

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I

ECOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES-INFORMATIQUE

Par Monsieur Joël Briand
pour obtenir le grade de

DOCTEUR

Spécialité : Didactique des mathématiques

-oOo-

**L'ÉNUMÉRATION DANS
LE MESURAGE DES COLLECTIONS.**

UN DYSFONCTIONNEMENT DANS LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE.

Soutenue le 14 Décembre 1993

Après avis de MM. A. Rouchier.
G. Vergnaud.

Rapporteurs

Devant la commission d'examen formée de :

MM. M. MENDES FRANCE, Professeur Université Bordeaux I.
G. BROUSSEAU, Professeur Université I.U.F.M. d'Aquitaine.
A. ROUCHIER, Professeur Université I.U.F.M. d'Orléans.
G. VERGNAUD, Directeur de recherche C.N.R.S.

Président.

Examineurs.

1993-

A
*Claude,
Yann, Paul-Eric, et Elise.*

Remerciements :

J'exprime tout d'abord ma sincère reconnaissance à Guy BROUSSEAU pour plusieurs raisons : tout d'abord au directeur de thèse qui m'a proposé ce sujet, mais aussi au chercheur ayant toujours eu le souci de se doter de structures qui permettent l'articulation entre la théorie et les observations. Enfin est-il besoin de répéter combien ses analyses des situations d'enseignement constituent, pour ceux qui y participent, une source chaque fois renouvelée d'enrichissement et de formation personnelle.

Je remercie vivement M. le Professeur Michel MENDES FRANCE d'avoir accepté de présider le jury.

Je remercie tout particulièrement MM. André ROUCHIER et Gérard VERGNAUD qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être mes rapporteurs.

Cette thèse n'est pas seulement le résultat d'un travail personnel. Pour conduire des observations, il faut des structures et des personnes.

Je remercie les enseignants de l'école Jules Michelet, et en particulier Françoise CARCAILLON Christiane DESTOUESSE et Georges MARBOT

Je remercie Marie Hélène LAGURGUE, Professeur des écoles maître formateur à l'école annexe Bourran (Mérignac) dont la très grande disponibilité m'a beaucoup aidé.

Pour effectuer cette étude, j'ai quelquefois demandé de l'aide¹, sollicité des encouragements, attendu des avis.

Je remercie particulièrement Jacques WITTWER pour son accueil et Yves CHEVALLARD pour m'avoir reçu à Marseille.

Merci aussi à Mme MAGENDIE professeur au lycée de Mérignac.

Je remercie Marie Hélène SALIN qui a bien voulu lire une partie de mon travail et y faire des remarques utiles, Jean Louis OYALLON et Suzy GAIRIN-CALVO, avec qui la réalisation de logiciels a constitué une belle aventure. Que ces amis soient remerciés.

Enfin, merci à Harrisson RATSIMBA-RAJOHN et Dominique WOILLEZ pour leur aide et leurs encouragements.

¹ Je tiens à remercier le service des examens du rectorat de Bordeaux ainsi que le personnel administratif du lycée Camille Jullian pour m'avoir très courtoisement accueilli et facilité la consultation des copies du BAC 1992

1. PREMIERE PARTIE LE CONCEPT D'ENUMERATION

1.1. INTRODUCTION

Traditionnellement, la question du partage des responsabilités entre le professeur et l'élève relativement à une situation d'enseignement donnée porte sur l'ordre selon lequel les savoirs doivent être enseignés, sur ce que l'élève devrait savoir des enseignements déjà reçus et sur ce qu'il devrait pouvoir apprendre. Une fois que les savoirs à enseigner sont définis, le professeur construit une progression qui tient compte des conseils du système (les instructions officielles et les commentaires qui s'y rattachent, les manuels, les collègues, etc.). Au cours de cette construction, le professeur est supposé savoir ce qu'il peut raisonnablement attendre des élèves (savoirs antérieurs et possibilités d'apprentissages nouveaux). En particulier, lorsque l'enseignement échoue, les professeurs signifient leurs attentes déçues par des : « *il n'a pas de bases* », « *il n'a pas appliqué* », « *il n'a pas de méthode* », etc. et les élèves répondent souvent : « *on n'a pas compris ce qu'il voulait* », « *ça allait trop vite* ».

Cet état de fait conditionne un ensemble de comportements et de jugements.

De récents travaux de recherche en didactique des mathématiques ont montré que ce partage des responsabilités si important dans le fonctionnement de l'enseignement ne prenait pas en compte le phénomène suivant : dans certaines situations, l'élève a besoin de connaissances qui ne lui sont pas enseignées, mais qu'il doit pourtant mettre en oeuvre, pour apprendre ou pour utiliser ce qu'il a appris. Ces travaux mettent en évidence une autre façon d'étudier le partage possible des responsabilités entre le professeur et l'élève : il existe des connaissances nécessaires à des pratiques (sociales ou d'enseignement) et relatives à un certain savoir, et qui ne peuvent être des objets d'enseignement parce qu'elles ne se présentent pas sous une forme culturelle connue. Elles sont donc, par nature sous la responsabilité de l'élève et le professeur n'a pas la possibilité de négocier ce partage des responsabilités.

L'exemple le mieux repéré est celui du raisonnement. "Savoir raisonner" est une compétence attendue de l'élève par le professeur. Celui-ci ne dispose pas de moyens pour aider un enfant en difficulté dans ce domaine et une difficulté liée au raisonnement est souvent pointée comme un manque de capacité intellectuelle de l'élève. Les raisonnements spontanés des élèves sont complexes. L'enseignement en a besoin. Mais il ne se fonde pas sur leur explicitation. L'enseignement du savoir savant qui y correspond, la logique, a été tenté dans les années 70, dans la scolarité obligatoire. Il n'a pas produit les effets attendus. La thèse de P. ORUS (1992-Bordeaux) étudie ce problème en proposant d'autres voies.

Un autre domaine concerne celui de l'enseignement de la géométrie. La thèse de MH.SALIN et R.BERTHELOT (1992) étudie le statut et le rôle des connaissances spatiales dans la transposition didactique² de la géométrie. Des connaissances spatiales personnelles de l'élève sont attendues à un moment ou à un autre par le professeur dans son cours de géométrie. Que se passe-t-il si ces connaissances ne sont pas disponibles ? Où se situe la frontière entre ce qui doit être pris en charge par l'enseignement et ce qui reste sous la responsabilité de l'élève ? La géométrie échoue comme moyen de donner la maîtrise des rapports des enfants avec

² Yves Chevallard (1980) développe le concept de "transposition didactique". "Au delà de la légitimité sociale et culturelle, chaque savoir enseigné se justifie en droit par sa correspondance à un savoir extra-scolaire - un savoir savant - qui le précède et qui le fonde culturellement et scientifiquement. Or, nécessairement, dans ce passage du savoir savant au savoir enseigné, un écart se creuse, une transposition s'opère, qui adapte, remanie, et parfois dénature les éléments empruntés à la sphère des pratiques savantes de la connaissance."

l'environnement à un âge jeune parce que l'on gère l'espace à l'aide de modèles qui ne sont pas la géométrie des mathématiciens. Celle-ci est un objet culturel et il y a un point aveugle, c'est à dire que la géométrie "objet culturel" a absorbé le projet didactique, éducatif, de donner à l'enfant la capacité de maîtriser son environnement spatial³.

1.1.1. PROBLEMATIQUE :

Existe-t-il alors d'autres domaines pour lesquels l'enseignement a besoin de connaissances qu'il ne prend pas en charge ? Et, en particulier, une telle étude ne mériterait-elle pas d'être faite dans le domaine de l'acquisition du nombre et des opérations arithmétiques ?

COMPTER CONSISTE A MESURER :

Lorsque des enfants sont en situation de comptage⁴ effectif de collections, ils doivent faire face à tout un ensemble de questions analogues aux questions rencontrées lors d'activités de mesurage⁵. Ils doivent avoir une idée de l'objet qu'ils traitent (la collection), ils doivent organiser leurs rapports avec cet objet. Pour contrôler les actions de comptage, ils doivent produire ou reconnaître des structures. Ils font des choix dictés par des raisons ergonomiques, etc. L'apprentissage des connaissances de l'espace mesurable est laissé sous la responsabilité de l'enfant.

Cet apprentissage peut-il se faire complètement ?

- ✓ Apparaît-il comme un objectif d'enseignement, au moins implicite pour l'élève, mais explicite pour le professeur ?
- ✓ Serait-il nécessaire d'appuyer ces apprentissages spontanés par des justifications explicites qui seraient les savoirs de l'élève relatifs au traitement des collections ?
- ✓ Si un tel enseignement s'avérait nécessaire ou utile, pourrait-il être identifié dans les termes du savoir que le professeur est en droit d'enseigner ?
- ✓ Si cet enseignement n'est pas possible est-ce parce que ces connaissances existent mais ne sont pas connues légitimement des professeurs⁶. ou parce qu'elles sont trop complexes pour les enfants (cela sera fait plus tard) ou bien est-ce parce que cela n'existe pas dans la culture et par conséquent l'enseignement doit les ignorer ?

³ Par exemple on fait faire des cartes qui ne servent pas à se diriger mais qui débouchent sur un calcul d'échelles. Il y a une transposition didactique et une disparition de tout ce qui n'a pas un correspondant culturel fort.

⁴ voir définitions des mots clés page 10.

⁵ Le comptage est un mesurage de collections : L'application de l'ensemble des parties d'un ensemble fini dans N qui, à toute partie fait correspondre son cardinal est une mesure. L'activité de comptage d'une collection est donc à une activité de mesurage. G.BROUSSEAU a mis en évidence huit domaines que tout sujet doit maîtriser dans une activité de mesurage. Ce sont : les objets "supports" des caractères à mesurer, la grandeur, la valeur particulière de cette grandeur, la mesure, la valeur de la mesure, la mesure concrète, le mesurage, l'évaluation des mesures. (BROUSSEAU 1992-p.113 à 118). Nous utiliserons cette analyse pour conduire une analyse semblable dans le domaine du comptage

⁶ Nous faisons la différence entre les connaissances légitimes du professeur (celles qu'il doit, de part sa fonction, posséder), et ses connaissances personnelles. Ainsi, par exemple, on peut souhaiter que le professeur de mathématiques soit psychologue, mais on ne peut pas dire que c'est la psychologie qui va servir au professeur. Un professeur qui voudrait se servir explicitement de la psychologie se mettrait en position difficile. On accusera ce facteur étranger d'en avoir été la cause d'échecs. Le phénomène des "mathématiques modernes" a fonctionné de la même façon. On a accusé les mathématiques modernes d'être la cause d'échecs parce qu'elles furent considérées comme un intrus. Même avec la légitimité institutionnelle, même existant dans le savoir, rien n'est acquis.

C'est pour répondre à cet ensemble de questions que nous avons décidé de conduire cette étude.

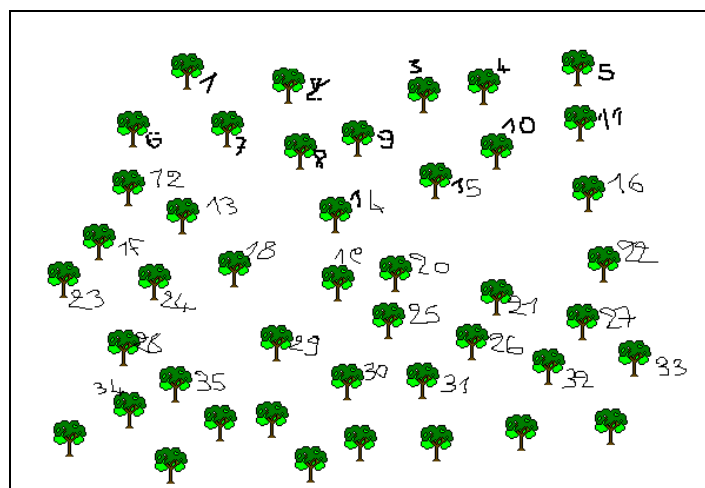
1.1.2. POURQUOI CETTE ETUDE VERS LE NOMBRE ET LES OPERATIONS ARITHMETIQUES ?

D'abord parce qu'il s'agit d'un domaine très sensible : la construction du nombre et des opérations arithmétiques occupe une large place dans l'enseignement élémentaire. La réussite en calcul est une valeur culturelle extrêmement prisée à laquelle sont consacrés de longs moments d'enseignement. L'enfant est soumis à des pressions continues venant du milieu enseignant, des parents, etc.

L'enseignement du nombre a été l'objet de réformes institutionnelles importantes (réforme des "mathématiques modernes" de 1970 dans l'enseignement français, nouveaux programmes de 1977, de 1985), faisant suite aux apports décisifs des psychologues constructivistes. De plus, dans les années 80, de nombreuses recherches en psychologie cognitive d'une part et en didactique des mathématiques d'autre part ont permis de mieux comprendre comment l'enfant s'appropriait le concept de nombre.

Il semblait donc que dans ce domaine tout ait été dit et qu'il ne restât plus aux enseignants qu'à s'informer et à appliquer au mieux les propositions d'enseignement faites dans les ouvrages professionnels. Toutefois beaucoup de questions restent sans réponses. Chaque année, les enseignants constatent des types de comportements à des exercices vis à vis desquels ils sont démunis : pour préciser ce propos, nous extrayons deux exemples issus des observations que nous avons conduites pour notre recherche :

Premier exemple issu de l'observation complète détaillée page 147 de notre travail : au cours préparatoire, au mois de mars, MATHILDE doit compter combien il y a d'arbres. Celle-ci commence à écrire un nombre au pied de chaque arbre (voir figure ci-après) puis, s'arrête à 35 et dit "je ne peux pas mettre le 36 parce que cela peut être là ou là". (Son geste désigne les deux arbres à droite de l'arbre marqué 35.).

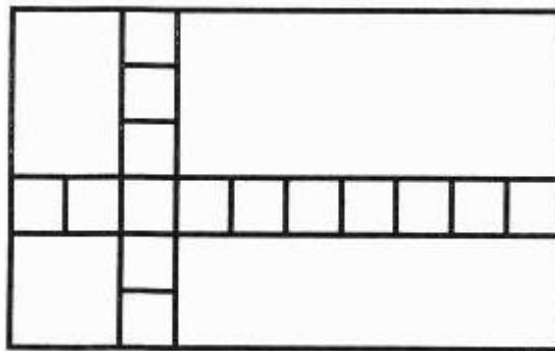


L'enseignant en situation de classe ne peut détecter cette hésitation. Quand bien même il en aurait fortuitement connaissance, il serait complètement démuné de moyens d'interprétation et d'actions à long terme. L'erreur serait alors traitée comme un accident de comptage. Le professeur n'aurait pas la possibilité d'intervenir sur le schème et ne pourrait proposer une issue qu'au niveau de l'action (une directive, un conseil), ce qui ne changeraient pas le rapport de l'élève à ce problème.

Quelle est la nature du problème qui se pose à Mathilde ? Pour peu qu'on veuille bien y regarder de plus près, ce ne sont pas les connaissances relatives au nombre qui sont en cause. Pour le contrôle de la situation, l'enfant fait fonctionner une connaissance qui se réfère à l'exploration de la collection et qui conditionne complètement le bon déroulement de l'activité. Les nombres inscrits au pied de chaque arbre ne fonctionnent pas, comme on pourrait le penser comme un marquage au sens ou un marquage permet d'exercer un contrôle de l'exploration. La suite numérique ne vient pas à l'aide du contrôle (de type spatial celui-là). Nous pouvons même faire l'hypothèse que, d'une certaine façon, elle entre en conflit avec. Et ce conflit n'est pas résolu. L'enfant échoue alors qu'elle dispose de la suite numérique et d'un procédé d'exploration relativement bien organisé. (Repérage en ligne). Il s'agit donc d'une absence de connaissance qui se manifeste par une absence de synchronisation effective entre une connaissance numérique et l'exploration de la collection.

Deuxième exemple (extrait de l'observation page 107) : Il s'agit d'un contrôle effectué chaque année en cours élémentaire deuxième année, lorsque les enfants ont une bonne maîtrise du procédé de calcul de la multiplication :

L'énoncé de l'exercice proposé est le suivant : "*Pour fabriquer le dessus d'une table en mosaïque, on a utilisé des carreaux. Voici le dessus de la table. Quelques cases seulement ont été dessinées. Combien a-t-on utilisé de carreaux pour faire le dessus de cette table ?*"



Chaque année, les enseignants constatent une différence significative de résultats entre cet exercice et un autre exercice qui montre tout le quadrillage et où il est demandé le nombre de cases du quadrillage. On imagine bien que les deux exercices sont de difficulté très différente, mais les maîtres sont désarmés devant les dispositions qu'il y aurait à prendre. Devant ces comportements répétés, le professeur n'a pas d'autre solution que de donner des conseils pratiques, des procédés, des procédures. Il est d'une certaine façon sans moyen devant des difficultés qui ne se situent pas dans le champ immédiat des savoirs bien étiquetés. Dans le cas présent, la correction consiste à redessiner entièrement la table. Les enfants perçoivent alors le modèle enseigné et font le lien entre ce problème et le traitement par la multiplication. La problématique énoncée précédemment se précise donc au travers de ces deux exemples : La construction du nombre a-t-elle besoin de connaissances qui se situeraient en amont du nombre et qui ne seraient pas prises en charge par l'enseignement ? L'enseignant peut-il concevoir qu'il y a là un projet possible d'enseignement d'un savoir ? Et si nous parvenons à trouver des réponses, celles-ci apporteront elles une amélioration décisive dans l'enseignement du nombre ?

1.1.3. LA DIDACTIQUE DE LA MESURE COMME MOYEN DE FOURNIR UNE METHODE D'ANALYSE :

Partons d'un exemple : soit un polyèdre régulier un peu compliqué (nombre de faces supérieur à 6, par exemple). Donnons ce polyèdre à une personne et demandons-lui de trouver le nombre de faces. En supposant que cette personne ait des connaissances numériques convenables, la tâche demandée peut toutefois se révéler difficile. Si l'on exclut le marquage, il va falloir mettre au point un (ou des) des techniques d'exploration du polyèdre afin de s'assurer d'une exploration exhaustive de l'ensemble des faces. Ainsi, savoir compter un à un les éléments d'une collection d'objets dans une boîte et savoir compter les faces d'un polyèdre ne sont pas deux tâches de même difficulté. Un ensemble est plus facile à mesurer que l'autre. Pour rechercher l'existence de connaissances nécessaires à l'élaboration du nombre, il nous a donc paru fonctionnel d'utiliser une analyse didactique de la mesure. En effet, le parallèle déjà évoqué entre le comptage et le mesurage doit nous permettre d'utiliser les analyses déjà conduites dans ce domaine et d'en faire la transposition au comptage. En particulier, l'analyse des méthodes effectives de détermination de la mesure doit être un outil permettant de mener une analyse à priori des méthodes effectives de détermination du cardinal d'un ensemble fini. C'est ce domaine qui nous intéresse.

1.2. DEFINITIONS DE MOTS CLES:

Dans cette partie, nous donnons une définition de mots-clés que nous emploierons. Le rapport entre les connaissances et les savoirs sont le domaine d'étude de la didactique. Les épistémologues se réfèrent à la maïeutique socratique, mais ce n'est pas ce point de vue qui nous intéresse précisément. Aussi, nous développons ce qui nous permettra d'obtenir une définition utile pour notre recherche. (En annexe, figurent quelques notes de lecture).

LE COMPTAGE

(ROCHEL Gelman et Gallistel) : chaque objet de la collection à compter doit être apparié à un mot de la "comptine numérique». Le comptage est un mesurage de collections : L'application de l'ensemble des parties d'un ensemble fini dans N qui, à toute partie fait correspondre son cardinal est une mesure. L'activité de comptage d'une collection est donc à une activité de mesurage.

G.BROUSSEAU a mis en évidence huit domaines que tout sujet doit maîtriser dans une activité de mesurage. Ce sont : les objets "supports" des caractères à mesurer, la grandeur, la valeur particulière de cette grandeur, la mesure, la valeur de la mesure, la mesure concrète, le mesurage, l'évaluation des mesures. (BROUSSEAU 1992-p.113 à 118). Nous utiliserons cette analyse pour conduire une analyse semblable dans le domaine du comptage.

LE DENOMBREMENT : Nous donnons trois définitions. La première est la définition d'un point de vue plutôt mathématique, les deux autres sont des définitions d'un point de vue plutôt didactique.

D1 En mathématiques, un ensemble est dit dénombrable s'il peut être mis en bijection avec une suite commençante de N .

D2 On dit qu'un enfant sait dénombrer une collection quand le dernier mot nombre qu'il prononce n'est pas un simple numéro, mais représente, à lui seul, la quantité de tous les objets. (GELMAN 1983)

D3 En situation, BLANCA-VILLEGAS (1986) distingue deux définitions du dénombrement : **LE DENOMBREMENT AU SENS LARGE** : Capacité à produire une collection (C2) équipotente à une collection donnée (C1) sans voir cette collection au moment où l'on produit la collection (C2). (Le comptage peut alors être un savoir suffisant).

LE DENOMBREMENT AU SENS RESTREINT : Capacité à produire une collection (C2) équipotente à une collection donnée (C1) sans voir cette collection au moment où l'on produit la collection (C2) en se servant du cardinal de la collection (C1).

NOMBRES : est l'activité parallèle au comptage qui consiste à produire l'écriture du nombre.

CONNAISSANCES ET SAVOIRS :

APPROCHES : Dans l'article : "un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane" ESM 20.PERRIN.M.J. et coll. (1989) considèrent une connaissance comme un "outil explicite", sans bien préciser ce terme : *"Un élève a des connaissances en mathématiques s'il est capable d'en provoquer le fonctionnement comme outils explicites dans les problèmes qu'il doit résoudre, qu'il ait ou non des indicateurs dans la formulation du problème, s'il est capable de les adapter lorsque les conditions habituelles d'emploi ne sont pas exactement satisfaites."* Mais les auteurs proposent une façon de repérer une connaissance qui nous semble porter les prémisses d'un lien entre connaissance et conception. Nous y reviendrons dans notre étude. *"Une connaissance non liée à un savoir reconnu culturellement ne peut être explicitée"*

que par un recours au contexte : "je ferai comme dans l'exercice précédent", sous entendu parce que cela a bien fonctionné. Le "cela" est alors le seul explicite possible. Ou bien, cette connaissance va être détectée par un observateur qui devra, dans une analyse à priori, prévoir, autant que faire se peut, les effets de son absence, de son mauvais fonctionnement, de son bon fonctionnement. "

SAVOIRS CONNAISSANCES ET ... OBSERVATION : Dans le numéro 13 de RDM (P. 222-267), F. CONNE expose un long article dont le titre est "Savoir et connaissance".

F.CONNE précise mieux le critère qui sépare l'ordre du savoir de celui de la connaissance. Il écrit : "*Lorsque le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui, le lieu inducteur de la situation sur cette connaissance devient irréversible, il sait. Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance utile, utilisable, dans ce sens qu'elle permet au sujet d'agir sur la représentation.*". Il rappelle aussi le rôle de l'observateur et de ses propres filtres d'observation : "*Toute enquête sur la connaissance et les phénomènes cognitifs ne peut se faire qu'à partir du savoir, qui sert alors de modèle de référence.*" Ceci nous permet de nous interroger sur ce que l'observateur va observer. En effet, toute observation ne peut décrire aisément des phénomènes qu'en des termes du savoir. Ainsi, ce qui est un savoir repéré par un observateur peut n'être qu'une connaissance chez le sujet. Il y a alors sans doute un effet de réduction.

SAVOIRS CONNAISSANCES ET SITUATIONS A-DIDACTIQUES :

Lorsque F.CONNE explique le passage de la connaissance au savoir par une reconnaissance du sujet, il se place, sans le dire, dans une situation cognitive sans doute a-didactique. Les effets de contrat, d'attente, de présupposés, de recherche à priori de savoir à produire ne sont pas pris en compte. Et si, comme l'écrit F.CONNE, l'étude de la connaissance procède d'une transposition de savoir alors pourquoi ne pas prendre en compte les contraintes de l'enseignement?

L'auteur évoque pourtant le "contrat didactique" comme moyen d'étude théorique. Par exemple, les théorèmes en acte sont le produit d'une association (chez le sujet) entre des savoirs ou/et connaissances acquis antérieurement et des utilisations de ces savoirs ou/et connaissances dans des situations nouvelles. L'expérimentation décrite P.238 montre bien ce qui pose problème :

L'auteur demande à un enfant de CP de prévoir dans laquelle des deux collections de jetons présentées "il y en a le plus". (Une collection de 5 paquets de 4 et 3 et une collection de 4 paquets de 5 et 3). Tout au long de l'entretien, l'enfant modifie la réalité afin que sa prévision "il y en plus dans la deuxième" s'avère juste. L'auteur conclut que l'enfant n'avait pas fait de prévision.

Qu'est-ce qui empêchait l'auteur de procéder à une nouvelle mise en situation ? Serait-ce qu'il y aurait à mieux faire la différence de rôle entre le clinicien et l'enseignant ? Qu'il y ait eu conflit cognitif, c'est sans doute un fait. Mais la rétroaction se fonde sur le comptage⁷. On aurait espéré une rétroaction qui se fonde plus sur des connaissances que sur des savoirs ...

L'approche de G.BROUSSEAU est la suivante : à partir de situations (situations fondamentales), il nomme *connaissance le fonctionnement de cette notion en situation d'action*. La connaissance est donc définie dans le rapport du sujet à la situation. Lorsque le même sujet sera confronté à une situation de validation (en regard de la même notion), la

⁷ Une discussion très intéressante avec F.CONNE en mai 94 a débouché sur le constat de la difficulté à décrire les rapports entre connaissances et savoirs en figeant le sujet dans une action. L'idée que dans l'action, savoirs et connaissances pourraient être séparés semble utopique. Ils ne peuvent être ni séparés dans l'instant ni complètement séparés dans la durée

notion s'inscrira alors en tant que savoir. Dans ce cas, c'est la nécessité *d'identifier un besoin de connaissances qui va déboucher sur la constitution d'un savoir.*

Dans l'article "Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant", G.BROUSSEAU et J.CENTENO (1992) reprennent l'étude de la distinction entre connaissance et savoir :

"Les connaissances sont les moyens transmissibles (par imitation, initiation, communication, etc.) mais non nécessairement explicitables, de contrôler une situation et d'y obtenir un certain résultat conformément à une attente ou à une exigence sociale."

"Le savoir est le produit culturel d'une institution qui a pour objet de repérer, d'analyser et d'organiser les connaissances afin de faciliter leur communication, leur usage sous forme de connaissance ou de savoirs et la production de nouveaux savoirs. Dans certaines situations (action formulation ou preuve) le même résultat peut être le fruit d'une connaissance de l'acteur ou le fruit d'un savoir, ou les deux."

LES DEFINITIONS DONT NOUS NOUS SERVIRONS :

Nous définirons le savoir comme le seul moyen de gestion sociale et culturelle des connaissances :

Nous disons qu'il n'y a pas identité entre la genèse des savoirs et celle des connaissances. Des sujets mis dans des situations comparables vont développer des connaissances comparables, mais le contrôle social de l'usage de ces connaissances va se faire par la reconnaissance de ces connaissances au travers de contrôles qui ignorent ces connaissances.

Le savoir (nous dirons le savoir produit dans un mode de fonctionnement type savoir) est ce qui permet, dans une situation de communication, de communiquer. Cette communication ne constitue pas des connaissances qui, par essence même ne sont pas communicables (même pour le sujet lui-même, nous y reviendrons).

Dans ce cas, le sujet formule. Il est alors obligé de faire le deuil d'adaptations individuelles trop grandes au profit de productions sur lesquelles lui et les autres pourront faire des déclarations de validité. Il s'agit alors du domaine des savoirs.

UN MOYEN POUR ETUDIER :

Dans des relations inter institutionnelles la connaissance dans une institution peut être un savoir pour l'autre (par exemple, la pensée naturelle du sujet et pensée naturelle pour un spécialiste. Dans un cas il s'agit d'une connaissance, dans l'autre, c'est un savoir avec le vocabulaire associé : (métaphore, métonymie, etc.). Le savoir d'une institution peut identifier les connaissances d'une autre institution comme savoir.

Dans le cas particulier d'un sujet, pour gérer les savoirs qu'il apprend, le sujet doit mettre en œuvre des connaissances qui, de toute façon seront hors de portée de l'enseignement. Il les a sous sa responsabilité.

Par exemple, un enfant doit effectuer le produit de 9×8 . Il effectue 9×7 et ajoute 9. Vu du côté de l'observateur mathématicien, il met en œuvre un savoir personnel (qu'il n'est pas nécessairement utile de communiquer, qui ne sera peut être pas reconnu socialement). Vu du côté du sujet, il n'est pas sûr que ce mode de fonctionnement soit étiqueté comme un savoir. Le mode est peut être plus implicite et relève alors de connaissances. (Remarque : un sujet peut "se" traiter des connaissances comme savoir : ce serait le savoir privé. Mais les connaissances privées sont inaccessibles au savoir privé.)

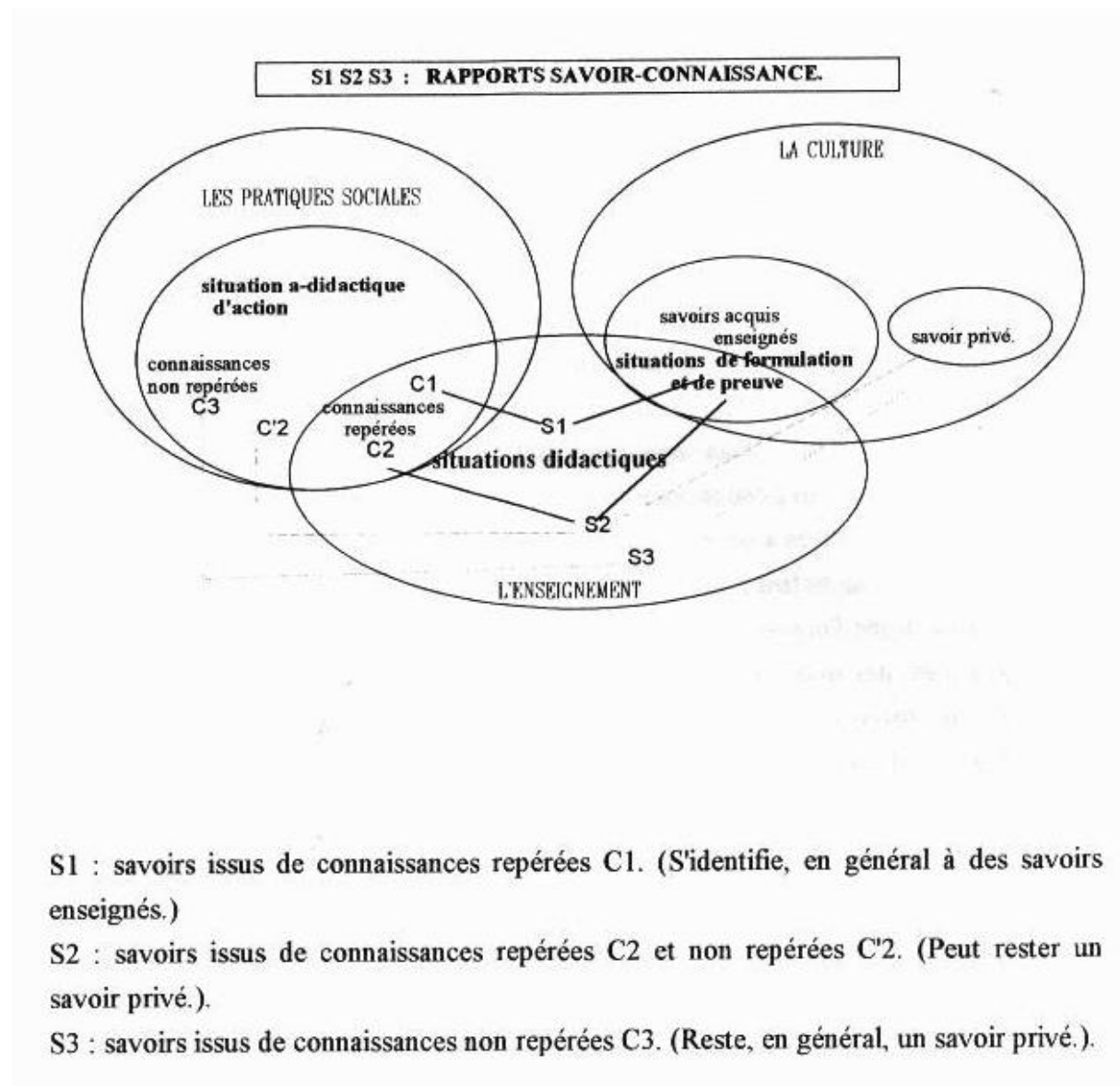
Connaissance et savoir peuvent s'opposer ou/et se compléter au niveau du sujet. La connaissance est plus complexe, plus riche, plus fine que le savoir. Elle est généralement en amont du savoir.

CONSTRUCTION DES SAVOIRS :

Tout savoir peut il être transformé en connaissances motivées par l'action ?

Le savoir n'articule pas sa genèse sur les connaissances. Dès le moment où un groupe discute, il y a un savoir dans cette institution : il y a des règles. Il y a des règles privées qui vont se superposer à des règles générales.

Une institution de savoirs est un système qui permet d'éliminer certains modèles et pas d'autres. Il ne suffit pas que les idées soient formulées pour qu'elles deviennent des savoirs pour le récepteur : la communication de l'information est un cas particulier du traitement des savoirs. **Informé n'est pas la même chose que débattre.** On entre là dans le domaine de la didactique⁸



⁸ Communiquer de l'information à un récepteur modifie ses systèmes de choix. Mais l'émetteur n'est pas réputé avoir d'intentionnalité au sujet du récepteur. Lorsque l'émetteur a une intention vis à vis du récepteur, il y a une forme d'influence. Si cette influence vise à l'insu du récepteur à modifier les systèmes de décision, alors on est dans le domaine de la didactique. Le didactique serait la modification intentionnelle d'un système non connu du sujet .

1.3. RAPPORTS ENTRE COMPTAGE ET MESURAGE : METHODE POUR UNE ANALYSE DIDACTIQUE

Le mot "mesure" a, en mathématique, un sens plus restreint qu'en physique, et ce que le mathématicien appelle théorie de la mesure ne s'applique directement qu'à une partie de l'activité du physicien et ne vise que la structure conceptuelle à l'exclusion des procédés expérimentaux de détermination des valeurs numériques qui relèvent de la métrologie.

En nous servant de la mesure comme modèle pour étudier le comptage des collections, nous n'allons donc pas nous restreindre à la définition conceptuelle de la mesure. C'est donc à partir d'une analyse didactique de celle-ci que nous conduirons notre analyse du comptage.

1.3.1. LES OBJETS EN JEU DANS LA MESURE

La connaissance de la mesure met en jeu plusieurs notions distinctes. Dans un article récent; BROUSSEAU (1992)⁹ donne donc quelques exemples de difficultés importantes attachées à l'enseignement de la mesure¹⁰, puis il énumère les "objets" distincts présents dans les problèmes de mesure. Il en recense huit que nous rappelons. Ce sont :

1°) les "objets supports" des caractères à mesurer (objets concrets, mais aussi, objets déjà mathématisés comme la largeur d'un rectangle, et objets conceptualisés tels que l'envergure d'un oiseau).

2°) la grandeur, concept permettant d'appréhender ce qui peut devenir grand ou petit.

3°) La valeur particulière de la grandeur, relative à un objet précis, sans tenir compte du système utilisé pour la quantifier, en particulier sans tenir compte des unités.

4°) L'application mesure

5°) La valeur de cette mesure, le nombre positif.

6°) La mesure concrète, c'est à dire le couple nombre, unité.

7°) Le mesurage, c'est à dire la ou les méthodes effectives de détermination de la mesure.

Dans ce cas, le nombre est associé à un intervalle de confiance.

8°) L'évaluation des mesures. Il s'agit là d'un jugement sur les mesures (ordre de grandeur d'une mesure, taille d'un nombre, etc.)

1.3.2. ANALYSE DIDACTIQUE DU COMPTAGE :

Appliquons donc cette analyse au domaine qui nous intéresse pour identifier les situations dans lesquelles le comptage fonctionne. En particulier, intéresserons-nous à ceux des objets

⁹ Voir Bib.

¹⁰ Par exemple, la mesure est une "notion familière et primitive constitue un obstacle culturel presque infranchissable pour une clarification du concept selon les usages de la scolarité obligatoire"... "La complexité de la réalisation effective des mesurages, les difficultés matérielles et conceptuelles attachées à ces pratiques de toutes sortes, ont conduit rapidement les enseignants à renoncer à la plupart des activités effectives de mesurage (en particulier, celles qui sont difficiles à contrôler en situation scolaire) pour se cantonner dans des situations simplifiées ou métaphoriques et dans des activités de calcul. Cette circonstance, si elle tend à simplifier l'acte d'enseignement, ne favorise pas la maîtrise du concept de mesure ni la représentation des mathématiques comme moyen efficace et simplificateur pour la réalisation et le contrôle d'activités effectives".

que la transposition de cette étude mettrait en évidence et qui ne sont pas repérés dans l'enseignement du nombre et du dénombrement.

1.3.2.1. POUR COMPTER, IL FAUT CONCEVOIR LA COLLECTION : OBJET EFFECTIF, OBJET A MESURER :

Nous partirons d'une phrase souvent entendue dans les classes et lue dans les manuels :

"Compte le nombre d'éléments de cette collection"

Apparemment, il n'y a pas de mystère dans cette injonction. Cette phrase induit pourtant un fait important : l'ostension de la collection. **La conception de la collection ne fait pas l'objet d'un enseignement.** La collection est montrée. Dès lors, le système ne dispose d'aucun moyen pour contrôler si la collection est effectivement prise en compte par le sujet ou si la collection n'existe que du point de vue de l'enseignant ou de l'observateur. Tout ce passe comme si cette conception allait de soi.

Or, ce que l'on mesure dans le cas des entiers naturels, ce sont les collections, mais "la collection" n'est pas un objet matériel¹¹. C'est en soi un objet de la structure mathématique et le domaine de ces objets est ce qui permet d'assigner une structure d'espace mesurable. Nous dirons que si le sujet ne dispose pas de moyen de déterminer l'objet "collection", il ne peut en concevoir un mesurage. Ce qui précède nous permet de distinguer d'une part l'objet effectif et d'autre part l'objet à mesurer.

Par exemple : nous pouvons nous référer au travail de MATHILDE : l'objet effectif est donné par la situation : il s'agit des arbres dessinés sur la feuille de papier. L'objet à mesurer est celui que l'élève va devoir concevoir. Pour cela, elle met en place un système de détermination de la collection fondé sur une exploration spatiale organisée. L'objet à mesurer se construit ainsi à la fois à partir du modèle mathématique que le sujet met en place qui va lui permettre de structurer et de l'objet lui-même¹².

Pour conclure, nous dirons que pour pouvoir considérer dans l'objet effectif, l'objet de la mesure, il est nécessaire d'avoir un projet mathématique, et ce projet est subordonné au contrôle des collections. Or le contrôle des collections met le plus souvent en jeu des connaissances, des instruments d'identification qui priment sur le nombre. Par exemple, l'organisation spatiale. Ce n'est que lorsqu'un enfant aura dépassé cet obstacle de la détermination des collections qu'il accordera un sens au cardinal, à l'équipotence.

1.3.2.2. LA GRANDEUR "CARDINALE" :

Il n'est pas nécessaire de connaître le cardinal d'une collection pour pouvoir comparer celles-ci à une autre. La grandeur "cardinale" existe donc. L'invariance par bijection est l'instrument de contrôle de conservation de la grandeur, donc de comparaison de grandeurs cardinales.

1.3.2.3. LA MESURE FONCTION :

Soit un ensemble fini E et l'ensemble de ses parties $P(E)$. L'application définie de $P(E)$ ¹³ dans N qui à toute partie de E fait correspondre son cardinal est une mesure. Cette application a en

¹¹ Comme la distance ne se confond pas avec la longueur, la forêt ne se confond pas avec les arbres.

¹² L'exemple du travail de MATHILDE nous permet de constater que la demande scolaire : "compter les éléments de la collection" s'oppose à un moment à la détermination de la collection.

¹³ $P(E)$ a une structure d'anneau (de BOOLE) pour les opérations \cap et \cup . On dit aussi que $P(E)$ est un clan des parties de E .

effet les propriétés d'additivité et d'invariance par équipotence. L'image de l'application, c'est à dire le cardinal est le nombre naturel. L'application est souvent notée "card", l'image est notée card(A).

1.3.2.4. LA MESURE DITE CONCRETE OU NOMBRE CONCRET:

Le cardinal d'une collection est un nombre. Dans la pratique, lorsque le système le permet, le résultat de la mesure est un couple nombre et objet identifié (Exemple : 45 arbres).

"45 arbres" est un objet qui n'est pas traité en mathématiques (sauf dans l'enseignement voici quelques années où l'on parlait de nombres concrets). "45 arbres" est une mesure de "quelque chose" (qui n'est plus "des arbres", mais une forêt...).

1.3.2.5. LE COMPTAGE :

Les procédés expérimentaux de détermination des valeurs numériques dans les activités de mesurage relèvent de la métrologie¹⁴. Le comptage est le mesurage¹⁵ des collections en vue de produire le cardinal de celles-ci. Le comptage est donc la ou les méthodes effectives de détermination de la mesure "cardinal" d'une collection.

APERCU DES PROCEDES DE COMPTAGE :

Les procédés qui permettent de mesurer une collection quelque soit la forme qu'elle revêt (objets dispersés, objets rangés, objets connus par leurs propriétés, etc.) constituent le comptage des collections Les opérations arithmétiques (addition, multiplication, soustraction), ainsi que la construction de l'écriture des nombres (numération) sont des outils de mesurage de collections, du point de vue du comptage.

TOLERANCE :

A priori, le résultat du mesurage des collections est un nombre. Il n'y a pas de tolérance. Il est nécessaire de donner une réponse exacte parce que les collections sont des ensembles discrets. Or, en réalité, le comptage de collections est souvent assorti d'une tolérance. Le contexte scolaire des premiers nombres et des opérations arithmétiques nous fait perdre de vue que dans des contextes différents ou dans des institutions différentes, il peut y avoir une tolérance. Par exemple, personne n'est dupe de la signification du nombre de globules rouges que lui fournit le laboratoire d'analyse médicale. La mesure de cette formulation est d'ailleurs fondée sur des méthodes de mesurage (voir notre étude page 98 qui, de fait, engendre une incertitude. De la même façon, personne n'imagine que la France ait eu exactement 52 658 253 habitants en 1975 (sources INSEE). Il est d'ailleurs fréquent d'annoncer la population française¹⁶ selon un nombre dont les trois derniers chiffres sont "0", ce qui sous-entend une tolérance de fait.

¹⁴ Nous constatons que les pratiques effectives de mesurage dans l'enseignement général tendent à disparaître. Il serait intéressant d'étudier les conséquences de cette tendance dans la connaissance de la mesure chez les enfants. L'étude du mesurage des collections en vue de la production du cardinal doit prendre en compte cette tendance.

¹⁵ A propos du mesurage, G.BROUSSEAU écrit : Mesurage : le mot désigne l'opération matérielle ou la méthode permettant de déterminer effectivement pour un objet de type 1, un nombre et un intervalle (ou une famille d'intervalles) d'incertitude (ou de confiance). Le mot désigne aussi son résultat. Exemple : la longueur de la table est (tel segment a pour longueur) 1,35 m \pm 0,002. Les procédés qui permettent de mesurer l'épaisseur d'une tôle, la largeur d'une fissure, la distance entre deux murs sont des mesurages de longueurs... La science du mesurage est la métrologie... Elle a été pendant longtemps un objet important de l'enseignement primaire (1/5 du temps en 1947).

¹⁶ Dans ce type de documents, "population française" désigne indifféremment la collection et le cardinal de la collection.

Donc, même avec les entiers naturels, apparaît la notion de chiffre significatif et d'erreur tolérée.

1.3.2.6. LE CONTROLE DU COMPTAGE :

Le contrôle du comptage consiste à se donner les moyens de vérifier si le nombre avancé comme cardinal d'une collection peut être admis pour juste ou non. D'où les moyens tels que chiffre significatif et erreur tolérée. Les notions d'ordre de grandeur, de taille des nombres permettent de contrôler cette erreur.

1.3.3. CONCLUSION :

Nous sommes partis de l'hypothèse que pour compter, l'élève doit contrôler le système dans lequel il se trouve. Nous nous sommes servis de l'analyse didactique de la mesure comme moyen méthodologique. Cette analyse nous permet les premières conclusions suivantes :

- ✓ Dans l'action de comptage, la détermination de l'objet à mesurer est un acte nécessaire.
- ✓ Pour mesurer effectivement une collection, l'élève met en jeu des connaissances qui s'apparentent aux connaissances du mesurage.

Nous détaillons maintenant le premier point en faisant l'hypothèse qu'une étude détaillée permettra de déceler certaines connaissances nécessaires. Pour cela, nous répondons aux deux interrogations suivantes :

- ✓ Quels sont les types de situations non didactiques dans lesquelles un sujet détermine une collection ?
- ✓ Quels sont les instruments dont il dispose pour déterminer effectivement une collection ?

1.3.4. DETERMINATION DES OBJETS A DENOMBRER :

Pour dénombrer, il est nécessaire de déterminer l'objet "collection", c'est à dire de passer des objets matériels aux objets sur lesquels la structure mathématique va porter : **les collections**. Cette détermination permet d'avoir un espace mesurable. Nous dirons que pour que cette détermination soit effective, il faut que l'objet "collection" puisse être identifié puis reconnu, au travers de transformations. L'exemple suivant précise notre propos. Des objets sont mis dans une boîte sans couvercle. Ils sont tous visibles. Puis la boîte est soustraite au regard des enfants. Enfin elle réapparaît. Un enfant a déterminé la collection **s'il dispose de moyens de s'assurer que les objets qu'il voit après cette transformation sont tous bien les mêmes ou non**. Cet exemple montre que la détermination d'une collection n'est pas nécessairement liée au nombre. Par contre, le mesurage d'une collection nécessite cette détermination.

1.3.5. DETERMINATION DES OBJETS POUR IDENTIFIER, RECONNAITRE, RECONSTRUIRE

La (re)construction d'une collection est souvent confondue avec la manipulation qui permet le regroupement d'objets.

Par exemple : lorsqu'un enfant prend des objets et les mets dans une boîte, l'observateur peut dire qu'une collection a été constituée. Mais il ne peut pas affirmer que l'enfant a déterminé une collection. La situation prend, en effet, en charge, la réalisation effective de la collection. C'est la manipulation qui est collectivisante.

La (re)construction effective d'une collection par l'élève a été étudiée par J.PERES qui a proposé une situation fondamentale de la construction effective des collections.

La détermination de l'objet "collection" entre en jeu lorsqu'il s'agit d'identifier une collection, c'est à dire de la trouver identique (ou non) après transformations. Pour reconnaître l'objet "collection", le sujet doit donc disposer d'un système autre que l'objet lui-même.

Nous dirons alors que la reconnaissance met en œuvre un système sémiotique qui produit la collection comme signe identificateur de la collection.

Nous allons examiner ce qui, de notre point de vue constitue deux formes différentes de reconnaissance : la désignation et l'identification par dénomination.

1.3.6. INSTRUMENTS DE LA DÉTERMINATION : DESIGNER, DENOMMER.

Pour étudier les instruments de la détermination des objets (donc des collections à mesurer dans le comptage), nous construisons deux définitions qui nous serviront dans la suite de l'étude :

Désigner¹⁷ consiste à attribuer à un objet un signe par un moyen qui ne permet pas la construction a priori de noms pour d'autres objets différents. Le système de désignation ne structure pas l'univers des objets. (Par exemple, montrer un objet c'est le désigner.)

Dénommer consiste à attribuer un nom à chaque objet, c'est à dire produire un signe dans un système qui permet la construction de noms pour des objets différents. Ce système permet en général d'attribuer à d'autres objets un autre nom. La conséquence est que le système de dénomination choisi induit souvent une structuration de la collection. Le nom est interne au système qui permet de fabriquer d'autres noms. Et cela induit une structure. Dénommer peut alors impliquer la production d'une structure sur un ensemble¹⁸

1.3.7. RAPPORTS ENTRE DESIGNATION ET DENOMINATION :

Soit une collection composée des objets suivants : 8 roues, 2 plaques LEGO, 4 tiges métalliques, deux bonhommes LEGO assis. (**Remarque : cette liste constitue déjà, en soi, une conception de la collection.**)

Pour contrôler cette collection, par exemple, pour s'assurer que cette collection est restée inchangée après transformation, il est possible :

- ✓ d'en faire une liste en dessinant chaque objet¹⁹. On est alors dans le cas décrit précédemment : Chaque objet est désigné ou dénommé ; la liste constitue une désignation de la collection.
- ✓ Il est aussi possible de mettre en jeu une connaissance qui structure celle-ci : par exemple le sujet y reconnaît l'ensemble des objets nécessaires à la réalisation de deux voitures simples (voiture simple dénommant la collection : une plaque, 4 roues, 2 axes et le chauffeur). Il s'agit alors d'une dénomination et le contrôle de la collection se trouve grandement facilité par cette connaissance mise en application. Il est facile

¹⁷ Nous n'abordons pas la question de la désignation effective ou de la désignation générique, bien que dans certaines activités de reconnaissance de collections le problème puisse se poser.

¹⁸ En cela, la dénomination peut être ou ne pas être adéquate à l'identification de l'objet.

¹⁹ Dans notre exemple, une désignation de la collection qui ne se fonderait pas sur une liste rendrait la situation incontrôlable.

d'imaginer que plusieurs dénominations sont possibles et qu'elles ne mobilisent pas les mêmes connaissances.

La désignation et la dénomination sont donc concurrentes. Le rapport entre la désignation et la dénomination peut, par exemple permettre de générer une exploration à l'aide de partitions : selon que dans une collection, le sujet dispose ou non de connaissances²⁰ lui permettant de classer dans une même catégorie (les ronds jaunes, etc.), il explorera l'ensemble d'une façon ou d'une autre. Nous nous servons de cette analyse pour étudier les comportements d'enfants dans des activités scolaires. Prenons un exemple : le domaine des opérations arithmétiques et, en particulier, celui de la multiplication. Selon que l'enfant concevra un tableau de a lignes-et de b colonnes comme un ensemble constitué, ou non de lignes formant partition, il disposera de moyens différents de dénommer cet ensemble. La conséquence sera qu'il déterminera l'ensemble d'une façon propice à l'émergence du message axb comme signe du cardinal ou non. Nous venons d'explorer trois domaines : le domaine des objets matériels, le domaine de la détermination des collections et le domaine des moyens de la détermination de ces collections. Nous venons d'analyser les interactions qui existent entre ces domaines lorsqu'il s'agit, en situation, d'agir sur des collections. Nous allons maintenant nous intéresser plus particulièrement aux moyens qu'un sujet met en œuvre pour réaliser effectivement des déterminations de collections.

²⁰ Il existe donc des déterminations faciles avec des caractères, des propriétés, ce qui, dans l'enseignement se traduit par des définitions en compréhension. Lorsqu'il est impossible de trouver des systèmes de définition en compréhension, il devient alors nécessaire de construire une définition autre, dont le produit est appelé extension dans l'enseignement. Les termes extension et compréhension sont des termes de didactique. Du point de vue mathématique ce qui détermine un ensemble c'est une propriété. Aussi cette classification des ensembles est purement structurelle. Cette classification n'a pas de raison d'être pertinente du point de vue du sujet. Il faut que le sujet dispose d'un système pour concevoir l'action de collectiviser (la collection). par ailleurs, montrer une collection (l'ostension) est un acte didactique. Rien n'assure que l'ostension de la collection permet la conception de la collection.

1.4. L'ENUMERATION : PREMIÈRE APPROCHE.

1.4.1. EXISTENCE D'UNE CONNAISSANCE COMMUNE :

Comment les moyens de la détermination de la collection vont ils être effectivement mobilisés ? Par exemple, comment les élèves de grande section passent-ils de dénomination d'objets à la désignation d'une collection ? Comment un sujet va-t-il effectivement contrôler la collection LEGO des deux voitures ? Et pour revenir au travail de MATHILDE quelle connaissance entre en conflit avec l'écriture des nombres au pied de chaque objet ?

Pour répondre à ces interrogations, nous mettons en évidence un ensemble organisé de décisions qui, dans chaque activité, apparaît indispensable.

Il s'agit de la stratégie suivante :

Pour déterminer une collection afin de la compter, le sujet doit prendre une série de décisions qui sont :

- Choisir un premier élément, lui appliquer une fonction de reconnaissance, (identification, dénomination, comparaison, confrontation, etc.) puis
- Choisir un successeur à ce premier élément en contrôlant qu'il est différent du ou des précédents puis
- Répéter l'opération jusqu'à ce que tous les éléments de la collection aient été pointés.

Cette opération produit un ordre total qui permet la détermination de l'ensemble. Nous appelons énumération cette opération.

1.4.2. REFLEXION SUR UN PROBLEME DE TERMINOLOGIE :

Nous venons d'utiliser le terme "d'énumération". Le choix de ce terme pour désigner la stratégie décrite présente quelques inconvénients :

L'étude étymologique²¹ du mot nous apprend qu'à l'origine, celui-ci désignait une action de comptage. Or, nous venons justement de caractériser une activité présente dans le comptage, mais distincte de celui-ci. Enfin, nous voulons montrer ultérieurement en quoi cette connaissance peut entraîner des dysfonctionnements dans le comptage. Le choix du mot paraît donc un peu contradictoire avec nos intentions. Toutefois les définitions plus récentes²² montrent que l'usage actuel du mot tend vers une signification plus détachée du numérique.

²¹ Énumération : du latin enumeratio, action de compter complètement. P.267 dictionnaire étymologique Larousse. 1992.

²² PETIT LAROUSSE ed 1992: Enumérer : Enoncer successivement les parties d'un tout, passer en revue. Énumération : action d'énumérer. DICTIONNAIRE ROBERT : Enumérer c'est d'après le dictionnaire Robert, compter un à un. Si l'on se porte au nom , "énumération", il s'agit d'une part de l'action d'énumérer, mais considéré comme une figure de rhétorique dans l'expression "faire l'énumération", il s'agit alors, toujours d'après le dictionnaire Robert, de l'action qui consiste à passer en revue toutes les manières, toutes les circonstances, toutes les parties. On voit que les deux mots "énumération" et "comptage" ont tantôt des significations différentes tantôt la même, ou à peu près. Poursuivons notre exploration afin de préciser le(s) sens admis de "dénombrement" et retournons voir le Robert. Celui-ci accorde trois sens au mot:

- 1- Compte de personnes. Ne se dit guère qu'en parlant d'un très grand nombre.
- 2- Énumération en parlant des choses.
- 3- Terme de logique: "dénombrement imparfait": faute de raisonnement par laquelle on tire une conclusion générale de plusieurs cas examinés, lorsque l'on a précisément oublié ceux qui rendent la conclusion fautive. La première acceptation est l'action de compter (en vue de...), la deuxième acceptation révèle

C'est pour cette raison que nous décidons de garder ce terme.

1.4.3. ANALYSE SUR UN EXEMPLE :

Reprenons l'exercice proposé lors de la troisième observation (page 131).

Pour compter le nombre d'éléments d'une collection donnée en ostension, l'élève doit nécessairement :

- 1- Être capable de distinguer deux éléments différents d'un ensemble donné.
- 2- Choisir un premier élément de la collection.
- 3- Énoncer le premier mot nombre (un).
- 4- Déterminer un successeur dans l'ensemble des éléments non déjà choisis.
- 5- Attribuer un mot-nombre (successeur du précédent dans une suite de mot-nombres).
- 6- Conserver la mémoire des choix précédents.
- 7 Recommencer 3 et 4 en les synchronisant.
- 8- Savoir que l'on a choisi le dernier élément.
- 9- Énoncer le dernier mot nombre.

Cette démarche peut être un maillon d'une démarche plus complexe qui se fonde sur un partitionnement de l'ensemble. (Cette étude est faite dans l'observation N°3 citée plus haut).

Reprenons les 9 points précédents et extrayons les points suivants :

- 1- Être capable de distinguer deux éléments différents d'un ensemble donné.
- 2- Choisir un premier élément de la collection.
- 4- Déterminer un successeur dans l'ensemble des éléments non déjà choisis.
- 6- Conserver la mémoire des choix précédents.
- 7- Recommencer 4.
- 8- Savoir que l'on a choisi le dernier élément."

Cette activité que nous appelons énumération se définit pleinement. Elle ne dépend pas du nombre. Elle est nécessaire au comptage. Elle est entièrement à la charge de l'élève. Ce sont les manifestations de cette activité (erreurs, difficultés) qui sont souvent pointées. Cette connaissance n'est pas uniquement en jeu dans ce contexte particulier de la construction des premiers nombres. Elle aboutit à la production effective d'une énumération des objets. Elle constitue un instrument de contrôle du comptage tout au long de la scolarité.

explicitement la confusion entre énumération et dénombrement, la troisième est clairement la description d'une action qui consiste à passer en revue toutes les manières, toutes les cas, c'est à dire "faire une énumération" au sens de la figure de rhétorique...

1.5. DIFFÉRENCE ENTRE OPÉRATIONS LOGIQUES ENSEMBLISTES ET OPÉRATIONS ÉNUMÉRATIVES.

Nous montrons, à l'aide d'un simple exemple, en quoi la réalisation effective d'une énumération d'un ensemble intersection de deux ensembles donnés nécessite la conception du produit cartésien de ces deux ensembles.

Voici deux ensembles L et A de noms. Soit à construire l'ensemble E des éléments de L qui sont aussi éléments de A ?

L	A
feg	rez
try	jik
jik	try
bof	poi
dre	bof
sdr	ver
lgi	ext
bhj	feg
	mol
	cer
	rea
	ast

La dénomination de l'ensemble constituant la réponse est immédiate à l'aide de l'intersection. L'ensemble qui répond à la question est $A \cap L$.

Mais lorsqu'il va s'agir de construire effectivement cet ensemble, il faudra mettre en œuvre des pratiques.

Du point de vue de l'action, un algorithme possible est le suivant : (en se fondant sur l'ordre canonique induit par les colonnes du tableau) :

Soit $a = \text{card}(A)$, $l = \text{card}(L)$. $A(i)$ le i terme de A et $L(i)$ le i terme de L

Pour i allant de 1 à a

Prendre le i° élément de A

pour j allant de 1 à l

si $A(i) = L(j)$ alors E devient $E \cup \{A(i)\}$

jusqu'à l

jusqu'à a .

On constate que l'énumération s'est effectuée sur le produit cartésien $A \times L$.

CONCLUSION :

Ainsi, il n'y a pas identité entre les opérations ensemblistes qui permettent de désigner un ensemble et les opérations énumératives qui permettent la production effective de cet ensemble.

Remarques relatives à cet exemple :

- ✓ Si les deux listes ne sont pas présentées de façon organisée, l'algorithme décrit ci-dessus doit être enrichi afin d'organiser un ordre sur chacun des ensembles.
- ✓ Si un prédicat caractérise A (ou L), il suffit d'une seule énumération.

1.6. ETUDE MATHEMATIQUE : L'ENUMERATION COMME PRODUCTION D'UNE RELATION D'ORDRE

En première analyse, l'énumération d'un ensemble fini est une relation d'ordre total sur cet ensemble.

Mais nous avons comme préoccupation d'étudier des pratiques énumératives. Il nous faut donc distinguer le fonctionnement des procédures possibles de celui des propriétés. C'est pour cela que nous sommes conduits à établir une construction particulière.

RAPPELS PRELIMINAIRES :

Soit un ensemble fini E et une relation d'ordre total \mathcal{R} sur E .

Dans la suite, nous noterons $\{a < b < c < d\}$ ou plus simplement $abcd$ l'ordre total sur l'ensemble $\{a, b, c, d\}$ dont le premier (le plus petit) élément est a , le second est b , etc., le dernier est d . (le plus grand).

Pour chaque ordre total sur E , il existe un premier élément, un dernier élément, et chaque élément, sauf le premier et le dernier, possède un et un seul prédécesseur²³, un et un seul successeur.

Chaque permutation de E peut être considérée comme un isomorphisme : ainsi la permutation notée $(abcd) \rightarrow (dabc)$ dans laquelle l'image de a est d , l'image de b est a , etc. peut être lue comme l'isomorphisme de l'ordre $abcd$ à l'ordre $dabc$ sur les éléments de E . A chaque ordre total correspond une permutation unique.

Conséquence : soit n le nombre d'éléments de l'ensemble E . Le nombre des ordres totaux sur E est $n!$

1.6.1. PREMIERE DEFINITION :

Soit un ensemble E fini. Une énumération de l'ensemble E est un ordre total sur cet ensemble.

Pourquoi ne pas s'en tenir à cette première définition ? Une telle définition rend compte de l'objet effectivement produit. Dans ce cas, il s'agit d'une suite telle que $(acdb)$. Mais cette définition ne permet pas de rendre compte de la façon dont l'énumération se réalise. Nous allons montrer que dans la réalisation effective de l'énumération d'une collection, la relation d'ordre n'est pas nécessaire. Elle est la conséquence d'une énumération. Aussi, nous reprenons l'analyse mathématique d'une façon un peu différente.

1.6.2. CONSTRUCTION D'UNE DEUXIEME DEFINITION :

Pour construire cette deuxième définition, nous rappelons et construisons quelques définitions préliminaires. Soit un ensemble E et une relation binaire antisymétrique²⁴ notée \mathcal{R} .

²³ On dit que x précède y si et seulement si $x \mathcal{R} y$ et si aucun élément z est tel que $x \mathcal{R} z$ et $z \mathcal{R} y$

²⁴ Il est commode de représenter un ensemble par des points du plan, chaque élément de a étant joint par un trait continu marqué d'une flèche à tout élément b tel que $a \mathcal{R} b$. Le diagramme est l'ensemble des points figurés et l'application de E dans $P(E)$ associant à chaque élément a de l'ensemble à des éléments x de E auxquels a est joint par une flèche ou une suite de flèches sans interruption constitue un graphe.

Définition 1a :

Un chemin C de E selon \mathcal{R} est une suite d'éléments de E notée $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n)$ telle que $a_i \mathcal{R} a_{i+1}$ pour $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ alors a_1 est dit premier élément, a_n est le dernier.

- Remarque : les éléments de la suite ne sont pas forcément tous distincts. Toutefois \mathcal{R} n'autorise pas n'importe quelle suite. Par exemple toute suite comprenant la sous suite suivante : a, b, a est incorrecte du fait de l'antisymétrie.

Définition 1b :

Soit un ensemble E et une relation binaire antisymétrique notée \mathcal{R} .

On appelle "trace", la suite produite par un chemin. (Deux chemins construits par exemple à partir de deux relations différentes, peuvent produire la même trace.)

Définition 2:

Un sous chemin S de C selon \mathcal{R} est une suite d'éléments de E produite par la même relation \mathcal{R} et incluse dans la suite de C .

Définition 3 :

Un cycle de E selon \mathcal{R} est un chemin de E noté $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n)$ d'éléments tous distincts et tel que $(a_n, a_1) \in \mathcal{R}$. (La relation \mathcal{R} étant antisymétrique, cette suite ne peut être réduite à deux éléments.)

Nous dirons qu'il s'agit d'un chemin cyclique.

Définition 4 :

Un chemin de E est dit maximal lorsque tout élément de E est élément du chemin.

Définition 5 :

Un chemin C est dit à cycle lorsqu'un sous chemin de C est un cycle.
(Un chemin cyclique est un chemin à cycle, la réciproque est fausse.)

Définition 6 :

Soient deux chemins $C (a_1, \dots, a_n)$ et $C' (b_1, \dots, b_m)$ sur E selon une même relation \mathcal{R} . et tels que le dernier élément de C soit le premier élément de C' ($a_n = b_1$).

On appelle concaténation, l'opération qui au couple (C, C') fait correspondre le chemin $C'' (a_1, \dots, a_n, b_2, \dots, b_m)$ dont le premier élément est le premier élément de C , le dernier élément, le dernier élément de C' .

C'' est le concaténé de C et C' .

Théorème : Le nombre d'éléments distincts d'un chemin maximal sans cycle est égal à $\text{card}(E)$.

Démonstration : la définition 4 implique $\text{card}(E) \leq \text{card}(C)$.

Supposons $\text{card}(E) > \text{card}(C)$. Comme tout élément de la suite de C est élément de E , cela signifierait qu'il existe deux éléments égaux de la suite, donc que C contiendrait un cycle, ce qui est contraire à l'hypothèse.

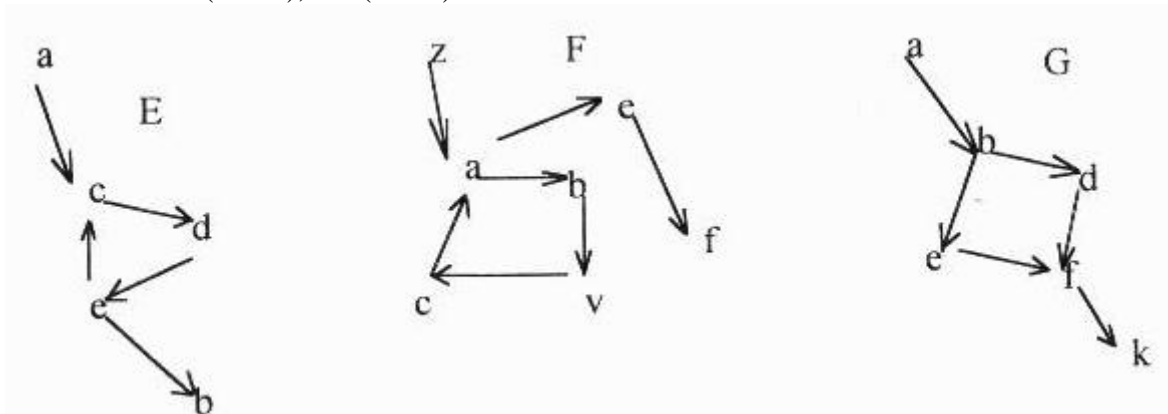
Définition 7:

Dans un chemin sans cycle C , x est avant y si et seulement s'il existe un sous chemin C' non cyclique de C tel que x en soit le premier et y le dernier.

Exemples :

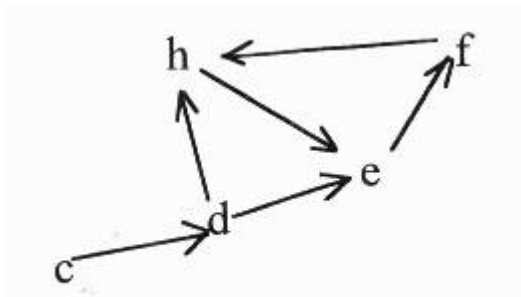
Voici quelques exemples de chemins dans trois ensembles E, F, G .

Dans E, voici des exemples de chemins : $C1=(acdeb)$, $C2=(acd)$, $C3=(cde)$.
 Dans F : $C4=(zabvcaef)$, $C5=(zaef)$,
 et dans G : $C6=(abdfk)$, $C7=(abefk)$.



$C1$ est maximal et sans cycle. $C2$, $C5$, $C6$, $C7$ sont sans cycle, mais non maximaux, $C3$ est non maximal est à cycle, $C4$ est maximal avec cycle.

Théorème : une relation antisymétrique dans E peut produire plusieurs chemins maximaux non cycliques.



Par exemple, dans cette figure, les chemins $(cdhef)$ et $(cdefh)$ sont maximaux et non cycliques.

DEUXIEME DEFINITION DE L'ENUMERATION :

Soit un ensemble E fini muni d'une relation antisymétrique \mathcal{R} . Tout chemin (Relatif à \mathcal{R}) maximal sans cycle, de E est une énumération de l'ensemble E. (notée \mathcal{E}).

Dans notre illustration ci dessus, $(acdeb)$ est une énumération de E. (acd) et (cde) n'en sont pas.

- ✓ Deux énumérations différentes peuvent produire la même trace et être issues de deux relations antisymétriques différentes.
- ✓ Deux énumérations d'un ensemble E peuvent être issues d'une même relation antisymétrique.

Définitions 8 : Deux énumérations sont dites équivalentes lorsqu'elles produisent la même trace. Pour cela, il suffit que les relations antisymétriques relatives à ces deux énumérations produisent un même chemin.

1.6.3. RELATION D'ORDRE INDUITE PAR UNE ENUMERATION

Soit un ensemble E muni d'une relation \mathcal{R} antisymétrique. Supposons qu'il existe une énumération \mathcal{E} de E , relativement à \mathcal{R} .

Soit la relation suivante \mathcal{R}' dans E

$x \mathcal{R}' y$ si et seulement si x est avant y dans l'énumération \mathcal{E} .

Cette relation est antisymétrique de par \mathcal{R} .

De plus, elle est transitive : en effet : soit x, y, z de E tels que $x \mathcal{R}' y$ et $y \mathcal{R}' z$. Le sous chemin C dont le premier élément est x et le dernier est y se concatène avec le sous chemin C' dont le premier élément est y et le dernier z . Le chemin obtenu est un sous chemin de \mathcal{E} . Il est sans cycle (sinon \mathcal{E} contiendrait un chemin à cycle). Donc x est avant z .

On montrerait aisément (chemin maximal) que tous les éléments de E sont comparables.

La relation \mathcal{R}' est une relation d'ordre strict total sur E .

CONCLUSION :

L'énumération induit une relation d'ordre total.

Réciproquement, une relation d'ordre total induit une énumération "canonique" que les ouvrages de mathématique qualifient de rangement linéaire.

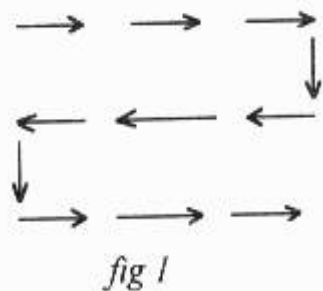
1.6.4. IMPORTANCE DE LA FONCTION SUCESSEUR DANS LES PRATIQUES ENUMERATIVES :

Dans une pratique énumérative, le sujet met en œuvre des modèles qui lui permettent de décider de passer d'un élément à un autre élément, de désigner le successeur d'un élément. Les raisons qui font que tel élément sera choisi (plutôt qu'un autre) constituent un champ d'études que nous aborderons ultérieurement.

Prenons un exemple : voici deux stratégies de mise en place d'une énumération sur un ensemble fini doté d'une structure en ligne et colonne.

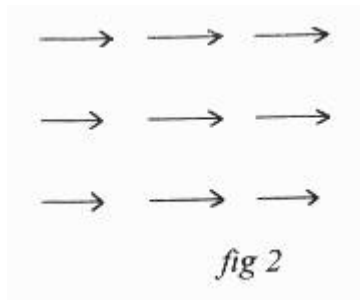
Soit maintenant à énumérer une collection d'un tableau d'objets tous identiques :

*	*	*	*
*	*	*	*
*	*	*	*



EXEMPLE 1

L'individu qui pratique une énumération ligne par ligne selon le chemin de la figure 1 parcourt l'ensemble en se servant d'une structure qu'il a reconnue. La relation d'ordre qui est induite par le chemin énumératif a été construite par proximité. Cette construction du chemin énumératif se fonde ici sur trois fonctions (dans E) : ce sont f_1 : immédiatement à droite, f_2 immédiatement en dessous, f_3 immédiatement à gauche qui ne se définissent que par la représentation de E .



EXEMPLE 2 :

Par contre, cette démarche, qui peut se représenter à l'aide des flèches ci-dessus, réalise trois chemins dans E. En cela ces trois chemins ne représentent pas une énumération. Toutefois, cette stratégie peut aboutir à une énumération si ces trois chemins sont ensuite raccordés convenablement.

Le nombre de fonctions mises en jeu dans une énumération est variable. Les fonctions mises en jeu caractérisent la pratique énumérative. Il peut alors être utile d'associer à une énumération donnée la suite de fonctions de E dans E qui ont permis la réalisation effective de l'énumération. Par exemple, la figure 1 représente une énumération qui utilise 4 fonctions : f1 : immédiatement à droite, f2 immédiatement à gauche, f3 immédiatement en dessous, f4 immédiatement au dessus. L'énumération se définit alors par le premier élément (appelons le a) suivi des fonctions utilisées. Sa désignation est alors: (E, a, f1, f1, f3, f2, f2, f4, f1, f1)

1.6.5. ENUMERATION ET OPERATIONS ENSEMBLISTES :

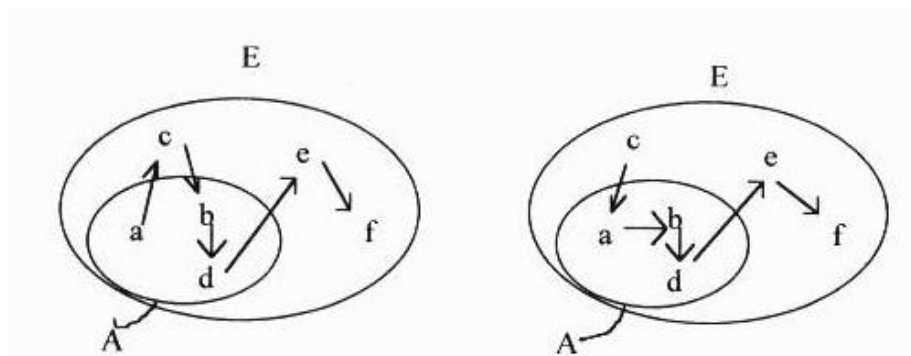
ENUMERATION D'UNE PARTIE D'UN ENSEMBLE FINI :

Soit un ensemble E et une énumération \mathcal{E} de E (relativement à \mathcal{R}). Soit A \subseteq E. Soit la relation dans E telle que $x < y$ si et seulement si x est avant y (relativement à \mathcal{R}) et $\{x,y\} \in A$. est antisymétrique.

Soit C le chemin dans A (défini par) maximal et non cyclique (à cause de \mathcal{E}). Ce chemin définit une énumération \mathcal{E}' de A.

Nous dirons que \mathcal{E}' est la restriction de \mathcal{E} à A.

Commentaire : la relation qui définit cette nouvelle énumération n'est pas toujours la restriction de \mathcal{R} à A.



Dans la figure ci-dessus, à gauche, l'énumération (a, b, d) induite est associée à une nouvelle relation. A droite, l'énumération (a, b, d) est associée à la restriction de la relation dans E. Ces deux énumérations à traces identiques sont donc produites par des relations différentes.

ENUMERATION D'UNE REUNION DISJOINTE :

Soit A et B deux sous ensembles disjoints de E. Soit \overline{EA} une énumération de A (liée à une relation \mathcal{R}) et \overline{EB} une énumération de B (liée à une relation \mathcal{R}').

Soit d le dernier élément du chemin de A et p le premier élément du chemin de B.

Soit la relation \mathcal{R}'' dans E telle que sa restriction à A soit \mathcal{R} et sa restriction à B soit \mathcal{R}' et telle que $d \mathcal{R}'' p$.

Cette relation est antisymétrique et le chemin concaténé est maximal et non cyclique (A et B disjoints). Il en résulte une énumération sur $A \cup B$.

ENUMERATION D'UN PRODUIT D'ENSEMBLES :

Soit A et B deux sous ensembles de E. Soit \overline{EA} une énumération de A (liée à une relation \mathcal{R}) et \overline{EB} une énumération de B (liée à une relation \mathcal{R}'). Soit l'ensemble $A \times B$ produit cartésien de A par B.

Il existe plusieurs façons de construire une énumération de l'ensemble produit à partir des deux énumérations données.

Par exemple, en considérant $A \times B$ comme réunion disjointes d'ensembles :

Soit $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{m, n, p\}$

$A \times B = \{(a, m), (b, m), (c, m), (d, m)\} \cup \{(a, n), (b, n), (c, n), (d, n)\} \cup \{(a, p), (b, p), (c, p), (d, p)\}$.

L'énumération de $A \times B$ est alors produite à partir de l'énumération d'ensembles disjoints.

Mais il est possible d'organiser la partition de $A \times B$ différemment.

ENUMERATION D'UNE INTERSECTION :

Soit A et B deux sous ensembles de E. Soit \overline{EA} une énumération de A (de relation \mathcal{R}) et \overline{EB} une énumération de B (de relation \mathcal{R}').

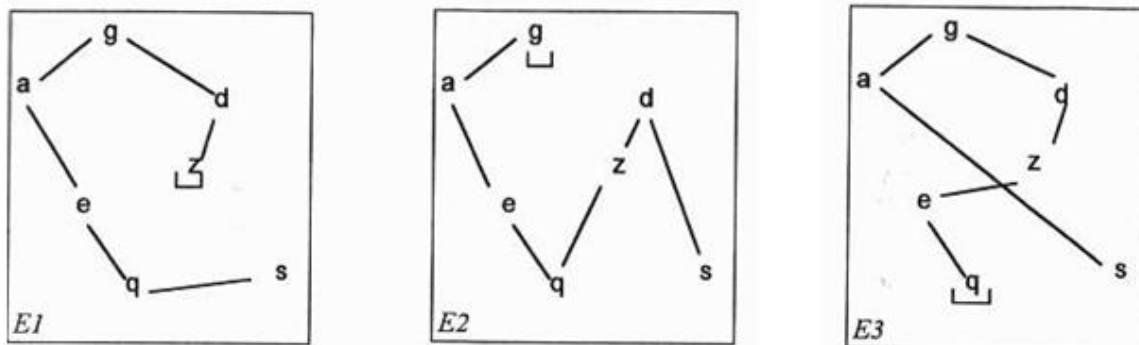
Soit la relation \mathcal{R}'' définie dans $A \cup B$ telle que $x \mathcal{R}'' y$ si et seulement si x "est avant" y dans le chemin maximal de \overline{EA} et x "est avant" y dans le chemin maximal de \overline{EB} .

Cette relation est antisymétrique. Le chemin est maximal et non cyclique dans $A \cup B$ (sinon l'un ou l'autre des chemins précédents ne serait pas maximal.). Il produit une énumération.

REMARQUE : Pour construire une telle énumération, il est suffisant de suivre l'énumération de A, et, pour chaque élément obtenu, de faire l'énumération de B pour savoir si cet élément est élément de B.

1.7. CONCLUSION : DEFINITIONS DE L'ENUMERATION

Nous distinguerons trois significations du mot énumération. Pour illustrer notre propos, nous nous servons des trois schémas suivants :



Soit l'ensemble $E = \{a, g, d, e, z, q, s\}$ et une première énumération $E1$. Si nous étudions ce travail d'un point de vue mathématique, nous y repérons une permutation de l'ensemble E . Donc,

- Du point de vue mathématique (**le résultat**) : tout ordre total sur un ensemble fini détermine une permutation. Les concepts existent ; il n'est pas nécessaire d'introduire d'autres mots.
- Si nous étudions ce travail d'un point de vue mathématique, mais cette fois ci pour tenter de modéliser l'algorithme producteur de cette permutation, nous devons faire une hypothèse sur ce qui a conduit le sujet à passer d'un élément au suivant. Ici, c'est la distance qui conditionne le choix du successeur. (**l'algorithme**) : Nous disons qu'une énumération d'un ensemble fini est un algorithme producteur d'une permutation de cet ensemble.
- Du point de vue didactique : (**l'activité**) : l'énumération est une description d'une activité de l'élève. (Ce qu'il fait quand il énumère).
- Du point de vue des connaissances en jeu : (**les connaissances**) : L'énumération est alors une connaissance productrice d'énumérations effectives. C'est un modèle implicite d'action, un ensemble de procédés locaux mis en oeuvre par l'élève pour réaliser concrètement une énumération.

Le schéma E1 montre un modèle de résultat d'un travail d'enfant. Du point de vue mathématique ce schéma montre une permutation E1 de l'ensemble E .

Si nous nous intéressons cette fois ci à la construction de ces permutations, l'algorithme repéré est : choix d'un premier élément et passage d'un élément au suivant par la fonction "le plus proche de". Pour pouvoir conclure que cet algorithme est le modèle de l'activité du sujet, il suffit de faire recommencer à partir d'un autre élément et s'assurer si le même algorithme (qui produit une autre permutation) est, ou non, mis en oeuvre. Par exemple, pour produire E2 et E3, le sujet n'est pas parti du même premier élément, mais utilise toujours la même fonction successeur "...est le plus proche de..". Ainsi, E1, E2 et E3 sont trois énumérations différentes du point de vue de la réalisation effectuée, mais constituent une seule énumération du point de vue de la connaissance en jeu.

1.8. EXISTENCE DE PRATIQUES SOCIALES ENUMERATIVES :

1.8.1. EXEMPLES DE PRODUCTIONS D'ENUMERATIONS DANS DES PRATIQUES SOCIALES :

La notion d'énumération existe-t-elle dans la culture ? Le premier usage du mot se réfère à une préoccupation habituelle qui se formule, par exemple, en ces termes : *"Il y a plusieurs raisons à cela, je vais les énumérer : il y a telle raison, puis celle-ci et enfin celle-ci."*... Nous dirons alors que la personne fait l'énumération ou une énumération des raisons invoquées. Bien souvent aussi, l'énumération porte sur des objets. Dans les pratiques de la vie courante, l'activité d'énumération d'une collection finie consiste à passer en revue tous les objets de cette collection une fois et une seule. Les raisons pour lesquelles cette activité est déployée sont multiples.

Nous prendrons un exemple bien connu : aller faire des achats au supermarché à l'aide d'une liste préparée à l'avance. L'activité d'énumération passera inaperçue si la liste préparée correspond parfaitement à l'organisation des rayons du supermarché. La liste elle-même apporte les moyens de contrôle des achats effectués et de ceux qui restent à faire. Mais si la liste n'a pas été conçue en fonction de l'organisation des rayons du supermarché, notre consommateur devra exercer un contrôle, rendu difficile, du passage en revue des éléments de sa liste. Il pourra s'aider du marquage s'il dispose d'un stylo, il pourra construire des sous-listes par familles de produits, etc. Il existe donc des pratiques énumératives.

Prenons un autre exemple : dans un paquet de pièces de dix francs, je sais que j'ai laissé tomber trois pièces de 100 pesetas (qui ressemblent aux pièces de dix francs). La première attitude consiste à trier rapidement avec l'espoir de retrouver les trois pièces. Si cette démarche ne suffit pas, il va falloir s'organiser différemment pour que le tri puisse être exhaustif : par exemple, étaler les pièces sur une table puis s'organiser dans l'exploration de l'ensemble. Dans ce cas, la fonction de l'énumération consiste à se donner les moyens de rechercher des objets dans un ensemble donné. L'activité est interrompue lorsque les trois pièces sont retrouvées. Si l'information "3" n'est pas disponible, l'activité est interrompue lorsque toute la collection a été explorée.

Mais l'exemple le plus connu (et sans doute le plus coûteux) est celui d'un recensement. Prenons le recensement de la population française. Il ne suffit pas de savoir compter jusqu'à 60 millions pour être capable d'effectuer ce recensement. Le recensement d'une population met en jeu toute une méthodologie, un contrôle du mesurage sur une quantité discrète, dont le but est de s'assurer que tous les habitants ont été énumérés.

Ainsi, dans la culture, il existe une tâche sans doute faiblement reconnue qui est celle d'énumérer un ensemble potentiel. Si une personne ou un groupe de personnes veut réaliser la tâche, elle devra effectuer des choix entre des énumérations. Nous voyons là que, même si cette tâche est fréquente, sa facilité apparente masque la difficulté réelle lorsqu'il s'agit de l'effectuer.

Nous allons montrer que cette tâche existe aussi dans des activités mathématiques.

1.8.2. EXEMPLES DE PRODUCTIONS D'ENUMERATIONS DANS DES ACTIVITES MATHEMATIQUES :

1.8.2.1. MANIFESTATIONS DE L'ENUMERATION :

La manifestation la plus familière de l'énumération, à l'école élémentaire est, nous l'avons vu, le comptage. Son contrôle se fait par la mise en œuvre de pratiques énumératives. C'est donc au cours du comptage que les difficultés de l'énumération se manifestent le plus fréquemment. Aussi est-elle souvent confondue avec lui.

Mais l'énumération n'est pas le comptage. Elle existe dans de nombreuses activités n'étant pas du comptage. Les deux exemples décrits précédemment page 7 le montrent.

Beaucoup d'activités fréquentes en mathématiques, relèvent de la désignation d'objets, de la comparaison d'ensembles finis, du contrôle d'un ensemble fini après transformation, de l'exploration d'ensembles finis. Notre analyse montre que, dans ces types d'activités, les pratiques énumératives sont effectives.

Mais, revenons sur les activités de dénombrement²⁵ d'ensembles qui occupent une place prépondérante en mathématiques à l'école élémentaire. Celles-ci constituent les fondements des connaissances numériques. Leur importance et leur fréquence méritent que l'on y caractérise la part prise par l'énumération.

1.8.2.2. DANS LA CONSTRUCTION DES PREMIERS NOMBRES :

Les enfants de 5-6 ans, qui comptent des objets, doivent, d'une façon ou d'une autre s'assurer qu'ils ont passé en revue tous les éléments de la collection sans en oublier un au passage. L'observation en situation adaptée permet d'identifier cette activité d'énumération au travers des difficultés spécifiques qu'elle provoque.

Chez les enfants, la conception²⁶ de l'énumération dans certaines conditions semble très vite mise en place mais sa réalisation effective au sein d'une activité de comptage présente des difficultés insoupçonnées. (L'observation de Mathilde constitue un exemple décisif).

1.8.2.3. DANS LA CONSTRUCTION DES OPERATIONS ARITHMETIQUES

L'enseignement a traditionnellement fait la séparation entre l'acquisition des nombres et celle des opérations arithmétiques élémentaires. Cette attitude s'est modifiée, notamment au cours des années 1970-1980. Par exemple, la construction de l'addition liée à l'écriture de nombres sous forme additive a permis d'avancer dans le décloisonnement entre les nombres, la numération et les opérations arithmétiques. Toutefois, ces séparations subsistent. L'énumération est le domaine où les élèves peuvent prendre les décisions pour effectuer des dénombrements. Les conditions de l'énumération doivent donc permettre de mettre en œuvre des techniques qui, à leur tour, imposeront des exigences dans le domaine du numérique. Ainsi, s'ouvre toute une réflexion sur l'enchaînement des situations d'apprentissage du nombre, de la numération, des opérations.

Par exemple, le contrôle de l'addition se fait à l'aide de connaissances énumératives. BROUSSEAU (1986) caractérise une situation fondamentale de l'addition : *"Il s'agira, pour le joueur, de produire le cardinal d'un ensemble alors qu'il ne peut en contrôler effectivement à chaque moment qu'une partie"*. Indépendamment du comptage de petites collections, outil indispensable à cette activité, la situation se fonde essentiellement sur un contrôle de l'exploration de l'ensemble qui doit être exercé par le sujet.

²⁵ Dénombrement doit être pris ici au sens de recherche de technique qui permette d'éviter le comptage un à un.

²⁶ Nous utilisons ce terme en nous plaçant du point de vue des élèves. Nous précisons l'usage de ce terme dans notre thèse.

L'énumération se manifeste aussi lorsque des enfants de cours élémentaire comptent les objets d'un tableau (voir notre exemple décrit en introduction), et prennent la décision de remplacer l'énumération effective (qui associerait le comptage un à un au passage en revue de chacun des éléments) par une énumération indirecte : (par exemple, prendre en compte une ligne, une colonne, leur nombre d'éléments et effectuer le produit.) , c'est à dire par une énumération se fondant elle-même sur des énumérations directes. Or cette activité constitue la genèse de la multiplication.

1.8.2.4. DENOMBREMENT D'ENSEMBLES :

En terminale, le chapitre intitulé "Combinatoire ; probabilité"_, constitue ce que le savoir savant a gardé des pratiques énumératives. Le terrain sur lequel ce savoir se fonde est d'ailleurs celui des ensembles. Les ouvrages rappellent donc quelques "résultats de la théorie des ensembles"_.

L'enseignement de l'analyse combinatoire fonctionne un peu comme les "problèmes types" du début du siècle dans les ouvrages des classes de fin d'études. Il s'agit de développer des savoir-faire dans un ensemble de situations suffisamment nombreuses et variées pour que l'enseignement ait le sentiment d'avoir répondu à la demande sociale d'enseigner ces connaissances.

1.9. LE DOMAINE DES ENUMERATIONS :

Nous avons montré la nécessité pour un sujet de passer des objets matériels aux objets mathématiques sur lesquels la structure mathématique portera : en l'occurrence, les collections. C'est en cela que l'objet "collection" sera identifié.

Nous avons aussi montré que pour déterminer un ensemble, il fallait disposer d'au moins une énumération de cet ensemble.

Dans ce chapitre, nous revenons sur le rôle de l'énumération dans la détermination des ensembles et proposons une autre façon de définir cette détermination à l'aide de l'énumération. Ensuite, nous analysons les conditions possibles de fonctionnement de l'énumération en situation a-didactique et commençons à isoler des variables influentes.

1.9.1. DETERMINATION D'ENSEMBLE ET ENUMERATIONS :

Reprenons l'exemple de la collection des pièces des deux voitures :

Les objets suivants sont disposés sur une table : 8 roues, 2 plaques LEGO, 4 tiges métalliques, deux bonhommes LEGO assis.

- Une détermination (donc un contrôle) de la collection se fonde sur une énumération des objets matériels. Cette énumération aboutit à une liste écrite.

Cette liste peut être une suite de dessins représentant les objets des collections ou bien de signes conventionnels.

- Une autre façon de déterminer effectivement cette collection est d'énumérer les objets de celle-ci en se fondant sur une dénomination de la collection. Par exemple : C'est une collection de deux autos avec chauffeurs. Cette dénomination induit une énumération qui aboutit à une liste de classes d'objets. Cette liste sous le contrôle de la conception que le sujet a d'une voiture et qui lui permet d'énumérer les classes.

Nous dirons que dans un ensemble E donné, deux énumérations sont équivalentes si elles permettent de déterminer un même sous ensemble de E .

La détermination d'une partie de E est alors une classe d'équivalence d'énumérations.

1.9.2. CONDITIONS REQUISES POUR QUE L'ENUMERATION SOIT UN MODELE IMPLICITE D'ACTION :

L'exemple ci-dessus montre les interactions entre le choix d'une énumération et un moyen de détermination de l'ensemble à énumérer. Ces interactions sont décisives dans des secteurs clés de l'enseignement des opérations arithmétiques.

Par exemple, dans une lecture du tableau ligne-colonne dans une situation multiplicative, l'enfant dispose, bien souvent, au mieux, d'une seule énumération par rapport à laquelle il n'a aucune liberté. Il a par exemple une manière d'énumérer les cases en prenant les bords (à gauche et en haut). Mis dans d'autres conditions (présence d'un cache déplaçable) il n'est pas capable d'envisager l'énumération (c'est à dire d'envisager une autre énumération) pour compter. Il dispose d'une énumération qui lui a été enseignée.

Dès à présent, nous devons donc :

- D'une part retenir que les moyens de déterminer une collection et le choix d'une énumération sont étroitement liés. Or, comme nous l'avons vu dans l'exemple de MATHILDE et des T.A.S., le choix (le mieux adapté à la situation) entre deux énumérations constitue une activité décisive et pourtant laissée complètement à la charge du sujet.

- D'autre part tenir compte du fait que l'enseignement induit fréquemment des procédures énumératives, donc des déterminations d'ensembles.

Notre analyse de situations a-didactiques doit donc permettre de distinguer des énumérations qui sont un modèle implicite d'action et des énumérations qui sont le résultat d'un projet extérieur au sujet apprenant.

1.9.3. DANS LES SITUATIONS D'ENSEIGNEMENT : DEUX TYPES D'ENUMERATIONS.

Qu'est-ce qui lie l'énumération et la conception de la collection ?

Nous avons déjà abordé cette question au travers des rapports entre la désignation et la dénomination. La dénomination d'un ensemble constitue un moyen pour éviter des énumérations "objet après objet". Nous allons maintenant aborder cette question du point de vue de la situation proposée au sujet.

Le milieu enseignant permet le plus souvent de réaliser effectivement une énumération sans concevoir l'ensemble. Par exemple : la situation exige de se saisir d'objets mis sur une table et les mettre dans une boîte. Le sujet réalise effectivement une énumération, sans qu'il en ait conscience. La détermination de l'ensemble n'est pas à la charge du sujet. Il se peut qu'il ait conçu l'ensemble, mais rien ne permet de s'en assurer.

Il existe donc des énumérations effectives, produites à l'insu du sujet, qui n'impliquent aucune connaissance de l'ensemble constitué ou reconstitué. L'observateur "voit" une énumération, mais le sujet choisit un élément après l'autre (dans notre exemple, c'est la situation elle-même qui fait faire une énumération). Le sujet effectue une énumération mais n'a pas de projet énumératif. Il n'a pas à disposer d'un modèle implicite d'action de l'énumération.

Nous distinguons alors les situations dans lesquelles l'énumération est à la charge du sujet et les situations qui impliquent, de fait, une énumération.

1.9.4. CONDITIONS DE NAISSANCE D'UN MODELE IMPLICITE D'ACTION DANS UNE SITUATION ADAPTEE :

Pour poursuivre l'analyse du paragraphe précédent, nous examinons le cas d'une situation dans laquelle l'énumération est à la charge du sujet :

Dans l'activité du "jeu du trésor", les élèves peuvent réaliser les dessins des objets sans avoir un projet d'énumérer. **Il leur faut du temps pour imaginer que l'énumération sera la solution au problème posé.**

Auparavant, les enfants peuvent produire une bonne liste, mais au hasard de la prise des objets. (Par exemple, la prise des objets et la pose à côté, peuvent produire une énumération à l'insu des enfants). Le projet effectif de contrôle de l'exhaustivité afin de reconnaître ou de reproduire l'ensemble n'est pas, au début, le moteur de l'action, encore moins de la formulation.

Ainsi, dans certaines situations laissant l'énumération à la charge du sujet, il peut toutefois se produire des phénomènes locaux qui laissent croire à une réussite.

1.9.5. VARIABLES POUVANT AGIR SUR LA MISE EN OEUVRE D'UN MODELE IMPLICITE D'ACTION :

Nous venons de mettre en évidence une variable significative et qui est liée à la situation : Il s'agit de la variable suivante : **certaines situations produisent une énumération à l'insu du sujet, d'autres impliquent une mise en œuvre d'une énumération.**

Une situation générique peut, à quelques modifications près, passer de la première catégorie à la seconde.

Reprenons l'exemple de la collection structurée en lignes et colonnes : si l'on propose à un enfant de dénombrer un ensemble d'objets organisé en lignes et en colonnes, cette situation appelle le comptage du nombre d'éléments par lignes et du nombre de lignes. Le produit donne alors le résultat attendu. Cette énumération (à l'aide de dénomination de classes) n'est, en fait pas à la charge du sujet. Le modèle est trop marqué scolairement. Supposons alors que l'élève ait à rechercher la structure de la collection (par exemple, il ne peut voir qu'une partie de la collection au travers d'un trou déplaçable au dessus de celle-ci). Dans ce cas, la structure n'est pas montrée. Le sujet doit agir et agir pour reconstruire cette structure.

Nous avons là un exemple de variable (vision globale ou locale) qui fait passer la situation de la première catégorie évoquée à la seconde. Cette variable peut d'ailleurs être affinée. Ainsi, il est probable que la grandeur de la fenêtre de vue, par rapport à la grandeur de la collection, influe sur la recherche de la structure de la collection.

Une analyse identique peut être conduite en se servant de la situation fondamentale de l'addition :

Le partitionnement d'une collection est le plus souvent ou enseigné ou suggéré par la présentation. Il en serait tout autrement si le sujet avait à produire effectivement une partition d'un ensemble pour pouvoir effectuer le dénombrement global à l'aide de dénombrements locaux.

Nous développons, dans le chapitre ingénierie, deux situations qui traitent cette question.

1.9.6. ESSAI DE MISE EN EVIDENCE DE CARACTERISTIQUES ERGONOMIQUES DE L'ENUMERATION :

1.9.6.1. *DEPENDANCE DE LA FONCTION "SUCESSEUR DE " PAR RAPPORT AU CHOIX DU PREMIER ELEMENT :*

Prenons deux collections E et F d'objets dessinés sur une feuille de papier. $E = \{a, g, e, z, d, q, s\}$ et $F = \{l, f, a, c, g, h\}$. Une première stratégie énumérative consiste à prendre un premier élément puis à prendre l'élément le plus proche (plaçons nous dans le cas où il n'y a pas deux choix possibles), et réitérer ainsi l'action jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'objets non énumérés.

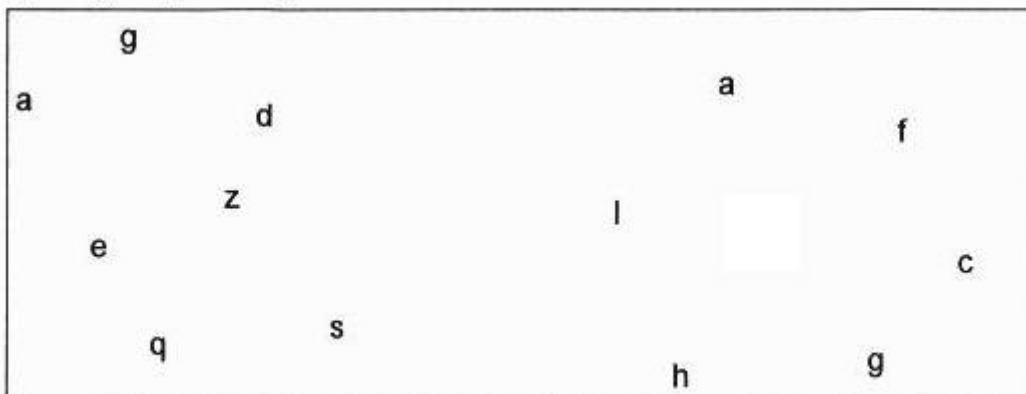


figure 1

figure 2

Soit f l'application (dans le cas où l'on se place) de E dans E qui à un élément fait correspondre le plus proche des restants.

Cette application se définit à partir de l'organisation de E et les distances entre les objets. **Mais f n'est pas définie uniquement par les distances.** Le choix du premier élément (et donc des suivants) peut conditionner la définition de f .

Ainsi, dans la figure 1, l'énumération obtenue à l'aide de cette stratégie en partant de a est : ($a g d z e q s$). En partant de z , l'énumération obtenue avec la même stratégie est : ($z d g a e q s$). Ces deux énumérations empruntent des chemins différents.

Par contre, dans la figure 2, L'énumération obtenue à l'aide de cette stratégie et partant de a est ($a f c g h l$). En partant de tout autre élément, on obtient une énumération identique (à une permutation près) : par exemple, en partant de c : ($c g h l a f$). Le chemin emprunté est le même. **Nous dirons dans ce cas que l'énumération est stable.**

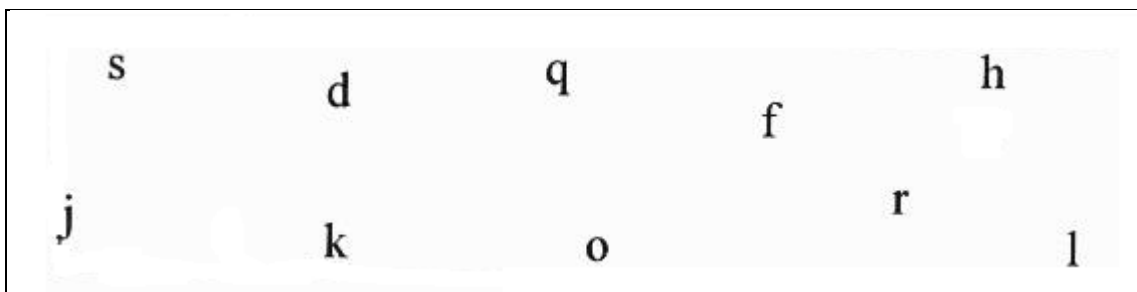
L'application f peut donc être définie indépendamment du choix du premier élément. Lorsque l'application f ne dépend pas du choix du premier élément, l'énumération est stable. C'est à dire qu'il existe un chemin unique qui sera parcouru d'un point à un autre.

Dans les autres cas, l'application f dépend du choix du premier élément. Il conviendrait alors de la noter f_a (a étant le premier élément choisi).

Du point de vue du sujet, on peut faire l'hypothèse que les ensembles qui offrent des énumérations stables provoqueront moins de ruptures lors d'essais successifs que dans les autres cas. Il s'agit donc d'une variable ergonomique à prendre en compte.

Il faudrait analyser d'autres stratégies possibles d'énumération qui peuvent se présenter : en particulier, dans l'énumération d'une collection, la recherche d'alignements horizontaux permettant de retrouver une organisation identique à celle de l'écriture.

Selon que l'organisation spatiale de la collection provoque ou non une rupture, l'activité d'énumération sera plus ou moins aisée :



Dans le cas de la figure 3, l'énumération régie par la stratégie du lignage risque d'être mise en défaut lorsque le sujet devra choisir après l'élément f .

Nos observations en cours préparatoire (page 145) mettent dans ce cas plusieurs stratégies en évidence.

1.9.6.2. *DEPENDANCES ENTRE ENUMERATION ET CONCEPTION DES ELEMENTS DE LA COLLECTION :*

Lorsqu'il s'agit de déterminer une collection et que les objets sont des objets matériels, les caractéristiques qui vont peser sur l'énumération sont des caractéristiques physiques ou de position : (poids, formes, localisations, proximités, etc.). La constitution des collections se manifeste alors par la réalisation d'un objet supplémentaire : la collection. Ce sera par exemple une boîte dans laquelle on place tous les objets dont il est question ou bien le lien effectif (chaînage) conséquence d'une énumération réussie d'objets dessinés sur une feuille de papier.

Mais il est parfois nécessaire de concevoir les objets eux-mêmes : ainsi par exemple, dans les problèmes d'analyse combinatoire, les objets sont définis par une propriété qui les caractérise. La définition en compréhension est un moyen didactique de montrer la conception des objets (par le système) qui vérifient une propriété commune. Reste au sujet à concevoir l'objet.

Prenons, par exemple le problème des pronostics dont nous faisons une observation détaillée page 161 : "*Soit 13 matches de football. Chaque match peut être perdu, gagné ou avoir pour résultat le match-nul. Trouver le nombre de pronostics possibles*".

Il s'agit de dénombrer une collection, mais, dans ce cas, un élément de cette collection n'est pas construit à priori. L'étudiant va devoir construire, conceptualiser cet élément. Il lui est facile, dans la grande majorité des cas, d'imaginer ce que sera un pronostic. Pour formaliser, nous pourrions dire qu'il s'agit d'un triplet (A,B,C) dans lequel A et B représentent deux équipes différentes et C l'un des trois états (gagné, perdu, nul). Mais une conception du pronostic en tant qu'élément ne conduit pas une conception du pronostic comme élément d'un ensemble. Nos résultats le prouvent.

Comment sait on que tel pronostic a déjà été répertorié ou non? : La conception du pronostic par l'étudiant est déterminante sur la façon dont l'étudiant pourra répondre à cette question.

Autre exemple : prenons l'exemple des chemins ²⁷(BAC D 1992) traité dans le chapitre des observations page 167. Les élèves conçoivent les objets (ce sont les chemins physiquement non représentés, mais dont il est aisé d'en déterminer un ou plusieurs). Le passage de la détermination de l'ensemble des chemins au dénombrement de cet ensemble nécessite au moins une énumération.

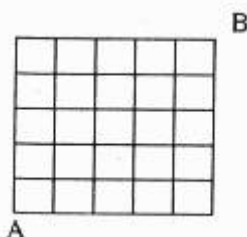
Par exemple, il est possible de construire une énumération à partir de propriétés locales (proximité géographique) : dans ce cas, il faut faire la liste des investigations effectuées et s'assurer, de la meilleure façon possible, que tous les objets ont été passés en revue.

Ensuite, il faudra les énumérer en vue du comptage. L'énumération effective pouvant se faire dans un ordre n'ayant rien à voir avec la construction. Par exemple, les chemins sont répertoriés par classes et dans chaque classe, une énumération est possible. Nos observations montrent qu'aucun étudiant ayant eu cette conception n'a pu répondre convenablement dès que le quadrillage dépassait 4 carreaux.

Il est possible de produire une énumération qui se fonde sur une autre détermination de l'ensemble ou sur une détermination d'un ensemble équipotent. (Par exemple, remplacer l'ensemble des chemins par un ensemble de vecteurs mis en bijection avec celui-ci). Cette seconde façon de concevoir les objets est plus coûteuse.

En conclusion : la (ou les) façon(s) de concevoir l'élément de l'ensemble dépendent et influent sur la façon de concevoir l'énumération de cet ensemble. (Et donc, dans les cas exposés ci-dessus, sur la façon de mener à bien le dénombrement.)

²⁷ L'épreuve du bac demandait le nombre de chemins minimaux possibles pour aller de A à B en se déplaçant sur le quadrillage. L'étude du quadrillage ci-dessous était précédée d'une question dans laquelle on demandait de représenter effectivement les chemins allant de A vers B sur un quadrillage comportant seulement 4 cases.



1.9.7. DEFINITION LOCALE DU SUCESSEUR COMME SYSTEME INFLUANT SUR LA PRODUCTION D'UNE ENUMERATION :

1.9.7.1. INFLUENCE DES CONDITIONS LOCALES SUR LA PRODUCTION D'UNE ENUMERATION :

Les énumérations effectives sont souvent réalisées à partir de choix locaux. **Dans quelle mesure une relation locale de détermination du successeur influe-t-elle sur l'énumération produite ?**

Prenons l'exemple de l'énumération d'une collection dessinée en vue du comptage de celle-ci. (Nos observations page 131).

Si cette collection est répartie en paquets, les enfants effectuent localement un chaînage (pour un paquet), puis passent à un autre paquet, etc. Ces enfants conçoivent donc localement des énumérations.

- Si ces énumérations sont synchronisées avec une mise en mémoire (le cardinal de chaque classe) et une énumération sur les nombres inscrits, alors les enfants aboutissent à la production d'une suite additive.
- Si les enfants effectuent un chaînage dans une classe puis passent à une autre classe en poursuivant le chaînage (en désignant un autre premier élément), la suite numérique conviendra et l'enfant produira le nombre cardinal de la collection.

Ces deux façons de mesurer la collection aboutissent à deux façons de dénombrer. La première induit la suite additive, la seconde induit l'écriture canonique.

Ainsi, à partir de décisions locales, l'enfant utilise une énumération ou une autre. Et dans le cas des activités de comptage, la conséquence est le recours, ou non, à des productions additives.

Dans l'activité de comptage, l'enfant sait qu'il doit tout prendre en compte et cette contrainte se traduit souvent par une énumération de type chaînage (parce qu'elle s'adapte au modèle de la comptine). Le système "force la main" aux enfants en exigeant à un moment donné de compter "les paquets" et de produire une écriture additive.

Or, la production (la mise en mémoire) des cardinaux des parties peut être le résultat de la production d'une énumération type chaînage qui se serait bloquée (pour des raisons d'ergonomie). Au lieu de rejeter immédiatement cette stratégie (parce qu'aucune place n'est réservée à la formulation de cette difficulté), il serait profitable de tirer profit de cette difficulté à énumérer pour justifier les comptages locaux. (Et plus tard la suite additive).

1.9.7.2. CHOIX LOCAUX SUGGERES PAR LE SYSTEME : OBSTACLE A UNE ENUMERATION.

Les choix locaux sont aussi décisifs dans des énumérations plus complexes : reprenons l'exemple de l'exercice des chemins. L'exercice demande de dénombrer les chemins sur un exemple simple (quadrillage de 4 cases) ou les objets "chemins" (et donc la collection des chemins) peuvent être effectivement passés en revue. Cette première question suggère donc une énumération qui se fonde sur des études locales : prendre les chemins qui commencent par une verticale, deux verticales, aucune verticale.

Nous avons déjà dit que dans ce cas, les pratiques ne sont malheureusement pas transférables au cas suivant. Le système impose donc une conception de l'objet chemin qui s'oppose à la réussite à la question suivante.

Tout au plus, et c'est l'habitude du système, cette première question premier pourra servir de contrôle de la formule obtenue dans le second cas. Notre observation montre malheureusement que ce contrôle ne s'exerce jamais.

1.9.8. QU'EST CE QUI DICTE ALORS LE CHOIX D'UNE ENUMERATION OU D'UNE AUTRE ? QUELLES CONSEQUENCES DANS UNE REFLEXION SUR LA CONSTRUCTION DES OPERATIONS ARITHMETIQUES ?

Qu'est-ce qui fait qu'une énumération est adaptée ou non à l'activité du moment ?

Pour répondre à cette interrogation, nous ne pouvons pas nous contenter de passer en revue des techniques d'énumération. Les exemples précédents montrent la diversité des variables qui influent sur le choix. La production d'un ordre total n'est qu'un aspect. Il faut pouvoir maîtriser un certain nombre de propriétés de cet ordre total, en particulier, l'économie, la fiabilité.

Nous commençons à comprendre qu'il y a des énumérations qui peuvent être très coûteuses du point de vue mise en œuvre de concepts, d'autres qui peuvent l'être moins. Examinons les conséquences de cela sur des points importants du programme de l'enseignement élémentaire :

LE PASSAGE D'UNE ENUMERATION A UNE AUTRE PERMET LA CONSTRUCTION D'ALGORITHMES DE CALCUL :

Par exemple, les progressions sur la construction des opérations se fondent sur des processus complexes d'économie. (Économie dans l'action, dans les calculs, dans les validations). Or, le comptage un à un est l'activité de base des élèves pour formuler le cardinal d'un ensemble.

Pour qu'un enfant abandonne le comptage un à un au profit d'autres modes de dénombrement mettant en jeu des opérations arithmétiques, il faut qu'il passe d'une énumération à une autre. L'énumération constitue alors un domaine de contrôle du comptage et donc des procédés qui éviteront le comptage un à un.

L'amélioration du comptage par l'accès à des opérations, comme la multiplication par exemple, consiste donc à passer d'un type d'énumération à un autre ou à plusieurs autres.

Cette analyse permet d'envisager de façon différente la construction des situations d'apprentissage des algorithmes.

LE CHOIX DE CERTAINES ENUMERATIONS PEUT CONSTITUER UN OBSTACLE AU DENOMBREMENT :

Exemple : en analyse combinatoire, le sujet peut mettre en œuvre des stratégies qui sont tout à fait correctes du point de vue ensembliste, mais qui se révéleront totalement inefficaces pour effectuer un dénombrement. (Voir étude page 172)

Certaines structures installées sur des ensembles sont bonnes par les propriétés informationnelles qu'elles assurent. D'autres, et ce ne sont pas toujours les mêmes, sont bonnes pour effectuer un dénombrement.

1.10. CONJECTURES²⁸

Pour préciser maintenant notre recherche, nous avons opté pour l'exposé sous forme de conjectures. Certains points, en particulier, dans la conjecture 3 dépassent notre travail. Comme nous l'avons déjà dit, notre recherche s'inscrit dans un travail collectif plus large. C'est pour cette raison que nous avons décidé de conserver des axes généraux (en italiques fines) afin de lier travail personnel et étude plus générale.

CONJECTURE 1 :

"Certaines difficultés dans des activités de dénombrement peuvent être imputées à la difficulté de passer d'un ensemble fini d'éléments à la détermination d'un ordre total_ sur cet ensemble. La capacité à faire ce passage peut être identifiée comme une connaissance appelée énumération.

Les difficultés dans l'énumération peuvent être repérées elles-mêmes comme des absences de connaissances. Il s'agit donc d'un savoir-faire nécessaire."

CONJECTURE 2 :

"L'énumération n'existe pas en tant qu'objet d'enseignement, ni comme objet scientifique tel quel. Ce que nous visons sous ce terme apparaît sous des formes éclatées dans les publications mathématiques ou pédagogiques. Il n'existe pas une définition de l'objet correspondant à ce que nous appelons l'énumération. Dans le savoir savant, cet objet est confondu avec les activités de dénombrement."

CONJECTURE 3 : Ce groupe de conjectures est à relier à un projet plus global.

La pensée naturelle permet la construction de raisonnements dont le sujet a besoin dans les pratiques sociales de la vie ordinaire. Or le savoir constitué, n'est pas la théorisation de la pensée naturelle. Mais il se trouve que l'on doit s'appuyer sur la pensée naturelle pour enseigner des mathématiques.

C31 Les connaissances énumératives sont ignorées de l'institution et des enseignants.

C32 L'énumération est la part de la responsabilité de l'élève dans le comptage.

C33 La transposition didactique ne s'opère pas.

Il y aurait donc, de fait un divorce entre le savoir savant enseigné et les pratiques sociales. En d'autres termes il y a des situations où la connaissance nécessaire à la pratique sociale (ou à l'enseignement) n'existe pas dans le savoir savant sous une forme convenable.

C34 L'institution enseignante se donne des moyens pour résoudre localement les problèmes posés par l'absence de l'enseignement de l'énumération. La connaissance y fonctionne alors comme un ordre prescrit²⁹. Il n'est pas nécessaire de connaître la nature précise de cette connaissance, il convient de savoir faire.

CONJECTURE 4 :

Il est possible de développer une ingénierie d'apprentissage autour du concept d'énumération, c'est à dire construire des séquences d'enseignement de l'énumération à l'école et dans le secondaire.

L'usage de l'informatique facilite la mise en scène de ces situations.

²⁸ Opinion fondée sur des apparences, sur des probabilités.

²⁹ _Nous aurions pu utiliser le mot "rite" au lieu "d'ordre prescrit". RITE : ordre prescrit des cérémonies qui se pratiquent dans une religion. (LITTRE).

CONJECTURE 5 :

La communication de ces situations aux enseignants en formation est possible et est facilitée par l'usage de logiciels d'enseignement. En particulier, la question de la perméabilité didactique peut être abordée.

La première conjecture vise une réponse à la question "Les enfants ont ils une ou des conceptions relative à l'énumération ?". Nous cherchons là, une caractérisation d'une forme de connaissance, d'un savoir faire disponible, méconnu et nécessaire. Nous voulons aussi montrer en quoi le dysfonctionnement de cette connaissance peut expliquer des difficultés dans le comptage.

Nous démontrerons la deuxième conjecture en étudiant la façon dont le savoir savant traite des questions dans lesquelles interviennent des pratiques énumératives.

La troisième conjecture traite des rapports entre le savoir savant et le savoir enseigné.

L'existence de pratiques énumératives non traitées dans le savoir savant, non prises en compte dans l'enseignement pose la question du sens réel donné à certaines connaissances.

- Est-il possible d'enseigner des concepts qui ne sont pas reconnus dans le savoir savant ?
- S'il y a une connaissance de l'énumération, il y a des fractions de savoirs relatives à l'énumération qui ne sont pas identifiées en tant qu'objet d'enseignement.

Pour montrer la validité de la quatrième conjecture, nous construisons une ingénierie pour produire des situations a-didactiques de l'énumération. Nous travaillons essentiellement dans le domaine de la construction du nombre et des opérations arithmétiques.

Nous apportons ensuite des réponses à la recherche des moyens à mettre en œuvre pour que les élèves de la scolarité obligatoire puissent, avec leurs professeurs, faire passer l'énumération du domaine des compétences personnelles à celui d'un savoir reconnu. Nous nous préoccupons de l'intégration de ces situations dans l'enseignement.

Ainsi, une grande part de notre recherche consiste à construire des situations spécifiques d'énumération et d'en espérer des situations d'apprentissage.

Nous avons opté, pour l'essentiel, pour la modélisation de situations par construction de logiciels. Nous montrons pourquoi cette option et montrons les applications possibles.

La conjecture 5 développe un aspect important de la transmission des résultats de recherches dans l'enseignement. En particulier il s'agit de réfléchir aux moyens de communiquer simplement l'existence de phénomènes d'enseignement aux enseignants.

1.11. LES TENTATIVES PRECEDENTES D'ENSEIGNEMENT DE CONNAISSANCES PRENUMERIQUES, LE ROLE DES TRAVAUX DES PSYCHOLOGUES, LES TRAVAUX PLUS RECENTS.

Actuellement, la construction du nombre n'est plus précédée de situations d'enseignement faisant travailler les enfants sur des ensembles. Cet état de fait existait déjà avant 1970. La réforme de l'enseignement des mathématiques appliquée en 1970 avait eu comme conséquences la mise en place de situations d'enseignement pré-numérique. Cette réforme s'appuyait essentiellement sur une transposition de la théorie des ensembles dans l'enseignement. Cette théorie fut d'abord enseignée dans les universités, puis transposée dans l'enseignement secondaire et élémentaire (DIENES, PAPY). Cette réforme prétendait, à la différence des précédentes, être une réforme des contenus. Elle permettait d'unifier et de réorganiser les connaissances mathématiques.

Cette réforme dite réforme des maths modernes a donc proposé, pour la première fois, des contenus d'enseignement préparatoires à la construction du nombre à l'école élémentaire. Ainsi, il s'agissait de concevoir des ensembles, de reconnaître si deux ensembles étaient identiques, puis de concevoir des ensembles à partir d'autres ensembles.

Le contrôle des ensembles s'y est fait à partir du contrôle logique, prédicatif. Les promoteurs se préoccupèrent de définir les ensembles. Ils utilisèrent pour cela des présentations telles que les diagrammes de VENN, de CARROLL, etc.

Nous allons montrer en quoi le projet de l'époque ne pouvait répondre aux questions que nous posons.

Mais le seul fait que les mathématiciens aient entrevu l'existence de connaissances préalables à la construction du nombre nous encourage à reprendre l'étude différemment.

1.11.1. LE SYSTEME RECONNAIT L'EXISTENCE DE CONNAISSANCES ANTERIEURES AU NOMBRE :

L'étude des programmes de mathématiques des années 1970 (précisément 1970 pour l'école élémentaire) mettent pour la première fois en évidence des connaissances "en amont" du nombre.

Par exemple, voici ce qu'écrit M.ROBERT³⁰ à propos de l'enseignement des entiers naturels : "au départ, rien ne paraît changé (NDLR par rapport aux programmes de 1947). On a toujours présenté les naturels à partir de collections d'objets. Même si on remplace le mot de collection par celui d'ensemble, le sens reste le même. Mais déjà nous voyons que les objets de l'ensemble doivent être distincts, qu'ils n'ont pas à être tous pareils, de même nature, et qu'il est souhaitable d'utiliser des ensembles d'objets bien différents et point trop intéressants affectivement." Plus tard, à propos de la numération, on peut lire : *"Il faut partir d'une collection d'objets, faire des groupements par 3, 5, 10, des groupements de groupements pour obtenir l'écriture du naturel dans un système de numération"*.

Voici ce qu'écrit encore ZIGLON (1971) dans un ouvrage de formation d'enseignants : "Nous ne donnerons pas de définition du mot "ensemble" ; nous considérons ce concept comme une notion première. En nous plaçant du point de vue intuitif, nous dirons avec A.REVUZ que "c'est la mathématisation de la notion concrète de collection".

³⁰ "La mathématique à l'école élémentaire APMEP Paris 1972 p.17.

1.11.2. UN OBSTACLE : "LA NOTION MATHÉMATIQUE SOUS-JACENTE".

Sans doute les promoteurs de 1970 soupçonnaient la nécessité d'enseigner des savoirs présents dans la construction du nombre, mais, à l'époque, le souci constant des enseignants et des formateurs était de faire correspondre l'activité du sujet et les notions mathématiques "sous-jacentes". Prenons exemple dans l'ouvrage de formation des maîtres de CH.GRANNEY et G.PERROT³¹ page 23. Voici le tableau proposé :

ACTIVITÉ	NOTIONS MATHÉMATIQUES SOUS-JACENTES
Ensemble	Ensemble
Famille d'ensembles	
Tas d'ensembles qui se ressemblent... autant que...	Partition. Relation d'équivalence Correspondance terme à terme
Mise en ordre des tas	Cardinal Relation d'ordre Ordinal
Nombre naturel	

Dès qu'une activité était étudiée, elle était rabattue sur ces nouveaux savoirs. Ceci a pesé lourd dans l'enseignement. On en connaît les excès. Quelquefois, le langage à utiliser devenait le savoir à enseigner³². Les contenus du cours préparatoire des années 70 furent profondément modifiés. Bien souvent, le premier trimestre était occupé par des activités relatives aux ensembles qui étaient coupées de la construction du nombre.

1.11.3. LES MOYENS DEVENUS OBJETS:

L'enseignement des années 70 se préoccupait donc de savoirs antérieurs au nombre. La volonté d'alors était de construire des connaissances sur les opérations ensemblistes. Replacé dans le contexte de l'époque, ce souhait n'était pas facile à exhausser parce que la seule activité scolaire retenue à propos des collections était le comptage. Définir ces collections, travailler sur leurs particularités n'était pas jusque là un objet d'enseignement. Tout ce qui touche à la construction effective des ensembles, aux conditions effectives dans lesquelles cette construction s'opère ne fut pas abordée. La conséquence fut que le système transforma en objet d'enseignement la définition des ensembles que l'on voulait compter, ainsi que les opérations ensemblistes associées aux opérations arithmétiques.

Parce que les résultats ne furent pas à la mesure des attentes, parce que les intentions n'étaient pas claires, parce que la seule démarche a toujours été de reconnaître les notions mathématiques "sous-jacentes" en les termes du savoir savant, parce que l'activité du sujet apprenant n'avait pas été vraiment étudiée, l'expérience des ensembles à l'école a été abandonnée. Est-ce à dire que tout était inadapté ?

³¹ Pédagogie de l'école élémentaire. Mathématiques et apprentissage du calcul. Tome 1. DELAGRAVE. 1976.

³² Citons ZIGLON (1971) dans l'introduction de son livre "vers les structures" : "Cet ouvrage ne traite pas de la théorie des ensembles ; il voudrait seulement aider les professeurs à utiliser dans leur classe le langage des ensembles qui vient d'être introduit dans les programmes du premier cycle."

1.11.4. LES CONNAISSANCES EN PSYCHOLOGIE COMME RENFORCEMENT DE LA DERIVE PRECEDENTE :

Les apports de PIAGET dans le champ de la psychologie du développement (notamment sur la genèse du nombre chez l'enfant) à travers sa théorie sur l'apprentissage constituent encore un fondement aux réflexions sur la construction du nombre.

Pour rappeler brièvement (c'est une gageure) l'hypothèse théorique de PIAGET (1967) concernant la construction du nombre, servons nous de l'introduction qu'il fit à son ouvrage sur la genèse du nombre. Voici un extrait : *"L'hypothèse dont nous sommes partis est, il va de soi, que cette construction (du nombre NDLR) est corrélative du développement de la logique elle-même et qu'au niveau prélogique correspond une période pré-numérique. Et le résultat obtenu a été qu'effectivement le nombre s'organise, étape par étape, en solidarité étroite avec l'élaboration graduelle des systèmes d'inclusions (hiérarchie des classes logiques) et des relations asymétriques (sériations qualitatives), la suite des nombres se constituant ainsi en tant que synthèse opératoire de la classification et de la sériation. Les opérations logiques et arithmétiques nous sont donc apparues comme un seul système total et psychologiquement naturel, les secondes résultant de la généralisation et de la fusion des premières, sous leurs deux aspects complémentaires de l'inclusion des classes et de la sériation des relations, mais avec élimination de la qualité."* Cette argumentation sur la genèse du nombre utilisait les structures semblables à celles des mathématiciens, même si ces structures décrivaient des comportements. A l'époque, ces travaux eurent pour conséquence, dans le milieu mathématicien, qu'ils renforçèrent, en même temps qu'ils les justifiaient, les mathématiques dites modernes. L'utilisation des théories psychologiques et pédagogiques de l'époque aboutissait à un comportement fréquent que décrit BROUSSEAU (1981) : cela consistait, en s'appuyant sur les travaux de PIAGET :

"À penser que, justement l'épistémologie génétique montrait l'apparition non pas des connaissances élémentaires mais des structures entières et, cela dans une genèse qui procédait du général au particulier ;

Et à conclure, avec une référence douteuse aux idées de ROGERS que l'activité des sujets et leur développement naturel conduisaient aux appropriations fondamentales visées, à condition que l'on n'y fasse pas obstacle par une didactique normative intempestive."

1.11.5. LES TRAVAUX PLUS RECENTS : ABSENCE DE CONSTRUCTION DE SITUATIONS D'ENSEIGNEMENT :

Examinons maintenant les travaux plus récents. Pour reprendre les termes de VERGNAUD (préface de "l'enfant et le nombre" de FAYOL 1990) *"la formation des compétences et des connaissances des enfants concernant le nombre s'est beaucoup développée depuis vingt ans, dans des directions que ne laissaient pas prévoir les premiers travaux des psychologues."*³³

Entre les deux grandes "catégories de théories" (cf. : conception inductive de l'acquisition et conception modulaire de la connaissance) (...), le comptage lui-même doit faire l'objet d'une étude visant à essayer d'en rendre compte. (FAYOL 1990 p.73).

Lorsque nous examinons les travaux de ces vingt dernières années concernant les opérations arithmétiques élémentaires, nous constatons que les études ne sont pas construites comme pour les premiers nombres. En particulier, lorsque nous examinons la façon dont est traitée l'addition, nous constatons que les situations proposées aux enfants ne permettent pas à ceux-

³³ Pour ne pas alourdir cette partie, nous développerons l'état des travaux relatifs à notre étude dans le chapitre deux

ci d'exercer pleinement un contrôle sémantique de l'activité demandée. Les difficultés semblent provenir d'une faiblesse des études des représentations des enfants, de l'impact des modes de formulation.

Or, la conception de l'addition consiste à construire une partition d'un ensemble et à contrôler la double activité de partitionnement ($A \cup B, C \cup B, A \cap C = \emptyset$) et de comptage. Cette activité de contrôle est en soi une énumération. Il nous faut construire une (vraie) famille de situations fondamentales de l'addition. Dans cette famille de situations, l'enfant devra avoir nécessairement en charge le projet de concevoir de (re)construire des partitions, d'en assurer la comptabilité et d'y associer le comptage.

1.12. HISTORIQUE DES RECHERCHES VOISINES.

Le cadre général de notre recherche touche les domaines de l'acquisition des premiers nombres, de leur écriture organisée, des opérations arithmétiques en particulier.

Nous avons montré l'absence de connaissances enseignées avant le nombre jusque vers les années 70, puis la tentative moderniste des années 70, puis l'apport des psychologues cognitivistes.

C'est à l'époque des années 70 que la didactique des mathématiques prend corps. BROUSSEAU (1986. p.4) montre l'intérêt qu'il y aurait à prendre l'ordre de l'enseignement des savoirs comme objet d'étude. L'interrogation (p.5) sur cet "ordre" établi pose le problème de la théorisation des phénomènes d'enseignement : "comment observer si cet ordre facilitait ou non les acquisitions ?". "Quelles relations au milieu peuvent le mieux donner une adéquation, une motivation et un sens correct aux connaissances qu'il s'agit d'enseigner ? ". Et, le premier domaine étudié sera celui des algorithmes de calcul numérique avec comme souci, de mettre en place un processus d'apprentissage tel qu'à chaque instant la signification de l'algorithme soit nécessaire pour son accomplissement.

L'idée d'étudier les connaissances mises en jeu par les élèves dans les activités de construction du nombre et des opérations arithmétiques apparaît donc peu à peu. A cette occasion, les chercheurs notent ponctuellement que les connaissances sollicitées pour enseigner un savoir donné ne sont pas toujours très bien explicitées dans le milieu enseignant et qu'il y a lieu de modifier des séquences de classe³⁴.

La thèse de EL BOUAZZAOUÏ (1982) fait alors le point sur les méthodes traditionnelles de construction des nombres et sur les nouvelles propositions des chercheurs. Mme EL BOUAZZAOUÏ étudie en particulier comment la numération alors objet "protomathématique" peut devenir un objet mathématique, sujet d'enseignement désigné explicitement. Elle construit une nouvelle transposition didactique où les rapports entre la numération et les nombres sont dialectiques. "L'élève construit un système de représentation des nombres qu'il modifie, améliore ou rejette par le jeu de certaines variables didactiques".

Parallèlement au travail de EL BOUAZZAOUÏ, PERES (1990) élabore des situations didactiques permettant aux enfants de 5-6 ans de construire et d'utiliser un code de désignation d'objets à l'école maternelle.

BROUSSEAU (1984), dans un article intitulé "L'enseignement de l'énumération", pose pour la première fois le problème de l'identification de l'activité d'énumération de collections en ostension dans les activités de comptage chez de jeunes enfants.

BERTHELOT (1984. 1992) propose alors une situation en grande section de maternelle³⁵ dans laquelle la solution au problème posé est une énumération d'une collection de quelques objets.

Dans notre D.E.A. (1985) "situation didactique et logiciels d'enseignement", nous construisons une situation a-didactique d'énumération et une situation a-didactique de dénombrement en vue de la construction de situations d'apprentissage liées. Ce travail était effectué en grande section de maternelles et au cours préparatoire. Le but était l'amélioration de la construction des premiers nombres.

³⁴ Localement, dans les publications de l'IREM de BORDEAUX_, cette question est abordée. Citons, en particulier les travaux de G.DERAMECOURT et F.MARTIN sur la multiplication. Dans leur publication, ces chercheurs notent déjà que les tableaux quadrillés partiellement cachés, constituent un obstacle au comptage de l'ensemble des cases du tableau. Ils considèrent cet obstacle comme nécessaire à dépasser dans une situation d'apprentissage de la multiplication.

³⁵ Nous exposons en détail cette situation ultérieurement

La gestion de ces situations étant complexe, nous avons alors axé notre travail sur les moyens nouveaux de l'époque. Il s'agissait de l'outil informatique. Nous concevions et réalisions alors deux logiciels (CALAPA pour le tri et l'énumération et VARDIDA pour le dénombrement) permettant une mise en scène d'une situation a-didactique de l'énumération et du dénombrement.

Les analyses faites à l'époque permirent de mettre en évidence les conditions dans lesquelles un logiciel devait être utilisé afin que les situations proposées puissent constituer des situations d'apprentissage. Plusieurs questions, en effet se posaient : quel nouveau rôle du professeur ? Quel statut pour ces "objets vidéo", quelles modifications la mise en scène sur ordinateur implique-t-elle dans le rapport à l'écrit, etc. Il fallut donc mener, de façon dialectique, l'élaboration des logiciels et leur utilisation en classe³⁶.

Notre étude fut reprise par QUEVEDO DE VILLEGAS (1986) qui, dans sa thèse, traita des difficultés propres à l'énumération dans le dénombrement de petites collections. Elle utilisa donc le logiciel CALAPA. Elle mit en évidence les effets de l'utilisation de ce logiciel sur la réussite dans le dénombrement.

³⁶ Nous reviendrons sur les résultats de ce travail, d'une part lorsque nous étudierons ce que R.BRISSIAUD conclue sur ces travaux, d'autre part, pour mettre en évidence des problèmes d'énumération non répertoriés à l'époque.

LES POINTS A APPROFONDIR :

Parallèlement, d'autres interrogations se posent. L'organisation de l'enseignement des connaissances dans le domaine du numérique laissent encore des points dans l'ombre, que ce soit dans l'élaboration de la numération elle-même comme dans celle des opérations arithmétiques puis, plus tard dans l'analyse combinatoire.

ROLE DE L'ENUMERATION DANS LA CONSTRUCTION DES NOMBRES:

Le cours préparatoire est un moment de la scolarité où l'élève va devoir être amené à explorer constamment des collections afin de les dénombrer. La construction du nombre bute sur des difficultés liées au fait que lorsqu'un enfant compte, il doit simultanément mettre en œuvre une structure lui permettant d'explorer la collection à compter (POTTER M.C. et LEVY, E.I. 1968). La réalisation effective de cette exploration nécessite la résolution de problèmes qui ne sont pas du domaine du comptage.

Or le système enseigne rapidement un moyen d'explorer les collections. Il s'agit de la constitution de paquets, réguliers si possible, par dix de préférence. De sorte que l'exploration des collections au cours préparatoire n'a comme finalité que le comptage et le but du système est de faire que les enfants quittent le comptage un à un au profit d'une organisation par paquets qui débouchera sur la justification de la numération.

Si l'énumération était un savoir enseigné, nous pourrions dire que l'enseignement de la numération en constituerait un résultat dans un contexte particulier. Or actuellement, la numération est un moyen de reproductibilité, externe au sujet³⁷, d'une énumération.

Donc, dès le début de la scolarité, la structuration des collections est noyée dans un projet scolaire très marqué : la construction du nombre, de son écriture, et des opérations. Nous étudierons les difficultés dues à cette confusion comptage-énumération et les conséquences de ce choix.

ROLE DE L'ENUMERATION DANS LA CONSTRUCTION DE L'ADDITION :

Une situation fondamentale de l'addition consiste à pouvoir contrôler des informations venant d'un ensemble fini afin de connaître le cardinal de l'ensemble. Le contrôle consiste en la production d'une partition de cet ensemble afin de comprendre que la réalisation de l'addition des cardinaux permet de calculer le cardinal du tout. La construction de cette partition se fait en vue de pouvoir "passer en revue" tous les éléments de la collection. Il s'agit donc bien de pratiques énumératives.

Le contrôle effectif d'une partition d'un ensemble par les élèves n'est pas un objectif d'enseignement. Une situation qui viserait cela n'est jamais proposée en classe parce que trop difficile à mettre en œuvre, pour des raisons diverses (langage, ostension sélective des sous-ensembles, etc.).

³⁷ Nous empruntons "reproductibilité externe" à G. BROUSSEAU lorsqu'il décrit les phénomènes "d'obsolescence des connaissances".

Nous montrons page 226 qu'il est possible de construire une famille de situations dans lesquelles un enfant doit exercer un contrôle permanent d'une partition à partir de sous ensembles d'un ensemble fini afin d'en conduire le dénombrement.

La prise d'information peut se faire de différentes façons selon que la collection est en ostension ou en compréhension. Si les sous ensembles sont définis à l'aide de prédicats, il sera alors utile de s'appuyer sur les travaux de WERMUZ. Son travail sur les composantes contextuelles livrées alors au jeu de la logique formelle permet d'avoir les outils d'analyse du passage progressif de la pensée naturelle à la logique formelle.

Ainsi, l'élaboration d'une classification, puis une énumération de tout l'ensemble, sur la base d'une partition, constituent la solution de la situation posée. Il s'agit donc d'une situation fondamentale de l'addition contrôlée par des énumérations.

ROLE DE L'ENUMERATION DANS LA CONSTRUCTION DE LA MULTIPLICATION :

Une situation fondamentale de la multiplication consiste à contrôler une structure d'un ensemble et d'en extraire une information numérique afin de dénombrer cet ensemble.

Nous étions toujours étonnés des difficultés rencontrés chez les enfants pour dénombrer un ensemble structuré sous forme d'un tableau ligne colonnes. L'analyse à priori de cette situation montre que, s'il suffit de concevoir les objets montrés dans un tableau à double entrée pour effectuer le comptage un à un, il faut redéfinir l'objet (en tant qu'élément d'un ensemble produit cartésien), c'est à dire avoir une autre conception de celui-ci pour effectuer le comptage à l'aide de deux informations : nombre d'éléments par ligne et nombre de lignes ou bien nombre de lignes et nombre de colonnes.

La mise en place de techniques d'exploration d'un tableau dans le micro-espace ainsi que le recueil et le traitement des informations prises au passage, ne s'enseignent pas. Elles sont déclarées évidentes par le professeur ou bien elles sont expliquées. **L'enseignement d'une procédure de comptage ("compte le nombre de ligne et compte le nombre de colonnes") fait que la découverte de la structure n'est pas vraiment à la charge de l'élève.** Cette structure paraît banale au maître qui va s'appuyer dessus pour construire la multiplication.

Il est possible d'expliquer certaines difficultés dans des situations de dénombrement d'éléments de tableaux en conduisant une étude des énumérations engagées par les élèves. Nous réalisons cette étude au chapitre trois.

L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE COMBINATOIRE

Envisager l'utilisation de formules de dénombrement en analyse combinatoire, consiste à faire le pari que les étudiants auront su, eux-mêmes, améliorer leurs stratégies d'énumération.

Lorsqu'il s'agira de dénombrer le nombre de cas possibles en combinatoire, comment l'étudiant s'assure-t-il qu'il a bien un moyen d'énumérer cet ensemble ou, plus certainement, comment l'étudiant contrôle-t-il que les formules de l'analyse combinatoire règlent ce problème de l'énumération. Exerce-t-il seulement ce contrôle, seul moyen de s'assurer du bien fondé du choix de la méthode ?

Énumération et analyse combinatoire semblent bien proches. Mais nous disons que l'énumération est le moteur de la construction de stratégies pour choisir des opérations permettant d'éviter le comptage un à un. De notre point de vue, la combinatoire n'est la théorie que d'une partie de l'activité pratiquée lors d'exercices de dénombrement et, de toute façon

elle n'est enseignée qu'au travers de savoir-faire. (Nous montrons, dans le chapitre 2 que l'activité effective des étudiants se situe "en amont" de la combinatoire³⁸.)

³⁸ Pour faire un parallèle avec la construction du nombre, nous remarquons que tous les cours de combinatoire sont précédés de cours sur les ensembles (comme l'étaient les cours sur le nombre dans les années 70).

NECESSITE D'ELABORER DES SITUATIONS A-DIDACTIQUES:

En conclusion, nous dirons que bien souvent, le système suggère une énumération possible, sans se rendre compte qu'il s'agit d'une énumération. Par exemple, le dénombrement des collections au cours préparatoire à l'aide de la consigne "fait des paquets de dix et écris le nombre" algorithmise précocement une énumération.

Dans d'autres cas, le système suggère une énumération effective dans un cas particulier et demande un dénombrement dans un cas plus général. En cela, le système fait l'hypothèse de l'enseignement par "l'exemple sur un cas simple". Ceci est fréquent en analyse combinatoire notamment, mais aussi dans la construction de la multiplication³⁹.

Ces exemples de fonctionnement montrent que le système reconnaît certaines difficultés mais il ne considère pas vraiment comme explicables du point de vue de l'organisation de savoirs à enseigner.

Or, par ailleurs, nous constatons que l'activité d'énumérer sert dans certaines pratiques sociales à accomplir une activité. Il n'est pas nécessaire de savoir en quoi cela consiste. Il faut savoir le faire.

L'enseignement oblige les élèves à utiliser des énumérations de façon implicite. Pour que cette utilisation ne produise pas trop d'échecs, le système produit alors des situations de construction de la numération et des opérations arithmétiques dans lesquelles ces énumérations dépendent de circonstances globales et souvent enseignées. Pour que l'énumération soit prise en charge différemment, sans s'éloigner des domaines privilégiés sur lesquels elle fonctionne, il faut produire des situations a-didactiques qui exigent la construction mentale d'une représentation de la collection explorée.

Donc, l'élaboration de situations a-didactiques de l'énumération proches des domaines numériques décrits va être un instrument important dans notre méthode de mise en évidence de l'existence et du fonctionnement de l'énumération. Nous avons pensé utile de développer une réflexion sur ce point :

Nous construirons donc ces situations de façon à ce qu'elles soient proches des domaines numériques décrits ci-dessus. Nous faisons en cela le projet que ces situations pourront ultérieurement constituer la base de situations d'apprentissage s'insérant aisément dans l'enseignement du nombre et des opérations. Du point de vue de notre recherche, ces situations permettront aussi d'étudier directement des élèves en situation d'action.

Mais revenons un moment sur le caractère didactique ou a-didactique des situations : **La question de l'énumération est en partie de savoir si les difficultés qu'elle provoque (à supposer qu'elles soient reconnues comme provoquées par l'énumération) peuvent être gérées localement, par ajustements du professeur à l'aide de conseils, de moyens**

³⁹ Prenons l'exercice suivant :

Voici un tableau (on exhibe un tableau de 3x2 éléments). Combien y-a-t-il d'éléments? La vision globale de la collection permet de satisfaire à la question. Mais, très vite, la "même" demande sera faite avec un tableau 12x15. La première méthode énumérative, qui est en l'occurrence basée sur la perception globale devient totalement inefficace ou sur une exploration spatiale simple. Or le système fait, dans ce cas, l'hypothèse que la première énumération va permettre la seconde. La première énumération ne donne pas la solution au deuxième exercice. Le système va donc donner les moyens de répondre à la question en travaillant directement sur 12x15. Une rupture s'opère dans le contrat qui propose tout d'abord une réelle exploration pour répondre au problème, et ensuite, parce que l'enseignement de la multiplication s'impose, ne se préoccupera plus de la façon dont une collection organisée, plus importante peut être explorée.

montrés ou si l'enjeu est suffisamment important pour que l'enseignement décide que l'élève ait à produire effectivement cette connaissance. Le modèle théorique qui nous permet de bâtir une comparaison est le caractère didactique ou a-didactique d'une situation d'énumération. Supposons que le système ait décidé d'enseigner l'énumération et prenons deux exemples de situations mettant en jeu l'énumération dans le cas particulier de l'élaboration de listes au cours préparatoire :

Première situation : En cours préparatoire. La maîtresse montre une vingtaine d'objets tous faciles à nommer pour des enfants de cet âge. Chaque enfant dispose d'une feuille de papier et d'un crayon.

Consigne donnée aux enfants : E. va retirer plusieurs objets de cette boîte et écrire sur une feuille le nom des objets qu'il a retirés. Vous aussi, vous écrivez sur une feuille le nom des objets retirés. Ensuite, nous comparerons vos listes pour voir si vous n'avez rien oublié.

La lecture des différentes listes rédigées par les enfants montrera qu'il faut organiser cette liste pour que les comparaisons soient aisées. L'enseignant pourra, d'ailleurs indiquer un moyen (flèches, marques) pour s'assurer que deux listes sont identiques.

Deuxième situation : En cours préparatoire, la maîtresse montre une vingtaine d'objets.

Consigne : E. va sortir. Je vais retirer plusieurs objets de cette boîte. Quand E. reviendra, il faut qu'il trouve les objets qui ont été retirés. Vous ne pourrez pas lui parler. Je choisirai au hasard une de vos feuilles et je la lui donnerai. Il faudra que, grâce à cette feuille, il réussisse à dire quels sont les objets que nous avons retirés.

Dans les deux situations, il semble qu'il s'agisse de mettre en œuvre les mêmes connaissances énumératives. En l'occurrence, il s'agit de produire une liste exhaustive des objets manquants. Or il paraît bien évident que la deuxième situation laisse une incertitude sur la nature de la tâche à effectuer pour résoudre le problème. En cela, cette deuxième situation sera moins bien réussie que la première.

Dans la deuxième situation, la situation est organisée de telle façon que les productions écrites des enfants seront validées par leur efficacité. (Bien sûr, il y aura toujours la question du lecteur et de l'écrivain et de la responsabilité de chacun). Dans la première situation, la liste écrite par l'enfant ne débouche sur aucune action qui permettrait de lui donner son sens. La maîtresse devra intéresser son auditoire lorsqu'elle prodiguera les conseils pour lire et comparer deux listes. Les conseils donnés seront perçus comme tels.

IMPORTANCE DU CRITERE A-DIDACTIQUE DE SITUATIONS D'ENUMERATIONS :

A l'intérieur d'une situation didactique (c'est à dire d'une situation organisée par le professeur pour un enseignement), le terme de situation a-didactique désigne toute situation (finalisée par un résultat) qui d'une part ne peut être maîtrisée de façon convenable sans la mise en œuvre des connaissances ou du savoir visés et qui d'autre part sanctionne, sur le mode de l'évidence pour l'élève, les décisions qu'il prend, sans interventions du professeur, relativement au savoir à mettre en œuvre. BROUSSEAU (1986b) écrit : "l'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle, mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la

construire sans faire appel à des raisons didactiques." "Le développement de rapports a-didactiques avec le milieu garantit une qualité des apprentissages liés au fait que les élèves sont capables de donner un sens proche de celui des pratiques de référence aux connaissances élaborées dans ce cadre."

Ainsi, il est fondamental, pour notre recherche, que nous puissions mettre en évidence des situations a-didactiques de l'énumération. Cette élaboration de situations a-didactiques constitue une méthode de preuve de l'existence du concept de l'énumération. La réalisation de situations a-didactiques relatives à la connaissance de l'énumération va permettre "d'étiqueter" ce savoir en termes de situation. Elle permet, en outre, une fois cette connaissance repérée, de la faire construire sans faire appel à des raisons didactiques, sans risquer la tentation enseignante de l'ostension.

Nous savons toutefois que la réalisation de situations a-didactiques n'implique pas ipso-facto la réalisation de situations d'apprentissage. Mais nous montrerons que les premières observations en situation a-didactique nous permettent beaucoup d'espoir.

Nous savons aussi, qu'une fois élaborées des situations d'apprentissage, la question du coût de ces nouveaux apprentissages et de leur efficacité sur les apprentissages actuels ne devra pas être éludée.

Nous développerons trois familles de situations a-didactiques de l'énumération. Une famille (liée à l'élaboration de la multiplication au cours élémentaire) nous servira aussi lors de l'observation d'élèves.

1.13. MÉTHODOLOGIE GENERALE

Dans cette partie, nous situons notre méthode de recherche par rapport aux méthodes d'ingénierie en didactique des mathématiques et nous détaillons notre méthodologie.

1.13.1. PARTICULARITES METHODOLOGIQUES DE NOTRE ETUDE.

1.13.1.1. METHODOLOGIE HABITUELLE :

Dans un article récent, ARTIGUE (1990) décrit une méthode de travail pour conduire une recherche en didactique. Peut-on utiliser cette méthode pour notre étude ?

Rappelons brièvement la démarche proposée :

Traditionnellement, l'ingénierie didactique⁴⁰ est vue comme méthodologie de recherche. ARTIGUE se base sur la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse de séquences d'enseignement. D'autres types de recherches sont basés sur des expérimentations en classe, mais la plupart de celles-ci se fondent sur des comparaisons avec des groupes témoins. Sans évacuer cette possibilité, l'ingénierie se fonde plutôt sur une confrontation entre l'analyse faite a priori et les constats a-posteriori.

La méthodologie d'ingénierie se déroule, dans le temps selon trois phases habituelles :

1°) les analyses préalables

"Dans une recherche d'ingénierie didactique, la phase de conception s'effectue en s'appuyant sur un cadre théorique didactique général et sur des connaissances didactiques déjà acquises dans le domaine étudié, mais aussi en s'appuyant sur un certain nombre d'analyses préliminaires :

- l'analyse épistémologique des contenus visés par l'enseignement.
- l'analyse des enseignements usuels et de ses effets.
- l'analyse des conceptions des élèves, des difficultés et obstacles qui marquent leur évolution.
- l'analyse du champ de contraintes dans lequel va se situer la réalisation didactique effective.
- les objectifs spécifiques de la recherche."

Nous ne nous attendons pas à rencontrer le concept d'énumération dans le savoir savant. Toutefois, en explorant plusieurs catégories d'ouvrages mathématiques, nous faisons l'hypothèse qu'il sera possible de mettre en évidence des manifestations diffuses de ce concept.

⁴⁰ La notion d'ingénierie didactique consiste à étiqueter la forme du travail didactique : celle comparable au travail de l'ingénieur qui, pour réaliser un projet précis, s'appuie sur des connaissances scientifiques de son domaine, accepte de se soumettre à un contrôle de type scientifique mais, dans le même temps, se trouve obligé de travailler sur des objets beaucoup plus complexes que les objets épurés de la science et donc, de s'attaquer pratiquement, avec tous les moyens dont il dispose, à des problèmes que la science ne veut ou ne peut prendre en charge. Art. "Ingénierie didactique" RDM Vol 9/3 M. ARTIGUE.

Du point de vue de l'enseignement usuel et de ses effets, et en particulier, pour observer si les élèves ont au moins une conception de l'énumération, nous conduirons la recherche de deux façons :

- observer des activités usuelles de classe au sein desquelles nous pensons que l'énumération joue un rôle. De ce point de vue, le champ des premiers nombres constitue un domaine à étudier.

- se servir, et nous y reviendrons, de la construction a priori de situations a-didactiques de l'énumération et de leur fonctionnement avec des enfants.

2°) Conception et analyse à priori

"Traditionnellement, cette analyse est centrée sur les caractéristiques d'une situation a-didactique que l'on a voulu constituer et dont on va chercher à faire la dévolution aux élèves." Cette situation a-didactique est caractérisée par un certain nombre de variables de commandes parmi lesquelles des variables didactiques, c'est à dire des variables qui influent significativement sur le déroulement didactique.

3°) L'expérimentation, l'analyse à posteriori et la validation.

Cette phase se mène au sein de classes. Cette phase est suivie d'une analyse dite à-postérieure qui s'appuie sur l'ensemble des données recueillies lors de l'expérimentation. Ces données sont souvent complétées par des questionnaires, des entretiens individuels, etc.

Comme nous l'avons dit, c'est la confrontation analyse a priori, analyse a-postérieure qui doit permettre d'engager un processus de validation dont on sait qu'il est difficile à atteindre pleinement⁴¹.

1.13.1.2. IMPOSSIBILITE DE SUIVRE ENTIEREMENT CETTE METHODOLOGIE

:

Nous ne pouvons suivre directement ce schéma. En effet si, traditionnellement, l'ingénierie didactique vue comme méthodologie de recherche se base sur la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse de séquences d'enseignement, alors toute recherche qui vise l'étude des dysfonctionnements entre des savoirs à enseigner et des connaissances mises en œuvre chez les élèves doit suivre un plan un peu différent, par la force des choses. En effet, la conception de séquences d'enseignement supposerait le savoir déjà bien délimité du point de vue du savoir reconnu. Or tel n'est pas le cas.

Mais nous nous sommes fixés comme contrainte de ne pas explorer des connaissances qui n'auraient comme spécificité que d'exister et dont l'utilité (dans les apprentissages numériques par exemple) pourrait être contestée. Dès lors, si nous construisons uniquement des situations a-didactiques de l'énumération nous risquons cette critique.

Nous avons opté pour une autre démarche : nous montrons que l'énumération est une connaissance nécessaire pour l'élaboration du nombre et des opérations arithmétiques. Nous construisons alors des situations a-didactique que nous nommerons situation a-didactique de la multiplication et situation a-didactique de l'addition. Ces deux familles de situations visent à restaurer l'énumération comme solution de questions additives et multiplicatives. Nous

⁴¹ La confrontation des deux analyses laisse apparaître des distorsions. Elles sont loin d'être toujours analysées en termes de validation, à savoir en recherchant ce que, dans les hypothèses engagées, les distorsions constatées invalident.(...) Les hypothèses même engagées explicitement dans les travaux d'ingénierie sont souvent des hypothèses relativement globales, mettant en jeu des processus d'apprentissage à long terme, que l'ampleur de l'ingénierie ne permet pas nécessairement de faire entrer réellement dans une démarche de validation. RDM vol 9/3 P. 298 M.ARTIGUE.

montrons ainsi qu'il est possible d'associer, en les rééquilibrant, connaissance non reconnue (énumération) et savoir exigés (opérations arithmétiques).

Prenons l'exemple de la situation fondamentale de l'addition : Nous avons écrit qu'il s'agit pour le joueur de produire le cardinal d'un ensemble alors qu'il ne peut en contrôler effectivement à chaque moment qu'une partie. La stratégie optimale consistera à constituer une partition de l'ensemble en contrôlant le nombre d'éléments de chaque classe, et en passant en revue toutes les classes. Du point de vue de l'action, le concept en jeu est l'énumération. C'est l'énumération qui sera le moteur du contrôle de la collection, de la constitution de la partition, de la comptabilité de l'ensemble.

Nous pensons maintenant utile de développer une analyse des conditions dans lesquelles des observations sont construites lorsqu'il s'agit de travailler sur des domaines non précisément reconnus dans le savoir enseigné.

1.13.2. OBSERVER DANS QUELLES CONDITIONS ? :

Par la nature même du sujet, l'organisation de la recherche ne peut donc se satisfaire de la seule lecture dans la contingence. Lorsque l'on observe la contingence, il est possible de trouver quelques relations, mais, bien souvent, la signification de cette relation n'est pas donnée. Il faut l'articulation théorique. Nos hypothèses impliquent donc la conjonction de questions à soumettre à la contingence. Par exemple, si nous voulons montrer que la conception de l'énumération existe, nous pouvons nous satisfaire d'observation d'enfants. Mais comme les manifestations de l'énumération sont fugaces, l'observation ne pourra être conduite que cas par cas.

Mais nous pouvons choisir une autre voie : si l'observation est menée à partir de situations construites à dessein, nous pouvons nous appuyer sur des objets déjà repérés et ne pas alors être trop soumis à la contingence.

Nous utiliserons tour à tour ces deux approches méthodologiques.

1.13.3. DIFFICULTES RENCONTREES :

Pour montrer les difficultés que nous avons rencontrées, nous pensons utile de détailler, à l'aide de deux exemples les questions méthodologiques que nous avons rencontrés lors de notre étude :

- DIFFICULTES A SE SERVIR DE QUESTIONNAIRES EXISTANTS:

Au centre pour l'observation de l'école Jules Michelet de Talence, nous disposons de données recueillies sur plusieurs années. Ces données sont, le plus souvent des questionnaires (Tests d'acquisition scolaires, contrôles d'acquisition scolaires) qui sont des moyens, pour les enseignants de mesurer les acquisitions des élèves. Ces questionnaires mesurent des savoirs reconnus. Du point de vue méthodologique, nous ne pourrions donc pas étudier les résultats de ces questionnaires. Nous pourrions seulement étudier, lorsque cela sera possible, des comportements d'enfants lors de la passation de ces questionnaires. Mais les traces écrites ne permettent pas toujours d'analyser des comportements. Toutefois, au travers de résultats étonnants concernant certains exercices, il nous a été possible d'étudier plus précisément les démarches des enfants et d'y reconnaître des comportements mettant en jeu l'énumération. C'est le cas en particulier pour les observations 1 et 2 du cours préparatoire, ainsi que pour l'observation 1 du cours élémentaire.

Exemples :

- En cours préparatoire par exemple, les corpus de contrôles de connaissances mis à notre disposition visaient l'acquisition de l'usage des nombres ou/et de la numération, et ne permettaient en aucune façon d'étudier la façon dont les enfants structuraient les collections en vue de leur comptage.

- En cours élémentaire, nous souhaitions étudier la façon dont un enfant est amené à prendre de l'information devant un tableau d'objets identiques. Nous cherchions, dans les contrôles de mathématiques, au chapitre multiplication de deux nombres, des exercices qui allaient, à priori, répondre à nos attentes. Or, le système a justement gommé, dans les contrôles tout ce qui pourrait évaluer une méthode d'exploration. Le système a donné un moyen de prendre de l'information dans un tableau (le nombre par lignes, le nombre de lignes ou bien, le nombre de lignes et le nombre de colonnes), de sorte que c'est l'aptitude à utiliser cet algorithme qui est évaluée. Nous avons donc utilisé, en situation de petit groupe, les situations a-didactiques modélisées sur ordinateur. Ceci nous a permis de confronter nos hypothèses à la contingence.

- Nous avons rencontré le même phénomène en analyse combinatoire ou la grande majorité des exercices proposés visent non pas la mise en place de procédés énumératifs, mais la seule reconnaissance, à l'aide d'indices parfois caricaturaux (voir la "fiche méthode" du manuel scolaire décrite page 80) d'une règle à appliquer.

- INSUFFISANCE D'UN QUESTIONNAIRE ECRIT :

Pour observer des enfants dans une situation de comptage d'objets, nous avons dû recourir à des observations individuelles. En effet, les productions écrites des enfants conservées d'une année à l'autre ne permettent pas d'être suffisamment précis sur le statut d'un écrit. L'exemple de MATHILDE est à cet égard significatif. Sans le commentaire de l'enfant, l'observation de la feuille de papier n'aurait pas pu permettre d'avancer les analyses que nous avons faites.

Nous sommes donc conduits, d'une part, à construire des questionnaires spécifiques de la recherche et à mener des observations individuelles, d'autre part, et en relation dialectique avec les premières investigations, à construire, très tôt, des situations a-didactiques afin d'observer des comportements d'élèves.

1.14. DECISIONS RELATIVES A LA METHODE EMPLOYEEE:

Nous sommes conduits à étudier les conjectures dans un ordre différent de celui dans lequel nous les avons présentés.

Conjecture 2 (voir page 40).

Nous ne nous attendons pas à prendre connaissance du concept de l'énumération dans le savoir savant.

Toutefois, en explorant plusieurs catégories d'ouvrages de mathématiques, de psychologie cognitive, nous faisons l'hypothèse qu'il sera possible de mettre en évidence, ça et là des manifestations de ce savoir.

Nous explorons alors (conjecture 2) le savoir mathématique afin de comprendre comment ces pratiques énumératives nécessaires sont assumées. Font-elles l'objet de recommandations ? Quel est leur statut ? Les mathématiciens, les psychologues, les professionnels d'autres secteurs de l'enseignement ont ils, chacun dans leur domaine, une connaissance de l'énumération ? Cette connaissance est-elle de même nature ?

Par ailleurs, il est possible que cette connaissance, bien que non répertoriée explicitement dans les ouvrages, y figure en filigrane ou rattachée de façon différente (cf. la combinatoire⁴²).

Pour conduire cette recherche, nous nous fonderons essentiellement sur des analyses bibliographiques. Nous consulterons particulièrement les ouvrages de mathématiques, y compris les ouvrages scolaires, les ouvrages des didacticiens et des psychologues.

Cette deuxième conjecture, si elle se trouve prouvée, oblige à renoncer à une exploration dans le savoir savant pour alimenter la recherche en activités caractéristiques de l'énumération.

Il va donc falloir repérer de façon empirique des situations particulières, qui permettent d'identifier l'énumération dans plusieurs domaines. (Conjecture 1)

Ce moyen d'investigation doit nous permettre de construire des situations dans lesquelles des techniques énumératives se mettent en place, et de mettre en évidence des variables. Il nous permet aussi d'étudier la (ou les) conception (si elle(s) existe(ent)) des élèves lorsqu'il s'agit d'énumérer. Nous détaillons pages 103 et suivantes notre méthode de mise en évidence de conceptions de l'énumération chez les élèves.

Conjecture 1 : (voir page 40).

Il ne faut pas s'attendre, nous l'avons dit, à voir apparaître le concept d'énumération tel quel dans le savoir savant. Nous avons vu que des recherches récentes avaient contribué à mettre en évidence des types de difficultés lors d'activités de comptage de petites collections. Il s'agit là de constats effectués dans le seul secteur des premiers nombres.

Nous voulons aller plus loin selon trois directions :

⁴² L'analyse combinatoire est l'ensemble des techniques qui servent, en mathématiques, à compter (ou dénombrer) certaines structures finies, ou à les énumérer (établir des listes exhaustives de structures considérées), enfin à démontrer leur existence pour certaines valeurs des paramètres dont elles dépendent. ENCYCLOPÆDIA UNIVERSALIS : (Article "COMBINATOIRE VOL 4 P.721)

- d'une part, montrer qu'il existe une connaissance spécifique qui se situe en amont du nombre. Pour montrer l'existence de cette connaissance, nous allons montrer que les enfants ont au moins une conception de ce que nous nommons l'énumération.

- d'autre part que cette connaissance est nécessaire pour l'élaboration de la numération et des opérations arithmétiques ainsi que pour la conception de l'analyse combinatoire.

- enfin, à la différence de ces travaux déjà décrits, nous avons exprimé notre volonté de ne pas nous contenter de constater des faits, mais de nous situer dans une perspective d'apprentissage, c'est à dire de construire finalement des situations nouvelles permettant de mieux traiter ces difficultés.

Nous conduirons alors deux types d'observations en situation.

- D'une part dans des activités usuelles où nous pressentons la présence d'énumérations,

- d'autre part des observations qui utilisent des situations a-didactiques de l'énumération parmi celles que nous construisons (et dont nous avons décrit en quoi nous voulions qu'elles constituent aussi des situations a-didactiques de l'addition et de la multiplication).

Par ailleurs, il nous a paru important d'étudier, plus tard dans la scolarité, comment les étudiants des classes terminales traitaient les problèmes de l'analyse combinatoire. En effet, il nous est apparu que l'enseignement de l'analyse combinatoire constituait l'exemple abouti d'un enseignement dans lequel la distance entre les savoirs enseignés et les conceptions des élèves devient source de dysfonctionnements importants.

Enfin, pour étudier plus généralement l'existence de l'énumération dans d'autres activités mathématiques, nous avons repéré des situations mettant en jeu des pratiques énumératives. L'observation de ces situations nous permettra de mieux caractériser des types d'énumérations.

Conjecture 3 :(voir page 40).

L'énumération existe dans un environnement qui n'en permet pas la transposition didactique. La transposition didactique de l'énumération ne peut s'effectuer pour la raison simple de l'inexistence de l'énumération comme savoir pointé précisément dans le savoir savant.

Si l'énumération est nécessairement considérée comme maîtrisée implicitement à tous niveaux de la scolarité, cette maîtrise est-elle réelle ? Et la non prise en charge de son enseignement par le système est-elle vraiment sans inconvénients ? Comment les professeurs s'en passent-ils ?

L'étude des conjectures 1 et 2 nous conduit à étudier les raisons de la (non) transposition didactique de l'énumération.

L'étude du dysfonctionnement entre des savoirs reconnus, des connaissances privées et des connaissances à enseigner fait, nous l'avons dit l'objet d'une interrogation plus générale.

La construction du savoir par la communauté (la philogénèse) n'a pas fait apparaître le concept. Sans doute faudrait-il étudier les problèmes de coût, c'est à dire l'intérêt (du point de vue de l'efficacité) qu'il y aurait à réorganiser des savoirs éclatés en une suite de chapitres définis.

Cette construction est-elle nécessaire au développement de l'individu ? (ontogénèse). Dans cette partie, il s'agit plus de s'interroger sur la façon dont se constituent les savoirs à enseigner à partir des savoirs savants.

Conjecture 4 (voir page 40).

Une analyse à priori dans plusieurs situations pourra permettre de construire une ingénierie de l'énumération (conjecture 4).

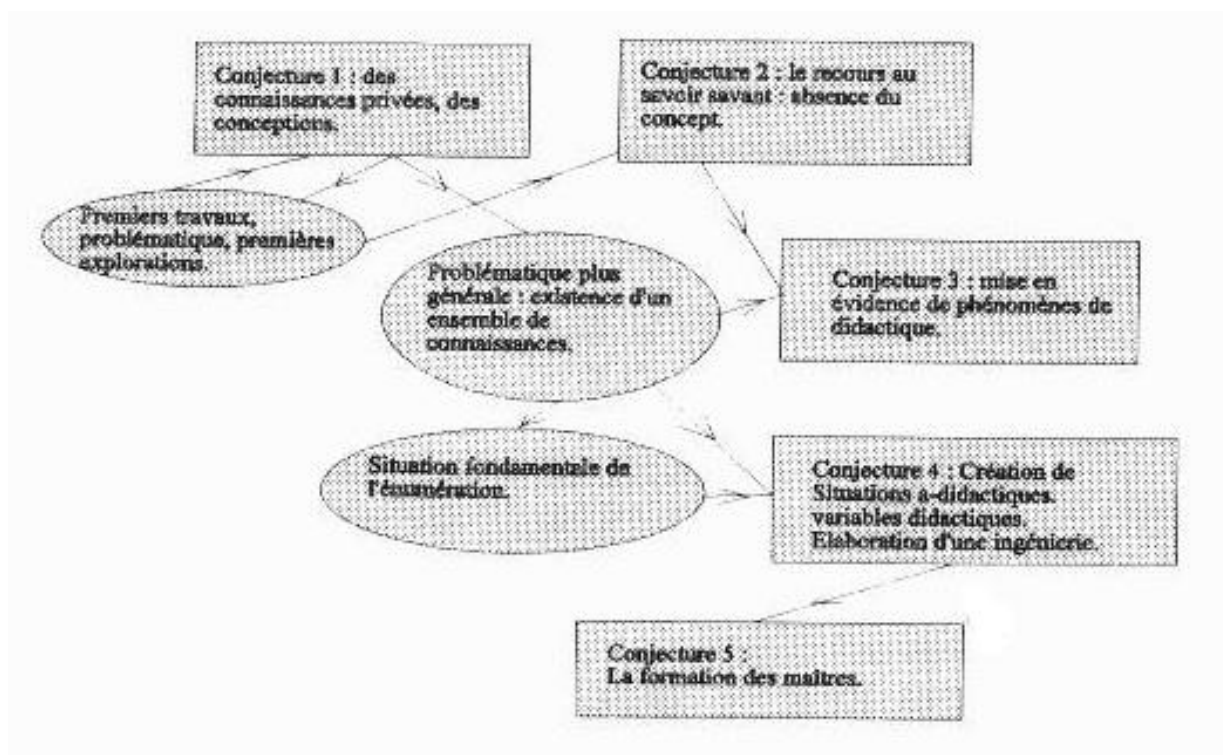
Sans préjuger du coût (du point de vue de l'enseignement), nous chercherons donc à développer des situations a-didactiques puis des séquences de classe au cours desquelles les enfants produiront, comme réponses aux problèmes posés, des stratégies d'énumération.

Pour bâtir cette ingénierie nous optons pour la construction de logiciels.

C'est après qu'il sera possible de construire des situations d'apprentissage et d'en mesurer leur coût et leur intérêt.

Enfin, un travail en formation des enseignants à l'aide des metteurs en scène de situations que sont les logiciels pourra être évalué (conjecture 5).

1.14.1. ORGANIGRAMME GENERAL DE L'ETUDE.



1.15. UNE PREMIERE OBSERVATION POUR VERIFIER L'EFFET DES CONDITIONS DE L'ENUMERATION DANS UNE SITUATION DE DENOMBREMENT.

Pour mettre en évidence l'existence de pratiques énumératives dans une situation simple, nous avons construit une observation, sous forme de questionnaire, qui, par le jeu d'une variable de commande, provoque le changement de pratiques énumératives, le choix d'une autre énumération. Nous étudions le rapport qu'il y a entre ces énumérations effectivement mises en œuvre, et les connaissances numériques des étudiants concernés.

Il nous faut construire une situation dans laquelle l'utilisation de la multiplication est possible pour résoudre le problème, mais nécessite une exploration (une mesure) de la collection faisant appel à une structure conçue et pas seulement montrée.

De plus,

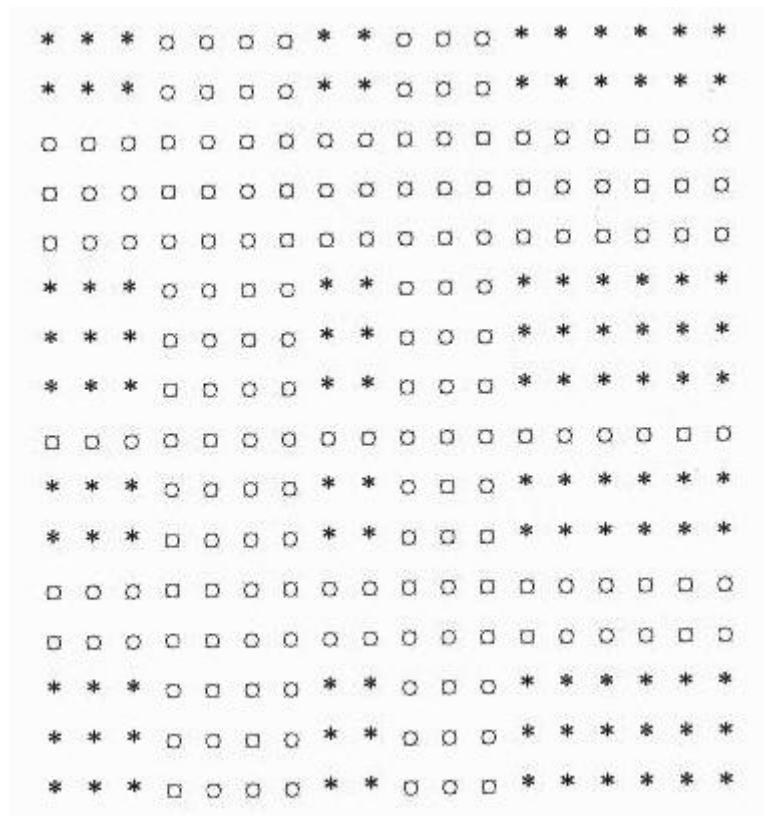
- Nous souhaitons observer des élèves chez lesquels nous n'avons aucun doute sur leurs capacités à utiliser les opérations arithmétiques. Nous avons donc conduit cette observation auprès de 30 PE2⁴³.
- Nous savons par leur formation en première année, que ces étudiants associent multiplication et tableau ligne-colonne, ce qui, a priori augmente la probabilité de les voir utiliser la multiplication lorsque se présente un tableau à dénombrer.
- Nous souhaitons mettre en évidence une variable de la situation a-didactique du dénombrement d'éléments dans un tableau qui influe significativement sur la mise en œuvre d'une énumération⁴⁴ :

A cet effet, nous construisons la situation suivante :

⁴³ Il s'agit d'étudiants ayant été reçus au concours de recrutement des professeurs des écoles et qui font leur année de formation en I.U.F.M.

⁴⁴ Nous avons conduit ce travail avec 30 étudiants en deuxième année d'I.U.F.M.. Ces étudiants ont tous suivis, en première année une formation au cours de laquelle ils ont pu apprendre comment la construction de la multiplication pouvait se fonder sur le dénombrement de collections disposées sous forme de tableau ligne-colonne.

Soit à dénombrer l'ensemble (A) des ? Et celui (B) des * dans cet ensemble C:



ANALYSE :

A priori, l'utilisation de la multiplication permet de procéder de la façon suivante :

A et B sont disjoints. $\text{Card}(A \cup B) = 18 \times 16$ (tableau vu). $\text{card}(B) = 11 \times 10$ (tableau conçu). $\text{Card}(A) = (18 \times 16) - (11 \times 10)$.

Mais cette stratégie ne peut être mise en œuvre que si plusieurs théorèmes liés à la pratique effective du mesurage des ensembles sont disponibles :

Il faut considérer l'ensemble C comme union disjointe de deux ensembles et en inférer l'usage possible de l'addition (de la soustraction).

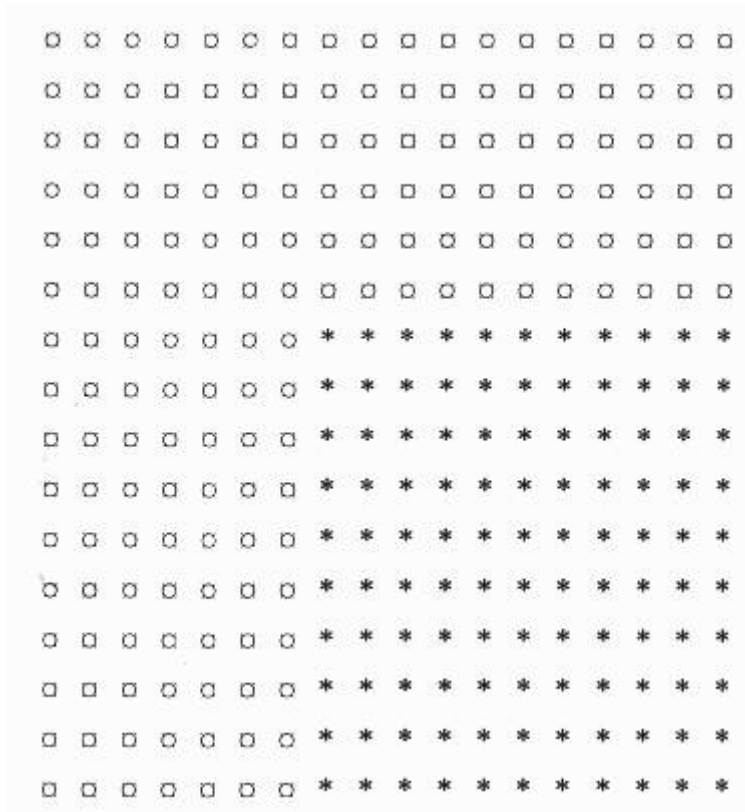
Il faut concevoir que la collection B peut être "vue" comme un tableau. Ce qui permet de "voir" la collection B comme un tableau relève de l'usage fonctionnel de concepts ensemblistes : en regroupant, il n'y aura pas de superpositions : le regroupement est celui de parties disjointes.

La solution alors apportée par la multiplication est rapide, mais aura nécessité une pratique de mesurage de la collection mettant en œuvre les partitions, l'union, l'intersection.

Par contre, si l'on veut dénombrer directement A à l'aide de la multiplication, l'utilisation de celle-ci devient coûteuse. Le travail de mesurage est plus complexe. Il faut contrôler les objets qui pourraient être comptés deux fois :

En effet, dans un tableau de a lignes et b colonnes, soit l le nombre de lignes relatives à A, et c le nombre de colonnes. Le produit lc mesure le cardinal d'un ensemble constitué de l lignes et de c colonnes, ce qui n'est pas le cas de A.

Le cardinal peut être obtenu de la façon suivante : remplaçons la collection vue par celle-ci :



La collection B est mieux perçue comme étant l'union non disjointe de deux sous ensembles de cardinaux égaux à ax_1 et bx_2 . Il faut retrancher le cardinal de l'intersection qui est lx_3 .
 $\text{Card}(A) = (ax_1) + (bx_2) - lx_3$

Cette étude suppose qu'une transformation géométrique (glissement des lignes et colonnes en vue de "caler" en haut et à gauche) conserve les cardinaux. La mesure de la collection B nécessite l'usage d'opérations ensemblistes et de transformations géométriques.

L'OBSERVATION :

La variable que nous étudions est la suivante :

La structure "tableau" de la collection (C) est montrée ou doit être conçue.

Nous faisons l'hypothèse que cette variable est sans influence sur le choix de l'énumération pour dénombrer la collection C.

QUESTIONNAIRE : L'EPREUVE DE LA MOSAÏQUE :

La veille de l'observation, lors d'un cours sur la multiplication, nous vérifions si les étudiants associent tableau et multiplication. Cette association est vraie pour tous les étudiants. Le lendemain, nous proposons le tableau déjà décrit :

RESULTATS DE L'EPREUVE :

(Travaux : voir annexe).

18 étudiants (sur 30) posent sur cet ensemble une structure ligne par ligne :
Ils font un bilan ligne par ligne, sous forme d'un couple de nombres, du nombre d'étoiles et du nombre de ronds et additionnent.

*** $\alpha\alpha\alpha$ ** α ***** (11*, 7 α)

7 utilisent la même structure, mais ne travaillent que sur la collection A. Ils déduisent le nombre d'étoiles à partir du nombre total d'éléments de la collection obtenu par multiplication.

*** $\alpha\alpha\alpha$ ** α ***** (7 α)

4 utilisent la structure en partitionnement par rectangles. Ils procèdent par multiplications associées aux tableaux vus, puis additionnent.

1 seul se sert de la structure (mentale) de tableau pour les étoiles : (10x11).

EPREUVE DE LA MOSAÏQUE :	utilisation de la structure tableau :	explorations plus locales (partitions).
collection * seule	30	0
collection * et α	1	29

Notre hypothèse est confondue. Selon que la structure en tableau est montrée ou qu'elle doit être retrouvée, les procédures employées sont complètement différentes. En particulier, la multiplication n'est plus utilisée massivement ou bien elle est utilisée lorsqu'un tableau est reconnu dans la feuille.

Il suffit donc d'une modification des conditions d'exploration de la collection pour que les énumérations algorithmisées (recherche du nombre de lignes, du nombre de colonnes) ne soient plus employées que marginalement.

RESULTATS DE L'ETUDE :

Dans cette situation, auprès d'étudiants ayant de bonnes connaissances numériques, les conditions du mesurage des collections influent très fortement sur le choix des opérations.

COMMENTAIRES : LES OPERATIONS ARITHMETIQUES COMME MOYENS D'EVITER UNE ENUMERATION EFFECTIVE :

Dans cette observation, nous avons mis en évidence l'influence de la présentation de la collection sur les choix de stratégies pour son dénombrement.

Les étudiants ont plusieurs méthodes potentielles à leur disposition. L'utilisation des opérations arithmétiques est ce qui va permettre d'éviter une énumération effective. Mais pour mener à bien l'utilisation des opérations arithmétiques, il faut contrôler le mesurage de la collection à l'aide d'opérations ensemblistes et géométriques.

Se constitue un équilibre entre le coût à l'exploration (ne pas dénombrer un par un : énumération effective), la conception de l'usage de la multiplication (presque uniquement en tableaux "visibles", et le contrôle des opérations ensemblistes).

Du point de vue des opérations ensemblistes, les étudiants n'utilisent que le partitionnement induit par la structure visible (étude par ligne, ou par tableaux juxtaposés.).

1.16. UNE SITUATION FONDAMENTALE DE L'ENUMERATION :

L'observation précédente montre que l'énumération de collections est une activité nécessaire lorsqu'il s'agit de s'assurer du contrôle d'un ensemble fini, c'est à dire le concevoir, le reconnaître, pouvoir conclure si une transformation de cet ensemble était ou non une bijection dans lui-même ou non, et bien sûr pouvoir le dénombrer.

Une situation fondamentale de l'énumération doit permettre de mettre en jeu des opérations dans l'ensemble des parties d'un ensemble en vue d'une organisation énumérative de celui-ci.

Or cette organisation énumérative est nécessaire au dénombrement. C'est pourquoi nous associons les situations fondamentales de l'énumération et les situations fondamentales des opérations arithmétiques. Il s'agit non pas d'apprendre les concepts ensemblistes au sens de l'enseignement des années 1970, mais de fonctionnaliser leur usage.

1.16.1. SITUATION FONDAMENTALE SIMPLE :

Nous n'avons pas, à ce stade de notre étude, une situation fondamentale de l'énumération, mais nous allons élargir la situation fondamentale de l'énumération effective d'une collection de quelques objets en ostension, et faire le lien avec la situation fondamentale du dénombrement et des opérations arithmétiques, puis repérer les variables déterminantes.

Nous décrivons maintenant la situation fondamentale de l'énumération d'une petite collection d'objets visibles dans un micro-espace.

Nous donnons comme exemple trois réalisations de la situation de base :

- La première mise au point par G.BROUSSEAU et R.BERTHELOT : Il s'agit de placer un jeton et un seul dans chaque tirelire d'une collection de tirelires. Une fois le jeton dans la tirelire, celui-ci n'est plus visible. Le fait que les tirelires soient opaques empêche un contrôle du déroulement de l'activité d'énumération, c'est à dire de pouvoir dire à chaque instant "voici ce que j'ai déjà fait, voici ce qui me reste à faire".

- La deuxième mise au point dans notre D.E.A.:

Il s'agit d'une situation sur micro-ordinateur. L'écran présente trois secteurs. Une partie haute et deux parties basses. Des objets sont "présents" dans la partie haute. Un sous ensemble de ces objets doit être transporté dans la partie basse à gauche, un autre sous ensemble doit être transporté dans la partie basse à droite. Le transport s'effectue par pointage (à l'aide du stylo optique ou de la souris) des éléments d'un des deux ensembles. Il doit les pointer tous, une seule fois. Dès qu'il estime cette action effectuée, il pointe la partie basse de l'écran dans laquelle il estime vouloir transporter l'ensemble énuméré. Le logiciel contrôle l'énumération effective et ne permet ce transport que si l'énumération a été correctement effectuée.

- La troisième est actuellement effectuée en section des moyens à l'école maternelle Jules Michelet. Il s'agit du jeu des boîtes et des bâtonnets⁴⁵. L'enfant joue seul. Il dispose devant lui d'un tas de boîtes d'allumettes identiques, percées sur les deux côtés un petit trou, d'un tas de bâtonnets (allumettes). Il doit placer une allumette et une seule dans chaque boîte, sans bien sûr l'ouvrir. Dans un premier temps, il peut secouer la boîte pour savoir si celle-ci est pleine ou vide, puis ce sera interdit. La vérification se fait avec la maîtresse qui ouvre alors chaque boîte. Si la consigne est suivie c'est gagné. La vérification n'a de sens que si l'enfant s'attend à n'avoir qu'un bâtonnet par boîte et un seul.

45 Bilan Classe 2 1992-1993 A.REMY et MJ LACAVE. P.44

1.16.2. ETUDE DE L'ENUMERATION DANS LA SITUATION FONDAMENTALE DU DENOMBREMENT :

Le dénombrement d'un ensemble fini est l'opération mentale et/ou concrète par laquelle est obtenu le cardinal de cet ensemble.

Dans le champ des mathématiques, le dénombrement d'un ensemble fini consiste à établir une bijection de cet ensemble entre celui-ci et une section commençante de N .

A l'école élémentaire, le dénombrement est souvent associé à la construction des premiers nombres, mais il existe nombre d'activités de l'école élémentaire dans lesquelles l'enfant doit dénombrer. Examinons une situation de dénombrement d'objets en ostension (lors de la construction des premiers nombres) et deux situations de dénombrement d'une collection structurée d'objets (lors de l'élaboration d'opérations arithmétiques).

1.16.3. DÉNOMBREMENT D'UNE COLLECTION SANS STRUCTURE VISIBLE :

Nous faisons une description de cette situation à partir d'une modélisation sur ordinateur⁴⁶. Cette situation s'adresse à des enfants de 5-6 ans.

Soit un ensemble E fini d'éléments (des animaux). Soit F un sous ensemble de E . (Par exemple des lapins ou bien des chameaux ou bien des chameaux et des lapins) L'ensemble E est une collection en ostension (même si les objets à l'écran n'ont pas un statut d'objet matériel).

L'enfant doit, construire un ensemble B équipotent à l'ensemble F . Dans le cas présent, l'enfant doit produire une barque par animal de l'ensemble F ou une barque par groupe d'animaux de l'ensemble F . Pour cela, il appuie sur une touche.

Dans une première variante de la situation, l'enfant explore l'ensemble F et construit "en même temps" l'ensemble B en faisant apparaître une barque.

Il fabrique, de cette façon, une collection équipotente à l'ensemble F .

Dans une seconde variante, dès que l'enfant produit une barque, l'ensemble F disparaît. L'enfant doit alors construire un ensemble intermédiaire qui lui permettra de mémoriser les informations nécessaires pour réussir. Il doit donc savoir que deux ensembles équipotents à un même troisième sont équipotents entre eux. La construction de cet ensemble intermédiaire dépend de l'ensemble F (dans le cas d'un ensemble d'objet familiers, divers, une liste mémorisée suffira. dans d'autres cas, une représentation écrite des objets ou de leur présence s'avérera nécessaire).

Lorsque ce dénombrement devra s'effectuer à l'aide d'une suite de mots de référence, il s'agira alors du comptage.

- Dans la première variante, l'enfant passe en revue chaque élément de l'ensemble F et appuie sur une touche pour produire un élément de l'ensemble B . Il construit ainsi l'ensemble B .

Si l'enfant s'arrête dans sa tâche, il perd le fil de son exploration. Il doit alors reconstituer une exploration sur des couples éléments de $F \times B$, repérer les éléments de E non concernés, puis reprendre l'activité à partir des éléments de F qui n'ont pas encore été concernés.

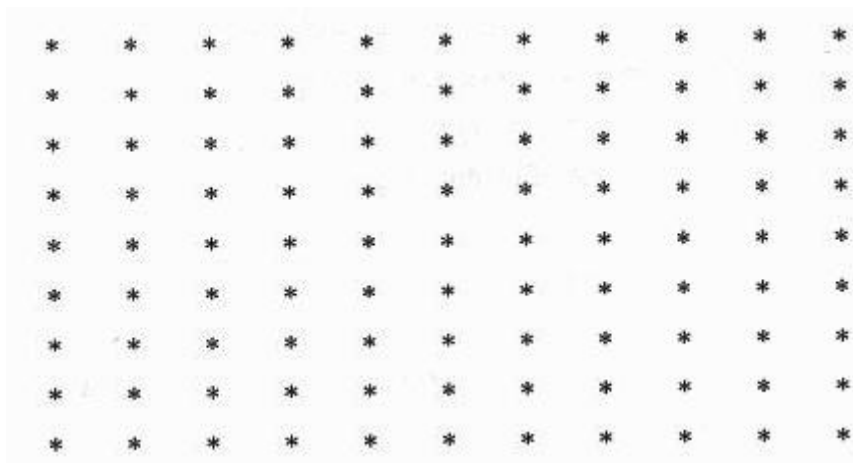
⁴⁶ Il s'agit du logiciel "BARQUES" élaboré pour le D.E.A. 1985 et reconstruit en 1992. La description détaillée figure dans le chapitre "ingénierie".

- Dans la deuxième variante, l'enfant passe en revue chaque élément de l'ensemble F et construit un ensemble intermédiaire dont il se servira pour construire l'ensemble B. Cette deuxième variante est, du point de vue mathématique, la première variante répétée deux fois. Dans cette deuxième variante, la stratégie de base est la construction d'un ensemble intermédiaire. Des procédés d'économie à la réalisation de cet ensemble intermédiaire conduiront à la mise en œuvre du comptage.

1.16.3.1. DÉNOMBREMENT D'UNE COLLECTION MONTRÉE ET STRUCTURÉE: SITUATION FONDAMENTALE DE LA MULTIPLICATION :

ANALYSE :

Nous pensons utile de montrer comment peut être perçue une collection disposée en tableau. Soit la collection disposée ainsi :



Les observations en cours élémentaire nous permettent de mettre en évidence plusieurs stratégies.

S1 : L'élève attribue, de façon aléatoire, un nombre (en travaillant sur la succession des nombres) à chaque étoile.

S11 : Un nombre est attribué à chaque étoile selon une stratégie n'utilisant que très peu la structure du tableau :

91	73	72	71	70	69	68	67	66	65	90
92	74	43	42	41	40	39	38	37	64	89
93	75	44	21	20	19	18	17	36	63	88
94	76	45	22	7	6	5	16	35	62	87
95	77	46	23	8	1	4	15	34	61	86
96	78	47	24	9	2	3	14	33	60	85
97	79	48	25	10	11	12	13	32	59	84
98	80	49	26	27	28	29	30	31	58	83
99	81	50	51	52	53	54	55	56	57	82

S12 : L'élève attribue un nombre à chaque étoile en se fixant un cheminement (par exemple, la première ligne, puis la deuxième ligne, soit en allers et retours soit à partir de la gauche, etc.). Le dénombrement pourra encore s'effectuer.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12
23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34
45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
66	65	64	63	62	61	60	59	58	57	56
67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
88	87	86	85	84	83	82	81	80	79	78
89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

S2 L'ensemble est partitionné :

S21 : l'élève effectue une partition de l'ensemble en plusieurs sous ensembles et procède au dénombrement de chaque ensemble, puis additionne:

1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	7
5	6	7	8	8	9	10	11	12	13	14
9	10	11	12	15	16	17	18	19	20	21
13	14	15	16	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	15	16	17	18	19	20	21
9	10	11	12	22	23	24	25	26	27	28
13	14	15	16	29	30	1	2	3	4	5
17	18	19	20	6	7	8	9	10	11	12

$$16+20+21+30+12 = 99$$

S22 : l'élève effectue une partition de l'ensemble en prévoyant d'une part d'avoir des ensembles équipotents, en profitant d'autre part de la structure contingente. Le dénombrement d'une ligne, le dénombrement de l'ensemble des lignes permettent le contrôle numérique.

Dans cette stratégie, on constate des variantes.... Par exemple, l'élève dénombre à nouveau chaque ligne ou bien il sait que, pour chaque ligne, "ce sera le même nombre".

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

Toutes ces stratégies possibles sont produites par une conception de l'exploration de l'ensemble. Le comptage un à un qui permet l'énumération effective s'oppose à l'utilisation de l'addition.

L'utilisation de l'addition permet d'éviter l'énumération effective mais suppose une énumération à partir d'une autre conception de l'ensemble (ensemble de parties disjointes formant partition, ensemble de lignes, de colonnes, etc.).

La conception de la multiplication se fonde aussi sur l'élaboration de telles énumérations.

CONCLUSION :

L'épreuve des mosaïques nous a permis de mettre en évidence le rôle primordial de la variable "structure montrée, structure à concevoir". La multiplication, par exemple, est souvent associée à une structure montrée et enseignée (voir l'observation précédente). Même chez des étudiants, dès que les conditions de mesurage sont modifiées, la multiplication est abandonnée.

Nous devons donc construire une situation qui, d'une part, restaure le mesurage d'une collection, d'autre part permette la mise en place de la multiplication.

Nous proposons une façon de faire fonctionner la variable "structure montrée, structure à concevoir". Pour cela, il suffit de jouer sur les possibilités de visionnement global (ou non) de l'ensemble à dénombrer.

Prenons la situation suivante : l'élève sait qu'il a une collection à dénombrer. Il ne peut apercevoir tous les objets à énumérer en une seule fois. Il doit se déplacer dans la collection de façon à explorer la totalité de la collection.

De cette façon, l'élève est conduit à passer d'une stratégie d'énumération implicite et spontanée, dépendant à priori de structures communément montrées et utilisées dans le milieu scolaire, à des la construction mentale d'une représentation de la collection explorée.

Nous développerons cette situation et mènerons une observation en cours élémentaire deuxième année. (Voir page 112).

1.16.3.2. LA SITUATION FONDAMENTALE DE L'ÉNUMÉRATION DANS L'ADDITION

La situation fondamentale de l'addition doit produire comme stratégie optimale le cardinal d'un ensemble alors que cet ensemble ne peut être contrôlé entièrement. De la même façon que précédemment, l'élève sait qu'il a une collection à dénombrer. Il ne peut apercevoir tous les objets à énumérer en une seule fois. Il doit alors se déplacer dans la collection de façon à

produire une partition de l'ensemble. Il doit donc, pour pouvoir compter tous les éléments de l'ensemble constituer une partition de l'ensemble puis s'assurer du nombre d'objets dans chaque classe et compter pour toutes les classes.

Si l'on veut que l'élève exprime la somme et ne se contente pas de l'utiliser, il faudra ménager une communication où l'émetteur pourra interroger la collection à compter et où le récepteur devra réaliser la collection équipotente sans voir le modèle.

1.16.3.3. L'ÉNUMÉRATION DANS L'ÉCONOMIE DU DÉNOMBREMENT :

Dans les activités de dénombrement, l'énumération est une opération effectuée afin de diminuer la complexité de l'activité de comptage. Le minimum qu'un élève puisse accomplir lors de la mesure d'un ensemble, c'est compter un à un. La genèse des opérations arithmétiques (addition, multiplication) est donc la mise en œuvre d'énumérations à l'aide des opérations ensemblistes qui permettront l'économie du comptage.

En général, les structures attendues par l'institution (groupements par paquets, par tableaux, etc.) sont montrées, étudiées. Le comptage s'exerce donc sur ces structures montrées. Préparer des groupements, pour (se) faciliter la tâche, fait partie de l'énumération mais répond à une demande de l'institution.

Les situations fondamentales que nous avons décrites ont comme caractéristique commune l'exploration d'une collection en vue d'un passage en revue de tous les éléments une fois et une seule.

Les situations fondamentales de l'addition et de la multiplication sont en fait très proches.

Les contraintes qui pèsent sur les moyens de prendre de l'information sur les ensembles sont déterminantes sur l'activité du sujet et sur le choix vers telle ou telle opération. En particulier, nous avons, jusque là, décrit des situations dans lesquelles les ensembles étaient montrés. Il est bien évident que s'il faut passer par une désignation (en extension ou en compréhension) de l'ensemble, l'activité sera considérablement modifiée.

Nous pouvons alors faire une première synthèse pour décrire une situation fondamentale élargie de l'énumération.

1.16.4. SITUATION FONDAMENTALE "ELARGIE"

Les situations d'énumération mettent donc en rapport les possibilités d'exploration d'un ensemble, la conception des objets de l'ensemble à énumérer, les systèmes de désignation de ces objets ou de classes d'objets, les relations entre des structures énumératives, l'usage possible des opérations ensemblistes, l'utilisation des nombres, de leur écriture, des opérations arithmétiques.

Une situation fondamentale de l'énumération se définit par la nature de l'ensemble à explorer et les possibilités effectives ou non d'exploration. Associons la à une activité mettant en jeu une opération de comptage ou/et une (ou plusieurs) opération(s) arithmétique.

L'élève sait qu'il a une collection à dénombrer. Il ne peut apercevoir tous les objets à énumérer en une seule fois. Il doit alors se déplacer dans la collection de façon à explorer la totalité de la collection. Ce déplacement peut être commandé par des contraintes spatiales (ne voir qu'une partie de la collection à la fois par une fenêtre) ou par des contraintes lexicales (ne pouvoir explorer que des sous ensembles nommés à l'aide de prédicats). L'élève doit tenir une comptabilité stricte de son exploration. Il doit alors produire des moyens de mener à bien cette pratique énumérative.

De cette façon, l'élève est conduit à passer d'une stratégie d'énumération implicite et spontanée, dépendant à priori des circonstances globales à des stratégies d'anticipation locales exigeant la construction mentale d'une représentation de la collection explorée.

En cela, les situations fondamentales de l'addition et la situation fondamentale de la multiplication se rejoignent.

Il apparaît plutôt que les choix de types d'énumérations d'une collection soient un facteur décisif dans la conception et la différenciation des ces deux opérations.

2. DEUXIÈME PARTIE : LE CONCEPT D'ÉNUMÉRATION : TRACES DANS LE SAVOIR.

Ce chapitre concerne la conjecture 2 :

"L'énumération n'existe pas en tant qu'objet d'enseignement, ni comme objet scientifique. Ce que nous visons sous ce terme apparaît sous des formes éclatées dans les publications mathématiques, pédagogiques. Il n'existe pas une définition de l'objet correspondant à ce que nous appelons l'énumération qui ne s'appuie sur les entiers naturels."

L'exploration que nous menons se conduit selon trois axes :

- Une étude dans le système savant. Nous considérons alors l'institution des mathématiciens.
- Une étude dans les mathématiques pratiques qui sont diffractées en des institutions de métiers.
- Une présence dans l'enseignement.

Nous étudierons en particulier comment l'institution construit d'autres concepts⁴⁷ comme celui du nombre par exemple, sans prendre en charge l'énumération.

⁴⁷ Dans le champ de la didactique des mathématiques, R.DOUDY et coll. (1989) considèrent les concepts d'un double point de vue :

-un concept est outil lorsque l'intérêt est focalisé sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème ou poser des questions. Un même outil peut être adapté à plusieurs problèmes, plusieurs outils peuvent être adaptés à un même problème.

-un concept est objet lorsqu'il est considéré du point de vue culturel, qu'il a une place dans l'édifice structuré des connaissances d'un moment reconnu socialement.

Notre étude vise à montrer, au travers de publications appartenant aux domaines énoncés plus haut, l'existence d'un outil significatif sans doute d'un savoir, mais qui n'est pas pointé comme tel.

Les dictionnaires donnent comme définition d'un concept celle de l'idée d'un objet conçu par l'esprit, permettant d'organiser les perceptions et les connaissances". Idée relève du langage commun, présente un caractère vague alors que le concept est plus technique, plus précis. « Concept » est plus objectif qu' « idée » ou « notion » (Dictionnaire actuel de l'éducation. LEGENDRE P111 LAROUSSE). Chacun peut avoir sa « notion », tandis que le concept devrait se présenter comme indépendant de l'esprit de celui qui les énonce.

Pour comprendre une acceptation du terme, citons LAPLACE qui, pour expliquer ce terme, prenait l'exemple du pendule : *"il n'en existe point d'autres [que le pendule composé] dans la nature ; et les pendules simples ne sont que de purs concepts géométriques propres à simplifier les objets."*

"Si un concept est une idée abstraite ou un symbole qui n'est pas directement observable ou mesurable ou mesurable, le chercheur doit inventer ou créer des moyens qui lui permettent d'adapter un concept à des fins d'investigation scientifique : pour ce faire, il ajoute de nouvelles dimensions à son concept que l'on désigne sous le nom de concept opératoire, qui implique l'idée d'une opération concrète". (QUELLET 1982).

2.1. TRACES DE L'ENUMERATION DANS LES OUVRAGES.

2.1.1. DANS LES DICTIONNAIRES ET LES ENCYCLOPEDIES :

Le mot lui-même vient (nous l'avons étudié page 20) du latin enumeratio, action de compter complètement. (P. 267 Dictionnaire étymologique LAROUSSE 1992). Les concepts "énumération" et "dénombrement" rencontrent au hasard des documents, différentes acceptations. Nous avons consulté plusieurs dictionnaires de référence.

Les définitions du verbe "énumérer" et du déverbal "énumération" sont liées entre elles. Ces définitions font apparaître deux significations différentes du mot :

DICTIONNAIRE ROBERT :

Énumérer c'est d'après le dictionnaire Robert, compter un à un. Si l'on se porte au nom, "énumération", il s'agit d'une part de l'action d'énumérer, mais considéré comme une figure de rhétorique dans l'expression "faire l'énumération", il s'agit alors, toujours d'après le dictionnaire Robert, de l'action qui consiste à passer en revue toutes les manières, toutes les circonstances, toutes les parties.

On voit que les deux mots "énumération" et "comptage" ont tantôt des significations différentes tantôt la même, ou à peu près.

Poursuivons notre exploration afin de préciser le(s) sens admis de "dénombrement" et retournons voir le Robert. Celui-ci accorde trois sens au mot:

1- Compte de personnes. Ne se dit guère qu'en parlant d'un très grand nombre.

2- Énumération en parlant des choses.

3- Terme de logique: "dénombrement imparfait": faute de raisonnement par laquelle on tire une conclusion générale de plusieurs cas examinés, lorsque l'on a précisément oublié ceux qui rendent la conclusion fautive.

La première acceptation est l'action de compter (en vue de...), la deuxième acceptation révèle explicitement la confusion entre énumération et dénombrement, la troisième est clairement la description d'une action qui consiste à passer en revue toutes les manières, toutes les cas, c'est à dire "faire une énumération" au sens de la figure de rhétorique...

PETIT LAROUSSE :

Énumérer : Énoncer successivement les parties d'un tout, passer en revue.

Énumération : action d'énumérer.

La lecture de ces articles nous montre qu'énumérer est tantôt lié au comptage, tantôt dissocié de celui-ci.

ENCYCLOPÆDIA UNIVERSALIS : (Article "COMBINATOIRE VOL 4 P.721)

L'analyse combinatoire est l'ensemble des techniques qui servent, en mathématiques, à compter (ou dénombrer) certaines structures finies, ou à les énumérer (établir des listes exhaustives de structures considérées), enfin à démontrer leur existence pour certaines valeurs des paramètres dont elles dépendent.

Ces structures sont très variées ; leur seul trait commun c'est d'être finies. En revanche, les problèmes qu'on se pose sur ces structures sont très divers, et les techniques mathématiques

qu'on utilise pour résoudre ces problèmes très différentes. Par exemple, si l'on veut dénombrer les arbres de n sommets, on établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble de ces arbres et l'ensemble de certaines suites que l'on sait compter. Mais si l'on veut montrer une famille infinie de codes correcteurs, on utilise les résultats fins sur les anneaux de polynômes à coefficient dans un corps fini. Pourtant, dans les deux cas, on dit qu'on s'occupe d'analyse combinatoire. Dans le foisonnement des sujets dits de nature combinatoire, on a donc dû faire un choix et laisser de côté des objets importants.

ENCYCLOPÆDIA UNIVERSALIS : (Article "COMBINATOIRE VOL 4 P. 723)

...."Le plus souvent, on est conduit à chercher une correspondance biunivoque entre ces structures et les ensembles finis. .. Jusqu'ici, il n'existe pas de théorie pour construire ces correspondances. Tout est question d'ingéniosité et de patience."

Ces deux extraits nous informent d'une pratique courante en mathématiques : lorsqu'il s'agit de dénombrer un ensemble fini, une stratégie fréquente consiste à remplacer l'ensemble difficile à dénombrer par un ensemble équipotent dont le dénombrement est aisé.

DICTIONNAIRE DE LA PEDAGOGIE :

Dans le dictionnaire de la pédagogie (Hotyat, Delépine, Touyarot), Le mot "énumération" est utilisé dans le champ de la psychologie génétique. Il est lié au premier stade de la description orale d'images (Binet): l'enfant ne prononce pas des phrases mais nomme les objets qu'il reconnaît ou croit reconnaître. Suit une analyse du discours de jeunes enfants.

L'énumération signifie ici l'association mots-objets. L'énumération est inhérente à la situation. Rien ne prouve que les enfants réalisent effectivement une énumération. Il s'agit d'un mot utilisé par l'observateur et en aucun cas d'une situation d'énumération.

DICTIONNAIRE ELEMENTAIRE DES MATHEMATIQUES MODERNES : (BOURSIN chez BORDAS).

Dans cet ouvrage, seule figure la définition de dénombrable. Énumération ne figure pas dans l'ouvrage.

DICTIONNAIRE DES MATHEMATIQUES BOUVIER P.U.F. P. 263 :

Dans ce dictionnaire, une trace de l'énumération se trouve à l'article "géométrie énumérative", avec la définition suivante :

Géométrie énumérative : Branche de la géométrie projective développée à la fin du XIX^e siècle, qui concerne la recherche explicite du nombre fini de solutions de problèmes dont la résolution échappe au calcul algébrique. Un exemple de problème est la recherche des coniques tangentes à 5 coniques données dans le plan : en situation générale, il y a 3264 (résolution de Chasles). Plus généralement, le nombre de quadriques tangentes à 9 quadriques en position générale est de 666 841 088 (Schubert).

2.1.2. LES OUVRAGES DE MATHEMATIQUES :

Depuis plusieurs années, s'est développé un secteur des mathématiques appelé combinatoire énumérative. Citons Richard STANLEY⁴⁸, qui définit la combinatoire énumérative de la façon suivante⁴⁹: "La combinatoire énumérative concerne le dénombrement des éléments d'un

⁴⁸ R.STANLEY : Enumerative combinatorics Vol 1 et 2. Wordworth and Brooks. Cole 1986.

⁴⁹ p.1 chap. 1

ensemble fini." L'auteur fait immédiatement remarquer qu'une telle définition aussi large englobe un grand nombre de problèmes de mathématiques.

Dès les années 60, les mathématiciens (en particulier Gian Carlo ROTA cité en préface du livre de STANLEY), ont cherché à donner une cohérence et une unité à la combinatoire, en particulier à l'énumération, et à l'incorporer dans la mouvance (mainstream) des mathématiques contemporaines. Une raison importante de cet essor a été le rôle fondamental que la combinatoire joue dans les mathématiques des informaticiens (computer science). Plusieurs auteurs se sont donc intéressés à cette partie des mathématiques. Citons; outre STANLEY, les travaux de LABELLE⁵⁰.

Gian Carlo ROTA écrit⁵¹ : *"de toutes les mathématiques, la combinatoire est peut être de nos jours le sujet sur lequel il est très difficile d'écrire, en dépit d'une grande demande émanant de plusieurs secteurs. Soit un résultat isolé attribuera une reconnaissance à son auteur, soit une nouvelle théorie légère (fledgling) avec quelques applications éparses est proposée en milieu de chapitre, soit l'auteur cède aux tentations contraires de la récréation mathématique, ou de la rigueur, ou du leurre de la "grande récompense de l'algorithme".*

Dans "Enumerative Combinatorics" (chap.1 p.1), R.STANLEY évoque la recherche constante d'une fonction de comptage associant un ensemble E_i dans lequel i ordonne selon un index I (qui peut être N) à une fonction $f(i)$. L'exemple le plus simple est celui de la recherche du nombre de sous ensembles de l'ensemble $E=\{1,2,3,\dots,n\}$ et de la fonction associée $f(n)=2^n$.

La recherche de cette fonction de comptage peut être conduite selon plusieurs voies standard que l'auteur passe en revue. En effet, il est rare que cette fonction, lorsqu'elle existe, puisse être explicitée de cette façon. Bien souvent, la fonction sera construite de façon récurrente, ou/et à l'aide d'une sommation. Dans plusieurs cas, cette fonction sera approchée par une formule algébrique plus aisée à calculer. Les moyens et les conditions de calcul effectif (nombre important d'opération élémentaires à effectuer) jouent un rôle important dans la décision du choix.

L'énumération, en ce qu'elle est souvent fastidieuse, est remplacée par d'autres procédés. L'article de l'encyclopaedia universalis cité plus haut affirmait déjà cela. Nous ne prétendons pas ici faire un recensement de ces procédés. La lecture des ouvrages cités ci-dessus constitue un bon point de départ.

Il est ainsi fréquent de trouver la stratégie suivante : soit un ensemble fini à dénombrer. Si cet ensemble peut être mis en bijection avec un ensemble lui même facilement dénombrable, le problème est alors résolu. A partir de ce constat, des activités mathématiques fructueuses sont développées⁵².

Pour illustrer ce propos, nous avons détaillé la résolution du problème suivant :

⁵⁰ LABELLE G. "Combinatoire énumérative : proceedings. Montréal, Québec 1985. Lecture note in mathematics. Springer Verlag 1985.

⁵¹ Extraits des avant propos de l'ouvrage de R. STANLEY cité plus haut. Traduction personnelle.

⁵² Citons en particulier les travaux de BOUSQUET-MELOU "Q-énumération de polyominos convexes" Bordeaux Thèse mai 91. Une partie de la thèse consiste à établir des bijections entre des familles de polyominos et des objets appelés empilements afin de pouvoir dénombrer les ensembles de polyominos. p.5 l'auteur écrit "L'intérêt de la constitution de bijections entre les objets que l'on cherche à dénombrer est que certains empilements de pièces peuvent s'énumérer".

Soit l'ensemble $\mathcal{N}(n,p) = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n \mid \sum_{k=1}^n x_k = p, p \in \mathbb{N}\}$ à dénombrer.

Il s'agit de dénombrer le nombre de possibilités d'égaliser à p la somme des termes d'une suite de \mathbb{N}^n , donc de trouver le cardinal de $\mathcal{N}(n,p)$.

Tentons d'établir une correspondance C entre cet ensemble et un autre ensemble.

$C : x \in \mathcal{N}(n,p) \longrightarrow y \in \mathcal{A}(1,n;0,p)$ d'applications croissantes (au sens large).

Définissons donc y une application de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ dans $\{0, \dots, p\}$ et tel que $y(n) = p$ de la façon suivante :

$$y(1) = x_1$$

$$y(2) = x_1 + x_2$$

$$y(3) = x_1 + x_2 + x_3$$

$$y(n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$$

La correspondance C est une bijection.

Remarque :

puisque tout $y(n) = p$, alors \mathcal{A} est en bijection avec l'ensemble \mathcal{A}'

$$\mathcal{A}' = \{w : \{1, 2, 3, \dots, n-1\} \longrightarrow \{0, \dots, p\} \text{ croissante au sens large}\}.$$

Mais cet ensemble est encore difficile à dénombrer donc le travail consiste à construire un nouvel ensemble \mathcal{A}'' de fonctions, cette fois ci injectives, tel qu'il existe une bijection entre \mathcal{A}' et \mathcal{A}'' .

Pour cela, il suffit de construire l'application w' à partir de w qui soit strictement croissante. ($w'(i) = w(i) + i$.)

w' est une injection de $\{1, 2, 3, \dots, n-1\} \longrightarrow \{1, \dots, p+n-1\}$ avec

$$\mathcal{A}'' = \{w' \text{ injection} : \{1, 2, 3, \dots, n-1\} \longrightarrow \{0, \dots, p+n-1\}\}.$$

Là aussi il faut apporter la preuve de l'existence d'une bijection entre \mathcal{A}' et \mathcal{A}'' .

Or, se donner une application strictement croissante de

$$\{1, 2, 3, \dots, n-1\} \longrightarrow \{1, \dots, p+n-1\}$$

est équivalent à se donner une partie de $\{1, \dots, p+n-1\}$ à $n-1$ éléments.

$$\text{Donc } \text{card}(\mathcal{A}'') = C(p+n-1, p) = C(p, p+n-1)$$

Cet exemple montre comment peut être conduit un travail de dénombrement par passage d'un ensemble fini à un autre à l'aide de bijections, pour aboutir après plusieurs "sauts" à un ensemble facile à dénombrer.

Gian Carlo ROTA dit de l'ouvrage de R.STANLEY qu'il constitue une réponse à ceux qui considèrent la combinatoire comme "un agglomérat de trop de théorèmes perdus dans de trop rares théories".

Ainsi, il existe bel et bien une activité spécifique visant à se doter de moyens d'explorations d'ensembles finis en vue, il est vrai bien souvent, de les dénombrer. Notons d'ailleurs que c'est en grande partie l'essor de l'informatique, et les besoins que ce secteur a eu, qui ont permis que de tels domaines des mathématiques soient ré explorés.

ELEMENTS D'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES N. BOURBAKI. (1969).

Dans cet ouvrage, nous avons pointé l'usage du mot énumération page 65 : ... "*Les problèmes généraux d'énumération groupés sous le nom d'analyse combinatoire, ne paraissent pas avoir été abordés avant les derniers siècles de l'antiquité classique : seule la formule générale pour $(n,p) = n(n-1)/2$ est attestée au III^e siècle de notre ère. Le mathématicien Hindou Bhaskara (XII^e siècle) connaît la formule générale pour (n,p) . Une étude plus systématique se trouve dans un manuscrit de Levi ben Gerson, au début du XIII^e siècle : il obtient la formule de récurrence permettant de calculer le nombre V_{np} des arrangements de n objets pris p à p , et en particulier le nombre des permutations de n objets*"...

Des auteurs se sont intéressés aux mathématiques de l'ordre et de la classification dans des ensembles finis. Nous avons étudié, en particulier l'ouvrage suivant :

ORDRE ET CLASSIFICATION. ALGEBRE ET COMBINATOIRE (M.BARBUT et B.MONJARDET).

Dans les avant propos de cet ouvrage, les auteurs suggèrent une caractérisation "au sens large" de l'action de mesurer : "*mesurer des grandeurs, c'est d'abord être capable de les classer, de les comparer*".

L'ouvrage traite essentiellement des structures finies et discrètes et prévient qu'il s'agit d'un ouvrage de mathématiques. Il annonce cependant des applications dans plusieurs domaines (les sciences de l'homme) dans lesquels il y aura à comparer des ensembles. Les chapitres des deux tomes sont les suivants : classer, comparer : les relations transitives.- Ordres totaux - Typologie des treillis - treillis modulaires et distributifs - Fermetures, correspondances de Galois - Treillis des préordres - treillis des partitions d'un ensemble fini -compléments.

Ce qui nous paraît se rapprocher de notre sujet est bien sûr le chapitre sur les ordres totaux. Les auteurs parlent alors de "chaîne"⁵³. (P. 43 tome 1). Ils associent ordres totaux sur un ensemble fini E et permutation de E (bijection de E avec lui-même) comme un isomorphisme : la permutation notée $(abcd)-(cabd)$ dans laquelle l'image de a est c , celle de b est a , celle de c est d , celle de d est b peut être ainsi lue comme l'isomorphisme de l'ordre $abcd$ à l'ordre $cabd$ sur les éléments de E .

Il y a ainsi $n!$ chaînes différentes de E .

Nous n'avons toutefois pas relevé, dans cet ouvrage, d'activités proposées dont la réalisation d'un ordre total soit la solution à un problème posé autre qu'une demande de réalisation d'un ordre total pour lui-même.

THEORIE ET APPLICATION DE LA STATISTIQUE :

Si l'on prend le manuel "Théorie et application de la statistique" (série SCHAUM édition 1972), et si l'on cherche "énumération" dans l'index alphabétique on est renvoyé aux pages 2 et 3. Dans ces pages, énumération ne figure pas. Seul le mot dénombrement est présent.

OUVRAGES D'INFORMATIQUE :

C'est en informatique que de nombreux algorithmes portant sur le parcours et le tri d'ensembles finis ont été mis en évidence. Il est intéressant de constater que la nouvelle discipline de l'informatique a eu besoin d'un nouveau savoir, ou, du moins d'un savoir qui, jusqu'à présent n'était pas considéré comme aussi "noble" que d'autres branches des mathématiques. Citons, en particulier le travail de référence de Donald KNUTH⁵⁴ à propos

⁵³ P. 44 du tome 1. D'autres ouvrages comme par exemple DUBREIL JACOTIN "leçon d'algèbre moderne" DUNOD 1964 parlent de chaînes.

⁵⁴ KNUTH "Run out of computer programming" in Bib.

des algorithmes de tri et de structures de données. Il a fallu expliciter des procédés qui, jusque là n'avaient pas beaucoup d'écho dans la communauté scientifique.

2.1.3. MANUELS SCOLAIRES DU SECONDAIRE :

La recherche d'activités faisant appel à l'exploration d'un ensemble s'identifie, comme dans le domaine des mathématiques savantes, aux activités de dénombrement. Aussi, pour trouver des traces de l'énumération, nous avons étudié les chapitres concernant l'analyse combinatoire.

Cette démarche se situe dans la recherche d'indices d'utilisation de l'énumération dans des pratiques institutionnelles. Nous ne faisons pas ici le recensement de secteurs des mathématiques du secondaire dans lesquels l'élève doit, à titre personnel, pratiquer des énumérations.

Nous n'avons pas fait une étude exhaustive des (nombreux) manuels actuellement sur le marché. Nous avons choisis ceux qui, de notre point de vue pouvaient apporter une information sur le statut de l'énumération dans les activités de combinatoire.

BORDAS TA1/B COLLECTION FRACTALE 1992:

A propos de l'analyse combinatoire, page 292 ce manuel propose la fiche méthode suivante :
Il n'est pas nécessaire de faire de longs commentaires sur cette façon de pratiquer le "bachotage".

TRANS-MATHS NATHAN TCE Ed 1990.

Au chapitre Combinatoire, on peut lire :

"POUR PRENDRE UN BON DEPART

Quels types de problèmes va-t-on résoudre?

La combinatoire, tout au moins dans la partie qui nous concerne, s'intéresse à des problèmes de dénombrement. Par exemple, huit points du plan sont donnés, dont trois quelconques ne sont pas alignés; Combien peut-on construire de triangles ayant trois de ces points pour sommet ?

Le but de ce chapitre est de vous donner des outils, des théorèmes pour répondre sûrement et rapidement à ce genre de questions. Mais ces théorèmes sont énoncés dans le langage de la théorie des ensembles et pour les appliquer, il vous sera nécessaire de "mathématiser" la situation concrète, c'est à dire de l'interpréter en termes d'ensembles, de sous-ensembles, de couples, de triplets, et plus généralement de n-uplets,"...

Ainsi, dans l'exemple proposé ci-dessus, on peut remarquer qu'un triangle étant déterminé par trois points distincts non alignés, tout revient à savoir combien il y a de façons de choisir 3 points parmi 8, ou encore combien il y a de sous-ensembles à 3 éléments dans un ensemble à 8 éléments ; et il se trouve que l'on sait répondre à cette question.

Les nombreux exemples traités par la suite vous permettront de vous familiariser avec cette pratique de "mathématisation" d'une situation concrète."

A la suite de ces préliminaires, figure un cours de 20 pages, assortis d'exemples, développant les opérations ensemblistes et leur utilisation.

IL est intéressant de noter le souci des auteurs de raccorder les activités de dénombrement et les connaissances ensemblistes. Nous avons analysé dans la première partie en quoi cette démarche ne pouvait toutefois pas aboutir.

La plupart des ouvrages scolaires ne prennent pas autant de précautions. Sous le chapitre "problèmes de dénombrement", ou "combinatoire", figure un bref rappel de cours concernant les ensembles, les opérations ensemblistes et les applications. A charge pour le professeur d'organiser la liaison.

2.1.4. MANUELS SCOLAIRES DE L'ECOLE ELEMENTAIRE :

Dans toutes les activités de comptage d'une collection décrite en ostension, les enfants doivent organiser l'exploration d'une collection en vue de son dénombrement. Nous allons étudier si les ouvrages (en particulier ceux du cours préparatoire) prennent en compte l'énumération comme connaissance nécessaire au dénombrement.

Nous avons mené notre étude sur les ouvrages suivants : MATHS CP Eiller HACHETTE, "Objectif Calcul" CP, MATHS CP collection Chapuis NATHAN, MATH CP livre outil MAGNARD ECOLES, j'apprends les MATHS, Brissiaud, chez RETZ, Atout maths, HACHETTE, "Vivre les mathématiques" ARMAND COLIN.

Nous rapportant seulement trois études sur trois ouvrages du cours préparatoire.

- Dans le livre du maître de "J'apprends les maths" de R. Brissiaud, l'analyse du comptage, du comptage numérotage est très détaillée (p.10). L'auteur fait allusion au subitizing (phénomène de reconnaissance quasi-instantané d'une quantité donnée), mais il n'y a pas trace d'une étude sur l'organisation d'une collection en vue de la production d'un ordre total pour le comptage.

- L'ouvrage ERMEL, P. 243, explique l'intérêt qu'il y a à organiser une collection afin de la compter, mais c'est pour expliquer l'intérêt des regroupements par paquets de dix.

- Pour les autres ouvrages scolaires cités, prenons l'ouvrage " MATH EN HERBE" de chez NATHAN ed.1992. Cet ouvrage est représentatif des ouvrages actuels du cours préparatoire. Nous repérons au chapitre deux, l'activité suivante :

"Trace une ligne : les fleurs rouges sont à l'intérieur, les fleurs jaunes sont à l'extérieur. "Ce texte est inscrit au-dessus d'un dessin sur lequel figurent 10 fleurs rouges et 9 fleurs jaunes. La réussite à cet exercice suppose la connaissance des mots extérieur et intérieur. Cet exercice figure dans le chapitre "Se repérer dans l'espace."

Au chapitre trois "trier et classer", un exercice demande :

"Entoure le chien de Nicolas. Tu peux le reconnaître ainsi : un dessin signifie, par icônes barrés que le chien est assis, qu'il a un collier vert, qu'il a une petite queue. Il faut trier dans une collection de 6 chiens.

Conclusions :

- Dans les ouvrages du cours préparatoire que nous avons consultés, nous avons repéré ces activités, toujours étiquetées "se repérer dans l'espace" ou bien "activités de classification", sans qu'il soit fait allusion, au lien qu'il pouvait y avoir entre ces activités et celle du dénombrement. Lorsqu'il s'agit de s'organiser dans un ensemble, c'est toujours à l'occasion de

la mise en place d'une organisation instituée en vue du comptage et liée à la numération : il s'agit de réaliser des groupements par dix.

- Les ouvrages du cours préparatoire ne proposent donc pas d'activités pointées comme activités d'énumération.

- Remarque :

Les ouvrages des années 1970, qui traitaient des ensembles permettaient quelquefois des activités provoquant un travail sur l'énumération⁵⁵. Mais la disparition de toute activité ensembliste, aussi rapide et totale que fut son apparition, ont mis aux oubliettes des activités qui mettaient en jeu des énumérations non liées à du comptage, même si cela n'était pas identifié comme tel. Par exemple, il était assez fréquent de demander aux enfants si deux ensembles représentés en extension étaient identiques ou non. Dès que la collection dépassait une dizaine d'éléments, il est évident qu'il fallait mettre au point des stratégies précises d'énumération. Il serait intéressant de savoir comment ces exercices étaient traités à l'époque. Ces activités auraient pu permettre de développer des techniques de reconnaissances et d'explorations. Mais elles furent, à l'époque assimilées à des pratiques bien inutiles. Il est vrai qu'il était difficile de séparer les activités novatrices et les rituels que les "ensembles" et autres "papygrammes" venaient d'apporter en masse. Ainsi, ces exercices arrivés à cette époque au nom des "ensembles" disparurent pour la même raison.

2.1.5. UN CLIN D'OEIL :



Dans l'album « le lourd passé de Lagaffe », page 24 (Ed 1986) Franquin a bien repéré les difficultés du comptage dues à une mauvaise stratégie énumérative...

⁵⁵ Je garde précieusement l'ouvrage que Guy BROUSSEAU m'a remis et qui constituait ses "premiers pas" dans le domaine de la production écrite : "Les mathématiques du cours préparatoire" chez DUNOD. Page 20 de cet ouvrage, l'on propose une activité de reconnaissance de deux collections qui implique une énumération. Mais à l'époque, c'est le critère d'appartenance qui est l'objet à enseigner et le nombre d'objets à comparer permet une réponse par lecture globale.

2.2. SUR QUOI SE FONDER DANS LES TRAVAUX EN PSYCHOLOGIE ET EN DIDACTIQUE ?

2.2.1. EN PSYCHOLOGIE, EN EPISTEMOLOGIE GENETIQUE :

Nous avons décidé de consulter quelques ouvrages de ces domaines. Nous y avons trouvé des préoccupations qui ne sont pas très éloignées des nôtres. Nous étudions deux extraits issus de deux ouvrages :

LA MEMOIRE César Florès P.U.F.

P. 53 l'auteur cite l'expérience de BOUSFIELD (1953) : "60 noms appartenant à 4 catégories sémantiques (quinze noms d'animaux, quinze noms de personnes, quinze noms de profession, quinze noms de végétaux) sont mélangés dans un ordre imprévisible pour les sujets de telle sorte que le nombre total de mots appartenant à la même catégorie qui se trouvent groupés dans la séquence correspond aux regroupements qu'un tirage au sort aurait pu donner. L'analyse du rappel libre, effectué immédiatement après une seule présentation de la liste montre que les suites de 2,3,4...7 mots homogènes sémantiquement que les sujets reproduisent dépassent très largement le nombre de suites attendues s'il n'y avait que le hasard."

L'auteur écrit : "L'examen de l'ordre effectivement réalisé par le sujet met en évidence l'étroite subordination de cette forme de rappel à l'égard des activités de catégorisation et de mise en relation qui assurent les regroupements et relèvent de l'intelligence."

Nous retrouvons dans cette étude l'analyse que nous avons faite à propos de la détermination des ensembles et du rapport entre désignation et dénomination. Dans cette expérience, la dénomination permet des partitions et facilite la restitution, même incomplète, de l'ensemble. Par là même, le sujet vise la construction d'une énumération et utilise la dénomination des objets pour que la mémorisation soit facilitée.

1°) L'ENFANT ET LE NOMBRE. (FAYOL 1990).

Cet ouvrage remarquable constitue une référence pour qui étudie la construction du nombre et des opérations. Nous prendrons quelques extraits de ce travail. Dans cet ouvrage, FAYOL (1990 p.60) évoque les obstacles au comptage et il titre : obstacles liés à la performance. Il cite les travaux de POTTER et LEVY (1968) qui mettent en évidence l'existence de difficultés très nettes au niveau du comptage d'une petite collection. Ces auteurs considèrent à priori que tout dénombrement nécessite :

La connaissance des noms des nombres dans l'ordre correct

Le pointage (par le doigt ou le regard) de chaque élément pris tour à tour jusqu'à ce que tous aient été considérés exactement une fois.

La coordination de ces deux habiletés.

Et pour conduire l'étude (sur 58 enfants), ils demandent à ceux-ci de "toucher chacun des éléments une fois et une seule". Les conclusions sont que selon la structure spatiale (lignes, aléatoire, rangées) le pourcentage de réussite varie. L'arrangement spatial a un impact sur l'exactitude de la tâche de pointage.

SHANNON (1978) mène d'ailleurs une étude typologique sur la façon dont les enfants explorent une petite collection (nos observations au cours préparatoire, voir chapitre trois) confirment cette étude.

Commentaires :

On remarque que ces auteurs détectent une tâche élémentaire mais qu'ils la considèrent comme relevant de la compétence du sujet. La consigne de travail de POTTER et LEVY montre d'ailleurs que le sens de l'activité ne peut être construit par le sujet. Dans ce cas, il s'agit d'appliquer une consigne sans finaliser l'activité autrement qu'en se conformant aux injonctions de l'expérimentateur.

2°) **GELMAN et MECK (1983)** émettent l'hypothèse selon laquelle le déroulement d'une collection se trouverait d'autant plus affecté que les sujets se verraient dans l'impossibilité d'effectuer un contrôle sur le dispositif spatial. Pour cela, ils mettent en œuvre des dispositifs dans lesquels les collections sont plus ou moins inaccessibles au pointage. Leurs conclusions sont les suivantes : puisque les compétences arithmétiques des élèves dépassent de très loin les performances jusque là décrites, il suffit de diminuer les obstacles pour induire une amélioration.

Commentaires :

Si nous pouvons admettre les modalités de recherche de GELMAN et MECK, il n'est pas possible d'accepter les conclusions dès lors que l'on se situe dans une perspective d'apprentissage. Les conditions du comptage sont ce qu'elles sont et le contrôle spatial de la collection est un enjeu suffisamment déterminant pour qu'il soit à un moment donné pris en charge par le système.

3°) **Dans les "bilans et perspectives"**, l'auteur fait une remarque à propos du "subitizing" : "le subitizing a été étudié le plus souvent pour lui-même, sans considération du rôle instrumental qu'il peut jouer dans une tâche de dénombrement. De fait, être capable de percevoir rapidement 2, 3, voire 4 ou 5 n'entraîne pas que cette capacité sera investie dans une procédure générale visant à déterminer le cardinal d'une collection." Et l'auteur conclue en s'interrogeant : "a-t-on affaire à des difficultés d'accès lexical, ou de délimitation des sous groupes, ou d'addition des résultats ? "

Commentaires :

Cette interrogation nous intéresse en ce sens qu'elle montre l'absence de travaux pour observer la mise en œuvre de connaissances privées à des fins procédurales. Il s'agit là d'une activité relevant de l'énumération en ce sens que l'élève devra faire des choix énumératifs en fonction d'un projet. En d'autres termes, constituer une suite additive (en utilisant le subitizing, pour des raisons évidentes d'économie d'énumération locale) suppose que l'élève sait qu'il sera capable d'énumérer l'ensemble des parties d'un ensemble. C'est donc là un travail d'anticipation qui ne peut se conduire que si une situation convenable le sollicite.

4°) Commentaires généraux :

Tous ces travaux récents relatifs au comptage et à la numération, montrent bien l'existence de champs connexes au nombre et nécessaires à la construction de celui-ci. Toutefois, ces domaines sont trop souvent considérés

D'une part comme relevant de la compétence du sujet. Il n'est pas question de viser l'enseignement de certains des concepts qui caractériseraient ces champs. Au contraire, la conception théorique de GELMAN ET MECK induit l'aplanissement des difficultés dues au pointage pour améliorer les résultats du dénombrement.

D'autre part comme isolés et non associés à l'activité de dénombrement.

2.2.2. EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES :

Nous effectuons notre exploration dans le domaine de l'enseignement des nombres et des opérations arithmétiques à l'école élémentaire.

RECHERCHES SUR LE PRE-CALCUL ALFRED BRAUNER (E.S.F.)

A propos des comptines p. 52 ..."*Lorsque la périodicité est espacée, le nombre des comptés trop grands, ou pour bien d'autres raisons, le compteur peut avoir recours au marquage. Ce procédé est une première tentative de numération écrite, c'est toujours un comptage primitif...Le progrès du procédé réside dans le fait qu'il y a matérialisation de la suite, même lorsqu'aucune trace des objets ou sujets comptés n'existe plus. On peut procéder au décompte, plus tard, à tout moment, si l'on dispose d'un moyen de comptage, d'un système de numération.*"

DECRIRE AGIR COMPTER :

Dans l'ouvrage "Décrire, agir, compter" (Claire Meljac, 1979), l'auteur met bien en évidence (pages 61 à 63) le fait que les enfants dénombrent moins bien qu'ils ne récitent. "*En effet, surtout chez les plus jeunes enfants, la bijection systématique entre le symbole numérique, d'une part, et l'élément à décompter lui-même, d'autre part, n'est pas du tout clairement établie. Lorsque la configuration est irrégulière, les enfants ne savent ni où commencer ni où s'arrêter et égrènent alors la suite qu'ils ont mémorisée sans se soucier des correspondances...Ainsi, chaque élément peut être compté plusieurs fois ou bien ne pas être compté du tout. On voit donc que la maîtrise parfaite sur le plan verbal n'est nullement une garantie de la réussite du dénombrement.*"

La tonalité générale de cet ouvrage n'est pas de conduire des analyses didactiques stricto-sensu. Aussi l'auteur ne cherche pas à produire des situations, à imaginer des enseignements. Le phénomène est cependant bien repéré.

UN DEUX BEAUCOUP PASSIONNEMENT :

Dans l'ouvrage "un deux beaucoup, passionnément" I.N.R.P. 1988, une large place est faite à l'activité de dénombrement ainsi qu'aux "principes qui (y) doivent être respectés" (page 105), sans que l'énumération n'apparaisse.

Dans l'article de F. CONNE, page 109 de ce même ouvrage, on peut lire : "*les activités de dénombrement consiste à coupler ce compteur (récitation exprimée ou mentale de la comptine ou plus généralement du recours à tout autre type de compteur) avec l'énumération des éléments de la collection.*" Plus loin, il évoque "*cependant, suivant l'ordre de grandeur de la quantité à évaluer et des conditions de travail, le recours à des systèmes de marquage auxiliaires peut s'avérer nécessaire.*"

On retrouve là encore une réponse procédurale à une question de mesurage d'une collection.

Enfin, la plupart des travaux sur la construction du nombre relèvent l'erreur des enfants qui "*effectuent le comptage du même objet plusieurs fois de suite et/ou oublient de prendre en considération certains objets*".⁵⁶

LES CHEMINS DU NOMBRE :

⁵⁶ A.Bessot et C.Comiti "appropriations des propriétés ordinales du nombre par l'élève du cours préparatoire" E.S.M. (1982).

GELMAN et GALLISTEL 1978 cités par ARTHUR BAROODY dans "Les chemins du nombre" p.384 recensent trois types d'erreurs classiques. La troisième est :

"Certains enfants capables de coordonner le mot-nombre énoncé avec chaque objet montré font cependant des erreurs de marquage de l'itinéraire suivi (keeping track errors). Dans ce cas, l'enfant ne distinguera pas les objets qu'il a comptés de ceux qui devraient l'être encore; il oubliera un objet ou le comptera plus d'une fois. De telles erreurs sont très fréquentes en début de scolarité. Manifestement, certains enfants, avant l'école échouent à concevoir des stratégies efficaces qui permettent de partager les objets comptés en les mettant, par exemple, en piles (FUSON 1988). La hâte entraîne souvent de telles erreurs."

ARTHUR BAROODY auteur de l'article cité propose des directives pratiques pour remédier à ce type d'erreur :

"Si l'enfant respecte la correspondance, s'applique, mais commet des erreurs, observez bien comment il construit son parcours et attirez son attention sur celui-ci. Montrez que les objets comptés peuvent être empilés suffisamment loin pour qu'ils ne soient pas mélangés avec les objets qui ne sont pas comptés. Pour les collections d'objets qui sont fixes, commencez par un endroit bien défini, tel qu'un coin ou une extrémité, et comptez dans une direction déterminée. Pour des collections d'images, biffez les éléments dès qu'ils sont comptés."

L'énumération est en filigrane dans l'activité de comptage, décelable par le type d'erreur provoqué. La remédiation consiste en un enseignement d'un procédé dont on ne mesure en aucune façon l'efficacité à long terme.

PRESENTATION DE TRAVAUX : Rubrique de RDM 1982 Vol 3-2 (Auteur F.CONNE faisant une étude du travail de G.VERGNAUD "L'enfant, la mathématique et la réalité" P.245).

F.CONNE remarque que, pour les ensembles, G.VERGNAUD utilise le mode de pensée des mathématiciens : «*c'est le simple fait de pouvoir les considérer in-abstracto, d'un seul acte de pensée* ». Il ajoute : *"Pour moi, c'est un point fondamental. Et qui permet de bien contraster les approches du psychologue et du mathématicien. Les mathématiques ne portent que sur des entités constituées. L'ensemble est tout fait, la relation est donnée par le graphe. On ne s'occupe pas de savoir comment elles se constituent, on ne prend pas en compte ce moment (de là d'ailleurs la transposition didactique qui, dans l'enseignement élémentaire invente des tâches de constitution d'ensemble par remplissage d'un diagramme de Venn). ... Considérer des entités constituées implique des opérations de pensées bien plus abstraites, c'est se placer d'emblée à un niveau de représentation où on peut traiter de ces entités comme des objets"*.

Cette analyse rejoint notre essai de détermination des collections et le rôle fondamental joué par l'énumération dans cette détermination.

ACTES DU CONGRES DE LA C.I.A.E.M. ADELAIDE 1984 :

Dès 1984, dans une communication au congrès de la C.I.A.E.M. d'Adélaïde, G. BROUSSEAU explicite pleinement l'énumération comme connaissance sans doute nécessaire à la pratique des dénombrements. L'auteur écrit en parlant de l'énumération :

"Cette activité de production effective d'une injection sur une section commençante de N intervient pendant toute la scolarité comme moyen de résoudre certaines problèmes de dénombrement et de combinatoire en diverses occasions. Elle n'est à aucun moment traitée comme objet d'enseignement, de sorte qu'elle n'est pas l'objet d'une intense négociation ni d'un contrat didactique complexe. Mais, par contre, elle est l'occasion d'échecs bien difficiles à traiter pour les professeurs qui les attribuent à un manque, chez les élèves, du sens de

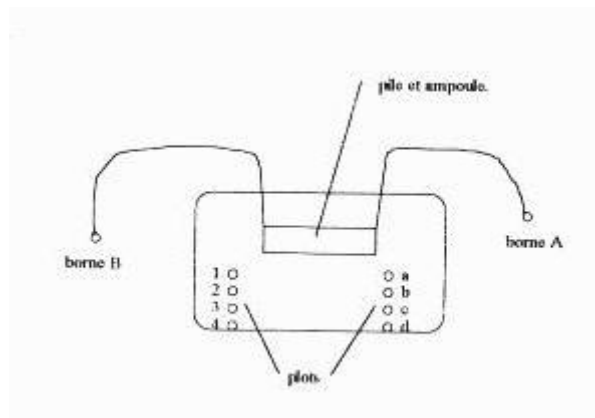
l'opération, ou encore, chez eux, à une difficulté à enseigner la compréhension des concepts mathématiques."

COMBINATOIRE ET RESOLUTION DE PROBLEMES AU CM1-CM2 : S.MAURY et M.FAYOL. (Article de la revue RDM vol 7-1 1986) :

Les auteurs relatent une recherche effectuée à l'occasion d'activités d'éveil sur l'électricité. Ils s'intéressent aux procédures utilisées par les élèves lors de la résolution de deux problèmes ayant trait à l'énumération et qui relèvent du domaine de l'électricité.

Le premier problème posé est le suivant : des enfants disposent de 4 piles portant chacune un signe distinctif et de 4 ampoules colorées Rouge, Bleue, Vert, Jaune et d'un circuit comportant une douille fixée sur un socle et relié à deux fils dotés de bornes assurant le contact avec celles de la pile. Une seule pile et une seule ampoule sont en état de marche. Les élèves ont à manipuler piles et ampoules afin de trouver quelle pile et quelle ampoule sont en état de marche.

Le deuxième problème est le suivant : les enfants doivent repérer, parmi plusieurs possibilités, un circuit caché (connexion secrète) à partir du montage suivant :



Les signes désignant les plots ne figurent pas dans le montage expérimental.

Les enfants doivent retrouver le seul circuit qui "ferme".

Les deux situations se fondent sur la même structure mathématique. Dans les deux cas, il s'agit d'explorer un ensemble produit cartésien de 4×4 .

Les auteurs font une étude détaillée des procédures énumératives conduites par les enfants. En particulier, le deuxième problème est l'occasion de repérer trois types d'explorations allant de 4 essais, à 16 puis à 32.

Le texte comporte une imprécision sur l'usage du mot énumération : en particulier les auteurs utilisent le terme d'énumération parallèle (page 78) : (qui consiste à relier les plots qui se font face) dans le deuxième problème alors que manifestement, cette stratégie ne conduit pas à l'exhaustivité. L'énumération serait alors, du point de vue des auteurs, le chemin exploratoire des enfants. Cette hypothèse sur la définition prise en compte dans cet article est confirmée par le fait que l'on y nomme énumération systématique une stratégie gagnante. (cf. page 95 : procédure qui -seule- permet la découverte des couples satisfaisants et la certitude de leur unicité).

Malgré cela, il s'agit bien d'un travail d'analyse de la façon dont les enfants explorent un ensemble et la situation est un exemple intéressant de situation d'énumération non liée au comptage.

Dans ce type de situation, l'action consiste à trouver le couple pile-ampoule ou le circuit (couple de bornes) corrects. Les auteurs constatent que les résultats à cette activité ne dépendent pas du niveau scolaire déclaré par l'institution sur la base des résultats scolaires habituels. Ils s'interrogent toutefois sur le rapport entre la structure (le schème) et les objets sur lesquels cette structure s'applique. Une des conclusions est la suivante : Deux problèmes pouvant être résolus à l'aide de la même procédure combinatoire, mais qui diffèrent par la nature des objets à combiner ne donnent pas lieu, à certains âges, au même niveau de performance, alors qu'ils seront abordés de la même façon à une période ultérieure.

ARTICLE "PROBLEMES DE DENOMBREMENT" A.ANTIBI Bulletin A.P.M.E.P. Avril 1990.

Dans cet article, l'auteur s'interroge sur les difficultés rencontrées chez les élèves et les enseignants face à la résolution d'un problème de dénombrement. Il conduit une expérimentation basée sur un test dont voici l'énoncé :

Quel est le nombre d'applications surjectives d'un ensemble de $(n+1)$ éléments dans un ensemble de n éléments ?

Il propose ce test à 55 enseignants (20 du supérieur et 35 de lycées), 37 étudiants préparant le CAPES de mathématiques, 11 étudiants de DEUG, 5 élèves de maths-sup, et 3 élèves de SUP-AERO.

Le pourcentage de réponses justes est de 16% chez les enseignants et de 11% chez les étudiants. Le pourcentage de réponses fausses est respectivement de 55% et 65%.

L'auteur consulte ensuite les candidats et leur pose la question "êtes-vous sûrs de vos réponses"? Personne ne répond OUI. "Dans ce domaine, on n'est jamais sûr" disent certains.

L'auteur cherche ensuite à expliquer les raisons d'un tel résultat. Il dit, en particulier :

"Je me suis astreint, pour la première fois dans ma carrière d'enseignant, à rédiger la solution de l'exercice proposé précédemment avec un niveau de rigueur comparable à celui qui est usuellement demandé dans les autres domaines des mathématiques : la solution ne tient plus alors en quelques lignes : elle nécessite deux pages environ".

Suit alors la démonstration.

Dans cette démonstration, l'auteur cite des étapes qui sont exactement celles que l'on rencontre dans d'autres activités apparemment éloignées (dans la scolarité comme dans le champ de connaissances) de l'activité de la combinatoire.

De cette analyse, nous pouvons retenir que l'auteur, sans l'explicitier, montre ce qui est habituellement à la charge de l'élève et ce qui est à la charge du professeur dans des activités de dénombrement. Il constate que si les exigences de l'institution étaient les mêmes que dans d'autres secteurs des mathématiques, les "rédactions des démonstrations" ne seraient pas de même nature (ni de même longueur !).

L'explication du "Pourquoi ces problèmes sont-ils difficiles" est assez sommaire : "Une des raisons essentielles de la difficulté de ce genre de problème est toute simple : on les pose très souvent de sorte qu'ils soient difficiles. Une difficulté de ce type n'est donc pas liée à la nature même des problèmes de dénombrement : elle est due à une tradition de notre système éducatif."

Comment comprendre cette conclusion ?

Dans l'article cité, l'auteur fait une étude d'une erreur classique : la réponse $n.(n+1).n!$

Pour parvenir à cette conclusion, les étudiants procèdent comme suit :

Soit f une bijection d'une partie A de E sur F . Le nombre de bijections de A sur F est $n!$ Le nombre de parties à n éléments de E est C_{n+1}^n soit $n+1$. L'élément restant a n possibilités.

Il apparaît que ce raisonnement est faux parce que les étudiants recomptent deux fois une même surjection. Ainsi, l'exploration de la collection des surjections conduit à un recouvrement de l'ensemble alors qu'il fallait une partition.

L'auteur conclut : *"A un certain moment de la démonstration, on utilise une propriété d'additivité d'une partition pour un ensemble de parties qui n'en est pas une."*

Il aurait été intéressant de regarder de plus près si les étudiants avaient la partition (ce qui paraît probable) comme conception. Mais cette partition s'exerce sur des représentations induisant des erreurs. Par exemple, le fait de faire un schéma type diagramme de Venn, induit, bien souvent la représentation d'un ensemble par une patate et élimine, de fait, une représentation d'un ensemble qui ne serait pas constitué de parties toutes connexes. On n'est pas devant une fatalité comme la conclusion le laisserait penser. Il faut prendre cette analyse comme le reflet d'une rupture de fonctionnement (de contrat) par rapport aux autres activités mathématiques.

2.3. TROIS ETUDES

Nous avons conduit deux études plus détaillées. La première étude se rapporte à l'ouvrage de R.BRISSIAUD : "Comment les enfants apprennent à calculer". L'auteur traite les difficultés d'exploration des collections comme la plupart des auteurs déjà cités. Par ailleurs, dans cet ouvrage, l'auteur cite les travaux de l'IREM de Bordeaux et, en particulier les nôtres. Nous avons perçu dans l'analyse de nos travaux un point de vue ou une incompréhension dont nous voulons débattre.

La deuxième étude est de nature plus historique. Il nous a semblé utile de réétudier de quelle façon la correspondance entre FERMAT et PASCAL, dont il est souvent admis qu'elle constitue une genèse des probabilités, mettait ça et là en évidence des problèmes d'exploration exhaustive d'ensembles. Nous avons eu la curiosité d'étudier comment les ouvrages actuels relataient cette correspondance. Nous avons constaté une transformation dont nous pensons qu'elle constitue en soi l'indice d'un phénomène de didactique.

2.3.1. A PROPOS DE : "COMMENT LES ENFANTS APPRENNENT A CALCULER ":

Examinons l'ouvrage "Comment les enfants apprennent à calculer", de R. BRISSIAUD. Son ouvrage traite du comptage et du dénombrement.

L'auteur rappelle que le comptage est l'attribution à chaque objet d'un mot-nombre, comme l'on attribuerait "des dossards à des coureurs". "Aucun des mots-nombres prononcés ne représente une quantité à lui tout seul. Le dernier mot-nombre prononcé ne "vaut" pas plus que les autres : lui aussi est un numéro qui réfère à l'objet pointé".

Le dénombrement est défini comme : "Un enfant sait dénombrer lorsque le dernier mot-nombre qu'il prononce n'est pas un simple numéro, mais représente à lui seul la quantité de tous les objets."

P. 35, la préoccupation de l'auteur est l'apprentissage du comptage. Il énonce les résultats de R.GELMAN qui affirme que 80% d'enfants de 4 ans réussissent le comptage d'une collection de 5 éléments, et cite les travaux de COMITI-BESSOT-PARISELLE dans lesquels les auteurs constatent que lorsque la taille de la collection augmente, (30 objets en milieu de cours préparatoire) il devient difficile, pour l'enfant d'effectuer correctement une correspondance terme à terme. Les erreurs sont : "soit les enfants oublient un objet, soit ils recomptent deux fois le même objet."

Or, page 36, lorsqu'il s'agit de répertorier les erreurs, R.BRISSIAUD écrit :

"On en trouve encore chez des enfants relativement âgés, et qui résultent plus d'un manque de méthode que d'un défaut de connaissances. Pour compter des objets qui sont disposés en cercle, par exemple, il faut garder la trace de son point de départ, pour ne pas s'arrêter trop tôt ou amorcer un deuxième tour. Dès que les objets à compter ne sont pas alignés, la mise en œuvre d'une stratégie de comptage appropriée se révèle nécessaire. L'enseignant peut assez facilement aider les enfants dans ce domaine. Si les objets à compter sont déplaçables, par exemple, on a vu qu'une bonne stratégie consiste à déplacer chaque objet, de façon à séparer les objets déjà comptés de ceux qui restent à compter. Quand il s'agit d'objets dessinés, l'enfant peut adopter une stratégie de marquage".

L'auteur a décelé une difficulté qui est sans doute caractéristique de l'énumération, mais il n'y reconnaît pas une connaissance à acquérir. Il propose un moyen d'éviter la difficulté. Il ne

propose pas une situation d'apprentissage. L'objectif est le comptage. C'est l'activité première. Tout ce qui s'y oppose est traité comme un manque de méthode, une difficulté personnelle de l'élève que l'enseignant résoudra localement.

Par ailleurs, l'auteur étudie de façon détaillée, quelles stratégies les enfants développent pour communiquer des quantités par écrit. *"Il fut un temps où l'on supposait qu'un enfant qui désire passer une commande écrite le fera nécessairement sous forme numérique par une écriture chiffrée, plutôt que par une collection témoin"*.

Page 52, l'auteur cite notre recherche DEA 1985 "situations didactiques et logiciels d'enseignement"⁵⁷, et les recherches de HABIBA EL-BOUAZZAoui, comme exemples d'activités dans lesquelles la construction du nombre se fait bien avant la production effective d'écritures numériques.

Mais, il semble bien que l'auteur n'ait pas vu dans cette activité la production de pratiques énumératives. En particulier, notre travail sur l'énumération pré-numérique (D.E.A. 1985) n'est pas pointé. Or, certains enfants reproduisent la collection témoin, d'autres restructurent cette collection par une énumération. Ces différences de comportements ont des conséquences sur la réussite à l'exercice.

Lors de cette étude, nous avons aussi montré (P.98 à 102) que 90% des messages écrits par les enfants étaient des listes constituées de dessins élémentaires.

Le travail de l'époque montrait que des situations utilisant un didacticiel (BARQUES, que nous traitons en détail dans la partie ingénierie) pouvaient permettre à un enfant de travailler le dénombrement autrement qu'en produisant le dernier mot-nombre⁵⁸.

Avec ce logiciel, un enfant avait à informer un autre enfant de la quantité exacte de barques à prévoir pour une collection d'une dizaine d'animaux.

Tous les enfants dessinaient des barques (lorsqu'ils n'écrivaient pas un nombre ou une suite de bâtonnets), signifiant ainsi l'anticipation que représentait pour eux ce message. Certains enfants construisaient, par restructuration, une collection témoin.

Or la mise en correspondance de la liste d'objets de la situation et d'une liste intermédiaire construite par l'enfant (bâtonnets alignés, ronds alignés) se bâtit à partir d'une utilisation effective d'une énumération.

Pour conclure, nous dirons que toutes les activités qui visent la mise au point d'écritures numériques et qui sont traitées sous la forme d'activité de communication (d'une façon traditionnelle ou à l'aide de logiciels), nécessitent des pratiques énumératives qui ne sont pas reconnues comme objet d'enseignement. L'exemple que nous venons d'étudier montre que l'auteur n'a retenu des travaux effectués à Bordeaux à l'époque que ce qui conduisait les enfants à la production effective des écritures numériques⁵⁹.

⁵⁷ D.E.A. "situations didactiques et logiciels d'enseignement" J.Briand Bordeaux 1985.

⁵⁸ Voir à ce sujet l'étude de RATSIMBA-RAJOHN "processus didactique et construction d'un didacticiel" 1989. Dans cette étude, l'auteur reprend les travaux écrits des enfants obtenus lors des expérimentations liées à notre D.E.A. et étudie la façon dont les enfants ont progressé dans la réalisation des productions écrites. (Voir aussi en annexe).

⁵⁹ D'autres travaux avaient déjà prouvé cela (GELMAN déjà cité). Lorsque les enfants veulent signifier, par écrit, un nombre, ils construisent souvent une collection témoin.

2.3.2. A PROPOS DE LA GENESE DES PROBABILITES :

En 1654, avec la correspondance entre PASCAL et FERMAT, une nouvelle "géométrie du hasard" va se substituer à la notion de hasard⁶⁰ abordée traditionnellement par les juristes, les commerçants et les banquiers.

Cette correspondance, ou, du moins des extraits, est souvent évoquée dans les ouvrages d'histoire des mathématiques.

Les travaux de PASCAL sont aussi évoqués dans des manuels de mathématiques des terminales A1 et B⁶¹.

Prenons deux exemples :

a) Le premier problème du CHEVALIER DE MERE⁶² : ce jeu consiste à jeter 3 dés. On gagne si le total des points obtenus sur les 3 dés est 11 ou 12.

"Vers 1650, Le CHEVALIER DE MERE, demande à son ami Blaise PASCAL pourquoi le 11 apparaît plus souvent que le 12 alors que l'on a, d'après lui 6 façons d'obtenir 11 et 6 façons d'obtenir 12."⁶³

11=	1+5+5	12=	4+4+4
	2+4+5		4+5+3
	3+4+4		4+6+2
	3+3+5		5+6+1
	3+6+2		5+5+2
	4+1+6		3+3+6

On trouve dans DIMATHEME TA2/A3 DIDIER 1984 un exercice, page 124 qui propose aux élèves de réfléchir sur "l'erreur" commise par le CHEVALIER DE MERE (le manuel présente la figure ci-dessus).

A la suite de l'énoncé, la question est : "PASCAL trouva une solution... et vous?"

L'erreur porte sur le recensement des cas possibles. En effet, il y a par exemple, plusieurs façons d'obtenir "l'objet" 1 5 5. Dans ce problème, le dénombrement de l'ensemble des événements possibles nécessite la résolution de deux problèmes à forte dépendance : reconnaître ce qu'est un élément de l'ensemble des possibles, puis dénombrer cet ensemble.

⁶⁰ En 1654, PASCAL adresse à l'Académie parisienne de science l'ouvrage "Géométrie du hasard, joignant rigueur des démonstrations de la science à l'incertitude du hasard et conciliant ces choses en apparence contraires". (cf. Mathématiques au fil des âges Dhombres-Gauthier-Vilars).

⁶¹ Dans ces sections, une approche historique de certaines notions est conseillée.

⁶² Ami de PASCAL, traditionnellement présenté comme "homme du monde" (cf. POISSON), ou "homme du monde" ou "courtisan". En fait, il y a plusieurs problèmes posés par le Chevalier de Méré à PASCAL.

⁶³ Rédaction "contemporaine" extraite de DIMATHEME TA2/A3 DIDIER 1984 , page 124 .

Le Chevalier de Méré échoue dans la détermination de l'objet de l'ensemble, confondant élément et classe d'événements possibles.⁶⁴

REMARQUES :

-Les manuels scolaires qui évoquent cette "erreur" du Chevalier de Méré oublient d'écrire :

- que celui-ci avait constaté un événement dans une situation (11 qui apparaît plus souvent que le 12).

- qu'il avait résisté à l'idée que le hasard ne pouvait se mesurer, qu'il avait voulu mathématiser la situation afin d'obtenir une explication du résultat.

Ce qui n'était déjà pas si mal...Mais il se heurtait à la question de la conception des objets liée leur dénombrement. Au lieu d'étudier cela, les manuels scolaires présentent le, le Chevalier comme "un personnage courtisan et frivole".

b) Autre problème du Chevalier de Méré qui fut à l'origine de la correspondance entre FERMAT et PASCAL : le problème de la règle des partis : (ce problème constitue la base de l'espérance mathématique).

Le problème est le suivant : dans un jeu de hasard en n parties, un joueur est déclaré vainqueur lorsqu'il a remporté p parties ($p < n$). Chaque joueur met la même mise initiale. Supposons que le jeu soit interrompu avant la victoire de l'un des joueurs, après le i° coup. Le joueur A a gagné a fois et le joueur B a gagné b fois ($a + b = i$).

Il faut faire le "parti", c'est à dire le partage de l'argent misé d'une façon qui paraisse la plus juste possible. Pour dire autrement, quel est le partage équitable?

PASCAL et FERMAT entretenirent une correspondance suivie sur ce problème au cours de l'année 1654.

Il faut consulter "MATHEMATIQUES AU FIL DES AGES " pour trouver un extrait de la correspondance PASCAL-FERMAT qui montre l'erreur de PASCAL et le cheminement du raisonnement de celui-ci avec FERMAT.

Voici un extrait de l'ouvrage, légèrement remanié pour des besoins de compréhension :

Dans la lettre de PASCAL à FERMAT du 29 Juillet 1654, PASCAL illustre le problème du CHEVALIER DE MERE :

⁶⁴ Nous proposons la résolution suivante dans ce cas précis:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Les événements élémentaires qui permettent le nombre 11 lors du lancé du troisième dé sont dénombrés en gras dans le tableau. Nous obtenons donc 27 cas possibles.

Les événements élémentaires qui permettent le nombre 12 lors du lancé du troisième dé sont dénombrés en gras dans ce tableau. Nous obtenons donc 25 cas possibles.

Le nombre des événements possibles étant défini, le total 11 apparaît donc bien plus souvent.

"Donc pour voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs, il faut imaginer qu'ils jouent avec un dé à deux faces (puis qu'ils ne sont que deux joueurs), comme à croix et pile, et qu'ils jettent quatre de ces dés (parce qu'ils jouent en quatre parties) ; et maintenant il faut voir combien ces dés peuvent avoir d'assiettes différentes. Cela est aisé à supputer : ils peuvent en avoir seize, qui est le second degré de quatre, c'est à dire le carré. Car figurons-nous qu'une des faces est marquée a, favorable au premier joueur, et l'autre b, favorable au second ; donc ces quatre dés peuvent s'asseoir sur une de ces seize assiettes : aaaa ... bbbb.

Et parce qu'il manque deux parties au premier joueur, toutes les faces qui ont deux a le font gagner : donc il y en a 11 pour lui ; et parce qu'il manque trois parties au second, toutes les faces où il y a trois b peuvent le faire gagner : donc il y en a 5. Donc il faut qu'ils partagent la somme comme 11 à 5."

Puis PASCAL continue cette analyse avec trois joueurs. Voici son raisonnement avec l'hypothèse suivante : il manque pour gagner une partie au joueur a, deux au joueur b, deux au joueur c. Trois parties au maximum décideront du jeu. Nous avons donc le schéma :

aaa 1	aab 1	aacl	aba 1	abb 1 2
abc 1	aca 1	acb 1	acc 1 3	baa 1
bab 1 2	bac 1	bba 2 1	bbb 2	bbe 2
bca 1	bcb 2	bcc 3	caa 1	cab 1
cac 1 3	cba 1	cbh 2	cbc 3	cca 3 1
ccb 3	ccc3			

(Le numéro est celui du joueur gagnant.)

PASCAL dit qu'il va utiliser la méthode de FERMAT et compte 19 chances de gagner pour a , 7 pour b, 7 pour c. Il sait que cela donne un partage faux.

PASCAL en déduit qu'il ne faut pas envisager toutes les combinaisons de trois parties possibles, car la "condition feinte" que l'on poursuive jusqu'au bout, même si l'un des joueurs a déjà gagné, implique un résultat faux.

Or PASCAL applique la méthode de FERMAT de manière discutable. En effet, dans le cas abb (noté abb 1 2), le joueur b ne gagne pas, puisque a a déjà gagné dès la première partie. Il ne faut donc pas comptabiliser cette occurrence de 2. Il faut donc tenir compte de l'ordre d'apparition de l'événement. Pour cela, il ne faut comptabiliser que le nombre de victoires potentielles (joueurs 1, 2 ou 3) que si le numéro du joueur apparaît en premier dans le bilan du tableau ci-dessus.

En conclusion cela donne 17 chances pour a, 5 pour b et 5 pour c.

Dans sa lettre du 25 septembre 1654, FERMAT fit apparaître à PASCAL l'erreur commise dans l'application de sa méthode. PASCAL se rendit alors à ses raisons et reconnut que "la vérité est la même à Toulouse qu'à Paris".

LE DOUTE DE D'ALEMBERT ET LE TRIANGLE DE PASCAL :

Deux autres exemples sont presque aussi édifiants. Il s'agit du "doute de D'ALEMBERT" et du "triangle de PASCAL".

-D'ALEMBERT⁶⁵ réfléchit longuement sur la probabilité de faire deux "face" consécutifs au jeu de pile ou face. Ce problème apparaît trivial dans nos classes.

PASCAL travaille sur le triangle comme moyen d'obtenir les coefficients du développement du binôme $(a+b)^n$. En fait ce triangle était connu⁶⁶ (chez les chinois) justement comme aide au développement du binôme.

Toutefois, PASCAL dégagne des propriétés nouvelles et des applications à la théorie des combinaisons. Mais ceci ne se fait pas immédiatement comme le laissent à penser certains ouvrages :

Le livre de COLETTE⁶⁷ sur l'histoire des mathématiques dit de ce triangle que les propositions de PASCAL rattachent étroitement le triangle aux combinaisons, mais le discours de PASCAL lui-même est plus proche de l'action, de la situation :

"Estans proposez deux joueurs, à chacun desquels il manque un certain nombre de parties pour achever, trouver par le triangle Arithmétique le party qu'il faut faire (s'ils veulent se séparer sans jouer), eu égard aux parties qui manquent à chacun. Soit prise dans le triangle la base dans laquelle il y a autant de cellules qu'il manque de parties aux deux ensemble : en suite, soient prises dans cette base autant de cellules continues à commencer par la première, qu'il manque de parties au premier joueur, et qu'on prenne la somme de leurs nombres. Donc il reste autant de cellules qu'il manque de parties à l'autre. Qu'on prenne encore la somme de leurs nombres. Ces sommes sont l'une à l'autre comme les avantages des joueurs réciproquement".

			1			
			1	1		
		1	2	1		
	1	3	3	1		
	1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1	

Prenons un exemple pour mieux comprendre : si deux joueurs a et b sont dans la partie tels que a peut gagner en 2 coups et b en un seul coup. Nous nous plaçons dans la ligne qui contient 2+1 cellules. Prenons 2 cellules (a en 2 coups) et faisons la somme 1+2 soit 3. On attribue la troisième cellule à l'autre joueur. On a 1. Le partage doit se faire comme 3 est à 1. A l'aide de ce même triangle, PASCAL décrit très en détails⁶⁸ la méthode de dénombrement du développement du binôme. Il décrit très précisément sa méthode de rangement des coefficients. Pour cela, il lui faut plusieurs pages.

L'HISTOIRE RACONTEE AUX LYCEENS LAISSE DE COTE L'HISTOIRE DE LA CONCEPTION DE L'ANALYSE COMBINATOIRE :

⁶⁵ Article de l'Encyclopédie méthodique 1785.

⁶⁶ Voir, à ce sujet "Histoire des mathématiques" P. 31 J.P.COLETTE Tome 2 Editions VUIBERT 1979.

⁶⁷ Tome 2 page 31

⁶⁸ PASCAL "Oeuvres complètes" ed. La pléiade. NRF 1954 Gallimard, repris dans maths collection Racine VUIBERT 1983.

Lorsque les ouvrages scolaires disent que FERMAT a résolu ce problème par les combinaisons, ils tendent à faire croire aux élèves que celui-ci a appliqué une formule. Ce n'est pas du tout le cas. La démarche de FERMAT est une étude exhaustive de cas possibles qui pourrait être considérée par un professeur du secondaire comme méthode un peu primitive.

Dans les ouvrages scolaires⁶⁹, il n'y a pas trace de l'évocation de l'existence de l'erreur commise par PASCAL.

Pourquoi les manuels de mathématiques ne mettent-ils pas en évidence la difficulté que de tels personnages ont eu à traiter des problèmes d'énumération?

Si PASCAL et FERMAT ont correspondu 6 fois sur ce thème, c'est bien qu'il y avait un problème de méthodologie, de conception.

PASCAL ne comprend pas la méthode d'énumération de FERMAT et il faut une ré explication de ce dernier pour que PASCAL comprenne.

Ce débat n'apparaît pas dans les manuels qui traitent de cette correspondance. Seul, le CHEVALIER DE MERE (courtisan, fréquentant les milieux mondains, non mathématicien...) est cité dans les ouvrages scolaires comme ayant commis une erreur grossière de raisonnement.

Les programmes de terminale ont choisi de présenter la combinatoire comme opérations sur des ensembles. Les manuels font un rappel de la théorie des ensembles et réalisent de dénombrements types (arrangements, permutations, combinaisons).

Ces ouvrages traitent alors l'aspect historique de la combinatoire en adaptant l'histoire à la construction scolaire. Les hésitations de PASCAL, les erreurs, le cheminement qui va permettre l'énumération de tous les cas possibles ne sont pas repris.

2.3.3. ENUMERER : DES ERREURS RECENTES.

2.3.3.1. ERREUR 1 :

Collection U flash A.COLIN Thermodynamique générale 1 (THELLIER Paris VI, BACHELLERIE BEN-AIM, PARIS IV,).

Page 85, dans le chapitre "considérations statistiques" l'ouvrage propose l'exercice suivant :

On jette simultanément 3 dés :

1°) Trouver la probabilité d'obtenir : a) un seul as, b) au moins un as, c) deux as.

2°) Faire la somme des différentes probabilités et conclure.

La solution proposée page 86 est la suivante :

1°) a) La probabilité d'obtenir un as pour un dé est égale à $1/6$, celle de ne pas obtenir d'as est donc $5/6$; pour 3 dés, la probabilité d'obtenir un as est donc égale à

$$P1=1/6 \times 5/6 \times 5/6 = 25/216$$

Et pour c) : La probabilité d'obtenir 2 as est égale à

$$P3=1/6 \times 1/6 \times 5/6 = 5/216$$

ANALYSE :

Il ne s'agit donc pas d'une erreur fortuite puisque la même méthode est appliquée deux fois.

⁶⁹ Bordas TA1/B Collection Fractale 1992- Vuibert TA1/B collection Racine 1983 - Nathan TA1/B collection Transmath 1989- Hachette TA1 collection Déclic 1992 - Didier TA2/A3 collection Dimatheme 1983.

La démonstration évite toute indication sur la constitution de l'ensemble des événements possibles. La construction de cet ensemble semble aller de soi. En fait, l'auteur raisonne sur un ensemble ordonné des trois dés et attribue un rôle différent au premier dé, ce qui lui fait commettre l'erreur.

2.3.3.2. ERREUR 2 :

Repéré par Didier NORDON⁷⁰ dans sa chronique "Bloc-note" de la revue "POUR LA SCIENCE" N° 182 Décembre 1992: reprenant un article du MONDE du 25 septembre 1992 : Citons Didier NORDON :

... "Les auteurs (Olivier DUHAMEL et Gérard GRUNBERG) ont procédé comme des écoliers affolés devant un problème...: A propos du profil des français...nos auteurs retiennent 5 critères : doté/démuni, centre/extrême, Progressiste/répressif, urbain/rural, social-chrétien/national-laïque et en déduisent qu'il y a dix FRANCE, pas une de moins !... Ce sont des politologues éminents : admettons la pertinence de ces couples d'oppositions. Constatons également que 5 fois 2 font 10. Mais ensuite ? D'où viennent les 10 FRANCE ? Du produit de 5 par 2 bien sûr, or ce produit n'a aucun sens...Le débutant en combinatoire sait que le nombre de classes nécessaires pour ranger des individus triés suivant 5 couples de critères est égal à 2^5 ".

ANALYSE : cette erreur est fréquente chez les élèves. La confusion entre l'utilisation de l'exponentiation et celle de la multiplication est la conséquence d'une erreur de structuration de l'ensemble (ici de l'ensemble des profils possibles). Nous reviendrons sur ce type de comportement.

⁷⁰ Professeur de mathématiques Université de BORDEAUX I.

2.4. ENUMERATION ET PRATIQUES PROFESSIONNELLES :

L'action de dénombrer une collection se retrouve dans des pratiques professionnelles diverses. Par exemple les biologistes qui veulent compter le nombre de globules afin de déterminer une formule sanguine cellules, les naturalistes qui se servent de la structure en spirale de l'épi de maïs pour compter des épis afin d'étudier les lois de l'hybridation, les géologues qui utilisent des tamis en chaîne pour dénombrer des catégories de sables (non usés, émoussés luisants, ronds mat)⁷¹.

Dans toutes ces pratiques, il ne s'agit pas de dénombrer à une unité près, mais d'évaluer, d'une façon acceptable en regard des travaux visés la quantité numérique. On est alors plus proches de la situation de mesurage dans laquelle le produit de la mesure est un couple de nombres représentant la mesure effective et l'erreur maximum possible.

Ainsi, la technique de MALASSEZ pour le comptage des globules rouges et blancs consiste en l'examen d'un frottis de sang au travers d'une grille microscopique. Il suffit de prendre plusieurs carrés de cette grille et de dénombrer les globules rouges et blancs dans ces carrés choisis, puis d'en déduire la composition sanguine. La notion d'échantillon représentatif a été vérifiée expérimentalement. Un savoir faire codé permet aux préparateurs de réaliser ce dénombrement.

Remarque : des techniques plus récentes ont remplacé cette technique. Elles délèguent complètement à des dispositifs automatisés le soin d'effectuer le dénombrement. Ces dispositifs ont nécessité la mise en place de procédés d'exploration d'une image, procédés de balayage du plan, couplés à un calcul de formulation à partir d'un échantillon.

Dans le cas de la technique de Malassez, on est en présence d'un procédé qui permet de résoudre deux problèmes : le premier est le choix de l'échantillon : un carré de la grille sur un frottis sanguin est déclaré constituer un volume sanguin assez constant, le deuxième est que l'exploration du carré afin de dénombrer est une activité réalisable pour le professionnel.

Ces exemples nous montrent que pour compter des objets et dès lors que l'on est dans des situations limites (par rapport aux situations scolaires), il faut développer des techniques qui sont des techniques de mesurage et qui constituent un domaine de connaissances identique à celui de la métrologie dans les activités de mesurage.

⁷¹ Vincent Pierre Sciences naturelles TD P.278 VUIBERT Paris.

2.5. CONCLUSION : PLACE DE L'ÉNUMÉRATION DANS LE SAVOIR SAVANT ET DANS LES ACTIVITES D'ENSEIGNEMENT.

Il n'existe pas, dans les publications à caractère mathématique, pédagogique, une définition de l'énumération qui ne s'appuie sur les entiers naturels. Et pourtant, il existe des savoirs de référence. Nous avons vu que les mathématiciens ont commencé à vouloir mieux identifier la "combinatoire énumérative" sans doute parce que des secteurs nouveaux, et en particulier l'informatique ont redonné une valeur à des connaissances jusque là un peu délaissées.

Nous avons remarqué que les procédés énoncés dans la combinatoire énumérative consistent souvent à traiter des problèmes de dénombrement en remplaçant l'ensemble difficile à dénombrer par un ensemble à dénombrement facile à réaliser à l'aide des connaissances mathématiques reconnues. Ainsi, l'énumération de l'ensemble est réalisée par l'énumération d'un autre ensemble pour lequel celle-ci a pu être algorithmisée d'une façon ou d'une autre.

Les travaux concernant la construction du nombre et des opérations arithmétiques avec les enfants de l'école élémentaire pointent certaines difficultés relevant de l'énumération sans pour autant identifier l'objet. Partant du principe qu'il s'agit alors d'une compétence personnelle de chaque enfant, les auteurs s'efforcent de donner des conseils (en particulier, dans les activités pré-numériques le marquage). Les pratiques énumératives se confondent avec l'apprentissage du comptage.

Dans l'enseignement secondaire, la combinatoire s'annonce comme sujet nouveau alors que les activités qu'elle prétend mettre à jour ont déjà beaucoup servi dans de nombreux domaines.

La combinatoire exposée telle quelle s'efforce de donner des moyens de résoudre des familles de problèmes sans que les situations aient été problématisées. Certains ouvrages (BORDAS TA1/B COLLECTION FRACTALE 1992) ont même recours, (par désespoir ?) à une liste de mots inducteurs permettant de savoir "*quelle méthode utiliser ?*".

La combinatoire ne prend pas en charge l'énumération. La construction savante du savoir fait précéder toute la combinatoire par la construction du nombre et de formules. Les commentaires de l'Encyclopaedia Universalis ("*Tout est question d'ingéniosité et de patience*"), sont, à cet égard, édifiants. Nous avons vu que des ouvrages scolaires (TRANS-MATHS TCE) pointent l'activité d'énumération, sans dire le mot, mais en donnant des conseils, en suggérant une "*mise au point de connaissances sur les ensembles afin de pouvoir mathématiser*".

Les professeurs s'interrogent ANTIBI(1990) sur les tours de passe-passe effectués dans les démonstrations lorsqu'il s'agit d'analyse combinatoire. Sans reconnaître un champ de connaissances spécifiques, l'auteur soupçonne un ensemble d'explications non données, de précautions de démonstration non prises, de raccourcis saisissants.

La question se posera alors : Est-ce trop tard, à ce moment de la scolarité, pour faire un enseignement de l'énumération? Est-ce que cela en vaut la peine ?

Par ailleurs, en reprenant la correspondance entre les mathématiciens PASCAL et FERMAT, on est surpris de constater l'ampleur des problèmes mathématiques qui se posent lorsqu'il s'agit de structurer des ensembles à dénombrer.

Or les ouvrages scolaires de mathématiques ne relèvent pas ce fait et transforment cette problématique en un champ d'application de formules de la combinatoire. L'objet déjà

difficile à identifier a été ignoré par les auteurs des manuels sans doute parce qu'ils n'auraient pas trop su quoi en faire !

EN CONCLUSION :

L'étude du côté du savoir savant, du côté de l'enseignement ou du côté de la didactique des mathématiques a montré que :

- L'énumération n'est pas un sujet mathématique.
- Dans le savoir savant il n'existe pas de notion qui correspond exactement à l'énumération. L'étude bibliographique a montré que ce qui s'en rapproche est construit à partir d'autres objets, en particulier des entiers naturels, du dénombrement, de la combinatoire.
- L'énumération intervient dans le savoir savant comme connaissance incluse et non comme savoir.
- Le savoir savant travaille sur les types d'ordre et sur des façons de remplacer des dénombrements d'ensembles finis par des dénombrements d'ensembles finis équipotents en mettant en évidence des bijections.
- Dans les manuels, les programmes, rien ne rappelle l'énumération. Comme l'espace, l'énumération n'est pas enseignée. A la différence de l'espace, les difficultés que l'absence de connaissance personnelle provoque, ne sont pas identifiées comme provenant de l'énumération. Elle n'est donc pas identifiée au niveau de l'enseignement. Elle est du côté de la responsabilité de l'élève.
- Le traitement de l'énumération n'est pas fait dans l'enseignement. Il est renvoyé soit à des problèmes de maîtrise de l'espace, soit au développement de l'enfant, à son intelligence privée.
- Les psychologues et les didacticiens n'ont pas, non plus identifié cet objet. Ils font souvent l'amalgame avec l'apprentissage du comptage.⁷²
- Les professions qui ont besoin d'explorer des collections à des fins de comptage se donnent des moyens techniques de réaliser ces dénombrements d'une façon économique.
- Les moyens automatiques de comparaison d'ensembles que l'on rencontre dans l'informatique ont nécessité le développement d'algorithmes, donc d'un savoir savant nouveau jusque là délaissé par les mathématiciens parce que non directement utiles.

Ainsi, une fois ce constat établi, nous allons montrer comment l'énumération intervient et quelles sont les conséquences des difficultés à réaliser une énumération sur les activités de comptage en particulier. C'est l'objet du chapitre suivant dans lequel nous conduisons un certain nombre d'observations.

⁷² Les travaux de J.Briand (1985) et B.Villegas (1987) ne sont pas étudiés dans cette partie. Ils seront repris ultérieurement.

**3. TROISIEME PARTIE DIDACTIQUE DE
L'ENUMERATION. ETUDE DES CONCEPTIONS DES ELEVES.**

Notre première conjecture (voir page 40) est ainsi formulée :

"Certaines difficultés dans des activités de dénombrement peuvent être imputées à la difficulté de passer d'un ensemble fini d'éléments à la détermination d'un ordre total sur cet ensemble. La capacité à faire ce passage peut être identifiée comme une connaissance appelée énumération.

Les difficultés dans l'énumération peuvent être repérées elles-mêmes comme des absences de connaissances. Il s'agit donc d'un savoir-faire nécessaire."

Nous faisons donc l'hypothèse que dans des activités dont le but explicite est de produire le cardinal d'un ensemble fini, les élèves manifestent au moins une conception de l'énumération et que des difficultés dans le comptage relèvent de cette conception et des difficultés à la mettre en œuvre.

Pour vérifier cette hypothèse, nous avons été amenés à conduire des observations à plusieurs niveaux de la scolarité selon un protocole dont nous avons expliqué les contraintes obligées page 55.

- l'école élémentaire, en cours élémentaire puis en cours préparatoire.

Les observations en cours élémentaire sont construites à partir d'une situation a-didactique que nous avons construite et que nous mettons en parallèle avec un contrôle de connaissances effectué dans le cadre de l'enseignement dans ces classes.

Les observations en cours préparatoire sont faites à partir d'exercices de ce niveau, mais la réalisation effective de l'exercice est faite devant l'observateur.

- Au lycée, nous avons étudié 200 copies de Baccalauréat D et B.

Nous avons étudié, dans ces copies, les modèles de comportements des étudiants devant des exercices d'analyse combinatoire.

- A différents niveaux de la scolarité allant de l'école maternelle à la formation d'enseignants, nous avons étudié des activités mathématiques dans lesquelles l'énumération constitue la connaissance nécessaire à la réussite de la tâche. Nous ne prétendons pas avoir fait une étude exhaustive de tous les domaines dans lesquels l'énumération est présente.

Nous espérons que la variété des situations que nous présentons contribuera à montrer l'importance de l'énumération dans les pratiques mathématiques.

3.1. OBSERVER UNE "CONCEPTION".

Le terme de "conception" est utilisé en didactique des mathématiques selon au moins deux acceptations. Dans sa thèse (chap. 7), M.J.PERRIN (1992) rappelle ces deux usages qui sont :

Un point de vue lié aux objets mathématiques étudiés : par exemple, "*M. ARTIGUE et J. ROBINET (1982) examinent différentes conceptions du cercle associées à des définitions différentes. Ces définitions sont équivalentes mais correspondent à des points de vue différents*". On pourrait dire : il y a plusieurs façons de concevoir (en termes de définition dans le savoir savant) un cercle. Cet aspect est utilisé dans l'analyse a priori d'une ingénierie didactique. Par exemple, HARRISSON RATSIMBA RAJOHN (1982) a mis en évidence deux conceptions différentes de rationnels⁷³. Dans ce cas, le didacticien se préoccupe de faire le point sur plusieurs approches (d'un même objet mathématique) aboutissant à des définitions différentes de cet objet.

Un point de vue qui se situe du côté des élèves : et qui "s'intéresse aux points de vue justes ou faux qu'un élève est susceptible d'avoir relativement à un problème donné dans une situation donnée. Ce point de vue est utilisé dans l'analyse des erreurs des élèves. Ces conceptions erronées des élèves ont, en général une parenté avec des conceptions justes mais dans un autre domaine de validité par exemple".

M.J.PERRIN écrit ensuite : "les deux aspects dont nous avons parlé sont étroitement reliés parce que les conceptions que les élèves mettent en œuvre dépendent des problèmes qu'ils traitent et des situations où ils sont placés.". L'auteur note ensuite que "chez les élèves peuvent coexister des conceptions erronées, voire contradictoires sans que l'élève soit conscient de la contradiction, ou en tous cas, en tienne compte."

Cette analyse n'indique pas (ce n'était pas son but) les moyens méthodologiques qui permettraient de mettre en évidence telle ou telle conception venant du sujet par rapport à un concept mathématique particulier. Par contre, HARRISSON RATSIMBA RAJOHN⁷⁴ (1982) propose une méthodologie de reconnaissance de "représentations" des rationnels.

L'auteur écrit en particulier : "Pour pouvoir répondre (à l'existence d'une représentation NDLR) il nous faut apporter des réponses aux deux questions intermédiaires suivantes :

1- Si on pose à des élèves un questionnaire dans lequel les questions ne peuvent être résolues que par l'une ou l'autre des deux stratégies, fournira-t-il des modalités de réponses susceptibles d'être engendrées par telle ou telle stratégie?§

2- Les modalités de réponses qui relèvent a priori d'une stratégie vont elles être produites par le même élève? Cette seconde réponse est nécessaire : en effet, si la plupart des élèves produisent indifféremment et aléatoirement des modalités qui relèvent de l'une ou l'autre des deux stratégies, il est certain que les deux stratégies n'ont pas de représentation qui leur soient respectivement spécifiques."

3.1.1. METHODE DE MISE EN EVIDENCE D'UNE OU DE PLUSIEURS CONCEPTION (S) (DE L'ÉNUMÉRATION).

Nous voulons montrer que, plus que des connaissances diffuses, le contrôle du comptage relève d'une conception.

⁷³ Il s'agit du modèle dit de commensuration et du modèle de fractionnement. A l'époque, l'auteur parle de « représentations ».

⁷⁴ RDM vol. 3-1 p77.

3.1.2. DEFINIR UNE METHODE POUR METRE EN EVIDENCE DES CONCEPTIONS :

(Voir tableaux qui suivent).

La théorie des situations permet de faire correspondre à un savoir ou à une connaissance (notée "K" dans les tableaux) une famille (F) de questions (situations) où cette connaissance devrait se manifester par des comportements (C) à la charge effective du sujet et une famille F' où elle n'apparaîtrait pas.

Cette connaissance est avérée si l'observation d'une population d'élèves confrontée à ces deux familles ($F \cup F'$) montre au moins un halo ou mieux un pavé $P(C, F)$ caractéristique de F et C. Les élèves "possédant" la connaissance ou le savoir déterminé ont sur F ou F' des réponses similaires ou caractéristiques.

Il y a plusieurs conceptions d'une connaissance lorsqu'il est possible de scinder la connaissance avérée en pavés disjoints (voir tableau 2) par l'adjonction (ou le choix) d'une famille (SD) de situations discriminantes (en rapport théorique avec la connaissance en question). En général, les comportements associés à SD concernent des réussites ou des échecs.

Notons P et R deux conceptions attendues. (C'est l'analyse à priori qui permet d'étiqueter ces conceptions.)

3.1.3. POUR NOTRE ETUDE :

L'énumération est une connaissance qui permet de faire fonctionner la construction du nombre. Nous sommes donc fondés à nous interroger sur la façon dont les élèves traitent cette connaissance.

Prenons un exemple : une première conception (C1) de l'énumération d'objets dessinés est la constitution d'une partition, une deuxième (C2) est le chaînage. Supposons que nous puissions bâtir une situation sur laquelle le changement d'une variable de commande favorise (S1) ou, au contraire s'oppose (S2) au partitionnement⁷⁵. Appelons ST1 une stratégie de partitions et ST2 une stratégie de chaînage. La situation S1 favorise la stratégie ST1. La situation S2 favorise la stratégie ST2. Nous reconnaissons que ST1 (resp. ST2) est le produit d'une conception (C1) (resp. C2) si les élèves réussissent mieux S1 (resp. S2) et échouent davantage en S2 (resp. S1).

Donc si nous parvenons à mettre en évidence chez les élèves plusieurs conceptions de l'énumération, cela voudra dire que nous aurons des variables qui jouent significativement sur l'énumération "connaissance". L'énumération sera d'autant mieux identifiée en tant que savoir que nous aurons mis en évidence de telles variables.

Nous dirons que les enfants ont une conception de l'énumération lorsqu'ils mettent en œuvre une technique visant le "passage en revue sans omission" sur un ensemble fini, indépendamment de la demande scolaire, y compris dans une situation qui ne s'y prête pas.

Lorsque nous disons indépendamment de la demande scolaire, nous voulons dire que la mise en œuvre d'une technique d'énumération se fera sans demande de l'institution, mais nous n'excluons pas l'utilisation appropriée ou non de techniques précédemment enseignées dans un autre contexte.

⁷⁵ Le fait de voir toute une collection structurée en paquets favorise a priori le partitionnement. A l'inverse, le fait de ne pas pouvoir voir toute la collection rend à a priori plus difficile la mise en œuvre du partitionnement.

	élève	F					F'		
		Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Qn.
Connaissance avérée	E1	?	en	?	?	en	?	?	?
	E2	?	?	?	?	?	?	?	?
	E3	en	en	en	en	en	en	?	?
	E4	en	en	en	en	en	?	en	?
	E5	en	en	en	en	en	?	?	?
	E6	en	en	en	en	en	?	en?	?
	E7	en	en	en	en	en	en	?	en
	E8	?	?	?	?	?	?	?	
	E9	?	?	en	?	en	?	?	
								

	élève	F					F'			SD			
		Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Qn.	Q'1....	Q'2...	...	Q'n
	E1	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
	E2	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
Conception 1	E3	enP1	enP1	enP1	enP1	enP1	?	?	?	enP0	enP0	enP0	enP0
	E4	enP1	enP1	enP1	enP1	enP1	?	?	?	enP0	enP0	enP0	enP0
Conception 2	E5	enR0	enR0	enR0	enR0	enR0	?	?	?	enR1	enR1	enR1	enR1
	E6	enR0	enR0	enR0	enR0	enR0	?	?	?	enR1	enR1	enR1	enR1
	E7	enR0	enR0	enR0	enR0	enR0	?	?	?	enR1	enR1	enR1	enR1
	E8	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	
	E9	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	
												

3.2. TABLEAU DES OBSERVATIONS:

TITRE	TYPE D'ÉTUDE	PRECISIONS
Observation auprès de professeurs d'école.	questionnaire	30 étudiants en IUFM. (observation déjà analysée page 64).
C.A.S. en CE2 Puis étude à l'aide d'une situation a-didactique.	Observation en classe de CE2	Observation de 20 travaux.
Activités de comptage de collections en cours préparatoire.	Une première famille d'observations suivie d'une seconde.	Analyse statistique portant sur 40 travaux en cours préparatoire.
Premières écritures du cardinal d'une collection.(D.E.A.)	Expérimentation/observation en grande section de maternelle.	Reprise du travail effectué sur le dénombrement lors du D.E.A.
Combinatoire en terminale B: les pronostics.	Étude de copies de l'épreuve de mathématiques du Bac B JUIN 92 Bordeaux.	90 copies étudiées.
Combinatoire en terminale D : les chemins sur un quadrillage.	Étude de copies de l'épreuve de mathématiques du Bac D JUIN 92 Bordeaux.	100 copies étudiées
Les vêtements de la poupée	Observation en petite et moyenne section	
le castelet	Observation en moyenne section	
les cubes	Observation en grande section.	
les poupées	Observation en moyenne section.	
La sorcière	Observation en grande section.	
Élaboration de listes en maternelle. (J.PERES)	Analyse à partir d'une recherche.	
Les rectangles	entretiens individuels.	
Le problème des intervalles	Deux entretiens individuels.	
Comparaison de listes.	Étude à priori.	
Travail sur les écritures	Étude à priori.	
Jeu de cartes.	Étude à priori.	
Produit de polynômes.	Étude à priori.	

3.3. OBSERVATIONS EN CE2 :

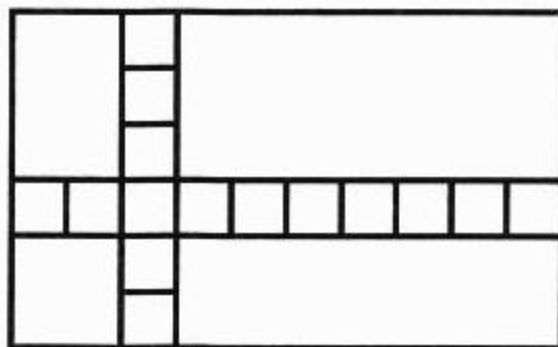
Notre étude se fait en deux temps : un constat à partir d'exercices pratiqués par les instituteurs dans le cadre des C.A.S. (contrôles d'acquisitions scolaires) de l'école Jules Michelet de Talence.

3.3.1. EXERCICE EXTRAIT DES "C.A.S."

C.A.S. 92 EN CE2 ECOLE JULES MICHELET : DEUX EXERCICES.

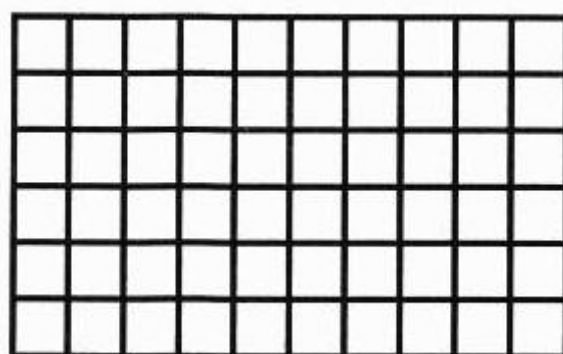
Chaque année, les enseignants de l'École Michelet proposent aux enfants du cours élémentaire deuxième année l'exercice suivant :

Exercice 1: Pour fabriquer le dessus d'une table, on a utilisé des carreaux. Voici le dessus de la table. Quelques cases seulement ont été dessinées. Combien a-t-on utilisé de carreaux pour faire le dessus de cette table ?



Parallèlement à cet exercice, les enfants ont l'habitude de résoudre les exercices suivants :

Exercice 2 : Calculer le nombre de cases de ce tableau :



Chaque année, les enseignants constatent une différence significative de résultats entre le premier exercice et les deux autres. Ils n'en sont pas surpris et l'on imagine bien que les deux exercices sont de difficultés très différentes. Là n'est pas le problème. Il s'agit de préciser quelle est l'origine des difficultés. L'explication habituellement donnée est que le premier exercice est facile à comprendre alors que le deuxième doit être "imaginé". Nous allons étudier en quoi il convient d'être plus précis que cette première affirmation.

Avant cela, faisons le rapprochement entre ce type d'exercice et un constat généralement fait lors de la mise en place de la multiplication :

Les premières activités concernant la construction de la multiplication mettent en scène le problème du contrôle du nombre d'objets d'une collection disposée en tableau, dans une situation de communication. Des séquences amènent les élèves à choisir une solution adaptée, rapide et fiable : c'est l'énumération de "lignes équipotentes" qui est à l'origine de messages de type "a lignes de b".

Des "rites" s'installent très vite et certaines activités ont été mises en place dans certains manuels pour veiller à maintenir le sens.

Voici un extrait de la brochure MULTIPLICATION au CE1 1985 IREM de Bordeaux⁷⁶:

...."indispensable de distinguer le type de dénombrement qui permet d'exprimer et de contrôler le nombre d'éléments d'une collection à l'aide d'un produit de celui (partition) qui permet d'exprimer et de contrôler le nombre par une somme".

D'où un matériel utilisé dans des activités de communication :

Il semble bien que nous ne soyons pas en face d'un problème local, mais plus général.

ANALYSE :

Le premier exercice est posé à l'aide d'un énoncé de problème qui permet la mise en scène. On peut faire plusieurs hypothèses sur la différence de réussite:

HYPOTHESE 1 : LA COMPRÉHENSION DE LA SITUATION, À L'AIDE D'UN ÉNONCÉ EST, EN SOI, FACTEUR DE COMPLEXITÉ.

HYPOTHESE 2 : LA STRUCTURE "TABLEAU" DE LA COLLECTION MONTRÉE OU CONÇUE N'INFLUE PAS SUR LE COMPTAGE DES ÉLÉMENTS DE LA COLLECTION.

Parce qu'il pose un problème de reconstitution mentale de la structure, le deuxième exercice ne peut mobiliser le savoir (énumération d'éléments d'un tableau cartésien) lié à la contingence d'un tableau vu en entier. Les enfants font alors fonctionner d'autres stratégies d'exploration.

ANALYSE DU QUESTIONNAIRE :

Afin de travailler sur un nombre plus important de copies, nous avons ajouté aux élèves de 1992, les résultats de CAS d'élèves passés en 1987 dans des conditions semblables. L'exercice 2 étant le contrôle de l'algorithme de la multiplication sur le tableau 13 x 27.

Nous observons donc les résultats écrits d'élèves de la classe de CE2. Les résultats figurent en annexe de la thèse.

3.3.2. OBSERVATION :

RESULTATS :

⁷⁶ Le premier document à l'usage des maîtres concernant la multiplication avait été rédigé par G.Deramecourt. Dans ce document, des activités utilisant des tableaux partiellement effacés montraient cette même préoccupation.

Dans les deux classes, les contrôles à la même époque montrent que les enfants produisent tous une écriture de type axb lorsqu'on leur présente un tableau.

ANALYSE :

Nous avons interrogé les enfants sur l'idée qu'ils se faisaient du problème. En particulier, nous nous sommes assurés en entretiens individuels, que le mot "table" induisait bien la structure rectangulaire. Nous n'avons pas réalisé ces entretiens sur les enfants de 1987. Pour l'observation de 1992, tous les enfants ont compris le problème sauf CYRIL et MOHAMMED pour lesquels nous ne pouvons conclure. L'hypothèse 1 peut donc être rejetée.

D'autre part, tous ces enfants affichent l'écriture axb lorsqu'on leur présente un tableau. Bien que cela ne soit pas notre intérêt pour cette étude, nous constatons de plus, qu'ils parviennent, pour la majorité d'entre eux à réaliser le produit.

Les résultats (consignés dans le tableau en annexe) montrent que les enfants utilisent trois familles d'exploration de la collection de l'exercice 2 :

P : Calcul à l'aide d'une suite additive de produits : partition constituée de paquets rectangulaires en vue de recréer les conditions scolaires de l'utilisation du produit.

Pc : Reconnaissance du produit cartésien. Utilisation directe de axb.

PN : partition mettant en évidence les paquets de dix.

TRAITEMENT DE LA DEUXIEME HYPOTHESE :

L'exercice 1 et l'exercice 2 présentent deux conditions différentes de l'énumération. Dans le premier, la collection est en ostension, dans le deuxième, la collection est suggérée, il faut recréer mentalement la structure en tableau.

Les modes de comptages sont P, Pc, PN. Ils sont la conséquence d'une exploration caractéristique de chacun d'entre eux.

Servons nous des deux exercices :

	P	Pc	PN	ABS
EX1	16	19	1	3
EX2	3	36	0	0

qu'il vaut mieux regrouper pour comparer les modes de comptage faisant appel à une autre conception que celle du produit cartésien. Nous obtenons :

	Pc	P,PN,ABS
EX1	19	20
EX2	36	3

Le calcul du chi deux donne 17,81 ; ce qui permet de rejeter cette hypothèse au seuil de .005.

CONCLUSION :

**LES CONDITIONS DE L'ENUMERATION INFLUENT SUR LE COMPTAGE :
DANS UNE SITUATION DE DENOMBREMENT D'OBJETS PRESENTES SOUS
FORME DE TABLEAU, SELON QUE LA COLLECTION EST TOTALEMENT
MONTREE AVEC UNE STRUCTURE OU QUE CETTE STRUCTURE DOIT ETRE
RECONSTRUITE, LE COMPTAGE NE S'EFFECTUE PLUS OU S'EFFECTUE
DIFFEREMMENT.**

Ainsi, il nous a été possible de préciser l'origine de la difficulté qui est plus à mettre à l'actif de la difficulté à énumérer qu'à "imaginer" le problème.

Puisque les enfants ont bien compris le problème, on peut s'étonner qu'ils ne décident pas par exemple de dessiner sur une feuille de brouillon la table avec les carreaux effectifs pour se ramener à un problème classique.

L'énumération employée lors d'un tableau $A \times B$ est une énumération algorithmisée par l'institution. Elle nourrit directement les séquences sur le produit de deux nombres. Mais les enfants ne disposent même pas d'un moyen d'associer une situation de dénombrement difficile à traiter telle quelle et une situation de dénombrement algorithmisée. C'est pourtant une activité que le savoir savant a pointé. (Voir chapitre précédent où nous avons montré comment les mathématiciens remplacent des dénombrements sur certains ensembles par des dénombrements plus faciles), car mettant en jeu des savoirs acquis, sur des ensembles équipotents.

Il faut rapprocher ce résultat de l'observation (voir page 64) de l'épreuve des mosaïques auprès d'étudiants en deuxième année de formation de professeurs). Nous avons tiré les mêmes conclusions sur un exercice qui modifiait les conditions de l'énumération dans un tableau.

ANALYSES COMPLEMENTAIRES :

Dans l'exercice 1, parmi les enfants qui réussissent, certains ont partitionné l'ensemble en zones rectangulaires

6		21						
		15						
4			14					

et ont ensuite écrit :

$6+4+14+21+15$ (Ronan).

$14+21+4+6+15$ (Elvis).

$21+14+6+4+15$ (Jérôme).

Soit E l'ensemble des cases.

Soit Z l'ensemble Z des 5 zones. Z est un sous ensemble de $P(E)$ qui constitue une partition de E . Z est conçu différemment selon les trois enfants : en utilisant le langage des ensembles et en ajoutant des parenthèses nous écrivons :

Ronan : $Z = (Z6 \cup Z4 \cup Z14 \cup Z21) \cup Z15$,

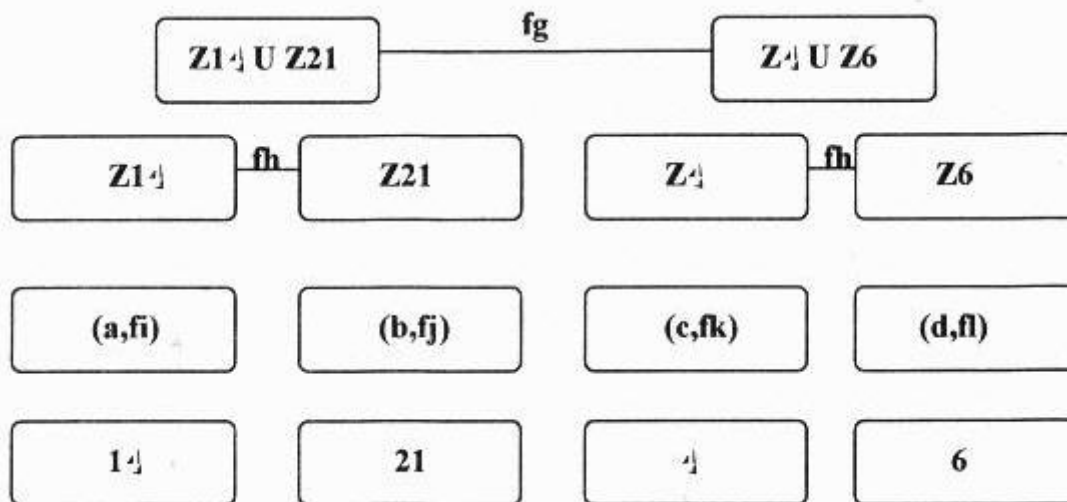
Elvis : $Z = ((Z14 \cup Z21) \cup (Z4 \cup Z6)) \cup Z15$.

Jérôme $Z = ((Z21 \cup Z14) \cup (Z6 \cup Z4)) \cup Z15$.

Soit fg, fd, fh, fb les fonction de l'ensemble des parties $P(Z-Z15) \longrightarrow P(Z-Z15)$:

fd : immédiatement à droite, fg : immédiatement à gauche, fb immédiatement en dessous, fh immédiatement au dessus.

Soit le cas Elvis :



Appelons $E1$ l'énumération $(Z14 \cup Z21, fg)$, $E2$ l'énumération $(Z14, fh)$, $E3$ l'énumération $(Z4, fh)$ et les énumérations directes $(a, fi), (b, fj), (c, fk), (d, fl)$ relatives aux zones $Z14, Z21, Z4, Z6$.

L'énumération de l'ensemble E s'effectue à partir des énumérations précédentes :

elle se note : $(a, (fi), fh, (fj), fg, (fk), fh, (fl))$. Les énumérations directes permettent produire les nombres 14, 21, 4, 6, Les énumérations $E1, E2, E3$ produisent l'addition parenthésée :

$$((14 + 21) + (4 + 6))$$

Cette modélisation ne permet pas toutefois de rendre compte de la différence entre les deux démarches suivantes :

Démarche 1 Compter 14, noter, écrire le signe "+", aller à l'autre zone, compter 21, écrire le signe "+", aller à l'autre zone, compter 4, noter, écrire le signe "+", aller à l'autre zone, compter 6, noter. La somme est produite au fur et à mesure.

Démarche 2 : compter 14, noter, aller à l'autre zone, compter 21, noter, puis 4, noter, puis 6 ,noter. Réaliser ensuite l'énumération de l'ensemble $\{14, 21, 4, 6\}$ pour écrire la somme.

En effet, les trois énumérations $E1, E2, E3$ qui induisent l'addition sont utilisables d'au moins deux façons :

Une façon itérative : c'est la démarche 1.

Une façon récursive : la démarche 2 : dans ce cas, les trois énumérations sont reprises sur non pas les zones $Z14, Z21, Z4, Z6$, mais sur leurs images par l'application cardinale.

Ainsi, ces enfants construisent une partition qui va permettre d'équilibrer le coût à l'exploration et le coût au comptage par zone. Ces enfants cherchent à partitionner selon des "petits tableaux", qu'ils vont compter à la façon de l'enseignement sous la forme de produits axb , puis additionner ces produits.

Les enfants conçoivent alors l'énumération à partir de celle qu'ils ont acquise lors de la construction du produit sans toutefois l'aborder sur l'ensemble tout entier.

Là encore, on retrouve des comportements qui s'apparentent aux comportements des étudiants lors de l'épreuve de la mosaïque.

CONCLUSION :

Les résultats montrent une chute dans la réussite de l'exercice 1 à l'exercice 2. L'exercice 2 ne peut être traité en utilisant directement des acquis scolaires. Seuls 19 élèves sur 39 utilisent le produit axb . Les enfants développent des comportements que nous pouvons, en majorité qualifier de "partitionner". Nous avons vu que l'enjeu des partitions était de retrouver des tableaux dans lesquels les produits élémentaires étaient effectifs.

Le premier exercice contrôle une application scolaire d'un procédé de comptage. Le deuxième exercice ne peut mobiliser le produit axb en tant que bilan d'une exploration. Les enfants doivent donc concevoir une autre exploration.. Cela passe par une augmentation du taux d'échec repéré par les instituteurs.

Les élèves ne sont plus dans les conditions habituelles d'utilisation du produit. La connaissance qui est en jeu n'est pas le comptage. Ce sont les conditions de l'énumération qui ont changé. Dans le cas d'un tableau classique où tous les objets sont présents, le problème de l'énumération ne se pose plus, où ne s'est jamais posé, puisqu'un enseignement a permis de donner le moyen du dénombrement.

Mis dans des conditions où la question de l'énumération se pose différemment, et peut être de façon première, 16 élèves dans l'exercice 2 se sont construits ou reconstruits une pratique énumérative.

3.3.3. ELABORATION D'UN OUTIL POUR UNE ETUDE DES CONDITIONS DE L'ENUMERATION DANS LE DENOMBREMENT DES ELEMENTS D'UN TABLEAU :

La première étude a permis de s'assurer de la validité de l'hypothèse selon laquelle *les conditions de l'énumération influent sur le comptage des éléments*. Cette hypothèse a été vérifiée dans deux circonstances : Avec des étudiants (L'épreuve des mosaïques) et avec des élèves de CE2 (Questionnaires des C.A.S.). Pour les étudiants, le résultat numérique n'est pas affecté. Il n'en est pas de même chez les élèves.

Les uns et les autres, placés dans une situation où les conditions de l'énumération sont différentes, ne font pas appel aux mêmes opérations ou y font appel différemment. C'est le choix de l'énumération qui induit le type d'opération numérique utilisée pour dénombrer.

Nous souhaitons approfondir cette observation, en particulier, mieux expliciter des variables de la situation d'énumération d'une collection en tableau.

Pour cela, nous construisons une situation a-didactique d'exploration de tableaux organisés.

LA SITUATION A-DIDACTIQUE :

Nous venons de voir que, lorsqu'il s'agit d'aborder la multiplication, les tableaux d'objets utilisés au cours élémentaire sont lus à l'aide d'une énumération apprise.

Cette énumération est prise en défaut dès que les conditions de lecture du tableau sont modifiées. (C.A.S.)

Nous allons construire une situation dont la solution est la mise en place d'une stratégie d'exploration d'une collection organisée, sous forme de tableaux en particulier, et plus généralement de collections structurées d'objets montrés. Nous construisons une situation dans la quelle **la tâche à effectuer est avant tout une tâche d'exploration, même si le comptage constitue le moyen de communiquer la tâche à effectuer et par là même le contrôle final.**

Pourquoi nous intéresser particulièrement aux tableaux ? : Tout d'abord parce qu'ils constituent un support fréquent en mathématiques à l'école élémentaire. Or ces tableaux sont toujours présentés dans leur ensemble et dans le micro-espace. Il s'agit de compter les lignes, compter les colonnes et utiliser la multiplication. Cette tâche évite l'activité d'exploration.

Cet état de fait est une réponse à la demande scolaire : reconnaître rapidement l'opération arithmétique à effectuer.

Un tableau dans un méso-espace, voir un macro-espace offrirait sans doute de bien meilleures conditions pour mettre en valeur les stratégies d'exploration.

Partant de ces remarques, nous voulons donc restaurer des familles de situations dont l'enjeu soit le développement de stratégies d'explorations performantes qui permettent d'élaborer la multiplication en particulier.

Si nous faisons l'hypothèse qu'une pratique énumérative "primitive" d'objets sur un plan est la partition, tout ce qui va rendre les stratégies de partitionnement plus coûteuses va donner du sens au remplacement d'une énumération par une autre, et par là même aux énumérations qui construisent la multiplication.

Donc, si les sous collections qui sont par paquets sont visibles en une fois, nous confortons l'idée de partition apprise. Si, par contre, il devient impossible de voir ces collections ensemble et qu'une démarche d'exploration autre est nécessaire, nous construisons alors une situation propice à la construction effective d'énumérations. Il se peut que ces énumérations soient plus diversifiées.

Pour pouvoir simuler ces types d'exploration, construisons une situation qui permette de ne pas voir toute la collection à la fois et qui oblige à prendre des décisions pour l'exploration.

HYPOTHÈSE :

LA SITUATION ET LES VARIABLES QUE NOUS AVONS DECIDE DE COMMANDER PERMETTENT DE MODIFIER LES CONDITIONS DE L'ENUMERATION.

LA SITUATION NECESSITE UN RECONSTRUCTION MENTALE DE LA COLLECTION.

IL DOIT DONC ETRE POSSIBLE D'OBSERVER DES CHOIX DIFFERENTS D'ENUMERATIONS.

LA SITUATION EST ALORS LA SUIVANTE :

Soit une collection structurée dessinée contrôlée à l'aide des variables suivantes :

- possibilité d'avoir un aperçu rapide de la collection afin de ne pas explorer sans avoir fait quelques hypothèses.
- Les objets peuvent être tous identiques ou non. Ils peuvent être des objets concrets mais aussi être des nombres.

- La structure peut être choisie relativement à la question que l'on veut traiter. (Tableau axb , groupements réguliers ou non, arborescence, etc.)
- le nombre d'objets.
- une fenêtre d'exploration de dimensions variables.

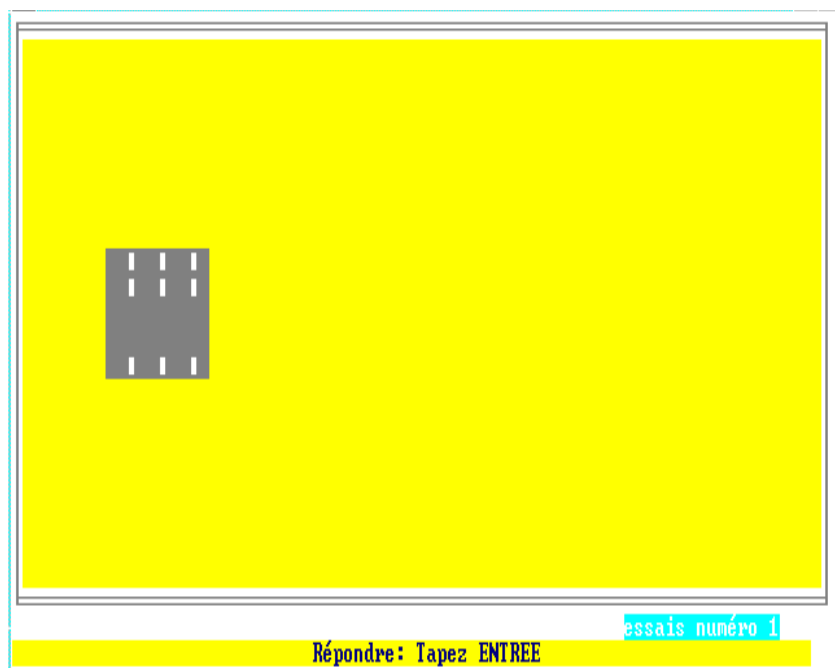
La mise en scène peut s'imaginer de la façon suivante : sur une feuille de papier, une collection est dessinée. Une autre feuille de papier cache la première. Cette deuxième feuille est munie d'une fenêtre. En faisant glisser cette feuille sur la première, on peut ainsi voir, "petit à petit" la collection, localement, et en déduire le nombre d'éléments.

Mais cette situation est irréalisable dans les conditions décrites ci-dessus en classe.

Nous avons donc décidé de construire un logiciel permettant de mieux mettre en scène cette situation.

Comme nous l'avons indiqué dans le premier chapitre, nous abandonnons donc l'étude sur une situation scolaire habituelle au profit d'une observation sur une situation a-didactique issue à la fois des limites reconnues de l'observation dans un cadre habituel et de l'analyse à priori.

Nous avons donc construit le logiciel que nous appelons "FENETRE". Nous décrivons par ailleurs, en détail ce logiciel et la situation a-didactique générée. (Chapitre ingénierie page 242.)



Page écran de travail : par la fenêtre, seule une partie de la collection est visible.

La fenêtre permet de visionner localement la collection. La collection elle-même est organisée. En l'état actuel du développement du logiciel, les structures de collections possibles sont des collections organisées selon le type axb ou $axbxc$ ou $(axb)-(cxd)$.

ANALYSE A PRIORI :

La situation présente donc des paquets d'objets répartis selon trois types de structures. Si nous nous référons aux pratiques attendues par l'institution, le premier type de structure nécessite donc la prise en compte de deux informations (nombre de lignes, nombre de colonnes), le deuxième nécessite 3 informations, le troisième 4 informations.

L'analyse et l'observation que nous avons conduites ne couvrent pas tous les types exposés ci-dessus. Un travail ultérieur permettrait de mieux utiliser les possibilités offertes par le logiciel. Nous ne conduirons donc pas, dans le cadre de ce travail, une analyse à priori générale.

Ainsi, dans la situation FENETRE avec des collections de type 2 (tableau de paquets), les stratégies possibles d'exploration énumérative en vue du comptage sont les suivantes :

LES STRATEGIES ATTENDUES.
M1 recherche du comptage un par un dans la collection par déplacement de la fenêtre.
M2 la fenêtre comme moyen de structurer.
M3 travail sur paquets (comptage des paquets) puis sur l'ensemble des paquets.
M4 travail sur axb directement.

M1 COMPTAGE UN A UN : les enfants peuvent se servir du "bip"⁷⁷ qui signale chaque déplacement élémentaire de la fenêtre en horizontal ou en vertical pour contrôler une exploration sur la collection.

M2 UTILISATION DE LA FENETRE POUR STRUCTURER:

La fenêtre peut être une "unité de mesure" permettant un pavage de la collection.

M3 TRAVAIL SUR LES PAQUETS :

Prise d'information ne nécessitant pas l'exploration totale de la collection, mais une représentation et une utilisation de la structure. (Ici, il y aura à affiner grâce à l'observation.)

Les paquets peuvent être traités comme unité de travail. L'enfant explore un paquet et en effectue le comptage de la façon suivante :

- Soit par exploration ligne colonne.
- Soit par chaînage et comptage un par un.
- Soit à l'aide des deux.

L'enfant peut explorer toute la collection et compter le nombre de paquets :

- Soit par exploration ligne colonne de la collection de paquets.
- Soit par comptage un à un.
- Soit à l'aide des deux.

Le lien entre le comptage sur les paquets et le comptage des paquets peut s'effectuer d'au moins deux façons :

Les paquets représentent un nombre. Ce nombre est utilisé dans la stratégie de comptage des paquets. Par exemple, un paquet contient 32 objets, alors pour les 12 paquets, il y aura 32+32+32 etc.

⁷⁷ Nous faisons cette hypothèse qui s'appuie sur notre travail de DEA, dans lequel les enfants contrôlaient leur dénombrement à la fois à l'aide d'une énumération, d'un comptage et d'un contrôle des BIP de la machine.

Le couple nombre de paquets, nombre d'objet par paquet est opérationnel pour conduire directement au produit.

M4 RECHERCHE DU COUPLE DE NOMBRES en vue d'effectuer le produit.

METHODE DE TRAVAIL QUE NOUS AVONS ADOPTEE :

Afin de conserver des comparaisons possibles, nous allons, dans la même séquence, proposer à des enfants de dénombrer une collection dessinée sur une fiche (voir page 117), puis de dénombrer une collection dans les conditions évoquées dans la situation a-didactique.

Dans le premier cas, le dénombrement se fait alors que la structure du quadrillage est entièrement visible, alors que dans le second, le dénombrement d'objets requiert des décisions d'exploration.

Cette situation répond à notre hypothèse : partant d'une utilisation scolarisée des tableaux, nous construisons une situation où les pratiques habituelles ne fonctionnent plus.

Il est possible que certains enfants recherchent très vite le nombre de lignes et le nombre de colonnes. Si nous souhaitons que cela ne se produise pas, nous n'aurions pas agité au mieux, car l'exercice précédent peut avoir un effet très inducteur. Mais si les enfants ne reprennent pas cette stratégie, nous serons d'autant plus convaincus de la nouveauté qu'apporte notre situation.

HYPOTHESE :

DANS CETTE SITUATION, CERTAINS ENFANTS QUI PRODUISENT LA MULTIPLICATION DANS LA FICHE LE FONT A LA DEMANDE DU SYSTEME. LA SITUATION DU LOGICIEL NECESSITE UNE PRISE EN CHARGE DE L'ENUMERATION. CETTE SITUATION DOIT DONC PROVOQUER DES DIFFICULTES. CERTAINS ENFANTS DOIVENT ALORS CHANGER DE STRATEGIE.

En construisant cette situation, nous visons bien sûr la vérification de cette hypothèse. C'est en effet dans ce cas que la situation pourra devenir une situation d'apprentissage d'une (ou de plusieurs) énumérations servant de base à la construction du sens de la multiplication.

CHOIX DES EXERCICES ET ORGANISATION DE L'OBSERVATION :

Il s'agit donc d'explorer une collection afin d'en calculer le nombre de ses éléments. Faire utiliser les connaissances sur les opérations (addition, multiplication, soustraction).

Pour cela, les enfants doivent mettre au point une méthode qui permette la lecture exhaustive d'un ensemble d'objets. La séquence doit, en particulier favoriser la phase de mise en place d'une stratégie de mesure (énumération).

La première phase (tableau ci-dessous au format réel A4) a pour but de s'assurer de la mise en œuvre de stratégies pour dénombrer une collection entièrement visible et structurée spatialement. Il s'agit d'une situation de contrôle. La structure de la collection est identique à celle qui sera présentée dans la situation modélisée à l'aide du logiciel.

LES STRATEGIES ATTENDUES

F1 Compte le nombre par produit $axbxc$.

F2 Compte le nombre par paquets puis le nombre de paquets et effectue le produit.

F3 Compte en largeur et en hauteur le nombre d'étoiles et effectue le produit.
--

F4 Compte le nombre par paquets puis additionne.
--

La deuxième phase (il s'agit alors d'un travail sur machine à l'aide du logiciel FENETRE) est une situation d'action. Les rétroactions sont apportées par la justesse, ou non de la réponse. Ces rétroactions valident ou invalident la solution numérique. Une réponse numérique juste nous assure d'une énumération correcte. (En cela, la validation de la situation n'est pas le choix d'une énumération, mais le résultat qu'elle produit au niveau du comptage final.)

DEROULEMENT :

Nous faisons passer les enfants deux par deux afin de favoriser des échanges verbaux.

MOYENS , MATERIELS:

Des collections qui sont dessinées sur une feuille (voir annexe). Le logiciel FENETRE. Deux machines compatibles PC.

DEROULEMENT PREVU :

Première phase (15 mn):

Par groupe de deux

L'enseignant distribue la feuille aux groupes.

1- Quels calculs allez-vous faire pour trouver le nombre d'étoiles de cette collection ?

2- Faites les calculs.

Deuxième phase (40 mn)

Sur la machine : la situation est la suivante :

Collection comportant autour de 300 objets.

Grande fenêtre d'exploration.

présentation de type $(axb)xc$.

(Démonstration - consigne) 5mn.

Le maître montre aux enfants la situation qu'ils vont avoir à résoudre sur la machine.

"Derrière cette fenêtre, il y a des objets (des petits carrés). Comme tout à l'heure, il va falloir trouver le nombre total d'objets."

"Pour vous aider, vous pouvez voir la collection, très rapidement et une seule fois, en tapant la touche ESC. (Le maître montre)."

"Vous pouvez écrire si vous le voulez."

Les enfants travailleront par atelier, sur machine : nous observons.

Atelier 1 : deux enfants	Atelier 2 : deux enfants
deux enfants observateurs	deux enfants observateurs
Les autres enfants ont une autre activité.	

Un tableau à côté de la machine attestera des réussites et des échecs des groupes d'enfants.

CODAGE DES COMPORTEMENTS : MATRICE A PRIORI:

LA MATRICE A PRIORI EST DONC :

	F1	F2	F3	F4	M1	M2	M3	M4
E1								
E2...								

La fiche :

F1 Compte le nombre par produit $axbxc$

F2 Compte le nombre par paquets puis le nombre de paquets et effectue le produit

F3 Compte en largeur et en hauteur le nombre d'étoiles et effectue le produit

F4 Compte le nombre par paquets puis additionne.

Exercice sur machine :

M1 recherche du comptage un par un dans la collection

M2 travail sur la structure collection-fenêtre

M3 travail sur paquets (comptage des paquets) puis sur l'ensemble des paquets

M4 travail sur axb directement.

TABLEAU DES DONNEES

	1	2	3	4	5	6	7	8
	F1	F2	F3	F4	M2	M3	M4	FP
1	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00
3	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00
4	0.00	0.00	1.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00
5	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	0.00	0.00	1.00
6	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00
7	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00
8	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00
9	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
10	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
11	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
12	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
13	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00	0.00	1.00
14	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	0.00	0.00	1.00
15	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
16	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	0.00	0.00	1.00
17	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
18	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
19	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
20	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00
21	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00	0.00	1.00
22	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00
23	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	1.00	0.00	0.00
24	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00
25	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	0.00	0.00	1.00
26	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
27	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00
28	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	1.00	0.00	0.00
29	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
30	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
31	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
32	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	0.00	0.00	1.00
33	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
34	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	1.00
35	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00
36	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	1.00
37	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
38	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
39	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00
40	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	1.00	0.00	1.00
41	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
42	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	0.00	0.00	1.00
43	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00

ANALYSE DES DONNEES :

TRAVAIL SUR FICHE :

Le travail sur la fiche a été réussi par 35 enfants sur 43. Les effectifs se répartissent comme suit :

LES STRATEGIES SUR FICHE	EFFECTIFS
F1 Compte le nombre par produit axbxc :	6
F2 Compte le nombre par paquets puis le nombre de paquets :	13
F3 Compte en largeur et en hauteur le nombre d'étoiles :	12
F4 Compte le nombre par paquets puis additionne :	11

TRAVAIL SUR LA MACHINE :

19 réussites au premier essai sur 43.

Seuls deux enfants (Hussein et Dounia) échouent encore au troisième essai.

LES STRATEGIES SUR MACHINE	Effectifs
M1 recherche du comptage un par un dans la collection.	0
M2 travail sur la structure collection-fenêtre.	15
M3 travail sur paquets (comptage des paquets) puis sur l'ensemble des paquets.	23
M4 travail sur axb directement.	4

Les réussites passent de 35 à 19 pour une collection ayant la même structure et un nombre d'éléments très proche de la première. Pourtant, la situation sur machine ayant été donnée après la fiche, un effet d'entraînement aurait pu se produire.

VERIFICATION DE L'HYPOTHESE :

Nous regroupons les enfants selon quatre catégories : F1 F2 F3 sont les stratégies (sur fiche) dans lesquelles la multiplication est utilisée.

M3 et M4 sont les stratégies (sur machine) dans lesquelles la multiplication est utilisée.

	F1 F2 F3	F4
M3 M4	23	3
M1 M2	7	8

Le chi-deux de cette distribution est 8,4, ce qui permet de rejeter l'hypothèse selon laquelle il n'y aurait pas de différence significative entre les comportements aux deux situations relativement à l'utilisation de la multiplication.

PREMIERS RESULTATS DE L'ETUDE :

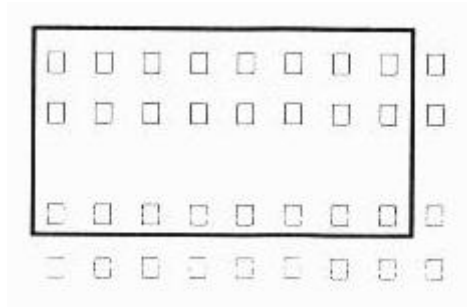
La situation "fenêtre" a provoqué :

- Une chute des réussites.
- L'abandon significatif de la multiplication pour un certain nombre d'élèves, ce qui semble confirmer notre hypothèse selon laquelle l'énumération d'une collection montrée en tableau n'est pas effective, mais apprise.

ANALYSE COMPLEMENTAIRE :

A plusieurs reprises, nous avons constaté que les enfants étaient mis en difficulté lorsque la fenêtre empêchait la visualisation complète d'un paquet constituant de la collection. Cette variable aurait une influence sur le comptage.

Or le visionnement (ou non) des paquets constitue une variable qui influe sur le choix d'une énumération puisqu'il montre (ou non) une partition évidente.



Le pavage du plan s'effectue donc avec la fenêtre comme module de référence.

Nous ajoutons donc une variable supplémentaire (FP)

FP rapport fenêtre paquet : FP=1 si fenêtre est plus petite que le paquet, c'est à dire si un paquet entier ne peut être visible.

HYPOTHESE : LA CONTRAINTE QU'EXERCE LA VARIABLE FP SUR L'EXPLORATION DE LA COLLECTION EST SANS EFFET SUR LES RESULTATS A L'EXERCICE.

Nous reprenons les résultats :

	FP=0	FP=1
REUSSITE	17	7
ECHEC	5	14

Le chi-deux de cette distribution est 8,41 (significatif à .05) ce qui permet de rejeter l'hypothèse selon laquelle il n'y aurait pas d'effet de la variable FP sur la réussite.

LA VARIABLE FP COMMANDE L'ACCES A UN VISIONNEMENT GLOBAL OU NON DES PARTIES (LOCALISEES SPATIALEMENT) DE LA COLLECTION.

CETTE VARIABLE, QUI MODIFIE LES CONDITIONS DE L'ENUMERATION INFLUE SIGNIFICATIVEMENT SUR LES RESULTATS DES ELEVES.

RESULTATS GENERAUX DE CETTE ETUDE :

NOUS PENSONS AVOIR MONTRE QUE LA SITUATION "FENETRE" PERMET DE RESTAURER UN TRAVAIL D'EXPLORATION DE LA COLLECTION EN VUE D'UNE ÉNUMÉRATION ET PERMET DE METTRE EN JEU DES TECHNIQUES PERSONNELLES NON SCOLARISÉES OU DE REDONNER DU SENS À DES TECHNIQUES SCOLARISÉES.

NOUS AVONS MIS EN ÉVIDENCE QUELQUES VARIABLES (CELLES PREVUES DANS LE LOGICIEL, ET LA VARIABLE FP QUI FUT DECOUVERTE EN COURS D'OBSERVATION) QUI DOIVENT CONTRIBUER À FAIRE DE L'ÉNUMÉRATION D'UNE COLLECTION NON TOTALEMENT VISIBLE UNE ACTIVITÉ PRODUCTRICE D'UNE CONNAISSANCE.

ANALYSE COMPLEMENTAIRE : RETOUR SUR DES ETUDES DE CAS:

La fiche chronique détaillée figure dans l'annexe de la thèse.
Afin d'être plus précis, nous avons toutefois conservé quelques extraits de chroniques d'enfants dans leur travail sur le logiciel FENETRE.

1- EXEMPLE MONTRANT COMMENT CERTAINS ENFANTS NE PEUVENT DÉTACHER LE DÉNOMBREMENT DES PAQUETS DU DÉNOMBREMENT PAR PAQUET :

AMANDINE et PROTIN : ...Ils ne peuvent abandonner le dénombrement des objets. Ils voient deux paquets mais ne peuvent pas dire 2. Ils disent 32.
Ils décident de travailler séparément.
Protin fait $16 + 16 + 16 \dots$ ainsi de suite (18 fois). Amandine balaie la collection et dénombre les paquets :16. Elle fait $18 \times 16 = 288$
Protin : *"t'es fou de faire ça"*.

PHILIPPE PHETSANA et CLEMENT :
Tous d'accord pour 18 par paquet. Ils utilisent le clin d'œil. Ils ont vu la structure et dessinent :

18	18	18
18	18	18
18	""	""
18	""	""
18	""	""

Clément dit : *" 5, 10, 15 fois 18... 270."*
Tous sont d'accord. REUSSITE. Durée du travail 5 mn.

DEUX EXEMPLES METTANT EN ÉVIDENCE L'IMPORTANCE DE LA VARIABLE FP QUE NOUS N'AVIONS PAS PRÉVUE ET QUI S'AVÈRE TRÈS IMPORTANTE:

HUSSEIN-DOUNIA

Ils comptent ce qu'ils voient au travers de la fenêtre. Mais la fenêtre ne peut laisser apparaître tout un paquet.. La fenêtre ne couvre pas un paquet élémentaire.

Ils procèdent comme ceci : ils comptent ce qu'ils voient par la fenêtre :

Le pavage du plan s'effectue donc avec la fenêtre comme module de référence.

Trois essais selon cette stratégie :

Je donne un quatrième essai : Ils découvrent enfin les paquets de 9.

Hussein est sûr : $18+18+18....$ La première rangée fait 54.

Il balaie alors en verticale et trouve 5. Résultat 270

Dounia effectue des sommes de 3×9 mais exclue la première ligne. Elle trouve 226.

Hussein décide de vérifier son nombre. REUSSITE.

Durée de l'activité : 30 mn

3 EXEMPLE DE COMPORTEMENT DANS LEQUEL L'ENFANT EXPLORE DIRECTEMENT UNE LIGNE ET UNE COLONNE :

LAURENT-DELPHINE

Laurent décide immédiatement de calculer en ligne et colonnes : $27 \times 10 = 270$. REUSSITE.

Durée de l'activité 5 mn.

3.4. OBSERVATIONS EN COURS PREPARATOIRE :

3.4.1. ENUMERATION A LA CHARGE DE L'ELEVE OU ENUMERATION INDUITE : ETUDE A PARTIR D'UN COMPTE-RENDU D'OBSERVATION D'UNE ETUDIANTE PROFESSEUR D'ECOLE :

L'enseignement de la numération désigne communément tout ce qui va permettre à un enfant d'écrire les nombres. La numération a longtemps été un objet métamathématique. Puis la réforme des mathématiques modernes a fait de la numération un objet mathématique. Les méthodes essentiellement inspirées de DIENES étaient basées sur l'hypothèse de la reconnaissance de la structure au travers des bases différentes, puis de la base dix. La numération outil était devenue une numération objet. Cet objet était montré (au travers de bases différentes).

Vers les années 1970, plusieurs travaux⁷⁸ visent la production de situations dans lesquelles la numération est la solution du problème posé. Mais il reste beaucoup d'interrogations :

La numération est sans doute l'aboutissement d'un processus de mise en place de stratégies énumératives obéissant à des processus d'économie complexes et contradictoires. La structure de l'écriture du nombre arrive-t-elle trop tôt dans la scolarité pour être une solution d'une situation a-didactique ? Peut-elle arriver plus tard puisque les enfants connaissent les mots (le comptage) ?

Cette question se retrouve dans les pratiques des enseignants : pour illustrer cette question, citons un compte-rendu d'une observation faite par une étudiante⁷⁹ de deuxième année des professeurs d'école.

Au cours de la séquence observée, les élèves devaient communiquer, par écrit, un message numérique lié à une collection dessinée sur une feuille. Le projet de l'institutrice de la classe était de faire produire une suite additive étant directement issue des paquets constitués sur la feuille.

Voici ce qu'écrivait l'étudiante :

"La maîtresse a été surprise par le fait que presque tous les groupes ont essayé de faire des sous collections de même nombre, alors qu'elle pensait que la disposition des éléments aurait pu donner l'idée aux enfants de faire des paquets "pratiques à compter" et ainsi, éviter d'avoir des éléments trop isolés."

A la suite de ce constat, la maîtresse a décidé de mettre en place une séquence qu'elle n'avait pas prévue : *"à partir de collections dessinées au tableau, les enfants doivent déterminer les meilleures techniques pour compter et pour écrire les messages en pouvant contrôler facilement, écrire les nombres au fur et à mesure qu'ils comptent, faire des collections ni trop petites ni trop grandes, ne pas faire à tout prix des paquets réguliers."*

Ainsi, cette activité et l'analyse faite par l'enseignante mettent en évidence l'existence de pratiques énumératives déjà algorithmisée (les paquets réguliers), directement issue du projet d'enseignement du cours préparatoire, et le sentiment, pour la maîtresse de "passer à côté" de découvertes de modes d'exploration des collections de façon plus adaptée à la contingence.

⁷⁸ Thèse d'Habiba el BOUZAOUÏ. Bordeaux. (déjà citée).

⁷⁹ Compte-rendu d'une observation : Béatrice Truchon PE deuxième année IUFM de Bordeaux.1993.

L'ENJEU :

L'enjeu est le suivant : ces pratiques énumératives constituent-elles un ensemble de connaissances dont l'absence ou le remplacement par des procédures enseignées feraient difficulté dans les activités de comptage ? Y-a-t-il des accidents repérables dans les raisonnements sur le comptage par suite d'une insuffisance de l'énumération ? Par ces questions, nous voulons montrer que les pratiques énumératives des enfants sont leurs instances de contrôle du comptage, le lieu où s'élabore la compréhension, l'ajustement, la vérification de celui-ci.

Comme dans les observations précédentes, nous allons chercher à repérer des accidents de comptage dus à l'énumération, cette fois-ci lors de la construction du nombre. Nous allons présenter des situations, à des enfants sachant compter, où l'énumération y est facile, et d'autres où les mêmes nombres entrent en scène, mais dans lesquelles les conditions d'énumération ont changé.

L'analyse des types et des fréquences d'erreurs doit nous informer sur les connaissances mises en jeu pour contrôler le comptage

DIFFICULTE :

Le cours préparatoire a ceci de particulier : très vite, le système qui enseigne le comptage fait, en même temps la promotion de procédures, d'algorithmes permettant le comptage et se confondant avec lui.

Par exemple, *"on va faire des paquets"*.

Toute observation de l'énumération doit donc pouvoir prendre en compte des énumérations qui ont été apprises et qui fonctionnent comme un "rite" et des énumérations qui seraient réellement dévolues à l'élève.

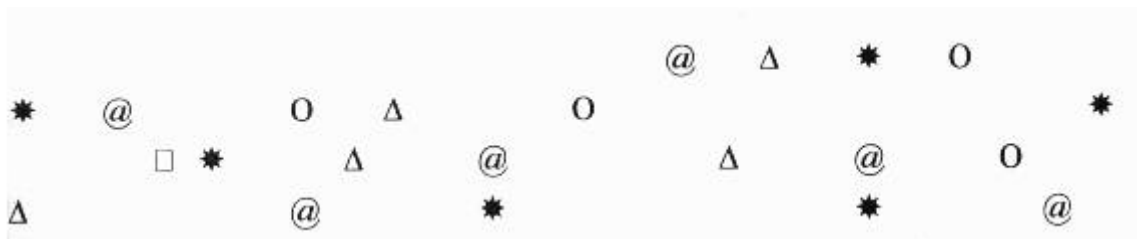
Tout comme au cours élémentaire, nous devons mettre en évidence, non pas les énumérations du système, mais celles conçues par les élèves, c'est à dire celles agissant comme modèles implicites d'action, comme moyens de contrôle.

Il se peut qu'une énumération venant du système fonctionne comme contrôle. Dans ce cas, le sujet se sera approprié l'énumération, en aura une conception. Mais cette même énumération peut, comme nous l'avons dit, n'être qu'une procédure apprise.

3.4.2. PREMIERE OBSERVATION⁸⁰ : OU L'IMPOSSIBILITE DE CONDUIRE UNE RECHERCHE A PARTIR D'UN QUESTIONNAIRE.

Dans ce contrôle effectué en mars dans un cours préparatoire de l'école Jules Michelet de Talence, nous avons extrait l'exercice suivant :

Pour chaque objet, écris le nombre dans le tableau :



@	□	Δ	O	*

Nous présentons cet exercice non pas pour sa très grande originalité, mais pour nous interroger sur ce qui fonde sa présence dans un contrôle de mathématiques. A l'évidence, il ne s'agit pas vraiment, au mois de mars, de contrôler ces connaissances numériques déjà acquises pour la majorité des enfants de cette école. Il s'agit de présenter à l'élève une situation dans laquelle la "quête" de la collection à dénombrer se fait dans des conditions un peu inhabituelles. Cet exercice révèle un souci de faire compter les objets d'une collection dont le repérage spatial est rendu plus difficile par la présence d'autres collections.. Nous prendrons cet exercice comme un indice de préoccupation des enseignants du contrôle de l'énumération. Toutefois, s'agissant d'exercices de contrôle, il faudrait être sûr si l'exercice est proposé pour contrôler une technique qui a fait l'objet d'un enseignement (et qui contrôlerait la connaissance de pratiques énumératives) ou si l'exercice est proposé pour mettre en scène de façon un peu différente une situation de comptage pour éviter la monotonie des contrôles. Comme tout exercice de comptage, celui-ci sollicite une énumération. Chaque élément doit être pris en compte. Les autres objets jouent tour à tour le rôle d'objets brouilleurs. Une organisation spatiale doit être effectuée. Or, chaque année, cet exercice est repris et le taux de réussite avoisine les 100%.⁸¹ Il est donc impossible, à la seule vue des résultats d'étudier les stratégies des élèves.

Nous sommes en présence d'un exercice à statut peu clarifié et pour lequel la réussite massive semble constituer un argument raisonnable de son maintien d'année en année.

⁸⁰ Dans l'annexe, nous avons laissé une première étude faite à partir d'un contrôle de mathématiques au cours préparatoire.

⁸¹ Les questionnaires proposés par les enseignants lors des bilans visent surtout la réussite d'une majorité d'individus. Ainsi, des activités qui pourraient sans doute mieux renseigner sur les comportements des enfants sont mises de côté.

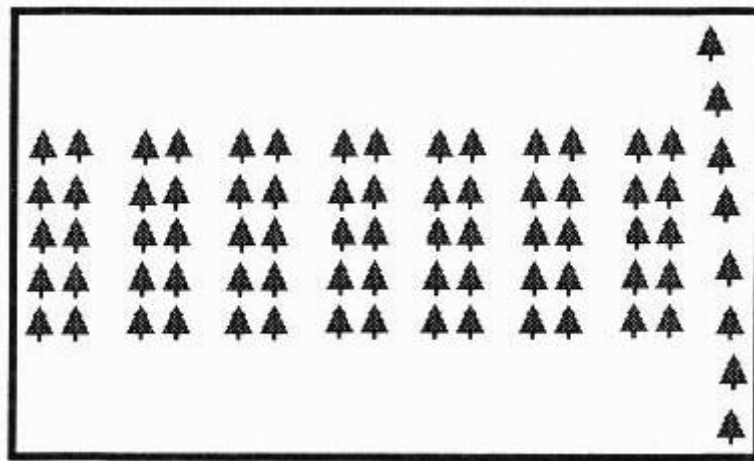
3.4.3. DEUXIEME OBSERVATION :

Pour étudier la façon dont la disposition spatiale d'une collection influe sur le comptage, nous avons étudié deux questionnaires posés en mars 87 dans les cours préparatoire de l'École Jules Michelet. (Voir le détail du dépouillement du questionnaire en annexe).

QUESTIONNAIRE :

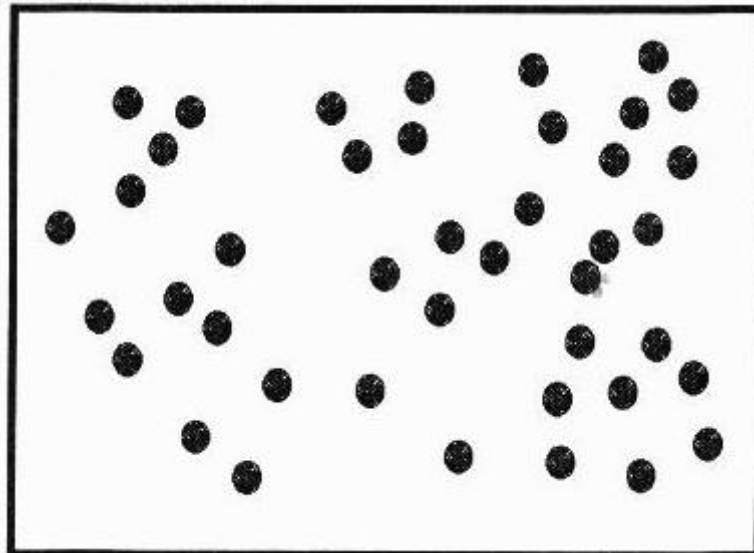
• Deux exercices posés dans les mêmes cours préparatoire en Mars 87 :

Exercice 1 : écris le nombre d'objets :



Exercice 1

Exercice 2 : Écris le nombre de ronds :



Exercice 2

ANALYSE :

HYPOTHESE : nous faisons donc l'hypothèse qu'il n'y a pas, à priori, à s'attendre à des résultats significativement différents sur les deux exercices. Le tableau des résultats est le suivant :

	R2	E2
R1	26	10
E1	4	9

(Valeurs théoriques 22 14 8 5).

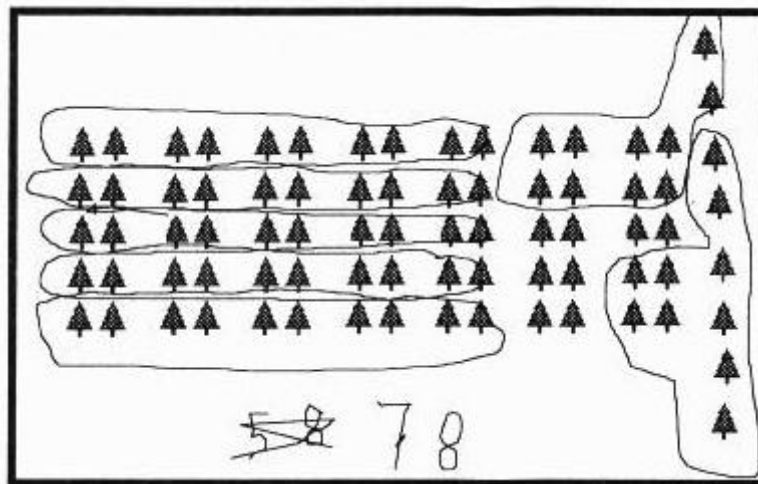
Le calcul du khi-deux donne 6,9 ce qui le rend significatif à 0.05. L'hypothèse peut donc être rejetée avec une erreur de 5%.

La présence d'une structure ligne-colonne dans le premier exercice semble significativement influencer sur le résultat.

Au contraire, l'exercice 2, est significativement moins bien réussi. Ce résultat confirme nos premières observations. Il était prévisible.

Mais une autre remarque va nous permettre de mieux comprendre l'attitude des enfants devant l'exercice 1.

Dans cet exercice, les enfants qui constituent des paquets le font en travaillant ligne par ligne. D'autre part, aucun de ceux qui réalisent des paquets de dix n'utilisent les paquets de dix visibles dans la représentation de la collection. Ainsi, l'exploration de la collection "structurée" ne se fait pas selon ce qui est souhaité par le rédacteur de la fiche de travail.

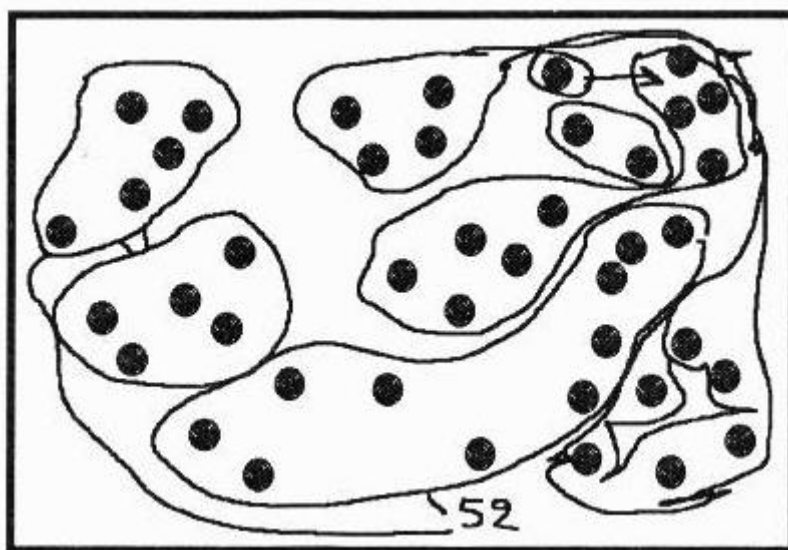


Premier travail de Mélanie :

D'une part, on note l'importance de la structure induite par l'activité de lecture : de gauche à droite et de haut en bas, d'autre part, lorsque les enfants disposent d'une technique (enseignée) de constitution de paquets de dix, ils n'utilisent pas cette technique dans des conditions optimales qui permettraient un contrôle permanent de l'exploration de la collection. (Voir travail ci-dessus).

Quant à la collection sans structure apparente, il est sûr qu'aux difficultés rencontrées dans l'exercice 1 s'ajoute la difficulté d'un travail d'organisation de l'exploration, même chez les enfants disposant d'outils enseignés tels que la réalisation de paquets de dix.

Voici, par exemple le travail de Mélanie dans l'exercice 2, qui, nous l'avons vu, réussit à compter 78 à l'exercice 1, et qui, dans l'exercice 2 construit les paquets de dix, puis commet une erreur dans le comptage final de ces 4 paquets (elle en dénombre 5) :



Deuxième travail de Mélanie

CETTE OBSERVATION VA DANS LE SENS DES RESULTATS MIS EN EVIDENCE AU COURS ELEMENTAIRE. DES LE DEBUT DE LA SCOLARITE OBLIGATOIRE : LE MESURAGE DES COLLECTIONS SE REALISE SOUVENT A PARTIR DE PROCEDURES ENSEIGNEES :

Nous sommes en avril et l'exercice 1 fait largement appel aux groupements par dix. La structure énumérative évidente de la collection des sapins semblait inciter les élèves à partitionner par dix. Or, les élèves font des partitions par dix, mais sans s'occuper de la structure spatiale de la collection. Les élèves ont confiance en le procédé de groupement par dix, mais n'optimisent pas leur contrôle par l'utilisation de la structure de la collection.

Le groupement par paquets de dix associés à la lecture-écriture horizontale et de gauche à droite, se substitue complètement à une possible activité d'énumération souple et générale qui pourrait par exemple s'appuyer sur la structure spatiale de la collection.

Une procédure est acquise (et fortement sollicitée par le système). Le maître aura beau dire à la correction : "vous auriez pu voir les paquets tout prêts", les élèves (même ceux qui ont réussi) ne peuvent que constater.

L'enjeu semble de toute façon, apparemment peu important devant l'enjeu du comptage par paquets de dix.

Très vite, des techniques enseignées ou socialement dominantes (groupements par paquets de dix, sens de la lecture) vont constituer autant de moyens mis en œuvre institutionnellement pour le dénombrement d'une collection et occulter complètement une grande partie de l'énumération.

Les pratiques personnelles des enfants que nous n'avons pas encore bien observées, seront d'autant plus difficiles à repérer dans un cadre scolaire habituel.

3.4.4. TROISIEME OBSERVATION :

PRESENTATION :

Les deux premières observations nous ont montré les limites de l'étude des questionnaires. Nous nous interrogeons aussi sur la difficulté à étudier les stratégies possibles d'énumération dans le comptage.

Nous avons donc le choix de contrôler si les enfants du cours préparatoire avaient une conception de l'énumération, en proposant des activités d'énumération non liées au comptage. Ceci nous aurait sans doute facilité la tâche, mais nous avons opté pour une étude de l'énumération dans une activité de comptage parce que cela constitue le travail du cours préparatoire et il nous paraissait plus opportun d'analyser d'abord les interactions entre le comptage et l'énumération d'une collection en ostension. Cette décision suppose (nous développons pourquoi ci-dessous) une observation enfant par enfant.

METHODE DE TRAVAIL :

Nous avons proposé le questionnaire ci-dessous aux enfants de C.P. en février. Ce questionnaire a été posé sur entretien individuel. Pour chaque collection, la consigne était la suivante : *"Voici une collection, trouve le nombre d'objets de cette collection. Pour t'aider, tu peux écrire et dessiner ce que tu veux sur la feuille."*

Nous avons choisi cette méthode car les techniques d'exploration d'une collection sont détectables par des gestes, des hésitations. Beaucoup d'enfants ne peuvent pas, d'eux-mêmes, transformer un acte gestuel en un acte graphique. Par exemple, un certain nombre d'enfants cachent, avec la main, le sous ensemble d'objets qui ont déjà été pris en compte. Ils "s'interdisent" toute représentation dessinée de ce geste.

PREMIERE HYPOTHESE : LES PRATIQUES ÉNUMÉRATIVES DES ENFANTS SE REGROUPENT EN DEUX GRANDES FAMILLES ET NE DÉPENDENT PAS DE LA COLLECTION PRÉSENTÉE. CE SONT LES ÉNUMÉRATIONS DIRECTES QUI METTENT EN JEU UN RANGEMENT DE LA COLLECTION (QUE NOUS NOTERONS R) ET LES ÉNUMÉRATIONS FONDÉES SUR UN DE PARTITIONNEMENT DE CELLE-CI (QUE NOUS NOTERONS P).

La stratégie R est une stratégie de base de l'énumération. Nous l'avons déjà décrite.

La stratégie P se décompose en actions qui doivent être coordonnées :

-Explorer la collection en effectuant des paquets (selon une règle implicite ou explicite qui peut varier). Cette classification peut contribuer à une énumération finale ou non.

-Faire un bilan numérique de chaque classe à l'aide d'une stratégie R.

-Effectuer une énumération sur l'ensemble des cardinaux de chaque classe afin de produire soit une concaténation de nombres, soit une suite additive, soit éventuellement une écriture canonique du cardinal de l'ensemble. Cette énumération suppose que l'enfant conçoive le remplacement d'une classe par le cardinal.

Pour que ces deux stratégies puissent être affirmées comme conceptions, nous les mettons donc à l'épreuve dans des situations où, à priori, le partitionnement est favorisé, et des situations dans lesquelles le chaînage est favorisé et nous étudions les résistances.

DEUXIEME FAMILLE D'HYPOTHESES :

Elle vise à éclaircir les rapports entre le comptage et l'énumération dans le cas de collection en ostension.

Par exemple, le partitionnement d'une collection en vue de son comptage est plus coûteux que le chaînage. En effet, le comptage un à un implique naturellement le chaînage et diminue donc les chances de choix du partitionnement.

Nous nous attendons donc, en l'absence de toute injonction scolaire, (à cette époque de l'année les paquets ne constituent pas encore un enjeu scolaire trop institutionnalisé), à avoir les stratégies de chaînage massivement utilisées.

Nous posons donc comme hypothèses :

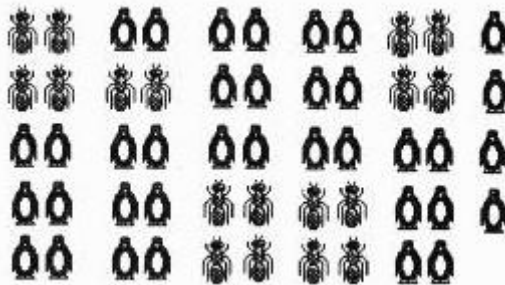
DEUXIEME HYPOTHESE : LE COMPTAGE CONSTITUE UN OBSTACLE À LA MISE EN CONCURRENCE DE PRATIQUES ÉNUMÉRATIVES, PAR SURDÉTERMINATION DE LA STRATÉGIE DU CHAÎNAGE D'UNE PART, PAR LA CONFUSION QU'IL ENTRETIENT ENTRE LES ACTIVITÉS D'EXPLORATION DE COLLECTION ET LUI-MÊME.

TROISIEME HYPOTHESE : LA PRODUCTION D'UNE ÉNUMÉRATION PEUT CONSTITUER UNE DIFFICULTÉ À LA MISE EN OEUVRE DU COMPTAGE.

Le comptage implique fortement une procédure d'énumération directe (par exemple, le chaînage). Cette implication occulte d'autres énumérations potentielles (basées sur le partitionnement par exemple.). Nous allons mettre en évidence un ensemble de techniques personnelles, leurs interférences. Nous proposons aussi des types d'activités qui permettraient de mieux différencier les pratiques énumératives et le comptage.

CHOIX DES EXERCICES :

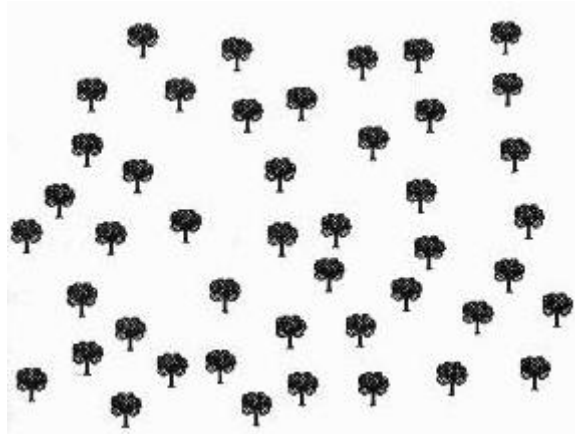
EXERCICE 1 : (Les fourmis et les pingouins)



EXERCICE 2 : (Les sapins)



EXERCICE 3 : (Les chênes).



EXPLICATION DU CHOIX DES EXERCICES :

La première collection peut se structurer selon deux organisations apparentes : celle des lignes et des colonnes d'une part, celle des catégories d'animaux d'autre part.

L'effet de cette structure peut provoquer des modifications de stratégies de comptage. Elle peut donc provoquer des effets différents sur les élèves qui concevraient l'énumération soit à partir du chaînage d'éléments, soit à partir d'une partition obéissant aux deux collections d'animaux. En effet, la partition en deux collections est visible, mais l'entourage est difficile. Il y a donc une gestion de l'énumération de chaque classe qui est difficile.

La deuxième collection, issue de l'expérience de la deuxième observation en cours préparatoire (voir page 128) possède une structure évidente. L'élève peut développer soit du chaînage, soit de partitions en s'aidant d'une représentation de la structure ou non.

La troisième collection n'a pas de structure évidente. La décision du choix de la structuration incombe à l'élève.

3.4.4.1. ANALYSE DES DONNEES :

CODAGE DES COMPORTEMENTS : MATRICE A PRIORI:

Pour chacun des 3 exercices (notés i dans la suite), nous relevons les comportements suivants : Pi Rij Z.

Pi1 : Partitionne la collection et ne fait rien d'autre.

Pi2 : Partitionne et effectue le comptage dans chaque classe. Les nombres ne sont réunis, ni par un lien, ni par une écriture à part, ni sous forme de suite additive.

Pi3 : Partitionne, effectue le comptage dans chaque classe. Les nombres sont réunis soit par un lien, soit par une écriture à part, soit sous forme de suite additive.

Ri1 : range la collection mais n'effectue pas de comptage. (Un marquage peut contrôler le rangement).

Ri2 : Range la collection et effectue un comptage de celle-ci.

Z : Aucune stratégie apparente d'exploration.

LA MATRICE EST DONC :

	P11	P12	P13	R12	P21	P22	P23	R22	P32	P33	R32	Z
Élève 1												
Élève 2												

Nous ne faisons pas figurer R11, R21, R31 : ces stratégies ne sont pas apparues dans notre étude. Ce qui signifie qu'une exploration par chaînage des éléments est toujours associée à un comptage, même si celui-ci est apparu après un chaînage préalable (voir études particulières). La cohérence de l'activité est notée par le deuxième indice (recherche du nombre).

Les variables sont binaires.

Les variables P_{ij} sont exclusives l'une de l'autre pour un exercice i donné. Les variables R_{ij} sont exclusives l'une de l'autre pour un exercice i donné

La variable Z est mise à 1 (vraie) lorsqu'il a été impossible de noter une stratégie dans au moins deux des trois exercices. Nous avons décidé ce choix après étude des 4 cas étudiés entrant dans cette catégorie.

Par exemple, l'élève N°6 est classé Z, bien qu'il ait P12, mais dans les exercices 2 et 3, nous n'avons rien repéré (aucune exploration, même visuelle).

L'élève 20 ne fait rien.

Les élèves 35 et 36 ont R12, mais n'ont aucune stratégie pour les exercices 2 et 3.

LES INDIVIDUS SUPPLEMENTAIRES :

Nous modélisons 5 "individus" supplémentaires de la façon suivante :

S1 représente un individu qui range et qui effectue le comptage.

S2 représente un individu qui partitionne et qui n'effectue pas le comptage.

S3 représente un individu qui partitionne et qui effectue le comptage.

S4 un individu dont on n'a relevé aucune stratégie apparente de structuration.

En reprenant la matrice à priori.

	P11	P12	P13	R12	P21	P22	P23	R22	P32	P33	R32	Z
S1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
S2	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
S3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
S4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

TABLEAU DES DONNEES

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	P11	P12	P13	R12	P21	P22	P23	R22	P32	P33	R32	Z3
1	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	1;00	0;00	0;00
2	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00
3	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00
4	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00
5	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00
6	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	0;00	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00
7	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00
8	0;00	0;00	0;00	0;00	0;00	0;00	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00
9	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	0;00	0;00	0;00
10	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00
11	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00
12	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00
13	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00
14	1;00	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00
15	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00
16	1;00	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00
17	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	1;00	0;00	0;00
18	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00
19	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00
20	0;00	0;00	0;00	0;00	0;00	0;00	0;00	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00
21	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00
22	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00
23	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00
24	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00
25	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00
26	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00
27	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00
28	0;00	0;10	0;00	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00
29	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00
30	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00
31	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00
32	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00
33	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00
34	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00
35	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	1;00
36	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	1;00
37	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00
38	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	1;00	0;00	1;00	0;00	0;00
39	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00	0;00	0;00	1;00	0;00

ANALYSE EN COMPOSANTES PRINCIPALES :

Les statistiques élémentaires montrent que R22 et R32 ont une moyenne forte. Par contre, R12 apparaît moins fortement que P1i (P11, P12, P13).

VARIABLES	MOYENNES	ECARTS-TYPES DE LA SERIE
P11	0.051	0.2206
P12	0.231	0.4213
P13	0.385	0.4865
R12	0.282	0.4590
P21	0.026	0.1581
P22	0.103	0.3034
P23	0.205	0.4038
R22	0.590	0.4919
P32	0.026	0.1581
P33	0.231	0.4213
R32	0.615	0.4865
T"	0.103	0.3034

PREMIERE ETUDE : Dans nos observations de l'épreuve de la mosaïque ainsi que dans l'observation du cours élémentaire, nous avons commencé à repérer des variables qui influent significativement sur les conditions de l'énumération. Nous examinons dès à présent les effets de la présence d'une partition montrée cette fois ci à l'aide de dénomination d'objets (les pingouins et les fourmis).

Faisons l'hypothèse suivante :

Le nombre de catégories d'objets ne change pas significativement la stratégie d'exploration :

Nous notons R toute stratégie de rangement et P toute stratégie de partitionnement. (Voir précédemment)

	R	P
Ex1	12	26
Ex2	24	13

La distance du chi-deux est de 8,32. Ce chi deux est significatif à .01. Nous devons donc rejeter cette hypothèse.

CONCLUSION :

LE FAIT QU'IL Y AIT DEUX COLLECTIONS DÉNOMMÉES DANS L'EXERCICE 1 ET UNE SEULE DANS L'EXERCICE 2 SEMBLE BIEN AVOIR UNE INFLUENCE DÉTERMINANTE SUR LA STRATÉGIE D'EXPLORATION.

Nous remarquons que, dans ce cas, les enfants ont considéré qu'il y avait deux collections. Ils ont alors compté le nombre d'éléments de chaque collection par énumération directe et se sont arrêtés là.

Seuls trois enfants ont constitué le nombre de la collection entière à l'aide de la somme.

ETUDE DES CORRELATIONS DANS L'EMPLOI DE STRATEGIES :

	P11	P12	P13	R12	P21	P22	P23	R22	P32	P33	R32	R3
P11	1.000											
P12	-0.127	1.000										
P13	-0.184	<u>-0.433</u>	1.000									
R12	-0.146	<u>-0.343</u>	<u>-0.476</u>	1.000								
P21	-0.038	0.296	-0.128	-0.102	1.000							
P22	<u>0.688</u>	0.015	-0.094	-0.212	-0.035	1.000						
P23	-0.118	-0.126	<u>0.512</u>	-0.318	-0.082	-0.172	1.000					
R22	-0.279	0.086	-0.345	<u>0.523</u>	-0.194	<u>-0.405</u>	<u>-0.609</u>	1.000				
P32	-0.038	0.296	-0.128	-0.102	-0.026	-0.055	0.319	-0.194	1.000			
P33	0.149	-0.011	0.192	-0.208	-0.089	0.216	0.325	-0.286	-0.089	1.000		
R32	-0.055	-0.067	-0.025	0.144	0.128	-0.254	-0.251	<u>0.412</u>	-0.205	<u>-0.633</u>	1.000	
R3	-0.079	-0.105	-0.094	0.164	-0.035	-0.114	-0.172	-0.062	-0.055	-0.185	-0.428	1.000

Le tableau montre une forte corrélation entre P11 et P22 (0,688), ce qui pourrait identifier un type de comportement : il s'agirait d'individus qui partitionnent et qui n'effectuent pas un comptage final de la collection. Mais on ne retrouve pas P12 et P32. Nous allons donc étudier cette apparente contradiction.

R12 R22 d'une part, R22 et R32 d'autre part, sont corrélés (0,523 et 0,412). Les individus qui rangent semblent être une population stable.

P23 et P13 sont aussi corrélés (0,512). Ce comportement caractérise les individus qui utilisent la partition et qui répondent au problème. Ils ont donc, à la fois une structuration de l'ensemble et ils vont jusqu'au comptage.

On s'étonne alors de l'éloignement de P33 par rapport à ces comportements.

L'étude du cercle des corrélations (plan 1-2 24,5% et 16,3 % d'inertie) confirme les interrogations :

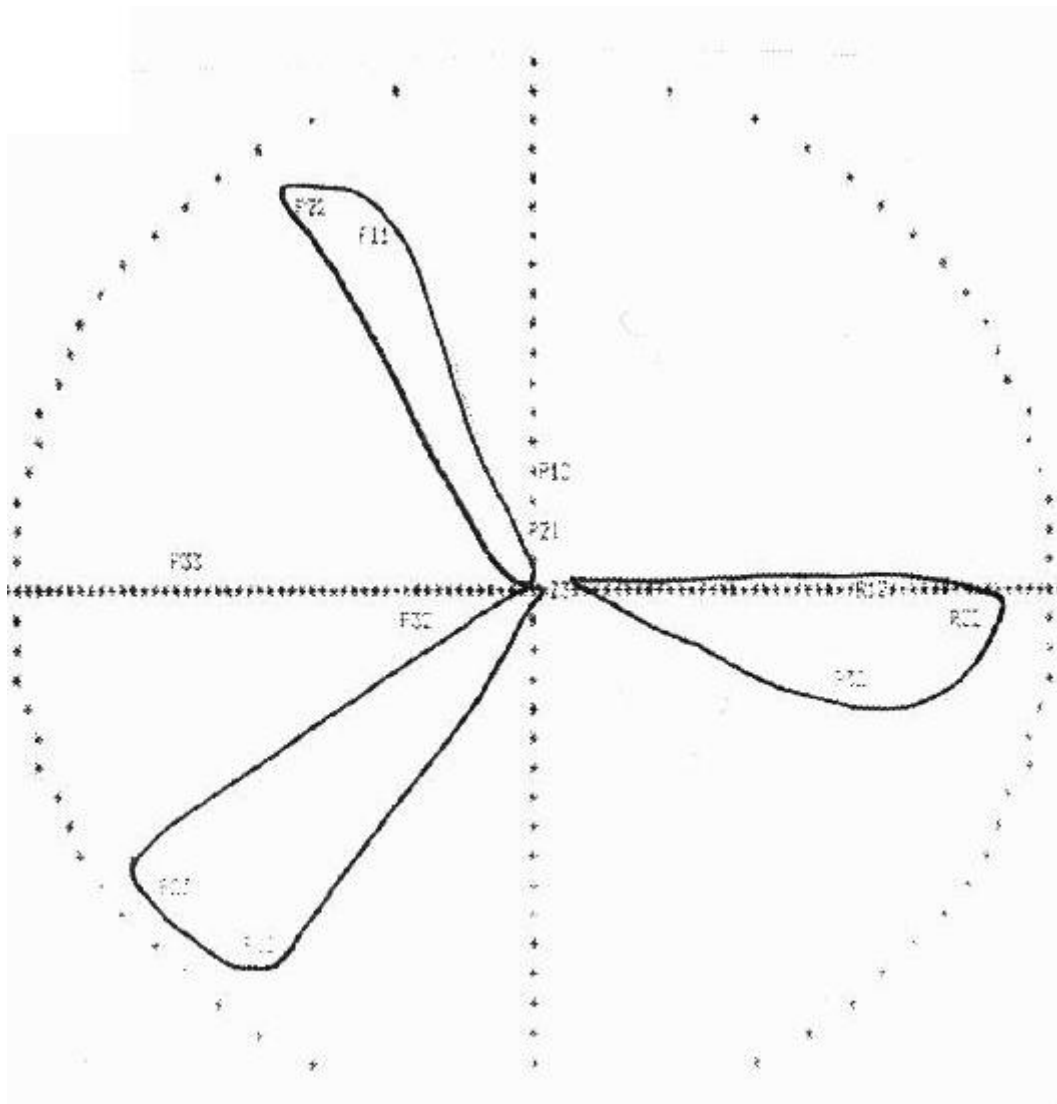
P12 et P32 sont éloignés de P11 et P22.

P33 est éloigné de P23 et P13.

Nous expliquons la place de P12 par le fait que les élèves qui partitionnent dans l'exercice 1 (et qui ne comptent pas) le font pour des raisons liées à la contingence, ce qui ne les caractérise pas vraiment comme partitionneurs. P12 est aussi proche de P22 et P11 que des rangements. P12 ne caractérise pas des partitionneurs.

P32 s'explique de la même façon.

CERCLE DES CORRELATIONS AXES 1-2 :



Pour P33, l'examen des 9 individus montre qu'ils sont tous partitionneurs dans les exercices précédents, mais qu'ils ne font pas la synthèse.

Les individus 1,14,17,38 sont ceux qui provoquent ce décalage. L'étude de leur travail en 3^o exercice montre qu'en fait, ils utilisent une technique mixte faite d'une partition et d'un chaînage. Nous étudierons ce fait dans l'analyse factorielle des correspondances.

ANALYSE FACTORIELLE DES CORRESPONDANCES :

L'apport moyen d'une variable est de 100/12 soit 8,3.

Axe 1 : 20,2 % axe 2 : 16,9%

REPRESENTATION SELON LES AXES 1 ET 2 (voir page suivante).

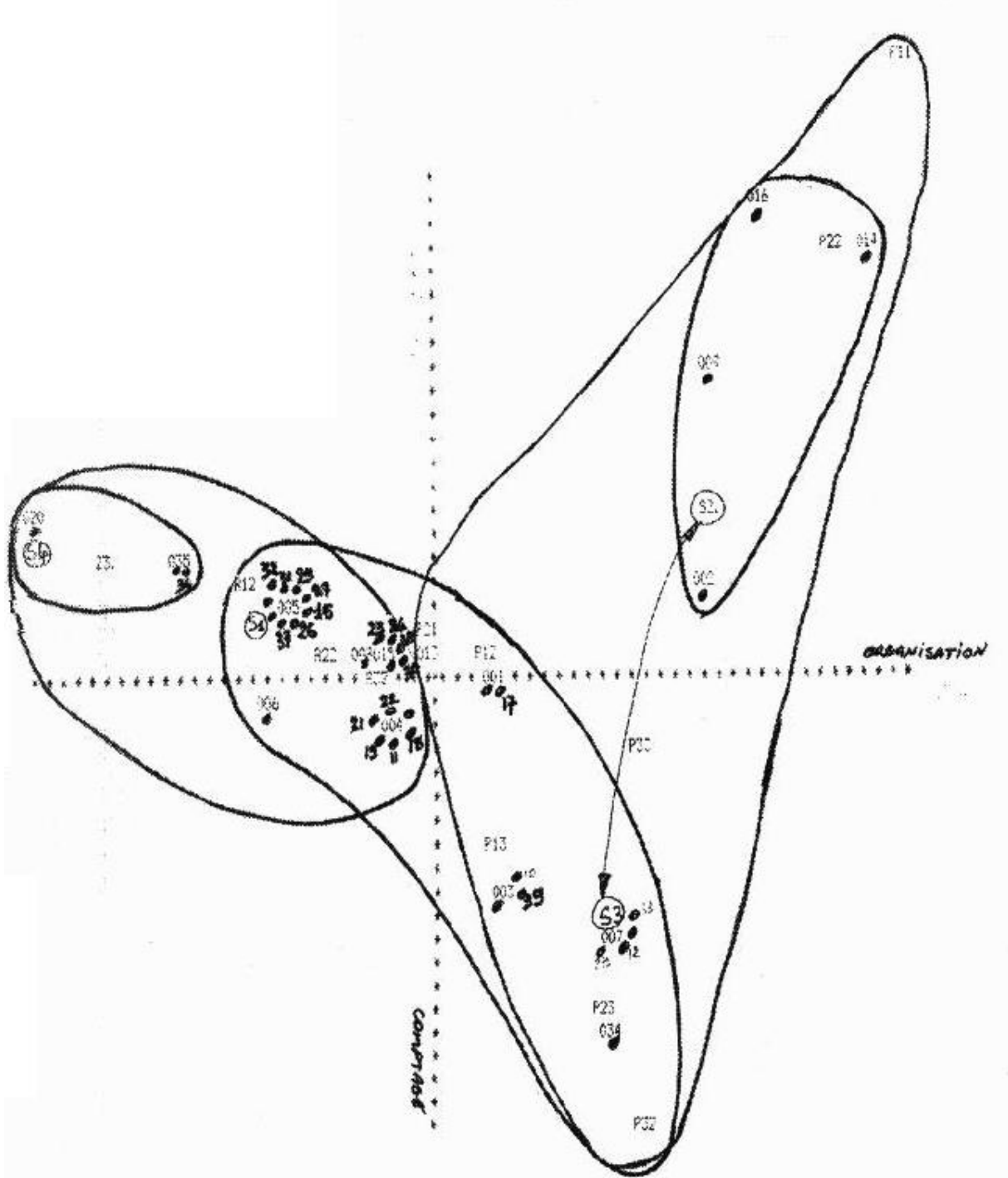
P11, P22, P33 contribuent positivement à l'axe 1, R12 contribue négativement.

P11 P13 P33 contribuent à l'axe 2.

L'axe 1 est l'axe de l'organisation. De gauche à droite, on passe de l'inorganisation à l'organisation. L'axe 2 est celui du nombre. De haut en bas, on passe de l'absence du nombre à la présence.

On retrouve la position de P33 : population d'individus non homogènes (9) dont 5 sont des partitionneurs qui utilisent le nombre dans les trois questions et 4 utilisent le nombre dans la troisième question, mais qui mettent en jeu des structures plus souples dans chacun des 3 exercices. Nous dirons que ces individus s'intéressent avant tout à la structure, mais que les stratégies retenues par notre analyse à priori ne rend pas les individus proches.

REPRESENTATION SELON LES AXES 1 ET 2

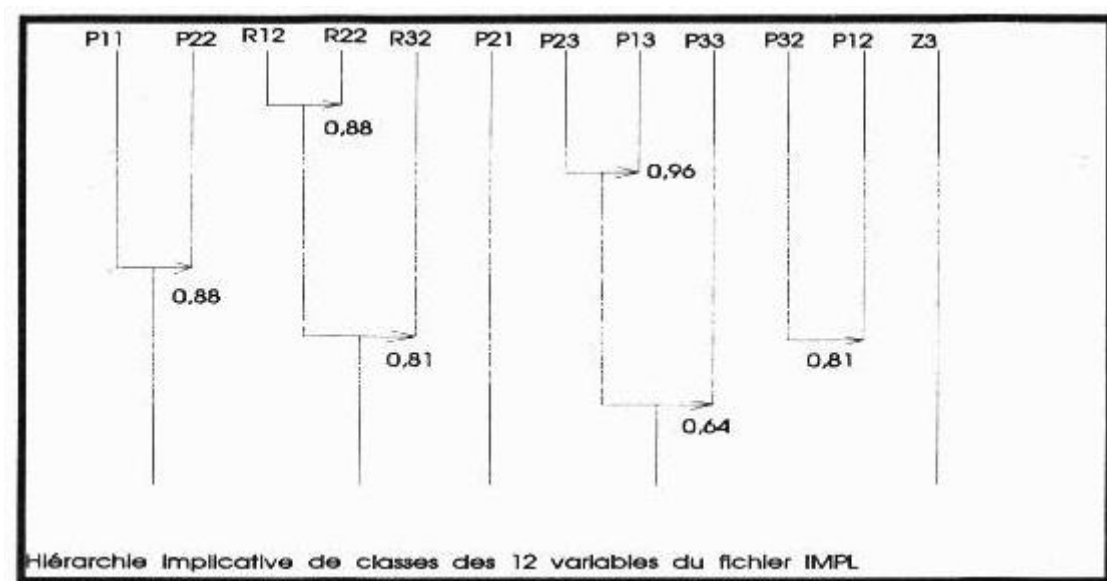


Les individus de P33 constituent une population non homogène qui révèle des stratégies mixtes montrant que ces deux conceptions peuvent se combiner pour produire des comportements à priori atypiques, mais très structurés et cohérents.

Les individus qui font P12 se retrouvent à la position de l'individu 15, c'est à dire proche des rangeurs, ce qui confirme ce que nous avons étudié plus haut. C'est l'exercice qui provoque cet effet. La moitié des P12 (5), sont rangeurs dans les autres questions.

CATEGORIES DE COMPORTEMENTS : MISE EN EVIDENCE PAR L'ANALYSE IMPLICATIVE:

L'analyse hiérarchique implicite va permettre de mieux mettre en évidence les catégories de comportements :



Les individus qui rangent forment un groupe homogène. (Comportements R12 R22 R32)

Les comportements liés aux partitions sont de trois familles :

La famille P11 P22 qui constitue les partitionneurs qui ne font pas usage du nombre (voir dans l'AFC).

La famille des Pi3 (avec le P33 moins caractérisé : voir l'explication déjà faite).

La famille des "faux partitionneurs", c'est à dire des partitionneurs "d'un exercice". (P32 P12).

Les partitionneurs ont plus de difficulté à se situer par rapport au travail demandé.

TYPOLOGIE DES EXERCICES ET CONCEPTIONS DES ELEVES :

P: partition R rangement. (E,C): couple énumération, comptage. NBP : total partitions

N° élève	P ou R en 1	0 ou 1 (E,C)	P ou R en 2	0 ou 1 (E,C)	P ou R en 3	0 ou 1 (E,C)	N BP	Remarques éventuelles
1	P	10	R	10	P	00	2	
2	P	11	P	11	P	11	3	Ecritue additive
3	P	00	P	00	R	00	2	
4	P	00	R	10	R	10	1	En 2 passe de 49 à 60
5	R	10	R	11	R	11	0	
6	P	10	R	00	R	00	1	
7	P	11	P	11	P	10	3	
8					R	10	0	
9	P	10	P	10		00	2	
10	P	10	P	11	R	00	2	
11	P	11	R	11	R	11	1	
12	P	11	P	10	P	10	3	
13	P	11	P	10	R	00	2	
14	P	11	P	10	P	11	3	
15	P	11	R	11	R	11	1	
16	P	00	P	11	R	11	2	
17	P	11	R	00	P	11	2	
18	P	11	R	10	R	00	2	
19	P	10	R	11	R	10	1	
20	R	10	R	10	R	10	0	
21	P	10	R	10	R	10	1	
22	P	10	R	10	R	11	1	
23	P	11	P	10	P	10	3	
24	P	10	R	10	R	10	1	
25	R	11	R	11	R	11	0	
26	R	11	R	11	R	11	0	1 au 3 parce que comptine.
27	R	11	R	11	R	11	0	
28	P	10	R	11	R	10	1	
29	R	11	R	11	R	11	0	
30	P	10	R	11	R	10	1	
31	R	11	R	11	R	11	0	
32	R	11	R	11	R	10	0	
33	P	11	P	11	P	11	3	
34	P	11	P	11	P	10	3	
35	R	10	R	10	R	10	0	
36	R	10	R	10	P	00	1	
37	R	10	R	10	R	00	0	
38	R	00	R	00	P	11	1	
39	P	00	P	11	R	10	2	

COMPARAISON DES EXERCICES : REPARTITION DE L'UTILISATION DES PARTITIONS ET DU CHAINAGE-RANGEMENT :

	partition	rangement
exercice 1	26	11
exercice 2	13	23
exercice 3	10	24

Les exercices 1 et 2 diffèrent significativement : chi-deux de 8,556

Les exercices 1 et 3 diffèrent significativement : chi-deux de 11,8

Les exercices 2 et 3 ne diffèrent pas significativement : chi-deux de 0,33.

Les questions 1 et 3 s'opposent donc. Quelles sont les conséquences chez les élèves :

La situation 1 facilite la stratégie des partitions. La situation 2 et la situation 3 ne facilitent pas les partitions.

Nous allons maintenant examiner le comportement des enfants selon qu'ils sont plutôt partitionneurs ou plutôt rangeurs. Pour l'instant, nous classons ces enfants relativement aux trois exercices. Les trois situations font apparaître deux types de stratégies. Nous n'affirmons pas encore que ces enfants aient une conception ou une autre de l'énumération.

Dans le tableau ci-dessus, nous faisons la répartition suivante : nous considérons comme partitionneurs les élèves qui ont utilisé au moins deux fois la stratégie de partition, et comme rangeurs ceux qui ont utilisé le rangement au moins 2 fois.

Ces deux catégories de comportements forment une partition.

Nous examinons la réussite- échec à l'exercice de ces types d'élèves aux exercices 1 et 3.

	partitionneurs.	rangeurs.
réussite exercice 1	1-2-7-10-11-13-15-17-18-14-23-33-34 effectif : 13	25-26-27-29-31-32 effectif : 6
réussite exercice 3	2-14-15-16-17-33 effectif : 6	4-5-11-22-25-27-31-32-38-29-26 effectif : 11

Le chi-deux est de 3,95 (significatif à .05.)

INTERPRÉTATION :

Dans l'exercice 3, les élèves qui utilisent la partition réussissent plutôt moins bien que les enfants qui rangent. Dans l'exercice 1, les enfants qui rangent réussissent plutôt moins bien que ceux qui partitionnent.

ON CONSTATE DONC UNE "RÉSISTANCE" QUI NE PEUT SE COMPRENDRE QUE PARCE QUE LES ENFANTS ONT UN MODÈLE D'ACTION NON DIRECTEMENT LIÉ À UNE SITUATION DONNÉE MAIS PLUTÔT À UNE FAMILLE DE SITUATIONS.

EN CELA, NOUS POUVONS ALORS AFFIRMER QUE CES DEUX GROUPES D'ENFANTS SONT SIGNIFICATIFS DE DEUX CONCEPTIONS DE L'ÉNUMÉRATION DANS CETTE FAMILLE D'EXERCICES.

RESULTATS DE L'ETUDE :

CONCLUSIONS RELATIVES A LA PREMIERE HYPOTHESE (VOIR PAGE 131).

LES INDIVIDUS SE RÉPARTISSENT EN DEUX GROUPES STABLES QUELQUESOIT LES EXERCICES :

- UN GROUPE HOMOGÈNE D'INDIVIDUS QUI CONÇOIVENT PLUTÔT L'ÉNUMÉRATION CHAÎNAGE COMME TECHNIQUE DE BASE.
- UN GROUPE PLUS DISPERSÉ D'INDIVIDUS QUI PARTITIONNENT.
- DEUX GROUPES QUI MONTRENT DEUX CONCEPTIONS DE L'ENUMERATION DANS CETTE SITUATION. (PAGE 144)

CONCLUSIONS RELATIVES A LA DEUXIEME HYPOTHESE (VOIR PAGE 132).

LES INDIVIDUS QUI EFFECTUENT UN CHAÎNAGE SONT DES INDIVIDUS QUI COMPTENT. LE CHAÎNAGE EST UNE ÉNUMÉRATION CONSÉCUTIVE AU COMPTAGE.

CONCLUSIONS RELATIVES A LA TROISIEME HYPOTHESE (VOIR PAGE 132).

NOUS AVONS REPÉRÉ DES INDIVIDUS QUI CONÇOIVENT L'ÉNUMÉRATION PAR PARTITION DE L'ENSEMBLE. NOUS CONSTATONS QUE CETTE POPULATION EST PLUS DISPERSÉE RELATIVEMENT AU COMPTAGE. LA PRODUCTION DE LA PARTITION SEMBLE BIEN CONSTITUER UN OBSTACLE À LA MISE EN OEUVRE DU COMPTAGE DANS LE CADRE DE CES EXERCICES. LES INDIVIDUS QUI PARTITIONNENT SONT SÉPARÉS PAR LEUR RAPPORT AU COMPTAGE FINAL, CE QUE LE COÛT ÉTUDIÉ DANS L'ANALYSE À PRIORI LAISSAIT PRÉVOIR.

COMMENTAIRES :

Cette conclusion pose un réel problème pour l'enseignement du nombre. Une énumération féconde pour la construction de la numération et de l'addition ne constitue pas la stratégie la plus performante pour effectuer le comptage. Or c'est le comptage qui est demandé. Il y a ainsi des risques à voir des enfants ne pas s'investir dans l'exploration de type partition parce que cette exploration ne constitue pas une solution efficace dans l'immédiat du cours préparatoire.

3.4.4.2. ETUDE COMPLEMENTAIRE : ANALYSE DETAILLEE DES STRATEGIES :

3.4.4.2.1. STRATEGIE OBSERVEES EN EXERCICE 1 :

Voici les familles de stratégies observées :

Exploration ligne par ligne sans s'occuper de la nature des objets. (Conception de la promenade.)

Exploration ligne par ligne, chaque ligne est considérée comme un paquet. (Conception des paquets-ligne).

Exploration ligne par ligne en s'occupant de la nature de l'objet : l'enfant "saute" alors l'animal qui n'est pas concerné par le dénombrement en cours. De fait, l'exploration sera conduite en deux temps. (Conception des promenades par paquets).

Constitue une partition de l'ensemble qui tient plutôt compte de la structure topographique. (Conception des paquets suivis de la promenade.)

Constitue une partition de l'ensemble qui tient plutôt compte des deux catégories d'animaux. (Conception des paquets-propriétés suivis de la promenade).

Constitue une partition selon un autre classement. (Conception des paquets, suivis de la promenade).

3.4.4.2.2. STRATEGIES OBSERVEES EN EXERCICE 2 : (associons les stratégies à celles de l'exercice 1).

Exploration ligne par ligne (conception de la promenade.)

Exploration ligne par ligne, chaque ligne est considérée comme un paquet. (Conception des paquets-lignes).

Constitue une partition de l'ensemble qui tient plutôt compte de la structure topographique. (Conception des paquets suivis de la promenade.)

Constitue une partition selon un autre classement. (Conception des paquets, suivis de la promenade).

3.4.4.2.3. STRATEGIES OBSERVEES EN EXERCICE 3 :

Prendre un par un, directement : dans cette catégorie, nous avons repéré deux catégories de comportements non pris en compte dans l'analyse à priori:

La première se fonde sur le marquage-nombre. La suite croissante des nombres sert de marquage objet par objet et permet ainsi le contrôle de l'exploration.

La deuxième est la mise en place, à priori du comptage, d'une "piste" matérialisée par un trait continu. Le comptage ne vient qu'après. (Voir le cas MELISSA page 150).

Ces deux catégories ne sont pas exclusives. Nous illustrons ci-après, à l'aide du travail de MATHILDE (page 147) comment ces deux comportements peuvent entrer en conflit.

Dans chacune de ces deux catégories, on observe des modes d'exploration de la collection liés à la contingence : par exemple, plusieurs enfants se servent de la notion de bordure pour démarrer l'exploration de la collection : un premier élément est pris sur le bord de la collection. L'élément suivant est pris d'une part proche du premier, d'autre part sur le bord. Cette stratégie, si elle est doublée d'une méthode de marquage ou de chaînage conduit à l'exploration "en escargot", parce qu'une fois un tour effectué, ce sont les objets déjà marqués ou chaînés qui constituent à leur tour le bord de la collection.

Classer puis ordonner les classes : dans cette catégorie, nous distinguons trois types :

Le comptage est prioritaire : la constitution de classes s'effectue à partir du projet de "faire des paquets de ". On y distingue plusieurs stratégies : certains enfants (ALEXANDRE (observation du 4-02-93, chez MHL.) constituent des paquets de n éléments. Ils se fixent le n . (ex : cardinal type 4 ou 5, ou les deux.).

Mais ce contrôle numérique peut être aussi effectué par un marquage de chaque élément : ARNAUD (observation du 5-02-93, chez CD.).

Les objets priment : constitution de classes à partir de réunion d'objets (réunion, entourages).

La topographie prime : constitution de classes à partir de réalisation de frontières (barrières) : l'enfant parle alors de "partie" de "moitié", de partage : CHRISTIAN (observation du 4-02-93, chez MHL.).

3.4.4.2.4. TECHNIQUES D'ENUMERATION ET DIFFICULTES RECENSEES:

Le chaînage : consiste à commencer par un élément de l'ensemble, dessiner un lien entre celui-ci et un suivant et répéter le processus jusqu'à ce que toute la collection soit explorée.

Nous allons montrer que le chaînage est une technique qui s'apprend (nous avons repéré des difficultés de conception), que cette technique est parfois utilisée pour déboucher sur un partitionnement et que chaînage et partition peuvent entrer en conflit :

Le chaînage est en phase de construction chez certains enfants : par exemple , DAMIEN (observation du 4-02-93, chez MHL.) pense chaîner les objets, mais n'est pas satisfait de son chaînage qui n'ordonne pas totalement la collection. Interrogé sur son travail , DAMIEN dit : "je fais pas le rang". DAMIEN conçoit donc les contraintes de la situation, mais des difficultés de nature topographique s'opposent à la réalisation effective du chaînage. La conséquence est qu'il ne pourra effectuer le dénombrement.

Le chaînage peut être conduit sur toute la collection ou être local. CLAIRE et EUGENIE (observation du 4-02-93, chez MHL.) effectuent un chaînage de la collection comme moyen de constituer une partition.

La technique du chaînage peut entrer en conflit avec le partitionnement à cause du comptage : par exemple, EUGENIE (observation du 4-02-93, chez MHL.) utilise le chaînage pour constituer des paquets. Dans une chaîne bouclée, l'enfant compte deux fois l'élément d'où il est parti et sur lequel, fatalement il termine.

Le marquage consiste à laisser une trace sur ou à côté de l'objet qui vient d'être pris en compte.

Certains enfants (JULIETTE) effectuent un marquage des objets sans se préoccuper du comptage. Ils arrivent ainsi à marquer tous les objets de la collection. Arrivés à ce stade, il prennent conscience de l'insuffisance de la tâche accomplie. Ils recommencent en utilisant un autre signe de marquage. Cet échec signifie bien que l'enfant conçoit une tâche nécessaire au comptage. Celle-ci prend même tellement de place que la tâche finale est perdue de vue.

D'autres enfants effectuent un travail prévisible : ils font une marque après avoir énoncé le successeur dans la suite des nombres. L'action est synchronisée. La fonction successeur de l'énumération est du type "est proche de".

D'autres enfants se servent directement du marquage numérique : ils marquent un nombre à chaque élément de la collection. Le nombre joue le double rôle de marque (pour ne plus y revenir) et de mémoire (pour désigner le successeur). Apparemment, cette méthode paraît clairement explicitée.

L'énumération est définie par la fonction "successeur de" construite de la façon suivante : y est successeur de x si y n'a pas déjà été choisi.

Mais examinons le cas de MATHILDE : MATHILDE (observation du 4-02-93, chez MHL.) marque chaque élément par un nombre. On peut donc penser que si la comptine est maîtrisée, le dénombrement sera réussi. Or MATHILDE s'arrête à 35 et dit "je ne peux pas mettre le 36 parce que cela peut être là ou là". En fait, MATHILDE travaillait sur un chaînage qu'elle marquait par la suite des nombres. Le fait d'avoir deux choix possibles pour mettre 36 l'empêche de poursuivre. Ainsi, malgré les apparences, c'est un contrôle topographique par chaînage qui est sous-jacent. L'écriture des nombres permet de contrôler le comptage sur le chaînage, mais ne fonctionne pas comme contrôle de passage. L'énumération est fondée sur une fonction "successeur de" : y est successeur de x si y n'a pas déjà été choisi et si y est proche de x..

Les entourages ou séparateurs d'une famille d'objets. Cette méthode est uniquement présente dans les stratégies de classification.

(CHRISTIAN (observation du 4-02-93, chez MHL.) partage, par séparation en plusieurs classes. Il effectue ensuite le comptage un à un par classe.

Les marquages doubles : appartenance à la classe et désignation de la classe :

(MAUD (observation du 4-02-93, chez MHL.), marque chaque élément d'une classe par un signe. Elle travaille sous contrôle numérique. Elle effectue des paquets de 8, mais tel paquet de 8 sera marqué, élément par élément d'un signe qui le distingue des autres éléments.

Énumération indirecte : Comptabilité finale des cardinaux de chaque classe :

Les enfants qui ont partitionné et marqué le cardinal de chaque classe (l'opération peut être conduite simultanément ou séparément) se divisent en deux catégories. Ceux qui prévoient l'énumération des nombres (ils disposent les nombres à part) et ceux qui ne prévoient pas : ceux-ci écrivent le nombre à côté de la classe concernée.

Des enfants entourent d'abord et ne se préoccupent pas de tenir la comptabilité pour chaque classe constituée. Ainsi, des enfants travaillant de façon très organisée sous contrôle numérique "faire des paquets de 5", mais qui ne marquent pas les 5 au fur et à mesure, n'ont plus la possibilité de produire une énumération des paquets ou bien commettent des erreurs. D'où des oublis du 5 dans la suite additive. Dans le domaine étudié dans le cadre de notre observation, les enfants peuvent énumérer les classes parce qu'elles sont dans un domaine de contrôle que nous qualifions de proche de la perception globale. Certains enfants sont toutefois très hésitants sur la façon d'explorer ce nouvel ensemble.

Nous avons remarqué une stratégie "mixte" utilisant le chaînage des classes : (ALEXANDRE (observation du 4-02-93, chez MHL.) constitue des paquets de 5 reprend le comptage de 1 à 40 en passant de classe en classe par des liens qu'il a construits au préalable.

Comptabilité nécessitant une énumération des classes : cette énumération s'appuyant sur un travail préalable de désignation des classes :

Les stratégies de mise en place des classes peuvent faciliter l'énumération des classes. Nous avons vu ci-dessus comment MAUD (observation du 4-02-93, chez MHL.), tient une comptabilité des paquets. Au moment d'énumérer les classes, le signe de chaque classe vient ici comme moyen d'énumérer dans un ensemble quotient simple puisque déjà désigné.

3.4.4.2.5. ANALYSES COMPLÉMENTAIRES :

RAPPORT DES ENFANTS A LA TÂCHE A EFFECTUER :

Nous avons disposé l'exercice 2 et l'exercice 3 côte à côte et avons demandé quel était l'ensemble pour lequel le nombre était "le plus facile à trouver". Nous analysons les réponses ci-après.

Nous faisons l'hypothèse qu'une structure "montrée" pouvait avoir une influence pour la constitution d'une structure sur un ensemble amorphe.

Les réponses à la question sur la facilité montrent que ceux-ci ont bien compris la difficulté, mais les stratégies de contrôle utilisées dans l'exercice 3 sont objectivement différentes des stratégies des exercices 1 et 2.

Donc, tous les enfants reconnaissent la nature différente de la tâche à accomplir entre l'exercice 2 et l'exercice 3.

Interrogés, ils disent de façon massive "c'est plus dur parce qu'il y en a plus", ou/et "c'est plus dur parce que ce n'est pas rangé".

A la question "comment faudrait-il ranger ?", ils répondent souvent : il "faut faire des paquets", alors que leur travail dans l'exercice 3 montre qu'il ne font pas toujours des paquets. Ainsi la réponse "il faut faire des paquets" peut être considérée comme une réponse de circonstance dans le cadre scolaire. Les paquets ne sont pas toujours mis en œuvre dans l'instant qui suit.

LA CONFUSION ENTRE EXPLORATION ET COMPTAGE : OBSTACLES A L'EMERGENCE DE L'ENUMERATION.

Certaines activités de comptage observées en cours préparatoire montrent une pratique scolaire courante dont nous allons analyser les effets : il s'agit de productions de suites additives très longues et constituées de petits nombres.

La maîtresse propose aux enfants "d'écrire le nombre de ronds" (il s'agit d'une collection de ronds dessinée). Dans le contrat de la classe, on peut écrire une suite additive. Les enfants partagent donc la collection en classes contenant peu d'objets (< 10 en général). En effet, les enfants du CP utilisent plus facilement les nombres :

- pour lesquels il n'y a pas de difficulté de pointage lorsqu'il faut compter une collection (donc proches de la perception globale, et un peu plus : nous pensons jusqu'à 10).
- qui ne mobilisent pas trop l'attention au niveau de la comptine.
- pour lesquels le passage de l'oral à l'écrit ne pose pas de problème.

Les enfants qui effectuent de petites classes pour pouvoir écrire rapidement des petits nombres répondent à l'exigence de l'institution. Ce faisant, ils produisent une écriture additive longue. Mais comme l'enseignement a séparé l'enjeu d'écrire le nombre et l'enjeu de réduire l'écriture de celui-ci, l'économie totale du système ne peut être l'objet d'un enjeu à ce moment.

ENUMERATION PRODUCTRICE D'UNE SUITE ADDITIVE ET EFFETS D'UNE DEMANDE DU SYSTEME :

Les élèves qui écrivent une suite additive doivent effectuer une énumération construite de la façon suivante :

- 1- Une mise en place d'une partition tenant compte de ses propres capacités à compter.
- 2- L'écriture cardinale de chaque classe. Nous avons constaté que cette écriture se fait soit en même temps que la constitution de la classe, soit après et que les nombres sont écrits soit à côté de la classe, soit à côté de la collection.
- 3- la constitution de la suite additive. Dans les deux cas, mais d'une façon différente, l'élève doit alors conduire une énumération d'une suite de nombres afin de constituer la suite additive. L'énumération est d'autant plus lourde que la quantité de nombres est importante et l'écriture dispersée sur la feuille.

Donc toute activité d'énumération incluse dans une activité de comptage va être assujettie à ce choix. En cela, nous pouvons dire que le comptage, ou plutôt les connaissances disponibles du comptage à ce moment de la scolarité constitue un frein à une exploration des collections.

Le résultat majeur est la prolifération de messages additifs longs, constitués de petits nombres. Les enfants semblent produire le message additif final en réponse à une demande scolaire. Nous avons un autre indice qui nous permet d'avancer cette affirmation : dans notre observation, les enfants qui partagent la première collection (fourmis pingouins) en deux classes perdent de vue la question posée. Lorsqu'on leur rappelle la question, "Tu as 31 pingouins et 18 fourmis : comment peux-tu écrire le nombre total d'animaux ?" ils ne comprennent pas. (Un enfant sur 40):

On peut donc s'interroger sur les conditions dans lesquelles les productions additives apparaissent. Il semble qu'elles soient plus le résultat d'une demande scolaire que la solution à un problème d'écriture de nombre.

Si nous revenons maintenant sur les enfants qui pratiquent simultanément le chaînage et le comptage, nous constatons que l'activité d'exploration de la collection se trouve freinée par le comptage. Cette remarque tombe sous le sens. Mais les enfants ne s'affranchissent pas facilement de cette difficulté. L'exemple de MELISSA (observation du 5-02-93 chez CD) est significatif de la découverte à faire : MELISSA mène de front comptage et tracé, se fatigue et dit alors : "je vais d'abord faire la promenade et, après, je compte". Ceci constitue une découverte pour elle. Cette découverte lui fait affirmer que l'exercice 3 est plus simple que le 2 (ce qui est contraire à ce que disent les autres enfants). Je lui demande les raisons de cette opinion. MELISSA répond : "Maintenant, c'est facile. On fait la promenade".

Ainsi, l'activité de dessin d'un chaînage en vue du comptage pourrait constituer un projet dans un exercice. Cela constituerait un bon point de départ pour débattre d'organisations d'exploration de collections.

CONCLUSION :

Dès les premiers travaux de recherche et de codage du cardinal d'une collection, (suite additive ou écriture du nombre), la confusion entre l'action d'organiser la collection et celle de compter freine l'émergence d'énumérations et de débats qui pourraient y être attachée.

3.4.4.2.6. LES ENUMERATIONS : OBSTACLE AU COMPTAGE :

Certains enfants emploient des énumérations qui ont pu fonctionner dans l'exercice 2 et qui sont difficiles à mettre en œuvre dans l'exercice 4. Par exemple, le chaînage va supposer la connaissance de la suite numérique jusqu'à la fin de l'exploration. Beaucoup d'enfants qui ont mis en œuvre cette énumération ne réussissent pas à produire une écriture numérique juste :

Plus généralement, toute énumération directe dans une tâche de comptage implique par principe un travail de comptage fastidieux.

Nous pouvons constater qu'aucun enfant ne marque de repères pour pouvoir s'arrêter dans le comptage des éléments chaînés. On voit bien qu'il suffirait de marquer, par exemple, 26 au pied du 26^e élément pour continuer, éventuellement en repartant de 1 pour pouvoir, finalement produire une suite additive.

A aucun moment cette stratégie n'est apparue (le travail d'ARNAUD observation du 5-02-93 chez CD est une manifestation de ce problème : ARNAUD me dit qu'il ne sait compter que jusqu'à 29. Aussi, lorsqu'il a chaîné 29 objets, il marque le point d'arrêt. A partir de cela, je lui suggère de continuer, mais ARNAUD ne comprend pas que l'on puisse interrompre la tâche numérique : on retrouve le problème de la non-effectivité du codage additif comme moyen d'écrire le nombre d'éléments de la collection..

3.4.4.2.7. REMARQUE SUR DEUX EFFETS SCOLAIRES :

L'effet des mots inducteurs : si l'on demande de trouver le nombre, nous avons acquis la conviction que cette demande "interdit" les classifications, puisque celles-ci aboutissent à "des nombres". Cette hypothèse est facilement vérifiée puisque les enfants font la différence entre le "grand nombre" et "les nombres".

L'enseignement du marquage :

- Dans la classe de MHL très peu d'enfants effectuent le marquage des objets pour les exercices 1 et 2, Un peu plus en 3. Dans cette classe, les enfants n'ont pas encore travaillé sur des fiches. Le marquage est donc une production personnelle.

- Les enfants de la classe de CD effectuent des marquages. Cette technique a été enseignée. La conséquence, nous l'avons vue, est que certains enfants (EMILIEN, ROXANE, et LYOD) marquent les objets des collections et estiment avoir terminé après avoir colorié les animaux. On retrouve ainsi, pour une énumération, les effets de l'enseignement.

COMMENTAIRES DE SYNTHÈSE ENTRE L'ÉTUDE DE L'OBSERVATION DU COURS PRÉPARATOIRE ET LES ÉTUDES DE CAS :

La majorité des exercices proposés en début de cours préparatoire rend la technique du chaînage immédiatement plus efficace. Or, la construction du nombre et de l'addition requièrent le partitionnement comme stratégie d'énumération.

Les enfants conçoivent l'exploration d'une collection de plusieurs façons. Nous avons mis en évidence deux grandes familles (chaînage et partitionnement) dans le cadre d'exercices fréquemment posés en cours préparatoire.

Il est permis alors de se poser les questions suivantes :

Le temps pendant lequel l'énumération de type chaînage constitue une stratégie plus immédiatement efficace provoque-t-il une démobilité d'autres énumérations ?

Si ce temps était réservé à la mise en concurrence de pratiques énumératives (et donc à l'étude du partitionnement), les enseignants auraient-ils d'autres perspectives pour la construction de situations d'apprentissage des groupements par paquets ?

Dès à présent, nous proposons des projets possibles pour modifier ce "premier temps du nombre ". Nous proposons, en particulier une situation modélisée sur ordinateur. Voici quelques pistes de réflexion :

3.4.4.2.8. PROJETS POSSIBLES POUR L'ENSEIGNEMENT :

Dès à présent, les observations que nous avons conduites nous permettent de proposer, dans ce cadre scolaire, des pistes permettant de construire des situations. Ce sont :

Des activités liées à l'énumération, indépendamment du comptage :

- Prendre en compte, dans la classe, les problèmes de marquage. (Nous avons vu qu'il faut construire des situations adéquates.). Nous proposons dans le logiciel CALAPA, une possibilité de marquer les objets, ce qui n'existait pas dans la version que nous avons mise au point pour notre DEA. Toutefois, dans notre logiciel, le marquage s'exerce sans que l'enfant l'ait décidé. Il faudrait s'assurer que ce marquage à la charge du logiciel peut être pris en compte dans un débat comme moyen de modifier significativement la réussite dans une exploration d'une collection.

-Dissocier l'activité d'énumération de celle du comptage : demander à des enfants de préparer une collection afin que d'autres puissent la compter le plus rapidement et le plus sûrement possible.

Des activités liées à l'énumération en situation de comptage :

- proposer une liste avec un marquage interrompu. Comment faire pour ne pas avoir à recommencer dès que l'on est interrompu. Il y aurait là un travail qui pourrait lier l'aspect

ordinal (le dernier qui a été compté) et l'aspect cardinal (cela permet de retrouver le nombre d'objets que l'on a déjà comptés.). Par exemple, un comptage a été interrompu à 32. Que fait-on pour poursuivre ? On passe à 33, on passe à 1, que fera-t-on des résultats ?

Ce type d'activité pourrait être le moyen de construire une situation qui permettrait de passer du chaînage-comptine à la classe-écriture additive.

-proposer une collection dans laquelle, un marquage numérique mettrait en évidence, par exemple, 3 suites de nombres. L'enfant aurait alors à contrôler si ces suites sont bien des sections commençantes de N et si tous les objets ont été concernés une fois. Le poids du comptage diminuerait au profit du poids de l'énumération.

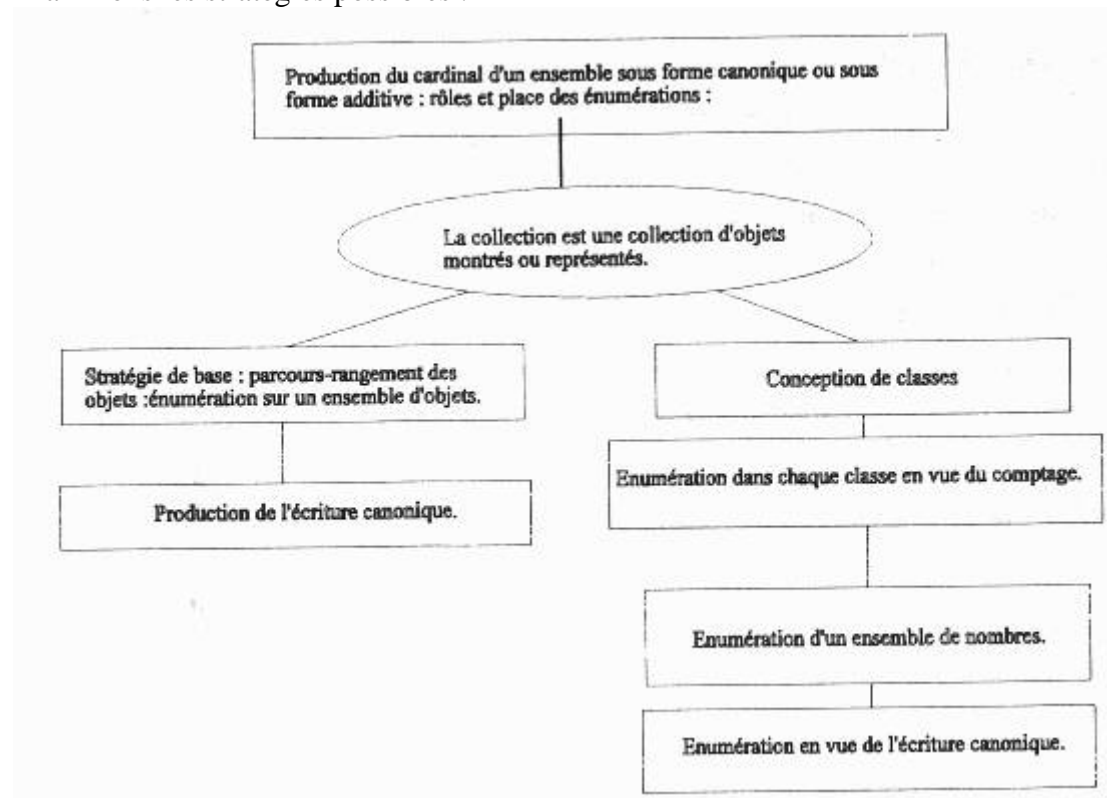
-proposer une situation d'exploration d'une collection qui rende nécessaire un contrôle d'un partitionnement. Ce type de situation n'est jamais proposé en cours préparatoire. On retrouve les traces de telles activités dans les chapitres dits "de logique"⁸² bien plus tard, en classe de seconde (programme de 1970).

Nous proposons une situation a-didactique dont la solution passe par un contrôle d'une partition d'un ensemble. Il s'agit de la situation décrite page 226 et modélisée sous forme de logiciel (VISUAL).

3.4.4.2.9. ESSAI D'ETUDE DU COUT DES DEUX CONCEPTIONS REPEREES:

Dans le cas des exemples vus lors de l'observation du cours préparatoire, lorsqu'un élève doit produire le nombre d'éléments d'une collection, il doit, de toute façon à un moment ou à un autre, effectuer une procédure d'énumération de cet ensemble.

Examinons les stratégies possibles :



⁸² Nous reviendrons sur l'utilisation qui est fait du qualificatif de "logique" aux exercices dans lesquels il s'agit d'énumération...mais il manquait une étiquette.

Lorsqu'il s'agit de dénombrer une collection, l'élève doit produire une énumération de base s'il utilise le rangement, deux énumérations s'il produit une partition et une suite additive, trois énumérations s'il conduit l'option partition jusqu'à l'écriture canonique.

Nous avons déjà analysé le comportement d'élèves qui produisent des classes simples à dénombrer, mais qui produisent une suite additive très longue. L'évaluation du coût du comptage pour chacune des deux stratégies décrites ci-dessus doit tenir compte des trois énumérations lors du partitionnement. Le partitionnement, pour être choisi de façon personnelle (et non comme rituel), suppose une conception du nombre déjà plus élaborée (une suite additive issue d'un partitionnement produit-elle le même bilan qu'une autre suite additive issue d'un autre partitionnement de la même collection ?) que le comptage un à un, seule contrainte pour la conception du rangement.

La question est : est-il plus coûteux de procéder en trois étapes énumératives ? La réponse à cette question nécessiterait de définir la notion de coût dans une activité de ce type, ce que nous n'avons pas abordé.

Pour envisager une telle question, il faudrait se fonder sur la définition de l'énumération que nous avons construite et qui se sert des fonctions "successeur" en jeu. Le coût est certainement un équilibre entre la conception de l'énumération et la réalisation effective de celle-ci.

3.5. PREMIERES ECRITURES DU CARDINAL D'UNE COLLECTION :

Nous allons maintenant observer le rôle de l'énumération dans la construction des tous premiers nombres. Pour cela, nous reprendrons et poursuivrons le travail effectué lors de notre DEA. Mais avant, revenons sur une façon fréquente d'exposer la genèse des nombres :

DES EXPLORATIONS QUI N'EN SONT PAS :

Revenons sur cette conception "primitive" du nombre et sur la façon dont elle est parfois décrite :

Citons André WARUSFEL⁸³ :

"Tout le monde connaît par cœur, la fable "le corbeau et le renard" :

*Maître corbeau, sur un arbre perché,
Tenait en son bec un fromage,
Maître Renard, par l'odeur alléché,
Lui tint à peu près ce langage..."*

Au lieu de déposer un caillou à chaque fois qu'un mouton passe devant nous, nous pouvons prononcer un mot de la fable et retenir le dernier mot sur lequel nous nous sommes arrêtés. Pour évaluer les jours de la semaine, nous finirions notre énumération sur "tenait", pour les doigts de la main, sur "bec", etc. Le dernier mot symbolise, pourrait-on dire, l'importance de la collection que nous explorons, c'est encore compter."

L'auteur parle d'exploration (*collection que nous explorons*) de la collection alors que c'est la situation qui gère cette exploration (*à chaque fois qu'un mouton passe devant nous*). Dans cette situation l'énumération n'est pas à la charge du sujet.

Nous avons déjà étudié page 90 cette ignorance de l'activité d'énumération, de mesure effective de la collection y compris dans l'analyse faite par BRISSIAUD de nos travaux de 1985.

3.5.1. CONSTRUCTION D'UNE SITUATION A-DIDACTIQUE DU NOMBRE LAISSANT L'ENUMERATION A LA CHARGE DU SUJET :

Nous avons construit une situation a-didactique de la construction du nombre. Nous décrivons cette situation de façon détaillée dans le chapitre ingénierie page 236.

3.5.1.1. ANALYSE DE LA PLACE DE L'ENUMERATION DANS CETTE SITUATION

:Un scénario possible permet de faire formuler une information numérique par la production de messages écrits .

Rappelons que dans ce logiciel, un enfant a sous les yeux une collection (d'animaux). Il doit laisser un message écrit à un autre enfant afin que celui-ci puisse appeler autant d'éléments (des barques) qu'il y avait d'animaux à l'écran. Cet enfant émetteur (appelé écrivain par

⁸³ « Les nombres et leurs mystères » collection microcosme éditions du Seuil 1961.

référence au travail de J. PERES) voit donc des animaux sur l'écran. Il produit un message. Avant de laisser son message, il fait disparaître les animaux. Le récepteur (appelé lecteur) lit le message et en tire les informations qu'il juge nécessaires pour appeler les barques.

Étudions la stratégie d'un enfant qui passe de la collection des animaux à l'écriture de type :



Cet enfant remplace, en vue d'un dénombrement ultérieur, une collection en ostension par une liste symbolique. Ce travail d'écriture est le produit du passage en revue de la collection, (c'est à dire l'énumération première), et d'une nécessité de mémoriser. (Les objets disparaissent). Le résultat est le dénombrement rendu possible. La situation est validée par contrôle du dénombrement.

Examinons les stratégies possibles :

Les stratégies sont classables en deux familles :

- celles qui font appel à la correspondance un à un : l'énumération de la première collection doit être synchronisée avec la production d'un signe de la liste symbolique.
- celles qui font appel à la comptine : l'enfant mesure la première collection et produit une collection équipotente. Dans ce cas, l'énumération de la première collection doit être synchronisée avec la comptine.

C'est en général ce que remarquent les auteurs (voir ci-dessus) en omettant les énumérations nécessaires.

En conclusion, ce qui différencie les deux stratégies est la dépendance entre une énumération (de nature spatiale) et une production de signes ou une synchronisation avec la liste des mots-nombres.

3.5.2. OBSERVATION D'UNE SITUATION MODELISEE PAR LE LOGICIEL "BARQUES" (RAPPEL DU D.E.A.) :

Pour étudier cette activité, nous observons les productions écrites d'enfants de grande section de maternelle. (Juin 85, 27 élèves.)

Dans l'annexe, figurent les messages des enfants émis lors de l'activité de dénombrement réalisée à l'aide du logiciel "BARQUES".

L'activité consiste donc à laisser un message écrit permettant d'appeler autant de barques qu'il y avait de lapins à l'écran. L'émetteur (appelé écrivain par référence au travail de J. PERES) voit donc des lapins sur l'écran. Il produit un message. Avant de laisser son message, il fait disparaître les lapins. Le récepteur (appelé lecteur), à la lecture du message, appelle les barques.

Les productions écrites des enfants (voir annexe) se classent de la façon suivante :

Type de message		Rapport à l'énumération
Utilisation de signes en référence au numérique ou à l'alphanumérique, sans signification apparente pour l'émetteur.	2	aucun en apparence
Utilisation de signes sans référence au numérique, sans signification apparente dans la situation.	1	aucun en apparence
Dessins de barques dont la disposition sur la feuille de papier est exactement celle des lapins sur l'écran.	6	Énumération-synchronisée avec production de signes : contrôle par conservation de l'organisation spatiale de la première collection.
Dessins (bâtonnets) dont la disposition sur la feuille de papier est exactement celle des lapins sur l'écran.	2	Énumération synchronisée avec la production d'une collection symbolique (par correspondance terme à terme) contrôle par conservation de l'organisation spatiale de la première collection.
Barques stylisées représentées alignées horizontalement.	5	énumération synchronisée. Reproduction par identité des images. Abandon de l'organisation spatiale de la collection d'origine.
Signes alignés verticaux ou horizontaux.	4	énumération-synchronisée. Production d'une collection symbolique. Abandon de l'organisation spatiale de la collection d'origine.
Suite alignée de nombres ou de lettres, comme s'il s'agissait d'une suite quelconque de signes.	3	énumération-synchronisée. . Production d'une collection symbolique. Abandon de l'organisation spatiale de la collection d'origine.
Nombre seul en graphie correcte ou en miroir.	4	énumération -comptage.

Sur 27 élèves travaillant une situation de dénombrement, 3 seulement n'énumèrent pas, mais l'origine de l'échec vient peut-être de la tâche à effectuer (écrire un message).

8 reproduisent la disposition de la collection vue à l'écran. Ils dessinent des barques (et non des lapins), ce qui prouve la compréhension de la situation.

L'énumération synchronisée avec une production graphique est dominante. Le comptage est le moyen de différer le dessin.

L'énumération est une activité que les enfants maîtrisent bien. Il faut toutefois conclure prudemment. En effet, la collection des animaux est présentée seule et non mêlée à d'autres collections. La situation a-didactique modélisée par notre logiciel permet de travailler sur cette variable, mais nous n'avons pas étudié son effet sur la réussite à l'énumération.

Mais le logiciel que nous avons construit ne permet pas de gérer très finement l'organisation spatiale de la collection. C'est sans doute un point faible de la situation a-didactique. Nous nous fondons sur une autre observation pour mettre en avant cette remarque :

Nous avons réalisé une observation en grande section de maternelle que nous relatons maintenant.

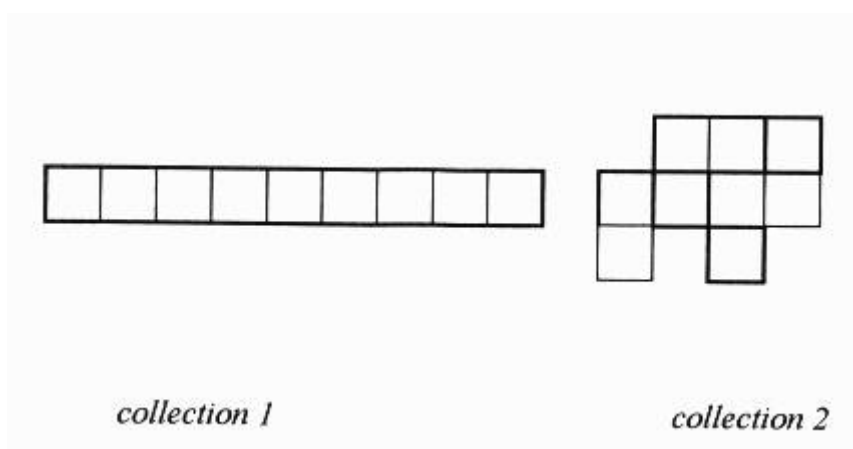
3.5.3. LES CUBES :

En grande section de maternelle, nous avons observé janvier 92 à l'école annexe de Bordeaux-Caudéran l'activité suivante:

Un enfant possède une feuille sur laquelle figure un quadrillage. Cet enfant doit écrire un message afin qu'un autre enfant lui procure la juste quantité de cubes. Chaque cube recouvre exactement un carreau du quadrillage.

Nous voulons examiner comment les enfants coordonnent la lecture de la collection et l'écriture du message. A cette époque les enfants produisent deux catégories de messages (parfois simultanément): la production d'une ligne de signes ou/et la production de l'écriture du nombre.

Afin d'étudier l'influence de la structure spatiale de la collection sur l'élaboration du message écrit, nous avons proposé deux sortes de collections :



Afin que le nombre n'influe pas sur le choix des stratégies, nous préparons des collections équipotentes.

Nous faisons l'hypothèse que la première collection permet une coordination lecture, production du message alors que la deuxième provoque des difficultés. L'observation, conduite avec 20 élèves de grande section, montre que :

Pour la collection 1

16 élèves réussissent à produire un message juste.

3 commettent une erreur de synchronisation et 2 ont voulu écrire un nombre et n'ont pas écrit 9.

Pour la collection 2

11 élèves réussissent à produire un message juste.

8 commettent une erreur de synchronisation.

2 commettent d'autres erreurs.

	Réussite	défaut de synchronisation
Collection 1	16	3
Collection 2	11	8

La distance du chi deux entre les deux distributions est de 3,19. (Significatif à 0,1).

L'hypothèse qui supposerait que ces deux situations n'ont pas de différence significative est à rejeter avec un risque de 10%.

Nous pouvons avancer comme explication que la deuxième collection impose une mise en œuvre plus complexe de la fonction successeur qui rend plus difficile la synchronisation avec l'écriture d'une suite alignée de signes.

CONCLUSIONS :

Nous devons rattacher cette observation à la première hypothèse de notre recherche : Les conditions de l'énumération influent sur le comptage, et il est possible de repérer des variables qui modifient significativement les conditions de l'énumération.

Jusqu'à présent, nous avons démontré cette hypothèse avec des étudiants ou des enfants plus grands.

Nous venons maintenant de voir que dès la maternelle, d'une part les enfants semblent bien concevoir une énumération, mais que d'autre part, il est possible d'organiser des activités dans lesquelles les conditions de l'énumération sont sensiblement modifiées.

REMARQUE : Sans l'avoir observé précisément, nous avons vu que le comptage oral (communication orale du nombre de cubes à fournir) ne pose pas les mêmes difficultés. En effet, l'enfant qui compte ne lève pas les yeux de la collection. Ainsi, il n'a pas à "mettre en mémoire" des procédés de retour à la collection qu'il est obligé de mettre en œuvre lorsqu'il dessine les signes un à un.

UN PROJET : CONSTRUIRE UNE SITUATION A-DIDACTIQUE DE L'ENUMERATION NON LIEE AU COMPTAGE :

Nous avons déjà posé, lors des conclusions relatives aux observations faites en cours préparatoire, les questions des conséquences probables de la confusion des activités d'énumération et des activités de comptage.

Est-il possible de construire une situation d'énumération en maternelle qui soit non directement liée au comptage ?

Nous disposons de plusieurs réponses :

- Dans leur thèse déjà citée, MH SALIN et R.BERTHELOT ont développé l'étude de la situation d'énumération, réalisable en grande section de maternelle, que R.BERTHELOT avait décrite en 1984. Ils étudient les effets possibles du type d'espace dans lequel cette situation peut être conduite.

- Nous avons développé un logiciel de simulation (CALAPA) de cette même situation en 1985 et nous avons déjà expliqué comment ce travail avait été prolongé par une étude des effets de l'apprentissage de l'énumération dans les activités de comptage (Mme BLANCA VILLEGAS 1987).

A la suite de ces travaux, nous avons repris ce logiciel afin d'y ajouter des variables. L'étude détaillée du nouveau logiciel (CALAPA2) figure page 231.

- Nous observerons d'autres activités en maternelle (le castelet, la sorcière) qui font appel à des énumérations sans comptage. Il y sera intéressant de noter que ces activités d'énumération sont souvent appelées activités "logiques", tout comme les activités "logiques" que nous évoquions page 152.

3.6. ANALYSE COMBINATOIRE EN TERMINALE (DEUX ETUDES)

Les problèmes de dénombrement sont des problèmes dans lesquels il s'agit de trouver un moyen pour calculer le nombre d'éléments d'un ensemble fini.

Voici le recensement⁸⁴ des activités qui s'y rapportent : il s'agit de trouver les cardinaux suivants :

Nombre d'éléments de $A \times B$

Nombre de parties d'un ensemble de n éléments.

Nombre de parties à p éléments d'un ensemble contenant p éléments.

Nombre d'application de A dans B .

Nombre d'applications injectives de A dans B .

Nombre de tiercés dans l'ordre, dans le désordre.

Nombre de mots différents pouvant être écrits à partir d'un certain ensemble de lettres.

Nombre de diagonales d'un polygone de n côtés.

Nombre de paquets de n cartes dans un jeu de cartes et vérifiant une certaine condition.

Nombre de tirages différents de n boules dans une urne contenant p boules blanches et q boules noires.

Nous voulons étudier comment l'analyse combinatoire est perçue dans l'enseignement secondaire. Nous voulons étudier, en particulier comment les professeurs et les élèves abordent ce chapitre des mathématiques. Nous avons noté, au chapitre 2 que certains enseignants s'interrogeaient sur le statut spécial fait à ce domaine des mathématique, notamment en ce qui concerne les exigences (les impossibles exigences pourrait-on dire) des professeurs lors de la rédaction des démonstrations.

Nous avons perçu, au travers de ces remarques, un vide laissé à la responsabilité des élèves, vide qui provoque toujours un sentiment de malaise lors des phases de correction d'exercices d'analyse combinatoire. La lecture des ouvrages scolaire (voir chapitre 2) nous a permis de montrer que l'analyse combinatoire se fonde sur une pratique des explorations d'ensembles qui n'est abordée qu'incidemment.

Nous avons vu que certains ouvrages recommandent un travail préparatoire sur les résultats élémentaires de la théorie des ensembles. D'autres ouvrages, moins scrupuleux ou visant l'efficacité à tous prix vers le baccalauréat enseignent des moyens extérieurs aux mathématiques pour reconnaître telle ou telle situation de dénombrement.

Toute l'analyse combinatoire est tournée vers le comptage, l'application de formules, comme si ce qui allait décider du choix de telle ou telle démarche allait de soit.

Nous pensons au contraire que là encore, des difficultés dans les activités de combinatoire sont imputables à des difficultés de l'énumération des ensembles et que l'institution ne se donne pas les moyens de mettre en scène des pratiques énumératives et d'en constituer un enseignement. Nous avons montré, par l'étude de la correspondance entre PASCAL et FERMAT le temps qu'il fallait à de tels mathématiciens pour s'affranchir de difficultés d'énumération (dans des activités de dénombrement). L'enseignement de l'analyse combinatoire n'a retenu que le "produit fini".

Pouvons-nous aujourd'hui nous faire une idée des conséquences d'un tel état de fait ?

⁸⁴ Bulletin APMEP Avril 1990 P. 173. " PROBLEMES DE DENOMBREMENT" A.ANTIBI. (déjà cité).

Pour étudier cet aspect, nous avons analysé deux épreuves extraites deux baccalauréats (B et D) de 1992. Dans chacune d'elles figuraient un exercice d'analyse combinatoire (ce qui montre que ce domaine n'est si pas marginal...).

Nous avons étudié à chaque fois une centaine de copies et nous avons fait un bilan des résultats à ces exercices.

3.6.1. EPREUVE DU BAC B JUIN 1992.

L'épreuve de mathématiques du bac B de JUIN 92 comportait un exercice (voir EXERCICE 2 ci-dessous) dont nous allons étudier les résultats et les modes de résolution.

EXERCICE 2 (A1/B) (4 points).

La grille du loto sportif de la semaine du 11 au 17 mars 1991 se présentait ainsi :

1	BREST	NANTES	1	N	2
2	RENNES	LILLE	1	N	2
3	TOULON	CAEN	1	N	2
4	AUXERRE	NICE	1	N	2
5	MONACO	CANNES	1	N	2
6	P.S.G.	BORDEAUX	1	N	2
7	SOCHAUX	TOULOUSE	1	N	2
8	LOUHANS	BASTIA	1	N	2
9	MARTIGUES	ALES	1	N	2
10	RODEZ	DIJON	1	N	2
11	LA ROCHE/YON	LAVAL	1	N	2
12	LENS	BOURGES	1	N	2
13	ROUEN	TOURS	1	N	2

Le texte qui suit est à interpréter à la date du 11 MARS 1991, c'est à dire avant les rencontres.

Le jeu consiste à remplir la grille en cochant une seule case sur chaque ligne, la case 1 si l'on pronostique la victoire de l'équipe qui reçoit (*dont le nom figure sur la colonne de gauche*), la case N en cas de match nul, et la case 2 si l'on pronostique la victoire de l'équipe visiteuse (*dont le nom figure dans la seconde colonne*).

Combien y-a-t-il de réponses possibles ?

Cet exercice ayant été posé à l'épreuve de Juin 92 du BAC série B, nous conduisons une étude sur 90 copies.

Nous reproduisons une solution extraite des copies examinées :

"Il y a donc une case à cocher pour chaque match. Il y a donc 313 pronostics possibles."

Cette rédaction conduisant à la solution (juste) est admise par les correcteurs.

Il faut bien reconnaître que l'on est proche de l'affirmation pure sans démonstration.

Mais quelle démonstration l'examineur pourrait-il exiger ? Quelle est la frontière entre ce qui est admis comme relevant du bon sens, des connaissances privées des étudiants et ce qui doit être démontré ?

3.6.1.1. OBSERVATION :

Cet exercice demande un dénombrement d'une collection (un ensemble de pronostics). La situation est assez simple à comprendre. Le taux de réussite assez faible (41%) à la première question, la diversité des réponses, la diversité des modes de résolution nous incitent à tenter de mieux comprendre comment fonctionnent les élèves dans une telle situation.

NOS HYPOTHESES DE TRAVAIL :

Nous voulons vérifier si l'analyse combinatoire constitue un domaine des mathématiques qui se différencie sensiblement (ou non) des autres domaines du point de vue de la réussite des élèves.

Nous souhaitons savoir si les élèves qui comprennent la situation (comprendre le problème posé) et qui utilisent des outils relevant de l'analyse combinatoire

Afin d'avoir une information sur le niveau mathématique des élèves, nous nous intéressons, en même temps, à la réussite à cet exercice de dénombrement et à la réussite au problème (connaissances classiques : voir énoncé du problème en annexe). Nous souhaitons voir si l'analyse combinatoire est significativement mieux ou moins bien réussie qu'un problème se référant à d'autres domaines plus classiques des mathématiques du baccalauréat.

Hypothèse 1 : La répartition réussite-échec à un exercice mettant en jeu un dénombrement est indépendante de la répartition réussite-échec dans un secteur mieux repéré en tant que savoir chez des élèves de terminale B.

Par ailleurs, la situation a été comprise par 86 étudiants sur 88. Ce qui nous permet cette affirmation est l'explication fournie de ce qu'est un pronostic. Presque tous les étudiants ont une idée juste de l'objet pronostic. A partir de là, nous faisons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2 : La compréhension de la situation n'est pas déterminante dans l'utilisation d'une opération appropriée.

C'est à dire que nous cherchons à savoir si, d'une part les étudiants ont compris la tâche à accomplir et si, d'autre part, les opérations utilisées sont appropriées.

Nous nous posons ensuite la question du rapport entre l'utilisation d'instruments mathématiques relevant de l'analyse combinatoire et la réussite à une activité de ce domaine.

Hypothèse 3 : Le recours à des instruments mathématiques enseignés relevant de l'ANALYSE COMBINATOIRE ne constitue pas un critère de réussite déterminant.

ANALYSE DES COPIES :

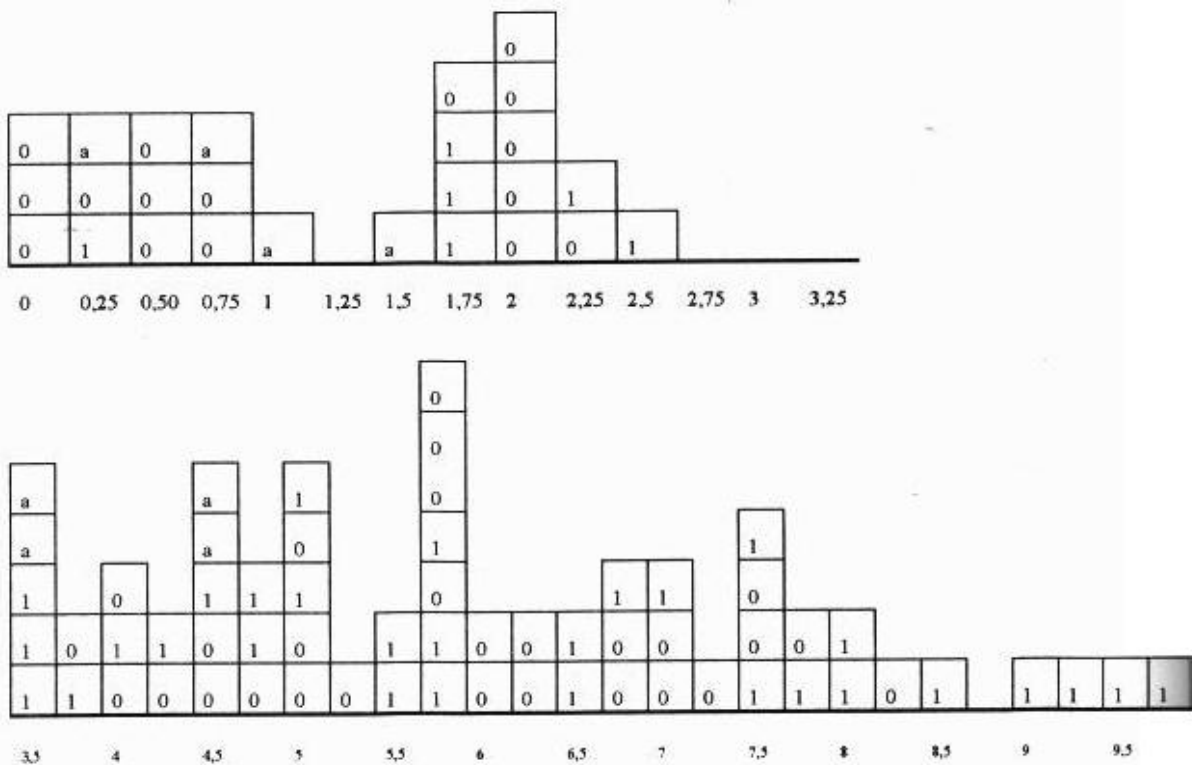
1°) CORRELATION ENTRE REUSSITE A L'EXERCICE 2 ET LE PROBLEME.

Nous travaillons sur l'hypothèse 1 : "La réussite ou l'échec à un exercice mettant en jeu un dénombrement est indépendante du niveau mathématique de l'élève de terminale B."

Le tableau suivant représente l'effectif en fonction de la note obtenue au problème. Dans chaque case nous avons marqué la réussite ou l'échec à l'exercice 2. (a : pour abstention).

Tableau de répartition de la réussite à l'exercice 1 en fonction des notes obtenues au problème. En abscisse, la note au problème /12. En ordonnée, l'effectif. Chaque candidat est matérialisé par un rectangle. La réussite (1), l'échec (0), ou l'abstention (a) à l'exercice 2 est marquée dans le rectangle.

Pour des raisons de présentation, ce tableau est coupé en deux parties. .



Taux de réussite à la question 1 de l'exercice 2: 36/88 soit 41%

- a) Les élèves qui ont échoué ou qui n'ont pas abordé l'exercice totalisent 196,5 points au problème, soit une moyenne de 5,45.
- b) Les élèves qui ont échoué à l'exercice totalisent 180,5 points, soit une moyenne de 6,45.
- c) Les élèves qui ont réussi à l'exercice totalisent 196,5 points au problème, soit une moyenne de 5,458.

Pour continuer l'analyse, faisons la répartition suivante. En colonne, nous avons réparti selon 4 classes de notes au problème. En ligne, nous notons les réussites -échecs à l'exercice 2.

	0-3	3,25-6	6,25-9	9,25-12
R	6	15	11	3
E	15	17	11	0
abs	4	4	0	0

Faisons l'hypothèse suivante (H0) :

"Le nombre d'échecs à l'exercice 2 est le même pour les classes de réussites au problème."

Si nous associons les "abstentions" et les échecs et que nous étudions sur les trois premières classes, nous obtenons un KHI-deux de 3,558.

La lecture de la table des KHI-Deux nous montre que l'on prend un risque de 25% à rejeter cette hypothèse.

En "serrant" en deux classes, la répartition devient la suivante.

	R(0-6)	E(>6)
R	14	21
E	11	32

Le KHI-deux est, dans ce cas : 1,84

On prendrait un risque de 25% à rejeter cette hypothèse.

Nous ne pouvons donc pas conclure sur l'indépendance entre la réussite à l'exercice d'analyse combinatoire et la réussite au problème de mathématiques de l'épreuve.

2°) TRAITEMENT DES HYPOTHESES 2 ET 3 :

Pour traiter des deux hypothèses, examinons les opérations utilisées par les étudiants pour résoudre l'exercice.

Le tableau suivant montre que sur 88 candidats, nous avons repéré 14 types de réponses. 8 candidats n'ont pas répondu à la question (abs).

Nous examinons ci- après les types de réponses. (Parmi ces 8 candidats figurent les 2 qui semblent ne pas avoir compris ce qu'est un pronostic).

calcul	effectif
abs	8
A_{13}^3	5
26!	1
C_{13}^3	6
3x13	9

calcul	effectif
113	1
13 ³	14
C_{32}^6	1
3!x13	1
313	35

calcul	effectif
3913	1
C_{39}^{13}	3
13x13	1
13x13x3	1
13	2

13x13x3 vient sans doute du raisonnement suivant : il y a 13 équipes 1, 3 résultats possibles et 13 équipes 2.

RESULTATS DE L'ETUDE :

Tous les étudiants ont compris la situation. Pourtant, les opérations utilisées sont exceptionnellement variées. L'hypothèse 2 est donc valise.

Nous ne pouvons pas retenir l'hypothèse selon laquelle ces étudiants ne sauraient pas compter. Il faut donc aller chercher ailleurs un tel résultat.

LES ÉTUDIANTS NE PEUVENT FAIRE LE LIEN ENTRE LA COMPRÉHENSION DE LA SITUATION ET LA MESURE EFFECTIVE DE LA COLLECTION.

Examinons maintenant les opérations relevant plutôt du champ de la combinatoire : Nous mettons dans cette catégorie l'exponentiation, les arrangements et les combinaisons (explicités en tant que tels par la désignation habituelle). Nous excluons l'usage de la multiplication.

Nous obtenons le résultat suivant : parmi les étudiants faisant appel à des opérations faisant plutôt partie du domaine de l'analyse combinatoire, 35 étudiants réussissent et 33 échouent.

L'UTILISATION DES OPÉRATIONS DE LA COMBINATOIRE NE CONSTITUE PAS UN FACTEUR DE RÉUSSITE.

ETUDE DES PROCEDURES DE DEMONSTRATION :

PREMIERE REMARQUE : les étudiants utilisent la même explication préalable pour aboutir à une conclusion différente : par exemple :

Il y a pour chaque match 3 possibilités donc pour 13 matches il y a $13 \times 3 = 39$.
Un pronostic consiste à cocher une case parmi 3 et de répéter 13 fois l'opération. Il y a donc 313 pronostics possibles soit 1594323.
Il y a 3 réponses possibles pour chaque cas et il y a 13 cas. Le nombre de pronostics possibles sera : 133 soit 2197

Parmi les élèves qui expliquent leur démarche, nous classons les discours qui font appel à des mots empruntés au champ de la combinatoire (Combinaisons, arrangement, permutation, probabilité, Bernouilli) et ceux qui décrivent la situation (cf. les trois exemples ci-dessus). Nous obtenons le tableau suivant :

	R	E
Vocabulaire "combinatoire"	6	8
Recours à la langue naturelle.	10	15
N'explique pas ou s'abstient	19	29

Parmi les 8 élèves qui sont en échec après recours à un vocabulaire pris dans le champ de la combinatoire, il y a 7 stratégies différentes.

Les 25 élèves qui ont recours à la langue naturelle utilisent essentiellement les calculs de type $133 \cdot 313$ et 3×13 .

LE PASSAGE DE L'EXPLICATION DE LA SITUATION (COMPRISE) À UN DÉNOMBREMENT DE LA COLLECTION GÉNÈRE UNE OPÉRATION INADÉQUATE POUR PLUS DE LA MOITIÉ DES ÉTUDIANTS.

A LA SUITE DE CETTE OBSERVATION, NOUS FAISONS LA CONCLUSION SUIVANTE :

LES ETUDIANTS NE DISPOSENT PAS D'INSTRUMENTS PERMETTANT DE PASSER DE LA CONCEPTION PREMIERE DES OBJETS A DENOMBRER A UNE CONCEPTION QUI FACILITERAIT L'ENUMERATION DE LA COLLECTION OR CE CHANGEMENT DE CONCEPTION NOUS PARAIT NECESSAIRE.

Pour la plupart des étudiants, la question de la modélisation mathématique de l'objet "pronostic" n'en est pas une. Les étudiants ont une conception naïve de l'objet pronostic. Le passage de cette conception à une reconstruction formelle de cet objet n'est pas pris en charge par ceux qui échouent. Or ce passage de la conception première à une conception formalisée est indispensable à la mise en œuvre de pratiques énumératives en vue du dénombrement.

Il ne peut y avoir de pratiques énumératives si l'ensemble à considéré n'est lui même pas clairement défini. Les erreurs de dénombrement ne sont que la conséquence de cette absence de prise en charge. Les étudiants plaquent des algorithmes du cours d'analyse combinatoire sur un ensemble flou.

L'élaboration d'une énumération nécessite parfois un changement de conception des objets de l'ensemble à énumérer. De la nouvelle conception va dépendre la mise en œuvre de pratiques énumératives. Nous n'excluons pas l'existence d'une relation dialectique entre conception de l'objet et mise en œuvre d'une énumération.

3.6.2. .EPREUVE DE MATHEMATIQUES DU BACCALAUREAT SERIE D JUIN 92 GROUPEMENT INTER-ACADEMIQUE II (EXERCICE 2).

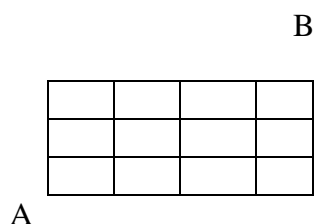
Nous nous sommes intéressés à cette épreuve parce qu'elle pouvait permettre de poursuivre l'étude précédente. En effet, dans l'exercice proposé, les étudiants doivent d'abord dénombrer une collection de chemins en les dessinant effectivement, puis doivent dénombrer une collection de chemins qui, cette fois ne peut être représentée, même si UN chemin de cette collection peut être dessiné. Nous nous sommes intéressés à l'effet produit par la succession de ces deux questions.

L'EPREUVE

L'exercice 2 reprend le célèbre problème des chemins : mais il est rédigé en deux questions : la première question pose le problème sur un quadrillage comportant 4 cases et demande : "pouvait-on le prévoir ?"

La deuxième question est la suivante :

Voici un quadrillage :



Il s'agit de trouver une méthode pour compter tous les chemins possibles allant de A à B. Mais ces chemins doivent respecter la règle suivante : on ne peut se déplacer qu'en allant vers le haut ou vers la droite.

Cet exercice ayant été posé à l'épreuve de Juin 92 du BAC série D, nous conduisons une étude sur 100 copies.

ETUDE DU PROBLEME GENERAL :

Ce problème est traité par la recherche d'une bijection avec un ensemble plus aisé à dénombrer. Ce qui suppose un changement de conception de l'objet "chemin".

Il faut tout d'abord s'assurer que la propriété énoncée : "chemin minimal" recueille une compréhension de tous les étudiants. Faisons cette hypothèse.

L'ensemble des chemins minima est une définition en compréhension.

Il faut transformer cette lecture en une écriture qui permette un dénombrement.

Soient i et j deux vecteurs (direction horizontale, direction verticale). Soit $V=\{i,j\}$. Pour construire un chemin minimal, il suffira de construire un 8-uplets avec 4 occurrences de i (ou de j , ce qui revient au même).

Soit M l'ensemble suivant :

$$M=\{x/ x=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8) \text{ et } a_i \in V \text{ et } \sum_{k=1}^8 (a_k = i) = 4 \}$$

Or, il existe une bijection de M vers A .

Donc $\text{Card}(M) = C_8^4$ donc $\text{Card}(A) = C_8^4$

3.6.2.1. ANALYSE DES COPIES :

Nous avons voulu étudier si la réussite à la première question permet la réussite à la seconde :

La première question est réussie à 77%.

La deuxième est réussie à 16 %

Aucun des étudiants ayant échoué à la première question réussissent à la seconde.

Les auteurs de l'exercice ont probablement construit cette première question pour "faire comprendre la situation" (et peut être pour permettre de faire "glander" quelques points au candidat).

La sous question "*pouvait-on le prévoir*" doit-elle être comprise comme un encouragement à changer de conception du point de vue des objets ?

En tous cas, nous sommes en présence de deux situations qui s'opposent par la conception des objets à dénombrer. Dans la première question, les objets sont effectifs. Ils peuvent en tous cas être dessinés. Ce n'est pas le cas dans la deuxième question.

La répartition des candidats est la suivante :

Question 2

	R	E
R	16	61
E	0	8

Question 1

Jamais la prévision (Il s'agissait de la question : pouvait-on le prévoir ?) n'entre en conflit avec le schéma, même (copies 13691, 13702, 13730, 13745, et même la copie 13736!- voir annexe) lorsque le schéma n'a pas révélé le nombre correct de chemins possibles.

LE CANDIDAT S'ARRANGE TOUJOURS POUR QUE LA FORMULE CONFIRME LE DÉNOMBREMENT EFFECTIF, Y COMPRIS LORSQU'IL OUBLIE DE DESSINER UN CHEMIN.

COMMENTAIRES :

Ainsi, la question "*pouvait-on le prévoir ?*", est perçue par les candidats comme une invitation à trouver une formule qui "marche", mais pas comme une incitation à changer de conception en vue de la seconde question.

On peut alors s'interroger sur cette pratique courante de commencer un exercice à l'aide d'une question qui fait travailler sur des objets effectifs et qui précède une question qui fera travailler sur des objets à concevoir.

Nous avons analysé au chapitre un comment les énumérations dépendaient largement de ce changement de conception.

EFFET DE LA PRODUCTION DE LA FORMULE JUSTE EN PREMIERE QUESTION SUR LA PRODUCTION D'UNE FORMULE EN DEUXIEME QUESTION : MISE EN EVIDENCE DE MODELES.

Les étudiants qui ont produit la formule C_4^2 lors de la première question se répartissent ainsi pour la deuxième :

C_8^2	C_{16}^4	C_8^4	Autres
7	1	2	5

Tout d'abord, on constate que sur 71 réussites en première question, 16 candidats seulement produisent la formule juste en deuxième question.

Les candidats qui déduisent la formule C_8^4 en deuxième question se justifient par une référence au modèle de la proportionnalité : *"Il y a deux fois plus de branches pour un chemin donc le 4 devient 8."* Une simple vérification sur un quadrillage à une case aurait pu mettre ce modèle en défaut.

ETUDE DE LA DEUXIEME QUESTION :

45 étudiants abordent cette deuxième question. 16 la réussissent (5 n'expliquent pas l'origine de leur formule).

Tous les autres étudiants se répartissent en deux groupes :

- Ceux qui effectuent une "transposition" de la formule découverte en première question.
- Ceux qui font référence à une transformation de nature géométrique qui permettrait de passer de la première question à la seconde, avec le modèle numérique de la proportionnalité en filigrane :

Par exemple, nous avons observé quatre types de stratégies de cette catégorie :

"En choisissant un départ, il ne reste plus que 7 possibilités. Il y a deux départs possibles, donc 14 chemins."

"La configuration 4x4 contient 4 fois plus de chemins que la configuration 2x2".

"Pour chaque carreau, il y a deux voies possibles, donc pour 4 carreaux, il y a 8 voies".

Les étudiants qui commencent une arborescence (un seul la termine et parvient au résultat !)

Sur 100 copies, aucun étudiant ne déclare chercher un ensemble équipotent à l'ensemble à dénombrer. C'est pourtant autour de cette activité que le savoir savant a développé des pratiques de dénombrement.

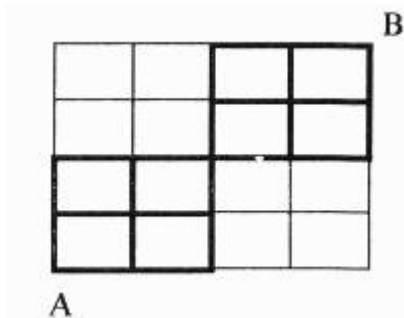
CONCLUSION

Les étudiants qui n'ont pas réussi cette deuxième question (84) recherchent un moyen d'utiliser les résultats de la première question, que ce soit par transposition de la formule ou par la géométrie.

Un étudiant a réalisé effectivement l'arborescence...

ETUDE DE CAS :

Remarque concernant l'influence de l'organisation spatiale sur les procédures de résolution : (copie 13678) :



La suite de l'exercice demandait la probabilité de passer au centre du quadrillage lorsque l'on va de A à B.

Le candidat répond : "le chemin minimal passant par 0 : on remarque que la moitié de la grille n'est pas utilisée donc le nombre de possibilités de chemins passant par 0 est du nombre total divisé par deux".

3- La copie 13705 propose une démarche très cohérente uniquement basée sur les permutations.

4-Un grand nombre de copies utilisent les combinaisons après des justifications qui n'en sont pas. Le correcteur accepte.

Exemple copies 13717,13718. Il s'agit des stratégies notées SC. Cette démarche échoue complètement pour la deuxième énumération : le résultat proposé est souvent C_8^4 : Sur 19 copies répertoriées dans la stratégie SC, 11 affirment la réponse C_8^4 pour le nombre de chemins de la deuxième question. Une copie affirme la réponse C_{16}^4 .

Nous pouvons attribuer cette erreur à la confusion faite entre vecteur et l'occurrence de vecteur.

5-La copie 13734 montre la confusion entre vecteur et place de vecteur dans la construction du chemin. Le candidat réussit parce qu'il a sans doute en tête les places et non les vecteurs, comme son discours tendrait à le faire croire. Avec ce même discours, la majorité échoue.

COMMENTAIRES :

LA RECHERCHE D'UN ENSEMBLE ÉQUIPOTENT À UN ENSEMBLE DONNÉ NÉCESSITE UN CHANGEMENT DE CONCEPTION DE L'OBJET À DÉNOMBRER (ICI, LE CHEMIN).

D'UNE DÉFINITION NAÏVE DE L'OBJET (CHEMIN AU SENS DE DÉPLACEMENT), L'ÉTUDIANT DOIT CONSTRUIRE UNE DÉFINITION AUTRE DE L'OBJET CHEMIN ET DONC DETERMINER UN NOUVEL ENSEMBLE.

DE PLUS, LE PASSAGE À UNE AUTRE CONCEPTION DOIT SE FAIRE DANS LE BUT DE RECONSTRUIRE UN ENSEMBLE QUE L'ÉTUDIANT SAIT, PAR AVANCE FACILEMENT DÉNOMBRABLE (ÉNUMÉRATION REMPLACÉE PAR LE DÉNOMBREMENT D'UN "ENSEMBLE TYPE" ÉTUDIÉ EN CLASSE). CETTE DÉMARCHÉ N'EST PAS ENSEIGNÉE.

Nous avons montré que les exercices d'analyse combinatoire sont des exercices qui sont mal résolus par des étudiants dont le niveau en mathématiques peut cependant être reconnu convenable. Nous ne pouvons pas affirmer que ces étudiants ne savent pas compter. Nous ne pouvons donc pas affirmer que les problèmes de dénombrement se réduisent à des problèmes de comptage.

Nous avons vu comment dans le savoir savant, les problèmes de dénombrement étaient évités par remplacement d'un ensemble difficile à dénombrer par un ensemble équipotent plus aisé à dénombrer.

Les étudiants de terminale n'ont pas reçu d'enseignement de telles techniques, qui, de toute façon requièrent souvent des compétences mathématiques importantes.

Nous avons montré que cette difficulté à concevoir une exploration d'une collection conduisait les étudiants à ne plus faire le lien entre la compréhension de la situation et l'utilisation d'opérations (première observation).

Ainsi, le contrôle du résultat ne s'effectue à aucun moment.

Les enseignants de l'école élémentaire diraient qu'ils n'ont pas "le sens des opérations".

L'étude de l'enseignement de l'analyse combinatoire, en ce qu'elle établit une distance entre les formules de calcul et les pratiques énumératives (que certains étudiants évoquent dans leur copie) nous informe peut être sur la construction des opérations arithmétiques chez de plus jeunes enfants.

UN CONTRAT PEU CLAIR : CONSEQUENCE SUR L'ATTITUDE DES CORRECTEURS :

Nous avons remarqué à plusieurs reprises comment les enseignants étaient en difficulté lors de la correction des copies.

Dans toutes les copies pour lesquelles nous avons relevé la stratégie SC en question 1 (voir annexe), nous avons une acceptation du correcteur. Or, dans tous les cas, il n'y a aucune explication, aucune justification de l'emploi des "combinaisons".

Lorsqu'une copie essaie par une méthode différente, avec des explications (stratégie notée SED en annexe), et qu'il réussit, le correcteur écrit "*peu convaincant*".

Ainsi, l'affichage de la formule des combinaisons permet de recueillir les points. Une tentative d'explication est jugée suspecte, à priori, même si le correcteur, dans notre étude, n'a pas vraiment sanctionné.

Il y a là un flou dans le comportement à la correction qui pose la question du contrat attendu.

3.7. DEUX AUTRES OBSERVATIONS :

3.7.1. CONSEQUENCE D'UN CHANGEMENT DE CONCEPTION DES OBJETS A DENOMBRER SUR L'ENUMERATION UTILISEE : L'ACTIVITE DES "RECTANGLES"⁸⁵:

L'exercice proposé est le suivant :

Soit un rectangle sur un quadrillage

Question: « Combien y-a-t-il de rectangles sur cette figure ? »

3.7.1.1. *OBSERVATION EN ENTRETIEN INDIVIDUEL*

Prenons deux exemples de stratégies développées :

1- Première stratégie :

L'enfant (Classe de 6^e) considère tous les rectangles ayant un carreau, puis tous les rectangles ayant deux carreaux , etc.

Il se sert d'une dénomination des rectangles pour constituer une partition de l'ensemble. Cette dénomination utilise la suite numérique. Elle permet l'énumération des classes.

Pour chaque classe, examinons les stratégies :

Pour les "à un carreau" :

La réponse (12) est le dénombrement d'une collection visible. L'enfant recourt à une énumération spatiale (codée ES1) dans laquelle les fonctions successeurs sont du type "à côté de", en dessous de".

Pour les "à deux carreaux" :

L'enfant considère les "verticaux" et les "horizontaux". Dans chacune de ces deux sous-classes, il effectue une nouvelle partition à l'aide des colonnes, puis en énumérant effectivement pour chaque colonne, ce qui, dans ce cas ne constitue aucune difficulté. Il s'agit toutefois d'une exploration nécessitant la reconnaissance d'objets qui se chevauchent (énumération codée ES2)

Pour les "à trois carreaux" :

La stratégie est un hybride des deux premiers cas. L'enfant considère les "verticaux" et les "horizontaux". Les verticaux sont visibles, (ES1) les "horizontaux" se chevauchent.(ES2)

Pour les "à quatre carreaux" :

Deux sous-classes sont obtenues à partir des rectangles en ligne (4 carrés côte à côte) et des rectangles carrés (formés de 4 carrés élémentaires).

Pour chacune de ces deux classes, on retrouve alors ES1 et ES2.

Les rectangles à 5, 7, 10, 11 carreaux n'existent pas. Ceci permet d'éliminer les classes vides. Cette découverte se fonde sur une utilisation, dans l'action, de théorèmes d'arithmétique

⁸⁵ Cet exercice a été l'objet de plusieurs observations. Citons N.BALATCHEFF dans la revue RDM Vol 3-3. Il s'agissait alors de travailler sur la démonstration. (Voir sa thèse). Citons aussi A. CAUTY Université de Bordeaux I qui étudie le code symbolique mis au point dans la différenciation des rectangles.

: 5,7,11 ne peuvent être de type axb , ou bien (10) le couple ne convient pas dans le contexte (5×2) .

Pour les " 6 carreaux" :

Trois sous classes lui sont nécessaires:

Ceux d'en haut (2 rectangles). ES1

Ceux d'en bas (2 rectangles). ES1

Ceux qui sont debout. (3 rectangles). ES2

Restent les rectangles à 8,9,12 dont le dénombrement utilise des stratégies d'énumérations déjà décrites ci-dessus.

Parallèlement à cette description, l'enfant a tenu une comptabilité pour chacune des classes (dénommées à l'aide d'un nombre pris dans la suite ordonnée 1,2,3,4,6,8,9,12) et sous classes et doit organiser ses données afin d'effectuer le comptage final.

Pour énumérer l'ensemble, l'enfant a dû :

Construire une partition, se donner les moyens d'énumérer les éléments de la partition. Dans chaque classe, construire des partitions (2 ou 3 sous classes), établir une énumération à partir d'un constat d'apparence spatiale en utilisant deux types d'énumérations élémentaires ES1 et ES2. Puis construire une énumération finale reprenne ces deux énumérations.

Résultat trouvé 60.

2- Deuxième stratégie :

Étudiant (terminale C) :

*"Pour chaque rectangle, il faut deux côtés horizontaux et deux côtés verticaux, ce qui fait
4 possibilités pour un côté de un.
3 possibilités pour un côté de deux.
2 possibilités pour un côté de trois.
1 possibilité pour un côté de quatre.*

$$4+3+2+1= 10$$

Idem pour les côtés verticaux :

$$3+2+1 = 6$$

Donc 60 possibles."

Étudions cette démarche : L'étudiant s'est donné une conception différente du rectangle (liée au contexte), ce qui lui permet d'envisager une partition de l'ensemble moins coûteuse que l'enfant de 6°. Les côtés restent des objets effectifs et l'étudiant tient alors une comptabilité des côtés à l'aide d'une énumération d'objets effectifs par classe. Il opère de même pour les côtés horizontaux. Dans cette stratégie, l'énumération est une énumération produit de deux énumérations.

3-Troisième stratégie :

Soit R l'ensemble des rectangles. Soit un élément r de R .

Soit $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ l'ensemble des côtés verticaux et $H = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ l'ensemble des côtés horizontaux.

Un rectangle est alors un quadruplet d'éléments (v_i, v_j, h_k, h_l) avec $i \neq j$ et $k \neq l$.

Il y a C_5^2 façons de choisir le couple (v_i, v_j) et C_4^2 façons de choisir le couple (h_k, h_l) .

Conclusion : le nombre de rectangles est $C_5^2 \times C_4^2$

CONCLUSIONS :

- Les trois stratégies sont commandées par la conception des objets à dénombrer.

-La première stratégie est le dénombrement d'objets effectifs. Dans ce cas, l'énumération est d'abord de nature spatiale.

-La deuxième stratégie se fonde sur une autre conception de l'ensemble des rectangles. Le dénombrement s'effectue sur des côtés. Ces côtés sont des objets effectifs. L'énumération est de nature spatiale pour les côtés, et utilise une partition d'un ensemble conçu pour les rectangles.

-La troisième stratégie ne fait plus référence aux objets effectifs.

- Si le même problème est posé en faisant varier le nombre de carreaux, la première stratégie devra être adaptée de façon très contextuelle, la seconde et la troisième sont adaptées à une famille de situations.

- Si l'on pose alors le problème plus général : combien de rectangles lorsqu'il y a n carreaux en longueur et p carreaux en largeur, il est clair que l'énumération de la deuxième stratégie permet rapidement une énumération générale dans cette classe de problèmes. Elle est dénombrante pour cette classe de problèmes : la somme des n premiers naturels est $n(n+1)$. Donc, le résultat est : $n(n+1)p(p+1)/4$

La troisième stratégie donnera le résultat⁸⁶ : $C_n^2 \times C_p^2$

- La deuxième stratégie est un compromis entre un coût lié au changement de conception des objets et les possibilités de généralisation.

- Nous avons conduit une observation en classe de seconde (lycée Camille Jullian, 1992) sur ce problème. Pour cela, nous avons donné l'exercice suivant :

Voici le schéma suivant :

Dans ce schéma, on peut voir 8 rectangles.

Voici maintenant le schéma suivant :

Combien de rectangles peut-on voir ?

Écrivez votre travail sur cette feuille.

RESULTATS ET ANALYSE:

⁸⁶ Ce qui permet de construire la formule : $C_n^2 \times C_p^2 = n(n+1)p(p+1)/4$

3 élèves se servent du premier exercice : il y a 6 schémas comme dans le premier, donc il y a 48 rectangles.

On retrouve les stratégies observées dans les copies de baccalauréat.

15 élèves procèdent comme l'étude de cas de l'élève de 6°. Leur taux de réussite est de 60 % : (oubli du plus grand rectangle en particulier).

15 élèves procèdent à l'aide d'une partition par nombre de rectangles élémentaires.

2 ne traitent la partition que selon les colonnes.

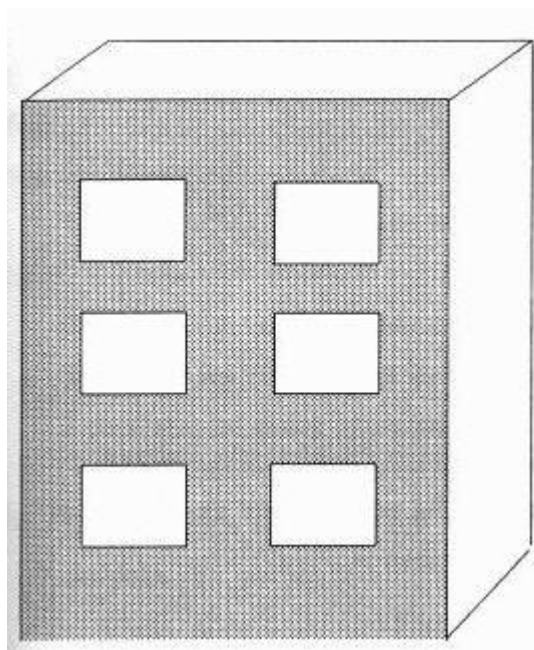
En classe de seconde, les élèves mesurent une collection d'objets effectifs. Il n'y a pas de différence significative entre le raisonnement des élèves de 2° et ceux de 6°.

Nous pensons qu'il y aurait à construire tout un travail préparatoire permettant de passer des objets effectifs aux objets conceptualisés et qui permettrait d'aborder, plus tard, l'analyse combinatoire dans de meilleures conditions.

3.8. AUTRES OBSERVATIONS :

Les observations qui suivent constituent un complément des observations précédentes. Elles visent à élargir le champ d'action de l'énumération dans la scolarité obligatoire à d'autres pratiques en particulier dans des activités non liées au comptage d'éléments d'une collection. Elles sont constituées d'observations plus ponctuelles ainsi que d'études hors observations.

3.8.1. L'ENUMERATION COMME ENJEU IMPLICITE DANS UNE ACTIVITE : EXEMPLE DU "CASTELET" :



L'activité est effectuée en atelier en moyenne section de maternelle. A l'origine, il s'agit d'une séquence de langage.

Le matériel est le suivant : (voir figure ci-contre). Il s'agit d'un panneau de carton doté de 6 portes. Ces portes doivent pouvoir se refermer très vite et facilement (attaches parisiennes.)

3.8.1.0.1. *OBSERVATION :*

Observation lundi 24 février 92 : École de Caudéran.

Nous avons observé une classe de 23 élèves nés en 1988 (Grande section).

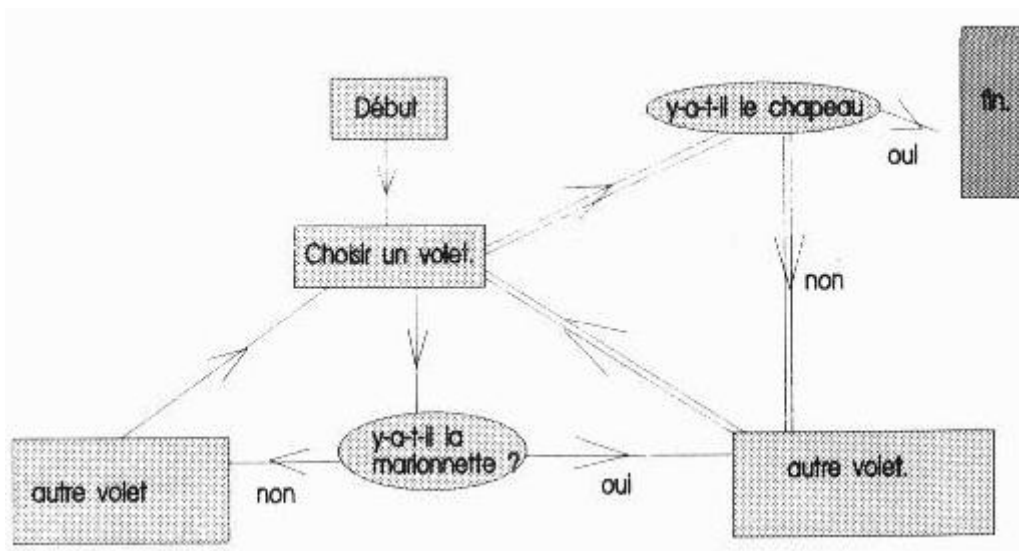
Le matériel est donc constitué d'une petite maison (castelet) ayant six fenêtres, avec volets ouvrants, derrière lesquels sont cachés différents personnages, une fenêtre restant vide.

DESCRIPTION : Les enfants découvrent la disparition de "pompon" (marionnette en peluche que les enfants manipulent habituellement le matin). A sa place, une lettre.

Les enfants réagissent et demandent ce que la marionnette a écrit.

La maîtresse lit la lettre : Pompon explique qu'elle est cachée derrière une fenêtre de la petite maison en carton placée dans le couloir, et qu'il faudra, sans se lever, demander à la maîtresse d'ouvrir les volets pour essayer de découvrir où il est caché.

L'algorithme de résolution peut être le suivant :



DEROULEMENT COLLECTIF :

- Les enfants demandent à ouvrir une fenêtre. Ils ne trouvent pas "pompon". Ils disent qu'il faut ouvrir une autre fenêtre. Ceci prouve :
 - qu'ils ont compris le jeu.
 - qu'ils ont une stratégie d'ensemble : "ouvrir une autre fenêtre."

ANALYSE DE LA SITUATION : Cette situation n'est pas la situation fondamentale de l'énumération telle que celle de CALAPA (ou du jeu des tirelires). En effet, la validation du bon accomplissement de l'énumération n'est pas incluse dans la situation.

Nous avons toutefois observé que le fait de ne pas ouvrir un volet "inutile" était un grand enjeu dans la classe. Aussi, la validation s'effectue par des échanges oraux portant sur les stratégies d'énumération.

Modes de structuration de l'ensemble : les stratégies se fondent sur:

- l'espace environnant : "c'est le volet en haut du côté de la cour".
- la coordination espace-temps : un enfant repère la collection de gauche à droite et de haut en bas. Il retient, dans cette suite, ce qui a été ouvert et ce qui ne l'a pas été.

Influence du travail collectif sur l'exploration de l'ensemble :

Chaque enfant doit intégrer les propositions des autres enfants. Ceci peut constituer un obstacle à sa propre démarche exploratoire.

TRAVAIL INDIVIDUEL :

Nous nous sommes servis de cette situation collective et de l'intérêt spontané que les enfants manifestaient pour "*n'ouvrir que ceux qui n'avaient pas déjà été ouverts*", pour proposer à nouveau la situation en individuel.

Sur 23 enfants, 17 réussissent un parcours sans rouvrir un volet une deuxième fois.

Sur ces 17 enfants,

- 10 ouvrent les volets sans organisation apparente, en utilisant la stratégie de base.
- 3 ouvrent les volets de gauche de haut en bas puis de droite de haut en bas.
- 2 ouvrent les volets selon le sens de la lecture.
- 2 prennent un ordre apparent autre que les précédents.

Sur les 6 enfants restant, 5 ont rouvert un volet, un enfant a rouvert plus d'une fois un volet.

CONCLUSION :

La situation ne constitue pas une situation de base pour l'énumération. Toutefois, les enfants ont manifesté un grand intérêt pour respecter la règle de la non-réouverture. Il s'agit d'une situation dans laquelle l'énumération est un problème posé par la classe pour elle-même.

Il s'agit donc bien d'une connaissance chez les enfants de cet âge qui est ici le moteur d'un enjeu.

REMARQUE : Le jeu du memory est un exemple de situation analogue, dans laquelle l'énumération n'est pas nécessaire à la conduite du jeu, mais dont l'usage spontané est recherché par les enfants.

3.8.2. L'ENUMERATION ET LA DETERMINATION D'UNE COLLECTION : LES VETEMENTS DE LA POUPEE.

L'activité est effectuée en atelier en petite et moyenne section de maternelle. La maîtresse propose une poupée représentée par un dessin. A l'autre bout de la classe la maîtresse a disposé des vêtements (figures découpées.). Les enfants doivent aller chercher un ensemble de vêtements nécessaires pour habiller la poupée. Cette démarche doit être exécutée en une seule fois.

Nous relatons une observation d'une séquence construite à partir de cette situation de base.

Observation de décembre 1993 : École de Caudéran.

Nous avons observé une classe constituée de 24 élèves nés en 1988 (moyenne section) et de 5 élèves nés en 1989 (petite section).

LA SITUATION :

Par atelier dirigé, par groupe de 4, chaque enfant a devant lui le dessin d'une poupée (voir annexe). Il doit envisager d'aller chercher en une seule fois les habits (découpés dans du papier) nécessaires.

Auparavant, la maîtresse et les enfants se sont mis d'accord sur les vêtements nécessaires à la poupée. Chaque vêtement est nommé : la cagoule, le pull-over, la robe, les chaussettes.

Collectivement, la maîtresse et les enfants choisissent les vêtements nécessaires pour une poupée.

LA CONSIGNE :

"Chacun va maintenant choisir exactement les habits qu'il faut pour habiller sa poupée".

DEROULEMENT :

Les 24 élèves de moyenne section réussissent l'activité. 5 élèves de petite section ont échoué.

ANALYSE :

Cette activité consiste à énumérer les vêtements nécessaires à prendre, sans en oublier, et en n'en prenant pas deux fois. Pour mener à bien cette activité, les enfants ont dû construire mentalement une liste ordonnée.

Pour cela, les enfants n'utilisent pas les objets en tant que tels mais dans leur rapport à un tout permis par une représentation du schéma corporel.

Il s'agit bien d'une détermination d'un ensemble par dénomination de la collection (les vêtements de la poupée) qui induit une énumération.

En revanche, les petits qui n'ont pas de référence bien stable au schéma corporel, ne disposent pas des moyens de construire une dénomination, même si chaque objet est nommé. Ils échouent significativement à cette activité.

Il s'agit donc d'une activité d'énumération d'une collection (de vêtements). Le contrôle de l'énumération de cet ensemble se fonde sur le schéma corporel qui permet une détermination (donc au moins une énumération) de la collection.

VARIANTES :

Des variables commandent cette situation :

- Le choix de l'objet de référence (la poupée). Dans notre observation, cet objet est vite identifié structurellement à celui de son corps. Le choix de l'objet commande la stratégie d'énumération.
- Le nombre d'objets à ramener.
- Le nombre d'objets constitués eux-mêmes de familles d'objet. (Dans notre observation, un enfant a rapporté une seule chaussette.)

3.8.3. L'ENUMERATION POUR LA DETERMINATION D'UN ENSEMBLE A L'AIDE D'UNE PRODUCTION ECRITE: ELABORATION DE LISTES EN MATERNELLE :

L'énumération directe effective d'objets en classe de maternelle est très souvent confondue avec des jeux de mémorisation. Le maître exhibe une collection d'objets et les cache. Il demande alors aux enfants

- de produire une collection identique en puisant des objets dans un ensemble d'objets.

Il s'agit d'un travail de mémorisation.

-de dire le nom de tous les objets qui étaient exhibés. Il s'agit d'un travail d'association de l'objet et de son nom, ainsi qu'un travail de mémorisation. Des variantes peuvent modifier profondément la situation de base : par exemple, dès que l'enfant énonce un nom d'objet, le maître extraie l'objet en question ou bien il le met de côté sans le faire voir, etc.

Nous avons déjà évoqué, page 180, le travail de J.PERES (1986)

Dans sa thèse "Construction et utilisation d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle", Jacques PERES travaille sur la situation suivante :

Il s'agit de retrouver le contenu exact d'une boîte (trésor) en se souvenant de tous les objets qui y sont enfermés. En travaillant sur les variables qui commandent cette activité (en particulier en utilisant les travaux de J.M. DIGNEAU sur le saut informationnel), Jacques PERES a construit des situations qui provoquaient, chez les enfants de grande section, le besoin d'écrire des listes.

Ce jeu des listes a, pour lui, un objectif précis : (P.34 de l'ouvrage à destination des enseignants).

"Nous avons dit qu'au cours de cet apprentissage, les enfants amélioreraient leur désignation en la complexifiant, en les rendant plus aptes à désigner efficacement les objets, en réduisant les incertitudes ou confusions. Cette amélioration, il faut la comprendre comme le symptôme d'un travail d'élaboration de la part des enfants et c'est cela qui est le véritable objet de notre apprentissage. Autrement dit, nous ne visons pas essentiellement l'apparition de désignations correctes mais plutôt ce qui les rend possible, c'est à dire les processus constructifs internes

mis en œuvre par l'enfant. C'est dans cette perspective que sont élaborés les obstacles auxquels ils sont confrontés."

P.35 "Pour être efficace, une liste suppose d'abord qu'à un seul objet corresponde un symbole et un seul, ensuite que tous les objets de la collection soient désignés. Autrement dit, il est nécessaire de mettre en correspondance rigoureuse les objets et leur désignation. Or, à l'âge des enfants intéressés par cette activité, les opérations bijectives ne sont pas encore spontanément réussies. Elles demandent un apprentissage."

P.36 "La nature logique de l'apprentissage apparaît plus clairement au cours de la construction, par l'enfant, de symboles qui visent non seulement à représenter un objet, mais aussi et surtout à le différencier d'autres objets avec lesquels il était confondu... cette démarche qui consiste pour l'enfant à prendre en considération ce que n'est pas l'objet tout autant que ce qu'il est, ou à envisager en même temps que l'aspect direct d'une action, l'aspect inverse qu'elle suppose, n'est pas du tout spontanée. Son absence est même chez PIAGET la cause essentielle du caractère prélogique des raisonnements."

D'où le choix des objets 5 objets longs, 7 objets ronds.

CONCEPTION DE L'ENUMERATION DANS CETTE ACTIVITE :

Dans l'activité du "jeu du trésor", l'auteur précise bien l'objet de l'apprentissage visé : "Autrement dit, nous ne visons pas essentiellement l'apparition de désignations correctes mais plutôt ce qui les rend possible".

Par exemple, les élèves peuvent réaliser les dessins des objets sans avoir un projet d'énumérer. Il leur faut du temps pour imaginer que l'énumération sera la solution au problème posé. Les enfants peuvent par exemple produire une bonne liste, mais au hasard de la prise des objets. (Par exemple, la prise des objets et la pose à côté, peuvent produire une énumération à l'insu des enfants). Le projet effectif de contrôle de l'exhaustivité afin de reconnaître ou de reproduire l'ensemble n'est pas, dès le début, le moteur de l'action, encore moins de la formulation.

L'énumération devient petit à petit un projet effectif (en réponse aux erreurs décelées dans le fonctionnement dans la situation) et ce projet se construit en même temps que se construisent des processus de dénomination des objets.

ENUMERATION D'OBJETS EFFECTIFS, ENUMERATION A L'AIDE DE LISTES :

Au cours de cette activité, les enfants élaborent donc des processus de construction d'une liste symbolique permettant de retrouver la liste des objets.

Dans les premières étapes de l'activité, les enfants devaient retrouver les éléments de la collection. Il s'agissait de contrôler, de déterminer une collection. Ils devaient donc produire l'inventaire, à l'aide d'analogies, d'oppositions, de pré-classifications.

Des indices montrent que les enfants commencent à donner du sens à cette activité (ils savent ce que signifie oublier, redire, etc.) montrent qu'ils commencent à concevoir une énumération de la collection.

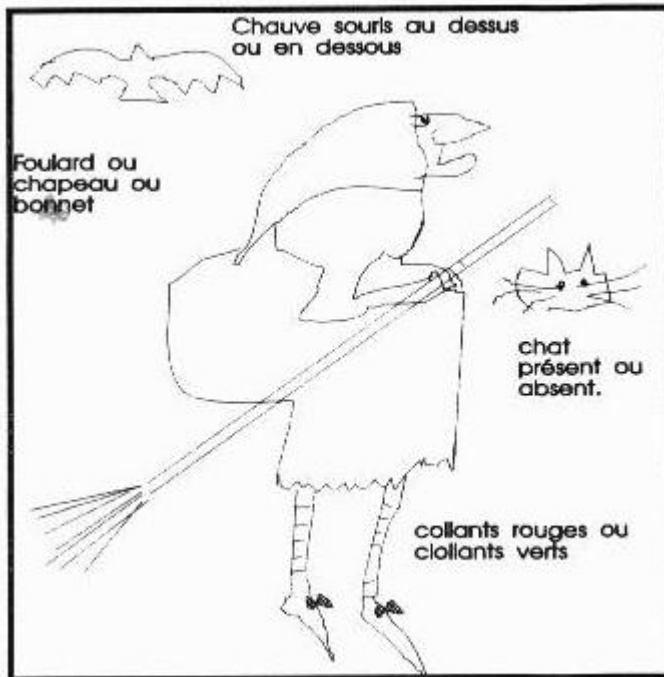
La construction des listes répond au problème des limites de l'organisation effective de cette première énumération. Le passage aux listes écrites permet de mettre à l'épreuve d'autres conceptions de l'énumération, en liaison avec la fonction symbolique. Ainsi, les enfants conçoivent qu'une énumération d'un ensemble (d'objets) peut se construire à partir d'un autre ensemble (de symboles) qui les représente. Cette nouvelle énumération est la solution du problème posé.

3.8.4. L'ENUMERATION COMME CONTROLE D'UNE EXPLORATION D'ENSEMBLE : "LA SORCIERE" :

La maîtresse a préparé des cartes. Chaque carte représente une sorcière. Ainsi, le jeu comporte 24 cartes cartonnées, toutes différentes : en effet, chaque sorcière diffère d'une autre sorcière de la façon suivante :

Les coiffures peuvent être un chapeau, un foulard ou un bonnet.

La chauve-souris peut être au dessus de la sorcière ou en dessous. Le chat peut être présent ou absent.



Une activité fréquemment conduite en maternelle consiste à cacher ou à marquer une carte et à poser des questions à celui qui a caché ou marqué cette carte afin de pouvoir découvrir la carte marquée ou manquante.

Cette activité est souvent étiquetée comme "activité logique". Nous allons conduire une observation afin d'analyser les modèles mis en œuvre par les enfants dans cette situation.

3.8.4.0.1. OBSERVATION :

Le détail de l'observation figure dans l'annexe de la thèse.

Étudions la phase trois dans laquelle deux enfants (nommés A et C) vont devoir retrouver la carte manquante.

Nous observons leur stratégie.

Jeu de la carte manquante : La maîtresse a enlevé une carte de la collection des 24 cartes. Deux enfants doivent retrouver la carte manquante.

A et C mettent les cartes par terre.

C : "d'abord, on va trier les chauve-souris au dessus et les chauve souris dessous." "Je compte les chauve-souris au dessus.

C compte 12. A dit alors : "c'est moi". Tous deux recomptent. C dessine sur son ardoise

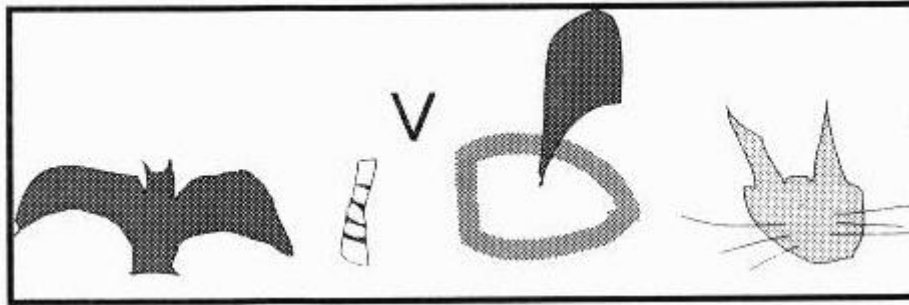
Maintenant, il faut les collants verts. Les enfants remettent alors toutes les cartes ensemble. Ils recomptent les deux classes : collants verts, collants rouges.

"Il y a 12 cartes de collants verts, donc c'est les collants rouges."

Les enfants font la même démarche pour le chat.

Pour les coiffures, ils font trois tas : la classe des chapeaux, celle des foulards, celle des bonnets. Ils repèrent que la classe des foulards n'a pas autant d'éléments que celles des chapeaux ou celle des bonnets.

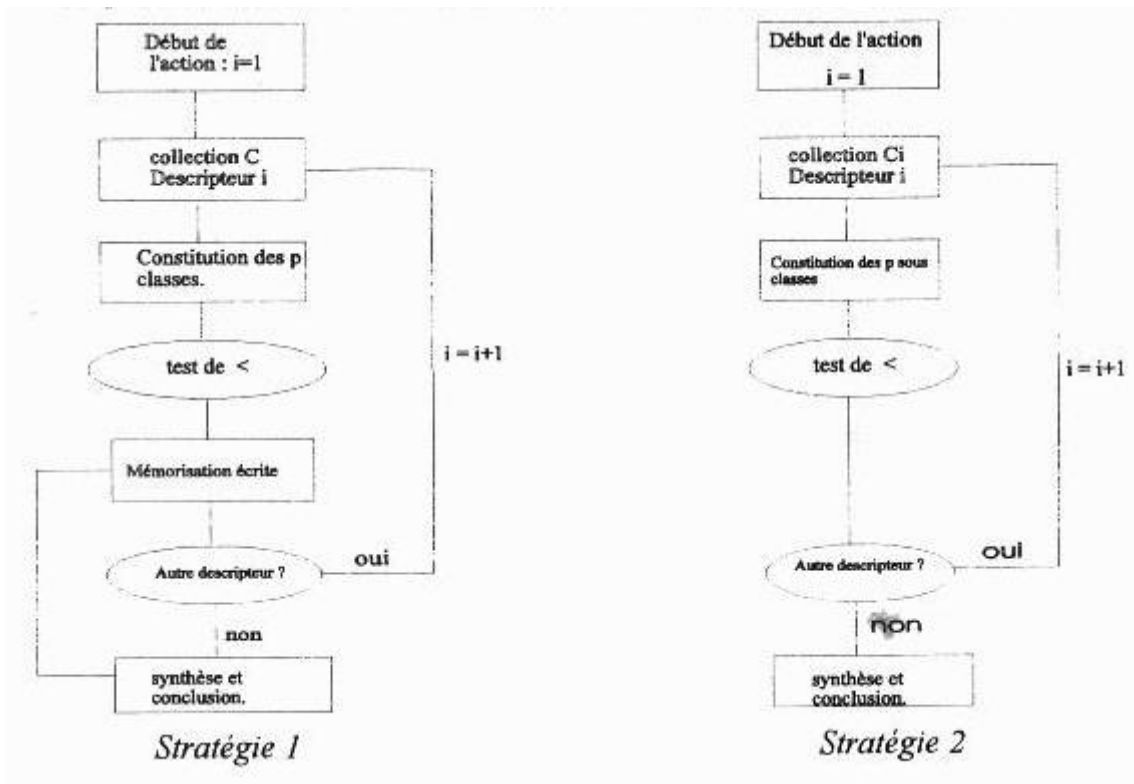
Le code a été mis au point avec la maîtresse, sur leur suggestion. Les enfants ont pris l'habitude de noter sur une ardoise. C a dessiné, au fur et à mesure des découvertes :



ANALYSE :

Les enfants réalisent la tâche suivante : Ils prennent une collection de cartes(C) et un descripteur. Ils partitionnent selon ce descripteur. Ils ont à leur disposition l'inégalité qui leur permet de conclure par rapport à ce descripteur. Ils prennent la collection, à nouveau et un autre descripteur et ainsi de suite.

Comparons cette stratégie avec celle qui tiendrait compte du résultat précédent :



Les élèves de maternelle que nous avons observés utilisent la première stratégie. La méthode de contrôle de l'action consiste donc à reprendre les 24 objets à chaque fois. La deuxième méthode consisterait à changer la désignation de "successeur de" en tenant compte des classifications emboîtées, ce qui est trop difficile à cet âge.

L'énumération est ici présente dans l'organisation de la tâche. Le moteur des décisions est la mise en rang de tâches élémentaires identiques, une mémorisation et un bilan. Une autre énumération plus coûteuse dans les moyens de définir le "successeur de " serait plus économique du point de vue du maniement des objets.

REMARQUE :

COUT DE STRATEGIES ET UTILISATION DE L'ECRIT :

La stratégie 1 implique une mise en mémoire de résultats. Dans la classe, cette mise en mémoire permet la réalisation des messages que nous avons décrits ci-dessus. La stratégie 2 ne nécessite pas de mise en mémoire. Il n'est pas nécessaire d'écrire.

Selon le choix des types d'énumérations, il y a donc un travail de mise en mémoire plus ou moins coûteux. Ce coût a une incidence sur l'usage de l'écrit.

Il y a donc un équilibre (en termes de coût) qui se produit entre choisir une exploration de la collection peu coûteuse (en tant que conceptualisation) parce que répétitive et constituée de séquences indépendantes, à laquelle on associe une prise de notes, et une exploration plus coûteuse constituée de séquences de travail emboîtées, pour laquelle aucune prise de note n'est nécessaire.

Dans ce cas, l'écrit est une solution à la mise en œuvre d'une procédure peu coûteuse.

3.8.5. ETUDES ASSOCIEES A L'OBSERVATION DES "SORCIERES":

3.8.5.1. RECHERCHE D'UN OBJET MANQUANT DANS UNE COLLECTION : BLOCS DIENES :

Cette étude se rapproche de celle des "la sorcière". Nous constatons que cette situation pose problème au delà de l'école maternelle.

Soit le problème suivant : Dans une boîte de blocs, on veut savoir si l'on a tous les blocs de la collection, ou savoir quel est l'objet manquant.

Cette collection est caractérisée par les descripteurs suivants (petits, grands, plats, épais, rond, carré, triangles, rouges, jaunes, verts, bleus). Si l'élève sait qu'il y a un seul représentant par classe "minimale", il n'est pas nécessaire de connaître le nombre d'élément de la collection. C'est l'utilisation (ou non) de l'information apportée par les descripteurs qui va être déterminante pour savoir quel(s) bloc(s) est (sont) manquants.

L'élève doit donc travailler sur des classes au travers de la désignation alors qu'il a effectivement les objets sous les yeux. Cela pourra se traduire par un rangement en tableau, par exemple. Le nombre peut être un outil d'appoint, comme nous l'avons vu dans l'activité "des sorcières".

Dans ces deux activités (blocs DIENES et la sorcière) les objets sont en ostension, mais le contrôle de l'ensemble s'effectue au travers d'une exploration de la collection fondée sur la structure induite par la dénomination.

3.8.5.2. L'ENUMERATION COMME MOYEN DE CONTROLER L'ABSENCE D'UN ELEMENT : LES JEUX DE CARTES :

Le jeu de cartes et le système de dénomination de celles-ci constitue un exemple de structuration induite par cette dénomination.

Dans le cas du jeu de cartes, la culture a donné deux ensembles de descripteurs, la "couleur" et la "valeur" qui, organisés, permettent la désignation de chaque objet. Nous avons déjà étudié dans le premier chapitre, en quoi un système de codage influe sur l'exploration de la collection du jeu de cartes en permettant une structure.

En absence de toute connaissance culturelle du jeu de cartes, l'identification d'une carte manquante ne pourra être conduite que par une énumération permettant la comparaison de deux listes (dans ce cas, pour se rendre compte de l'absence d'une carte, il faut comparer le jeu à un jeu complet.).

Si, par contre, le sujet dispose de descripteurs et les reconnaît comme tels, c'est à dire s'en sert pour structurer la collection, l'énumération ne se conduit pas de la même façon (voir l'observation des "sorcières").

La syntaxe des descripteurs permet une organisation énumérative de la collection.

REMARQUE : Le choix d'une structure syntaxique optimale de dénomination des objets d'une collection à des fins informatives est modélisé par le théorème de Shannon. Pour 32 objets, il suffit donc de 5 mots et d'une règle de concaténation. ($2^5=32$).

3.8.5.3. L'ENUMERATION COMME MODELE IMPLICITE D'ACTION POUR CONSTRUIRE UNE COLLECTION : LE JEU DES DIFFERENCES:

Il existe une famille de jeux qui repose sur le principe suivant : deux dessins apparemment identiques sont proposés aux enfants. En fait, ces deux dessins diffèrent par un certain nombre de détails qu'il s'agit de recenser. Généralement, au nombre près, la consigne est la suivante : *"trouvez les 7 différences qui existent entre ces deux dessins"*.

Nous avons conduit une observation d'enfants de grande section à propos de ce jeu. Ceux-ci font les associations par couples d'éléments réputés identiques. En cela, l'exploration spatiale est prépondérante (mais elle dépend des dessins à explorer). Dès qu'un couple ne réalise pas l'identité, l'enfant le signale en disant souvent : "j'ai trouvé une différence". L'enfant constitue donc formellement un ensemble de nouveaux objets conceptualisés (les "pas pareils", les "différences") à partir de couples.

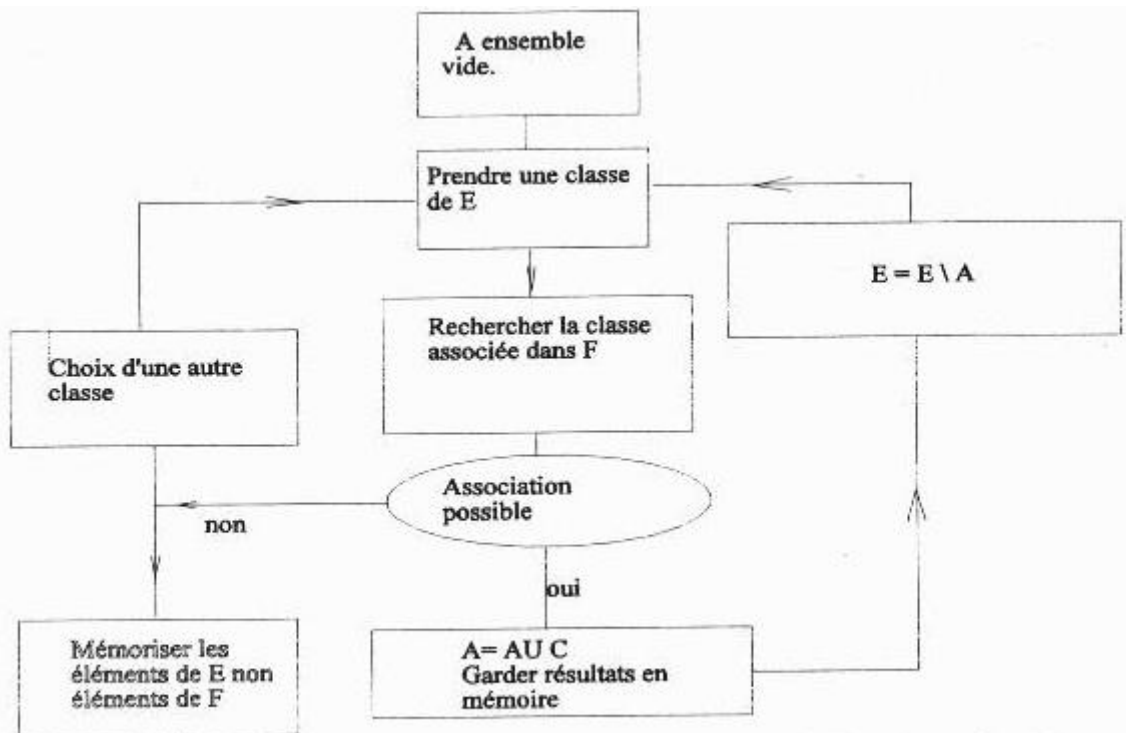
L'exploration de l'ensemble se traduit donc par une énumération de l'ensemble produit des couples identiques afin d'en extraire un ensemble de couples non-identiques. Même si l'énumération n'est pas réellement nécessaire, elle constitue un modèle de fonctionnement du sujet : (*"non, j'ai déjà pris ces deux là"*).

Bien souvent, l'enfant ne sait plus s'il a déjà répertorié, ou non, le couple de non-identiques qu'il vient de (re)trouver. Dans le cas de 7 erreurs, nous avons pu remarquer que le contrôle à l'aide du nombre (7) était opérationnel chez certains enfants mais pas tous. Il faut bien sûr pour cela avoir la maîtrise du dénombrement d'une collection de 7 objets.

Aucun des 25 enfants que nous avons observés n'a pensé à effectuer un marquage des couples recensés afin d'organiser l'énumération

3.8.6. L'ENUMERATION ET LA COMPARAISON DE DEUX COLLECTIONS :

La comparaison de deux collections d'objets fait appel à de nombreuses stratégies largement dépendantes de la contingence. Nous allons faire un organigramme d'une démarche possible.



Un exemple de famille de stratégies de comparaison de deux listes E et F

Une classe de l'ensemble E peut être réduite à un élément de l'ensemble. Par exemple, lorsque l'on compare deux listes E et F de noms, on prend un ou plusieurs noms de E, et on explore F pour trouver les éléments associés.

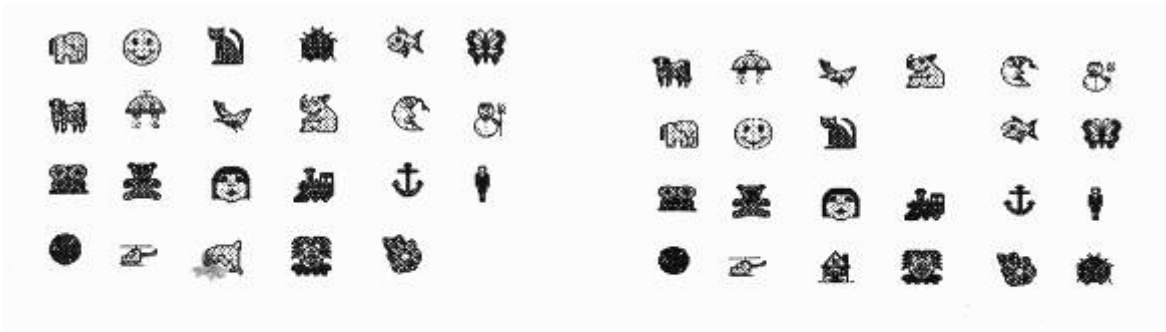
Il faut tenir une comptabilité des associations repérées. Puis l'on prend un ou plusieurs éléments de E non déjà recensés et l'on cherche les éléments associés dans les éléments de F non déjà recensés. Dans cette démarche, des éléments de E non éléments de F sont repérables. Il faut en tenir une comptabilité (marquage, liste à part, etc.).

Lorsqu'il s'agit de comparer des collections, il faut au moins énumérer une collection et mettre en mémoire, avant tout passage au successeur, ce qui sera utile à la résolution du problème.

EXEMPLES DE COLLECTIONS POSSIBLES A COMPARER AU COURS PREPARATOIRE :

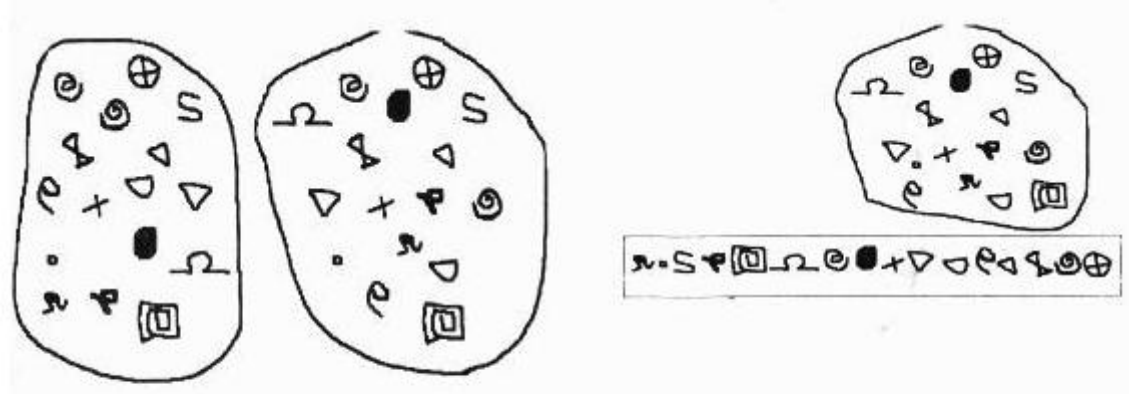
Nous donnons, page suivante, une famille de types de listes en mettant en évidence les variables qui peuvent influencer sur l'énumération :

- Les objets peuvent être nommés ou non.
- Les objets sont traditionnellement associés (ou non) à une structure d'ordre total (les lettres de l'alphabet, les nombres) fonctionnelle.
- Les objets sont associés en classes. La construction des classes peut être le fait d'objets identiques ou non.
- Une des deux collections est structurée spatialement.

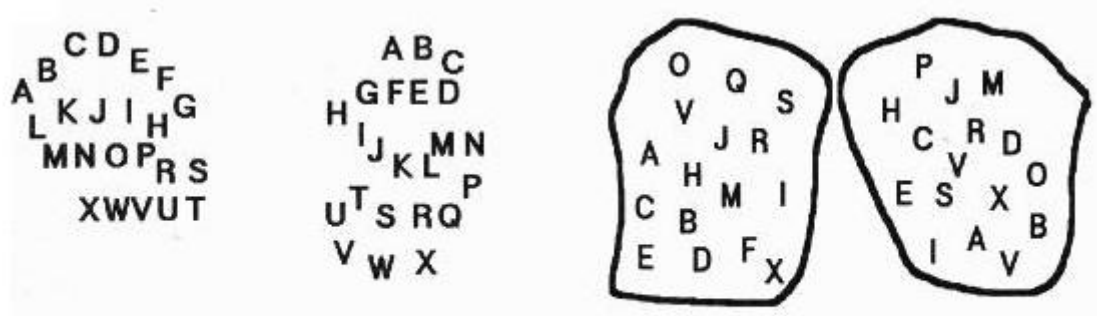


Collections utilisées lors de l'observation supplémentaire du cours préparatoire.

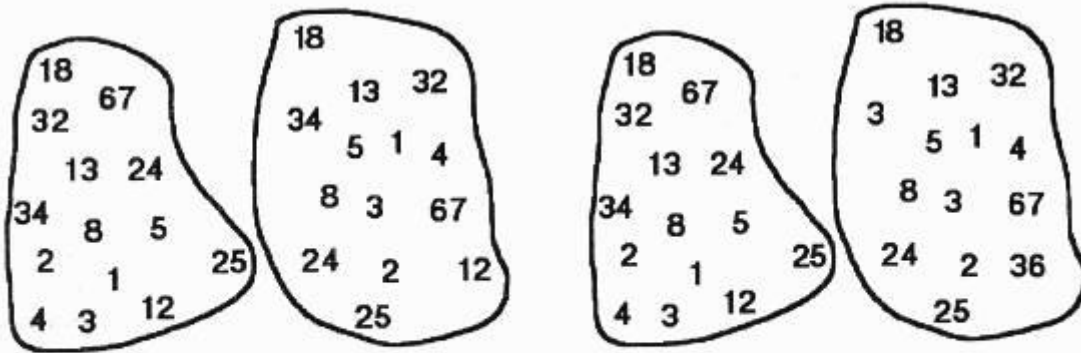
Le choix des icônes influe sur les stratégies de comparaison. Les exemples suivants montrent des choix possibles :



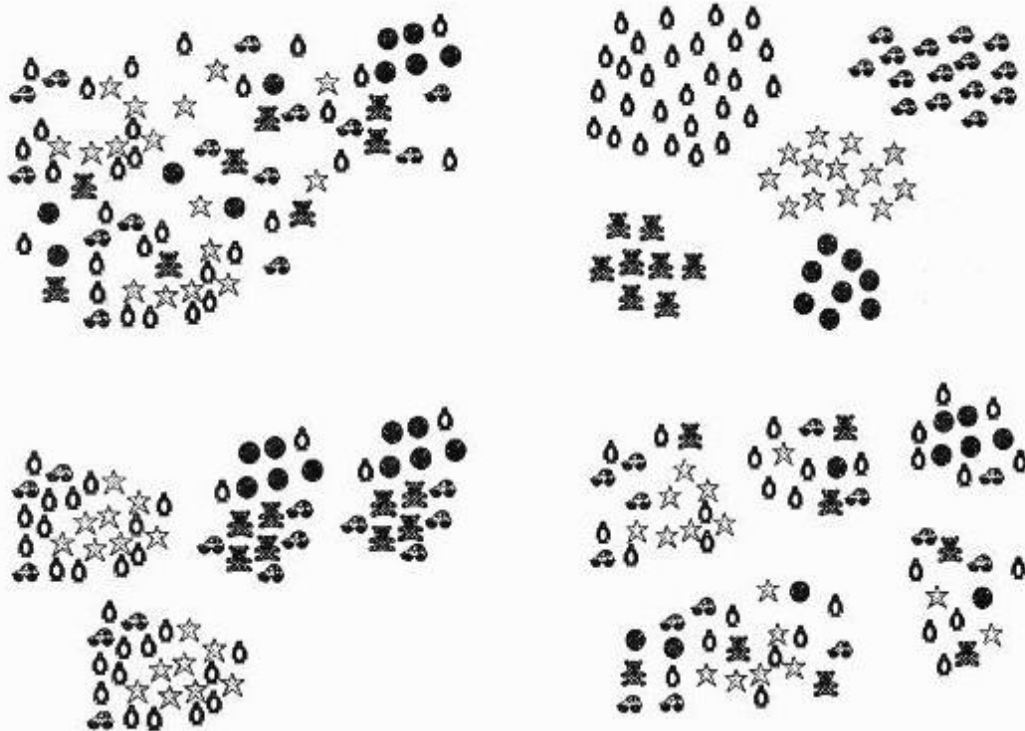
Là, les objets ne peuvent être nommés et dans le deuxième exemple une collection est organisée.



Dans ce cas, les objets induisent un rangement intrinsèque qui peut permettre une énumération adaptée



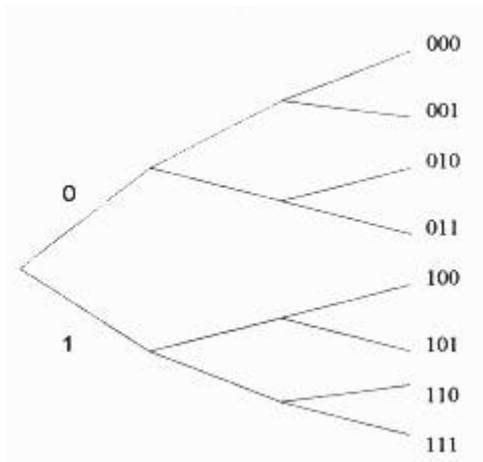
Les nombres induisent aussi un ordre qui peut avoir une influence sur le déroulement de l'énumération



Selon que la façon dont sont constituées les classes, les méthodes de comparaison doivent varier.

3.8.7. CHOIX D'ENUMERATIONS EN FONCTION DE LA TACHE A ACCOMPLIR:

Prenons, par exemple, un alphabet A de deux mots et l'ensemble des mots de trois lettres $_$: L'ordre lexicographique et l'arbre dichotomique par lequel on représente souvent cet ensemble constituent une présentation qui fait l'amalgame entre deux procédés de réalisation de l'ensemble. Il est en effet possible de construire l'ensemble à l'aide de la technique de l'arbre dichotomique sans que la solution (la colonne des éléments de E) soit ordonnée selon l'ordre lexicographique. Au contraire, l'ensemble peut être réalisé en ordonnant immédiatement les éléments du premier "000" au dernier "111". Dans ce cas, l'ordre lexicographique permet le contrôle de l'énumération. En effet, le sujet qui a conçu l'ensemble E comme étant totalement ordonné par cet ordre a alors les moyens de construire facilement la fonction "successeur de" dans l'ensemble E.



Nous sommes en présence de deux énumérations fondées sur deux conceptions différentes des éléments de l'ensemble : la première est une énumération indirecte fondée sur un produit cartésien de A^3 , la deuxième est une énumération directe de l'ensemble E. Les ouvrages de mathématiques vont pourtant faire l'amalgame entre les deux.

Or la première conception (celle de l'arbre, celle de A^3) permet une énumération dénombrante de l'ensemble (aboutir à la construction de la formule 2^3 , puis 2^n). Elle est donc parfaitement adaptée au dénombrement de l'ensemble E.

Par contre, si l'activité consiste à rechercher et à désigner si un élément de l'ensemble E est absent et s'il y a un ou des doublons, le dénombrement, donc l'énumération associée n'est pas très adéquate. L'énumération se fondant sur l'ordre lexicographique est mieux adaptée.

3.8.8. L'ENUMERATION ET LES PROCESSUS ITERATIFS : LE PROBLEME DIT DES "INTERVALLES"⁸⁷ :

Prenons un exemple :

Sur une route, il y a des arbres. Il y en 6, chacun distant de 8 mètres.

1°) *Quelle distance totale entre le premier et le dernier arbre? (Le texte est accompagné d'un schéma sur lequel figurent les 6 arbres).*

2°) *Même problème avec 75 arbres. (Cette fois ci, il n'y a pas de dessin.).*

Ce problème doit mettre en évidence le changement de comportement lorsqu'il s'agit de dénombrer une collection lorsqu'on la voit et lorsqu'il s'agit de dénombrer une collection que l'on ne peut que concevoir structurellement. Nous faisons trois observations d'enfants sur ce problème.

Le choix de ce problème nous a été inspiré par les travaux de J.WITTEWER sur un thème très voisin dans l'ouvrage : *"analyse génétique des conduites opératives dans le problème scolaire dit "des intervalles"* Cahier 5 École Normale Supérieure de Tunis 1966.⁸⁸

L'étude porte sur les structures que l'enfant met en jeu pour conceptualiser le deuxième problème. Il s'agit d'un problème de dénombrement indirect (le dénombrement des arbres est une donnée; une bijection et une fonction récurrente permettent, à un près, de dénombrer le nombre d'intervalles.)

⁸⁷ Dans la tradition de l'enseignement des mathématiques, cette activité est étiquetée "problème d'intervalle". Dans les ouvrages anciens du "cours supérieur" (exemple ouvrage MINET et PATIN F.NATHAN 1931), les auteurs appelaient ce problème : "problème des intervalles avec un piquets à chaque bout". Très vite, on enseigne trois règles aux enfants : la règle des intervalles ouverts, des intervalles semi-ouverts, des intervalles fermés.

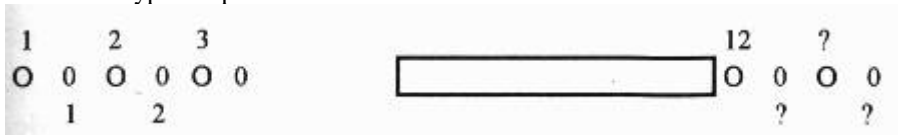
⁸⁸ Citons l'auteur :

"Il existe quantité de pratiques concrètes où il s'agit de partager un espace en n parties avec x éléments divers ... En général , on résout le problème par des actions concrètes, soit préopératoires, c'est à dire en prenant n éléments pour n parties, ce qui fonctionne bien pour la clôture et les piquets, espace fermé, mais pose le plus souvent la différence + ou -1 en espace ouvert. Ces problèmes sont sans importance pour l'adulte qui ajuste n et x selon ses besoins, mais, à l'école, la manipulation n'est pas nécessairement autorisée !...

L'auteur met au point le dispositif suivant :



Voici deux types de problèmes à résoudre :



et teste ainsi l'hypothèse du "structurellement possible".

3.8.8.1. OBSERVATION :

Observation de trois enfants :

TH. 8 ans, fin de CE1

Répond sans difficulté à la première question.

Il ne peut pas répondre à la deuxième question et n'envisage aucune stratégie.

Y. 12 ans, fin de 6°

Trouve immédiatement le problème $74 \times 8 = 592$.

P.E. 9ans, fin de CE2.

Question 1 :

P.E. ajoute $8+8+8+8+8$ et annonce 40 sans hésiter.

Question 2 :

Immédiatement, P.E. dit *"pour 8 il y a deux arbres, alors je fais 75 en deux moitiés."*... silence.

Quelques moments après, P.E. dit : *"75-6=69 j'ai 40 mètres"*, puis continue : $69-6=63$ et marque 40 en dessous des 40 premiers en vue d'une addition future.

"Je sais que c'est ça mais ça va être long".

Le problème est posé avec 20 arbres. Les hésitations sont les mêmes.

Le dessin avec 20 arbres est présenté à P.E.

P.E. compte les intervalles et annonce directement "Il faut faire 8×19 ". Il effectue ensuite la multiplication.

Retour aux 75 arbres.

P.E. *"Je vois, il faut en enlever un. Pour 20 c'est 19. Pour 75 c'est 74. Il faut faire 74×8 "*. Il effectue ensuite la multiplication.

(Temps total, 12 mn).

COMMENTAIRES : Le passage à 20 arbres, qui se situe à la limite de la perception (l'enfant utilise la multiplication) a semblé constituer une bonne variante de la situation pour, à la fois maintenir le contrôle de la situation tout en invalidant le procédé utilisé pour la question 1.

Pourquoi l'enfant a-t-il décidé de ne plus utiliser la stratégie du comptage effectif ? Dans le cas de 20, la connaissance du nombre d'intervalles semble prendre plus d'importance que dans la question 1. Il apparaît que cette recherche préalable devient prioritaire.

Le passage à 75 permet de faire formuler le théorème en acte "il y en a un de moins" qui est le théorème des intervalles qui ne pouvait être découvert par le passage de 6 à 75, puisque l'ensemble des intervalles était présent physiquement mais non pris en compte comme entité par le sujet.

L'ENUMERATION COMME MOYEN DE VALIDER LE THEOREME EN ACTE :

L'ensemble de départ est constitué d'objets (arbre) et d'objets segments (entre les deux arbres).

Une stratégie pour mener à bien l'exploration de l'ensemble consiste à remplacer cette conception par la conception suivante : concevoir un ensemble constitué de l'ensemble des couples (arbre, segment à droite de l'arbre). L'énumération de cette collection est déterminée par le rang de l'arbre et l'organisation spatiale (simple). La fonction successeur est unique. Nous dirons alors qu'il s'agit d'une énumération à processus itératif.

Dans "de la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent, PIAGET distingue le "matériellement possible" du "structurellement possible". Il déclare *"On peut, en premier lieu,*

parler d'opérations et de relations possibles pour désigner celles que le sujet conçoit lui-même comme possibles, c'est à dire celles qu'il sait pouvoir effectuer ou construire, même sans qu'il le fasse effectivement : c'est ce que nous appellerons le "matériellement possible". Mais on pourrait aussi attribuer la qualification de possible aux opérations et relations que le sujet serait capable d'effectuer ou de construire sans qu'il prenne conscience de cette éventualité ni même de sa propre capacité à cet égard : c'est ce que nous appellerons le "structurellement possible" qui est donc le possible du point de vue de l'observation". J.WITWER⁸⁹ ajoute que "le structurellement possible" peut être confirmé par la démarche suivante : découvrir des tâches dont la réussite suffisante n'advient qu'à l'âge des opérations formelles (11-12 ans) et telles que leur organisation dynamique ait une isomorphie avec une organisation logico-mathématique."

Apparemment, il semble qu'il y ait une opposition entre la conception de l'ensemble vue par P.E. et celle qui est explicitée dans l'analyse que nous venons de faire. Dans un cas, l'ensemble est pris globalement, dans l'autre, il est structuré à l'aide d'une itération. Nous n'avons pas poursuivi cette observation, mais nous nous interrogeons sur les modèles implicites qui permettent à un enfant comme P.E. d'énoncer le théorème "un de moins". L'opposition entre les deux conceptions ne serait elle qu'apparente ? Y aurait-il une procédure énumérative telle que nous la décrivons qui permettrait d'énoncer ce théorème ?

3.8.9. L'ENUMERATION DU COTE DES PROFESSEURS : LE PRODUIT DE POLYNOMES:

Développer le produit de 2, 3, n polynômes, est une activité qui engendre beaucoup d'erreurs. Les élèves utilisent des procédés qui ne sont pas bien reliés aux produits. S'il y a un produit de trois facteurs, les contrôles de l'exhaustivité et de la non-redondance (la stratégie énumérative des rectangles) sont remis en cause. Il faut en reconstruire une autre : faire le produit des deux premiers? Faire le produit en repérant les degrés et en pratiquant par ordre croissant ou décroissant? Ceci demande alors de concevoir une énumération évoluée. Le produit du nombre de monômes par polynôme permet un contrôle quantitatif du nombre d'éléments issus des produits élémentaires, mais redondance et exhaustivité peuvent se conjuguer pour rendre ce contrôle inopérant. Ce contrôle est une condition nécessaire à la réussite de certaines stratégies.

Soit à développer le produit de deux polynômes de degré n et m en monômes. Les deux polynômes sont eux-mêmes rangés, selon l'ordre de l'écriture qui peut être, ou non, l'ordre des degrés croissants ou décroissants des monômes.

Méthode 1 : multiplier le premier terme du premier polynôme par le premier, le deuxième, etc., recommencer pour le deuxième terme du premier, etc. puis additionner.

Cette méthode nécessite une énumération d'un ensemble produit.

Méthode 1 bis : travailler de la même façon, mais à partir du deuxième polynôme.

Méthode 2 : rechercher tous les monômes de degré 1, de degré 2, etc.

Cette méthode énumérative requiert la construction d'une partition (monômes ayant même degré), un ordre, une énumération élémentaire d'un sous ensemble d'un ensemble produit : (savoir énumérer tous les monômes de même degré).

⁸⁹ "Perspectives Piagétienne" ed. Privat 1982 P.65

Méthode 3 : poser $u=3x+1$ et effectuer $u(2x+5)$. Dans ce cas, on remplace une énumération d'un ensemble à 4 éléments par deux énumérations à 2 éléments.

Lorsque le nombre de polynômes dépasse deux, les deux méthodes évoluent différemment. La première permet de mettre en place un processus récurrent. La deuxième devient vite difficile.

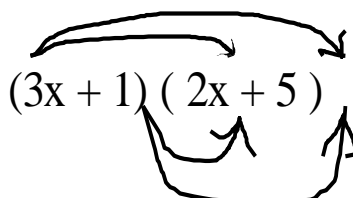
PRATIQUES OBSERVEES CHEZ LES PROFESSEURS :

Certains professeurs aident les élèves en faisant changer de cadre et en faisant apprendre à faire le produit de deux polynômes à l'aide de la représentation en rectangle. Ainsi, par exemple, pour effectuer le produit : $(3x+4)(5x^2 -6x +3)$, le professeur enseigne le tableau suivant :

	$5x^2$	$-6x$	$+3$
$3x$			
$+4$			

Cet enseignement résout localement le problème de l'énumération. Il est bien évident que cet enseignement ne résoudra pas le problème du produit de 3 polynômes.

D'autres professeurs les flèches à inscrire au dessus du polynôme. Cet enseignement va permettre le contrôle de l'énumération. L'enseignant a construit un système d'énumération : pour énumérer, il faut savoir faire les flèches.



Les deux exemples que nous avons décrits illustrent des effets de glissement méta didactique. Le professeur sait qu'il y a une difficulté. S'il veut laisser à la charge de l'étudiant la responsabilité de concevoir une méthode d'énumération, il ne dispose pas d'indications dans les programmes. S'il décide de prendre ce problème à sa charge, il prend le risque d'enseigner un procédé à efficacité trop locale.

Pour conclure sur cette étude, nous mettons l'accent sur le fait que lorsque nous avons interrogé des professeurs sur la façon dont ils travaillaient sur le produit de polynômes, ceux-ci répondaient généralement : "moi, je...."

3.9. RESULTATS

RESULTATS GENERAUX DES OBSERVATIONS

Nous faisons l'hypothèse que certaines difficultés dans des activités de dénombrement peuvent être imputées à la difficulté de passer d'un ensemble fini d'éléments à la détermination d'un ordre total sur cet ensemble. Nous voulions montrer que cette difficulté était due à une absence de connaissances que nous appelons l'énumération.

De nos observations, nous retirons les résultats suivants :

A- (ÉTUDE PAGE 131) DANS DES SITUATIONS DE COMPTAGE EN COURS PRÉPARATOIRE, NOUS AVONS RELEVÉ DEUX CONCEPTIONS DE L'ÉNUMÉRATION. NOUS AVONS MONTRÉ QUE LEURS PRATIQUES ÉNUMÉRATIVES SE RATTACHENT À DEUX GRANDES FAMILLES IDENTIFIABLES. CE SONT LES ÉNUMÉRATIONS DIRECTES QUI METTENT EN JEU UN RANGEMENT DE LA COLLECTION ET LES ÉNUMÉRATIONS FONDÉES SUR UN PARTITIONNEMENT DE CELLE-CI. NOUS AVONS MONTRÉ QUE CES DEUX CONCEPTIONS S'ADAPTENT DIFFÉREMMENT AU COMPTAGE.

Une fois cette investigation effectuée, nous avons observé comment l'énumération, au travers de ses dysfonctionnements, influait sur le comptage. Mais pour conduire cette étude il fallait mettre en évidence des variables qui permettraient de mieux caractériser des situations d'énumération, en particulier de séparer l'énumération du comptage.

B-(ETUDES PAGES 64 ,107 et 157) :LES CONDITIONS DE L'ENUMERATION INFLUENT SUR LE COMPTAGE :

Nous avons apporté la preuve de cette affirmation au cours de plusieurs des observations que nous avons conduites :

L'ÉPREUVE DES MOSAIQUES (page 64107) a montré que les conditions du mesurage des collections influent très fortement sur le choix des opérations, y compris chez des étudiants ayant de bonnes connaissances numériques .

L'observation de l'ÉPREUVE DES C.A.S. en cours élémentaire deuxième année (page 107) AINSI QUE L'OBSERVATION CONSTRUITE AUTOUR DU LOGICIEL "FENETRE" (voir présentation du logiciel page 242) ont montré que dans une situation de dénombrement d'objets présentés sous forme de tableau, selon que la collection est totalement montrée avec une structure ou que cette structure doit être effectivement reconstruite, le comptage ne s'effectue plus ou s'effectue différemment.

L'ACTIVITE "LES CUBES EN MATERNELLE" (page 157) en particulier, mais aussi de la "SORCIERE" ont montré que la question de l'énumération se posait très tôt. En particulier; dès la maternelle, il est possible d'organiser des activités dans lesquelles les conditions de l'énumération influent significativement sur le comptage.

CONSEQUENCES :

Pour pouvoir simuler ces types d'exploration, nous avons construit une situation a-didactique qui permet de ne pas voir toute la collection à la fois et oblige à prendre des décisions pour l'exploration.

Nous pensons avoir montré que la situation "FENETRE" permet de restaurer un travail d'exploration de la collection en vue d'une énumération et permet de mettre en jeu des techniques personnelles non scolarisées ou de redonner du sens à des techniques scolarisées.

C- IL EST POSSIBLE DE REPÉRER DES VARIABLES QUI MODIFIENT SIGNIFICATIVEMENT LES CONDITIONS DE L'ÉNUMÉRATION :

Nous avons mis en évidence des variables et nous avons prouvé leur influence significative sur l'énumération, donc sur le comptage.

Ces variables sont :

- de nature spatiale : nous avons en particulier conduit cette étude avec des enfants de moyenne et de grande section. (Page 157)

- la présence de plusieurs collections : cette variable a été étudiée dans l'épreuve "mosaïque" avec les étudiants (page 64). Dans cette observation, cette variable interfère avec la première variable. Dans la troisième observation du cours préparatoire, le fait qu'il y ait deux collections dénommées dans l'exercice 1 (page 136) et une seule dans l'exercice 2 a une influence déterminante sur la stratégie d'exploration.

Ceci nous a conduits à remanier le logiciel "CALAPA" (voir page 231) que nous avons élaboré lors de notre D.E.A. et d'y intégrer cette variable. Notre intention étant d'intégrer des situations d'énumération très tôt dans la scolarité, c'est à dire avant la construction du nombre.

- les conditions d'exploration de la collection : objets vus, objets conçus, collections vues, collections conçues :

Nous avons montré les effets de cette variable lors de l'observation du cours élémentaire. Dans cette observation, les variables du logiciel "fenêtre" (page 242) ainsi qu'une variable supplémentaire (FP) modifiaient significativement les démarches des enfants.

Ce type de situation doit contribuer à identifier l'énumération en tant que connaissance et permettre son traitement dans une activité scolaire.

Cette situation ne s'éloigne pas trop des situations habituelles du cours élémentaire. Ainsi, il nous paraît que l'intégration de cette situation en cours élémentaire ne pose pas de difficulté majeure. Or cette situation qui permet un traitement effectif et explicite de l'énumération permet, de plus, de lier énumération et construction des opérations, en particulier de la multiplication.

- la dénomination des objets : (Observation 3 du cours préparatoire, exercice 1 et 2 à partir de la page 131). Selon que les objets renvoient ou non à une dénomination, l'énumération n'est pas conduite de la même façon.

D- DES DIFFICULTÉS DANS LE COMPTAGE RELÈVENT DE L'ÉNUMÉRATION.

L'observation 3 du cours préparatoire (page 131) a montré que les enfants qui ont choisi de partitionner ont plus de difficultés à effectuer le comptage de la collection. L'énumération par partition rend l'activité de comptage plus difficile dans le cadre de ces exercices
Des études de cas (page 150 avant et après) ont montré que des difficultés d'exploration de la collection ET des difficultés liées à la synchronisation entre le marquage (activité relevant de l'énumération) et le comptage, provoquaient des difficultés dans le comptage.

L'OBSERVATION DES cubes (page 157) en maternelle a montré que l'organisation spatiale de la collection (et donc son énumération) avait une répercussion significative sur le comptage des éléments de cette collection.

Lors de l'observation élaborée autour du logiciel "FENETRE", (voir page 242) nous faisons l'hypothèse suivante : dans cette situation, certains enfants qui produisent la multiplication dans la fiche le font sur demande du système. La situation du logiciel nécessite une prise en charge de l'énumération. Cette situation doit donc provoquer des difficultés. Certains enfants doivent alors changer de stratégie et prendre l'énumération à leur compte.

La situation "fenêtre" a provoqué :

- une chute des réussites.
- l'abandon significatif de la multiplication chez un certain nombre d'élèves , ce qui semble confirmer notre hypothèse selon laquelle l'énumération d'une collection montrée en tableau n'est pas effective, mais apprise.

Cette hypothèse a permis de mettre en évidence un phénomène d'enseignement : le milieu scolaire se dote de moyens de faire procéder au calcul sans que l'enfant ait à énumérer la collection.

E- LES PRATIQUES SCOLAIRES INDUISENT DES ÉNUMÉRATIONS QUI RENDENT NON COMPÉTITIVES DES ÉNUMÉRATIONS QUI SERONT POURTANT FÉCONDES PLUS TARD.

Reprenons la deuxième hypothèse de l'observation 3 du COURS PRÉPARATOIRE.:(Page 131) *"le comptage constitue un obstacle à la mise en concurrence de pratiques énumératives par surdétermination de la stratégie du chaînage d'une part, par la confusion qu'il entretient entre les activités d'exploration de la collection et lui-même d'autre part."* Nous dirons que le chaînage est l'énumération consécutive au comptage de quelques éléments.

L'OBSERVATION 2 DU COURS PRÉPARATOIRE, (page 128) dans laquelle la situation utilisait la présence d'une structure ligne-colonne dans le premier exercice semble significativement influencer sur le résultat et confirme les résultats mis en évidence au CE2 (page 112) : le mesurage des collections se réalise souvent à partir de procédures enseignées.

COMMENTAIRE :

Cette conclusion pose un réel problème pour l'enseignement du nombre. Une énumération féconde pour la construction de la numération et de l'addition (le partitionnement de la collection) ne constitue pas la stratégie la plus performante pour effectuer le comptage. Or c'est le comptage qui est demandé.

Il y a ainsi des risques à voir des enfants ne pas s'investir dans l'exploration de type partition parce qu'elle ne constitue pas une solution efficace dans l'immédiat du cours préparatoire.

En effet, la majorité des exercices proposés en début de cours préparatoire rend la technique du chaînage immédiatement plus efficace. Or, la construction du nombre et de l'addition requièrent le partitionnement comme stratégie d'énumération.

Il est permis alors de se poser les questions suivantes :

Le temps pendant lequel l'énumération de type chaînage constitue une stratégie plus immédiatement efficace provoque-t-il une démobilisation d'autres énumérations ?

Si ce temps était réservé à la mise en concurrence de pratiques énumératives (et donc à l'étude du partitionnement), les enseignants auraient-ils d'autres perspectives pour la construction de situations d'apprentissage des groupements par paquets ?

F- LE RECOURS AUX OPERATIONS APPRISES POUR MESURER UNE COLLECTION N'EST PAS SUFFISANT POUR REUSSIR :

L'ETUDE 1 DES COPIES DE BACCALAUREAT (pages 161 et suivantes) montre que la compréhension de la situation n'est pas déterminante dans l'utilisation d'une opération appropriée et que le recours à des instruments mathématiques enseignés relevant de l'analyse combinatoire ne constitue pas un critère de réussite déterminant.

Les étudiants ne peuvent faire le lien entre la compréhension de la situation et la mesure effective de la collection.

L'utilisation des opérations de la combinatoire ne constitue pas un facteur de réussite.

Le passage de l'explication de la situation au dénombrement de la collection génère une opération inadéquate pour plus de la moitié des étudiants.

G- DANS DES SITUATIONS D'ANALYSE COMBINATOIRE, L'IMPOSSIBILITÉ À CHANGER DE CONCEPTION CONSTITUE UN OBSTACLE DIDACTIQUE À L'ÉNUMÉRATION

L'OBSERVATION DE L'ACTIVITE "DES RECTANGLES" (page 172) a montré l'influence des conceptions des objets à dénombrer sur la réussite au dénombrement.

L'ETUDE 2 DES COPIES DE BACCALAUREAT (page 167) montre que les étudiants ne disposent pas d'instruments permettant de passer d'une conception des objets à dénombrer à une autre qui faciliterait l'énumération.

REMARQUE :

Lors de cette étude, nous avons repéré le phénomène d'enseignement suivant : les auteurs d'exercices commencent un énoncé à l'aide d'une question qui fait travailler sur des objets effectifs. Cette question précède une autre question qui fera travailler sur des objets à concevoir. Cette pratique peut constituer un obstacle au changement nécessaire de conception des objets en vue du dénombrement.

H- IL EXISTE D'AUTRES DOMAINES DES MATHEMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE DANS LESQUELS L'ENUMERATION EST PRESENTE MAIS IGNOREE.

Les observations ou études complémentaires que nous avons conduites (à partir de la page 176) nous ont permis d'identifier des domaines de l'enseignement des mathématiques où

l'énumération est présente. Nous n'avons pas fait une étude exhaustive de ces domaines. Nous nous servons simplement de cette étude pour mettre en évidence deux phénomènes :

- Les activités communément appelées "activités de logique" à l'école maternelle relèvent souvent de l'énumération. (LE CASTELET (page 176), LES POUPEES (page 178), LA SORCIERE (page 181) sont les sources qui nous permettent d'avancer ce fait).

COMMENTAIRE : en prenant ces activités et en admettant que celle-ci relèvent d'une certaine façon des mathématiques, le système est confronté à l'étiquetage de ces savoirs. Faute de mieux, ces activités sont étiquetées "activités logiques".

- Certains points du programmes sont abordés dans les manuels (ou/et par les professeurs) sous forme de conseils. Cela va du conseil pour ne pas oublier de termes dans le développement d'un produit de polynômes (page 191) aux conseils plus "caricaturaux" (page 80) que nous avons relevés dans le domaine de l'analyse combinatoire.

COMMENTAIRE :

Nous pensons que ces conseils donnés dans un manuel sont l'indice d'une inadaptation du savoir savant à la construction effective du savoir. Il n'est pas étonnant d'y retrouver alors des conseils qui relèvent de l'énumération.

3.10. CONCLUSION :

3.10.1. LES OBSERVATIONS RÉALISÉES EN COURS ÉLÉMENTAIRE ONT PERMIS DE METTRE EN ÉVIDENCE :

Tout d'abord que les enfants peuvent répondre juste à une demande de l'institution concernant la multiplication dans les conditions du tableau cartésien en ostension, sans avoir un contrôle personnel de l'énumération de la collection. Cela serait sans dommage si l'on ne constatait pas d'échec dans les situations de multiplication s'éloignant un peu de la présentation "tableau". Or, nous avons montré que ces pratiques procédurales échouent dans une situation multiplicative dans laquelle la structure doit être conçue.

Les enfants ont donc des procédures scolaires de comptage d'éléments organisés en tableau. Ils comptent généralement le nombre de lignes et de colonnes, mais nous avons vu que dès que la structure du tableau change légèrement d'autres stratégies apparaissent. Les procédures sont déstabilisées dès que les conditions d'exploration du tableau sont modifiées.

Ainsi, l'apprentissage de la multiplication s'effectue sur une structure spatiale que les enfants n'ont pas toujours eu à concevoir.

Nous avons construit une situation a-didactique dans laquelle la réponse attendue passe par la mise en œuvre d'une énumération. Nous avons mis en évidence des variables qui permettent d'agir sur cette situation afin de restaurer l'activité d'énumération comme production personnelle des élèves.

Dans ces nouvelles conditions, les élèves reconstruisent des stratégies d'exploration qui sont fondées à la fois sur une observation de l'organisation du tableau et sur recherche de l'utilisation, dans des conditions simplifiées d'un savoir scolaire (comptage de type axb sur des "petits tableaux"). Nous avons montré que les élèves doivent alors reconsidérer le statut des objets à dénombrer. Ces objets effectifs deviennent alors représentants d'objets ayant une propriété.

Il nous paraît maintenant nécessaire d'intégrer cette situation dans une suite de séquence visant la construction de la multiplication (et de la soustraction) au cours élémentaire et de mesurer les effets sur la construction de ces opérations.

3.10.2. LES OBSERVATIONS RÉALISÉES EN COURS PRÉPARATOIRE ONT PERMIS DE METTRE EN ÉVIDENCE :

Que l'institution scolaire résout les questions d'énumération en enseignant la numération comme moyen procédural d'explorer une collection : (L'exemple de la collection structurée verticalement en paquets de dix montre comment la numération peut s'opposer à une activité d'énumération souple et générale). La procédure est donnée. Le maître aura beau dire à la correction : "vous auriez pu voir les paquets tout prêts", les élèves (qui ont réussi) ne peuvent que constater.

Partant de là, nous avons observé plus tôt dans l'année scolaire, lorsque les enfants ont à dénombrer une collection d'une quarantaine d'objets et qu'ils disposent du comptage. L'institution enseigne alors le dénombrement à l'aide de partitions.

Nous avons montré que le comptage peut alors constituer un obstacle à la mise en œuvre de stratégies d'énumération disponibles chez le sujet, par surdétermination de la stratégie du chaînage et que, par ailleurs. Nous avons montré que la production d'un type d'énumération peut constituer un obstacle à la mise en œuvre du comptage.

Nous avons mis en évidence deux conceptions chez les élèves (le chaînage et le partitionnement), par leur rapport différent au comptage. Le chaînage semble être l'énumération naturellement impliquée par le comptage alors que le partitionnement provoque une complexité dans le dénombrement. Nous avons pu montrer que le chaînage, même s'il paraît être contrôlé par le comptage, ne l'est pas dans tous les cas (étude du cas MATHILDE page 147).

Ceci pose la question de l'organisation de l'enseignement de l'addition car les énumérations futures nécessaires pour la construction des opérations arithmétiques se fondent principalement sur des partitions.

Nous ajoutons que les élèves qui ont une conception "partition" sont quand même influencés par le numérique en ce sens qu'ils prévoient l'utilisation des nombres. Or il y a une catégorie de nombres que les enfants du CP s'autorisent à utiliser plus facilement:

Ce sont les nombres pour lesquels :

- il n'y a pas de difficulté de pointage lorsqu'il faut compter une collection (donc proches de la perception globale, et un peu plus : nous pensons jusqu'à 10).
- il ne mobilise pas trop l'attention au niveau de la comptine.
- le passage de l'oral à l'écriture ne pose pas de problème.

Donc toute activité d'énumération incluse dans une activité de comptage y compris chez les enfants qui conçoivent plutôt l'énumération à partir d'un partitionnement, va être assujettie à ce choix. En cela, nous pouvons dire que le comptage, ou plutôt les connaissances disponibles du comptage à ce moment de la scolarité constitue un frein à une exploration des collections.

Le résultat majeur est la prolifération de messages additifs longs, constitués de petits nombres. Plus généralement, toute énumération qui va permettre une exploration rapide de la collection va impliquer un travail sur des nombres plus grands. En cela, elle peut produire des erreurs au niveau du comptage.

Nous avons constaté qu'aucun enfant ne marque de repères pour pouvoir s'arrêter dans le comptage des éléments chaînés. Nous n'avons pas vu de stratégies "mixtes" qui utiliseraient le comptage et le partitionnement. Nous écrivons : "On voit bien qu'il suffirait de marquer, par exemple, 26 au pied du 26^e élément pour continuer, éventuellement en repartant de 1 pour pouvoir, finalement produire une suite additive."

Ces dernières remarques nous incitent à penser qu'une réorganisation scolaire des situations d'enseignement du comptage et de l'addition, mettant en jeu les pratiques énumératives des élèves permettrait d'ouvrir des modes de dénombrements moins procéduraux et plus propices à la construction des opérations arithmétiques.

Il y a là tout un travail technique de mesurage des collections qui ne fait pas l'objet d'un contrat d'enseignement et qui constitue pourtant un domaine à partir duquel la construction des opérations arithmétiques prend tout son sens.

3.10.3. LES OBSERVATIONS RÉALISÉES AUX ÉPREUVES DU BACCALAURÉAT B ET D ONT PERMIS DE METTRE EN ÉVIDENCE :

qu'à ce moment de la scolarité, les élèves conçoivent bien les problèmes qui leur sont posés. Mais un obstacle majeur se pose : les élèves doivent concevoir les objets à dénombrer de façon dialectique avec la conception de l'énumération permettant le dénombrement.

Nous avons, par ailleurs constaté que le recours à des instruments mathématiques enseignés ne constitue pas un critère de réussite déterminant et que l'explication en termes simples de la

situation, qui montre la compréhension de celle-ci, n'est pourtant pas déterminante dans l'utilisation d'une opération appropriée.

Ainsi, le fossé est creusé entre la conception des objets et le recours précipité à des formules.

Nous avons aussi constaté l'embarras de nos collègues correcteurs (dont nous pourrions faire partie...), mais aussi une tendance à accepter une rédaction faisant appel à des formules au détriment d'une copie posant les problèmes d'énumération. Ainsi, l'affichage de la formule des combinaisons permet de recueillir les points. Une tentative de réflexion sur la structure de la collection et sa façon de l'explorer est jugée suspecte, à priori, même si, dans notre étude, le correcteur, n'a pas vraiment sanctionné.

Il y a là un flou qui révèle bien l'embarras à expliciter le contrat didactique.

3.10.4. LES AUTRES OBSERVATIONS QUE NOUS AVONS CONDUITES, OU LES TRAVAUX QUE NOUS AVONS ÉTUDIÉS PERMETTENT DE METTRE EN ÉVIDENCE QUELQUES POINTS SUPPLÉMENTAIRES :

Les activités de maternelle contribuent à mettre en évidence des conceptions chez des enfants plus jeunes, dans des activités non numériques. C'est le cas pour la séquence du "Castelet" et celle des "sorcières". La séquence du "Castelet" montre que l'énumération peut être un enjeu dans une classe de moyenne section, celle des "Sorcières" montre une conception dominante (ensemble en deux ou trois classes) permettant une énumération.

La séquence des cubes montre en quoi la structure spatiale de la collection influe sur la réussite au comptage de celle-ci. L'énumération de la collection agit directement sur la synchronisation avec l'écriture d'une suite de signes alignés.

Nous avons repris les travaux de J. PERES parce qu'ils constituent une étude exemplaire du passage à des constitutions de listes en vue d'une énumération sûre de collections. Ces travaux montrent tout le rôle de l'énumération dans la désignation des objets : la construction des listes répond au problème des limites de l'organisation effective d'une première énumération. Le passage aux listes écrites permet de mettre à l'épreuve d'autres conceptions de l'énumération, en liaison avec la fonction symbolique. Ainsi, les enfants conçoivent qu'une énumération d'un ensemble (objets) peut se construire à partir d'un autre ensemble (symboles) qui les représente. Cette nouvelle énumération est la solution du problème posé.

3.10.5. REFLEXIONS COMPLÉMENTAIRES :

3.10.5.1. DU CÔTÉ DES ENSEIGNANTS

L'énumération est difficile pour le professeur parce que c'est difficile à corriger. D'ailleurs, l'action de mesurer en général n'est pas facile à contrôler en tant que connaissance. Prenons un exemple : un professeur donne facilement une longueur à mesurer, par contre, il donnera difficilement une longueur à réaliser: "tracez un trait de 4,9 cm". Le contrôle de ce travail est très fastidieux. Il est dévolu aux secteurs de l'apprentissage d'un métier.

La théorie des ensembles a mis à l'écart tout ce qui serait procédé effectif d'énumération, ainsi tout ce qui serait définitions concrètes d'ensembles.

Si l'on examine l'enseignement des opérations ensemblistes dans les parties d'un ensemble et l'enseignement de la combinatoire qui est associé, on constate un vide entre ces deux domaines tels que l'enseignement les présente.

L'exemple du manuel scolaire (cité page 80) est typique de la difficulté rencontrée par les enseignants : les problèmes de structuration des ensembles et donc d'énumération, qui sont traités sous forme de combinatoire dans le savoir établi, ne permettent pas de développer des objets de savoir convenables. Les outils sont devenus des objets d'enseignement.

Les professeurs peuvent-ils éviter cela?

Les professeurs ne sont pas autorisés à construire des approches qui s'éloigneraient sensiblement des programmes officiels. Tout ajout à ces textes serait considéré comme un luxe inutile, obligatoirement non nécessaire à la construction de l'édifice. Dans le secondaire cela serait en tout état de cause une rupture du contrat didactique.

Nous avons décrit, lors de notre introduction (étude du cas MATHILDE), comment le professeur est contraint de résoudre localement une difficulté qui révèle pourtant un dysfonctionnement plus important.

Lorsque l'on interroge les professeurs sur leur façon de permettre aux élèves de ne pas oublier un facteur lors de la réalisation d'un produit de deux ou trois polynômes, la réponse commence toujours par "moi, je". Ceci atteste bien le fait que l'énumération sera traitée de façon privée. D'ailleurs comment pourrait-il en être autrement puisqu'aucun statut n'est attribué à cette connaissance dans le savoir savant?

Les enseignants sont donc enfermés dans des objectifs culturels. Même si de bonnes activités peuvent être menées localement, elles ne peuvent être transformées en objets de savoir reconnus par la communauté.

3.10.5.2. DU COTE DES ELEVES

Que ce soit le problème des pronostics, le problème des intervalles, comme celui des rectangles en classe de seconde, nous pouvons dégager une problématique générale :

Les élèves dénombrent, bien sûr sans difficulté sur un exemple où l'énumération est effective avec les objets visibles (arbres) où faciles à dénombrer (6 rectangles élémentaires). Mais l'énumération qu'ils mettent en jeu ne constitue en aucune façon une aide pour conduire des énumérations plus complexes. Au contraire, nous avons vu (page 167172) que les élèves tentent de réutiliser le résultat de la question 1 afin de produire le résultat de la question 2. Or, il faut rejeter le type d'énumération de la question 1 pour pouvoir construire une énumération dénombrante dans la question 2.

Le système propose presque toujours cette démarche : il suggère une énumération possible à partir d'un exemple, mais cette énumération ne donne pas la solution lorsqu'il faut concevoir une structure et l'opérationnaliser. Elle ne donne pas un comptage. Elle n'est pas dénombrante. Dans ces cas, il y a une difficulté des élèves à contrôler une énumération supposée évidente pour le professeur et une impossibilité du professeur à tirer un élève de son guêpier, et à donner les moyens du contrôle effectif de la situation.

Un début d'explication peut être apporté par une étude du rapport de l'enfant à l'objet élément de la collection à prendre en compte. La conception de l'objet, par le sujet doit être liée à la conception de l'énumération.

En effet, la conception de l'objet en ce qu'il est vu, en ce qu'il est désigné, en ce qu'il est défini, va agir dialectiquement sur une conception de l'énumération. De la possibilité d'envisager l'objet, ou sa désignation, de plusieurs points de vue ou non, donc d'avoir plusieurs conceptions de celui-ci va dépendre la possibilité de bâtir des énumérations.

Plusieurs travaux montrent la diversité de conception d'objets (exemple de la pensée naturelle à la pensée logique pour les structures syntaxiques). Donc il y a une double difficulté :

Il y a une conception a priori des objets à énumérer.

Cette conception est celle qui, pour une économie minimale va permettre de reconnaître l'objet, de le distinguer d'un autre objet. Ceci a été vu dans le travail sur les listes, dans la façon dont les enfants considèrent les points d'un tableau (comme points), dans les pronostics ou nous voyons bien la différence entre les élèves qui, tous, ont compris quel type d'objet était à dénombrer.

Cette conception doit, dans la majorité des cas, faire place à une autre conception. L'exemple de notre travail est celui des rectangles (page 172) où la recombinaison de l'objet rectangle est nécessaire pour pouvoir conduire une énumération dénombrante.

Donc conduire une tâche d'énumération revient du moins en partie à conduire un travail de reconception de l'objet.

Ce travail se fait dans un rapport à l'ensemble auquel il appartient. Ceci est vérifié par le fait que lorsqu'il s'agit de dénombrer un ensemble, la notion d'élément va varier selon les individus. En fait, toute partition de cet ensemble constitue un ensemble d'objets. La partition la plus fine nous ramène à l'élément, mais toute énumération consiste bien à remplacer cet objet par une classe d'objets, classe elle-même facilement dénombrable.

Alors la réponse à la question : y-a-t-il une conception de l'énumération ? peut se faire de la façon suivante :

La conception de l'énumération semble, d'après nos travaux très liée à la possibilité de modifier la conception des objets. Or la conception de l'objet semble très liée à la représentation qui en est faite, à la relation à l'ensemble qui le constitue. Nous en voyons une conséquence dans les travaux des épreuves du bac dans lesquels l'énumération ne pose aucun problème lorsque la conception de l'objet se confond avec le dessin de l'objet (chemins) et où tout se complique lorsque le changement de conception du même objet constitue la clé pour la mise en œuvre d'une énumération dénombrante.

Lorsque l'enseignant dit que l'enfant ne sait pas généraliser, il ne dit pas autre chose.

Généraliser, c'est concevoir l'objet différemment au travers d'une place qu'il occupe dans un ensemble. Nous avons vu que cette place pouvait se caractériser par l'espace (Calapa, tableaux), par un rapport logico-mathématique (les prédicats amalgamés)

Le souci constant des élèves est de réaliser une partition puis d'additionner les cardinaux. La notion de partition est très liée à la notion d'occupation spatiale particulière. Nous avons vu dans les copies du bac des élèves qui considèrent que deux chemins qui se croisent ne devraient pas figurer dans la même classe. Il s'agit dans ce cas de la conception de l'objet liée à celle de partition qui fait obstacle à la réalisation d'une partition.

3.11. ANALYSE COMPLÉMENTAIRE A LA SUITE DES OBSERVATIONS.

Les points que nous évoquons maintenant ont déjà été abordés lors de l'analyse a priori. Il nous a toutefois semblé utile de revenir sur certains détails et d'en faire quelques nouveaux développements.

3.11.1. DES CHANGEMENTS DE CONCEPTION D'OBJETS POUR ENUMERER :

Dans notre analyse première, (page 36), nous étudions les phénomènes de dépendance entre l'énumération et la conception des éléments de la collection en question.

Dans l'étude des pronostics, nous avons montré que le travail supposait de concevoir les objets à la fois en tant que tels (savoir ce qu'est un pronostic) et en tant qu'élément d'un ensemble produit cartésien. Sans cette double conception, l'élève n'a pas un contrôle adéquat de l'ensemble. Il est contraint d'avoir un rapport effectif à celui-ci par l'ostension des objets. Ce qui se traduit par un début de production de systèmes d'écritures des pronostics et un début d'organisation de leur liste. Ce rapport effectif aux objets a ses limites liées au nombre d'objets de la collection.

Tous les étudiants qui ont tenté d'écrire effectivement les pronostics n'ont pu aboutir. Nous dirons donc, après observation des copies que non seulement un changement de conception de l'objet "élément de la collection " est nécessaire, mais qu'une conception inadaptée constitue un obstacle à la réussite à l'exercice.

Cette analyse a aussi été faite dans l'activité de dénombrement des rectangles. Dans cette activité, nous avons observé que peut s'établir un équilibre entre les coûts en changement de conception des objets et les procédures effectives de dénombrement.

Dans l'activité des chemins (BAC D), nous avons observé que le changement de conception de l'objet comme moyen de remplacer l'ensemble d'origine (l'ensemble des chemins pour aller de A à B) par un ensemble équipotent constitue la seule issue possible. Tous les étudiants ayant réussi à cet exercice ont pratiqué ainsi.

3.11.2. COMPTAGE ET ENUMERATION : DEUX ACTIVITES QUI INTERFERENT:

Nous avons détaillé les liens entre comptage et énumération lors de l'observation effectuée en cours préparatoire. Nous allons toutefois répertorier des variables qui peuvent jouer dans le passage d'une activité d'énumération sans comptage à une activité d'énumération se servant du comptage.

Prenons un exemple : des objets sont réunis en un lieu déterminé. Dans l'activité, le professeur montre la collection. L'objet "collection" doit pouvoir être reconnu (c'est à dire déterminé) même si certaines perceptions varient (les objets peuvent changer de place).

Nous avons analysé en quoi les moyens mis en œuvre pour s'assurer que la collection a ou n'a pas été modifiée mettent en jeu des énumérations. Nous allons étudier le rôle du comptage et de l'énumération dans la détermination d'un ensemble.

Soit la situation a-didactique suivante :

Soit une collection d'objets. Cette collection est présentée à un enfant. La collection est ensuite retirée au regard de l'enfant et changée dans sa disposition. L'enfant doit dire si la collection est celle qu'il avait vue auparavant ou non⁹⁰.

Dans cette situation, l'objet ensemble constitue un invariant⁹¹ au sens de PIAGET. Le fait que le maître soit parti avec la boîte, puis revenu, ne pose pas de problème d'existence de l'objet "collection".

Par ailleurs, les enfants disposent de moyens fondés sur des pratiques énumératives (mémorisation, liens contingents entre objets, etc.) leur permettant de contrôler si l'ensemble a été modifié ou non.

La constitution de la collection est essentielle dans la détermination des stratégies. Si tous les objets sont facilement différenciables, seuls les procédés d'énumération apparaîtront. Si parmi ces objets, certains sont difficiles à différencier (par exemple, il y a deux voitures miniatures) alors l'énumération sera relayée par le comptage. Ce comptage s'effectue sur des classes d'objets ou sur l'ensemble lui-même selon la composition de la collection.⁹²

Ainsi, le fait que les objets soient ou non différenciables, du point de vue du sujet, constitue une variable importante qui conditionne l'usage de l'énumération ou et du comptage.

Des situations doivent donc être développées dans ce sens.

Ainsi, une classification peut être avancée :

La collection peut être constituée :

- d'objets tous identiques. (Exemple de CALAPA).
- d'objets différents (activité du trésor).
- d'objets différents mais appartenant à des catégories connues culturellement (animaux, nombres, lettres, etc.). Dans ce cas, le sujet pourra établir une énumération par classes et un comptage dans chaque classe : *"Il y a 3 poupées, 2 stylos et 4 voitures."*
- d'objets différents mais appartenant à des catégories connues culturellement elles-mêmes munies de structures d'ordre connues (les nombres, les lettres, les mots d'une comptine, etc.). Dans ce cas, une énumération pourra se produire sur la base d'un ordre induit.

La désignation orale de ces objets

- peut être absente. (Suite de dessins non figuratifs).
- peut être fondée sur une association d'un mot générique (les canards) à chaque objet, qui marque la conception de l'ensemble.
- peut être fondée sur une association de plusieurs mots génériques à un ou plusieurs objets : par exemple le jeu des sorcières. Une sorcière se définit verbalement par une association de 5 prédicats. Dans le jeu décrit, cette formulation aboutit à la caractérisation d'une seule sorcière. Rien n'empêche d'avoir un nombre d'objets supérieur à un associé à une même liste de prédicats.

⁹⁰ Nous avons conduit cette observation dans une classe de cours préparatoire en Novembre. L'enseignant dispose d'une boîte ouverte dans laquelle il a installé quelques objets reconnaissables facilement par des enfants. Il sort avec la boîte, puis revient et demande s'il y a les mêmes objets dans la boîte.

⁹¹ Lorsque PIAGET parle de conservation de quantités numériques, il travaille sur des ensembles d'objets non différenciés. Ce sont des objets identiques. Dans le cas que nous venons de décrire, les objets sont différenciés. Il y a une centration sur la caractéristique de chaque objet de "l'ensemble objet". Le contrôle est un contrôle qualitatif. Le contrôle quantitatif (le comptage) peut intervenir comme moyen du contrôle qualitatif, mais il ne s'identifie pas à celui-ci.

⁹² Nous avons constaté, lors de nos observations, que le choix du contrôle par le numérique dépendait essentiellement du rapport personnel du sujet à des catégories d'objets. Par exemple, si dans la collection, figurent entre autres, une voiture et un camion, un enfant qui fait bien la différence entre une voiture et un camion énumérera une voiture, un camion, alors qu'un autre enfant se servira de "deux voitures" pour contrôler la collection à son retour.

Les élèves peuvent avoir des rapports à ces objets et à leur désignation orale qui interfèrent avec les statuts décrits précédemment :

- des objets différents peuvent être associés en familles par une propriété commune conçue par l'élève. (Jeu du trésor : tous les objets qui roulent).
- des objets différents peuvent être associés en familles par une propriété commune induite par le milieu (les sorcières, les blocs DIENES) : il peut s'agir des propriétés physiques des objets. Ces propriétés peuvent être traitées au niveau des objets comme au niveau des prédicats associés dans la désignation orale.

3.11.3. RUPTURES DE CONTRAT ET ENUMERATIONS INADAPTEES:

Prenons la situation des pronostics :

Si la situation est proposée avec 3 équipes seulement. L'ensemble des matches possibles est concevable à partir de la conception de chaque objet. La conséquence est la réalisation d'un ensemble en extension. S'il s'agit de rechercher le cardinal de cet ensemble, une énumération effective de l'ensemble suffira.

S'il s'agit de 13 équipes, l'ensemble est conçu différemment. La conception première se révèle insuffisante pour le calcul du cardinal de cet ensemble. L'élève doit donc abandonner cette conception au profit d'une autre. Nous avons montré que l'objet doit être vu de deux façons : en tant que tel et en tant qu'élément d'un produit cartésien. La première conception (en extension) n'est pas une solution de la deuxième.

Or, dans la plupart des exercices (voir l'épreuve des chemins du bac D 1992, l'observation des rectangles en classe de seconde, etc.) les énoncés proposent une question qui encourage la mise en valeur de la première conception et la question suivante suppose que l'étudiant abandonne cette première conception au profit d'une autre.

Il s'agit d'une rupture de contrat non négociée avec l'élève puisque, généralement, les questions (surtout celles des épreuves du baccalauréat) sont supposées se succéder selon un ordre de dépendance reconnue (sinon, le rédacteur signale l'indépendance des questions).

4. QUATRIEME PARTIE : PHENOMENES DE DIDACTIQUE.

4.1. PRESENTATION

Nous avons montré que les enfants avaient, dans des situations scolaires relevant du domaine du numérique, des difficultés dont l'origine est l'énumération. Nous avons montré que les enfants avaient des pratiques énumératives personnelles et que celles-ci étaient fondues dans des activités plus marquées scolairement. Nous constatons que l'enseignement a décidé de ne pas prendre en charge l'apprentissage de ces pratiques. Enfin, nous avons montré que les enseignants ne reconnaissent pas l'énumération comme origine des difficultés repérées.

Il existe ainsi des savoirs reconnus dans la politique éducative et dans le savoir savant qui supposent le fonctionnement de connaissances qui ne sont pas, elles, pointées comme objets de savoir. L'énumération fait partie de celles-ci. D'autres secteurs, sans être "ignorés" comme l'énumération font les frais de cette supposition.⁹³

Nous allons maintenant essayer d'identifier les raisons d'un tel état de fait en termes de "phénomène de didactique"⁹⁴.

En effet, l'action d'enseignement se réalise au sein d'un système didactique dont les composantes (enseignant, apprenants, savoirs) sont elle mêmes liées à un projet social d'enseignement. Ce projet se fonde lui-même sur une histoire des savoirs scolaires reconnus⁹⁵. La tradition de ce qui doit être transmis aux nouvelles générations pèse lourdement sur le projet social.

Notre étude met en évidence des habitudes, des choix qui conduisent à des insuffisances dans l'enseignement du nombre et des opérations arithmétiques. Nous faisons des propositions pour le développement de situations permettant de faire émerger l'énumération en tant que concept explicitement pris en charge par l'enseignement. Aussi, nous devons nous donner un temps pour analyser et expliquer le fonctionnement actuel de l'enseignement dans ce domaine.

⁹³ MH.SALIN et R. BERTHELOT Thèse 1992 : "la géométrie échoue comme moyen de donner la maîtrise des rapports des enfants avec l'environnement à un âge jeune parce que l'on gère l'espace à l'aide de modèles qui ne sont pas la géométrie des mathématiciens. Celle-ci est un objet culturel et il y a un point aveugle, c'est à dire que la géométrie "objet culturel" a mangé le projet didactique, éducatif, de donner à l'enfant la capacité de maîtriser son environnement spatial.

Par exemple on fait faire des cartes qui ne servent pas à se diriger mais qui débouchent sur un calcul d'échelles. Il y a une transposition

⁹⁴ G. BROUSSEAU écrit (1986) : "Identifier ces phénomènes revient à construire un "modèle" des protagonistes en présence, des relations et des contraintes qui les lient, et à montrer que le jeu de ces contraintes produit bien des effets et le déroulement observés." P.41

⁹⁵ Pensons aux déclaration de Y. CHEVENEMENT en 1985, et de bien d'autres à propos de l'école élémentaire : "il faut y apprendre à lire écrire et compter".

4.2. PREMIER PHENOMENE : LES CONNAISSANCES ENUMERATIVES SONT IGNOREES DE L'INSTITUTION ET DES ENSEIGNANTS.

4.2.1. CONSTATS :

Au cours de leur scolarité, les élèves doivent passer brutalement d'un contrôle perceptif de l'énumération de petites collections d'objets montrés à un contrôle mental et verbal d'ensembles quelconques. Ces ensembles sont quelquefois à concevoir en même temps qu'ils sont à contrôler. Cette activité est entièrement sous la responsabilité de l'élève. A la différence d'autres domaines comme l'espace ou la logique, le concept de l'énumération n'est même pas pointé comme nécessaire par les enseignants. L'organisation des savoirs mathématiques fait éclater l'énumération qui apparaît alors comme un accessoire qu'il faut avoir personnellement à sa disposition⁹⁶.

4.2.2. EXPLICATION DE CET ETAT DE FAIT :

Nous avons montré que certains problèmes de dénombrement qui allaient générer l'analyse combinatoire se sont posés à l'aube des probabilités (correspondance PASCAL-FERMAT). Que les techniques d'énumération fassent partie de cette naissance est incontestable, mais l'étude du moment portait sur des questions qui avaient leur intérêt propre. Les difficultés produites par l'énumération furent considérées comme des difficultés personnelles à présenter une situation. L'enjeu mathématique était ailleurs. Ainsi, la morphogénèse scientifique n'a pas fait apparaître cette notion comme digne de figurer comme chapitre à part entière. L'étude des ouvrages proposés aux enfants des lycées nous a montré de quelle façon était relatée l'histoire de cette genèse : les cheminements des mathématiciens n'y sont plus évoqués. Il apparaît seulement que les formules de la combinatoire furent mises au point à cette époque. Ainsi, il faut peut de temps (à l'échelle des savoirs) pour que des concepts de mathématiques évoluent complètement dans leur présentation. Tout le travail de conception a été gommé au profit de la mise en évidence du procédé algorithmique. Cette étude montre qu'au début des probabilités, les conceptions des dénombrements exhaustifs étaient au cœur de l'activité de ces mathématiciens. Il a suffi de quelques générations pour que ce problème crucial, sans doute difficile, soit évincé parce qu'une théorie (l'analyse combinatoire) s'est construite. Son enseignement montre que le système a choisi le nombre au détriment de l'énumération. Ainsi, ce qui, de notre point de vue, a pesé dans la genèse de l'analyse combinatoire et qui est source de problèmes d'énumération, n'est pas devenu un sujet d'enseignement. La mise à l'épreuve des conceptions des énumérations ne peut même plus être un enjeu d'enseignement.

Ainsi, la façon dont s'est construit le savoir dans la communauté (**philogenèse**) et la façon dont le savoir savant a traité cette connaissance (**morphogenèse**) ont été déterminante dans le "laminage" du concept d'énumération. A chaque moment de l'histoire des mathématiques dans laquelle l'énumération était présente, les enjeux étaient autrement importants. Il s'agissait soit de notions très anciennes (les premiers nombres et leurs écritures symboliques), soit de notions clés (les probabilités) dont le statut mathématique devait être admis. On a d'un côté des concepts qui se confondent avec la culture de l'humanité, d'un autre côté un concept qui, lui-même doit faire "ses preuves" pour être admis dans le savoir mathématicien. La culture a choisi. L'énumération est restée un sous produit de ces grands domaines mathématiques.

⁹⁶ Rappelons les extraits des ouvrages en II-I.

Cette remarque n'est pas de circonstance. Nous avons vu que les enfants du cours préparatoire et du cours élémentaire doivent faire appel à des connaissances relevant de l'énumération pour résoudre des problèmes numériques. On retrouve donc, dans la construction des connaissances chez les enfants (ontogenèse) une similitude avec la construction de la connaissance (par exemple, des probabilités) dans l'histoire.

Ainsi donc, la pensée naturelle permet la construction de raisonnements énumératifs dont le sujet a besoin dans les pratiques sociales de la vie ordinaire.

La construction historique des savoirs s'est servie de l'énumération. Il ne subsiste que des traces de cette notion. La construction du savoir de l'enfant (l'ontogenèse) ne calque pas la philogenèse scientifique. La philogenèse artificielle que les didacticiens tentent de recréer dans l'enseignement des mathématiques à propos de différentes notions, a donc toutes les difficultés à exister pour l'énumération.

Nous avons trop brièvement exploré une piste qui serait d'aller voir, dans d'autres institutions comment des approches nécessaires de l'énumération se font et, par là même étudier des transpositions épistémologiques. Toutefois, l'informatique est un exemple concret de domaine qui a du reconstruire des savoirs mathématiques jusqu'alors délaissés, redonnant à certains de ces savoirs, une noblesse qu'ils n'avaient pas acquis au sein de la communauté mathématique traditionnelle.

Dès lors, l'enseignement trouvera une filiation, une morphogenèse artificielle qui permettra l'entrée des élèves dans les différentes institutions de la société. Il faudra aussi bien que les élèves qui sortent de l'enseignement puissent entrer dans un système où il s'agit d'un problème de comptage, de combinatoire, ou de tri (en informatique par exemple).

Tout ce qui vient d'être étudié a une conséquence sur les progressions mathématiques en général. L'ordre d'introduction qui suit le travail théorique mathématique n'est pas nécessairement adapté à la résolution de problèmes pratiques. L'ordre de la difficulté mathématique et l'ordre de la difficulté pratique ne coïncident pas.⁹⁷

Si nous suivons l'ordre de difficulté mathématique, si nous rangeons les exercices en fonction de la difficulté mathématique, nous ne trouvons pas trace de l'énumération. C'est dans l'étude des situations et du milieu que nous commençons à pouvoir obtenir quelques réponses.

4.2.3. CONCLUSION :

Les difficultés repérées viennent du fait que l'enchaînement des séquences relatives à la construction des premiers nombres et des opérations est le résultat d'une transposition de savoirs étiquetés. La façon dont s'est construit ce savoir dans la communauté (philogenèse) et la façon le savoir savant a traité cette connaissance (morphogenèse) ne coïncident pas avec la construction des savoirs d'un individu (ontogenèse). Or, on doit appuyer sur la pensée naturelle pour faire fonctionner un enseignement par adaptation dans des situations

⁹⁷ D'autres domaines des mathématiques de l'école et du collège sont concernés. En particulier, la construction des nombres évacue complètement ou approche de manière trop éclatée, tout ce qui permettrait l'acquisition de connaissances sur l'ordre de grandeur des résultats. Là encore, ce problème est évoqué dans les mathématiques des physiciens à un moment où ne se pose plus le problème de l'acquisition de ce savoir, mais celui de son utilisation. De sorte que le travail sur l'ordre de grandeur est vu de façon très ostensive et académique (quelques leçons peu construites dans les manuels) et ne fait pas l'objet d'un réel apprentissage.

Pour que cela puisse se faire, il y aurait, de notre point de vue, tout un travail de reconstruction d'une topologie des ensembles numériques (en particulier les décimaux), bien absent à l'heure actuelle.

d'apprentissage. Ce constat doit nous rendre attentifs à l'organisation (la réorganisation) de la construction des situations d'enseignement dans le domaine des nombres et des opérations arithmétiques. Dans la suite de cette étude, nous faisons des propositions allant en ce sens.

4.3. DEUXIEME PHENOMENE : LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE DE L'ENUMERATION NE S'OPERE PAS.

4.3.1. CONSTATS :

Il n'existe pas d'activités scolaires mathématiques dont le but explicite soit l'apprentissage de l'énumération. Nous avons repéré des activités qui sollicitent l'énumération, mais lorsque celles-ci ne sont pas directement liées au nombre, elles sont qualifiées d'activités de logique (familles d'activités type recherche de l'objet manquant à retrouver par exemple). Nous avons seulement repéré, dans l'histoire récente des programmes l'effet des programmes de 1970 (qui se fondaient en grande partie sur les constructions ensemblistes). A cette époque, il était alors possible de trouver des activités dont le but explicite était le contrôle de l'identité de deux ensembles, activité qui a complètement disparu aujourd'hui.

4.3.2. EXPLICATION DE CET ETAT DE FAITS :

L'organisation des programmes de mathématiques est une réplique (à une transposition didactique près) de l'organisation des savoirs savants⁹⁸. L'enchaînement des savoirs scolaires est le résultat d'une transposition didactique des savoirs savants pour les besoins de la formation. On sait tous les obstacles créés par cet état de fait dans plusieurs domaines⁹⁹.

Si nous avons dit à un moment qu'il manquait le concept d'énumération dans le savoir savant, ce n'était pas tout à fait exact. Nous avons montré que des secteurs des mathématiques traitent de la combinatoire énumérative. Mais ce traitement se fait à l'aide d'instruments mathématiques élaborés. Le contrôle de l'énumération effective ne s'y pratique pas. Dans les domaines du savoir savant directement liés aux savoirs enseignés de l'école et du lycée, ce traitement n'est pas effectué.

Y.CHEVALLARD a montré en quoi certaines notions faisant partie du champ des mathématiques n'étaient pas elles mêmes des notions mathématiques¹⁰⁰. L'énumération ne se

⁹⁸ JONNAERT écrit dans "Conflits de savoirs et didactique" (voir bibliographie) qu'une bonne partie d'un savoir dans une discipline précise, et ce, pour des raisons multiples, échappe aux pressions d'une politique éducative et ne deviendra jamais objet d'enseignement. Il conclut sur le fait que des zones du M.O.S. (milieu originel du savoir) ne sont pas reprises dans la politique éducative. Nous n'avons pas travaillé à partir de cet auteur parce que son analyse n'est pas systémique.

⁹⁹ Voir en particulier tout le travail épistémologique et didactique sur les "rationnels dans la scolarité obligatoire" N.et G. BROUSSEAU 1987. Citons encore : "La construction de l'enseignement des probabilités et des statistiques ne permet pas de poser les problèmes d'usage et de compréhension des problèmes qui s'y posent parce que les problèmes qui sont choisis sont les problèmes du savoir savant."

¹⁰⁰ NOTIONS MATHÉMATIQUES, PARA-MATHÉMATIQUES, PROTO-MATHÉMATIQUES: PLACE DE L'ENUMERATION.

- Qu'est-ce qu'un objet de savoir ?

En mathématiques, on peut ranger dans cette catégorie les "notions mathématiques" telles que l'addition, le cercle, les équations différentielles du premier ordre à coefficients constants, etc. Ces exemples sont donnés par des étiquettes qui font sens dans la communauté. Il faut conduire une analyse épistémologique et didactique de ces étiquettes. Il y a les notions "para mathématique" telles que la notion de paramètre, d'équation, de démonstration. Ces notions ne sont pas, habituellement des objets d'étude. Il n'y a pas d'étanchéité entre ces deux domaines. En effet, la distinction doit se référer à une pratique d'enseignement précise.

Les notions pré-mathématiques sont plus souvent qu'on ne le croit pré-construites.

Il existe une strate plus profonde de "notions" mobilisées implicitement par le contrat didactique. Yves Chevallard les qualifie de "protomathématiques".

retrouve pas dans ces catégories essentiellement parce que la communauté enseignante n'a même pas repéré cette connaissance. ¹⁰¹Du point de vue culturel, il n'y a pas l'objet d'étude "énumération" qui permettrait d'en faire un objet d'enseignement. La transposition ne s'opère donc pas .

Or la transposition didactique ne devrait pas être seulement la transformation des savoirs formulés, elle devrait pouvoir transformer en objet d'enseignement un environnement de problèmes repérés dans le savoir savant et jugés suffisamment déterminants dans des pratiques mathématiques.

Nous sommes en présence d'un concept sur lequel la transposition didactique ne peut pas fonctionner comme sur une notion mathématique reconnue.

Ce sont donc les instruments de la transposition didactique qui manquent.

4.3.3. CONCLUSION :

Ce n'est pas renier le concept de la transposition didactique que de le saisir à travers quelques uns de ses effets les plus spectaculaires ou par le biais de ses dysfonctionnements. Aussi, nous nous baserons plutôt sur l'évocation : "pourquoi y a-t-il transposition didactique ?" : *"parce que le fonctionnement didactique du savoir est autre que le fonctionnement savant, parce qu'il y a deux régimes du savoir, en interrelation mais cependant non superposables"*. Le didacticien qui se sert de la transposition didactique doit aussi se préoccuper des pratiques personnelles des sujets apprenant. La pensée naturelle permet la construction de raisonnements dans des activités de la vie ordinaire, donc dans les

Ces notions qui sont souvent identifiées à des capacités, des compétences, ne se retrouvent pas dans l'acte explicite d'enseignement. Elles se retrouvent dans les évaluations et dans les pédagogies qui visent des capacités (pédagogie par objectif).

De nombreuses "capacités" ainsi identifiées restent absentes de l'univers de l'enseignant", notamment parce qu'elles ne peuvent pas, comme telles, faire l'objet d'un enseignement.

En général, si ces capacités, leur acquisition et leur développement, peuvent éventuellement être désignées comme des objectifs d'enseignement, elles ne prennent pas place au range d'objets d'enseignement pour autant.

L'énumération fait elle partie de ce qu'Y.CHEVALLARD appelle les notions paramathématiques.?

Pour nous rattacher aux propos d'Y.CHEVALLARD dans son ouvrage sur la transposition didactique, nous serions tentés de classer l'énumération dans les notions paramathématiques. Rappelons que les notions paramathématiques sont des notions outils de l'activité mathématique ; elles ne sont pas "normalement" des objets d'étude pour le mathématicien. L'auteur cite comme exemple la notion de paramètre, d'équation, de démonstration.

P. 51, l'auteur dit : les notions paramathématiques sont des objets dont l'enseignant prend conscience et à qui il donne un nom.

Notre expérience de professeur de mathématiques nous permet, dès à présent d'affirmer que l'énumération ne fait pas partie du vocabulaire du mathématicien praticien. Nous avons vu que les difficultés rencontrées dans des activités de dénombrement ne sont pas imputées à l'énumération.

L'énumération fait elle partie des notions "protomathématiques" ?

Rappelons que les notions protomathématiques (Y.C. P. 51) sont des notions mobilisées implicitement par le contrat didactique...on a cité comme performance de l'élève attendue par le professeur la reconnaissance de certaines occasions d'emploi de notions mathématiques considérées comme outil de l'activité mathématique. Là encore, si des moyens de production d'énumération sont des comportements attendus, le recours à l'énumération en tant que secteur de l'activité mathématique n'est pas imaginable puisque non reconnu comme concept.

¹⁰¹ A la rigueur, l'énumération se rapproche des notions dites protomathématiques. Mais si plusieurs secteurs des mathématiques révèlent des pratiques énumératives, compétences exigées, qui constitueraient autant de notions protomathématiques, nous sommes fondés à nous interroger une organisation des savoirs qui devrait faire appel à plusieurs reprises à une notion protomathématique pour construire des notions aussi importantes que les nombres, les opérations arithmétiques, l'analyse combinatoire.

apprentissages scolaires. Le fait qu'il y ait une distorsion entre le savoir constitué et la pensée naturelle et que l'enseignement des mathématiques doivent s'appuyer sur la pensée naturelle pose en soi un problème dans la transposition didactique.

4.4. TROISIEME PHENOMENE : L'INSTITUTION ENSEIGNANTE SE DONNE DES MOYENS POUR RESOUDRE LOCALEMENT LES PROBLEMES POSES PAR L'ABSENCE DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ENUMERATION.

4.4.1. CONSTATS :

Il n'y a pas de transposition didactique de l'énumération. Mais l'énumération est nécessaire à l'acquisition de savoirs dont la transposition a été effectuée. L'institution a donc dû effectuer une transposition didactique de savoirs bien "recensés" sans effectuer la transposition didactique de l'énumération. Cette façon de traiter le savoir savant à des fins d'enseignement a des conséquences qu'il convient d'étudier.

Il n'existe pas, dans les pratiques scolaires de situations d'apprentissage de l'énumération. Or celle-ci est nécessaire. Le système va donc se doter de moyens de résoudre localement les problèmes.

Par exemple, la construction des premiers nombres fait appel à la mise en place d'algorithmes (non numériques) qui sont souvent enseignés. Ainsi, au cours préparatoire, de fréquents exercices présentent des collections sous forme de partitions, de "paquets réguliers", ou bien de comptines commencées qu'il convient de poursuivre. Ces exercices sont tellement associés au comptage qu'ils paraissent faire partie de celui-ci.

Ces procédés enseignés opacifient complètement ce que les élèves pourraient effectivement produire dans une situation a-didactique du mesurage des collections. Ces procédés contribuent à masquer l'énumération.

Ainsi, le système traite l'énumération à l'aide d'algorithmes enseignés d'une part sans penser qu'il s'agit d'algorithmes, d'autre part en commettant une erreur sur la nature du concept que ces algorithmes traitent.

4.4.2. CONSEQUENCES DE CET ETAT DE FAITS :

Quelles peuvent être ces conséquences ?

a) C'est dans l'étude des modes d'adaptations locales du système que nous pouvons trouver des réponses.

Pour cela, l'enseignement dispose de procédés bien connus. En particulier l'ostension¹⁰² : "Le critère qui apparaît essentiel pour différencier une présentation ostensive du mode d'enseignement par adaptation, est celui de l'existence ou non, au sein de la situation d'enseignement, d'une situation a-didactique d'apprentissage où l'élève peut se situer en "résolveur de problèmes" grâce à ses interactions avec un milieu de référence effectif."

C'est au travers de la transposition didactique des opérations arithmétiques, de l'analyse combinatoire que nous avons pu montrer comment d'une certaine façon, les activités proposées aux enfants s'étaient adaptées à l'organisation des savoirs savants en se donnant des familles d'exercices dans lesquels l'énumération nécessaire à la production du résultat pouvait être, à peu de frais, rendue procédurale. Dans ce cas, nous pouvons dire que la connaissance fonctionne comme un rite. Il n'est pas nécessaire de connaître la nature précise de cette connaissance, il convient de savoir faire :

Ainsi, au cours préparatoire, la numération enseignée rapidement occulte les problèmes d'énumération. Une procédure est donnée. L'élève doit l'appliquer. Mais, justement, parce que

¹⁰² Ce concept a été repris et détaillé dans la thèse de MH SALIN et R.BERTHELOT (1992-Bordeaux) p.78.

l'énumération n'est pas enseignée et que la numération doit l'être, alors le système éducatif va mettre au point tout un ensemble de procédés pour respecter l'ordre chronologique du savoir savant. Or cet ordre peut être contesté. L'énumération est une des composantes essentielles pour la maîtrise de la numération. (BROUSSEAU 1986 p.446). En particulier, il y a à s'interroger sur la place respective de la construction du nombre et de l'addition et nous y reviendrons dans le chapitre suivant.

Au cours élémentaire, nous avons montré que lorsqu'il s'agit de construire le produit de deux nombres, les tableaux en ostension sont très tôt reconnus par les enfants comme devant être "comptés" en comptant le nombre de lignes et de colonnes. Mais nous avons montré que ceci ne devait pas se confondre avec le contrôle de la collection à l'aide de cette présentation. Nous avons montré l'erreur qui consisterait à croire que ces enfants ont intégré cette structure comme résultat d'un problème qu'ils se seraient posés.

Plus tard, l'analyse combinatoire constituera l'exemple aboutit d'une procédure à appliquer dans des familles de situations typiques.

Ainsi, l'enseignement de la scolarité obligatoire va continuer à enseigner le dénombrement, les opérations arithmétiques, en se lamentant sur les enfants qui n'ont pas le sens des opérations.

b) Influence sur le comportement des enseignants :

Nous avons montré comment les moyens de l'énumération de collections montrées ou désignées étaient laissés à la responsabilité de l'enfant. Nous avons été surpris de l'étendue des procédés (observation numéro 3 du cours préparatoire) de contrôle d'énumérations. Nous n'avons pas moins été surpris de constater que les enseignants n'avaient pas de position par rapport à toutes ces productions. Or cette absence de prise de position se manifeste de façon plus aiguë chez les enseignants qui sont sensibles à la construction des savoirs par des situations d'apprentissage. En effet, les enseignants dont les pratiques pédagogiques se rapprochent plus des méthodes dites en ostension ont des réponses toutes prêtes. *"Je leur fait faire des marques à chaque nombre énoncé" ou "je leur fait faire des paquets réguliers et je leur fait marquer les paquets"*¹⁰³. Etc.

Les professeurs ne disposent pas de situation d'enseignement de l'énumération qui permette de faire développer par leurs élèves des savoirs faire, des anticipations, des stratégies dans des rapports expérimentaux avec le milieu. Ils ne disposent pas non plus, de ce fait, de moyens de négocier avec eux des contrats didactiques raisonnables à propos de ces questions ni même d'évoquer avec eux ce genre de difficultés. Ainsi se pose la question du partage des responsabilités.

Pire, l'absence de situation adéquate d'énumération fait que l'enseignant pense qu'il enseigne une méthode pour construire la numération alors qu'il ritualise une méthode d'énumération. Le rituel s'installe donc dès la numération, même s'il s'agit de situations de communication.

4.4.3. CONCLUSION :

Ainsi, l'enseignement postule des connaissances sans qu'il y ait toujours les savoirs étiquetés correspondants.

Beaucoup de travaux de psychologue et de didacticiens ont permis de mettre en évidence des connaissances acquises parallèlement aux savoirs enseignés. Citons par exemple les théorèmes en acte : Un théorème en acte (ou théorème élève) est utilisé dans l'action. Il

¹⁰³ Ils rejoignent en cela ce que nous avons pu voir dans les ouvrages pédagogiques du cours préparatoire au chapitre 2 !

fonctionne comme une règle, un théorème, il permet des prises de décision. Il est plus ou moins implicite. Il a son propre champ de validité.

D'autres chercheurs ont déjà mis en évidence ce fait, que ce soit dans le rapport connaissances spatiales, savoirs géométriques¹⁰⁴ ou dans le statut du raisonnement dans la relation didactique¹⁰⁵.

Le milieu enseigne donc des connaissances sans le vouloir (y compris des fausses). Le milieu communique donc des savoirs faire (des connaissances) sans enseigner les savoirs qui vont avec. Cette pratique est courante et les mathématiques ne sont pas la seule discipline dans laquelle se phénomène apparaît. On pourrait, dans certaines limites faire un autre rapprochement entre le "savoir parler" et la grammaire.

Or la légitimité de l'acte d'enseignement repose sur le fait que ce qui commande ces connaissances est un savoir traité comme tel par la société.

Dans le cas de l'énumération, il ne peut même pas y avoir de référence à un savoir savant précis. Le sujet ne peut pas alors être traité dans sa dépendance à un savoir institué.

Alors se posera un autre problème : Nous avons à nous interroger sur l'intérêt ou non qu'il y aurait à construire le savoir "énumération" et à le faire apprendre. En effet, le constat suivant : *"On apprend à compter et les enfants apprennent l'énumération, ils n'ont pas besoin d'un enseignement spécifique."* nous amène à nous interroger :

- Est-ce qu'il y a à gagner à ce qu'un certain savoir accompagne les connaissances?

- Le savoir savant n'a pas reconnu l'énumération comme concept à enseigner. Faut-il faire les frais d'un objet scolaire qui serait l'énumération pour faciliter les apprentissages sur le dénombrement ?

Nous pouvons maintenant affirmer que des erreurs d'élèves sont dues à des problèmes d'énumération et que la négociation de ces erreurs au sein d'un contrat d'enseignement est rendue difficile parce que l'enseignant ne peut pas pointer l'origine de l'erreur. Il l'attribue à un manque de savoir faire.

Il nous paraît important d'avoir pu contribuer à montrer que certaines erreurs habituellement attribuées à des difficultés personnelles sont finalement le résultat d'un conflit entre une conception de l'énumération et la situation proposée. Nous ne prétendons pas avoir pu mesurer si la mise en évidence du concept de l'énumération devait nécessairement aboutir à son enseignement. Nous affirmons toutefois que localement, il est possible de construire des situations qui permettent de pointer plus explicitement ce concept.

Le chapitre suivant de notre étude va donc en ce sens. Nous allons développer des situations dans lesquelles l'énumération est l'objet de savoir.

¹⁰⁴ thèse 1992 MH SALIN- R.BERTHELOT Bordeaux.

¹⁰⁵ Thèse 1992 Pilar ORUZ Bordeaux.

4.5. QUATRIEME PHENOMENE : L'ENUMERATION EST LA PART DE RESPONSABILITÉ DE L'ELEVE DANS LE COMPTAGE.

4.5.1. CONSTAT :

Les instances scolaires exigent que les enfants sachent compter. Pour compter, un enfant va énumérer, mais le professeur n'enseigne pas l'énumération¹⁰⁶. Comme celui-ci est obligé de donner à l'élève une responsabilité¹⁰⁷, un élément de contrôle sur ce qui a été dit, l'énumération constituera la part de responsabilité de l'élève dans le comptage.

4.5.2. ANALYSE :

EXISTENCE D'UNE FRONTIERE :

Si l'énumération constitue une connaissance nécessaire à la réalisation de certaines tâches, et puisqu'elle n'est pas un objet d'enseignement, elle va se manifester dans la capacité personnelle des enfants à résoudre un problème.

Dans leur thèse, (p.82), MH SALIN et R.BERTHELOT développent les raisons du déguisement de l'ostension dans l'enseignement de l'espace : "ce sont les contraintes de la relation didactique et l'ignorance du système sur d'autres moyens pour y satisfaire, qui

¹⁰⁶ Comme l'espace est le domaine de compétence de l'élève pour pouvoir tenir son rôle vis à vis de la géométrie.

¹⁰⁷ Lors de l'enseignement d'un savoir mathématique étiqueté dans le savoir savant, le partage entre ce qui relève de la responsabilité du professeur et ce qui relève de celle de l'élève dans une situation d'enseignement donné est relativement défini.

Dans l'article de l'école d'été cité plus haut, G.BROUSSEAU définit la notion de "responsabilités" de l'issue de la situation. Voici un extrait :

« *Le passage d'un l'état de la situation au suivant peut être déterminé entièrement ou partiellement :*

-par l'agencement de la situation ou par la règle du jeu.

-par le choix de l'élève : en général, certaines de ses connaissances lui permettent d'envisager des possibilités que d'autres connaissances lui permettent d'écarter. Mais la responsabilité de ces choix peut être répartie entre :

une part, en quelque sorte publique, déterminée par des connaissances (ou plutôt du savoir) culturelles (universelles ou particulières à la classe), liées aux langages utilisés, par des algorithmes appris, des connaissances explicitées antérieurement, des représentations... des savoirs.

*une part privée, personnelle mais ancienne, de connaissances, de savoirs, de manières de comprendre, d'habitudes, de conceptions... conscientes ou explicites, en partie seulement, mais régulières et repérables : **la compétence.***

*une part de décision prise dans l'instant, de façon aléatoire ou nouvellement organisée : **la performance.***

-par l'intervention directe du professeur, qui, soit modifie la situation ou ses règles, soit agit sur les connaissances utilisables par l'élève (contrat didactique), soit intervient sur la décision elle-même.

Un bon enseignement a pour résultat de permettre à l'élève de participer à des pratiques sociales ou d'affronter des situations telles que leur issue dépende essentiellement de la mise en oeuvre, par cet élève, des connaissances visées. Par exemple, l'utilisation de ses connaissances publiques et culturelles pour un "exercice" ou de sa compétence pour un "problème".

Une situation d'apprentissage a-didactique doit permettre à l'élève de s'adapter en modifiant de lui-même ses performances et de convertir ses performances en produits de sa compétence (soit par assimilation, soit par accommodation) sans l'intervention directe du professeur. Une telle situation doit donc solliciter chez l'apprenant ces divers niveaux de responsabilité et provoquer l'apprentissage recherché par une sorte de rupture qui provoque le transfert d'un niveau à un autre : la situation cesse d'assurer l'effet habituel escompté par l'élève qui doit maintenant l'obtenir par d'autres moyens nécessitant une activité intellectuelle. »

conduisent à l'emploi de la forme d'ostension que nous avons appelée "déguisée". Les auteurs décrivent ensuite l'étonnement et l'impuissance des professeurs de 6° devant les productions des enfants dans des situations de communication de géométrie. "Il devient nécessaire de discuter de la réussite ou de l'échec de la communication parce que les figures ne sont que presque superposables". Les auteurs avancent alors une explication relevant de l'impossibilité pour le professeur de prendre en compte les connaissances des élèves.

Replaçons-nous dans notre étude. Dans les situations de comptage que nous observons à l'école élémentaire, le professeur ne détecte même pas l'existence de l'énumération comme modèle de comportement d'enfants, de sorte que, dans des situations de communication qui mettent en œuvre des représentations de collection à des fins de comptage, ni le professeur, ni les enfants ne disposent de moyens de traiter de la question de l'exploration de la collection.

A la différence de la géométrie où les connaissances spatiales effectives des élèves sont repérables (mais pour lesquelles aucune négociation ne semble permise), les connaissances énumératives sont plus difficilement repérables, les situations de communication (portant sur le numérique) ne permettent qu'une faible reconnaissance du concept.

Dans ce cas, comme dans celui de la géométrie et de la logique, si l'enseignant a repéré des difficultés d'exploration de collections : (fait des marques, repère, etc.)? alors le modèle d'enseignement par ostension apparaît comme le seul possible.

L'enseignant a le choix entre ritualiser des pratiques ou bien ignorer le problème et renvoyer le sujet à ses difficultés personnelles.

Ainsi, le partage des responsabilités ne peut donc être appréhendé convenablement parce que les situations qui permettraient cette négociation n'existent pas.

QUESTIONS DE DIDACTIQUE :

Dans une activité d'apprentissage, le professeur est obligé de donner à l'élève une responsabilité, de réserver à l'élève une part personnelle. La question de didactique est alors : Qu'est-ce qui définit le partage des responsabilités entre le professeur et l'élève dans les tâches d'apprentissage? Cette question en infère une autre : comment cette frontière est-elle identifiée ?

L'étude théorique de ce phénomène est une composante du contrat didactique. Dans le contrat didactique, la question posée est celle de qui peut être raisonnablement dévolu à l'élève ou au professeur. Il est possible de déplacer les charges de chacun. Mais comment et jusqu'où peut on aller? Cette question générale dépasse le cadre de notre étude mais notre étude montre que cette question dépend très directement de la détermination des connaissances en jeu.

L'ignorance des pratiques énumératives dans les activités de comptage empêche toute négociation sur le partage des responsabilités : l'enseignant doit enseigner le nombre. Il est responsable des situations de comptage (ensemble en ostension). Il attend le comptage. Montrer l'existence d'une connaissance nécessaire au comptage qui fonctionne dans les situations proposées par le professeur est un moyen nécessaire pour pouvoir travailler ensuite sur le partage des responsabilités. Donc, à chaque fois qu'il sera possible de mettre en évidence une situation a-didactique mettant en jeu des connaissances nécessaires à la résolution de la situation proposée par professeur et incluse dans cette situation, nous permettrons de mieux étudier les effets du déplacement des responsabilités.

EFFETS PRODUITS PAR UNE IGNORANCE DE CE PHENOMENE ET CONSEQUENCES POUR NOTRE ETUDE :

Le phénomène de faire tomber dans le domaine des mathématiques une connaissance qui était en charge des mathématiciens s'est déjà produit: Guy .BROUSSEAU évoque : "*Dans les*

mathématiques, il y a des notions qui sont de la responsabilité des mathématiciens, qui font que c'est un mathématicien. Celui-ci a des connaissances qui font de lui un mathématicien (un connaisseur des mathématiques). Le mathématicien n'est pas réductible à ses savoirs. Par exemple, en logique, il utilise des raisonnements admis dans sa communauté, qui seront peut-être remis en cause un jour, et il est suffisant de dire et faire ce qu'il fait. S'il en dit trop, cela devient inutile, il ne faut pas expliquer des trivialisés."¹⁰⁸

Par exemple, l'enseignement de la théorie des ensembles a fait entrer dans le domaine des mathématiques certaines connaissances qui étaient du domaine para-mathématique.

Prenons l'exemple précis de la théorie des groupes, par rapport aux enseignements antérieurs des transformations. Lorsque l'on se préoccupait des transformations géométriques, le sujet avait à sa charge les opérations nécessaires pour concevoir les compositions de transformations (on ne parlait pas de composition). Les théories ensemblistes ont alors imposé l'enseignement de l'algèbre des transformations, la théorie des groupes. L'activité est alors devenue tout autre. Est-ce à dire que les élèves sont devenus des spécialistes de la composition des transformations ?

L'enseignement a une tendance à didactifier les mathématiques nouvelles, c'est à dire à enseigner (à tout prix) ce qui est nouvellement reconnu. Si nous reprenons l'exemple de la théorie des groupes, celle-ci va devenir objet d'enseignement et le système va ainsi changer le point de vue des transformations. Pour les groupes, le professeur a ses connaissances de l'université. Il trouve évident ce que lui sait, mais les élèves n'ont plus de situations permettant de concevoir l'algèbre des transformations. Nous pensons que ceci peut provoquer un "effet Jourdain".

Cette analyse peut se faire dès qu'une connaissance est prise en compte par le système et qu'elle devient un savoir répertorié. Les années 70 ont montré les effets non maîtrisés de ce phénomène en transformant une théorie ensembliste construite en une explication des mathématiques.

Notre étude a montré l'existence d'une connaissance non reconnue comme savoir à enseigner. Nous avons construit des situations a-didactiques dans lesquelles l'énumération constitue la solution à la question posée.

Nous sommes bien conscients que nous n'échapperons pas à cette difficulté du partage des responsabilités lorsqu'il s'agira de transmettre ces situations à des enseignants.

¹⁰⁸ Entretien Juillet 92

5. CINQUIEME PARTIE : INGENIERIE DEVELOPPEE.

5.1. PRESENTATION.

Nous avons défini l'énumération en tant que connaissance productrice d'énumérations effectives. Dans ce cas, l'énumération est un modèle implicite d'action. Nous avons montré que, particulièrement dans des situations de comptage, les enfants concevaient des types d'énumérations.

Un des buts principaux de notre étude est de construire des situations a-didactiques dans lesquelles il est nécessaire de produire effectivement des énumérations et qui permettent de faire "émerger" cette connaissance nécessaire afin qu'elle puisse devenir objet de savoir.

Nous avons montré en quoi les opérations ensemblistes constituaient les fondements de la construction des nombres et des opérations arithmétiques. Nous avons montré en quoi leur enseignement traditionnel n'avait pas permis l'acquisition des connaissances permettant le mesurage des collections.

Les situations que nous construisons permettent de justifier l'usage d'opérations dans l'ensemble des parties d'un ensemble. Il s'agit en quelque sorte de fonctionnaliser l'usage des concepts ensemblistes et de développer les activités de mesurage des collections dans des contextes variés que nous choisissons proches du contexte scolaire actuel..

Nous proposons TROIS familles de situations :

-Exploration d'un ensemble entièrement visible en vue de son énumération. Nous faisons suivre cette famille de la situation fondamentale du nombre et nous montrons les dépendances entre ces deux familles.

-Exploration d'un ensemble structuré spatialement en vue de la construction de la multiplication, mais aussi de la soustraction, de l'addition et des liens entre ces opérations..

-Exploration d'un ensemble par le jeu de dénominations de parties recouvrantes de cet ensemble. Dans ce cas, le partitionnement est à la charge de l'élève et constitue la seule réponse possible au problème posé. Cette situation constitue une situation fondamentale de l'addition.

5.2. PREMIERE FAMILLE DE SITUATIONS:

Il s'agit de la situation d'énumération d'une collection d'objets visibles.

Rappelons cette situation, mise au point par G.BROUSSEAU et R.BERTHELOT : Il s'agit de placer un jeton et un seul dans chaque tirelire d'une collection de tirelires. Une fois le jeton dans la tirelire, celui-ci n'est plus visible. Le fait que les tirelires soient opaques empêche un contrôle du déroulement de l'activité d'énumération, c'est à dire de pouvoir dire à chaque instant *"voici ce que j'ai déjà fait, voici ce qui me reste à faire"*.

Dans ce cas, l'énumération nécessite une coordination de l'espace et du temps : espace constitué par la position des objets à énumérer, et temps du déroulement de l'énumération.

Les moyens pour faciliter ce travail sont le marquage (décrit dans de nombreux manuels, voir première partie), le déplacement des objets (ici, mettre ensemble les tirelires dès qu'elles sont munies du jeton, organiser l'espace (en ligne, par exemple).

Si aucune de ces conditions n'est réalisée, il faut que l'enfant puisse structurer mentalement cette collection.

Aider les enfants dans sa maîtrise de l'énumération, c'est lui permettre de savoir choisir dans ces différents moyens celui qui est le plus adapté à la tâche qu'il va effectuer.

Nous développons un logiciel dans lequel, les enfants sont mis en situation d'énumération sans possibilité de déplacer les objets. Le développement du logiciel a commencé en 1985¹⁰⁹. Nous avons alors étudié son utilisation et ses effets en classe de moyenne et de grande section de maternelle.

Nous avons, depuis, réorganisé le logiciel en permettant des variantes supplémentaires : CALAPA 2 permet de réaliser trois situations pré-numériques : le tri-simple, l'énumération avec marquage, l'énumération sans marquage.

Deux fonctions de l'énumération sont mises en scène : la première fonction consiste à passer en revue tous les éléments d'une collection donnée, la deuxième consiste à extraire d'un ensemble donné tous les éléments ayant une propriété commune.

L'objectif de ces situations est que l'énumération de la collection concernée (collection ou sous ensemble) constitue la solution. Aussi, le scénario vise à rassembler des éléments, pour des raisons contingentes qui devront être facilement compréhensibles par les enfants.

Si ce rassemblement s'effectue élément par élément, il s'agit d'un tri. Si ce rassemblement s'effectue en une seule action, il s'agit d'une énumération.

Ce rassemblement peut s'effectuer en détermination de collections plus ou moins complexes : (collections constituées d'éléments identiques ou non par exemple).

Nous nous servons d'images d'animaux (voir description du logiciel lui-même page 231) pour permettre la construction d'une histoire qui donne un sens premier à l'action de rassembler.

LES SITUATIONS

¹⁰⁹ Voir DEA J.BRIAND 1985, Voir Thèse Mme VILLEGAS.(1987).

Dans la situation de TRI, les enfants cliquent¹¹⁰ et "tirent" les éléments affichés à l'écran, un par un, dans un ordre quelconque pour amener les éléments à leur destination.

Dans la situation d'ENUMERATION AVEC MARQUAGE, les enfants cliquent en tous les éléments cliquent ensuite le lieu de destination commun. Au cours de "l'appel" des éléments, ceux-ci sont marqués.

Si l'enfant omet un élément ou s'il marque un élément déjà marqué, l'action de rassemblement ne peut être menée à bien. Le logiciel contrôle cette phase. Si la règle n'a pas été comprise, la situation permet de comprendre à quelles conditions le rassemblement peut s'effectuer.

Si l'enfant pointe une destination qui n'est pas celle attendue, la partie doit être recommencée complètement.

Ainsi, l'enfant doit marquer tous les éléments du sous ensemble E puis ordonner le déplacement de tous ces éléments en une seule action. Pour cela, il lui faut construire une stratégie d'exploration de l'ensemble pour déterminer le sous ensemble. Le contrôle de l'utilisation correcte de cette énumération est principalement à la charge de la machine (marquage). L'énumération est effectuée par le sujet, mais la conception n'est pas à sa charge

Dans la situation d'ENUMERATION SANS MARQUAGE, les enfants cliquent en tous les éléments cliquent ensuite le lieu de destination commun. Au cours de "l'appel" des éléments, ceux-ci ne sont pas marqués.

Si l'enfant omet un élément ou s'il clique un élément déjà cliqué, l'action de rassemblement ne peut être menée à bien. Le logiciel contrôle cette phase. Si la règle n'a pas été comprise, la situation permet de comprendre à quelles conditions le rassemblement peut s'effectuer.

Si l'enfant pointe une destination qui n'est pas celle attendue, la partie doit être recommencée complètement.

Dans ce cas, l'enfant doit donc construire une structure qui permette une linéarisation de l'ensemble F et exercer un contrôle permanent de l'utilisation correcte de cette linéarisation (mise en ordre total). L'énumération est cette fois ci complètement à sa charge.

Nous reviendrons sur les variables repérées de cette famille de situations et sur celles que nous avons décidé de contrôler.

¹¹⁰ Ce terme sera employé dans la suite de notre étude, bien qu'il ne figure pas, sous ce sens, dans les dictionnaires actuels.

5.3. DEUXIEME FAMILLE DE SITUATIONS :

Cette situation est le résultat d'une réflexion issue d'activités de géométrie réalisées à l'école Jules Michelet, activités relatées dans la thèse de MHSALIN et R.BERTHELOT sous le nom de "la nappe trouée"¹¹¹, mais que nous avons adaptée à une situation de dénombrement.

Nous souhaitons construire une situation d'exploration d'un ensemble à dénombrer qui permette de contrôler, à chaque instant, une partie visible, mais seulement une partie de l'ensemble.

Notre projet était d'associer cette activité, aux difficultés que connaissent les élèves lors de l'exploration de tableaux en vue du dénombrement utilisant le produit cartésien.

Envisager de structurer un ensemble selon un ensemble produit pour envisager le dénombrement de cet ensemble, constitue la base de la multiplication. Mais nous avons montré (observation du cours élémentaire) que le système induisait des procédures dont l'effet produit était de ne plus faire prendre en charge cette nécessaire structuration par les élèves.

Nous construisons une situation générique qui restaure cette activité de structuration d'un ensemble en vue de son dénombrement.

Nous avons déjà décrit cette situation page 242 parce que son utilisation s'avérait nécessaire à notre étude lors des observations du chapitre trois. Rappelons là brièvement :

Il s'agit donc de construire une situation dont la question même serait la recherche d'une façon d'aller puiser de l'information dans un ensemble structuré (de tirer parti de cette structure) afin de trouver le nombre de ses éléments. Pour cela, nous avons développé le logiciel "FENETRE" :

IDEE GENERALE :

Nous allons construire une situation dont la solution est la mise en place d'une stratégie d'exploration d'une collection organisée sous forme de tableaux en particulier, et plus généralement de collections structurées d'objets montrés.

Nous construisons une situation dans la quelle la tâche à effectuer est avant tout une tâche d'exploration, même si le comptage constitue le moyen de communiquer la tâche à effectuer et par là même le contrôle final.

Pour que la tâche d'exploration soit un véritable enjeu, il est nécessaire de ne pas voir toute la collection. Si, par contre, il devient impossible de voir toute la collection et qu'une démarche d'exploration effective est nécessaire, nous construisons alors une situation propice à la mise en place explicite de techniques énumératives plus diversifiées.

LA SITUATION ELLE MEME :

Soit une collection structurée dessinée contrôlée à l'aide des variables suivantes :

- possibilité d'avoir un aperçu rapide de la collection afin de ne pas explorer sans avoir fait quelques hypothèses.

¹¹¹ "Le principe de base des situations, utilisées par G.GALVEZ, consiste à simuler le macro-espace urbain par l'exploration locale de ce qui peut correspondre à une vue d'avion." P. 346

- Les objets peuvent être tous identiques ou non. Ils peuvent être des objets concrets mais aussi être des nombres¹¹²
- La structure peut être choisie relativement à la question que l'on veut traiter. (Tableau axb , groupements réguliers ou non, arborescence, etc.)
- le nombre d'objets.
- une fenêtre d'exploration de dimensions variables.

La mise en scène peut s'imaginer de la façon suivante : sur une feuille de papier, une collection est dessinée. Une autre feuille de papier cache la première. Cette deuxième feuille est munie d'une fenêtre. En faisant glisser cette feuille sur la première, on peut ainsi voir, "petit à petit" la collection, localement, et en déduire le nombre d'éléments. La difficulté de mise en scène de cette situation nous a conduits à recourir à l'informatique comme outil de simulation.

Afin que la recherche de stratégies préalables constituent un enjeu véritable, il est nécessaire de rendre coûteux, voire impossible, l'énumération première de la collection par pointage un à un. C'est pour cela que nous avons développé un logiciel qui, par contrainte visuelle, autorise un "instantané" sur la collection, puis une recherche locale d'indices de dénombrement. Comme pour la première famille de situations, nous reviendrons sur les variables repérées de cette famille de situations et sur celles que nous avons décider de contrôler.

¹¹² Nous aborderons peut-être le problème suivant : si l'on donne une addition en colonne de dix nombres égaux, par exemple 15, très peu d'enfants pensent utiliser le dénombrement des 15 pour, ensuite effectuer une multiplication qui donnera le résultat de l'addition. La présence de l'addition, l'interdit implicite d'utiliser la multiplication pour "faire" une addition constituent des obstacles prévisibles.

Les nombres (15) étant dispersés sur un plan, nous faisons l'hypothèse que les enfants utiliseront plus volontiers la multiplication. Si ce point se révélait exact, il montrerait que le choix des stratégies d'énumération est assujéti à la pratique scolaire et que, au contraire des auteurs qui analysent l'énumération d'objets disposés en ligne comme plus facile, nous dirions que dans le cas d'écritures déjà lourdes de sens (addition en colonne), l'énumération choisie est un obstacle à la décision d'utiliser le modèle multiplicatif.

5.4. TROISIEME FAMILLE DE SITUATIONS :

Cette situation vise la essentiellement modélisation de la situation fondamentale de l'addition des entiers naturels.

Dans sa thèse p.437, G.BROUSSEAU (1986) définit la situation en ces termes : *"il s'agira, pour le joueur de produire le cardinal d'un ensemble alors qu'il ne peut en contrôler effectivement à chaque moment (pour quelque raison que ce soit) qu'une partie. Par exemple, il ne sait pas compter des nombres plus grands que 5, mais il dit : "il y a 5 et puis 5 et puis 2". Ou encore l'élève doit pouvoir appeler et compter certaines catégories d'objets de la collection. La stratégie optimale consiste à constituer une partition de l'ensemble puis à s'assurer du nombre d'objets dans chaque classe, en s'assurant que l'on compte bien toutes les classes.*

Si l'on veut que l'élève exprime la somme et ne se contente plus de l'utiliser, il faudra ménager une communication où l'émetteur pourra "interroger" la collection à compter et où le récepteur devra réaliser la collection équipotente sans voir le modèle. "

Pour traiter ce sujet, nous utiliserons l'exploration de collections à l'aide de descripteurs¹¹³ et de concaténation de descripteurs formant une phrase que nous appellerons prédicats amalgamés.

SITUATION :

Soit une collection d'objets. Soit un ensemble de descripteurs. Tous les objets sont concernés par au moins un descripteur. (Les blocs DIENES sont un exemple de collection répondant à cette définition). L'élève a connaissance de l'ensemble des descripteurs. Il sait que tous les objets de l'ensemble sont concernés.

La situation est la suivante : sur demande de l'élève, qui utilise un ou plusieurs descripteurs, la partie de la collection ainsi dénommée apparaît.

L'élève doit organiser une exploration de la collection par l'intermédiaire de ces descripteurs.

Cette situation génère habituellement une situation didactique dans laquelle deux élèves jouent ensemble : l'un pose des questions, l'autre montre les objets concernés. *"je veux voir les ronds noirs"*, etc. De cette suite de questions, le joueur va ultérieurement pouvoir déduire, en s'organisant, le nombre d'éléments de la collection.

Cette situation est en fait difficile à gérer, pour des raisons faciles à imaginer : (questions sans contraintes, lourdeur des manipulations entre autres).

L'informatique permet de mettre en scène des situations équivalentes, facilitant ainsi le déroulement de l'activité.

Ce projet de mise en scène par informatique a été abordé par S. GAIRIN CALVO et J.L. OYALLON qui ont développé à L'IREM de BORDEAUX un logiciel "QUE VEUX-TU VOIR ?" qui est la mise en scène de cette situation.

Ils ont pour cela utilisé deux descripteurs qualitatifs (couleur, forme) et un descripteur quantitatif (taille). Les enfants interrogent alors.

Des contraintes sont apportées afin que l'enfant ne puisse pas explorer de façon trop simpliste : par exemple, si l'enfant demande "les petits", il lui est répondu qu'il n'y a pas assez de place à l'écran. Ainsi, l'enfant doit revoir son questionnement.

¹¹³ Au sens de G.VERGNAUD dans "l'enfant les mathématiques et la réalité" P.66

Nous souhaitons pouvoir conduire différemment cette situation en proposant aux enfants un ensemble de prédicats amalgamés déjà construits afin de rendre plus explicite la prise en charge de l'exploration de la collection en vue d'un repérage exhaustif (d'une énumération) de ses éléments.

En particulier, nous voulons que les enfants aient à expliciter le passage des prédicats amalgamés tels qu'ils les conçoivent aux opérations ensemblistes nécessaires à l'exploration de la collection.

Pour cela, il nous faut construire un automate qui produise des prédicats amalgamés dont les parties associées constituent un recouvrement de l'ensemble.

Les contraintes viennent alors de cette organisation à priori de l'exploration définie par la situation.

Nous avons effectué une première approche informatique de cette situation en construisant le logiciel "PROTO" qui affichait une liste de prédicats.

Les enfants pouvaient interroger le logiciel au travers de chacun de ces prédicats. Par exemple, si l'enfant choisissait le prédicat "Les petits ronds", il voyait s'afficher les petits ronds.

Mais ce logiciel ne proposait qu'une seule liste. Ainsi, les élèves mettaient vite au point une procédure mémorisée qui dénaturait l'activité.

Il fallait donc envisager un logiciel qui génère des listes de prédicats amalgamés et que l'ensemble des classes désignées par les prédicats amalgamés recouvrent la collection

Nous avons créé le logiciel "VISUAL".¹¹⁴

Dans ce logiciel la situation propose une liste, en compréhension, de parties de l'ensemble de référence. Ces parties sont définies par des prédicats amalgamés.

Par exemple :

Collections explorables : les bleus foncés, les figures B vertes, les figures B bleues claires, les vertes, les bleues claires.

Sachant que l'ensemble de référence est constitué de figures A, B, C, D de couleur bleu-foncé ou bleu clair ou vert, que ces figures peuvent être à trait simple ou double, l'enfant va devoir interroger la machine en demandant à voir quelques unes (ou toutes) ces collections.

Pour cela, ces éléments de $P(E)$ doivent recouvrir l'ensemble E de la façon suivante: ils constituent un ensemble qui contient un sous-ensemble $L(P(E))$ qui recouvre l'ensemble E . Ainsi, le visionnement de plusieurs éléments de $L(P(E))$ suffit pour pouvoir affirmer le cardinal de l'ensemble E , ce qui veut dire, qu'en plus de la garantie d'un recouvrement, les éléments de $L(P(E))$ proposés permettent, par la redondance des informations qu'ils apportent, des stratégies de choix.

Pour cela, la liste proposée doit répondre à un certain nombre de conditions:

-Chacune des parties affichées doit être montrable.

-Il doit y avoir un ou plusieurs recouvrements.

¹¹⁴ En fait, pour des raisons matérielles, nous avons développé une version BASIC sur matériel THOMSON et une version Turbo Pascal sur matériel P.C.. Nous n'avons pas, en turbo-pascal travaillé sur le graphisme. Aussi les objets sont des polygones et sont nommés par des lettres. Ce qui explique les termes employés dans l'entretien individuel pour une première observation de VISUAL-PC. Un développement ultérieur prévu de ce logiciel reprendra le graphisme mis au point dans la version Basic-Thomson.

-Le nombre de parties ne doit pas être trop grand et être éventuellement gérable.

-Les dénominations des sous ensembles doivent pouvoir être choisies selon des critères à expliciter afin de construire une situation adaptée. C'est à dire que l'on doit pouvoir commander des listes dont la dénomination soit construite sur la base de un deux ou trois prédicats.

Par exemple, lorsqu'il y a beaucoup de parties dénommées à l'aide de trois prédicats les informations sont plus simples a priori.

Lorsqu'une exploration est terminée et un résultat (exact ou non) donné, il est possible de montrer la structure de la collection sous la forme d'un tableau. Une deuxième exploration pourra être considérablement influencée par le regard porté sur ce tableau. Bien sûr, cet apport doit être étudié du point de vue didactique (effet de ritualisation, mais aussi levé d'un interdit : voir première observation en entretien individuel avec ce logiciel).

Nous avons repéré au moins deux niveaux possibles de rapports du sujet à cette situation:

Exploration libre:

La situation est la suivante: des parties d'ensembles peuvent être visionnées. Le sujet peut explorer librement la collection. A un moment il décide qu'il a suffisamment de renseignements pour pouvoir affirmer le nombre d'éléments de la collection. Dans ce premier niveau l'élève doit développer recueillir les informations en contrôlant ce que chacune apporte. Pour cela; il utilise des opérations dans les parties de la collection de façon fonctionnelle. Il structure l'ensemble. Nous ne savons rien des représentations qui seront mises en jeu.

Stratégies dans le choix des parties de E proposées:

Cette nouvelle situation suppose une variable supplémentaire par rapport à l'activité précédente: l'exploration doit être la plus courte possible. L'élève n'imagine sans doute pas, au départ que poser un minimum de questions a un sens. La consigne qui exige cela va lui permettre, petit à petit, ne plus envisager l'action d'exploration comme première, mais de prendre conscience d'une activité de recherche préalable qui met en jeu l'exhaustivité, associée à une bonne représentation de la structure ensembliste.

Comme pour les familles précédentes, nous reviendrons sur les variables repérées de cette famille de situations et sur celles que nous avons décidé de contrôler.

5.5. PROCESSUS DE REALISATION DES LOGICIELS:

Pour nos premiers travaux, en 1985, nous avons développé les premiers logiciels en BASIC sur du matériel THOMSON.

Ceci pour plusieurs raisons :

- 1°) A cette époque, les seuls matériels utilisables à l'école élémentaire étaient ceux qui venaient d'être distribués par le Ministère de l'Éducation Nationale.
- 2°) Ces matériels avaient la possibilité de faire travailler à l'aide d'un stylo optique, ce qui, de notre point de vue les rendait d'une utilisation aisée chez de jeunes enfants.
- 3°) Il était possible de programmer assez aisément des dessins à l'écran.

Lorsqu'il s'est agit de continuer un travail de programmation pour les logiciels de notre recherche, ces matériels se sont avérés limités.

Nous avons donc développé FENETRE et VISUAL en TURBO-PASCAL 5.0 sur compatibles PC.

Afin d'optimiser certains développements, nous avons utilisé une bibliothèque de routines "Turbo-Professionnel" de chez ATEA (TOURS).

Les logiciels FENETRE et VISUAL ont donc été réalisés de cette façon. Ils sont utilisables sur compatibles PC, de préférence munis d'un disque dur.

La deuxième version des logiciels CALAPA et BARQUES, qui intègre des variables de commandes supplémentaires a été réalisée conjointement avec les informaticiens des EDITIONS PROFIL (MONTROUGE). Le développement est fait en C avec utilisation d'une bibliothèque de routines propres à cette maison d'édition.¹¹⁵

5.5.1. LES LOGICIELS (REALISATION):

Les logiciels VISUAL et FENETRE sont réalisés en TURBO-PASCAL (V.5-0) de chez BORLAND et utilisent des routines de TURBO-PROFESSIONAL (ATEA).

Pour chacun des deux logiciels, nous avons développé le programme selon trois unités, qui, elles-mêmes, appellent des routines ATEA.

Les deux logiciels¹¹⁶ adoptent la même structure dans laquelle un programme appelle trois unités.

¹¹⁵ Nous avons décrit dans un article : "Conditions didactiques d'élaboration d'un didacticiel" Actes du séminaire micro-informatique en éducation. Montréal 90, notre expérience de réalisateur de logiciels en tant que didacticien. Nous y décrivons les limites à vouloir contrôler, en tant qu'exécutant, tout à la fois les deux aspects techniques et didactiques. Par ailleurs, dans les conditions actuelles du développement du logiciel éducatif en France., nous expliquons notre choix de travailler avec une maison d'édition.

¹¹⁶ Les listings des programmes sources sont en annexe.

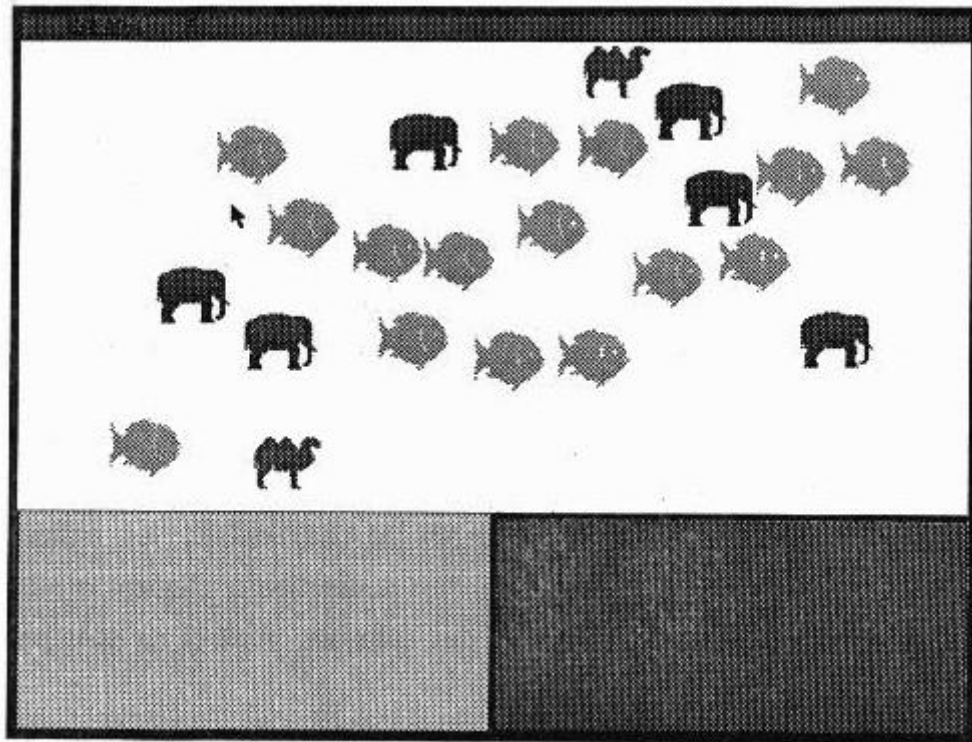
PROGRAMME		
UNITE 1 Saisie du scénario	UNITE 2 L'activité	UNITE 3 Ensemble de routines communes..

Le schéma suivant résume la structure générale des deux programmes:

VISUAL.EXE (60 Ko)			SCRUTE.EXE (50 Ko)	
SCENARIO.TP U (6,24 Ko) (Organise la page-écran du scénario et la saisie des variables de commande.)	ACTIVITE.TPU (24,2 Ko) (Corps du programme : générateur de prédicats, affichage de ceux-ci, affichage de la collection).	TOUT.TPU (4,7 Ko) (Organise la saisie des résultats. Commun aux deux logiciels).	OEIL.TPU (7,6 Ko) (Corps du programme. Organise l'exploration de la collection).	SV.TPU (5,5 Ko) (Organise la page-écran du scénario et la saisie des variables de commande.)
LES ROUTINES D'ATEA				
TPCRT (remplace CRT)	TPCMD	TPFENETR (contient des routines de gestion des fenêtres et des écrans virtuels).	TPMENU (utilitaire de création de menus déroulants).	TPEDIT (fournit un éditeur plein-écran).

5.6. LOGICIEL "CALAPA2"

Dans les trois cas, sur la partie haute de l'écran apparaissent des animaux, en bas à gauche une mare, en bas à droite un pré ou du sable (selon option) il s'agit de mettre chaque animal dans son lieu habituel. . Dans la mare les canards et les poissons, dans le pré les lapins et les écureuils, ou sur le sable les chameaux et les éléphants.



Les animaux sont pointés ou marqués à l'aide de la souris.

La situation porte sur deux trois ou quatre catégories d'animaux (voir variables).

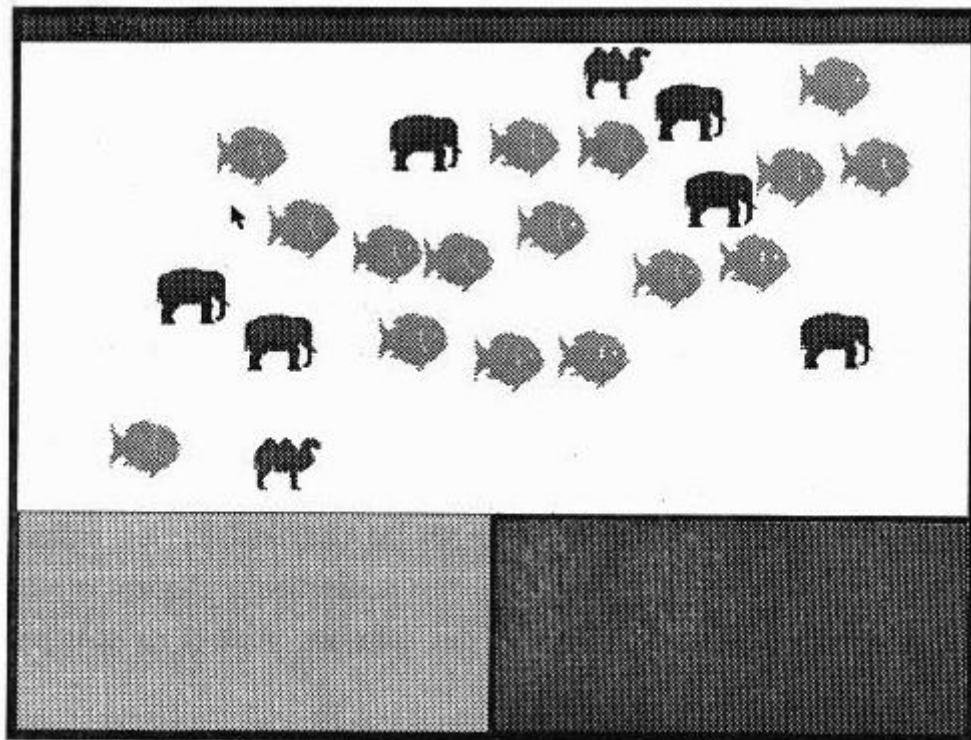
5.6.1. LES SITUATIONS :

Dans la situation de TRI, pour amener les animaux à leur destination, les enfants cliquent et "tirent" les animaux un par un, dans un ordre quelconque.

Cette première situation concerne les enfants de maternelle de moyenne et de grande section.

Dans la situation d'ENUMERATION AVEC MARQUAGE, les enfants cliquent tous les animaux qui doivent aller à la même destination et cliquent ensuite le lieu de destination. Au cours de "l'appel" des animaux, ceux-ci sont marqués.

Si l'enfant omet un animal ou s'il marque un animal deux fois, il doit être recommencé complètement pour cette destination.

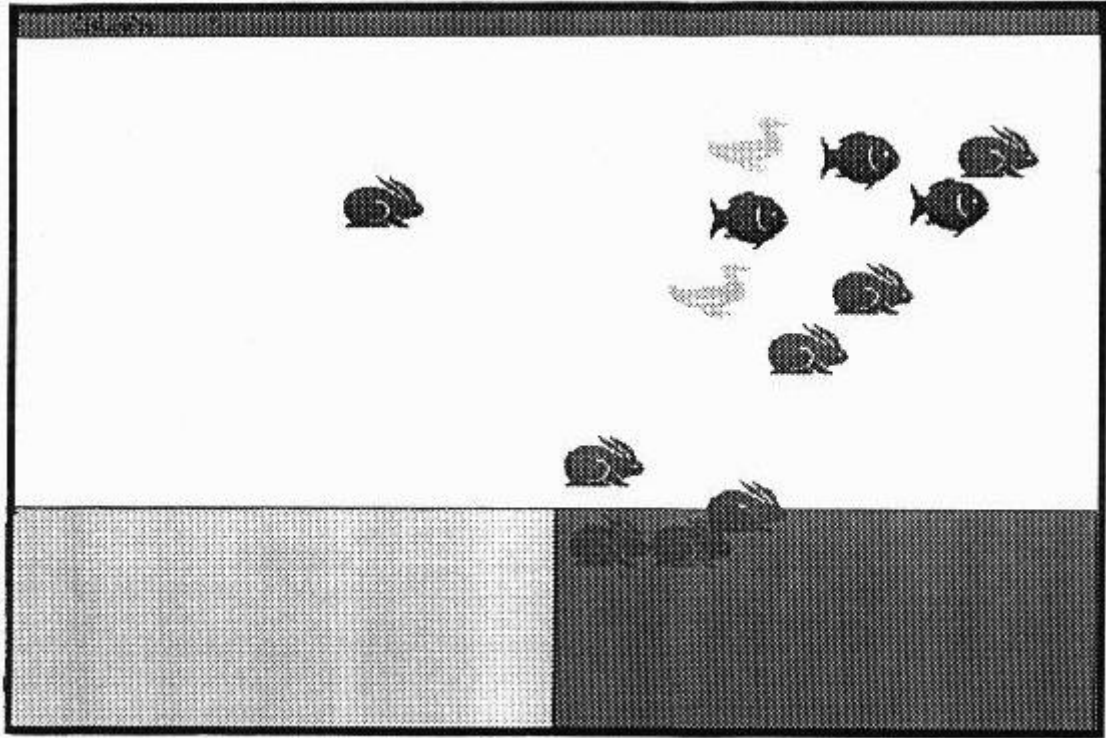


Cette page écran montre un marquage en cours sur les animaux destinés à la mare.

Dans la situation d'ENUMERATION SANS MARQUAGE, les enfants cliquent tous les animaux qui doivent aller à la même destination et cliquent ensuite le lieu de destination. Au cours de "l'appel" des animaux, ceux-ci ne sont pas marqués.

Si l'enfant omet un animal, de même que dans la situation précédente, ou s'il marque un animal deux fois, il doit être recommencé complètement pour cette destination.

Si l'enfant pointe une destination qui n'est pas celle attendue, la partie doit être recommencée complètement.

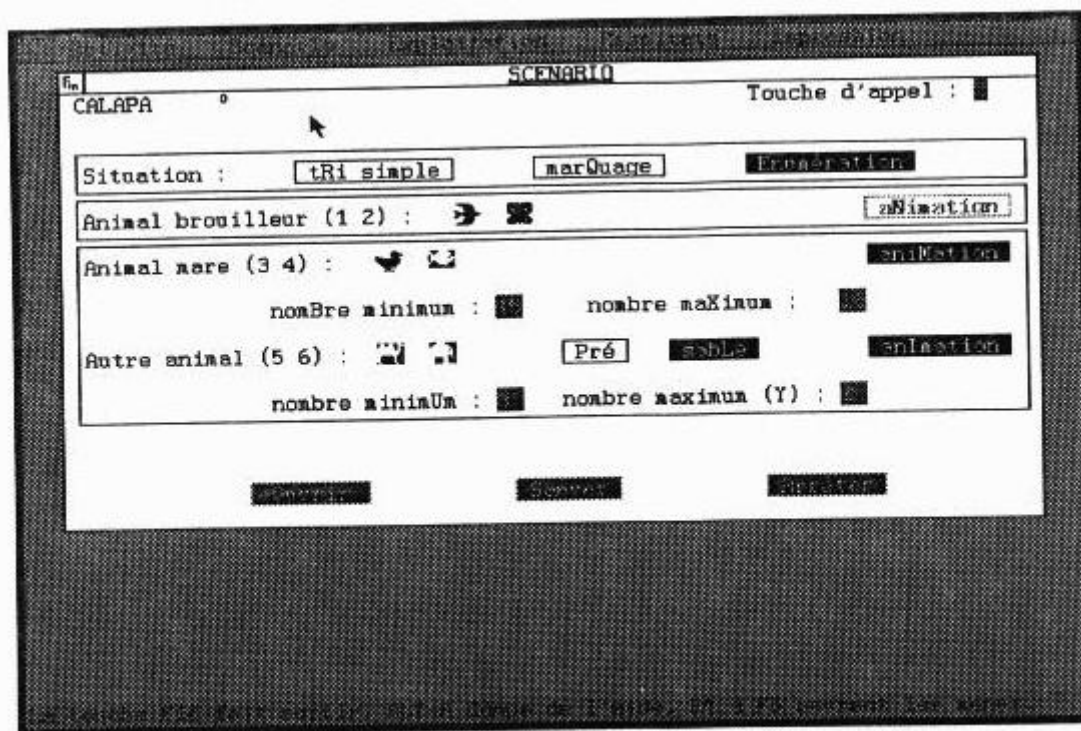


Cette page écran montre la validation en cours d'une énumération incomplète sur les animaux destinés à la mare.

Lors de la mise dans le pré, les lapins pointés viennent en glissant, dans le pré, mais repartiront aussitôt dans la partie haute de l'écran.

Des animaux brouilleurs peuvent être ajoutés afin de faire travailler le tri ou l'énumération dans un environnement plus complexe. Tout pointage sur un des animaux brouilleurs oblige à recommencer la partie

5.6.2. LES VARIABLES



Voici les trois cadres permettant la construction du scénario de CALAPA

LE PREMIER CADRE

Permet de choisir la situation.

LE DEUXIEME CADRE

Animal brouilleur (1 2)

En activant le pictogramme oiseau et/ou papillon, une ou deux familles de ces animaux viendront brouiller le travail de tri ou d'énumération. - La présence ou non d'animaux brouilleurs (leur nombre est géré par l'ordinateur).

Animation : Ces animaux peuvent se déplacer dans la partie haute de l'écran ou non.

LE TROISIEME CADRE :

Animal mare (3 4)

La destination mare est réservée aux poissons et aux canards. Un ou deux types de ces animaux peuvent figurer dans la mise en scène. On active, pour cela le pictogramme voulu.

Animation :

Si ce bandeau est activé, les animaux dont la destination est la mare peuvent se déplacer sur la partie haute de l'écran.

Nombre minimum, nombre maximum

Permet de donner une fourchette numérique. Le nombre minimum et le nombre maximum de poissons et/ou de canards peut être choisi entre 1 et 18.

Autre animal (5 6)

La destination pré ou sable est réservée aux lapins et aux écureuils ou aux chameaux et aux éléphants.

Un ou deux types de ces animaux peuvent figurer dans la mise en scène. Pour cela, activez le bandeau PRE ou SABLE. Ces deux bandeaux fonctionnent en bascule.

Animation :

Si ce bandeau est activé, les animaux dont la destination est le pré ou le sable peuvent se déplacer sur la partie haute de l'écran.

Nombre minimum, nombre maximum

Permet de donner une fourchette numérique. Le nombre minimum et le nombre maximum de lapins et/ou d'écureuils pour le pré ou d'éléphants et/ou de chameaux pour le sable est entre 1 et 18 .

LES VERSIONS PRE-PROGRAMMEES

Nous avons préparé trois versions préprogrammées:

LE TRI (lettre d'appel : T)

Nous avons pris une version très simple:

Les lapins (entre 8 et 10), les poissons (entre 8 et 10), pas d'animaux brouilleurs, le tout est animé.

LE MARQUAGE (lettre d'appel : M)

Les poissons (entre 10 et 14), les chameaux et éléphants (entre 7 et 9), des animaux brouilleurs, le tout est animé.

L'ENUMERATION (lettre d'appel : E)

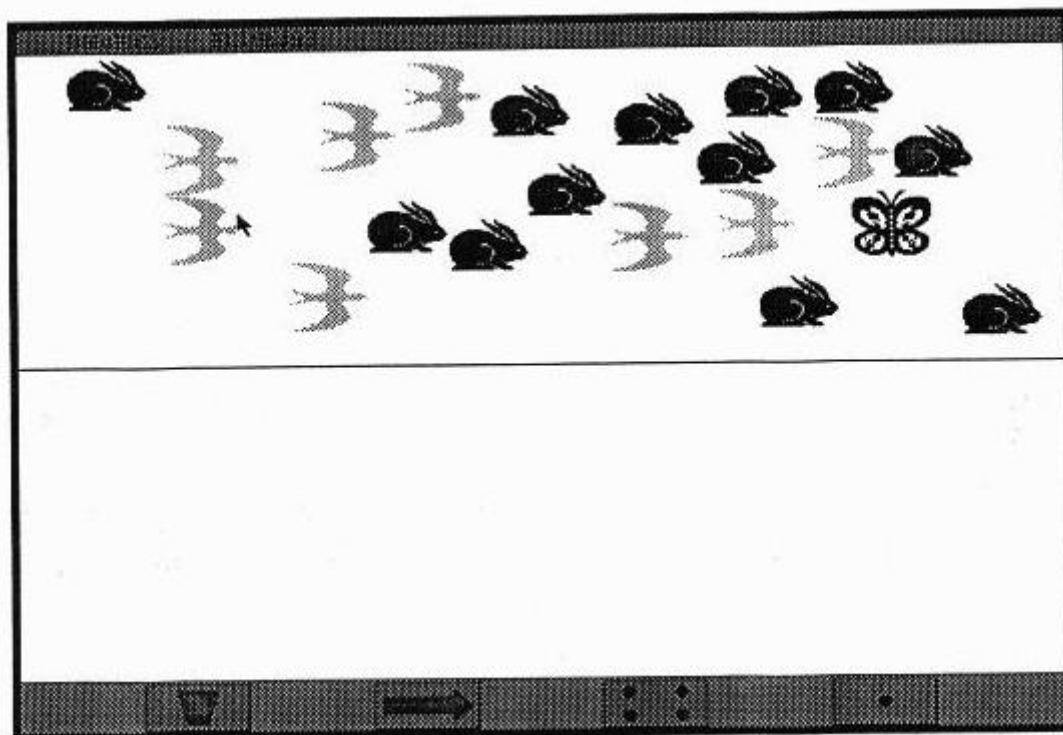
La variante disponible au démarrage du logiciel est une situation d'ENUMERATION. Le nombre de lapins est compris entre 8 et 12, celui des canards entre 5 et 10. Des papillons sont présents. Le tout est animé.

5.7. LE LOGICIEL "BARQUES" :

5.7.1. PAGE DE TRAVAIL ET SITUATIONS DE BASE :

L'écran est divisé en deux parties :

- En bas : la "mare" bleue dans laquelle, l'enfant construira la collection de barques.
- En haut : les animaux, à savoir la collection de lapins ou de chameaux sur laquelle porte le travail et, éventuellement, la collection d'animaux "brouilleurs" (oiseaux et papillons).



Le logiciel permet de réaliser plusieurs situations visant l'apprentissage des premiers nombres et une situation d'initiation au jeu.

Dans tous les cas, il s'agit de construire des barques pour des animaux (lapins ou chameaux) :

- exactement une barque pour chacun (dans le cas de barques à une place). L'apprentissage visé est alors le dénombrement de collections, le nom et l'écriture des nombres jusqu'à 25.
- exactement une place pour chacun (dans le cas où il y a aussi des barques à plusieurs places). Les situations permettent alors une première approche de la numération et du calcul

L'enfant fabrique les barques une à une en cliquant l'icône correspondant en bas. Dans l'option "CORRECTION BARQUES", il peut supprimer la dernière barque en cliquant la poubelle .

Trois types de situations (S1 S2 S3) décrits ci-après peuvent être mis en scène:

Dans S1 et dans S2, l'enfant commence immédiatement à fabriquer les barques.

Dans S2, les animaux disparaissent quand il clique pour fabriquer la première barque.

Dans S3, il faut d'abord faire disparaître les animaux en cliquant la flèche, avant de commencer à fabriquer les barques.

Quand l'enfant estime avoir fabriqué la collection convenable de barques, il clique la flèche en bas de l'écran.

Dans S2 et S3, les lapins réapparaissent alors. Il faut maintenant les embarquer.

Dans le cas de pose automatique, la commande se fait en cliquant la flèche.

Dans le cas d'embarquement par l'enfant:

- s'il n'y a que des barques à une place, il pointe un animal, une barque, un animal, une barque... jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'animaux, ou de barques.

- s'il y a des barques à "n" places, la pose se fait barque par barque: l'enfant doit cliquer exactement "n" animaux puis la barque à "n" places; aucune barque ne peut être occupée seulement partiellement; l'enfant peut remplir les barques à "n" places et à une place dans l'ordre qu'il veut. Il doit poursuivre l'embarquement jusqu'à ce qu'il ne reste plus de barques à remplir (mais il peut rester à la fois des barques et des lapins: par exemple 2 barques à 5 places et 4 lapins)

A la fin de l'embarquement : cliquage de la flèche.

- s'il a réussi (s'il ne reste ni lapin-ou chameau- ni barque vide) : animation.

- s'il s'est trompé, suivant le choix fait par l'utilisateur :

- . Soit il ne se passe rien : l'enfant doit chercher son erreur

- . Soit l'erreur est visualisée : les barques en trop deviennent noires ou (et) les animaux sans barque deviennent rouges.

En cliquant à nouveau la flèche, il termine le premier essai.

Si l'utilisateur a choisi "2 essais", les animaux reprennent leur place, les barques disparaissent.

Le deuxième essai est identique au premier.

A la fin, cliquage de la flèche pour terminer la partie.

5.7.2. LES SITUATIONS:

Situation S0: INITIATION

L'enfant appelle une barque puis embarque un animal. Il procède ainsi pour chaque animal.

Les seules barques disponibles sont les barques à une place.

Situation S1: AVEC ANIMAUX

Il s'agit de construire une collection (de barques) équipotente à une collection visible (d'animaux).

L'enfant réalise d'un seul coup toutes les barques nécessaires, puis il embarque les animaux.

Pour gagner, il ne doit pas rester de barques ni en manquer.

Les procédés utilisés sont soit la correspondance terme à terme, soit le comptage, souvent les deux, l'un validant l'autre.

Situation S2 : SANS ANIMAUX

Elle consiste à construire une collection équipotente à une autre qui n'est plus visible.

L'enfant doit encore réaliser d'un seul coup toutes les barques nécessaires mais maintenant les lapins disparaissent quand il appelle la première barque.

Le procédé utilisé en général est le comptage.

Situation S3: COMMUNICATION

Elle permet de réaliser en classe des situations de communication orale ou écrite.

Ici, il faut faire disparaître les animaux AVANT de commencer à fabriquer les barques.

Exemple de situation de communication :

Un enfant vient voir les animaux, puis les faits disparaître. Il communique, oralement ou par écrit, le nombre d'animaux à un autre enfant qui vient construire la collection de barques.

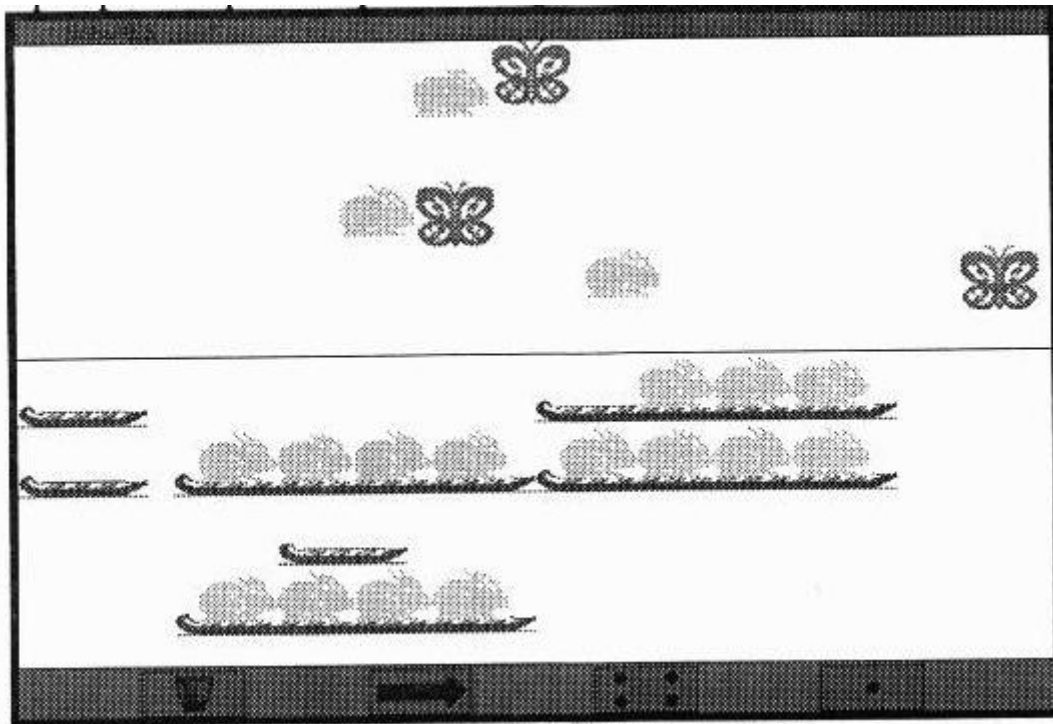
Les connaissances visées sont ici la désignation orale ou écrite des nombres (dessins ou écriture usuelle).

Ces trois situation (avec animaux, sans animaux, communication) peuvent être reconstruites en travaillant cette fois-ci avec des barques à plusieurs places. On obtient donc trois autres situations:

S1-2 AVEC ANIMAUX et BARQUES A PLUSIEURS PLACES

L'enfant dispose maintenant de deux types de barques: à une place et à "n" places (n pouvant prendre les valeurs 2,3,4,5). Pour gagner, il ne doit pas rester de places vides, ni d'animaux.

Il peut procéder par correspondance un pour "n"; ou bien par tâtonnement.



Ici, les lapins commencent à être embarqués, par groupe énuméré de 4 si l'enfant doit pointer les lapins.

S2-2 SANS ANIMAUX et BARQUES A PLUSIEURS PLACES

L'enfant doit prévoir avant de fabriquer la première barque combien il fera de barques de chaque type. Il peut aussi garder en mémoire le nombre total d'animaux et procéder par tâtonnement en comptant les places disponibles après chaque fabrication de barque.

S3-2 COMMUNICATION et BARQUES A PLUSIEURS PLACES

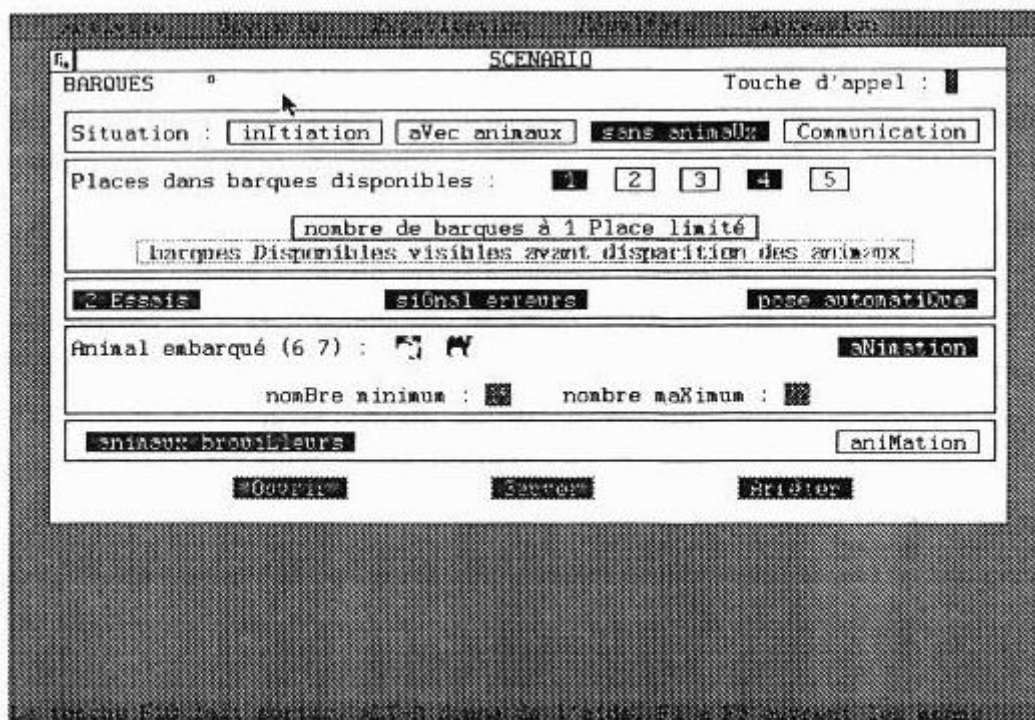
a) si le premier enfant voit les icônes des barques disponibles AVANT de faire disparaître les animaux, il communique au deuxième enfant un message du type "4 barques à 3 places et 2 barques à une place".

Dans le cas où il est seul, il doit garder en mémoire un message de ce type.

Cette structuration de la collection en paquets égaux constitue une première approche de la numération ("56" c'est "5 paquets de dix et 6")

b) si les icônes des barques disponibles ne sont visibles qu'APRES la disparition des animaux, la communication porte sur le nombre total d'animaux et le deuxième enfant doit effectuer, par tâtonnement ou par calcul, une décomposition du nombre. (Ex : $14 = 3+3+3+3+2$)

5.7.3. LES VARIABLES



Voici les trois cadres permettant la gestion du scénario de BARQUES.

PREMIER CADRE :

L'utilisateur choisit d'abord la situation (S0,S1,S2 ou S3)

DEUXIEME CADRE

Place dans barques disponibles

Pour S1, S2 ou S3, il y a toujours des barques à une place, mais l'utilisateur peut choisir d'avoir aussi des barques à 2,3,4 ou 5 places (un seul choix). Pour cela, il active le bandeau voulu en tapant le nombre ou en cliquant à la souris.

Nombre de places à une place limité

Si ce nombre est limité, dans le cas de barques à n places, l'enfant ne peut pas faire plus de n-1 barques. Quand l'enfant atteint le nombre-limite, il ne se passe rien quand il clique l'icône correspondant aux barques à une place. Il doit alors utiliser les grandes barques, et éventuellement en effacer des petites.

Cette limitation a pour but d'obliger l'enfant à utiliser le plus possible de grandes barques.

Barques disponibles visibles avant la disparition des animaux

Ce bandeau n'est disponible que pour la situation S3 parce que cette variable concerne la situation S3.

Elle modifie le problème posé: si l'enfant ne connaît pas la taille des grandes barques quand il observe la collection d'animaux, il ne peut pas structurer mentalement celle-ci en paquets égaux pour prévoir le nombre de grandes barques nécessaires; il devra utiliser le nombre total d'animaux (ou le communiquer à celui qui fabriquera les barques).

TROISIEME CADRE

2 essais Si ce bandeau est activé, l'enfant dispose de deux essais. C'est à dire qu'après avoir constaté qu'il y a des barques ou des animaux en trop, l'enfant peut recommencer sur la base du même nombre d'animaux.

Si ce bandeau n'est pas activé, l'enfant ne dispose que d'un essai.

Signal erreurs

Dans le premier cas, la recherche de l'erreur est à la charge de l'élève ; il doit avoir bien compris le but à atteindre.

Dans le deuxième cas, c'est l'ordinateur qui valide le travail. L'enfant attend le "verdict". Le choix dépend du niveau de prise en charge du problème par les enfants.

Pose automatique

Nous conseillons de commencer par " pose par l'élève" pour que celui-ci établisse lui-même la correspondance terme à terme et voit bien le but du jeu. Par la suite, quand les enfants ont bien compris la situation, la pose automatique permet de gagner du temps.

QUATRIEME CADRE

Animal embarqué (6 7)

Il s'agit soit de lapins, soit de chameaux qui sont choisis en activant le bandeau voulu..

Le minimum est au moins 1 et le maximum au plus 20.

Le choix de ces nombres est bien sûr essentiel pour définir la situation d'apprentissage; il pourra être fait en fonction du niveau de chaque enfant, ou groupe d'enfants.

Animation :

En choisissant ANIMATION, les animaux se déplacent lentement sur l'écran ce qui rend les problèmes beaucoup plus difficile.

CINQUIEME CADRE

Animaux brouilleurs

Il s'agit d'oiseaux et de papillons, dont le nombre total est automatiquement entre 3 et 10. Ils peuvent, eux-aussi, être en mouvement.

Ces deux collections modifient la situation de base.

Dans le cas de très petits nombres de lapins, elles permettent de garder un caractère problématique à l'activité.

Animation :

En choisissant ANIMATION, les animaux brouilleurs se déplacent lentement sur l'écran.

LES VERSIONS PRE-PROGRAMMEES :

Situation d'initiation (Touche d'appel : I)

Dans cette situation d'initiation (utilisant S0), les lapins sont posés par l'élève, l'erreur est non marquée, le nombre de lapins est entre 5 et 10. Les animaux brouilleurs sont présents.

Lapins, 1 pl (Touche d'appel : L)

Dans cette situation les lapins restent présents pendant la commande des barques (S1), les lapins sont embarqués par l'élève, l'erreur est non marquée, le nombre de lapins est entre 10 et 15. Les animaux brouilleurs sont présents.

Lapins absents, 1 pl (Touche d'appel : A)

Dans cette situation les lapins disparaissent pendant la commande des barques (S2), les lapins sont embarqués par la machine, l'erreur est non marquée, le nombre de lapins est entre 10 et 15. Les animaux brouilleurs sont présents.

Communication simple (Touche d'appel : C)

Dans cette situation les lapins disparaissent sur demande avant la commande des barques (S3), les lapins sont embarqués par la machine, l'erreur est non marquée, le nombre de lapins est entre 10 et 15. Les animaux brouilleurs sont présents.

Lapins, 3 pl (Touche d'appel : T)

Dans cette situation les lapins restent présents pendant la commande des barques. L'enfant peut commander des barques à une place et des barques à trois places (S1-2). Les lapins sont embarqués par l'élève, l'erreur est non marquée, le nombre de lapins est entre 10 et 15. Les animaux brouilleurs sont présents.

Lapins absents, 3 pl (Touche d'appel : P)

Dans cette situation les lapins restent présents pendant la commande des barques. L'enfant peut commander des barques à une place et des barques à trois places (S2-2), les lapins sont embarqués par l'élève, l'erreur est non marquée, le nombre de lapins est entre 10 et 15. Les animaux brouilleurs sont présents.

Comm, 4 places (Touche d'appel : Q)

Dans cette situation les lapins disparaissent sur demande avant la commande des barques. Les icônes des barques sont présents. (S3-2), les lapins sont embarqués par la machine, l'erreur est non marquée, le nombre de lapins est entre 15 et 20. Les animaux brouilleurs sont présents.

Comm, type inconnu (Touche d'appel : X)

Les barques ont 5 places.

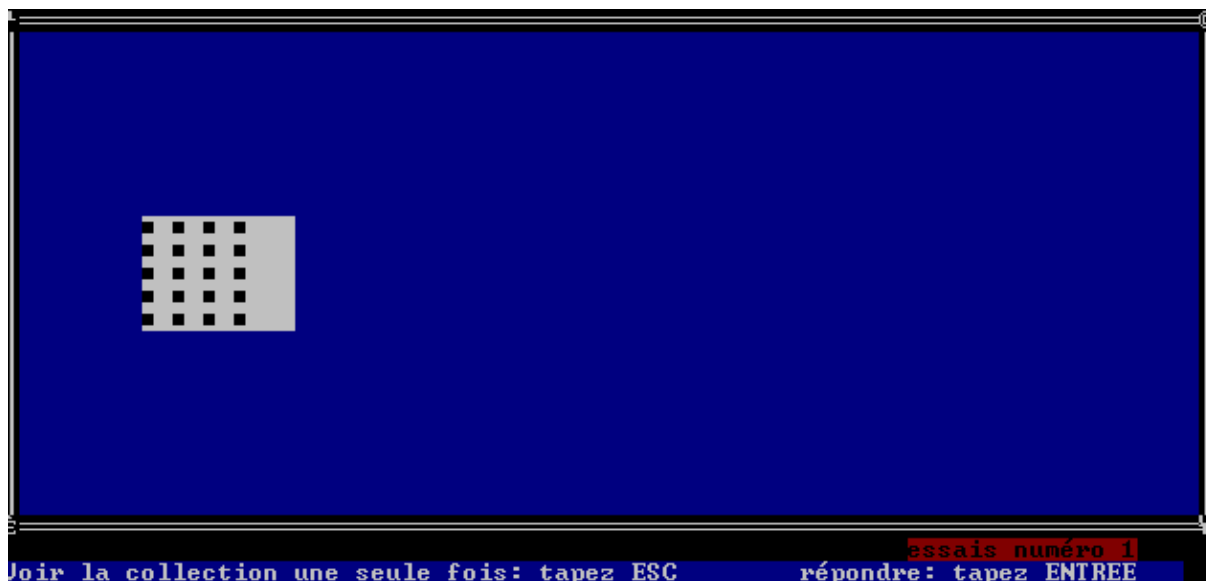
Dans cette situation les lapins disparaissent sur demande avant la commande des barques (S3-2). Les icônes des barques sont absents au départ (Le premier enfant ne peut donc transmettre qu'une information numérique générale). Les lapins sont embarqués par la machine, l'erreur est non marquée, le nombre de lapins est entre 15 et 20. Les animaux brouilleurs sont présents.

5.8. LOGICIEL "FENETRE"

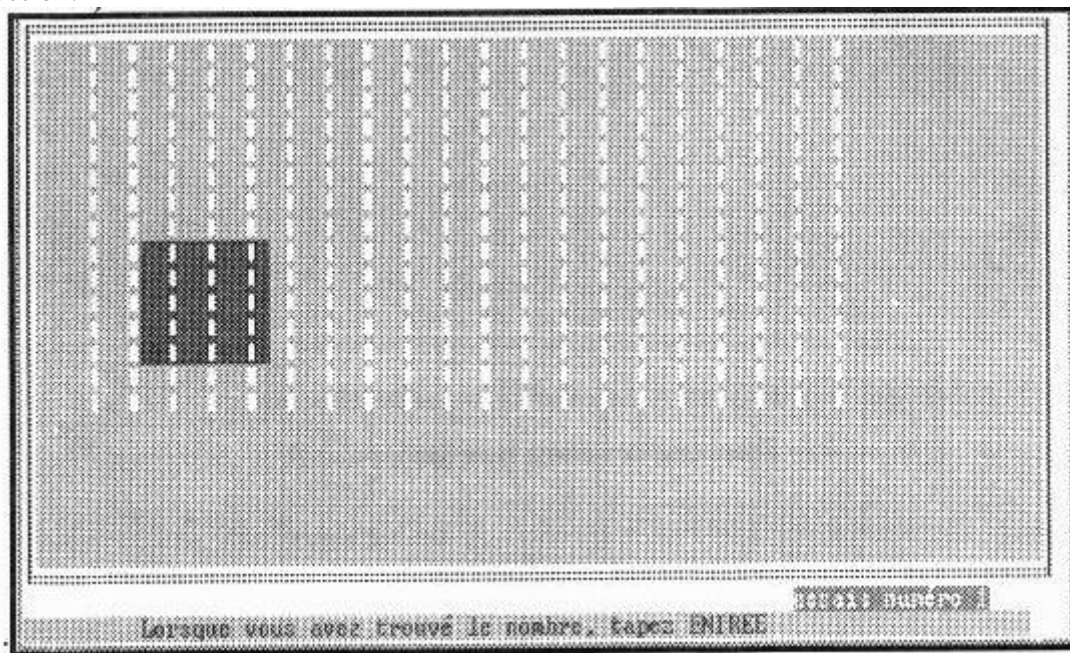
ORGANISATION DU PROGRAMME ET LISTING (Voir annexe).

5.8.1. SITUATION :

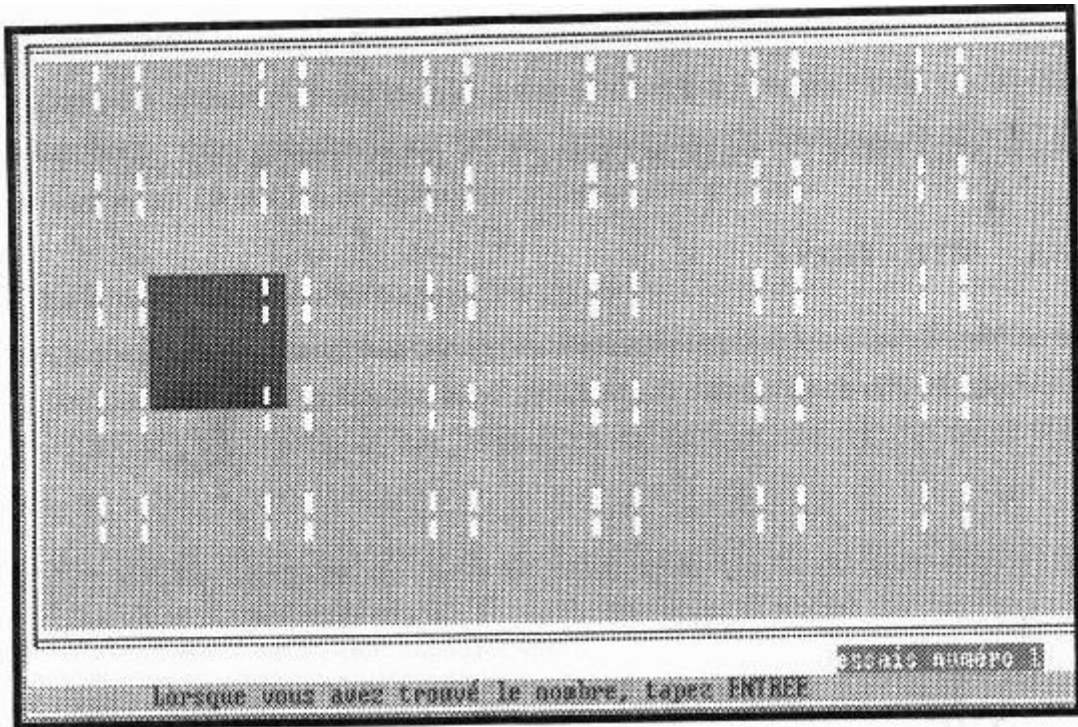
Un tableau d'objets est en partie visible au travers d'une fenêtre. Cette fenêtre peut-être déplacée afin de permettre l'exploration de la collection.



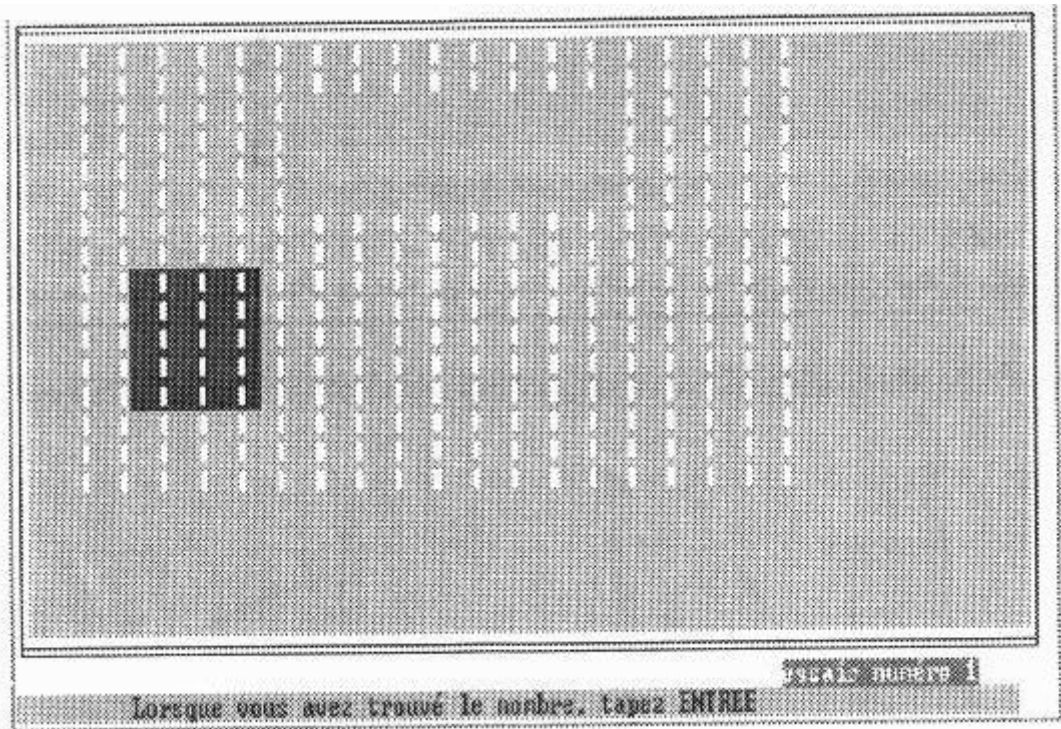
Une touche du clavier permet d'avoir (une fois) un coup d'œil général (voir ci-dessous) sur la collection.



Exemple de structure (forme axb).



Voici une structure type (axb)xc



Voici une structure type (axb) - (cxd)

5.8.2. LES VARIABLES :



- La collection peut rester visible. Cela permet une situation d'initiation qui a pour but la compréhension de la règle du jeu.
- La fenêtre peut être de deux dimensions (petite ou grande).
- Le nombre d'éléments de la collection dépend du maillage du tableau. Nous avons prévu 3 maillages. Le maillage 1 permet d'afficher aux environs de 800 objets, le maillage 2 permet d'afficher aux environs de 400 objets, le maillage 3 permet d'afficher aux environs de 200 objets.
- Remarque : à chaque appel d'une touche fléchée, la fenêtre se déplace d'une ligne ou d'une colonne du maillage. Nous avons choisi cette option car ceci permet un sur-contrôle du comptage par le geste sur le clavier.
- Dans l'état actuel du logiciel, l'enfant ne peut proposer que l'écriture canonique du résultat. Nous pensons développer ce point ultérieurement.
- Les types de collection peuvent donc être choisis de la façon suivante :

	axb	axb-cxd	axbxc
type 1	*		
type 2		*	
type 3			*
type 4	*	*	
type 5	*	*	*

Les types 4 et 5 permettent un choix aléatoire.

Les jeux peuvent être enregistrés, constituant ainsi une réserve de situations.

5.9. LOGICIEL "VISUAL":

ORGANISATION DU PROGRAMME ET LISTING (Voir annexe).

ETUDE DES MESSAGES EN FONCTION DES SCENARIOS (Voir annexe).

5.9.1. REALISATION DE L'AUTOMATE GENERATEUR DE LISTES :

Nous avons construit un modèle de générateur de listes. Il s'agit donc, dans ce cas de recenser toutes les variables, toutes les stratégies et de concevoir un programme qui produise une liste de parties d'un ensemble répondant aux contraintes de la situation.

Dans la version Thomson , les prédicats sont constitués à partir des prédicats élémentaires suivants :

petits grands
monstres, voiliers, poissons, arbres
verts, jaunes, blancs

Dans la version PC, nous avons pris les prédicats suivants :

simple double
figure A, figure B, figure C, figure D
Vert, bleu-clair, bleu-foncé, rouge

Nous dirons qu'il y a là trois variables dont la première peut prendre 2 valeurs, la deuxième 4 valeurs, la troisième 3 valeurs. Le logiciel permet de générer de façon aléatoire des définitions en compréhension de listes d'éléments de $P(E)$, tout en garantissant les propriétés suivantes:

Ces éléments de $P(E)$ recouvrent l'ensemble de référence.

Ils constituent un ensemble qui contient un sous-ensemble $L(P(E))$ qui recouvre l'ensemble E de référence.

Le visionnement de plusieurs éléments de $L(P(E))$ suffit pour pouvoir affirmer le cardinal de l'ensemble E , ce qui veut dire, qu'en plus de la garantie d'un recouvrement, les éléments de $L(P(E))$ proposés permettent, par la redondance des informations qu'ils apportent, des stratégies de choix.

Ensemble de référence:

Il y a donc (voir ci-dessus) trois variables:

Une variable à deux valeurs (grandeur), une variable à trois valeurs (couleurs), une variable à quatre valeurs (nature).

Ceci constitue donc 24 parties exprimables en fixant les trois valeurs des variables.

Les prédicats définissent les parties d'un ensemble. Cet ensemble est un ensemble de 24 classes d'objets. Dans chacune de ces classes il peut y avoir plusieurs objets. Par exemple, il peut y avoir plusieurs "petits poissons jaunes". Ce qui est nommé par les prédicats sont donc des éléments de l'ensemble des parties. Ce que doit faire l'enfant, c'est appeler, choisir les parties qui sont affichées, l'ordinateur montre alors les éléments qu'il y a dedans. Par exemple, on veut voir les "poissons verts", l'ordinateur montre les poissons verts. Il peut y en avoir de

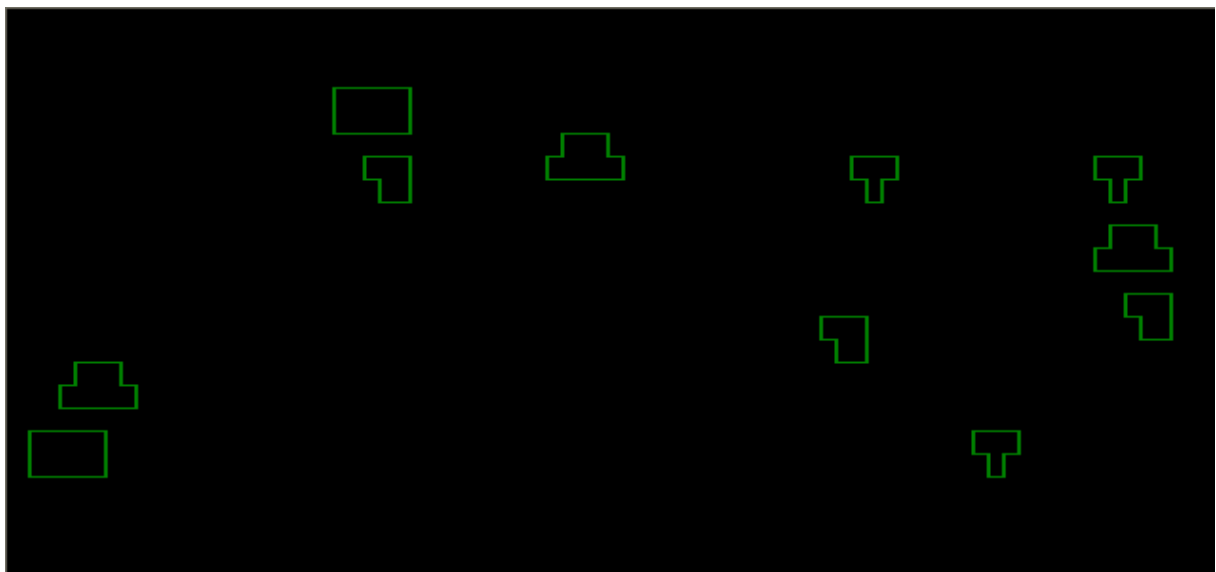
grands, de petits. L'enfant doit dire combien il y a d'objet dans cet ensemble E des objets. Pour cela, il doit donc appeler, à l'aide de ces prédicats là, des parties, qui ne sont pas disjointes, et former un recouvrement à travers ce qui lui est proposé. Il faut qu'il fasse une énumération des éléments de l'ensemble des parties. Remarque: les catégories peuvent ne pas toutes apparaître lors de l'affichage des prédicats, si on a une partition à l'aide d'une autre variable. Par exemple, si l'on a "les grands" et "les petits" on n'a pas besoin de savoir s'il y a des voiliers, des monstres, des verts. L'enfant peut être amené à demander ce qu'il y a (la nature du référentiel) alors que cette information n'est pas nécessaire, dès lors que la règle est : cet ensemble des parties assure un recouvrement.

5.9.2. LA SITUATION :

Voici un élément de L(P(E)) proposé par la machine:



L'enfant peut visionner, sur demande, la collection sélectionnée : exemple, ici



L'enfant a demandé à visionner « les vertes » (les objets sont en couleurs sur l'écran).
L'utilisation de la touche CNT A permet de savoir que l'enfant travaille sur la collection suivante :

		bleues foncées		vertes		bleues claires	
		D	D	D	D	D	D
simples	figures A	3	2	3	2	3	1
	figures B	2	2	2	2	2	1
	figures C	3	2	3	2	2	1
	figures D	2	2	3	2	3	1
doubles	figures A	0	0	0	0	0	0
	figures B	0	0	0	0	0	0
	figures C	0	0	0	0	0	0
	figures D	0	0	0	0	0	0
Le nombre total des figures est :		31		Taux de recouvrement :		1.6600	
Analyse des inclusions :		1 2 4					

Une analyse (calcul du taux, recherche des min-termes éliminables) est fastidieuse en cours d'observation, si l'on veut corrélérer ceci avec les stratégies et les modèles employés par les enfants. Donc, nous installons, dans le logiciel, une procédure qui nous donnera la valeur du taux de recouvrement ainsi que le rang des min-termes superflus, sur la base de ce que nous avons décrit.

L'analyse des inclusions est faite automatiquement. Elle montre ici, que la collection des bleus-clairs (collection n°5) peut ne pas être explorée. L'exploration des autres collections suffit.

Ainsi, le logiciel analyse maintenant automatiquement la collection qu'il a produite. Il calcule le taux de recouvrement et affiche les numéros des min-termes reconnus superflus. Ces informations sont à destination du chercheur et ne sont obtenues que si la configuration du scénario l'a prévu.

Autre exemple : pris avec possibilité de 2 à 3 critères pour définir un élément de P(E).

Collections explorables	
1-	Les simples figures D vertes
2-	Les simples figures D bleues claires
3-	Les doubles figures A bleues foncées
4-	Les doubles figures A vertes
5-	Les doubles figures A bleues claires
6-	Les doubles figures B bleues foncées
7-	Les doubles figures B vertes
8-	Les doubles figures B bleues claires
9-	Les doubles figures C bleues foncées
10-	Les doubles figures C vertes
11-	Les doubles figures C bleues claires
12-	Les doubles figures D bleues foncées
13-	Les doubles figures D vertes
14-	Les doubles figures D bleues claires
15-	Les simples figures A bleues foncées
16-	Les simples figures A vertes
17-	Les simples figures A bleues claires
18-	Les simples figures B bleues foncées
19-	Les simples figures B vertes
20-	Les simples figures B bleues claires
21-	Les simples figures C bleues foncées
22-	Les simples figures C vertes
23-	Les simples figures C bleues claires
24-	Les simples figures D bleues foncées

ENTREE pour voir la partie correspondante ESC pour conclure

L'analyse immédiate donne :

		bleues foncées		vertes		bleues claires	
		D	D	D	D	D	D
simples	figures A	5	1	5	1	4	1
	figures B	3	1	5	1	4	1
	figures C	3	1	3	1	5	1
	figures D	4	1	4	1	4	1
doubles	figures A	5	1	3	1	4	1
	figures B	3	1	3	1	5	1
	figures C	3	1	5	1	5	1
	figures D	3	1	3	1	3	1
Le nombre total des figures est:		94		Taux de recouvrement:		1.0000	
Analyse des inclusions:		2 3 4					

5.9.3. LES VARIABLES :



Première variable:

-Le logiciel prévoit la possibilité de visionner la collection en entier (si celle-ci ne dépasse pas 73 éléments). Dans ce cas, l'activité n'est plus du tout celle prévue initialement, mais une observation avec un enfant a montré que, dans une première approche, voir la collection donnait du sens à la future activité. (La permanence de l'objet vidéo est ici, semble-t-il en cause, à moins que cela ne soit la compréhension de la règle du jeu... à étudier).

Deuxième variable:

-Le logiciel permet de sélectionner 2 ou 3 de ces critères. Par exemple, si l'on sélectionne 2 critères, le logiciel va construire un ensemble de définitions utilisant uniquement la nature ou/et la couleur. Il s'agit de la première variable V0 qui peut être gérée lors de la constitution du scénario.

Remarque: la partition la plus fine possible (que nous appellerons les min-classes) utilisant les définitions en extension est composée de 24 éléments si l'on choisit V0=3 ou de 12 éléments si l'on choisit V0=2.

Troisième variable:

-Le logiciel permet de demander au programme de concevoir des définitions qui utilisent elles-mêmes entre I et J variables, $0 < I < J < 4$. Par exemple, si l'on a V0=3, I=2 J=3, le logiciel générera des définitions du type :Les Petits monstres ou bien Les Petits monstres blancs ou bien les petits blancs.

Quatrième variable:

-Le logiciel permet de fixer le nombre minimum ainsi que le nombre maximum d'éléments dans chaque classe définie par trois critères (classification la plus fine.). Par exemple, si l'on choisit entre 3 et 5 objets par classe, et si V0=3, c'est à dire trois critères, c'est une collection comprise entre 3X24 et 4X24 objets qu'il faudra dénombrer.

Remarque : on voit que le nombre d'objets, s'il est choisit entre 0 et 1 par classe a une espérance de 6, dans le cas ou V0=2 mais que si l'on choisit 6 objets par classe avec V0=3 on arrive à 144 objets.

Cinquième variable:

A chaque fois que l'on visionne un sous-ensemble, celui-ci peut être, ou non, disposé de la même façon à l'écran.

Sixième variable:

Après avoir réussi dans sa recherche du cardinal de la collection, l'enfant peut obtenir une représentation en tableau à double entrée de la structure de la collection, si le scénario est calé sur cette option. Ceci est optionnel car cela donne un moyen de représentation à l'enfant, moyen qui peut-être un des objets de l'apprentissage en cours.

REMARQUE : Les premières observations nous montrent que les enfants cherchent à reconnaître, au travers des prédicats amalgamés, des sous ensembles qui constitueraient une partition. Ainsi, nous avons deux catégories de situations :

- Celles qui proposent, dans la liste des prédicats, une sous liste désignant une partition.
- Celles qui ne permettent pas une partition par simple analyse des prédicats amalgamés.

Cette variable qui paraît être fondamentale n'est pas directement gérée par le logiciel. Toutefois, comme chaque jeu peut être enregistré, il suffira de préparer des jeux caractérisant l'une et l'autre de ces deux familles de situations.

Commodités de fonctionnement:

A tout instant, on peut quitter le travail en cours en tapant sur la touche ACC. A tout instant, le maître peut avoir accès à la structure de la collection en appuyant sur les touches CNT et A. Le logiciel enregistre, à tout moment d'arrêt, le scénario. Si donc, l'on reprend le logiciel plus tard, la configuration du scénario est celle qui résidait la séance précédente. Chaque situation peut-être enregistrée et stockée sur disquette. Ainsi, il sera possible de remettre en scène une situation déjà vue. Dans ce cas, c'est la structure qui est conservée, ainsi que les phrases. Par contre, nous n'avons pas conservé le même nombre d'objets. Ainsi, il sera possible de retravailler la même situation sans disposer du résultat numérique, ce qui permet l'utilisation avec un groupe d'enfants. L'impression des phrases afin qu'un enfant puisse aller réfléchir en dehors de l'ordinateur est aussi possible.

Analyses en temps réel:

Afin de permettre une analyse plus fine de la situation, il est possible d'obtenir (en utilisant CNT A) un tableau. Dans ce tableau figure le nombre d'objets par minterme, ainsi que le nombre de fois ou le minterme a été sollicité lors de la construction des phrases. Au bas du tableau après un temps de traitement, le taux de recouvrement est affiché.

En option (au scénario), une analyse des inclusions est faite, de sorte qu'il est possible d'avoir automatiquement la liste des phrases inutiles de l'exercice. Comme chaque jeu peut être enregistré, on dispose là d'une banque possible de situations.

5.10. OBSERVATIONS:

Les logiciels de notre étude ont été construits à des époques différentes en réponse à des problématiques différentes. CALAPA et BARQUES ont contribué au travail d'identification de l'énumération de petites collections en ostension d'une part et du dénombrement (au sens restreint)¹¹⁷. La situation mise en scène par VISUAL est le résultat d'une interrogation commencée avec G.BROUSSEAU autour du logiciel QUE VEUX-TU VOIR ? puis PROTO. Il permet la mise en scène d'une situation d'utilisation de prédicats amalgamés pour explorer un ensemble. Le logiciel FENETRE fut construit pour mettre en scène une situation d'exploration d'une collection d'objets, structurée, mais non totalement visible.

Ce chapitre ne constitue pas une suite continue d'observations à partir des logiciels, mais un bilan des types d'observations qui ont été faites au cours de cette étude.

5.10.1. "CALAPA2" ET "BARQUES":

Les observations relatives à ces deux situations furent l'objet de notre D.E.A.. (voir en annexe, quelques extraits). L'année suivante, les logiciels CALAPA et BARQUES furent l'objet d'observations détaillées au sein de la thèse de Mme BLANCA VILLEGAS. Depuis, ce logiciel est régulièrement utilisé en début d'année du cours préparatoire de l'École Jules Michelet.

Rappelons quelques résultats relatifs aux observations liées à l'utilisation des logiciels CALAPA et BARQUES :

Lors de notre D.E.A., nous avons constaté que la plupart des enfants de grande section de maternelle avaient résolu les problèmes d'énumération dans le micro-espace (voir page 44 du DEA) que constitue l'écran. Toutefois, pour certains enfants, la réussite n'était obtenue que lors du deuxième essai. Ce fut un résultat qui nous permit de montrer en quoi une situation a-didactique mise en scène par un logiciel permettait, par une deuxième confrontation avec le problème de faire progresser les enfants. J.PERES évoquait la nécessaire prise de conscience de la situation qui pouvait faire obstacle, dans un premier temps à la réalisation effective du problème.

Les observations conduites à cette époque en moyenne section de maternelle montrèrent des résultats nettement différents. En fin de moyenne section, une majorité d'enfants ne réussit pas à une énumération d'une collection de 8-10 objets.

Les enfants de grande section que nous avons étudiés avaient réalisé un long travail dans l'activité dite "du jeu du trésor"¹¹⁸ qui avait peut être influé sur les résultats du travail avec CALAPA.

Si nous prenons des observations du cours préparatoire de 1986¹¹⁹, nous constatons de résultats en effet plus nuancés :

Les enfants ont travaillé une première fois sur le logiciel. La maîtresse propose ensuite une fiche¹²⁰ dont le dessin représente une mise en scène identique à celle vécue sur micro-ordinateur. (Voir annexe). Les deux observations montrent que sur 27 enfants observés, 2 ne

¹¹⁷ Dénombrement qui ne suppose pas le comptage. (J.BRIAND DEA 1985, BLANCA VILLEGAS Thèse 1986).

¹¹⁸ J.PERES Bib.

¹¹⁹ Observations du 9 septembre 1986 et du 11 septembre 1986. Archives du COREM Ecole Jules Michelet Talence.

¹²⁰ Voir thèse BLANCA VILLEGAS.1986

réalisent pas l'énumération, 7 oublient un animal, 5 font des amorces d'énumération. 13 réalisent une énumération correcte. Lors de l'observation suivante, après un débat collectif, on constate 17 réussites, 4 oublis d'animaux, et 6 amorces d'énumération. Bien qu'il ne s'agisse pas d'une situation à l'identique de la situation de CALAPA (pas de feed-back, obligation d'une convention de représentation qui peut prêter à confusion pour l'observateur), nous ne pouvons totalement écarter l'hypothèse que des enfants en début du cours préparatoire ont des difficultés dans cette activité.

Or, BLANCA VILLEGAS, dans sa thèse, montre que l'apprentissage de l'énumération dans le contexte de CALAPA favorise la réalisation du comptage dans le contexte de la situation fondamentale du dénombrement (BLANCA VILLEGAS utilisait le logiciel BARQUES). Nous pensons donc utile de mettre en place, en début d'année scolaire du cours préparatoire, une activité construite autour de CALAPA afin de mener à bien un apprentissage de l'énumération d'une petite collection auprès des enfants en difficulté dans cette activité.

5.10.2. "FENETRE" : ENTRETIENS INDIVIDUELS

FENETRE fut mis au point à partir d'entretiens individuels en 1990. Nous ne relatons pas ces entretiens, puisque nous avons utilisé ce logiciel dans les observations du cours élémentaire et que nous avons relaté ces observations dans le chapitre trois.

Les observations nous ont permis de projeter un certain nombre de modifications pour une version future de ce logiciel.

En particulier, il faudrait concevoir des structures de collections plus variées, D'autre part, ce logiciel peut ne pas se limiter à l'énumération d'objets identiques, mais, en reprenant les analyses que nous faisons au chapitre un, les ensembles à énumérer devraient pouvoir être constitués d'objets différents. Nous pourrions alors construire une activité de comparaison d'ensembles, dont une énumération constitue la stratégie de base, et mettre en place un scénario qui permette une rétroaction indépendante du nombre.

5.10.3. "VISUAL" : ENTRETIENS INDIVIDUELS. :

Nous avons conduit deux entretiens sur la situation de "VISUAL". La première a été conduite avec un enfant de 9 ans, la seconde avec un enfant de 11 ans. Le détail de ces deux entretiens figure en annexe.

Premier entretien : (utilisation de la version "thomson" du logiciel, dans laquelle les objets sont dénommés.)

(Voir annexe).

Analyse a posteriori :

PE a comme modèle la partition en deux classes grand-petit. Il utilise donc ce modèle alors que vert-blanc-jaune figurait explicitement et définissait une partition.

Le partitionnement est le moteur de l'exploration, mais la partition choisie obéit à une priorité venant des prédicats.

Tout se passe comme s'il y avait une hiérarchie dans ces prédicats, les descripteurs petits grands l'emportant sur les descripteurs nommant les objets ou les couleurs. Les descripteurs petit-grand suggèrent une partition en deux sous ensembles, ce qui n'est pas le cas de la partition "évidente" affichée dans la situation (verts, blancs, jaunes).

Cette conception de la partition en deux sous ensembles s'oppose à une exploration plus économique dans la situation. L'enfant ne fait pas l'analyse de la meilleure partition en fonction du contexte, mais en fonction d'une perception première de la collection au travers d'une partition en deux.

Deuxième entretien : (utilisation de la version "PC" du logiciel, dans laquelle les objets sont difficiles à dénommer.)
(Voir annexe).

Analyse a posteriori : Dans un premier temps (voir travaux en annexe), l'enfant donne priorité à une partition par type de figures mais échoue. Nous lui montrons le tableau qui fait le bilan numérique par classe.

Lors du deuxième essai, l'enfant change de stratégie et met en place un tableau à double entrée. Pour cela, il effectue une exploration des parties dans le but unique de répertorier les parties de la collection selon le procédé suivant :

Il effectue un passage en revue des collections pour rédiger la colonne du tableau (les types de figures). Puis il effectue un nouveau passage en revue pour rédiger la ligne du tableau (les couleurs). Il passe ensuite en revue les 8 sous ensembles et enregistre l'information numérique au fur et à mesure dans le tableau. Il réussit.

Dans ce cas, le visionnement du tableau a été déterminant. L'enfant s'est construit un tableau lié à la situation effective. Il semble qu'il ne s'agisse pas d'une simple imitation.

Cette première approche en vue de la construction d'une situation didactique nous conduit à nous poser la question suivante :

5.10.4. VISUAL PERMET-IL UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE DE L'ADDITION ?

Du point de vue didactique, le saut que l'enfant doit faire entre le jeu proposé et les moyens qu'il doit se donner afin de réussir risque d'être grand. La situation a-didactique manque de possibilités pour réduire ce saut.

La situation qui fait fonctionner le savoir en jeu n'est peut être pas une bonne situation d'apprentissage de ce savoir.

A la lumière du deuxième entretien, nous proposons une réflexion et une solution :

Nous avons vu que chaque jeu pouvait être enregistré. Or le tableau qui sert de contrôle peut faire partie de la situation. (Voir observation précédente).

L'enfant vient de faire un jeu et échoue. La question est alors d'obtenir une stratégie de base pour cette situation.

L'enfant regarde la solution à l'aide du tableau.

Il n'est pas forcément capable de puiser toutes les informations et les ressources que celui-ci contient.

Toutefois, un apprentissage peut, peut être s'y élaborer. C'est ce qui semble s'être produit lors de notre observation.

A partir du moment où un enfant a l'idée qu'un modèle comme le tableau est une structure déterminante, il y a une période pendant laquelle l'usage de cette structure pourra être utile à la recherche sans que cela soit nécessairement un apprentissage.

Il paraîtrait donc utile d'étudier le passage d'une résolution sans tableau avec les représentations des enfants à une recherche à l'aide du tableau.

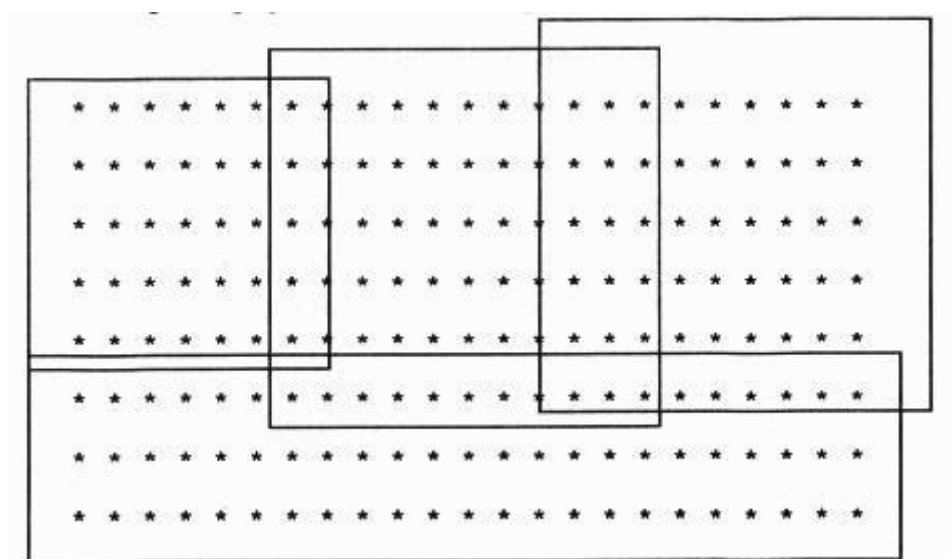
De ce point de vue, il paraît utile de prévoir, dans une future version du logiciel, un tableau qui ait une présentation contingente de la collection explorée et qui ne soit pas un tableau unique comme c'est le cas actuellement.

Petit à petit, l'enfant sait que cette structure est la bonne et se constitue un tableau. Cela constitue alors, en quelque sorte la fin de l'apprentissage. Dès ce moment, il n'y a plus aucun jeu, mais entre le jeu initial et la fin, il y aurait à étudier comment l'enfant va se saisir de cette structure et du bon outil, sans qu'il vive cela comme le modèle de l'enseignant qu'il faut appliquer.

Nous n'avons pas fait d'autres observations permettant de confirmer cette analyse. Cette interrogation doit pouvoir faire l'objet de futurs travaux.

5.10.5. LIENS ENTRE FENETRE ET VISUAL : PROPOSITIONS POUR UNE SITUATION A-DIDACTIQUE DE L'ENUMERATION PLUS GENERALE :

Proposition de réalisation d'une situation : nous proposons la situation suivante, résumée par la page écran de travail qui s'inspire de la page écran de FENETRE.



Le logiciel FENETRE permet l'exploration d'une collection d'objets représentés dans une structure donnée. Le logiciel VISUAL permet l'exploration d'une collection d'objets qui utilise le modèle des partitions au travers de l'usage de prédicats.

Nous proposons la mise en œuvre d'une situation dans laquelle les élèves auraient à explorer une collection d'objets visibles (sur le mode de FENETRE), mais cette fois ci en utilisant un ensemble de parties de l'ensemble constituant un recouvrement de l'ensemble lui-même. Dans l'exemple ci-dessus, figurent quatre parties. Du point de vue informatique, il est possible de faire apparaître les parties (rectangles, dans le cas montré ci-dessus). Ainsi, les enfants auraient à travailler sur une structure identique à celle de Visual, sans toutefois à avoir à interpréter des informations fournies par des prédicats. Nous pensons qu'il s'agit là d'une étape significative dans la mise en place de stratégies d'exploration d'ensembles.

Dans ce type de situation, on peut déjà faire l'analyse à priori suivante : selon que les objets sont tous identiques ou non, selon qu'ils peuvent eux-mêmes être liés par une énumération naturelle (nombre, lettres, etc.) l'activité en sera considérablement modifiée.

Lorsque les objets sont tous identiques, le seul contrôle sur l'exploration du tableau est un contrôle de nature spatial. Lorsque les objets sont tous différents, d'autres modes de contrôle doivent apparaître.

Par ailleurs, la coïncidence (ou non) entre certaines parties (rectangles) et la nature des objets recouverts sera elle aussi d'une influence certaine sur le choix des stratégies.

5.10.6. ELARGISSEMENT DE LA SITUATION DE "FENETRE" A PLUSIEURS COLLECTIONS.

L'observation de l'épreuve des mosaïques (page 64) a montré l'influence déterminante de la présence de deux collections. Leur présence simultanée induit une structure qui modifie significativement les conditions de mesurage des deux collections.

Il nous paraît utile de prévoir cette variable dans une évolution future de ce logiciel.

6. INFORMATION DES PROFESSEURS

6.1. LE DIDACTICIEL COMME MOYEN DE TRAITER LA QUESTION DE LA NEGOCIATION DIDACTIQUE.

Avant d'étudier les apports d'un didacticiel en formation des professeurs, nous rappelons quelques résultats observés lors de l'utilisation de didacticiels par des professeurs¹²¹:

- Tout d'abord, le didacticiel permet au professeur d'être déchargé d'une grande partie de l'intendance qui accompagne généralement une situation a-didactique complexe¹²².
- Le didacticiel influe sur la négociation didactique entre le professeur et l'élève. Nous avons pu observer qu'un logiciel d'enseignement pouvait influencer sur la négociation du contrat didactique.¹²³

En effet, puisque le logiciel détient une partie de la mise en scène de la situation, le rôle du professeur ne se confond plus, aux yeux des élèves, avec celui du metteur en scène. Il s'établit donc une relation nouvelle entre l'élève (les élèves) et le professeur qui peut être un facteur de modification du contrat.

Tout va dépendre des décisions que prendra alors le professeur. En particulier, la situation ainsi mise en scène va permettre de mettre une distance entre le problème posé et l'enseignant. Or nous savons qu'un obstacle important dans une action d'enseignement est la difficulté, pour l'enfant, d'explicitier les connaissances indépendamment de la personne qui l'organise, afin de s'appropriier le problème.

CONSEQUENCES POSSIBLES :

Mais nous avons constaté lors d'observations postérieures à notre D.E.A. que, certains enseignants étant, de fait, déchargé d'une partie de la mise en scène de la situation avaient tendance à moins bien accepter la phase prévisible de désappointement de l'apprenant devant la difficulté.

Nous avons cru percevoir en cela un double jeu venant à la fois d'une complicité nouvelle professeur-élève devant la situation et d'une culpabilisation du professeur à n'avoir pas construit "sa" situation. Dans certains cas, nous avons noté des sur-interventions allant même jusqu'à donner les réponses à la place des élèves.

Ces effets ont pu être mis en évidence.

EN FORMATION :

Le fait que le didacticiel mette en scène des situations à étudier en formation facilite grandement le travail du formateur d'enseignants.

En effet, l'enseignant en formation peut découvrir une situation comme le fera l'élève sans qu'il soit nécessaire de la décrire, de l'expliquer, de la justifier pour qu'il puisse la concevoir.

¹²¹ Cette étude date de 1986 et fait suite à notre D.E.A. . Les logiciels furent alors utilisés à l'école Jules Michelet au cours préparatoire, ainsi qu'à l'école de Bourran de Mérignac et à l'école Paul Lapie de Bordeaux, en particulier grâce au travail de Mme Suzy Gairin-Calvo. Les réflexions recueillies alors ne firent pas l'objet d'une publication. Toutefois, Mme Gairin Calvo publia en 1988 l'ouvrage "Les nombres au C.P." (bibl) sur lequel nous revenons dans la suite de ce chapitre.

¹²² Nous avons rédigé en annexe une partie concernant l'utilisation des didacticiels. Nous avons, en particulier voulu clarifier le fait que le didacticiel ne se confond pas avec la situation didactique. Il met, tout au plus en scène une situation a-didactique. Le professeur conserve à sa charge la présentation de la situation et la gestion de celle-ci. A cet égard, le didacticiel ne "garantit" pas une gestion unique de la situation a-didactique.

¹²³ RATSIMBA-RAJOHN dans "Processus didactique et construction d'un didacticiel" 1989, reprend, en les détaillant, les conclusions de notre D.E.A.

Pour les mêmes raisons que celles évoquées ci-dessus, la situation n'est pas perçue comme la situation du formateur et la mise à distance provoquée facilite les débats.

Ainsi, le savoir visé s'en trouve beaucoup mieux défini et les rôles de élèves et du professeur dans son acquisition, mieux connus.

Traités en formation des professeurs, ils permettent de mieux aborder la question du contrat didactique et de la dévolution d'une situation à des élèves. (Voir D.E.A. 1985 P. 156 "rôles recensés du logiciel dans la négociation didactique).

EXEMPLE : AIDE A LA SENSIBILISATION AUX VARIABLES DIDACTIQUES :

Prenons l'exemple de la situation fondamentale du dénombrement. Il n'est pas facile de montrer les effets de certaines variables didactiques au travers d'un exposé en formation d'enseignants. Les professeurs imaginent bien que certaines "variantes" de la situation sont possibles, mais n'envisage pas l'ensemble des variables. Or, c'est la gestion de ces variables qui transforme une situation apparemment ponctuelle en une suite de séquences basées sur la même situation fondamentale, mais évoluant par le changement des valeurs des variables. Il est très simple, en formation, de mesurer les effets de la modification des variables par sa propre réaction, en tant que formé. De cette façon, la notion de variable didactique devient plus fonctionnelle.

6.2. L'ENUMERATION EN FORMATION DES ENSEIGNANTS.

Exemple d'action de formation à l'aide du logiciel BARQUES :

Les professeurs prennent connaissance de la situation a-didactique. Cette prise en main peut se faire uniquement à l'aide du document écrit associé. Très rapidement, les stagiaires se rendent compte de la diversité des scénarii à partir d'un seul jeu. Surtout, ils mesurent les effets de la modification de la valeur de ces variables. Citons, en particulier :

- le fait de choisir la collection de référence absente lors de l'appel des barques surprend autant les adultes que les enfants...pas pour les mêmes raisons bien sûr, mais l'effet est suffisant pour que cela puisse être repris ultérieurement.
- L'optimisation par l'appel de barques à 3, 4, ou 5 places permet là encore de préparer les stagiaires à une analyse moins "étriquée" de la situation de comptage.
- Les stagiaires ne comprennent pas la variable "communication" proposée dans le scénario. Rappelons que cette variante de la situation permet à un enfant d'examiner la collection de référence à l'écran, puis de laisser un message écrit à un autre enfant, tout en faisant disparaître cette collection de référence. L'enfant récepteur du message doit alors constituer une collection de barques à l'aide de la seule information transmise par son camarade.

A partir de cette première approche, l'exposé des situations habituelles du dénombrement (situation d'auto communication, de communication orale, de communication écrite) sont mieux intégrées.

Nous utilisons la variable "communication" pour mettre en évidence la nécessité d'un écrit pré-numérique. A partir de là, les travaux récents sur les productions écrites des enfants en situation de dénombrement peuvent être exposés.

AIDE A LA RECONNAISSANCE DE L'ENUMERATION :

L'utilisation du logiciel CALAPA en formation des professeurs permet, sans discours, de montrer la différence entre une situation de comptage et une situation d'énumération.

La comparaison avec l'activité demandée dans le logiciel BARQUES positionne clairement la place de l'énumération dans le dénombrement.

Exemple d'action de formation à l'aide du logiciel CALAPA :

Les professeurs prennent connaissance de la situation a-didactique. Cette prise en main peut se faire uniquement à l'aide du document écrit associé. L'activité d'énumération est alors pratiquée.

Nous demandons ensuite d'imaginer une situation de classe (sans logiciel) qui soit la transposition de la situation qui vient d'être résolue. Très fréquemment, les enseignants proposent des activités qui sont soit du comptage, soit du tri simple. Les débats sont généralement très constructifs et permettent de bien différencier énumération, tri simple, comptage, dénombrement. La conclusion est que l'énumération est nécessaire au comptage d'une part, et que, d'autre part, une situation d'énumération ne fait pas partie des situations connues, recensées dans les manuels. Nous avons vu, à plusieurs reprises, des professeurs recréer la situation type tirelire ou boîtes aux lettres.¹²⁴ Lorsque cela ne se produit pas, nous proposons la situation.

¹²⁴ Situation fondamentale de l'énumération proposée par R. Berthelot et G. Brousseau. (Déjà citée).

Après cela, nous proposons d'examiner des travaux d'enfant de cours préparatoire dans des activités de comptage d'éléments d'un ensemble. (Analogues aux travaux de l'observation 3 du CP en annexe.). Nous avons constaté une plus grande acuité des stagiaires dans l'analyse de ces travaux.

AIDE A L'ORGANISATION DE LA TACHE :

Le logiciel "QUE VEUX-TU VOIR" de S.GAIRIN CALVO ET J.L. OYALLON suppose une exploration organisée d'un ensemble. Nous avons vu en quoi il supposait une énumération de cet ensemble. Utilisé en formation des maîtres, ce logiciel possède deux caractéristiques :

- Il peut être configuré de façon à ce que la tâche à accomplir soit difficile pour des adultes. Pour cela, il suffit de constituer un scénario adapté. De cette façon, étant donné qu'il s'agit d'un logiciel destiné à des enfants du cours préparatoire les professeurs sont surpris. Plus tard, cette distorsion apparente entre le niveau auquel sont destiné le logiciel et la difficulté à résoudre la situation permettra, là encore de montrer toute l'importance de certaines variables didactiques.

- Il suppose surtout que l'utilisateur organise sa tâche. En effet, la réponse à la situation ne peut être construite sans passer à l'écriture de l'exploration et du recensement de parties de l'ensemble à explorer. Or, nous avons souvent constaté que des enseignants n'utilisaient que tardivement l'écrit, soit parce qu'ils pensent que ce n'est pas une démarche "élégante", soit parce qu'ils imaginent qu'étant devant un logiciel, l'écrit pourra être évité.

Nous nous servons de cette attitude fréquemment rencontrée pour évoquer le rôle de l'écrit comme moyen d'organiser une exploration d'une collection et de révéler les représentations de chacun.

Nous n'avons pas utilisé les logiciels FENETRE et VISUAL en formation des maîtres, par manque d'opportunité, mais les résultats de l'observation "l'épreuve des mosaïques" nous permet de penser à un projet de formation.

6.3. LIMITES A MAINTENIR

Les situations que nous avons développées sous forme de logiciels sont, nous l'avons dit, une partie de la situation didactique.

Le rôle du professeur reste déterminant, en particulier dans la gestion du contrat didactique. Dans le cas de notions non pointées dans le savoir comme l'énumération, se pose la question de décider de ce qui doit rester à la charge de l'élève et de ce qui doit rester du côté du professeur.

En particulier, G.BROUSSEAU évoque la perméabilité didactique c'est à dire « *l'usage, par le professeur dans le discours aux élèves comme objet d'enseignement d'éléments qui font partie de sa propre relation au savoir* ». C'est donc l'impossibilité à maintenir une distance entre les savoirs qui doivent rester les siens et ceux qu'il doit enseigner aux élèves. Ce qui paraît une explication raisonnable pour le professeur ne doit pas nécessairement être utilisé pour expliquer aux élèves. Sinon, il y a risques à transformer en objet d'enseignement des moyens d'enseignement.

7. CONCLUSION GENERALE

7.1. PREMIERE FAMILLE DE RESULTATS : EXISTENCE D'UNE CONNAISSANCE ET CONSEQUENCES DE SON IGNORANCE POUR L'ENSEIGNEMENT DU NOMBRE ET DES OPERATIONS ARITHMETIQUES.

LES RESULTATS :

Les observations (dont le bilan des résultats est effectué page 193) nous permettent d'affirmer :

A- (ÉTUDE PAGE 131) DANS DES SITUATIONS DE COMPTAGE EN COURS PRÉPARATOIRE, LES ENFANTS SE REPARTISSENT EN AU MOINS DEUX CATEGORIES DE CONCEPTION VIS A VIS DE L'ÉNUMÉRATION.

CE SONT LES ÉNUMÉRATIONS DIRECTES QUI METTENT EN JEU UN RANGEMENT DE LA COLLECTION ET LES ÉNUMÉRATIONS FONDÉES SUR UN PARTITIONNEMENT DE CELLE-CI.

NOUS AVONS MONTRÉ QUE CES DEUX CONCEPTIONS S'ADAPTENT DIFFÉREMMENT AU COMPTAGE.

B- PLUSIEURS OBSERVATIONS (ÉTUDES PAGES 64, 107 ET 157) ONT MONTRÉ QUE LES CONDITIONS DE L'ÉNUMÉRATION INFLUENT SUR LE COMPTAGE :

C- NOUS AVONS REPERÉ DES VARIABLES QUI MODIFIENT SIGNIFICATIVEMENT LES CONDITIONS DE L'ÉNUMÉRATION.

D- NOUS AVONS MONTRÉ QUE DES DIFFICULTÉS DANS LE COMPTAGE RELÈVENT DE L'ÉNUMÉRATION.

E- LES PRATIQUES SCOLAIRES INDUISENT DES ÉNUMÉRATIONS QUI RENDENT NON COMPÉTITIVES DES ÉNUMÉRATIONS QUI SERONT POURTANT FÉCONDES PLUS TARD.

F- LE RECOURS AUX OPERATIONS APPRISES POUR MESURER UNE COLLECTION N'EST PAS SUFFISANT POUR REUSSIR :

G- DANS DES SITUATIONS D'ANALYSE COMBINATOIRE, L'IMPOSSIBILITÉ À CHANGER DE CONCEPTION CONSTITUE UN OBSTACLE DIDACTIQUE À L'ÉNUMÉRATION

H- IL EXISTE D'AUTRES DOMAINES DES MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE DANS LESQUELS L'ÉNUMÉRATION EST PRÉSENTE MAIS IGNORÉE.

COMMENTAIRES :

L'ÉNUMÉRATION : INSTANCES DE CONTRÔLE DU COMPTAGE.

Pour mieux explorer ce domaine du dénombrement, nous nous sommes servis de l'analyse didactique de l'activité de mesure. Cette démarche nous a permis de donner du corps à toute l'activité développée par un enfant lorsqu'il est en situation de dénombrement. Ainsi, nous avons été conduits à préciser les rapports que doit entretenir un sujet avec l'ensemble à dénombrer (détermination de l'ensemble, utilisation de structures spatiales, conceptions des éléments liée à la conception de l'ensemble).

Nous avons montré que les enfants travaillaient en permanence sur l'énumération lorsqu'il s'agissait de se servir d'une opération arithmétique pour dénombrer un ensemble.

L'énumération est donc un ensemble de connaissances qui constitue les "instances de contrôle du comptage".

L'ENUMERATION : DOMAINE DE CONSTRUCTION DES OPERATIONS ARITHMETIQUES ELEMENTAIRES :

A partir de cette constatation, nous sommes alors fondés à nous interroger sur les conditions scolaires dans lesquelles un enfant peut mettre en place un procédé de calcul (addition, multiplication par exemple). Cette interrogation est l'objet de la conjecture 3. Mais dès à présent, nous pouvons affirmer que l'énumération n'agit pas seulement dans le domaine très spécifique de l'exploration d'une collection de quelques objets montrés.

Ainsi, la situation que nous avons proposée en cours élémentaire à propos de la multiplication montre que les enfants réussissant à utiliser la multiplication lorsqu'une collection présentée sous forme de tableau leur était présentée ne vont pas "à la recherche" de cette structure dès lors qu'elle n'est pas ostensiblement montrée.

Cette situation a-didactique à l'origine a permis aux enfants de découvrir un champ d'activité dont ils pouvaient parler : ("*aller à la recherche de ce qui permet de comprendre l'ensemble*" comme l'a dit un enfant).

Nous sommes maintenant convaincus que ce champ d'activités constitue une grande partie de la réponse aux interrogations habituelles des enseignants à propos de "ils ne savent pas quand il faut utiliser cette opération".

L'énumération permet de prendre la mesure de l'ensemble et d'avoir des projets dans le domaine du numérique :

Par exemple, lorsque l'enfant a découvert que le nombre de ligne et de colonnes d'un ensemble était une information suffisante pour définir le cardinal de l'ensemble, il est alors concevable qu'il ait un projet de construction de la multiplication de deux entiers.

Lorsqu'un enfant a comme soucis de construire (de contrôler) une partition d'un ensemble, l'addition est la conséquence numérique de cette exigence de mesure.

Lorsqu'un enfant contrôle une collection en construisant une partition en parts équipotentes, il utilise une énumération et le comptage sous sa forme la plus élémentaire. La numération constitue la réponse numérique à une activité de mesurage de la collection.

Ainsi, la numération et les opérations arithmétiques élémentaires fondent leur sens sur des pratiques énumératives de collections finies.

La première conjecture nous a donc permis d'explorer non seulement le domaine de la construction des premières écritures numériques mais aussi celui de la construction des opérations arithmétiques de la scolarité élémentaire.

L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE COMBINATOIRE COMME EXEMPLE DE LA CONSEQUENCE DE L'ABSENCE DE RECONNAISSANCE DE L'ENUMERATION PAR LE SYSTEME :

Nous avons montré que les pratiques énumératives existaient dans bien d'autres domaines des mathématiques. Nous sommes persuadés que cette exploration n'est pas exhaustive et qu'il reste bien d'autres domaines des mathématiques que nous n'avons pas étudiés.

Les épreuves du BAC relatives à l'analyse combinatoire ont montré à quel point les réponses étaient vides de sens, fondées sur des raisonnements par similitude. Nous avons été surpris par l'éventail et le nombre de réponses fausses et justifiées par un discours vide de sens. Nous avons été aussi surpris par l'impossibilité des élèves à exprimer leur démarche, même erronée. Les élèves ne disposent pas d'autre moyen que celui de la reconnaissance de problèmes-type à condition toutefois de produire une transformation des éléments à dénombrer afin de remplacer l'ensemble à dénombrer par un ensemble équipotent. Or, et nous y reviendrons, cette activité n'est pas simple. Elle constitue un domaine spécifique des mathématiques faisant l'objet de publications.

7.2. DEUXIEME FAMILLE DE RESULTATS : RELATIFS A LA PLACE DE L'ENUMERATION DANS LE SAVOIR.

Nous avons mis en évidence un ensemble de connaissances indépendantes du comptage et pourtant nécessaires au comptage.

L'enseignement des premiers nombres est tellement lié à un savoir social (la comptine) qu'il est tentant d'utiliser à la rentrée en cours préparatoire cette connaissance. Même si de nombreux travaux ont montré que le passage de la comptine au dénombrement n'allait pas de soi, nous n'avons pas relevé dans les manuels scolaires de situation d'enseignement qui traitent de l'exploration de l'ensemble autrement que son forme d'injonctions (entoure, fait un lien, etc.).

Mais, au delà de cette mise en évidence, nous avons relevé deux phénomènes que nous rapprochons de la conjecture 4 :

PREMIER PHENOMENE : TRANSFORMATION DE FAITS HISTORIQUES MATHEMATIQUES AFIN DE FAIRE COINCIDER LEUR GENESE AVEC LA CONSTRUCTION DES SAVOIRS ENSEIGNES ACTUELS :

Nous avons montré, au travers de l'étude d'ouvrages, que l'énumération affleurerait souvent sans être explicitée comme savoir. L'exemple de la correspondance entre PASCAL et FERMAT et de son traitement par les ouvrages de mathématiques à l'usage des lycéens montre bien sûr le statu précaire de cette connaissance, mais une transformation des faits : l'étude du passage des faits (la correspondance elle-même) à l'interprétation (page 92), nous montre comment les auteurs de manuels transforment complètement l'analyse de ces deux mathématiciens pour en réaliser un faire valoir de la combinatoire réduite à l'application de procédures.

DEUXIEME PHENOMENE : LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE DE CERTAINS SAVOIRS COMME OBSTACLE A LA CONSTRUCTION D'UN ENSEIGNEMENT PRE-NUMERIQUE INTEGRANT EXPLICITEMENT L'ENUMERATION :

Nous avons montré comment les tentatives antérieures d'enseignement pré-numérique lié aux ensembles avaient échoués. Nous attribuons l'explication de cet échec à la trop grande dépendance entre les savoirs à enseigner et les savoirs savants correspondants ("la notion mathématique sous-jacente") et à une absence d'analyse didactique de l'activité de dénombrement comme activité de mesurage d'une collection. Bien que certaines activités de comparaisons d'ensembles aient pu constituer les prémisses à l'enseignement de l'énumération, leur présence ne se justifiait que parce que les ensembles constituaient le point de départ de toute connaissance mathématique. Il fallait donc enseigner ces notions auprès des jeunes enfants. La philogénèse imposait la construction scolaire des connaissances.

7.3. TROISIEME FAMILLE DE RESULTATS PHENOMENES DE DIDACTIQUE ET CONSEQUENCES.

Nous pensons avoir mis en évidence les quatre phénomènes suivants :

A- LES CONNAISSANCES ENUMERATIVES SONT IGNOREES DE L'INSTITUTION. (Page 214)

B- LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE DE L'ENUMERATION NE S'OPERE PAS. (page 211)

C- L'INSTITUTION SE DONNE DES MOYENS POUR RESOUDRE LOCALEMENT LES PROBLEMES POSES PAR L'ABSENCE DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ENUMERATION. (page 214).

D- L'ENUMERATION EST LA PART DE RESPONSABILITE DE L'ELEVE DANS LE COMPTAGE. (Page 217).

COMMENTAIRES :

Les professeurs connaissent bien les difficultés des élèves et tentent d'apporter des réponses afin que l'enseignement puisse continuer. Les réponses apportées visent la poursuite de la séquence du moment. Par exemple, devant la difficulté de MATHILDE (exemple cité dès l'introduction) nous avons montré l'impossibilité du professeur à intervenir de façon efficace à long terme parce que le problème révélé par l'interrogation ne peut être pris en compte de par l'organisation des savoirs. Le professeur est réduit à intervenir : "*continue et met le 36 ici*".

Le décalage trop grand entre ce que le professeur doit enseigner et les connaissances personnelles mobilisées impose cette attitude.

Au terme de cette étude, nous mesurons toute la difficulté à passer de la reconnaissance de l'énumération comme connaissance nécessaire à son enseignement, ceci pour au moins trois raisons :

La première concerne le système éducatif : toute une partie des progressions à l'école élémentaire et des enseignements à l'école élémentaire au collège et au lycée font que les pratiques énumératives ne paraissent pas nécessaires puisque les instruments enseignés (numération, opérations arithmétiques, formules de la combinatoire) sont justement là pour rendre procédurales les énumérations en jeu.

Par ailleurs, nous avons souvent constaté que des activités mettant en jeu des énumérations (voir activité de la sorcière) portaient souvent le nom générique "d'activités logiques". Nous sommes, dans ce cas, proches d'activités "test" que l'enseignant va faire fonctionner, mais qu'il ne peut transformer en situation d'apprentissage. Les stratégies qui permettent de réussir dans cette situation ne font pas l'objet de débats.

Dans tous ces cas, une technique d'énumération est nécessaire, mais la découverte de cette technique ne fait pas l'objet d'un projet d'enseignement.

Lorsque les énumérations sont à la charge de l'élève (nombre, opérations arithmétiques) c'est au travers d'une procédure à appliquer. Il ne s'agit donc pas d'une véritable prise en charge.

La deuxième concerne la recherche : l'énumération a, de toute façon, peu de chances d'apparaître lorsque le système s'interroge sur la construction des savoirs dans l'enseignement. Nous constatons, même dans des articles récents, que le savoir (le savoir savant) reste souvent

la référence pour toute recherche sur la connaissance et les phénomènes cognitifs. F.CONNE(1993) déclare : *"toute enquête sur la connaissance et les phénomènes cognitifs ne peut se faire qu'à partir du savoir, qui sert alors de modèle de référence"*. Nous n'adhérons pas à cette affirmation. L'analyse en situation montre justement le décalage entre les instruments utilisés par un sujet et le savoir mis en jeu par l'institution. Ce décalage constitue un phénomène de didactique important qui dépasse de loin notre propre étude.

La troisième renvoie à une question de didactique : que nous avons posée dans le chapitre 3 page 217.

Dans une activité d'apprentissage, le professeur délègue certaines responsabilités aux élèves. Nous posons la question : Qu'est-ce qui définit le partage des responsabilités entre le professeur et l'élève dans les tâches d'apprentissage? Et cette question en inférait une autre : comment cette frontière est-elle identifiée ?

Cette question générale dépasse le cadre de notre étude mais nous pensons pouvoir apporter un élément de réflexion :

Cette question dépend très directement de la détermination des connaissances en jeu. Nous avons montré que l'ignorance des pratiques énumératives dans les activités de comptage empêche toute négociation sur le partage des responsabilités : En prouvant l'existence d'une connaissance nécessaire au comptage et en construisant des situations a-didactiques convenables, nous pensons faciliter un travail ultérieur d'analyse de partage des responsabilités.

Dans le cadre strict de notre recherche, les situations que nous avons construites permettent de faire prendre en charge par l'institution des questions qui, jusque là étaient ignorées d'elle et qui relevaient de la responsabilité de l'élève.

L'ORGANISATION DES SAVOIRS : OBSTACLE A L'UTILISATION D'ACTIVITES NOUVELLES DANS L'ENSEIGNEMENT :

Nous nous servons des jeux vidéo récents comme exemple : ces jeux (type MARIO sur consoles NINTENDO ou SEGA) sont basés sur le principe de l'exploration exhaustive d'un ensemble "de mondes". Il s'agit d'organiser son exploration. Des revues écrites spécialisées représentent sous forme d'organigrammes complexes des explorations possibles de ces ensembles. Quiconque a pris le temps d'observer un enfant explorer ces ensembles est étonné (le mot est faible) par les pratiques et les débats.

Nous n'avons pas conduit d'observations détaillées, mais nous sommes convaincus qu'il serait très utile de mener une recherche dans ce domaine pour mettre en évidence les connaissances que les enfants utilisent, et la connaissance commune qu'ils élaborent dans la nécessité de s'expliquer.

Ainsi, le même enfant passera une demi-heure par jour¹²⁵, en moyenne, à explorer les "mondes" du jeu et à formuler des problèmes d'exploration afin d'expliquer à son coéquipier du moment, à viser un chemin.

Bien sûr, il y a plusieurs raisons qui font que le système enseignant ignore ces jeux. On imagine difficilement l'arrivée de ces jeux dans les salles de classe¹²⁶ !, mais même si cette liaison était possible dans un cadre ou un autre, l'enseignement n'aurait rien à en tirer pour la raison que les connaissances en jeu sont ignorées dans l'enseignement.

¹²⁵ étude faite pour une émission de France Inter "le téléphone sonne", à propos des jeux vidéo Décembre 1991.

¹²⁶ La bataille navale est acceptée parce qu'elle fait fonctionner un système de codage sous forme de couples parfaitement reconnu dans le savoir mathématique.

7.4. QUATRIEME FAMILLE DE RESULTATS PROPOSITIONS D'INGENIERIE ET QUESTIONS ASSOCIEES:

LES SITUATIONS QUE NOUS AVONS CONSTRUITES PEUVENT ETRE FACILEMENT INTEGREES DANS LES PROGRESSIONS DE L'ECOLE ELEMENTAIRE :

Les trois familles de situation que nous avons construites constituent des points de départ. Ces situations peuvent, sans beaucoup d'aménagements coûteux, être intégrées dans des enseignements. La première famille de situations a déjà fait l'objet d'une mise en place de situations didactiques au cours préparatoire. Les résultats sont très encourageants : voir études de BRIAND (1985).et VILLEGAS (1988).

Nous n'avons pas pu mesurer à long terme les effets de la mise en place des deux autres familles de situations. Notre but était plus modeste. Mais l'étude sur les classes de cours élémentaire de la situation d'exploration des tableaux (par une fenêtre) ainsi que les premières observations menées avec quelques enfants (pour les partitions et la situation fondamentale de l'addition) nous persuadent de la possibilité de construire des situations d'apprentissage de l'énumération à partir de ces situations et d'inclure ces situations dans les progressions construites autour des opérations arithmétiques. Il s'agit d'un travail qui constitue un prolongement immédiat à cette recherche.

7.5. CINQUIEME FAMILLE DE RESULTATS : LES APPORTS DES LOGICIELS EN RECHERCHE EN DIDACTIQUE ET EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

CONCEPTION DE DIDACTICIELS ET RECHERCHE EN DIDACTIQUE :

Nous développons une réflexion sur ce thème en annexe de notre étude.

Nous rappelons brièvement quelques points :

La réalisation et l'utilisation de didacticiels intéressent la didactique pour les raisons suivantes :

- La conception et la programmation nécessitent une explicitation de choix très précis de façon a priori. Il est alors possible de construire des situations a-didactique et faire le choix de la gestion (ou non) de certaines variables de commandes. Cette démarche nous a permis de conduire des observations rapides et fertiles. La construction des situations didactiques d'apprentissage s'en trouve grandement facilitée.

- Ils provoquent une interrogation sur leur place et rôle dans une situation d'enseignement, notamment par ce qu'ils modifient dans le contrat didactique. (Dévolutions nouvelles, obstacles didactiques.)

- Ils permettent une communication des interrogations et des réalisations de la didactique, en formation d'enseignants. Ils apportent les preuves d'existence de savoirs en jeu.

LES LOGICIELS EN FORMATION DES MAITRES :

Nous avons expérimenté l'utilisation des logiciels en formation des professeurs comme moyen d'appréhender des situations a-didactiques.

Ce travail a été effectué à l'aide des logiciels construits pour cette recherche.

Dès lors que, dans une situation, l'énumération est la solution, il devient facile de faire partager le questionnement relatif à la place de l'énumération dans la construction du nombre. De ce point de vue, les logiciels, en ce qu'ils matérialisent une situation proche des habitudes de travail des enseignants, permettent de poser les problèmes rapidement.

Le débat porte alors sur la décision de prendre, ou non, en charge ces apprentissages, et de quelles façon.

7.6. LES SITUATIONS D'ENUMERATION ABORDEES DANS CETTE ETUDE DANS L'ORDRE DE LEUR PRESENTATION

LES LEGO.....	page 33
LISTE DANS UN SUPERMARCHE	page 30
LES PIECES	page 30
LE RECENSEMENT	page 30
L'EPREUVE DES MOSAIQUES	page 64
LES TIRELIRES	page 66
LES BOITES ET LES BATONNETS	page 66.
TECHNIQUE DE MALASSEZ	page 98
LA TABLE	page 8
FENETRE	page 242
BARQUES	page 236
LES CUBES	page 157
CALAPA	page 231
LES PRONOSTICS	page 161
LES CHEMINS	page 167
LES RECTANGLES	page 172
LE CASTELET	page 176
LA POUPEE	page 178
LES LISTES	page 52
LA SORCIERE	page 181
BLOCS DIENES	page 183
LES JEUX DE CARTES	page 183
LE JEU DES DIFFERENCES	page 184
COMPARER DES COLLECTIONS.....	page 184.
LES INTERVALLES	page 189

LES LOGICIELS CONSTRUITS POUR NOTRE THESE : "CALAPA 2", "BARQUES", "FENETRE", "VISUAL".

LES LOGICIELS DU GROUPE DE BORDEAUX DANS LESQUELS FIGURENT DES TACHES D'ENUMERATION : "TIMBRES", "SAFARI", "QUE VEUX-TU VOIR?", "PROTO", "NICHE".

8. BIBLIOGRAPHIE

- ANTIBI A. (1990) "problèmes de dénombrement" in bulletin A.P.M.E.P. Avril 90 P.173-188.
- ARTIGUE M. (1988) "Ingénierie didactique" in Recherches en didactique des mathématiques vol 9-3. 5-64
- ARTIGUE M.,ROBINET (1982) "Conception du cercle chez les enfants de l'école élémentaire". Recherches en didactique des mathématiques vol 3-1. 5-64
- ATEA (1988) Turbo-Professionnel 5-0 "Bibliothèque de routines optimisées pour Turbo-PASCAL". 98 rue Giraudeau 37000 TOURS.
- BALATCHEFF N. (1988) "Génèse du concept d'itération: une approche expérimentale". Enfance. vol 3-5.
- BALATCHEFF N. (1988) "Une étude des processus de preuve en mathématiques chez les élèves au collège". Thèse d'état Université de Grenoble 1.
- BARBUT-MONJARDET (1970) "Ordre et classification algèbre et combinatoire". Hachette Université. Tomes 1 et 2 .1970.
- BAROODY A.C., (1991) "Remédier aux difficultés courantes du comptage", in BIDEAUD et al, 1991, 377-399.
- BASTIEN C (1984) "Qu'apportent les modèles de simulation à la compréhension de problèmes de partition chez l'enfant de 4 à 7 ans?" Colloque de la société française de psychologie. Grenoble. ESPREL-FRAYSSSE, PELISSIER. PINELLI.
- BASTIEN C. (1985)"Représentation, construction et repérage de l'intersection : l'impossible ubiquité". Archives de psychologie.
- BERTHELOT R et.SALIN M.H (1992) "L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire". Thèse BORDEAUX I.
- BOULE F (1989) La construction des nombres. Armand Colin. Paris. 1989.
- BOURBAKI N. (1969) "Eléments d'histoire des mathématiques" HERMANN Paris 1969.
- BOURSIN (1970) "Dictionnaire élémentaire des mathématiques modernes": Bordas.
- BOUSQUET-MELOU M. (1991) "Q-Enumérations de polyominos convexes" Thèse Bordeaux Mai 1991.
- BOUVIER (1992) "Dictionnaire des mathématiques " PUF .
- BRAUNER A. (1970) "Recherches sur le pré-calcul" E.S.F.
- BRIAND J. (1985) "Situations didactiques et logiciels d'enseignement" . D.E.A. Bordeaux.
- BRIAND J. (1990) "Conditions didactiques d'élaboration d'un didacticiel" Actes du séminaire micro-informatique en éducation. Montréal.
- BRISIAUD R. (1989) Comment les enfants apprennent à calculer ? RETZ, Paris, 1989, 192.
- BRISIAUD R. (1991) "Calculer et compter de la petite section à la grande section" in Grand N, n°49, Grenoble, CRDP, 1991. 37-48.
- BROUSSEAU G. (1983) "Didactique et acquisitions des connaissances scientifiques". 1983. Projet du GRECO (G.VERGNAUD M.HULIN).
- BROUSSEAU G (1984) "L'enseignement de l'énumération" Congrès C.I.A.E.M. Adélaïde 1984
- BROUSSEAU G. (1986) "Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques". Thèse d'état BORDEAUX .
- BROUSSEAU N. et G. (1987 et 1992) "La mesure en cours moyen première année." Edition augmentée. Tirage 1992 .
- BROUSSEAU G. et CENTENO J. (1992) "La mémoire du système didactique" Document provisoire à paraître.
- CADIEUX P. (1990) "Guide de rédaction de la documentation accompagnant un didacticiel" Direction des ressources didactiques. Ministère de l'éducation du QUEBEC
- CHEVALLARD Y. (1980) "La transposition didactique" Pensée Sauvage.
- CHEVALLARD Y. (1982) "Sur l'ingénierie didactique".

CHEVALLARD Y. JOSHUA M.A (1983) article "Un exemple d'analyse de la transposition didactique" in RDM vol 3-2

CHEVALLARD Y. (1989) "Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel." Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique Université Grenoble 1.

COLETTE (1979) "Histoire des mathématiques" VUIBERT.

CONNE F. (1993) "Savoir et connaissance" Recherches en didactique des mathématiques. N°13

DARCHEVILLE. "Modification de l'activité de quantification des collections par le nombre chez les enfants de 5-6 ans." Revue française de pédagogie, 65, P.39-46.

DOUADY R. et coll. (1989) "un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane" ESM 20.

DUFOYER J.P. (1988) "Informatique, éducation et psychologie de l'enfant" P.U.F.

DHOMBRES J. et coll. (1987) "Mathématiques au fil des âges" GAUTHIER-VILLARS 1987.

FAYOL M. "Résolution de problèmes de combinatoire chez des enfants du cycle élémentaire: influence de l'habillage du travail en groupe". Enfance. (FAYOLL M.- MAURY S).

FAYOL M. (1991) "Du nombre à son utilisation : la résolution de problèmes additifs" in Bideaud .J, Meljac C, et Fischer J.P. (eds) .Les chemins du nombre. Presses universitaires de Lille, Lille, 257-270.

FAYOL M. (1990) L'enfant et le nombre : du comptage à la résolution de problème. Delachaux et Niestlé, Paris, 233.

FAYOL M. (1985) "Nombre, numération et dénombrement, que sait-on de leur acquisition ?". Revue française de pédagogie, INRP, Paris. 59-77.

FISHER. (1984) "La dénomination des nombres par l'enfant" IREM Strasbourg .

FISCHER "L'appréhension du nombre chez le jeune enfant". Enfance.

FISHER (1984) "Etude complémentaire sur l'appréhension du nombre" IREM de Strasbourg. .

FLORES C. (1972) "La mémoire". PUF.

GAIRIN CALVO S. (1988) "Les nombres au C.P.avec ou sans logiciels" I.R.E.M. De Bordeaux.

GELMAN (1983) "Les bébés et le calcul". La recherche n° 14.

GUIDOTTI Johanne (1990) "Protocole d'évaluation formative d'un didacticiel" Direction des ressources didactiques. Ministère de l'éducation du QUEBEC

HENRY M. (1991) "didactique des mathématiques" I.R.E.M. de Besançon .

I.N.R.P. (1988) "Un, deux, beaucoup... passionnément" I.N.R.P.

KAREN C. FUSON "Relations entre comptage et cardinalité chez les enfants de 2 à 8 ans" in BIDEAUD et al.

KNUTH (1969) "Computer programming". Seminumericals algorithms. Addison Wesley .

KNUTH (1973) "Computer programming". Seminumericals algorithms. Addison Wesley.

KNUTH (1981) "Computer programming". Seminumericals algorithms. Addison Wesley.

MAURY S. (1986) Thèse d'état "Contribution à l'étude didactique de quelques notions de probabilité et de combinatoire à travers la résolution de problèmes" Université des sciences du Languedoc.

MELJAC C. (1979) "Décrire, agir, compter" P.U.F.

MYX A. (1974) "PASCAL et Fibonacci." Document I.R.E.M. De Lyon.

PERES J. (1986) "Construction et utilisation d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle". Bordeaux. thèse.

PERES J. (1987) "Construction et utilisation d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle". I.R.E.M. de Bordeaux. formation.

- PERES J (194) "Utilisation d'une théorie des situations en vue de l'identification des phénomènes didactiques au cours d'une activité d'apprentissage. Construction d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle". Etude en didactique des mathématiques. IREM de Bordeaux.
- PERRIN.M.J. et coll. (1989) "un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane" ESM 20.
- PERRIN M.J. (1992) Thèse d'état.
- PIAGET J. (1941) "La génèse du nombre chez l'enfant". Neufchâtel. Paris. Delachaux et Niestlé.
- PIAGET J. (1975) "L' quilibr tion des structures cognitives". Paris PU.F.
- PIAGET J. (1955) "de la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent" PARIS-PUF.
- RATSIMBA-RAJOHN (1982) "Deux méthodes de mesures rationnelles". R.D.M. 3-1 P.65-112.
- RATSIMBA-RAJOHN (1989) "Processus didactique et construction d'un didacticiel". I.R.E.M.
- ROUCHIER A. (1984) "Informatique et didactique de l'informatique" in actes de la III  cole d'été de didactique juillet 84 Orléans. P.167   175.
- SALIN M.H et BERTHELOT R. (1992) : "L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire". Thèse BORDEAUX I.
- STANLEY R. (1986) "Enumerative combinatorics" Wadworth and brooks/cole advanced Books and sotware. Belmont California.
- STEIN P.R. (?) "A brief history of enumeration", Advances in applied Mathematics, Metropolis.
- TREHARD F. (1987) "Logiciels pouvant impliquer des activités mathématiques à l' cole élémentaire : typologie et enjeux didactiques".
- VERGNAUD G. (1988) "La théorie des champs conceptuels". Recherche en didactique des mathématiques .Vol10 2/3, 133-170.
- VERGNAUD G. (1991) "L'appropriation du concept de nombre : un processus de longue haleine." in Bideaud .J, Meljac C, et Fischer J.P. (eds). Les chemins du nombre. Presses universitaires de Lille, Lille, 271-282.
- WARUSFEL A. (1961) "Les nombres et leurs mystères" Collection Microcosme. Paris. le Seuil 1961.
- VALIANT L.G. (1979) "The complexity of enumeration and reliability problems" SIAM J. COMPUT 8, 410-421.
- WITTWER J. (1966) "Analyse génétique des conduites opératives dans le problème scolaire dit des intervalles" Cahier 5 Ecole normale supérieur de Tunis-
- WITTWER J (1982) "Deux exemples du -structuralement possible- Piag tien. Le problème scolaire dit des intervalles" in Perspectives piag tiennes- Edition des sciences de l'homme PRIVAT.
- WOHLWILL (1966) "Vers une reformulation du rôle de l'expérience dans le développement cognitif" in "Psychologie et épistémologie cognitives".P.211 DUNOD.

8. TABLE DES MATIERES

Sommaire

1. PREMIERE PARTIE	LE CONCEPT D'ENUMERATION	4
1.1.	INTRODUCTION	5
1.1.1.	PROBLEMATIQUE :	6
1.1.2.	POURQUOI CETTE ETUDE VERS LE NOMBRE ET LES OPERATIONS ARITHMETIQUES ?	7
1.1.3.	LA DIDACTIQUE DE LA MESURE COMME MOYEN DE FOURNIR UNE METHODE D'ANALYSE :	9
1.2.	DEFINITIONS DE MOTS CLES:	10
1.3.	RAPPORTS ENTRE COMPTAGE ET MESURAGE : METHODE POUR UNE ANALYSE DIDACTIQUE	14
1.3.1.	LES OBJETS EN JEU DANS LA MESURE	14
1.3.2.	ANALYSE DIDACTIQUE du COMPTAGE :	14
1.3.3.	CONCLUSION :	17
1.3.4.	DETERMINATION DES OBJETS A DENOMBRER :	17
1.3.5.	DETERMINATION DES OBJETS POUR IDENTIFIER, RECONNAITRE, RECONSTRUIRE	17
1.3.6.	INSTRUMENTS DE LA DETERMINATION : DESIGNER, DENOMMER	18
1.3.7.	RAPPORTS ENTRE DESIGNATION ET DENOMINATION :	18
1.4.	L'ENUMERATION : PREMIERE APPROCHE	20
1.4.1.	EXISTENCE D'UNE CONNAISSANCE COMMUNE :	20
1.4.2.	REFLEXION SUR UN PROBLEME DE TERMINOLOGIE :	20
1.4.3.	ANALYSE SUR UN EXEMPLE :	21
1.5.	Différence entre opérations logiques ensemblistes et opérations énumératives.	22
1.6.	ETUDE MATHEMATIQUE : L'ENUMERATION COMME PRODUCTION D'UNE RELATION D'ORDRE	23
1.6.1.	PREMIERE DEFINITION :	23
1.6.2.	CONSTRUCTION D'UNE DEUXIEME DEFINITION :	23
1.6.3.	RELATION D'ORDRE INDUITE PAR UNE ENUMERATION	26
1.6.4.	IMPORTANCE DE LA FONCTION SUCCESSEUR DANS LES PRATIQUES ENUMERATIVES :	26
1.6.5.	ENUMERATION ET OPERATIONS ENSEMBLISTES :	27
1.7.	CONCLUSION : DEFINITIONS DE L'ENUMERATION	29
1.8.	EXISTENCE DE PRATIQUES SOCIALES ENUMERATIVES :	30
1.8.1.	EXEMPLES DE PRODUCTIONS D'ENUMERATIONS DANS DES PRATIQUES SOCIALES :	30
1.8.2.	EXEMPLES DE PRODUCTIONS D'ENUMERATIONS DANS DES ACTIVITES MATHEMATIQUES :	31
1.9.	LE DOMAINE DES ENUMERATIONS :	33
1.9.1.	DETERMINATION D'ENSEMBLE ET ENUMERATIONS :	33
1.9.2.	CONDITIONS REQUISES POUR QUE L'ENUMERATION SOIT UN MODELE IMPLICITE D'ACTION :	33
1.9.3.	DANS LES SITUATIONS D'ENSEIGNEMENT : DEUX TYPES D'ENUMERATIONS.	34
1.9.4.	CONDITIONS DE NAISSANCE D'UN MODELE IMPLICITE D'ACTION DANS UNE SITUATION ADAPTEE :	34

1.9.5. VARIABLES POUVANT AGIR SUR LA MISE EN OEUVRE D'UN MODELE IMPLICITE D'ACTION :	35
1.9.6. ESSAI DE MISE EN EVIDENCE DE CARACTERISTIQUES ERGONOMIQUES DE L'ENUMERATION :	35
1.9.7. DEFINITION LOCALE DU SUCESSEUR COMME SYSTEME INFLUANT SUR LA PRODUCTION D'UNE ENUMERATION :	38
1.9.8. QU'EST CE QUI DICTE ALORS LE CHOIX D'UNE ENUMERATION OU D'UNE AUTRE ? QUELLES CONSEQUENCES DANS UNE REFLEXION SUR LA CONSTRUCTION DES OPERATIONS ARITHMETIQUES ?	39
1.10. CONJECTURES	40
1.11. LES TENTATIVES PRECEDENTES D'ENSEIGNEMENT DE CONNAISSANCES PRENUMERIQUES, LE ROLE DES TRAVAUX DES PSYCHOLOGUES, LES TRAVAUX PLUS RECENTS	42
1.11.1. LE SYSTEME RECONNAIT L'EXISTENCE DE CONNAISSANCES ANTERIEURES AU NOMBRE :	42
1.11.2. UN OBSTACLE : "LA NOTION MATHEMATIQUE SOUS-JACENTE"	43
1.11.3. LES MOYENS DEVENUS OBJETS:	43
1.11.4. LES CONNAISSANCES EN PSYCHOLOGIE COMME RENFORCEMENT DE LA DERIVE PRECEDENTE :	44
1.11.5. LES TRAVAUX PLUS RECENTS : ABSENCE DE CONSTRUCTION DE SITUATIONS D'ENSEIGNEMENT :	44
1.12. HISTORIQUE DES RECHERCHES VOISINES	46
LES POINTS A APPROFONDIR :	48
ROLE DE L'ENUMERATION DANS LA CONSTRUCTION DES NOMBRES:	48
ROLE DE L'ENUMERATION DANS LA CONSTRUCTION DE L'ADDITION :	48
ROLE DE L'ENUMERATION DANS LA CONSTRUCTION DE LA MULTIPLICATION :	49
L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE COMBINATOIRE	49
NECESSITE D'ELABORER DES SITUATIONS A-DIDACTIQUES:	51
IMPORTANCE DU CRITERE A-DIDACTIQUE DE SITUATIONS D'ENUMERATIONS :	52
1.13. MÉTHODOLOGIE GENERALE	54
1.13.1. PARTICULARITES METHODOLOGIQUES DE NOTRE ETUDE	54
1.13.2. OBSERVER DANS QUELLES CONDITIONS ? :	56
1.13.3. DIFFICULTES RENCONTREES :	56
1.14. DECISIONS RELATIVES A LA METHODE EMPLOYEE:	58
1.14.1. ORGANIGRAMME GENERAL DE L'ETUDE	60
1.15. UNE PREMIERE OBSERVATION POUR VERIFIER L'EFFET DES CONDITIONS DE L'ENUMERATION DANS UNE SITUATION DE DENOMBREMENT.	61
1.16. UNE SITUATION FONDAMENTALE DE L'ENUMERATION :	66
1.16.1. SITUATION FONDAMENTALE SIMPLE :	66
1.16.2. ETUDE DE L'ENUMERATION DANS LA SITUATION FONDAMENTALE DU DENOMBREMENT :	67
1.16.3. Dénombrement d'une collection sans structure visible :	67
1.16.4. SITUATION FONDAMENTALE "ELARGIE"	71
2. DEUXIÈME PARTIE : LE CONCEPT D'ÉNUMÉRATION : TRACES DANS LE SAVOIR.	73
2.1. TRACES DE L'ENUMERATION DANS LES OUVRAGES	75
2.1.1. DANS LES DICTIONNAIRES ET LES ENCYCLOPEDIES :	75

2.1.2.	LES OUVRAGES DE MATHÉMATIQUES :	76
2.1.3.	MANUELS SCOLAIRES DU SECONDAIRE :	80
2.1.4.	MANUELS SCOLAIRES DE L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE :	81
2.1.5.	UN CLIN D'ŒIL :	82
2.2.	SUR QUOI SE FONDER DANS LES TRAVAUX EN PSYCHOLOGIE ET EN DIDACTIQUE ?	83
2.2.1.	EN PSYCHOLOGIE, EN ÉPISTEMOLOGIE GÉNÉTIQUE :	83
2.2.2.	EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES :	85
2.3.	TROIS ÉTUDES	90
2.3.1.	A PROPOS DE : "COMMENT LES ENFANTS APPRENNENT À CALCULER" :	90
2.3.2.	A PROPOS DE LA GÉNÈSE DES PROBABILITÉS :	92
2.3.3.	ÉNUMÉRER : DES ERREURS RÉCENTES.	96
2.4.	ÉNUMÉRATION ET PRATIQUES PROFESSIONNELLES :	98
2.5.	CONCLUSION : PLACE DE L'ÉNUMÉRATION DANS LE SAVOIR SAVANT ET DANS LES ACTIVITÉS D'ENSEIGNEMENT.....	99
3.	TROISIÈME PARTIE DIDACTIQUE DE L'ÉNUMÉRATION. ÉTUDE DES CONCEPTIONS DES ÉLÈVES.	101
3.1.	OBSERVER UNE "CONCEPTION"	103
3.1.1.	MÉTHODE DE MISE EN ÉVIDENCE D'UNE OU DE PLUSIEURS CONCEPTION (S) (DE L'ÉNUMÉRATION).....	103
3.1.2.	DÉFINIR UNE MÉTHODE POUR METTRE EN ÉVIDENCE DES CONCEPTIONS :	104
3.1.3.	Pour notre étude :	104
3.2.	TABLEAU DES OBSERVATIONS:.....	106
3.3.	OBSERVATIONS EN CE2 :	107
3.3.1.	EXERCICE EXTRAIT DES "C.A.S."	107
3.3.2.	OBSERVATION :	108
3.3.3.	ÉLABORATION D'UN OUTIL POUR UNE ÉTUDE DES CONDITIONS DE L'énumération dans le DÉNOMBREMENT DES ÉLÉMENTS D'UN TABLEAU :	112
3.4.	OBSERVATIONS EN COURS PRÉPARATOIRE :	125
3.4.1.	ÉNUMÉRATION À LA CHARGE DE L'ÉLÈVE OU ÉNUMÉRATION INDUITE : ÉTUDE À PARTIR D'UN COMPTE-RENDU D'OBSERVATION D'UNE ÉTUDIANTE PROFESSEUR D'ÉCOLE : 125	
3.4.2.	PREMIÈRE OBSERVATION : OU L'IMPOSSIBILITÉ DE CONDUIRE UNE RECHERCHE À PARTIR D'UN QUESTIONNAIRE.	127
3.4.3.	DEUXIÈME OBSERVATION :	128
3.4.4.	TROISIÈME OBSERVATION :	131
3.5.	PREMIÈRES ÉCRITURES DU CARDINAL D'UNE COLLECTION :	154
3.5.1.	CONSTRUCTION D'UNE SITUATION A-DIDACTIQUE DU NOMBRE LAISSANT L'ÉNUMÉRATION À LA CHARGE DU SUJET :	154
3.5.2.	OBSERVATION D'UNE SITUATION MODÉLISÉE PAR LE LOGICIEL "BARQUES" (RAPPEL DU D.E.A.) :	155
3.5.3.	LES CUBES :	157
3.6.	ANALYSE COMBINATOIRE EN TERMINALE (DEUX ÉTUDES).....	159
3.6.1.	ÉPREUVE DU BAC B JUIN 1992.....	161
3.6.2.	ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES DU BACCALAURÉAT SÉRIE D JUIN 92 GROUPEMENT INTER-ACADÉMIQUE II (EXERCICE 2).	167

3.7.	DEUX AUTRES OBSERVATIONS :	172
3.7.1.	CONSEQUENCE D'UN CHANGEMENT DE CONCEPTION DES OBJETS A DENOMBRER SUR L'ENUMERATION UTILISEE : L'ACTIVITE DES "RECTANGLES.....	172
3.8.	AUTRES OBSERVATIONS :	176
3.8.1.	L'ENUMERATION COMME ENJEU IMPLICITE DANS UNE ACTIVITE : EXEMPLE DU "CASTELET" :	176
3.8.2.	L'ENUMERATION ET LA DETERMINATION D'UNE COLLECTION : LES VETEMENTS DE LA POUPEE.....	178
3.8.3.	L'ENUMERATION POUR LA DETERMINATION D'UN ENSEMBLE A L'AIDE D'UNE PRODUCTION ECRITE: ELABORATION DE LISTES EN MATERNELLE :	179
3.8.4.	L'ENUMERATION COMME CONTROLE D'UNE EXPLORATION D'ENSEMBLE : "LA SORCIERE" :	181
3.8.5.	ETUDES ASSOCIEES A L'OBSERVATION DES "SORCIERES":.....	183
3.8.6.	L'ENUMERATION ET LA COMPARAISON DE DEUX COLLECTIONS :	184
3.8.7.	CHOIX D'ENUMERATIONS EN FONCTION DE LA TACHE A ACCOMPLIR:.....	188
3.8.8.	L'ENUMERATION ET LES PROCESSUS ITERATIFS : LE PROBLEME DIT DES "INTERVALLES" _:	189
3.8.9.	L'ENUMERATION DU COTE DES PROFESSEURS : LE PRODUIT DE POLYNOMES:.....	191
3.9.	RESULTATS	193
3.10.	CONCLUSION :	198
3.10.1.	Les observations réalisées en cours élémentaire ont permis de mettre en évidence :	198
3.10.2.	Les observations réalisées en cours préparatoire ont permis de mettre en évidence :.....	198
3.10.3.	Les observations réalisées aux épreuves du baccalauréat B et D ont permis de mettre en évidence :	199
3.10.4.	Les autres observations que nous avons conduites, ou les travaux que nous avons étudiés permettent de mettre en évidence quelques points supplémentaires :	200
3.10.5.	REFLEXIONS COMPLEMENTAIRES :	200
3.11.	ANALYSE COMPLEMENTAIRE A LA SUITE DES OBSERVATIONS.....	203
3.11.1.	DES CHANGEMENTS DE CONCEPTION D'OBJETS POUR ENUMERER :	203
3.11.2.	COMPTAGE ET ENUMERATION : DEUX ACTIVITES QUI INTERFERENT:.....	203
3.11.3.	RUPTURES DE CONTRAT ET ENUMERATIONS INADAPTEES:.....	205
4.	QUATRIEME PARTIE : PHENOMENES DE DIDACTIQUE.....	206
4.1.	PRESENTATION	207
4.2.	PREMIER PHENOMENE : LES CONNAISSANCES ENUMERATIVES SONT IGNOREES DE L'INSTITUTION ET DES ENSEIGNANTS.....	208
4.2.1.	CONSTATS :	208
4.2.2.	EXPLICATION DE CET ETAT DE FAIT :	208
4.2.3.	CONCLUSION :	209
4.3.	DEUXIEME PHENOMENE : LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE DE L'ENUMERATION NE S'OPERE PAS.....	211
4.3.1.	CONSTATS :	211
4.3.2.	EXPLICATION DE CET ETAT DE FAITS :	211
4.3.3.	CONCLUSION :	212
4.4.	TROISIEME PHENOMENE : L'INSTITUTION ENSEIGNANTE SE DONNE DES MOYENS POUR RESOUDRE LOCALEMENT LES PROBLEMES POSES PAR L'ABSENCE DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ENUMERATION.....	214

4.4.1.	CONSTATS :	214
4.4.2.	CONSEQUENCES DE CET ETAT DE FAITS :	214
4.4.3.	CONCLUSION :	215
4.5.	QUATRIEME PHENOMENE : L'ENUMERATION EST LA PART DE RESPONSABILITÉ DE L'ELEVE DANS LE COMPTAGE.	217
4.5.1.	CONSTAT :	217
4.5.2.	ANALYSE :	217
5.	CINQUIEME PARTIE : INGENIERIE DEVELOPEE	220
5.1.	PRESENTATION.	221
5.2.	PREMIERE FAMILLE DE SITUATIONS:	222
5.3.	DEUXIEME FAMILLE DE SITUATIONS :	224
5.4.	TROISIEME FAMILLE DE SITUATIONS :	226
5.5.	PROCESSUS DE REALISATION DES LOGICIELS:	229
5.5.1.	LES LOGICIELS (REALISATION):	229
5.6.	LOGICIEL "CALAPA2"	231
5.6.1.	LES SITUATIONS :	231
5.6.2.	LES VARIABLES	234
5.7.	LE LOGICIEL "BARQUES" :	236
5.7.1.	PAGE DE TRAVAIL ET SITUATIONS DE BASE :	236
5.7.2.	LES SITUATIONS:	237
5.7.3.	LES VARIABLES	239
5.8.	LOGICIEL "FENETRE"	242
5.8.1.	SITUATION :	242
5.8.2.	LES VARIABLES :	244
5.9.	LOGICIEL "VISUAL":	245
5.9.1.	REALISATION DE L'AUTOMATE GENERATEUR DE LISTES :	245
5.9.2.	LA SITUATION :	247
5.9.3.	LES VARIABLES :	250
5.10.	OBSERVATIONS:	252
5.10.1.	"CALAPA2" et "BARQUES":	252
5.10.3.	"VISUAL" : ENTRETIENS INDIVIDUELS. :	253
5.10.4.	VISUAL PERMET-IL UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE DE L'ADDITION ?	254
5.10.5.	LIENS ENTRE FENETRE ET VISUAL : PROPOSITIONS POUR UNE SITUATION A-DIDACTIQUE DE L'ENUMERATION PLUS GENERALE :	255
6.	INFORMATION DES PROFESSEURS	257
6.1.	LE DIDACTICIEL COMME MOYEN DE TRAITER LA QUESTION DE LA NEGOCIATION DIDACTIQUE	258
6.2.	L'ENUMERATION EN FORMATION DES ENSEIGNANTS.	260
6.3.	LIMITES A MAINTENIR	262
7.	CONCLUSION GENERALE	263
7.1.	PREMIERE FAMILLE DE RESULTATS : EXISTENCE D'UNE CONNAISSANCE ET CONSEQUENCES DE SON IGNORANCE POUR L'ENSEIGNEMENT DU NOMBRE ET DES OPERATIONS ARITHMETIQUES	264

7.2.	DEUXIEME FAMILLE DE RESULTATS : RELATIFS A LA PLACE DE L'ENUMERATION DANS LE SAVOIR.....	266
7.3.	TROISIEME FAMILLE DE RESULTATS PHENOMENES DE DIDACTIQUE ET CONSEQUENCES.....	267
7.4.	QUATRIEME FAMILLE DE RESULTATS PROPOSITIONS D'INGENIERIE ET QUESTIONS ASSOCIEES:.....	269
7.5.	CINQUIEME FAMILLE DE RESULTATS : LES APPORTS DES LOGICIELS EN RECHERCHE EN DIDACTIQUE ET EN FORMATION DES ENSEIGNANTS.....	270
7.6.	LES SITUATIONS D'ENUMERATION ABORDEES DANS CETTE ETUDE DANS L'ORDRE DE LEUR PRESENTATION.....	271
8.	BIBLIOGRAPHIE.....	272
8.	TABLE DES MATIERES.....	276