



HAL
open science

Modélisation micromécanique de la croissance et de la percolation de pores sous pression dans une matrice céramique à haute température

Pierre-Guy Vincent

► **To cite this version:**

Pierre-Guy Vincent. Modélisation micromécanique de la croissance et de la percolation de pores sous pression dans une matrice céramique à haute température. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2007. Français. NNT : 2007AIX11046 . tel-00492215

HAL Id: tel-00492215

<https://theses.hal.science/tel-00492215v1>

Submitted on 15 Jun 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE I - PROVENCE

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE I

Discipline : Mécanique Énergétique

École Doctorale : Physique, Modélisation et Sciences pour l'Ingénieur

E.D. numéro 353

présentée et soutenue publiquement

par

Pierre-Guy VINCENT

le 12 novembre 2007

Modélisation micromécanique de la croissance et de la percolation de pores sous pression dans une matrice céramique à haute température

JURY

MM.	A. ZAOUÏ	Directeur de recherche CNRS, LIM	Président
	P. GILORMINI	Directeur de recherche CNRS, LIM	Rapporteur
	D. KONDO	Professeur, Université Lille I	Rapporteur
	R. LEBENSOHN	Senior Researcher, LANL, USA	Examineur
	J.-B. LEBLOND	Professeur, Université Paris VI	Examineur
	F. LEBON	Professeur, Université Aix-Marseille I	Examineur
	P. SUQUET	Directeur de recherche CNRS, LMA	Directeur de thèse
	R. MASSON	Ingénieur-Chercheur, EDF	Membre invité
	Y. MONERIE	Ingénieur-Chercheur, IRSN	Encadrant de thèse

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers Yann Monerie, qui a été à l'origine de cette thèse et qui l'a encadrée. Je ne saurais exprimer avec quelques mots tout ce que je lui dois. Simplement, je mentionnerai qu'il a toujours pris le temps de m'aider dans mon travail, de me donner toutes les explications nécessaires et de me faire découvrir le monde de la recherche en mécanique dont il est un acteur expérimenté et créatif.

Je tiens également à remercier Pierre Suquet, mon directeur de thèse : je doute qu'un doctorant puisse trouver meilleur directeur de thèse tant par ses remarquables connaissances, sa grande disponibilité, sa virtuosité dans le maniement des équations et dans le développement de ses idées, sa générosité intellectuelle.

Ainsi, je pense sincèrement que j'ai eu la chance de bénéficier, durant ces trois années de thèse, du meilleur encadrement qu'un doctorant puisse souhaiter.

Je remercie André Zaoui pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de soutenance de thèse.

Je remercie Pierre Gilormini et Djimédo Kondo pour avoir accepté la tâche difficile d'écrire les rapports sur ce mémoire.

Je remercie vivement tous les membres du jury d'avoir exprimé leur intérêt pour ce travail et d'avoir accepté de se déplacer pour ma soutenance de thèse. Je les remercie pour les conseils judicieux, les remarques et les idées pertinentes dont ils m'ont fait part.

Je remercie Christian Bernaudat, mon correspondant EDF, pour avoir accepté de suivre cette thèse et pour avoir soutenu ce projet de recherche.

Je tiens aussi à remercier très chaleureusement tous les membres du laboratoire où j'ai effectué cette thèse (IRSN/DPAM/SEMCA/LEC) pour les discussions scientifiques que j'ai pu avoir avec eux, le tout dans une excellente ambiance de travail.

Je remercie particulièrement Marc Petit, le chef de ce laboratoire, et d'une façon plus générale, l'IRSN, pour m'avoir permis de travailler dans de très bonnes conditions.

Je tiens aussi à remercier Didier Vola pour son aide dans la gestion des couleurs des cellules de Voronoï.

Je remercie également les membres de l'équipe MESH du LMA pour leur accueil. Je remercie particulièrement : Jean-Claude Michel grâce à qui j'ai pu effectuer les simulations FFT et les simulations éléments finis sur cellules unitaires, Hervé Moulinec également pour les simulations FFT et Mihail Găărăjeu pour son aide concernant les calculs analytiques sur cellules ellipsoïdales aplaties. J'ai fortement apprécié leur aide et je leur en suis extrêmement reconnaissant.

Je voudrais aussi remercier Stéphane Bourgeois, dont j'ai suivi les cours en école d'ingénieur, pour m'avoir orienté vers l'IRSN et l'homogénéisation à la fin de mon DEA. Cela a constitué une étape importante vers cette thèse. Je tiens à le remercier pour avoir relu et corrigé la note technique

IRSN rédigée au cours de ma thèse et, par conséquent, pour avoir suivi mon travail en me donnant les encouragements nécessaires.

J'adresse une mention spéciale à Frédéric Perales, qui m'a beaucoup aidé pour mener à bien les simulations numériques avec Xper et avec qui j'ai partagé un bureau pendant ces trois années : ainsi, je l'ai vu durant sa "période de rédaction de thèse" et il m'a vu durant la mienne... Cela ne s'oublie pas ! Je le remercie grandement pour sa bonne humeur et tous ses bons conseils.

Je n'oublierai pas de saluer les doctorants et post-doctorants de l'IRSN que j'ai pu rencontrer (certains le sont encore, d'autres ne le sont déjà plus...) : Céline Lapuerta, Matthieu Jobelin, Patrick Roux, Christian Mun, Vincent Busser, Aurélien Larcher, Guillaume Ansanay-Alex, Laura Gastaldo, Sébastien Destercke, Florence Gupta...

A tous mes proches et amis, je souhaite leur exprimer ma profonde reconnaissance pour leurs encouragements.

Pour l'essentiel, je terminerai en remerciant de tout cœur mes parents et mes sœurs pour le soutien moral et affectif qu'ils m'ont apporté.

Table des matières

Notations	9
I Position du problème	11
1 Introduction	13
2 Problème physique et choix de modélisation	17
2.1 Le contexte : accident de réactivité dans les réacteurs à eau sous pression	17
2.2 Le combustible UO_2 fortement irradié	20
2.2.1 Microstructure	21
2.2.2 Propriétés thermomécaniques	22
2.2.3 Objectifs de la thèse	24
2.3 Démarche proposée et hypothèses principales	25
2.3.1 Modélisation multi-échelle : endommagement ductile par croissance de pores	25
2.3.2 Enrichissement à l'échelle macroscopique : prise en compte de la coalescence	28
II Surface de plasticité	31
3 Matériaux poreux avec une seule population de cavités	33
3.1 Cavités sphériques : rappels	34
3.1.1 Critère de Gurson	34
3.1.2 Critères elliptiques	35
3.1.3 Méthode sécante modifiée (approche variationnelle) à N phases	38
3.1.4 Modifications de type GTN du critère de Gurson	41
3.2 Cavités ellipsoïdales aplaties et alignées	42
3.2.1 Critères de type Gurson (rappels)	42
3.2.2 Approche de type Gurson : borne supérieure	45
3.2.3 Approche de type Gurson : estimation	47
3.3 Cavités ellipsoïdales aplaties et orientées aléatoirement	49
3.3.1 Approche de type Gurson : borne supérieure	50
3.3.2 Approche de type Gurson : estimation	51
3.3.3 Comparaisons et résultats	53
4 Matériaux poreux avec deux populations de cavités	57
4.1 Cavités sphériques	58
4.1.1 Méthode sécante modifiée (approche variationnelle) : borne supérieure . . .	59
4.1.2 Approche de type Gurson : borne supérieure	60

4.1.3	Comparaison entre les deux bornes supérieures précédentes	61
4.1.4	Méthode sécante modifiée (approche variationnelle) à N phases : estimation	62
4.1.5	Approche de type Gurson : estimation	64
4.2	Cavités ellipsoïdales aplaties et alignées	70
4.2.1	Approche de type Gurson : borne supérieure	70
4.2.2	Approche de type Gurson : estimation	71
4.3	Cavités ellipsoïdales aplaties et orientées aléatoirement	72
4.3.1	Méthode sécante modifiée (approche variationnelle) : borne supérieure	73
4.3.2	Approche de type Gurson : borne supérieure	73
4.3.3	Comparaison entre les deux bornes supérieures précédentes	75
4.3.4	Méthode sécante modifiée (approche variationnelle) à N phases : estimation	75
4.3.5	Approche de type Gurson : estimation	80
4.3.6	Conclusion	82
4.4	Borne et estimation elliptiques	83
4.5	Bilan sur les modèles	85
4.6	Simulations numériques FFT	86
4.6.1	Méthode FFT de Michel et al. (2000) (rappels)	87
4.6.2	Modèle de Gurson en théorie élastoplastique (ou de déformation)	89
4.6.3	Résultats	90
5	Matériaux poreux avec deux populations de cavités sous pressions (saturées)	103
5.1	Cas élastique linéaire avec une unique population de cavités saturées : rappels	104
5.2	Première échelle : prise en compte d'une pression dans les cavités	105
5.3	Deuxième échelle : cavités ellipsoïdales aplaties et orientées aléatoirement, prise en compte d'une pression dans les cavités	106
5.3.1	Méthode sécante modifiée (approche variationnelle) : borne supérieure	106
5.3.2	Approche de type Gurson : borne supérieure	107
5.3.3	Méthode sécante modifiée (approche variationnelle) à N phases : estimation	108
5.4	Borne et estimation elliptiques	109
5.5	Effet mécanique des pressions aux deux échelles et comparaison des modèles	109
5.5.1	Ecriture du point hydrostatique de Leblond (2003) avec pressions	110
5.5.2	Comparaison des modèles	110
5.5.3	Critère utilisé dans les codes simplifiés pour l'oxyde d'uranium irradié	110
III	Evolution de l'endommagement	115
6	Evolution de l'endommagement	117
6.1	Partie élastique	117
6.2	Critère de plasticité : méthode sécante modifiée à N phases	119
6.3	Lois d'évolution des paramètres internes	119
6.4	Intégration du modèle élastoplastique endommageable	122
7	Modélisation du comportement élastoplastique endommageable jusqu'à rupture du matériau d'étude	125
7.1	Modèle élastoplastique endommageable proposé en déformations planes généralisées	126
7.1.1	Partie élastique	126
7.1.2	Critère de plasticité : méthode sécante modifiée (approche variationnelle) à N phases	127

7.1.3	Lois d'évolution des paramètres internes	135
7.2	Méthode numérique : homogénéisation périodique avec modèle de zone cohésive et cellules de Voronoï bidimensionnelles	138
7.2.1	Modèle de zone cohésive utilisé et homogénéisation périodique (logiciel Xper, Perales (2005))	138
7.2.2	Domaine étudié : milieu périodique partitionné en grains (cellules de Voronoï) avec possibilité de préfissures sur certains joints de grain	141
7.3	Description du comportement élastoplastique endommageable jusqu'à rupture du matériau d'étude	142
7.3.1	Données expérimentales utilisées pour le comportement mécanique de l' UO_2 vierge sans porosité et à haute température (la matrice)	142
7.3.2	Identification des paramètres du modèle de zone cohésive utilisé pour l' UO_2 vierge sans porosité et à haute température (la matrice)	144
7.3.3	Cellules de Voronoï avec préfissures placées aux joints de grain	146
7.3.4	Comparaison entre simulations numériques avec modèle de zone cohésive et modèle élastoplastique endommageable — Enrichissement du modèle élastoplastique endommageable	148
7.3.5	Conclusion : prise en compte de la coalescence et de la rupture dans le modèle élastoplastique endommageable tridimensionnel pour le matériau d'étude . .	152
8	Conclusion et perspectives	157
8.1	Bilan du travail réalisé	157
8.2	Perspectives	160
IV	Annexes techniques	163
A	Problème de l'ellipsoïde creux : équivalence entre le champ élastique de Milton (2002) et le champ axisymétrique de Gologanu et al. (1994)	165
B	Nouvelle borne supérieure pour un matériau poreux à matrice rigide plastique parfaite et à cavités aplaties alignées	169
C	Borne supérieure de type Gărăjeu (1995) pour un matériau poreux à matrice rigide plastique parfaite et à cavités aplaties alignées	173
D	Un critère approché pour un matériau poreux à matrice rigide plastique parfaite et à cavités aplaties alignées	179
E	Borne supérieure de Hashin et Shtrikman (1963)	183
F	Estimation auto-cohérente de Hervé et Zaoui (1993)	185
G	Borne supérieure de Ponte Castañeda et Willis (1995)	189
H	Porosités "équivalentes", cas tridimensionnel	191
I	Calcul de l'intégrale I	193

J	Démonstration : méthode sécante modifiée pour un matériau poreux saturé à matrice de Gurson	195
J.1	Modèles MSM (MSM sphérique et MSM ellipsoïdal)	195
J.1.1	Etude de $W_o^{hom}(\mathbf{E}, p)$	196
J.1.2	Problème général du milieu poreux saturé élastique linéaire	197
J.1.3	Energie du problème (\mathcal{P}_o)	201
J.1.4	Ecriture de la méthode sécante modifiée	201
J.1.5	Récapitulatif pour la méthode sécante modifiée	202
J.2	Modèle MSMN sphérique	204
J.2.1	Etude de $W_o^{hom}(\mathbf{E}, p)$	205
J.2.2	Problème général du milieu poreux saturé élastique linéaire multiphasés	205
J.2.3	Energie du problème (\mathcal{P}_o^N)	209
J.2.4	Ecriture de la méthode sécante modifiée	209
J.2.5	Récapitulatif pour la méthode sécante modifiée à N phases	210
K	Démonstration : borne et estimation elliptiques	213
K.1	Etude du problème linéaire	214
K.2	Ecriture du critère	215
L	Borne supérieure de Hashin et Shtrikman (1963) dans le cas bidimensionnel	217
M	Borne supérieure de Ponte Castañeda et Willis (1995) dans le cas bidimensionnel	219
N	Estimation auto-cohérente de Hervé et Zaoui (1995) dans le cas bidimensionnel	221
O	Energie élastique d'un milieu élastique linéaire isotrope transverse	225
P	Porosités "équivalentes", cas bidimensionnel	227
Q	Microstructures utilisées pour les simulations numériques avec modèle de zone cohésive	229

Notations

Les notations présentées ici sont valables dans l'intégralité du document et ne sont pas rappelées par la suite.

Tenseurs d'ordre 1

- Les vecteurs sont notés en gras.
- La transposée d'un vecteur \mathbf{u} est notée \mathbf{u}^T .

Tenseurs d'ordre 2

- Les tenseurs d'ordre 2 sont notés en gras.
- Le tenseur identité d'ordre 2 est noté \mathbf{I} .
- Soit \mathbf{q} un tenseur symétrique d'ordre 2 :
 - La partie hydrostatique de \mathbf{q} est notée q_m et vaut $\frac{1}{3}\text{Tr}(\mathbf{q})$.
 - La partie déviatorique de \mathbf{q} est notée \mathbf{q}_d et vaut :

$$\mathbf{q}_d = \mathbf{q} - q_m \mathbf{I}. \quad (1)$$

- Si \mathbf{q} est un tenseur de contrainte, alors la contrainte équivalente q_{eq} est égale à $\sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{q}_d : \mathbf{q}_d}$.
- Si \mathbf{q} est un tenseur de déformation, alors la déformation équivalente q_{eq} est égale à $\sqrt{\frac{2}{3}\mathbf{q}_d : \mathbf{q}_d}$.
- La notation vectorielle suivante de \mathbf{q} est parfois utilisée (comme dans Suquet et Bornert (2001)) :

$$\{\mathbf{q}\} = \left(q_{11}, q_{22}, q_{33}, \sqrt{2}q_{23}, \sqrt{2}q_{31}, \sqrt{2}q_{12} \right)^T, \quad (2)$$

où chaque composante ij de \mathbf{q} est notée q_{ij} .

Tenseurs d'ordre 4

- Les tenseurs d'ordre 4 sont notés en gras.
- Le tenseur identité d'ordre 4 projetant tout tenseur d'ordre 2 sur sa partie symétrique est notée \mathbf{ID} . La composante $ijkl$ de \mathbf{ID} est égale à $\frac{1}{2}(I_{ik}I_{jl} + I_{il}I_{jk})$.
- Les tenseurs \mathbf{J} et \mathbf{K} projettent tout tenseur d'ordre 2 symétrique respectivement sur sa partie hydrostatique et déviatorique. La composante $ijkl$ de \mathbf{J} est égale à $\frac{1}{3}I_{ij}I_{kl}$ et \mathbf{K} est égal à $\mathbf{ID} - \mathbf{J}$.
- Soit \mathbf{C}_o un tenseur de raideur isotrope. Les coefficients de compressibilité et de cisaillement associés à \mathbf{C}_o sont notés respectivement k_o et μ_o .
- La notation matricielle d'un tenseur \mathbf{Q} d'ordre 4 présentant les symétries mineures ($Q_{ijkl} =$

$Q_{jikl} = Q_{ijlk} = Q_{jilk}$) est parfois utilisée :

$$\left(\begin{array}{cccccc} Q_{1111} & Q_{1122} & Q_{1133} & \sqrt{2}Q_{1123} & \sqrt{2}Q_{1131} & \sqrt{2}Q_{1112} \\ Q_{2211} & Q_{2222} & Q_{2233} & \sqrt{2}Q_{2223} & \sqrt{2}Q_{2231} & \sqrt{2}Q_{2212} \\ Q_{3311} & Q_{3322} & Q_{3333} & \sqrt{2}Q_{3323} & \sqrt{2}Q_{3331} & \sqrt{2}Q_{3312} \\ \sqrt{2}Q_{2311} & \sqrt{2}Q_{2322} & \sqrt{2}Q_{2333} & 2Q_{2323} & 2Q_{2331} & 2Q_{2312} \\ \sqrt{2}Q_{3111} & \sqrt{2}Q_{3122} & \sqrt{2}Q_{3133} & 2Q_{3123} & 2Q_{3131} & 2Q_{3112} \\ \sqrt{2}Q_{1211} & \sqrt{2}Q_{1222} & \sqrt{2}Q_{1233} & 2Q_{1223} & 2Q_{1231} & 2Q_{1212} \end{array} \right). \quad (3)$$

Divers opérateurs

- Le symbole Tr désigne la trace.
- Le symbole div désigne la divergence.
- Le symbole \otimes désigne le produit tensoriel.
- Le symbole \cdot désigne le produit scalaire.
- Le symbole $:$ désigne le produit doublement contracté.
- La transposée d'une matrice \mathbf{Q} est notée \mathbf{Q}^T .
- Le symbole $\langle \mathbf{q} \rangle_V$ désigne la moyenne volumique de \mathbf{q} sur le domaine V (opérateur de moyenne) :

$$\langle \mathbf{q} \rangle_V = \frac{1}{|V|} \int_V \mathbf{q} \, dV, \quad (4)$$

où le volume de V est noté $|V|$ (le symbole ∂V désigne, quant à lui, la surface extérieure de V).

Première partie

Position du problème

Chapitre 1

Introduction

L'Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (IRSN) mène conjointement des recherches et des expertises scientifiques dans les disciplines du risque, de la sûreté et de la sécurité des installations nucléaires, du transport et du contrôle des matières nucléaires et sensibles, de la protection de l'environnement et de la santé. Dans le cadre de la sûreté des installations nucléaires, le Service d'Etude et de Modélisation du Combustible en situation Accidentelle (SEMCA) effectuée, au sein de la Direction de la Prévention des Accidents Majeurs (DPAM), des recherches sur le comportement thermomécanique du combustible des réacteurs nucléaires en dehors des conditions nominales de fonctionnement.

Ce travail, réalisé au SEMCA, entre dans le cadre des programmes de modélisation avancée de l'IRSN et d'Electricité de France (EdF) relatifs à l'étude de l'accident de réactivité dans les réacteurs à eau sous pression. L'application de ce travail concerne l'étude du comportement mécanique de l'oxyde d'uranium UO_2 fortement irradié lors d'un tel accident de réactivité. Les motivations de ce travail sont présentées dès le chapitre 2. Pour l'essentiel, l'accident de réactivité constitue, pour la classe des réacteurs à eau sous pression, un accident de dimensionnement : c'est un accident dont l'occurrence et les éventuelles conséquences doivent être étudiées par l'exploitant nucléaire à la conception de ces réacteurs et lors de la définition et de la mise en place de leurs gestions. D'une façon générale, étudier le comportement du combustible nucléaire — ici l'oxyde d'uranium — lors de ces accidents revient à contribuer, à l'échelle la plus fine, à l'analyse de l'intégrité des barrières de confinements de la matière radioactive et des produits de fission associés.

Deux particularités fortes de l'étude du comportement des matériaux dans le domaine du nucléaire sont, d'une part, l'évolution constante de leur microstructure lors de leur vie en réacteur (irradiation, physico-chimie complexe) et d'autre part, l'extrême difficulté à procéder à des mesures locales en ligne de leur comportement. Ces deux particularités font que la modélisation multi-échelle constitue une démarche naturelle dans la prédiction quantitative du comportement de ces matériaux après un temps donné de séjour en réacteur.

L'évolution de la microstructure du combustible UO_2 n'échappe pas à cette règle. Cette céramique poreuse présente à l'état non irradié des macro-pores de fabrication d'échelle micrométrique, dont la géométrie est souvent assimilée à des sphères et dont l'état initial est sans pression. Lors de son séjour en réacteur, une étape de densification du combustible conduit progressivement à la diminution de cette population de pores au profit de deux autres populations qui se développent à des échelles inférieures. Le combustible fortement irradié exhibe ainsi deux nouvelles populations de pores distinctes par leur taille et leur forme : (1) à l'échelle du grain, une population de cavi-

tés nanométriques de forme plutôt sphérique, appelées bulles intragranulaires, (2) à l'échelle d'une collection de grains, une population de cavités micrométriques de forme plutôt ellipsoïdale aplatie, appelées bulles intergranulaires. Du point de vue d'une modélisation multi-échelle, il semble légitime de considérer que la taille de ces deux nouvelles populations de pores est compatible avec une hypothèse de séparation d'échelle, et que leur distribution est isotrope en espace et en orientation (orientations équiprobables). Par ailleurs, ces deux populations sont saturées par la présence de produits de fissions gazeux. Durant un accident de réactivité, la température du matériau augmente fortement, ce qui induit une forte augmentation du chargement d'origine thermique ainsi qu'une forte augmentation des pressions dans ces bulles. Les bulles intergranulaires croissent, coalescent et des microfissures apparaissent, conduisant ainsi, à la ruine totale du matériau et à la création de chemins d'écoulement pour la libération des gaz de fission.

Ce travail propose un modèle d'endommagement ductile pour décrire le comportement élastoplastique du matériau avec gonflement des bulles inter et intragranulaires puis percolation des bulles intergranulaires. Comme annoncé, la modélisation proposée est basée sur une approche multi-échelle sous l'hypothèse de séparation d'échelle et les propriétés effectives du matériau global sont obtenues en deux étapes : (étape 1) les propriétés effectives du milieu à la première échelle (échelle des bulles intragranulaires) sont déterminées ; (étape 2) le matériau possédant ces propriétés effectives constitue la matrice du milieu poreux à l'échelle supérieure (échelle des bulles intergranulaires). Le modèle élastoplastique endommageable proposé par cette démarche traite séparément de l'élasticité, de la surface de plasticité — ou surface de charge — puis de l'évolution des paramètres internes du modèle avec le chargement. Ce modèle est ensuite enrichi a posteriori pour prendre en compte une coalescence des bulles intergranulaires compatible avec des simulations numériques. Le terme de percolation utilisé dans le titre de ce travail est assimilé ici au phénomène de coalescence.

Le point le plus ardu de ce travail concerne la détermination de la surface de plasticité du milieu effectif constitué d'une matrice plastique parfaite (critère de Von Mises) contenant deux populations de pores sous pression — la pression et la forme étant différentes pour chaque population. Compte tenu de l'absence d'effets d'échelles dans les méthodes d'homogénéisation pour matériaux non linéaires et de la morphologie des différentes populations de pores présentées, on peut d'ores et déjà souligner que l'obtention d'un comportement effectif drainé à l'échelle des pores sphériques intragranulaires pour le combustible fortement irradié, fournit aussi celui du combustible vierge (une seule population sphérique micrométrique drainée).

D'un point de vue général, les méthodes mises en œuvre dans ce travail se répartissent en trois groupes.

1. **La poroélasticité deux échelles.** Les méthodes classiques en poroélasticité (Dormieux et al. (2002)) sont ici étendues au cas deux échelles avec pression saturante différente à chaque échelle à la manière de Dormieux et al. (2006). La morphologie et la distribution des pores sont prises en compte à l'aide des bornes de Hashin et Shtrikman (1963) à l'échelle des petits pores sphériques, et de Ponte Castañeda et Willis (1995) avec prise de moyenne sur les orientations à l'échelle des larges pores ellipsoïdaux aplatis. Le comportement poroélastique effectif dérive alors d'un potentiel quadratique en déformation et en pression apparente. Cette pression apparente se définit comme une différence entre les pressions aux deux échelles pondérées par des termes de Biot.
2. **La poroplasticité deux échelles.** Dans le cadre des études de sûreté, il est usuel de distinguer les approches *conservatives* et les approches *best-estimate*. Les approches conservatives s'appuient sur des combinaisons d'hypothèses restrictives afin de garantir un résultat pos-

sédant des marges confortables du point de vue de la sûreté. Les approches best-estimate cherchent à fournir des estimations au plus juste afin de connaître l'amplitude des marges précédentes. La démarche micromécanique développée dans cette étude vise principalement à fournir des *estimations* pertinentes. Une partie du présent document s'intéresse cependant à l'obtention de *bornes supérieures* minimales, de manière notamment à garantir la validité des estimations proposées.

Deux grandes classes d'approches micromécaniques sont développées ici dans le cadre de la poroplasticité : (1) les approches de type Gurson (1977) qui conduisent à des modèles pertinents sous chargements hydrostatiques ; (2) les approches de type approche variationnelle de Ponte Castañeda (1991) fiables en cisaillement. Pour chacune de ces approches, une borne supérieure rigoureuse est proposée, ainsi qu'une estimation qui tire le meilleur parti des deux approches.

L'originalité principale de ce travail concerne le double changement d'échelle qui conduit à étudier un matériau poreux à matrice compressible à la deuxième échelle. En particulier, un modèle efficace de poroplasticité pour matériaux poreux fissurés drainés ou saturés est obtenu.

3. **Les simulations numériques multi-échelle.** Trois types de méthodes numériques sont employées dans ce travail :
- la méthode classique des éléments finis est utilisée pour la validation des modèles proposés sur cellule unitaire (sphère ou ellipsoïde creux) ;
 - la méthode de la transformée de Fourier rapide (méthode FFT), pour la validation des modèles à l'échelle d'une collection de plusieurs cavités ;
 - la méthode des éléments finis cohésifs-volumiques sur des cellules périodiques de type pavage de Voronoï, pour l'analyse de la coalescence des bulles intergranulaires.

Ce document s'organise en quatre parties.

- **Partie I — Position du problème.** Cette première partie est essentiellement consacrée à la description de la problématique industrielle, à la description du matériau d'étude et à la présentation détaillée de la démarche de modélisation micromécanique (chapitre 2).
- **Partie II — Surface de plasticité.** Cette partie présente les principaux résultats obtenus en homogénéisation non linéaire des matériaux poreux à deux échelles. Une procédure par étape est suivie afin d'aboutir à la surface de plasticité effective finale. Tout d'abord, le cas d'un milieu avec une seule population de cavité est traité (chapitre 3) pour trois cas : le cas des cavités sphériques, celui des cavités ellipsoïdales aplaties alignées, puis celui des cavités ellipsoïdales aplaties orientées aléatoirement (orientations équiprobables). Ensuite, le cas d'un milieu avec les deux populations de cavité est abordé (chapitre 4), en reconsidérant les trois cas précédents. Enfin, le cas non drainé est traité au chapitre 5. Des bornes supérieures et des estimations (les plus analytiques possibles) sont déterminées pour les surfaces de plasticité effectives. Le modèle retenu pour la suite est comparé, dans le cas des cavités sphériques, à des simulations numériques par éléments finis et, dans le cas bidimensionnel où les cavités sont à base elliptique, à des simulations numériques par FFT.
- **Partie III — Modèle d'endommagement.** Cette partie détaille le modèle élastoplastique endommageable final. La poroélasticité est traitée et les lois d'évolution du modèle élastoplastique endommageable sont proposées (chapitre 6). Ces lois d'évolution reposent sur certaines hypothèses morphologiques et demeurent approximatives. De plus, elles ne permettent pas de décrire la coalescence des bulles intergranulaires menant à la ruine totale du matériau. Ce point est abordé au travers de simulations numériques macroscopiques relatives à l' UO_2 fortement irradié à haute température (chapitre 7) afin d'enrichir a posteriori le modèle élastoplastique endommageable.

- **Partie IV — Annexes techniques.** Cette dernière partie rassemble des développements techniques utilisés dans les parties II et III et les microstructures utilisées pour les simulations numériques de la coalescence.

Chapitre 2

Problème physique et choix de modélisation

On rappelle que ce travail entre dans le cadre de modélisations avancées relatives à l'étude de l'accident de réactivité (RIA, Reactivity Initiated Accident) dans les réacteurs à eau sous pression (REP) et que l'application de ce travail concerne l'étude du comportement mécanique de l'oxyde d'uranium UO_2 fortement irradié lors d'un accident de réactivité. Ce chapitre traite du contexte général en présentant quelques données relatives aux REP et au RIA (section 2.1). Puis l'oxyde d'uranium UO_2 est plus précisément présenté (microstructure du matériau fortement irradié, propriétés à l'état vierge). Cette présentation de l' UO_2 fortement irradié conduit aux objectifs applicatifs de ce travail, qui consistent à disposer d'un modèle complet pour décrire le comportement mécanique de ce matériau (section 2.2). Ce travail est une approche multi-échelle visant à modéliser le comportement poroélastoplastique endommageable du matériau. Une étude numérique concernant la ruine totale du matériau permet d'enrichir a posteriori le modèle obtenu (section 2.3).

2.1 Le contexte : accident de réactivité dans les réacteurs à eau sous pression¹

Un réacteur à eau sous pression (REP) est constitué d'assemblages combustibles (157 pour un réacteur 900 MWe, 193 pour un réacteur 1300 MWe). Chaque assemblage comprend 264 crayons combustibles disposés en un réseau carré 17×17 , un tube d'instrumentation central, 24 tubes-guides servant au passage des barres de contrôle (qui peuvent recevoir des crayons absorbant les neutrons afin de limiter la puissance du réacteur). Chaque crayon combustible est composé d'une gaine (tube cylindrique) en alliage de Zirconium fermée à chaque extrémité par un bouchon soudé à la gaine. Chaque gaine comprend une colonne de pastilles de combustible (256 pastilles) empilées les unes sur les autres. Les gaines sont extrêmement élancées (environ 4 m de long, 1 cm de diamètre et 0.5 mm d'épaisseur). Le combustible est constitué soit d'oxyde d'uranium enrichi UO_2 soit d'oxyde mixte d'uranium et de plutonium (en général appelé Mixed OXide, MOX). Le crayon est fermé sous hélium à une pression supérieure ou égale à 25 bars à froid afin de "contrebalancer" l'effet de la pression externe du fluide caloporteur sur la gaine. Chaque pastille de combustible forme un cylindre de 8.2 mm de diamètre et de 13.5 mm de hauteur environ. La FIG. 2.1 montre un schéma d'un assemblage ainsi qu'une coupe d'un crayon de combustible pour REP. La FIG. 2.2 présente un schéma d'une pastille de combustible d' UO_2 .

En fonctionnement nominal, il est à noter que le fluide caloporteur est à 155 bars pour une

¹Les quelques données présentées ici sont principalement issues de Bailly et al. (1996).

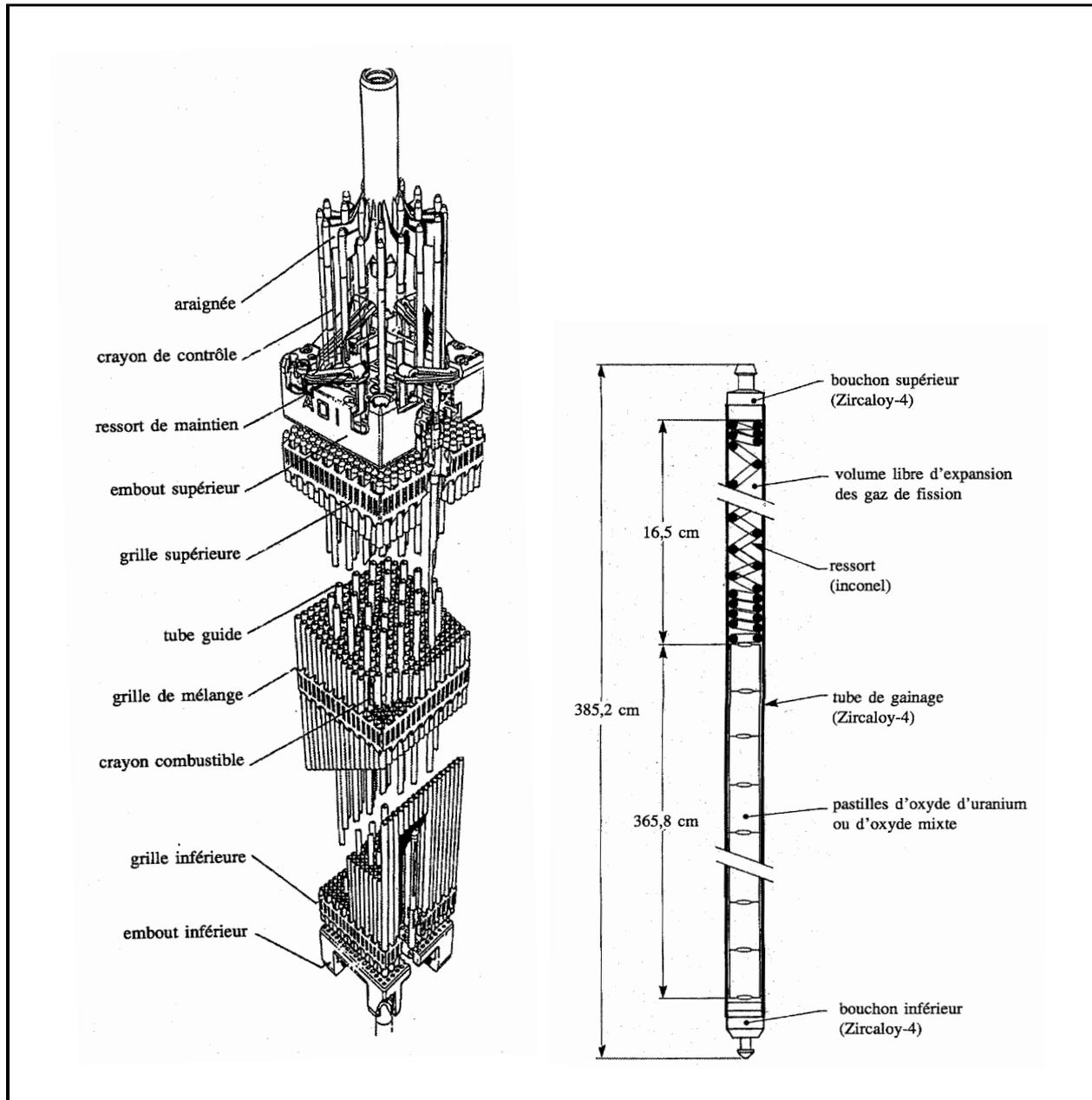


FIG. 2.1 – Assemblage et coupe d'un crayon de combustible pour réacteur à eau sous pression (d'après Bailly et al. (1996)).

température d'environ 300 °C. Toujours en fonctionnement nominal, la température d'une pastille de combustible UO_2 varie entre 500 °C (à l'extérieur de la pastille) à 1000 °C (au centre de la pastille). Le gradient radial de température induit des contraintes internes spécifiques dans le combustible. Dès les premiers cycles de fonctionnement, la pastille se fracture longitudinalement, radialement et axialement. De plus, ces températures de fonctionnement induisent un gonflement du combustible dont la forme tend alors vers une forme de "diabolo" (voir FIG. 2.3).

Afin de garantir la sûreté des réacteurs nucléaires, les produits radioactifs présents dans le réacteur sont enfermés dans trois barrières de confinement successives :

- les gaines contenant les pastilles de combustible constituent la première barrière,

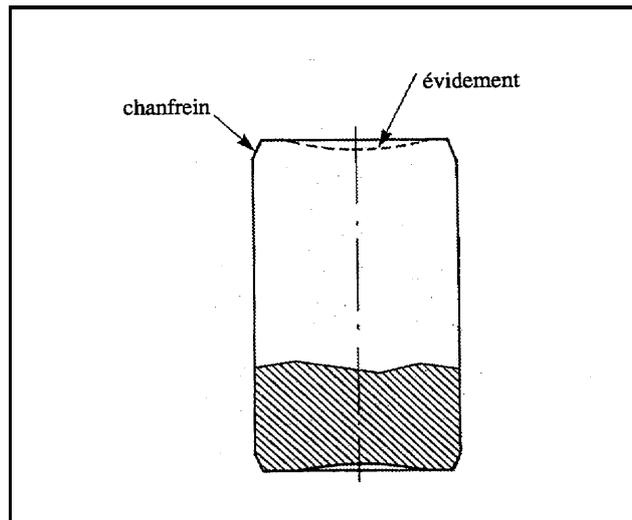


FIG. 2.2 – Coupe schématique d'une pastille de combustible (d'après Bailly et al. (1996)).

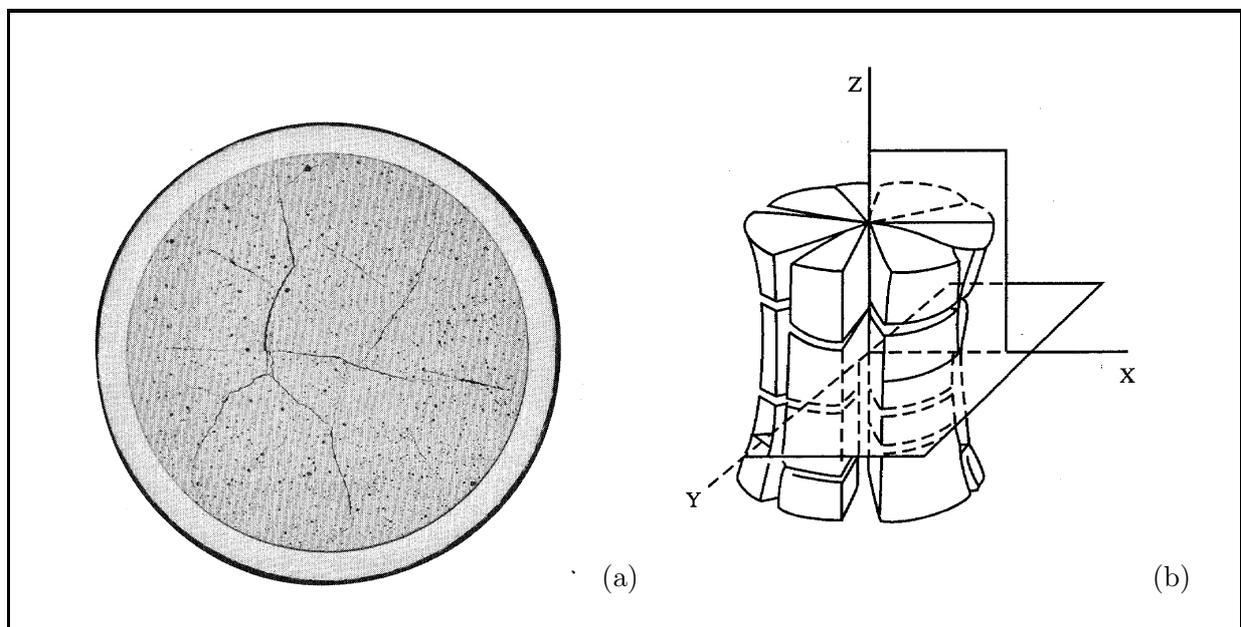


FIG. 2.3 – (a) Macrographie de pastille de combustible de réacteur à eau sous pression fissurée par gradient thermique et (b) schéma de la forme de diabolos vers laquelle tend une pastille de combustible sous l'effet des contraintes thermiques (d'après Bailly et al. (1996)).

- la cuve en acier contenant le cœur du réacteur constitue la deuxième barrière,
- l'enceinte en béton entourant le réacteur constitue la troisième barrière.

Un accident de réactivité (RIA) est un accident de dimensionnement correspondant à une éjection de barre de contrôle limitant la réaction neutronique du cœur. Cette éjection entraîne un transitoire de puissance (i.e. une augmentation rapide, environ 10 ms, de la puissance locale) dans les assemblages combustibles. La montée en température du combustible est rapide, de l'ordre de 10^4 K/s. Le combustible gonfle, se fragmente et vient pressuriser la gaine (interaction pastille-gaine, voir FIG. 2.4). La pression des gaz contenus à l'intérieur de la gaine augmente aussi fortement et vient s'ajouter au chargement sur la gaine. La gaine peut éventuellement se rompre (fortes sollicitations

mécaniques et thermiques sur la gaine), ce qui correspond alors à la rupture de la première barrière (dans ce cas éventuel, le combustible peut se disperser dans le circuit primaire) et peut conduire à l'extension de l'accident de cœur.

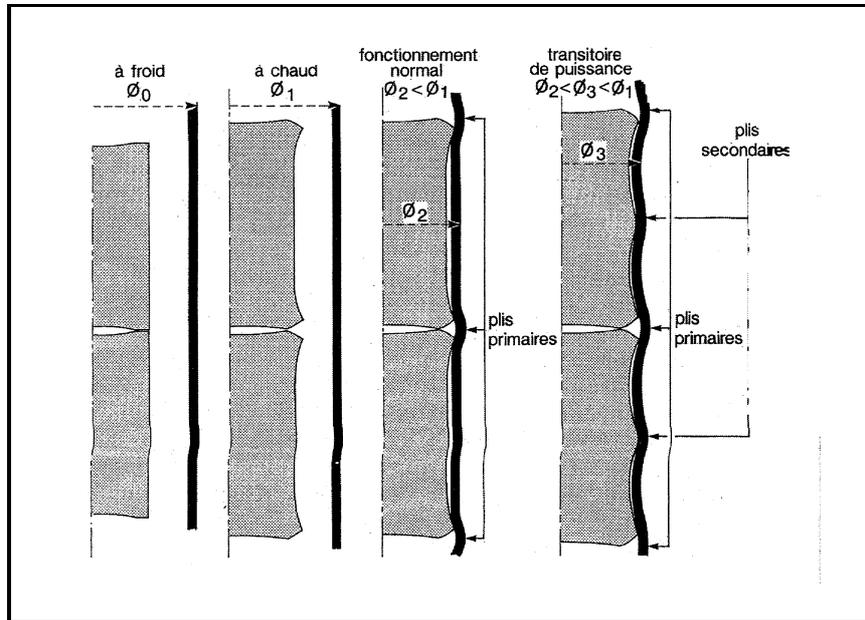


FIG. 2.4 – Schéma retraçant l'évolution du jeu entre pastilles et gaine au cours de son utilisation nominale et lors d'un transitoire de puissance (d'après Bailly et al. (1996)).

Afin de déterminer les sollicitations mécaniques sur la gaine durant un RIA, il est essentiel de déterminer le comportement mécanique du combustible durant cet accident.

L' UO_2 fortement irradié est un matériau à plusieurs populations de cavités (voir section 2.2). Durant un RIA, les pressions dans les cavités (contenant des gaz de fission, essentiellement du Xenon et du Krypton) augmentent fortement ainsi que la déformation d'origine thermique du matériau. Les bulles intergranulaires (cavités situées aux joints de grain, voir section 2.2) peuvent alors percoler ; les gaz de fission que ces bulles contiennent peuvent alors s'écouler librement à travers le matériau et augmenter la pression des gaz sur la gaine. D'après Casanova (1998), la séparation des joints de grain de l' UO_2 fortement irradié (dûe à la coalescence des bulles intergranulaires) augmente avec l'énergie injectée durant le transitoire de la périphérie de la pastille vers le centre de la pastille. La FIG. 2.5 schématise, pour le combustible étudié, le phénomène observé durant un RIA.

Ce travail propose un modèle micromécanique pour décrire le comportement mécanique du combustible UO_2 fortement irradié et à haute température afin de pouvoir déterminer le gonflement et la fissuration de ce matériau durant un RIA.

2.2 Le combustible UO_2 fortement irradié

Le matériau constitutif de l'étude est l'oxyde d'uranium UO_2 fortement irradié. La microstructure d'un tel matériau est présentée en 2.2.1 puis quelques propriétés, essentiellement mécaniques, du matériau vierge sont exposées en 2.2.2. Enfin, l'objectif de la thèse est présenté en 2.2.3.

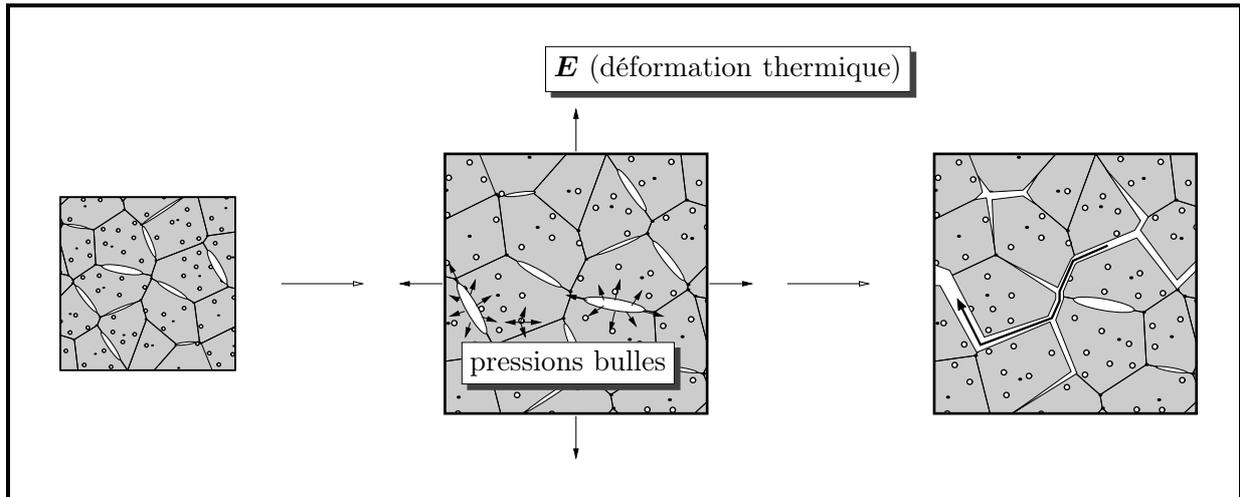


FIG. 2.5 – Phénomène de gonflement et de fissuration du combustible lors d'un accident de réactivité.

2.2.1 Microstructure

L'oxyde d'uranium UO_2 est une céramique poreuse. La taille des grains qui la constituent est de l'ordre de $10\ \mu\text{m}$ (suivant le taux de combustion, les conditions d'utilisation et de fabrication) :

- de l'ordre de $5\ \mu\text{m}$ pour de l' UO_2 vierge d'après Olander (1976),
- de l'ordre de $10\ \mu\text{m}$ pour de l' UO_2 vierge d'après Dherbey et al. (2002),
- de l'ordre de $9\ \mu\text{m}$ pour de l' UO_2 irradié (28 GW j/T, GigaWatt jour par Tonne) pour Kashibe et Une (1991),
- de l'ordre de $13\ \mu\text{m}$ pour de l' UO_2 fortement irradié (83 GW j/T) pour Kashibe et al. (1993), etc...

L'oxyde d'uranium UO_2 fortement irradié possède principalement deux populations de cavités saturées (i.e. sous pression) qui contiennent des gaz de fission. On parle alors de bulles. Dans la zone centrale du combustible qui apparaît en sombre sur la FIG. 2.6, on observe une forte concentration de bulles intragranulaires (i.e. situées à l'intérieur des grains) ainsi qu'une forte concentration de bulles intergranulaires (i.e. situées aux joints de grains) sous forme de "chapelets" formant parfois des tunnels (Bailly et al. (1996)).

Pour l' UO_2 fortement irradié (83 GW j/T), Kashibe et al. (1993) montrent que les bulles intragranulaires sont plutôt sphériques (voir aussi la FIG. 2.7) et de taille moyenne d'environ $4.7\ \text{nm}$ (diamètre). Plus précisément, ils mettent en évidence des bulles intragranulaires de $2\ \text{nm}$ de diamètre environ et d'autres bulles intragranulaires de $10 - 20\ \text{nm}$ de diamètre. La concentration moyenne des bulles intragranulaires donnée par Kashibe et al. (1993) pour ce matériau est de $4.4 \cdot 10^{23} / \text{m}^3$ (nombre de bulles par unité de volume). Cela donne une fraction volumique (porosité) d'environ $2.4\ \%$. Une fois le matériau chauffé à $1800\ ^\circ\text{C}$ pendant $5\ \text{h}$, Kashibe et al. (1993) observent une taille moyenne de bulles intragranulaires de $800\ \text{nm}$ environ, ce qui prouve le fort gonflement des bulles intragranulaires lors d'une montée en température du combustible. L'étude bibliographique de Lösönen (2000) décrit l'évolution de la taille et de la concentration des bulles intragranulaires en fonction du taux de combustion (irradiation) et de la température.

D'après Kashibe et Une (1991), pour l' UO_2 irradié à 28 GW j/T, les bulles intergranulaires sont aplaties (forme lenticulaires), de longueur d'environ $229\ \text{nm}$ en moyenne et couvrent environ $10.1\ \%$ de la surface des joints de grain. Ces bulles sont donc de taille beaucoup plus importante que les bulles intragranulaires (facteur entre 10 et 100). Les FIG. 2.7 (b) et FIG. 2.8 sont des

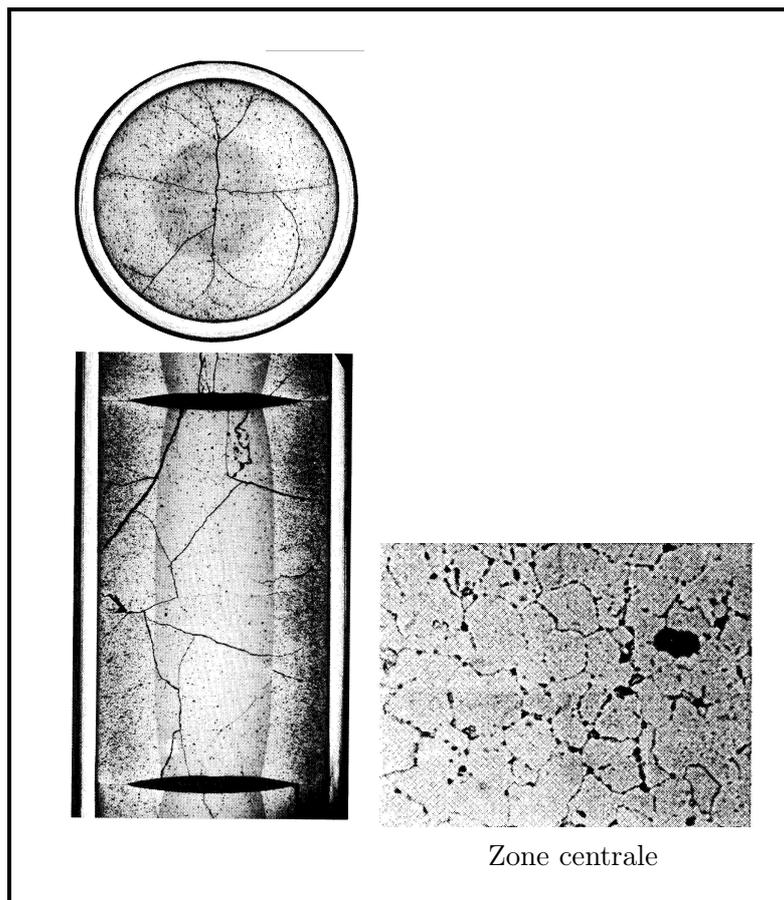


FIG. 2.6 – Micrographies d'un combustible UO_2 irradié pendant 5 cycles annuels : visualisation de la "zone sombre" (d'après Bailly et al. (1996)).

exemples de micrographies mettant en évidence des bulles intergranulaires. La FIG. 2.9 montre une micrographie et un schéma présentant des bulles intergranulaires dans le plan d'un joint de grain.

2.2.2 Propriétés thermomécaniques

Une étude bibliographique a permis de dégager les propriétés suivantes. Le but est de déterminer les propriétés mécaniques de l' UO_2 vierge (non irradié), si possible sans porosité de fabrication ($f = 0$), pour une taille de grain standard (de l'ordre de $10 \mu\text{m}$) et à partir d'essais à faible vitesse de déformation. Ces propriétés seront par la suite utilisées pour décrire le comportement élasto-plastique de la phase matrice de l' UO_2 irradié (sans porosités intergranulaires ni intragranulaires).

Propriétés élastiques Martin (1989) propose les lois empiriques suivantes (par comparaison à des essais expérimentaux) concernant les propriétés élastiques de l' UO_2 vierge (matériau isotrope) :

$$E = 223(1 - 2.5f)(1 - 1.32 \cdot 10^{-4}T), \quad (2.1)$$

$$\nu = \frac{223(1 - 2.5f)}{168(1 - 2.25f)} - 1, \quad (2.2)$$

pour des températures T en $^{\circ}\text{C}$ ($T < 1500 \text{ }^{\circ}\text{C}$) et des porosités de fabrication f entre 0 et 30 %. E représente le module d'Young (en GPa) et ν le coefficient de Poisson. Ces lois sont validées par Gatt et al. (2005).

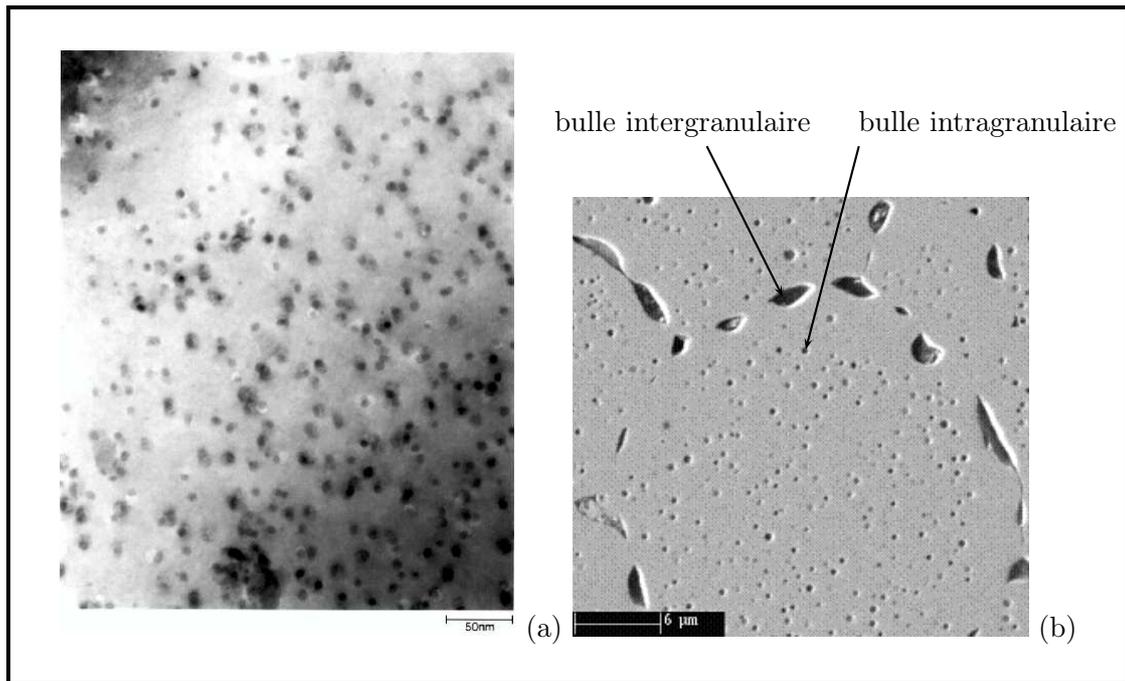


FIG. 2.7 – Bulles intragranulaires : (a) UO_2 irradié à 38.8 GW j/T après rampe à 1200 °C (Yagnik et al. (2004)), (b) UO_2 irradié à 33 GW j/T porté à 2000 °K pendant 3 h environ (Dubourg et al. (2005)) .

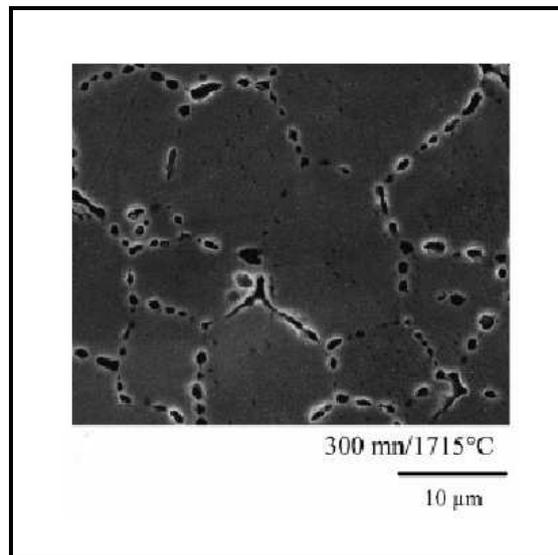


FIG. 2.8 – Bulles intergranulaires : UO_2 irradié à 25 GW j/T porté à 1700 °C pendant 300 min environ (Zacharie et al. (1998)).

Contrainte maximale Pour l' UO_2 vierge (porosité de fabrication de 3 %, taille de grain de 8 μm), Canon et al. (1971) ont réalisé des essais de flexion 4 points pour différentes températures. Nous retenons ici les essais réalisés à faible vitesse de déformation ($2.6 \cdot 10^{-5}$ /s). Les valeurs des contraintes maximales en traction en fonction de la température sont données sur la FIG. 2.10. Une zone fragile (basses températures, rupture transgranulaire) et une zone ductile (hautes températures, rupture intergranulaire) sont mises en évidence. La température de transition fragile-ductile

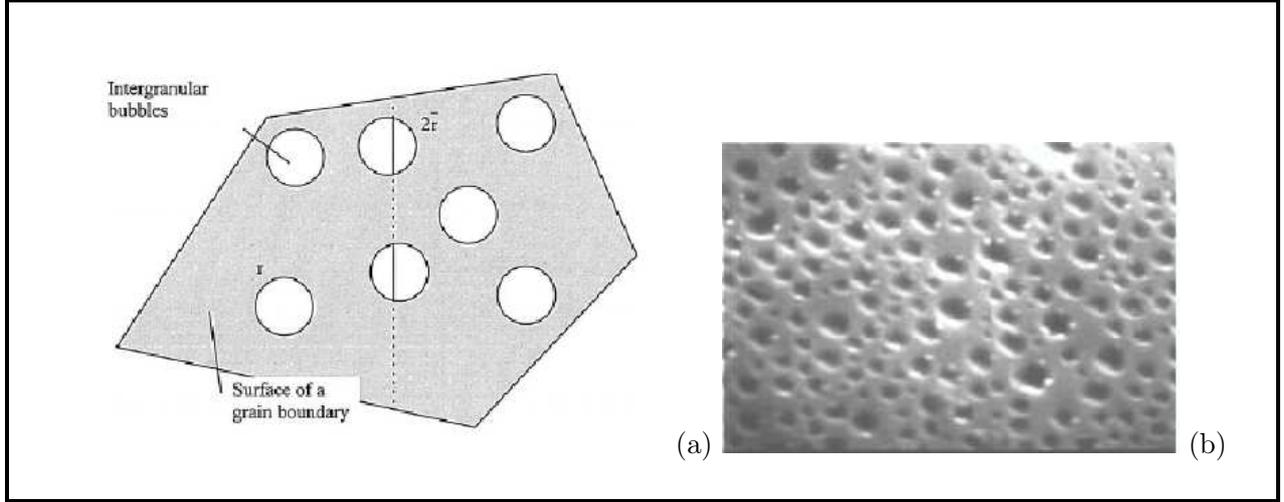


FIG. 2.9 – Bulles intergranulaires : (a) surface d'un joint de grain avec bulles intergranulaires (Zacharie et al. (1998)), (b) bulles intergranulaires dans le plan d'un joint de grain (UO_2 porté à $1200\text{ }^\circ\text{C}$ pendant 100 h Yagnik et al. (2004)).

est d'environ $1400\text{ }^\circ\text{C}$. Au delà de cette température, des déformations plus importantes sont relevées (voir FIG. 2.10).

D'après Canon et al. (1971), Knudsen et al. (1960) proposent la loi empirique suivante obtenue sur de l' UO_2 vierge à basse température (différentes porosités de fabrication, différentes tailles de grain, $T = 25\text{ }^\circ\text{C}$) pour la dépendance de la contrainte maximale en traction à la porosité de fabrication :

$$UTS = UTS(f = 0) \exp(-3.17f). \quad (2.3)$$

Pour le domaine ductile (haute température), Canon et al. (1971) proposent la loi empirique suivante :

$$\sigma_e = 0.1 \left(\frac{1}{2} \dot{\epsilon} T \exp \left(\frac{87000}{RT} \right) \right)^{1/4.23}, \quad (2.4)$$

avec $R = 1.987\text{ cal mole}^{-1}\text{ K}^{-1}$, T en K, $\dot{\epsilon}$ en h^{-1} , σ_e en MPa.

Il est à noter que la valeur de la contrainte maximale en compression et à basse température est beaucoup plus élevée : Igata et Domoto (1972) donnent la loi suivante de contrainte maximale (pour l' UO_2 vierge à différentes valeurs de f et de tailles de grains entre 5 et $10\text{ }\mu\text{m}$) en compression simple et pour $T = 20\text{ }^\circ\text{C}$:

$$\sigma_e = 1067 \exp(-3.505f), \quad (2.5)$$

en MPa. Extrapolé à $f = 0$, cette relation donne : $\sigma_e = 1067\text{ MPa}$.

2.2.3 Objectifs de la thèse

La section 2.1 a rappelé l'intérêt d'obtenir une loi de comportement évolutive et complète (jusqu'à la rupture) pour le combustible UO_2 lors d'un accident de réactivité. La section 2.2.1 a montré que le combustible fortement irradié est un matériau granulaire avec plusieurs populations de cavités sous pression. La section 2.2.2 a montré que pour de hautes températures (rencontrées durant un accident de réactivité), le combustible est plutôt ductile. Ces observations étant faites, l'objectif de cette thèse est d'obtenir un modèle micromécanique pour décrire le comportement poroélastoplastique endommageable de l' UO_2 fortement irradié. Ce modèle doit prendre en compte les différentes porosités, la morphologie des cavités et les pressions qui y règnent ainsi que le

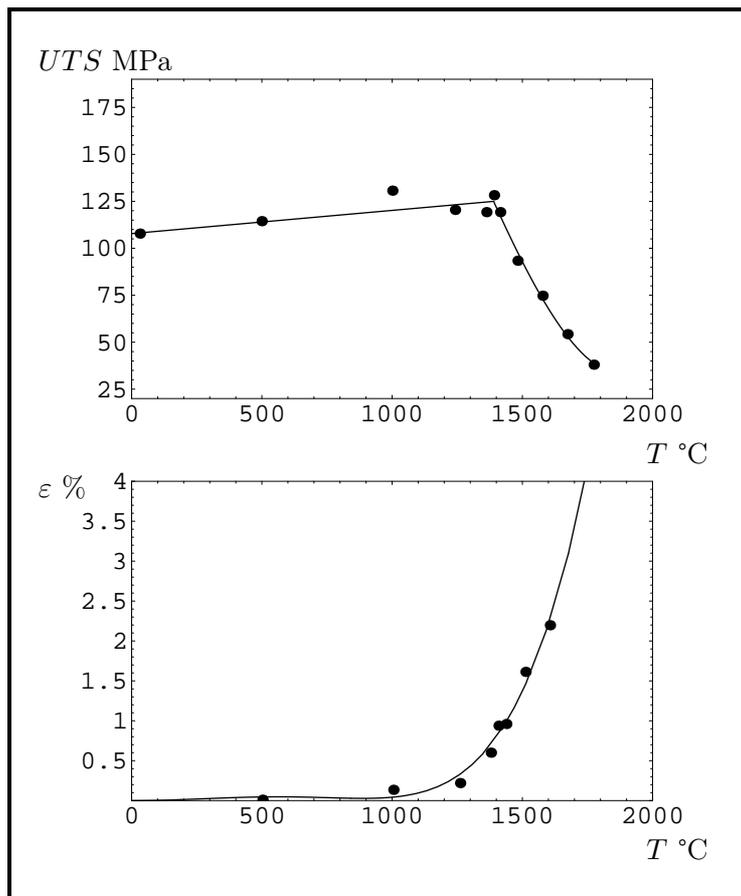


FIG. 2.10 – Résultats expérimentaux de Canon *et al.* (1971) (en traction, pour de l' UO_2 vierge, porosité de fabrication de 3 %, taille de grain de $8 \mu m$, faible vitesse de déformation). Mise en évidence d'une partie fragile (basse température) et d'une partie ductile (haute température).

comportement de la matrice d' UO_2 (sans cavité). Les différents paramètres du modèle doivent évoluer durant le chargement (essentiellement hydrostatique et dû aux déformations thermiques) afin de décrire le caractère "évolutif" du matériau.

2.3 Démarche proposée et hypothèses principales

La démarche proposée afin de répondre aux objectifs visés est basée sur une approche multi-échelle (méthodes d'homogénéisation) dont les résultats sont enrichis a posteriori à l'aide de simulations numériques pour prendre en compte des effets coalescence/rupture.

2.3.1 Modélisation multi-échelle : endommagement ductile par croissance de pores

La section 2.2.1 a montré que le combustible fortement irradié est un matériau avec deux populations de cavités sous pression (bulles intergranulaires et bulles intragranulaires) de tailles différentes. La section 2.2.2 a exposé les propriétés élastoplastiques du matériau (vierge et sans cavité). Le modèle doit donc prendre en compte :

- une matrice élastoplastique,
- la présence de petites bulles sphériques sous pression (bulles intragranulaires),

- la présence de bulles aplaties sous pression (bulles intergranulaires) de plus grande taille que les précédentes.

Les bulles intragranulaires (appelées aussi cavités à la petite échelle ou à la première échelle dans ce document) étant très petites par rapport aux bulles intergranulaires (appelées aussi cavités à l'échelle supérieure ou à la deuxième échelle dans ce document), **une hypothèse de séparation d'échelles est formulée**. Les propriétés effectives sont d'abord déterminées sur un milieu composé de la matrice élastoplastique et des petites bulles intragranulaires (première échelle). Le matériau homogène équivalent obtenu sert de matrice à l'échelle supérieure où les bulles intergranulaires sont ajoutées. Les propriétés effectives de ce matériau sont ensuite déterminées. Cette démarche est schématisée sur la FIG. 2.11.

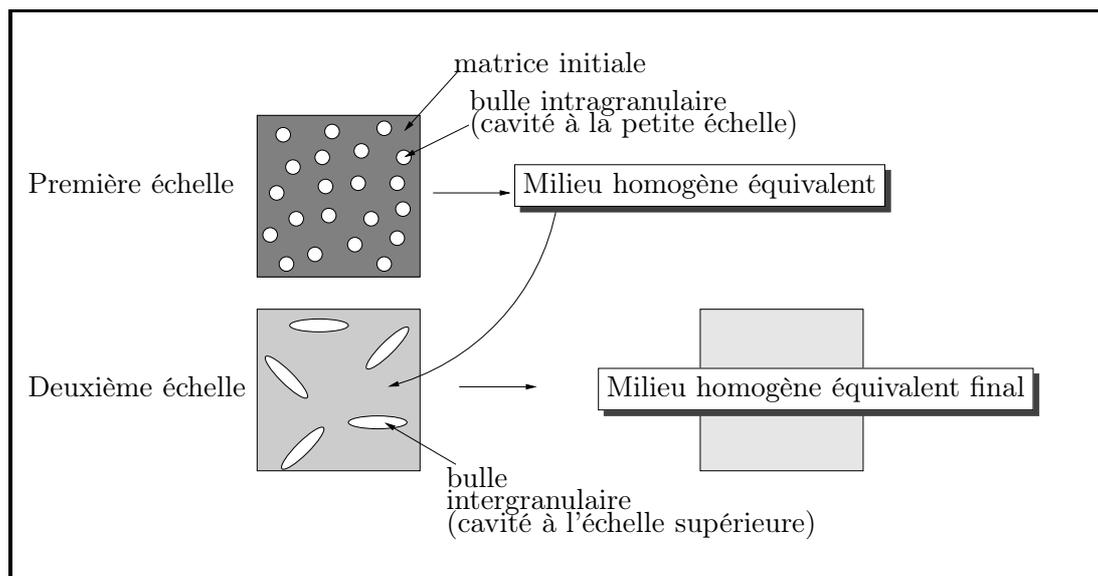


FIG. 2.11 – Démarche suivie pour obtenir le modèle micromécanique fournissant le comportement élastoplastique endommageable du matériau de l'étude.

La matrice initiale est supposée isotrope et élastoplastique parfaite (critère de Von Mises). La porosité des bulles intragranulaires est notée f_b et représente une porosité locale (rapport du volume occupée par ces cavités sur le volume total occupé par la matrice initiale et ces cavités). La porosité des bulles intergranulaires est notée f_e . On note V le domaine total, ω_b le domaine occupé par les bulles intragranulaires et ω_e le domaine occupé par les bulles intergranulaires. Les porosités f_b et f_e s'écrivent :

$$f_b = \frac{|\omega_b|}{|V - \omega_e|}, \quad (2.6)$$

$$f_e = \frac{|\omega_e|}{|V|}. \quad (2.7)$$

Les pressions dans les bulles intragranulaires et intergranulaires sont supposées uniformes et sont notées respectivement p_b et p_e . **Les bulles intragranulaires sont supposées sphériques. Les bulles intergranulaires sont supposées ellipsoïdales aplaties ("oblate", de révolution autour de leur petit axe) et orientées aléatoirement. Leur nombre est assez important pour supposer que le comportement global (ou effectif) du matériau est isotrope.**

Deux étapes d'homogénéisation sont nécessaires (première échelle et deuxième échelle). Les propriétés élastiques et plastiques sont déterminées séparément et l'hypothèse de partition des déformations élastiques et plastiques est utilisée : des méthodes d'homogénéisation linéaires sont utilisées

pour la partie élastique et des méthodes d'homogénéisation non linéaires sont utilisées pour la partie plastique. Le comportement plastique revient à déterminer la surface de plasticité du matériau effectif. L'évolution des paramètres internes (porosités, forme des cavités) conditionne l'endommagement par croissance de cavités. Le paragraphe suivant rappelle, de façon générale, les équations d'homogénéisation pour les matériaux poreux (systèmes à résoudre, approches variationnelles).

Rappels généraux d'homogénéisation pour les matériaux poreux On considère dans ce paragraphe un domaine V constitué d'une matrice et de cavités (domaine ω_e , porosité f_e) drainées (pressions nulles dans les cavités). La matrice suit un potentiel de dissipation $\varphi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$ tel que, en chaque point de la matrice :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}. \quad (2.8)$$

Deux types de conditions sont classiquement appliquées sur le bord du domaine V .

Les **conditions de taux de déformation homogène au bord** s'écrivent, avec $\dot{\boldsymbol{u}}$ le champ de vitesse et $\dot{\boldsymbol{E}}$ imposé (appelé taux de déformation effectif ou macroscopique) :

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \dot{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{x} \text{ sur } \partial V. \quad (2.9)$$

Ainsi le système à résoudre sur V s'écrit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} \text{ dans } V - \omega_e, \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0} \text{ dans } V - \omega_e \text{ et } \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{N} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial \omega_e, \boldsymbol{N} \text{ normale au pore considéré,} \\ \dot{\boldsymbol{u}} = \dot{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{x} \text{ sur } \partial V. \end{cases} \quad (2.10)$$

La contrainte effective ou macroscopique $\boldsymbol{\Sigma}$ est définie par $(1 - f_e)\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{V - \omega_e}$. On peut montrer que $\dot{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{u}} \otimes \boldsymbol{N} + \boldsymbol{N} \otimes \dot{\boldsymbol{u}}) dS$ (voir par exemple Leblond (2003)). Le vecteur \boldsymbol{N} est la normale sortante de V . En prolongeant les champs de contrainte par $\mathbf{0}$ dans ω_e et en prolongeant les champs de vitesse dans ω_e de façon à être différentiables et continus dans V , on peut écrire (voir Leblond (2003)) :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_V \quad (2.11)$$

et

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_V, \quad (2.12)$$

où $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon(\dot{\boldsymbol{u}})$. L'écriture variationnelle de ce problème est :

$$\Phi^+(\dot{\boldsymbol{E}}) = \inf_{\dot{\boldsymbol{v}} \in \mathcal{K}(\dot{\boldsymbol{E}})} (1 - f_e) \langle \varphi(\varepsilon(\dot{\boldsymbol{v}})) \rangle_{V - \omega_e}, \quad \mathcal{K}(\dot{\boldsymbol{E}}) = \{\dot{\boldsymbol{v}} \mid \dot{\boldsymbol{v}} = \dot{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{x} \text{ sur } \partial V\}; \quad (2.13)$$

la contrainte effective $\boldsymbol{\Sigma}$ et le taux de déformation effectif $\dot{\boldsymbol{E}}$ issus du problème précédent (à taux de déformation homogène au bord) vérifient :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial \Phi^+}{\partial \dot{\boldsymbol{E}}}. \quad (2.14)$$

Le potentiel en contrainte dual de Φ^+ est noté Ψ^+ et vaut :

$$\Psi^+(\boldsymbol{\Sigma}) = \inf_{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}} (1 - f_e) \langle \psi(\boldsymbol{\tau}) \rangle_{V - \omega_e}, \quad \mathcal{S} = \{\boldsymbol{\tau} \mid \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \text{ dans } V - \omega_e \text{ et } \boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\tau} \rangle_V\}, \quad (2.15)$$

en notant ψ le potentiel dual de φ .

Les **conditions de contrainte homogène au bord** s'écrivent, avec $\boldsymbol{\Sigma}$ imposé :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{N} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{N} \text{ sur } \partial V, \boldsymbol{N} \text{ normale sortante de } V. \quad (2.16)$$

Ainsi le système à résoudre sur V s'écrit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} \text{ dans } V - \omega_e, \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0} \text{ dans } V - \omega_e \text{ et } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\omega_e, \mathbf{N} \text{ normale au pore considéré,} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{N} \text{ sur } \partial V, \mathbf{N} \text{ normale sortante de } V. \end{cases} \quad (2.17)$$

Le taux de déformation effectif ou macroscopique est défini par $\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes \dot{\mathbf{u}}) dS$. On peut montrer que la contrainte effective vaut alors $\boldsymbol{\Sigma} = (1 - f_e) \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{V - \omega_e}$. On utilise les mêmes prolongements que précédemment et on obtient de nouveau les équations de moyenne (2.11) et (2.12). L'écriture variationnelle de ce problème est :

$$\Psi^-(\boldsymbol{\Sigma}) = \inf_{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}(\boldsymbol{\Sigma})} (1 - f_e) \langle \psi(\boldsymbol{\tau}) \rangle_{V - \omega_e}, \quad \mathcal{S}(\boldsymbol{\Sigma}) = \{ \boldsymbol{\tau} \mid \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \text{ dans } V - \omega_e \text{ et } \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{N} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{N} \text{ sur } \partial V \}; \quad (2.18)$$

la contrainte effective $\boldsymbol{\Sigma}$ et le taux de déformation effectif $\dot{\mathbf{E}}$ issus du problème précédent (à contrainte homogène au bord) vérifient :

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{\partial \Psi^-}{\partial \boldsymbol{\Sigma}}. \quad (2.19)$$

Le potentiel en taux de déformation dual de Ψ^- est noté Φ^- et vaut :

$$\Phi^-(\dot{\mathbf{E}}) = \inf_{\dot{\boldsymbol{\nu}} \in \mathcal{K}} (1 - f_e) \langle \varphi(\varepsilon(\dot{\boldsymbol{\nu}})) \rangle_{V - \omega_e}, \quad \mathcal{K} = \{ \dot{\boldsymbol{\nu}} \mid \dot{\mathbf{E}} = \langle \varepsilon(\dot{\boldsymbol{\nu}}) \rangle_V \}. \quad (2.20)$$

Le potentiel de dissipation effectif $\Phi(\dot{\mathbf{E}})$ solution est encadré par (Willis (1989)) :

$$\Phi^-(\dot{\mathbf{E}}) \leq \Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \Phi^+(\dot{\mathbf{E}}) \quad (2.21)$$

et son potentiel dual $\Psi(\boldsymbol{\Sigma})$ est encadré par :

$$\Psi^+(\boldsymbol{\Sigma}) \leq \Psi(\boldsymbol{\Sigma}) \leq \Psi^-(\boldsymbol{\Sigma}). \quad (2.22)$$

Ces résultats seront grandement utilisés dans la suite de ce travail.

Remarque 2.1 (Cas saturé) Dans le cas où les cavités ω_e sont saturées (pression p dans les cavités), il suffit de prolonger les champs de contrainte par $-p\mathbf{I}$ dans ω_e . Ensuite, il convient de remplacer, dans les écritures variationnelles $(1 - f_e) \langle \varphi(\varepsilon(\dot{\boldsymbol{\nu}})) \rangle_{V - \omega_e}$ par $\langle \varphi(\varepsilon(\dot{\boldsymbol{\nu}})) \rangle_V$, avec (\mathbf{N} normale rentrant dans le pore considéré) :

$$\begin{aligned} \langle \varphi(\varepsilon(\dot{\boldsymbol{\nu}})) \rangle_V &= (1 - f_e) \langle \varphi(\varepsilon(\dot{\boldsymbol{\nu}})) \rangle_{V - \omega_e} - \frac{1}{V} \int_{\partial\omega_e} p \dot{\boldsymbol{\nu}} \cdot \mathbf{N} dS \\ &= (1 - f_e) \langle \varphi(\varepsilon(\dot{\boldsymbol{\nu}})) \rangle_{V - \omega_e} + f_e \langle -p \operatorname{Tr}(\varepsilon(\dot{\boldsymbol{\nu}})) \rangle_{\omega_e}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

2.3.2 Enrichissement à l'échelle macroscopique : prise en compte de la coalescence

Les modèles d'homogénéisation (méthodes de changement d'échelle) dont les principes variationnels sont rappelés ci-dessus conduisent dans ce travail à l'élaboration d'un modèle élastoplastique endommageable pour un matériau poreux à deux populations de cavités saturées. Le modèle obtenu est capable de décrire l'endommagement du matériau par croissance des cavités (bulles) mais il est incapable de décrire la coalescence des cavités conduisant à la ruine totale du matériau. L'idée est

d'effectuer des simulations numériques et d'enrichir a posteriori le modèle élastoplastique endommageable afin de tenir compte de la coalescence.

Les simulations numériques sont effectuées sur des cellules périodiques partitionnées en cellules de Voronoï (les grains, voir FIG. 2.12) et en utilisant les propriétés mécanique de l' UO_2 présentées en 2.2.2. Ces grains sont discrétisés et des modèles de zones cohésives (lois de traction-séparation des mailles) sont introduits aux joints de grains afin de simuler la fissuration intergranulaire. Des pré-fissures représentant les bulles intergranulaires sont placées aléatoirement sur les joints de grains. Un chargement hydrostatatique est appliqué sur la cellule (chargement essentiellement d'origine thermique et donc hydrostatatique lors d'un accident de réactivité). Les courbes contrainte-déformation obtenues par ses simulatons numériques mettent en évidence l'apparition de la coalescence et le début de la ruine du matériau. La modification a posteriori du modèle élastoplastique endommageable obtenu par l'approche multi-échelle consiste à accélérer la porosité intergranulaire dès le début de la coalescence observée sur les simulations numériques. Cette accélération de la porosité intergranulaire permet de décrire in fine la ruine du matériau de façon phénoménologique dans le modèle élastoplastique endommageable complet.

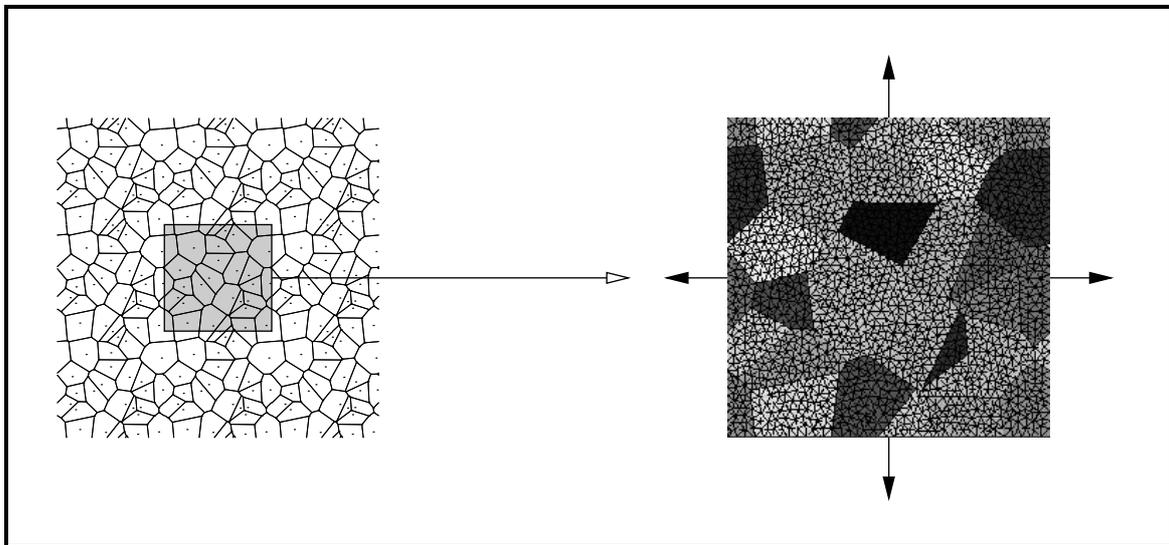


FIG. 2.12 – *Simulations numériques effectuées sur des cellules périodiques partitionnées en cellules de Voronoï (les grains). Ces grains sont discrétisés et des modèles de zones cohésives (lois de traction-séparation des mailles) sont introduits aux joints de grains afin de simuler la fissuration intergranulaire.*

Toute la partie suivante est dédiée à la détermination de la surface de plasticité pour le modèle élastoplastique endommageable. Concernant l'élaboration du modèle, cette partie constitue le point difficile (mécanique non linéaire). Les simulations numériques abordées dans cette section seront détaillées dans la partie III.

Deuxième partie

Surface de plasticité

Chapitre 3

Matériaux poreux avec une seule population de cavités

L'endommagement des matériaux ductiles est lié à la présence de micro-cavités au sein du matériau qui croissent jusqu'à former une fissure macroscopique (Chaboche et al. (2001)). La modélisation de cet endommagement peut se faire en partie à partir du critère de plasticité macroscopique du matériau poreux. Ce chapitre traite des surfaces de plasticité effectives (ou macroscopiques) d'un milieu poreux constitué d'une matrice et d'une unique population de cavités.

Deux façons différentes d'obtenir pour un tel matériau des bornes supérieures pour le critère de plasticité sont utilisées.

- D'un côté, l'approche de "type Gurson" consiste à utiliser le principe variationnel (équations (2.13) et (2.21)) en choisissant un champ de vitesse précis en hydrostatique mais peu pertinent en cisaillement. La borne supérieure obtenue par cette approche s'avère pertinente en hydrostatique mais trop majorante en cisaillement.
- D'un autre côté, l'utilisation du principe variationnel de Ponte Castañeda (1991) (équivalent à la méthode sécante modifiée, voir Suquet (1995) et Ponte Castañeda et Suquet (1998)) avec un composite linéaire de comparaison identique au composite non linéaire (voir 3.1.2) permet d'obtenir une borne supérieure pour le critère de plasticité. Contrairement à l'approche précédente, cette borne supérieure s'avère pertinente en cisaillement mais trop majorante en hydrostatique.

Ainsi, ces deux approches sont simultanément mises en œuvre afin d'exhiber une estimation pertinente à la fois en hydrostatique et en cisaillement.

Remarque 3.1 (Généralité du résultat de Ponte Castañeda (1991)) La première approche (approche de type Gurson) est une borne supérieure pour une cellule élémentaire contenant une seule cavité et, par extension, est aussi une borne supérieure pour l'assemblage de Hashin de cellules élémentaires contenant chacune une cavité. La seconde approche (approche variationnelle de Ponte Castañeda (1991)) est plus générale : elle constitue une borne supérieure pour toute microstructure isotrope. Cette remarque est détaillée dans la suite de ce chapitre. _____

Tout d'abord, une analyse bibliographique présente les critères de plasticité disponibles dans le cas des cavités sphériques et obtenus par l'intermédiaire de l'approche de type Gurson ou de l'approche variationnelle de Ponte Castañeda (1991) (avec deux phases pour le composite linéaire de comparaison). Des estimations issues de la comparaison entre les deux approches précédentes sont aussi présentées.

Le cas des cavités ellipsoïdales aplaties et alignées est ensuite traité dans ce travail par l'intermé-

diaire d'une approche de type Gurson (en utilisant le champ de vitesse de Gologanu et al. (1994)). Une borne supérieure est obtenue et une estimation est proposée. Ce point constitue une étape intermédiaire pour traiter le cas des cavités ellipsoïdales aplaties et orientées aléatoirement dans le matériau (orientations équiprobables).

Ce dernier cas est étudié dans la dernière section du chapitre. De nouveau, une borne supérieure et une estimation sont obtenues en opérant une "moyenne sur les orientations" de la borne supérieure et de l'estimation précédentes. Cette nouvelle borne supérieure conduit, par un traitement numérique, à un critère qui s'avère plus pertinent en hydrostatique (resp. moins pertinent en cisaillement) que celui obtenu par l'approche variationnelle de Ponte Castañeda (1991) (avec deux phases pour le composite linéaire de comparaison). La nouvelle estimation proposée correspond à un critère analytique et tire le meilleur parti des deux approches : elle est proche, en hydrostatique, de la borne supérieure issue de l'approche de type Gurson et proche, en cisaillement, de la borne supérieure issue de l'approche variationnelle de Ponte Castañeda (1991).

3.1 Cavités sphériques : rappels

Cette section rappelle les surfaces de plasticité obtenues via l'étude d'un milieu poreux constitué d'une matrice et d'une unique population de cavités sphériques.

3.1.1 Critère de Gurson

Le critère le plus utilisé est celui de Gurson (1977), obtenu à partir de l'analyse d'une sphère creuse chargée sur sa face externe. Il s'écrit :

$$\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0}\right)^2 + 2f \cosh\left(\frac{3}{2}\frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right) - 1 - f^2 = 0. \quad (3.1)$$

Il s'agit d'un critère non elliptique en Σ_{eq} et Σ_m . Il dépend de la porosité f des cavités et de σ_0 la contrainte d'écoulement en traction de la matrice saine (sans porosité). La démarche aboutissant à ce critère a été grandement améliorée par Perrin (1992) (voir aussi Leblond (2003) ou Chaboche et al. (2001)) et les étapes essentielles sont rappelées ici afin de présenter le potentiel de dissipation associé à ce critère.

Le volume élémentaire considéré (domaine Ω) est une sphère creuse de rayons interne et externe notés respectivement a_1 et a_2 (voir FIG. 3.1). Des conditions de taux de déformation homogène au bord, $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x}$, sont appliquées sur la surface externe du volume élémentaire. La matrice (domaine $\Omega - \omega$) est rigide plastique parfaite de contrainte d'écoulement en traction σ_0 . Le potentiel de dissipation de la matrice s'écrit :

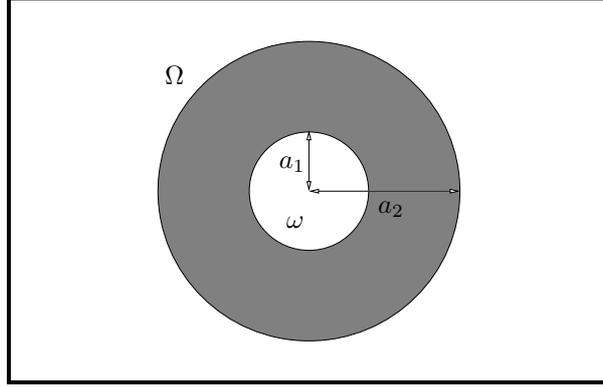
$$\varphi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \sigma_0 \dot{\varepsilon}_{eq}. \quad (3.2)$$

Le champ de vitesse dans la matrice initialement proposé par Gurson (1977), noté $\dot{\mathbf{v}}^G$, se décompose en une partie correspondant à un changement de volume de la cavité sans changement de forme et une partie correspondant à un changement de forme de la cavité sans changement de volume :

$$\dot{\mathbf{v}}^G(\dot{\mathbf{E}}) = \dot{E}_m \frac{a_2^3}{r^2} \mathbf{e}_r + \dot{\mathbf{E}}_d \cdot \mathbf{x}. \quad (3.3)$$

L'utilisation du principe variationnel (équations (2.13) et (2.21)) avec ce champ de vitesse permet de majorer le potentiel de dissipation effectif :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega-\omega} \varphi(\varepsilon(\dot{\mathbf{v}}^G)) d\Omega = \frac{\sigma_0}{|\Omega|} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=a_1}^{r=a_2} \dot{\varepsilon}_{eq} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (3.4)$$


 FIG. 3.1 – *Sphère creuse.*

avec $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon(\dot{\boldsymbol{\nu}}^G)$ et r, θ, ϕ les coordonnées sphériques. L'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit alors :

$$\Phi(\dot{\boldsymbol{E}}) \leq \frac{\sigma_0}{|\Omega|} \int_{r=a_1}^{r=a_2} S(r) \sqrt{\frac{1}{S(r)} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \dot{\varepsilon}_{eq}^2 dS} dr \quad (3.5)$$

avec $S(r) = 4\pi r^2$ et $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$. Le calcul de $\dot{\varepsilon}_{eq}^2$ et l'introduction d'un changement de variable ($y = (r/a_2)^3$) conduisent à :

$$\Phi(\dot{\boldsymbol{E}}) \leq \Phi^G(\dot{\boldsymbol{E}}) = \sigma_0 \int_f^1 \sqrt{\frac{4\dot{\boldsymbol{E}}_m^2}{y^2} + \dot{\boldsymbol{E}}_{eq}^2} dy, \quad (3.6)$$

avec $f = (a_1/a_2)^3$ la porosité du domaine considéré.

Les contraintes effectives hydrostatique et équivalente dérivant de $\Phi^G(\dot{\boldsymbol{E}})$ vérifient alors le critère de Gurson (1977) rappelé en (3.1) (les calculs détaillés sont donnés par exemple dans Leblond (2003) ou, dans un cas plus général, dans Gărăjeu et Suquet (1997)).

Il est intéressant de noter que le critère de Gurson est une borne supérieure pour le problème de la sphère creuse. Par reproduction de motifs, il est aussi une borne supérieure pour un assemblage de Hashin (voir FIG. 3.2) de sphères creuses autosemblables (voir par exemple la démonstration de Gărăjeu (1995) pour la construction d'un champ de vitesse cinématiquement admissible sur l'assemblage à partir d'un champ de vitesse cinématiquement admissible sur la sphère creuse unitaire). Le point purement équivalent (ou purement déviatorique) donné par le critère de Gurson (1977) correspond à la borne supérieure de type Voigt, i.e. $\sigma_0(1-f)$.

Le point purement hydrostatique donné par le critère de Gurson (1977) correspond à la solution exacte du problème de la sphère creuse soumise à un chargement hydrostatique homogène sur sa surface externe (en taux de déformation ou en contrainte, voir par exemple Leblond (2003) ou Michel et Suquet (1992)).

3.1.2 Critères elliptiques

Ponte Castañeda (1991) a proposé le critère suivant à partir d'un principe variationnel générique appliqué au cas d'une distribution isotrope de pores dans une matrice rigide plastique parfaite :

$$\left(1 + \frac{2}{3}f\right) \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0}\right)^2 + \frac{9}{4}f \left(\frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right)^2 - (1-f)^2 = 0. \quad (3.7)$$

Il s'agit d'un critère elliptique en Σ_{eq} et en Σ_m . Comme dans le cas du critère de Gurson, ce critère dépend de la porosité f des cavités et de σ_0 la contrainte d'écoulement en traction de la matrice

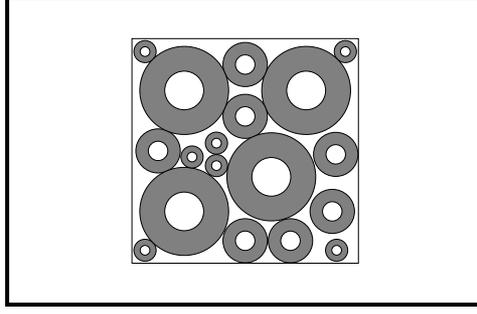


FIG. 3.2 – Empilement de Hashin de sphères creuses autosemblables.

saine.

Le principe variationnel de Ponte Castañeda (1991), mis en œuvre pour aboutir à ce critère elliptique, est équivalent à la "méthode sécante modifiée" de Suquet (1995) et Ponte Castañeda et Suquet (1998) (voir aussi Bornert et Suquet (2001)). Il revient à remplacer le milieu hétérogène réel non linéaire par un composite linéaire de comparaison (**CLC**) dont les propriétés de chaque phase vérifient un système d'équations non linéaires et dont les propriétés effectives sont aisément calculables. Le résultat final de la méthode variationnelle de Ponte Castañeda (1991) (ou de façon équivalente de la méthode sécante modifiée) utilisé pour aboutir au critère elliptique (3.7) peut être interprété de la manière suivante. En remplaçant les modules sécants $\mathbf{C}_{sct}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$ qui varient d'un point à l'autre dans la matrice (domaine M) par un module uniforme $\mathbf{C}_{sct}(\langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_M)$ calculé à partir du second moment $\langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_M$ du champ de vitesse de déformation, on obtient un composite linéaire de comparaison dont la raideur est une borne supérieure rigoureuse pour le composite non linéaire. Autrement dit, le critère elliptique (3.7) est obtenu en considérant un composite linéaire de comparaison à deux phases : une phase de cavité dans une matrice de module uniforme $\mathbf{C}_{sct}(\langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_M)$ calculé à partir du second moment $\langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_M$ du taux de déformation dans le CLC. On montre que pour chaque taux de déformation macroscopique donné $\dot{\mathbf{E}}$, la raideur effective du CLC majore la raideur sécante du composite non linéaire. Les équations ci-dessous reprennent de façon plus détaillée cette interprétation.

Le problème à résoudre conduisant au critère (3.7) s'écrit en taux de déformation homogène au bord sur le domaine V (milieu poreux) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Entrée : } \dot{\mathbf{E}}, \text{ résoudre :} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\mathbf{x}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x})), \text{ avec } \varphi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \sigma_0 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}, \quad \forall \mathbf{x} \in M, \\ \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S} \text{ et } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \in \mathcal{K}(\dot{\mathbf{E}}) \quad (\mathcal{S} \text{ et } \mathcal{K}(\dot{\mathbf{E}}) \text{ définis en (2.15) et (2.13)}. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

La contrainte effective issue de ce problème vaut $\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_V$. Le module sécant, \mathbf{C}_{sct} , permet de réécrire la deuxième ligne de (3.8) sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}_{sct}(\mathbf{x}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x})) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in M \quad (3.9)$$

et la méthode sécante modifiée, telle qu'utilisée pour obtenir le critère (3.7), conduit au système

suivant formé d'un problème non linéaire couplé avec un problème linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Entrée : } \dot{\mathbf{E}}. \\ \text{Problème non linéaire : } \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{C}_o^1 \text{ et } \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_M \text{ tels que :} \\ \mathbf{C}_o^1 = \mathbf{C}_{sct}(\langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_M) \\ \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_M = \frac{1}{1-f} \dot{\mathbf{E}} : \frac{\partial \mathbf{C}_o^{hom}}{\partial \mathbf{C}_o^1} : \dot{\mathbf{E}} \end{array} \right. \\ \text{Problème linéaire : } \left\{ \begin{array}{l} \text{Résoudre :} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}_o^1 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in M, \\ \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S} \text{ et } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \in \mathcal{K}(\dot{\mathbf{E}}) \\ (\mathcal{S} \text{ et } \mathcal{K}(\dot{\mathbf{E}}) \text{ définis en (2.15) et (2.13)).} \end{array} \right. \\ \text{La contrainte effective issue du problème linéaire vaut } \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{C}_o^{hom} : \dot{\mathbf{E}}. \end{array} \right. \quad (3.10)$$

L'équation de (3.10) donnant $\langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_M$ est valable pour tout composite linéaire (voir Ponte Castañeda et Suquet (1998), Bornert et Suquet (2001)). Le CLC est ici composé de 2 phases (la phase matrice et les cavités) et possède la même géométrie que le milieu non linéaire. La phase matrice du CLC a un tenseur de raideur noté \mathbf{C}_o^1 et le tenseur de raideur effectif du CLC est noté \mathbf{C}_o^{hom} . Le problème (3.10) fait clairement apparaître l'interprétation finale de l'approche variationnelle de Ponte Castañeda (1991), à savoir que le module sécant $\mathbf{C}_{sct}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$ est remplacé par un module uniforme $\mathbf{C}_{sct}(\langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_M)$ calculé à partir du second moment $\langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_M$ du taux de déformation dans le CLC. Si \mathbf{C}_o^{hom} correspond à une borne supérieure des propriétés effectives du CLC alors la solution du problème (3.10) est aussi une borne supérieure. Afin d'obtenir le critère (3.7), la borne supérieure de Hashin et Shtrikman (1963) est utilisée pour \mathbf{C}_o^{hom} .

Il est intéressant de noter que le critère (3.7) de Ponte Castañeda (1991) est une borne supérieure pour tout milieu poreux macroscopiquement isotrope et constitué d'une matrice rigide plastique parfaite.

Le point purement équivalent (ou purement déviatorique) donné par le critère (3.7) de Ponte Castañeda (1991) vaut $\sigma_0(1-f)/\sqrt{1+\frac{2}{3}f}$, ce qui améliore la borne supérieure de type Voigt.

Le point purement hydrostatique donné par le critère (3.7) majore grandement (à faible porosité) la solution exacte de la sphère creuse soumise à un chargement hydrostatique homogène sur sa face externe. Ainsi, Michel et Suquet (1992) ont proposé de modifier le terme en Σ_m dans le critère (3.7) afin de retrouver cette solution exacte. Le critère de Michel et Suquet (1992) (appelé "modèle de sphère creuse") s'écrit :

$$\left(1 + \frac{2}{3}f\right) \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0}\right)^2 + \frac{9}{4} \left(\frac{1-f}{\ln(f)}\right)^2 \left(\frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right)^2 - (1-f)^2 = 0. \quad (3.11)$$

La FIG. 3.3 illustre la différence de "forme" entre ces critères elliptiques et le critère de Gurson. La forme du critère conditionne l'évolution de la triaxialité du taux de déformation avec celle des contraintes (voir FIG. 3.4) et, par là même, le taux de croissance des cavités (directement relié à la partie hydrostatique du taux de déformation, voir la section 6.3). Ainsi, afin d'avoir une bonne prédiction du taux de croissance des cavités, il est donc nécessaire d'avoir une bonne estimation de la "forme" du critère. Le modèle de Gurson donne une partie hydrostatique du taux de déformation macroscopique plus importante que celle donnée par le modèle de sphère creuse de Michel et Suquet (1992) et prévoit donc un taux de croissance des cavités plus important ; ce qui est plus en adéquation avec les simulations numériques et les résultats expérimentaux (voir Chaboche et al. (2001)). Ainsi, le modèle de Gurson est retenu dans la suite.

La FIG. 3.3 illustre aussi le fait que le critère de Gurson viole la borne supérieure de Ponte Castañeda (1991) pour un chargement purement équivalent (ou purement déviatorique). Ce point est discuté à la section 3.1.4 où les modifications de type GTN du critère de Gurson sont abordées.

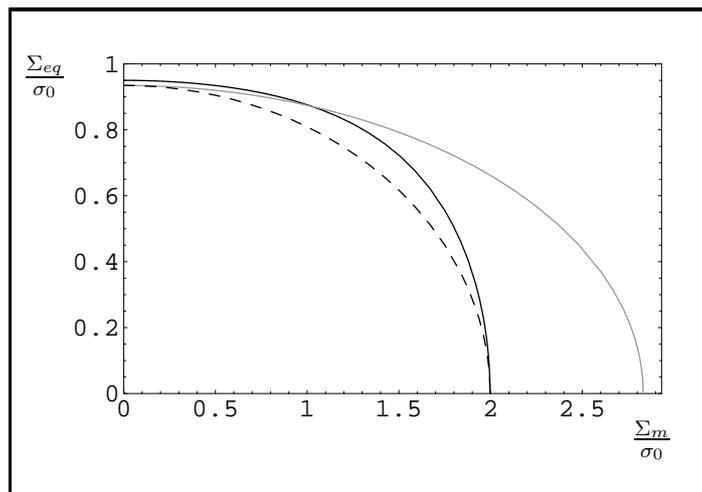


FIG. 3.3 – Critères de plasticité : Trait plein noir : critère de Gurson. Trait plein gris : critère de Ponte Castañeda (1991) (relation (3.7)). Trait discontinu noir : modèle de sphère creuse de Michel et Suquet (1992) (relation (3.11)). Porosité : $f = 0.05$. Illustration de la différence de "forme" entre les critères elliptiques de Ponte Castañeda (1991) ou de Michel et Suquet (1992) et le critère non elliptique de Gurson. Le critère de Gurson viole la borne supérieure de Ponte Castañeda (1991) pour un chargement purement équivalent (ou purement déviatorique), mais reste intérieur à la borne supérieure de Ponte Castañeda (1991) pour un chargement purement hydrostatique.

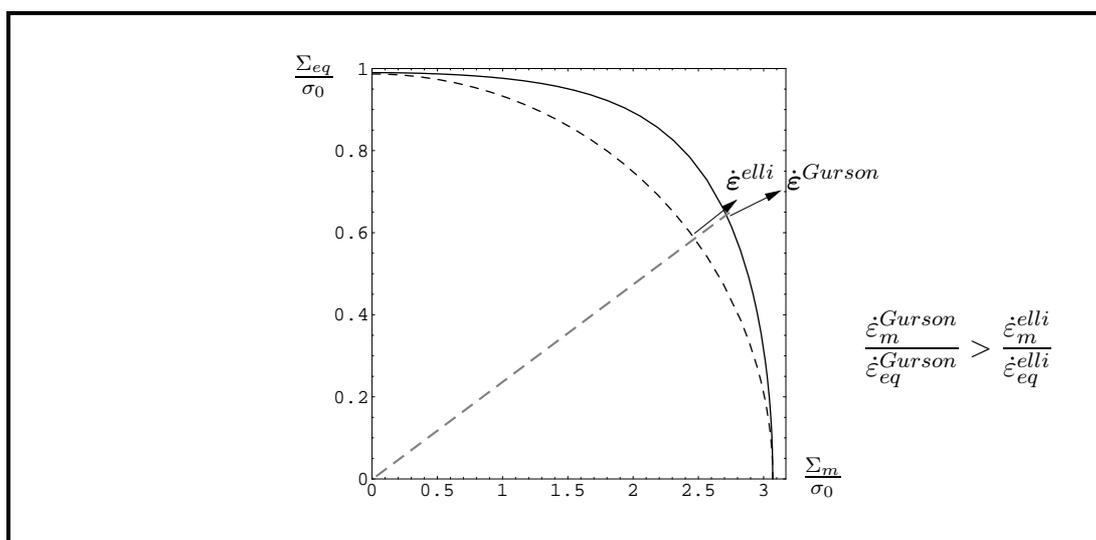


FIG. 3.4 – Importance de la "forme" du critère de plasticité sur le taux de déformation macroscopique $\dot{\epsilon}$ (porosité $f = 0.01$). Trait plein : critère de Gurson. Trait discontinu : modèle de sphère creuse de Michel et Suquet (1992) (relation (3.11)).

3.1.3 Méthode sécante modifiée (approche variationnelle) à N phases

Afin de réunir les avantages des deux démarches précédentes, à savoir, le fait que la borne supérieure due à l'approche de Gurson est pertinente dans le cas d'un chargement purement hydrostatique (solution exacte de la sphère creuse soumise à un chargement hydrostatique homogène

sur sa face externe) et que la borne supérieure due à l'approche variationnelle de Ponte Castañeda (1991), relation (3.7), est pertinente dans le cas d'un chargement purement déviatorique, Bilger et al. (2002) proposent l'approche dite " N phases" détaillée ci-dessous.

Bilger et al. (2002) utilisent la méthode sécante modifiée en découpant fictivement la matrice en N phases : au final, cela revient à remplacer $\mathbf{C}_{sct}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$ par un module $\mathbf{C}_{sct}(\langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_{\Omega_r})$ uniforme dans chacune des phases r (domaines Ω_r) issues du découpage de la matrice. L'objectif de Bilger et al. (2002) est de prendre en compte l'hétérogénéité radiale du champ de déformation dans la matrice pour le calcul de \mathbf{C}_{sct} . Le CLC est alors composé de N sphères concentriques : la phase 1 correspond aux cavités et les $N - 1$ autres phases correspondent au "découpage" radial de la matrice M , voir FIG. F.1. Chaque phase r ($2 \leq r \leq N$) du CLC a un tenseur de raideur noté \mathbf{C}_o^r et une fraction volumique notée f_r . Le tenseur de raideur effectif du CLC est noté \mathbf{C}_o^{hom} . L'application de la méthode sécante modifiée conduit au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Entrée : } \dot{\mathbf{E}}. \\ \text{Problème non linéaire : } \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{C}_o^r \text{ et } \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_{\Omega_r}, \forall r (2 \leq r \leq N), \text{ tels que :} \\ \mathbf{C}_o^r = \mathbf{C}_{sct}(\langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_{\Omega_r}) \\ \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_{\Omega_r} = \frac{1}{f_r} \dot{\mathbf{E}} : \frac{\partial \mathbf{C}_o^{hom}}{\partial \mathbf{C}_o^r} : \dot{\mathbf{E}} \end{array} \right. \\ \text{Problème linéaire : } \left\{ \begin{array}{l} \text{Résoudre :} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}_o^r : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_r, \quad \forall r (2 \leq r \leq N) \\ \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S} \text{ et } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \in \mathcal{K}(\dot{\mathbf{E}}) \\ (\mathcal{S} \text{ et } \mathcal{K}(\dot{\mathbf{E}}) \text{ définis en (2.15) et (2.13)).} \end{array} \right. \\ \text{La contrainte effective issue du problème linéaire vaut } \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{C}_o^{hom} : \dot{\mathbf{E}}. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

La matrice étant rigide plastique parfaite et le milieu effectif étant supposé isotrope, le problème (3.12) peut se réécrire de la façon suivante (voir Bilger et al. (2002)) :

Entrées : $\dot{\mathbf{E}}$ et T ;

répéter

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall r (2 \leq r \leq N) : \\ \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^2 \rangle_{\Omega_r} = \frac{\dot{E}_{eq}^2}{f_r} \left(\frac{\partial \mu_o^{hom}}{\partial \mu_o^r} + 3 \left(T \frac{\mu_o^{hom}}{k_o^{hom}} \right)^2 \frac{\partial k_o^{hom}}{\partial \mu_o^r} \right) ; \\ \mu_o^r = \frac{\sigma_0}{3 \sqrt{\langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^2 \rangle_r}} ; \end{array} \right.$$

jusqu'à convergence sur $\langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^2 \rangle_{\Omega_r}$ et μ_o^r , $\forall r (2 \leq r \leq N)$;

Sorties : $\Sigma_{eq} = 3\mu_o^{hom} \dot{E}_{eq}$ et $\Sigma_m = T\Sigma_{eq}$,

où T est le taux de triaxialité macroscopique des contraintes. Bilger et al. (2002) étudient un milieu composé d'un assemblage de Hashin de sphère creuses autosemblables (voir FIG. 3.2) et choisissent un CLC de même géométrie que le milieu étudié et en incluant le découpage de chaque sphère. L'estimation autocohérente ou la borne supérieure de Hervé et Zaoui (1993) sont utilisées pour déterminer les propriétés effectives du CLC. Le critère de plasticité associé n'est pas décrit analytiquement et le système précédent est résolu par un algorithme de point fixe. Les termes $\frac{\partial k_o^{hom}}{\partial \mu_o^r}$ et $\frac{\partial \mu_o^{hom}}{\partial \mu_o^r}$ sont déterminés numériquement par un développement à l'ordre 1.

La FIG. 3.5 compare, pour une porosité donnée, les critères de Gurson (1977) et de l'approche de Bilger et al. (2002). Le point hydrostatique obtenu avec l'approche de Bilger et al. (2002) tend vers le point hydrostatique du critère de Gurson lorsque le nombre N de phases augmente et donc vers la

solution exacte du problème de sphère creuse. Cela s'explique de la façon suivante. D'un côté, afin d'aboutir au critère de Gurson, l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans (3.5) revient, au final, à utiliser un ε_{eq}^2 uniforme dans chaque couche concentrique paramétrée par r en coordonnées sphériques et entourant la cavité centrale. D'un autre côté, la méthode sécante modifiée utilisée par Bilger et al. (2002) revient à remplacer, au final, le module sécant $\mathbf{C}_{sct}(\dot{\varepsilon} \otimes \dot{\varepsilon})$ par un module $\mathbf{C}_{sct}(\langle \dot{\varepsilon} \otimes \dot{\varepsilon} \rangle_r)$ uniforme dans chaque phase r et qui vaut dans ce cas $\mathbf{C}_{sct}(\langle \varepsilon_{eq}^2 \rangle_r)$ dans chaque phase r . Ainsi, à la limite ($N \rightarrow +\infty$), ces deux approches sont équivalentes en hydrostatique.

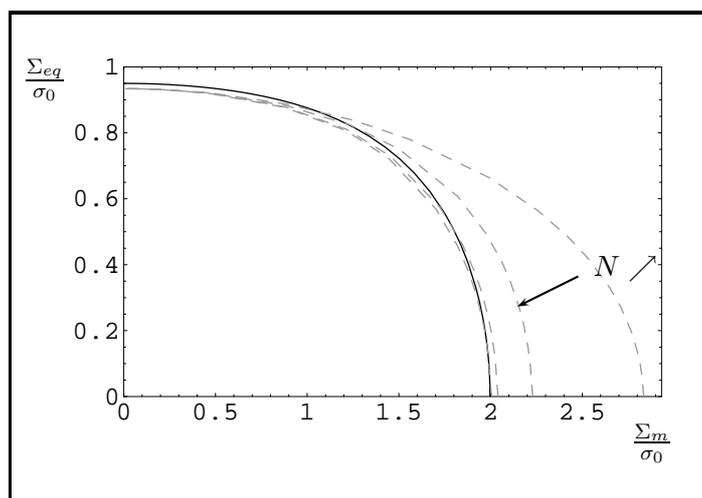


FIG. 3.5 – Critères de plasticité : Trait plein noir : critère de Gurson (relation (3.1)). Trait discontinu gris : approche de Bilger et al. (2002) (problème (3.12)) pour $N = 2, N = 3, N = 6, N = 21$. Porosité $f = 0.05$: le point hydrostatique obtenu avec l'approche de Bilger et al. (2002) tend vers le point hydrostatique du critère de Gurson (solution exacte de la sphère creuse chargée hydrostatiquement sur sa face externe) lorsque le nombre de phases N augmente.

Le tableau ci-dessous regroupe les propriétés essentielles des modèles précédents :

Modèle	Bon en hydrostatique pur	Bon en déviatorique pur	Bon taux de croissance des cavités	Analytique
Gurson (Gurson (1977))	oui	non	oui	oui
Variationnel (Ponte Castañeda (1991))	non	oui	non	oui
Sphère creuse (Michel et Suquet (1992))	oui	oui	non	oui
N phases (Bilger et al. (2002))	oui	oui	oui	non

Le tableau ci-dessus montre que la meilleure estimation non nécessairement analytique est celle obtenue avec le modèle N phases. Le modèle de Gurson constitue la meilleure estimation analytique sous réserve de modification de son "point équivalent" (ou déviatorique). C'est l'objet de la section suivante 3.1.4.

3.1.4 Modifications de type GTN du critère de Gurson

Différentes modifications ont été apportées dans la littérature au critère initial de Gurson (1977). La plus connue de ses différentes modifications est le critère "GTN" (Gurson, Tvergaard, Needleman) :

$$q_3 \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^2 + 2q_1 f \cosh \left(\frac{3 \Sigma_m}{2 \sigma_0} \right) - 1 - (q_1 f)^2 = 0 \quad (3.13)$$

Les paramètres q_1 et q_3 sont introduits afin, d'une part, de donner un meilleur accord entre le critère initial de Gurson et différentes simulations numériques par éléments finis (qui, pour d'autres géométries que celle d'une sphère creuse et essentiellement pour une contrainte effective hydrostatique, font apparaître le phénomène de localisation de la déformation) et, d'autre part, d'améliorer le point équivalent (déviatorique pur) du critère initial de Gurson (i.e. la borne supérieure de Voigt comme signalé en 3.1.1).

Les valeurs de q_1 diffèrent selon les auteurs et les approches :

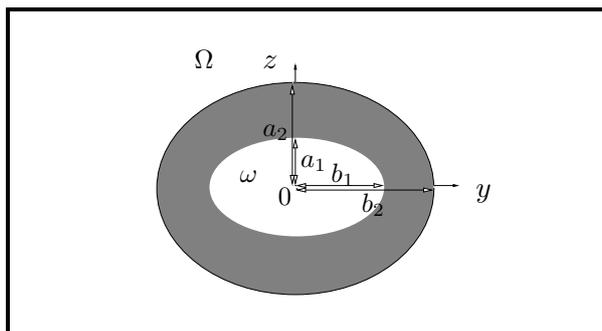
- $q_1 = 1$ pour le critère initial de Gurson (approche théorique exposée en 3.1.1),
- $q_1 = 1.5$ pour Tvergaard (1982) (comparaison à des simulations numériques par éléments finis),
- $q_1 = 1.25$ pour Koplik et Needleman (1988) (comparaison à des simulations numériques par éléments finis),
- $q_1 \approx 1.47$ pour Perrin et Leblond (1990) (approche théorique : modèle autocohérent basé sur le problème de la sphère creuse placée dans un milieu infini lui même obéissant au critère GTN et sous chargement hydrostatique).

La valeur de q_1 conseillée par Chaboche et al. (2001) est de 1.25. Cette valeur est intermédiaire entre la valeur $q_1 = 1$ (correspondant à la solution dans le cas d'une cellule unitaire sphérique chargée en hydrostatique) et la valeur $q_1 = 1.5$ de Tvergaard (simulations numériques effectuées sur une cellule axisymétrique cylindrique contenant une cavité sphérique en son centre). Cette valeur de $q_1 = 1.25$ semble aussi être en accord avec les simulations numériques par transformée de Fourier rapide (méthode FFT exposée en 4.6.1) effectuées par Bilger (2003) sur un volume élémentaire représentatif contenant un grand nombre de cavités sphériques distribuées aléatoirement (le point hydrostatique des simulations numériques de Bilger (2003) est proche du critère GTN avec $q_1 = 1.25$). Cette valeur est donc retenue par la suite.

Afin de mettre en adéquation le critère initial de Gurson (1977) et la borne de Ponte Castañeda (1991) pour un chargement purement équivalent (déviatorique pur), Leblond et al. (1994) introduisent la fonction $q_3(f)$ suivante : $q_3(f) = 1 + \frac{2}{3}f$. Cette fonction est définie pour le cas $q_1 = 1$. Une fonction $q_3(f)$ a été proposée par Gărăjeu (1995) afin d'abaisser le point équivalent du critère initial de Gurson (1977) tout en conservant, quel que soit le taux de triaxialité, le statut de borne supérieure sur le problème de la sphère creuse. Le point équivalent obtenu est encore supérieur à la borne supérieure de Ponte Castañeda (1991). La fonction $q_3(f)$ de Gărăjeu (1995) vaut :

$$q_3(f) = \left(\frac{1}{1-f} - \frac{f}{\frac{(3+2f)(1-f)}{5} + \frac{168f(1-f^{2/3})^2(1-f)}{5(16+19f^{7/3})}} \right)^{-1}. \quad (3.14)$$

Dans ce travail, nous retenons la valeur $q_1 = 1.25$ et nous proposons une extension de la fonction $q_3(f)$ de Leblond et al. (1994) adapté au cas $q_1 = 1.25$ et qui permet de retrouver, dans le cas d'un chargement purement équivalent (purement déviatorique), la borne supérieure de Ponte Castañeda (1991) : $\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^2 = \frac{(1-f)^2}{1+\frac{2}{3}f}$. Ainsi, les valeurs de q_1 et de q_3 retenues pour la présente étude permettent de retrouver, dans le cas d'un chargement purement équivalent, la borne supérieure de Ponte Castañeda (1991) et, dans le cas d'un chargement purement hydrostatique,


 FIG. 3.6 – *Domaine étudié par Gologanu et al. (1994).*

la valeur de la contrainte hydrostatique en accord avec les simulations numériques présentées ci-dessus :

$$q_1 = 1.25 \quad (3.15)$$

$$q_3(f) = \left(1 + \frac{2}{3}f\right) \frac{(1 - q_1 f)^2}{(1 - f)^2}. \quad (3.16)$$

Par la suite, ce critère approché est appelé "critère de Gurson modifié".

3.2 Cavités ellipsoïdales aplaties et alignées

Cette section traite de surfaces de plasticité pour un milieu poreux constitué d'une matrice rigide plastique parfaite avec critère de Von Mises et d'une unique population de cavités ellipsoïdales aplaties alignées. Tout d'abord, le critère de Gologanu et al. (1994) est rappelé. Il s'agit d'un critère de type Gurson. Puis, une borne supérieure et une estimation sont proposées par extension de la démarche de Gologanu et al. (1994) à un taux de déformation effectif qui n'est plus seulement axisymétrique. Cette section constitue une étape intermédiaire pour traiter le cas des cavités ellipsoïdales aplaties et orientées aléatoirement dans la matrice (voir FIG. 3.8, cas traité en 3.3).

3.2.1 Critères de type Gurson (rappels)

Le cas des cavités ellipsoïdales aplaties et alignées a été étudié par Gologanu et al. (1994). Pour l'essentiel, ces auteurs étudient un volume Ω ellipsoïdal aplati ("oblate") contenant en son centre une cavité ellipsoïdale oblate (domaine ω) de mêmes axes que le domaine Ω . Les deux ellipsoïdes Ω et ω sont confocaux (mêmes foyers). La géométrie est schématisée sur la FIG. 3.6. La matrice (domaine $\Omega - \omega$) est supposée rigide plastique parfaite (contrainte limite d'écoulement en traction σ_0). Des conditions de taux de déformation homogène au bord (noté $\dot{\mathbf{E}}$) sont appliquées avec un taux de déformation effectif $\dot{\mathbf{E}}$ **axisymétrique**, d'axe l'axe de révolution des ellipsoïdes Ω et ω .

Les demi-axes de ω (respectivement Ω) sont notés a_1 et b_1 (respectivement a_2 et b_2) comme illustré sur la FIG. 3.6. La demi-distance focale est notée c et vaut :

$$c = \sqrt{b_1^2 - a_1^2} = \sqrt{b_2^2 - a_2^2}. \quad (3.17)$$

Les coordonnées cartésiennes (x, y, z) (base $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$), cylindriques (ρ, ϕ, z) (base $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$) et elliptiques (λ, β, ϕ) (base $(\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\phi)$) sont utilisées. L'axe des z est l'axe de révolution des ellipsoïdes Ω et ω . Les notations suivantes sont introduites :

$$\begin{aligned}
 \rho &= c \cosh \lambda \sin \beta, & \phi &= \phi, & z &= c \sinh \lambda \cos \beta, \\
 \lambda &\in [0, +\infty[, & \beta &\in [0, \pi], & \phi &\in [0, 2\pi], \\
 f &= (a_1 b_1^2)/(a_2 b_2^2) \text{ (porosité)}, \\
 a &= c \sinh \lambda, & b &= c \cosh \lambda \\
 e_2 &= c/b_2, & e_1 &= c/b_1, \text{ (excentricités)}.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Les surfaces à λ constant sont des ellipsoïdes confocaux dont les foyers sont situés sur un cercle (défini par $\rho = c, z = 0$) et dont les demi-axes mineur et majeur valent respectivement $a = c \sinh \lambda$ et $b = c \cosh \lambda$. Le rapport $e = c/b$ est prescrit. La matrice (domaine $\Omega - \omega$) est délimitée par les surfaces à λ_1 et λ_2 constants.

Remarque 3.2 (Cas des fissures) Le cas où ω est une fissure ($a_1 = 0$) est obtenu pour $f = 0, e_1 = 1$ et e_2 arbitraire.

Le champ de vitesse incompressible dans la matrice utilisé par Gologanu et al. (1994) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{v}}^{Go} &= \mathcal{A} \mathbf{v}^{(A)} + \mathcal{B} \mathbf{v}^{(B)} \quad \text{avec} \\
 \mathbf{v}^{(A)} &= R(\lambda) \rho \mathbf{e}_\rho + Z(\lambda) z \mathbf{e}_z, & \mathbf{v}^{(B)} &= -\frac{x}{2} \mathbf{e}_x - \frac{y}{2} \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z, \\
 R(\lambda) &= -ac/b^2 + \text{Arcsin}(c/b) \quad \text{et} \quad Z(\lambda) = 2c/a - 2\text{Arcsin}(c/b).
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Les constantes \mathcal{A} et \mathcal{B} sont déterminées par les conditions aux limites $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x}$ sur $\partial\Omega$:

$$\begin{cases} \dot{E}_{xx} = \dot{E}_{yy} = \mathcal{A}R_2 - \mathcal{B}/2 & \text{avec : } R_2 = R(\lambda_2) \\ \dot{E}_{zz} = \mathcal{A}Z_2 + \mathcal{B} & \text{avec : } Z_2 = Z(\lambda_2). \end{cases} \tag{3.20}$$

Le taux de déformation effectif imposé $\dot{\mathbf{E}}$ est axisymétrique ; il s'écrit en notation vectorielle :

$$\{\dot{\mathbf{E}}\} = \left(\dot{E}_{xx}, \dot{E}_{yy} = \dot{E}_{xx}, \dot{E}_{zz}, 0, 0, 0 \right)^T. \tag{3.21}$$

L'utilisation du principe variationnel (équations (2.13) et (2.21)) avec ce champ de vitesse $\dot{\mathbf{v}}^{Go}$ permet de majorer le potentiel de dissipation effectif :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega-\omega} \varphi(\varepsilon(\dot{\mathbf{v}}^{Go})) d\Omega = \sigma_0 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{\beta=\pi} \dot{\varepsilon}_{eq} J_{\lambda\beta\phi} d\beta d\phi d\lambda \tag{3.22}$$

avec $\dot{\varepsilon} = \varepsilon(\dot{\mathbf{v}}^{Go})$ et $J_{\lambda\beta\phi} = (b(a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta) \sin \beta) / |\Omega|$. L'intégrale (3.22) est approchée par Gologanu et al. (1994) en remplaçant $\cos^2 \beta$ par sa valeur moyenne sur $[0, \pi]$, puis en adoptant les deux changements de variables suivants :

$$\tilde{x} = \frac{c^3}{ab^2} = \frac{1}{\sinh \lambda \cosh^2 \lambda}, \quad \text{puis} \quad \tilde{y} = \frac{\chi \tilde{x}}{\tilde{x} + 3\chi/4} \quad \text{avec} \quad \chi = \sqrt{\pi^2 + 32/3}, \tag{3.23}$$

et enfin en approchant $\dot{\varepsilon}_{eq}$ par une fonction de la forme : $(\mathcal{A}'^2 \tilde{y}^2 + \mathcal{B}'^2)^{1/2}$ où \mathcal{A}' et \mathcal{B}' sont des constantes non précisées ici. Le potentiel effectif approché correspond au critère suivant :

$$\left(\frac{\Sigma_n - \Sigma_p + \eta \Sigma_h}{\sigma_0 / \sqrt{C}} \right)^2 + 2(g+1)(g+f) \cosh \left(\frac{\kappa}{\sigma_0} \Sigma_h \right) - (g+1)^2 - (g+f)^2 = 0, \tag{3.24}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 g &= \frac{4e_2^3}{3\chi\sqrt{1-e_2^2}}, \quad \chi = \sqrt{\pi^2 + 32/3}, \\
 \kappa &= \left(\frac{2}{3} + \frac{g(1-f)(g+2f+gf)}{3(g+1)^2(g+f)^2 \ln \frac{g+1}{g+f}} \right)^{-1}, \\
 \alpha(e) &= -\frac{1-e^2}{2e^2} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{2e^3} \arcsin(e), \\
 \eta &= \frac{\kappa(1-f)(g+1)(g+f) \sinh(2\kappa(\alpha_2 - \alpha_1))}{(g+1)^2 + (g+f)^2 + 2(g+1)(g+f)(\kappa(\alpha_2 - \alpha_1) \sinh(2\kappa(\alpha_2 - \alpha_1)) - \cosh(2\kappa(\alpha_2 - \alpha_1)))}, \\
 \alpha_2 &= \alpha(e_2), \quad \alpha_1 = \alpha(e_1), \\
 C &= \frac{(g+1)(g+f)\kappa \sinh(2\kappa(\alpha_2 - \alpha_1))}{(1-f-2\eta(\alpha_2 - \alpha_1))\eta}, \\
 \Sigma_p &= \frac{\Sigma_{xx} + \Sigma_{yy}}{2}, \quad \Sigma_n = \Sigma_{zz}, \quad \Sigma_h = 2\alpha_2 \Sigma_p + (1-2\alpha_2)\Sigma_n.
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Les constantes précédentes ont été modifiées par Gologanu et al. (1997) afin d'améliorer le résultat de la comparaison entre le modèle précédent et des simulations numériques par éléments finis (les constantes modifiées sont indexées par *) :

$$\begin{aligned}
 \alpha_1^* &= \frac{-e_1(1-e_1^2) + (1-e_1^2)^{1/2} \arcsin(e_1)}{2e_1^3}, \\
 \alpha_2^* &= \frac{(1-e_2^2)(1-2e_2^2)}{3-6e_2^2+4e_2^4}, \\
 g^* &= \frac{e_2^3}{(1-e_2^2)^{1/2}}, \quad g_f = \frac{g^*}{g^*+f}, \quad g_1 = \frac{g^*}{g^*+1}, \quad H = 2|\alpha_1^* - \alpha_2^*|, \\
 (\kappa^*)^{-1} &= \frac{2}{3} + \frac{(2/3)(g_f - g_1) + (2/5)(g_f^{5/2} - g_1^{5/2})(4/3 - g_f^{5/2} - g_1^{5/2})}{\ln(g_f/g_1)}, \\
 \eta^* &= \frac{\kappa^*(1-f)(g^*+1)(g^*+f) \sinh(\kappa^*H)}{(g^*+1)^2 + (g^*+f)^2 + (g^*+1)(g^*+f)(\kappa^*H \sinh(\kappa^*H) - 2 \cosh(\kappa^*H))}, \\
 C^* &= \frac{-(\kappa^*/\eta^*)(g^*+1)(g^*+f) \sinh(\kappa^*H)}{\eta^*H - (1-f)}.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Remarque 3.3 (Lien avec le champ élastique de Milton (2002)) La solution exacte du problème élastique linéaire correspondant à une déformation hydrostatique de la cavité et à une déformation uniforme \mathbf{D} sur la surface extérieure (notée $\partial\Omega$) est connue (Milton (2002)), avec :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D} &= D_{xx}(\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y) + D_{zz}\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z, \\
 D_{xx} &= -\frac{1}{3} + \alpha(e_1) - f\alpha(e_2), \\
 D_{zz} &= -2D_{xx} - f, \\
 \alpha(e) &\text{ défini en (3.25)}.
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Il est intéressant de noter que cette solution coïncide avec le champ \mathbf{v}^{Go} lorsque $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{D}$. La démonstration est donnée en Annexe A. _____

Remarque 3.4 (Cas des cavités allongées) Le cas des cavités allongées ("prolate") a été traité de la même façon par Gologanu et al. (1993). Le résultat n'est pas rappelé dans le présent travail (restreint aux cavités aplaties). Il est intéressant de noter que le champ de vitesse utilisé par Gologanu et al. (1993) et Gologanu et al. (1994) fait intervenir

un champ $\mathbf{v}^{(A)}$ qui donne des conditions de taux de déformation homogène sur tous les ellipsoïdes confocaux avec la cavité centrale mais ce champ n'est pas uniquement dirigé selon \mathbf{e}_λ .

Dans le cas des cavités allongées, Gărăjeu (1995) utilise un champ de vitesse tiré du cas linéaire qui fait intervenir un champ $\dot{\mathbf{v}}^{(C)}$ dirigé selon \mathbf{e}_λ et qui correspond à des conditions de taux de déformation homogène sur le bord extérieur seulement. Ce résultat de Gărăjeu (1995) n'est pas rappelé dans le présent document.

Remarque 3.5 (Critère de Monchiet et al. (2007)) Plus récemment, Monchiet et al. (2007) ont développé un nouveau critère en utilisant un champ de vitesse tiré du cas linéaire et correspondant au problème d'Eshelby (cavité ellipsoïdale en milieu infini, (Eshelby (1957)), (Mura (1987))). Les conditions de déformation homogène au bord sont remplacées par la condition : $\langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_\Omega = \dot{\mathbf{E}}$, ce qui implique que le caractère rigoureux de borne supérieure pour le critère de plasticité est perdu. Contrairement à l'analyse de Gologanu et al. (1994), le tenseur $\dot{\mathbf{E}}$ est quelconque (pas seulement axisymétrique). L'estimation obtenue est rappelée ici dans le cas des cavités sphériques :

$$\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0}\right)^2 + 2f \cosh\left(\frac{1}{\sigma_0} \sqrt{\frac{9}{4}\Sigma_m^2 + \frac{2}{3}\Sigma_{eq}^2}\right) - 1 - f^2 = 0. \quad (3.28)$$

Pour de faibles valeurs de Σ_m , un développement limité du terme en cosh montre que le critère précédent est analogue à la borne supérieure de Ponte Castañeda (1991). Lorsque $\Sigma_{eq} = 0$, le critère précédent, comme le critère de Gurson, permet de retrouver la solution exacte de la sphère creuse chargée hydrostatiquement et de façon homogène sur sa face externe.

3.2.2 Approche de type Gurson : borne supérieure

Le but de cette section est de reprendre l'analyse de Gologanu et al. (1994) avec un taux de déformation effectif $\dot{\mathbf{E}}$ général (et non plus seulement axisymétrique) et d'en déduire une borne supérieure rigoureuse pour la surface de charge (critère de plasticité).

Le taux de déformation effectif $\dot{\mathbf{E}}$ est décomposé en une partie axisymétrique $\dot{\mathbf{E}}^A$ et une partie non-axisymétrique $\dot{\mathbf{E}}^{NA}$ (en notation vectorielle) :

$$\begin{aligned} \{\dot{\mathbf{E}}\} &= \{\dot{\mathbf{E}}^A\} + \{\dot{\mathbf{E}}^{NA}\}, \\ \{\dot{\mathbf{E}}^A\} &= \left(\frac{\dot{E}_{xx} + \dot{E}_{yy}}{2}, \frac{\dot{E}_{xx} - \dot{E}_{yy}}{2}, \dot{E}_{zz}, 0, 0, 0\right)^T, \\ \{\dot{\mathbf{E}}^{NA}\} &= \left(\frac{\dot{E}_{xx} - \dot{E}_{yy}}{2}, \frac{\dot{E}_{yy} - \dot{E}_{xx}}{2}, 0, \sqrt{2}\dot{E}_{yz}, \sqrt{2}\dot{E}_{zx}, \sqrt{2}\dot{E}_{xy}\right)^T. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Le champ de vitesse $\dot{\mathbf{v}}$ choisi utilise le champ de vitesse $\dot{\mathbf{v}}^{Go}$ (relation (3.19)) et un champ élémentaire $\dot{\mathbf{v}}^{NA}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{v}}^{Go}(\mathbf{x}) + \dot{\mathbf{v}}^{NA}(\mathbf{x}) \quad \text{avec} \\ \dot{\mathbf{v}}^{Go}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{E}}^A \cdot \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad \text{et} \\ \dot{\mathbf{v}}^{NA}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{E}}^{NA} \cdot \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega - \omega. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Les champs $\dot{\mathbf{v}}^{Go}$ et $\dot{\mathbf{v}}^{NA}$ sont incompressibles, ce qui assure la même propriété pour le champ $\dot{\mathbf{v}}$. De plus, $\dot{\mathbf{v}}$ vérifie les conditions de taux de déformation homogène au bord : $\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$.

Les constantes \mathcal{A} et \mathcal{B} intervenant dans $\dot{\mathbf{v}}^{Go}$ (équation (3.19)) sont déterminées par les conditions aux limites de $\dot{\mathbf{v}}^{Go}$ sur $\partial\Omega$ par l'intermédiaire de la relation (3.20) et en veillant à bien utiliser $\dot{\mathbf{E}}^A$:

$$\mathcal{A} = \frac{\text{Tr}(\dot{\mathbf{E}})}{2R_2 + Z_2} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \dot{E}_{zz} - \mathcal{A} Z_2, \quad \text{avec} \quad R_2 = R(\lambda_2) \quad \text{et} \quad Z_2 = Z(\lambda_2). \quad (3.31)$$

En utilisant le principe variationnel (équations (2.13) et (2.21)), le potentiel effectif est majoré par :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \frac{\sigma_0}{|\Omega|} \int_{\Omega-\omega} \varepsilon_{eq}(\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x})) \, d\Omega = \sigma_0 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{\beta=\pi} \dot{\varepsilon}_{eq}(\mathbf{x}) J_{\lambda\beta\phi} d\beta \, d\phi \, d\lambda, \quad (3.32)$$

où $\dot{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \varepsilon(\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}))$ et $J_{\lambda\beta\phi} = (b(a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta) \sin \beta) / |\Omega|$ (notations définies en 3.2.1). L'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \sigma_0 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{J(\lambda)} \sqrt{\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{\beta=\pi} \varepsilon_{eq}^2(\mathbf{x}) J_{\lambda\beta\phi} d\beta \, d\phi} \, d\lambda, \quad (3.33)$$

avec :

$$J(\lambda) = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{\pi} J_{\lambda\beta\phi} d\beta \, d\phi = \frac{4\pi b(2a^2 + b^2)}{3|\Omega|}. \quad (3.34)$$

Après quelques calculs (cf Annexe B), cette dernière intégrale se met sous la forme :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \sigma_0 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{J(\lambda)} \sqrt{\dot{\mathbf{E}} : \mathbf{Q}(\lambda) : \dot{\mathbf{E}}} \, d\lambda, \quad (3.35)$$

où \mathbf{Q} est un tenseur du quatrième ordre qui s'écrit en utilisant la notation matricielle 6×6 :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\lambda) &= \mathbf{T}^T \cdot \frac{2\pi b}{|\Omega|} \begin{pmatrix} I_1 & I_2 \\ I_2 & I_3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{T} + J(\lambda) \mathbf{Q}^{NA}, \\ I_1 &= \frac{8}{9} (3b^2 R^2 + 2a^2 (R^2 + RZ + Z^2)), \quad I_2 = \frac{4}{3} (-b^2 R + a^2 Z), \quad I_3 = \frac{4a^2}{3} + \frac{2b^2}{3}, \\ \tilde{\alpha} &= \frac{1}{2R_2 + Z_2} = \frac{a_2 b_2^2}{2c^3}, \quad |\Omega| = \frac{4}{3} \pi a_2 b_2^2, \end{aligned} \quad (3.36)$$

avec \mathbf{T} une matrice 2×6 et \mathbf{Q}^{NA} une matrice symétrique 6×6 dont les coefficients non nuls sont :

$$T_{11} = T_{12} = T_{13} = \tilde{\alpha}, \quad T_{21} = T_{22} = -\tilde{\alpha} Z_2, \quad T_{23} = 1 - \tilde{\alpha} Z_2, \quad (3.37)$$

$$Q_{11}^{NA} = Q_{22}^{NA} = -Q_{12}^{NA} = \frac{1}{3}, \quad Q_{44}^{NA} = Q_{55}^{NA} = Q_{66}^{NA} = \frac{2}{3}. \quad (3.38)$$

L'expression (3.35) constitue une borne supérieure rigoureuse du potentiel effectif en taux de déformation et par conséquent une borne supérieure pour la surface de charge (critère de plasticité), tracée point par point :

$$\Sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{E}}}(\dot{\mathbf{E}}), \quad (3.39)$$

$$\Sigma = \sigma_0 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\sqrt{J(\lambda)}}{\sqrt{\dot{\mathbf{E}} : \mathbf{Q}(\lambda) : \dot{\mathbf{E}}}} \mathbf{Q}(\lambda) : \dot{\mathbf{E}} \, d\lambda. \quad (3.40)$$

Autre champ de vitesse Un champ de vitesse différent de (3.30) a été testé. Le champ choisi utilise principalement un champ tiré de l'analyse de Găărăjeu (1995) pour le cas des cavités ellipsoïdales allongées et adapté pour le cas des cavités aplaties. L'analyse est détaillée en Annexe C. Le résultat donné à titre indicatif s'écrit :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \sigma_0 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{J(\lambda)} \sqrt{\dot{\mathbf{E}} : \mathbf{Q}^*(\lambda) : \dot{\mathbf{E}}} d\lambda, \quad (3.41)$$

avec, en notation matricielle 6×6 :

$$\mathbf{Q}^* = J(\lambda) \mathbf{Q}^{NA} + \frac{J(\lambda)}{(1+2\mathfrak{A}^2)^2} \mathfrak{T}^{*T} \cdot \mathfrak{T}^* + \frac{4}{3} \frac{F_1(\lambda)}{c^2 \cosh^4 \lambda} \frac{1}{(1+2\mathfrak{A}^2)^2} \mathfrak{T}^T \cdot \mathfrak{T} - \frac{2F_2(\lambda)}{c^3 (1+2\mathfrak{A}^2)^2} \mathfrak{T}^T \cdot \mathfrak{T}^*, \quad (3.42)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{T} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2\mathfrak{A}^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{T}^* &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2\mathfrak{A}^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A} &= \tanh(\lambda_2), \\ F_1(\lambda) &= \sinh^2(\lambda) J(\lambda) + Q_1(\lambda) 2\pi J_1 + Q_2(\lambda) 2\pi J_2 + Q_3(\lambda) 2\pi J_3, \\ F_2(\lambda) &= -c^2 J(\lambda) + 2\pi Q_1^*(\lambda) J_1 + 2\pi Q_2^*(\lambda) J_2 + 2\pi Q_3^*(\lambda) J_3, \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_1(\lambda) &= \sinh^2 \lambda \left(1 + \frac{2}{c^2} - \sinh^2 \lambda \right), \\ Q_2(\lambda) &= -\frac{1}{c^4} + \sinh^2 \lambda \left(1 + \frac{4}{c^2} \right) + (\sinh^4 \lambda) \left(-1 + \frac{2}{c^2} \right) - \sinh^6 \lambda, \\ Q_3(\lambda) &= \frac{1}{c^4} + \frac{4}{c^4} \sinh^2 \lambda + \sinh^4 \lambda \left(-1 + \frac{3}{c^4} - \frac{4}{c^2} \right) - \frac{4}{c^2} \sinh^6 \lambda + \sinh^8 \lambda, \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= 2 \frac{c^3}{|\Omega|} \cosh \lambda, \\ J_2 &= \frac{c^3}{|\Omega| \tanh \lambda} \arctan \left(\frac{1}{\sinh \lambda} \right), \\ J_3 &= \frac{c^3}{|\Omega| \tanh \lambda} \frac{\sinh \lambda + (1 + \sinh^2 \lambda) \arctan \left(\frac{1}{\sinh \lambda} \right)}{\sinh^2 \lambda + \sinh^4 \lambda}, \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_1^*(\lambda) &= 1 - c^2 - 2c^2 \sinh^2 \lambda, \\ Q_2^*(\lambda) &= -3 + 5 \sinh^2 \lambda (c^2 - 1) + 7c^2 \sinh^4(\lambda), \\ Q_3^*(\lambda) &= 4 \sinh^2(\lambda) (1 + \sinh^2(\lambda) (1 - c^2) - c^2 \sinh^4 \lambda), \end{aligned} \right\} \quad (3.47)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Q}^{NA} &\text{ défini en (3.38),} \\ |\Omega| &= \frac{4}{3} \pi a_2 b_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.48)$$

La borne supérieure obtenue s'avère moins serrée que celle obtenue avec le champ (3.30) et n'est donc pas retenue pour la suite de l'étude (voir la FIG. 3.7).

3.2.3 Approche de type Gurson : estimation

Cette section a pour but d'obtenir un critère de plasticité analytique en contraintes. La démarche aboutissant à la borne supérieure décrite en 3.2.2 est reprise. L'idée est d'utiliser les approximations faites par Gologanu et al. (1994) afin d'aboutir à un critère analytique. L'inéquation (3.33) est reprise :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \sigma_0 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{J(\lambda)} \sqrt{\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{\beta=\pi} \left((\dot{\varepsilon}_{eq}^{Go})^2 + (\dot{\mathbf{E}}_{eq}^{NA})^2 + \frac{4}{3} \dot{\varepsilon}^{Go} : \dot{\mathbf{E}}^{NA} \right) J_{\lambda\beta\phi} d\beta d\phi d\lambda}, \quad (3.49)$$

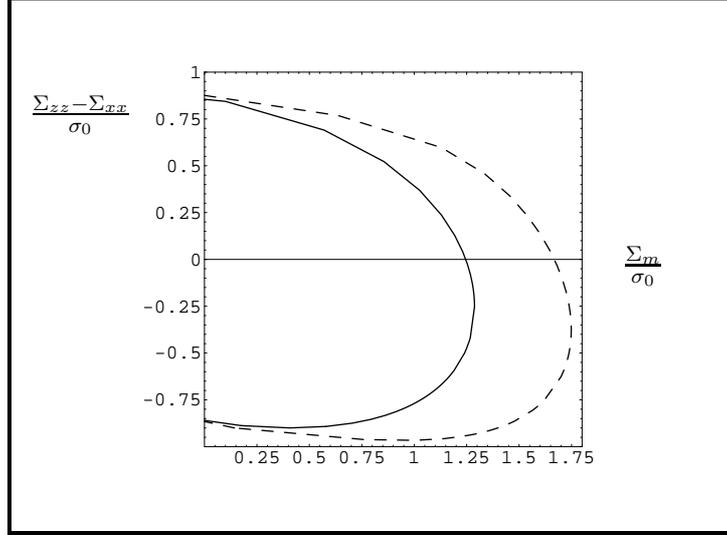


FIG. 3.7 – Critères de plasticité : la borne supérieure (3.35) obtenue par une extension non axisymétrique de l’approche de Gologanu et al. (1994) (trait plein) est meilleure que la borne supérieure (3.41) obtenue par une extension au cas des ellipsoïdes aplatis de l’approche de Gărăjeu (1995) (trait discontinu). $f = 0.1$, $w = 1/5$. Chargement axisymétrique d’axe z .

avec $\dot{\varepsilon}^{Go} = \varepsilon(\dot{\nu}^{Go})$. D’après l’Annexe B, le terme "croisé", $\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{\pi} \dot{\varepsilon}^{Go} : \dot{\mathbf{E}}^{NA} J_{\lambda\beta\phi} d\beta d\phi$ s’annule. D’où :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \sigma_0 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{J(\lambda)} \sqrt{\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{\pi} \left((\dot{\varepsilon}_{eq}^{Go})^2 + (\dot{E}_{eq}^{NA})^2 \right) J_{\lambda\beta\phi} d\beta d\phi} d\lambda. \quad (3.50)$$

L’expression de $(\dot{\varepsilon}_{eq}^{Go})^2$ est donnée en (B.5). La première approximation de Gologanu et al. (1994) consiste à remplacer, dans l’expression de $(\dot{\varepsilon}_{eq}^{Go})^2$, la fonction $\cos^2 \beta$ par sa valeur moyenne sur $[0, \pi]$, i.e. $1/3$. Cela donne :

$$\begin{aligned} \Phi(\dot{\mathbf{E}}) &\approx \sigma_0 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{(\dot{\varepsilon}_{eq}^{Go})^2 + (\dot{E}_{eq}^{NA})^2} J(\lambda) d\lambda, \\ (\dot{\varepsilon}_{eq}^{Go})^2 &= \frac{2\mathcal{A}^2}{3} \left(2R^2 + Z^2 + \frac{2R+Z}{3b^2-2c^2} (2b^2R + (a^2-c^2)Z) \right) + 2\mathcal{A}\mathcal{B} \left(Z - \frac{b^2(2R+Z)}{3b^2-2c^2} \right) + \mathcal{B}^2. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Remarque 3.6 (Approximation) L’équation (3.51) peut aussi être obtenue en remplaçant $\cos^2 \beta$ par $1/3$ directement dans (3.50). En effet :

$$J(\lambda) = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{\pi} \frac{b(a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta) \sin \beta}{|\Omega|} d\beta d\phi = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{\pi} \frac{b(a^2 \frac{2}{3} + b^2 \frac{1}{3}) \sin \beta}{|\Omega|} d\beta d\phi. \quad (3.52)$$

Le changement de variables suivant $\tilde{x} = \frac{c^3}{ab^2} = \frac{1}{\sinh \lambda \cosh^2 \lambda}$ conduit à :

$$J(\lambda) d\lambda = -\frac{4\pi c^3}{3|\Omega|} \frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}^2}. \quad (3.53)$$

En effet :

$$J(\lambda) = \frac{4\pi b(2a^2 + b^2)}{3|\Omega|} = \frac{4\pi b}{|\Omega|} \left(b^2 - \frac{2c^3}{3} \right) = \frac{4\pi}{|\Omega|} c^3 \cosh \lambda \left(\sinh^2 \lambda + \frac{1}{3} \right) \quad (3.54)$$

et :

$$\frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}^2} = -3 \cosh \lambda \left(\sinh^2 \lambda + \frac{1}{3} \right) d\lambda. \quad (3.55)$$

D'où :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \approx \frac{4\pi c^3 \sigma_0}{3|\Omega|} \int_{\tilde{x}_2}^{\tilde{x}_1} \sqrt{(\dot{\varepsilon}_{eq}^{Go}(\tilde{x}))^2 + (\dot{E}_{eq}^{NA})^2} \frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}^2}. \quad (3.56)$$

Les quantités \tilde{x}_1 et \tilde{x}_2 représentent respectivement les valeurs de \tilde{x} en λ_1 et en λ_2 .

Un deuxième changement de variables, $\tilde{y} = \frac{\chi \tilde{x}}{\tilde{x} + 3\chi/4}$ avec $\chi = \sqrt{\pi^2 + 32/3}$, est effectué ($d\tilde{y}/\tilde{y}^2 = 3d\tilde{x}/4\tilde{x}^2$) et, en suivant Gologanu et al. (1994), la fonction $(\dot{\varepsilon}_{eq}^{Go}(\tilde{x}))^2$ est remplacée par une fonction plus simple sous la forme : $\mathcal{A}'^2 \tilde{y}^2 + \mathcal{B}'^2$. Cela donne :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \approx \frac{16\pi c^3 \sigma_0}{9|\Omega|} \int_{\tilde{y}_2}^{\tilde{y}_1} \sqrt{\mathcal{A}'^2 \tilde{y}^2 + \mathcal{B}'^2 + (\dot{E}_{eq}^{NA})^2} \frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}^2}, \quad (3.57)$$

avec $\mathcal{A}' = \bar{F}\mathcal{A} + \bar{G}\mathcal{B}$, $\mathcal{B}' = \bar{H}\mathcal{B}$.

Les quantités \tilde{y}_1 et \tilde{y}_2 représentent respectivement les valeurs de \tilde{y} en λ_1 et en λ_2 . Les quantités \mathcal{A} et \mathcal{B} dépendent de $\dot{\mathbf{E}}$ et sont données en (3.31). Les constantes \bar{F} , \bar{G} et \bar{H} ne sont pas données ici. Un dernier changement de variables $\tilde{z} = \tilde{y}_2/\tilde{y}$ permet d'obtenir :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \approx \frac{16\pi c^3 \sigma_0}{9|\Omega|\tilde{y}_2} \int_{\frac{\tilde{y}_2}{\tilde{y}_1}}^1 \sqrt{\frac{\mathcal{A}'^2 \tilde{y}_2^2}{z^2} + \mathcal{B}'^2 + (\dot{E}_{eq}^{NA})^2} dz \equiv \sigma'_0 \int_{\tilde{f}}^1 \sqrt{\frac{\mathcal{A}''^2}{z^2} + \mathcal{B}'^2 + (\dot{E}_{eq}^{NA})^2} dz, \quad (3.58)$$

avec $\sigma'_0 = \frac{16\pi c^3 \sigma_0}{9|\Omega|\tilde{y}_2}$, $\tilde{f} = \frac{\tilde{y}_2}{\tilde{y}_1}$, $\mathcal{A}''^2 = \mathcal{A}'^2 \tilde{y}_2^2$.

Le critère associé à ce potentiel est calculé dans l'Annexe D et s'écrit :

$$\left(\frac{\Sigma_n - \Sigma_p + \eta \Sigma_h}{\sigma_0/\sqrt{C}} \right)^2 + 3 \frac{\tau_p^2}{\sigma_0^2} + 3 \frac{\tau_n^2}{\sigma_0^2} + 2(g+1)(g+f) \cosh \left(\frac{\kappa}{\sigma_0} \Sigma_h \right) - (g+1)^2 - (g+f)^2 = 0. \quad (3.59)$$

Ce critère est identique à celui de Gologanu et al. (1994), rappelé en (3.24), avec des termes de cisaillement supplémentaires τ_p et τ_n :

$$\tau_p^2 = \Sigma_{xy}^2 + (\Sigma_{xx} - \Sigma_{yy})^2 / 4, \quad \tau_n^2 = \Sigma_{xz}^2 + \Sigma_{yz}^2. \quad (3.60)$$

Pour l'estimation proposée, les coefficients de Gologanu et al. (1997) (rappelés en (3.26)) sont utilisés : les coefficients C , η , g , κ apparaissant dans (3.59) sont, au final, remplacés par les C^* , η^* , g^* , κ^* de (3.26).

3.3 Cavités ellipsoïdales aplaties et orientées aléatoirement

Le domaine V étudié dans cette section est composé d'un assemblage de cellules élémentaires de type Ω (étudiées en 3.2) orientées aléatoirement (orientations équiprobables) et en nombre suffisant afin d'assurer l'isotropie globale de V . Le domaine V est schématisé sur la FIG. 3.8 : c'est un assemblage de cellules élémentaires orientées aléatoirement. D'après Benveniste et Milton (2003), tout l'espace peut être rempli par des cellules ellipsoïdales orientées aléatoirement (voir la démonstration dans l'annexe de Benveniste et Milton (2003)). Cette section propose une borne supérieure et une estimation analytique de la surface de plasticité.

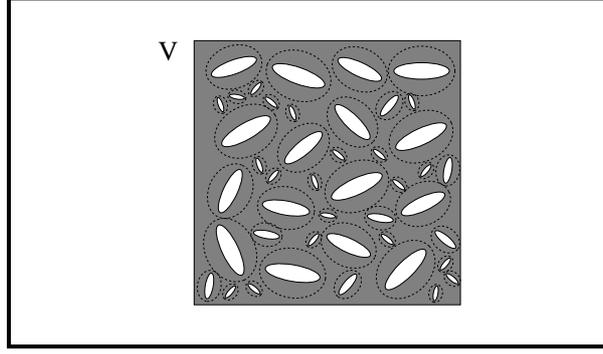


FIG. 3.8 – *Domaine V : assemblage de cellules élémentaires de type Ω orientées aléatoirement (orientations équiprobables).*

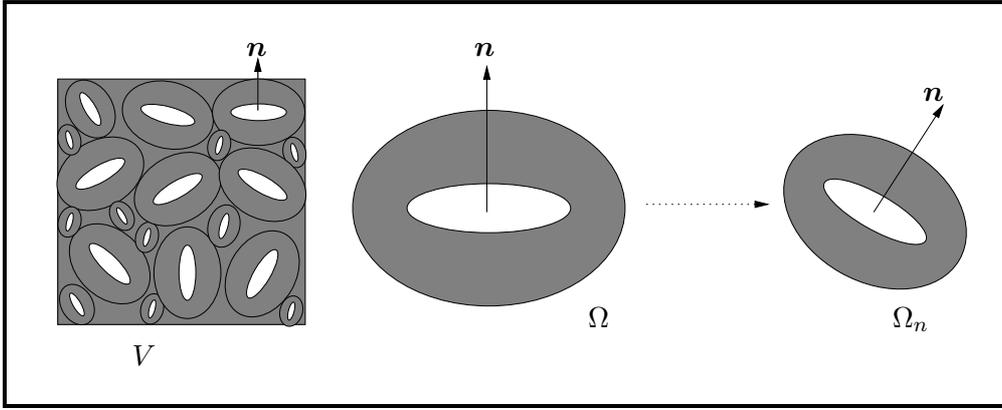


FIG. 3.9 – *Domaine V : assemblage de cellules élémentaires Ω_n orientées aléatoirement (orientations équiprobables). Domaine Ω : domaine de référence ou motif (les domaines Ω_n correspondent chacun à une translation, une rotation et une dilation de Ω). A chaque domaine Ω_n correspond un vecteur \mathbf{n} colinéaire à son axe de révolution.*

3.3.1 Approche de type Gurson : borne supérieure

Des conditions de taux de déformation homogène au bord sur ∂V sont appliquées. Un champ de vitesse est construit tel que $\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x}$ sur chaque ellipsoïde élémentaire $\partial\Omega_n$ (voir FIG. 3.9). Ce champ vérifie bien $\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x}$ sur ∂V . En utilisant le principe variationnel (équations (2.13) et (2.21)) et la borne supérieure (3.35) sur une cellule élémentaire Ω de référence (motif), le potentiel effectif est majoré par :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \oint \sigma_0 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{J(\lambda) \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{Q}(\mathcal{R}, \lambda) : \dot{\mathbf{E}}} d\lambda d\mathcal{R}, \quad (3.61)$$

où \mathcal{R} décrit une dépendance à l'orientation de la quantité considérée et \oint est une moyenne sur toutes les orientations possibles. Il est à noter que cette construction du champ de vitesse dans V nécessite le fait que $\dot{\mathbf{E}}$ sur la cellule élémentaire de référence soit totalement général (et pas seulement axisymétrique par exemple). L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \sigma_0 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{J(\lambda) \oint \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{Q}(\mathcal{R}, \lambda) : \dot{\mathbf{E}}} d\lambda. \quad (3.62)$$

Un résultat de Gatt et al. (2005) fournit :

$$\oint \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{Q}(\mathcal{R}, \lambda) : \dot{\mathbf{E}} d\mathcal{R} = 3Q_J \dot{E}_m^2 + \frac{3}{10} Q_K \dot{E}_{eq}^2, \quad \text{avec } Q_J = \mathbf{Q} :: \mathbf{J} \quad \text{et} \quad Q_K = \mathbf{Q} :: \mathbf{K}. \quad (3.63)$$

Après quelques calculs utilisant l'expression de \mathbf{Q} donnée en (3.36), il vient :

$$\begin{aligned} Q_J &= \frac{4}{9} \frac{b\pi}{|\Omega|} [b^2(-1 + 6R\tilde{\alpha} + 3Z_2\tilde{\alpha})^2 + 2a^2(1 - 6Z_2\tilde{\alpha} + 12R^2\tilde{\alpha}^2 + 12Z_2^2\tilde{\alpha}^2 + 9Z_2^2\tilde{\alpha}^2 \\ &\quad + 6Z_2\tilde{\alpha}(1 + 2R\tilde{\alpha} - 3Z_2\tilde{\alpha}))] \\ Q_K &= \frac{10}{3} J(\lambda). \end{aligned} \quad (3.64)$$

La surface de charge effective (critère de plasticité) est obtenue numériquement avec $\Sigma = \frac{\partial \Phi(\dot{\mathbf{E}})}{\partial \mathbf{E}}$:

$$\begin{aligned} \Sigma_m &= \frac{1}{3} \sigma_0 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{J(\lambda)} \frac{1}{\sqrt{3Q_J \dot{E}_m^2 + \frac{3}{10} Q_K \dot{E}_{eq}^2}} 3Q_J \dot{E}_m d\lambda, \\ \Sigma_{eq} &= \sigma_0 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{J(\lambda)} \frac{1}{\sqrt{3Q_J \dot{E}_m^2 + \frac{3}{10} Q_K \dot{E}_{eq}^2}} \frac{3}{10} Q_K \dot{E}_{eq} d\lambda. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Remarque 3.7 (Autre champ de vitesse) Dans le cas d'un champ de vitesse de type Gărăjeu (1995) (voir Annexe C), les calculs donnent :

$$\begin{aligned} Q_J^* &= \frac{4}{3} J(\lambda) \frac{(-1 + \mathfrak{A}^2)^2}{(1 + 2\mathfrak{A}^2)^2} + \frac{F_1(\lambda)}{c^2 \cosh^4 \lambda} \frac{4}{(1 + 2\mathfrak{A}^2)^2} - \frac{4F_2(\lambda)}{c^3} \frac{(1 - \mathfrak{A}^2)}{(1 + 2\mathfrak{A}^2)^2}, \\ Q_K^* &= \frac{10}{3} J(\lambda) = Q_K. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Remarque 3.8 (Point purement équivalent) Pour les deux champs de vitesse utilisés, le point purement équivalent (purement déviatorique) vaut $\sigma_0(1 - f)$ et correspond à la borne de Voigt.

La nouvelle borne supérieure constituée des équations (3.64) et (3.65) est appelée par la suite "Borne de type Gologanu non axisymétrique". De même, celle relative aux équations (3.65) et (3.66) est appelée "Borne de type Gărăjeu oblate".

3.3.2 Approche de type Gurson : estimation

De nouveau, on associe à la borne supérieure précédente une estimation permettant d'exhiber un critère analytique. Cette estimation est ici une moyenne sur les orientations de l'estimation obtenue dans le cas des cavités alignées.

Le critère de plasticité (3.59) sur la cellule élémentaire Ω (motif) peut se mettre sous la forme :

$$\Sigma : \mathbf{S}_0 : \Sigma + 2(g + 1)(g + f) \cosh(\mathbf{T}_0 : \Sigma) - (g + 1)^2 - (g + f)^2 = 0, \quad (3.67)$$

où \mathbf{S}_0 et \mathbf{T}_0 sont respectivement des tenseurs du quatrième ordre et du deuxième ordre, donnés en Annexe D.

A toute cellule élémentaire Ω_n de V est associé un vecteur \mathbf{n} colinéaire à l'axe de révolution de l'ellipsoïde Ω_n considéré. Chaque vecteur \mathbf{n} permet de définir entièrement l'orientation de l'ellipsoïde

Ω_n . Ainsi, pour chaque cellule élémentaire Ω_n de V , il existe un tenseur de rotation du deuxième ordre, $\mathbf{Q}^{(n)}$, dépendant de \mathbf{n} et tel que, pour cette cellule, le critère s'écrive :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}^{(n)} : \mathbf{S}_0 : \boldsymbol{\Sigma}^{(n)} + 2(g+1)(g+f) \cosh\left(\mathbf{T}_0 : \boldsymbol{\Sigma}^{(n)}\right) - (g+1)^2 - (g+f)^2 &= 0, \\ \text{avec : } \boldsymbol{\Sigma}^{(n)} &= \mathbf{Q}^{(n)} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{Q}^{(n)T}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

De plus, il existe un autre tenseur de rotation du deuxième ordre $\mathbf{R}^{(0)}$ permettant d'exprimer $\boldsymbol{\Sigma}$ dans la base associée à ses directions de contraintes principales :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{R}^{(0)} \cdot \bar{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \mathbf{R}^{(0)T}, \quad (3.69)$$

avec $\{\bar{\boldsymbol{\Sigma}}\}^T = (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, 0, 0, 0)$.

Ainsi, pour chaque cellule élémentaire Ω_n , il existe un tenseur du deuxième ordre $\mathbf{R}^{(n)} = \mathbf{Q}^{(n)} \cdot \mathbf{R}^{(0)}$, tel que :

$$\boldsymbol{\Sigma}^{(n)} = \mathbf{R}^{(n)} \cdot \bar{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \mathbf{R}^{(n)T} \quad (3.70)$$

Cela permet d'écrire, pour chaque cellule élémentaire Ω_n :

$$\boldsymbol{\Sigma}^{(n)} : \mathbf{S}_0 : \boldsymbol{\Sigma}^{(n)} = \bar{\boldsymbol{\Sigma}} : \mathbf{S}_0^{(n)} : \bar{\boldsymbol{\Sigma}}, \quad (3.71)$$

avec $(\mathbf{S}_0^{(n)})_{mnop} = (\mathbf{R}^{(n)T})_{mi}(\mathbf{R}^{(n)T})_{nj}(\mathbf{R}^{(n)T})_{ok}(\mathbf{R}^{(n)T})_{pl}(\mathbf{S}_0)_{ijkl}$.

La même démarche pour \mathbf{T}_0 donne :

$$\mathbf{T}_0 : \boldsymbol{\Sigma}^{(n)} = \mathbf{T}_0^{(n)} : \bar{\boldsymbol{\Sigma}}, \quad (3.72)$$

avec : $(\mathbf{T}_0^{(n)})_{kl} = (\mathbf{R}^{(n)T})_{ki}(\mathbf{T}_0)_{ij}(\mathbf{R}^{(n)})_{jl}$.

Le critère approché s'écrit ainsi pour toute cellule élémentaire Ω_n de V :

$$\bar{\boldsymbol{\Sigma}} : \mathbf{S}_0^{(n)} : \bar{\boldsymbol{\Sigma}} + 2(g+1)(g+f) \cosh\left(\mathbf{T}_0^{(n)} : \bar{\boldsymbol{\Sigma}}\right) - (g+1)^2 - (g+f)^2 \leq 0. \quad (3.73)$$

La moyenne sur les orientations de (3.73), notée \oint , conduit à :

$$\begin{aligned} \oint \bar{\boldsymbol{\Sigma}} : \mathbf{S}_0^{(n)} : \bar{\boldsymbol{\Sigma}} - (g+1)^2 - (g+f)^2 &\leq -2(g+1)(g+f) \oint \cosh\left(\mathbf{T}_0^{(n)} : \bar{\boldsymbol{\Sigma}}\right) \\ &\leq -2(g+1)(g+f) \cosh\left(\oint \mathbf{T}_0^{(n)} : \bar{\boldsymbol{\Sigma}}\right). \end{aligned} \quad (3.74)$$

En suivant Gologanu et al. (1993), ce dernier terme vaut $-2(g+1)(g+f) \cosh\left(\frac{\kappa}{\sigma_0} \Sigma_m\right)$. Le terme $\oint \bar{\boldsymbol{\Sigma}} : \mathbf{S}_0^{(n)} : \bar{\boldsymbol{\Sigma}}$ est calculé en utilisant la projection de \mathbf{S}_0 sur la base d'isotropie (\mathbf{J}, \mathbf{K}) (comme en (3.63)). Au final, le critère approché obtenu s'écrit :

$$C\eta^2 \left(\frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right)^2 + D \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0}\right)^2 + 2(g+1)(g+f) \cosh\left(\frac{\kappa}{\sigma_0} \Sigma_m\right) - (g+1)^2 - (g+f)^2 = 0, \quad (3.75)$$

où

$$D = \frac{4}{15}C \left(\frac{3}{4} + \frac{\eta^2}{3}(1 - 3\alpha_2)^2 + \eta(1 - 3\alpha_2)\right) + \frac{4}{5}. \quad (3.76)$$

Les coefficients C , η , α_2 , g , κ retenus sont ceux de Gologanu et al. (1994) (marqués d'une * en (3.26)).

Remarque 3.9 (Cas des cavités sphériques) Dans le cas des cavités sphériques, il est aisé de vérifier que $C^* = 1$, $\eta^* = 0$, $\kappa^* = 3/2$ et $g^* = 0$. Ainsi, le critère (3.75) est exactement le critère du Gurson original. _____

3.3.3 Comparaisons et résultats

Comparaison des deux bornes supérieures Les deux bornes supérieures obtenues en 3.3.1 (borne de type Gologanu non axisymétrique et borne de type Gărăjeu oblate) sont comparées sur la FIG. 3.10. Le point purement déviatorique est le même pour les deux bornes. Par contre, le point purement hydrostatique obtenu avec la borne de type Gologanu non axisymétrique est inférieur à celui obtenu avec la borne de type Gărăjeu oblate.

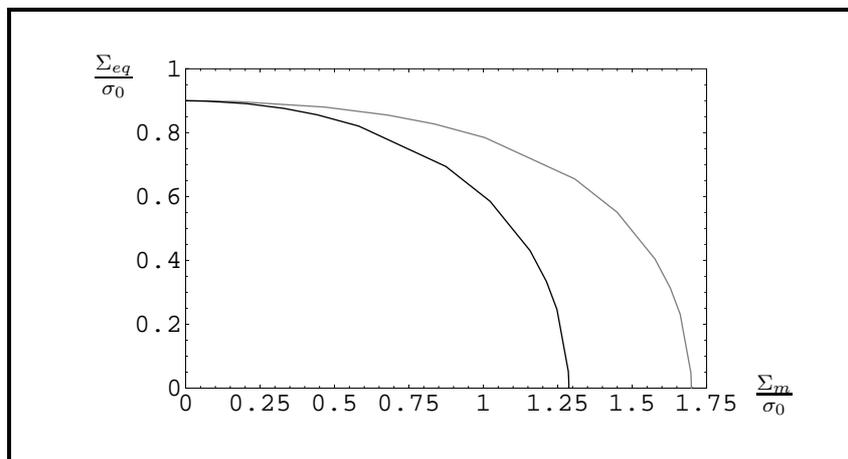


FIG. 3.10 – Critère de plasticité pour cavités ellipsoïdales aplaties orientées aléatoirement dans une matrice rigide plastique parfaite (critère de Von Mises) ($a_1/b_1 = 1/5$) : comparaison de la borne supérieure de type Gologanu non axisymétrique en noir et de la borne supérieure de type Gărăjeu oblate en gris. $a_1/b_1 = 1/5$, $f = 0.1$. La borne de type Gologanu non axisymétrique est plus pertinente que la borne de type Gărăjeu oblate.

Pertinence de l'estimation proposée Afin d'estimer le pertinence de l'estimation proposée, des simulations numériques par éléments finis sont réalisées sur la cellule élémentaire Ω (motif). Des conditions de contrainte homogène au bord sont appliquées dans le cas d'une contrainte hydrostatique : $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} = \Sigma_m \mathbf{I} \cdot \mathbf{N}$ sur $\partial\Omega$ (avec \mathbf{N} la normale extérieure à Ω). La valeur de la contrainte d'écoulement hydrostatique Σ_m est relevée. Cette valeur de Σ_m constitue une borne inférieure pour l'assemblage V concernant le point purement hydrostatique.

En effet, il est possible de construire un champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ dans V tel que, sur chaque cellule Ω_n , la condition, $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} = \Sigma_m \mathbf{I} \cdot \mathbf{N}$ sur son bord extérieur, soit respectée. Ce champ $\boldsymbol{\sigma}$ vérifie alors la condition $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} = \Sigma_m \mathbf{I} \cdot \mathbf{N}$ sur ∂V . Le champ $\boldsymbol{\sigma}$, dans chaque ellipsoïde Ω_n , résulte du calcul sur une cellule ellipsoïdale (en l'occurrence Ω_n) chargée en contrainte et de façon homogène sur sa face externe. Le champ $\boldsymbol{\sigma}$ vérifie bien $\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}$ dans chaque Ω_n et donc dans V . En vertu du principe variationnel (équations (2.18), (2.20) et (2.21)), l'utilisation de ce champ de contrainte permet d'obtenir une borne inférieure pour le critère de plasticité effectif. Etant donné que le chargement est hydrostatique, un seul calcul du champ $\boldsymbol{\sigma}$ sur la cellule de référence Ω est nécessaire. La valeur de la contrainte d'écoulement hydrostatique Σ_m obtenue sur Ω est relevée et constitue une borne inférieure pour V (à la précision des calculs par éléments finis près).

Les maillages utilisés sont donnés sur la FIG. 3.11 et les résultats sont donnés sur la FIG. 3.12.

La FIG. 3.12 montre que l'estimation proposée (3.75) ne viole pas la borne supérieure de type Gologanu non axisymétrique ((3.64) et (3.65)).

Dans le cas des fissures, la borne supérieure non linéaire exposée dans Ponte Castañeda et Suquet

(1998) est aussi reportée (voir FIG. 3.12). Il est à noter que le résultat de Ponte Castañeda et Suquet (1998) est une borne supérieure lorsque $g^* \leq 1$. Comme dans le cas des cavités sphériques exposé en 3.1.2, la borne supérieure de Ponte Castañeda et Suquet (1998) s'avère très pertinente pour le point purement déviatorique mais beaucoup trop majorante pour le point purement hydrostatique. Dans le cas du chargement purement déviatorique, l'estimation (3.75) viole légèrement la borne supérieure de Ponte Castañeda et Suquet (1998) mais reste meilleure que la borne de type Gologanu non axisymétrique qui correspond dans le cas des fissures à la borne de Voigt. Pour conclure, l'estimation proposée s'avère proche, en hydrostatique, de la borne supérieure due à l'approche de type Gurson (borne de type Gologanu non axisymétrique (3.65) (3.64)) et s'avère meilleure que cette dernière en cisaillement car plus proche de la borne supérieure due à l'approche variationnelle de Ponte Castañeda (1991) (borne supérieure exposée dans Ponte Castañeda et Suquet (1998)).

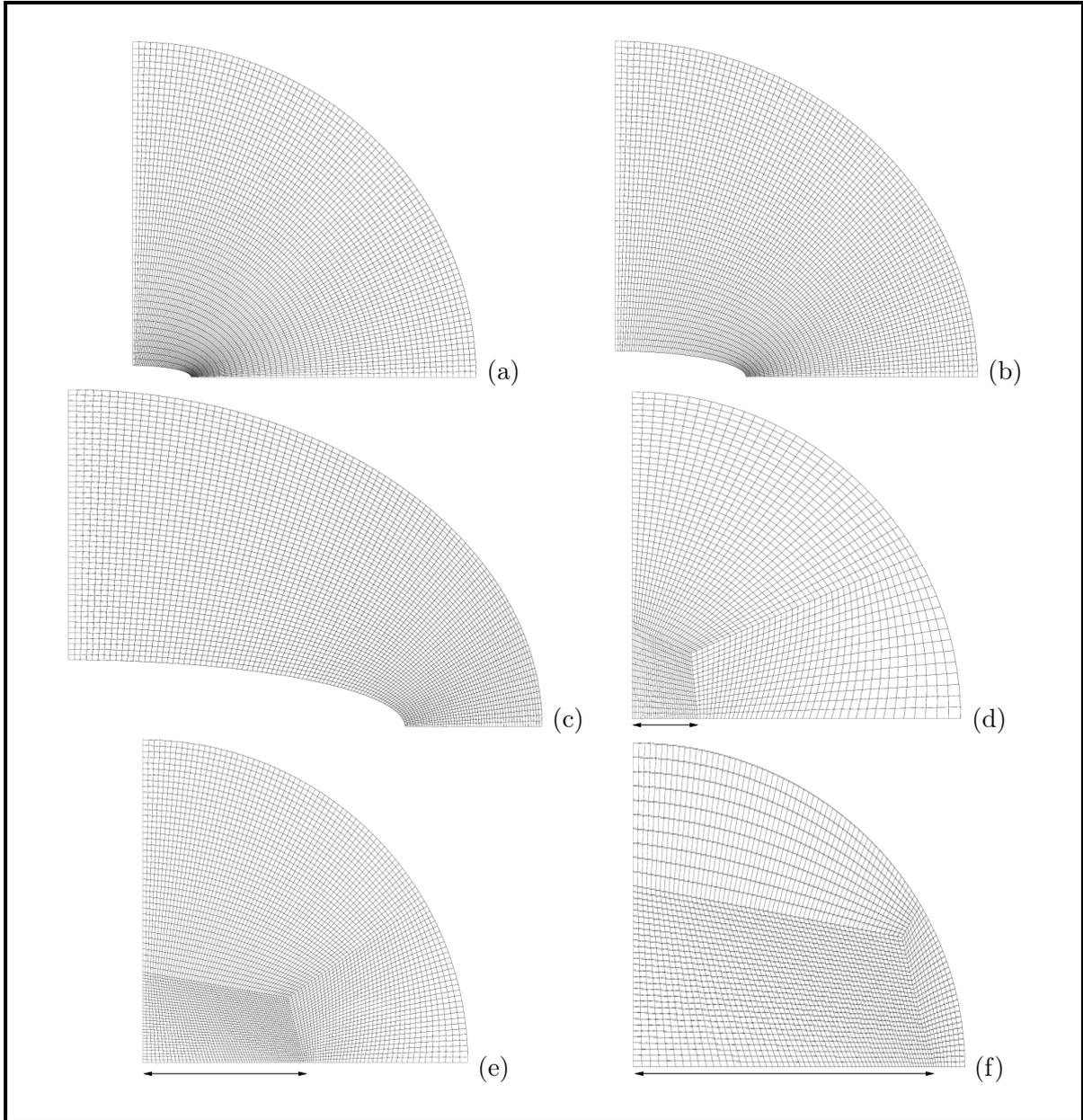


FIG. 3.11 – Maillages utilisés pour les simulations numériques par éléments finis (voir texte). (a) $f = 0.001$, $w = 1/5$, (b) $f = 0.01$, $w = 1/5$, (c) $f = 0.1$, $w = 1/5$. Cas des fissures : (d) $g^* = 0.008$, (e) $g^* = 0.14$, (f) $g^* = 1.67$ (sur chaque figure, la double flèche indique la longueur de la fissure).

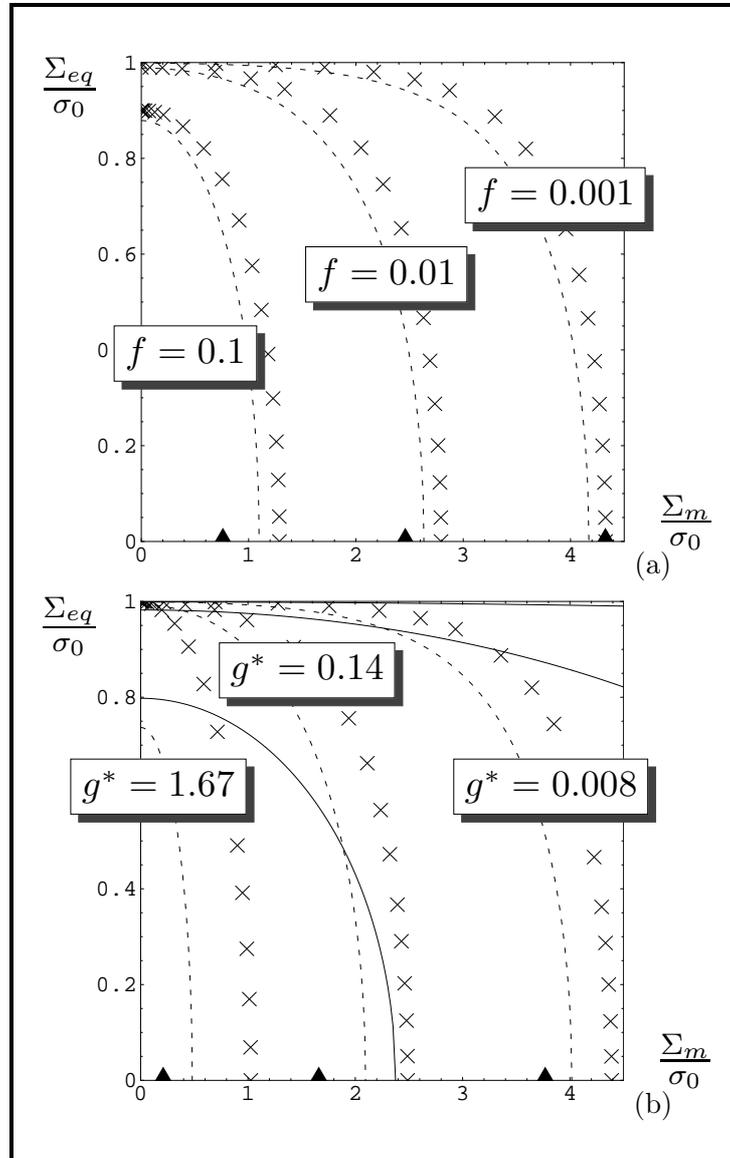


FIG. 3.12 – Critère de plasticité pour cavités ellipsoïdales aplaties orientées aléatoirement dans une matrice rigide plastique parfaite (critère de Von Mises) (a) ($a_1/b_1 = 1/5$); (b) fissures. Croix : borne supérieure de type Gologanu non axisymétrique. Triangles : borne inférieure issue des simulations numériques par éléments finis (voir texte); Trait discontinu : estimation (3.75). Trait plein : borne supérieure (lorsque $g^* \leq 1$) de Ponte Castañeda et Suquet (1998). Pertinence de l'estimation proposée.

Chapitre 4

Matériaux poreux avec deux populations de cavités

Ce chapitre traite des surfaces de plasticité pour un milieu poreux avec deux populations de cavités à deux échelles différentes. La première population de cavités (correspondant à la première échelle) est supposée sphérique et distribuée de façon isotrope. La deuxième population de cavités (correspondant à la deuxième échelle, i.e. l'échelle supérieure) est supposée :

- tout d'abord sphérique et distribuée de façon isotrope (section 4.1),
- puis ellipsoïdale aplatie et orientée selon une direction (section 4.2),
- et enfin ellipsoïdale aplatie et orientée aléatoirement dans le matériau (orientations équiprobables, section 4.3).

Comme dans le cas d'une unique population de cavités, deux façons différentes d'obtenir sur un tel matériau des bornes supérieures pour le critère de plasticité sont mises en œuvre.

- D'un côté, l'approche de "type Gurson" consiste à utiliser le principe variationnel (équations (2.13) et (2.21)) en choisissant un champ de vitesse précis en hydrostatique mais peu pertinent en cisaillement. Par conséquent, la borne supérieure obtenue par cette approche s'avère pertinente en hydrostatique mais trop majorante en cisaillement.
- D'un autre côté, l'utilisation du principe variationnel de Ponte Castañeda (1991) (équivalent à la méthode sécante modifiée, voir Suquet (1995) et Ponte Castañeda et Suquet (1998)) avec deux phases pour le composite linéaire de comparaison (comme explicité en 3.1.2) permet d'obtenir une borne supérieure pour le critère de plasticité. Contrairement à l'approche précédente, cette borne supérieure s'avère pertinente en cisaillement mais trop majorante en hydrostatique.

Ainsi, les deux approches précédentes sont mises en œuvre afin d'exhiber une estimation qui soit à la fois en accord avec l'approche de type Gurson en hydrostatique et en accord avec l'approche variationnelle de Ponte Castañeda (1991) en cisaillement. Deux estimations obtenues par l'intermédiaire des deux approches précédentes sont proposées. L'estimation issue de l'approche de type Gurson est entièrement analytique ; celle issue de l'approche variationnelle nécessite un traitement numérique. Dans le cas des cavités saturées (i.e. pressions non nulles dans les cavités, objet de la section 5), seule l'estimation issue de l'approche variationnelle est proposée dans ce document.

Les cavités à la première échelle étant supposées sphériques et réparties de façon isotrope, le critère de Gurson est utilisé (sous sa forme modifiée rappelée en (3.13)). Les coefficients q_1 et q_3 retenus sont donnés en (3.15) et en (3.16) pour les raisons exposées en 3.1.4. La porosité à la première échelle est maintenant notée f_b . Ainsi, le critère s'écrit :

$$q_3 \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^2 + 2q_1 f_b \cosh \left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_0} \right) - 1 - (q_1 f_b)^2 = 0, \quad (4.1)$$

$$q_1 = 1.25, \quad (4.2)$$

$$q_3(f_b) = \left(1 + \frac{2}{3}f_b\right) \frac{(1 - q_1 f_b)^2}{(1 - f_b)^2}. \quad (4.3)$$

Dans la suite du document, f_{qb} représente le produit $q_1 f_b$.

D'après la démarche aboutissant au critère de Gurson (démarche exposée en 3.1.1), il est rappelé que le potentiel en taux de déformation associé à ce critère s'écrit :

$$\varphi^G(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \sigma_0 \int_{f_{qb}}^1 \sqrt{\frac{4\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^2}{y^2} + \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^2}{q_3}} dy. \quad (4.4)$$

La démarche permettant d'obtenir une estimation du critère de plasticité par l'intermédiaire de la méthode sécante modifiée est validée par comparaison à des simulations numériques à la section 4.6. Ces simulations numériques utilisent la méthode de la transformée de Fourier rapide (FFT, Michel et al. (2000)) sur un milieu bidimensionnel contenant des cavités elliptiques orientées aléatoirement (orientations équiprobables) et plongées dans une matrice de Gurson. Les résultats de ces simulations numériques sont comparés aux résultats donnés par l'estimation du critère de plasticité obtenue avec la méthode sécante modifiée et écrite en déformations planes généralisées (l'écriture de ce modèle en déformations planes généralisées est détaillée au chapitre 7).

4.1 Cavités sphériques

Dans cette section, les cavités à la deuxième échelle sont supposées sphériques et réparties de façon isotrope. La porosité des cavités à la deuxième échelle est notée f_e . La matrice est constituée du milieu effectif de la première échelle dont la loi de comportement est donnée par le potentiel de Gurson modifié (4.4). Le domaine total est noté V et le domaine occupé par les cavités à la deuxième échelle est noté ω_e . Le problème à résoudre s'écrit, en taux de déformation homogène au bord :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \varphi^G}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) & \text{dans la matrice} \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0} & \text{dans } V \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} = 0 \mathbf{N} & \text{sur } \partial\omega_e, \mathbf{N} \text{ est la normale dirigée vers l'intérieur de } \omega_e \\ \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x} & \text{sur } \partial V \end{cases}$$

La contrainte effective issue de ce problème s'écrit : $\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_V$. Comme précisé dans Leblond (2003), le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ est prolongé par $\mathbf{0}$ dans ω_e . Les conditions $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} = 0 \mathbf{N}$ sur $\partial\omega_e$ et $\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}$ dans V sont toujours vérifiées. Le champ de vitesse $\dot{\mathbf{u}}$ est prolongé dans ω_e de façon à être de classe C^1 dans V .

La loi de comportement de la matrice du problème donné ci-dessus s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \varphi^G}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}). \quad (4.5)$$

La difficulté majeure de cette section réside dans le fait que la matrice est compressible contrairement aux approches plus classiques telles que celles traitées au chapitre 3 où la matrice est rigide plastique parfaite de Von Mises (donc incompressible).

Cette section 4.1 présente deux bornes supérieures obtenues avec deux approches différentes et deux estimations (issues des deux bornes).

4.1.1 Méthode sécante modifiée (approche variationnelle) : borne supérieure

La méthode sécante modifiée (dont le principe est présenté en 3.1.2) aboutit à la résolution du système d'équations donné ci-dessous. La démonstration est donnée en Annexe J dans le cas saturé (i.e. avec prise en compte des pressions dans les cavités). Le problème suivant est donc celui correspondant à l'équation (J.58) en considérant le cas drainé (pressions nulles).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Entrée : } \dot{\mathbb{E}}. \\ \text{Trouver } \mathbf{C}_o^1 \text{ et } \bar{\bar{\mathbb{E}}}^{(1)}, \text{ tels que :} \\ \mathbf{C}_o^1 = \frac{\partial \varphi^G}{\partial \mathbb{D}}(\bar{\bar{\mathbb{E}}}^{(1)}) \\ \bar{\bar{\mathbb{E}}}^{(1)} = \frac{1}{1-f_e} \frac{1}{2} \dot{\mathbb{E}} : \frac{\partial \mathbf{C}_o^{hom}}{\partial \mathbf{C}_o^1} : \dot{\mathbb{E}}. \end{array} \right. \quad (4.6)$$

La contrainte effective est donnée par $\Sigma = \mathbf{C}_o^{hom} : \dot{\mathbb{E}}$. Le tenseur $\bar{\bar{\mathbb{E}}}^{(1)}$ représente la moyenne volumique de \mathbb{E} sur la matrice (le tenseur \mathbb{E} est un tenseur d'ordre 4 et vaut $\frac{1}{2} \dot{\varepsilon} \otimes \dot{\varepsilon}$). L'équation donnant \mathbf{C}_o^1 provient de la définition du module sécant évalué pour $\mathbb{E} = \bar{\bar{\mathbb{E}}}^{(1)}$ et représente le tenseur de raideur de la matrice du composite linéaire de comparaison. Le composite linéaire de comparaison est pris ici de même géométrie que le milieu non linéaire. Le tenseur \mathbf{C}_o^{hom} représente le tenseur de raideur effectif du composite linéaire de comparaison. L'expression de $\frac{\partial \varphi^G}{\partial \mathbb{E}}$ est détaillée en Annexe J et s'écrit :

$$\frac{\partial \varphi^G}{\partial \mathbb{E}} = \mathfrak{A} \mathbf{J} + \mathfrak{B} \mathbf{K}, \text{ avec :} \quad (4.7)$$

$$\mathfrak{A} = \frac{2}{3} \sigma_0 \frac{1}{\sqrt{(\dot{\varepsilon}_m)^2}} \left(-\text{Arcsinh} \left(2 \sqrt{\frac{(\dot{\varepsilon}_m)^2}{(\dot{\varepsilon}_{eq})^2} q_3} \right) + \text{Arcsinh} \left(\frac{2}{f_{qb}} \sqrt{\frac{(\dot{\varepsilon}_m)^2}{(\dot{\varepsilon}_{eq})^2} q_3} \right) \right), \quad (4.8)$$

$$\mathfrak{B} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{(\dot{\varepsilon}_{eq})^2} \left(\sqrt{4(\dot{\varepsilon}_m)^2 + \frac{(\dot{\varepsilon}_{eq})^2}{q_3}} - f_{qb} \sqrt{\frac{4(\dot{\varepsilon}_m)^2}{(f_{qb})^2} + \frac{(\dot{\varepsilon}_{eq})^2}{q_3}} \right). \quad (4.9)$$

Chaque phase étant isotrope et le milieu total étant macroscopiquement isotrope, le problème ci-dessus se met sous la forme suivante (calculs donnés en Annexe J) :

Entrées : \dot{E}_m et \dot{E}_{eq} ;

répéter

$$k_o^1 = \frac{2}{9} \sigma_0 \frac{1}{\sqrt{(\dot{\varepsilon}_m)^2}} \left(-\text{Arcsinh} \left(2 \sqrt{\frac{(\dot{\varepsilon}_m)^2}{(\dot{\varepsilon}_{eq})^2} q_3} \right) + \text{Arcsinh} \left(\frac{2}{f_{qb}} \sqrt{\frac{(\dot{\varepsilon}_m)^2}{(\dot{\varepsilon}_{eq})^2} q_3} \right) \right) ;$$

$$\mu_o^1 = \frac{1}{3} \frac{\sigma_0}{(\dot{\varepsilon}_{eq})^2} \left(\sqrt{4(\dot{\varepsilon}_m)^2 + \frac{(\dot{\varepsilon}_{eq})^2}{q_3}} - f_{qb} \sqrt{\frac{4(\dot{\varepsilon}_m)^2}{(f_{qb})^2} + \frac{(\dot{\varepsilon}_{eq})^2}{q_3}} \right) ;$$

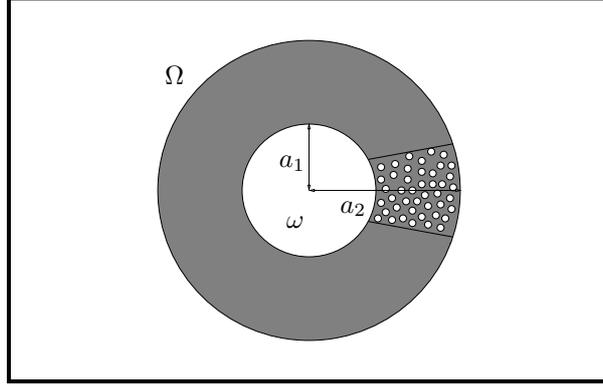
$$(\dot{\varepsilon}_m)^2 = \frac{1}{3(1-f_e)} \frac{\partial \mu_o^{hom}}{\partial k_o^1} (\dot{E}_{eq})^2 + \frac{1}{1-f_e} \frac{\partial k_o^{hom}}{\partial k_o^1} (\dot{E}_m)^2 ;$$

$$(\dot{\varepsilon}_{eq})^2 = \frac{1}{(1-f_e)} \frac{\partial \mu_o^{hom}}{\partial \mu_o^1} (\dot{E}_{eq})^2 + \frac{3}{1-f_e} \frac{\partial k_o^{hom}}{\partial \mu_o^1} (\dot{E}_m)^2 ;$$

jusqu'à convergence sur $(\dot{\varepsilon}_m)^2$ et $(\dot{\varepsilon}_{eq})^2$;

Sorties : $\Sigma_m = 3k_o^{hom} \dot{E}_m$ et $\Sigma_{eq} = 3\mu_o^{hom} \dot{E}_{eq}$.

Les coefficients k_o^{hom} et μ_o^{hom} sont respectivement les coefficients de compressibilité et de cisaillement effectifs du composite linéaire de comparaison. La borne supérieure de Hashin et Shtrikman


 FIG. 4.1 – *Sphère creuse avec matrice poreuse.*

(1963) est utilisée pour déterminer ces coefficients, i.e. $k_o^{hom} = k_o^{HS}$ et $\mu_o^{hom} = \mu_o^{HS}$. Les expressions de k_o^{HS} , μ_o^{HS} , $\frac{\partial k_o^{HS}}{\partial k_o^1}$, $\frac{\partial \mu_o^{HS}}{\partial k_o^1}$, $\frac{\partial k_o^{HS}}{\partial \mu_o^1}$, $\frac{\partial \mu_o^{HS}}{\partial \mu_o^1}$ sont données en Annexe E.

Le système d'équations précédent est résolu avec un algorithme de point fixe.

Le résultat obtenu est une borne supérieure pour le critère de plasticité. **Le modèle obtenu est noté MSM sphérique dans ce document.**

4.1.2 Approche de type Gurson : borne supérieure

Le problème de la sphère creuse avec condition de taux de déformation homogène aux bords est repris (voir 3.1.1). Le volume élémentaire (domaine Ω) est une sphère creuse de rayons interne et externe notés respectivement a_1 et a_2 (voir FIG. 4.1). Des conditions de taux de déformation homogène au bord, $\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x}$, sont appliquées sur la surface externe du volume élémentaire. La matrice (domaine $\Omega - \omega$) suit le critère de Gurson sous sa forme modifiée (potentiel φ^G (4.4)). Le champ de vitesse dans la matrice est pris sous la forme :

$$\dot{\mathbf{v}} = A \mathbf{x} + \dot{\mathbf{v}}^G (\dot{\mathbf{E}} - A \mathbf{I}). \quad (4.10)$$

Le champ $A \mathbf{x}$ permet d'introduire une composante compressible au champ $\dot{\mathbf{v}}^G$, champ de l'analyse initiale de Gurson présentée en 3.1.1. Le champ $\dot{\mathbf{v}}^G$ est pris cinématiquement admissible avec $\dot{\mathbf{E}} - A \mathbf{I}$, i.e. :

$$\dot{\mathbf{v}}^G = (\dot{\mathbf{E}} - A \mathbf{I}) \cdot \mathbf{x}, \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (4.11)$$

Ainsi le champ $\dot{\mathbf{v}}$ vérifie $\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x}$ sur $\partial\Omega$. Etant donné le potentiel pour la matrice (rappelé en (4.4)), le principe variationnel (équations (2.13) et (2.21)) implique que :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \inf_A \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega-\omega} \varphi^G(\varepsilon(\dot{\mathbf{v}})) d\Omega = \inf_A \frac{\sigma_0}{|\Omega|} \int_{\Omega-\omega} \int_{q_1 f_b}^1 \left(\frac{4(\varepsilon_m(\dot{\mathbf{v}}))^2}{y^2} + \frac{(\varepsilon_{eq}(\dot{\mathbf{v}}))^2}{q_3} \right)^{1/2} dy d\Omega. \quad (4.12)$$

Etant donné que dans la matrice, $\varepsilon_m(\dot{\mathbf{v}}) = A$ est uniforme et que $(\varepsilon_{eq}(\dot{\mathbf{v}}))^2 = (\varepsilon_{eq}(\dot{\mathbf{v}}^G))^2$, cela donne :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \inf_A \frac{\sigma_0}{|\Omega|} \int_{\Omega-\omega} \int_{q_1 f_b}^1 \left(\frac{4A^2}{y^2} + \frac{(\varepsilon_{eq}(\dot{\mathbf{v}}^G))^2}{q_3} \right)^{1/2} dy d\Omega. \quad (4.13)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est appliquée (comme en 3.1.1, inégalité (3.5)) :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \inf_A \frac{\sigma_0}{|\Omega|} \int_{q_1 f_b}^1 \int_{r=a_1}^{r=a_2} S(r) \sqrt{\frac{4A^2}{y^2} + \frac{1}{S(r)} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{(\varepsilon_{eq}(\dot{\mathbf{v}}^G))^2}{q_3} dS dr dy}. \quad (4.14)$$

L'analyse détaillée en 3.1.1, permet de calculer le terme : $\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} (\varepsilon_{eq}(\dot{\mathbf{v}}^G))^2 dS$. Le même changement de variables qu'en 3.1.1 ($z = (r/a_2)^3$) est effectué :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \inf_A \sigma_0 \int_{q_1 f_b}^1 \int_{f_e}^1 \sqrt{\frac{4A^2}{y^2} + \frac{4}{q_3} \frac{(\dot{E}_m - A)^2}{z^2} + \frac{\dot{E}_{eq}^2}{q_3}} dz dy. \quad (4.15)$$

Remarque 4.1 (Assemblage) Comme le critère de Gurson initial, le résultat (4.15) est une borne supérieure pour l'assemblage de Hashin.

Le A solution qui minimise (4.15) est noté A_{sol} et vérifie (dérivation de (4.15) par rapport à A) :

$$\int_{q_1 f_b}^1 \int_{f_e}^1 \left(\frac{4A_{sol}^2}{y^2} + \frac{4}{q_3} \frac{(\dot{E}_m - A_{sol})^2}{z^2} + \frac{\dot{E}_{eq}^2}{q_3} \right)^{-1/2} \left(\frac{4A_{sol}}{y^2} - \frac{4}{q_3} \frac{(\dot{E}_m - A_{sol})}{z^2} \right) dz dy = 0. \quad (4.16)$$

La règle $\Sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{E}}}(\dot{\mathbf{E}})$ donne avec l'équation précédente et (4.15) :

$$\begin{aligned} \Sigma_m &= \left. \frac{1}{3} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{E}_m}(\dot{\mathbf{E}}) \right|_{A=A_{sol}} \\ &= \frac{1}{3} \sigma_0 \int_{q_1 f_b}^1 \int_{f_e}^1 \left(\frac{4A_{sol}^2}{y^2} + \frac{4}{q_3} \frac{(\dot{E}_m - A_{sol})^2}{z^2} + \frac{\dot{E}_{eq}^2}{q_3} \right)^{-1/2} \frac{4(\dot{E}_m - A_{sol})}{q_3 z^2} dz dy \\ \Sigma_{eq} &= \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{E}_{eq}}(\dot{\mathbf{E}}) \right|_{A=A_{sol}} \\ &= \sigma_0 \int_{q_1 f_b}^1 \int_{f_e}^1 \left(\frac{4A_{sol}^2}{y^2} + \frac{4}{q_3} \frac{(\dot{E}_m - A_{sol})^2}{z^2} + \frac{\dot{E}_{eq}^2}{q_3} \right)^{-1/2} \frac{\dot{E}_{eq}}{q_3} dz dy. \end{aligned} \quad (4.17)$$

4.1.3 Comparaison entre les deux bornes supérieures précédentes

Les deux bornes supérieures obtenues avec la méthode sécante modifiée en 4.1.1 et l'approche de type Gurson en 4.1.2 sont comparées. Le même type de résultat que dans le cas d'une seule population de cavité est obtenu. Afin d'estimer le caractère majorant de ces bornes, la solution hydrostatique du problème de sphère creuse avec matrice de Gurson est rappelée dans un premier temps.

Point hydrostatique de Perrin (1992) et Leblond (2003) (rappels) Perrin étudie le problème de la sphère creuse avec matrice de Gurson et avec un chargement hydrostatique en tension et en contrainte homogène aux bords i.e. $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} = \Sigma_m \mathbf{N}$ sur $\partial\Omega$ avec $\Sigma_m \geq 0$. L'intégration de l'équation d'équilibre dans la matrice combinée aux conditions aux limites et au critère vérifié dans la matrice conduit au système d'équations suivant (donné ici avec $q_1 = q_3 = 1$, voir Perrin (1992)) :

$$\begin{cases} v_a^2 + 2f_b \cosh(v_a) - 1 - (f_b)^2 = 0 \\ \frac{v_b}{v_a} = f_e \exp \left(2 \int_{v_b}^{v_a} \frac{1}{\sqrt{(1 + (f_b)^2 - v^2)^2 - 4(f_b)^2}} dv \right) \\ \frac{\Sigma_m}{\sigma_0} = \frac{2}{3} \left(\operatorname{arccosh} \left(\frac{1 + (f_b)^2 - (v_b)^2}{2f_b} \right) - v_b \right). \end{cases} \quad (4.18)$$

Ce système d'équations peut être résolu numériquement. Perrin propose les simplifications suivantes (voir Perrin (1992) ou Leblond (2003)) : dans le critère de Gurson, le $2 \cosh(v_a)$ est remplacé par

$\exp(v_a)$ et le terme en $(f_b)^2$ est négligé. Les équations précédentes se simplifient alors en :

$$\begin{cases} v_a^2 + f_b \exp(v_a) - 1 - (f_b)^2 = 0 \\ \tilde{\lambda} = f_e \frac{v_a(1+v_a)}{1-v_a} \\ v_b = \frac{1}{2} \left(-\tilde{\lambda} - 1 + \sqrt{\tilde{\lambda}^2 + 6\tilde{\lambda} + 1} \right) \\ \frac{\Sigma_m}{\sigma_0} = \frac{2}{3} \left(-v_b + \ln \left(\frac{1 + (f_b)^2 - v_b^2}{f_b} \right) \right). \end{cases} \quad (4.19)$$

La première équation de (4.19) est une équation implicite en v_a . Les autres équations donnent Σ_m . Compte tenu de la géométrie et du type de chargement, la solution du problème (4.18) constitue la solution exacte du problème de la sphère creuse avec matrice de Gurson et chargement homogène hydrostatique sur le bord extérieur.

Comparaison La FIG. 4.2 montre que, dans le cas d'un chargement purement déviatorique, la méthode sécante modifiée est meilleure que l'approche de type Gurson (le point purement déviatorique de la méthode sécante modifiée est inférieur au point purement déviatorique de l'approche de type Gurson) et que, dans le cas d'un chargement purement hydrostatique, l'approche de type Gurson est meilleure que la méthode sécante modifiée (le point purement hydrostatique de la méthode sécante modifiée est supérieur au point purement hydrostatique de l'approche de type Gurson). Le point numérique de Perrin (1992) est aussi représenté car il représente la solution exacte pour le problème de la sphère creuse avec matrice de Gurson (trait vertical).

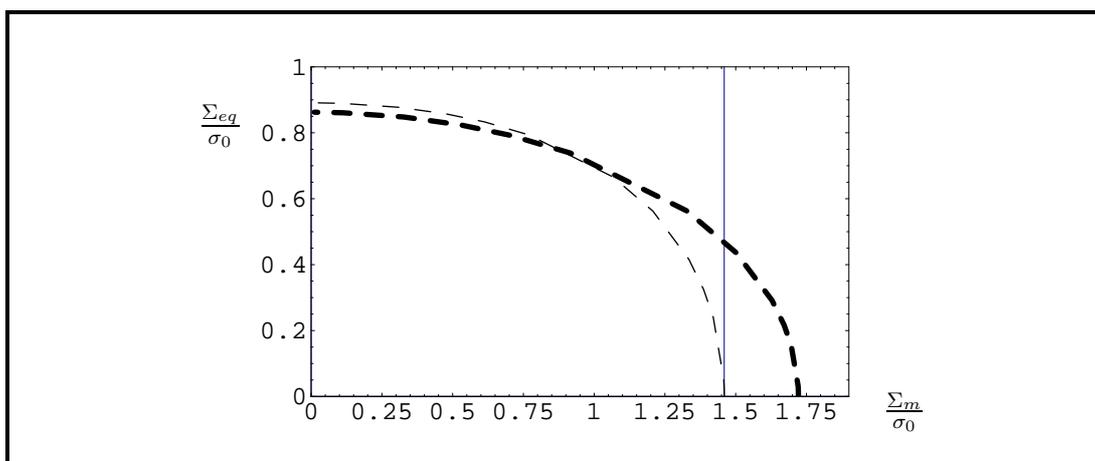


FIG. 4.2 – Critères de plasticité : borne supérieure obtenue avec la méthode sécante modifiée (section 4.1.1, trait discontinu épais), borne supérieure obtenue avec l'approche de type Gurson (section 4.1.2, potentiel (4.15), trait discontinu fin). Point hydrostatique de Perrin (1992) (trait vertical). $f_e = 0.1$, $f_b = 0.01$, $q_3 = q_1 = 1$. La borne supérieure obtenue avec la méthode sécante modifiée (resp. l'approche de type Gurson) est meilleure en déviatorique pur (resp. hydrostatique pur) que la borne supérieure obtenue avec l'approche de type Gurson (resp. la méthode sécante modifiée).

4.1.4 Méthode sécante modifiée (approche variationnelle) à N phases : estimation

Comme indiqué par la comparaison précédente sur la FIG.4.2, la borne supérieure obtenue avec la méthode sécante modifiée dans la section 4.1.1 ne conduit pas à une bonne estimation du critère

de plasticité dans le cas du chargement purement hydrostatique. L'idée de cette section est de reprendre l'analyse de Bilger et al. (2002) présentée en 3.1.2 en utilisant une matrice obéissant au critère de Gurson modifié :

$$q_3 \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^2 + 2q_1 f_b \cosh \left(\frac{3\sigma_m}{2\sigma_0} \right) - 1 - (q_1 f_b)^2 = 0, \quad (4.20)$$

dont on rappelle le potentiel en taux de déformation associé :

$$\varphi^G(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \sigma_0 \int_{f_{qb}}^1 \sqrt{\frac{4\dot{\varepsilon}_m^2}{y^2} + \frac{\dot{\varepsilon}_{eq}^2}{q_3}} dy. \quad (4.21)$$

La méthode sécante modifiée est mise en œuvre en utilisant le même composite linéaire de comparaison que Bilger et al. (2002) : sphère creuse à $N - 1$ phases concentriques entourant la porosité centrale (voir la FIG. F.1). Toutes les couches sont choisies arbitrairement de même épaisseur. La fraction volumique de chaque couche est notée f_i et le domaine occupé par chaque couche est noté Ω_i . L'estimation autocohérente de Hervé et Zaoui (1993), présentée en Annexe F, est utilisée pour le comportement effectif du composite linéaire de comparaison. Le résultat obtenu constitue une estimation du critère de plasticité macroscopique. Les équations à résoudre s'écrivent à la manière de la méthode sécante modifiée à deux phases (voir équations (4.6) et Annexe J) :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{E}} \text{ donné, trouver } \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_V \text{ tel que, } \forall i (2 \leq i \leq N) : \\ \mathbf{C}_o^i = \frac{\partial \varphi^G}{\partial \mathbb{E}}(\bar{\mathbb{E}}^{(i)}) \\ \bar{\mathbb{E}}^{(i)} = \frac{1}{f_i} \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{E}} : \frac{\partial \mathbf{C}_o^{hom}}{\partial \mathbf{C}_o^i} : \dot{\boldsymbol{E}} \\ \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_V = \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{C}_o^{hom} : \dot{\boldsymbol{E}} \end{cases} \quad (4.22)$$

Le tenseur $\bar{\mathbb{E}}^{(i)}$ représente la moyenne volumique de $\dot{\mathbb{E}} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ sur la phase i . L'équation donnant \mathbf{C}_o^i provient de la définition du module sécant évalué, dans chaque phase i du CLC, pour $\dot{\mathbb{E}} = \bar{\mathbb{E}}^{(i)}$. Le tenseur \mathbf{C}_o^i représente le tenseur de raideur de la phase i du composite linéaire de comparaison et le tenseur \mathbf{C}_o^{hom} représente le tenseur de raideur effectif du composite linéaire de comparaison. Chaque phase étant isotrope et le milieu total étant macroscopiquement isotrope, le problème ci-dessus se met sous la forme suivante (calculs donnés en Annexe J) :

Entrées : \dot{E}_m et \dot{E}_{eq} ;

répéter

$\forall i (2 \leq i \leq N) :$

$$k_o^i = \frac{2}{9} \sigma_0 \frac{1}{\sqrt{\langle (\dot{\varepsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}}} \left(-\text{Arcsinh} \left(2 \sqrt{\frac{\langle (\dot{\varepsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}}{\langle (\dot{\varepsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}}} q_3 \right) + \text{Arcsinh} \left(\frac{2}{f_{qb}} \sqrt{\frac{\langle (\dot{\varepsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}}{\langle (\dot{\varepsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}}} q_3 \right) \right) ;$$

$$\mu_o^i = \frac{1}{3} \frac{\sigma_0}{\langle (\dot{\varepsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}} \left(\sqrt{4 \langle (\dot{\varepsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i} + \frac{\langle (\dot{\varepsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}}{q_3}} - f_{qb} \sqrt{\frac{4 \langle (\dot{\varepsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}}{(f_{qb})^2} + \frac{\langle (\dot{\varepsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}}{q_3}} \right) ;$$

$$\langle (\dot{\varepsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i} = \frac{1}{f_i} \frac{\partial k_o^{hom}}{\partial k_o^i} (\dot{E}_m)^2 + \frac{1}{3f_i} \frac{\partial \mu_o^{hom}}{\partial k_o^i} (\dot{E}_{eq})^2 ;$$

$$\langle (\dot{\varepsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i} = \frac{3}{f_i} \frac{\partial k_o^{hom}}{\partial \mu_o^i} (\dot{E}_m)^2 + \frac{1}{f_i} \frac{\partial \mu_o^{hom}}{\partial \mu_o^i} (\dot{E}_{eq})^2 ;$$

jusqu'à convergence sur $\langle (\dot{\varepsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}$ et $\langle (\dot{\varepsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}$, $\forall i (2 \leq i \leq N)$;

Sorties : $\Sigma_m = 3k_o^{hom} \dot{E}_m$ et $\Sigma_{eq} = 3\mu_o^{hom} \dot{E}_{eq}$.

Un algorithme de point fixe permet d'atteindre en peu d'itérations la convergence de ce problème. Le critère d'arrêt utilisé porte sur la variation des moyennes par phases des seconds moments du taux de déformation :

$$\begin{aligned} & \left| \left(\langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i} \right)_{\text{réactualisé}} - \langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i} \right| < 0.01 \langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i} \\ \text{et :} & \\ & \left| \left(\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i} \right)_{\text{réactualisé}} - \langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i} \right| < 0.01 \langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Le calcul des dérivées partielles se fait numériquement en utilisant une formulation approchée à l'ordre 1. Les coefficients $k_o^{hom} = k_o^{HZ}$ et $\mu_o^{hom} = \mu_o^{HZ}$ de l'estimation auto-cohérente de Hervé et Zaoui (1993) sont donnés en Annexe F. **Le modèle développé dans cette section est appelé par la suite MSMN sphérique (Méthode Sécante Modifiée à N phases).**

Résultats : Le point hydrostatique obtenu avec cette méthode tend vers le point de Perrin (1992) donné en (4.18) lorsque le nombre de phases N augmente. Cela est illustré sur la FIG. 4.3. De plus, il est vérifié que le critère obtenu par cette méthode respecte les deux bornes supérieures obtenues aux sections 4.1.1 et 4.1.2 (méthode sécante modifiée avec 2 phases et approche de type Gurson) lorsque le nombre de phases N augmente. Cela est illustré sur la FIG. 4.4. Enfin des simulations numériques par éléments finis ont été réalisées sur des quarts de sphères creuses (axisymétrie). Deux fractions volumiques ($f_e = 0.01$ et $f_e = 0.1$) pour la cavité centrale ont été testées. La FIG. 4.5 représente les maillages utilisés. Des conditions de taux déformation homogène au bord sont appliquées. Chaque direction de contrainte peut être imposée (méthode de pilotage en contrainte analogue à celle décrite dans Michel et al. (1999)). La matrice suit le critère de Gurson (critère GTN avec $q_1 = q_3 = 1$). Les simulations numériques sont réalisées pour différentes valeurs de la porosité f_b ($f_b = 0.01$ et $f_b = 0.1$). Les critères obtenus par l'intermédiaire de la méthode développée dans cette section (méthode sécante modifiée à N phases) sont en bon accord avec les critères obtenus par simulations numériques (voir FIG. 4.6).

4.1.5 Approche de type Gurson : estimation

Cette section propose un critère approché, dérivé de la borne supérieure de type Gurson (4.15). L'idée est d'utiliser un champ de vitesse compressible approché pour estimer le potentiel (4.15). Le point purement hydrostatique et le point purement déviatorique sont ensuite calculés à l'aide de cette approximation et un critère de type Gurson reliant ces deux points est proposé. Le critère obtenu est proche de la borne supérieure (4.15) et des simulations numériques par éléments finis présentées en 4.1.4. L'avantage de ce critère est qu'il est totalement analytique. On rappelle que le potentiel (4.15) s'écrit :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \inf_A \sigma_0 \int_{q_1 f_b}^1 \int_{f_e}^1 \sqrt{\frac{4A^2}{y^2} + \frac{4}{q_3} \frac{(\dot{E}_m - A)^2}{z^2} + \frac{\dot{E}_{eq}^2}{q_3}} dz dy. \quad (4.24)$$

L'approximation proposée consiste à prendre A sous la forme :

$$\bar{A} \equiv \frac{q_1 f_b}{f_e + q_1 f_b} \dot{E}_m. \quad (4.25)$$

Ce choix conserve le statut de borne supérieure de (4.24) et le \bar{A} proposé correspond à la solution exacte de l'infimum de (4.24) lorsque :

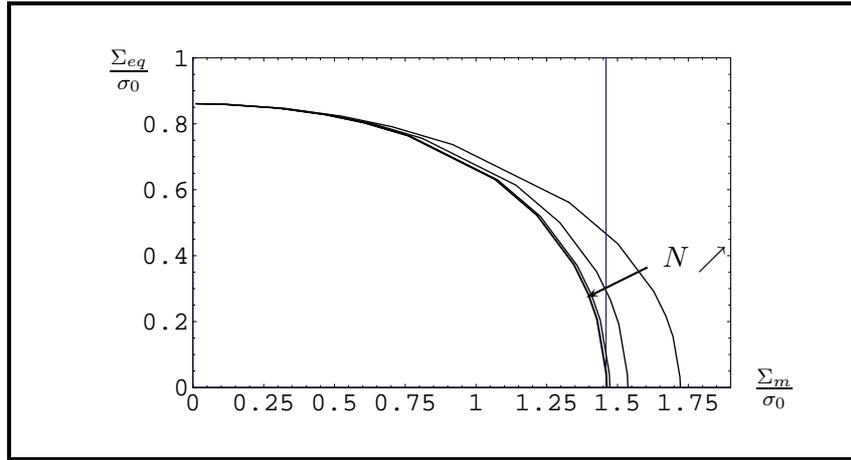


FIG. 4.3 – Critères de plasticité : estimations obtenues avec la méthode sécante modifiée à N phases (section 4.1.4, trait continu) pour $N = 2, N = 3, N = 6, N = 11, N = 21$ (solution "convergée" pour $N \geq 6$). Point hydrostatique de Perrin (1992) (trait vertical). $f_e = 0.1, f_b = 0.01, q_3 = q_1 = 1$. Le point purement hydrostatique obtenu avec la méthode sécante modifiée à N phases (section 4.1.4) tend vers le point de Perrin (1992) donné en (4.18) lorsque le nombre de phases N augmente.

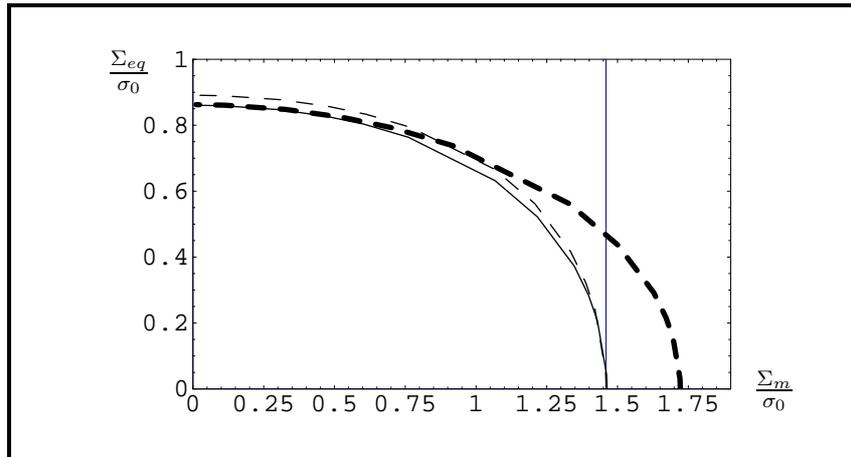


FIG. 4.4 – Critères de plasticité : borne supérieure obtenue avec la méthode sécante modifiée (section 4.1.1, trait discontinu épais), borne supérieure obtenue avec l'approche de type Gurson (section 4.1.2, potentiel (4.15), trait discontinu fin), estimation obtenue avec la méthode sécante modifiée à $N = 11$ phases (section 4.1.4, trait continu). Point hydrostatique de Perrin (1992) (trait vertical). $f_e = 0.1, f_b = 0.01, q_3 = q_1 = 1$. Le critère obtenu via la méthode sécante modifiée à $N = 11$ phases respecte les deux bornes supérieures obtenues aux sections 4.1.1 et 4.1.2 (méthode sécante modifiée avec 2 phases et approche de type Gurson).

- $f_b = 0$ (dans ce cas, $A = 0$ est solution du problème d'infimum (4.24)),
- $f_e = 0$, (dans ce cas, $A = \dot{E}_m$ est solution du problème d'infimum (4.24)),
- $q_3 = 1$ et $q_1 f_b = f_e$, (dans ce cas, $A = 1/2 \dot{E}_m$ est solution du problème d'infimum (4.24)).

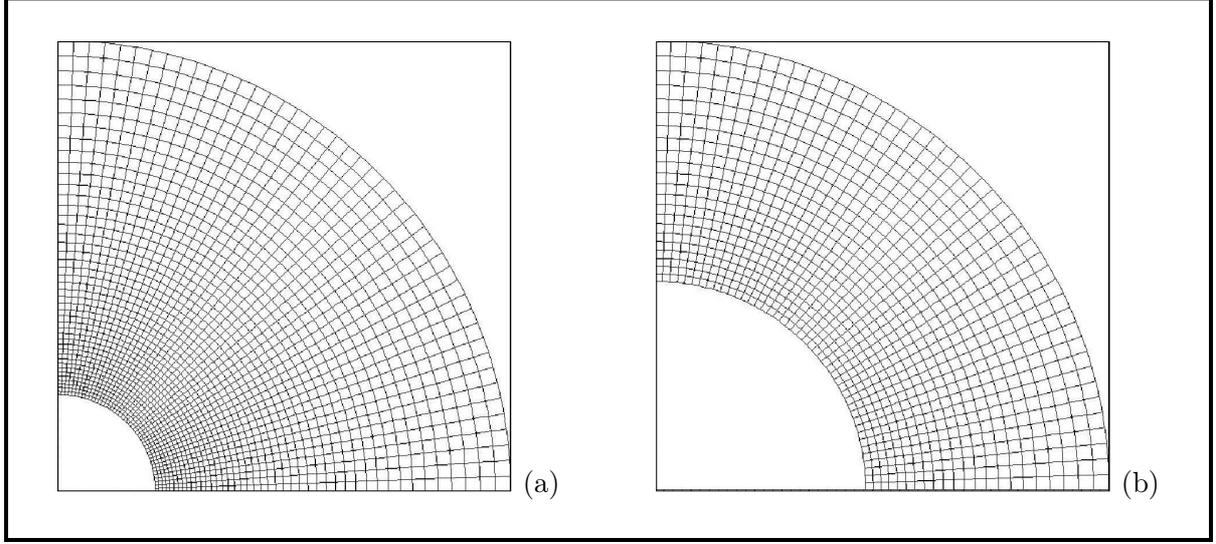


FIG. 4.5 – Maillages utilisés pour les simulations numériques par éléments finis : (a) $f_e = 0.01$, (b) $f_e = 0.1$.

En utilisant $A = \bar{A}$, la borne supérieure (4.24) est encore majorée par :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \sigma_0 \int_{q_1 f_b}^1 \int_{f_e}^1 \sqrt{\frac{4q_1^2 f_b^2}{(f_e + q_1 f_b)^2} \frac{\dot{E}_m^2}{y^2} + \frac{4f_e^2}{q_3 (f_e + q_1 f_b)^2} \frac{\dot{E}_m^2}{z^2} + \frac{\dot{E}_{eq}^2}{q_3}} dz dy. \quad (4.26)$$

Le point purement déviatorique et le point purement hydrostatique obtenus avec (4.26) peuvent être calculés analytiquement (voir Annexe I) :

$$\Sigma_m = 0, \quad \Sigma_{eq} = \tilde{\sigma}_0 \quad \text{avec} \quad \tilde{\sigma}_0 = \sigma_0(1 - f_{qb})(1 - f_e)/\sqrt{q_3} \quad (4.27)$$

et :

$$\Sigma_m = \tilde{p}, \quad \Sigma_{eq} = 0 \quad \text{avec} \quad \tilde{p} = \frac{1}{3} \sigma_0 \frac{2}{\sqrt{q_3}(f_{qb} + f_e)} (C_1 + \ln(C_2)), \quad (4.28)$$

avec :

$$B_1 = \sqrt{f_e^2 + f_{qb}^2 q_3}, \quad B_2 = f_{qb} \sqrt{f_e^2 + q_3}, \quad B_3 = f_e \sqrt{1 + f_{qb}^2 q_3}, \quad B_4 = f_{qb} f_e \sqrt{1 + q_3}, \quad (4.29)$$

$$C_1 = 2(B_1 - B_2 - B_3 + B_4),$$

$$C_2 = f_{qb}^{f_{qb}(1-f_e)\sqrt{q_3}} f_e^{(1-f_{qb})f_e} \left(\frac{B_1 - f_e}{B_3 - f_e}\right)^{f_e} \left(\frac{B_4 - f_{qb} f_e}{B_2 - f_{qb} f_e}\right)^{f_{qb} f_e} \left(\frac{B_1 - f_{qb} \sqrt{q_3}}{B_2 - f_{qb} \sqrt{q_3}}\right)^{f_{qb} \sqrt{q_3}} \left(\frac{B_4 - f_{qb} f_e \sqrt{q_3}}{B_3 - f_{qb} f_e \sqrt{q_3}}\right)^{f_{qb} f_e \sqrt{q_3}}. \quad (4.30)$$

La seconde approximation introduite ici consiste à proposer un critère arbitraire de type Gurson et passant par les points purement hydrostatique \tilde{p} et purement déviatorique $\tilde{\sigma}_0$.

$$\frac{1}{\beta} \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0}\right)^2 + \frac{1}{\alpha} \cosh\left(\frac{3 \Sigma_m}{2 \sigma_0}\right) - 1 = 0, \quad \text{avec} \quad \alpha \equiv \cosh\left(\frac{3 \tilde{p}}{2 \sigma_0}\right) \quad \text{et} \quad \beta \equiv \frac{\alpha}{\alpha - 1} \left(\frac{\tilde{\sigma}_0}{\sigma_0}\right)^2. \quad (4.31)$$

Le critère précédent (4.31) constitue une estimation analytique pour le critère de plasticité d'un milieu poreux avec deux populations de cavités sphériques.

La FIG. 4.7 montre le bon accord entre le critère approché précédent (4.31) et les simulations

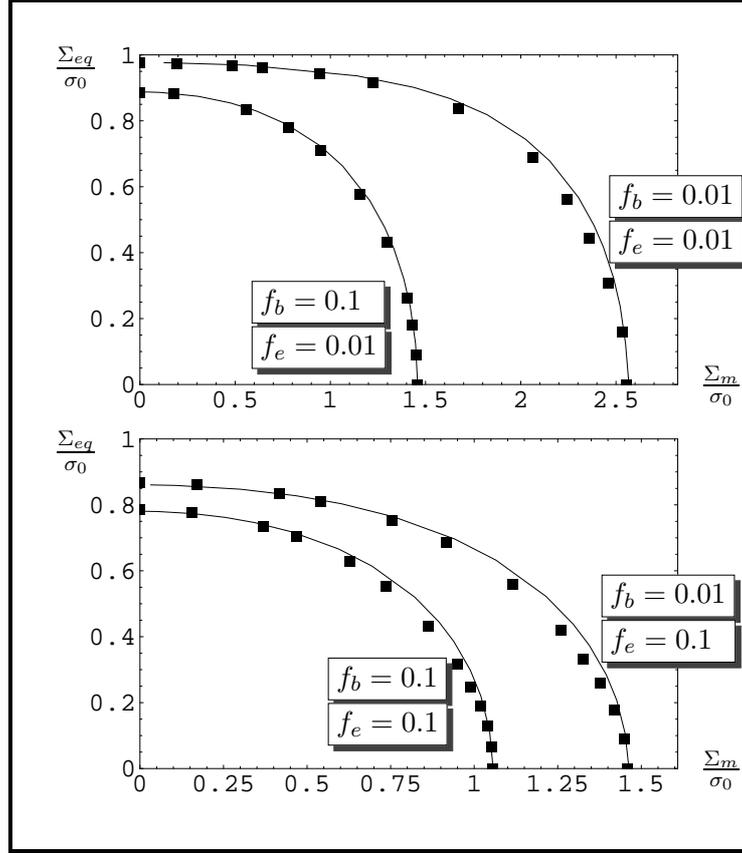


FIG. 4.6 – Critères de plasticité : bon accord entre l'estimation obtenue avec la méthode sécante modifiée à $N = 21$ phases (section 4.1.4, trait continu) et les simulations numériques par éléments finis (carrés noirs). $q_3 = q_1 = 1$.

numériques par éléments finis présentées en 4.1.4. De plus le critère approché (4.31) reste proche de la borne supérieure (4.15). La figure FIG. 4.7 montre néanmoins que le point purement déviatorique obtenu avec le critère approché (4.31) est légèrement supérieur aux simulations numériques par éléments finis (voir remarque 4.2).

Remarque 4.2 (Amélioration du point purement déviatorique (4.27)) Le principe variationnel est repris sur le milieu V contenant une matrice M de potentiel φ^G (4.4) (critère de Gurson modifié) et une population de pores sphériques ω_e distribués de façon isotrope :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \inf_{\dot{\mathbf{v}} \in \mathcal{K}(\dot{\mathbf{E}})} \frac{\sigma_0}{|V|} \int_M \int_{q_1 f_b}^1 \sqrt{\frac{4\dot{\varepsilon}_m^2}{y^2} + \frac{\dot{\varepsilon}_{eq}^2}{q_3}} dy dV. \quad (4.32)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est d'abord appliquée sur l'intégrale en y :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \frac{\sigma_0 \sqrt{1 - q_1 f_b}}{|V|} \inf_{\dot{\mathbf{v}} \in \mathcal{K}(\dot{\mathbf{E}})} \int_M \left(\frac{4(1 - q_1 f_b)}{q_1 f_b} \dot{\varepsilon}_m^2 + \frac{(1 - q_1 f_b)}{q_3} \dot{\varepsilon}_{eq}^2 \right)^{1/2} dV, \quad (4.33)$$

puis sur l'intégrale sur V :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \sigma_0 \sqrt{1 - q_1 f_b} \sqrt{1 - f_e} \left[\inf_{\dot{\mathbf{v}} \in \mathcal{K}(\dot{\mathbf{E}})} \frac{1}{|V|} \int_M \left(\frac{9}{2} k_1 \dot{\varepsilon}_m^2 + \frac{3}{2} \mu_1 \dot{\varepsilon}_{eq}^2 \right) dV \right]^{1/2} \quad (4.34)$$

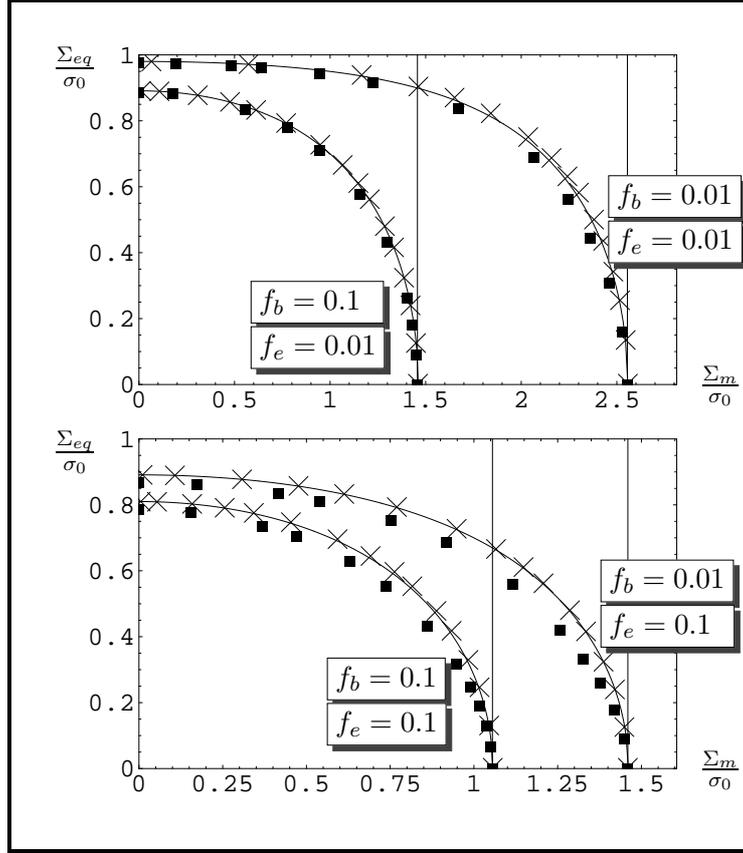


FIG. 4.7 – Critères de plasticité : borne supérieure (4.15) (croix), critère approché (4.31), (4.27) (trait plein), simulations numériques par éléments finis (carrés noirs). $q_3 = q_1 = 1$. Trait vertical : valeur hydrostatique de Perrin (1992) donnée en (4.18). Le critère approché (4.31), (4.27) ne viole pas la borne supérieure (4.15) et est en bon accord avec les simulations numériques par éléments finis.

où :

$$k_1 = \frac{8(1 - q_1 f_b)}{9q_1 f_b}, \quad \mu_1 = \frac{2(1 - q_1 f_b)}{3q_3}. \quad (4.35)$$

De plus, lorsque le matériau est macroscopiquement isotrope :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \sigma_0 \sqrt{1 - q_1 f_b} \sqrt{1 - f_e} \left(\frac{9}{2} \tilde{k}_1 \dot{E}_m^2 + \frac{3}{2} \tilde{\mu}_1 \dot{E}_{eq}^2 \right)^{1/2}, \quad (4.36)$$

où \tilde{k}_1 et $\tilde{\mu}_1$ représentent respectivement les coefficients de compressibilité et de cisaillement effectifs d'un matériau poreux linéaire avec coefficients de compressibilité et de cisaillement k_1 et μ_1 respectivement (choix d'une borne supérieure).

La borne supérieure de Hashin et Shtrikman (1963) (rappelée en Annexe E) est utilisée pour \tilde{k}_1 et $\tilde{\mu}_1$:

$$\tilde{k}_1 \leq \frac{4}{3} \mu_1 \frac{1 - f_e}{f_e + \frac{4\mu_1}{3k_1}}, \quad \tilde{\mu}_1 \leq \mu_1 \frac{1 - f_e}{1 + 6f_e \frac{k_1 + 2\mu_1}{9k_1 + 8\mu_1}}, \quad (4.37)$$

et la borne supérieure suivante est obtenue :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \sigma_0 \frac{(1 - q_1 f_b)(1 - f_e)}{\sqrt{q_3}} \left(\frac{4\dot{E}_m^2}{f_e + \frac{q_1 f_b}{q_3}} + \frac{\dot{E}_{eq}^2}{1 + f_e \frac{2q_3 + 3q_1 f_b}{3q_3 + 2q_1 f_b}} \right)^{1/2}. \quad (4.38)$$

Le point purement déviatorique obtenu avec cette borne supérieure s'écrit :

$$\Sigma_m = 0, \quad \Sigma_{eq} = \tilde{\sigma}_0 \quad \text{avec} \quad \tilde{\sigma}_0 = \sigma_0 \frac{(1 - q_1 f_b)(1 - f_e)}{\sqrt{q_3}} \sqrt{\frac{1}{1 + f_e \frac{2q_3 + 3q_1 f_b}{3q_3 + 2q_1 f_b}}}. \quad (4.39)$$

Le critère obtenu avec (4.31), (4.28) et (4.39) est une borne supérieure concernant les point purement hydrostatique et déviatorique. Dans le cas du chargement purement déviatorique, cette borne supérieure est meilleure que celle obtenue avec (4.31), (4.28) et (4.27) (voir FIG. 4.8).

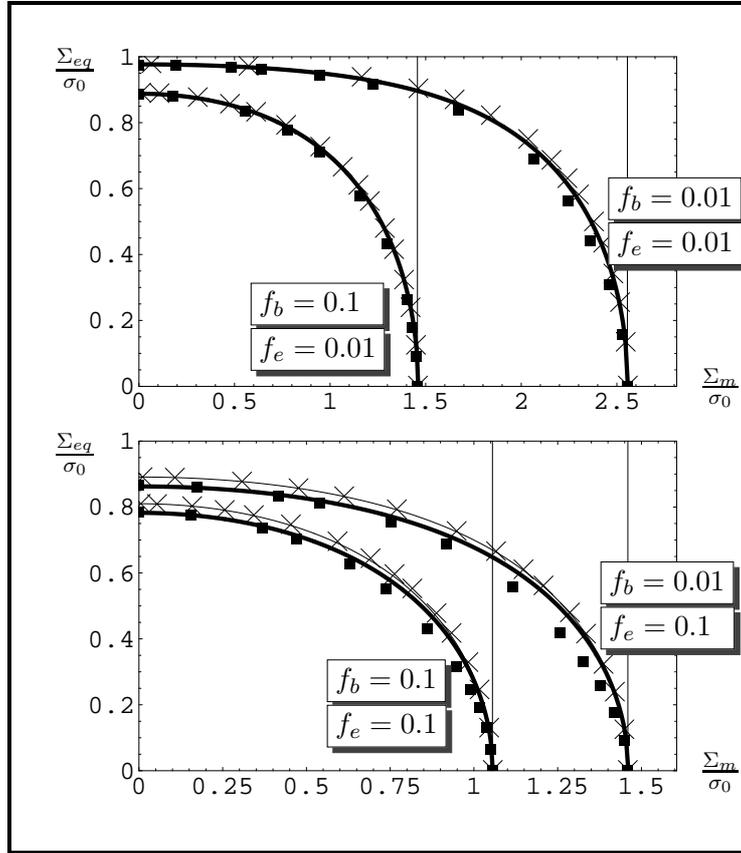


FIG. 4.8 – Critères de plasticité : borne supérieure (4.15) (croix), critère approché (4.31), (4.27) (trait plein), simulations numériques par éléments finis (carrés noirs), critère approché (4.31), (4.39) (trait plein épais). Trait vertical : valeur hydrostatique de Perrin (1992) donnée en (4.18). $q_3 = q_1 = 1$. Le critère approché (4.31), (4.39) améliore le point purement déviatorique du critère approché (4.31), (4.27).

Remarque 4.3 (Interprétation de \bar{A}) Etant donné le champ de vitesse utilisé (relation (4.10)), il est rappelé que le scalaire A est égal au taux de déformation hydrostatique

dans la matrice : $A = \dot{\varepsilon}_m$. La scalaire A est ainsi directement relié à la loi d'évolution de f_b , qui s'écrit (incompressibilité de la matrice initiale) :

$$\dot{f}_b = 3(1 - f_b)A. \quad (4.40)$$

De plus, en utilisant les relations liant la porosité totale du milieu, la porosité à la première échelle f_b et la porosité à la deuxième échelle f_e , il vient :

$$\dot{f}_e = 3(1 - f_e)(\dot{E}_m - A). \quad (4.41)$$

La FIG. 4.9 compare les taux de dilatation relatifs obtenus dans la matrice en utilisant le A optimal, noté A_{sol} en 4.1.2 et en utilisant l'approximation de A notée \bar{A} dans cette section. Le chargement choisi est un chargement purement hydrostatique en tension. Le résultat exact de Perrin (1992) est reporté sur cette figure afin d'illustrer la non uniformité du taux de dilatation relatif exact dans la matrice. Ce résultat exact de Perrin (1992) peut être retrouvé en utilisant la méthode sécante modifiée à N phases exposée en 4.1.4 ainsi que les lois d'évolution exposées en 6.3 mais en autorisant ici une évolution différente de la porosité f_b dans chaque couche entourant la cavité centrale. .

4.2 Cavités ellipsoïdales aplaties et alignées

4.2.1 Approche de type Gurson : borne supérieure

Le but de cette section est d'obtenir une majoration du potentiel effectif en taux de déformation de l'ellipsoïde creux (cavité ellipsoïdale aplatie dans un domaine ellipsoïdal aplati confocal, voir FIG. 3.6) pour une matrice qui suit le critère GTN dont le potentiel φ^G est rappelé en (4.4). Le potentiel effectif obtenu servira dans la suite pour le passage à l'assemblage (assemblage de cellules élémentaires orientées aléatoirement dans la matrice). Comme pour le cas de la sphère creuse avec matrice de Gurson (section 4.1.2), le champ de vitesse proposé est la somme d'une partie compressible et d'une partie incompressible :

$$\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \dot{\mathbf{v}}^{Go}(\mathbf{x}) + \dot{\mathbf{v}}^{NA}(\mathbf{x}) \quad \text{avec} \quad \dot{\mathbf{v}}^{NA}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{D}}^{NA} \cdot \mathbf{x}, \quad (4.42)$$

où $\dot{\mathbf{v}}^{Go}$ est le champ de vitesse utilisé pour l'ellipsoïde creux à matrice incompressible (section 3.2.2). Ici, $\dot{\mathbf{v}}^{Go}$ est pris tel que : $\dot{\mathbf{v}}^{Go} = \dot{\mathbf{D}}^A \cdot \mathbf{x}$ sur $\partial\Omega$ avec $\dot{\mathbf{D}} = \dot{\mathbf{E}} - A\mathbf{I}$. Le tenseur $\dot{\mathbf{D}}$ est décomposé en partie axisymétrique $\dot{\mathbf{D}}^A$ et non-axisymétrique $\dot{\mathbf{D}}^{NA}$ comme en (3.29). Le principe variationnel (équations (2.13) et (2.21)) est utilisé avec ce champ de vitesse :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \inf_A \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega-\omega} \sigma_0 \int_{q_1 f_b}^1 \sqrt{\frac{4A^2}{y^2} + \frac{\dot{\varepsilon}_{eq}^2}{q_3}} dy d\Omega, \quad \dot{\varepsilon} = \varepsilon(\dot{\mathbf{v}}). \quad (4.43)$$

La démarche est alors la même que pour l'ellipsoïde creux à matrice incompressible en prenant en compte le terme additionnel compressible $\frac{4A^2}{y^2}$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \inf_A \sigma_0 \int_{q_1 f_b}^1 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{J^2(\lambda) \frac{4A^2}{y^2} + \frac{J(\lambda)}{q_3} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{\pi} \dot{\varepsilon}_{eq}^2 J_{\lambda\beta\phi} d\beta d\phi d\lambda dy}. \quad (4.44)$$

Le dernier terme est calculé en utilisant le résultat de la section 3.2.2 (passage de (3.33) à (3.35)) :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \inf_A \sigma_0 \int_{q_1 f_b}^1 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{J^2(\lambda) \frac{4A^2}{y^2} + \frac{J(\lambda)}{q_3} \dot{\mathbf{D}} : \mathbf{Q}(\lambda) : \dot{\mathbf{D}}} d\lambda dy. \quad (4.45)$$

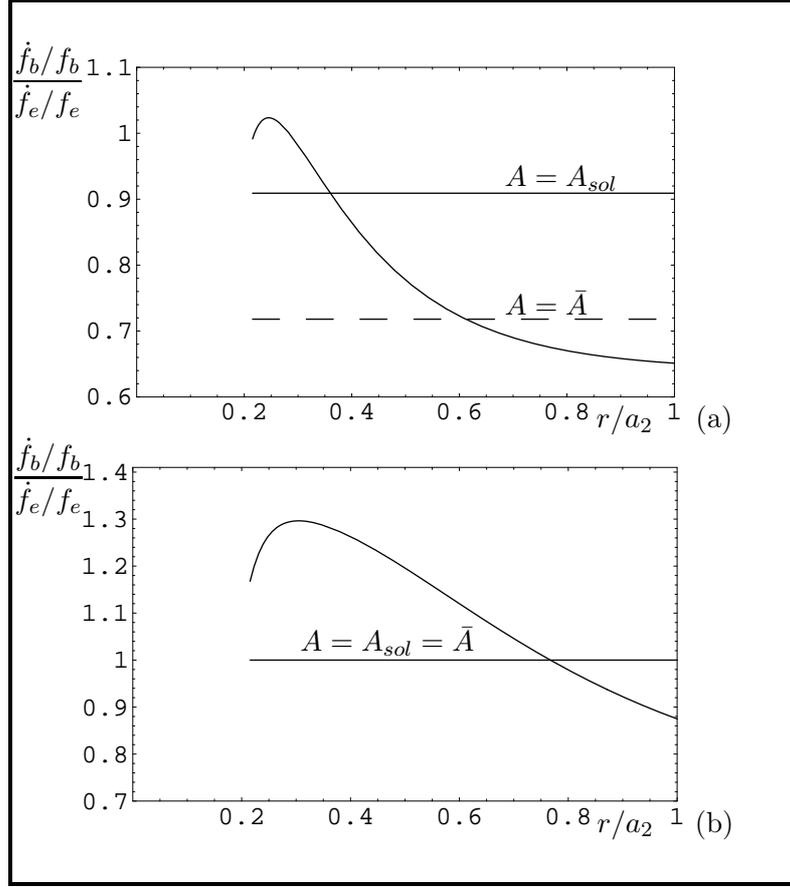


FIG. 4.9 – *Sphère creuse sous chargement purement hydrostatique en tension sur sa face externe : taux de dilatation relatif. Résultat exact de Perrin (1992) ou, de façon équivalente, résultat obtenu avec la méthode sécante modifiée à N phases exposée en 4.1.4 avec évolution de la porosité f_b différente dans chaque phase entourant la cavité centrale (courbe en trait plein). Utilisation du A optimal, noté A_{sol} en 4.1.2 (trait horizontal plein). Utilisation de l'approximation de A notée \bar{A} en 4.1.5 (trait horizontal discontinu). (a) $f_e = 1 \%$, $f_b = 10 \%$. (b) $f_e = 1 \%$, $f_b = 1 \%$. $q_1 = q_3 = 1$.*

Le A qui minimise (4.45) est noté A_{sol} . La relation $\Sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{E}}}$ permet d'obtenir une majoration de la surface de plasticité comme explicité en 4.1.2 :

$$\Sigma = \int_{q_1 f_b}^1 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{J^2(\lambda) \frac{4A_{sol}^2}{y^2} + \frac{J(\lambda)}{q_3}} (\dot{\mathbf{E}} - A_{sol} \mathbf{I}) : \mathbf{Q}(\lambda) : (\dot{\mathbf{E}} - A_{sol} \mathbf{I})} \frac{J(\lambda)}{q_3} \mathbf{Q}(\lambda) : (\dot{\mathbf{E}} - A_{sol} \mathbf{I}) d\lambda dy. \quad (4.46)$$

Le critère obtenu est une borne supérieure rigoureuse. Il est rappelé que ce résultat sera utilisé lors de l'étude des cavités ellipsoïdales aplaties orientées aléatoirement dans la matrice.

4.2.2 Approche de type Gurson : estimation

Une estimation de Φ peut être obtenue à partir de l'inéquation précédente :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \inf_A \sigma_0 \int_{q_1 f_b}^1 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{J^2(\lambda) \frac{4A^2}{y^2} + \frac{J(\lambda)}{q_3}} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{\pi} \dot{\varepsilon}_{eq}^2 J_{\lambda\beta\phi} d\beta d\phi d\lambda dy. \quad (4.47)$$

Le terme $\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{\pi} \dot{\varepsilon}_{eq}^2 J_{\lambda\beta\phi} d\beta d\phi$ est approché en utilisant les même étapes que dans le cas de la matrice incompressible (voir 3.2.3). Cela donne :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \approx \inf_A \sigma'_0 \int_{q_1 f_b}^1 \int_{\tilde{f}}^1 \sqrt{\frac{4A^2}{y^2} + \frac{\mathcal{A}''^2(\dot{\mathbf{D}})}{q_3 z^2} + \frac{\mathcal{B}'^2(\dot{\mathbf{D}})}{q_3} + \frac{(\dot{E}_{eq}^{NA})^2}{q_3}} dz dy, \quad (4.48)$$

avec :

$$\begin{aligned} \sigma'_0 &= \frac{16\pi c^3 \sigma_0}{9|\Omega| \tilde{y}_2}, \quad \tilde{f} = \frac{\tilde{y}_2}{\tilde{y}_1}, \quad \mathcal{A}''^2(\dot{\mathbf{D}}) = \mathcal{A}'^2(\dot{\mathbf{D}}) \tilde{y}_2^2, \\ \mathcal{A}'(\dot{\mathbf{D}}) &= \bar{F} \mathcal{A}(\dot{\mathbf{D}}) + \bar{G} \mathcal{B}(\dot{\mathbf{D}}), \quad \mathcal{B}'(\dot{\mathbf{D}}) = \bar{H} \mathcal{B}(\dot{\mathbf{D}}), \\ \tilde{y} &= \frac{\chi \tilde{x}}{\tilde{x} + 3\chi/4}, \quad \chi = \sqrt{\pi^2 + 32/3}, \quad \tilde{x} = \frac{c^3}{ab^2} = \frac{1}{\sinh \lambda \cosh^2 \lambda}, \quad |\Omega| = \frac{4}{3} \pi a_2 b_2^2. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Les quantités \tilde{x}_1 et \tilde{x}_2 représentent respectivement les valeurs de \tilde{x} en λ_1 et en λ_2 . De même, les quantités \tilde{y}_1 et \tilde{y}_2 représentent respectivement les valeurs de \tilde{y} en λ_1 et en λ_2 . Les constantes $\mathcal{A}(\dot{\mathbf{D}})$ et $\mathcal{B}(\dot{\mathbf{D}})$ sont déterminées par les conditions aux limites données à l'équation (3.31) en remplaçant $\dot{\mathbf{E}}$ par $\dot{\mathbf{D}}$.

Les constantes \bar{F} , \bar{G} et \bar{H} sont des constantes introduites par Gologanu et al. (1994). Le terme

$$\frac{\mathcal{A}''^2(\dot{\mathbf{D}})}{z^2} + \mathcal{B}'^2(\dot{\mathbf{D}}) \quad (4.50)$$

peut se simplifier en considérant que $\bar{H}^2 + \bar{G}^2 \tilde{y}^2 \approx 1$ (voir (Gologanu et al. (1994))). Le résultat s'écrit :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \approx \inf_A \sigma'_0 \int_{q_1 f_b}^1 \int_{\tilde{f}}^1 \sqrt{\frac{4A^2}{y^2} + [\bar{F}^2 \mathcal{A}^2(\dot{\mathbf{D}}) + 2\bar{F}\bar{G} \mathcal{A}(\dot{\mathbf{D}}) \mathcal{B}(\dot{\mathbf{D}})] \frac{y_2^2}{q_3 z^2} + \frac{\mathcal{B}^2(\dot{\mathbf{D}})}{q_3} + \frac{(\dot{E}_{eq}^{NA})^2}{q_3}} dz dy. \quad (4.51)$$

Enfin, le terme

$$[\bar{F}^2 \mathcal{A}^2(\dot{\mathbf{D}}) + 2\bar{F}\bar{G} \mathcal{A}(\dot{\mathbf{D}}) \mathcal{B}(\dot{\mathbf{D}})] \frac{y_2^2}{q_3 z^2} + \frac{\mathcal{B}^2(\dot{\mathbf{D}})}{q_3} + \frac{(\dot{E}_{eq}^{NA})^2}{q_3}, \quad (4.52)$$

peut facilement s'écrire sous la forme $\dot{\mathbf{D}} : \mathbf{S}_{(ap)} : \dot{\mathbf{D}}$ avec $\mathbf{S}_{(ap)}$ un tenseur d'ordre 4 (non précisé dans ce travail). Ainsi, le potentiel Φ est approximé par :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \approx \inf_A \sigma'_0 \int_{q_1 f_b}^1 \int_{\tilde{f}}^1 \sqrt{\frac{4A^2}{y^2} + \dot{\mathbf{D}} : \mathbf{S}_{(ap)} : \dot{\mathbf{D}}} dz dy. \quad (4.53)$$

Ce potentiel est utilisé lors du passage aux cavités ellipsoïdales aplaties et orientées aléatoirement dans la section suivante (en 4.3.5).

4.3 Cavités ellipsoïdales aplaties et orientées aléatoirement

Dans cette section, les cavités à la deuxième échelle (échelle supérieure) sont supposées ellipsoïdales aplaties, réparties de façon isotrope dans la matrice et orientées de façon aléatoire (orientations équiprobables). La porosité des cavités à la deuxième échelle est notée f_e . Le rapport de forme des cavités à la deuxième échelle est noté w (rapport du petit axe sur le grand axe, $w \leq 1$ dans le cas oblate). La matrice est constituée du milieu effectif de la première échelle dont la loi de comportement est donnée par le potentiel (4.4) (critère de Gurson modifié).

Les difficultés majeures de cette section résident dans la géométrie spécifique des cavités (ellipsoïdales) et dans le fait que la matrice est compressible.

Cette section présente, comme dans le cas sphérique traité en 4.1, deux bornes supérieures obtenues avec deux approches différentes et deux estimations (issues des deux bornes supérieures précédentes).

4.3.1 Méthode sécante modifiée (approche variationnelle) : borne supérieure

La méthode sécante modifiée est ici mise en œuvre comme dans le cas sphérique (section 4.1.1) en estimant les coefficients de compressibilité et de cisaillement effectifs non plus par la borne supérieure de Hashin et Shtrikman (1963) mais par la borne supérieure de Ponte Castañeda et Willis (1995), i.e. $k_o^{hom} = k_o^{PCW}$ et $\mu_o^{hom} = \mu_o^{PCW}$. Cette dernière permet une prise en compte distincte de la morphologie ellipsoïdale des cavités et de leur distribution isotrope (sphérique). Les expressions de k_o^{PCW} , μ_o^{PCW} sont données en Annexe G.

Il est rappelé que les expressions de k_o^1 et de μ_o^1 sont tirées de la relation

$$\mathbf{C}_o^1 = \frac{\partial \varphi^G}{\partial \mathbb{D}}(\bar{\mathbb{E}}^{(1)}) \quad (4.54)$$

et que les expressions de $(\dot{\epsilon}_m)^2$ et de $(\dot{\epsilon}_{eq})^2$ sont tirées de la relation

$$\bar{\mathbb{E}}^{(1)} = \frac{1}{1-f_e} \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}} : \frac{\partial \mathbf{C}_o^{hom}}{\partial \mathbf{C}_o^1} : \dot{\mathbf{E}}. \quad (4.55)$$

Le problème à résoudre est le même que dans le cas sphérique, avec des expressions différentes de k_o^{hom} et de μ_o^{hom} :

Entrées : \dot{E}_m et \dot{E}_{eq} ;

répéter

$$\left\{ \begin{array}{l} k_o^1 = \frac{2}{9} \sigma_0 \frac{1}{\sqrt{(\dot{\epsilon}_m)^2}} \left(-\text{Arcsinh} \left(2 \sqrt{\frac{(\dot{\epsilon}_m)^2}{(\dot{\epsilon}_{eq})^2} q_3} \right) + \text{Arcsinh} \left(\frac{2}{f_{qb}} \sqrt{\frac{(\dot{\epsilon}_m)^2}{(\dot{\epsilon}_{eq})^2} q_3} \right) \right) ; \\ \mu_o^1 = \frac{1}{3} \frac{\sigma_0}{(\dot{\epsilon}_{eq})^2} \left(\sqrt{4(\dot{\epsilon}_m)^2 + \frac{(\dot{\epsilon}_{eq})^2}{q_3}} - f_{qb} \sqrt{\frac{4(\dot{\epsilon}_m)^2}{(f_{qb})^2} + \frac{(\dot{\epsilon}_{eq})^2}{q_3}} \right) ; \\ (\dot{\epsilon}_m)^2 = \frac{1}{3(1-f_e)} \frac{\partial \mu_o^{hom}}{\partial k_o^1} (\dot{E}_{eq})^2 + \frac{1}{1-f_e} \frac{\partial k_o^{hom}}{\partial k_o^1} (\dot{E}_m)^2 ; \\ (\dot{\epsilon}_{eq})^2 = \frac{1}{(1-f_e)} \frac{\partial \mu_o^{hom}}{\partial \mu_o^1} (\dot{E}_{eq})^2 + \frac{3}{(1-f_e)} \frac{\partial k_o^{hom}}{\partial \mu_o^1} (\dot{E}_m)^2 ; \end{array} \right.$$

jusqu'à convergence sur $(\dot{\epsilon}_m)^2$ et $(\dot{\epsilon}_{eq})^2$;

Sorties : $\Sigma_m = 3k_o^{hom} \dot{E}_m$ et $\Sigma_{eq} = 3\mu_o^{hom} \dot{E}_{eq}$.

Le système d'équation précédent est résolu avec un algorithme de point fixe.

Le résultat obtenu est une borne supérieure pour le critère de plasticité. **Le modèle obtenu est noté MSM ellipsoïdal dans ce document.**

4.3.2 Approche de type Gurson : borne supérieure

Le problème traité en 3.3.1 d'un matériau poreux avec une seule population de cavités ellipsoïdales aplaties et orientées aléatoirement (orientations équiprobables) est repris mais avec une matrice GTN : le domaine V étudié dans cette section est composé d'un assemblage de cellules

élémentaires de type Ω (cavité ellipsoïdale aplatie dans un domaine Ω ellipsoïdal aplati confocal) orientées aléatoirement et en nombre suffisant afin d'assurer l'isotropie globale de V . Le domaine V est schématisé sur la FIG. 3.8 : c'est un assemblage de cellules élémentaires orientées aléatoirement. D'après Benveniste et Milton (2003), tout l'espace peut être rempli par des cellules ellipsoïdales orientées aléatoirement (voir la démonstration dans l'annexe de Benveniste et Milton (2003)). Cette section propose une borne supérieure pour la surface de plasticité.

Comme en 3.3.1, des conditions de taux de déformations homogènes au bord sur ∂V sont appliquées. Un champ de vitesse est construit tel que $\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x}$ sur chaque ellipsoïde élémentaire $\partial\Omega_n$. Ce champ vérifie bien $\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x}$ sur ∂V . En utilisant le principe variationnel (équations (2.13) et (2.21)) et la borne supérieure élaborée en 4.2 pour le cas des ellipsoïdes alignés (relation (4.45)) sur la cellule élémentaire de référence Ω , le potentiel effectif est majoré par :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \oint \sigma_0 \inf_{A(\mathcal{R})} \int_{q_1 f_b}^1 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{J^2(\lambda) \frac{4A^2(\mathcal{R})}{y^2} + \frac{J(\lambda)}{q_3} \dot{\mathbf{D}}(\mathcal{R}) : \mathbf{Q}(\mathcal{R}, \lambda) : \dot{\mathbf{D}}(\mathcal{R})} d\lambda dy d\mathcal{R}. \quad (4.56)$$

Il est supposé que A est indépendant de \mathcal{R} pour tous les ellipsoïdes et uniforme dans V . Ce choix préserve le statut de borne supérieure sur (4.56). D'où :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \sigma_0 \oint \inf_A \int_{q_1 f_b}^1 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{J^2(\lambda) \frac{4A^2}{y^2} + \frac{J(\lambda)}{q_3} \dot{\mathbf{D}} : \mathbf{Q}(\mathcal{R}, \lambda) : \dot{\mathbf{D}}} d\lambda dy d\mathcal{R}. \quad (4.57)$$

Puis, en utilisant le fait que la somme des infima est majorée par l'infimum de la somme :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \sigma_0 \inf_A \oint \int_{q_1 f_b}^1 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{J^2(\lambda) \frac{4A^2}{y^2} + \frac{J(\lambda)}{q_3} \dot{\mathbf{D}} : \mathbf{Q}(\mathcal{R}, \lambda) : \dot{\mathbf{D}}} d\lambda dy d\mathcal{R}, \quad (4.58)$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \sigma_0 \inf_A \int_{q_1 f_b}^1 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{J^2(\lambda) \frac{4A^2}{y^2} + \frac{J(\lambda)}{q_3} \oint \dot{\mathbf{D}} : \mathbf{Q}(\mathcal{R}, \lambda) : \dot{\mathbf{D}}} d\lambda dy. \quad (4.59)$$

De la même manière que pour le cas de la matrice incompressible de la section 3.3.1, on obtient :

$$\oint \dot{\mathbf{D}} : \mathbf{Q}(\mathcal{R}, \lambda) : \dot{\mathbf{D}} d\mathcal{R} = 3Q_J D_m^2 + \frac{3}{10} Q_K D_{eq}^2 \quad \text{avec} \quad Q_J = \mathbf{Q} :: \mathbf{J} \quad \text{et} \quad Q_K = \mathbf{Q} :: \mathbf{K}. \quad (4.60)$$

Au final, la borne supérieure obtenue s'écrit :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \sigma_0 \inf_A \int_{q_1 f_b}^1 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{J^2(\lambda) \frac{4A^2}{y^2} + \frac{J(\lambda)}{q_3} \left(3Q_J(\lambda) (\dot{E}_m - A)^2 + J(\lambda) \dot{E}_{eq}^2 \right)} d\lambda dy. \quad (4.61)$$

La quantité Q_J est donnée en (3.64). Le A qui minimise (4.61) est noté A_{sol} . Comme explicité à la fin de 4.1.2, la relation $\Sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{E}}}$ permet d'obtenir une majoration de la surface de plasticité :

$$\begin{aligned} \Sigma_m &= \frac{1}{3} \sigma_0 \int_{q_1 f_b}^1 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\frac{J(\lambda)}{q_3} 3Q_J(\lambda) (\dot{E}_m - A_{sol})}{\sqrt{J^2(\lambda) \frac{4A_{sol}^2}{y^2} + \frac{J(\lambda)}{q_3} \left(3Q_J(\lambda) (\dot{E}_m - A_{sol})^2 + J(\lambda) \dot{E}_{eq}^2 \right)}} d\lambda dy \\ \Sigma_{eq} &= \sigma_0 \int_{q_1 f_b}^1 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\frac{J(\lambda)}{q_3} J(\lambda) \dot{E}_{eq}}{\sqrt{J^2(\lambda) \frac{4A_{sol}^2}{y^2} + \frac{J(\lambda)}{q_3} \left(3Q_J(\lambda) (\dot{E}_m - A_{sol})^2 + J(\lambda) \dot{E}_{eq}^2 \right)}} d\lambda dy. \end{aligned} \quad (4.62)$$

4.3.3 Comparaison entre les deux bornes supérieures précédentes

Pour certaines valeurs de porosité, les mêmes conclusions que dans le cas sphérique sont obtenues. Dans le cas d'un chargement purement déviatorique, la méthode sécante modifiée est meilleure que l'approche de type Gurson (pour ce point, la méthode sécante modifiée donne un résultat inférieur à celui obtenu avec l'approche de type Gurson et constitue donc, pour ce point, une meilleure borne supérieure). Dans le cas d'un chargement purement hydrostatique, l'approche de type Gurson est meilleure que la méthode sécante modifiée. Ces remarques sont illustrées sur la FIG. 4.10. Pour d'autres valeurs de porosité, la méthode sécante modifiée est meilleure (borne plus restrictive) que l'approche de type Gurson quel que soit le taux de triaxialité des contraintes (voir FIG. 4.11).

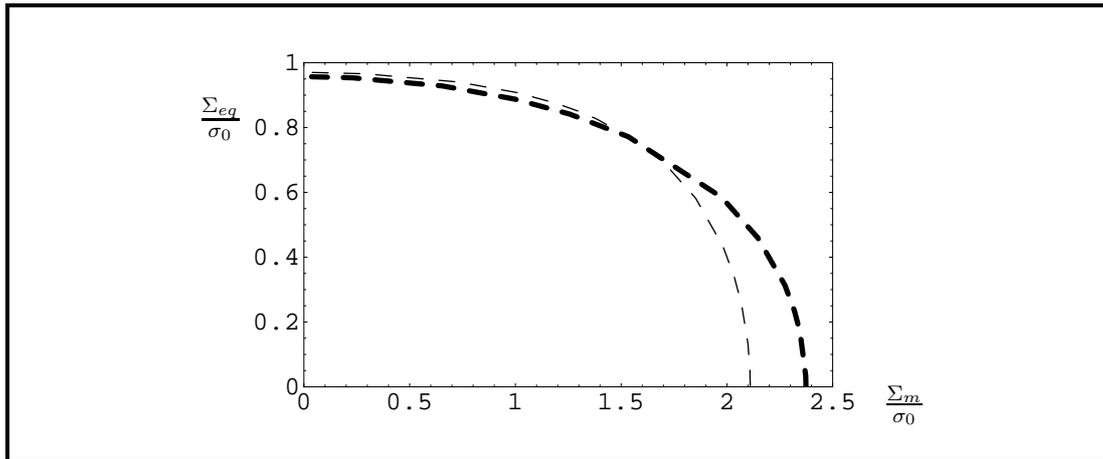


FIG. 4.10 – Critères de plasticité : borne supérieure obtenue avec la méthode sécante modifiée (section 4.3.1, trait discontinu épais), borne supérieure obtenue avec l'approche de type Gurson (section 4.3.2, potentiel (4.61), trait discontinu fin). $f_e = 0.02$, $f_b = 0.01$, $q_3 = q_1 = 1$, $w = 1/5$. Dans le cas d'un chargement purement déviatorique (resp. hydrostatique), la méthode sécante modifiée (resp. l'approche de type Gurson) est meilleure que l'approche de type Gurson (resp. la méthode sécante modifiée).

4.3.4 Méthode sécante modifiée (approche variationnelle) à N phases : estimation

De nouveau, comme dans le cas des cavités sphériques, on cherche ici à appliquer la méthode sécante modifiée avec un CLC à N phases. Il s'agit ici cependant d'un CLC constitué d'un assemblage d'ellipsoïde creux où chaque cavité ellipsoïdale est enrobée de $N - 1$ couches ellipsoïdales confocales. L'estimation des propriétés effectives d'un tel composite n'est pas à notre connaissance un problème définitivement résolu (voir des pistes dans Barhdadi (2005)). Il est donc proposé ici d'utiliser, pour le comportement effectif du CLC, l'estimation de Hervé et Zaoui (1993), valable dans le cas sphérique. Pour ce faire, la notion de "porosités équivalentes" est introduite et permet de traiter le cas ellipsoïdal à partir du cas sphérique. Le but est de remplacer le milieu avec cavités ellipsoïdales de porosités f_e par un milieu avec cavités sphériques de porosité f_s comme schématisé sur la FIG. 4.12.

Afin de déterminer f_s , il est tout d'abord rappelé que **les modèles MSM sphérique et MSM ellipsoïdal** développés en 4.1.1 et 4.3.1 donnent lieu au problème suivant :

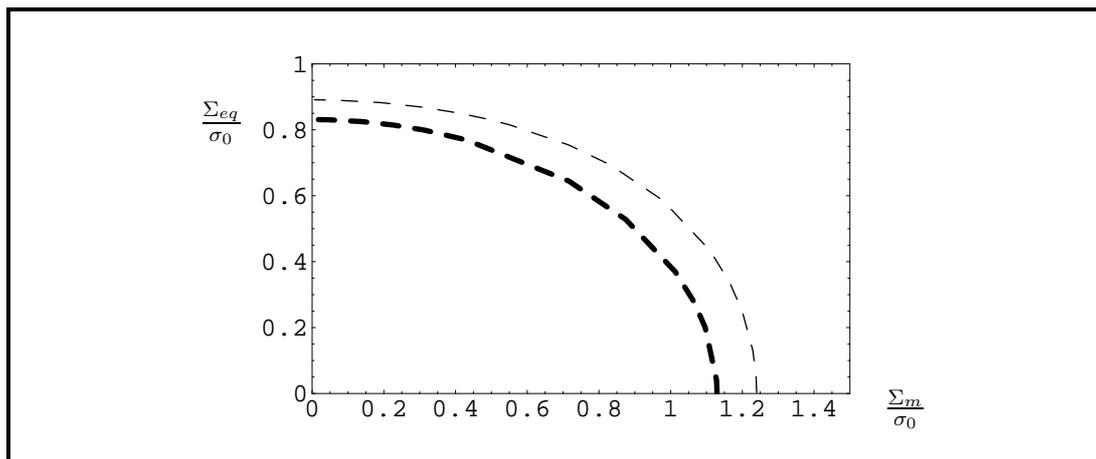


FIG. 4.11 – Critères de plasticité : borne supérieure obtenue avec la méthode sécante modifiée (section 4.3.1, trait discontinu épais), borne supérieure obtenue avec l’approche de type Gurson (section 4.3.2, potentiel (4.61), trait discontinu fin). $f_e = 0.1$, $f_b = 0.01$, $q_3 = q_1 = 1$, $w = 1/5$. La méthode sécante modifiée est ici meilleure que l’approche de type Gurson.

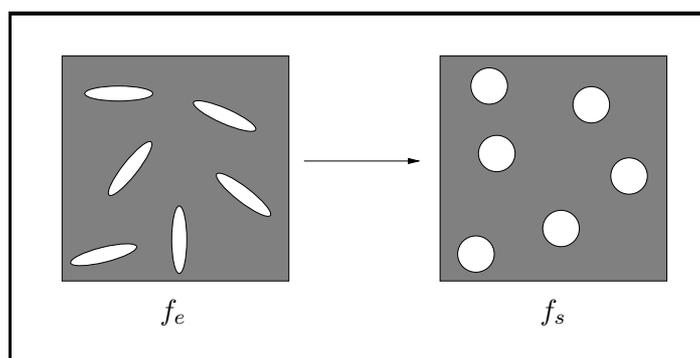


FIG. 4.12 – Notion de porosité équivalente : remplacer le milieu avec cavités ellipsoïdales de porosités f_e par un milieu avec cavités sphériques de porosité f_s .

Entrées : \dot{E}_m et \dot{E}_{eq} ;

répéter

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{actualisation de } k_o^1 \text{ et de } \mu_o^1, \text{ puis de } (\dot{\epsilon}_m)^2 \text{ et de } (\dot{\epsilon}_{eq})^2 : \\ (\dot{\epsilon}_m)^2 = \frac{1}{3(1-f_e)} \frac{\partial \mu_o^{hom}}{\partial k_o^1} (\dot{E}_{eq})^2 + \frac{1}{1-f_e} \frac{\partial k_o^{hom}}{\partial k_o^1} (\dot{E}_m)^2 ; \\ (\dot{\epsilon}_{eq})^2 = \frac{1}{(1-f_e)} \frac{\partial \mu_o^{hom}}{\partial \mu_o^1} (\dot{E}_{eq})^2 + \frac{3}{1-f_e} \frac{\partial k_o^{hom}}{\partial \mu_o^1} (\dot{E}_m)^2 ; \end{array} \right.$$

jusqu’à convergence sur $(\dot{\epsilon}_m)^2$ et $(\dot{\epsilon}_{eq})^2$;

Sorties : $\Sigma_m = 3k_o^{hom} \dot{E}_m$ et $\Sigma_{eq} = 3\mu_o^{hom} \dot{E}_{eq}$.

Il est de plus rappelé que les coefficients k_o^{hom} et μ_o^{hom} sont estimés via la borne supérieure de Hashin et Shtrikman (1963) pour le cas sphérique et via la borne supérieure de Ponte Castañeda et Willis (1995) pour le cas ellipsoïdal.

Le but étant de traiter le cas ellipsoïdal à partir du cas sphérique, on cherche ainsi f_s tel que :

$$\begin{aligned}\frac{k_o^{PCW}(f_e)}{1-f_e} &= \frac{k_o^{HS}(f_s)}{1-f_s} \\ \frac{\mu_o^{PCW}(f_e)}{1-f_e} &= \frac{\mu_o^{HS}(f_s)}{1-f_s}.\end{aligned}\tag{4.63}$$

Avec cette définition de la porosité équivalente f_s , il est possible de retrouver exactement le cas ellipsoïdal à partir du cas sphérique en résolvant ce système :

Entrées : \dot{E}_m et \dot{E}_{eq} ;

répéter

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{actualisation de } k_o^1 \text{ et de } \mu_o^1, \text{ puis de } (\dot{\epsilon}_m)^2 \text{ et de } (\dot{\epsilon}_{eq})^2 : \\ (\dot{\epsilon}_m)^2 = \frac{1}{3(1-f_s)} \frac{\partial \mu_o^{HS}(f_s)}{\partial k_o^1} (\dot{E}_{eq})^2 + \frac{1}{1-f_s} \frac{\partial k_o^{HS}(f_s)}{\partial k_o^1} (\dot{E}_m)^2 ; \\ (\dot{\epsilon}_{eq})^2 = \frac{1}{(1-f_s)} \frac{\partial \mu_o^{HS}(f_s)}{\partial \mu_o^1} (\dot{E}_{eq})^2 + \frac{3}{1-f_s} \frac{\partial k_o^{HS}(f_s)}{\partial \mu_o^1} (\dot{E}_m)^2 ; \end{array} \right.$$

jusqu'à convergence sur $(\dot{\epsilon}_m)^2$ et $(\dot{\epsilon}_{eq})^2$;

$$\text{Sorties : } \Sigma_m = 3k_o^{HS}(f_s) \frac{1-f_e}{1-f_s} \dot{E}_m \text{ et } \Sigma_{eq} = 3\mu_o^{HS}(f_s) \frac{1-f_e}{1-f_s} \dot{E}_{eq}.$$

La boucle du problème ci-dessus correspond physiquement au problème sur un milieu avec cavités sphériques et dont la porosité vaut f_s .

Cependant, il n'existe pas une unique porosité f_s capable de vérifier les deux équations de (4.63) : il existe une première solution f_s^k capable de vérifier la première équation de (4.63) et il existe une deuxième solution f_s^μ capable de vérifier la deuxième équation de (4.63). Ce couple de porosités (f_s^k, f_s^μ) vérifie :

$$\begin{aligned}\frac{k_o^{PCW}(f_e)}{1-f_e} &= \frac{k_o^{HS}(f_s^k)}{1-f_s^k} \\ \frac{\mu_o^{PCW}(f_e)}{1-f_e} &= \frac{\mu_o^{HS}(f_s^\mu)}{1-f_s^\mu}.\end{aligned}\tag{4.64}$$

Les coefficients f_s^k et f_s^μ vérifiant le système ci-dessus dépendent de f_e , de w mais aussi de k_o^1 et de μ_o^1 . La matrice restant proche de l'incompressibilité pour les faibles fractions volumiques f_b motivant cette étude, une bonne approximation consiste à prendre k_o^1 grand (i.e. le faire tendre vers l'infini). Les expressions de f_s^k et de f_s^μ résultant de cette approximation sont données en Annexe H et dépendent uniquement de f_e et de w .

En utilisant ce couple de porosités (f_s^k, f_s^μ) , le problème des ellipsoïdes **traité avec le modèle MSM ellipsoïdal** s'écrit en fonction du problème ci-dessous où la borne supérieure de **Hashin et Shtrikman (1963)** est utilisée. Les termes contenant k_o^{HS} sont exprimés en f_s^k et les termes contenant μ_o^{HS} sont exprimés en f_s^μ :

Entrées : \dot{E}_m et \dot{E}_{eq} ;

répéter

$$\left| \begin{array}{l} \text{actualisation de } k_o^1 \text{ et de } \mu_o^1, \text{ puis de } (\dot{\varepsilon}_m)^2 \text{ et de } (\dot{\varepsilon}_{eq})^2 : \\ (\dot{\varepsilon}_m)^2 = \frac{1}{3(1-f_s^\mu)} \frac{\partial \mu_o^{HS}(f_s^\mu)}{\partial k_o^1} (\dot{E}_{eq})^2 + \frac{1}{1-f_s^k} \frac{\partial k_o^{HS}(f_s^k)}{\partial k_o^1} (\dot{E}_m)^2 ; \\ (\dot{\varepsilon}_{eq})^2 = \frac{1}{(1-f_s^\mu)} \frac{\partial \mu_o^{HS}(f_s^\mu)}{\partial \mu_o^1} (\dot{E}_{eq})^2 + \frac{3}{1-f_s^k} \frac{\partial k_o^{HS}(f_s^k)}{\partial \mu_o^1} (\dot{E}_m)^2 ; \end{array} \right.$$

jusqu'à convergence sur $(\dot{\varepsilon}_m)^2$ et $(\dot{\varepsilon}_{eq})^2$;

Sorties : $\Sigma_m = 3k_o^{HS}(f_s^k) \frac{1-f_e}{1-f_s^k} \dot{E}_m$ et $\Sigma_{eq} = 3\mu_o^{HS}(f_s^\mu) \frac{1-f_e}{1-f_s^\mu} \dot{E}_{eq}$.

La boucle du problème ci-dessus correspond physiquement (voir FIG. 4.13) au :

- cas des cavités sphériques de fraction volumique f_s^k lorsque $\dot{E}_{eq} = 0$.
- cas des cavités sphériques de fraction volumique f_s^μ lorsque $\dot{E}_m = 0$.

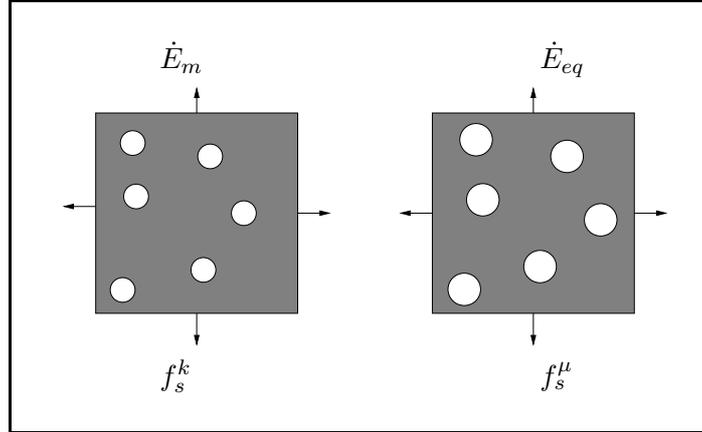


FIG. 4.13 – La boucle du problème résolu correspond au cas des cavités sphériques de fraction volumique f_s^k lorsque le chargement est purement hydrostatique et au cas des cavités sphériques de fraction volumique f_s^μ lorsque le chargement est purement déviatorique.

La méthode sécante modifiée avec N phases est alors utilisée sur ce dernier problème, ainsi que l'estimation de Hervé et Zaoui (1993) comme en 4.1.4 (voir FIG. 4.14). Les équations à résoudre sont données ci-dessous. Les f_i^k (respectivement f_i^μ) sont les fractions volumiques des couches entourant la sphère centrale de fraction volumique f_s^k (respectivement f_s^μ). Toutes les couches $2 \leq i \leq N$ sont prises de même épaisseur.

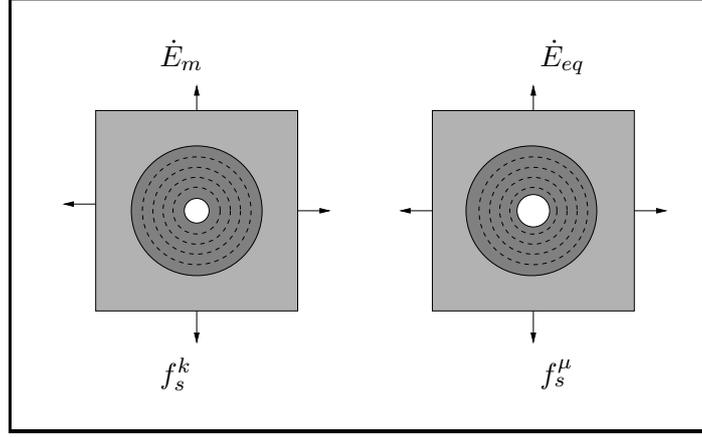


FIG. 4.14 – Utilisation de l'estimation de Hervé et Zaoui (1993) sur les milieux de porosités f_s^k et f_s^μ .

Entrées : \dot{E}_m et \dot{E}_{eq} ;

répéter

$\forall i (2 \leq i \leq N) :$

$$k_o^i = \frac{2}{9} \sigma_0 \frac{1}{\sqrt{\langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}}} \left(-\text{Arcsinh} \left(2 \sqrt{\frac{\langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}}{\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}}} q_3 \right) + \text{Arcsinh} \left(\frac{2}{f_{qb}} \sqrt{\frac{\langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}}{\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}}} q_3 \right) \right) ;$$

$$\mu_o^i = \frac{1}{3} \frac{\sigma_0}{\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}} \left(\sqrt{4 \langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i} + \frac{\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}}{q_3}} - f_{qb} \sqrt{\frac{4 \langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}}{(f_{qb})^2} + \frac{\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}}{q_3}} \right) ;$$

$$\langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i} = \frac{1}{3 f_i^\mu} \frac{\partial \mu_o^{HZ}(f_i^\mu)}{\partial k_o^1} (\dot{E}_{eq})^2 + \frac{1}{f_i^k} \frac{\partial k_o^{HZ}(f_i^k)}{\partial k_o^1} (\dot{E}_m)^2 ;$$

$$\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i} = \frac{1}{f_i^\mu} \frac{\partial \mu_o^{HZ}(f_i^\mu)}{\partial \mu_o^1} (\dot{E}_{eq})^2 + \frac{3}{f_i^k} \frac{\partial k_o^{HZ}(f_i^k)}{\partial \mu_o^1} (\dot{E}_m)^2 ;$$

jusqu'à convergence sur $\langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}$ et $\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}$, $\forall i (2 \leq i \leq N)$;

Sorties : $\Sigma_m = 3 k_o^{HZ}(f_i^k) \frac{1 - f_e}{1 - f_s^k} \dot{E}_m$ et $\Sigma_{eq} = 3 \mu_o^{HZ}(f_i^\mu) \frac{1 - f_e}{1 - f_s^\mu} \dot{E}_{eq}$

Comme pour le cas sphérique en 4.1.4, un simple algorithme de point fixe permet d'atteindre en peu d'itérations la convergence. Le calcul des dérivées partielles se fait numériquement en utilisant une formulation approchée à l'ordre 1.

Le modèle développé dans cette section est appelé par la suite MSMN ellipsoïdal (Méthode Sécante Modifiée à N phases). La FIG. 4.15 illustre la propriété que le modèle MSMN ellipsoïdal améliore le modèle MSM ellipsoïdal pour le cas du chargement purement hydrostatique lorsque le nombre de couches N augmente sans changer le point purement déviatorique. De plus, cette figure montre que le modèle MSMN ellipsoïdal est en accord avec les deux bornes supérieures établies en 4.3.1 (modèle MSM ellipsoïdal) et en 4.3.2 (approche de type Gurson).

Le caractère arbitraire de cette notion de "porosités équivalentes" conduisant au modèle MSMN ellipsoïdal est à souligner. Dans le cas des déformations planes généralisées, des simulations numériques par Transformées de Fourier Rapides (FFT) permettent de valider l'utilisation de ces "porosités équivalentes" (voir 4.6).

Le modèle MSMN ellipsoïdal nécessite un traitement numérique (résolution d'un problème de point fixe). La section suivante propose un modèle conduisant à un critère de plasticité analytique et issu de l'approche de type Gurson.

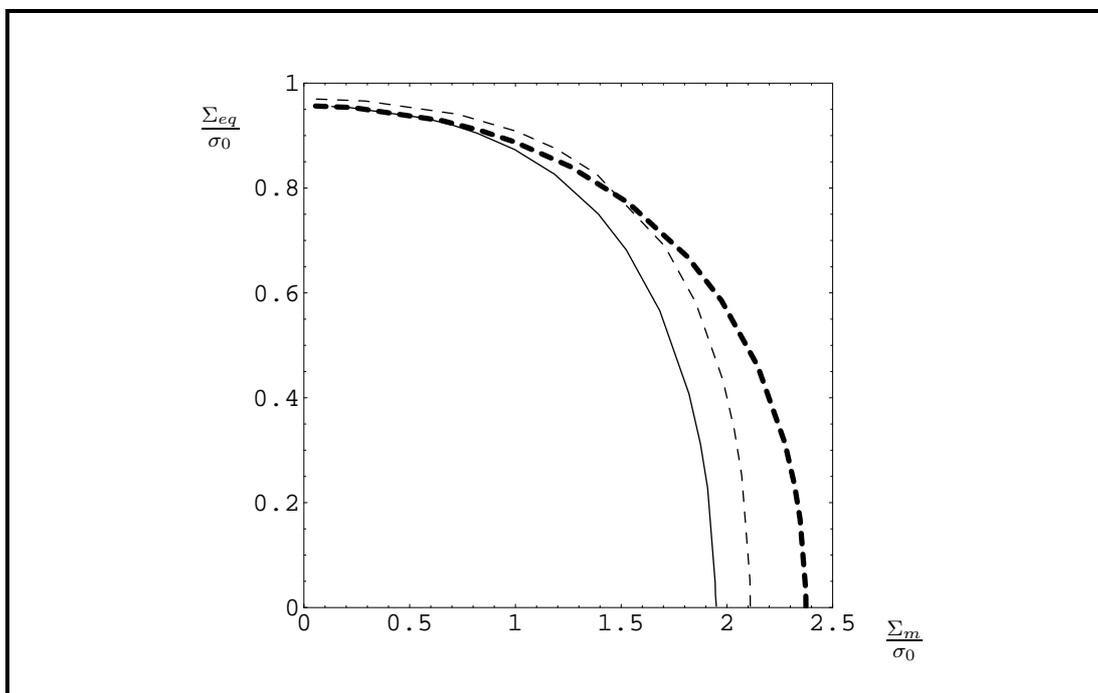


FIG. 4.15 – Critères de plasticité : borne supérieure obtenue avec la méthode sécante modifiée (section 4.3.1, trait discontinu épais), borne supérieure obtenue avec l'approche de type Gurson (section 4.3.2, potentiel (4.61), trait discontinu fin), estimation obtenue avec la méthode sécante modifiée à N phases $N = 21$ (section 4.3.4). $f_e = 0.02$, $f_b = 0.01$, $q_3 = q_1 = 1$, $w = 1/5$. L'estimation obtenue avec la méthode sécante modifiée à $N = 21$ phases améliore le point hydrostatique obtenu avec la méthode sécante modifiée de la section 4.3.1. L'estimation obtenue avec la méthode sécante modifiée à $N = 21$ phases respecte les deux bornes supérieures obtenues aux sections 4.3.1 et 4.3.2.

4.3.5 Approche de type Gurson : estimation

Le but de cette section est d'obtenir une estimation analytique à partir de l'approche de type Gurson. Le problème traité en 4.3.2 est repris ici. La même démarche que celle suivie en 4.3.2 est appliquée mais en utilisant le potentiel effectif sur cellule élémentaire donné en (4.53) pour les cavités ellipsoïdales alignées. Ce potentiel sur cellule unitaire correspond à une estimation et n'a pas le statut de borne supérieure. La moyenne sur les orientations (voir 4.3.2) conduit à effectuer la projection de $\mathbf{S}_{(ap)}$ sur \mathbf{J} et \mathbf{K} . Cela donne :

$$\begin{aligned} \Phi(\dot{\mathbf{E}}) &\approx \inf_A \sigma'_0 \int_{q_1 f_b}^1 \int_{\tilde{f}}^1 \sqrt{\frac{4A^2}{y^2} + \frac{(\dot{E}_m - A)^2 \tilde{a}^2}{z^2} \frac{\tilde{a}^2}{q_3} + (\dot{E}_m - A)^2 \frac{\tilde{b}^2}{q_3} + \frac{(\dot{E}_{eq})^2}{q_3}} dz dy \\ &\approx \inf_A \sigma_0 (g + 1) \int_{q_1 f_b}^1 \int_{\tilde{f}}^1 \sqrt{\frac{4A^2}{y^2} + \frac{(\dot{E}_m - A)^2 \tilde{a}^2}{z^2} \frac{\tilde{a}^2}{q_3} + (\dot{E}_m - A)^2 \frac{\tilde{b}^2}{q_3} + \frac{(\dot{E}_{eq})^2}{q_3}} dz dy \end{aligned} \quad (4.65)$$

avec :

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= \frac{g + f_e}{g + 1}, \quad g = \frac{4e_2^3}{3\chi\sqrt{1-e_2^2}}, \quad \chi = \sqrt{\pi^2 + 32/3}, \quad \tilde{a}^2 = \frac{3}{\kappa^2(g+1)^2} \left(3 - 2\eta + \frac{4\eta Z_2}{\chi g}\right), \\ \tilde{b}^2 &= \left(1 - \frac{2}{\chi g} Z_2\right)^2, \quad Z_2 = \frac{2e_2}{\sqrt{1-e_2^2}} - 2\arcsin(e_2), \quad \alpha_2 = \alpha(e_2), \quad \alpha_1 = \alpha(e_1). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Les fonctions κ , α , η sont données en (3.25) :

$$\begin{aligned} \alpha(e) &= -\frac{1-e^2}{2e^2} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{2e^3} \arcsin(e), \quad \kappa = \left(\frac{2}{3} + \frac{g(1-f_e)(g+2f_e+gf_e)}{3(g+1)^2(g+f_e)^2 \ln \frac{g+1}{g+f_e}}\right)^{-1}, \\ \eta &= \frac{\kappa(1-f_e)(g+1)(g+f_e) \sinh(2\kappa(\alpha_2-\alpha_1))}{(g+1)^2 + (g+f_e)^2 + 2(g+1)(g+f_e) (\kappa(\alpha_2-\alpha_1) \sinh(2\kappa(\alpha_2-\alpha_1)) - \cosh(2\kappa(\alpha_2-\alpha_1)))}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Les fonctions κ^* , α^* , η^* et Z_2^* tirées de Gologanu et al. (1997) sont utilisées à la place de κ , α , η et Z_2 :

$$\begin{aligned} \alpha_1^* &= \frac{-e_1(1-e_1^2) + (1-e_1^2)^{1/2} \arcsin(e_1)}{2e_1^3}, \quad \alpha_2^* = \frac{(1-e_2^2)(1-2e_2^2)}{3-6e_2^2+4e_2^4}, \\ g^* &= \frac{e_2^3}{(1-e_2^2)^{1/2}}, \quad gf = \frac{g^*}{(g^*+f_e)}, \quad g_1 = \frac{g^*}{g^*+1}, \quad H = 2|\alpha_1^* - \alpha_2^*|, \\ (\kappa^*)^{-1} &= \frac{2}{3} + \frac{(2/3)(gf-g_1) + (2/5)(g_f^{5/2} - g_1^{5/2})(4/3 - g_f^{5/2} - g_1^{5/2})}{\ln(g_f/g_1)}, \\ \eta^* &= \frac{\kappa^*(1-f_e)(g^*+1)(g^*+f_e) \sinh(\kappa^*H)}{(g^*+1)^2 + (g^*+f_e)^2 + (g^*+1)(g^*+f_e) (\kappa^*H \sinh(\kappa^*H) - 2 \cosh(\kappa^*H))}, \\ Z_2^* &= 3g^*(1-2\alpha_2^*). \end{aligned} \quad (4.68)$$

Sous chargement purement déviatorique, le potentiel (4.65) donne :

$$\Sigma_m = 0, \quad \Sigma_{eq} = \tilde{\sigma}_0 \quad \text{avec} \quad \tilde{\sigma}_0 = \sigma_0(1-f_e)(1-q_1f_b)/\sqrt{q_3}, \quad (4.69)$$

valeur qui ne prend pas en compte le rapport de forme des ellipsoïdes et qui peut être améliorée (voir la remarque 4.4).

Dans le but d'obtenir une estimation analytique du critère de plasticité, un A approché de la forme suivante est proposé, par simple analogie avec le cas sphérique donné en (4.25) :

$$A = \bar{A} \equiv \frac{q_1 f_b}{\tilde{f} + q_1 f_b} \dot{E}_m. \quad (4.70)$$

Ce choix de A conduit sous chargement purement hydrostatique à :

$$\Sigma_{eq} = 0, \quad \Sigma_m = \tilde{p} \quad \text{avec} \quad \tilde{p} = \frac{1}{3} \sigma_0 (g+1) I, \quad (4.71)$$

où I est une intégrale dont l'expression détaillée est donnée en Annexe I avec :

$$f_t = \tilde{f}, \quad f_s = q_1 f_b, \quad \tilde{P} = 2 \left| \frac{q_1 f_b}{\tilde{f} + q_1 f_b} \right|, \quad \tilde{Q} = \frac{1}{\sqrt{q_3}} \left| \frac{\tilde{f} \tilde{a}}{\tilde{f} + q_1 f_b} \right| \quad \text{et} \quad \tilde{R} = \frac{1}{\sqrt{q_3}} \left| \frac{\tilde{f} \tilde{b}}{\tilde{f} + q_1 f_b} \right|. \quad (4.72)$$

Un critère de type Gurson passant par les deux points purement hydrostatique \tilde{p} et purement déviatorique $\tilde{\sigma}_0$ est proposé (comme dans le cas sphérique en (4.31)) :

$$\frac{1}{\beta} \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^2 + \frac{1}{\alpha} \cosh \left(\frac{3 \Sigma_m}{2 \sigma_0} \right) - 1 = 0, \quad \text{avec} \quad \alpha \equiv \cosh \left(\frac{3 \tilde{p}}{2 \sigma_0} \right) \quad \text{et} \quad \beta \equiv \frac{\alpha}{\alpha - 1} \left(\frac{\tilde{\sigma}_0}{\sigma_0} \right)^2. \quad (4.73)$$

Le critère précédent (4.31) constitue une estimation analytique pour le critère de plasticité d'un milieu poreux avec deux populations de cavités, la seconde population pouvant être de type ellipsoïdes aplatis orientés aléatoirement. En particulier, ce modèle analytique fournit une estimation du critère de plasticité pour un milieu poreux fissuré. Les deux points purement déviatorique et purement hydrostatique obtenus avec ce critère sont des bornes supérieures.

Remarque 4.4 (Amélioration du point purement déviatorique (4.69)) La démarche variationnelle suivie en 4.1.5 dans le cas sphérique est appliquée ici et conduit à :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \sigma_0 \sqrt{1 - q_1 f_b} \sqrt{1 - f_e} \left(\frac{9}{2} \tilde{k}_1 \dot{E}_m^2 + \frac{3}{2} \tilde{\mu}_1 \dot{E}_{eq}^2 \right)^{1/2}, \quad (4.74)$$

où \tilde{k}_1 et $\tilde{\mu}_1$ représentent respectivement les coefficients de compressibilité et de cisaillement effectifs d'un matériau poreux linéaire avec coefficients de compressibilité et de cisaillement k_1 et μ_1 respectivement (choix d'une borne supérieure) :

$$k_1 = \frac{8(1 - q_1 f_b)}{9q_1 f_b}, \quad \mu_1 = \frac{2(1 - q_1 f_b)}{3q_3}. \quad (4.75)$$

La borne supérieure de Ponte Castañeda et Willis (1995) est utilisée pour \tilde{k}_1 et $\tilde{\mu}_1$. Le point purement déviatorique obtenu avec cette majoration s'écrit :

$$\Sigma_m = 0, \quad \Sigma_{eq} = \tilde{\sigma}_0 \quad \text{avec} \quad \tilde{\sigma}_0 = \sigma_0 \sqrt{(1 - q_1 f_b)(1 - f_e)} \sqrt{\frac{3}{2} \tilde{\mu}_1}. \quad (4.76)$$

Le critère obtenu (4.73), (4.71), (4.76) est une estimation du critère de plasticité. Les deux points purement déviatorique et purement hydrostatique obtenus avec ce critère sont des bornes supérieures.

La FIG. 4.16 compare les critères obtenus via la borne supérieure de 4.3.2 (approche de type Gurson, minimisation sur A), le critère approché (4.73) avec (4.71) et (4.69) puis le critère approché modifié en déviatorique avec (4.71) et (4.76). Le critère approché est très proche de la borne supérieure de 4.3.2. Le critère approché modifié en déviatorique fournit bien un point purement déviatorique plus petit que les deux autres modèles. La méthode sécante modifiée à N phases est aussi représentée sur la FIG. 4.16 afin de montrer le bon accord entre ce modèle et les approches de type Gurson (borne supérieure de 4.3.2 et critère approché (4.73)).

4.3.6 Conclusion

Dans le cadre de la modélisation des critères de plasticité des milieux poreux à deux populations de cavités, notamment les poreux fissurés, les recommandations suivantes peuvent être formulées :

- pour une estimation la plus précise possible, mettre en œuvre la résolution numérique du modèle MSMN ellipsoïdal (mise en œuvre lourde),
- pour une estimation moins précise mais rapide et pertinente, ou pour des développements analytiques, utiliser l'estimation de type Gurson modifiée en déviatorique (équation (4.73) avec (4.71) et (4.76)),

cette dernière fournissant par ailleurs la meilleure borne supérieure connue pour des chargements purement hydrostatiques et une borne supérieure très pertinente pour des chargements purement déviatoriques.

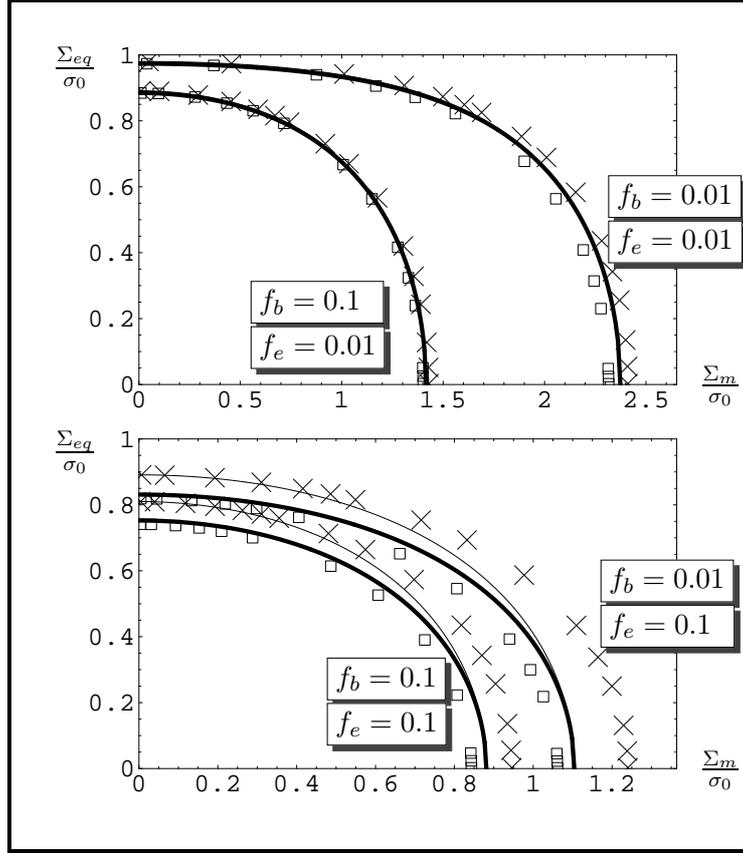


FIG. 4.16 – Critères de plasticité : borne supérieure obtenue avec l’approche de type Gurson ((4.61), croix), estimation obtenue avec l’approche de type Gurson ((4.73) avec (4.71) et (4.69), trait plein), estimation obtenue avec l’approche de type Gurson modifiée en déviatorique ((4.73) avec (4.71) et (4.76), trait plein épais), méthode sécante modifiée à $N = 6$ phases (exposée en 4.3.4, carrés blancs). L’estimation (4.73) avec (4.71) et (4.76) ne viole pas la borne supérieure (4.61) et reste proche du modèle issu de la méthode sécante modifiée à $N = 6$ phases exposé en 4.3.4. $w = 1/5$, $q_1 = q_3 = 1$.

4.4 Borne et estimation elliptiques

Seulement dans cette section, la surface de charge donnée par la borne non linéaire de Ponte Castañeda (1991) ou le modèle de sphère creuse de Michel et Suquet (1992) (présentés en 3.1.2) sont utilisées pour la matrice à la place du critère GTN. Ainsi, un critère elliptique est utilisé pour la matrice dans cette section :

$$(1 - f_b)^2 = A(f_b) \left(\frac{\Sigma_m}{\sigma_0} \right)^2 + \left(1 + \frac{2}{3} f_b \right) \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^2, \quad (4.77)$$

avec $A(f_b) = \frac{9}{4} f_b$ pour la borne non linéaire de Ponte Castañeda (1991) et $A(f_b) = \left(\frac{3(1-f_b)}{2 \ln(f_b)} \right)^2$ pour le modèle de sphère creuse de Michel et Suquet (1992). Conformément aux choix de q_1 et q_3 (équations (3.15) et (3.16)), le coefficient $A(f_b)$ utilisé ici pour le modèle de sphère creuse de Michel et Suquet (1992) est (le but est de conserver le point purement déviatorique donné par la borne supérieure de Ponte Castañeda (1991) et d’abaisser le point hydrostatique par comparaison

aux simulations numériques par l'intermédiaire de q_1) :

$$A(f_b) = \left(\frac{3(1-f_b)}{2 \ln(q_1 f_b)} \right)^2. \quad (4.78)$$

Le potentiel ψ_{SC} obtenu par Michel et Suquet (1992) et correspondant à la surface de plasticité (4.77) est utilisé pour décrire le comportement de la matrice. Puis une démarche analogue à celle de Michel et Suquet (1992) est utilisée afin d'obtenir la surface de plasticité du matériau contenant la deuxième population de cavité (porosité f_e). La démonstration donnée en Annexe K (dans le cas saturé) conduit au critère suivant :

$$\frac{1}{k_o^{hom}} \left(\frac{\Sigma_m}{\sigma_0} \right)^2 + \frac{1}{3\mu_o^{hom}} \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^2 = 2(1-f_e)(1-f_b)^2 \quad (4.79)$$

Les coefficients k_o^{hom} et μ_o^{hom} s'obtiennent par homogénéisation sur un milieu élastique linéaire de matrice de coefficients k_o^1 et μ_o^1 et de porosités de fraction volumique f_e de même géométrie que le milieu non linéaire :

$$\begin{aligned} k_o^1 &= \frac{1}{2A(f_b)} \\ \mu_o^1 &= \frac{1}{6B(f_b)} \quad \text{avec} \quad B(f_b) = \left(1 + \frac{2}{3}f_b\right). \end{aligned} \quad (4.80)$$

Lorsque le $A(f_b)$ est celui de la borne non linéaire de Ponte Castañeda (1991) :

$$A(f_b) = \frac{9}{4}f_b, \quad (4.81)$$

le modèle obtenu fournit une **borne supérieure** pour la surface de charge. Ce modèle est appelé **modèle 2BNL** (borne non linéaire pour les deux échelles).

Lorsque le $A(f_b)$ est celui du modèle de sphère creuse de Michel et Suquet (1992) :

$$A(f_b) = \frac{9(1-f_b)^2}{4(\ln(f_b))^2}, \quad (4.82)$$

le modèle obtenu fournit une **estimation** pour la surface de charge. Ce modèle est appelé **modèle BNLSC** (borne non linéaire pour la deuxième échelle et modèle de sphère creuse pour la première échelle).

Dans le cas des porosités sphériques, les modules k_o^{hom} et μ_o^{hom} correspondent à la borne supérieure de Hashin et Shtrikman (1963). Dans le cas des pores ellipsoïdaux répartis et orientés de façon aléatoire (orientations équiprobables, porosité f_e), la borne supérieure de Ponte Castañeda et Willis (1995) est utilisée.

L'avantage du modèle 2BNL est qu'il constitue une borne supérieure de la surface de plasticité. Son inconvénient est que cette borne est trop majorante pour un chargement purement hydrostatique. L'avantage du modèle BNLSC est d'être entièrement analytique. Son inconvénient réside dans le fait que le modèle de sphère creuse utilisé pour la matrice prédit un taux de croissance des petites porosités trop faible (forme du critère, voir 3.1.2).

La FIG. 4.17 compare les surfaces de plasticité obtenues avec les modèles 2BNL, BNLSC et la méthode sécante modifiée à N phases (modèle MSMN ellipsoïdal), ce dernier constituant ici la meilleure approximation du critère de plasticité pour un matériau poreux constitué d'une matrice rigide parfaitement plastique, d'une population de cavités sphériques de petite taille et d'une population de cavités ellipsoïdales de plus grande taille (séparation de échelles) distribuées aléatoirement en espace et en orientation. De plus, le modèle MSMN ellipsoïdal permet une prise en compte des pressions dans toutes les cavités, ce qui n'est pas le cas de l'estimation donnée en 4.3.5 par l'approche de type Gurson.

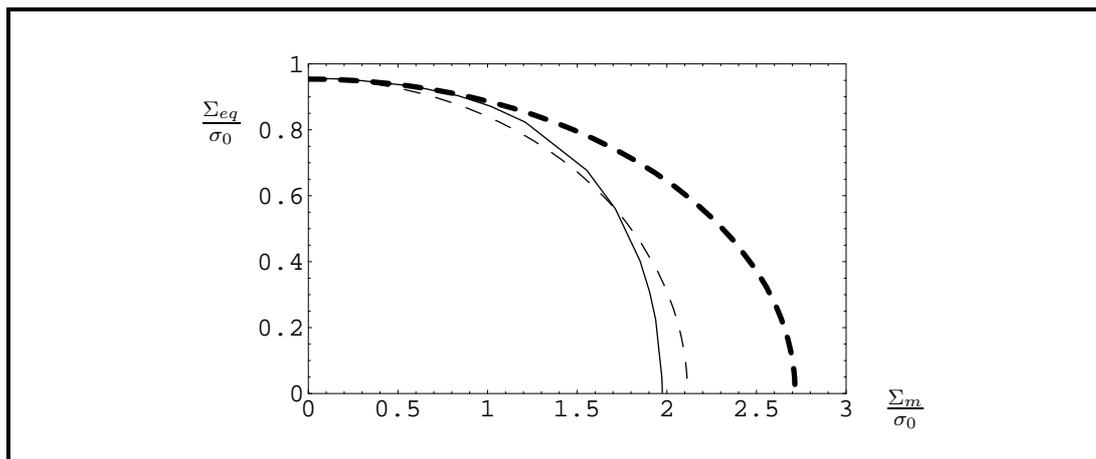


FIG. 4.17 – Critères de plasticité : borne supérieure obtenue avec le modèle 2BNL (relations (4.79) (4.80) (4.81), trait discontinu épais), estimation obtenue avec le modèle BNLSC (relations (4.79) (4.80) (4.82), trait discontinu fin), estimation obtenue avec la méthode sécante modifiée à N phases $N = 6$ (section 4.3.4, modèle MSMN ellipsoïdal, trait plein). $f_e = 0.02$, $f_b = 0.01$, $q_3 = q_1 = 1$, $w = 1/5$.

4.5 Bilan sur les modèles

Les modèles détaillés dans ce chapitre sont recensés dans le tableau ci-dessous :

Méthode	Avantage	Inconvénient	Section
Approche variationnelle : borne supérieure MSM sphérique et MSM ellipsoïdal	Pertinent en déviatorique	Large en hydrostatique, non analytique	4.1.1 et 4.3.1
Approche de type Gurson : borne supérieure	Pertinent en hydrostatique	Large en déviatorique, non analytique	4.1.2 et 4.3.2
Approche variationnelle : estimation MSMN sphérique et MSMN ellipsoïdal	Pertinent en déviatorique et en hydrostatique	Non analytique	4.1.4 et 4.3.4
Approche de type Gurson : estimation	Pertinent en hydrostatique, analytique	Large en déviatorique, forme arbitraire du critère	4.1.5 et 4.3.5
Approche de type Gurson : estimation	Pertinent en déviatorique et en hydrostatique, analytique	Forme arbitraire du critère	4.1.5, remarque 4.2 et 4.3.5, remarque 4.4
Approche variationnelle : borne supérieure 2BNL	Pertinent en déviatorique, analytique	Large en hydrostatique, utilisation d'un autre critère que celui de Gurson pour la matrice	4.4
Approche variationnelle : estimation BNLSC	Pertinent en déviatorique, analytique	Large en hydrostatique, utilisation d'un autre critère que celui de Gurson pour la matrice	4.4

Les modèles énoncés dans le tableau ci-dessus sont étendus au cas des cavités saturées (i.e. pressions non nulles dans les cavités) dans le chapitre 5, à part les estimations issues de l'approche de type Gurson (pour ces modèles, un A approché n'a pas pu être déterminé dans le cas saturé). Au final, le modèle MSMN ellipsoïdal est retenu pour la suite (cas des cavités saturées).

4.6 Simulations numériques FFT

Le modèle MSMN ellipsoïdal est écrit à la section 7.1.2 en déformations planes généralisées. L'objectif de la présente section est de valider la démarche conduisant au modèle MSMN ellipsoïdal (utilisation des "porosités équivalentes") par comparaison à des simulations numériques. Le milieu étudié ici est un milieu bidimensionnel contenant des cavités elliptiques orientées aléatoirement (orientations équiprobables) et plongées dans une matrice de Gurson. Les simulations numériques effectuées utilisent la méthode de la transformée de Fourier rapide (FFT, Michel et al. (2000)). En effet, afin d'étudier les propriétés effectives des composites à microstructures périodiques, Moulinec et Suquet (1998) ont proposé une méthode numérique basée sur des transformées de Fourier rapides (Fast Fourier Transforms, **FFT**). Cette méthode itérative est basée sur l'expression de la fonction de Green d'un milieu de référence élastique linéaire. Cette méthode n'assure pas la convergence lorsque le contraste entre les phases est infini (par exemple, le cas d'un matériau poreux avec matrice rigide plastique parfaite de Von Mises). C'est pourquoi, Michel et al. (2000) ont proposé

de lever cette difficulté de convergence en utilisant une méthode de Lagrangien augmenté. Cette approche s'est révélée efficace pour traiter le cas des problèmes à contraste grand ou infini entre les phases. La méthode de Michel et al. (2000) a été appliquée avec succès dans ce travail pour un matériau à fort contraste entre les deux phases (matrice de Gurson et cavités). L'intérêt de ce type de simulations est de pouvoir réaliser des calculs sur des cellules périodiques et présentant des microstructures complexes. Ainsi, des calculs sur des cellules contenant un grand nombre de cavités ont pu être réalisés, ce qui permet de mieux approximer la géométrie réelle du matériau. Cette section rappelle la méthode dite FFT de Michel et al. (2000), puis l'implémentation dans cette méthode d'une matrice de type Gurson et enfin, les résultats obtenus concernant les surfaces de plasticité pour un milieu poreux (cavités elliptiques orientées aléatoirement) dans une matrice de type Gurson.

4.6.1 Méthode FFT de Michel et al. (2000) (rappels)

D'une façon générale, on considère dans ce paragraphe que l'élément de volume V est composé de différentes phases dont le potentiel en déformation, $\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})$, est tel que pour tout \mathbf{x} de V :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}). \quad (4.83)$$

Le potentiel $\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})$ est une fonction convexe de $\boldsymbol{\varepsilon}$. L'élément de volume V est soumis à une déformation moyenne \mathbf{E} . Des conditions de périodicité sont imposées sur ∂V et la déformation locale $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ est décomposée en sa moyenne \mathbf{E} et en une fluctuation $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$ telle que $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$. Le champ \mathbf{v} est imposé périodique et $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ est imposé anti-périodique. Le potentiel effectif en déformation Φ s'écrit (voir, par exemple, Ponte Castañeda et Suquet (1998)) :

$$\Phi(\mathbf{E}) = \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{K}^\#(\mathbf{E})} \langle \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \rangle_V, \quad (4.84)$$

avec $\mathcal{K}^\#(\mathbf{E}) = \{\mathbf{u} \text{ tel que } \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \mathbf{v} \text{ périodique}\}$. Le problème (4.84) est reformulé comme un problème de minimisation sous contrainte :

$$\inf_{\mathbf{e}} \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{K}^\#(\mathbf{E})} \langle \varphi(\mathbf{e}) \rangle_V, \quad (4.85)$$

sous la contrainte :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \mathbf{e}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V. \quad (4.86)$$

Le Lagrangien augmenté associé au problème de minimisation sous contrainte précédent s'écrit :

$$L_{\mathbf{C}_0}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \mathbf{e}, \boldsymbol{\lambda}) = \langle \varphi(\mathbf{e}) \rangle_V + \langle \boldsymbol{\lambda} : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathbf{e}) \rangle_V + \frac{1}{2} \langle (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathbf{e}) : \mathbf{C}_0 : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathbf{e}) \rangle_V. \quad (4.87)$$

Le problème de minimisation sous contrainte (4.85) revient à résoudre :

$$\sup_{\boldsymbol{\lambda}} \inf_{\mathbf{e}} \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{K}^\#(\mathbf{E})} L_{\mathbf{C}_0}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \mathbf{e}, \boldsymbol{\lambda}). \quad (4.88)$$

Ce problème de point selle est résolu par l'intermédiaire d'un algorithme d'Uzawa :

- Pas i : \mathbf{e}^{i-1} et $\boldsymbol{\lambda}^{i-1}$ connus.
- Etape 1 : Trouver $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i)$ solution du problème :

$$\inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{K}^\#(\mathbf{E})} L_{\mathbf{C}_0}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \mathbf{e}^{i-1}, \boldsymbol{\lambda}^{i-1}).$$

- Etape 2 : Trouver \mathbf{e}^i tel que (pour tout \mathbf{x}) :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{e}}(\mathbf{x}, \mathbf{e}^i) + \mathbf{C}_0 : \mathbf{e}^i(\mathbf{x}) = \mathbf{C}_0 : \varepsilon(\mathbf{u}^i(\mathbf{x})) + \boldsymbol{\lambda}^{i-1}(\mathbf{x}).$$

Cette équation provient du fait que $L_{\mathbf{C}_0}$ est convexe en \mathbf{e} et que $\frac{\partial L_{\mathbf{C}_0}}{\partial \mathbf{e}}(\mathbf{e}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{C}_0}}{\partial \mathbf{e}}(\mathbf{e}) = 0$ en posant $L_{\mathbf{C}_0} = \langle \mathcal{L}_{\mathbf{C}_0} \rangle_V$.

- Etape 3 : Mise à jour de $\boldsymbol{\lambda}^i$:

$$\boldsymbol{\lambda}^i(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\lambda}^{i-1}(\mathbf{x}) + \mathbf{D}_0 : (\varepsilon(\mathbf{u}^i(\mathbf{x})) - \mathbf{e}^i(\mathbf{x})).$$

Le tenseur d'ordre 4, \mathbf{D}_0 donne la direction de descente dans l'algorithme d'Uzawa. Une fois la convergence obtenue : $\varepsilon(\mathbf{u}) = \mathbf{e}$ et \mathbf{u} est tel que l'infimum $\inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{K}^\#(\mathbf{E})} \langle \varphi(\varepsilon(\mathbf{u})) \rangle_V$ est atteint. L'étape 1 correspond au problème d'élasticité linéaire suivant pour un milieu homogène élastique linéaire de raideur \mathbf{C}_0 :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}_0 : \varepsilon(\mathbf{v}(\mathbf{x})) + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in V, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in V, \quad \mathbf{v} \text{ périodique, } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ antipériodique,} \end{cases} \quad (4.89)$$

avec $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$, un champ de polarisation, qui s'écrit :

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\lambda}^{i-1}(\mathbf{x}) - \mathbf{C}_0 : \mathbf{e}^{i-1}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}_0 : \mathbf{E}. \quad (4.90)$$

La solution du problème précédent s'exprime en fonction de l'opérateur de Green $\boldsymbol{\Gamma}^0$:

$$\varepsilon(\mathbf{v}(\mathbf{x})) = -\boldsymbol{\Gamma}^0 * \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in V, \quad (4.91)$$

où le symbole $*$ représente le produit de convolution. Dans l'espace de Fourier, la relation précédente s'écrit :

$$\hat{\varepsilon}(\mathbf{v}(\boldsymbol{\xi})) = -\hat{\boldsymbol{\Gamma}}^0(\boldsymbol{\xi}) : \hat{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\xi}). \quad (4.92)$$

La transformée de Fourier $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}^0$ peut être obtenue de façon explicite (non précisée dans ce document). Lorsque le potentiel $\varphi(\varepsilon)$ peut se mettre sous la forme $\varphi(\varepsilon_m, \varepsilon_{eq})$, l'étape 2 revient à résoudre le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_m}(e_m^i, e_{eq}^i) + 3k_0 e_m^i = 3k_0 \varepsilon_m(\mathbf{u}^i) + \boldsymbol{\lambda}_m^{i-1}, \\ \frac{1}{3\mu_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{eq}}(e_m^i, e_{eq}^i) + e_{eq}^i = \left(\varepsilon^d(\mathbf{u}^i) + \frac{1}{2\mu_0} (\boldsymbol{\lambda}^{i-1})^d \right)_{eq}. \end{cases} \quad (4.93)$$

L'étape 3 consiste à réactualiser le multiplicateur de lagrange $\boldsymbol{\lambda}$, qui correspond, à convergence, au champ de contrainte solution. Le tenseur \mathbf{D}_0 est choisi tel que $\mathbf{D}_0 = \mathbf{C}_0$. Ce choix a l'avantage de donner $\boldsymbol{\lambda}^i = 0$ dans les cavités.

Remarque 4.5 (Direction de contrainte imposée) La méthode FFT est mise en œuvre de façon incrémentale et à déformation imposée \mathbf{E} . Il est remarquable que la direction de contrainte $\boldsymbol{\Sigma}^0$ peut être imposée en utilisant la procédure suivante (voir Michel et al. (1999)) :

- t (paramètre de chargement) imposé. $\boldsymbol{\Sigma}^0$ (direction de contrainte) imposée.
- Trouver \mathbf{E} , $\boldsymbol{\Sigma}$, k (13 inconnues) tels que :
- $\mathbf{E} : \boldsymbol{\Sigma}^0 = t$ (1 équation),
- $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{f}(\mathbf{E})$ (méthode FFT, 6 équations),
- $\boldsymbol{\Sigma} = k \boldsymbol{\Sigma}^0$ (le scalaire k est appelé niveau de contrainte, 6 équations).

4.6.2 Modèle de Gurson en théorie élastoplastique (ou de déformation)

Le but est d'utiliser la méthode FFT (présentée dans le paragraphe précédent) afin de déterminer numériquement et pour différentes valeurs de porosité les surfaces de plasticité d'un milieu contenant des cavités elliptiques (porosité f_e) et une matrice obéissant au critère de Gurson (avec une porosité f_b fixe). La méthode précédente est valable lorsque le comportement de la matrice obéit à un potentiel en déformation $\varphi(\boldsymbol{\varepsilon})$. Le comportement de la matrice de Gurson doit être régularisé et écrit en théorie de la déformation, ce qui fait l'objet de ce paragraphe.

La méthode FFT (présentée dans le paragraphe précédent) nécessite, pour cette étude, la connaissance de $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ dans la matrice (voir l'étape 3). La régularisation du comportement de la matrice en théorie de la déformation revient à écrire un algorithme dont l'entrée est $\boldsymbol{\varepsilon}$ (déformation en un point) et la sortie est $\boldsymbol{\sigma}$ (contrainte en un point). La fonction de charge correspondant au critère de Gurson s'écrit :

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f_b \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right) - 1 - f_b^2. \quad (4.94)$$

La déformation est la somme de la déformation élastique et de la déformation plastique :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (4.95)$$

La déformation élastique se met sous la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma}. \quad (4.96)$$

La déformation plastique s'écrit (théorie de la déformation) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \lambda^p \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}), \quad (4.97)$$

où λ^p est le multiplicateur plastique. Le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{3k} + \lambda^p \frac{f_b}{\sigma_0} \sinh\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right) \\ \varepsilon_{eq} = \frac{\sigma_{eq}}{3\mu} + 2\lambda^p \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0^2} \\ \lambda^p \geq 0, \quad F(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0, \quad \lambda^p F(\boldsymbol{\sigma}) = 0. \end{cases} \quad (4.98)$$

À $\boldsymbol{\varepsilon}$ donné, la première étape consiste à calculer le champ test $\boldsymbol{\sigma}_T = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$. Cela donne : $\sigma_m T = 3k \varepsilon_m$ et $\sigma_{eq} T = 3\mu \varepsilon_{eq}$.

Si $F(\boldsymbol{\sigma}_T) < 0$ alors $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_T$.

Sinon, le système formé des équations (4.98) doit être résolu en remplaçant la dernière équation du système par $F(\sigma_m, \sigma_{eq}) = 0$.

L'équation $F(\sigma_m, \sigma_{eq}) = 0$ donne :

$$\sigma_{eq} = \sigma_0 \sqrt{1 + f_b^2 - 2f_b \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right)}. \quad (4.99)$$

La deuxième équation de (4.98) donne :

$$\lambda^p = \frac{\varepsilon_{eq} \sigma_0}{2} \frac{\sigma_0}{\sigma_{eq}} - \frac{\sigma_0^2}{6\mu}. \quad (4.100)$$

La première équation de (4.98) donne :

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{3k} + \left(\frac{\varepsilon_{eq} \sigma_0}{2} \left(1 + f_b^2 - 2f_b \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right) \right)^{-1/2} - \frac{\sigma_0^2}{6\mu} \right) \frac{f_b}{\sigma_0} \sinh\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right). \quad (4.101)$$

Cette dernière est une équation non linéaire de la forme $\mathcal{F}(\sigma_m) = 0$. Pour la résoudre, un algorithme de Newton-Raphson est utilisé avec :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\sigma_m) &= \frac{\sigma_m}{3k} + \left(\frac{\varepsilon_{eq} f_b}{2\sqrt{1 + f_b^2 - 2f_b \cosh\left(\frac{3}{2}\frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right)}} - \frac{f_b \sigma_0}{6\mu} \right) \sinh\left(\frac{3}{2}\frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right) - \varepsilon_m, \\ \mathcal{F}'(\sigma_m) &= \frac{1}{3k} + \frac{3}{2\sigma_0} \cosh\left(\frac{3}{2}\frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right) \mathcal{H} + \left(\sinh\left(\frac{3}{2}\frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right) \right)^2 \frac{3f_b^2 \varepsilon_{eq}}{4\sigma_0} \left(1 + f_b^2 - 2f_b \cosh\left(\frac{3}{2}\frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right) \right)^{-3/2} \\ \text{avec : } \mathcal{H} &= \frac{\varepsilon_{eq} f_b}{2\sqrt{1 + f_b^2 - 2f_b \cosh\left(\frac{3}{2}\frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right)}} - \frac{f_b \sigma_0}{6\mu}.\end{aligned}\tag{4.102}$$

Une fois la valeur de σ_m fixée, l'équation (4.99) fournit σ_{eq} . L'équation (4.100) fournit ensuite λ^p . Pour finir :

$$\sigma_d = \frac{1}{\frac{1}{2\mu} + \lambda^p \frac{3}{\sigma_0^2}} \varepsilon_d.\tag{4.103}$$

Remarque 4.6 (Test de l'algorithme) Afin de tester l'algorithme, il est intéressant d'utiliser un volume V homogène ne comportant aucune cavité (uniquement de la matrice). En chaque point de V , l'entrée de l'algorithme détaillé dans ce paragraphe correspond à la déformation ε , ce qui implique que le rapport $\varepsilon_m/\varepsilon_{eq}$ est fixe. Pendant la partie élastique, le rapport $\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} = \frac{k \varepsilon_m}{\mu \varepsilon_{eq}}$ est donc lui aussi imposé. Pour une certaine valeur de t (paramètre de chargement), la surface de plasticité est atteinte. L'algorithme fait alors en sorte que, pour chaque t suivant, le critère de plasticité soit toujours vérifié jusqu'à ce que ε^p (qui est normal à la surface de plasticité) soit grand devant ε^e (partie élastique, fixe) et donc soit tel que $\varepsilon \approx \varepsilon^p$. Ainsi, à l'asymptote obtenue, la valeur de la contrainte est toujours située sur la surface de plasticité et en un point tel que la normale à la surface de plasticité en ce point soit colinéaire ε .

Remarque 4.7 (Cas particulier) Si $F(\sigma_T) \geq 0$ et $\varepsilon_{eq} = 0$ alors la solution est directement $\sigma_{eq} = 0$ et $\sigma_m = |\frac{2}{3}\sigma_0 \ln(f_b)| \text{sign}(\varepsilon_m)$.

4.6.3 Résultats

Des simulations numériques utilisant la méthode FFT ont été réalisées en déformations planes généralisées (d'axe 3). Les directions de contrainte choisies sont axisymétriques, de la forme :

$$\Sigma^0 = \begin{pmatrix} T^0 & 0 & 0 \\ 0 & T^0 & 0 \\ 0 & 0 & S^0 \end{pmatrix}.\tag{4.104}$$

Les cellules V sont périodiques et sont constituées d'une matrice obéissant au modèle de Gurson régularisé (porosité f_b) et de cavités à bases elliptiques dans le plan 1 – 2. Pour chaque direction de contrainte imposée, la valeur de Σ à l'asymptote est relevée afin de construire, point par point, la surface de plasticité. Les bases des cavités sont orientées aléatoirement dans la matrice et sont toutes de même dimension (il ne s'agit pas d'un assemblage de Hashin). La microstructure est construite telle que chaque base elliptique est entourée d'un cercle de sécurité comme schématisé sur la FIG. 4.18 afin d'empêcher le recouvrement d'ellipses (processus de type "sphère-dure" pour le cercle de sécurité). Un grand nombre d'ellipses est placé dans V afin d'approcher l'isotropie globale

dans le plan transverse 1 – 2 : l’algorithme place les cercles de sécurité contenant les ellipses une à une (de façon itérative) et en interdisant le recouvrement entre cercles de sécurité ; l’algorithme s’arrête lorsque qu’il n’y a plus assez d’espace disponible dans V pour placer un seul cercle de sécurité. Dans cette section, les surfaces de plasticité obtenues par simulations numériques utilisant la méthode FFT sont comparées aux surfaces de plasticité obtenues via le modèle utilisant la méthode sécante modifiée à N phases, décrit en 7.1.2.

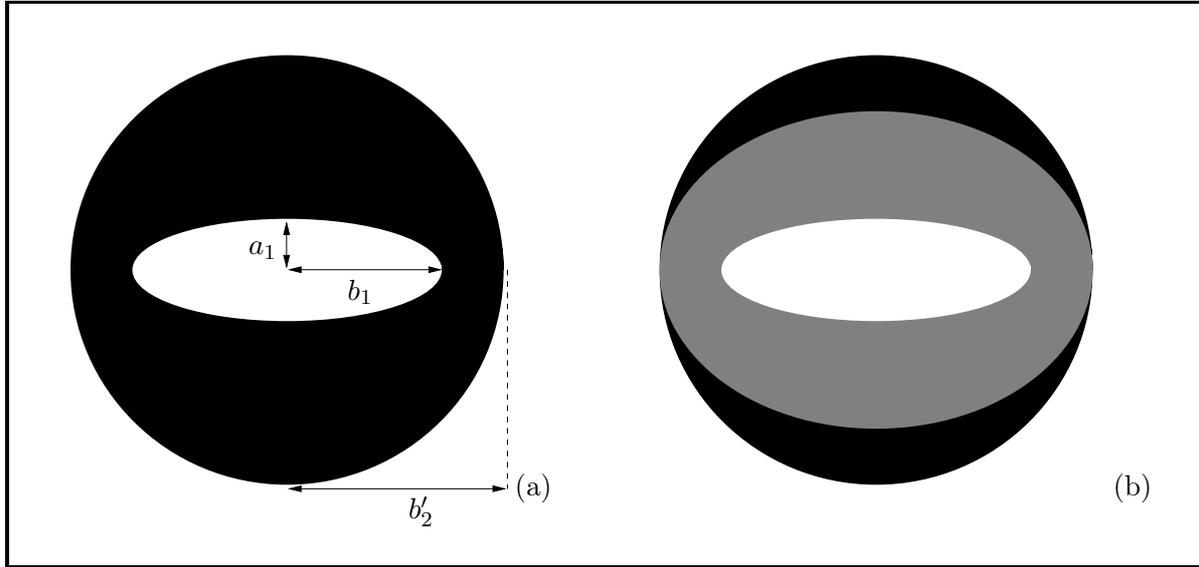


FIG. 4.18 – Pour les simulations numériques par FFT réalisées, chaque ellipse est entourée d’un cercle de sécurité de matrice, ce qui empêche le recouvrement d’ellipses lors de la construction de l’assemblage (figure (a)). Définition de la porosité f_e comme le rapport entre la surface occupée par une cavité elliptique et la surface occupée par l’ellipse confocale de matrice entourant la cavité et de même grand axe que le cercle de sécurité (figure (b)).

La demi longueur du grand axe des cavités elliptiques (dans le plan 1 – 2) est notée b_1 ; la demi longueur du petit axe des cavités elliptiques (dans le plan 1 – 2) est noté a_1 . Le rayon du cercle de sécurité (dans le plan 1 – 2) entourant la cavité est notée b'_2 .

Différentes simulations ont été effectuées avec différentes valeurs de la porosité f_e des cavités elliptiques et du rapport de forme $w = a_1/b_1$. La porosité f_b du critère de Gurson est fixée à 0.1. Les microstructures utilisées sont représentées sur les FIG. 4.19, FIG. 4.21, FIG. 4.23, FIG. 4.25 et FIG. 4.27. La direction de contrainte :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.105)$$

donne une déformation homogène dans la matrice. La direction de contrainte :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.106)$$

donne une déformation diffuse autour de chaque cavité (la déformation diminue avec la distance

au centre de la cavité). La direction de contrainte :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.107)$$

(cas hydrostatique) aboutit à des bandes de localisation : la déformation se concentre en "bandes" entre les cavités. Les FIG. 4.19, FIG. 4.21, FIG. 4.23, FIG. 4.25 et FIG. 4.27 illustrent ces conclusions. Les surfaces de plasticité obtenues par FFT sur ces microstructures sont comparées à celles

	Image 1	Image 2	Image 3	Image 4	Image 5
$\frac{b'_2}{b_1}$	3	2	1.5	3.46	1.413
$\frac{1}{w} = \frac{b_1}{a_1}$	3	3	3	1	6
b'_2	0.025	0.018	0.015	0.018	0.018
Nombre de cavités	278	537	776	537	537
f_e obtenu (en %)	2.02	4.57	8.10	4.58	4.56

TAB. 4.1 – Le domaine V étudié est un carré dont la longueur du côté vaut 1. Le nombre de pixels dans V est 1215×1215 . Pour chaque image, le nombre de pixels dans chaque cavité est supérieur à 100 (il a été vérifié sur un domaine contenant une seule cavité que cela était suffisant).

données par la méthode sécante modifiée à N phases (méthode exposée en 7.1.2). **Dans le cas du chargement (4.105) (chargement axial) et du chargement (4.106) (chargement hydrostatique plan)**, la méthode sécante modifiée à N phases est en accord avec les simulations numériques. **Dans le cas du chargement hydrostatique (4.107)**, la méthode sécante modifiée à N phases est trop majorante comparée aux simulations numériques : les bandes de localisation observées dans les simulations numériques ne sont pas prises en compte dans le modèle. La modélisation de ce phénomène de localisation reste encore un problème ouvert. Il a été observé qu'à porosité f_e fixe, plus w est petit et plus le phénomène de localisation est important. De même, à w fixe, il a été constaté que plus la porosité f_e augmente et plus le phénomène de localisation est important.

Afin d'améliorer l'accord en hydrostatique entre simulations numériques FFT et méthode sécante modifiée à N phases, une porosité modifiée plus importante que la porosité réelle est utilisée dans le modèle (cf q_1 dans les modèles GTN) : cette porosité modifiée f_{qe} est définie comme le rapport entre la surface occupée par une seule cavité elliptique et la surface occupée par l'ellipse confocale de matrice entourant cette cavité et de même grand axe que le cercle de sécurité (voir FIG. 4.18). Il est rappelé que, la porosité f_e est définie comme la fraction volumique occupée par les cavités dans le domaine total V . L'utilisation de la porosité f_{qe} améliore grandement les résultats de la comparaison entre simulations numériques FFT et méthode sécante modifiée à N phases : les points du modèle correspondant aux chargements (4.105) (chargement axial) et (4.106) (chargement hydrostatique plan) sont légèrement inférieurs à ceux des simulations numériques mais un bon accord est observé dans le cas du chargement (4.107) (hydrostatique).

Les FIG. 4.20, FIG. 4.22, FIG. 4.24, FIG. 4.26, FIG. 4.28 illustrent ces résultats.

Bilan Ces simulations numériques par FFT permettent de valider le modèle utilisant la méthode sécante modifiée à N phases en déformations planes généralisées décrit en 7.1.2 et, d'une façon plus générale, de valider la notion de "porosités équivalentes" permettant de traiter le cas des cavités à bases elliptiques (resp. des cavités ellipsoïdales en 3D) à partir du cas des cavités à bases circulaires (resp. des cavités sphériques en 3D).

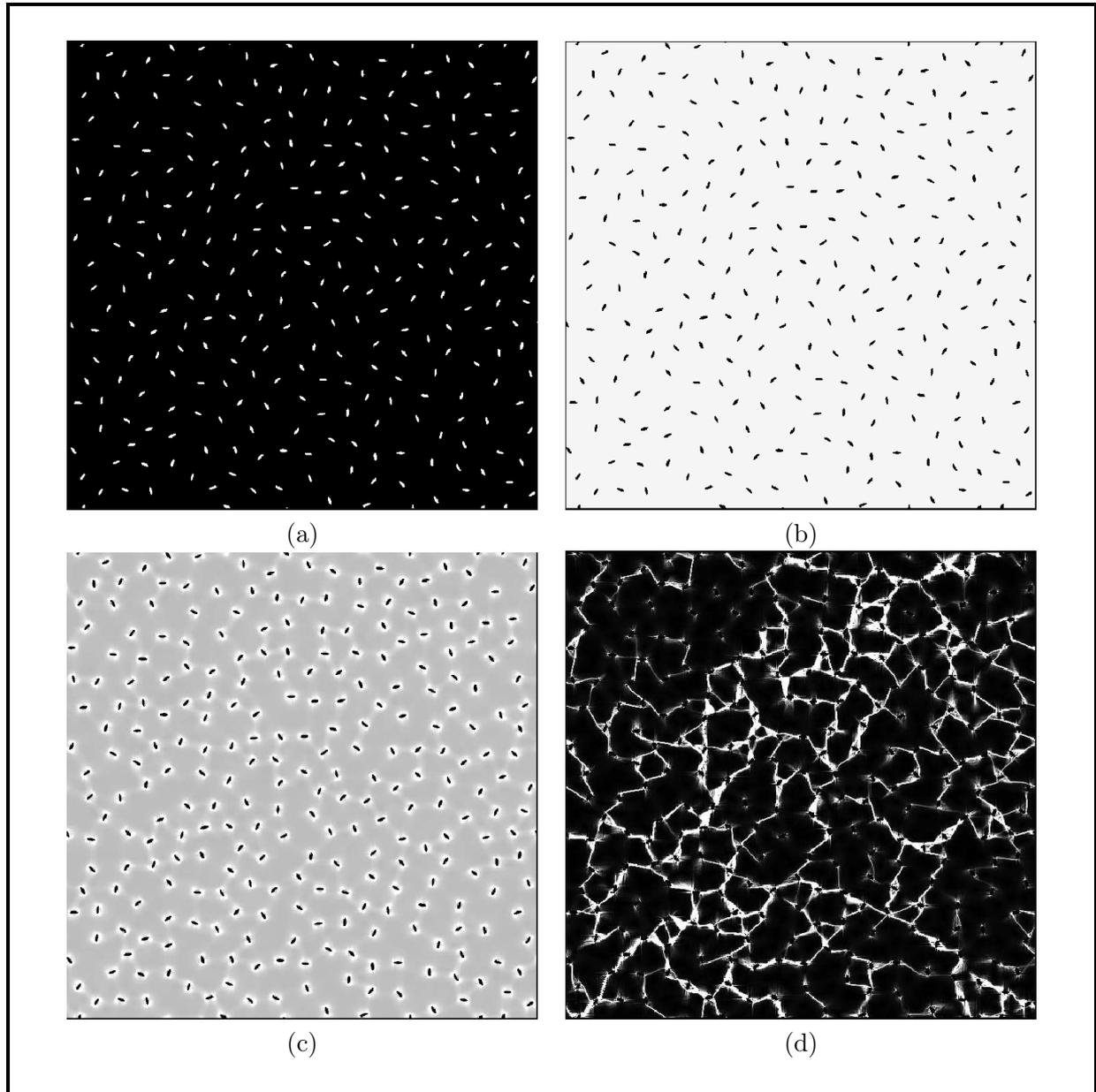


FIG. 4.19 – *Simulations numériques par FFT. Image 1 (caractéristiques précisées dans TAB. 4.1). (a) : Microstructure. Cartes des déformations équivalentes (blanc : déformations équivalentes supérieures ou égales à 1%). (b) : Direction de chargement (4.105). (c) : Direction de chargement (4.106). (d) : Direction de chargement (4.107).*

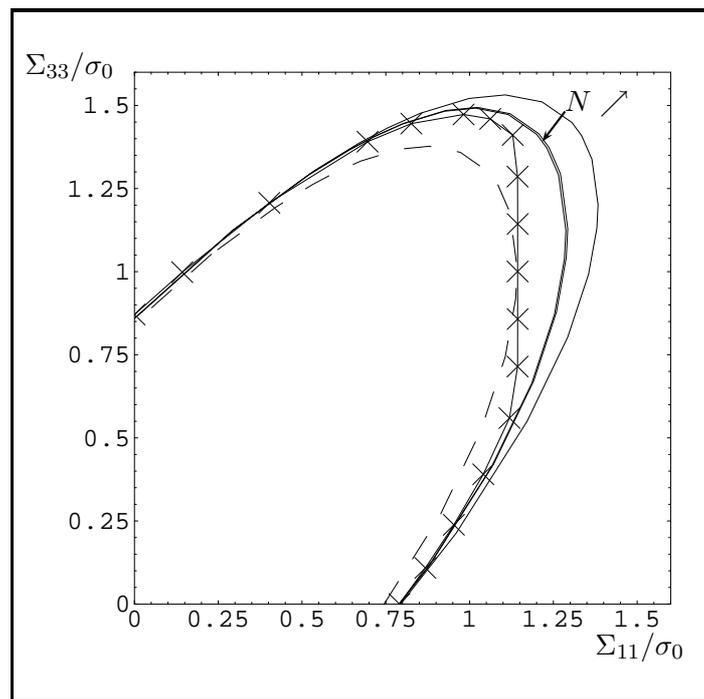


FIG. 4.20 – Comparaison entre simulations numériques FFT (Image 1, caractéristiques précisées dans TAB. 4.1) et modèle. Traits pleins : modèle utilisant la méthode sécante modifiée à N phases décrite en 7.1.2 (pour $N = 2$ puis $N = 6$ puis $N = 11$); Croix : simulations numériques FFT; Trait discontinu : modèle utilisant la méthode sécante modifiée à N phases décrite en 7.1.2 avec la porosité modifiée f_{qe} (ici $f_{qe} = 3.91\%$ et $N = 6$).

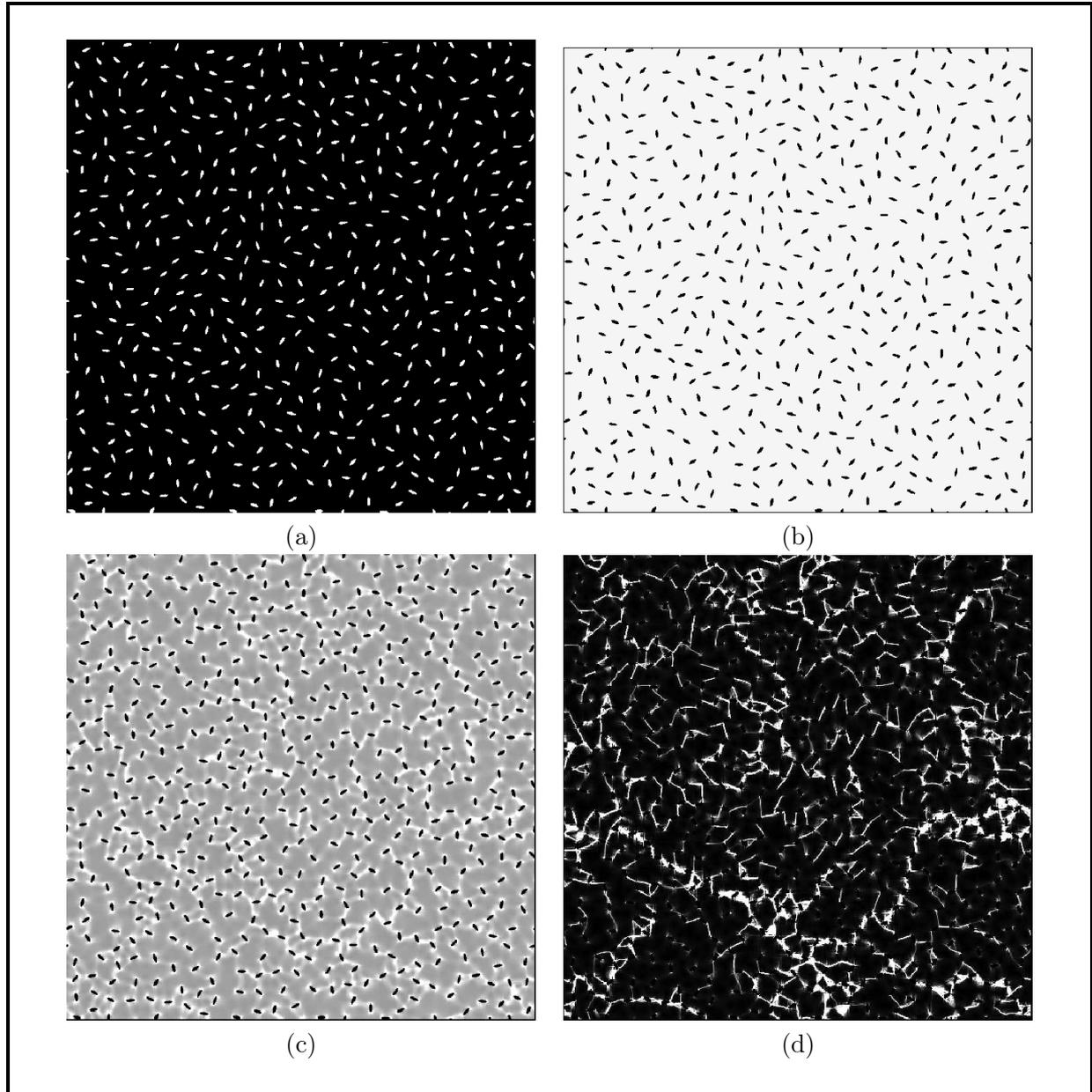


FIG. 4.21 – *Simulations numériques par FFT. Image 2 (caractéristiques précisées dans TAB. 4.1). (a) : Microstructure. Cartes des déformations équivalentes (blanc : déformations équivalentes supérieures ou égales à 1%). (b) : Direction de chargement (4.105). (c) : Direction de chargement (4.106). (d) : Direction de chargement (4.107).*

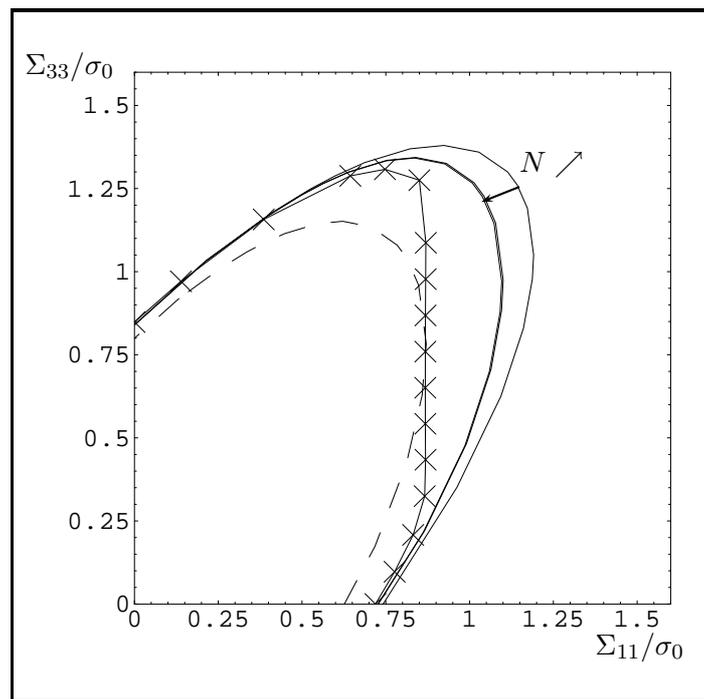


FIG. 4.22 – Comparaison entre simulations numériques FFT (Image 2, caractéristiques précisées dans TAB. 4.1) et modèle. Traits pleins : modèle utilisant la méthode sécante modifiée à N phases décrite en 7.1.2 (pour $N = 2$ puis $N = 6$ puis $N = 11$); Croix : simulations numériques FFT; Trait discontinu : modèle utilisant la méthode sécante modifiée à N phases décrite en 7.1.2 avec la porosité modifiée f_{qe} (ici $f_{qe} = 9.49\%$ et $N = 6$).

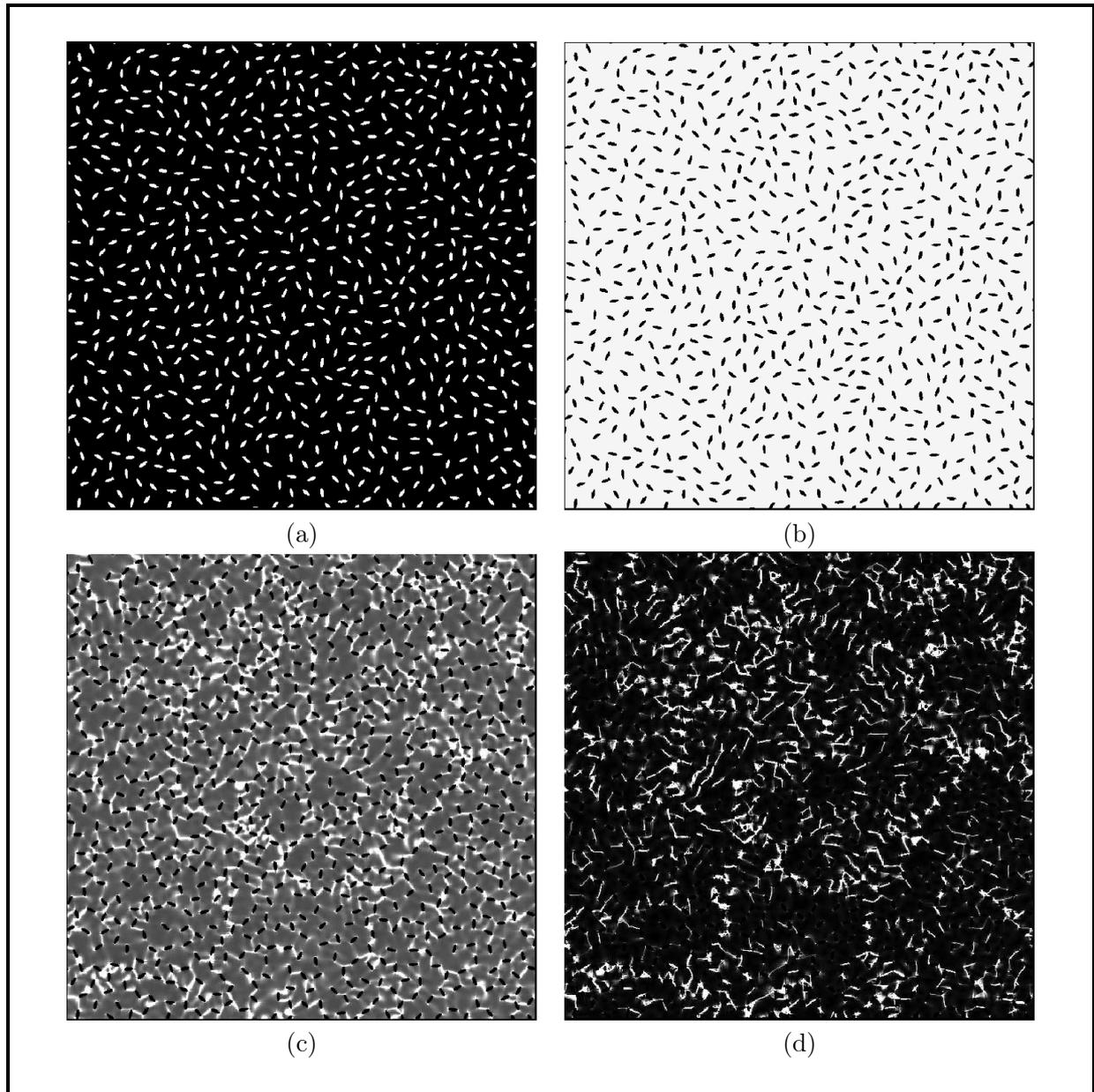


FIG. 4.23 – *Simulations numériques par FFT. Image 3 (caractéristiques précisées dans TAB. 4.1). (a) : Microstructure. Cartes des déformations équivalentes (blanc : déformations équivalentes supérieures ou égales à 1%). (b) : Direction de chargement (4.105). (c) : Direction de chargement (4.106). (d) : Direction de chargement (4.107).*

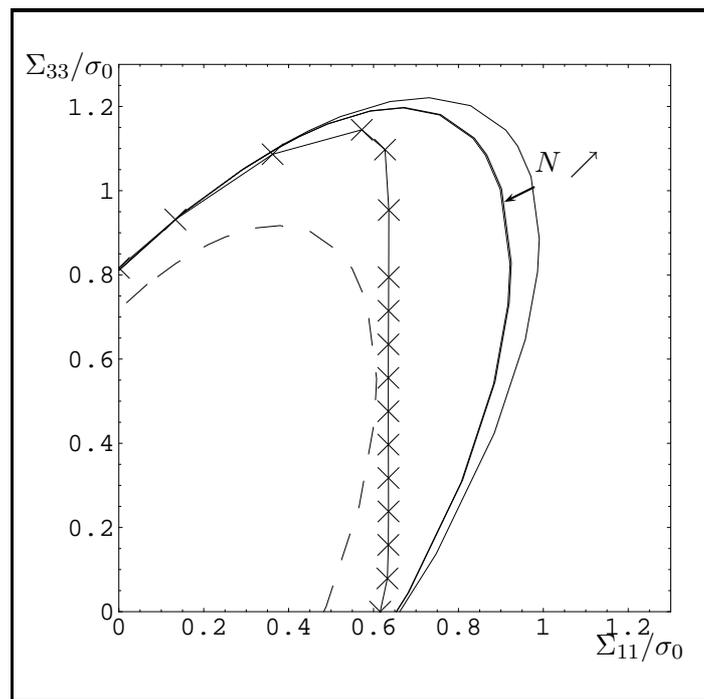


FIG. 4.24 – Comparaison entre simulations numériques FFT (Image 3, caractéristiques précisées dans TAB. 4.1) et modèle. Traits pleins : modèle utilisant la méthode sécante modifiée à N phases décrite en 7.1.2 (pour $N = 2$ puis $N = 6$ puis $N = 11$); Croix : simulations numériques FFT; Trait discontinu : modèle utilisant la méthode sécante modifiée à N phases décrite en 7.1.2 avec la porosité modifiée f_{qe} (ici $f_{qe} = 18.98\%$ et $N = 6$).

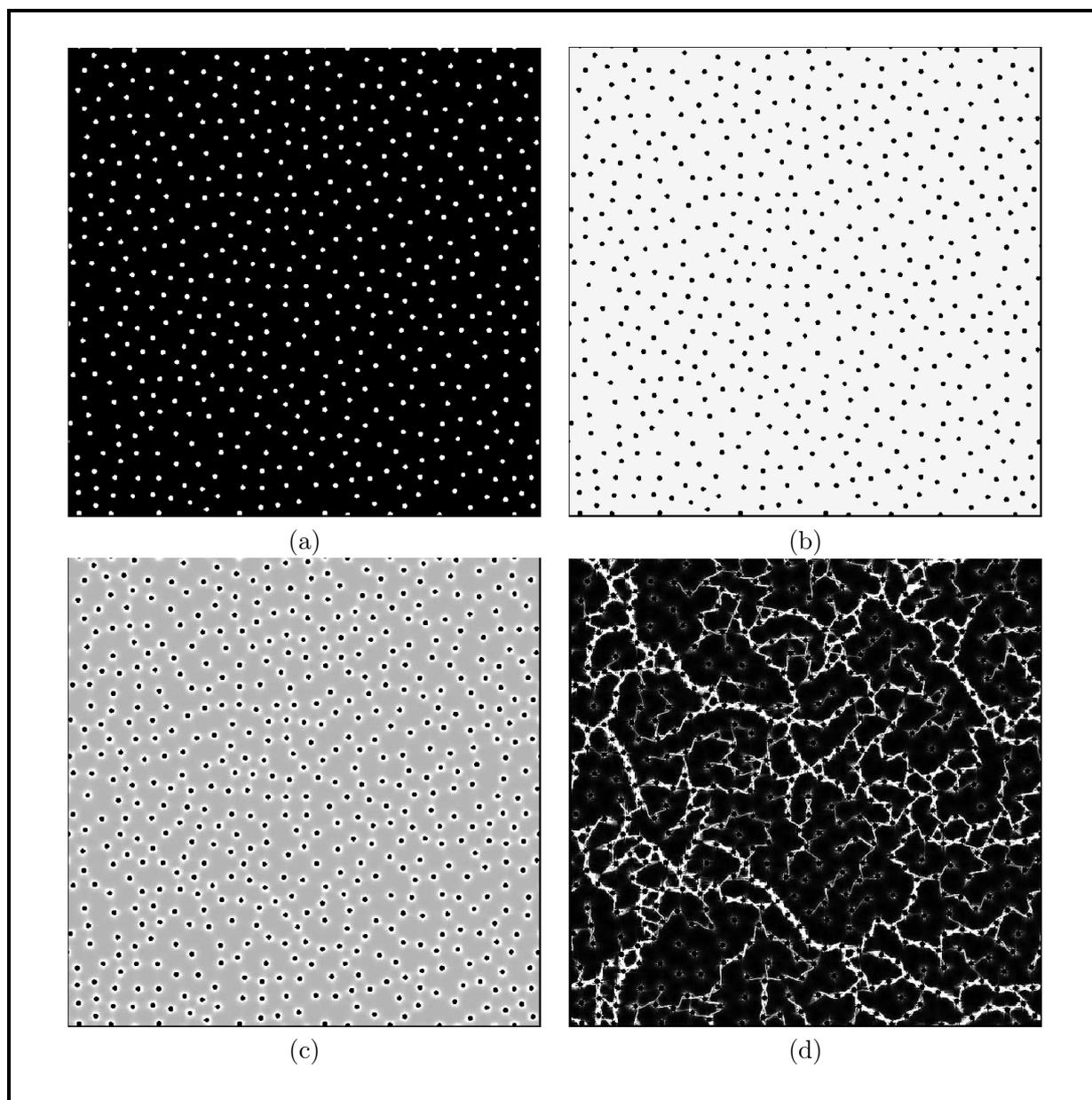


FIG. 4.25 – *Simulations numériques par FFT. Image 4 (caractéristiques précisées dans TAB. 4.1). (a) : Microstructure. Cartes des déformations équivalentes (blanc : déformations équivalentes supérieures ou égales à 1%) ; (b) : Direction de chargement (4.105). (c) : Direction de chargement (4.106). (d) : Direction de chargement (4.107).*

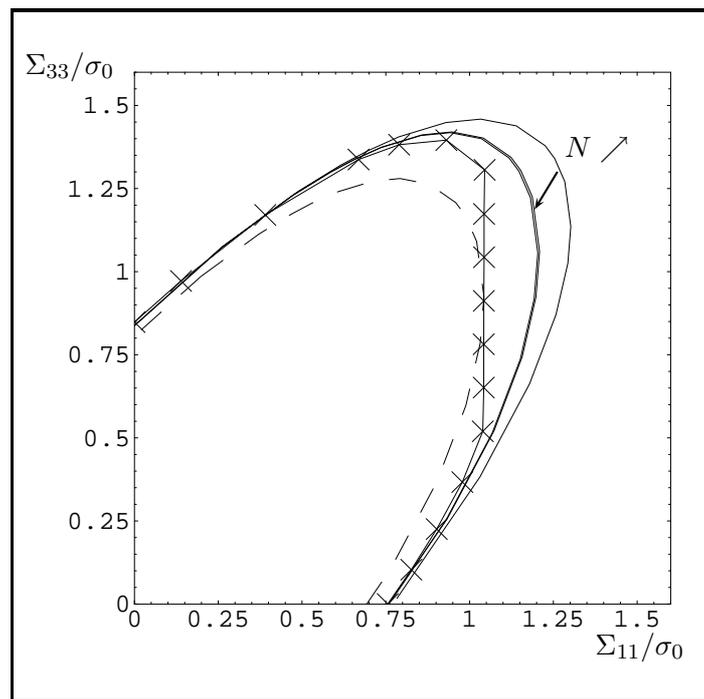


FIG. 4.26 – Comparaison entre simulations numériques FFT (Image 4, caractéristiques précisées dans TAB. 4.1) et modèle. Traits pleins : modèle utilisant la méthode sécante modifiée à N phases décrite en 7.1.2 (pour $N = 2$ puis $N = 6$ puis $N = 11$); Croix : simulations numériques FFT; Trait discontinu : modèle utilisant la méthode sécante modifiée à N phases décrite en 7.1.2 avec la porosité modifiée f_{qe} (ici $f_{qe} = 8.39\%$ et $N = 6$).

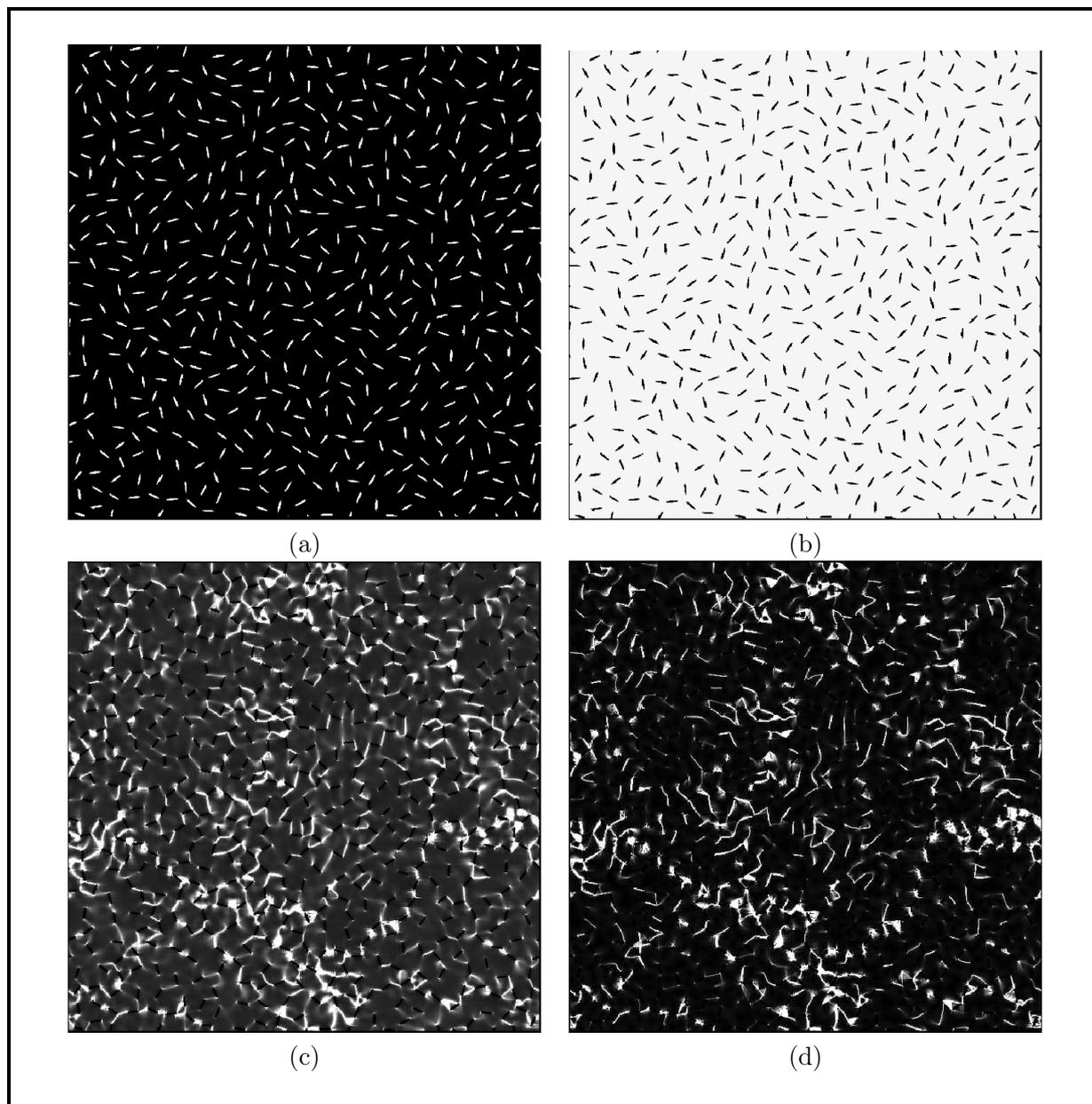


FIG. 4.27 – *Simulations numériques par FFT. Image 5 (caractéristiques précisées dans TAB. 4.1). (a) : Microstructure. Cartes des déformations équivalentes (blanc : déformations équivalentes supérieures ou égales à 1%). (b) : Direction de chargement (4.105). (c) : Direction de chargement (4.106). (d) : Direction de chargement (4.107).*

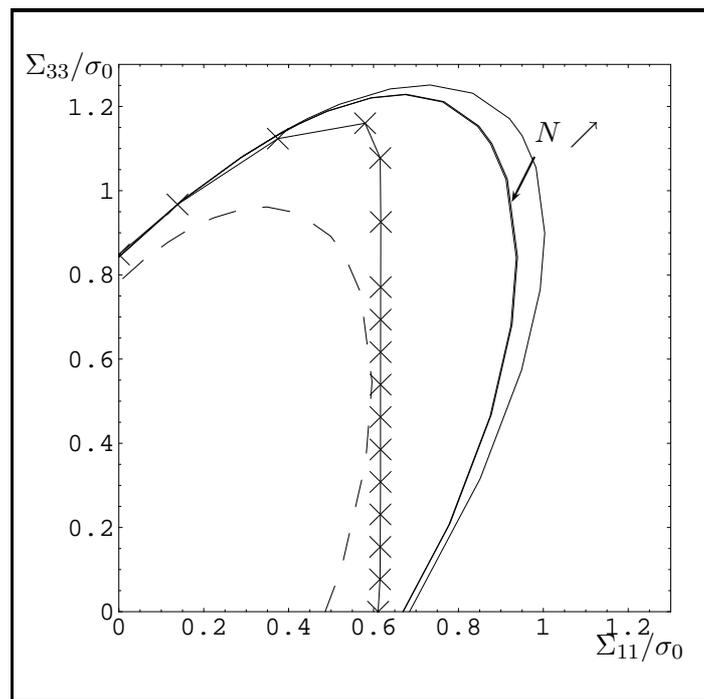


FIG. 4.28 – Comparaison entre simulations numériques FFT (Image 5, caractéristiques précisées dans TAB. 4.1) et modèle. Traits pleins : modèle utilisant la méthode sécante modifiée à N phases décrite en 7.1.2 (pour $N = 2$ puis $N = 6$ puis $N = 11$); Croix : simulations numériques FFT; Trait discontinu : modèle utilisant la méthode sécante modifiée à N phases décrite en 7.1.2 avec la porosité modifiée f_{qe} (ici $f_{qe} = 11.66\%$ et $N = 6$).

Chapitre 5

Matériaux poreux avec deux populations de cavités sous pressions (saturées)

Le milieu étudié dans ce chapitre est composé d'une matrice rigide plastique parfaite (critère de Von Mises), d'une première population de cavités sphériques (petite échelle) sous pression (pression uniforme notée p_b) et d'une seconde population de cavités ellipsoïdales aplaties (oblate) orientées aléatoirement avec orientations équiprobables (échelle supérieure) sous pression (pression uniforme notée p_e). Le milieu est schématisé sur la FIG. 5.1.

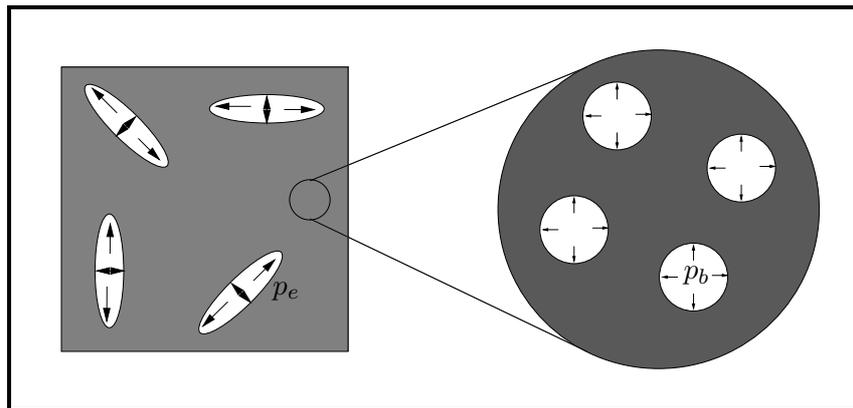


FIG. 5.1 – Milieu étudié au chapitre 5 : première population de cavités sphériques (petite échelle) sous pression uniforme p_b et seconde population de cavités ellipsoïdales orientées aléatoirement avec orientations équiprobables (échelle supérieure) sous pression uniforme p_e .

L'objectif de ce chapitre est d'étendre le modèle MSMN ellipsoïdal (estimation obtenue par l'intermédiaire de l'approche variationnelle) présenté au chapitre 4 dans le cas où les cavités sont saturées (i.e. le cas où les cavités sont sous pression). Comme dans le chapitre 4, il est vérifié que le modèle MSMN ellipsoïdal ne viole pas les deux bornes supérieures obtenues avec l'approche variationnelle (méthode sécante modifiée avec 2 phases pour le composite linéaire de comparaison) et avec l'approche de type Gurson.

Le contenu du chapitre est le suivant.

- Tout d'abord sont exposés des rappels bibliographiques concernant le cas élastique linéaire avec une unique population de cavités saturées (pression uniforme dans les cavités). Ces rappels sont utiles pour déterminer le comportement effectif ainsi que l'énergie totale du composite linéaire de comparaison dans la méthode sécante modifiée (approche variationnelle).

- L’approche variationnelle (méthode sécante modifiée avec 2 phases pour le composite linéaire de comparaison) est exposée et conduit à une borne supérieure pour la surface de plasticité.
- L’approche de type Gurson est étendue au cas saturé et conduit aussi à une borne supérieure pour la surface de plasticité. Comme dans le cas drainé (i.e. pressions nulles dans les cavités), l’approche de type Gurson s’avère pertinente dans le cas d’un chargement purement hydrostatique et la méthode sécante modifiée avec 2 phases pour le composite linéaire de comparaison s’avère pertinente dans le cas d’un chargement purement déviatorique.
- L’estimation MSMN ellipsoïdal (et MSMN sphérique) est ensuite établie à partir de la méthode sécante modifiée avec N phases pour le composite linéaire de comparaison. Comme dans le cas drainé, il est vérifié que l’estimation obtenue ne viole ni le point hydrostatique obtenue avec la borne supérieure due à l’approche de type Gurson ni le point déviatorique obtenue avec la borne supérieure due à l’approche variationnelle.
- Les modèles basés sur une matrice autre que le critère de Gurson (modèles elliptiques), appelés 2BNL et BNLSC dans le chapitre 4, sont étendus au cas des cavités saturées. Ils constituent respectivement une borne supérieure et une estimation pour la surface de plasticité. Leur avantage est qu’ils sont analytiques (contrairement aux autres modèles exposés dans ce chapitre qui nécessitent un traitement numérique) mais il est montré qu’ils sont très imprécis en hydrostatique dans le cas saturé.
- Enfin, l’effet mécanique des pressions sur la surface de plasticité globale est discutée.

5.1 Cas élastique linéaire avec une unique population de cavités saturées : rappels

Cette section reprend quelques résultats classiques concernant un domaine V de matrice élastique linéaire et contenant des cavités ω_e (de forme non précisée et de porosité f_e). Le tenseur de rigidité de la matrice est noté \mathbf{C}_o . Les cavités sont sous pression (uniforme) notée p . Le problème en condition de déformation homogène au bord est traité sur ce milieu :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\epsilon} & \text{dans la matrice} \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0} & \text{dans } V \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} = -p \cdot \mathbf{N} & \text{sur } \partial\omega_e, \\ \mathbf{u} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} & \text{sur } \partial V \end{cases}$$

On en déduit que la contrainte effective s’écrit : $\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_V$. Le vecteur \mathbf{N} est la normale rentrant dans la cavité considérée. D’après le théorème de superposition, le problème précédent peut se décomposer en deux sous-problèmes, l’un drainé mais avec déformation homogène au bord non nulle et l’autre saturé mais avec déformation homogène au bord nulle :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\epsilon}' & \text{dans la matrice} \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}') = \mathbf{0} & \text{dans } V \\ \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{N} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\omega_e, \\ \mathbf{u}' = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} & \text{sur } \partial V \end{cases} + \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}'' = \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\epsilon}'' & \text{dans la matrice} \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}'') = \mathbf{0} & \text{dans } V \\ \boldsymbol{\sigma}'' \cdot \mathbf{N} = -p \cdot \mathbf{N} & \text{sur } \partial\omega_e, \\ \mathbf{u}'' = \mathbf{0} & \text{sur } \partial V \end{cases}$$

L’annexe J.1.2 (qui reprend les résultats de Dormieux et al. (2002, 2006)) donne la relation suivante entre \mathbf{E} et $\boldsymbol{\Sigma}$:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{C}^{hom} : \mathbf{E} - \mathbf{B}p, \quad (5.1)$$

relation originale de Biot (1941). Le tenseur \mathbf{C}^{hom} est le tenseur effectif du milieu drainé. Le tenseur \mathbf{B} est un tenseur d’ordre 2 appelé tenseur de Biot. Ce tenseur s’écrit, lorsque le milieu V

est macroscopiquement isotrope et que la matrice est isotrope, sous la forme :

$$\mathbf{B} = b\mathbf{I} \quad \text{avec :} \quad b = 1 - \frac{k^{hom}}{k_o}. \quad (5.2)$$

L'annexe J.1.2 montre que l'énergie totale sur V vaut :

$$\mathcal{E} = \frac{|V|}{2} \mathbf{E} : \mathbf{C}^{hom} : \mathbf{E} - |V| p \mathbf{B} : \mathbf{E} - \frac{|V|}{2} \frac{p^2}{M}. \quad (5.3)$$

L'énergie fait bien apparaître un terme quadratique en \mathbf{E} , un terme quadratique en p et un terme "croisé" en $p\mathbf{E}$. Ces résultats seront utilisés par la suite (section 5.3) dans l'approche variationnelle. Le coefficient $1/M$ est appelé module de Biot et vaut dans le cas d'un milieu V macroscopiquement isotrope et avec une matrice isotrope :

$$\frac{1}{M} = \frac{b - f_e}{k_o}. \quad (5.4)$$

5.2 Première échelle : prise en compte d'une pression dans les cavités

Soit un matériau poreux (domaine V) saturé (une pression p_b règne dans les cavités) ayant une **matrice incompressible** de potentiel en contrainte ψ . Le problème à résoudre s'écrit, en taux de déformation homogène au bord :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\sigma}) & \text{dans la matrice} \\ \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0} & \text{dans la matrice} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} = -p_b \mathbf{N} & \text{sur le bord des pores} \\ \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x} & \text{sur } \partial V \end{array} \right.$$

Le champ $\boldsymbol{\sigma}$ est prolongé par $-p_b \mathbf{I}$ dans le volume occupé par les pores et la contrainte effective $\boldsymbol{\Sigma}$ vaut $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_V$. Le vecteur \mathbf{N} est la normale dirigée vers l'intérieur du pore considéré. Le changement de variable suivant est effectué : $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} + p_b \mathbf{I}$. Compte tenu du fait que la matrice est incompressible, le potentiel ψ ne dépend pas de σ_m et on a : $\psi(\boldsymbol{\sigma}') = \psi(\boldsymbol{\sigma})$, ce qui induit : $\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\sigma}') = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\sigma})$. Ce problème "translaté" s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\sigma}') & \text{dans la matrice} \\ \text{div}(\boldsymbol{\sigma}') = \mathbf{0} & \text{dans la matrice} \\ \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{N} = \mathbf{0} & \text{sur les bords des pores} \\ \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x} & \text{sur } \partial V \end{array} \right.$$

Le champ $\boldsymbol{\sigma}$ est prolongé par $-p_b \mathbf{I}$ dans le volume occupé par les pores et la contrainte effective $\boldsymbol{\Sigma}'$ vaut $\langle \boldsymbol{\sigma}' \rangle_V = \boldsymbol{\Sigma} + p_b \mathbf{I}$. C'est le même problème que le problème drainé (i.e. pression nulle dans les cavités) où la contrainte macroscopique $\boldsymbol{\Sigma}$ est remplacée par $\boldsymbol{\Sigma} + p_b \mathbf{I}$. **Les critères développés au chapitre 3 s'appliquent donc pour des porosités sous pression (il suffit que la matrice soit incompressible). Il suffit, dans ces critères, de remplacer Σ_m par $\Sigma_m + p_b$.** Cette translation du critère de plasticité effectif le long de l'axe hydrostatique est mise en évidence dans Dormieux et al. (2006).

5.3 Deuxième échelle : cavités ellipsoïdales aplaties et orientées aléatoirement, prise en compte d'une pression dans les cavités

Dans cette section, les cavités à la petite échelle (porosité f_b) sont sphériques et sous pression (uniforme et notée p_b) et les cavités à l'échelle supérieure (porosité f_e) sont ellipsoïdales aplaties (oblate) orientées aléatoirement (orientations équiprobables) et également sous pression (uniforme et notée p_e). **La différence des pressions ($p_b - p_e$) est notée p .** La matrice est supposée rigide plastique parfaite (critère de Von Mises). Le domaine étudié est schématisé sur la FIG. 5.1.

Cette section reprend, pour le cas saturé, les bornes supérieures obtenues dans le cas drainé au chapitre 4 (borne supérieure obtenue avec la méthode sécante modifiée et borne supérieure obtenue avec l'approche de type Gurson). Comme dans le cas drainé, une estimation est proposée à partir de la méthode sécante modifiée à N phases.

5.3.1 Méthode sécante modifiée (approche variationnelle) : borne supérieure

La méthode sécante modifiée (approche variationnelle) aboutit à la résolution d'un système d'équations donné à la fin de cette section. La démonstration est donnée en Annexe J.

La borne supérieure de Ponte Castañeda et Willis (1995) est utilisée, i.e. $k_o^{hom} = k_o^{PCW}$ et $\mu_o^{hom} = \mu_o^{PCW}$ (Annexe G).

Il est rappelé que les expressions de k_o^1 et de μ_o^1 sont tirées de la relation

$$\mathbf{C}_o^1 = \frac{\partial \varphi^G}{\partial \mathbb{D}}(\bar{\mathbb{E}}^{(1)}) \quad (5.5)$$

(matrice de Gurson de potentiel φ^G donné en (4.4)) et que les expressions de $(\dot{\epsilon}_m)^2$ et de $(\dot{\epsilon}_{eq})^2$ dérivent de la relation suivante faisant intervenir l'énergie du CLC (voir équation (5.3) et Annexe J) :

$$\bar{\mathbb{E}}^{(1)} = \frac{1}{1 - f_e} \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_o^1} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{C}_o^{hom} : \dot{\mathbf{E}} + p(\mathbf{B} - \mathbf{I}) : \dot{\mathbf{E}} - \frac{1}{2} \frac{p^2}{M} \right), \quad (5.6)$$

où le tenseur $\bar{\mathbb{E}}^{(1)}$ représente la moyenne volumique de $\mathbb{E} = \frac{1}{2} \dot{\epsilon} \otimes \dot{\epsilon}$ sur la phase matrice. Le tenseur \mathbf{B} est le tenseur de Biot et le terme $1/M$ est le module de Biot du composite linéaire de comparaison.

Le problème à résoudre s'écrit :

Entrées : \dot{E}_m et \dot{E}_{eq} ;

répéter

- actualisation de k_o^1 et de μ_o^1 (propriétés de la matrice du composite linéaire de comparaison) :

$$k_o^1 = \frac{2}{9} \sigma_0 \frac{1}{\sqrt{(\dot{\varepsilon}_m)^2}} \left(-\text{Arcsinh} \left(2 \sqrt{\frac{(\dot{\varepsilon}_m)^2}{(\dot{\varepsilon}_{eq})^2}} q_3 \right) + \text{Arcsinh} \left(\frac{2}{f_{qb}} \sqrt{\frac{(\dot{\varepsilon}_m)^2}{(\dot{\varepsilon}_{eq})^2}} q_3 \right) \right) ;$$

$$\mu_o^1 = \frac{1}{3} \frac{\sigma_0}{(\dot{\varepsilon}_{eq})^2} \left(\sqrt{4(\dot{\varepsilon}_m)^2 + \frac{(\dot{\varepsilon}_{eq})^2}{q_3}} - f_{qb} \sqrt{\frac{4(\dot{\varepsilon}_m)^2}{(f_{qb})^2} + \frac{(\dot{\varepsilon}_{eq})^2}{q_3}} \right) ;$$

- actualisation du second moment du taux de déformation dans la matrice :

$$(\dot{\varepsilon}_m)^2 = \frac{1}{3(1-f_e)} \frac{\partial \mu_o^{hom}}{\partial k_o^1} (\dot{E}_{eq})^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{1-f_e} \frac{\partial k_o^{hom}}{\partial k_o^1} \left(\dot{E}_m - \frac{p}{3k_o^1} \right)^2 + \frac{2p}{3(1-f_e)} \dot{E}_m \frac{k_o^{hom}}{(k_o^1)^2} - \frac{p^2}{(k_o^1)^2 9(1-f_e)} \left(\frac{2k_o^{hom}}{k_o^1} - 1 + f_e \right) ;$$

$$(\dot{\varepsilon}_{eq})^2 = \frac{1}{(1-f_e)} \frac{\partial \mu_o^{hom}}{\partial \mu_o^1} (\dot{E}_{eq})^2 + \frac{3}{(1-f_e)} \frac{\partial k_o^{hom}}{\partial \mu_o^1} \left(\dot{E}_m - \frac{p}{3k_o^1} \right)^2 ;$$

jusqu'à convergence sur $(\dot{\varepsilon}_m)^2$ et $(\dot{\varepsilon}_{eq})^2$;

Sorties : $\Sigma_m = 3k_o^{hom} \dot{E}_m - p \frac{k_o^{hom}}{k_o^1} - p_e$ et $\Sigma_{eq} = 3\mu_o^{hom} \dot{E}_{eq}$.

5.3.2 Approche de type Gurson : borne supérieure

Le problème traité aux sections 4.1.2 et 4.3.2 est repris avec prise en compte des pressions p_b et p_e :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x} & \text{sur } \partial\Omega \\ \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} = -p_e \mathbf{N} & \text{sur } \partial\omega, \mathbf{N} \text{ est la normale dirigée vers l'intérieur de } \omega \\ \boldsymbol{\sigma} + p_b \mathbf{I} = \frac{\partial \varphi^G}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) & \text{dans la matrice} \\ \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_\Omega = \boldsymbol{\Sigma} \end{cases}$$

Le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ est prolongé par $-p_e \mathbf{I}$ dans ω . Ainsi, $\boldsymbol{\sigma}$ vérifie bien $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} = -p_e \mathbf{N}$ sur $\partial\omega$ et $\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}$ dans Ω . Le champ de vitesse $\dot{\mathbf{u}}$ est prolongé dans ω de façon à être de classe C^1 dans Ω .

La loi de comportement du problème donné ci-dessus peut s'écrire dans la matrice :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial(\varphi^G(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) - 3p_b \dot{\varepsilon}_m)}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}. \quad (5.7)$$

Le principe variationnel (équations (2.13) et (2.21)) donne avec le champ de vitesse $\dot{\mathbf{v}}$ précisé dans le cas drainé :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \inf_A \frac{1}{|\Omega|} \left(\int_{\Omega-\omega} (\varphi^G(\varepsilon(\dot{\mathbf{v}})) - 3p_b \varepsilon_m(\dot{\mathbf{v}})) d\mathbf{x} + \int_\omega \boldsymbol{\sigma} : \varepsilon(\dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} \right). \quad (5.8)$$

Etant donné que $\varepsilon_m(\dot{\mathbf{v}}) = A$ dans $\Omega - \omega$ et que $\boldsymbol{\sigma} = -p_e \mathbf{I}$ dans ω et que $\dot{E}_m = (1-f_e)A + f_e \langle \dot{\varepsilon}_m \rangle_\omega$:

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \inf_A \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega-\omega} \varphi^G(\varepsilon(\dot{\mathbf{v}})) d\mathbf{x} + \frac{1}{|\Omega|} \left(-3p_b A |\Omega - \omega| - 3p_e |\omega| \left(\frac{\dot{E}_m - (1-f_e)A}{f_e} \right) \right) \right) \quad (5.9)$$

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \inf_A \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega-\omega} \varphi^G(\varepsilon(\dot{\mathbf{v}})) d\mathbf{x} + \left(-3p_b A (1-f_e) - 3p_e (\dot{E}_m - (1-f_e)A) \right) \right) \quad (5.10)$$

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \inf_A \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega-\omega} \varphi^G(\varepsilon(\dot{\mathbf{v}})) d\mathbf{x} - 3p_e \dot{E}_m + 3(1 - f_e)(p_e - p_b)A \right) \quad (5.11)$$

Le terme $\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega-\omega} \varphi^G(\varepsilon(\dot{\mathbf{v}})) d\mathbf{x}$ est calculé en 4.1.2 dans le cas sphérique et en 4.3.2 dans le cas des ellipsoïdes. Il suffit de rajouter

$$-3p_e \dot{E}_m + 3(1 - f_e)(p_e - p_b)A \quad (5.12)$$

dans la recherche de l'infimum sur A dans les expressions du potentiel macroscopique (4.15) ou (4.61).

5.3.3 Méthode sécante modifiée (approche variationnelle) à N phases : estimation

Le but de cette section est d'obtenir une estimation de la surface de plasticité par l'intermédiaire de la méthode sécante modifiée et en utilisant un CLC à N phases (comme dans les cas drainés : en 4.1.4 dans le cas sphérique et en 4.3.4 dans le cas ellipsoïdal).

Comme dans le cas drainé, on vise à utiliser pour le comportement effectif du CLC l'estimation de Hervé et Zaoui (1993) valable dans le cas sphérique. Pour ce faire, la notion de "porosités équivalentes" (4.64) déjà introduite à la section 4.3.4 dans le cas drainé est de nouveau utilisée. Le traitement du problème des ellipsoïdes passe alors par la mise en œuvre de la méthode sécante modifiée telle que présentée en 5.3.1 pour le cas saturé où la borne supérieure de Hashin et Shtrikman (1963) est utilisée :

Entrées : \dot{E}_m et \dot{E}_{eq} ;

répéter

- actualisation de k_o^1 et de μ_o^1 ;
- actualisation de $(\dot{\varepsilon}_m)^2$ et de $(\dot{\varepsilon}_{eq})^2$:

$$\begin{aligned} (\dot{\varepsilon}_m)^2 &= \frac{1}{1 - f_s^k} \frac{\partial k_o^{HS}(f_s^k)}{\partial k_o^1} \dot{E}_m^2 + \frac{1}{3(1 - f_s^\mu)} \frac{\partial \mu_o^{HS}(f_s^\mu)}{\partial k_o^1} (\dot{E}_{eq})^2 - \frac{2p}{3k_o^1 (1 - f_s^k)} \frac{\partial k_o^{HS}(f_s^k)}{\partial k_o^1} + \dots \\ &\dots + \frac{1}{1 - f_s^k} \frac{p^2}{9(k_o^1)^2} \frac{\partial k_o^{HS}(f_s^k)}{\partial k_o^1} + \frac{2p}{3(1 - f_s^k)} \dot{E}_m \frac{k_o^{HS}(f_s^k)}{(k_o^1)^2} - \frac{p^2}{(k_o^1)^2 9(1 - f_s^k)} \frac{2k_o^{HS}(f_s^k)}{k_o^1} + \frac{p^2}{(k_o^1)^2 9} ; \\ (\dot{\varepsilon}_{eq})^2 &= \frac{3}{(1 - f_s^k)} \frac{\partial k_o^{HS}(f_s^k)}{\partial \mu_o^1} \dot{E}_m^2 + \frac{1}{(1 - f_s^\mu)} \frac{\partial \mu_o^{HS}(f_s^\mu)}{\partial \mu_o^1} \dot{E}_{eq}^2 + \frac{3}{1 - f_s^k} \frac{\partial k_o^{HS}(f_s^k)}{\partial \mu_o^1} \frac{p^2}{9(k_o^1)^2} + \dots \\ &\dots - \frac{3}{1 - f_s^k} \frac{\partial k_o^{HS}(f_s^k)}{\partial \mu_o^1} \frac{2p}{3k_o^1} \dot{E}_m ; \end{aligned}$$

jusqu'à convergence sur $(\dot{\varepsilon}_m)^2$ et $(\dot{\varepsilon}_{eq})^2$;

Sorties : $\Sigma_m = 3k_o^{HS}(f_s^k) \frac{1 - f_e}{1 - f_s^k} \dot{E}_m + p \left(-\frac{k_o^{HS}(f_s^k)}{k_o^1} \frac{1 - f_e}{1 - f_s^k} \right) - p_e$ et

$$\Sigma_{eq} = 3\mu_o^{HS}(f_s^\mu) \frac{1 - f_e}{1 - f_s^\mu} \dot{E}_{eq}.$$

L'utilisation de la méthode sécante modifiée avec N phases sur ce dernier problème et l'utilisation de l'estimation de Hervé et Zaoui (1993) conduisent alors au problème donné ci-dessous.

Entrées : \dot{E}_m et \dot{E}_{eq} ;

répéter

$\forall i (2 \leq i \leq N) :$

$$k_o^i = \frac{2}{9} \sigma_0 \frac{1}{\sqrt{\langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}}} \left(-\text{Arcsinh} \left(2 \sqrt{\frac{\langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}}{\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}}} q_3 \right) + \text{Arcsinh} \left(\frac{2}{f_{qb}} \sqrt{\frac{\langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}}{\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}}} q_3 \right) \right) ;$$

$$\mu_o^i = \frac{1}{3} \frac{\sigma_0}{\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}} \left(\sqrt{4 \langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i} + \frac{\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}}{q_3}} - f_{qb} \sqrt{\frac{4 \langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}}{(f_{qb})^2} + \frac{\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}}{q_3}} \right) ;$$

$$\langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i} = \frac{1}{(f_i^k)} \frac{\partial k_o^{HZ}(f_i^k)}{\partial k_o^i} (\dot{E}_m)^2 + \frac{1}{3(f_i^\mu)} \frac{\partial \mu_o^{HZ}(f_i^\mu)}{\partial k_o^i} (\dot{E}_{eq})^2 + \frac{2p}{3(f_i^k)} \dot{E}_m \frac{\partial b(f_i^k)}{\partial k_o^i} - \frac{p^2}{9(f_i^k)} \frac{\partial \frac{1}{M}(f_i^k)}{\partial k_o^i} ;$$

$$\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i} = \frac{3}{(f_i^k)} \frac{\partial k_o^{HZ}(f_i^k)}{\partial \mu_o^i} (\dot{E}_m)^2 + \frac{1}{(f_i^\mu)} \frac{\partial \mu_o^{HZ}(f_i^\mu)}{\partial \mu_o^i} (\dot{E}_{eq})^2 + \frac{2p}{(f_i^k)} \dot{E}_m \frac{\partial b(f_i^k)}{\partial \mu_o^i} - \frac{p^2}{3(f_i^k)} \frac{\partial \frac{1}{M}(f_i^k)}{\partial \mu_o^i} ;$$

jusqu'à convergence sur $\langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}$ et $\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}$, $\forall i (2 \leq i \leq N)$;

Sorties : $\Sigma_m = 3k_o^{HZ}(f_i^k) \frac{1-f_e}{1-f_s^k} \dot{E}_m + p(b(f_i^k) - 1) \frac{1-f_e}{1-f_s^k} - p_e$ et

$$\Sigma_{eq} = 3\mu_o^{HZ}(f_i^\mu) \frac{1-f_e}{1-f_s^\mu} \dot{E}_{eq}.$$

Les f_i^k (respectivement f_i^μ) sont les fractions volumiques des couches entourant la boule centrale de fraction volumique f_s^k (respectivement f_s^μ). Toutes les couches $2 \leq i \leq N$ sont prises de même épaisseur. Les termes b et $1/M$ sont des termes de Biot adaptés à l'estimation N phases de Hervé et Zaoui (1993) et sont calculés en Annexe J (équations (J.87) et (J.108)). Dans le cas des cavités sphériques, la notion de "porosités équivalentes" n'est bien sûr pas utilisée et $f_s^k = f_s^\mu = f_e$ et $\forall i$, $f_i^k = f_i^\mu = f_i$.

5.4 Borne et estimation elliptiques

Dans le cas des cavités saturées, la démarche suivie en 4.4 (approche variationnelle sur matrice avec critère elliptique) conduit au critère analytique suivant (démonstration donnée en Annexe K) :

$$\frac{k_o^1}{k_o^{hom}} (\Sigma_m + p_b - bp)^2 + \frac{k_o^1}{3\mu_o^{hom}} (\Sigma_{eq})^2 = \sigma_0^2 2k_o^1 (1-f_e)(1-f_b)^2 - (p)^2 (b-f_e) \quad (5.13)$$

Les coefficients k_o^{hom} et μ_o^{hom} sont ceux spécifiés en 4.4. Le terme b (terme de Biot) vaut $(1 - \frac{k_o^{hom}}{k_o^1})$. Comme en 4.4, le critère (5.13) conduit, suivant les coefficients choisis, à une borne supérieure appelée 2BNL ou à une estimation appelée BNLSC.

Le critère (5.13) montre clairement que la différence des pressions $p_b - p_e$ induit une translation du critère selon l'axe hydrostatique et une réduction du critère selon, à la fois, la contrainte équivalente et la contrainte hydrostatique. Lorsque $p_e = p_b$, i.e. $p = 0$, la surface de plasticité du cas saturé est une pure translation de la surface de plasticité du cas drainé selon l'axe hydrostatique.

5.5 Effet mécanique des pressions aux deux échelles et comparaison des modèles

Afin de comparer entre eux les modèles saturés proposés et d'estimer leur pertinence, un point hydrostatique de type Leblond (2003) est obtenu dans le cas de la prise en compte des pressions.

5.5.1 Ecriture du point hydrostatique de Leblond (2003) avec pressions

Pour les cavités sphériques, le point hydrostatique de Leblond (2003) peut être déterminé dans le cas saturé. A partir des travaux de ces auteurs, le résultat est immédiat et la démonstration n'est pas reprise ici. Les nouvelles conditions aux limites s'écrivent : $\frac{\sigma_{rr}}{\sigma_0}(r = a_1) = \frac{p}{\sigma_0}$ et $\frac{\sigma_{rr}}{\sigma_0}(r = a_2) = \frac{\Sigma_m}{\sigma_0} + \frac{p_b}{\sigma_0}$ et le système d'équations suivant est obtenu :

$$\begin{cases} v_a^2 + f_b \exp\left(\frac{3}{2} \frac{p}{\sigma_0} + v_a\right) - 1 - (f_b)^2 = 0 \\ \tilde{\lambda} = f_e \frac{v_a(1 + v_a)}{1 - v_a} \\ v_b = \frac{1}{2} \left(-\tilde{\lambda} - 1 + \sqrt{\tilde{\lambda}^2 + 6\tilde{\lambda} + 1} \right) \\ \frac{\Sigma_m}{\sigma_0} + \frac{p_b}{\sigma_0} = \frac{2}{3} \left(-v_b + \ln \left(\frac{1 + (f_b)^2 - v_b^2}{f_b} \right) \right). \end{cases} \quad (5.14)$$

Remarque 5.1 (Matrice en traction) Ces équations sont obtenues en prenant $\Sigma_m \geq 0$ et $p_b \geq p_e (\geq 0)$. Cela assure le fait que σ_m dans la matrice est positif (matrice en traction), condition nécessaire à l'élaboration du système d'équations ci-dessus (voir la démonstration de Leblond (2003)).

5.5.2 Comparaison des modèles

La FIG. 5.3 montre le bon accord entre le point hydrostatique précédent et celui obtenu avec la méthode sécante modifiée à N phases.

La FIG. 5.4 et la FIG. 5.5 illustrent, dans le cas des cavités ellipsoïdales de porosité f_e , les résultats obtenus avec les différents modèles. La FIG. 5.4 montre que le critère obtenu avec la méthode sécante modifiée à N phases respecte (pour un N assez grand) les deux bornes supérieures (méthode sécante modifiée de 5.3.1 et l'approche de type Gurson de 5.3.2). La FIG. 5.5 montre que les modèles 2BNL et BNLSC ne peuvent pas donner une bonne approximation du critère de plasticité dans le cas saturé.

Lorsque les deux pressions p_b et p_e sont différentes, une translation du critère selon l'axe hydrostatique est observée. De plus, une réduction du critère selon à la fois la contrainte équivalente et la contrainte hydrostatique est observée : le critère de plasticité effectif du milieu saturé n'est pas une pure translation du critère de plasticité effectif du milieu drainé le long de l'axe hydrostatique (voir figure FIG. 5.6). Cela est en accord avec le résultat de Dormieux et al. (2006) dans le cas général d'un milieu poreux dont le critère de la matrice dépend à la fois de σ_m et de σ_{eq} . **Lorsque $p_e = p_b$, i.e. $p = 0$, la surface de plasticité du cas saturé est une pure translation de la surface de plasticité du cas drainé (pressions nulles) de $p_e = p_b$ selon l'axe hydrostatique.** La FIG. 5.2 illustre cette propriété.

5.5.3 Critère utilisé dans les codes simplifiés pour l'oxyde d'uranium irradié

Les critères utilisés pour l'oxyde d'uranium irradié dans les codes simplifiés de sûreté traduisent l'hypothèse que le matériau n'a pas de résistance en traction et que le matériau respecte le critère de Von Mises s'il est globalement en compression (Lamare et al. (2007)). Ce type de critère est représenté sur la FIG. 5.7. Le modèle obtenu dans ce chapitre (avec la méthode sécante modifiée à N phases) peut servir à justifier, dans certains cas, l'utilisation d'un tel critère simplifié et, dans d'autres cas, peut servir de base pour l'élaboration d'un critère plus pertinent. Pour des valeurs de f_b , f_e , w et p_e relevées sur un calcul utilisant un code simplifié de modélisation d'un accident

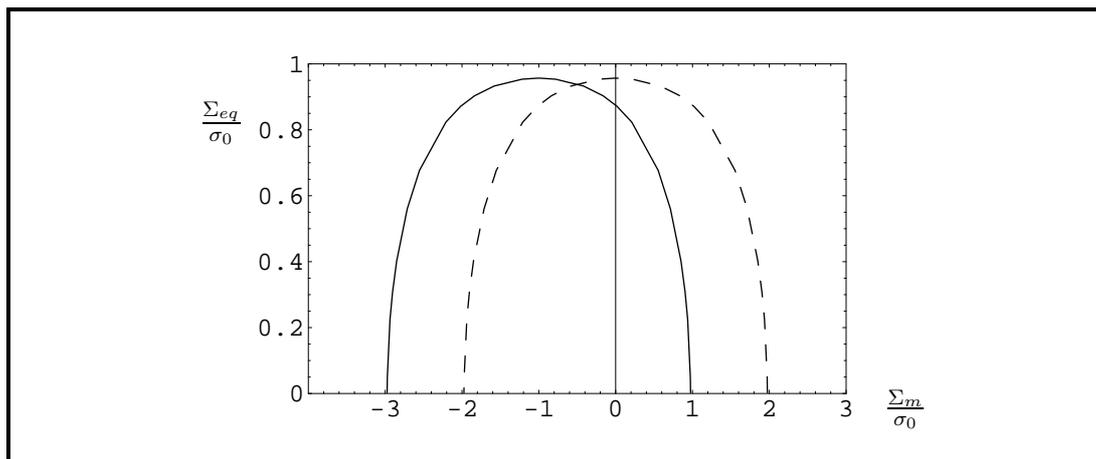


FIG. 5.2 – Critères de plasticité : estimation obtenue avec la méthode sécante modifiée à N phases $N = 6$ (section 5.3.3) $f_e = 0.02$, $f_b = 0.01$, $q_3 = q_1 = 1$, $w = 1/5$. Cas drainé ($p_b = p_e = 0$, trait discontinu) et cas saturé avec $p_b = p_e = \sigma_0$ (trait plein). Lorsque $p_b = p_e \neq 0$, le critère de plasticité est une simple translation du critère de plasticité du cas drainé selon l'axe hydrostatique.

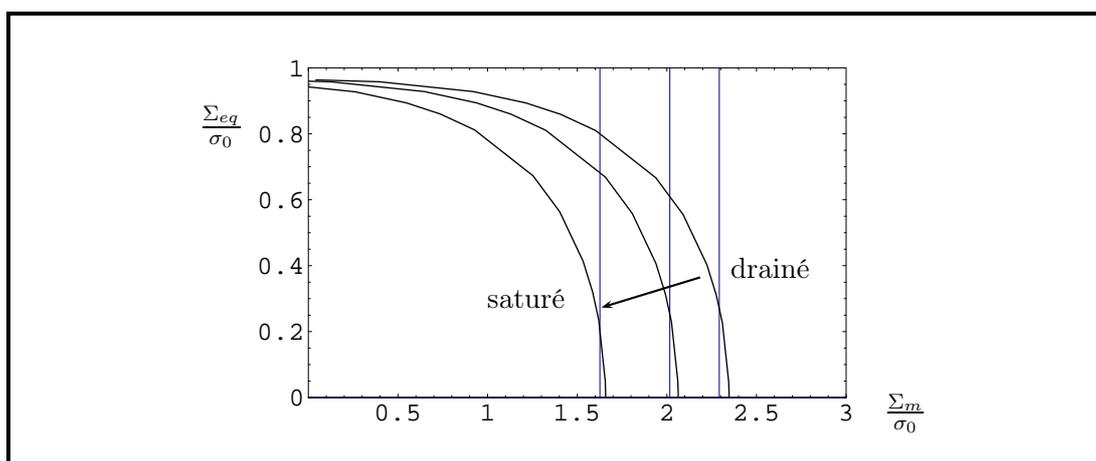


FIG. 5.3 – Critères de plasticité : estimation obtenue avec la méthode sécante modifiée à N phases $N = 6$ (section 5.3.3) $f_e = 0.02$, $f_b = 0.01$, $q_3 = q_1 = 1$, cas des cavités sphériques. Trait vertical : Point hydrostatique de (5.14). Cas drainé ($p_b = p_e = 0$) vers cas saturés avec $p_b = \frac{2}{5}\sigma_0$, $p_e = \frac{1}{5}\sigma_0$, puis avec $p_b = \sigma_0$, $p_e = \frac{2}{5}\sigma_0$. Un bon accord est observé entre le point hydrostatique de (5.14) et la méthode sécante modifiée à N phases pour le cas drainé et le cas saturé.

de réactivité —le code SCANAIR—, le modèle retenu dans ce chapitre est utilisé pour prédire à partir de quelle valeur de la pression p_b le matériau n'a plus de résistance en traction (au sens où $\Sigma_m \leq 0$ quel que soit $\dot{\mathbf{E}}$). La valeur obtenue pour p_b est de $2.1\sigma_0$. Le critère de plasticité obtenu est représenté sur la FIG. 5.7. Deux types de commentaires mécaniques peuvent être formulés :

1. pour des taux de triaxialité Σ_m/Σ_{eq} compris environ entre -4 et $+\infty$, la modélisation très simplifiée "Von Mises - No tension material" semble pouvoir constituer une approximation acceptable pour l' UO_2 fortement irradié en situation de RIA, compte tenu des incertitudes des données matériaux ;
2. la pertinence de cette approximation s'appuie sur le fait, essentiel ici, que les modèles de

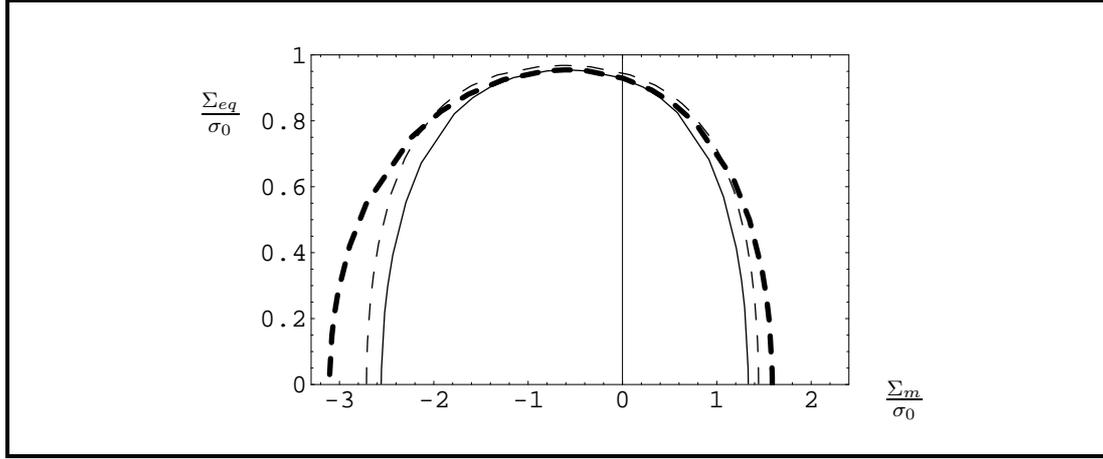


FIG. 5.4 – Critères de plasticité : estimation obtenue avec la méthode sécante modifiée à N phases $N = 6$ (section 5.3.3, trait plein), borne supérieure obtenue avec la méthode sécante modifiée en 5.3.1 (trait discontinu épais), borne supérieure obtenue avec l’approche de type Gurson en 5.3.2 (trait discontinu fin). $f_e = 0.02$, $f_b = 0.01$, $q_3 = q_1 = 1$, $w = 1/5$, $p_b = \sigma_0$, $p_e = \frac{1}{2}\sigma_0$. L’estimation obtenue avec la méthode sécante modifiée à N phases respecte les deux bornes supérieures (obtenue avec la méthode sécante modifiée et obtenue avec l’approche de type Gurson).

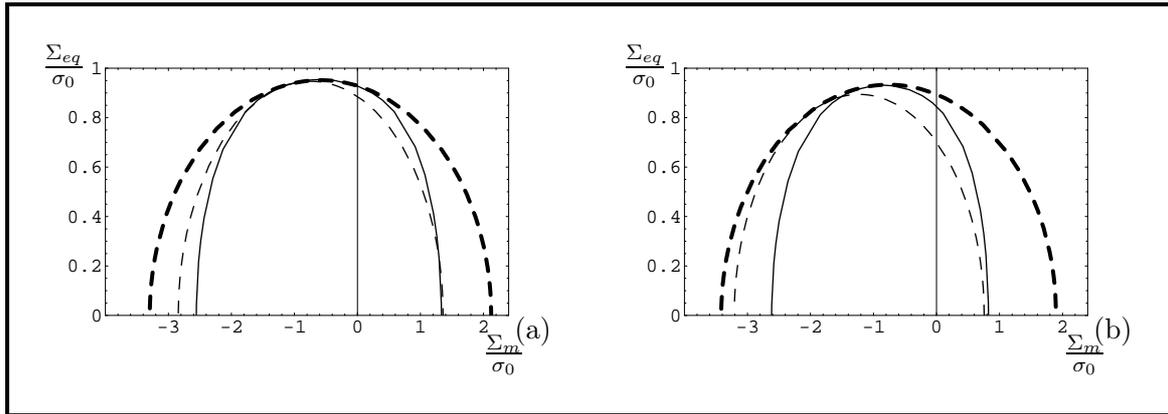


FIG. 5.5 – Critères de plasticité : estimation obtenue avec la méthode sécante modifiée à N phases $N = 6$ (section 5.3.3, trait plein), borne supérieure obtenue avec le modèle 2BNL en 5.4 (trait discontinu épais), estimation obtenue avec le modèle BNLSC en 5.4 (trait discontinu fin). $f_e = 0.02$, $f_b = 0.01$, $q_3 = q_1 = 1$, $w = 1/5$. (a) $p_b = \sigma_0$, $p_e = \frac{1}{2}\sigma_0$. (b) $p_b = 2\sigma_0$, $p_e = \frac{1}{2}\sigma_0$. Les modèles 2BNL et BNLSC ne constituent pas une bonne approximation dans le cas saturé.

comportement des gaz de fission à la petite échelle prédisent une pression dans les bulles intragranulaires de l’ordre de $2\sigma_0$, ce qui pour l’ UO_2 au voisinage de 1700 °C correspond environ à $p_b \approx 100\text{ MPa}$. Les hypothèses sur lesquelles reposent les modèles de comportement des gaz semblent conduire à des valeurs de p_b très différentes. En particulier, ces modèles font : (1) l’hypothèse d’un couplage très faible entre les gaz et la mécanique, (2) l’hypothèse que ce couplage est convenablement traduit par un équilibre purement élastique. La présente étude indique ainsi, du point de vue appliqué, qu’un effort doit être fait du côté de la modélisation des gaz de fission.

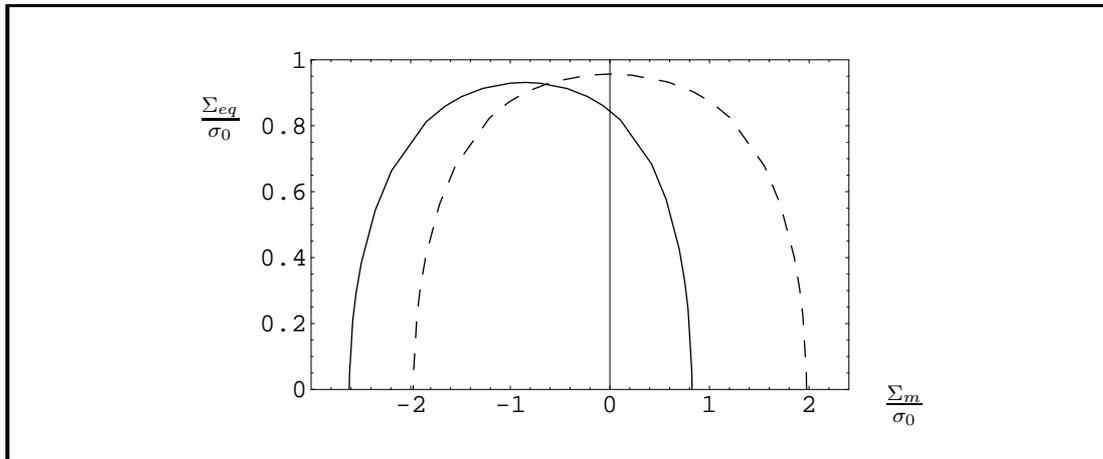


FIG. 5.6 – Critères de plasticité : estimation obtenue avec la méthode sécante modifiée à N phases $N = 6$ (section 5.3.3). $f_e = 0.02$, $f_b = 0.01$, $q_3 = q_1 = 1$, $w = 1/5$. Cas drainé ($p_b = p_e = 0$, trait discontinu) et cas saturé (trait plein) avec $p_b = 2\sigma_0$, $p_e = \frac{1}{2}\sigma_0$. Lorsque les deux pressions p_b et p_e sont différentes, une translation du critère selon l'axe hydrostatique est observée. De plus, une réduction du critère selon à la fois la contrainte équivalente et la contrainte hydrostatique est observée.

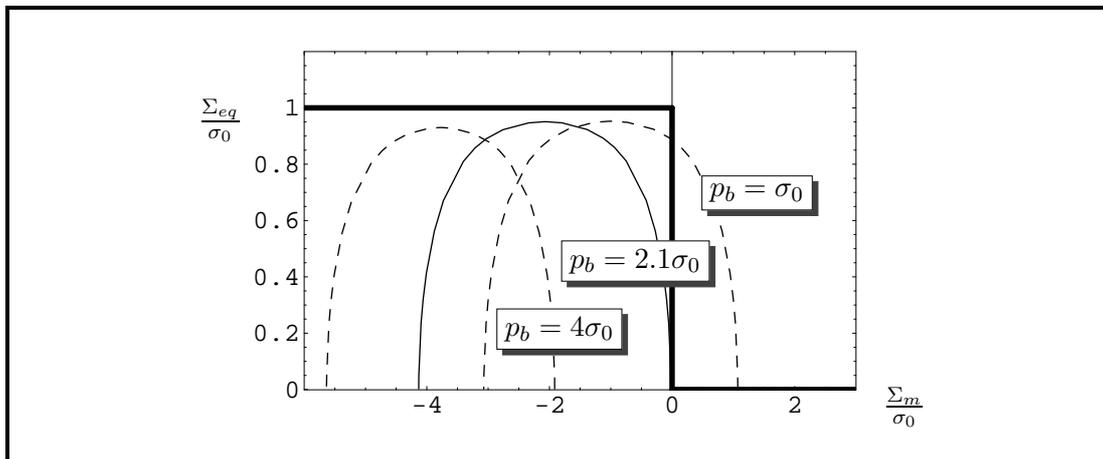


FIG. 5.7 – Type de critère de plasticité utilisé dans les codes simplifiés de sûreté (trait épais), critères de plasticité obtenus avec la méthode sécante modifiée à N phases $N = 6$ (section 5.3.3, traits fins). $f_e = 0.001$, $f_b = 0.035$, $w = 0.45$, q_1 et q_3 de la forme (3.15) et (3.16), $p_e = \sigma_0$. Différentes valeurs de p_b .

Troisième partie

Evolution de l'endommagement

Chapitre 6

Evolution de l'endommagement

Le but de ce chapitre est d'exposer les équations nécessaires à l'établissement d'un modèle d'endommagement complet pour un matériau à double populations de cavités saturées (cavités sphériques à la petite échelle et cavités ellipsoïdales aplaties distribuées et orientées aléatoirement avec orientations équiprobables à l'échelle supérieure). Le modèle micromécanique utilisé pour la partie élastique est exposé en 6.1. Celui utilisé pour le critère de plasticité est donné en 6.2. Les lois d'évolution des paramètres internes du modèle sont établies en 6.3 à partir du modèle choisi pour le critère de plasticité. Enfin, les équations nécessaires à l'intégration numérique du modèle complet sont données en 6.4.

6.1 Partie élastique

Soit un milieu V contenant des cavités ω_e . La matrice est élastique linéaire (tenseur de rigidité \mathbf{C}_o). Les cavités sont sous pression notée p . Le problème en condition de déformation homogène au bord est traité sur ce milieu :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\varepsilon} & \text{dans la matrice} \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0} & \text{dans } V \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} = -p \cdot \mathbf{N} & \text{sur } \partial\omega_e, \\ \mathbf{u} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} & \text{sur } \partial V \end{cases}$$

La contrainte effective $\boldsymbol{\Sigma}$ déduite du problème précédent vaut $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_V$ (le champ $\boldsymbol{\sigma}$ est prolongé par $-p\mathbf{I}$ dans ω_e). Le vecteur \mathbf{N} est la normale rentrante dans la cavité considérée. L'annexe J.1.2 redémontre la relation classique reliant \mathbf{E} à $\boldsymbol{\Sigma}$:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{C}^{hom} : \mathbf{E} - \mathbf{B}p. \quad (6.1)$$

Il est rappelé que le tenseur de Biot \mathbf{B} s'écrit lorsque le milieu V est macroscopiquement isotrope et que la matrice est isotrope :

$$\mathbf{B} = b\mathbf{I} \quad \text{avec :} \quad b = 1 - \frac{k^{hom}}{k_o}. \quad (6.2)$$

Pour notre problème, la première échelle correspond à un milieu élastique linéaire isotrope (coefficients de compressibilité et de cisaillement k et μ) contenant des cavités sphériques distribuées de façon isotrope et sous pression (porosité f_b , pression p_b). Le problème à traiter à la première échelle conduit donc à :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_1^{hom} : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{B}_1 p_b, \quad (6.3)$$

avec :

$$\mathbf{B}_1 = b_1 \mathbf{I}, \quad b_1 = 1 - \frac{k_1^{hom}}{k}. \quad (6.4)$$

La borne supérieure de Hashin et Shtrikman (1963) est utilisée pour \mathbf{C}_1^{hom} .

Pour la deuxième échelle, le domaine ω_e correspond à la seconde population de cavités sous pression (porosité f_e , pression p_e) :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_1^{hom} : \boldsymbol{\varepsilon} - b_1 p_b \mathbf{I} & \text{dans la matrice} \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0} & \text{dans } V \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} = -p_e \cdot \mathbf{N} & \text{sur } \partial\omega_e, \\ \mathbf{u} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} & \text{sur } \partial V \end{cases}$$

La contrainte effective $\boldsymbol{\Sigma}$ déduite de ce problème vaut $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_V$. Le changement de variables $\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma} + b_1 p_b \mathbf{I}$ donne :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{C}_1^{hom} : \boldsymbol{\varepsilon} & \text{dans la matrice} \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^*) = \mathbf{0} & \text{dans } V \\ \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{N} = (b_1 p_b - p_e) \cdot \mathbf{N} & \text{sur } \partial\omega_e, \\ \mathbf{u} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} & \text{sur } \partial V \end{cases}$$

La contrainte effective issue de ce problème vaut $\boldsymbol{\Sigma} + b_1 p_b \mathbf{I} = \langle \boldsymbol{\sigma}^* \rangle_V$. Le comportement poroélastique du problème à cette deuxième échelle est donc donné par :

$$\boldsymbol{\Sigma} + b_1 p_b \mathbf{I} = \mathbf{C}_2^{hom} : \mathbf{E} - \mathbf{B}_2 (p_e - b_1 p_b). \quad (6.5)$$

La borne supérieure de Ponte Castañeda et Willis (1995) est utilisée pour \mathbf{C}_2^{hom} (cavités ellipsoïdales aplaties orientées et distribuées aléatoirement). Le milieu V étant macroscopiquement isotrope et \mathbf{C}_1^{hom} étant isotrope :

$$\mathbf{B}_2 = b_2 \mathbf{I}, \quad b_2 = 1 - \frac{k_2^{hom}}{k_1^{hom}}. \quad (6.6)$$

L'équation (6.5) donne alors :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{C}_2^{hom} : \mathbf{E} - b_2 p_e \mathbf{I} + (b_2 - 1) b_1 p_b \mathbf{I}. \quad (6.7)$$

L'équation précédente a été obtenue simultanément à ce travail par Dormieux et al. (2006) (voir Monerie et al. (2006)).

Au final, on obtient pour le cas traité ici :

$$\begin{aligned} \Sigma_m &= 3k_2^{hom} E_m - b_2 p_e + (b_2 - 1) b_1 p_b \\ \Sigma_d &= 2\mu_2^{hom} E_d, \end{aligned} \quad (6.8)$$

avec :

- $k_1^{hom} = k - \frac{f_b k}{1 - \frac{(1-f_b)k}{k + \frac{4\mu}{3}}}$
- $\mu_1^{hom} = \frac{(1-f_b)\mu(9k+8\mu)}{(9+6f_b)k + 4(2+3f_b)\mu}$
- $b_1 = 1 - \frac{k_1^{hom}}{k}$
- $b_2 = \left(1 - \frac{k_2^{hom}}{k_1^{hom}}\right)$
- Dans le cas où les cavités de porosité f_e sont des fissures, les expressions de k_2^{hom} et de μ_2^{hom} sont :

- $k_2^{hom} = \frac{k_1^{hom} \mu_1^{hom} (3k_1^{hom} \pi - 4k_1^{hom} \alpha_c + \pi \mu_1^{hom})}{3(k_1^{hom})^2 \alpha_c + 3k_1^{hom} \pi \mu_1^{hom} + \pi (\mu_1^{hom})^2}$
- $\mu_2^{hom} = \frac{\mu_1^{hom} (27(k_1^{hom})^2 (25\pi - 12\alpha_c) + 27k_1^{hom} (25\pi - 16\alpha_c) \mu_1^{hom} + 2(75\pi - 64\alpha_c) (\mu_1^{hom})^2)}{3(9(k_1^{hom})^2 (25\pi + 8\alpha_c) + k_1^{hom} (225\pi + 176\alpha_c) \mu_1^{hom} + 2(25\pi + 32\alpha_c) (\mu_1^{hom})^2)}$
- Dans le cas où les cavités de porosité f_e sont des ellipsoïdes aplatis, les expressions de k_2^{hom} et de μ_2^{hom} sont données en Annexe G en (G.6) et (G.9) (remplacer k_o^1 et μ_o^1 par k_1^{hom} et μ_1^{hom}).

6.2 Critère de plasticité : méthode sécante modifiée à N phases

Le critère de plasticité est déterminé en utilisant le modèle MSMN ellipsoïdal décrit en 5.3.3. Pour un taux de déformation plastique $\dot{\mathbf{E}}^p$ donné et pour des valeurs de pressions p_b et p_e données, le modèle MSMN ellipsoïdal fournit la contrainte Σ sur le critère de plasticité estimé.

6.3 Lois d'évolution des paramètres internes

Les paramètres internes du modèle sont :

- f_b (porosité à la première échelle),
- f_e (porosité à l'échelle supérieure),
- w (rapport petit axe sur grand axe des ellipsoïdes aplatis de révolution correspondant aux bulles intergranulaires).

Ces paramètres sont supposés rester constants durant la phase élastique mais évoluent lorsque le critère de plasticité est atteint. Les lois d'évolution des paramètres internes sont déterminées à partir du composite linéaire de comparaison issu de la méthode sécante modifiée à N phases.

L'objet de cette section est de détailler ces lois.

La porosité "absolue" des bulles intragranulaires est notée f_{ba} et est définie par :

$$f_{ba} = \frac{|\omega_b|}{|V|} = \frac{|\omega_b|}{|V| - |\omega_e|} \frac{|V| - |\omega_e|}{|V|} = f_b (1 - f_e), \quad (6.9)$$

avec ω_b le volume occupé par les bulles intragranulaires, V le volume total et ω_e le volume occupé par les bulles intergranulaires. De plus, la porosité totale étant $f_e + f_{ba}$, l'incompressibilité de la matrice sans aucune porosité permet d'écrire :

$$\dot{f}_e + \dot{f}_{ba} = (1 - f_e - f_{ba}) \text{Tr}(\dot{\mathbf{E}}). \quad (6.10)$$

De plus, la dérivée de (6.9) donne :

$$\dot{f}_{ba} = \dot{f}_b (1 - f_e) - f_b \dot{f}_e \quad (6.11)$$

et (6.10) et (6.11) fournissent :

$$\dot{f}_b = \frac{\dot{f}_{ba} + f_b \dot{f}_e}{(1 - f_e)} = \frac{(1 - f_e - f_b (1 - f_e)) \text{Tr}(\dot{\mathbf{E}}) - \dot{f}_e + f_b \dot{f}_e}{(1 - f_e)}. \quad (6.12)$$

Le modèle suppose que :

- les ellipsoïdes de révolution correspondant à la phase ω_e restent des ellipsoïdes de révolution quel que soit le chargement ;
- la déformation dans la phase ω_e est homogène ;
- tous les ellipsoïdes de la phase ω_e ont le même rapport de forme quel que soit le chargement.

Dans le cadre de ce travail, ces hypothèses ont été choisies pour des raisons de simplicité mais il est clair que pour de grandes déformations ces hypothèses constituent une approximation forte. Par conséquent, pour chaque ellipsoïde et dans sa base locale, le taux de déformation s'écrit :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{b}_1}{b_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{b}_1}{b_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{a}_1}{a_1} \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

où les dimensions des ellipsoïdes sont notées : b_1 , les demi-longueurs dans les directions \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y de la base locale et a_1 , la demi-épaisseur dans la direction \mathbf{e}_z de la base locale (\mathbf{e}_z axe de révolution). D'où :

$$3\langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m \rangle_{\omega_e} = 2\frac{\dot{b}_1}{b_1} + \frac{\dot{a}_1}{a_1} \quad (6.14)$$

et :

$$\langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq} \rangle_{\omega_e} = \frac{2}{3} \left| \frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{b}_1}{b_1} \right|. \quad (6.15)$$

Les expressions de $\langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m \rangle_{\omega_e}$ et $\langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq} \rangle_{\omega_e}$ sont données par l'intermédiaire du composite linéaire de comparaison de la façon suivante.

Soit le problème suivant, où les coefficients des \mathbf{C}_o^i sont donnés par le dernier pas de la méthode sécante modifiée (à convergence) :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_o^i : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} & \text{dans chaque phase } i \text{ de la matrice, } 2 \leq i \leq N \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0} & \text{dans } V \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} = -p^* \cdot \mathbf{N} = p \cdot \mathbf{N} & \text{sur les bords de } \omega_e \\ \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x} & \text{sur le bord de } \partial V, \end{cases}$$

et la contrainte effective associée à ce problème s'écrit $\boldsymbol{\Sigma} + p_b \mathbf{I} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_V$. Ce problème linéaire est décomposé en deux sous problèmes linéaires comme en J.1.2 et J.2.2. Le sous problème sans pression est indicé par un ' et le sous problème sans taux de déformation imposé sur le bord du VER est indicé par un ''. Le taux de déformation total s'écrit :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}' + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'', \quad (6.16)$$

et sa moyenne sur les cavités ω_e :

$$\langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_{\omega_e} = \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}' \rangle_{\omega_e} + \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' \rangle_{\omega_e} = \langle \mathbf{A} \rangle_{\omega_e} : \dot{\mathbf{E}} - \langle \mathbf{a} \rangle_{\omega_e} p^*, \quad (6.17)$$

où \mathbf{A} et \mathbf{a} sont les tenseurs de localisation associés aux deux sous-problèmes. Lorsque $N = 2$, les équations (J.25) et (J.36) ainsi que les définitions de \mathbf{B} (J.26) et $1/M$ (J.38) permettent d'écrire, en notant \mathbf{C}_o^1 la raideur de la matrice (modules de compressibilité et de cisaillement associés k_o^1 et μ_o^1) :

$$\begin{aligned} \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m \rangle_{\omega_e} &= \frac{\dot{E}_m}{f_e} - \frac{1}{f_e} \frac{k_o^{hom}}{k_o^1} \dot{E}_m + p^* \frac{1}{3f_e} \frac{1}{M} = \frac{\dot{E}_m}{f_e} - \frac{1}{f_e} \frac{k_o^{hom}}{k_o^1} \dot{E}_m + p^* \frac{1}{3f_e} \frac{b - f_e}{k_o^1} \\ &= \frac{\dot{E}_m}{f_e} - \frac{1}{f_e} \frac{k_o^{hom}}{k_o^1} \dot{E}_m + p^* \frac{1}{3f_e} \left(\frac{1 - f_e}{k_o^1} - \frac{k_o^{hom}}{k_o^1} \right) = \frac{\dot{E}_m}{f_e} - \frac{1}{f_e} (1 - b) \dot{E}_m + p^* \frac{1}{3f_e} \frac{1}{M}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Dans le cas des bulles intergranulaires sphériques, la borne supérieure de Hashin et Shtrikman (1963) est utilisée :

$$\langle \dot{\varepsilon}_m \rangle_{\omega_e} = \frac{\dot{E}_m}{f_e} - \frac{1}{f_e} \frac{k_o^{HS}}{k_o^1} \dot{E}_m + p^* \frac{1}{3f_e} \left(\frac{1-f_e}{k_o^1} - \frac{k_o^{HS}}{k_o^1} \right). \quad (6.19)$$

Dans le cas des bulles intergranulaires ellipsoïdales, la borne supérieure Ponte Castañeda et Willis (1995) est utilisée :

$$\langle \dot{\varepsilon}_m \rangle_{\omega_e} = \frac{\dot{E}_m}{f_e} - \frac{1}{f_e} \frac{k_o^{PCW}}{k_o^1} \dot{E}_m + p^* \frac{1}{3f_e} \left(\frac{1-f_e}{k_o^1} - \frac{k_o^{PCW}}{k_o^1} \right). \quad (6.20)$$

En utilisant les "porosités équivalentes" (relations (4.64)) cette dernière équation se réécrit :

$$\begin{aligned} \langle \dot{\varepsilon}_m \rangle_{\omega_e} &= \frac{\dot{E}_m}{f_e} - \frac{1}{f_e} \frac{k_o^{HS}(f_s^k)}{k_o^1} \frac{1-f_e}{1-f_s^k} \dot{E}_m + p^* \frac{1}{3f_e} \left(\frac{1-f_s^k}{k_o^1} - \frac{k_o^{HS}(f_s^k)}{k_o^1} \right) \frac{1-f_e}{1-f_s^k} \\ &= \frac{\dot{E}_m}{f_e} - \frac{1}{f_e} (1-b_o^{HS}) \frac{1-f_e}{1-f_s^k} \dot{E}_m + p^* \frac{1}{3f_e} \left(\frac{1}{M_o^{HS}} \right) \frac{1-f_e}{1-f_s^k}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Le tenseur et le module de Biot sont ceux obtenus avec la borne supérieure de Hashin et Shtrikman (1963) ($\mathbf{B}_o^{HS} = b_o^{HS} \mathbf{I}$ et $\frac{1}{M_o^{HS}}$). Pour passer aux modèles à N phases, l'estimation de Hervé et Zaoui (1993) est utilisée (b_o^{HZ} et $\frac{1}{M_o^{HZ}}$ sont donnés en (J.87) et (J.108)) :

$$\langle \dot{\varepsilon}_m \rangle_{\omega_e} = \frac{\dot{E}_m}{f_e} - \frac{1}{f_e} (1-b_o^{HZ}) \frac{1-f_e}{1-f_s^k} \dot{E}_m + p^* \frac{1}{3f_e} \left(\frac{1}{M_o^{HZ}} \right) \frac{1-f_e}{1-f_s^k}. \quad (6.22)$$

Le calcul de $\langle \dot{\varepsilon}_{eq} \rangle_{\omega_e}$ suit le même raisonnement. Dans le cas des bulles intergranulaires sphériques, la borne supérieure de Hashin et Shtrikman (1963) est utilisée :

$$\langle \dot{\varepsilon}_{eq} \rangle_{\omega_e} = \left(\frac{1}{f_e} - \frac{1}{f_e} \frac{\mu_o^{HS}}{\mu_o^1} \right) \dot{E}_{eq}. \quad (6.23)$$

Dans le cas des bulles intergranulaires ellipsoïdales, la borne supérieure Ponte Castañeda et Willis (1995) est utilisée :

$$\langle \dot{\varepsilon}_{eq} \rangle_{\omega_e} = \left(\frac{1}{f_e} - \frac{1}{f_e} \frac{\mu_o^{PCW}}{\mu_o^1} \right) \dot{E}_{eq} = \frac{1}{f_e} \dot{E}_{eq} - \frac{1}{f_e} \frac{\mu_o^{HS}(f_s^\mu)}{\mu_o^1} \frac{1-f_e}{1-f_s^\mu} \dot{E}_{eq}. \quad (6.24)$$

Pour passer aux modèles à N phases, l'estimation de Hervé et Zaoui (1993) sur le problème de la porosité sphérique ω_e de porosité f_s^μ permet d'écrire :

$$\langle \dot{\varepsilon}_{eq} \rangle_{\omega_e} = \mathcal{A}_o^{HZ} \dot{E}_{eq}. \quad (6.25)$$

où :

$$\mathcal{A}_o^{HZ} = \frac{1}{A_{N+1}} \left(A_1 - \frac{21}{5} (R_1^\mu)^2 B_1 \right). \quad (6.26)$$

avec, R_1^μ désignant le rayon de la cavité ω_e de porosité f_s^μ , et :

- $\frac{A_1}{A_{N+1}} = \frac{P_{22}^{(n)}}{P_{11}^{(n)} P_{22}^{(n)} - P_{12}^{(n)} P_{21}^{(n)}}$
- $\frac{B_1}{B_{N+1}} = - \frac{P_{21}^{(n)}}{P_{11}^{(n)} P_{22}^{(n)} - P_{12}^{(n)} P_{21}^{(n)}}$

- $P^{(N)} = \prod_{j=N}^{j=1} M^{(j)}$

- $M^{(k)}$ donné en (F.7).

La quantité $\langle \dot{\varepsilon}_{eq} \rangle_{\omega_e}$ s'écrit donc pour le modèle N phases :

$$\langle \dot{\varepsilon}_{eq} \rangle_{\omega_e} = \frac{1}{f_e} \dot{E}_{eq} - \frac{1}{f_e} \mathcal{R}_\mu \frac{1-f_e}{1-f_s^\mu} \dot{E}_{eq}, \quad (6.27)$$

avec :

$$\mathcal{R}_\mu = 1 - f_s^\mu \mathcal{A}_o^{HZ}. \quad (6.28)$$

Le nombre d'ellipsoïdes dans V est noté N_e et la porosité f_e est donnée par :

$$f_e = \frac{\frac{4}{3}\pi b_1^2 a_1 N_e}{|V|}. \quad (6.29)$$

D'où :

$$\dot{f}_e = \frac{4}{3}\pi \frac{N_e}{|V|} \left(2\dot{b}_1 b_1 a_1 + b_1^2 \dot{a}_1 \right) - \frac{4}{3} \frac{\pi b_1^2 a_1 N_e}{|V|^2} |\dot{V}| = f_e \left(2 \frac{\dot{b}_1}{b_1} + \frac{\dot{a}_1}{a_1} \right) - 3f_e \dot{E}_m. \quad (6.30)$$

En utilisant (6.14) :

$$\dot{f}_e = f_e \left(3\langle \dot{\varepsilon}_m \rangle_{\omega_e} - 3\dot{E}_m \right). \quad (6.31)$$

Les équations (6.22) et (6.31) permettent alors de déterminer \dot{f}_e .

De plus $w = \frac{a_1}{b_1}$ donne :

$$\dot{w} = \frac{\dot{a}_1}{b_1} - \frac{a_1}{b_1^2} \dot{b}_1 = w \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{b}_1}{b_1} \right) = \pm \frac{3}{2} w \langle \dot{\varepsilon}_{eq} \rangle_{\omega_e} \quad \text{cf équation (6.15)}. \quad (6.32)$$

Les équations (6.27) et (6.32) permettent de déterminer $|\dot{w}|$. Une hypothèse supplémentaire doit être faite sur le signe de \dot{w} . En l'absence d'informations supplémentaires, il est supposé que $\dot{w} \leq 0$, i.e. que les cavités ont tendance à s'allonger.

Bilan pour les lois d'évolution

$$\begin{cases} \dot{f}_b = \frac{(1-f_e - f_b(1-f_e)) \text{Tr}(\dot{\mathbf{E}}) - \dot{f}_e + f_b \dot{f}_e}{(1-f_e)} = \mathfrak{g}_1(\dot{\mathbf{E}}, f_b, f_e, w, p_b, p_e) \\ \dot{f}_e = f_e \left(3\langle \dot{\varepsilon}_m \rangle_{\omega_e} - 3\dot{E}_m \right) = \mathfrak{g}_2(\dot{\mathbf{E}}, f_b, f_e, w, p_b, p_e) \\ \dot{w} = -\frac{3}{2} w \langle \dot{\varepsilon}_{eq} \rangle_{\omega_e} = \mathfrak{g}_3(\dot{\mathbf{E}}, f_b, f_e, w, p_b, p_e) \\ \langle \dot{\varepsilon}_m \rangle_{\omega_e} = \frac{\dot{E}_m}{f_e} - \frac{1}{f_e} (1-b_o^{HZ}) \frac{1-f_e}{1-f_s^k} \dot{E}_m + p^* \frac{1}{3f_e} \left(\frac{1}{M_o^{HZ}} \right) \frac{1-f_e}{1-f_s^k} \\ \langle \dot{\varepsilon}_{eq} \rangle_{\omega_e} = \frac{1}{f_e} \dot{E}_{eq} - \frac{1}{f_e} \mathcal{R}_\mu \frac{1-f_e}{1-f_s^\mu} \dot{E}_{eq} \\ p^* = p_e - p_b. \end{cases} \quad (6.33)$$

6.4 Intégration du modèle élastoplastique endommageable

Le but de cette section est de fournir les équations nécessaires au modèle élastoplastique endommageable lors d'un calcul de structure. Le taux de déformation $\dot{\varepsilon}$ est imposé ($\dot{\varepsilon}$ et σ sont respectivement le taux de déformation et la contrainte en un point de Gauss). Un pas de temps δt est imposé. La démarche est la suivante.

- Premier pas, calcul de :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \dot{\varepsilon} \delta t \\ \boldsymbol{\sigma}_1^T - (-b_2 p_e \mathbf{I} + (b_2 - 1) b_1 p_b \mathbf{I}) &= \mathbf{C}_2^{hom} : \varepsilon_1. \end{aligned} \quad (6.34)$$

- Détermination de la direction du taux de déformation plastique $\dot{\mathbf{d}}$ où la surface de plasticité est atteinte en premier. Le fait de fixer $\dot{\varepsilon}$ et δt impose la direction de contrainte dans la partie élastique :

$$\frac{\sigma_m^T - (-b_2 p_e + (b_2 - 1) b_1 p_b)}{\sigma_{eq}^T} = \frac{k_2^{hom} \dot{\varepsilon}_m}{\mu_2^{hom} \dot{\varepsilon}_{eq}}. \quad (6.35)$$

Ainsi, la surface est atteinte en premier pour ce taux de triaxialité $\frac{\sigma_{m1}^T - (-b_2 p_e + (b_2 - 1) b_1 p_b)}{\sigma_{eq1}^T}$. La direction du taux de déformation plastique $\dot{\mathbf{d}}$ telle que :

$$\frac{\sigma_{m1}^T - (-b_2 p_e + (b_2 - 1) b_1 p_b)}{\sigma_{eq1}^T} = \frac{\sigma_m^{NL} - (-b_2 p_e + (b_2 - 1) b_1 p_b)}{\sigma_{eq}^{NL}}, \quad (6.36)$$

est recherchée. $\boldsymbol{\sigma}^{NL}(\dot{\mathbf{d}})$ est donné par le modèle MSMN ellipsoïdal (détermination de la surface de plasticité) pour une direction de taux de déformation $\dot{\mathbf{d}}$ donnée. La direction du taux de déformation $\dot{\mathbf{d}}$ vérifiant (6.36) est obtenue via un algorithme de Newton-Raphson.

- Calcul de :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1} &= \varepsilon_i + \dot{\varepsilon} \delta t \\ \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^T - (-b_2 p_e \mathbf{I} + (b_2 - 1) b_1 p_b \mathbf{I}) &= \mathbf{C}_2^{hom} : \varepsilon_{i+1}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Tant que : $\sigma_{m i+1}^T < \sigma_m^{NL}$ et $\sigma_{eq i+1}^T < \sigma_{eq}^{NL}$, alors : $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$. Sinon, le système suivant doit être résolu :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_2^{hom} : (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathfrak{f}(\dot{\varepsilon}^p, f_b, f_e, w, p_b, p_e) & \text{modèle MSMN} \\ \dot{f}_b = \mathfrak{g}_1(\dot{\varepsilon}^p, f_b, f_e, w, p_b, p_e) & \text{lois d'évolution des paramètres internes} \\ \dot{f}_e = \mathfrak{g}_2(\dot{\varepsilon}^p, f_b, f_e, w, p_b, p_e) \\ \dot{w} = \mathfrak{g}_3(\dot{\varepsilon}^p, f_b, f_e, w, p_b, p_e) \end{cases} \quad (6.38)$$

Ce système d'équation est intégré avec un θ -schéma :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{i+1} = \boldsymbol{\sigma}_i + \delta t \mathbf{C}_2^{hom} : (\dot{\varepsilon} - ((1 - \theta) \dot{\varepsilon}_i^p + \theta \dot{\varepsilon}_{i+1}^p)) \\ \boldsymbol{\sigma}_{i+1} = \mathfrak{f}(\dot{\varepsilon}_{i+1}^p, \chi_{i+1}, p_b, p_e) \\ \chi_{i+1} = \chi_i + \delta t \mathfrak{g}((1 - \theta) \dot{\varepsilon}_i^p + \theta \dot{\varepsilon}_{i+1}^p, (1 - \theta) \dot{\chi}_i + \theta \dot{\chi}_{i+1}, p_b, p_e) \end{cases} \quad (6.39)$$

où la variable χ représente les paramètres internes du modèle : $\chi = \{f_b, f_e, w\}$. Les inconnues de ce système d'équation sont $\boldsymbol{\sigma}_{i+1}$, $\dot{\varepsilon}_{i+1}^p$ et χ_{i+1} (i.e. $f_{b i+1}$, $f_{e i+1}$, w_{i+1}). Ce système est résolu numériquement via un algorithme de Newton-Raphson.

Remarque 6.1 (Partie élastique) Il est supposé que les paramètres internes n'évoluent pas dans la partie élastique. Ainsi \mathbf{C}_2^{hom} , b_2 et b_1 restent constants. Les lois d'évolution des paramètres internes sont écrites avec la partie plastique du taux de déformation.—

La FIG. 6.1 donne un exemple d'une courbe contrainte-déformation obtenue avec ces relations.

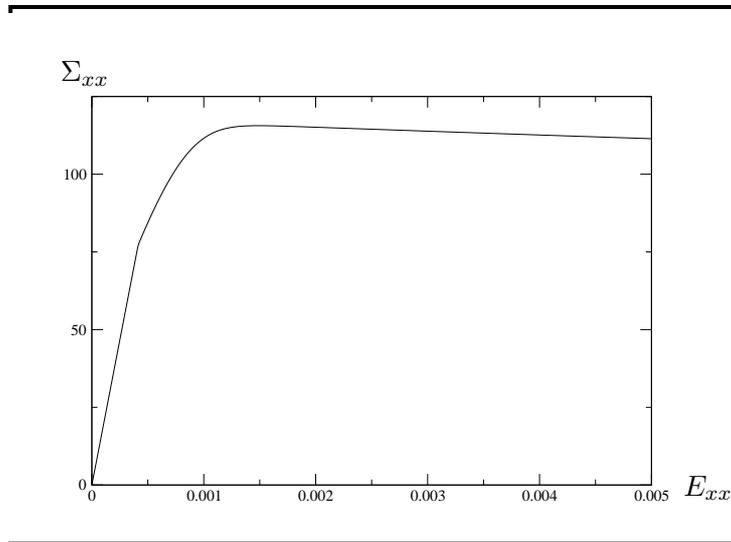


FIG. 6.1 – Courbe contrainte-déformation : $\dot{\mathbf{E}}_{xx} > 0$, autres $\dot{\mathbf{E}}_{ij} = 0$. Surface de charge obtenue avec le modèle MSMN ellipsoïdal (méthode sécante modifiée à N phases avec $N = 6$). $p_b = p_e = 0$, $q_1 = q_3 = 1$, $w = 1/5$, $f_b = 0.01$, $f_e = 0.02$, $\sigma_0 = 55$ MPa, $k = 170$ GPa, $\mu = 65$ GPa. Equations intégrées avec un schéma de point milieu ($\theta = 1/2$) comme présenté en 6.4.

Chapitre 7

Modélisation du comportement élastoplastique endommageable jusqu'à rupture du matériau d'étude

Le modèle élastoplastique endommageable présenté au chapitre 6 est écrit dans ce chapitre en déformations planes généralisées afin d'être comparé à des simulations numériques exclusivement bidimensionnelles.

Les simulations numériques bidimensionnelles présentées dans ce chapitre utilisent une méthode d'éléments finis multi-corps et des modèles de zones cohésives (voir (Perales, 2005)) sur un milieu contenant des fissures plongées dans une matrice élastoplastique parfaite avec critère de Von Mises. Le milieu étudié est un milieu périodique constitué de cellules de Voronoï dont chacune représente un grain. Des zones cohésives sont placées sur les joins de grain et des fissures sont placées aléatoirement sur certains joins de grains. Les propriétés des zones cohésives sont identifiées par comparaison à des données expérimentales issues de la littérature et concernant le matériau motivant cette étude, à savoir l'oxyde d'uranium à haute température. Un chargement hydrostatique plan est appliqué sur le milieu et les résultats des simulations numériques sont comparées aux résultats donnés par le modèle élastoplastique endommageable complet écrit en déformations planes généralisées. Cette comparaison permet d'exhiber, pour le matériau d'étude, une densité de fissure critique correspondant au début de la coalescence et donc au début de la ruine du matériau. Cette densité de fissure critique permet d'introduire la notion de coalescence dans le modèle élastoplastique endommageable final en s'inspirant du modèle GTN (Gurson, Tvergaard, Needleman, voir par exemple, Koplik et Needleman (1988)).

L'organisation de ce chapitre est la suivante :

- La section 7.1 présente le modèle élastoplastique endommageable complet en déformations planes généralisées.
- La section 7.2 présente les simulations numériques bidimensionnelles utilisant éléments finis multi-corps et zones cohésives.
- La section 7.3 présente les résultats obtenus avec ces simulations numériques ainsi que le modèle élastoplastique endommageable final avec prise en compte, pour le matériau d'étude, de la coalescence et de la rupture.

7.1 Modèle élastoplastique endommageable proposé en déformations planes généralisées

Le modèle élastoplastique endommageable présenté au chapitre 6 est écrit ici en déformations planes généralisées. Le milieu étudié, noté V , est constitué de cavités cylindriques infiniment longues dans la direction 3 et à bases elliptiques (rapport petit axe sur grand axe noté w) dans le plan 1 – 2 (coordonnées cartésiennes) plongées dans une matrice obéissant au critère de Gurson modifié :

$$q_3 \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^2 + 2q_1 f_b \cosh \left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_0} \right) - 1 - (q_1 f_b)^2 = 0, \quad (7.1)$$

dont le potentiel en taux de déformation s'écrit (on rappelle que la quantité f_{qb} représente le produit $q_1 f_b$) :

$$\varphi^G(\dot{\varepsilon}) = \sigma_0 \int_{f_{qb}}^1 \sqrt{\frac{4\dot{\varepsilon}_m^2}{y^2} + \frac{\dot{\varepsilon}_{eq}^2}{q_3}} dy. \quad (7.2)$$

Toutes les bases elliptiques des cavités ont le même rapport de forme et sont orientées aléatoirement dans le plan 1 – 2. La fraction volumique des cavités cylindriques ω_e est notée f_e . Le taux de déformation appliqué sur le bord de V est de la forme :

$$\dot{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \dot{E}_{11} & \dot{E}_{12} & 0 \\ \dot{E}_{12} & \dot{E}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{E}_{33} \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

7.1.1 Partie élastique

La première échelle correspond à un milieu élastique linéaire isotrope (coefficients de compressibilité et de cisaillement k et μ) contenant des cavités sphériques (bulles intragranulaires, porosité f_b) distribuées de façon isotrope. Le problème à traiter à cette échelle conduit à :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_1^{hom} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (7.4)$$

La borne supérieure de Hashin et Shtrikman (1963) est utilisée pour \mathbf{C}_1^{hom} :

$$\mathbf{C}_1^{hom} = \mathbf{C}^{HS}. \quad (7.5)$$

Le milieu à la première échelle étant isotrope, deux coefficients élastiques sont nécessaires, par exemple, les coefficients de compressibilité et de cisaillement :

- $k_1^{hom} = k - \frac{f_b k}{1 - \frac{(1-f_b)k}{k + \frac{4\mu}{3}}}$
- $\mu_1^{hom} = \frac{(1-f_b)\mu(9k+8\mu)}{(9+6f_b)k + 4(2+3f_b)\mu}$.

A la deuxième échelle, ω_e correspond au domaine occupé par la seconde population de cavités (de porosité f_e). Ces cavités sont supposées cylindriques (d'axe 3) à bases elliptiques aplaties dans le plan 1 – 2 (rapport petit axe sur grand axe noté w) orientées et distribuées aléatoirement dans le plan 1 – 2. Le problème à la deuxième échelle s'écrit sur le domaine total V :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_1^{hom} : \boldsymbol{\varepsilon} & \text{dans la matrice } M \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0} & \text{dans } V \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{N} & \text{sur } \partial\omega_e, \\ \mathbf{u} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} & \text{sur } \partial V \end{cases}$$

La contrainte effective déduite de ce problème vaut $\Sigma = \langle \sigma \rangle_V$. Sur ce problème :

$$\langle \sigma \rangle_V = \mathbf{C}_2^{hom} : \mathbf{E}. \quad (7.6)$$

La borne supérieure de Ponte Castañeda et Willis (1995) est utilisée pour \mathbf{C}_2^{hom} :

$$\mathbf{C}_2^{hom} = \mathbf{C}^{PCW}. \quad (7.7)$$

Le milieu effectif est isotrope transverse d'axe 3. Ainsi, 5 coefficients sont nécessaires pour décrire \mathbf{C}_2^{hom} , par exemple, K_2^{hom} , $E_2^{L\ hom}$, $\nu_2^{L\ hom}$, $\mu_2^{T\ hom}$, $\mu_2^{L\ hom}$ représentant respectivement le coefficient de compressibilité plane, le module d'Young longitudinal, le coefficient de Poisson longitudinal, le module de cisaillement transverse et le module de cisaillement longitudinal. La loi de comportement

$$\Sigma = \mathbf{C}_2^{hom} : \mathbf{E}, \quad (7.8)$$

s'écrit en considérant \mathbf{E} sous la forme (7.3) (déformations planes généralisées), où les seules composantes non nulles de \mathbf{E} sont E_{11} , E_{22} , E_{33} , E_{12} :

- $\Sigma_{11} = \left(K_2^{hom} + \mu_2^{T\ hom} \right) E_{11} + \left(K_2^{hom} - \mu_2^{T\ hom} \right) E_{22} + 2\nu_2^{L\ hom} K_2^{hom} E_{33}$
- $\Sigma_{22} = \left(K_2^{hom} - \mu_2^{T\ hom} \right) E_{11} + \left(K_2^{hom} + \mu_2^{T\ hom} \right) E_{22} + 2\nu_2^{L\ hom} K_2^{hom} E_{33}$
- $\Sigma_{12} = 2\mu_2^{T\ hom} E_{12}$
- $\Sigma_{33} = 2\nu_2^{L\ hom} K_2^{hom} E_{11} + 2\nu_2^{L\ hom} K_2^{hom} E_{22} + \left(E_2^{L\ hom} + 4 \left(\nu_2^{L\ hom} \right)^2 K_2^{hom} \right) E_{33}$.

Les coefficients K_2^{hom} , $E_2^{L\ hom}$, $\nu_2^{L\ hom}$, $\mu_2^{T\ hom}$ sont calculés en Annexe M :

- $K_2^{hom} = \frac{(2w - f_e(1 + w^2)) \mu_1^{hom} (3k_1^{hom} + \mu_1^{hom})}{6w\mu_1^{hom} + f_e(1 + w^2)(3k_1^{hom} + \mu_1^{hom})}$
- $\mu_2^{T\ hom} = \frac{(4w - f_e(1 + w^2)) \mu_1^{hom} (3k_1^{hom} + \mu_1^{hom})}{4w(3k_1^{hom} + \mu_1^{hom}) + f_e(1 + w)^2(3k_1^{hom} + 7\mu_1^{hom})}$
- $E_2^{L\ hom} = \frac{9(1 - f_e)k_1^{hom} \mu_1^{hom}}{3k_1^{hom} + \mu_1^{hom}} = (1 - f_e)E_1^{hom}$
- $\nu_2^{L\ hom} = \frac{3k_1^{hom} - 2\mu_1^{hom}}{6k_1^{hom} + 2\mu_1^{hom}} = \nu_1^{hom}$.

7.1.2 Critère de plasticité : méthode sécante modifiée (approche variationnelle) à N phases

Le critère de plasticité est déterminé en utilisant la méthode sécante modifiée (approche variationnelle) à N phases.

Cas des bases circulaires

Dans le cas où les cavités ω_e sont cylindriques d'axe 3 et à base circulaire dans le plan 1 – 2, le composite linéaire de comparaison est constitué d'un cylindre creux (cavité cylindrique d'axe 3 et à base circulaire dans le plan 1 – 2) décomposé en N phases : la phase 1 correspond à la cavité centrale et les $N - 1$ autres phases correspondent à $N - 1$ couches concentriques entourant la cavité centrale (voir la FIG. F.1). La fraction volumique de chaque couche est notée f_i et le domaine occupé par chaque couche est noté Ω_i . L'estimation auto-cohérente de Hervé et Zaoui (1995) associée à ce CLC est donnée en Annexe N. L'énergie du composite linéaire de comparaison s'écrit alors (voir Annexe

O) :

$$\begin{aligned}\Phi_o &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{C}_o^{hom} : \dot{\mathbf{E}} \\ &= \frac{1}{2} \left(K_o^{hom} \dot{E}_p^2 + \left(E_o^{L\ hom} + 4 \left(\nu_o^{L\ hom} \right)^2 K_o^{hom} \right) \dot{E}_n^2 + \mu_o^{T\ hom} \dot{\Gamma}_p + 4 \nu_o^{L\ hom} K_o^{hom} \dot{E}_p \dot{E}_n \right),\end{aligned}\quad (7.9)$$

avec :

$$\dot{E}_p = \dot{E}_{11} + \dot{E}_{22}, \quad \dot{E}_n = \dot{E}_{33} \quad \text{et} \quad \dot{\Gamma}_p = 2 \sqrt{\dot{E}_{12}^2 + \frac{1}{4} (\dot{E}_{22} - \dot{E}_{11})^2}. \quad (7.10)$$

Les coefficients K_o^{hom} , $E_o^{L\ hom}$, $\nu_o^{L\ hom}$, $\mu_o^{T\ hom}$ de Hervé et Zaoui (1995) sont donnés en Annexe N et le problème suivant est obtenu :

$$\text{Entrées : } \dot{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \dot{E}_{11} & \dot{E}_{12} & 0 \\ \dot{E}_{12} & \dot{E}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{E}_{33} \end{pmatrix};$$

répéter

$\forall i (2 \leq i \leq N) :$

• actualisation de k_o^i et de μ_o^i :

$$k_o^i = \frac{2}{9} \sigma_0 \frac{1}{\sqrt{\langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}}} \left(-\text{Arcsinh} \left(2 \sqrt{\frac{\langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}}{\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}}} q_3 \right) + \text{Arcsinh} \left(\frac{2}{f_{qb}} \sqrt{\frac{\langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}}{\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}}} q_3 \right) \right);$$

$$\mu_o^i = \frac{1}{3} \frac{\sigma_0}{\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}} \left(\sqrt{4 \langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i} + \frac{\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}}{q_3}} - f_{qb} \sqrt{\frac{4 \langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}}{(f_{qb})^2} + \frac{\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}}{q_3}} \right);$$

• actualisation de $\langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}$ et de $\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}$:

$$\langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i} = \frac{2}{9} \frac{1}{f_i} \frac{\partial \Phi_o}{\partial k_o^i};$$

$$\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i} = \frac{2}{3} \frac{1}{f_i} \frac{\partial \Phi_o}{\partial \mu_o^i};$$

jusqu'à convergence sur $\langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}$ et $\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}$;

Sorties : $\Sigma = \mathbf{C}_o^{hom} : \dot{\mathbf{E}}$;

$$\Sigma_{11} = \left(K_o^{hom} + \mu_o^{T\ hom} \right) \dot{E}_{11} + \left(K_o^{hom} - \mu_o^{T\ hom} \right) \dot{E}_{22} + 2 \nu_o^{L\ hom} K_o^{hom} \dot{E}_{33};$$

$$\Sigma_{22} = \left(K_o^{hom} - \mu_o^{T\ hom} \right) \dot{E}_{11} + \left(K_o^{hom} + \mu_o^{T\ hom} \right) \dot{E}_{22} + 2 \nu_o^{L\ hom} K_o^{hom} \dot{E}_{33};$$

$$\Sigma_{12} = 2 \mu_o^{T\ hom} \dot{E}_{12};$$

$$\Sigma_{33} = 2 \nu_o^{L\ hom} K_o^{hom} \dot{E}_{11} + 2 \nu_o^{L\ hom} K_o^{hom} \dot{E}_{22} + \left(E_o^{L\ hom} + 4 \left(\nu_o^{L\ hom} \right)^2 K_o^{hom} \right) \dot{E}_{33}.$$

Un algorithme de point fixe permet d'atteindre la convergence en peu d'itérations. Les dérivées partielles sont calculées avec une formule approchée au premier ordre.

Comparaison avec le modèle de Gurson (1977)

Gurson (1977) a déterminé la surface de plasticité pour un cylindre creux à base circulaire dans le plan 1 – 2, infiniment long dans la direction longitudinale (axe 3) et avec une condition de taux de déformation homogène sur la section latérale et externe du cylindre. La matrice est dans ce paragraphe **rigide plastique parfaite de Von Mises** et la porosité du cylindre creux est notée

f. Les résultats sont les suivants :

$$C \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh \left(\sqrt{3} \frac{\Sigma_p}{\sigma_0} \right) - 1 - f^2 = 0, \quad (7.11)$$

où

$$\Sigma_p = \frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22}}{2}, \quad (7.12)$$

$C = 1$ dans le cas d'un chargement axisymétrique et $C = 1 + 3f + 24f^6$ pour un problème en déformations planes (C est alors déterminé numériquement).

Le but de ce paragraphe est de comparer les résultats donnés avec la méthode sécante modifiée à N phases en déformations planes généralisées exposée précédemment et le critère de Gurson (1977) rappelé ci-dessus. Le même type de comparaison a été effectué par Bilger et al. (2002) dans le cas des cavités sphériques.

La méthode sécante modifiée à N phases en déformations planes généralisées est ainsi mise en œuvre avec une matrice rigide plastique parfaite de Von Mises ($f_b = 0$). Le composite linéaire de comparaison est donc actualisé à l'aide des coefficients suivants :

$$k_o^i = +\infty \quad \text{et} \quad \mu_o^i = \frac{\sigma_0}{3 \left(\sqrt{\langle (\dot{\varepsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}} \right)}. \quad (7.13)$$

Comme dans le cas tridimensionnel, on constate que le point hydrostatique du modèle à N phases tend vers celui du critère de Gurson lorsque le nombre de phases augmente (voir FIG. 7.1 et FIG. 7.2).

Remarque 7.1 (Rayons R_i) Les résultats précédents ont été obtenus en considérant les rayons R_i ci-dessous (le but est de découper plus finement la zone la plus proche de la cavité centrale, c'est à dire la zone où les fluctuations du second moment sont les plus importantes ; il a été vérifié que cela améliorerait les résultats i.e. pour un nombre de couche donné cela rapproche les résultats du modèle à N phases vers la surface de Gurson (1977)). **Dans ce travail, les rayons R_i (pour $1 \leq i \leq N$) choisis pour le modèle utilisant la méthode sécante modifiée à N phases en déformations planes généralisées sont calculés à partir de la relation :**

$$R_i = \sqrt{f_e} + (1 - \sqrt{f_e}) \left(\frac{i-1}{N-1} \right)^2. \quad (7.14)$$

Point analytique

Un cylindre creux à base circulaire de porosité f_e est considéré ici. La matrice de ce cylindre creux obéit au **critère de Gurson** modifié :

$$q_3 \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^2 + 2q_1 f_b \cosh \left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_0} \right) - 1 - (q_1 f_b)^2 = 0. \quad (7.15)$$

Le but est d'obtenir un point analytique du critère de plasticité effectif pour le chargement spécifique suivant (l'axe 3 correspond à l'axe des z) :

$$\begin{cases} \dot{u}_3 = \dot{E}_{33} \cdot z & \text{sur les deux sections terminales infinies} \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N})_1 = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N})_2 = 0 & \text{sur les deux sections terminales infinies, avec } \mathbf{N} \text{ la normale sortante} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{0} & \text{sur les surfaces latérales externe et interne} \end{cases}$$

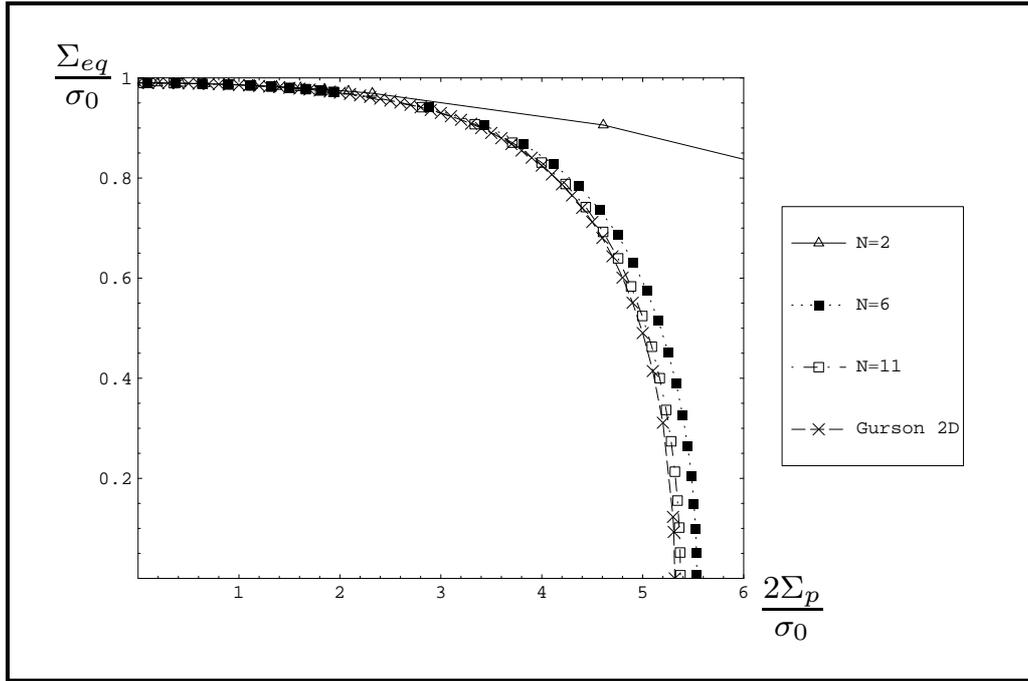


FIG. 7.1 – Critères de plasticité : modèle avec méthode sécante modifiée à N phases pour différentes valeurs de N comparé au modèle de Gurson (1977) (relation (7.11)). Cylindre creux à base circulaire de porosité $f = 0.01$ et à matrice rigide plastique parfaite de Von Mises. R_i définis en (7.14). Chargement axisymétrique. Le point hydrostatique du modèle à N phases tend vers celui du critère de Gurson lorsque le nombre de phases augmente.

L'attention est portée sur le caractère mixte du chargement imposé (c'est un mélange entre la condition de taux de déformation homogène au bord et la condition de contrainte homogène au bord). La solution évidente du problème précédent correspond au tenseur des contraintes suivant :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Sigma_{33}}{1-f_e} \end{pmatrix}. \quad (7.16)$$

Les équations d'équilibre dans la matrice ainsi que les conditions aux limites sur les bords sont vérifiées. Dans la matrice, le critère de Gurson s'écrit :

$$q_3 \frac{\Sigma_{33}^2}{\sigma_0^2 (1-f_e)^2} + 2f_{qb} \cosh\left(\frac{\Sigma_{33}}{2\sigma_0 (1-f_e)}\right) - 1 - f_{qb}^2 = 0. \quad (7.17)$$

Cette équation non linéaire en Σ_{33} possède deux solutions. Les deux points obtenus sont placés sur un graphique $2\Sigma_p - \Sigma_n$ (avec $\Sigma_n \equiv \Sigma_{33}$) afin d'être comparés avec le modèle utilisant la méthode sécante modifiée à N phases (voir FIG. 7.3). Un bon accord est observé entre le point exact précédent et la méthode sécante modifiée à N phases.

Cas des bases elliptiques

Ce paragraphe traite du cas où les cavités ω_e sont à base elliptique dans le plan 1–2. La matrice suit le critère de Gurson modifié. On cherche à mettre en œuvre la méthode sécante modifiée à N

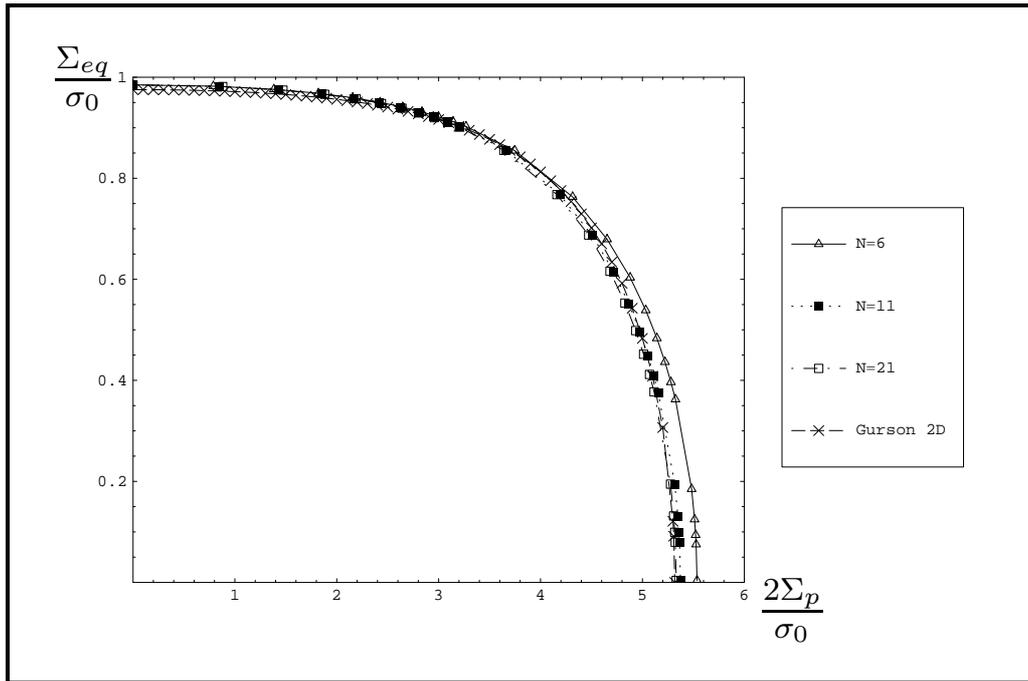


FIG. 7.2 – Critères de plasticité : modèle avec méthode sécante modifiée à N phases pour différentes valeurs de N comparé au modèle de Gurson (1977) (relation (7.11)). Cylindre creux à base circulaire de porosité $f = 0.01$ et à matrice rigide plastique parfaite de Von Mises. R_i définis en (7.14). Déformations planes (avec \dot{E}_{12} fixe). Le point hydrostatique du modèle à N phases tend vers celui du critère de Gurson lorsque le nombre de phases augmente.

phases en utilisant l'estimation de Hashin et Shtrikman (1963) valable pour le cas des bases circulaires et la notion de "porosités équivalentes". **La méthode sécante modifiée avec un CLC à 2 phases** conduit au problème suivant :

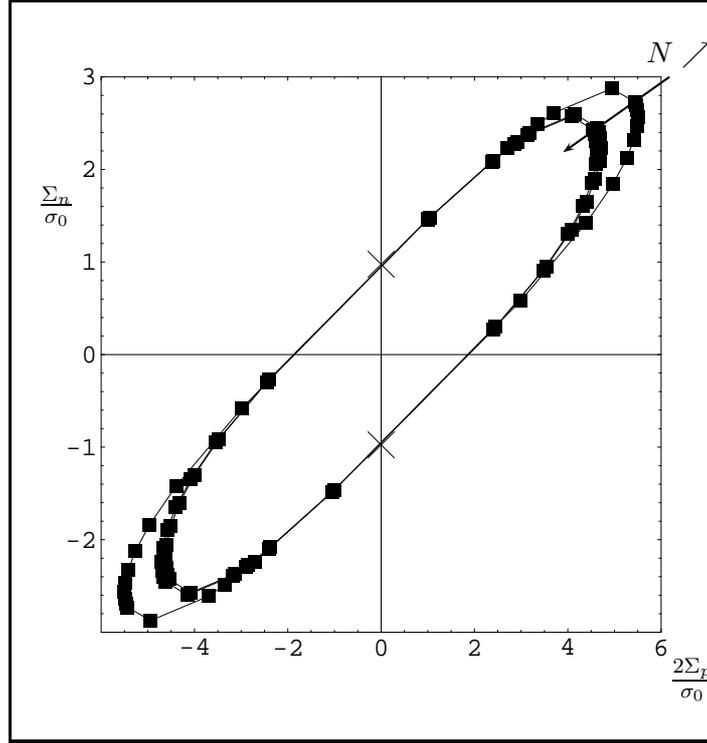


FIG. 7.3 – Critères de plasticité : modèle avec méthode sécante modifiée à N phases pour différentes valeurs de N (2 puis 6 puis 11) comparé aux points analytiques exacts donnés par (7.17). Cylindre creux à base circulaire. Porosités $f_b = 0.01$, $f_e = 0.01$ ($q_1 = 1.25$, $q_3(f_b)$ donné en 3.16). R_i définis en (7.14). Déformations planes généralisées (avec $\dot{E}_{12} = 0$ et $\dot{E}_{11} = \dot{E}_{22}$). Un bon accord est observé entre le point exact et la méthode sécante modifiée à N phases.

Entrées : $\dot{\mathbf{E}}$ de la forme (7.3);

répéter

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_o = \frac{1}{2} \left(K_o^{hom} \dot{E}_p^2 + \left(E_o^{L\ hom} + 4 \left(\nu_o^{L\ hom} \right)^2 K_o^{hom} \right) \dot{E}_n^2 + \mu_o^{T\ hom} \dot{\Gamma}_p^2 + 4\nu_o^{L\ hom} K_o^{hom} \dot{E}_p \dot{E}_n \right); \\ k_o^1 = \frac{2}{9} \sigma_0 \frac{1}{\sqrt{(\dot{\epsilon}_m)^2}} \left(-\text{Arcsinh} \left(2\sqrt{\frac{(\dot{\epsilon}_m)^2}{(\dot{\epsilon}_{eq})^2}} q_3 \right) + \text{Arcsinh} \left(\frac{2}{f_{qb}} \sqrt{\frac{(\dot{\epsilon}_m)^2}{(\dot{\epsilon}_{eq})^2}} q_3 \right) \right); \\ \mu_o^1 = \frac{1}{3} \frac{\sigma_0}{(\dot{\epsilon}_{eq})^2} \left(\sqrt{4(\dot{\epsilon}_m)^2 + \frac{(\dot{\epsilon}_{eq})^2}{q_3}} - f_{qb} \sqrt{\frac{4(\dot{\epsilon}_m)^2}{(f_{qb})^2} + \frac{(\dot{\epsilon}_{eq})^2}{q_3}} \right); \\ (\dot{\epsilon}_m)^2 = \frac{2}{9} \frac{1}{1 - f_e} \frac{\partial \Phi_o}{\partial k_o^1}; \\ (\dot{\epsilon}_{eq})^2 = \frac{2}{3} \frac{1}{1 - f_e} \frac{\partial \Phi_o}{\partial \mu_o^1}; \end{array} \right.$$

jusqu'à convergence sur $(\dot{\epsilon}_m)^2$ et $(\dot{\epsilon}_{eq})^2$;

Sorties : $\Sigma = \mathbf{C}_o^{hom} : \dot{\mathbf{E}}$;

$$\Sigma_{11} = \left(K_o^{hom} + \mu_o^{T\ hom} \right) \dot{E}_{11} + \left(K_o^{hom} - \mu_o^{T\ hom} \right) \dot{E}_{22} + 2\nu_o^{L\ hom} K_o^{hom} \dot{E}_{33};$$

$$\Sigma_{22} = \left(K_o^{hom} - \mu_o^{T\ hom} \right) \dot{E}_{11} + \left(K_o^{hom} + \mu_o^{T\ hom} \right) \dot{E}_{22} + 2\nu_o^{L\ hom} K_o^{hom} \dot{E}_{33};$$

$$\Sigma_{12} = 2\mu_o^{T\ hom} \dot{E}_{12};$$

$$\Sigma_{33} = 2\nu_o^{L\ hom} K_o^{hom} \dot{E}_{11} + 2\nu_o^{L\ hom} K_o^{hom} \dot{E}_{22} + \left(E_o^{L\ hom} + 4 \left(\nu_o^{L\ hom} \right)^2 K_o^{hom} \right) \dot{E}_{33}.$$

Dans le cas des bases circulaires, les coefficients de \mathbf{C}_o^{hom} sont obtenus via la borne supérieure de Hashin et Shtrikman (1963) (rappelée en Annexe L pour le cas bidimensionnel). Dans le cas des bases elliptiques, les coefficients de \mathbf{C}_o^{hom} sont obtenus via la borne supérieure de Ponte Castañeda et Willis (1995) (rappelée en Annexe M pour le cas bidimensionnel).

La notion de "porosités équivalentes" dans le cas bidimensionnel introduit le couple de porosités $(f_s^K, f_s^{\mu^T})$ fournissant les mêmes coefficients dans le cas de la borne supérieure de Hashin et Shtrikman (1963) que dans le cas de la borne supérieure de Ponte Castañeda et Willis (1995). Plus précisément, on cherche les porosités f_s telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{K_o^{PCW}(f_e)}{1-f_e} = \frac{K_o^{HS}(f_s)}{1-f_s} \\ \frac{E_o^{L\ PCW}(f_e)}{1-f_e} = \frac{E_o^{L\ HS}(f_s)}{1-f_s} \\ \frac{(\nu_o^{L\ PCW}(f_e))^2 K_o^{PCW}(f_e)}{1-f_e} = \frac{(\nu_o^{L\ HS}(f_s))^2 K_o^{HS}(f_s)}{1-f_s} \\ \frac{\mu_o^T\ PCW(f_e)}{1-f_e} = \frac{\mu_o^T\ HS(f_s)}{1-f_s} \\ \frac{\nu_o^{L\ PCW}(f_e) K_o^{PCW}(f_e)}{1-f_e} = \frac{\nu_o^{L\ HS}(f_s) K_o^{HS}(f_s)}{1-f_s} \end{array} \right. \quad (7.18)$$

La première égalité fournit une porosité f_s notée f_s^K . La deuxième égalité est valable quel que soit f_s . En effet, $\frac{E_o^{L\ PCW}(f_e)}{1-f_e} = \frac{E_o^{L\ HS}(f_s)}{1-f_s} = E_o^1$. La troisième et la cinquième égalité sont aussi vérifiées lorsque $f_s = f_s^K$. En effet, $\nu_o^{L\ PCW}(f_e) = \nu_o^{L\ HS}(f_s) = \nu_o^1$. La quatrième égalité est vérifiée pour une porosité f_s notée $f_s^{\mu^T}$. En utilisant ce couple de porosités $(f_s^K, f_s^{\mu^T})$, le cas elliptique est traité à partir du cas circulaire où la borne de Hashin et Shtrikman (1963) est utilisée :

Entrées : \dot{E} de la forme (7.3);

répéter

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_o = \frac{1}{2}[K_o^{HS}(f_s^K)\dot{E}_p^2 + (E_o^L HS(f_s^K) + 4(\nu_o^L HS(f_s^K))^2 K_o^{HS}(f_s^K))\dot{E}_n^2 + \mu_o^T HS(f_s^{\mu^T})\dot{\Gamma}_p^2 + \\ 4\nu_o^L HS(f_s^K)K_o^{HS}(f_s^K)\dot{E}_p\dot{E}_n]; \\ \Phi_{o2} = \frac{1}{2}\mu_o^T HS(f_s^{\mu^T})\dot{\Gamma}_p^2; \\ \Phi_{o1} = \Phi_o - \Phi_{o2}; \\ \text{actualisation de } k_o^1 \text{ et de } \mu_o^1; \\ \text{actualisation de } (\dot{\epsilon}_m)^2 \text{ et de } (\dot{\epsilon}_{eq})^2 : \\ (\dot{\epsilon}_m)^2 = \frac{2}{9} \left(\frac{1}{1-f_s^K} \frac{\partial \Phi_{o1}}{\partial k_o^1} + \frac{1}{1-f_s^{\mu^T}} \frac{\partial \Phi_{o2}}{\partial k_o^1} \right); \\ (\dot{\epsilon}_{eq})^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{1-f_s^K} \frac{\partial \Phi_{o1}}{\partial \mu_o^1} + \frac{1}{1-f_s^{\mu^T}} \frac{\partial \Phi_{o2}}{\partial \mu_o^1} \right); \end{array} \right.$$

jusqu'à convergence sur $(\dot{\epsilon}_m)^2$ et $(\dot{\epsilon}_{eq})^2$;

Sorties :

$$\begin{aligned} \Sigma_{11} &= \left(\frac{1-f_e}{1-f_s^K} K_o^{HS}(f_s^K) + \frac{1-f_e}{1-f_s^{\mu^T}} \mu_o^T HS(f_s^{\mu^T}) \right) \dot{E}_{11} + \\ &\left(\frac{1-f_e}{1-f_s^K} K_o^{HS}(f_s^K) - \frac{1-f_e}{1-f_s^{\mu^T}} \mu_o^T HS(f_s^{\mu^T}) \right) \dot{E}_{22} + 2 \frac{1-f_e}{1-f_s^K} \nu_o^L HS(f_s^K) K_o^{HS}(f_s^K) \dot{E}_{33}; \\ \Sigma_{22} &= \left(\frac{1-f_e}{1-f_s^K} K_o^{HS}(f_s^K) - \frac{1-f_e}{1-f_s^{\mu^T}} \mu_o^T HS(f_s^{\mu^T}) \right) \dot{E}_{11} + \\ &\left(\frac{1-f_e}{1-f_s^K} K_o^{HS}(f_s^K) + \frac{1-f_e}{1-f_s^{\mu^T}} \mu_o^T HS(f_s^{\mu^T}) \right) \dot{E}_{22} + 2 \frac{1-f_e}{1-f_s^K} \nu_o^L HS(f_s^K) K_o^{HS}(f_s^K) \dot{E}_{33}; \\ \Sigma_{12} &= 2 \frac{1-f_e}{1-f_s^{\mu^T}} \mu_o^T HS(f_s^{\mu^T}) \dot{E}_{12}; \\ \Sigma_{33} &= 2 \frac{1-f_e}{1-f_s^K} \nu_o^L HS(f_s^K) K_o^{HS}(f_s^K) \dot{E}_{11} + 2 \frac{1-f_e}{1-f_s^K} \nu_o^L HS(f_s^K) K_o^{HS}(f_s^K) \dot{E}_{22} + \\ &\left(E_o^L HS(f_s^K) + 4(\nu_o^L HS(f_s^K))^2 K_o^{HS}(f_s^K) \right) \frac{1-f_e}{1-f_s^K} \dot{E}_{33}. \end{aligned}$$

La boucle du problème correspond physiquement au :

- cas des cavités ω_e à base circulaire dans le plan transverse et de fraction volumique f_s^K lorsque $\dot{\Gamma}_p = 0$ (i.e. $\dot{E}_{11} = \dot{E}_{22}$ et $\dot{E}_{12} = 0$)
- cas des cavités ω_e à base circulaire dans le plan transverse et de fraction volumique $f_s^{\mu^T}$ lorsque $\dot{E}_p = \dot{E}_n = 0$

Ce problème permet de retrouver le cas des cavités à base elliptique de fraction volumique f_e . La même simplification que celle réalisée en 4.3.4 est utilisée ici pour le calcul de f_s^K et $f_s^{\mu^T}$: k_o^1 est supposé grand (i.e. tend vers l'infini). Les expressions de f_s^K et $f_s^{\mu^T}$ obtenues sont données en Annexe P.

Pour le cas d'un CLC à N phases et en notant f_i^K (respectivement $f_i^{\mu^T}$) les fractions volumiques des couches entourant la cavité centrale de porosité f_s^K (respectivement $f_s^{\mu^T}$), l'estimation auto-cohérente de Hervé et Zaoui (1995) (Annexe N) est alors utilisée :

- Dans le cas des bases circulaires : $f_s^K = f_s^{\mu^T} = f_e$.
- Dans le cas des bases elliptiques : f_s^K et $f_s^{\mu^T}$ sont donnés en Annexe P.

Entrées : $\dot{\mathbf{E}}$ de la forme (7.3);

répéter

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_o = \frac{1}{2} [K_o^{HZ}(f_s^K) \dot{E}_p^2 + (E_o^L{}^{HZ}(f_s^K) + 4(\nu_o^L{}^{HZ}(f_s^K))^2 K_o^{HZ}(f_s^K)) \dot{E}_n^2 + \\ \mu_o^T{}^{HZ}(f_s^{\mu T}) \dot{E}_p^2 + 4\nu_o^L{}^{HZ}(f_s^K) K_o^{HZ}(f_s^K) \dot{E}_p \dot{E}_n]; \\ \Phi_{o2} = \frac{1}{2} \mu_o^T{}^{HZ}(f_s^{\mu T}) \dot{E}_p^2; \\ \Phi_{o1} = \Phi_o - \Phi_{o2}; \\ \forall i (2 \leq i \leq N) : \\ k_o^i = \frac{2}{9} \sigma_o \frac{1}{\sqrt{\langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}}} \left(-\text{Arcsinh} \left(2 \sqrt{\frac{\langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}}{\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}}} q_3 \right) + \text{Arcsinh} \left(\frac{2}{f_{qb}} \sqrt{\frac{\langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}}{\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}}} q_3 \right) \right); \\ \mu_o^i = \frac{1}{3} \frac{\sigma_o}{\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}} \left(\sqrt{4 \langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i} + \frac{\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}}{q_3}} - f_{qb} \sqrt{\frac{4 \langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}}{(f_{qb})^2} + \frac{\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}}{q_3}} \right); \\ \langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i} = \frac{2}{9} \left(\frac{1}{f_i^K} \frac{\partial \Phi_{o1}}{\partial k_o^i} + \frac{1}{f_i^{\mu T}} \frac{\partial \Phi_{o2}}{\partial k_o^i} \right); \\ \langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{f_i^K} \frac{\partial \Phi_{o1}}{\partial \mu_o^i} + \frac{1}{f_i^{\mu T}} \frac{\partial \Phi_{o2}}{\partial \mu_o^i} \right); \end{array} \right.$$

jusqu'à convergence sur $\langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}$ et $\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}$, $\forall i (2 \leq i \leq N)$;

Sorties :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_{11} = \left(\frac{1-f_e}{1-f_s^K} K_o^{HZ}(f_s^K) + \frac{1-f_e}{1-f_s^{\mu T}} \mu_o^T{}^{HZ}(f_s^{\mu T}) \right) \dot{E}_{11} + \\ \left(\frac{1-f_e}{1-f_s^K} K_o^{HZ}(f_s^K) - \frac{1-f_e}{1-f_s^{\mu T}} \mu_o^T{}^{HZ}(f_s^{\mu T}) \right) \dot{E}_{22} + 2 \frac{1-f_e}{1-f_s^K} \nu_o^L{}^{HZ}(f_s^K) K_o^{HZ}(f_s^K) \dot{E}_{33}; \\ \Sigma_{22} = \left(\frac{1-f_e}{1-f_s^K} K_o^{HZ}(f_s^K) - \frac{1-f_e}{1-f_s^{\mu T}} \mu_o^T{}^{HZ}(f_s^{\mu T}) \right) \dot{E}_{11} + \\ \left(\frac{1-f_e}{1-f_s^K} K_o^{HZ}(f_s^K) + \frac{1-f_e}{1-f_s^{\mu T}} \mu_o^T{}^{HZ}(f_s^{\mu T}) \right) \dot{E}_{22} + 2 \frac{1-f_e}{1-f_s^K} \nu_o^L{}^{HZ}(f_s^K) K_o^{HZ}(f_s^K) \dot{E}_{33}; \\ \Sigma_{12} = 2 \frac{1-f_e}{1-f_s^{\mu T}} \mu_o^T{}^{HZ}(f_s^{\mu T}) \dot{E}_{12}; \\ \Sigma_{33} = 2 \frac{1-f_e}{1-f_s^K} \nu_o^L{}^{HZ}(f_s^K) K_o^{HZ}(f_s^K) \dot{E}_{11} + 2 \frac{1-f_e}{1-f_s^K} \nu_o^L{}^{HZ}(f_s^K) K_o^{HZ}(f_s^K) \dot{E}_{22} + \\ \left(E_o^L{}^{HZ}(f_s^K) + 4(\nu_o^L{}^{HZ}(f_s^K))^2 K_o^{HZ}(f_s^K) \right) \frac{1-f_e}{1-f_s^K} \dot{E}_{33}. \end{array} \right.$$

Le calcul des dérivées partielles se fait numériquement en utilisant une formulation approchée à l'ordre 1. Cet algorithme permet d'estimer la surface de plasticité pour un milieu avec une matrice de Gurson et des cavités cylindriques d'axe 3 et à bases elliptiques dans le plan 1 – 2 pour un chargement en taux de déformations planes généralisées. Il est rappelé que la section 4.6 compare les critères de plasticité obtenus par ce modèle avec des simulations numériques par transformée de Fourier rapide (FFT, Michel et al. (2000)).

7.1.3 Lois d'évolution des paramètres internes

Comme dans le cas tridimensionnel, l'évolution des paramètres internes $\chi = \{f_b, f_e, w\}$ est maintenant déterminée.

La relation (6.12) établie dans le cas tridimensionnel est toujours valable :

$$f_b = \frac{f_{ba} + f_b \dot{f}_e}{(1 - f_e)} = \frac{(1 - f_e - f_b(1 - f_e)) \text{Tr}(\dot{\mathbf{E}}) - \dot{f}_e + f_b \dot{f}_e}{(1 - f_e)}. \quad (7.19)$$

Le modèle suppose que :

- dans le plan transverse 1 – 2, les ellipses restent des ellipses quel que soit le chargement ;
- la déformation dans la phase ω_e est homogène ;
- dans le plan transverse, toutes les ellipses de la phase ω_e restent de même rapport de forme.

Par conséquent, pour chaque ellipse et dans sa base locale, le taux de déformation s'écrit (en notant b_1 , la demi-longueur dans la direction 1 de la base locale, a_1 , la demi-épaisseur dans la direction 2 de la base locale et h , la longueur du cylindre dans la direction 3) :

$$\dot{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{b}_1}{b_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{a}_1}{a_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{h}}{h} \end{pmatrix}. \quad (7.20)$$

D'où :

$$3\langle \dot{\varepsilon}_m \rangle_{\omega_e} = \frac{\dot{b}_1}{b_1} + \frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{h}}{h} \quad (7.21)$$

et :

$$\langle \dot{\gamma}_p \rangle_{\omega_e} = \left| \frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{b}_1}{b_1} \right|. \quad (7.22)$$

Les expressions de $\langle \dot{\varepsilon}_m \rangle_{\omega_e}$ et $\langle \dot{\gamma}_p \rangle_{\omega_e}$ sont données par l'intermédiaire du composite linéaire de comparaison de la façon suivante.

En utilisant les équations (N.12), (N.13) et (N.14) :

$$\langle \dot{\varepsilon}_m \rangle_{\omega_e} = \frac{b_1}{3f_e} \dot{E}_n + \frac{b_2}{3f_e} \dot{E}_p. \quad (7.23)$$

Cela permet d'écrire, en utilisant les définitions suivantes $b'_1 = 1 - b_1$ et $b'_2 = 1 - b_2$:

$$\langle \dot{\varepsilon}_m \rangle_{\omega_e} = \frac{\dot{E}_m}{f_e} - \frac{b'_2}{3f_e} \dot{E}_p - \frac{b'_1}{3f_e} \dot{E}_n. \quad (7.24)$$

Or, dans le cas d'un biphasé (matrice et cavité), la relation suivante donne $\langle \dot{\varepsilon}_m \rangle_{\omega_e}$:

$$\langle \dot{\varepsilon}_m \rangle_{\omega_e} = \frac{\dot{E}_m}{f_e} - \frac{1 - f_e}{f_e} \langle \dot{\varepsilon}_m \rangle_M = \frac{\dot{E}_m}{f_e} - \frac{1}{3f_e} (\mathbf{I} - \mathbf{B}) : \dot{\mathbf{E}}, \quad (7.25)$$

avec :

$$\mathbf{B} = \mathbf{I} : \left(\mathbf{I} \mathbf{D} - (\mathbf{C}_o^1)^{-1} : \mathbf{C}_o^{hom} \right). \quad (7.26)$$

Dans le cas où C_o^1 est isotrope et où C_o^{hom} est isotrope transverse, il vient :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_2 = 1 - b'_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 = 1 - b'_1 \end{pmatrix} \quad (7.27)$$

avec :

$$b'_2 = \frac{2K_o^{hom}(1 + \nu_o^{L\ hom})}{3k_o^1} \quad (7.28)$$

et

$$b'_1 = \frac{E_o^{L\ hom} + 4K_o^{L\ hom} \nu_o^{L\ hom}(1 + \nu_o^{L\ hom})}{3k_o^1}. \quad (7.29)$$

Cela donne :

$$\langle \dot{\varepsilon}_m \rangle_{\omega_e} = \frac{\dot{E}_m}{f_e} - \frac{b'_2}{3f_e} \dot{E}_p - \frac{b'_1}{3f_e} \dot{E}_n. \quad (7.30)$$

En suivant le même raisonnement que dans la section 7.1.2, le cas des N phases peut se traiter avec :

$$\langle \dot{\varepsilon}_m \rangle_{\omega_e} = \frac{\dot{E}_m}{f_e} + \left(-\frac{b'_2(f_s^K)}{3f_e} \dot{E}_p - \frac{b'_1(f_s^K)}{3f_e} \dot{E}_n \right) \frac{1-f_e}{1-f_s^K}, \quad (7.31)$$

en utilisant b_1 et b_2 de (N.12), (N.13) et (N.14). Dans le cas des bases circulaires dans le plan transverse, le cisaillement plan microscopique est relié au cisaillement plan macroscopique par l'intermédiaire de la relation suivante :

$$\langle \dot{\gamma}_p \rangle_{\omega_e} = \frac{1}{f_e} \left(1 - \frac{\mu_o^T HS}{\mu_o^1} \right) \dot{\Gamma}_p. \quad (7.32)$$

et dans le cas des bases elliptiques dans le plan transverse :

$$\langle \dot{\gamma}_p \rangle_{\omega_e} = \frac{1}{f_e} \left(1 - \frac{\mu_o^T PCW}{\mu_o^1} \right) \dot{\Gamma}_p = \frac{1}{f_e} \left(1 - \frac{\mu_o^T HS (f_s^{\mu^T})}{\mu_o^1} \frac{1-f_e}{1-f_s^{\mu^T}} \right) \dot{\Gamma}_p. \quad (7.33)$$

L'estimation de Hervé et Zaoui (1995) sur le problème de la porosité à base sphérique ω_e de porosité $f_s^{\mu^T}$ permet d'écrire dans le cas d'un chargement macroscopique du type cisaillement plan (les seules composantes non nulles de $\dot{\mathbf{E}}$ sont $\dot{E}_{11} = \gamma$ et $\dot{E}_{22} = -\gamma$) :

$$\langle \dot{\varepsilon}_{eq} \rangle_{\omega_e}^2 = \mathcal{A}_o^{HZ} \gamma^2, \quad (7.34)$$

avec :

$$\mathcal{A}_o^{HZ} = \frac{4}{3} \left(\frac{Q_{11}^{(N)} + 3Q_{14}^{(N)}}{Q_{44}^{(N)} Q_{11}^{(N)} - Q_{41}^{(N)} Q_{14}^{(N)}} \right)^2, \quad (7.35)$$

$Q^{(N)} = \prod_{j=N}^{j=1} N^{(j)}$ et $N^{(j)}$ donnée en (N.11) avec $q_N = 1$. La quantité $\langle \dot{\varepsilon}_{eq} \rangle_{\omega_e}$ s'écrit donc pour le modèle N phases :

$$\langle \dot{\varepsilon}_{eq} \rangle_{\omega_e} = \frac{4}{3 (f_s^{\mu^T})^2} (1 - \mathcal{R}_{\mu^T})^2 \gamma^2, \quad (7.36)$$

avec :

$$\mathcal{R}_{\mu^T} = 1 - f_s^{\mu^T} \sqrt{\frac{3}{4} \mathcal{A}_o^{HZ}}. \quad (7.37)$$

Or, pour ce chargement macroscopique et dans le cas d'un biphasé, le taux de déformation équivalent dans la matrice est (après calculs) :

$$\langle \dot{\varepsilon}_{eq} \rangle_{\omega_e}^2 = \frac{4}{3 (f_s^{\mu^T})^2} \left(1 - \frac{\mu_o^T hom}{\mu_o^1} \right)^2 \gamma^2. \quad (7.38)$$

En suivant le même raisonnement que dans la section 7.1.2, le cas des N phases peut se traiter avec :

$$\langle \dot{\gamma}_p \rangle_{\omega_e} = \frac{1}{f_e} \left(1 - \mathcal{R}_{\mu^T} (f_s^{\mu^T}) \frac{1-f_e}{1-f_s^{\mu^T}} \right) \dot{\Gamma}_p. \quad (7.39)$$

La porosité f_e est définie par :

$$f_e = \frac{\pi b_1 a_1 h N_e}{|V|}, \quad (7.40)$$

avec N_e le nombre de cavités dans le domaine total. D'où :

$$\begin{aligned} \dot{f}_e &= f_e \left(\frac{\dot{b}_1}{b_1} + \frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{h}}{h} \right) - 3f_e \dot{E}_m \\ &= 3f_e \langle \dot{\varepsilon}_m \rangle_{\omega_e} - 3f_e \dot{E}_m \quad (\text{cf relation (7.21)}). \end{aligned} \quad (7.41)$$

Les équations (7.31) et (7.41) permettent de déterminer \dot{f}_e . Le rapport de forme des ellipses dans le plan transverse 1 – 2 est défini par :

$$w = \frac{a_1}{b_1}. \quad (7.42)$$

Cela donne :

$$\dot{w} = \frac{\dot{a}_1}{b_1} - \frac{a_1}{b_1^2} \dot{b}_1 = w \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{b}_1}{b_1} \right) = \pm w \langle \dot{\gamma}_p \rangle_{\omega_e} \quad (\text{cf relation (7.22)}). \quad (7.43)$$

Les équations (7.39) et (7.43) permettent de déterminer $|\dot{w}|$. Une hypothèse supplémentaire doit être faite sur le signe de \dot{w} . En l'absence d'informations supplémentaires, il est supposé que $\dot{w} \leq 0$ (i.e. que les cavités ont tendance à s'allonger).

Bilan

$$\begin{cases} \dot{f}_b = \frac{(1 - f_e - f_b(1 - f_e)) \text{Tr}(\dot{\mathbf{E}}) - \dot{f}_e + f_b \dot{f}_e}{(1 - f_e)} \\ \dot{f}_e = f_e \left(3 \langle \dot{\varepsilon}_m \rangle_{\omega_e} - 3 \dot{E}_m \right) \\ \dot{w} = -w \langle \dot{\gamma}_p \rangle_{\omega_e} \\ \langle \dot{\varepsilon}_m \rangle_{\omega_e} = \frac{\dot{E}_m}{f_e} + \left(-\frac{b'_2 (f_s^K)}{3f_e} \dot{E}_p - \frac{b'_1 (f_s^K)}{3f_e} \dot{E}_n \right) \frac{1 - f_e}{1 - f_s^K} \\ b'_1 = 1 - b_1 \text{ et } b'_2 = 1 - b_2, b_1 \text{ et } b_2 \text{ définis en (N.13) et (N.14),} \\ \langle \dot{\gamma}_p \rangle_{\omega_e} = \frac{1}{f_e} \left(1 - \mathcal{R}_{\mu^T} \left(f_s^{\mu^T} \right) \frac{1 - f_e}{1 - f_s^{\mu^T}} \right) \dot{\Gamma}_p. \end{cases} \quad (7.44)$$

7.2 Méthode numérique : homogénéisation périodique avec modèle de zone cohésive et cellules de Voronoï bidimensionnelles

Cette section est relative aux simulations numériques utilisées dans la suite (en 7.3) pour étudier la coalescence et la rupture de l' UO_2 . Le modèle numérique ainsi que le type de cellule utilisé pour ces simulations sont présentés dans cette section.

7.2.1 Modèle de zone cohésive utilisé et homogénéisation périodique (logiciel Xper, Perales (2005))

Les modèles de zone cohésive permettent une approche locale des phénomènes de fissuration. L'idée est de placer des zones cohésives entre chaque maille d'un maillage éléments finis (voir FIG. 7.4) afin de simuler l'initiation et la propagation de fissures sur ce maillage (approche dite parfois "méthode des éléments finis volumiques-cohésifs"). Les mailles du maillage éléments finis initial sont "éclatées" et des zones cohésives sont placées entre les mailles. Les zones cohésives

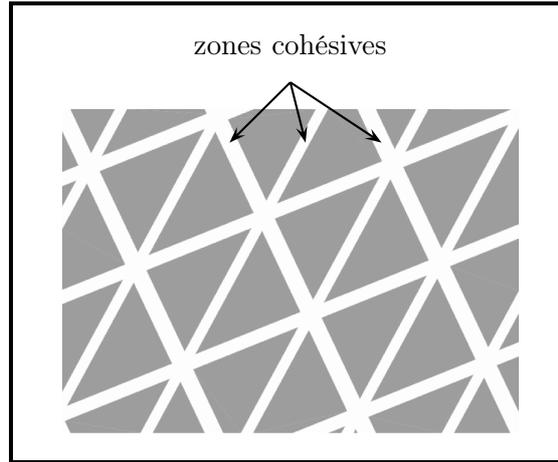


FIG. 7.4 – Représentation d'un maillage éléments finis "éclaté" : entre chaque maille est implémenté un modèle de zone cohésive (d'après Perales (2005)).

introduisent une relation entre le vecteur contrainte et le saut de déplacement entre les mailles en vis à vis. Entre deux mailles en vis à vis, par exemple Ω_1 et Ω_2 , le saut de déplacement à l'interface $[\mathbf{u}]$ est défini par $[\mathbf{u}] = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ et il est décomposé entre partie normale $u_N \mathbf{n}$ et partie tangente \mathbf{u}_T (voir les notations sur la FIG. 7.5) :

$$[\mathbf{u}] = u_N \mathbf{n} + \mathbf{u}_T. \quad (7.45)$$

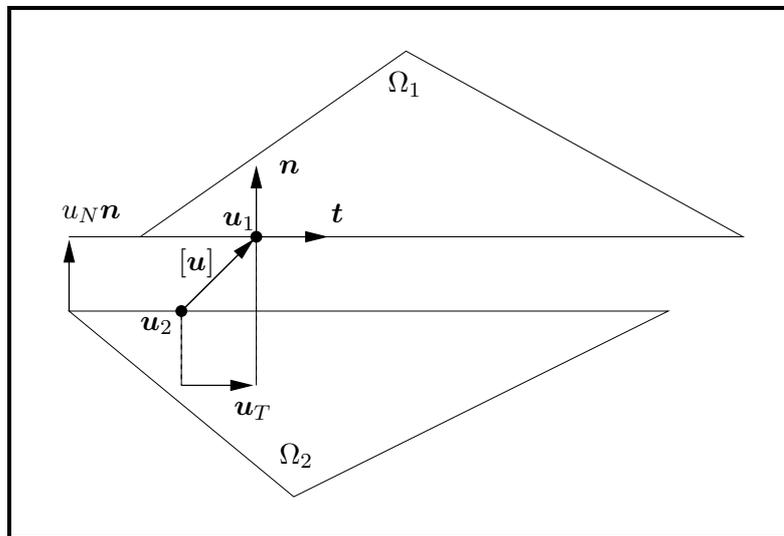


FIG. 7.5 – Notations utilisées en 7.2.1 : saut de déplacement $[\mathbf{u}] = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$.

Le vecteur \mathbf{R} est défini comme le vecteur contrainte de la maille Ω_1 (c'est la force surfacique définie comme $\mathbf{R} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu}$ dans Ω_1 où $\boldsymbol{\nu}$ est la normale unitaire sortante à Ω_1 , i.e. $\boldsymbol{\nu} = -\mathbf{n}$, voir FIG. 7.5) et il est décomposé en partie normale $R_N \mathbf{n}$ et partie tangente \mathbf{R}_T :

$$\mathbf{R} = R_N \mathbf{n} + \mathbf{R}_T. \quad (7.46)$$

Avec ces notations, la réaction interfaciale normale R_N est positive (resp. négative) lorsque l'interface est en compression (resp. en traction). Le modèle de zone cohésive utilisé dans ce travail utilise une loi adhésive avec contact parfait sans frottement. A chaque interface, les conditions de Signorini pour le contact unilatéral s'écrivent :

$$\begin{aligned} u_N &= 0, & R_N &> -R_N^{adh} \\ u_N &> 0, & R_N &= -R_N^{adh}, \end{aligned} \quad (7.47)$$

où le vecteur \mathbf{R}^{adh} est donné dans la suite. Etant donné que l'on ne simule pas le frottement, le vecteur tangentiel \mathbf{R}_T vaut $\mathbf{R}_T = -\mathbf{R}_T^{adh}$. La loi adhésive est celle utilisée par Perales et al. (2005) (d'après ces auteurs, c'est une variante de la loi d'endommagement surfacique de Michel et Suquet (1994)) :

$$\mathbf{R}^{adh} = \mathbf{K}^{adh}(\beta) \cdot [\mathbf{u}], \quad (7.48)$$

avec :

$$\mathbf{K}^{adh}(\beta) = \beta \left(C_N \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + C_T \frac{\mathbf{u}_T \otimes \mathbf{u}_T}{\|\mathbf{u}_T\|^2} \right), \quad (7.49)$$

où $\|\mathbf{u}_T\|$ représente la norme euclidienne de \mathbf{u}_T . La variable β , comprise entre 0 et 1, décrit le degré d'endommagement surfacique : pour $\beta = 1$ la zone cohésive est parfaite, pour $0 < \beta < 1$ la zone cohésive est partiellement endommagée et pour $\beta = 0$ la zone cohésive est rompue. L'évolution de β (appelé niveau d'endommagement surfacique) prend en compte l'irréversibilité du comportement lorsque $0 < \beta < 1$ et lorsque la norme du vecteur saut de déplacement a atteint, à un instant donné, une valeur critique δ_c :

$$\begin{cases} \beta = \min(g^{adh}([\mathbf{u}]_{max}), g^{adh}([\mathbf{u}])), \\ g^{adh}(\mathbf{v}) = \begin{cases} \beta_0 & \text{si } \|\mathbf{v}\| < \delta_c, \\ \beta_0 \frac{3\delta_c - \|\mathbf{v}\|}{\delta_c + \|\mathbf{v}\|} & \text{si } \delta_c \leq \|\mathbf{v}\| \leq 3\delta_c, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{cases} \quad (7.50)$$

avec :

$$\delta_c = \sqrt{\frac{w^{ref}}{9 - 4\ln 4} \left(\frac{1}{C_N} + \frac{1}{C_T} \right)}, \quad (7.51)$$

où C_N et C_T sont respectivement appelés les raideurs linéiques interfaciales initiales normale et tangente, $0 \leq \beta_0 \leq 1$ est le niveau d'endommagement surfacique initial, w^{ref} est une énergie surfacique de référence et $[\mathbf{u}]_{max}$ est le saut de déplacement correspondant à la plus grande valeur atteinte par $\|\mathbf{u}\|$.

Afin d'illustrer le modèle de zone cohésive utilisé, la FIG. 7.6 représente l'évolution de la loi cohésive normale lors d'un essai en traction normale, en supposant que $\mathbf{u}_T = \mathbf{0}$ et en supposant que l'interface est initialement vierge ($\beta_0 = 1$). Le modèle est entièrement défini avec C_N , C_T et w^{ref} . Dans la suite, on suppose que les raideurs initiales normale et tangente sont identiques ($C_T = C_N$) ; le modèle est alors défini avec deux paramètres : C_N et w^{ref} .

Le logiciel Xper (Perales (2005) et Perales et al. (2005)) permet de prendre en compte le modèle de zone cohésive précédent entre chaque maille d'un maillage éléments finis et dans le cadre de la théorie de l'homogénéisation périodique en grandes déformations (Perales et al. (2007)). On considère un milieu périodique (il existe deux vecteurs selon lesquels la géométrie du milieu se reproduit par périodicité). Le champ du gradient de la transformation solution et le champ du tenseur de Piola-Kirchhoff de première espèce solution sont tous les deux périodiques de même période que le milieu étudié. De plus, ils sont chacun décomposés en une partie moyenne et en une

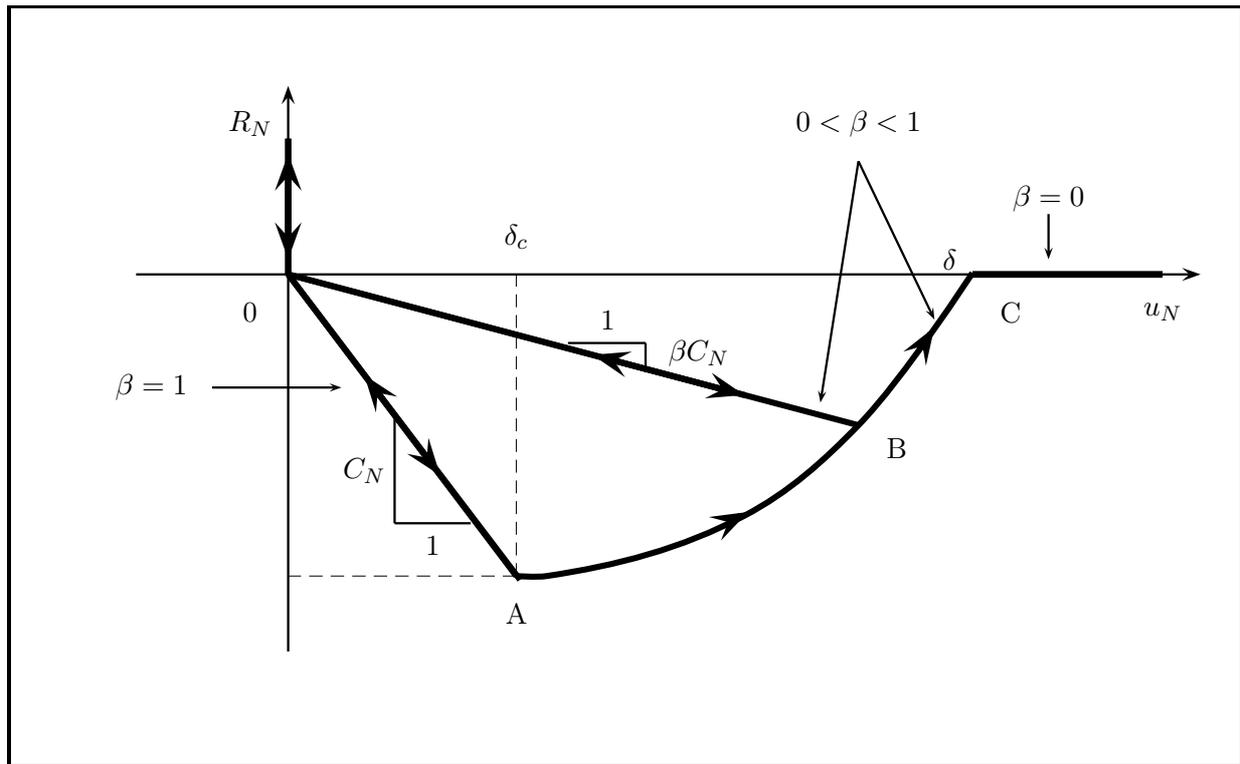


FIG. 7.6 – Loi cohésive normale : charge-décharge en traction normale, en supposant que $\mathbf{u}_T = \mathbf{0}$ et que $\beta_0 = 1$ (d'après Perales (2005)).

partie fluctuante de moyenne nulle (voir Perales et al. (2007)). Le logiciel Xper permet d'imposer des composantes non nulles du tenseur de contrainte (de Piola-Kirchhoff de première espèce) effectif ou du tenseur de taux de déformation effectif (en repectant que chaque direction ait l'une des deux imposée) et de relever les valeurs des composantes laissées libres.

7.2.2 Domaine étudié : milieu périodique partitionné en grains (cellules de Voronoï) avec possibilité de préfissures sur certains joints de grain

Les simulations numériques avec modèle de zone cohésive présentées dans ce travail sont effectuées en deux dimensions. Le milieu granulaire V étudié est l'oxyde d'uranium UO_2 et est modélisé comme un assemblage de cellules de Voronoï dans lequel chaque cellule représente un grain. La partition du domaine V est obtenue de la façon suivante. Des points sont placés dans V de façon isotrope (distribution isotrope des points) ; ces points vont représenter les centres des cellules de Voronoï (on les appelle les germes). Physiquement, chaque cellule de Voronoï associée à un germe i regroupe les points de l'espace qui sont plus près du germe i que de tous les autres germes $j \neq i$. On parle alors de zone d'influence du germe i . Coster et Chermant (2002) montrent, à partir d'études de microstructures, que la représentation de la microstructure de l' UO_2 (vierge et sans porosité de fabrication) avec une partition du domaine en cellules de Voronoï constitue une bonne approximation.

Les domaines V utilisés pour les simulations numériques avec le logiciel Xper sont des domaines périodiques et partitionnés en cellules de Voronoï. Un pavage périodique en cellules de Voronoï

est obtenu sur V à partir d'un ensemble périodique de germes comme expliqué par Nygård et Gudmundson (2002) (voir FIG. 7.7).

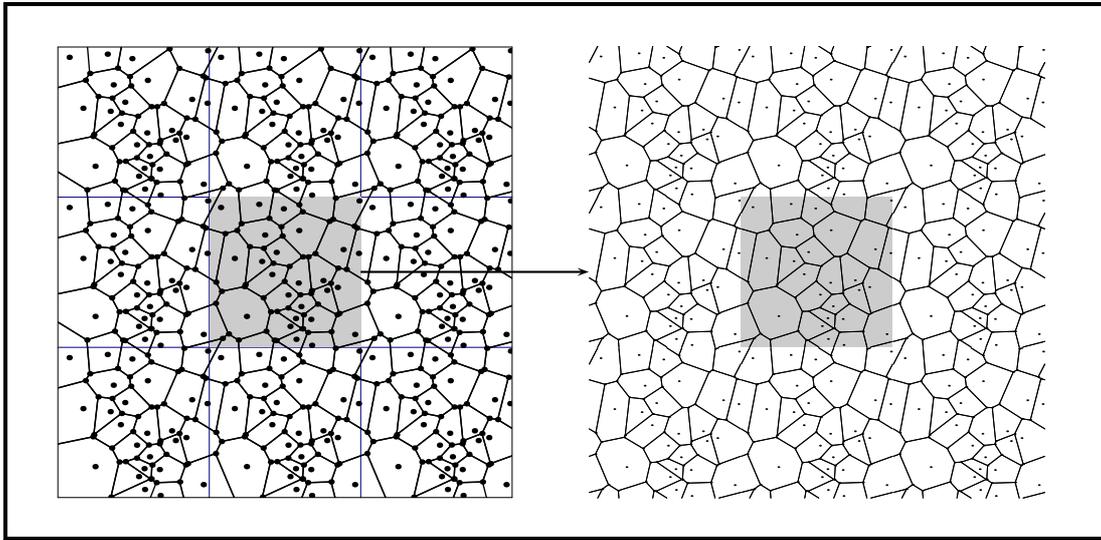


FIG. 7.7 – Construction d'un domaine V périodique (en gris) et constitué de cellules de Voronoï.

Des zones cohésives sont placées uniquement sur les joints de grains (les interfaces délimitant les grains adjacents), tandis que l'intérieur des grains est composé d'éléments finis standard (sans zone cohésive). Cela permet de simuler la rupture intergranulaire et non transgranulaire en accord avec les observations expérimentales (voir chapitre 2). Des exemples de maillages sont donnés par la suite. Des préfissures peuvent aussi être placées sur certains joints de grains en posant $\beta_0 = 0$ (zone cohésive rompue initialement) sur les zones des préfissures. On parle alors de densité de fissure initiale non nulle.

7.3 Description du comportement élastoplastique endommageable jusqu'à rupture du matériau d'étude

Cette section aboutit à l'enrichissement a posteriori du modèle élastoplastique endommageable pour simuler la coalescence et la rupture de l' UO_2 . Tout d'abord, les données matériaux utiles pour simuler le comportement mécanique de l' UO_2 sont exposées. Puis, les coefficients utiles aux simulations numériques avec modèle de zone cohésive embarqué sont identifiés. Enfin, les résultats des simulations numériques avec modèle de zone cohésive embarqué et densité de fissures initiales non nulles sont donnés. Les lois d'évolution du modèle élastoplastique endommageable sont modifiées afin de retrouver les résultats numériques relatifs à la coalescence et la rupture du matériau.

7.3.1 Données expérimentales utilisées pour le comportement mécanique de l' UO_2 vierge sans porosité et à haute température (la matrice)

Le but de cette section est de donner les coefficients matériaux disponibles pour décrire le comportement élastoplastique de la matrice d' UO_2 (sans cavités), supposée élastoplastique parfaite (critère de Von Mises).

Concernant le module d'Young (en GPa) et le coefficient de Poisson de l' UO_2 vierge, les relations

suivantes sont utilisées (voir section 2.2.2) :

$$E = 223(1 - 2.5f)(1 - 1.32 \cdot 10^{-4}T), \quad (7.52)$$

$$\nu = \frac{223(1 - 2.5f)}{168(1 - 2.25f)} - 1, \quad (7.53)$$

où f représente la porosité de fabrication et T la température en °C. Pour une porosité de fabrication nulle, le module d'Young et le coefficient de Poisson s'écrivent :

$$E = 223(1 - 1.32 \cdot 10^{-4}T), \quad (7.54)$$

$$\nu = 0.33. \quad (7.55)$$

Pour une température de 1700 °C, le module d'Young vaut 173 GPa.

La contrainte maximale en traction est obtenue à partir des résultats de Canon et al. (1971) et Knudsen et al. (1960) pour les basses températures et de la loi de Canon et al. (1971) pour les hautes températures (voir 2.2.2). Pour les basses températures, on peut supposer que la contrainte maximale est constante en fonction de la température et sa valeur est obtenue à partir des résultats de Canon et al. (1971) à température ambiante modifiée avec la loi de Knudsen et al. (1960) afin de ramener cette valeur à $f = 0$. Pour les hautes températures, la loi de Canon et al. (1971) à très faible vitesse de sollicitation est utilisée (avec $\dot{\epsilon} = 2.6 \cdot 10^{-5}$ /s). La courbe obtenue est tracée en FIG. 7.8. La transition entre les deux parties (courbe basse et courbe haute température) a toujours lieu pour une température d'environ 1400 °C. A 1700 °C, la contrainte maximale en traction vaut 55 MPa.

Concernant la déformation totale, seules les données de Canon et al. (1971) (exposées sur la FIG. 2.10) sont disponibles : à 1700 °C, la déformation à rupture est d'environ 3.5 % si l'on extrapole les résultats expérimentaux et d'environ 2 % si l'on conserve la valeur expérimentale obtenue pour la température la plus proche de 1700 °C.

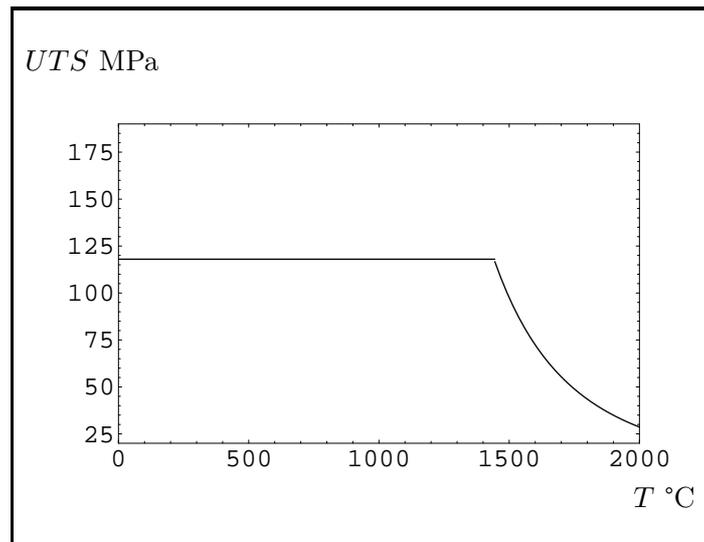


FIG. 7.8 – Contrainte maximale en traction en fonction de la température pour de l' UO_2 sans porosité : utilisation des lois de Canon et al. (1971) et Knudsen et al. (1960) pour les basses températures et de la loi de Canon et al. (1971) pour les hautes températures.

Au final, à 1700 °C (haute température), les coefficients matériaux retenus sont :

$$\begin{aligned} E &= 173 \text{ GPa} \\ \nu &= 0.33 \\ \sigma_0 &= 55 \text{ MPa} \\ \varepsilon_{max} &\in [2 - 3.5] \%. \end{aligned} \quad (7.56)$$

7.3.2 Identification des paramètres du modèle de zone cohésive utilisé pour l' UO_2 vierge sans porosité et à haute température (la matrice)

Le but de cette section est d'identifier les paramètres nécessaires au modèle de zone cohésive (présenté en 7.2.1), à savoir C_N et w^{ref} . Des premiers calculs numériques avec le logiciel Xper sont réalisés afin de retrouver approximativement la valeur de la déformation maximale expérimentale. La matrice est supposée élastoplastique parfaite avec critère de Von Mises (coefficients matériaux donnés en (7.56)).

Un premier calcul concerne le nombre d'éléments moyen dans chaque grain nécessaire afin d'assurer la convergence du calcul par éléments finis. Le nombre obtenu et utilisé par la suite est de 135 éléments par grain (voir les courbes de traction sur la FIG. 7.9 et les maillages sur la FIG. 7.10), pour une triangularisation de type Delaunay avec des mailles P_1 (interpolation linéaire à 1 point de Gauss).

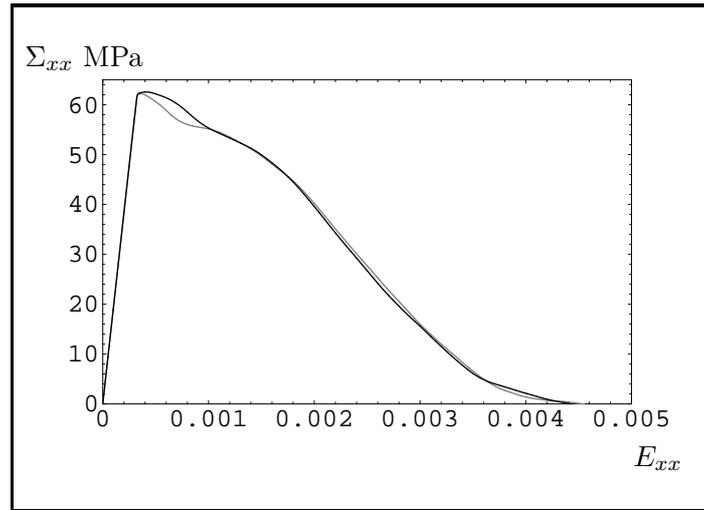


FIG. 7.9 – Simulations numériques : 9 grains maillés avec 135 éléments par grain en moyenne (courbe noire) et 352 éléments par grain en moyenne (courbe grise). \dot{E}_{xx} imposé non nul et autres $\Sigma_{ij} = 0$. Propriétés matériaux données en (7.56). Paramètres du modèle de zone cohésive : $C_N = 3.0275 \cdot 10^{18}$ Pa/m et $w^{ref} = 0.001$ J/m², longueur de la cellule 30 μ m. Pas de pré-fissures : $\beta_0 = 1$ sur chaque zone cohésive (zones cohésives situées sur les joints de grains). 135 éléments par grain en moyenne est suffisant.

Dans la suite, des cellules à 25 grains sont utilisées, maillées avec 135 éléments par grains en moyenne. La taille des grains moyenne étant de 10 μ m, cela fait des cellules de 50 μ m de longueur environ. Les tailles de mailles L_{mesh} utilisées sont de 1.24 μ m environ. Le paramètre C_N est choisi de façon à vérifier la relation de Perales et al. (2007) :

$$C_N \geq \frac{21E}{L_{mesh}}. \quad (7.57)$$

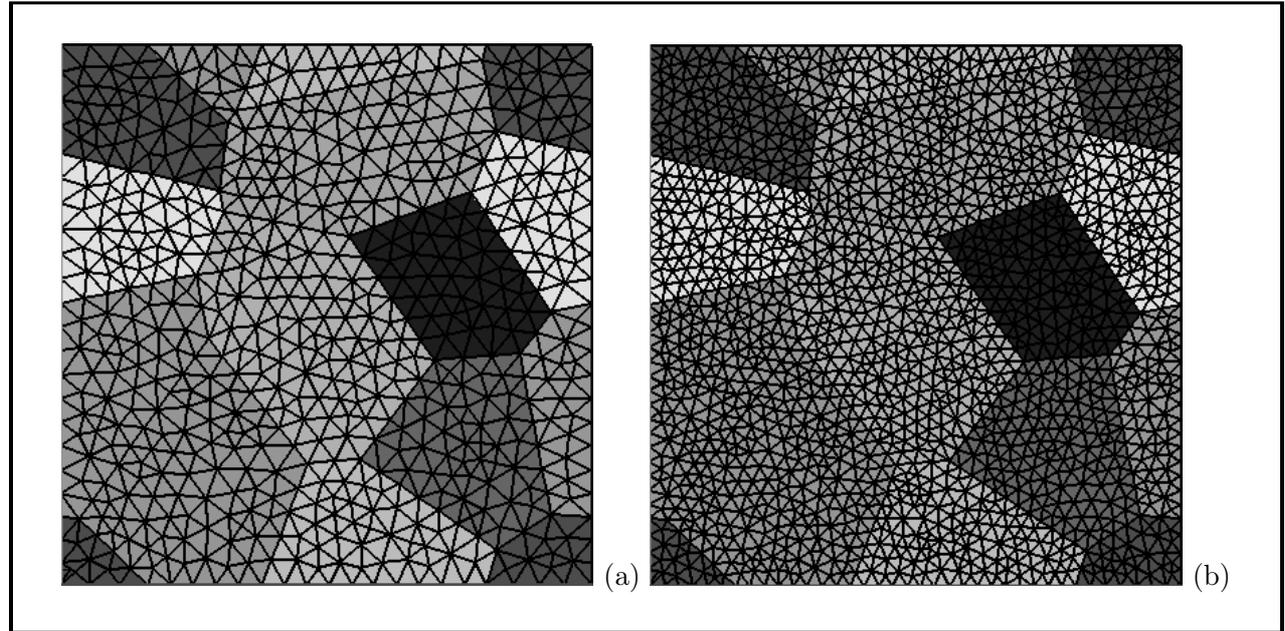


FIG. 7.10 – Maillages utilisés pour les simulations numériques : 9 grains maillés avec 135 éléments par grain en moyenne (a) et 352 éléments par grain en moyenne (b).

D'après Perales et al. (2007), ce critère permet d'assurer que les zones cohésives ne modifient pas (ou peu) la raideur apparente de la structure. La valeur de C_N utilisée est de $3.0275 \cdot 10^{18}$ Pa/m et permet de vérifier le critère précédent pour les cellules à 25 grains et 135 éléments par grains en moyenne utilisées dans la suite.

L'énergie surfacique de référence w^{ref} reste à déterminer. Des simulations numériques sont effectuées afin de retrouver la déformation maximale expérimentale. Le w^{ref} identifié vaut 0.025 J/m² (voir les courbes de traction sur la FIG. 7.11, les maillages utilisés sont les deux derniers de la FIG. 7.13).

Au final, les paramètres du modèle de zone cohésive utilisé sont :

$$C_N = 3.0275 \cdot 10^{18} \text{ Pa/m} \quad \text{et} \quad w^{ref} = 0.025 \text{ J/m}^2. \quad (7.58)$$

Afin d'illustrer le modèle de zone cohésive utilisé avec les paramètres précédents, la FIG. 7.12 représente l'évolution de la loi cohésive normale lors d'un essai en traction normale, en supposant que $\mathbf{u}_T = \mathbf{0}$ et en supposant que l'interface est initialement vierge ($\beta_0 = 1$). Pour résumer, les deux paramètres nécessaires au modèle de zone cohésive utilisé sont déterminés : le paramètre C_N est fixé par l'intermédiaire du critère de Perales et al. (2007) et le paramètre w^{ref} est identifié par l'intermédiaire d'une comparaison entre des simulations numériques et une donnée expérimentale. Avec ces paramètres fixés, la FIG. 7.12 montre que la valeur maximale de la force surfacique durant l'ouverture $|R_N|$ est de l'ordre de $4 * \sigma_0$ et que le saut de déplacement à rupture est très faible (de l'ordre de 0.2 nm). Ce modèle de zone cohésive introduit donc un comportement fragile dans un matériau globalement ductile. Cela explique les fortes déformations plastiques et la chute brutale de la contrainte dans les simulations numériques exposées sur la FIG. 7.11 : le modèle de zone cohésive retenu conduit à un comportement élastoplastique avec quasiment aucun endommagement jusqu'au moment de la rupture et à une rupture de type fragile ensuite. Lorsque la fissuration s'initie aux joints de grains, la ruine du matériau est alors très rapide et s'effectue presque sans aucune déformation plastique macroscopique additionnelle.

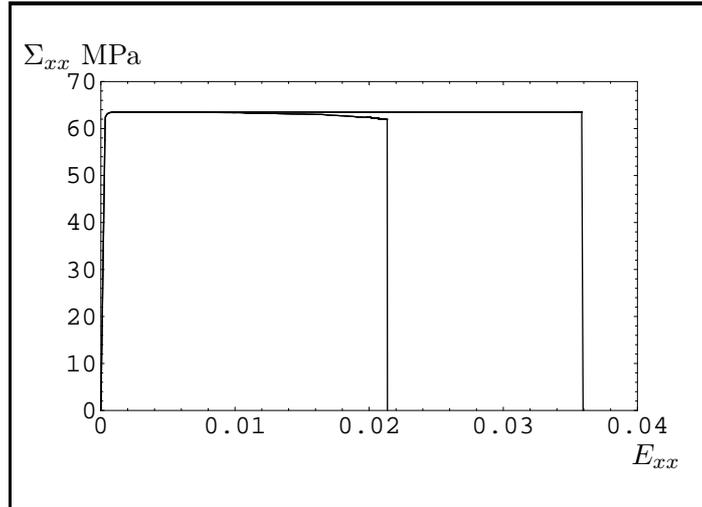


FIG. 7.11 – Simulations numériques sur 6 tirages : \dot{E}_{xx} imposé non nul et autres $\Sigma_{ij} = 0$. Propriétés matériaux données en (7.56). Paramètres du modèle de zone cohésive : $C_N = 3.0275 \cdot 10^{18} \text{ Pa/m}$ et $w^{ref} = 0.025 \text{ J/m}^2$. Pas de préfissures : $\beta_0 = 1$ sur chaque zone cohésive (zones cohésives situées sur les joints de grains). Cette valeur de w^{ref} permet de retrouver approximativement la déformation maximale expérimentale. Les deux courbes tracées correspondent aux deux tirages qui ont donné les valeurs des déformations à rupture minimale et maximale parmi les 6 tirages.

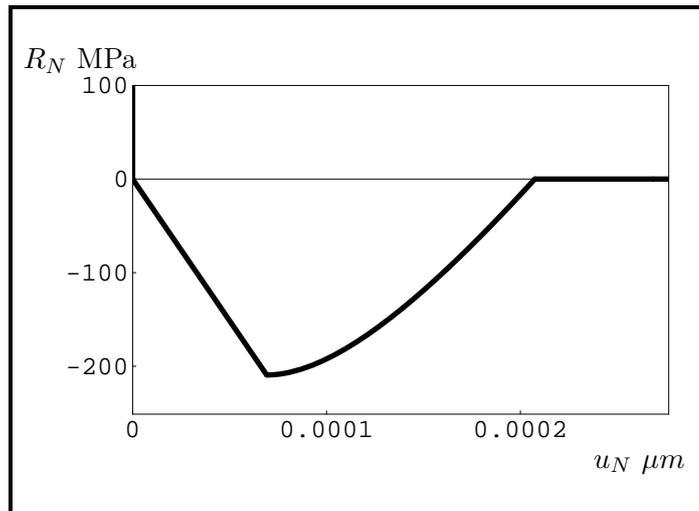


FIG. 7.12 – Loi cohésive normale avec les paramètres du modèle de zone cohésive (7.58) : charge-décharge en traction normale, en supposant que $\mathbf{u}_T = \mathbf{0}$ et que $\beta_0 = 1$.

7.3.3 Cellules de Voronoï avec préfissures placées aux joints de grain

Le but de cette section est de présenter les résultats numériques obtenus pour des cellules préfissurées. Des cellules de 25 grains maillées avec 135 éléments par grains sont utilisées (cellules de la FIG. 7.13). Des préfissures sont placées sur certains joints de grains. Ces préfissures sont composées de 4 éléments chacune et le paramètre d'endommagement initial du modèle de zone cohésive vaut 0 sur ces préfissures (zones cohésives rompues). Des calculs à 12, 25, 33 et 40 préfissures

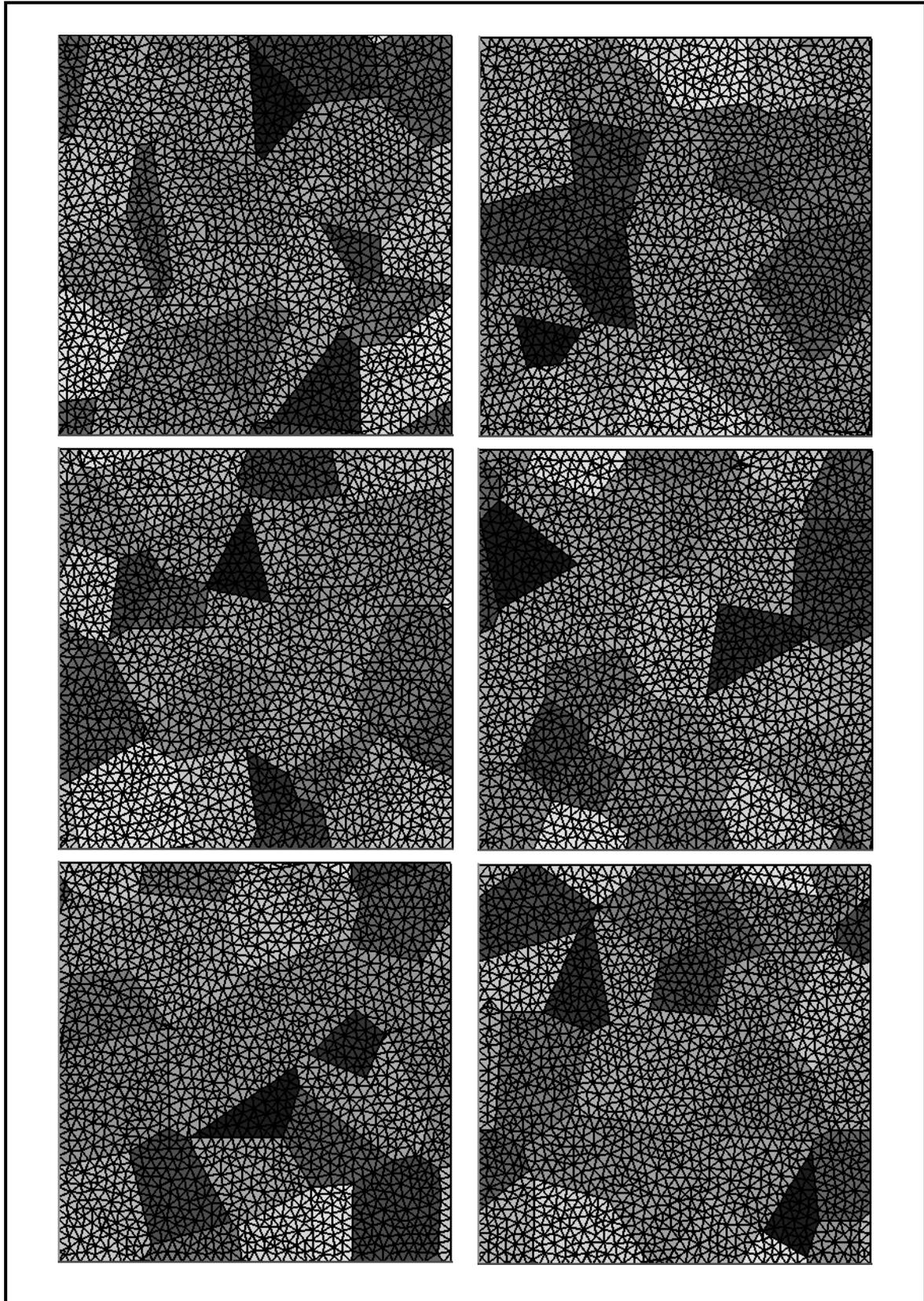


FIG. 7.13 – Maillages des 6 tirages utilisés pour les simulations numériques : 25 grains, 135 éléments par grain en moyenne, cellules de 50 μm de côté.

sont effectués et les microstructures associées sont données en Annexe Q. On rappelle que, pour ces simulations numériques, la matrice d' UO_2 est prise élastoplastique parfaite avec critère de Von Mises.

Le chargement imposé est en taux de déformation macroscopique plan, i.e. $\dot{E}_{xx} = \dot{E}_{yy} \neq 0$ et autres $\dot{E}_{ij} = 0$. Ce chargement est choisi pour les simulations numériques car il correspond, pour la plasticité, à un chargement purement hydrostatique en contrainte ce qui représente le chargement principal lors d'un accident de réactivité. En effet, pour un chargement hydrostatique plan en taux de déformation, les équations du modèle MSMN ellipsoïdal (voir les équations des algorithmes présentés en 7.1.2) montrent par exemple que $\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy} = \Sigma_{zz}$ et autres $\Sigma_{ij} = 0$ (matrice incompressible : $\nu_o^L hom = 1/2$ dans les équations de 7.1.2).

Dans le cas des cellules avec 12 préfissures, différents tirages de cellules de Voronoï et différents tirages de préfissures sont testés. Les maillages sont ceux de la FIG. 7.13 et les microstructures sont données en Annexe Q. Les courbes contraintes-déformations obtenues pour ces six calculs sont données sur la FIG. 7.14 et montrent que 12 fissures suffisent pour obtenir des calculs convergés vis à vis de la distribution des fissures dans la cellule totale. Des résultats analogues sont réalisés avec le cas des 25 préfissures et les résultats sont donnés sur la FIG. 7.15. Dans le cas 33 et 40 préfissures, un seul calcul (avec un seul tirage de grains et de préfissures) est ainsi nécessaire. Les courbes contraintes-déformations obtenues sont données sur la FIG. 7.16.

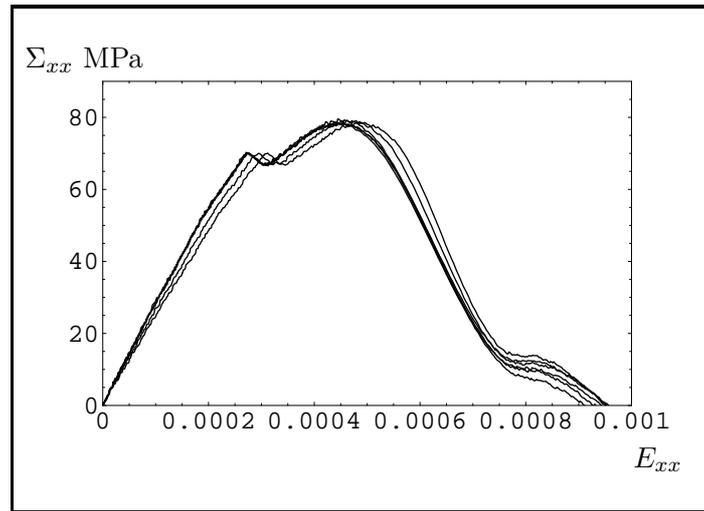


FIG. 7.14 – Simulations numériques sur 6 tirages : chargement hydrostatique plan en taux de déformation effectif $\dot{E}_{xx} = \dot{E}_{yy}$ imposé non nul et autres \dot{E}_{ij} nuls. Propriétés matériaux données en (7.56). Paramètres du modèle de zone cohésive donnés en (7.58). 25 grains. 12 préfissures de longueur $4.96 \mu m$ chacune environ (cellules de $50 \mu m$ de côté). Maillages donnés sur la FIG. 7.13 et microstructures données en Annexe Q.

7.3.4 Comparaison entre simulations numériques avec modèle de zone cohésive et modèle élastoplastique endommageable — Enrichissement du modèle élastoplastique endommageable

Le but de cette section est de comparer le modèle élastoplastique endommageable et les simulations numériques. Pour ce faire, les simulations numériques effectuées à 12, 25, 33 et 40 préfissures et exposées en 7.3.3 sont utilisées. Le modèle élastoplastique endommageable établi en 7.1 est mis en œuvre avec les densités de fissures correspondantes et une matrice de Von Mises (sans bulle intragranulaire).

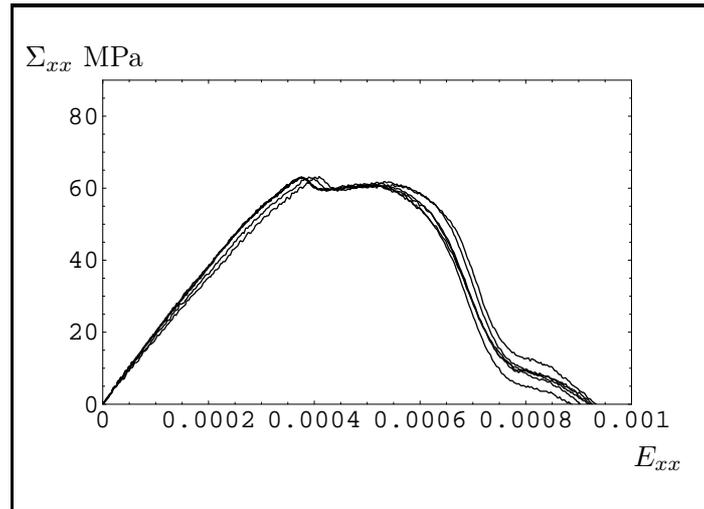


FIG. 7.15 – Simulations numériques sur 6 tirages : chargement hydrostatique plan en taux de déformation effectif $\dot{E}_{xx} = \dot{E}_{yy}$ imposé non nul et autres \dot{E}_{ij} nuls. Propriétés matériaux données en (7.56). Paramètres du modèle de zone cohésive donnés en (7.58). 25 grains. 25 préfissures de longueur $4.96 \mu\text{m}$ chacune environ (cellules de $50 \mu\text{m}$ de côté). Maillages donnés sur la FIG. 7.13 et microstructures données en Annexe Q.

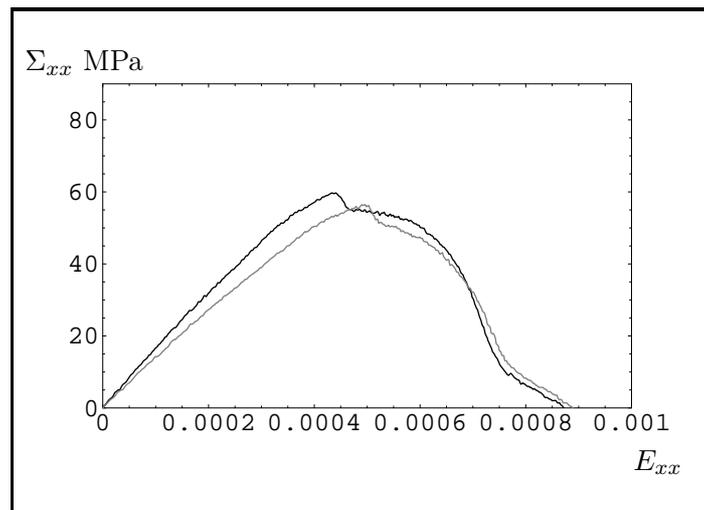


FIG. 7.16 – Simulations numériques : chargement hydrostatique plan en taux de déformation effectif $\dot{E}_{xx} = \dot{E}_{yy}$ imposé non nul et autres \dot{E}_{ij} nuls. Propriétés matériaux données en (7.56). Paramètres du modèle de zone cohésive donnés en (7.58). 25 grains. 33 préfissures (courbe noire) et 40 préfissures (courbe grise) de longueur $4.96 \mu\text{m}$ chacune environ (cellules de $50 \mu\text{m}$ de côté). Maillage donné sur la FIG. 7.13 (première figure) et microstructures données en Annexe Q.

Le modèle élastoplastique endommageable établi en 7.1 nécessite la connaissance de la porosité et du rapport de forme initial des cavités intergranulaires (notés f_e et w). Les simulations numériques étant effectuées dans le cas où les cavités intergranulaires sont des fissures, le modèle élastoplastique endommageable est utilisé avec un w initial proche de 0. Dans les simulations numériques, le rayon des fissures vaut $b_1 = 2.48 \mu\text{m}$, la surface vaut $S = 50 \times 50 \mu\text{m}^2$, et le nombre de fissures est noté

N_c . Cela permet de définir la densité de fissure initiale de la manière suivante :

$$\alpha_c = \frac{\pi b_1^2 N_c}{S}. \quad (7.59)$$

A chaque simulation numérique correspond une densité de fissure initiale α_c . Pour le modèle élastoplastique endommageable, la porosité initiale et le rapport de forme initial vérifient :

$$f_e = \alpha_c w. \quad (7.60)$$

La valeur initiale de α_c étant imposé pour chaque simulation numérique, les porosités et les rapports de forme nécessaires au modèle sont proportionnels. Il est vérifié que $w = 0.1$ est suffisamment petit pour simuler correctement des fissures avec le modèle ($w = 0.01$ donne approximativement le même résultat). Ainsi, chaque simulation numérique exposée en 7.3.3 (12, 25, 33 et 40 pré-fissures) peut être comparée au modèle élastoplastique endommageable :

- le cas 12 fissures correspond à $f_e \approx 1\%$ et $w = 0.1$
- le cas 25 fissures correspond à $f_e \approx 2\%$ et $w = 0.1$
- le cas 33 fissures correspond à $f_e \approx 2.5\%$ et $w = 0.1$
- le cas 40 fissures correspond à $f_e \approx 3\%$ et $w = 0.1$.

Le chargement effectif est hydrostatique en contrainte. D'après les simulations numériques par FFT exposées en 4.6, ce cas de chargement induit la localisation de la déformation. Ce phénomène n'est pas pris en compte par le modèle qui conduit alors à une surestimation de la contrainte effective. Les porosités f_e sont augmentées (remplacées par $f_{qe} \geq f_e$), d'un facteur 2, tiré de façon approximative des simulations numériques par FFT exposées en 4.6.

Vu le chargement utilisé, les équations d'évolution du modèle données en 7.1.3 donnent :

$$\dot{w} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\dot{f}_e}{f_e} = \frac{\dot{\alpha}_c}{\alpha_c} \quad (7.61)$$

Ainsi, l'évolution de α_c est obtenue aisément à partir de l'évolution de f_e . Les courbes contraintes-déformations obtenues par le modèle et les simulations numériques sont comparées sur la FIG. 7.17. **Concernant les contraintes maximales, un bon accord est observé entre le modèle et simulations numériques.** Le modèle décrit convenablement le comportement du matériau jusqu'au début de la coalescence des fissures intergranulaires. Cependant, comme pour le modèle de Gurson original, le modèle développé dans ce travail ne peut pas décrire convenablement la dernière partie de la courbe contrainte-déformation correspondant à une chute plus importante de la contrainte effective (coalescence des bulles). En effet, pour un chargement purement hydrostatique en taux de déformation, le modèle de Gurson peut être intégré analytiquement et conduit à la contrainte hydrostatique suivante :

$$\Sigma_m(t) = \pm \frac{2}{3} \sigma_0 \ln \left(1 - (1 - f(t=0)) \exp(-3\dot{E}_m t) \right). \quad (7.62)$$

Dans ces conditions, la valeur $\Sigma_m = 0$ (indiquant la ruine totale du matériau) ne peut être obtenue que pour un chargement infini. C'est pourquoi, les modèles GTN introduisent une accélération de la porosité afin d'atteindre une valeur de contrainte effective nulle pour un chargement fini. Par conséquent, ces modèles GTN nécessitent une loi pour décrire cette accélération de porosité et un critère pour déterminer l'instant à partir duquel la porosité doit être accélérée, cet instant correspondant au début de la coalescence des bulles.

L'objectif est maintenant d'utiliser les simulations numériques avec modèle de zone cohésive afin d'enrichir le modèle élastoplastique endommageable développé dans ce travail : comme dans les modèles GTN, un critère de coalescence et une accélération de la porosité sont recherchés. Cela

va permettre de décrire convenablement avec le modèle la dernière partie de la courbe contrainte-déformation. Etant donné que les simulations numériques sont effectuées sur le matériau d'étude (UO_2 à 1700 °C), il est évident que le critère de coalescence et l'accélération de porosité énoncés ci-dessous ne sont pas entièrement génériques et sont uniquement déterminés pour le matériau d'étude.

Il est observé que la contrainte chute brutalement dans les simulations numériques lorsque la variation relative de α_c dans le modèle vaut 1 %. Ce critère a été déterminé par comparaison avec les simulations numériques dans les cas 12 et 25 fissures et semble pertinent dans les deux autres cas (25 et 33 fissures). Au final, le critère de coalescence utilisé pour le modèle s'écrit :

$$\frac{\alpha_c - \alpha_{c\,ini}}{\alpha_{c\,ini}} = 0.01, \quad (7.63)$$

où $\alpha_{c\,ini}$ est la valeur de α_c initiale. De manière intrinsèque, ce critère porte sur l'accroissement relatif du rayon des fissures b_1 et, de ce point de vue, il s'écrit :

$$\left(\frac{b_1}{b_{1\,ini}} \right)^2 \approx 1.01, \quad (7.64)$$

avec $b_{1\,ini}$ la valeur initiale de b_1 . Par conséquent, le critère de coalescence utilisé dans ce travail dépend de l'endommagement initial du matériau, ce qui n'est pas le cas dans les modèles GTN (voir par exemple Koplik et Needleman (1988)) où le critère de coalescence est relatif à une porosité critique indépendante de la porosité initiale. Cette dépendance du critère de coalescence à l'endommagement initial du matériau est mise en évidence dans Pardoen et Hutchinson (2000). Dès que le critère précédent est atteint par le modèle, la valeur de la porosité f_e correspondante est relevée et notée f_{ec} (porosité de début de coalescence). La contrainte effective est ensuite calculée à partir d'une porosité accélérée de la même façon que dans les modèles GTN (voir par exemple Koplik et Needleman (1988)) :

$$f_e^* = f_{ec} + \delta_{lin}(f_e - f_{ec}). \quad (7.65)$$

Plus le paramètre δ_{lin} est élevé et plus la courbe contrainte-déformation chute brutalement. La valeur de δ_{lin} a été déterminée par comparaison avec les simulations numériques dans les cas 12 et 25 fissures et semble pertinente dans les deux autres cas (25 et 33 fissures). La valeur de δ_{lin} identifiée vaut :

$$\delta_{lin} = 140. \quad (7.66)$$

Les courbes contraintes-déformations obtenues par le modèle et les simulations numériques sont alors comparées sur la FIG. 7.17. Les valeurs des énergies (énergie du modèle avec accélération de porosité (7.65) notée w^{mod} et énergie des simulations numériques notée w^{sim}) sont relevées et comparées. L'écart relatif est peu important (voir le tableau ci-dessous).

	12 fissures	25 fissures	33 fissures	40 fissures
$\frac{w^{mod}-w^{sim}}{w^{sim}}$	-16 %	-8 %	-1 %	1 %

La valeur de δ_{lin} identifiée est très importante comparée à la valeur de δ_{lin} de Koplik et Needleman (1988) : ces auteurs ont obtenu un δ_{lin} de 7.7 à partir de simulations numériques sur une cellule cylindrique contenant une cavité sphérique. Cependant, cette valeur de δ_{lin} de 140 permet de retrouver la chute brutale de contrainte effective observée sur les simulations numériques avec modèle de zone cohésive. Cette chute brutale de la contrainte effective s'explique par le comportement fragile des propriétés des zones cohésives identifiées en 7.3.2.

Nous proposons dans ce travail une autre accélération de la porosité que celle exposée en (7.65) sous la forme :

$$f_e^* = f_{ec} e^{(\delta_{exp}(f_e - f_{ec}))}, \quad \delta_{exp} = \frac{\delta_{lin}}{f_{emax} - f_{ec}} \ln \left(\frac{f_{emax}}{f_{ec}} \right), \quad \delta_{lin} = 140, \quad f_{emax} = 0.2. \quad (7.67)$$

Les courbes contraintes-déformations obtenues par le modèle avec l'accélération de porosité (7.67) et les simulations numériques sont comparées sur la FIG. 7.18. La décroissance de Σ_{xx} donnée par le modèle semble plus proche des simulations numériques avec l'accélération de porosité (7.67) qu'avec l'accélération de porosité (7.65). Les valeurs des énergies (énergie du modèle avec accélération de porosité (7.67) notée w^{mod} et énergie des simulations numériques notée w^{sim}) sont relevées et comparées. L'écart relatif est peu important (voir le tableau ci-dessous).

	12 fissures	25 fissures	33 fissures	40 fissures
$\frac{w^{mod} - w^{sim}}{w^{sim}}$	6 %	4 %	8 %	8 %

Au final, le critère de coalescence (7.63) et l'accélération de porosité (7.67) sont retenus. La différence avec le modèle décrit dans Koplik et Needleman (1988) est double :

- dans le modèle de Koplik et Needleman (1988), le début de la coalescence est détecté par l'intermédiaire d'une porosité critique indépendante de l'endommagement initial du matériau ; ici, le critère de coalescence utilisé fait intervenir la variation relative du paramètre de densité de fissure et dépend de l'endommagement initial du matériau ;
- dans le modèle de Koplik et Needleman (1988), l'accélération de la porosité est donnée par une expression linéaire de f_e^* en fonction de f_e ; ici, une expression non linéaire (exponentielle) de f_e^* en fonction de f_e est utilisée.

7.3.5 Conclusion : prise en compte de la coalescence et de la rupture dans le modèle élastoplastique endommageable tridimensionnel pour le matériau d'étude

Le critère de coalescence et la description de la rupture présentés à la section 7.3.4 ont été identifiés pour du $l'UO_2$ à 1700 °C, à partir de simulations numériques bidimensionnelles utilisant une matrice de Von Mises (sans cavité intragranulaire). L'hypothèse principale de cette partie est de considérer que ces résultats sont valables pour enrichir le modèle élastoplastique endommageable **tridimensionnel** de la section 6 **et avec une matrice de Gurson** (présence de cavités intragranulaires). Au final, le critère de coalescence utilisé pour le modèle élastoplastique endommageable tridimensionnel s'écrit :

$$\frac{\alpha_c - \alpha_{c\ ini}}{\alpha_{c\ ini}} = 0.015, \quad (7.68)$$

où $\alpha_c = \frac{4}{3} \pi b_1^3 \frac{N_c}{|V|}$ est la densité de fissures en 3D. Cette valeur de 0.015 vient du fait que le critère obtenu en 7.3.4 s'écrit en fonction du rayon des fissures sous la forme :

$$\left(\frac{b_1}{b_{1\ ini}} \right)^2 \approx 1.01, \quad (7.69)$$

avec $b_{1\ ini}$ la valeur initiale de b_1 ; ce qui donne :

$$\left(\frac{b_1}{b_{1\ ini}} \right)^3 \approx 1.015 \quad (7.70)$$

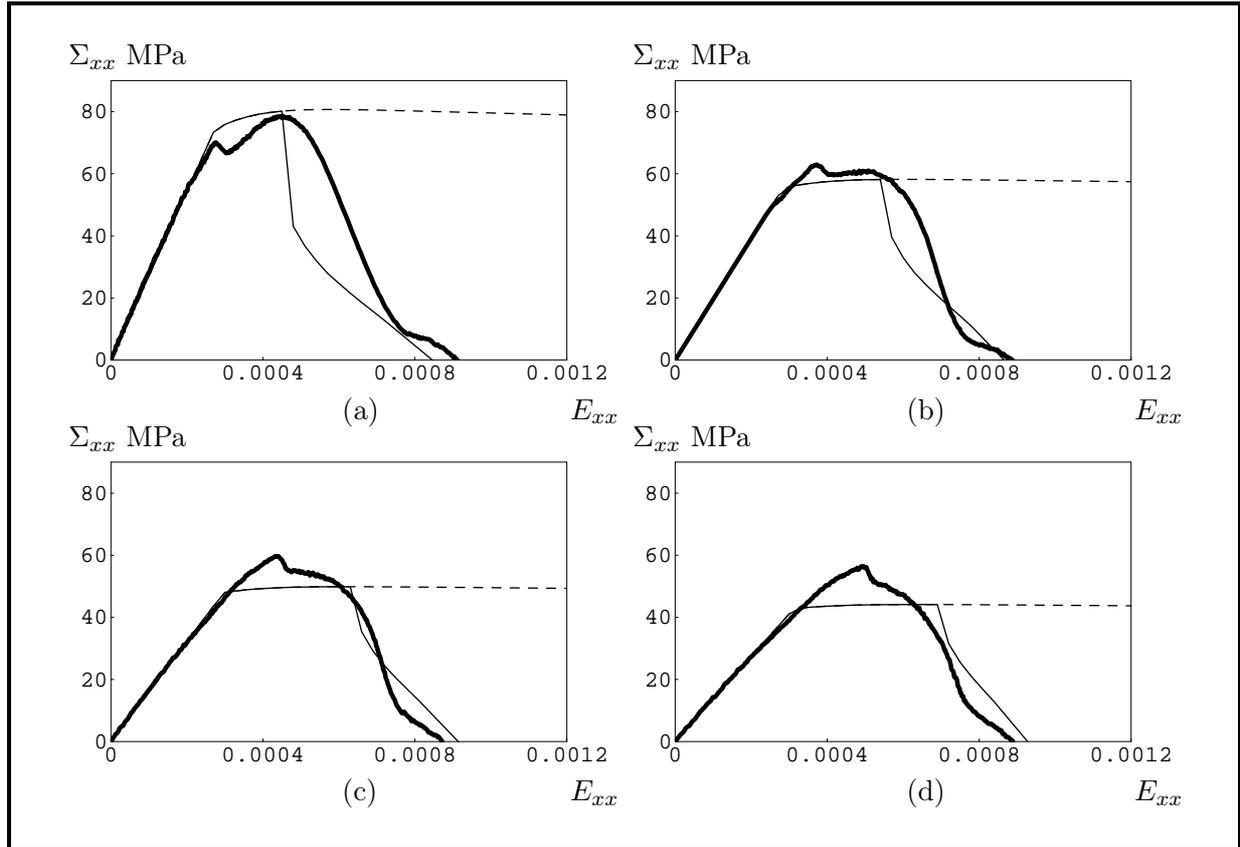


FIG. 7.17 – Simulations numériques de 7.3.3 (trait continu épais), modèle élastoplastique endommageable de 7.1 (trait discontinu) et modèle élastoplastique endommageable de 7.1 avec prise en compte de la coalescence et de la rupture (trait continu fin) par l'intermédiaire de l'accélération de la porosité (7.65). Chargement hydrostatique plan en taux de déformation effectif : $\dot{E}_{xx} = \dot{E}_{yy}$ imposé non nul et autres \dot{E}_{ij} nuls. Propriétés matériaux données en (7.56). Paramètres du modèle de zone cohésive donnés en (7.58). 25 grains. (a) 12 fissures, (b) 25 fissures, (c) 33 fissures, (d) 40 fissures. Maillage donné sur la FIG. 7.13 (première figure) et microstructures données en Annexe Q (première figure pour chaque densité de fissure). Préfissures de longueur $4.96 \mu\text{m}$ chacune environ (cellules de $50 \mu\text{m}$ de côté). Pour le modèle : $N = 4$, $\theta = 1$, rapport de forme initial $w = 0.1$, porosité initiale : (a) $f_e = 2 * 0.0093$, (b) $f_e = 2 * 0.0193$, (c) $f_e = 2 * 0.0255$, (d) $f_e = 2 * 0.0309$.

et conduit au critère 3D (7.68). Dès que le critère précédent est atteint par le modèle, la valeur de la porosité f_e correspondante est relevée et notée f_{ec} (porosité de début de coalescence). La contrainte effective est ensuite calculée à partir d'une porosité accélérée :

$$f_e^* = f_{ec} e^{(\delta_{exp}(f_e - f_{ec}))}, \quad \delta_{exp} = \frac{\delta_{lin}}{f_{emax} - f_{ec}} \ln \left(\frac{f_{emax}}{f_{ec}} \right), \quad \delta_{lin} = 140, \quad f_{emax} = 0.2. \quad (7.71)$$

Des exemples de courbes contrainte-déformation obtenues avec le modèle élastoplastique endommageable tridimensionnel complet pour l' UO_2 fortement irradié à $1700 \text{ }^\circ\text{C}$ sont donnés sur la FIG. 7.19. D'un point de vue général, ce modèle pour l' UO_2 conduit à des déformations à rupture faibles (de l'ordre de 0.1 % pour un chargement purement hydrostatique en taux de déformation). En ce sens, il s'agit d'un modèle relativement fragile. Cette fragilité est principalement due au mécanisme de coalescence/rupture intergranulaire. A contrario, la présence de cavités intragranulaires agit en faveur d'une augmentation de la ductilité du matériau, au sens d'une augmentation de la déformation

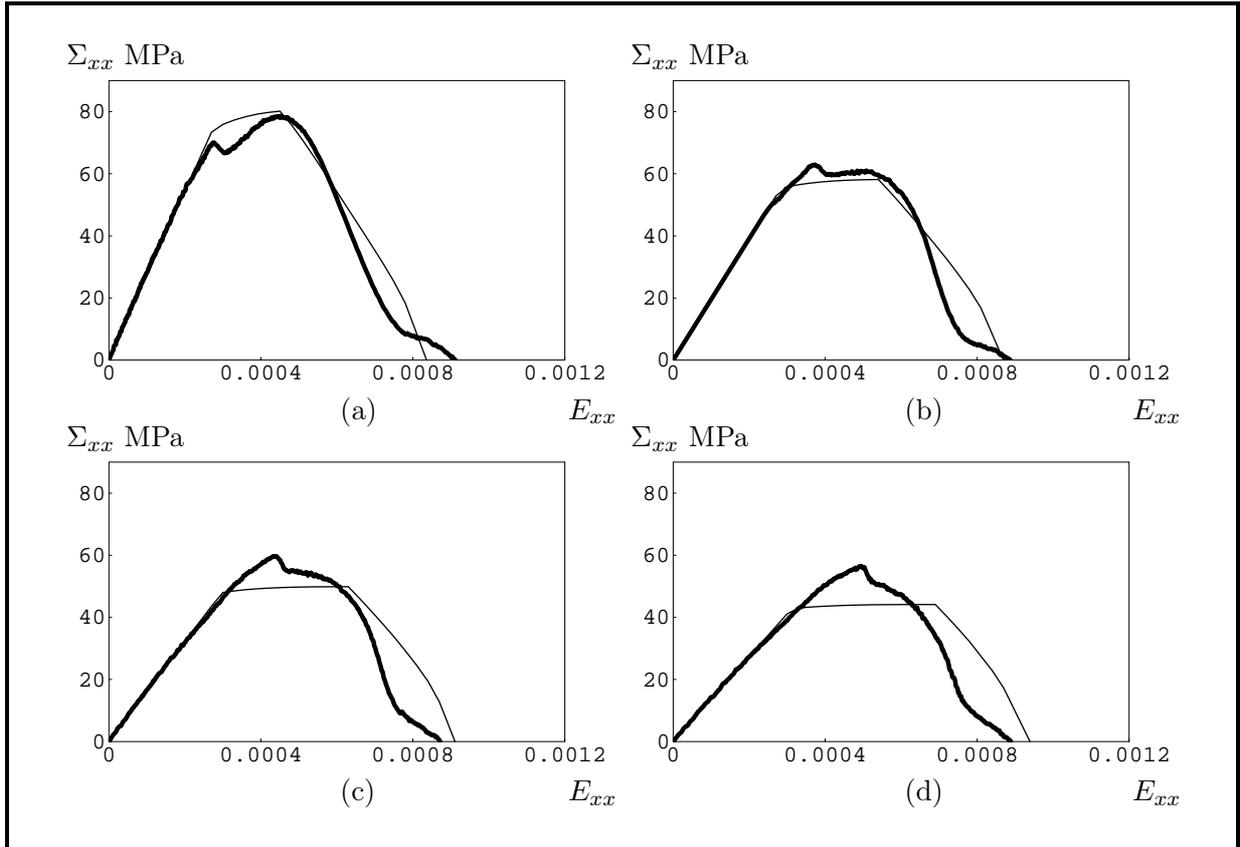


FIG. 7.18 – Simulations numériques de 7.3.3 (trait continu épais), modèle élastoplastique endommageable de 7.1 avec prise en compte de la coalescence et de la rupture (trait continu fin) par l'intermédiaire de l'accélération de la porosité (7.67). Chargement hydrostatique plan en taux de déformation effectif : $\dot{E}_{xx} = \dot{E}_{yy}$ imposé non nul et autres \dot{E}_{ij} nuls. Propriétés matériaux données en (7.56). Paramètres du modèle de zone cohésive donnés en (7.58). 25 grains. (a) 12 fissures, (b) 25 fissures, (c) 33 fissures, (d) 40 fissures. Maillage donné sur la FIG. 7.13 (première figure) et microstructures données en Annexe Q (première figure pour chaque densité de fissure). Préfissures de longueur $4.96 \mu\text{m}$ chacune environ (cellules de $50 \mu\text{m}$ de côté). Pour le modèle : $N = 4$, $\theta = 1$, rapport de forme initial $w = 0.1$, porosité initiale : (a) $f_e = 2 * 0.0093$, (b) $f_e = 2 * 0.0193$, (c) $f_e = 2 * 0.0255$, (d) $f_e = 2 * 0.0309$.

à rupture et d'une diminution de la contrainte d'écoulement macroscopique. Par ailleurs, même si la déformation à rupture est très faible, la FIG. 7.20 montre avec des décharges que l'endommagement progresse peu jusqu'à la rupture totale dans le sens où la part de la déformation plastique dans la déformation totale reste importante ; cela montre que le matériau est de type plastique.

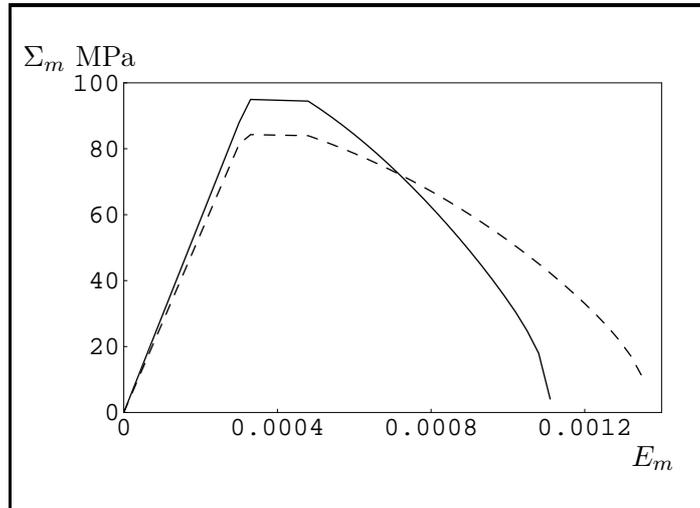


FIG. 7.19 – Modèle d'endommagement tridimensionnel complet. Chargement hydrostatique en \dot{E}_m . $f_e = 0.01$, $w = 0.1$, $p_b = p_e = 0$, q_1 et q_3 de la forme (3.15) et (3.16), $f_b = 0.03$ (trait plein), $f_b = 0.05$ (trait discontinu). Plus f_b est grand (i.e. plus la matrice à la deuxième échelle est compressible) et plus la déformation à rupture obtenue est importante.

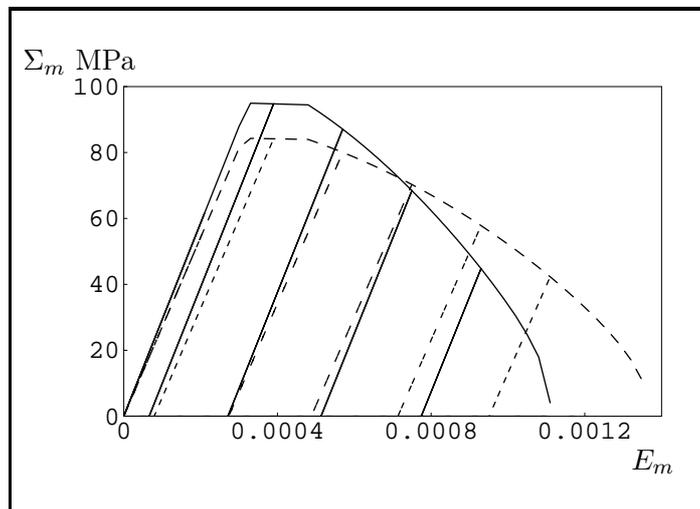


FIG. 7.20 – Modèle d'endommagement tridimensionnel complet. Chargement hydrostatique en \dot{E}_m . $f_e = 0.01$, $w = 0.1$, $p_b = p_e = 0$, q_1 et q_3 de la forme (3.15) et (3.16), $f_b = 0.03$ (trait plein), $f_b = 0.05$ (trait discontinu). Les décharges montrent la part importante de la déformation plastique dans la déformation totale.

Chapitre 8

Conclusion et perspectives

8.1 Bilan du travail réalisé

Ce travail a visé à la construction d'un modèle élastoplastique endommageable pour une céramique poreuse à deux populations de pores saturés : le combustible nucléaire d'oxyde d'uranium UO_2 fortement irradié et à haute température. Une étude bibliographique a permis d'identifier sa microstructure et les coefficients matériaux associés à son comportement élastoplastique avant irradiation (i.e. hors prise en compte de cette microstructure). La démarche suivie a consisté en une approche multi-échelle basée sur l'hypothèse de séparation des échelles entre les deux populations de cavités et sur celle de l'isotropie macroscopique. Le comportement effectif du matériau a ainsi été obtenu en deux changements d'échelle :

- (étape 1) établissement du comportement effectif du milieu à la première échelle (échelle des bulles intragranulaires), constitué d'une matrice plastique parfaite respectant un critère de Von Mises et contenant des pores sphériques distribués aléatoirement ;
- (étape 2) établissement du comportement effectif du milieu à la deuxième échelle (échelle des bulles intergranulaires), constitué d'une matrice compressible possédant le comportement et les propriétés du milieu effectif de la première échelle et contenant des cavités ellipsoïdales aplaties distribuées et orientées aléatoirement (orientations équiprobables).

Le modèle élastoplastique endommageable proposé traite séparément de l'élasticité, de la surface de plasticité et de l'évolution des paramètres internes du modèle avec le chargement. La prise en compte de pressions différentes dans chaque population de cavités a été effectuée pour les trois régimes élasticité-plasticité-endommagement. Au sens strict, le modèle développé est un modèle d'endommagement ductile qui ne tient compte, en premier lieu, que de la croissance des cavités ; la coalescence des cavités de plus large taille est prise en compte a posteriori par une accélération de la porosité de type Gurson-Tvergaard-Needleman identifiée sur des simulations numériques lorsque cette population de cavités est considérée comme un ensemble de fissures.

Les principaux résultats de ce travail sont d'ordre théorique. Ils contribuent pour l'essentiel à la définition de nouveaux modèles en poroélasticité à deux échelles et en poroplasticité à une et deux échelles.

- **La poroélasticité à deux échelles.** Les méthodes classiques en poroélasticité (voir par exemple Dormieux et al. (2002)) ont été étendues au cas de deux changements d'échelles avec prise en compte d'une pression saturante différente à chaque échelle. Il a été montré que le comportement poroélastique effectif faisait alors intervenir une contrainte macroscopique de type Terzaghi et dérivait d'un potentiel quadratique en déformation et en pression apparente, cette pression apparente étant obtenue comme une différence entre la pression des pores de la

seconde échelle et de celle des pores de la première échelle pondérée par le tenseur de Biot de la première échelle. Par ailleurs, ce potentiel quadratique fait intervenir des tenseurs et des modules de Biot relatifs à chaque changement d'échelle. Le résultat obtenu est identique à celui de Dormieux et al. (2006) dont le travail a été publié simultanément (voir Monerie et al. (2006)). A la première échelle, les pores sphériques distribués aléatoirement ont été pris en compte à l'aide de la borne supérieure de Hashin et Shtrikman (1963). A la seconde échelle, les pores ellipsoïdaux aplatis distribués et orientés aléatoirement ont été pris en compte à l'aide de la borne supérieure de Ponte Castañeda et Willis (1995) avec prise de moyenne sur les orientations.

► **La poroplasticité à une échelle.** Le cas d'une seule population de cavités sphériques ou ellipsoïdales aplaties dans une matrice de Von Mises a été traité en détails.

▷ **Cavités sphériques distribuées aléatoirement.**

- Proposition d'un critère GTN avec des coefficients q_1 et q_3 (voir les relations (3.15) et (3.16)) permettant d'être compatible avec les simulations numériques de Koplik et Needleman (1988), Chaboche et al. (2001) et Bilger (2003) sous chargement purement hydrostatique, et avec la borne supérieure de Ponte Castañeda (1991) sous chargement purement déviatorique.

▷ **Cavités ellipsoïdales aplaties et alignées — Ellipsoïde aplati creux.**

- Il a été montré que le champ test proposé par Gologanu et al. (1994) dans le cadre de l'étude de l'ellipsoïde creux à matrice de Von Mises correspondait au champ élastique de Milton (2002) dans le cas d'une déformation hydrostatique de la cavité ellipsoïdale.
- Une nouvelle borne supérieure et une nouvelle estimation analytique ont été proposées pour le cas de l'ellipsoïde creux. Ces deux résultats s'appuient sur une approche de type Gurson à partir d'un champ de vitesse cinématiquement admissible avec un taux de déformation quelconque. Ils permettent, d'une part, d'étendre le résultat initial de Gologanu et al. (1994) à un champ autre qu'axisymétrique, et d'autre part, d'envisager un assemblage d'ellipsoïdes orientés aléatoirement. Une borne supérieure a aussi été déterminée à partir d'un champ inspiré de l'analyse de Gărăjeu (1995). Cette dernière se révèle moins pertinente que la précédente.

▷ **Cavités ellipsoïdales aplaties distribuées et orientées aléatoirement.**

- Pour un assemblage de cavités ellipsoïdales aplaties distribuées et orientées aléatoirement, une borne supérieure et une estimation analytique ont été obtenues par moyenne sur les orientations équiprobables du cas des cavités ellipsoïdales aplaties alignées.
- La borne et l'estimation proposées ont été confrontées à des simulations numériques par éléments finis permettant d'approcher la borne inférieure pour le point purement hydrostatique.

► **La poroplasticité à deux échelles.** Pour le cas à deux échelles, l'étude a porté sur une population de cavités sphériques ou ellipsoïdales aplaties dans une matrice compressible obéissant au critère obtenu à la première échelle dans le cas des cavités sphériques (le critère de Gurson (1977) modifié avec les facteurs q_1 et q_3 spécifiques). Le cas des ellipsoïdes à la première échelle n'a pas été retenu pour le comportement de la matrice compressible compte tenu du matériau considéré. Les résultats obtenus à la première échelle pour les ellipsoïdes ont constitué un cadre essentiel aux développements analytiques de la deuxième échelle.

▷ **Cavités sphériques distribuées aléatoirement.**

- Le cas de la sphère creuse à matrice de type Gurson a été étudié. Une borne supérieure a été proposée en utilisant une approche dite ici "de type Gurson" : principe variationnel classique avec un champ de vitesse correspondant à celui de Gurson augmenté d'une partie compressible. Cette borne supérieure étend au cas d'un taux de triaxialité quelconque les résultats antérieurs de Perrin (1992) obtenus pour des chargements purement

hydrostatiques (voir aussi Perrin et Leblond (1990), Leblond (2003)).

- Une seconde borne supérieure a été proposée sur les bases de l’approche variationnelle de Ponte Castañeda (1991) (équivalente à la méthode sécante modifiée, voir Suquet (1995) et Ponte Castañeda et Suquet (1998)). Cette borne supérieure issue de la méthode sécante modifiée se révèle plus pertinente (resp. moins pertinente) que la borne supérieure issue de l’approche de type Gurson dans le cas d’un chargement purement déviatorique (resp. purement hydrostatique).
- Deux estimations ont été obtenues à partir des deux bornes supérieures précédentes : une estimation analytique à partir de l’approche de type Gurson, et une estimation non analytique à partir de la méthode sécante modifiée en utilisant un composite linéaire de comparaison à N phases, ainsi que l’estimation de Hervé et Zaoui (1993). La pertinence de ces estimations a été soulignée par des comparaisons avec des simulations numériques par éléments finis, avec les deux bornes supérieures précédentes et avec le point hydrostatique de Perrin (1992). L’estimation analytique de type Gurson se révèle extrêmement fiable et l’estimation non analytique de type N phases se révèle très pertinente dès six phases environ.
- ▷ **Cavités ellipsoïdales aplaties et alignées — Ellipsoïde aplati creux.**
 - Une borne supérieure a été proposée en utilisant l’approche de type Gurson : le champ de vitesse retenu correspondant maintenant à l’extension non axisymétrique du champ de Gologanu et al. (1994) proposé à la première échelle et augmenté d’une partie compressible.
- ▷ **Cavités ellipsoïdales aplaties distribuées et orientées aléatoirement.**
 - De nouveau, une borne supérieure a été proposée à partir de l’approche de type Gurson, ainsi qu’une estimation analytique. Cette dernière constitue un modèle particulièrement efficace pour les matériaux poreux drainés à deux échelles et en particulier pour les matériaux poreux fissurés : à notre connaissance, il s’agit du modèle le plus abouti dans ce domaine. Cependant, le présent travail n’a pas permis de la rendre compatible avec une prise en compte de pressions dans les pores.
 - La méthode sécante modifiée à N phases a conduit quant à elle à une estimation basée sur la notion de "porosités équivalentes" qui permet de traiter le cas des cavités ellipsoïdales à partir du cas des cavités sphériques. Cette estimation, fiable pour un faible nombre de phases, présente l’avantage de permettre une prise en compte de pressions dans les pores aux deux échelles.
 - Des simulations numériques FFT (Fast Fourier Transform, Michel et al. (2000)) ont été réalisées afin de valider le modèle retenu en poroplasticité à deux échelles, à savoir la méthode sécante modifiée avec composite linéaire de comparaison à N phases. Pour cela, le critère de Gurson est écrit en théorie élastoplastique (ou de déformation). Ces simulations ont montré l’importance de la localisation de la déformation dans le cas bi-dimensionnel sous chargement purement hydrostatique en contrainte. L’utilisation d’une porosité modifiée, à la manière d’un critère GTN, a permis d’améliorer l’accord entre les prédictions du modèle et des simulations numériques.
 - De manière plus anecdotique dans ce travail, une borne supérieure et une estimation ont été obtenues dans le cas d’une matrice compressible obéissant à un critère elliptique.
- ▶ **La prise en compte des pressions.**
 - La prise en compte des pressions dans les pores aux deux échelles a été effectuée directement dans le cas des cavités ellipsoïdales aplaties et orientées aléatoirement pour la deuxième échelle. Deux bornes supérieures utilisant la méthode sécante modifiée à N phases et l’approche de type Gurson ont été obtenues. Pour cela, l’approche variationnelle de Ponte Castañeda (1991) a été réécrite afin de prendre en compte les termes dus aux pressions dans

les cavités. Des termes analogues à des termes de Biot ont été déterminés pour l'estimation du composite linéaire de comparaison à N phases. Le point de Leblond (2003) (sphère creuse avec chargement hydrostatique homogène en contrainte sur sa face externe et matrice de Gurson) a été étendu au cas des cavités saturées et le modèle a été comparé avec ce point hydrostatique. L'effet mécanique des pressions a été détaillé : lorsque les pressions à la première échelle (p_b) et à la deuxième échelle (p_e) sont différentes, une translation du critère selon l'axe hydrostatique et une réduction du critère selon, à la fois, la contrainte équivalente et la contrainte hydrostatique sont obtenues. Lorsque ces pressions sont égales ($p_e = p_b = \bar{p}$), la surface de plasticité du cas saturé est une pure translation de \bar{p} selon l'axe hydrostatique de la surface de plasticité du cas drainé.

- La borne supérieure et l'estimation développées à partir d'un critère elliptique pour la matrice ont été données à titre indicatif. Elles ne permettent cependant pas d'obtenir un estimation satisfaisante du critère de plasticité dans le cas des cavités saturées.

Un **modèle poroélastoplastique endommageable** a ensuite été établi sur la base : (1) du modèle de poroélasticité deux échelles proposé, (2) du modèle de poroplasticité deux échelles basé sur la méthode sécante modifiée avec un composite linéaire de comparaison à N phases, (3) des lois d'évolution associées. Ces lois d'évolution ont été obtenues sous réserve de quelques hypothèses concernant notamment l'évolution du facteur d'aspect de la population de pores ellipsoïdaux.

Ce modèle a été enrichi a posteriori pour prendre en compte la **coalescence des pores ellipsoïdaux** par l'intermédiaire d'une accélération de leur fraction volumique inspirée de Koplik et Needleman (1988). Cette accélération est identifiée à partir de simulations numériques bidimensionnelles. Ce point a, en particulier, nécessité d'écrire le modèle élastoplastique endommageable en déformations planes généralisées (cavités cylindriques à bases elliptiques dans le plan transverse), ce qui a aussi permis de le comparer au critère de Gurson bidimensionnel (dans le cas d'une matrice de Von Mises) et à un point de chargement exact (dans le cas d'une matrice de Gurson). Les simulations numériques utilisées reposent sur une approche de type éléments finis cohésifs-volumiques avec modèles de zone cohésive et sont conduites sur des cellules périodiques de type Voronoï. Ces calculs ont été réalisés pour des coefficients matériaux correspondant à l' UO_2 à haute température, des pores intergranulaires sous forme de fissure, sans porosités intragranulaires, sans pression et sous chargement hydrostatique plan. Il a été supposé que l'identification de la coalescence résultant de cette comparaison modèle-simulation devrait rester valable en situation tridimensionnelle, en présence de pores intragranulaires, de pressions aux deux échelles et pour des chargements symptomatiques de ceux rencontrés en situations accidentelles. L'identification retenue propose une croissance exponentielle de la porosité initiale aux joints de grain. Il en a résulté un modèle d'endommagement ductile complet pour l'oxyde d'uranium fortement irradié et à haute température.

8.2 Perspectives

Sur le plan théorique, de nombreuses pistes d'amélioration-extension de ce travail peuvent être envisagées.

- ▷ Extension de l'estimation analytique obtenue avec l'approche de type Gurson au cas saturé.
- ▷ Ecriture des bornes supérieures et des estimations présentées dans ce travail pour le cas des cavités ellipsoïdales allongées.
- ▷ Simulations numériques par FFT dans le cas tridimensionnel, toujours avec matrice de Gur-

son et cavités ellipsoïdales, afin d'étudier l'importance de la localisation de la déformation.

- ▷ Etablir un critère de coalescence non phénoménologique (on peut penser à des arguments analogues à ceux de Thomason (1985)).
- ▷ Etendre ce travail au cas d'une matrice de Drucker-Prager.

Sur le plan applicatif, ce travail ouvre de nombreuses perspectives dans la compréhension et la prédiction du comportement de l'oxyde d'uranium fortement irradié, mais aussi dans d'autres domaines tels que la mécanique des sols ou des roches (milieux poreux fissurés saturés ou drainés).

Concernant le combustible nucléaire, on peut déjà énoncer quelques perspectives applicatives :

- ▷ Dès l'instant où la coalescence des bulles intergranulaires est prédite par le modèle, il semble judicieux d'étudier la perméabilité effective du milieu fissuré en utilisant une approche multi-échelle. Dans un premier temps, l'analyse multi-échelle de Dormieux et Kondo (2004) pourrait être utilisée et cette étude pourrait servir de point de départ pour la modélisation de la perméabilité effective du matériau en fonction de sa microstructure : vers une prise en compte de la "tortuosité" des chemins d'écoulement le long des joints de grains.
- ▷ S'appuyer sur le modèle pour modéliser plus finement les différences de comportement observées en situations accidentelles dans différentes zones des pastilles de combustible (à cœur, à mi-rayon, en périphérie) afin d'adapter les modélisations de type "no-tension material" utilisées dans les codes actuels. Le modèle pourrait servir, dans un premier temps, à prédire à partir de quelles valeurs de porosités f_b et f_e et à partir de quelles valeurs des pressions p_b et p_e le matériau n'a plus de résistance en traction (plus précisément $\Sigma_m \leq 0$ quel que soit \vec{E}).
- ▷ Valider les hypothèses majeures des lois de croissance-coalescence du modèle, en étendant par exemple les simulations numériques sur cellules de Voronoï périodiques au cas tridimensionnel et avec prise en compte d'une matrice de Gurson drainée ou saturée à l'échelle du comportement des grains.

Quatrième partie

Annexes techniques

Annexe A

Problème de l'ellipsoïde creux : équivalence entre le champ élastique de Milton (2002) et le champ axisymétrique de Gologanu et al. (1994)

Le problème de l'ellipsoïde creux traité en 3.2.1 est repris. Un volume Ω ellipsoïdal aplati ("oblate") contenant en son centre une cavité ellipsoïdale oblate (domaine ω) de mêmes axes que le domaine Ω est étudié. Les deux ellipsoïdes Ω et ω sont pris confocaux (mêmes foyers). La géométrie est schématisée sur la FIG. 3.6. Des conditions de taux de déformation homogène au bord sont appliquées. Les demi-axes de ω (respectivement Ω) sont notés a_1 et b_1 (respectivement a_2 et b_2) comme illustré sur la FIG. 3.6. La demi-distance focale est notée c et vaut :

$$c = \sqrt{b_1^2 - a_1^2} = \sqrt{b_2^2 - a_2^2}. \quad (\text{A.1})$$

Les coordonnées cartésiennes (x, y, z) (base $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$) et cylindriques (ρ, ϕ, z) (base $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$) sont utilisées. L'axe des z est l'axe de révolution des ellipsoïdes Ω et ω . Les notations suivantes sont utilisées :

$$\begin{aligned} f &= (a_1 b_1^2)/(a_2 b_2^2) \text{ (porosité)}, \\ a &= c \sinh \lambda, \quad b = c \cosh \lambda \\ e_2 &= c/b_2, \quad e_1 = c/b_1, \text{ (excentricités)}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Les surfaces à λ constants sont des ellipsoïdes confocaux dont les foyers sont situés sur un cercle (défini par $\rho = c, z = 0$) et dont les demi-axes mineurs et majeurs valent respectivement $a = c \sinh \lambda$ et $b = c \cosh \lambda$. Le rapport $e = c/b$ est défini. La matrice (domaine $\Omega - \omega$) est délimitée par les surfaces à λ_1 et λ_2 constants.

Milton (2002) donne le champ solution correspondant à une déformation hydrostatique de la cavité et à une déformation uniforme \mathbf{D} sur la surface extérieure (notée $\partial\Omega$) dans le cas où la matrice est élastique linéaire (isotrope) et incompressible. La déformation \mathbf{D} s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= D_{xx}(\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y) + D_{zz}\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z, \\ D_{xx} &= -\frac{1}{3} + \alpha(e_1) - f\alpha(e_2), \\ D_{zz} &= -2D_{xx} - f, \\ \alpha(e) &= -\frac{1-e^2}{2e^2} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{2e^3} \arcsin(e). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Théorème Cette solution coïncide avec le champ \mathbf{v}^{Go} donné en (3.19) lorsque $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{D}$.

Démonstration Le champ de déplacement proposé par Milton (2002) s'écrit, dans la base des coordonnées cartésiennes :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x(\mathbf{x}) = -\frac{x}{3} + \frac{xa_1(c^2 + a_1^2)}{2} \int_{a_1^2}^{a^2} \frac{d\rho}{(c^2 + \rho)^2 \sqrt{\rho}} \\ u_y(\mathbf{x}) = -\frac{y}{3} + \frac{ya_1(c^2 + a_1^2)}{2} \int_{a_1^2}^{a^2} \frac{d\rho}{(c^2 + \rho)^2 \sqrt{\rho}} \\ u_z(\mathbf{x}) = -\frac{z}{3} + \frac{za_1(c^2 + a_1^2)}{2} \int_{a_1^2}^{a^2} \frac{d\rho}{(c^2 + \rho) \sqrt{\rho}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Après intégration :

$$\begin{aligned} u_x(\mathbf{x}) &= x \left(-\frac{1}{3} - \frac{a_1^2}{2c^2} - \frac{a_1(c^2 + a_1^2)}{2c^3} \arctan\left(\frac{a_1}{c}\right) \right) + x \frac{a_1(c^2 + a_1^2)}{2} \left(\frac{a}{c^2(c^2 + a^2)} + \frac{1}{c^3} \arctan\left(\frac{a}{c}\right) \right) \\ &= x \left(-\frac{1}{3} - \frac{a_1^2}{2c^2} - \frac{a_1(c^2 + a_1^2)}{2c^3} \arctan\left(\frac{a_1}{c}\right) \right) - x \mathfrak{C} \left(\frac{ac}{c^2 + a^2} + \arctan\left(\frac{a}{c}\right) \right) \\ &= x \left(-\frac{1}{3} - \frac{a_1^2}{2c^2} - \frac{a_1(c^2 + a_1^2)}{2c^3} \arctan\left(\frac{a_1}{c}\right) \right) - x \mathfrak{C} \left(\frac{\pi}{2} - R(\lambda) \right) \\ &= \mathfrak{C}xR(\lambda) - \frac{x}{2}\mathfrak{D}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

De la même façon :

$$u_y(\mathbf{x}) = \mathfrak{C}yR(\lambda) - \frac{y}{2}\mathfrak{D}. \quad (\text{A.6})$$

Où il est posé :

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} &= -\frac{a_1(c^2 + a_1^2)}{2c^3} \\ \mathfrak{D} &= \mathfrak{C}\pi + \frac{2}{3} + \frac{a_1^2}{c^2} + \frac{a_1(c^2 + a_1^2)}{c^3} \arctan\left(\frac{a_1}{c}\right) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{a_1^2}{c^2} - \frac{a_1 b_1^2}{c^3} \arcsin\left(\frac{c}{b_1}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} u_z(\mathbf{x}) &= z \left(-\frac{1}{3} + a_1(c^2 + a_1^2) \left(\frac{1}{c^2 a_1} + \frac{1}{c^3} \arctan\left(\frac{a_1}{c}\right) \right) \right) + z \left(-\frac{a_1(c^2 + a_1^2)}{c^2 a} - \frac{a_1(c^2 + a_1^2)}{c^3} \arctan\left(\frac{a}{c}\right) \right) \\ &= z \left(-\frac{1}{3} + a_1(c^2 + a_1^2) \left(\frac{1}{c^2 a_1} + \frac{1}{c^3} \arctan\left(\frac{a_1}{c}\right) \right) \right) + z \mathfrak{C} \left(\frac{2c}{a} + 2 \arctan\left(\frac{a}{c}\right) \right) \\ &= z \left(-\frac{1}{3} + a_1(c^2 + a_1^2) \left(\frac{1}{c^2 a_1} + \frac{1}{c^3} \arctan\left(\frac{a_1}{c}\right) \right) \right) + z \mathfrak{C} (Z(\lambda) + \pi) \\ &= \mathfrak{C}zZ(\lambda) + z \left(\mathfrak{C}\pi - \frac{1}{3} + \frac{a_1(c^2 + a_1^2)}{c^2 a_1} + \frac{a_1(c^2 + a_1^2)}{c^3} \arctan\left(\frac{a_1}{c}\right) \right) \\ &= \mathfrak{C}zZ(\lambda) + z\mathfrak{D}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Les quantités $R(\lambda)$ et $Z(\lambda)$ sont définies en (3.19).

Ainsi, le champ \mathbf{u} peut s'écrire sous la forme : $\mathfrak{C}\mathbf{v}^{(A)} + \mathfrak{D}\mathbf{v}^{(B)}$, avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(A)} &= R(\lambda)x\mathbf{e}_x + R(\lambda)y\mathbf{e}_y + zZ(\lambda)\mathbf{e}_z, \\ \mathbf{v}^{(B)} &= -\frac{x}{2}\mathbf{e}_x - \frac{y}{2}\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Dans la base des coordonnées cylindriques, les composantes de $\mathbf{v}^{(A)}$ sont :

$$v_\rho^{(A)} = R(\lambda)\rho, \quad v_\theta^{(A)} = 0, \quad v_z^{(A)} = Z(\lambda)z. \quad (\text{A.10})$$

Les champs $\mathbf{v}^{(A)}$ et $\mathbf{v}^{(B)}$ sont les champs utilisés par Gologanu et al. (1994) (voir équation (3.19)). D'après Milton (2002), ce champ \mathbf{u} donne une déformation \mathbf{D} uniforme sur le bord $\partial\Omega$ et dont les composantes non nulles sont :

$$\begin{aligned} D_{xx} &= D_{yy} = -\frac{1}{3} + d_2(e_1) - fd_2(e_2), & D_{zz} &= -\frac{1}{3} + d_1(e_1) - fd_1(e_2) \\ d_1(e) &= -2\alpha(e) + 1, & d_2(e) &= \alpha(e). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

D'où :

$$D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{3} + \alpha(e_1) - f\alpha(e_2), \quad D_{zz} = \frac{2}{3} - f - 2\alpha(e_1) + 2f\alpha(e_2). \quad (\text{A.12})$$

Les quantités \mathfrak{C} et \mathfrak{D} s'écrivent alors, après quelques calculs :

$$\mathfrak{C} = \frac{a_2 b_2^2}{2c^3} \text{Tr}(\mathbf{D}), \quad \mathfrak{D} = D_{zz} - \text{Tr}(\mathbf{D}) \left(\frac{b_2^2}{c^2} - \frac{a_2 b_2^2}{c^3} \arcsin \left(\frac{c}{b_2} \right) \right). \quad (\text{A.13})$$

Or, d'après (3.19) et (3.20), les coefficients \mathcal{A} et \mathcal{B} utilisés dans le champ de Gologanu et al. (1994) s'expriment sous la forme :

$$\mathcal{A} = \frac{a_2 b_2^2}{2c^3} \text{Tr}(\dot{\mathbf{E}}), \quad \mathcal{B} = \dot{E}_{zz} - \text{Tr}(\dot{\mathbf{E}}) \left(\frac{b_2^2}{c^2} - \frac{a_2 b_2^2}{c^3} \arcsin \left(\frac{c}{b_2} \right) \right). \quad (\text{A.14})$$

Cela achève la démonstration.

Annexe B

Nouvelle borne supérieure pour un matériau poreux à matrice rigide plastique parfaite et à cavités aplaties alignées

Le problème de l'ellipsoïde creux traité en 3.2.1 est repris. Un volume Ω ellipsoïdal aplati ("oblate") contenant en son centre une cavité ellipsoïdale oblate (domaine ω) de mêmes axes que le domaine Ω est étudié. Les deux ellipsoïdes Ω et ω sont pris confocaux (mêmes foyers). La géométrie est schématisée sur la FIG. 3.6. La matrice (domaine $\Omega - \omega$) est supposée rigide plastique parfaite de Von Mises (contrainte limite d'écoulement en traction σ_0). Des conditions de taux de déformation homogène au bord (noté $\dot{\mathbf{E}}$) sont appliquées. Les demi-axes de ω (respectivement Ω) sont notés a_1 et b_1 (respectivement a_2 et b_2) comme illustré sur la FIG. 3.6. La demi-distance focale est notée c et vaut :

$$c = \sqrt{b_1^2 - a_1^2} = \sqrt{b_2^2 - a_2^2}. \quad (\text{B.1})$$

Les coordonnées cartésiennes (x, y, z) (base $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$), cylindriques (ρ, ϕ, z) (base $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$) et elliptiques (λ, β, ϕ) (base $(\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\phi)$) sont utilisées. L'axe des z est l'axe de révolution des ellipsoïdes Ω et ω . Les notations suivantes sont utilisées :

$$\begin{aligned} \rho &= c \cosh \lambda \sin \beta, & \phi &= \phi, & z &= c \sinh \lambda \cos \beta, \\ \lambda &\in [0, +\infty[, & \beta &\in [0, \pi], & \phi &\in [0, 2\pi], \\ f &= (a_1 b_1^2) / (a_2 b_2^2) \text{ (porosité)}, \\ a &= c \sinh \lambda, & b &= c \cosh \lambda \\ e_2 &= c/b_2, & e_1 &= c/b_1, \text{ (excentricités)}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Les surfaces à λ constants sont des ellipsoïdes confocaux dont les foyers sont situés sur un cercle (défini par $\rho = c, z = 0$) et dont les demi-axes mineurs et majeurs valent respectivement $a = c \sinh \lambda$ et $b = c \cosh \lambda$. Le rapport $e = c/b$ est défini. La matrice (domaine $\Omega - \omega$) est délimitée par les surfaces à λ_1 et λ_2 constants.

Le champ de vitesse $\dot{\mathbf{v}}$ choisi ici est donné par les équations (3.29), (3.30) et (3.31). Il conduit à la majoration suivante (voir 3.2.2) :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \sigma_0 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{J(\lambda)} \sqrt{\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{\beta=\pi} \varepsilon_{eq}^2(\mathbf{x}) J_{\lambda\beta\phi} d\beta d\phi d\lambda}, \quad (\text{B.3})$$

avec $J(\lambda) = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{\pi} J_{\lambda\beta\phi} d\beta d\phi = \frac{4}{3} \frac{\pi b(2a^2+b^2)}{|\Omega|}$. Le but de cette annexe est de calculer le terme $\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{\pi} \dot{\varepsilon}_{eq}^2(\mathbf{x}) J_{\lambda\beta\phi} d\beta d\phi$.
Le terme $\dot{\varepsilon}_{eq}^2(\mathbf{x})$ s'écrit ici :

$$\dot{\varepsilon}_{eq}^2(\mathbf{x}) = (\dot{\varepsilon}_{eq}^{Go})^2 + (\dot{E}_{eq}^{NA})^2 + \frac{4}{3} \dot{\varepsilon}^{Go} : \dot{\mathbf{E}}^{NA}, \quad (\text{B.4})$$

où $\dot{\varepsilon}^{Go} = \varepsilon(\dot{\mathbf{v}}^{Go})$. D'après Gologanu et al. (1994), le terme $(\dot{\varepsilon}_{eq}^{Go})^2$ s'écrit :

$$\begin{aligned} (\dot{\varepsilon}_{eq}^{Go})^2 = & \frac{2A^2}{3} \left(2R^2 + Z^2 + \frac{2R+Z}{D} (2b^2 R \cos^2 \beta + (a^2 \sin^2 \beta - b^2 \cos^2 \beta) Z) \right) + \\ & + 2AB \left(Z - \frac{b^2 \cos^2 \beta}{D} (2R + Z) \right) + B^2, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

avec :

$$\tilde{D} = a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta. \quad (\text{B.6})$$

Le terme $(\dot{E}_{eq}^{NA})^2$ vaut :

$$(\dot{E}_{eq}^{NA})^2 = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4} (\dot{E}_{xx} - \dot{E}_{yy})^2 + \dot{E}_{yz}^2 + \dot{E}_{xz}^2 + \dot{E}_{xy}^2 \right). \quad (\text{B.7})$$

et le terme croisé de (B.4) :

$$\dot{\varepsilon}^{Go} : \dot{\mathbf{E}}^{NA} = \mathcal{A} \dot{\varepsilon}^{(A)} : \dot{E}^{NA} + \mathcal{B} \dot{\varepsilon}^{(B)} : \dot{E}^{NA} = \mathcal{A} \dot{\varepsilon}^{(A)} : \dot{E}^{NA}, \quad (\text{B.8})$$

où : $\dot{\varepsilon}^{(A)} = \varepsilon(\mathbf{v}^{(A)})$ et $\dot{\varepsilon}^{(B)} = \varepsilon(\mathbf{v}^{(B)})$ (les champs $\mathbf{v}^{(A)}$ et $\mathbf{v}^{(B)}$ sont définis en (3.19)). Il est aisé de vérifier que le terme $\dot{\varepsilon}^{(B)} : \dot{E}^{NA}$ s'annule. De plus, $\dot{\varepsilon}^{(A)}$ est exprimé par Gologanu et al. (1994) dans la base des coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) :

- $\dot{\varepsilon}_{\rho\rho}^{(A)} = R(\lambda) + \frac{abR'(\lambda)}{D} \sin^2 \beta$
- $\dot{\varepsilon}_{\phi\phi}^{(A)} = R(\lambda)$
- $\dot{\varepsilon}_{zz}^{(A)} = Z(\lambda) + \frac{abZ'(\lambda) \cos^2 \beta}{D}$
- $\dot{\varepsilon}_{\rho\phi}^{(A)} = 0$
- $\dot{\varepsilon}_{\rho z}^{(A)} = \frac{b^2 R'(\lambda) + a^2 Z'(\lambda)}{2D} \cos \beta \sin \beta$
- $\dot{\varepsilon}_{\phi z}^{(A)} = 0$.

Le tenseur $\dot{\mathbf{E}}^{NA}$ s'exprime dans la base des coordonnées cylindriques :

- $\dot{E}_{\rho\rho}^{NA} = \frac{\dot{E}_{xx} - \dot{E}_{yy}}{2} (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) + 2\dot{E}_{xy} \cos \phi \sin \phi$
- $\dot{E}_{\phi\phi}^{NA} = \frac{\dot{E}_{xx} - \dot{E}_{yy}}{2} (-\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) - 2\dot{E}_{xy} \cos \phi \sin \phi$
- $\dot{E}_{zz}^{NA} = 0$
- $\dot{E}_{\rho\phi}^{NA} = \dot{E}_{xy} (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) + (\dot{E}_{xx} - \dot{E}_{yy}) \cos \phi \sin \phi$
- $\dot{E}_{\rho z}^{NA} = \dot{E}_{xz} \cos \phi + \dot{E}_{yz} \sin \phi$
- $\dot{E}_{\phi z}^{NA} = -\dot{E}_{xz} \sin \phi + \dot{E}_{yz} \cos \phi$.

L'expression de $\dot{\varepsilon}^{Go} : \dot{\mathbf{E}}^{NA}$ s'en déduit.

D'après (B.4), l'intégrale $\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{\pi} \dot{\varepsilon}_{eq}^2(\mathbf{x}) J_{\lambda\beta\phi} d\beta d\phi$ s'exprime sous la forme :

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{\pi} \left((\dot{\varepsilon}_{eq}^{Go})^2 + (\dot{E}_{eq}^{NA})^2 + \frac{4}{3} \dot{\varepsilon}^{Go} : \dot{\mathbf{E}}^{NA} \right) J_{\lambda\beta\phi} d\beta d\phi. \quad (\text{B.9})$$

- Expression du terme $\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{\beta=\pi} (\dot{\varepsilon}_{eq}^{Go})^2 J_{\lambda\beta\phi} d\beta d\phi$

D'après (B.5), le terme $\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{\beta=\pi} (\dot{\varepsilon}_{eq}^{Go})^2 J_{\lambda\beta\phi} d\beta d\phi$ peut s'exprimer par :

$$\begin{aligned} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{\beta=\pi} (\dot{\varepsilon}_{eq}^{Go})^2 J_{\lambda\beta\phi} d\beta d\phi &= \frac{2\pi b}{|\Omega|} \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 & I_2 \\ I_2 & I_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \end{pmatrix} \\ &= \frac{2\pi b}{|\Omega|} \{\dot{\mathbf{E}}\}^T \cdot \mathbf{T}^T \cdot \begin{pmatrix} I_1 & I_2 \\ I_2 & I_3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{T} \cdot \{\dot{\mathbf{E}}\}, \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

où \mathbf{T} est une matrice $2 * 6$ telle que :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \{\dot{\mathbf{E}}\}, \quad (\text{B.11})$$

c'est à dire d'après (3.31) :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & \tilde{\alpha} & \tilde{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{\alpha}Z_2 & -\tilde{\alpha}Z_2 & 1 - \tilde{\alpha}Z_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \tilde{\alpha} = \frac{1}{2R_2 + Z_2}. \quad (\text{B.12})$$

Les quantités I_1 , I_2 et I_3 valent :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\beta=0}^{\pi} \frac{2}{3} \left(2R^2 + Z^2 + \frac{2R+Z}{D} (2b^2R \cos^2 \beta + (a^2 \sin^2 \beta - b^2 \cos^2 \beta) Z) \right) \tilde{D} \sin \beta d\beta \\ &= \frac{8}{9} (3b^2R^2 + 2a^2(R^2 + RZ + Z^2)) \\ I_2 &= \int_{\beta=0}^{\pi} \left(Z - \frac{b^2 \cos^2 \beta}{D} (2R + Z) \right) \tilde{D} \sin \beta d\beta = \frac{4}{3} (-b^2R + a^2Z) \\ I_3 &= \int_{\beta=0}^{\pi} \tilde{D} \sin \beta d\beta = \frac{4a^2}{3} + \frac{2b^2}{3}. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

- Expression du terme $\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{\beta=\pi} (\dot{\mathbf{E}}_{eq}^{NA})^2 J_{\lambda\beta\phi} d\beta d\phi$

D'après (B.7), le terme $\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{\beta=\pi} (\dot{\mathbf{E}}_{eq}^{NA})^2 J_{\lambda\beta\phi} d\beta d\phi$ se met simplement sous la forme :

$$\{\dot{\mathbf{E}}\}^T \cdot \frac{4}{3} J(\lambda) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \{\dot{\mathbf{E}}\}. \quad (\text{B.14})$$

- Expression du terme $\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{\beta=\pi} \dot{\varepsilon}^{Go} : \dot{\mathbf{E}}^{NA} J_{\lambda\beta\phi} d\beta d\phi$

L'expression de $\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{\beta=\pi} \dot{\varepsilon}^{Go} : \dot{\mathbf{E}}^{NA} J_{\lambda\beta\phi} d\beta d\phi$ est nulle puisque : $\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \cos \phi = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \sin \phi = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \cos^2 \phi - \sin^2 \phi = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \cos \phi \sin \phi = 0$.

Au final, le potentiel effectif (3.33) $\sigma_0 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{J(\lambda)} \sqrt{\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{\beta=\pi} \dot{\varepsilon}_{eq}^2(\mathbf{x}) J_{\lambda\beta\phi} d\beta d\phi} d\lambda$ se met sous la forme : $\sigma_0 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{J(\lambda)} \sqrt{\dot{\mathbf{E}} : \mathbf{Q}(\lambda) : \dot{\mathbf{E}}} d\lambda$ avec \mathbf{Q} un tenseur d'ordre 4, qui en notation $6 * 6$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\lambda) &= \mathbf{T}^T \cdot \frac{2\pi b}{|\Omega|} \begin{pmatrix} I_1 & I_2 \\ I_2 & I_3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{T} + J(\lambda) \mathbf{Q}^{NA}, \\ I_1 &= \frac{8}{9} (3b^2R^2 + 2a^2(R^2 + RZ + Z^2)), \quad I_2 = \frac{4}{3} (-b^2R + a^2Z), \quad I_3 = \frac{4a^2}{3} + \frac{2b^2}{3}, \\ \tilde{\alpha} &= \frac{1}{2R_2 + Z_2} = \frac{a_2 b_2^2}{2c^3}, \quad |\Omega| = \frac{4}{3} \pi a_2 b_2^2. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

\mathbf{T} est une matrice 2×6 et \mathbf{Q}^{NA} est une matrice symétrique 6×6 dont les coefficients non nuls sont :

$$T_{11} = T_{12} = T_{13} = \tilde{\alpha}, \quad T_{21} = T_{22} = -\tilde{\alpha}Z_2, \quad T_{23} = 1 - \tilde{\alpha}Z_2, \quad (\text{B.16})$$

$$Q_{11}^{NA} = Q_{22}^{NA} = -Q_{12}^{NA} = \frac{1}{3}, \quad Q_{44}^{NA} = Q_{55}^{NA} = Q_{66}^{NA} = \frac{2}{3}. \quad (\text{B.17})$$

Annexe C

Borne supérieure de type Găărăjeu (1995) pour un matériau poreux à matrice rigide plastique parfaite et à cavités aplaties alignées

Le problème traité en 3.2.2 et en Annexe B est repris mais avec un champ de vitesse tiré de Găărăjeu (1995) et adapté au cas des cavités ellipsoïdales aplaties (oblate) avec un taux de déformation effectif $\dot{\mathbf{E}}$ général. L'utilisation du principe variationnel et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz conduisent comme en (3.33) à :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \sigma_0 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{J(\lambda)} \sqrt{\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon_{eq}^2(\mathbf{x}) J_{\lambda\theta\phi} d\theta d\phi} d\lambda, \quad (\text{C.1})$$

avec :

$$\begin{aligned} J(\lambda) &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} J_{\lambda\theta\phi} d\theta d\phi = \frac{4}{3} \frac{\pi b(2a^2 + b^2)}{|\Omega|} \\ &= \frac{c^3}{3|\Omega|} \pi (\cosh(\lambda) + 3 \cosh(3\lambda)) = 4 \frac{c^3}{|\Omega|} \pi \cosh(\lambda) (\sinh^2(\lambda) + \frac{1}{3}). \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

L'objectif est d'exprimer : $\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon_{eq}^2(\mathbf{x}) J_{\lambda\theta\phi} d\theta d\phi$, avec $\varepsilon_{eq}^2(\mathbf{x}) = \varepsilon_{eq}(\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}))$ et $\dot{\mathbf{v}}$, le nouveau champ de vitesse utilisé ici.

Le taux de déformation effectif $\dot{\mathbf{E}}$ est décomposé en partie axisymétrique et non axisymétrique selon la relation (3.29). Le champ de vitesse incompressible utilisé dans la matrice (domaine $\Omega - \omega$) s'écrit :

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}^{Ga} + \dot{\mathbf{E}}^{NA} \cdot \mathbf{x}. \quad (\text{C.3})$$

Le champ $\dot{\mathbf{v}}^{Ga}$ est lui même décomposé en deux parties incompressibles :

$$\dot{\mathbf{v}}^{Ga} = \dot{\mathbf{v}}^{(C)} + \dot{\mathbf{v}}^{(D)}, \quad (\text{C.4})$$

avec $\dot{\mathbf{v}}^{(C)}$ et $\dot{\mathbf{v}}^{(D)}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $\dot{\mathbf{v}}^{(C)} = \bar{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{x}$ sur $\partial\Omega$, $\bar{\mathbf{d}}$ indépendant de \mathbf{x}
- $\text{Tr} \left(\varepsilon \left(\dot{\mathbf{v}}^{(C)} \right) \right) = 0$ dans la matrice
- $\dot{\mathbf{v}}^{(C)} = v_{\lambda}^{(C)}(\lambda, \theta) \mathbf{e}_{\lambda}$
- $\dot{\mathbf{v}}^{(D)} = \left(\dot{\mathbf{E}}^A - \bar{\mathbf{d}} \right) \cdot \mathbf{x}$ dans la matrice
- $\text{Tr} \left(\dot{\mathbf{E}}^A \right) = \text{Tr} \left(\bar{\mathbf{d}} \right)$.

Les coordonnées elliptiques sont à nouveau utilisées (les notations suivantes sont légèrement différentes de celles utilisées en 3.2.2 : $\theta = \beta - \frac{\pi}{2}$) :

- $0 \leq \lambda \leq +\infty$
- $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
- $-\pi \leq \phi \leq \pi$.

Le fait d'imposer $\dot{\mathbf{v}}^{(C)} = v_\lambda^{(C)}(\lambda, \theta) \mathbf{e}_\lambda$ et de prendre ce champ à divergence nulle (incompressible) implique que (c désigne toujours la distance focale) :

$$v_\lambda^{(C)}(\lambda, \theta) = \frac{cT(\theta)}{\cosh \lambda \sqrt{\sin^2 \theta + \sinh^2 \lambda}}, \quad (\text{C.5})$$

où $T(\theta)$ est une fonction inconnue à ce stade. En coordonnées cartésiennes et sur le bord extérieur ($\lambda = \lambda_2$), le champ $\dot{\mathbf{v}}^{(C)}$ s'écrit :

$$\dot{\mathbf{v}}_{cart}^{(C)}(\lambda_2, \theta) = \begin{pmatrix} \xi x \\ \xi y \\ \frac{\xi}{\mathfrak{A}^2} z \end{pmatrix} \quad (\text{C.6})$$

avec :

$$\xi = \frac{\sinh(\lambda_2)T(\theta)}{\cosh^2 \lambda_2 (\sin^2 \theta + \sinh^2 \lambda_2)}, \quad \mathfrak{A} = \tanh(\lambda_2). \quad (\text{C.7})$$

Etant donné que $\dot{\mathbf{v}}^{(C)} = \bar{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{x}$ sur $\partial\Omega$, cela donne :

$$\bar{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\xi}{\mathfrak{A}^2} \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

et puisque $\text{Tr}(\dot{\mathbf{E}}^A) = \text{Tr}(\bar{\mathbf{d}})$, il vient :

$$\xi = \left(\text{Tr}(\dot{\mathbf{E}}) \right) \frac{\mathfrak{A}^2}{1 + 2\mathfrak{A}^2}. \quad (\text{C.9})$$

Les demi petits et grands axes s'écrivent respectivement $a_2 = c \sinh(\lambda_2)$ et $b_2 = c \cosh(\lambda_2)$. **Afin de fixer la géométrie, il est imposé : $a_2 = 1$.** En utilisant (C.7), cela donne :

$$T(\theta) = \frac{\xi}{\mathfrak{A}^2 c^3} (1 + c^2 \sin^2 \theta). \quad (\text{C.10})$$

Pour récapituler :

- $\mathfrak{A} = \tanh(\lambda_2)$
- $\xi = \left(\text{Tr}(\dot{\mathbf{E}}) \right) \frac{\mathfrak{A}^2}{1 + 2\mathfrak{A}^2}$
- $\dot{\mathbf{v}}_\lambda^{(C)} = \frac{\xi(1 + c^2 \sin^2 \theta)}{\mathfrak{A}^2 c^2 \cosh(\lambda) \sqrt{\sin^2 \theta + \sinh^2 \lambda}}$
- expression de $\bar{\mathbf{d}}$ donnée en (C.8).

Le tenseur des déformations associé à $\dot{\mathbf{v}}^{(C)}$ est calculé dans la base des coordonnées elliptiques. Ses composantes non nulles sont :

- $\varepsilon \left(\dot{\mathbf{v}}^{(C)} \right)_{\lambda\lambda} = -\frac{\xi}{\mathfrak{A}^2 c^3} \frac{\sinh(\lambda) (\cosh(2\lambda) + \sin^2(\theta)) (1 + c^2 \sin^2(\theta))}{\cosh^2(\lambda) (\sin^2(\theta) + \sinh^2(\lambda))^2}$
- $\varepsilon \left(\dot{\mathbf{v}}^{(C)} \right)_{\lambda\theta} = -\frac{\xi}{\mathfrak{A}^2 c^3} \frac{\cos(\theta) \sin(\theta) (1 - c^2 \sinh^2(\lambda))}{\cosh(\lambda) (\sin^2(\theta) + \sinh^2(\lambda))^2}$

- $\varepsilon \left(\dot{\mathbf{v}}^{(C)} \right)_{\theta\theta} = \frac{\xi}{2\mathfrak{A}^2 c^3} \frac{\sinh(\lambda) (1 + c^2 \sin^2(\theta))}{(\sin^2(\theta) + \sinh^2(\lambda))^2}$
- $\varepsilon \left(\dot{\mathbf{v}}^{(C)} \right)_{\phi\phi} = \frac{\xi}{2\mathfrak{A}^2 c^3} \frac{\sinh(\lambda) (1 + c^2 \sin^2(\theta))}{\cosh^2(\lambda) (\sin^2(\theta) + \sinh^2(\lambda))}$.

Le terme $\varepsilon_{eq}^2(\dot{\mathbf{v}})$ s'écrit :

$$\varepsilon_{eq}^2(\dot{\mathbf{v}}) = \varepsilon_{eq}^2 \left(\dot{\mathbf{v}}^{Ga} + \dot{\mathbf{E}}^{NA} \cdot \mathbf{x} \right) = (\varepsilon_{eq}^{Ga})^2 + \left(\dot{\mathbf{E}}_{eq}^{NA} \right)^2 + \frac{4}{3} \dot{\mathbf{E}}^{Ga} : \dot{\mathbf{E}}^{NA}. \quad (\text{C.11})$$

- Expression du terme $\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\dot{\mathbf{E}}_{eq}^{NA} \right)^2 J_{\lambda\theta\phi} d\theta d\phi$

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\dot{\mathbf{E}}_{eq}^{NA} \right)^2 J_{\lambda\theta\phi} d\theta d\phi = \left(\dot{\mathbf{E}}_{eq}^{NA} \right)^2 J(\lambda). \quad (\text{C.12})$$

- Expression du terme $\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dot{\mathbf{E}}^{Ga} : \dot{\mathbf{E}}^{NA} J_{\lambda\theta\phi} d\theta d\phi$

Vu que $\bar{\mathbf{d}} : \dot{\mathbf{E}}^{NA} = 0$ et $\dot{\mathbf{E}}^A : \dot{\mathbf{E}}^{NA} = 0$:

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dot{\mathbf{E}}^{Ga} : \dot{\mathbf{E}}^{NA} J_{\lambda\theta\phi} d\theta d\phi = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon(\dot{\mathbf{v}}^{(C)}) : \dot{\mathbf{E}}^{NA} J_{\lambda\theta\phi} d\theta d\phi. \quad (\text{C.13})$$

$\varepsilon(\dot{\mathbf{v}}^{(C)})$ est exprimé dans la base des coordonnées cartésiennes. $\dot{\mathbf{E}}^{NA}$ est déjà dans la base des coordonnées cartésiennes. Le produit doublement contracté entre ces deux grandeurs est effectué. Son intégrale sur ϕ et θ est nulle.

- Expression du terme $\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\varepsilon_{eq}^{Ga})^2 J_{\lambda\theta\phi} d\theta d\phi$

$$(\varepsilon_{eq}^{Ga})^2 = \left(\varepsilon_{eq}(\dot{\mathbf{v}}^{(C)}) \right)^2 + \left(\varepsilon_{eq}(\dot{\mathbf{v}}^{(D)}) \right)^2 + \frac{4}{3} \varepsilon(\dot{\mathbf{v}}^{(C)}) : \varepsilon(\dot{\mathbf{v}}^{(D)}). \quad (\text{C.14})$$

Le terme $\left(\varepsilon_{eq}(\dot{\mathbf{v}}^{(C)}) \right)^2$ peut se mettre sous la forme :

$$\left(\varepsilon_{eq}(\dot{\mathbf{v}}^{(C)}) \right)^2 = \frac{1}{3\mathfrak{A}^4 c^2} \frac{4\xi^2}{(\cosh \lambda)^4} \left(\sinh^2 \lambda + \frac{Q_1(\lambda)}{P(\theta, \lambda)} + \frac{Q_2(\lambda)}{(P(\theta, \lambda))^2} + \frac{Q_3(\lambda)}{(P(\theta, \lambda))^3} \right) \quad (\text{C.15})$$

avec :

- $Q_1(\lambda) = \sinh^2 \lambda \left(1 + \frac{2}{c^2} - \sinh^2 \lambda \right)$
- $Q_2(\lambda) = -\frac{1}{c^4} + \sinh^2 \lambda \left(1 + \frac{4}{c^2} \right) + (\sinh^4 \lambda) \left(-1 + \frac{2}{c^2} \right) - \sinh^6 \lambda$
- $Q_3(\lambda) = \frac{1}{c^4} + \frac{4}{c^4} \sinh^2 \lambda + \sinh^4 \lambda \left(-1 + \frac{3}{c^4} - \frac{4}{c^2} \right) - \frac{4}{c^2} \sinh^6 \lambda + \sinh^8 \lambda$
- $P(\theta, \lambda) = \sin^2 \theta + \sinh^2 \lambda$.

Compte tenu de la forme de $\dot{\mathbf{v}}^{(D)}$, il vient : $\varepsilon(\dot{\mathbf{v}}^{(D)}) = \bar{\mathbf{E}}$, où :

$$\bar{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^A - \bar{\mathbf{d}}, \quad (\text{C.16})$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{E}_{11} &= \frac{\dot{E}_{xx} + \dot{E}_{yy}}{2} - \left(\text{Tr} \left(\dot{\mathbf{E}} \right) \right) \frac{\mathfrak{A}^2}{1 + 2\mathfrak{A}^2} = \frac{-2\dot{E}_{zz}\mathfrak{A}^2 + \dot{E}_{xx} + \dot{E}_{yy}}{2(1 + 2\mathfrak{A}^2)} \equiv \bar{\xi} \\ \bar{E}_{22} &= \bar{E}_{11} = \bar{\xi} \\ \bar{E}_{33} &= \dot{E}_{zz} - \left(\text{Tr} \left(\dot{\mathbf{E}} \right) \right) \frac{1}{1 + 2\mathfrak{A}^2} = -2\bar{\xi}. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Ainsi, $\bar{\mathbf{E}}$ s'écrit :

$$\bar{\mathbf{E}} = \bar{\xi}(\mathbf{I} - 3\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3). \quad (\text{C.18})$$

Cela donne :

$$\left(\varepsilon_{eq}(\dot{\mathbf{v}}^{(D)})\right)^2 = 4(\bar{\xi})^2 \quad (\text{C.19})$$

et :

$$\frac{4}{3}\varepsilon(\dot{\mathbf{v}}^{(C)}) : \varepsilon(\mathbf{v}^{(D)}) = -4\bar{\xi} \left(\varepsilon_{cart}(\dot{\mathbf{v}}^{(C)})\right)_{33}. \quad (\text{C.20})$$

Le terme $\left(\varepsilon_{cart}(\dot{\mathbf{v}}^{(C)})\right)_{33}$ s'exprime dans la base des coordonnées cartésiennes :

$$\left(\varepsilon_{cart}(\dot{\mathbf{v}}^{(C)})\right)_{33} = \frac{\xi}{2c^3} \sinh \lambda \left(-c^2 + \frac{Q_1^*(\lambda)}{P(\theta, \lambda)} + \frac{Q_2^*(\lambda)}{P^2(\theta, \lambda)} + \frac{Q_3^*(\lambda)}{P^3(\theta, \lambda)}\right) \quad (\text{C.21})$$

avec :

- $Q_1^*(\lambda) = 1 - c^2 - 2c^2 \sinh^2 \lambda$
- $Q_2^*(\lambda) = -3 + 5 \sinh^2 \lambda (c^2 - 1) + 7c^2 \sinh^4(\lambda)$
- $Q_3^*(\lambda) = 4 \sinh^2(\lambda) (1 + \sinh^2(\lambda) (1 - c^2) - c^2 \sinh^4 \lambda)$.

L'intégrale sur le domaine des trois termes précédents fait intervenir la quantité $J_{\lambda\theta\phi}$ qui peut s'écrire de différentes façons :

$$\begin{aligned} J_{\lambda\theta\phi} &= \frac{1}{2} \frac{c^3}{|\Omega|} \cos \theta \cosh \lambda (-\cos(2\theta) + \cosh(2\lambda)) \\ &= \frac{1}{2} \frac{c^3}{|\Omega|} \cos \theta \cosh \lambda (\cosh^2 \lambda + \sinh^2 \lambda - (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)) \\ &= \frac{1}{2} \frac{c^3}{|\Omega|} \cos \theta \cosh \lambda (1 + 2 \sinh^2 \lambda - 1 + 2 \sin^2 \theta) \\ &= \frac{c^3}{|\Omega|} \cos \theta \cosh \lambda P(\theta, \lambda). \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Après calculs, il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\varepsilon_{eq}(\dot{\mathbf{v}}^{(C)})\right)^2 J_{\lambda\theta\phi} d\theta d\phi &= \frac{4\xi^2}{32^4 c^2 (\cosh \lambda)^4} \left(\sinh^2(\lambda) J(\lambda) + \right. \\ &\quad \left. + Q_1(\lambda) 2\pi J_1 + Q_2(\lambda) 2\pi J_2 + Q_3(\lambda) 2\pi J_3\right) \\ &= \frac{4\xi^2}{32^4 c^2 (\cosh \lambda)^4} F_1(\lambda), \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

avec, pour $1 \leq i \leq 3$ et en posant $u = \sin \theta$:

$$J_i = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{J_{\lambda\theta\phi}}{P^i(\theta, \lambda)} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{c^3 \cos \theta \cosh \lambda}{|\Omega| P^{i-1}(\theta, \lambda)} d\theta = \frac{c^3}{|\Omega|} \cosh \lambda \int_{-1}^1 \frac{du}{P^{i-1}(u, \lambda)}, \quad (\text{C.24})$$

- $J_1 = 2 \frac{c^3}{|\Omega|} \cosh \lambda$
- $J_2 = \frac{c^3}{|\Omega|} \frac{2}{\tanh \lambda} \arctan\left(\frac{1}{\sinh \lambda}\right)$
- $J_3 = \frac{c^3}{|\Omega| \tanh \lambda} \frac{\sinh \lambda + (1 + \sinh^2 \lambda) \arctan\left(\frac{1}{\sinh \lambda}\right)}{\sinh^2 \lambda + \sinh^4 \lambda}$.

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\varepsilon_{eq}(\dot{\mathbf{v}}^{(D)})\right)^2 J_{\lambda\theta\phi} d\theta d\phi = 4(\bar{\xi})^2 J(\lambda). \quad (\text{C.25})$$

Enfin :

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon(\dot{\mathbf{v}}^{(C)}) : \varepsilon(\mathbf{v}^{(D)}) J_{\lambda\theta\phi} d\theta d\phi \\ = \frac{4\xi\xi}{2^2 c^3} (-c^2 J(\lambda) + 2\pi Q_1^*(\lambda) J_1 + 2\pi Q_2^*(\lambda) J_2 + 2\pi Q_3^*(\lambda) J_3) = \frac{-4\xi\xi}{2^2 c^3} F_2(\lambda). \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

Le potentiel effectif en taux de déformation est ainsi majoré par :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \sigma_0 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{J(\lambda)} \sqrt{\left(\dot{E}_{eq}^{NA}\right)^2 J(\lambda) + 4\bar{\xi}^2 J(\lambda) + \frac{4\xi^2}{32^4 c^2 \cosh^4 \lambda} F_1(\lambda) - \frac{4\xi\xi}{2^2 c^3} F_2(\lambda)} d\lambda. \quad (\text{C.27})$$

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \sigma_0 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{J(\lambda)} \sqrt{\dot{\mathbf{E}} : \mathbf{Q}^*(\lambda) : \dot{\mathbf{E}}} d\lambda. \quad (\text{C.28})$$

En utilisant la notation vectorielle de $\dot{\mathbf{E}}$, les scalaires ξ et $\bar{\xi}$ s'écrivent :

- $\xi = \frac{\mathfrak{A}^2}{1+2\mathfrak{A}^2} \mathfrak{T} \cdot \{\dot{\mathbf{E}}\}$
- $\bar{\xi} = \frac{1}{2(1+2\mathfrak{A}^2)} \mathfrak{T}^* \cdot \{\dot{\mathbf{E}}\},$

avec :

$$\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.29})$$

$$\mathfrak{T}^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\mathfrak{A}^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.30})$$

D'où :

- $\xi^2 = \left(\frac{\mathfrak{A}^2}{1+2\mathfrak{A}^2} \right)^2 \{\dot{\mathbf{E}}\}^T \cdot \mathfrak{T}^T \cdot \mathfrak{T} \cdot \{\dot{\mathbf{E}}\}$
- $\bar{\xi}^2 = \frac{1}{4(1+2\mathfrak{A}^2)^2} \{\dot{\mathbf{E}}\}^T \cdot \mathfrak{T}^{*T} \cdot \mathfrak{T}^* \cdot \{\dot{\mathbf{E}}\}$
- $\xi\bar{\xi} = \frac{\mathfrak{A}^2}{2(1+2\mathfrak{A}^2)^2} \{\dot{\mathbf{E}}\}^T \cdot \mathfrak{T}^T \cdot \mathfrak{T}^* \cdot \{\dot{\mathbf{E}}\}.$

En écrivant le terme (B.14) sous la forme :

$$\{\dot{\mathbf{E}}\}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \{\dot{\mathbf{E}}\}, \quad (\text{C.31})$$

il vient :

$$\left(\dot{E}_{eq}^{NA} \right)^2 J(\lambda) = \{\dot{\mathbf{E}}\}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \{\dot{\mathbf{E}}\}. \quad (\text{C.32})$$

On obtient au final l'expression suivante de \mathbf{Q}^* en notation 6 * 6 :

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{M} + \frac{J(\lambda)}{(1+2\mathfrak{A}^2)^2} \mathfrak{T}^{*T} \cdot \mathfrak{T}^* + \frac{4}{3} \frac{F_1(\lambda)}{c^2 \cosh^4 \lambda} \frac{1}{(1+2\mathfrak{A}^2)^2} \mathfrak{T}^T \cdot \mathfrak{T} - \frac{2F_2(\lambda)}{c^3 (1+2\mathfrak{A}^2)^2} \mathfrak{T}^T \cdot \mathfrak{T}^*. \quad (\text{C.33})$$

Annexe D

Un critère approché pour un matériau poreux à matrice rigide plastique parfaite et à cavités aplaties alignées

Cette Annexe a pour but d'écrire le critère en contrainte associé au potentiel déterminé en 3.2.3 :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) = \sigma'_0 \int_{\tilde{f}}^1 \sqrt{\frac{\mathcal{A}'^2}{z^2} + \mathcal{B}'^2 + (\dot{E}_{eq}^{NA})^2} dz, \quad (\text{D.1})$$

avec $\mathcal{A}''^2 = \mathcal{A}'^2 \tilde{\gamma}_2^2$, $\mathcal{A}' = \bar{F}\mathcal{A} + \bar{G}\mathcal{B}$, $\mathcal{B}' = \bar{H}\mathcal{B}$.

Les quantités σ'_0 , \tilde{f} , \bar{F} , \bar{G} , \bar{H} , $\tilde{\gamma}_2$ sont des constantes. \dot{E}_{eq}^{NA} est la partie équivalente de $\dot{\mathbf{E}}^{NA}$ défini en (3.29). Les quantités \mathcal{A} et \mathcal{B} sont déterminées par les conditions limites données en (3.31).

Le taux de déformation $\dot{\mathbf{E}}$ appliqué possède 6 composantes indépendantes : \dot{E}_{xx} , \dot{E}_{yy} , \dot{E}_{zz} , \dot{E}_{xy} , \dot{E}_{yz} , \dot{E}_{xz} . Ses 6 composantes indépendantes peuvent être remplacées par \dot{E}_p , \dot{E}_q , \dot{E}_{zz} , \dot{E}_{xy} , \dot{E}_{yz} , \dot{E}_{xz} , avec :

$$\begin{cases} \dot{E}_p = \dot{E}_{xx} + \dot{E}_{yy} \\ \dot{E}_q = \dot{E}_{xx} - \dot{E}_{yy} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{E}_{xx} = \frac{\dot{E}_p + \dot{E}_q}{2} \\ \dot{E}_{yy} = \frac{\dot{E}_p - \dot{E}_q}{2} \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

D'après la règle $\Sigma = \frac{\partial \Phi(\dot{\mathbf{E}})}{\partial \dot{\mathbf{E}}}$:

$$\frac{\partial \Phi(\dot{\mathbf{E}})}{\partial \dot{E}_p} = \frac{\partial \Phi(\dot{\mathbf{E}})}{\partial \dot{E}_{xx}} \frac{\partial \dot{E}_{xx}}{\partial \dot{E}_p} + \frac{\partial \Phi(\dot{\mathbf{E}})}{\partial \dot{E}_{yy}} \frac{\partial \dot{E}_{yy}}{\partial \dot{E}_p} = \frac{\Sigma_{xx} + \Sigma_{yy}}{2} \equiv \Sigma_p. \quad (\text{D.3})$$

$$\frac{\partial \Phi(\dot{\mathbf{E}})}{\partial \dot{E}_q} = \frac{\partial \Phi(\dot{\mathbf{E}})}{\partial \dot{E}_{xx}} \frac{\partial \dot{E}_{xx}}{\partial \dot{E}_q} + \frac{\partial \Phi(\dot{\mathbf{E}})}{\partial \dot{E}_{yy}} \frac{\partial \dot{E}_{yy}}{\partial \dot{E}_q} = \frac{\Sigma_{xx} - \Sigma_{yy}}{2} \equiv \Sigma_q. \quad (\text{D.4})$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{cases} \mathcal{A} = \frac{\mathcal{A}''}{\tilde{\gamma}_2 \bar{F}} - \frac{\bar{G}}{\bar{H}\bar{F}} \mathcal{B}' \\ \mathcal{B} = \frac{\mathcal{B}'}{\bar{H}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A}'' = \tilde{\gamma}_2 (\bar{F}\mathcal{A} + \bar{G}\mathcal{B}) \\ \mathcal{B}' = \bar{H}\mathcal{B} \end{cases} \quad (\text{D.5})$$

D'où :

$$\frac{\partial \Phi(\dot{\mathbf{E}})}{\partial \mathcal{A}''} = \frac{\partial \Phi(\dot{\mathbf{E}})}{\partial \mathcal{A}} \frac{1}{\tilde{\gamma}_2 \bar{F}}, \quad \frac{\partial \Phi(\dot{\mathbf{E}})}{\partial \mathcal{B}'} = \frac{\partial \Phi(\dot{\mathbf{E}})}{\partial \mathcal{A}} \left(-\frac{\bar{G}}{\bar{H}\bar{F}} \right) + \frac{\partial \Phi(\dot{\mathbf{E}})}{\partial \mathcal{B}} \frac{1}{\bar{H}}. \quad (\text{D.6})$$

D'après les conditions limites données en (3.31) et la définition de $\tilde{\alpha}$ donnée en (B.15) :

$$\begin{cases} \mathcal{A} = \tilde{\alpha}(\dot{E}_p + \dot{E}_{zz}) \\ \mathcal{B} = (1 - Z_2 \tilde{\alpha}) \dot{E}_{zz} - Z_2 \tilde{\alpha} \dot{E}_p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{E}_p = 2\mathcal{A}R_2 - \mathcal{B} \\ \dot{E}_{zz} = \mathcal{A}Z_2 + \mathcal{B} \end{cases} \quad (\text{D.7})$$

D'où :

$$\frac{\partial\Phi(\dot{\mathbf{E}})}{\partial\mathcal{A}} = \frac{\partial\Phi(\dot{\mathbf{E}})}{\partial\dot{E}_p} \frac{\partial\dot{E}_p}{\partial\mathcal{A}} + \frac{\partial\Phi(\dot{\mathbf{E}})}{\partial\dot{E}_{zz}} \frac{\partial\dot{E}_{zz}}{\partial\mathcal{A}} = \Sigma_p(2R_2) + \Sigma_{zz}Z_2 \equiv \Sigma_h/\tilde{\alpha}. \quad (\text{D.8})$$

Cela donne, avec la définition de α_2 donnée en (3.25) :

$$\Sigma_h = 2\alpha_2\Sigma_p + (1 - 2\alpha_2)\Sigma_{zz}. \quad (\text{D.9})$$

De même :

$$\frac{\partial\Phi(\dot{\mathbf{E}})}{\partial\mathcal{B}} = \Sigma_{zz} - \Sigma_p. \quad (\text{D.10})$$

En reprenant (D.6) :

$$\frac{\partial\Phi(\dot{\mathbf{E}})}{\partial\mathcal{A}''} = \frac{1}{\tilde{y}_2\bar{F}\tilde{\alpha}}\Sigma_h, \quad \frac{\partial\Phi(\dot{\mathbf{E}})}{\partial\mathcal{B}'} = -\frac{\bar{G}}{\bar{H}\bar{F}\tilde{\alpha}}\Sigma_h + \frac{1}{\bar{H}}(\Sigma_{zz} - \Sigma_p). \quad (\text{D.11})$$

Le calcul de $(\dot{E}_{eq}^{NA})^2$ donne directement :

$$(\dot{E}_{eq}^{NA})^2 = \frac{1}{3}\dot{E}_q^2 + \frac{2}{3}(\dot{E}_{xy}^2 + \dot{E}_{xz}^2 + \dot{E}_{yz}^2 + \dot{E}_{yx}^2 + \dot{E}_{zx}^2 + \dot{E}_{zy}^2). \quad (\text{D.12})$$

Lemme : Soit A_i des variables indépendantes et :

$$W(A_i) = \int_f^1 \sqrt{\frac{A_1^2}{y^2} + \sum_{i=2}^{i=N} A_i^2} dy, \quad (\text{D.13})$$

alors :

$$\sum_{i=2}^{i=N} \left(\frac{\partial W}{\partial A_i} \right)^2 + 2f \cosh \left(\frac{\partial W}{\partial A_1} \right) - 1 - f^2 = 0. \quad (\text{D.14})$$

Preuve :

$$\frac{\partial W}{\partial A_1} = \int_f^1 \left(\frac{A_1^2}{y^2} + \sum_{i=2}^{i=N} A_i^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{A_1}{y^2} dy, \quad \frac{\partial W}{\partial A_k} = \int_f^1 \left(\frac{A_1^2}{y^2} + \sum_{i=2}^{i=N} A_i^2 \right)^{-\frac{1}{2}} A_k dy \text{ pour } 2 \leq k \leq N. \quad (\text{D.15})$$

Le changement de variable suivant $x = \frac{A_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^{i=N} A_i^2}} \frac{1}{y}$ est effectué. Cela donne $dy = \frac{A_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^{i=N} A_i^2}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx$

et :

$$\frac{\partial W}{\partial A_1} = \int_\beta^{\frac{\beta}{f}} (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} dx \equiv I, \quad \beta = \frac{A_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^{i=N} A_i^2}}. \quad (\text{D.16})$$

Pour $2 \leq k \leq N$:

$$\frac{\partial W}{\partial A_k} = \frac{A_k}{\sqrt{\sum_{i=2}^{i=N} A_i^2}} \beta \int_\beta^{\frac{\beta}{f}} (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} x^{-2} dx \equiv \frac{A_k}{\sqrt{\sum_{i=2}^{i=N} A_i^2}} \beta J. \quad (\text{D.17})$$

D'où :

$$\sum_{k=2}^{k=N} \left(\frac{\partial W}{\partial A_k} \right)^2 = (\beta J)^2. \quad (\text{D.18})$$

La relation suivante (établie dans Găărăjeu et Suquet (1997)) donne le résultat :

$$(\beta J)^2 + 2f \cosh(I) - 1 - f^2 = 0. \quad (\text{D.19})$$

Le lemme précédent donne :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma_0'^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathcal{B}'} \right)^2 + \frac{1}{\sigma_0'^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{E}_q / \sqrt{3}} \right)^2 + \frac{1}{\sigma_0'^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{E}_{xy} \sqrt{2/3}} \right)^2 + \frac{1}{\sigma_0'^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{E}_{yx} \sqrt{2/3}} \right)^2 + \frac{1}{\sigma_0'^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{E}_{xz} \sqrt{2/3}} \right)^2 + \\ & \frac{1}{\sigma_0'^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{E}_{zx} \sqrt{2/3}} \right)^2 + \frac{1}{\sigma_0'^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{E}_{yz} \sqrt{2/3}} \right)^2 + \frac{1}{\sigma_0'^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{E}_{zy} \sqrt{2/3}} \right)^2 + 2\tilde{f} \cosh\left(\frac{1}{\sigma_0'} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathcal{A}'}\right) - 1 - \tilde{f}^2 = 0. \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

$$\frac{1}{\sigma_0'^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathcal{B}'} \right)^2 + \frac{1}{\sigma_0'^2} \left(3\Sigma_q^2 + \frac{3}{2}(\Sigma_{xy}^2 + \Sigma_{yx}^2 + \Sigma_{xz}^2 + \Sigma_{zx}^2 + \Sigma_{yz}^2 + \Sigma_{zy}^2) \right) + 2\tilde{f} \cosh\left(\frac{1}{\sigma_0'} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathcal{A}'}\right) - 1 - \tilde{f}^2 = 0. \quad (\text{D.21})$$

$$\frac{1}{\sigma_0'^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathcal{B}'} \right)^2 + \frac{1}{\sigma_0'^2} \left(3\tau_p^2 + 3\tau_n^2 \right) + 2\tilde{f} \cosh\left(\frac{1}{\sigma_0'} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathcal{A}'}\right) - 1 - \tilde{f}^2 = 0. \quad (\text{D.22})$$

En utilisant les constantes de Gologanu et al. (1994), à savoir : $\kappa = \frac{3}{2F}$, $C = \frac{1}{H^2}$, $\eta = \frac{-3\chi g \bar{G}}{2F}$, les équations (D.11) et (D.22) donnent le critère donné en (3.59) :

$$\left(\frac{\Sigma_n - \Sigma_p + \eta \Sigma_h}{\sigma_0 / \sqrt{C}} \right)^2 + 3 \frac{\tau_p^2}{\sigma_0^2} + 3 \frac{\tau_n^2}{\sigma_0^2} + 2(g+1)(g+f) \cosh\left(\frac{\kappa}{\sigma_0} \Sigma_h\right) - (g+1)^2 - (g+f)^2 = 0. \quad (\text{D.23})$$

$$\Sigma_n = \Sigma_{zz}, \quad \tau_p^2 = \Sigma_{xy}^2 + (\Sigma_{xx} - \Sigma_{yy})^2 / 4, \quad \tau_n^2 = \Sigma_{xz}^2 + \Sigma_{yz}^2. \quad (\text{D.24})$$

Ce critère de plasticité peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{\Sigma} : \mathbf{S}_0 : \mathbf{\Sigma} + 2(g+1)(g+f) \cosh(\mathbf{T}_0 : \mathbf{\Sigma}) - (g+1)^2 - (g+f)^2 = 0, \quad (\text{D.25})$$

avec :

$$\mathbf{S}_0 = \frac{C}{\sigma_0^2} \mathbf{Q}_{(dnps)} + \frac{C}{\sigma_0^2} \eta^2 \mathbf{Q}_{(hh)} + \frac{2C\eta}{\sigma_0^2} \mathbf{Q}_{(hdnp)} + \frac{3}{\sigma_0^2} \mathbf{Q}_{(tps)} + \frac{3}{\sigma_0^2} \mathbf{Q}_{(tns)}. \quad (\text{D.26})$$

En notation vectorielle, le tenseur d'ordre 2, $\mathbf{\Sigma}$, s'écrit $\{\mathbf{\Sigma}\} = (\Sigma_{xx}, \Sigma_{yy}, \Sigma_{zz}, \sqrt{2}\Sigma_{yz}, \sqrt{2}\Sigma_{xz}, \sqrt{2}\Sigma_{xy})^T$ et :

$$\mathbf{Q}_{(dnps)} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.27})$$

$$\mathbf{Q}_{(hh)} = \begin{pmatrix} \alpha_2^2 & \alpha_2^2 & \alpha_2(1-2\alpha_2) & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2^2 & \alpha_2^2 & \alpha_2(1-2\alpha_2) & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2(1-2\alpha_2) & \alpha_2(1-2\alpha_2) & (1-2\alpha_2)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.28})$$

$$\mathbf{Q}_{(hdnp)} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_2}{2} & -\frac{\alpha_2}{2} & \alpha_2 - \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha_2}{2} & -\frac{\alpha_2}{2} & \alpha_2 - \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 - \frac{1}{4} & \alpha_2 - \frac{1}{4} & (1-2\alpha_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.29})$$

$$\mathbf{Q}_{(tps)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{(tns)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.30})$$

Le tenseur d'ordre 2, \mathbf{T}_0 , s'écrit (sans utiliser la notation vectorielle) :

$$\mathbf{T}_0 = \frac{\kappa}{\sigma_0} \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - 2\alpha_2) \end{pmatrix}. \quad (\text{D.31})$$

Annexe E

Borne supérieure de Hashin et Shtrikman (1963)

Les coefficients de compressibilité et de cisaillement issus de la borne supérieure de Hashin et Shtrikman (1963) s'écrivent :

$$\begin{aligned} k_o^{HS} &= k_o^1 + f_e \frac{-k_o^1}{1+(1-f_e) \frac{-k_o^1}{k_s+k_o^1}}, \\ \mu_o^{HS} &= \mu_o^1 + f_e \frac{-\mu_o^1}{1+(1-f_e) \frac{-\mu_o^1}{\mu_s+\mu_o^1}}, \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

avec :

$$k_s = \frac{4}{3}\mu_o^1, \quad \mu_s = \frac{\mu_o^1}{6} \frac{9k_o^1 + 8\mu_o^1}{k_o^1 + 2\mu_o^1}. \quad (\text{E.2})$$

Après calculs :

$$\frac{\partial k_o^{HS}}{\partial k_o^1} = \frac{16(1-f_e)(\mu_o^1)^2}{(3f_e k_o^1 + 4\mu_o^1)^2}, \quad \frac{\partial k_o^{HS}}{\partial \mu_o^1} = \frac{12(1-f_e)f_e(k_o^1)^2}{(3f_e k_o^1 + 4\mu_o^1)^2}, \quad (\text{E.3})$$

$$\frac{\partial \mu_o^{HS}}{\partial k_o^1} = \frac{60(1-f_e)f_e(\mu_o^1)^2}{((9+6f_e)k_o^1 + 4(2+3f_e)\mu_o^1)^2}, \quad (\text{E.4})$$

$$\frac{\partial \mu_o^{HS}}{\partial \mu_o^1} = \frac{(1-f_e)(27(3+2f_e)(k_o^1)^2 + 48(3+2f_e)k_o^1\mu_o^1 + 32(2+3f_e)(\mu_o^1)^2)}{((9+6f_e)k_o^1 + 4(2+3f_e)\mu_o^1)^2}. \quad (\text{E.5})$$

Annexe F

Estimation auto-cohérente de Hervé et Zaoui (1993)

Ces auteurs étudient une inclusion sphérique entourée de $N - 1$ couches concentriques sphériques (la dernière couche est de rayon R_N , voir FIG. F.1). La couche $N + 1$ est supposée infinie. Le chargement est appliqué à l'infini, soit en condition de déformation homogène au bord, soit en condition de contrainte homogène au bord. Toutes les phases sont élastiques linéaires et isotropes. Le cas du chargement purement hydrostatique est traité afin de déterminer un coefficient de compressibilité homogène équivalent. Pour le cas déviatorique, le déplacement suivant est imposé à l'infini (en cartésien) :

$$\begin{cases} u_x^o = \gamma x \\ u_y^o = -\gamma y \\ u_z^o = 0. \end{cases} \quad (\text{F.1})$$

Ce cas permet d'en déduire un coefficient de cisaillement équivalent.

Les champs de déplacement utilisés ne sont pas précisés ici. Les modules de compressibilité et de cisaillement équivalents peuvent être obtenus par une approche auto-cohérente : la phase $N + 1$ est caractérisée par les modules de compressibilité et de cisaillement recherchés. Dans le cas de la condition de déformation homogène au bord, la condition d'auto-cohérence traduit le fait que la déformation appliquée à l'infini est égale à la déformation moyenne sur la boule de rayon R_N .

Les coefficients k_o^{HZ} et μ_o^{HZ} s'écrivent (Hervé et Zaoui (1993)) :

- l'indice $i = 1$ désigne la boule centrale
- R_i désigne le rayon externe de la couche i , $1 \leq i \leq N$
- R_N est choisi tel que la boule contenant les N premières couches est de volume 1
- les coefficients de compressibilité et de cisaillement de chaque phase i ($1 \leq i \leq N$) sont notés k_o^i et μ_o^i (coefficient de Poisson ν_o^i).

$$k_o^{HZ} = \frac{3k_o^N R_N^3 Q_{11}^{(N-1)} - 4\mu_o^N Q_{21}^{(N-1)}}{3 \left(R_N^3 Q_{11}^{(N-1)} + Q_{21}^{(N-1)} \right)} \quad (\text{F.2})$$

$$Q^{(N-1)} = \prod_{j=N-1}^{j=1} N^{(j)} \quad (\text{F.3})$$

$$N^{(k)} = \frac{1}{3k_o^{k+1} + 4\mu_o^{k+1}} \begin{pmatrix} 3k_o^k + 4\mu_o^{k+1} & \frac{4}{R_k^3} (\mu_o^{k+1} - \mu_o^k) \\ 3(k_o^{k+1} - k_o^k) R_k^3 & (3k_o^{k+1} + 4\mu_o^k) \end{pmatrix}. \quad (\text{F.4})$$

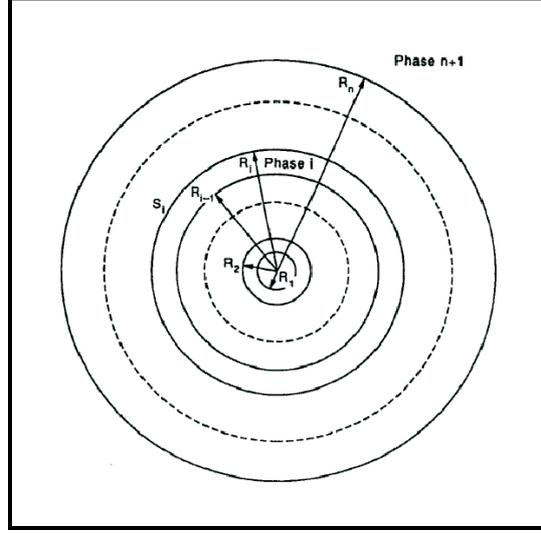


FIG. F.1 – Inclusion multi-enrobée dans une matrice infinie (Hervé et Zaoui (1993)).

Le coefficient μ_o^{HZ} est solution de l'équation du second degré suivante (μ_o^{HZ} est la solution positive et plus petite que le plus grand des μ_o^i , $1 \leq i \leq N$) :

$$A \left(\frac{\mu}{\mu_o^N} \right)^2 + B \left(\frac{\mu}{\mu_o^N} \right) + C = 0. \quad (\text{F.5})$$

A , B et C désignent dans cette annexe les quantités suivantes :

- $A = 4R_N^{10}(1 - 2\nu_o^N)(7 - 10\nu_o^N)Z_{12} + 20R_N^7(7 - 12\nu_o^N + 8(\nu_o^N)^2)Z_{42} + 12R_N^5(1 - 2\nu_o^N)(Z_{14} - 7Z_{23}) + 20R_N^3(1 - 2\nu_o^N)^2Z_{13} + 16(4 - 5\nu_o^N)(1 - 2\nu_o^N)Z_{43}$
 - $B = 3R_N^{10}(1 - 2\nu_o^N)(15\nu_o^N - 7)Z_{12} + 60R_N^7(\nu_o^N - 3)\nu_o^NZ_{42} - 24R_N^5(1 - 2\nu_o^N)(Z_{14} - 7Z_{23}) - 40R_N^3(1 - 2\nu_o^N)^2Z_{13} - 8(1 - 5\nu_o^N)(1 - 2\nu_o^N)Z_{43}$
 - $C = -R_N^{10}(1 - 2\nu_o^N)(7 + 5\nu_o^N)Z_{12} + 10R_N^7(7 - (\nu_o^N)^2)Z_{42} + 12R_N^5(1 - 2\nu_o^N)(Z_{14} - 7Z_{23}) + 20R_N^3(1 - 2\nu_o^N)^2Z_{13} - 8(7 - 5\nu_o^N)(1 - 2\nu_o^N)Z_{43}$
- avec : $Z_{\alpha\beta} = P_{\alpha 1}^{(N-1)} P_{\beta 2}^{(N-1)} - P_{\beta 1}^{(N-1)} P_{\alpha 2}^{(N-1)}$

$$P^{(N-1)} = \prod_{j=N-1}^{j=1} M^{(j)} \quad (\text{F.6})$$

$$M^{(k)} = \frac{1}{5(1 - \nu_o^{k+1})} \begin{pmatrix} \frac{c_k}{3} & \frac{R_k^2(3b_k - 7c_k)}{5(1 - 2\nu_o^k)} & \frac{-12\alpha_k}{R_k^5} & \frac{4(f_k - 27\alpha_k)}{15(1 - 2\nu_o^k)R_k^3} \\ 0 & \frac{(1 - 2\nu_o^{k+1})b_k}{7(1 - 2\nu_o^k)} & \frac{-20(1 - 2\nu_o^{k+1})\alpha_k}{7R_k^4} & \frac{-12\alpha_k(1 - 2\nu_o^{k+1})}{7(1 - 2\nu_o^k)R_k^5} \\ \frac{R_k^5\alpha_k}{2} & \frac{-R_k^7(2a_k + 147\alpha_k)}{70(1 - 2\nu_o^k)} & \frac{d_k}{7} & \frac{R_k^2(105(1 - \nu_o^{k+1}) + 12\alpha_k(7 - 10\nu_o^{k+1}) - 7e_k)}{35(1 - 2\nu_o^k)} \\ -\frac{5}{6}(1 - 2\nu_o^{k+1})\alpha_k R_k^3 & \frac{7(1 - 2\nu_o^{k+1})\alpha_k R_k^5}{2(1 - 2\nu_o^k)} & 0 & \frac{e_k(1 - 2\nu_o^{k+1})}{3(1 - 2\nu_o^k)} \end{pmatrix} \quad (\text{F.7})$$

- $a_k = \frac{\mu_o^k}{\mu_o^{k+1}}(7 + 5\nu_o^k)(7 - 10\nu_o^{k+1}) - (7 - 10\nu_o^k)(7 + 5\nu_o^{k+1})$
- $b_k = 4(7 - 10\nu_o^k) + \frac{\mu_o^k}{\mu_o^{k+1}}(7 + 5\nu_o^k)$
- $c_k = (7 - 5\nu_o^{k+1}) + 2\frac{\mu_o^k}{\mu_o^{k+1}}(4 - 5\nu_o^{k+1})$
- $d_k = (7 + 5\nu_o^{k+1}) + 4\frac{\mu_o^k}{\mu_o^{k+1}}(7 - 10\nu_o^{k+1})$
- $e_k = 2(4 - 5\nu_o^k) + \frac{\mu_o^k}{\mu_o^{k+1}}(7 - 5\nu_o^k)$

-
- $f_k = (4 - 5\nu_o^k)(7 - 5\nu_o^{k+1}) - \frac{\mu_o^k}{\mu_o^{k+1}}(4 - 5\nu_o^{k+1})(7 - 5\nu_o^k)$
 - $\alpha_k = \frac{\mu_o^k}{\mu_o^{k+1}} - 1.$

Remarque F.1 (Phase 1) Cette estimation est donnée dans le cas où la phase 1 (i.e. ω , la phase la plus à l'intérieur) a pour coefficients de compressibilité et de cisaillement k_o^1 et μ_o^1 . Pour le cas traité ici, cette phase est vide. Hervé et Pellegrini (1995) ont repris l'étude de Hervé et Zaoui (1993) en considérant le cas où la phase 1 est vide. Cela revient à faire tendre k_o^1 et μ_o^1 vers 0 dans l'estimation de Hervé et Zaoui (1993). Pour ce travail, l'estimation de Hervé et Zaoui (1993) est utilisée en prenant k_o^1 et μ_o^1 proches de 0.

Annexe G

Borne supérieure de Ponte Castañeda et Willis (1995)

La borne supérieure de Ponte Castañeda et Willis (1995) permet de distinguer la forme et la distribution des cavités dans la matrice par l'intermédiaire de deux tenseurs morphologiques \mathbf{P}^i et \mathbf{P}^d . Le tenseur de raideur issu de la borne supérieure de Ponte Castañeda et Willis (1995) s'écrit (le tenseur de raideur de la matrice est notée \mathbf{C}_o^1) :

$$\mathbf{C}_o^{PCW} = \mathbf{C}_o^1 + f_e \left(\mathbf{ID} - f_e \oint [(\mathbf{P}^i - (\mathbf{C}_o^1)^{-1})^{-1}] : \mathbf{P}^d \right)^{-1} : \oint [(\mathbf{P}^i - (\mathbf{C}_o^1)^{-1})^{-1}] \quad (\text{G.1})$$

avec $\mathbf{P}^i = \mathbf{S}_e^i(w) : (\mathbf{C}_o^1)^{-1}$ et $\mathbf{P}^d = \mathbf{S}_e^d(w^d) : (\mathbf{C}_o^1)^{-1}$.

Le symbole \oint représente la moyenne sur les orientations et revient à projeter l'argument sur la base (\mathbf{J}, \mathbf{K}) (Gatt et al. (2005)) :

$$\oint \mathbf{AR} = P_{JK}(\mathbf{AR}) = \frac{\mathbf{AR} :: \mathbf{J}}{\mathbf{J} :: \mathbf{J}} \mathbf{J} + \frac{\mathbf{AR} :: \mathbf{K}}{\mathbf{K} :: \mathbf{K}} \mathbf{K}. \quad (\text{G.2})$$

Les tenseurs \mathbf{S}_e^i et \mathbf{S}_e^d sont les tenseurs d'Eshelby relatifs respectivement à la forme et à la distribution des inclusions (voir une expression de ces tenseurs dans Mura (1987)).

Dans le cas des fissures ($w = 0$) orientées aléatoirement (orientations équiprobables) et distribuées de façon isotrope, les coefficients de compressibilité et de cisaillement effectifs s'écrivent (en fonction de α_c et en fonction des coefficients de la phase matrice, de coefficient de Poisson ν_o^1) :

$$k_o^{PCW} = k_o^1 - k_o^1 \frac{12\alpha_c (1 - (\nu_o^1)^2)}{9\pi (1 - 2\nu_o^1) + 4\alpha_c (1 + \nu_o^1)^2} \quad (\text{G.3})$$

$$\mu_o^{PCW} = \mu_o^1 - \mu_o^1 \frac{120\alpha_c (1 - \nu_o^1) (5 - \nu_o^1)}{225\pi (2 - \nu_o^1) + 16\alpha_c (4 - 5\nu_o^1) (5 - \nu_o^1)} \quad (\text{G.4})$$

avec :

$$\alpha_c = \frac{4\pi (b_1)^3 N_c}{3 |V|}. \quad (\text{G.5})$$

Le demi-grand axe des fissures (rayon des fissures) est noté b_1 . Le nombre de fissures dans le volume total V est noté N_c (α_c est le paramètre utilisé dans Ponte Castañeda et Willis (1995)).

Dans le cas plus général des ellipsoïdes, les expressions de k_o^{PCW} et de μ_o^{PCW} sont :

$$k_o^{PCW} = -\frac{kn}{kd}. \quad (\text{G.6})$$

$$kn = 2k_o^1\mu_o^1 \left(k_o^1(2f_e + (-3 + 4f_e)w^2)(-2 + w^2 + w^4) + 2(-1 + f_e)w^2(-1 - w^2 + 2w^4)\mu_o^1 + w \arccos(w) \left(2\sqrt{1-w^2}(3k_o^1(1 + f_e + (-1 + 2f_e)w^2) + (-1 + f_e)(-1 + 4w^2)\mu_o^1) - 9k_o^1w \arccos(w) \right) \right) \quad (\text{G.7})$$

$$kd = (-1 + w)(1 + w)(3f_ek_o^1(1 + 2w^2)(k_o^1(2 + w^2) + w^2\mu_o^1) + 2w^2\mu_o^1(3k_o^1(2 + w^2) + 2\mu_o^1 + 4w^2\mu_o^1)) + w \arccos(w) \left(\sqrt{1-w^2}(9f_ek_o^{12}(1 + 2w^2) + 3k_o^1(-4 - f_e + 4(1 + f_e)w^2)\mu_o^1) + 4(-1 + 4w^2)\mu_o^{12} \right) + 18k_o^1w\mu_o^1 \arccos(w) \quad (\text{G.8})$$

Le résultat analytique pour μ_o^{PCW} est compliqué. Un développement limité à l'ordre 1 en w donne une expression plus simple (en écrivant $f_e = \alpha_c w$) :

$$\mu_o^{PCW} = (\mu_o^1(5625\pi^2w^2(3k_o^1 + \mu_o^1)^2(3k_o^1 + 2\mu_o^1)^2 - 96f_e^2(k_o^1 + 2\mu_o^1)(9k_o^1 + 4\mu_o^1)^2(9k_o^1 + 8\mu_o^1) + 25f_ew(-81k_o^{14}(800w + 9\pi(4 + 15\pi w)) - 108k_o^{13}(3\pi + 5(304 + 45\pi^2)w)\mu_o^1 - 54k_o^{12}(-68\pi + 5(496 + 69\pi^2)w)\mu_o^{12} - 24k_o^1(-96\pi + 5(368 + 45\pi^2)w)\mu_o^{13} - 8(-48\pi + 640w + 45\pi^2w)\mu_o^{14})) / (9(25\pi w(3k_o^1 + \mu_o^1)(3k_o^1 + 2\mu_o^1) + 8f_e(k_o^1 + 2\mu_o^1)(9k_o^1 + 4\mu_o^1))^2). \quad (\text{G.9})$$

Remarque G.1 (Statut de borne supérieure) Le résultat de Ponte Castañeda et Willis (1995) est une borne supérieure lorsque $f_e \leq w$.

Annexe H

Porosités "équivalentes", cas tridimensionnel

Les porosités équivalentes f_s^k et f_s^μ sont utilisées dans le modèle MSMN ellipsoïdal pour traiter le cas des cavités ellipsoïdales orientées aléatoirement à partir du cas des cavités sphériques. Dans le cas des cavités ellipsoïdales, les porosités f_s^k et f_s^μ s'écrivent :

$$f_s^k = \frac{(2(-1 + f_e) f_e (1 + 2w^2) (-2 + w^2 + w^4 + 3w\sqrt{1 - w^2} \arccos(w)))}{((-2 + w^2 + w^4)(-3w^2 + f_e(2 + 4w^2)) + 6w\sqrt{1 - w^2}(1 + f_e - w^2 + 2f_e w^2) \arccos(w) - 9w^2 (\arccos(w))^2)}, \quad (\text{H.1})$$

$$f_s^\mu = \frac{f_e(w(-1 + w^2))^2 (8f_e(-1 + w^2)^2(-4 - 65w^2 - 44w^4 + 14w^6) - 5(-16 + 612w^2 - 2w^4 + 283w^6 - 93w^8 + 26w^{10})) +}{2(w(-1 + w^2))^2 (4f_e(-1 + w^2)^2(-4 - 65w^2 - 44w^4 + 14w^6) - 25w^2(-56 + 22w^2 - 9w^4 - 13w^6 + 2w^8)) -} \\ \frac{6(1 - w^2)^{3/2} (4f_e(-1 + w^2)^2(12 - 28w^2 + 55w^4)(12 - 28w^2 + 55w^4) + 5(-24 + 24w^2 + 169w^4 + 96w^6 + 5w^{10})) \operatorname{arccosh}(w) +}{2(1 - w^2)^{3/2} (-6f_e(-1 + w^2)^2(12 - 28w^2 + 55w^4) + 25w^2(-16 + 83w^2 - 36w^4 + 22w^6 + w^8)) \arccos(w) +} \\ \frac{18w(-1 + w^2)^2(130 + 265w^2 + 60w^4 - 5w^6 + 4f_e(-3 + 21w^2 - 26w^4 + 8w^6)) (\arccos(w))^2 - 54w^2\sqrt{1 - w^2}(5(13 + 20w^2 - 4w^4 + w^6) +}{6w(-1 + w^2)^2(-25(4 + 19w^2 - 8w^4 + 3w^6) + 6f_e(-3 + 21w^2 - 26w^4 + 8w^6)) (\arccos(w))^2 -} \\ \frac{4f_e(1 - 3w^4 + 2w^6) (\arccos(w))^3 + 2025(w^3 + w^5) (\arccos(w))^4}{18w^2\sqrt{1 - w^2}(-25(3 + 4w^2 - 2w^4 + w^6) + 6f_e(1 - 3w^4 + 2w^6)) (\arccos(w))^3 - 675(w^3 + w^5) (\arccos(w))^4}. \quad (\text{H.2})$$

Lorsque ces cavités sont des fissures, les porosités f_s^k et f_s^μ se mettent sous la forme :

$$f_s^k = \frac{4\alpha_c}{3\pi - 4\alpha_c}, \quad (\text{H.3})$$

$$f_s^\mu = \frac{30\alpha_c}{25\pi - 12\alpha_c}. \quad (\text{H.4})$$

Annexe I

Calcul de l'intégrale I

$$I = \int_{f_s}^1 \int_{f_t}^1 \sqrt{\frac{\tilde{P}^2}{y^2} + \frac{\tilde{Q}^2}{z^2} + \tilde{R}^2} dz dy.$$

Les notations suivantes sont introduites :

$$\begin{aligned} \tilde{B}_1 &= \sqrt{\tilde{P}^2 + \tilde{Q}^2 + \tilde{R}^2}, & \tilde{B}_2 &= \sqrt{\tilde{P}^2 + f_s^2(\tilde{Q}^2 + \tilde{R}^2)}, & \tilde{B}_3 &= \sqrt{\tilde{Q}^2 + f_t^2(\tilde{P}^2 + \tilde{R}^2)} \\ \tilde{B}_4 &= \sqrt{f_s^2\tilde{Q}^2 + f_t^2(\tilde{P}^2 + f_s^2\tilde{R}^2)}, & \tilde{B}_5 &= \tilde{P}\tilde{Q}\tilde{R}, & \tilde{A}_i &= (\tilde{P}^2\tilde{Q}^2 - \tilde{R}^2\tilde{B}_i^2), & \tilde{C}_i &= 2\tilde{B}_5\tilde{B}_i, \quad i = 1, 4, \\ \tilde{K} &= \tilde{A}_1\tilde{A}_4 - \tilde{C}_1\tilde{C}_4, & \tilde{L} &= \tilde{A}_1\tilde{C}_4 - \tilde{C}_1\tilde{A}_4, & \tilde{M} &= \tilde{A}_2\tilde{A}_3 - \tilde{C}_2\tilde{C}_3, & \tilde{N} &= \tilde{A}_2\tilde{C}_3 + \tilde{A}_3\tilde{C}_2. \end{aligned}$$

Une expression analytique de I est obtenue :

$$\begin{aligned} I &= \tilde{B}_1 - \tilde{B}_2 - \tilde{B}_3 + \tilde{B}_4 + \frac{\tilde{P}\tilde{Q}}{2\tilde{R}} \arcsin \left(\frac{\tilde{L}\tilde{M} - \tilde{N}\tilde{K}}{\tilde{M}^2 + \tilde{N}^2} \right) + \\ &+ \ln \left[\left(\frac{\tilde{Q} + \tilde{B}_3}{f_t(\tilde{Q} + \tilde{B}_1)} \right)^{\tilde{Q}} \left(\frac{f_s(f_t\tilde{P} + \tilde{B}_3)}{f_t\tilde{P} + \tilde{B}_4} \right)^{(\tilde{P}f_t)} \left(\frac{\tilde{P} + \tilde{B}_2}{f_s(\tilde{P} + \tilde{B}_1)} \right)^{\tilde{P}} \left(\frac{f_t(f_s\tilde{Q} + \tilde{B}_2)}{f_s\tilde{Q} + \tilde{B}_4} \right)^{(\tilde{Q}f_s)} \right]. \end{aligned}$$

Annexe J

Démonstration : méthode sécante modifiée pour un matériau poreux saturé à matrice de Gurson

Cette annexe présente la méthode sécante modifiée (équivalente au principe variationnel de Ponte Castañeda (1991), voir Suquet (1995) et Ponte Castañeda et Suquet (1998)) dans le cas où les cavités sont sous pression : pression p_b dans les cavités intragranulaires et pression p_e dans les cavités intergranulaires. **La différence des pressions ($p_b - p_e$) est notée p .** Le domaine total V contient les cavités de porosité f_e qui occupent le domaine ω_e . La microstructure est telle que le comportement effectif est isotrope. La matrice de V (domaine M) suit le critère GTN rappelé en 3.1.4.

Pour des raisons de simplicité, la méthode sécante modifiée est d'abord mise en oeuvre avec 2 phases pour le composite linéaire de comparaison (une phase cavité correspondant à ω_e et une phase matrice) ce qui conduit aux modèles MSM (MSM sphérique et MSM ellipsoïdal) présentés en 4.1.1, 4.3.1 et 5.3.1. Puis, la méthode sécante modifiée est mise en oeuvre avec N phases pour le composite linéaire de comparaison ce qui conduit aux modèles MSMN (MSMN sphérique et MSMN ellipsoïdal) présentés en 4.1.4, 4.3.4 et 5.3.3.

J.1 Modèles MSM (MSM sphérique et MSM ellipsoïdal)

Le problème à résoudre s'écrit (en taux de déformation homogène au bord) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{\sigma} + p_b \mathbf{I} = \frac{\partial \varphi^G}{\partial \mathbf{e}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) & \text{dans la matrice} \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 & \text{dans } V \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} = -p_e \mathbf{N} & \text{sur } \partial\omega_e, \mathbf{N} \text{ est la normale dirigée vers l'intérieur de } \omega_e \\ \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x} & \text{sur } \partial V \end{array} \right.$$

La contrainte effective $\boldsymbol{\Sigma}$ déduite de ce problème vaut $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_V$. Comme précisé dans Leblond (2003), le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ est prolongé par $-p_e \mathbf{I}$ dans ω_e . Ainsi, $\boldsymbol{\sigma}$ vérifie bien $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} = -p_e \mathbf{N}$ sur $\partial\omega_e$ et $\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ dans V . Le champ de vitesse $\dot{\mathbf{u}}$ est prolongé dans ω_e de façon à être de classe C^1 dans V .

La loi de comportement du problème donné ci-dessus peut s'écrire dans la matrice :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial(\varphi^G(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) - 3p_b \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m)}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}. \quad (\text{J.1})$$

Le principe variationnel (équations (2.13) et (2.21)) donne :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}, p_b, p_e) \leq \Phi^+(\dot{\mathbf{E}}, p_b, p_e) = \inf_{\dot{\mathbf{v}} \in \mathcal{K}(\dot{\mathbf{E}})} \frac{1}{|V|} \left(\int_M (\varphi^G(\varepsilon(\dot{\mathbf{v}})) - 3p_b \varepsilon_m(\dot{\mathbf{v}})) d\mathbf{x} + \int_{\omega_e} \boldsymbol{\sigma} : \varepsilon(\dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} \right). \quad (\text{J.2})$$

Etant donné que $\boldsymbol{\sigma} = -p_e \mathbf{I}$ dans ω_e , il vient :

$$\begin{aligned} \Phi^+(\dot{\mathbf{E}}, p_b, p_e) &= \inf_{\dot{\mathbf{v}} \in \mathcal{K}(\dot{\mathbf{E}})} (1 - f_e) \langle \varphi^G(\varepsilon(\dot{\mathbf{v}})) - 3p_b \varepsilon_m(\dot{\mathbf{v}}) \rangle_M - 3p_e f_e \langle \varepsilon_m(\dot{\mathbf{v}}) \rangle_{\omega_e} \\ &= \inf_{\dot{\mathbf{v}} \in \mathcal{K}(\dot{\mathbf{E}})} (1 - f_e) \langle \varphi^G(\varepsilon(\dot{\mathbf{v}})) - 3(p_b - p_e) \varepsilon_m(\dot{\mathbf{v}}) \rangle_M - 3p_e \dot{E}_m. \end{aligned} \quad (\text{J.3})$$

Pour des raisons de simplicité, $\varepsilon(\dot{\mathbf{v}})$ est noté $\dot{\varepsilon}$. Soit $\varphi_p(\dot{\varepsilon})$ tel que :

$$\varphi_p(\dot{\varepsilon}) = \varphi^G(\dot{\varepsilon}) - 3p\dot{\varepsilon}_m = \varphi^G(\dot{\varepsilon}) - w_o(\dot{\varepsilon}) + w_o(\dot{\varepsilon}) - 3p\dot{\varepsilon}_m. \quad (\text{J.4})$$

Le potentiel w_o est le potentiel quadratique en taux de déformation de la matrice du "composite linéaire de comparaison" (CLC). La matrice du CLC a un tenseur de raideur noté \mathbf{C}_o^1 . Le CLC est pris de même géométrie que le milieu non linéaire.

$$\varphi_p(\dot{\varepsilon}) \leq \sup_{\dot{\varepsilon}} (\varphi^G(\dot{\varepsilon}) - w_o(\dot{\varepsilon})) + w_o(\dot{\varepsilon}) - 3p\dot{\varepsilon}_m \quad (\text{J.5})$$

Soit $V(\mathbf{C}_o^1)$:

$$V(\mathbf{C}_o^1) = \sup_{\dot{\varepsilon}} (\varphi^G(\dot{\varepsilon}) - w_o(\dot{\varepsilon})). \quad (\text{J.6})$$

Ainsi :

$$\langle \varphi_p(\dot{\varepsilon}) \rangle_M \leq \langle V(\mathbf{C}_o^1) \rangle_M + \langle w_o(\dot{\varepsilon}) - 3p\dot{\varepsilon}_m \rangle_M. \quad (\text{J.7})$$

Vu que V est indépendant de $\dot{\varepsilon}$:

$$\inf_{\dot{\mathbf{v}} \in \mathcal{K}(\dot{\mathbf{E}})} (\langle \varphi_p \rangle_M) \leq \langle V(\mathbf{C}_o^1) \rangle_M + \inf_{\dot{\mathbf{v}} \in \mathcal{K}(\dot{\mathbf{E}})} (\langle w_o(\dot{\varepsilon}) - 3p\dot{\varepsilon}_m \rangle_M) \quad (\text{J.8})$$

$$\leq \inf_{\mathbf{C}_o^1 > 0} \left(V(\mathbf{C}_o^1) + \frac{W_o^{hom}(\dot{\mathbf{E}}, p)}{1 - f_e} \right), \quad (\text{J.9})$$

avec :

$$W_o^{hom}(\dot{\mathbf{E}}, p) = (1 - f_e) \inf_{\dot{\mathbf{v}} \in \mathcal{K}(\dot{\mathbf{E}})} (\langle w_o(\dot{\varepsilon}) - 3p\dot{\varepsilon}_m \rangle_M). \quad (\text{J.10})$$

J.1.1 Etude de $W_o^{hom}(\dot{\mathbf{E}}, p)$

$W_o^{hom}(\dot{\mathbf{E}}, p)$ est le potentiel effectif du problème suivant : une matrice de potentiel $w_o(\dot{\varepsilon}) - 3p\dot{\varepsilon}_m$ dans laquelle sont plongés des pores ω_e sans pression interne. Le champ $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x}$ est appliqué sur le bord du domaine total V . Dans la matrice, la loi de comportement s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial(w_o(\dot{\varepsilon}) - 3p\dot{\varepsilon}_m)}{\partial \dot{\varepsilon}} = \mathbf{C}_o^1 : \dot{\varepsilon} - p\mathbf{I} \quad (\text{J.11})$$

$$\boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I} = \mathbf{C}_o^1 : \dot{\varepsilon}. \quad (\text{J.12})$$

C'est à dire que le problème s'écrit :

$$(\mathcal{P}_o) \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I} = \mathbf{C}_o^1 : \dot{\varepsilon} & \text{dans la matrice} \\ \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 & \text{dans } V \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} = 0 \cdot \mathbf{N} & \text{sur } \partial\omega_e \\ \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x} & \text{sur } \partial V \end{cases}$$

On effectue le changement de variable $\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I}$ et on obtient le problème en posant $p^* = -p$:

$$(\mathcal{P}_o^*) \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{C}_o^1 : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} & \text{dans la matrice} \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^*) = 0 & \text{dans } V \\ \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{N} = -p^* \cdot \mathbf{N} & \text{sur } \partial\omega_e \\ \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x} & \text{sur } \partial V \end{cases}$$

Afin de déterminer $W_o^{hom}(\dot{\mathbf{E}}, p)$, il est nécessaire de connaître le potentiel effectif d'un milieu poreux élastique linéaire saturé. C'est l'objet de la section suivante.

J.1.2 Problème général du milieu poreux saturé élastique linéaire

Soit un milieu poreux dont la matrice est élastique linéaire. Le volume occupé par les pores est noté $|\omega_e|$. Les pores sont sous pression p . Le volume total est noté $|V|$. Le problème s'écrit :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\epsilon} & \text{dans la matrice} \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 & \text{dans } V \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} = -p \cdot \mathbf{N} & \text{sur } \partial\omega_e \\ \mathbf{u} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} & \text{sur } \partial V \end{cases}$$

Par linéarité, l'énergie du problème (\mathcal{P}) est une fonction quadratique par rapport à \mathbf{E} et p . Nous montrons dans ce paragraphe que l'énergie de (\mathcal{P}) s'écrit sous la forme (voir aussi Dormieux et al. (2006)) :

$$\mathcal{E} = \frac{|V|}{2} \mathbf{E} : \mathbf{C}^{hom} : \mathbf{E} - |V| p \mathbf{B} : \mathbf{E} - \frac{|V|}{2} \frac{p^2}{M}, \quad (\text{J.13})$$

où les quantités \mathbf{B} et $\frac{1}{M}$ sont explicités dans la suite.

Le théorème de superposition permet de décomposer ce problème en deux sous problèmes :

$$(\mathcal{P}') \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\epsilon}' & \text{dans la matrice} \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}') = 0 & \text{dans } V \\ \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{N} = 0 \cdot \mathbf{N} & \text{sur } \partial\omega_e \\ \mathbf{u} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} & \text{sur } \partial V \end{cases} + (\mathcal{P}'') \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}'' = \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\epsilon}'' & \text{dans la matrice} \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}'') = 0 & \text{dans } V \\ \boldsymbol{\sigma}'' \cdot \mathbf{N} = -p \cdot \mathbf{N} & \text{sur } \partial\omega_e \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial V \end{cases}$$

Le volume occupé par la matrice est noté $|M| = |V - \omega_e|$.

$$\langle \boldsymbol{\sigma}' \rangle_V = \frac{1}{|V|} \int_M \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{C}^{hom} : \mathbf{E} \quad (\text{J.14})$$

Le problème (\mathcal{P}'') étant linéaire, un tenseur d'ordre 2, appelé \mathbf{B} , tenseur de Biot, est introduit :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}'' \rangle_V = -p \mathbf{B}. \quad (\text{J.15})$$

Le tenseur \mathbf{B} se détermine comme ceci : le théorème de Hill est d'abord appliqué deux fois.

$$\langle \boldsymbol{\sigma}'' : \boldsymbol{\epsilon}' \rangle_V = \langle \boldsymbol{\sigma}'' \rangle_V : \langle \boldsymbol{\epsilon}' \rangle_V = -p \mathbf{B} : \mathbf{E} \quad (\text{J.16})$$

et :

$$\langle \boldsymbol{\epsilon}'' : \boldsymbol{\sigma}' \rangle_V = \langle \boldsymbol{\epsilon}'' \rangle_V : \langle \boldsymbol{\sigma}' \rangle_V = 0. \quad (\text{J.17})$$

La dernière égalité vient du fait que $\langle \boldsymbol{\epsilon}'' \rangle_V = 0$.

Vu que $\boldsymbol{\sigma}'' = \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\epsilon}''$ dans M et que $\boldsymbol{\sigma}''$ est prolongé par $-p\mathbf{I}$ dans ω_e , cela donne :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}'' : \boldsymbol{\epsilon}' \rangle_V = \frac{1}{|V|} \left(\int_M \boldsymbol{\epsilon}'' : \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\epsilon}' + \int_{\omega_e} -p \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}') \right). \quad (\text{J.18})$$

De plus :

$$\begin{aligned} \int_M \boldsymbol{\epsilon}'' : \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\epsilon}' &= \int_M \boldsymbol{\epsilon}'' : \boldsymbol{\sigma}' \quad \text{car } \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\epsilon}' \text{ dans } M \\ &= \int_V \boldsymbol{\epsilon}'' : \boldsymbol{\sigma}' - \int_{\omega_e} \boldsymbol{\epsilon}'' : \boldsymbol{\sigma}' \\ &= - \int_{\omega_e} \boldsymbol{\epsilon}'' : \boldsymbol{\sigma}' \quad \text{équation (J.17)} \\ &= 0 \quad \text{car } \boldsymbol{\sigma}' = 0 \text{ dans } \omega_e. \end{aligned} \quad (\text{J.19})$$

Les équations (J.18) et (J.19) donnent :

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma}'' : \boldsymbol{\epsilon}' \rangle_V &= \frac{1}{|V|} \left(\int_{\omega_e} -p \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}') \right) \\ &= -pf_e \frac{1}{|\omega_e|} \int_{\omega_e} \boldsymbol{\epsilon}' : \mathbf{I} = -pf_e \langle \mathbf{E} : \mathbf{A} : \mathbf{I} \rangle_{\omega_e} = -pf_e \mathbf{E} : \langle \mathbf{A} : \mathbf{I} \rangle_{\omega_e}. \end{aligned} \quad (\text{J.20})$$

\mathbf{A} est le tenseur de localisation : $\boldsymbol{\epsilon}'(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) : \mathbf{E}$. Les équations (J.16) et (J.20) donnent :

$$-p\mathbf{B} : \mathbf{E} = -pf_e \mathbf{E} : \langle \mathbf{A} : \mathbf{I} \rangle_{\omega_e} \quad (\text{J.21})$$

$$\mathbf{B} = f_e \langle \mathbf{A} : \mathbf{I} \rangle_{\omega_e}. \quad (\text{J.22})$$

De plus :

$$\mathbf{C}^{hom} = (1 - f_e)\mathbf{C}_o : \langle \mathbf{A} \rangle_M \Leftrightarrow \langle \mathbf{A} \rangle_M = \frac{1}{1 - f_e} (\mathbf{C}_o)^{-1} : \mathbf{C}^{hom}. \quad (\text{J.23})$$

$$(1 - f_e)\langle \mathbf{A} \rangle_M + f_e \langle \mathbf{A} \rangle_{\omega_e} = \mathbf{ID} \Leftrightarrow f_e \langle \mathbf{A} \rangle_{\omega_e} = \mathbf{ID} - (1 - f_e)\langle \mathbf{A} \rangle_M \quad (\text{J.24})$$

$$f_e \langle \mathbf{A} \rangle_{\omega_e} = \mathbf{ID} - (\mathbf{C}_o)^{-1} : \mathbf{C}^{hom}. \quad (\text{J.25})$$

Ainsi :

$$\mathbf{B} = \mathbf{I} : \left(\mathbf{ID} - (\mathbf{C}_o)^{-1} : \mathbf{C}^{hom} \right) \quad \text{Tenseur de Biot.} \quad (\text{J.26})$$

Si le milieu est isotrope (matrice isotrope et distribution isotrope des pores) :

$$\mathbf{B} = b\mathbf{I}, \quad \text{avec } b = 1 - \frac{k^{hom}}{k_o}. \quad (\text{J.27})$$

k_o est le coefficient de compressibilité de la matrice.

L'énergie totale du problème (\mathcal{P}'') s'écrit :

$$\mathcal{E}'' = \frac{1}{2} \int_M \boldsymbol{\epsilon}'' : \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\epsilon}'' + \int_{\omega_e} (-p) \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}''). \quad (\text{J.28})$$

Or :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_M \boldsymbol{\epsilon}'' : \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\epsilon}'' &= \frac{1}{2} \int_M \boldsymbol{\sigma}'' : \boldsymbol{\epsilon}'' \quad \text{car } \boldsymbol{\sigma}'' = \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\epsilon}'' \text{ dans } M \\
 &= \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}'' : \boldsymbol{\epsilon}'' - \frac{1}{2} \int_{\omega_e} \boldsymbol{\sigma}'' : \boldsymbol{\epsilon}'' \\
 &= \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}'' : \int_V \boldsymbol{\epsilon}'' + \frac{1}{2} \int_{\omega_e} p \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}'') \quad \text{lemme de Hill et } \boldsymbol{\sigma}'' = -p\mathbf{I} \text{ dans } \omega_e \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\omega_e} p \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}'') \quad \text{car } \langle \boldsymbol{\epsilon}'' \rangle_V = 0.
 \end{aligned} \tag{J.29}$$

D'après (J.28) :

$$\mathcal{E}'' = -\frac{1}{2} \int_{\omega_e} p \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}''). \tag{J.30}$$

Par linéarité de (\mathcal{P}'') , il existe \mathbf{a} tel que : $\boldsymbol{\epsilon}'' = -\mathbf{a}p$. Alors :

$$\mathcal{E}'' = \frac{1}{2} p^2 \int_{\omega_e} \mathbf{a} : \mathbf{I} \tag{J.31}$$

De plus :

$$\langle \boldsymbol{\epsilon}'' \rangle_V = 0 = f_e(-p) \langle \mathbf{a} \rangle_{\omega_e} + (1 - f_e)(-p) \langle \mathbf{a} \rangle_M. \tag{J.32}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 \langle \boldsymbol{\sigma}'' \rangle_V &= -p\mathbf{B} \quad \text{d'après (J.15)} \\
 &= (1 - f_e) \langle \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\epsilon}'' \rangle_M + f_e(-p\mathbf{I}) \\
 &= (1 - f_e) \mathbf{C}_o : \langle -\mathbf{a}p \rangle_M - f_e p \mathbf{I}.
 \end{aligned} \tag{J.33}$$

$$-\mathbf{B} = -(1 - f_e) \mathbf{C}_o : \langle \mathbf{a} \rangle_M - f_e \mathbf{I} \tag{J.34}$$

$$(1 - f_e) \langle \mathbf{a} \rangle_M = (\mathbf{C}_o)^{-1} : (\mathbf{B} - f_e \mathbf{I}). \tag{J.35}$$

D'après (J.32) :

$$\langle \mathbf{a} \rangle_{\omega_e} = \frac{1}{f_e} \left((\mathbf{C}_o)^{-1} : (f_e \mathbf{I} - \mathbf{B}) \right). \tag{J.36}$$

Cela donne :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}'' &= \frac{1}{2} p^2 \int_{\omega_e} \mathbf{a} : \mathbf{I} = \frac{1}{2} p^2 |\omega_e| \frac{1}{|\omega_e|} \int_{\omega_e} \mathbf{a} : \mathbf{I} = \frac{1}{2} p^2 |\omega_e| \frac{1}{f_e} \left((\mathbf{C}_o)^{-1} : (f_e \mathbf{I} - \mathbf{B}) \right) : \mathbf{I} \\
 &= \frac{1}{2} p^2 |V| \left((\mathbf{C}_o)^{-1} : (f_e \mathbf{I} - \mathbf{B}) \right) : \mathbf{I} = -\frac{1}{2} \frac{p^2}{M} |V|,
 \end{aligned} \tag{J.37}$$

avec :

$$\frac{1}{M} = \mathbf{I} : (\mathbf{C}_o)^{-1} : (\mathbf{B} - f_e \mathbf{I}) \quad \text{Module de Biot.} \tag{J.38}$$

L'énergie totale du problème s'écrit :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_M \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\epsilon} + \int_{\omega_e} (-p) \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}). \quad (\text{J.39})$$

De plus, vu que $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}' + \boldsymbol{\epsilon}''$ et $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' + \boldsymbol{\sigma}''$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \int_M (\boldsymbol{\epsilon}' + \boldsymbol{\epsilon}'') : (\boldsymbol{\sigma}' + \boldsymbol{\sigma}'') - \int_{\omega_e} p \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}') - \int_{\omega_e} p \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}'') \\ &= \frac{1}{2} \int_M \boldsymbol{\epsilon}' : \boldsymbol{\sigma}' - \int_{\omega_e} p \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}') \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_M \boldsymbol{\epsilon}'' : \boldsymbol{\sigma}'' - \int_{\omega_e} p \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}'') + \frac{1}{2} \left(\int_M \boldsymbol{\epsilon}' : \boldsymbol{\sigma}'' + \int_M \boldsymbol{\epsilon}'' : \boldsymbol{\sigma}' \right) \end{aligned} \quad (\text{J.40})$$

$$\begin{aligned} \int_M \boldsymbol{\epsilon}'' : \boldsymbol{\sigma}' &= \int_V \boldsymbol{\epsilon}'' : \boldsymbol{\sigma}' \quad \text{car } \boldsymbol{\sigma}' = 0 \text{ dans } \omega_e \\ &= \int_V \boldsymbol{\epsilon}'' : \int_V \boldsymbol{\sigma}' \quad \text{lemme de Hill} \\ &= 0 \quad \text{car } \langle \boldsymbol{\epsilon}'' \rangle_V = 0 \\ &= \int_M \boldsymbol{\epsilon}'' : \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\epsilon}' \quad \text{car } \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\epsilon}' \text{ dans } M \\ &= \int_M \boldsymbol{\sigma}'' : \boldsymbol{\epsilon}' \quad \text{car } \boldsymbol{\sigma}'' = \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\epsilon}'' \text{ dans } M. \end{aligned} \quad (\text{J.41})$$

Les équations (J.40), (J.41) et (J.28) (avec $\boldsymbol{\sigma}'' = \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\epsilon}''$ dans M) donnent :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \int_M \boldsymbol{\epsilon}' : \boldsymbol{\sigma}' - \int_{\omega_e} p \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}') + \mathcal{E}'' \\ &= \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\epsilon}' : \boldsymbol{\sigma}' - \int_{\omega_e} p \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}') + \mathcal{E}'' \quad \text{car } \boldsymbol{\sigma}' = 0 \text{ dans } \omega_e. \end{aligned} \quad (\text{J.42})$$

Les équations (J.37), (J.42) et $\frac{1}{|V|} \int_V \boldsymbol{\epsilon}' : \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{E} : \mathbf{C}^{hom} : \mathbf{E}$ donnent :

$$\mathcal{E} = \frac{|V|}{2} \mathbf{E} : \mathbf{C}^{hom} : \mathbf{E} - \int_{\omega_e} p \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}') - \frac{1}{2} \frac{p^2}{M} |V|. \quad (\text{J.43})$$

Les relations $\boldsymbol{\epsilon}'(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) : \mathbf{E}$ puis $\langle \mathbf{A} \rangle_M = \frac{1}{1-f_e} (\mathbf{C}_o)^{-1} : \mathbf{C}^{hom}$ puis $\mathbf{B} = f_e \langle \mathbf{A} : \mathbf{I} \rangle_{\omega_e}$ sont utilisées pour écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\omega_e} \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}') &= \int_V \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}') - \int_M \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}') = |V| \text{Tr}(\mathbf{E}) - \int_M \mathbf{E} : \mathbf{A} : \mathbf{I} \\ &= |V| \text{Tr}(\mathbf{E}) - \mathbf{E} : |M| \langle \mathbf{A} : \mathbf{I} \rangle_M = |V| \text{Tr}(\mathbf{E}) - |V| (1-f_e) \mathbf{E} : \langle \mathbf{A} \rangle_M : \mathbf{I} \\ &= |V| \text{Tr}(\mathbf{E}) - |V| \mathbf{E} : \left((\mathbf{C}_o)^{-1} : \mathbf{C}^{hom} \right) : \mathbf{I} = |V| \mathbf{E} : \left(\mathbf{I} \mathbf{D} - (\mathbf{C}_o)^{-1} : \mathbf{C}^{hom} \right) : \mathbf{I} \\ &= |V| \mathbf{E} : \mathbf{B} = |V| \mathbf{B} : \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (\text{J.44})$$

Au final :

$$\mathcal{E} = \frac{|V|}{2} \mathbf{E} : \mathbf{C}^{hom} : \mathbf{E} - |V| p \mathbf{B} : \mathbf{E} - \frac{|V|}{2} \frac{p^2}{M}. \quad (\text{J.45})$$

J.1.3 Energie du problème (\mathcal{P}_o)

L'énergie du problème (\mathcal{P}_o), notée \mathcal{E}_o , est la même que celle du problème (\mathcal{P}_o^*) (un simple changement de variable a permis d'établir (\mathcal{P}_o^*) à partir de (\mathcal{P}_o)).

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_o &= \frac{1}{2} \int_M \dot{\varepsilon} : \mathbf{C}_o^1 : \dot{\varepsilon} - \int_{\omega_e} p^* \text{Tr}(\dot{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \int_M \dot{\varepsilon} : \mathbf{C}_o^1 : \dot{\varepsilon} - \left(\int_V p^* \text{Tr}(\dot{\varepsilon}) - \int_M p^* \text{Tr}(\dot{\varepsilon}) \right) \\
 &= \int_M w_o(\dot{\varepsilon}) + \int_V p \text{Tr}(\dot{\varepsilon}) - \int_M p \text{Tr}(\dot{\varepsilon}) = \int_M w_o(\dot{\varepsilon}) + p \text{Tr}(\dot{\mathbf{E}})|V| - \int_M p \text{Tr}(\dot{\varepsilon}) \\
 &= \int_M (w_o(\dot{\varepsilon}) - p \text{Tr}(\dot{\varepsilon})) + |V|p \text{Tr}(\dot{\mathbf{E}}) = |M| \langle w_o(\dot{\varepsilon}) - p \text{Tr}(\dot{\varepsilon}) \rangle_M + |V|p \text{Tr}(\dot{\mathbf{E}})
 \end{aligned} \tag{J.46}$$

Or :

$$\mathcal{E}_o = \frac{1}{2} |V| \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{C}_o^{hom} : \dot{\mathbf{E}} - |V| p^* \mathbf{B} : \dot{\mathbf{E}} - \frac{1}{2} |V| \frac{(p^*)^2}{M} \tag{J.47}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 \langle w_o(\dot{\varepsilon}) - p \text{Tr}(\dot{\varepsilon}) \rangle_M &= \left(\frac{\mathcal{E}_o}{|V|} - p \text{Tr}(\dot{\mathbf{E}}) \right) \frac{1}{1 - f_e} \\
 &= \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{C}_o^{hom} : \dot{\mathbf{E}} - p^* \mathbf{B} : \dot{\mathbf{E}} - \frac{1}{2} \frac{(p^*)^2}{M} - p \text{Tr}(\dot{\mathbf{E}}) \right) \frac{1}{1 - f_e} \\
 &= \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{C}_o^{hom} : \dot{\mathbf{E}} + p \mathbf{B} : \dot{\mathbf{E}} - \frac{1}{2} \frac{p^2}{M} - p \text{Tr}(\dot{\mathbf{E}}) \right) \frac{1}{1 - f_e} \\
 &= \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{C}_o^{hom} : \dot{\mathbf{E}} + p (\mathbf{B} - \mathbf{I}) : \dot{\mathbf{E}} - \frac{1}{2} \frac{p^2}{M} \right) \frac{1}{1 - f_e}.
 \end{aligned} \tag{J.48}$$

Le potentiel $W_o^{hom}(\dot{\mathbf{E}}, p)$ s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
 W_o^{hom}(\dot{\mathbf{E}}, p) &= (1 - f_e) \inf_{\dot{\mathbf{v}} \in \mathcal{K}(\dot{\mathbf{E}})} (\langle w_o(\varepsilon(\dot{\mathbf{v}})) - 3p\varepsilon_m(\dot{\mathbf{v}}) \rangle_M) \\
 &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{C}_o^{hom} : \dot{\mathbf{E}} + p (\mathbf{B} - \mathbf{I}) : \dot{\mathbf{E}} - \frac{1}{2} \frac{p^2}{M}.
 \end{aligned} \tag{J.49}$$

J.1.4 Ecriture de la méthode sécante modifiée

D'après l'inéquation (J.9), les conditions d'optimalité par rapport à \mathbf{C}_o^1 sont les suivantes :

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{C}_o^1} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_o^1} \left(\frac{1}{2(1 - f_e)} \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{C}_o^{hom} : \dot{\mathbf{E}} \right) + \frac{p}{1 - f_e} \frac{\partial \mathbf{B} : \dot{\mathbf{E}}}{\partial \mathbf{C}_o^1} - \frac{1}{2(1 - f_e)} p^2 \frac{\partial \left(\frac{1}{M} \right)}{\partial \mathbf{C}_o^1} = 0. \tag{J.50}$$

Cette inéquation peut se réécrire en :

$$\begin{aligned}
 \inf_{\dot{\mathbf{v}} \in \mathcal{K}(\dot{\mathbf{E}})} \langle \varphi_p \rangle_M &\leq \inf_{\mathbf{C}_o^1 > 0} \left(V(\mathbf{C}_o^1) + \inf_{\dot{\mathbf{v}} \in \mathcal{K}(\dot{\mathbf{E}})} \langle w_o(\dot{\varepsilon}) - 3p\dot{\varepsilon}_m \rangle_M \right) \\
 &\leq \inf_{\mathbf{C}_o^1 > 0} \left(V(\mathbf{C}_o^1) + \inf_{\dot{\mathbf{v}} \in \mathcal{K}(\dot{\mathbf{E}})} \langle \mathbf{C}_o^1 :: \dot{\mathbf{E}} - 3p\dot{\varepsilon}_m \rangle_M \right).
 \end{aligned} \tag{J.51}$$

Le tenseur $\dot{\mathbf{E}}$ est un tenseur d'ordre 4 et vaut $\frac{1}{2} \dot{\varepsilon} \otimes \dot{\varepsilon}$.

$$\begin{aligned}
 \inf_{\dot{\mathbf{v}} \in \mathcal{K}(\dot{\mathbf{E}})} \langle \varphi_p \rangle_M &\leq \inf_{\mathbf{C}_o^1 > 0} \left(V(\mathbf{C}_o^1) + \inf_{\dot{\mathbf{v}} \in \mathcal{K}(\dot{\mathbf{E}})} \left(\mathbf{C}_o^1 :: \bar{\mathbf{E}}^{(1)} - 3p \langle \dot{\varepsilon}_m \rangle_M \right) \right) \\
 &\leq \inf_{\mathbf{C}_o^1 > 0} \left(V(\mathbf{C}_o^1) + \mathbf{C}_o^1 :: \bar{\mathbf{E}}^{(1)}(\dot{\mathbf{u}}) - 3p \langle \varepsilon_m(\dot{\mathbf{u}}) \rangle_M \right)
 \end{aligned} \tag{J.52}$$

Le tenseur $\bar{\bar{\mathbb{E}}}^{(1)}$ représente la moyenne volumique de $\bar{\mathbb{E}}$ sur la phase 1, c'est à dire la phase matrice. Le champ de vitesse $\dot{\mathbf{u}}$ est le champ solution. Les conditions d'optimalité par rapport à \mathbf{C}_o^1 s'écrivent donc :

$$\bar{\bar{\mathbb{E}}}^{(1)} = -\frac{\partial V(\mathbf{C}_o^1)}{\partial \mathbf{C}_o^1}. \quad (\text{J.53})$$

Les conditions d'optimalité par rapport à \mathbf{C}_o^1 donnent donc en utilisant (J.50) et (J.53) :

$$\bar{\bar{\mathbb{E}}}^{(1)} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_o^1} \left(\frac{1}{2(1-f_e)} \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{C}_o^{hom} : \dot{\mathbf{E}} \right) + \frac{p}{1-f_e} \frac{\partial \mathbf{B} : \dot{\mathbf{E}}}{\partial \mathbf{C}_o^1} - \frac{1}{2(1-f_e)} p^2 \frac{\partial \left(\frac{1}{M} \right)}{\partial \mathbf{C}_o^1} \quad (\text{J.54})$$

$$V(\mathbf{C}_o^1) = \sup_{\mathbb{D}} \left(\varphi^G(\mathbb{D}) - w_o(\mathbb{D}) \right) = -\inf_{\mathbb{D}} \left(w_o(\mathbb{D}) - \varphi^G(\mathbb{D}) \right). \quad (\text{J.55})$$

Cela permet d'exhiber le dual de V :

$$V_*(\mathbb{D}) = -\varphi^G(\mathbb{D}). \quad (\text{J.56})$$

L'équation (J.53) donne :

$$\mathbf{C}_o^1 = \frac{\partial \varphi^G}{\partial \mathbb{D}}(\bar{\bar{\mathbb{E}}}^{(1)}). \quad (\text{J.57})$$

J.1.5 Récapitulatif pour la méthode sécante modifiée

Le système non linéaire d'équation à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \bar{\bar{\mathbb{E}}}^{(1)} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_o^1} \left(\frac{1}{2(1-f_e)} \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{C}_o^{hom} : \dot{\mathbf{E}} \right) + \frac{p}{1-f_e} \frac{\partial \mathbf{B} : \dot{\mathbf{E}}}{\partial \mathbf{C}_o^1} - \frac{1}{2(1-f_e)} p^2 \frac{\partial \left(\frac{1}{M} \right)}{\partial \mathbf{C}_o^1} \\ \mathbf{C}_o^1 = \frac{\partial \varphi^G}{\partial \mathbb{D}}(\bar{\bar{\mathbb{E}}}^{(1)}) \end{cases} \quad (\text{J.58})$$

Lorsque \mathbf{C}_o^1 vérifie ces deux équations, alors :

$$\Phi^+(\dot{\mathbf{E}}, p_b, p_e) \leq \Phi^{++}(\dot{\mathbf{E}}, p_b, p_e), \quad \text{avec} \quad (\text{J.59})$$

$$\Phi^{++}(\dot{\mathbf{E}}, p_b, p_e) = (1-f_e) \left(V(\mathbf{C}_o^1) + \frac{1}{1-f_e} \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{C}_o^{hom} : \dot{\mathbf{E}} + \frac{p}{1-f_e} (\mathbf{B} - \mathbf{I}) : \dot{\mathbf{E}} - \frac{1}{2(1-f_e)} \frac{p^2}{M} \right) - 3p_e \dot{E}_m \quad (\text{J.60})$$

et :

$$\Sigma \approx \frac{\partial \Phi^{++}}{\partial \dot{\mathbf{E}}}(\dot{\mathbf{E}}, p_b, p_e) = \mathbf{C}_o^{hom} : \dot{\mathbf{E}} + p(\mathbf{B} - \mathbf{I}) - p_e \mathbf{I}. \quad (\text{J.61})$$

Les termes de ces équations doivent être explicités.

Pour le problème traité, \mathbf{B} et \mathbf{C}_o^{hom} sont isotropes.

Soit A un scalaire. Soit \mathbf{C} un tenseur d'ordre 4 isotrope, $\mathbf{C} = 3k\mathbf{J} + 2\mu\mathbf{K}$.

$$\frac{\partial A}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial A}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial A}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{C}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial A}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial A}{\partial k} \frac{1}{3} \mathbf{J} + \frac{\partial A}{\partial \mu} \frac{1}{10} \mathbf{K} \quad (\text{J.62})$$

Les relations $\frac{2}{3}\mathbf{J} :: \bar{\mathbb{D}}^{(1)} = \langle (\dot{d}_m)^2 \rangle_M$ et $\frac{4}{3}\mathbf{K} :: \bar{\mathbb{D}}^{(1)} = \langle (\dot{d}_{eq})^2 \rangle_M$ sont utilisées. Les notations suivantes sont introduites (valables dans cette section uniquement) :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2(1-f_e)} \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{C}_o^{hom} : \dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2(1-f_e)} \left(9k_o^{hom} (\dot{E}_m)^2 + 3\mu_o^{hom} (\dot{E}_{eq})^2 \right) \\ \mathcal{A}' &= \mathbf{B} : \dot{\mathbf{E}} \\ \mathcal{A}'' &= \frac{1}{M}. \end{aligned} \quad (\text{J.63})$$

Deplus, il est rappelé que : $\mathbf{J} :: \mathbf{J} = 1$, $\mathbf{K} :: \mathbf{K} = 5$ et $\mathbf{J} :: \mathbf{K} = 0$. Ces indications permettent de déterminer $\langle (\dot{\varepsilon}_m)^2 \rangle_M$ et $\langle (\dot{\varepsilon}_{eq})^2 \rangle_M$ sous la forme :

$$\langle (\dot{\varepsilon}_m)^2 \rangle_M = \frac{1}{(1-f_e)} \frac{\partial k_o^{hom}}{\partial k_o^1} (\dot{E}_m)^2 + \frac{1}{3(1-f_e)} \frac{\partial \mu_o^{hom}}{\partial k_o^1} (\dot{E}_{eq})^2 + \frac{2p}{3(1-f_e)} \dot{E}_m \frac{\partial b}{\partial k_o^1} - \frac{p^2}{9(1-f_e)} \frac{\partial \mathcal{A}''}{\partial k_o^1} \quad (\text{J.64})$$

$$\langle (\dot{\varepsilon}_{eq})^2 \rangle_M = \frac{3}{(1-f_e)} \frac{\partial k_o^{hom}}{\partial \mu_o^1} (\dot{E}_m)^2 + \frac{1}{(1-f_e)} \frac{\partial \mu_o^{hom}}{\partial \mu_o^1} (\dot{E}_{eq})^2 + \frac{2p}{(1-f_e)} \dot{E}_m \frac{\partial b}{\partial \mu_o^1} - \frac{p^2}{3(1-f_e)} \frac{\partial \mathcal{A}''}{\partial \mu_o^1}. \quad (\text{J.65})$$

Le fait que $b = 1 - \frac{k_o^{hom}}{k_o^1}$ et que $\mathcal{A}'' = \frac{b-f_e}{k_o^1}$ permet d'exprimer plus simplement $\langle (\dot{\varepsilon}_{eq})^2 \rangle_M$ et $\langle (\dot{\varepsilon}_m)^2 \rangle_M$:

$$\langle (\dot{\varepsilon}_{eq})^2 \rangle_M = \frac{1}{(1-f_e)} \frac{\partial \mu_o^{hom}}{\partial \mu_o^1} (\dot{E}_{eq})^2 + \frac{3}{(1-f_e)} \frac{\partial k_o^{hom}}{\partial \mu_o^1} \left(\dot{E}_m - \frac{p}{3k_o^1} \right)^2 \quad (\text{J.66})$$

$$\begin{aligned} \langle (\dot{\varepsilon}_m)^2 \rangle_M &= \frac{1}{3(1-f_e)} \frac{\partial \mu_o^{hom}}{\partial k_o^1} (\dot{E}_{eq})^2 + \frac{1}{1-f_e} \frac{\partial k_o^{hom}}{\partial k_o^1} \left(\dot{E}_m - \frac{p}{3k_o^1} \right)^2 \\ &+ \frac{2p}{3(1-f_e)} \dot{E}_m \frac{k_o^{hom}}{(k_o^1)^2} - \frac{p^2}{(k_o^1)^2 9(1-f_e)} \left(\frac{2k_o^{hom}}{k_o^1} - 1 + f_e \right). \end{aligned} \quad (\text{J.67})$$

Il est donc nécessaire de connaître : $\frac{\partial k_o^{hom}}{\partial k_o^1}$, $\frac{\partial k_o^{hom}}{\partial \mu_o^1}$, $\frac{\partial \mu_o^{hom}}{\partial k_o^1}$, $\frac{\partial \mu_o^{hom}}{\partial \mu_o^1}$.

Remarque J.1 (Particularité de la borne supérieure de Hashin et Shtrikman (1963))

Pour la borne supérieure de Hashin et Shtrikman (1963), les relations :

$$\frac{\partial k_o^{hom}}{\partial \mu_o^1} = -(k_o^1)^2 \frac{\partial \mathcal{A}''}{\partial \mu_o^1} = -k_o^1 \frac{\partial b}{\partial \mu_o^1} \quad (\text{J.68})$$

et

$$\frac{\partial k_o^{hom}}{\partial k_o^1} = \frac{\partial \mathcal{A}''}{\partial k_o^1} \left(-\frac{1}{f_e 29} \right) 16(\mu_o^1)^2 = \frac{\partial b}{\partial k_o^1} \left(\frac{1}{12f_e \mu_o^1} \right) 16(\mu_o^1)^2 \quad (\text{J.69})$$

permettent de réécrire plus simplement $\langle (\dot{\varepsilon}_m)^2 \rangle_M$ et $\langle (\dot{\varepsilon}_{eq})^2 \rangle_M$:

$$\langle (\dot{\varepsilon}_{eq})^2 \rangle_M = \frac{1}{(1-f_e)} \frac{\partial \mu_o^{hom}}{\partial \mu_o^1} (\dot{E}_{eq})^2 + \frac{\partial k_o^{hom}}{\partial \mu_o^1} \frac{3}{(1-f_e)} \left(\dot{E}_m - \frac{p}{3k_o^1} \right)^2 \quad (\text{J.70})$$

$$\langle (\dot{\varepsilon}_m)^2 \rangle_M = \frac{1}{3(1-f_e)} \frac{\partial \mu_o^{hom}}{\partial k_o^1} (\dot{E}_{eq})^2 + \frac{1}{(1-f_e)} \frac{\partial k_o^{hom}}{\partial k_o^1} \left(\dot{E}_m + \frac{pf_e}{4\mu_o^1} \right)^2. \quad (\text{J.71})$$

Il ne reste plus qu'à expliciter le terme $\mathbf{C}_o^1 = \frac{\partial \varphi^G}{\partial \mathbb{D}}(\bar{\mathbb{E}}^{(1)})$.

$$\frac{\partial \varphi^G}{\partial \mathbb{D}} = \frac{\partial \varphi^G}{\partial \dot{d}_m} \frac{\partial \dot{d}_m}{\partial \mathbb{D}} + \frac{\partial \varphi^G}{\partial \dot{d}_{eq}} \frac{\partial \dot{d}_{eq}}{\partial \mathbb{D}} \quad (\text{J.72})$$

Or $\mathbb{D} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}} \otimes \dot{\mathbf{d}}$, $(\dot{d}_m)^2 = \frac{2}{3} \mathbf{J} :: \mathbb{D}$ et $(\dot{d}_{eq})^2 = \frac{4}{3} \mathbf{K} :: \mathbb{D}$. D'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi^G}{\partial \mathbb{D}}(\dot{\mathbb{E}}) &= \sigma_0 \int_{q_1 f_b}^1 \left(\frac{4\dot{\varepsilon}_m^2}{y^2} + \frac{\dot{\varepsilon}_{eq}^2}{q_3} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{4}{y^2} \dot{\varepsilon}_m dy \frac{1}{3\dot{\varepsilon}_m} \mathbf{J} + \sigma_0 \int_{q_1 f_b}^1 \left(\frac{4\dot{\varepsilon}_m^2}{y^2} + \frac{\dot{\varepsilon}_{eq}^2}{q_3} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{q_3} \dot{\varepsilon}_{eq} \right) dy \frac{2}{3\dot{\varepsilon}_{eq}} \mathbf{K} \\ &= \sigma_0 \int_{q_1 f_b}^1 \left(\frac{4\dot{\varepsilon}_m^2}{y^2} + \frac{\dot{\varepsilon}_{eq}^2}{q_3} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{4}{3y^2} dy \mathbf{J} + \sigma_0 \int_{q_1 f_b}^1 \left(\frac{4\dot{\varepsilon}_m^2}{y^2} + \frac{\dot{\varepsilon}_{eq}^2}{q_3} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3q_3} \right) dy \mathbf{K} \\ &= \mathfrak{A} \mathbf{J} + \mathfrak{B} \mathbf{K}. \end{aligned} \quad (\text{J.73})$$

Avec, après calculs :

$$\mathfrak{A} = \frac{2}{3} \sigma_0 \frac{1}{\sqrt{(\dot{\varepsilon}_m)^2}} \left(-\text{Arcsinh} \left(2 \sqrt{\frac{(\dot{\varepsilon}_m)^2}{(\dot{\varepsilon}_{eq})^2} q_3} \right) + \text{Arcsinh} \left(\frac{2}{f_{qb}} \sqrt{\frac{(\dot{\varepsilon}_m)^2}{(\dot{\varepsilon}_{eq})^2} q_3} \right) \right) \quad (\text{J.74})$$

$$\mathfrak{B} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{(\dot{\varepsilon}_{eq})^2} \left(\sqrt{4(\dot{\varepsilon}_m)^2 + \frac{(\dot{\varepsilon}_{eq})^2}{q_3}} - f_{qb} \sqrt{\frac{4(\dot{\varepsilon}_m)^2}{(f_{qb})^2} + \frac{(\dot{\varepsilon}_{eq})^2}{q_3}} \right). \quad (\text{J.75})$$

Le tenseur $\mathbf{C}_o^1 = 3k_o^1 \mathbf{J} + 2\mu_o^1 \mathbf{K}$ est ainsi réactualisé avec $k_o^1 = \frac{1}{3} \mathfrak{A}$ et $\mu_o^1 = \frac{1}{2} \mathfrak{B}$.

J.2 Modèle MSMN sphérique

Le cas des cavités sphériques est traité ici. Le composite linéaire de comparaison possède cette fois N phases. Cela permet de mieux prendre en compte l'hétérogénéité de \mathbb{E} dans la matrice.

L'équation (J.3) est toujours valable. Le domaine $M = V - \omega_e$ est découpé en $(N - 1)$ phases Ω_i (i variant de 2 à N). La fraction volumique de chaque phase Ω_i est notée f_i .

$$\begin{aligned} \Phi^+(\dot{\mathbf{E}}, p_b, p_e) &= \inf_{\dot{\mathbf{v}} \in \mathcal{K}(\dot{\mathbf{E}})} \left(\sum_{i=2}^{i=N} f_i \langle \varphi^G(\varepsilon(\dot{\mathbf{v}})) - 3p_e \varepsilon_m(\dot{\mathbf{v}}) \rangle_{\Omega_i} \right) - 3p_e \dot{E}_m \\ &= \inf_{\dot{\mathbf{v}} \in \mathcal{K}(\dot{\mathbf{E}})} \left(\sum_{i=2}^{i=N} f_i \langle \varphi_p^i(\varepsilon(\dot{\mathbf{v}})) \rangle_{\Omega_i} \right) - 3p_e \dot{E}_m \end{aligned} \quad (\text{J.76})$$

$$\varphi_p^i(\dot{\varepsilon}) = \varphi^G(\dot{\varepsilon}) - 3p_e \dot{\varepsilon}_m = \varphi^G(\dot{\varepsilon}) - w_o^i(\dot{\varepsilon}) + w_o^i(\dot{\varepsilon}) - 3p_e \dot{\varepsilon}_m. \quad (\text{J.77})$$

Le potentiel w_o^i est le potentiel en taux de déformation de la phase i du CLC. La phase i du CLC a pour tenseur de raideur \mathbf{C}_o^i (des modules de compressibilité et de cisaillement k_o^i et μ_o^i).

Soit :

$$V^{(i)} = \sup_{\dot{\varepsilon}} (\varphi^G(\dot{\varepsilon}) - w_o^i(\dot{\varepsilon})). \quad (\text{J.78})$$

Dans chaque phase $2 \leq i \leq N$:

$$\varphi_p^i(\dot{\varepsilon}) \leq V^{(i)} + w_o^i(\dot{\varepsilon}) - 3p_e \dot{\varepsilon}_m \quad (\text{J.79})$$

$$\langle \varphi_p^i(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \rangle_{\Omega_i} \leq V^{(i)} + \langle w_o^i(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) - 3p\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m \rangle_{\Omega_i}. \quad (\text{J.80})$$

$$\begin{aligned} \Phi^+(\dot{\boldsymbol{E}}, p_b, p_e) + 3p_e \dot{E}_m &= \inf_{\dot{\boldsymbol{v}} \in \mathcal{K}(\dot{\boldsymbol{E}})} \left(\sum_{i=2}^{i=N} f_i \langle \varphi_p^i(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \rangle_{\Omega_i} \right) \\ &\leq \inf_{\dot{\boldsymbol{v}} \in \mathcal{K}(\dot{\boldsymbol{E}})} \left(\sum_{i=2}^{i=N} f_i \left(V^{(i)} + \langle w_o^i(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) - 3p\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m \rangle_{\Omega_i} \right) \right) \\ &\leq \sum_{i=2}^{i=N} f_i V^{(i)} + \inf_{\dot{\boldsymbol{v}} \in \mathcal{K}(\dot{\boldsymbol{E}})} \left(\sum_{i=2}^{i=N} f_i \langle w_o^i(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) - 3p\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m \rangle_{\Omega_i} \right) = \sum_{i=2}^{i=N} f_i V^{(i)} + W_o^{hom}(\dot{\boldsymbol{E}}, p) \\ &\leq \inf_{\mathbf{C}_o^i > 0, 2 \leq i \leq N} \left(\left(\sum_{i=2}^{i=N} f_i V^{(i)} \right) + W_o^{hom}(\dot{\boldsymbol{E}}, p) \right). \end{aligned} \quad (\text{J.81})$$

J.2.1 Etude de $W_o^{hom}(\dot{\boldsymbol{E}}, p)$

$W_o^{hom}(\dot{\boldsymbol{E}}, p)$ est le potentiel effectif du problème suivant : des pores ω_e sans pression interne plongés dans un matériau contenant $N-1$ phases de potentiels $w_o^i(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) - 3p\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m$ ($2 \leq i \leq N$). Le champ $\dot{\boldsymbol{u}} = \dot{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{x}$ est appliqué sur le bord de V . Dans chaque phase $2 \leq i \leq N$, la loi de comportement s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_o^i : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - p\mathbf{I} \quad (\text{J.82})$$

$$\boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I} = \mathbf{C}_o^i : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{J.83})$$

C'est à dire que le problème s'écrit :

$$(\mathcal{P}_o^N) \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I} = \mathbf{C}_o^i : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} & \text{dans chaque phase } 2 \leq i \leq N \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 & \text{dans } V \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} = 0 \cdot \mathbf{N} & \text{sur } \partial\omega_e \\ \dot{\boldsymbol{u}} = \dot{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{x} & \text{sur } \partial V \end{cases}$$

Le changement de variable suivant $\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I}$ donne le problème en posant $p^* = -p$:

$$(\mathcal{P}_o^{N*}) \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{C}_o^i : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} & \text{dans chaque phase } 2 \leq i \leq N \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^*) = 0 & \text{dans } V \\ \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{N} = -p^* \cdot \mathbf{N} & \text{sur } \partial\omega_e \\ \dot{\boldsymbol{u}} = \dot{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{x} & \text{sur } \partial V \end{cases}$$

J.2.2 Problème général du milieu poreux saturé élastique linéaire multiphasés

Energie totale Soit un milieu poreux dont la matrice est élastique linéaire constituée de $N-1$ phases. Le volume occupé par les pores est noté $|\omega_e|$. Les pores sont sous pression p . Le volume total est noté $|V|$. Chaque phase i ($2 \leq i \leq N$) occupe un volume $|\Omega_i|$. La fraction volumique de chaque phase i est notée f_i . La fraction volumique des pores est notée f_e . Le problème s'écrit :

$$(\mathcal{P}^N) \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_o^i : \boldsymbol{\varepsilon} & \text{dans chaque phase } 2 \leq i \leq N \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 & \text{dans } V \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} = -p \cdot \mathbf{N} & \text{sur } \partial\omega_e \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{x} & \text{sur } \partial V \end{cases}$$

Le théorème de superposition permet de décomposer ce problème en deux sous problèmes :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{P}^{N'}) & \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{C}_o^i : \boldsymbol{\varepsilon}' & \text{dans chaque phase } 2 \leq i \leq N \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}') = 0 & \text{dans } V \\ \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{N} = 0 \cdot \mathbf{N} & \text{sur } \partial\omega_e \\ \mathbf{u}' = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} & \text{sur } \partial V \end{cases} \\
 + (\mathcal{P}^{N''}) & \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}'' = \mathbf{C}_o^i : \boldsymbol{\varepsilon}'' & \text{dans chaque phase } 2 \leq i \leq N \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}'') = 0 & \text{dans } V \\ \boldsymbol{\sigma}'' \cdot \mathbf{N} = -p \cdot \mathbf{N} & \text{sur } \partial\omega_e \\ \mathbf{u}'' = 0 & \text{sur } \partial V \end{cases}
 \end{aligned}$$

Le volume sans les pores est noté $|M| = |V - \omega_e|$.

Les équations (J.14) à (J.22) puis (J.28) à (J.30) puis (J.39) à (J.42) sont toujours valides (\mathbf{C}_o devient $\mathbf{C}_o^i(x) = \mathbf{C}_o^i$ dans chaque phase i).

Au final, l'énergie totale du problème (\mathcal{P}^N) s'écrit :

$$\mathcal{E} = \frac{|V|}{2} \mathbf{E} : \mathbf{C}^{hom} : \mathbf{E} - \int_{\omega_e} p \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}') - \frac{1}{2} \int_{\omega_e} p \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}''). \quad (\text{J.84})$$

Le module \mathbf{C}^{hom} provient du problème ($\mathcal{P}^{N'}$) (le problème drainé). L'estimation auto-cohérente de Hervé et Zaoui (1993) est utilisée pour \mathbf{C}^{hom} . L'analyse de Hervé et Zaoui (1993) est reprise afin de déterminer les termes en pression issus du problème ($\mathcal{P}^{N'}$) ($-\int_{\omega_e} p \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}')$) et du problème ($\mathcal{P}^{N''}$) ($-\frac{1}{2} \int_{\omega_e} p \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}'')$).

Terme en pression du problème ($\mathcal{P}^{N'}$) Le but de cette partie est de déterminer le coefficient $\mathcal{E}' = -\int_{\omega_e} p \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}') = -p|\omega_e| \langle \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}') \rangle_{\omega_e}$ nécessaire à l'expression de l'énergie (J.84). Il faut donc déterminer la moyenne sur la phase 1 de la trace de la déformation. Le travail de Hervé et Zaoui (1993) est repris (voir Annexe F). D'après ces auteurs :

$$\langle \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}') \rangle_{\Omega_1 = \omega_e} = \frac{\operatorname{Tr}(\mathbf{E})}{Q_{11}^{(N)}}. \quad (\text{J.85})$$

Par conséquent :

$$\frac{\mathcal{E}'}{|V|} = -p f_1 \frac{\operatorname{Tr}(\mathbf{E})}{Q_{11}^{(N)}}. \quad (\text{J.86})$$

Par analogie avec l'expression (J.45), on en déduit un "terme de Biot" b :

$$b = \frac{f_1}{Q_{11}^{(N)}}. \quad (\text{J.87})$$

Terme en pression du problème ($\mathcal{P}^{N''}$) Le but de cette partie est de déterminer le coefficient $\mathcal{E}'' = -\frac{1}{2} \int_{\omega_e} p \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}'') = -\frac{1}{2} p \int_{\partial\omega_e} \mathbf{u}'' \cdot \mathbf{n} dS$. Le vecteur \mathbf{n} est ici la normale extérieure à ω_e . Il faut déterminer le déplacement sur la boule ω_e pour ce problème :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}'' = \mathbf{C}_o^i : \boldsymbol{\varepsilon}'' & \text{dans chaque phase } 2 \leq i \leq N \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}'') = 0 & \text{dans } V \\ \boldsymbol{\sigma}'' \cdot \mathbf{n} = -p \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \partial\omega_e \\ \mathbf{u}'' = 0 & \text{sur } \partial V \end{cases}$$

Comme dans Hervé et Zaoui (1993) dans le cas du chargement hydrostatique, le champ de déplacement est recherché dans chaque couche sous la forme (en coordonnées sphériques) : $\mathbf{u}'' = u_r'' \mathbf{e}_r$, avec :

$$u_r'' = \left(A_i r + \frac{B_i}{r^2} \right). \quad (\text{J.88})$$

La déformation dans chaque couche s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}'' = \begin{pmatrix} A_i - \frac{2B_i}{r^3} & 0 & 0 \\ 0 & A_i + \frac{B_i}{r^3} & 0 \\ 0 & 0 & A_i + \frac{B_i}{r^3} \end{pmatrix}. \quad (\text{J.89})$$

Les coefficients non nuls de $\boldsymbol{\sigma}''$ sont :

- $\sigma_{rr}'' = 3k_o^i A_i - \frac{4\mu_o^i B_i}{r^3}$
- $\sigma_{\theta\theta}'' = \sigma_{\phi\phi}'' = 3k_o^i A_i + \frac{2\mu_o^i B_i}{r^3}$.

La phase 1 est vide. La continuité des u_r'' à chaque interface $r = R_i$ s'écrit :

$$A_i R_i + \frac{B_i}{R_i^2} = A_{i+1} R_i + \frac{B_{i+1}}{R_i^2} \quad (\text{J.90})$$

pour $2 \leq i \leq N$.

La continuité des σ_{rr}'' à chaque interface $r = R_i$ s'écrit :

$$3k_o^i A_i - \frac{4\mu_o^i B_i}{R_i^3} = 3k_o^{i+1} A_{i+1} - \frac{4\mu_o^{i+1} B_{i+1}}{R_i^3} \quad (\text{J.91})$$

pour $2 \leq i \leq N - 1$ et :

$$3k_o^N A_N - \frac{4\mu_o^N B_N}{R_N^3} = 3k^{hom} A_{N+1} - \frac{4\mu^{hom} B_{N+1}}{R_N^3} - b^{hom} p. \quad (\text{J.92})$$

En $r = R_1$, $\sigma_{rr}'' = -p$ d'où :

$$3k_o^2 A_2 - \frac{4\mu_o^2 B_2}{R_1^3} = -p. \quad (\text{J.93})$$

A l'infini, $\mathbf{u}'' = \mathbf{0}$. Cela impose que :

$$A_{N+1} = 0. \quad (\text{J.94})$$

Pour $2 \leq i \leq N - 1$, les équations (J.90) et (J.91) donnent :

$$\begin{pmatrix} R_i & \frac{1}{R_i^2} \\ 3k_o^i & \frac{-4\mu_o^i}{R_i^3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_i & \frac{1}{R_i^2} \\ 3k_o^{i+1} & \frac{-4\mu_o^{i+1}}{R_i^3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{i+1} \\ B_{i+1} \end{pmatrix}. \quad (\text{J.95})$$

Il est noté : $M_i = \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix}$. La relation précédente permet de définir N_i tel que : $M_{i+1} = N_i M_i$. Cela donne pour $2 \leq i \leq N - 1$:

$$M_{i+1} = H_i M_i \quad (\text{J.96})$$

avec : $H_i = N_i \cdot \dots \cdot N_2$. Les relations (J.90) (avec $i = N$), (J.92) et (J.94) donnent :

$$\begin{pmatrix} R_N & \frac{1}{R_N^2} \\ 3k_o^N & \frac{-4\mu_o^N}{R_N^3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_N \\ B_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_N & \frac{1}{R_N^2} \\ 3k^{hom} & \frac{-4\mu^{hom}}{R_N^3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ B_{N+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -b^{hom}p \end{pmatrix}. \quad (J.97)$$

$J_i(r)$ est défini par :

$$J_i(r) = \begin{pmatrix} r & \frac{1}{r^2} \\ 3k_o^i & \frac{-4\mu_o^i}{r^3} \end{pmatrix}. \quad (J.98)$$

D'où :

$$J_N(R_N) \cdot H_{N-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-p}{3k_o^2} + \frac{4\mu_o^2 B_2}{3R_1^3 k_o^2} \\ B_2 \end{pmatrix} = J_{N+1}(R_N) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ B_{N+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -b^{hom}p \end{pmatrix}. \quad (J.99)$$

C'est un problème à deux équations et trois inconnues (B_2 , B_{N+1} et b^{hom}). La condition d'auto-cohérence permet d'obtenir une troisième équation.

La même condition d'auto-cohérence que celle utilisée par Hervé et Zaoui (1993) est utilisée, à savoir (Ω est la boule unité et \mathbf{E}^o la déformation imposée à l'infini nulle dans ce cas) :

$$\left\langle \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}'') \right\rangle_{\Omega} = \text{Tr}(\mathbf{E}^o) = 0. \quad (J.100)$$

D'où :

$$\left\langle \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}'') \right\rangle_{\Omega} = 0 = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}'' \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi R_N^2 \left(\frac{B_{N+1}}{R_N^2} \right). \quad (J.101)$$

D'où $B_{N+1} = 0$. Le déplacement est nul dans la couche $N + 1$.

Comme condition d'auto-cohérence, il est aussi naturel de poser :

$$\sigma''_{rr}(r = R_N) = -pb^{hom}. \quad (J.102)$$

Ainsi :

$$-\frac{4\mu^{hom}}{R_N^3} B_{N+1} - pb^{hom} = -pb^{hom}. \quad (J.103)$$

D'où $B_{N+1} = 0$. Le déplacement est nul dans la couche $N + 1$. On obtient la même condition.

Le système d'équation à résoudre s'écrit d'après (J.99) :

$$J_N(R_N) \cdot H_{N-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-p}{3k_o^2} + \frac{4\mu_o^2 B_2}{3R_1^3 k_o^2} \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -b^{hom}p \end{pmatrix}. \quad (J.104)$$

Soit $L = J_N(R_N) \cdot H_{N-1}$. Le système (J.104) donne :

$$B_2'' = \frac{B_2}{p} = \frac{L_{11}}{3k_o^2} \frac{1}{L_{12} + L_{11} \frac{4\mu_o^2}{3R_1^3 k_o^2}}. \quad (J.105)$$

On a donc :

$$A_2'' = \frac{A_2}{p} = -\frac{1}{3k_o^2} + \left(\frac{4\mu_o^2}{3R_1^3 k_o^2} \right) \frac{L_{11}}{3k_o^2} \frac{1}{L_{12} + L_{11} \frac{4\mu_o^2}{3R_1^3 k_o^2}}. \quad (\text{J.106})$$

Il est désormais possible d'exprimer totalement l'énergie :

$$\mathcal{E}'' = -\frac{1}{2} p 4\pi R_1^2 u_r''(R_1) = -\frac{1}{2} p^2 4\pi R_1^2 \left(A_2'' R_1 + \frac{B_2''}{R_1^2} \right). \quad (\text{J.107})$$

Par analogie avec l'équation (J.45), on en déduit un "terme de Biot" du type $\frac{1}{M}$:

$$\frac{1}{M} = 3f_1 \left(A_2'' + \frac{B_2''}{R_1^3} \right). \quad (\text{J.108})$$

Récapitulatif pour l'énergie totale de (\mathcal{P}^N) Au final, l'énergie totale (J.84) s'écrit :

$$\frac{\mathcal{E}}{|\Omega|} = \frac{9}{2} k^{hom} E_m^2 + \frac{3}{2} \mu^{hom} E_{eq}^2 - 3pbE_m - \frac{1}{2} \frac{p^2}{M} \quad (\text{J.109})$$

avec :

- k^{hom} donné par l'équation (F.2)
- μ^{hom} donné par l'équation (F.5)
- b donné par l'équation (J.87)
- $\frac{1}{M}$ donné par l'équation (J.108).

J.2.3 Energie du problème (\mathcal{P}_o^N)

Les équations (J.46) à (J.48) sont toujours valables (en remplaçant \mathbf{C}_o^1 par $\mathbf{C}_o^1(\mathbf{x}) = \mathbf{C}_o^i$ et w_o par $w_o(\mathbf{x}) = w_o^i$ dans chaque phase i).

Le potentiel $W_o^{hom}(\dot{\mathbf{E}}, p)$ s'écrit donc :

$$W_o^{hom}(\dot{\mathbf{E}}, p) = \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{C}_o^{hom} : \dot{\mathbf{E}} + p(\mathbf{B} - \mathbf{I}) : \dot{\mathbf{E}} - \frac{1}{2} \frac{p^2}{M} \right). \quad (\text{J.110})$$

J.2.4 Ecriture de la méthode sécante modifiée

D'après l'inéquation (J.81), les conditions d'optimalité par rapport à \mathbf{C}_o^i sont les suivantes pour $2 \leq i \leq N$:

$$\frac{\partial V^{(i)}}{\partial \mathbf{C}_o^i} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_o^i} \left(\frac{1}{2(f_i)} \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{C}_o^{hom} : \dot{\mathbf{E}} \right) + \frac{p}{f_i} \frac{\partial \mathbf{B} : \dot{\mathbf{E}}}{\partial \mathbf{C}_o^i} - \frac{1}{2(f_i)} p^2 \frac{\partial \left(\frac{1}{M} \right)}{\partial \mathbf{C}_o^i} = 0. \quad (\text{J.111})$$

Cette inéquation peut se réécrire en :

$$\begin{aligned} \Phi^+(\dot{\mathbf{E}}, p_b, p_e) + 3p_e \dot{E}_m &\leq \inf_{\mathbf{C}_o^i > 0, 2 \leq i \leq N} \left(\sum_{i=2}^{i=N} f_i V^{(i)} + \inf_{\dot{\mathbf{v}} \in \mathcal{K}(\dot{\mathbf{E}})} \left(\sum_{i=2}^{i=N} f_i \langle w_o^i(\varepsilon(\dot{\mathbf{v}})) - 3p\varepsilon_m(\dot{\mathbf{v}}) \rangle_{\Omega_i} \right) \right) \\ &\leq \inf_{\mathbf{C}_o^i > 0, 2 \leq i \leq N} \left(\sum_{i=2}^{i=N} f_i V^{(i)} + \inf_{\dot{\mathbf{v}} \in \mathcal{K}(\dot{\mathbf{E}})} \left(\sum_{i=2}^{i=N} f_i \langle \mathbf{C}_o^i :: \dot{\mathbf{E}}(\dot{\mathbf{v}}) - 3p\varepsilon_m(\dot{\mathbf{v}}) \rangle_{\Omega_i} \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{J.112})$$

Le tenseur $\dot{\mathbb{E}}$ est un tenseur d'ordre 4 et vaut $\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

$$\begin{aligned} \Phi^+(\dot{\mathbf{E}}, p_b, p_e) + 3p_e \dot{E}_m &\leq \inf_{\mathbf{C}_o^i > 0, 2 \leq i \leq N} \left(\sum_{i=2}^{i=N} f_i V^{(i)} + \inf_{\dot{\mathbf{v}} \in \mathcal{K}(\dot{\mathbf{E}})} \left(\sum_{i=2}^{i=N} f_i \mathbf{C}_o^i :: \bar{\mathbb{E}}^{(i)}(\dot{\mathbf{v}}) - 3p \langle \varepsilon_m(\dot{\mathbf{v}}) \rangle_{\Omega_i} \right) \right) \\ &\leq \inf_{\mathbf{C}_o^i > 0, 2 \leq i \leq N} \left(\sum_{i=2}^{i=N} f_i V^{(i)} + \sum_{i=2}^{i=N} f_i \mathbf{C}_o^i :: \bar{\mathbb{E}}^{(i)}(\dot{\mathbf{u}}) - 3p \langle \varepsilon_m(\dot{\mathbf{u}}) \rangle_{\Omega_i} \right) \end{aligned} \quad (\text{J.113})$$

Le tenseur $\bar{\mathbb{E}}^{(i)}$ représente la moyenne volumique de $\dot{\mathbb{E}}$ sur la phase i . Le champ de vitesse $\dot{\mathbf{u}}$ est le champ solution. Les conditions d'optimalité par rapport à \mathbf{C}_o^i s'écrivent donc :

$$\bar{\mathbb{E}}^{(i)} = -\frac{\partial V^{(i)}}{\partial \mathbf{C}_o^i}. \quad (\text{J.114})$$

Les conditions d'optimalité par rapport à \mathbf{C}_o^i donnent donc en utilisant (J.111) et (J.114) :

$$\bar{\mathbb{E}}^{(i)} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_o^i} \left(\frac{1}{2f_i} \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{C}_o^{hom} : \dot{\mathbf{E}} \right) + \frac{p}{f_i} \frac{\partial \mathbf{B} : \dot{\mathbf{E}}}{\partial \mathbf{C}_o^i} - \frac{1}{2f_i} p^2 \frac{\partial \left(\frac{1}{M} \right)}{\partial \mathbf{C}_o^i}. \quad (\text{J.115})$$

La démonstration sur le dual de $V^{(i)}$ est la même que celle faite pour V dans le cas du biphasé (voir les équations (J.55) à (J.57)). Cela permet d'écrire :

$$\mathbf{C}_o^i = \frac{\partial \varphi^G}{\partial \mathbb{D}}(\bar{\mathbb{E}}^{(i)}). \quad (\text{J.116})$$

J.2.5 Récapitulatif pour la méthode sécante modifiée à N phases

Le système d'équation à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \bar{\mathbb{E}}^{(i)} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_o^i} \left(\frac{1}{2f_i} \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{C}_o^{hom} : \dot{\mathbf{E}} \right) + \frac{p}{f_i} \frac{\partial \mathbf{B} : \dot{\mathbf{E}}}{\partial \mathbf{C}_o^i} - \frac{1}{2f_i} p^2 \frac{\partial \left(\frac{1}{M} \right)}{\partial \mathbf{C}_o^i} \\ \mathbf{C}_o^i = \frac{\partial \varphi^G}{\partial \mathbb{D}}(\bar{\mathbb{E}}^{(i)}) \end{cases} \quad (\text{J.117})$$

Lorsque \mathbf{C}_o^i vérifie ces deux équations, alors :

$$\Phi^+(\dot{\mathbf{E}}, p_b, p_e) \leq \Phi^{++}(\dot{\mathbf{E}}, p_b, p_e), \quad (\text{J.118})$$

avec :

$$\Phi^{++}(\dot{\mathbf{E}}, p_b, p_e) = \sum_{i=2}^{i=N} f_i V^{(i)} + \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{C}_o^{hom} : \dot{\mathbf{E}} + p(\mathbf{B} - \mathbf{I}) : \dot{\mathbf{E}} - \frac{1}{2} \frac{p^2}{M} \right) - 3p_e \dot{E}_m \quad (\text{J.119})$$

et :

$$\boldsymbol{\Sigma} \approx \frac{\partial \Phi^{++}}{\partial \dot{\mathbf{E}}}(\dot{\mathbf{E}}, p_b, p_e) = \mathbf{C}_o^{hom} : \dot{\mathbf{E}} + p(\mathbf{B} - \mathbf{I}) - p_e \mathbf{I}. \quad (\text{J.120})$$

Les termes de ces équations doivent être explicités.
Pour le problème traité, \mathbf{B} et \mathbf{C}_o^{hom} sont isotropes.

Les équations (J.64) et (J.65) sont toujours valables (il suffit de remplacer M par Ω_i , l'indice 1 par l'indice i et $(1 - f_e)$ par f_i).

Les équations (J.72) à (J.75) sont toujours valables.

Au final, le système d'équations à résoudre se réécrit comme ceci :

Entrées : \dot{E}_m et \dot{E}_{eq} ;

répéter

$\forall i (2 \leq i \leq N) :$

$$k_o^i = \frac{2}{9} \sigma_0 \frac{1}{\sqrt{\langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}}} \left(-\text{Arcsinh} \left(2 \sqrt{\frac{\langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}}{\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}}} q_3 \right) + \text{Arcsinh} \left(\frac{2}{f_{qb}} \sqrt{\frac{\langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}}{\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}}} q_3 \right) \right) ;$$

$$\mu_o^i = \frac{1}{3} \frac{\sigma_0}{\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}} \left(\sqrt{4 \langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i} + \frac{\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}}{q_3}} - f_{qb} \sqrt{\frac{4 \langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}}{(f_{qb})^2} + \frac{\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}}{q_3}} \right) ;$$

$$\langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i} = \frac{1}{f_i} \frac{\partial k_o^{HZ}}{\partial k_o^i} (\dot{E}_m)^2 + \frac{1}{3f_i} \frac{\partial \mu_o^{HZ}}{\partial k_o^i} (\dot{E}_{eq})^2 + \frac{2p}{3f_i} \dot{E}_m \frac{\partial b}{\partial k_o^i} - \frac{p^2}{9f_i} \frac{\partial \frac{1}{M}}{\partial k_o^i} ;$$

$$\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i} = \frac{3}{f_i} \frac{\partial k_o^{HZ}}{\partial \mu_o^i} (\dot{E}_m)^2 + \frac{1}{f_i} \frac{\partial \mu_o^{HZ}}{\partial \mu_o^i} (\dot{E}_{eq})^2 + \frac{2p}{f_i} \dot{E}_m \frac{\partial b}{\partial \mu_o^i} - \frac{p^2}{3f_i} \frac{\partial \frac{1}{M}}{\partial \mu_o^i} ;$$

jusqu'à convergence sur $\langle (\dot{\epsilon}_m)^2 \rangle_{\Omega_i}$ et $\langle (\dot{\epsilon}_{eq})^2 \rangle_{\Omega_i}$, $\forall i (2 \leq i \leq N)$;

Sorties : $\Sigma_m = 3k_o^{HZ} \dot{E}_m + p(b - 1) - p_e$ et $\Sigma_{eq} = 3\mu_o^{HZ} \dot{E}_{eq}$.

Les quantités b et $1/M$ sont données en (J.87) et en (J.108).

Annexe K

Démonstration : borne et estimation elliptiques

Le potentiel ψ_{SC} obtenu par Michel et Suquet (1992) et correspondant à la surface de plasticité (4.77) est utilisé pour décrire le comportement de la matrice (domaine M). Puis **une démarche analogue à celle de Michel et Suquet (1992) est utilisée afin d'obtenir la surface** de plasticité du matériau contenant la deuxième population de cavité (porosité f_e , domaine ω_e). Le domaine total est noté V .

$$\psi_{SC}(\boldsymbol{\sigma}) = K_n (A_n \sigma_m^2 + B \sigma_{eq}^2)^{\frac{n+1}{2}}. \quad (\text{K.1})$$

$n \rightarrow +\infty$ correspond au cas d'une matrice rigide plastique parfaite et permet de retrouver le critère (4.77). L'exposant n est un réel supérieur ou égal à 1. Avec :

$$K_n = \frac{\dot{\varepsilon}_0}{(n+1)(\sigma_0(1-f_b))^n} \quad (\text{K.2})$$

$$B = \left(1 + \frac{2}{3}f_b\right). \quad (\text{K.3})$$

Pour le modèle de sphère creuse de Michel et Suquet (1992) :

$$A_n = \frac{9 \left(n \left((f_{qb})^{-\frac{1}{n}} - 1 \right) \right)^{-\frac{2n}{n+1}}}{4 (1-f_b)^{-\frac{2n}{n+1}}}. \quad (\text{K.4})$$

Pour la borne non linéaire de Ponte Castañeda (1991) :

$$A_n = \frac{9}{4}f_b. \quad (\text{K.5})$$

Le problème à résoudre s'écrit avec $\boldsymbol{\sigma}'' = \boldsymbol{\sigma} + p_e \mathbf{I}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}'' + p_b \mathbf{I} - p_e \mathbf{I} = \frac{\partial \varphi_{SC}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) & \text{dans la matrice} \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}'') = 0 & \text{dans } V \\ \boldsymbol{\sigma}'' \cdot \mathbf{N} = 0 \mathbf{N} & \text{sur } \partial \omega_e \\ \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x} & \text{sur } \partial V, \end{cases}$$

d'où l'on tire $\boldsymbol{\Sigma}'' = \langle \boldsymbol{\sigma}'' \rangle_V = \boldsymbol{\Sigma} + p_e \mathbf{I}$. Ce problème se réécrit :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \psi_{SC}}{\partial \boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\sigma}'' + p_b \mathbf{I} - p_e \mathbf{I}) & \text{dans la matrice} \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}'') = 0 & \text{dans } V \\ \boldsymbol{\sigma}'' \cdot \mathbf{N} = 0 \mathbf{N} & \text{sur } \partial \omega_e \\ \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x} & \text{sur } \partial V \end{cases}$$

Le potentiel macroscopique dual de $\Phi(\dot{\mathbf{E}})$ s'écrit, avec le champ $\boldsymbol{\sigma}''$ solution :

$$\Phi^*(\dot{\mathbf{E}}) = \Psi(\boldsymbol{\Sigma}'') = (1 - f_e) \langle \psi_{SC}(\boldsymbol{\sigma}'' + p_b \mathbf{I} - p_e \mathbf{I}) \rangle_M. \quad (\text{K.6})$$

Le potentiel $\Psi(\boldsymbol{\Sigma}'')$ est cherché sous la forme :

$$\Psi(\boldsymbol{\Sigma}'') = K_n (1 - f_e) \left(A_n (\bar{\boldsymbol{\Sigma}}''_m)^2 + B (\bar{\boldsymbol{\Sigma}}''_{eq})^2 \right)^{\frac{n+1}{2}}. \quad (\text{K.7})$$

Le but est de déterminer $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}''$. L'inégalité de Hölder (extension de l'inégalité de Cauchy-Schwarz) est utilisée ainsi qu'une borne pour le comportement effectif d'un milieu de même géométrie que le milieu non linéaire mais avec des phases élastiques linéaires. Soit $\boldsymbol{\sigma}''$ le champ solution :

$$\left(A_n (\bar{\boldsymbol{\Sigma}}''_m)^2 + B (\bar{\boldsymbol{\Sigma}}''_{eq})^2 \right)^{\frac{n+1}{2}} = \left\langle \left(A_n (\boldsymbol{\sigma}''_m + p_b - p_e)^2 + B (\boldsymbol{\sigma}''_{eq})^2 \right)^{\frac{n+1}{2}} \right\rangle_M. \quad (\text{K.8})$$

$\bar{\boldsymbol{\Sigma}}''_*$ est la solution lorsque l'exposant vaut 1 (le coefficient n dans A_n n'est pas imposé) : $\Psi(\bar{\boldsymbol{\Sigma}}''_*) = \min_{\boldsymbol{\tau}} (1 - f_e) \langle \psi_{SC}(\boldsymbol{\tau} + p_b \mathbf{I} - p_e \mathbf{I}) \rangle_M$.

$$A_n (\bar{\boldsymbol{\Sigma}}''_{*m})^2 + B (\bar{\boldsymbol{\Sigma}}''_{*eq})^2 \leq \left\langle A_n (\boldsymbol{\sigma}''_m + p_b - p_e)^2 + B (\boldsymbol{\sigma}''_{eq})^2 \right\rangle_M \quad (\text{K.9})$$

L'inégalité de Hölder donne :

$$\begin{aligned} \left(\left\langle A_n (\boldsymbol{\sigma}''_m + p_b - p_e)^2 + B (\boldsymbol{\sigma}''_{eq})^2 \right\rangle_M \right)^{\frac{n+1}{2}} &\leq \left\langle \left(A_n (\boldsymbol{\sigma}''_m + p_b - p_e)^2 + B (\boldsymbol{\sigma}''_{eq})^2 \right)^{\frac{n+1}{2}} \right\rangle_M \\ &= \left(A_n (\bar{\boldsymbol{\Sigma}}''_m)^2 + B (\bar{\boldsymbol{\Sigma}}''_{eq})^2 \right)^{\frac{n+1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{K.10})$$

L'équation (K.7) fournit alors :

$$\begin{aligned} \Psi(\boldsymbol{\Sigma}'') &\geq K_n (1 - f_e) \left(\left\langle A_n (\boldsymbol{\sigma}''_m + p_b - p_e)^2 + B (\boldsymbol{\sigma}''_{eq})^2 \right\rangle_M \right)^{\frac{n+1}{2}} \\ &\geq K_n (1 - f_e) \left(A_n (\bar{\boldsymbol{\Sigma}}''_{*m})^2 + B (\bar{\boldsymbol{\Sigma}}''_{*eq})^2 \right)^{\frac{n+1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{K.11})$$

K.1 Etude du problème linéaire

Lorsque l'exposant n vaut 1, le potentiel macroscopique est recherché sous la forme :

$$\Psi(\boldsymbol{\Sigma}'') = K_1 (1 - f_e) \left(A_n (\bar{\boldsymbol{\Sigma}}''_{*m})^2 + B (\bar{\boldsymbol{\Sigma}}''_{*eq})^2 \right). \quad (\text{K.12})$$

Il est possible de prendre indifféremment K_n ou K_1 (cf. la remarque K.1).

Le potentiel en contrainte dans la matrice est :

$$\psi(\boldsymbol{\sigma}'') = K_1 \left(A_n (\boldsymbol{\sigma}''_m)^2 + B (\boldsymbol{\sigma}''_{eq})^2 \right) = \frac{1}{2k_o^1} (\boldsymbol{\sigma}''_m)^2 + \frac{1}{6\mu_o^1} (\boldsymbol{\sigma}''_{eq})^2. \quad (\text{K.13})$$

Le problème à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\sigma}'' + p_b \mathbf{I} - p_e \mathbf{I}) & \text{dans la matrice} \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}'') = 0 & \text{dans } V \\ \boldsymbol{\sigma}'' \cdot \mathbf{N} = 0 \cdot \mathbf{N} & \text{sur } \partial \omega_e \\ \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x} & \text{sur } \partial V, \end{cases}$$

d'où l'on tire $\boldsymbol{\Sigma}'' = \langle \boldsymbol{\sigma}'' \rangle_V$. Le changement de variables $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}'' + (p_b - p_e) \mathbf{I} = \boldsymbol{\sigma} + p_b \mathbf{I}$ est effectué. La différence de pression $p_e - p_b$ est notée p^* .

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\sigma}') & \text{dans la matrice} \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}') = 0 & \text{dans } V \\ \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{N} = -p^* \cdot \mathbf{N} & \text{sur } \partial \omega_e \\ \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x} & \text{sur } \partial V, \end{cases}$$

d'où l'on tire $\boldsymbol{\Sigma}' = \langle \boldsymbol{\sigma}' \rangle_V$. Une estimation pour le comportement effectif d'un milieu poreux où la matrice est élastique linéaire avec des modules de compressibilité et de cisaillement k_o^1 et μ_o^1 est utilisée. Il s'agit ici de la borne supérieure de Ponte Castañeda et Willis (1995). Le potentiel effectif s'écrit (voir J.1.2) (c'est une borne supérieure) :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{C}_o^{PCW} : \dot{\mathbf{E}} - p^* \mathbf{B} : \dot{\mathbf{E}} - \frac{1}{2} \frac{(p^*)^2}{M}. \quad (\text{K.14})$$

Le potentiel dual de Φ s'écrit :

$$\begin{aligned} \Psi(\boldsymbol{\Sigma}') &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Sigma}' : \mathbf{S}_o^{PCW} + p^* \mathbf{B} : \mathbf{S}_o^{PCW}) : \boldsymbol{\Sigma}' + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Sigma}' : \mathbf{S}_o^{PCW} + p^* \mathbf{B} : \mathbf{S}_o^{PCW}) : p^* \mathbf{B} + \frac{1}{2} \frac{(p^*)^2}{M} \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}' : \mathbf{S}_o^{PCW} : \boldsymbol{\Sigma}' + p^* \mathbf{B} : \mathbf{S}_o^{PCW} : \boldsymbol{\Sigma}' + \frac{1}{2} (p^*)^2 \mathbf{B} : \mathbf{S}_o^{PCW} : \mathbf{B} + \frac{1}{2} \frac{(p^*)^2}{M} \end{aligned} \quad (\text{K.15})$$

$$\begin{aligned} \Psi(\boldsymbol{\Sigma}'') &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Sigma}'' - p^* \mathbf{I}) : \mathbf{S}_o^{PCW} : (\boldsymbol{\Sigma}'' - p^* \mathbf{I}) + p^* \mathbf{B} : \mathbf{S}_o^{PCW} : (\boldsymbol{\Sigma}'' - p^* \mathbf{I}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (p^*)^2 \mathbf{B} : \mathbf{S}_o^{PCW} : \mathbf{B} + \frac{1}{2} \frac{(p^*)^2}{M} \\ &= L(\boldsymbol{\Sigma}''). \end{aligned} \quad (\text{K.16})$$

Ainsi :

$$\left(A_n (\bar{\boldsymbol{\Sigma}}''_{*m})^2 + \mathbf{B} (\bar{\boldsymbol{\Sigma}}''_{*eq})^2 \right) = \frac{1}{K_1(1-f_e)} L(\boldsymbol{\Sigma}''). \quad (\text{K.17})$$

K.2 Ecriture du critère

$$\Psi(\boldsymbol{\Sigma}'') \geq K_n (1-f_e) \left(\frac{L(\boldsymbol{\Sigma}'')}{K_1(1-f_e)} \right)^{\frac{n+1}{2}} = \frac{\hat{\varepsilon}_0 \sigma_0 (1-f_b)(1-f_e)}{n+1} \left(\frac{L(\boldsymbol{\Sigma}'')}{K_1(1-f_e) \sigma_0^2 (1-f_b)^2} \right)^{\frac{n+1}{2}}. \quad (\text{K.18})$$

La surface de charge obtenue s'écrit ($n \rightarrow +\infty$) :

$$L(\boldsymbol{\Sigma}'') = K_1 (1-f_e) \sigma_0^2 (1-f_b)^2 \quad (\text{K.19})$$

avec :

$$L(\Sigma) = \frac{1}{2} (\Sigma + p_b \mathbf{I}) : S_o^{PCW} : (\Sigma + p_b \mathbf{I}) + p^* \mathbf{B} : S_o^{PCW} : (\Sigma + p_b \mathbf{I}) + \frac{1}{2} (p^*)^2 \mathbf{B} : S_o^{PCW} : \mathbf{B} + \frac{1}{2} \frac{(p^*)^2}{M}. \quad (\text{K.20})$$

Or $\mathbf{B} = b \mathbf{I} = (1 - \frac{k_o^{PCW}}{k_o^1}) \mathbf{I}$ (voir J.1.2), $S_o^{PCW} = \frac{1}{3k_o^{PCW}} J + \frac{1}{2\mu_o^{PCW}} K$ et $\frac{1}{M} = (b - f_e) \frac{1}{k_o^1}$ (voir J.1.2). D'où :

$$\begin{aligned} L(\Sigma) &= \frac{1}{2} \Sigma : S_o^{PCW} : \Sigma + \frac{1}{2} (p_b)^2 \mathbf{I} : S_o^{PCW} : \mathbf{I} + p_b \mathbf{I} : S_o^{PCW} : \Sigma + p^* b \mathbf{I} : S_o^{PCW} : \Sigma \\ &\quad + p^* p_b b \mathbf{I} : S_o^{PCW} : \mathbf{I} + \frac{1}{2} (p^*)^2 b^2 \mathbf{I} : S_o^{PCW} : \mathbf{I} + \frac{1}{2} (p^*)^2 (b - f_e) \frac{1}{k_o^1} \\ &= \frac{1}{2k_o^{PCW}} (\Sigma_m + p_b)^2 + \frac{1}{6\mu_o^{PCW}} (\Sigma_{eq})^2 + \frac{1}{k_o^{PCW}} \left(p^* b \Sigma_m + p^* b p_b + \frac{1}{2} (p^*)^2 b^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} (p^*)^2 (b - f_e) \frac{1}{k_o^1}. \end{aligned} \quad (\text{K.21})$$

Les coefficients k_o^{PCW} et μ_o^{PCW} s'obtiennent par homogénéisation sur un milieu de coefficients k_o^1 et μ_o^1 contenant des porosités ω_e (de fraction volumique f_e) tels que :

$$\begin{aligned} K_1 A(f_b) &= \frac{1}{2k_o^1}, & A(f_b) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n \\ K_1 B(f_b) &= \frac{1}{6\mu_o^1}. \end{aligned} \quad (\text{K.22})$$

C'est à dire :

$$\begin{aligned} k_o^1 &= \frac{1}{2K_1 A(f_b)} \\ \mu_o^1 &= \frac{1}{6K_1 B(f_b)}. \end{aligned} \quad (\text{K.23})$$

Remarque K.1 (Simplification) Les coefficients k_o^1 et μ_o^1 sont proportionnels à $\frac{1}{K_1}$. Les produits $k_o^{PCW} K_1$, $\mu_o^{PCW} K_1$, $k_o^1 K_1$ et $\mu_o^1 K_1$, ne dépendent pas de K_1 .

La surface de charge s'écrit (avec K_1) :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2k_o^{PCW} K_1 (1 - f_e)} \left(\frac{\Sigma_m + p_b}{\sigma_0} \right)^2 + \frac{1}{6\mu_o^{PCW} K_1 (1 - f_e)} \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{k_o^{PCW} K_1 (1 - f_e)} \left(\frac{p^*}{\sigma_0} b \frac{\Sigma_m}{\sigma_0} + \frac{p_b p^*}{\sigma_0^2} b + \frac{1}{2} \frac{(p^*)^2}{\sigma_0^2} b^2 \right) + \frac{1}{2k_o^1 K_1 (1 - f_e)} \frac{(p^*)^2}{\sigma_0^2} (b - f_e) = (1 - f_b)^2. \end{aligned} \quad (\text{K.24})$$

Annexe L

Borne supérieure de Hashin et Shtrikman (1963) dans le cas bidimensionnel

Dans le cas des cavités cylindriques infiniment longues dans la direction longitudinale (axe 3), à base circulaire dans le plan 1-2 et plongées dans une matrice élastique linéaire isotrope (de coefficients k_o^1 et μ_o^1), la borne de Hashin et Shtrikman (1963) donne les cinq coefficients ci-dessous (cinq coefficients sont nécessaires puisque le milieu effectif est isotrope transverse d'axe 3, voir Gilormini (2001), porosité notée f_e) :

$$\begin{aligned} K_o^{HS} &= \frac{(1 - f_e)\mu_o^1(3k_o^1 + \mu_o^1)}{3\mu_o^1 + f_e(3k_o^1 + \mu_o^1)} \\ \mu_o^{T HS} &= \frac{(1 - f_e)\mu_o^1(3k_o^1 + \mu_o^1)}{3(1 + f_e)k_o^1 + (1 + 7f_e)\mu_o^1} \\ E_o^{L HS} &= \frac{9(1 - f_e)k_o^1\mu_o^1}{3k_o^1 + \mu_o^1} = (1 - f_e)E_o^1 \\ \nu_o^{L HS} &= \frac{3k_o^1 - 2\mu_o^1}{6k_o^1 + 2\mu_o^1} = \nu_o^1 \\ \mu_o^{L HS} &= \frac{(1 - f_e)\mu_o^1}{1 + f_e}. \end{aligned} \tag{L.1}$$

K_o^{HS} , $E_o^{L HS}$, $\nu_o^{L HS}$, $\mu_o^{T HS}$, $\mu_o^{L HS}$ représentent respectivement le coefficient de compressibilité plane, le module d'Young longitudinal, le coefficient de Poisson longitudinal, le module de cisaillement transverse et le module de cisaillement longitudinal.

Annexe M

Borne supérieure de Ponte Castañeda et Willis (1995) dans le cas bidimensionnel

Le cas traité ici correspond aux cavités cylindriques infiniment longues dans la direction longitudinale (axe 3), à base elliptique dans le plan transverse 1-2 (de rapport de forme w) et dont les orientations et les centres sont tirés aléatoirement dans le plan 1-2 (distribution isotrope des centres et orientations équiprobables dans le plan 1-2). Ces cavités sont plongées dans une matrice élastique linéaire isotrope (de coefficients k_o^1 et μ_o^1 , tenseur de raideur noté \mathbf{C}_o^1). La borne supérieure de Ponte Castañeda et Willis (1995) donne l'expression ci-dessous (cinq coefficients sont nécessaires puisque le milieu effectif est isotrope transverse d'axe 3; la porosité est notée f_e). La moyenne du tenseur du quatrième ordre $\left(\mathbf{P}^i - (\mathbf{C}_o^1)^{-1}\right)^{-1}$ sur toutes les orientations dans le plan transverse 1-2 est donnée par l'intermédiaire de la projection de ce tenseur dans la base d'isotropie transverse (projection notée P_{isotr}) dont les éléments sont donnés dans Suquet et Bornert (2001).

$$\mathbf{C}_o^{PCW} = \mathbf{C}_o^1 + f_e \left[\mathbf{ID} - f_e P_{isotr} \left[\left(\mathbf{P}^i - (\mathbf{C}_o^1)^{-1} \right)^{-1} \right] : \mathbf{P}^d \right]^{-1} : \left[P_{isotr} \left[\left(\mathbf{P}^i - (\mathbf{C}_o^1)^{-1} \right)^{-1} \right] \right] \quad (\text{M.1})$$

avec :

- $\mathbf{P}^d = \mathbf{S}_e^d(k_o^1, \mu_o^1, w = 1) : (\mathbf{C}_o^1)^{-1}$, le tenseur de Hill relatif à la distribution des centres des ellipses dans le plan transverse,
- $\mathbf{P}^i = \mathbf{S}_e^i(k_o^1, \mu_o^1, w) : (\mathbf{C}_o^1)^{-1}$, le tenseur de Hill relatif à la forme elliptique dans le plan transverse.

Le tenseur $\mathbf{S}_e(k_o^1, \mu_o^1, w)$ est le tenseur d'Eshelby pour une inclusion cylindrique (à base elliptique dans le plan transverse) dans un milieu infini composé de la matrice de coefficients k_o^1 et μ_o^1 (voir l'expression de ce tenseur dans Mura (1987)). Les résultats sont :

$$\begin{aligned} K_o^{PCW} &= \frac{(2w - f_e(1 + w^2)) \mu_o^1(3k_o^1 + \mu_o^1)}{6w\mu_o^1 + f_e(1 + w^2)(3k_o^1 + \mu_o^1)} \\ \mu_o^{T PCW} &= \frac{(4w - f_e(1 + w^2))\mu_o^1(3k_o^1 + \mu_o^1)}{4w(3k_o^1 + \mu_o^1) + f_e(1 + w^2)(3k_o^1 + 7\mu_o^1)} \\ E_o^L PCW &= \frac{9(1 - f_e)k_o^1\mu_o^1}{3k_o^1 + \mu_o^1} = (1 - f_e)E_o^1 \\ \nu_o^{L PCW} &= \frac{3k_o^1 - 2\mu_o^1}{6k_o^1 + 2\mu_o^1} = \nu_o^1 \\ \mu_o^{L PCW} &= \frac{(4w - f_e(1 + w^2))\mu_o^1}{4w + f_e(1 + w)^2}. \end{aligned} \quad (\text{M.2})$$

Lorsque $w = 1$, la borne supérieure de Hashin et Shtrikman (1963) est retrouvée.

Le rapport de forme des cavités, w , est défini comme le rapport a_1/b_1 , où a_1 désigne la demi-longueur du petit axe et b_1 désigne la demi-longueur du grand axe. La porosité f_e est définie telle que :

$$f_e = \pi a_1 b_1 h \frac{N_c}{|V|}, \quad (\text{M.3})$$

où V est le domaine total, N_c est le nombre de fissures dans V et h est la longueur du domaine total selon 3. Le cas des fissures est traité en faisant tendre a_1 vers 0. Le rapport f_e/w reste constant et est noté α_c :

$$\alpha_c = \frac{\pi (b_1)^2 h N_c}{|V|}. \quad (\text{M.4})$$

Cette définition de α_c est analogue à celle utilisée par Ponte Castañeda et Willis (1995) dans le cas des cavités ellipsoïdales. Lorsque c vers 0 (cas des fissures), les coefficients suivants sont obtenus :

$$\begin{aligned} K_o^{PCW} &= \frac{(2 - \alpha_c)\mu_o^1(3k_o^1 + \mu_o^1)}{3k_o^1\alpha_c + (6 + \alpha_c)\mu_o^1} \\ \mu_o^{T\ PCW} &= \frac{(4 - \alpha_c)\mu_o^1(3k_o^1 + \mu_o^1)}{3k_o^1(4 + \alpha_c) + (4 + 7\alpha_c)\mu_o^1} \\ E_o^{L\ PCW} &= \frac{9k_o^1\mu_o^1}{3k_o^1 + \mu_o^1} = E_o^1 \\ \nu_o^{L\ PCW} &= \frac{3k_o^1 - 2\mu_o^1}{6k_o^1 + 2\mu_o^1} = \nu_o^1 \\ \mu_o^{L\ PCW} &= \frac{(4 - \alpha_c)\mu_o^1}{(4 + \alpha_c)}. \end{aligned} \quad (\text{M.5})$$

Annexe N

Estimation auto-cohérente de Hervé et Zaoui (1995) dans le cas bidimensionnel

Hervé et Zaoui (1995) étudient une inclusion cylindrique entourée de $N-1$ couches concentriques cylindriques (la dernière couche est de rayon R_N , voir FIG. F.1). La couche $N+1$ est infinie. Le chargement est appliqué à l'infini soit en condition de déformation homogène au bord soit en condition de contrainte homogène au bord. Toutes les phases sont élastiques linéaires et isotropes transverses de même axe que les cylindres.

Afin de déterminer les coefficients K_o^{hom} , $E_o^{L\ hom}$ et $\nu_o^{L\ hom}$, un chargement normal longitudinal et hydrostatique dans le plan transverse est utilisé. Afin de déterminer le coefficient $\mu_o^{T\ hom}$, un cisaillement dans le plan transverse est utilisé. Les champs de déplacement utilisés ne sont pas précisés ici. Les modules effectifs sont obtenus par une approche auto-cohérente : la phase $N+1$ est caractérisée par les modules recherchés. Dans le cas de la condition de déformation homogène au bord, la condition d'auto-cohérence utilisée traduit le fait que la déformation appliquée à l'infini est égale à la déformation moyenne sur le cylindre de rayon R_N .

Les coefficients de chaque phase i ($1 \leq i \leq N$) sont notés K_o^i , $E_o^{L\ i}$, $\nu_o^{L\ i}$, $\mu_o^{T\ i}$, $\mu_o^{L\ i}$.

Les résultats sont :

$$K_o^{hom} = \frac{K_o^N R_N^2 Q_{11}^{(N-1)} - \mu_o^{T\ N} R_{N-1}^2 Q_{21}^{(N-1)}}{R_N^2 Q_{11}^{(N-1)} + R_{N-1}^2 Q_{21}^{(N-1)}} \quad (\text{N.1})$$

$$E_o^{L\ hom} = \frac{1}{R_N^2} \sum_{i=1}^{i=N} (R_i^2 - R_{i-1}^2) \left(C_{o11}^i + C_{o12}^i Q_{11}^{(i-1)} \left(\frac{-C_{o12}^N R_N^2 - 2K_o^N R_N^2 M_1^{(N)} + 2\mu_o^{T\ N} R_{N-1}^2 M_2^{(N)}}{K_o^N Q_{11}^{(N-1)} R_N^2 - \mu_o^{T\ N} Q_{21}^{(N-1)} R_{N-1}^2} \right) + 2C_{o12}^i M_1^{(i)} \right) \quad (\text{N.2})$$

$$\nu_o^{L\ hom} = \frac{2R_N^2 (K_o^N - K_o^{hom}) M_1^{(N)} - 2R_{N-1}^2 (\mu_o^{T\ N} + K_o^{hom}) M_2^{(N)} + R_N^2 C_{o12}^N}{2K_o^{hom} R_N^2} \quad (\text{N.3})$$

avec :

$$Q^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{N.4})$$

Pour $1 \leq k \leq N$:

$$Q^{(k)} = \prod_{j=k}^{j=1} N^{(j)} \quad (\text{N.5})$$

$$N^{(k)} = \frac{1}{\mu_o^{T \ k+1} + K_o^{k+1}} \begin{pmatrix} \mu_o^{T \ k+1} + K_o^k & \frac{R_{k-1}^2}{R_k^2} (\mu_o^{T \ k+1} - \mu_o^{T \ k}) \\ K_o^{k+1} - K_o^k & \frac{R_{k-1}^2}{R_k^2} (K_o^{k+1} + \mu_o^{T \ k}) \end{pmatrix} \quad (\text{N.6})$$

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{N.7})$$

$$M^{(2)} = \frac{C_{o12}^1 - C_{o12}^2}{2(\mu_o^{T \ 2} + K_o^2)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{N.8})$$

pour $1 < k \leq N$:

$$M^{(k+1)} = \frac{C_{o12}^k - C_{o12}^{k+1}}{2(\mu_o^{T \ k+1} + K_o^{k+1})} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{i=k-1} \frac{C_{o12}^i - C_{o12}^{i+1}}{2(\mu_o^{T \ i+1} + K_o^{i+1})} \left(\prod_{j=k}^{j=i+1} N^{(j)} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{N.9})$$

Le coefficient $\mu_o^{T \ hom}$ est la solution positive et plus petite que le plus grand des $\mu_o^{T \ i}$ de l'équation du second ordre suivante :

$$A \left(\frac{\mu_T}{\mu_o^T N} \right)^2 + 2B \left(\frac{\mu_T}{\mu_o^T N} \right) + C = 0, \quad (\text{N.10})$$

avec (A , B et C désignent **dans cette annexe seulement**) :

- $A = (3 - 4\nu_o^N)(Z_{41} + Z_{32}) - (3 - 4\nu_o^N)^2 Z_{13} + Z_{42} + Z_{43} - 3Z_{13} - 3Z_{12}$
- $B = (2\nu_o^N - 1)(Z_{41} + Z_{32}) - (3 - 4\nu_o^N)Z_{13} - (Z_{42} + Z_{43} - 3Z_{13} - 3Z_{12})$
- $C = Z_{42} + Z_{43} - 3Z_{13} - 3Z_{12} - (Z_{41} + Z_{32} + Z_{13})$
- $Z_{\alpha\beta} = Q_{\alpha 4}^{(N-1)} Q_{\beta 1}^{(N-1)} - Q_{\beta 4}^{(N-1)} Q_{\alpha 1}^{(N-1)}$ avec $1 \leq \alpha \leq 4$ et $1 \leq \beta \leq 4$.
- $Q^{(N-1)} = \prod_{j=N-1}^{j=1} N^{(j)}$

où $1 \leq i \leq N - 1$:

$$N^{(i)} = \frac{1}{4(1 - \nu_{i+1})} \begin{pmatrix} \frac{a_i}{q_i^2} & \frac{1}{q_i}(1 - \rho_i) & \frac{1}{q_i}(1 - \rho_i) & 0 \\ 2q_i^4 b_i & q_i^4 c_i & 2q_i^4 d_i & q_i^4(\rho_i - 1) \\ -3q_i^2(1 - \rho_i) & 0 & q_i^2 a_i & q_i^2(1 - \rho_i) \\ -6d_i & 3(1 - \rho_i) & 2b_i & c_i \end{pmatrix} \quad (\text{N.11})$$

et **dans cette annexe seulement**, on note :

- $a_i = \rho_i + (3 - 4\nu_o^i)$
- $b_i = (3 - 2\nu_o^i) + \rho_i(2\nu_o^{i+1} - 3)$
- $c_i = 1 + \rho_i(3 - 4\nu_o^{i+1})$
- $d_i = 2\nu_o^i - 1 + \rho_i(1 - 2\nu_o^{i+1})$
- $\rho_i = \frac{\mu_o^{T \ i}}{\mu_o^{T \ i+1}}$
- $q_i = \frac{R_i}{R_{i+1}}$
- $\nu_o^i = \frac{C_{o23}^i}{C_{o23}^i + C_{o22}^i}$

C_o^i est le tenseur de raideur de la phase i dont les coefficients utilisés dans les équations ci-dessus s'écrivent :

- $C_{o12}^i = 2\nu_o^{L \ i} K_o^i$

- $C_{o11}^i = E_o^{L\ i} + 4(\nu_o^{L\ i})^2 K_o^i$
- $C_{o22}^i = K_o^i + \mu_o^{T\ i}$
- $C_{o23}^i = K_o^i - \mu_o^{T\ i}$

Remarque : dans le cas traité ici, les couches entourant la cavité sont isotropes et non isotropes transverses. Seuls un coefficient de compressibilité k_o^i et un module de cisaillement μ_o^i sont nécessaires pour chaque couche. Il est rappelé que dans ce cas $k_o^i = K_o^i - \frac{\mu_o^i}{3}$ et que $\mu_o^i = \mu_o^{L\ i} = \mu_o^{T\ i}$.

Déformation hydrostatique de la cavité Le but de cette partie est de déterminer le terme $\langle \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle_{\omega_e}$ nécessaire à l'expression de la loi d'évolution de f_e dans le modèle élastoplastique endommageable. Le travail de Hervé et Zaoui (1995) est repris. D'après ces auteurs :

$$\begin{aligned}
f_e \langle \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle_{\omega_e} &= f_e \left(E_{33} + 2 \left(\frac{E_{11} + E_{22} - E_{33} M_1^{(N+1)}}{2 Q_{11}^{(N)}} \right) \right) \\
&= f_e \left(\left(1 - \frac{2M_1^{(N+1)}}{Q_{11}^{(N)}} \right) E_{33} + \frac{1}{Q_{11}^{(N)}} (E_{11} + E_{22}) \right) \\
&\equiv b_1 E_{33} + b_2 (E_{11} + E_{22}) \\
&\equiv \mathbf{B} : \mathbf{E},
\end{aligned} \tag{N.12}$$

avec :

$$b_1 = f_e \left(1 - \frac{2M_1^{(N+1)}}{Q_{11}^{(N)}} \right), \tag{N.13}$$

$$b_2 = f_e \left(\frac{1}{Q_{11}^{(N)}} \right) \tag{N.14}$$

et :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_2 = 1 - b_2' & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 = 1 - b_1' \end{pmatrix}. \tag{N.15}$$

Q est défini en N.5 et N.6.

Annexe O

Energie élastique d'un milieu élastique linéaire isotrope transverse

Un tenseur de raideur \mathbf{C} isotrope transverse d'axe 3 peut s'écrire, en notations 6*6, de la façon suivante :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{\beta+\delta}{2} & \frac{\beta-\delta}{2} & \frac{\gamma}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta-\delta}{2} & \frac{\beta+\delta}{2} & \frac{\gamma}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2}} & \frac{\gamma}{\sqrt{2}} & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}. \quad (\text{O.1})$$

Les tenseurs de contrainte et de déformation peuvent s'écrire sous forme vectorielle :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \quad (\text{O.2})$$

En déformations planes généralisées, le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \quad (\text{O.3})$$

D'où :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{pmatrix} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\beta+\delta}{2}\varepsilon_{11} + \frac{\beta-\delta}{2}\varepsilon_{22} + \frac{\gamma}{\sqrt{2}}\varepsilon_{33} \\ \frac{\beta-\delta}{2}\varepsilon_{11} + \frac{\beta+\delta}{2}\varepsilon_{22} + \frac{\gamma}{\sqrt{2}}\varepsilon_{33} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2}}\varepsilon_{11} + \frac{\gamma}{\sqrt{2}}\varepsilon_{22} + \alpha\varepsilon_{33} \\ 0 \\ 0 \\ \delta\sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{pmatrix}, \quad (\text{O.4})$$

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{\beta+\delta}{2}\varepsilon_{11}^2 + \frac{\beta+\delta}{2}\varepsilon_{22}^2 + \alpha\varepsilon_{33}^2 + \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}(\beta - \delta) + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11}\sqrt{2}\gamma + \varepsilon_{33}\varepsilon_{22}\sqrt{2}\gamma + 2\delta\varepsilon_{12}^2 \\
 &= \frac{\beta}{2}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2 + \alpha\varepsilon_{33}^2 + 2\delta\left(\varepsilon_{12}^2 + \frac{1}{4}(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11})^2\right) + \sqrt{2}\gamma(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\varepsilon_{33}.
 \end{aligned} \tag{O.5}$$

En notant :

- $\varepsilon_p = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$,
- $\varepsilon_n = \varepsilon_{33}$,
- $\gamma_p = 2\sqrt{\varepsilon_{12}^2 + \frac{1}{4}(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11})^2}$,

on a :

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{2}\varepsilon_p^2 + \alpha\varepsilon_n^2 + \frac{\delta}{2}\gamma_p^2 + \sqrt{2}\gamma\varepsilon_p\varepsilon_n\right). \tag{O.6}$$

K , E^L , ν^L , μ^T , μ^L représentent respectivement le coefficient de compressibilité plane, le module d'Young longitudinal, le coefficient de Poisson longitudinal, le module de cisaillement transverse et le module de cisaillement longitudinal (cinq coefficients matériaux sont nécessaires pour un milieu élastique linéaire isotrope transverse). En utilisant les relations suivantes (notations de Suquet et Bornert (2001)) :

- $\beta = 2K$
- $\alpha = E^L + 4(\nu^L)^2 K$
- $\gamma = 2\sqrt{2}\nu^L K$
- $\delta = 2\mu^T$
- $\delta' = 2\mu^L$,

l'énergie élastique s'écrit :

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(K\varepsilon_p^2 + \left(E^L + 4(\nu^L)^2 K\right)\varepsilon_n^2 + \mu^T\gamma_p^2 + 4\nu^L K\varepsilon_p\varepsilon_n\right). \tag{O.7}$$

Annexe P

Porosités "équivalentes", cas bidimensionnel

Les porosités équivalentes f_s^K et $f_s^{\mu T}$ sont utilisées à la section 7.1 pour traiter le cas des cavités à bases elliptiques dans le plan transverse à partir du cas des cavités à bases circulaires dans le plan transverse.

Dans le cas des bases elliptiques, les porosités f_s^K et $f_s^{\mu T}$ s'écrivent :

$$f_s^K = \frac{(1 - f_e)f_e(1 + w^2)}{2w - f_e w^2 - f_e}, \quad (\text{P.1})$$

$$f_s^{\mu T} = \frac{f_e(f_e(1 + w)^2 - 2(1 + w^2))}{-4w + f_e(1 + w)^2}. \quad (\text{P.2})$$

Lorsque ces bases sont des fissures, les porosités f_s^K et $f_s^{\mu T}$ se mettent sous la forme :

$$f_s^K = \frac{\alpha_c}{2 - \alpha_c}, \quad (\text{P.3})$$

$$f_s^{\mu T} = \frac{2\alpha_c}{4 - \alpha_c}. \quad (\text{P.4})$$

Annexe Q

Microstructures utilisées pour les simulations numériques avec modèle de zone cohésive

Cette Annexe présente les microstructures utilisées pour les simulations numériques présentés en 7.3.3.

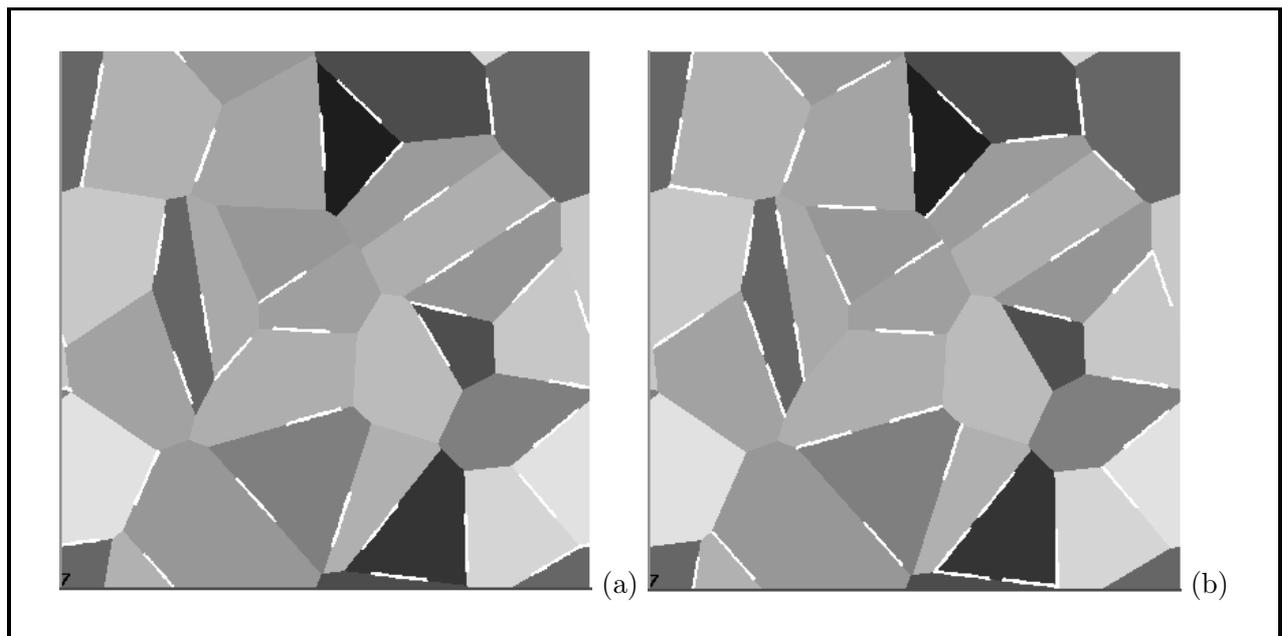


FIG. Q.1 – Microstructures utilisées pour les calculs à 33 préfissures (a) et 40 préfissures (b) exposés en 7.3.3. Les préfissures sont situées sur les joints de grains (en blanc).

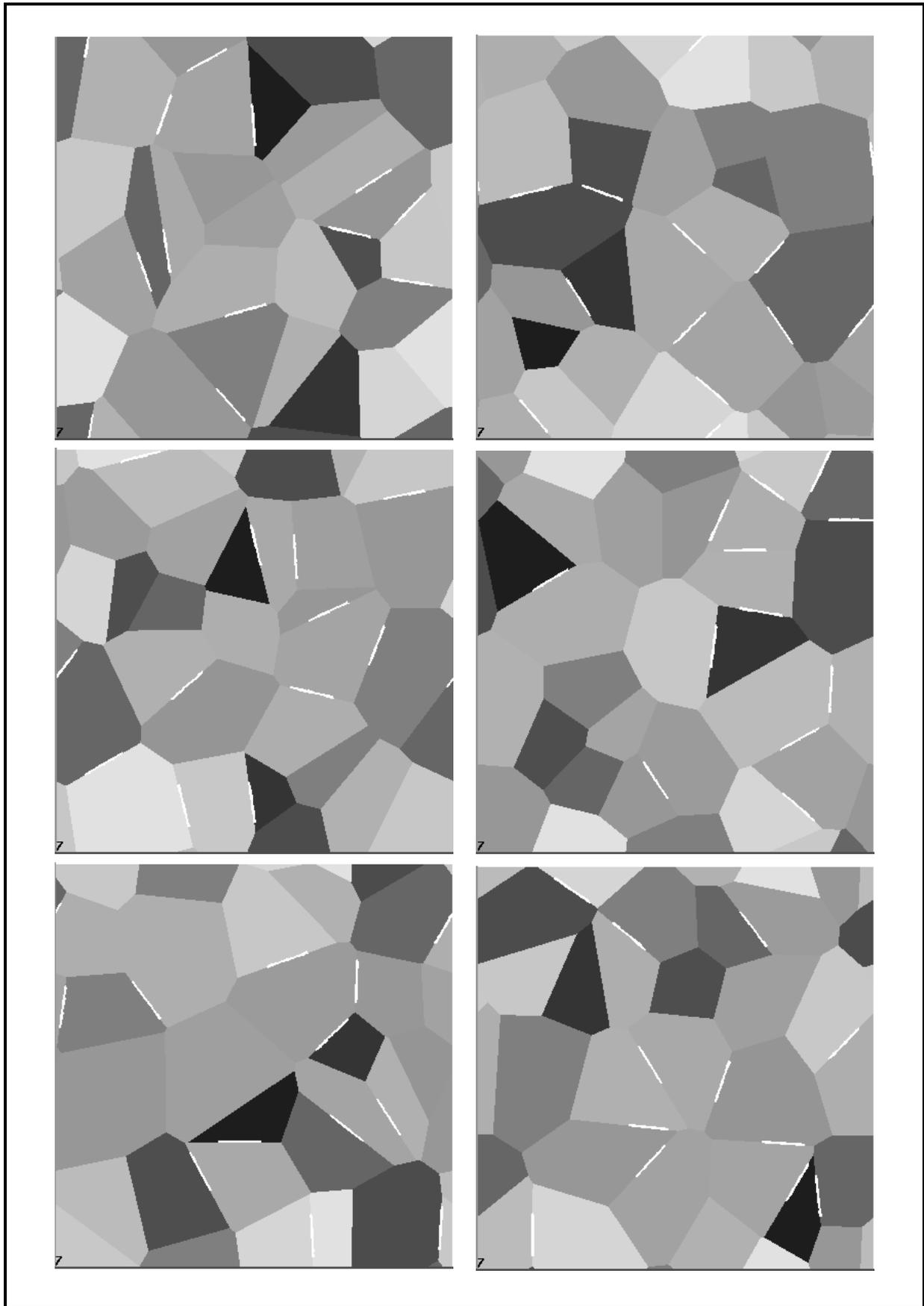


FIG. Q.2 – Microstructures utilisées pour les calculs à 12 préfissures exposés en 7.3.3. Les préfissures sont situées sur les joints de grains (en blanc).

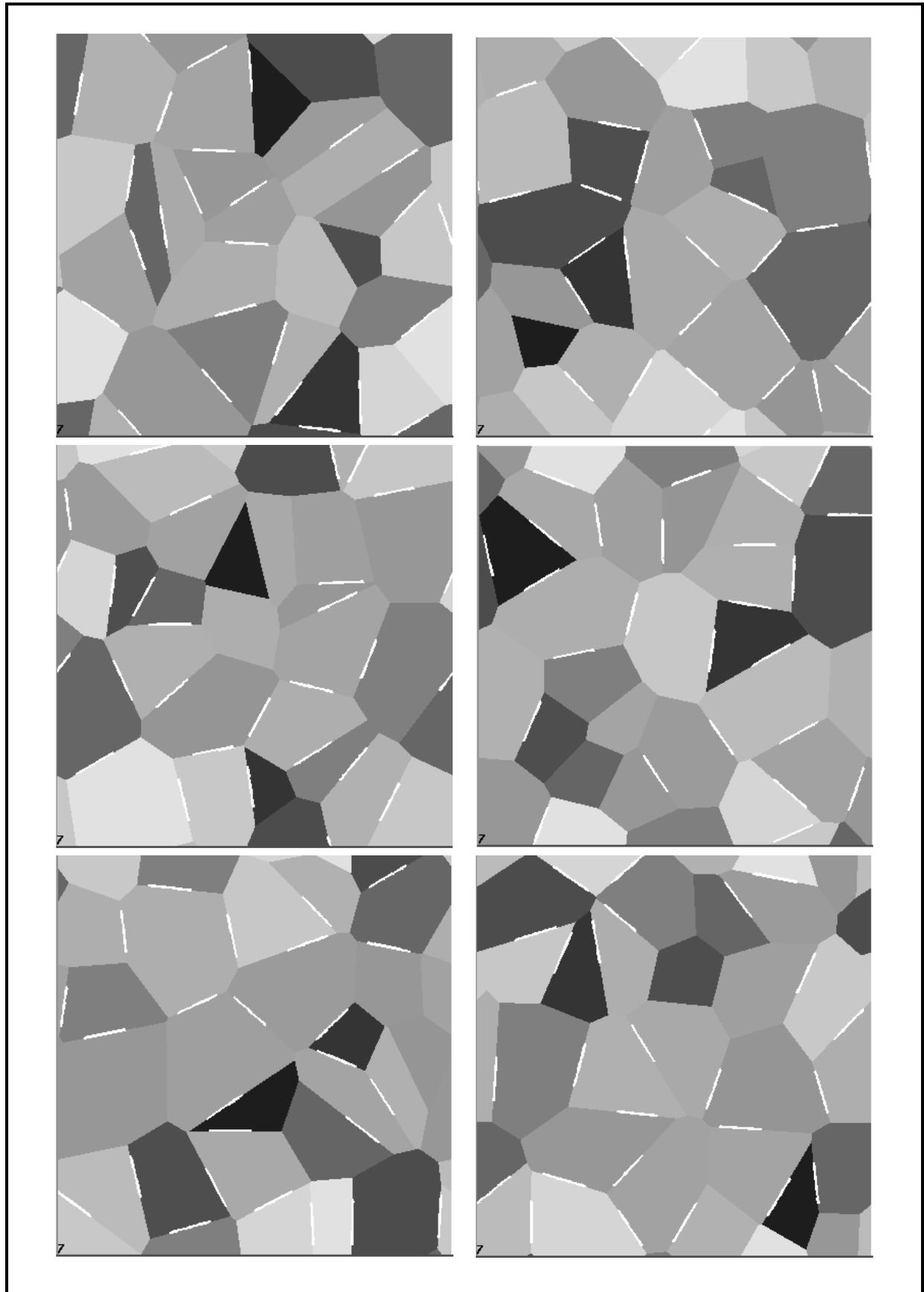


FIG. Q.3 – Microstructures utilisées pour les calculs à 25 préfissures exposés en 7.3.3. Les préfissures sont situées sur les joints de grains (en blanc).

Bibliographie

- Bailly, H., Ménessier, D. et Prunier, C. (1996). *Le combustible nucléaire des réacteurs à eau sous pression et des réacteurs à neutrons rapides*. Eyrolles, Paris.
- Barhdadi, E. H. (2005). *Modélisation micromécanique des matériaux composites à renforts ellipsoïdaux multienrobés et applications*. Thèse, Université de Metz.
- Benveniste, Y. et Milton, G. W. (2003). New exact results for the effective electric, elastic, piezoelectric and other properties of composite ellipsoid assemblages. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51 : 1773–1813.
- Bilger, N. (2003). *Etude micromécanique de l'effet de la présence d'amas d'inclusions sur la transition fragile-ductile d'aciers nucléaires*. Thèse, Ecole Polytechnique.
- Bilger, N., Auslender, F., Bornert, M. et Masson, R. (2002). New bounds and estimates for porous media with rigid perfectly plastic matrix. *C. R. Mécanique*, 330 : 127–132.
- Biot, M. A. (1941). General theory of three-dimensional consolidation. *J. Appl. Phys.*, 12 : 155–164.
- Bornert, M. et Suquet, P. (2001). Propriétés non linéaires des composites : approches par les potentiels. In Bornert, M., Bretheau, T. et Gilormini, P., éditeurs, *Homogénéisation en mécanique des matériaux*, volume 2, chapitre 2, pages 45–90. Hermès Science Publications, Paris.
- Canon, R. F., Roberts, J. T. A. et Beals, R. J. (1971). Deformation of UO_2 at high temperatures. *Journal of the American Ceramic Society*, 54(2) : 105–112.
- Casanova, E. (1998). *Comportement des gaz de fission dans un combustible irradié lors d'un transitoire de puissance*. Thèse, Université de Provence.
- Chaboche, J.-L., Suquet, P. et Besson, J. (2001). Endommagement et changement d'échelle. In Bornert, M., Bretheau, T. et Gilormini, P., éditeurs, *Homogénéisation en mécanique des matériaux*, volume 2, chapitre 3, pages 113–141. Hermès Science Publications, Paris.
- Coster, M. et Chermant, J. L. (2002). On a way to material models for ceramics. *Journal of the European Ceramic Society*, 22 : 1191–1203.
- Dherbey, F., Louchet, F., Mocellin, A. et Leclercq, S. (2002). Elevated temperature creep of polycrystalline uranium dioxide : from microscopic mechanisms to macroscopic behaviour. *Acta Materialia*, 50 : 1495–1505.
- Dormieux, L. et Kondo, D. (2004). Approche micromécanique du couplage perméabilité-endommagement. *Comptes Rendus Mécanique*, 332 : 135–140.
- Dormieux, L., Kondo, D. et Ulm, F.-J. (2006). *Microporomechanics*. Wiley, England.

- Dormieux, L., Molinari, A. et Kondo, D. (2002). Micromechanical approach to the behavior of poroelastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50 : 2203–2231.
- Dubourg, R., Faure-Geors, H., Nicaise, G. et Barrachin, M. (2005). Fission product release in the first two PHEBUS tests FPT0 and FPT1. *Nuclear Engineering and Design*, 235 : 2183–2208.
- Eshelby, J. D. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problem. *Proc. R. Soc. Lond.*, A 241 : 376–396.
- Gatt, J.-M., Monerie, Y., Laux, D. et Baron, D. (2005). Elastic behavior of porous ceramics : application to nuclear fuel materials. *Journal of Nuclear Materials*, 336 : 145–155.
- Gilormini, P. (2001). Application. In Bornert, M., Bretheau, T. et Gilormini, P., éditeurs, *Homogénéisation en mécanique des matériaux*, volume 1, chapitre 6, pages 223–250. Hermès Science Publications, Paris.
- Gologanu, M., Leblond, J.-B. et Devaux, J. (1993). Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids - case of axisymmetric prolate ellipsoidal cavities. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(11) : 1723–1754.
- Gologanu, M., Leblond, J.-B. et Devaux, J. (1994). Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids - case of axisymmetric oblate ellipsoidal cavities. *ASME J. Engr. Mater. Technol.*, 116 : 290–297.
- Gologanu, M., Leblond, J.-B., Perrin, G. et Devaux, J. (1997). Recent extensions of Gurson's model for porous ductile metals. In Suquet, P., éditeur, *Continuum Micromechanics*, pages 61–130. Springer-Verlag, Udine.
- Gărăjeu, M. (1995). *Contribution à l'étude du comportement non linéaire de milieux poreux avec ou sans renfort*. Thèse, Université de la Méditerranée.
- Gărăjeu, M. et Suquet, P. (1997). Effective properties of porous ideally plastic or viscoplastic materials containing rigid particles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(6) : 873–902.
- Gurson, A. (1977). Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : Part I - yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 99 : 2–15.
- Hashin, Z. et Shtrikman, S. (1963). A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11 : 127–140.
- Hervé, E. et Pellegrini, O. (1995). The elastic constants of a material containing spherical coated holes. *Arch. Mech.*, 47(2) : 223–246.
- Hervé, E. et Zaoui, A. (1993). N-layered inclusions-based micromechanical modelling. *Int. J. Engng Sci.*, 31(1) : 1–10.
- Hervé, E. et Zaoui, A. (1995). Elastic behaviour of multiply coated fibre-reinforced composites. *Int. J. Engng Sci.*, 33(10) : 1419–1433.
- Igata, N. et Domoto, K. (1972). Fracture stress and elastic modulus of uranium dioxide including excess oxygen. *Journal of Nuclear Materials*, 45 : 317–322.

- Kashibe, S. et Une, K. (1991). Effects of temperature cycling and heating rate on fission gas release of bwr fuels. *Journal of Nuclear Science and Technology*, 28 : 1090–1099.
- Kashibe, S., Une, K. et Nogita, K. (1993). Formation and growth of intragranular fission gas bubbles in UO_2 fuels with burnup of 6 – 83 GWd/t. *Journal of Nuclear Materials*, 206 : 22–34.
- Knudsen, F. P., Parker, H. S. et Burdick, M. D. (1960). Flexural strength of specimens prepared from several uranium dioxide powders ; its dependence on porosity and grain size and the influence of additions of titania. *Journal of the American Ceramic Society*, 43(12) : 641–647.
- Koplik, J. et Needleman, A. (1988). Void growth and coalescence in porous plastic solids. *International Journal of Solids and Structures*, 24 : 835–853.
- Lamare, F., Latché, J. C., Fédérici, E. et Bessiron, V. (2007). Scanair v5.3 : reference documentation. Rapport technique, IRSN.
- Leblond, J.-B. (2003). *Mécanique de la rupture fragile et ductile*. Hermès Science Publications, Paris.
- Leblond, J. B., Perrin, G. et Suquet, P. (1994). Exact results and approximate models for porous viscoplastic solids. *International Journal of Plasticity*, 10 : 213–235.
- Lösönen, P. (2000). On the behaviour of intragranular fission gas in UO_2 fuel. *Journal of Nuclear Materials*, 280 : 56–72.
- Martin, D. (1989). The elastic constants of polycrystalline UO_2 and (U, Pu) mixed oxides : a review and recommendations. *High Temperatures - High Pressures*, 21 : 13–24.
- Michel, J. et Suquet, P. (1992). The constitutive law of nonlinear viscous and porous materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40 : 783–812.
- Michel, J.-C., Moulinec, H. et Suquet, P. (1999). Effective properties of composite materials with periodic microstructure : a computational approach. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 172 : 109–143.
- Michel, J.-C., Moulinec, H. et Suquet, P. (2000). A Computational Method Based on Augmented Lagrangians and Fast Fourier Transforms for Composites with High Contrast. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 1(2) : 79–88.
- Michel, J. C. et Suquet, P. (1994). An analytical and numerical study of the overall behaviour of metal-matrix composites. *Modelling Simulation in Materials Science and Engineering*, 2 : 637–658.
- Milton, G. W. (2002). *The Theory of Composites*, chapitre 7, pages 113–142. Cambridge University Press, Cambridge.
- Monchiet, V., Charkaluk, E. et Kondo, D. (2007). An improvement of Gurson-type models of porous materials by using Eshelby-like trial velocity fields. *Comptes Rendus Mécanique*, 335(1) : 32–41.
- Monerie, Y., Vincent, P.-G. et Suquet, P. (2006). Céramiques nucléaires. In *Approches multi-échelles en mécanique des matériaux*. Colloque National MECAMAT-Aussois 2006.
- Moulinec, H. et Suquet, P. (1998). A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 157 : 69–94.

- Mura, T. (1987). *Micromechanics of Defects in Solids*. Kluwer Academic Publishers, second revised edition.
- Nygårds, M. et Gudmundson, P. (2002). Three-dimensional periodic Voronoi grain models and micromechanical FE-simulations of a two-phase steel. *Computational Materials Science*, 24(4) : 513–519.
- Olander, D. R. (1976). *Fundamental Aspects of Nuclear Reactor Fuel Elements*. Technical Information Center, U.S. Department of Energy.
- Pardoen, T. et Hutchinson, J. W. (2000). An extended model for void growth and coalescence. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48 : 2467–2512.
- Perales, F. (2005). *Fissuration des matériaux à gradient de propriétés. Application au zircaloy hydruré*. Thèse, Université Montpellier II.
- Perales, F., Bourgeois, S., Chrysochoos, A. et Monerie, Y. (2007). Two field multibody method for periodic homogenization in fracture mechanics of non linear heterogeneous materials. *Engineering Fracture Mechanics*. In Press.
- Perales, F., Monerie, Y., Dubois, F. et Stainier, L. (2005). Numerical simulation of dynamical fracture in heterogeneous materials. In Bathe, K., éditeur, *Computational Fluid and Solid Mechanics*, pages 437–441. Massachusetts Institute of Technology, Elsevier.
- Perrin, G. (1992). *Contribution à l'étude théorique et numérique de la rupture ductile des métaux*. Thèse, Ecole Polytechnique.
- Perrin, G. et Leblond, J. (1990). Analytical study of a hollow sphere made of plastic porous material and subjected to hydrostatic tension. Application to some problems in ductile fracture of metals. *International Journal of Plasticity*, 6 : 677–699.
- Ponte Castañeda, P. (1991). The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39 : 45–71.
- Ponte Castañeda, P. et Suquet, P. (1998). Nonlinear composites. *Advances in applied mechanics*, 34 : 171–302.
- Ponte Castañeda, P. et Willis, J. (1995). The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 43 : 1919–1951.
- Suquet, P. (1995). Overall properties of nonlinear composites : a modified secant moduli theory and its link with Ponte Castañeda's nonlinear variational procedure. *C. R. Acad. Sci., Paris, Série II(320)* : 563–571.
- Suquet, P. et Bornert, M. (2001). Rappels de calcul tensoriel et d'élasticité. In Bornert, M., Bretheau, T. et Gilormini, P., éditeurs, *Homogénéisation en mécanique des matériaux*, volume 2, chapitre 5, pages 171–202. Hermès Science Publications, Paris.
- Thomason, P. F. (1985). Three-dimensional models for the plastic limit-loads at incipient failure of the intervoid matrix in ductile porous solids. *Acta metall.*, 33(6) : 1079–1085.
- Tvergaard, V. (1982). Material failure by void coalescence in localized shear bands. *Int. J. Solids Structures*, 18(8) : 659–672.

- Willis, J. R. (1989). The structure of overall constitutive relations for a class of nonlinear composites. *J. Appl. Math.*, 43 : 231–242.
- Yagnik, S., Turnbull, J. et Gomme, R. (2004). Microstructure investigations of as-irradiated, annealed and power ramped high burn-up fuel. In *Pellet-clad Interaction in Water Reactor Fuels*, pages 123–141, Aix-en-Provence, France. OECD Publishing.
- Zacharie, I., Lansiaart, S., Combette, P., Trotabas, M., Coster, M. et Groos, M. (1998). Microstructural analysis and modelling of intergranular swelling of an irradiated UO_2 fuel treated at high temperature. *Journal of Nuclear Materials*, 255 : 92–104.

Modélisation micromécanique de la croissance et de la percolation de pores sous pression dans une matrice céramique à haute température

Résumé : Ce travail vise à la construction d'un modèle élastoplastique endommageable pour une céramique poreuse à deux populations de pores saturés : le combustible nucléaire d'oxyde d'uranium fortement irradié et à haute température. La démarche suivie consiste en une approche multi-échelle basée sur l'hypothèse de séparation des échelles entre les deux populations de cavités (pores intragranulaires sphériques et pores intergranulaires ellipsoïdaux) et sur celle de l'isotropie macroscopique. Le modèle élastoplastique endommageable proposé traite séparément de l'élasticité, de la surface de plasticité et de l'évolution des paramètres internes du modèle avec le chargement. La prise en compte de pressions différentes dans chaque population de cavités est effectuée pour les trois régimes élasticité-plasticité-endommagement.

Le modèle développé pour le comportement élastique prend en compte les deux populations de cavité, leur morphologie, leur distribution et les pressions internes qui y règnent (par l'intermédiaire de tenseurs de Biot aux deux échelles).

Le critère de plasticité proposé s'appuie sur des méthodes d'homogénéisation pour comportements non linéaires. A l'échelle du grain, la première population de cavité est prise en compte par l'intermédiaire d'un critère de plasticité de type Gurson-Tvergaard-Needleman. A l'échelle d'une collection de grains, la présence d'une deuxième population de cavité au sein d'une matrice compressible donne lieu au développement de nouvelles bornes supérieures et d'estimations pertinentes pour la surface de plasticité effective. Ces modèles sont dépendants de la morphologie et de la distribution des cavités. Dans le cas des cavités drainées, une estimation analytique, basée sur l'écriture du principe variationnel classique avec un champ de vitesse compressible et une moyenne sur les orientations équiprobables, est développée. Dans le cas saturé, une autre estimation, basée sur l'approche variationnelle de Ponte Castañeda (1991) avec un composite linéaire de comparaison à N phases est proposée. Ces modèles sont comparés à des simulations numériques par éléments finis et à des simulations numériques utilisant la méthode de la transformée de Fourier rapide (méthode FFT).

Les lois d'évolution du modèle élastoplastique retenu (l'estimation N phases) sont établies sur des hypothèses de conservation moyenne des morphologies des cavités. Un enrichissement a posteriori de la loi d'évolution de la porosité à la deuxième échelle est réalisé par l'intermédiaire de simulations numériques qui sont relatives au matériau d'étude. Ces simulations numériques permettent d'étudier la coalescence des bulles de la deuxième échelle (le terme de percolation est assimilé ici au phénomène de coalescence) et mettent en œuvre une méthode d'éléments finis volumiques/cohésifs sur des cellules de Voronoï périodiques.

Mots-clefs : Milieux poreux, oxyde d'uranium, combustible, homogénéisation, approche multi-échelle, élasticité, plasticité, endommagement, critère de Gurson, approches variationnelles, cavités ellipsoïdales, fissures, éléments finis, transformée de Fourier rapide, zones cohésives, cellules de Voronoï.