$$

Revenons à notre exemple, dans lequel l'intervalle [0,1] est subdivisé en N+1 segments, donc: $\Delta x = \frac{1}{N+1}$. Appliquons la méthode des moments à l'équation approximative:

$$L^d(f) = 1 + 4x^2 \qquad \text{(III.141)}$$

avec les conditions aux limites f(0)=f(1)=0.

Où: $$L^d(f) \approx (N+1)^2\left[-f\left(x-\frac{1}{N+1}\right)+2f(x)-f\left(x+\frac{1}{N+1}\right)\right] \qquad \text{(III.142)}$$

Pour résoudre cette équation, on choisit: $f_n = P(x - x_n)$ (III.143)

et $\omega_m = \delta(x - x_m)$ (III.143)

D'où les éléments de la matrice Z:

$$Z_{mn} = <\omega_m, L^d(f_n)> = \begin{cases} 2(N+1)^2 & \text{si } m = n \\ -(N+1)^2 & \text{si } |m-n| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{(III.145)}$$

Et ceux de la matrice V: $$V_m = <\delta(x - x_m), 1 + 4x^2> = 1 + 4\left(\frac{m}{N+1}\right)^2 \qquad \text{(III.146)}$$

Par exemple pour N=5, on obtient l'équation matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} 72 & -36 & 0 & 0 & 0 \\ -36 & 72 & -36 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 72 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & -36 & 72 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & -36 & 72 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.111 \\ 1.444 \\ 2 \\ 2.778 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.147)}$$

On trouve:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.095 \\ 0.163 \\ 0.199 \\ 0.195 \\ 0.136 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.148)}$$

Dans la figure III.19, on compare la solution obtenue par une approximation en escalier à la solution exacte.

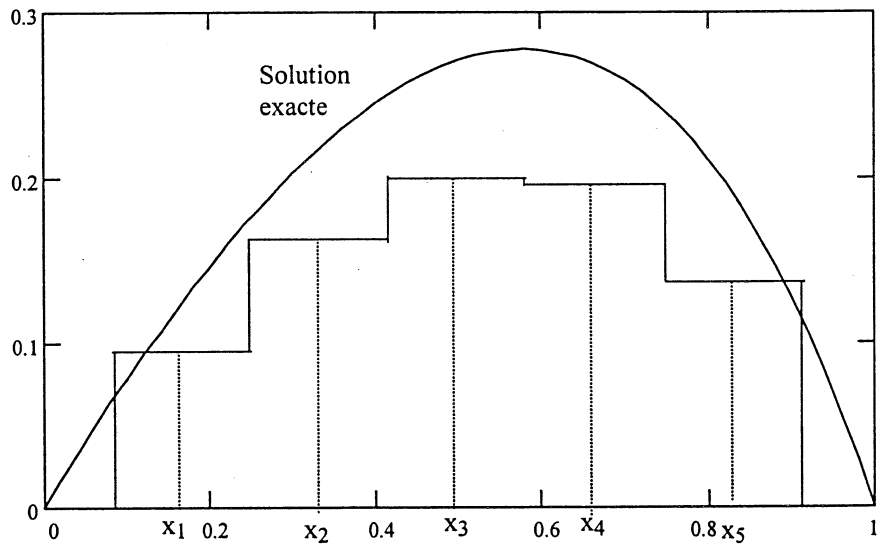


Figure III.19: approximation en escalier (N=5)

Pour avoir une meilleure précision, il suffit d'augmenter le nombre de subdivisions (figure III.20):

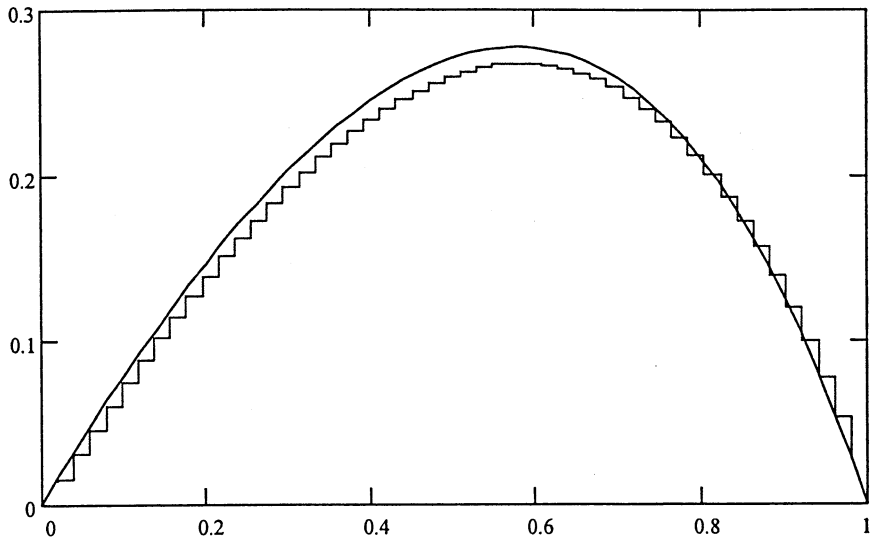


Figure III.20: approximation en escalier (N=50)

Un autre exemple d'une fonction base définie uniquement sur un sous intervalle est la fonction triangle définie par:

$$T(x) = \begin{cases} 1 - |x|(N+1) & \text{pour } |x| < \dfrac{1}{N+1} \\ 0 & \text{pour } |x| > \dfrac{1}{N+1} \end{cases} \qquad \text{(III.149)}$$

Pour N=5, la fonction $T(x-x_2)$ est représentée dans la figure III.21:

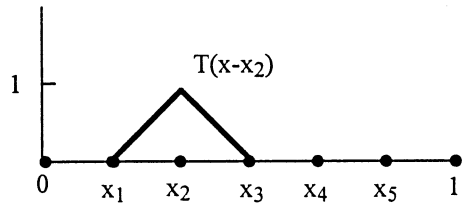


Figure III.21: fonction triangle

Une combinaison linéaire des fonctions triangle de la forme $f(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n T(x - x_n)$ donne une approximation linéaire par morceaux de f (figure III.22).

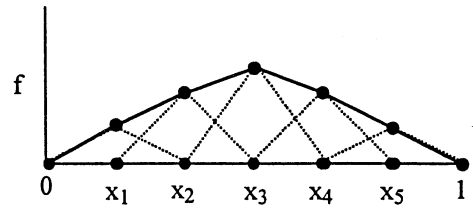


Figure III.22: approximation linéaire par morceaux.

Pour $L = -\frac{d^2}{dx^2}$, on a:

$$L(T(x-x_n)) = (N+1)\left[-\delta(x-x_{n-1}) + 2\,\delta(x-x_n) - \delta(x-x_{n+1})\right] \qquad \text{(III.150)}$$

Revenons encore une fois à notre exemple, on applique toujours la méthode des moments à l'équation: $L(f) = 1 + 4x^2$.

On prend maintenant $f_n = T(x-x_n)$ comme fonctions bases et $\omega_m = P(x-x_m)$ comme fonctions tests. Les éléments de la matrice Z sont donnés par:

$$Z_{mn} = <\omega_m, L(f_n)> = \begin{cases} 2(N+1) & \text{si } m = n \\ -(N+1) & \text{si } |m-n| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{(III.151)}$$

Les éléments de la matrice V sont donnés par:

$$V_m = <\omega_m, 1+4x^2> = \frac{1}{N+1}\left[1 + \frac{4m^2 + (1/3)}{(N+1)^2}\right] \qquad \text{(III.152)}$$

Par exemple pour N=5, on a l'équation matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} 12 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 12 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.187 \\ 0.242 \\ 0.335 \\ 0.465 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.153)}$$

On trouve:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.096 \\ 0.164 \\ 0.2 \\ 0.197 \\ 0.137 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.154)}$$

Dans la figure III.21, on compare la solution obtenue par une approximation linéaire par morceaux à la solution exacte.

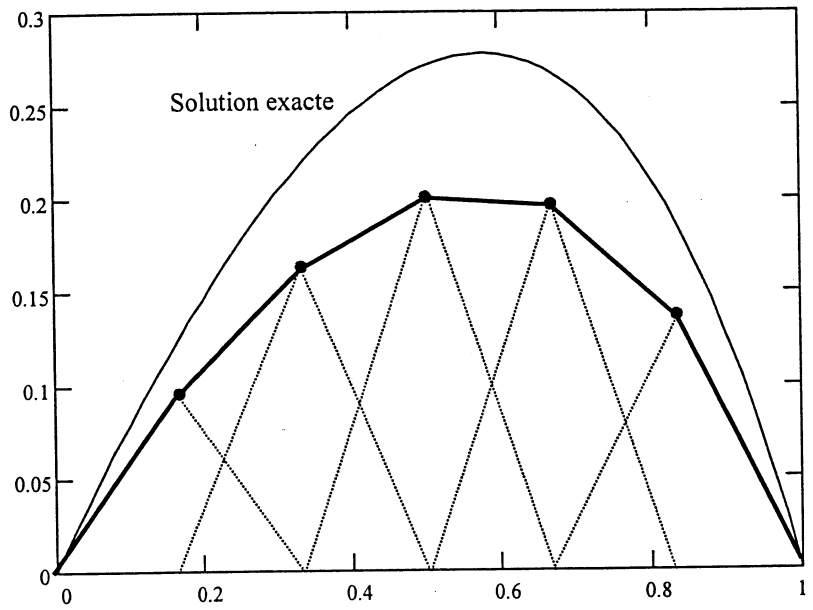


Figure III.23: Approximation linéaire par morceaux (N=5)

III.3.3 Application de la méthode des moments à un circuit filiforme:

Considérons un conducteur mince C de conductivité infinie ($\sigma = \infty$). La condition aux limites due à la continuité du champ électrique tangentiel à la surface du conducteur en un point M'(r') s'écrit:

$$\vec{E}_{tan} = \vec{n} \times \vec{E}_T = 0 \qquad \text{(III.155)}$$

Où $\vec{n}$ est le vecteur normal à la surface du conducteur en M' et $\vec{E}_T$ est le champ électrique total.

Le champ total $\vec{E}_T$ se décompose en une composante incidente $\vec{E}_i$ et une composante diffractée $\vec{E}_D$ (figure III.24).

$$\vec{E}_T = \vec{E}_i + \vec{E}_D \qquad \text{(III.156)}$$

L'équation III.155 devient:

$$\vec{n} \times \vec{E}_i = -\vec{n} \times \vec{E}_D \qquad \text{(III.157)}$$

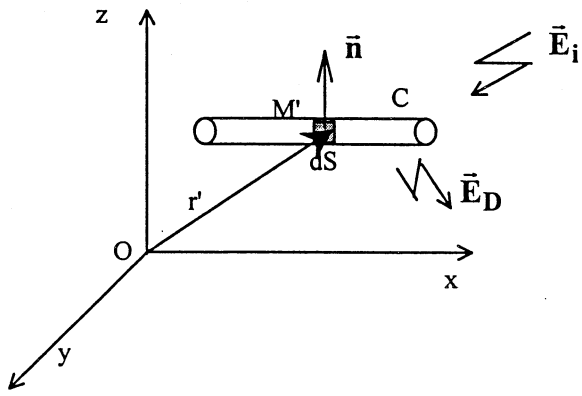


Figure III.24: condition aux limites à la surface d'un conducteur.

Le champ diffracté $\vec{E}_D$ est produit par les courants et les charges du conducteur, il est donné par:

$$\vec{E}_D = -j\omega\vec{A} - \text{grad}\,\phi \qquad \text{(III.158)}$$

La condition limite (III.157) est appliquée uniquement à la composante axiale du champ sur la surface du conducteur, on aura alors:

$$j\omega A(x) + \frac{\partial\phi}{\partial x}(x) = E_{i_x}(x) \qquad \text{(III.159)}$$

Avec A(x) le potentiel vecteur en un point de l'axe du conducteur donné par:

$$A(x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_C I(x')\frac{e^{-j\beta|x-x'|}}{|x-x'|}\,dx' \qquad \text{(III.160)}$$

Et $\phi(x)$ le potentiel vecteur en un point de l'axe du conducteur donné par:

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_C \lambda(x')\frac{e^{-j\beta|x-x'|}}{|x-x'|}\,dx' \qquad \text{(III.161)}$$

λ étant la densité de charge linéique, elle est reliée au courant par l'équation de continuité:

$$\lambda = -\frac{1}{j\omega}\frac{dI}{dx} \qquad \text{(III.162)}$$

III.161 devient alors:

$$\phi(x) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon\, j\omega}\int_C \frac{dI}{dx'}(x')\frac{e^{-j\beta|x-x'|}}{|x-x'|}\,dx' \qquad \text{(III.163)}$$

On définit l'opérateur suivant: $$L(I) = j\omega A + \frac{\partial\phi}{\partial x} \qquad \text{(III.164)}$$

L'équation III.159 s'écrit alors: $$L(I) = E_{i_x} \qquad \text{(III.165)}$$

Le produit scalaire le plus adapté est défini par: $< I, E >= \int_C I(x)\, E(x)\, dx$ (III.166)

Exprimons I comme combinaison linéaire de fonctions bases $f_1, f_2 ... f_n$: $I = \sum_n I_n f_n$ (III.167)

On choisit ensuite des fonctions tests ω_1, ω_2, ω_3 ... . En faisant le produit scalaire entre III.165 et une des fonctions tests ω_m , on obtient: $\sum_n I_n < \omega_m, L(f_n) > =< \omega_m, E_i >$ (III.168)

On définit les matrices:

$$[I_n] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad [V_m] = \begin{bmatrix} < \omega_1, E_i > \\ < \omega_2, E_i > \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad [Z_{mn}] = \begin{bmatrix} < \omega_1, L(f_1) > & < \omega_1, L(f_2) > & \dots \\ < \omega_2, L(f_1) > & < \omega_2, L(f_2) > & \dots \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

On obtient donc une équation matricielle: $[Z_{mn}][I_n] = [V_m]$, les éléments Z_{mn} sont appelés impédances généralisées.

Pour un conducteur de longueur L subdivisé en N segments, on prend des fonctions portes comme fonctions bases (figure III.25).

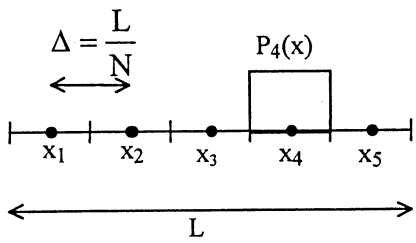


Figure III.25: Conducteur subdivisé en 5 segments, exemple de fonction porte.

Pour n quelconque, P_n est définie par:

$$P_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x - x_n| < \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{si } |x - x_n| > \frac{\Delta}{2} \end{cases} \quad \text{(III.169)}$$

On a: $$L(P_n)(x) = j\omega \frac{\mu}{4\pi} \int_C P_n(x') \frac{e^{-j\beta|x-x'|}}{|x-x'|} dx' - \frac{1}{4\pi\varepsilon j\omega} \int_C \frac{\partial P_n}{\partial x'}(x') \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{e^{-j\beta|x-x'|}}{|x-x'|}\right] dx' \quad \text{(III.170)}$$

$\frac{\partial P_n}{\partial x'}$ n'est pas définie, par conséquent, on utilise un opérateur approximatif:

$$\frac{\partial P_n}{\partial x'} = \frac{1}{\Delta}\left[P_n\left(x' + \frac{\Delta}{2}\right) - P_n\left(x' - \frac{\Delta}{2}\right)\right] \quad \text{(III.171)}$$

De plus, on fait l'approximation suivante:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{e^{-j\beta|x-x'|}}{|x-x'|}\right]=\frac{1}{\Delta}\left[\frac{e^{-j\beta\left|x+\frac{\Delta}{2}-x'\right|}}{\left|x+\frac{\Delta}{2}-x'\right|}-\frac{e^{-j\beta\left|x-\frac{\Delta}{2}-x'\right|}}{\left|x-\frac{\Delta}{2}-x'\right|}\right] \tag{III.172}$$

III.170 devient alors:

$$\begin{aligned}L(P_n)(x)&=j\omega\frac{\mu}{4\pi}\int_{x_n-\frac{\Delta}{2}}^{x_n+\frac{\Delta}{2}}\frac{e^{-j\beta|x-x'|}}{|x-x'|}dx'\\&-\frac{1}{4\pi\varepsilon j\omega\Delta^2}\int_C\left[P_n\left(x'+\frac{\Delta}{2}\right)-P_n\left(x'-\frac{\Delta}{2}\right)\right]\left[\frac{e^{-j\beta\left|x-x'+\frac{\Delta}{2}\right|}}{\left|x-x'+\frac{\Delta}{2}\right|}-\frac{e^{-j\beta\left|x-x'-\frac{\Delta}{2}\right|}}{\left|x-x'-\frac{\Delta}{2}\right|}\right]dx'\end{aligned} \tag{III.173}$$

Par changement de variable, on obtient:

$$\begin{aligned}L(P_n)(x)&=j\omega\frac{\mu}{4\pi}\int_{x_n-\frac{\Delta}{2}}^{x_n+\frac{\Delta}{2}}\frac{e^{-j\beta|x-x'|}}{|x-x'|}dx'\\&+\frac{1}{4\pi\varepsilon j\omega\Delta^2}\left[\begin{aligned}&\int_{x_n-\frac{\Delta}{2}}^{x_n+\frac{\Delta}{2}}\frac{e^{-j\beta|x-x'|}}{|x-x'|}dx'-\int_{x_{n-1}-\frac{\Delta}{2}}^{x_{n-1}+\frac{\Delta}{2}}\frac{e^{-j\beta|x-x'|}}{|x-x'|}dx'\\&+\int_{x_n-\frac{\Delta}{2}}^{x_n+\frac{\Delta}{2}}\frac{e^{-j\beta|x-x'|}}{|x-x'|}dx'-\int_{x_{n+1}-\frac{\Delta}{2}}^{x_{n+1}+\frac{\Delta}{2}}\frac{e^{-j\beta|x-x'|}}{|x-x'|}dx'\end{aligned}\right]\end{aligned} \tag{III.174}$$

On prend maintenant des fonctions de Dirac comme fonction tests: $\omega_m(x)=\delta(x-x_m)$ (III.175)

On obtient alors les éléments de la matrice Z:

$$Z_{mn}=j\omega\frac{\mu}{4\pi}\Delta\frac{e^{-j\beta|x_m-x_n|}}{|x_m-x_n|}+\frac{1}{4\pi\varepsilon j\omega\Delta}\left[2\frac{e^{-j\beta|x_m-x_n|}}{|x_m-x_n|}-\frac{e^{-j\beta|x_m-x_{n-1}|}}{|x_m-x_{n-1}|}-\frac{e^{-j\beta|x_m-x_{n+1}|}}{|x_m-x_{n+1}|}\right] \tag{III.176}$$

Et ceux de la matrice V: $V_m=E_i(x_m)$ (III.177)

III.3.4 Application à l'antenne:

On applique cette dernière approche au cas de l'antenne.

Commençons par le cas d'une antenne demi-onde (L=λ/2 et 2a/L=0.001) alimentée en son milieu par une tension sinusoïdale d'amplitude 1V.

Soit N le nombre de subdivision, les éléments de la matrice V sont nuls sauf le terme $\frac{N}{2}$ qui vaut: $\frac{1}{\Delta}$.

En résolvant alors l'équation matricielle respectivement pour N = 4, 20 et 50, on obtient l'allure de courant attendue. (figure III.26).

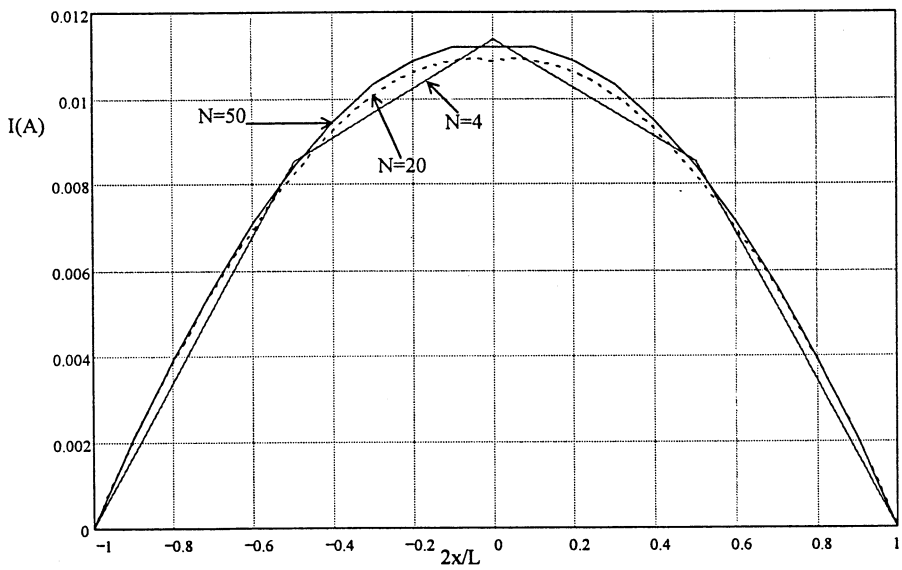
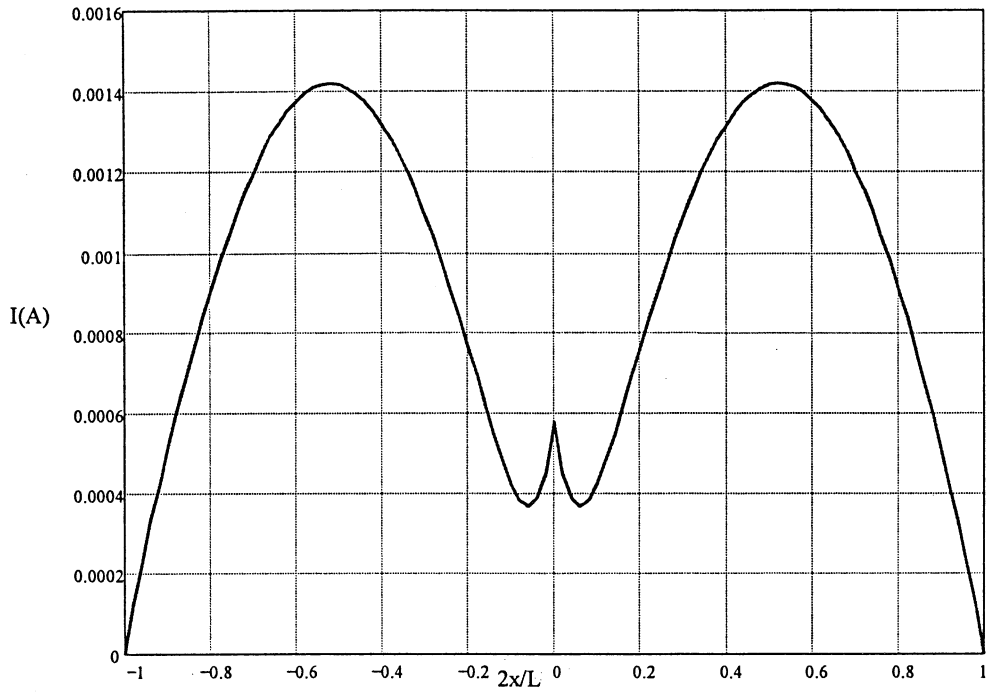


Figure III.26: Courant dans une antenne demi-onde.

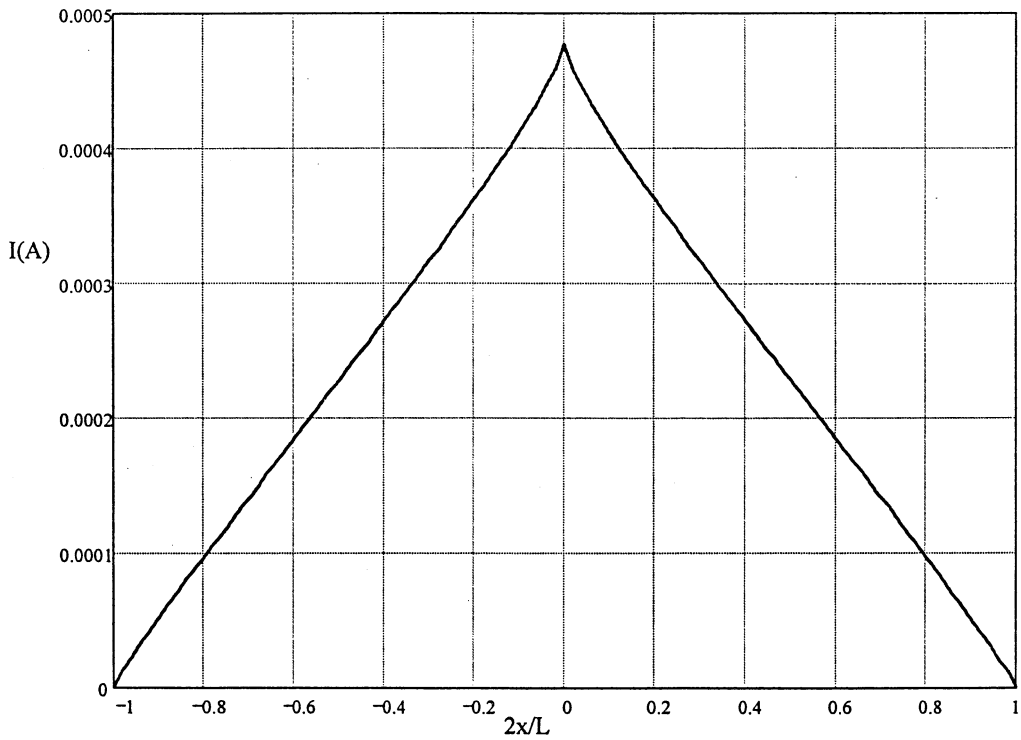
On voit bien que la convergence est assez rapide.

La même approche est appliquée aux deux cas suivants:

- L=λ, on obtient bien une sinusoïde complète (figure III.27-a).
- L=0.1 λ, on obtient bien un courant triangulaire (figure III.27-b).



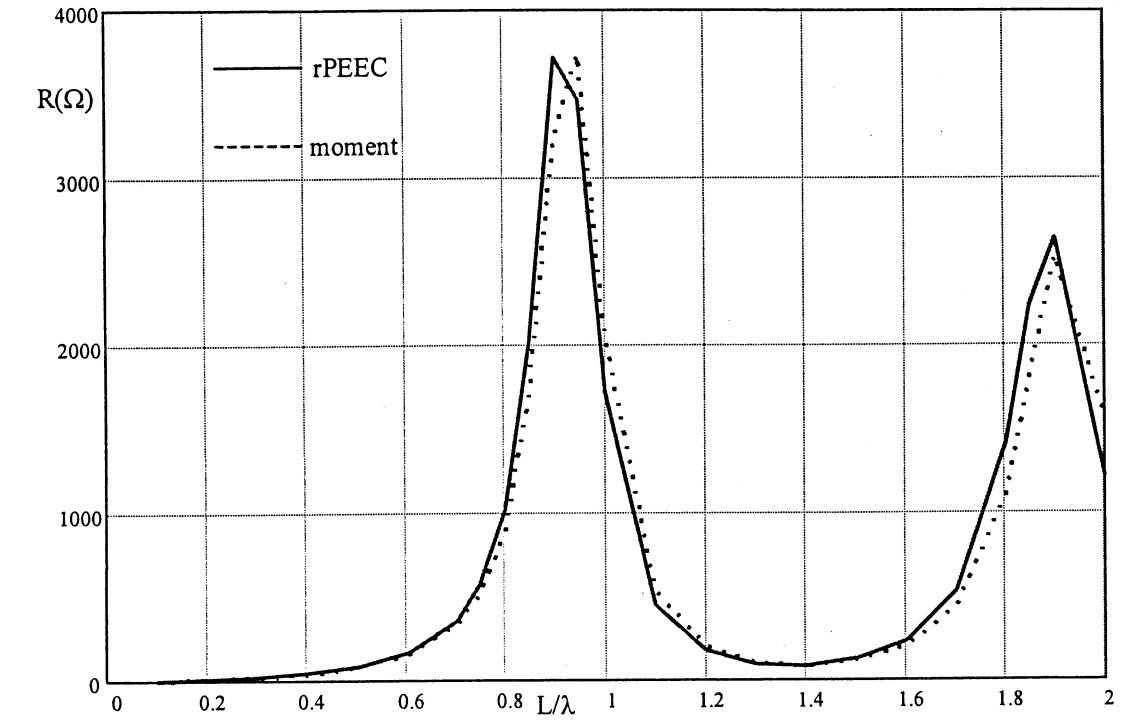
(a)



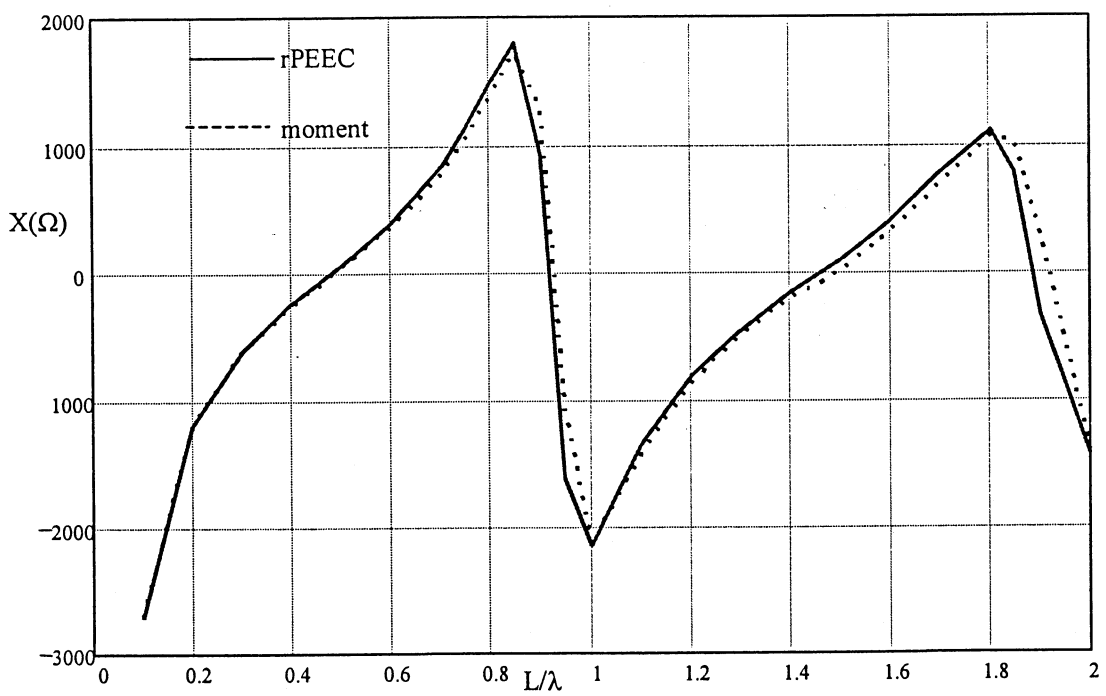
(b)

Figure III.27: Courant dans une antenne, (a) L=λ, (b) L=0.1 λ.

Afin de comparer la méthode des moments à la méthode rPEEC pour l'exemple de l'antenne, on calcule l'impédance à l'entrée de l'antenne par les deux méthodes, les résultats de la comparaison sont représentés dans les figure III.28-a et III.28-b.



(a)



(b)

Figure III.28:impédance d'entrée d'une antenne(moment/rPEEC),(a) résistance, (b) réactance.

Conclusion:

On constate qu'avec les deux méthodes on obtient exactement les mêmes résultats. En effet en visualisant les équations III.109 et III.176, on voit bien qu'il s'agit de la même équation matricielle. Par conséquent appliquer la méthode des moments avec des fonctions portes comme fonctions bases et des fonctions de Dirac comme fonctions tests est équivalent à appliquer la méthode rPEEC.

La méthode des moments donne cependant une certaine souplesse quant au choix des fonctions de base, qu'il est bien de garder en mémoire. Un choix bien pensé de fonctions peut simplifier considérablement les calculs, comme le montre l'exemple suivant.

III.3.5 Application à une boucle circulaire:

On considère une boucle circulaire alimentée en Φ=0 (figure III.29). [61]

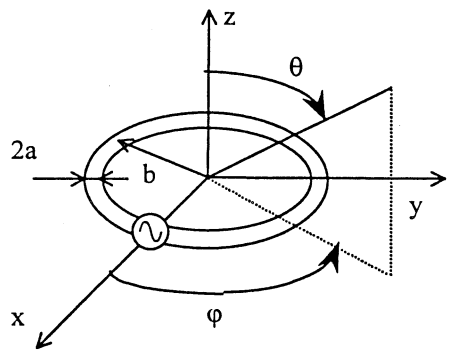


Figure III.29: Boucle circulaire.

L'équation de continuité s'écrit de la manière suivante:

$$E_{i\varphi} = j\omega A_{\varphi} + \frac{1}{b}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \qquad \text{(III.178)}$$

avec:

$$A_{\varphi}(\varphi) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} I(\varphi')\,\frac{e^{-j\beta R}}{R}\cos(\varphi-\varphi')\;b\,d\varphi' \qquad \text{(III.179)}$$

$$\phi(\varphi) = \frac{-1}{4\pi j\omega\varepsilon}\int_0^{2\pi}\frac{1}{b}\frac{dI}{d\varphi'}\frac{e^{-j\beta R}}{R}\,b\,d\varphi' \qquad \text{(III.180)}$$

Où R est la distance entre un point de l'axe du conducteur et un point de sa surface:

$$R = \sqrt{b^2 + b^2 - 2\,b^2\cos(\varphi - \varphi') + a^2} = b\sqrt{4\sin^2\left(\frac{\varphi - \varphi'}{2}\right) + \left(\frac{a}{b}\right)^2} \qquad \text{(III.181)}$$

On définit l'opérateur:

$$L(I) = \int_0^{2\pi}\left[j\omega\mu\, b\, I\cos(\varphi - \varphi')\frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} - \frac{1}{j\omega\varepsilon b}\frac{dI}{d\varphi'}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R}\right)\right] d\varphi' \qquad \text{(III.182)}$$

On a donc l'équation suivante:

$$L(I) = E_\varphi^i \qquad \text{(III.183)}$$

Dans notre cas: $$E_\varphi^i = \frac{V_S}{b}\delta(\varphi) \qquad \text{(III.184)}$$

On prend $f_n = e^{jn\varphi}$ comme fonctions bases, on exprime le courant comme combinaison linéaire des fonctions f_n: $$I(\varphi) = \sum_n I_n\, e^{jn\varphi} \qquad \text{(III.185)}$$

Pour les fonctions tests, on prend $\omega_m = f_m^* = e^{-jm\varphi}$ (III.186)

Les éléments de la matrice V sont donnés par:

$$V_m = <\omega_m, E_\varphi^i> = \int_0^{2\pi} e^{-jm\varphi}\, V_S\, \delta(\varphi)\, d\varphi = V_S \qquad \forall m \qquad \text{(III.187)}$$

Les éléments de la matrice Z sont donnés par:

$$Z_{mn} = <\omega_n, L(f_n)> = \int_0^{2\pi} e^{-jm\varphi}\, L(f_n)\, b\, d\varphi \qquad \text{(III.188)}$$

Pour calculer III.188, on définit la série de Fourier suivante:

$$\frac{b}{R}e^{-j\beta R} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_n\, e^{jn(\varphi - \varphi')} \qquad \text{(III.189)}$$

Où R est donnée par III.181, les K_n sont les coefficients de Fourier donnés par:

$$K_n = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-j\beta b\sqrt{4\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \left(\frac{a}{b}\right)^2}}}{\sqrt{4\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \left(\frac{a}{b}\right)^2}}\, e^{-jn\varphi}\, d\varphi \qquad \text{(III.190)}$$

En remplaçant III.189 dans III.182, on obtient:

$$L\left(e^{jn\varphi}\right) = \frac{j}{2b}\left[\frac{\omega\mu b}{2}(K_{n-1} + K_{n+1}) - \frac{n^2}{\omega\varepsilon b}K_n\right]e^{jn\varphi} \qquad \text{(III.191)}$$

En utilisant III.191 et III.186 dans III.188, on obtient:

$$Z_{mn} = 0 \qquad m \neq n \tag{III.192}$$

$$Z_{nn} = j\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\beta b\left[\frac{1}{2}K_{n-1} + \frac{1}{2}K_{n+1} - \left(\frac{n}{\beta b}\right)^2 K_n\right] \tag{III.193}$$

On constate que Z est diagonal, par conséquent la solution s'obtient facilement par:

$$I(\varphi) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{V_n}{Z_{nn}} e^{jn\varphi} \tag{III.194}$$

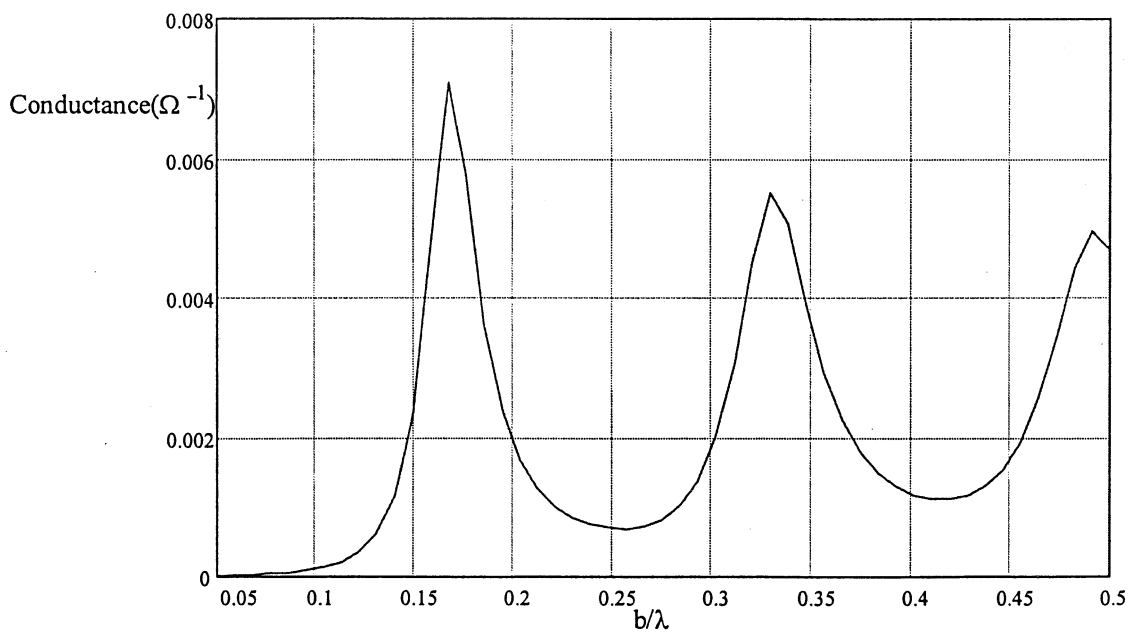
Comme $Z_{-n-n}=Z_{nn}$, III.194 devient:

$$I(\varphi) = \frac{V_S}{Z_{00}} + 2V_S \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos(n\varphi)}{Z_{nn}} \tag{III.195}$$

D'où l'admittance d'entrée:

$$Y_{in} = \frac{I(0)}{V_S} = \frac{1}{Z_{00}} + 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{Z_{nn}} \tag{III.196}$$

On a calculé l'admittance d'entrée par III.196 avec N=20 et b/a=100, les résultats sont représentés dans la figure III.30.



(a)

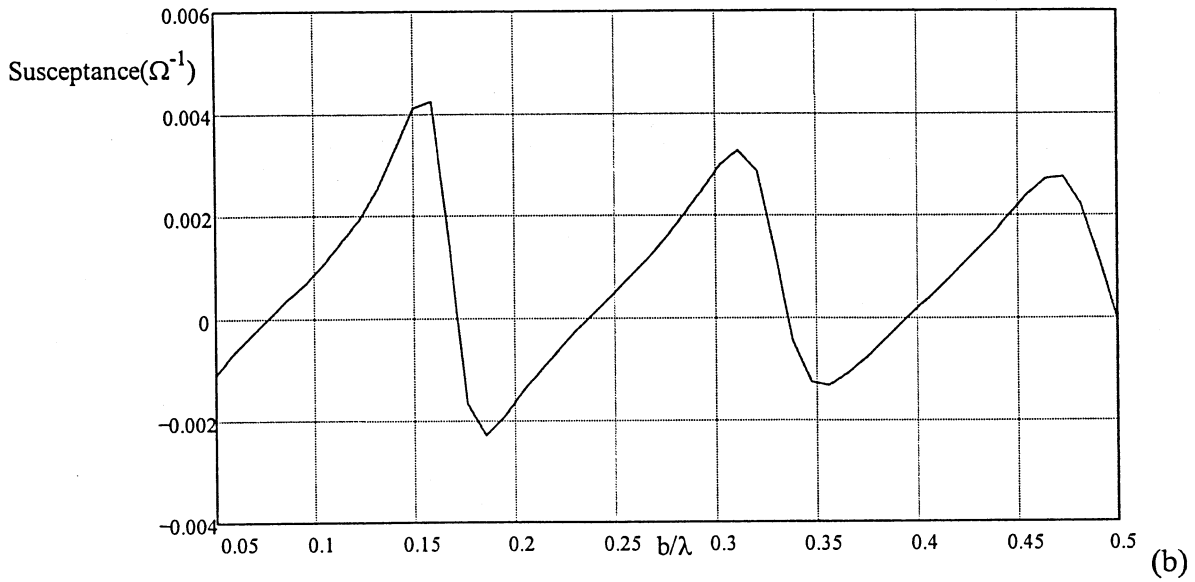


Figure III.30: Admittance d'entrée d'une boucle circulaire. (a) conductance, (b) susceptance.

Il s'agit donc là d'un exemple où un choix judicieux des fonctions bases et des fonctions tests permet d'avoir une matrice Z diagonale, ce qui permet d'avoir une expression analytique de l'impédance au lieu d'avoir à résoudre l'équation matricielle pour chaque fréquence séparément.

III.3.6 Conclusion:

La méthode des moments permet la résolution d'équations intégrales linéaires. La fonction inconnue est exprimée comme une combinaison linéaire de fonctions appelées fonctions bases. La précision de la solution, la facilité dans le calcul des éléments de la matrice dépendent de ces fonctions. L'application de cette méthode au cas de l'antenne a mis en évidence le fait qu'appliquer la méthode des moments avec des fonctions portes comme fonctions bases et des fonctions de Dirac comme fonctions tests est parfaitement équivalent à appliquer la méthode rPEEC.

III.4 La méthode des Lignes de Transmissions:

III.4.1 Introduction:

Les lignes de transmission étudiées sont constituées de deux conducteurs dont les propriétés sont constantes tout le long de la ligne. La théorie exposée plus loin suppose que les dimensions transversales sont négligeables par rapport aux dimensions longitudinales. Dès lors, le courant qui traverse le conducteur d'aller est égal et de sens opposé au courant qui traverse le conducteur de retour. Dans ce genre de lignes, le principal mode de propagation des ondes électromagnétiques est le mode TEM (champs transversaux au sens du courant).[10].

III.4.2 Equations des lignes:

III.4.2.1 Schéma équivalent d'une ligne de transmission:

Considérons un élément de ligne de longueur dx. Désignons par v et v+dv les tensions à l'entrée et à la sortie de l'élément, par i et i+di les courants correspondants.
Le schéma équivalent du tronçon est représenté dans la figure III.31.

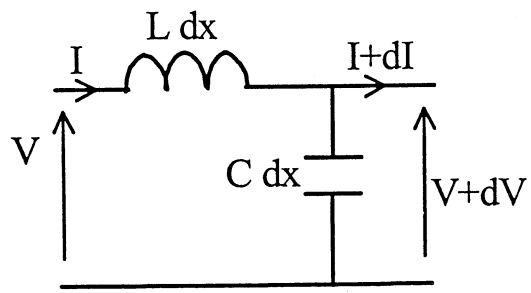


Figure III.31.a: Ligne sans pertes.

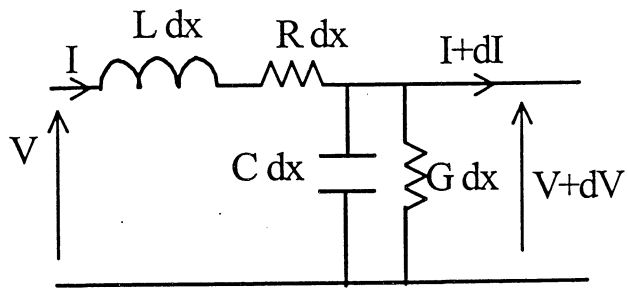


Figure III.31.b: Ligne avec pertes.

R représente les pertes résistives dans les conducteurs et G les pertes diélectriques dans l'isolant.
Les équations générales d'une ligne de transmission sont:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (RC + LG)\dfrac{\partial V}{\partial t} + RGV \\ \dfrac{\partial^2 I}{\partial x^2} = LC\dfrac{\partial^2 I}{\partial t^2} + (RC + LG)\dfrac{\partial I}{\partial t} + RGI \end{cases} \qquad \text{(III.197)}$$

Dans le cas où les pertes sont négligeables, on retrouve l'équation de propagation connue (équation des télégraphistes):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial^2 I}{\partial x^2} = LC\dfrac{\partial^2 I}{\partial t^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 I}{\partial t^2} \end{cases} \qquad \text{(III.198)}$$

Les solutions de ces équations correspondent à la somme d'une onde + et d'une onde − :

$$V(x,t) = V^{+}\left(t - \frac{x}{v}\right) + V^{-}\left(t + \frac{x}{v}\right) \qquad \text{(III.199)}$$

avec: $$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{(III.200)}$$

qui n'est autre que la vitesse de l'onde.

III.4.2.2 Solution générale de l'équation complète en régime harmonique:

En régime harmonique le système III.197 devient:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\overline{V}}{dx^2} - (R + jL\omega)(G + jC\omega)\dfrac{\partial \overline{V}}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{d^2\overline{I}}{dx^2} - (R + jL\omega)(G + jC\omega)\dfrac{\partial \overline{I}}{\partial t} = 0 \end{cases} \qquad \text{(III.201)}$$

Où $\overline{V}$ et $\overline{I}$ dépendent uniquement de la variable espace ($V = \overline{V}(x)e^{j\omega t}, I = \overline{I}(x)e^{j\omega t}$).

Soit γ un nombre complexe tel que:

$$\gamma^2 = (R + jL\omega)(G + jC\omega) \qquad \text{(III.202)}$$

γ est désignée sous le nom de constante de propagation de la ligne, elle dépend des paramètres linéiques et de la fréquence.

Le système III.201 devient:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\overline{V}}{dx^2} - \gamma^2\overline{V} = 0 \\ \dfrac{d^2\overline{I}}{dx^2} - \gamma^2\overline{I} = 0 \end{cases} \qquad \text{(III.203)}$$

La solution générale de ce système est:

$$\begin{cases} \overline{V} = A e^{-\gamma x} + B e^{\gamma x} \\ \overline{I} = -\dfrac{1}{R + jL\omega}\dfrac{d\overline{V}}{dx} = \dfrac{1}{Z_c}\left(A e^{-\gamma x} - B e^{\gamma x}\right) \end{cases} \qquad \text{(III.204)}$$

Avec $$Z_c = \sqrt{\frac{R + jL\omega}{G + jC\omega}} \qquad \text{(III.205)}$$

Z_c étant l'impédance caractéristique complexe de la ligne.

On pose: $$\gamma = \alpha + j\beta \qquad \text{(III.206)}$$

Où α est la constante d'atténuation et β est la constante de phase.

Pour une ligne sans pertes:

$$\alpha = 0 \qquad \beta = \omega\sqrt{LC} = \frac{\omega}{v} \qquad \text{et} \qquad Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

III.4.2.3 Coefficients de réflexion et impédance :

En tout point de la ligne, on peut définir le coefficient de réflexion comme le rapport:

$$\Gamma(x) = \frac{V^-(x)}{V^+(x)} \qquad \text{(III.207)}$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} V(x) &= A e^{-\gamma x}\left(1 + \Gamma(x)\right) \\ I(x) &= \frac{A}{Z_c} e^{-\gamma x}\left(1 - \Gamma(x)\right) \end{aligned} \qquad \text{(III.208)}$$

On définit l'impédance ramenée en un point x de la ligne comme le rapport: $Z(x) = \dfrac{V(x)}{I(x)}$

Compte tenu des expressions de V(x) et I(x), on a:

$$Z(x) = Z_c \frac{1 + \Gamma(x)}{1 - \Gamma(x)} \qquad \text{(III.209)}$$

Expression de Z(x) en fonction de Z_c et Z_L (impédance de charge):

On a:

$$\begin{cases} V(x) = A e^{-\gamma x} + B e^{\gamma x} \\ I(x) = \dfrac{1}{Z_c}\left(A e^{-\gamma x} - B e^{\gamma x}\right) \end{cases}$$

Donc:

$$\begin{cases} A = \dfrac{V(x) + Z_c I(x)}{2} e^{\gamma x} \\ B = \dfrac{V(x) - Z_c I(x)}{2} e^{-\gamma x} \end{cases} \qquad \text{(III.210)}$$

Exprimons l'impédance de la charge (x=L):

$$Z_L = \frac{V(L)}{I(L)} = Z_c \frac{A e^{-\gamma L} + B e^{\gamma L}}{A e^{-\gamma L} - B e^{\gamma L}} \qquad \text{(III.211)}$$

En remplaçant A et B par leurs expressions, on obtient:

$$Z_L = Z_C \frac{V(x)\,\mathrm{ch}\,\gamma(x-L) + Z_c\, I(x)\,\mathrm{sh}\,\gamma(x-L)}{V(x)\,\mathrm{sh}\,\gamma(x-L) + Z_c\, I(x)\,\mathrm{ch}\,\gamma(x-L)} \qquad \text{(III.212)}$$

D'où l'impédance en un point x quelconque:

$$Z(x) = \frac{V(x)}{I(x)} = Z_C \frac{Z_L + Z_C\ \mathrm{th}\,\gamma(L-x)}{Z_C + Z_L\ \mathrm{th}\,\gamma(L-x)} \qquad \text{(III.213)}$$

En particulier l'impédance d'entrée est donnée par:

$$Z_e = Z(0) = Z_C \frac{Z_L + Z_C\ \mathrm{th}\,\gamma L}{Z_C + Z_L\ \mathrm{th}\,\gamma L} \qquad \text{(III.214)}$$

Pour une ligne sans pertes, cette expression devient:

$$Z_e = Z(0) = Z_C \frac{Z_L + jZ_C\ \mathrm{tg}\,\gamma L}{Z_C + jZ_L\ \mathrm{tg}\,\gamma L} \qquad \text{(III.215)}$$

III.4.3 La matrice S ou matrice de dispersion:

III.4.3.1 Définition:

Considérons un quadripôle linéaire lié d'une part à une source, d'autre part à une charge.

V_{e1} et V_{e2} sont les ondes de tension entrant dans le quadripôle, V_{S1} et V_{S2} les ondes de tension sortant du quadripôle (figure III.32).

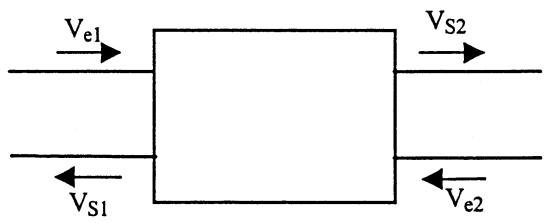


Figure III.32: Quadripôle.

On peut exprimer les tensions sortantes en fonction des tensions entrantes de la façon suivante:

$$\begin{pmatrix} V_{S1} \\ V_{S2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \end{pmatrix} \qquad \text{(III.216)}$$

La signification des facteurs S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22} dits paramètre S est la suivante:

$S_{11} = \frac{V_{S1}}{V_{e1}}$ pour $V_{e2}=0$: c'est le facteur de réflexion à l'entrée, la sortie étant adaptée.

$S_{21} = \frac{V_{S2}}{V_{e1}}$ pour $V_{e2}=0$: c'est le facteur de transmission entrée-sortie, sortie adaptée.

$S_{22} = \frac{V_{S2}}{V_{e2}}$ pour $V_{e1}=0$: c'est le facteur de réflexion en sortie, l'entrée étant adaptée.

$S_{12} = \frac{V_{S1}}{V_{e2}}$ pour $V_{e1}=0$: c'est le facteur de transmission sortie-entrée, entrée adaptée.

III.4.3.2 Intérêt des paramètres S :

Il existe pour l'étude des quadripôles linéaires d'autres paramètres bien connus: paramètres h,z,y. La détermination expérimentale de ces paramètres exige des mesures en court circuit et en circuit ouvert. Au dessus de 100MHz, la condition circuit ouvert (impédance infinie) est difficile à réaliser; quant à la mise en court circuit, elle entraîne souvent l'oscillation du montage.

Au contraire, les mesures des paramètres S se font sur entrée et sortie adaptées (50Ω) et n'entraînent pas ces difficultés. La connaissance des paramètres S permet en outre de calculer simplement les grandeurs les plus communément recherchées: puissance, gain ou atténuation, facteur de réflexion, impédance d'entrée... Leur intérêt pratique est donc très grand.

III.4.3.3 Paramètres S d'une ligne de transmission :

On considère une ligne de transmission de longueur L, liée d'une part à une source e_g et d'autre part à une charge R_L. (figure III.33).

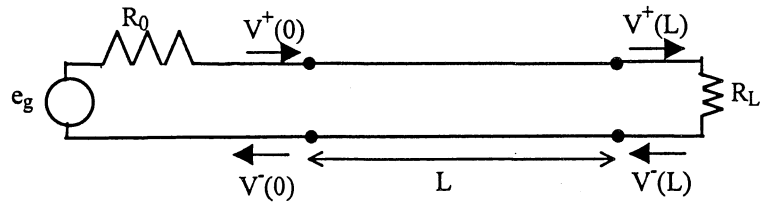


Figure III.33: Paramètres S d'une ligne de transmission.

On a: $$S_{11} = \frac{V^-(0)}{V^+(0)} = \Gamma(0) \qquad \text{(III.217)}$$

Grâce à III.209, on a: $$Z_e = Z_C \frac{1+S_{11}}{1-S_{11}} \qquad \text{(III.218)}$$

Cette relation permet de retrouver l'impédance d'entrée à partir de la mesure de S_{11} .

D'autre part:

$$S_{21} = \frac{V^+(L)}{V^+(0)} = \frac{A\,e^{-\gamma L}}{A} = e^{-\gamma L} = e^{-\alpha L}\, e^{-j\beta L} \qquad \text{(III.219)}$$

On peut donc déduire le facteur d'atténuation à partir de S_{21} par:

$$\alpha = -\frac{1}{L} \ln(|S_{21}|) \qquad \text{(III.220)}$$

III.4.4 La ligne microruban:

La ligne microruban est constituée par un ruban métallique déposé sur une plaque diélectrique entièrement métallisée sur l'autre face (plan de masse) (figure III.34).

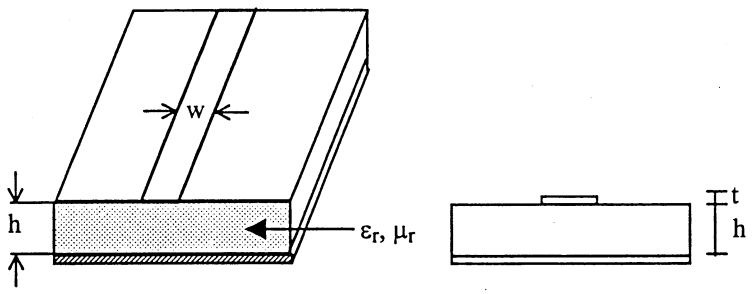


Figure III.34: Ligne microruban.

La ligne microruban est caractérisée par la permittivité relative de son substrat ε_r, par l'épaisseur h de celui ci, par la largeur w du ruban enfin par l'épaisseur du ruban t.

Constante diélectrique effective ε_e:

L'introduction du diélectrique modifie la capacité linéique. Appelons C la nouvelle capacité linéique et posons $\varepsilon_e = \frac{C}{C_0}$, ε_e est la permittivité effective de la ligne. La nouvelle vitesse de propagation est:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C}} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0 \varepsilon_e}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_e}} \qquad \text{(III.221)}$$

La nouvelle impédance caractéristique est:

$$R_C = \sqrt{\frac{L_0}{C}} = \frac{R_{C0}}{\sqrt{\varepsilon_e}} \tag{III.222}$$

D'après Schneider et Hammerstad nous donnons ci-dessous l'expression de la permittivité effective ε_e et de l'impédance caractéristique.

$$\varepsilon_e = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} f\left(\frac{w}{h}\right) \tag{III.223}$$

avec:

$$\begin{cases} f\left(\frac{w}{h}\right) = \left(1 + \frac{12h}{w}\right)^{-0.5} + 0.04\left(1 - \frac{h}{w}\right)^2 & \text{si } \frac{w}{h} \le 1 \\ f\left(\frac{w}{h}\right) = \left(1 + \frac{12h}{w}\right)^{-0.5} & \text{si } \frac{w}{h} > 1 \end{cases} \tag{III.224}$$

$$\begin{cases} R_C = \frac{Z_0}{2\pi\sqrt{\varepsilon_e}} \operatorname{Log}\left(\frac{8h}{w} + \frac{0.25w}{h}\right) & \text{si } \frac{w}{h} \le 1 \\ R_C = \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon_e}} \left[\frac{w}{h} + 1.393 + 0.667 \operatorname{Log}\left(\frac{w}{h} + 1.444\right)\right]^{-1} & \text{si } \frac{w}{h} > 1 \end{cases} \tag{III.225}$$

avec: $Z_0 = 120\pi$.

III.5 Conclusion:

Dans ce chapitre, différentes méthodes de modélisation d'interconnexions ont été présentées. La méthode PEEC permet de modéliser la connexion par un circuit équivalent, elle est valable dans le cadre de l'hypothèse des états quasi-stationnaires. Si cette hypothèse n'est plus respectée, une méthode semblable peut être appliquer, il s'agit de la méthode rPEEC.

Une deuxième approche consiste à déduire à partir des équations de Maxwell une équation intégrale en courant, cette équation est ensuite résolue par la méthode des moments. Le domaine d'application de cette approche est très large, elle s'applique aussi bien pour des circuits de dimensions faibles devant la longueur d'onde que pour des circuits de dimensions comparables à la longueur d'onde. L'application de cette méthode au cas de l'antenne constitue une validation importante.

Une troisième approche a été abordée dans ce chapitre, il s'agit de la méthode des lignes de transmission. Cette méthode s'applique dans le cas de lignes longues et étroites pour lesquels le principal mode de propagation des ondes électromagnétiques est le mode TEM (champs transversaux au sens du courant). Tout comme la méthode PEEC, cette méthode permet d'avoir un circuit équivalent des connexions qui peut être implanter dans un logiciel de simulation.

Dans le chapitre suivant, on va étudier l'application de ces méthode pour des circuits d'électronique de puissance.

PARTIE IV

APPLICATIONS

IV.1 Introduction:

Dans ce chapitre, on va appliquer les méthodes présentées au chapitre précédent à deux cas simples mais représentatifs des circuits qu'on rencontre en électronique de puissance. Il s'agit du cas de la boucle rectangulaire et du cas d'une ligne microruban.
A travers ces exemples, on va tenter de définir l'adéquation de ces méthodes à nos besoins.

IV.2 Cas d'une boucle rectangulaire:

On considère une boucle rectangulaire de dimensions L_1 et L_2 constituée d'un fil cylindrique de rayon $a=L_1/50$ et alimentée par une source de tension alternative V_g (figure IV.1).

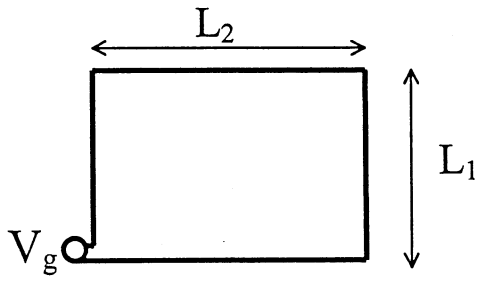


Figure IV.1: Boucle rectangulaire.

On a vu que la méthode des moments et la méthode rPEEC sont équivalentes, par contre la méthode PEEC n'est applicable que si le retard est négligeable, c'est à dire lorsque les dimensions du circuit sont négligeables devant la longueur d'onde.
Ceci se confirme dans le cas de la boucle rectangulaire, en effet dans le cas où L_1 et L_2 sont négligeables devant λ la méthode PEEC donne une répartition de courant proche de celle donnée par les méthodes rPEEC et moment (figure III.36, $L_1=L_2=\lambda/64$), par contre lorsque L_1 et L_2 deviennent du même ordre que λ, on note une différence plus notable entre la méthode PEEC et les deux autres méthodes (Figure III.37, $L_1=L_2=\lambda/8$).
Il est par ailleurs intéressant de remarquer que pour le deuxième cas le périmètre du circuit vaut $\lambda/2$, ce qui explique le fait qu'on a obtenu une demi sinusoïde comme c'est le cas dans la figure IV.3, par contre dans le premier cas le périmètre du circuit est petit devant la longueur d'onde, ce qui explique le fait que le courant ne varie pas beaucoup le long du circuit (figure IV.2).

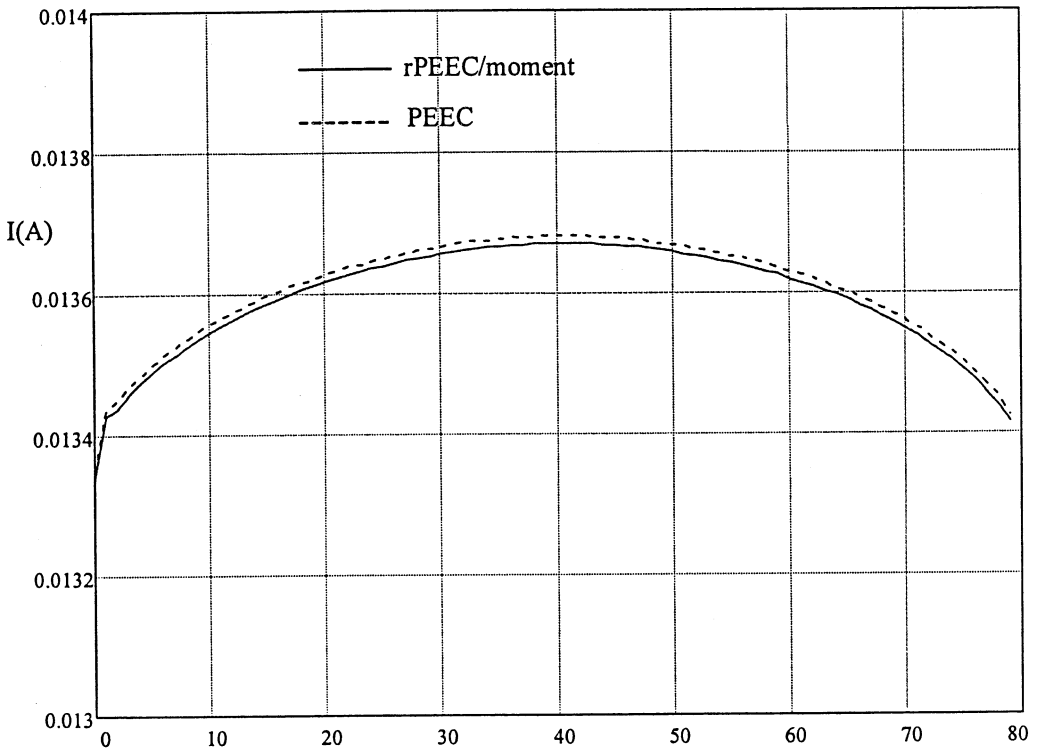


Figure IV.2: Courant dans une boucle rectangulaire de dimensions $L_1=L_2=\lambda/64$.

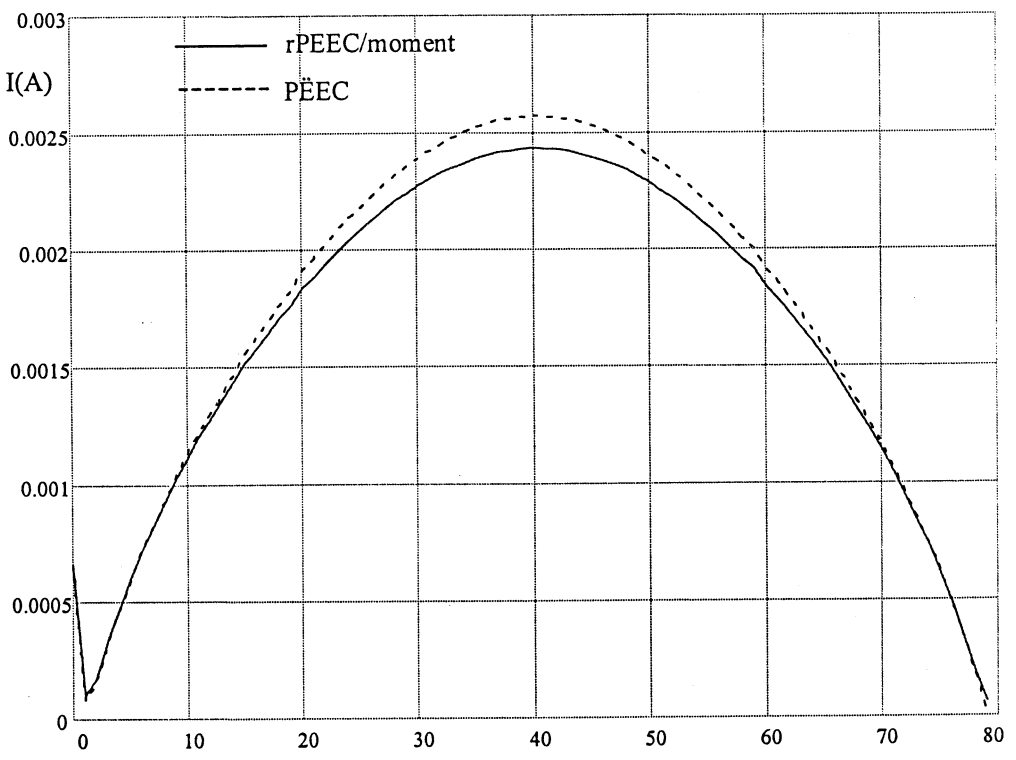


Figure IV.3: Courant dans une boucle rectangulaire de dimensions $L_1=L_2=\lambda/8$.

IV.2.1 Impédance d'entrée d'une boucle rectangulaire:

Considérons une boucle rectangulaire de dimensions $L_1=L_2=10cm$, constitué d'un fil cylindrique de rayon $L_1/50$. Selon la fréquence, on doit utiliser l'une des approches suivantes:

- Cas quasi stationnaire+effet capacitif négligeable:

  Dans ce cas la boucle est représentée par une inductance $L_b=250nH$.

- Cas quasi stationnaire : méthode PEEC:

  Le retard est négligeable, par conséquent l'impédance d'entrée est imaginaire pure.

- Cas général: méthode rPEEC, ou la méthode des moments:

  On tient compte du retard, l'impédance contient une partie réelle appelée résistance de rayonnement.

Dans la figure IV.4, on compare les parties imaginaires de l'impédance données par les différentes approches.

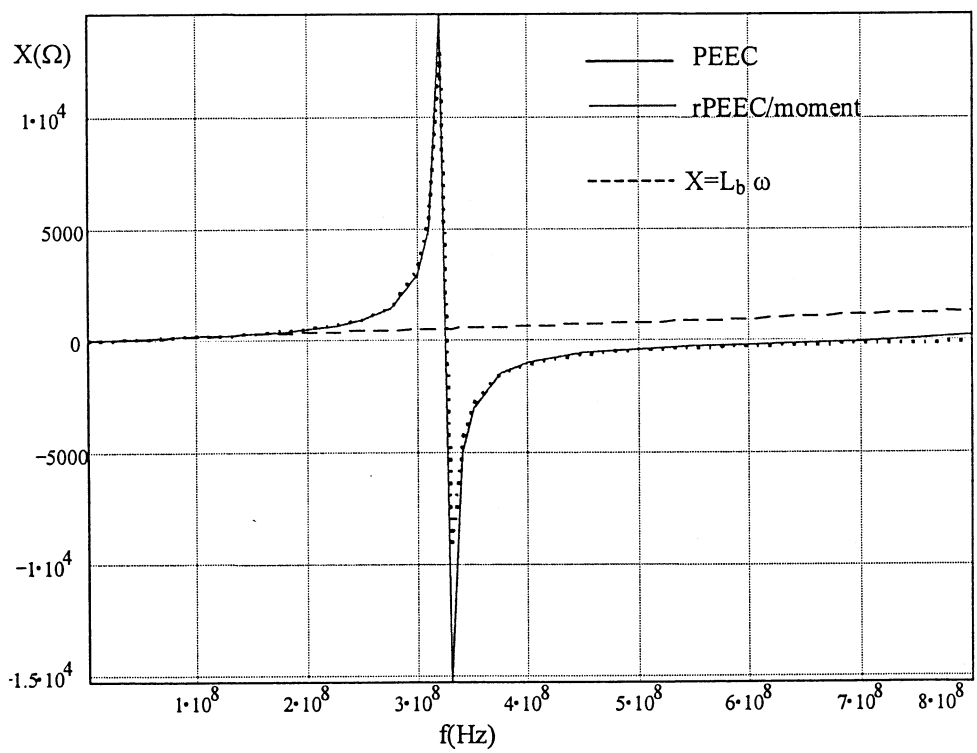


Figure IV.4: Impédance d'entrée d'une boucle rectangulaire.

On constate que la méthode PEEC permet d'estimer d'une façon correcte la partie imaginaire de l'impédance. Par contre l'approche qui consiste à considérer la boucle comme une simple inductance n'est plus valable au dela d'une certaine fréquence (figure IV.5).

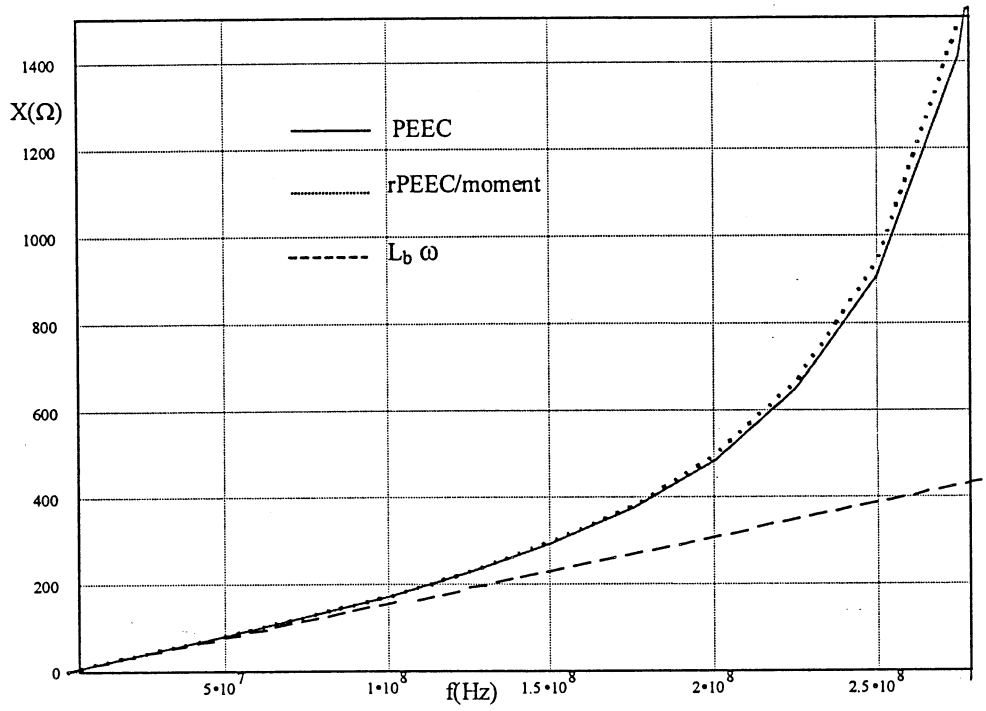


Figure IV.5: Limite de la première méthode.

La figure IV.6 montre que l'écart relatif entre la première et la troisième approche devient supérieur à 10% à partir de f=100MHz, ce qui correspond à une longueur d'onde λ=3m. Par conséquent dès que 4.L/λ>0.133, on ne peut plus considérer la boucle comme une simple inductance.

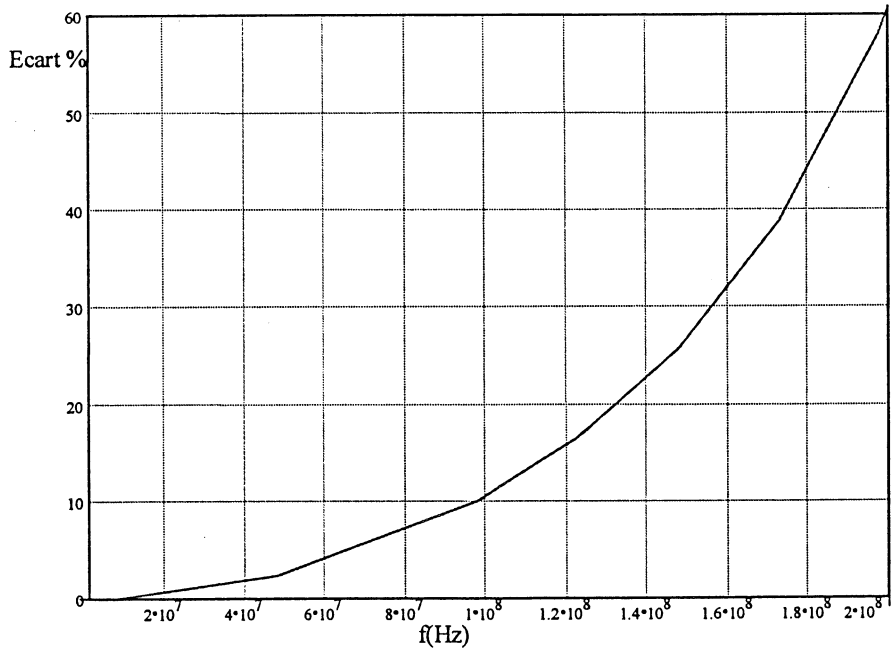


Figure IV.6: Ecart relatif entre la 1ere et la 3eme approche.

IV.2.2 Schéma équivalent de la boucle:

On se propose de démontrer que vu de l'entrée la boucle peut être représentée par le circuit électrique suivant:

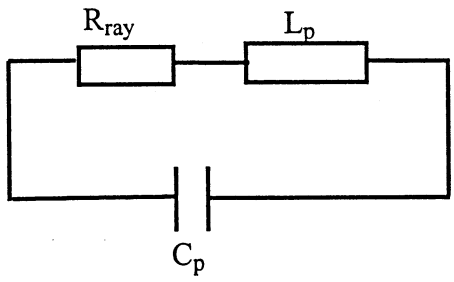


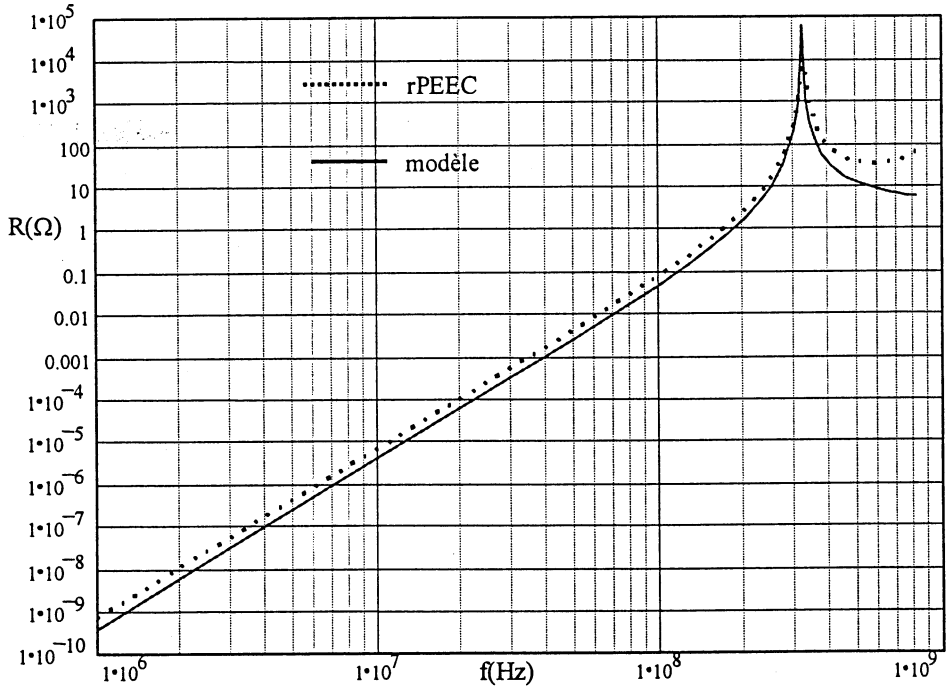
Figure IV.7: Schéma équivalent d'une boucle rectangulaire.

Avec L_p l'inductance partielle de la boucle (L_p=250nH), la fréquence de résonance est obtenue en écrivant que 2 (L_1+L_2)=$\lambda/2$ (lorsque le périmètre est égale à la moitié de la longueur d'onde le courant est nul à l'entrée), donc Cp se déduit à partir de:

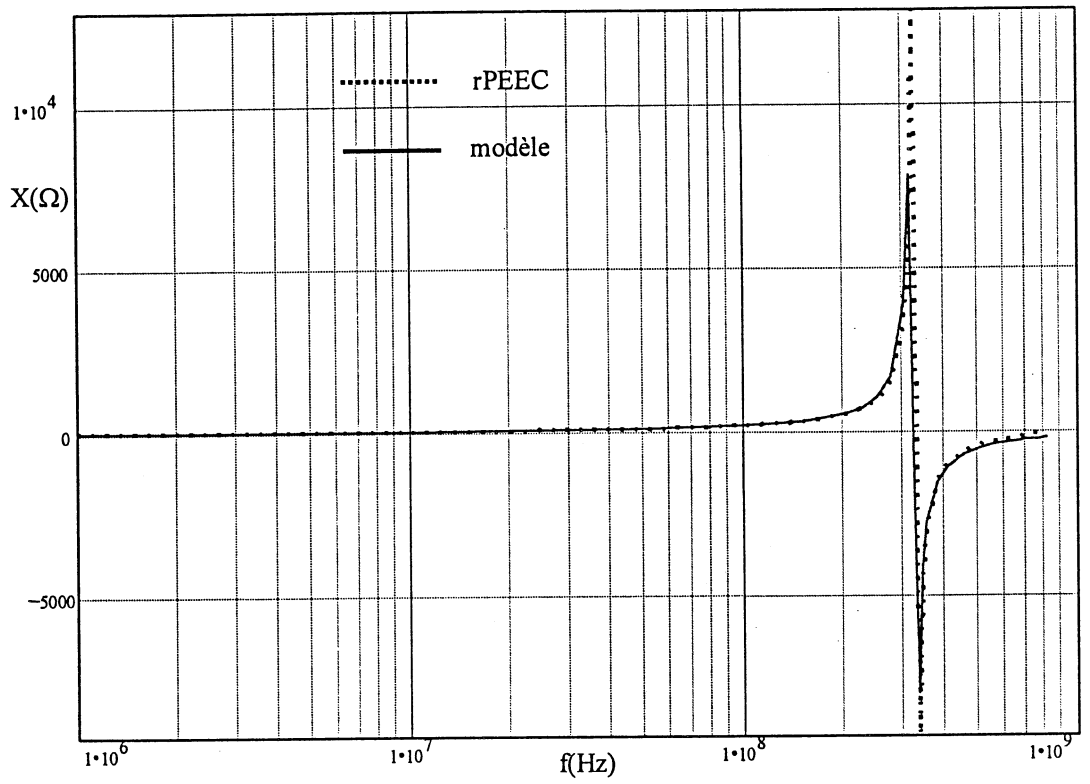
$$L_p C_p (2\pi f_{res})^2 = 1 \qquad \text{(IV.1)}$$

Enfin R_{ray} n'est autre que la résistance de rayonnement donnée par: $R_{ray} = 20\beta^4 (L_1 L_2)^2$.

Les figures IV.8-a et b montre une bonne coïncidence entre l'impédance donnée par le schéma équivalent et celle calculée par la méthode rPEEC.



(a)



(b)

Figure IV.8: Impédance d'entrée de la boucle, comparaison modèle/rPEEC.(a) R, (b) X.

IV.2.3 Influence du retard sur le champ:

Calculons maintenant le champ magnétique crée par cette même boucle en un point d'observation de coordonnées (0;0;10cm) par rapport à la source.

Le calcul sera effectué dans trois cas différents:

1er cas:

On considère que le courant est constant sur la boucle, son module est tout simplement donné par:

$$I = \frac{V_g}{L_p \omega} \qquad \text{(IV.2)}$$

De plus on néglige le retard, par conséquent le potentiel vecteur magnétique est donné par:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} I \sum_i \frac{d\vec{l}_i}{r_i} \qquad \text{(IV.3)}$$

(ri est la distance entre l'élément i et le point d'observation).

Ensuite H se déduit grâce à: $\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot}\, \vec{A}$.

2eme cas:

Le courant est toujours considéré constant, par contre dans ce cas l'effet du retard sera pris en compte, le potentiel vecteur s'exprime donc comme suit:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} I \sum_i \frac{e^{-j\beta r_i}\, d\vec{l}_i}{r_i} \qquad \text{(IV.4)}$$

3eme cas:

La répartition du courant est calculée par la méthode déjà présentée, ensuite le potentiel vecteur se calcule par:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \sum_i I_i \frac{e^{-j\beta r_i}\, d\vec{l}_i}{r_i} \qquad \text{(IV.5)}$$

On compare maintenant les champs calculés par les trois approches pour la plage 50MHz-500MHz, afin de déduire la fréquence à partir de laquelle on doit tenir compte du phénomène de propagation dans la boucle et du phénomène de retard.

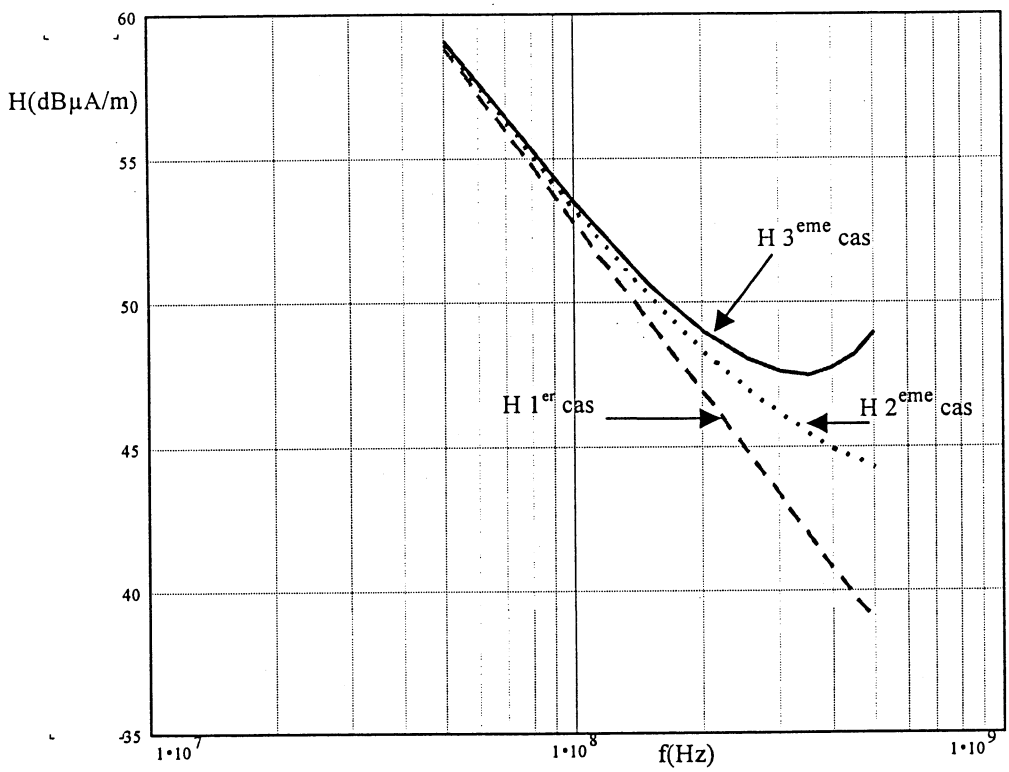


Figure IV.9: Influence du retard sur le champ H.

Pour avoir les fréquences limites il est préférable de regarder les champs en échelle linéaire:

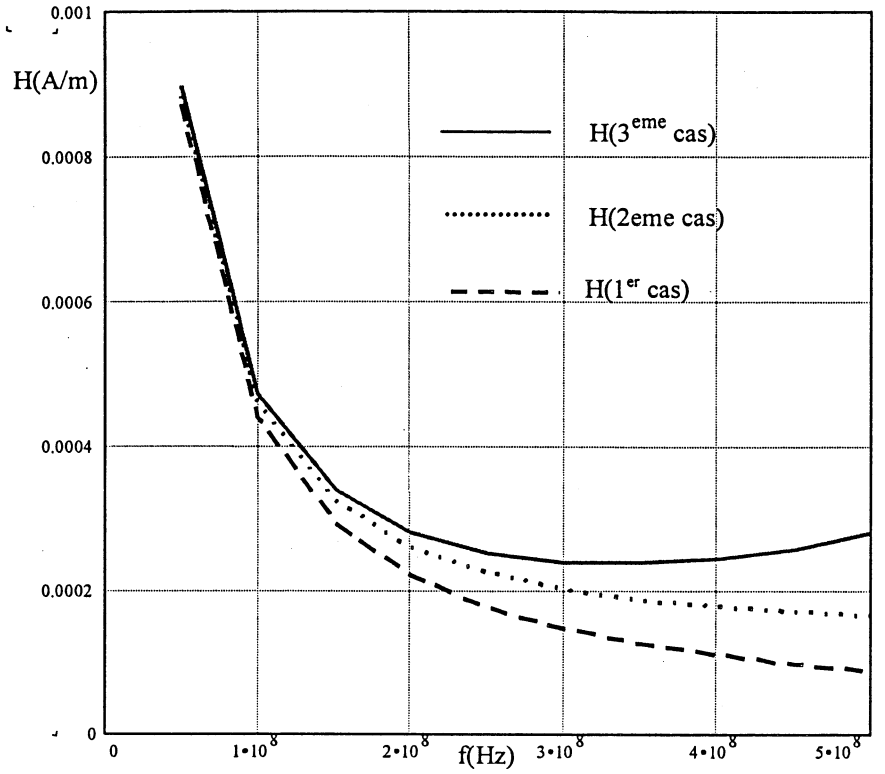


Figure IV.10: Influence du retard sur le champ H.(échelle linéaire).

On constate qu'à partir de f_1=150MHz l'écart relatif entre la première et la troisième approche devient supérieur à 15%, donc à partir de cette fréquence on n'a plus le droit de négliger le retard.

D'autre part l'écart relatif entre la première et la deuxième approche dépasse les 12% à partir de f_2=250MHz, donc à partir de f_2 il faut tenir compte de la répartition réelle de courant dans la boucle.

IV.2.4 Conclusion:

L'application des méthodes PEEC et rPEEC sur l'exemple de la boucle rectangulaire nous ont permis de trouver pour une boucle donnée la fréquence à partir de laquelle l'hypothèse des états quasi stationnaires n'est plus vérifiée. De plus la détermination du courant par ces deux méthodes, nous a permis d'évaluer l'influence du retard et de la variation du courant le long de la boucle, sur le champ rayonné. En effet, à partir de $L = \frac{\lambda}{5}$ (L étant le périmètre de la boucle), le fait de négliger le retard entraîne une erreur supérieure à 15% sur le champ H.

IV.3 Cas d'une ligne microruban:

IV.3.1 Introduction:

Dans ce paragraphe, les trois méthodes explicitées au chapitre précédent vont être appliquer au cas d'une ligne microruban. A priori la méthode des lignes de transmission semble être la plus adaptées à ce genre de problèmes. Comme première étape les formules théoriques de la ligne microruban vont être validées par des mesures de paramètres S. Ensuite, on appliquera la méthode rPEEC à cette même ligne.

IV.3.2 Caractéristiques géométriques de la ligne microruban à étudier:

On considère une ligne microruban de longueur 20cm et de largeur 1mm, la permittivité relative du substrat vaut: $\varepsilon_r = 4.7$ son épaisseur vaut h=1.5mm, l'impédance de la charge vaut Z_L=50Ω. (figure IV.11).

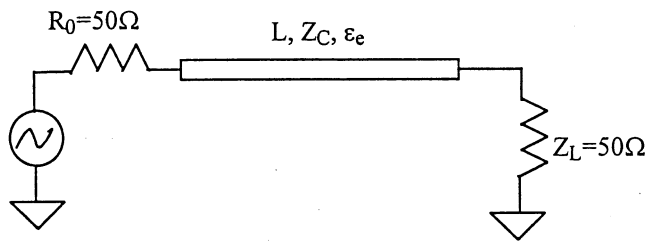


Figure IV.11 Ligne microruban chargée par une résistance.

IV.3.3 Calcul de ε_e et de Z_c:

IV.3.3.1 Calcul théorique:

En utilisant les relations III.223 et III.224, on obtient:

$$\boxed{\varepsilon_e = 3.28}$$

La relation III.225 permet de déduire l'impédance caractéristique de la ligne, dans notre cas, on trouve:

$$\boxed{Z_C = 82.75\,\Omega}$$

La nouvelle vitesse de propagation se calcule par IV.221: $\boxed{v = 1.656\ 10^8\ m/s}$

IV.3.3.2 Validation expérimentale:

On se propose de retrouver ces résultats à partir de la mesure des paramètres S.

On sait que S_{11} n'est autre que le coefficient de réflexion à l'entrée, donc:

$$S_{11} = \frac{Z_e - R_0}{Z_e + R_0} \qquad \text{(IV.6)}$$

avec:

$$Z_e(\lambda) = Z_C \frac{Z_L + jZ_C\,\mathrm{tg}\left(\frac{2\pi L}{\lambda}\right)}{Z_C + jZ_L\,\mathrm{tg}\left(\frac{2\pi L}{\lambda}\right)} \qquad \text{(IV.7)}$$

Pour des valeurs particulières de λ, $|S_{11}|$ passe par des extremums dont les valeurs permettrons de retrouver les différents paramètres de la ligne.(figure IV.12).

λ	∞	4L	2L	3L/4
Z_e	Z_L	$\frac{Z_C^2}{Z_L}$	Z_L	$\frac{Z_C^2}{Z_L}$
$\lvert S_{11}\rvert = \frac{Z_e - R_0}{Z_e + R_0}$	$\frac{Z_L - R_0}{Z_L + R_0}$	$\frac{\frac{Z_C^2}{Z_L} - R_0}{\frac{Z_C^2}{Z_L} + R_0}$	$\frac{Z_L - R_0}{Z_L + R_0}$	$\frac{\frac{Z_C^2}{Z_L} - R_0}{\frac{Z_C^2}{Z_L} + R_0}$

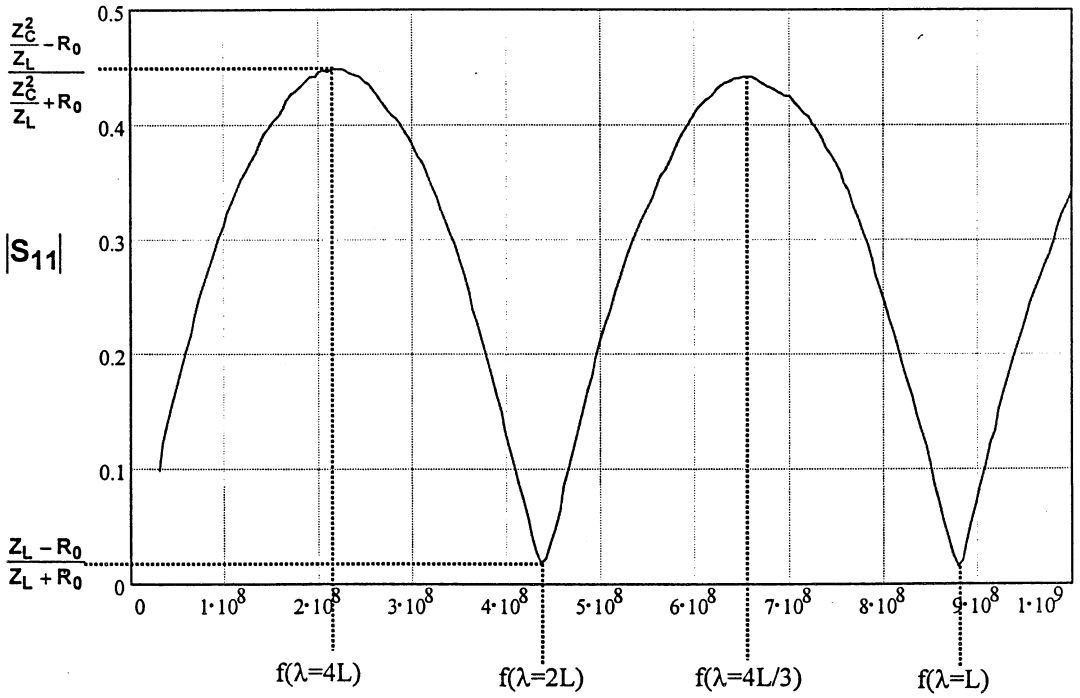


Figure IV.12: Calcul des paramètres de la ligne à partir de la mesure de S_{11}.

On voit bien que lorsque λ=4L, $|S_{11}|$ atteint un maximum absolu. La fréquence correspondante permet de retrouver la vitesse de propagation et donc la permittivité relative, en effet:

$$v = 4L\, f(4L) \qquad \text{(IV.8)}$$

avec: L=20cm et f(4L)=219MHz, d'où:

$$v = 1.75\ 10^8\ m/s \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_e = 2.94.$$

On constate un écart de 11% entre la permittivité effective théorique et celle obtenue grâce à la mesure.

D'autre part $|S_{11}|_{max}$ permet de déduire l'impédance caractéristique Z_C grâce à la relation suivante:

$$|S_{11}|_{max} = \frac{\frac{Z_C^2}{Z_L} - R_0}{\frac{Z_C^2}{Z_L} + R_0} = 0.4485 \qquad \text{(IV.9)}$$

D'où:

$$Z_C = \sqrt{R_0\, Z_L}\ \sqrt{\frac{0.4485+1}{1-0.4485}} = 81.032\,\Omega \qquad \text{(IV.10)}$$

On constate un écart relatif de 2% avec l'impédance caractéristique théorique.

IV.3.4 Calcul de l'impédance d'entrée de la ligne:

L'impédance d'entrée s'obtient grâce à la mesure de S_{11} par la relation III.218, essayons de retrouver cette impédance d'une part par la théorie des lignes et d'autre part par la méthode rPEEC.

IV.3.4.1 Calcul de l'impédance d'entrée par la théorie des lignes:

On a vu que le calcul théorique des paramètres de la ligne donne: $\varepsilon_e = 3.28$ et $Z_C = 82.75\,\Omega$.

Sachant que Z_L=50Ω, l'impédance d'entrée de la ligne est donnée par la relation IV.7. Cette impédance est comparée à l'impédance déduite de la mesure de S11 par la relation IV.6.

Dans les figures suivantes une comparaison entre les deux impédances est présentée.

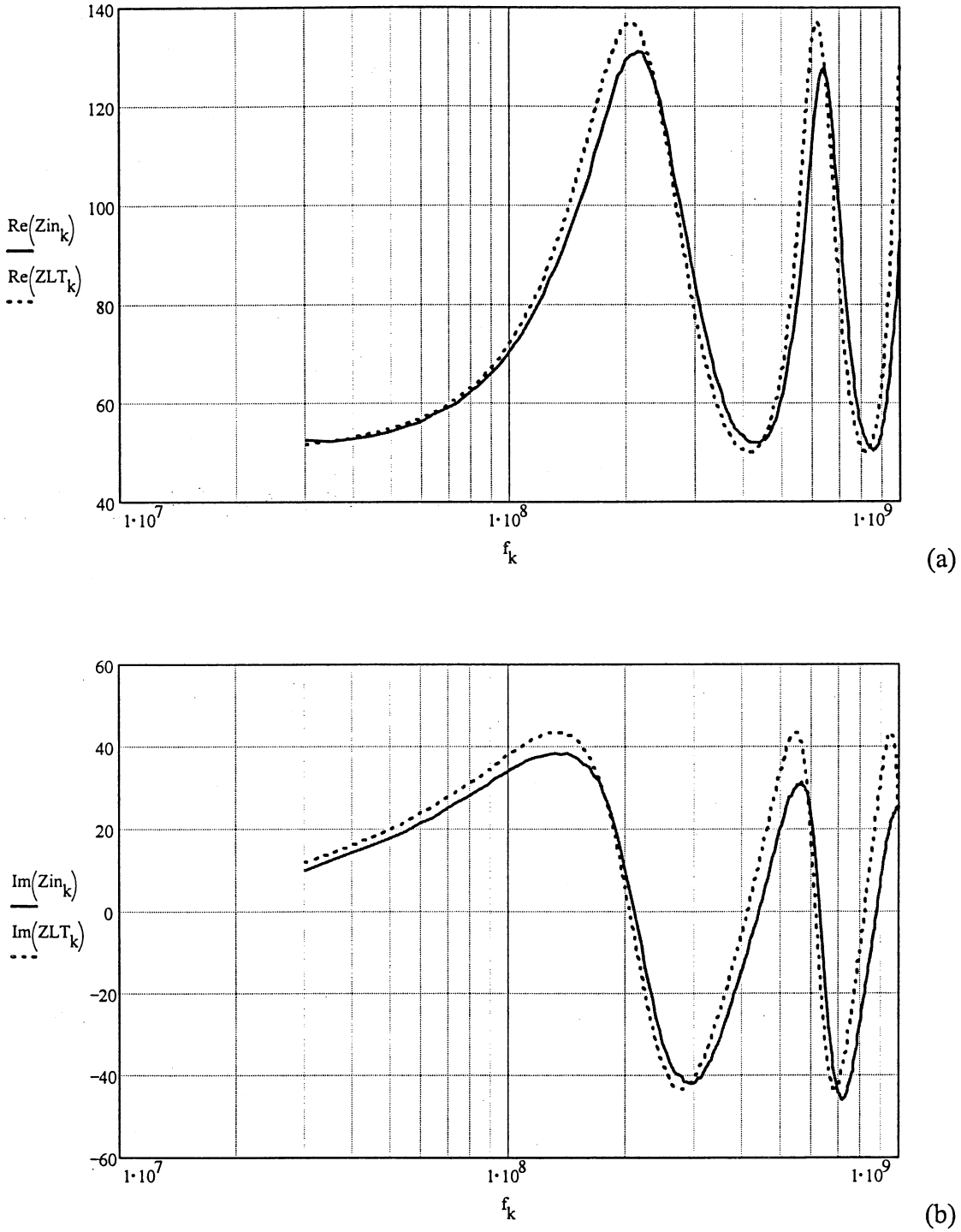


Figure IV.13: Comparaison entre l'impédance calculée par la formule des lignes et celle déduite à partir de la mesure de S_{11}.(a): R, (b): X.

IV.3.4.2 Calcul de l'impédance d'entrée par la méthode rPEEC:

On subdivise la ligne en N segments sur lesquels le courant est considéré constant. Le schéma équivalent s'obtient selon le principe exposé pour la méthode PEEC (figure III.11), mais les éléments mutuelles sont complexes comme c'est expliquer dans la première solution du paragraphe III.2.5.2.

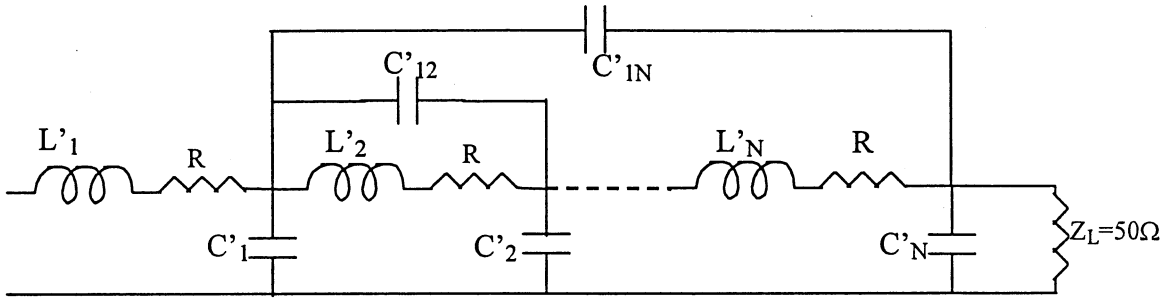


Figure IV.14 : Schéma équivalent de la ligne microruban.

La prise en compte de l'effet du plan de masse se fait par l'application de la méthode des images [1]. En effet les inductances du schéma équivalent sont données par :

$L'_i=L_i-M_{ii'}$, où L_i est l'inductance propre de l'élément i et $M_{ii'}$ est la mutuelle entre l'élément i et son image.

De même pour les mutuelles inductances, on a :

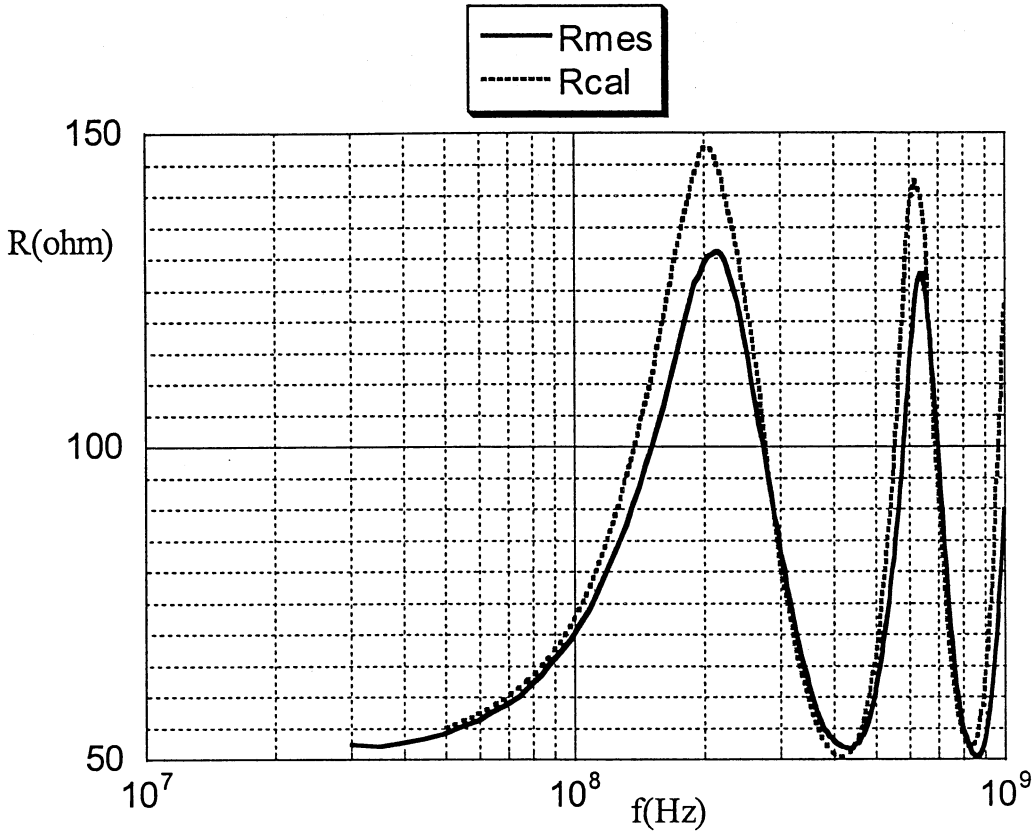
$M'_{ij}=M_{ij}-M_{ij'}$, où M_{ij} est la mutuelle entre les éléments i et j, $M_{ij'}$ est la mutuelle entre l'élément i et l'image de l'élément j.

Le même principe s'applique aux coefficients de potentiel :

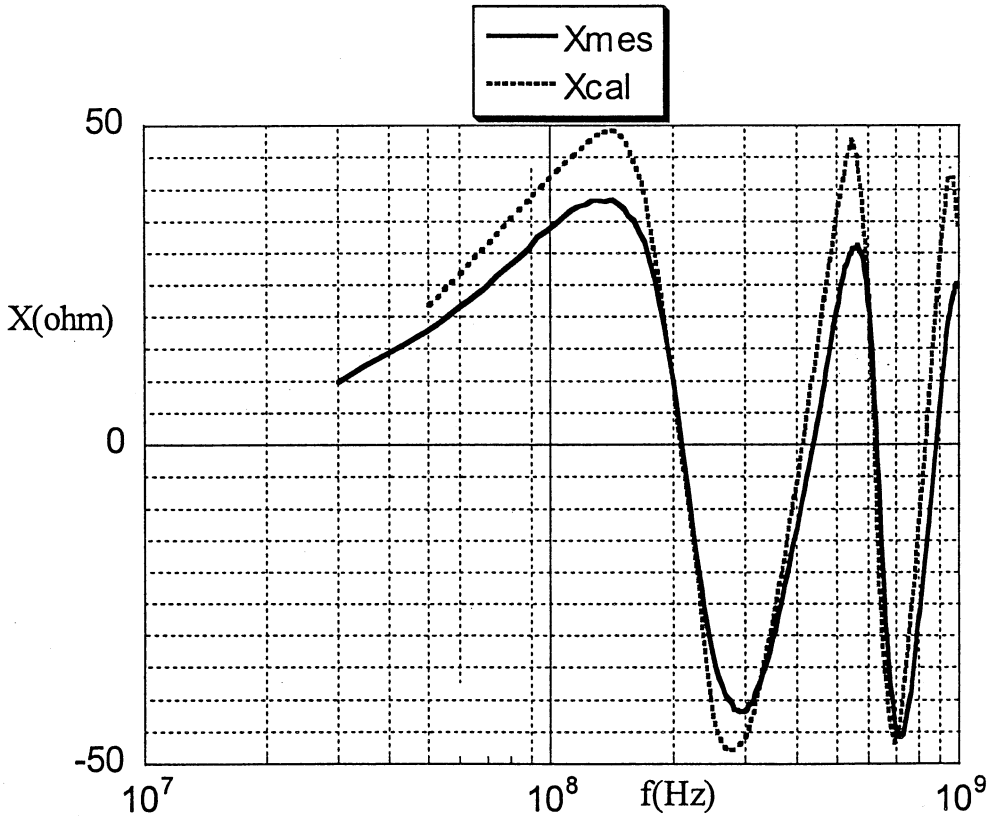
$P'_{ii}=P_{ii}-P_{ii'}$

$P'_{ij}=P_{ij}-P_{ij'}$

On utilisera la valeur de ε_{eff} calculée dans le paragraphe précédant dans l'expression des coefficients de potentiel. On obtient alors une nouvelle matrice P', ensuite on déduit la nouvelle matrice c' par $c'=P'^{-1}$ et finalement, on calcule les éléments de la matrice C' grâce aux équations III.65 et III.66. Avec ce schéma équivalent, on calcule l'impédance d'entrée de la ligne qu'on comparera à l'impédance obtenue à partir de la mesure de S_{11}.



(a)



(b)

Figure IV.15: Calcul de l'impédance d'entrée par la méthode rPEEC, a) R, b) X.

IV.3.5 Conclusion :

Dans le cas d'une ligne microruban, on est en mode TEM, donc la méthode des lignes de transmission est la plus adaptée. En effet, à partir de la connaissance de deux paramètres de la ligne qui sont l'impédance caractéristique Z_c et la permettivité effective ε_{eff}, on peut déduire la répartition du courant et l'impédance d'entrée de la ligne. La méthode rPEEC donne d'aussi bons résultats, mais avec un temps de calcul plus grand.

IV.4 Conclusion :

Dans ce chapitre, deux géométries de câblage qu'on rencontre souvent dans les circuits d'électronique de puissance, ont été traités par les méthodes explicitées dans le chapitre précédant. Il s'agit d'une boucle rectangulaire et d'une ligne microruban.

Dans le cas de la boucle rectangulaire, l'application des méthodes PEEC et rPEEC a permis de déduire qu'à partir de $L \approx \lambda/5$ (L est le périmètre de la boucle, λ est la longueur d'onde), on doit tenir compte des effets de la propagation et du retard.

Le cas de la ligne microruban nous a montré l'efficacité de la méthode des lignes de transmission lorsque l'hypothèse TEM est vérifiée. Dans ce cas, la méthode rPEEC donne aussi des résultats satisfaisants, mais avec un temps de calcul plus long.

En définitif, on arrive à la conclusion que la méthode rPEEC est la plus adaptée pour modéliser le câblage dans un circuit d'électronique de puissance. D'une part, son domaine de validité est très large, en effet on peut traiter aussi bien des problèmes d'électronique de puissance que des problèmes de type micro-ondes (comme le cas de l'antenne). D'autre part, cette méthode permet de modéliser chaque partie du câblage par un circuit électrique équivalent, qu'on peut facilement implanter dans un logiciel de simulation.

CONCLUSION GENERALE

L'objectif de cette thèse a été de développer et d'acquérir une compétence dans la caractérisation des rayonnements électromagnétiques engendrés par les convertisseurs d'électronique de puissance. Notre travail s'est inscrit dans un axe de recherche de longue haleine qui concerne la conception technologique des convertisseurs d'électronique de puissance. Plusieurs thèses ont déjà concerné la conception de convertisseurs, mais en se limitant aux aspects CEM conduite. InCa est l'aboutissement d'une partie de ces travaux.

Dans la première partie de notre travail, nous avons essayé de caractériser globalement les champs rayonnés à partir de la connaissance des courants à l'intérieur de la structure du convertisseur. Les résultats obtenus sont satisfaisants, ce qui nous a amené à conclure qu'une connaissance précise de la répartition du courant dans la structure à étudier, permet sans doute de déduire le champ rayonné en tout point de l'espace.

Par conséquent, dans la deuxième partie on s'est logiquement intéressé aux différentes méthodes de modélisation de la connectique, dans l'objectif de trouver des modèles de câblage ayant une plage de validité étendue en fréquence. Comme nous avons pu le souligner dans notre travail, l'exigence tend aujourd'hui vers le GHz afin d'être en mesure de respecter les normes d'émission rayonnée. Notre travail n'était pas d'utiliser la méthode la plus rapide, ou la plus précise pour traiter un problème mais bien au contraire de respecter la philosophie jusqu'ici utilisée dans le logiciel InCa et dont l'originalité est d'avoir un outil spécifique utilisable par un électronicien de puissance et non par un spécialiste des hyper fréquences ou des méthodes numériques.

L'étude des différentes méthodes existantes a montré que la méthode des moments et la méthode rPEEC ont une large plage de validité. Ceci a été confirmé par l'étude d'une antenne, problème typique des Hyper fréquences. Notre choix s'est porté sur la méthode rPEEC, car elle permet de modéliser chaque partie du câblage par un circuit électrique équivalent facilement utilisable dans un logiciel de simulation. C'est de plus la suite logique de la méthode PEEC déjà utilisée dans InCa.

En fait la tâche était bien sûr immense et nous ne prétendons pas l'avoir accompli dans sa totalité. Par ailleurs des travaux sont en cours à l'heure actuelle sur un appareil industriel d'une grande complexité. Il devrait nous permettre dans le futur de valider notre démarche et d'évaluer plus finement notre contribution afin de savoir si la méthode rPEEC sera effectivement celle qui sera codée dans InCa et quelles modifications à apporter. Si cette méthode se révélait toutefois mal adaptée aux problèmes industriels (nombre de composants...) peut être serait t-il nécessaire d'en changer radicalement...

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] J.L. Schanen "Intégration de la compatibilité électromagnétique dans la conception de convertisseurs en Electronique de puissance", thèse de doctorat INPG, Janvier 94, Grenoble.

[2] E. Clavel "Vers un outil de conception de câblage: le logiciel InCa", thèse de doctorat INPG, novembre 96, Grenoble.

[3] W. Teulings "Prise en compte du câblage dans la conception et la simulation des convertisseurs de puissance : performances CEM", thèse de doctorat INPG, avril 97, Grenoble.

[4] B. Lu "Contribution à l'étude du rayonnement en champ électromagnétique proche des circuits en Electronique de puissance", thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, mai 90.

[5] A. Puzo "Contribution à l'étude des perturbations rayonnées par les convertisseurs HF", thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, juin 92.

[6] J.Ben Hadj Slama "Modélisation du rayonnement électromagnétique des circuits d'électronique de puissance, application à un hacheur", thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, décembre 97.

[7] C.R. Paul "Introduction to Electromagnetic compatibility", Whiley and sons, 1993.

[8] C.R. Paul, S.A. Nasar "Introduction to Electromagnetic Fields", McGraw-Hill 1987.

[9] P. Degauque, J. Hamelin "Compatibilité électromagnétique", éditions Dunod 1990.

[10] R. Badoual, C. Martin, S. Jacquet "les micro-ondes: Tome I: circuits, microrubans, fibres", Masson 1993.

[11] R. Badoual, C. Martin, S. Jacquet "les micro-ondes: Tome II: composants, antennes, fonctions, mesures", Masson 1995.

[12] J.D. Kraus, "Antennas" McGraw-Hill, 1988.

[13] W.L. Stutzman, G.A. Thiele "Antenna theory and design" Whiley and sons, 1998.

[14] S.A. Schelkunoff, H.T. Friis, "Antennas theory and Practise", 1952.

[15] M. Youssef, J. Roudet, Y. Marechal "Near-Field Characterisation of Power Electronics Circuit for Radiation Prediction" 28th IEEE Power Electronics Specialists Conference PESC'97, juin 1997.

[16] M. Youssef, J. Roudet, Y. Marechal "Electromagnetic Radiation from power electronics circuits", 7th European Conference on Power Electronics and Application EPE'97, Trondheim, Norway, septembre 1997.

[17] M. Youssef, G. Antonini, E. Clavel, J. Roudet, S. Cristina, A. Orlandi "Conducted and radiated EMI characterisation on Power Electronics Converter" IEEE International Symposium on Industrial Electronics ISIE'97, Guimaraes, Portugal, juillet 1997.

[18] G. Antonini, S. Cristina, A. Orlandi "EMC Characterisation of SMPS Devices: Circuit and Radiated Emissions Model", IEEE Transactions on EMC, vol.38, N°4, août 1996.

[19] J. Roudet, J.L. Schanen, P. Saguet "Microwave techniques validation in Power Electronics Interconnections Modeling", EMC'96, Rome 17-20 sept.-96, Vol.1, pp144-148.

[20] E. Clavel, J.L. Schanen, J. Roudet "Elecromagnetic modeling of a power module case", Euro EM'94 Conference.

[21] E. Clavel, J. Roudet, J.L. Schanen, P. Hublier "Modeling and Electrical Simulation of a Bus bar", PCIM'96, Nuremberg, 21-23 May 1996, pp747-752.

[22] E. Clavel, J.L. Schanen, J. Roudet "Case Impedance Modeling of a Power Mosfet", Proceedings of ICEAA'95 conference, p143-146.

[23] J.L. Schanen, E. Clavel, J. Roudet "Modeling of low inductive conductors the planar bus bar structure", IEEE-IAS'94 conference.

[24] J.L Schanen, C. Guérin, J. Roudet, G. Meunier "Modeling of printed circuit board loop inductance", IEEE Transactions on Magnetics COMPUMAG'93, Miami, septembre 1994.

[25] J.L. Schanen, J. Roudet, H. Morel "prédétermination des inductances de câblage pour a simulation fine des convertisseurs", CEM'94 conference.

[26] L.B. Gravelle, P.F. Wilson "EMI/EMC in Printed circuit Boards- A Literature review", IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, Vol.34, No 2, mai 1992.

[27] J.L. Schanen, C. Guerin, J. Roudet, G. Meunier "Modeling of printed circuit board loop inductance", IEEE Transactions on Magnetics,1993.

[28] K. Naishadham, J.B. Berry "A rigourous model to compute the radiation from printed circuit board", Proceedings of the IEEE National Symposium on EMC, 1989.

[29] S. Daijavad, J. Janak, H. Heeb, A. Ruehli, D. McBride "A Fast Method for computing Radiation from printed circuit Boards", IEEE International Symposium on EMC, 1990, pp300-303.

[30] H. Heeb, A.E. Ruehli, J. Janak, S. Daijavad "Simulating Electromagnetic Radiation of Printed Circuit Boards", Proceedings IEEE Conf on Computer Aided Design, pp392-395, 1990.

[31] R.F. German, H.W. Ott, C.R. Paul "Effect of an image plane on printed circuit board radiation", IEEE International Symposium on EMC, Washington 1990.

[32] E. Clavel, J.L. Schanen, J. Roudet, Y. Marechal "Modeling connections", IEEE ICEAA'95, Turin, septembre 1995.

[33] C.R. Paul "A comparison of the Contribution of Common Mode and Differential Mode Currents in Radiated Emissions", IEEE Trans. On EMC Vol.31, No 2, mai 1989.

[34] C.R. Paul, D.R. Bush "Radiated Emissions from Common-Mode Currents", IEEE International Symposium on EMC, Atlanta, août 1987.

[35] J.L. Schanen, J. Roudet, F. Mérienne, E. Clavel, "Lumped elements approach for common mode current Modeling in power converters", IAR'95 Grenoble, 1995.

[36] F. Costa, F. Forest, A. Puzo, G. Rojat "Influence of the switching mode on conducted and radiated perturbations", 4th European Conference on Power Electronics and Application EPE'91, Firence, Italy, 1991.

[37] M. Youssef, R.M. Popescu, J. Roudet "A contribution to MCTS testing in hard and soft switching modes" PCIM'96, Nuremberg, mai 1996.

[38] A. Consoli, S. Musumeci, G. Oriti, A. Testa "An Innovative EMI Reduction Design Technique in Power Converters", IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, Vol.38,No.4, novembre 1996.

[39] R. Laroussi, G.I. Costache "Far-Field Predictions from Near-Field measurments Using an Exact Integral Equation Solution", IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, Vol.36, No.3, août 1994.

[40] S. Ramo, J.R. Whinnery, T. Van Duzer "Fields and waves in communication electronics" Whiley and sons, 1993.

[41] A.E. Ruehli "Inductance calculations in a complex integrated circuit environment", IBM Journal on R&D, septembre 1972.

[42] A.E. Ruehli "Equivalent circuit models for three dimensional multiconductor systems", IEEE Transaction on Microwave Theory and Thechniques, vol. MTT 22, mars 1974.

[43] A.E. Ruehli, N. Rover, P.A. Brennan "Three dimensional inductance computations with partial element equivalent circuits", IBM Journal on R&D, vol.23, n° 6, novembre 1979.

[44] A.E. Ruehli, H. Heeb "Three dimensional interconnect analysis using partial element equivalent circuits", IEEE Transaction on Circuits and Systems, vol.39, n°11, novembre 1992.

[45] C. Hoer, C. Love "Exact inductance equations for rectangular conductors with application more complicated geometries", J. Research of the national bureau of standards, Vol.69, No.2, August 1965.

[46] P.K. Wolff, A.E. Ruehli "Inductance Computations for Complex three dimentional geometries", IEEE International Symposium on Circuit & Systems, 1982.

[47] A.E. Ruehli, N. Kulasza, J. Pivnichny "Inductance of non straight conductors close to a ground return plane", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, août 1975.

[48] J.L. Schanen, E. Clavel, J. Roudet "Influence of an impedance step in interconnection inductance calculation", COMPUMAG'95 conference.

[49] A.E. Ruehli, H. Heeb "Circuit models for three-dimensional geometries including dielectrics", IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques, vol.40, juillet 1992.

[50] A.E. Ruehli, P.A. Brennan "Efficient capacitance calculations for three dimensional multiconductor systems", IEEE Transaction on Microwave Theory and Thechniques, vol.21, n°2, février 1973.

[51] A.E. Ruehli, P.A. Brennan "Capacitance Models fot Integrated Circuit Metallization Wires", IEEE Journal of Solid-State Circuits, Vol.SC-10,No.6, décembre 1975.

[52] P.D. Patel "Calculation of capacitance coefficients for a system of Irregular Finite Conductors on a dielectric sheet", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol.MTT.19, No.11, novembre 1971.

[53] P. Silverter, P. Benedek "Equivalent Capacitances of Microstrip open circuits" IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol.MTT-20, No.8, août 1992.

[54] J.F. Janak, D.D. Ling "C3DSTAR: A 3D Wiring capacitance calculator", Proceedings of IEEE Int.conf on CAD, 1989, pp530-533.

[55] DD. Ling, A.E. Ruehli "Circuit Analysis, Simulation and Design", pp.211-253, Elsevier Science Publishers B.V (North-Holland), 1987.

[56] A.E. Ruehli "Survey of Computer Aided Electrical Analysis of Integrated Circuit Interconnections", IBM Journal on R&D, Vol.23, No.6, novembre 1979.

[57] E.Bogatin "Design Rules for Microstrip Capacitance", IEEE Transactions on Components Hybrids and Manufacturing Technology, vol.11, No 3, septembre 1988.

[58] D.A. Hill, D.G. Camell, K.H. Cavcey, G.H. Koepke "Radiated Emissions and Immunity of Microstrip Transmission Lines: Theory and Reverberation Chamber Measurements", IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, Vol.38, No 2, mai 1996.

[59] V. Costa, S. Cannigia, L. Catello "On the computation of Electromagnetic Field components from a Transmission Line: Theory and Application", IEEE International Symposium on EMC, Washington 1990.

[60] F. Ndagijimana "Propagation- Part.III: Lignes de transmission", Cours 2° Année IUT.

[61] R.F. Harrington, "Field computation by Moment method" 1968.

ANNEXES

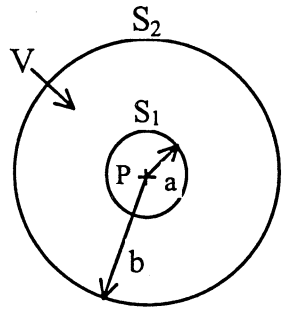


Figure 1

On suppose que pour $r \geq b$; $\exists M$ tel que $\begin{cases} |U| \leq \dfrac{M}{r} \\ \left|\dfrac{\partial U}{\partial r}\right| \leq \dfrac{M}{r^2} \end{cases}$

Alors pour $r \geq b$ on aura :

$$\left|\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right| = \left|-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r^2}\right| \leq \left|\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right| + \left|\frac{U}{r^2}\right| \leq \frac{2M}{b^3}$$

Donc : $\left|\iint_{S_2}\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + U\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r}\right) dS\right| \leq \iint_{S_2}\frac{2M}{b^3}dS = \frac{8\pi M}{b}$

d'où : $\lim\limits_{b\to\infty}\left|\iint_{S_2}\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + U\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r}\right) dS\right| = 0$

soit $m = \max_{S_1}\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)$, on a: $\left|\iint_{S_1}\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}dS\right| \leq \iint_{S_1}\frac{m}{a}\ dS = 4\pi m a$; d'où $\lim\limits_{a\to 0}\iint_{S_1}\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}dS = 0$

Il ne reste donc que le deuxième terme :

$$\iint_{S_1} U\ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r}\ dS = -4\pi U(P') \text{ où } P' \in S_1;$$

lorsque $a \to 0$; $P' \to P$,

Donc en définitif en faisant $a \to 0$, et $b \to \infty$ on obtient:

$$U(P) = \frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{f}{r}dv \qquad (6)$$

V étant l'éspace tout entier.

ANNEXE 2: Résolution des équations d'ondes complètes

On se propose de démontrer que les expressions I.22 et I.23 sont bien solutions respectives des équations d'ondes I.18 et I.17.

Le terme sous l'intégrale dans l'équation I.22 est de la forme $f = \frac{g}{r}$ où $g = g(\tau)$ avec $\tau = t - \frac{r}{u}$.

Le Laplacien de f est : $\nabla^2 f = g\nabla^2 \frac{1}{r} + 2\nabla g\, \nabla\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\nabla^2 g$.

Le gradiant de g est : $\nabla g = -\frac{1}{u}g'$, où : $g' = \frac{\partial g}{\partial \tau}$. Donc : $2\nabla g\, \nabla\frac{1}{r} = \frac{2g'}{ur^2}$ et $\nabla^2 g = \frac{1}{u^2}g'' - \frac{2g'}{ur}$.

Puisque $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{g''}{r}$, on aboutit à :

$$\nabla^2 f - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = g\nabla^2 \frac{1}{r} = 0 \qquad r \neq 0 \tag{1}$$

On divise maintenant le volume v en une petite sphère de volume v_1 centrée en P et un volume v_2=v-v_1. Le potentiel V donnée par l'équation I.22 est la somme du potentiel V_1 dû aux charges contenues dans v_1 et du potentiel V_2 dû aux charges contenues dans v_2.

Sur v_2, on a $r \neq 0$ puisque $P \notin v_2$, par conséquent, grâce à I.22 et (1), on peut écrire :

$$\nabla^2 V_2 - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{v_2}\left(\nabla^2 f - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)dv = 0 \tag{2}$$

où $f = \frac{[\rho]}{r}$. Pour V_1, on ne peut pas différentier à l'intérieur de l'intégral car r=0 lorsque Q=P.

Mais, on peut choisir un rayon a faible pour la sphère v1 de manière à pouvoir développer $[\rho]$ en série de Taylor en $\frac{r}{ut}$:

$$\rho\left(Q, t - \frac{r}{u}\right) = \rho(Q,t) + c_1\frac{r}{ut} + c_2\left(\frac{r}{ut}\right)^2 + \cdots \tag{3}$$

Donc :

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{v_1}\frac{\rho\left(Q,t-\frac{r}{u}\right)}{r}dv=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\int_{v_1}\frac{\rho(Q,t)}{r}dv+c_1\int_{v_1}\frac{\frac{r}{ut}}{r}dv+c_2\int_{v_1}\frac{\left(\frac{r}{ut}\right)^2}{r}dv+\cdots\right] \tag{4}$$

$$=V_0(P,t)+\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{c_1}{ut}\frac{4}{3}\pi a^3+\cdots\right]=V_0(P,t)+O\left(a^3\right)$$

On note que le premier terme $V_0(P,t)$ est solution de l'équation de Poisson $\nabla^2 V_0=-\frac{\rho(P,t)}{\varepsilon}$,

donc : $$\nabla^2 V_1-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}+O\left(a^3\right) \tag{5}$$

Où $O\left(a^3\right)$ signifie terme d'ordre a^3. En sommant (2) et (5), on obtient :

$$\nabla^2 V-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}+O\left(a^3\right) \tag{6}$$

En faisant $a\to 0$, on voit bien que V vérifie l'équation I.18. De même, on peut démontrer que l'équation I.23 vérifie l'équation I.17.

Il reste maintenant à vérifier que les solutions données par I.22 et I.23 vérifient bien la condition de Lorentz.

Pour distinguer entre la dérivée au point d'observation P et celle au point source Q, on introduit un indice dans ∇. En prenant la divergence de l'équation I.23, on obtient :

$$\nabla_P\cdot\vec{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int_v\nabla_P\frac{[\vec{J}]}{r}dv \tag{7}$$

avec : $r^2=(x_P-x_Q)^2+(y_P-y_Q)^2+(z_P-z_Q)^2$, $[J]=J(Q,\tau)$ et $\tau=t-\frac{r}{u}$.

Notons que si $f=f(Q,\tau)$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_Q}=\frac{\partial f'}{\partial x_Q}+\frac{\partial f}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial x_Q},\ \frac{\partial f}{\partial x_P}=\frac{\partial f}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial x_P}\ \text{et}\ \frac{\partial\tau}{\partial x_Q}=-\frac{\partial\tau}{\partial x_P}.$$

Ici $f'=f(Q,\tau'=cst)$. Il découle de ces relations :

$$\nabla_Q\cdot[J]=\nabla_Q\cdot[J']-\nabla_P\cdot[J]=[\nabla_Q\cdot J]-\nabla_P\cdot[J] \tag{8}$$

L'élément sous l'intégrale dans l'équation (7) s'écrit :

$$\nabla_P\cdot\frac{[J]}{r}=\frac{1}{r}\nabla_P\cdot[J]+[J]\cdot\nabla_P\frac{1}{r} \tag{9}$$

En utilisant (8) et le fait que $\nabla_P \cdot \frac{1}{r} = -\nabla_Q \frac{1}{r}$, (9) devient :

$$\nabla_P \cdot \frac{[J]}{r} = \frac{1}{r}\left[\nabla_Q \cdot J\right] - \frac{1}{r}\nabla_Q \cdot [J] - [J] \cdot \nabla_Q \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\left[\nabla_Q \cdot J\right] - \nabla_Q \cdot \frac{[J]}{r} \tag{10}$$

En utilisant I.13, I.22 et (10), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \nabla_P \cdot \vec{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\mu}{4\pi}\int_v \nabla_P \cdot \frac{[\vec{J}]}{r} dv + \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{1}{r}\frac{\partial [\rho]}{\partial t} dv \\ &= \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{1}{r}\left[\nabla_Q \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right] dv - \frac{\mu}{4\pi}\int_v \nabla_Q \cdot \frac{[\vec{J}]}{r} dv \end{aligned} \tag{11}$$

Par le théorème de la divergence, on aboutit à :

$$\nabla_P \cdot \vec{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{1}{r}\left[\nabla_Q \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right] dv - \frac{\mu}{4\pi}\int_S \frac{[\vec{J}] \cdot \vec{n}}{r} dS \tag{12}$$

Où S est la surface entourant v.

Dans le cas d'un conducteur parfait, le courant est surfacique et de plus $[\vec{J}_S] \cdot \vec{n} = 0$. <u>Cette condition est réalisée dans le cas de l'antenne.</u>

D'autre part, l'équation de continuité est vérifiée en n'importe quel point source Q à n'importe quel instant t, donc on peut remplacer t par τ pour obtenir la relation :

$$\left[\nabla_Q \cdot J + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right] = 0 \tag{13}$$

Par conséquent, le terme de droite dans l'équation (12) est nul et les potentiels A et V vérifient bien la condition de Lorentz.

ANNEXE 3: Rayonnement du dipôle de Hertz

Tout d'abord calculons le potentiel électrique crée par les deux charges aux extrémités du dipôle. On a vu que V est donnée par:

$$V = \frac{I}{j4\pi\varepsilon_0\omega}\left(\frac{e^{-j\beta r_1}}{r_1} - \frac{e^{-j\beta r_2}}{r_2}\right) \tag{1}$$

avec:

$$r_1^2 = r^2 + \frac{\ell^2}{4} - r\ell\cos\theta \tag{2}$$

$$r_2^2 = r^2 + \frac{\ell^2}{4} + r\ell\cos\theta \tag{3}$$

Comme $\ell << r$, on peut faire les approximations suivantes:

$$r_1 \approx r\left(1 - \frac{\ell}{2r}\cos\theta\right) \tag{4}$$

$$r_2 \approx r\left(1 + \frac{\ell}{2r}\cos\theta\right) \tag{5}$$

L'équation (1) devient alors:

$$V = \frac{I}{j4\pi\varepsilon_0\omega}\frac{e^{-j\beta r}}{r}\left(\frac{e^{j\beta\frac{\ell}{2}\cos\theta}}{1 - \frac{\ell}{2r\cos\theta}} - \frac{e^{-j\beta\frac{\ell}{2}\cos\theta}}{1 + \frac{\ell}{2r\cos\theta}}\right) \tag{6}$$

Comme $\beta\ell << 1$, un développement limité de l'équation (6) donne:

$$V = \frac{I}{j4\pi\varepsilon_0\omega}\frac{e^{-j\beta r}}{r}\left(\left(1 + j\beta\frac{\ell}{2}\cos\theta\right)\left(1 + \frac{\ell}{2r\cos\theta}\right) - \left(1 - j\beta\frac{\ell}{2}\cos\theta\right)\left(1 - \frac{\ell}{2r\cos\theta}\right)\right) \tag{7}$$

On retrouve bien la relation I.28: $V = \frac{I\ell\cos\theta}{j4\pi\varepsilon_0\omega}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{j\beta}{r}\right)e^{-j\beta r}$

Calcul des champs E et H:

Le champ H se calcule par: $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\vec{A}$.

Avec: $\vec{A} = \frac{\mu_0 I\ell}{4\pi}\frac{e^{-j\beta r}}{r}\vec{e}_z$.

Faisons le calcul en coordonnées sphériques:

On a: $\vec{e}_z = \cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta$,

Donc: $$A_r = \frac{\mu_0\, I\,\ell\cos\theta}{4\pi}\frac{e^{-j\beta r}}{r} \text{ et } A_\theta = -\frac{\mu_0\, I\,\ell\sin\theta}{4\pi}\frac{e^{-j\beta r}}{r}$$

En utilisant l'expression du rotationel en coordonnées sphériques, on trouve:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\vec{e}_\varphi = \frac{I\ell}{4\pi r}\left[-\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(e^{-j\beta r}\right) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e^{-j\beta r}}{r}\cos\theta\right)\right]$$

$$= \frac{I\ell\sin\theta}{4\pi r}\left(\frac{1}{r} + j\beta\right)e^{-j\beta r}\,\vec{e}_\varphi$$

Le champ E se calcule par: $\vec{E} = -j\omega\vec{A} - \text{grad}\,V$; on a donc:

$$E_r = -j\omega A_r - \frac{\partial V}{\partial r} = -j\omega\frac{\mu_0\, I\,\ell\cos\theta}{4\pi}\frac{e^{-j\beta r}}{r} - \frac{I\,\ell\cos\theta}{j4\pi\varepsilon_0\,\omega}\left[-\frac{2}{r^3} - \frac{j\beta}{r^2} - j\beta\left(\frac{1}{r^2} + \frac{j\beta}{r}\right)\right]$$

En utilisant: $\omega = \beta c$, $\mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = Z_0$, on obtient:

$$E_r = \frac{Z_0.I.\ell\cos\theta}{2\pi.r}\cdot\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{j\beta r^2}\right)\cdot e^{-j\beta r}$$

De même, on trouve: $$E_\theta = \frac{Z_0.I.\ell\sin\theta}{4\pi.r}\cdot\left(j\beta + \frac{1}{r} + \frac{1}{j\beta r^2}\right)\cdot e^{-j\beta r}$$

E peut également être calculer par: $\vec{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\text{rot}\,\vec{H}$

ANNEXE 4: Rayonnement d'une antenne filaire de longueur quelconque

Tout d'abord, calculons le champ lointain créé par l'antenne de la figure I.7.

Le champ créé par un élément I.dz est: $dH_\varphi = \dfrac{j\beta I\,dz \sin\theta}{4\pi r'} e^{-j\beta r'}$, $dE_\theta = Z_0\, dH_\varphi$.

Avec (voir figure I.7) : $r' \approx r - z\cos\theta$.

En champ lointain, on peut écrire : $\dfrac{1}{r'} \approx \dfrac{1}{r}$, $e^{-j\beta r'} = e^{-j\beta r} e^{j\beta z\cos\theta}$.

D'où: $H_\varphi = \dfrac{j\beta I_0\, \ell_\theta \sin\theta}{4\pi r} e^{-j\beta r}$, avec: $\ell_\theta = \displaystyle\int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{I(z)}{I_0} e^{j\beta z\cos\theta}\, dz$.

Donc:

$$\ell_\theta = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \sin\left(\beta\left(\frac{\ell}{2} - |z|\right)\right) e^{j\beta z\cos\theta}\, dz$$

$$= \int_{0}^{\ell/2} \sin\left(\beta\left(\frac{\ell}{2} - z\right)\right) e^{j\beta z\cos\theta}\, dz + \int_{-\ell/2}^{0} \sin\left(\beta\left(\frac{\ell}{2} + z\right)\right) e^{j\beta z\cos\theta}\, dz$$

En faisant le changement de variable ($z' = -z$ dans la 2eme intégrale), on obtient:

$$\ell_\theta = 2\int_{0}^{\ell/2} \sin\left(\beta\left(\frac{\ell}{2} - z\right)\right) \cos(\beta z\cos\theta)\, dz$$

$$= \int_{0}^{\ell/2} \sin\left(\beta\left(\frac{\ell}{2} - z + z\cos\theta\right)\right) dz + \int_{0}^{\ell/2} \sin\left(\beta\left(\frac{\ell}{2} - z - z\cos\theta\right)\right) dz$$

$$= \left[\frac{\cos\left(\beta\left(\frac{\ell}{2} - z + z\cos\theta\right)\right)}{1-\cos\theta} + \frac{\cos\left(\beta\left(\frac{\ell}{2} - z - z\cos\theta\right)\right)}{1+\cos\theta}\right]_0^{\ell/2}$$

$$= \left[\frac{\cos(\beta z\cos\theta) - \cos\left(\beta\frac{\ell}{2}\right)}{1-\cos\theta} + \frac{\cos(\beta z\cos\theta) - \cos\left(\beta\frac{\ell}{2}\right)}{1+\cos\theta}\right]$$

D'où: $\ell_\theta = \dfrac{2}{\beta\sin^2\theta}\left[\cos\left(\dfrac{\beta\ell}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\dfrac{\beta\ell}{2}\right)\right]$

Le vecteur de Poynting est réel et radial, il est donné par:

$$S_r = \frac{1}{2} E_\theta \cdot H_\varphi^* = \frac{1}{2} Z_0 \cdot |H_\varphi|^2$$

$$= \frac{1}{2} 120\pi \frac{\beta^2 I_0^2 \sin^2\theta}{16\pi^2 r^2} \frac{4}{\beta^2 \sin^4\theta} \left[\cos\left(\frac{\beta\ell}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta\ell}{2}\right)\right]^2$$

$$= \frac{15 I_0^2}{\pi r^2} \cdot \left[\frac{\cos\left(\frac{\beta\ell}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta\ell}{2}\right)}{\sin\theta}\right]^2$$

La puissance rayonnée est obtenue en intégrant S_r sur une sphère de rayon r centrée sur l'antenne:

$$P_{rad} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} S_r(\theta,\varphi) r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{1}{2} R_{rad} I_0^2$$

D'où:

$$R_{rad} = 60 \int_0^{\pi} \frac{\left[\cos\left(\beta\frac{\ell}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\beta\frac{\ell}{2}\right)\right]^2}{\sin\theta} d\theta$$

Pour la suite on posera : $k = \frac{\beta\ell}{2}$. On fait le changement de variable : $u = \cos\theta$:

$$R_{rad} = 60 \int_{-1}^{1} \frac{(\cos ku - \cos k)^2}{1-u^2} du$$

$$= 30 \int_{-1}^{1} \frac{(\cos ku - \cos k)^2}{1+u} du + 30 \int_{-1}^{1} \frac{(\cos ku - \cos k)^2}{1-u} du$$

En effectuant le changement de variable : v=k.(1+u) dans la première intégrale et v=k.(1-u) dans la deuxième intégrale, on obtient:

$$R_{rad} = 60 \int_0^{\beta\ell} \frac{(\cos(v-k) - \cos k)^2}{v} dv$$

Or:

$$(\cos(v-k) - \cos k)^2 = \frac{1+\cos 2(v-k)}{2} - 2\cos k \cos(v-k) + \frac{1+\cos 2k}{2}$$

$$= (1+\cos 2k)(1-\cos v) - \frac{\cos 2k}{2}(1-\cos 2v) - \sin 2k \sin v + \frac{\sin 2k}{2}\sin 2v$$

Finalement on obtient :

$$R_0 = 30[2(1+\cos\beta\ell)\mathrm{Cin}\beta\ell - \cos\beta\ell\,\mathrm{Cin}2\beta\ell - 2\sin\beta\ell\,\mathrm{Si}\beta\ell + \sin\beta\ell\,\mathrm{Si}\,2\beta\ell]$$

Avec : $\mathrm{Si}(u) = \int_0^u \frac{\sin x}{x} dx, \mathrm{Ci}(u) = -\int_u^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx, \mathrm{Cin}(u) = \int_0^u \frac{1-\cos x}{x} dx$.

$$S_r = \frac{1}{2} E_\theta \cdot H_\varphi^* = \frac{1}{2} Z_0 \cdot |H_\varphi|^2$$

$$= \frac{1}{2} 120\pi \frac{\beta^2 I_0^2 \sin^2\theta}{16\pi^2 r^2} \frac{4}{\beta^2 \sin^4\theta} \left[\cos\left(\frac{\beta\ell}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta\ell}{2}\right)\right]^2$$

$$= \frac{15 I_0^2}{\pi r^2} \cdot \left[\frac{\cos\left(\frac{\beta\ell}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta\ell}{2}\right)}{\sin\theta}\right]^2$$

La puissance rayonnée est obtenue en intégrant S_r sur une sphère de rayon r centrée sur l'antenne:

$$P_{rad} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} S_r(\theta,\varphi) r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{1}{2} R_{rad} I_0^2$$

D'où:

$$R_{rad} = 60 \int_0^{\pi} \frac{\left[\cos\left(\beta\frac{\ell}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\beta\frac{\ell}{2}\right)\right]^2}{\sin\theta} d\theta$$

Pour la suite on posera : $k = \frac{\beta\ell}{2}$. On fait le changement de variable : $u = \cos\theta$:

$$R_{rad} = 60 \int_{-1}^{1} \frac{(\cos ku - \cos k)^2}{1-u^2} du$$

$$= 30 \int_{-1}^{1} \frac{(\cos ku - \cos k)^2}{1+u} du + 30 \int_{-1}^{1} \frac{(\cos ku - \cos k)^2}{1-u} du$$

En effectuant le changement de variable : v=k.(1+u) dans la première intégrale et v=k.(1-u) dans la deuxième intégrale, on obtient:

$$R_{rad} = 60 \int_0^{\beta\ell} \frac{(\cos(v-k) - \cos k)^2}{v} dv$$

Or:

$$(\cos(v-k) - \cos k)^2 = \frac{1+\cos 2(v-k)}{2} - 2\cos k \cos(v-k) + \frac{1+\cos 2k}{2}$$

$$= (1+\cos 2k)(1-\cos v) - \frac{\cos 2k}{2}(1-\cos 2v) - \sin 2k \sin v + \frac{\sin 2k}{2}\sin 2v$$

Finalement on obtient :

$$R_0 = 30[2(1+\cos\beta\ell)\mathrm{Cin}\beta\ell - \cos\beta\ell\,\mathrm{Cin}2\beta\ell - 2\sin\beta\ell\,\mathrm{Si}\beta\ell + \sin\beta\ell\,\mathrm{Si}\,2\beta\ell]$$

Avec : $\mathrm{Si}(u) = \int_0^u \frac{\sin x}{x} dx, \mathrm{Ci}(u) = -\int_u^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx, \mathrm{Cin}(u) = \int_0^u \frac{1-\cos x}{x} dx$.

ANNEXE 5: Impédance de rayonnement d'une antenne

L'impédance de l'antenne est définie par :

$$Z_{11} = -\frac{1}{I_0^2}\int E \cdot I^* dz .$$

Considérons une antenne de longueur $\frac{\ell}{2}$, dont la distribution de courant est donnée par :

$$I(u) = I_0 . \sin \beta u.$$

Calculons le champ E créé l'antenne.

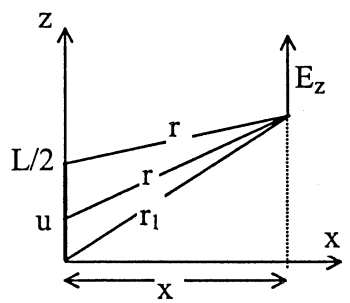


Figure 1: Champ crée par une antenne de longueur L/2.

L'équation de continuité permet de déduire la densité de charge:

$$\rho(u) = -\int \frac{\partial I}{\partial u} dt = \frac{j\beta I_0}{\omega} \cos \beta u \tag{1}$$

Le potentiel vecteur est donné par :

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{\ell/2} \frac{I(u)}{r} du = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_0^{\ell/2} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sin \beta u \, du \tag{2}$$

avec : $r^2 = x^2 + (z-u)^2$

Le potentiel électrique est donné par :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\ell/2} \frac{\rho(u)}{r} du = \frac{j\beta I_0}{4\pi\varepsilon_0 \omega} \int_0^{\ell/2} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \cos \beta u \, du \tag{3}$$

Le champ E est donné par :

$$E_z = -j\omega A_z - \frac{\partial V}{\partial z} \tag{4}$$

On a:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{j\beta I_0}{4\pi\varepsilon_0 \omega} \int_0^{\ell/2} \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{e^{-j\beta r}}{r}\right] \cos \beta u \, du \tag{5}$$

Or : $\frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{\partial r}{\partial u} = \frac{z-u}{r}$. Ensuite en effectuant une intégration par parties on obtient :

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{j\beta I_0}{4\pi\varepsilon_0\omega}\left\{\left[\cos\beta u\frac{e^{-j\beta r}}{r}\right]_0^{\ell/2} + \beta\int_0^{\ell/2}\frac{e^{-j\beta r}}{r}\sin\beta u\,du\right\}$$
$$= -\frac{j\beta I_0}{4\pi\varepsilon_0\omega}\left[\cos\frac{\beta\ell}{2}\frac{e^{-j\beta r_0}}{r_0} - \frac{e^{-j\beta r_1}}{r_1}\right] - \frac{j\,\beta^2 I_0}{4\pi\varepsilon_0\omega}\int_0^{\ell/2}\frac{e^{-j\beta r}}{r}\sin\beta u\ du \qquad (6)$$

En utilisant le fait que : $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$; $\lambda = cT$; $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$; $\omega = \frac{2\pi}{T}$, on constate que le deuxième terme n'est autre que $j\omega A_z$ d'où:

$$E_z = \frac{j\beta I_0}{4\pi\varepsilon_0\omega}\left[\cos\frac{\beta\ell}{2}\ \frac{e^{-j\beta r_0}}{r_0} - \frac{e^{-j\beta r_1}}{r_1}\right] = 30jI_0\left[\cos\frac{\beta\ell}{2}\ \frac{e^{-j\beta r_0}}{r_0} - \frac{e^{-j\beta r_1}}{r_1}\right] \qquad (7)$$

Cas de l'antenne symétrique :

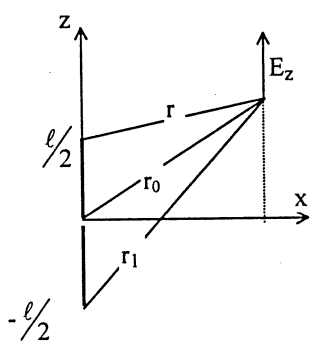


Figure 2: champ crée par une antenne symétrique.

La distribution du courant est donnée par : $I(z) = I_0 \sin\left[\beta\left(\frac{\ell}{2} - |z|\right)\right]$ (8)

En utilisant la relation (7) on déduit :

$$E_z = 30jI_0\left[2\cos\frac{\beta\ell}{2}\frac{e^{-j\beta r_0}}{r_0} - \frac{e^{-j\beta r_1}}{r_1} - \frac{e^{-j\beta r_2}}{r_2}\right] \qquad (9)$$

Ensuite:

$$Z_{11} = -\frac{1}{I_0^2}\int_{-\ell/2}^{\ell/2} E(z)I(z)dz \qquad (10)$$

avec : $r_0 = z$; $r_1 = \frac{\ell}{2} + z$; $r_2 = \frac{\ell}{2} - z$.

La fonction E(z).I(z) étant paire on peut écrire:

$$Z_{11} = -\frac{2}{I_0^2}\int_0^{\ell/2} E_z I_0 \sin\beta\left(\frac{\ell}{2}-z\right)\,dz$$
$$= 60j\int_0^{\ell/2}\left(\frac{e^{-j\beta r_2}}{r_2}+\frac{e^{-j\beta r_1}}{r_1}-2\cos\beta\frac{\ell}{2}\frac{e^{-j\beta r_0}}{r_0}\right)\sin\beta\left(\frac{\ell}{2}-z\right)dz \qquad (11)$$

D'où :

$$R_{11} = \mathrm{Re}(Z_{11}) = 60\int_0^{\ell/2}\left(\frac{\sin\beta r_2}{r_2}+\frac{\sin\beta r_1}{r_1}-2\cos\frac{\beta\ell}{2}\frac{\sin\beta r_0}{r_0}\right)\sin\beta\left(\frac{\ell}{2}-z\right)dz \qquad (12)$$

On effectue les changements de variables suivants : $u=\beta.r_2$ dans la première intégrale; $u=\beta.r_1$ dans la deuxième et $u=\beta.r_0$ dans la troisième. On pose $k=\beta L/2$. (12) devient:

$$R_{11} = 60\left\{\int_0^k \frac{\sin^2 u}{u}\,du + \int_k^{2k}\frac{\sin u}{u}\sin(2k-u)du - 2\cos k\int_0^k\frac{\sin u}{u}\sin(k-u)du\right\}$$
$$= 60\left\{\begin{array}{l}\int_0^k\frac{1-\cos 2u}{2u}du + \int_k^{2k}\left(\sin 2k\frac{\sin 2u}{2u}-\cos 2k\frac{1-\cos 2u}{2u}\right)du \\ -2\cos k\int_0^k\left(\sin k\frac{\sin 2u}{2u}-\cos k\frac{1-\cos 2u}{2u}\right)du\end{array}\right\}$$
$$= 30\{\mathrm{Cin}\,2k+\sin 2k(\mathrm{Si}\,4k-\mathrm{Si}\,2k)-\cos 2k(\mathrm{Cin}\,4k-\mathrm{Cin}\,2k)-\sin 2k\,\mathrm{Si}2k+(1+\cos 2k)\mathrm{Cin}\,2k\}$$

On retrouve bien:

$R_{11}= 30[2(1+\cos\beta\ell)\mathrm{Cin}\,\beta\ell-\cos\beta\ell\,\mathrm{Cin}\,2\beta\ell-2\sin\beta\ell\,\mathrm{Si}\,\beta\ell+\sin\beta\ell\,\mathrm{Si}\,2\beta\ell]$ De même on a:

$$X_{11} = \mathrm{Im}(Z_{11}) = 60\int_0^{\ell/2}\left(\frac{\cos\beta r_2}{r_2}+\frac{\cos\beta r_1}{r_1}-2\cos\frac{\beta\ell}{2}\frac{\cos\beta r_0}{r_0}\right)\sin\beta\left(\frac{\ell}{2}-z\right)dz$$

En effectuant les mêmes changements de variable on obtient :

$$X_{11} = 60\left\{\int_0^k\frac{\sin 2u}{2\ u}du + \int_k^{2k}\frac{\cos u}{u}\sin(2k-u)du - 2\cos k\int_0^k\frac{\cos u}{u}\sin(k-u)du\right\}$$

On voit bien que le terme $\int_0^k\frac{\cos u}{u}du$ diverge donc X_{11} diverge. Pour avoir une partie imaginaire finie il faudra considérer que l'antenne est un cylindre de diamètre $a \neq 0$.

Mutuelle entre deux antennes:

La mutuelle entre deux antennes est donnée par:

$$Z_{12} = -\int_{A_2} \frac{E_1(z_2)}{I_{10}} \cdot \frac{I_2(z_2)}{I_{20}} dz_2 \tag{13}$$

avec I_{10} et I_{20} sont les courants maximums dans les deux antennes.

Avec:

$$E_1(z_2) = 30jI_{10}\left[2\cos\frac{\beta\ell}{2}\ \frac{e^{-j\beta r_0}}{r_0} - \frac{e^{-j\beta r_1}}{r_1} - \frac{e^{-j\beta r_2}}{r_2}\right] \tag{14}$$

$$r_2^2 = d^2 + \left(\frac{\ell}{2} - z_2\right)^2 ; r_1^2 = d^2 + \left(\frac{\ell}{2} + z_2\right)^2 ; r_0^2 = d^2 + z_2^2;\ I_2(z_2) = I_{20}\sin\beta\left(\frac{\ell}{2} - |z_2|\right)$$

Donc:

$$\begin{aligned} Z_{12} &= -2\int_0^{\ell/2} \frac{E_1(z_2)}{I_{10}} \sin\beta\left(\frac{L}{2} - z_2\right) dz_2 \\ &= 60j\int_0^{\ell/2} \left(\frac{e^{-j\beta r_2}}{r_2} + \frac{e^{-j\beta r_1}}{r_1} - 2\cos\beta\frac{\ell}{2}\ \frac{e^{-j\beta r_0}}{r_0}\right) \sin\beta\left(\frac{\ell}{2} - z_2\right) dz_2 \\ &= 30\int_0^{\ell/2} \left[\begin{array}{l} \dfrac{e^{j\beta\left(\frac{\ell}{2} - z_2 - r_2\right)}}{r_2} - \dfrac{e^{j\beta\left(\frac{\ell}{2} - z_2 + r_2\right)}}{r_2} + \dfrac{e^{j\beta\left(\frac{\ell}{2} - z_2 - r_1\right)}}{r_1} - \dfrac{e^{j\beta\left(\frac{\ell}{2} - z_2 + r_1\right)}}{r_1} \\ -2\cos\dfrac{\beta\ell}{2}\dfrac{e^{j\beta\left(\frac{\ell}{2} - z_2 - r_0\right)}}{r_0} + 2\cos\dfrac{\beta\ell}{2}\dfrac{e^{j\beta\left(\frac{\ell}{2} - z_2 + r_0\right)}}{r_0} \end{array}\right] dz_2 \end{aligned} \tag{15}$$

On effectue les changements de variables suivants:

$$\begin{cases} u = \beta\left(r_2 + z_2 - \frac{\ell}{2}\right) \\ du = \frac{u}{r_2} dz_2 \end{cases} \text{dans } I_1 ; \quad \begin{cases} u = \beta\left(r_2 - z_2 + \frac{\ell}{2}\right) \\ du = -\frac{u}{r_2} dz_2 \end{cases} \text{dans } I_2 ; \quad \begin{cases} u = \beta\left(r_1 + z_2 + \frac{\ell}{2}\right) \\ du = \frac{u}{r_1} dz_2 \end{cases} \text{dans } I_3$$

$$\begin{cases} u = \beta\left(r_1 - z_2 - \frac{\ell}{2}\right) \\ du = -\frac{u}{r_1} dz_2 \end{cases} \text{dans } I_4 ; \quad \begin{cases} \mathbf{u = \beta(r_0 + z_2)} \\ \mathbf{du = \frac{u}{r_0} dz_2} \end{cases} \text{dans } I_5 ; \quad \begin{cases} \mathbf{u = \beta(r_0 - z_2)} \\ \mathbf{du = -\frac{u}{r_0} dz_2} \end{cases} \text{dans } I_6$$

(15) devient:

$$\frac{Z_{12}}{30} = \left(2 + e^{-j\beta\ell}\right)\int_{y_1}^{x_0} \frac{e^{-ju}}{u}\,du + \left(1 + 2\cos\frac{\beta\ell}{2} e^{j\beta\frac{\ell}{2}}\right)\int_{y_2}^{x_0} \frac{e^{-ju}}{u}\,du$$
$$+ e^{j\beta\ell}\int_{y_2}^{x_2} \frac{e^{-ju}}{u}\,du + e^{-j\beta\ell}\int_{y_1}^{x_1} \frac{e^{-ju}}{u}\,du \qquad (16)$$

avec:

$$x_0 = \beta d;\ x_1 = \beta\left(\sqrt{d^2 + \ell^2} - \ell\right);\ x_2 = \beta\left(\sqrt{d^2 + \ell^2} + \ell\right);$$
$$y_1 = \beta\left(\sqrt{d^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} - \frac{\ell}{2}\right);\ y_2 = \beta\left(\sqrt{d^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} + \frac{\ell}{2}\right)$$

On en déduit que:

$$\frac{R_{12}}{30} = \sin\beta\ell\left(Six_2 - Six_1 - 2Siy_2 + 2Siy_1\right) - \cos\beta\ell\left(2Ciy_2 + 2Ciy_1 - 2Cix_0 - Cix_2 - Cix_1\right)$$
$$- 2\left(Ciy_2 + Ciy_1 - 2Cix_0\right)$$
$$\frac{X_{12}}{30} = -\sin\beta\ell\left(2Ciy_2 - 2Ciy_1 + Cix_1 - Cix_2\right) - \cos\beta\ell\left(Six_2 + Six_1 + 2Six_0 - 2Siy_1 - 2Siy_2\right)$$
$$+ 2\left(Siy_2 + Siy_1 - 2Six_0\right)$$

INPG

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 30 Mars 1992 relatifs aux Etudes Doctorales

Vu les Rapports de présentations de :

Monsieur Flavio CANAVERO

Monsieur André NICOLET

Monsieur Moez YOUSSEF

est autorisé(e) à présenter une thèse en soutenance en vue de l'obtention du diplôme de **Docteur de l'Institut National Polytechnique de Grenoble,** spécialité "GENIE ELECTRIQUE".

Fait à Grenoble, le 08 DEC 1998

Pierre GENTIL
Professeur INPG
Directeur du Collège Doctoral