

Habilitation Universitaire

Analyse et applications

par

Bessem SAMET

Ecole Supérieure des Sciences et Techniques de Tunis

Plan

1. Méthode de la dérivée topologique en optimisation de formes
 - ▶ Qu'est-ce qu'un problème d'optimisation de formes ?
 - ▶ Exemples
 - ▶ Définition de la topologie
 - ▶ Optimisation de formes classique/topologique
 - ▶ Principe de la méthode de la dérivée topologique
 - ▶ Méthode de l'adjoint
 - ▶ Dérivée topologique pour l'équation de Helmholtz
 - ▶ Applications : optimisation d'un guide d'ondes électromagnétique
2. Inégalité de Wente pour l'opérateur de Helmholtz modifié
 - ▶ Introduction
 - ▶ Problème de Wente pour l'équation de HM
 - ▶ Constante optimale pour la norme $\| \cdot \|_{\infty}$
 - ▶ Constante optimale pour la norme $\| \cdot \|_{L^2}$
 - ▶ Extension à une large classe d'opérateurs

Méthode de la dérivée topologique en optimisation de formes

Qu'est-ce qu'un problème d'optimisation de formes ?

But :

$$\min_{\Omega \in \mathcal{O}} j(\Omega)$$

où

- ▶ \mathcal{O} est un ensemble de formes admissibles,
- ▶ $j(\Omega) = J(u_\Omega)$,
- ▶ u_Ω est la solution d'une **EDP** posée dans Ω .

Difficulté : $j'(\Omega)$?

Exemples

Exemple 1 : Problèmes isopérimétriques

Soit $\mathcal{O} := \{\Omega \text{ domaine borné de } \mathbb{R}^N, |\Omega| = S_0 > 0\}$, $N \geq 2$

On considère $j : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$j(\Omega) := \text{surface du bord ou périmètre de } \Omega$$

Le pb d'optimisation de formes est :

$$(\mathcal{P}) : \quad \Omega^* \mid j(\Omega^*) = \min_{\Omega \in \mathcal{O}} j(\Omega).$$

Par l'inégalité isopérimétrique [**J. Steiner-E. Schmidt**] :

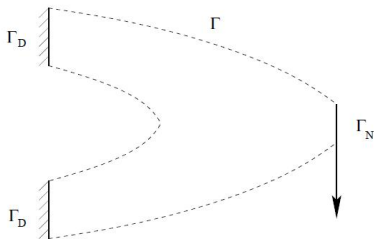
$$|\Omega|^{N-1} \leq \frac{1}{N^N V_N} j(\Omega)^N,$$

où V_N est le volume de la boule unité, on obtient :

$$\Omega^* = \text{la boule de volume } S_0$$

Exemple 2 : Optimisation de la forme d'une membrane

- ▶ Ω : domaine de référence
- ▶ $\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D$
- ▶ Γ : variable
- ▶ Γ_D : fixe (Dirichlet bc)
- ▶ Des efforts g (Neumann bc) sur Γ_N



Le déplacement vertical u_Ω est solution de :

$$\begin{cases} \Delta u_\Omega = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_\Omega = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \partial_n u_\Omega = g & \text{sur } \Gamma_N \\ \partial_n u_\Omega = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

$$\mathcal{O} := \left\{ \Omega \subset \mathbb{R}^2 \mid \Gamma_D \cup \Gamma_N \subset \partial\Omega \text{ et } \int_\Omega dx = V_0 > 0 \right\}.$$

- ▶ On peut choisir comme critère **la compliance** qui prend ici la forme suivante :

$$j(\Omega) = J(u_\Omega) = \int_{\Gamma_N} g u_\Omega d\Gamma_N.$$

- ▶ Si on veut obtenir un **déplacement cible** $u_0(x)$, on peut choisir comme critère :

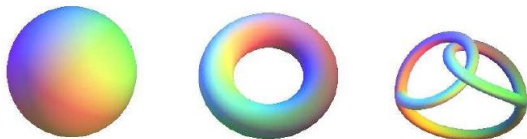
$$j(\Omega) = J(u_\Omega) = \int_{\Omega} |u(x) - u_0(x)|^2 dx.$$

Finalement, le problème d'optimisation de la forme d'une membrane s'écrit :

$$(\mathcal{P}) : \quad \Omega^* \mid j(\Omega^*) = \min_{\Omega \in \mathcal{O}} j(\Omega)$$

Définition de la topologie

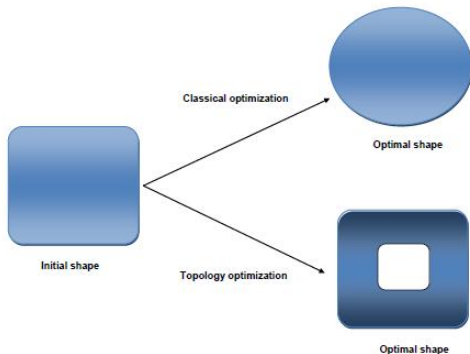
- ▶ Deux formes ont la **même topologie** si on peut passer de l'une à l'autre par une **déformation continue**
- ▶ En **dimension 2** la topologie est caractérisée par le nombre de composantes connexes du bord ou de **trous**
- ▶ En **dimension 3** c'est plus compliqué ! il faut tenir compte du **nombre de composantes connexes du bord** mais aussi du **nombre de boucles**
- ▶ une boule \neq un tore \neq un bretzel



Optimisation de formes classique/topologique

Parmi les problèmes d'optimisation de formes on peut distinguer deux catégories :

- ▶ **l'optimisation de formes classique** où, à partir d'une forme initiale, on varie la position des frontières de la forme (sans toutefois changer la topologie de la forme, c'est-à-dire le nombre de trous en 2-d),
- ▶ **l'optimisation de formes topologique** où, l'on cherche, sans aucune restriction explicite ou implicite, la meilleure forme possible quitte à changer de topologie.



Principe de la méthode de la dérivée topologique

Fonction à minimiser :

$$\Omega \mapsto u_\Omega \mapsto j(\Omega) = J(u_\Omega).$$

La méthode de la dérivée topologique étudie comment varie la fonction coût lorsque l'on effectue un trou $B(x, \varepsilon)$ dans le domaine Ω à l'endroit x :

$$\varepsilon \mapsto \Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B(x, \varepsilon)} \mapsto u_{\Omega_\varepsilon} \mapsto j(\Omega_\varepsilon) = J(u_{\Omega_\varepsilon}).$$

D'une manière générale :

$$j(\Omega_\varepsilon) - j(\Omega) = f(\varepsilon)g(x) + o(f(\varepsilon))$$

où $f(\varepsilon) > 0$ et $f(0^+) = 0$. La fonction g est la **dérivée topologique**.
On a intérêt à trouser là où la dérivée topologique est la plus négative.
CNS d'optimalité : $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega^*$.

Méthode de l'adjoint

- ▶ Soit V un \mathbb{C} -espace de Hilbert (fixe) et $J : V \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(H1) : J(u+h) = J(u) + \operatorname{Re}(L_u(h)) + o(\|h\|_V).$$

Exemple : Soit $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$J(u) = \|u\|_V^2, \quad \forall u \in V.$$

Dans ce cas, pour $u \in V$, on a :

$$L_u(h) = 2\operatorname{Re}(h, u)_V, \quad \forall h \in V.$$

- ▶ Pour tout $\varepsilon \geq 0$, soit $u_\varepsilon \in V$ solution de :

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \ell(v), \quad \forall v \in V.$$

- ▶ On suppose : $\exists \alpha > 0$ tq :

$$(H2) : \forall u \in V, \exists v \in V^* \mid |a_0(u, v)| \geq \alpha \|u\|_V \|v\|_V.$$

- ▶ On suppose :

$$(H3) : \|a_\varepsilon - a_0 - f(\varepsilon)\delta_a\| = o(f(\varepsilon))$$

où $f(\varepsilon) > 0$, $f(0^+) = 0$ et $\delta_a : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire et continue.

- ▶ Soit $p_0 \in V$ (état adjoint) solution du problème adjoint :

$$a_0(v, p_0) = -L_{u_0}(v), \quad \forall v \in V.$$

On montre le résultat suivant :

Proposition :

On suppose que les hypothèses (H1)-(H3) sont vérifiées. On a :

$$J(u_\varepsilon) - J(u_0) = f(\varepsilon) \operatorname{Re}(\delta_a(u_0, p_0)) + o(f(\varepsilon)) \quad \square$$

Dérivée topologique pour l'équation de Helmholtz

Pb initial : Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N = 2$ ou 3), $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$.

$$(P) : \begin{cases} \Delta u_\Omega + k^2 u_\Omega & = 0 \text{ dans } \Omega, \\ u_\Omega & = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ \partial_n u_\Omega & = Su_\Omega + h \text{ sur } \Gamma_1. \end{cases}$$

On pose :

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma_0} = 0\}, \\ a_\Omega(u, v) &= \int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v} dx - k^2 \int_\Omega u \bar{v} dx - \langle Su, \bar{v} \rangle, \\ \ell(v) &= \langle h, \bar{v} \rangle. \end{aligned}$$

$u_\Omega \in V(\Omega)$ est solution du problème variationnel :

$$(P_v) : a_\Omega(u_\Omega, v) = \ell(v), \quad \forall v \in V(\Omega).$$

Fonction coût : $J : V(O) \rightarrow \mathbb{R}$, où

$$V(O) = \{v \in H^1(O) \mid v|_{\Gamma_0} = 0\}.$$

On pose :

$$j(\Omega) = J(u_{\Omega|O})$$

Etat adjoint : $p_{\Omega} \in V(\Omega)$ solution de :

$$a_{\Omega}(v, p_{\Omega}) = -L_{u_{\Omega|O}}(v), \quad \forall v \in V(\Omega).$$

Pb avec trou : Pour $\varepsilon > 0$ (assez petit), on considère le domaine avec trou $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon}$, $x_0 \in \Omega$, $\omega_\varepsilon = x_0 + \varepsilon\omega$, $\omega \subset \mathbb{R}^N$.

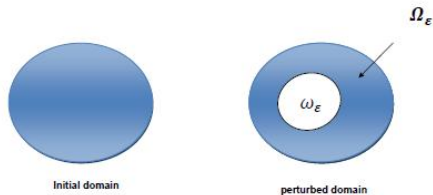
$$\begin{cases} \Delta u_{\Omega_\varepsilon} + k^2 u_{\Omega_\varepsilon} & = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon \\ u_{\Omega_\varepsilon} & = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \cup \partial\omega_\varepsilon \\ \partial_n u_{\Omega_\varepsilon} & = Su_{\Omega_\varepsilon} + \theta \text{ sur } \Gamma_1. \end{cases}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose :

$$j(\Omega_\varepsilon) = J(u_{\Omega_\varepsilon}|_0), \quad j(\Omega) = J(u_\Omega|_0).$$

But : Développement asymptotique de $j(\Omega_\varepsilon) - j(\Omega)$?

Problème ! u_{Ω_ε} appartient à un espace fonctionnel qui dépend de ε .



Troncature du domaine : Soit $R > 0$ tel que :

$$\overline{\omega_\varepsilon} \subset B(x_0, R) \text{ et } \overline{B(x_0, R)} \subset \Omega.$$

On définit le domaine tronqué :

$$\Omega_R = \Omega \setminus \overline{B(x_0, R)}$$

Pour tout $\varepsilon \geq 0$, on introduit l'opérateur Dirichlet-to-Neumann :

$$T_\varepsilon : H^{1/2}(\Gamma_R) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_R)$$

défini par :

$$T_\varepsilon \varphi = \nabla u_\varepsilon^\varphi \cdot n|_{\Gamma_R}, \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma_R)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_\varepsilon^\varphi + k^2 u_\varepsilon^\varphi = 0 \text{ dans } D_\varepsilon \\ u_\varepsilon^\varphi = 0 \text{ sur } \partial\omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon^\varphi = \varphi \text{ sur } \Gamma_R \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u_0^\varphi + k^2 u_0^\varphi = 0 \text{ dans } B(x_0, R) \\ u_0^\varphi = \varphi \text{ sur } \Gamma_R \end{array} \right.$$

Reformulation du problème dans un espace fonctionnel fixe : On définit l'espace fonctionnel fixe :

$$V(\Omega_R) = \{v \in H^1(\Omega_R) \mid v|_{\Gamma_0} = 0\}.$$

On pose :

$$u_\varepsilon = u_{\Omega_\varepsilon}|_{\Omega_R}, \quad u_0 = u_{\Omega}|_{\Omega_R}, \quad p_0 = p_{\Omega}|_{\Omega_R}.$$

On peut écrire :

$$j(\Omega) = J(u_{\Omega|O}) = J(u_{0|O}) \text{ et } j(\Omega_\varepsilon) = J(u_{\Omega_\varepsilon|O}) = J(u_{\varepsilon|O})$$

On montre que :

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \ell(v), \quad a_0(v, p_0) = -L_{u_0|O}(v) \quad \forall v \in V(\Omega_R)$$

$$a_\varepsilon(u, v) = \int_{\Omega_R} (\nabla u \cdot \overline{\nabla v} - k^2 u \bar{v}) dx - \langle Su, \bar{v} \rangle + \langle T_\varepsilon u|_{\Gamma_R}, \bar{v} \rangle$$

But : $J(u_{\varepsilon|O}) - J(u_{0|O})$ pour $\varepsilon \rightarrow 0^+$: Méthode de l'adjoint

Hypothèse (H3) : trouver $f(\varepsilon)$ et $\delta_a : V(\Omega_R) \times V(\Omega_R) \rightarrow \mathbb{C}$ avec

$$\|a_\varepsilon - a_0 - f(\varepsilon)\delta_a\| = o(f(\varepsilon)).$$

Etude asymptotique de $a_\varepsilon - a_0$:

$$(a_\varepsilon - a_0)(u, v) = \int_{\Gamma_R} (T_\varepsilon - T_0)u \bar{v} d\Gamma_R$$

L'étude asymptotique de $a_\varepsilon - a_0$ revient à l'étude asymptotique de $(T_\varepsilon - T_0)\varphi$ pour $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_R)$.

- ▶ Pour un trou de forme particulière (cercle, sphère,...) on peut avoir une expression explicite de $T_\varepsilon - T_0$.
- ▶ Pour un trou de forme quelconque, on utilise une représentation intégrale de la solution.

Pour $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_R)$, on obtient les expressions suivantes :

$$T_\varepsilon \varphi(R, \theta) = k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{J'_n(kR) Y_n(k\varepsilon) - J_n(k\varepsilon) Y'_n(kR)}{J_n(kR) Y_n(k\varepsilon) - Y_n(kR) J_n(k\varepsilon)} \varphi_n e^{in\theta}$$

$$T_0 \varphi(R, \theta) = k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{J'_n(kR)}{J_n(kR)} \varphi_n e^{in\theta} (1)$$

On introduit l'opérateur : $\delta_T : H^{1/2}(\Gamma_R) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_R)$ défini par :

$$\delta_T \varphi(R, \theta) = \frac{1}{RJ_0^2(kR)} \varphi_0, \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma_R).$$

Proposition :

$$\left\| T_\varepsilon - T_0 - \frac{-1}{\ln \varepsilon} \delta_T \right\| = o\left(\frac{1}{\ln \varepsilon}\right) \quad \square$$

On pose :

$$\delta_a(u, v) = \frac{u^{mean}}{J_0(kR)} \frac{\overline{v^{mean}}}{J_0(kR)}, \quad \forall u, v \in V(\Omega_R).$$

Proposition :

$$\|a_\varepsilon - a_0 - f(\varepsilon)\delta_a\| = o(f(\varepsilon)), \quad f(\varepsilon) = \frac{-2\pi}{\ln \varepsilon} \quad \square$$

La méthode de l'adjoint $\Rightarrow J(u_\varepsilon) - J(u_0) = f(\varepsilon)Re(\delta_a(u_0, p_0)) + o(f(\varepsilon))$.

On montre que :

$$\delta_a(u_0, p_0) = \delta_a(u_\Omega, p_\Omega) = u_\Omega(x_0) \overline{p_\Omega(x_0)}$$

Théorème (Samet, Amstutz, Masmoudi, 2003) :

Pour $N = 2$, on a le développement asymptotique suivant :

$$j(\Omega \setminus \overline{B(x_0, \varepsilon)}) - j(\Omega) = \frac{-2\pi}{\ln \varepsilon} \operatorname{Re}(u_\Omega(x_0) \overline{p_\Omega(x_0)}) + o\left(\frac{1}{\ln \varepsilon}\right) \quad \square$$

Ainsi, la dérivée topologique en x_0 est donnée par :

$$g(x_0) = \operatorname{Re}(u_\Omega(x_0) \overline{p_\Omega(x_0)}).$$

Remarque : L'expression de la dérivée topologique pour $N = 2$ est indépendante de la forme du trou. Ce n'est pas le cas pour $N = 3!!!$

Le cas $N = 3$ et $\omega_\varepsilon = \varepsilon\omega$

Dans le cas où ω est de forme quelconque, l'idée consiste à approcher $u_\varepsilon^\varphi - u_0^\varphi$ par la solution d'un problème extérieur à ω_ε où seulement la partie principale de l'opérateur non-homogène est considérée.

La variation $u_\varepsilon^\varphi - u_0^\varphi$ est solution de :

$$\begin{cases} \Delta(u_\varepsilon^\varphi - u_0^\varphi) + k^2(u_\varepsilon^\varphi - u_0^\varphi) = 0 & \text{dans } D_\varepsilon \\ u_\varepsilon^\varphi - u_0^\varphi = -u_0^\varphi & \text{sur } \partial\omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon^\varphi - u_0^\varphi = 0 & \text{sur } \Gamma_R \end{cases}$$

On approche $u_\varepsilon^\varphi - u_0^\varphi$ par $u_{\varepsilon,\varphi}$ solution de :

$$\begin{cases} \Delta u_{\varepsilon,\varphi} + k^2 u_{\varepsilon,\varphi} = 0 & \text{dans } D_\varepsilon \\ u_{\varepsilon,\varphi} = -u_0^\varphi(0) & \text{sur } \partial\omega_\varepsilon \\ u_{\varepsilon,\varphi} = 0 & \text{sur } \Gamma_R \end{cases}$$

On approche $u_{\varepsilon,\varphi}$ par v_ε^φ , où $v_\varepsilon^\varphi(x) = v_\omega^\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

Ici, v_ω^φ est la solution du problème extérieur :

$$\begin{cases} -\Delta v_\omega^\varphi = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\omega} \\ v_\omega^\varphi = 0 & \text{à } \infty \\ v_\omega^\varphi = -u_0^\varphi(0) & \text{sur } \partial\omega \end{cases}$$

On montre que :

$$v_\varepsilon^\varphi(x) = \varepsilon \left(\int_{\partial\omega} p_\omega(x) d\omega \right) E(x) + O(\varepsilon^2),$$

où $p_\omega \in H^{-1/2}(\partial\omega)$ est la solution de l'équation intégrale :

$$\int_{\partial\omega} E(y-x) p_\omega(x) d\omega = -u_0^\varphi(0), \quad \forall y \in \partial\omega.$$

En posant : $P_\omega^\varphi(x) = \left(\int_{\partial\omega} p_\omega(x) d\omega \right) E(x)$, on peut écrire :

$$\boxed{u_\varepsilon^\varphi - u_0^\varphi = \varepsilon P_\omega^\varphi(x) + R(\varepsilon)}$$

Première tentative d'approximation : On introduit l'opérateur δ_T défini par :

$$\delta_T \varphi = \nabla P_\omega^\varphi \cdot n|_{\Gamma_R}, \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma_R).$$

On montre le résultat suivant :

$$\|T_\varepsilon - T_0 - \varepsilon \delta_T\| = O(\varepsilon)$$

Résultat non exploitable ! on cherche $o(\varepsilon)$ non $O(\varepsilon)$.

Approximation finale : On introduit un terme correctif Q_ω^φ solution du problème intérieur :

$$\begin{cases} \Delta Q_\omega^\varphi + k^2 Q_\omega^\varphi = 0 & \text{dans } B(0, R) \\ Q_\omega^\varphi = P_\omega^\varphi|_{\Gamma_R} & \text{sur } \Gamma_R \end{cases}$$

On introduit l'opérateur δ_T défini par :

$$\delta_T \varphi = \nabla (P_\omega^\varphi - Q_\omega^\varphi) \cdot n|_{\Gamma_R}, \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma_R)$$

Proposition :

$$\|T_\varepsilon - T_0 - \varepsilon \delta_T\| = o(\varepsilon) \quad \square$$

On pose :

$$\delta_a(u, v) = \int_{\Gamma_R} \delta_T u \bar{v} \, d\Gamma_R, \quad \forall u, v \in V(\Omega_R)$$

Proposition :

$$\|a_\varepsilon - a_0 - \varepsilon \delta_a\| = o(\varepsilon) \quad \square$$

La méthode de l'adjoint $\Rightarrow J(u_\varepsilon) - J(u_0) = \varepsilon \operatorname{Re}(\delta_a(u_0, p_0)) + o(\varepsilon)$.

On montre que :

$$\delta_a(u_0, p_0) = \delta_a(u_\Omega, p_\Omega) = A_\omega(u_\Omega(x_0)) \overline{p_\Omega(x_0)}$$

Ici,

$$A_\omega(u_\Omega(x_0)) = \int_{\partial\omega} p_\omega(x) \, d\omega,$$

où

$$\int_{\partial\omega} E(y-x) p_\omega(x) \, d\omega = -u_\Omega(x_0), \quad \forall y \in \partial\omega.$$

Théorème(Samet-Pommier, 2004) :

Pour $N = 3$, $\omega_\varepsilon = x_0 + \varepsilon\omega$, on a le développement asymptotique suivant :

$$j(\Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon}) - j(\Omega) = \varepsilon \operatorname{Re} \left[\left(\int_{\partial\omega} p_\omega(x) d\omega \right) \overline{p_\Omega(x_0)} \right] + o(\varepsilon). \quad \square$$

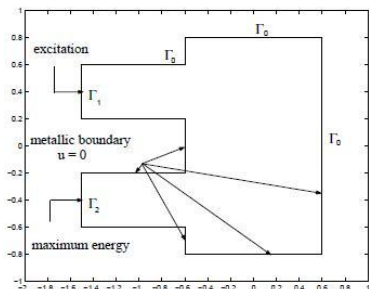
Ainsi, l'expression de la dérivée topologique en dimension 3 est donnée par :

$$g(x_0) = \operatorname{Re} \left[\left(\int_{\partial\omega} p_\omega(x) d\omega \right) \overline{p_\Omega(x_0)} \right]$$

Cas particulier $\omega_\varepsilon = B(x_0, \varepsilon)$: Dans ce cas, on montre que :

$$g(x_0) = 4\pi \operatorname{Re}(u_\Omega(x_0) \overline{p_\Omega(x_0)})$$

Optimisation d'un guide d'ondes électromagnétique

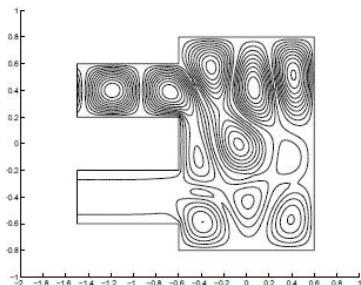


Model : H-plane, harmonic wave (Helmholtz), mode TE_{10}

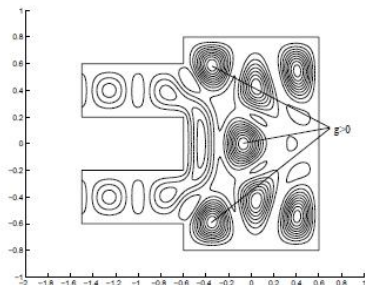
Une excitation est imposée sur Γ_1 : $u_e(y) = \cos\left(\frac{\pi y}{d}\right)$.

Fonction coût à maximiser : $j(\Omega) = J(u_\Omega) = |S_{12}(u_\Omega)|^2$

Ici, $u_\Omega = E_z$, $k = 10$.



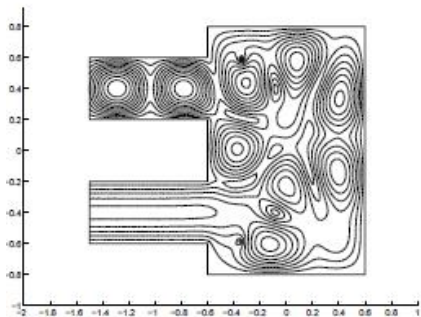
(a)



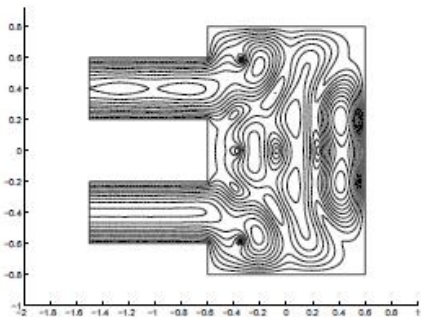
(b)

Modulus of the electric field (a) and topological gradient (b).

- ▶ 88.45% de l'énergie est réfléchi.
- ▶ La dérivée topologique présente trois maxima locaux.
- ▶ En chaque maximum local, on introduit un point métallique.



(a)



(b)

Modulus of the electric fields obtained after a first iteration (a) and after two iterations (b).

- ▶ Première itération : 39.19% de l'énergie est perdue
- ▶ Deuxième itération : 0.7 % de l'énergie est perdue !

Inégalité de Wente pour l'opérateur de Helmholtz modifié

Introduction

Problème de Wente :

- ▶ Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $u = (a, b)$, $a, b \in H^1(\Omega, \mathbb{R})$.
- ▶ On considère le problème : trouver Φ_0 solution de

$$(W_0) : \quad -\Delta\Phi_0 = \det(\nabla u) = a_{x_1}b_{x_2} - a_{x_2}b_{x_1} \text{ dans } \Omega$$

avec la condition aux limites (condition de Dirichlet) :

$$(D) : \quad \begin{cases} \Phi_0 & = & 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ si } \Omega \text{ est borné,} \\ \Phi_0(x) & \rightarrow & 0 \text{ quand } \|x\| \rightarrow +\infty \text{ si } \Omega = \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

- ▶ Le problème $(W_0) - (D)$ est connu en littérature sous le nom du **problème de Wente classique**.
- ▶ A première vue, on a :

$$f = \det(\nabla u) \in L^1(\Omega) \Rightarrow \Phi_0 \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^q(\Omega), \quad p < 2, q < \infty.$$

Régularité :

En adaptant un travail de H. Wente, H. Brezis et J. M. Coron ont obtenu une régularité plus forte de la solution du problème $(W_0) - (D)$.

Théorème (Brezis-Coron, 1984) :

Soit Ω un ouvert borné et régulier de \mathbb{R}^2 . Supposons que $a, b \in H^1(\Omega)$ et soit $\Phi_0 \in W_0^{1,1}(\Omega)$ l'unique solution de $(W_0) - (D)$. Alors :

1. $\Phi_0 \in C(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)$
2. Il existe $C(\Omega) > 0$ telle que :

$$(*) \quad \|\Phi_0\|_\infty + \|\nabla\Phi_0\|_2 \leq C(\Omega)\|\nabla a\|_2\|\nabla b\|_2 \quad \square$$

(*) : inégalité de Wente

Inégalité de Wente avec une constante universelle :

- ▶ Le cas $\Omega = B(0, 1)$: $\exists C > 0$ tel que :

$$\|\Phi_0\|_{L^\infty(B)} + \|\nabla\Phi_0\|_{L^2(B)} \leq C\|\nabla a\|_{L^2(B)}\|\nabla b\|_{L^2(B)}$$

- ▶ Le cas Ω un ouvert borné simplement connexe de frontière C^1 : il existe une transformation conforme

$$\begin{aligned} T : \Omega &\rightarrow B(0, 1) \\ x = (x_1, x_2) &\mapsto Tx = (T_1(x), T_2(x)) \end{aligned}$$

Pour $a, b \in H^1(\Omega)$ et Φ_0 la solution de $(W_0) - (D)$ dans Ω , on pose :

$$\tilde{a}(y) = a(T^{-1}(y)), \tilde{b}(y) = b(T^{-1}(y)), \tilde{\Phi}_0(y) = \Phi_0(T^{-1}(y)).$$

On vérifie que $\tilde{\Phi}_0$ est la solution de :

$$(\tilde{W}_0) : \quad -\Delta\tilde{\Phi}_0 = \det(\nabla\tilde{u}) \text{ dans } B(0, 1)$$

avec la condition aux limites :

$$(\tilde{D}) : \quad \tilde{\Phi}_0 = 0 \text{ sur } \partial B(0, 1).$$

D'après le cas précédent :

$$\|\tilde{\Phi}_0\|_{L^\infty(B)} + \|\nabla\tilde{\Phi}_0\|_{L^2(B)} \leq C\|\nabla\tilde{a}\|_{L^2(B)}\|\nabla\tilde{b}\|_{L^2(B)}.$$

On vérifie :

$$\|\tilde{\Phi}_0\|_{L^\infty(B)} = \|\Phi_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \|\nabla\tilde{\Phi}_0\|_{L^2(B)} = \|\nabla\Phi_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

- ▶ Cas d'un ouvert borné quelconque (non nécessairement simplement connexe) : [F. Bethuel-J. M. Ghidaglia, 1993].

Constantes optimales :

Notons :

$$C_{\infty}^0(\Omega) := \sup_{\nabla a, \nabla b \neq 0} \frac{\|\Phi_0\|_{\infty}}{\|\nabla a\|_2 \|\nabla b\|_2}, \quad C_2^0(\Omega) := \sup_{\nabla a, \nabla b \neq 0} \frac{\|\nabla \Phi_0\|_2}{\|\nabla a\|_2 \|\nabla b\|_2}$$

Constante optimale pour la norme $\|\cdot\|_{\infty}$:

Théorème (Baraket, 1996) :

1. $C_{\infty}^0(\mathbb{R}^2) = 1/2\pi$
2. Si Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , alors : $C_{\infty}^0(\Omega) \geq 1/2\pi$
3. Si de plus, Ω est simplement connexe, $C_{\infty}^0(\Omega) = 1/2\pi$ \square

Théorème (Topping, 1997) :

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 . On a :

$$C_{\infty}^0(\Omega) = 1/2\pi \quad \square$$

Constante optimale pour la norme $\|\cdot\|_2$:

Théorème (Yuxin, 1998) :

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 . On a :

$$C_2^0(\Omega) = \sqrt{\frac{3}{16\pi}} \quad \square$$

Problème de Wentz pour l'équation de HM

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , $u = (a, b) \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$, $\alpha > 0$ (constante) et Φ_α solution de $(W_\alpha) - (D)$, où

$$(W_\alpha) : \quad -\Delta\Phi_\alpha + \alpha\Phi_\alpha = \det(\nabla u) \text{ sur } \Omega.$$

Proposition (régularité) :

Soit Ω un ouvert borné et régulier de \mathbb{R}^2 et $a, b \in H^1(\Omega)$. Alors $(W_\alpha) - (D)$ admet une et une seule solution $\Phi_\alpha \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. De plus,

$$(**) \quad \|\Phi_\alpha\|_\infty + \frac{\|\nabla\Phi_\alpha\|_2^2 + \alpha\|\Phi_\alpha\|_2^2}{\|\nabla\Phi_\alpha\|_2} \leq C\|\nabla a\|_2\|\nabla b\|_2,$$

où $C > 0$ est une constante universelle. \square

Pour $\alpha = 0$, $(**)$ est l'inégalité de Wentz classique.

Démonstration : Il suffit d'écrire :

$$\Phi_\alpha = \Phi_0 + \Psi_\alpha,$$

où Φ_0 est solution de $(W_0) - (D)$ et Ψ_α est solution de

$$\begin{cases} -\Delta \Psi_\alpha + \alpha \Psi_\alpha & = -\alpha \Phi_0 \text{ dans } \Omega \\ \Psi_\alpha & = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On note :

$$C_\infty^\alpha(\Omega) := \sup_{\nabla a, \nabla b \neq 0} \frac{\|\Phi_\alpha\|_\infty}{\|\nabla a\|_2 \|\nabla b\|_2}, \quad C_2^\alpha(\Omega) := \sup_{\nabla a, \nabla b \neq 0} \frac{\|\nabla \Phi_\alpha\|_2^2 + \alpha \|\Phi_\alpha\|_2^2}{\|\nabla a\|_2 \|\nabla b\|_2 \|\nabla \Phi_\alpha\|_2}$$

Difficultés :

- ▶ Opérateur non-homogène : pas d'invariance par transformation conforme.
- ▶ Manipulation des fonctions de Bessel modifiées.

Constante optimale pour la norme $\| \cdot \|_\infty$

On s'intéresse à la détermination de la constante optimale :

$$C_\infty^\alpha(\Omega) := \sup_{\nabla a, \nabla b \neq 0} \frac{\|\Phi_\alpha\|_\infty}{\|\nabla a\|_2 \|\nabla b\|_2}.$$

Théorème (Samet-Jleli, 2008) :

$$C_\infty^\alpha(\mathbb{R}^2) = C_\infty^0(\mathbb{R}^2) = \frac{1}{2\pi}, \quad \forall \alpha > 0 \quad \square$$

Théorème (Samet-Jleli, 2008) :

Soit Ω un ouvert borné et régulier de \mathbb{R}^2 . On a :

$$\frac{1}{2\pi} \leq C_\infty^\alpha(\Omega) \leq \frac{1}{\pi}, \quad \forall \alpha > 0 \quad \square$$

La détermination exacte de $C_\infty^\alpha(\Omega)$ reste un problème ouvert !

Constante optimale pour la norme $\| \cdot \|_2$

On s'intéresse à la détermination de la constante optimale :

$$C_2^\alpha(\Omega) := \sup_{\nabla a, \nabla b \neq 0} \frac{\|\nabla \Phi_\alpha\|_2^2 + \alpha \|\Phi_\alpha\|_2^2}{\|\nabla a\|_2 \|\nabla b\|_2 \|\nabla \Phi_\alpha\|_2}.$$

On a obtenu le résultat suivant.

Théorème (Samet-Jleli, 2008) :

Soit Ω un ouvert borné et régulier de \mathbb{R}^2 . On a :

$$C_2^\alpha(\mathbb{R}^2) \leq \sqrt{3/32\pi} \leq C_2^\alpha(\Omega) \leq \sqrt{3/16\pi}, \quad \forall \alpha > 0 \quad \square$$

Extension à une large classe d'opérateurs

Nous considérons le problème :

$$(W) : \begin{cases} A\vec{U}_A & = \vec{F} \text{ dans } \mathbb{R}^2 \\ \vec{U}_A(x) & \rightarrow \vec{0} \text{ quand } \|x\| \rightarrow +\infty \end{cases}$$

où A est un opérateur elliptique, \vec{U}_A et \vec{F} sont deux vecteurs de \mathbb{R}^N donnés par :

$$\begin{aligned} \vec{U}_A(x) &= (U_A^1(x), U_A^2(x), \dots, U_A^N(x)), \quad x \in \mathbb{R}^2 \\ \vec{F}(x) &= (F^1(x), F^2(x), \dots, F^N(x)). \end{aligned}$$

Pour tout i , la composante F^i est donnée par :

$$F^i(x) = a_{x_1}^i b_{x_2}^i - a_{x_2}^i b_{x_1}^i = \det(\nabla u^i),$$

où $u^i = (a^i, b^i) \in H^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

Notations :

- ▶ Soit \vec{X} une fonction vectorielle définie par :

$$\vec{X}(x) = (X^1(x), X^2(x), \dots, X^N(x)), \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Nous notons :

$$\|\vec{X}\|_\infty := \sup_{1 \leq i \leq N} \|X^i\|_\infty.$$

- ▶ La distribution matricielle $E_A \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^{N \times N})$ désigne la solution fondamentale de A : chaque colonne E_A^j est solution de $AE_A^j = \delta_{e_j}$, où δ est la distribution de Dirac et $(e_j)_j$ est la base canonique de \mathbb{R}^N .

Hypothèses :

- ▶ (H1) : Pb (W) admet une et une seule solution dans $H^1(\mathbb{R}^2)^N$.
- ▶ (H2) : La solution fondamentale s'écrit :

$$E_A(x) = \tau f(r)I_N + G_A(x)$$

où $G_A = (G_A(i,j))_{1 \leq i,j \leq N}$ satisfait :

$$\begin{cases} G_A(i,j) \in L^\infty(\mathbb{R}^2), \forall i,j \\ \exists j \mid \partial_r G_A(i,j) = 0, \forall i. \end{cases}$$

- ▶ (H3) : La fonction $f \in C^1(0, +\infty)$ et vérifie :

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0^+} rf(r) = 0 \\ r \mapsto rf'(r) \in L^\infty(0, +\infty) \\ \sup_{r \geq 0} r|f'(r)| = 1. \end{cases}$$

- ▶ (H4) : $A[\vec{U}_A(x + x_0)] = \vec{F}(x + x_0), \forall x, x_0 \in \mathbb{R}^2$.

Estimation dans L^∞ :

Proposition :

Sous les hypothèses (H1)-(H4), nous avons l'estimation suivante :

$$\|\vec{U}_A\|_\infty \leq (\tau + \nu) \sum_{i=1}^N \|\nabla a^i\|_2 \|\nabla b^i\|_2,$$

où $\nu := \sup_{1 \leq i, j \leq N} \|G_A(i, j)\|_\infty$

□

On note :

$$C_\infty^A(\mathbb{R}^2) := \sup_{(a, b) \in V} \frac{\|\vec{U}_A\|_\infty}{\sum_{i=1}^N \|\nabla a^i\|_2 \|\nabla b^i\|_2}$$

où

$$V := \{(a, b) \in H^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^{2N}) \mid \exists i_0; \|\nabla a^{i_0}\|_2 \|\nabla b^{i_0}\|_2 \neq 0\}.$$

Estimation de la constante optimale : On a le résultat suivant.

Théorème (Samet-Jleli, 2007) :

On suppose que les hypothèses (H1)-(H4) sont vérifiées. Soit $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

- ▶ $g \in C^\infty(0, +\infty) \setminus \{0\}$
- ▶ $r \mapsto rg^2(r) \in L^1(0, +\infty)$
- ▶ $r \mapsto r^3g'^2(r) \in L^1(0, +\infty)$
- ▶ $\lim_{r \rightarrow 0^+} rg(r) = 0$
- ▶ $\lim_{r \rightarrow 0^+} r^2f(r)g^2(r) = 0.$

Alors,

$$\tau \mathcal{L}_A(g) \leq C_\infty^A(\mathbb{R}^2) \leq (\tau + \nu),$$

où

$$\mathcal{L}_A(g) := \frac{\left| \int_0^{+\infty} r^2 f'(r) g^2(r) dr \right|}{\int_0^{+\infty} r^3 g'^2(r) dr} \quad \square$$

Cas particuliers :

Opérateur de Laplace : $A = -\Delta$ et $N = 1$

$$E_A(x) = -\frac{1}{2\pi} \ln r, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

- ▶ Les hypothèses (H1)-(H4) sont vérifiées avec :

$$\tau = \frac{1}{2\pi}, \quad f(r) = -\ln r, \quad G_A \equiv 0.$$

- ▶ On considère la famille de fonctions $(g_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$:

$$g_\varepsilon(r) = r^{\varepsilon-1} e^{-r/2}, \quad \forall r > 0.$$

- ▶ On applique le théorème précédent : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{2\pi} \mathcal{L}_{-\Delta}(g_\varepsilon) \leq C_\infty^{-\Delta}(\mathbb{R}^2) \leq \frac{1}{2\pi}.$$

- ▶ On fait tendre $\varepsilon \rightarrow 0^+$: $C_\infty^{-\Delta}(\mathbb{R}^2) = 1/2\pi$.

Opérateur de HM : $A = -\Delta + \alpha I$ et $N = 1$

$$E_A(x) = \frac{1}{2\pi} K_0(\sqrt{\alpha}r), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

où K_0 est la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce et d'ordre 0.

- ▶ Les hypothèses (H1)-(H4) sont vérifiées avec :

$$\tau = \frac{1}{2\pi}, \quad f(r) = K_0(\sqrt{\alpha}r), \quad G_A \equiv 0.$$

- ▶ On applique le théorème précédent : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{2\pi} \mathcal{L}_{-\Delta+\alpha I}(g_\varepsilon) \leq C_\infty^{-\Delta+\alpha I}(\mathbb{R}^2) \leq \frac{1}{2\pi}.$$

- ▶ On fait tendre $\varepsilon \rightarrow 0^+$: $C_\infty^{-\Delta+\alpha I}(\mathbb{R}^2) = 1/2\pi$.

Opérateur de Lamé :

$$A\vec{U} = -\mu\Delta\vec{U} - (\lambda + \mu)\nabla(\operatorname{div}\vec{U}), \lambda \geq 0, \mu > 0, N = 2$$

La solution fondamentale $E_A \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^{2 \times 2})$ de A est donnée par :

$$E_A(x) = \beta \ln r I_2 + \gamma e_r e_r^t, \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

où

$$\beta = -\frac{\lambda + 3\mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)}, \gamma = \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)}.$$

- ▶ Les hypothèses (H1)-(H4) sont vérifiées avec :

$$\tau = -\beta, f(r) = -\ln r, G_A(x) = \gamma e_r e_r^t, \nu = \gamma.$$

- ▶ On applique le théorème précédent :

$$-\beta \mathcal{L}_A(g_\varepsilon) \leq C_\infty^A(\mathbb{R}^2) \leq -\beta + \gamma, \forall \varepsilon > 0.$$

- ▶ Pour $\varepsilon \rightarrow 0^+$, on obtient :

$$-\beta \leq C_\infty^A(\mathbb{R}^2) \leq -\beta + \gamma.$$

FIN