

Thèse de Doctorat

présentée par

Olivier Dudas

pour obtenir le grade de
Docteur de Mathématiques de l'Université de
Franche-Comté – Besançon

Géométrie des variétés de Deligne-Lusztig : décompositions, cohomologie modulo ℓ et représentations modulaires

Thèse soutenue le 9 juin 2010, devant le jury composé de :

Cédric BONNAFÉ (directeur)	Directeur de Recherche à l'Université de Franche-Comté
Michel BROUÉ	Professeur à l'Université Paris 7
Jean-François DAT (rapporteur)	Professeur à l'Université Paris 6
Meinolf GECK	Professeur à l'Université d'Aberdeen
Nicolas JACON	Maître de Conférences à l'Université de Franche-Comté
Gunter MALLE	Professeur à l'Université de Kaiserslautern
Raphaël ROUQUIER (rapporteur)	Professeur à l'Université d'Oxford

Remerciements

À la pensée de l'encadrement exceptionnel de mon directeur de thèse, Cédric Bonnafé, c'est avec une certaine mélancolie que je rédige les dernières lignes de ce travail. Sa générosité, sa grande disponibilité, ses encouragements et bien sûr ses immenses qualités scientifiques m'ont apporté une aide précieuse durant ces quatre années. C'est donc avec un plaisir tout particulier que je le remercie d'avoir partagé sa passion si communicative des mathématiques.

Je remercie également Jean-François Dat et Raphaël Rouquier pour avoir accepté de relire mon travail. Leur lecture attentive et leurs suggestions judicieuses m'ont véritablement aidé à améliorer le manuscrit. Leur présence dans le jury, ainsi que celle de Michel Broué, Meinolf Geck, Nicolas Jacon et Gunter Malle est pour moi à la fois un très grand plaisir et un immense honneur. Je tiens à remercier chacun d'entre eux d'avoir fait le voyage jusqu'à Besançon.

Au cours de ces quatre années de thèse, j'ai eu l'occasion et le privilège de rencontrer des mathématiciens de tout premier plan qui m'ont beaucoup apporté. Je remercie en particulier Michel Broué qui m'a fait découvrir le monde fascinant de la théorie des représentations, ainsi que François Digne, Jean Michel et Raphaël Rouquier. Outre la richesse de leurs conseils et leur disponibilité pour répondre à mes questions, j'ai beaucoup apprécié leur vision vivante et exaltante des mathématiques.

Pour des raisons parfois un peu moins scientifiques mais tout aussi louables, j'adresse aussi mes remerciements à Cédric L., Daniel, Geordie, J-B, Jérémie, Maria, Olivier pour tous les joyeux moments que nous avons partagés en conférence. Un grand merci bien sûr à toutes les personnes que j'ai côtoyées au laboratoire de Besançon. Plutôt que d'en énumérer ici la liste et de risquer d'en oublier, je préfère les remercier de vive voix pendant que j'en ai encore l'occasion. Une exception tout de même pour Nico qui a beaucoup contribué à rendre ces années bisontines agréables.

Je remercie aussi mes amis et ma famille qui, malgré la distance, ont réellement su me reconforter dans les moments difficiles. Je leur dois beaucoup.

Merci enfin à Claire pour sa patience, son courage et pour le soutien qu'elle m'a apporté à toutes les étapes de cette thèse. Parce qu'elle a eu la tendresse de s'intéresser à ma passion, je partage aujourd'hui avec elle le bonheur d'être allé jusqu'au bout.

Table des matières

Remerciements	3
Introduction	9
1 Cohomologie et représentations modulaires	17
1.1 Rappels d'algèbre homologique	18
1.1.1 Catégories dérivées	18
1.1.2 Cadre modulaire	19
1.1.3 Isomorphismes dans $D^b(\mathcal{A})$	22
1.1.4 Isomorphismes dans $K^b(\mathcal{A})$	23
1.1.5 Équivalences de Rickard	25
1.2 Cohomologie d'une variété quasi-projective	26
1.2.1 Complexe de Rouquier	26
1.2.2 Propriétés du complexe	27
1.2.3 Perfection	30
1.3 L'action de l'endomorphisme de Frobenius	30
1.3.1 Espaces propres généralisés dans $\Lambda\text{-mod}$	31
1.3.2 L'endomorphisme de Frobenius sur $R\Gamma_c(X, \mathcal{O})$	32
2 Décomposition des variétés de Deligne-Lusztig	35
2.1 Première décomposition	36
2.1.1 Groupes réductifs finis	36
2.1.2 Variétés de Deligne-Lusztig	37
2.1.3 Les pièces $X_x(w)$ et $Y_x(\dot{w})$	39
2.2 Décomposition de Curtis-Deodhar	41
2.2.1 Décomposition de Białynicki-Birula	41
2.2.2 Applications aux cellules de Schubert doubles	45
2.2.3 Sur l'adhérence des cellules de Curtis-Deodhar	50
2.3 Application au calcul de la cohomologie de la pièce maximale	55
2.3.1 L'exemple de $GL_3(\mathbb{F})$	56
2.3.2 Sur certains quotients des variétés de Deligne-Lusztig	58
2.3.3 Étude du quotient de la pièce maximale $X_{w_0}(w)$ de $X(w)$	62
2.3.4 Sur la cohomologie de $D(\mathbf{U})^F \setminus Y_{w_0}(w)$	63
2.4 Extension aux autres pièces	71
2.4.1 Décomposition et cohomologie des pièces $X_x(w)$ et $Y_x(\dot{w})$	71
2.4.2 Application aux caractères réguliers	74

2.5	Cas particuliers	75
2.5.1	Caractères (γ, x) -réguliers	75
2.5.2	Cas des sous-groupes unipotents maximaux	76
2.5.3	Le cas de la variété $Y(w_0)$ pour les groupes de type A_n	84
3	Modules de Gelfand-Graev généralisés	87
3.1	Modules de Gelfand-Graev généralisés	88
3.1.1	Classification des orbites nilpotentes	89
3.1.2	Modules de Gelfand-Graev généralisés	92
3.1.3	Algèbre d'endomorphismes	95
3.2	Modules de Gelfand-Graev généralisés dans la cohomologie de Y	99
3.2.1	Expression du quotient de $\tilde{Y}_x(\dot{w})$ par U_3	99
3.2.2	Cohomologie des pièces $Y_x(\dot{w})$	100
3.3	Cas particulier des modules de Gelfand-Graev	102
3.3.1	Conjecture de Bonnafé-Rouquier	102
3.3.2	Modules de Gelfand-Graev induits	103
4	Cohomologie de la variété de Coxeter	107
4.1	Blocs et variétés de Deligne-Lusztig	108
4.1.1	Blocs et séries de Lusztig	108
4.1.2	Blocs unipotents et d -cuspidalité	109
4.2	Le ℓ -bloc principal, pour q d'ordre h modulo ℓ	113
4.2.1	Le cas Coxeter	113
4.2.2	Les caractères du bloc principal	116
4.2.3	L'arbre de Brauer	119
4.3	Preuve de la conjecture de Hiss-Lübeck-Malle	122
4.3.1	Les kG -modules non cuspidaux du bloc	123
4.3.2	Les kG -modules cuspidaux du bloc	127
4.3.3	Applications numériques	128
4.4	Autour de la torsion dans la cohomologie	129
4.4.1	Le cas des variétés \bar{X}_l	130
4.4.2	Torsion et cuspidalité	134
4.4.3	Réduction de Y à X	136
4.4.4	Étude de la torsion dans la cohomologie de X	141
4.4.5	Quelques cas particuliers	143
4.5	Applications sous l'hypothèse de non-torsion forte	152
4.5.1	Détermination du complexe de cohomologie	152
4.5.2	Conjecture de Broué	159
4.5.3	Plongement planaire de l'arbre de Brauer	163
4.5.4	Perversité et matrice de décomposition	165
5	Autres éléments réguliers	169
5.1	Quotient de variétés de Deligne-Lusztig	170
5.1.1	Regroupement des pièces	170
5.1.2	Utilisation des cellules de Curtis-Deodhar	171

TABLE DES MATIÈRES

5.2	Calcul de la cohomologie	173
5.2.1	Conditions sur les cellules $\Upsilon_\gamma(x)$	173
5.2.2	Caractères cuspidaux	175
5.3	Cas particuliers	177
5.3.1	Éléments 8-réguliers des groupes de type F_4	177
5.3.2	Éléments 9-réguliers des groupes de type E_6	182
5.3.3	Éléments 14-réguliers des groupes de type E_7	186
5.3.4	Éléments 24-réguliers des groupes de type E_8	189
5.3.5	Traduction des résultats	193
5.4	Arbres de Brauer associés	195
5.4.1	Observations	195
5.4.2	Conjectures	197
A	Annexe	201
A.1	Programmes GAP	201
A.2	Le groupe simple de type B_2	203
A.3	Tables d'induction et restriction	204
	Index des notations	209
	Bibliographie	215

Introduction

Un des enjeux majeurs dans la théorie des groupes est de comprendre les groupes dits *simples*, qui forment en quelque sorte les « atomes » de la théorie. On espère ainsi, par dévissage, retrouver les propriétés d'un groupe à partir des propriétés de chaque composant simple qu'il contient. La percée la plus spectaculaire dans cette direction est certainement la classification des groupes finis simples, annoncée par Gorenstein en 1983. Celle-ci se divise en trois grandes familles infinies :

- (1) les groupes cycliques $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour p un nombre premier ;
- (2) les groupes alternés \mathfrak{A}_n pour $n \geq 5$;
- (3) les groupes simples de type de Lie (comme $\mathrm{PSL}_n(q)$, $\mathrm{SO}_n(q)$... avec certaines restrictions sur n et q) ;

plus quelques groupes inclassables :

- (4) 26 groupes sporadiques.

Cette thèse s'articule autour d'une certaine classe de groupes provenant de la troisième famille, les *groupes réductifs finis*, et plus particulièrement autour de certains aspects de leur théorie des représentations modulaires.

Depuis les travaux de Steinberg [89] on sait construire ces groupes comme de véritables analogues finis des groupes de Lie : ce sont les points fixes \mathbf{G}^F d'un groupe algébrique réductif défini sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ sous l'action d'un endomorphisme de Frobenius F . Les groupes finis « classiques » $\mathrm{GL}_n(q)$, $\mathrm{SL}_n(q)$, $\mathrm{O}_n(q)$, $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$... sont autant d'exemples de groupes réductifs finis.

Représentations des groupes réductifs finis

En caractéristique nulle

La structure géométrique sous-jacente des groupes réductifs finis suggère l'utilisation de méthodes géométriques pour construire les représentations. C'est dans cette perspective que s'inscrivent les travaux de Deligne et Lusztig [29] : à tout élément w du groupe de Weyl W , ils associent une variété quasi-projective

$$Y(\dot{w}) = \{g\mathbf{U} \in \mathbf{G}/\mathbf{U} \mid g^{-1}F(g) \in \mathbf{U}\dot{w}\mathbf{U}\}$$

munie à la fois d'une action de \mathbf{G}^F et du groupe des points fixes \mathbf{T}_w^F d'un tore de type w . Les représentations de \mathbf{G}^F s'obtiennent alors en « linéarisant » cette action à l'aide des groupes de cohomologie ℓ -adique à support compact. L'action

supplémentaire de \mathbf{T}_w^F permet en outre de découper les représentations obtenues afin de se rapprocher de représentations irréductibles. Plus précisément, Deligne et Lusztig ont étudié les caractères virtuels

$$\mathbf{R}_{\mathbf{T}_w^F}^{\mathbf{G}^F}(\theta) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i H_c^i(Y(\dot{w}), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\theta \in \mathbb{Z} \text{ Irr } \mathbf{G}^F$$

pour θ un caractère de \mathbf{T}_w^F , appelés *caractères de Deligne-Lusztig*. À l'instar des caractères irréductibles, ils engendrent le groupe $\mathbb{Z} \text{ Irr } \mathbf{G}^F$ lorsque w et θ varient et vérifient des formules d'orthogonalité précises. L'avantage est que les valeurs de ces caractères peuvent se calculer à partir des fonctions de Green.

Dans une série de travaux remarquables, culminant dans [64], Lusztig a achevé la classification des caractères ordinaires en calculant les multiplicités des caractères irréductibles dans chaque $\mathbf{R}_{\mathbf{T}_w^F}^{\mathbf{G}^F}(\theta)$, à partir de matrices de Fourier associées à des petits groupes finis.

En caractéristique positive

Une fois les caractères ordinaires déterminés, l'étape suivante dans l'étude de la théorie des représentations du groupe \mathbf{G}^F consiste à exprimer, pour différents nombres premiers ℓ , les caractères de Brauer projectifs en fonction des caractères ordinaires, de façon à obtenir les matrices de décomposition de \mathbf{G}^F .

Les premiers résultats dans cette direction ont été obtenus au cours des années 80 par Fong et Srinivasan [36], [37], [38] puis par Broué, Malle et Michel [18], [15] au début des années 90. Ces derniers ont mis en évidence un lien très profond entre la partition de $\text{Irr } \mathbf{G}^F$ en blocs, et la cohomologie de certaines variétés de Deligne-Lusztig (voir théorème 4.9). Leurs travaux ont suggéré l'étude, au delà des groupes $H_c^i(Y(\dot{w}), \mathbb{Z}_\ell)$, du complexe

$$\mathbf{R}\Gamma_c(Y(\dot{w}), \mathbb{Z}_\ell)$$

représentant la cohomologie de la variété $Y(\dot{w})$ dans la catégorie dérivée des $(\mathbf{G}^F, \mathbf{T}_w^F)$ -bimodules. La version géométrique des conjectures de Broué [17] précise le rôle de ce complexe dans la compréhension des blocs à équivalence dérivée près, expliquant ainsi les nombreuses coïncidences numériques issues des travaux précédents.

La première difficulté théorique, résolue par Rouquier [80], fut de construire un bon représentant de ce complexe, c'est-à-dire possédant de bonnes propriétés de finitude ; c'est ce représentant que nous noterons $\mathbf{R}\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda)$, pour une extension finie Λ de \mathbb{Z}_ℓ contenant assez de racines de l'unité. La théorie de Deligne-Lusztig modulaire, développée par Bonnafé et Rouquier dans [6], s'est alors concentrée sur l'étude des complexes parfaits

$$\mathcal{R}_{\mathbf{T}_w^F}^{\mathbf{G}^F}(P_\theta) = \mathbf{R}\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda)_{e_\theta} \in D^b(\Lambda \mathbf{G}^F\text{-mod})$$

qui forment l'analogue modulaire des caractères de Deligne-Lusztig. Ici, θ est un ℓ' -caractère de \mathbf{T}_w^F , P_θ son enveloppe projective et e_θ l'idempotent associé. Parmi

les nombreux résultats obtenus par Bonnafé et Rouquier, certains généralisent au cadre modulaire des phénomènes connus pour les caractères ordinaires :

- les complexes induits $(\mathcal{R}_{\mathbf{T}_w^F}^{\mathbf{G}^F}(P_\theta))_{w \in W, \theta \in \text{Irr}_{\ell'} \mathbf{T}_w^F}$ engendrent la catégorie des complexes parfaits de $\Lambda \mathbf{G}^F$ -modules ;

d'autres relèvent au niveau des catégories de modules des propriétés auparavant exprimées dans les groupes de Grothendieck de ces catégories :

- la décomposition de Jordan des caractères irréductibles de \mathbf{G}^F est le reflet d'une équivalence de Morita.

Les résultats principaux de cette thèse contribuent à l'avancement de la théorie de Deligne-Lusztig modulaire dans ces deux directions générales.

Modules de Gelfand-Graev

S'il est possible de calculer la somme alternée des groupes de cohomologie d'une variété de Deligne-Lusztig à partir des formules de Lefschetz, il est en revanche beaucoup plus difficile d'explicitier chacun de ces groupes, ainsi que les caractères irréductibles qui y apparaissent. Une classe particulière de caractères échappe néanmoins à cette obstruction : les composants irréductibles des *caractères de Gelfand-Graev*. Deligne et Lusztig ont en effet montré [29] que pour tout caractère de Gelfand-Graev $\gamma_{\mathbf{G}^F}$ de \mathbf{G}^F on a

$$\langle \gamma_{\mathbf{G}^F} ; H_c^i(Y(\dot{w}), \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \rangle_{\mathbf{G}^F} = \begin{cases} |\mathbf{T}_w^F| & \text{si } i = \ell(w) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le caractère $\gamma_{\mathbf{G}^F}$ provient en fait d'un $\Lambda \mathbf{G}^F$ -module projectif $\Gamma_{\mathbf{G}^F}$, appelé *module de Gelfand-Graev*. L'analogue modulaire du résultat précédent est énoncé par Bonnafé et Rouquier dans [7] et démontré dans le cas particulier où w est un élément de Coxeter. Le premier résultat de cette thèse concerne la résolution de ce problème en toute généralité, c'est-à-dire sans hypothèse sur w ou \mathbf{G} :

Théorème 1. *Soit $\Gamma_{\mathbf{G}^F}$ un module de Gelfand-Graev de \mathbf{G}^F et $w \in W$. Alors*

$${}^* \mathcal{R}_{\mathbf{T}_w^F}^{\mathbf{G}^F}(\Gamma_{\mathbf{G}^F}) = \text{RHom}_{\Lambda \mathbf{G}^F}^{\bullet}(\Gamma_{\mathbf{G}^F}, \text{R}\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda)) \simeq \Lambda \mathbf{T}_w^F[-\ell(w)]$$

dans la catégorie dérivée $D^b(\text{mod-}\Lambda \mathbf{T}_w^F)$.

Avec le vocabulaire introduit dans [6], ce résultat traduit le fait que la restriction de Deligne-Lusztig modulaire d'un module de Gelfand-Graev à un tore est un module de Gelfand-Graev de ce tore, modulo un décalage. Ceci permet entre autres de valider une construction fonctorielle du morphisme de Curtis, effectuée dans [5].

Le principe de la preuve de Bonnafé et Rouquier repose sur la forme simple que prend la variété de Deligne-Lusztig $X(w) = Y(\dot{w})/\mathbf{T}_w^F$ lorsque w est un élément de Coxeter :

- la variété $X(w)$ est contenue dans la cellule de Schubert $\mathbf{B}_{w_0} \cdot \mathbf{B}$;
- le quotient $\mathbf{U}^F \backslash X(w)$ est isomorphe au tore $(\mathbf{G}_m)^{\ell(w)}$.

De telles propriétés géométriques sont évidemment spécifiques au cas des éléments de Coxeter, mais elle suggèrent de découper la variété $X(w)$ en des sous-variétés dont le quotient par \mathbf{U}^F sera proche d'être un tore, et dont on pourra facilement calculer la cohomologie. C'est ici qu'intervient la décomposition de Deodhar, qui, en raffinant la stratification de Bruhat de la variété de drapeaux \mathbf{G}/\mathbf{B} , permet de décomposer la variété $Y(\dot{w})$ en des sous-variétés localement fermées et stables par l'action de \mathbf{U}^F

$$Y(\dot{w}) = \bigsqcup Y_\gamma$$

lesquelles sont alors assez simples pour que l'on puisse calculer explicitement la cohomologie des quotients $D(\mathbf{U}^F \backslash Y_\gamma)$. On montre alors que les caractères de \mathbf{U}^F réguliers apparaissent dans la cohomologie d'un seul de ces quotients, ce qui permet de calculer la contribution du module de Gelfand-Graev dans la cohomologie de la réunion des cellules, autrement dit $Y(\dot{w})$ (voir la section 2.4.2).

Plus le caractère de \mathbf{U}^F considéré est proche d'être régulier, plus le nombre de cellules qui peuvent faire apparaître ce caractère est faible. De cette observation on déduit des propriétés de concentration de certains induits de modules de Gelfand-Graev dans la cohomologie des éléments formés à partir de puissances d'éléments de Coxeter (voir la section 2.5.2). L'élément de plus grande longueur w_0 apparaît dans cette étude, et on décrit même, pour les groupe de type A_n , le degré maximal des groupes de cohomologie dans lequel l'induit d'un module de Gelfand-Graev peut apparaître. Au niveau des caractères unipotents, ce résultat se traduit par :

Théorème 2. *Soit (\mathbf{G}, F) un groupe déployé de type A_n et ρ_λ le caractère unipotent associé à la partition λ de $n + 1$. Alors*

$$\langle \rho_\lambda ; H_c^i(Y(\dot{w}_0)) \rangle_{\mathbf{G}^F} \neq 0 \implies i \in \{\nu_{\mathbf{G}}, \nu_{\mathbf{G}} + 1, \dots, 2\nu_{\mathbf{G}} - A_\lambda\}$$

où $\ell(w_0) = \nu_{\mathbf{G}} = n(n + 1)/2$ et A_λ est le degré du degré générique associé à λ .

La borne supérieure donnée dans ce théorème, égale à $2\nu_{\mathbf{G}} - A_\lambda$, est exactement le degré dans lequel le caractère unipotent devrait apparaître selon [35]. Une étude plus approfondie des quotients de $Y(\dot{w}_0)$ par les sous-groupes paraboliques \mathbf{P}^F devrait donner une borne inférieure permettant d'obtenir les premiers résultats de disjonction pour la variété $Y(\dot{w}_0)$.

Conjecture de Broué

La cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig permet non seulement de construire tous les caractères ordinaires de \mathbf{G}^F , mais aussi de regrouper ces caractères en blocs grâce aux travaux de Broué, Malle et Michel [16]. Un de ces blocs nous intéressera tout particulièrement dans cette thèse : si w est un bon élément

d -régulier et que l'ordre de q modulo ℓ est exactement d , alors le ℓ -bloc principal est donné par

$$\bigcup_{\theta \in \text{Irr}_\ell \mathbf{T}_w^F} \{ \rho \in \text{Irr } \mathbf{G}^F \mid \langle \rho; \mathbf{R}_{\mathbf{T}_w^F}^{\mathbf{G}^F}(\theta) \rangle_{\mathbf{G}^F} \neq 0 \}.$$

Broué a conjecturé dans [12] puis [15] que ce résultat était la traduction d'un phénomène beaucoup plus général, énoncé dans le cadre modulaire. Si b (resp. b') désigne l'idempotent de $\Lambda \mathbf{G}^F$ (resp. $\Lambda N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_w)$) associé au bloc principal, alors la version géométrique de la conjecture de Broué prédit que le foncteur

$$b\text{R}\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda) \otimes_{\Lambda N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_w)}^{\mathbb{L}} - : D^b(b' \Lambda N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_w)\text{-mod}) \longrightarrow D^b(b \Lambda \mathbf{G}^F\text{-mod})$$

induit une équivalence dérivée entre les ℓ -blocs principaux de \mathbf{G}^F et $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_w)$. L'existence d'une telle équivalence repose principalement sur les deux propriétés suivantes de la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig, conjecturées pour les bons éléments réguliers :

- l'action de \mathbf{T}_w^F sur le complexe $\text{R}\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda)$ s'étend en une action du normalisateur $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_w)$;
- il y a disjonction de la cohomologie, c'est-à-dire :

$$\text{Hom}_{D^b(b \Lambda \mathbf{G}^F)}(b\text{R}\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda), b\text{R}\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda)[n]) = 0 \quad \text{si } n \neq 0.$$

Tous les résultats énoncés dans cette thèse sont à mettre en perspective avec cette deuxième propriété : d'une part, la disjonction sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ traduit le fait que les groupes de cohomologie de $Y(\dot{w})$ sont disjoints comme \mathbf{G}^F -modules, ce qui revient à déterminer les différents caractères irréductibles de \mathbf{G}^F apparaissant dans chacun de ces groupes. Dans cet esprit, nous arrivons à localiser certains caractères unipotents (voir la section 3.3.2 et en particulier le théorème 2) ou à déterminer explicitement la cohomologie de $Y(\dot{w})$ pour des éléments w particuliers (voir le cas traités au chapitre 5). D'autre part, l'étude des morphismes $\text{RHom}_{\Lambda \mathbf{G}^F}^\bullet(P, \text{R}\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda))$ pour divers modules projectifs P , comme les modules de Gelfand-Graev et leur induits au chapitre 3, est une étape essentielle vers l'obtention de la propriété de disjonction sur l'anneau Λ .

Au cours du chapitre 4, on parvient finalement à une preuve générale de cette propriété lorsque w est un élément de Coxeter. La cohomologie à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ des variétés de Deligne-Lusztig associées à ces éléments a été entièrement déterminée par Lusztig dans [62]. Si on suppose que les groupes de cohomologie à coefficients dans Λ sont sans torsion, on en déduit non seulement chacun de ces groupes, mais aussi un représentant explicite de $b\text{R}\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda)$ sous la forme d'un complexe borné de modules projectifs de type fini. De façon remarquable, ce dernier est exactement le complexe de Rickard associé à l'arbre de Brauer du ℓ -bloc principal, et la propriété de disjonction est alors une conséquence immédiate de [75].

D'autre part, il résulte des travaux de Rouquier [80] que dans le cas particulier des éléments de Coxeter, l'action de \mathbf{T}_w^F se prolonge naturellement à $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_w)$ à

l'aide de l'endomorphisme de Frobenius F . On obtient ainsi une preuve de la version géométrique de la conjecture de Broué pour ces éléments :

Théorème 3. *Soit w un élément de Coxeter, ℓ un nombre premier choisi de telle sorte que q soit d'ordre h (le nombre de Coxeter) modulo ℓ et b le bloc principal de $\Lambda \mathbf{G}^F$. Si les groupes de cohomologie $bH_c^i(Y(\dot{w}), \Lambda)$ sont tous sans torsion, alors le foncteur*

$$bR\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda) \overset{L}{\otimes}_{\Lambda N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_w)} - : D^b(b'\Lambda N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_w)\text{-mod}) \longrightarrow D^b(b\Lambda \mathbf{G}^F\text{-mod})$$

induit une équivalence splendide entre les ℓ -blocs principaux de \mathbf{G}^F et $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_w)$.

Le problème de savoir si la cohomologie de $Y(\dot{w})$ est effectivement sans torsion se ramène à connaître les groupes de cohomologie dans lesquels les $\Lambda \mathbf{G}^F$ -modules cuspidaux peuvent apparaître. Sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, les caractères cuspidaux sont concentrés en degré moitié d'après les travaux de Lusztig [62], et on espère que le phénomène est identique sur l'anneau Λ . On parvient à résoudre entièrement cette question dans les cas suivants :

Théorème 4. *Soit w un élément de Coxeter et ℓ un nombre premier tel que q soit d'ordre h modulo ℓ . Alors la cohomologie de la variété de Deligne-Lusztig $Y(\dot{w})$, coupée par le bloc principal, est sans torsion dans les cas suivants :*

- (i) (\mathbf{G}, F) est un groupe de rang 1 ;
- (ii) (\mathbf{G}, F) est de type A_n ou 2D_n ;
- (iii) (\mathbf{G}, F) est de type B_n ou C_n et $p \neq 2$.

La preuve de ce résultat passe par l'étude précise de la contribution des modules de Gelfand-Graev dans la cohomologie de la variété $Y(\dot{w})$, donnée par le théorème 1, ainsi que de certaines versions « généralisée » de ces modules [56].

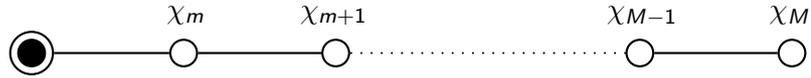
Arbres de Brauer

Les ℓ -blocs principaux de \mathbf{G}^F construits à partir de certains éléments d -réguliers, comme les éléments de Coxeter, ont des groupes de défaut cycliques. À de tels blocs on peut associer un arbre, appelé *arbre de Brauer*, qui caractérise le bloc à équivalence de Morita près. Ces arbres ont été explicitement déterminés pour la grande majorité des groupes simples, exception faite de certains blocs pour les groupes réductifs finis de type E_7 et E_8 qui semblent résister aux méthodes algébriques usuelles.

Le cas des éléments de Coxeter se distingue ici par la relation étroite, observée par Hiss, Lübeck et Malle [51], entre l'agencement des caractères irréductibles dans la cohomologie de la variété de Deligne-Lusztig $Y(\dot{w})$ d'une part et dans l'arbre de Brauer du ℓ -bloc associé d'autre part. Plus précisément, les caractères unipotents d'une série de Harish-Chandra fixée étant arrangés dans la cohomologie selon le tableau suivant

$H_c^r(Y(\dot{w}), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$	$H_c^{r+1}(Y(\dot{w}), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$	\dots	$H_c^{r+M-m}(Y(\dot{w}), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$
χ_m	χ_{m+1}	\dots	χ_M

Hiss, Lübeck et Malle ont vérifié dans la plupart des cas que la branche de l'arbre de Brauer associée était donnée par



Ils ont en outre conjecturé que les valeurs propres de l'endomorphisme de Frobenius définissaient le plongement planaire de cet arbre, c'est-à-dire l'ordre dans lequel les branches devaient être reliées au sommet exceptionnel. Sous l'hypothèse de non torsion discutée précédemment, la détermination explicite du complexe $bR\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda)$ permet de résoudre ce problème en toute généralité :

Théorème 5. *Soit w un élément de Coxeter et ℓ un nombre premier tel que q soit d'ordre h modulo ℓ . Si les groupes de cohomologie $bH_c^i(Y(\dot{w}), \Lambda)$ sont tous sans torsion, alors la conjecture de Hiss-Lübeck-Malle est vraie.*

Ce mémoire s'achève par un travail effectué avec l'aide Jean Michel, à savoir l'étude du problème analogue pour d'autres éléments réguliers de petite longueur. La première étape consiste à déterminer explicitement la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig en s'inspirant de [62] et [34]. Il est très encourageant de voir que les outils géométriques mis en place dans la démonstration du théorème 1 sont encore une fois particulièrement adaptés pour généraliser « le cas Coxeter » à d'autres éléments.

Poussé par les résultats obtenus et par la forme particulière que prennent les arbres de Brauer connus pour les types F_4 et E_6 , on propose finalement deux arbres conjecturaux pour les ℓ -blocs principaux des groupes de type E_7 et E_8 , jusqu'à présent inconnus. Une étude détaillée de la torsion dans la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig associées fournira vraisemblablement les éléments manquant à la preuve.

Cohomologie des variétés quasi-projectives et représentations modulaires

Contexte

Ce chapitre introduit le vocabulaire homologique et géométrique que nous emploierons tout au long de cette thèse. Depuis les travaux fondateurs de Deligne et Lusztig [29], l'idée générale qui prédomine en théorie des représentations des groupes réductifs finis consiste à obtenir les représentations à partir de la cohomologie de certaines variétés sur lesquels le groupe fini agit.

On peut donner plusieurs sens au mot « cohomologie » : lorsque l'on étudie les représentations d'un groupe fini H sur un anneau \mathcal{O} , on cherche à décrire la catégorie des $\mathcal{O}H$ -modules de type fini. Dans le cas où \mathcal{O} est un corps de caractéristique zéro, notamment la clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ du corps des nombres ℓ -adiques, cette catégorie est entièrement décrite par son groupe de Grothendieck, et les informations cohomologiques d'une H -variété X sont encodées dans le caractère virtuel

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i H_c^i(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \in \mathbb{Z} \text{Irr } H.$$

En revanche, dès que \mathcal{O} est un corps de caractéristique ℓ , avec ℓ divisant l'ordre du groupe H , la catégorie des représentations n'est plus semi-simple et la détermination des caractères virtuels précédents, ou même de chacun des groupes de cohomologie $H_c^i(X, \mathcal{O})$, ne suffit plus à rendre compte de la richesse de $\mathcal{O}H\text{-mod}$. Le bon point de vue consiste en l'étude du complexe

$$R\Gamma_c(X, \mathcal{O}) \in D^b(\mathcal{O}H\text{-Mod})$$

représentant la cohomologie de la variété X , initié dans [6]. L'avantage de cette approche est que la plupart des propriétés géométriques de l'action de H sur X se traduit sur ce complexe, permettant ainsi de déduire des informations sur

les représentations modulaires de H en construisant notamment de nombreux modules projectifs à l'aide du corollaire 1.27.

Ce chapitre est divisé en trois parties : la première énonce les principaux résultats d'algèbre homologique dont nous aurons besoin par la suite, traduits pour la plupart dans le langage des catégories dérivées [55]. On rappelle ensuite les principales propriétés du complexe $R\Gamma_c(X, \mathcal{O})$ construit par Rouquier dans [80], avant de terminer le chapitre par quelques résultats permettant de couper le complexe selon les espaces propres généralisés d'un endomorphisme de X normalisant H .

1.1 Rappels d'algèbre homologique

On commence par fixer les notations, et rappeler quelques propriétés d'algèbre homologique, traduites dans le langage des catégories dérivées. Ce formalisme sera amplement utilisé dans les chapitres suivants pour étudier les représentations modulaires des groupes réductifs finis.

1.1.1 Catégories dérivées

Pour \mathcal{A} une catégorie abélienne, on notera $C(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes de cochaînes, $K(\mathcal{A})$ la catégorie homotopique et $D(\mathcal{A})$ la catégorie dérivée. On utilisera les exposants $-$, $+$ et b pour désigner les sous-catégories pleines formées des complexes majorés, minorés ou bornés.

Dans tout ce chapitre, on se placera dans le cas où $\mathcal{A} = A\text{-Mod}$ est la catégorie des modules sur un anneau A quelconque, ou dans la sous-catégorie pleine $A\text{-mod}$ formée des modules de type fini. Cette hypothèse n'est en théorie pas très restrictive puisque toute petite catégorie abélienne se plonge dans une certaine catégorie de modules [67]. Puisque les modules libres sont projectifs, les catégories $A\text{-Mod}$ et $A\text{-mod}$ possèdent suffisamment de projectifs, ce qui permet de construire les foncteurs dérivés des bi-foncteurs usuels. Notons que la catégorie $A\text{-Mod}$ a aussi suffisamment d'objets injectifs, ce qui n'est pas le cas de $A\text{-mod}$ en général.

(i) **Résolutions.** On appellera *résolution projective* (resp. *résolution injective*) d'un complexe $C \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ tout quasi-isomorphisme de la forme $P \rightarrow C$ (resp. $C \rightarrow I$), tel que P (resp. I) soit un complexe de A -modules projectifs (resp. injectifs). Le fait que la catégorie \mathcal{A} possède suffisamment de projectifs (resp. d'injectifs) entraîne que tout objet $C \in \text{Ob}(C^-(\mathcal{A}))$ (resp. $C \in \text{Ob}(C^+(\mathcal{A}))$) possède une résolution projective (resp. injective). De plus, ces résolutions sont uniques à homotopie près [91].

(ii) **Bi-foncteurs usuels.** D'après [55, section 10.3], on peut définir le foncteur dérivé à droite du bifoncteur $\text{Hom}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}^{\text{op}} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$. On le notera

$$\text{RHom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(-, -) : D^+(\mathcal{A}^{\text{op}}) \times D^+(\mathcal{A}) \rightarrow D^+(\mathbb{Z}\text{-Mod})$$

En pratique, lorsque C et C' sont deux complexes de A -modules, on calcule $\mathrm{RHom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(C, C')$ en choisissant une résolution projective P du complexe C , ou bien une résolution injective I de C' . On obtient alors les isomorphismes suivants dans $D^+(\mathbb{Z}\text{-Mod})$:

$$\mathrm{RHom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(C, C') \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(P, C') \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(C, I)$$

où le complexe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(C, C')$ désigne le complexe total associé au bicomplexe $(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C_i, C'_j))_{i,j}$. De plus, la cohomologie de ces complexes permet de représenter simplement les morphismes dans la catégorie homotopique ainsi que dans la catégorie dérivée puisque l'on a d'après [55, proposition 11.7.3 et Théorème 13.4.1] :

$$\begin{aligned} H^i(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(C, C')) &\simeq \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(C, C'[i]) \\ \text{et} \quad H^i(\mathrm{RHom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(C, C')) &\simeq \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(C, C'[i]). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Le produit tensoriel possède lui aussi une version dérivée, que l'on notera

$$- \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_A - : D^-(\mathrm{Mod}\text{-}A) \times D^-(A\text{-Mod}) \longrightarrow D^-(\mathbb{Z}\text{-Mod})$$

On le calcule en pratique en prenant des résolutions plates ou projectives des complexes concernés : si C, C' sont deux objets de $C^-(\mathcal{A})$, et P, P' deux résolutions projectives, on a en effet, dans $D^+(\mathbb{Z}\text{-Mod})$:

$$C \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_A C' \simeq C \otimes_A P' \simeq P \otimes_A C'.$$

Remarque 1.2. Étant donné que les images des bifoncteurs RHom^{\bullet} et $\overset{\mathrm{L}}{\otimes}$ peuvent se construire à l'aide de la résolution d'un seul des deux complexes, on peut supposer en général que l'un des deux complexes seulement est minoré ou majoré selon les cas. En revanche, le complexe image n'aura alors aucune raison d'être minoré ou majoré.

1.1.2 Cadre modulaire

Fixons maintenant le cadre modulaire que nous utiliserons ensuite dans les chapitres suivants. Soit H un groupe fini et ℓ un nombre premier. On appelle *système ℓ -modulaire* tout triplet (K, Λ, k) où

- K est une extension finie du corps \mathbb{Q}_{ℓ} des nombre ℓ -adiques ;
- Λ est l'anneau des entiers de K sur \mathbb{Z}_{ℓ} . C' est un anneau local d'unique idéal maximal $J(\Lambda)$;
- $k = \Lambda/J(\Lambda)$ est le corps résiduel de l'anneau local Λ . C' est un corps fini de caractéristique ℓ .

En résumé, on peut agencer les différents anneaux dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & K & & \\
 & & \uparrow & \swarrow & \\
 & & \mathbb{Q}_\ell & & \Lambda & \longrightarrow & k \\
 & & \uparrow & \swarrow & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \mathbb{Z}_\ell & & \mathbb{F}_\ell & \longrightarrow & \mathbb{F}_\ell
 \end{array}$$

On dit que le système modulaire est *assez gros* pour H si le corps K contient toutes les racines de l'unité d'ordre divisant l'exposant du groupe H . Dans ce cas, non seulement les caractères de H sont à valeurs dans K mais toute représentation linéaire de H est réalisable sur K [81, section 12.3]. L'algèbre KH est donc semi-simple déployée.

Désormais, on se concentrera sur l'étude des représentations des algèbres de la forme $A = \mathcal{O}H$ pour \mathcal{O} un anneau quelconque parmi (K, Λ, k) . L'étude de la théorie des représentations de ces algèbres ainsi que des différents liens existant entre elles constitue le coeur de la théorie des représentations modulaires de H et formera donc le cadre général de notre travail. La majorité des représentations étudiées dans cette thèse proviendra de certains complexes de cochaînes et de leur cohomologie ; nous donnons donc maintenant les différentes compatibilités entre le cadre modulaire et les méthodes homologiques que nous mettrons en oeuvre.

(i) **Compatibilité dans $D^b(\mathcal{O}H\text{-Mod})$.** À partir d'un complexe borné C de ΛH -modules, on peut construire les complexes

$$KC = C \otimes_{\Lambda}^{\mathbb{L}} K \quad \text{et} \quad \overline{C} = C \otimes_{\Lambda}^{\mathbb{L}} k.$$

Puisque K est le corps des fractions de Λ , il est plat sur Λ et le complexe KC est isomorphe dans $D^-(KH\text{-Mod})$ à l'extension usuelle des scalaires $C \otimes_{\Lambda} K$. En revanche, c'est en général faux pour la réduction modulo ℓ .

Pour C et C' deux complexes bornés de ΛH -modules, on peut, avec ces notations, écrire l'isomorphisme suivant dans $D(\mathbb{Z}\text{-Mod})$:

$$\mathrm{RHom}_{\Lambda H}^{\bullet}(C, C') \otimes_{\Lambda}^{\mathbb{L}} K \simeq \mathrm{RHom}_{KH}^{\bullet}(KC, KC').$$

Sans hypothèses supplémentaires sur C et C' , l'analogie de cet isomorphisme pour la réduction modulo ℓ est faux. Néanmoins, si ces deux complexes sont supposés quasi-isomorphes à des complexes bornés de modules projectifs de type fini (c'est-à-dire *parfaits*, voir la définition 1.9), on trouve effectivement

$$\mathrm{RHom}_{\Lambda H}^{\bullet}(C, C') \otimes_{\Lambda}^{\mathbb{L}} k \simeq \mathrm{RHom}_{kH}^{\bullet}(\overline{C}, \overline{C}').$$

(ii) **Compatibilité de la cohomologie.** Puisque K est plat sur Λ , le foncteur extension des scalaires de Λ à K est exact et la cohomologie du complexe $KC = C \otimes_{\Lambda} K$ s'obtient naturellement par la formule

$$H^i(KC) \simeq H^i(C) \otimes_{\Lambda} K.$$

En particulier, si C et C' sont deux complexes bornés de ΛH -modules on trouve, à l'aide de l'isomorphisme 1.1 :

$$\mathrm{Hom}_{D^b(kH)}(KC, KC') \simeq \mathrm{Hom}_{D^b(\Lambda H)}(C, C') \otimes_{\Lambda} K.$$

En revanche, la cohomologie de \overline{C} n'est pas exactement la ℓ -réduction de la cohomologie de C en général. Le lien entre les deux est donné par la formule des coefficients universels :

Théorème 1.3 (Formule des coefficients universels). *Soit C un complexe de ΛH -modules. Si les termes de C sont libres sur Λ , alors pour tout entier $n \geq 1$, on dispose d'une suite exacte de kH -modules*

$$0 \longrightarrow H^i(C) \otimes_{\Lambda} \Lambda/\ell^n \Lambda \longrightarrow H^i(C \otimes_{\Lambda} \Lambda/\ell^n \Lambda) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(H^{i+1}(C), \Lambda/\ell^n \Lambda) \longrightarrow 0.$$

Exemple 1.4. Le complexe $C : 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\ell} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ concentré en degrés 0 et 1 a de la cohomologie non nulle en degré 1 seulement, donnée par $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ alors que sa réduction $\overline{C} : 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \longrightarrow 0$ a deux groupes de cohomologie égaux à $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ en degrés 0 et 1.

(iii) **Facteurs de composition de la cohomologie.** Le langage des foncteurs dérivés permet d'exprimer agréablement la présence de certains facteurs de composition dans la cohomologie d'un complexe donné :

Proposition 1.5. *Soit L un kH -module simple et P_L son enveloppe projective. Pour C un complexe de kH -modules et i un entier fixé, il y a équivalence entre les assertions suivantes :*

- (i) le groupe de cohomologie $H^i(\mathrm{RHom}_{kH}^{\bullet}(P_L, C))$ est non nul ;
- (ii) le groupe $\mathrm{Hom}_{K^b(kH)}(P_L, C[i])$ est non nul ;
- (iii) L est un facteur de composition de $H^i(C)$.

Démonstration. Les deux premières assertions sont équivalentes car P_L étant projectif, les complexes $\mathrm{RHom}_{kH}^{\bullet}(P_L, C)$ et $\mathrm{Hom}_{kH}^{\bullet}(P_L, C)$ sont isomorphes dans la catégorie $D(kH\text{-mod})$. En particulier, on a

$$H^i(\mathrm{RHom}_{kH}^{\bullet}(P_L, C)) \simeq H^i(\mathrm{Hom}_{kH}^{\bullet}(P_L, C)) \simeq \mathrm{Hom}_{K^b(kH)}(P_L, C[i]).$$

Montrons maintenant que les assertions (ii) et (iii) sont équivalentes : si L est un facteur de composition du module $H^i(C)$ alors il existe un morphisme non nul $P_L \longrightarrow H^i(C) \simeq \mathrm{Ker} d_i / \mathrm{Im} d_{i-1}$. Puisque P_L est projectif, on en déduit un morphisme non nul φ de P_L vers $\mathrm{Ker} d_i$ et donc vers C_i par inclusion. Le fait que φ soit homotopiquement nul se traduit par l'existence d'un morphisme $\psi : P_L \longrightarrow C_{i-1}$ factorisant φ . Si un tel morphisme existait, on aurait $\mathrm{Im} \varphi = \mathrm{Im} d_{i-1}$ ce qui est exclu puisque le morphisme de départ $P_L \longrightarrow H^i(C)$ est supposé non nul, et ainsi (iii) \Rightarrow (ii).

Supposons maintenant que L n'est pas facteur de composition de $H^i(C)$. La donnée d'un morphisme de complexes $P_L \rightarrow C$ est équivalente à la donnée d'un morphisme de modules $\varphi : P_L \rightarrow C_i$ vérifiant $\text{Im } \varphi \subset \text{Ker } d_i$. Étant donné que L n'est pas facteur de composition de $H^i(C)$, on a en fait $\text{Im } \varphi \subset \text{Im } d_{i-1}$. Or C_{i-1} se projette sur ce dernier module, et la projectivité de P_L nous assure l'existence d'un morphisme $\psi : P_L \rightarrow C_{i-1}$ factorisant φ , c'est-à-dire tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_L & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \cdots \\
 & & & & \downarrow \varphi & & \\
 & & \swarrow \psi & & & \searrow d_i & \\
 \cdots & \longrightarrow & C_{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & C_i & \xrightarrow{d_i} & C_{i+1} \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

Ceci traduit exactement le fait que φ est homotope à zéro et démontre l'implication restante (ii) \Rightarrow (iii). \square

1.1.3 Isomorphismes dans $D^b(\mathcal{A})$

Nous rappelons ici quelques méthodes permettant de simplifier la représentation des complexes à isomorphisme près dans la catégorie dérivée $D^b(\mathcal{A})$.

(i) **Concentration.** Nous travaillerons exclusivement sur des complexes bornés où à cohomologie bornée. Les opérations de troncation nous permettent alors de représenter ces complexes sous une forme minimale. Rappelons que pour tout entier relatif n , on dispose de deux foncteurs $\tau_{\geq n}$ et $\tau_{\leq n}$ définis par :

$$\tau_{\geq n}(C) = \begin{cases} C_i & \text{si } i > n \\ \text{Ker } d_n & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et} \quad \tau_{\leq n}(C) = \begin{cases} C_i & \text{si } i < n \\ \text{Coker } d_{n-1} & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, tout complexe C de $\mathcal{O}H$ -modules est relié à ses troncations par le triangle distingué suivant dans $D(\mathcal{O}H\text{-Mod})$:

$$\tau_{\leq n}(C) \longrightarrow C \longrightarrow \tau_{\geq n+1}(C) \rightsquigarrow$$

Puisque les complexes acycliques sont isomorphes à zéro dans $D^b(\mathcal{O}H\text{-Mod})$, on en déduit aisément le lemme suivant :

Lemme 1.6. *Si C est un complexe de $\mathcal{O}H$ -modules dont la cohomologie est concentrée entre les degrés m et M alors*

$$C \simeq \tau_{\geq m} \circ \tau_{\leq M}(C) = \tau_{\leq M} \circ \tau_{\geq m}(C)$$

dans la catégorie dérivée $D(\mathcal{O}H\text{-Mod})$. En particulier, si la cohomologie de C est concentrée en degré m , alors C est quasi-isomorphe à $H^m(C)[-m]$.

(ii) **Le cas héréditaire.** On dit qu'une catégorie abélienne \mathcal{A} est héréditaire si pour tout couple d'objets (M, N) de la catégorie, les groupes $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(N, M)$ sont nuls dès que $i > 1$. C'est le cas des catégories de modules sur des anneaux de dimension

globale inférieure à 1 [91, section 4.1], comme KH (de dimension 0) ou ΛH et kH dès que l'ordre de H est premier à ℓ (de dimensions respectives 1 et 0). Dans ce cas, un complexe borné est, à quasi-isomorphisme près, entièrement déterminé par sa cohomologie [55, Corollaire 13.1.20] :

Proposition 1.7. *Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne héréditaire et $C \in C^b(\mathcal{A})$ un complexe borné. Alors il existe un isomorphisme (non canonique) entre C et $H^\bullet(C)$ dans $D^b(\mathcal{A})$.*

Remarque 1.8. Ce résultat n'implique pas pour autant que la catégorie dérivée $D^b(\mathcal{A})$ est équivalente à la catégorie des complexes bornés de \mathcal{A} de différentielle nulle. En effet, si R est un objet de \mathcal{A} qui possède des auto-extensions, on a $\text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(R, R[1]) = \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(R, R) \neq 0$ alors que $\text{Hom}_{C(\mathcal{A})}(R, R[1]) = 0$.

1.1.4 Isomorphismes dans $K^b(\mathcal{A})$

(i) **Perfection et concentration.** Le résultat précédent de concentration ne se généralise pas directement à la catégorie homotopique car un complexe acyclique n'est pas forcément homotope à zéro. C'est en revanche le cas si on se restreint à une certaine classe de complexes.

Définition 1.9. *On dit qu'un complexe de $\mathcal{O}H$ -modules est parfait s'il est isomorphe dans $D^b(\mathcal{O}H)$ à un complexe borné dont les termes sont des $\mathcal{O}H$ -modules projectifs de type fini.*

On notera $D(\mathcal{O}H\text{-Mod})_{\text{parf}}$ la catégorie des complexes parfaits. D'après la section 1.1.2, les images des foncteurs dérivés sur les complexes parfaits se calculent directement à partir des foncteurs usuels : si C est un complexe parfait et C' un complexe de $\mathcal{O}H$ -modules quelconque, on a

$$C \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}H} C' \simeq C \otimes_{\mathcal{O}H} C' \quad \text{et} \quad \text{RHom}_{\mathcal{O}H}^\bullet(C, C') \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}H}^\bullet(C, C').$$

En particulier, si $\mathcal{O}H\text{-proj}$ désigne la catégorie additive des modules projectifs de type fini, le foncteur naturel

$$K^b(\mathcal{O}H\text{-proj}) \longrightarrow D(\mathcal{O}H\text{-Mod})_{\text{parf}}$$

est une équivalence de catégories.

En considérant uniquement des objets de $K^b(\mathcal{O}H\text{-proj})$ on peut facilement éliminer les termes superflus, et on obtient l'analogie suivant du lemme 1.6 :

Lemme 1.10. *Soit $C \in K^b(\mathcal{O}H\text{-proj})$. Si la cohomologie de C est concentrée entre les degrés m et M alors C est homotope à un complexe*

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P_{m-1} \longrightarrow P_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_M \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

dont les termes sont des modules projectifs de type fini concentrés entre les degrés $m - 1$ et M . De plus, on peut choisir $P_{m-1} = 0$ dans les deux cas suivants :

- (a) \mathcal{O} est l'un des corps K ou k ;

(b) $\mathcal{O} = \Lambda$ et le groupe $H^m(C)$ est libre sur Λ .

Démonstration. Supposons que les derniers termes du complexe C s'écrivent

$$\cdots \longrightarrow P_r \xrightarrow{d_r} P_{r+1} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

avec $r \geq M$. Par hypothèse sur la cohomologie, la différentielle d_r est surjective ; puisque P_{r+1} est projectif, on en déduit qu'il existe des modules P' et P'' tels que P_r se décompose en $P_r = P' \oplus P''$ et d induise un isomorphisme entre P' et P_{r+1} . Le complexe $0 \longrightarrow P' \longrightarrow P_{r+1} \longrightarrow 0$ est donc un facteur direct de C homotope à zéro ; en le retirant, on obtient un complexe parfait dont la longueur a diminué. Il suffit alors d'itérer le procédé afin d'obtenir un complexe dont les termes de degrés strictement supérieurs à M sont nuls.

Pour éliminer les termes superflus à gauche, on procède de la même façon : si les premiers termes du complexe s'écrivent

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P_r \xrightarrow{d_r} P_{r+1} \longrightarrow \cdots$$

avec $r < m$ alors la différentielle d_r est injective. Elle possède une rétraction $\pi : P_{r+1} \longrightarrow P_r$ dans le cas où \mathcal{O} vaut K ou k puisqu'alors tout module projectif est aussi injectif. Développons le cas où $\mathcal{O} = \Lambda$: une telle rétraction existe si $\text{Coker } d_r$ est sans torsion. En effet, P_r est $(H, 1)$ -injectif par [26, théorème 19.12] puisqu'il est projectif et la suite exacte $0 \longrightarrow P_r \longrightarrow P_{r+1} \longrightarrow \text{Coker } d_r \longrightarrow 0$ se scinde sur ΛH dès qu'elle se scinde sur Λ . Deux cas se présentent alors : si $r < m - 1$, alors $\text{Im } d_r = \text{Ker } d_{r+1}$ et il vient $\text{Coker } d_r \simeq \text{Im } d_{r+1}$ qui est sans torsion comme sous-module de P_{r+2} . Pour $r = m - 1$ le module quotient $\text{Coker } d_{m-1}/H^m(C) \simeq \text{Im } d_m$ est sans torsion donc $\text{Coker } d_{m-1}$ l'est aussi dès que $H^m(C)$ l'est, c'est-à-dire si l'hypothèse (b) est satisfaite.

Une fois que l'on dispose d'une rétraction de d_r , il est facile de vérifier que le complexe $0 \longrightarrow P_r \longrightarrow \text{Im } d_r \longrightarrow 0$ est un facteur direct de C homotope à zéro, ce qui permet d'éliminer le premier terme de C . On conclut en itérant le procédé. \square

(ii) **Le cas semi-simple.** Lorsque \mathcal{O} est le corps K , la situation est en fait beaucoup plus élémentaire. Plus généralement, dès que l'algèbre $\mathcal{O}H$ est semi-simple, on peut montrer que tout complexe C est homotope à sa cohomologie : en écrivant $C_i = \text{Ker } d_i \oplus M_i$ avec $M_i \simeq \text{Im } d_i$ et $\text{Ker } d_i = \text{Im } d_{i-1} \oplus N_i$ avec $N_i \simeq H^i(C)$, on définit des applications naturelles $f : C \twoheadrightarrow N$ et $g : N \hookrightarrow C$ qui sont inverses l'une de l'autre dans $K(\mathcal{O}H\text{-Mod})$. En effet, on a clairement $f \circ g = \text{Id}_N$ et l'homotopie entre $g \circ f$ et Id_C est donnée par composition de la projection $C_{i+1} \twoheadrightarrow \text{Im } d_i$ et de l'inclusion $\text{Im } d_i \simeq M_i \hookrightarrow C_i$.

Puisque pour les complexes munis d'une différentielle nulle les applications homotopiquement nulles sont identiquement nulles, on en déduit que le foncteur H^\bullet induit une équivalence entre $K(\mathcal{O}H\text{-Mod})$ et la catégorie $\mathcal{O}H\text{-Mod}_{\mathbb{Z}}$ des $\mathcal{O}H$ -modules \mathbb{Z} -gradués dès que \mathcal{O} vaut K ou dès que \mathcal{O} vaut k et que l'ordre du groupe H est premier à ℓ .

(iii) **Une homotopie particulière.** Le lemme suivant sera amplement utilisé dans la section 4.5.1 pour éliminer certains facteurs directs dans les termes d'un complexe :

Lemme 1.11. *Soit (C, d) un complexe de $\mathcal{O}H$ -modules. Supposons que pour un entier i fixé on dispose de décompositions $C_i = D_i \oplus M$ et $C_{i+1} = D_{i+1} \oplus N$ telles que d induise un isomorphisme entre M et N . Alors C est homotope au complexe*

$$\cdots \longrightarrow C_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} D_i \xrightarrow{\partial_i} D_{i+1} \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_{i+2} \longrightarrow \cdots$$

où les différentielles sont définies naturellement par :

- ∂_{i-1} est la composée de d_{i-1} avec la projection $C_i \rightarrow D_i$;
- ∂_i est la composée de la restriction de d_i à D_i avec la projection $C_{i+1} \rightarrow D_{i+1}$;
- ∂_{i+1} est la restriction de d_{i+1} à D_{i+1} .

Démonstration. Désignons par D le complexe construit dans l'énoncé du lemme. Les décompositions de C_i et C_{i+1} induisent des morphismes naturels de complexes $f : C \rightarrow D$ et $g : D \hookrightarrow C$ tels que $f \circ g = \text{Id}_D$. L'homotopie $\psi : C \rightarrow C[1]$ entre $g \circ f$ et Id_C se construit de la manière suivante : ψ_j est nulle pour $j \neq i+1$ et ψ_{i+1} est définie comme la composée de la projection $C_{i+1} \rightarrow N$ avec l'inclusion $N \simeq M \hookrightarrow C_i$. On vérifie facilement que $\text{Id}_C - g \circ f = \psi \circ d + d \circ \psi$. \square

1.1.5 Équivalences de Rickard

Les équivalences de Rickard sont un cas particulier d'équivalences entre catégories dérivées de modules s'inspirant des équivalences de Morita. Rappelons que le prototype d'une équivalence de Morita entre deux anneaux A et B est donné par un foncteur de la forme $P \otimes_A - : A\text{-mod} \rightarrow B\text{-mod}$ où P est un (B, A) -bimodule de type fini, projectif à gauche et à droite. La notion de complexe parfait généralisant naturellement celle des modules projectifs de type fini, Rickard a introduit dans [76] :

Définition 1.12. *Soient A et B deux anneaux, et C un complexe de (B, A) -bimodules, parfait à gauche et à droite. Une équivalence de Rickard est une équivalence de catégories triangulées induite par le foncteur*

$$\mathcal{F} : C \otimes_A^{\mathbb{L}} - : D^b(A\text{-mod}) \longrightarrow D^b(B\text{-mod}).$$

Si \mathcal{F} est une telle équivalence alors le complexe C , vu comme complexe de B -modules, est l'image de A par \mathcal{F} . À ce titre on peut montrer qu'il possède les propriétés suivantes :

- la catégorie additive $\text{add}(C)$ formé des facteurs directs de sommes finies de C engendre $K^b(B\text{-mod})$ en tant que catégorie triangulée (voir [57]) ;
- la cohomologie du complexe $\text{REnd}_B^\bullet(C)$ est concentrée en degré 0 ;
- le morphisme naturel $A \rightarrow \text{End}_{D^b(B\text{-mod})}(C)$ est un isomorphisme.

Les deux premières propriétés traduisent le fait que C est un complexe *basculant* (voir aussi le corollaire 4.77).

Dans le cadre qui nous est cher, c'est-à-dire lorsque $A = \Lambda He$ et $B = \Lambda Ne'$ sont des blocs ou des sommes de blocs de certains groupes finis, Broué a donné dans [12] des conditions suffisantes sur le complexe C pour qu'il induise une équivalence de Rickard. En conjuguant ses résultats à [78], on obtient le théorème suivant, démontré en annexe dans [4] :

Théorème 1.13. *Soient $A = \Lambda He$ et $B = \Lambda Ne'$ des sommes de Λ -blocs de groupes finis et C un complexe de (B, A) -bimodules. On suppose que*

- (i) C est parfait à gauche et à droite ;
- (ii) C vérifie la propriété de disjonction suivante : pour tout $i \neq 0$

$$\mathrm{Hom}_{D^b(B\text{-mod})}(C, C[i]) = 0.$$

Autrement dit, la cohomologie de $\mathrm{REnd}_B^\bullet(C)$ est concentrée en degré 0 ;

- (iii) *le morphisme naturel $A \longrightarrow \mathrm{End}_{D^b(B\text{-mod})}(C)$ est un isomorphisme ;*
- (iv) *tous les caractères irréductibles de KB apparaissent dans $H^\bullet(KC)$.*

Alors $C \otimes_A^L -$ induit une équivalence de Rickard entre $D^b(A\text{-mod})$ et $D^b(B\text{-mod})$.

Une telle équivalence a de nombreuses conséquences numériques : le nombre de caractères irréductibles (ordinaires et modulaires) de A et B ainsi que les invariants de similitude de la matrice de Cartan sont notamment conservés [13].

Remarque 1.14. Lorsque B est un véritable bloc, l'hypothèse (iv) est superflue. En revanche, on peut toujours ajouter à e' des blocs b vérifiant $bC \simeq 0$ sans changer les trois premières hypothèses du théorème, alors que la conclusion devient trivialement fausse.

1.2 Cohomologie d'une variété quasi-projective

Le principe de la théorie de Deligne-Lusztig modulaire, initiée par Broué [12], [15], [17] et principalement développée par Bonnafé et Rouquier [6], réside dans la construction et l'étude des représentations modulaires d'un groupe réductif fini G à partir d'un complexe de ΛG -modules représentant la cohomologie d'une variété de Deligne-Lusztig. Nous rappelons dans cette partie la construction canonique de ce complexe par Rouquier [80] ainsi que les importantes propriétés algébriques que nous utiliserons par la suite.

1.2.1 Complexe de Rouquier

Soit X une variété algébrique quasi-projective définie sur $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}_p$, H un groupe fini agissant sur X et \mathcal{T} un monoïde d'endomorphismes de X normalisant H . On supposera désormais que le nombre premier p (la caractéristique des corps sur lesquels toutes les variétés algébriques considérées sont définies) et le nombre

premier ℓ (associé au système modulaire) sont distincts. Si \mathcal{O} est un des anneaux parmi (K, Λ, k) , il existe deux complexes bornés de $\mathcal{O}H \rtimes \Upsilon$ -modules

$$R\Gamma(X, \mathcal{O}) \quad \text{et} \quad R\Gamma_c(X, \mathcal{O})$$

représentant la cohomologie ℓ -adique (resp. la cohomologie ℓ -adique à support compact) de X , c'est-à-dire tels que

$$H^\bullet(R\Gamma(X, \mathcal{O})) \simeq H^\bullet(X, \mathcal{O})$$

et

$$H^\bullet(R\Gamma_c(X, \mathcal{O})) \simeq H_c^\bullet(X, \mathcal{O})$$

comme $\mathcal{O}H \rtimes \Upsilon$ -modules.

Remarque 1.15. Les termes de ces complexes sont en général loin d'être des modules de type fini. On verra néanmoins dans la section 1.2.3 un moyen d'en expliciter des représentants (à homotopie près) possédant de bonnes propriétés de finitude.

Ce formalisme convient parfaitement au cadre modulaire : l'opération d'extension des scalaires au niveau des complexes se traduit en effet par un changement de coefficients de la cohomologie. Si \mathcal{O} est un des corps parmi K et k , on a les isomorphismes suivants dans $D^b(\mathcal{O}H \rtimes \Upsilon\text{-Mod})$:

$$R\Gamma(X, \Lambda) \otimes_{\Lambda}^L \mathcal{O} \simeq R\Gamma(X, \mathcal{O}) \quad \text{et} \quad R\Gamma_c(X, \Lambda) \otimes_{\Lambda}^L \mathcal{O} \simeq R\Gamma_c(X, \mathcal{O}).$$

On pourra ainsi appliquer la formule des coefficients universels 1.3 aux groupes de cohomologie ℓ -adique.

1.2.2 Propriétés du complexe

On rappelle dans cette section les principales propriétés du complexe de cohomologie. La plupart des résultats seront énoncés pour la cohomologie à support compact, mais restent valident pour la cohomologie usuelle. Les références ou les preuves de ces propriétés peuvent se trouver par exemple dans [45], [28] et [66].

Proposition 1.16 (Formule de Künneth). *Soit X et Y deux variétés quasi-projectives munies d'une action d'un groupe fini H , et Υ un monoïde d'endomorphismes de X et Y normalisant H . Alors*

$$R\Gamma_c(X \times Y, \mathcal{O}) \simeq R\Gamma_c(X, \mathcal{O}) \otimes^L R\Gamma_c(Y, \mathcal{O})$$

dans la catégorie dérivée $D(\mathcal{O}H \rtimes \Upsilon\text{-Mod})$.

D'après [82, proposition 19] on peut former le quotient de la variété quasi-projective X par le groupe fini H . La cohomologie de ce quotient se déduit de la cohomologie de X grâce à [6, section 3] :

Proposition 1.17. *Si l'ordre des stabilisateurs $\text{Stab}_H(x)$ de chacun des points $x \in X$ est inversible dans \mathcal{O} , alors*

$$R\Gamma_c(H \backslash X, \mathcal{O}) \simeq \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}H}^L R\Gamma_c(X, \mathcal{O})$$

dans la catégorie $D(\mathcal{O}\Upsilon\text{-Mod})$.

Soit N un groupe fini agissant sur X et Y . Si on suppose que les actions de N et $H \rtimes \Upsilon$ commutent, on peut former le produit amalgamé $X \times_N Y$ comme le quotient de $X \times Y$ par l'action diagonale de N . C'est alors une variété quasi-projective munie d'une action de $H \rtimes \Upsilon$. En conjuguant les deux résultats précédents, on en déduit que dès que les stabilisateurs des points de $X \times Y$ sous l'action diagonale de N sont inversibles dans \mathcal{O} on a

$$R\Gamma_c(X \times_N Y, \mathcal{O}) \simeq R\Gamma_c(X, \mathcal{O}) \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{O}_N} R\Gamma_c(Y, \mathcal{O}) \quad (1.18)$$

dans la catégorie dérivée $D(\mathcal{O}H \rtimes \Upsilon\text{-Mod})$.

Le résultat suivant de Deligne et Lusztig est une retraduction de [29, proposition 6.4] :

Proposition 1.19. *Soit H un groupe d'ordre inversible dans \mathcal{O} . Si l'action de H sur X s'étend en une action d'un groupe algébrique connexe, alors l'application naturelle*

$$R\Gamma_c(X, \mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{O} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{O}H} R\Gamma_c(X, \mathcal{O})$$

est un isomorphisme dans $D(\mathcal{O}\Upsilon\text{-Mod})$.

Rappelons que la cohomologie à support compact d'un espace affine de dimension n est concentrée en degré $2n$, et isomorphe à \mathcal{O} en ce degré. Plus généralement, on déduit de [45, Exposé XVIII, 2.9] :

Proposition 1.20. *Soit $\pi : Y \longrightarrow X$ un morphisme lisse, H -équivariant et de type fini. Si les fibres de π sont isomorphes à des espaces affines de dimension constante n , alors*

$$R\Gamma_c(Y, \mathcal{O}) \simeq R\Gamma_c(X, \mathcal{O})[-2n]$$

dans la catégorie $D^b(\mathcal{O}H\text{-mod})$.

Dans la proposition précédente, on perd la trace de l'action du monoïde d'endomorphismes Υ . Néanmoins, lorsque celui-ci est engendré par un endomorphisme de Frobenius F définissant une \mathbb{F}_q -structure rationnelle sur X et Y , l'isomorphisme précédent reste vrai dans $D^b(\mathcal{O}H \rtimes \langle F \rangle_{\text{mon}}\text{-Mod})$ à condition d'ajouter une torsion de Tate. On notera alors

$$R\Gamma_c(Y, \mathcal{O}) \simeq R\Gamma_c(X, \mathcal{O})[-2n](n).$$

La stratégie principale adoptée dans les chapitres suivants pour calculer la cohomologie d'une variété consistera à en trouver une décomposition en sous-variétés pour lesquelles le calcul de la cohomologie est un problème élémentaire et à appliquer ensuite la proposition suivante :

Proposition 1.21 (Suite exacte « ouvert-fermé »). *Si X se décompose en une union de sous-variétés $X = Y \amalg Z$, chacune étant stable par l'action de $H \rtimes \Upsilon$, la variété Y étant ouverte et Z fermée, alors il existe un triangle distingué dans $D^b(\mathcal{O}H \rtimes \Upsilon\text{-Mod})$ de la forme*

$$R\Gamma_c(Y, \mathcal{O}) \longrightarrow R\Gamma_c(X, \mathcal{O}) \longrightarrow R\Gamma_c(Z, \mathcal{O}) \rightsquigarrow$$

De plus, si Y est à la fois ouverte et fermée, ce triangle est scindé.

Nous terminons cette section avec la dualité de Poincaré-Verdier. Pour C un complexe de $\mathcal{O}H$ -modules, on définit le dual de C dans $D(\mathcal{O}H\text{-mod})^{\text{op}}$ par

$$C^\vee = \text{RHom}_{\mathcal{O}}^\bullet(C, \mathcal{O}).$$

Notons que cette définition ne soulève pas d'ambiguïté pour les modules qui nous intéressent : en effet, l'algèbre $\mathcal{O}H$ étant symétrique, le complexe C^\vee est quasi-isomorphe à $\text{RHom}_{\mathcal{O}H}^\bullet(C, \mathcal{O}H)$.

Remarque 1.22. Lorsque $\mathcal{O} = \Lambda$, un complexe n'est pas forcément quasi-isomorphe à son bidual. C'est néanmoins le cas s'il peut être représenté par un complexe borné P dont les termes sont libres de rang fini sur Λ : en effet, on a d'une part $P^\vee \simeq \text{Hom}_\Lambda^\bullet(P, \Lambda)$ dans $D^b(\Lambda H\text{-mod})$ et d'autre part chaque terme de ce complexe est isomorphe à son bidual usuel comme ΛH -module. Ceci s'appliquera en particulier aux complexes parfaits.

Exemple 1.23. On reprend le complexe $C : 0 \rightarrow \mathbb{Z}_\ell \xrightarrow{\ell} \mathbb{Z}_\ell \rightarrow 0$ donné dans l'exemple 1.4. Il est quasi-isomorphe au complexe $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}[-1]$ concentré en degré 1. Son dual C^\vee dans $D^b(\mathbb{Z}_\ell\text{-mod})$ est isomorphe à $C[1]$, alors que le dual usuel de $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ est nul. Autrement dit, on a

$$(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}[0])^\vee \simeq \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}[-1]$$

dans la catégorie dérivée $D^b(\mathbb{Z}_\ell\text{-mod})$.

La dualité de Poincaré-Verdier [28] appliquée au faisceau constant sur une variété lisse permet de relier la cohomologie à support compact de la variété à sa cohomologie usuelle :

Proposition 1.24. *Si X est une variété quasi-projective lisse purement de dimension d , alors*

$$\text{R}\Gamma_c(X, \mathcal{O})^\vee \simeq \text{R}\Gamma(X, \mathcal{O})[2d]$$

dans la catégorie dérivée $D^b(\mathcal{O}H\text{-Mod})$.

Cette fois encore, on peut garder la trace de l'action de l'endomorphisme de Frobenius à condition de rajouter une torsion de Tate : on a en effet

$$\text{R}\Gamma_c(X, \mathcal{O})^\vee \simeq \text{R}\Gamma(X, \mathcal{O})[2d](d)$$

dans $D^b(\mathcal{O}H \rtimes \langle F \rangle_{\text{mon}}\text{-Mod})$.

Remarque 1.25. Lorsque $\mathcal{O} = K$, la dualité de Poincaré-Verdier se traduit sur les groupes de cohomologie par l'isomorphisme de $KH \rtimes \langle F \rangle_{\text{mon}}$ -modules suivant :

$$\text{Hom}_K(H_c^i(X, K), K) = H_c^i(X, K)^* \simeq H^{2d-i}(X, K)(d).$$

Pour les autres valeurs de \mathcal{O} , on disposera d'un tel isomorphisme (non canonique) dans les deux situations suivantes :

- $\mathcal{O} = \Lambda/\ell^n\Lambda$: dans ce cas, le module $\Lambda/\ell^n\Lambda$ est un $\Lambda/\ell^n\Lambda$ -module injectif et le dual « dérivé » défini précédemment se calcule à partir du dual usuel ;
- $\mathcal{O} = \Lambda$ avec ℓ premier à l'ordre du groupe H et chaque $H_c^i(X, \Lambda)$ sans torsion (ce qui est nécessaire afin que le dual du complexe $H_c^\bullet(X, \Lambda)$ corresponde au dual usuel).

1.2.3 Perfection

Par définition, les termes du complexe $R\Gamma_c(X, \mathcal{O})$ sont en général très loin d'être de type fini sur \mathcal{O} . Néanmoins, on peut, à homotopie près, représenter ce dernier par un complexe possédant de bonnes propriétés de finitude [80, section 2.5.1] :

Théorème 1.26 (Rouquier). *Soit X une variété quasi-projective munie d'une action d'un groupe fini H . Notons $\mathcal{S} = \{\text{Stab}_H(x) \mid x \in X\}$ la famille des stabilisateurs des points de X . Alors $R\Gamma_c(X, \mathcal{O})$ est homotope à un complexe borné de $\mathcal{O}H$ -modules dont les termes sont des facteurs directs de sommes finies de modules de permutations de la forme $\mathcal{O}[H/S]$ pour $S \in \mathcal{S}$.*

On en déduit que l'on peut toujours représenter la cohomologie de X par un complexe de $\mathcal{O}H$ -modules libres de rang fini comme \mathcal{O} -modules. Plus généralement, on retiendra la conséquence suivante de ce résultat :

Corollaire 1.27. *Si les ordres des stabilisateurs des points sont inversibles dans \mathcal{O} , alors $R\Gamma_c(X, \mathcal{O})$ est homotope à un complexe borné de $\mathcal{O}H$ -modules projectifs de type fini. En particulier, il est parfait.*

Cette conséquence est très utile en pratique pour déterminer un représentant de $R\Gamma_c(X, \mathcal{O})$ à homotopie près. Par exemple, pour $X = \mathbf{G}_m$ muni de l'action par multiplication du groupe $\mu_d = \mu_d(\overline{\mathbb{F}}_p)$ des racines d -ièmes de l'unité, on peut montrer que $R\Gamma_c(X, \Lambda)$ est homotope au complexe

$$0 \longrightarrow \Lambda_{\mu_d} \xrightarrow{\zeta-1} \Lambda_{\mu_d} \longrightarrow 0$$

concentré en degrés 1 et 2, où ζ est une racine primitive d -ième de l'unité quelconque.

Plus généralement, si on suppose que X est une variété affine et irréductible, alors sa cohomologie à coefficients dans n 'importe quel anneau parmi (K, Λ, k) est concentrée entre les degrés $\dim X, \dots, 2 \dim X$. Grâce au lemme 1.10 et à la formule 1.3, on en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 1.28. *Soit X une variété affine et irréductible de dimension d . Si les ordres des stabilisateurs des points sont premiers à ℓ , alors $R\Gamma_c(X, \Lambda)$ est homotope à un complexe borné de ΛH -modules projectifs de type fini concentrés en degrés $d, \dots, 2d$. En particulier, le groupe de cohomologie moitié $H_c^d(X, \Lambda)$ est sans torsion.*

Notons que le résultat reste vrai lorsque X est une union disjointe de variétés affines de même dimension, ce qui est le cas pour toutes les variétés de Deligne-Lusztig affines – et donc en particulier pour les variétés étudiées au chapitre 4.

1.3 L'action de l'endomorphisme de Frobenius

Cette dernière partie est consacrée au cas particulier où Υ est engendré par un endomorphisme de Frobenius F définissant une \mathbb{F}_q -structure rationnelle sur X .

Le but est d'obtenir un moyen simple de couper le complexe $R\Gamma_c(X, \mathcal{O})$ selon les valeurs propres de F . À cette fin, on commence par rappeler quelques rudiments de la théorie des représentations de l'algèbre des polynômes à une variable $\Lambda[T]$.

1.3.1 Espaces propres généralisés dans Λ -mod

Lorsque M est un $\Lambda[T]$ -module de type fini sur Λ , l'endomorphisme f de M induit par l'action de T est annulé par un certain polynôme unitaire P . On est donc ramené à étudier les représentations de l'algèbre $\Lambda[T]/(P)$.

Fixons donc un polynôme annulateur $P \in \Lambda[T]$ de f ; quitte à augmenter K , on peut supposer que les racines $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ de ce polynôme appartiennent à Λ de sorte que l'on peut l'écrire $P(T) = (T - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (T - \lambda_r)^{\alpha_r}$. De cette décomposition on tire la décomposition usuelle du module KM en la somme directe des espaces propres généralisés de f :

$$KM = \text{Ker}(f - \lambda_1)^{\alpha_1} \oplus \dots \oplus \text{Ker}(f - \lambda_r)^{\alpha_r}.$$

Pour disposer d'un résultat analogue sur Λ , il est nécessaire de regrouper les racines de P selon leur réduction modulo ℓ pour former les blocs de l'algèbre $\Lambda[T]/(P)$, ce qui revient à considérer les polynômes

$$P_{\bar{\lambda}}(T) = \prod_{\bar{\lambda}_i = \bar{\lambda}} (T - \lambda_i)^{\alpha_i}.$$

On obtient donc une nouvelle décomposition

$$P = \prod_{\bar{\lambda} \in k} P_{\bar{\lambda}}$$

qui se réduit modulo ℓ en la décomposition usuelle de \bar{P} , la réduction de chaque facteur étant de la forme $(T - \bar{\lambda})^n$. Par le théorème des restes chinois et le théorème de relèvement des idempotents, on en déduit la décomposition en blocs des deux algèbres $k[T]/(\bar{P})$ et $\Lambda[T]/(P)$;

$$\begin{array}{c} \Lambda[T]/(P) \simeq \prod_{\bar{\lambda} \in k} \Lambda[T]/(P_{\bar{\lambda}}) \\ \downarrow \\ k[T]/(\bar{P}) \simeq \prod_{\bar{\lambda} \in k} k[T]/(\bar{P}_{\bar{\lambda}}) \end{array}$$

Pour $\lambda \in \Lambda$, on notera $e_\lambda \in \Lambda[T]/(P)$ l'idempotent associé au facteur $\Lambda[T]/(P_{\bar{\lambda}})$. On définit alors le (λ) -espace propre généralisé de f sur M par

$$M_{(\lambda)} = e_\lambda M$$

si bien que M se décompose en :

$$M = \bigoplus_{\bar{\lambda} \in k} M_{(\lambda)}.$$

Remarque 1.29. Cette définition est indépendante du polynôme annulateur fixé, car le module $e_\lambda M$ ne dépend que de l'image de l'idempotent e_λ dans l'algèbre $\Lambda[T]/\mathcal{P}$ où \mathcal{P} est l'idéal engendré par les polynômes annulateurs de f .

Puisque les polynômes $P_{\bar{\lambda}}$ sont étrangers dans $\Lambda[T]$, le noyau de l'endomorphisme $P(f)$ se décompose en la somme directe des noyaux des morphismes $P_{\bar{\lambda}}(f)$, si bien que l'on peut identifier $M_{(\lambda)}$ et $\text{Ker } P_{\bar{\lambda}}(f)$. En particulier,

Lemme 1.30. *Si f et g sont deux endomorphismes de M tels que $\bar{f} - \bar{g}$ soit un endomorphisme nilpotent de \bar{M} , alors les (λ) -espaces propres généralisés de f et g coïncident.*

Si \mathcal{O} est un des corps K ou k , on peut prolonger naturellement la définition des (λ) -espaces propres généralisés par

$$(M \otimes_{\Lambda} \mathcal{O})_{(\lambda)} = M_{(\lambda)} \otimes_{\Lambda} \mathcal{O}.$$

Ces deux modules sont reliés aux espaces propres généralisés usuels de f par la proposition suivante :

Proposition 1.31. *Pour $\lambda \in \Lambda$,*

- (i) *le $K[T]$ -module $(KM)_{(\lambda)} := M_{(\lambda)} \otimes_{\Lambda} K$ est isomorphe à la somme des μ -espaces propres généralisés usuels pour μ parcourant l'ensemble des scalaires congrus à λ modulo ℓ ;*
- (ii) *le $k[T]$ -module $\bar{M}_{(\lambda)} := M_{(\lambda)} \otimes_{\Lambda} k$ est isomorphe au $\bar{\lambda}$ -espace propre généralisé usuel associé à $\bar{\lambda} \in k$.*

Plus généralement, pour tout anneau \mathcal{O} parmi (K, Λ, k) on peut définir un endofoncteur $C \mapsto C_{(\lambda)}$ de la catégorie des complexes bornés de $\Lambda[T]$ -modules de type fini sur Λ . C'est un foncteur exact ; à ce titre, il vérifie

$$H^\bullet(C_{(\lambda)}) \simeq H^\bullet(C)_{(\lambda)}. \quad (1.32)$$

1.3.2 L'endomorphisme de Frobenius sur $R\Gamma_c(X, \mathcal{O})$

Soit X une variété quasi-projective muni d'un endomorphisme de Frobenius F définissant une \mathbb{F}_q -structure rationnelle sur X , et d'une action d'un groupe fini H commutant à l'action de F . Le complexe $R\Gamma_c(X, \Lambda)$ est alors un complexe borné de $\mathcal{O}H \times \langle F \rangle_{\text{mon}}$ -modules.

Afin de pouvoir utiliser les constructions précédentes, il est commode que les termes de ce complexe soient de type fini, ce qui n'est généralement pas le cas. Néanmoins, le théorème 1.26 nous assure l'existence d'un complexe \mathcal{C} de $\mathcal{O}H$ -modules de permutations ainsi que de morphismes H -équivariants $f : C \rightarrow \mathcal{C}$ et $g : \mathcal{C} \rightarrow C$ inverses l'un de l'autre dans la catégorie $K^b(\mathcal{O}H\text{-Mod})$. Par transfert, on définit un endomorphisme \mathcal{F} sur \mathcal{C} par $\mathcal{F} = f \circ F \circ g$. Notons que sa définition dépend du choix des fonctions réalisant l'homotopie entre C et \mathcal{C} , mais que les images de \mathcal{F} et F coïncident sur la cohomologie de X . En particulier, on a

$$H^\bullet(\mathcal{C}_{(\lambda)}) \simeq H_c^\bullet(X, \mathcal{O})_{(\lambda)}$$

l'espace propre de droite étant associé à l'endomorphisme de Frobenius F .

Si les termes de \mathcal{C} sont en plus projectifs (par exemple si H agit librement), les espaces propres généralisés $\mathcal{C}_{(\lambda)}$ sont aussi des éléments de $C^b(\mathcal{O}H\text{-proj})$, mais souvent de longueur bien plus petite. On peut ainsi espérer retrouver des représentants explicites, à homotopie près, de chacun de ces espaces propres, et donc du complexe total $R\Gamma_c(X, \Lambda)$. C'est la méthode que nous adopterons dans le chapitre 4.

Décomposition des variétés de Deligne-Lusztig

Contexte

Ce chapitre et les suivants sont consacrés à l'étude, sous différents aspects, des représentations d'une certaine classe de groupes finis dits *groupes réductifs finis* ou *groupes finis de type de Lie*. Depuis les travaux de Steinberg [89], on sait obtenir ces groupes comme les points fixes d'un groupe algébrique réductif \mathbf{G} sous une isogénie F . L'intérêt de cette construction est double : elle permet, d'une part, de dériver des propriétés structurelles de \mathbf{G}^F à partir de celles de \mathbf{G} et, d'autre part, de construire des variétés algébriques non triviales munies d'actions du groupe fini \mathbf{G}^F . L'introduction puis l'étude de ces variétés et leur cohomologie par Deligne et Lusztig dans la série de travaux [29] puis [62]-[64] a permis d'élucider de nombreux mystères en théorie des représentations ordinaires des groupes réductifs finis, aboutissant entre autres à une classification complète des caractères irréductibles dans l'esprit du programme de Langlands. À l'aide des outils introduits au chapitre 1, on tâchera dans notre travail de généraliser certains de leurs résultats au cadre modulaire.

Plus précisément, Deligne et Lusztig ont défini deux familles de variétés $X(w)$ et $Y(\dot{w})$, indexées par le groupe de Weyl de \mathbf{G} , sur lesquelles le groupe fini \mathbf{G}^F agit. Cependant, en dehors de certains cas très particuliers, la géométrie de ces variétés est riche mais très mal comprise et le calcul de leur cohomologie reste un problème difficile. La stratégie adoptée dans ce chapitre pour résoudre ce problème consiste à décomposer ces variétés en des pièces X_γ pour lesquelles on pourra déterminer explicitement le complexe de cohomologie $R\Gamma_c(X_\gamma, \mathcal{O})$, et ceci pour n'importe quel anneau de coefficient \mathcal{O} parmi (K, Λ, k) . Les décompositions que l'on effectuera ne sont pas stables par \mathbf{G}^F , mais le sont en revanche par un sous-groupe unipotent maximal \mathbf{U}^F ; on espère donc obtenir ainsi la restriction à \mathbf{U}^F de la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig. Néanmoins, ces calculs s'avèrent pour l'instant possibles pour certains quotients de $X(w)$ et $Y(\dot{w})$ seulement. Cela se traduit notamment par une perte d'informations concernant les re-

présentations modulaires qui n'interviennent pas dans des modules de Gelfand-Graev ou leurs induits (les détails seront donnés au cours de la section 3.3.2).

Ce chapitre est organisé de la façon suivante : la première partie précise les définitions des groupes réductifs finis et des variétés de Deligne-Lusztig, ainsi que certaines de leurs propriétés significatives pour notre étude. Le cas particulier où w est un élément de Coxeter y est développé, car il donne un aperçu de la géométrie du quotient $\mathbf{U}^F \backslash X(w)$ de la variété $X(w)$ par le groupe unipotent \mathbf{U}^F . Les outils nécessaires à l'étude de ce quotient sont mis en place dans la deuxième partie. On y étudie une décomposition de la variété de drapeaux introduite par Deodhar dans [31], ainsi qu'une généralisation due à Curtis [25]. Le point de vue adopté ici est celui de Morel [68], qui montre que ces décompositions s'obtiennent déjà au niveau des variétés de Bott-Samelson par des théorèmes généraux de Białyński-Birula [2]. Enfin, on relève explicitement ces décompositions aux variétés quotient $D(\mathbf{U})^F \backslash X(w)$ puis $D(\mathbf{U})^F \backslash Y(\dot{w})$, ce qui permet de déterminer la cohomologie de chaque pièce. Si cela ne suffit malheureusement pas pour retrouver la cohomologie des variétés quotient, on peut toutefois calculer les contributions de certains caractères de \mathbf{U}^F supposés suffisamment complexes. Le résultat principal dans cette direction est le corollaire 2.54, qui montre que les caractères réguliers intervenant dans la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig sont concentrés en degré moitié, pour une contribution qu'on déterminera explicitement. Dans une dernière partie, on tâchera de généraliser partiellement ce résultat à d'autres types de caractères.

2.1 Première décomposition

2.1.1 Groupes réductifs finis

On reprend les notations du chapitre 1 : on fixe un nombre premier p et une clôture algébrique $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}_p$ du corps fini à p éléments. Sauf mention explicite, toutes les variétés algébriques considérées dans ce chapitre seront définies sur \mathbb{F} .

Soit \mathbf{G} un groupe algébrique réductif connexe défini sur \mathbb{F} , muni d'une isogénie F dont une certaine puissance est un endomorphisme de Frobenius. En d'autres termes, il existe un entier positif δ tel que F^δ définisse une \mathbb{F}_{q^δ} -structure déployée sur \mathbf{G} , q^δ étant une certaine puissance entière de la caractéristique p . On désignera par $G = \mathbf{G}^F$ les points fixes de \mathbf{G} sous F . C'est un groupe fini, appelé *groupe réductif fini*. Plus généralement, pour tout sous-groupe fermé \mathbf{H} de \mathbf{G} stable par F , on notera H le sous-groupe fini de G associé.

Parmi les sous-groupes remarquables de \mathbf{G} , on fixe un sous-groupe de Borel \mathbf{B} contenant un tore maximal \mathbf{T} , tous les deux supposés stables par F . Ce choix définit un système de racines Φ , ainsi qu'une base Δ de ce système. L'ensemble des racines positives (resp. négatives) sera noté Φ^+ (resp. Φ^-). De plus, F agit sur le groupe de Weyl W de ce système de racines, de façon compatible à l'isomorphisme $W \simeq N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})/\mathbf{T}$. À défaut de stabiliser Φ , F stabilise donc l'ensemble

des réflexions de W . En particulier, si α est une racine, $F(\alpha)$ est un multiple positif d'une unique racine que l'on notera $\phi^{-1}(\alpha)$, définissant ainsi une bijection $\phi : \Phi \longrightarrow \Phi$ qui stabilise Δ et Φ^+ . On notera $[\Delta/\phi]$ un système de représentants des orbites de Δ sous l'action de ϕ . Les groupes des caractères et cocaractères de \mathbf{T} seront notés $X(\mathbf{T}) = \text{Hom}(\mathbf{T}, \mathbf{G}_m)$ et $X^\vee(\mathbf{T}) = \text{Hom}(\mathbf{G}_m, \mathbf{T})$; ils sont en dualité parfaite via le couplage usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle : X(\mathbf{T}) \times X^\vee(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Soit \mathbf{U} (resp. \mathbf{U}^-) le radical unipotent de \mathbf{B} (resp. du sous-groupe de Borel \mathbf{B}^- opposé à \mathbf{B} par rapport à \mathbf{T}). Chaque racine α définit un sous-groupe à un paramètre \mathbf{U}_α , et on note $u_\alpha : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbf{U}_\alpha$ un isomorphisme de groupes algébriques. Les groupes \mathbf{U} et \mathbf{U}^- sont stables par F , mais les sous-groupes \mathbf{U}_α ne le sont pas forcément. Néanmoins, on peut choisir la famille $(u_\alpha)_{\alpha \in \Phi}$ de telle sorte que la restriction de F à \mathbf{U}_α vérifie la relation $F(u_\alpha(\zeta)) = u_{\phi(\alpha)}(\zeta^{q_\alpha^\circ})$, où q_α° est la puissance de p définie par $F(\phi(\alpha)) = q_\alpha^\circ \alpha$. Si de plus, d_α désigne la longueur de l'orbite de α sous ϕ et que l'on pose $q_\alpha = q_\alpha^\circ q_{\phi(\alpha)}^\circ \cdots q_{\phi^{d_\alpha-1}(\alpha)}^\circ$, alors le sous-groupe \mathbf{U}_α est stable par F^{d_α} et $\mathbf{U}_\alpha^{F^{d_\alpha}} \simeq \mathbb{F}_{q_\alpha}^+$. On notera δ (resp. q^δ) le plus petit multiple commun des entiers d_α (resp. q_α). L'endomorphisme F^δ est alors la plus petite puissance de F définissant une structure rationnelle déployée sur \mathbf{G} (qui est alors une \mathbb{F}_{q^δ} -structure déployée). Indépendamment de ce choix, il sera parfois nécessaire de supposer que les isomorphismes u_α vérifient les relations de Chevalley, principalement pour les exemples de la section 2.2.3.

Exemple 2.1. Au cours de ce chapitre et des suivants, on accordera une attention particulière au cas des groupes linéaire et spécial linéaire, qui permettent d'illustrer de nombreux concepts abordés dans cette thèse. Considérons donc le groupe $\mathbf{G} = \text{GL}_n(\mathbb{F})$, muni de l'endomorphisme de Frobenius standard $F : (a_{i,j}) \longmapsto (a_{i,j}^q)$ définissant sur \mathbf{G} une \mathbb{F}_q -structure déployée. Pour cette isogénie particulière, le groupe des points fixes est clairement $\text{GL}_n(q)$. On définit \mathbf{B} (resp. \mathbf{U}) comme le groupe des matrices triangulaires (resp. unitriangulaires) supérieures inversibles et \mathbf{T} comme le groupe des matrices diagonales inversibles. Le groupe de Weyl $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})/\mathbf{T}$ s'identifie alors au groupe symétrique \mathfrak{S}_n par l'intermédiaire des matrices de permutation, les réflexions étant données par les transpositions $(i, j) \in \mathfrak{S}_n$. Le système de racines est de type A_{n-1} et on peut choisir les matrices $u_{\alpha_{i,j}}(\zeta)$ de la forme

$$u_{\alpha_{i,j}}(\zeta) = I_n \pm \zeta E_{i,j}$$

où $(E_{k,l})_{k,l}$ désigne la base canonique de $\text{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$. Le choix du signe n'a d'importance que dans le cas où on exige que les relations de Chevalley soient vérifiées [21, section 4].

2.1.2 Variétés de Deligne-Lusztig

D'après [87, section 9.3], il existe un ensemble de représentants $\{\dot{w}\}$ de W dans $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ vérifiant la propriété suivante : si $w = w_1 w_2$ est tel que $\ell(w) = \ell(w_1) + \ell(w_2)$, alors $\dot{w} = \dot{w}_1 \dot{w}_2$. Les variétés de Deligne-Lusztig $X(w)$ et $Y(\dot{w})$ sont alors définies par :

$$\begin{aligned} Y(\dot{w}) &= \{g\mathbf{U} \in \mathbf{G}/\mathbf{U} \mid g^{-1}F(g) \in \mathbf{U}\dot{w}\mathbf{U}\} \\ \pi_w \downarrow / \mathbf{T}^{wF} \\ X(w) &= \{g\mathbf{B} \in \mathbf{G}/\mathbf{B} \mid g^{-1}F(g) \in \mathbf{B}w\mathbf{B}\} \end{aligned}$$

où π_w désigne la restriction à $Y(\dot{w})$ de la projection canonique $\mathbf{G}/\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{B}$. Ce sont des variétés quasi-projectives sur lesquelles G agit par multiplication à gauche. De plus, le groupe \mathbf{T}^{wF} agit librement par multiplication à droite, et π_w s'identifie à l'application quotient associée, induisant ainsi un isomorphisme G -équivariant $Y(\dot{w})/\mathbf{T}^{wF} \simeq X(w)$. Parmi les nombreuses propriétés géométriques de ces variétés, on retiendra principalement les suivantes [29], [46] :

Proposition 2.2. *Les variétés $X(w)$ et $Y(\dot{w})$ sont quasi-affines, lisses et purement de dimension $\ell(w)$.*

À la question de savoir si elles sont affines, on ne dispose pour l'instant que de réponses partielles, même dans le cas du groupe linéaire (cf. [29, théorème 9.7], [8, théorème A], [48, théorème 1.3] et [70, section 5]) :

Théorème 2.3. *Les variétés $X(w)$ et $Y(\dot{w})$ sont affines dès que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée :*

- q est plus grand que le nombre de Coxeter ;
- w est de longueur minimale dans sa classe de F -conjugaison.

Notons que la deuxième hypothèse est vérifiée pour les éléments de Coxeter ; nous étudierons en détails cette situation dans le chapitre 4. À titre d'exemple, on peut, pour le groupe linéaire, expliciter la variété $X(w)$ dans ce cas particulier [29, exemple 2.1] :

Exemple 2.4. Pour le groupe linéaire $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, la variété \mathbf{G}/\mathbf{B} s'identifie à l'ensemble \mathcal{F} des drapeaux complets de l'espace vectoriel \mathbb{F}^n :

$$\mathcal{F} = \{\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{F}^n \mid \dim V_i = i\}.$$

En effet, \mathbf{G} agit transitivement sur cet ensemble et \mathbf{B} est le stabilisateur du drapeau canonique. Via cette description, un drapeau V_\bullet appartient à $X(w)$ si et seulement si V_\bullet et $F(V_\bullet)$ sont en position générale w , c'est-à-dire s'il existe une base (e_i) adaptée au drapeau V_\bullet telle que $(e_{w(i)})$ soit adaptée à $F(V_\bullet)$. Choisissons maintenant pour w l'élément de Coxeter $(1, 2, \dots, n)$; un drapeau $V_\bullet \in X(w)$ vérifie alors $V_i = V_1 \oplus F(V_1) + \cdots \oplus F^{i-1}(V_1)$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} X(w) &\simeq \{V_1 \in \mathbb{P}(\mathbb{F}^n) \mid \dim(V_1 + F(V_1) + \cdots + F^{n-1}(V_1)) = n\} \\ &\simeq \{[x_1 : x_2 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}_n(\mathbb{F}) \mid \nabla(x_1, \dots, x_n) \neq 0\} \end{aligned}$$

où $\nabla(x_1, \dots, x_n)$ désigne le déterminant suivant :

$$\nabla(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1 & x_1^q & \cdots & x_1^{q^{n-1}} \\ x_2 & x_2^q & \cdots & x_2^{q^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_n^q & \cdots & x_n^{q^{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Puisque l'équation définissant $X(w)$ force x_1 à être non nul, on peut ramener les coordonnées dans \mathbb{A}_{n-1} , et remarquer alors que $X(w)$ est bien une variété affine de dimension $n - 1$. Le même calcul dans \mathbf{G}/\mathbf{U} donne

$$Y(\dot{w}) \simeq \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{A}_n \mid (\nabla(x_1, \dots, x_n))^{q-1} = 1\}$$

l'action de \mathbf{T}^{wF} s'effectuant par multiplication sur chaque coordonnée, après avoir identifié \mathbf{T}^{wF} au groupe des racines $(q^n - 1)$ -ièmes de l'unité dans \mathbb{F} .

On peut aussi remarquer qu'une droite V_1 appartient à $X(w)$ si et seulement si elle n'est contenue dans aucun hyperplan projectif stable par F . Cela permet de factoriser le déterminant précédent selon les équations de ces hyperplans :

$$\nabla(x_1, \dots, x_n) \sim \prod_{[a_1: \dots: a_n] \in \mathbb{P}(\mathbb{F}_q^n)} (a_1 x_1 + \dots + a_n x_n).$$

On trouvera plus de détails dans [11, section V.5, Exercice 6].

Un autre cas particulier important est celui des variétés associées à l'élément neutre de W . En effet, pour $w = 1$, on vérifie facilement que $X(w)$ et $Y(\dot{w})$ sont des variétés de dimension nulle, respectivement isomorphes à G/B et G/U .

2.1.3 Les pièces $X_x(w)$ et $Y_x(\dot{w})$

Pour x un élément de W , on notera $\mathbf{B}_x \cdot \mathbf{B}$ la *cellule de Schubert* associée à x , c'est-à-dire l'unique orbite de \mathbf{G}/\mathbf{B} sous \mathbf{B} contenant x . C'est une sous-variété localement fermée de \mathbf{G}/\mathbf{B} , isomorphe à un espace affine de dimension $\ell(x)$. En vertu de la décomposition de Bruhat [21], l'ensemble de ces cellules forme une partition de la variété de drapeaux :

$$\mathbf{G}/\mathbf{B} = \bigsqcup_{x \in W} \mathbf{B}_x \cdot \mathbf{B}.$$

Via la projection canonique $\pi : \mathbf{G}/\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{B}$, cette décomposition se relève en une décomposition équivalente de \mathbf{G}/\mathbf{U} . En suivant [6], on peut considérer la trace de ces décompositions sur les variétés $X(w)$ et $Y(\dot{w})$ et définir les *pièces*

$$Y_x(\dot{w}) = \{g\mathbf{U} \in \mathbf{B}_x \cdot \mathbf{U} \mid g^{-1}F(g) \in \mathbf{U}\dot{w}\mathbf{U}\}$$

et

$$X_x(w) = \{g\mathbf{B} \in \mathbf{B}_x \cdot \mathbf{B} \mid g^{-1}F(g) \in \mathbf{B}w\mathbf{B}\}.$$

Notons que ces sous-variétés ne sont pas forcément stables par l'action de G , mais le sont en revanche par l'action de B .

Revenons à la décomposition de Bruhat : pour $x \in W$ on note S_x et on appelle *variété de Schubert* l'adhérence dans \mathbf{G}/\mathbf{B} de la cellule de Schubert associée à x . Elle est formée de l'union des cellules de Schubert $\mathbf{B}_y \cdot \mathbf{B}$ pour y parcourant l'ensemble des éléments de W inférieurs à x pour l'ordre de Bruhat. En ce sens, la décomposition de Bruhat est une *stratification*. Cette propriété n'est en général pas préservée lorsque l'on se restreint aux variétés $X(w)$ et $Y(\dot{w})$ mais on dispose néanmoins du résultat suivant :

Lemme 2.5. *Pour toute numérotation $W = \{w_0, w_1, \dots, w_n\}$ des éléments du groupe de Weyl, compatible avec l'ordre de Bruhat inversé, les ensembles*

$$F_i = \bigsqcup_{j \leq i} X_{w_j}(w)$$

définissent une filtration $X(w) = F_0 \supset F_1 \supset \dots \supset F_n \supset F_{n+1} = \emptyset$ de $X(w)$ en sous-variétés fermées vérifiant $F_i \setminus F_{i+1} = X_{w_i}(w)$.

Par continuité, la préimage par π_w d'une telle filtration fournit une filtration de la variété $Y(\dot{w})$ possédant les mêmes propriétés. On dira que les décompositions $(X_x(w))_{x \in W}$ et $(Y_x(\dot{w}))_{x \in W}$ sont *filtrables*. Cette propriété est essentielle si l'on veut espérer déduire des informations cohomologiques sur les variétés de Deligne-Lusztig à partir de calculs sur leurs pièces. On utilisera à cette fin les triangles distingués

$$R\Gamma_c(Y_{w_i}(\dot{w}), \mathcal{O}) \longrightarrow R\Gamma_c(F_i, \mathcal{O}) \longrightarrow R\Gamma_c(F_{i+1}, \mathcal{O}) \rightsquigarrow \quad (2.6)$$

donnés par la proposition 1.21.

En apparence, les pièces $X_x(w)$ et $Y_x(w)$ ne semblent pas moins complexes que les variétés qu'elles décomposent. Néanmoins, les choses se simplifient grandement dans le cas où w est un élément de Coxeter. En effet, Lusztig a montré [62] que dans ce cas particulier,

- la variété $X(w)$ est contenue dans $\mathbf{B}w_0 \cdot \mathbf{B}$;
- la variété quotient $U \backslash X(w)$ est isomorphe à un produit de \mathbf{G}_m .

Autrement dit, les variétés $X_x(w)$ sont vides dès que $x \neq w_0$, et le quotient de $X_{w_0}(w)$ par U est isomorphe à $(\mathbf{G}_m)^{\ell(w)}$. Ce résultat, tel qu'il est énoncé pour les éléments de Coxeter, est trivialement faux pour les autres éléments du groupe de Weyl. Par exemple, la variété $X(1)$ rencontre toutes les cellules de Schubert associées aux éléments de W^F . Nous verrons cependant dans la prochaine section comment généraliser ce résultat en raffinant notre première décomposition (voir section 2.3.3).

On termine cette partie en continuant l'exemple du groupe linéaire :

Exemple 2.7. On reprend les notations de l'exemple 2.1 : on rappelle que w est supposé égal au n -cycle $(1, 2, \dots, n)$. Pour $[x_1 : \dots : x_n] \in X(w) \subset \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{F})$ (avec donc x_n non nul), on définit la fonction suivante :

$$f_i([x_1 : \dots : x_n]) = \frac{1}{x_n^{1+q+\dots+q^{n-i}}} \nabla(x_n, x_{n-1}, \dots, x_i).$$

Alors on peut vérifier que chaque fonction f_i est constante sur les U -orbites et que $f = (f_1, \dots, f_{n-1})$ induit un isomorphisme entre $U \backslash X(w)$ et $(\mathbf{G}_m)^{n-1}$. Ceci peut se faire soit par calcul direct, soit en utilisant [69, section 4.5, exemple 2] ou [83, proposition 5.5.6].

2.2 Décomposition de Curtis-Deodhar

Nous étudions dans cette partie une décomposition des cellules de Schubert doubles en vue de l'appliquer aux pièces $X_x(w)$ et $Y_x(w)$ des variétés de Deligne-Lusztig. Pour motiver notre démarche, considérons tout d'abord le cas particulier où x est l'élément de plus grande longueur w_0 . Cet élément est involutif et stable par F . Via l'isomorphisme $u \in \mathbf{U} \mapsto uw_0 \cdot \mathbf{B} \in \mathbf{B}w_0 \cdot \mathbf{B}$, la pièce maximale $X_{w_0}(w)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} X_{w_0}(w) &\simeq \{u \in \mathbf{U} \mid w_0^{-1}u^{-1}F(u)F(w_0) \in \mathbf{B}w\mathbf{B}\} \\ &\simeq \{u \in \mathbf{U} \mid w_0(u^{-1}F(u)) \in \mathbf{B}w\mathbf{B} \cap \mathbf{U}^-\}. \end{aligned}$$

En particulier, l'application $u \mapsto w_0(u^{-1}F(u))$ induit un isomorphisme entre le quotient $U \backslash X_{w_0}(w)$ et la variété $\mathbf{B}w\mathbf{B} \cap \mathbf{U}^-$, laquelle est isomorphe à la cellule double $\mathbf{B}w \cdot \mathbf{B} \cap \mathbf{B}^- \cdot \mathbf{B}$. Ces variétés, obtenues comme intersection de deux cellules de Schubert pour des sous-groupes de Borel différents, seront l'objet de cette partie.

2.2.1 Décomposition de Białyński-Birula dans les variétés de Bott-Samelson

On commence par présenter un résultat général, dû à Białyński-Birula, permettant de décomposer les variétés projectives lisses munies d'action de tores. Malheureusement, les variétés qui nous intéressent ne sont pas projectives, mais elles admettent toutefois une compactification lisse : les variétés de Bott-Samelson. La détermination explicite des cellules de Białyński-Birula y est alors possible grâce aux calculs effectués par Härterich dans [53, section 1].

(i) Généralités sur la décomposition de Białyński-Birula. Le résultat principal de [2] concerne donc les variétés projectives lisses munies d'une action du groupe algébrique \mathbf{G}_m . Plus précisément, pour une variété Z vérifiant ces hypothèses, Białyński-Birula définit deux décompositions en sous-variétés localement fermées, chacune indexée par les intersections de composantes irréductibles de $Z^{\mathbf{G}_m}$. Pour simplifier l'énoncé de ses résultats, on supposera ici que l'ensemble des points fixes de Z sous l'action de \mathbf{G}_m est fini, ce qui sera toujours vérifié dans les cas où on les utilisera.

Pour $(\lambda, z) \in \mathbf{G}_m \times Z$, on note $\lambda \cdot z$ l'action de λ sur z et on choisit un plongement de \mathbf{G}_m dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{F})$ de sorte que $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}) \setminus \mathbf{G}_m = \{0, \infty\}$. Les hypothèses sur la variété Z assurent alors que pour z fixé, les limites de $\lambda \cdot z$ en 0 et ∞ existent et sont des points fixes. On peut donc associer, à chaque élément a de $Z^{\mathbf{G}_m}$, deux ensembles non vides Z_a^+ et Z_a^- définis par

$$Z_a^+ = \{z \in Z \mid \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \cdot z = a\}$$

et

$$Z_a^- = \{z \in Z \mid \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \cdot z = a\}$$

afin d'obtenir deux partitions de Z appelées décompositions en *cellules contractantes* et *dilatantes* :

$$Z = \bigsqcup_{a \in Z^{\mathbf{G}_m}} Z_a^+ = \bigsqcup_{a \in Z^{\mathbf{G}_m}} Z_a^-.$$

Le résultat principal de [2] renseigne sur la géométrie de ces ensembles :

Théorème 2.8 (Białynicki-Birula). *Soit Z une variété projective lisse. Alors, pour tout point fixe a de Z sous \mathbf{G}_m ,*

- les ensembles Z_a^+ et Z_a^- sont des sous-variétés localement fermées de Z ;
- les variétés Z_a^+ et Z_a^- sont des espaces affines.

Exemple 2.9. Considérons la variété projective lisse $Z = \mathbf{G}/\mathbf{B}$. Le tore maximal \mathbf{T} agit sur cette variété ; on peut donc associer, à chaque cocaractère $\chi : \mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{T}$, une action de \mathbf{G}_m . Si χ est supposé *strictement dominant*, c'est-à-dire s'il vérifie $\langle \alpha, \chi \rangle > 0$ pour toute racine positive α , alors les points fixes de \mathbf{G}/\mathbf{B} sous l'action de \mathbf{G}_m correspondante sont donnés par :

$$(\mathbf{G}/\mathbf{B})^{\mathbf{G}_m} = \{w \cdot \mathbf{B} \mid w \in W\}.$$

Ainsi, les cellules de Schubert $\mathbf{B}w \cdot \mathbf{B}$ et $\mathbf{B}^-w \cdot \mathbf{B}$ sont stables par l'action de \mathbf{G}_m et ne contiennent qu'un seul point fixe. On peut en outre vérifier directement que, pour $\lambda \in \mathbf{G}_m$

$$\chi(\lambda)bw \cdot \mathbf{B} = (\chi(\lambda)b)w \cdot \mathbf{B} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} w \cdot \mathbf{B} \quad \text{si } b \in \mathbf{B}$$

et
$$\chi(\lambda)b'w \cdot \mathbf{B} = (\chi(\lambda)b')w \cdot \mathbf{B} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} w \cdot \mathbf{B} \quad \text{si } b' \in \mathbf{B}^-$$

si bien que les décompositions en cellules contractantes et dilatantes de la variété de drapeaux s'identifient aux décompositions de Bruhat suivantes :

$$\mathbf{G}/\mathbf{B} = \bigsqcup_{w \in W} \mathbf{B}w \cdot \mathbf{B} = \bigsqcup_{w \in W} \mathbf{B}^-w \cdot \mathbf{B}.$$

Plus généralement, pour $x \in W$, les décompositions associées au cocaractère $x^{-1} \cdot \chi$ défini par $(x^{-1} \cdot \chi)(\lambda) = (\chi(\lambda))^x$ sont données par :

$$\mathbf{G}/\mathbf{B} = \bigsqcup_{w \in W} \mathbf{B}^x w \cdot \mathbf{B} = \bigsqcup_{w \in W} (\mathbf{B}^-)^x w \cdot \mathbf{B}.$$

(ii) Cas des variétés de Bott-Samelson. Rappelons que pour $w \in W$, on note S_w la variété de Schubert associée à w , définie comme l'adhérence dans \mathbf{G}/\mathbf{B} de la cellule $\mathbf{B}w \cdot \mathbf{B}$. Cette variété n'est en général pas lisse, mais Demazure en a construit dans [30] une désingularisation $\partial : \mathbf{BS} \rightarrow S_w$ vérifiant les propriétés suivantes :

- \mathbf{BS} est une variété projective lisse et ∂ est un morphisme projectif surjectif ;
- ∂ est un isomorphisme au-dessus de $\mathbf{B}w \cdot \mathbf{B}$.

La définition de cette résolution nécessite l'introduction de quelques notations : on fixe tout d'abord une décomposition réduite $w = s_1 s_2 \cdots s_r$ de w . À chaque réflexion simple apparaissant dans cette écriture correspond un sous-groupe parabolique standard $\mathbf{P}_{s_i} = \mathbf{B} \cup \mathbf{B}s_i\mathbf{B}$. La *variété de Bott-Samelson* associée à cette décomposition est alors définie par :

$$\mathbf{BS} = \mathbf{BS}_{(s_1, \dots, s_r)} = \mathbf{P}_{s_1} \times_{\mathbf{B}} \mathbf{P}_{s_2} \times_{\mathbf{B}} \cdots \times_{\mathbf{B}} \mathbf{P}_{s_r} / \mathbf{B}.$$

En d'autres termes, c'est le quotient de la variété $\mathbf{P}_{s_1} \times \mathbf{P}_{s_2} \times \cdots \times \mathbf{P}_{s_r}$ par le groupe \mathbf{B}^r agissant à droite par $(p_1, \dots, p_r) \cdot (b_1, \dots, b_r) = (p_1 b_1, b_1^{-1} p_2 b_2, \dots, b_{r-1}^{-1} p_r b_r)$. Le morphisme $\partial : \mathbf{BS} \rightarrow S_w$, qui envoie la classe $[p_1, \dots, p_r] \in \mathbf{BS}$ d'un élément $(p_1, \dots, p_r) \in \mathbf{P}_{s_1} \times \cdots \times \mathbf{P}_{s_r}$ sur la classe du produit $p_1 p_2 \cdots p_r$ dans \mathbf{G}/\mathbf{B} , est appelé *résolution de Bott-Samelson*. On vérifie facilement qu'il satisfait les propriétés énoncées précédemment.

Le tore \mathbf{T} agit naturellement sur la variété \mathbf{BS} , par multiplication à gauche sur la première composante, ou, de façon équivalente, par conjugaison sur chaque facteur

$$t \cdot [p_1, p_2, \dots, p_r] = [t p_1, p_2, \dots, p_r] = [{}^t p_1, {}^t p_2, \dots, {}^t p_r].$$

de telle sorte que ∂ est un morphisme \mathbf{T} -équivariant. Les points fixes sous cette action sont en nombre fini, représentés par les classes dans \mathbf{BS} des éléments de l'ensemble $\Gamma = \{1, s_1\} \times \{1, s_2\} \times \cdots \times \{1, s_r\}$; un tel élément sera appelé une *sous-expression* de w .

Remarque 2.10. Le terme « sous-expression de w » n'a de sens que si une décomposition réduite de w a été fixée au préalable. Ce sera le cas dans toutes les situations où l'on fera cet abus de langage.

Fixons maintenant, comme dans l'exemple 2.9, un cocaractère $\chi : \mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{T}$ strictement dominant et un élément x de W . On souhaite déterminer explicitement les cellules de Białynicki-Birula pour l'action de \mathbf{G}_m sur \mathbf{BS} induite par $x^{-1} \cdot \chi$. Pour cela, on adapte les calculs effectués en [53, section 1] par Härterich : pour une sous-expression $\gamma \in \Gamma$, on considère l'immersion ouverte $a_\gamma : \mathbb{A}_r \rightarrow \mathbf{BS}$ définie par

$$a_\gamma(z_1, z_2, \dots, z_r) = [u_{\gamma_1(-\alpha_1)}(z_1)\dot{\gamma}_1, u_{\gamma_2(-\alpha_2)}(z_2)\dot{\gamma}_2, \dots, u_{\gamma_r(-\alpha_r)}(z_r)\dot{\gamma}_r]$$

où α_i désigne la racine simple associée à la réflexion s_i . Lorsque γ parcourt Γ , les images de ces morphismes, que l'on notera A_γ , forment un recouvrement d'ouverts de \mathbf{BS} .

Exemple 2.11. Pour $r = 1$, la variété de Bott-Samelson associée à une réflexion simple s est définie comme le quotient \mathbf{P}_s/\mathbf{B} , lequel est isomorphe à la droite projective $\mathbb{P}_1(\mathbb{F})$. Elle se décompose en une réunion de deux ouverts isomorphes à des droites affines

$$\mathbf{G}/\mathbf{B} = \mathbf{U}_\alpha s \cdot \mathbf{B} \cup \mathbf{U}_{-\alpha} \cdot \mathbf{B}$$

de la même façon que l'on peut décomposer $\mathbb{P}_1(\mathbb{F})$ en $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}) = \{[z : 1]\} \cup \{[1 : z]\}$. La compatibilité de ces deux décompositions est donnée par l'égalité suivante :

$$\forall z \in \mathbf{G}_m \quad u_\alpha(z)s \cdot \mathbf{B} = u_{-\alpha}(z^{-1}) \cdot \mathbf{B}$$

que l'on vérifie par un calcul direct dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F})$.

Chaque ouvert A_γ ne contient en fait qu'un seul point fixe sous l'action de \mathbf{G}_m , à savoir γ ; pour le voir, et déterminer du même coup la cellule contractante associée à ce point fixe, on peut plonger la variété \mathbf{BS} dans un produit de variétés de drapeaux via le morphisme $\iota : \mathbf{BS} \longrightarrow (\mathbf{G}/\mathbf{B})^r$, défini par

$$\iota([p_1, p_2, \dots, p_r]) = (p_1 \cdot \mathbf{B}, p_1 p_2 \cdot \mathbf{B}, \dots, p_1 p_2 \cdots p_r \cdot \mathbf{B}).$$

Notons que ∂ s'identifie à la dernière composante de ce morphisme. L'image d'un élément de A_γ par ι s'obtient en composant a_γ et ι :

$$\iota \circ a_\gamma(z_1, \dots, z_r) = (u_{\gamma_1(-\alpha_1)}(z_1)\dot{\gamma}_1 \cdot \mathbf{B}, u_{\gamma_1(-\alpha_1)}(z_1)\dot{\gamma}_1 u_{\gamma_2(-\alpha_2)}(z_2)\dot{\gamma}_2 \cdot \mathbf{B}, \dots).$$

Notons $\gamma^i = \gamma_1 \cdots \gamma_i$ le sous-mot de w formé du produit des i premiers éléments de γ . D'après [87, section 9.3], il existe un choix de représentants $\{\dot{w}\}$ de W dans $N_{\mathbf{G}}(T)$ qui satisfont l'égalité

$$\dot{\gamma}_1 \cdots \dot{\gamma}_{i-1} u_{\gamma_i(-\alpha_i)}(z_i)\dot{\gamma}_i = u_{\gamma^i(-\alpha_i)}(\pm z_i)\dot{\gamma}_1 \cdots \dot{\gamma}_i = u_{\tilde{\alpha}_i}(\pm z_i)\dot{\gamma}_1 \cdots \dot{\gamma}_i$$

où on a posé $\tilde{\alpha}_i = \gamma^i(-\alpha_i)$ afin d'alléger les notations. L'expression précédente se simplifie donc en

$$\begin{aligned} \iota \circ a_\gamma(z_1, \dots, z_r) &= (u_{\gamma^1(-\alpha_1)}(z_1)\gamma^1 \cdot \mathbf{B}, u_{\gamma^1(-\alpha_1)}(z_1)u_{\gamma^2(-\alpha_2)}(\pm z_2)\gamma^2 \cdot \mathbf{B}, \dots, \\ &\quad u_{\gamma^1(-\alpha_1)}(z_1)u_{\gamma^2(-\alpha_2)}(\pm z_2) \cdots u_{\gamma^r(-\alpha_r)}(\pm z_r)\gamma^r \cdot \mathbf{B}) \\ &= (u_{\tilde{\alpha}_1}(z_1)\gamma^1 \cdot \mathbf{B}, u_{\tilde{\alpha}_1}(z_1)u_{\tilde{\alpha}_2}(\pm z_2)\gamma^2 \cdot \mathbf{B}, \dots, \\ &\quad u_{\tilde{\alpha}_1}(z_1)u_{\tilde{\alpha}_2}(\pm z_2) \cdots u_{\tilde{\alpha}_r}(\pm z_r)\gamma^r \cdot \mathbf{B}). \end{aligned}$$

Puisque l'action de $\lambda \in \mathbf{G}_m$ via $x^{-1} \cdot \chi$ sur un élément de la forme $u_\alpha(z)$ s'obtient par $\lambda \cdot u_\alpha(z) = u_\alpha(\lambda^{\langle \alpha, x^{-1} \cdot \chi \rangle} z)$, on en déduit que

$$\iota(\lambda \cdot a_\gamma(z_1, \dots, z_r)) \xrightarrow[\lambda \rightarrow 0]{} \iota(\gamma) \iff z_i = 0 \text{ dès que } \langle \tilde{\alpha}_i, x^{-1} \cdot \chi \rangle < 0.$$

Le morphisme ι étant injectif, on obtient ainsi la forme de la cellule contractante associée à γ :

$$\begin{aligned} C_\gamma(x) &= a_\gamma(\{(z_1, \dots, z_r) \mid z_i = 0 \text{ dès que } \langle \tilde{\alpha}_i, x^{-1} \cdot \chi \rangle < 0\}) \\ &= a_\gamma(\{(z_1, \dots, z_r) \mid z_i = 0 \text{ dès que } x(\tilde{\alpha}_i) \in \Phi^-\}). \end{aligned}$$

En résumé,

Proposition 2.12. *Soit $x \in W$ et $\chi : \mathbf{G}_m \longrightarrow \mathbf{T}$ un cocaractère strictement dominant de \mathbf{T} . Les points fixes de \mathbf{BS} sous l'action de \mathbf{G}_m induite par $x^{-1} \cdot \chi$ sont exactement les sous-expressions $\gamma \in \Gamma = \{1, s_1\} \times \{1, s_2\} \times \cdots \times \{1, s_r\}$ et les cellules contractantes sont données par*

$$C_\gamma(x) = \{[u_{\gamma_1(-\alpha_1)}(z_1)\dot{\gamma}_1, \dots, u_{\gamma_r(-\alpha_r)}(z_r)\dot{\gamma}_r] \mid z_i = 0 \text{ dès que } x\gamma^i(\alpha_i) \in \Phi^+\}$$

où $\gamma^i = \gamma_1 \cdots \gamma_i$ désigne le sous-mot constitué du produit des i premiers éléments de γ .

2.2.2 Applications aux cellules de Schubert doubles

Nous utilisons ici les calculs de la section précédente dans le but de déterminer une décomposition des *cellules de Schubert doubles* $\mathbf{B}w \cdot \mathbf{B} \cap (\mathbf{B}^x)v \cdot \mathbf{B}$ où w, x et v sont des éléments quelconques du groupe de Weyl. Comme précédemment, on fixe une décomposition réduite $w = s_1 \cdots s_r$ de w ; toutes les sous-expressions de w considérées seront définies par rapport à cette décomposition. Pour $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_r) \in \Gamma$, on définit les sous-ensembles suivants :

$$\begin{aligned} J_\gamma(x) &= \{i = 1, \dots, r \mid x\gamma^i < x\gamma^i s_i\} \\ &= \{i = 1, \dots, r \mid x\gamma^i(\alpha_i) \in \Phi^+\} \end{aligned}$$

et

$$I_\gamma = \{i = 1, \dots, r \mid \gamma_i = s_i\}.$$

Avec ces notations, les théorèmes de décomposition de Deodhar [31, théorème 1.1 et corollaire 1.2] et Curtis [25] s'énoncent de la manière suivante :

Théorème 2.13 (Deodhar, Curtis). *Il existe une famille $(D_\gamma(x))_{\gamma \in \Gamma}$ de sous-variétés localement fermées de $\mathbf{B}w \cdot \mathbf{B}$ telle que :*

- (i) $D_\gamma(x)$ est non vide si et seulement si $J_\gamma(x) \subset I_\gamma$;
- (ii) si $D_\gamma(x)$ est non-vide, il existe un isomorphisme de variétés

$$D_\gamma(x) \simeq (\mathbf{G}_a)^{|I_\gamma| - |J_\gamma(x)|} \times (\mathbf{G}_m)^{r - |I_\gamma|};$$

- (iii) pour $v \in W$, la cellule de Schubert double admet la décomposition suivante :

$$\mathbf{B}w \cdot \mathbf{B} \cap (\mathbf{B}^x)v \cdot \mathbf{B} = \bigsqcup_{\gamma \in \Gamma_v} D_\gamma(x)$$

où Γ_v désigne le sous-ensemble de Γ formé des sous-expressions γ vérifiant $\gamma^r = v$.

Démonstration. En suivant [68], on utilise la décomposition de la variété $\mathbf{B}\mathbf{S}$ déterminée dans la section précédente. Puisque le morphisme $\partial : \mathbf{B}\mathbf{S} \rightarrow S_w$ est un isomorphisme au-dessus de $\mathbf{B}w \cdot \mathbf{B}$, on peut définir les cellules $D_\gamma(x)$ comme les restrictions des cellules $C_\gamma(x)$. La décomposition

$$\mathbf{B}\mathbf{S} \cap \partial^{-1}(\mathbf{B}w \cdot \mathbf{B}) = \partial^{-1}(\mathbf{B}w \cdot \mathbf{B}) = \bigsqcup_{\gamma \in \Gamma} (C_\gamma(x) \cap \partial^{-1}(\mathbf{B}w \cdot \mathbf{B}))$$

induit ainsi, via le morphisme ∂ , la décomposition suivante :

$$\mathbf{B}w \cdot \mathbf{B} = \bigsqcup_{\gamma \in \Gamma} \partial(C_\gamma(x) \cap \partial^{-1}(\mathbf{B}w \cdot \mathbf{B})).$$

La cellule de Curtis-Deodhar associée à la sous-expression γ est donc définie par $D_\gamma(x) = \partial(C_\gamma(x) \cap \partial^{-1}(\mathbf{B}w \cdot \mathbf{B}))$. Reste à la déterminer explicitement à partir de la cellule $C_\gamma(x)$. Pour cela, on reprend les notations de la section 2.2.1 : la variété de Bott-Samelson admet un recouvrement ouvert $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ donné par les images de la famille de morphismes $(a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$. On remarque alors que :

- $\partial^{-1}(\mathbf{B}_w \cdot \mathbf{B}) = A_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}$ est exactement l'ouvert correspondant à la sous-expression (s_1, s_2, \dots, s_r) ;
- l'intersection de A_γ avec cet ouvert se calcule comme dans l'exemple 2.11 :

$$\begin{aligned} A_\gamma \cap A_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} &= a_\gamma(\{(z_1, \dots, z_r) \in \mathbb{A}_r \mid z_i \neq 0 \text{ dès que } \gamma_i = 1\}) \\ &= a_\gamma(\{(z_1, \dots, z_r) \in \mathbb{A}_r \mid z_i \neq 0 \text{ dès que } i \notin I_\gamma\}). \end{aligned}$$

D'autre part, d'après la proposition 2.12, la cellule $C_\gamma(x)$ s'écrit

$$C_\gamma(x) = a_\gamma(\{(z_1, \dots, z_r) \in \mathbb{A}_r \mid z_i = 0 \text{ dès que } i \in J_\gamma(x)\}).$$

En conjuguant ces deux égalités, on obtient finalement

$$D_\gamma(x) = \partial \circ a_\gamma(\{(z_1, \dots, z_r) \in \mathbb{A}_r \mid z_i = 0 \text{ si } i \in J_\gamma(x) \text{ et } z_i \neq 0 \text{ si } i \notin I_\gamma\}).$$

Les deux premières assertions du théorème sont alors claires (l'isomorphisme (ii) étant induit par $\partial \circ a_\gamma$); la troisième découle de l'inclusion $\partial(C_\gamma(x)) \subset (\mathbf{B})^x \gamma^r \cdot \mathbf{B}$ que l'on peut par exemple déduire de la proposition 2.12. \square

La condition $J_\gamma(x) \subset I_\gamma$, qui traduit le fait que la cellule de Curtis-Deodhar associée à γ est non vide, peut s'écrire sous plusieurs formes. On retiendra la suivante, donnée dans [31], utile pour la construction inductive de telles sous-expressions :

Définition 2.14. Soit $\gamma \in \Gamma$ une sous-expression de w . On dit que γ est x -distinguée (ou seulement distinguée si $x = w_0$) si elle vérifie la propriété suivante :

$$x\gamma^{i-1} < x\gamma^{i-1}s_i \implies \gamma_i = s_i.$$

La détermination explicite de l'isomorphisme 2.13.(ii) est fondamentale pour la suite de notre travail. Evidemment, le calcul de la cohomologie des variétés de la forme $(\mathbf{G}_m)^a \times (\mathbf{G}_a)^b$ est très simple, mais ce n'est pas exactement ce qui nous intéresse. On cherche plutôt à relever ces constructions aux variétés $X(w)$ et $Y(w)$, ou, de façon moins optimiste, au quotient de ces variétés par $D(\mathbf{U})^F$ et non U tout entier. Le fait de connaître un paramétrage explicite de chaque cellule nous permettra, dans la section suivante, de donner des équations relativement simples de leur contribution à $D(\mathbf{U})^F \backslash X(w)$ dans le but de calculer la cohomologie de ce quotient. Avant cela, on va préciser le paramétrage de $D_\gamma(x)$ obtenu au cours de la démonstration du théorème 2.13.

Notations 2.15. Fixons une sous-expression x -distinguée γ de w et définissons la suite finie de racines suivante :

$$\Phi_\gamma(x) = (\gamma^i(-\alpha_i))_{i=1, \dots, r \text{ et } x\gamma^i(\alpha_i) \in \Phi^-}.$$

On veillera à ne pas oublier l'ordre des éléments de cette suite, donné par les indices i , ainsi que les multiplicités éventuelles pouvant apparaître. À chaque élément $\beta = \gamma^i(-\alpha_i)$ correspond une variable z_β choisie dans \mathbf{G}_m si $\gamma_i = 1$ ou dans \mathbf{G}_a sinon. Avec ces notations, l'isomorphisme 2.13.(ii) s'écrit

$$(z_\beta)_{\beta \in \Phi_\gamma(x)} \mapsto \left(\prod_{\beta \in \Phi_\gamma(x)} u_\beta(z_\beta) \right) \gamma^r \cdot \mathbf{B}$$

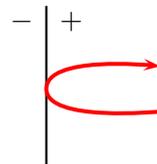
Par construction, il donne donc un représentant canonique dans \mathbf{U}^\times de chaque élément de $D_\gamma(x)$. On notera $\Omega_\gamma(x) \subset \mathbf{U}^\times$ l'ensemble de ces représentants.

Remarque 2.16. Dans le cas où $v = 1$, l'application $u \mapsto u \cdot \mathbf{B}$ induit un isomorphisme de $\mathbf{B}w\mathbf{B} \cap (\mathbf{U}^\times \cap \mathbf{U}^-)$ sur $\mathbf{B}w \cdot \mathbf{B} \cap (\mathbf{B}^\times) \cdot \mathbf{B}$; toutefois, l'ensemble de représentants $\Omega_\gamma(x)$ n'est pas forcément inclus dans $\mathbf{U}^\times \cap \mathbf{U}^-$. Nous verrons dans la section 2.4.1 comment résoudre ce problème.

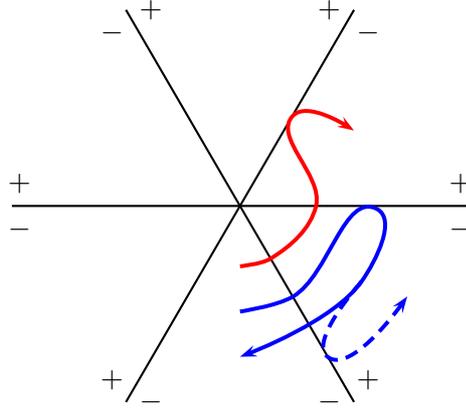
Il existe une représentation graphique des sous-expressions particulièrement adaptée à notre situation. On utilise pour cela une représentation de réflexion V du groupe de Weyl (par exemple $V = X^\vee(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$) dans laquelle on fixe une chambre fondamentale C . Chaque hyperplan de réflexion coupe l'espace en deux composantes connexes : celle contenant C est marquée positivement, l'autre négativement. Une sous-expression x -distinguée γ définit alors un chemin de la chambre $x^{-1}(C)$ vers la chambre $(x\gamma^r)^{-1}(C)$, chaque morceau du chemin étant représenté par l'un des trois mouvements suivants, allant de $(x\gamma^{i-1})^{-1}(C)$ vers $(x\gamma^i)^{-1}(C)$:

$\gamma_i = 1$	$\gamma_i = s_i$	$\gamma_i = s_i$
$z_\beta \in \mathbf{G}_m$	$z_\beta \in \mathbf{G}_a$	$z_\beta = 0$ (car $x\gamma^i(\alpha_i) \in \Phi^+$)

Notons que la propriété d'être distinguée pour une sous-expression implique que le mouvement suivant est impossible :



Exemple 2.17. Si $W = \langle s, t \rangle$ est un groupe de type A_2 et $x = w = w_0 = sts$, alors les sous-expressions $\gamma = (s, t, 1)$ et $\delta = (s, 1, s)$ sont distinguées. Elles sont représentées par les chemins suivants :



On en déduit que les cellules de Deodhar associées à ces sous-expressions sont isomorphes à \mathbf{G}_m pour la première et $\mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_m$ pour la seconde. Dans cet exemple particulier, la seule sous-expression qui n'est pas distinguée est $(s, 1, 1)$; elle est représentée en pointillés.

Pour conclure cette partie, il nous reste à traiter certains cas particuliers selon le type de \mathbf{G} ou la valeur de w , x ou v . Les exemples donnés ici seront pour la plupart réutilisés dans les prochaines sections.

(i) **La cellule maximale pour $x = w_0$.** Dans le cas où x est l'élément de plus grande longueur w_0 , la cellule de Schubert double $\mathbf{B}w \cdot \mathbf{B} \cap \mathbf{B}^-v \cdot \mathbf{B}$ est irréductible (voir par exemple [74]). Si l'on suppose que $\mathbf{B}w \cdot \mathbf{B} \cap \mathbf{B}^-v \cdot \mathbf{B}$ est non vide (ce qui est le cas si et seulement si $v \leq w$), on en déduit qu'il existe une cellule $D_\gamma(w_0)$ dense dans cette variété. On peut même montrer (voir [31]) que γ est l'unique sous-expression distinguée qui vérifie $J_\gamma(w_0) = l_\gamma$; en particulier, la cellule associée est isomorphe à $(\mathbf{G}_m)^{\ell(w)-\ell(v)}$. On l'appellera la *cellule de Curtis-Deodhar maximale*.

Exemple 2.18. Pour $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{F})$, un groupe de type A_n , il existe un lien étroit entre la décomposition en cellules et les mineurs de matrices. Illustrons ce lien dans le cas où $x = w = w_0$ et $v = 1$: par le morphisme $u \mapsto u \cdot \mathbf{B}$, la cellule de Schubert double $\mathbf{B}w_0 \cdot \mathbf{B} \cap \mathbf{B}^- \cdot \mathbf{B}$ est isomorphe à $\mathbf{B}w_0\mathbf{B} \cap \mathbf{U}^-$. Dans le cas du groupe linéaire, on connaît explicitement l'ensemble $(\mathbf{B}^-)\mathbf{B} = w_0\mathbf{B}w_0\mathbf{B}$: il est formé des matrices dont les mineurs principaux sont non nuls. Avec $n = 2$ et $W = \langle s, t \rangle$, on obtient par exemple :

$$\mathbf{B}w_0\mathbf{B} \cap \mathbf{U}^- = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c \neq 0 \\ b & 1 & 0 & ab - c \neq 0 \\ c & a & 1 & \end{array} \right) \right\}.$$

En considérant l'alternative $a \neq 0$ et $a = 0$, on obtient une décomposition de cette variété en $\mathbf{B}w_0\mathbf{B} \cap \mathbf{U}^- \simeq (\mathbf{G}_m)^3 \amalg \mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_m$, qui correspond exactement à la décomposition en cellules de Curtis-Deodhar avec les sous-expressions distinguées $(1, 1, 1)$ et $(s, 1, s)$ de $w_0 = sts$. La cellule maximale est donc paramétrée par les mineurs a , c et $ab - c$.

Plus généralement, pour n quelconque, on note $\Delta = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ les racines simples du type A_n , ordonnées de telle sorte que les sous-groupes à un paramètre associés parcourent la première diagonale de haut en bas et de gauche à droite. Les réflexions simples correspondantes seront notées $S = \{t_1, \dots, t_n\}$. On considère la décomposition réduite suivante de w_0 :

$$w_0 = t_n t_{n-1} t_n t_{n-2} t_{n-1} t_n \cdots t_1 t_2 \cdots t_n.$$

Alors, pour $\gamma = (1, 1, \dots, 1)$, la cellule $D_\gamma(w_0)$ est la cellule maximale de $\mathbf{B}w_0 \cdot \mathbf{B} \cap \mathbf{B}^- \cdot \mathbf{B}$. D'après les notations 2.15, les éléments du système de représentants $\Omega_\gamma(w_0) \subset \mathbf{B}w_0\mathbf{B} \cap \mathbf{U}^-$ sont donnés par

$$u^{(n)} = \prod_{i=1}^n \prod_{j=n-i+1}^n u_{-\beta_j}(z_j^{(i)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & u^{(n-1)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ z_1^{(n)} & 1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & z_n^{(n)} & 1 \end{pmatrix}$$

où les variables $z_j^{(i)}$ sont toutes supposées non nulles. On peut alors relier certains mineurs de la matrice $u^{(n)}$ à ceux de $u^{(n-1)}$. Les relations qui nous intéressent sont les suivantes, pour $1 \leq j < i \leq n+1$:

$$\det_{\llbracket i-j+1; i \rrbracket, \llbracket 1; j \rrbracket}(u^{(n)}) = z_1^{(n)} z_2^{(n)} \cdots z_j^{(n)} \det_{\llbracket i-j; i-1 \rrbracket, \llbracket 1; j \rrbracket}(u^{(n-1)})$$

où on a noté $\det_{I,J}$ le déterminant extrait à partir des lignes d'indice $i \in I$ et des colonnes d'indices $j \in J$. On en déduit par récurrence la formule suivante :

$$\det_{\llbracket i-j+1; i \rrbracket, \llbracket 1; j \rrbracket}(u^{(n)}) = \prod_{k=0}^{i-j-1} z_{k+1}^{(n-k)} z_{k+2}^{(n-k)} \cdots z_{k+j}^{(n-k)}.$$

Par conséquent, l'application

$$u \longmapsto \left(\det_{\llbracket i-j+1; i \rrbracket, \llbracket 1; j \rrbracket}(u) \right)_{1 \leq j < i \leq n+1}$$

définit un isomorphisme de la cellule maximale $\Omega_\gamma(w_0)$ vers $(\mathbf{G}_m)^{n(n+1)/2}$.

(ii) Cas où w est un élément de Coxeter. Dans cet exemple, on note $[\Delta/\phi] = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ un ensemble de représentants des orbites de racines simples sous ϕ et $\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ l'ensemble des réflexions simples associées, choisis dans un ordre quelconque. Le produit $w = t_1 t_2 \dots t_m$ de ces réflexions simples est un *élément de Coxeter tordu* (au sens de [85, section 7]) ; pour cette classe particulière d'éléments, la décomposition de Curtis-Deodhar prend une forme très simple puisque l'on a

- $\mathbf{B}w \cdot \mathbf{B} \cap (\mathbf{B}^x) \cdot \mathbf{B} = \emptyset$ dès que $x \neq w_0$;
- $\mathbf{B}w \cdot \mathbf{B} \cap \mathbf{B}^- \cdot \mathbf{B} = D_{(1, \dots, 1)}(w_0) \simeq (\mathbf{G}_m)^r$.

En effet, la seule sous-expression de w dont le produit vaut 1 est $\gamma = (1, 1, \dots, 1)$, et celle-ci n'est x -distinguée que dans le cas où $x = w_0$. On retrouve ainsi, pour les groupes déployés, le résultat donné dans [62, section 2] (voir la remarque 2.51 pour le cas non déployé).

2.2.3 Sur l'adhérence des cellules de Curtis-Deodhar

Nous examinons dans cette section le problème de déterminer l'adhérence d'une cellule de Curtis-Deodhar. En dépit des apparences et des exemples traités précédemment, on ne dispose pour l'instant d'aucune méthode générale pour résoudre cette question. On donnera deux contre-exemples généraux (voir les propositions 2.25 et 2.26) qui attestent de la difficulté de ce problème. Ces complications ne constitueront pas pour autant des obstacles majeurs pour la suite du travail, puisque la propriété de filtrabilité est tout de même vérifiée (cf. lemme 2.20).

On reprend les notations précédentes : $w = s_1 \dots s_r$ est une décomposition réduite de w et x est un élément quelconque de W . Rappelons que l'on peut plonger la variété \mathbf{BS} dans un produit de variétés de drapeaux via le morphisme $\iota : \mathbf{BS} \rightarrow (\mathbf{G}/\mathbf{B})^r$, défini par

$$\iota([p_1, p_2, \dots, p_r]) = (p_1 \cdot \mathbf{B}, p_1 p_2 \cdot \mathbf{B}, \dots, p_1 p_2 \cdots p_r \cdot \mathbf{B}).$$

Soit $\gamma \in \Gamma$ une sous-expression de w . Par construction de $C_\gamma(x)$, on a

$$\iota(C_\gamma(x)) \subset \prod_{i=1}^r \mathbf{B}^{x \gamma^i} \cdot \mathbf{B}.$$

Puisque \mathbf{BS} est une variété projective, le morphisme ι est fermé ; il envoie donc l'adhérence d'une cellule $C_\gamma(x)$ dans \mathbf{BS} sur l'adhérence de $\iota(C_\gamma(x))$. L'ordre de Bruhat, qui décrit les relations d'inclusion entre variétés de Schubert, induit un ordre naturel sur Γ défini par

$$\delta \preceq \gamma \iff x\delta^i \leq x\gamma^i \text{ pour tout } i = 1, \dots, r$$

et on obtient

$$\overline{C_\gamma(x)} \subset \bigcup_{\delta \preceq \gamma} C_\delta(x) \quad \text{et} \quad \overline{D_\gamma(x)} \subset \bigcup_{\delta \preceq \gamma} D_\delta(x) \quad (2.19)$$

où $\overline{D_\gamma(x)}$ désigne l'adhérence de $D_\gamma(x)$ dans la cellule de Schubert $\mathbf{B}w \cdot \mathbf{B}$. De ces inclusions on peut déduire la filtrabilité de la décomposition de Curtis-Deodhar :

Lemme 2.20. *Soient $w, v, x \in W$ fixés, et $w = s_1 \cdots s_r$ une décomposition réduite de w . En numérotant l'ensemble $\Gamma_v(x) = \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ de façon compatible à l'ordre \preceq , les relations $F_i \setminus F_{i+1} = D_{\gamma_i}$ définissent une filtration $F_0 \supset F_1 \supset \cdots \supset F_m \supset F_{m+1} = \emptyset$ de $\mathbf{B}w \cdot \mathbf{B} \cap \mathbf{B}^{-v} \cdot \mathbf{B}$ en sous-variétés fermées.*

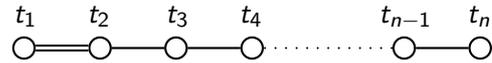
La propriété de filtrabilité est en fait toujours vérifiée pour les décompositions de Białyński-Birula de variétés projectives [3]. En revanche, d'autres hypothèses sont nécessaires si l'on souhaite obtenir des stratifications (un critère est donné dans [3]) ; pour les variétés de Bott-Samelson, ces hypothèses ne sont en général pas vérifiées, ce qui ne laisse que peu d'espoir pour que la décomposition de Curtis-Deodhar soit une stratification. Les deux questions suivantes résument les problèmes qui peuvent se poser dans notre situation :

Question 2.21. L'adhérence de $D_\gamma(x)$ est-elle une union de cellules ? En d'autres termes, est-ce que la partition $(D_\gamma(x))_{\gamma \in \Gamma}$ définit une stratification de la variété $\mathbf{B}w \cdot \mathbf{B}$?

Question 2.22. Si δ est une sous-expression vérifiant $\delta \preceq \gamma$, a-t-on nécessairement $D_\gamma(x) \cap D_\delta(x) \neq \emptyset$?

S'il est possible de donner une réponse positive à ces deux questions dans des cas particuliers – si w est un élément de Coxeter ou si γ est maximal (cf. la fin de la section 2.2.2) – on montre dans les sections suivantes que ce n'est pas vrai en toute généralité.

(i) Formules de Chevalley pour le type B_n . À partir de maintenant et jusqu'à la fin de cette partie, \mathbf{G} désignera un groupe quasi-simple de type B_n (on peut par exemple choisir pour \mathbf{G} le groupe orthogonal $\mathrm{SO}_{2n+1}(k)$). Le groupe de Weyl $W = W_n$ et son système de racines correspondent donc au diagramme de Dynkin suivant :



On notera $S = \{t_1, \dots, t_n\}$ l'ensemble des réflexions simples et $\Delta = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ les racines simples associées. Rappelons que Φ est formé de n^2 racines positives, dont l'expression en termes des racines simples est donnée par [11, planche II] :

- $\beta_i + \beta_{i+1} + \dots + \beta_j$ pour $1 \leq i \leq j \leq n$;
- $2\beta_1 + \dots + 2\beta_i + \beta_{i+1} + \dots + \beta_j$ pour $1 \leq i < j \leq n$.

Afin de pouvoir effectuer des calculs explicites, on choisit une famille d'isomorphismes $(u_\alpha)_{\alpha \in \Phi}$ vérifiant la formule des commutateurs de Chevalley (cf. [21, théorème 5.2.2]). Autrement dit, si $\alpha, \beta \in \Phi$ sont des racines linéairement indépendantes, et $x, y \in \mathbb{F}$ des scalaires quelconques, on a :

$$[u_\alpha(x); u_\beta(y)] = u_\alpha(x)u_\beta(y)u_\alpha(-x)u_\beta(-y) = \prod_{i,j>0} u_{i\beta+j\alpha}(C_{ij\beta\alpha}(-y)^i x^j)$$

où le produit est calculé sur les couples (i, j) tels que $i\beta + j\alpha \in \Phi$, dans un ordre croissant pour $i + j$. On donne ici les cas particuliers dans lesquels cette formule sera appliquée par la suite :

Formules 2.23. Soient $x, y \in \mathbb{F}$. Pour $\alpha, \beta \in \Phi^-$ et $i = 2, \dots, n-1$, on a

(i) si $\alpha + \beta \notin \Phi$ alors

$$u_\alpha(x)u_\beta(y)u_\alpha(-x) = u_\beta(y);$$

(ii) si $\alpha = -\beta_i$ et $\beta = -\beta_{i+1} - \dots - \beta_n$ alors

$$u_\alpha(x)u_\beta(y)u_\alpha(-x) = u_{\alpha+\beta}(\pm xy)u_\beta(y);$$

(iii) si $\alpha = -2\beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_{n-1}$ et $\beta = -\beta_2 - \dots - \beta_n$ alors

$$u_\alpha(x)u_\beta(y)u_\alpha(-x) = u_{\alpha+\beta}(\pm xy)u_\beta(y);$$

(iv) si $\alpha = -\beta_i - \dots - \beta_{n-1}$ et $\beta = -\beta_n$ alors

$$u_\alpha(x)u_\beta(y)u_\alpha(-x) = u_\beta(y)u_{\alpha+\beta}(\pm xy);$$

(v) si $\alpha = -\beta_1 - \dots - \beta_{n-1}$ et $\beta = -\beta_n$ alors

$$[u_\alpha(x); u_\beta(y)] = u_{2\alpha+\beta}(\pm x^2 y)u_{\alpha+\beta}(\pm xy).$$

Remarque 2.24. Les valeurs des constantes $C_{ij\beta\alpha}$ peuvent être déterminées par [21, section 4.3]. Les signes de ces constantes dépendent d'un choix sur certains éléments de la base de Chevalley de l'algèbre de Lie de \mathbf{G} (à savoir les paires extra-spéciales, cf. [21, section 4.2]). Néanmoins, ces choix ne seront pas significatifs dans nos calculs et nous utiliserons la notation \pm .

Dans un souci de simplicité, on s'attachera uniquement au cas où $x = w_0$ dans les exemples suivants. Toutes les sous-expressions x -distinguées seront simplement distinguées, les cellules de Curtis-Deodhar seront notées D_γ et les suites de racines apparaissant dans l'écriture canonique de leurs éléments Φ_γ (cf. notations 2.15).

(ii) Obstruction à la stratification. On commence par donner une réponse négative à la question 2.21. Pour cela, on considère l'élément w de W_n défini par la décomposition réduite suivante :

$$w = t_n t_{n-1} \cdots t_2 t_1 t_2 \cdots t_{n-1} t_n t_{n-1} \cdots t_2 t_1 t_2 \cdots t_{n-1}$$

et on définit les sous-expressions distinguées $\gamma, \delta \in \Gamma$ par :

$$\gamma = (1, t_{n-1}, t_{n-2}, \dots, t_2, 1, t_2, \dots, t_{n-1}, 1, t_{n-1}, \dots, t_2, 1, t_2, \dots, t_{n-1})$$

et $\delta = (1, t_{n-1}, t_{n-2}, \dots, t_2, t_1, 1, 1, \dots, \dots, \dots, 1, t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$.

La dimension des cellules associées à ces sous-expressions est donnée par le théorème 2.13. On peut facilement vérifier que $\dim D_\gamma = 2n$ et $\dim D_\delta = 3n - 3$, bien que les deux sous-expressions vérifient $\delta \preceq \gamma$. Par conséquent, pour $n \geq 4$, l'adhérence de la cellule D_γ ne peut contenir entièrement la cellule D_δ , ce qui force au moins l'une des deux questions à avoir une réponse négative. On va en fait prouver le résultat suivant :

Proposition 2.25. *L'adhérence de D_γ dans la cellule de Schubert double $\mathbf{B}w \cdot \mathbf{B} \cap \mathbf{B}^- \cdot \mathbf{B}$ contient une sous-variété de D_δ de dimension n .*

Démonstration. (i) Soit Ψ le sous-ensemble du système de racines Φ défini par

$$\Psi = \{-2\beta_1 - \dots - 2\beta_{n-1} - \beta_n; -\beta_2 - \dots - \beta_n; -\beta_3 - \dots - \beta_n; \dots; -\beta_{n-1} - \beta_n; -\beta_n\}.$$

Puisque la somme de deux éléments de cet ensemble n'est jamais une racine, les sous-groupes à un paramètre associés commutent entre eux. Considérons l'ensemble Ω suivant :

$$\Omega = \prod_{\beta \in \Psi} u_\beta(\mathbf{G}_m) \subset \mathbf{U}^-.$$

Par la remarque précédente et la formule 2.23.(i), ce produit ne dépend pas de l'ordre dans lequel on le calcule. On va montrer que son image dans \mathbf{G}/\mathbf{B} , notée $V = \Omega \cdot \mathbf{B}$, est incluse à la fois dans \overline{D}_γ et D_δ , ce qui prouvera la proposition.

(ii) À l'aide de [11, section V.4.1], on peut calculer explicitement les éléments de la suite Φ_δ définie en 2.15 ; leur opposé est donné par

$$-\Phi_\delta = (\beta_n; 2\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n-1}; \beta_2; \beta_3; \dots; \beta_{n-2}; \\ \beta_{n-1} + \beta_n; \beta_{n-2}; \dots; \beta_3; \beta_2; 2\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n-1}; \\ \beta_1 + \cdots + \beta_{n-1}; \beta_2 + \cdots + \beta_{n-1}; \dots; \beta_{n-1}).$$

En reprenant les notations données en 2.15, chaque élément de D_δ s'exprime en fonction des variables $(x_\beta)_{\beta \in \Phi_\delta}$, qui appartiennent à \mathbf{G}_m ou \mathbf{G}_a selon la valeur du δ_i correspondant. Ici, on peut vérifier que les $(2n - 2)$ premières variables correspondent à des variables dans \mathbf{G}_m tandis que les $(n - 1)$ dernières parcourent \mathbf{G}_a . Si bien que pour $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in (\mathbf{G}_a)^n$, on peut construire l'élément de D_δ associé à la spécialisation suivante :

$$(x_\beta)_{\beta \in \Phi_\delta} = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n, -y_{n-1}, \dots, -y_3, -y_2, 0, \dots, 0).$$

Le représentant $u_{\mathbf{y}} \in \mathbf{U}^-$ correspondant s'écrit

$$u_{\mathbf{y}} = u_{\beta_n}^*(y_1) u_{2\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n-1}}^*(y_2) v_{\mathbf{y}} u_{2\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n-1}}^*(-y_2)$$

avec

$$v_{\mathbf{y}} = u_{\beta_2}^*(y_3) \cdots u_{\beta_{n-1} + \beta_n}^*(y_n) \cdots u_{\beta_2}^*(-y_3)$$

en notant $u_\alpha^* = u_{-\alpha}$ le sous-groupe à un paramètre correspondant à la racine $-\alpha$. On adoptera cette convention jusqu'à la fin de cette section afin de rendre les calculs plus lisibles. Par applications successives des formules 2.23.(i) et 2.23.(ii), l'expression de $v_{\mathbf{y}}$ se simplifie en

$$v_{\mathbf{y}} = u_{\beta_2 + \cdots + \beta_n}^*(\pm y_3 \cdots y_n) \cdots u_{\beta_{n-2} + \beta_{n-1} + \beta_n}^*(\pm y_{n-1} y_n) u_{\beta_{n-1} + \beta_n}^*(y_n).$$

En réinjectant cette expression dans la définition de $u_{\mathbf{y}}$ et en utilisant les formules 2.23.(i) et 2.23.(iii), on obtient

$$u_{\mathbf{y}} = u_{\beta_n}^*(y_1) u_{2\beta_1 + \cdots + 2\beta_{n-1} + \beta_n}^*(\pm y_2 \cdots y_n) v_{\mathbf{y}} \\ = u_{\beta_n}^*(y_1) u_{2\beta_1 + \cdots + 2\beta_{n-1} + \beta_n}^*(\pm y_2 \cdots y_n) u_{\beta_2 + \cdots + \beta_n}^*(\pm y_3 \cdots y_n) \cdots u_{\beta_{n-1} + \beta_n}^*(y_n).$$

Puisque tout élément de Ω peut s'écrire sous cette forme, on en déduit que D_δ contient la variété V , qui est bien sûr de dimension n .

(iii) Comme précédemment, il est facile de déterminer la suite des racines apparaissant dans l'expression canonique des éléments de D_γ (cf. notations 2.15). L'opposé de cet ensemble est donné par

$$-\Phi_\gamma = (\beta_n; \beta_1 + \cdots + \beta_{n-1}; \beta_2 + \cdots + \beta_{n-1}; \dots; \beta_{n-1}; \\ \beta_n; \beta_1 + \cdots + \beta_{n-1}; \beta_2 + \cdots + \beta_{n-1}; \dots; \beta_{n-1}).$$

Pour $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n, t) \in (\mathbf{G}_m)^{n+1}$, on peut considérer le représentant $u_{\mathbf{z}} \in \mathbf{U}^-$ de l'élément de D_γ associé au choix de variables suivant :

$$(x_\beta)_{\beta \in \Phi_\delta} = (z_n, z_1 t, z_2 t^2, z_3 t^2, \dots, z_{n-1} t^2, t^{-2}, -z_1 t, -z_2 t^2, -z_3 t^2, \dots, -z_{n-1} t^2).$$

Puisque chacune de ces variables est supposée non nulle, il est ici inutile de vérifier quelle racine correspond à une variable de \mathbf{G}_a ou \mathbf{G}_m . De plus, on peut changer l'ordre de certains termes de cette suite en utilisant la formule 2.23.(i) et ainsi obtenir

$$u_{\mathbf{z}} = u_{\beta_n}^*(z_n) u_{\beta_1+\dots+\beta_{n-1}}^*(z_1 t) v_{\mathbf{z}} u_{\beta_1+\dots+\beta_{n-1}}^*(-z_1 t).$$

avec $v_{\mathbf{z}} = u_{\beta_2+\dots+\beta_{n-1}}^*(z_2 t^2) \cdots u_{\beta_{n-1}}^*(z_{n-1} t^2) u_{\beta_n}^*(t^{-2}) u_{\beta_{n-1}}^*(-z_{n-1} t^2) \cdots$

Par applications successives des formules 2.23.(i) et 2.23.(iv), l'expression de $v_{\mathbf{z}}$ se simplifie en

$$v_{\mathbf{z}} = u_{\beta_n}^*(t^{-2}) u_{\beta_2+\dots+\beta_n}^*(\pm z_2) u_{\beta_3+\dots+\beta_n}^*(\pm z_3) \cdots u_{\beta_{n-1}+\beta_n}^*(\pm z_{n-1}).$$

On utilise alors les formules 2.23.(i) puis 2.23.(v) pour obtenir

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{z}} &= u_{\beta_n}^*(z_n) [u_{\beta_1+\dots+\beta_{n-1}}^*(z_1 t); u_{\beta_n}^*(t^{-2})] v_{\mathbf{z}} \\ &= u_{\beta_n}^*(z_n) u_{2\beta_1+\dots+2\beta_{n-1}+\beta_n}^*(\pm z_1^2) u_{\beta_1+\dots+\beta_n}^*(\pm z_1 t^{-1}) v_{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

Cette expression admet donc une limite en $t = \infty$, donnée par

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_{\mathbf{z}} = u_{\beta_n}^*(z_n) u_{2\beta_1+\dots+2\beta_{n-1}+\beta_n}^*(\pm z_1^2) u_{\beta_2+\dots+\beta_n}^*(\pm z_2) \cdots u_{\beta_{n-1}+\beta_n}^*(\pm z_{n-1}).$$

À nouveau, on observe que chaque élément de Ω peut être écrit sous cette forme, ce qui prouve que la variété $V = \Omega \cdot \mathbf{B}$ est aussi contenue dans l'adhérence de la cellule D_γ . \square

En résumé, on a construit, pour tout entier $n \geq 4$, deux sous-expressions distinguées $\gamma, \delta \in \Gamma_1$ vérifiant

- $\delta \preceq \gamma$;
- $D_\delta \not\subseteq \overline{D_\gamma}$;
- $\dim \overline{D_\gamma} \cap D_\delta \geq n$.

En particulier, la réponse à la question 2.21 est négative, contrairement à ce qui est démontré dans [90].

(iii) Disjonction des cellules. On s'intéresse maintenant au problème posé par la question 2.22. Le groupe \mathbf{G} est toujours supposé de type B_n , mais dans le cas particulier où $n = 3$. Dans cet exemple, on considère deux sous-expressions de w_0 associées à la décomposition réduite $w_0 = t_3 t_2 t_1 t_2 t_3 t_2 t_1 t_2 t_1$:

$$\sigma = (1, t_2, 1, t_2, 1, t_2, t_1, 1, t_1)$$

et

$$\tau = (1, t_2, t_1, 1, 1, t_2, 1, t_2, t_1).$$

Ces sous-expressions vérifient $\tau \preceq \sigma$, et les cellules associées sont des sous-variétés de $\mathbf{B}^- t_2 \cdot \mathbf{B}$ de dimension 6. Pourtant,

Proposition 2.26. *L'adhérence $\overline{D_\sigma}$ de D_σ dans la cellule de Schubert $\mathbf{B} w_0 \cdot \mathbf{B}$ est disjointe de la cellule D_τ , donnant ainsi une réponse négative à la question 2.22.*

Démonstration. À l'aide de [11, section V.4.1], on peut déterminer tous les sous-groupes à un paramètre apparaissant dans l'expression canonique des éléments de D_σ et D_τ (cf. notations 2.15). Les racines correspondantes sont données par les suites :

$$-\Phi_\sigma = (\beta_3; \beta_1 + \beta_2; \beta_2; \beta_3; 2\beta_1 + \beta_2; \beta_1 + \beta_2)$$

et
$$-\Phi_\tau = (\beta_3; 2\beta_1 + \beta_2; \beta_2 + \beta_3; \beta_1; 2\beta_1 + \beta_2; \beta_1 + \beta_2).$$

Par définition, chacune des deux cellules est contenue dans $\mathbf{B}^- t_2 \cdot \mathbf{B}$, mais puisque la racine $-\beta_1$ n'apparaît pas dans l'ensemble Φ_σ , la cellule D_σ est en fait contenue dans $(\mathbf{B}^- \cap {}^t_1 \mathbf{B}^-) t_2 \cdot \mathbf{B}$. Cette dernière variété étant fermée dans $\mathbf{B}^- t_2 \cdot \mathbf{B}$, on en déduit que l'adhérence de D_σ dans la cellule de Schubert double $\mathbf{B} w_0 \cdot \mathbf{B} \cap \mathbf{B}^- t_2 \cdot \mathbf{B}$ est aussi contenue dans $(\mathbf{B}^- \cap {}^t_1 \mathbf{B}^-) t_2 \cdot \mathbf{B}$.

D'un autre côté, $-\beta_1$ n'apparaît qu'une seule fois dans Φ_τ , et la variable correspondante appartient à \mathbf{G}_m . Plus précisément, pour $i = 7$ on a :

- $\tau^i = t_2 t_1 t_2$ et $\tau_i = 1$ si bien que $i \notin I_\tau$ correspond à une variable dans \mathbf{G}_m ;
- $\tau^i(-\alpha_i) = \tau^i(-\beta_1) = t_2 t_1 t_2(-\beta_1) = -\beta_1$;

ce qui entraîne que l'intersection de la cellule D_τ avec $(\mathbf{B}^- \cap {}^t_1 \mathbf{B}^-) t_2 \cdot \mathbf{B}$ (et donc avec l'adhérence de D_σ) est vide. \square

Remarque 2.27. La situation de disjonction n'est pas spécifique à la dimension 3. L'exemple précédent s'étend facilement au type B_n en concaténant σ et τ avec la sous-expression distinguée de $v = t_n \cdots t_2 t_1 t_2 \cdots t_n$ définie par :

$$\eta = (1, 1, \dots, 1, t_2, 1, t_2, 1, \dots, 1).$$

Les cellules de Curtis-Deodhar associées aux sous-expressions $\tilde{\sigma} = \eta \cdot \sigma$ et $\tilde{\tau} = \eta \cdot \tau$ sont alors de dimension $2n+2$, et satisfont pour autant la proposition précédente.

2.3 Application au calcul de la cohomologie de la pièce maximale

Nous nous intéressons ici à la cohomologie des pièces maximales des variétés de Deligne-Lusztig. Les décompositions de Curtis-Deodhar étudiées précédemment se relèvent naturellement en des décompositions de $X_{w_0}(w)$ et $Y_{w_0}(\dot{w})$ en des sous-variétés localement fermées stables par l'action de U . Le calcul de la cohomologie de chaque sous-variété n'est pour autant pas plus aisé ; pour simplifier le problème, on choisit de se restreindre au quotient de chaque cellule par $D(\mathbf{U})^F$. On récupère ainsi de nombreuses informations sur les caractères linéaires de U apparaissant dans la cohomologie des pièces maximales.

Détaillons les différentes étapes de cette étude : on commence par relier certaines cellules de Schubert à la pièce $X_{w_0}(w)$ afin d'utiliser les résultats de la section précédente pour en définir une décomposition en une famille de cellules (X_γ) indexées par les sous-expressions distinguées de w . La détermination des quotients $D(\mathbf{U})^F \backslash X_\gamma$ est alors rendue possible par :

- le paramétrage des cellules de Curtis-Deodhar donné en 2.15 ;
- une description explicite du quotient $D(\mathbf{U})^F \backslash \mathbf{U}$.

Pour résoudre ce dernier point, on donne un procédé général pour construire des quotients de la forme $\mathbf{V}^F \backslash \mathbf{B}$, pour une classe assez large de sous-groupes \mathbf{V} de \mathbf{U} (cf. proposition 2.29). Grâce aux outils développés, on est alors en mesure de donner des équations explicites pour $D(\mathbf{U})^F \backslash X_\gamma$. Si cette construction ne se relève pas directement à $D(\mathbf{U})^F \backslash Y(\dot{w})$, on peut, en revanche, en construire un revêtement abélien qui aura la forme souhaitée. Ce revêtement se décompose alors en un produit de courbes pour lesquelles on peut calculer directement la cohomologie en utilisant les résultats de [7], et en déduire finalement celle de $D(\mathbf{U})^F \backslash Y(\dot{w})$ (théorèmes 2.43 et 2.53). La description obtenue est particulièrement intéressante lorsque l'on se restreint aux caractères réguliers, et sera amplement utilisée dans le prochain chapitre. On montre en effet que seule la cellule maximale peut contenir des caractères réguliers dans sa cohomologie, et qu'ils sont de plus concentrés en degré moitié.

Il nous a semblé très éclairant de commencer par traiter le cas du groupe $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_3(\mathbb{F})$. On peut illustrer sur cet exemple la plupart des méthodes développées dans les différentes sections de cette partie.

2.3.1 L'exemple de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F})$

On suppose donc dans cette section seulement que $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_3(\mathbb{F})$. Le groupe de Weyl s'identifie alors au groupe symétrique $W \simeq \mathfrak{S}_3$, engendré par les transpositions $s = (1, 2)$ et $t = (2, 3)$. Comme mentionné au début de la partie 2.2, on peut, via l'isomorphisme $u \in \mathbf{U} \mapsto uw_0 \cdot \mathbf{B} \in \mathbf{B}_{w_0}\mathbf{B}$, écrire la pièce maximale de la variété de Deligne-Lusztig $X(w_0)$ comme suit :

$$\begin{aligned} X_{w_0}(w_0) &= \{g\mathbf{B} \in \mathbf{B}_{w_0} \cdot \mathbf{B} \mid g^{-1}F(g) \in \mathbf{B}_{w_0}\mathbf{B}\} \\ &\simeq \{u \in \mathbf{U} \mid (u^{-1}F(u))^{w_0} \in \mathbf{B}_{w_0}\mathbf{B} \cap \mathbf{U}^-\}. \end{aligned}$$

Le groupe \mathbf{G} est ici assez petit pour que l'on puisse y effectuer des calculs concrets : étant donné un élément $u \in \mathbf{U}$ écrit sous forme matricielle

$$u = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on trouve $(u^{-1}F(u))^{w_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b^q - b & 1 & 0 \\ c^q - c - a(b^q - b) & a^q - a & 1 \end{pmatrix}$.

D'autre part, on a vu au cours de l'exemple 2.18 que la cellule de Schubert double $\mathbf{B}_{w_0} \cdot \mathbf{B} \cap \mathbf{B}^- \cdot \mathbf{B}$ est isomorphe à $\mathbf{B}_{w_0}\mathbf{B} \cap \mathbf{U}^-$, laquelle peut s'écrire

$$\mathbf{B}_{w_0}\mathbf{B} \cap \mathbf{U}^- = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b' & 1 & 0 \\ c' & a' & 1 \end{pmatrix} \mid c' \neq 0 \text{ et } a'b' - c' \neq 0 \right\}.$$

En identifiant \mathbf{U} à \mathbb{A}_3 , on en déduit une expression explicite de la pièce maximale, donnée par

$$X_{w_0}(w_0) \simeq \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{A}_3 \mid \begin{array}{l} c^q - c - a(b^q - b) \neq 0 \\ c^q - c - a^q(b^q - b) \neq 0 \end{array} \right\}.$$

Même sur cet exemple particulièrement simple, on s'aperçoit de la difficulté de calculer la cohomologie de cette variété. On peut néanmoins contourner ce problème en considérant le quotient de la pièce maximale par $D(\mathbf{U})^F$. Pour le construire, on remarque que ce groupe, isomorphe à \mathbb{F}_q^+ , agit par translation sur la troisième variable seulement. La projection $X_{w_0}(w_0) \rightarrow D(\mathbf{U})^F \backslash X_{w_0}(w_0)$ correspond alors par exemple au changement de variable $C = c^q - c - a(b^q - b)$, ce qui donne

$$D(\mathbf{U})^F \backslash X_{w_0}(w_0) \simeq \{(a, b, C) \in \mathbb{A}_2 \times \mathbf{G}_m \mid C - (a^q - a)(b^q - b) \neq 0\}.$$

Reste à appliquer la décomposition de Curtis-Deodhar pour la variété $\mathbf{B}_{w_0}\mathbf{B} \cap \mathbf{U}^-$, obtenue explicitement dans l'exemple 2.18. L'alternative $a' \neq 0$ ou $a' = 0$ se traduit ici par $a^q - a \neq 0$ ou $a^q - a = 0$. En résumé, le quotient de la pièce maximale par $D(\mathbf{U})^F$ se décompose en

- une sous-variété fermée X_f définie par l'équation $a^q - a = 0$, c'est-à-dire $a \in \mathbb{F}_q$. Avec la description précédente du quotient, X_f est donc isomorphe à $\mathbb{F}_q \times \mathbb{A}_1 \times \mathbf{G}_m$, le groupe $D(\mathbf{U})^F \backslash U \simeq \mathbb{F}_q^+ \times \mathbb{F}_q^+$ agissant par translation sur les deux premières composantes;
- une sous-variété ouverte X_o définie par l'équation $a^q - a \neq 0$. Après le changement de variable $C' = C / (a^q - a)$, on peut extraire la variable a , et écrire X_o comme le produit suivant :

$$\begin{aligned} X_o &\simeq \mathcal{L}^{-1}(\mathbf{G}_m) \times \{(b, C') \in \mathbb{A}_1 \times \mathbf{G}_m \mid C' \neq b^q - b\} \\ &\simeq \mathcal{L}^{-1}(\mathbf{G}_m) \times ((\mathbb{A}_1 \times \mathbf{G}_m) \setminus \mathcal{L}^{-1}(\mathbf{G}_m)) \end{aligned}$$

où \mathcal{L} est l'application de Lang $z \mapsto z^q - z$ et $\mathcal{L}^{-1}(\mathbf{G}_m) = \mathbb{A}_1 \setminus \mathbb{A}_1(\mathbb{F}_q)$ se plonge dans $\mathbb{A}_1 \times \mathbf{G}_m$ via le morphisme $b \mapsto (b, b^q - b)$.

Les cellules X_f et X_o peuvent donc être exprimées en fonctions de variétés dont on sait calculer la cohomologie. On peut par exemple vérifier que le groupe U_β agit trivialement sur la cohomologie de X_f . Avant de préciser ce phénomène, on introduit quelques notations utiles par la suite :

Notations 2.28. Puisque ℓ est premier à la caractéristique, l'idempotent primitif e_ψ associé à un caractère linéaire $\psi : S \rightarrow \Lambda^+$ d'un p -groupe S s'écrit

$$e_\psi = \frac{1}{|S|} \sum_{x \in S} \psi(x) x^{-1} \in \Lambda S.$$

Le module Λ sur lequel S agit par ψ sera noté Λ_ψ . Il s'identifie à $e_\psi \Lambda S$.

En utilisant les propriétés données en section 1.2.2, on peut vérifier que pour tout caractère linéaire ψ de U dont les restrictions à U_α et U_β sont non triviales,

la composante ψ -isotypique de la cohomologie du quotient $D(\mathbf{U})^F \backslash X_{w_0}(w_0)$ est donnée par

$$e_\psi H_c^\bullet(D(\mathbf{U})^F \backslash X_{w_0}(w_0), \Lambda) \simeq e_\psi H_c^\bullet(X_o, \Lambda) \simeq \Lambda_\psi[-3].$$

En d'autres termes, les caractères réguliers n'apparaissent que dans la cohomologie de la cellule maximale, et en un seul degré. Ce phénomène n'est pas spécifique à $GL_3(\mathbb{F})$, et le but de cette partie sera de montrer ce résultat pour les pièces maximales $X_{w_0}(w)$ et $Y_{w_0}(w)$ sans conditions sur \mathbf{G} ou w .

2.3.2 Sur certains quotients des variétés de Deligne-Lusztig

Fixons un élément quelconque w de W et considérons la pièce maximale de la variété de Deligne-Lusztig $X_{w_0}(w)$ donnée par :

$$X_{w_0}(w) = \{g \in \mathbf{B}w_0 \cdot \mathbf{B} \mid g^{-1}F(g) \in \mathbf{B}w\mathbf{B}\}.$$

Afin d'effectuer des calculs explicites, on utilisera plutôt la description suivante, donnée par l'isomorphisme $u \in \mathbf{U} \mapsto uw_0 \cdot \mathbf{B} \in \mathbf{B}w_0 \cdot \mathbf{B}$:

$$X_{w_0}(w) \simeq \{u \in \mathbf{U} \mid (u^{-1}F(u))^{w_0} \in \mathbf{B}w\mathbf{B} \cap \mathbf{U}^-\}.$$

On remarque alors que le morphisme $u \mapsto (u^{-1}F(u))^{w_0}$ induit un isomorphisme du quotient $U \backslash X_{w_0}(w)$ sur $\mathbf{B}w\mathbf{B} \cap \mathbf{U}^-$ (la surjectivité étant donnée par le théorème de Lang). Comme on l'a vu au cours de l'exemple précédent, l'expression de $u^{-1}F(u)$ est en général très complexe par rapport à celle de u et un paramétrage, même simple, du quotient $U \backslash X_{w_0}(w)$ donne des équations pour $X_{w_0}(w)$ difficilement exploitables. En revanche, on peut relier beaucoup plus facilement les classes de u et $u^{-1}F(u)$ dans $\mathbf{U}/D(\mathbf{U})$, ce qui suggère de s'intéresser plutôt au quotient de $X_{w_0}(w)$ par $D(\mathbf{U})^F$. Le but de cette section est de décrire ce type de quotients tout en gardant la trace de l'élément $u^{-1}F(u)$.

(i) Description des quotients $\mathbf{V}^F \backslash \mathbf{B}$. À tout sous-groupe fermé \mathbf{V} de \mathbf{U} normalisé par \mathbf{T} , on peut associer le sous-ensemble de racines $\Phi_{\mathbf{V}}$ défini par

$$\Phi_{\mathbf{V}} = \{\alpha \in \Phi \mid \mathbf{U}_\alpha \subset \mathbf{V}\} \subset \Phi^+.$$

Si on suppose de plus que \mathbf{V} est stable par F , alors ce sous-ensemble est stable par ϕ . Fixons un ordre total sur Φ^+ pour lequel les éléments de $\Phi_{\mathbf{V}}$ sont inférieurs à tous les éléments de $\Phi^+ \setminus \Phi_{\mathbf{V}}$. L'application produit associée à cet ordre détermine alors un isomorphisme de variétés

$$\mathbf{B} \simeq \underbrace{\left(\prod_{\alpha \in \Phi_{\mathbf{V}}} \mathbf{U}_\alpha \right)}_{\mathbf{V}} \times \left(\prod_{\alpha \in \Phi^+ \setminus \Phi_{\mathbf{V}}} \mathbf{U}_\alpha \right) \times \mathbf{T}$$

compatible avec l'action de F . Sous l'hypothèse supplémentaire où \mathbf{V} est aussi distingué dans \mathbf{U} , on obtient donc un isomorphisme de variétés $\mathbf{B} \simeq \mathbf{V} \times \mathbf{V} \backslash \mathbf{B}$. Plus précisément, on dispose de :

- un morphisme de variétés V -équivariant $f : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{V}$ dont la restriction à \mathbf{V} est l'identité ;
- un morphisme de groupes algébriques $\pi_{\mathbf{V}} : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{V} \backslash \mathbf{B}$, compatible avec l'action de F ;
- une section $j : \mathbf{V} \backslash \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{V}$ de $\pi_{\mathbf{V}}$ comme morphisme de variétés, définie par la relation $b = f(b)j(\pi_{\mathbf{V}}(b))$.

Avec ces notations, le quotient $V \backslash \mathbf{B}$ peut être construit de la manière suivante :

Proposition 2.29. *Si \mathbf{V} est un sous-groupe fermé de \mathbf{U} , distingué dans \mathbf{B} et stable par F , alors l'application $\varphi : b \in \mathbf{B} \longmapsto (b^{-1}F(b), \pi_{\mathbf{V}}(b)) \in \mathbf{B} \times (\mathbf{V} \backslash \mathbf{B})$ induit l'isomorphisme B -équivariant de variétés suivant :*

$$V \backslash \mathbf{B} \simeq \{(\bar{b}, h) \in \mathbf{B} \times (\mathbf{V} \backslash \mathbf{B}) \mid \pi_{\mathbf{V}}(\bar{b}) = h^{-1}F(h)\}$$

où B agit sur le couple (\bar{b}, h) par multiplication sur h seulement.

Démonstration. Soit b un élément de \mathbf{B} ; avec les notations précédentes, b se décompose en $b = f(b)j(\pi_{\mathbf{V}}(b))$, et on peut calculer

$$b^{-1}F(b) = (f(b)^{-1}F(f(b)))^{j(\pi_{\mathbf{V}}(b))} j(\pi_{\mathbf{V}}(b))^{-1}F(j(\pi_{\mathbf{V}}(b))).$$

Puisque \mathbf{V} est distingué dans \mathbf{B} , on en déduit que

$$\pi_{\mathbf{V}}(b^{-1}F(b)) = \pi_{\mathbf{V}}\left(j(\pi_{\mathbf{V}}(b))^{-1}F(j(\pi_{\mathbf{V}}(b)))\right) = \pi_{\mathbf{V}}(b)^{-1}F(\pi_{\mathbf{V}}(b)).$$

Par conséquent, l'image de φ est formé des couples $(\bar{b}, h) \in \mathbf{B} \times (\mathbf{V} \backslash \mathbf{B})$ tels que $\pi_{\mathbf{V}}(\bar{b}) = h^{-1}F(h)$.

De plus, deux points b et b' ont la même image par φ si et seulement si ils sont dans la même classe. En effet l'égalité $\varphi(b) = \varphi(b')$ force $f(b)^{-1}F(f(b)) = f(b')^{-1}F(f(b'))$ d'après les calculs précédents, et ainsi $f(b) \in V f(b')$. Le résultat découle alors de l'écriture de b (resp. b') en fonction de $f(b)$ (resp. $f(b')$) et $\pi_{\mathbf{V}}(b)$.

Reste à prouver que $\varphi : \mathbf{B} \longrightarrow \text{Im } \varphi$ est un morphisme étale. Puisque les morphismes $\mathbf{B} \longrightarrow B \backslash \mathbf{B}$ et $\text{Im } \varphi \longrightarrow B \backslash \text{Im } \varphi$ sont étales, il suffit de montrer que l'application induite $\varphi' : B \backslash \mathbf{B} \longrightarrow B \backslash \text{Im } \varphi$ est un isomorphisme. Pour cela, on peut remarquer que par la première projection $B \backslash \text{Im } \varphi \longrightarrow \mathbf{B}$, cette fonction s'identifie à l'isomorphisme canonique $Bb \in B \backslash \mathbf{B} \longmapsto b^{-1}F(b) \in \mathbf{B}$. \square

Remarque 2.30. La proposition reste vraie en remplaçant \mathbf{B} par \mathbf{U} , et pourra ainsi s'appliquer indifféremment aux quotients des variétés $Y_x(\hat{w})$ ou $X_x(w)$.

(ii) Quotient par les points fixes du groupe dérivé. Le sous-groupe dérivé $D(\mathbf{U})$ de \mathbf{U} est un sous-groupe fermé, normalisé par \mathbf{T} , distingué et stable par F . Les conditions d'application de la proposition précédente sont donc vérifiées, et φ induit l'isomorphisme suivant :

$$D(\mathbf{U})^F \backslash \mathbf{U} \simeq \{(\bar{u}, h) \in \mathbf{U} \times (D(\mathbf{U}) \backslash \mathbf{U}) \mid \pi_D(\bar{u}) = h^{-1}F(h)\}.$$

L'intérêt de cette description réside dans le fait que l'on obtient le quotient de la pièce maximale de $X(w)$ en restreignant la variable \bar{u} à $\mathbf{U} \cap {}^{w_0}(\mathbf{B}w\mathbf{B})$.

Ici, on peut même décrire le groupe quotient $D(\mathbf{U}) \backslash \mathbf{U}$ et la projection $\pi_D = \pi_{D(\mathbf{U})}$ associée en termes des racines simples de Φ . En effet, le groupe dérivé est, d'après [21], engendré par les sous-groupes à un paramètre associés aux racines positives qui ne sont pas simples. Il est en fait isomorphe, en tant que variété, au produit de ces groupes :

$$D(\mathbf{U}) \simeq \prod_{\alpha \in \Phi^+ \setminus \Delta} \mathbf{U}_\alpha.$$

Puisque le groupe $D(\mathbf{U}) \backslash \mathbf{U}$ est abélien, on en déduit que pour toute racine simple $\alpha \in \Delta$, la composante d'un élément $u \in \mathbf{U}$ sur \mathbf{U}_α ne dépend pas de l'ordre dans lequel u se décompose sur les sous-groupes à un paramètre. En notant $\pi_\alpha(u)$ cette composante, le morphisme produit $(\pi_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ se factorise par π_D en un isomorphisme de groupes algébriques

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{U} & \xrightarrow{(\pi_\alpha)_{\alpha \in \Delta}} & \prod_{\alpha \in \Delta} \mathbf{U}_\alpha \\ \searrow \pi_D & & \nearrow \cong \\ & D(\mathbf{U}) \backslash \mathbf{U} & \end{array}$$

compatible avec l'action de F . Néanmoins, le morphisme π_α , tout comme u_α , ne commute pas à F dans le cas où \mathbf{G} n'est pas déployé, mais vérifie la relation $F \circ \pi_\alpha = \pi_{\phi(\alpha)} \circ F$.

Avec ces notations et celles de la section 2.1.1, l'image d'un élément $h = (u_\alpha(\zeta_\alpha))_{\alpha \in \Delta}$ par l'application de Lang s'écrit

$$h^{-1}F(h) = (u_{\phi(\alpha)}(\zeta_\alpha^{q_\alpha^\circ} - \zeta_{\phi(\alpha)}))_{\alpha \in \Delta}.$$

Ainsi, l'élément (\bar{u}, h) appartient à $D(\mathbf{U})^F \backslash \mathbf{U}$ si et seulement si

$$\forall \alpha \in \Delta \quad \pi_{\phi(\alpha)}(\bar{u}) = u_{\phi(\alpha)}(\zeta_\alpha^{q_\alpha^\circ} - \zeta_{\phi(\alpha)}).$$

En particulier, le scalaire $\zeta_{\phi(\alpha)}$ est entièrement déterminé par ζ_α et $\pi_{\phi(\alpha)}(\bar{u})$. Plus généralement, pour tout entier $i = 1, \dots, d_\alpha$ on a

$$\prod_{j=0}^{i-1} \pi_{\phi^j(\alpha)}(F^j(\bar{u})) = u_{\phi^i(\alpha)}(\zeta_\alpha^{q_\alpha^\circ \cdots q_{\phi^{i-1}(\alpha)}^\circ} - \zeta_{\phi^i(\alpha)})$$

ce qui, pour $i < d_\alpha$, détermine $\zeta_{\phi^i(\alpha)}$ en fonction de ζ_α et \bar{u} . De plus, dans le cas où $i = d_\alpha$, on obtient la relation suivante entre ζ_α et \bar{u} :

$$\prod_{j=0}^{d_\alpha-1} \pi_\alpha(F^j(\bar{u})) = u_\alpha(\zeta_\alpha^{q_\alpha^\circ} - \zeta_\alpha).$$

Reste à traduire l'action de $D(\mathbf{U})^F \backslash \mathbf{U}$ sur les variables ζ_α (rappelons que ce groupe agit trivialement sur \bar{u}). Comme on l'a vu précédemment, les morphismes $(u_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ ne commutent pas à F en général, mais en les regroupant selon une orbite de ϕ , on peut définir les applications

$$v_\alpha : \xi \in \mathbf{G}_a \longmapsto \prod_{j=0}^{d_\alpha-1} F^j(u_\alpha(\xi)) = \prod_{j=0}^{d_\alpha-1} u_{\phi^j(\alpha)}(\xi^{q_\alpha^0 \cdots q_{\phi^j-1}(\alpha)}) \in \prod_{\alpha \in \Delta} \mathbf{U}_\alpha.$$

Les images $(\mathbf{V}_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ de ces morphismes sont des sous-groupes dont les classes engendrent $D(\mathbf{U}) \setminus \mathbf{U}$. Ils ne sont pas forcément stables par F mais permettent de décomposer le groupe des points fixes de $D(\mathbf{U}) \setminus \mathbf{U}$ en

$$D(\mathbf{U})^F \setminus U \simeq (D(\mathbf{U}) \setminus \mathbf{U})^F \simeq \prod_{\alpha \in [\Delta/\phi]} v_\alpha(\mathbb{F}_{q_\alpha}).$$

En remarquant que pour $\xi \in \mathbf{G}_a$, on a $v_\alpha(\xi)^{-1} F(v_\alpha(\xi)) = u_\alpha(\xi^{q_\alpha} - \xi)$, on en déduit que $\mathbf{V}_\alpha^F \simeq \mathbb{F}_{q_\alpha}^+$ et on pourra donc noter $V_\alpha = v_\alpha(\mathbb{F}_{q_\alpha})$. Via cette identification, chaque groupe V_α agit par translation sur la variable ζ_α correspondante. Si l'on restreint cette description à la pièce maximale $X_{w_0}(w)$, on trouve finalement

Proposition 2.31. *La variété quotient $D(\mathbf{U})^F \setminus X_{w_0}(w)$ est isomorphe à la sous-variété de $(\mathbf{U} \cap {}^{w_0}(\mathbf{B}w\mathbf{B})) \times (\mathbf{G}_a)^{[\Delta/\phi]}$ définie par les équations suivantes :*

$$\forall \alpha \in [\Delta/\phi] \quad \prod_{j=0}^{d_\alpha-1} \pi_\alpha(F^j(\bar{u})) = u_\alpha(\zeta_\alpha^{q_\alpha} - \zeta_\alpha)$$

avec les variables $\bar{u} \in \mathbf{U} \cap {}^{w_0}(\mathbf{B}w\mathbf{B})$ et $(\zeta_\alpha)_{\alpha \in [\Delta/\phi]} \in (\mathbf{G}_a)^{[\Delta/\phi]}$. De plus, l'action de $D(\mathbf{U})^F \setminus U$ se décompose en une action par translation sur chaque variable ζ_α via l'isomorphisme de groupe $D(\mathbf{U})^F \setminus U \simeq \prod_{\alpha \in [\Delta/\phi]} \mathbb{F}_{q_\alpha}^+$.

Exemple 2.32. Reprenons l'exemple donné à la fin de la section 2.2.2 : si w est un élément de Coxeter, la variété $\mathbf{B}w \cdot \mathbf{B} \cap \mathbf{B}^- \cdot \mathbf{B}$ est réduite à sa cellule maximale. Plus précisément, si on fixe une décomposition réduite $w = t_1 \cdots t_m$ de w correspondant à un système de représentants $[\Delta/\phi] = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$, la seule sous-expression distinguée de w est $\gamma = (1, 1, \dots, 1)$; avec les notations 2.15, on trouve ainsi

$$\mathbf{B}w \cdot \mathbf{B} \cap \mathbf{B}^- \cdot \mathbf{B} = \{u_{-\beta_1}(z_1) \cdots u_{-\beta_m}(z_m) \cdot \mathbf{B} \mid z_i \in \mathbf{G}_m\}.$$

Par conséquent, tout élément $\bar{u} \in \mathbf{U} \cap {}^{w_0}(\mathbf{B}w\mathbf{B})$ s'écrit de façon unique sous la forme $u = u_{-w_0(\beta_1)}(z_1) \cdots u_{-w_0(\beta_m)}(z_m)$, ce qui permet de calculer directement $\pi_\alpha(\bar{u})$ en fonction des variables z_i . En posant $\zeta_i = \zeta_{-w_0(\beta_i)}$ et $q_i = q_{-w_0(\beta_i)}$, les équations de la proposition précédente se simplifient pour donner :

$$D(\mathbf{U})^F \setminus X_{w_0}(w) \simeq \prod_{i=1}^m \{(z_i, \zeta_i) \in \mathbf{G}_m \times \mathbf{G}_a \mid z_i = \zeta_i^{q_i} - \zeta_i\}.$$

La variété $D(\mathbf{U})^F \setminus X_{w_0}(w)$ se décompose donc en un produit de courbes dont on peut calculer facilement la cohomologie, chacune étant isomorphe à $\mathbb{A}_1 \setminus \mathbb{A}_1(\mathbb{F}_{q_i})$.

Dans le cas général, la stratégie consistera à décomposer ce quotient selon les cellules de Curtis-Deodhar et à donner une description similaire pour chaque sous-variété intervenant dans cette décomposition.

2.3.3 Étude du quotient de la pièce maximale $X_{w_0}(w)$ de $X(w)$

Rappelons que via l'isomorphisme $u \in \mathbf{U} \mapsto uw_0 \cdot \mathbf{B}$, la pièce maximale $X_{w_0}(w)$ s'écrit

$$\begin{aligned} X_{w_0}(w) &= \{g\mathbf{B} \in \mathbf{B}w_0 \cdot \mathbf{B} \mid g^{-1}F(g) \in \mathbf{B}w\mathbf{B}\} \\ &\simeq \{u \in \mathbf{U} \mid (u^{-1}F(u))^{w_0} \in \mathbf{B}w\mathbf{B} \cap \mathbf{U}^-\}. \end{aligned}$$

Fixons une décomposition réduite $w = s_1 \dots s_r$ de w associées aux racines simples $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ et considérons la décomposition de Curtis-Deodhar de la cellule de Schubert double $\mathbf{B}w \cdot \mathbf{B} \cap \mathbf{B}^- \cdot \mathbf{B}$. Avec les notations données en 2.15, cette décomposition se relève dans \mathbf{U}^- en :

$$\mathbf{B}w\mathbf{B} \cap \mathbf{U}^- = \bigsqcup_{\gamma \in \Gamma_1} \Omega_\gamma(w_0).$$

Elle induit donc une décomposition de la pièce maximale $X_{w_0}(w)$ en des sous-variétés localement fermées X_γ définies par

$$X_\gamma = \{u \in \mathbf{U} \mid (u^{-1}F(u))^{w_0} \in \Omega_\gamma(w_0)\}.$$

Notons que par continuité de l'application de Lang, la propriété de filtrabilité des cellules de Curtis-Deodhar (voir lemme 2.20) se transmet à la famille $(X_\gamma)_{\gamma \in \Gamma_1}$.

En combinant le paramétrage des cellules $\Omega_\gamma(w_0)$ et la proposition 2.31, on peut alors décrire explicitement le quotient de chaque sous-variété X_γ par $D(\mathbf{U})^F$ à l'aide de certaines données combinatoires associées à la sous-expression γ . Pour cela, on introduit les variétés suivantes

$$X_q(n, m) = \{(\zeta, (\mu_i), (\lambda_j)) \in (\mathbf{G}_a)^{n+1} \times (\mathbf{G}_m)^m \mid \zeta^q - \zeta = \sum_i \mu_i + \sum_j \lambda_j\}$$

où q est une puissance de la caractéristique p et m et n sont des entiers positifs. Ces variétés sont de plus munies d'une action de \mathbb{F}_q^+ par translation sur la première coordonnée.

Proposition 2.33. *Soit γ une sous-expression distinguée de w . Pour toute racine simple α , on note \mathcal{O}_α l'orbite de α sous ϕ , et on définit les entiers suivants :*

- $n_\alpha(\gamma) = |\{i = 1, \dots, r \mid -w_0\gamma^i(\alpha_i) \in \mathcal{O}_\alpha \text{ et } i \in I_\gamma \setminus J_\gamma(w_0)\}|;$
- $m_\alpha(\gamma) = |\{i = 1, \dots, r \mid -w_0\gamma^i(\alpha_i) \in \mathcal{O}_\alpha \text{ et } i \notin I_\gamma\}|;$
- $\bar{n}(\gamma) = |I_\gamma| - |J_\gamma(w_0)| - \sum n_\alpha(\gamma);$
- $\bar{m}(\gamma) = r - |I_\gamma| - \sum m_\alpha(\gamma).$

Alors il existe un morphisme de variétés $D(\mathbf{U})^F \setminus U$ -équivariant, bijectif, fini et purement inséparable :

$$(\mathbf{G}_a)^{\bar{n}(\gamma)} \times (\mathbf{G}_m)^{\bar{m}(\gamma)} \times \prod_{\alpha \in [\Delta/\phi]} X_{q_\alpha}(n_\alpha(\gamma), m_\alpha(\gamma)) \longrightarrow D(\mathbf{U})^F \setminus X_\gamma$$

où $D(\mathbf{U})^F \setminus U \simeq \prod_{\alpha \in [\Delta/\phi]} V_\alpha$ agit sur le produit $\prod_{\alpha \in [\Delta/\phi]} X_{q_\alpha}(n_\alpha(\gamma), m_\alpha(\gamma))$ via les identifications $V_\alpha \simeq \mathbb{F}_{q_\alpha}^+$. De plus, si (\mathbf{G}, F) est déployé, c'est un isomorphisme de variétés. En général, c'est une équivalence de sites étales.

Démonstration. Il suffit de traduire les équations de la proposition 2.31 en fonction du paramétrage de la cellule $\Omega_\gamma(w_0)$. Avec les notations 2.15, tout élément \bar{u} appartenant au conjugué de cette cellule par w_0 s'écrit de manière unique

$$\bar{u} = \prod_{\beta \in \Phi_\gamma(w_0)} u_{w_0(\beta)}(z_\beta) \in \mathbf{U} \cap {}^{w_0}(\mathbf{B}w\mathbf{B})$$

avec, pour $\beta = -\gamma^i(\alpha_i)$, la variable z_β dans \mathbf{G}_a ou \mathbf{G}_m selon la valeur de γ_i . Pour chaque racine $\alpha \in [\Delta/\phi]$, le calcul des éléments $\pi_\alpha(F^j(\bar{u}))$ se fait directement sur cette écriture et donne :

$$\pi_\alpha(F^j(\bar{u})) = F^j(\pi_{\phi^{-j}(\alpha)}(\bar{u})) = \prod_{\substack{\beta \in \Phi_\gamma(w_0) \\ w_0(\beta) = \phi^{-j}(\alpha)}} F^j(u_{\phi^{-j}(\alpha)}(z_\beta)).$$

En notant $q_i^\circ = q_{\phi^{-i}(\alpha)}$, on a $F^j(u_{\phi^{-j}(\alpha)}(z_\beta)) = u_\alpha(z_\beta^{q_1^\circ \cdots q_j^\circ})$. Les équations de la proposition 2.31 se simplifient donc en

$$\zeta_\alpha^{q_\alpha} - \zeta_\alpha = \sum_{w_0(\beta) = \alpha} z_\beta + \sum_{w_0(\beta) = \phi^{-1}(\alpha)} z_\beta^{q_1^\circ} + \cdots + \sum_{w_0(\beta) = \phi^{-d_\alpha+1}(\alpha)} z_\beta^{q_{d_\alpha-1}^\circ \cdots q_1^\circ}.$$

Notons que certaines variables z_β n'apparaissent dans aucune équation. Elles correspondent à des racines β pour lesquelles $w_0(\beta)$ n'est pas une racine simple, et contribuent au facteur $(\mathbf{G}_a)^{\bar{n}(\gamma)} \times (\mathbf{G}_m)^{\bar{m}(\gamma)}$ donné dans l'énoncé de la proposition. Pour les autres racines, de la forme $\beta = w_0(\phi^{-i}i(\alpha))$, on pose $q_\beta = q_i^\circ \cdots q_1^\circ$; on obtient alors la description suivante du quotient $D(\mathbf{U})^F \backslash X_\gamma$:

$$D(\mathbf{U})^F \backslash X_\gamma \simeq (\mathbf{G}_a)^{\bar{n}(\gamma)} \times (\mathbf{G}_m)^{\bar{m}(\gamma)} \times \prod_{\alpha \in [\Delta/\phi]} \{(\zeta_\alpha, (z_\beta)_{w_0(\beta) \in \mathcal{O}_\alpha}) \mid \zeta_\alpha^{q_\alpha} - \zeta_\alpha = \sum z_\beta^{q_\beta}\}.$$

En composant cet isomorphisme avec l'application $(z_\beta) \mapsto (z_\beta^{q_\beta})$, on obtient le morphisme de variétés désiré. Si ce changement de variable permet de supprimer les puissances de p intervenant dans les équations, il n'induit un isomorphisme que dans le cas où ces puissances sont triviales (c'est-à-dire si (\mathbf{G}, F) est déployé). Néanmoins, c'est un morphisme fini, bijectif et purement inséparable entre variétés lisses. Par [44, Exposé IX, 4.10], il induit donc une équivalence de sites étales. \square

2.3.4 Sur la cohomologie de $D(\mathbf{U})^F \backslash Y_{w_0}(w)$

(i) **Relèvement des cellules à $Y_{w_0}(\dot{w})$.** Rappelons que la projection canonique $\pi : \mathbf{G}/\mathbf{U} \mapsto \mathbf{G}/\mathbf{B}$ se restreint en une application $\pi_w : Y(\dot{w}) \mapsto X(w)$ qui s'identifie au quotient par \mathbf{T}^{wF} . En définissant Y_γ comme la préimage de X_γ par ce morphisme, on en déduit une décomposition de la pièce maximale

$$Y_{w_0}(\dot{w}) = \bigsqcup_{\gamma \in \Gamma_1} Y_\gamma$$

en une famille de sous-variétés localement fermées, stables par l'action de \mathbf{T}^{wF} et vérifiant $Y_\gamma/\mathbf{T}^{wF} \simeq X_\gamma$. Malheureusement, on ne peut pas déduire un paramétrage de Y_γ ou de son quotient par $D(\mathbf{U})^F$ directement à partir de celui de X_γ donné dans la proposition 2.33. On peut néanmoins adapter la méthode de [7] afin de construire un revêtement abélien de $D(\mathbf{U})^F \backslash Y_\gamma$ qui aura la forme souhaitée.

Notations 2.34. Pour simplifier les notations de la proposition 2.33, on introduit les entiers $m(\gamma) = r - |I_\gamma|$ et $n(\gamma) = |I_\gamma| - |J_\gamma(w_0)|$ de telle sorte que la cellule de Curtis-Deodhar associée à une sous-expression distinguée γ soit isomorphe à $(\mathbf{G}_a)^{n(\gamma)} \times (\mathbf{G}_m)^{m(\gamma)}$. La variété produit donnée dans cette même proposition sera notée X'_γ .

Considérons la préimage dans Y_γ d'une composante connexe de $U \backslash Y_\gamma$ que l'on notera Y_γ° . Par construction, la variété Y_γ° est stable par l'action de U et le quotient $U \backslash Y_\gamma^\circ$ est connexe (alors que Y_γ° ne l'est pas forcément). De plus, puisque $U \backslash Y_\gamma/\mathbf{T}^{wF} \simeq U \backslash X_\gamma$ est connexe, le groupe \mathbf{T}^{wF} agit transitivement sur les composantes connexes de $U \backslash Y_\gamma$. Par conséquent, en désignant par H le stabilisateur de $U \backslash Y_\gamma^\circ$ dans \mathbf{T}^{wF} , la multiplication induit l'isomorphisme $(\mathbf{T}^{wF})^{\text{op}}$ -équivariant suivant :

$$(U \backslash Y_\gamma^\circ) \times_H \mathbf{T}^{wF} \simeq U \backslash Y_\gamma.$$

D'autre part, les actions de U et \mathbf{T}^{wF} commutent, si bien que l'on a aussi

$$(D(\mathbf{U})^F \backslash Y_\gamma^\circ) \times_H \mathbf{T}^{wF} \simeq D(\mathbf{U})^F \backslash Y_\gamma. \quad (2.35)$$

On peut maintenant définir l'analogue Y'_γ de X'_γ pour la variété $Y(w)$ comme le produit fibré de X'_γ et $D(\mathbf{U})^F \backslash Y_\gamma^\circ$ au-dessus de $D(\mathbf{U})^F \backslash X_\gamma$. On résume cette construction par le diagramme commutatif suivant, dont les carrés sont cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} Y'_\gamma & \xleftrightarrow{\text{équ}} & D(\mathbf{U})^F \backslash Y_\gamma^\circ & \longrightarrow & U \backslash Y_\gamma^\circ \\ \pi'_w \downarrow & & \pi_w^\circ \downarrow & & \pi_w^\circ \downarrow \\ X'_\gamma & \xleftrightarrow{\text{équ}} & D(\mathbf{U})^F \backslash X_\gamma & \longrightarrow & U \backslash X_\gamma \end{array}$$

Dans ce diagramme et les suivants, on utilisera l'abréviation « équ » pour désigner une équivalence de sites étales.

Ici, les morphismes π'_w et π_w° s'identifient aux applications quotient par le sous-groupe H de \mathbf{T}^{wF} qui est un p' -groupe. En particulier, la projection $\pi_w^\circ : U \backslash Y_\gamma^\circ \rightarrow (\mathbf{G}_a)^{n(\gamma)} \times (\mathbf{G}_m)^{m(\gamma)}$ est un revêtement étale galoisien modérément ramifié. Par le lemme d'Abhyankar [44, Exposé XIII, 5.3], il existe un revêtement galoisien $\varpi : (\mathbf{G}_a)^{n(\gamma)} \times (\mathbf{G}_m)^{m(\gamma)} \rightarrow U \backslash Y_\gamma^\circ$ de groupe de Galois N qui, composé avec π_w° , envoie $(\mu_1, \dots, \mu_{n(\gamma)}, \lambda_1, \dots, \lambda_{m(\gamma)})$ sur $(\mu_1, \dots, \mu_{n(\gamma)}, \lambda_1^d, \dots, \lambda_{m(\gamma)}^d)$ pour un certain entier d premier à p . Cela se traduit par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbf{G}_a)^{n(\gamma)} \times (\mathbf{G}_m)^{m(\gamma)} & & \\
 \downarrow \varpi \quad /N & \searrow & \\
 U \backslash Y_\gamma^\circ & & /(\mu_d)^{m(\gamma)} \\
 \downarrow \pi_w^\circ \quad /H & & \\
 U \backslash X_\gamma \simeq (\mathbf{G}_a)^{n(\gamma)} \times (\mathbf{G}_m)^{m(\gamma)} & &
 \end{array}$$

où μ_d désigne le groupe des racines d -ièmes de l'unité dans \mathbb{F} . Ainsi, N est un sous-groupe de $(\mu_d)^{m(\gamma)}$ et le quotient $(\mu_d)^{m(\gamma)}/N$ est canoniquement isomorphe à H . Si on définit Y_γ'' comme le produit fibré de Y_γ' avec $(\mathbf{G}_a)^{n(\gamma)} \times (\mathbf{G}_m)^{m(\gamma)}$ au-dessus de $U \backslash Y_\gamma^\circ$, on obtient finalement le diagramme suivant, dont les carrés sont cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc}
 Y_\gamma'' & \xrightarrow{\quad} & (\mathbf{G}_a)^{n(\gamma)} \times (\mathbf{G}_m)^{m(\gamma)} & & \\
 \downarrow /N & & \downarrow \varpi \quad /N & \searrow & \\
 Y_\gamma' & \xleftarrow{\text{équ}} & D(\mathbf{U})^F \backslash Y_\gamma^\circ & \xrightarrow{\quad} & U \backslash Y_\gamma^\circ \\
 \downarrow \pi_w' & & \downarrow \pi_w^\circ & & \downarrow \pi_w^\circ \quad /H \\
 X_\gamma' & \xleftarrow{\text{équ}} & D(\mathbf{U})^F \backslash X_\gamma & \xrightarrow{\quad} & U \backslash X_\gamma \simeq (\mathbf{G}_a)^{n(\gamma)} \times (\mathbf{G}_m)^{m(\gamma)} \quad (2.36)
 \end{array}$$

En utilisant le grand carré et la description de X_γ' donnée par la proposition 2.33, on a donc un isomorphisme $D(\mathbf{U})^F \backslash U \times ((\mu_d)^{m(\gamma)})^{\text{op}}$ -équivariant

$$Y_\gamma'' \simeq (\mathbf{G}_a)^{\bar{n}(\gamma)} \times (\mathbf{G}_m)^{\bar{m}(\gamma)} \times \prod_{\alpha \in [\Delta/\phi]} Y_{q_{\alpha,d}(n_\alpha(\gamma), m_\alpha(\gamma))} \quad (2.37)$$

dans lequel les facteurs du produit sont définis par :

$$Y_{q,s}(n, m) = \left\{ (\zeta, (\mu_i), (\lambda_j)) \in (\mathbf{G}_a)^{n+1} \times (\mathbf{G}_m)^m \mid \zeta^q - \zeta = \sum_i \mu_i + \sum_j \lambda_j^s \right\}.$$

Deux groupes agissent donc indépendamment sur ces variétés : le groupe \mathbb{F}_q^+ par translation sur la première variable, et le groupe $(\mu_s)^m$ par multiplication sur $(\mathbf{G}_m)^m$. À équivalence de sites étales près, on a donc construit un revêtement abélien de $D(\mathbf{U})^F \backslash Y_\gamma^\circ$ qui se décompose en un produit de variétés dont on va pouvoir calculer la cohomologie en utilisant les résultats de [7].

(ii) Cohomologie des variétés $Y_{q,s}(n, m)$. On fixe un caractère irréductible $\psi : \mathbb{F}_q^+ \rightarrow \Lambda^\times$ de \mathbb{F}_q^+ et on note, en accord avec 2.28, e_ψ l'idempotent associé. Le calcul de la partie ψ -isotypique de la cohomologie se distingue alors en deux cas, selon que ψ est trivial ou non. Pour pouvoir énoncer le résultat suivant cette

valeur, on fixe un générateur g de μ_s et on définit le complexe de Λ_{μ_s} -modules suivant

$$Z : 0 \longrightarrow \Lambda_{\mu_s} \xrightarrow{g-1} \Lambda_{\mu_s} \longrightarrow 0$$

concentré en degrés 0 et 1. À isomorphisme de Λ_{μ_s} -modules près, ce complexe ne dépend pas du choix de g . De plus, Bonnafé et Rouquier ont montré au cours de la démonstration de [7, lemme 3.6] que, à un décalage près, ce complexe représente la cohomologie de \mathbf{G}_m muni de l'action de μ_s par multiplication. On a donc un isomorphisme

$$R\Gamma_c(\mathbf{G}_m, \Lambda) \simeq Z[-1] \quad (2.38)$$

dans la catégorie $D^b(\Lambda_{\mu_s}\text{-Mod})$. Avec ces notations, on obtient

Proposition 2.39. *Pour ψ un caractère irréductible de \mathbb{F}_q^+ , on a*

$$e_\psi R\Gamma_c(Y_{q,s}(n, m), \Lambda) \simeq \begin{cases} (Z^{\otimes m})[-m-2n] & \text{si } \psi = 1, \\ \Lambda_\psi(\mu_s)^m[-m] & \text{si } n = 0 \text{ et } \psi \neq 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

dans la catégorie dérivée $D^b(\Lambda\mathbb{F}_q\text{-Mod}-\Lambda(\mu_s)^m)$.

Démonstration. Si $n \neq 0$, l'équation définissant $Y_{q,s}(n, m)$ se réécrit en :

$$\mu_1 = \zeta^q - \zeta - \sum_{i=1}^m \lambda_i^s - \sum_{j=2}^n \mu_j$$

si bien que $Y_{q,s}(n, m) \simeq (\mathbf{G}_a)^n \times (\mathbf{G}_m)^m$, avec une action de \mathbb{F}_q^+ sur la première coordonnée. Puisque la cohomologie de la droite affine est donnée par $R\Gamma_c(\mathbf{G}_a, \Lambda) \simeq \Lambda[-2]$, ce groupe agit trivialement sur la cohomologie et seule la partie 1-isotypique est non nulle.

Pour n quelconque, l'application de Lang $\zeta \mapsto \zeta^q - \zeta$ induit un isomorphisme du quotient $\mathbb{F}_q \backslash Y_{q,s}(n, m)$ vers $(\mathbf{G}_a)^n \times (\mathbf{G}_m)^m$. En appliquant les propositions 1.17 et 1.20, on en déduit que

$$e_1 R\Gamma_c(Y_{q,s}(n, m), \Lambda) \simeq R\Gamma_c(\mathbb{F}_q \backslash Y_{q,s}(n, m), \Lambda) \simeq (R\Gamma_c(\mathbf{G}_m, \Lambda))^{\boxtimes m}[-2n].$$

Puisque le complexe $R\Gamma_c(\mathbf{G}_m, \Lambda)$ est quasi-isomorphe à $Z[-1]$ par 2.38, il est parfait, et on peut remplacer le produit tensoriel dérivé par un produit tensoriel de modules pour obtenir le résultat annoncé.

Reste à traiter le cas où $n = 0$ et ψ est non trivial. La variété $Y_{q,s}(0, m)$ peut être exprimée en fonction des courbes $Y_{q,s} = Y_{q,s}(0, 1)$ étudiées par Bonnafé et Rouquier dans [7] (voir aussi [58]). En effet, l'application

$$\begin{aligned} Y_{q,s} \times Y_{q,s} \times \cdots \times Y_{q,s} &\longrightarrow Y_{q,s}(0, m) \\ ((\zeta_1, \lambda_1), \dots, (\zeta_m, \lambda_m)) &\longmapsto (\zeta_1 + \cdots + \zeta_m, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \end{aligned}$$

induit l'isomorphisme $\mathbb{F}_q^+ \times (\mu_s)^m$ -équivariant suivant :

$$Y_{q,s} \times_{\mathbb{F}_q} Y_{q,s} \times_{\mathbb{F}_q} \cdots \times_{\mathbb{F}_q} Y_{q,s} \simeq Y_{q,s}(0, m).$$

Il suffit alors de traduire cet isomorphisme dans la catégorie dérivée $D^b(\Lambda_{\mathbb{F}_q}\text{-Mod-}\Lambda(\mu_s)^m)$; le résultat se déduit ainsi du cas où $m = 1$, résolu dans [7, lemme 3.6] :

$$\begin{aligned} e_\psi \mathrm{R}\Gamma_c(Y_{q,s}(0, m), \Lambda) &\simeq e_\psi \mathrm{R}\Gamma_c(Y_{q,s}, \Lambda) \otimes_{\Lambda_{\mathbb{F}_q}}^L \cdots \otimes_{\Lambda_{\mathbb{F}_q}}^L e_\psi \mathrm{R}\Gamma_c(Y_{q,s}, \Lambda) \\ &\simeq \Lambda_{\psi, \mu_s}[-1] \otimes_{\Lambda_{\mathbb{F}_q}}^L \cdots \otimes_{\Lambda_{\mathbb{F}_q}}^L \Lambda_{\psi, \mu_s}[-1] \simeq \Lambda_{\psi}(\mu_s)^m[-m]. \end{aligned}$$

Tous les Λ_{μ_s} -modules intervenant étant projectifs, le produit tensoriel dérivé est ici le produit tensoriel usuel. Notons que l'on a utilisé le fait que e_ψ est un idempotent pour pouvoir le distribuer dans le premier isomorphisme. \square

Grâce à cette proposition et à la formule 2.37, on peut donc calculer la partie ψ -isotypique de la cohomologie de Y_γ'' pour n'importe quel caractère ψ du groupe abélien $D(\mathbf{U})^F \backslash U$, en fonction des restrictions de ψ aux groupes V_α .

(iii) Cohomologie des cellules $D(\mathbf{U})^F \backslash Y_\gamma$. Pour redescendre au niveau de la variété $Y(\dot{w})$, il suffit de traduire les effets des précédentes constructions sur la cohomologie. On commence par la formule 2.35 qui, par la formule de Künneth, donne :

$$\mathrm{R}\Gamma_c(D(\mathbf{U})^F \backslash Y_\gamma, \Lambda) \simeq \mathrm{R}\Gamma_c(D(\mathbf{U})^F \backslash Y_\gamma^\circ, \Lambda) \otimes_{\Lambda_H}^L \mathbf{T}^{wF}.$$

Continuons les réductions : d'après le diagramme commutatif 2.36, on dispose d'une équivalence de sites étales entre $D(\mathbf{U})^F \backslash Y_\gamma^\circ$ et Y_γ'' , ainsi que d'un isomorphisme entre Y_γ' et le quotient Y_γ''/N , tous les deux $U \times H^{\mathrm{op}}$ -équivariants. On obtient donc, par la proposition 1.17 :

$$\mathrm{R}\Gamma_c(D(\mathbf{U})^F \backslash Y_\gamma^\circ, \Lambda) \simeq \mathrm{R}\Gamma_c(Y_\gamma'', \Lambda) \otimes_{\Lambda_N}^L \Lambda.$$

Puisque le groupe H est isomorphe au quotient $(\mu_d)^{m(\gamma)}/N$, on en déduit par adjonction que

$$\begin{aligned} \mathrm{R}\Gamma_c(D(\mathbf{U})^F \backslash Y_\gamma, \Lambda) &\simeq (\mathrm{R}\Gamma_c(Y_\gamma'', \Lambda) \otimes_{\Lambda_N}^L \Lambda) \otimes_{\Lambda_H}^L \Lambda \mathbf{T}^{wF} \\ &\simeq (\mathrm{R}\Gamma_c(Y_\gamma'', \Lambda) \otimes_{\Lambda(\mu_d)^{m(\gamma)}}^L \Lambda H) \otimes_{\Lambda_H}^L \Lambda \mathbf{T}^{wF} \\ \mathrm{R}\Gamma_c(D(\mathbf{U})^F \backslash Y_\gamma, \Lambda) &\simeq \mathrm{R}\Gamma_c(Y_\gamma'', \Lambda) \otimes_{\Lambda(\mu_d)^{m(\gamma)}}^L \Lambda \mathbf{T}^{wF}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Reste à utiliser la formule 2.37 et la proposition précédente pour en déduire explicitement la cohomologie de $D(\mathbf{U})^F \backslash Y_\gamma$. Afin de l'exprimer raisonnablement, on va d'abord introduire et préciser certaines notations.

Notations 2.41. Pour L un groupe fini et L' un sous-groupe cyclique de L , on définit le complexe de ΛL -modules suivant [7] :

$$Z_L(L') : 0 \longrightarrow \Lambda L \xrightarrow{g-1} \Lambda L \longrightarrow 0$$

où g est un générateur de L' . À isomorphisme près, ce complexe ne dépend pas du choix de g . On note aussi $Z_L(L_1, \dots, L_m)$ le produit tensoriel suivant :

$$Z_L(L_1, \dots, L_m) = Z_L(L_1) \otimes_{\Lambda L} Z_L(L_2) \otimes_{\Lambda L} \cdots \otimes_{\Lambda L} Z_L(L_m).$$

avec la convention $Z_L(\emptyset) = \Lambda L$. C'est un *complexe de Koszul*. Dans notre cas, on prendra $L = \mathbf{T}^{wF}$; les sous-groupes cycliques qui vont nous intéresser seront alors les images des groupes de racines de l'unité μ_d par le morphisme $(\mu_d)^{m(\gamma)} \rightarrow H \subset \mathbf{T}^{wF}$. On a donc besoin de distinguer chacun de ces groupes, en se rappelant que les variables de \mathbf{G}_m intervenant dans la cellule $D_\gamma(w_0) \simeq U \backslash X_\gamma$ sont indexées par les éléments de $\llbracket 1; r \rrbracket \setminus I_\gamma$ (voir notations 2.15). Pour un élément i de ce cet ensemble, on notera $\mu_d^{(i)}$ le groupe des racines de l'unité associé à cette variable, et T_i le groupe cyclique image dans \mathbf{T}^{wF} par la projection $(\mu_d)^{m(\gamma)} \rightarrow H$.

Précisons maintenant les types de représentations qui vont intervenir : si on se donne, pour chaque $\alpha \in [\Delta/\phi]$, un caractère linéaire ψ_α de $V_\alpha \simeq \mathbb{F}_{q_\alpha}^+$, on peut en former le produit extérieur $\psi = \bigotimes \psi_\alpha$. C'est un caractère linéaire de U dont les restrictions aux sous-groupes V_α sont données par les caractères ψ_α . De plus, puisque $D(\mathbf{U})^F \backslash U \simeq \prod V_\alpha$, ψ est trivial sur $D(\mathbf{U})^F$ et tout caractère linéaire vérifiant cette propriété est de cette forme. Notons que cette hypothèse supplémentaire est en général superflue, puisque $D(\mathbf{U})^F = D(U)$ dans la plupart des cas (les seules exceptions étant les groupes quasi-simples de type B_2 ou F_4 sur \mathbb{F}_2 ou de type G_2 sur \mathbb{F}_3 , voir [52, lemme 7]).

Enfin, on définit la classe des représentations qui vont intervenir dans la cohomologie des pièces Y_γ :

Définition 2.42. Un caractère linéaire $\psi : U \rightarrow \Lambda^\times$ est dit γ -régulier si

- la restriction de ψ à $D(\mathbf{U})^F$ est triviale ;
- pour toute racine simple $\alpha \in [\Delta/\phi]$, on a $n_\alpha(\gamma) = 0$ dès que $\psi|_{V_\alpha} \neq 1$.

Avec ces notations, on peut énoncer le résultat principal de ce chapitre :

Théorème 2.43. Soit $\psi : U \rightarrow \Lambda^\times$ un caractère linéaire de U , trivial sur $D(\mathbf{U})^F$, et $\gamma \in \Gamma_1$ une sous-expression distinguée de w . En posant

$$K_\gamma(\psi) = \{i \in \llbracket 1; r \rrbracket \setminus I_\gamma \mid \beta = -w_0\gamma^i(\alpha_i) \notin \Delta \text{ ou } \psi|_{V_\beta} = 1\}$$

la partie ψ -isotypique de la cohomologie de la pièce Y_γ est donnée par :

$$e_\psi \mathrm{R}\Gamma_c(Y_\gamma, \Lambda) \simeq \begin{cases} Z_{\mathbf{T}^{wF}}((T_i)_{i \in K_\gamma(\psi)})[-m(\gamma) - 2n(\gamma)] & \text{si } \psi \text{ est } \gamma\text{-régulier,} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

dans la catégorie dérivée $D^b(\mathrm{Mod}\text{-}\Lambda \mathbf{T}^{wF})$.

Démonstration. Tout d'abord, puisque ψ est trivial sur $D(\mathbf{U})^F$, on a

$$e_\psi \mathrm{R}\Gamma_c(Y_\gamma, \Lambda) \simeq \Lambda \otimes_{\Lambda D(\mathbf{U})^F} e_\psi \mathrm{R}\Gamma_c(Y_\gamma, \Lambda) \simeq e_\psi \mathrm{R}\Gamma_c(D(\mathbf{U})^F \backslash Y_\gamma, \Lambda)$$

en utilisant la proposition 1.17 et le fait que e_ψ est central dans ΛU . On est donc ramené à démontrer le résultat pour le quotient $D(\mathbf{U})^F \backslash Y_\gamma$, pour lequel on dispose de la description suivante :

$$\mathrm{R}\Gamma_c(D(\mathbf{U})^F \setminus Y_\gamma, \Lambda) \simeq \mathrm{R}\Gamma_c(Y''_\gamma, \Lambda) \otimes_{\Lambda(\mathbb{P}_d)^{m(\gamma)}} \Lambda \mathbf{T}^{wF}.$$

De plus, la décomposition de la variété Y''_γ (voir 2.37) se traduit, par la formule de Künneth, en un isomorphisme dans $D^b(\Lambda U\text{-Mod-}\Lambda \mathbf{T}^{wF})$:

$$\mathrm{R}\Gamma_c(Y''_\gamma, \Lambda) \simeq \mathrm{R}\Gamma_c((\mathbf{G}_a)^{\bar{n}(\gamma)} \times (\mathbf{G}_m)^{\bar{m}(\gamma)}, \Lambda) \otimes \mathrm{R}\Gamma_c\left(\prod_{\alpha \in [\Delta/\phi]} Y_{q_\alpha, d}(n_\alpha(\gamma), m_\alpha(\gamma)), \Lambda\right).$$

En notant ψ_α la restriction de ψ au groupe $V_\alpha \simeq \mathbb{F}_{q_\alpha}^+$, la ψ -partie de ce dernier complexe s'écrit

$$\mathrm{R}\Gamma_c((\mathbf{G}_a)^{\bar{n}(\gamma)} \times (\mathbf{G}_m)^{\bar{m}(\gamma)}, \Lambda) \otimes \left(\bigotimes_{\alpha \in [\Delta/\phi]} e_{\psi_\alpha} \mathrm{R}\Gamma_c(Y_{q_\alpha, d}(n_\alpha(\gamma), m_\alpha(\gamma)), \Lambda) \right). \quad (2.44)$$

Maintenant, si ψ n'est pas γ -régulier, il existe une racine simple $\alpha \in [\Delta/\phi]$ telle que ψ_α soit non trivial et $n_\alpha(\gamma)$ soit non nul. Par la proposition 2.39 et la description précédente, on en déduit que $e_\psi \mathrm{R}\Gamma_c(D(\mathbf{U})^F \setminus Y_\gamma, \Lambda)$ est nul.

Supposons que ψ est γ -régulier ; alors aucun des termes du produit de l'expression précédente n'est nul. Par la proposition 2.39, on a même

$$e_{\psi_\alpha} \mathrm{R}\Gamma_c(Y_{q_\alpha, d}(n_\alpha(\gamma), m_\alpha(\gamma)), \Lambda) \simeq \begin{cases} (Z^{\otimes m_\alpha(\gamma)})[-m_\alpha(\gamma) - 2n_\alpha(\gamma)] & \text{si } \psi_\alpha = 1, \\ \Lambda(\mathbb{P}_d)^{m_\alpha(\gamma)}[-m_\alpha(\gamma)] & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec les notations 2.41, chaque groupe de racines de l'unité intervenant dans cette écriture correspond à un indice i . Le produit de ces groupes, noté précédemment $(\mathbb{P}_d)^{m_\alpha(\gamma)}$ sera désormais noté $\mathbb{P}_d^{(\alpha)}$. On forme aussi l'ensemble $H_\gamma(\alpha)$ des indices i intervenant dans cette décomposition. En d'autres termes, on a :

$$H_\gamma(\alpha) = \{i \in \llbracket 1; r \rrbracket \setminus l_\gamma \mid -w_0\gamma^i(\alpha_i) \in \mathcal{O}_\alpha\}$$

et

$$\mathbb{P}_d^{(\alpha)} = \prod_{i \in H_\gamma(\alpha)} \mathbb{P}_d^{(i)}$$

si bien qu'avec les notations 2.41, l'alternative précédente donne

$$e_1 \mathrm{R}\Gamma_c(Y_{q_\alpha, d}(n_\alpha(\gamma), m_\alpha(\gamma)), \Lambda) \simeq Z_{\mathbb{P}_d^{(\alpha)}}((\mathbb{P}_d^{(i)})_{i \in H_\gamma(\alpha)})[-m_\alpha(\gamma) - 2n_\alpha(\gamma)]$$

et, lorsque ψ_α est non trivial,

$$e_{\psi_\alpha} \mathrm{R}\Gamma_c(Y_{q_\alpha, d}(n_\alpha(\gamma), m_\alpha(\gamma)), \Lambda) \simeq Z_{\mathbb{P}_d^{(\alpha)}}(\emptyset)[-m_\alpha(\gamma)].$$

En injectant ces isomorphismes dans l'écriture 2.44, et en remarquant que

$$K_\gamma(\psi) = \left\{ i \in \llbracket 1; r \rrbracket \setminus l_\gamma \mid -w_0\gamma^i(\alpha_i) \notin \Delta \right\} \amalg \left(\bigcup_{\substack{\alpha \in [\Delta/\phi] \\ \psi_\alpha = 1}} H_\gamma(\alpha) \right)$$

on obtient finalement

$$e_\psi \mathrm{R}\Gamma_c(Y''_\gamma, \Lambda) \simeq Z_{(\mathbb{P}_d)^{m(\gamma)}}((\mathbb{P}_d^{(i)})_{i \in K_\gamma(\psi)})[-m(\gamma) - 2n(\gamma)].$$

Il suffit alors d'appliquer les différents isomorphismes donnés au début de la preuve pour conclure. \square

Le théorème précédent prend une forme particulièrement simple dans le cas des caractères *réguliers*.

Définition 2.45. Un caractère linéaire $\psi : U \longrightarrow \Lambda^\times$ est dit régulier si

- la restriction de ψ à $D(\mathbf{U})^F$ est triviale ;
- pour toute racine simple $\alpha \in [\Delta/\phi]$, on a $\psi|_{V_\alpha} \neq 1$.

Si $\gamma \in \Gamma_1$ est une sous-expression différente de $(1, 1, \dots, 1)$, alors il existe nécessairement une racine simple α telle que $n_\alpha(\gamma) \neq 0$. Par exemple, si $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ est le plus grand indice pour lequel $\gamma_i = s_i$ alors $\alpha = -w_0\gamma^i(\alpha_i) \in \Delta$ convient. On en déduit qu'un caractère linéaire régulier ψ est γ -régulier pour la sous-expression $\gamma = (1, 1, \dots, 1)$ uniquement. En particulier, le théorème précédent assure que les caractères réguliers apparaissent seulement dans la cohomologie la cellule maximale :

Corollaire 2.46. Si $\psi : U \longrightarrow \Lambda^\times$ est un caractère linéaire régulier, alors :

$$e_\psi \mathrm{R}\Gamma_c(Y_\gamma, \Lambda) \simeq \begin{cases} \Lambda \mathbf{T}^{wF}[-\ell(w)] & \text{si } \gamma = (1, 1, \dots, 1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

dans la catégorie dérivée $D^b(\mathrm{Mod}\text{-}\Lambda \mathbf{T}^{wF})$. En particulier, on a

$$e_\psi \mathrm{R}\Gamma_c(Y_{w_0}(\dot{w}), \Lambda) \simeq \Lambda \mathbf{T}^{wF}[-\ell(w)].$$

Démonstration. L'observation précédente montre que le seul cas non trivial correspond à la sous-expression $\gamma = (1, 1, \dots, 1)$. Pour celle-ci, on a $m(\gamma) = r = \ell(w)$, $n(\gamma) = 0$ et $K_\gamma(\psi) = \emptyset$ pour tout caractère régulier ; le théorème précédent donne donc la première partie du corollaire. En utilisant les triangles distingués donnés par la filtration 2.20, on en déduit la seconde assertion. \square

On montrera dans le prochain chapitre que ce dernier résultat reste vrai en remplaçant $Y_{w_0}(\dot{w})$ par $Y(\dot{w})$.

Remarque 2.47. Le calcul de la cohomologie de la variété $D(\mathbf{U})^F \backslash Y_{w_0}(w)$ ne se réduit généralement pas au calcul de celle de chaque pièce $D(\mathbf{U})^F \backslash Y_\gamma$ car les triangles distingués les reliant ne sont pas forcément scindés. Reprenons l'exemple de $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_3(\mathbb{F})$ pour illustrer ces difficultés : la variété $D(\mathbf{U})^F \backslash X_{w_0}(w_0)$ se décompose en deux sous-variétés X_o et X_f , dont on peut directement calculer la cohomologie (on peut aussi utiliser le théorème précédent). La suite exacte longue les reliant est donnée par le tableau suivant :

	$H_c^\bullet(X_o)$	$H_c^\bullet(D(\mathbf{U})^F \backslash X_{w_0}(w_0))$	$H_c^\bullet(X_f)$
2	0	0	0
3	$\Lambda U_\alpha \otimes \Lambda U_\beta$?	ΛU_α
4	$(\Lambda U_\alpha)^{\oplus 2} \oplus \Lambda U_\beta$?	ΛU_α
5	ΛU_α	?	0
6	Λ	Λ	0

On remarque ainsi que même en échangeant les rôles de α et β , on ne peut pas obtenir de description précise de tous les groupes de cohomologie de la variété quotient $D(\mathbf{U})^F \backslash X_{w_0}(w_0)$ seulement à partir de ces informations.

2.4 Extension aux autres pièces

Cherchons à généraliser la construction précédente aux autres pièces $X_x(w)$ des variétés de Deligne-Lusztig. Comme dans le cas où $x = w_0$, on peut, via l'isomorphisme $\mathbf{B}x \cdot \mathbf{B} \simeq \mathbf{U} \cap {}^x\mathbf{U}^-$, préciser la définition de ces variétés en

$$\begin{aligned} X_x(w) &= \{g\mathbf{B} \in \mathbf{B}x \cdot \mathbf{B} \mid g^{-1}F(g) \in \mathbf{B}w\mathbf{B}\} \\ &= \{u \in \mathbf{U} \cap {}^x\mathbf{U}^- \mid u^{-1}F(u) \in x(\mathbf{B}w\mathbf{B})F(x)^{-1}\} \end{aligned}$$

ce qui fait apparaître deux problèmes supplémentaires :

- si x n'est pas stable par F , l'image de l'ensemble $\mathbf{U} \cap {}^x\mathbf{U}^-$ par l'application de Lang : $u \mapsto u^{-1}F(u)$ est difficile à exprimer ;
- même dans le cas où $x \in W^F$, la variété quotient $U \backslash X_x(w)$ s'identifie à $\mathbf{B}w\mathbf{B} \cap (\mathbf{U}^x \cap \mathbf{U}^-)$ par l'application de Lang, mais les cellules $\Omega_\gamma(x)$ définies en 2.15 ne sont pas forcément contenues dans cette variété.

On éliminera ces difficultés en construisant un fibré vectoriel $\tilde{X}_x(w)$ de la pièce $X_x(w)$ pour lequel on pourra appliquer les méthodes développées dans la partie précédente. On en déduira que les caractères réguliers apparaissant dans la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig $X(w)$ et $Y(\dot{w})$ sont concentrés en degré moitié.

2.4.1 Décomposition et cohomologie des pièces $X_x(w)$ et $Y_x(\dot{w})$

(i) **Relèvements des pièces $X_x(w)$ et $Y_x(\dot{w})$.** Soient w et x deux éléments de W . Le groupe unipotent \mathbf{U} se décompose, comme variété algébrique, en un produit $\mathbf{U} = (\mathbf{U} \cap {}^x\mathbf{U}^-) \times (\mathbf{U} \cap {}^x\mathbf{U})$. Si on définit

$$\tilde{X}_x(w) = \{u \in \mathbf{U} \mid x^{-1}(u^{-1}F(u))F(x) \in \mathbf{B}w\mathbf{B}\}$$

alors la projection $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U} \cap {}^x\mathbf{U}^-$ induit un morphisme surjectif $\tilde{\pi}$ de $\tilde{X}_x(w)$ vers $X_x(w)$. En effet, si $u \in \tilde{X}_x(w)$ et $v \in \mathbf{U} \cap {}^x\mathbf{U}$ alors

$$x^{-1}(uv)^{-1}F(uv)F(x) = (v^{-1})^x x^{-1}(u^{-1}F(u))F(x)F(v^x) \in \mathbf{B}w\mathbf{B}$$

ce qui prouve que $\tilde{X}_x(w)$ est stable par multiplication à droite par les éléments de $\mathbf{U} \cap {}^x\mathbf{U}$. Le morphisme $\tilde{\pi}$ est donc U -équivariant et toutes ses fibres sont isomorphes à l'espace affine $\mathbf{U} \cap {}^x\mathbf{U}$. La même construction s'applique à $\tilde{Y}_x(\dot{w})$, et donne le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} Y_x(\dot{w}) & \longleftarrow & \tilde{Y}_x(\dot{w}) = \{b \in \mathbf{B} \mid x^{-1}(b^{-1}F(b))F(x) \in \mathbf{U}\dot{w}\mathbf{U}\} \\ \pi_w \downarrow & & \tilde{\pi}_w \downarrow \\ X_x(w) & \longleftarrow & \tilde{X}_x(w) = \{u \in \mathbf{U} \mid x^{-1}(u^{-1}F(u))F(x) \in \mathbf{B}w\mathbf{B}\}. \end{array}$$

Ici, l'action du groupe fini \mathbf{T}^{wF} sur $\tilde{Y}_x(w)$ est tordue par x : si $b \in \tilde{Y}_x(w)$ et $t \in \mathbf{T}^{wF}$, alors $b \cdot t = bxtx^{-1}$. Le morphisme $\tilde{\pi}_w$ s'identifie au morphisme quotient pour cette action. Par la proposition 1.20, on en déduit que

$$\mathrm{R}\Gamma_c(\tilde{Y}_x(w), \Lambda) \simeq \mathrm{R}\Gamma_c(Y_x(w), \Lambda)[-2 \dim(\mathbf{U} \cap {}^x\mathbf{U})] \quad (2.48)$$

dans la catégorie dérivée $D^b(\Lambda\mathbf{U}\text{-Mod-}\Lambda\mathbf{T}^{wF})$, ce qui permet de ramener le calcul de la cohomologie de la pièce $Y_x(w)$ à celui de $\tilde{Y}_x(w)$.

(ii) **Décomposition de $\tilde{X}_x(w)$ et $\tilde{Y}_x(w)$.** Afin de décomposer ces variétés en utilisant les résultats de la partie 2.3, on s'intéresse tout d'abord au quotient $U \backslash \tilde{X}_x(w)$. Par l'application de Lang, il s'identifie à :

$$U \backslash \tilde{X}_x(w) \simeq ({}^x\mathbf{B}w\mathbf{B}F(x)^{-1}) \cap \mathbf{U}.$$

En reliant cette intersection à une cellule de Schubert double, on peut la décomposer à l'aide de cellules de Curtis-Deodhar modifiées :

Lemme 2.49. *Posons $\bar{x} = x^{-1}F(x)$ et définissons, pour toute sous-expression $\gamma \in \Gamma_{\bar{x}}$ de w , la cellule $\tilde{\Omega}_\gamma(x)$ comme l'image du produit $\Omega_\gamma(x) \times (\mathbf{U}^x \cap {}^{\bar{x}}\mathbf{U})$ par la multiplication. Alors les cellules $\tilde{\Omega}_\gamma(x)$ sont des sous-variétés localement fermées de \mathbf{U}^x et on a*

$$({}^x\mathbf{B}w\mathbf{B}F(x)^{-1}) \cap \mathbf{U} = \bigsqcup_{\gamma \in \Gamma_{\bar{x}}} {}^x(\tilde{\Omega}_\gamma(x)).$$

Démonstration. La décomposition de Curtis-Deodhar (voir théorème 2.13), appliquée à $v = \bar{x}$ s'écrit :

$$\mathbf{B}w \cdot \mathbf{B} \cap (\mathbf{B})^{\bar{x}} \cdot \mathbf{B} = \bigsqcup_{\gamma \in \Gamma_{\bar{x}}} D_\gamma(x).$$

Rappelons que ce théorème définit aussi un relèvement à \mathbf{U}^x de chacune de ces cellules, noté $\Omega_\gamma(x)$, tel que l'application $u \mapsto u\bar{x} \cdot \mathbf{B}$ induise un isomorphisme entre $\Omega_\gamma(x)$ et $D_\gamma(x)$ (voir notations 2.15). En particulier, chaque cellule $\Omega_\gamma(x)$ est contenue dans $(\mathbf{B}w\mathbf{B})\bar{x}^{-1}$, ce qui prouve que

$$({}^x\mathbf{B}w\mathbf{B}F(x)^{-1}) \cap \mathbf{U} = {}^x((\mathbf{B}w\mathbf{B})\bar{x}^{-1} \cap \mathbf{U}^x) \supset \bigsqcup_{\gamma \in \Gamma_{\bar{x}}} {}^x(\Omega_\gamma(x)).$$

Puisque l'ensemble $(\mathbf{B}w\mathbf{B})\bar{x}^{-1}$ est stable par multiplication à droite par les éléments de $\mathbf{U}^x \cap {}^{\bar{x}}\mathbf{U} \subset {}^{\bar{x}}\mathbf{U}$, on a même

$$({}^x\mathbf{B}w\mathbf{B}F(x)^{-1}) \cap \mathbf{U} \supset \bigsqcup_{\gamma \in \Gamma_{\bar{x}}} {}^x(\tilde{\Omega}_\gamma(x)).$$

Réciproquement, si u est un élément de $({}^x\mathbf{B}w\mathbf{B}F(x)^{-1}) \cap \mathbf{U}$, on peut l'écrire $z = {}^xv$, avec $v \in (\mathbf{B}w\mathbf{B})\bar{x}^{-1} \cap \mathbf{U}^x$. Par conséquent, $v\bar{x} \cdot \mathbf{B}$ appartient à la cellule de Schubert double $\mathbf{B}w \cdot \mathbf{B} \cap (\mathbf{B})^{\bar{x}} \cdot \mathbf{B}$ et il existe une sous-expression $\gamma \in \Gamma_{\bar{x}}$ telle que $v\bar{x} \cdot \mathbf{B} \in D_\gamma(x)$. On en déduit que $v = v'v''$ avec $v' \in \Omega_\gamma(x)$ et $v'' = v'^{-1}v \in \mathbf{U}^x \cap {}^{\bar{x}}\mathbf{B}$, ce qui prouve que $v \in \tilde{\Omega}_\gamma(x)$. \square

Remarque 2.50. L'application $(v', v'') \in \Omega_\gamma(x) \times (\mathbf{U}^x \cap \bar{x}\mathbf{U}) \mapsto v'v'' \in \tilde{\Omega}_\gamma(x)$ est en fait un isomorphisme (car la restriction de $u \mapsto u\bar{x} \cdot \mathbf{B}$ à la cellule $\Omega_\gamma(x)$ est injective). On peut donc rajouter, aux variables (z_β) définies en 2.15, des variables de \mathbf{G}_a en nombre égal à la dimension de $\mathbf{U}^x \cap \bar{x}\mathbf{U}$ afin d'obtenir un paramétrage de la cellule modifiée $\tilde{\Omega}_\gamma(x)$. Le principal changement dans les résultats de la section précédente proviendra de ces variables supplémentaires.

Pour $\gamma \in \Gamma_{\bar{x}}$ une sous-expression x -distinguée de w donnant le mot $\bar{x} = x^{-1}F(x)$, on peut donc définir la variété

$$\tilde{X}_\gamma = \{u \in \mathbf{U} \mid u^{-1}F(u) \in {}^x(\tilde{\Omega}_\gamma(x))\}$$

ainsi que son relevé à $\tilde{Y}_x(\dot{w})$ donné par $\tilde{Y}_\gamma = \tilde{\pi}_w^{-1}(\tilde{X}_\gamma)$; on obtient ainsi des décompositions filtrables de $\tilde{X}_x(w)$ et $\tilde{Y}_x(\dot{w})$ en sous variétés localement fermées

$$\tilde{X}_x(w) = \bigsqcup_{\gamma \in \Gamma_{\bar{x}}} \tilde{X}_\gamma \quad \text{et} \quad \tilde{Y}_x(\dot{w}) = \bigsqcup_{\gamma \in \Gamma_{\bar{x}}} \tilde{Y}_\gamma$$

avec les isomorphismes $\tilde{Y}_\gamma/\mathbf{T}^{wF} \simeq \tilde{X}_\gamma$. La situation est donc très similaire à celle des sections 2.3.3 et 2.3.4, les seuls changements notables apparaissant dans les définitions des objets combinatoires associés à γ . Nous allons donner dans les sections suivantes les deux principaux résultats en tenant compte de ces modifications.

Remarque 2.51. Dans le cas où $w = t_1 \cdots t_n$ est un élément de Coxeter, [62, lemme 2.4] assure que l'existence d'une sous-expression x -distinguée de w donnant \bar{x} force $\bar{x} = 1$. On en déduit, grâce à l'analyse effectuée en fin de section 2.2.2 que la seule cellule \tilde{X}_γ non vide est associée à la sous-expression w_0 -distinguée $(1, \dots, 1)$. En particulier, les pièces $X_x(w)$ sont vides dès que x est différent de w_0 .

(iii) **Description de $D(\mathbf{U}) \setminus \tilde{X}_\gamma$.** Si $x \in W$, les sous-groupes à un paramètre apparaissant dans le groupe unipotent $\mathbf{U}^x \cap \bar{x}\mathbf{U}$ sont associés aux racines de l'ensemble suivant :

$$\Psi_x = \{\beta \in \Phi \mid x(\beta) \in \Phi^+ \text{ et } \bar{x}^{-1}(\beta) \in \Phi^+\} = x^{-1}(\Phi^+) \cap \bar{x}(\Phi^+).$$

En accord avec les notations de la proposition 2.33, on redéfinit, pour toute sous-expression x -distinguée γ de w et toute racine simple $\alpha \in \Delta$, les entiers suivants :

- $n_\alpha(\gamma) = |\{i = 1, \dots, r \mid -x\gamma^i(\alpha_i) \in \mathcal{O}_\alpha \text{ et } i \in I_\gamma \setminus J_\gamma(x)\}| + |x(\Psi_x) \cap \mathcal{O}_\alpha|$;
- $m_\alpha(\gamma) = |\{i = 1, \dots, r \mid -x\gamma^i(\alpha_i) \in \mathcal{O}_\alpha \text{ et } i \notin I_\gamma\}|$;
- $\bar{n}(\gamma) = |\Psi_x| + |I_\gamma| - |J_\gamma(w_0)| - \sum n_\alpha(\gamma)$;
- $\bar{m}(\gamma) = r - |I_\gamma| - \sum m_\alpha(\gamma)$.

Alors, en traduisant le paramétrage de la cellule modifiée $\tilde{\Omega}_\gamma(x)$ donné par la remarque 2.50, on vérifie facilement que la proposition 2.33 se généralise en :

Proposition 2.52. *Il existe un morphisme de variétés $D(\mathbf{U})^F \setminus U$ -équivariant, bijectif, fini et purement inséparable :*

$$(\mathbf{G}_a)^{\bar{n}(\gamma)} \times (\mathbf{G}_m)^{\bar{m}(\gamma)} \times \prod_{\alpha \in [\Delta/\phi]} X_{q_\alpha}(n_\alpha(\gamma), m_\alpha(\gamma)) \longrightarrow D(\mathbf{U})^F \backslash \tilde{X}_\gamma$$

où $D(\mathbf{U})^F \backslash U \simeq \prod_{\alpha \in [\Delta/\phi]} V_\alpha$ agit sur le produit $\prod_{\alpha \in [\Delta/\phi]} X_{q_\alpha}(n_\alpha(\gamma), m_\alpha(\gamma))$ via les identifications $V_\alpha \simeq \mathbb{F}_{q_\alpha}^+$. De plus, si (\mathbf{G}, F) est déployé, c'est un isomorphisme de variétés. En général, c'est une équivalence de sites étales.

(iv) Cohomologie de $D(\mathbf{U}) \backslash \tilde{Y}_\gamma$. On termine cette section en énonçant le théorème principal dans toute sa généralité. La notion de γ -régularité s'étend aux sous-expressions x -distinguées γ en utilisant les invariant $n_\alpha(\gamma)$ redéfinis précédemment ; s'il y a ambiguïté, on parlera de (γ, x) -régularité. On montre alors, en suivant la preuve de la section 2.3.4 :

Théorème 2.53. Soit $\psi : U \longrightarrow \Lambda^\times$ un caractère linéaire de U , trivial sur $D(\mathbf{U})^F$, et $\gamma \in \Gamma_{\bar{x}}$ une sous-expression x -distinguée de w . En posant

$$K_\gamma(\psi) = \{i \in \llbracket 1; r \rrbracket \setminus I_\gamma \mid \beta = -x\gamma^i(\alpha_i) \notin \Delta \text{ ou } \psi|_{V_\beta} = 1\}$$

la partie ψ -isotypique de la cohomologie de la pièce Y_γ est donnée par :

$$e_\psi \mathrm{R}\Gamma_c(\tilde{Y}_\gamma, \Lambda) \simeq \begin{cases} Z_{\mathbf{T}^{wF}}((T_i)_{i \in K_\gamma(\psi)})[-m(\gamma) - 2(n(\gamma) + |\Psi_x|)] & \text{si } \psi \text{ est } (\gamma, x)\text{-régulier,} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

dans la catégorie dérivée $D^b(\mathrm{Mod}\text{-}\Lambda\mathbf{T}^{wF})$.

2.4.2 Application aux caractères réguliers

Soit $x \in W$ un élément différent de w_0 . Alors l'ensemble $x(\Psi_x) = \Phi^+ \cap F(x)(\Phi^+)$ contient au moins une racine simple α , ce qui force $n_\alpha(\gamma)$ à être non nul pour toute sous-expression x -distinguée γ de w . On en déduit qu'un caractère régulier $\psi : U \longrightarrow \Lambda^\times$ n'est jamais (γ, x) -régulier, ce qui, par le théorème précédent, généralise le corollaire 2.46 en :

Corollaire 2.54. Si $\psi : U \longrightarrow \Lambda^\times$ est un caractère linéaire régulier et γ une sous-expression x -distinguée de w , alors :

$$e_\psi \mathrm{R}\Gamma_c(\tilde{Y}_\gamma, \Lambda) \simeq \begin{cases} \Lambda\mathbf{T}^{wF}[-\ell(w)] & \text{si } x = w_0 \text{ et } \gamma = (1, 1, \dots, 1), \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

dans la catégorie dérivée $D^b(\mathrm{Mod}\text{-}\Lambda\mathbf{T}^{wF})$. En particulier, on a

$$e_\psi \mathrm{R}\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda) \simeq \Lambda\mathbf{T}^{wF}[-\ell(w)].$$

Ce dernier résultat résout une conjecture énoncée par Bonnafé et Rouquier dans [7]. On verra au cours du chapitre suivant le lien entre cette assertion et la restriction d'un module de Gelfand-Graev. On y donnera en outre une seconde preuve, plus courte, du fait que la cohomologie des pièces non maximales ne contient aucun caractère régulier.

2.5 Cas particuliers

Dans cette dernière partie, on examine certains cas particuliers selon le type de \mathbf{G} ou la valeur de w et ψ . Sous certaines conditions, on peut calculer explicitement les données combinatoires associées aux sous-expressions distinguées, afin de donner, pour w et ψ fixés, le rang à partir duquel la composante ψ -isotypique des groupe de cohomologie $H_c^i(Y(\dot{w}))$ s'annule. Deux directions sont envisagées :

- lorsque la restriction de ψ au radical unipotent d'un sous-groupe de Levi maximal fixé est un caractère régulier. On donne, pour les types classiques A_n, B_n, C_n et D_n , la forme que prennent les sous-expressions x -distinguées γ pour lesquelles ψ est (γ, x) -régulier. Le cas des groupes exceptionnels est traité à l'aide des algorithmes donnés en annexe. Sauf pour le type A_n , on se restreindra au cas où w est une puissance d'un élément de Coxeter ;
- lorsque \mathbf{G} est de type A_n et w est l'élément de plus grande longueur w_0 .

Chacun de ces résultats est en accord avec [35, conjecture 3.3.26] et sera réinterprété en ces termes dans le chapitre suivant (voir section 3.3.2).

2.5.1 Caractères (γ, x) -réguliers et éléments réduits du groupe de Weyl

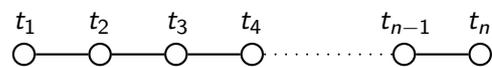
Pour $I \subset \Delta$ un sous-ensemble de racines simples, on note Φ_I le sous-système de racines de Φ engendré par I . Le groupe de Weyl associé est un sous-groupe de W , engendré par les réflexions simples associées aux éléments de I . C'est le *sous-groupe parabolique standard* associé à I , qui sera noté W_I . Si on suppose de plus que I est stable par ϕ , alors W_I est stable par F .

Rappelons qu'un élément $v \in W$ est *l -réduit* s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes [42, section 2.1] :

- v est l'unique élément de longueur minimale dans $W_I v$;
- pour tout $v' \in W_I$ on a $\ell(v'v) = \ell(v') + \ell(v)$;
- pour toute racine $\alpha \in I$, on a $v^{-1}(\alpha) \in \Phi^+$.

On dira aussi que v est *réduit- l* si v^{-1} est l -réduit.

Exemple 2.55. Pour un groupe déployé de type A_n , en notant $\Delta = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ et $S = \{t_1, \dots, t_n\}$ selon le diagramme



les éléments $\Delta \setminus \{\beta_n\}$ -réduits sont de la forme $v = t_n t_{n-1} \cdots t_i$ avec $i \leq n + 1$.

On va maintenant montrer que la condition de régularité pour les caractères fournit de nombreux éléments réduits. Pour cela, on fixe une décomposition réduite $w = s_1 \cdots s_r$ de w et un triplé (x, γ, ψ) formé d'un élément x de W , d'une sous-expression x -distinguée de w et d'un caractère (γ, x) -régulier de U . Considérons le sous-ensemble ϕ -stable $\Delta(\psi)$ de Δ défini par :

$$\Delta_\psi = \{\alpha \in \Delta \mid \psi|_{V_\alpha} \neq 1\}.$$

La (γ, x) -régularité force alors $x\gamma^i(-\alpha_i) \notin \Delta_\psi$ dès que $\gamma_i = s_i$. Si on pose $\tilde{\Delta}_\psi = -w_0(\Delta_\psi)$, on peut en déduire le résultat suivant :

Lemme 2.56. *Si $\gamma^r = 1$, les éléments $(w_0x\gamma^i)_{i=1,\dots,r}$ sont $\tilde{\Delta}_\psi$ -réduits.*

Démonstration. Par récurrence sur i : pour $i = r$, on a $w_0x\gamma^i = w_0x$. Si, par l'absurde, il existe une racine $\alpha \in \tilde{\Delta}_\psi$ telle que $(w_0x)^{-1}(\alpha) \in \Phi^-$, alors l'ensemble $x(\Phi)^+$ rencontre Δ_ψ . Puisque ϕ stabilise Φ^+ et Δ_ψ , on en déduit que $x(\Psi_x) = \Phi^+ \cap F(x)(\Phi^+)$ rencontre aussi Δ_ψ , ce qui contredit la régularité de ψ (pour chaque racine β de l'intersection on a $n_\beta(\gamma) > 0$ et $\psi|_{V_\beta} \neq 1$).

Supposons maintenant que pour $i < r$ fixé, l'élément $w_0x\gamma^i$ est $\tilde{\Delta}_\psi$ -réduit. Alors $w_0x\gamma^{i-1}$ l'est aussi directement si $\gamma_i = 1$. Dans le cas où $\gamma_i = s_i$, on a $w_0x\gamma^{i-1} = w_0x\gamma^i s_i$ et ainsi, pour toute racine $\alpha \in \tilde{\Delta}_\psi$

$$(w_0x\gamma^{i-1})^{-1}(\alpha) = s_i((w_0x\gamma^i)^{-1}(\alpha)) \in \Phi^+$$

En effet, on a :

- $(w_0x\gamma^i)^{-1}(\alpha) \in \Phi^+$ puisque $w_0x\gamma^i$ est $\tilde{\Delta}_\psi$ -réduit ;
- $(w_0x\gamma^i)^{-1}(\alpha) \neq \alpha_i$ car $x\gamma^i(-\alpha_i) \notin \Delta_\psi$ par régularité de ψ ;

ce qui prouve que $w_0x\gamma^{i-1}$ est $\tilde{\Delta}_\psi$ -réduit. □

2.5.2 Caractères réguliers du radical unipotent d'un sous-groupe de Levi maximal

Nous allons maintenant appliquer le résultat de la section précédente dans le cas où Δ_ψ est un sous-ensemble « maximal » de Δ . La forme des éléments réduits pour cet ensemble permet alors de déterminer explicitement les sous-expressions x -distinguées pour lesquelles ψ est régulier, et d'obtenir ainsi des informations sur la partie ψ -isotypique de la cohomologie de $Y(\dot{w})$. C'est, en quelque sorte, l'étape suivante dans la détermination de la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig, après le corollaire 2.54 où on avait $\Delta_\psi = \Delta$. Pourtant, même dans ce cas particulier, on ne peut pas espérer déduire explicitement cette partie isotypique. On illustrera ce problème en poursuivant l'exemple de $GL_3(\mathbb{F})$ entamé dans la section 2.3.1.

Pour simplifier, tous les groupes réductifs considérés ici seront supposés simples et déployés. Le groupe de Weyl W est alors irréductible et l'action de F y est triviale. Les types classiques seront traités explicitement, alors que l'on utilisera les algorithmes donnés en annexe pour résoudre le cas des groupes exceptionnels. Sauf pour le type A_n , on se restreindra au cas où w est une puissance d'un bon élément de Coxeter.

La position d'un caractère linéaire ψ de U dans la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig est globalement contrôlée par sa position dans la cohomologie de chaque pièce. La stratégie employée dans cette section et la suivante se résume à employer le théorème 2.53 afin d'encadrer la contribution de ψ dans ces différents

groupes de cohomologie. À cette fin, on utilisera le lemme suivant, en tâchant de déterminer explicitement l'entier $K_x(\psi)$ dans chacun des cas que l'on étudiera :

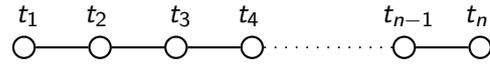
Lemme 2.57. *Pour (\mathbf{G}, F) un groupe déployé, ψ un caractère linéaire de U trivial sur $D(\mathbf{U})^F$, et $x \in W$, on pose*

$$K_x(\psi) = \max \{ |K_\gamma(\psi)| \mid \gamma \in \Gamma_1 \text{ est } x\text{-distinguée et } \psi \text{ est } (\gamma, x)\text{-régulier} \}.$$

Alors les groupes $e_\psi H_c^i(Y_x(\dot{w}), \Lambda)$ sont nuls dès que $i > \ell(w) + K_x(\psi)$.

Démonstration du lemme. Fixons une décomposition réduite de w et considérons la partition de $\tilde{Y}_x(w)$ donnée dans la section 2.4.1. Pour γ une sous-expression x -distinguée de w , le théorème 2.53 nous assure que les groupes $e_\psi H_c^i(\tilde{Y}_\gamma, \Lambda)$ vont s'annuler dès que $i > m(\gamma) + 2(n(\gamma) + \dim(\mathbf{U} \cap {}^x\mathbf{U})) + |K_\gamma(\psi)|$. Puisque $\gamma^r = 1$, on a $m(\gamma) + 2n(\gamma) = r = \ell(w)$, et le lemme se déduit de la formule 2.48 et des suites exactes longues données par le lemme 2.20 et la proposition 1.21. \square

(i) **Le type \mathbf{A}_n .** Le groupe de Weyl $W = \mathfrak{S}_{n+1}$ et son système de racines sont représentés par le diagramme de Dynkin suivant :



Comme dans les exemples précédents, on notera $S = \{t_1, \dots, t_n\}$ l'ensemble des réflexions simples et $\Delta = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ les racines simples associées. Les éléments de Φ^+ sont alors de la forme $\beta_i + \beta_{i+1} \cdots + \beta_j$ pour $i \leq j$ (voir [11, planche I]).

Fixons un élément $w \in W$. On peut l'écrire sous la forme $w = w_n w_{n-1} \cdots w_1$ où chaque w_j est un élément de \mathfrak{S}_{j+1} qui est réduit- $\{\beta_1, \dots, \beta_{j-1}\}$, ce qui définit une décomposition réduite de w de la forme

$$w = t_{i_n} \cdots t_{n-1} t_n t_{i_{n-1}} \cdots t_{n-2} t_{n-1} \cdots$$

Considérons alors un caractère linéaire $\psi : U \longrightarrow \Lambda^\times$ tel que $\Delta_\psi = \{\beta_2, \dots, \beta_n\}$ et cherchons à déterminer toutes les sous-expressions x -distinguées de w vérifiant $\gamma^r = 1$ et pour lesquelles ψ est régulier. Vu la forme de la décomposition réduite de w , une telle sous-expression se décompose en $\gamma = (\gamma^{(n)}, \dots, \gamma^{(1)})$, où $\gamma^{(j)}$ est une sous-expression de w_j dont le produit sera noté v_j . Avec ces notations, les éléments $v_n v_{n-1} \cdots v_{j+1}$ correspondent à certains produits partiels de γ . Puisque $\tilde{\Delta}_\psi = \{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$, le lemme 2.56 nous assure que, composés avec $w_0 x$, ils sont de la forme

$$w_0 x v_n v_{n-1} \cdots v_{j+1} = t_n \cdots t_{m_j}$$

pour un certain entier m_j inférieur ou égal à $n + 1$. La sous-expression γ étant distinguée, on déduit de la forme de w_j que seuls trois cas sont possibles, selon les valeurs de m_{j-1} :

(A.1) si $m_{j-1} = m_j$, alors on a forcément $i_j > m_j$ et $\gamma^{(j)} = (1, \dots, 1)$;

- (A.2) si $m_{j-1} < m_j$, on a en fait $i_j < m_j$ et $m_{j-1} = m_j - 1$. La sous-expression $\gamma^{(j)}$ est alors donnée par $\gamma^{(j)} = (1, \dots, 1, t_{m_{j-1}}, 1, \dots, 1)$;
- (A.3) si $m_{j-1} > m_j$, on trouve $i_j \leq m_j$ et $m_{j-1} = j + 1$. La seule sous-expression possible est donc $\gamma^{(j)} = (1, \dots, 1, t_{m_j}, t_{m_{j+1}}, \dots, t_j)$. Puisque les réflexions simples t_j et t_{j+1} n'apparaissent pas dans les mots w_i pour $i < j$, on en déduit qu'à partir de ce rang la sous-expression γ est triviale, ce qui force $m_n = j + 1$.

Par conséquent, pour x fixé, il y a au plus une sous-expression x -distinguée de w pour laquelle ψ est régulier. Dans le cas où elle existe, elle s'écrit

$$\gamma = (1, \dots, 1, t_i, 1, \dots, 1, t_{i-1}, 1, \dots, 1, t_j, 1, \dots, 1, t_j, t_{j+1}, \dots, t_{i-1}, t_i, 1, \dots, 1)$$

avec $x = w_0 t_n t_{n-1} \cdots t_{i+1}$.

Exemple 2.58. Pour $n = 2$ et $w = w_0 = sts$, on a donc deux sous-expressions à considérer : $\gamma = (1, 1, 1)$ qui est w_0 -distinguée et $\delta = (s, 1, s)$ qui est ts -distinguée. Par la proposition 2.52, la cohomologie des pièces correspondantes est donnée par :

$$H_c^\bullet(\tilde{X}_\gamma, \Lambda) = (\Lambda U_\alpha \otimes \Lambda U_\beta)[-3] \oplus (\Lambda U_\alpha^{\oplus 2} \oplus \Lambda U_\beta)[-4] \oplus \Lambda U_\alpha[-5] \oplus \Lambda[-6]$$

$$\text{et } H_c^\bullet(\tilde{X}_\delta, \Lambda) = \Lambda U_\beta[-5] \oplus \Lambda[-6].$$

En utilisant la formule 2.48, on en déduit que pour tout caractère linéaire ψ non trivial sur U_β , on a

$$e_\psi H_c^\bullet(X_{w_0}(w_0), \Lambda) = \Lambda_\psi[-3] \oplus \Lambda_\psi[-4]$$

$$\text{et } e_\psi H_c^\bullet(X_{ts}(w_0), \Lambda) = \Lambda_\psi[-3].$$

Néanmoins, même sur cet exemple simple, ces valeurs ne permettent pas de déduire les groupes $e_\psi H_c^i(X(w_0), \Lambda)$ pour $i = 3$ ou 4 . Elle assurent tout de même qu'ils sont nuls dès que $i > 4$. Dans le cas général, on obtient le résultat suivant :

Proposition 2.59. *Pour (\mathbf{G}, F) un groupe déployé de type A_n , \mathbf{P} un sous-groupe parabolique standard de \mathbf{G} de décomposition $\mathbf{P} = \mathbf{L}U_{\mathbf{P}}$ avec \mathbf{L} de type A_{n-1} et ψ un caractère linéaire de U dont la restriction à $U \cap \mathbf{L}$ est régulière, on a*

$$e_\psi H_c^i(Y(\dot{w}), \Lambda) = 0 \text{ dès que } i \notin \{\ell(w), \ell(w) + 1\}.$$

Démonstration. Grâce au lemme 2.57, il suffit de montrer que pour toute sous-expression x -distinguée γ de w vérifiant $\gamma^r = 1$ et pour laquelle ψ est régulier, l'ensemble $K_\gamma(\psi)$ a au plus un élément. Rappelons qu'il est donné par

$$\begin{aligned} K_\gamma(\psi) &= \{i \in \llbracket 1; r \rrbracket \setminus I_\gamma \mid \beta = -x\gamma^i(\alpha_i) \notin \Delta \text{ ou } \psi|_{V_\beta} = 1\} \\ &= \{i \in \llbracket 1; r \rrbracket \setminus I_\gamma \mid -x\gamma^i(\alpha_i) \notin \Delta_\psi\} \\ K_\gamma(\psi) &= \{i \in \llbracket 1; r \rrbracket \setminus I_\gamma \mid w_0 x \gamma^i(\alpha_i) \notin \tilde{\Delta}_\psi\}. \end{aligned}$$

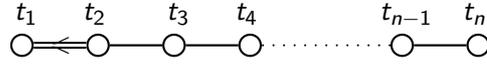
Quitte à conjuguer \mathbf{P} , on peut supposer que \mathbf{L} est le sous-groupe de Levi standard associé aux racines simples $\{\beta_2, \dots, \beta_n\}$, ce qui se traduit par $\Delta_\psi \supset \{\beta_2, \dots, \beta_n\}$.

En reprenant l'étude précédente, on peut alors déterminer explicitement les racines $w_0 x \gamma^i(\alpha_i)$ lorsque $\gamma_i = 1$. En effet, on a, pour $j \leq n+1$,

$$t_n t_{n-1} \cdots t_j(\beta_j) = \begin{cases} \beta_i & \text{si } i < j-1; \\ \beta_{i-1} & \text{si } i > j; \\ \beta_i + \cdots + \beta_n & \text{si } i = j-1 \end{cases}$$

ce dernier cas n'apparaissant qu'une seule fois au plus dans le calcul de $w_0 x \gamma^i(\alpha_i)$ pour $\gamma_i = 1$ (il correspond au cas (A.3) lorsque $j \leq n$; si $j = n+1$, on est forcément dans la situation où $x = w_0$ avec $\gamma = (1, 1, \dots, 1)$, et β_n n'apparaît bien qu'une seule fois). On conclut en remarquant que $\tilde{\Delta}_\psi = \{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$. \square

(ii) **Le type B_n .** Ici, le groupe de Weyl $W = W_n$ et son système de racines correspondent au diagramme de Dynkin suivant :



On notera $S = \{t_1, \dots, t_n\}$ l'ensemble des réflexions simples et $\Delta = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ les racines simples associées. Rappelons que Φ est formé de n^2 racines positives, dont l'expression en termes des racines simples est donnée par [11, planche II] :

- $\beta_i + \beta_{i+1} + \cdots + \beta_j$ pour $1 \leq i \leq j \leq n$;
- $2\beta_1 + \cdots + 2\beta_i + \beta_{i+1} + \cdots + \beta_j$ pour $1 \leq i < j \leq n$.

On choisit pour ψ un caractère linéaire de U non trivial sur les sous-groupes U_{β_i} pour $i < n$ et trivial sur U_{β_n} , de sorte que $\Delta_\psi = \tilde{\Delta}_\psi = \{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$. Les éléments w pour lesquels on va pouvoir expliciter les sous-expressions x -distinguées sont les puissances des éléments de Coxeter.

On fixe pour l'instant un élément particulier $c = t_n t_{n-1} \cdots t_1$ et on pose $w = c^d$, avec $d \leq n$. Comme pour le type A_n , on peut décomposer w en $w = w_n w_{n-1} \cdots w_1$, où chaque w_j est un élément de W_j qui est réduit- $\{\beta_1, \dots, \beta_{j-1}\}$. On vérifie facilement que ces éléments sont donnés par :

- $w_j = t_{j-d+1} \cdots t_{j-1} t_j$ pour $j > d$;
- $w_j = t_j t_{j-1} \cdots t_2 t_1 t_2 \cdots t_{j-1} t_j$ pour $j \leq d$.

En particulier, $w_d \cdots w_2 w_1$ représente l'élément de plus grande longueur de W_d . Comme précédemment, pour γ une sous-expression x -distinguée de w , on notera $\gamma^{(j)}$ les sous-expressions de w_j induites, et v_j le produit de leurs éléments. Si on suppose maintenant que ψ est (γ, x) -régulier et que $\gamma^r = 1$, le lemme 2.56 contraint les v_j à vérifier l'une des deux relations suivantes :

$$w_0 x v_n \cdots v_{j+1} = t_n t_{n-1} \cdots t_{m_j} \text{ avec } 2 \leq m_j \leq n+1$$

ou
$$w_0 x v_n \cdots v_{j+1} = t_n t_{n-1} \cdots t_2 t_1 t_2 \cdots t_{m_j} \text{ avec } 1 \leq m_j \leq n.$$

La seconde égalité n'est en fait jamais vérifiée dans notre cas. Nous allons le montrer par une analyse précise de la forme que prennent ces sous-expressions. On distingue pour cela deux cas :

- si $w_0x = t_n \cdots t_2 t_1 t_2 \cdots t_{m_n}$ avec $m_n \geq 1$, alors pour $j > d$, les sous-expressions $\gamma^{(j)}$ sont de la forme

$$\gamma^{(j)} = \begin{cases} (1, 1, \dots, 1) & \text{si } m_{j-1} = m_j; \\ (1, 1, \dots, 1, t_{m_j}, 1, \dots, 1) & \text{si } m_{j-1} < m_j; \\ (t_{m_j+1}, \dots, t_{m_{j-1}}, 1, \dots, 1) & \text{si } m_{j-1} > m_j. \end{cases}$$

Notons que ce dernier cas ne peut se produire qu'une seule fois au plus, et qu'alors forcément $m_{j-1} < j$ (ceci est dû à la condition $\gamma^r = 1$, ainsi qu'à la forme particulière de w). Dans les autres cas, on trouve aussi $m_{j-1} < j$, et donc en particulier $m_d \leq d$. Pour $j \leq d$, on trouve

$$\gamma^{(j)} = \begin{cases} (1, 1, \dots, 1); \\ (1, \dots, 1, t_{m_j+1}, 1, \dots, 1, t_{m_j+1}, 1, \dots, 1); \\ (1, \dots, 1, 1, t_{m_j}, t_{m_{j-1}}, \dots, t_2, t_1, t_2, \dots, t_j). \end{cases} \quad (\mathbf{B.0})$$

Puisque $m_d \leq d$, ce dernier cas se produit au moins une fois (au plus tard pour la sous-expression $\gamma^{(m_d)}$), et γ est triviale à partir de ce rang. Vu que $\gamma^r = 1$, on en déduit que $xw_0 = t_n t_{n-1} \cdots t_{j+2} t_{j+1}$, ce qui contredit la forme donnée au départ;

- si $w_0x = t_n t_{n-1} \cdots t_{m_n}$ avec $m_n \geq 2$, alors pour $j > d$, on obtient, toujours grâce au lemme 2.56 :

$$\gamma^{(j)} = \begin{cases} (1, 1, \dots, 1) & \text{si } m_{j-1} = m_j; & (\mathbf{B.1}) \\ (1, 1, \dots, 1, t_{m_{j-1}}, 1, \dots, 1) & \text{si } m_{j-1} < m_j; & (\mathbf{B.2}) \\ (1, \dots, 1, t_{m_j}, \dots, t_{j-1}, t_j) & \text{si } m_{j-1} > m_j. & (\mathbf{B.3}) \end{cases}$$

Pour ce dernier cas, on a forcément $m_n = j + 1$ et la sous-expression γ est triviale à partir de ce rang. Pour être plus précis, on peut même donner l'ordre dans lequel ces différentes sous-expressions apparaissent : si $m_n \leq n - d + 1$, alors le cas (B.3) se produit après un certain nombre de cas (B.1) ($n - d + 1 - m_n$ exactement), ce qui conduit à deux valeurs différentes pour m_n . On a donc $m_n > n - d + 1$, et les sous-expressions $\gamma^{(j)}$ apparaissent dans l'ordre (B.2)-(B.3)-(B.1). Remarquons tout de même que les cas (B.3) et (B.1) ne se produisent que lorsque $m_n \geq d + 1$, puisque la condition $m_n = j + 1$ ne peut être vérifiée sinon.

Plaçons nous maintenant sous l'hypothèse $m_n \geq d + 1$. Par l'analyse précédente, on obtient $m_d = m_n - (n - d)$ car les sous-expressions $\gamma^{(j)}$ sont toutes du type (B.2) pour $j > d$. Pour $j \leq d$, les choix possibles sont les suivants :

$$\gamma^{(j)} = \begin{cases} (1, 1, \dots, 1); & (\mathbf{B.4}) \\ (1, \dots, 1, t_{m_j}, 1, \dots, 1, t_{m_j}, 1, \dots, 1); & (\mathbf{B.5}) \\ (1, \dots, 1, t_{m_j}, 1, \dots, 1, 1, t_{m_j+1}, \dots, t_j); & (\mathbf{B.6}) \\ (t_j, t_{j-1}, \dots, t_i, 1, \dots, 1, t_i, \dots, t_{j-1}, t_j); & (\mathbf{B.7}) \\ (t_j, t_{j-1}, \dots, t_2, t_1, t_2, \dots, t_{m_{j-1}}, 1, \dots, 1). & \text{---}(\mathbf{B.8}) \end{cases}$$

Comme précédemment, il est facile de vérifier que les cas (B.6) et (B.7) sont terminaux. Quant au type (B.8), on montre qu'il est exclu : si j est un entier maximal tel que $\gamma^{(j)}$ soit de type (B.8), alors nécessairement $m_d = m_j$ car les situations non terminales ne modifient pas les entiers m_j . Les cas suivants possibles sont alors du type (B.5) puis (B.0) pour une sous-expression $\gamma^{(j')}$. On obtient ainsi $m_j \leq j'$ et $m_n = j' + 1$, ce qui contredit l'égalité $m_d = m_n - (n - d)$.

Remarquons pour finir qu'avec les mêmes arguments, le type (B.7) ne peut apparaître que dans le cas où $d = n$ (car on montre alors que $m_d = m_n$).

De la forme particulière de ces sous-expressions distinguées on déduit le résultat suivant :

Proposition 2.60. *Pour (\mathbf{G}, F) un groupe déployé de type B_n , \mathbf{P} un sous-groupe parabolique standard de \mathbf{G} de décomposition $\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{U}_{\mathbf{P}}$ avec \mathbf{L} de type B_{n-1} , ψ un caractère linéaire de U dont la restriction à $U \cap \mathbf{L}$ est régulière et w une puissance d'un élément de Coxeter, les groupes $e_{\psi}H_c^i(Y(\dot{w}), \Lambda)$ s'annulent dès que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

- $i \notin \{\ell(w), \ell(w) + 1\}$ et $w \neq w_0$;
- $i \notin \{\ell(w), \ell(w) + 1, \ell(w) + 2\}$ et $w = w_0$.

Démonstration. Par hypothèse, on peut choisir un élément de Coxeter c et un entier non nul d vérifiant $w = c^d$. Puisque c^{-1} est aussi un élément de Coxeter, on peut supposer que $d \leq n$. En effet, pour le type B_n , le nombre de Coxeter, qui est aussi l'ordre de c , est égal à $2n$. L'élément de Coxeter $c_0 = t_n t_{n-1} \cdots t_1$ vérifie $c_0^n = w_0$ et il est donc central dans W_n . Puisque tous les éléments de Coxeter sont conjugués, on en déduit que $c^n = w_0$ et qu'ainsi pour tout entier $d \leq n$ on a $\ell(c^d) = nd$.

Décomposons maintenant c en un produit vv' tel que $\ell(v) + \ell(v') = n$ et considérons un autre élément de Coxeter $c' = v'v$. Dans cette situation, on dit que les éléments c et c' sont *conjugués par permutation cyclique* [42, section 3.1]. L'observation précédente sur les longueurs assure que les puissances de c et de c' sont aussi conjuguées par permutation cyclique : en effet, on trouve $c^d = v((v'v)^{d-1}v')$ et $c'^d = ((v'v)^{d-1}v')v$ avec

$$\ell(c^d) = \ell(v) + \ell((v'v)^{d-1}v') = \ell(c'^d) = nd.$$

Puisque tous les éléments de Coxeter sont conjugués par une suite de permutations cycliques [42, théorème 3.1.4], on déduit de [29, théorème 1.6] que les variétés de Deligne-Lusztig associées à une puissance fixée de n'importe quel élément de Coxeter ont toutes la même cohomologie. On peut donc supposer que $c = c_0 = t_n t_{n-1} \cdots t_1$.

On reprend alors la démonstration de la proposition 2.59 : le lemme 2.57 nous assure qu'il suffit de majorer le cardinal de l'ensemble

$$\mathcal{K}_{\gamma}(\psi) = \{i \in \llbracket 1; r \rrbracket \setminus I_{\gamma} \mid w_0 \times \gamma^i(\alpha_i) \notin \tilde{\Delta}_{\psi}\}.$$

avec ici $\tilde{\Delta}_\psi = \Delta_\psi = \{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$. D'un autre côté, le lemme 2.56 nous donne précisément la forme des éléments $w_0 \times \gamma^i$. Il suffit alors de calculer, pour $j \leq n+1$,

$$t_n t_{n-1} \cdots t_j(\beta_i) = \begin{cases} \beta_i & \text{si } i < j-1; \\ \beta_{i-1} & \text{si } i > j; \\ \beta_i + \cdots + \beta_n & \text{si } i = j-1 \end{cases} \quad (2.61)$$

et de remarquer que le dernier cas ne peut se produire que dans les situations (B.3), (B.6) (il ne se produit alors qu'une seule fois) ou (B.7) (il a lieu au plus deux fois dans cette situation, et seulement lorsque $d = n$, c'est-à-dire pour $w = w_0$). Puisque la sous-expression γ est triviale après chacune de ces situations, on en déduit la proposition. \square

Remarque 2.62. Le début de la preuve cache la notion de *bon élément de Coxeter*. De façon générale, on dit qu'un élément $w \in W$ est un *bon élément m -régulier* [17] si $w^m = 1$ et si pour tout entier $n \leq m/2$ l'élément w^n est de longueur nN/m .

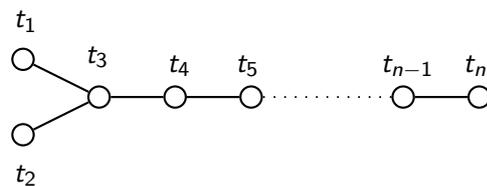
Si w_0 est central, le nombre de Coxeter est pair et tous les éléments de Coxeter sont des bons éléments h -réguliers, puisqu'ils vérifient tous $c^{h/2} = w_0$; on a vu alors au cours de la démonstration précédente que la cohomologie de la variété de Deligne-Lusztig associée à une puissance d'un élément de Coxeter ne dépendait pas du choix de cet élément. En général, si c et c' sont deux éléments de Coxeter, alors d'après [42, théorème 3.1.4] et [35, proposition 3.1.6] les variétés $X(c^d)$ et $X(c'^d)$ associées aux puissances des images de c et c' dans le groupe de tresses ont la même cohomologie; si c et c' sont tous les deux supposés bons, on en déduit que $X(c^d)$ et $X(c'^d)$ ont la même cohomologie.

(iii) **Le type C_n .** Le groupe de Weyl $W = W_n$ est identique au groupe de type B_n et les sous-expressions distingués sont les mêmes. En revanche, le système de racine est différent, mais l'équation 2.61 reste néanmoins vraie, et la proposition précédente se généralise au type C_n :

Proposition 2.63. *Pour (G, F) un groupe déployé de type C_n , \mathbf{P} un sous-groupe parabolique standard de \mathbf{G} de décomposition $\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{U}_\mathbf{P}$ avec \mathbf{L} de type C_{n-1} , ψ un caractère linéaire de U dont la restriction à $U \cap \mathbf{L}$ est régulière et w une puissance d'un élément de Coxeter, les groupes $e_\psi H_c^i(Y(w), \Lambda)$ s'annulent dès que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

- $i \notin \{\ell(w), \ell(w) + 1\}$ et $w \neq w_0$;
- $i \notin \{\ell(w), \ell(w) + 1, \ell(w) + 2\}$ et $w = w_0$.

(iv) **Le type D_n .** Le groupe de Weyl $W = W'_n$ et son système de racines sont représentés par le diagramme de Dynkin suivant :



On notera $S = \{t_1, \dots, t_n\}$ l'ensemble des réflexions simples et $\Delta = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ les racines simples associées. L'ensemble Φ est formé de $n^2 - n$ racines positives, dont l'expression en termes des racines simples est donnée par [11, planche III] :

- $\beta_i + \beta_{i+1} + \dots + \beta_j$ pour $3 \leq i \leq j \leq n$;
- $\beta_1 + \beta_3 + \dots + \beta_j$ pour $3 \leq j \leq n$ ou β_1 ;
- $\beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_j$ pour $3 \leq j \leq n$ ou β_2 ;
- $\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + \dots + 2\beta_{i-1} + \beta_i + \dots + \beta_j$ pour $3 \leq i \leq j \leq n$.

Ici, pour $d \leq n-1$, les puissances d -ièmes de l'élément de Coxeter $c = t_n t_{n-1} \dots t_1$ peuvent s'écrire $w = c^d = w_n \dots w_3 w_2$ où pour $j \geq 3$, w_j est un élément de W'_j qui est réduit- $\{\beta_1, \dots, \beta_{j-1}\}$, et $w_2 = t_2 t_1$. De façon plus précise, on trouve

- $w_j = t_{j-d+1} \dots t_{j-1} t_j$ pour $j > d$;
- $w_j = t_j t_{j-1} \dots t_3 t_2 t_1 t_3 \dots t_{j-1} t_j$ pour $3 \leq j \leq d$.

Comme précédemment, une sous-expression x -distinguée de w se décompose en $\gamma = (\gamma^{(n)}, \dots, \gamma^{(3)}, \gamma^{(2)})$, avec $\gamma^{(j)}$ une sous-expression de w_j dont le produit sera noté v_j . Si de plus ψ est un caractère (γ, x) -régulier de U vérifiant $\tilde{\Delta}_\psi = \Delta_\psi = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}\}$ et $\gamma^r = 1$, alors la forme des sous-mots issus des sous-expressions partielles de γ est donnée par le lemme 2.56. On distingue quatre cas :

$$w_0 x v_n v_{n-1} \dots v_{j+1} = \begin{cases} t_n t_{n-1} \dots t_{m_j} & \text{avec } 3 \leq m_j \leq n+1; \\ t_n t_{n-1} \dots t_3 t_2 \text{ ou } t_n t_{n-1} \dots t_3 t_1; \\ t_n t_{n-1} \dots t_3 t_2 t_1 t_3 \dots t_{m_j-1} t_{m_j} & \text{avec } 2 \leq m_j \leq n. \end{cases}$$

On peut montrer qu'en fait seule la première situation est possible. La même analyse que celle menée pour le type B_n nous donne en effet la forme précise que prennent les sous-expressions $\gamma^{(j)}$: pour $j > d$, on a

$$\gamma^{(j)} = \begin{cases} (1, 1, \dots, 1) & \text{si } m_{j-1} = m_j; & \text{(D.1)} \\ (1, 1, \dots, 1, t_{m_{j-1}}, 1, \dots, 1) & \text{si } m_{j-1} < m_j; & \text{(D.2)} \\ (1, \dots, 1, t_{m_j}, \dots, t_{j-1}, t_j) & \text{si } m_{j-1} > m_j. & \text{(D.3)} \end{cases}$$

alors que pour $3 \leq j \leq d$ on trouve :

$$\gamma^{(j)} = \begin{cases} (1, 1, \dots, 1); & \text{(D.4)} \\ (1, \dots, 1, t_{m_j}, 1, \dots, 1, t_{m_j}, 1, \dots, 1); & \text{(D.5)} \\ (1, \dots, 1, t_{m_j}, 1, \dots, 1, 1, t_{m_j+1}, \dots, t_j); & \text{(D.6)} \\ (t_j, t_{j-1}, \dots, t_i, 1, \dots, 1, t_i, \dots, t_{j-1}, t_j); & \text{(D.7)} \end{cases}$$

avec en plus $\gamma^{(2)} = (1, 1)$. Là encore, les cas (D.3), (D.6) et (D.7) sont terminaux (les sous-expressions restantes sont triviales) et ce dernier ne se produit que pour $d = n-1$, c'est-à-dire lorsque $w = w_0$. En adaptant la démonstration de la proposition 2.60 à la lumière de la remarque 2.62, on trouve finalement :

Proposition 2.64. *Pour (\mathbf{G}, F) un groupe déployé de type D_n , avec $n \geq 4$, \mathbf{P} un sous-groupe parabolique standard de \mathbf{G} de décomposition $\mathbf{P} = \mathbf{L}U_{\mathbf{P}}$ avec \mathbf{L} de type D_{n-1} , ψ*

un caractère linéaire de U dont la restriction à $U \cap \mathbf{L}$ est régulière et w une puissance d'un bon élément de Coxeter, les groupes $e_\psi H_c^i(Y(\dot{w}), \Lambda)$ s'annulent dès que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- $i \notin \{\ell(w), \ell(w) + 1\}$ et $w \neq w_0$;
- $i \notin \{\ell(w), \ell(w) + 1, \ell(w) + 2\}$ et $w = w_0$.

(v) Groupes exceptionnels. Pour résoudre le cas des groupes exceptionnels, on utilise les programmes donnés en annexe. Les résultats sont affichés dans le tableau suivant : chaque entrée représente l'intervalle en dehors duquel on est sûr que les groupes $e_\psi H_c^i(Y(\dot{w}), \Lambda)$ sont nuls, pour $w = c^d$ une puissance non triviale d'un bon élément de Coxeter fixé pour chaque type (d'après la remarque 2.62, la cohomologie de la variété de Deligne-Lusztig associée ne dépend pas de ce choix). D'autre part, puisque c^{-1} est aussi un élément de Coxeter, on se limitera à $d \leq h/2$.

	type E_6	type E_7	type E_8	type F_4	type G_2
1	[[6 ; 7]]	[[7 ; 8]]	[[8 ; 9]]	[[4 ; 5]]	[[2 ; 3]]
2	[[12 ; 13]]	[[14 ; 15]]	[[16 ; 17]]	[[8 ; 9]]	[[4 ; 6]]
3	[[18 ; 19]]	[[21 ; 22]]	[[24 ; 26]]	[[12 ; 14]]	[[6 ; 9]]
4	[[24 ; 26]]	[[28 ; 30]]	[[32 ; 34]]	[[16 ; 19]]	
5	[[30 ; 33]]	[[35 ; 37]]	[[40 ; 42]]	[[20 ; 23]]	
6	[[36 ; 41]]	[[42 ; 46]]	[[48 ; 51]]	[[24 ; 28]]	
7		[[49 ; 53]]	[[56 ; 60]]		
8		[[56 ; 61]]	[[64 ; 69]]		
9		[[63 ; 69]]	[[72 ; 77]]		
10			[[80 ; 86]]		
11			[[88 ; 95]]		
12			[[96 ; 104]]		
13			[[104 ; 112]]		
14			[[112 ; 120]]		
15			[[120 ; 129]]		

Remarque 2.65. Les valeurs de ce tableau ont été calculées à partir de certaines décompositions réduites de puissances d'éléments de Coxeter seulement. Avec une puissance de calcul plus grande, il est probable que l'on puisse diminuer la longueur de certains intervalles.

2.5.3 Le cas de la variété $Y(w_0)$ pour les groupes de type A_n

On restreint notre étude au cas des groupes de type A_n et pour $w = w_0$, mais en supprimant maintenant toute condition sur les caractères linéaires considérés.

On verra au cours du prochain chapitre que ce résultat permet de limiter la position des caractères unipotents dans la cohomologie de $Y(w_0)$, en accord avec [35, conjecture 3.3.26] (voir théorème 3.31).

Proposition 2.66. *Soit (\mathbf{G}, F) un groupe déployé de type A_n et ψ un caractère linéaire de U . Alors, en notant*

$$r_\psi = \sum_{i=1}^n |(\Delta \setminus \Delta_\psi) \cap \{\beta_i, \dots, \beta_n\}|$$

les groupes $e_\psi H_c^i(Y(w_0), \Lambda)$ sont nuls dès que $i > \ell(w_0) + r_\psi$.

Démonstration. Pour chaque élément $x \in W$, on va exhiber une décomposition réduite de w_0 pour laquelle $K_x(\psi) \leq r_\psi$; le résultat découlera alors du lemme 2.57. On écrit pour cela w_0 sous la forme $w_0 = x^{-1}xw_0 = x^{-1}w_0({}^{w_0}x)$; notons que les longueurs de $y = x^{-1}w_0$ et $\tilde{x} = ({}^{w_0}x)$ s'ajoutent, ce qui permet d'obtenir une décomposition réduite de w_0 en concaténant des décompositions réduites de y et \tilde{x} . Pour ce dernier élément, on choisira une décomposition de la forme

$$\tilde{x} = w_1 \cdots w_{n-1} w_n = \cdots (t_{n-1} t_{n-2} \cdots t_{j_{n-1}}) (t_n t_{n-1} \cdots t_{j_n})$$

où chaque w_i est un élément de \mathfrak{S}_{i+1} qui est $\{\beta_1, \dots, \beta_{i-1}\}$ -réduit. L'intérêt d'une telle décomposition réside dans le fait que si γ est une sous-expression x -distinguée de w_0 , alors on a forcément $\gamma_i = s_i$ pour $i \leq \ell(y)$. Par conséquent, γ se décompose en $\gamma = (\delta, \tilde{\gamma}^{(1)}, \dots, \tilde{\gamma}^{(n)})$ où :

- $\delta = (s_1, s_2, \dots, s_{\ell(y)})$;
- $\tilde{\gamma}^{(i)}$ est une sous-expression $w_0 w_1 \cdots w_{i-1}$ -distinguée de w_i , dont le produit sera noté v_i .

Avec ces notations, l'ensemble $K_\gamma(\psi)$ se partitionne en

$$K_\gamma(\psi) = \bigsqcup_{i=1}^n K_{\tilde{\gamma}^{(i)}}(\psi). \quad (2.67)$$

On est donc ramené à étudier le cardinal de chaque ensemble $K_{\tilde{\gamma}^{(i)}}(\psi)$. Fixons un entier i et examinons la sous-expression $\tilde{\gamma}^{(i)}$: elle s'écrit $\tilde{\gamma}^{(i)} = (\gamma_j)_{j \in J_i}$ pour un certain ensemble d'entiers consécutifs J_i et on a

$$K_{\tilde{\gamma}^{(i)}}(\psi) = \{j \in J_i \mid \gamma_j = 1 \text{ et } w_0 x \gamma^j(\alpha_j) \notin \tilde{\Delta}_\psi\}.$$

D'après le lemme 2.56, les éléments $w_0 x \gamma^j$ sont $\tilde{\Delta}_\psi$ -réduits; étant donné que α_j est une racine simple, on en déduit que la condition $w_0 x \gamma^j(\alpha_j) \notin \tilde{\Delta}_\psi$ est équivalente à $w_0 x \gamma^j(\alpha_j) \notin \Phi_{\tilde{\Delta}_\psi}$. Autrement dit, $w_0 x \gamma^j(\alpha_j) \notin \tilde{\Delta}_\psi$ si et seulement si la décomposition de $w_0 x \gamma^j(\alpha_j)$ en une somme de racines simples fait apparaître au moins un élément de $\Delta \setminus \tilde{\Delta}_\psi$. On va montrer que ces éléments sont distincts.

Posons $n_i = \min\{j \in J_i \mid \gamma_j = 1\}$; la forme particulière de l'élément w_i permet de vérifier l'égalité suivante :

$$\sum_{\substack{j \in J_i \\ \gamma_j=1}} w_0 x^{\gamma^j}(\alpha_j) = w_1 \cdots w_{i-1}(\beta_i + \beta_{i+1} + \cdots + \beta_{n_j}) \in \Phi.$$

Puisque γ est x -distinguée, chacune des racines de la somme est positive. Par l'égalité précédente, la somme est donc aussi une racine (positive); par conséquent, les racines simples intervenant dans chacun des termes $w_0 x^{\gamma^j}(\alpha_j)$ sont deux à deux disjointes. Cette propriété étant vraie *a fortiori* pour $w_0 x^{\gamma^j}(\alpha_j)$ si $j \in K_{\tilde{\gamma}(i)}(\psi)$, on déduit de l'analyse précédente que

$$|K_{\tilde{\gamma}(i)}(\psi)| \leq |(\Delta \setminus \tilde{\Delta}_\psi) \cap w_1 \cdots w_{i-1}(\Phi_{\{\beta_1, \dots, \beta_i\}})|$$

c'est-à-dire
$$|K_{\tilde{\gamma}(i)}(\psi)| \leq |(\Delta \setminus \tilde{\Delta}_\psi) \cap \{\beta_1, \dots, \beta_i\}|.$$

On conclut grâce à l'égalité 2.67 et en appliquant l'involution $-w_0$ sur l'ensemble des racines simples Δ . \square

Remarque 2.68. On peut voir ψ comme l'inflation d'un caractère régulier du groupe unipotent $U \cap \mathbf{L}_{\Delta_\psi}$, où \mathbf{L}_{Δ_ψ} est le sous-groupe de Levi standard associé à l'ensemble de racines simples Δ_ψ . Dans le cas du type A_n , les classes de conjugaison de ces sous-groupes de Levi sont indexées par les partitions de $n+1$, et le théorème 3.31 donnera un lien entre l'entier r_ψ et la partition associée à \mathbf{L}_{Δ_ψ} en termes des fonctions a et A de Lusztig.

Modules de Gelfand-Graev généralisés dans la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig

Contexte

Dans la théorie des représentations ordinaires des groupes réductifs finis se pose le problème de calculer explicitement la table des caractères de ces groupes, et notamment la valeur des caractères irréductibles sur les éléments unipotents. Deux stratégies ont été développées parallèlement pour résoudre cette question : l'introduction et l'étude, par Kawanaka, des *caractères de Gelfand-Graev généralisés*, et la théorie des *faisceaux-caractères* développée par Lusztig. Si les deux approches sont étroitement reliées (via les classes unipotentes et leur géométrie), c'est la première qui retiendra notre attention dans ce chapitre, puisqu'elle s'étend naturellement au cadre modulaire.

Plus précisément, lorsque la caractéristique de \mathbb{F} est bonne pour \mathbf{G} , on peut associer à chaque élément nilpotent rationnel N de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de ce groupe, un module projectif Γ_N , indépendant de la classe de G -conjugaison de N , défini comme l'induit d'une certaine représentation du groupe unipotent U . L'objet de ce chapitre sera de comprendre le lien entre ces modules et la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig, lien que l'on représentera concrètement par le complexe $\mathrm{RHom}_{\Lambda_G}^\bullet(\Gamma_N, \mathrm{R}\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda))$.

La définition précise des modules de Gelfand-Graev généralisés repose sur la classification des orbites nilpotentes de \mathbf{G} , que l'on rappellera dans une première partie. L'avantage de cette classification est qu'elle ne dépend pas de la caractéristique p , en supposant que p est un bon nombre premier pour \mathbf{G} . On donnera ensuite, dans une deuxième partie, un point de départ au calcul du complexe $\mathrm{RHom}_{\Lambda_G}^\bullet(\Gamma_N, \mathrm{R}\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda))$ à l'aide des pièces $Y_x(\dot{w})$ introduites dans le chapitre précédent. Le point crucial est encore la description explicite de certains quotients de ces pièces, qui permet d'étendre les actions de certains groupes finis à

un groupe algébrique connexe, afin de montrer que l'action induite sur la cohomologie de ces variétés est triviale. Pour finir, on s'intéressera au cas particulier de la classe unipotente maximale, formée des éléments unipotents réguliers de \mathbf{G} . On obtient alors des modules de Gelfand-Graev usuels, en termes desquels on peut traduire les résultats des parties 2.3 et 2.4. On en déduit une preuve de la conjecture de Bonnafé-Rouquier sur la restriction de Deligne-Lusztig des modules de Gelfand-Graev, ainsi que des résultats partiels concernant leurs induits. Tous les résultats de ce chapitre seront montrés sous l'hypothèse suivante :

(H.0) la caractéristique p de F est un très bon nombre premier pour \mathbf{G} .

Autrement dit, les restrictions sur p seront les suivantes, selon les types des facteurs simples intervenant dans \mathbf{G} :

- type A_n : p ne divise pas $n + 1$;
- types B_n, C_n et D_n : $p \neq 2$;
- types E_6, E_7, F_4 et G_2 : $p \neq 2, 3$;
- type E_8 : $p \neq 2, 3, 5$.

3.1 Modules de Gelfand-Graev généralisés

On reprend les notations données au début du chapitre précédent en y ajoutant les objets infinitésimaux associés : on désignera par \mathfrak{g} , \mathfrak{t} et \mathfrak{u} (resp. \mathfrak{u}^-) les algèbres de Lie de \mathbf{G} , \mathbf{T} et \mathbf{U} (resp. \mathbf{U}^-). L'endomorphisme de Frobenius induit sur ces algèbres sera toujours noté F . On désigne par \mathcal{N} le cône nilpotent formé des éléments nilpotents de \mathfrak{g} (c'est-à-dire les éléments dont l'image par n'importe quelle représentation est un endomorphisme nilpotent). Le groupe algébrique \mathbf{G} agit sur \mathfrak{g} par adjonction, stabilisant globalement \mathcal{N} ; les orbites d'éléments nilpotents pour cette action sont appelées les orbites nilpotentes de \mathbf{G} .

Dans le cas où la caractéristique de \mathbf{G} est un bon nombre premier, de nombreux résultats concernant les orbites nilpotentes (notamment la classification) ne dépendent que du type de \mathbf{G} . Sous l'hypothèse (H.0) et lorsque \mathbf{G} est semi-simple, on dispose même d'isogénies centrales séparables

$$\mathbf{G}^{\text{sc}} \xrightarrow{\pi} \mathbf{G} \xrightarrow{\iota} \mathbf{G}^{\text{ad}}$$

où \mathbf{G}^{sc} (resp. \mathbf{G}^{ad}) est un groupe simplement connexe (resp. de type adjoint) de même type que \mathbf{G} . Ces morphismes induisent, au niveau des groupes, des isomorphismes \mathbf{T} -équivariants entre les sous-groupes à un paramètre \mathbf{U}_α , et leur différentielle induit, aux niveaux des algèbres de Lie :

- des isomorphismes \mathbf{G} -équivariants entre \mathfrak{g}^{sc} , \mathfrak{g} et \mathfrak{g}^{ad} ;
- des homéomorphismes \mathbf{G} -équivariants entre les cônes nilpotents, et donc des bijections entre les ensembles d'orbites nilpotentes ;
- des isomorphismes \mathbf{T} -équivariants entre les algèbres de Lie des groupes à un paramètre \mathbf{U}_α .

Certains invariants associés aux orbites nilpotentes, comme le nombre de composantes connexes du centralisateur d'un élément nilpotent, dépendent néanmoins du groupe \mathbf{G} considéré, et pas seulement de son type.

3.1.1 Classification des orbites nilpotentes

Nous allons rappeler deux points de vues utilisés pour paramétrer les orbites nilpotentes de \mathfrak{g} , à savoir les diagrammes de Dynkin pondérés et les sous-groupes paraboliques distingués. Les méthodes exposées brièvement ici sont par exemple détaillées dans [21, chapitre 5] et [71].

L'ingrédient essentiel de cette classification est la finitude de l'ensemble des classes unipotentes, démontrée dans [10]. Puisque le cône nilpotent \mathcal{N} est irréductible, il contient une unique orbite ouverte dense, appelée *orbite régulière*. Ce phénomène s'applique aussi à certains sous-groupes de \mathbf{G} , et permet ainsi de construire des orbites nilpotentes en saturant les orbites régulières associées à des groupes plus petits.

(i) Diagrammes de Dynkin pondérés. Fixons un groupe algébrique complexe semi-simple et simplement connexe $\mathbf{G}_{\mathbb{C}}$ de même type que \mathbf{G} et notons $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ son algèbre de Lie. On peut alors choisir une base de Chevalley de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ formée des éléments $(X_{\alpha})_{\alpha \in \Phi}$ et $(H_{\alpha})_{\alpha \in \Delta}$, ce qui permet de définir une forme entière $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Par hypothèse sur p , on peut identifier $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}$ (voir par exemple [10]) et on en déduit, pour chaque racine α , un vecteur directeur $\varepsilon_{\alpha} = X_{\alpha} \otimes 1$ de la droite $\mathfrak{u}_{\alpha} = \text{Lie}(\mathbf{U}_{\alpha})$. Notons qu'il n'est pas forcément stable par F même dans les cas où \mathbf{U}_{α} l'est. Avec ces notations, l'algèbre \mathfrak{g} se décompose en :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^{-} \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{u} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathbb{F} \varepsilon_{\alpha}.$$

Le théorème de Jacobson-Morozov nous assure que tout élément nilpotent N de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ peut être complété en un \mathfrak{sl}_2 -triplet $\{N, N', H\}$. De plus, quitte à conjuguer N , on peut supposer que l'élément H est combinaison linéaire à coefficients entiers, et même positifs, des éléments H_{α} . Le *diagramme de Dynkin pondéré* associé à N est alors la fonction additive $d : \Phi \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $d(\alpha) = \alpha(H)$. On peut montrer qu'il ne peut prendre que les valeurs 0, 1 ou 2 sur la base Δ et qu'il ne dépend pas de la classe de $\mathbf{G}_{\mathbb{C}}$ -conjugaison \mathcal{O} de N ; on pourra donc le noter $d_{\mathcal{O}}$. L'ensemble des diagrammes obtenus de cette façon sera noté $\text{Diag}(\Phi)$.

Le résultat surprenant de cette théorie est que l'ensemble $\text{Diag}(\Phi)$ paramètre non seulement les orbites nilpotentes du groupe complexe $\mathbf{G}_{\mathbb{C}}$ mais aussi celles de \mathbf{G} , alors que le théorème de Jacobson-Morozov n'y est pas toujours valable. En effet, à chaque diagramme de Dynkin pondéré d on peut associer un sous-groupe parabolique \mathbf{P}_d de \mathbf{G} défini par

$$\mathbf{P}_d = \langle \mathbf{T}, \mathbf{U}_{\alpha} \mid d(\alpha) \geq 0 \rangle$$

ainsi qu'une décomposition de Levi $\mathbf{P}_d = \mathbf{L}_d \mathbf{U}_d$ de ce groupe, donnée par

$$\mathbf{L}_d = \langle \mathbf{T}, \mathbf{U}_\alpha \mid d(\alpha) = 0 \rangle \quad \text{et} \quad \mathbf{U}_d = \langle \mathbf{U}_\alpha \mid d(\alpha) > 0 \rangle.$$

Au niveau des algèbres de Lie, d définit une graduation $(\mathfrak{g}_d(i))_{i \in \mathbb{Z}}$ de \mathfrak{g} en une famille de sous-espaces vectoriels

$$\mathfrak{g}_d(i) = \bigoplus_{d(\alpha)=i} \mathfrak{u}_\alpha \quad \text{pour } i \neq 0,$$

et

$$\mathfrak{g}_d(0) = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{d(\alpha)=0} \mathfrak{u}_\alpha.$$

Les espaces $\mathfrak{g}_d(i)$ ne sont pas forcément des sous-algèbres de Lie de \mathfrak{g} , mais ils sont en revanche stables par l'action adjointe du groupe réductif \mathbf{L}_d . En notant $\mathfrak{g}_d(2)_{\text{rég}}$ l'unique \mathbf{L}_d -orbite dense dans $\mathfrak{g}_d(2)$, on obtient le paramétrage annoncé :

Théorème 3.1 (Dynkin, Pommering, Premet). *Si p est un très bon nombre premier pour \mathbf{G} , l'application $d \mapsto \mathbf{G} \cdot \mathfrak{g}_d(2)_{\text{rég}}$ réalise une bijection entre l'ensemble $\text{Diag}(\Phi)$ des diagrammes de Dynkin pondérés et l'ensemble des orbites nilpotentes de \mathbf{G} . De plus, pour un diagramme d fixé, on a*

- $\mathcal{O}_d \cap (\bigoplus_{i \geq 2} \mathfrak{g}_d(i))$ est une seule \mathbf{P}_d -orbite, et elle est dense dans $\bigoplus_{i \geq 2} \mathfrak{g}_d(i)$;
- tout élément N de cette \mathbf{P}_d -orbite vérifie $C_{\mathbf{G}}(N) = C_{\mathbf{P}_d}(N)$.

Remarque 3.2. Puisque deux diagrammes distincts donnent deux orbites distinctes, le diagramme associé à une orbite \mathcal{O} stable par F vérifie nécessairement $d \circ \phi = d$. Ainsi, les sous-groupes et sous-espaces associés à d sont eux aussi stables par F , de même que la \mathbf{L}_d -orbite maximale $\mathfrak{g}_d(2)_{\text{rég}}$.

La classe \mathcal{O}^F se scinde éventuellement en plusieurs G -orbites, toutes ne rencontrant pas forcément $\mathfrak{g}_d(2)_{\text{rég}}$. Néanmoins, pour $N \in \mathfrak{g}_d(2)_{\text{rég}}$, le centralisateur $C_{\mathbf{G}}(N)$ est un sous-groupe du groupe connexe \mathbf{P}_d , et le théorème de Lang assure que chacune de ces classes admet tout de même un représentant dans $\mathbf{P}_d \cdot \mathfrak{g}_d(2)_{\text{rég}}^F$, et donc, d'après le résultat précédent, dans $\mathcal{O}^F \cap (\bigoplus_{i \geq 2} \mathfrak{g}_d(i))$.

Exemple 3.3. Supposons que $\mathbf{G} = \text{Sp}_4(\mathbb{F})$ est le groupe symplectique. D'après [21, chapitre 13], le cône nilpotent se décompose en 4 orbites sous l'action de \mathbf{G} , lesquelles vérifient les relations d'inclusion

$$\{0\} \subset \overline{\mathcal{O}}_{\text{min}} \subset \overline{\mathcal{O}} \subset \overline{\mathcal{O}}_{\text{rég}} = \mathcal{N}$$

L'orbite \mathcal{O}_{min} est appelée *orbite minimale* : elle est contenue dans l'adhérence de toutes les orbites non triviales (nous y reviendront en section 3.1.3). L'orbite \mathcal{O} est quant à elle appelée *orbite sous-régulière* ; elle correspond au diagramme de Dynkin pondéré suivant

$$\begin{array}{c} 0 \quad 2 \\ \circ \rightleftarrows \circ \end{array}$$

c'est-à-dire le diagramme d défini sur les racines simples par $d(\alpha) = 0$ (α étant la racine simple courte) et $d(\beta) = 2$.

Munissons maintenant le groupe \mathbf{G} de sa \mathbb{F}_q -structure rationnelle standard, de telle sorte que la classe sous-régulière \mathcal{O} soit stable par F . Alors d'après [88],

l'ensemble \mathcal{O}^F se scinde en deux classes rationnelles. On peut en préciser des représentants après avoir fixé une base (e_γ) de \mathfrak{u} stable par F et proportionnelle à la base de Chevalley (ε_γ) : chaque G -orbite de \mathcal{O}^F est portée par un élément nilpotent de la forme $N(\nu) = e_\beta - \nu e_{2\alpha+\beta}$ avec $\nu \in \mathbb{F}_q^\times$. De plus, $N(\nu)$ et $N(\nu')$ sont conjugués sous $G = \mathrm{Sp}_4(q)$ si et seulement si $\nu'\nu^{-1}$ est un carré dans \mathbb{F}_q .

Si $\mathbf{G} = \mathrm{PSp}_4(\mathbb{F})$ est le groupe de type adjoint correspondant, alors le résultat reste vrai puisque d'après [21, chapitre 13], le groupe $C_{\mathbf{G}}(N)/C_{\mathbf{G}}(N)^\circ$ est d'ordre 2 pour tout élément nilpotent N de la classe sous-régulière.

Remarque 3.4. D'après le premier point du théorème précédent, la dimension du centralisateur d'un élément $N \in \mathcal{O}$ est donnée par

$$\dim C_{\mathbf{G}}(N) = \dim \mathbf{P}_d - \dim \mathbf{U}_2 = \dim \mathbf{G} - \dim \mathbf{U}_1 - \dim \mathbf{U}_2.$$

On en déduit que la dimension d'une orbite nilpotente se calcule directement à partir de son diagramme de Dynkin $d_{\mathcal{O}}$:

$$\dim \mathcal{O} = \dim \mathbf{U}_1 + \dim \mathbf{U}_2.$$

(ii) **Théorie de Bala-Carter.** La manipulation pratique des diagrammes de Dynkin pondérés n'est pas toujours aisée ; on peut néanmoins contourner ce problème en se concentrant sur d'autres objets associés : les sous-groupes de Levi de \mathbf{G} et leurs sous-groupes paraboliques. Fixons pour cela un diagramme $d \in \mathrm{Diag}(\Phi)$ et N un élément de $\mathfrak{g}_d(2)_{\mathrm{rég}}$; le groupe $C_{L_d}(N)$ est alors un groupe réductif et on peut construire un sous-groupe de Levi \mathbf{L} de \mathbf{G} , défini comme le centralisateur d'un tore maximal de ce groupe. En posant $\mathbf{Q} = \mathbf{P}_d \cap \mathbf{L}$ et $\mathbf{V} = R_u(\mathbf{Q})$ son radical unipotent on peut montrer que

- \mathbf{Q} est un sous-groupe parabolique *distingué* de \mathbf{L} , c'est-à-dire qu'il vérifie :

$$\dim (D(\mathbf{Q})/\mathbf{V}) = \dim (\mathbf{V}/D(\mathbf{V}));$$

- N est un *élément de Richardson* de $\mathfrak{v} = \mathrm{Lie}(\mathbf{V})$, ce qui signifie que l'orbite $\mathbf{Q} \cdot N$ est dense dans \mathfrak{v} . On notera $\mathfrak{v}_{\mathrm{rég}}$ cette orbite.

À conjugaison près, on obtient par ce procédé toutes les paires (\mathbf{L}, \mathbf{Q}) vérifiant cette propriété lorsque d parcourt $\mathrm{Diag}(\Phi)$. Plus précisément,

Théorème 3.5 (Bala-Carter, Pommering, Premet). *L'application $(\mathbf{L}, \mathbf{Q}) \mapsto \mathbf{G} \cdot \mathfrak{v}_{\mathrm{rég}}$ réalise une bijection entre les classes de conjugaison des couples formés d'un sous-groupe de Levi \mathbf{L} de \mathbf{G} et d'un sous-groupe parabolique distingué \mathbf{Q} de \mathbf{L} et l'ensemble des orbites nilpotentes de \mathbf{G} .*

Remarque 3.6. Le diagramme de la \mathbf{L} -orbite $\mathfrak{v}_{\mathrm{rég}}$ peut-être facilement déterminé : quitte à conjuguer la paire (\mathbf{L}, \mathbf{Q}) , on peut en effet supposer que ces données sont standard et s'écrivent $\mathbf{L} = \mathbf{L}_I$ et $\mathbf{Q} = \mathbf{P}_J \cap \mathbf{L}_I$ pour $J \subset I \subset \Delta$. Le diagramme $d_{\mathfrak{v}_{\mathrm{rég}}}$ prend alors la valeur 2 sur J et 0 sur $I \setminus J$. En revanche, il est en général difficile de donner explicitement celui la \mathbf{G} -orbite associée : on s'en convaincra facilement en remarquant par exemple qu'il ne prend pas forcément des valeurs paires sur toutes les racines.

Parmi les orbites nilpotentes de \mathbf{G} , notre attention se portera souvent sur les deux suivantes dans les exemples de ce chapitre. Nous étudierons aussi dans la section 3.1.3 un troisième exemple générique, celui de l'orbite nilpotente minimale.

Exemple 3.7. L'orbite régulière (définie comme l'unique orbite dense dans \mathcal{N}) correspond au diagramme de Dynkin vérifiant $d(\alpha) = 2$ pour toute racine simple α , ainsi qu'au couple (\mathbf{G}, \mathbf{G}) ; l'élément 0, seul dans son orbite, est donné quant à lui par le diagramme de Dynkin nul et le couple (\mathbf{T}, \mathbf{T}) .

Un des aspects remarquables de ces théorèmes est l'indépendance du paramétrage par rapport à la caractéristique. Pour \mathcal{O} une orbite nilpotente de \mathbf{G} associée à un diagramme d , on notera $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ l'orbite nilpotente de $\mathbf{G}_{\mathbb{C}}$ associée à ce même diagramme, définissant ainsi une bijection entre les orbites nilpotentes de \mathbf{G} et celles du groupe complexe $\mathbf{G}_{\mathbb{C}}$.

(iii) Relation d'ordre entre les orbites nilpotentes. On peut définir une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des orbites nilpotentes de \mathbf{G} par :

$$\mathcal{O} \preceq \mathcal{O}' \iff \overline{\mathcal{O}} \subset \overline{\mathcal{O}'}.$$

La même construction s'applique au cadre complexe et le résultat [84, théorème 5.2] de Spaltenstein s'interprète alors comme la compatibilité du paramétrage précédent avec cet ordre :

Théorème 3.8 (Spaltenstein). *L'application $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ est croissante.*

3.1.2 Modules de Gelfand-Graev généralisés

(i) Définition et premières propriétés. La famille $(\varepsilon_{\alpha})_{\alpha \in \Phi}$ n'étant pas forcément adaptée à l'action de F induite sur \mathfrak{g} , on lui préférera une famille $(e_{\alpha})_{\alpha \in \Phi}$ vérifiant $F(e_{\alpha}) = e_{\phi(\alpha)}$ et $e_{\alpha} \in \mathfrak{u}_{\alpha}$. Avec les notations données en section 2.1.1, il suffit pour cela de choisir, pour chaque représentant $\alpha \in [\Phi/\phi]$, un élément e_{α} stable par $F^{d_{\alpha}}$ et de poser ensuite $e_{\phi^i(\alpha)} = F^i(e_{\alpha})$.

Soit \mathcal{O} une orbite nilpotente et d le diagramme de Dynkin pondéré associé. On suppose que \mathcal{O} est stable par F ; comme on l'a remarqué en 3.2, le poids des racines est constant sur chaque orbite sous ϕ . On peut donc définir une filtration de $\mathbf{U}_d = \mathbf{U}_1 \supset \mathbf{U}_2 \supset \dots$ par des groupes unipotents stables par F

$$\mathbf{U}_i = \langle \mathbf{U}_{\alpha} \mid d(\alpha) \geq i \rangle$$

dont les algèbres de Lie seront notées $\mathfrak{u}_i = \text{Lie}(\mathbf{U}_i)$. Notons au passage que les formules de Chevalley nous assurent que les quotients successifs $\mathbf{U}_i/\mathbf{U}_{i+1}$ sont des groupes abéliens, isomorphes à $\prod_{d(\alpha)=i} \mathbf{U}_{\alpha}$ via la multiplication. Le cas $i = 2$ nous intéressera tout particulièrement, et on notera $\partial : \mathbf{U}_2 \rightarrow \mathfrak{g}_d(2)$ l'application définie par

$$\partial \left(\prod_{d(\alpha) \geq 2} u_{\alpha}(\zeta_{\alpha}) \right) = \sum_{d(\alpha)=2} \zeta_{\alpha} e_{\alpha}.$$

C'est un morphisme de groupes surjectif, \mathbf{L}_d -équivariant et compatible avec l'action de F . L'ordre du produit n'a ici pas d'importance puisque ∂ se factorise par la projection $\mathbf{U}_2 \longrightarrow \mathbf{U}_2/\mathbf{U}_3$.

En suivant [56], on fixe un caractère linéaire $\chi : \mathbb{F}_{q^\delta}^+ \longrightarrow \Lambda^\times$ de \mathbb{F}_{q^δ} et on définit, pour tout élément nilpotent $N \in \mathcal{O}^F \cap \mathfrak{u}_2$, un caractère linéaire ψ_N de U_2 par :

$$\forall x \in U_2 \quad \psi_N(x) = \chi(\kappa({}^{\dot{w}_0}N, \partial(x))).$$

où κ est la forme de Killing de \mathfrak{g} et \dot{w}_0 un relevé de w_0 dans $N_G(\mathbf{T})$. Notons que puisque ρ est supposé très bon, la restriction de κ à $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est non-dégénérée.

Remarque 3.9. En décomposant $N = \sum_{d(\alpha) \geq 2} \eta_\alpha e_\alpha$ sur la base de Chevalley et en posant $c_\alpha = \kappa({}^{\dot{w}_0}e_\alpha, e_\alpha)$, on peut écrire la formule précédente en extension :

$$\psi_N\left(\prod_{d(\alpha) \geq 2} u_\alpha(x_\alpha)\right) = \chi\left(\sum_{d(\alpha)=2} c_\alpha \eta_{w_0(-\alpha)} x_\alpha\right).$$

Sous cette forme, il est clair que pour toute racine α de poids 2, la restriction de ψ_N à V_α est triviale si et seulement si la composante de N sur $e_{w_0(-\alpha)}$ est nulle. On peut aussi remarquer que ψ_N ne dépend que de la classe de N dans $\mathfrak{u}_2/\mathfrak{u}_3$.

Pour finir, Kawanaka montre qu'il existe un sous-groupe unipotent stable par F intermédiaire entre \mathbf{U}_1 et \mathbf{U}_2 , noté $\mathbf{U}_{1,5}$, vérifiant $[U_{1,5} : U_2] = [U_1 : U_{1,5}]$, ainsi qu'une extension $\tilde{\psi}_N$ de ψ_N en un caractère linéaire de $U_{1,5}$. Le module de Gelfand-Graev généralisé associé à N est alors défini par

$$\Gamma_N = \text{Ind}_{U_{1,5}}^G \Lambda_N$$

où on a noté Λ_N le module Λ sur lequel $U_{1,5}$ agit par le caractère $\tilde{\psi}_N$

Proposition 3.10. *Le module Γ_N est un ΛG -module projectif dont le caractère γ_N est donné par*

$$[\Gamma_N] = \frac{1}{[U_2 : U_1]^{1/2}} \text{Ind}_{U_2}^G \psi_N.$$

À isomorphisme près, ce module ne dépend pas de la classe de G -conjugaison de N .

Démonstration. Une preuve partielle de ce résultat est donnée dans [56] ; il reste à montrer que si N et N' sont deux éléments de $\mathcal{O}^F \cap \mathfrak{u}_2$ rationnellement conjugués, alors les caractères ψ_N et $\psi_{N'}$ sont aussi conjugués. Par le théorème 3.1, N et N' sont aussi dans la même \mathbf{P}_d -orbite et $C_G(N) \subset \mathbf{P}_d$; on en déduit qu'ils sont en fait conjugués par un élément $z \in P_d$. Décomposons cet élément en $z = um$, avec $u \in U_d$ et $m \in L_d$. Alors

$$\psi_{z \cdot N} = ({}^{\dot{w}_0}m) \cdot \psi_N. \quad (3.11)$$

En effet, le groupe \mathbf{U}_d agit trivialement sur $\mathfrak{u}_2/\mathfrak{u}_3$, et les caractères $\psi_{z \cdot N}$ et $\psi_{m \cdot N}$ sont donc égaux. En utilisant les compatibilités de κ et ∂ avec l'action de \mathbf{L}_d , on trouve alors, pour tout élément x de U_2

$$\begin{aligned}\psi_{m \cdot N}(x) &= \chi(\kappa({}^{w_0}(m \cdot N), \partial(x))) = \chi(\kappa({}^{w_0}N, ({}^{w_0}m^{-1}) \cdot \partial(x))) \\ &= \chi(\kappa({}^{w_0}N, \partial(({}^{w_0}m^{-1}) \cdot x))) = \psi_N(({}^{w_0}m^{-1}) \cdot x)\end{aligned}$$

ce qui traduit exactement l'équation 3.11.

Enfin, Γ_N est bien projectif puisqu'il est l'induit du module Λ_N qui est lui aussi projectif (ℓ ne divisant pas l'ordre de $U_{1,5}$). Sa classe d'isomorphisme est donc déterminée par son caractère. \square

D'après la remarque 3.2, chaque élément nilpotent de \mathcal{O} stable par F est rationnellement conjugué à un élément de $\mathcal{O}^F \cap \mathfrak{u}_2$. La proposition précédente nous assure donc que Γ_N est bien défini pour n'importe quel élément de \mathcal{N}^F .

Exemple 3.12. Si \mathcal{O} est l'orbite régulière, alors $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_{1,5} = \mathbf{U}_2 = \mathbf{U}$; pour tout élément N de $\mathcal{O}^F \cap \mathfrak{u}_2$, le caractère $\tilde{\psi}_N$ est donc un caractère linéaire de U , trivial sur $D(\mathbf{U})^F$ (puisque ici $D(\mathbf{U}) = \mathbf{U}_3$). De plus, N étant régulier, ses composantes sur les vecteurs e_α pour toute racine simple α sont non nulles. Par la remarque 3.9, on en déduit que $\tilde{\psi}_N$ est un caractère régulier de U . Le module $\Gamma_N = \text{Ind}_U^G \Lambda_N$ associé est alors un *module de Gelfand-Graev* usuel.

Si \mathcal{O} est réduit à zéro, on a $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_{1,5} = \mathbf{U}_2 = \{1\}$, et $\Gamma_0 = \text{Ind}_1^G \Lambda = \Lambda G$ est la représentation régulière de G .

(ii) Décomposition de γ_N sur les caractères unipotents. Rappelons qu'à chaque caractère unipotent irréductible ρ de G on peut associer une orbite nilpotente spéciale $\mathcal{O}(\rho)$ définie comme l'unique orbite vérifiant les deux conditions suivantes (voir [65, section 11]) :

- la représentation λ de W associée au système local $(\mathcal{O}(\rho), 1)$ par la correspondance de Springer est une représentation spéciale (autrement dit $\mathcal{O}(\rho)$ est une orbite spéciale) ;
- le caractère unipotent associé à $\lambda \otimes \text{sgn}$ est dans la même famille que ρ .

L'application $\rho \mapsto \mathcal{O}(\rho)$ permet de traduire certaines propriétés de la matrice de passage entre les caractères unipotents et les caractères de Gelfand-Graev généralisés [65, théorème 11.2] :

Théorème 3.13 (Lusztig). *Soit $N \in \mathcal{N}^F$ un élément nilpotent, \mathcal{O} l'orbite nilpotente associée et $\rho \in \text{Irr } G$ un caractère unipotent de G . Alors*

- (i) si $\dim \mathcal{O}(\rho) \leq \dim \mathcal{O}$ avec $\mathcal{O}(\rho) \neq \mathcal{O}$, la multiplicité de ρ dans γ_N est nulle ;
- (ii) si $\mathcal{O}(\rho) = \mathcal{O}$, la multiplicité de ρ dans γ_N est un entier borné par $|W|^2$;
- (iii) ρ étant fixé, il existe $N' \in \mathcal{O}(\rho)^F$ tel que $\langle \gamma_{N'} ; \rho \rangle \neq 0$.

Autrement dit, la projection d'un caractère de Gelfand-Graev généralisé γ_N sur l'espace des caractères unipotents ne fait apparaître que des caractères associés à des orbites de dimensions supérieures à celle de $\mathbf{G} \cdot N$. De plus, si $\mathbf{G} \cdot N$ est spéciale, les caractères unipotents associés apparaissent avec une « petite » multiplicité.

Exemple 3.14. Si N est un élément nilpotent régulier, le caractère de Gelfand-Graev généralisé γ_N est un caractère de Gelfand-Graev usuel. L'orbite nilpotente $\mathcal{O}_{\text{rég}} = \mathbf{G} \cdot N$ est spéciale, et le seul caractère unipotent associé à cette orbite est le caractère de Steinberg St_G . Il est donc le seul caractère unipotent intervenant dans γ_N et il apparaît avec multiplicité 1.

Exemple 3.15. Pour $\mathbf{G} = \text{Sp}_4(\mathbb{F})$ muni de sa \mathbb{F}_q -structure standard, il y a trois orbites spéciales. Les trois familles de caractères unipotents de G associées sont $\{\text{St}_G\}$, $\{\rho_\theta, \rho_{\theta_\varepsilon}, \rho_r, \theta_{10}\}$ et $\{1_G\}$ (voir l'annexe A.2). Comme on l'a vu au cours de l'exemple 3.3, la classe nilpotente sous-régulière se scinde en deux classes rationnelles $\mathcal{O}^F = G \cdot N \cup G \cdot N'$. Les projections des caractères de Gelfand-Graev généralisés correspondants sur l'espace $\mathcal{KE}(G, 1)$ engendré par les caractères unipotents s'écrivent

$$\pi(\gamma_N) = \rho_\theta + \rho_r + q\text{St}_G \quad \text{et} \quad \pi(\gamma_{N'}) = \rho_{\theta_\varepsilon} + \theta_{10} + q\text{St}_G$$

en vertu des formules données en annexe.

3.1.3 Algèbre d'endomorphismes

Cette dernière section est consacrée à l'étude de certaines propriétés de l'algèbre des endomorphismes du module de Gelfand-Graev généralisé que l'on désignera par $W_N = \text{End}_{\Lambda G}(\Gamma_N)$.

Le point de départ est le suivant : si $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est une algèbre de Lie semi-simple complexe et N un élément nilpotent de cette algèbre, il existe un $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ -module \mathfrak{q}_N , construit de manière analogue aux G -modules définis dans la section précédente. L'algèbre d'endomorphismes $\mathfrak{W}_N = \text{End}_{U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})}(\mathfrak{q}_N)$ de ce module est appelée *W-algèbre de type fini* [39]. Elle admet une structure de Poisson, ainsi qu'une filtration particulière pour laquelle l'algèbre graduée est isomorphe à l'algèbre des fonctions sur la *tranche de Slodowy* associée à N . Plus précisément, si (N, N', H) est un \mathfrak{sl}_2 -triplet contenant N , et $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(N')$ le centralisateur de N' pour l'action adjointe de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, on dispose d'un isomorphisme d'algèbres de Poisson

$$\text{gr } \mathfrak{W}_N \simeq \mathbb{C}[N + \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(N')]. \quad (3.16)$$

En ce sens, l'algèbre \mathfrak{W}_N est une quantification de la tranche de Slodowy.

Si l'on revient aux modules de Gelfand-Graev généralisés de G , on peut observer que pour les deux cas particuliers étudiés dans l'exemple 3.12, l'algèbre W_N est libre de rang fini sur Λ et $\text{rg}_{\Lambda} W_N$ est très proche de $|C_G(N)|$. En effet :

- si $N = 0$, alors $W_N = \Lambda G$ est bien de dimension $|G| = |C_G(0)|$;
- si N est un élément régulier, alors le rang de W_N sur Λ est égal au nombre de classes rationnelles d'éléments semi-simples $s \in (\mathbf{G}^*)^F$. Dans le cas où le centre de \mathbf{G} est connexe, ce nombre vaut $(Z(\mathbf{G})^\circ)^F q^r$, avec r le rang semi-simple de \mathbf{G} ; c'est aussi exactement l'ordre du groupe $C_G(N)$ (voir par exemple [33, section 14]).

Ces deux égalités suggèrent l'existence d'un isomorphisme analogue à 3.16. En étudiant plus précisément la dimension des algèbres W_N , on verra qu'une solution à ce problème, si elle existe, n'est pas si évidente.

(i) L'orbite minimale. Pour simplifier, on suppose dans cette sous-section que (\mathbf{G}, F) est un groupe quasi-simple déployé et de type adjoint. En particulier, tous les entiers q_α sont ici égaux à q . Puisque W est irréductible, il existe une unique orbite nilpotente non nulle de dimension minimale \mathcal{O}_{\min} appelée *orbite nilpotente minimale*. Elle s'identifie à l'orbite du vecteur e_{α_0} associé à la plus longue racine α_0 de Φ . Pour déterminer le diagramme de Dynkin pondéré correspondant, on remarque tout d'abord que le sous-groupe de Borel \mathbf{B} stabilise la droite u_{α_0} en vertu des formules de Chevalley. Par conséquent, le normalisateur $N_{\mathbf{G}}(u_{\alpha_0})$ de cette droite est un sous-groupe parabolique standard $\mathbf{P}_I = \mathbf{B}W_I\mathbf{B}$ pour un certain $I \subset \Delta$, explicité par exemple dans [54]. On vérifie alors facilement que

$$W_I = C_W(\alpha_0) = \{w \in W \mid w(\alpha_0) = \alpha_0\}.$$

Le diagramme d associé à \mathcal{O}_{\min} est alors défini sur la base Δ par

$$d(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \in I; \\ 0 & \text{si } \alpha \in \Delta \setminus I; \end{cases}$$

et les sous-groupes unipotents qu'il définit sont de la forme $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_d = R_u(\mathbf{P}_I)$ et $\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_{\alpha_0}$. On en déduit que $\mathcal{O}_{\min}^F \cap u_2 = u_{\alpha_0}(\mathbb{F}_q^\times)$, ce qui nous permet de choisir N égal à e_{α_0} sans restreindre la généralité de notre étude.

Avec ces notations, on peut maintenant calculer la dimension de W_N , donnée par le produit scalaire $\langle \gamma_N; \gamma_N \rangle$. En appliquant la formule de Mackey et la description de γ_N donnée à la proposition 3.10, cette quantité s'écrit :

$$\langle \gamma_N; \gamma_N \rangle = \frac{1}{[U_1 : U_2]} \sum_{g \in U_2 \backslash G / U_2} \langle \text{Res}_{U_2 \cap^g U_2}^{U_2} \psi_N; \text{Res}_{U_2 \cap^g U_2}^{g \cdot U_2} (g \cdot \psi_N) \rangle. \quad (3.17)$$

Puisque \mathbf{P}_I est aussi égal à $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{U}_{\alpha_0})$, l'intersection $U_2 \cap^g U_2$ est triviale dès que $g \notin P_I$, et dans ce cas les produits scalaires des restrictions (qui sont triviales) valent 1. De plus, $U_2 \times (U_2)^{\text{op}}$ agit librement sur $G \setminus P_I$ et on obtient ainsi

$$\sum_{g \in U_2 \backslash (G \setminus P_I) / U_2} \langle \text{Res}_{U_2 \cap^g U_2}^{U_2} \psi_N; \text{Res}_{U_2 \cap^g U_2}^{g \cdot U_2} (g \cdot \psi_N) \rangle = \frac{|G| - |P_I|}{|U_2|^2}.$$

Reste à calculer la contribution de P_I : puisque W_I agit trivialement sur α_0 , on a $U_2 \backslash P_I / U_2 = U_2 \backslash P_I$. De plus, pour $g \in P_I$ on vérifie facilement (en utilisant par exemple la description de la remarque 3.9) que $\psi_N = g \cdot \psi_N$ si et seulement si $g \in C_{P_I}(N)$. On trouve donc

$$\sum_{g \in U_2 \backslash P_I / U_2} \langle \text{Res}_{U_2 \cap^g U_2}^{U_2} \psi_N; \text{Res}_{U_2 \cap^g U_2}^{g \cdot U_2} (g \cdot \psi_N) \rangle = |U_2 \backslash C_{P_I}(N)| = \frac{|C_G(N)|}{|U_2|}$$

si bien que $\langle \gamma_N; \gamma_N \rangle = \frac{1}{|U_2|^2 [U_1 : U_2]} (|G| - |P_I| + |U_2| |C_G(N)|)$.

Ici, on peut décrire explicitement le centralisateur de N : l'action d'un élément ρ de \mathbf{P}_I sur N se fait par multiplication par un scalaire $\tilde{\alpha}_0(\rho)$ où $\tilde{\alpha}_0$ est une extension triviale à \mathbf{P}_I du caractère α_0 de \mathbf{T} . On a donc $C_G(N) = (\text{Ker } \tilde{\alpha}_0)^F$. Puisque \mathbf{G} est de type adjoint, le groupe $X(\mathbf{T})/\mathbb{Z}\alpha_0 = \mathbb{Z}\Phi/\mathbb{Z}\alpha_0$ est sans torsion, et ainsi $\text{Ker } \alpha_0$ est un sous-groupe connexe de \mathbf{T} . Par le théorème de Lang, on en déduit que la restriction de α_0 à \mathbf{T}^F est une application surjective de \mathbf{T}^F vers \mathbb{F}_q^\times , ce qui donne $|C_G(N)| = |P_I|/(q_{\alpha_0} - 1) = |P_I|/(|U_2| - 1)$ et permet d'améliorer l'égalité précédente en

$$\langle \gamma_N; \gamma_N \rangle = \frac{1}{|U_2|^2 [U_1 : U_2]} (|G| + |C_G(N)|).$$

On peut finalement la réécrire en

Proposition 3.18. *Soit (\mathbf{G}, F) un groupe quasi-simple déployé de type adjoint. Si \mathcal{O}_{\min} est l'orbite nilpotente minimale, et N un élément stable par F de cette orbite, on a*

$$\dim_K W_N = \frac{1}{|U_1||U_2|} |\overline{\mathcal{O}}_{\min}^F| |C_G(N)| \quad (3.19)$$

avec $\overline{\mathcal{O}}_{\min} = \mathcal{O}_{\min} \cup \{0\}$.

L'avantage de cette formulation est qu'elle reste vraie en remplaçant \mathcal{O}_{\min} par les orbites $\{0\}$ ou $\mathcal{O}_{\text{rég}}$ (en utilisant par exemple [33, corollaire 9.5]). On observe aussi que les quantités $|U_1||U_2|$ et $|\mathcal{O}|$ sont de même ordre de grandeur par la remarque 3.4.

Remarque 3.20. L'équation 3.19 n'est malheureusement pas vérifiée pour un ensemble d'orbites plus large. Par exemple, pour l'orbite nilpotente de $\text{PGL}_4(\mathbb{F})$ associée à la partition $[2, 2]$, on a

$$\frac{\dim_K W_N}{|C_G(N)|} = \frac{1}{q^5} (q^5 - q^2 + 1)$$

alors que $|\overline{\mathcal{O}}^F| = q^2(q^6 + q^2 - 1)$.

On va néanmoins donner deux généralisations partielles de cette formule dans les paragraphes suivants.

(ii) Dimension asymptotique. On calcule maintenant l'ordre de grandeur de la dimension de l'algèbre d'endomorphismes de Γ_N et on s'assure ainsi qu'il est le même que celui de l'ordre du centralisateur de N , comme le suggère la formule 3.19. Pour fixer les notations, on dira que deux fonctions f et g sont de même ordre de grandeur si $f = O(g)$ et $g = O(f)$. On notera alors $f = \Theta(g)$. On se placera encore sous l'hypothèse où le groupe (\mathbf{G}, F) est déployé ; les quantités calculées ici sont alors des fonctions de q et seront considérées comme telles.

D'après le théorème 3.1, la dimension du centralisateur de N est donnée par :

$$\dim C_G(N) = \dim \mathbf{P}_d - \dim u_2 = \dim \mathbf{G} - \dim \mathbf{U}_1 - \dim \mathbf{U}_2$$

D'autre part, la formule 3.17 permet d'obtenir l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{[U_1 : U_2]} |U_2 \backslash P_d w_0 P_d / U_2| \leq \dim_K W_N \leq \frac{1}{[U_1 : U_2]} |U_2 \backslash G / U_2|.$$

Puisque $U_2 \cap {}^w U_2 = 1$, on trouve $|U_2 \backslash P_d w_0 P_d / U_2| = q^{\dim G - 2 \dim U_2}$ et on en déduit la proposition suivante :

Proposition 3.21. *Si (\mathbf{G}, F) est supposé déployé, la dimension de W_N et l'ordre du centralisateur $C_G(N)$ sont de même ordre de grandeur, égal à $q^{\dim \mathbf{G} - \dim \mathcal{O}}$, ce qui s'écrit*

$$\dim_K W_N = \Theta(|C_G(N)|) = \Theta(q^{\dim \mathbf{G} - \dim \mathcal{O}}).$$

(iii) **Dimension de W_N et ordre de $|C_G(N)|$.** Toujours dans l'optique de généraliser partiellement la formule 3.19 aux autres orbites nilpotentes, on montre le résultat suivant :

Proposition 3.22. *Pour \mathcal{O} et une orbite nilpotente stable par F et N un élément de \mathcal{O}^F , il existe un entier $n_{N, \mathbf{G}, F} \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\dim_K W_N = \frac{1}{|U_1| |U_2|} |C_G(N)| n_{N, \mathbf{G}, F}.$$

Démonstration. Posons $\varphi_N = \text{Ind}_{U_2}^{P_d} \psi_N$ et décomposons le caractère de Gelfand-Graev généralisé en $\gamma_N = [U_1 : U_2]^{-1/2} \text{Ind}_{P_d}^G \varphi_N$. La formule de Mackey nous donne alors

$$\langle \gamma_N ; \gamma_N \rangle = \frac{1}{[U_1 : U_2]} \sum_{w \in W_d \backslash W / W_d} \langle \text{Res}_{P_d \cap {}^w P_d}^{P_d} \varphi_N ; \text{Res}_{P_d \cap {}^w P_d}^{P_d} (w \cdot \varphi_N) \rangle.$$

Puisque P_d normalise U_2 , les caractères induits φ_N se calculent facilement : ils sont nuls en dehors de U_2 et valent, pour $x \in U_2$:

$$\varphi_N(x) = \sum_{y \in P_d} \psi_N(x^y) = \sum_{y \in P_d} (y \cdot \psi_N)(x).$$

Afin de simplifier les notations, on mentionnera les restrictions en indice du produit scalaire seulement. On a donc, pour tout $w \in W$,

$$\langle \varphi_N ; w \cdot \varphi_N \rangle_{P_d \cap {}^w P_d} = \frac{|U_2 \cap {}^w U_2|}{|P_d \cap {}^w P_d|} \sum_{y, z \in P_d} \langle y \cdot \psi_N ; w z \cdot \psi_N \rangle_{U_2 \cap {}^w U_2}.$$

Comme on l'a vu au cours de la proposition 3.10, l'action de U_d sur ψ_N est triviale, et celle de L_d s'effectue sur l'élément N , après conjugaison par w_0 . L'action d'un élément $y = mu \in P$ se traduit donc de la façon suivante :

$$y \cdot \psi_N = m \cdot \psi_N = \psi_{(w_0 m) \cdot N}$$

et on en déduit que

$$\langle \varphi_N ; w \cdot \varphi_N \rangle_{P_d \cap {}^w P_d} = \frac{|U_2 \cap {}^w U_2|}{|P_d \cap {}^w P_d|} |C_G(N)| \sum_{\substack{z \in P_d \\ N' \in P_d \cdot N}} \langle \psi_{N'} ; w z \cdot \psi_N \rangle_{U_2 \cap {}^w U_2}.$$

Le même raisonnement montre que la fonction $z \mapsto \sum_{N' \in P_d \cdot N} \langle \psi_{N'} ; wz \cdot \psi_N \rangle$ est invariante par multiplication à gauche par un élément de $P_d \cap P_d^w$, et ainsi

$$\langle \varphi_N ; w \cdot \varphi_N \rangle_{P_d \cap^w P_d} = |U_2 \cap^w U_2| |C_G(N)| \sum_{\substack{z \in P_d \cap P_d^w \setminus P_d \\ N' \in P_d \cdot N}} \langle \psi_{N'} ; wz \cdot \psi_N \rangle_{U_2 \cap^w U_2}$$

ce qui prouve que le quotient $\langle \text{Res}_{P_d \cap^w P_d}^{P_d} \varphi_N ; \text{Res}_{P_d \cap^w P_d}^{w P_d} (w \cdot \varphi_N) \rangle / |C_G(N)|$ est un entier positif et termine la preuve de la proposition. \square

Remarque 3.23. Les calculs explicites de la dimension de W_N effectués dans des petits groupes suggèrent que l'entier $n_{N, \mathbf{G}, F}$ est en fait générique, c'est-à-dire polynomial en les variables $(q_\alpha)_{\alpha \in [\Delta/\phi]}$.

3.2 Modules de Gelfand-Graev généralisés dans la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig

On va maintenant pouvoir entrer dans le vif du sujet, à savoir étudier le lien entre la cohomologie de la variété $Y(\dot{w})$ et les modules de Gelfand-Graev généralisés Γ_N . Vu la nature de ces objets, ce lien sera représenté par le complexe

$$\text{RHom}_{\Lambda G}(\Gamma_N, \text{R}\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda)) \in D^b(\Lambda G\text{-Mod}).$$

Comme dans le chapitre précédent, on va utiliser la décomposition de la variété de Deligne-Lusztig $Y(\dot{w})$ en pièces, et espérer ainsi ramener le problème au calcul des morphismes entre Γ_N et la cohomologie de $Y_x(\dot{w})$ pour chaque élément x de W . Il faut cependant noter que les sous-variétés $Y_x(\dot{w})$ ne sont pas stables par l'action de G en général, mais seulement par U ; puisque les modules Γ_N sont définis à partir de ce sous-groupe unipotent, cela ne posera pas de problème en pratique.

Dans une première section, on appliquera les résultats de la section 2.3.2 afin de construire explicitement le quotient de chaque pièce par le groupe unipotent U_3 associé à N . Grâce à cette description, on sera en mesure de prolonger les actions de certains groupes à un paramètre sur $Y_x(\dot{w})$ à un groupe connexe. Enfin, la traduction cohomologique de ce résultat donnera un critère sur x permettant de dire si les morphismes qui nous intéressent peuvent être non triviaux (voir corollaire 3.25).

3.2.1 Expression du quotient de $\tilde{Y}_x(\dot{w})$ par U_3

Soit \mathcal{O} une orbite nilpotente de \mathbf{G} stable par F , et d le diagramme de Dynkin pondéré associé. On va se concentrer sur un groupe unipotent particulier dans la filtration (\mathbf{U}_i) définie par d : il s'agit du groupe \mathbf{U}_3 , engendré par les sous-groupes à un paramètre \mathbf{U}_α pour $d(\alpha) \geq 3$. Par les formules de Chevalley et la linéarité de d , c'est un sous-groupe distingué de \mathbf{B} et on notera $\pi_3 : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{U}_3 \backslash \mathbf{B}$ le morphisme quotient. Il est de plus stable par F , si bien que par la proposition 2.29,

l'application $\varphi : b \in \mathbf{B} \mapsto (b^{-1}F(b), \pi_3(b)) \in \mathbf{B} \times (\mathbf{U}_3 \backslash \mathbf{B})$ induit l'isomorphisme B -équivariant de variétés suivant :

$$U_3 \backslash \mathbf{B} \simeq \{(\bar{b}, h) \in \mathbf{B} \times (\mathbf{U}_3 \backslash \mathbf{B}) \mid \pi_3(\bar{b}) = h^{-1}F(h)\}.$$

Si x et w sont deux éléments du groupe de Weyl, on dispose d'un fibré en espaces affines $\tilde{Y}_x(\dot{w})$ au dessus de la pièce $Y_x(\dot{w})$, défini en section 2.4.1, et pour lequel la restriction de cet isomorphisme donne :

$$U_3 \backslash \tilde{Y}_x(\dot{w}) \simeq \{(\bar{b}, h) \in \mathbf{B} \times (\mathbf{U}_3 \backslash \mathbf{B}) \mid \pi_3(\bar{b}) = h^{-1}F(h) \text{ et } \bar{b} \in x(\mathbf{U}\dot{w}\mathbf{U})F(x)^{-1}\}.$$

Rappelons qu'avec cette identification, un élément de U agit par l'intermédiaire de sa classe dans $\mathbf{U}_3 \backslash \mathbf{B}$ sur l'élément h .

3.2.2 Sur certaines composantes isotypiques de la cohomologie des pièces $Y_x(\dot{w})$

Fixons maintenant un élément nilpotent $N \in \mathcal{O}^F \cap \mathfrak{u}_2$. Il définit un module de Gelfand-Graev généralisé qui s'écrit $\Gamma_N = \text{Ind}_{U_{1,5}}^G \Lambda_N$. On cherche alors à déterminer le complexe

$$\text{RHom}_{\Lambda_G}^\bullet(\Gamma_N, \text{R}\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda))$$

afin d'obtenir des informations précises sur la contribution de Γ_N dans la cohomologie de la variété de Deligne-Lusztig $Y(\dot{w})$. Par la formule de réciprocity de Frobenius, ce dernier est quasi-isomorphe aux complexes

$$\text{RHom}_{\Lambda_{U_{1,5}}}^\bullet(\Lambda_N, \text{R}\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda)) \simeq e_N \text{R}\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda)$$

où e_N désigne l'idempotent de $\Lambda_{U_{1,5}}$ associé au caractère linéaire $\tilde{\psi}_N$. On va donner dans cette section des conditions sur x pour que la contribution de la pièce associée à x , représentée par le complexe $e_N \text{R}\Gamma_c(Y_x(\dot{w}), \Lambda)$, soit nulle dans la catégorie dérivée $D^b(\text{Mod-}\mathbf{T}^{wF})$.

(i) Prolongement d'actions. La description du quotient de la pièce $\tilde{Y}_x(\dot{w})$ par U_3 donnée dans la section précédente va nous permettre d'étendre l'action de certains groupes à un paramètre. Plus précisément, on montre :

Proposition 3.24. *Soit α une racine positive vérifiant les trois conditions suivantes :*

- (i) α est de poids 2 (i.e. $d(\alpha) = 2$);
- (ii) $x^{-1}(\alpha)$ est une racine positive ;
- (iii) α est maximale pour son poids, i.e. pour toute racine simple β de poids 0, on a $\alpha + \beta \notin \Phi$.

Alors l'action de V_α sur la variété quotient $U_3 \backslash \tilde{Y}_x(\dot{w})$ s'étend en une action du groupe algébrique connexe \mathbf{V}_α .

Démonstration. On utilise la description de la variété quotient $U_3 \backslash \tilde{Y}_x(\dot{w})$ donnée précédemment :

$$U_3 \backslash \tilde{Y}_x(w) \simeq \{(\bar{b}, h) \in \mathbf{B} \times (\mathbf{U}_3 \backslash \mathbf{B}) \mid \pi_3(\bar{b}) = h^{-1}F(h) \text{ et } \bar{b} \in x(\mathbf{U}\dot{w}\mathbf{U})F(x)^{-1}\}.$$

Par l'application quotient $\mathbf{U}_3 \backslash \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{T}$, tout caractère du tore \mathbf{T} s'étend de façon triviale en un caractère linéaire du groupe $\mathbf{U}_3 \backslash \mathbf{B}$. Pour α une racine simple, on notera $\tilde{\alpha} : \mathbf{U}_3 \backslash \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{G}_m$ l'extension correspondante; pour $h \in \mathbf{U}_3 \backslash \mathbf{B}$ on a alors, grâce à l'hypothèse (iii) :

$$hu_\alpha(\zeta)h^{-1} = u_\alpha(\tilde{\alpha}(h)\zeta).$$

À l'aide de cette relation, on va montrer que l'on peut définir une action du groupe connexe V_α sur la variété quotient $U_3 \backslash \tilde{Y}_x(\dot{w})$ par :

$$\forall \zeta \in \mathbb{F} \quad v_\alpha(\zeta) \cdot (\bar{b}, h) = (u_\alpha(\tilde{\alpha}(h^{-1})(\zeta^{q_\alpha} - \zeta))\bar{b}, v_\alpha(\zeta)h).$$

Il suffit de vérifier que la variété quotient est bien stable par cette action : considérons $(\bar{b}, h) \in U_3 \backslash \tilde{Y}_x(w)$ et $(\bar{b}', h') = v_\alpha(\zeta) \cdot (\bar{b}, h)$ le couple image par ζ . En utilisant la formule $v_\alpha(\zeta)^{-1}F(v_\alpha(\zeta)) = u_\alpha(\zeta^{q_\alpha} - \zeta)$ (voir section 2.3.2), on peut calculer :

$$\begin{aligned} h'^{-1}F(h') &= h^{-1}v_\alpha(\zeta)^{-1}F(v_\alpha(\zeta))F(h) \\ &= h^{-1}u_\alpha(\zeta^{q_\alpha} - \zeta)h^{-1}F(h) \\ h'^{-1}F(h') &= u_\alpha(\tilde{\alpha}(h^{-1})(\zeta^{q_\alpha} - \zeta))h^{-1}F(h) \end{aligned}$$

si bien que $\mathcal{L}_\Delta(h') = \bar{b}'_\Delta$ par définition de \bar{b}' . De plus, le sous-groupe à un paramètre \mathbf{U}_α est contenu dans ${}^x\mathbf{U}$ puisque $x^{-1}(\alpha) > 0$. Par suite $\bar{b}' \in {}^x\mathbf{U}\bar{b} \subset x(\mathbf{U}\dot{w}\mathbf{U})F(x)^{-1}$, ce qui prouve que $(\bar{b}', h') \in U_3 \backslash \tilde{Y}_x(\dot{w})$.

Pour conclure, on remarque que restreindre cette action au groupe fini V_α revient à restreindre le paramètre ζ à \mathbb{F}_{q_α} . Dans ce cas on récupère l'action naturelle de V_α qui provient de l'action de $U_3 \backslash U$ décrite précédemment. \square

Corollaire 3.25. *Pour w et x deux éléments fixés de W , on suppose qu'il existe une racine positive α telle que*

- le couple (x, α) vérifie les trois conditions de la proposition précédente ;
- la restriction de $\tilde{\psi}_N$ au groupe V_α est non-triviale.

Alors le complexe $e_N \mathrm{R}\Gamma_c(Y_x(\dot{w}), \Lambda)$ est nul dans la catégorie dérivée $D^b(\mathrm{Mod}\text{-}\mathbf{T}^{wF})$.

Démonstration. On procède comme dans la preuve du théorème 2.43 : avec les résultats énoncés dans la section 1.2.2, et le fait que l'ordre du groupe U_3 est inversible dans Λ , on peut écrire la suite suivante de quasi-isomorphismes :

$$\begin{aligned} e_N \mathrm{R}\Gamma_c(Y_x(\dot{w}), \Lambda) &\simeq e_N \mathrm{R}\Gamma_c(\tilde{Y}_x(\dot{w}), \Lambda)[2 \dim(\mathbf{U} \cap {}^x\mathbf{U})] \\ &\simeq \Lambda \otimes_{\Lambda U_3} e_N \mathrm{R}\Gamma_c(\tilde{Y}_x(\dot{w}), \Lambda)[2 \dim(\mathbf{U} \cap {}^x\mathbf{U})] \\ &\simeq e_N \mathrm{R}\Gamma_c(U_3 \backslash \tilde{Y}_x(\dot{w}), \Lambda)[2 \dim(\mathbf{U} \cap {}^x\mathbf{U})]. \end{aligned}$$

D'autre part, la proposition précédente, conjuguée avec 1.19, assure que

$$R\Gamma_c(U_3 \backslash \tilde{Y}_x(\dot{w}), \Lambda) \simeq \Lambda \otimes_{\Lambda V_\alpha} R\Gamma_c(U_3 \backslash \tilde{Y}_x(\dot{w}), \Lambda).$$

Enfin, la restriction de $\tilde{\psi}_N$ au groupe V_α étant supposée non triviale, le complexe précédent coupé par l'idempotent e_N est quasi-isomorphe à zéro. \square

Remarque 3.26. Supposons que N est un élément nilpotent régulier. Puisque pour cet élément toutes les racines simples sont de poids deux, toute racine simple α vérifiant $x^{-1}(\alpha) \in \Phi^+$ vérifie automatiquement toutes les hypothèses du corollaire précédent. On en déduit que

$$e_N R\Gamma_c(Y_x(\dot{w}), \Lambda) \simeq 0.$$

dès que x est différent de w_0 . On retrouve ainsi une partie du corollaire 2.54.

3.3 Cas particulier des modules de Gelfand-Graev

On termine ce chapitre en conjuguant les résultats précédents à ceux du chapitre 2 dans le cas particulier des modules de Gelfand-Graev usuels. Tout au long de cette partie, $N \in \mathcal{O}_{\text{rég}}^F$ désignera donc un élément nilpotent régulier et Γ_N le module de Gelfand-Graev correspondant. Rappelons que dès que le centre de \mathbf{G} est connexe, ce module ne dépend pas de N car alors tous les éléments nilpotents réguliers stables par F sont rationnellement conjugués [33, corollaire 14.25].

Les hypothèses sur ρ énoncées dans l'introduction sont superflues si l'on s'intéresse seulement aux modules de Gelfand-Graev ; dans toute cette partie, ρ sera donc à nouveau un nombre premier quelconque.

3.3.1 Conjecture de Bonnafé-Rouquier

Les sous-groupes unipotents associés à un élément régulier N sont donnés par $\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}$ et $\mathbf{U}_3 = D(\mathbf{U})$. De plus, on peut toujours choisir N de sorte que ses composantes sur les vecteurs e_α associés aux racines simples soit non nulles. Grâce à la remarque 3.9, on en déduit que le caractère $\tilde{\psi}_N$ de U associé à l'élément nilpotent N est régulier (au sens de 2.45) dès que N l'est. En particulier, le corollaire 2.54 s'applique et se traduit par :

Théorème 3.27. *Soit w un élément quelconque de W et Γ un module de Gelfand-Graev de G . Alors*

$$\text{RHom}_{\Lambda_G}^\bullet(\Gamma, R\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda)) \simeq \Lambda \mathbf{T}^{wF}[-\ell(w)]$$

dans la catégorie dérivée $D^b(\text{Mod-}\Lambda \mathbf{T}^{wF})$.

Notons que le module $\Lambda \mathbf{T}^{wF}$ n'est rien d'autre que l'unique module de Gelfand-Graev du groupe \mathbf{T}^{wF} . Aussi dans le langage des foncteurs d'induction et restriction de Deligne-Lusztig modulaires introduits par Bonnafé et Rouquier [6], le théorème traduit le fait que la restriction d'un module de Gelfand-Graev à un tore quelconque est un module de Gelfand-Graev décalé. Ce résultat était auparavant démontré pour les éléments de Coxeter des sous-groupes paraboliques

de W [7, théorème 3.10]. Pour de tels éléments, très peu de cellules de Deodhar sont non vides et le théorème se démontre à partir d'une étude approfondie de la pièce maximale. C'est cette étude que nous avons adaptée dans le cas d'un élément quelconque dans le chapitre 2. Concernant les autres pièces, qui sont en général non vides, on peut utiliser les résultats de la partie 2.4 ou le corollaire 3.25.

À l'aide de ce théorème on peut retrouver de façon élémentaire plusieurs résultats connus. Premièrement, il permet de construire une version modulaire et conceptuelle du morphisme de Curtis ${}_{\kappa}\text{Cur}_w : \text{End}_{KG}(K\Gamma_{\psi}) \longrightarrow K\mathbf{T}^{wF}$ (voir [5, théorème 2.7]) :

Proposition 3.28. *Le quasi-isomorphisme*

$$\text{RHom}_{\Lambda G}^{\bullet}(\Gamma, \text{R}\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda)) \simeq \Lambda\mathbf{T}^{wF}[-\ell(w)]$$

donne lieu à un morphisme de Λ -algèbres

$$\text{End}_{\Lambda G}(\Gamma) \longrightarrow \Lambda\mathbf{T}^{wF}$$

dont le produit tensoriel par K s'identifie au morphisme de Curtis ${}_{\kappa}\text{Cur}_w$.

Au niveau des caractères ensuite (après avoir tensorisé par K), le théorème exprime le fait que les composants irréductibles d'un caractère de Gelfand-Graev – les *caractères réguliers* de G – sont concentrés dans le groupe $H_c^{\ell(w)}(Y(\dot{w}), K)$. En particulier, le caractère de Steinberg n'apparaît lui aussi qu'en degré moitié, ce qui avait été auparavant prouvé par des méthodes complètement différentes [35, proposition 3.3.15].

Enfin, la version « numérique » du théorème 3.27 est obtenue en traduisant le quasi-isomorphisme dans le groupe de Grothendieck de la catégorie $K\mathbf{T}^{wF}\text{-mod}$. En appliquant la dualité d'Alvis-Curtis, on en déduit une nouvelle méthode pour calculer les valeurs des fonctions de Green sur les éléments unipotents réguliers [29, théorème 9.16]. Rappelons que la détermination de ces valeurs est une étape essentielle pour montrer qu'un caractère de Gelfand-Graev a un unique composant irréductible dans chaque série rationnelle.

Nous verrons au chapitre 4 une véritable application modulaire de la conjecture de Bonnafé-Rouquier, permettant de contrôler la torsion dans la cohomologie de certaines variétés de Deligne-Lusztig.

3.3.2 Modules de Gelfand-Graev induits

Considérons maintenant un sous-ensemble I de Δ stable par ϕ et notons \mathbf{P}_I , \mathbf{L}_I et $\mathbf{U}_I = R_u(\mathbf{P}_I)$ les sous-groupes standard associés, de sorte que $\mathbf{P}_I = \mathbf{L}_I\mathbf{U}_I$. L'ensemble de racines I étant stable par ϕ , tous ces groupes sont stables par F ; on dispose alors d'une paire de foncteurs adjoints, appelé *foncteurs d'induction et de restriction de Harish-Chandra*, définis pour n'importe quel anneau de base \mathcal{O} parmi (K, Λ, k) :

$$\begin{aligned} R_{L_I}^G &: \mathcal{O}_{L_I}\text{-mod} \longrightarrow \mathcal{O}G\text{-mod} \\ &N \longmapsto \mathcal{O}[G/U_I] \otimes_{\mathcal{O}_{L_I}} N \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} {}^*R_{L_I}^G &: \mathcal{O}G\text{-mod} \longrightarrow \mathcal{O}_{L_I}\text{-mod} \\ &M \longmapsto M^{U_I} \end{aligned}$$

Si N_I est un élément nilpotent rationnel de l'algèbre de Lie \mathfrak{l}_I du groupe \mathbf{L}_I , alors la contribution de l'induit $R_{L_I}^G(\Gamma_{N_I})$ du module de Gelfand-Graev généralisé associé à N_I s'écrit

$$\mathrm{RHom}_{\Lambda G}^{\bullet}(R_{L_I}^G(\Gamma_{N_I}), \mathrm{R}\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda)) \simeq e_{N_I} \mathrm{R}\Gamma_c(U_I \backslash Y(\dot{w}), \Lambda)$$

en vertu de la proposition 1.17. Dans le cas où N_I est un élément nilpotent régulier de \mathfrak{l}_I , le caractère $\tilde{\varphi}_{N_I}$ s'étend naturellement en un caractère ψ_{N_I} de U , trivial sur $D(\mathbf{U})^F$ et vérifiant

$$\Delta_{\psi_{N_I}} = \{\alpha \in \Delta \mid (\psi_{N_I})|_{V_{\alpha}} \neq 1\} = I.$$

Grâce à cette observation, on peut énoncer les résultats de la partie 2.5 en termes de modules de Gelfand-Graev induits :

Proposition 3.29. *Supposons que (\mathbf{G}, F) est déployé. Soit \mathbf{L} un sous-groupe de Levi F -stable maximal de \mathbf{G} et Γ un module de Gelfand-Graev de \mathbf{L} . Alors, pour $w \in W$, la cohomologie du complexe*

$$\mathrm{RHom}_{\Lambda G}^{\bullet}(R_L^G(\Gamma), \mathrm{R}\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda))$$

est concentrée en degrés

- (i) $\{\ell(w), \ell(w) + 1\}$ si \mathbf{G} est de type A_n , \mathbf{L} de type A_{n-1} et w quelconque ou si \mathbf{G} est de type B_n (resp. C_n et D_n), \mathbf{L} de type B_{n-1} (resp. C_{n-1} et D_{n-1}) et w est une puissance d'un bon élément de Coxeter différente de w_0 (voir la remarque 2.62) ;
- (ii) $\{\ell(w), \ell(w) + 1, \ell(w) + 2\}$ si $w = w_0$ et \mathbf{G} est de type B_n (resp. C_n et D_n) et \mathbf{L} de type B_{n-1} (resp. C_{n-1} et D_{n-1}).

De telles propriétés de concentration permettent notamment de localiser certains caractères unipotents dans la cohomologie des variétés $X(\dot{w})$ et $Y(\dot{w})$. En effet, le complexe $\mathrm{RHom}_{\Lambda G}^{\bullet}(R_L^G(\Gamma), \mathrm{R}\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda))$, tensorisé par K , s'écrit simplement

$$\bigoplus_{i=\ell(w)}^{2\ell(w)} \mathrm{Hom}_{K G}(R_L^G(K\Gamma), H_c^i(Y(\dot{w}), K))[-i]$$

En particulier, les composants irréductibles du caractère induit $R_L^G(\gamma)$ de $\gamma = [K\Gamma]$ ne peuvent apparaître que dans certains groupes de cohomologie de $Y(\dot{w})$. Maintenant, pour $\chi \in \mathrm{Irr} W$, la multiplicité du caractère unipotent ρ_{χ} dans l'induit $R_L^G(\gamma)$ se calcule directement dans le groupe de Weyl :

$$\langle R_L^G(\gamma); \rho_{\chi} \rangle_G = \langle R_L^G(\mathrm{St}_{L_I}); \rho_{\chi} \rangle_G = \langle \mathrm{Ind}_{W_I}^W \mathrm{sgn}; \chi \rangle_W.$$

Dans le cas présent, ces multiplicités s'obtiennent aisément à l'aides des règles de Pieri [42, 6.1.7 et 6.1.9]. En adoptant les notations usuelles des caractères des

groupes de Weyl, données par exemple dans [42, chapitre 5] ou [21, chapitre 11], on trouve

Proposition 3.30. *Soit (\mathbf{G}, F) un groupe déployé et $w \in W$.*

- (i) *Si \mathbf{G} est de type A_n , alors le caractère unipotent associé à la partition $[2, 1^{n-1}]$ (appelé caractère sous-régulier) ne peut apparaître que dans les groupes de cohomologie ℓ -adiques*

$$H_c^{\ell(w)}(Y(\dot{w})) \text{ et } H_c^{\ell(w)+1}(Y(\dot{w})).$$

- (ii) *Si \mathbf{G} est de type B_n, C_n ou D_n , et w une puissance d'un bon élément de Coxeter (voir la remarque 2.62), alors les caractères unipotents associés aux bipartitions $([2, 1^{n-2}], \emptyset)$ et $([1^{n-1}], [1])$ ne peuvent apparaître que dans les groupes*

$$H_c^{\ell(w)}(Y(\dot{w})) \text{ et } H_c^{\ell(w)+1}(Y(\dot{w})) \text{ (et } H_c^{\ell(w)+2}(Y(\dot{w})) \text{ si } w = w_0).$$

Pour finir, on peut traduire la proposition 2.66, en accord avec [35, conjecture 3.3.26] donnant l'arrangement exact des caractères unipotents dans la cohomologie de $Y(w_0)$:

Théorème 3.31. *Soit (\mathbf{G}, F) un groupe déployé de type A_n . Pour λ une partition de $n + 1$, le caractère unipotent associé vérifie*

$$\langle \rho_\lambda; H_c^i(Y(\dot{w}_0)) \rangle_G \neq 0 \implies i \in \{\nu_{\mathbf{G}}, \nu_{\mathbf{G}} + 1, \dots, 2\nu_{\mathbf{G}} - A_\lambda\}$$

où $\ell(w_0) = \nu_{\mathbf{G}} = n(n + 1)/2$ et A_λ est le degré du degré générique associé à λ .

Démonstration. À chaque partition $\lambda = [\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_s]$ de $n + 1$ on peut associer un sous-ensemble de racines simples $I_\lambda \subset \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ défini par son complémentaire

$$\Delta \setminus I_\lambda = \{\beta_{\lambda_1}, \beta_{\lambda_1 + \lambda_2}, \dots, \beta_{\lambda_1 + \dots + \lambda_{s-1}}\}.$$

Notons \mathbf{L}_λ le sous-groupe de Levi associé, et fixons un caractère de Gelfand-Graev γ de L_λ . Si λ' est la partition conjuguée, alors la multiplicité du caractère unipotent $\rho_{\lambda'}$ dans le caractère induit se calcule par

$$\langle R_{L_\lambda}^G(\gamma); \rho_{\lambda'} \rangle_G = \langle \text{Ind}_{W_\lambda}^W \text{sgn}; \chi_{\lambda'} \rangle_W.$$

Par définition, cette dernière multiplicité vaut exactement 1. Afin de prouver le théorème, il suffit donc d'utiliser la proposition 2.66 et de montrer que

$$\nu_{\mathbf{G}} - A_{\lambda'} = \sum_{i=1}^n |(\Delta \setminus I_\lambda) \cap \{\beta_i, \dots, \beta_n\}|.$$

En arrangeant les termes de cette dernière somme selon leur valeur, on trouve facilement

$$\sum_{i=1}^n |(\Delta \setminus I_\lambda) \cap \{\beta_i, \dots, \beta_n\}| = \sum_{i=1}^s (s - i)\lambda_i = \sum_{i=1}^s \binom{\lambda'_i}{2}$$

Finalement, en utilisant par exemple [42, théorème 10.5.2], on vérifie que cette dernière quantité est exactement $a_\lambda = \nu_{\mathbf{G}} - A_{\lambda'}$. \square

Remarque 3.32. Puisque ρ_λ est l'unique caractère unipotent apparaissant à la fois dans $R_{L_\lambda}^G(\gamma)$ et $R_{L_\lambda}^G(1)$ on pourrait espérer le « coïncider » dans un groupe de cohomologie en étudiant la contribution de $R_{L_\lambda}^G(1)$ dans la cohomologie de $Y(\dot{w}_0)$. Cela revient à étudier le quotient de $Y(\dot{w}_0)$ par P_λ dans la mesure où

$$\langle R_{L_\lambda}^G(\text{Id}); H_c^\bullet(Y(\dot{w}_0)) \rangle_G = \langle \text{Id}; H_c^\bullet(Y(\dot{w}_0))^{U_\lambda} \rangle_{L_\lambda} = \dim_{\text{gr}} H_c^\bullet(Y(\dot{w}_0))^{P_\lambda}.$$

Les pièces $Y_x(\dot{w}_0)$ n'étant généralement pas stables par l'action de P_λ , on les regroupe selon la classe de x dans $W_\lambda \backslash W$. Autrement dit, on restreint la décomposition de \mathbf{G}/\mathbf{U} en \mathbf{P}_λ -orbites à la variété $Y(\dot{w}_0)$ de manière à obtenir

$$Y(\dot{w}_0) = \bigsqcup_{x \in [W_\lambda \backslash W]} \{p_x \cdot \mathbf{U} \in \mathbf{P}_\lambda x \cdot \mathbf{U}/\mathbf{U} \mid p^{-1}F(p) \in {}^x(\mathbf{U}w_0\mathbf{U})\} = \bigsqcup_{x \in [W_\lambda \backslash W]} Z_x(\dot{w}_0).$$

Chaque sous-variété $Z_x(\dot{w}_0)$ apparaissant dans cette décomposition admet une fibration P_λ -équivariante $\tilde{Z}_x(\dot{w}_0) \rightarrow Z_x(\dot{w}_0)$ à fibres isomorphes à $\mathbf{P}_\lambda \cap {}^x\mathbf{U}$, induite naturellement par la projection $\mathbf{P}_\lambda \rightarrow \mathbf{P}_\lambda x \cdot \mathbf{U}$:

$$\tilde{Z}_x(\dot{w}_0) = \{p \in \mathbf{P}_\lambda \mid p^{-1}F(p) \in {}^x(\mathbf{U}w_0\mathbf{U})\}.$$

Pour cette dernière variété, le quotient par P_λ se calcule facilement puisque l'on a $P_\lambda \backslash \tilde{Z}_x(\dot{w}_0) \simeq {}^x(\mathbf{U}w_0\mathbf{U}) \cap \mathbf{P}_\lambda$. En reprenant la fibration précédente sur ce quotient, on trouve

$$H_c^\bullet(P_\lambda \backslash Z_x(\dot{w}_0)) \simeq H_c^\bullet(\mathbf{U}w_0 \cdot \mathbf{U} \cap (\mathbf{P}_\lambda)^x \cdot \mathbf{U}).$$

En composant les isomorphismes $\mathbf{U}w_0 \cdot \mathbf{U} \simeq \mathbf{U} \simeq \mathbf{B}w_0 \cdot \mathbf{B}$, on obtient finalement

$$H_c^\bullet(P_\lambda \backslash Z_x(\dot{w}_0)) \simeq H_c^\bullet(\mathbf{B}w_0 \cdot \mathbf{B} \cap (\mathbf{P}_\lambda)^x \cdot \mathbf{B}).$$

Ces variétés ne sont pas anodines : lorsque $\mathbf{P}_\lambda = \mathbf{B}$ on retrouve bien les cellules de Bruhat doubles apparaissant dans la décomposition de $U \backslash X(w_0)$. Dans le cas général, on peut une nouvelle fois décomposer ces dernières en

$$\mathbf{B}w_0 \cdot \mathbf{B} \cap (\mathbf{P}_\lambda)^x \cdot \mathbf{B} = \bigsqcup_{v \in W_\lambda} \mathbf{B}w_0 \cdot \mathbf{B} \cap (\mathbf{B}v\mathbf{B})^x \cdot \mathbf{B}.$$

Supposons maintenant que x est de longueur minimale dans la classe $W_\lambda x$ de telle sorte que x soit l_λ -réduit. Dans ce cas, on a $\mathbf{B}v\mathbf{B}x^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{B}vx^{-1}\mathbf{B}$ pour tout élément v de W_λ et ainsi

$$\mathbf{B}w_0 \cdot \mathbf{B} \cap (\mathbf{P}_\lambda)^x \cdot \mathbf{B} = \bigsqcup_{v \in W_\lambda} \mathbf{B}w_0 \cdot \mathbf{B} \cap \mathbf{B}^x v^x \cdot \mathbf{B}.$$

On en déduit que la cohomologie de la variété quotient $P_\lambda \backslash Y(\dot{w}_0)$ peut s'étudier à partir de la cohomologie des cellules de Curtis-Deodhar $D_\gamma(x)$ lorsque x parcourt l'ensemble des éléments l_λ -réduits de W et γ l'ensemble des sous-expression x -distinguées de w_0 dont le produit appartient à $(W_\lambda)^x$. On peut ainsi obtenir un degré m_λ en dessous duquel la cohomologie de toutes les cellules est nulle. Malheureusement, les calculs explicites effectués sur des groupes de petit rang montrent qu'en général $m_\lambda < 2\nu_{\mathbf{G}} - A_\lambda$.

Cohomologie de la variété de Deligne-Lusztig associée à un élément de Coxeter

Contexte

Jusqu'à présent, on s'est intéressé à une partie seulement des représentations modulaires intervenant dans la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig, à savoir les modules de Gelfand-Graev et leurs induits. Les résultats obtenus précédemment n'utilisaient que très peu de renseignements sur la théorie des représentations ordinaires des groupes réductifs finis. En ce sens, le point de vue adopté dans ce chapitre est différent : on se concentre sur le cas particulier des variétés associées à un élément de Coxeter, pour lesquelles on connaît explicitement les groupes de cohomologie ℓ -adiques grâce aux travaux de Lusztig [62]. En conjuguant ces résultats et ceux du chapitre 1, on espère retrouver ainsi un représentant explicite du complexe $R\Gamma_c(Y, \Lambda)$, ou du moins de la partie unipotente de ce complexe, en vue d'établir l'équivalence splendide prédite par la version géométrique de la conjecture de Broué [15].

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : la première partie rappelle les travaux de Broué-Malle-Michel sur les blocs des groupes réductifs finis, et leur lien avec la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig. Le cas particulier du ℓ -bloc principal b , lorsque q est d'ordre h (le nombre de Coxeter) modulo ℓ , constituera l'objet d'étude de ce chapitre, et plus particulièrement de la deuxième partie. Le pendant géométrique de ce bloc étant incarné par la variété de Deligne-Lusztig associée à un élément de Coxeter c , on énoncera les principaux résultats de [62] concernant la cohomologie à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ de cette variété, ainsi qu'une conjecture de Hiss-Lübeck-Malle donnant l'arbre de Brauer associé au bloc principal à partir de cette description. À l'aide des résultats de Lusztig et des méthodes introduites au chapitre 1, on donnera, dans une troisième partie, une preuve partielle de cette conjecture, conditionnée par l'hypothèse suivante :

- (W) Pour λ une valeur propre de F^δ sur le groupe de cohomologie moitié $H_c^i(X(c), K)$, les (λ) -espaces propres généralisés de F^δ sur $bH_c^i(Y(\dot{c}), \Lambda)$ sont sans torsion.

Le but de la quatrième partie de ce chapitre sera de donner de nombreux résultats partiels plaidant en faveur de cette hypothèse, ainsi que de la suivante :

- (S) Les Λ -modules $bH_c^i(Y(\dot{c}), \Lambda)$ sont sans torsion.

dont on montrera qu'elle est vérifiée pour certains groupes classiques. Sous cette dernière hypothèse, on sera en mesure, dans une dernière partie, d'exprimer le complexe $bR\Gamma_c(Y(\dot{c}), \Lambda)$ sous la forme d'un complexe de Rickard [75], et on en déduira l'équivalence splendide prédite par la conjecture de Broué. Deux conséquences importantes de cette équivalence seront étudiées : le plongement planaire de l'arbre de Brauer associé au bloc principal d'une part, et l'unitriangularité de la matrice de décomposition d'autre part. Pour ce dernier point, on utilisera le formalisme d'équivalence perverse introduit par Chuang-Rouquier dans [22].

4.1 Blocs et variétés de Deligne-Lusztig

Dans la théorie des représentations ordinaires des groupes réductifs finis, les caractères irréductibles se regroupent en séries, chacune correspondant à une classe de conjugaison (rationnelle ou géométrique) d'un élément semi-simple stable par F du groupe dual \mathbf{G}^* . Parmi celles-ci, on distingue la série associée à l'élément neutre de \mathbf{G}^* , constituée des caractères unipotents, laquelle forme en quelque sorte un modèle pour les autres. Les principaux résultats de classification [16] montrent alors que les propriétés des caractères unipotents (nombre, degré...) sont le reflet de propriétés d'objets génériques associés au squelette du groupe (\mathbf{G}, F) .

L'un des aspects remarquables de la théorie des blocs pour les groupes réductifs finis est que cette généricité se conserve au niveau des représentations modulaires. Le cadre théorique de ce phénomène étant détaillé dans [14] et [16], on se contentera d'en développer seulement deux notions importantes, qui suffiront pour comprendre l'objet d'étude de ce chapitre.

4.1.1 Blocs et séries de Lusztig

On conserve les notations du chapitre 2 : (K, Λ, k) est un système ℓ -modulaire assez grand, si bien que les algèbres kG et KG sont déployées. Le nombre premier ℓ sera toujours supposé différent de la caractéristique p de \mathbb{F} .

On fixe une paire (\mathbf{G}^*, F) en dualité avec (\mathbf{G}, F) . Pour tout élément semi-simple $s \in G_{ss}^*$ du groupe dual, on notera $\mathcal{E}(G, s)$ la série rationnelle associée. Si la partition en séries convient parfaitement à l'étude des caractères ordinaires, il est nécessaire de la modifier pour l'étude des représentations modulaires. En effet, l'ensemble $\mathcal{E}(G, s)$ n'est généralement pas une union de blocs ; pour pallier

ce problème, on peut regrouper les séries associées à des éléments semi-simples ayant la même ℓ' -partie. On définit ainsi

$$\mathcal{E}_\ell(G, s) = \bigcup_{\substack{t \in G_{ss}^* \\ t_{\ell'} = s_{\ell'}}} \mathcal{E}(G, t)$$

et on note $b_\ell(G, s)$ l'idempotent de KG associé. L'ensemble défini ci-dessus ne dépendant que de la ℓ' -partie de s , on pourra supposer que s est d'ordre premier à ℓ . Cette fois-ci, $b_\ell(G, s)$ est bien un élément de ΛG et plus précisément

Théorème 4.1 (Broué-Michel [18], Hiss [49]). *Pour s un élément semi-simple de G^* d'ordre premier à ℓ , l'ensemble $\mathcal{E}_\ell(G, s)$ est l'union des blocs qui rencontrent la série $\mathcal{E}(G, s)$.*

Nous nous intéresserons par la suite au cas où s est l'élément neutre de G^* , c'est-à-dire à l'ensemble $\mathcal{E}_\ell(G, 1)$. Les blocs contenus dans cet ensemble seront appelés *blocs unipotents*. Par le théorème précédent, un bloc est unipotent s'il contient au moins un caractère unipotent. En particulier, le bloc principal, qui contient le caractère unipotent trivial, est unipotent.

4.1.2 Blocs unipotents et d -cuspidalité

En suivant les travaux de Broué-Malle-Michel, nous allons maintenant donner un paramétrage des blocs unipotents à l'aide des paires d -cuspidales, et relier les caractères contenus dans ces blocs à la cohomologie de certaines variétés de Deligne-Lusztig.

(i) Tores et sous-groupes de Levi d -déployés. Avec les notations de la section 2.1.1, l'endomorphisme F^δ munit \mathbf{G} d'une \mathbb{F}_{q^δ} -structure déployée. C'est d'ailleurs la plus petite puissance de F vérifiant cette propriété. Afin de simplifier l'exposé des résultats de [16], on se placera dans le cas où F est un endomorphisme de Frobenius. Cela revient à exclure les facteurs « tordus » du type ${}^2\mathbf{B}_2$, ${}^2\mathbf{F}_4$ et ${}^2\mathbf{G}_2$. Dans ce cas, la fonction q_α est constante, égale à q (qui est alors un entier).

Pour \mathbf{S} un sous-tore de \mathbf{G} stable par F , l'ordre du groupe des points fixes est donné par l'action de F sur le groupe des cocaractères $X^\vee(\mathbf{S})$, puisque l'on a :

$$|\mathbf{S}| = |\mathbf{S}^F| = |\det(F - 1 | X^\vee(\mathbf{S}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C})|.$$

Par hypothèse sur F , l'endomorphisme $q^{-1}F$ stabilise $X^\vee(\mathbf{S})$ et il est d'ordre fini. On en déduit que l'ordre du tore se décompose en un produit de polynômes cyclotomiques évalués en q :

$$|\mathbf{S}^F| = \prod_d \Phi_d(q)^{a(d)}$$

où la fonction a prend des valeurs non nulles sur un ensemble fini d'entiers positifs. Dans le cas où il existe au plus un entier d tel que $a(d) \neq 0$, on dit que \mathbf{S} est un Φ_d -tore. De façon plus intrinsèque,

Définition 4.2. Un tore \mathbf{S} de \mathbf{G} stable par F est appelé Φ_d -tore si l'endomorphisme $\Phi_d(q^{-1}F)$ est identiquement nul sur $X^\vee(\mathbf{S})$. Dans ce cas, l'ordre $|\mathbf{S}^F|$ du groupe des points fixes est une puissance de $\Phi_d(q)$.

Exemple 4.3. Le cas $d = 1$ correspond au cas usuel des tores déployés : les Φ_1 -tores sont exactement les tores sur lesquels F agit par élévation à une certaine puissance de p . Plus généralement, \mathbb{F}_{q^d} est la plus petite extension sur laquelle les Φ_d -tores se déploient. Par exemple, pour $\mathbf{G} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F})$, le groupe fini associé au tore maximal \mathbf{T}_s de type s est isomorphe à \mathbb{F}_{q+1} ; c'est donc un Φ_2 -tore, et il se déploie sur \mathbb{F}_{q^2} .

Remarque 4.4. Lorsque F est seulement une isogénie, l'endomorphisme $q^{-1}F$ est encore d'ordre fini. En revanche, il ne stabilise pas $X^\vee(\mathbf{S})$ mais seulement $X^\vee(\mathbf{S}) \otimes_{\mathbb{Z}} R$ pour une certaine extension R de \mathbb{Z} (en pratique, $R = \mathbb{Z}[\sqrt{p}^{-1}]$ pour $p = 2, 3$). On a alors besoin de remplacer les polynômes Φ_d par certains produits de polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$, étudiés par exemple dans [14].

Les polynômes cyclotomiques Φ_d interviennent non seulement dans le calcul du cardinal des tores, mais aussi plus généralement dans celui des sous-groupes de Levi, et donc de G lui-même [14]. Pour la structure des groupes réductifs finis, les polynômes cyclotomiques Φ_d se comportent, en quelque sorte, comme les nombres premiers dans la théorie des groupes finis usuels. Le résultat suivant, qui énonce un analogue du théorème de Sylow, est une autre manifestation intéressante de ce phénomène :

Théorème 4.5 (Broué-Malle). Écrivons $|G|_{p'} = \prod_d \Phi_d(q)^{a(d)}$. Alors, pour tout entier positif d , il existe un sous-tore \mathbf{S} de \mathbf{G} , stable par F et vérifiant $|\mathbf{S}^F| = \Phi_d(q)^{a(d)}$. C'est un Φ_d -tore maximal pour cette propriété, appelé Φ_d -sous-groupe de Sylow de \mathbf{G} . De plus, les Φ_d -sous-groupes de Sylow sont conjugués sous G .

Rappelons pour finir que les caractères irréductibles de G se regroupent en séries de Harish-Chandra. Celles-ci sont construites en étudiant les morphismes d'induction et de restriction associés à des sous-groupes de Levi déployés, qui sont définis comme les centralisateurs des tores déployés. Dans l'optique de généraliser cette construction, Broué, Malle et Michel ont introduit une notion naturelle de sous-groupes de Levi d -déployés :

Définition 4.6. Si d un entier strictement positif, on appellera sous-groupes de Levi d -déployés les centralisateurs des Φ_d -tores dans G . Ce sont des sous-groupes de Levi stables par F , qui sont \mathbf{G}^{F^d} -déployés, dans le sens où ce sont des compléments de Levi de sous-groupes paraboliques F^d -stables.

(ii) **d -séries de Harish-Chandra.** Rappelons que pour tout sous-groupe de Levi \mathbf{L} de \mathbf{G} stable par F , on dispose d'un morphisme de restriction de Deligne-Lusztig ${}^*R_L^G$ du groupe des caractères virtuels de G vers celui de L . En considérant uniquement des sous-groupes de Levi d -déployés, on peut définir une notion de d -cuspidalité :

Définition 4.7. Soit ρ un caractère unipotent de G , et d un entier positif. On dit que ρ est d -cuspidal si pour tout sous-groupe de Levi d -déployé propre de G , la restriction ${}^*R_L^G(\rho)$ est nulle.

Remarque 4.8. Avec la définition précédente, le cas $d = 1$ correspond effectivement à la notion usuelle de cuspidalité.

En suivant [16], on peut définir une relation sur l'ensemble des paires (\mathbf{L}, χ) formées d'un sous-groupe de Levi d -déployé \mathbf{L} et d'un caractère unipotent χ de L . Elle est donnée par :

$$(\mathbf{L}, \chi) \leq (\mathbf{M}, \eta) \iff \mathbf{L} \subset \mathbf{M} \text{ et } \langle R_L^M(\chi); \eta \rangle_M \neq 0.$$

Les propriétés de cette relation sont analogues au cas déployé, puisqu'il est montré dans [16] que :

- la relation \leq est une relation d'ordre partiel ;
- les paires (\mathbf{L}, χ) minimales pour cette relation sont exactement les paires formées d'un sous-groupe de Levi d -déployé et d'un caractère d -cuspidal de L . On les appelle les *paires d -cuspidales* ;
- deux paires d -cuspidales (\mathbf{L}, χ) et (\mathbf{M}, η) sont conjuguées sous G si et seulement si il existe un caractère unipotent ρ de \mathbf{G} tel que $(\mathbf{L}, \chi) \leq (\mathbf{G}, \rho)$ et $(\mathbf{M}, \eta) \leq (\mathbf{G}, \rho)$.

La d -série de Harish-Chandra associée à la classe de conjugaison $[\mathbf{L}, \lambda]$ d'une paire d -cuspidale est alors définie par

$$\mathcal{E}_d(G, (\mathbf{L}, \lambda)) = \{ \rho \in \mathcal{E}(G, 1) \mid (\mathbf{L}, \lambda) \leq (\mathbf{G}, \rho) \}$$

et elle vérifie
$$\mathcal{E}(G, 1) = \bigsqcup_{[\mathbf{L}, \lambda]} \mathcal{E}_d(G, (\mathbf{L}, \lambda)).$$

où l'union est indexée par l'ensemble des classes de conjugaison sous G des paires d -cuspidales.

(iii) Blocs unipotents et paires d -cuspidales. Pour pouvoir relier les ℓ -blocs unipotents aux paires d -cuspidales, on se place dans le cas où ℓ divise l'ordre de G mais pas celui de W^F . Les conséquences de cette hypothèse sont les suivantes :

- ℓ est un bon nombre premier pour \mathbf{G} ;
- ℓ ne divise ni $|Z(G)/Z(G)^\circ|^F$ ni $|Z(G^*)/Z(G^*)^\circ|^F$;
- il existe un unique entier d tel que ℓ divise $\Phi_d(q)$ (d est alors l'ordre de q modulo ℓ).

Si (\mathbf{L}, λ) est une paire d -cuspidale, on peut montrer que les composants irréductibles du caractère virtuel $R_L^G(\lambda)$ sont tous dans le même ℓ -bloc. Mieux, ce résultat reste vrai si l'on multiplie λ par certains caractères linéaires de L assez réguliers, et on obtient de cette façon tout le bloc. En suivant [16], on notera $\text{Ab}_\ell \text{Irr}(L)$ l'ensemble des ℓ -caractères irréductibles du groupe abélien $L/[L, L]^F$ (vu comme caractères de L) et on pose

$$B_\ell(G, (\mathbf{L}, \lambda)) = \bigcup_{\theta \in \text{Ab}_\ell \text{Irr}(L)} \{\rho \in \text{Irr } G \mid \langle R_L^G(\lambda\theta); \rho \rangle_G \neq 0\}.$$

L'un des résultats principaux de [16] assure que cet ensemble est bien un ℓ -bloc de G . En notant $b_\ell(G, (\mathbf{L}, \lambda))$ l'idempotent de ΛG associé, on peut l'énoncer en :

Théorème 4.9 (Broué-Malle-Michel). *L'application $(\mathbf{L}, \lambda) \mapsto b_\ell(G, (\mathbf{L}, \lambda))$ induit une bijection entre les classes de conjugaisons de paires d -cuspidales et les ℓ -blocs unipotents de G . Autrement dit,*

$$b_\ell(G, 1) = \sum_{[(\mathbf{L}, \lambda)]} b_\ell(G, (\mathbf{L}, \lambda))$$

est exactement la décomposition de $b_\ell(G, 1)$ en une somme d'idempotents primitifs centraux de ΛG .

Remarque 4.10. L'étude précédente a été généralisée depuis par Cabanes et Enguehard [19] aux blocs non-unipotents à l'aide de la décomposition de Jordan.

(iv) L'exemple de $\text{SL}_2(q)$. Pour conclure cette partie, nous allons développer le théorème précédent sur l'exemple du groupe $\mathbf{G} = \text{SL}_2(\mathbb{F})$. Il est suffisamment simple pour être traité « à la main » et suffisamment compliqué pour illustrer la plupart des résultats de ce chapitre. Nous essaierons, autant que possible, de faire passer les idées essentielles de ces résultats sur cet exemple précis.

Le groupe fini $\text{SL}_2(q)$ est d'ordre $q(q-1)(q+1)$. On peut donc distinguer dans $\text{SL}_2(\mathbb{F})$ deux types de tores rationnels : le tore déployé \mathbf{T} qui est un Φ_1 -tore avec $T \simeq \mathbb{F}_{q-1}$, et le tore \mathbf{T}' de type s qui est un Φ_2 -tore dont les points fixes sont donnés par $T' \simeq \mathbb{F}_{q+1}$. Les seules paires d -cuspidales sont donc $(\mathbf{T}, 1)$ pour $d = 1$ et $(\mathbf{T}', 1)$ pour $d = 2$. Le théorème 4.9 nous assure alors que lorsque ℓ est un nombre premier impair divisant $q-1$ ou $q+1$, le bloc principal est l'unique bloc unipotent et ses éléments sont donnés par :

- pour $\ell \mid q-1$: les composants irréductibles des caractères $R_T^G(\theta)$ avec θ un ℓ -caractère de T . On peut calculer

(a) $R_T^G(1_T) = 1_G + \text{St}_G$;

- (b) $R_T^G(\theta)$ est un caractère irréductible dès que θ est un ℓ -caractère de T non trivial. De plus, $R_T^G(\theta) = R_T^G(\eta)$ si et seulement si $\theta = \eta^{\pm 1}$, en notant η^{-1} le caractère défini par $(\eta^{-1})(t) = \eta(t^{-1})$.

On en déduit que le bloc principal contient 2 caractères unipotents ainsi que $((q-1)_\ell - 1)/2$ caractères irréductibles non-unipotents.

- pour $\ell \mid q+1$: les composants irréductibles des caractères virtuels $R_{T'}^G(\theta)$ avec θ un ℓ -caractère de T' . On trouve ici

(a') $R_{T'}^G(1_{T'}) = 1_G - \text{St}_G$;

- (b') $-R_{T'}^G(\theta)$ est un caractère irréductible dès que θ est un ℓ -caractère de T' non trivial. De plus, $R_{T'}^G(\theta) = R_{T'}^G(\eta)$ si et seulement si $\theta = \eta^{\pm 1}$.

Ici, le bloc principal contient 2 caractères unipotents et $((q+1)_\ell - 1)/2$ caractères irréductibles non-unipotents (ceux de la *série discrète*).

4.2 Le ℓ -bloc principal, pour q d'ordre h modulo ℓ

Cette partie est consacrée à l'étude du ℓ -bloc principal dans le cas où l'ordre de q modulo ℓ est égal au nombre de Coxeter h . C'est en un sens le cas maximal pour lequel l'étude des représentations modulaires de G est intéressante, puisque h est aussi le plus grand entier d pour lequel le polynôme cyclotomique $\Phi_d(q)$ divise l'ordre de G .

Les résultats de la partie précédente nous permettent d'identifier les caractères de ce bloc avec les composants irréductibles de certains induits $R_{T_c}^G(\theta)$ à partir d'un tore de Coxeter T_c . Dans ce cas particulier, on est en mesure de décomposer explicitement ces caractères virtuels grâce aux travaux de Lusztig sur la cohomologie de la variété $X(c)$. Deux types de caractères apparaissent :

- les caractères $R_{T_c}^G(\theta)$, pour θ un ℓ -caractère non trivial du tore, qui sont irréductibles (à un signe près) ;
- les caractères unipotents qui apparaissent dans la cohomologie de $X(c)$.

Ici, le groupe de défaut du ℓ -bloc principal est cyclique et la distinction « unipotent/non-unipotent » se retrouve dans la théorie des blocs à défaut cyclique en « non-exceptionnel/exceptionnel ». Le lien est en fait plus profond, et aussi Hiss, Lübeck et Malle ont énoncé dans [51] une conjecture reliant l'arbre de Brauer du bloc principal à la cohomologie de la variété de Deligne-Lusztig $X(c)$. Nous allons détailler leurs résultats dans cette partie.

4.2.1 Le cas Coxeter

On supposera dans un premier temps que \mathbf{G} ne contient pas de facteurs tordus du type ${}^2\mathbf{B}_2$, ${}^2\mathbf{F}_4$ ou ${}^2\mathbf{G}_2$. Les groupes de Ree et Suzuki seront traités indépendamment, dans la section (iii).

(i) Éléments de Coxeter. Formons le \mathbb{C} -espace vectoriel $V = X^\vee(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ de dimension m . Le groupe de Weyl W se plonge dans le groupe des automorphismes de cet espace vectoriel ; de plus, l'endomorphisme $\sigma = q^{-1}F$ est un automorphisme de V d'ordre fini δ normalisant W (avec les hypothèses sur (\mathbf{G}, F) , c'est exactement le prolongement linéaire de ϕ). D'après [89], on peut donc choisir des vecteurs propres (f_1, \dots, f_m) de σ dans $S(V)$ de degrés (d_1, \dots, d_m) , invariants par l'action de W et associés aux valeurs propres $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$, tels que l'algèbre des invariants $S(V)^W$ soit isomorphe à l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[f_1, \dots, f_m]$. À permutation près, les couples (d_j, ε_j) sont entièrement déterminés par σ . L'ordre du groupe G est alors donné par la formule

$$|G| = q^N \prod_{j=1}^m (q^{d_j} - \varepsilon_j^{-1}) = q^N \prod_d \Phi_d(q)^{a(d)}$$

où $a(d)$ est égal au nombre d'entiers j tels que $\varepsilon_j = \exp(2i\pi d_j/d)$ [14]. Le plus grand des entiers vérifiant $a(d) \neq 0$ sera noté h ; on l'appelle le *nombre de Coxeter* de la paire (W, F) .

On supposera désormais \mathbf{G} semi-simple et W irréductible. Dans ce cas, le \mathbb{C} -espace vectoriel $V = X^\vee(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ s'identifie à la représentation de réflexion de W . On connaît alors explicitement [20] les couples (d_j, ε_j) donnés par l'action de σ sur V et on en déduit les valeurs des nombres de Coxeter pour chaque type :

type	A_n	B_n	D_n	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2	${}^2A_{2n}$	${}^2A_{2n+1}$	2D_n	3D_4	2E_6
h	$n + 1$	$2n$	$2n - 2$	12	18	30	12	6	$4n + 2$	$4n + 2$	$2n$	12	18

De plus, avec les mêmes données numériques, on vérifie facilement que $a(h) = 1$.

En suivant [85, section 7], on peut définir une notion d'éléments de Coxeter « tordus », qui généralise la notion usuelle pour les groupes déployés :

Définition 4.11. *Pour tout système de représentants $[\Delta/\phi] = \{\beta_1, \dots, \beta_r\}$ des orbites de racines simples sous l'action de ϕ , le produit $c = s_{\beta_1} s_{\beta_2} \cdots s_{\beta_r}$ est appelé élément de Coxeter de la paire (W, F) .*

L'élément c a les mêmes propriétés que les éléments de Coxeter usuels, à condition de remplacer la conjugaison sur W par la F -conjugaison. La traduction de ces propriétés est alors plus évidente en considérant l'élément $c\sigma = q^{-1}cF$ de $GL(V)$:

Théorème 4.12 (Springer). *Pour un élément de Coxeter c de (W, F) , avec W supposé irréductible, on a :*

- (i) *L'élément $c\sigma$ est d'ordre h et il est h -régulier.*
- (ii) *Tous les éléments de la forme $c'\sigma$ qui possèdent une valeur propre d'ordre h sont réguliers, et il sont conjugués à $c\sigma$. En particulier, tous les élément de Coxeter sont F -conjugués.*
- (iii) *Les valeurs propres de $c\sigma$ sont de la forme $\varepsilon_j^{-1} \exp(2i\pi(d_j - 1)/h)$. De plus, les valeurs propres d'ordre exactement h sont de multiplicité 1.*
- (iv) *Le centralisateur $C_W(c\sigma)$ de $c\sigma$ dans W est un groupe cyclique, engendré par $(c\sigma)^\delta = cF(c) \cdots F^{\delta-1}(c)$.*

En particulier, δ divise h et on notera h_0 l'entier h/δ en accord avec la définition de Lusztig [62, section 1.13]. Les différentes valeurs de cet entier sont donc donnés par :

type	A_n	B_n	D_n	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2	${}^2A_{2n}$	${}^2A_{2n+1}$	2D_n	3D_4	2E_6
h_0	$n + 1$	$2n$	$2n - 2$	12	18	30	12	6	$2n + 1$	$2n + 1$	n	4	9

Remarque 4.13. Dans [85], Springer définit l'entier h comme l'ordre maximal que peut prendre une valeur propre d'un élément de la forme $w\sigma$. En remarquant que le cardinal d'un tore de type w fait apparaître les polynômes cyclotomiques associés à l'ordre de ces valeurs propres, on en déduit par le théorème 4.5 que ces deux définitions sont équivalentes.

Remarque 4.14. Des deux assertions (ii) et (iii) on peut déduire que les Φ_h -sous-groupes de Sylow sont d'ordre exactement $\Phi_h(q)$, ce qui force $a(h) = 1$ d'après le théorème 4.5. On notera cependant que dans le cas non déployé, la démonstration de ce dernier théorème s'effectue uniquement au cas par cas.

(ii) Tore de Coxeter. Un tore rationnel \mathbf{T}_c dont le type est un élément de Coxeter c de (W, σ) est appelé *tore de Coxeter*. Rappelons que (\mathbf{T}_c, F) est isomorphe à (\mathbf{T}, cF) et que l'ordre du groupe fini associé se calcule par :

$$|T_c| = |\mathbf{T}^{cF}| = |\det(qc\sigma - 1 | X^\vee(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C})|.$$

Puisque $a(h) = 1$, on en déduit que \mathbf{T}_c contient un unique Φ_h -sous-groupe de Sylow \mathbf{S}_h de \mathbf{G} . On donne dans la proposition suivante quelques propriétés de ce sous-groupe que l'on utilisera par la suite :

Proposition 4.15. *Soit ℓ un nombre premier différent de p . On suppose que ℓ ne divise pas $|W^F|$ mais divise $\Phi_h(q)$. Alors :*

- (i) *L'ensemble des ℓ -éléments de S_h forme un ℓ -sous-groupe de Sylow cyclique de G que l'on notera T_ℓ .*
- (ii) *$N_G(T_\ell)/C_G(T_\ell) \simeq N_G(T_c)/T_c \simeq C_W(c\sigma)$.*
- (iii) *Si θ est un ℓ -caractère non trivial de T_c , alors θ est en position générale. Autrement dit, $C_W(\theta) = \{1\}$.*

Démonstration. Ces propriétés sont des traductions du théorème 4.12 ; on va tout de même détailler une partie de leur démonstration car elle met en lumière les principales constructions de [14], et leur lien avec la théorie de Springer.

Considérons le sous-tore \mathbf{S} de \mathbf{T} , stable par cF , défini par son groupe de cocaractères $X^\vee(\mathbf{S}) = \text{Ker } \Phi_h(c\sigma)$. Puisque $c\sigma$ a au moins une valeur propre d'ordre h , ce noyau n'est pas trivial ; de plus $a(h) = 1$ et ainsi le groupe \mathbf{S}^{cF} est cyclique d'ordre $\Phi_h(q)$ (voir [14, proposition 3.3]). La conjugaison permet alors de transformer ce tore en un Φ_h -sous groupe de Sylow de \mathbf{G} : on choisit un élément $g \in \mathbf{G}$ vérifiant $\mathbf{T}_c = {}^g\mathbf{T}$, et le Φ_h -tore cherché s'obtient par $\mathbf{S}_h = {}^g\mathbf{S}$. L'assertion (i) s'en déduit.

Pour s un élément de T_ℓ non trivial, on va montrer que $C_G(s) = \mathbf{T}_c$. Les hypothèses sur ℓ forcent $C_G(s)$ à être un sous-groupe de Levi. Son centre connexe $Z(C_G(s))^\circ$ est un sous-tore rationnel de \mathbf{T}_c qui contient le ℓ -élément s . En effet, s appartient à $Z(C_G(s))$ et par hypothèse, ℓ ne divise pas l'ordre du groupe $Z(C_G(s))/Z(C_G(s))^\circ$. Puisque ℓ ne divise aucun entier $\Phi_d(q)$ pour $d \neq h$, on en déduit que $Z(C_G(s))^\circ$ contient l'unique Φ_h -Sylow de \mathbf{T}_c , à savoir \mathbf{S}_h , et qu'ainsi $C_G(s) = C_G(\mathbf{S}_h)$. On est donc ramené à montrer que $C_G(\mathbf{S}_h) = \mathbf{T}_c$. Pour cela, on peut remarquer que les racines du groupe de Levi $C_G(\mathbf{S})$ sont exactement les racines $\alpha \in \Phi$ orthogonales à $X^\vee(\mathbf{S})$. Or, si l'on traduit le fait que $c\sigma$ est h -régulier, il existe un élément de $X^\vee(\mathbf{S}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ qui n'est orthogonal à aucune racine, ce qui prouve que $C_G(\mathbf{S})$ est en fait un tore, égal à \mathbf{T} .

De l'étude précédente on déduit $C_G(T_\ell) = \mathbf{T}_c$. Les inclusions $N_G(\mathbf{T}_c) \subset N_G(T_\ell) \subset N_G(C_G(T_\ell))$ forcent alors $N_G(T_\ell) = N_G(\mathbf{T}_c)$ et on en déduit l'assertion

(ii) en passant aux points fixes sous F . Pour finir, l'assertion (iii) est la traduction, aux niveaux des caractères, de l'égalité $C_G(s) = \mathbf{T}_c$, vérifiée pour tout élément s de T_ℓ distinct de l'élément neutre. \square

(iii) **Le cas des groupes de Ree et Suzuki.** La proposition précédente reste tout de même vraie lorsque \mathbf{G} est de type ${}^2\mathbf{B}_2$, ${}^2\mathbf{F}_4$ ou ${}^2\mathbf{G}_2$. La notion d'élément de Coxeter se généralise directement aux cas tordus, en prenant garde au fait que $\sigma = q^{-1}F$ ne stabilise pas $X^\vee(\mathbf{T})$ mais seulement $X^\vee(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\sqrt{p}^{-1}]$ pour $p = 2$ ou 3 selon le type considéré. On peut alors compléter le tableau précédent grâce aux ordres des éléments $c\sigma$:

type	${}^2\mathbf{B}_2$	${}^2\mathbf{F}_4$	${}^2\mathbf{G}_2$
h	8	24	12

Dans chacun de ces cas, le groupe des points fixes T_c du tore de Coxeter est un groupe cyclique, dont l'ordre est donné par :

type	${}^2\mathbf{B}_2$	${}^2\mathbf{F}_4$	${}^2\mathbf{G}_2$
$ T_c $	$1 - q\sqrt{2} + q^2$	$1 - q\sqrt{2} + q^2 - q^3\sqrt{2} + q^4$	$1 - q\sqrt{3} + q^2$

On peut alors vérifier, au cas par cas (voir par exemple [40, section 4.6]), que lorsque ℓ divise l'un de ces nombres sans diviser l'ordre du groupe de Weyl associé, l'ensemble des ℓ -éléments de T_c est un ℓ -Sylow de G vérifiant les assertions (ii) et (iii) de la proposition 4.15.

4.2.2 Les caractères du bloc principal

Afin d'utiliser les résultats de la section précédente, on supposera, jusqu'à la fin de ce chapitre, que \mathbf{G} est un groupe semi-simple et que W est irréductible (on dit alors que \mathbf{G} est *quasi-simple*). On fixe un nombre premier ℓ étranger à l'ordre de W^F , vérifiant l'une des deux hypothèses suivantes, selon le type de (\mathbf{G}, F) :

- cas « non tordus » : ℓ divise $\Phi_h(q)$;
- cas « tordus » : ℓ divise l'ordre de T_c pour c un élément de Coxeter.

Pour (K, Λ, k) un système ℓ -modulaire assez gros pour \mathbf{G} , ces hypothèses sur ℓ forcent l'ordre de q dans le groupe multiplicatif k^\times à être exactement h . Le bloc principal de ΛG dans ce cas particulier sera l'objet d'étude de ce chapitre.

Fixons un élément de Coxeter c de la paire (W, F) , ainsi qu'un tore rationnel maximal \mathbf{T}_c de type c . D'après la proposition 4.15, ce tore est le centralisateur d'un Φ_h -tore \mathbf{S}_h (avec $\mathbf{S}_h = \mathbf{T}_c$ dans les cas tordus), et c'est donc, à ce titre, un sous-groupe de Levi h -déployé. Le théorème 4.9 assure alors que les caractères du ℓ -bloc principal correspondent à la paire h -cuspidale $(\mathbf{T}_c, 1)$: ce sont les composants irréductibles des caractères virtuels $R_{T_c}^G(\theta)$, pour θ un ℓ -caractère de T_c . En utilisant les travaux de Lusztig, on va identifier et paramétrer les deux types de caractères qui apparaissent.

(i) Les caractères non-unipotents du bloc. La proposition 4.15 nous assure que les ℓ -caractères de T_c non triviaux sont en position générale, et que leurs induits sont donc des caractères irréductibles de G . Ce résultat est le reflet d'une propriété beaucoup plus profonde de la cohomologie de la variété de Deligne-Lusztig $Y(\dot{c})$ [29, corollaire 9.9] : si θ est un ℓ -caractère de \mathbf{T}^{cF} , alors la composante θ -isotypique $H_c^i(Y(\dot{c}), K)_\theta$ du i -ème groupe de cohomologie est non nulle pour $i = \ell(c) = r$ seulement.

Puisque l'endomorphisme de Frobenius F^δ fixe c , il agit sur le groupe \mathbf{T}^{cF} , et on en déduit une action à droite de $\mathbf{T}^{cF} \rtimes \langle F^\delta \rangle_{\text{mon}}$ sur la variété $Y(\dot{c})$. Cette action induit une action linéaire sur la cohomologie qui vérifie

$$F^\delta(H_c^r(Y(\dot{c}), K)_\theta) = H_c^r(Y(\dot{c}), K)_{F^\delta(\theta)} = H_c^r(Y(\dot{c}), K)_{v \cdot \theta}$$

où $v = cF(c) \cdots F^{\delta-1}(c)$ est le générateur (d'ordre $h_0 = h/\delta$) du groupe cyclique $C_W(c\sigma)$. Puisque F commute à l'action de G , les modules associés à deux ℓ -caractères dans la même orbite sous $C_W(c\sigma)$ sont isomorphes.

Notations 4.16. Pour chaque ℓ -caractère θ de \mathbf{T}^{cF} supposé non trivial, la composante θ -isotypique de $H_c^r(Y(\dot{c}), K)$ est un KG -module que l'on notera Y_θ . Sa classe d'isomorphisme ne dépend que de l'orbite de θ sous $C_W(c\sigma)$ et le caractère associé sera noté χ_θ .

Proposition 4.17. Lorsque θ parcourt $[\text{Irr}_\ell(\mathbf{T}^{cF})/C_W(c\sigma)]$ et qu'il est supposé non trivial, les caractères χ_θ sont des caractères cuspidaux, deux à deux distincts ; ils possèdent néanmoins la même restriction à l'ensemble $G_{\ell'}$ des ℓ' -éléments de G .

Démonstration. L'élément de Coxeter c n'étant contenu dans aucun sous-groupe parabolique de W stable par F , autre que W lui-même, le tore de Coxeter \mathbf{T}_c ne peut être contenu dans un sous-groupe parabolique rationnel propre de \mathbf{G} . Par [63, Corollaire 2.19], on en déduit que les caractères χ_θ sont cuspidaux.

Fixons deux ℓ -caractères θ et θ' de \mathbf{T}^{cF} . La formule de Mackey [33, théorème 11.13], appliquée au tore (\mathbf{T}, cF) plutôt que (\mathbf{T}_c, F) s'écrit :

$$\langle \chi_\theta ; \chi_{\theta'} \rangle_G = \sum_{w \in W^{cF}} \langle \theta ; w \cdot \theta' \rangle_{\mathbf{T}^{cF}}.$$

Puisque θ et θ' sont en position générale, cette somme est non nulle si et seulement si θ et θ' sont dans la même orbite sous $W^{cF} = C_W(c\sigma)$.

Finalement, un ℓ -caractère de \mathbf{T}^{cF} prend la valeur 1 sur les éléments d'ordre premier à ℓ ; la formule des caractères [33, proposition 12.2] assure donc que la restriction de χ_θ à $G_{\ell'}$ est indépendante de θ . \square

(ii) Les caractères unipotents du bloc. Ce sont les composants irréductibles du caractère virtuel $R_{T_c}^G(1)$, construit à partir de la variété de Deligne-Lusztig $X(c)$. Les trois théorèmes suivants, qui énoncent certaines propriétés fondamentales de la cohomologie de cette variété, nous permettent de déterminer simplement les caractères unipotents du ℓ -bloc principal :

Théorème 4.18 (Lusztig). *L'endomorphisme de Frobenius F^δ agit de façon semi-simple sur $\bigoplus_i H_c^i(X(c), K)$ et ses espaces propres sont des KG -modules simples.*

De plus, Lusztig montre que les valeurs propres de F^δ sont de la forme $\zeta q^{m\delta/2}$, où m est un entier positif et ζ une racine de l'unité, et les détermine même explicitement pour chaque type. En utilisant [62, table 7.3], on peut vérifier que :

Fait 4.19. Les classes des valeurs propres de F^δ dans k sont deux à deux disjointes, et forment le groupe des racines h_0 -ièmes de l'unité, avec $h_0 = h/\delta$.

Remarque 4.20. Cette observation traduit un phénomène beaucoup plus profond selon lequel l'action du morphisme F^δ , vu comme élément de l'algèbre $\text{End}_{K^b(kG)}(\text{R}\Gamma_c(X(c), k))$, est d'ordre fini h_0 (voir corollaire 4.80).

Par hypothèse sur ℓ , la classe de l'entier q^δ est d'ordre h_0 dans k^\times et fournit ainsi un générateur particulier du groupe des racines h_0 -ièmes de l'unité. On fait dès maintenant le choix d'une racine carrée de q dans K , de sorte que chaque valeur propre de F^δ corresponde, modulo ℓ , à une unique puissance de q^δ . Cette observation permet d'introduire la notation suivante :

Notations 4.21. On notera Y_j (ou parfois $Y_j(\zeta)$) l'espace propre de F^δ associé à l'unique valeur propre $\zeta q^{\delta m/2}$ dont la classe dans k s'identifie à celle de $q^{j\delta}$. Le caractère correspondant sera noté χ_j .

Avec ces notations, l'ensemble $\{\chi_j \mid j = 0, \dots, h_0 - 1\}$ constitue l'ensemble des caractères unipotents du ℓ -bloc principal.

Il sera parfois important de garder la trace de la racine de l'unité ζ intervenant dans la valeur propre de F^δ , car elle rend compte de la série de Harish-Chandra dans laquelle se trouve l'espace propre associé :

Théorème 4.22 (Lusztig). *Deux modules $Y_i(\zeta)$ et $Y_j(\xi)$ sont dans la même série de Harish-Chandra si et seulement si $\zeta = \xi$.*

Pour finir, le théorème suivant donne la répartition des espaces propres appartenant à une série de Harish-Chandra fixée :

Théorème 4.23 (Lusztig). *L'ensemble des entiers j tels que Y_j est dans la série de Harish-Chandra associée à une racine de l'unité ζ est un intervalle d'entiers de la forme $\llbracket m_\zeta ; M_\zeta \rrbracket$ et la répartition de ces espaces propres dans la cohomologie de $X(c)$ est la suivante :*

$$\begin{array}{c|c|c|c} H_c^r(X(c), K) & H_c^{r+1}(X(c), K) & \dots & H_c^{r+M_\zeta-m_\zeta}(X(c), K) \\ \hline Y_{m_\zeta}(\zeta) & Y_{m_\zeta+1}(\zeta) & \dots & Y_{M_\zeta}(\zeta) \end{array}$$

De plus, Y_j est cuspidal si et seulement si $j = m_\zeta = M_\zeta$.

Exemple 4.24. Dans le cas où $\mathbf{G} = \text{SL}_2(\mathbb{F})$ et $c = s$, la variété $X(c)$ est isomorphe à $\mathbb{P}_1 \setminus \mathbb{P}_1(\mathbb{F}_q)$ et on peut calculer sa cohomologie à l'aide de la proposition 1.21. Le G -ensemble $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_q)$ étant identifié à G/B , on trouve :

- $H_c^1(X(c), K) = K[G/B]/K$ avec la valeur propre 1. Le caractère associé est le caractère de Steinberg St_G ;
- $H_c^2(X(c), K) = K$ avec la valeur propre q , laquelle se réduit en -1 modulo ℓ .

Avec les notations précédentes, $\chi_0 = \text{St}_G$ et $\chi_1 = 1_G$ sont exactement les caractères unipotents du bloc principal.

4.2.3 L'arbre de Brauer

Les caractères irréductibles du ℓ -bloc principal se regroupent donc en deux familles distinctes : $\{\chi_\theta \mid \theta \in [\text{Irr}_\ell \mathbf{T}^{CF}/C_W(c\sigma)] \text{ et } \theta \neq 1\}$ et $\{\chi_i \mid i = 0, \dots, h_0 - 1\}$. Les caractères du premier ensemble ont la même restriction à $G_{\ell'}$ et jouent, à ce titre, le même rôle dans la théorie des représentations ℓ -modulaires de G . Si on définit le *caractère exceptionnel* χ_{exc} comme la somme de ces éléments, alors la structure du bloc peut s'exprimer à l'aide de l'ensemble $\mathcal{V} = \{\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{h_0-1}\} \cup \{\chi_{\text{exc}}\}$. Plus précisément, la théorie des blocs à défaut cyclique nous dit que le caractère de tout ΛG -module projectif indécomposable P s'écrit $[P] = \chi + \chi'$ avec $\chi \neq \chi' \in \mathcal{V}$. À partir des travaux de Brauer, on peut définir le graphe suivant :

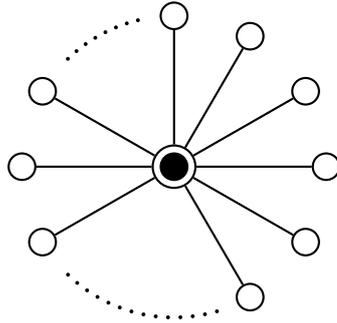
- les sommets du graphe sont indexés par $\mathcal{V} = \{\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{h_0-1}\} \cup \{\chi_{\text{exc}}\}$. Le sommet associé à χ_{exc} est appelé *sommet exceptionnel*. Par extension, les autres sommets seront dits *non exceptionnels* ;
- une arête relie deux sommets χ et χ' si et seulement si $\chi + \chi'$ est le caractère d'un ΛG -module projectif indécomposable.

Le graphe Γ ainsi défini est en fait un arbre, appelé *arbre de Brauer* du bloc. Les arêtes de l'arbre pourront donc être indexées soit par les ΛG -modules projectifs indécomposables du bloc, soit par les kG -modules simples du bloc (les projectifs indécomposables étant exactement les enveloppes projectives des simples).

Exemple 4.25. Soit D un ℓ -groupe cyclique et E un ℓ' -sous-groupe de $\text{Aut}(D)$. L'arbre de Brauer de l'unique ℓ -bloc du groupe $H = D \rtimes E$ est une étoile. En effet, les kH -modules simples s'identifient aux kE -modules simples munis d'une action triviale de D . Puisque E est un ℓ' -groupe, un tel module se relève de façon unique en un ΛE -module \tilde{S} libre sur Λ , dont l'enveloppe projective est indécomposable et donnée par $\text{Ind}_E^H \tilde{S}$. Le caractère de ce dernier module se décompose en

$$[\text{Ind}_E^H \tilde{S}] = [\tilde{S}] + \chi_{\text{exc}}$$

avec χ_{exc} désignant la somme des caractères ordinaires irréductibles de H dont la restriction à D provient d'une représentation triviale de D . Par construction, l'arbre de Brauer est alors de la forme suivante :



Les travaux de Rickard [75], [77] et Linckelmann [59] ont montré qu’il est possible de « déplier » l’arbre de Brauer du ℓ -bloc principal de G de façon à obtenir cette étoile, et que ce « dépliage » se traduit par une équivalence splendide entre les ℓ -blocs principaux de G et $\mathbf{T}^{cf} \rtimes C_W(c\sigma)$. L’un des buts de ce chapitre est de montrer que ce dépliage peut s’effectuer via le complexe de cohomologie $R\Gamma_c(Y(\dot{c}), \Lambda)$ de la variété de Deligne-Lusztig $Y(\dot{c})$.

La conjecture de Hiss-Lübeck-Malle s’inscrit dans cette démarche en donnant l’arbre de Brauer du ℓ -bloc principal de G en fonction du paramétrage des caractères unipotents donné dans la section précédente [51] :

Conjecture 4.26 (Hiss-Lübeck-Malle). *Soit Γ^\bullet le graphe obtenu à partir de l’arbre de Brauer du ℓ -bloc principal en retirant le sommet exceptionnel ainsi que les arêtes incidentes. Alors*

- (i) *Les composantes connexes de Γ^\bullet sont indexées par les séries de Harish-Chandra, et donc par les racines de l’unité ζ .*
- (ii) *Si ζ est une racine de l’unité, la composante connexe associée est :*



- (iii) *Les sommets indexés par les caractères χ_{m_ζ} sont les seuls sommets reliés au sommet exceptionnel.*

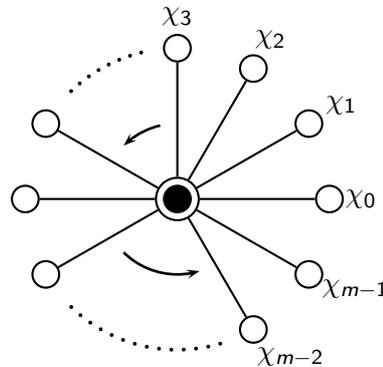
Cette conjecture a été vérifiée au cas par cas seulement, pour tous les types hormis E_7 et E_8 . Nous en donnerons une démonstration générale sous l’hypothèse (W) (cf. l’introduction du chapitre ou la section 4.3).

A priori, l’arbre de Brauer encode uniquement la matrice de décomposition du bloc considéré. Cependant, en reprenant l’exemple précédent, on peut remarquer qu’une fois les sommets indexés, le dessin de l’arbre définit un plongement planaire du graphe. De fait, cette donnée est essentielle pour la compréhension des représentations du bloc : si on fixe un sommet de l’arbre, et que l’on considère les kG -modules simples S_1, \dots, S_m qui indexent les arêtes incidentes à ce sommet, alors il existe des modules unisériels dont les facteurs de composition sont les modules S_i , et l’ordre dans lequel ces modules apparaissent est toujours le même, à permutation cyclique près [43]. On définira le *plongement planaire* de

l'arbre à partir de cet ordre, les arêtes incidentes étant dessinées dans le sens trigonométrique.

Exemple 4.27. On reprend l'exemple précédent dans le cas particulier où E est un groupe cyclique, engendré par un élément $x \in \text{Aut}(D)$ d'ordre m premier à ℓ . Rappelons que D aussi est cyclique ; par conséquent, x agit par élévation à une certaine puissance n première à $|D| = \ell^\alpha$, uniquement déterminée dans $\llbracket 0; \ell^\alpha - 1 \rrbracket$. Puisque x est d'ordre m , la classe de l'entier n modulo ℓ est d'ordre $d \mid m$. D'autre part, $\ell > m$ et ainsi $v_\ell(n^d - 1) = v_\ell(n^m - 1) \geq \ell^\alpha$, ce qui force $d = m$.

Par le lemme de Hensel, on en déduit qu'il existe une (unique) racine primitive m -ième de l'unité $\zeta \in \mathbb{Z}_\ell^\times$ vérifiant $\zeta \equiv n \pmod{\ell\mathbb{Z}_\ell}$. En numérotant les caractères exceptionnels $\chi_j : E \rightarrow \mathbb{Z}_\ell^\times$ de telle sorte que $\chi_j(x) = \zeta^j$, on obtient le plongement planaire de l'arbre de Brauer :

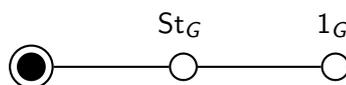


Par conséquent, si on désigne par S_j le kH -module simple associé au caractère χ_j , alors $\text{Ext}_{kH}^1(S_i, S_j)$ est non nul si et seulement si $i \equiv j + 1 \pmod{m}$.

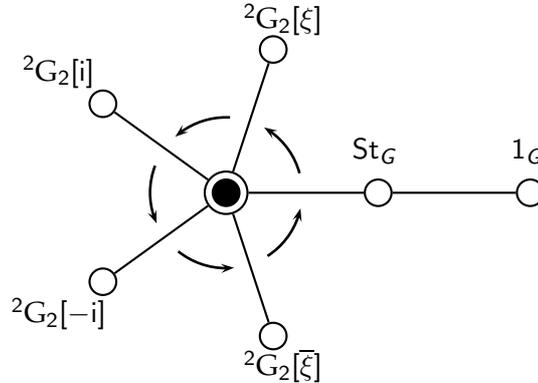
L'exemple précédent n'est pas anodin, puisqu'il donne aussi l'arbre de Brauer du ℓ -bloc principal de $\mathbf{T}^{cF} \rtimes C_W(c\sigma)$, ainsi que son plongement planaire. Dans ce cas, on remarque que le générateur $x = (cF(c) \cdots F^{\delta-1}(c))^{-1}$ de $C_W(cF)$ agit sur T^{cF} par élévation à la puissance q^δ via l'endomorphisme de Frobenius F^δ ; d'autre part, les caractères non-exceptionnels du ℓ -bloc principal de G sont indexés par les valeurs propres de F^δ sur la cohomologie de $X(c)$. Puisque les deux actions de F^δ sont compatibles, il est naturel de proposer la conjecture suivante, permettant de déterminer le plongement planaire de Γ :

Conjecture 4.28. *Les arêtes reliant le sommet exceptionnel aux sommets indexés par χ_{m_ζ} sont ordonnées par valeurs de m_ζ croissantes.*

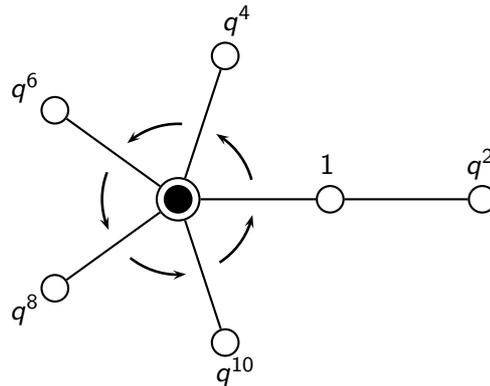
Les seuls cas pour lesquels cette conjecture est intéressante sont ceux pour lesquels il y a différents choix possibles pour le plongement planaire. Ce n'est par exemple pas le cas du groupe $\text{SL}_2(\mathbb{F})$ dont l'arbre Γ est donné par :



Les seuls types où une indétermination subsiste sont les types F_4 , E_7 , E_8 et 2G_2 . Pour ce dernier, on conjecture donc que l'arbre de Brauer est représenté par :



où $i = \xi^3$, avec ξ l'unique racine 12-ième de l'unité de Λ^\times dont la classe dans k est égale à celle de q . La lecture de l'arbre devient plus claire si on choisit d'indexer les sommets non exceptionnels par les entiers $q^{i\delta}$ congrus modulo ℓ aux valeurs propres de F^δ :



Nous donnerons dans la dernière partie une preuve de cette conjecture conditionnée par l'hypothèse (S) (cf. l'introduction de ce chapitre).

4.3 Preuve de la conjecture de Hiss-Lübeck-Malle

Nous présentons dans cette partie une preuve générale de la conjecture 4.26 sous une certaine hypothèse de non torsion dans la cohomologie. Le point de vue adopté ici est encore une fois géométrique, le but étant d'utiliser les propriétés de la variété de Deligne-Lusztig $X(c)$ afin d'en déduire des informations sur la théorie des représentations modulaires du groupe réductif fini associé. À cette fin, les travaux de Lusztig [62] sur cette variété seront d'une aide précieuse.

Dans la première section, on se restreint à l'étude des kG -modules non cuspidaux et de leur enveloppe projective. L'effet de cette restriction sur l'arbre de

Brauer du ℓ -bloc principal se traduit par l'isolement des droites données par l'assertion (ii) de la conjecture. L'élément final de la preuve consiste donc à montrer que les arêtes indexées par des modules cuspidaux sont exactement les arêtes supprimées lors du passage de Γ à Γ^\bullet . C'est ici que l'hypothèse (W) intervient, puisqu'elle permet, avec les outils introduits au chapitre 1, d'isoler un module projectif de caractère $\chi_{\text{exc}} + \chi_{m_\zeta}$ dans la cohomologie de $Y(\dot{c})$. Ainsi, chaque branche « non cuspidale » est reliée au sommet exceptionnel par l'intermédiaire d'un kG -module cuspidal.

4.3.1 Les kG -modules non cuspidaux du bloc

Soit I un sous-ensemble de racines simples stable par ϕ . Le sous-groupe parabolique standard \mathbf{P}_I associé, ainsi que le sous-groupe de Levi standard \mathbf{L}_I , sont tous les deux stables par F . Rappelons que l'on dispose alors des foncteurs d'induction et restriction de Harish-Chandra, définis pour n'importe quel anneau de base \mathcal{O} parmi (K, Λ, k) :

$$\begin{aligned} R_{L_I}^G : \mathcal{O}_{L_I}\text{-mod} &\longrightarrow \mathcal{O}G\text{-mod} \\ N &\longmapsto \mathcal{O}[G/U_I] \otimes_{\mathcal{O}_{L_I}} N \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} {}^*R_{L_I}^G : \mathcal{O}G\text{-mod} &\longrightarrow \mathcal{O}_{L_I}\text{-mod} \\ M &\longmapsto M^{U_I}. \end{aligned}$$

Voici quelques propriétés de ces foncteurs que nous utiliserons par la suite :

- $R_{L_I}^G$ et ${}^*R_{L_I}^G$ sont des foncteurs exacts, qui stabilisent la catégorie des modules projectifs de type fini et celle des modules \mathcal{O} -libres de type fini.
- $R_{L_I}^G$ et ${}^*R_{L_I}^G$ commutent aux opérations d'extension des scalaires au corps des fractions $-\otimes_\Lambda K$ et de réduction modulo $\ell - \otimes_\Lambda k$.

En particulier, les morphismes entre groupes de Grothendieck associés sont compatibles avec les applications de décomposition. Plus précisément, si déc_G (resp. déc_{L_I}) désigne l'application de décomposition entre $K_0(KG\text{-mod})$ et $K_0(kG\text{-mod})$ (resp. entre $K_0(KL_I\text{-mod})$ et $K_0(kL_I\text{-mod})$), alors

$$\text{déc}_G \circ R_{L_I}^G = R_{L_I}^G \circ \text{déc}_{L_I} \quad \text{et} \quad \text{déc}_{L_I} \circ {}^*R_{L_I}^G = {}^*R_{L_I}^G \circ \text{déc}_G.$$

On va étudier les enveloppes projectives des kG -modules non cuspidaux à partir de leur restriction de Harish-Chandra. Cette méthode repose sur le fait que la restriction de la cohomologie de $X(c)$ s'exprime à partir de variétés de Coxeter associés à des groupes « plus petits » pour lesquels les catégories de modules sur k sont semi-simples.

(i) Restriction d'un kG -module. Désormais, la variété de Deligne-Lusztig associée à l'élément de Coxeter c sera simplement notée X . Pour I un sous-ensemble de Δ stable par ϕ , on peut former un élément de Coxeter c_I de la paire (W_I, F) à partir de c en supprimant les réflexions associées aux racines simples qui n'appartiennent pas à I . En notant $\mathbf{B}_I = \mathbf{B} \cap \mathbf{L}_I$, la variété de Deligne-Lusztig X_I associée à c_I est, par définition,

$$X_l = X_{L_l}(c_l) = \{g\mathbf{B}_l \in \mathbf{L}_l/\mathbf{B}_l \mid g^{-1}F(g) \in \mathbf{B}_l c_l \mathbf{B}_l\}.$$

Lorsque l est maximal, le lien entre la cohomologie de cette variété et celle de X est donnée par [62, corollaire 2.10] :

Proposition 4.29. *Supposons l maximal, c'est-à-dire vérifiant $|l/\phi| = |\Delta/\phi| - 1$. Alors on dispose d'un isomorphisme de KL_l -modules, compatible à l'action de F^δ*

$$*R_{L_l}^G(H_c^i(X, K)) \simeq H_c^{i-1}(X_l, K) \oplus H_c^{i-2}(X_l, K)(-1)$$

étant entendu que l'action de F^δ sur $H_c^{i-2}(X_l, K)$ est modifiée par une torsion de Tate, indiqué par la notation (-1) .

Des applications successives de cette proposition permettent d'étendre l'isomorphisme précédent au cas où l n'est pas supposé maximal :

$$*R_{L_l}^G(H_c^i(X, K)) \simeq \bigoplus_{j \geq 0} \binom{r - r_l}{j} H_c^{i-r+r_l-j}(X_l, K)(-j)$$

où on a noté $r_l = |l/\phi|$. En particulier, toute valeur propre de F^δ en tant qu'endomorphisme de la cohomologie de X_l l'est aussi pour F^δ en tant qu'endomorphisme de la cohomologie de X . Afin de traduire la proposition en termes des espaces propres associés, on introduit la notation suivante, valable pour l quelconque :

Notations 4.30. Pour $\lambda = \zeta q^{m\delta/2}$ une valeur propre de F^δ sur $H_c^\bullet(X, K)$, et j l'unique entier de $\llbracket 0; h_0 - 1 \rrbracket$ tel que les classes modulo ℓ de λ et $q^{j\delta}$ coïncident, on notera $Y_j^!$ (ou $Y_j^!(\zeta)$ s'il y a risque de confusion), le λ -espace propre de F^δ sur $H_c^\bullet(X_l, K)$. C'est un KL_l -module (qui peut être nul) dont le caractère associé sera noté $\chi_j^!$.

Remarque 4.31. Lorsque l'ordre de F sur W_l est aussi égal à δ , le théorème 4.22 s'applique à la variété X_l , même si W_l n'est pas forcément irréductible ou \mathbf{L}_l semi-simple. Les $Y_j(\zeta)$ non nuls, qui sont exactement les espaces propres de F^δ sur $H_c^\bullet(X_l, K)$, sont alors des KL_l -modules simples deux à deux non isomorphes. Les seuls cas non triviaux où l'ordre de F sur W_l diminue sont ceux où W_l est de type A_n . Les valeurs propres de F étant alors $1, q, \dots, q^n$, il n'y a pas de regroupement d'espaces propres possible entre F et F^δ et les modules $Y_j(\zeta)$ non nuls sont encore des KL_l -modules simples deux à deux non isomorphes.

Avec ces notations, la proposition précédente permet donc de calculer la restriction d'un KG -module simple du bloc, qui, lorsque l est maximal, s'exprime par la formule suivante :

$$*R_{L_l}^G(Y_j(\zeta)) \simeq Y_j^!(\zeta) \oplus Y_{j-1}^!(\zeta). \quad (4.32)$$

(ii) **Détermination des kG -modules non cuspidaux.** Si M est un kG -module simple, son enveloppe projective se relève de façon unique (à isomorphisme près) en un ΛG -module projectif indécomposable que l'on notera P_M . Dans le cas où M n'est pas cuspidal, le lemme suivant détermine le caractère de P_M :

Lemme 4.33. *Soit M un kG -module simple appartenant au ℓ -bloc principal. Si M n'est pas cuspidal, alors il existe une unique racine de l'unité ζ et un entier $j \in \llbracket m_\zeta + 1; M_\zeta \rrbracket$ tels que*

$$[P_M] = [Y_j(\zeta)] + [Y_{j-1}(\zeta)] = \chi_j + \chi_{j-1}.$$

*De plus, si I est un sous-ensemble de Δ stable par ϕ maximal, alors le module ${}^*R_{L_I}^G(M)$ se relève de façon unique (à isomorphisme près) en un Λ_{L_I} -module libre sur Λ et de caractère χ_{j-1}^I .*

Démonstration. D'après la proposition 4.17 le caractère χ_{exc} est cuspidal, et ne peut donc pas intervenir dans le calcul du caractère de P_M . En effet, ${}^*R_{L_I}^G$ commute à la ℓ -réduction et ainsi tous les facteurs de composition de la ℓ -réduction d'un KG -module cuspidal sont eux aussi cuspidaux. On en déduit qu'il existe des racines de l'unité ζ et ξ , ainsi que des entiers distincts i et j tels que

$$[P_M] = [Y_j(\zeta)] + [Y_i(\xi)].$$

Autrement dit, M est facteur de composition des ℓ -réductions de $Y_j(\zeta)$ et $Y_i(\xi)$.

Soit I un sous-ensemble de Δ stable par ϕ maximal, tel que la restriction ${}^*R_{L_I}^G(M)$ soit non nulle (un tel sous-ensemble existe puisque M n'est pas cuspidal). Les propriétés du morphisme de restriction assurent que les facteurs de composition de ${}^*R_{L_I}^G(M)$ sont aussi facteurs de composition des ℓ -réductions de ${}^*R_{L_I}^G(Y_j(\zeta))$ et ${}^*R_{L_I}^G(Y_i(\xi))$. D'autre part, la formule 4.32 donne

$${}^*R_{L_I}^G(Y_j(\zeta)) \simeq Y_j^I(\zeta) \oplus Y_{j-1}^I(\zeta)$$

et

$${}^*R_{L_I}^G(Y_i(\xi)) \simeq Y_i^I(\xi) \oplus Y_{i-1}^I(\xi).$$

Puisque L_I est un sous-groupe de Levi propre de \mathbf{G} , l'ordre du groupe de ses points fixes n'est pas divisible par ℓ (sinon L_I contiendrait un tore de Coxeter d'après les résultats de la section 4.2.1, ce qui est exclu). Par conséquent, les KL_I -modules simples restent simples après réduction modulo ℓ . Vu la remarque 4.31, cela force $\zeta = \xi$, $|i - j| = 1$ et ${}^*R_{L_I}^G(M)$ à être un module simple, isomorphe à n'importe quelle ℓ -réduction de $Y_{\min(i,j)}^I(\zeta)$. \square

Notations 4.34. Un kG -module simple non cuspidal vérifiant les propriétés du lemme précédent est unique à isomorphisme près, et sera noté $S_j(\zeta)$. Si pour un couple (j, ζ) donné un tel module n'existe pas ou s'il est cuspidal, on posera par convention $S_j(\zeta) = \{0\}$.

Avec ces notations, on déduit du lemme que les facteurs de composition des ℓ -réductions de $Y_j(\zeta)$ qui ne sont pas cuspidaux sont isomorphes à $S_j(\zeta)$ ou $S_{j+1}(\zeta)$, ce qui donne la partie non cuspidale de l'arbre de Brauer. Reste à déterminer les couples (j, ζ) pour lesquels $S_j(\zeta)$ est non nul :

Lemme 4.35. *Si $Y_j(\zeta)$ est un espace propre non nul de F^δ avec $j > m_\zeta$, alors $S_j(\zeta)$ est non nul et apparaît avec multiplicité 1 comme facteur de composition dans les ℓ -réductions de $Y_j(\zeta)$ et $Y_{j-1}(\zeta)$.*

Démonstration. Par hypothèse sur j , le module $Y_j(\zeta)$ est un espace propre de F^δ dans un certain groupe de cohomologie $H_c^i(X, K)$ avec $i > r$. Puisqu'il n'est pas cuspidal, il existe un sous-ensemble de racines simples l stable par ϕ et maximal pour cette propriété, tel que la restriction $*R_{L_l}^G(Y_j(\zeta))$ soit non nulle. Par la formule 4.32, cela force un des deux modules parmi $Y_j^l(\zeta)$ et $Y_{j-1}^l(\zeta)$ à être non nul. En fait, $Y_{j-1}^l(\zeta)$ est toujours non nul : en effet, par la proposition 4.29, $Y_j^l(\zeta)$ est un sous-espace propre de F^δ sur $H_c^{i-1}(X_l, K)$ avec $i-1 > r-1$; le théorème 4.23 appliqué à la variété de Coxeter X_l de dimension $r-1$ assure alors que $Y_{j-1}^l(\zeta)$ est non nul dès que $Y_j^l(\zeta)$ l'est aussi.

Notons a (resp. b) la multiplicité de $S_j(\zeta)$ (resp. $S_{j+1}(\zeta)$) dans les suites de compositions des ℓ -réductions de $Y_j(\zeta)$ (en convenant que la multiplicité est nulle si le module $S_m(\zeta)$ considéré est nul). D'après le lemme précédent, ces modules sont les seuls facteurs de composition non cuspidaux possibles. Puisque la restriction commute aux applications de décomposition, on en déduit que

$$\text{déc}_{L_l}([*R_{L_l}^G(Y_j(\zeta))]) = a[*R_{L_l}^G(S_j(\zeta))]_k + b[*R_{L_l}^G(S_{j+1}(\zeta))]_k$$

dans $K_0(kG\text{-mod})$. Avec la formule 4.32, l'égalité devient

$$\text{déc}_{L_l}([Y_j^l(\zeta)]) + \text{déc}_{L_l}([Y_{j-1}^l(\zeta)]) = a[*R_{L_l}^G(S_j(\zeta))]_k + b[*R_{L_l}^G(S_{j+1}(\zeta))]_k$$

Mais par le lemme 4.33, on sait que le caractère de la restriction d'un module $S_m(\zeta)$ est soit nul, soit égal à $\text{déc}_{L_l}([Y_{m-1}^l(\zeta)])$. Puisque ce dernier est non nul pour $m = j$, l'égalité précédente force $*R_{L_l}^G(S_j(\zeta)) \neq \{0\}$ et $a = 1$. En particulier $S_j(\zeta)$ est un kG -module simple qui apparaît avec multiplicité 1 dans toute ℓ -réduction de $Y_j(\zeta)$. En appliquant le même raisonnement à l'égalité

$$\text{déc}_{L_l}([*R_{L_l}^G(Y_{j-1}(\zeta))]) = a'[*R_{L_l}^G(S_{j-1}(\zeta))]_k + b'[*R_{L_l}^G(S_j(\zeta))]_k$$

on en déduit que $S_j(\zeta)$ est aussi un facteur de composition de multiplicité $b' = 1$ dans toute ℓ -réduction de $Y_{j-1}(\zeta)$. \square

En particulier, lorsque j n'est pas égal à l'un des entiers m_ζ , la somme $\chi_j + \chi_{j-1}$ est toujours le caractère d'un ΛG -module projectif indécomposable, que l'on notera P_j (ou $P_j(\zeta)$ s'il y a ambiguïté).

Conséquence 4.36. Des deux lemmes précédents on déduit que les droites



sont des sous-arbres de l'arbre de Brauer Γ du ℓ -bloc principal de G . De plus, les arêtes manquantes sont indexées par les kG -modules cuspidaux.

Exemple 4.37. Dans le cas où $\mathbf{G} = \text{SL}_2(\mathbb{F})$, avec ℓ un nombre premier impair divisant $q+1$, le caractère $\chi_1 + \chi_0 = 1_G + \text{St}_G$ est exactement le caractère du module projectif $\Lambda G/B = \text{Ind}_B^G \Lambda$.

4.3.2 Les kG -modules cuspidaux du bloc

La partie la plus délicate dans la démonstration de la conjecture de Hiss-Lübeck-Malle consiste à recoller les branches non cuspidales au sommet exceptionnel. Si on suppose que la conjecture est vérifiée, l'étude précédente nous assure que les arêtes reliant ces branches sont indexées par des kG -modules simples cuspidaux dont l'enveloppe projective a pour caractère $\chi_{\text{exc}} + \chi_{m_\zeta}$. Nous allons ici construire explicitement ces modules projectifs à l'aide du complexe $R\Gamma_c(Y(\dot{c}), \Lambda)$. D'après la section 1.2.3 on sait que ce complexe possède de bonnes propriétés de perfection et fournit ainsi de nombreux modules projectifs. Cependant, ces derniers sont trop gros pour être calculés explicitement ; aussi est-il nécessaire de les couper suivant l'action de F^δ , en utilisant les outils introduits au chapitre 1. À cette fin, nous ferons l'hypothèse suivante :

- (W) Pour chaque racine de l'unité ζ associée à une série de Harish-Chandra rencontrant le bloc principal, les $(q^{m_\zeta \delta})$ -espaces propres généralisés de F^δ sur $bH_c^i(Y(\dot{c}), \Lambda)$ sont sans torsion.

Par le théorème 4.23, ces valeurs propres sont exactement celles qui interviennent lorsque l'on restreint l'action de F^δ au groupe de cohomologie moitié $H_c^i(X, K)$.

Sous cette hypothèse, on peut construire les modules projectifs manquants, en considérant l'espace propre de F^δ associé sur le complexe de cohomologie $C = bR\Gamma_c(Y(\dot{c}), \Lambda)$ représentant la cohomologie de la variété $Y(\dot{c})$, coupée par le bloc principal b . Pour cela, on travaillera dorénavant avec un représentant particulier de C , disposant de propriétés de finitudes nécessaires pour appliquer les résultats de la partie 1.3.

D'après le corollaire 1.27, il existe un complexe borné \mathcal{C} de $(\Lambda G, \Lambda \mathbf{T}^{cF})$ -bimodules de type fini, projectifs à gauche et à droite, ainsi que des applications équivariantes $f : C \rightarrow \mathcal{C}$ et $g : \mathcal{C} \rightarrow C$ inverses l'une de l'autre dans la catégorie $K^b(\Lambda G \times (\mathbf{T}^{cF})^{\text{op}})$. On notera $\mathcal{F} = f \circ F^\delta \circ g$ l'application induite par le Frobenius sur le complexe \mathcal{C} .

Proposition 4.38. *Soit ζ une racine de l'unité vérifiant l'hypothèse (W), et λ l'unique valeur propre de F^δ sur $H_c^\bullet(X, K)$ congrue à $q^{m_\zeta \delta}$ modulo l . Alors le complexe $\mathcal{C}_{(\lambda)}$ est homotope à un ΛG -module projectif P concentré en degré r dont le caractère est donné par*

$$[P] = \chi_{\text{exc}} + \chi_{m_\zeta}.$$

Démonstration. De la proposition 1.31 on peut déduire que le complexe $\mathcal{C}_{(\lambda)}$ possède les propriétés suivantes :

- $\mathcal{C}_{(\lambda)}$ est un complexe borné de ΛG -modules projectifs ;
- la cohomologie du complexe $\mathcal{C}_{(\lambda)} \otimes_\Lambda k$ est concentrée en degrés $r, \dots, 2r$ (celle de $\mathcal{C} \otimes_\Lambda k$ l'est déjà car $Y(\dot{c})$ est affine et irréductible) ;
- pour $i > r$, le i -ème groupe de cohomologie du complexe $\mathcal{C}_{(\lambda)} \otimes_\Lambda K$ est nul en vertu des résultats [29, corollaire 9.9] et 4.23 ainsi que du fait 4.19. En effet, on a successivement

$$H_c^i(\mathcal{C}_{(\lambda)} \otimes_{\lambda} K) \stackrel{1.31}{=} bH_c^i(Y(\dot{c}), K)_{(\lambda)} \stackrel{[29]}{=} H_c^i(X, K)_{(\lambda)} \stackrel{4.19}{=} H_c^i(X, K)_{\lambda} \stackrel{4.23}{=} 0.$$

L'hypothèse (W) traduisant le fait que les groupes $H_c^i(\mathcal{C}_{(\lambda)})$ sont sans torsion, on en déduit qu'ils sont nuls pour $i \neq r$. Dès lors, le lemme 1.10 assure que l'on peut, à homotopie près, scinder le complexe $\mathcal{C}_{(\lambda)}$ de façon à obtenir le ΛG -module projectif $P = H_c^r(\mathcal{C}_{(\lambda)})$ concentré en degré r ; son caractère est donné par

$$[P] = \sum_{i=r}^{2r} (-1)^{i-r} [\mathcal{C}_{(\lambda)}^i] = [bH_c^r(Y(\dot{c}), K)_{\lambda}].$$

De plus, d'après le théorème 4.23, il n'y a qu'un seul caractère non exceptionnel (i.e. unipotent) qui apparaît dans ce caractère, à savoir $\chi_{m_{\zeta}}$. La seule possibilité est donc $[P] = \chi_{\text{exc}} + \chi_{m_{\zeta}}$. \square

D'après la section précédente, les modules obtenus ainsi sont exactement les enveloppes projectives des kG -modules cuspidaux. Ces derniers seront notés $S_{m_{\zeta}}$ et leur enveloppe projective $P_{m_{\zeta}}$. Ils forment les arêtes reliant les branches non-cuspidales (ou de façon équivalente, les composantes connexes de Γ^{\bullet}) au sommet exceptionnel. On a donc montré

Corollaire 4.39. *Sous l'hypothèse (W) la conjecture de Hiss-Lübeck-Malle est vraie.*

4.3.3 Applications numériques

Nous donnons, pour finir cette partie, deux applications directes de l'étude précédente, toujours sous l'hypothèse (W).

Proposition 4.40. *Soit M un KG -module unipotent simple du bloc principal. Si M est cuspidal, alors sa réduction modulo ℓ est un kG -module simple supercuspidal.*

Démonstration. Les caractères irréductibles unipotents cuspidaux du bloc sont de la forme $\chi_{m_{\zeta}}$ avec $m_{\zeta} = M_{\zeta}$ (par le théorème 4.23). La conjecture de Hiss-Lübeck-Malle assure alors que les sommets associés sont des extrémités de l'arbre de Brauer, ce qui prouve que la réduction modulo ℓ d'un module associé à un tel caractère est isomorphe au module simple $S_{m_{\zeta}}$.

De plus, l'enveloppe projective de $S_{m_{\zeta}}$ a pour caractère $\chi_{\text{exc}} + \chi_{m_{\zeta}}$ qui est cuspidal par la proposition 4.17 et le théorème 4.23. Ceci traduit la supercuspidalité du module $S_{m_{\zeta}}$. \square

Dans la classification de Lusztig [64], les caractères unipotents se regroupent en familles. On peut vérifier que la fonction a de Lusztig – c'est-à-dire la valuation du degré d'un caractère unipotent comme polynôme en q – est constante sur chaque famille \mathcal{F} ; on la notera $a(\mathcal{F})$.

Proposition 4.41. *Soient $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_m$ les familles F -stables de caractères unipotents qui rencontrent le bloc principal, ordonnées de telle sorte que $a(\mathcal{F}_1) \leq \dots \leq a(\mathcal{F}_m)$. Alors on peut arranger les caractères de Brauer du bloc de façon à ce que la restriction de*

la matrice de décomposition à l'ensemble des caractères unipotents ait une forme triangulaire inférieure

$$D = \begin{pmatrix} I_{r_1} & 0 & \cdots & 0 \\ * & I_{r_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & I_{r_m} \end{pmatrix}$$

où les blocs diagonaux correspondant à chaque famille sont des matrices identité.

Démonstration. Une fois l'ordre sur les caractères unipotents fixé, on ordonnera les caractères de Brauer du bloc via la correspondance $\chi_j \leftrightarrow [S_j]$.

D'après [17, lemme 5.11], la puissance de q apparaissant dans la valeur propre de F^δ associée à χ est donnée par

$$n_\chi = \frac{2\nu_{\mathbf{G}} - (a_\chi + A_\chi)}{r}.$$

Puisque cette quantité est constante sur les familles, on déduit de la forme de l'arbre que deux caractères dans la même famille ne peuvent être sur la même branche de l'arbre. Autrement dit, pour χ et η deux caractères distincts de la même famille, les images $\text{dec}_k(\chi)$ et $\text{dec}_k(\eta)$ n'ont aucun composant en commun. Ceci traduit la présence des matrices identité sur la diagonale de D .

D'autre part, on peut vérifier, au cas par cas, que pour deux caractères du bloc principal, on a $a_\chi \leq a_\eta$ si et seulement si $n_\eta \geq n_\chi$. Puisque la fonction n_χ est croissante sur chaque branche de l'arbre (par la conjecture 4.26), on en déduit aisément que la matrice de décomposition est unitriangulaire. \square

De façon plus générale, il est conjecturé que ces deux résultats (sans la supercuspidalité, voir la remarque 5.38) restent vrais lorsque ℓ est seulement supposé bon [41, conjecture 3.4]. Nous donnerons une autre interprétation de la proposition précédente dans la dernière partie de ce chapitre.

4.4 Autour de la torsion dans la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig

La preuve de la conjecture de Hiss-Lübeck-Malle donnée dans la partie précédente est conditionnée par une hypothèse de non torsion de certains espaces propres de F^δ sur la cohomologie de la variété de Deligne-Lusztig $Y(\dot{c})$ (hypothèse (W)). Nous donnons dans cette partie quelques résultats partiels autour de la torsion dans les variétés $X(c)$ et $Y(\dot{c})$ dans le but de s'affranchir de cette hypothèse. Voici les différentes étapes dans notre programme :

- (1) lorsque I est un sous-ensemble propre de Δ stable par ϕ , il n'y a pas de torsion dans la cohomologie de X_I ;
- (2) les groupes de torsion de $H_c^i(X, \Lambda)$ et $bH_c^i(Y(\dot{c}), \Lambda)$ sont des ΛG -modules cuspidaux ;

- (3) les facteurs de composition cuspidaux de $H_c^i(X, \Lambda)$ sont concentrés en degré moitié.

La résolution des deux premiers points est détaillée dans les sections 4.4.2 et 4.4.3 de cette partie, et consiste à exprimer la cohomologie des quotients de X et $Y(\dot{c})$ par les sous-groupes unipotents U_I à partir de la cohomologie de certaines variétés que l'on sait sans torsion. Grâce à ces résultats, on est ramené à connaître l'emplacement des facteurs de composition cuspidaux dans la cohomologie de la variété X . Malheureusement, notre analyse ne peut pas se conduire sur chaque espace propre de F^δ , mais aboutit en revanche à la considération d'une hypothèse plus forte que (W), à savoir

(S) Les Λ -modules $bH_c^i(Y(\dot{c}), \Lambda)$ sont sans torsion.

Celle-ci sera partiellement démontrée au cours de la section 4.4.4 mais entièrement résolue pour les groupes quasi-simples de type A_n, B_n, C_n et 2D_n à la fin de ce chapitre. Notons que la propriété d'être sans torsion pour la variété X est certainement spécifique à l'élément de Coxeter, et ne sera en général pas vérifiée pour les éléments réguliers de plus grande longueur, comme nous le verrons au chapitre suivant (voir remarque 5.37).

Indépendamment de ces résultats, il nous a semblé intéressant de donner dans une première section un résultat analogue au point (1) pour les compactifications de variétés de Deligne-Lusztig $\overline{X}(w)$. Cela pourra constituer un point de départ à l'étude de la torsion pour les variétés associées à d'autres éléments du groupe de Weyl.

4.4.1 Le cas des variétés \overline{X}_I

On revient dans un premier temps au cas général : w est un élément quelconque du groupe de Weyl, et ℓ est seulement supposé différent de ρ . Le peu de renseignements dont on dispose sur la géométrie de la variété de Deligne-Lusztig $X(w)$ font que l'étude de la torsion dans la cohomologie de cette variété reste un problème difficile. Il n'existe d'ailleurs à notre connaissance que peu de critères généraux permettant de vérifier une telle propriété ; celui que nous utiliserons ici s'inspire de l'exemple de la variété de drapeaux \mathbf{G}/\mathbf{B} , stratifiée par des espaces affines :

Lemme 4.42. *Soit Z une variété quasi-projective filtrée par une suite de sous-variétés fermées $Z = F_0 \supset F_1 \supset \dots \supset F_n = \emptyset$. On suppose que la cohomologie des variétés $Z_j = F_j \setminus F_{j+1}$ est concentrée en degré maximal, c'est-à-dire vérifie*

$$H_c^\bullet(Z_j, \Lambda) = H_c^{2 \dim Z_j}(Z_j, \Lambda).$$

Alors les groupes de cohomologie de Z sont sans torsion, et non nuls en degrés uniquement.

Démonstration. On raisonne sur les sous-variétés F_j par récurrence sur j : on suppose pour cela que la cohomologie de F_{j+1} est sans torsion et non nulle en degrés

pairs seulement. La partition $F_j = Z_j \cup F_{j+1}$ induit une suite exacte longue en cohomologie

$$\cdots \longrightarrow H_c^i(Z_j, \Lambda) \longrightarrow H_c^i(F_j, \Lambda) \longrightarrow H_c^i(F_{j+1}, \Lambda) \longrightarrow H_c^{i+1}(Z_j, \Lambda) \longrightarrow \cdots$$

Notons $N = 2 \dim Z_j$. Lorsque i est différent de $2N$ et $2N - 1$, il n'y a pas de contribution de Z_j dans la suite précédente, et la flèche $H_c^i(F_j, \Lambda) \longrightarrow H_c^i(F_{j+1}, \Lambda)$ est un isomorphisme. Pour $i = 2N - 1$, c'est une injection ; mais la cohomologie de F_{j-1} étant concentrée en degrés pairs, on en déduit que $H_c^{2N-1}(F_j, \Lambda) = 0$. Enfin, dans le cas où $i = 2N$, on obtient la suite exacte courte suivante :

$$0 \longrightarrow H_c^{2N}(Z_j, \Lambda) \longrightarrow H_c^{2N}(F_j, \Lambda) \longrightarrow H_c^{2N}(F_{j+1}, \Lambda) \longrightarrow 0$$

ce qui prouve que $H_c^{2N}(F_j, \Lambda)$ est sans torsion. \square

Remarque 4.43. On peut même montrer que la suite exacte précédente se scinde : en effet, si on note \bar{Z}_j l'adhérence de Z_j dans Z , la flèche $\iota : H_c^{2N}(Z_j, \Lambda) \longrightarrow H_c^{2N}(\bar{Z}_j, \Lambda)$ est un isomorphisme, et on construit une rétraction en composant l'application de restriction $H_c^{2N}(F_j, \Lambda) \longrightarrow H_c^{2N}(\bar{Z}_j, \Lambda)$ et ι^{-1} [61, proposition 2.7].

Exemple 4.44. La variété \mathbf{G}/\mathbf{B} est stratifiée par les cellules de Schubert $\mathbf{B}_v \cdot \mathbf{B}$ pour $v \in W$, qui sont isomorphes à des espaces affines de dimension $\ell(v)$. La filtration obtenue à partir de cette stratification vérifie donc les hypothèses du lemme, et on en déduit que la cohomologie de \mathbf{G}/\mathbf{B} est sans torsion.

Pour des raisons évidentes, il n'y a aucun espoir d'appliquer le lemme précédent directement aux variétés de Deligne-Lusztig. En revanche, on peut, en suivant [61], construire une variété raisonnablement proche de $X(w)$ et vérifiant les hypothèses du lemme. Nous allons maintenant détailler cette construction.

Rappelons que pour toute décomposition réduite $w = s_1 \cdots s_m$ de w , il existe une compactification lisse de $X(w)$ à la Bott-Samelson (voir section 2.2.1), notée $\bar{X}(w)$ par abus de notation. Elle est définie dans [29] comme l'ensemble des $(m + 1)$ -uplets $(g_0\mathbf{B}, \cdots, g_m\mathbf{B}) \in (\mathbf{G}/\mathbf{B})^{m+1}$ vérifiant

- $g_{i-1}^{-1}g_i \in \mathbf{P}_{s_i} = \mathbf{B} \cup \mathbf{B}s_i\mathbf{B}$ pour tout $i = 1, \dots, m$;
- $g_m^{-1}F(g_0) \in \mathbf{B}$.

C'est une variété projective lisse, et le morphisme $\pi : \bar{X}(w) \longrightarrow \overline{X(w)}$ donné par la première projection $(g_0\mathbf{B}, \cdots, g_m\mathbf{B}) \longmapsto g_0\mathbf{B}$ induit un isomorphisme de $\pi^{-1}(X(w))$ sur $X(w)$, ce qui justifie la terminologie employée. D'autre part, l'action du groupe fini G sur $X(w)$ s'étend naturellement en une action sur $\bar{X}(w)$ par multiplication à gauche sur chaque composante, et on peut définir le produit amalgamé

$$Z = \bar{X}(w) \times_G \bar{X}(w).$$

Lusztig a construit dans [61] une partition de $\bar{X}(w) \times \bar{X}(w)$ en une famille de sous-variétés localement fermées indexées par un ensemble partiellement ordonné (\mathcal{M}, \leq) . Chacune des pièces Z_a de cette décomposition vérifie :

- (i) Z_a est stable par l'action diagonale de G sur $\bar{X}(w) \times \bar{X}(w)$;

- (ii) l'adhérence \overline{Z}_a de Z_a est contenue dans $\bigcup_{a' \leq a} Z_{a'}$;
- (iii) la cohomologie de la variété quotient $G \backslash Z_a$ à coefficients dans le corps K est concentrée en degré maximal (égal à $2 \dim Z_a$).

En particulier, la décomposition induite sur Z par les variétés $G \backslash Z_a$ est très proche de vérifier les conditions d'application du lemme 4.42. Le seul problème vient du point (iii) qui concerne la cohomologie à coefficients dans K et non sur l'anneau Λ . Cette obstruction peut être levée en supposant que le nombre premier ℓ est assez grand :

Proposition 4.45. *Si ℓ ne divise par l'ordre de G , alors la cohomologie de la variété $Z = \overline{X}(w) \times_G \overline{X}(w)$ à coefficient dans Λ est sans torsion.*

Démonstration. En vertu du lemme 4.42, il suffit donc de montrer que la cohomologie des variétés $G \backslash Z_a$ à coefficients dans Λ est concentrée en degré maximal. On reprend à cette fin l'argument de Lusztig utilisé pour montrer (iii) : \mathbf{a} étant fixé, il construit les objets suivants :

- une variété quasi-projective Z_0 muni d'une action de $G \times T^{\text{op}}$, avec T un groupe fini agissant librement, ainsi qu'un morphisme surjectif G -équivariant $\pi_0 : Z_0 \rightarrow Z_a$ induisant un isomorphisme entre les G -variétés Z_0/T et Z_a ;
- une variété quasi-projective Z_1 munie de deux actions libres de G et T qui commutent, et telles que $G \backslash Z_1$ soit un quasi-espace affine ;
- un quasi-fibré vectoriel $G \times T^{\text{op}}$ -équivariant $\pi_1 : Z_0 \rightarrow Z_1$.

Les traductions cohomologiques de ces constructions s'écrivent, via les résultats de la section 1.2.2 :

- $R\Gamma_c(Z_a, \Lambda) \simeq R\Gamma_c(Z_0, \Lambda) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda T} \Lambda$ dans $D^b(\Lambda G\text{-Mod})$;
- $\Lambda \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda G} R\Gamma_c(Z_1, \Lambda) \simeq \Lambda[-2 \dim Z_1]$ dans $D^b(\text{Mod-}\Lambda T)$;
- $R\Gamma_c(Z_0, \Lambda) \simeq R\Gamma_c(Z_1, \Lambda)[-2(\dim Z_0 - \dim Z_1)]$ dans $D^b(\Lambda G\text{-Mod-}\Lambda T)$;

et, puisque ℓ ne divise pas $|G|$, on en déduit que

$$R\Gamma_c(G \backslash Z_a, \Lambda) \simeq \Lambda \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda G} R\Gamma_c(Z_a, \Lambda) \simeq \Lambda \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda T} \Lambda[-2 \dim Z_0].$$

dans $D^b(\Lambda\text{-Mod})$.

Pour finir, T est isomorphe à un sous-groupe de \mathbf{T}^{vF} pour un certain élément v du groupe de Weyl [61], et son ordre est donc inversible dans Λ par hypothèses sur ℓ . On trouve donc $R\Gamma_c(G \backslash Z_a, \Lambda) \simeq \Lambda[-2 \dim Z_a]$, ce qui termine la preuve. \square

Remarque 4.46. L'action de G sur Z_a n'est pas libre, et dans le cas où ℓ divise l'ordre de G , les ordres des stabilisateurs des points de Z_a sous cette action peuvent ne pas être inversibles dans Λ . Dans ce cas, la cohomologie de la variété quotient $G \backslash Z_a$ n'est pas forcément donnée par les coinvariants de la cohomologie.

Corollaire 4.47. *Si ℓ ne divise pas l'ordre de G , alors la cohomologie de la variété $\overline{X}(w)$ à coefficients dans Λ est sans torsion.*

Démonstration. Pour simplifier les notations de cette preuve, on désignera par \overline{X} la variété de Deligne-Lusztig compactifiée. Puisque ℓ ne divise pas l'ordre de G , les ΛG -modules projectifs de type fini sont exactement les ΛG -modules libres de rang fini sur Λ . Aussi le complexe $D = R\Gamma_c(\overline{X}, \Lambda)$ est parfait par le théorème 1.26. On en déduit par la formule de Künneth [91, théorème 3.6.1] la suite exacte suivante, pour tout entier n :

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(D) \otimes_{\Lambda G} H^j(D) \longrightarrow H^n(D \otimes_{\Lambda G} D)$$

qui, à l'aide la formule $R\Gamma_c(Z, \Lambda) \simeq D \otimes_{\Lambda G} D$ donnée dans la section 1.2.2, se traduit par

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(\overline{X}, \Lambda) \otimes_{\Lambda G} H^j(\overline{X}, \Lambda) \longrightarrow H^n(Z, \Lambda)$$

En vertu de la proposition 4.45, les groupes $H^i(\overline{X}, \Lambda) \otimes_{\Lambda G} H^j(\overline{X}, \Lambda)$ sont donc sans torsion. On va en déduire que chacun des groupes $H^i(\overline{X}, \Lambda)$ l'est aussi. Pour cela, on note $H^i(\overline{X}, \Lambda)_{\text{tor}}$ la torsion de ce dernier groupe et on écrit

$$0 \longrightarrow H^i(\overline{X}, \Lambda)_{\text{tor}} \longrightarrow H^i(\overline{X}, \Lambda) \longrightarrow H^i(\overline{X}, \Lambda)/H^i(\overline{X}, \Lambda)_{\text{tor}} \longrightarrow 0$$

Puisque l'ordre de G est inversible dans Λ et que $H^i(\overline{X}, \Lambda)/H^i(\overline{X}, \Lambda)_{\text{tor}}$ est sans torsion par définition, le module de torsion est en fait facteur direct de $H^i(\overline{X}, \Lambda)$. Par passage au produit tensoriel, on en déduit que $H^i(\overline{X}, \Lambda)_{\text{tor}} \otimes_{\Lambda G} H^j(\overline{X}, \Lambda)$ est un sous-module de torsion de $H^i(\overline{X}, \Lambda) \otimes_{\Lambda G} H^j(\overline{X}, \Lambda)$, et qu'à ce titre il est nul.

Puisque les groupes de cohomologie non nuls sont en nombre fini, et chacun de type fini, on peut fixer un entier n tel que pour tout $m \in \mathbb{Z}$

$$\text{Tor}_1^\Lambda(H^m(\overline{X}, \Lambda), \Lambda/\ell^n\Lambda) = H^m(\overline{X}, \Lambda)_{\text{tor}}.$$

Autrement dit, n est choisi de sorte que chaque élément de torsion soit en fait annulé par ℓ^n . En particulier, $H^i(\overline{X}, \Lambda)_{\text{tor}}$ est un $\Lambda/\ell^n\Lambda$ -module et par réduction modulo ℓ^n , on a

$$H^i(\overline{X}, \Lambda)_{\text{tor}} \otimes_{(\Lambda/\ell^n\Lambda)G} (H^j(\overline{X}, \Lambda) \otimes_{\Lambda} \Lambda/\ell^n\Lambda) = 0$$

et la formule des coefficients universels nous permet donc d'affirmer que

$$H^i(\overline{X}, \Lambda)_{\text{tor}} \otimes_{(\Lambda/\ell^n\Lambda)G} H^j(\overline{X}, \Lambda/\ell^n\Lambda) \simeq H^i(\overline{X}, \Lambda)_{\text{tor}} \otimes_{(\Lambda/\ell^n\Lambda)G} H^{j+1}(\overline{X}, \Lambda)_{\text{tor}}.$$

L'analyse précédente nous assure que ce dernier terme est nul, comme la ℓ^n -réduction d'un facteur direct de $H^i(\overline{X}, \Lambda)_{\text{tor}} \otimes_{\Lambda G} H^{j+1}(\overline{X}, \Lambda)$. On obtient ainsi

$$H^i(\overline{X}, \Lambda)_{\text{tor}} \otimes_{(\Lambda/\ell^n\Lambda)G} H^j(\overline{X}, \Lambda/\ell^n\Lambda) = 0.$$

D'autre part, \overline{X} est une variété projective lisse, et la dualité de Poincaré fournit un isomorphisme de $(\Lambda/\ell^n\Lambda)G$ -modules entre le groupe $H^j(\overline{X}, \Lambda/\ell^n\Lambda)$ et le dual de $H^{2r-j}(\overline{X}, \Lambda/\ell^n\Lambda)$ sur $\Lambda/\ell^n\Lambda$ (voir la remarque 1.25). L'égalité précédente peut donc se réécrire en

$$\mathrm{Hom}_{(\Lambda/\ell^n\Lambda)_G}(\mathrm{H}^{2r-j}(\overline{X}, \Lambda/\ell^n\Lambda), \mathrm{H}^i(\overline{X}, \Lambda)_{\mathrm{tor}}) = 0.$$

Appliquée au cas $j = 2r - i - 1$, on trouve

$$\mathrm{Hom}_{(\Lambda/\ell^n\Lambda)_G}(\mathrm{H}^{i-1}(\overline{X}, \Lambda/\ell^n\Lambda), \mathrm{H}^i(\overline{X}, \Lambda)_{\mathrm{tor}}) = 0$$

ce qui force le module $\mathrm{H}^i(\overline{X}, \Lambda)_{\mathrm{tor}} = \mathrm{Tor}_1^\Lambda(\mathrm{H}^i(\overline{X}, \Lambda), \Lambda/\ell^n\Lambda)$ à être nul par la formule des coefficients universels 1.3. \square

Ce dernier corollaire s'inscrit parfaitement dans notre démarche : rappelons que pour un sous-ensemble de racines simples I stable par ϕ , on peut former la variété de Deligne-Lusztig $X_I = X_{L_I}(c_I)$ associée à l'élément de Coxeter c_I de (W_I, F) obtenu à partir de c en ne gardant que les réflexions simples de I . Si on reprend les hypothèses sur ℓ données dans le début de la section 4.2.2, l'ordre du groupe L_I est étranger à ℓ dès que I est un sous-ensemble propre de Δ . En particulier,

Corollaire 4.48. *Si ℓ vérifie les hypothèses données en 4.2.2, et si I est un sous-ensemble propre de Δ stable par ϕ , alors la cohomologie de la variété \overline{X}_I à coefficients dans Λ est sans torsion.*

4.4.2 Torsion et cuspidalité

Avec les hypothèses sur ℓ énoncées en 4.2.2, on résoud dans cette section le problème de la torsion pour les variétés X_I lorsque $I \subsetneq \Delta$. L'idée qui prédomine ici, et que nous réutiliserons dans le cours de cette partie, consiste à montrer que la torsion est nécessairement cuspidale, et étudier alors la présence ou non de facteurs de composition cuspidaux. On gagne alors à utiliser tous les triangles exacts donnés par les constructions de Lusztig [62] afin d'identifier les groupes de cohomologie qui possèdent potentiellement des facteurs de composition cuspidaux. Les détails sont donnés dans la preuve de la proposition suivante :

Proposition 4.49. *Soit I un sous-ensemble propre de Δ , stable par ϕ . Alors la cohomologie de la variété X_I à coefficients dans Λ est sans torsion.*

Démonstration. On procède par récurrence sur le cardinal de $|I|$, la proposition étant trivialement vérifiée lorsque $I = \emptyset$. Fixons donc un ensemble de racines simples non vide et stable par F . La récurrence est amorcée par [62, corollaire 2.10] (cf. aussi la section suivante pour plus de détails) : pour tout sous-ensemble $J \subset I$ stable par ϕ et maximal pour cette propriété, on dispose d'un isomorphisme de variétés $(U_J \cap L_I) \backslash X_I \simeq X_J \times \mathbf{G}_m$, qui se traduit par l'isomorphisme de Λ -modules suivant :

$${}^*R_{L_I}^{L_I}(\mathrm{H}_c^i(X_I, \Lambda)) \simeq \mathrm{H}_c^{i-1}(X_J, \Lambda) \oplus \mathrm{H}_c^{i-2}(X_J, \Lambda).$$

Par conséquent, la restriction de $\mathrm{H}_c^\bullet(X_I, \Lambda)_{\mathrm{tor}}$ est un Λ -sous-module de torsion de $\mathrm{H}_c^\bullet(X_J, \Lambda)$ qui est donc nul par hypothèse de récurrence. Autrement dit, tout sous-module de torsion de $\mathrm{H}_c^\bullet(X_I, \Lambda)$ est un ΛL_I -module cuspidal.

Posons $r_I = |I/\phi|$. En suivant [62], on peut filtrer la compactification \bar{X}_I par une suite de sous-variétés fermées et L_I -stables $\bar{X}_I = D_{r_I}(I) \supset D_{r_I-1}(I) \supset \cdots \supset D_0(I) = L_I/B_I$. Chaque couple $(D_a(I), D_{a-1}(I))$ donne lieu à des suites exactes longues de kL_I -modules :

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{\substack{J \subset I \text{ stable par } \phi \\ |J/\phi|=a}} R_{L_J}^{L_I}(\mathrm{H}_c^i(X_J, k)) \longrightarrow \mathrm{H}^i(D_a(I), k) \longrightarrow \mathrm{H}^i(D_{a-1}(I), k) \longrightarrow \cdots$$

Puisque kL_I est semi-simple, on se trouve dans le cas où

- tout facteur de composition cuspidal d'un kL_I -module M est en fait facteur direct. On peut donc définir naturellement la partie cuspidale de M , notée M_{cusp} comme la somme de tous les sous-modules cuspidaux ;
- un kL_I -module induit $R_{L_J}^{L_I}(M)$ a une partie cuspidale nulle si $J \neq I$;
- la dualité de Poincaré exprime le fait que $\mathrm{H}^i(\bar{X}_I, k)$ est isomorphe au k -dual du kL_I -module $\mathrm{H}^{2r_I-i}(\bar{X}_I, k)$ (voir la remarque 1.25) ;

On en déduit, comme dans [62], que la partie cuspidale de $\mathrm{H}_c^i(X_I, k)$ est nulle dès que $i > r_I$, grâce aux isomorphismes

$$\mathrm{H}_c^i(X_I, k)_{\mathrm{cusp}} \simeq \mathrm{H}^i(\bar{X}_I, k)_{\mathrm{cusp}} \simeq \mathrm{H}^{2r_I-i}(\bar{X}_I, k)_{\mathrm{cusp}}^* \simeq \mathrm{H}_c^{2r_I-i}(X_I, k)_{\mathrm{cusp}}^* = 0.$$

Pour finir, on revient aux groupes de cohomologie à coefficients dans Λ : pour $i > r_I$, le module $\mathrm{H}_c^i(X_I, \Lambda)_{\mathrm{tor}} \otimes_{\Lambda} k$ est un sous-module cuspidal de $\mathrm{H}_c^i(X_I, \Lambda) \otimes_{\Lambda} k$ et donc aussi de $\mathrm{H}_c^i(X_I, k)$ par la formule des coefficients universels 1.3. Il est donc nul, ce qui prouve que $\mathrm{H}_c^i(X_I, \Lambda)$ est sans torsion. Le cas $i = r_I$ se déduit quant à lui de l'affinité de X_I : puisque $\mathrm{H}_c^{r_I-1}(X_I, k)$ est nul, le groupe $\mathrm{H}_c^{r_I}(X_I, \Lambda)$ est sans torsion par la formule 1.3 (voir le corollaire 1.28). \square

Remarque 4.50. Le fait que ℓ ne divise pas l'ordre des groupes considérés est primordial : dans le cas contraire, un module induit peut avoir des facteurs de composition cuspidaux. Par exemple, le module $R_7^G(k) = k[G/B]$ a un facteur de composition cuspidal (égal à S_0 avec les notations de la section 4.3.2). C'est en grande partie à cause de ce phénomène que l'argument de [62, proposition 4.3] ne peut pas s'appliquer dans le cas modulaire, même si on espère que le résultat sur la concentration des modules cuspidaux reste vrai.

Comme conséquence immédiate de cette proposition et de l'isomorphisme donné par [62, corollaire 2.10], on trouve :

Corollaire 4.51. *Les modules de torsion de chaque groupe $\mathrm{H}_c^i(X, \Lambda)$ sont des ΛG -modules cuspidaux.*

Remarque 4.52. Pour montrer qu'il n'y a pas de torsion dans la cohomologie de X , il suffit donc de prouver que pour $i > r$, les groupes $\mathrm{H}_c^i(X, k)$ n'ont pas de facteurs de composition cuspidaux et procéder comme dans la fin de la preuve de la proposition précédente.

Réciproquement, si les groupes $\mathrm{H}_c^i(X, \Lambda)$ sont sans torsion et que la conjecture de Hiss-Lübeck-Malle est vérifiée, alors les facteurs de composition cuspidaux

sont concentrés en degré moitié d'après l'étude effectuée dans la partie 4.3. Cela justifie la démarche que nous adopterons jusqu'à la fin de cette partie.

4.4.3 Réduction de Y à X

Cette section est consacrée à l'étude du lien entre les problèmes de torsion pour les deux types de variétés de Deligne-Lusztig. Plus précisément, on donne une condition sur X pour que la cohomologie de Y , coupée par le bloc principal, soit sans torsion. L'avantage de la variété X est qu'elle possède une compactification qui est lisse, contrairement à celle de Y qui, en général, est seulement rationnellement lisse [9]. Cela nous permettra d'utiliser de façon intensive la dualité de Poincaré-Verdier pour déduire certaines propriétés de concentration des kG -modules cuspidaux dans la section suivante, ce qui s'inscrira naturellement dans notre démarche.

On dispose de deux façons de couper la cohomologie de la variété Y : la première consiste à couper à gauche par l'idempotent b associé au bloc principal de ΛG , tandis que la seconde consiste à couper à droite par l'idempotent b' associé au bloc principal de $\Lambda \mathbf{T}^{cF}$. La conjecture de Broué [15] prédit que les deux complexes sont homotopes, c'est-à-dire que l'on a l'isomorphisme suivant dans $K^b(\Lambda G\text{-Mod})$:

$$bR\Gamma_c(Y, \Lambda) \simeq R\Gamma_c(Y, \Lambda)b'.$$

En vertu du théorème 4.9, le résultat est déjà vrai au niveau du corps K , et se transmet donc à Λ dans les cas où il n'y a pas de torsion dans la cohomologie. On se concentrera désormais sur le complexe donné par le membre de droite de cet isomorphisme, qui se calcule simplement par la proposition 1.17 :

$$R\Gamma_c(Y, \Lambda)b' \simeq R\Gamma_c(Y, \Lambda) \otimes_{\Lambda T_{\ell'}} \Lambda \simeq R\Gamma_c(Y/T_{\ell'}, \Lambda)$$

où $T_{\ell'}$ désigne la ℓ' -composante du groupe abélien \mathbf{T}^{cF} . La variété quotient $Y/T_{\ell'}$ sera quant à elle notée Y_{ℓ} .

On a vu précédemment (cf. corollaire 4.51) que la torsion dans la cohomologie de la variété X était forcément cuspidale. En généralisant l'étude du quotient de X par U_I à la variété Y , on dispose d'un analogue de [62, corollaire 2.10] pour la variété Y_{ℓ} :

Proposition 4.53. *Soit I un sous-ensemble propre de Δ , stable par ϕ et maximal pour cette propriété. Alors la cohomologie du quotient $U_I \backslash Y_{\ell}$ est donnée par l'isomorphisme de Λ -modules suivant :*

$$H_c^i(U_I \backslash Y_{\ell}, \Lambda) \simeq {}^*R_{L_I}^G(H_c^i(Y_{\ell}, \Lambda)) \simeq H_c^{i-1}(X_I, \Lambda) \oplus H_c^{i-2}(X_I, \Lambda).$$

Démonstration. Écrivons $c = s_1 \cdots s_r$ et $[\Delta/\phi] = \{\beta_1, \dots, \beta_r\}$ les racines simples associées à cette décomposition. L'ensemble I étant maximal, il s'obtient à partir de Δ en retirant les éléments dans l'orbite d'une certaine racine simple β_j ; autrement dit, $I = \Delta \setminus \{\langle \phi \rangle \cdot \beta_j\}$.

D'après [62, corollaire 2.10] on dispose d'un isomorphisme de variétés $U_I \backslash X \simeq X_I \times \mathbf{G}_m$, qui n'est pas L_I -équivariant en général, mais néanmoins V_I -équivariant, avec $\mathbf{V}_I = \mathbf{L}_I \cap \mathbf{U}$. Vu l'importance de cet isomorphisme dans les preuves de ce chapitre, il convient de détailler sa construction. On emploiera à cette fin le vocabulaire du chapitre 2 et plus particulièrement de la section 2.3.2. En notant $\pi : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{U}_I \backslash \mathbf{B}$ la projection canonique, on peut décrire la variété quotient $U_I \backslash \mathbf{U}$ par :

$$U_I \backslash \mathbf{U} \simeq \{(\bar{u}, h) \in \mathbf{U} \times \mathbf{U}_I \backslash \mathbf{U} \mid h^{-1}F(h) = \pi(\bar{u})\}$$

avec V_I agissant sur h seulement, par multiplication à gauche. D'autre part, pour les éléments de Coxeter, la décomposition de Deodhar prend une forme très simple : seule la cellule maximale est non vide (cf. remarque 2.51). En particulier,

- l'injection $X_{w_0}(c) \rightarrow X$ est un isomorphisme U -équivariant ;
- la cellule de Schubert double $\mathbf{B}c \cdot \mathbf{B} \cap \mathbf{B}^- \cdot \mathbf{B}$ est isomorphe à un tore, via l'isomorphisme

$$\begin{aligned} (\mathbf{G}_m)^r &\longrightarrow \mathbf{B}c \cdot \mathbf{B} \cap \mathbf{B}^- \cdot \mathbf{B} \\ (z_1, \dots, z_r) &\longmapsto u_{-\beta_1}(z_1) \cdots u_{-\beta_r}(z_r) \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

Avec ces observations, on obtient

$$X \simeq \{u \in \mathbf{U} \mid u^{-1}F(u) \in u_{\beta_1}(\mathbf{G}_m) \cdots u_{\beta_r}(\mathbf{G}_m)\}$$

et ainsi

$$U_I \backslash X \simeq \{((z_1, \dots, z_r), h) \in (\mathbf{G}_m)^r \times \mathbf{U}_I \backslash \mathbf{U} \mid h^{-1}F(h) = \pi(u_{\beta_1}(z_1) \cdots u_{\beta_r}(z_r))\}.$$

Maintenant, pour $i \neq j$, le morphisme de groupes $\pi \circ u_{\beta_i}$ est injectif. Mieux, la projection π se scinde en un morphisme de variétés V_I -équivariant ι , obtenu en composant $\mathbf{U}_I \backslash \mathbf{U} \simeq \mathbf{V}_I$ et $\mathbf{V}_I \subset \mathbf{U}$. Via cette section, on a

$$\iota \circ \pi \circ u_{\beta_i}(z_i) = \begin{cases} u_{\beta_i}(z_i) & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et par conséquent

$$U_I \backslash X \simeq \{((z_i), h) \in (\mathbf{G}_m)^r \times \mathbf{V}_I \mid h^{-1}F(h) = u_{\beta_1}(z_1) \cdots \widehat{u_{\beta_j}(z_j)} \cdots u_{\beta_r}(z_r)\}.$$

L'application $((z_i), h) \mapsto (h, z_j)$ induit alors un isomorphisme V_I -équivariant entre les variétés $U_I \backslash X$ et $X_I \times \mathbf{G}_m$.

Remarque 4.54. Plus généralement, on peut effectuer la même construction si I n'est pas supposé maximal. Le quotient $U_I \backslash X$ est toujours paramétré par des variables $z_i \in \mathbf{G}_m$ et $h \in \mathbf{V}_I$, et l'application consistant à oublier les z_i pour lesquels $\beta_i \in I$ induit un isomorphisme V_I -équivariant de variétés

$$\phi_{I, \Delta} : U_I \backslash X \simeq X_I \times (\mathbf{G}_m)^{r-r_I}$$

où, rappelons-le, r_I est égal à $|I/\phi|$. Puisque X_I est aussi une variété de Deligne-Lusztig associée à un élément de Coxeter, mais pour le groupe réductif \mathbf{L}_I , on dispose en fait d'une famille d'isomorphismes

$$\phi_{I,J} : (V_J \cap U_I) \backslash X_J \simeq X_I \times (\mathbf{G}_m)^{r_J - r_I}$$

indexées par les couples (I, J) de sous-ensembles de Δ stables par ϕ et tels que $I \subset J$. Il est alors facile de vérifier qu'ils sont compatibles entre eux, c'est-à-dire que pour $I \subset J \subset L$, on a

$$\phi_{I,L} = (\phi_{I,J} \times \text{id}_{(\mathbf{G}_m)^{r_L - r_J}}) \circ \phi_{J,L}.$$

Retour à la démonstration. On reprend l'idée de [7] déjà utilisée dans la section 2.3.4 : l'isomorphisme $U_I \backslash X \simeq X_I \times \mathbf{G}_m$ ne se relève pas directement à Y , mais seulement à revêtement abélien de cette variété. Considérons la préimage Y° d'une composante connexe de $U \backslash Y$. C'est une variété stable par l'action de U , mais pas nécessairement par l'action de \mathbf{T}^{cF} , qui agit transitivement sur les composantes connexes de $U \backslash Y$ (puisque $U \backslash Y / \mathbf{T}^{cF} \simeq U \backslash X$ est connexe). En notant H le stabilisateur de la composante $U \backslash Y^\circ$ dans \mathbf{T}^{cF} , on obtient un isomorphisme V_I -équivariant

$$U_I \backslash Y^\circ \times_H \mathbf{T}^{cF} \simeq U_I \backslash Y. \quad (4.55)$$

L'avantage de cette construction est que l'on peut maintenant relever le revêtement galoisien $U \backslash Y \rightarrow U \backslash X \simeq (\mathbf{G}_m)^r$ en un revêtement $\varpi : (\mathbf{G}_m)^r \rightarrow (\mathbf{G}_m)^r$ de groupe de Galois $\prod \mathbb{P}_{m_i}$. Les détails sont donnés dans [7] et dans la section 2.3.4. On peut alors former le diagramme suivant, dans lesquels les carrés sont cartésiens :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \longrightarrow & (\mathbf{G}_m)^r \\ \downarrow /N & & \downarrow \varpi /N \\ U_I \backslash Y^\circ & \longrightarrow & U \backslash Y^\circ \\ \downarrow \pi^\circ /H & & \downarrow \pi^\circ /H \\ U_I \backslash X & \longrightarrow & U \backslash X \simeq (\mathbf{G}_m)^r \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow / \prod \mathbb{P}_{m_i} \\ \searrow \end{array} \quad (4.56)$$

Via l'identification $U \backslash X \simeq X_I \times \mathbf{G}_m$ et d'après la remarque précédente, l'application $U \backslash X \rightarrow (\mathbf{G}_m)^r$ se décompose en $\pi_I \times \text{id}_{\mathbf{G}_m}$ où $\pi_I : X_I \rightarrow V_I \backslash X_I \simeq (\mathbf{G}_m)^{r-1}$ est le morphisme quotient associé à X_I . Autrement dit, si on forme le produit fibré suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y}_I & \longrightarrow & (\mathbf{G}_m)^{r-1} \\ \downarrow / \prod_{i \neq j} \mathbb{P}_{m_i} & & \downarrow / \prod_{i \neq j} \mathbb{P}_{m_i} \\ X_I & \longrightarrow & (\mathbf{G}_m)^{r-1} \end{array} \quad (4.57)$$

on peut décomposer la variété \tilde{Y} en $\tilde{Y} \simeq \tilde{Y}_I \times \mathbf{G}_m$, de façon compatible à la décomposition du groupe $\prod \mathbb{P}_{m_i} \simeq (\prod_{i \neq j} \mathbb{P}_{m_i}) \times \mathbb{P}_{m_j}$.

Traduisons maintenant ces constructions en termes cohomologiques à l'aide de la proposition 1.17 : en conjuguant l'équation 4.55 et le diagramme 4.56 on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{R}\Gamma_c(U_I \setminus Y, \Lambda) &\simeq \mathrm{R}\Gamma_c(U_I \setminus Y^\circ, \Lambda) \otimes_{\Lambda_H}^L \Lambda \mathbf{T}^{cF} \\ &\simeq \mathrm{R}\Gamma_c(\tilde{Y}, \Lambda) \otimes_{\Lambda \prod_{i \neq j} \mathbb{U}_{m_i}}^L \Lambda \mathbf{T}^{cF} \end{aligned}$$

ce qui, via l'isomorphisme $\tilde{Y} \simeq \tilde{Y}_I \times \mathbf{G}_m$, et les notations introduites en 2.41, s'écrit finalement

$$\begin{aligned} \mathrm{R}\Gamma_c(U_I \setminus Y, \Lambda) &\simeq \left(\mathrm{R}\Gamma_c(\tilde{Y}_I, \Lambda) \otimes_{\Lambda \prod_{i \neq j} \mathbb{U}_{m_i}}^L \Lambda \mathbf{T}^{cF} \right) \otimes_{\Lambda \mathbf{T}^{cF}}^L \left(\mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{G}_m, \Lambda) \otimes_{\Lambda \mathbb{U}_{m_j}}^L \Lambda \mathbf{T}^{cF} \right) \\ &\simeq \left(\mathrm{R}\Gamma_c(\tilde{Y}_I, \Lambda) \otimes_{\Lambda \prod_{i \neq j} \mathbb{U}_{m_i}}^L \Lambda \mathbf{T}^{cF} \right) \otimes_{\Lambda \mathbf{T}^{cF}}^L Z_{\mathbf{T}^{cF}}(\mathbb{U}_{m_j})[-1] \end{aligned} \quad (4.58)$$

dans la catégorie $D^b(\mathrm{Mod}\text{-}\Lambda \mathbf{T}^{cF})$.

En général, les groupes de cohomologie du complexe $Z_{\mathbf{T}^{cF}}(\mathbb{U}_{m_j})$ ne sont pas munis d'une action triviale de \mathbf{T}^{cF} , car l'application $\mathbb{U}_{m_j} \rightarrow \mathbf{T}^{cF}$ n'est pas surjective. On peut d'ailleurs calculer explicitement l'image de cette dernière application : avec les notations de Bonnafé et Rouquier, [7, proposition 3.5] nous dit que cette image est exactement le groupe $N_c(Y_{c,c_l})$. On trouve donc

$$H^0(Z_{\mathbf{T}^{cF}}(\mathbb{U}_{m_j})) = H^1(Z_{\mathbf{T}^{cF}}(\mathbb{U}_{m_j})) \simeq \Lambda[\mathbf{T}^{cF}/N_c(Y_{c,c_l})].$$

Par [6, proposition 4.4], le groupe quotient apparaissant est aussi isomorphe à $\mathbf{T}^{c_l F}/N_{c_l}(Y_{c,c_l})$ qui est d'ordre premier à ℓ . En particulier, l'image de l'application $\mathbb{U}_{m_j} \rightarrow \mathbf{T}^{cF}$ contient le ℓ -sous-groupe de Sylow de \mathbf{T}^{cF} , c'est-à-dire que le morphisme $\mathbb{U}_{m_j} \rightarrow \mathbf{T}^{cF}/T_\ell$ est assurément surjectif.

Rappelons que l'on cherche à calculer la cohomologie d'un quotient de Y seulement, défini par $Y_\ell = Y/T_\ell$. Grâce à la proposition 1.17, il suffit de prendre les coinvariants sous T_ℓ des complexes calculés précédemment. On dispose du triangle distingué suivant dans $D^b(\Lambda \mathbf{T}^{cF}\text{-Mod})$

$$\Lambda[\mathbf{T}^{cF}/N_c(Y_{c,c_l})] \rightarrow Z_{\mathbf{T}^{cF}}(\mathbb{U}_{m_j}) \rightarrow \Lambda[\mathbf{T}^{cF}/N_c(Y_{c,c_l})][-1] \rightsquigarrow$$

dont les coinvariants sous T_ℓ prennent une forme relativement simple grâce à l'observation précédente :

$$\Lambda \rightarrow Z_{\mathbf{T}^{cF}}(\mathbb{U}_{m_j}) \otimes_{\Lambda T_\ell}^L \Lambda \rightarrow \Lambda[-1] \rightsquigarrow \quad (4.59)$$

Combiné à $\mathrm{R}\Gamma_c(\tilde{Y}_I, \Lambda) \otimes_{\Lambda \prod_{i \neq j} \mathbb{U}_{m_i}}^L \Lambda \mathbf{T}^{cF}$ via l'équation 4.58, ce triangle devient

$$\mathrm{R}\Gamma_c(\tilde{Y}_I, \Lambda) \otimes_{\Lambda \prod_{i \neq j} \mathbb{U}_{m_i}}^L \Lambda[-1] \rightarrow \mathrm{R}\Gamma_c(U_I \setminus Y_\ell, \Lambda) \rightarrow \mathrm{R}\Gamma_c(\tilde{Y}_I, \Lambda) \otimes_{\Lambda \prod_{i \neq j} \mathbb{U}_{m_i}}^L \Lambda[-2] \rightsquigarrow$$

où plus simplement, par définition de \tilde{Y}_I :

$$\mathrm{R}\Gamma_c(X_I, \Lambda)[-1] \rightarrow \mathrm{R}\Gamma_c(U_I \setminus Y_\ell, \Lambda) \rightarrow \mathrm{R}\Gamma_c(X_I, \Lambda)[-2] \rightsquigarrow$$

Examinons de plus près les morphismes de connexion $H_c^{i-2}(X_I, \Lambda) \rightarrow H_c^i(X_I, \Lambda)$ de la suite exacte longue en cohomologie associée. Puisque le triangle 4.59 se

scinde sur K , ce sont des morphismes nuls sur K entre des Λ -modules qui sont sans torsion d'après la proposition 4.49. Ils sont donc identiquement nuls. On en déduit des suites exactes

$$0 \longrightarrow H_c^{i-1}(X_I, \Lambda) \longrightarrow H_c^i(Y_\ell, \Lambda)^{U_I} \longrightarrow H_c^{i-2}(X_I, \Lambda) \longrightarrow 0$$

qui donnent l'isomorphisme cherché. \square

Grâce à cet isomorphisme et à la proposition 4.49, on obtient un analogue du corollaire 4.51 pour la variété Y :

Corollaire 4.60. *Les modules de torsion de chaque groupe $H_c^i(Y_\ell, \Lambda)$ sont des ΛG -modules cuspidaux.*

Si on suppose la conjecture de Hiss-Lübeck-Malle vraie, seul le groupe $H_c^r(Y_\ell)$ peut, après ℓ -réduction, faire apparaître des kG -modules cuspidaux. Conjecturalement, l'absence de torsion dans la variété Y_ℓ est donc équivalente au fait que les groupes $H_c^i(Y_\ell, k)$ ne contiennent aucun facteur de composition cuspidal lorsque $i > r$ (voir aussi la remarque 4.52). Il suffit en fait que la même propriété soit vérifiée pour la variété X seulement :

Corollaire 4.61. *Si les facteurs de composition cuspidaux dans la cohomologie de X à coefficients dans k sont concentrés en degré moitié, alors les groupes $H_c^i(Y_\ell, \Lambda)$ sont sans torsion.*

Démonstration. Notons $\pi_\ell : Y_\ell \longrightarrow X$ le morphisme quotient par le ℓ -Sylow T_ℓ de \mathbf{T}^{cF} . Le module trivial étant le seul kT_ℓ -module simple, l'image du faisceau constant égal à k par π_ℓ s'écrit comme extensions successives de faisceaux constants k_X :

$$(\pi_\ell)_*(k_{Y_\ell}) \simeq \begin{pmatrix} k_X \\ k_X \\ \vdots \\ k_X \end{pmatrix}$$

Au niveau des complexes, on peut donc construire $R\Gamma_c(Y_\ell, k) = R\Gamma_c(X, (\pi_\ell)_*(k_{Y_\ell}))$ à partir d'extensions successives de $R\Gamma_c(X, k)$. Autrement dit, il existe une suite de complexes $R\Gamma_c(Y_\ell, k) = C_0, C_1, \dots, C_n = R\Gamma_c(X, k)$ reliés par des triangles distingués dans $D^b(kG\text{-Mod-}kT_\ell)$

$$C_{i+1} \longrightarrow C_i \longrightarrow R\Gamma_c(X, k) \rightsquigarrow$$

En appliquant le foncteur $\mathrm{RHom}_{kG}^\bullet(P, -)$ à chacun de ces triangles, on en déduit que les complexes $\mathrm{RHom}_{kG}^\bullet(P, C_i)$ sont concentrés en degré r dès que le complexe $\mathrm{RHom}_{kG}^\bullet(P, C_n)$ l'est. En particulier, si P est l'enveloppe projective d'un module cuspidal L , alors L ne peut être facteur de composition de $H_c^i(Y_\ell, k)$ s'il n'est pas facteur de composition de $H_c^i(X, k)$ (voir proposition 1.5). Le lien avec la torsion s'obtient à l'aide du corollaire précédent. \square

Au vu de l'étude effectuée au cours de la section 4.4.2 (voir par exemple la remarque 4.52), ce corollaire permet effectivement de relier l'absence de torsion dans la cohomologie des deux types de variétés de Deligne-Lusztig :

Corollaire 4.62. *La cohomologie de Y_ℓ à coefficients dans Λ est sans torsion dès que les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

- la cohomologie de X à coefficients dans Λ est sans torsion ;
- la conjecture de Hiss-Lübeck-Malle (cf. conjecture 4.26) est vraie.

4.4.4 Étude de la torsion dans la cohomologie de X

Pour (\mathbf{G}, F) un groupe réductif connexe quelconque, on démontre dans cette section deux résultats partiels, ne permettant malheureusement pas de s'affranchir totalement des hypothèses de torsion faible (W) ou forte (S).

Proposition 4.63. *Si λ est une valeur propre de F^δ sur $H_c^i(X, K)$, alors les $\bar{\lambda}$ -espaces propres généralisés de F^δ sur $H_c^*(X, k)$ n'ont pas de facteurs de composition cuspidaux en dehors du degré r . En particulier, les groupes $H_c^i(X, \Lambda)_{(\lambda)}$ sont sans torsion.*

Démonstration. En accord avec [62], on notera $D = D_{r-1}(\Delta)$ le complémentaire de X dans \bar{X} . Soit I un sous-ensemble propre de Δ stable par ϕ . En vertu du théorème 4.23 et de la proposition 4.29, les $\bar{\lambda}$ -espaces propres généralisés de F^δ sur $H_c^i(X_I, K)$ sont nuls si $i \neq |I/\phi|$. Par la proposition 4.49, le résultat reste vrai en considérant les groupes de cohomologie à coefficients dans k . Des suites exactes longues

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{\substack{I \text{ stable par } \phi \\ |I/\phi|=a}} R_{L_I}^G(H_c^i(X_I, k)) \longrightarrow H_c^i(D_a(\Delta), k) \longrightarrow H_c^i(D_{a-1}(\Delta), k) \longrightarrow \cdots$$

on déduit que les groupes $H_c^i(D, k)_{(\lambda)}$ sont nuls dès que $i \geq r$, si bien que pour $i > r$ on trouve

$$H_c^i(X, k)_{(\lambda)} \simeq H^i(\bar{X}, k)_{(\lambda)}.$$

D'autre part, si $\mu = q^{2r}\lambda^{-1}$, alors par le même raisonnement que précédemment on montre que les $\bar{\mu}$ -espace propres généralisés sur $H_c^i(D, k)$ sont nuls pour tout entier i (il suffit de remarquer que μ est une valeur propre maximale dans sa série de Harish-Chandra et qu'à ce titre elle n'intervient jamais dans la cohomologie des sous-variétés X_I). Puisque \bar{X} est lisse, on peut alors appliquer la dualité de Poincaré-Verdier 1.24 et on obtient, pour $i > r$, les isomorphismes suivants

$$H_c^i(X, k)_{(\lambda)} \simeq H^i(\bar{X}, k)_{(\lambda)} \simeq (H^{2r-i}(\bar{X}, k)_{(\mu)})^* \simeq (H_c^{2r-i}(X, k)_{(\mu)})^*.$$

Reste à remarquer que X étant affine et irréductible, les groupes $H_c^{2r-i}(X, k)$ sont nuls lorsque $i > r$, ce qui prouve que $H_c^i(X, k)_{(\lambda)}$ est nul. □

Remarque 4.64. Même si l'énoncé de ce résultat est très proche de l'hypothèse (W), il ne permet pas de déduire une quelconque information sur la présence ou non de torsion dans la cohomologie de Y_ℓ . En effet, la méthode de réduction de Y_ℓ à X mise en oeuvre dans le corollaire 4.61 ne conserve pas les espaces propres généralisés de F^δ .

Notons cependant que Bonnafé et Rouquier ont construit dans [9] une compactification de \bar{Y}_ℓ de Y_ℓ telle que $\bar{Y}_\ell \setminus Y_\ell \simeq \bar{X} \setminus X$. Cette compactification est en général seulement rationnellement lisse, mais si elle s'avère être aussi k -lisse, alors la démonstration précédente se généralise à Y_ℓ , ce qui permettrait d'achever la démonstration de la conjecture de Hiss-Lübeck-Malle.

Le second résultat général de cette section permet de passer partiellement de l'hypothèse (W) à l'hypothèse (S). On montre en effet que seuls certains espaces propres très précis de la cohomologie de X peuvent éventuellement faire apparaître de la torsion :

Proposition 4.65. Soit $\lambda = \zeta q^{m_\delta}$ une valeur propre de F sur $H_c^\bullet(X, K)$ congrue à $q^{j\delta}$ modulo ℓ . Supposons la conjecture 4.26 vérifiée. Alors si $j = m_\zeta$ ou si $j < M_\zeta$ les groupes $H_c^i(X, \Lambda)_{(\lambda)}$ sont sans torsion.

Démonstration. Soit I un sous-ensemble propre de Δ stable par ϕ et μ une valeur propre de F^δ sur $H_c^\bullet(X, K)$. On commence par observer que les modules induits $R_{L_I}^G(H_c^i(X_I, k)_{(\mu)})$ n'ont aucun facteur de composition cuspidal si $i > |I/\phi|$ ou si μ n'est pas congrue à $q^{\delta m_\xi}$ c'est-à-dire minimale dans sa série de Harish-Chandra. En effet, la proposition 4.29 donne

$$\langle \chi_{m_\xi} ; R_{L_I}^G(H_c^i(X_I, K)_{(\mu)}) \rangle = \langle {}^*R_{L_I}^G(H_c^i(X, K)_{(q^{\delta m_\xi})}) ; H_c^i(X_I, K)_{(\mu)} \rangle \neq 0$$

si et seulement si $i = \dim X_I = |I/\phi|$ et μ est congrue à $q^{\delta m_\xi}$. D'autre part, l'absence de torsion dans la cohomologie des variétés X_I donne

$$\text{déc}_G[R_{L_I}^G(H_c^i(X_I, K))] = [R_{L_I}^G(H_c^i(X_I, k))]_k.$$

Il suffit alors de remarquer qu'en vertu de la conjecture de Hiss-Lübeck-Malle et de l'analyse effectuée dans la section 4.3.1, seules les ℓ -réductions des caractères de la forme χ_{m_ξ} peuvent avoir des facteurs de composition cuspidaux.

En reprenant les suites exactes

$$\dots \longrightarrow \bigoplus_{\substack{I \text{ stable par } \phi \\ |I/\phi|=a}} R_{L_I}^G(H_c^i(X_I, k)) \longrightarrow H_c^i(D_a(\Delta), k) \longrightarrow H_c^i(D_{a-1}(\Delta), k) \longrightarrow \dots$$

avec $a < r$, on en déduit que pour $D = D_{r-1}(\Delta)$:

- les groupes $H_c^i(D, k)$ n'ont pas de facteurs de composition cuspidaux dès que $i \geq r - 1$;
- si μ n'est pas congrue modulo ℓ à une valeur propre de F^δ sur $H_c^r(X, K)$ alors les groupes $H_c^i(D, k)_{(\mu)}$ n'ont aucun facteur de composition cuspidal.

On procède alors comme dans la preuve de la proposition précédente : si L est un kG -module simple cuspidal et si $i > r$ alors on peut former la suite d'isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{kG}(P_L, H_c^i(X, k)_{(\lambda)}) &\simeq \mathrm{Hom}_{kG}(P_L, H^i(\overline{X}, k)_{(\lambda)}) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{kG}(P_L, (H^{2r-i}(\overline{X}, k)_{(\mu)})^*) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{kG}(P_L, (H_c^{2r-i}(X, k)_{(\mu)})^*) \end{aligned}$$

avec $\mu = q^{2r}\lambda^{-1}$. Notons que le dernier isomorphisme est justifié par le fait que le dual d'un module cuspidal est bien cuspidal. Puisque X est affine et irréductible, on en déduit que L n'est facteur de composition d'aucun groupe $H_c^i(X, k)_{(\lambda)}$ pour $i > r$, ce qui, conjugué avec le corollaire 4.51, assure que les groupes $H_c^i(X, \Lambda)_{(\lambda)}$ sont sans torsion. \square

Remarque 4.66. Pour venir à bout de l'hypothèse (S), il reste à traiter le cas des valeurs propres λ qui sont congrues à $q^{\delta M_c}$ modulo ℓ . Examinons le cas du groupe $\mathbf{G} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F})$: lorsque l'on calcule la cohomologie de X , on utilise la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow H^0(\overline{X}, k) \longrightarrow H_c^0(D, k) \longrightarrow H_c^1(X, k).$$

Dans cet exemple, on a $H_c^0(D, k) \simeq kG/B$ avec la valeur propre 1 de F , et ce module fait intervenir un facteur de composition cuspidal. Rien ne peut garantir a priori que ce facteur n'intervient pas dans $H^0(\overline{X}, k)$. Ce n'est néanmoins pas le cas puisqu'ici $H^0(\overline{X}, k)$ est le module trivial.

4.4.5 Quelques cas particuliers

Pour finir cette partie, on va donner quelques cas particuliers pour lesquels on peut effectivement montrer que l'hypothèse (S) est vérifiée. Par le corollaire 4.61, il suffit de prouver que les facteurs de composition cuspidaux ne peuvent pas apparaître dans les groupes $H_c^i(X, k)$ dès que $i > r$. Cela revient à montrer que le complexe

$$\mathrm{RHom}_{kG}^\bullet(P, \mathrm{R}\Gamma_c(X, k))$$

est concentré en degré r lorsque P est l'enveloppe projective d'un kG -module cuspidal.

Au cours du chapitre 2, nous avons étudié un phénomène similaire, faisant intervenir des modules projectifs particuliers : les modules de Gelfand-Graev. En combinant l'étude des chapitres 2 et 3 avec les résultats de cette partie, on montre le théorème suivant :

Théorème 4.67. *Avec les hypothèses de la section 4.2.2 sur ℓ et (\mathbf{G}, F) , la cohomologie de la variété Y_ℓ à coefficient dans Λ , coupée par le bloc principal de ΛG , est sans torsion dans les cas suivants :*

- (i) (\mathbf{G}, F) est un groupe de \mathbb{F}_q -rang 1;

- (ii) (\mathbf{G}, F) est de type A_n ou 2D_n ;
- (iii) (\mathbf{G}, F) est de type B_n ou C_n et $p \neq 2$.

(i) Les groupes de \mathbb{F}_q -rang 1. La variété Y_ℓ est le quotient d'une variété affine par un groupe fini : elle est donc affine. D'autre part, c'est une variété irréductible de dimension 1 : sa cohomologie est donc concentrée en degrés 1 et 2 à la fois sur Λ et sur k . Puisque $H_c^0(Y_\ell, k) = 0$, il n'y a pas de torsion dans $H_c^1(Y_\ell, \Lambda)$; il ne peut pas y avoir non plus de torsion dans le groupe $H_c^2(Y_\ell, \Lambda)$, puisqu'il est toujours libre de rang égal au nombre de composantes irréductibles de dimension 1 de Y_ℓ .

(ii) Les groupes de type A_n et 2D_n . Pour chacun de ces deux types, il n'y a que les caractères de la série principale qui sont susceptibles d'être dans le bloc principal (voir [62, table 7.3]). Dès lors, on sait d'après les résultats de la section 4.3.1 qu'il ne peut y avoir qu'un seul kG -module simple cuspidal dans ce bloc, et on va pouvoir construire son enveloppe projective.

Soit ψ un caractère régulier de U , et Γ_ψ le module de Gelfand-Graev associé. D'après [29], son caractère rencontre une et une seule fois chaque série rationnelle $\mathcal{E}(G, s)$. En particulier, il n'a qu'un seul composant unipotent, et c'est le caractère de Steinberg St_G , que l'on a noté χ_0 en 4.21. Par conséquent, son caractère, coupé par le bloc principal b est forcément donné par

$$[b\Gamma_\psi]_{\mathcal{K}} = \chi_{\text{exc}} + \text{St}_G = \chi_{\text{exc}} + \chi_0$$

ce qui permet d'identifier $b\Gamma_\psi$ à l'enveloppe projective de l'unique module cuspidal du bloc principal.

On peut alors utiliser le théorème 3.27 dans le cas particulier de l'élément de Coxeter, ce qui donne

$$\text{RHom}_{kG}^\bullet(\bar{\Gamma}_\psi, \text{R}\Gamma_c(X, k)) \simeq \bar{e}_\psi \text{R}\Gamma_c(X, k) \simeq k[-r].$$

Par la proposition 1.5, cette dernière propriété traduit le fait que tout kG -module situé dans la tête de Γ_ψ ne peut être facteur de composition de $H_c^i(X, k)$ pour $i = r$ seulement. En particulier, l'unique kG -module simple cuspidal du bloc principal, qui se trouve dans la tête de $b\Gamma_\psi$, ne peut être facteur de composition de $H_c^i(X, k)$ lorsque $i > r$. À l'aide du corollaire 4.61, on en déduit que la cohomologie du complexe $b\text{R}\Gamma_c(Y_\ell, \Lambda)$ est sans torsion.

(iii) Le type B_2 . Pour les types B_n et C_n , la situation est un peu plus compliquée que précédemment : il y a deux séries qui rencontrent le bloc principal, et ainsi deux kG -modules simples cuspidaux dans ce bloc. Le module de Gelfand-Graev, coupé par le bloc, donne comme précédemment l'enveloppe projective de l'un d'entre eux mais ne donne aucune information sur le second. L'objectif général est alors de construire, pour tout kG -module simple cuspidal L du bloc, un module projectif Q_L tel que

- L est dans la tête du module Q_L . Autrement dit, P_L est facteur direct de Q_L ;

- la cohomologie du complexe $\mathrm{RHom}_{\Lambda_G}^\bullet(Q_L, \mathrm{R}\Gamma_c(X, \Lambda))$ est sans torsion.

Si ces deux conditions sont remplies, on déduit de la formule 1.3 que la cohomologie du complexe $\mathrm{RHom}_{kG}^\bullet(\overline{P}_L, \mathrm{R}\Gamma_c(X, k))$ est concentrée en degré r (puisque'elle l'est déjà sur K). Ainsi, par la proposition 1.5, L ne peut pas apparaître comme module de torsion de $H_c^\bullet(X, \Lambda)$.

Dans le cas des groupes de type B_n et C_n , nous allons construire le module Q_L à l'aide des modules de Gelfand-Graev généralisés associés à la classe unipotente sous-régulière. Afin d'effectuer des premiers calculs de façon explicite, nous commencerons par traiter le cas $n = 2$. On notera α et β les racines simples, la racine β étant supposée longue. Les réflexions associées seront notées s et t :

$$\begin{array}{c} s \quad t \\ \circ \rightleftarrows \circ \end{array}$$

Avec ces notations, le diagramme de Dynkin pondéré d associé à la classe sous-régulière \mathcal{O} est défini par $d(\alpha) = 0$ et $d(\beta) = 2$. Le groupe unipotent \mathbf{U}_2 associé est donc engendré par \mathbf{U}_β , $\mathbf{U}_{\alpha+\beta}$ et $\mathbf{U}_{2\alpha+\beta}$.

Pour toute la suite, on fera le choix $c = ts$ pour l'élément de Coxeter. La variété X s'écrit alors

$$X = \{u \in \mathbf{U} \mid u^{-1}F(u) \in u_\alpha(\mathbf{G}_m)u_\beta(\mathbf{G}_m)\}$$

En écrivant $u = u(x, y, z, t) = u_\alpha(x)u_\beta(y)u_{\alpha+\beta}(z)u_{2\alpha+\beta}(t)$, la condition sur l'élément $u^{-1}F(u)$ est donnée par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x^q - x \neq 0 \\ y^q - y \neq 0 \\ z^q - z + y(x^q - x) = 0 \\ t^q - t + 2z(x^q - x) - y(x^q - x)^2 = 0 \end{cases}$$

De plus, l'action du groupe fini $U_2 = U_\beta U_{\alpha+\beta} U_{2\alpha+\beta}$ y est donnée par :

$$u(0, a, b, c)u(x, y, z, t) = u(x, y + a, z + b - ax, t + c - 2bx + ax^2).$$

Afin de simplifier cette action, on effectue le changement de variable $u(x, y, z, t) = v(x, y, z', t')$ avec :

$$\begin{cases} z' = z + xy \\ t' = t + 2xz + x^2y \end{cases}$$

si bien que les équations deviennent :

$$\begin{cases} x^q - x \neq 0 \\ y^q - y \neq 0 \\ z'^q - z' - x^q(y^q - y) = 0 \\ t'^q - t' - x^{2q}(y^q - y) = 0 \end{cases}$$

avec action du groupe U_2 donnée par :

$$u(0, a, b, c)v(x, y, z', t') = v(x, y + a, z' + b, t' + c).$$

D'après [29, proposition 1.23], la G -variété X ne dépend que du type de (\mathbf{G}, F) ; on peut supposer que le groupe \mathbf{G} est simplement connexe, égal à $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F})$. On a vu alors au cours de l'exemple 3.3 que tout élément nilpotent $N \in \mathcal{O}^F$ est conjugué à un élément de la forme $N(\nu) = e_\beta - \nu e_{2\alpha+\beta}$, avec $\nu \in \mathbb{F}_q^\times$. De plus, les éléments $N(\nu)$ et $N(\nu')$ sont rationnellement conjugués si et seulement si $\nu'\nu^{-1}$ est un carré dans \mathbb{F}_q . À l'aide de cette forme précise, le caractère de Gelfand-Graev généralisé associé à $N(\nu)$ peut se construire de la façon suivante : on fixe un caractère linéaire non trivial $\chi : \mathbb{F}_q^+ \rightarrow \Lambda^\times$, et on définit $\psi_{N(\nu)} : U_2 \rightarrow \Lambda^\times$ par

$$\psi_{N(\nu)}(u(0, a, b, c)) = \chi(a - \nu c)$$

et on note Λ_ν le module Λ muni de l'action de U_2 par ce dernier caractère. Le module de Gelfand-Graev généralisé est alors défini comme l'induit $\Gamma_{N(\nu)} = \mathrm{Ind}_{U_2}^G \Lambda_\nu$. C'est un ΛG -module projectif qui, d'après l'exemple 3.15 et avec les notations de la partie 4.3, se décompose sur le bloc principal en :

$$b\Gamma_{N(\nu)} \simeq \begin{cases} (P_0)^{q-1} \oplus P_1 & \text{si } \nu \text{ est un carré dans } \mathbb{F}_q; \\ (P_0)^q \oplus P_3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est le deuxième cas qui va retenir notre attention, car les deux modules projectifs qui apparaissent dans la décomposition sont exactement les enveloppes projectives des deux kG -modules simples cuspidaux du bloc principal. Nous allons donc étudier le complexe

$$\mathrm{RHom}_{\Lambda G}^\bullet(\Gamma_{N(\nu)}, \mathrm{R}\Gamma_c(X, \Lambda)) \simeq e_{\psi_{N(\nu)}} \mathrm{R}\Gamma_c(X, \Lambda).$$

Il est assez surprenant de voir que dans le cas où ν est un carré dans \mathbb{F}_q , ce complexe a une cohomologie non nulle en degrés 2 et 3, alors qu'elle est concentrée en degré 2 dans le cas contraire. Pour simplifier, on notera désormais e_ν (resp. ψ_ν) à la place de $e_{\psi_{N(\nu)}}$ (resp. $\psi_{N(\nu)}$).

Les équations de X sont trop compliquées pour pouvoir calculer la cohomologie de cette variété par des méthodes élémentaires. Néanmoins, puisque c'est uniquement la composante ψ_ν -isotypique qui nous intéresse, on peut remplacer X par son quotient par le noyau de ψ_ν sans changer cette composante. Notons que ce noyau est formé des éléments de la forme $u(0, \nu a, b, a)$ et qu'il s'écrit donc comme un produit $\{u(0, \nu a, 0, a)\} \times U_{\alpha+\beta}$, ce qui permet d'effectuer le quotient en deux étapes. Tout d'abord, quotienter par $U_{\alpha+\beta}$ revient à prendre $z'^q - z'$ comme variable, et la troisième équation disparaît pour donner la description suivante de $U_{\alpha+\beta} \backslash X$:

$$\begin{cases} x^q - x \neq 0 \\ y^q - y \neq 0 \\ t'^q - t' - x^{2q}(y^q - y) = 0 \end{cases}$$

Afin de simplifier le second passage au quotient, on effectue dans les équations précédentes le changement de variable $\mathbf{t} = t' - \nu^{-1}y$, de sorte qu'en posant $\mathbf{y} = y^q - y$, le quotient de X par le noyau de ψ_ν est donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x^q - x \neq 0 \\ \mathbf{y} \neq 0 \\ \mathbf{t}^q - \mathbf{t} = (x^{2q} - \nu^{-1})\mathbf{y} \end{cases}$$

Finalemnt, en écrivant $\nu = \theta^2$ avec $\theta \in \mathbb{F}_{q^2}$, et en effectuant un dernier changement de variable (par dilatation), la variété quotient $(\text{Ker } \psi_\nu) \backslash X$ est donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{x}^q - \theta^{q-1}\mathbf{x} \neq 0 \\ \mathbf{y} \neq 0 \\ \mathbf{t}^q - \mathbf{t} = (\mathbf{x}^{2q} - 1)\mathbf{y} \end{cases}$$

et l'action de $(\text{Ker } \psi_\nu) \backslash U_2 \simeq \mathbb{F}_q$ s'effectue par translation sur la variable \mathbf{t} . Il est alors clair que la nature de ν influe fortement sur les équations de cette variété. En effet, si ν est un carré dans \mathbb{F}_q , alors θ^{q-1} vaut 1, et ainsi $\mathbf{x}^{2q} - 1$ n'est jamais nul. En reprenant les notations de la section 2.3.1, on en déduit l'isomorphisme suivant :

$$(\text{Ker } \psi_\nu) \backslash X \simeq \mathcal{L}^{-1}(\mathbf{G}_m) \times \mathcal{L}^{-1}(\mathbf{G}_m)$$

avec \mathbb{F}_q agissant sur le second terme du produit. On trouve alors facilement $e_\nu H_c^\bullet(X, \Lambda) = \Lambda^q[-2] \oplus \Lambda[-3]$.

Remarque 4.68. Ce résultat est conforme à nos attentes puisque dans le cas où ν est un carré dans \mathbb{F}_q , les seuls caractères unipotents intervenant dans $\Gamma_{N(\nu)}$ sont $\chi_0 = \text{St}_G$ avec multiplicité q et χ_1 avec multiplicité 1. D'autre part, ils apparaissent respectivement dans le second et troisième groupe de cohomologie de la variété de Deligne-Lusztig X .

Intéressons-nous maintenant au cas où ν n'est pas un carré dans \mathbb{F}_q . On a alors $\theta^{q-1} = -1$. Élever la première équation à la puissance q et remplacer \mathbf{x}^q par \mathbf{x} ne change pas la cohomologie de la variété, et on peut donc supposer que les équations sont données par :

$$\begin{cases} \mathbf{x}^q + \mathbf{x} \neq 0 \\ \mathbf{y} \neq 0 \\ \mathbf{t}^q - \mathbf{t} = (\mathbf{x}^2 - 1)\mathbf{y} \end{cases}$$

Puisque $[b\Gamma_{N(\nu)}] = (q+1)\chi_{\text{exc}} + q\text{St}_G + \theta_{10}$, on connaît la cohomologie à coefficients dans K de cette variété, qui est donnée par $\text{RHom}_{K\mathbf{G}}^\bullet(K\Gamma_{N(\nu)}, \text{R}\Gamma_c(X, K)) \simeq K^{q+1}[-2]$. Pour obtenir un résultat similaire sur Λ ou k , il suffit de montrer que $e_\nu H_c^\bullet(X, \Lambda)$ est sans torsion. Commençons par découper la variété quotient : l'alternative $\mathbf{x}^2 = 1$ ou $\mathbf{x}^2 \neq 1$ induit une décomposition $(\text{Ker } \psi_\nu) \backslash X = X_o \cup X_f$ où

- X_o est une sous-variété ouverte qui, après le changement de variable $\mathbf{y}' = (\mathbf{x}^2 - 1)\mathbf{y}$ s'identifie à $(\mathbb{A}_1 \setminus \{q+2 \text{ points}\}) \times \mathcal{L}^{-1}(\mathbf{G}_m)$, avec action de \mathbb{F}_q par translation sur la deuxième composante ;
- X_f est une sous variété fermée isomorphe à $\{\pm 1\} \times \mathbf{G}_m \times \mathbb{F}_q$, avec action de \mathbb{F}_q sur la troisième composante.

La suite exacte longue en cohomologie est alors donnée par le tableau suivant :

	$e_\nu H_c^\bullet(X_o, \Lambda)$	$e_\nu H_c^\bullet(X, \Lambda)$	$e_\nu H_c^\bullet(X_f, \Lambda)$
1	0	0	Λ^2
2	Λ^{q+2}	$e_\nu H_c^2(X)$	Λ^2
3	Λ	$e_\nu H_c^3(X)$	0
4	0	$e_\nu H_c^4(X)$	0

La composante ψ_ν -isotypique de la cohomologie de X peut donc être potentiellement non nulle en degré 3, mais elle est forcément de torsion puisque $e_\nu H_c^3(X, K)$ est nul. Elle s'identifie au conoyau du morphisme de connexion $\Lambda^2 \rightarrow \Lambda$. On se propose de montrer que cette dernière flèche est en fait surjective, en rajoutant une information à notre étude : l'action d'un groupe fini.

Chacune des variétés X , X_f et X_o est stable par l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, qui agit naturellement sur la variable \mathbf{x} , indépendamment de l'action de \mathbb{F}_q . De plus, l'action induite sur $e_\nu H_c^3(X_o, \Lambda)$ est triviale, puisqu'elle correspond à l'action sur $H_c^\bullet(\mathbb{A}_1, \Lambda)$. On déduit du tableau précédent que

$$e_\nu H_c^3(X, \Lambda) = e_\nu H_c^3(X, \Lambda)^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} = e_\nu H_c^3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \backslash X, \Lambda).$$

Il suffit donc de montrer que ce dernier module, qui est de torsion, est en fait nul. En écrivant

$$X = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}) \in (\mathbf{G}_m)^2 \times \mathbf{G}_a \mid \mathbf{x}^{q-1} \neq -1 \text{ et } \mathbf{t}^q - \mathbf{t} = (\mathbf{x}^2 - 1)\mathbf{y}\}$$

on peut, via l'application $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^2$, identifier le quotient de la variété X par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ avec la variété

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}) \in (\mathbf{G}_m)^2 \times \mathbf{G}_a \mid \mathbf{x}^{(q-1)/2} \neq -1 \text{ et } \mathbf{t}^q - \mathbf{t} = (\mathbf{x} - 1)\mathbf{y}\}.$$

Cette dernière variété peut se plonger comme ouvert dense dans la variété suivante, obtenue en enlevant les conditions sur la variable \mathbf{x} :

$$\tilde{X} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}) \in \mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_m \times \mathbf{G}_a \mid \mathbf{t}^q - \mathbf{t} = (\mathbf{x} - 1)\mathbf{y}\}.$$

Le changement de variable $\mathbf{x}' = (\mathbf{x} - 1)\mathbf{y}$ nous donne clairement $\tilde{X} \simeq \mathbf{G}_m \times \mathbb{A}_1$, ce qui prouve que la composante ψ_ν -isotypique de la cohomologie de \tilde{X} est nulle. On trouve donc en particulier

$$e_\nu H_c^3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \backslash X, \Lambda) \simeq e_\nu H_c^2(\tilde{X} \setminus X, \Lambda).$$

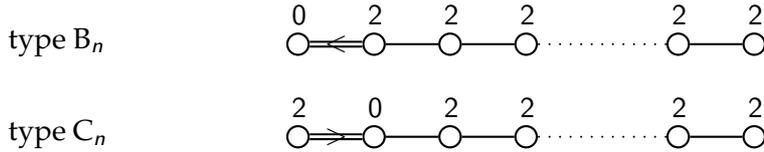
Puisque $\tilde{X} \setminus X$ est une union disjointe de variétés affines irréductibles de dimension 2, ce dernier groupe est sans torsion, et par conséquent nul. En résumé, on a montré que la cohomologie du complexe

$$\mathrm{RHom}_{\Lambda_G}^\bullet(\Gamma_{N(\nu)}, \mathrm{R}\Gamma_c(X, \Lambda)) \simeq e_\nu \mathrm{R}\Gamma_c(X, \Lambda)$$

est concentrée en degré 2 (et sans torsion dans ce degré puisque X est affine et irréductible), ce qui, en vertu du corollaire 4.61 et de la forme particulière de $\Gamma_{N(\nu)}$, assure que les groupes $bH_c^i(Y_\ell, \Lambda)$ sont sans torsion.

(iv) **Les types B_n et C_n .** Revenons maintenant au cas général où (\mathbf{G}, F) est de type B_n ou C_n avec $n \geq 2$. Les racines simples seront notées $\Delta = \{\alpha, \beta, \gamma_3, \dots, \gamma_n\}$ de sorte que le sous-système de racines engendré par α et β soit de type B_2 .

Par [24, section 4.2], il existe une unique classe nilpotente F -stable \mathcal{O} de \mathcal{N} telle que \mathcal{O} soit dense dans $\mathcal{N} \setminus \mathcal{O}_{\text{reg}}$. On l'appelle *l'orbite sous-régulière* ; elle est de plus spéciale et de codimension 2 dans \mathcal{N} . À l'aide de [21, chapitre 13], on vérifie facilement qu'elle correspond aux diagrammes de Dynkin pondérés suivants :



De plus, lorsque \mathbf{G} est supposé de type adjoint, alors pour tout $N \in \mathcal{O}$ on a $C_{\mathbf{G}}(N)/C_{\mathbf{G}}(N)^\circ \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Nous allons travailler avec des représentants particuliers des orbites rationnelles de cette classe, donnés par le lemme suivant :

Lemme 4.69. *Supposons \mathbf{G} de type adjoint. Alors tout élément de \mathcal{O} est conjugué à un élément de la forme*

$$N(\nu) = e_\alpha - \nu e_{\alpha+2\beta} + \sum_{i=3}^n e_{\gamma_i}$$

avec $\nu \in \mathbb{F}_q$. De plus, $N(\nu)$ et $N(\nu')$ sont rationnellement conjugués si et seulement si $\nu'\nu^{-1}$ est un carré dans \mathbb{F}_q .

Démonstration. D'après [84] et [21], la classe sous-régulière du groupe de type adjoint $\text{SO}_{2n+1}(\mathbb{F})$ (resp. du groupe simplement connexe $\text{Sp}_{2n}(\mathbb{F})$) est obtenue par restriction de la classe de $\text{SL}_{2n+1}(\mathbb{F})$ correspondant à la partition $[2n-1, 1^2]$ (resp. de la classe de $\text{SL}_{2n}(\mathbb{F})$ correspondant à $[2n-2, 2]$). Puisque la projection $\text{Sp}_{2n}(\mathbb{F}) \rightarrow \text{PSp}_{2n}(\mathbb{F})$ induit une bijection sur les classes unipotentes (et nilpotentes si $p \neq 2$), il suffit de vérifier de façon élémentaire que $N(\nu)$, vu comme élément de \mathfrak{sl}_{2n} ou \mathfrak{sl}_{2n+1} , possède la décomposition de Jordan appropriée.

Supposons maintenant que $N(\nu)$ et $N(\nu')$ soient rationnellement conjugués, et reprenons les notations de la section 3.1.1. Puisque $C_{\mathbf{G}}(N(\nu)) \subset \mathbf{P}_d$ et que $N(\nu)$ et $N(\nu')$ sont conjugués sous \mathbf{P}_d , on en déduit qu'il existe $z \in P_d$ tel que $N(\nu) = z \cdot N(\nu')$. En écrivant $\mathbf{P}_d = \mathbf{L}_d \mathbf{U}_1$ on remarque que \mathbf{U}_1 ne change pas les coordonnées de $N(\nu')$ sur les racines de poids 2. En particulier, si z s'écrit $z = lu$ alors $N(\nu) = l \cdot N(\nu')$. Vu la forme du sous-groupe de Levi $\mathbf{L}_d = \langle \mathbf{T}, \mathbf{U}_\alpha, \mathbf{U}_{-\alpha} \rangle$, le résultat se déduit du rang 2 traité au cours de l'exemple 3.3. \square

Grâce à la forme particulière de ces éléments, on peut calculer aisément la contribution du module de Gelfand-Graev généralisé sur la cohomologie de X à partir des résultats obtenus dans le type B_2 . Pour $\chi : \mathbb{F}_q^+ \rightarrow \Lambda^\times$ un caractère linéaire non trivial et $\psi_{N(\nu)}$ le caractère de U_2 associé comme en section 3.1.2, on va ainsi vérifier que la cohomologie du complexe

$$\mathrm{RHom}_{\Lambda G}^{\bullet}(\Gamma_{N(\nu)}, \mathrm{R}\Gamma_c(X, \Lambda)) \simeq e_{\psi_{N(\nu)}} \mathrm{R}\Gamma_c(X, \Lambda)$$

est sans torsion. Pour simplifier, on notera désormais $e_{\nu} = e_{\psi_{N(\nu)}}$.

Afin de faire intervenir les calculs précédents, on va considérer trois sous-groupes unipotents particuliers de \mathbf{U} , à savoir

- $\mathbf{U}^{\mathrm{B}_2} = \mathbf{U} \cap \mathbf{L}_{\alpha, \beta}$ le sous-groupe de \mathbf{U} engendré par les groupes \mathbf{U}_{α} et \mathbf{U}_{β} , qui s'identifie au sous-groupe unipotent maximal d'un groupe de type B_2 ;
- $\mathbf{U}^{\mathrm{A}_{n-2}} = \mathbf{U} \cap \mathbf{L}_{\gamma_3, \dots, \gamma_n}$ le sous-groupe de \mathbf{U} engendré par les \mathbf{U}_{γ_i} , lequel s'identifie au sous-groupe des matrices unitriangulaires de $\mathrm{GL}_{n-1}(q)$;
- \mathbf{V} le sous-groupe de \mathbf{U} engendré par les sous-groupes à un paramètre restants, c'est-à-dire correspondant à des racines positives qui ne sont pas dans l'ensemble $\langle \alpha, \beta \rangle \cup \langle \gamma_3, \dots, \gamma_n \rangle$. C'est un sous-groupe distingué de \mathbf{U} normalisé par \mathbf{T} .

On dispose alors d'un isomorphisme de groupe algébriques $\mathbf{V} \backslash \mathbf{U} \simeq \mathbf{U}^{\mathrm{B}_2} \times \mathbf{U}^{\mathrm{A}_{n-2}}$ et on notera $\pi_{\mathbf{V}}$ la composée de la projection canonique $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V} \backslash \mathbf{U}$ avec cette identification.

Vu la forme des éléments $N(\nu)$, le caractère $\psi_{N(\nu)}$ se factorise en un caractère linéaire de $V \backslash U$ et se décompose à ce titre en $\psi_{N(\nu)} = \psi_{\nu}^{\mathrm{B}_2} \boxtimes \psi^{\mathrm{A}_{n-2}}$. Clairement, le caractère $\psi^{\mathrm{A}_{n-2}}$ est un caractère régulier de $U^{\mathrm{A}_{n-2}}$ et $\psi_{\nu}^{\mathrm{B}_2}$ correspond quant à lui au caractère de $U_2^{\mathrm{B}_2}$ étudié précédemment.

Détaillons maintenant l'analogie géométrique de cette décomposition. Avec l'élément de Coxeter $c = s_{\alpha} s_{\beta} s_{\gamma_3} \cdots s_{\gamma_n}$, la variété de Deligne-Lusztig s'écrit :

$$X = \{u \in \mathbf{U} \mid u^{-1}F(u) \in u_{\alpha}(\mathbf{G}_m)u_{\beta}(\mathbf{G}_m)u_{\gamma_3}(\mathbf{G}_m) \cdots u_{\gamma_n}(\mathbf{G}_m)\}.$$

À l'aide de la proposition 2.29 et de l'identification $\mathbf{V} \backslash \mathbf{U} \simeq \mathbf{U}^{\mathrm{B}_2} \times \mathbf{U}^{\mathrm{A}_{n-2}}$, on peut alors réaliser son quotient par V de la façon suivante :

$$V \backslash X \simeq \left\{ (\bar{u}, v_1, v_2) \in \mathbf{U} \times \mathbf{U}^{\mathrm{B}_2} \times \mathbf{U}^{\mathrm{A}_{n-2}} \mid \begin{array}{l} \pi_{\mathbf{V}}(\bar{u}) = v_1^{-1}F(v_1)v_2^{-1}F(v_2) \\ \bar{u} \in u_{\alpha}(\mathbf{G}_m)u_{\beta}(\mathbf{G}_m) \cdots u_{\gamma_n}(\mathbf{G}_m) \end{array} \right\}$$

ce qui se traduit par l'isomorphisme $U^{\mathrm{B}_2} \times U^{\mathrm{A}_{n-2}}$ -équivariant suivant :

$$V \backslash X \simeq X_{\mathbf{L}_{\alpha, \beta}}(s_{\alpha} s_{\beta}) \times X_{\mathbf{L}_{\gamma_3, \dots, \gamma_n}}(s_{\gamma_3} \cdots s_{\gamma_n}).$$

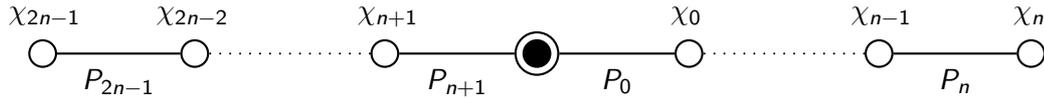
On en déduit finalement que le complexe $\mathrm{RHom}_{\Lambda}^{\bullet}(\Gamma_{N(\nu)}, \mathrm{R}\Gamma_c(X, \Lambda))$ est donné dans $D^b(\Lambda\text{-Mod})$ par

$$\begin{aligned} e_{\nu} \mathrm{R}\Gamma_c(X, \Lambda) &\simeq e_{\nu} \mathrm{R}\Gamma_c(V \backslash X, \Lambda) \\ &\simeq e_{\psi_{\nu}^{\mathrm{B}_2}} \mathrm{R}\Gamma_c(X_{\mathbf{L}_{\alpha, \beta}}(s_{\alpha} s_{\beta}), \Lambda) \stackrel{\mathbf{L}}{\otimes}_{\Lambda} e_{\psi^{\mathrm{A}_{n-2}}} \mathrm{R}\Gamma_c(X_{\mathbf{L}_{\gamma_3, \dots, \gamma_n}}(s_{\gamma_3} \cdots s_{\gamma_n}), \Lambda) \\ e_{\nu} \mathrm{R}\Gamma_c(X, \Lambda) &\simeq e_{\psi_{\nu}^{\mathrm{B}_2}} \mathrm{R}\Gamma_c(X_{\mathbf{L}_{\alpha, \beta}}(s_{\alpha} s_{\beta}), \Lambda)[-r+2] \end{aligned}$$

le dernier isomorphisme étant obtenu par le corollaire 2.54 puisque $\psi^{\mathrm{A}_{n-2}}$ est un caractère régulier. Par conséquent, les calculs effectués pour le type B_2 assurent que la cohomologie de ce complexe est sans torsion, et qu'ainsi tous les

kG -modules simples cuspidaux apparaissant dans la tête de $\Gamma_{N(\nu)}$ pour un certain ν ne peuvent apparaître comme modules de torsion de $H_c^\bullet(X, \Lambda)$.

Il reste donc à montrer que le second kG -module simple cuspidal du bloc (i.e. celui qui n'apparaît pas dans la tête du module de Gelfand-Graev usuel) apparaît effectivement dans la tête de $\Gamma_{N(\nu)}$ pour un certain $\nu \in \mathbb{F}_q$. Rappelons d'abord que pour un groupe réductif de type B_n ou C_n , l'arbre de Brauer du ℓ -bloc principal est donné par :



Les enveloppes projectives des deux kG -modules cuspidaux du bloc sont donc P_0 et P_{n+1} ; elles sont associées aux caractères unipotents $\chi_0 = \text{St}_G$ et χ_{n+1} , ainsi qu'au caractère exceptionnel χ_{exc} .

Avec les notations de [38], les caractères de la série principale $\{\chi_0, \dots, \chi_n\}$ rencontrant le ℓ -bloc principal correspondent aux symboles

$$\chi_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & (n-i-1) & n \\ & 1 & 2 & \cdots & (n-i) & \end{pmatrix}$$

pour $i = 0, \dots, n$ et ceux de la série associée au caractère cuspidal de B_2 correspondent à des symboles de défaut 3 donnés par

$$\chi_{n+j} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & (n-j) & n \\ & 1 & 2 & \cdots & (n-j-1) & \end{pmatrix}.$$

avec $j = 1, \dots, n-1$. Notons de plus que les caractères χ_j et χ_{n+j} sont dans la même famille car les entiers intervenant dans leur symbole sont les mêmes. En particulier, le caractère χ_{n+1} dont on veut garder la trace est dans la même famille que χ_1 qui correspond au symbole

$$\chi_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n \\ & 1 & 2 & \cdots & n-1 & \end{pmatrix}$$

À l'aide de [21, chapitre 11], on peut vérifier que le caractère de W associé à ce caractère unipotent, qui vit dans la série principale, correspond à la bipartition $([1], [1^{n-1}])$. En tant que caractère de W , il est spécial. Le conjugué de cette bipartition est $([n-1], [1])$ et correspond au produit tensoriel de ce dernier caractère avec la signature. On vérifie alors facilement, toujours à l'aide de [21], que la classe spéciale associée à ce caractère par la correspondance de Springer est exactement la classe \mathcal{O} considérée précédemment. En résumé, la classe \mathcal{O} est exactement la classe nilpotente associée par [65, section 11.1] au caractère unipotent χ_{n+1} (voir aussi la fin de la section 3.1.2).

D'après le théorème 3.13, les seuls caractères unipotents du bloc principal qui sont susceptibles d'apparaître dans le module $\Gamma_{N(\nu)}$ sont donc χ_1 et χ_{n+1} (avec multiplicité indépendante de q) et $\chi_0 = \text{St}_G$ (avec multiplicité polynomiale). En

particulier, les seuls facteurs directs indécomposables du module projectif $b\Gamma_{N(\nu)}$ sont P_0, P_1 et P_{n+1} . De plus, on est certain que χ_{n+1} apparaît effectivement dans le caractère d'un des modules $\Gamma_{N(\nu)}$ ce qui assure que P_{n+1} est bien facteur direct d'un de ces module. Par conséquent, les calculs précédents assurent que la cohomologie du complexe $\mathrm{RHom}_{\Lambda G}^\bullet(P_{n+1}, \mathrm{R}\Gamma_c(X, \Lambda))$ est sans torsion, et qu'à ce titre l'hypothèse (S) est vérifiée.

4.5 Applications sous l'hypothèse de non-torsion forte

Cette partie finalise l'analyse du bloc principal de G , à partir de l'étude de l'arbre de Brauer entamée au cours de la partie 4.3. Tous les résultats énoncés ici le seront sous l'hypothèse de non-torsion suivante :

(S) Les Λ -modules $bH_c^i(Y_\ell, \Lambda)$ sont sans torsion

où, on le rappelle, la variété Y_ℓ est le quotient de $Y(\dot{c})$ par la ℓ' -partie du tore \mathbf{T}^{cF} . En particulier, les groupes de cohomologie $bH_c^i(Y_\ell, \Lambda)$ sont des formes entières des groupes $bH_c^i(Y_\ell, K)$ et leurs réductions modulo ℓ s'identifient aux groupes $bH_c^i(Y_\ell, k)$. Ceci permet de court-circuiter l'étude de la cohomologie de Y_ℓ à coefficients dans k en passant par les travaux de Lusztig.

Dans un premier temps, on détermine un représentant explicite du complexe $b\mathrm{R}\Gamma_c(Y_\ell, \Lambda)$ à l'aide des modules projectifs P_j étudiés dans la partie 4.3. Plus précisément, on donne, pour chaque valeur propre λ de F^δ , un complexe parfait de ΛG -modules homotope au (λ) -espace propre généralisé de F^δ . Sous l'hypothèse (S), on connaît explicitement l'arbre de Brauer du bloc principal, et ce dernier complexe prend la forme du complexe de Rickard associé au sommet de l'arbre indexé par λ [75, section 4]. De cette observation on déduira, dans la deuxième section, que $b\mathrm{R}\Gamma_c(Y_\ell, \Lambda)$ induit une équivalence splendide entre les blocs principaux de G et $\mathbf{T}^{cF} \rtimes C_W(c\sigma)$, en accord avec la version géométrique de la conjecture de Broué [15]. Dans les sections suivantes on établira deux conséquences de cette équivalence, à savoir le plongement planaire de l'arbre de Brauer du bloc principal, et l'unitriangularité de la matrice de décomposition. Concernant ce dernier point, seule la connaissance de l'arbre est nécessaire, l'unitriangularité se vérifiant au cas par cas pour chaque type (voir proposition 4.41). Néanmoins, on expliquera ce résultat en utilisant le formalisme d'équivalence perverse récemment introduit dans [22], dans le but de comprendre le phénomène dans toute sa généralité.

4.5.1 Détermination du complexe de cohomologie

Comme annoncé dans l'introduction, on détermine ici la contribution de chaque espace propre de F^δ sur la cohomologie de Y_ℓ . En un sens, la démarche généralise celle de la proposition 4.38, qui concerne uniquement les valeurs propres « minimales » de F^δ . La méthode reste la même : l'hypothèse de non-torsion permet, à homotopie près, de scinder le complexe pour ne faire apparaître que

certaines modules projectifs et en certains degrés. La détermination explicite de ces modules se fait au moyen des travaux de Lusztig donnant le caractère total du complexe.

Comme dans la section 4.3.2, on travaillera avec un représentant particulier de $C = bR\Gamma_c(Y_\ell, \Lambda)$ possédant de bonnes propriétés de finitude : par le théorème 1.27, il existe un complexe borné \mathcal{C} de $(\Lambda G, \Lambda \mathbf{T}^{cF})$ -modules de type fini, projectifs à gauche et à droite, homotope au complexe $bR\Gamma_c(Y_\ell, \Lambda)$. Par transfert, on peut définir un endomorphisme \mathcal{F} de \mathcal{C} tel que les images de \mathcal{F} et F^δ coïncident via l'isomorphisme $\text{End}_{K^b(\Lambda G)}(\mathcal{C}) \simeq \text{End}_{K^b(\Lambda G)}(C)$.

Afin de comprendre les méthodes homologiques mises en oeuvre dans cette section, on commencera par traiter l'exemple du groupe $\text{SL}_2(\mathbb{F})$ en suivant [4].

(i) L'exemple du groupe $\text{SL}_2(\mathbb{F})$. Ici, la variété Y_ℓ étant une courbe lisse, sa cohomologie est sans torsion [28, Arcata, section III.3] et l'hypothèse (S) est vérifiée. D'après la proposition 4.38, le (1)-espace propre généralisé de \mathcal{F} sur le complexe \mathcal{C} est homotope au module projectif P_0 concentré en degré 1. Quant au (q) -espace propre, il est homotope à un complexe à deux termes

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{d} Q \longrightarrow 0$$

où P et Q sont deux ΛG -modules projectifs. Puisque $H_c^2(Y_\ell)_{(q)} = \Lambda$, le module Q se projette sur Λ , et on en déduit qu'il existe un module projectif Q' tel que $Q = P_1 \oplus Q'$ avec $Q' \subset \text{Im } d$ (P_1 étant le relevé de l'enveloppe projective du kG -module trivial). Puisque Q' est projectif, l'application $d^{-1}(Q') \rightarrow Q'$ se scinde ; on notera Q'' le sous-module de $d^{-1}(Q')$ isomorphe à Q' . Pour montrer que Q'' est un facteur direct de P , on utilise le lemme suivant :

Lemme 4.70. *Soit B un ΛG -modules de type fini, et A un sous-module projectif de B . Si le quotient B/A est libre sur Λ alors A est un facteur direct de B .*

Démonstration. Si B/A est libre sur Λ , alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow B/A \longrightarrow 0$$

se scinde en tant que suite de Λ -modules. Puisque A est projectif comme ΛG -module, il est en particulier relativement $(G, 1)$ -projectif, et donc $(G, 1)$ -injectif par [26, théorème 19.12]. Autrement dit, la suite exacte précédente se scinde aussi comme suite de ΛG -modules, et ainsi A est facteur direct de B . \square

Pour vérifier que P/Q'' est sans torsion, il suffit alors de remarquer que d induit une injection de $(P/Q'')/(d^{-1}(Q')/Q'')$ dans Q/Q' . Puisque $Q/Q' \simeq P_1$ et $d^{-1}(Q')/Q'' \simeq d^{-1}(Q') \cap \text{Ker } d \subset P$ sont sans torsion, on en déduit que P/Q'' aussi. Mais alors, il existe un module projectif P' tel que $P = P' \oplus Q''$. En notant $\partial : P' \rightarrow P_1$ la composée de $d|_{P'}$ avec la projection $Q \rightarrow P_1$, on a construit un complexe

$$0 \longrightarrow P' \xrightarrow{\partial} P_1 \longrightarrow 0$$

homotope à $\mathcal{C}_{(q)}$ d'après le lemme 1.11. De plus, son caractère est donné, au signe près, par $[P] - [Q] = [H_c^1(Y_\ell)_{(q)}] - [H_c^2(Y_\ell)_{(q)}] = \chi_{\text{exc}} - \chi_1$, ce qui force $[P'] = \chi_{\text{exc}} - \chi_1 + \chi_0 + \chi_1 = \chi_{\text{exc}} + \chi_0$. On en déduit que P' est isomorphe à P_0 . Si on récapitule, on a

$$\mathcal{C}_{(1)} : 0 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

et

$$\mathcal{C}_{(q)} : 0 \longrightarrow P_0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow 0.$$

(ii) **Le cas général.** En s'inspirant de l'exemple précédent, on va montrer le résultat suivant sur le complexe \mathcal{C} :

Théorème 4.71. *Soit ζ une racine de l'unité associée à une série de Harish-Chandra rencontrant le bloc principal, et $j \in \llbracket m_\zeta ; M_\zeta \rrbracket$. Alors le (q^{δ}) -espace propre de \mathcal{F} sur \mathcal{C} est homotope au complexe de ΛG -modules suivant, concentré en degrés $\llbracket r ; r + j - m_\zeta \rrbracket$:*

$$0 \longrightarrow P_{m_\zeta} \longrightarrow P_{m_\zeta+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{j-1} \longrightarrow P_j \longrightarrow 0.$$

De plus, après ℓ -réduction, les différentielles $\bar{d}_i : \bar{P}_i \longrightarrow \bar{P}_{i+1}$ sont non nulles.

Notons que ce complexe est exactement le complexe associé au sommet de l'arbre de Brauer indexé par χ_j dans la construction de Rickard [75, section 4]. Cette observation sera fondamentale pour la suite de ce chapitre (voir la remarque 4.76).

Avant de démontrer le théorème, on rappelle certaines notations, ainsi que quelques propriétés de l'arbre de Brauer Γ du ℓ -bloc principal étudiées dans la section 4.2.3. Les sommets non exceptionnels de l'arbre sont indexés par les caractères unipotents χ_j du bloc, avec $j \in \llbracket 0 ; h_0 - 1 \rrbracket$. Il y a autant de kG -modules simples que de caractères unipotents, mais ils se regroupent en deux familles :

- les modules non cuspidaux S_j où j n'est pas de la forme m_ζ . Leur enveloppe projective dans $\Lambda G\text{-mod}$, notée P_j , est associée à l'arête reliant χ_j à χ_{j-1} puisque son caractère est donné par $[P_j] = \chi_j + \chi_{j-1}$;
- les modules cuspidaux S_{m_ζ} pour ζ une racine de l'unité associée à une série de Harish-Chandra rencontrant le bloc principal. Le caractère du module projectif associé est donné par $[P_{m_\zeta}] = \chi_{m_\zeta} + \chi_{\text{exc}}$.

De plus, la forme particulière de l'arbre (donnée par la conjecture de Hiss-Lübeck-Malle) nous permet de déterminer explicitement les module projectifs \bar{P}_j pour $j \neq m_\zeta$ [43]. Ils sont de la forme

$$\bar{P}_j = \begin{pmatrix} S_j \\ S_{j-1} \oplus S_{j+1} \\ S_j \end{pmatrix}$$

si $j \neq M_\zeta$, c'est-à-dire si le sommet indexé par χ_j ne se trouve pas à l'extrémité d'une branche, et de la forme

$$\bar{P}_{M_\zeta} = \begin{pmatrix} S_{M_\zeta} \\ S_{M_\zeta-1} \\ S_{M_\zeta} \end{pmatrix}$$

sinon. En revanche, si le plongement planaire de Γ n'est pas déterminé, on ne peut pas donner la forme précise des modules projectifs \overline{P}_{m_ζ} . On sait néanmoins qu'ils ont une tête et un socle simples, isomorphes à S_{m_ζ} , et que leur classe dans le groupe de Grothendieck $K_0(kG\text{-mod})$ est donnée par :

$$[\overline{P}_{m_\zeta}]_k = [S_{m_\zeta}]_k + [S_{m_\zeta+1}]_k + \frac{|\mathbf{T}^{cF}|_\ell - 1}{h_0} \sum_{\xi} [S_{m_\xi}]_k.$$

Ici, la quantité $(|\mathbf{T}^{cF}|_\ell - 1)/h_0$ désigne la multiplicité du sommet exceptionnel, c'est-à-dire le nombre de caractères irréductibles qui composent χ_{exc} .

Définition 4.72. Pour P un ΛG -module projectif indécomposable du bloc, on appellera hauteur de P dans l'arbre Γ et on notera $h_\Gamma(P)$ le nombre minimum de sommets à parcourir pour atteindre le sommet exceptionnel depuis l'arête indexée par P .

La convention adoptée sera $h_\Gamma(P_{m_\zeta}) = 0$. Par extension, la hauteur d'un module projectif est la hauteur maximale de ses facteurs directs indécomposables. De plus, la hauteur d'un kG -module simple sera définie comme la hauteur de son enveloppe projective.

Remarque 4.73. Si P est un module projectif de hauteur n , l'analyse précédente montre que ses facteurs de composition sont de hauteur au plus $n + 1$.

Pour démontrer le théorème, on commence par parcourir le complexe $\mathcal{C}_{(q^j\delta)}$ de gauche à droite en enlevant les modules projectifs de hauteur trop grande. On pourra supposer pour simplifier que j est différent de m_ζ , ce cas ayant été traité dans la section 4.3.2. On montre alors :

Lemme 4.74. Le complexe $\mathcal{C}_j = \mathcal{C}_{(q^j\delta)}$ est homotope à un complexe borné de ΛG -modules projectifs

$$0 \longrightarrow R_{m_\zeta} \xrightarrow{\delta_{m_\zeta}} R_{m_\zeta+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R_{j-1} \xrightarrow{\delta_{j-1}} R_j \longrightarrow 0$$

vérifiant $h_\Gamma(R_i) \leq h_\Gamma(P_i)$.

Démonstration. L'hypothèse (S) ainsi que les résultats [29, corollaire 9.9] et 4.23 assurent que les groupes de cohomologie du complexe \mathcal{C}_j sont non nuls en degrés r et $r + j - m_\zeta$ seulement. On en déduit par le lemme 1.10 que ce complexe peut être représenté par un complexe de ΛG -modules projectifs

$$0 \longrightarrow Q_{m_\zeta} \xrightarrow{d_{m_\zeta}} Q_{m_\zeta+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_{j-1} \xrightarrow{d_{j-1}} Q_j \longrightarrow 0$$

vérifiant :

- $\text{Im } d_i = \text{Ker } d_{i+1}$ pour tout $i = m_\zeta, \dots, r + j - m_\zeta - 1$;
- $H^r(\mathcal{C}_j) = \text{Ker } d_{m_\zeta}$ est un ΛG -module libre sur Λ dont le caractère vaut $n_j \chi_{\text{exc}}$, pour un certain entier positif n_j ;
- $H^{r+j-m_\zeta}(\mathcal{C}_j) = Q_j / \text{Im } d_{j-1}$ est un ΛG -module libre sur Λ de caractère χ_j .

De plus, l'entier n_j est forcément non nul car le caractère χ_j n'est pas combinaison linéaire de caractères de modules projectifs (pour une raison de parité). En outre, d'après la section 4.2.2, la multiplicité de χ_{exc} dans la cohomologie de Y_ℓ vaut $\sum_i n_i = |C_W(c\sigma)| = h_0$ et force ainsi chaque entier n_i à valoir 1.

Remarque 4.75. Au passage, on observe que toutes les valeurs propres de F^δ sur la cohomologie de Y_ℓ (et pas seulement de X) se réduisent modulo ℓ en une racine h -ième de l'unité.

Pour démontrer le lemme, on procède par récurrence en montrant que pour tout n , le complexe \mathcal{C}_j est homotope à un complexe de la forme

$$0 \longrightarrow R_{m_\zeta} \xrightarrow{\delta_{m_\zeta}} R_{m_\zeta+1} \xrightarrow{\delta_{m_\zeta+1}} \cdots \xrightarrow{\delta_{n-2}} R_{n-1} \xrightarrow{d'_{n-1}} Q'_n \xrightarrow{d'_n} \cdots \xrightarrow{d'_{j-1}} Q'_j \longrightarrow 0$$

où pour $i < n$, on a $h_\Gamma(R_i) \leq h_\Gamma(P_i)$. L'analyse précédente résoud le cas $n = m_\zeta$ et amorce ainsi la récurrence.

Supposons que l'on dispose du complexe précédent pour un certain entier $n \geq m_\zeta$ et cherchons à construire R_n . Pour simplifier les notations, on notera $d : A \longrightarrow B$ en lieu et place de $d'_n : Q'_n \longrightarrow Q'_{n+1}$. Pour P_m un facteur direct de A de hauteur strictement supérieure à celle de P_n (et donc de hauteur non nulle), décomposons le module A en $A = P_m \oplus A'$. On peut vérifier que

- la restriction de d à P_m est injective : en effet, par construction, le caractère de P_m vaut $\chi_m + \chi_{m-1}$ alors que celui de $\text{Ker } d$ est égal à

$$[\text{Ker } d] = [R_{n-1}] - [R_{n-2}] + \cdots + (-1)^{n-m_\zeta+1} [R_{m_\zeta}] + (-1)^{n-m_\zeta} \chi_{\text{exc}}.$$

Or, par hypothèse de récurrence, ni χ_m ni χ_{m-1} ne peut apparaître dans cette expression ; le module $P_m \cap \text{Ker } d$ a donc un caractère nul. Étant sans torsion, c'est le module nul ;

- le quotient $B/d(P_m)$ est sans torsion : on dispose de la suite exacte de kG -modules suivante :

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_1^\wedge(B/d(P_m), k) \longrightarrow \overline{P}_m \xrightarrow{\overline{d}} \overline{B}.$$

Par conséquent, il suffit de montrer que $\text{Ker } \overline{d} \cap \overline{P}_m$ est nul. Mais la classe de $\text{Ker } \overline{d}$ dans $K_0(kG\text{-mod})$ est donnée par :

$$[\text{Ker } \overline{d}] = [\overline{R}_{n-1}] - [\overline{R}_{n-2}] + \cdots + (-1)^{n-m_\zeta+1} [\overline{R}_{m_\zeta}] + (-1)^{n-m_\zeta} [\text{Ker } \overline{\delta}_{m_\zeta}].$$

Par l'hypothèse (S) de non-torsion et la formule des coefficients universels, le kG -module $H^r(\mathcal{C}_j \otimes_\Lambda k) = \text{Ker } \overline{\delta}_{m_\zeta}$ s'identifie à la ℓ -réduction de $H^r(\mathcal{C}_j)$, ce qui s'écrit

$$\text{Ker } \overline{\delta}_{m_\zeta} \simeq H^r(\mathcal{C}_j) \otimes_\Lambda k = \overline{\text{Ker } \delta_{m_\zeta}}.$$

Le caractère de $H^r(\mathcal{C}_j)$ étant cuspidal (il vaut χ_{exc}), le module $\text{Ker } \overline{\delta}_{m_\zeta}$ n'a que des facteurs de composition cuspidaux. Puisque le module S_m est de hauteur $h_\Gamma(P_m)$, on en déduit que sa classe dans $K_0(kG\text{-mod})$ n'apparaît

- ni dans la classe de $[R_i]$ pour $i < n$, qui, par hypothèse de récurrence, fait intervenir des kG -modules simples de hauteur au plus celle de P_n (voir la remarque 4.73);
- ni dans la classe de $\text{Ker } \bar{\delta}_{m_\zeta}$ dont les facteurs de composition sont cuspidaux et donc de hauteur nulle.

Il ne peut donc pas non plus apparaître dans l'expression de la classe de $\text{Ker } \bar{d}$ donnée précédemment. Puisque $\text{Soc}(\bar{P}_m) \simeq S_m$, cela force $\text{Ker } \bar{d} \cap \bar{P}_m$ à être nul.

Par conséquent, on peut décomposer B en $B = d(P_m) \oplus B'$ de telle sorte que d induise un isomorphisme entre P_m et $d(P_m)$. Si on définit $d' : A' \rightarrow B'$ comme la composée de la restriction $d|_{A'}$ et de la projection $B \rightarrow B'$, alors le lemme 1.11 nous assure que le complexe

$$0 \longrightarrow R_{m_\zeta} \xrightarrow{\delta_{m_\zeta}} \cdots \longrightarrow R_{n-1} \longrightarrow A' \xrightarrow{d'} B' \longrightarrow \cdots \xrightarrow{d'_{j-1}} Q'_j \longrightarrow 0$$

est homotope à \mathcal{C}_j . La récurrence s'établit en répétant ce procédé afin de supprimer tous les facteurs directs de A qui sont de hauteur strictement supérieure à celle de P_n . \square

Dans le lemme précédent, on a modifié le complexe de gauche à droite en éliminant des modules projectifs superflus. La même méthode fonctionne en parcourant le complexe dans l'autre sens, ce qui permet de terminer la preuve du théorème.

Fin de la démonstration du théorème. On procède une fois de plus par récurrence, en montrant que \mathcal{C}_j est homotope à un complexe de la forme

$$0 \longrightarrow R_{m_\zeta} \xrightarrow{\delta_{m_\zeta}} R_{m_\zeta+1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\delta_{n-1}} R_n \xrightarrow{\delta} P_{n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_j \longrightarrow 0$$

où chaque module R_i vérifie $h_\Gamma(R_i) \leq h_\Gamma(P_j)$. Le lemme précédent assure que c'est le cas pour $n = j$ et amorce donc la récurrence.

Supposons que l'on dispose du complexe précédent pour un certain entier $n \leq j$. Dans ce cas, le caractère du ΛG -module $\text{Coker } \delta_{n-1} = R_n / \text{Im } \delta_{n-1}$ est donné par

$$\begin{aligned} [\text{Coker } \delta_{n-1}] &= [P_{n+1}] - [P_{n+2}] + \cdots + (-1)^{j-n+1} [P_j] + (-1)^{j-n} [H^j(\mathcal{C}_j)] \\ &= (\chi_n + \chi_{n+1}) - (\chi_{n+1} + \chi_{n+2}) + \cdots + (-1)^{j-n} \chi_j \\ [\text{Coker } \delta_{n-1}] &= \chi_n + (\chi_{n+1} - \chi_{n+1}) - (\chi_{n+2} - \chi_{n-2}) + \cdots = \chi_n. \end{aligned}$$

De plus, c'est un module sans torsion : il est en effet isomorphe à $\text{Im } \delta$ lorsque $n < j$ et à $H^j(\mathcal{C}_j)$ lorsque $n = j$. Par conséquent, la tête du ΛG -module $\text{Coker } \delta_{n-1}$ consiste en au plus deux modules simples, à savoir S_n et S_{n+1} . Si P en est une enveloppe projective, la projection $R_n \twoheadrightarrow \text{Coker } \delta_{n-1}$ se factorise par P et ainsi $h_\Gamma(P) \leq h_\Gamma(R_n) \leq h_\Gamma(P_n)$, forçant P à être isomorphe à P_n . On en déduit que le module R_n se décompose en $R_n = P_n \oplus R'$ avec $R' \subset \text{Im } \delta_{n-1}$.

Afin d'alléger les notations, on notera désormais $\partial : A \rightarrow B$ à la place de $\delta_{n-1} : R_{n-1} \rightarrow R_n$. On procède alors comme dans l'exemple $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F})$: puisque R' est projectif, l'application $\partial^{-1}(R') \rightarrow R'$ se scinde. L'image R'' de la section associée est un sous-module de A isomorphe à R' , tel que le quotient A/R'' soit sans torsion. En effet, ∂ permet de plonger $(A/R'')/(\partial^{-1}(R')/R'')$ dans B/R' et les deux modules $B/R' \simeq P_n$ et $\partial^{-1}(R')/R'' \simeq \partial^{-1}(R') \cap \mathrm{Ker} \partial \subset A$ sont sans torsion. Ainsi, A se décompose en $A = R'' \oplus A'$ et le lemme 1.11 nous montre que le complexe \mathcal{C}_j est homotope à

$$0 \rightarrow R_{m_\zeta} \rightarrow \cdots \rightarrow A' \rightarrow P_n \rightarrow P_{n+1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_j \rightarrow 0$$

où les modules $R_{m_\zeta}, \dots, R_{n-1}, A'$ vérifient les conditions de hauteur données par le lemme 4.74. Si on répète cette construction on trouve finalement un complexe

$$0 \rightarrow R \rightarrow P_{m_\zeta+1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_j \rightarrow 0$$

dont il suffit de calculer le caractère total (valant $\chi_{\mathrm{exc}} + (-1)^{j-m_\zeta} \chi_j$) pour montrer que R est isomorphe à P_{m_ζ} . \square

Remarque 4.76. On peut préciser la forme des différentielles $d_i : P_i \rightarrow P_{i+1}$. Les caractères du noyau et de l'image de d_i s'obtiennent grâce à la cohomologie de la variété Y_ℓ à coefficients dans K : on a respectivement $[\mathrm{Ker} d_i] = \chi_{i-1}$ et $[\mathrm{Im} d_i] = \chi_i$. De plus, on a vu au cours de la démonstration du théorème que le conoyau de d_i est un module sans torsion de caractère $[\mathrm{Coker} d_i] = \chi_{i+1}$. On en déduit que la réduction modulo ℓ de d_i se factorise en

$$\begin{pmatrix} S_j \\ S_{j-1} \oplus S_{j+1} \\ S_j \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} S_j \\ S_{j+1} \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} S_{j+1} \\ S_j \oplus S_{j+2} \\ S_{j+1} \end{pmatrix}$$

et que le complexe $\overline{\mathcal{C}} = b\mathrm{R}\Gamma_c(Y_\ell, k)$ est effectivement homotope au complexe construit par Rickard [75].

En définitive, on peut représenter la cohomologie de la variété Y_ℓ par un complexe construit directement à partir de l'arbre de Brauer du bloc principal. Les résultats suivants sont des conséquences de la forme particulière de ce complexe :

Corollaire 4.77. *Le complexe $\overline{\mathcal{C}} = \overline{b}\mathrm{R}\Gamma_c(Y_\ell, k)$ est un complexe basculant pour $kG\overline{b}$. Autrement dit, c'est un complexe parfait de $kG\overline{b}$ -modules qui vérifie*

- $\mathrm{Hom}_{K^b(kG\overline{b})}(\overline{\mathcal{C}}, \overline{\mathcal{C}}[i]) = 0$ dès que $i \neq 0$;
- la catégorie additive $\mathrm{add}(\overline{\mathcal{C}})$ formée des facteurs directs de sommes finies de copies de $\overline{\mathcal{C}}$ engendre $K^b(kG\overline{b}\text{-mod})$ en tant que catégorie triangulée.

Démonstration. La remarque précédente assure que $\overline{b}\mathrm{R}\Gamma_c(Y_\ell, k)$ est homotope, en tant que complexe de kG -modules, au complexe de Rickard associée à Γ . Le corollaire se déduit alors directement de la preuve de [75, théorème 4.2]. \square

Corollaire 4.78. *Le complexe $C = bR\Gamma_c(Y_\ell, \Lambda)$ est basculant pour ΛGb . Son algèbre d'endomorphismes $\text{End}_{K^b(\Lambda Gb)}(C)$ est libre sur Λ et elle est homotope au complexe total $\text{Hom}_{\Lambda Gb}^\bullet(C, C)$ en tant que complexe de $(\Lambda T^{cF}, \Lambda T^{cF})$ -bimodules.*

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour \mathcal{C} . Ce dernier est basculant, comme l'unique complexe basculant relevant $\overline{\mathcal{C}}$ (en vertu de [77, proposition 3.1 et théorème 3.3]). On en déduit que la cohomologie de $E = \text{Hom}_{\Lambda G}^\bullet(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ est non nulle en degré 0 seulement. De même la cohomologie de $\overline{E} = E \otimes_\Lambda k$ est concentrée en degré 0 par le corollaire précédent.

La propriété de perfection de \mathcal{C} assure que $\text{Hom}_{\Lambda G}^\bullet(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ est un complexe de $(\Lambda T^{cF}, \Lambda T^{cF})$ -bimodules projectifs de type fini. On en déduit grâce au lemme 1.10 que E est homotope à $H^0(E) \simeq \text{End}_{K^b(\Lambda G)}(\mathcal{C})$. En particulier, ce dernier module est libre sur Λ . \square

Corollaire 4.79. *Le morphisme naturel de Λ -algèbres*

$$\text{End}_{K^b(\Lambda Gb)}(bR\Gamma_c(Y_\ell, \Lambda)) \longrightarrow \text{End}_{\Lambda Gb}^{\text{gr}}(H_c^\bullet(Y_\ell, \Lambda))$$

est injectif.

Démonstration. Puisque la catégorie $KG\text{-mod}$ est semi-simple, on dispose du diagramme commutatif suivant, avec $C = bR\Gamma_c(Y_\ell, \Lambda)$:

$$\begin{array}{ccc} \text{End}_{D^b(\Lambda Gb)}(C) & \xrightarrow{\iota} & \text{End}_{D^b(KGb)}(C) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \text{End}_{\Lambda Gb}^{\text{gr}}(H^\bullet(C)) & \longrightarrow & \text{End}_{K^b(KGb)}^{\text{gr}}(H^\bullet(C)) \end{array}$$

Or par le corollaire précédent $\text{End}_{D^b(\Lambda Gb)}(C) \simeq \text{End}_{K^b(\Lambda Gb)}(C)$ est sans torsion, et le morphisme ι est donc injectif ; le résultat s'en déduit. \square

Corollaire 4.80. *L'image de $F^h - 1$ dans $\text{End}_{K^b(KGb)}(\overline{bR\Gamma_c(Y_\ell, k)})$ est nilpotente.*

Démonstration. Posons $A = \text{End}_{K^b(\Lambda Gb)}(bR\Gamma_c(Y_\ell, \Lambda))$. D'après le corollaire 4.78, la réduction modulo ℓ de A est exactement $\text{End}_{K^b(KGb)}(\overline{bR\Gamma_c(Y_\ell, k)})$. Si χ désigne le polynôme minimal de F^δ sur $H_c^\bullet(Y_\ell, K)$, alors l'image de $\chi(F^\delta)$ dans A est nulle en vertu de l'hypothèse (S) et du corollaire précédent. Mais d'après le fait 4.19 et la remarque 4.75, la réduction modulo ℓ de χ est un facteur d'une certaine puissance du polynôme $X^h - 1$ ce qui assure que $F^h - 1$ est nilpotent modulo ℓ . \square

4.5.2 Conjecture de Broué

La conjecture de Broué, sous sa forme originelle [12], prédit l'existence d'une équivalence dérivée entre la catégorie des modules sur un bloc et celle de son correspondant de Brauer dès que le défaut du bloc est abélien. Plus précisément, pour un bloc de défaut D abélien, représenté par l'idempotent b , et $c = \text{Br}(b)$ le bloc de $N_G(D)$ associé, il existe une équivalence

$$D^b(\Lambda Gb\text{-Mod}) \xrightarrow{\sim} D^b(\Lambda N_G(D)_c\text{-Mod}).$$

Une telle équivalence induit, entre autre, une *isométrie parfaite* entre les groupes de Grothendieck possédant de nombreuses propriétés arithmétiques. Les conséquences numériques de l'existence d'une telle isométrie sont nombreuses : on peut en déduire la conservation du nombre de caractères irréductibles (ordinaires et modulaires) et des invariants de similitude de la matrice de Cartan [13]. Sous cette forme, la conjecture à été prouvée dans les cas suivants :

- avec restrictions sur le défaut : lorsque D est un groupe cyclique [75], [59] et [79], ou isomorphe au groupe de Klein $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ [78] et [60];
- avec restrictions sur G : lorsque G est ℓ -résoluble [27], [72] et [47], lorsqu'il est isomorphe à un groupe symétrique ou à un groupe linéaire [23], ou lorsque c'est un groupe réductif fini et que ℓ divise $q - 1$ [73].

De nombreux autres cas particuliers ont aussi été résolus, et constituent autant d'indices attestant du bien-fondé de cette conjecture.

Il n'est pas clair qu'il existe une manière canonique de réaliser l'équivalence, ce qui est une des principales difficultés du problème. Cependant, dans le cas où G est un groupe réductif fini, la cohomologie de certaines variétés de Deligne-Lusztig fournit un bon candidat pour induire l'équivalence souhaitée : c'est la *version géométrique* de la conjecture de Broué, telle qu'elle est précisée dans [15] et [17].

Les variétés $Y(\dot{w})$ dont la cohomologie possède les propriétés requises pour réaliser une équivalence dérivée sont associés à des éléments vérifiant les hypothèses suivantes :

- (B1) $w\sigma$ est un bon élément d -régulier au sens de [17].
- (B2) ℓ divise $|T_w|$ mais ne divise pas $[G : T_w]$.

On supposera de plus que le nombre premier ℓ est grand, c'est-à-dire vérifie :

- (B3) ℓ ne divise pas $|W^F|$.

Alors la conjecture de Broué prédit que le complexe $bR\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda)$ induit une équivalence de Rickard splendide, et donc une équivalence dérivée, entre les blocs principaux des groupes G et $N_G(T_w)$. Plus précisément,

Conjecture 4.81 (Broué). *Sous les hypothèses précédentes, il existe un complexe borné D de $(\Lambda Gb, \Lambda N_G(T_w))$ -bimodules tel que*

- (i) *Les restrictions de $bR\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda)$ et D à la catégorie des complexes bornés de $(\Lambda Gb, \Lambda T_w)$ -bimodules sont homotopes.*
- (ii) *Le complexe D induit une équivalence de Rickard splendide entre les ℓ -blocs principaux de G et $N_G(T_w)$.*

Remarque 4.82. Dans le cas où l'élément w n'est pas supposé bon, la disjonction de la cohomologie n'est pas toujours vraie. Les autres hypothèses sur w prennent une forme plus simple lorsque (\mathbf{G}, F) n'a pas de facteurs tordus du type 2B_2 , 2F_4 ou 2G_2 , puisqu'elle traduisent essentiellement le fait que $(\mathbf{T}_w, 1)$ est une paire

d -cuspidale. En ce sens, le théorème 4.9 est une conséquence numérique de cette conjecture (qui peut d'ailleurs s'adapter aux autres blocs). De plus, T_w contient un unique ℓ -sous-groupe de Sylow T_ℓ de G . C'est un groupe de défaut du bloc principal et on peut vérifier, en suivant la preuve de la proposition 4.15, que son normalisateur est donné par $N_G(T_\ell) = N_G(T_w) = N_G(\mathbf{T}_w)$.

Lorsque w est un élément de Coxeter associé à la paire (W, F) , une hypothèse supplémentaire est vérifiée :

(B4) Le groupe $C_W(w\sigma)$ est cyclique, engendré par $wF(w) \cdots F^{\delta-1}(w)$.

Dans ce cas, l'action de l'endomorphisme de Frobenius F^δ fournit un moyen naturel d'étendre l'action de $T_w \simeq \mathbf{T}^{wF}$ sur le complexe $b\mathrm{R}\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda)$ en une action de $N_G(T_w)$. Fort de cette observation, Rouquier a montré dans [80] que l'hypothèse de disjonction de la cohomologie à coefficients dans k suffisait à démontrer la conjecture de Broué. Grâce à la section précédente, on sait que cette propriété de disjonction est vérifiée lorsque w est un élément de Coxeter, ce qui nous permet d'énoncer le résultat principal de ce chapitre :

Théorème 4.83. *Sous l'hypothèse (S), la conjecture 4.81 est vérifiée lorsque w est un élément de Coxeter.*

Le théorème est une conséquence directe du corollaire 4.77 et de [80, théorème 4.5]. Nous donnons ici quelques détails de la démonstration de ce dernier résultat afin de comprendre le lien entre les actions de $v = cF(c) \cdots F^{\delta-1}(v)$ et F^δ sur la cohomologie de $Y(\dot{w})$.

Considérons l'algèbre $A = \mathrm{End}_{\mathcal{K}^b(\Lambda Gb)}(C)$ associée à $C = b\mathrm{R}\Gamma_c(Y_\ell, \Lambda)$. La propriété de disjonction assure qu'elle est homotope à $\mathrm{End}_{\Lambda Gb}^\bullet(C)$ en tant que complexe de $(\Lambda \mathbf{T}^{cF}, \Lambda \mathbf{T}^{cF})$ -bimodules (voir corollaire 4.78). Elle est de plus libre sur Λ et vérifie ainsi

$$\bar{A} = A \otimes_\Lambda k \simeq \mathrm{End}_{\mathcal{K}^b(kG\bar{b})}(\bar{C}).$$

Puisque l'action de G sur C commute aussi à celle de F^δ , on dispose d'un morphisme canonique $\phi : \Lambda \mathbf{T}^{cF} \rtimes \langle F^\delta \rangle_{\mathrm{mon}} \longrightarrow A$ dont on peut montrer qu'il est surjectif. Notons τ l'image de F^h dans A et $\langle \tau \rangle$ la sous-algèbre qu'il engendre. La classe de τ dans \bar{A} sera notée $\bar{\tau}$. D'après le corollaire 4.80, l'élément $\bar{\tau} - 1$ est nilpotent. Puisque h est premier à ℓ , le lemme de Hensel appliqué à l'idéal $\mathfrak{m} = \mathrm{Nil}\langle \tau \rangle + \ell \langle \tau \rangle$ nous assure qu'il existe un élément $\alpha \in \langle \tau \rangle$ tel que $\alpha^{h_0} = \tau$ et $\bar{\alpha} - 1$ soit nilpotent. On peut alors déformer ϕ en un morphisme

$$\psi : \Lambda \mathbf{T}^{cF} \rtimes C_W(c\sigma) \longrightarrow A$$

en posant $\psi(v^{-1}) = \alpha^{-1}\phi(F^\delta)$. En d'autres termes, on a défini une action de v sur C à homotopie près qui, modulo ℓ , ressemble à l'inverse de l'action de F^δ . Reste à appliquer [80, lemme 4.9] pour conclure qu'il existe un complexe D de $(\Lambda Gb, \Lambda \mathbf{T}^{cF} \rtimes C_W(c\sigma))$ -bimodules et une équivalence d'homotopie f entre les restrictions de C et D à la catégorie des complexes de $(\Lambda Gb, \Lambda \mathbf{T}^{cF})$ -bimodules telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda \mathbf{T}^{cF} \rtimes C_W(c\sigma) & \xrightarrow{\psi} & \text{End}_{K^b(\Lambda Gb)}(C) \\
 & \searrow \text{can} & \updownarrow f \\
 & & \text{End}_{K^b(\Lambda Gb)}(D)
 \end{array}$$

Le foncteur $D^\vee \otimes_{\Lambda G} -$ induit alors une équivalence de Rickard splendide entre les ℓ -blocs principaux de G et $\mathbf{T}^{cF} \rtimes C_W(c\sigma)$.

Exemple 4.84. Pour $\mathbf{G} = \text{SL}_2(\mathbb{F})$, l'image \mathcal{F} de F dans A vérifie la relation quadratique suivante :

$$\mathcal{F}^2 = -q\mathcal{D} + \mathcal{F} \circ \mathcal{E}$$

avec
$$\mathcal{E} = \sum_{t \in \mathbf{T}^{cF}} t \in \Lambda \mathbf{T}^{cF} \quad \text{et} \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{T}^{cF}.$$

Notons que cette relation a lieu sans hypothèse sur ℓ (voir [4, théorème 7.3.9]). Néanmoins, lorsque ℓ est impair et divise $q+1$, l'image de \mathcal{E} dans \bar{A} est nilpotente, et \mathcal{D} agit par l'identité sur $R\Gamma_c(Y_\ell, \Lambda)$ (\mathcal{D} est un ℓ' -élément). La relation précédente assure donc que $\bar{\mathcal{F}}^2 - 1$ est aussi nilpotent.

Dans cet exemple, on peut directement construire l'image de s dans A à partir de \mathcal{F} et \mathcal{E} [4, théorème 8.3.4]. Si on note $\sqrt{-q}$ l'unique racine de $-q$ dans Λ congrue à 1 modulo ℓ , on définit \mathcal{S} par :

$$\mathcal{S} = \frac{1}{\sqrt{-q}} \left(\mathcal{F} - \frac{1}{2} \mathcal{E} \right) \left(1 - \frac{\sqrt{-q} - 1}{(\sqrt{-q} + 1)(1 - q)} \mathcal{E} \right).$$

On peut alors vérifier « à la main » que cet endomorphisme commute à l'action de \mathbf{T}^{cF} de la même façon que s et qu'il vérifie de plus $\mathcal{S}^2 = \mathcal{D}$. Il constitue enfin une bonne approximation de \mathcal{F} dans le sens où les images de \mathcal{S} et \mathcal{F} coïncident dans $\bar{A}/\text{Rad } \bar{A}$.

Remarque 4.85. Le morphisme quotient $N_G(T_c) \twoheadrightarrow C_W(c\sigma)$ donné par la proposition 4.15 ne se scinde pas en général, et les groupes $N_G(T_c)$ et $\mathbf{T}^{cF} \rtimes C_W(c\sigma)$ ne sont pas isomorphes. En revanche, lorsque ℓ vérifie les hypothèses données en 4.2.2, les algèbres $\Lambda N_G(T_c)$ et $\Lambda \mathbf{T}^{cF} \rtimes C_W(c\sigma)$ sont isomorphes et on peut ainsi identifier leur bloc principal.

En conjuguant ce résultat avec le théorème 4.67, on a finalement démontré la version géométrique de la conjecture de Broué dans les cas suivants, qui viennent s'ajouter au cas des groupes de \mathbb{F}_q -rang 1 [80] ou de type A_n [6] :

Théorème 4.86. *La version géométrique de la conjecture de Broué est vraie pour les éléments de Coxeter dans les cas suivants :*

- (i) (\mathbf{G}, F) est de type 2D_n (avec ℓ divisant $\Phi_n(q^2)$);
- (ii) (\mathbf{G}, F) est de type B_n ou C_n et $p \neq 2$ (avec ℓ divisant $\Phi_{2n}(q)$).

L'action de v^{-1} sur les groupes $H_c^i(Y_\ell, \Lambda)$ qui, modulo ℓ , s'identifie à l'action de la partie semi-simple de F^δ va nous permettre d'expliciter la valeur du foncteur $\overline{D}^\vee \otimes_{kG} -$ sur les kG -modules simples du bloc et d'obtenir ainsi d'autres propriétés de l'équivalence dérivée induite par ce foncteur.

4.5.3 Plongement planaire de l'arbre de Brauer

On commence par construire un représentant \mathcal{D} de D qui possède de bonnes propriétés de finitude, comme on l'a fait précédemment pour $C = b\mathrm{R}\Gamma_c(Y_\ell, \Lambda)$. Remarquons d'abord que la restriction de D à la catégorie des complexes de $(\Lambda G, \Lambda \mathbf{T}^{cF})$ -bimodules est homotope à C , et donc à \mathcal{C} qui est bien un complexe borné de modules projectifs à gauche et à droite. Reste à définir l'action du groupe $C_W(cw)$ sur ce complexe.

Par transfert, on peut définir un endomorphisme \tilde{v} sur \mathcal{C} tel que les images de v et \tilde{v} s'identifient via l'isomorphisme $\mathrm{End}_{K^b(\Lambda G)}(D) \simeq \mathrm{End}_{K^b(\Lambda G)}(\mathcal{C})$. Notons que la définition de \tilde{v} dépend du choix des fonctions réalisant l'équivalence d'homotopie entre \mathcal{C} et D . L'image de \tilde{v} est donc d'ordre h_0 et il existe un endomorphisme n de \mathcal{C} homotope à zéro vérifiant $\tilde{v}^{h_0} = 1 + n$. On procède alors comme dans [4] : on considère le complexe de $(\Lambda G, \Lambda \mathbf{T}^{cF})$ -bimodules \mathcal{D} obtenu en retirant les facteurs directs de \mathcal{C} homotopes à zéro. Puisque $\ell > h_0$ on peut alors extraire une racine h_0 -ième de $1 + n$ grâce à la série formelle ${}^h\sqrt{1 + X}$. Autrement dit, il existe un endomorphisme n' de \mathcal{D} homotope à zéro tel que $(1 + n')^{h_0} = 1 + n$. On définit finalement l'action de $v \in C_W(c\sigma)$ sur \mathcal{D} via l'endomorphisme $\mathcal{V} = (1 + n')^{-1}\tilde{v}$.

En résumé, on a construit un complexe borné \mathcal{D} de $(\Lambda G, \Lambda \mathbf{T}^{cF} \rtimes C_W(c\sigma))$ -bimodules tel que :

- \mathcal{D} est un complexe borné de modules de type fini projectifs à gauche et à droite (car $C_W(c\sigma)$ est d'ordre inversible dans Λ) ;
- les restrictions de \mathcal{D} et $C = b\mathrm{R}\Gamma_c(Y_\ell, \Lambda)$ à la catégorie des complexes de $(\Lambda G, \Lambda \mathbf{T}^{cF})$ -bimodules sont homotopes ;
- via l'identification $\mathrm{End}_{K^b(kG)}(\overline{\mathcal{D}}) \simeq \mathrm{End}_{K^b(kG)}(\overline{C})$, les images de v^{-1} et F^δ diffèrent d'un élément nilpotent.

En particulier, on peut, grâce au lemme 1.30, identifier les (λ) -espaces propres généralisés de v^{-1} à ceux de F^δ sur les groupes de cohomologie de Y_ℓ . Le couple $(\mathcal{D}, \mathcal{V})$ possède alors les mêmes propriétés que le couple $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ qui sont requises pour la démonstration du théorème 4.71. Aussi peut-on montrer que pour $j \in \llbracket m_\zeta ; M_\zeta \rrbracket$, l'espace propre généralisé \mathcal{D}_j de \mathcal{V} sur \mathcal{D} associé à la classe de $q^{-j\delta}$ est homotope au complexe de kG -modules suivant :

$$0 \longrightarrow P_{m_\zeta} \longrightarrow P_{m_\zeta+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{j-1} \longrightarrow P_j \longrightarrow 0$$

En utilisant cette forme particulière on peut déterminer le plongement planaire de l'arbre de Brauer, conjecturé dans la section 4.2.3 :

Théorème 4.87. *Sous l'hypothèse (S), la conjecture 4.28 est vraie.*

Démonstration. Il suffit de montrer que si le groupe $\text{Ext}_{kG}^1(S_{m_\zeta}, S_{m_\xi})$ est non nul, alors l'entier m_ξ est forcément congru à $M_\zeta + 1$ modulo h_0 . Le formalisme des catégories dérivées nous permet d'écrire ce groupe comme

$$\text{Ext}_{kG}^1(S_{m_\zeta}, S_{m_\xi}) \simeq \text{Hom}_{D^b(kG)}(S_{m_\zeta}, S_{m_\xi}[1])$$

qui, via le foncteur $\overline{\mathcal{D}}^\vee \otimes_{kG} -$, est aussi isomorphe à

$$\text{Hom}_{D^b(k\mathbf{T}^{cF} \rtimes C_W(c\sigma))}(\overline{\mathcal{D}}^\vee \otimes_{kG} S_{m_\zeta}, \overline{\mathcal{D}}^\vee \otimes_{kG} S_{m_\xi}[1]).$$

Maintenant, pour $j \neq m_\zeta$, on a $\overline{P}_j^\vee \otimes_{kG} S_{m_\zeta} = \text{Hom}_{kG}(\overline{P}_j, S_{m_\zeta}) = 0$. En coupant le complexe $\overline{\mathcal{D}}$ selon les valeurs propres de ν , on peut écrire les isomorphismes suivants, dans la catégorie $K^b(kC_W(c\sigma)\text{-mod})$:

$$\overline{\mathcal{D}}^\vee \otimes_{kG} S_{m_\zeta} \simeq \bigoplus_{j=0}^{h_0-1} \overline{\mathcal{D}}_j^\vee \otimes_{kG} S_{m_\zeta} \simeq \bigoplus_{j=m_\zeta}^{M_\zeta} \overline{\mathcal{D}}_j^\vee \otimes_{kG} S_{m_\zeta} \simeq \bigoplus_{j=m_\zeta}^{M_\zeta} k_j[-r]$$

où k_j désigne le $kC_W(c\sigma)$ -module simple sur lequel ν agit par multiplication par la classe modulo ℓ de $q^{-j\delta}$. En particulier, le caractère de Brauer ϕ_j du module k_j vérifie $\phi_j(\nu) \equiv q^{-j\delta} \pmod{\ell}$, en accord avec les notations introduites dans l'exemple 4.27 (ici l'élément ν agit sur \mathbf{T}^{cF} par élévation à la puissance $q^{-\delta}$). On en déduit que le complexe $\overline{\mathcal{D}}^\vee \otimes_{kG} S_{m_\zeta}$ est quasi-isomorphe à un $k\mathbf{T}^{cF} \rtimes C_W(c\sigma)$ -module N_{m_ζ} concentré en degré r , qui vérifie

$$\text{Res}_{kC_W(c\sigma)}^{k\mathbf{T}^{cF} \rtimes C_W(c\sigma)}(N_{m_\zeta}) \simeq k_{m_\zeta} \oplus k_{m_\zeta+1} \oplus \cdots \oplus k_{M_\zeta}.$$

Ainsi, les facteurs de composition du module N_{m_ζ} sont tous de la forme k_j , avec $j \in \llbracket m_\zeta ; M_\zeta \rrbracket$.

D'autre part, le groupe d'extensions $\text{Ext}_{k\mathbf{T}^{cF} \rtimes C_W(c\sigma)}^1(k_i, k_j)$ est non nul si et seulement si $j = i + 1$ modulo h_0 (voir l'exemple 4.27). Puisque

$$\text{Ext}_{kG}^1(S_{m_\zeta}, S_{m_\xi}) \simeq \text{Ext}_{k\mathbf{T}^{cF} \rtimes C_W(c\sigma)}^1(N_{m_\zeta}, N_{m_\xi})$$

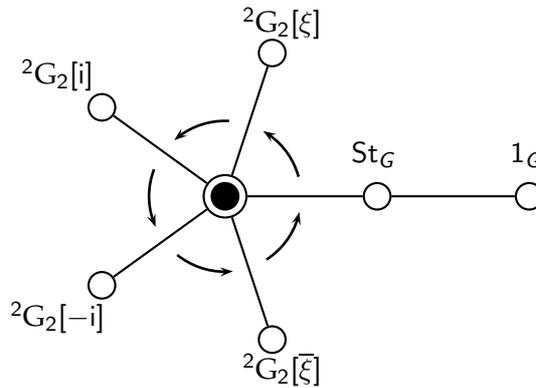
on en déduit que pour que ce dernier groupe soit non nul, il faut qu'il existe $i \in \llbracket m_\zeta ; M_\zeta \rrbracket$ et $j \in \llbracket m_\xi ; M_\xi \rrbracket$ tel que $j = i + 1$ modulo h_0 . Mais les seuls entiers pouvant vérifier cette égalité sont $i = M_\zeta$ et $j = m_\xi$, ce qui termine la preuve. \square

Remarque 4.88. On peut préciser la forme du module N_{m_ζ} : puisqu'il est image d'un module indécomposable, il est lui-même indécomposable. D'autre part, ses facteurs de composition sont exactement $k_{m_\zeta}, k_{m_\zeta+1}, \dots, k_{M_\zeta}$; on en déduit que N_{m_ζ} est unisériel, et qu'il s'écrit

$$N_{m_\zeta} = \begin{pmatrix} k_{M_\zeta} \\ k_{M_\zeta-1} \\ \vdots \\ k_{m_\zeta} \end{pmatrix}.$$

Notons cependant qu'il peut exister une ambiguïté dans le cas d'un groupe de type A_1 comme $SL_2(q)$.

Remarque 4.89. Grâce au théorème 4.67, on en déduit que pour le groupe de Ree de type 2G_2 , dont le \mathbb{F}_q -rang est 1, l'arbre de Brauer du ℓ -bloc principal lorsque q est d'ordre 12 modulo ℓ est bien



4.5.4 Perversité et matrice de décomposition

Pour clore ce chapitre, on observe que l'équivalence induite par le complexe de cohomologie est *perverse* au sens de [22], donnant ainsi une preuve conceptuelle de l'unitriangularité de la matrice de décomposition du ℓ -bloc principal.

Donnons avant cela quelques précisions sur les notations intervenant dans la définition. On rappelle qu'une sous-catégorie pleine \mathcal{B} d'une catégorie abélienne \mathcal{A} est une *sous-catégorie de Serre* si pour toute suite exacte

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

dans \mathcal{A} , B est un objet de \mathcal{B} si et seulement si A et C sont eux-même dans \mathcal{B} . Autrement dit, la catégorie \mathcal{B} est stable par quotients et sous-modules quelconques, ainsi que par extensions par objets de \mathcal{B} .

Étant donné une telle catégorie, on notera $D_{\mathcal{B}}^b(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $D^b(\mathcal{A})$ formée des complexes dont la cohomologie est constituée d'objets de \mathcal{B} et on pourra former les catégories quotient \mathcal{A}/\mathcal{B} et $D^b(\mathcal{A})/D_{\mathcal{B}}^b(\mathcal{A})$.

Définition 4.90. Soient \mathcal{A} et \mathcal{A}' deux catégories abéliennes, \mathcal{S} et \mathcal{S}' l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets simples de ces catégories. Une équivalence de catégories $\Theta : D^b(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathcal{A}')$ est dite *perverse* s'il existe

- des filtrations $\emptyset = \mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}_1 \subset \dots \subset \mathcal{S}_r = \mathcal{S}$ et $\emptyset = \mathcal{S}'_0 \subset \mathcal{S}'_1 \subset \dots \subset \mathcal{S}'_r = \mathcal{S}'$ des ensembles \mathcal{S} et \mathcal{S}' ,
- une fonction $p : \llbracket 0; r \rrbracket \longrightarrow \mathbb{Z}$ représentant la perversité,

telles que si \mathcal{A}_i (resp. \mathcal{A}'_i) désigne la sous-catégorie de Serre engendrée par \mathcal{S}_i (resp. \mathcal{S}'_i), alors pour tout i

- (i) Θ se restreint en des équivalences $D_{\mathcal{A}_i}^b(\mathcal{A}) \simeq D_{\mathcal{A}'_i}^b(\mathcal{A}')$;

(ii) le foncteur composé $\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i-1} \hookrightarrow D_{\mathcal{A}_i}^b(\mathcal{A})/D_{\mathcal{A}_{i-1}}^b(\mathcal{A}) \xrightarrow{\Theta} D_{\mathcal{A}'_i}^b(\mathcal{A}')/D_{\mathcal{A}'_{i-1}}^b(\mathcal{A}')$ se factorise selon le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} D_{\mathcal{A}_i}^b(\mathcal{A})/D_{\mathcal{A}_{i-1}}^b(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\Theta} & D_{\mathcal{A}'_i}^b(\mathcal{A}')/D_{\mathcal{A}'_{i-1}}^b(\mathcal{A}') \\ \text{can} \uparrow & & \uparrow [\rho(i)] \\ \mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i-1} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{A}'_i/\mathcal{A}'_{i-1} \end{array}$$

de sorte que $\Theta[-\rho(i)]$ induise une équivalence $\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i-1} \simeq \mathcal{A}'_i/\mathcal{A}'_{i-1}$.

Dans la suite, on supposera que tous les objets des catégories abéliennes considérées ont des suites de composition de longueur finie, de sorte que la notion de facteur de composition ait un sens. Les propriétés (i) et (ii) se reformulent alors en partique en :

- pour L un module simple appartenant à \mathcal{S}_i , les facteurs de composition de $H^n(\Theta(L))$ appartiennent à \mathcal{S}'_i ; de plus, ils appartiennent même à \mathcal{S}'_{i-1} dès que $n \neq -\rho(i)$;
- si $L \in \mathcal{S}_i \setminus \mathcal{S}_{i-1}$ alors $H^{-\rho(i)}(\Theta(L))$ a un unique facteur de composition L' appartenant à \mathcal{S}'_i et l'application $L \mapsto L'$ induit une bijection entre les modules simples de $\mathcal{S}_i \setminus \mathcal{S}_{i-1}$ et ceux de $\mathcal{S}'_i \setminus \mathcal{S}'_{i-1}$.

En des termes plus simples, $\Theta(L)$ est quasi-isomorphe à $L'[\rho(i)]$ « modulo des facteurs de composition dans \mathcal{S}_{i-1} ».

Remarque 4.91. Si F est une équivalence perverse de perversité p , et G un foncteur inverse de F , alors G est une équivalence perverse de perversité $-p$.

Revenons maintenant au cas de l'équivalence dérivée étudiée précédemment. On a construit un complexe borné \mathcal{D} de $(\Lambda G, \Lambda \mathbf{T}^{cF} \rtimes C_W(c\sigma))$ -bimodules représentant la cohomologie de Y_ℓ , et dont les termes sont des modules projectifs de type fini à gauche et à droite. En reprenant la démonstration du théorème [], on montre facilement que pour S_j un kG -module simple avec $j \in \llbracket m_\zeta; M_\zeta \rrbracket$, on a

$$\overline{\mathcal{D}}^\vee \otimes_{kG} S_j \simeq N_j[m_\zeta - j - r] \quad (4.92)$$

avec N_j un $k\mathbf{T}^{cF} \rtimes C_W(c\sigma)$ -module vérifiant

$$\text{Res}_{kC_W(c\sigma)}^{k\mathbf{T}^{cF} \rtimes C_W(c\sigma)}(N_j) \simeq k_j \oplus k_{j+1} \oplus \cdots \oplus k_{M_\zeta}.$$

En particulier, les facteurs de composition de N_j sont exactement les inflations des modules simples k_j, \dots, k_{M_ζ} .

De cette observation on va déduire que le foncteur $\Theta : \overline{\mathcal{D}} \otimes_{kG} -$ induit une équivalence perverse. Rappelons d'abord qu'à tout module simple S on peut associer sa hauteur dans l'arbre de Brauer, comme sa distance au sommet exceptionnel. Avec les notations précédentes, on a par exemple $h_\Gamma(S_j) = j - m_\zeta$. À l'aide de cette fonction on définit les ensembles de kG -modules simples

$$\mathcal{S}_i = \{S \in \text{Irr } kG \mid h_\Gamma(S) \leq r - i\}$$

ainsi que leurs analogues

$$\mathcal{S}'_i = \{k_j \in \text{Irr } k\mathbf{T}^{cF} \rtimes C_W(c\sigma) \mid S_j \in \mathcal{S}_i\}$$

où, par abus de notation, on notera toujours k_j l'inflation du module k_j de $C_W(c\sigma)$ à $\mathbf{T}^{cF} \rtimes C_W(c\sigma)$. Notons que $\mathcal{S}_r = \text{Irr } kG$ et $\mathcal{S}'_r = \text{Irr } k\mathbf{T}^{cF} \rtimes C_W(c\sigma)$ sont les derniers éléments de la filtration.

Enfin, l'image par Θ d'un module $S_j \in \mathcal{S}_i \setminus \mathcal{S}_{i-1}$ possède, par l'isomorphisme 4.92, un unique facteur de composition dans $\mathcal{S}'_i \setminus \mathcal{S}'_{i-1}$, à savoir k_j . Ce dernier est concentré en degré $r + j - m_\zeta = r + h_\Gamma(S_j) = 2r - i$, de sorte que si on définit la fonction de perversité par $p(i) = i - 2r$, on obtient finalement :

Théorème 4.93. *Le foncteur $\Theta : \overline{\mathcal{D}} \otimes_{kG} -$ muni du triplet $(\mathcal{S}_\bullet, \mathcal{S}'_\bullet, p)$ induit une équivalence perverse entre les blocs principaux de kG et $k\mathbf{T}^{cF} \rtimes C_W(c\sigma)$. La bijection induite sur les modules simples par cette équivalence est $S_j \longleftrightarrow k_j$.*

Pour les équivalences dérivées prédites par la conjecture de Broué, où l'une des deux algèbres apparaissant est du type $D \rtimes E$ avec D un ℓ -groupe abélien et E un ℓ' -sous groupe de $\text{Aut}(D)$, l'existence d'une donnée perverse renseigne sur les matrices de décomposition des blocs considérés [22] :

Corollaire 4.94 (Chuang-Rouquier). *On peut ordonner les KG -modules simples et les kG -modules simples de telle sorte que la matrice de décomposition du bloc principal de ΛG soit unitriangulaire.*

Démonstration. Il suffit de choisir un ordre sur les modules respectant la perversité (ici donnée par la hauteur). Par semi-simplicité, le foncteur

$$K\Theta : D^b(KG\text{-mod}) \longrightarrow D^b(K\mathbf{T}^{cF} \rtimes C_W(c\sigma))$$

induit une bijection sur les simples appartenant aux blocs principaux, bijection qui, par définition des modules Y_j et k_j (voir la notation 4.21 et l'exemple 4.27), envoie le module simple Y_j sur un module décalé isomorphe à un relevé à Λ de k_j .

Soit Θ^* un foncteur inverse de Θ . Il induit aussi une équivalence perverse, pour les mêmes filtrations, mais pour une fonction de perversité opposée. La filtration sur les simples étant donnée par la hauteur, on trouve

$$\text{déc}_G [Y_j]_K = \Theta^*([k_j]_k) = [S_j]_k + \sum_{h_\Gamma(S_i) \geq h_\Gamma(S_j)} a_{i,j} [S_i]_k$$

pour certains entiers $a_{i,j}$, ce qui traduit l'unitriangularité de la matrice de décomposition de ΛGb . \square

Bien sûr, on aurait pu vérifier directement que l'ordre induit par la hauteur dans l'arbre de Brauer donne une matrice de décomposition unitriangulaire, mais la démonstration donnée dans [22] s'applique à des situations où l'on ne dispose que de l'équivalence perverse, et pas de la structure détaillée du bloc.

Cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig associées à d'autres éléments réguliers

Contexte

Au cours de cette thèse, l'étude de la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig a été essentiellement conduite dans deux directions différentes :

- pour identifier une certaine classe de représentations modulaires apparaissant dans la cohomologie des variétés $Y(w)$ et $X(w)$ associées à n'importe quel élément du groupe de Weyl, ceci grâce à des décompositions géométriques de ces variétés ;
- pour comprendre toutes les représentations données par la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig associées à des éléments particuliers de W (les éléments de Coxeter).

Ce dernier chapitre est un travail effectué avec l'aide de Jean Michel, qui ouvre des perspectives de recherche où se mêlent les différents points de vue adoptés dans les chapitres précédents.

Les éléments de Coxeter étudiés précédemment sont des éléments réguliers particuliers. La version géométrique des conjectures de Broué, telle qu'elle est précisée dans [17], fait intervenir les variétés de Deligne-Lusztig associées à d'autres éléments réguliers dans le but de décrire tous les ℓ -blocs principaux pour différents nombres premiers ℓ à partir de la cohomologie des variétés associées.

La première étape dans la généralisation des résultats du chapitre précédent à d'autres éléments réguliers est le calcul explicite de la cohomologie de ces variétés. On s'inspire pour cela des méthodes utilisées dans les travaux récents de Digne, Michel et Rouquier [34], [35] en y ajoutant les ingrédients du chapitre 2. Le lien entre les deux points de vue est détaillé dans les deux premières parties, où on développe une méthode générale permettant de calculer la cohomologie du quotient des variétés de Deligne-Lusztig à partir de variétés plus petites, regroupées selon certaines cellules de Deodhar. On observe ensuite que pour des

éléments réguliers de petite longueur, très peu de variétés interviennent, ce qui permet de mener à bien quelques calculs dans les groupes de type F_4 , E_6 , E_7 et E_8 . La traduction modulaire de ces résultats est donnée dans une dernière partie, sous la forme de deux arbres de Brauer décrivant conjecturalement le Φ_{14} -bloc principal d'un groupe de type E_7 et le Φ_{24} -bloc principal d'un groupe de type E_8 . Une inspection plus approfondie de la torsion dans la cohomologie modulaire de ces variétés devrait, comme dans le cas des éléments de Coxeter, donner assez d'informations pour mener à bien cette étude.

5.1 Quotient de variétés de Deligne-Lusztig

On cherche à calculer la cohomologie de certaines variétés de Deligne-Lusztig de manière inductive. Rappelons que lorsque w est un élément de Coxeter, le quotient de $X(w)$ par le sous-groupe unipotent U_I s'exprime en fonction d'une autre variété de Deligne-Lusztig, elle-même associée à un élément de Coxeter du sous-groupe parabolique W_I . C'est en grande partie sur ce phénomène que reposent les travaux de Lusztig [62] que nous avons utilisés au chapitre précédent.

Nous donnons dans cette première partie une méthode générale permettant de généraliser ce résultat. La philosophie du chapitre 4 est conservée : la décomposition de Curtis-Deodhar permet d'exprimer le quotient $U_I \backslash X(w)$ pour n'importe quel élément $w \in W$ à l'aide de variétés de Deligne-Lusztig « plus petites ». Chaque variété apparaissant correspond à une certaine cellule de Deodhar, expliquant ainsi le fait qu'une seule variété apparaisse dans le cas d'un élément de Coxeter. En pratique, on commencera par regrouper les pièces de $X(w)$ en suivant [34], de manière à obtenir une décomposition du quotient en sous-variétés stables par l'action de L_I . On décomposera à nouveau ces dernières en utilisant les outils introduits au chapitre 2, afin de faire apparaître les variétés de Deligne-Lusztig associées aux éléments de W_I .

5.1.1 Regroupement des pièces

Soit $w \in W$ et I un sous-ensemble de racines simples stable par ϕ . Les sous-groupes standards \mathbf{P}_I , \mathbf{L}_I et \mathbf{U}_I (voir section 3.3.2) sont donc stables par F . Rappelons que la variété de Deligne-Lusztig $X(w)$ se décompose en pièces $X_x(w)$, selon la décomposition de Bruhat de \mathbf{G}/\mathbf{B} . Ces pièces sont en général permutées par l'action de L_I mais on peut les regrouper selon la classe de x dans $W_I \backslash W$ de façon à obtenir des sous-variétés stables par L_I . De manière équivalente, la décomposition de \mathbf{G}/\mathbf{B} en \mathbf{P}_I -orbites induit la décomposition suivante de $X(w)$:

$$X(w) = \bigsqcup_{x \in [W_I \backslash W]} \{px \cdot \mathbf{B} \in \mathbf{P}_I x \cdot \mathbf{B}/\mathbf{B} \mid p^{-1}F(p) \in x\mathbf{B}w\mathbf{B}F(x)^{-1}\} = \bigsqcup_{x \in [W_I \backslash W]} Z_x(w).$$

Le quotient de chacune de ces variétés par U_I se calcule plus facilement si on les relève à \mathbf{P} : on définit, pour tout $x \in W$, la variété

$$\tilde{Z}_x(w) = \{p \in \mathbf{P}_I \mid p^{-1}F(p) \in {}^x\mathbf{B}w\mathbf{B}F(x)^{-1}\}$$

de sorte que la projection canonique $\mathbf{P}_I \rightarrow \mathbf{P}_I \times \mathbf{B}/\mathbf{B}$ induise un isomorphisme \mathbf{P}_I -équivariant entre $\tilde{Z}_x(w)/(\mathbf{P}_I \cap {}^x\mathbf{B})$ et $Z_x(W)$.

On supposera désormais que x est I -réduit. En particulier, le groupe $\mathbf{P}_I \cap {}^x\mathbf{B}$ se décompose en $\mathbf{P}_I \cap {}^x\mathbf{B} = \mathbf{B}_I \cdot (\mathbf{U}_I \cap {}^x\mathbf{U})$ où on a noté $\mathbf{B}_I = \mathbf{L}_I \cap \mathbf{B}$ le sous-groupe de Borel de \mathbf{L}_I provenant de \mathbf{B} . Puisque $\mathbf{U}_I \cap {}^x\mathbf{U}$ agit librement sur $\tilde{Z}_x(w)$ on en déduit par la proposition 1.20 l'isomorphisme suivant dans $D^b(K\mathbf{P}_I\text{-Mod})$:

$$\mathrm{R}\Gamma_c(Z_x(w), K) \simeq \mathrm{R}\Gamma_c(\tilde{Z}_x(w)/\mathbf{B}_I, K) [2 \dim(\mathbf{U}_I \cap {}^x\mathbf{U})].$$

On est donc ramené à comprendre la cohomologie du quotient $U_I \backslash \tilde{Z}_x(w)/\mathbf{B}_I$.

Notons $\pi_I : \mathbf{P}_I \rightarrow \mathbf{L}_I$ la projection canonique associée à la décomposition de Levi $\mathbf{P}_I = \mathbf{U}_I \mathbf{L}_I$. En procédant comme dans la section 2.3.2, on peut réaliser le quotient $U_I \backslash \mathbf{P}_I$ comme l'image de l'application $p \rightarrow (p^{-1}F(p), \pi_I(p))$. En restreignant cette image à la variété $\tilde{Z}_x(w)$ on trouve

$$\begin{aligned} U_I \backslash \tilde{Z}_x(w) &\simeq \{(\bar{p}, m) \in \mathbf{P}_I \times \mathbf{L}_I \mid \bar{p} \in {}^x\mathbf{B}w\mathbf{B}F(x)^{-1} \text{ et } m^{-1}F(m) = \pi_I(\bar{p})\} \\ &\simeq \{(\bar{p}, m) \in (({}^x\mathbf{B}w\mathbf{B}F(x)^{-1}) \cap \mathbf{P}_I) \times \mathbf{L}_I \mid m^{-1}F(m) = \pi_I(\bar{p})\}. \end{aligned}$$

Via cet isomorphisme, L_I agit uniquement sur m , par multiplication à gauche, et l'action de $b \in \mathbf{B}_I$ se fait par $(\bar{p}, m) \cdot b = (b^{-1}\bar{p}F(b), mb)$. L'oubli de la variable \bar{p} fait alors apparaître les variétés de Deligne-Lusztig associées à certains éléments de W_I : en effet, la projection $\mathbf{P}_I \times \mathbf{L}_I \rightarrow \mathbf{L}_I$ se restreint en

$$U_I \backslash \tilde{Z}_x(w) \longrightarrow \bigsqcup_{v \in W_I} \{m \in \mathbf{L}_I \mid m^{-1}F(m) \in \pi_I(({}^x\mathbf{B}w\mathbf{B}F(x)^{-1}) \cap (\mathbf{B}v\mathbf{B}))\}.$$

Mais les éléments x et $F(x)$ étant I -réduits, le groupe \mathbf{B}_I est à la fois contenu dans \mathbf{B} , ${}^x\mathbf{B}$ et $F(x)\mathbf{B}$, si bien que l'ensemble $\pi_I(({}^x\mathbf{B}w\mathbf{B}F(x)^{-1}) \cap (\mathbf{B}v\mathbf{B}))$ est la réunion des doubles classes $\mathbf{B}_I v \mathbf{B}_I$ pour v vérifiant $({}^x\mathbf{B}w\mathbf{B}F(x)^{-1}) \cap (\mathbf{B}v\mathbf{B}) \neq \emptyset$. En passant au quotient par \mathbf{B}_I , on en déduit un morphisme surjectif L_I -équivariant

$$U_I \backslash \tilde{Z}_x(w)/\mathbf{B}_I \longrightarrow \bigsqcup_{\substack{v \in W_I \\ ({}^x\mathbf{B}w\mathbf{B}F(x)^{-1}) \cap (\mathbf{B}v\mathbf{B}) \neq \emptyset}} X_{L_I}(v) \hookrightarrow \mathbf{L}_I/\mathbf{B}_I. \quad (5.1)$$

5.1.2 Utilisation des cellules de Curtis-Deodhar

Un premier lien entre la cohomologie de la variété quotient $U_I \backslash X(w)$ et celle des variétés de Deligne-Lusztig associées au groupe algébrique L_I est donné par la projection 5.1. Pour approfondir ce lien, il faut :

- (i) déterminer l'ensemble des éléments $v \in W_I$ pour lesquels l'intersection $({}^x\mathbf{B}w\mathbf{B}F(x)^{-1}) \cap (\mathbf{B}v\mathbf{B})$ est non vide ;
- (ii) calculer les fibres du morphisme 5.1 dans l'espoir d'exprimer la cohomologie de la préimage de $X_{L_I}(v)$ à partir de celle de $X_{L_I}(v)$;

Le premier point se résoud aisément grâce à la combinatoire introduite au chapitre 2 : l'ensemble $(\mathbf{B}w\mathbf{B}) \cap (x^{-1}\mathbf{B}v\mathbf{B}F(x))$ est non vide si et seulement si son image dans \mathbf{G}/\mathbf{B} l'est aussi. Or $F(x)$ étant l -réduit, on a $x^{-1}\mathbf{B}v\mathbf{B}F(x) \cdot \mathbf{B} = x^{-1}\mathbf{B}vF(x) \cdot \mathbf{B}$. On en déduit que $(\mathbf{B}w\mathbf{B}) \cap (x^{-1}\mathbf{B}v\mathbf{B}F(x))$ est non vide si et seulement si la cellule de Schubert double $\mathbf{B}w \cdot \mathbf{B} \cap (\mathbf{B})^x x^{-1}vF(x) \cdot \mathbf{B}$ l'est aussi. Autrement dit, si on fixe une décomposition réduite $w = s_1 \cdots s_r$ de w , alors cette intersection est non vide si et seulement si il existe une sous-expression x -distinguée de w dont le produit vaut $x^{-1}vF(x)$.

Le point (ii) est en revanche un peu plus délicat mais les résultats du chapitre 2 permettent d'en donner un point de départ acceptable. Observons d'abord que tout élément de $\mathbf{B}v\mathbf{B}$ se décompose de manière unique en $uu'vb$ avec $u \in \mathbf{B}_l \cap {}^v\mathbf{U}^-$, $u' \in \mathbf{U}_l$ et $b \in \mathbf{B}_l$. Dès lors, cet élément appartient à $x\mathbf{B}w\mathbf{B}F(x)^{-1}$ si et seulement si $u' \in x\mathbf{B}w\mathbf{B}(vF(x))^{-1}$. On a ainsi

$$x\mathbf{B}w\mathbf{B}F(x)^{-1} \cap \mathbf{B}v\mathbf{B} = \{uu'vb \mid u \in \mathbf{B}_l \cap {}^v\mathbf{U}^-, b \in \mathbf{B}_l, u' \in \mathbf{U}_l \cap x\mathbf{B}w\mathbf{B}(vF(x))^{-1}\}.$$

En remarquant que $\pi_l(uu'vb) = uvb$, on en déduit que les fibres du morphisme

$$\{(\bar{p}, m) \in (x\mathbf{B}w\mathbf{B}F(x)^{-1}) \cap (\mathbf{B}v\mathbf{B}) \times \mathbf{L}_l \mid m^{-1}F(m) = \pi_l(\bar{p})\} / \mathbf{B}_l \longrightarrow X_{\mathbf{L}_l}(v)$$

sont toutes isomorphes à $\mathbf{U}_l \cap x\mathbf{B}w\mathbf{B}(vF(x))^{-1}$. L'avantage de cette description est que l'on peut facilement paramétrer les éléments de cette fibre, ou du moins de l'extension $\mathbf{U} \cap x\mathbf{B}w\mathbf{B}(vF(x))^{-1}$: en suivant la méthode employée au cours de la partie 2.4, on peut en effet utiliser la décomposition de Curtis-Deodhar pour écrire

$$\mathbf{U} \cap x\mathbf{B}w\mathbf{B}(vF(x))^{-1} = \bigsqcup_{\gamma \in \Gamma_{x^{-1}vF(x)}} ({}^x\Omega_\gamma(x)) \cdot (\mathbf{U} \cap {}^vF(x)\mathbf{U}).$$

D'autre part, chaque cellule $D_\gamma(x) = \Omega_\gamma x^{-1}vF(x) \cdot \mathbf{B}$ est stable par multiplication à gauche par les éléments de $\mathbf{U} \cap \mathbf{U}^x$ (on vérifie facilement que $C_\gamma(x)$ l'est déjà comme cellule contractante). Puisque $\mathbf{U} \cap x\mathbf{B}w\mathbf{B}(vF(x))^{-1}$ est stable par l'action du conjugué $\mathbf{U} \cap {}^x\mathbf{U}$, on en déduit que chaque sous-variété apparaissant dans la décomposition précédente l'est aussi. En particulier, chacune des pièces est stable par l'action de $\mathbf{B}_l \cap \mathbf{U}$ et ainsi, en notant ϖ_l la projection de \mathbf{B} sur \mathbf{U}_l associée à la décomposition $\mathbf{B} = \mathbf{B}_l\mathbf{U}_l$, on peut écrire

$$\mathbf{U}_l \cap x\mathbf{B}w\mathbf{B}(vF(x))^{-1} = \bigsqcup_{\gamma \in \Gamma_{x^{-1}vF(x)}} \varpi_l({}^x\Omega_\gamma(x) \cdot (\mathbf{U} \cap {}^vF(x)\mathbf{U})).$$

Posons $\Upsilon_\gamma(x) = \varpi_l({}^x\Omega_\gamma(x) \cdot \mathbf{U} \cap {}^vF(x)\mathbf{U})$. Sous certaines conditions que nous détaillerons dans la proposition 5.4, on peut obtenir un paramétrage précis de cette cellule à partir de celui de $\Omega_\gamma(x)$. D'autre part, puisque \mathbf{B}_l est contenu dans ${}^F(x)\mathbf{B}$, la variété ${}^x\Omega_\gamma(x) \cdot \mathbf{U} \cap {}^vF(x)\mathbf{U}$ admet une action de $\mathbf{B}_l \cap \mathbf{U} \cap {}^v\mathbf{B}_l$ à droite, et donc une action de $\mathbf{B}_l \cap {}^v\mathbf{B}_l$ par conjugaison qui se transmet à $\Upsilon_\gamma(x)$. En définitive, on peut décomposer la variété quotient $U_l \setminus \tilde{Z}_x(w)$ en une union de sous-variétés localement fermées, stables par les actions des groupes L_l et \mathbf{B}_l

$$U_I \backslash \tilde{Z}_x(w) = \bigsqcup_{\substack{v \in W_I \\ \gamma \in \Gamma_{x^{-1}vF(x)}}} \tilde{Z}_\gamma$$

avec $\tilde{Z}_\gamma \simeq \{(z, m) \in \Upsilon_\gamma(x) \times \mathbf{L}_I \mid m^{-1}F(m) \in \mathbf{B}_I v \mathbf{B}_I\}$

l'action de $b \in \mathbf{B}_I$ s'effectuant par multiplication à droite sur m , et de façon un peu moins élémentaire sur z : en écrivant $m^{-1}F(m) = u_1 v b_1$ avec $u_1 \in \mathbf{B}_I \cap {}^v\mathbf{U}^-$ et $b_1 \in \mathbf{B}_I$ et en décomposant $b^{-1}u_1$ en $u'_1 b'$ avec $u'_1 \in \mathbf{B}_I \cap {}^v\mathbf{U}^-$ et $b' \in \mathbf{B}_I \cap {}^v\mathbf{B}_I$, l'élément $b \in \mathbf{B}_I$ agit par $(u, m) \cdot b = (b'z, mb)$. En d'autres termes, \mathbf{B}_I agit de telle sorte que l'injection $(z, m) \mapsto (u_1 z v b, m) \in \mathbf{P}_I \times \mathbf{L}_I$ soit \mathbf{B}_I -équivariante. On résume les différentes constructions ainsi que leurs propriétés dans la proposition suivante :

Proposition 5.2. *Pour $w \in W$ et I un sous-ensemble de racines simples stable par ϕ , on dispose de deux décompositions*

$$U_I \backslash X(w) = \bigsqcup_{x \text{ } I\text{-réduit}} U_I \backslash Z_x(w) \quad \text{et} \quad U_I \backslash \tilde{Z}_x(w) = \bigsqcup_{\substack{v \in W_I \\ \gamma \in \Gamma_{x^{-1}vF(x)}}} \tilde{Z}_\gamma$$

avec, pour tout élément I -réduit x et toute sous-expression x -distinguée γ de w dont le produit vaut $x^{-1}vF(x)$ pour un certain élément $v \in W_I$:

- un quasi-fibré vectoriel L_I -équivariant $U_I \backslash \tilde{Z}_x(w) / \mathbf{B}_I \rightarrow U_I \backslash Z_x(w)$ de fibres de dimension $\dim(\mathbf{U}_I \cap {}^x\mathbf{U})$;
- une projection L_I -équivariante $\tilde{Z}_\gamma / \mathbf{B}_I \rightarrow X_{\mathbf{L}_I}(v)$ de fibres isomorphes à $\Upsilon_\gamma(x)$.

Exemple 5.3. Lorsque $w = c$ est un élément de Coxeter, on peut montrer qu'il ne peut y avoir de sous-expression x -distinguée dont le produit appartient à $x^{-1}W_I F(x)$ si x n'est pas dans $W_I w_0$. De plus, lorsque x est l'élément minimal de cette classe, la seule sous-expression x -distinguée est obtenue en choisissant uniquement les réflexions simples associées aux racines simples de I , et son produit est un élément de Coxeter c_I de W_I . La proposition précédente nous donne alors un morphisme L_I -équivariant

$$U_I \backslash X(c) \longrightarrow X_{\mathbf{L}_I}(c_I)$$

dont les fibres sont isomorphes à $(\mathbf{G}_m)^{|\Delta \setminus I| / \phi|}$ (à comparer avec [62]).

5.2 Calcul de la cohomologie

5.2.1 Conditions sur les cellules $\Upsilon_\gamma(x)$ pour la cohomologie de $U_I \backslash X(w)$

En reprenant les notations de la section 2.2.2 et en considérant les entiers $a(\gamma) = |l_\gamma| - |J_\gamma(x)| + \ell(vF(x))$ et $b(\gamma) = \ell(w) - |l_\gamma|$ on peut construire un morphisme de variétés

$$(\mathbf{G}_a)^{a(\gamma)} \times (\mathbf{G}_m)^{b(\gamma)} \longrightarrow \Upsilon_\gamma(x)$$

obtenu en composant le paramétrage de ${}^x\Omega_\gamma(x) \cdot \mathbf{U} \cap {}^{vx}\mathbf{U}$ et le morphisme ϖ_I . Les fibres de ce morphisme sont donc des espaces affines de dimension $|\Phi_I^+|$. Cela ne suffit malheureusement pas pour déterminer la cohomologie de la variété $\tilde{Z}_\gamma/\mathbf{B}_I$ et il est nécessaire de disposer d'un paramétrage particulier de la cellule. Celui donné dans la proposition suivante est non optimal mais suffira pour les calculs explicites que nous effectuerons par la suite :

Proposition 5.4. *Soit x un élément l -réduit, $v \in W_I$ et γ une sous-expression x -distinguée de w donnant $x^{-1}vF(x)$. On suppose qu'il existe des racines deux à deux distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta, \beta' \in \Phi^+ \setminus \Phi_I^+$ telles que la cellule $\Upsilon_\gamma(x)$ soit donnée par l'une des deux variétés suivantes :*

- (i) $u_{\alpha_1}(\mathbf{G}_a) \cdots u_{\alpha_i}(\mathbf{G}_a) u_\beta(\mathbf{G}_m) u_{\alpha_{i+1}}(\mathbf{G}_a) \cdots u_{\alpha_n}(\mathbf{G}_a)$;
- (ii) $u_{\alpha_1}(\mathbf{G}_a) \cdots u_{\alpha_i}(\mathbf{G}_a) u_\beta(\mathbf{G}_m) u_{\alpha_{i+1}}(\mathbf{G}_a) \cdots u_{\alpha_j}(\mathbf{G}_a) u_{\beta'}(\mathbf{G}_m) u_{\alpha_{j+1}}(\mathbf{G}_a) \cdots u_{\alpha_n}(\mathbf{G}_a)$.

Alors la cohomologie ℓ -adique de la variété $\tilde{Z}_\gamma/\mathbf{B}_I$ s'obtient par

$$H_c^\bullet(\tilde{Z}_\gamma/\mathbf{B}_I, K) \simeq H_c^\bullet(\Upsilon_\gamma(x), K) \otimes H_c^\bullet(X_{L_I}(v), K).$$

Démonstration. Le groupe $\mathbf{B}_I \cap {}^v\mathbf{B}_I$ agit par conjugaison sur $\Upsilon_\gamma(x)$ et donc nécessairement trivialement sur les variables appartenant à \mathbf{G}_m . On en déduit que les cellules obtenues en remplaçant \mathbf{G}_m par $\{0\}$ ou \mathbf{G}_a sont aussi stables par cette action.

On se place dans le cas le plus complexe (ii). Au niveau de \tilde{Z}_γ , l'observation précédente se traduit par l'existence de variétés munies d'une action de $L_I \times (\mathbf{B}_I)^{\text{op}}$ vérifiant les relations suivantes :

$$\tilde{Z}_\gamma = Z_{\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_m} \setminus Z_{0, \mathbf{G}_m} \quad \text{et} \quad Z_{0, \mathbf{G}_m} = Z_{0, \mathbf{G}_a} \setminus Z_{0, 0}.$$

Puisque \mathbf{B}_I agit librement sur chacune de ces variétés (il agit par translation sur la variable $m \in \mathbf{L}_I$), les égalités restent vraies pour les quotients par \mathbf{B}_I . On en déduit les triangles distingués suivants dans $D^b(L_I\text{-Mod})$:

$$R\Gamma_c(\tilde{Z}_\gamma/\mathbf{B}_I, K) \longrightarrow R\Gamma_c(Z_{\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_m}/\mathbf{B}_I, K) \longrightarrow R\Gamma_c(Z_{0, \mathbf{G}_m}/\mathbf{B}_I, K) \rightsquigarrow$$

$$\text{et} \quad R\Gamma_c(Z_{0, \mathbf{G}_m}/\mathbf{B}_I, K) \longrightarrow R\Gamma_c(Z_{0, \mathbf{G}_a}/\mathbf{B}_I, K) \longrightarrow R\Gamma_c(Z_{0, 0}/\mathbf{B}_I, K) \rightsquigarrow$$

D'autre part, les fibres des projections $Z_{0, \mathbf{G}_a}/\mathbf{B}_I \rightarrow Z_{0, 0}/\mathbf{B}_I \rightarrow X_{L_I}(v)$ sont des espaces affines ce qui permet de calculer la cohomologie de chacune de ces variétés à partir de la cohomologie de $X_{L_I}(v)$ via la proposition 1.20.

Pour conclure, on procède comme dans la preuve de [34, proposition 8.17] : d'après la proposition 1.20, le morphisme $R\Gamma_c(Z_{0, \mathbf{G}_a}/\mathbf{B}_I, K) \rightarrow R\Gamma_c(Z_{0, 0}/\mathbf{B}_I, K)$ provient d'un morphisme de faisceaux $\partial : K_{Z_{0, 0}/\mathbf{B}_I}[-2] \rightarrow K_{Z_{0, 0}/\mathbf{B}_I}$. Puisque ce dernier est L_I -équivariant, c'est un élément de $H^2(Z_{0, 0}/\mathbf{B}_I, K)^{L_I}$. Mais par dualité on a

$$H^2(Z_{0, 0}/\mathbf{B}_I, K)^{L_I} \simeq H^2(X_{L_I}(v), K)^{L_I} \simeq \text{Hom}_{K_{L_I}}(H_c^{2\ell(v)-2}(X_{L_I}(v), K), K)$$

et ce dernier groupe est nul en vertu de [35, proposition 3.3.14]. On en déduit que la cohomologie de $Z_{0, \mathbf{G}_m}/\mathbf{B}_I$ est donnée par

$$\begin{aligned} H_c^\bullet(Z_{0,\mathbf{G}_m}/\mathbf{B}_I, K) &\simeq H_c^\bullet(Z_{0,0}/\mathbf{B}_I, K)[-2] \oplus H_c^\bullet(Z_{0,0}/\mathbf{B}_I, K)[-1] \\ &\simeq H_c^\bullet(\mathbf{G}_m \times X_{L_I}(v), K)[2|\Phi_I^+| - 2a(\gamma)]. \end{aligned}$$

Notons que cela suffit à démontrer la proposition dans le cas (i). Pour traiter la deuxième forme, on procède comme précédemment en utilisant une nouvelle fois les isomorphismes

$$H^2(Z_{0,\mathbf{G}_m}/\mathbf{B}_I, K)^{L_I} \simeq H^2(\mathbf{G}_m \times X_{L_I}(v), K)^{L_I} \simeq \text{Hom}_{KL_I}(H_c^{2\ell(v)}(\mathbf{G}_m \times X_{L_I}(v), K), K).$$

Puisque $H_c^{2\ell(v)}(\mathbf{G}_m \times X_{L_I}(v), K) \simeq H_c^{2\ell(v)-1}(X_{L_I}(v), K) \oplus H_c^{2\ell(v)-2}(X_{L_I}(v), K)$, on en déduit que le morphisme $R\Gamma_c(Z_{\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_m}/\mathbf{B}_I, K) \rightarrow R\Gamma_c(Z_{0,\mathbf{G}_m}/\mathbf{B}_I, K)$ est nul et qu'ainsi

$$\begin{aligned} H_c^\bullet(\tilde{Z}_\gamma/\mathbf{B}_I, K) &\simeq H_c^\bullet(Z_{0,\mathbf{G}_m}/\mathbf{B}_I, K)[-2] \oplus H_c^\bullet(Z_{0,\mathbf{G}_m}/\mathbf{B}_I, K)[-1] \\ &\simeq H_c^\bullet((\mathbf{G}_m)^2 \times X_{L_I}(v), K)[2|\Phi_I^+| - 2a(\gamma)] \\ &\simeq H_c^\bullet(\Upsilon_\gamma(x) \times X_{L_I}(v), K) \end{aligned}$$

en tant que KL_I -modules. □

Remarque 5.5. Le cas $b(\gamma) = 2$ est le cas le plus complexe qui puisse être traité avec cette méthode. En continuant le procédé on aurait en effet à considérer entre autres le groupe

$$\text{Hom}_{KL_I}(H_c^{2\ell(v)+2}((\mathbf{G}_m)^2 \times X_{L_I}(v), K), K)$$

qui est cette fois-ci non trivial.

Remarque 5.6. Dans le cas où $w = c$ est un élément de Coxeter et I un sous-ensemble maximal de Δ stable par ϕ , on retrouve [62, corollaire 2.10] (voir aussi la proposition 4.29) qui s'écrit

$$H_c^\bullet(U_I \backslash X(c), K) \simeq H_c^\bullet(\mathbf{G}_m, K) \otimes H_c^\bullet(X_{L_I}(c_I), K). \quad (5.7)$$

5.2.2 Caractères cuspidaux

Par définition, les représentations cuspidales de G n'ont aucun élément non nul fixe par U_I dès que I est un sous-ensemble propre de Δ . Aussi l'étude des quotients $U_I \backslash X(w)$ ne donne aucune information sur les caractères cuspidaux apparaissant dans la cohomologie de $X(w)$. Le but de cette section est de rappeler, très brièvement, certains résultats et méthodes développés dans [34] et [35] qui nous permettront de déterminer la position de ces caractères dans la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig qui nous intéresseront.

Notons B_W^+ le monoïde de tresse associé au groupe de Weyl W , engendré par $\{\mathbf{s}_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$. La projection canonique $B_W^+ \rightarrow W$ admet une *section de Tits*, que l'on notera $w \mapsto \mathbf{w}$: on la définit par $\mathbf{w} = \mathbf{s}_1 \cdots \mathbf{s}_r$ pour toute décomposition réduite $w = s_1 \cdots s_r$ de $w \in W$. L'image de cette section sera noté \mathbf{W} . Par un théorème

de Deligne, on peut étendre la définition des variétés de Deligne-Lusztig au monoïde de tresse : si \mathbf{b} s'écrit $\mathbf{w}_1 \cdots \mathbf{w}_r$ avec $\mathbf{w}_i \in \mathbf{W}$, on définit

$$X(\mathbf{b}) = \{(g_0, g_1, \dots, g_r) \in (\mathbf{G}/\mathbf{B})^{r+1} \mid g_{i-1}^{-1}g_i \in \mathbf{B}w_i\mathbf{B} \text{ et } g_r^{-1}F(g_0) \in \mathbf{B}\}.$$

À isomorphisme unique près, cette variété ne dépend pas du choix des \mathbf{w}_i . En particulier, pour $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$, les variétés $X(\mathbf{w})$ et $X(w)$ sont isomorphes. Finalement, on peut définir une compactification de $X(\mathbf{b})$ en une variété

$$X(\underline{w}_1 \cdots \underline{w}_r) = \{(g_0, g_1, \dots, g_r) \in (\mathbf{G}/\mathbf{B})^{r+1} \mid g_{i-1}^{-1}g_i \in \overline{\mathbf{B}w_i\mathbf{B}} \text{ et } g_r^{-1}F(g_0) \in \mathbf{B}\}$$

qui possède les propriétés suivantes (voir [34] et [35]) :

Proposition 5.8. *Pour w_1, \dots, w_r des éléments de W ,*

- (i) $X(\underline{w}_1 \cdots \underline{w}_r)$ est une variété projective de dimension $\ell(w_1) + \cdots + \ell(w_r)$;
- (ii) $X(\underline{w}_1 \cdots \underline{w}_r)$ est lisse dès que chaque variété $\overline{\mathbf{B}w_i\mathbf{B}}$ l'est ;
- (iii) $X(\underline{w}_1 \cdots \underline{w}_r)$ est rationnellement lisse dès que chaque variété $\overline{\mathbf{B}w_i\mathbf{B}}$ l'est ;
- (iv) $X(\underline{w}_1 \cdots \underline{w}_r)$ est filtrée par les sous-variétés fermées $X(\underline{v}_1 \cdots \underline{v}_r)$ où les éléments v_i vérifient $v_i \leq w_i$ pour tout i .

Remarque 5.9. Dans le cas où chaque w_i est une réflexion s_i , on retrouve la compactification lisse introduite dans [29] (voir aussi la section 4.4.1).

Fixons un élément $w \in W$. Afin de pouvoir calculer la partie cuspidale de la cohomologie de $X(w)$ à l'aide des compactifications précédentes, nous utiliserons principalement les quatre points suivants :

- la cohomologie de la variété $X(w)$ est concentrée en degrés $\ell(w), \dots, 2\ell(w)$ [35, corollaire 3.3.22] ;
- le triangle suivant est distingué dans $D^b(KG\text{-Mod})$:

$$R\Gamma_c(X(w), K) \longrightarrow R\Gamma_c(X(\underline{w}), K) \longrightarrow R\Gamma_c\left(\bigcup_{v < w} X(\underline{v}), K\right) \rightsquigarrow$$

- lorsque $X(\underline{w})$ est rationnellement lisse, sa cohomologie en tant que $G \times \langle F^\delta \rangle_{\text{mon}}$ -module gradué se calcule explicitement par [35, corollaire 3.3.8] ;
- soit ρ une représentation cuspidale de G apparaissant dans la cohomologie de la variété de Coxeter. Alors si w n'est pas un élément de Coxeter, les valeurs propres de F^δ sur $H_c^{\ell(w)}(X(w), K)_\rho$ sont de module strictement inférieur à $q^{\delta\ell(w)/2}$. Ce résultat est un cas particulier de [35, proposition 3.3.21].

Notons que la propriété de $X(\underline{w})$ d'être rationnellement lisse se vérifie sur les polynômes de Kazhdan-Lusztig de W [35, proposition 3.2.5]. Dans le cas où cette propriété fait défaut, on pourra décomposer w en un produit d'éléments $w = w_1 \cdots w_r$ tels que chaque variété $\overline{\mathbf{B}w_i\mathbf{B}}$ soit lisse.

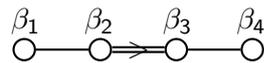
5.3 Cas particuliers

Pour les éléments réguliers de petite longueur, on peut observer – sans pouvoir pour l’instant l’expliquer – que très peu de cellules $\Upsilon_\gamma(x)$ sont non vides, et que ces dernières satisfont en outre les hypothèses de la proposition 5.4. On se propose donc, pour certains de ces éléments, de déterminer explicitement la cohomologie du quotient $U_I \backslash X(w)$. En utilisant les outils rappelés dans la section 5.2.2, on sera ensuite en mesure d’en déduire chaque groupe de cohomologie de la variété de Deligne-Lusztig $X(w)$.

Pour manipuler les différents groupes de cohomologie de manière agréable, on utilisera les notations introduites dans [34] : la cohomologie d’une variété de Deligne-Lusztig $X(w)$ munie de l’action de $G \times \langle F^\delta \rangle_{\text{mon}}$ sera représentée par un polynôme $H_{X(w)}(t^{1/2}, h)$ dont les coefficients sont des combinaisons entières de caractères unipotents. Par un théorème de Lusztig, lorsque ρ est un caractère unipotent, les valeurs propres de F^δ sur la partie ρ -isotypique de $H_c^i(X(w), K)$ sont de la forme $\lambda_\rho q^{\delta j/2}$, avec λ_ρ une racine de l’unité ne dépendant ni de w ni de i . La multiplicité de ρ dans le groupe $H_c^i(X(w), K)$ avec une valeur propre $\lambda_\rho q^{\delta j/2}$ sera donc encodée par le coefficient de $h^i t^{j/2}$ dans le polynôme $H_{X(w)}(t^{1/2}, h)$.

5.3.1 Éléments 8-réguliers des groupes de type F_4

Soit (\mathbf{G}, F) un groupe déployé de type F_4 . Les entiers d pour lesquels il existe des éléments d -réguliers sont $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ (voir par exemple [85]), le dernier entier correspondant aux éléments de Coxeter. Nous allons nous intéresser à des éléments 8-réguliers particuliers, ceux dont l’image dans le groupe de tresse est une bonne racine 8-ième de π [17] (voir aussi la remarque 2.62). Pour fixer les notations des racines simples, on utilisera le diagramme de Dynkin suivant :



Les réflexions simples associées seront notées t_1, t_2, t_3, t_4 .

On peut vérifier que tous les bonnes racines 8-ièmes de π sont conjuguées par une suite de permutations circulaires dans le groupe de tresse, et qu’ainsi la cohomologie de la variété de Deligne-Lusztig associée ne dépend pas de la racine choisie. De façon générale, il résulte des travaux de Bessis [1], Digne et Michel [32] que les bonnes racines d -ièmes de π sont conjuguées par une suite de permutations circulaires dès que le groupe (\mathbf{G}, F) est supposé déployé. Il est conjecturé que le résultat reste vrai pour les F -racines de π dans un groupe non déployé [17]. Dans notre cas on choisira

$$w = t_2 t_4 t_3 t_2 t_1 t_3.$$

(i) **Cohomologie de $U_I \backslash X(w)$.** On commence par déterminer la cohomologie du quotient $U_I \backslash X(w)$ dans le cas où $I = \{\beta_2, \beta_3\}$. À l’aide du programme GAP donné en annexe, on peut vérifier qu’il n’existe que trois cellules $\Upsilon_\gamma(x)$ non vides, données par :

- pour x_1 l'élément l -réduit dans la classe $W_I w_0$ et $v = t_2 t_3 t_2 t_3$

$$\Upsilon_\gamma(x_1) = u_{\beta_2+2\beta_3+\beta_4}(\mathbf{G}_m) u_{\beta_1}(\mathbf{G}_m)$$

- pour x_2 l'élément l -réduit dans la classe $W_I w_0 t_1 t_2$ et $v = t_3 t_2$

$$\Upsilon_\gamma(x_2) = u_{\beta_2+2\beta_3+\beta_4}(\mathbf{G}_m) u_{\beta_1+\beta_2}(\mathbf{G}_a) u_{\beta_1+\beta_2+\beta_3}(\mathbf{G}_m) \mathbf{U}_I \cap {}^x \mathbf{U}$$

- pour x_3 l'élément l -réduit dans la classe $W_I w_0 t_4 t_3$ et $v = t_3 t_2$

$$\Upsilon_\gamma(x_3) = u_{\beta_2+2\beta_3+\beta_4}(\mathbf{G}_a) u_{\beta_4}(\mathbf{G}_a) u_{\beta_2+2\beta_3+2\beta_4}(\mathbf{G}_m) u_{\beta_1+\beta_2}(\mathbf{G}_m) u_{\beta_2+\beta_3+\beta_4}(\mathbf{G}_a)$$

On en déduit grâce aux propositions 5.2, 5.4 ainsi que 1.20 la cohomologie de chaque pièce $U_I \setminus Z_x(w)$:

$W_I x$	$\dim(\mathbf{U}_I \cap {}^x \mathbf{U})$	$H_c^\bullet(U_I \setminus Z_x(w), K)$
$W_I w_0$	0	$H_c^\bullet((\mathbf{G}_m)^2) \otimes H_c^\bullet(X_{L_I}(t_2 t_3 t_2 t_3))$
$W_I w_0 t_1 t_2$	2	$H_c^\bullet(\mathbf{G}_a \times (\mathbf{G}_m)^2) \otimes H_c^\bullet(X_{L_I}(t_3 t_2))$
$W_I w_0 t_4 t_3$	2	$H_c^\bullet(\mathbf{G}_a \times (\mathbf{G}_m)^2) \otimes H_c^\bullet(X_{L_I}(t_3 t_2))$

De plus, les éléments l -réduits x_2 et x_3 des classes $W_I w_0 t_1 t_2$ et $W_I w_0 t_4 t_3$ sont incomparables par l'ordre de Bruhat, et on obtient ainsi

$$H_c^\bullet(U_I \setminus Z_{x_2}(w) \cup U_I \setminus Z_{x_3}(w), K) \simeq \left(H_c^\bullet(\mathbf{G}_a \times (\mathbf{G}_m)^2) \otimes H_c^\bullet(X_{L_I}(t_3 t_2)) \right)^{\oplus 2}.$$

Le groupe de Weyl L_I est un groupe de type B_2 . Ses caractères unipotents sont, avec les notations données en annexe, $\{\text{Id}, \text{St}, \rho_\theta, \rho_{\theta_\varepsilon}, \rho_r, \theta_{10}\}$. De [35, théorème 4.3.4] on tire alors facilement

$$\begin{aligned} H_{U_I \setminus Z_{x_1}(w)} &= (h^2 t + h)^2 (h^4 \text{St} + h^5 t^2 (\rho_\theta + \rho_{\theta_\varepsilon} + 2\theta_{10}) + h^8 t^4 \text{Id}) \\ &= h^6 \text{St} + h^7 (2t \text{St} + t^2 (\rho_\theta + \rho_{\theta_\varepsilon} + 2\theta_{10})) + h^8 (t^2 \text{St} + 2t^3 (\rho_\theta + \rho_{\theta_\varepsilon} + 2\theta_{10})) \\ &\quad + h^9 t^4 (\rho_\theta + \rho_{\theta_\varepsilon} + 2\theta_{10}) + h^{10} t^4 \text{Id} + 2h^{11} t^5 \text{Id} + h^{12} t^6 \text{Id} \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} H_{U_I \setminus Z_{x_2}(w)} &= h^2 t (h^2 t + h)^2 (h^2 (\text{St} + t\theta_{10}) + h^3 t \rho_r + h^4 t^2 \text{Id}) \\ &= h^6 (t \text{St} + t^2 \theta_{10}) + h^7 (t^2 (2\text{St} + \rho_r) + 2t^3 \theta_{10}) \\ &\quad + h^8 (t^3 (\text{St} + 2\rho_r + \text{Id}) + t^4 \theta_{10}) + h^9 t^4 (\rho_r + 2\text{Id}) + h^{10} t^5 \text{Id}. \end{aligned}$$

Les caractères unipotents $\rho_\theta, \rho_{\theta_\varepsilon}$ et ρ_r apparaissent dans la cohomologie d'une des deux variétés seulement. En écrivant la suite exacte longue associée à la décomposition

$$U_I \setminus X(w) = U_I \setminus Z_{x_1}(w) \cup (U_I \setminus Z_{x_2}(w) \cup U_I \setminus Z_{x_3}(w))$$

on en déduit la position exacte de ces caractères dans la cohomologie de $U_I \backslash X(w)$, donnée par

$$h^7 t^2 (\rho_\theta + \rho_{\theta_\varepsilon} + 2\rho_r) + h^8 t^3 (2\rho_\theta + 2\rho_{\theta_\varepsilon} + 4\rho_r) + h^9 t^4 (\rho_\theta + \rho_{\theta_\varepsilon} + 2\rho_r).$$

Quant aux caractères St et Id, ils peuvent être obtenus à partir des suites exactes suivantes :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{St} \longrightarrow H_c^6(U_I \backslash X(w))_{\text{St}} \longrightarrow 2t\text{St} \longrightarrow 2t\text{St} \longrightarrow H_c^7(U_I \backslash X(w))_{\text{St}} \\ \longrightarrow 4t^2\text{St} \longrightarrow t^2\text{St} \longrightarrow H_c^8(U_I \backslash X(w))_{\text{St}} \longrightarrow 2t^3\text{St} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

$$0 \longrightarrow H_c^8(U_I \backslash X(w))_{\text{Id}} \longrightarrow 2t^3\text{Id} \longrightarrow 0$$

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H_c^9(U_I \backslash X(w))_{\text{Id}} \longrightarrow 4t^4\text{Id} \longrightarrow t^4\text{Id} \longrightarrow H_c^{10}(U_I \backslash X(w))_{\text{Id}} \\ \longrightarrow 2t^5\text{Id} \longrightarrow 2t^5\text{Id} \longrightarrow H_c^{11}(U_I \backslash X(w))_{\text{Id}} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

$$0 \longrightarrow t^6\text{Id} \longrightarrow H_c^{12}(U_I \backslash X(w))_{\text{Id}} \longrightarrow 0$$

Tous les morphismes des suites exactes précédentes sont $\langle F^\delta \rangle_{\text{mon}}$ -équivariants, ce qui permet de séparer les contributions de chaque puissance de t . D'autre part, les seuls caractères unipotents de G dont la restriction de Harish-Chandra à L_I vaut St ou Id sont les caractères équivalents de G , c'est-à-dire St_G et Id_G . Mais on sait d'après [35, proposition 3.3.14 et 3.3.15] où ces derniers apparaissent dans la cohomologie de $X(w)$ et avec quelle valeur propre. On en déduit que

- $t\text{St}$ n'apparaît pas ni dans $H_c^6(U_I \backslash X(w))$ ni dans $H_c^7(U_I \backslash X(w))$;
- $t^2\text{St}$ n'apparaît pas dans $H_c^8(U_I \backslash X(w))$;
- $t^4\text{Id}$ n'apparaît pas dans $H_c^{10}(U_I \backslash X(w))$;
- $t^5\text{Id}$ n'apparaît pas dans $H_c^{11}(U_I \backslash X(w))$.

Avec ces informations supplémentaires, on trouve finalement

Proposition 5.10. *Pour $w = t_2 t_4 t_3 t_2 t_1 t_3$ et $I = \{\beta_2, \beta_3\}$, la contribution des caractères de la série principale dans la cohomologie de $U_I \backslash X(w)$ est donnée par*

$$\begin{aligned} h^6\text{St} + h^7 t^2 (3\text{St} + \rho_\theta + \rho_{\theta_\varepsilon} + 2\rho_r) + h^8 t^3 (2\text{St} + 2\rho_\theta + 2\rho_{\theta_\varepsilon} + 4\rho_r + 2\text{Id}) \\ + h^9 t^4 (\rho_\theta + \rho_{\theta_\varepsilon} + 2\rho_r + 3\text{Id}) + h^{12} t^6\text{Id} \end{aligned}$$

Remarque 5.11. Les suites exactes longues « ouvert - fermé » ne donnent en revanche pas assez d'informations pour pouvoir déterminer la position précise du caractère cuspidal θ_{10} :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H_c^6(U_I \backslash X(w))_{\theta_{10}} \longrightarrow 2t^2\theta_{10} \longrightarrow 2t^2\theta_{10} \longrightarrow H_c^7(U_I \backslash X(w))_{\theta_{10}} \longrightarrow 4t^3\theta_{10} \\ \longrightarrow 4t^3\theta_{10} \longrightarrow H_c^8(U_I \backslash X(w))_{\theta_{10}} \longrightarrow 2t^4\theta_{10} \longrightarrow 2t^4\theta_{10} \longrightarrow H_c^9(U_I \backslash X(w))_{\theta_{10}} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

On peut néanmoins espérer que les morphismes de connexion de cette suite exacte sont des isomorphismes, et en déduire ainsi que le caractère θ_{10} n'apparaît pas dans la cohomologie de $U_I \backslash X(w)$.

(ii) **Caractères cuspidaux.** Le théorème 4.9 assure que les caractères unipotents de la série principale de G intervenant dans la somme alternée de la cohomologie de $X(w)$ sont ceux du Φ_8 -bloc principal, c'est-à-dire Id_G , St_G , $\phi_{9,10}$, $\phi_{16,5}$ et $\phi_{9,2}$ avec les notations de [21]. On peut alors observer que les restrictions de ces caractères au groupe L_I sont exactement les caractères apparaissant dans la proposition précédente, ce qui permet de retrouver dans un premier temps une partie de la cohomologie de $X(w)$. Les caractères manquants sont deux types : ils peuvent être cuspidaux, ou appartenir à la série de Harish-Chandra associé à θ_{10} . Nous allons mettre en oeuvre les outils rappelés au cours de la section 5.2.2 afin de déterminer explicitement la contribution des caractères cuspidaux.

Rappelons que G possède 7 caractères unipotents cuspidaux, notés $F_4[-1]$, $F_4[i]$, $F_4[-i]$, $F_4[\theta]$, $F_4[\theta^2]$, $F_4^I[1]$, $F_4^{II}[1]$ où i (resp. θ) est un générateur fixé du groupe des racines de l'unité μ_4 (resp. μ_3). Soit ρ un caractère cuspidal et $v \leq w$. Le caractère ρ ne peut apparaître dans la cohomologie des variétés $X(\underline{v})$ ou $X(v)$ si v est dans un sous-groupe parabolique strict de W . Les éléments v à considérer appartiennent donc à l'ensemble

$$\mathcal{V} = \{w, t_4 t_3 t_2 t_3 t_1, t_4 t_2 t_3 t_2 t_1, t_4 t_2 t_3 t_1, t_4 t_3 t_2 t_1\}.$$

Notons $F = X(t_4 t_2 t_3 t_2 t_1) \cup X(t_4 t_3 t_2 t_3 t_1)$ et $F' = X(t_4 t_3 t_2 t_1) \cup X(t_4 t_2 t_3 t_1)$. De la filtration donnée par la proposition 5.8 on peut donc déduire les suites exactes longues en cohomologie suivantes :

$$\cdots \longrightarrow H_c^i(X(w))_\rho \longrightarrow H_c^i(X(\underline{w}))_\rho \longrightarrow H_c^i(F)_\rho \longrightarrow \cdots \quad (5.12)$$

$$\cdots \longrightarrow H_c^i(X(t_4 t_3 t_2 t_3 t_1))_\rho \longrightarrow H_c^i(X(t_4 t_3 t_2 t_3 t_1))_\rho \longrightarrow H_c^i(F')_\rho \longrightarrow \cdots \quad (5.13)$$

$$\cdots \longrightarrow H_c^i(X(t_4 t_2 t_3 t_2 t_1))_\rho \longrightarrow H_c^i(X(t_4 t_2 t_3 t_2 t_1))_\rho \longrightarrow H_c^i(F')_\rho \longrightarrow \cdots \quad (5.14)$$

De plus, on peut vérifier que chacune des compactifications est rationnellement lisse et calculer ainsi la partie cuspidale de leur cohomologie, que l'on notera $\underline{H}_X(t^{1/2}, h)$. Elle est donnée par

$$\underline{H}_{X(\underline{w})} = h^6 t^3 (F_4[-1] + F_4[i] + F_4[-i] + 2F_4[\theta] + 2F_4[\theta^2]) \quad (5.15)$$

$$\text{et } \underline{H}_{X(t_4 t_3 t_2 t_3 t_1)} = \underline{H}_{X(t_4 t_2 t_3 t_2 t_1)} = (h^4 t^2 + h^6 t^3)(F_4[i] + F_4[-i] + F_4[\theta] + F_4[\theta^2]).$$

D'autre part, les éléments $t_4 t_3 t_2 t_1$ et $t_4 t_2 t_3 t_1$ sont minimaux dans l'ensemble \mathcal{V} , ce qui permet d'écrire, pour tout caractère cuspidal ρ

$$H_c^i(F')_\rho \simeq H_c^i(X(t_4 t_2 t_3 t_1))_\rho \oplus H_c^i(X(t_4 t_3 t_2 t_1))_\rho \simeq H_c^i(X(c))_\rho^{\oplus 2}$$

et d'en déduire ainsi la partie cuspidale de la cohomologie de F' à partir de celle de la variété de Coxeter. Elle vaut donc, d'après [62, table 7.3] :

$$\underline{H}_{F'} = 2h^4 t^2 (F_4[i] + F_4[-i] + F_4[\theta] + F_4[\theta^2]).$$

En combinant ces données numériques avec les suites exactes 5.13 et 5.14, sans oublier le fait que la cohomologie des variétés $X(t_4 t_3 t_2 t_3 t_1)$ et $X(t_4 t_2 t_3 t_2 t_1)$ est nulle en degré 4, on en déduit que

$$\underline{H}_{X(t_4 t_3 t_2 t_3 t_1)} = \underline{H}_{X(t_4 t_2 t_3 t_2 t_1)} = (h^5 t^2 + h^6 t^3)(F_4[i] + F_4[-i] + F_4[\theta] + F_4[\theta^2]).$$

À partir de ces résultats, on peut maintenant obtenir des informations sur la cohomologie de la variété F : en utilisant, pour tout caractère cuspidal ρ , la suite exacte longue suivante

$$\cdots \longrightarrow H_c^i(X(t_4 t_3 t_2 t_3 t_1))_\rho \oplus H_c^i(X(t_4 t_2 t_3 t_2 t_1))_\rho \longrightarrow H_c^i(F)_\rho \longrightarrow H_c^i(F')_\rho \longrightarrow \cdots$$

on trouve des entiers ε_i valant 0, 1 ou 2 tels que

$$\begin{aligned} \underline{H}_F &= (h^4 + h^5)t^2(\varepsilon_1 F_4[i] + \varepsilon_2 F_4[-i] + \varepsilon_3 F_4[\theta] + \varepsilon_4 F_4[\theta^2]) \\ &\quad + 2h^6 t^3(F_4[i] + F_4[-i] + F_4[\theta] + F_4[\theta^2]). \end{aligned}$$

Mais en reprenant la suite exacte 5.12, chaque caractère $\varepsilon_i \rho$ s'injecte dans le groupe $H_c^5(X(w))$ puisque $H_c^4(X(\underline{w}))$ est nul par 5.15. Étant donné que la cohomologie de $X(w)$ est concentrée en degrés 6, ..., 12, on en déduit que tous les entiers ε_i sont nuls. Par conséquent, la suite exacte 5.12 se décompose en

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H_c^6(X(w))_{F_4[1]} \longrightarrow t^3 F_4[1] \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow H_c^6(X(w))_{F_4[i]} \longrightarrow t^3 F_4[i] \longrightarrow 2t^3 F_4[i] \longrightarrow H_c^7(X(w))_{F_4[i]} \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow H_c^6(X(w))_{F_4[-i]} \longrightarrow t^3 F_4[-i] \longrightarrow 2t^3 F_4[-i] \longrightarrow H_c^7(X(w))_{F_4[-i]} \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow H_c^6(X(w))_{F_4[\theta]} \longrightarrow 2t^3 F_4[\theta] \longrightarrow 2t^3 F_4[\theta] \longrightarrow H_c^7(X(w))_{F_4[\theta]} \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow H_c^6(X(w))_{F_4[\theta^2]} \longrightarrow 2t^3 F_4[\theta^2] \longrightarrow 2t^3 F_4[\theta^2] \longrightarrow H_c^7(X(w))_{F_4[\theta^2]} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Finalement, on applique [35, proposition 3.3.21] pour résoudre ces suites : les caractères $F_4[i]$, $F_4[-i]$, $F_4[\theta]$ et $F_4[\theta^2]$ apparaissent déjà dans la cohomologie de la variété de Coxeter. Puisque w n'est pas F -conjugué à un élément de Coxeter, ils ne peuvent apparaître dans le groupe $H_c^6(X(w))$ avec une valeur propre de module q^3 . En définitive,

Proposition 5.16. *Pour $w = t_2 t_4 t_3 t_2 t_1 t_3$, la contribution des caractères cuspidaux dans la cohomologie de $X(w)$ est donnée par*

$$h^6 t^3 F_4[-1] + h^7 t^3 (F_4[i] + F_4[-i]).$$

(iii) **Cohomologie de $X(w)$.** Les caractères unipotents du Φ_8 -bloc principal b sont donnés par

$$b_{\text{uni}} = \{\text{Id}, \text{St}_G, \phi_{9,10}, \phi_{16,5}, \phi_{9,2}, F_4[-1], F_4[i], F_4[-i]\}.$$

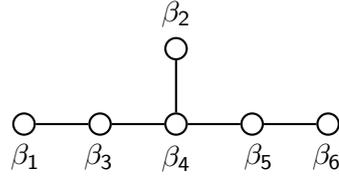
En coupant la cohomologie de $X(w)$ par ce bloc, les caractères de la série associée à B_2 disparaissent. Puisque la position de tous les autres caractères unipotents a été déterminée, on peut résumer les résultats de cette section dans le théorème suivant :

Théorème 5.17. Soit (\mathbf{G}, F) un groupe déployé de type F_4 et w un bon élément 8-régulier. La cohomologie de la variété de Deligne-Lusztig $X(w)$, coupée par le Φ_8 -bloc principal, est donnée par

i	6	7	8	9	10	11	12
$bH^i(X(w), K)$	St $-q^3 F_4[-1]$	$q^2 \phi_{9,10}$ $i q^3 F_4[i]$ $-i q^3 F_4[-i]$	$q^3 \phi_{16,5}$	$q^4 \phi_{9,2}$			$q^6 \text{Id}$

5.3.2 Éléments 9-réguliers des groupes de type E_6

On suppose ici que (\mathbf{G}, F) est un groupe déployé de type E_6 . Le plus grand entier régulier (en dehors du nombre de Coxeter) est 9 et on s'intéresse donc au calcul de la cohomologie de $X(w)$ lorsque w est une bonne racine 9-ième de π . On numérotera les racines simples selon le diagramme suivant :



Les réflexions simples associées seront notées t_1, \dots, t_6 .

Comme précédemment, on fixera une racine particulière de π puisque la cohomologie de la variété de Deligne-Lusztig associée ne dépend pas de ce choix. On fixera

$$w = t_1 t_3 t_4 t_3 t_2 t_4 t_5 t_6.$$

(i) **Cohomologie de $U_I \backslash X(w)$.** On calcule ici la cohomologie du quotient $U_I \backslash X(w)$ lorsque $I = \{\beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5\}$ à partir de la cohomologie de certaines variétés de Deligne-Lusztig associées au sous-groupe de Levi \mathbf{L}_I . Pour commencer, on vérifie à l'aide du programme GAP donné en annexe qu'il n'existe que trois cellules $\Upsilon_\gamma(x)$ non vides, données par :

- pour x_1 l'élément I -réduit dans la classe $W_I w_0$ et $v = t_4 t_2 t_5 t_4 t_2 t_3$

$$\Upsilon_\gamma(x_1) = u_{\beta_2+\beta_3+2\beta_4+2\beta_5+\beta_6}(\mathbf{G}_m) u_{\beta_1+\beta_3}(\mathbf{G}_m)$$

- pour x_2 l'élément I -réduit dans la classe $W_I w_0 t_6 t_5 t_4$ et $v = t_2 t_5 t_4 t_3$

$$\Upsilon_\gamma(x_2) = u_{\beta_2+\beta_3+2\beta_4+2\beta_5+\beta_6}(\mathbf{G}_m) u_{\beta_1+\beta_3+\beta_4}(\mathbf{G}_a) u_{\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4}(\mathbf{G}_m) \mathbf{U}_I \cap {}^x \mathbf{U}$$

- pour x_3 l'élément I -réduit dans la classe $W_I w_0 t_1 t_3$ et $v = t_5 t_4 t_2 t_3$

$$\begin{aligned} \Upsilon_\gamma(x_3) = & u_{\beta_3+\beta_4+\beta_5+\beta_6}(\mathbf{G}_m) u_{\beta_2+\beta_3+2\beta_4+2\beta_5+\beta_6}(\mathbf{G}_a) u_{\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4}(\mathbf{G}_m) \\ & u_{\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5+\beta_6}(\mathbf{G}_a) u_{\beta_2+\beta_3+2\beta_4+\beta_5+\beta_6}(\mathbf{G}_a) \end{aligned}$$

On en déduit grâce aux propositions 5.2, 5.4 ainsi que 1.20 la cohomologie de chaque pièce $U_I \setminus Z_x(w)$:

$W_I x$	$\dim(\mathbf{U}_I \cap {}^x \mathbf{U})$	$H_c^\bullet(U_I \setminus Z_x(w), K)$
$W_I w_0$	0	$H_c^\bullet((\mathbf{G}_m)^2) \otimes H_c^\bullet(X_{L_I}(t_4 t_2 t_5 t_4 t_2 t_3))$
$W_I w_0 t_6 t_5 t_4$	3	$H_c^\bullet(\mathbf{G}_a \times (\mathbf{G}_m)^2) \otimes H_c^\bullet(X_{L_I}(t_2 t_5 t_4 t_3))$
$W_I w_0 t_1 t_3$	2	$H_c^\bullet(\mathbf{G}_a \times (\mathbf{G}_m)^2) \otimes H_c^\bullet(X_{L_I}(t_5 t_4 t_2 t_3))$

Encore une fois, les éléments x_2 et x_3 ne sont pas comparables par l'ordre de Bruhat, ce qui assure que les variétés $U_I \setminus Z_{x_2}(w)$ et $U_I \setminus Z_{x_3}(w)$ sont à la fois fermées et ouvertes dans leur union. On peut donc décomposer le quotient $U_I \setminus X(w) = X_o \cup X_f$ en deux sous-variétés dont la cohomologie est donnée par [34, théorème 12.4] pour l'ouvert, et [62, table 7.3] pour le fermé :

$$H_{X_o} = (h^2 t + h)^2 (h^6 \text{St} + h^7 (t^2 (\rho_{1^2+} + \rho_{1^2-} + \rho_{21^2}) + 2t^3 D_4) + 2h^8 t^3 \rho_{1.21} + h^9 t^4 (\rho_{2+} + \rho_{2-} + \rho_{31}) + h^{12} t^6 \text{Id})$$

$$H_{X_f} = 2h^2 t (h^2 t + h)^2 (h^4 (\text{St} + t^2 D_4) + h^5 t \rho_{1.1^3} + h^6 t^2 \rho_{1^2.2} + h^7 t^3 \rho_{1.3} + h^8 t^4 \text{Id})$$

en ayant noté ρ_λ le caractère unipotent de la série principale correspondant au caractère λ de W_I et D_4 l'unique caractère unipotent cuspidal de L_I .

Comme précédemment, les caractères de la série principale autres que St et Id n'interviennent que dans la cohomologie d'une seule des deux variétés, de sorte que leur contribution dans la cohomologie de $U_I \setminus X(w)$ est donnée par le polynôme

$$\begin{aligned} & h^9 t^2 (\rho_{1^2+} + \rho_{1^2-} + \rho_{21^2} + 2\rho_{1.1^3}) \\ & + h^{10} t^3 (2\rho_{1^2+} + 2\rho_{1^2-} + 2\rho_{21^2} + 4\rho_{1.1^3} + 2\rho_{1.21} + 2\rho_{1^2.2}) \\ & + h^{11} t^4 (\rho_{1^2+} + \rho_{1^2-} + \rho_{21^2} + 2\rho_{1.1^3} + 4\rho_{1.21} + 4\rho_{1^2.2} + \rho_{2+} + \rho_{2-} + \rho_{31} + 2\rho_{1.3}) \\ & + h^{12} t^5 (2\rho_{1.21} + 2\rho_{1^2.2} + 2\rho_{2+} + 2\rho_{2-} + 2\rho_{31} + 4\rho_{1.3}) \\ & + h^{13} t^6 (\rho_{2+} + \rho_{2-} + \rho_{31} + 2\rho_{1.3}). \end{aligned}$$

Pour les deux autres caractères unipotents de la série principale, à savoir St et Id , on obtient les suites exactes suivantes :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{St} \longrightarrow H_c^8(U_I \setminus X(w))_{\text{St}} \longrightarrow 2t\text{St} \longrightarrow 2t\text{St} \longrightarrow H_c^9(U_I \setminus X(w))_{\text{St}} \\ \longrightarrow 4t^2\text{St} \longrightarrow t^2\text{St} \longrightarrow H_c^{10}(U_I \setminus X(w))_{\text{St}} \longrightarrow 2t^3\text{St} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

$$0 \longrightarrow H_c^{12}(U_I \setminus X(w))_{\text{Id}} \longrightarrow 2t^5\text{Id} \longrightarrow 0$$

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H_c^{13}(U_I \setminus X(w))_{\text{Id}} \longrightarrow 4t^6\text{Id} \longrightarrow t^6\text{Id} \longrightarrow H_c^{14}(U_I \setminus X(w))_{\text{Id}} \\ \longrightarrow 2t^7\text{Id} \longrightarrow 2t^7\text{Id} \longrightarrow H_c^{15}(U_I \setminus X(w))_{\text{Id}} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

$$0 \longrightarrow t^8 \text{Id} \longrightarrow H_c^{16}(U_I \backslash X(w))_{\text{Id}} \longrightarrow 0$$

que l'on peut résoudre avec la méthode utilisée pour le type F_4 . En définitive,

Proposition 5.18. *Pour $w = t_1 t_3 t_4 t_3 t_2 t_4 t_5 t_6$ et $I = \{\beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5\}$, la contribution des caractères de la série principale dans la cohomologie de $U_I \backslash X(w)$ est donnée par*

$$\begin{aligned} & h^8 \text{St} + h^9 t^2 (3\text{St} + \rho_{1^2+} + \rho_{1^2-} + \rho_{21^2} + 2\rho_{1.1^3}) \\ & + h^{10} t^3 (2\text{St} + 2\rho_{1^2+} + 2\rho_{1^2-} + 2\rho_{21^2} + 4\rho_{1.1^3} + 2\rho_{1.21} + 2\rho_{1^2.2}) \\ & + h^{11} t^4 (\rho_{1^2+} + \rho_{1^2-} + \rho_{21^2} + 2\rho_{1.1^3} + 4\rho_{1.21} + 4\rho_{1^2.2} + \rho_{2+} + \rho_{2-} + \rho_{31} + 2\rho_{1.3}) \\ & + h^{12} t^5 (2\rho_{1.21} + 2\rho_{1^2.2} + 2\rho_{2+} + 2\rho_{2-} + 2\rho_{31} + 4\rho_{1.3} + 2\text{Id}) \\ & + h^{13} t^6 (\rho_{2+} + \rho_{2-} + \rho_{31} + 2\rho_{1.3} + 3\text{Id}) + h^{16} t^8 \text{Id}. \end{aligned}$$

Remarque 5.19. Comme dans le cas précédent (voir remarque 5.11), on ne dispose pas de suffisamment d'informations pour localiser le caractère cuspidal D_4 de L_I dans la cohomologie de $U_I \backslash X(w)$.

(ii) **Caractères cuspidaux.** Le groupe G ne possède que deux caractères unipotents cuspidaux, notés $E_6[\theta]$ et $E_6[\theta^2]$ avec θ une racine primitive 3-ième de l'unité fixée. Pour déterminer leur position dans la cohomologie de $X(w)$, on procède ici comme pour le type F_4 à une différence près : les compactifications $X(\underline{v})$ que l'on souhaite utiliser ne sont pas toutes rationnellement lisses, et on travaillera donc plutôt avec la compactification de Bott-Samelson, obtenue en soulignant toutes les réflexions simples de w . Pour plus de détails concernant les méthodes de calcul explicite de la cohomologie, on pourra se référer à la section précédente.

On définit d'abord la sous-variété fermée de $\overline{X}(w)$

$$F = X(\underline{t}_1 \underline{t}_4 \underline{t}_3 \underline{t}_2 \underline{t}_4 \underline{t}_5 \underline{t}_6) \cup X(\underline{t}_1 \underline{t}_3 \underline{t}_3 \underline{t}_2 \underline{t}_4 \underline{t}_5 \underline{t}_6) \cup X(\underline{t}_1 \underline{t}_3 \underline{t}_4 \underline{t}_2 \underline{t}_4 \underline{t}_5 \underline{t}_6) \cup X(\underline{t}_1 \underline{t}_3 \underline{t}_4 \underline{t}_3 \underline{t}_2 \underline{t}_5 \underline{t}_6)$$

de manière à obtenir, pour tout caractère unipotent cuspidal ρ , une suite exacte longue en cohomologie

$$\cdots \longrightarrow H_c^i(X(w))_\rho \longrightarrow H_c^i(\overline{X}(w))_\rho \longrightarrow H_c^i(F)_\rho \longrightarrow \cdots \quad (5.20)$$

La partie cuspidale de F se calcule comme précédemment : on commence par calculer, pour $v \in \{t_1 t_4 t_3 t_2 t_4 t_5 t_6, t_1 t_3 t_4 t_2 t_4 t_5 t_6, t_1 t_3 t_4 t_3 t_2 t_5 t_6\}$

$$\underline{H}_{X(v)} = \underline{H}_{\overline{X}(v)} = (h^7 t^3 + h^8 t^4)(E_6[\theta] + E_6[\theta^2])$$

à l'aide des suites exactes longues

$$\cdots \longrightarrow H_c^i(X(v))_\rho \longrightarrow H_c^i(\overline{X}(v))_\rho \longrightarrow (H_c^i(X(c))_\rho)^{\oplus 2} \longrightarrow \cdots$$

et des valeur précises

$$\underline{H}_{\overline{X}(v)} = (h^6 t^3 + h^8 t^4)(E_6[\theta] + E_6[\theta^2])$$

et

$$\underline{H}_{\overline{X}(c)} = h^6 t^3 (E_6[\theta] + E_6[\theta^2])$$

données par [62] et [35]. Notons que la suite exacte précédente peut effectivement se résoudre étant donné que la cohomologie de $X(v)$ est nulle dans les degrés strictement inférieurs à 7.

Pour l'élément $\mathbf{v} = \mathbf{t}_1\mathbf{t}_3\mathbf{t}_3\mathbf{t}_2\mathbf{t}_4\mathbf{t}_5\mathbf{t}_6$ on peut utiliser [35, proposition 3.2.10] afin d'obtenir

$$\underline{H}_{X(\mathbf{v})} = (h^2 t + h) \underline{H}_{\overline{X}(c)} = (h^7 t^3 + h^8 t^4)(E_6[\theta] + E_6[\theta^2]).$$

En observant que tous les éléments v considérés donnent lieu à la même partie cuspidale, on peut finalement écrire la suite exacte

$$\cdots \longrightarrow (H_c^i(X(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_4\mathbf{t}_3\mathbf{t}_2\mathbf{t}_4\mathbf{t}_5\mathbf{t}_6))_\rho)^{\oplus 4} \longrightarrow H_c^i(F)_\rho \longrightarrow (H_c^i(X(c))_\rho)^{\oplus 4} \longrightarrow \cdots$$

dont on déduit

$$\underline{H}_F = 4h^8 t^4 (E_6[\theta] + E_6[\theta^2]). \quad (5.21)$$

Là encore, la suite exacte précédente ne suffit pas a priori pas pour déterminer cette quantité ; il faut aussi utiliser le fait que

- $X(w)$ n'a pas de cohomologie en degré 7 ;
- $\underline{H}_{\overline{X}(w)} = 3h^8 t^4 (E_6[\theta] + E_6[\theta^2])$ ce qui force en particulier $H_c^6(\overline{X}(w))$ à n'avoir aucun composant cuspidal.

En vertu de 5.20, ces deux propriétés assurent que le coefficient de h^6 dans \underline{H}_F est nul, et permet de ce fait de retrouver la formule 5.21.

On dispose donc, pour tout caractère unipotent cuspidal ρ , d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow H_c^8(X(w))_\rho \longrightarrow 3t^4 \rho \longrightarrow 4t^4 \rho \longrightarrow H_c^9(X(w))_\rho \longrightarrow 0$$

dont on déduit, à l'aide de [35, proposition 3.3.21], la position exacte des caractères cuspidaux dans la cohomologie de $X(w)$:

Proposition 5.22. *Pour $w = \mathbf{t}_1\mathbf{t}_3\mathbf{t}_4\mathbf{t}_3\mathbf{t}_2\mathbf{t}_4\mathbf{t}_5\mathbf{t}_6$, la contribution des caractères cuspidaux dans la cohomologie de $X(w)$ est donnée par*

$$h^9 t^4 (E_6[\theta] + E_6[\theta^2]).$$

(iii) **Cohomologie de $X(w)$.** D'après [18] (voir aussi le théorème 4.9), le caractère virtuel associé à la cohomologie de $X(w)$ fait apparaître les caractères unipotents du Φ_9 -bloc principal b de (\mathbf{G}, F) , donnés par

$$b_{\text{uni}} = \{\text{Id}_G, \text{St}_G, \phi_{20,20}, \phi_{64,13}, \phi_{90,8}, \phi_{64,4}, \phi_{20,2}, E_6[\theta], E_6[\theta^2]\}.$$

La restriction de ces caractères au sous-groupe de Levi L_I pour $I = \{\beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5\}$ s'obtient à partir de la table A.5 donnée en annexe. On déduit alors des propositions 5.18 et 5.22 le théorème suivant :

Théorème 5.23. *Soit (\mathbf{G}, F) un groupe déployé de type E_6 et w un bon élément 9-régulier de W . Alors la cohomologie de $X(w)$, coupée par le Φ_9 -bloc principal, est donnée par*

i	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$bH^i(X(w), K)$	St	$q^2 \phi_{20,20}$ $\theta q^4 E_6[\theta]$ $\theta^2 q^4 E_6[\theta^2]$	$q^3 \phi_{64,13}$	$q^4 \phi_{90,8}$	$q^5 \phi_{64,4}$	$q^6 \phi_{20,2}$			$q^8 \text{Id}$

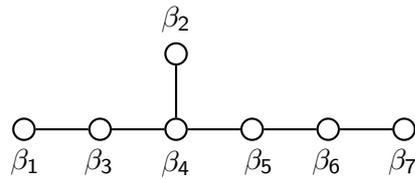
L'indétermination sur la présence ou non des caractères de la série de D_4 dans la cohomologie de $X(w)$ n'a pas pu être levée, mais le problème disparaît lorsque l'on coupe cette cohomologie par le Φ_9 -bloc principal. Il est en fait conjecturé que cette opération est inutile [15], c'est-à-dire que les seuls caractères apparaissant dans les groupes de cohomologie sont ceux de la somme alternée. Dans notre cas, cette propriété se traduit par

Hypothèse 5.24. La cohomologie de la variété $X(w)$ ne contient aucun caractère de la série associée à l'unique représentation cuspidale de D_4 .

Cette hypothèse sera indispensable pour énoncer un analogue complet du théorème précédent pour les groupes de type E_7 et E_8 (voir théorèmes 5.28 et 5.34).

5.3.3 Éléments 14-réguliers des groupes de type E_7

Dans toute cette section, (\mathbf{G}, F) désignera un groupe déployé de type E_7 . Les entiers réguliers étant $\{1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18\}$, on s'attachera au calcul de la cohomologie de $X(w)$ lorsque w est une bonne racine 14-ième de π . On numérotera les racines simples selon le diagramme suivant, de façon compatible avec la section précédente :



Les réflexions simples associées seront notées t_1, \dots, t_7 .

Comme dans les cas précédents, on effectuera les calculs pour une racine particulière de π , donnée ici par :

$$w = t_7 t_6 t_5 t_4 t_5 t_2 t_4 t_3 t_1.$$

(i) **Cohomologie de $U_l \backslash X(w)$.** On cherche à déterminer la cohomologie du quotient $U_l \backslash X(w)$ lorsque l est maximal, égal à $\{\beta_1, \dots, \beta_6\}$, à partir des résultats de la section précédente. Ici, on vérifie à l'aide du programme GAP donné en annexe qu'il n'existe que deux cellules $\Upsilon_\gamma(x)$ non vides, données par :

- pour x_1 l'élément l -réduit dans la classe $W_l w_0$ et $v = t_1 t_3 t_4 t_3 t_2 t_4 t_5 t_6$ l'élément régulier étudié dans la section précédente

$$\Upsilon_\gamma(x_1) = u_{\beta_6}(\mathbf{G}_m)$$

où on a noté β_0 la plus haute racine ;

- pour x_2 l'élément I -réduit dans la classe $W_I w_0 t_7 t_6 t_5$ et $v = t_1 t_3 t_4 t_2 t_5 t_6$

$$\Upsilon_\gamma(x_2) = u_\beta(\mathbf{G}_m) u_{\beta+\beta_2}(\mathbf{G}_a) \mathbf{U}_I \cap {}^\times \mathbf{U}$$

avec $\beta = \beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 3\beta_4 + 3\beta_5 + 2\beta_6 + \beta_7$.

On en déduit grâce aux propositions 5.2, 5.4 ainsi que 1.20 la cohomologie de chaque pièce $U_I \setminus Z_x(w)$:

$W_I x$	$\dim(\mathbf{U}_I \cap {}^\times \mathbf{U})$	$H_c^\bullet(U_I \setminus Z_x(w), K)$
$W_I w_0$	0	$H_c^\bullet(\mathbf{G}_m) \otimes H_c^\bullet(X_{L_I}(t_1 t_3 t_4 t_3 t_2 t_4 t_5 t_6))$
$W_I w_0 t_7 t_6 t_5$	3	$H_c^\bullet(\mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_m) \otimes H_c^\bullet(X_{L_I}(t_1 t_3 t_4 t_2 t_5 t_6))$

Chacune des deux cohomologies se calcule : la première grâce aux résultats de la section précédente, et la seconde à l'aide de [62, table 7.3]. Rappelons en effet que pour un élément de Coxeter c_I de W_I , on a

$$\begin{aligned} H_{X_{L_I}(c_I)} = & h^6(\text{St} + t^2 D_{4,\varepsilon} + t^3 E_6[\theta] + t^3 E_6[\theta^2]) + h^7(t\phi_{6,25} + t^3 D_{4,r}) \\ & + h^8(t^2 \phi_{15,17} + t^4 D_{4,\text{Id}}) + h^9 t^3 \phi_{20,10} + h^{10} t^4 \phi_{15,5} + h^{11} t^5 \phi_{6,1} + h^{12} t^6 \text{Id}. \end{aligned}$$

Lorsque l'on considère uniquement les caractères unipotents de la série principale, en excluant St et Id, on observe que la cohomologie des variétés $U_I \setminus Z_{x_1}(w)$ et $U_I \setminus Z_{x_2}(w)$ sont disjointes. Ainsi, la contribution de ces caractères sur l'union $U_I \setminus X(w)$ s'en déduit aisément. Pour le caractère de Steinberg et le caractère trivial, les suites exactes longues « ouvert - fermé » donnent

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{St} \longrightarrow H_c^9(U_I \setminus X(w))_{\text{St}} \longrightarrow t\text{St} \longrightarrow t\text{St} \longrightarrow H_c^{10}(U_I \setminus X(w))_{\text{St}} \longrightarrow t^2\text{St} \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow H_c^{15}(U_I \setminus X(w))_{\text{Id}} \longrightarrow t^7\text{Id} \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow H_c^{16}(U_I \setminus X(w))_{\text{Id}} \longrightarrow t^8\text{Id} \longrightarrow t^8\text{Id} \longrightarrow H_c^{17}(U_I \setminus X(w))_{\text{Id}} \\ 0 \longrightarrow t^9\text{Id} \longrightarrow H_c^{18}(U_I \setminus X(w))_{\text{Id}} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Le caractère St ne peut apparaître dans le groupe $H_c^8(U_I \setminus X(w))$ avec le coefficient t , car étant le seul caractère de la série principale à apparaître avec cette valeur propre, on en déduirait que $H_c^8(X(w))$ contient St_G avec cette même valeur propre, ce qui exclu vu [35, proposition 3.3.15]. De même, $H_c^{17}(U_I \setminus X(w))$ ne contient par le caractère trivial en vertu de [35, proposition 3.3.14]. Ces observations suffisent à résoudre les suites exactes précédentes et on trouve :

Proposition 5.25. *Pour $w = t_7 t_6 t_5 t_4 t_5 t_2 t_4 t_3 t_1$ et $I = \Delta \setminus \{\beta_7\}$, la contribution des caractères de la série principale dans la cohomologie de $U_I \setminus X(w)$ est donnée par*

$$\begin{aligned}
 & h^9 \text{St} + h^{10} t^2 (\text{St} + \phi_{6,25} + \phi_{20,20}) + h^{11} t^3 (\phi_{6,25} + \phi_{20,20} + \phi_{15,17} + \phi_{64,13}) \\
 & + h^{12} t^4 (\phi_{15,17} + \phi_{64,13} + \phi_{20,10} + \phi_{90,8}) + h^{13} t^5 (\phi_{20,10} + \phi_{90,8} + \phi_{15,5} + \phi_{64,4}) \\
 & + h^{14} t^6 (\phi_{15,5} + \phi_{64,4} + \phi_{6,1} + \phi_{20,2}) + h^{15} t^7 (\phi_{6,1} + \phi_{20,2} + \text{Id}) + h^{18} t^9 \text{Id}.
 \end{aligned}$$

Pour déterminer la position des caractères de la série $\{D_{4,\text{Id}}, D_{4,r}, D_{4,\varepsilon}\}$ associée au caractère cuspidal de D_4 , il faut connaître leur contribution dans la cohomologie de la variété $X_{L_l}(t_1 t_3 t_4 t_3 t_2 t_4 t_5 t_6)$. Malheureusement, les résultats de la section précédente laissent une indétermination quant à cette contribution. Si on suppose néanmoins que ces caractères n'apparaissent pas, on trouve

Proposition 5.26. *Si l'hypothèse 5.24 est vérifiée, alors pour $w = t_7 t_6 t_5 t_4 t_5 t_2 t_4 t_3 t_1$ et $l = \Delta \setminus \{\beta_7\}$, la contribution des caractères de la série associée à D_4 dans la cohomologie de $U_l \backslash X(w)$ est donnée par*

$$h^9 t^3 D_{4,\varepsilon} + h^{10} t^4 (D_{4,\varepsilon} + D_{4,r}) + h^{11} t^5 (D_{4,r} + D_{4,\text{Id}}) + h^{12} t^6 D_{4,\text{Id}}.$$

Finalement, pour les caractères cuspidaux $E_6[\theta]$ et $E_6[\theta^2]$, la suite exacte longue s'écrit

$$\begin{aligned}
 0 \longrightarrow H_c^9(U_l \backslash X(w))_{E_6[\theta]} \longrightarrow t^4 E_6[\theta] \longrightarrow t^4 E_6[\theta] \longrightarrow H_c^{10}(U_l \backslash X(w))_{E_6[\theta]} \\
 \longrightarrow t^5 E_6[\theta] \longrightarrow t^5 E_6[\theta] \longrightarrow H_c^{11}(U_l \backslash X(w))_{E_6[\theta]} \longrightarrow 0
 \end{aligned}$$

Encore une fois, on ne peut pas en déduire la position précise de ces caractères mais seulement espérer qu'ils n'apparaissent pas.

(ii) Caractères cuspidaux. Le groupe G possède 2 caractères unipotents cuspidaux, notés $E_7[i]$ et $E_7[-i]$, où i désigne une racine primitive 4-ième de l'unité fixée. La méthode permettant de déterminer leur position dans la cohomologie de $X(w)$ est identique au cas du type E_6 et donne

Proposition 5.27. *Pour $w = t_7 t_6 t_5 t_4 t_5 t_2 t_4 t_3 t_1$, la contribution des caractères cuspidaux dans la cohomologie de $X(w)$ est donnée par*

$$h^{10} t^{9/2} (E_7[i] + E_7[-i]).$$

(iii) Cohomologie de $X(w)$. En combinant les propositions 5.25 et 5.26, on obtient la restriction de la cohomologie de $X(w)$ au sous-groupe de Levi L_l . Après examen des tables d'induction-restriction données en annexe, on peut retrouver les caractères de $H_c^\bullet(X(w))$ à partir de leur restriction, en sachant de plus qu'en vertu du théorème 4.9, les caractères unipotents du Φ_{14} -bloc principal

$$\begin{aligned}
 b_{\text{uni}} = \{ \text{St}_G, \text{Id}_G, \phi_{27,37}, \phi_{105,26}, \phi_{189,17}, \phi_{189,10}, \phi_{105,5}, \phi_{27,2}, \\
 D_{4,13}, D_{4,12.1}, D_{4,1.2}, D_{4,3}, E_7[i], E_7[-i] \}
 \end{aligned}$$

apparaissent effectivement dans la cohomologie de $X(w)$. En ajoutant les caractères cuspidaux obtenus dans la proposition 5.27, on trouve finalement

Théorème 5.28. Soit (\mathbf{G}, F) un groupe déployé de type E_7 et w un bon élément 14-régulier. La cohomologie de $X(w)$, coupée par le Φ_{14} -bloc principal, est donnée par

i	9	10	11	12	13
$bH^i(X(w), K)$	St $-q^3 D_{4,13}$	$q^2 \phi_{27,37}$ $-q^4 D_{4,12,1}$ $iq^{9/2} E_7[i]$ $-iq^{9/2} E_7[-i]$	$q^3 \phi_{105,26}$ $-q^5 D_{4,1,2}$	$q^4 \phi_{189,17}$ $-q^6 D_{4,3}$	$q^5 \phi_{189,10}$

i	14	15	16	17	18
$bH^i(X(w), K)$	$q^6 \phi_{105,5}$	$q^7 \phi_{27,2}$			$q^9 \text{Id}$

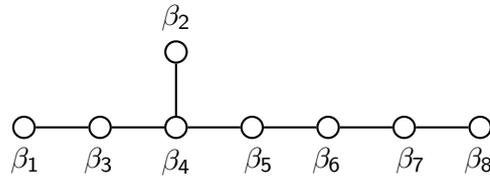
la position des caractères de la série de D_4 étant donnée sous réserve que l'hypothèse 5.24 est vérifiée.

Au vu des calculs réalisés dans cette section, la seule différence pouvant subsister entre $H_c^\bullet(X(w))$ et $bH_c^\bullet(X(w))$ provient des caractères des deux séries associées aux caractères cuspidaux $E_6[\theta]$ et $E_6[\theta^2]$. Il est néanmoins conjecturé que les seuls caractères pouvant apparaître dans la cohomologie de $X(w)$ sont ceux du bloc principal, ce qui, dans notre situation, est équivalent à

Hypothèse 5.29. Les caractères des deux séries associées aux caractères cuspidaux $E_6[\theta]$ et $E_6[\theta^2]$ n'apparaissent pas dans la cohomologie de $X(w)$.

5.3.4 Éléments 24-réguliers des groupes de type E_8

On termine cette partie par le cas où (\mathbf{G}, F) est un groupe déployé de type E_8 . Le plus grand entier régulier (en dehors du nombre de Coxeter) est 24 et on s'intéresse donc au calcul de la cohomologie de $X(w)$ lorsque w est une bonne racine 24-ième de π . On numérotera les racines simples selon le diagramme suivant, de façon compatible avec les diagrammes précédents :



Les réflexions simples associées seront notées t_1, \dots, t_8 .

Comme précédemment, on fixera un élément 24-régulier particulier, donné ici par

$$w = t_8 t_7 t_6 t_5 t_4 t_5 t_2 t_4 t_3 t_1.$$

(i) **Cohomologie de $U_l \backslash X(w)$.** On calcule ici la cohomologie du quotient $U_l \backslash X(w)$ lorsque l est maximal, égal à $\{\beta_1, \dots, \beta_7\}$, à partir des résultats de la section

précédente. On commence par vérifier à l'aide du programme GAP donné en annexe qu'il n'existe que deux cellules $\Upsilon_\gamma(x)$ non vides, données par :

- pour x_1 l'élément l -réduit dans la classe $W_I w_0$ et $v = t_7 t_6 t_5 t_4 t_5 t_2 t_4 t_3 t_1$ l'élément régulier étudié dans la section précédente

$$\Upsilon_\gamma(x_1) = u_{\beta_0 - \beta_8}(\mathbf{G}_m)$$

où on a noté β_0 la plus haute racine ;

- pour x_2 l'élément l -réduit dans la classe $W_I w_0 t_8 t_7 t_6 t_5$ et $v = t_7 t_6 t_5 t_4 t_2 t_3 t_1$

$$\Upsilon_\gamma(x_2) = u_\beta(\mathbf{G}_m) u_{\beta + \beta_3}(\mathbf{G}_a) \mathbf{U}_I \cap {}^x \mathbf{U}$$

avec $\beta = 2\beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 + 5\beta_4 + 4\beta_5 + 3\beta_6 + 2\beta_7 + \beta_8$

La proposition 5.4 s'applique donc à chacune de ces cellules et permet de déterminer la cohomologie des pièces associées :

$W_I x$	$\dim(\mathbf{U}_I \cap {}^x \mathbf{U})$	$H_c^\bullet(U_I \backslash Z_x(w), K)$
$W_I w_0$	0	$H_c^\bullet(\mathbf{G}_m) \otimes H_c^\bullet(X_{L_I}(t_7 t_6 t_5 t_4 t_5 t_2 t_4 t_3 t_1))$
$W_I w_0 t_8 t_7 t_6 t_5$	4	$H_c^\bullet(\mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_m) \otimes H_c^\bullet(X_{L_I}(t_7 t_6 t_5 t_4 t_2 t_3 t_1))$

La cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig qui apparaissent dans ce tableau ont suffisamment peu de caractères en commun pour que l'on puisse déterminer la partie principale de la cohomologie de $U_I \backslash X(w)$. Rappelons en effet que d'après [62, table 7.3] on a

$$\begin{aligned} H_{X_{L_I}(c_I)} &= h^7(\text{St} + t^2 D_{4,\varepsilon} + t^3(E_6[\theta]_\varepsilon + E_6[\theta^2]_\varepsilon) + t^{7/2}(E_7[i] + E_7[-i])) \\ &\quad + h^8(t\phi_{7,46} + t^3 D_{4,1.1^2} + t^4(E_6[\theta]_{\text{Id}} + E_6[\theta^2]_{\text{Id}})) \\ &\quad + h^9(t^2\phi_{21,33} + t^4 D_{4,2.1}) + h^{10}(t^3\phi_{35,22} + t^5 D_{4,\text{Id}}) \\ &\quad + h^{11}t^4\phi_{35,13} + h^{12}t^5\phi_{21,6} + h^{13}t^6\phi_{7,1} + h^{14}t^7 \text{Id} \end{aligned}$$

à comparer avec les calculs de la section précédente. La méthode étant identique au cas de l'élément 14-régulier pour le type E_7 , on énonce seulement le résultat :

Proposition 5.30. *Pour $w = t_8 t_7 t_6 t_5 t_4 t_5 t_2 t_4 t_3 t_1$ et $I = \Delta \setminus \{\beta_8\}$, la contribution des caractères de la série principale dans la cohomologie de $U_I \backslash X(w)$ est donnée par*

$$\begin{aligned} &h^{10} \text{St} + h^{11} t^2 (\text{St} + \phi_{7,46} + \phi_{27,37}) + h^{12} t^3 (\phi_{7,46} + \phi_{27,37} + \phi_{21,33} + \phi_{105,26}) \\ &+ h^{13} t^4 (\phi_{21,33} + \phi_{105,26} + \phi_{35,22} + \phi_{189,17}) + h^{14} t^5 (\phi_{35,22} + \phi_{189,17} + \phi_{35,13} + \phi_{189,10}) \\ &+ h^{15} t^6 (\phi_{35,13} + \phi_{189,10} + \phi_{21,6} + \phi_{105,5}) + h^{16} t^7 (\phi_{21,6} + \phi_{105,5} + \phi_{7,1} + \phi_{27,2}) \\ &+ h^{17} t^8 (\phi_{7,1} + \phi_{27,2} + \text{Id}) + h^{20} t^{10} \text{Id}. \end{aligned}$$

Concernant les autres caractères, il faut une nouvelle fois disposer de toute la cohomologie de la variété $X_{L_I}(t_7 t_6 t_5 t_4 t_5 t_2 t_4 t_3 t_1)$ et pas seulement de sa partie

principale si on souhaite retrouver leur position. En supposant par exemple que les hypothèses 5.24 et 5.29 sont vérifiées, on trouve facilement :

Proposition 5.31. Soient $w = t_8 t_7 t_6 t_5 t_4 t_5 t_2 t_4 t_3 t_1$ et $I = \Delta \setminus \{\beta_8\}$.

(i) Si l'hypothèse 5.24 est vérifiée, alors la contribution des caractères de la série associée à D_4 dans la cohomologie de $U_I \backslash X(w)$ est donnée par

$$\begin{aligned} & h^{10} t^3 (D_{4,\varepsilon} + D_{4,1^3}) + h^{11} t^4 (D_{4,\varepsilon} + D_{4,1^3} + D_{4,1.1^2} + D_{4,1^2.1}) \\ & + h^{12} t^5 (D_{4,1.1^2} + D_{4,1^2.1} + D_{4,2.1} + D_{4,1.2}) \\ & + h^{13} t^6 (D_{4,2.1} + D_{4,1.2} + D_{4,\text{Id}} + D_{4,.3}) + h^{14} t^7 (D_{4,\text{Id}} + D_{4,.3}). \end{aligned}$$

(ii) Si l'hypothèse 5.29 est vérifiée, alors la contribution des caractères des deux séries associées au caractères cuspidaux de E_6 est donnée par

$$\begin{aligned} & h^{10} t^4 E_6[\theta]_\varepsilon + h^{11} t^5 (E_6[\theta]_\varepsilon + E_6[\theta]_{\text{Id}}) + h^{12} t^6 E_6[\theta]_{\text{Id}} \\ \text{et} \quad & h^{10} t^4 E_6[\theta^2]_\varepsilon + h^{11} t^5 (E_6[\theta^2]_\varepsilon + E_6[\theta^2]_{\text{Id}}) + h^{12} t^6 E_6[\theta^2]_{\text{Id}}. \end{aligned}$$

(ii) Caractères cuspidaux. Le groupe G possède de nombreux caractères unipotents cuspidaux, notés $E_8[\pm i]$, $E_8[\pm \theta]$, $E_8[\pm \theta^2]$, $E_8^I[1]$, $E_8^{II}[1]$ et $E_8[\zeta^j]$ pour ζ une racine primitive 5-ième de l'unité et $j = 1, 2, 3, 4$. La méthode générale pour déterminer la position de ces caractères dans la cohomologie de $X(w)$ est la même que précédemment, mais les calculs sont ici un peu plus fastidieux en raison de la présence de nombreux caractères.

On commence par écrire, pour tout caractère unipotent cuspidal ρ , la suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow H_c^i(X(w))_\rho \longrightarrow H_c^i(\overline{X}(w))_\rho \longrightarrow H_c^i(F)_\rho \longrightarrow \cdots \quad (5.32)$$

où F est l'union des variétés $X(v)$ pour v de la forme

$$\underline{t}_8 \underline{t}_7 \underline{t}_6 \underline{t}_4 \underline{t}_5 \underline{t}_2 \underline{t}_4 \underline{t}_3 \underline{t}_1, \underline{t}_8 \underline{t}_7 \underline{t}_6 \underline{t}_5 \underline{t}_4 \underline{t}_2 \underline{t}_4 \underline{t}_3 \underline{t}_1, \underline{t}_8 \underline{t}_7 \underline{t}_6 \underline{t}_5 \underline{t}_4 \underline{t}_5 \underline{t}_2 \underline{t}_3 \underline{t}_1, \underline{t}_8 \underline{t}_7 \underline{t}_6 \underline{t}_5 \underline{t}_5 \underline{t}_2 \underline{t}_4 \underline{t}_3 \underline{t}_1.$$

Les éléments du groupe de tresse obtenus en « désoulignant » les réflexions simples seront notés $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ et \mathbf{v}_4 . Notons que seul le dernier élément n'appartient pas à l'image \mathbf{W} de W par la section de Tits. La partie cuspidale de la cohomologie des variétés $X(\mathbf{v}_j) \simeq X(v_j)$ pour $j = 1, 2, 3$ se déduit de la suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H_c^i(X(\mathbf{v}_j))_\rho \longrightarrow H_c^i(\overline{X}(\mathbf{v}_j))_\rho \longrightarrow (H_c^i(X(c)))_\rho^{\oplus 2} \longrightarrow \cdots$$

en utilisant les informations suivantes :

- la partie cuspidale de $H_c^\bullet(\overline{X}(\mathbf{v}_j))$ se calcule par [35] :

$$\underline{H}_{\overline{X}(\mathbf{v}_j)} = (h^8 t^4 + h^{10} t^5) (E_8[-\theta] + E_8[-\theta^2] + E_8[\zeta] + E_8[\zeta^2] + E_8[\zeta^3] + E_8[\zeta^4])$$

- la partie cuspidale de la cohomologie de la variété de Coxeter est donnée par [62] :

$$\underline{H}_{\overline{X}(c)} = h^8 t^4 (E_8[-\theta] + E_8[-\theta^2] + E_8[\zeta] + E_8[\zeta^2] + E_8[\zeta^3] + E_8[\zeta^4])$$

- la variété $X(v_j)$ n'a pas de cohomologie en degré 8.

On trouve alors, pour $j = 1, 2, 3$:

$$\underline{H}_{X(v_j)} = (h^9 t^4 + h^{10} t^5)(E_8[-\theta] + E_8[-\theta^2] + E_8[\zeta] + E_8[\zeta^2] + E_8[\zeta^3] + E_8[\zeta^4])$$

En utilisant [35, proposition 3.2.10], on vérifie que c'est aussi la valeur de la partie cuspidale de la cohomologie de $X(\mathbf{v}_4)$.

Pour déterminer la contribution des caractères cuspidaux sur la cohomologie de F , on utilise une nouvelle suite exacte « ouvert - fermé » reliant la cohomologie de F à celle de l'union des ouverts $X(\mathbf{v}_j)$. Après simplification, elle peut s'écrire, pour tout caractère cuspidal ρ :

$$\dots \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^4 H_c^i(X(\mathbf{v}_j))_\rho \longrightarrow H_c^i(F)_\rho \longrightarrow (H_c^i(X(c))_\rho)^{\oplus 4} \longrightarrow \dots$$

Encore une fois, l'information nécessaire à la résolution de cette suite provient du fait que la variété $X(w)$ n'a pas de cohomologie en degré 9. Puisque la partie cuspidale de $H_c^\bullet(\overline{X}(w))$ est concentrée en degré 10, donnée par

$$h^{10} t^5 (E_8[i] + E_8[-i] + 3(E_8[-\theta] + E_8[-\theta^2]) + 4(E_8[\zeta] + E_8[\zeta^2] + E_8[\zeta^3] + E_8[\zeta^4]))$$

la partie cuspidale de $H_c^8(F)$ est nulle en vertu de la suite exacte 5.32, et on trouve

$$\underline{H}_F = 4h^{10} t^5 (E_8[-\theta] + E_8[-\theta^2] + E_8[\zeta] + E_8[\zeta^2] + E_8[\zeta^3] + E_8[\zeta^4]).$$

À l'aide de ces deux dernières données numériques, on peut décomposer la suite exacte 5.32 selon les parties isotypiques des différents caractères cuspidaux pour obtenir

$$0 \longrightarrow H_c^{10}(X(w))_{E_8[\pm i]} \longrightarrow t^5 E_8[\pm i] \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H_c^{10}(X(w))_{E_8[-\theta]} \longrightarrow 3t^5 E_8[-\theta] \longrightarrow 4t^5 E_8[-\theta] \longrightarrow H_c^{11}(X(w))_{E_8[-\theta]} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H_c^{10}(X(w))_{E_8[-\theta^2]} \longrightarrow 3t^5 E_8[-\theta^2] \longrightarrow 4t^5 E_8[-\theta^2] \longrightarrow H_c^{11}(X(w))_{E_8[-\theta^2]} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H_c^{10}(X(w))_{E_8[\zeta^j]} \longrightarrow 4t^5 E_8[\zeta^j] \longrightarrow 4t^5 E_8[\zeta^j] \longrightarrow H_c^{11}(X(w))_{E_8[\zeta^j]} \longrightarrow 0$$

Pour conclure, il suffit d'observer que les caractères $E_8[-\theta]$, $E_8[-\theta^2]$ et $E_8[\zeta^j]$ apparaissent déjà dans la variété de Coxeter, et qu'à ce titre ils ne peuvent apparaître dans la cohomologie moitié de $X(w)$ avec une valeur propre de module q^5 [35, proposition 3.3.21]. En résumé,

Proposition 5.33. *Pour $w = t_8 t_7 t_6 t_5 t_4 t_3 t_2 t_1$, la contribution des caractères cuspidaux dans la cohomologie de $X(w)$ est donnée par*

$$h^{10} t^5 (E_8[i] + E_8[-i]) + h^{11} t^5 (E_8[-\theta] + E_8[-\theta^2]).$$

(iii) **Cohomologie de $X(w)$.** On termine ici l'étude du cas E_8 en explicitant la partie principale de la cohomologie de $X(w)$. Les caractères unipotent du Φ_{24} -bloc principal b étant donnés par

$$b_{\text{uni}} = \{ \text{Id}_G, \text{St}_G, \phi_{35,74}, \phi_{160,55}, \phi_{350,38}, \phi_{448,25}, \phi_{350,14}, \phi_{160,16}, \phi_{35,2}, D_{4,\phi'_{2,16}}, \\ D_{4,\phi'_{8,9}}, D_{4,\phi_{12,4}}, D_{4,\phi'_{8,3}}, D_{4,\phi'_{2,4}}, E_6[\theta]_{\phi'_{1,3}}, E_6[\theta]_{\phi_{2,2}}, E_6[\theta]_{\phi'_{1,3}}, E_6[\theta^2]_{\phi'_{1,3}}, \\ E_6[\theta^2]_{\phi_{2,2}}, E_6[\theta^2]_{\phi'_{1,3}}, E_8[i], E_8[-i], E_8[-\theta], E_8[-\theta^2] \}$$

on déduit des propositions 5.30, 5.31 et 5.33 ainsi que des tables d'induction-restriction données en annexe :

Théorème 5.34. Soit (\mathbf{G}, F) un groupe déployé de type E_8 et w un bon élément 24-régulier. La cohomologie de la variété de Deligne-Lusztig $X(w)$, coupée par le Φ_{24} -bloc principal, est donnée par

i	10	11	12	13
$bH^i(X(w), K)$	St $-q^3 D_{4,\phi'_{2,16}}$ $\theta q^4 E_6[\theta]_{\phi'_{1,3}}$ $\theta^2 q^4 E_6[\theta^2]_{\phi'_{1,3}}$ $i q^5 E_8[i]$ $-i q^5 E_8[-i]$	$q^2 \phi_{35,74}$ $-q^4 D_{4,\phi'_{8,9}}$ $\theta q^5 E_6[\theta]_{\phi_{2,2}}$ $\theta^2 q^5 E_6[\theta^2]_{\phi_{2,2}}$ $-\theta q^5 E_8[-\theta]$ $-\theta^2 q^5 E_8[-\theta^2]$	$q^3 \phi_{160,55}$ $-q^5 D_{4,\phi_{12,4}}$ $\theta q^6 E_6[\theta]_{\phi'_{1,3}}$ $\theta^2 q^6 E_6[\theta^2]_{\phi'_{1,3}}$	$q^4 \phi_{350,38}$ $-q^6 D_{4,\phi'_{8,3}}$

i	14	15	16	17	18	19	20
$bH^i(X(w), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$	$q^5 \phi_{448,25}$ $-q^7 D_{4,\phi'_{2,4}}$	$q^6 \phi_{350,14}$	$q^7 \phi_{160,7}$	$q^8 \phi_{35,2}$			$q^{10} \text{Id}$

la position des caractères de la série de D_4 étant donnés sous l'hypothèse 5.24 et ceux des deux séries de E_6 sous l'hypothèse 5.29.

5.3.5 Traduction des résultats

Les éléments du groupe de Weyl considérés dans cette partie sont non seulement des bon éléments réguliers, mais ils vérifient aussi la propriété suivante, déjà mentionnée en section 4.5.2 pour les élément de Coxeter :

(B4) – cas déployé – Le groupe $C_W(w)$ est cyclique, engendré par w .

Avec cette hypothèse supplémentaire, il est conjecturé que l'algèbre d'endomorphisme de la cohomologie de la variété de $X(w)$ est une algèbre de Hecke cyclo-

tomique dont les paramètres se calculent à partir des fonctions a et A de Lusztig [17, conjecture 5.7].

De façon plus détaillée, pour d un entier positif, on considère un ensemble de paramètres $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_{d-1})$ et on définit l'algèbre de Hecke générique $\mathcal{H}_{\mathbf{u}}$ associée au groupe cyclique $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ par

$$\mathcal{H}_{\mathbf{u}} = \mathbb{Z}[\mathbf{u}, \mathbf{u}^{-1}, T] / \langle (T - u_0) \cdots (T - u_{d-1}) \rangle.$$

Pour ζ une racine primitive d -ième de l'unité dans K , et n_0, \dots, n_{d-1} des entiers positifs, une *spécialisation d -cyclotomique* est un morphisme d'algèbre de la forme

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z}[\mathbf{u}, \mathbf{u}^{-1}] &\longrightarrow K \\ u_j &\longmapsto \zeta^j (\zeta^{-1} q)^{n_j} \end{aligned}$$

L'algèbre $K\mathcal{H}_{\varphi}$ obtenue via cette spécialisation est dite *cyclotomique*. Dans les cas que nous avons traités précédemment, la conjecture s'énonce en

Théorème 5.35. *Soit (\mathbf{G}, F) un groupe déployé et $w \in W$ un bon élément d -régulier. On se place dans l'un des cas suivants :*

- (\mathbf{G}, F) est de type F_4 et $d = 8$.
- (\mathbf{G}, F) est de type E_6 et $d = 9$.
- (\mathbf{G}, F) est de type E_7 , $d = 14$ et l'hypothèse 5.24 est vérifiée.
- (\mathbf{G}, F) est de type E_8 , $d = 24$ et les hypothèses 5.24 et 5.29 sont vérifiées.

Si b est le Φ_d -bloc principal, alors

- (i) $\mathrm{REnd}_{\mathcal{K}\mathbf{G}}^{\bullet}(b\mathrm{R}\Gamma_c(X(w), K))$ est homotope à l'algèbre $\mathrm{End}_{D^b(\mathcal{K}\mathbf{G})}(b\mathrm{R}\Gamma_c(X(w), K))$ concentrée en degré 0 ;
- (ii) il existe des entiers n_j tels que l'application $T \longmapsto F$ induise un isomorphisme d'algèbres entre $K\mathcal{H}_{\varphi}$ et $\mathrm{End}_{D^b(\mathcal{K}\mathbf{G})}(b\mathrm{R}\Gamma_c(X(w), K))$;
- (iii) via la spécialisation $q \longmapsto \zeta$, les valeurs propres de F sur $b\mathrm{H}_c^{\bullet}(X(w), K)$ sont exactement les racines d -ièmes de l'unité $1, \zeta, \dots, \zeta^{d-1}$ et les entiers n_j sont donnés par

$$n_j = \frac{2\nu_{\mathbf{G}} - a_{\chi_j} - A_{\chi_j}}{\ell(w)}$$

où χ_j désigne le caractère unipotent associé à la valeur propre se réduisant en ζ^j .

Remarque 5.36. Pour les groupes de type E_6 et E_8 , il existe d'autres bon éléments réguliers w vérifiant l'hypothèse (B4). Pour chacun de ses éléments, on peut observer que très peu de cellules $\Upsilon_{\gamma}(x)$ sont non vides, et qu'elles vérifient toutes les hypothèses de la proposition 5.4. Néanmoins, la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig du sous-groupe parabolique considéré qui apparaissent dans le quotient $U_I \backslash X(w)$ ne sont pas assez disjointes pour que l'on puisse recoller les différents morceaux simplement.

5.4 Arbres de Brauer associés

Pour conclure ce chapitre on propose, à partir des résultats de la partie précédente et à la lumière de l'étude menée au chapitre 4, deux conjectures sur les arbres de Brauer des ℓ -blocs principaux pour les groupes de type E_7 et E_8 .

Dans certains cas particuliers, on a déterminé explicitement les caractères du Φ_d -bloc principal dans la cohomologie de la variété de Deligne-Lusztig associée à un élément d -régulier, ainsi que les valeurs propres de l'endomorphisme de Frobenius sur chacun de ces caractères. La situation est très similaire à celle des éléments de Coxeter étudiée au cours du chapitre 4 (voir la partie 4.2) : si ℓ divise $\Phi_d(q)$ sans diviser l'ordre de W , alors

- $T_w \simeq \mathbf{T}^{wF}$ contient un ℓ -Sylow cyclique T_ℓ de G et $N_G(T_\ell)/T_\ell \simeq C_W(w)$ est un groupe cyclique d'ordre d engendré par w ;
- les ℓ -caractères non triviaux θ de T_w sont en position générale et ainsi les caractères $R_{T_w}^G(\theta)$ sont des caractères cuspidaux de G ;
- les valeurs propres de F sur $H_c^\bullet(X(w), K)$ se réduisent modulo ℓ en les racines d -ièmes de l'unité.

On en déduit que le ℓ -bloc principal b , donné par le théorème 4.9, se partitionne comme dans le cas des éléments de Coxeter en

$$b = b_\ell([\mathbf{T}_w, 1]) = \{ [H_c^{\ell(w)}(Y(\dot{w}), K)_\theta] \mid \theta \in \text{Irr}_\ell \mathbf{T}^{wF} \text{ et } \theta \neq \text{Id} \} \cup \{ \chi_0, \dots, \chi_{d-1} \}$$

où χ_j désigne l'unique caractère unipotent de G associé à une valeur propre de F congrue à q^j modulo ℓ . Ces derniers forment les caractères non exceptionnels du bloc, alors que le caractère exceptionnel est donné par

$$\chi_{\text{exc}} = \frac{1}{|C_W(w)|} \sum_{\substack{\theta \in \text{Irr}_\ell \mathbf{T}^{wF} \\ \theta \neq \text{Id}}} [H_c^{\ell(w)}(X(w), K)_\theta].$$

De nombreuses ressemblances se trouvent aussi du côté géométrique : les calculs effectués dans ce chapitre montrent que la cohomologie de la variété $X(w)$ a une forme très similaire au cas de l'élément de Coxeter (traité dans les théorèmes 4.18, 4.22 et 4.23). Sans aucun doute, ces observations constituent autant de preuves de l'existence d'un analogue de la conjecture de Hiss-Lübeck-Malle pour les éléments d -réguliers étudiés ici.

Pour renforcer cette conviction, nous rappellerons dans une première partie les résultats existants sur les arbres de Brauer associés aux groupes de type F_4 et E_6 avant de proposer deux arbres conjecturaux pour les groupes de type E_7 et E_8 .

5.4.1 Observations

Soit (G, F) un groupe déployé de type F_4 et w un bon élément 8-régulier. Lorsque q est supposé d'ordre 8 modulo ℓ , la structure du ℓ -bloc principal est donné par l'arbre de Brauer représenté par la figure 5.1 et déterminé dans [50].

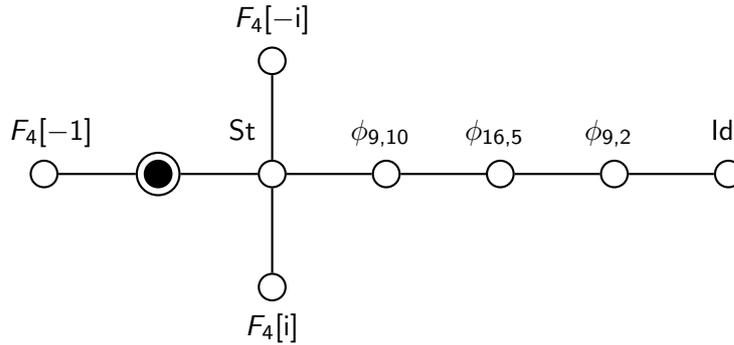


FIG. 5.1 – Arbre de Brauer du ℓ -bloc principal de F_4 pour q d'ordre 8 modulo ℓ

L'entier q est d'ordre 8 modulo ℓ et chaque valeur propre de F sur la cohomologie de $X(w)$ se réduit en une unique racine 8-ième de l'unité, permettant ainsi de numérotter les caractères unipotents du bloc. Comme dans le cas Coxeter, on peut donc indexer les sommets de l'arbre par les entiers $j \in \llbracket 0; 7 \rrbracket$ pour obtenir la figure 5.2.

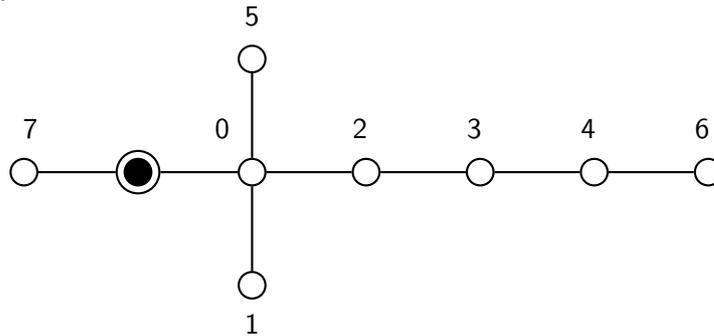


FIG. 5.2 – Sommets indexés selon les valeurs propres de F

Supposons maintenant que (\mathbf{G}, F) un groupe déployé de type E_6 et que ℓ est choisi de tel sorte que l'ordre de q modulo ℓ soit exactement 9. Alors l'arbre de Brauer du ℓ -bloc principal, représenté par la figure 5.3, est donné par [51].

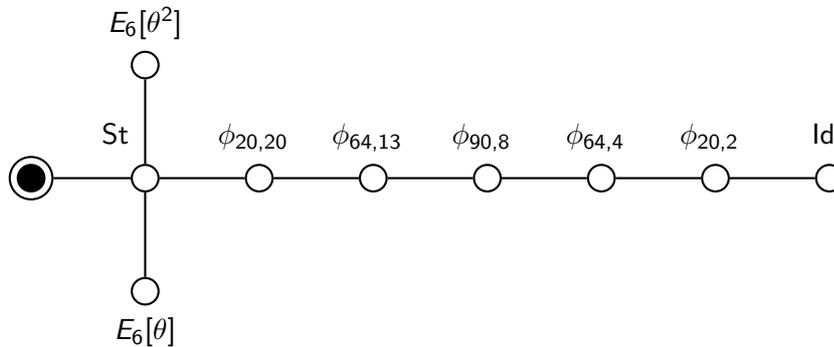


FIG. 5.3 – Arbre de Brauer du ℓ -bloc principal de E_6 pour q d'ordre 9 modulo ℓ

Si, comme précédemment, on indexe les sommets de l'arbre selon les puissance de q congrues aux valeurs propres de F sur la cohomologie de $X(w)$, on obtient la figure 5.4 grâce au théorème 5.23.

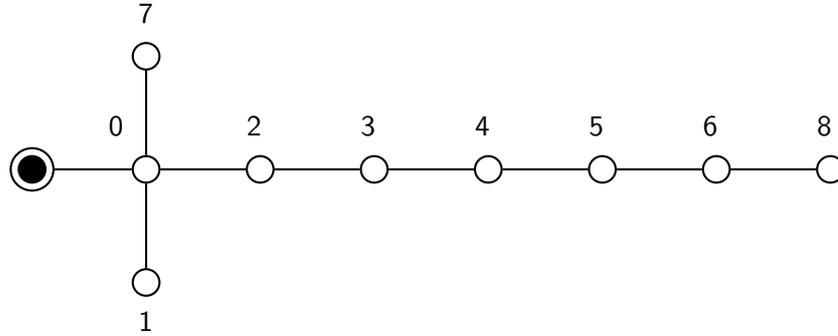


FIG. 5.4 – Sommets indexés selon les valeurs propres de F

Remarque 5.37. Il faut noter une différence majeure avec le cas des variétés associées aux éléments de Coxeter : les branches associées à chaque série de Harish-Chandra ne sont pas toutes reliées au sommet exceptionnel. Un des effets de bord majeurs est l'apparition de torsion dans la cohomologie de $Y(\dot{w})$. Il n'y a par exemple aucune chance de pouvoir représenter le (q^2) -espace propre de F sur la cohomologie de $Y(\dot{w})$ par un complexe à deux termes formés de modules projectifs

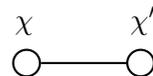
$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{d} Q \longrightarrow 0$$

sans que le conoyau de d soit sans torsion. D'ailleurs, le complexe de Rickard associé aux deux arbres de Brauer précédents a lui-même de la torsion dans sa cohomologie. Celle-ci est néanmoins toujours cuspidale.

5.4.2 Conjectures

Fort de ces observations et des résultats énoncés dans les théorèmes 5.34 et 5.23, on conjecture que les arbres de Brauer du Φ_{14} -bloc principal de E_7 et du Φ_{24} -bloc principal de E_8 peuvent être représentés par les figures 5.5 et 5.6. Pour étayer ces conjectures, notons que dans les deux cas, on peut :

- utiliser l'induction de Harish-Chandra pour construire certains modules projectifs et vérifier ainsi que les branches obtenues en considérant chaque série sont bien des sous-graphes des arbres représentés ici ;
- calculer le caractère total du complexe $R\Gamma_c(Y_\ell, \Lambda)_{(\lambda)}$ pour chaque valeur propre afin de vérifier à l'aide du corollaire 1.27 que pour chaque arête



le caractère $\chi + \chi'$ est bien un caractère virtuel projectif – c'est-à-dire un élément de $K_0(\Lambda G\text{-proj})$.

Remarque 5.38. Notons que pour tous les blocs principaux considérés dans cette partie, la ℓ -réduction d'un KG -module simple cuspidal reste simple, mais ce n'est pas forcément un kG -module supercuspidal, contrairement au cas traité dans la proposition 4.40. Cette situation est néanmoins spécifique aux types exceptionnels (voir [41, théorème 3.12]).

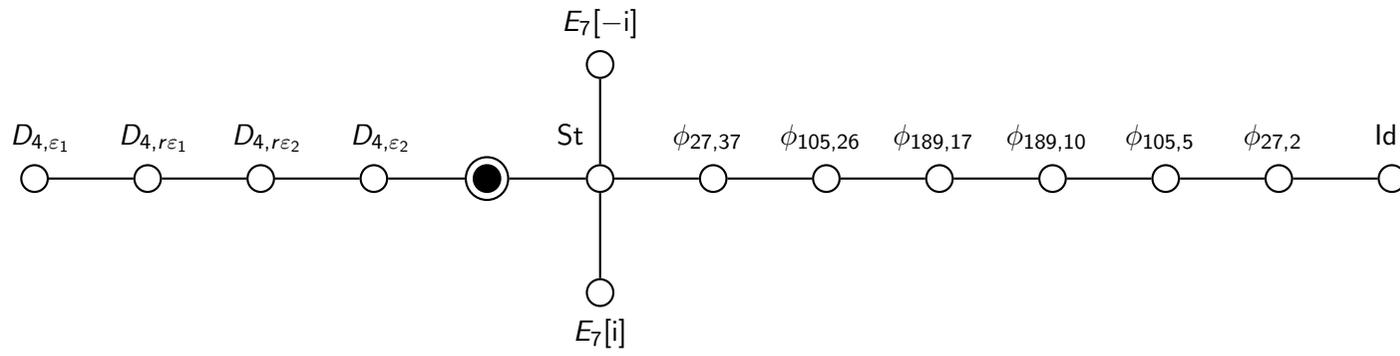


FIG. 5.5 – Arbre de Brauer du ℓ -bloc principal de E_7 pour q d'ordre 14 modulo ℓ

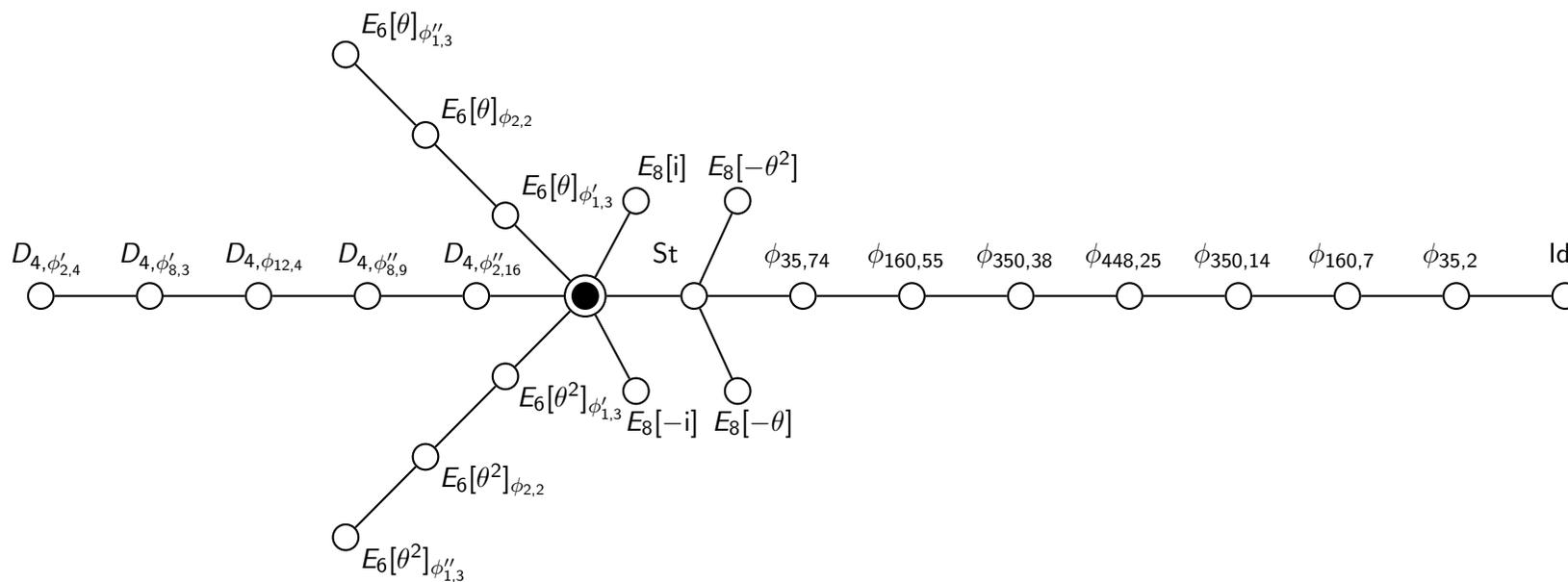


FIG. 5.6 – Arbre de Brauer du ℓ -bloc principal de E_8 pour q d'ordre 24 modulo ℓ

A.1 Programmes GAP

La fonction `AllxDistinguishedSubExpr` renvoie la liste des sous-expressions x -distinguées de w dont le produit vaut v . Les entrées correspondantes sont :

- W : représente le groupe de Weyl W , défini par la fonction `CoxeterGroup`;
- $base$: liste d'entiers de 1 à $W.N$ représentant la décomposition réduite de l'élément w ;
- v et x : éléments de W . `elements` représentant v et x .

En sortie, les éléments de la liste sont représentés par des listes contenant les mêmes entrées que $base$ avec éventuellement des 0 à la place de certains entiers pour marquer le fait que $\gamma_i = 1$.

```
AllxDistinguishedSubExpr:=function(W,base,v,x)
  local n,s,base2,v2,L,M;
  n:=Length(base);
  if (n=0 and v=()) then
    return [[]];
  elif (n=0 and v<>()) then
    return [];
  fi;
  s:=base[n];
  base2:=base{[1..n-1]};
  v2:=v*EltWord(W,[s]);
  if s/(x*v) <= W.N then
    L:=AllxDistinguishedSubExpr(W,base2,v2,x);
    return List(L,i->Concatenation(i,[s]));
  else
    L:=AllxDistinguishedSubExpr(W,base2,v2,x);
    M:=AllxDistinguishedSubExpr(W,base2,v,x);
    return Concatenation(List(L,i->Concatenation(i,[s])),
                          List(M,i->Concatenation(i,[0])));
  fi;
end;
```

Exemple A.1. Les sous-expressions distinguées de l'élément sts du groupe de Weyl de $GL_3(\mathbb{F})$ sont $(s, 1, s)$ et $(1, 1, 1)$:

```
#gap> W:=CoxeterGroup("A",2);;
#gap> w0:=LongestCoxeterElement(W);;
#gap> AllxDistinguishedSubExpr(W,[1,2,1],(),w0);
#[ [ 1, 0, 1 ], [ 0, 0, 0 ] ]
```

Les entrées de `nonZeroSubExpr` sont identiques à celles de la fonction précédente, avec une donnée supplémentaire : la liste d'entiers I encodant les racines simples Δ_ψ . La fonction renvoie une liste formée de couples $[l, m]$ où l est une sous-expression x -distinguée γ et m représente l'entier $|K_\gamma(x)| + \ell(w)$, qui donne le degré maximal du groupe de cohomologie de la variété Y_γ qui fait apparaître des caractères linéaires ψ vérifiant $\Delta_\psi = I$.

```
nonZeroSubExpr:=function(W,base,v,x,I)
  local n,s,base2,v2,L,M;
  n:=Length(base);
  if (n=0 and v=()) then return [[[],0]];
  elif (n=0 and v<>()) then return []; fi;
  s:=base[n];
  base2:=base{[1..n-1]};
  v2:=v*EltWord(W,[s]);
  if s/(x*v) <= W.N then
    L:=nonZeroSubExpr(W,base2,v2,x,I);
    return List(L,i->[Concatenation(i[1],[s]),i[2]+2]);
  elif s/(x*v) > W.N and Position(I,s/(x*v)-W.N)<>false then
    L:=nonZeroSubExpr(W,base2,v,x,I);
    return List(L,i->[Concatenation(i[1],[0]),i[2]+1]);
  else
    L:=nonZeroSubExpr(W,base2,v2,x,I);
    M:=nonZeroSubExpr(W,base2,v,x,I);
    return Concatenation(List(L,i->[Concatenation(i[1],[s]),i[2]]),
      List(M,i->[Concatenation(i[1],[0]),i[2]+2]));
  fi;
end;
```

Exemple A.2. Pour $G = GL_5(\mathbb{F})$, les caractères unipotents différents de Id ne peuvent apparaître que dans les groupes de cohomologie de degré 10 à 16 de $Y_{w_0}(\dot{w}_0)$, conformément au théorème 3.31 :

```
#gap> W:=CoxeterGroup("A",4);;
#gap> w0:=LongestCoxeterElement(W);;
#gap> nonZeroSubExpr(W,LongestCoxeterWord(W),(),w0,[4]);
[ [ [ 0, 2, 1, 3, 0, 1, 0, 3, 2, 0 ], 12 ],
  [ [ 0, 2, 0, 3, 0, 0, 0, 3, 2, 0 ], 14 ],
  [ [ 0, 2, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 2, 0 ], 13 ],
  [ [ 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 2, 0 ], 15 ],
  [ [ 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 3, 0, 0 ], 14 ],
  [ [ 0, 2, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0 ], 15 ],
  [ [ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ], 16 ] ]
```

Cette dernière fonction renvoie, par itération de la fonction précédente, le degré maximal de la cohomologie de $Y(\dot{w})$ dans lequel ψ peut apparaître :

```
maxDimension:=function(W,base,I)
  local L,V;
  V:=ReflectionSubgroup(W,I);
  L:=List(ReducedRightCosetRepresentatives(W,V),
```

```

w->LongestCoxeterElement(V)*w);
return Maximum(Flat(List(L,x->List(nonZeroSubExpr(W,base,(),x,I),
                                i->i[2]))));
end;

```

Exemple A.3. En reprenant l'exemple précédent, on obtient cette fois un résultat pour la variété totale $Y(w_0)$

```

#gap> W:=CoxeterGroup("A",4);;
#gap> w0:=LongestCoxeterElement(W);;
#gap> maxDimension(W,LongestCoxeterWord(W),[4]);
16

```

A.2 Le groupe simple de type B_2

Le groupe de Weyl de type B_2 possède 5 classes de conjugaisons données par $\{1\}$, $\{s, tst\}$, $\{t, sts\}$, $\{st, ts\}$, $\{w_0\}$. Sa table de caractère est donnée par

	1	s	t	st	w_0
1	1	1	1	1	1
ε	1	-1	-1	1	1
θ	1	1	-1	-1	1
$\theta\varepsilon$	1	-1	1	-1	1
r	2	0	0	0	-2

Le groupe réductif simple associé (le groupe $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F})$) possède 4 classes unipotentes, dont une se scindant en deux classes rationnelles (la sous-régulière). À l'aide de [86, section 7.15], on peut calculer les fonctions de Green associées aux différentes classes non triviales :

	1	s	t	st	w_0
$Q_w(u_0)$	1	1	1	1	1
$Q_w(u_1)$	$3q+1$	$-q-1$	$q+1$	$-q+1$	$-q+1$
$Q_w(u'_1)$	$q+1$	$q+1$	$-q+1$	$q+1$	$-3q+1$
$Q_w(u_2)$	$(q+1)^2$	$-q^2+1$	q^2+1	$-q^2+1$	$(q-1)^2$

Avec les tables données dans [21, section 13.6], on peut aussi calculer explicitement les caractères de Deligne-Lusztig du groupe G :

$$R_{T_1}^G(1) = \text{Id}_G + \text{St}_G + \rho_\theta + \rho_{\theta\varepsilon} + 2\rho_r$$

$$R_{T_s}^G(1) = \text{Id}_G - \text{St}_G + \rho_\theta - \rho_{\theta\varepsilon}$$

$$R_{T_t}^G(1) = \text{Id}_G - \text{St}_G - \rho_\theta + \rho_{\theta\varepsilon}$$

$$R_{T_{st}}^G(1) = \text{Id}_G + \text{St}_G - \rho_r + \theta_{10}$$

$$R_{T_{w_0}}^G(1) = \text{Id}_G + \text{St}_G - \rho_\theta - \rho_{\theta\varepsilon} - 2\theta_{10}$$

en en déduire les caractères fantômes :

$$R_1 = \text{Id}_G, \quad R_\varepsilon = \text{St}_G$$

$$R_\theta = \frac{1}{2}(\rho_\theta - \rho_{\theta\varepsilon} + \rho_r - \theta_{10})$$

$$R_{\theta\varepsilon} = \frac{1}{2}(-\rho_\theta + \rho_{\theta\varepsilon} + \rho_r - \theta_{10})$$

$$R_r = \frac{1}{2}(\rho_\theta + \rho_{\theta\varepsilon} + \rho_r + \theta_{10})$$

$$R_? = \frac{1}{2}(\rho_\theta + \rho_{\theta\varepsilon} - \rho_r - \theta_{10})$$

le dernier caractère virtuel étant défini comme l'un des deux caractères virtuels de norme 1 orthogonal à tous les autres.

En utilisant les formules donnée dans [56], on peut alors déterminer les projections des caractères de Gelfand-Graev généralisés sur l'espace des fonctions unipotentes uniformes. On trouve

$$[\pi_{\text{uni}}(\Gamma_{u_0})] = \text{St}_G$$

$$[\pi_{\text{uni}}(\Gamma_{u_1})] = R_\theta + R_r + q\text{St}_G = \rho_\theta + \rho_r + q\text{St}_G$$

$$[\pi_{\text{uni}}(\Gamma_{u'_1})] = R_r - R_\theta + q\text{St}_G = \rho_{\theta\varepsilon} + \theta_{10} + q\text{St}_G$$

$$[\pi_{\text{uni}}(\Gamma_{u_2})] = R_\theta + qR_r + q^2\text{St}_G = \frac{q+1}{2}\rho_\theta + \frac{q-1}{2}\rho_{\theta\varepsilon} + \frac{q+1}{2}\rho_r + \frac{q-1}{2}\theta_{10}$$

Pour obtenir la partie unipotente des caractères de Gelfand-Graev généralisés, il reste à déterminer la contribution de $R_?$ dans chacun de ces caractères. Puisque chaque $[\Gamma_{u_i}]$ est un véritable caractère, il n'y a pas d'ambiguïté pour les trois premiers et le coefficient sur $R_?$ est nul.

A.3 Tables d'induction et restriction

Pour tout groupe de Weyl W non trivial on notera Id (ou 1) le caractère trivial et ε la signature. Les groupes de type A_2 possèdent un caractère supplémentaire associé à la représentation de réflexion que l'on notera r . Hormis pour le groupe de type B_2 , pour lequel on reprendra les notations précédentes, on indexera les

caractères des groupes de type B_n, C_n et D_n grâce aux bipartitions (certaines pouvant donner deux caractères différents dans le type D_n) en suivant [21] ou [42].

Nous aurons besoin au chapitre 5 des tables d'induction-restriction suivantes entre un sous-groupe parabolique W_I et W . Par manque de place, on ne recopiera pas les tables d'induction de E_6 à E_7 et de E_7 à E_8 . Elle peuvent néanmoins s'obtenir grâce au package CHEVIE de GAP3 via la commande

```
> Display(InductionTable(V,W))
```

où W est un groupe de Coxeter créé par la fonction `CoxeterGroup` et V un sous-groupe créé à l'aide de `ReflectionSubgroup`.

	ε	ld
$\phi_{1,0}$.	1
$\phi_{1,6}$	1	.
$\phi'_{1,3}$.	1
$\phi''_{1,3}$	1	.
$\phi_{2,1}$	1	1
$\phi_{2,2}$	1	1

TAB. A.1 – Induction de A_1 à G_2

	ε	r	ld
1^3	1	.	.
$1^2.1$	1	1	.
1.1^2	1	1	.
ε	1	.	.
$21.$.	1	.
1.2	.	1	1
2.1	.	1	1
$.21$.	1	.
ld	.	.	1
$.3$.	.	1

TAB. A.2 – Induction de A_2 à C_3

	θ	r	ε	ld	$\theta\varepsilon$
$\phi_{1,0}$.	.	.	1	.
$\phi''_{1,12}$	1
$\phi'_{1,12}$	1
$\phi_{1,24}$.	.	1	.	.
$\phi''_{2,4}$.	.	.	1	1
$\phi'_{2,16}$	1	.	1	.	.
$\phi'_{2,4}$	1	.	.	1	.
$\phi''_{2,16}$.	.	1	.	1
$\phi_{4,8}$	1	.	1	1	1
$\phi_{9,2}$	1	2	.	3	1
$\phi''_{9,6}$.	2	1	1	3
$\phi_{9,6}$	3	2	1	1	.
$\phi_{9,10}$	1	2	3	.	1
$\phi'_{6,6}$	1	2	.	.	1
$\phi'_{6,6}$.	2	1	1	.
$\phi_{12,4}$	1	4	1	1	1
$\phi_{4,1}$.	1	.	2	.
$\phi''_{4,7}$.	1	.	.	2
$\phi'_{4,7}$	2	1	.	.	.
$\phi_{4,13}$.	1	2	.	.
$\phi''_{8,3}$.	2	.	2	2
$\phi'_{8,9}$	2	2	2	.	.
$\phi'_{8,3}$	2	2	.	2	.
$\phi''_{8,9}$.	2	2	.	2
$\phi_{16,5}$	2	4	2	2	2

TAB. A.3 – Induction de B_2 à F_4

	1^3	$1^2.1$	1.1^2	ε	21.	1.2	2.1	.21	ld	.3
$\phi_{1,0}$	1	.
$\phi''_{1,12}$	1
$\phi'_{1,12}$	1
$\phi_{1,24}$.	.	.	1
$\phi''_{2,4}$	1
$\phi'_{2,16}$	1	.	.
$\phi'_{2,4}$	1	1
$\phi''_{2,16}$	1	.	.	1
$\phi_{4,8}$	1	.	.	1	.	.
$\phi_{9,2}$	1	1	1	.	1	.
$\phi''_{9,6}$	1	1	1	.	1
$\phi'_{9,6}$	1	1	1	.	1
$\phi_{9,10}$.	1	1	1	.	.	.	1	.	.
$\phi'_{6,6}$.	1	.	.	.	1
$\phi''_{6,6}$.	.	1	.	.	.	1	.	.	.
$\phi_{12,4}$.	1	1	.	.	1	1	.	.	.
$\phi_{4,1}$	1	.	1	.
$\phi''_{4,7}$	1	1
$\phi'_{4,7}$	1	.	.	.	1
$\phi_{4,13}$.	.	1	1
$\phi''_{8,3}$.	1	.	.	1	.	1	.	.	.
$\phi'_{8,9}$.	.	1	.	.	1	.	1	.	.
$\phi'_{8,3}$	1	1	.	1	1
$\phi''_{8,9}$	1	1	1	1
$\phi_{16,5}$.	1	1	.	1	1	1	1	.	.

TAB. A.4 – Induction de C_3 à F_4

A. ANNEXE

	11.+	11.-	1.111	.1111	11.2	1.21	.211	2.+	2.-	.22	1.3	.31	.4
$\phi_{1,0}$	1
$\phi_{1,36}$.	.	.	1
$\phi_{10,9}$	1	.	.	.	1	.	.	.
$\phi_{6,1}$	1	.	2
$\phi_{6,25}$.	.	1	2
$\phi_{20,10}$.	.	1	.	2	1	.	.
$\phi_{15,5}$	1	2	.	1
$\phi_{15,17}$.	.	2	1	1
$\phi_{15,4}$	1	1	1	1	1	.
$\phi_{15,16}$	1	1	1	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.
$\phi_{20,2}$	1	1	.	2	1	3
$\phi_{20,20}$	1	1	2	3	.	.	1
$\phi_{24,6}$	1	1	.	1	1	.	.	1	1
$\phi_{24,12}$	1	1	.	1	1	1	1
$\phi_{30,3}$	1	.	1	1	.	3	1	1
$\phi_{30,15}$	1	1	3	1	.	1	1
$\phi_{60,8}$	1	1	.	.	2	3	1	1	1	3	.	1	.
$\phi_{80,7}$	1	1	1	.	2	5	1	1	1	1	1	1	.
$\phi_{90,8}$	1	1	2	.	4	4	1	1	1	.	2	1	.
$\phi_{60,5}$	1	3	.	2	2	2	2	2	.
$\phi_{60,11}$	2	2	2	.	1	3	2	.	.	2	.	.	.
$\phi_{64,4}$	2	2	.	2	2	.	4	2	2
$\phi_{64,13}$	2	2	4	2	2	2	2
$\phi_{81,6}$	1	1	.	.	3	3	1	2	2	.	3	2	.
$\phi_{81,10}$	2	2	3	.	3	3	2	1	1	.	.	1	.

TAB. A.5 – Induction de D_4 à E_6

Index des notations

\mathcal{A} : catégorie abélienne (en général $A\text{-Mod}$ ou $A\text{-mod}$)	18
$A\text{-Mod}$: catégorie des A -modules	18
$A\text{-mod}$: catégorie des A -modules de type fini	18
$A\text{-proj}$: catégorie additive des A -modules projectifs de type fini	23
a_λ, a_χ : fonction a de Lusztig associée à la partition λ ou au caractère χ	106, 129
A_λ, A_χ : fonction A de Lusztig associée à la partition λ ou au caractère χ	105, 129
B : sous-groupe de Borel de G	36
B ⁻ : sous-groupe de Borel opposé à B	37
B _{I} : sous-groupe de Borel de L _{I}	124
BS : variété de Bott-Samelson	42
B _{x} · B : cellule de Schubert associée à $x \in W$	39
B_W^+ : monoïde de tresse associé à W	175
$b_\ell(G, s)$: idempotent associé à $\mathcal{E}_\ell(G, s)$	109
$C(\mathcal{A})$: catégorie des complexes d'objets de \mathcal{A}	
$C^+(\mathcal{A})$: sous-catégorie des complexes minorés	18
$C^-(\mathcal{A})$: sous-catégorie des complexes majorés	18
$C^b(\mathcal{A})$: sous-catégorie des complexes bornés	18
C : complexe $b\text{R}\Gamma_c(Y, \Lambda)$	127
\mathcal{C} : représentant de C possédant les bonnes propriétés de finitude	127
c : élément de Coxeter de la paire (W, F)	114
c_I : élément de Coxeter de W_I	124
χ_θ : caractère exceptionnel du bloc principal	117
$\chi_j, \chi_j(\zeta)$: caractère de Y_j	118
$\chi_j^I, \chi_j^I(\zeta)$: caractère de Y_j^I	124
$D(\mathcal{A})$: catégorie dérivée de \mathcal{A}	
$D^+(\mathcal{A})$: sous-catégorie des complexes minorés	18
$D^-(\mathcal{A})$: sous-catégorie des complexes majorés	18
$D^b(\mathcal{A})$: sous-catégorie des complexes bornés	18
d_α : longueur de l'orbite de la racine α sous ϕ	37
Δ : racines simples de Φ	36
Δ_ψ : racines simples associées aux restrictions non triviales de ψ	76
$\tilde{\Delta}_\psi$: image de Δ_ψ par $-w_0$	76
$D_\gamma(x)$: cellule de Curtis-Deodhar	45
$D(\mathbf{U})$: groupe dérivé de U	59

Diag(Φ) : diagrammes de Dynkin pondérés 89

$\mathcal{E}(G, s)$: série rationnelle associée à l'élément semi-simple $s \in G^*$ 108

$\mathcal{E}_\ell(G, s)$: union des blocs rencontrant $\mathcal{E}(G, s)$ 109

$\mathcal{E}_d(G, (\mathbf{L}, \lambda))$: d -série de Harish-Chandra associée à la paire d -cuspidale (\mathbf{L}, λ) 111

e_ψ : idempotent associé au caractère ψ 57

F : endomorphisme de Frobenius 28, 36

F^δ : plus petite puissance de F telle que (\mathbf{G}, F^δ) soit déployé 36

\mathbb{F} : une clôture algébrique de \mathbb{F}_p 27, 36

G : groupe des points fixes \mathbf{G}^F de \mathbf{G} sous F 36

\mathbf{G}^* : dual de Langlands de \mathbf{G} 108

\mathbf{G} : groupe algébrique réductif connexe défini sur \mathbb{F} 36

\mathbf{G}_a : groupe algébrique additif \mathbb{F}^+ 45

\mathbf{G}_m : groupe algébrique multiplicatif \mathbb{F}^\times 40

\mathfrak{g} : algèbre de Lie de \mathbf{G} 88

$\mathfrak{g}_d(i)$: graduation de \mathfrak{g} selon les poids des racines 90

γ^i : produit des i premiers termes d'une sous-expression $\gamma \in \Gamma$ 44

Γ : sous-expressions 43

Γ_v : sous-expressions dont le produit des termes vaut v 45

Γ_N : module de Gelfand-Graev généralisé 93

$H^i(X, \mathcal{O})$: groupes de cohomologie étale de X 27

$H_c^i(X, \mathcal{O})$: groupes de cohomologie étale à support compact de X 27

$H_{X(w)}$: polynôme encodant le $G \times \langle F^\delta \rangle_{\text{mod}}$ -module gradué $H_c^\bullet(X(w), K)$ 177

h : nombre de Coxeter de la paire (W, F) 113

h_0 : entier h/δ 114

h_Γ : fonction hauteur associée à l'arbre de Brauer Γ 155

$\text{Hom}_{\mathcal{A}}^\bullet$: bifoncteur Hom total 19

\mathcal{H}_u : algèbre de Hecke générique associée à un groupe cyclique 194

I_γ : ensemble des indices i vérifiant $\gamma_i = s_i$ 45

$\text{Irr}_\ell H$: caractères linéaires d'ordre une puissance de ℓ du groupe abélien H .. 117

$J(\Lambda)$: idéal maximal de Λ 19

$J_\gamma(x)$: ensembles des indices i vérifiant $x\gamma^i < x\gamma^i s_i$ 45

$K(\mathcal{A})$: catégorie homotopique de \mathcal{A}

$K^+(\mathcal{A})$: sous-catégorie des complexes minorés 18

$K^-(\mathcal{A})$: sous-catégorie des complexes majorés 18

$K^b(\mathcal{A})$: sous-catégorie des complexes bornés 18

K : extension finie de \mathbb{Q}_ℓ 19

k : corps résiduel de l'anneau local Λ 19

$K_\gamma(\psi)$ 68, 74

$K_x(\psi)$: maximum des cardinaux de certains ensembles $K_\gamma(\psi)$ 77

Λ : anneau des entiers de K sur \mathbb{Z}_ℓ	19
Λ_ψ : module Λ muni de l'action d'un groupe via un caractère linéaire ψ	57
$\ell(w)$: longueur de w dans W	37
\mathbf{L}_d : sous-groupe de Levi de \mathbf{G} associé au diagramme pondéré d	89
\mathbf{L}_I : sous-groupe de Levi standard	103
M_ζ : plus grand entier j pour lequel $Y_j(\zeta)$ est non nul	118
m_ζ : plus petit entier j pour lequel $Y_j(\zeta)$ est non nul	118
$m_\alpha(\gamma), \bar{m}(\gamma), m(\gamma)$: données combinatoires associées à $\gamma \in \Gamma$	62, 73
μ_d : groupe des racines d -ièmes de l'unité dans \mathbb{F}	65
$n_\alpha(\gamma), \bar{n}(\gamma), n(\gamma)$: données combinatoires associées à $\gamma \in \Gamma$	62, 73
$n_{\mathbf{G}}$: nombre de racines positives du système de racines de \mathbf{G}	105
\mathcal{O} : anneau parmi (K, Λ, k)	19
$\Omega_\gamma(x)$: système de représentants de la cellule $D_\gamma(x)$ dans \mathbf{U}^\times	47
$\tilde{\Omega}_\gamma(x)$: cellule de Curtis-Deodhar $\Omega_\gamma(x)$ modifiée	72
\mathcal{O} : orbite nilpotente de \mathbf{G}	89
\mathcal{O}_{\min} : orbite nilpotente minimale	90
$\mathcal{O}_{\text{rég}}$: orbite nilpotente régulière	90
$\mathcal{O}(\rho)$: orbite spéciale associée au caractère unipotent ρ	94
Φ_d : d -ième polynôme cyclotomique	109
Φ : système de racines	
Φ^- : racines négatives	36
Φ^+ : racines positives	36
$\Phi_\gamma(x)$: ensemble de racines paramétrant la cellule de Curtis-Deodhar	46
Ψ_x : ensemble de racines $x^{-1}(\Phi^+ \cap F(x)(\Phi^+))$	73
ϕ : action induite de F sur Φ	37
\mathbf{P}_d : sous-groupe parabolique de \mathbf{G} associé au diagramme pondéré d	89
\mathbf{P}_I : sous-groupe parabolique standard	103
P_M : relevé à ΛH -mod d'une enveloppe projective d'un kH -module M	124
$P_j, P_j(\zeta)$: relevé de l'enveloppe projective de S_j	126, 128
q : puissance (pas forcément entière) de p	36
q^δ : puissance entière de p	36
q_α	37
q_α°	37
$R\Gamma(X, \mathcal{O})$: complexe de cohomologie étale de X	27
$R\Gamma_c(X, \mathcal{O})$: complexe de cohomologie étale à support compact de X	27
$\text{RHom}_{\mathcal{A}}^\bullet$: foncteur dérivé du bifoncteur $\text{Hom}_{\mathcal{A}}^\bullet$	19
$R_{L_I}^G, {}^*R_{L_I}^G$: foncteur d'induction-restriction	
de Deligne-Lusztig	110
de Harish-Chandra	103

S_w : variété de Schubert associée à $w \in W$	42
σ : endomorphisme $q^{-1}F$	113
$S_j, S_j(\zeta)$: kG -module simple (cuspidal si et seulement si $j = m_\zeta$)	125, 128
T : tore maximal de G	36
\mathbf{T}_w : tore maximal de type w	110
$T_{\ell'}$: ℓ' composante du groupe abélien \mathbf{T}^{cF}	136
\mathfrak{t} : algèbre de Lie de T	88
$\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_A$: foncteur dérivé du produit tensoriel	19
U : radical unipotent de B	37
\mathbf{U}^- : radical unipotent de \mathbf{B}^-	37
\mathbf{U}_α : sous-groupe à un paramètre associé à $\alpha \in \Phi$	37
\mathbf{U}_d : radical unipotent de \mathbf{P}_d	89
\mathbf{U}_I : radical unipotent de \mathbf{P}_I	103
\mathbf{U}_j : filtration de U par le poids des racines	92
$\mathbf{U}_{1,5}$: sous-groupe intermédiaire entre \mathbf{U}_1 et \mathbf{U}_2	93
u : algèbre de Lie de U	88
u^- : algèbre de Lie de \mathbf{U}^-	88
u_α : algèbre de Lie de \mathbf{U}_α	89
u_j : algèbre de Lie de \mathbf{U}_j	92
u_α : isomorphisme entre \mathbb{F} et \mathbf{U}_α	37
u_α^* : abbréviation de $u_{-\alpha}$	53
\mathbf{V}_I : sous-groupe unipotent maximal de \mathbf{L}_I , égal à $\mathbf{U} \cap \mathbf{L}_I$	136
\mathbf{V}_α : sous-groupe de U associé à l'orbite de α sous ϕ	61
v_α : isomorphisme entre \mathbb{F} et \mathbf{V}_α	61
W : groupe de Weyl associé à (\mathbf{G}, \mathbf{T})	36
W : image de W par la section de Tits	175
\dot{w} : représentant de $w \in W$ dans $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$	37
X : variété de Deligne-Lusztig $X(c)$	124
X_I : variété de de Deligne-Lusztig de \mathbf{L}_I associée à c_I	124
$X(w)$: variété de Deligne-Lusztig	37
$\bar{X}(w)$: compactification de la variété $X(w)$	131
$X_x(w)$: pièce de la variété de Deligne-Lusztig	39
X_γ : sous-variété de $X(w)$ associée à la cellule de Curtis-Deodhar $D_\gamma(x)$	62
$\tilde{X}_x(w)$: fibré au-dessus de $X_x(w)$	71
\tilde{X}_γ : cellule de $\tilde{X}_x(w)$	73
$X_q(n, m)$	62
Υ : monoïde d'endomorphismes d'une variété	27
$\Upsilon_\gamma(x)$: cellule de Curtis-Deodhar modifiée	172
$Y(\dot{w})$: variété de Deligne-Lusztig	37
$Y_x(\dot{w})$: pièce de la variété de Deligne-Lusztig	39

Y_γ : sous-variété de $Y(\dot{w})$ associée à la cellule de Curtis-Deodhar $D_\gamma(x)$	63
$\tilde{Y}_x(\dot{w})$: fibré au-dessus de $Y_x(\dot{w})$	71
\tilde{Y}_γ : cellule de $\tilde{Y}_x(\dot{w})$	73
$Y_{q,s}(n, m)$	65
$Y_j, Y_j(\zeta)$: espace propre de F^δ sur $H_c^\bullet(X)$	118
$Y_j^!, Y_j^!(\zeta)$: espace propre de F^δ sur $H_c^\bullet(X_I)$	124
Y_ℓ : quotient de $Y(\dot{c})$ par le ℓ -Sylow de \mathbf{T}^{cF}	136
Z : complexe à deux termes représentant $R\Gamma_c(\mathbf{G}_m, \Lambda)[1]$	66
$Z_L(L')$: complexe à deux termes généralisant Z	67
$Z_x(w)$: regroupement des pièces $X_y(w)$ pour $y \in W_I x$	170
\tilde{Z}_γ : cellule du quotient $U_I \backslash \tilde{Z}_x(w)$	173
$\tilde{Z}_x(w)$: relèvement de $Z_x(w)$	170

Bibliographie

- [1] D. Bessis. Finite complex reflection arrangements are $k(\pi, 1)$, arXiv : math.GT/0610777. *Preprint*.
- [2] A. Białyński-Birula. Some theorems on actions of algebraic groups. *Ann. of Math. (2)*, 98 :480–497, 1973.
- [3] A. Białyński-Birula. Some properties of the decompositions of algebraic varieties determined by actions of a torus. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 24(9) :667–674, 1976.
- [4] C. Bonnafé. *Représentations du groupe $SL_2(q)$* .
- [5] C. Bonnafé and R. Kessar. On the endomorphism algebras of modular Gelfand-Graev representations. *J. Algebra*, 320(7) :2847–2870, 2008.
- [6] C. Bonnafé and R. Rouquier. Catégories dérivées et variétés de Deligne-Lusztig. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (97) :1–59, 2003.
- [7] C. Bonnafé and R. Rouquier. Coxeter orbits and modular representations. *Nagoya Math. J.*, 183 :1–34, 2006.
- [8] C. Bonnafé and R. Rouquier. Affineness of Deligne-Lusztig varieties for minimal length elements. *J. Algebra*, 320(3) :1200–1206, 2008.
- [9] C. Bonnafé and R. Rouquier. Compactification des variétés de Deligne-Lusztig. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 59(2) :621–640, 2009.
- [10] A. Borel. Properties and linear representations of Chevalley groups. In *Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups (The Institute for Advanced Study, Princeton, N.J., 1968/69)*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 131, pages 1–55. Springer, Berlin, 1970.
- [11] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV : Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V : Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI : systèmes de racines*. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1337. Hermann, Paris, 1968.
- [12] M. Broué. Isométries de caractères et équivalences de Morita ou dérivées. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (71) :45–63, 1990.
- [13] M. Broué. Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées. *Astérisque*, (181-182) :61–92, 1990.
- [14] M. Broué and G. Malle. Théorèmes de Sylow génériques pour les groupes réductifs sur les corps finis. *Math. Ann.*, 292(2) :241–262, 1992.

-
- [15] M. Broué and G. Malle. Zyklotomische Heckealgebren. *Astérisque*, (212) : 119–189, 1993. Représentations unipotentes génériques et blocs des groupes réductifs finis.
- [16] M. Broué, G. Malle, and J. Michel. Generic blocks of finite reductive groups. *Astérisque*, (212) :7–92, 1993. Représentations unipotentes génériques et blocs des groupes réductifs finis.
- [17] M. Broué and J. Michel. Sur certains éléments réguliers des groupes de Weyl et les variétés de Deligne-Lusztig associées. In *Finite reductive groups (Luminy, 1994)*, volume 141 of *Progr. Math.*, pages 73–139.
- [18] M. Broué and J. Michel. Blocs et séries de Lusztig dans un groupe réductif fini. *J. Reine Angew. Math.*, 395 :56–67, 1989.
- [19] M. Cabanes and M. Enguehard. On blocks of finite reductive groups and twisted induction. *Adv. Math.*, 145(2) :189–229, 1999.
- [20] R. W. Carter. *Simple groups of Lie type*. John Wiley & Sons, London-New York-Sydney, 1972. Pure and Applied Mathematics, Vol. 28.
- [21] R. W. Carter. *Finite groups of Lie type*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1993. Conjugacy classes and complex characters, Reprint of the 1985 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [22] J. Chuang and R. Rouquier. Calabi-yau algebras and perverse morita equivalences. *In preparation*.
- [23] J. Chuang and R. Rouquier. Derived equivalences for symmetric groups and \mathfrak{sl}_2 -categorification. *Ann. of Math. (2)*, 167(1) :245–298, 2008.
- [24] D. H. Collingwood and W. M. McGovern. *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*. Van Nostrand Reinhold Mathematics Series. Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1993.
- [25] C. W. Curtis. A further refinement of the Bruhat decomposition. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 102(1) :37–42, 1988.
- [26] C. W. Curtis and I. Reiner. *Methods of representation theory. Vol. I*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1990. With applications to finite groups and orders, Reprint of the 1981 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [27] E. C. Dade. A correspondence of characters. In *The Santa Cruz Conference on Finite Groups (Univ. California, Santa Cruz, Calif., 1979)*, volume 37 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 401–403.
- [28] P. Deligne. *Cohomologie étale*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 569. Springer-Verlag, Berlin, 1977. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA 4 $\frac{1}{2}$, Avec la collaboration de J. F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J. L. Verdier.
- [29] P. Deligne and G. Lusztig. Representations of reductive groups over finite fields. *Ann. of Math. (2)*, 103(1) :103–161, 1976.

- [30] M. Demazure. Désingularisation des variétés de Schubert généralisées. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 7 :53–88, 1974. Collection of articles dedicated to Henri Cartan on the occasion of his 70th birthday, I.
- [31] V. V. Deodhar. On some geometric aspects of Bruhat orderings. I. A finer decomposition of Bruhat cells. *Invent. Math.*, 79(3) :499–511, 1985.
- [32] Digne and Michel. Parabolic deligne-lusztig varieties. *In preparation*.
- [33] F. Digne and J. Michel. *Representations of finite groups of Lie type*, volume 21 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [34] F. Digne and J. Michel. Endomorphisms of Deligne-Lusztig varieties. *Nagoya Math. J.*, 183 :35–103, 2006.
- [35] F. Digne, J. Michel, and R. Rouquier. Cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig. *Adv. Math.*, 209(2) :749–822, 2007.
- [36] P. Fong and B. Srinivasan. The blocks of finite general linear and unitary groups. *Invent. Math.*, 69(1) :109–153, 1982.
- [37] P. Fong and B. Srinivasan. The blocks of finite classical groups. *J. Reine Angew. Math.*, 396 :122–191, 1989.
- [38] P. Fong and B. Srinivasan. Brauer trees in classical groups. *J. Algebra*, 131(1) :179–225, 1990.
- [39] W. L. Gan and V. Ginzburg. Quantization of Slodowy slices. *Int. Math. Res. Not.*, (5) :243–255, 2002.
- [40] M. Geck. *An introduction to algebraic geometry and algebraic groups*, volume 10 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [41] M. Geck and G. Hiss. Modular representations of finite groups of Lie type in non-defining characteristic. In *Finite reductive groups (Luminy, 1994)*, volume 141 of *Progr. Math.*, pages 195–249. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997.
- [42] M. Geck and G. Pfeiffer. *Characters of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke algebras*, volume 21 of *London Mathematical Society Monographs. New Series*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2000.
- [43] J. A. Green. Walking around the Brauer Tree. *J. Austral. Math. Soc.*, 17 :197–213, 1974. Collection of articles dedicated to the memory of Hanna Neumann, VI.
- [44] A. Grothendieck. *Revêtements étales et groupe fondamental. Fasc. I : Exposés 1 à 5*, volume 1960/61 of *Séminaire de Géométrie Algébrique*. Institut des Hautes Études Scientifiques, Paris, 1963.
- [45] A. Grothendieck and al. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 2*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 270. Springer-Verlag, Berlin, 1972. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4).

-
- [46] B. Haastert. Die Quasiaffinität der Deligne-Lusztig-Varietäten. *J. Algebra*, 102(1) :186–193, 1986.
- [47] M. E. Harris and M. Linckelmann. Splendid derived equivalences for blocks of finite p -solvable groups. *J. London Math. Soc. (2)*, 62(1) :85–96, 2000.
- [48] X. He. On the affineness of Deligne-Lusztig varieties. *J. Algebra*, 320(3) :1207–1219, 2008.
- [49] G. Hiss. Zerlegungszahlen endlicher gruppen vom lie-typ in nicht-definierender charakteristik. *Habilitationsschrift*.
- [50] G. Hiss and F. Lübeck. The Brauer trees of the exceptional Chevalley groups of types F_4 and 2E_6 . *Arch. Math. (Basel)*, 70(1) :16–21, 1998.
- [51] G. Hiss, F. Lübeck, and G. Malle. The Brauer trees of the exceptional Chevalley groups of type E_6 . *Manuscripta Math.*, 87(1) :131–144, 1995.
- [52] R. B. Howlett. On the degrees of Steinberg characters of Chevalley groups. *Math. Z.*, 135 :125–135, 1973/74.
- [53] M. Härterich. The t -equivariant cohomology of bott-samelson varieties, [arXiv :math/0412337](https://arxiv.org/abs/math/0412337). *Preprint*.
- [54] D. Juteau. Cohomology of the minimal nilpotent orbit. *Transform. Groups*, 13(2) :355–387, 2008.
- [55] M. Kashiwara and P. Schapira. *Categories and sheaves*, volume 332 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [56] N. Kawanaka. Generalized Gelfand-Graev representations of exceptional simple algebraic groups over a finite field. I. *Invent. Math.*, 84(3) :575–616, 1986.
- [57] B. Keller. On the construction of triangle equivalences. In *Derived equivalences for group rings*, volume 1685 of *Lecture Notes in Math.*, pages 155–176. Springer, Berlin, 1998.
- [58] G. Laumon. Majorations de sommes trigonométriques (d’après P. Deligne et N. Katz). In *The Euler-Poincaré characteristic (French)*, volume 83 of *Astérisque*, pages 221–258. Soc. Math. France, Paris, 1981.
- [59] M. Linckelmann. Derived equivalence for cyclic blocks over a p -adic ring. *Math. Z.*, 207(2) :293–304, 1991.
- [60] M. Linckelmann. A derived equivalence for blocks with dihedral defect groups. *J. Algebra*, 164(1) :244–255, 1994.
- [61] G. Lusztig. Homology bases arising from reductive groups over a finite field. In *Algebraic groups and their representations (Cambridge, 1997)*, volume 517 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 53–72.
- [62] G. Lusztig. Coxeter orbits and eigenspaces of Frobenius. *Invent. Math.*, 38(2) :101–159, 1976/77.

- [63] G. Lusztig. Representations of finite Chevalley groups. 39 :v+48, 1978. Expository lectures from the CBMS Regional Conference held at Madison, Wis., August 8–12, 1977.
- [64] G. Lusztig. *Characters of reductive groups over a finite field*, volume 107 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1984.
- [65] G. Lusztig. A unipotent support for irreducible representations. *Adv. Math.*, 94(2) :139–179, 1992.
- [66] J. S. Milne. *Étale cohomology*, volume 33 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.
- [67] B. Mitchell. The full imbedding theorem. *Amer. J. Math.*, 86 :619–637, 1964.
- [68] S. Morel. Note sur les polynômes de kazhdan-lusztig, arXiv :math/0603519. *Preprint*.
- [69] M. D. Neusel and L. Smith. *Invariant theory of finite groups*, volume 94 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [70] S. Orlik and M. Rapoport. Deligne-Lusztig varieties and period domains over finite fields. *J. Algebra*, 320(3) :1220–1234, 2008.
- [71] A. Premet. Nilpotent orbits in good characteristic and the Kempf-Rousseau theory. *J. Algebra*, 260(1) :338–366, 2003. Special issue celebrating the 80th birthday of Robert Steinberg.
- [72] L. Puig. Local block theory in p -solvable groups. In *The Santa Cruz Conference on Finite Groups (Univ. California, Santa Cruz, Calif., 1979)*, volume 37 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 385–388.
- [73] L. Puig. Algèbres de source de certains blocs des groupes de Chevalley. *Astérisque*, (181-182) :9, 221–236, 1990.
- [74] R. W. Richardson. Intersections of double cosets in algebraic groups. *Indag. Math. (N.S.)*, 3(1) :69–77, 1992.
- [75] J. Rickard. Derived categories and stable equivalence. *J. Pure Appl. Algebra*, 61(3) :303–317, 1989.
- [76] J. Rickard. Morita theory for derived categories. *J. London Math. Soc. (2)*, 39(3) :436–456, 1989.
- [77] J. Rickard. Lifting theorems for tilting complexes. *J. Algebra*, 142(2) :383–393, 1991.
- [78] J. Rickard. Splendid equivalences : derived categories and permutation modules. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 72(2) :331–358, 1996.
- [79] R. Rouquier. The derived category of blocks with cyclic defect groups. In *Derived equivalences for group rings*, volume 1685 of *Lecture Notes in Math.*, pages 199–220. Springer, Berlin, 1998.
- [80] R. Rouquier. Complexes de chaînes étales et courbes de Deligne-Lusztig. *J. Algebra*, 257(2) :482–508, 2002.

-
- [81] J.-P. Serre. *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann, Paris, revised edition, 1978.
- [82] J.-P. Serre. *Algebraic groups and class fields*, volume 117 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1988. Translated from the French.
- [83] L. Smith. *Polynomial invariants of finite groups*, volume 6 of *Research Notes in Mathematics*. A K Peters Ltd., Wellesley, MA, 1995.
- [84] N. Spaltenstein. *Classes unipotentes et sous-groupes de Borel*, volume 946 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [85] T. A. Springer. Regular elements of finite reflection groups. *Invent. Math.*, 25 :159–198, 1974.
- [86] T. A. Springer. Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups. *Invent. Math.*, 36 :173–207, 1976.
- [87] T. A. Springer. *Linear algebraic groups*, volume 9 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second edition, 1998.
- [88] B. Srinivasan. The characters of the finite symplectic group $\mathrm{Sp}(4, q)$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 131 :488–525, 1968.
- [89] R. Steinberg. *Lectures on Chevalley groups*. Yale University, New Haven, Conn., 1968. Notes prepared by John Faulkner and Robert Wilson.
- [90] B. Webster and M. Yakimov. A Deodhar-type stratification on the double flag variety. *Transform. Groups*, 12(4) :769–785, 2007.
- [91] C. A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

GEOMETRY OF DELIGNE-LUSZTIG VARIETIES, DECOMPOSITIONS,
MOD ℓ COHOMOLOGY AND MODULAR REPRESENTATIONS

Abstract. This work is a contribution to the modular representation theory of finite reductive groups. As in the ordinary setting, we are mainly interested in geometric constructions of the representations by means of the cohomology of Deligne-Lusztig varieties. We start by studying a Deodhar-type decomposition that we use to locate a certain class of representations, the so-called Gelfand-Graev modules and some of their generalizations. More precise results are obtained for varieties associated to some short-length regular elements. The case of Coxeter elements holds an important place in this work: for these specific elements we give an explicit construction of a complex representing the cohomology of the corresponding varieties, leading to a proof of the geometric version of Broué's conjecture for some prime numbers. We also deduce the Brauer tree of the principal block in this case, which settles a conjecture of Hiss, Lübeck and Malle. Both of these results rely on the assumption that the cohomology is torsion-free, which is shown to hold for several classical and exceptional groups.

Keywords. finite reductive groups, Deligne-Lusztig theory, Deodhar decomposition, Białynicki-Birula decomposition, Gelfand-Graev modules, generalized Gelfand-Graev modules, Brauer trees, Broué's conjecture.

Résumé. Cette thèse porte sur la construction et l'étude des représentations modulaires des groupes réductifs finis. Comme dans le cas ordinaire, l'accent est mis sur les constructions de nature géométrique, obtenues à partir de la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig. On commence par introduire des méthodes de décomposition du type Deodhar, permettant de déterminer en toute généralité la présence d'une classe particulière de représentations, les modules de Gelfand-Graev, ainsi que certaines de leurs versions généralisées. Des résultats plus précis sont ensuite démontrés pour des variétés associées à certains éléments réguliers de petite longueur. Le cas des éléments de Coxeter tient une place importante dans ce mémoire : pour ces éléments, on détermine un représentant explicite du complexe de cohomologie, aboutissant à une preuve de la version géométrique de la conjecture de Broué pour certains nombres premiers. On en déduit aussi la forme de l'arbre de Brauer du bloc principal dans ce cas, ce qui résout une conjecture de Hiss, Lübeck et Malle. Ces deux résultats sont conditionnés par une hypothèse assurant l'absence de torsion dans la cohomologie, dont on montre qu'elle est satisfaite pour de nombreux groupes classiques et exceptionnels.

Mots clefs. groupes réductifs finis, théorie de Deligne-Lusztig, décomposition de Deodhar, décomposition de Białynicki-Birula, modules de Gelfand-Graev, modules de Gelfand-Graev généralisés, arbres de Brauer, conjecture de Broué.

Mathematics Subject Classification. 20C33 - 18E30 - 20C20 - 20G40