



**HAL**  
open science

# Extension de l'approche X-FEM aux grandes transformations pour la fissuration des milieux hyperélastiques

Grégory Legrain

► **To cite this version:**

Grégory Legrain. Extension de l'approche X-FEM aux grandes transformations pour la fissuration des milieux hyperélastiques. Matériaux. Ecole Centrale de Nantes (ECN); Université de Nantes, 2006. Français. NNT: . tel-00495847v2

**HAL Id: tel-00495847**

**<https://theses.hal.science/tel-00495847v2>**

Submitted on 27 Jul 2011 (v2), last revised 13 Jun 2018 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Extension de l'approche X-FEM  
aux grandes transformations pour la  
fissuration des milieux hyperélastiques*

Grégory LEGRAIN

Thèse de Doctorat présentée et soutenue publiquement le  
17 novembre 2006



**ÉCOLE DOCTORALE**

MÉCANIQUE, THERMIQUE ET GÉNIE CIVIL

**Année 2006**

**N° B.U. :**

**Thèse de Doctorat**

***Diplôme délivré conjointement par  
l'École Centrale de Nantes et l'Université de Nantes***

**Spécialité : GÉNIE MÉCANIQUE**

**Présentée et soutenue publiquement par :**

**Grégory LEGRAIN**

**le 17 novembre 2006**

**à l'École Centrale de Nantes**

**Titre**

**Extension de l'approche X-FEM aux grandes transformations  
pour la fissuration des milieux hyperélastiques**

**Jury**

<b>Président :</b>	<b>G.A. MAUGIN</b>	<b>Directeur de Recherche CNRS, Université Paris 6</b>
<b>Rapporteurs :</b>	<b>C. REY C. STOLZ</b>	<b>Professeur, École Normale Supérieure de Cachan Directeur de Recherche CNRS, École Polytechnique</b>
<b>Examineurs :</b>	<b>A. HUERTA N. MOËS E. VERRON</b>	<b>Professeur, Université Polytechnique de Catalogne Professeur, École Centrale de Nantes Maître de Conférence HDR, École Centrale de Nantes</b>

---

Directeurs de thèse : Nicolas MOËS - Erwan VERRON

Laboratoire : Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique, École Centrale de Nantes - BP 92101 - 44321 Nantes  
Cedex 03

N° ED 0367-251



*A ceux qui nous ont quittés...*

*A ceux qui nous ont rejoints...*

Jugez vos succès d'après ce que vous avez dû sacrifier pour les obtenir.

*[Dalai Lama]*

À quoi te sert, Socrate, d'apprendre à jouer de la lyre puisque tu vas mourir ?

“A jouer de la lyre avant de mourir”

*[Socrate]*

L'ennui dans ce monde, c'est que les idiots sont sûrs d'eux et les gens sensés pleins de doutes.

*[Bertrand Russell]*

Ce que je sais, c'est que je ne sais rien.

*[Socrate]*

# Merci !

---

*Cette thèse a été réalisée à l'Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique à l'École Centrale de Nantes, sous la direction de Nicolas Moës et Erwan Verron que je souhaite remercier pour leur disponibilité, leurs conseils et leur aide précieuse (euphémisme!).*

*Je remercie sincèrement les membres de mon jury : Messieurs Christian Rey et Claude Stolz pour avoir accepté de rapporter mon mémoire, Monsieur Antonio Huerta pour avoir accepté de participer à ce jury et Monsieur Gérard Maugin pour m'avoir fait l'honneur de présider ce jury.*

*Je souhaite également adresser mes remerciements à l'ensemble des membres du Laboratoire pour leur aide ainsi que leurs conseils tout au long de ces années. Merci enfin à Brigitte et Jean-Pierre pour leur bonne humeur !*

*Je ne saurais oublier  
l'ensemble des thésards que j'ai  
rencontrés... Ceux avec lesquels j'ai eu la  
chance de partager mon bureau : Jean-Benoît,  
Andri, Mathieu (le grand !), Steven et Céline. Sans ou-  
blier Marta, Sébastien G., Ahmad et Sébas-  
tien R. ... Enfin, un grand merci aux  
amis : Myriam et Mathieu (le thieu (le  
moyen !)) pour le feuilleton "la petite  
maison en nor-mandie", Émile pour son humour et  
sa bonne humeur, Mathieu (le petit !) pour sa ponctualité légén-  
daire et son application sans faille de la méthode du "juste à temps"  
jusque dans sa date de soutenance de thèse, Grand Mathieu pour  
être venu depuis la capitale assister à ma soutenance, Sylvain et  
Karine pour toutes ces années à Cachan, les petits week-ends à  
Saint Lô (via la case urgences!), mais aussi Antoine  
Nordez (A l'arrache<sup>®</sup> !), Fred, ainsi que Sophie  
et Vincent. Enfin, je  
voudrais remercier les  
piliers de Roc en Stock de  
m'avoir fait le plaisir d'être venus lors de ma  
soutenance : Simon, Marie, Ma-  
math, Léo, Marina...*

*Un grand merci enfin à ma famille, pour leur soutien au cours de ces années et pour m'avoir transmis un peu de la rigueur qu'ils mettent dans leur travail.*

*Enfin, Claire, je ne trouve aucun mot suffisant pour t'exprimer ma gratitude.*

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>2 Rappels - Généralités</b>	<b>3</b>
2.1 Introduction	3
2.2 Notations	3
2.3 Hyperélasticité appliquée aux élastomères	6
2.4 Méthodes d'approximation en mécanique	12
2.5 Conclusion	26
<b>3 Adaptation de la méthode X-FEM à la mécanique non-linéaire de la rupture</b>	<b>27</b>
3.1 Introduction	28
3.2 Déformation d'un corps fissuré en grandes transformations	28
3.3 Linéarisation de la formulation faible	30
3.4 Choix d'une description	30
3.5 Résolution du système discrétisé	33
3.6 Spécificités de la fissuration des élastomères	35
3.7 Enrichissement en pointe de fissure	39
3.8 Validations	41
3.9 Conclusion	52
<b>4 Formulations pour résoudre un problème d'élasticité incompressible</b>	<b>54</b>
4.1 Introduction	55
4.2 Le cas des petites perturbations	56
4.3 Extension au cas des grandes transformations	82
4.4 Conclusion	94
<b>5 Évaluation des forces configurationnelles en mécanique de la rupture</b>	<b>96</b>
5.1 Introduction	96
5.2 La mécanique configurationnelle	99
5.3 Mise en œuvre numérique	102
5.4 Étude de la précision du calcul des forces configurationnelles	108
5.5 Calculs de propagation	117
5.6 Le cas des grandes transformations	120
5.7 Conclusion - perspectives	123
<b>6 Conclusion générale</b>	<b>125</b>
<b>A Solutions de référence en incompressible</b>	<b>128</b>
A.1 Solution analytique de l'exemple à interface courbe	128
A.2 Solution analytique de l'exemple à interface droite	129

<b>B Évaluation numérique du T-stress</b>	<b>131</b>
B.1 Champs auxiliaire pour l'extraction du T-stress . . . . .	131
B.2 Validation de la méthode . . . . .	131
<b>Bibliographie</b>	<b>134</b>

# Chapitre 1

## Introduction générale

Ces cinquante dernières années, les matériaux élastomères ont pris une place de plus en plus importante dans des secteurs industriels tels que l'automobile, l'aéronautique ou le génie-civil. Dans tous ces secteurs, la tendance est à la réduction du temps de conception. En effet, l'objectif est actuellement de suivre au plus près les tendances du marché, sans pour autant pénaliser la qualité des produits. C'est dans ce contexte que depuis une quinzaine d'années, l'étude du comportement mécanique et de la tenue en fatigue des élastomères fait l'objet de nombreuses recherches. Les expérimentations dans ce domaine s'avèrent particulièrement longues et onéreuses lorsqu'il s'agit de caractériser le comportement en fatigue de pièces industrielles. Aussi, un grand nombre de travaux de recherche se portent sur le développement d'outils numériques permettant la qualification de ces pièces. Cette approche numérique est intéressante puisque de nombreux cas de figures peuvent être testés rapidement (donc au plus près de la phase de conception) sans nécessiter la fabrication puis le test de prototypes onéreux.

Le mode de ruine prépondérant des matériaux élastomères est la rupture par propagation de fissures. Classiquement, deux phases peuvent être mises en évidence dans ce mécanisme de ruine : *(i)* l'initiation d'une fissure de taille critique dans le matériau puis *(ii)* la propagation de cette fissure jusqu'à rupture de la pièce en raison du chargement extérieur.

Le phénomène d'initiation est très complexe et peut dépendre à la fois du chargement extérieur, et de l'environnement dans lequel évolue la pièce (réaction du matériau avec l'ozone contenu dans l'air ou attaque du milieu extérieur). La simulation numérique de l'initiation des fissures dans les élastomères peut, par exemple, être étudiée par la mécanique de l'endommagement. Cette approche requiert cependant une connaissance fine des phénomènes micro-structuraux menant à l'apparition de la fissure. Par ailleurs, la mise en œuvre numérique de la mécanique de l'endommagement n'est pas aisée et des phénomènes de dépendance de l'état d'endommagement à la finesse de la discrétisation peuvent apparaître.

C'est la deuxième phase de ce mécanisme de ruine : la propagation, que nous nous proposons d'étudier tout au long de ce mémoire. De nombreux codes de calculs, principalement fondés sur la méthode des éléments finis, intègrent des procédures permettant la simulation de propagation de fissures. Ces dernières sont robustes dans le cas de problèmes plans relevant de la mécanique linéaire de la rupture. De plus, la méthode des éléments finis a largement évolué et peut s'étendre bien au-delà des calculs statiques en élasticité linéaire : il est maintenant classique de traiter de problèmes de non linéarités matérielle ou géométrique que ce soit en statique ou en dynamique. L'un des domaines posant encore des difficultés est celui des discontinuités mobiles (dont les fissures sont un cas particulier). Dans ce cas, le maillage éléments finis doit se conformer aux discontinuités, ce qui requiert des opérations de pré-traitement qui deviennent fastidieuses lorsque les interfaces bougent : il est alors nécessaire de remailler la structure au cours de la simulation. Les procédures de remaillage automatique sont maintenant robustes dans le cas bidimensionnel, mais restent très perfectibles lorsque la simulation est tridimensionnelle. Pour pallier ces difficultés, de nouvelles méthodes numériques ont été proposées : celles-ci permettent de s'affranchir de la description explicite des surfaces de discontinuité. Parmi elles, nous nous intéresserons à la méthode des éléments finis étendus (X-FEM). Il s'agit d'une évolution de la méthode des éléments finis s'appuyant sur la propriété de partition de l'unité et permettant ainsi la représentation implicite des surfaces de discontinuité via une fonction d'enrichissement adaptée. Cette méthode permet l'enrichissement de la solution éléments finis par des fonctions provenant de la physique du problème, améliorant ainsi la qualité de la solution. La méthode a été principalement utilisée en mécanique linéaire, mais commence maintenant à être appliquée aux cas non linéaires tel la plasticité. Dans ce mémoire, nous appliquerons la méthode X-FEM à la simulation de la fissuration des élastomères. Les spécificités du comportement des élastomères conduisent dès lors à l'étude des problèmes suivants :

- ▷ *Application de la méthode au cas des grandes transformations* : la faible rigidité de ces matériaux fait que leur domaine d'application fait intervenir de grandes transformations ;
- ▷ *Application à la mécanique non linéaire de la rupture* : la non linéarité du comportement des élastomères, ainsi que le point précédent ne permettent pas l'application de la mécanique linéaire de la rupture ;
- ▷ *Gestion de la contrainte d'incompressibilité* : ces matériaux sont connus pour ne pas voir varier leur volume sous sollicitation. Ce point est déjà délicat à gérer en éléments finis classiques, il le reste donc avec la méthode X-FEM qui, de plus, ne représente pas explicitement les discontinuités ;
- ▷ *Choix d'un critère de propagation* : classiquement, les critères développés pour les métaux sont appliqués aux élastomères. Le développement d'un critère plus général doit être envisagé.

Le présent document se divise en quatre chapitres. Le chapitre 1 présente quelques rappels de mécanique des milieux continus en grandes transformations, ainsi qu'une présentation de différentes méthodes d'approximation utilisées en mécanique. Le chapitre 2 propose d'appliquer la méthode X-FEM à la mécanique non linéaire de la rupture en grandes transformations. Nous porterons un intérêt particulier au choix de fonctions d'enrichissement adaptées ainsi qu'à la validation de la méthode. Le chapitre 3 présente l'application de la méthode à l'élasticité incompressible. Dans un premier temps, le cas de l'élasticité linéaire est considéré, dans la mesure où il a été largement développé dans la littérature. Dans un deuxième temps, les résultats sont appliqués au cas des grandes transformations. L'objectif de ce chapitre est de proposer des stratégies de résolution fiables et performantes. Finalement, le chapitre 4 aborde le développement d'un critère de branchement de fissure adapté à la mécanique non linéaire de la rupture. Ce dernier est fondé sur la mécanique configurationnelle. Tout comme dans le chapitre 3, le cas élastique linéaire est d'abord considéré avant d'étendre les résultats au cas non linéaire.



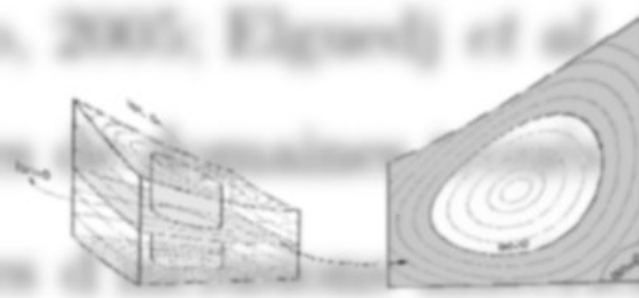
# Chapitre 2

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_i^n u_i \varphi_i(\mathbf{x}) + \sum_{i \in I} \varphi_i(\mathbf{x}) \left( \sum_{j \in J_i} a_j^i v_j^i(\mathbf{x}) \right)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})|_{\Omega_e} = \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{N}^\alpha \left( u^\alpha + \sum_{\beta=1}^{n_{\text{neur}}} a_\beta^\alpha \phi_\beta(\mathbf{x}) \right)$$



## Rappels - Généralités



### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux hypothèses et au cadre général de cette étude. Tout d'abord, nous rappelons brièvement les notations utilisées en mécanique des milieux continus en grandes transformations. En effet, les concepts de mécanique des milieux continus en grandes transformations sont bien connus et détaillés dans de nombreux ouvrages (Sirodoff, 1982), (Bonet et Wood, 1997), (Holzapfel, 2001). Nous nous attarderons sur les notions d'hyperélasticité et d'incompressibilité qui sont au coeur de cette étude. En effet, tout au long de ce manuscrit, les matériaux seront modélisés par un modèle de comportement Hyperélastique, la plupart du temps incompressible. Dans un deuxième temps, nous présenterons de façon synthétique un panel de méthodes numériques permettant de résoudre numériquement les problèmes de fissuration. Cela nous permettra d'introduire également la méthode X-FEM qui servira ensuite de support à cette étude.

### 2.2 Notations

Cette section rappelle les notations communément utilisées en mécanique des milieux continus en grandes transformations; pour une présentation détaillée, on pourra se référer à (Sirodoff, 1982), (Bonet et Wood, 1997) ou (Holzapfel, 2001).



**Conventions d'écriture**

$x, X$	Grandeur scalaire	
$\mathbf{x}$	Vecteur (Tenseur d'ordre 1) de composante	$x_i$
$\underline{X}$	Tenseur d'ordre 2 de composante	$X_{ij}$
$\underline{\underline{X}}$	Tenseur d'ordre 4 de composante	$X_{ijkl}$

**Grandeurs mathématiques :**

$\delta_{ij}$	Symbole de Kronecker	
$\underline{I}$	Tenseur identité d'ordre 2	$I_{ij} = \delta_{ij}$
$\underline{\underline{I}}$	Tenseur identité d'ordre 4	$I_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$

**Définition des produits :**

La convention de sommation sur les indices répétés est adoptée ici.

$\otimes$	Produit tensoriel	$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j$
$\cdot$	Produit contracté une fois	$(\underline{A} \cdot \underline{B})_{ij} = A_{ik} B_{kj}$
$:$	Produit doublement contracté	$\underline{A} : \underline{B} = A_{ij} B_{ij} = \text{Tr}(\underline{A} \cdot \underline{B}^T)$
$:$	Produit d'un tenseur d'ordre 2 et d'un tenseur d'ordre 4	$(\underline{\underline{A}} : \underline{B})_{ij} = A_{ijkl} B_{kl}$ $(\underline{\underline{B}} : \underline{\underline{A}})_{kl} = B_{ij} A_{ijkl}$

**Opérateurs :**

- $\nabla$  Opérateur gradient (appliqué à un scalaire)  $(\nabla u)_i = u_{,i}$
- $\underline{\underline{\nabla}}$  Opérateur gradient (appliqué à un vecteur)  $(\underline{\underline{\nabla}} \mathbf{u})_{ij} = u_{,i,j}$
- div Opérateur divergence
- $\nabla_0$  Opérateur gradient dans la configuration de référence (appliqué à un scalaire)
- $\underline{\underline{\nabla}}_0$  Opérateur gradient dans la configuration de référence (appliqué à un vecteur)
- Div Opérateur divergence dans la configuration de référence
- Dérivation en temps matérielle de •

**Cinématique :**

Considérons un corps  $\mathcal{B}$  défini par la région  $(\Omega)$  qu'il occupe et sa frontière  $\Gamma$  dans sa configuration de référence non déformée  $\mathcal{C}_0$ . Soumis à des sollicitations,  $\mathcal{B}$  se déforme et occupe la configuration  $\mathcal{C}$ . La région occupée par  $\mathcal{B}$  ainsi que sa frontière sont notées respectivement  $(\omega)$  et  $\gamma$  dans la configuration déformée (voir les notations sur la figure 2.1). Le mouvement entre  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}$  est décrit par la transformation  $\phi$  qui relie la position  $\mathbf{x}$  d'une particule au temps  $t$  à sa position initiale  $\mathbf{X}$ .

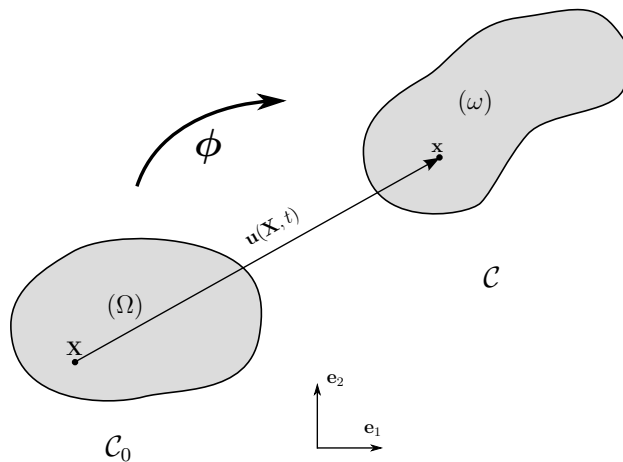


FIGURE 2.1: Cinématique.

**Voir la figure 2.1**

$\mathcal{C}_0$	Configuration de référence
$\mathcal{C}$	Configuration courante
$\phi$	Transformation entre $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}$
$\mathbf{X}$	Position d'un point matériel dans la configuration de référence
$\mathbf{x}$	Position d'un point matériel dans la configuration courante
$\mathbf{u}$	Champ de déplacement
$\underline{\underline{F}}$	Tenseur gradient de la transformation : $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\nabla}}_0 \mathbf{x} = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\nabla}}_0 \mathbf{u}$
$J$	Variation locale de volume : $J = \det(\underline{\underline{F}})$ . Jacobien de la transformation $\phi$
$\underline{\underline{C}}$	Tenseur des dilatations de Cauchy-Green à droite : $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}}$
$\underline{\underline{b}}$	Tenseur des dilatations de Cauchy-Green à gauche : $\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T$
$\underline{\underline{U}}, \underline{\underline{R}}$	Tenseur droit de déformation pure et tenseur des rotations provenant de la décomposition polaire de $\underline{\underline{F}}$ tels que : $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}}$ et $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{U}}^2$
$\underline{\underline{V}}$	Tenseur gauche de déformation pure provenant de la décomposition polaire de $\underline{\underline{F}}$ tel que : $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{R}}$ et $\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{V}}^2$
$I_1 I_2 I_3$	Premiers invariants des tenseurs de Cauchy-Green
$\underline{\underline{E}}$	Tenseur des déformations de Green-Lagrange
$\underline{\underline{F}}$	Tenseur gradient de la transformation incompressible
$\underline{\underline{C}}$	Tenseur des dilatations de Cauchy-Green à droite incompressible

**Contraintes :**

$\underline{\underline{\sigma}}$	Tenseur des contraintes de Cauchy
$\underline{\underline{P}}$	Tenseur des contraintes de Piola Kirchhoff 1 : $\underline{\underline{P}} = J \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{F}}^{-T}$
$\underline{\underline{S}}$	Tenseur des contraintes de Piola Kirchhoff 2 : $\underline{\underline{S}} = J \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{F}}^{-T} = J \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{P}}$
$q$	Pression hydrostatique (cas général)
$p$	Pression hydrostatique : $p = \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}})$

**Comportement :**

$W$	Densité d'énergie de déformation par unité de volume non déformé
$w$	Densité d'énergie de déformation par unité de volume déformé
$\mathbb{C}$	Tenseur d'élasticité lagrangien
$\mathbb{C}^e$	Tenseur d'élasticité eulérien

**Équations d'équilibre :**

Dans la configuration déformée, la frontière de  $(\omega)$  peut être séparée en deux parties distinctes :  $\gamma_u$  sur laquelle sont appliquées les conditions limites de Dirichlet, et  $\gamma_T$  pour les conditions limites de Neumann. Dans la configuration de référence, les parties correspondantes sont notées  $\Gamma_u$  (conditions limites de Dirichlet) et  $\Gamma_T$  (conditions limites de Neumann).

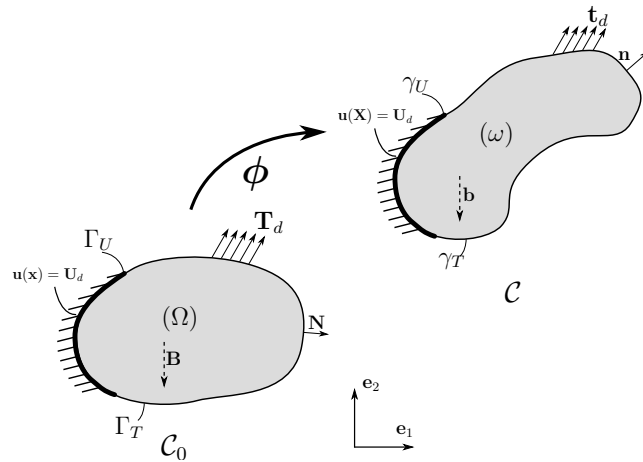


FIGURE 2.2: Équations d'équilibre.

Voir la figure 2.2

- $\mathbf{n}$  Normale unitaire extérieure à  $(\omega)$
- $\mathbf{N}$  Normale unitaire extérieure à  $(\Omega)$
- $\gamma$  Frontière de  $(\omega)$
- $\Gamma$  Frontière de  $(\Omega)$
- $\mathbf{b}$  Forces extérieures par unité de volume déformé
- $\mathbf{B}$  Forces extérieures par unité de volume non-déformé
- $\mathbf{t}_d$  Tractions extérieures sur la configuration courante
- $\gamma_T$  Portion de  $\gamma$  où sont appliquées les tractions extérieures
- $\mathbf{T}_d$  Tractions extérieures sur la configuration de référence
- $\Gamma_T$  Portion  $\Gamma$  où sont appliquées les tractions extérieures
- $\mathbf{U}_d$  Champ de déplacement imposé
- $\gamma_U$  Portion de  $\gamma$  où les déplacements sont imposés
- $\Gamma_U$  Portion de  $\Gamma$  où les déplacements sont imposés

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \mathbf{b} = \mathbf{0} & \text{dans } \omega \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_d & \text{sur } \gamma_T \end{cases} \quad \text{Équilibre eulérien}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Div} \underline{\underline{P}} + \mathbf{B} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \\ \underline{\underline{P}} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{T}_d & \text{sur } \Gamma_T \end{cases} \quad \text{Équilibre lagrangien}$$

### 2.3 Hyperélasticité appliquée aux élastomères

#### Définition

Un matériau est dit hyperélastique s'il existe une fonction  $W(\underline{\underline{F}}, \underline{\underline{X}})$  à valeur dans  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\underline{\underline{P}} = \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{F}}} \quad (2.1)$$

La fonction  $W(\underline{\underline{F}}, \underline{\underline{X}})$  est appelée densité d'énergie de déformation. Cette fonction doit aussi vérifier la condition de conservation de la quantité de mouvement angulaire :

$$\left( \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{F}}} \right) \underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{F}} \left( \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{F}}} \right)^T \quad \forall \underline{\underline{F}} \quad (2.2)$$

Plusieurs hypothèses permettent de réduire le champ des fonctions  $W$  admissibles. Tout d'abord, afin de satisfaire l'objectivité de la loi de comportement,  $W$  doit dépendre seulement des déformations pures :

$$W = W(\underline{\underline{C}}) = W(\underline{\underline{b}}) \quad (2.3)$$

Pour la suite de cette étude, nous nous limiterons aux matériaux homogènes, donc  $W$  ne dépend pas de  $\mathbf{X}$ . De plus, le matériau considéré sera isotrope ( $W$  dépend seulement des invariants de  $\underline{\underline{C}}$ ) :

$$W = W(I_1, I_2, I_3) \quad (2.4)$$

Finalement, en notant  $W_1 = \partial W / \partial I_1$ ,  $W_2 = \partial W / \partial I_2$  et  $W_3 = \partial W / \partial I_3$ , il est possible d'écrire les différents tenseurs des contraintes sous la forme :

$$\underline{\underline{P}} = 2 \left( (W_1 + W_2 I_1) \underline{\underline{F}} - W_2 \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{C}} + W_3 I_3 \underline{\underline{F}}^{-T} \right) \quad (2.5)$$

$$\underline{\underline{S}} = 2 \left( (W_1 + W_2 I_1) \underline{\underline{I}} - W_2 \underline{\underline{C}} + W_3 I_3 \underline{\underline{C}}^{-1} \right) \quad (2.6)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2J^{-1} \left( (W_1 + W_2 I_1) \underline{\underline{b}} - W_2 \underline{\underline{b}}^2 + W_3 I_3 \underline{\underline{I}} \right) \quad (2.7)$$

### Incompressibilité

Il est communément admis que les élastomères peuvent supporter de très grandes déformations sans voir leur volume varier. Seules des cinématiques isochores seront donc compatibles avec ces types de comportement. Un matériau qui garde un volume constant au cours de son mouvement est dit incompressible. Dans ce cas, le matériau est contraint à vérifier la condition suivante :

$$J = 1 \quad (2.8)$$

où  $J$  est le jacobien de la transformation définie en 2.2. Les matériaux dont le comportement doit vérifier une (ou des) contrainte(s) interne(s) sont dits "matériaux contraints". La plus commune de ces contraintes est la contrainte d'incompressibilité (2.8). Le second principe s'écrit alors dans le cas isotherme (la distinction entre énergie interne et énergie libre disparaît) :

$$\mathcal{D}_{int} = \left( \underline{\underline{P}} - \frac{\partial W(\underline{\underline{F}})}{\partial \underline{\underline{F}}} \right) : \dot{\underline{\underline{F}}} = 0 \quad \forall \underline{\underline{F}} \quad |\det(\underline{\underline{F}})| = 1 \quad (2.9)$$

où  $\mathcal{D}_{int}$  est la dissipation. Dans le cas de l'incompressibilité, le jacobien de la transformation doit être constant et unitaire. Les tenseurs admissibles dans (2.9) vérifient donc :

$$\dot{J}(\underline{\underline{F}}) = \frac{\partial J}{\partial \underline{\underline{F}}} : \dot{\underline{\underline{F}}} = 0 \quad \forall \underline{\underline{F}} \quad (2.10)$$

i.e.

$$J \underline{\underline{F}}^{-T} : \dot{\underline{\underline{F}}} = 0 \quad \forall \underline{\underline{F}} \quad (2.11)$$

L'application de (2.9) n'implique donc pas la nullité du terme entre parenthèses (comme pour des matériaux compressibles), mais plutôt (du fait de la condition (2.11)) :

$$\exists q \text{ tel que } \mathcal{D}_{int} = \left( \underline{\underline{P}} - \frac{\partial W(\underline{\underline{F}})}{\partial \underline{\underline{F}}} + q J \underline{\underline{F}}^{-T} \right) : \dot{\underline{\underline{F}}} = 0 \quad \forall \underline{\underline{F}} \quad (2.12)$$

où  $q$  est un scalaire quelconque. On obtient alors, dans le cas incompressible, les relations de comportement suivantes :

$$\underline{\underline{P}} = \frac{\partial W(\underline{\underline{F}})}{\partial \underline{\underline{F}}} - q \underline{\underline{F}}^{-T} \quad (2.13)$$

$$\underline{\underline{S}} = 2 \frac{\partial W(\underline{\underline{C}})}{\partial \underline{\underline{C}}} - q J \underline{\underline{C}}^{-1} \quad (2.14)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{F}} \left( \frac{\partial W(\underline{\underline{F}})}{\partial \underline{\underline{F}}} \right)^T - q \underline{\underline{I}} \quad (2.15)$$

$q$  s'identifie alors à une pression hydrostatique. Celle-ci ne peut être déterminée qu'en utilisant les équations d'équilibre, c'est-à-dire pour un problème donné. Notons que le terme  $\underline{\underline{F}} \left( \frac{\partial W(\underline{\underline{F}})}{\partial \underline{\underline{F}}} \right)^T$  n'est pas forcément

à trace nulle.  $q$  n'est donc pas la partie sphérique de  $\underline{\underline{\sigma}}$ . Cependant, dans le cas général, il est possible de relier  $p$  et  $q$  selon la relation :

$$p = q + \frac{2}{3} J^{-1} \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{C}} \quad (2.16)$$

Pour simplifier le traitement numérique du problème, mais également pour mieux représenter le comportement de certains matériaux, les élastomères peuvent être considérés comme quasi-incompressibles. En effet, des essais ont montré que le module de compressibilité de ces matériaux était de l'ordre de 300 fois plus grand que le module de cisaillement. Ils se comportent donc de façon complètement différente en compression et en cisaillement. De nombreux auteurs proposent alors de décomposer les contraintes en deux parties (Bonet et Wood, 1997; Holzapfel, 2001; Attard, 2003), l'une déviatorique et l'autre sphérique :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_{iso} + \underline{\underline{\sigma}}_{sph} \quad (2.17)$$

La partie déviatorique représente l'état de contrainte dans le matériau sans changement de volume et la partie sphérique représente les contraintes nécessaires pour garder le volume constant. Le matériau peut donc s'écrire en fonction de deux types de grandeurs : celles qui mesurent les déformations à volume constant et celles qui mesurent les variations de volume. Pour traduire cela dans les équations, on utilise très souvent la séparation de la transformation due à Ogden (Ogden, 1984) :

$$\underline{\underline{F}} = J^{-1/3} \underline{\underline{F}} \quad (2.18)$$

Cette décomposition multiplicative du gradient de la transformation est analogue à ce qui est pratiqué en plasticité (Lee, 1969) et viscoélasticité (Sidoroff, 1975). La variation de volume est caractérisée par  $J$ , tandis que l'état de déformation à volume constant est décrit par des invariants à volume constant (Ogden, 1984) :

$$I_{\bar{1}} = I_2^{-1/3} I_1 \quad I_{\bar{2}} = I_{3C}^{-2/3} I_2 \quad (2.19)$$

qui sont les invariants de  $\underline{\underline{C}} = J^{-2/3} \underline{\underline{C}}$ . Cela revient à considérer que la densité d'énergie de déformation du matériau peut se décomposer en parties déviatorique et sphérique :

$$W(\underline{\underline{C}}) = W_{iso}(\underline{\underline{C}}) + W_{sph}(J) \quad (2.20)$$

où  $W_{iso}(\underline{\underline{C}})$  et  $W_{sph}(J)$  sont des fonctions scalaires supposées objectives. Elles décrivent respectivement les réponses déviatoriques et volumiques du matériau. La partie déviatorique de la densité d'énergie de déformation est représentée par un modèle hyperélastique incompressible classique, tandis que la densité volumique s'exprime à l'aide d'une fonction  $W_{sph}(J)$  qui dépend de  $J$ . Pour être admissible, cette fonction doit être strictement convexe et atteindre son unique minimum en  $J = 1$  (Brink et Stein, 1996). Classiquement, on pose  $W_{sph} = kG(J)$  avec  $k$  une constante matérielle assimilable à un module de compressibilité si  $G''(J) = 1$ . Le tableau 2.3 présente quelques-unes des nombreuses fonctions proposées dans la littérature. La première, introduite par Simo (1988) et van den Bogert et al. (1991) est la plus utilisée, dans la mesure où elle est bien corrélée avec des essais de compression (voir la figure 2.3) et où  $G''(J)$  est bien égale à 1. Nous utiliserons donc cette fonction par la suite.

Les relations de comportement d'un matériau quasi-incompressible peuvent être obtenues en appliquant le second principe de la thermodynamique (2.12) avec cette fois-ci  $\underline{\underline{F}}$  quelconque. On retrouve alors la relation :

$$\underline{\underline{S}} = 2 \frac{\partial W(\underline{\underline{C}})}{\partial \underline{\underline{C}}} = \underline{\underline{S}}_{iso} + \underline{\underline{S}}_{sph} \quad (2.21)$$

ce qui conduit à :

$$\underline{\underline{S}}_{iso} = 2 \frac{\partial W(\underline{\underline{C}})}{\partial \underline{\underline{C}}} \quad (2.22)$$

et :

$$\underline{\underline{S}}_{sph} = p J \underline{\underline{C}}^{-1} \quad \text{avec} \quad p = \frac{dW_{sph}(J)}{dJ} \quad (2.23)$$

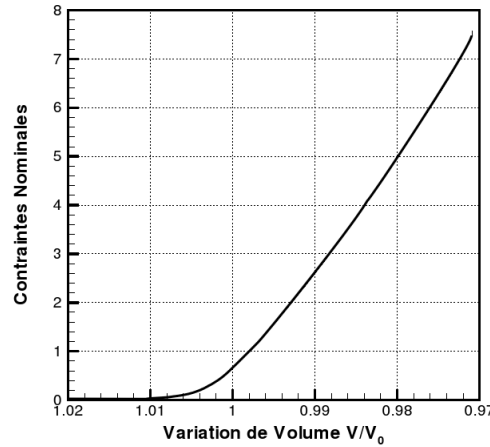


FIGURE 2.3: Relation entre la contrainte ( $\underline{P}$ ) et la variation de volume lors d'un essai de compression confinée (Chagnon, 2003). Cet essai suggère une évolution linéaire de la pression hydrostatique et fonction de la variation de volume.

$G(J)$	Référence
$\frac{k}{2}(J - 1)^2$	Simo (1988), van den Bogert <i>et al.</i> (1991)
$\frac{k}{2} \ln^2(J)$	Valanis et Landel (1967)
$\frac{k}{4} \left( (J - 1)^2 + \ln^2(J) \right)$	Simo et Taylor (1982), van den Bogert <i>et al.</i> (1991)
$\frac{k}{4} \left( (J^2 - 1) - 2 \ln(J) \right)$	Kaliske et Rothert (1999)

TABLE 2.3: Quelques fonctions représentant le comportement volumique du matériau.

Le tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\sigma}$  peut alors s'exprimer à partir de la relation (2.21) :

$$\underline{\sigma} = J^{-1} \underline{F} \underline{S} \underline{F}^T = \underbrace{J^{-1} \underline{F} \underline{S}_{iso} \underline{F}^T}_{\underline{\sigma}_{iso}} + p \underline{I} \tag{2.24}$$

avec  $\text{Tr}(\underline{\sigma}_{iso}) = 0$ . L'intérêt de cette décomposition est alors visible, car la variable  $p$  est bien la pression hydrostatique. Notons cependant que la trace de  $\underline{S}_{iso}$  n'est pas nulle. Cette décomposition, bien que pratique d'un point de vue utilisation, a été remise en cause en 1970 par Penn (1970) via des expérimentations. Ehlers et Heipper (1998) ont repris l'approche de Penn de façon numérique et ont, eux aussi, montré que cette décomposition n'était pas valable sur toute la plage de déformation du matériau, le volume augmentant aux fortes elongations.

**Remarque 2.1** De nombreux auteurs traitent le phénomène de l'incompressibilité à partir de ce type de décomposition (Papoulia, 1999; Chang et al., 1991; Scharnhorst et Pian, 1978; Bonet et Wood, 1997; Holzapfel, 2001). Si les équations (2.13 - 2.15) sont réécrites en remplaçant  $W(\underline{C})$  par  $W_{iso}(\underline{C})$ , alors le multiplicateur  $q$  s'identifie à la pression hydrostatique  $p$  dans le matériau.  $\diamond$

### Linéarisation des grandeurs mécaniques

Comme les équations du problème sont non linéaires, la linéarisation des grandeurs cinématiques et du comportement est indispensable dans la phase de résolution numérique. Sont présentés ici les résultats qui seront nécessaires par la suite. Ceux-ci sont aujourd'hui classiques, voir par exemple (Bonet et Wood, 1997; Holzapfel, 2001). Dans cette optique, il semble utile de définir la dérivée de Gâteaux, notée  $D_X(\bullet)$  par la

relation suivante :

$$D_{\mathbf{b}} f(\mathbf{a}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(\mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{b}) - f(\mathbf{a})}{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(\mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{b})|_{\varepsilon=0^+} \quad (2.25)$$

où  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  peuvent être de nature tensorielle quelconque (scalaire, vecteur, tenseur). On parle également de dérivée directionnelle de la fonction  $f(\mathbf{a})$  dans la direction  $\mathbf{b}$ .

### Grandeurs cinématiques

La linéarisation des grandeurs cinématiques fournit :

$$D_{\mathbf{u}} \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{u} \quad (2.26)$$

$$D_{\mathbf{u}} \underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{F}}^T [\underline{\underline{\nabla}} \mathbf{u} (\underline{\underline{\nabla}} \mathbf{u})^T] \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}) \underline{\underline{F}} \quad (2.27)$$

$$D_{\mathbf{u}} \underline{\underline{C}} = 2 \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}) \underline{\underline{F}} \quad (2.28)$$

$$D_{\mathbf{u}} \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{u} \underline{\underline{b}} + \underline{\underline{b}} (\underline{\underline{\nabla}} \mathbf{u})^T \quad (2.29)$$

$$D_{\mathbf{u}} J = J \operatorname{div}(\mathbf{u}) \quad (2.30)$$

où  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u})$  est le tenseur des déformations HPP (partie symétrique du gradient du déplacement) :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}} \mathbf{u} + (\underline{\underline{\nabla}} \mathbf{u})^T) = \underline{\underline{\nabla}}^S \mathbf{u} \quad (2.31)$$

### Comportement

La linéarisation des relations de comportement s'écrit :

$$D_{\mathbf{u}} \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{\mathbb{C}}} : D_{\mathbf{u}} \underline{\underline{E}} \quad (2.32)$$

où le tenseur d'ordre 4,  $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$  est appelé tenseur d'élasticité lagrangien :

$$\underline{\underline{\mathbb{C}}} = 2 \frac{\partial \underline{\underline{S}}}{\partial \underline{\underline{C}}} = 4 \frac{\partial^2 W(\underline{\underline{C}})}{\partial \underline{\underline{C}}^2} \quad (2.33)$$

Dans le cas incompressible, ce tenseur peut être séparé en parties dépendantes ou non du champ de pression :

$$\underline{\underline{\mathbb{C}}} = \underline{\underline{\mathbb{C}}}_i + \underline{\underline{\mathbb{C}}}_p \quad (2.34)$$

avec :

$$\underline{\underline{\mathbb{C}}}_i = 2 \frac{\partial \underline{\underline{S}}}{\partial \underline{\underline{C}}} = 4 \frac{\partial^2 W(\underline{\underline{C}})}{\partial \underline{\underline{C}} \partial \underline{\underline{C}}} \quad (2.35)$$

$$\underline{\underline{\mathbb{C}}}_p = 2 \frac{\partial (p J \underline{\underline{C}}^{-1})}{\partial \underline{\underline{C}}} = J p [\underline{\underline{C}}^{-1} \otimes \underline{\underline{C}}^{-1} - 2 \underline{\underline{\mathbb{J}}}] + J \frac{dp}{dJ} \underline{\underline{C}}^{-1} \otimes \underline{\underline{C}}^{-1} \quad (2.36)$$

dans ces équations :

$$\underline{\underline{\mathbb{J}}} = - \frac{\partial \underline{\underline{C}}^{-1}}{\partial \underline{\underline{C}}} \quad \text{c'est-à-dire} \quad J_{ijkl} = C_{ik}^{-1} C_{jl}^{-1} \quad (2.37)$$

Pour une formulation quasi-incompressible, la séparation fournit :

$$\underline{\underline{\mathbb{C}}} = \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{iso} + \underline{\underline{\mathbb{C}}}_p \quad (2.38)$$

avec :

$$\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{iso} = 2 \frac{\partial \underline{\underline{S}}_{iso}}{\partial \underline{\underline{C}}} = 4 \frac{\partial^2 W(\underline{\underline{C}})}{\partial \underline{\underline{C}}^2} \quad (2.39)$$

$$(2.40)$$

où  $\underline{\underline{\mathbb{C}}}_p$  est identique au cas incompressible. Remarquons que ni le tenseur  $\underline{\underline{\mathbb{J}}}$  ni le tenseur  $\underline{\underline{C}}^{-1} \otimes \underline{\underline{C}}^{-1}$  ne dépendent du type de matériau considéré. De plus, les équivalents eulériens ( $\underline{\underline{\mathbb{C}}}_i^e$ ,  $\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{iso}^e$  et  $\underline{\underline{\mathbb{C}}}_p^e$ ) de ces tenseurs peuvent s'écrire facilement à partir des opérations de push-forward (Bonet et Wood, 1997).

## Modèles considérés dans cette étude

En hyperélasticité, postuler un comportement revient à proposer une forme de la densité d'énergie de déformation  $W(\underline{\underline{C}})$ . De nombreux modèles hyperélastiques existent ; pour une comparaison détaillée d'un grand nombre de ces modèles, ou pourra se référer à (Marckmann, 2004). Nous utiliserons ici le matériau néo-hookéen (Treloar, 1943a,b) dont la densité d'énergie de déformation, les tenseurs des contraintes  $\underline{\underline{S}}$  et d'élasticité  $\underline{\underline{C}}$  lagrangiens s'écrivent :

▷ *Cas compressible :*

$$W(\underline{\underline{C}}) = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) - \mu \ln(J) + \frac{\lambda}{2}(\ln(J))^2 \quad (2.41)$$

$$\underline{\underline{S}} = \mu(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{C}}^{-1}) + \lambda \ln(J) \underline{\underline{C}}^{-1} \quad (2.42)$$

$$\underline{\underline{C}} = \lambda \underline{\underline{C}}^{-1} \otimes \underline{\underline{C}}^{-1} + 2(\mu - \lambda \ln(J)) \mathbb{J} \quad (2.43)$$

▷ *Cas incompressible :*

$$W(\underline{\underline{C}}) = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) \quad (2.44)$$

Deux possibilités se présentent alors :

1. Dans l'hypothèse des contraintes planes,  $\underline{\underline{P}}$  peut être obtenu dans le cas général à partir de la relation (2.51), la pression hydrostatique restant inconnue. La condition d'incompressibilité  $J = 1$  permet d'obtenir une relation entre les distributions d'épaisseur initiale  $H$  et courante  $h$  :

$$h^2 = \frac{H^2}{\det(\widehat{\underline{\underline{C}}})} \quad (2.45)$$

où  $\widehat{\underline{\underline{C}}}$  représente la restriction de  $\underline{\underline{C}}$  au plan de contraintes planes. Cette variation d'épaisseur permet de vérifier automatiquement la condition d'incompressibilité, quelle que soit la valeur de la pression dans le matériau. L'écriture de la condition de contraintes planes  $P_{33} = 0$  permet ensuite d'obtenir une relation explicite entre la pression et les déformations dans le plan de contraintes planes :

$$p = \frac{\mu}{J} (\widehat{I}_1 - 2\widehat{I}_3^{-1}) \quad (2.46)$$

où  $\widehat{I}_1$  et  $\widehat{I}_3$  sont respectivement le premier et le troisième invariant de la restriction de  $\underline{\underline{C}}$  au plan de contraintes planes. On obtient alors les tenseurs de contrainte et d'élasticité :

$$\widehat{\underline{\underline{S}}} = \mu (\widehat{\underline{\underline{I}}} - \widehat{I}_3^{-1} \widehat{\underline{\underline{C}}}^{-1}) \quad (2.47)$$

$$\widehat{\underline{\underline{C}}}_{ijkl} = \frac{2\mu}{\widehat{I}_3} (C_{ij}^{-1} C_{kl}^{-1} + C_{ik}^{-1} C_{jl}^{-1}) \quad i, j, k, l = 1, 2 \quad (2.48)$$

Remarquons que contrairement au cas général, la contrainte dans le matériau ne dépend plus explicitement de la pression hydrostatique.

2. Dans l'hypothèse des déformations planes ou dans le cas 3D, les relations (2.13-2.15) et (2.33) permettent d'obtenir respectivement  $\underline{\underline{P}}$ ,  $\underline{\underline{S}}$ ,  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $\underline{\underline{C}}$ . La pression hydrostatique ne peut être déterminée qu'à partir des conditions d'équilibre globales du problème :

$$\underline{\underline{S}} = \mu \underline{\underline{I}} + p J \underline{\underline{C}}^{-1} \quad (2.49)$$

$$\underline{\underline{C}} = p J (\underline{\underline{C}}^{-1} \otimes \underline{\underline{C}}^{-1} - 2\mathbb{J}) \quad (2.50)$$

▷ *Cas quasi-incompressible :* La relation (2.44) se décompose en partie déviatorique et sphérique à partir des invariants réduits. On obtient alors les expressions suivantes :

$$\underline{\underline{S}} = \mu I_{3C}^{-1/3} \left( \underline{\underline{I}} - \frac{1}{3} I_1 \underline{\underline{C}}^{-1} \right) + p J \underline{\underline{C}}^{-1} \quad (2.51)$$

$$\underline{\underline{C}}_{iso} = \frac{2\mu}{3} I_{3C}^{-1/3} \left[ I_1 \mathbb{J} - \underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{C}}^{-1} - \underline{\underline{C}}^{-1} \otimes \underline{\underline{I}} + \frac{1}{3} I_1 \underline{\underline{C}}^{-1} \otimes \underline{\underline{C}}^{-1} \right] \quad (2.52)$$

$$\underline{\underline{C}}_p = p J (\underline{\underline{C}}^{-1} \otimes \underline{\underline{C}}^{-1} - 2\mathbb{J}) \quad (2.53)$$



## 2.4 Méthodes d'approximation en mécanique

L'objectif de cette section est de présenter différentes méthodes de discrétisation numérique adaptées à la résolution de problèmes de fissuration. Nous nous intéresserons en particulier à trois types de méthodes : (i) les méthodes éléments finis classiques, (ii) les méthodes d'éléments finis fondées sur la partition de l'unité (dont fait partie la méthode X-FEM) et (iii) les méthodes sans maillage. Ce paragraphe ne prétend pas fournir une synthèse exhaustive de ces méthodes, mais donne une vision générale des méthodes permettant de traiter le problème qui nous intéresse ici. Nous insisterons cependant plus particulièrement sur les méthodes de partition de l'unité puisque ce sont celles sur lesquelles nous mettrons l'accent par la suite.

### La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est maintenant très largement utilisée en mécanique. Depuis ses débuts, celle-ci a fait l'objet de développements continus de la part de la communauté du calcul des structures. De nombreux ouvrages lui sont dédiés, comme [Bathe \(1996\)](#), [Zienkiewicz et Taylor \(1991\)](#)<sup>1</sup> pour ne citer que les plus connus.

Considérons un domaine  $\Omega$  décomposé en  $\mathcal{N}_e$  sous-domaines géométriques  $\Omega_e$  de forme simple, comme des triangles ou des quadrangles en 2D. Ces formes simples sont appelées *éléments* et constituent le maillage de  $\Omega$  :

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{\mathcal{N}_e} \Omega_e \quad (2.54)$$

Afin de simplifier les calculs et les évaluations des quantités, on introduit classiquement des éléments de référence (ou éléments parents) de forme simple. Pour chaque élément  $\Omega_e$ , la transformation permettant de passer de l'espace de référence à l'espace réel est mise en place par l'intermédiaire de fonctions de forme. Un exemple de transformation est donné sur la figure 2.4 pour un élément triangulaire. Le champ de déplacement  $\mathbf{u}$

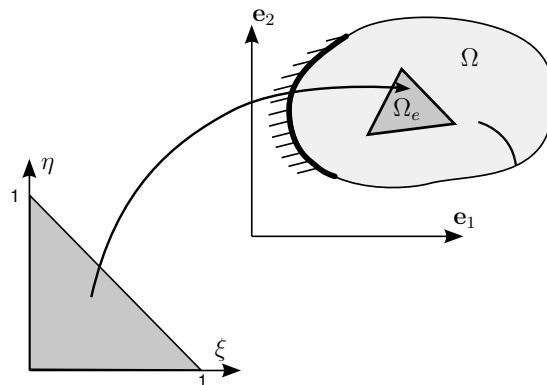


FIGURE 2.4: Transformation liant l'élément de référence (à gauche) à un élément de la discrétisation de  $\Omega$ .

(ou tout autre champ) est approché sur la structure par un champ  $\mathbf{u}^h$  construit à partir des valeurs nodales du champ de déplacement  $\mathbf{u}^i$  aux noeuds de la discrétisation et de fonctions d'interpolation  $N^i(x)$  généralement polynomiales :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_e} \mathbf{u}^i N^i(\mathbf{x}) \quad (2.55)$$

L'intérêt de la méthode des éléments finis vient du support compact des fonctions de forme. Ainsi,  $N^i(x)$  est non nulle seulement sur le *support* du noeud  $i$ , c'est-à-dire l'ensemble des éléments connectés à ce noeud. L'approximation  $\mathbf{u}^h$  du champ de déplacement peut alors se réécrire plus simplement :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{\text{noeuds}}} \mathbf{u}^i N^i(\mathbf{x}) \quad (2.56)$$

1. La 6<sup>ème</sup> édition de cet ouvrage vient de paraître en 2006

où  $\mathcal{N}_{\text{noeuds}}$  représente l'ensemble des noeuds de l'élément contenant le point  $\mathbf{x}$ . Le champ de déplacement peut alors être évalué en n'importe quel point de la structure par la connaissance d'un ensemble fini de valeurs nodales. Les grandeurs telles que le gradient du déplacement ou sa divergence sont alors écrites en remplaçant  $\mathbf{u}$  par  $\mathbf{u}^h$  dans les opérateurs correspondants :

$$\underline{\underline{\nabla}}\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{\text{noeuds}}} \mathbf{u}^i \otimes \nabla N^i(\mathbf{x}) \quad (2.57)$$

Dans la suite de ce travail, nous n'écrivons pas l'interpolation du champ de déplacement sous la forme (2.55), mais sous la forme :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^n u^\alpha \mathbf{N}^\alpha(\mathbf{x}) \quad (2.58)$$

où  $n$  est le nombre de coefficients décrivant l'approximation du déplacement sur l'élément (degrés de liberté),  $u^\alpha$  est le  $\alpha^{\text{ième}}$  coefficient de cette approximation et  $\mathbf{N}^\alpha$  est la fonction de forme vectorielle qui lui est associée. Le gradient du champ  $\mathbf{u}^h$  s'écrit alors de façon naturelle :

$$\underline{\underline{\nabla}}\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^n u^\alpha \underline{\underline{\nabla}}\mathbf{N}^\alpha(\mathbf{x}) \quad (2.59)$$

Les fonctions de formes  $\mathbf{N}^\alpha$  classiquement utilisées en éléments finis vérifient la propriété de *partition de l'unité* (Melenk et Babuška, 1996) :

$$\sum_{\alpha=1}^n \mathbf{N}^\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{1} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.60)$$

La méthode des éléments finis a permis la résolution d'un grand nombre de problèmes en élasticité linéaire, non linéaire, en acoustique, mais aussi des problèmes de mécanique des fluides... Les performances de la méthode sont cependant restreintes par le degré des fonctions utilisées comme base éléments finis et les problèmes contraints tels que les problèmes d'incompressibilité sont difficiles à résoudre. A cela s'ajoute une contrainte d'ordre technique qui provient du temps passé à générer un maillage. Cette génération est robuste en 2D, mais elle peut s'avérer difficile en 3D lorsque l'on traite des problèmes industriels dont la géométrie est complexe. Les performances de convergence de la méthode peuvent être améliorées en augmentant le degré des fonctions de forme éléments finis (raffinement  $p$ ). Cependant dans le cas de problèmes de fissuration, le raffinement  $p$  n'est d'aucune aide car la perte de convergence provient de la nature même de la solution recherchée : cette dernière est singulière et ne peut donc pas être représentée par des polynômes réguliers. En ce qui concerne les problèmes contraints des stratégies ont été proposées, et seront présentées dans le chapitre 4.

## Les méthodes de type partition de l'unité

Nous venons de voir que l'ordre de convergence des solutions éléments finis était réduit lorsque la solution du problème est non régulière. La diminution de la taille des éléments (raffinement  $h$ ) ou l'augmentation de l'ordre des polynômes de la base éléments finis (raffinement  $p$ ) ne sont d'aucun secours. L'idée de la méthode de partition de l'unité est d'introduire dans la base éléments finis des fonctions d'interpolation adaptées à la nature du problème telles que des polynômes harmoniques pour les problèmes de Laplacien, des solutions trigonométriques en acoustique ou des solutions asymptotiques en pointe de fissure en mécanique de la rupture. Celles-ci doivent permettre une amélioration de la solution. Ce type d'approche peut être obtenu en utilisant la propriété de partition de l'unité des fonctions de forme éléments finis. Les premiers travaux sur cette approche ont été proposés par Babuska et Melenk (Babuska et Melenk, 1997; Melenk et Babuška, 1996).

Nous présentons maintenant les fondements de cette méthode. *Pour simplifier les notations de ce paragraphe, la fonction  $u(\mathbf{x})$  à approcher n'est pas vectorielle, mais scalaire.*

Considérons un ensemble d'ouverts appelés "patches"  $\mathcal{T} = \{\Omega_i\}_{i \in I}$  réalisant un recouvrement de  $\Omega$  (voir la figure 2.5(a)), chaque  $\Omega_i$  pouvant en outre recouvrir une partie de ses voisins. De nouvelles fonctions  $v_i$  sont alors définies sur chaque patch  $\Omega_i$ . Ces fonctions sont choisies telles qu'elles soient de bonnes approximations de  $u$  sur chaque  $\Omega_i$  (solutions approchées du problème ou adaptées à sa nature). De plus, elles doivent vérifier

la propriété suivante :  $\forall i \in I, v_i \in H^1(\Omega_i \cap \Omega)$ . Enfin, on définit un ensemble de fonctions  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  sur les  $\Omega_i$  de manière à ce qu'elles forment sur  $\Omega$  une partition de l'unité associée à la partition  $\mathcal{T}$  :

$$\text{Supp}(\varphi_i) \subset \bar{\Omega}_i \quad \forall i \in I \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I} \varphi_i = 1 \quad \text{sur } \Omega \quad (2.61)$$

Comme mentionné précédemment, les fonctions de forme éléments finis vérifient cette propriété de partition

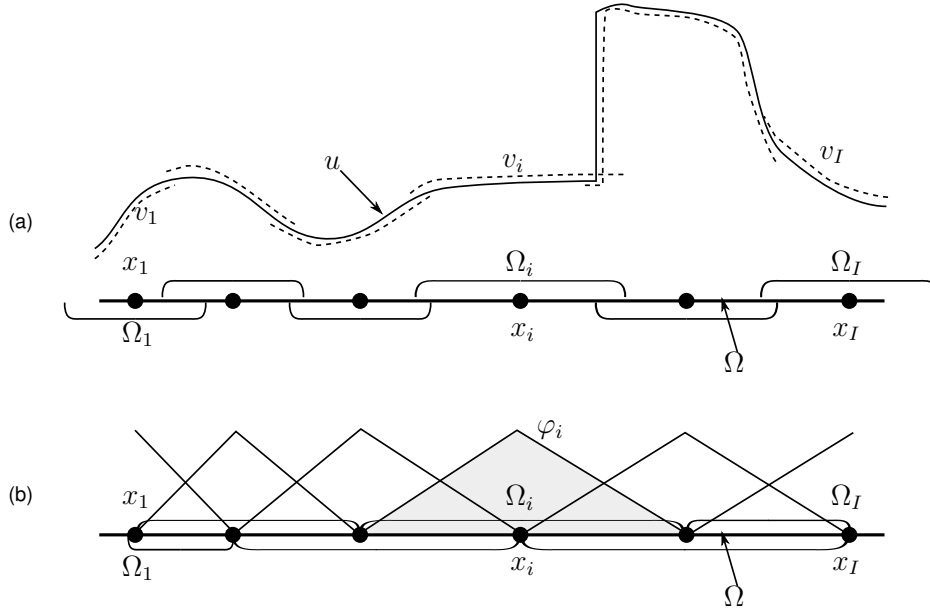


FIGURE 2.5: La partition de l'unité en 1D.

de l'unité. La fonction  $\varphi_i$  est alors associée à un noeud, et le patch  $\Omega_i$  est constitué du support du noeud  $i$  (voir la figure 2.5(b)). L'espace d'approximation PUM s'écrit alors sur  $\Omega$  :

$$V_{PUM} = \left\{ u(x) = \sum_{i \in I} \varphi_i(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{x}) \mid v_i \in V_i, V_i \in H^1(\Omega_i \cap \Omega) \right\} \subset H^1(\Omega) \quad (2.62)$$

Si, sur chaque patch  $\Omega_i \cap \Omega$ , la fonction  $v_i \in V_i$  approche correctement la fonction  $u$ , c'est-à-dire :

$$\|u - v_i\|_{L^2(\Omega_i \cap \Omega)} \leq \epsilon_1(i) \quad \text{et} \quad \|\nabla u - \nabla v_i\|_{L^2(\Omega_i \cap \Omega)} \leq \epsilon_2(i) \quad (2.63)$$

alors la fonction  $u^h = \sum_{i \in I} \varphi_i v_i \in V_{PUM}$  vérifie (Melenk et Babuška, 1996) :

$$\|u - u^h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \sqrt{\sum_i \epsilon_1(i)^2} \quad (2.64)$$

$$\|\nabla u - \nabla u^h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \sqrt{\sum_i (\epsilon_1(i)^2 + \epsilon_2(i)^2)} \quad (2.65)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes qui dépendent uniquement de la partition  $\mathcal{T}$  (taille des  $\Omega_i$ , nombre de patches se recouvrant en un point) et de l'ensemble des fonctions  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ . La PUM permet alors de fournir une bonne approximation de  $u$  sur  $\Omega$  pour peu que  $u$  soit bien approchée sur chaque  $\Omega_i$  (et ce, quelle que soit la partition de l'unité  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  considérée). Si une base éléments finis est utilisée comme partition de l'unité, alors les (bonnes) propriétés de la PUM sont valables quels que soient les degrés des fonctions de forme et le raffinement du maillage.

En particulier, la fonction  $u$  peut être approchée sous la forme :

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} \varphi_i(\mathbf{x}) \left( \sum_{j \in J_i} a_i^j v_i^j(\mathbf{x}) \right) \quad (2.66)$$

où  $v_i^j(\mathbf{x})$  est une fonction particulière de la base  $\{v_i^j(\mathbf{x})\}_{j \in J_i}$  (fonctions définissant une bonne approximation de  $u$  sur  $\Omega_i$ , le patch où est défini la partition de l'unité). Finalement, les  $a_i^j$  sont les degrés de liberté associés à la PUM. Le choix le plus simple pour les fonctions  $\varphi_i$  consiste à prendre les fonctions de forme éléments finis standards qui définissent une partition de l'unité sur le support de chaque noeud (voir la propriété (2.60)). Le patch  $\Omega_i$  correspond alors au support de ce noeud. C'est ce que Babuska et Melenk appellent les *Partition of Unity Finite Element Methods* (Babuska et Melenk, 1997). Notons qu'en choisissant la fonction  $v_i^j(\mathbf{x}) = 1$ , nous retrouvons les approches éléments finis classiques :

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_i^n u_i \varphi_i(\mathbf{x}) \quad (2.67)$$

Cependant, rien n'empêche de choisir des partitions de l'unité différentes pour les éléments finis classiques et les fonctions d'enrichissement (degrés polynomiaux différents). On peut donc écrire :

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_i^n u_i \bar{\varphi}_i(\mathbf{x}) + \sum_{i \in I} \varphi_i(\mathbf{x}) \left( \sum_{j \in J_i} a_i^j v_i^j(\mathbf{x}) \right) \quad (2.68)$$

où  $\bar{\varphi}_i(\mathbf{x})$  sont les fonctions de forme éléments finis (créant une partition de l'unité sur le support de chaque noeud),  $n$  est le nombre de noeuds éléments finis,  $\varphi_i(\mathbf{x})$  est la partition de l'unité utilisée pour l'enrichissement,  $I$  est le nombre de noeuds enrichis par les fonctions  $v_i^j$  et  $a_i^j$  est le degré de liberté additionnel associé à la  $j^{\text{ème}}$  fonction d'enrichissement du noeud  $i$ .

Deux types de méthodes se sont basées sur le concept de partition de l'unité de Babuska et Melenk : les méthodes GFEM (Generalized Finite Element Method) et X-FEM (eXtended Finite Element Method). Si ces deux méthodes sont assez proches d'un point de vue théorique, elles poursuivent cependant des motivations différentes : améliorer la qualité de l'espace engendré dans le cas de la méthode GFEM, utiliser la flexibilité de la partition de l'unité dans le cas de la méthode X-FEM afin d'éviter de mailler les surfaces de discontinuité.

### La méthode GFEM

Le but de la méthode GFEM (Strouboulis *et al.*, 2000) est (à la base, car cela a quelque peu évolué) de construire des approximations de grande qualité dans les cas où la méthode des éléments finis classique fournit des résultats décevants de par la pauvreté ou l'inadaptation de son espace d'approximation. Les auteurs se sont donc principalement intéressés à résoudre des problèmes de microstructure complexe comme des domaines contenant plusieurs centaines de trous, d'inclusions ou de fissures et ce, avec des méthodes non-conformes, l'objectif étant d'obtenir des ordres de convergence maximaux. Les auteurs se sont également intéressés aux aspects multi-échelle ainsi qu'au choix de fonctions d'enrichissement dans le cas où aucune solution analytique n'est disponible (Strouboulis *et al.*, 2003). Pour cela, ils résolvent numériquement une série de problèmes semi-infinis et utilisent les solutions numériques de ces problèmes pour enrichir la solution éléments finis globale (voir la figure 2.6).

### La méthode X-FEM

*Revenons maintenant au cas où l'on cherche à interpoler un champ de déplacement, et non plus une fonction scalaire.*

Dans le cadre de la méthode X-FEM, l'interpolation du champ de déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  sur un élément  $\Omega_e$  peut se développer sous la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})|_{\Omega_e} = \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{N}^\alpha \left( u^\alpha + \sum_{\beta=1}^{n_{enr}} a_\beta^\alpha \phi_\beta(\mathbf{x}) \right) \quad (2.69)$$

où  $n$  est le nombre de degrés de liberté associés à l'interpolation éléments finis du problème,  $n_{enr}$  est le nombre de modes d'enrichissement,  $a_\beta^\alpha$  est le  $\beta^{\text{ième}}$  ddl additionnel associé au ddl  $\alpha$  et  $\phi_\beta^u$  représente la  $\beta^{\text{ième}}$  fonction d'enrichissement scalaire.

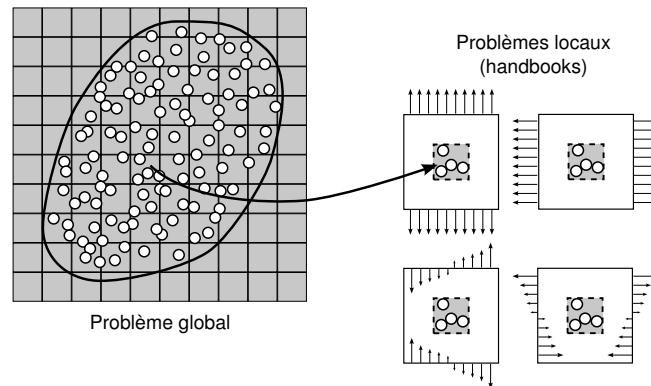


FIGURE 2.6: La méthode GFEM : enrichissement de la solution éléments finis à partir de solutions numériques simples appelés handbooks. Ces fonctions sont obtenues par résolution numérique d'une série de problèmes semi-infinis simples.

**Remarque 2.2** Le concept de partition de l'unité peut être illustré en prenant le cas d'une unique fonction d'enrichissement  $\phi(\mathbf{x})$ , en annulant les ddl  $u^\alpha$  associés à l'approximation éléments finis classique et en fixant à 1 les ddl associés à l'enrichissement. On obtient alors (par la propriété de partition de l'unité) :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})|_{\Omega_e} = \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{N}^\alpha \phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) \quad (2.70)$$

La fonction  $\phi(\mathbf{x})$  est alors exactement représentée sur le patch où l'interpolation éléments finis est enrichie.  $\diamond$

L'idée de la méthode X-FEM est de n'utiliser la propriété de partition de l'unité que localement, afin de ne pas alourdir l'approximation éléments finis. Les premiers travaux sur cette méthode datent de 1999 avec une première approche de Belytschko et Black (1999) en mécanique linéaire de la rupture : tous les noeuds dont le support est coupé par la fissure sont enrichis par des fonctions provenant du développement asymptotique du déplacement en fond de fissure. Ce type d'enrichissement provient des travaux de Fleming et al. (1997) sur les méthodes sans maillage. Cependant, des problèmes de conditionnement de la matrice éléments finis apparaissent.

La méthode X-FEM apparaît en tant que telle en 1999 (Moës et al., 1999) : c'est à cette occasion qu'est introduite la fonction Heaviside qui permet une généralisation du concept de double noeuds utilisé en éléments finis. Cette méthode a été appliquée par la suite à un grand nombre de domaines :

- ▷ Les problèmes de fissuration 2D (Moës et al., 1999; Sukumar et al., 2004; Budyn et al., 2004), 3D (Sukumar et al., 2000; Moës et al., 2002; Gravouil et al., 2002), plaques et coques (Dolbow et al., 2000, 2001; Areias et Belytschko, 2005), fissuration cohésive (Moës et Belytschko, 2002) (Wells et Sluys, 2001), fissuration dynamique (Réthoré et al., 2005), mécanique non linéaire de la rupture (Dolbow et Devan, 2004; Legrain et al., 2005; Areias et Belytschko, 2005; Elguedj et al., 2006b) ;
- ▷ Les problèmes de domaines troués (Daux et al., 2000; Sukumar et al., 2001) ;
- ▷ Les problèmes d'inclusions matérielles (Sukumar et al., 2001; Moës et al., 2003; Legay et al., 2005) ;
- ▷ Les Écoulements à plusieurs phases (Wagner et al., 2001; Chessa et Belytschko, 2003) ;
- ▷ La modélisation des discontinuités en temps (Chessa et Belytschko, 2004, 2006; Rethore et al., 2005).
- ▷ La simulation de problèmes d'interaction fluide-structure (Tourbier, 2005; Legay et al., 2006)

Les derniers travaux concernant la méthode portent sur sa robustesse (Béchet et al., 2005; Laborde et al., 2005), l'imposition de conditions limites de type Dirichlet à l'intérieur même des éléments (Moës et al., 2006), la gestion du contact en fissuration (Elguedj et al., 2006a; Geniaut et al., 2007) et les méthodes multi-échelles (Guidault, 2005; Guidault et al., 2006; Cloirec et al., 2005; Hettich et Ramm, 2006). En effet, même si la méthode X-FEM permet d'éviter le remaillage dû aux discontinuités internes à la structure, le maillage doit cependant être suffisamment fin pour représenter en détail ces discontinuités, d'où la nécessité, dans certains cas, de ces approches multi-échelles.

Dans la suite de cette section, nous détaillerons uniquement le cas de la fissuration dans X-FEM. Le cas des trous et des interfaces matérielles sera considéré au chapitre 4.

Pour la fissuration, deux types d'enrichissements sont considérés :

- ▷ Un enrichissement discontinu pour les éléments dont le support est coupé par la fissure (Moës *et al.*, 1999). Celui-ci utilise alors une fonction de type Heaviside  $H(\mathbf{x})$  telle que :

$$H(\mathbf{x}) \begin{cases} = 1 & \text{si } \mathbf{x} \text{ est au dessus de la fissure} \\ = -1 & \text{si } \mathbf{x} \text{ est en dessous de la fissure} \end{cases} \quad (2.71)$$

Ce type d'enrichissement permet de représenter le saut de déplacement dans les éléments contenant la fissure (voir son illustration sur la figure 3.14(a)).

- ▷ Un enrichissement fondé sur le développement asymptotique du déplacement en pointe de fissure pour les éléments dont le support contient la pointe de fissure (*au minimum*). En appliquant la propriété de partition de l'unité, il est alors possible de reconstruire une approximation exacte du champ de déplacement asymptotique en pointe de fissure. Par exemple, en petites déformations :

$$\phi = \left\{ r^{1/2} \sin(\theta/2), r^{1/2} \cos(\theta/2), r^{1/2} \sin(\theta/2) \sin(\theta), r^{1/2} \cos(\theta/2) \sin(\theta) \right\} \quad (2.72)$$

D'autres bases sont utilisables pour recréer le champ asymptotique du déplacement. Cependant, cette dernière présente l'avantage de faire apparaître peu de modes à énergie nulle et conduit donc à des matrices de rigidité au conditionnement acceptable (Elguedj *et al.*, 2006b).

Ces différents cas de figure sont décrits sur la figure 2.7.

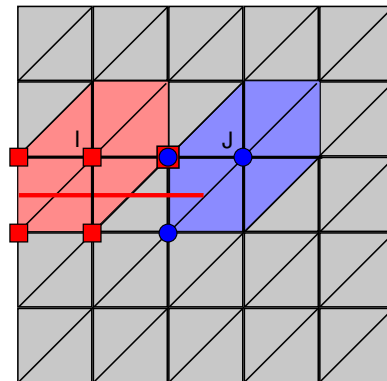


FIGURE 2.7: Différents types d'enrichissement en mécanique de la rupture : enrichissement de type Heaviside (carrés), enrichissement de pointe de fissure (cercles) et supports des nœuds  $I$  et  $J$ .

**Intégration de la formulation faible** Nous venons de voir qu'il était possible d'enrichir l'interpolation éléments finis par des fonctions discontinues dans le but de représenter le saut de déplacement à travers la fissure. De même, dans le cas d'un enrichissement en pointe, le premier terme de la base (2.72) est discontinu à travers la fissure. Aussi, des fonctions discontinues et à gradient discontinus devront être intégrées lors de l'écriture de la formulation faible du problème. L'utilisation d'une simple quadrature de Gauss sans tenir compte de ces discontinuités conduit alors à d'importantes erreurs d'intégration (Moës *et al.*, 1999; Sukumar et Prévost, 2003). Même une forte augmentation du nombre de points de Gauss dans les éléments ne permet pas de réduire ces erreurs à un niveau acceptable. Pour cela, il a été proposé dans (Moës *et al.*, 1999) de générer des sous-éléments qui, eux, se conforment aux surfaces de discontinuité (voir la figure 2.8). Pour intégrer la formulation faible sur un élément, il suffit alors de boucler sur ses sous-éléments et de sommer les résultats. Pour les éléments enrichis par la fonction Heaviside, le nombre de points de Gauss sur chacun de ces éléments est minimal (un point de Gauss par sous-élément dans le cas d'éléments finis linéaires). En revanche, le nombre de points de Gauss est augmenté dans les éléments enrichis par les fonctions de pointe de fissure car ces fonctions ne sont pas polynomiales (sous-éléments notés M, N, O sur la figure 2.8). Notons

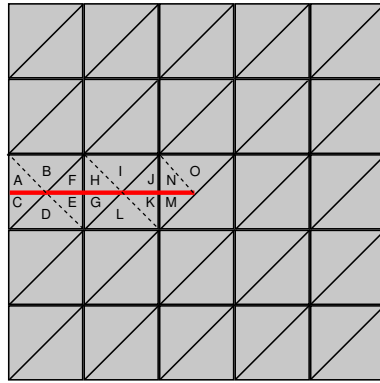


FIGURE 2.8: Sous-éléments (A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O) utilisés pour l'intégration de la formulation faible.

qu'aucun degré de liberté n'est associé à ces sous-éléments : ils sont créés uniquement dans le but d'intégrer précisément la formulation faible. De plus, ils ne doivent vérifier aucune contrainte topologique comme c'est le cas pour les éléments finis auxquels sont associés des ddl (les sous-éléments peuvent être très aplatis).

**Remarque 2.3** Dans le cas des éléments complètement traversés par la fissure (et donc enrichis uniquement avec la fonction Heaviside), il est possible d'intégrer la formulation faible sans introduire de sous-éléments (Ventura, 2006). Cette opération est effectuée en décomposant les intégrales par morceaux.◇

**Procédure de "fit to vertices"** La méthode X-FEM peut donner lieu à des problèmes de conditionnement dans le cas où la surface de discontinuité est extrêmement proche d'un noeud, comme représenté sur la figure 2.9(a). Dans ce cas, le sous-élément 2 est de très faible dimension par rapport aux autres sous-éléments.

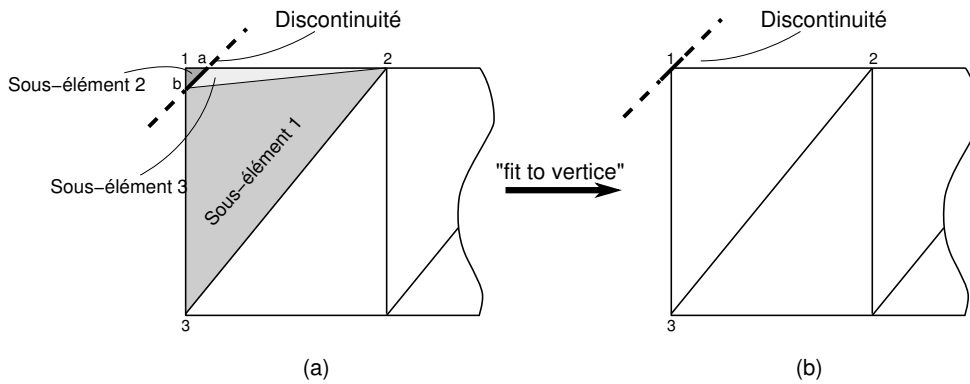


FIGURE 2.9: (a) Élément coupé par une discontinuité proche d'un noeud. Le sous-élément 2 est de très faible dimension par rapport aux autres sous-éléments. Il en résulte un mauvais conditionnement de la matrice raideur du système ; (b) après procédure de "fit to vertices", la discontinuité est déplacée sur le noeud 1

Après enrichissement, des dépendances linéaires peuvent apparaître entre les fonctions enrichies et les fonctions de base, ce qui induit un mauvais conditionnement (les fonctions d'enrichissement sont quasi-linéaires dans le sous-élément 2). Il faut alors chercher à éliminer ce dernier. Deux solutions sont possibles :

1. Déplacer le noeud 1 sur la surface de discontinuité ;
2. Déplacer la discontinuité sur le noeud 1 (Moës et al., 1999), comme présenté sur la figure 2.9(b).

La première approche présente le désavantage de modifier le maillage, alors que l'intérêt de la méthode X-FEM est justement de ne pas le modifier. De plus, cette modification du maillage impose de recalculer la levelset et de re-projeter les variables internes dans le cas d'applications non linéaires. La deuxième approche a donc été



retenue, mais malheureusement celle-ci modifie la géométrie du problème. Cependant, cette procédure n'est appliqué que lorsque l'une des distances  $(1 - a)$  ou  $(1 - b)$  est inférieure à moins de 1% de la distance totale  $(1 - 2)$  ou  $(1 - 3)$ . L'erreur dûe à ces changements de géométrie est supposée d'un ordre inférieur à l'erreur de la solution éléments finis.

**Représentation des surfaces de discontinuité par levelset** Telle que proposée initialement (Moës *et al.*, 1999), la méthode X-FEM requiert une représentation des surfaces de discontinuité par un maillage de degré  $n - 1$  (où  $n$  est la dimension de la structure) plaqué au dessus du maillage X-FEM. La procédure d'enrichissement autour de ces surfaces nécessite donc une interaction entre le maillage de la discontinuité et le maillage global. Utilisant la notion de fonction de niveau ("levelset"), Stolarska *et al.* (2001a) a proposé une nouvelle approche permettant de représenter la surface de discontinuité en utilisant uniquement le maillage de la structure.

Cette approche propose de représenter une interface  $\Gamma$  sur un domaine  $(\Omega)$  (voir la figure 2.10) à partir d'une fonction  $\phi(\mathbf{x}, t)$  suffisamment régulière, telle que le sous-espace  $\phi(\mathbf{x}, t) = 0$  représente  $\Gamma$ . De plus, la fonction levelset doit vérifier les conditions suivantes :

$$\phi(\mathbf{x}, t) > 0 \text{ pour } x \in \Omega^+ ; \quad \phi(\mathbf{x}, t) < 0 \text{ pour } x \in \Omega^- ; \quad \phi(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ pour } x \in \Gamma(t) \quad (2.73)$$

où les domaines  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  sont définis sur la figure 2.10. Cette fonction est la fonction distance signée à l'interface  $\Gamma$ . En pratique, la fonction de niveau est interpolée sur le maillage éléments finis de la structure à

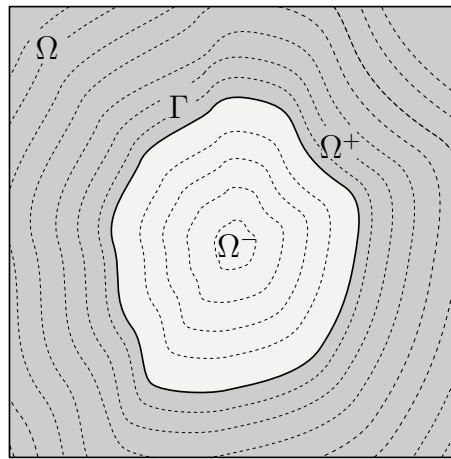


FIGURE 2.10: Domaine  $(\Omega)$ , séparé en deux sous-domaines  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  par une surface de discontinuité  $\Gamma$ . L'iso-zéro de la levelset est représentée par la ligne continue.

partir des fonctions de forme éléments finis. Le mouvement de la discontinuité est ensuite obtenu en mettant à jour la fonction levelset (Osher *et Sethian*, 1988). Cette méthode a été appliquée au cas de la fissuration bidimensionnelle (Stolarska *et al.*, 2001a), tridimensionnelle (Moës *et al.*, 2002; Gravouil *et al.*, 2002) ainsi qu'aux interfaces matériaux et aux trous (Sukumar *et al.*, 2001). Dans le cas des trous et des interfaces matériaux, l'approche ne nécessite pas d'aménagement par rapport aux travaux de Osher et Sethian. Par contre, la méthode doit être adaptée dans le cas de la fissuration car une levelset ne peut représenter que des surfaces fermées ou séparant le domaine en deux. Dans le cas d'une fissure, la surface de la fissure n'a de sens que jusqu'à la pointe de fissure. C'est pourquoi deux levelsets sont introduites :

- Une levelset dite "normale"  $l_{sn}$  dont la valeur représente la distance à la surface de la fissure (cette distance est étendue au-delà du front de fissure par simple prolongement) ;
- Une levelset dite "tangente"  $l_{st}$  dont la valeur représente la distance au front de fissure.

**Remarque 2.4** Ces deux levelsets sont dites orthogonales :  $\nabla l_{sn} \cdot \nabla l_{st} = 0$ .

Une représentation de ces levelsets est donnée sur la figure 2.11 dans le cas d'une fissure circulaire au centre d'un cube. L'iso-zéro de  $l_{sn}$  représente la surface de la fissure et son extension à tout le domaine.



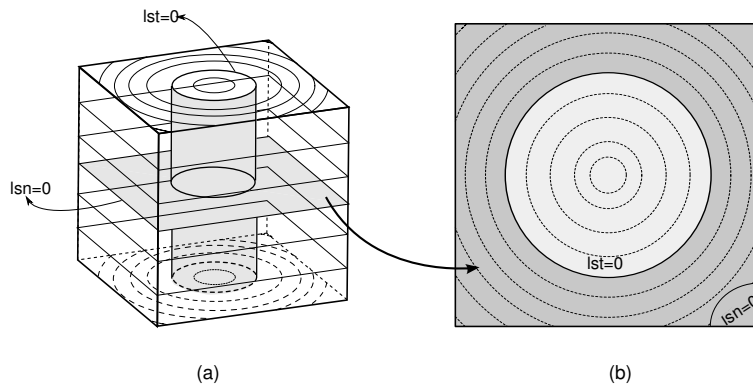


FIGURE 2.11: Cube contenant une fissure circulaire en son centre : (a) représentation des levelsets  $l_{sn}$  et  $l_{st}$  ainsi que leurs iso-valeurs.  $l_{sn} = 0$  représente le plan de la fissure ; (b) iso-valeurs de  $l_{st}$  dans le plan  $l_{sn} = 0$ .  $l_{st} = 0$  représente le front de la fissure et  $l_{st} < 0 \cap l_{sn} = 0$  la surface de la fissure.

L'intersection des iso-zéros de  $l_{sn}$  et  $l_{st}$  définit le front de fissure et  $l_{st} < 0 \cap l_{sn} = 0$  la surface de la fissure.

La propagation d'une levelset s'effectue en trois étapes :

1. Extension de la vitesse connue sur l'iso-zéro vers le domaine entier ;
2. Propagation de la levelset à partir de ce champ de vitesse ;
3. Réinitialisation de la fonction levelset pour ré-obtenir une fonction distance.

Dans le cas des fissures, les deux levelsets sont propagées, mais elles doivent en plus rester orthogonales et la partie déjà fissurée doit rester immobile. La propagation de la fissure peut donc se résumer aux étapes suivantes :

1. Propagation puis réinitialisation de  $l_{sn}$  (*mise à jour de la géométrie de la surface de la fissure*),
2. Propagation de  $l_{st}$  (*propagation de la position du front de fissure*),
3. Ré-orthogonalisation de  $l_{st}$  par rapport à  $l_{sn}$  (*la surface de fissure, représentée par  $l_{sn}$ , doit rester de la meilleure qualité possible. C'est donc  $l_{st}$  qui est mise à jour lors de cette procédure*),
4. Réinitialisation de  $l_{st}$

Toutes ces étapes sont réalisées en résolvant des équations de type Hamilton-Jacobi (Gravouil *et al.*, 2002) :

$$\frac{\partial \bullet}{\partial t} + \mathbf{F} \cdot |\nabla \bullet| = f \quad (2.74)$$

où  $\mathbf{F}$  et  $f$  dépendent de l'étape considérée, et  $\bullet$  est alternativement  $l_{sn}$  ou  $l_{st}$ .

## La méthode de Nitsche et ses variantes

La méthode Nitsche (Nitsche, 1971), introduite dans les années 1970, est une forme consistante de la méthode des pénalités. La communauté n'y trouva alors pas énormément d'intérêt car elle ne permettait de prendre en compte que les conditions limites de type Dirichlet. C'est avec l'émergence des méthodes sans maillage que cette approche connut un regain d'intérêt. En effet, en général, les méthodes sans maillage ne vérifient pas la propriété de Kronecker (la fonction de forme associée à un noeud ne vaut pas 1 en ce noeud et peut être non-nulle aux autres noeuds du maillage). La méthode Nitsche permet alors d'imposer des conditions limites de type Dirichlet (Fernández-Méndez et Huerta, 2004). Dans le cas du développement de méthodes non-conformes (Hansbo et Hansbo, 2003), la méthode Nitsche ne sert que de "colle" pour assurer la continuité du déplacement en pointe de fissure. Les auteurs proposent en effet une approche alternative aux méthodes de type partition de l'unité pour l'introduction de discontinuités fortes ou faibles dans le champ de déplacement, avec un maillage non conforme. Pour les fissures, la procédure est la suivante :

1. Considérons un domaine  $(\Omega)$  contenant une fissure  $\Gamma_C$ . Deux approximations indépendantes du champ de déplacement sont alors définies sur les éléments contenant la fissure (éléments grisés sur la figure 2.12). Deux éléments finis sont alors "superposés" : chacun d'entre eux étant utilisé pour interpoler le champ de déplacement d'un côté de la fissure. Ainsi, le déplacement est bien discontinu à travers la fissure (la

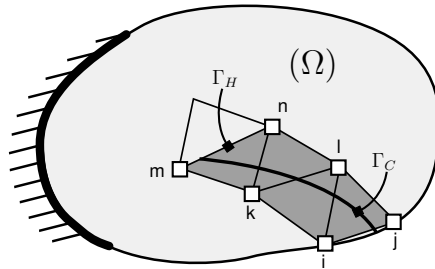


FIGURE 2.12: Application de la méthode Nitsche à la fissuration. Deux champs de déplacement sont définis sur les noeuds du maillage, et le déplacement est "recollé" sur  $\Gamma_H$  en utilisant la méthode Nitsche.

manière de construire ce type de champ sera détaillée par la suite). En procédant ainsi, le champ de déplacement sera également discontinu au niveau de la pointe de la fissure (voir la figure 2.13).

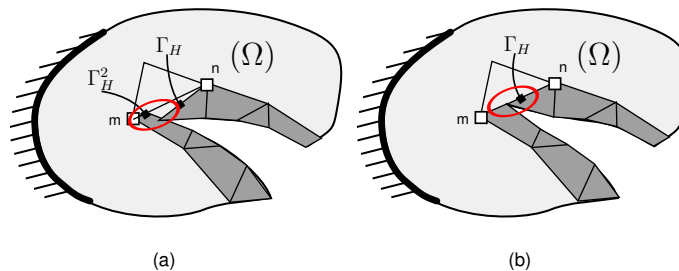


FIGURE 2.13: Après déformation : (a) sans recoller le déplacement au niveau de  $\Gamma_H$ , (b) en recollant le déplacement au niveau de  $\Gamma_H$ .

2. Le champ de déplacement est alors "recollé" au niveau de  $\Gamma_H$  avec la méthode Nitsche. Cette méthode a également été utilisée pour la simulation de discontinuités faibles du champ de déplacement (discontinuité du gradient du champ de déplacement) : le champ  $\underline{\mathbf{u}}$  est recollé au niveau de l'interface de l'inclusion et  $\underline{\nabla}\underline{\mathbf{u}}$  est laissé discontinu.

**Remarque 2.5** *Mergheim et al. (2005) ont proposé une méthode alternative pour assurer la continuité du champ de déplacement en pointe de fissure, en choisissant de ne pas définir les deux champs de déplacement présentés plus haut sur les frontières de l'élément supportant la pointe de la fissure (sur la figure 2.12, le champ de déplacement est unique aux noeuds m et n).*◊

La construction des deux champs de déplacement indépendants des deux côtés de la fissure est présentée sur la figure 2.14. Cette construction est très simple (*Mergheim et al., 2005*) :

1. L'élément  $ijk$  est séparé en deux "sous-éléments"  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  ;
2. Un élément complet est superposé sur chacun de ces deux "sous-éléments" :  $ij^*k$  pour  $\Omega_1$  et  $i^*jk^*$  pour  $\Omega_2$  ;
3. Des degrés de liberté sont associés à chacun de ces éléments. Les degrés de liberté associés au noeud  $i$  sont indépendant de ceux associés au noeud  $i^*$  (idem pour les noeuds  $j$  et  $k$ ) ;
4. Une fonction de forme modifiée est associée à chacun de ces ddl : cette fonction est identique à une fonction de forme classique, mais elle s'annule de l'autre côté de la fissure.

Ceci conduit à un doublement du nombre de ddl sur les éléments coupés par la fissure, ainsi qu'une approximation discontinue à travers la fissure. Cette méthode a été appliquée à de nombreux problèmes : fissuration 2D, inclusions matérielles 2D et contact 2D dans (*Hansbo et Hansbo, 2003*) ; fissuration cohésive 2D linéaire

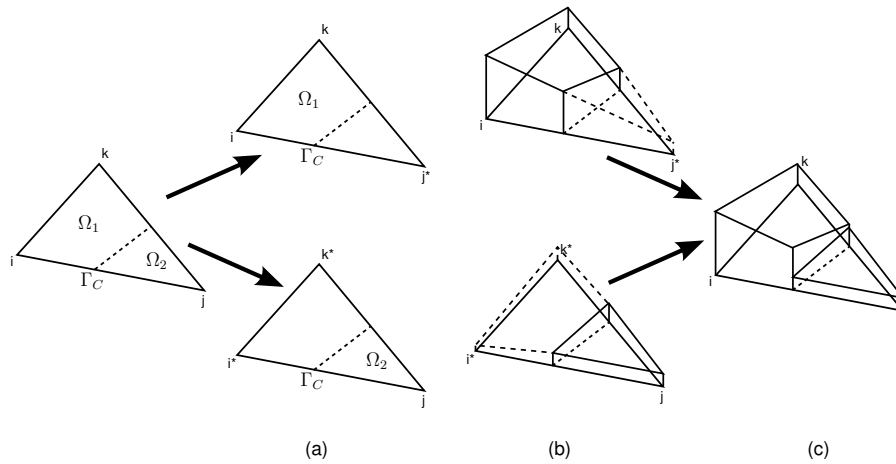


FIGURE 2.14: Construction de deux champs de déplacement indépendants sur un élément coupé par la fissure : (a) l'élément est séparé en deux "sous-éléments"  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sur lesquels un élément complet est superposé ; (b) association de degrés de liberté et des fonctions de forme indépendantes à ces deux sous-éléments.

dans (Mergheim *et al.*, 2005) ; fissuration cohésive 2D non linéaire dans (Mergheim et Steinmann, 2006) ; fissuration non linéaire cohésive 3D dans (Mergheim *et al.*, 2006), propagation de fissures 2D en mécanique linéaire de la rupture par la méthode des forces configurationnelles dans (Heintz, 2006) (voir chapitre 5).

Les avantages et inconvénients de la méthode peuvent se résumer ainsi :

1. Cette approche est peu différente de la méthode X-FEM : ce ne sont pas le saut du déplacement et le déplacement continu qui sont discrétisés, mais deux champs de déplacement. Les degrés de liberté de ces deux approches sont directement reliés comme l'ont montré Areias et Belytschko (2006) ;
2. La plus grande différence entre cette méthode et X-FEM est que celle-ci n'est pas explicitement fondée sur la partition de l'unité : la connaissance de solutions analytiques ou numériques adaptées au problème ne peut être mise à profit pour améliorer la précision des calculs ;
3. Selon les auteurs, cette méthode est plus simple à mettre en œuvre que X-FEM car seule l'interpolation de l'élément coupé est modifiée par les ddl additionnels. En effet, avec X-FEM les éléments bordant la discontinuité sont partiellement enrichis (voir la figure 2.15).
4. Le calcul du saut de déplacement à travers la fissure nécessite des opérations supplémentaires, alors qu'avec X-FEM les degrés de liberté additionnels liés à l'enrichissement Heaviside correspondent directement à cette grandeur. De ce fait, la méthode X-FEM est plus facile à utiliser pour modéliser des applications nécessitant cette grandeur, comme par exemple la simulation de la fissuration cohésive.

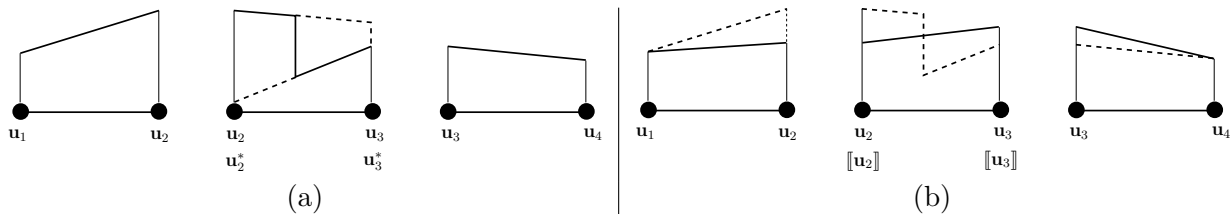


FIGURE 2.15: Élément 1D contenant une discontinuité de champ : (a) méthode Nitsche : sur les éléments bordant la discontinuité, l'approximation éléments finis n'est pas modifiée ; (b) méthode X-FEM : les enrichissements des ddl aux noeuds 2 et 3 influencent l'approximation dans les éléments bordant la discontinuité.

**Remarque 2.6** La méthode a été appliquée au cas des grandes transformations par Mergheim et Steinmann (2006) dans le cas de la fissuration cohésive 2D et d'interfaces matérielles 2D. L'intérêt de cette approche est qu'elle n'impose pas l'utilisation d'une formulation lagrangienne totale. En particulier, dans (Mergheim

et al., 2006), une méthode en lagrangien réactualisé est utilisée. Cependant, nous verrons dans le chapitre 3 qu'il est possible d'utiliser une formulation de ce type avec la méthode X-FEM en se restreignant aux mêmes hypothèses que les auteurs.◊

### Les méthodes sans maillage

Les méthodes sans maillage ont été développées avec l'objectif d'éviter les difficultés de régénération du maillage dans le cas de problèmes à frontières mobiles comme les fissures, ou en grandes transformations. Les premiers travaux sur ce type de méthode ont été menés par Lucy en 1977 avec le développement de la méthode SPH (Smooth Particle Hydrodynamics) (Lucy, 1992) pour la modélisation de phénomènes astrophysiques. Viennent ensuite les travaux de Nayroles (Nayroles et al., 1992) qui développa la méthode des éléments diffus (DEM) en 1992. Une introduction à ce type de méthodes peut être trouvée dans (Sukumar et al., 2005), et une description détaillée dans (Belytschko et al., 1998; Liu et Liu, 2002). Les méthodes sans maillage sont intimement liées à l'approximation de données dispersées. Considérons un ensemble de noeuds dispersés dans  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 1 - 3$ ) associés à des valeurs nodales; une surface approximation de ces données peut être construite sans nécessiter de connectivité a priori entre les noeuds (comme en éléments finis). C'est cette approche qui est utilisée dans le cas des méthodes sans maillage. Ces dernières sont fondées sur les théories d'approximation de données (Lancaster et Salkauskas, 1981; Sibson, 1981) et permettent la construction d'espaces d'approximation en mécanique. Nous nous intéresserons uniquement au concept de moindres carrés mobiles (Moving Least Squares : MLS) (Lancaster et Salkauskas, 1981) qui a donné naissance aux méthodes "meshless" de type Element Free Galerkin Methods (EFG) ainsi qu'à d'autres méthodes sans maillage (Liu et Liu, 2002). Dans un objectif de simplicité, nous nous limiterons au cas de l'interpolation  $u^h$  d'une fonction scalaire  $u$ ; le cas des fonctions vectorielles est une simple extension des concepts présentés dans la suite. L'approximation des moindres carrés mobiles  $u^h$  d'une fonction scalaire  $u$  s'écrit (Nayroles et al., 1992; Belytschko et al., 1998) :

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) a_j(\mathbf{x}) = [tp(\mathbf{x})]^T [a(\mathbf{x})] \tag{2.75}$$

où  $m$  est le nombre de termes du vecteur  $[p]$  contenant la base meshless et les  $a_j$  sont des coefficients qui proviennent de la minimisation de la fonctionnelle quadratique  $\mathcal{J}$  :

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n w_I(\mathbf{x}) \left[ [p(\mathbf{x}_I)]^T [a(\mathbf{x})] - u_I \right]^2 \tag{2.76}$$

où la fonction poids  $w_I(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \geq 0$  a un support compact (figure 2.16). En minimisant  $\mathcal{J}$  et après

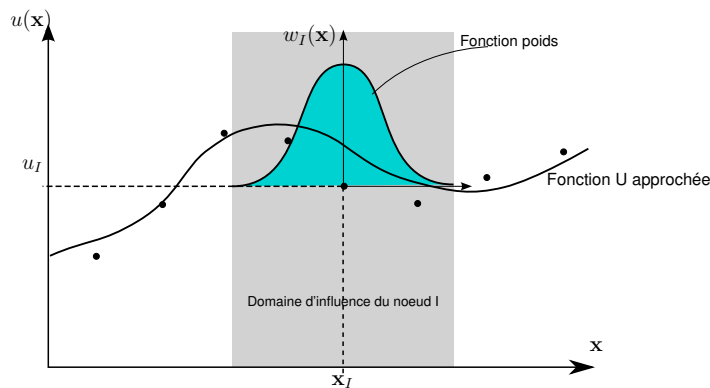


FIGURE 2.16: Approximation EFG d'un ensemble de points de données.

quelques simplifications, on obtient :

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \phi_I(\mathbf{x}) u_I \tag{2.77}$$

où les  $(u_I)_{I=1,n}$  sont les paramètres nodaux, et les fonctions de forme EFG  $\phi$  sont données par la relation :

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) \left[ [A(\mathbf{x})]^{-1} [B(\mathbf{x})] \right]_{jI} \quad (2.78)$$

Comme  $\phi_I(\mathbf{x}_J) \neq \delta_{IJ}$ , les fonctions de forme EFG n'interpolent pas les valeurs nodales. De plus, les fonctions de forme à l'intérieur du domaine ne s'annulent pas nécessairement sur la frontière : cela complique singulièrement l'imposition de conditions limites de type Dirichlet (Wagner et Liu, 2001). C'est pour cela que la méthode Nitsche (Nitsche, 1971) a connu un regain de popularité ces dernières années.

Dans l'équation précédente, les matrices  $[A]$  et  $[B]$  s'écrivent :

$$[A(\mathbf{x})] = \sum_{I=1}^n w_I(\mathbf{x}) [p(\mathbf{x}_I)] [p(\mathbf{x}_I)]^T \quad (2.79)$$

et :

$$[B(\mathbf{x})] = [w_I(\mathbf{x}) [p(\mathbf{x}_1)], \dots, w_n(\mathbf{x}) [p(\mathbf{x}_n)]] \quad (2.80)$$

Pour une base "meshless" suffisamment régulière, les fonctions de forme EFG héritent de la régularité des fonctions poids. Cette propriété permet de construire simplement des espaces de fonctions de grande régularité. Classiquement, un domaine d'influence est associé à chaque nœud ; celui-ci correspond au support de la fonction poids  $w_I$ , avec  $w_I > 0$  à l'intérieur du domaine d'influence et  $w_I = 0$  en dehors. Ces domaines d'influence sont des régions circulaires ou rectangulaires en 2D, et les fonctions poids sont des fonctions Gaussiennes ou polynomiales (splines) (Belytschko et al., 1998).

Cette méthode fait intervenir un certain nombre de paramètres :

- ▷ Le domaine d'influence d'un nœud : ce paramètre a une influence sur la fonction  $u^h$  finalement obtenue. Si le domaine d'influence est trop grand, alors  $u^h$  dégénère vers une droite. Si ce domaine est trop petit, chaque nœud se comportera indépendamment de son voisin et là encore  $u^h$  ne sera pas correcte. A ce jour, ce domaine d'influence est obtenu par la pratique et ne peut être déterminé analytiquement ;
- ▷ Dans le cas 1D précédent, si le domaine d'influence d'un nœud va du nœud qui le précède à celui qui le suit, alors on retrouve la méthode des éléments finis ;
- ▷ Le choix de la base EFG (au minimum, la base contient les fonctions  $[1, x, y]$  en 2D). Tout comme dans le cas des méthodes éléments finis enrichies, il est possible de placer dans la base EFG des fonctions provenant de la physique du problème. Par exemple en mécanique linéaire de la rupture, on y ajoute la base (2.72) (Fleming et al., 1997) ;
- ▷ La méthode est censée permettre une gestion simple des surfaces de discontinuité comme les fissures. Cependant, des aménagements sont nécessaires. La figure 2.17, présente le cas d'un carré fissuré discrétisé par EFGM. Les nœuds  $I$  et  $J$ , ainsi que le domaine d'influence du nœud  $I$  sont également représentés. Le nœud  $J$  étant situé dans le domaine d'influence du nœud  $I$ , leurs déplacements sont liés. Or, comme ils sont séparés par la fissure, leurs déplacements doivent être indépendants. Un certain nombre de critères existent pour pallier cette difficulté. Le plus simple consiste à annuler la fonction poids associée au nœud  $I$  de l'autre côté de la fissure : c'est le critère de visibilité. Cependant, cela peut induire des discontinuités non désirées dans le champ de déplacement près de la pointe de fissure (Organ et al., 1996). Aussi, Ventura et al. (2002) a présenté une méthode fondée sur la partition de l'unité et la fonction Heaviside, afin de modéliser le saut de discontinuité de la même manière qu'avec X-FEM ;
- ▷ Bien que qualifiée de sans maillage, la méthode nécessite la génération de cellules en arrière plan du nuage de nœuds, afin d'intégrer la formulation faible. La taille de ces cellules doit de plus être proportionnelle à la densité de nœuds ;
- ▷ La méthode EFGM vérifie la partition de l'unité.

**Remarque 2.7** Il existe un grand nombre d'autres méthodes sans maillage, dont celles fondées non pas sur les moindres carrés glissants, mais sur la notion de voisinage naturel (Sibson, 1981) : la méthode NEM (Natural Element Method) qui est intermédiaire entre les méthodes EFGM et les méthodes éléments finis. Les domaines

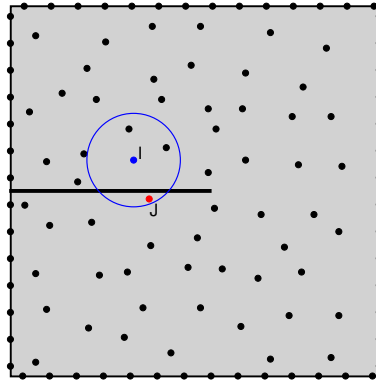


FIGURE 2.17: Discretisation EFGM d'une plaque fissurée : le noeud  $J$  est contenu dans le domaine d'influence du noeud  $I$ , mais celui-ci est aussi coupé par la fissure. Les deux noeuds devraient être indépendants.

d'influence des noeuds sont obtenus à partir du diagramme de Voronoi du domaine. Ceci permet de définir des fonctions d'interpolation à support compact, sans introduire de paramètre comme la zone d'influence d'un noeud et vérifiant la partition de l'unité.

L'imposition des conditions limites pose encore des problèmes. [Sukumar \(1998\)](#) a en effet démontré que les interpolants de Sibson qui servent de fonctions de forme dans la NEM ne sont interpolants sur les frontières du domaine que si celles-ci sont convexes. Pour des domaines non-convexes, il faut alors utiliser d'autres méthodes plus appropriées ; par exemple, les  $\alpha$ -shapes ([Cueto et al., 2000](#)) qui conduisent la méthode  $\alpha$ -NEM ou alors les diagrammes de Voronoi contraints ([Yvonnet et al., 2004](#)) qui conduisent à la méthode C-NEM.  $\diamond$

### La méthode des fortes discontinuités (SDA)

La méthode SDA (Strong Discontinuity Approach) est une méthode qui, tout comme les méthodes de partition de l'unité, permet d'introduire des discontinuités dans le champ de déplacement. Prenons l'exemple d'un domaine  $(\Omega)$  séparé en deux parties  $(\Omega^+)$  et  $(\Omega^-)$  par une surface de discontinuité  $\Gamma$  de normale unitaire  $\mathbf{n}$  dirigée de  $(\Omega^-)$  vers  $(\Omega^+)$  (voir la figure 2.18).

Le champ de déplacement s'écrit sous la forme :

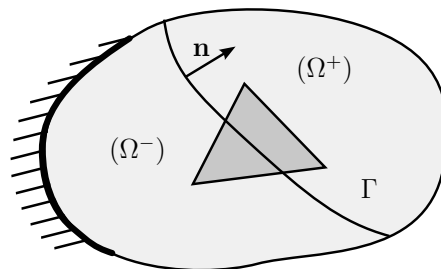


FIGURE 2.18: Problème de référence pour la SDA.

$$\mathbf{u}_{SDA}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \quad (2.81)$$

où  $\bar{\mathbf{u}}$  est continu à travers  $\Gamma$  et  $\hat{\mathbf{u}}$  est discontinu à travers  $\Gamma$ . Dans l'approche SDA,  $\hat{\mathbf{u}}$  est défini sous la forme :

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = [H_{\Gamma}(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})] \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \quad (2.82)$$

où  $\llbracket \bullet \rrbracket$  représente le saut de  $\bullet$ ,  $H_{\Gamma}$  est la fonction Heaviside centrée sur la discontinuité  $\Gamma$  et  $\psi$  est une fonction suffisamment régulière qui permet de satisfaire  $\hat{\mathbf{u}} = 0$  aux noeuds du maillage (cela permet d'imposer les conditions de type Dirichlet de manière directe sur  $\bar{\mathbf{u}}$  et non pas sur  $\mathbf{u}$  et  $\hat{\mathbf{u}}$ ). Cette fonction permet alors de restreindre le support de  $\hat{\mathbf{u}}$  aux éléments contenant la discontinuité. La fonction  $\psi(\mathbf{x})$  se définit dans l'élément

de référence sous la forme :

$$\psi(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{N^{n+}} N_i(\xi, \eta) \quad (2.83)$$

où  $N^{n+}$  représente l'ensemble des noeuds se trouvant dans  $(\Omega^+)$  et  $N_i(\xi, \eta)$  sont les fonctions de forme éléments finis exprimées sur l'élément de référence. La fonction  $H_\Gamma(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})$  a donc comme support l'ensemble des éléments traversés par la discontinuité.

En choisissant  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$  constant par élément, la déformation linéarisée peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{SDA} = \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - (\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \otimes \nabla \psi)^S + (\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \otimes \mathbf{n})^S \delta_\Gamma \quad (2.84)$$

où  $(\bullet)^S$  représente la partie symétrique du tenseur  $\bullet$  et  $\delta_\Gamma$  est l'opérateur delta Dirac provenant du gradient de la fonction Heaviside. Remarquons que ce dernier terme est singulier.

Le support de la fonction  $H_\Gamma(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})$  étant limité aux éléments coupés par la discontinuité, les inconnues associées au saut du déplacement sont internes à ces éléments. Les inconnues du problème seront donc les valeurs nodales  $u_I$  du champ de déplacement. Le degré de liberté correspondant à  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$  dans les éléments coupés par  $\Gamma$  est traité comme une variable interne. Le terme dépendant de  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$  dans (2.84) représente une déformation incompatible qui s'ajoute au champ de déformation compatible  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u})$ . La méthode peut ainsi être vue comme un enrichissement du gradient de déplacement plutôt que du déplacement : on est dans le cadre des méthode de type Enhanced Assumed Strain (EAS) (Simo et Rifai, 1990) dont nous reparlerons au chapitre 4.

La méthode SDA présente cependant un certain nombre de limitations :

- ▷ La position de la discontinuité (localisée par la fonction  $H_\Gamma(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})$ ) peut être discontinue entre les éléments. Seul un maillage raffiné permet d'obtenir une bonne représentation de  $\Gamma$  ;
- ▷ Par conséquent, il est impossible de localiser avec précision la pointe de la fissure ;
- ▷ Le saut de déformation qui apparaît dans les éléments contenant  $\Gamma$  rend la déformation totale incompatible avec le champ de déplacement. C'est ce que l'on appelle un "crime variationnel" (voir la remarque 4.8). Il faut alors étudier si la méthode vérifie le patch test (Zienkiewicz et Taylor, 1991).

Notons également qu'une étude comparative des méthodes SDA et partition de l'unité a été proposée par Jirasek (2000).

## 2.5 Conclusion

Nous avons rappelé dans ce chapitre les équations de la mécanique des milieux continus en grandes transformations. En particulier, nous avons insisté sur le phénomène d'incompressibilité, ainsi que sur la linéarisation des grandeurs mécaniques dans la mesure où ces notions seront largement utilisées par la suite. Dans un second temps, nous avons présenté un rapide tour d'horizon des méthodes de discrétisation classiquement utilisées en mécanique, en s'attardant plus particulièrement sur les fondements de la méthode X-FEM. Le prochain chapitre consistera à réutiliser ces concepts de mécanique des milieux continus en grandes transformations dans le cas d'un milieu fissuré, dans l'optique d'une application à la méthode X-FEM. Le cas de l'incompressibilité sera ensuite traité dans un chapitre 4.



## Adaptation de la méthode X-FEM à la mécanique non-linéaire de la rupture

### Sommaire

2.1	Introduction . . . . .	3
2.2	Notations . . . . .	3
2.3	Hyperélasticité appliquée aux élastomères . . . . .	6
	Définition . . . . .	6
	Incompressibilité . . . . .	7
	Linéarisation des grandeurs mécaniques . . . . .	9
	Modèles considérés dans cette étude . . . . .	11
2.4	Méthodes d'approximation en mécanique . . . . .	12
	La méthode des éléments finis . . . . .	12
	Les méthodes de type partition de l'unité . . . . .	13
	La méthode de Nitsche et ses variantes . . . . .	20
	Les méthodes sans maillage . . . . .	23
	La méthode des fortes discontinuités (SDA) . . . . .	25
2.5	Conclusion . . . . .	26



### 3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de détailler l'adaptation de la méthode X-FEM à la mécanique non linéaire de la rupture. Pour simplifier l'étude, le problème de la gestion de l'incompressibilité ne sera pas traité dans l'immédiat. Aussi dans la suite, *les structures seront considérées de faible épaisseur et vérifiant l'hypothèse de contraintes planes*. Nous nous intéresserons en particulier au choix d'une description pour la résolution, aux spécificités de la fissuration des élastomères, ainsi qu'au choix de fonctions d'enrichissement en pointe de fissure. Enfin, une série de validations de la méthode clora le chapitre.

### 3.2 Déformation d'un corps fissuré en grandes transformations

#### Formulation forte

Considérons un corps fissuré  $\mathcal{B}$  dont l'épaisseur est faible, celui-ci est défini par sa surface médiane  $(\Omega)$ , sa frontière  $\Gamma$  et sa distribution d'épaisseur  $H(\mathbf{X})$  dans sa configuration de référence non-déformée  $\mathcal{C}_0$ . Soumis à des sollicitations dans son plan,  $\mathcal{B}$  se déforme et occupe la configuration  $\mathcal{C}$ . La surface médiane, la frontière ainsi que la distribution d'épaisseur dans cette configuration sont notées respectivement  $(\omega)$ ,  $\gamma$  et  $h(\mathbf{x})$  (voir les notations sur la figure 3.1). Le mouvement entre  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}$  est décrit par la transformation  $\phi$  qui relie la

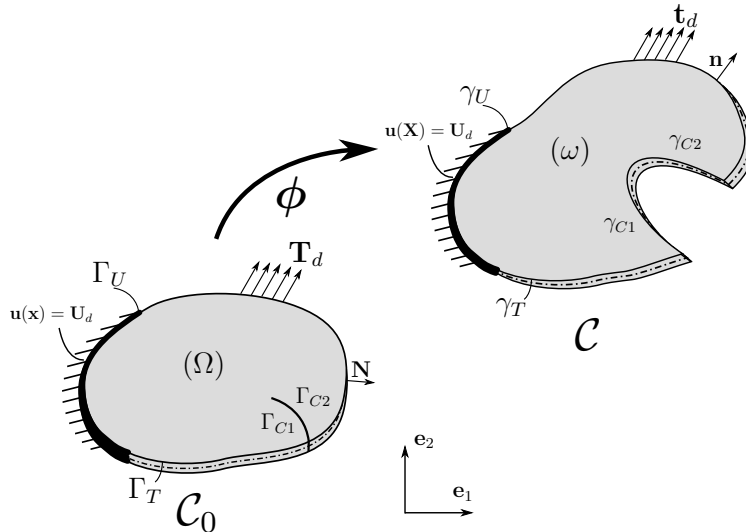


FIGURE 3.1: Déformation d'un corps fissuré.

position d'une particule  $\mathbf{x}$  au temps  $t$  à sa position initiale  $\mathbf{X}$  :

$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t) \quad (3.1)$$

Cette transformation doit être bijective entre  $(\Omega)$  et  $(\omega)$  et inversible. Dans la configuration déformée, la frontière de  $(\omega)$  peut être séparée en deux parties distinctes :  $\gamma_U$  sur laquelle sont appliquées les conditions limites de Dirichlet, et  $\gamma_T$  pour les conditions limites de Neumann. Remarquons que  $\gamma_T$  inclut les lèvres de la fissure  $\gamma_{C1}$  et  $\gamma_{C2}$ . Les parties correspondantes sont notées, dans la configuration de référence,  $\Gamma_U$  (conditions limites de Dirichlet),  $\Gamma_T$  (conditions limites de Neumann),  $\Gamma_{C1}$  et  $\Gamma_{C2}$  pour les lèvres de la fissure. Afin de respecter la bijectivité de la transformation,  $\Gamma_{C1}$  et  $\Gamma_{C2}$  sont mathématiquement différentes bien que superposées.

En négligeant les forces de volume, la formulation forte du problème s'exprime en description eulérienne :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{0} & \text{dans } \omega \\ \underline{\underline{u}}(\mathbf{x}) = \underline{\underline{U}}_d & \text{sur } \gamma_u \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \underline{\underline{t}}_d & \text{sur } \gamma_T \setminus (\gamma_{C1} \cup \gamma_{C2}) \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{sur } \gamma_{C1} \text{ et } \gamma_{C2} \end{cases} \quad (3.2)$$

Dans ces équations,  $\underline{\underline{\sigma}}$  est le tenseur des contraintes de Cauchy,  $\mathbf{u}$  le champ de déplacement,  $\mathbf{U}_d$  les déplacements imposés,  $\mathbf{n}$  la normale unitaire extérieure à la frontière  $\gamma_T$  et  $\mathbf{t}_d$  le vecteur contrainte imposé par unité de longueur déformée. En description lagrangienne, cet équilibre s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Div } \underline{\underline{P}} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{U}_d & \text{sur } \Gamma_u \\ \underline{\underline{P}} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{T}_d & \text{sur } \Gamma_T \setminus (\Gamma_{C1} \cup \Gamma_{C2}) \\ \underline{\underline{P}} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{0} & \text{sur } \gamma_{C1} \text{ et } \gamma_{C2} \end{cases} \quad (3.3)$$

Dans ces équations,  $\mathbf{U}_d$  correspond aux déplacements imposés,  $\mathbf{N}$  à la normale unitaire extérieure à la frontière  $\Gamma_T$  et  $\mathbf{T}_d$  au vecteur contrainte imposé par unité de longueur non-déformée.

### Formulation faible

Nous nous contenterons pour l'instant d'une formulation en déplacement, car ce type de formulation est suffisant dans le cas d'un matériau néo-hookéen incompressible sous l'hypothèse des contraintes planes. La solution du problème est recherchée par minimisation de l'énergie potentielle  $\Pi_{EP}$  du système. Relativement à la configuration non-déformée, celle-ci s'écrit :

$$\Pi_{EP}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} W(\underline{\underline{F}}) d\Omega - \int_{\Gamma_T} \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}_d d\Gamma \quad (3.4)$$

La formulation faible du problème s'obtient en écrivant la stationnarité de ce potentiel :

$$\text{trouver } \mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid \forall \delta \mathbf{v} \in \mathcal{V}^0 \quad D_{\delta \mathbf{v}} \Pi_{EP}(\mathbf{u}) = 0 \quad (3.5)$$

où les espaces  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{V}^0$  sont définis par :

$$\mathcal{V} = \left\{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega) \mid \mathbf{u} = \mathbf{U}_d \text{ sur } \Gamma_u \right\} \quad (3.6)$$

$$\mathcal{V}^0 = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega) \mid \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_u \right\} \quad (3.7)$$

Si les efforts extérieurs sont conservatifs, alors on obtient :

$$\text{trouver } \mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid \forall \delta \mathbf{v} \in \mathcal{V}^0 \quad \text{on ait} \quad \int_{\Omega} \underline{\underline{S}}(\mathbf{u}) : \delta \underline{\underline{E}} d\Omega - \int_{\Gamma_T} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}_d d\Gamma = 0 \quad (3.8)$$

où le terme  $\delta \underline{\underline{E}}$  s'écrit :

$$\delta \mathbf{E}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left[ (\nabla \delta \mathbf{v})^T \cdot \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^T \nabla \delta \mathbf{v} \right] = \left[ (\nabla \delta \mathbf{v})^T \cdot \underline{\underline{F}} \right]_{\text{sym}} \quad (3.9)$$

Dans l'expression (3.8), le terme de gauche correspond au travail virtuel des efforts intérieurs  $\delta W_{\text{int}}$  et le terme de droite au travail virtuel des efforts extérieurs  $\delta W_{\text{ext}}$ . Cette expression peut donc se réécrire sous une forme plus compacte :

$$\text{trouver } \mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid \forall \delta \mathbf{v} \in \mathcal{V}^0 \quad \text{on ait} \quad \delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{v}) - \delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{v}) = 0$$

Relativement à la configuration déformée (formulation eulérienne), cette forme s'écrit :

$$\text{trouver } \mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid \forall \delta \mathbf{v} \in \mathcal{V}^0 \quad \text{on ait} \quad \int_{\omega} \underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\delta \mathbf{v}) d\omega - \int_{\gamma_T} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_d d\gamma = 0 \quad (3.10)$$

où  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  est le tenseur des déformations linéarisées.

Le terme de gauche de cette équation représente là encore le travail virtuel des efforts intérieurs  $\delta W_{\text{int}}$  et celui de droite, le travail virtuel des efforts extérieurs  $\delta W_{\text{ext}}$ . Ces deux termes ont rigoureusement la même valeur que dans le cas lagrangien. La formulation faible du problème (qui correspond au Principe des Travaux Virtuels) peut donc être écrite sous la forme générale, et ce quelle que soit la formulation (eulérienne ou lagrangienne) :

$$\text{trouver } \mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid \forall \delta \mathbf{v} \in \mathcal{V}^0 \quad \text{on ait} \quad \delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{v}) - \delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{v}) = 0 \quad (3.11)$$

Les équations (3.8) et (3.10) sont non linéaires d'une part à cause du comportement du matériau, et d'autre part à cause des non-linéarités géométriques (au travers du tenseur  $\delta \underline{\underline{E}}$  en lagrangien et sous la forme de la configuration courante ( $\omega$ ) en eulérien).

### 3.3 Linéarisation de la formulation faible

De nombreuses méthodes ont été développées pour la résolution d'équations non linéaires. La classe de méthodes la plus connue est celle basée sur l'algorithme de Newton-Raphson qui consiste à résoudre une série de problèmes linéarisés jusqu'à obtention de la solution. Dans cette optique, nous allons maintenant présenter la linéarisation des équations du Principe des Travaux Virtuels. Cette linéarisation se base sur les résultats déjà présentés dans la section 2.3.

#### Linéarisation du travail des efforts intérieurs

La linéarisation de  $\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{v})$  s'obtient en utilisant la dérivée de Gâteaux du terme considéré :

$$D_{\mathbf{u}}\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \delta \underline{\underline{E}} : D_{\mathbf{u}}(\underline{\underline{S}}) d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\underline{S}} : D_{\mathbf{u}}(\delta \underline{\underline{E}}) d\Omega \quad (3.12)$$

$$= \int_{\Omega} D_{\mathbf{u}}\delta \underline{\underline{E}} : \mathbb{C} : D_{\mathbf{u}}\underline{\underline{E}} d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\underline{S}} : [(\nabla_0 \mathbf{u})^T \cdot (\nabla_0 \delta \mathbf{v})] d\Omega \quad (3.13)$$

où le tenseur d'élasticité lagrangien  $\mathbb{C}$  a été présenté en (2.33) et  $D_{\mathbf{u}}(\underline{\underline{E}})$  est donné par (2.27). En formulation eulérienne, on obtient :

$$D_{\mathbf{u}}\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{v}) = \int_{\omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\delta \mathbf{v}) : \mathbb{C}^e : \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}) d\Omega + \int_{\omega} \underline{\underline{\sigma}} : [(\nabla \mathbf{u})^T \cdot (\nabla \delta \mathbf{v})] d\Omega \quad (3.14)$$

où  $\mathbb{C}^e$  est le tenseur d'élasticité eulérien.

#### Linéarisation du travail des efforts extérieurs

En faisant l'hypothèse d'efforts extérieurs conservatifs, la linéarisation du travail des efforts extérieurs s'écrit :

$$D_{\mathbf{u}}\delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{v}) = 0 \quad (3.15)$$

**Remarque 3.1** Dans le cas où les efforts extérieurs ne sont pas conservatifs, comme par exemple dans le cas de forces suiveuses, la dépendance du travail virtuel des efforts extérieurs aux déformations du solide doit être prise en compte lors de la linéarisation (en raison des changements d'aire et de normale au cours de la déformation).  $\diamond$

### 3.4 Choix d'une description

#### Formulations classiques en mécanique

Pour résoudre numériquement le problème présenté sur la figure 3.1 ainsi que les équations (3.8) et (3.10), il nous faut choisir une description pour l'écriture des équations. Classiquement, trois choix se présentent :

- ▷ la description lagrangienne du problème qui conduira à la formulation **lagrangienne totale** des équations à résoudre : les nœuds du maillage suivent la matière au cours de leur mouvement de  $(\Omega)$  vers  $(\omega)$ . Plus le domaine est soumis à de grandes transformations, plus le maillage se distord comme sur la figure 3.2. Ce type de formulation reste cependant tout à fait adapté à des niveaux de déformation de l'ordre de plusieurs dizaines de pourcents, mais au delà un remaillage peut devenir nécessaire ;
- ▷ la description eulérienne du problème qui conduira aux formulations **eulérienne** et **lagrangienne réactualisée** des équations. Pour la formulation eulérienne "pure", les grandeurs interpolées par le maillage sont eulériennes et donc associées à une position fixe de l'espace (position des nœuds du maillage). Le maillage reste fixe au cours du temps et donc ne se distord pas (cf figure 3.3).

La formulation lagrangienne réactualisée est quant à elle une alternative à la formulation eulérienne "pure". L'équilibre du solide s'écrit sous forme eulérienne sur la configuration déformée, mais les grandeurs mécaniques restent exprimées de manière lagrangienne (les nœuds du maillage suivent les particules lors de leur mouvement) ;

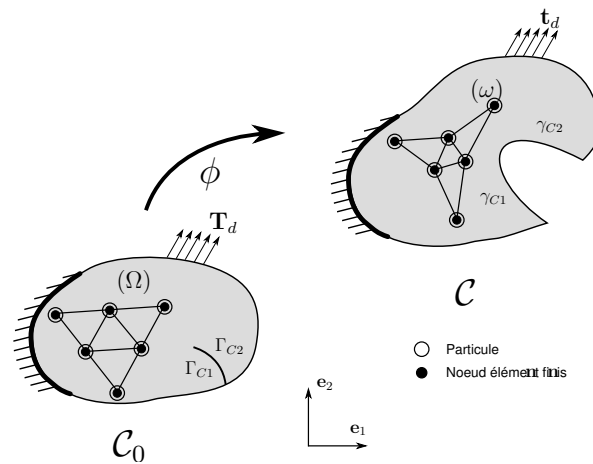


FIGURE 3.2: Formulation lagrangienne totale : les nœuds  $\bullet$  du maillage suivent les particules de matière  $\circ$  au cours de leur mouvement. Si ces particules subissent de grands déplacements, alors le maillage risque de se distordre.

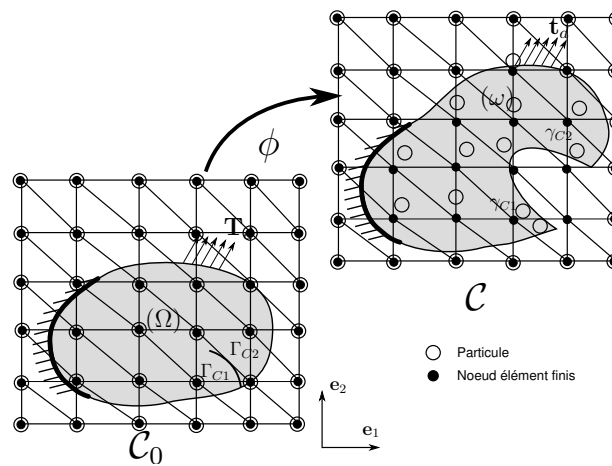


FIGURE 3.3: Formulation eulérienne : les nœuds  $\bullet$  du maillage sont associés à une position fixe de l'espace. Leur position est indépendante de celle des particules de matière  $\circ$ .

- ▷ la description hybride du problème qui conduira à la formulation **Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE)** (Donea, 1983) des équations. Les grandeurs ne s'expriment ni dans la configuration de référence  $(\Omega)$  ni dans la configuration courante  $(\omega)$ , mais dans une configuration arbitraire  $(\hat{\Omega})$ . Les descriptions lagrangienne et eulérienne peuvent être considérées comme des cas extrêmes de l'ALE ( $(\hat{\Omega}) = (\Omega)$  ou  $(\hat{\Omega}) = (\omega)$ ). Pour cette formulation, le maillage et la matière se déforment indépendamment (cf figure 3.4). Nous n'utiliserons cependant pas cette formulation dans la suite de ce travail.

### Choix d'une formulation dans le cadre X-FEM

Le choix de la formulation la plus adaptée à notre cas se fera donc en considérant les avantages et inconvénients d'une intégration de la formulation faible sur la configuration de référence ou la configuration déformée. Selon que l'on se place en formulation lagrangienne ou eulérienne, l'intégration s'effectue sur les éléments de la configuration de référence  $\Omega_e$  ou sur ceux de la configuration déformée  $\omega_e$  (voir la figure 3.5). Pour cela, une intégration de Gauss sur l'élément parent est utilisée. Dans le cas d'une formulation lagrangienne, la transformation  $\psi^R$  qui relie l'élément parent à chacun des éléments de la discrétisation de  $(\Omega)$  est construite. Ainsi, connaissant le jacobien de cette transformation, il est possible d'intégrer la formulation faible à partir de cet élément. Dans le cas d'une formulation eulérienne, c'est la transformation  $\psi^D$  qui relie l'élément parent à chacun des éléments de  $(\omega)$  qui est construite. Ces deux transformations sont simplement calculées à partir

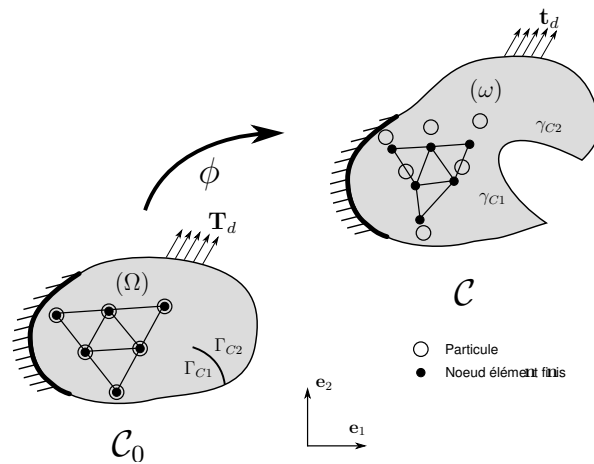


FIGURE 3.4: Formulation ALE : le mouvement des nœuds du maillage  $\bullet$  est indépendant de celui des particules de matière  $\circ$ .

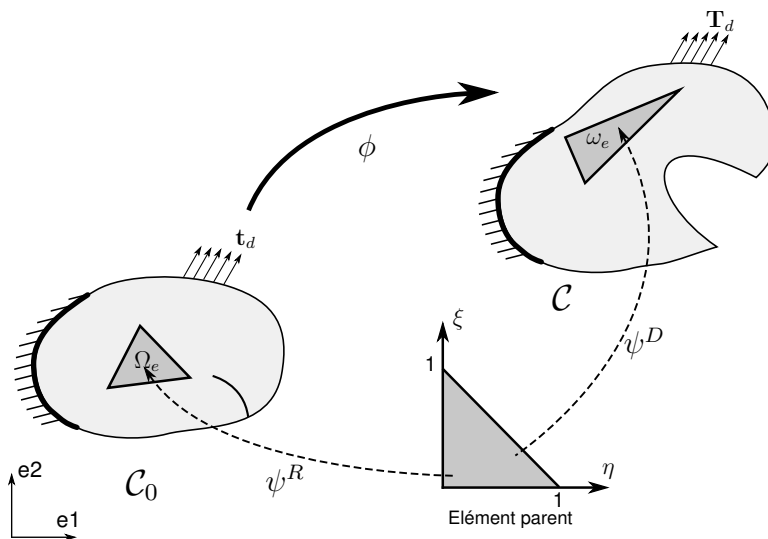


FIGURE 3.5: Intégration de la formulation faible dans le cadre éléments finis.

des coordonnées des nœuds de l'élément  $\Omega_e$  ou  $\omega_e$ , les transformations  $\psi^R$  et  $\psi^D$  étant polynomiales. En éléments finis classique il est aussi simple de construire  $\psi^R$  que  $\psi^D$  et donc le choix entre une formulation lagrangienne totale et réactualisée se fait sur d'autres critères tels la distorsion du maillage ou la structuration du code éléments finis utilisé.

Dans notre cas, le problème ne se situe pas à ce niveau, mais au niveau de la construction de  $\psi^R$  et  $\psi^D$ . Sur la figure 3.6, considérons un élément  $\Omega_e$  contenant la pointe de fissure : les degrés de liberté de cet élément sont enrichis par des fonctions provenant du développement asymptotique du déplacement en fond de fissure (voir la section 2.4). L'élément  $\omega_e$  sera non seulement fendu dans la configuration courante, mais de plus ses bords ne seront plus droits à cause de l'enrichissement. La transformation  $\psi^D$  sera donc non-polynomiale et difficile à obtenir : il n'est alors plus possible, connaissant les coordonnées des nœuds de  $\omega_e$ , de construire  $\psi^D$ . Cette transformation peut aussi être obtenue par une superposition des transformations  $\psi^R$  et  $\phi$ . Dans ce cas, le calcul du jacobien de la transformation dépend non-seulement des déplacements nodaux des éléments, mais aussi de la valeur des degrés de liberté enrichis. Contrairement à ce qui vient d'être présenté, la transformation  $\psi^R$  reste aisée à construire car dans la configuration de référence sa procédure de construction est identique au cas des éléments finis classiques. C'est pour cette raison que nous avons fait le choix (tout comme la plupart des auteurs qui se sont intéressés à l'extension de X-FEM au cas des grandes transformations (Dolbow et Devan, 2004; Belytschko et al., 2001; Areias et Belytschko, 2005)) d'utiliser une formulation lagrangienne totale.

Il est toutefois possible d'utiliser une formulation lagrangienne réactualisée avec X-FEM (Gasser et Holzapfel,

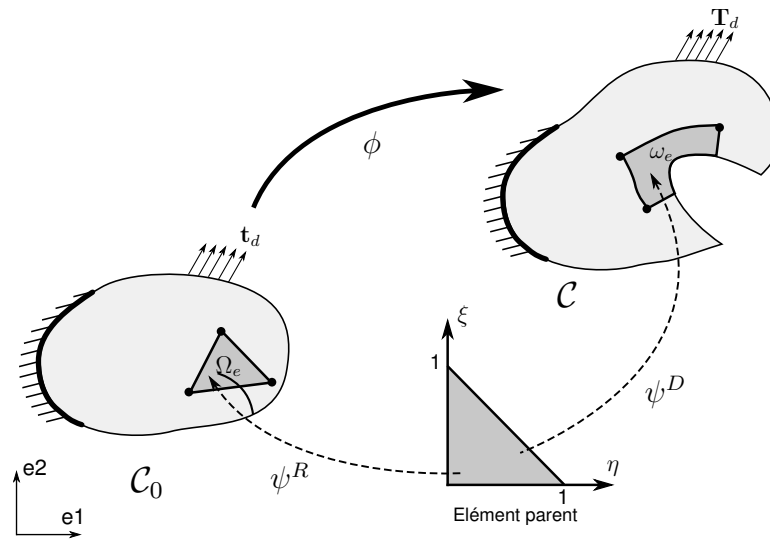


FIGURE 3.6: Intégration de la formulation faible dans le cadre X-FEM.

2006; Mergheim *et al.*, 2006). Pour cela, il faut se restreindre à un enrichissement de type Heaviside pour modéliser la fissure. Ce faisant, la transformation  $\psi^D$  redevient polynomiale, bien que discontinue dans les éléments coupés par la fissure (voir figure 3.7). Ces éléments ont donc à nouveau des bords droits. Pour intégrer la formulation faible, il suffit de boucler sur les éléments de la configuration déformée. Si ces éléments sont coupés par la fissure, il faut ensuite boucler sur les sous-éléments ( $\omega_{e1}, t_1$  et  $t_2$  sur la figure 3.7), puis extraire les coordonnées de ses sommets de chacun de ces sous-éléments pour construire les transformations  $\psi_2^D, \psi_{t1}^D$  et  $\psi_{t2}^D$  qui les lient à l'élément parent.

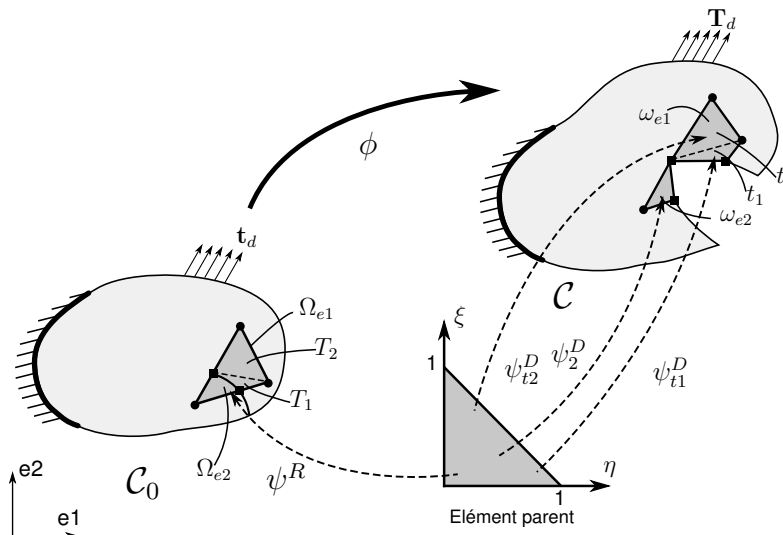


FIGURE 3.7: Intégration de la formulation faible dans la configuration courante avec X-FEM. A partir des coordonnées des sommets des sous-éléments  $\omega_{e1}, t_1$  et  $t_2$ , il est possible de construire les transformations polynomiales  $\psi_2^D, \psi_{t1}^D$  et  $\psi_{t2}^D$  qui lient ces sous-éléments à l'élément parent.

### 3.5 Résolution du système discrétisé

La formulation lagrangienne totale étant choisie, il faut à présent discrétiser, puis résoudre le système non linéaire (3.8).

## Résolution par un algorithme de Newton-Raphson

La méthode de résolution des équations non linéaires de Newton-Raphson est fondée sur le développement limité de Taylor de l'équation à résoudre, afin d'obtenir un schéma itératif. Pour la résolution d'une équation non linéaire du type  $f(x) = 0$  à partir du voisinage d'un point  $x_0$ , on cherche à trouver un incrément  $\Delta u$  tel que  $f(x_0 + \Delta u) = 0$ . Le développement limité de Taylor au voisinage du point  $x_0$  s'écrit :

$$f(x_0 + \Delta u) = f(x_0) + \underbrace{\Delta u \frac{\partial f}{\partial \Delta u}(x_0 + \Delta u)}_{=D_{\Delta u}f(x)} \Big|_{\Delta u=0} + \dots \dots (\text{termes d'ordre supérieur}) \quad (3.16)$$

Il faut donc chercher  $\Delta u$  tel que :

$$f(x_0) + D_{\Delta u}f(x) = 0 \quad (3.17)$$

$D_{\Delta u}f(x)$  étant la dérivée directionnelle de  $f$  en  $x_0$ , d'où le schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} f(x_k) + D_{\Delta u}f(x_k) = 0 \\ x_{k+1} = x_k + \Delta u \end{cases} \quad (3.18)$$

Dans notre cas, il faudra résoudre à chaque itération le système linéaire suivant :

$$\delta W(\mathbf{u}, \delta \mathbf{v}) + D_{\Delta \mathbf{u}}\delta W(\mathbf{u}, \delta \mathbf{v}) = 0 \quad (3.19)$$

Les expressions de  $\delta W(\mathbf{u}, \delta \mathbf{v})$  et de sa linéarisation étant données par les équations (3.8) et (3.12). Le champ de déplacement est mis à jour par la relation :

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \Delta \mathbf{u} \quad (3.20)$$

Remarquons que nous nous sommes seulement intéressés à l'implémentation de Newton Raphson la plus classique. En effet, la convergence de cette méthode s'est avérée suffisante tout au long de ce travail. Dans le cas contraire, il aurait été possible d'utiliser une méthode de type "Line Search" pour accélérer la convergence.

## Discrétisation des équations

Les champs  $\mathbf{u}$  et  $\delta \mathbf{v}$  sont interpolés par éléments finis selon l'expression donnée en (2.69). On obtient alors le système suivant à résoudre à chaque itération :

$$D_{\Delta \mathbf{u}}\delta W(\mathbf{u}^h, \delta \mathbf{v}^h) = -\delta W(\mathbf{u}^h, \delta \mathbf{v}^h) \quad (3.21)$$

$$D_{\Delta \mathbf{u}}\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}^h, \delta \mathbf{v}^h) - D_{\Delta \mathbf{u}}\delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}^h, \delta \mathbf{v}^h) = \delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}^h, \delta \mathbf{v}^h) - \delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}^h, \delta \mathbf{v}^h) \quad (3.22)$$

Les expressions de  $D_{\Delta \mathbf{u}}\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}^h, \delta \mathbf{v}^h)$ ,  $D_{\Delta \mathbf{u}}\delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}^h, \delta \mathbf{v}^h)$ ,  $\delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}^h, \delta \mathbf{v}^h)$  et  $\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}^h, \delta \mathbf{v}^h)$  sont obtenues en remplaçant le champ éléments finis dans les expressions continues de  $D_{\Delta \mathbf{u}}\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{v})$ ,  $D_{\Delta \mathbf{u}}\delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{v})$ ,  $\delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{v})$  et  $\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{v})$ .

Ce système se met sous la forme :

$$([K]^{\text{phys}} + [K]^{\text{geo}}) [\Delta \mathbf{u}] = [f]^{\text{ext}} - [f]^{\text{int}} \quad (3.23)$$

où  $[K]^{\text{phys}}$  est la matrice tangente physique qui rend compte des non-linéarités du matériau,  $[K]^{\text{geo}}$  la matrice tangente géométrique qui rend compte des non-linéarités cinématiques,  $[f]^{\text{ext}}$  est appelé vecteur forces extérieures et  $[f]^{\text{int}}$  le vecteur forces intérieures. Les matrices et vecteurs de ce système sont liés à celles du système (3.21) par les relations suivantes :

$$D_{\Delta \mathbf{u}}\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}^h, \delta \mathbf{v}^h) = [\delta \mathbf{v}] [K]^{\text{phys}} [u] \quad (3.24)$$

$$D_{\Delta \mathbf{u}}\delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}^h, \delta \mathbf{v}^h) = [\delta \mathbf{v}] [K]^{\text{geo}} [u] \quad (3.25)$$

$$\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}^h, \delta \mathbf{v}^h) = [\delta \mathbf{v}] [f]^{\text{int}} \quad (3.26)$$

$$\delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}^h, \delta \mathbf{v}^h) = [\delta \mathbf{v}] [f]^{\text{ext}} \quad (3.27)$$

Les matrices tangentes s'obtiennent par les expressions suivantes :

$$[K]_{ij}^{\text{phys}} = \int_{\Omega} D_{\mathbf{u}} \underline{E}(\mathbf{N}^i) : \mathbb{C} : D_{\mathbf{u}} \underline{E}(\mathbf{N}^j) d\Omega \quad (3.28)$$

$$[K]_{ij}^{\text{geo}} = \int_{\Omega} \underline{S} : \left( (\nabla_0 \mathbf{N}^i)^T (\nabla_0 \mathbf{N}^j) \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left( (\nabla_0 \mathbf{N}^i) \cdot \underline{S} \right) : (\nabla_0 \mathbf{N}^j) d\Omega \quad (3.29)$$

et les vecteurs forces s'écrivent :

$$[f]_i^{\text{int}} = \int_{\Omega} \underline{S} : \delta \underline{E}(\mathbf{u}, \mathbf{N}^i) d\Omega \quad (3.30)$$

$$[f]_i^{\text{ext}} = \int_{\Gamma_T} \mathbf{T}_d \cdot \mathbf{N}^i d\Gamma \quad (3.31)$$

### 3.6 Spécificités de la fissuration des élastomères

La fissuration des matériaux élastomères est un domaine bien distinct de celui de la fissuration des métaux. En effet, le comportement mécanique très différent de ces deux matériaux influence la façon dont ceux-ci se fissurent. Ainsi, une fissure dans un matériau métallique est modélisée par une ligne de discontinuité à travers laquelle apparaît un saut de déplacement. Cette modélisation est en accord avec la réalité expérimentale (figure 3.8). La rigidité des élastomères étant beaucoup plus faible que celle des métaux, les deux faces de la fissure vont très largement s'écarter entre l'état libre et l'état déformé : on observe alors un émoussement caractéristique de la pointe de fissure (figure 3.9). Cet émoussement est beaucoup plus visible que celui apparaissant en fissuration élasto-plastique des métaux. Pour plus de précisions, il est possible de se référer à la thèse de T. Elguedj (Elguedj, 2006) qui traite de la fissuration élasto-plastique des métaux avec X-FEM.

#### La fissuration des élastomères

Les premiers travaux sur la fissuration des élastomères ont été proposés par Rivlin et Thomas dans les années 50. Le concept le plus important est sans nul doute celui d'énergie de déchirement (Rivlin et Thomas, 1953). Cette grandeur est une extension aux élastomères du taux de restitution d'énergie  $G$  (Griffith, 1920) (et donc de l'intégrale  $J$ ). Dans leur travail, Rivlin et Thomas ont en effet montré que la fissuration des élastomères était contrôlée par cette énergie de déchirement  $T$ , définie par la relation suivante :

$$T = - \left( \frac{\partial W}{\partial A} \right)_l \quad (3.32)$$

où  $W$  représente la densité d'énergie de déformation dans le matériau,  $A$  est l'aire d'une des lèvres de la fissure, et l'indice  $l$  indique que la dérivation s'effectue de telle manière à ce que les efforts extérieurs ne travaillent pas (déplacements constants là où la frontière du domaine n'est pas libre d'effort). En considérant

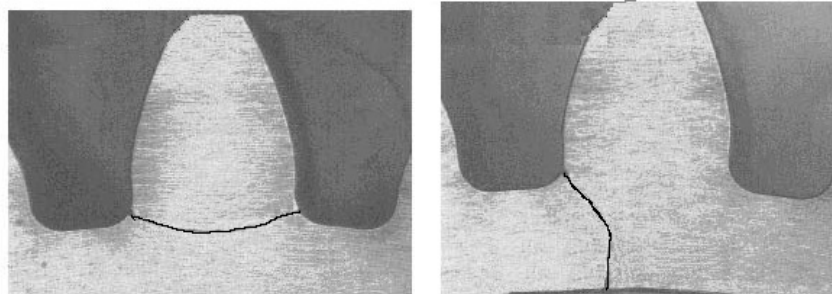


FIGURE 3.8: Propagation de fissures dans un pignon métallique : la fissure est une ligne de discontinuité du champ de déplacement. (photo D.G. Lewicki : <http://www.grc.nasa.gov/WWW/5900/5950/GearCrack/GearCrack.htm>)





FIGURE 3.9: Fissure dans une éprouvette sollicitée en glissement pur (photo Trelleborg). Les lèvres de la fissure s'écartent fortement et la pointe de fissure s'émousse.

que  $A = cH$  (où  $H$  est l'épaisseur du solide fissuré dans la configuration de référence, et  $c$  la longueur de la fissure), l'équation précédente devient :

$$T = - \left( \frac{1}{H} \frac{\partial W}{\partial c} \right)_l \quad (3.33)$$

Numériquement, l'évaluation de l'énergie de déchirement se fera par le calcul de l'intégrale  $J$  (Rice, 1968).

### L'intégrale $J$ en petites perturbations

Cette intégrale a été développée par James<sup>1</sup> Rice en 1968 (Rice, 1968) et propose une autre manière d'écrire le bilan énergétique en pointe de fissure. Considérant un matériau homogène présentant un comportement élastique (linéaire ou non) en petites perturbations et entaillé selon l'axe  $\mathbf{E}_1$  (voir la figure 3.10), J. Rice montre alors que l'intégrale  $J$  définie par l'équation (3.34) est non nulle si le champ de contrainte en pointe de fissure est singulier. De plus, la valeur de l'intégrale  $J$  est identique à celle du taux de restitution d'énergie  $G$  (Griffith, 1920).

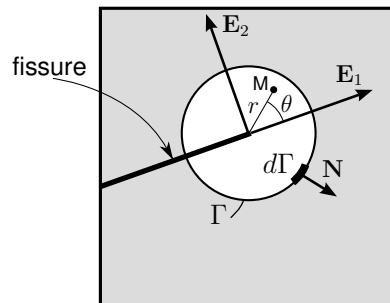


FIGURE 3.10: Contour étudié pour l'intégrale  $J$  en petites perturbations.

$$J = \int_{\Gamma} \left( W_e \cdot n_1 - \sigma_{ij} \cdot n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) d\gamma \quad (3.34)$$

La propriété fondamentale de cette intégrale est l'indépendance de sa valeur au contour  $\Gamma$  choisi. Cette indépendance au contour s'obtient en intégrant l'équation (3.34) sur deux contours quelconques ( $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ ) englobant la pointe de fissure. L'intégrale sur  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  et les faces de la fissure est alors nulle, d'où la propriété d'indépendance. L'intégrale  $J$  représente également la variation d'énergie potentielle correspondant à une propagation de la fissure d'une unité de surface (Hocine, 1996).

**Remarque 3.2** Une autre interprétation, utilisant le tenseur des contraintes d'Eshelby, sera donnée dans le chapitre 5.◇

1. d'où le nom de l'intégrale...

## L'intégrale $J$ en grandes transformations

Dans le cas où les grandeurs lagrangiennes et eulériennes doivent être différenciées, l'intégrale  $J$  s'écrit :

$$J = \int_{\gamma} \left( w n_1 - \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right) d\gamma \quad (3.35)$$

où  $\gamma$  est le contour d'intégration,  $\mathbf{n}$  la normale unitaire extérieure au contour, et  $w$  la densité d'énergie de déformation par unité de volume déformé (figure 3.11). Cette expression eulérienne est adaptée à une résolution

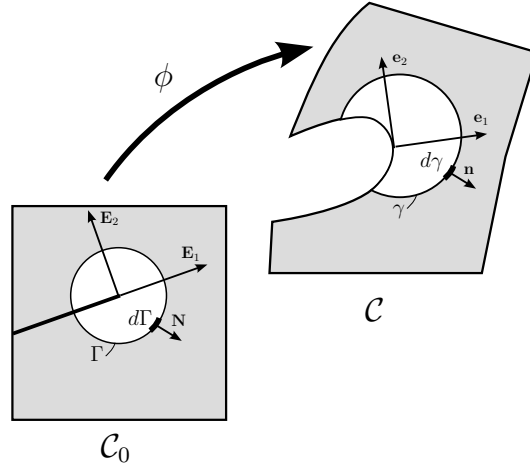


FIGURE 3.11: Contour utilisé pour le calcul de l'intégrale  $J$  en grandes transformations.

lagrangienne réactualisée. Cependant, nous avons opté précédemment pour une résolution lagrangienne totale où seule la configuration de référence est parfaitement connue. C'est pourquoi  $J$  doit être réécrite en fonction de variables lagrangiennes par une opération de pull-back (Knowles et Sternberg, 1972) (figure 3.11)

$$J = \int_{\Gamma} \left( W N_1 - \mathbf{N} \cdot \underline{\underline{P}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_1} \right) d\Gamma \quad (3.36)$$

où  $W$  est la densité d'énergie de déformation par unité de volume non-déformé,  $\mathbf{N}$  est la normale unitaire extérieure au contour d'intégration  $\Gamma$  et  $\underline{\underline{P}}$  est le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff.

### Calcul numérique de l'intégrale $J$

Que l'intégrale  $J$  soit calculée sous sa forme lagrangienne ou sous sa forme eulérienne, il faut intégrer une fonction scalaire sur un contour ( $\Gamma$  ou  $\gamma$ ). Or, lors d'un calcul par éléments finis, il est plus aisé de calculer une intégrale sur une surface (en 2D) ou un volume (en 3D) que sur un contour. En effet, les variables matérielles du calcul (telles que les contraintes ou le flux plastique) ne sont stockées qu'aux points de Gauss des éléments et une intégration sur un contour oblige donc à interpoler à nouveau ces valeurs, ce qui est source d'imprécision. Il est aujourd'hui classique d'évaluer l'intégrale  $J$  sous forme d'intégrale de domaine : au lieu de calculer cette intégrale à partir du contour  $\Gamma$ , celle-ci est calculée à partir de la surface contenue dans le domaine délimité par  $\Gamma$ . Les premiers travaux sur cette écriture ont été proposés par Destuynder *et al.* (1983) dans le cas bidimensionnel. La méthode a ensuite été étendue au cas tridimensionnel par Nikishkov et Atluri (1987) et au cas tridimensionnel curviligne par Dolbow et Gosz (2002). Dans le cadre X-FEM, cette méthode a été utilisée dès le départ, tant en fissuration bidimensionnelle (Moës *et al.*, 1999) que tridimensionnelle (Sukumar *et al.*, 2000). Dans ce dernier cas, la gestion des fissures curvilignes a été considérablement simplifiée par l'utilisation de la représentation "levelset" de la fissure (Moës *et al.*, 2002). Pour cela, deux contours  $\Gamma$  et  $\Gamma_e$  sont considérées (voir figure 3.12). L'intégrale  $J$  (3.36) se réécrit sous la forme :

$$J = \int_{\Gamma} \left( W \mathbf{N} - \mathbf{N} \cdot \underline{\underline{P}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X} \right) \cdot \mathbf{E}_1 d\Gamma \quad (3.37)$$

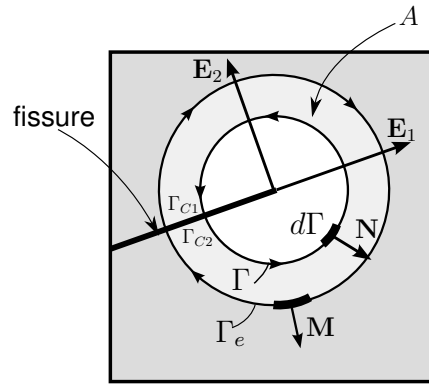


FIGURE 3.12: Contours pour l'intégrale J sous forme de domaine.

On considère ensuite une fonction  $\alpha$  suffisamment régulière telle que :

$$\begin{cases} \alpha = 1 & \text{sur } \Gamma \\ \alpha = 0 & \text{sur } \Gamma_e \end{cases} \quad (3.38)$$

Cette fonction est ensuite utilisée pour définir la fonction test  $\mathbf{q}$  :

$$\mathbf{q} = \alpha \mathbf{E}_1 \quad (3.39)$$

et on évalue l'expression :

$$\tilde{J} = \int_C \left( W \mathbf{N} - \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X}}} \right) \cdot \mathbf{q} \, d\Gamma \quad (3.40)$$

où  $C$  est le contour  $\Gamma \cup \Gamma_{C1} \cup \Gamma_e \cup \Gamma_{C2}$ .

Grâce aux propriétés de  $\mathbf{q}$ , et dans le cas où la fissure n'est pas chargée, il vient :

$$J = -\tilde{J} \quad (3.41)$$

La pointe de la fissure n'étant pas à l'intérieur de  $C$ , il est possible d'appliquer le théorème de la divergence, et ainsi d'exprimer l'intégrale  $J$  grâce l'intégrale de domaine suivante :

$$J = - \int_A \left( W \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{\nabla}}_0 \mathbf{u} \right) \cdot \underline{\underline{\nabla}}_0 \mathbf{q} \, dS \quad (3.42)$$

où  $A$  est l'aire contenue dans  $C$ .

Pour faciliter l'intégration de cette expression, on choisit d'abord de faire tendre  $\Gamma$  vers la pointe de fissure :  $A$  est donc maintenant l'aire contenue dans le contour  $\Gamma_e$ . En pratique, le domaine  $A$  sera constitué des éléments contenant au moins un noeud situé dans un cercle de rayon  $r$  (fixé), centré sur la pointe de fissure (voir la figure 3.13(a)). De plus,  $\alpha$  est choisi sous forme d'un plateau égal à 1 en pointe de fissure et décroissant linéairement vers 0 sur la dernière couche d'éléments délimitant le contour  $\Gamma_e$  (figure 3.13(b)). Ainsi, le gradient de  $\mathbf{q}$  est nul dans la zone proche de la pointe de fissure, c'est-à-dire à l'endroit où la qualité de la solution est la moins bonne. Grâce à ces choix de domaine et de fonction poids, le calcul de  $J$  est facilité et la qualité de son évaluation améliorée (Destuynder *et al.*, 1983).

**Remarque 3.3** L'extension en 3D de cette expression sera étudiée au chapitre 5.◇

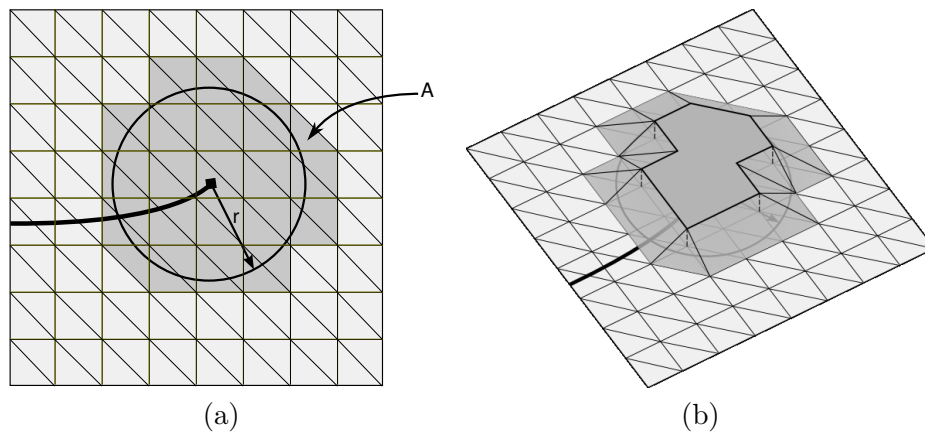


FIGURE 3.13: (a) Sélection du domaine pour l'évaluation de l'intégrale  $J$ . (b) Fonction plateau associée à cette sélection.

### 3.7 Enrichissement en pointe de fissure

#### Développement asymptotique du champ de position

En mécanique linéaire de la rupture, le déplacement est enrichi à partir de fonctions provenant du développement asymptotique du déplacement en fond de fissure déjà présentées par l'équation (2.72). Une interprétation graphique de l'enrichissement par des fonctions du type de celles proposées par Fleming *et al.* (1997) est proposée sur la figure 3.14(b). L'utilisation de ces fonctions comme enrichissement est très performante, comme le montrent les premières applications de X-FEM à la mécanique linéaire de la rupture (Belytschko et Black, 1999; Moës *et al.*, 1999). Nous nous intéresserons maintenant à la recherche de fonctions d'enrichissement adaptées au cas non linéaire.

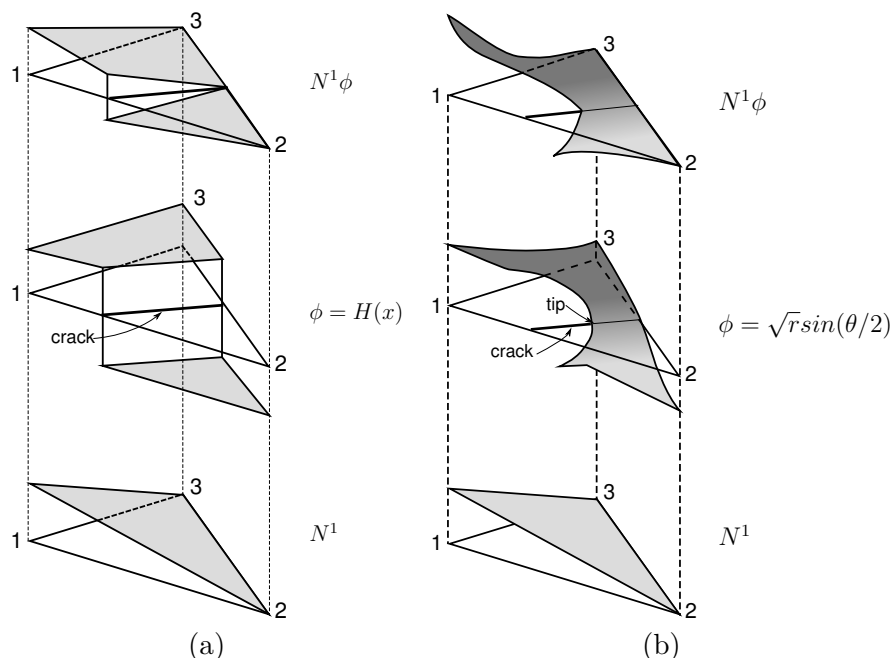


FIGURE 3.14: (a) Approximation discontinue du champ de déplacement obtenue par le produit d'une fonction de forme classique ( $N^1$ ) et d'une fonction d'enrichissement ( $\phi$ ).

(b) Approximation du champ de déplacement en pointe de fissure obtenu par le produit d'une fonction de forme classique ( $N^1$ ) et d'une fonction d'enrichissement ( $\phi$ ).

**Remarque 3.4** Nous ne parlerons pas de la fonction Heaviside puisque celle-ci est utilisable quel que soit le matériau considéré. En effet, cette fonction est neutre vis-à-vis du comportement : elle sert uniquement à rendre compte de la discontinuité du déplacement à travers la fissure (voir la figure 3.14(a)). $\diamond$

L'étude des champs de contrainte et de déplacement en pointe de fissure dans les élastomères est un sujet complexe du fait des fortes non-linéarités qui apparaissent (non-linéarités géométrique et matérielle). Dans ce cas, le formalisme des fonctions d'Airy ne peut plus être utilisé pour obtenir les champs asymptotiques du problème. Les seuls résultats de la littérature sont obtenus en considérant des matériaux de type néo-hookéen généralisé dont la densité d'énergie de déformation s'écrit :

$$W(\underline{\underline{C}}) = \frac{\mu}{2b} \left( \left[ 1 + \frac{b}{n} (\text{Tr}(\underline{\underline{C}}) - 3) \right]^n - 1 \right) \quad (3.43)$$

où  $\mu$  est le module de cisaillement,  $n$  définit la nature de la non-linéarité et  $b$  est un paramètre additionnel. Parmi les différents auteurs ayant publié sur le sujet, retenons les travaux de Geubelle et Knauss (1994a,b,c) pour le cas incompressible sous l'hypothèse des contraintes planes, Knowles et Sternberg (1973, 1974) pour le cas compressible sous l'hypothèse des déformations planes et enfin Stephenson (1982) pour le cas incompressible sous l'hypothèse des déformations planes. Pour une présentation plus détaillée de ces solutions asymptotiques, il est possible de se référer aux travaux de thèse de G. Martin Borret (1998). Dans le cas des contraintes planes étudié ici, nous considérons donc les résultats de Geubelle et Knauss (Geubelle et Knauss, 1994a) et nous nous limiterons au cas néo-hookéen, i.e.  $n = 1$  et  $b = 1$  dans la densité d'énergie de déformation (3.43). La base canonique du champ de position asymptotique en pointe de fissure est alors :

$$\begin{cases} \tilde{y}_1(r, \theta) \approx r \cos(\theta) \\ \tilde{y}_2(r, \theta) = r^{1/2} \sin(\theta/2) \end{cases} \quad (3.44)$$

où  $\tilde{y}_1$  et  $\tilde{y}_2$  sont les projections des positions déformées des points  $\mathbf{X}$  sur les axes  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{E}_2$ , et  $(r, \theta)$  représente le paramétrage du front de la fissure (voir la figure 3.10). De plus, le calcul des termes d'ordre supérieur de ce développement, permet de montrer que seul un terme selon  $\mathbf{E}_2$  apparaît ; ce terme s'obtient par la résolution d'une équation implicite et n'est donc pas facile à obtenir.

**Remarque 3.5** Notons que la forme du développement de  $\tilde{y}_1$  est approchée (Geubelle et Knauss, 1994a) puisqu'il provient de la résolution d'une équation non linéaire selon la théorie WKB (Bender et Orszag, 1978). $\diamond$

Connaissant la base canonique  $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$  du champ de position asymptotique, Stephenson (1982) montre que la famille complète des champs de solution peut être obtenue à partir d'une rotation de corps solide :

$$\mathbf{y} = \underline{\underline{Q}} \cdot \tilde{\mathbf{y}} \quad (3.45)$$

où  $\tilde{\mathbf{y}}$  est la solution canonique et  $\underline{\underline{Q}}$  une rotation de corps solide ; la valeur de la rotation dépendant du caractère mixte du chargement. Le champ solution peut alors s'écrire sous la forme (Chang et Li, 2004) :

$$y_1(r, \theta) = y_1^0 + A_1 r^{1/2} \sin(\theta/2) + r \left[ \frac{A_1 B_1}{A_1^2 + A_2^2} \cos(\theta) - \frac{A_2 B_2}{A_1^2 + A_2^2} \sin^2(\theta/2) \right] + O(r^{3/2}) \quad (3.46)$$

$$y_2(r, \theta) = y_2^0 + A_2 r^{1/2} \sin(\theta/2) + r \left[ \frac{A_2 B_1}{A_1^2 + A_2^2} \cos(\theta) + \frac{A_1 B_2}{A_1^2 + A_2^2} \sin^2(\theta/2) \right] + O(r^{3/2}) \quad (3.47)$$

où  $(y_1^0, y_2^0)$  est un vecteur constant arbitraire,  $A_1, A_2, B_1$  et  $B_2$  sont des constantes dépendant du chargement à l'infini et de la géométrie du problème.

Finalement, seuls les termes singuliers sont conservés comme base d'enrichissement en pointe de fissure :

$$\phi^{NHCP-I} = \left\{ r^{1/2} \sin(\theta/2) \right\} \quad (3.48)$$

**Remarque 3.6** Le terme utilisé pour enrichir le déplacement est identique au terme discontinu de la base (2.72) utilisée en mécanique linéaire de la rupture. $\diamond$

## Remarques

### Autres modes de déformation

Les développements présentés ci-dessus montrent que sans faire d'hypothèse sur la nature du chargement, seules des solutions symétriques sont obtenues en pointe (ces solutions sont assimilables à des champs de mode *I* en petites perturbations). Or, on s'attendait à faire apparaître des solutions sans symétrie particulière en mode mixte. Stephenson montre que dans le cas des matériaux néo-hookéens, les solutions de type mode *II* pur (déplacement transverse impair et déplacement d'ouverture pair) n'existent pas. En effet, ces solutions dégénèrent toujours en solutions trivialement nulles. Le chargement à l'infini pouvant cependant être mixte, G. Martin Borret (1998) suppose alors que ces chargements mixtes se répercutent localement par des rotations de corps solides.

### Raccordement avec les petites perturbations

G. Martin Borret (1998) montre qu'il n'est pas possible de raccorder les solutions en petites perturbations et en grandes transformations. En effet, celles-ci sont obtenues à partir de problèmes aux valeurs propres indépendants. Il en résulte donc que les champs mécaniques en grandes transformations en fond de fissure ne sont pas valables pour les faibles (ou petites) déformations. De même, les champs mécaniques en petites perturbations ne sont pas représentatifs des champs mécaniques locaux en pointe de fissure s'ils impliquent de grandes transformations locales. Martin Borret (1998) montre tout de même qu'un raccordement au sens faible (par l'intermédiaire de l'intégrale  $J$ ) est possible pour les matériaux néo-hookéens généralisés.

### Singularité des champs mécaniques

En utilisant le champ de déplacement asymptotique en fond de fissure (3.48), il est possible d'obtenir le comportement asymptotique des champs de contrainte et de déformation en pointe de fissure :

$$\underline{\underline{\sigma}} \rightarrow \frac{1}{r} \quad (3.49)$$

$$\underline{\underline{P}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{r}} \quad (3.50)$$

$$\sqrt{\det(\underline{\underline{C}})} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{r}} \quad (3.51)$$

Comme le montrent les expressions (3.49) et (3.50), l'ordre de la singularité du champ de contrainte varie entre la configuration de référence et la configuration courante : il est plus élevé dans cette dernière. Il faut également préciser que toutes les composantes des tenseurs des contraintes ne sont pas singulières, et que cet ordre de singularité peut varier d'une composante à l'autre. Ce sont là deux différences avec la mécanique linéaire de la rupture où la singularité du tenseur de Cauchy est en  $1/\sqrt{r}$  pour toutes les composantes du tenseur. Finalement, notons que d'après (3.51), l'épaisseur du matériau tend vers zéro en pointe de fissure sous l'hypothèse des contraintes planes (afin de vérifier la condition d'incompressibilité).

## 3.8 Validations

### Validations préliminaires

L'objectif de ces premiers exemples est de valider la méthode. Les deux premiers concernent la validation de calculs structuraux non linéaires tandis que les deux suivants concernent la mécanique non linéaire de la rupture.

### Indépendance au maillage

Considérons l'extension uniaxiale d'une éprouvette avec une entaille latérale (Single Edge Notched Specimen in Tension : SET) présentée sur la figure 3.15(a). La largeur et la hauteur de l'éprouvette sont toutes les deux égales à 2 mm. Le matériau est néo-hookéen incompressible sous l'hypothèse des contraintes planes

avec  $\mu = 0,4225$  MPa, ce qui correspond à un caoutchouc naturel non chargé. La base de l'éprouvette est bloquée verticalement et un noeud supplémentaire est bloqué afin d'éviter les mouvements de corps rigide. Deux maillages structurés sont utilisés : un premier composé de  $32 \times 16$  éléments triangulaires (voir la figure 3.15(b)), et un second de  $32 \times 15$  éléments (voir la figure 3.15(c)). Pour le premier maillage ( $32 \times 16$ ), la fissure est alignée avec les bords des éléments, alors que pour le second la fissure passe à travers les éléments. Nous comparons les déplacements verticaux des noeuds situés sur le bord supérieur du maillage en fonction du maillage considéré, la différence est tracée sur la figure 3.16(a). Cette différence de déplacement entre les deux maillages reste inférieure à 0,18% malgré les grandes transformations qui apparaissent, comme illustré sur la figure 3.16(b). Aussi, l'un des avantages de la méthode X-FEM est vérifié : la pièce peut être discrétisée sans pour autant tenir compte de la position de la fissure.

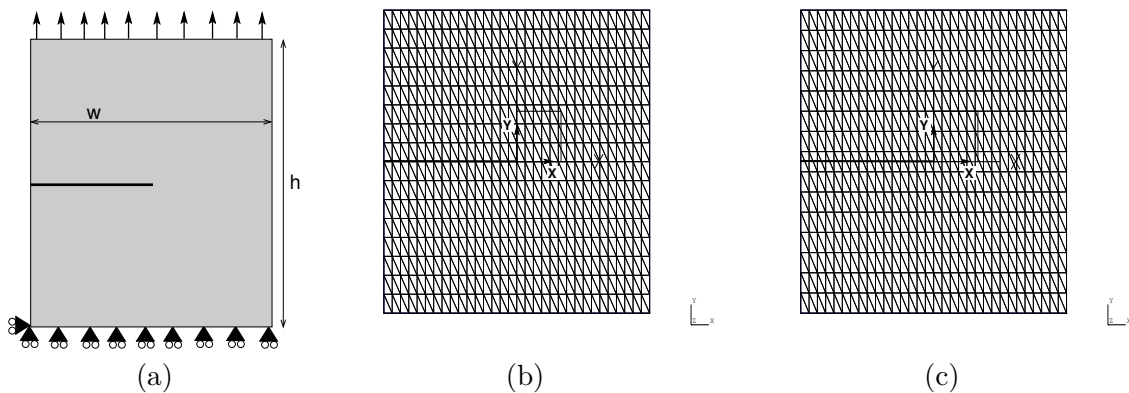


FIGURE 3.15: (a) Éprouvette simple entaille sous extension uniaxiale, (b) maillage  $32 \times 16$ , (c) maillage  $32 \times 15$ .

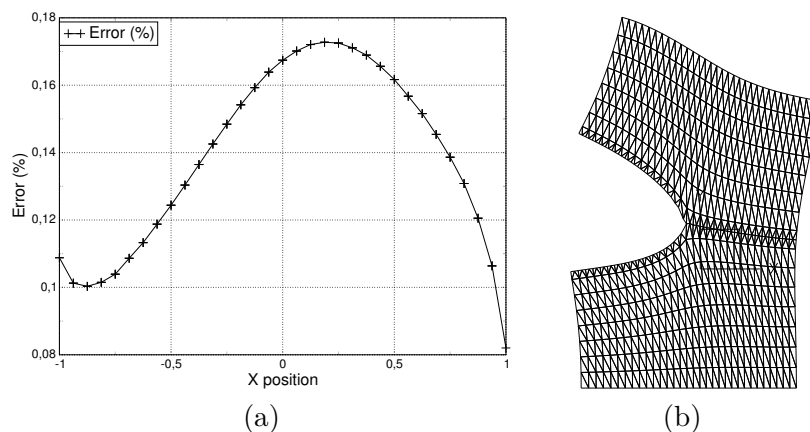


FIGURE 3.16: (a) Erreur sur le déplacement vertical des noeuds de la face supérieure entre les deux maillages, (b) Configuration déformée.

### Comparaison avec un code éléments finis standard

Dans cet exemple, nous comparons des résultats provenant de X-FEM et d'Abaqus (HKS). Une éprouvette SET (dimensions =  $2 \text{ mm} \times 6 \text{ mm}$  et longueur de fissure =  $1 \text{ mm}$ ) est soumise à un déplacement vertical imposé de  $4 \text{ mm}$  sur sa face supérieure, sa face inférieure étant fixée. Le matériau est identique à celui considéré dans l'exemple précédent. Le maillage utilisé sous Abaqus se conforme à la géométrie de la fissure et a la même densité d'éléments que le maillage X-FEM, qui est non-structuré (la fissure passe à travers les éléments). Les configurations déformées sont comparées : qualitativement, celles-ci sont similaires comme le montrent les figures 3.17(a) et 3.17(b). Pour comparer plus précisément les résultats, le déplacement vertical des noeuds



situés sur la surface de la fissure est tracé sur la figure 3.17(c) en fonction de la position initiale de ces nœuds sur l'axe horizontal. Les déformées des faces de la fissure sont très similaires et les résultats obtenus par X-FEM sont fiables.

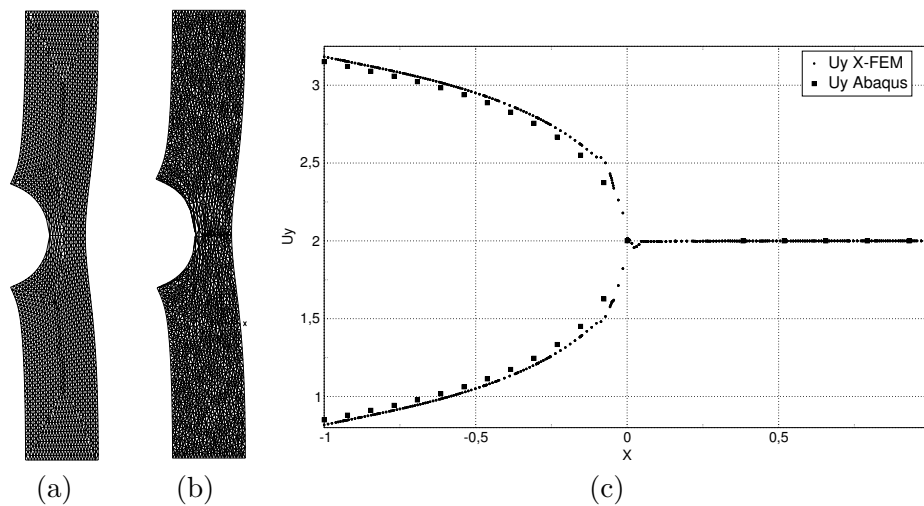


FIGURE 3.17: (a) Configuration déformée Abaqus; (b) Configuration déformée X-FEM; (c) Comparaison des déplacements verticaux des deux solutions.

**Remarque 3.7** La version d'Abaqus dont nous disposons ne contenait pas le module permettant d'insérer des double nœuds à travers la fissure. Ainsi, dans le calcul Abaqus, la fissure n'est pas une singularité mais un coin très refermé (la fermeture du coin est limitée par les capacités du mailleur d'Abaqus qui ne réussit pas à mailler dans tous les cas).◊

### Indépendance au domaine de l'intégrale $J$

L'objectif de cet exemple est de s'assurer que le calcul de l'énergie de déchirement ne dépend pas du domaine choisi lors du calcul de l'intégrale  $J$ . Le problème est identique au précédent et les éléments sont enrichis topologiquement en pointe de fissure. L'intégrale  $J$  est calculée pour différents niveaux d'élongation et différents rayons de domaine. Un élément sera sélectionné dans le domaine de calcul de l'intégrale  $J$  si un de ses nœuds est contenu dans un cercle centré sur la pointe de fissure (voir la figure 3.13).

La figure 3.18 présente l'évolution de l'intégrale  $J$  (normée par rapport à sa valeur convergée) en fonction du rayon du domaine (normé par rapport à la taille caractéristique de l'élément qui contient la pointe de fissure) pour différents niveaux d'élongation. Dans tous les cas, les calculs de l'intégrale  $J$  convergent rapidement (pour environ deux couches d'éléments autour de la fissure) et la vitesse de convergence n'est pas significativement influencée par le niveau d'élongation.

### Robustesse du processus d'enrichissement

Finalement, la précision du calcul de l'énergie de déchirement est étudiée par rapport au groupe de nœuds enrichis. Comme mentionné dans le chapitre 2, le nombre de nœuds enrichis est faible dans le cas d'un problème de fissuration. Un certain nombre d'études ont démontré que la précision du calcul de l'intégrale  $J$  était assurée par l'utilisation d'un maillage suffisamment raffiné. Néanmoins, dans le cas de problèmes non linéaires, le temps de calcul augmente fortement avec le nombre de degrés de liberté en raison de la résolution itérative. Le calcul de l'énergie de déchirement se doit donc d'être précis même dans le cas de maillages grossiers afin de pouvoir étudier des géométries complexes.

**Remarque 3.8** A titre d'illustration, considérons le cas d'un calcul de propagation de fissure en grandes transformations. Pour un niveau d'élongation de l'ordre de 200%, le chargement sera appliqué en 50 pas environ. Chaque pas de chargement étant résolu en 7 itérations environ. Nous arrivons alors à 350 résolutions de systèmes linéaires. Si 15 pas de propagation de la fissure sont simulés, nous arrivons à un ordre de grandeur

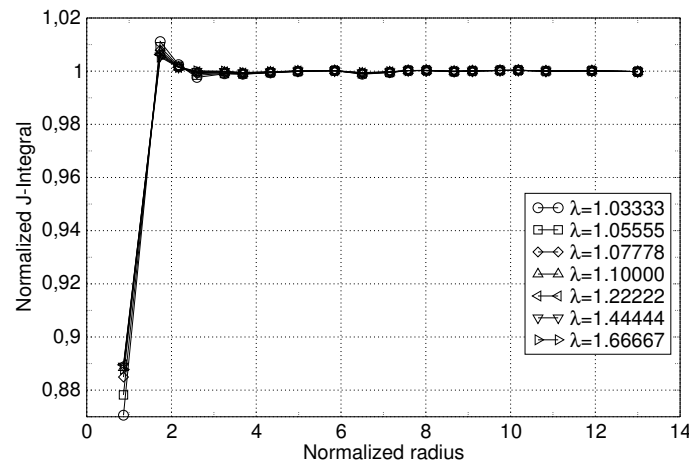


FIGURE 3.18: Évolution de l'intégrale  $J$  en fonction de la taille du domaine de calcul et du niveau d'élongation ( $\lambda$ ).

de 5250 calculs successifs. Dès lors, il apparaît qu'un gain de 3 secondes par calcul implique un gain de 4 heures pour la simulation complète!◇

Considérons une éprouvette SET (dimensions 7 mm × 6 mm) discrétisée par 84 éléments triangulaires de dimension 1 mm × 1 mm et présentée sur la figure 3.19(a). La position de la pointe de fissure varie de  $(-1; 0)$  à  $(+1; 0)$ . Le groupe de nœuds enrichis est représenté sur la figure 3.19 par des carrés gris. La face inférieure du maillage est fixée verticalement (en plus d'un nœud pour les mouvements de corps rigide), et la face supérieure est soumise à un déplacement vertical conduisant à une élongation de 157%. Le rayon utilisé pour le calcul de l'intégrale  $J$  est de 0,9 mm.

L'évolution de l'énergie de déchirement est tracée en fonction de la position de la pointe de fissure sur la figure 3.20 (courbe notée "J classical coarse mesh"). Au voisinage de  $X = \pm 0,5$ ,  $J$  varie significativement : cela correspond au changement de groupe de nœuds enrichis lorsque la fissure passe d'un élément à un autre. Pour lisser l'évolution de  $J$ , le groupe de nœuds enrichis est agrandi en considérant ceux situés dans un cercle fictif centré sur la pointe de fissure (voir les figures 3.19(b) et (c) où les carrés gris représentent les nœuds enrichis). Deux tailles différentes sont étudiées ici : leur rayon correspond à deux ou trois fois la taille caractéristique de l'élément qui contient la pointe de fissure. Les résultats correspondants sont tracés sur la figure 3.20. Dans les deux cas, les courbes sont suffisamment lisses pour assurer la précision du calcul de l'intégrale  $J$ . De plus, un rayon de deux couches autour de la pointe de la fissure est suffisant dans le cas présent puisque les résultats sont en accord avec la 4<sup>ème</sup> courbe de la figure 3.20 où un maillage deux fois plus raffiné a été utilisé ("Refined mesh"). Par conséquent, plusieurs couches d'éléments peuvent être considérées dans le cas de maillages grossiers afin d'obtenir une évolution lisse de l'intégrale  $J$  lors de la propagation de la fissure.

Pendant, seule une couche d'éléments sera considérée dans la suite de cette section, dans la mesure où les maillages utilisés sont suffisamment raffinés.

**Remarque 3.9** Ce principe a été étudié plus en détail par Béchet et al. (2005) : deux classes d'enrichissement ont été mises en évidence :

- ▷ L'enrichissement topologique (technique proposée ici) : plus le maillage est raffiné, plus la taille de la zone enrichie diminue (mais le nombre de ddl enrichis reste fixe) ;
- ▷ L'enrichissement géométrique où les éléments situés dans un cercle de taille fixe au cours du raffinement du maillage sont enrichis (le nombre de ddl enrichis augmente).

A partir d'une étude de convergence sur un benchmark avec des éléments linéaires, les auteurs ont observé que la solution obtenue avec l'enrichissement classique X-FEM converge en  $O(h^{1/2})$  lors du raffinement du maillage. L'enrichissement topologique converge lui aussi en  $O(h^{1/2})$  (mais l'erreur à l'origine est plus faible). Finalement, l'enrichissement géométrique converge en  $O(h)$ , c'est-à-dire le taux de convergence optimal d'une solution régulière.◇

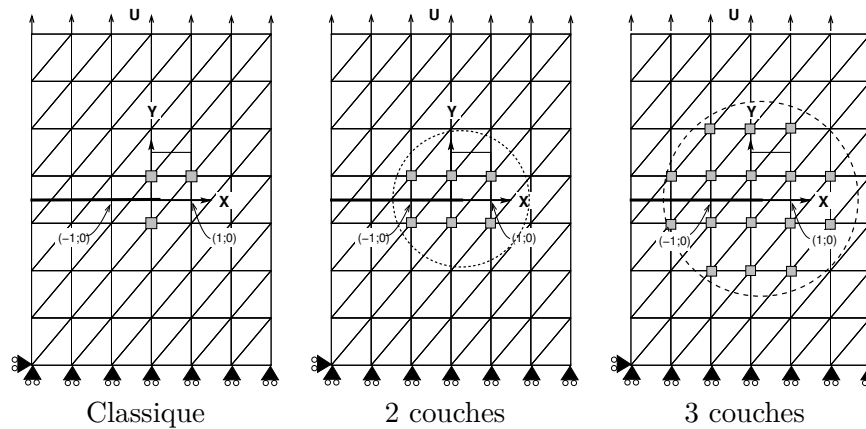


FIGURE 3.19: Le maillage utilisé et les nœuds enrichis avec les fonctions de pointe de fissure (carrés gris). Une zone d'enrichissement de  $n$  couches ( $n > 1$ ) consiste à enrichir les nœuds situés à une distance inférieure à  $n$  fois la taille caractéristique de l'élément contenant la pointe de fissure.

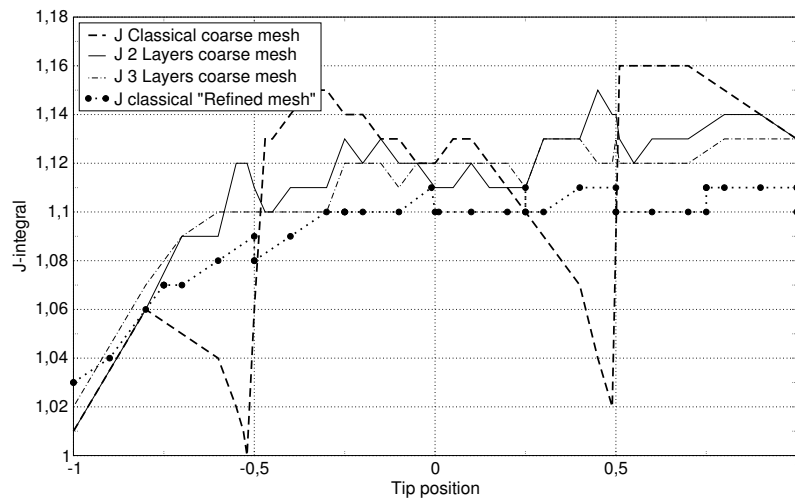


FIGURE 3.20: Évolution de l'énergie de déchirement en fonction de la position de la pointe de fissure.

### Problèmes sous chargement simple

Dans cette section, nous considérons des problèmes sous chargement simple afin de caractériser l'influence de l'enrichissement en pointe de fissure et de la densité du maillage. Pour chacun des exemples de cette section, l'évolution de l'énergie de déchirement est étudiée en fonction du niveau d'élongation, de la taille des éléments et du type d'enrichissement.

Nous nous intéresserons également au paramètre  $k$  introduit par (Rivlin et Thomas, 1953), qui relie la perte d'énergie due à la présence de la fissure à la densité d'énergie de déformation d'une éprouvette saine. Ce facteur est défini par la relation :

$$k = - \frac{\Delta U}{W H c^2} \quad (3.52)$$

où  $W$  est la densité d'énergie de déformation dans l'éprouvette **avant** l'introduction de la fissure,  $c$  est la demi-longueur de la fissure,  $H$  l'épaisseur de la plaque dans la configuration de référence et  $\Delta U$  représente la perte d'énergie qui provient de la fissure. En introduisant l'intégrale  $J$ ,  $k$  s'exprime sous la forme :

$$k = \frac{J}{2 W c} \quad (3.53)$$

Enfin, Rivlin et Thomas font l'hypothèse que ce paramètre dépend uniquement du niveau d'élongation. De plus, à la limite de l'élasticité linéaire, Yeoh (2002) montre que :

- ▷  $k = \pi$  en extension simple ;
- ▷  $k = \pi$  en extension équibiaxiale ;
- ▷  $k = \frac{4}{3}\pi$  en glissement pur.

### Comparaison avec les résultats expérimentaux de Greensmith

Greensmith a effectué des essais sur des éprouvettes SET en tension (Greensmith, 1963). Ses résultats ont ensuite été utilisés par Lindley en plus de calculs éléments finis pour proposer une relation empirique entre  $k$  et le niveau d'élongation dans la direction d'extension  $\lambda$  (Lindley, 1972) :

$$k = \frac{2,95 - 0,008(1 - \lambda)}{\sqrt{\lambda}} \quad (3.54)$$

Le maillage de référence présenté sur la figure 3.21(a) (12958 ddl) est utilisé pour établir une solution de

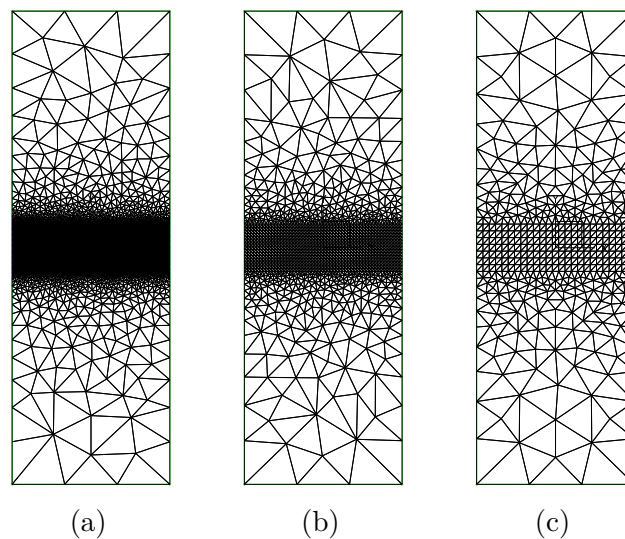


FIGURE 3.21: (a) Maillage de référence (12958 ddl) ; (b) Maillage fin (2664 ddl) ; (c) Maillage grossier (912 ddl).

référence. L'évolution de l'intégrale  $J$  ( $J_{NL}$ ) et de sa contrepartie géométriquement linéaire ( $J_{LIN}$ ) est calculée en fonction du niveau d'élongation ( $J_{LIN}$  est obtenue en considérant que les déplacements et les déformations sont faibles, i.e. en remplaçant le tenseur  $\underline{P}$  par le tenseur des contraintes de Cauchy et en écrivant les dérivations par rapport à la configuration de référence). Les résultats correspondants sont présentés sur la figure 3.22. La différence entre les courbes  $J_{NL}$  et  $J_{LIN}$  montre l'influence de l'émoussement de la pointe de fissure aux grandes transformations. Cela induit une valeur plus faible pour la version non linéaire de l'énergie de déchirement. Notons cependant que ces deux courbes sont confondues aux faibles élongations. De plus,  $J_{NL}$  est proche de  $J_{Lindley}$ , ce qui montre la précision de la méthode. Dans un deuxième temps, l'influence de l'enrichissement en pointe de fissure est étudiée en considérant deux autres maillages : l'un fin (2664 ddl) et l'autre grossier (912 ddl) présentés sur les figures 3.21(b) et (c). Les erreurs entre les valeurs de  $J$  obtenues avec ces maillages et la solution de référence en fonction de l'élongation sont tracées sur la figure 3.23 avec ou sans enrichissement. Les deux courbes ("Fine mesh (1664 dofs) -  $H(X)$  &  $r^{1/2}\sin(\theta/2)$ ") et "Fine mesh (2664 dofs) -  $H(X)$ ") montrent l'influence de l'enrichissement sur le maillage fin, et les deux autres ("Coarse mesh (912 dofs)  $H(X)$  et  $r^{1/2}\sin(\theta/2)$ " et "Coarse mesh (912 dofs)  $H(X)$ ") montrent son influence sur le maillage grossier. Cette influence est plus significative sur des maillages grossiers (diminution de l'erreur de 2,7% pour le maillage grossier et de 0,6% pour le maillage fin).

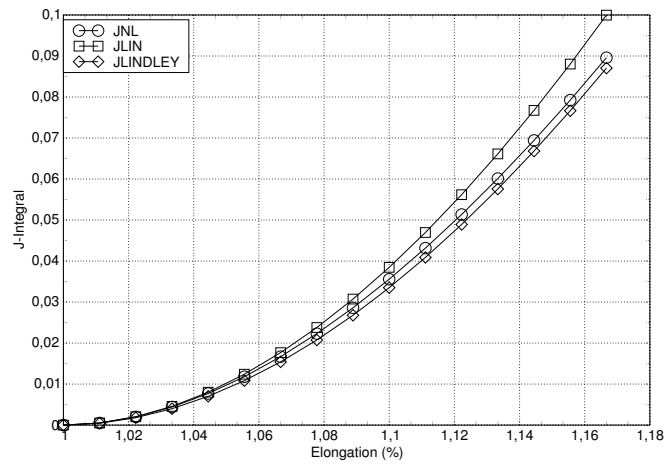


FIGURE 3.22: Évolution de l'énergie de déchirement en fonction du niveau d'élongation.

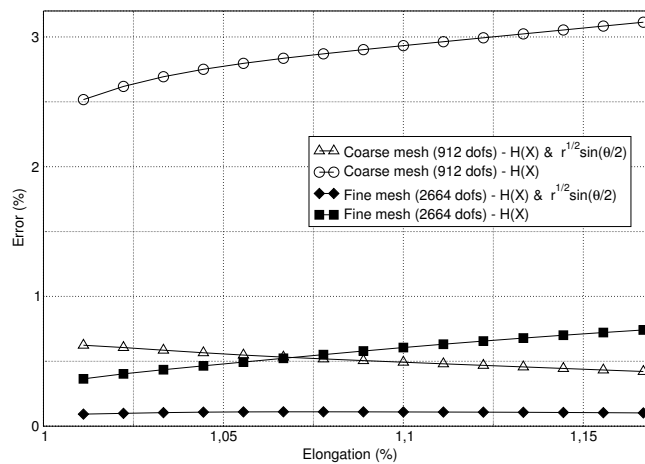


FIGURE 3.23: Influence du maillage et de l'enrichissement sur l'énergie de déchirement en fonction du niveau d'élongation.

### Problème de Griffith

Considérons une membrane de Griffith fissurée en élasticité non linéaire présentée sur la figure 3.24(a). La membrane "infinie" a une fissure en son centre de longueur 0,5 mm. Elle est soumise aux trois chargements fondamentaux présentés sur la figure 3.24 : (a) extension uniaxiale, (b) extension équibiaxiale et (c) glissement pur (Treloar, 1944). Les dimensions du domaine sont choisies telles que la fissure puisse être considérée comme un détail, i.e.  $h = w = 6$  mm pour les extensions uniaxiales et équibiaxiales et  $h = 6$  mm et  $w = 60$  mm pour le glissement pur. Pour les deux premiers chargements, une tension de 1 MPa est appliquée et les mouvements de corps rigide sont bloqués. Pour le glissement pur, un déplacement vertical de 6 mm est appliqué sur la face inférieure du domaine. Les symétries du problème ne sont pas prises en compte afin de pouvoir vérifier que les calculs d'intégrale  $J$  conduisent aux mêmes résultats aux deux pointes de la fissure. Trois types de maillages sont utilisés : un maillage très fin (19758 ddl) pour calculer une solution de référence (voir la figure 3.25), un maillage fin (7234 ddl), et un maillage grossier (2176 ddl) présentés respectivement sur les figures 3.26 et 3.27. Dans tous les cas, l'intégrale  $J$  est calculée sur un domaine de 0,2 mm de rayon.

**Remarque 3.10** Nous vérifions dans tous ces calculs que les valeurs d'intégrale  $J$  obtenues aux deux pointes de la fissure ne diffèrent pas de plus de 0,02%. $\diamond$

L'évolution de l'énergie de déchirement en fonction du niveau d'élongation est tracée sur la figure 3.28 pour l'extension uniaxiale. Les résultats sont comparés avec l'approximation de  $k$  proposée par Lake (1970) pour

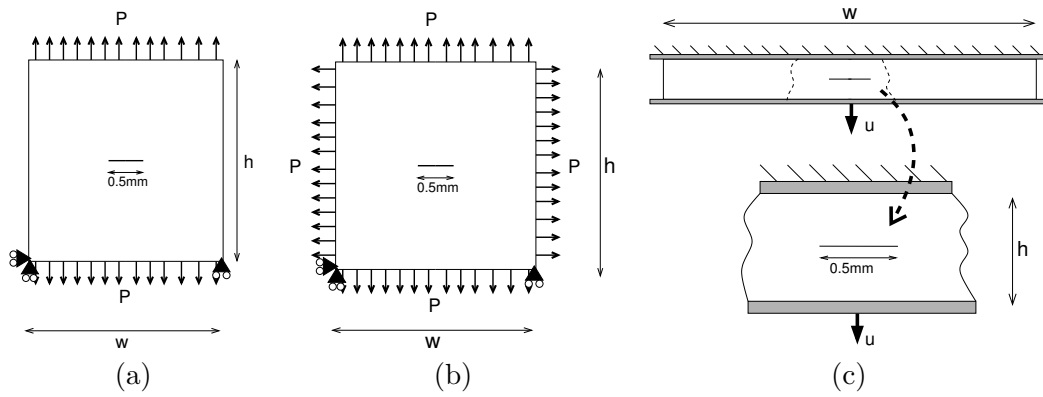


FIGURE 3.24: Problème de Griffith non linéaire : (a) Extension uniaxiale, (b) Extension équilibaxiale, (c) Glissement pur.

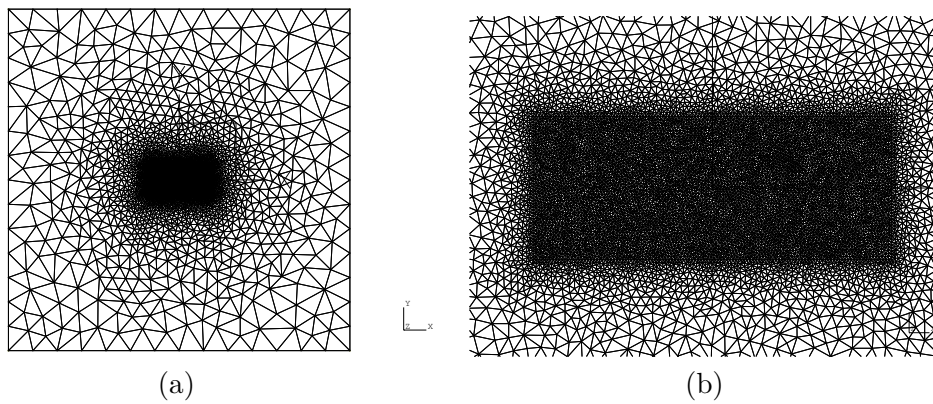


FIGURE 3.25: (a) Le maillage de référence (19758 ddl), (b) Zoom sur la zone de la pointe de fissure.

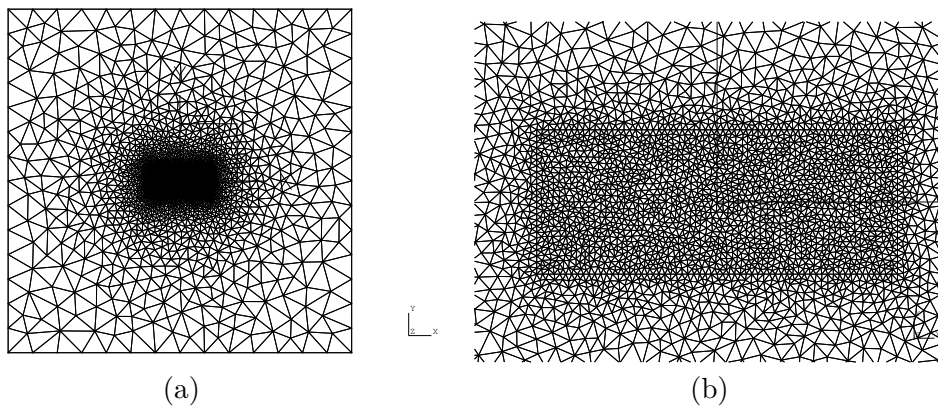


FIGURE 3.26: (a) Le maillage "fin" (N° 1) (7234 ddl), (b) Zoom sur la zone de la pointe de fissure.

un problème de Griffith en extension uniaxiale. Ce facteur est approché en égalant la perte d'énergie due à l'ouverture de la fissure avec l'énergie nécessaire à la refermer :

$$k = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \quad (3.55)$$

Notons que cette expression a été obtenue en considérant une approche géométriquement non linéaire, mais un comportement linéaire. Par conséquent, l'équation (3.55) n'est pas précise pour de grandes transformations



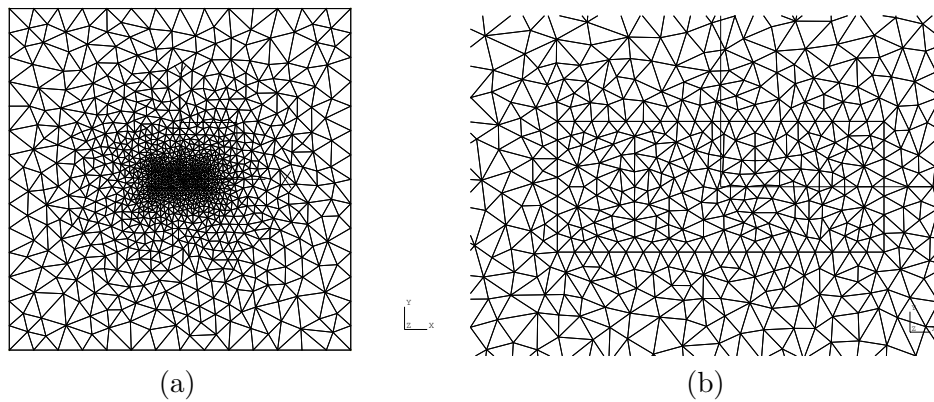


FIGURE 3.27: (a) Le maillage "grossier" ( $N = 2$ ) (2176 ddl), (b) Zoom sur la zone de la pointe de fissure.

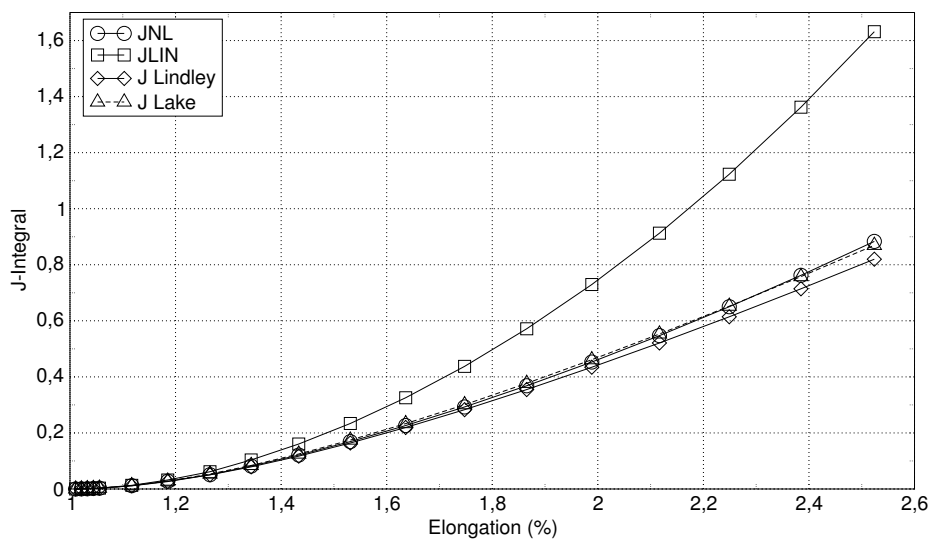


FIGURE 3.28: Évolution de  $J_{LIN}$  et  $J_{NL}$  (extension uniaxiale).

(plus de 100%). L'approximation de Lindley est également tracée (tout comme dans (Yeoh, 2002)), même si ces deux courbes ne peuvent être comparées dans la mesure où les conditions limites d'un éprouvette SET sont différentes de celles d'un demi problème de Griffith (i.e. en tenant compte des symétries).

**Remarque 3.11** Comme dans la section précédente l'influence de l'érousement de la pointe de fissure est visible et toutes les courbes sont confondues en petites perturbation.  $\diamond$

Nous nous intéressons maintenant à l'influence de l'enrichissement en étudiant l'évolution de la valeur de l'intégrale  $J$  en fonction du niveau d'élongation et du type d'enrichissement. Plus précisément, le degré de la singularité de  $u_2$  dans l'équation (3.44) est changé de  $1/2$  à  $1/4$ ,  $1/3$ ,  $1$  et  $2$ . La différence entre ces résultats et la solution de référence (maillage extrêmement fin) est tracée sur la figure 3.29. Le niveau de la singularité influence fortement la précision de la solution, et les résultats s'approchent de la solution de référence lorsque la singularité tend vers sa valeur théorique  $1/2$ . La meilleure fonction d'enrichissement est clairement celle provenant de la solution analytique. Dans le cas où aucun enrichissement n'est utilisé en pointe de fissure, on note que pour de grandes transformations (en raison de l'érousement), mieux vaut ne pas enrichir la pointe de fissure que de faire un mauvais choix d'enrichissement.

**Remarque 3.12** Notons que ces nouveaux degrés de singularité ne sont absolument pas physiques, car en théorie la singularité du champ de déplacement vertical doit se situer dans l'intervalle  $]1/2, 1[$  pour un matériau néo-hookéen.  $\diamond$



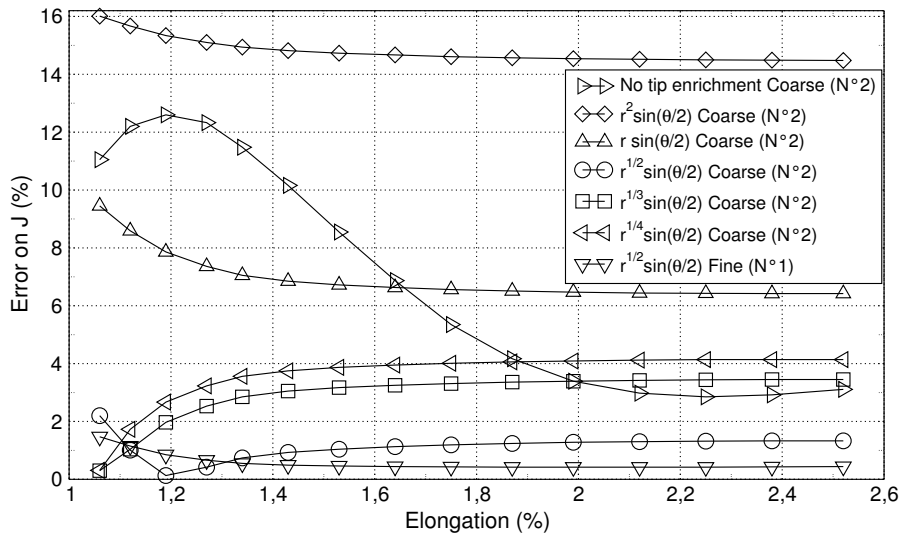


FIGURE 3.29: Influence de l'enrichissement pour les deux maillages : erreur sur l'intégrale  $J$  (%).

Pour étudier la validité de nos développements sous d'autres chargements, considérons les cas de l'extension équi-biaxiale et du glissement pur présentés sur les figures 3.24(b) et (c). Le maillage grossier (N° 2) est utilisé dans le cas de l'extension équi-biaxiale, et un maillage à 4372 ddl est utilisé pour le glissement pur. L'évolution de  $k$  est tracée en fonction du taux d'élongation sur les figures 3.30(a) and (b) pour respectivement l'extension équi-biaxiale et le glissement pur. Ces résultats sont comparés avec ceux de Yeoh (2002) qui a estimé  $k$  à partir d'une méthode basée sur le déplacement des faces de la fissure (Key, 1969), considérant que la fissure admet une forme elliptique. Les résultats numériques sont en accord, même si les valeurs obtenues par X-FEM sont légèrement différentes à cause de l'enrichissement. De plus, les valeurs obtenues pour de faibles élongations dans le tableau 3.1 sont en accord avec les valeurs théoriques.

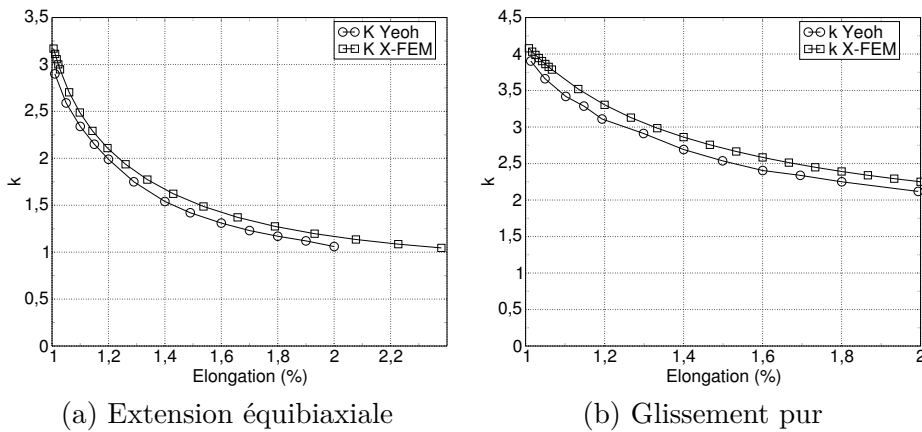


FIGURE 3.30: Évolution de  $k$  en fonction de l'élongation.

Type de chargement	Valeur théorique	Valeur X-FEM
Extension uniaxiale	$k = \pi$	$k = 3,17$
Extension équi-biaxiale	$k = \pi$	$k = 3,16$
Glissement pur	$k = \frac{4}{3}\pi \simeq 4,18$	$k = 4,08$

TABLE 3.1: Valeurs de  $k$  en petites transformations.

### Membrane avec une fissure inclinée

Pour cette dernière validation, considérons une membrane "infinie" soumise à une tension uniaxiale avec une fissure inclinée en son centre. La membrane (présentée sur la figure 3.31) est chargée sur ses faces supérieure et inférieure; les tractions de Piola-Kirchhoff variant de 0 à 0,7 MPa. La fissure de longueur  $2a$  est paramétrée par son angle d'inclinaison  $\beta$  ( $\beta \in [0^\circ; 90^\circ]$ ) et est située au centre de la membrane carrée ( $h = w$ ). Les dimensions de la membrane sont choisies telles que la fissure soit beaucoup plus petite que la membrane ( $2a/w < 0,1$ ). Enfin, le maillage utilisé comporte 6367 noeuds. Sur la figure 3.32(a), nous traçons

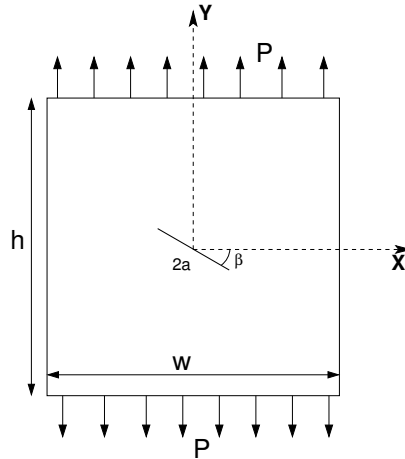


FIGURE 3.31: Membrane avec une fissure inclinée d'un angle  $\beta$  en son centre.

l'évolution de l'énergie de déchirement adimensionnée (par sa valeur pour  $\beta = 0$ ) en fonction de  $\beta$  et pour différents niveaux d'élongation. Dans notre cas, cette évolution ne dépend pas du niveau d'élongation et est proche de celle obtenue en mécanique linéaire de la rupture où l'intégrale  $J$  est liée à  $\beta$  par la relation :

$$J = \frac{\sigma^2 \pi}{E} \left[ a \left( \cos^4 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \beta \right) \right] \quad (3.56)$$

où  $\sigma$  est la traction appliquée sur la membrane,  $E$  est le module d'Young et  $\beta$  l'angle d'inclinaison de la fissure.  $J$  peut être écrite :

$$J(\sigma, a, \beta) = J_\sigma(\sigma) \cdot J_C(a, \beta) \quad (3.57)$$

L'erreur entre la solution éléments finis de la figure 3.32(a) et la solution linéaire (3.56) est tracée sur la

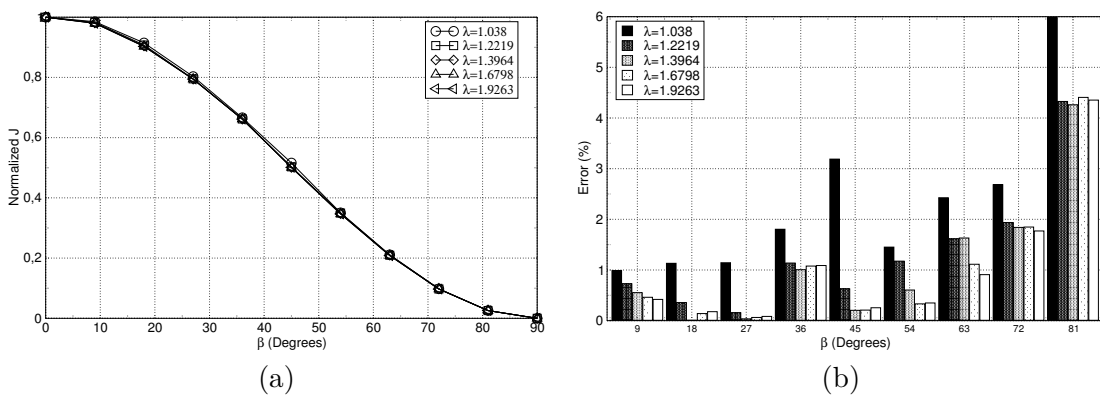


FIGURE 3.32: (a) Évolution  $J$  normée, (b) Évolution de l'erreur sur (3.56).

figure 3.32(b) et reste inférieure à 6%. A partir de ce résultat, nous étudions la possibilité d'établir une relation non linéaire équivalente à (3.56). A partir de la figure 3.32(b), la dépendance de  $J_{NL}$  à  $\beta$  est identique au cas linéaire (voir l'équation (3.56)). Ainsi, seule la dépendance de  $J_{NL}$  à  $P$  et  $a$  doit être étudiée. Les résultats correspondants sont présentés sur la figure 3.33(a) et (b) pour les dépendances en  $P$  et  $a$  respectivement. En

examinant ces figures, il est possible de séparer l'énergie de déchirement comme produit d'une fonction de la contrainte seule et d'une fonction de la géométrie de la fissure seule :

$$\begin{aligned} J_{NL}(P, a, \beta) &= J_{NL-P}(P) \times J_{NL-C}(a, \beta) \\ &= b P^{2.1} J_{NL-C}(a, \beta) \end{aligned} \quad (3.58)$$

où  $b$  est un terme qui dépend du comportement du matériau.

**Remarque 3.13** Notons tout de même que ces résultats ne sont valables que dans ce cas précis : ils peuvent ne pas être valides pour d'autres comportements, pour les cas des déformations planes et en 3D. ◊

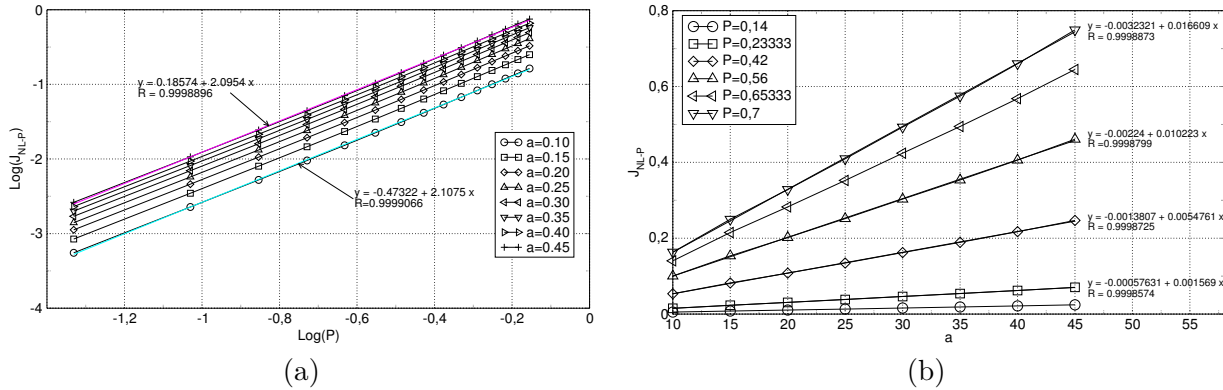


FIGURE 3.33: (a)  $\log(J_{NL-P})$  en fonction de  $\log(P)$ , (b)  $J_{NL-P}$  en fonction de la longueur de la fissure.

### 3.9 Conclusion

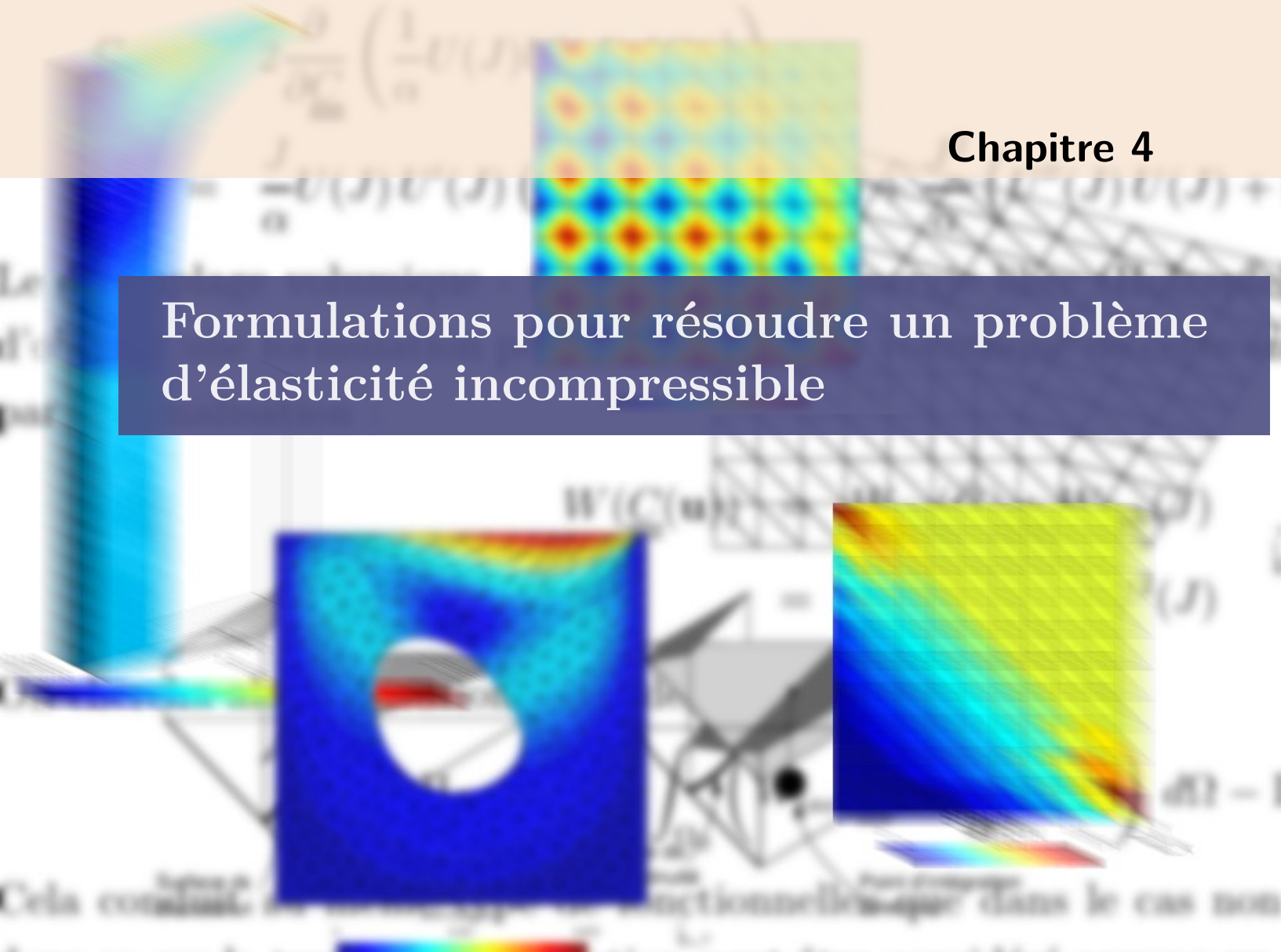
Au travers de ce chapitre, les équations de la mécanique des milieux continus associées au problème de la fissuration d'un corps fin en grandes transformations ont tout d'abord été présentées. Ensuite, nous avons montré comment la méthode X-FEM pouvait être appliquée à la mécanique non linéaire de la rupture. Les points les plus importants que nous avons mis en évidence sont : (i) le choix d'une formulation pour la résolution, (ii) le choix des fonctions d'enrichissement en pointe de fissure et (iii) l'évaluation de l'intégrale  $J$ . De part la spécificité de la méthode X-FEM, il a été choisi une formulation lagrangienne totale pour la résolution des équations. Ce choix impose malheureusement un certain nombre de limitations dues à la distorsion du maillage et à la difficulté de remailler la configuration courante. Une stratégie pour utiliser une formulation lagrangienne réactualisée au prix d'une précision moindre en pointe de fissure a cependant été présentée.

A notre sens, le point le plus limitant concerne les enrichissements en pointe de fissure. En effet, il a été montré que le choix de ces fonctions conditionnait fortement la qualité de la solution éléments finis. En outre, l'étude s'est restreinte aux matériaux de type néo-hookéen qui permettent de démontrer la faisabilité et les qualités de la méthode, mais ne permettent pas de modéliser finement le comportement du matériau. En particulier, le raidissement du matériau aux fortes elongations n'est pas pris en compte. Il serait donc intéressant de voir de quelle manière enrichir l'interpolation éléments finis en pointe de fissure dans ce cas. Pour cela, il serait possible d'identifier numériquement les dépendances en  $r$  et en  $\theta$  des champs de déplacement et de pression en pointe de fissure. Ce type d'approche a déjà été utilisé par [Lund et Westmann \(1990\)](#) pour ré-obtenir les résultats de Knowles et Sternberg sur le développement asymptotique du déplacement et de la contrainte en pointe de fissure. Par ailleurs durant les validations, il a été montré qu'à *maillage fixé*, la meilleure solution était obtenue en enrichissant avec les développements asymptotiques théoriques. Nous n'avons cependant pas vérifié si la solution convergerait quand même en raffinant le maillage. Si tel est le cas, alors il serait possible de se contenter d'une approximation "grossière" des champs de déplacement en pointe de fissure, sous réserve que le maillage soit suffisamment raffiné. Cette approximation grossière peut alors être celle du matériau néo-hookéen donnée en (3.44), ou être obtenue numériquement.

La dernière limitation correspond au fait que nous n'avons traité que le problème des grandes transformations. L'incompressibilité est gérée par l'artifice de l'hypothèse des contraintes planes. Dans le cas où la structure à

simuler ne vérifie pas cette hypothèse, seul un matériau compressible pourra être considéré. La gestion de cet aspect fera l'objet de la section suivante.

# Formulations pour résoudre un problème d'élasticité incompressible



## Sommaire

3.1	Introduction . . . . .	<b>28</b>
3.2	Déformation d'un corps fissuré en grandes transformations . . . . .	<b>28</b>
	Formulation forte . . . . .	28
	Formulation faible . . . . .	29
3.3	Linéarisation de la formulation faible . . . . .	<b>30</b>
	Linéarisation du travail des efforts intérieurs . . . . .	30
	Linéarisation du travail des efforts extérieurs . . . . .	30
3.4	Choix d'une description . . . . .	<b>30</b>
	Formulations classiques en mécanique . . . . .	30
	Choix d'une formulation dans le cadre X-FEM . . . . .	31
3.5	Résolution du système discrétisé . . . . .	<b>33</b>
	Résolution par un algorithme de Newton-Raphson . . . . .	34
	Discrétisation des équations . . . . .	34
3.6	Spécificités de la fissuration des élastomères . . . . .	<b>35</b>
	La fissuration des élastomères . . . . .	35
	L'intégrale $J$ en petites perturbations . . . . .	36
	L'intégrale $J$ en grandes transformations . . . . .	37
	Calcul numérique de l'intégrale $J$ . . . . .	37
3.7	Enrichissement en pointe de fissure . . . . .	<b>39</b>
	Développement asymptotique du champ de position . . . . .	39
	Remarques . . . . .	41

3.8	Validations . . . . .	41
	Validations préliminaires . . . . .	41
	Problèmes sous chargement simple . . . . .	45
3.9	Conclusion . . . . .	52

## 4.1 Introduction

De nombreux essais ont mis en évidence que sous sollicitations extérieures, les matériaux de type caoutchouc se déformaient à volume quasi constant (Goebel et Tobolsky, 1971). Leur comportement est donc classiquement supposé incompressible ou quasi-incompressible. De la même façon, la plasticité causée par les procédés de formage induit un comportement isochore dans les zones plastifiées. En effet, la déformation  $\underline{\underline{\epsilon}}$  se décompose en une partie élastique  $\underline{\underline{\epsilon}}^e$  et une partie plastique  $\underline{\underline{\epsilon}}^p$  (cette dernière est généralement considérée isochore). Lors du formage, la partie plastique prend le dessus sur la partie élastique ( $\underline{\underline{\epsilon}} \simeq \underline{\underline{\epsilon}}^p$ ), et la cinématique est quasi-incompressible. Il convient donc d'imposer une condition cinématique additionnelle d'incompressibilité :  $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$  en petites perturbations ou  $\det(\underline{\underline{F}}) = 1$  en grandes transformations. Cette condition additionnelle pose des problèmes lors de la résolution numérique. En effet, les formulations en déplacement "verrouillent" lorsque le comportement du matériau tend vers l'incompressibilité. Ce phénomène se manifeste par un champ de déplacement anormalement faible et non physique. Un exemple est présenté sur la figure 4.1 : un chargement compressif est appliqué sur un bloc de matériau élastique, linéaire de module d'Young  $E = 1$  et de coefficient de Poisson  $\nu = 0,499999$ , dans l'hypothèse des petites perturbations. Le champ de déplacement calculé n'est pas physique (voir la figure 4.1(b)) dans la mesure où le gradient du déplacement fait apparaître deux zones bien distinctes où la déformation est constante (nulle pour l'une d'elles), comme le montre la figure 4.1(c). Ce type de réponse numérique peut être amoindri en raffinant le maillage ou en utilisant des éléments d'ordre supérieur, mais en aucun cas elle ne peut être éliminée complètement. Cependant, si une technique adaptée (telle que celles présentées par la suite) est utilisée, il est possible d'obtenir la solution physique à ce problème comme le montre la figure 4.2.

L'objectif de cette section est d'établir, parmi les méthodes utilisées pour résoudre des problèmes incompressibles,

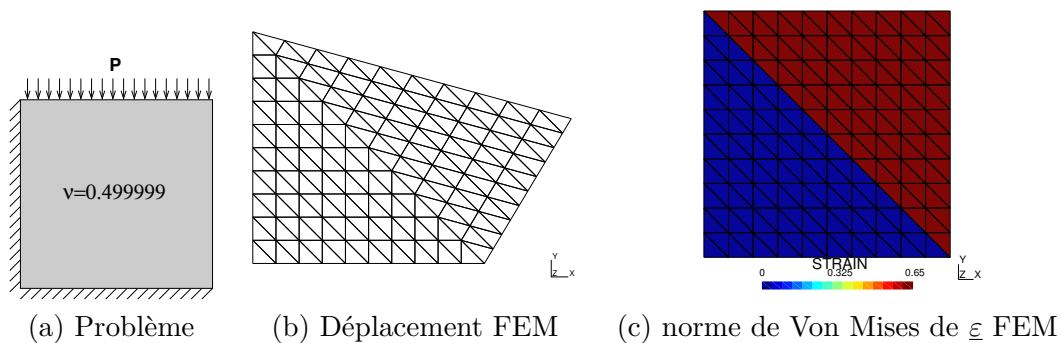


FIGURE 4.1: Mise en évidence du verrouillage : élément T3.

sibles, lesquelles peuvent être utilisées en conjonction avec la méthode X-FEM. Il existe trois grandes familles de méthodes adaptées à la résolution de problèmes incompressibles :

- ▷ les méthodes mixtes ;
- ▷ les méthodes des pénalités ;
- ▷ les méthodes de type "enhanced strain".

Les phénomènes de type verrouillage étant présents tant en petites transformations qu'en grandes transformations, nous nous intéresserons en premier lieu au cas élastique linéaire incompressible sous l'hypothèse des

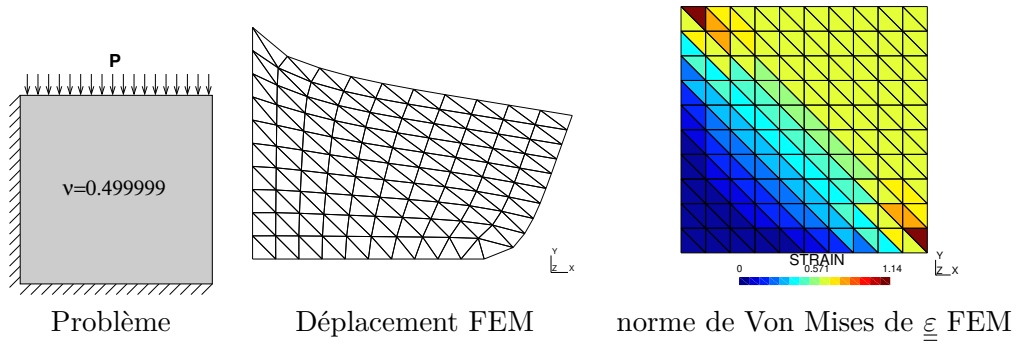


FIGURE 4.2: Mise en évidence du verrouillage : cas d'une formulation insensible au verrouillage.

petites perturbations. Le cas non linéaire, présenté par la suite, est une extension directe des résultats que nous aurons développé en linéaire. Ce chapitre débutera par la présentation des équations du problème élastique, linéaire, incompressible sous l'hypothèse des petites perturbations. Ensuite, les méthodes présentées ci-dessus seront développées, et leur applicabilité au cas X-FEM sera étudiée. Finalement, la formulation mixte à deux champs sera sélectionnée et son comportement caractérisé en présence de trous, d'interfaces matérielles et de fissures.

## 4.2 Le cas des petites perturbations

### Problème de référence

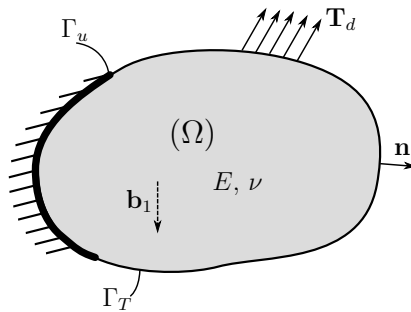


FIGURE 4.3: Le problème de référence.

Considérons la réponse quasi-statique d'un solide élastique occupant un domaine borné  $\Omega \in \mathbb{R}^{2-3}$  avec une frontière suffisamment régulière  $\partial\Omega$  séparée en deux parties disjointes :  $\Gamma_u$  où les déplacements sont imposés et  $\Gamma_T$  où le vecteur contrainte est imposé. Les équations gouvernant le problème d'élasticité linéaire s'écrivent :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \mathbf{b} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) & \text{dans } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}_d & \text{sur } \Gamma_T \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_d & \text{sur } \Gamma_u \\ \underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}} & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}$  est le tenseur des contraintes de Cauchy,  $\mathbf{b}$  représente les forces volumiques,  $\mathbf{u}_d$  est le champ de déplacement imposé,  $\mathbf{T}_d$  est le vecteur contrainte imposé,  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure à la frontière  $\partial\Omega$ ,  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  est le tenseur des déformations linéarisé et  $\mathbb{C}$  est le tenseur d'élasticité du 4<sup>ème</sup> ordre qui doit être borné, i.e.

$$\mathbb{C}_{ijkl} \in L^\infty(\Omega) \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (4.2)$$



Dans le cas de l'élasticité linéaire isotrope, la relation de comportement s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \kappa \underline{\underline{\varepsilon}}_V(\mathbf{u}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}^D(\mathbf{u}) \quad \text{in } \Omega \quad (4.3)$$

où  $\varepsilon_V$  est la déformation volumique ( $\varepsilon_V = \text{div}(\mathbf{u})$ ),  $\kappa$  est le module de compressibilité

$$\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (4.4)$$

et  $\underline{\underline{\varepsilon}}^D$  est la partie déviatorique de la déformation :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^D = \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{\varepsilon_V}{3} \underline{\underline{I}} \quad (4.5)$$

Quand le matériau devient incompressible, le module de compressibilité tend vers l'infini. Cela signifie que  $\varepsilon_V$  doit tendre vers zéro (le champ de déplacement doit être à divergence nulle quand le comportement tend à être incompressible) :

$$\varepsilon_V = \text{div}(\mathbf{u}) \longrightarrow 0 \quad \text{quand } \nu \rightarrow 0,5 \quad (4.6)$$

Comme dans le cas non linéaire, la formulation forte (4.1) est équivalente à la stationnarité d'un potentiel  $\Pi_{EP}$ . Dans le cas où la seule variable est le déplacement, on parle alors de minimum de l'énergie potentielle :

$$\Pi_{EP}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}) : \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_T} \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}_d d\Gamma \quad (4.7)$$

Nous avons vu en introduction que la minimisation de (4.7) sur un espace éléments finis conduisait au verrouillage (on parle aussi de locking) de la solution. En effet, la solution est recherchée par minimisation de  $\Pi_{EP}$  dans l'espace des champs éléments finis à divergence nulle. Si cet espace est trop petit, alors la seule solution au problème de minimisation sera la solution à déplacement nul. Une augmentation de la taille de l'espace d'approximation (éléments d'ordre plus élevé) améliore légèrement les résultats, mais ceux-ci se dégradent en s'approchant de l'incompressibilité. Ce phénomène peut aussi s'expliquer par l'étude du problème matriciel qui découle de la minimisation de (4.7) :

$$[K][u] = [f] \quad (4.8)$$

où  $[K]$  est la matrice raideur du problème,  $[u]$  le vecteur des déplacements nodaux et  $[f]$  le vecteur des forces extérieures. En tenant compte de (4.3), ce système matriciel peut se réécrire sous la forme :

$$\left( [K]^D + \kappa [K]^V \right) [u] = [f] \quad (4.9)$$

où  $[K]^D$  et  $[K]^V$  sont construites respectivement à partir des termes déviatoriques et volumiques de la relation de comportement. Si le problème devient incompressible,  $\kappa$  tend vers l'infini et la matrice  $[K]^D$  peut être négligée par rapport à  $\kappa [K]^V$ . Le système devient alors :

$$[K]^V [u] = \frac{1}{\kappa} [f] \quad (4.10)$$

Le second membre tend vers [0] et donc  $[u]$  également, sauf si la matrice  $[K]^V$  est singulière (ce qui n'est pas le cas).

La formulation classique en déplacement ne donnant pas satisfaction, il est nécessaire d'utiliser des stratégies adaptées à l'incompressibilité. Celles-ci sont présentées ci-après.

## Stratégies de gestion de l'incompressibilité en éléments finis

### Formulations mixtes

Les formulations mixtes sont les formulations les plus naturelles pour résoudre des problèmes d'élasticité incompressible. Toutes ces formulations sont issues du principe variationnel de Hu-Washizu (à trois champs) qui s'écrit :

$$\Pi_{HW}(\mathbf{u}, \underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}} d\Omega - \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \left( \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\nabla}}^S(\mathbf{u}) \right) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}_d d\Gamma \quad (4.11)$$

où  $\underline{\underline{\nabla}}^S(\mathbf{u})$  représente la partie symétrique du gradient du déplacement. Remarquons que dans cette fonctionnelle, les champs  $\mathbf{u}$ ,  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  sont indépendants (principe à trois champs). L'écriture de la stationnarité de la fonctionnelle de Hu-Washizu redonne les équations d'équilibre (4.1) du problème. Dans le cas de l'incompressibilité, nous nous intéresserons plus particulièrement au principe variationnel d'Hellinger-Reissner. La relation de comportement  $\underline{\underline{\varepsilon}} = \mathbb{C}^{-1}\underline{\underline{\sigma}}$  est alors introduite dans le principe de Hu-Washizu :

$$\Pi_{HR}(\mathbf{u}, \underline{\underline{\sigma}}) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \mathbb{C}^{-1} : \underline{\underline{\sigma}} d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}}^S(\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}_d d\Gamma \quad (4.12)$$

Pour la résolution de problèmes d'élasticité incompressible, Herrmann (1986) a proposé une forme particulière du principe de Hellinger-Reissner. Pour cela, le principe est reformulé en faisant apparaître les contributions volumiques et déviatoriques des contraintes et des déformations. En postulant que la partie déviatorique est calculée à partir du déplacement, la contrainte s'exprime alors par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}^D \quad \text{dans } \Omega \quad (4.13)$$

où  $p$  est la pression hydrostatique, qui devient une variable indépendante du problème. La réécriture du principe à deux champs (4.12) non plus en fonction de  $\mathbf{u}$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ , mais en fonction de  $\mathbf{u}$  et  $p$  conduit à la fonctionnelle  $\chi$  :

$$\chi(\mathbf{u}, p) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}^D(\mathbf{u}) : \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}}^D(\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d\Omega - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}_d d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{p^2}{\kappa} d\Omega - \int_{\Omega} p \varepsilon_V(\mathbf{u}) d\Omega \quad (4.14)$$

La stationnarité de  $\chi(\mathbf{u}, p)$  par rapport aux deux variables indépendantes  $\mathbf{u}$  et  $p$  s'écrit :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^D : \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}}^D d\Omega - \int_{\Omega} p \delta \varepsilon_V d\Omega = R(\delta \mathbf{v}) & \forall \delta \mathbf{v} \in \mathcal{V}^0 \\ - \int_{\Omega} \left( \frac{p}{\kappa} + \varepsilon_V \right) \delta p d\Omega = 0 & \forall \delta p \in \mathcal{Q} \end{cases} \quad (4.15)$$

où  $R(\delta \mathbf{v})$  représente le travail virtuel des forces extérieures, l'espace  $\mathcal{V}^0$  a déjà été défini en (3.7) et  $\mathcal{Q}$  est l'espace des fonctions de carré intégrable  $\mathcal{Q} = \{q \in L^2(\Omega)\}$

**Remarque 4.1** Dans le cas d'un principe variationnel à un champ, le point critique (point où la première dérivée du potentiel s'annule) est un minimum. Dans le cas d'une fonctionnelle à deux champs, ce point critique est un point selle : il faut trouver le couple  $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Q}$  tel que :

$$(\mathbf{u}, p) = \max_{q \in \mathcal{Q}} \left[ \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}} \chi(\mathbf{v}, q) \right] \quad (4.16)$$

◇

## Stabilité des formulations à deux champs

**Condition analytique de stabilité : la condition inf-sup** La discrétisation des équations (4.15 - 4.15) conduit à un système éléments finis du type :

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{up}] \\ [K_{up}]^T & \frac{1}{\kappa} [K_{pp}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u] \\ [p] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [f] \\ [0] \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

La question est alors de savoir sous quelles conditions ce système d'équations est régulier. Il est possible de montrer que c'est le cas (en incompressibilité totale quand  $\kappa \mapsto \infty$ ), si le noyau de  $[K_{up}]$  est vide (et que les modes de déplacements rigides ont été supprimés). Plus précisément, l'interpolation déplacement - pression doit vérifier la condition de compatibilité de Ladyzhenskaya - Babuška - Brezzi (Brezzi et Fortin, 1991), également nommée condition LBB (ou inf-sup). Cette condition stipule que les champs de déplacement et de

pression ne peuvent être choisis séparément. Pour être capable de résoudre (4.17), une condition nécessaire mais non suffisante d'unicité de  $\mathbf{u}$  et  $p$  est :

$$\dim \mathcal{Q}^h \leq \dim \mathcal{V}^h \quad (4.18)$$

où  $\mathcal{Q}^h$  et  $\mathcal{V}^h$  sont respectivement les espaces éléments finis de la pression et du déplacement. La condition suffisante qui lie ces deux espaces (condition inf-sup ou LBB) s'écrit alors :

L'existence d'une approximation éléments finis stable  $(\mathbf{u}^h, p^h)$  dépend du choix d'une paire d'espaces  $\mathcal{V}^h$  et  $\mathcal{Q}^h$  vérifiant la condition suivante :

$$\inf_{q^h \in \mathcal{Q}^h} \sup_{\mathbf{v}^h \in \mathcal{V}^h} \frac{\int_{\Omega} q^h \operatorname{div} \mathbf{v}^h d\Omega}{\|\mathbf{v}^h\|_{H^1} \|q^h\|_{L^2}} \geq \beta > 0 \quad (4.19)$$

où  $\beta$  est une constante indépendante de la taille du maillage  $h$ . Si la condition inf-sup est satisfaite, alors il existe un unique  $\mathbf{u}^h \in \mathcal{V}^h$  et  $p^h \in \mathcal{Q}^h$  (déterminé à une constante près dans le cas où les conditions limites sont uniquement de type Dirichlet) et ce, même pour  $h$  tendant vers zéro.

**Vérification numérique de la condition inf-sup** La vérification de la condition inf-sup par un couple d'espaces  $(\mathcal{V}^h, \mathcal{Q}^h)$  est toutefois impossible à prouver pour des situations pratiques. C'est pourquoi l'évaluation numérique du inf-sup a été largement étudiée (Chapelle et Bathe, 1993; Brezzi et Fortin, 1991). Cette évaluation numérique, bien que non-équivalente à la condition analytique, donne une indication sur la vérification (ou non) de (4.19) pour une discrétisation éléments finis donnée. Le test numérique du inf-sup est fondé sur le théorème suivant :

**Proposition 4.2.1** Soient les matrices  $[M]_{uu}$  et  $[M]_{pp}$ , associées respectivement aux produits scalaires dans  $\mathcal{V}^h$  (norme  $H^1$ ) et  $\mathcal{Q}^h$  (norme  $L^2$ ) et soit  $\mu_{min}$  la plus petite valeur propre non nulle du problème aux valeurs propres suivant :

$$[K_{up}]^T [M_{uu}]^{-1} [K_{up}] \mathbf{v} = \mu^2 [M]_{pp} \mathbf{v} \quad (4.20)$$

alors, la valeur de  $\beta$  dans (4.19) est simplement  $\mu_{min}$ .

La démonstration de l'équivalence entre ce système aux valeurs propres et la condition inf-sup peut être trouvée dans (Malkus, 1981) ou (Brezzi et Fortin, 1991). Le test numérique proposé dans (Chapelle et Bathe, 1993) consiste à tester une formulation mixte en calculant  $\beta$  avec des maillages de plus en plus raffinés. Sur la base de trois ou quatre résultats, il est possible de prédire si la valeur du inf-sup est bornée ou au contraire tend vers zéro quand le maillage est raffiné. La fiabilité de ce test est démontrée sur de nombreux exemples d'éléments en élasticité incompressible dans (Chapelle et Bathe, 1993).

**Remarque 4.2** Dans ce travail, nous suivrons la démarche présentée dans (Chapelle et Bathe, 1993), et nous considérerons  $[S]_{uu} = \int_{\Omega} \underline{\nabla} \mathbf{u} : \underline{\nabla} \mathbf{u} d\Omega$  au lieu de  $[M]_{uu}$  dans (4.20).◇

Ce test est appliqué en considérant une séquence de maillages successivement raffinés du type de ceux présentés sur la figure 4.4. L'objectif est de contrôler la valeur du inf-sup  $\beta_h$  quand  $h$  diminue. Si  $\log(\beta_h)$  décroît constamment lorsque  $h$  tend vers zéro, on prédit que l'élément viole la condition inf-sup. Par contre, si  $\log(\beta_h)$  se stabilise lorsque le nombre d'éléments augmente, alors le test numérique est vérifié.

### Éléments finis mixtes stables

Nous venons de voir que les espaces d'approximation des déplacements et de la pression devaient vérifier la condition inf-sup. De nombreux travaux dans la littérature proposent des éléments finis mixtes, mais tous (même lorsqu'ils donnent satisfaction dans la pratique) ne vérifient pas la condition inf-sup<sup>1</sup>. Ces éléments peuvent être classés en deux familles (Bathe, 1996) :

1. A ce sujet, M. Fortin écrivait : "Computations were done (with success!) using theoretically dubious elements or at best, using elements at which theory remained silent." (Brezzi et Fortin, 1991)

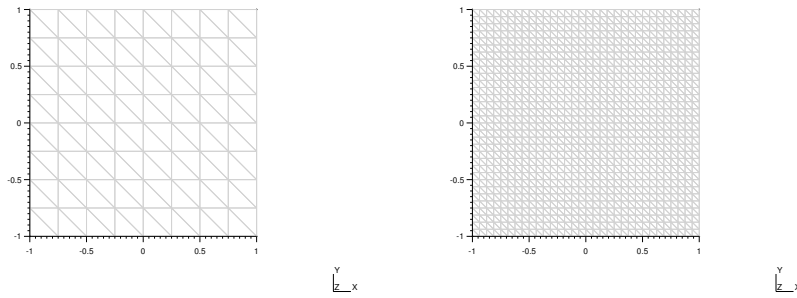


FIGURE 4.4: Exemples de maillages utilisés pour le test numérique du inf-sup.

Element	Représentation	Stabilité
T3-1	<p>● Déplacement ▲ Pression</p>	Instable
T3-3	<p>● Déplacement ▲ Pression</p>	Instable
T6-3	<p>● Déplacement ▲ Pression</p>	Stable

TABLE 4.1: Quelques éléments  $u/p$  à pression discontinue.

- ▷ les éléments  $u/p$  : le champ de pression est interne à l'élément et peut donc être condensé (voir le tableau 4.1). Ce type d'élément est utilisable car aucune dérivée du champ de pression n'apparaît dans la formulation faible (4.15) du problème. Le champ de pression sera donc continu par morceaux et dans le cas d'un champ de pression globalement continu, cette continuité ne sera possible que pour un nombre suffisant d'éléments (maillage suffisamment fin).
- ▷ les éléments  $u/p - c$  : "c" signifiant continu. Le champ de pression est défini à partir de valeurs nodales de pression, ces valeurs étant partagées d'élément en élément (voir le tableau 4.2). Par construction, le champ de pression est continu sur la structure quel que soit le nombre d'éléments (maillage grossier ou fin). En contrepartie, les variables de pression ne peuvent être condensées comme pour les éléments  $u/p$  et la taille du problème éléments finis augmente.

Dans cette étude, nous nous intéresserons plus particulièrement à deux des éléments présentés dans le tableau 4.2 : les éléments Mini et T6T3. Ces éléments sont bien connus de la littérature et vérifient la condition inf-sup. L'élément Mini, introduit par Arnold *et al.* (1984), est constitué d'un champ de déplacement linéaire

Element	Espaces	Représentation	Stabilité
T3-T3	$P_1, P_1$		Instable
T6-T3	$P_2, P_1$		Stable
Mini	$P_1^+, P_1$		Stable

TABLE 4.2: Quelques éléments  $u/p$  à pression continue (éléments  $u/p - c$ ).

enrichi avec une fonction bulle et d'un champ de pression linéaire (élément  $P_1^+, P_1$ ). Le  $T6T3$  (élément  $P_2, P_1$ ) est défini quant à lui pour un champ de déplacement quadratique et une pression linéaire (Bathe, 1996). Nous ne nous intéresserons pas aux éléments du tableau 4.1 pour des raisons qui seront détaillées dans le paragraphe suivant.

### Le cas X-FEM

Dans le cas X-FEM, le champ de déplacement est enrichi pour que les surfaces de discontinuité présentes dans le problème n'aient pas à respecter la géométrie du maillage. Cet enrichissement modifie donc l'espace des champs de déplacement  $\mathcal{V}^h$ . Par conséquent, si  $Q^h$  n'est pas enrichi, nous risquons d'obtenir un élément qui ne vérifie pas la condition inf-sup. La problématique est donc la suivante : *connaissant les fonctions d'enrichissement à appliquer pour un problème de trou, d'interface matériau ou de fissuration, comment enrichir le champ de pression afin que l'élément ainsi enrichi vérifie la condition inf-sup ?*

- ▷ Pour cela, nous allons tout d'abord nous placer dans le cas le plus défavorable : l'incompressibilité totale. En effet, un élément ne vérifiant pas la condition inf-sup comme l'élément quadrilatéral à déplacement bilinéaire et pression constante peut sembler stable (convergence du champ de déplacement) tout en faisant apparaître un champ de pression en "échiquier" (voir figure 4.5) : la pression ne converge pas. Ce type de champ de pression est d'autant plus prononcé que l'on se rapproche de l'incompressibilité totale. Nous procéderons donc à des études de convergence sur les déplacements et la pression pour un comportement totalement incompressible. Ce type d'étude permet d'estimer la qualité du triplet *élément fini - enrichissement du champ de déplacement - enrichissement du champ de pression*. Malheureusement, cela peut s'avérer insuffisant dans la mesure où après des opérations telles que le lissage du champ de pression, certains éléments ne vérifiant pas la condition inf-sup arrivent à converger (cependant, la qualité de la solution peut être très variable d'un problème à l'autre).
- ▷ Le test numérique du inf-sup présenté ci-dessus sera également considéré. Pour cela, un maillage éléments finis simple sera utilisé ; nous y placerons un trou, une inclusion matérielle ou une fissure et le système aux valeurs propres (4.20) sera résolu. Si au cours du raffinement du maillage la plus petite valeur propre non-nulle du système reste bornée loin de zéro, alors la condition inf-sup sera considérée vérifiée.

- ▷ Si notre triplet *élément fini - enrichissement du champ de déplacement - enrichissement du champ de pression* converge de façon optimale **et** vérifie le test numérique du inf-sup, alors l'élément sera considéré robuste et vérifiant le inf-sup.

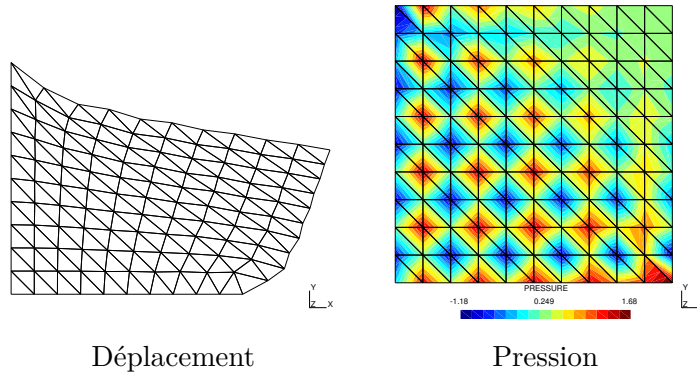


FIGURE 4.5: Element ne vérifiant pas la LBB (T3-T3) : le déplacement semble correct, en revanche la pression est en échiquier. Résultats à comparer à ceux de la figure 4.2.

### Formulation de type pénalité

Nous avons vu que les formulations mixtes à pression continue avaient pour inconvénient d'introduire des degrés de liberté associés au champ de pression. Les formulations de type pénalité permettent, elles aussi, la résolution de problèmes sous contrainte et ce, sans introduire d'inconnues supplémentaires. Comme nous l'avons vu précédemment, la résolution de la formulation faible d'un problème éléments finis peut être vue comme la recherche de la stationnarité d'une fonctionnelle énergétique. Dans le cas d'une formulation en déplacement, la formulation faible d'un problème d'élasticité linéaire était liée à la fonctionnelle  $\Pi_{EP}(\mathbf{u})$  définie en (4.7). Dans le cadre d'une formulation de type pénalité, la fonctionnelle précédente est pénalisée (via le coefficient de pénalité constant  $\gamma$ ) lorsque la divergence du déplacement est non-nulle. Cela permet d'éliminer les minima correspondant à des solutions compressibles :

$$\tilde{\Pi}(\mathbf{u}) = \Pi_{EP}(\mathbf{u}) + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u})^2 d\Omega \quad (4.21)$$

**Remarque 4.3** La fonctionnelle est pénalisée au travers de  $\operatorname{div}(\mathbf{u})^2$  pour conserver la convexité du potentiel (toute fonction positive, coercive et s'annulant lorsque  $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$  peut cependant être utilisée comme fonction de pénalité).◊

Par stationnarité de  $\tilde{\Pi}(\mathbf{u})$ , on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = \int_{\Omega} \delta \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathcal{C} : \underline{\underline{\varepsilon}} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \underline{\underline{b}} d\Omega - \int_{\Gamma_T} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}^d d\Gamma + \underbrace{\gamma \int_{\Omega} \operatorname{div}(\delta \mathbf{u}) \operatorname{div}(\mathbf{u}) d\Omega}_{\text{Pénalisation}} = 0 \quad (4.22)$$

ou encore :

$$a(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathcal{L}(\delta \mathbf{u}) \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V}^0 \quad (4.23)$$

où  $\mathcal{V}^0$  est le champ des déplacements cinématiquement admissibles à zéro,  $a(\bullet, \bullet)$  est la forme bilinéaire associée à la formulation et  $\mathcal{L}(\bullet)$  est la forme linéaire de la formulation (travail virtuel des efforts extérieurs). Cette formulation faible, une fois discrétisée conduit à la résolution d'un système linéaire du type :

$$([K_{uu}] + [K_{uu}^{\tilde{}}]) [u] = [f] \quad (4.24)$$

où  $[K_{uu}]$  est la matrice raideur classique d'élasticité linéaire et  $[\tilde{K}_{uu}]$  une matrice raideur provenant de la pénalisation :

$$[K_{uu}]_{ij} = \int_{\Omega_e} \underline{\nabla} \phi^i : \mathcal{C} : \underline{\nabla} \phi^j d\Omega_e \quad (4.25)$$

et

$$[\tilde{K}_{uu}]_{ij} = \gamma \int_{\Omega_e} \text{div}(\phi^i) \text{div}(\phi^j) d\Omega_e \quad (4.26)$$

Dans une formulation par pénalité, plus le coefficient de pénalité augmente, plus la condition pénalisée est vérifiée. Elle ne sera donc exactement vérifiée que si  $\gamma \rightarrow \infty$ . Le problème est que dans ce cas, le conditionnement de la matrice du système linéaire se dégrade fortement (les termes de  $[\tilde{K}_{uu}]$  deviennent beaucoup plus grands que ceux de  $[K_{uu}]$  dans (4.24)). La résolution du système linéaire devient donc difficile si un solveur itératif est utilisé (convergence très lente). Ce problème peut être contourné en utilisant un solveur direct (insensible au conditionnement de la matrice). Malgré tout, le système est défini positif (par opposition aux formulations mixtes où il est défini mais non-positif) et un seul champ est discrétisé (taille du système identique au cas compressible).

**Remarque 4.4** La structure de la matrice de pénalité  $[\tilde{K}_{uu}]$  est identique à celle de la matrice  $[K]^V$  introduite en (4.9), le coefficient de Lamé  $\lambda$  jouant le rôle de coefficient de pénalité. Une interprétation physique à  $\gamma$  est ainsi possible. ◊

**Remarque 4.5** Dans le cas où le coefficient de pénalité est très grand, le système éléments finis (4.24) prend une forme identique à (4.9). Il s'en suit donc que la solution éléments finis pénalisée verrouille pour les mêmes raisons que celles évoquées dans l'introduction de ce chapitre. ◊

**Procédures d'intégration réduite sélective** Nous venons de voir qu'en appliquant la formulation des pénalités telle quelle, la méthode verrouille (tant pour des éléments linéaires que des éléments quadratiques). Ce phénomène peut être contrebalancé par l'utilisation de procédures d'intégration réduite sélective. Ces procédures consistent à intégrer la matrice de pénalité  $[\tilde{K}_{uu}]$  avec un nombre de points de Gauss inférieur à celui nécessaire pour l'intégrer exactement. En procédant ainsi, il est possible de donner à  $[\tilde{K}_{uu}]$  le bon coefficient de singularité permettant la résolution du système (4.24).

**Remarque 4.6** Ce comportement peut s'expliquer à partir de l'équation (4.10) : le seul moyen d'obtenir une solution non-nulle à cette équation est de rendre la matrice  $[K]^V$  (égale à  $[\tilde{K}_{uu}]$  dans ce cas) singulière (Donea et Huerta, 2003). Cette singularité est donc obtenue par sous-intégration sélective. ◊

**Équivalence avec une formulation mixte** A leur introduction, les formulations à intégration réduite ont eu de nombreux détracteurs. En effet, bien que ces procédures fournissent de bons résultats, elles étaient perçues comme des "bricolages variationnels". Plus tard, Malkus et Hughes (1978) ont montré que sous certaines conditions les formulations pénalisées et les formulations mixtes étaient équivalentes. Plus exactement, si les points d'intégration réduite coïncident avec les nœuds de pression des éléments  $u - p$  du tableau 4.1, les deux formulations sont équivalentes. De plus, les résultats suivants sont obtenus :

- ▷ Avec un élément fini triangulaire linéaire et une intégration réduite à un point de Gauss au centre de l'élément, la formulation des pénalités est équivalente à un élément T3-1 (cf tableau 4.1) qui ne vérifie pas la condition inf-sup ;
- ▷ De même, pour un élément triangulaire à déplacement quadratique et une intégration réduite à trois points de Gauss, il y a équivalence avec l'élément T6-3 qui est stable (ses points de Gauss ne sont pas placés de la même façon que dans une intégration de Gauss classique).



**Le cas X-FEM** Dans le cas X-FEM, l'utilisation de formulations de type pénalités pour imposer l'incompressibilité semble difficile, bien que ce type de formulations ait déjà été utilisé pour la gestion du contact entre deux levelsets (thèse de Yosra Guétari (Guétari, 2005)). Les formulations des pénalités pures peuvent d'ores et déjà être éliminées pour les raisons de stabilité exposées plus haut. En ce qui concerne les procédures d'intégration réduite sélective, plusieurs problèmes se posent :

- ▷ Lorsque le déplacement est enrichi par une fonction discontinue (cas des fissures) ou à dérivée discontinue (cas des interfaces matériaux), le gradient du champ de déplacement est discontinu à travers l'interface. En choisissant une procédure d'intégration sélective,  $[K_{uu}^{\sim}]$  est intégrée avec un seul point de Gauss situé au milieu de l'élément. Si les termes à intégrer sont constants, alors seule leur valeur au centre de l'élément est considérée. Si la surface de discontinuité passe par ce point, alors il y a indétermination sur la valeur à intégrer (cf figure 4.6(a)). Dans les autres cas, la valeur d'un côté ou de l'autre de la surface de discontinuité est prise en compte suivant la position de la discontinuité par rapport au centre de l'élément (voir la figure 4.6(b)) ;
- ▷ Lorsque le déplacement est enrichi par des fonctions non-polynomiales, les termes de  $[K_{uu}^{\sim}]$  sont considérés comme constants alors que leur évolution est complexe. Le problème risque donc de devenir sous-contraint (introduction de modes à énergie nulle).

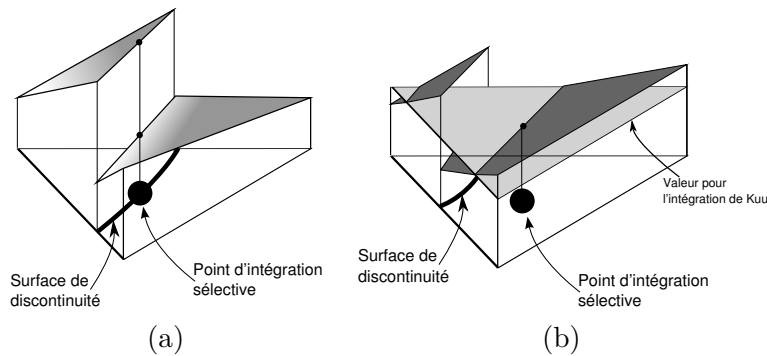


FIGURE 4.6: (a) : Cas où le point d'intégration réduite est situé sur la surface de discontinuité : il y a une indétermination sur la valeur à utiliser ;

(b) : Cas où le point d'intégration réduite est situé d'un côté de la surface de discontinuité : la position de la discontinuité influence directement la valeur à considérer au point d'intégration.

Il existe cependant des cas (certes rares) où les formulations à intégration réduite sélective peuvent être applicables à X-FEM, comme par exemple la simulation de la fissuration en n'utilisant que l'enrichissement de type Heaviside. Il suffit pour cela d'utiliser une intégration dite "partition" (définie dans la section 2.4) et d'appliquer la procédure d'intégration sélective à chaque partie de l'élément (cf figure 4.7). L'inconvénient de cette restriction est que la fissure doit alors se terminer sur l'arête d'un élément (ou un noeud) pour être représentée géométriquement. Il en découle également une perte de précision à proximité de la pointe de fissure puisque les fonctions (2.72) ont été supprimées.

**Remarque 4.7** D'après l'équivalence entre formulations des pénalités à intégration réduite et formulations mixtes, les stratégies proposées ici devraient aussi fonctionner avec leurs équivalents mixtes.◊

### Éléments de type Enhanced Assumed Strain (EAS)

La méthode Enhanced Assumed Strain est très utilisée pour le traitement de problèmes incompressibles ou de flexion, le tout avec une formulation en déplacement. L'intérêt est qu'alors, comme pour les formulations des pénalités, la taille du système éléments finis à résoudre est identique au cas compressible. Cette méthode, fondée sur le principe variationnel de Hu-Washizu, a initialement été introduite par Simo et Rifai (1990) dans le cas de l'élasticité linéaire. Elle peut être vue comme une extension des méthodes à modes incompatibles de Taylor et al. (1976) et permet la construction d'éléments d'ordre faible aux très bonnes performances dans le cas de maillages grossiers. Cependant, une des limitations de cette formulation est l'impossibilité de l'appliquer aux éléments triangulaires (Reddy et Simo, 1994).

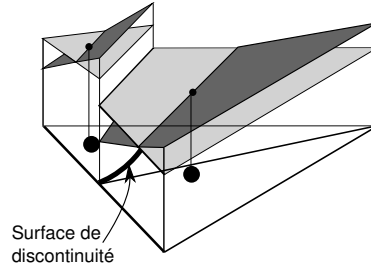


FIGURE 4.7: Proposition dans le cas des fissures : un point d'intégration sélective est utilisé pour chaque "partition" de l'élément.

**La formulation Enhanced Assumed Strain (EAS)** Le point de départ de la formulation est la fonctionnelle de Hu-Washizu (4.11). Dans celle-ci,  $\mathbf{u}$ ,  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  sont des variables indépendantes. Le champ de déformation linéarisé est considéré sous la forme :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}}_{\text{compatible}} + \underbrace{\underline{\underline{\varepsilon}}^e}_{\text{augmenté}} \quad (4.27)$$

où  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$  est un champ de déformation "augmenté" incompatible avec la discrétisation. Si cette expression est introduite dans l'équation (4.11), on obtient :

$$\Pi^*(\mathbf{u}, \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\sigma}}) = \Pi_{EP}(\mathbf{u}) - \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e d\Omega + \Pi^{\text{ext}} \quad (4.28)$$

En choisissant un champ de déformation augmenté  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$  orthogonal au champ de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$ , c'est-à-dire :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e d\Omega = 0 \quad (4.29)$$

Alors la contrainte peut être éliminée de la formulation de Hu-Washizu (4.11), ce qui conduit à :

$$\Pi^*(u, \underline{\underline{\varepsilon}}^e) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}) + \underline{\underline{\varepsilon}}^e) : \mathbb{C} : (\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}) + \underline{\underline{\varepsilon}}^e) d\Omega + \Pi^{\text{ext}} \quad (4.30)$$

Le champ de déformation augmenté  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$  est choisi discontinu entre les éléments et interpolé à partir d'une base de modes de déformation  $\underline{\underline{G}}^{ie}$  :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \sum_{ie} \underline{\underline{G}}^{ie} \alpha^{ie} \quad (4.31)$$

où  $\alpha^{ie}$  correspond au degré de liberté de l'interpolation associé au mode  $\underline{\underline{G}}^{ie}$ . Ces degrés de liberté sont locaux (définis par élément) et sont donc éliminés par condensation.

Intéressons nous maintenant à l'imposition de la condition d'orthogonalité (4.29). Si celle-ci est imposée au niveau variationnel, le système obtenu conduit à la nullité de  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$  ; cette condition est donc imposée pour un champ de contrainte  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$  non plus quelconque, mais constant par élément :

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} : \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}^e d\Omega = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}^e d\Omega = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} \underline{\underline{G}}^{ie} d\Omega = 0 \quad (4.32)$$

Cette condition assure la vérification du patch-test (voir (Bathe, 1996)) ainsi que la convergence de la méthode EAS en élasticité linéaire.

**Remarque 4.8** *Le patch-test doit être vérifié ici, car cette méthode est une extension des méthodes à modes incompatibles où le choix des modes conditionne directement les performances de la méthode (l'introduction de  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$  représente un "crime variationnel").* ◊

La condition d'orthogonalité sur un élément fini devient :

$$\int_{\Omega_e} \underline{\underline{G}}^{ie} d\Omega = \int_{\square} \tilde{\underline{\underline{G}}}^{ie}(\xi, \eta) j(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0 \quad (4.33)$$

où  $\square$  représente l'élément fini de référence,  $j$  est le déterminant du jacobien de la transformation  $\tilde{\phi}$  liant un élément dans  $\Omega$  et  $\square$ , et  $(\xi, \eta)$  sont les coordonnées dans l'élément de référence. Remarquons ici l'apparition de  $\tilde{\underline{\underline{G}}}^{ie}(\xi, \eta)$  : ce tenseur correspond à l'expression de  $\underline{\underline{G}}^{ie}$  sur la configuration  $\square$ . Taylor et al. (1976) ont proposé d'écrire ce tenseur sous la forme :

$$\underline{\underline{G}}^{ie}(\mathbf{x}) = \frac{j_0}{j(\xi, \eta)} \underline{\underline{J}}_0^{-T} \tilde{\underline{\underline{G}}}^{ie}(\xi, \eta) \underline{\underline{J}}_0^{-1} \quad (4.34)$$

$$= \frac{j_0}{j(\xi, \eta)} \underline{\underline{F}}_0^{-1} \tilde{\underline{\underline{G}}}^{ie}(\xi, \eta) \quad (4.35)$$

où  $j_0 = j(\xi = 0, \eta = 0)$ ,  $\underline{\underline{J}}$  est la partie constante de la matrice jacobienne, et  $\underline{\underline{F}}_0$  est obtenu à partir de  $\underline{\underline{J}}_0$ . Grâce à cette expression, la vérification de la condition d'orthogonalité est bien plus aisée qu'avec la méthode initialement proposée par Simo et al. (où  $\underline{\underline{J}}$  variait dans  $\square$ ). Finalement, cette condition d'orthogonalité s'écrit :

$$\int_{\Omega_e} \underline{\underline{G}}^{ie} d\Omega = j_0 \underline{\underline{F}}_0^{-1} \int_{\square} \tilde{\underline{\underline{G}}}^{ie}(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0 \quad (4.36)$$

La question est maintenant de savoir comment choisir la base  $\tilde{\underline{\underline{G}}}^{ie}$  pour obtenir un élément aux meilleures caractéristiques possibles. En deux dimensions, la base minimale est constituée de :

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{\underline{G}}}^1 &= \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \tilde{\underline{\underline{G}}}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix} & \tilde{\underline{\underline{G}}}^3 &= \begin{pmatrix} 0 & \xi/2 \\ \xi/2 & 0 \end{pmatrix} & \tilde{\underline{\underline{G}}}^4 &= \begin{pmatrix} 0 & \eta/2 \\ \eta/2 & 0 \end{pmatrix} \\ & & & & \tilde{\underline{\underline{G}}}^5 &= \begin{pmatrix} \xi\eta & (\xi^2 - \eta^2)/2 \\ (\xi^2 - \eta^2)/2 & -\xi\eta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.37)$$

L'utilisation de  $\tilde{\underline{\underline{G}}}^1$ ,  $\tilde{\underline{\underline{G}}}^2$ ,  $\tilde{\underline{\underline{G}}}^3$  et  $\tilde{\underline{\underline{G}}}^4$ , correspond à l'élément Q1-E4 (remarquons que si on ne considère pas au minimum ces quatre tenseurs, la base de  $\underline{\underline{e}}^e$  n'est pas complète). En ajoutant  $\tilde{\underline{\underline{G}}}^5$ , nous obtenons l'élément Q1-E5. Toutefois, l'élément Q1-E4 est suffisant en 2D pour obtenir des éléments qui ne verrouillent pas (voir plus ci-après). Si on choisit tout de même d'aller au-delà de cinq termes, les performances de l'élément ne sont pas notablement améliorées. Pire même, son efficacité numérique est diminuée (temps de calcul).

**Cas de l'incompressibilité** Le changement de volume lié au champ de déplacement  $\mathbf{u}$  peut être développé sous la forme (Wriggers et Korelc, 1996) :

$$\frac{V}{V_0} = \text{Tr}(\underline{\underline{e}}(\mathbf{u})) = C_0 + C_1\xi + C_2\eta + C_4\xi\eta + \text{termes d'ordre supérieur} \quad (4.38)$$

où  $V_0$  représente le volume initial de l'élément,  $V$  son volume final et  $C_i$  sont des constantes qui dépendent des déplacements nodaux. Le changement de volume lié au champ de déformation augmenté s'écrit quant à lui :

$$\frac{V}{V_0} = \text{Tr}(\underline{\underline{e}}^e) = C_1^e\xi + C_2^e\eta + C_4^e\xi\eta + \text{termes d'ordre supérieur} \quad (4.39)$$

où les constantes  $C_i^e$  dépendent des coefficients  $\alpha^{ie}$ . Selon Simo et al. (1993), un élément sera insensible au verrouillage si la construction du champ de déformation augmenté donne pour l'incompressibilité  $C_i = -C_i^e$  pour tous les termes non nuls de l'équation (4.38). Ainsi, seuls les changements de volume constants sont admis (terme  $C_0$  de (4.38)). D'après (4.38), en 2D quatre modes EAS suffisent à rendre un élément Q1 insensible au verrouillage. Ce résultat a été prouvé par Freischläger et Schweizerhof (1996) pour l'incompressibilité, mais pas pour le verrouillage en flexion.

**Remarque 4.9** Pantuso et Bathe (1995) proposent d'appliquer le formalisme EAS à des éléments mixtes pour améliorer leur comportement. Cet élément est ainsi le premier élément EAS vérifiant la condition inf-sup. Cette approche a été reprise par Lovadina et Auricchio (Lovadina et Auricchio, 2003) pour construire un élément triangulaire EAS, ce qui est impossible en utilisant une formulation en déplacement. ◊

**Le cas X-FEM** L'application de la méthode X-FEM à une formulation de type EAS a déjà été étudiée par Dolbow et Devan (2004) dans le cas non linéaire incompressible. Les auteurs ont considéré l'élément Q1-E4 présenté plus haut, et l'ont enrichi par X-FEM. Le point délicat de cette formulation consiste à assurer l'orthogonalité du champ augmenté du gradient de déplacement avec le champ de contrainte. La formulation résultante doit en outre, comme toutes les formulations de type EAS, vérifier le patch-test. Les détails de cette implémentation seront présentés plus loin, nous ne nous attarderons donc pas sur ce point dans ce paragraphe. Les auteurs montrent que la méthode conduit à de bons résultats (pas de locking et pas d'instabilités) dans le cas d'un enrichissement avec Heaviside seul (pas d'enrichissement en pointe). L'avantage de cette approche est qu'elle permet de résoudre des problèmes d'incompressibilité (en grandes transformations), sans pour autant avoir à se conformer au maillage et sans avoir à introduire d'inconnues supplémentaires comme dans le cas des formulations mixtes.

Cependant, un point reste litigieux : les auteurs se sont limités au cas de l'enrichissement par Heaviside. La fissure doit donc se terminer sur un noeud ou une arête du maillage pour que sa géométrie soit correctement représentée. Ils ajoutent en outre que l'utilisation d'un enrichissement en pointe améliorerait encore la précision du calcul. Rien n'est moins sûr. En effet, l'ajout d'un enrichissement en  $\sqrt{r} \sin(\theta/2)$  qui permettrait de représenter la fissure de façon réellement indépendante du maillage rendrait difficile voir impossible l'orthogonalité entre le gradient du déplacement augmenté et la contrainte. De plus, un enrichissement avec les quatre autres termes asymptotiques du champ de déplacement en pointe de fissure rend l'orthogonalité impossible.

### Enrichissement de formulations mixtes par la méthode X-FEM

Dans cette section, nous nous attacherons à proposer des stratégies d'enrichissement pour le champ de pression afin d'obtenir une formulation enrichie qui reste stable. En particulier, les cas des trous, des inclusions et des fissures seront considérés.

#### Stratégies d'enrichissement pour les formulations mixtes

**Trous** Le traitement des trous avec X-FEM consiste en une intégration de la formulation faible uniquement sur les parties non-vides des éléments (Daux *et al.*, 2000; Sukumar *et al.*, 2001) (voir la figure 4.8). De plus, les noeuds pour lesquels le support est complètement hors de la matière sont éliminés. Dans le cas incompressible, il est naturel de suivre la même stratégie. Aucun enrichissement ne sera utilisé et la formulation faible sera intégrée sur le corps seulement.

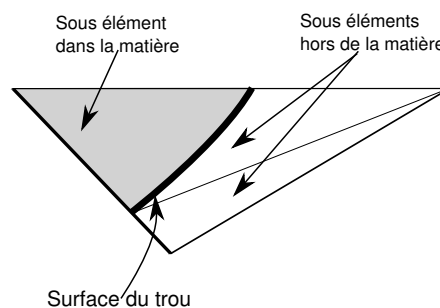


FIGURE 4.8: Intégration de la formulation faible dans le cas d'un élément coupé par un trou.

**Inclusions** Le cas des inclusions matérielles dans les matériaux *compressibles* a été étudié dans deux contributions principales (Sukumar *et al.*, 2001; Moës *et al.*, 2003). Il a en outre été observé que la fonction d'enrichissement proposée par Sukumar *et al.* (2001) provoquait une diminution de l'ordre de convergence de l'approximation (Chessa *et al.*, 2003). Ces auteurs ont montré que l'utilisation d'éléments de type "bending" permettait d'éliminer cette dégradation de l'ordre de convergence. Plus récemment, Legay *et al.* (2005) ont établi qu'il suffisait d'enrichir uniquement les termes d'ordre  $n - 1$  d'un élément de degré  $n$  pour obtenir une convergence optimale (remarquons que cela ne fonctionne pas avec des éléments linéaires).

Ici, nous nous intéresserons à la stratégie d'enrichissement proposée par Moës *et al.* (2003). En effet, les

auteurs ont observé numériquement que la fonction d'enrichissement de type "ridge" préservait l'ordre de convergence de la solution éléments finis<sup>2</sup> et cela sans avoir à utiliser les stratégies présentées par Chessa *et al.* et Legay *et al.* Il semblerait que cette propriété découle du fait que le support de cette fonction est compact. Notons également qu'elle permet une convergence optimale avec des éléments linéaires, à la différence de Legay *et al.* (2005). Cette fonction "ridge" s'exprime ainsi :

$$\phi^u(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} |\xi^{\alpha}| N^{\alpha}(\mathbf{x}) - \left| \sum_{\alpha} \xi^{\alpha} N^{\alpha}(\mathbf{x}) \right| \quad (4.40)$$

où  $\xi_i$  est la fonction de distance signée à l'interface (levelset) évaluée au noeud  $i$  du maillage et  $N^i$  est la fonction de forme éléments finis associée au noeud  $i$  (voir la figure 4.9 pour le cas d'une plaque avec une inclusion circulaire en son centre). Deux types d'enrichissement seront testés pour la pression :

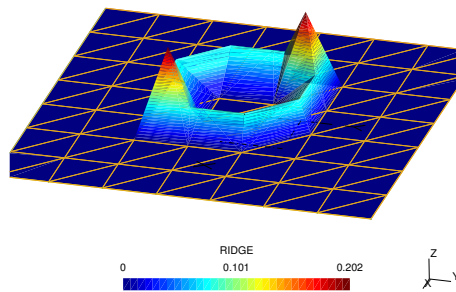


FIGURE 4.9: Fonction "ridge" dans le cas d'une plaque carrée avec une inclusion circulaire.

- ▷ Un enrichissement discontinu à travers l'interface (fonction Heaviside), car la pression peut être  $C^0$  ;
- ▷ Un enrichissement de type "ridge" (par analogie avec la stratégie considérée pour le champ de déplacement)

Remarquons que si l'approximation éléments finis initiale vérifie la condition inf-sup, alors la condition (4.18) sera automatiquement vérifiée si la pression est enrichie par une des fonctions proposées ci-dessus.

L'utilisation de ces fonctions d'enrichissement conduit à de nombreux cas de figure. Ceux que nous testerons par la suite sont présentés dans le tableau 4.3.

**Fissures** La résolution de problèmes de mécanique de la rupture dans le cas compressible a été largement étudiée avec X-FEM (voir section 2.4). La stratégie d'enrichissement la plus classique consiste à utiliser le développement asymptotique du champ de déplacement en pointe de fissure. Dans le cas incompressible, ce développement n'est pas modifié et peut donc être réutilisé. L'évolution asymptotique du champ de pression peut elle aussi être obtenue à partir de la solution de Westergaard :

$$p(r, \theta) = \frac{2K_I}{3\sqrt{2}\pi r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{2K_{II}}{3\sqrt{2}\pi r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (4.41)$$

Cette expression est utilisée pour obtenir la base d'enrichissement de la pression dans la zone proche de la pointe de fissure :

$$\begin{cases} \phi_I^p &= \frac{1}{\sqrt{r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \phi_{II}^p &= \frac{1}{\sqrt{r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases} \quad (4.42)$$

2. Tout du moins dans le cas des éléments linéaires. Le cas des éléments quadratiques a été traité au cours de cette thèse et l'ordre de convergence optimal est là aussi préservé.

Déplacement	Pression	Formulation N°	Taux de convergence (Déplacement/Pression)	Test inf-sup
<i>FEM-T6T3</i>				
$P_2$	$P_1$	1	$\sim 1.5^a/1.5$	réussite
<i>FEM-Mini</i>				
$P_1^+$	$P_1$	2	$\sim 1/1$	réussite
<i>X-FEM - Mini</i>				
$P_1^+ \oplus P_1^+ * R$	$P_1 \oplus P_1 * R$	3	$\sim 1/1$	réussite
$P_1^+ \oplus P_1 * R$	$P_1 \oplus P_1 * R$	4	$\sim 1/1$	réussite
$P_1^+ \oplus P_1^+ * R$	$P_1 \oplus P_1 * H$	5	$\sim 1/-^b$	réussite <sup>b</sup>
$P_1^+ \oplus P_1 * R$	$P_1 \oplus P_1 * H$	6	$\sim 1/-^b$	réussite <sup>b</sup>
<i>X-FEM - T6T3</i>				
$P_2 \oplus P_2 * R$	$P_1 \oplus P_1 * R$	7	$\sim 1.5^a/1.5$	réussite
$P_2 \oplus P_1 * R$	$P_1 \oplus P_1 * R$	8	$\sim 1.5^a/1.5$	réussite
$P_2 \oplus P_2 * R$	$P_1 \oplus P_1 * H$	9	$\sim 1.5^a/-^b$	réussite <sup>b</sup>
$P_2 \oplus P_1 * R$	$P_1 \oplus P_1 * H$	10	$\sim 1.5^a/-^b$	réussite <sup>b</sup>

$a$  : élément triangulaires à bords droits.

$b$  : le paramètre inf-sup oscille et la convergence de la pression n'est pas monotone.

TABLE 4.3: Espaces d'approximation ( $R$  : enrichissement Ridge,  $H$  : enrichissement Heaviside).

Remarquons que la pression et le déplacement sont enrichis avec une fonction de type Heaviside pour les nœuds dont le support est coupé en deux par la fissure. De plus, seul l'élément Mini sera utilisé lors des validations de fissuration.

### Validations

D'après [Zienkiewicz et al. \(1989\)](#), la convergence d'une approximation mixte (sans singularité) est caractérisée par l'inégalité suivante :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{H^1} + \|p - p^h\|_{L^2} = O\left(h^{\min(K,L+1)}\right) \quad (4.43)$$

où  $(\mathbf{u}, p)$  est la solution exacte du problème,  $(\mathbf{u}^h, p^h)$  est la solution éléments finis et  $(K, L)$  les ordres complets des polynômes interpolant respectivement le déplacement et la pression. Aucun résultat théorique n'est à notre connaissance disponible lorsqu'une singularité est présente dans les champs de pression ou de déplacement. Les taux de convergence optimaux éléments finis seront donc les suivants :

Élément	Déplacement (norme $H^1$ )	Pression (norme $L^2$ )
Mini	$O(h)$	$O(h)$
T6-T3	$O(h^2)$	$O(h^2)$

Ordres de convergence optimaux

### Validations pour les trous

**Étude de convergence** Considérons une plaque infinie avec un trou circulaire soumise à un chargement de traction uniaxiale ; la solution exacte de ce problème est donnée dans ([Sukumar et al., 2001](#)). Le domaine de simulation est un carré de côté 2 avec un trou circulaire de rayon  $a = 0,4$  en son centre. Les tractions exactes sont imposées sur la frontière du domaine et les mouvements de corps rigide sont bloqués. Le coefficient de Poisson est choisi égal à 0,5 (incompressibilité totale), le module d'Young égal à 1, et on fait en plus l'hypothèse d'un état de déformations planes. La séquence de maillages utilisée pour l'étude de convergence est non-structurée et ne tient pas compte du trou (voir figure 4.10(a)). L'erreur sur le champ de déplacement

est mesurée par une erreur en énergie (4.44) et l'erreur sur la pression par une erreur en norme  $L^2$  (4.45), c'est-à-dire :

$$\varepsilon_u = \frac{\left( \int_{\Omega} (\underline{\varepsilon}(u^h) - \underline{\varepsilon}(u)) : \mathbb{C} : (\underline{\varepsilon}(u^h) - \underline{\varepsilon}(u)) d\Omega \right)^{1/2}}{\left( \int_{\Omega} \underline{\varepsilon}(u) : \mathbb{C} : \underline{\varepsilon}(u) d\Omega \right)^{1/2}} \quad (4.44)$$

et

$$\varepsilon_p = \frac{\left( \int_{\Omega} (p^h - p)^2 d\Omega \right)^{1/2}}{\left( \int_{\Omega} p^2 d\Omega \right)^{1/2}} \quad (4.45)$$

L'étude de convergence est réalisée avec les éléments Mini et T6T3. Les résultats sont présentés sur la

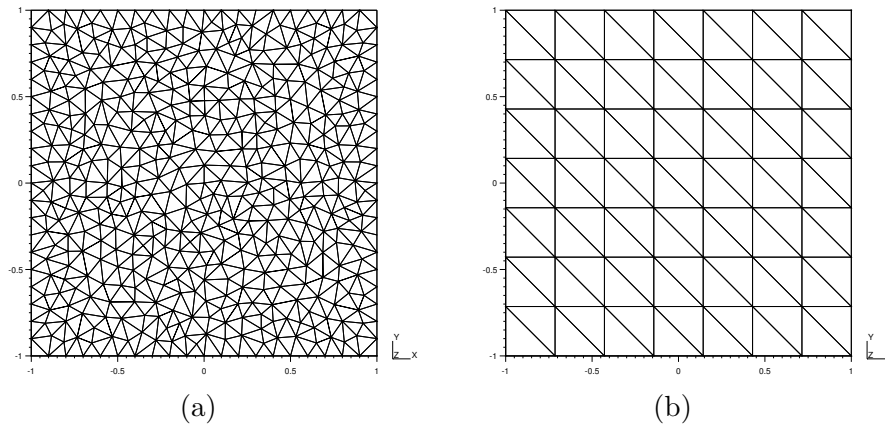


FIGURE 4.10: (a) Maillage utilisé pour l'étude de convergence, (b) Maillage utilisé pour le test numérique du inf-sup.

Figure 4.11 pour la pression et le déplacement. Comme illustré sur cette figure, le taux de convergence pour

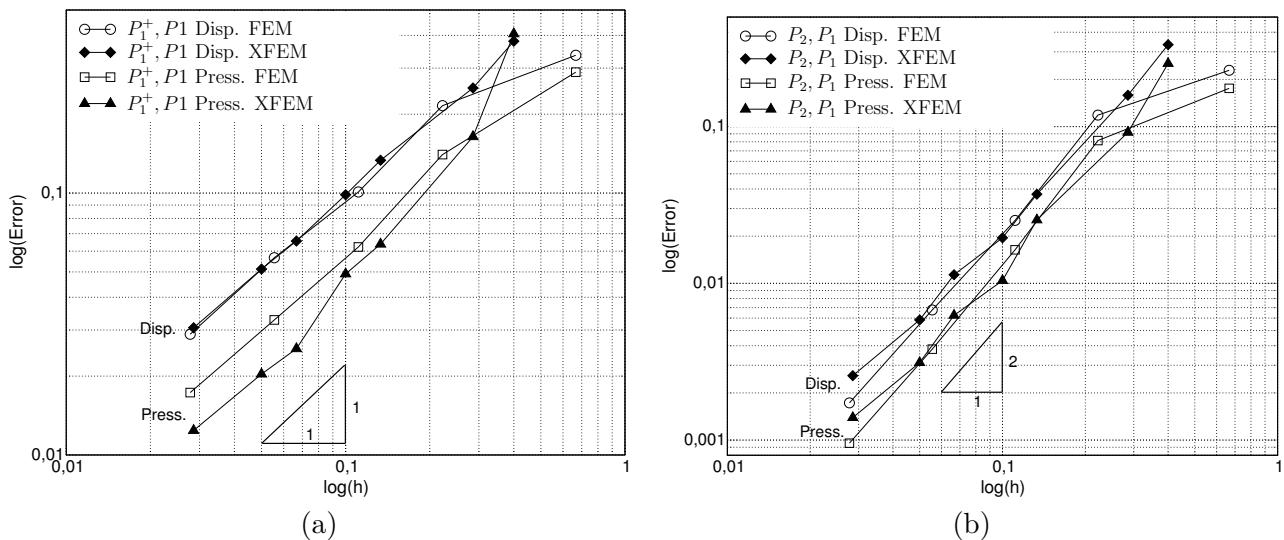


FIGURE 4.11: Étude de convergence, plaque incompressible trouée : (a) Élément Mini (b) T6T3.

le déplacement et la pression sont similaires aux taux théoriques tant pour le Mini que le T6T3.

**Test numérique du inf-sup** Pour ce test numérique, nous suivons le travail de Chapelle et Bathe (Chapelle et Bathe, 1993) décrit dans la section 4.2, et nous considérons le problème présenté sur la figure 4.12(a). Il est composé d'un carré de côté 2 percé d'un trou de rayon 0,4 en son centre. Les côtés gauche et bas



sont bloqués et une pression est appliquée sur le côté supérieur. La valeur du inf-sup est approchée en utilisant des maillages triangulaires structurés graduellement raffinés tels que celui présenté sur la figure 4.10(b). L'évolution numérique du inf-sup par rapport à la taille du maillage est tracée sur la figure 4.12(b). Il apparaît

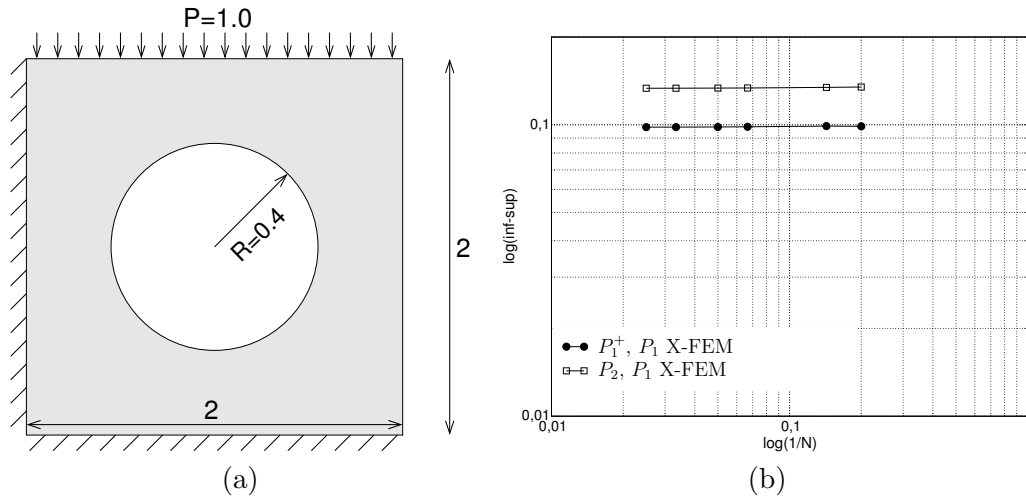


FIGURE 4.12: Évaluation du inf-sup pour les trous : (a) problème de référence, (b) évolution du inf-sup numérique.

clairement que l'inf-sup numérique est stable tant pour le Mini que pour le T6T3.

**Cavité carrée** L'exemple suivant est adapté d'un test classiquement utilisé en mécanique des fluides pour quantifier la robustesse des éléments finis mixtes. Le problème est constitué d'une plaque carrée de côté 2 contenant un trou circulaire de rayon  $a = 0,4$  en son centre (voir figure 4.13(a)). Les faces inférieures, gauches et droites sont encastées, alors que le déplacement vertical est bloqué sur la face supérieure. Le chargement est constitué d'un effort horizontal  $t$  réparti sur la face supérieure. Les comportements des formulations mixtes FEM et X-FEM sont comparés avec leurs homologues en déplacement. Pour cela, nous considérons quatre formulations (FEM, X-FEM, mixtes ou non), et nous faisons varier le coefficient de Poisson de 0,3 à 0,5. La figure 4.13(b) représente la variation du déplacement maximum sur la ligne supérieure en fonction du module de compressibilité du matériau. Toutes les formulations en déplacement verrouillent comme en attestent les courbes de déplacement qui tendent vers zéro. A l'opposé, les formulations mixtes (FEM ou X-FEM) restent insensibles aux variations du module de compressibilité. Les champs de déplacement et de pression FEM et X-FEM sont présentés sur les figures 4.14 et 4.15 respectivement. Les résultats montrent que le calcul X-FEM donne une solution cohérente avec l'approche conforme, tant pour le déplacement que la pression.

**Conclusion pour les trous** Nous venons de voir au travers des exemples précédents que l'utilisation de la méthode X-FEM sur des éléments finis mixtes stables tels que les éléments Mini et T6T3 ne rendait pas instable les formulations dans la cas des trous. En effet, nous avons observé que les taux de convergence restaient optimaux après application de la méthode. De plus, le test numérique du inf-sup montre clairement que ces formulations vérifient toujours la condition inf-sup après enrichissement.

### Validations pour les inclusions

**Étude de convergence (interface courbe)** Considérons l'exemple présenté sur la figure 4.16(a). Deux matériaux totalement incompressibles sont collés l'un à l'autre. Leurs modules de cisaillement sont notés  $\mu_1$  and  $\mu_2$ . Le premier matériau est encasté à un rayon  $r = a$  et l'interface entre les deux matériaux est située à un rayon  $r = b$ . La structure est soumise à des forces de volume  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{b}_2$  dans  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  respectivement et des tractions sont appliquées au rayon  $r = c$ . La solution analytique du champ de pression est présentée sur la figure 4.17 et est détaillée dans l'annexe A.1.

Les résultats de convergence pour l'élément Mini sont présentés sur la figure 4.18, et un maillage utilisé pour l'étude de convergence sur la figure 4.16(b). L'erreur en énergie converge en  $O(h)$  indépendamment de la

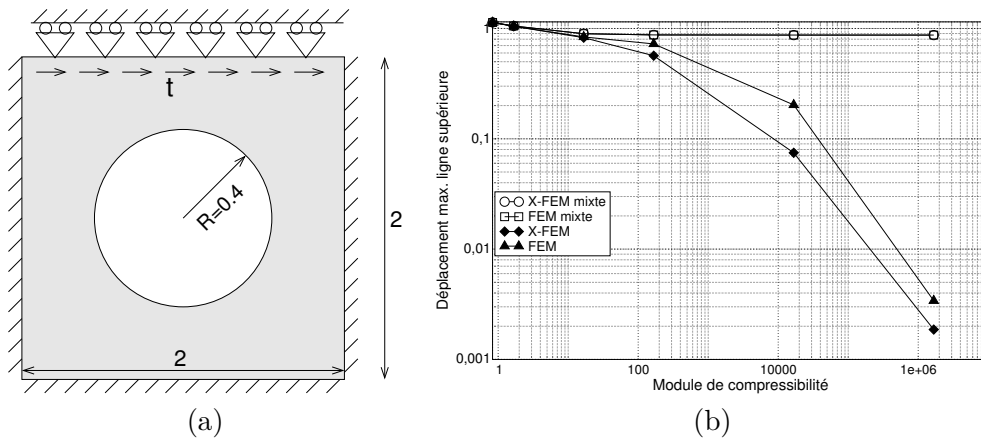


FIGURE 4.13: (a) Problème de cavité, (b) Évolution du déplacement sur la ligne supérieure en fonction du module de compressibilité.

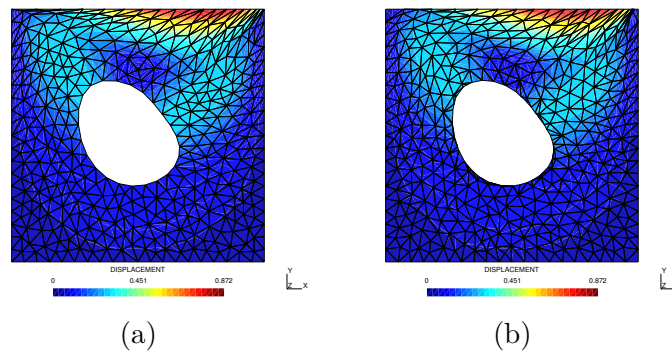


FIGURE 4.14:  $\nu = 0,5$  : Champ de déplacement (a) éléments finis classiques, (b) X-FEM.

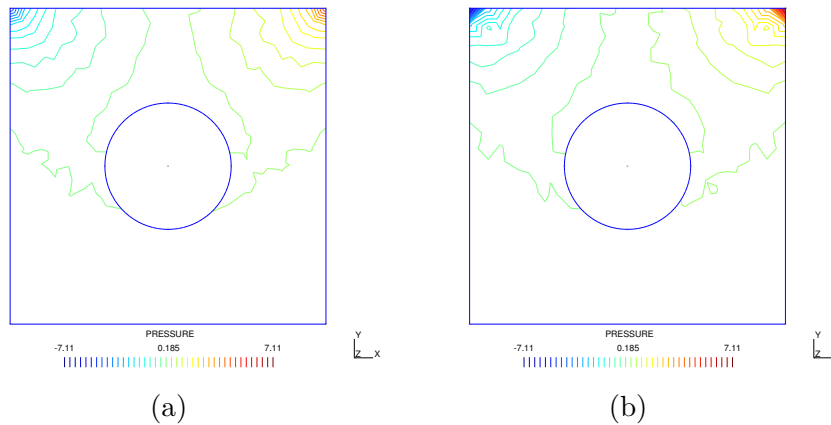


FIGURE 4.15:  $\nu = 0,5$  : Iso-valeurs de pression (a) éléments finis, (b) X-FEM.

stratégie d'enrichissement utilisée (voir le tableau 4.3). En ce qui concerne la pression, la figure 4.18 montre que seules les formulations 2 et 3 convergent de façon optimale. La formulation 5, quant à elle, fait apparaître une dégradation du taux de convergence lorsque le maillage est raffiné. En fait, cela provient de modes de pression très localisés qui dégradent la convergence lorsque l'interface entre les matériaux s'approche fortement des bords des éléments. La figure 4.19 montre le cas où seule la partie linéaire de l'espace d'approximation est enrichie. Le taux de convergence est une fois encore dégradé pour l'enrichissement en Heaviside lorsque le maillage est raffiné. Cependant, le taux de convergence avec l'enrichissement "ridge" reste optimal tant pour le déplacement que pour la pression.

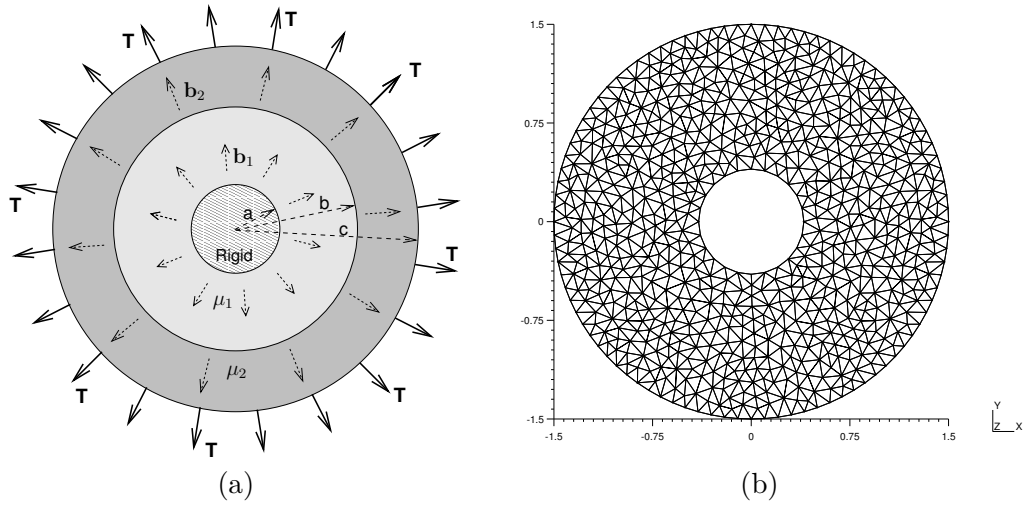


FIGURE 4.16: (a) Exemple de tube sous cisaillement ; (b) maillage utilisé pour l'étude de convergence (notons que le rayon extérieur du maillage est inférieur à c).

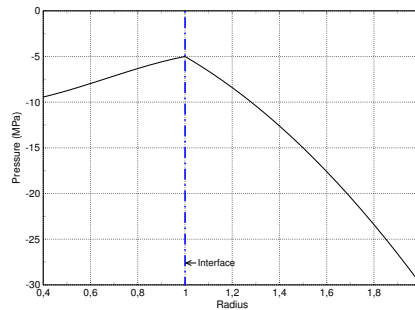


FIGURE 4.17: Solution analytique pour la pression.

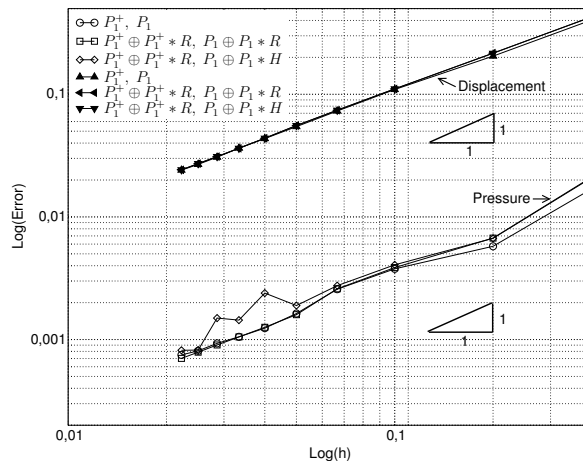


FIGURE 4.18: Taux de convergence pour le problème de la Fig.4.16.

**Remarque 4.10** N'enrichir que la partie linéaire de l'approximation revient à utiliser des partitions de l'unité différentes pour le déplacement et les enrichissements (Legay et al., 2005).◇

Pour terminer, considérons le cas de l'élément quadratique T6T3 sur la figure 4.20. Son taux de convergence est en  $O(h^{3/2})$  pour la pression et légèrement inférieur pour le déplacement (même pour les calculs éléments finis classiques). Ce résultat est en accord avec la théorie (Raviart et Thomas, 1998, p 119) : le taux de

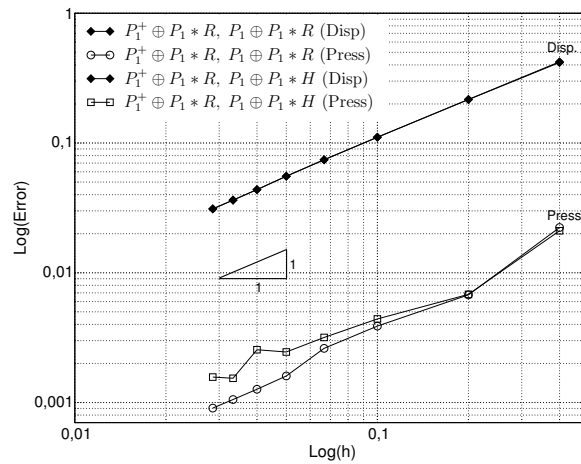


FIGURE 4.19: Taux de convergence pour le problème de la Fig.4.16, partie linéaire enrichie (élément Mini).

convergence optimal pour des domaines incurvés discrétisés par des éléments triangulaires (bords droits) est d'ordre  $O(h^{3/2})$ . Le même comportement est observé lorsque seule la partie linéaire du déplacement est enrichie (voir la figure 4.21).

Comme nous l'avons vu sur ce premier exemple, l'enrichissement du déplacement et de la pression avec la

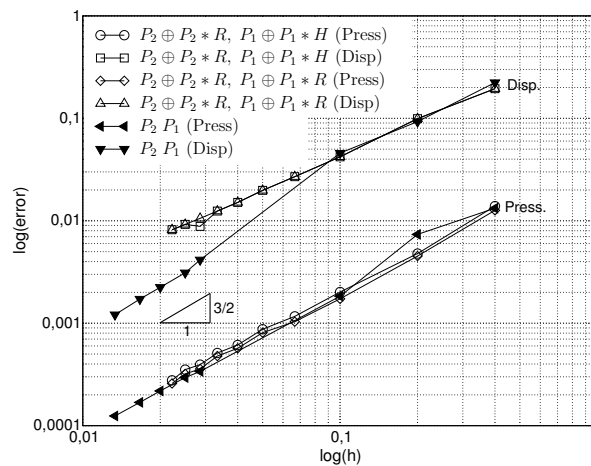


FIGURE 4.20: Taux de convergence pour le problème de la Fig.4.16, élément T6T3.

fonction ridge permet d'obtenir les taux de convergence optimaux avec l'élément Mini. Cet exemple ne permet cependant pas l'étude complète de l'élément T6T3, dans la mesure où son taux de convergence optimal est limité non pas par la stratégie d'enrichissement de la pression, mais par la géométrie du problème. Finalement, ne pas enrichir la fonction bulle de l'élément Mini conduit à des résultats optimaux, mais avec moins de degrés de liberté. C'est cet élément, enrichi par le "ridge" tant pour le déplacement que la pression qui semble donner le meilleur compromis stabilité - nombre de degrés de liberté dans la limite de l'incompressibilité.

**Étude de convergence (interface droite)** Pour pouvoir réellement caractériser les formulations fondées sur l'élément T6T3, nous avons construit un autre cas test en considérant un carré de côté 2 (voir la figure 4.22), composé de deux matériaux 1 et 2 totalement incompressibles. Les modules de cisaillement de ces matériaux sont notés respectivement  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . Le corps est soumis à des tractions de surface  $\mathbf{T}$  sur sa frontière et à des forces de volume  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{b}_2$  dans 1 et 2. Les champs de contrainte, de déformation et de pression analytiques sont fournis dans l'annexe A.2 et aucun de ces champs n'est contenu dans les espaces d'approximation des éléments finis que nous utilisons. Dans cette section, nous prendrons  $\mu_1 = 1/3$  et  $\mu_2 = 10/3$ . Une étude de convergence est effectuée et les résultats sont présentés sur la figure 4.23. Cette fois-ci, les éléments Mini et surtout T6T3 convergent à leurs taux optimaux (respectivement  $O(h)$  et  $O(h^2)$ ), ce qui permet de

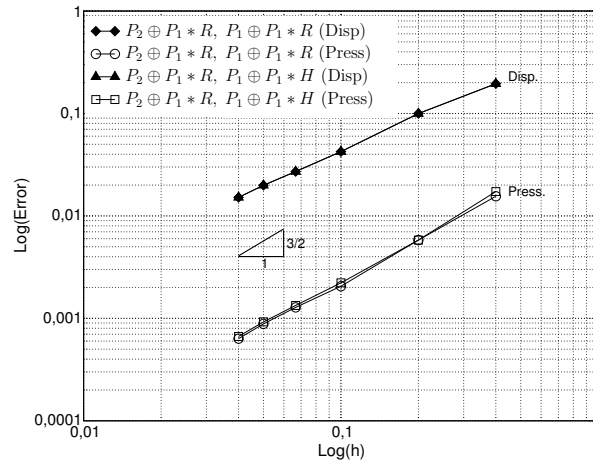


FIGURE 4.21: Taux de convergence pour le problème de la Fig.4.16, partie linéaire enrichie (élément T6T3).

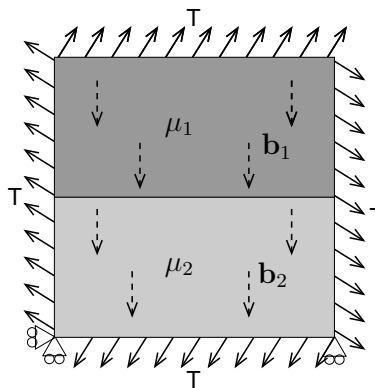


FIGURE 4.22: Problème bi-matériau avec une interface droite.

montrer que l’enrichissement “ridge” admet un comportement stable à la limite de l’incompressibilité et que le taux de convergence en  $O(h^{3/2})$  que nous avons obtenu pour l’élément T6T3 dans l’exemple précédent était bien dû à la géométrie du problème.

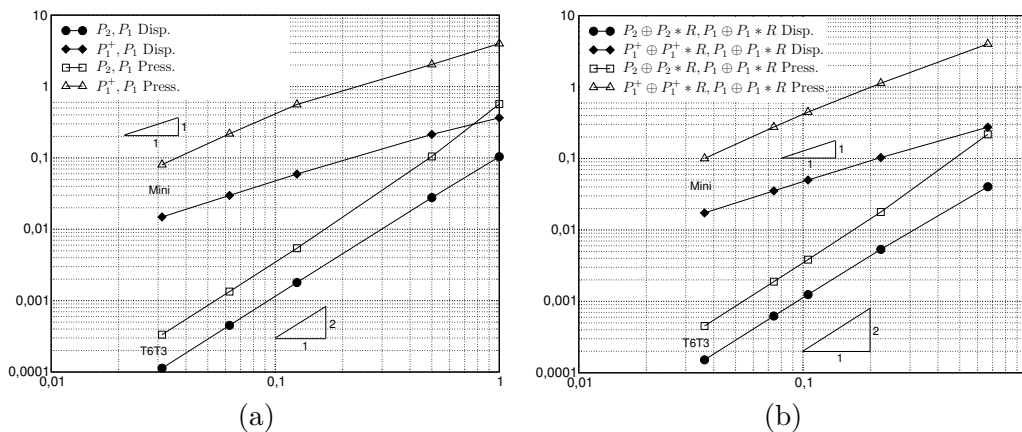


FIGURE 4.23: Étude de convergence, interface droite : (a) FEM, (b) X-FEM.

**Test numérique du inf-sup** Le test numérique du inf-sup est d’abord appliqué aux exemples considérés lors des études de convergence, avec les mêmes conditions limites. La seule différence réside dans l’utilisation d’un maillage non-structuré dans le cas de l’interface droite. Les résultats pour ce dernier cas sont présentés sur la figure 4.24 : si la pression est enrichie par le ridge, alors le paramètre inf-sup est stable alors qu’il oscille

beaucoup lorsque la pression est enrichie par Heaviside. Ces oscillations apparaissent lorsque l'interface entre les deux matériaux est très proche des nœuds des éléments. Il est cependant difficile de dire si le paramètre du inf-sup tend vers zéro lorsqu'on raffine le maillage ou s'il ne fait qu'osciller.

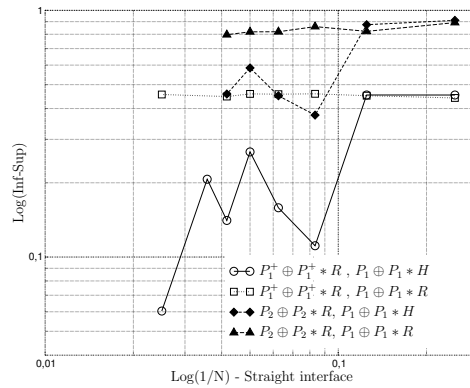


FIGURE 4.24: Évaluation numérique du inf-sup sur l'exemple avec interface droite.

Pour lever cette incertitude, considérons à présent un cas plus simple, présenté sur la figure 4.25, afin d'étudier ce phénomène en détail. Celui-ci est constitué d'un carré composé de deux matériaux différents et soumis à une pression sur son arête supérieure (voir la figure 4.25). La position de l'interface entre les deux matériaux est paramétrée par  $\delta$  qui représente la distance de l'interface au centre du carré. On pose d'abord  $\delta = 0$  et le inf-sup est évalué. Dans ce cas, l'interface passe toujours au milieu des éléments du maillage au cours du raffinement, car celui-ci est structuré avec un nombre impair d'éléments par face (voir la figure 4.10(b)). Comme le montre la figure 4.26, le paramètre du inf-sup reste stable au cours du raffinement

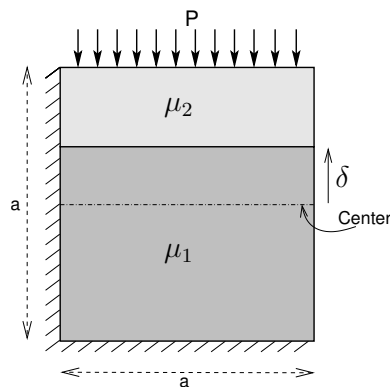


FIGURE 4.25: Problème pour l'évaluation numérique du inf-sup.

quel que soit le type d'enrichissement.

On pose ensuite  $\delta = 0, 1$ , et le maillage est raffiné. Comme l'interface n'est plus située sur un axe de symétrie du problème, elle sera proche des bords des éléments à certains stades du raffinement. L'influence de  $\delta$  est clairement montrée sur la figure 4.27 :

- ▷ Pour les enrichissements de type ridge (formulations 3 et 7 dans le tableau 4.3), aucune dégradation du inf-sup n'est observée et la valeur reste stable durant le raffinement ;
- ▷ En ce qui concerne les enrichissements de type Heaviside (formulations 5 et 9 dans le tableau 4.3), la valeur du inf-sup se dégrade fortement lorsque les bords des éléments s'approchent de la discontinuité (pour  $1/N \rightarrow 0, 1$  ou  $1/N \rightarrow 0, 033333$ ).

Pour étudier plus en détail ce résultat, nous utilisons maintenant une autre séquence de maillages. Cette dernière est construite de façon à ce que l'interface entre les deux matériaux coupe toujours les éléments à 90% de leur hauteur. Ces cas de figure correspondent aux courbes notées " $P_1^+ \oplus P_1^+ * R, P_1 \oplus P_1 * H$  (90%)" et " $P_2 \oplus P_2 * R, P_1 \oplus P_1 * H$  (90%)" sur la figure 4.27. Ces courbes sont complètement stables : la condition inf-sup est vérifiée même avec un enrichissement de type Heaviside de la pression, néanmoins la valeur du paramètre du inf-sup correspondant dépend de la façon dont l'interface matérielle coupe le maillage.

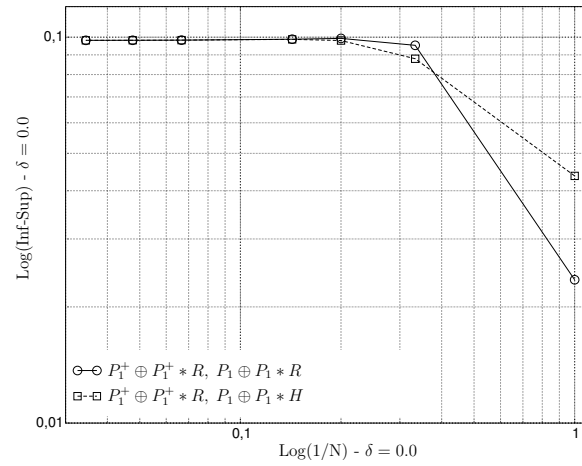


FIGURE 4.26: Évaluation du inf-sup ( $\delta = 0, 0$ ).

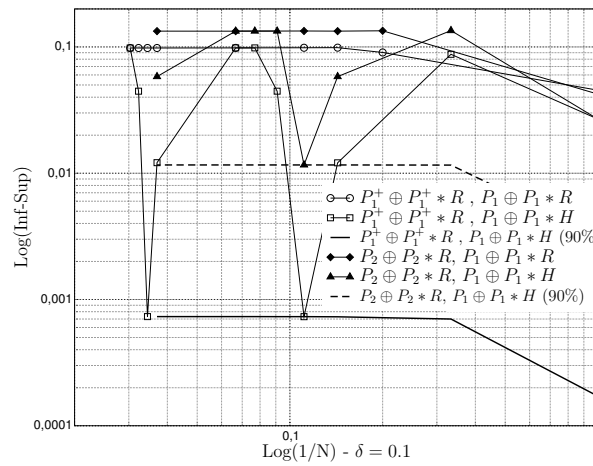


FIGURE 4.27: Évaluation du inf-sup ( $\delta = 0, 1$ ).

**Remarque 4.11** Les résultats des cas à 90% où la pression est enrichie avec le ridge ne sont pas présentés dans la mesure où ils sont confondus avec ceux de la première séquence de maillages.◇

Des résultats similaires ont été obtenus dans le cas où seule la partie linéaire du champ de déplacement est enrichie (voir la figure 4.28).

Le comportement instable, la dépendance du paramètre du inf-sup à  $\delta$  ainsi que la convergence non monotone

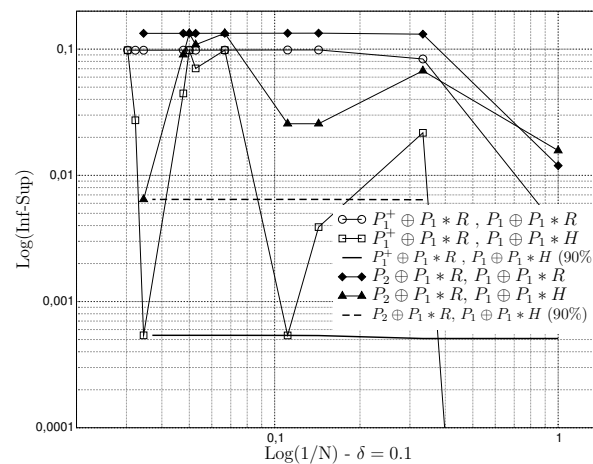


FIGURE 4.28: Évaluation du inf-sup (partie linéaire enrichie), problème 2 ( $R=0.1$ ).



des enrichissements de la pression avec la fonction Heaviside (formulations 5 and 9) nous conduisent à éviter ces stratégies d'enrichissement.

**Conclusion pour les multi-matériaux** Les résultats présentés dans cette section sont résumés dans la dernière colonne du tableau 4.3 p.69. Les stratégies d'enrichissement de la pression et du déplacement par la fonction ridge sont les plus efficaces, car elles passent le test numérique du inf-sup, convergent de façon optimale dans les exemples proposés et ne conduisent pas à des résultats dépendant de la topologie du maillage. Au contraire, les enrichissements de la pression par une fonction Heaviside, bien que vérifiant la condition inf-sup, fournissent des résultats qui dépendent de la topologie du maillage et font apparaître des instabilités numériques. Ces stratégies ne doivent donc pas être utilisées. Les formulations où seule la partie linéaire du champ de déplacement est enrichie par le ridge (n° 4 et 8) sont intéressantes, dans la mesure où moins de degrés de liberté sont utilisés dans l'approximation. Cette propriété est importante dans l'optique d'une extension au cas tridimensionnel.

**Remarque 4.12** La dégradation du taux de convergence observée sur les figures 4.18 et 4.19 est directement liée au comportement oscillant du paramètre inf-sup. En effet, la constante dans l'expression de l'erreur a priori dépend de ce paramètre. Si celui-ci varie, alors la courbe de convergence de l'erreur se situe entre deux courbes enveloppe correspondant à  $\beta^{\max}$  et  $\beta^{\min}$  (voir la courbe 4.29). $\diamond$

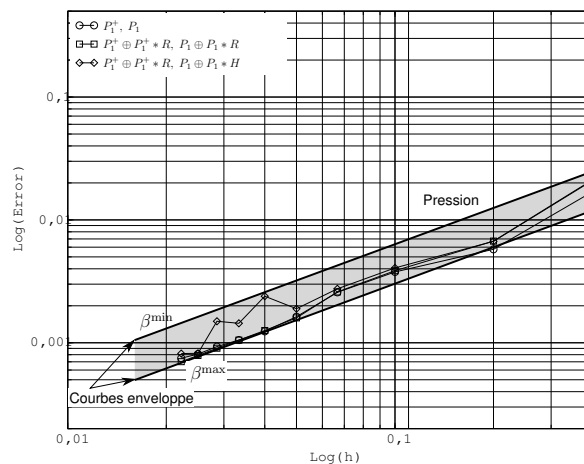


FIGURE 4.29: Courbes enveloppe pour le problème à interface courbe.

## Validations pour la mécanique de la rupture

**Étude de convergence** Considérons un domaine  $\Omega = [-1; 1] \times [-1; 1]$  soumis à des tractions sur sa frontière  $\partial\Omega$  (voir la figure 4.30). Ces tractions sont en fait les tractions exactes d'un problème de domaine infini fissuré soumis à un chargement en mode mixte (solution de Westergaard avec  $K_I = 1$  et  $K_{II} = 1$ ). Deux séquences de maillages graduellement raffinés sont utilisées, de sorte que la fissure passe toujours à travers les éléments. La première est présentée sur la figure 4.30(a) : la pointe de fissure est toujours située sur la bordure d'un élément. La seconde sur la figure 4.30(b) est telle que la pointe de la fissure se situe toujours à l'intérieur d'un élément.

Deux stratégies d'enrichissement sont considérées :

- ▷ En premier lieu, l'enrichissement topologique où seuls les nœuds dont le support contient la pointe de fissure sont enrichis ;
- ▷ Puis, l'enrichissement géométrique introduit par Béchet et al. (Béchet et al., 2005) où tous les nœuds situés dans un cercle (de rayon 0,1) sont enrichis avec les champs asymptotiques de la pointe de fissure. Il a été montré que ce type d'enrichissement améliorait le taux de convergence du problème de  $O(h^{1/2})$  à  $O(h)$ .

Notons que *seul l'élément Mini est utilisé tout au long de cette section.*

Les résultats de l'étude de convergence sont présentés sur la figure 4.31 pour le premier type de maillage,

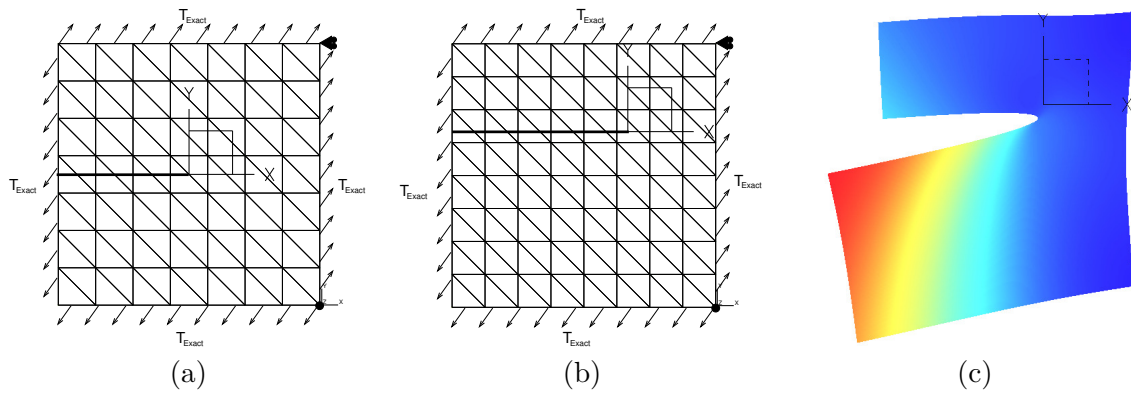


FIGURE 4.30: Domaine d'intérêt, (a) maillage  $N^{\circ} 1$ , (b) maillage  $N^{\circ} 2$  et (c) déformée.

et sur la figure 4.32 pour le deuxième. Les taux de convergence de la pression et du déplacement sont en  $O(h^{1/2})$  pour l'enrichissement topologique. Ce résultat est cohérent avec la théorie de l'élasticité linéaire compressible, du moins pour les déplacements. En ce qui concerne la pression, aucun résultat ne permet de connaître le taux de convergence optimal dans le cas où une singularité est présente dans les champs. L'influence de l'enrichissement est mise en évidence par un décalage vertical des courbes de convergence. Pour l'enrichissement géométrique, les résultats sont similaires à ceux obtenus par (Béchet *et al.*, 2005), c'est-à-dire une amélioration du taux de convergence jusqu'à  $O(h)$ , tant pour le déplacement que pour la pression. Dans notre cas particulier, nous obtenons une légère super-convergence pour la pression.

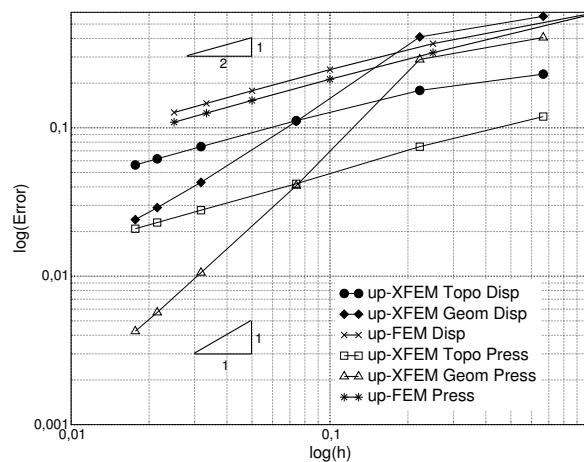


FIGURE 4.31: Taux de convergence maillage structuré  $N^{\circ} 1$ .

Nous avons également testé le cas où seul le champ de déplacement est enrichi. L'influence de l'enrichissement de la pression est faible dans le cas d'un enrichissement topologique : seule une variation de l'ordonnée à l'origine de la courbe de convergence apparaît. Cette influence s'accroît dans le cas de l'enrichissement géométrique : dégradation à la fois de l'ordonnée à l'origine et du taux de convergence. L'enrichissement géométrique de la pression et du déplacement est donc la manière la plus précise pour étudier des problèmes de fissuration incompressible.

Finalement, nous étudions le cas où seule la partie linéaire du champ de déplacement est enrichie. La figure 4.33 montre qu'il n'en résulte aucune variation du taux de convergence et de l'ordonnée à l'origine de la courbe. Cependant, là encore des degrés de liberté sont économisés (voir la Remarque 4.10 p.73).

**Test numérique du Inf-sup** Le test numérique du inf-sup est effectué sur un problème d'éprouvette carrée de côté 2 avec une entaille latérale de longueur 1 (voir la figure 4.34). Une pression est appliquée sur la face supérieure de l'éprouvette, et les faces basse et droite sont encastées. Ce cas de chargement a été choisi car il est plus drastique que celui utilisé lors des études de convergence. La pointe de la fissure est située en

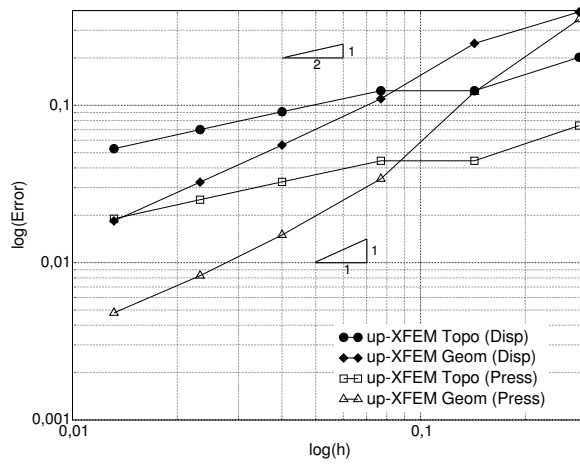


FIGURE 4.32: Taux de convergence maillage structuré  $N^{\circ} 2$ .

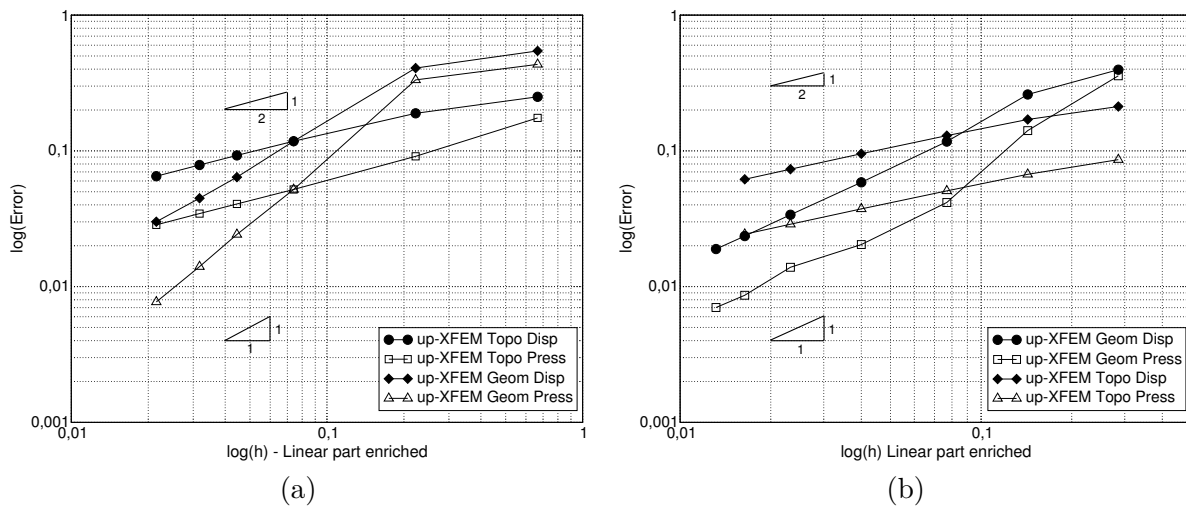


FIGURE 4.33: Taux de convergence, partie linéaire enrichie : (a) maillage  $N^{\circ} 1$ , (b) maillage  $N^{\circ} 2$ .

$(0, 1; 0, 05)$  ainsi, sa position relative avec le maillage variera (voir la figure 4.34). L'évolution du paramètre

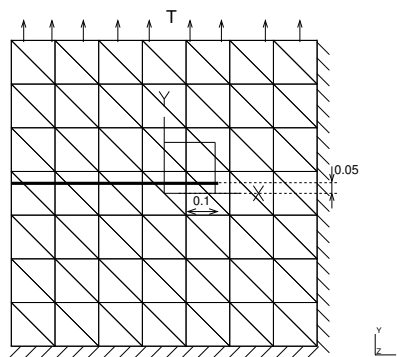


FIGURE 4.34: Test numérique du inf-sup pour la fissuration.

du inf-sup est tracée sur la figure 4.35 pour cinq cas de figure :

1. Enrichissement topologique;
2. Enrichissement géométrie (rayon 4, 0);
3. Éléments finis classiques;
4. Enrichissement topologique (partie linéaire enrichie);

## 5. Enrichissement géométrique (rayon 4, 0, partie linéaire enrichie);

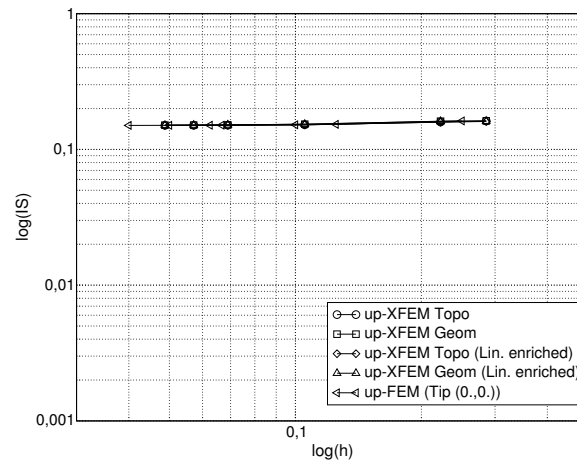


FIGURE 4.35: Résultats du test inf-sup pour la fissuration.

Le paramètre inf-sup est stable dans tous ces cas de figure : la condition inf-sup est vérifiée dans tous les cas.

**Conclusion sur la fissuration** Au cours de ce paragraphe, nous avons vu que l'enrichissement du déplacement et de la pression avec les champs asymptotiques provenant de la solution de Westergaard conduit à des formulations mixtes stables mais non-conformes. De plus, l'utilisation d'un enrichissement géométrique améliore la convergence de la même manière qu'en fissuration compressible. Finalement, le fait de enrichir uniquement la partie linéaire du déplacement permet d'économiser des degrés de liberté.

### 4.3 Extension au cas des grandes transformations

Le cas des petites transformations étant traité, nous nous intéressons à présent au cas des grandes transformations. Un certain nombre de formulations adaptées à la gestion de l'incompressibilité ont été proposées dans la littérature, la plupart dans le cadre des éléments finis classiques. Cette section s'inspire en partie de la présentation synthétique proposée dans la thèse de S. Lejeunes (Lejeunes, 2006).

#### Stratégies de gestion de l'incompressibilité en grandes transformations

##### Les méthodes EAS

Nous avons vu dans la section précédente que les formulations de type EAS étaient adaptées à la formulation d'éléments finis d'ordre faible insensibles au locking. Dans le cas non linéaire développé par Simo et Armero (1992), ce n'est plus le champ de déformation  $\underline{\underline{\epsilon}}$  qui est enrichi, mais le gradient de la transformation  $\underline{\underline{F}}$ . Pour le cas X-FEM, Dolbow et Devan (2004) proposent une partition du gradient de la transformation telle que :

$$\underline{\underline{F}} = \underbrace{\underline{\underline{\text{GRAD}}}(\phi)}_{\text{Enrichi par la partition de l'unité}} + \underbrace{\underline{\underline{F}}^e}_{\text{Étendu pour le locking}} \quad (4.46)$$

les conditions sur  $\underline{\underline{F}}^e$  étant :

1. intersection nulle avec le gradient des fonctions de forme :

$$\{\text{Espace des } \underline{\underline{F}}^e\} \cap \{\text{Espace des } \underline{\underline{\text{GRAD}}}(\phi)\} = \emptyset \quad (4.47)$$

2. Orthogonalité avec un champ de contrainte constant (condition équivalente à 4.29) :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{F}}^e d\Omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\Omega_e} \underline{\underline{G}}^{ie} d\Omega = 0 \quad (4.48)$$

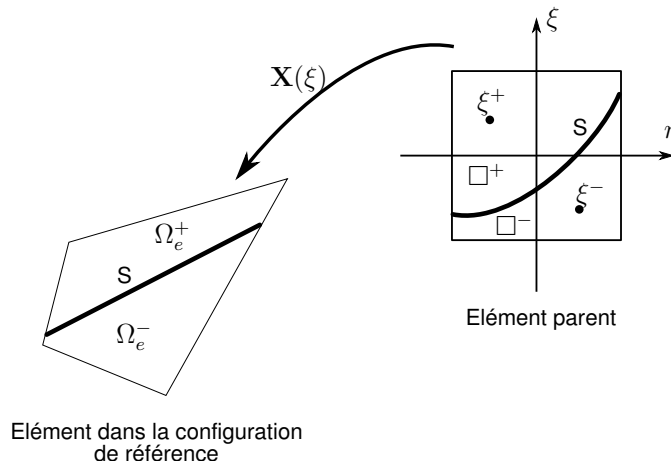


FIGURE 4.36: Élément EAS coupé par une discontinuité.

**Le cas X-FEM** Dans le cas où un élément est coupé par une surface de discontinuité (voir la figure 4.36), Dolbow et Devan proposent d'écrire la condition d'orthogonalité (4.48) sur chaque partie de l'élément :

$$\int_{\Omega_e^+} \underline{\underline{G}}^{ie} d\Omega = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_e^-} \underline{\underline{G}}^{ie} d\Omega = 0 \quad (4.49)$$

Ce qui, exprimé sur l'élément parent devient :

$$\int_{\square^+} \tilde{\underline{\underline{G}}}^{ie}(\xi, \eta) j(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\square^-} \tilde{\underline{\underline{G}}}^{ie}(\xi, \eta) j(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0 \quad (4.50)$$

Les auteurs proposent alors d'utiliser non pas 4, mais 8 modes de déformation pour les éléments coupés par la discontinuité. En effet, le nombre de degrés de liberté a doublé dans ces éléments du fait de l'enrichissement. Il est alors logique de doubler aussi le nombre de modes EAS, afin de laisser proportionnellement autant de "liberté" à l'élément que dans le cas non-enrichi. La condition d'orthogonalité n'est plus obtenue avec les modes  $\underline{\tilde{G}}^1$ ,  $\underline{\tilde{G}}^2$ ,  $\underline{\tilde{G}}^3$  et  $\underline{\tilde{G}}^4$  présentés en (4.37), mais avec les modes suivants :

$$\underline{\tilde{G}}^1 = \begin{pmatrix} \bar{\xi} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\tilde{G}}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\eta} \end{pmatrix} \quad \underline{\tilde{G}}^3 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\xi}/2 \\ \bar{\xi}/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\tilde{G}}^4 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\eta}/2 \\ \bar{\eta}/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

où

$$\begin{cases} \bar{\xi} = \xi - \xi^+ & \text{et } \bar{\eta} = \eta - \eta^+ & \text{dans } \square^+ \\ \bar{\xi} = \xi - \xi^- & \text{et } \bar{\eta} = \eta - \eta^- & \text{dans } \square^- \end{cases} \quad (4.52)$$

Les points  $(\xi^+, \eta^+)$  et  $(\xi^-, \eta^-)$  étant déterminés à la volée lors de l'intégration de la formulation faible afin de vérifier la condition (4.49).

Les auteurs ont montré que cette approche donnait de bons résultats en fissuration non linéaire, dans le cas où seule la fonction Heaviside était utilisée pour l'enrichissement. Néanmoins, la même remarque peut être faite que dans le cas linéaire : que se passe-t-il lorsque le champ de déplacement est enrichi avec des fonctions non rationnelles ? Dans ce cas, la condition d'orthogonalité semble difficilement vérifiable avec de telles fonctions EAS.

**Remarque 4.13** Les éléments EAS souffrent de modes de déformation en "sablier" lorsqu'ils sont soumis à de forts niveaux de compression (Pantuso et Bathe, 1997; Korelc et Wriggers, 1996). Seuls les éléments EAS à 2 modes sont insensibles à ce phénomène. Cependant, deux modes EAS ne sont pas suffisants pour éviter le verrouillage en cisaillement et en volume.◇

### Méthodes des pénalités

Tout comme pour l'incompressibilité HPP, les méthodes en déplacement pénalisées ont été appliquées aux grandes transformations non linéaires. L'approche la plus commune est celle introduite par Malkus et Hughes (1978) dans laquelle le potentiel pénalisé suivant est considéré :

$$\Pi_{EPP}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega_0} W(\underline{\underline{C}}(\mathbf{u})) d\Omega + \frac{1}{2\alpha} \int_{\Omega_0} U^2(J) d\Omega - \Pi_{Ext} \quad (4.53)$$

où  $\alpha$  est un coefficient de pénalité et  $U(J)$  est la fonction de pénalisation qui doit être positive, coercive et doit s'annuler uniquement lorsque  $J = 1$ . Le tableau 4.4 présente quelques formes courantes de la fonction de pénalisation. L'écriture de la stationnarité de la fonctionnelle nous conduit à la formulation faible suivante :

$U(J)$	Référence
$J - 1$	
$\ln(J)$	Häggblad et Sundberg (1983)

TABLE 4.4: Quelques formes pour la fonction de pénalisation.

$$\int_{\Omega_0} \left( \underline{\underline{S}} + \frac{1}{\alpha} U(J) U'(J) J \underline{\underline{C}}^{-1} \right) : \delta \underline{\underline{E}} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{v} \mathbf{b}_d d\Omega - \int_{\Gamma_d} \delta \mathbf{v} \mathbf{T}_d d\Gamma = 0 \quad \forall \delta \mathbf{v} \in \mathcal{V}^0 \quad (4.54)$$

La linéarisation de ces équations pour l'utilisation d'algorithmes de type Newton donne un système analogue à celui présenté dans la section 3.5. Seul le tenseur d'élasticité  $\mathbb{C}$  doit être remplacé par  $\mathbb{C} + \mathbb{C}_\alpha$  où  $\mathbb{C}_\alpha$  provient de la linéarisation du terme de pénalité.

$$\mathbb{C}_\alpha = 2 \frac{\partial}{\partial \underline{\underline{C}}} \left( \frac{1}{\alpha} U(J) U'(J) J \underline{\underline{C}}^{-1} \right) \quad (4.55)$$

$$= \frac{J}{\alpha} U(J) U'(J) \left( \underline{\underline{C}}^{-1} \otimes \underline{\underline{C}}^{-1} - 2\mathbb{J} \right) + \frac{J^2}{\alpha} \left( U''(J) U(J) + (U'(J))^2 \right) \underline{\underline{C}}^{-1} \otimes \underline{\underline{C}}^{-1} \quad (4.56)$$

Le découplage volumique - isochorique de l'énergie libre (Holzapfel, 2001) permet également d'obtenir une formulation pénalisée. La partie volumique de cette énergie étant prise en charge par la pénalisation :

$$W(\underline{\underline{C}}(\mathbf{u})) = W_{iso}(\underline{\underline{C}}) + W_{sph}(J) \quad (4.57)$$

$$= W_{iso}(\underline{\underline{C}}) + \frac{1}{\alpha} U^2(J) \quad (4.58)$$

On cherche alors la stationnarité de la fonctionnelle :

$$\Pi_{EPP}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega_0} \left( W_{iso}(\underline{\underline{C}}) + \frac{1}{\alpha} U^2(J) \right) d\Omega - \Pi_{Ext} \quad (4.59)$$

Cela conduit au même type de fonctionnelles que dans le cas non découplé, mis à part que dans ce cas le terme de pénalisation peut être considéré comme un module de compressibilité dont la valeur se règle indépendamment des propriétés du matériau.

**Remarque 4.14** Comme dans le cas linéaire, le coefficient de pénalité a une grande influence sur le conditionnement de la matrice tangente du problème. La méthode est sensible au blocage ; celui-ci peut être contourné par l'utilisation de méthodes d'intégration réduite sélective.  $\diamond$

**Le cas X-FEM** Les stratégies proposées dans le cas linéaire sont directement applicables au cas non linéaire. Cependant les limitations sur les fonctions d'enrichissement restent les mêmes.

### Formulations mixtes en grandes transformations

Tout comme en linéaire, la contrainte d'incompressibilité peut être relaxée en introduisant des principes variationnels mixtes du même type que ceux présentés dans la section précédente. Nous ne considérerons ici que les formulations à deux champs (déplacement et pression) ou trois champs (déplacement, pression et  $J$ ). Cependant, il est possible d'introduire jusqu'à sept champs indépendants, comme le montrent Atluri et Reissner (1989). Les méthodes à deux champs peuvent être classées en deux catégories :

- ▷ les formulations en Lagrangien ;
- ▷ les formulations en Lagrangien perturbé.

**Formulation à deux champs en Lagrangien** Cette méthode est fondée sur un principe mixte déplacement-pression qui est une particularisation du principe de Hellinger-Reissner étendu aux grandes transformations (Herrmann, 1986) :

$$\Pi_{HR}(\mathbf{u}, p) = \int_{\Omega} \left( W(\underline{\underline{C}}) - q(J - 1) \right) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u} \mathbf{b}_d d\Omega - \int_{\Gamma_d} \mathbf{u} \mathbf{T}_d d\Gamma = 0 \quad (4.60)$$

où le multiplicateur de Lagrange  $q$  correspond à une pression hydrostatique à l'intérieur du matériau (voir la section 2.3). La minimisation de cette fonctionnelle conduit aux équations d'Euler suivantes :

Trouver  $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Q}$  tels que :

$$\int_{\Omega_0} \left( 2 \frac{\partial W(\underline{\underline{C}})}{\partial \underline{\underline{C}}} - q J \underline{\underline{C}}^{-1} \right) : \delta \underline{\underline{E}} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{v} \mathbf{b}_d d\Omega - \int_{\Gamma_d} \delta \mathbf{v} \mathbf{T}_d d\Gamma = 0 \quad \forall \delta \mathbf{v} \in \mathcal{V}^0 \quad (4.61)$$

$$\int_{\Omega_0} (J(\mathbf{u}) - 1) \delta q d\Omega = 0 \quad \forall \delta q \in \mathcal{Q} \quad (4.62)$$

Nous retrouvons dans la première équation l'expression du second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff sous forme incompressible. La linéarisation de cette forme variationnelle permet d'obtenir le système tangent suivant :

$$\begin{bmatrix} [K] & [K_{up}] \\ [K_{up}]^T & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [U] \\ [P] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F] \\ [0] \end{bmatrix} \quad (4.63)$$



avec :

$$[K] = D_{\Delta \mathbf{v}} D_{\delta \mathbf{v}} \Pi_{HR}(\mathbf{u}, q) \quad (4.64)$$

$$= \int_{\Omega_0} D_{\mathbf{u}} \delta \underline{E} : (\mathbb{C} + \mathbb{C}_p) : D_{\mathbf{u}} \underline{E} d\Omega + \int_{\Omega_0} \underline{S} : [\underline{\nabla}_0 \mathbf{u}^T \underline{\nabla}_0 \delta \mathbf{u}^T] d\Omega \quad (4.65)$$

et :

$$[K_{up}] = \int_{\Omega_0} J q \operatorname{div}(\delta \mathbf{u}) d\Omega \quad (4.66)$$

les tenseurs d'élasticité  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{C}_p$  étant définis par l'équation (2.34).

**Remarque 4.15** Afin de ne pas surcharger les notations, les fonctions de formes éléments finis n'ont pas été introduites dans les expressions continues correspondant aux matrices  $[K]$  et  $[K_{up}]$ . La composante  $[K]_{ij}$  de la matrice  $[K]$  est obtenue en remplaçant  $D_{\mathbf{u}} \underline{E}$ ,  $D_{\mathbf{u}} \delta \underline{E}$ ,  $\underline{\nabla}_0 \mathbf{u}$  et  $\underline{\nabla}_0 \delta \mathbf{u}$  par leurs équivalents discrétisés (voir les équations (3.28) et (3.29)). $\diamond$

L'inconvénient de cette formulation est que, tout comme dans le cas linéaire, le système à résoudre est défini mais non-positif. Certains types de solveurs itératifs deviennent alors inutilisables.

**Remarque 4.16** Nous avons choisi ici d'écrire le principe de Hellinger-Reissner (4.60) selon l'approche non découplée. Il est possible d'écrire ces équations à partir du découplage volumique-isochorique. Les tenseurs  $\underline{S}_{iso}$  et  $\mathbb{C}_{iso}$  remplacent alors  $\underline{S}$  et  $\mathbb{C}$ . Le champ de pression devient alors le champ de pression hydrostatique  $p$  au sens de Cauchy. $\diamond$

**Formulation à deux champs en Lagrangien perturbé** Les méthodes de Lagrangien perturbé ont été introduites par Glowinski et Tallec (1980) pour pallier la non-positivité du système tangent du cas Lagrangien. Cette formulation peut être vue comme une perturbation de la fonctionnelle (4.60) par un terme de pénalité qui relaxe la condition d'incompressibilité (Chang et al., 1991) :

$$\Pi_{LP}(\mathbf{u}, p) = \int_{\Omega} \left( W(\underline{C}) - q U(J) - \underbrace{\frac{1}{\alpha} p^2}_{\text{Perturbation}} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{v} \mathbf{b}_d d\Omega - \int_{\Gamma_d} \delta \mathbf{v} \mathbf{T}_d d\Gamma \quad (4.67)$$

La fonction  $U(J)$  doit être convexe, suffisamment régulière et s'annuler seulement en  $J = 1$ . On est dans le cas proposé par Brink et Stein (Brink et Stein, 1996) qui montrent qu'un grand nombre de formulations retrouvées dans la littérature telles celles de Sussman et Bathe (1987) ou van den Bogert et al. (1991) sont des cas particuliers de la formulation en Lagrangien perturbé avec  $U(J) = J - 1$ .

La stationnarité s'écrit :

Trouver  $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Q}$  tels que :

$$\int_{\Omega_0} \left( 2 \frac{\partial W(\underline{C})}{\partial \underline{C}} - q U'(J) J \underline{C}^{-1} \right) : \delta \underline{E} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{v} \mathbf{b}_d d\Omega - \int_{\Gamma_d} \delta \mathbf{v} \mathbf{T}_d d\Gamma = 0 \quad \forall \delta \mathbf{v} \in \mathcal{V}^0 \quad (4.68)$$

$$\int_{\Omega_0} \left( \frac{1}{\alpha} q + U(J) \right) \delta q d\Omega = 0 \quad \forall \delta q \in \mathcal{Q} \quad (4.69)$$

La première équation est identique à celle obtenue pour la formulation en Lagrangien. La seconde correspond à une loi de compressibilité où  $\alpha$  représente le module de compressibilité.

**Remarque 4.17** Lorsque  $\alpha$  tend vers l'infini, on retrouve la formulation classique en Lagrangien si  $U(J) = J - 1$ . $\diamond$

**Remarque 4.18** D'après la première équation d'Euler de la fonctionnelle en Lagrangien perturbé, le deuxième tenseur des contraintes de Piola Kirchhoff s'écrit :

$$\underline{S} = 2 \frac{\partial W(\underline{C})}{\partial \underline{C}} - q U'(J) J \underline{C}^{-1} \quad (4.70)$$

Le tenseur de Cauchy qui lui est associé s'écrit, quant à lui :

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2 \underline{\underline{\sigma}} - q U'(J) \underline{\underline{I}} \quad (4.71)$$

Là encore, le champ de pression calculé par le Lagrangien perturbé ne peut pas être identifié au champ de pression hydrostatique dans le matériau. En revanche, dans le cas de la décomposition volumique-isochorique ( $W_{iso}$ ,  $\underline{\underline{S}}_{iso}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}_{iso}$  remplacent respectivement  $W$ ,  $\underline{\underline{S}}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}$ ),  $q$  est identifiable à la pression hydrostatique si  $U'(J) = 1$  (ce qui est le cas avec la fonction  $U(J) = (J - 1)$ ).  $\diamond$

La linéarisation de cette forme variationnelle conduit à l'opérateur tangent suivant :

$$\begin{bmatrix} [K] & [K_{up}] \\ [K_{up}]^T & \frac{1}{\alpha} [K]_{pp} \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

où :

$$[K] = D_{\Delta v} D_{\delta v} \Pi_{LP}(\mathbf{u}, q) \quad (4.73)$$

$$= \int_{\Omega} D_{\mathbf{u}} \delta \underline{\underline{E}} : (\mathbb{C} + \mathbb{C}_p) : D_{\mathbf{u}} \underline{\underline{E}} d\Omega + \int_{\Omega_0} \underline{\underline{S}} : [\underline{\underline{\nabla}}_0 \mathbf{u}^T \underline{\underline{\nabla}}_0 \delta \mathbf{u}^T] d\Omega \quad (4.74)$$

$$[K_{up}] = D_{\Delta p} D_{\delta v} \Pi_{LP}(\mathbf{u}, q) \quad (4.75)$$

$$= \int_{\Omega_0} J q U'(J) \operatorname{div}(\delta \mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega_0} (q J U'(J) \underline{\underline{C}}^{-1}) : \delta \underline{\underline{E}} d\Omega \quad (4.76)$$

et :

$$[K]_{pp} = D_{\Delta p} D_{\delta p} \Pi_{LP}(\mathbf{u}, q) \quad (4.77)$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega_0} \delta q q d\Omega \quad (4.78)$$

et où  $\mathbb{C}_p$  s'exprime :

$$\mathbb{C}_p = 2 \frac{\partial}{\partial \underline{\underline{C}}} \left( J(\mathbf{u}) p U'(J) \underline{\underline{C}}^{-1} \right) \quad (4.79)$$

$$= p J U'(J) \left( \underline{\underline{C}}^{-1} \otimes \underline{\underline{C}}^{-1} - 2 \mathbb{J} \right) + \underbrace{J^2 U''(J) \underline{\underline{C}}^{-1} \otimes \underline{\underline{C}}^{-1}}_{\text{Provenant de la perturbation}} \quad (4.80)$$

**Remarque 4.19** Dans le cas où  $U(J) = (J - 1)$ , alors  $U'(J) = 1$  et  $U''(J) = 0$  et on retrouve les tenseurs d'élasticité  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{C}_p$  du cas Lagrangien.  $\diamond$

**Remarque 4.20** *Chen et al. (1997)* ont étudié la convergence de solutions discrètes et continues quasi-incompressibles vers des solutions incompressibles pour ce type de formulation variationnelle. Ils montrent que la vitesse de convergence vers la solution incompressible est en  $1/\alpha$ .  $\diamond$

**Le cas X-FEM** Les stratégies développées en petites perturbations peuvent être appliquées telles quelles. Cependant, aucun résultat théorique n'est disponible quant à la stabilité des formulations mixtes en grandes transformations. En effet, la condition inf-sup n'a de sens que dans le cas linéaire présenté en 4.2. Cependant, *Pantuso et Bathe (1997)* ont montré qu'un élément qui ne vérifiait pas la condition inf-sup avait toutes les chances d'être instable dans le cas non linéaire, même si celui-ci se comporte correctement en linéaire. La réciproque n'est pas forcément vraie : Pantuso montre numériquement que certains éléments vérifiant la condition inf-sup se déforment en sablier sous chargement fortement compressif. Quant au choix de la formulation pour la résolution du problème (Lagrangien ou Lagrangien perturbé), il est nécessaire que le multiplicateur de Lagrange  $p$  soit cohérent avec la fonction d'enrichissement utilisée. En effet, pour pouvoir utiliser la décomposition volumique-isochorique, il faut que la fonction d'enrichissement ait été obtenue dans ces mêmes conditions.

**Formulation à trois champs** Ce type de méthode a été proposé par [Simo \(1987\)](#) puis [Simo et Taylor \(1991\)](#) comme une application du principe à trois champs de Hu-Washizu (4.11). Le Jacobien  $\tilde{J}$  est introduit comme troisième variable cinématique en plus des champs de déplacement et de pression. En utilisant la décomposition volumique-isochorique, le principe s'écrit :

$$\Pi_{STP}(\mathbf{u}, p, \tilde{J}) = \int_{\Omega_0} \left( W_{iso}(\underline{\underline{C}}) + W_{sph}(\tilde{J}) + p(\tilde{J} - J(\mathbf{u})) \right) d\Omega - \int_{\Gamma_d} \mathbf{u} \mathbf{T}_d d\Gamma \quad (4.81)$$

La stationnarité conduit aux équations d'Euler suivantes :

Trouver  $(\mathbf{u}, p, \tilde{J}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Q} \times (L^2(\Omega))$  tels que  $\forall (\delta \mathbf{v}, p, \delta \theta) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Q} \times L^2(\Omega)$  :

$$\int_{\Omega_0} \left( \frac{\partial W_{iso}(\underline{\underline{C}})}{\partial \underline{\underline{C}}} - p J \underline{\underline{C}}^{-1} \right) : \delta \underline{\underline{E}} - \int_{\Gamma_d} \delta \mathbf{v} \mathbf{T}_d d\Gamma = 0 \quad (4.82)$$

$$\int_{\Omega_0} (\tilde{J} - J(\mathbf{u})) \delta q d\Omega = 0 \quad (4.83)$$

$$\int_{\Omega_0} \left( \frac{\partial W_{sph}(\tilde{J})}{\partial \tilde{J}} + p \right) \delta \theta = 0 \quad (4.84)$$

Le multiplicateur de Lagrange  $p$  peut ici être identifié à la pression hydrostatique. Numériquement, les champs de pression et de changement de volume sont discrétisés par des approximations du même ordre. Classiquement, c'est la méthode des dilatations moyennes de [Nagtegaal et al. \(1974\)](#) qui est considérée : le champ de déplacement est linéaire, et les champs de pression et de dilatation sont constants par élément, mais discontinus entre les éléments. Les trois équations d'Euler de cette formulation correspondent respectivement à l'équilibre des puissances virtuelles, à la contrainte d'égalité du champ de dilatation  $\tilde{J}$  avec la variation de volume  $J(\mathbf{u})$  calculée à partir du déplacement et à l'égalité de la pression hydrostatique avec la partie sphérique de la contrainte. En utilisant ce type de formulation, l'élément quadrangulaire à déplacement bilinéaire et pression constante redevient performant (disparition des oscillations du champ de pression).

Notons que l'on fait alors l'hypothèse d'un comportement quasi-incompressible. Dans le cas de la modélisation d'un comportement totalement incompressible, la fonctionnelle  $\Pi_{STP}$  doit être modifiée. [Simo et Taylor \(1991\)](#) proposent alors d'utiliser une méthode en Lagrangien augmenté.

**Remarque 4.21** [Miehe \(1994\)](#) a proposé une comparaison entre cette méthode et les méthodes de type EAS et montre que même si les résultats sont proches, les méthodes EAS sont plus performantes. ◊

**Remarque 4.22** [Brink et Stein \(1996\)](#) ont montré que les formulations en Lagrangien perturbé étaient équivalentes à cette formulation à trois champs lorsque  $U(J) = J - 1$  dans (4.67). Rien ne sert alors d'écrire une formulation à trois champs, puisque des résultats strictement identiques peuvent être obtenus à partir de la formulation en Lagrangien perturbé. ◊

**Formulations en Lagrangien augmenté** La formulation du Lagrangien augmenté est classiquement utilisée pour résoudre des problèmes d'inégalités variationnelles (comme par exemple le contact). Cette méthode, introduite par [Glowinski et Tallec \(1982a,b, 1980\)](#) a été appliquée par ses auteurs au cas de l'incompressibilité. La méthode consiste à relaxer la relation  $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\nabla}}_0 \mathbf{u}$  entre le déplacement et le gradient de la transformation. On recherche donc la stationnarité de la fonctionnelle :

$$\Pi_{HWA}(\mathbf{u}, \underline{\underline{F}}, \underline{\underline{\lambda}}) = \int_{\Omega_0} \left( W(\underline{\underline{F}}) - \underline{\underline{\lambda}} : (\underline{\underline{F}}(\mathbf{u}) - \underline{\underline{F}}) \right) d\Omega + \frac{\gamma}{2} \| \underline{\underline{F}}(\mathbf{u}) - \underline{\underline{F}} \|_{L^2}^2 \quad (4.85)$$

$$- \int_{\Gamma_d} \mathbf{u} \mathbf{T}_d d\Gamma$$

$$(\mathbf{u}, \underline{\underline{F}}, \underline{\underline{\lambda}}) \in \mathcal{V}^0 \times \mathcal{F}^i \times (L^2(\Omega))^{d \times d}$$

avec  $\gamma$  un coefficient de pénalité,  $d$  la dimension du problème et où l'espace  $\mathcal{F}^i$  est défini par :

$$\mathcal{F}^i = \left\{ \underline{\underline{F}} \in (L^2(\Omega))^{d \times d}, \quad \underline{\underline{F}}^{-T} \in (L^2(\Omega))^{d \times d}, \quad \det(\underline{\underline{F}}) = 1 \text{ dans } \Omega \right\} \quad (4.86)$$

La stationnarité s'écrit alors :

Trouver  $(\mathbf{u}, \underline{\underline{F}}, \underline{\underline{\lambda}}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{F}^i \times (L^2(\Omega))^{d \times d}$  tels que  $\forall (\delta \mathbf{v}, \delta \underline{\underline{G}}, \delta \underline{\underline{\mu}}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{F}^c \times (L^2(\Omega))^{d \times d}$  :

$$\int_{\Omega_0} \left( \frac{\partial W(\underline{\underline{F}}(\mathbf{u}))}{\partial \underline{\underline{F}}} - \underline{\underline{\lambda}} + \gamma(\underline{\underline{F}}(\mathbf{u}) - \underline{\underline{F}}) \right) : \nabla_0 \delta \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Gamma_d} \delta \mathbf{v} \mathbf{T}_d \, d\Gamma = 0 \quad (4.87)$$

$$\int_{\Omega_0} \left( \gamma(\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{F}}(\mathbf{u})) + \underline{\underline{\lambda}} \right) : \delta \underline{\underline{G}} = 0 \quad (4.88)$$

$$\int_{\Omega_0} \left( \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{F}}(\mathbf{u}) \right) : \delta \underline{\underline{\mu}} = 0 \quad (4.89)$$

où l'espace  $\mathcal{F}^c$  est l'espace tangent à  $\mathcal{F}^i$  au point  $\underline{\underline{F}}$  :

$$\mathcal{F}^c = \left\{ \underline{\underline{G}} \in (L^2(\Omega))^{d \times d}, \quad \det(\underline{\underline{F}}) \underline{\underline{F}}^{-T} \underline{\underline{G}} = 0 \text{ dans } \Omega \right\} \quad (4.90)$$

Le multiplicateur de Lagrange tensoriel  $\underline{\underline{\lambda}}$  peut alors être identifié à la partie de la contrainte liée à la variable de pression. Aux points stationnaires,  $\underline{\underline{\lambda}} = -p \underline{\underline{F}}^{-T}$ .

Le système peut se résoudre à l'aide d'une méthode itérative de Uzawa si  $\gamma$  est assez grand. Toutefois, la littérature montre que cette résolution n'est pas aisée, d'autant plus que la construction de l'espace tangent  $\mathcal{F}^c$  n'est pas triviale (Glowinski et Tallec, 1982b).

**Stabilité des formulations mixtes non linéaires** Nous avons introduit précédemment le fait que des formulations performantes en petites perturbations, telles les formulations EAS, pouvaient développer des comportements instables en grandes transformations. Dans le cas des formulations EAS, cela vient du fait que ces formulations ne vérifient pas la condition inf-sup (Brezzi et Fortin, 1991; Pantuso et Bathe, 1997; Auricchio et al., 2004a,b).

**Remarque 4.23** Bien que les formulations EAS puissent être équivalentes à une formulation à trois champs, cette formulation équivalente ne vérifie pas la condition inf-sup qui, pour trois champs, s'écrit (Brink et Stein, 1996) :

$$\inf_{q^h \in \mathcal{Q}^h} \sup_{v^h \in \mathcal{V}^h} \sup_{\tilde{J}^h \in \mathcal{Q}^h} \frac{\int_{\Omega} q^h \operatorname{div} \mathbf{v}^h \, d\Omega - \int_{\Omega} q^h \tilde{J}^h \, d\Omega}{\| \mathbf{v}^h \|_{H^1} \left( \| q^h \|_{L^2} \| \tilde{J}^h \|_{L^2} \right)} \geq \beta > 0 \quad (4.91)$$

C'est pour cette raison qu'en petites perturbations, les méthodes EAS ne résolvent pas le problème du locking, mais le limitent uniquement. ◊

Ainsi, Pantuso et Bathe (1995) ont proposé un élément mixte augmenté par la méthode EAS et vérifiant le test numérique du inf-sup (il a par la suite été prouvé analytiquement que cet élément vérifiait la condition inf-sup (Lovadina, 1998)). Cet élément se comporte très bien en petites perturbations, malheureusement les auteurs ont montré qu'il était sensible au phénomène de déformation en sablier en grandes transformations (Pantuso et Bathe, 1997) (voir la figure 4.37). Venant d'un élément EAS, ceci n'a rien d'étonnant dans la mesure où toutes les formulations de ce type sont sensibles à ce phénomène. Un certain nombre de stratégies ont d'ailleurs été proposées pour filtrer (Belytschko et Bindeman, 1991) ou comprendre ce comportement (Crisfield et al., 1995; Neto et al., 1995; Wriggers et Reese, 1996). Le cas de l'élément de Pantuso est différent dans la mesure où il vérifie la condition inf-sup qui est, a priori, suffisante pour assurer la stabilité de la formulation. Pire même, Pantuso et Bathe ont montré que certains éléments mixtes classiques<sup>3</sup> vérifiant la condition inf-sup comme le Q2-1 (élément quadrangulaire équivalent au T6-3) étaient sensibles à ce phénomène. Ils imputent ce comportement à une perte d'éllipticité sur le noyau à certains stades du chargement.

Cette proposition a été étudiée par Auricchio et al. (2004a) : à l'aide de cas simples, les auteurs ont montré que le problème venait de la non-vérification de la condition d'inversibilité sur le noyau. En effet, la stabilité d'une formulation mixte est assurée lorsque deux conditions sont vérifiées (Brezzi et Fortin, 1991) :

1. La condition inf-sup ;

3. Au sens où ces éléments ne sont pas de type EAS.

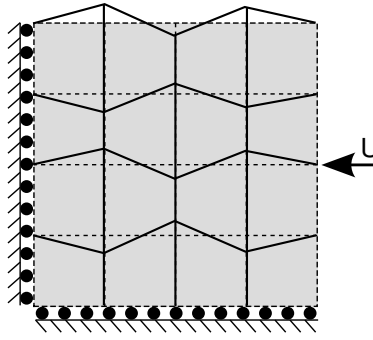


FIGURE 4.37: Mode de déformation en sablier dans le cas d'un chargement compressif.

2. La condition d'inversibilité sur le noyau, c'est-à-dire l'existence d'une constante  $\alpha$  telle que quel que soit  $h$  (la taille du maillage) on ait :

$$\inf_{\mathbf{v} \in \text{Ker}[K_{up}]} \sup_{\mathbf{u} \in \text{Ker}[K_{up}]} \frac{a_{uu}(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \geq \alpha \quad (4.92)$$

où  $\text{Ker}[K_{up}]$  est le noyau de  $[K_{up}]$ ,  $a_{uu}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  est la forme bilinéaire associée à  $[K]$  et  $\|\bullet\|$  est la norme de  $\bullet$  sur  $\mathcal{V}$ .

La condition inf-sup est automatiquement vérifiée pour peu que les espaces de définition du déplacement et de la pression aient correctement été choisis. La condition d'inversibilité dépend en plus du problème considéré. Un problème continu ne vérifiera cette condition que dans une certaine plage de chargement. Le problème discrétisé associé ne vérifiera, lui aussi, cette condition que dans une certaine plage (*plus restreinte que la plage continue*). La taille de cette plage de validité dépend du problème et du type d'élément considéré. De même, il se peut que la plage de validité du problème discret ne soit pas vérifiée numériquement dans la pratique. Auricchio fait donc apparaître trois plages, paramétrées par le chargement de son problème, où la condition d'inversibilité sur le noyau est vérifiée :

- ▷ La plage associée au problème continu ;
- ▷ La plage associée au problème discret (tenant compte du type d'élément utilisé) ;
- ▷ La plage numériquement observée lors de la résolution du problème.

Auricchio et al. tirent alors de leur étude les conclusions suivantes :

- ▷ La plage associée au problème discret est plus petite que celle associée au problème continu ;
- ▷ La plage numériquement observée pour l'élément EAS mixte de Pantuso et Bathe n'est pas en accord avec sa plage discrète théorique (plus petite) ;
- ▷ La plage numériquement observée pour l'élément Q2P1 (équivalent quadrangulaire de l'élément T6-3) n'est pas en accord avec sa plage discrète théorique (plus large même que celle du problème continu !) ;
- ▷ La plage numériquement observée pour l'élément Mini est en accord avec sa plage discrète théorique ;

Ils en déduisent alors que l'élément le plus performant en grandes transformations est l'élément Mini. En effet, cet élément reproduit au mieux le comportement du problème continu. Dans le cas de l'élément de Pantuso et Bathe, la condition d'inversibilité sur le noyau n'est plus vérifiée avant le problème continu, d'où l'apparition de modes en sablier. L'élément Q2P1 permet quant à lui de résoudre le problème dans tous les cas, et même lorsque le calcul continu n'admet pas de solution !

Notre choix d'élément (Mini) est donc performant dans le cas non-enrichi, aucune conclusion ne pouvant être faite dans le cas enrichi.

## Fonctions d'enrichissement en pointe de fissure

Nous nous intéressons à présent à l'obtention du développement asymptotique du champ de position en fond de fissure. Ce paragraphe réutilise les notions développées au chapitre 3.7. Nous suivons le travail de

Stephenson (1982) dans la mesure où le cas des déformations planes incompressible est considéré. Considérons un matériau en puissance du premier invariant du type :

$$W = A I_{1C}^n + B I_{1C}^{n-1} + o(I_{1C}^{n-1}) \quad (4.93)$$

où  $A$ ,  $B$  et  $n$  sont des constantes caractéristiques du matériau : pour un matériau néo-hookéen,  $n = 1$ ,  $A = \mu/2$  et  $B = -\mu$ . Stephenson montre alors que la base canonique du champ de position asymptotique en pointe de fissure s'écrit :

$$\tilde{y}_1(r, \theta) = a_1 r \sin^2(\theta/2) \quad (4.94)$$

$$\tilde{y}_2(r, \theta) = a_2 r^{1/2} \sin(\theta/2) \quad (4.95)$$

Le champ de pression s'écrit quant à lui :

$$q(r, \theta) = -2 \frac{\mu b_1}{a_3^2} r^{1/2} \cos(\theta/2) \quad (4.96)$$

où les  $a_i$  et les  $b_i$  sont des constantes et  $\mu$  est le module de cisaillement.

Notons que le champ de pression utilisé par Stephenson est le champ  $q$  défini en (2.12), et non pas la pression hydrostatique  $p$  introduite pour les matériaux quasi-incompressibles. Le champ de pression  $q$  n'est pas singulier, alors qu'il serait logique de penser le contraire. En fait, cela provient de la façon dont Stephenson formule le problème : en procédant ainsi, la singularité du champ de pression (au sens de Cauchy) provient du terme de gauche de l'équation (2.15), et non pas de  $q$ . Le champ de pression hydrostatique  $p$  étant lié à  $q$  par la relation (2.16), il sera bien singulier. Les développements de Stephenson permettent alors d'écrire le comportement asymptotique de  $p$  :

$$p(r, \theta) = q(r, \theta) + \frac{\mu}{6} I_1 = \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\sigma}) \quad (4.97)$$

$$\simeq \frac{a}{r} + b \frac{\sin(\theta/2)}{\sqrt{r}} + O(r^{-1/2}) \quad \text{lorsque } r \rightarrow 0 \quad (4.98)$$

avec  $a$  et  $b$ , des constantes dépendantes du problème. Le champ de pression est donc (au premier ordre, tout du moins) continu à travers les faces de la fissure.

Les fonctions d'enrichissement du déplacement sont alors :

$$\phi_u^{NHDP-I} = \left\{ r^{1/2} \sin(\theta/2), r \sin^2(\theta/2) \right\} \quad (4.99)$$

Et celles de la pression :

$$\phi_p^{NHDP-I} = \left\{ r^{-1}, \frac{\sin(\theta/2)}{\sqrt{r}} \right\} \quad (4.100)$$

Nous avons gardé le terme de second ordre (en  $r^{-1/2}$ ) du développement de la pression afin de laisser à celle-ci la possibilité d'être discontinue entre les lèvres de la fissure là où le terme en  $r^{-1}$  n'est pas dominant. Chang et Li (2004) ont d'ailleurs montré à partir de solutions éléments finis que bien que le terme en  $r^{-1}$  soit dominant en pointe de fissure, l'effet du second terme en  $r^{-1/2}$  augmente significativement lorsque  $r$  augmente.

## Validations

### Validations basiques en deux dimensions

L'implémentation de la formulation mixte en Lagrangien a tout d'abord validée été sur un cas d'extension uniaxiale, afin de vérifier que les champs de déplacement, contrainte et pression étaient corrects. Nous nous intéresserons ici à quelques validations de robustesse des éléments Mini et T6T3 en grandes transformations. Tout au long de ces tests, le matériau considéré sera néo-hookéen incompressible, de module de cisaillement  $\mu = 0,33333$ .

**Bande en traction** Considérons l'exemple présenté sur la figure 4.38 : une bande d'épaisseur infinie d'un matériau néo-hookéen incompressible sous l'hypothèse des déformations planes est encastree selon sa face inférieure. Deux formulations en Lagrangien sont considérées : l'une utilisant la décomposition volumique-isochorique de l'énergie libre et l'autre sans décomposition. Un déplacement vertical est appliqué graduellement sur la face supérieure de la bande (30 pas), jusqu'à une élongation de 2,5 afin d'étudier l'apparition ou non de modes de type sablier (Hourglass) et la stabilité de la pression. Cinq maillages réglés sont considérés :  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$ ,  $8 \times 8$ ,  $16 \times 16$  et  $32 \times 32$  éléments. Sur la figure 4.39, le champ de pression est tracé sur la configuration déformée : celui-ci est stable dans les deux cas et le champ de déplacement est de bonne qualité. Notons cependant que les deux champs de pression ne peuvent être comparés directement puisque l'un est la pression hydrostatique au sens de Cauchy et l'autre un multiplicateur de Lagrange. Notons aussi que la décomposition volumique-isochorique requiert 60 pas pour converger (seulement pour le maillage  $32 \times 32$ ). Ce comportement s'explique par le champ contraintes de la figure 4.40 : la formulation avec décomposition "capte" beaucoup mieux la singularité au coin droit de la face supérieure. Il est alors logique qu'elle converge moins bien.

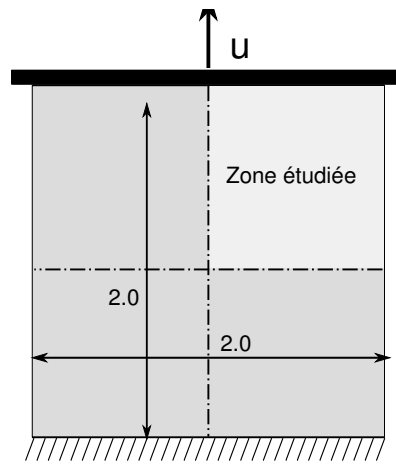
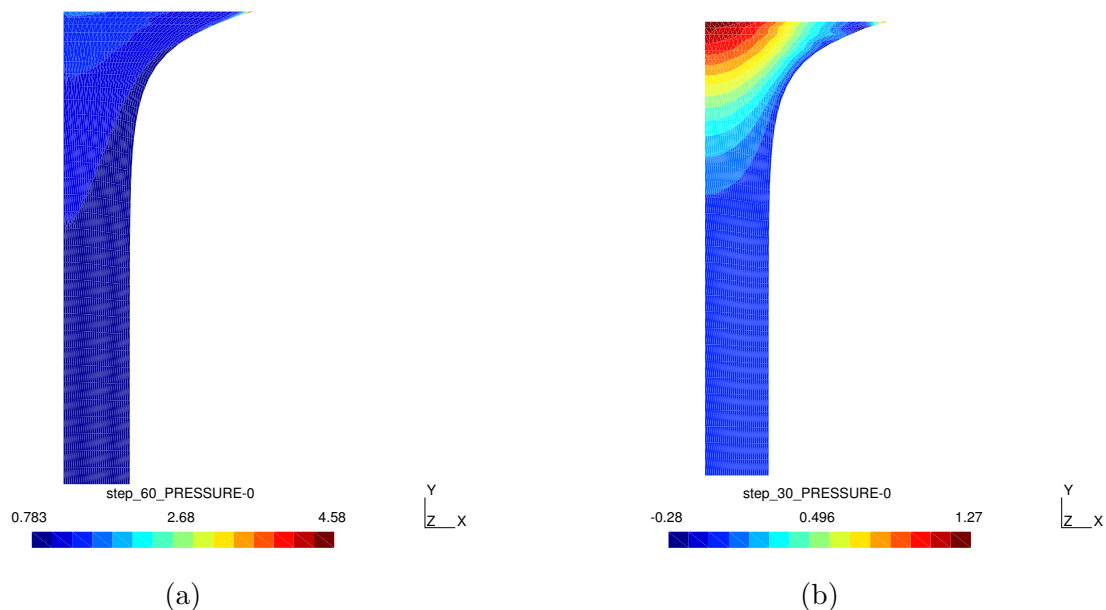


FIGURE 4.38: Bande en traction.

FIGURE 4.39: Bande en traction : champ de pression sur la configuration déformée, maillage  $32 \times 32$ . (a) Décomposition volumique-isochorique (b) Aucune décomposition.



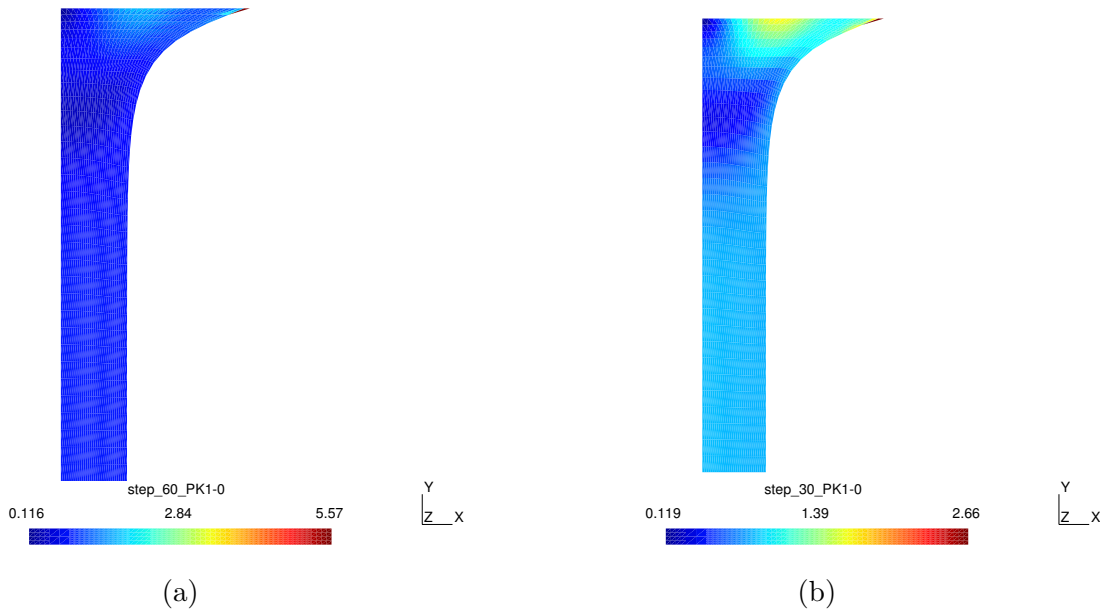


FIGURE 4.40: Bande en traction : champ de contrainte  $\underline{P}$  sur la configuration déformée, maillage  $32 \times 32$ . (a) Décomposition volumique-isochorique (b) Aucune décomposition.

**Problème de Cook** Ce problème est classiquement utilisé pour évaluer le comportement des formulations vis-à-vis du blocage en cisaillement (voir sa représentation sur la figure 4.41(a)). La pièce est soumise à une charge verticale répartie de  $0,1 \text{ N.mm}^{-1}$  sur la ligne  $AB$ . Le matériau est néo-hookéen incompressible de module de cisaillement  $\mu = 0,333333$ . Deux formulations Lagrangiennes sont utilisées : (i) une formulation avec décomposition volumique-isochorique et (ii) une formulation sans décomposition. Finalement, les éléments Mini et T6T3 sont considérés. Le chargement est appliqué en un pas et la déformée du problème ainsi que le champ de pression sont présentés sur la figure 4.41(b).

Le déplacement vertical du point  $A$  est tracé sur la figure 4.42 en fonction du nombre d'éléments sur  $AB$  et du

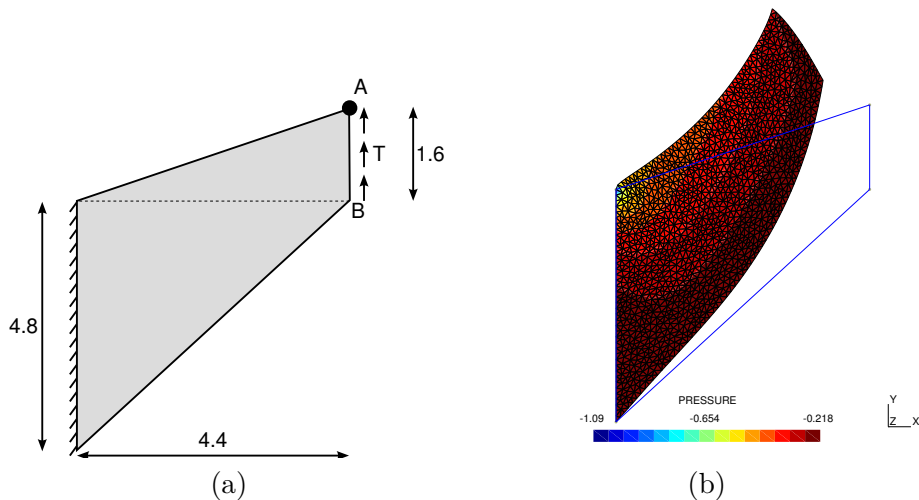
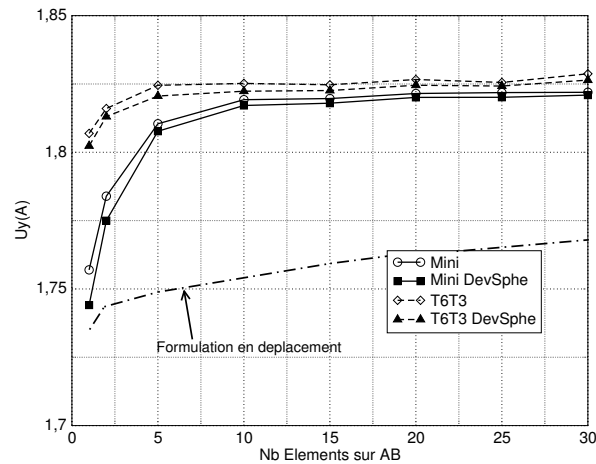


FIGURE 4.41: Problème de Cook en grandes transformations : (a) Dimensions ; (b) Champ de pression sur la configuration déformée.

type de formulation. Si la formulation verrouille, alors  $U(A)$  ne convergera pas lorsque le nombre d'éléments sur  $AB$  augmente. Dans notre cas, aucune des deux formulations ne verrouillent, que ce soit avec le Mini ou le T6T3.

FIGURE 4.42: Déplacement vertical du point  $A$  en fonction du nombre d'éléments sur  $AB$ .

### Validations basiques en trois dimensions

**Bande en traction** Nous reprenons ici l'exemple de la bande en traction mais extrudée selon l'axe  $z$  (voir la figure 4.43). Pour appliquer des conditions de déformations planes, le déplacement selon  $z$  est bloqué sur deux faces de la bande. Le déplacement vertical sur la face supérieure conduit à une elongation de 3,0. Il est appliqué en 150 pas pour la formulation avec décomposition sphérique et 100 pas pour la formulation sans décomposition (pour le maillage le plus fin). Les éléments utilisés sont de type Mini tridimensionnels et les caractéristiques du matériau sont identiques à celles des validations 2D. Une nouvelle fois, des maillages de plus en plus raffinés ( $2 \times 2 \times 1$ ,  $4 \times 4 \times 1$ ,  $8 \times 8 \times 1$ ,  $16 \times 16 \times 2$  et  $32 \times 32 \times 5$  éléments) sont considérés. Les

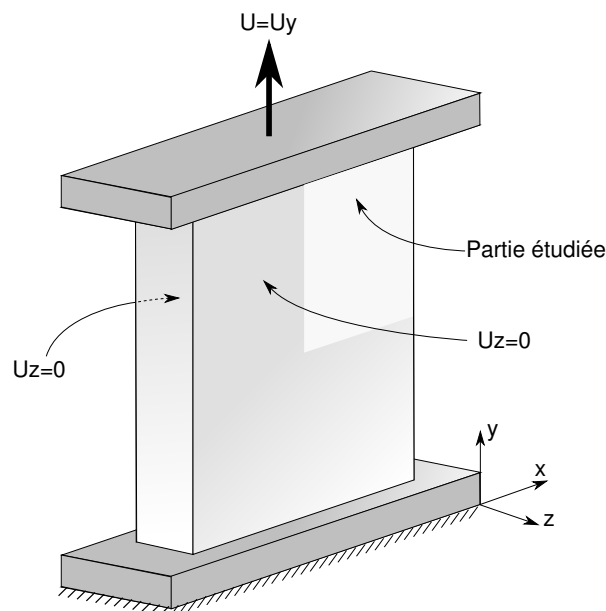


FIGURE 4.43: Bande en traction 3D.

conclusions sont identiques au cas 2D : la décomposition volumique-isochorique du potentiel hyperélastique converge moins bien que dans le cas sans décomposition, mais représente mieux la singularité du champ de contrainte au coin en haut à droite de la bande (voir la figure 4.44).

**Membrane de Cook en 3D** Nous reprenons à nouveau l'exemple de la membrane de Cook (voir la figure 4.41) extrudée selon la direction  $z$  (voir la figure 4.45(a)). Des conditions limites permettant de reproduire l'état de déformations planes sont appliquées sur les deux faces de l'extrusion, et nous ne considérons que le cas de l'élément Mini. Comme dans le cas bidimensionnel, le déplacement du point  $A$  se stabilise rapidement lorsque le maillage est raffiné (voir la figure 4.45(b)).

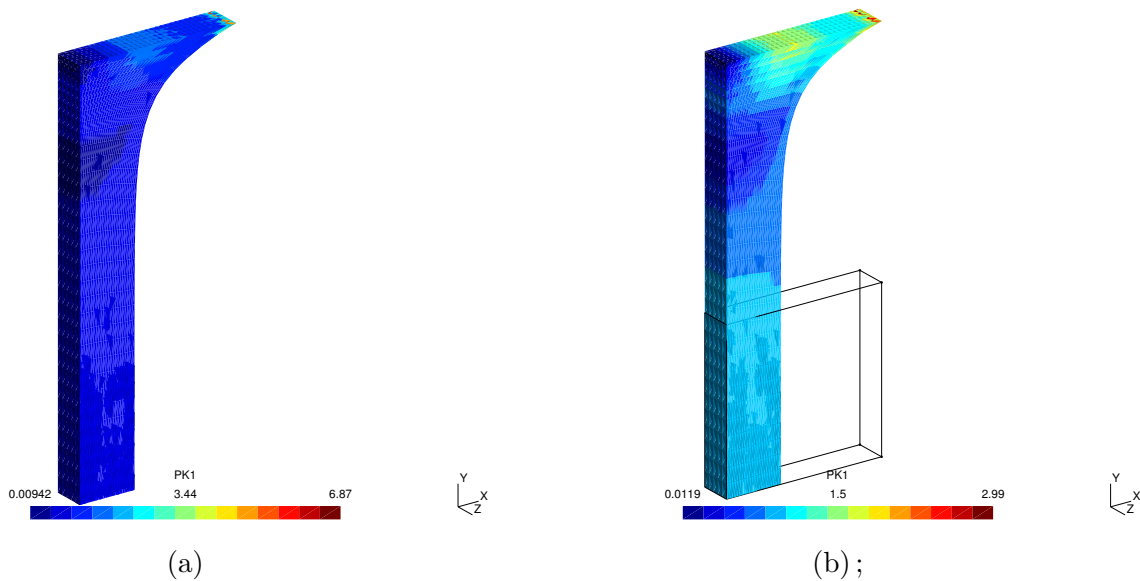


FIGURE 4.44: Bande en traction 3D : champ de contraintes de Piola Kirchhoff 1 : (a) décomposition volumique-isochorique ; (b) aucune décomposition.

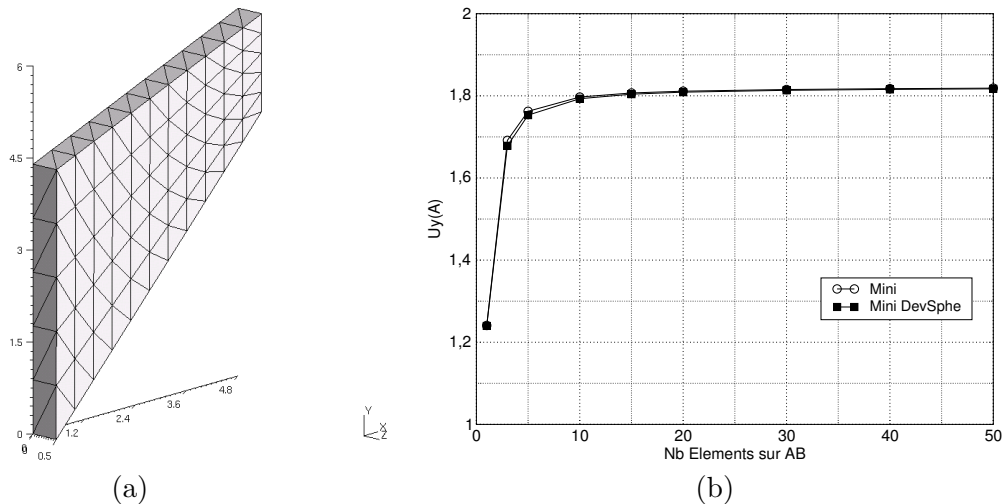


FIGURE 4.45: Membrane de Cook en 3D : (a) maillage ; (b) déplacement vertical du point A en fonction du nombre d'éléments sur AB.

## 4.4 Conclusion

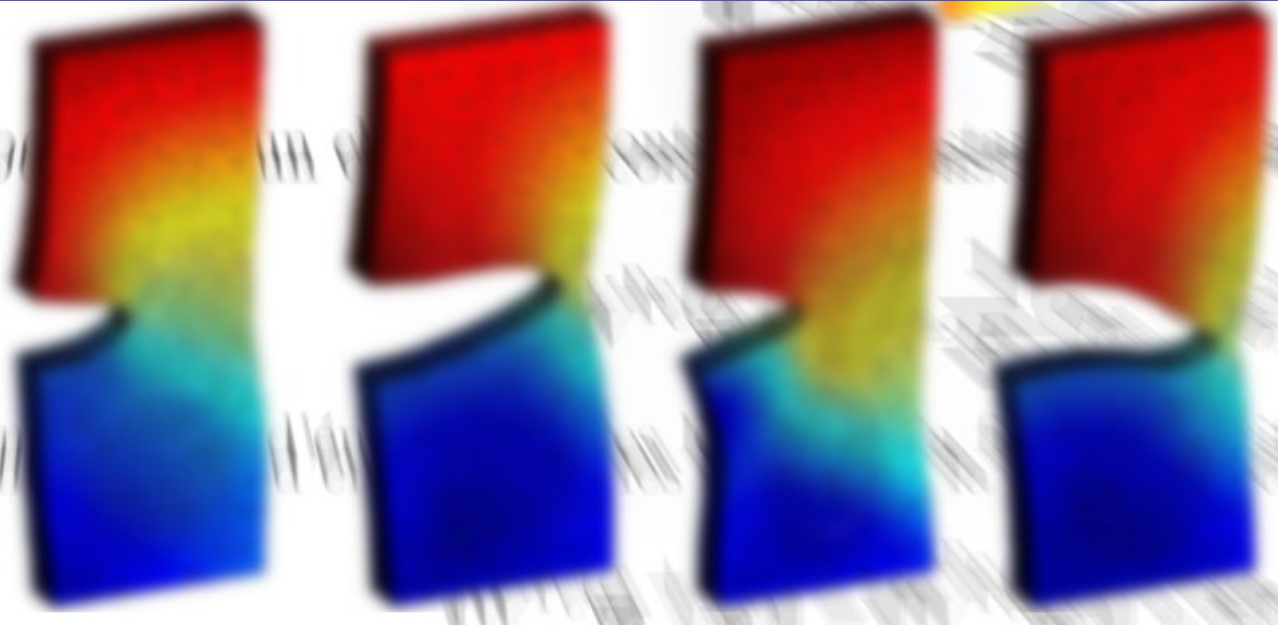
A travers ce chapitre, nous avons étendu l'utilisation de la méthode X-FEM aux problèmes d'élasticité incompressible. Dans un premier temps, l'étude s'est restreinte au cas des petites perturbations où l'aspect mathématique a été largement développé dans le cas des éléments finis classiques. Après avoir illustré la problématique du verrouillage, nous avons présenté une sélection de méthodes permettant de résoudre les problèmes d'élasticité incompressible en éléments finis. Par ailleurs, nous avons étudié la possibilité d'utiliser ces méthodes avec X-FEM. Une formulation mixte à deux champs a finalement été choisie. Pour être fiable, ce type de formulation nécessite cependant la vérification de la condition inf-sup qui lie les espaces de déplacement et de pression. Dans le cas contraire, la méthode devient instable et des phénomènes tels que des oscillations de pression apparaissent. L'objectif était d'obtenir une formulation mixte qui reste stable après enrichissement. La vérification analytique de la condition inf-sup dans le cas X-FEM étant une tâche très complexe, nous nous sommes basés sur des études de convergence ainsi que sur un test numérique qui donne une indication sur la vérification de la condition inf-sup. Les cas des trous, des interfaces matérielles et des fissures ont été étudiés. Il a été établi que pour des enrichissements bien choisis du champ de pression, chacune de ces applications pouvait être résolue de façon non-conforme avec la méthode X-FEM. Il a cependant été montré que certains

enrichissements du champ de pression, bien que vérifiant la condition inf-sup, pouvaient donner lieu à une convergence dépendant de la topologie du maillage.

Dans un second temps, le cas des grandes transformations a été considéré. Après étude des méthodes existantes, nous avons sélectionné la formulation mixte en Lagrangien. Cette méthode étant une méthode mixte, les stratégies développées en petites perturbations ont été réutilisées. Enfin, l'implémentation de cette méthode a été validée dans les cas bidimensionnels et tridimensionnels. Les résultats ont été comparés selon que l'on décompose ou non la densité d'énergie de déformation et partie isovolume et sphérique. Il a été illustré que la décomposition en parties isovolume et sphérique représentait mieux les contraintes dans le matériau, mais pouvait donner lieu à des difficultés de convergence.

Les perspectives concernant ce chapitre sont multiples. Tout d'abord, il serait intéressant d'étudier si une démonstration mathématique de la vérification de la condition inf-sup est possible dans le cas X-FEM (au moins pour les trous et les interfaces matériaux). Ensuite, l'extension de ce travail à la stabilité d'éléments à pression discontinue serait intéressante d'un point de vue numérique car les degrés de liberté du champ de pression pourraient alors être condensés (la taille du système linéaire diminue). Ce travail est d'ailleurs en cours au laboratoire de calcul numérique (LaCán) de l'Université Polytechnique de Catalogne. Il n'est toutefois pas clair si ce type d'élément peut rester stable une fois enrichi avec les fonctions de pointe de fissure.

# Évaluation des forces configurationnelles en mécanique de la rupture pour les petites et grandes transformations



## Sommaire

4.1	Introduction . . . . .	55
4.2	Le cas des petites perturbations . . . . .	56
	Problème de référence . . . . .	56
	Stratégies de gestion de l'incompressibilité en éléments finis . . . . .	57
	Enrichissement de formulations mixtes par la méthode X-FEM . . . . .	67
	Validations . . . . .	69
4.3	Extension au cas des grandes transformations . . . . .	82
	Stratégies de gestion de l'incompressibilité en grandes transformations . . . . .	82
	Fonctions d'enrichissement en pointe de fissure . . . . .	89
	Validations . . . . .	90
4.4	Conclusion . . . . .	94

## 5.1 Introduction

Les approches développées dans les chapitres 3 et 4 permettent de traiter des problèmes de mécanique non linéaire de la rupture avec X-FEM. De plus, les travaux précédents traitant de la fissuration avec X-FEM (Stolarska *et al.*, 2001a; Gravouil *et al.*, 2002; Moës *et al.*, 2002; Béchet *et al.*, 2005) mettent à

notre disposition tous les outils permettant de faire propager numériquement des fissures grâce aux levelsets. Cependant, il nous est actuellement impossible de déterminer dans quelle direction se propagera la fissure, malgré la connaissance de tous les champs mécaniques dans la structure. En mécanique linéaire de la rupture, de nombreux critères ont été proposés pour déterminer cette direction de branchement. En revanche peu de critères ont été développés pour la mécanique de la rupture en grandes transformations.

### Critères utilisés en mécanique linéaire de la rupture

De nombreux auteurs ont comparé les critères existants dans la littérature pour la propagation de fissures en mécanique de la rupture. D'un point de vue bibliographique, citons [Qian et Fatemi \(1996\)](#) pour les aspects théoriques et [Bouchard et al. \(2000, 2003\)](#) pour les aspects numériques.

Parmi les critères existants, le plus utilisé est certainement le critère de la contrainte tangentielle maximale ([Erdogan et Sih, 1963](#)).

#### Critère de contrainte tangentielle maximale

Ce critère postule que la fissure se propage dans la direction définie par :

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} < 0 \quad (5.1)$$

où  $\sigma_{\theta\theta} = \mathbf{E}_\theta \cdot \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{E}_\theta$  (voir la figure 5.1, page 99). En remplaçant  $\underline{\underline{\sigma}}$  par son développement asymptotique en pointe de fissure,  $\theta$  s'obtient explicitement en fonction des facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$ . Ce type de critère a été utilisé dans les publications traitant de fissuration quasi-statique des matériaux avec X-FEM ([Moës et al., 1999](#); [Sukumar et al., 2000](#); [Dolbow et al., 2000](#); [Stolarska et al., 2001b](#); [Moës et al., 2002](#)).

#### Critère du minimum de la densité d'énergie de déformation

Ce critère a été introduit par [Sih \(1974, 1991\)](#). Selon l'auteur, la fissure se propage dans la direction minimisant la densité d'énergie de déformation  $S$  lorsque  $S$  atteint sa valeur critique  $S_c$  définie expérimentalement :

$$S = a_{11}k_1^2 + a_{12}k_1k_2 + a_{22}k_2^2 + a_{33}k_3^2 \quad (5.2)$$

où les constantes  $(a_{ij})_{i,j=1\dots 3}$  dépendent de  $\theta$ ,  $E$  et  $\nu$  ; les paramètres  $k_i$  sont définis par :

$$k_i = \frac{K_i}{\sqrt{\pi}} \quad i = I, II, III \quad (5.3)$$

La direction de propagation est caractérisée par la relation :

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} > 0 \quad (5.4)$$

Les résultats obtenus par ce critère ont été largement critiqués en raison des fondements théoriques de l'établissement de (5.2) mais aussi de la qualité de ses prédictions quelquefois contradictoires et inutilisables en mode *III*.

#### Critère du taux de restitution d'énergie maximal

Ce critère se fonde sur le postulat selon lequel le taux de restitution d'énergie est le seul paramètre valide expliquant la propagation (ou non) d'une fissure ([Erdogan et Sih, 1963](#)). Dans ce cas, la fissure tend à se propager dans la direction maximisant cette grandeur. [Hussain et al. \(1974\)](#) ont réussi à relier le taux de restitution d'énergie (après propagation) aux facteurs d'intensité de contrainte (avant propagation), donnant ainsi l'équation implicite qui régit ce critère.

### Critère de l'intégrale J vectorielle

Ce critère a été introduit par [Hellen et Blackburn \(1975\)](#). Ils définissent un vecteur  $\mathbf{J}$  tel que :

$$\mathbf{J} = J_1 \mathbf{E}_1 + J_2 \mathbf{E}_2 \quad (5.5)$$

$$J_i = \int_{\Gamma} \left( W_e \cdot n_i - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) d\Gamma \quad i = 1, 2 \quad (5.6)$$

D'après ce critère, la propagation a lieu selon la direction  $\mathbf{J}$  lorsque  $\|\mathbf{J}\|$  atteint une valeur critique  $J_c$ . Il a été utilisé par [Dai et Zheng \(1987\)](#) dans le cas d'une plaque en traction uniaxiale présentant une fissure inclinée en son centre. Les résultats sont satisfaisants lorsque le mode dominant est le mode  $I$ . En mode  $II$ , [Gdoutos \(1990\)](#) montre que les prédictions de ce critère dévient de la plupart des essais expérimentaux<sup>1</sup>. Présenté ainsi, ce critère n'est fondé sur aucune considération physique. Nous verrons par la suite qu'il peut être relié de façon rigoureuse au tenseur des contraintes d'Eshelby ([Eshelby, 1975](#)), lui donnant ainsi une signification physique forte.

**Remarque 5.1** *A la différence des précédents, ce critère présente tout de même l'avantage (pour les applications en mécanique non linéaire de la rupture) de ne pas être exprimé en terme de facteurs d'intensité de contrainte.*◊

### Autres critères de propagation

De nombreux autres critères de propagation ont été proposés, chacun s'adaptant plus ou moins aux différents matériaux et aux différents cas de chargement. Notons aussi l'approche de la *mécanique de l'endommagement* qui, fondée sur des grandeurs physiques locales, permet la simulation de la propagation de fissures. La tendance actuelle consiste à relier les grandeurs d'endommagement à une ouverture de fissure équivalente, afin de pouvoir facilement passer du modèle continu (en pointe de fissure) au modèle discontinu là où la fissure est ouverte ([Areias et Belytschko, 2005](#); [Perego et al., 2006](#)).

### Le cas non linéaire

Dans le cas de la mécanique non linéaire de la rupture, les facteurs d'intensité de contraintes n'ont plus de sens physique. Or, la plupart des critères présentés précédemment sont exprimés en fonction de ces grandeurs (hormis le critère de l'intégrale J vectorielle). Néanmoins, certains peuvent être utilisés, mais de façon numérique uniquement. Pour cela, un maillage rayonnant est construit autour de la pointe de fissure. La contrainte ou la déformation est ensuite évaluée sur la couronne extérieure afin d'obtenir son évolution en fonction de  $\theta$ . Il est alors possible d'obtenir la direction maximisant (ou minimisant) cette grandeur (voir la figure 5.1). Toutefois ce type d'approche nécessite de nombreux calculs afin de ne pas manquer les extrêmes du critère. Par ailleurs, on peut se demander si l'utilisation de critères développés dans le cadre de la mécanique linéaire garde un sens dans le cas non linéaire. Seules des campagnes d'essais pourraient répondre à cette interrogation.

Nous nous attacherons dans ce chapitre à étudier la possibilité d'appliquer un critère de branchement de fissures basé sur le concept des forces configurationnelles. Ce type de critère est identique au critère de l'intégrale J vectorielle, avec cette fois-ci un fondement mécanique. Notons qu'une campagne expérimentale serait nécessaire pour déterminer les paramètres de ce critère ainsi que sa validation.

1. En fait, si l'état mécanique est celui du mode  $II$  pur,  $J_2$  s'annule et la direction de propagation prédite est horizontale. Le critère de contrainte circonférentielle maximale prédit quant à lui une direction de propagation inclinée de  $70,7^\circ$ .



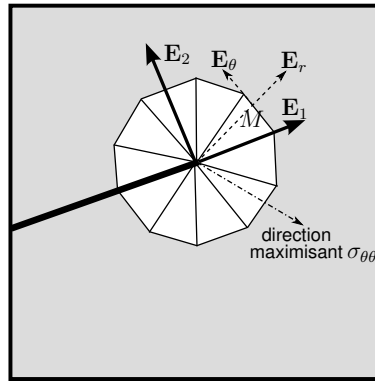


FIGURE 5.1: Maillage rayonnant autour de la pointe de fissure et direction maximisant  $\sigma_{\theta\theta}$ .

## 5.2 La mécanique configurationnelle

*Remarque : La théorie de la mécanique configurationnelle ne sera pas développée en profondeur dans ce chapitre. En effet, nous nous placerons dans cette étude en tant qu'utilisateurs. Les domaines d'application de cette théorie sont extrêmement vastes et s'étendent de l'étude des singularités, à celle des défauts ou des réarrangements structuraux de la matière. Elle est utilisée non seulement en fissuration, mais aussi pour la modélisation des changements de phase et des problèmes d'ondes de choc. Nous nous contenterons donc ici de développer les résultats utiles en lien avec la mécanique de la rupture.*

### Introduction

Le concept de force configurationnelle agissant sur un défaut a été introduit par Eshelby (1951) et étendu au cadre des grandes transformations par Eshelby (1975) et Chadwick (1975). Cette force configurationnelle est définie comme l'opposé de la variation de l'énergie totale du solide contenant un défaut par rapport à la variation de position de ce dernier dans la configuration de référence. En utilisant les notations de la figure 5.2,

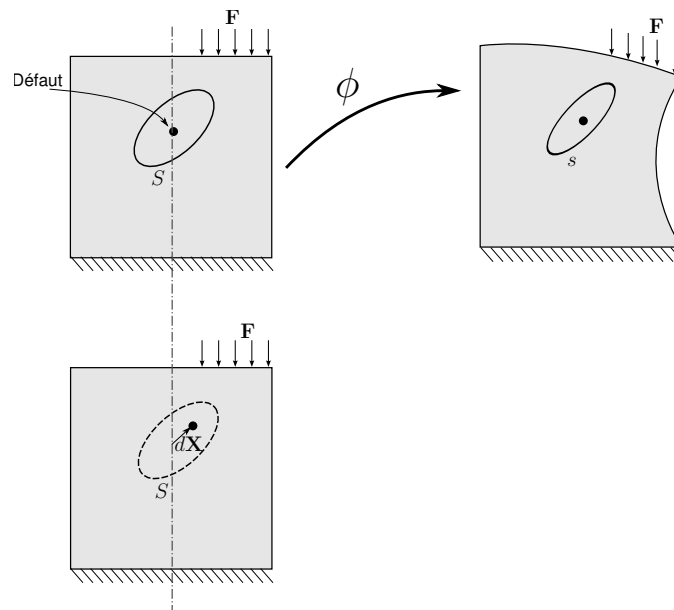


FIGURE 5.2: Mouvement infinitésimal  $d\mathbf{X}$  d'un défaut dans la configuration de référence.

représentant la variation de position d'un défaut dans la configuration de référence d'un vecteur infinitésimal  $d\mathbf{X}$ , la force configurationnelle appliquée sur le défaut s'écrit :

$$\mathcal{F}^s = - \frac{\partial \Pi^{\text{Tot}}(\Omega)}{\partial \mathbf{X}} \quad (5.7)$$

où  $\Pi^{\text{Tot}}$  représente l'énergie totale du système, et  $\mathbf{X}$  la position du défaut dans la configuration de référence. Cette force pointe dans la direction opposée à celle faisant diminuer l'énergie totale du système. Le tenseur des contraintes associé aux forces configurationnelles est appelé *tenseur des contraintes d'Eshelby* (ou *tenseur de moment matériel*). Les recherches dans ce domaine ont récemment été accélérées par les travaux de [Stumpf et Le \(1990\)](#), [Maugin et al. \(Epstein et Maugin, 1990b,a,c; Maugin, 1993, 1995\)](#), [Steinmann et al. \(Steinmann, 2000; Steinmann et al., 2001; Denzer et al., 2003; Kuhl et al., 2004\)](#) et [Gurtin \(1999\)](#). Un formalisme variationnel a aussi été proposé pour le problème configurationnel (aussi appelé problème cinématique inverse) ([Maugin et Trimarco, 1992](#)).

Dans le problème cinématique direct (mécanique Newtonienne), les forces physiques sont conjuguées thermodynamiquement avec le mouvement physique des particules (leur position dans la configuration courante). Au contraire, dans le problème cinématique inverse (mécanique Eshelbienne), les forces configurationnelles sont conjuguées thermodynamiquement avec la cinématique inverse des particules (leur position dans la configuration de référence). Des forces configurationnelles apparaissent en présence de défauts ou d'inhomogénéités dans la structure (fissures, inclusions matérielles, dislocations, cavités). Dans le cas d'une singularité (pointe de fissure), la force configurationnelle qui apparaît à la pointe est directement reliée au concept de taux de restitution d'énergie ([Steinmann, 2000](#)). Ces propriétés permettent aux forces configurationnelles d'être des grandeurs physiques adaptées au développement de critères de branchement de fissure.

L'évaluation numérique des forces configurationnelles a été étudié par [Mueller et al. \(2002\)](#), [Steinmann et al. \(Denzer et al., 2003; Steinmann et al., 2001\)](#) et [Gross et al. \(2003\)](#) pour les éléments finis classiques. Tous ces auteurs considèrent la formulation faible du problème configurationnel et utilisent les fonctions test éléments finis pour obtenir des forces configurationnelles nodales. Grâce à cette approche, le taux de restitution d'énergie ou les changements de géométrie des inhomogénéités sont obtenus à partir des forces configurationnelles nodales. De plus, dans le cas de corps homogènes, les forces configurationnelles sont parfois utilisées pour optimiser la topologie du maillage ([Mueller et al., 2002](#)).

Cependant, ces méthodes employées pour calculer les forces configurationnelles ne peuvent être utilisées telles quelles avec X-FEM, dans la mesure où le maillage ne suit pas les frontières des inhomogénéités. Aussi, [Glaser et Steinmann \(2005\)](#) ont proposé d'introduire des forces configurationnelles additionnelles associées aux degrés de liberté enrichis de l'approximation. Il est également possible de réutiliser les procédures fondées sur l'intégrale de domaine (voir le chapitre 3.6). Cette approche a été proposée récemment par [Heintz \(Heintz, 2006\)](#) dans le contexte de la méthode Nitsche (voir le chapitre 2.4) et requiert cependant l'intégration de termes singuliers sur les lèvres de la fissure. Néanmoins, aucune étude n'a été proposée pour vérifier la convergence de cette grandeur.

L'objectif de ce chapitre est donc de mettre en place puis de comparer différentes approches permettant le calcul de forces configurationnelles. En particulier, nous nous intéresserons à la précision des résultats qui n'a pas encore été étudiée dans la littérature. Nous chercherons ensuite à mettre en évidence l'influence d'imprécisions lors du calcul des forces configurationnelles sur des simulations de propagation. Tout comme dans le cas de la gestion de l'incompressibilité (cf. chapitre précédent), nous considérerons tout d'abord le cas élastique linéaire, dans la mesure où des formes analytiques sont disponibles.

## Équilibre Newtonien (physique)

Reprenons le problème de référence posé dans le chapitre 4.2, mais cette fois-ci le corps est fissuré (voir la figure 5.3). Les lèvres de la fissure sont notées  $\Gamma_{C1}$  et  $\Gamma_{C2}$ . Le problème à résoudre est présenté dans les équations (4.1) auxquelles s'ajoute une condition de surface libre sur les lèvres de la fissure :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_{C1} \cup \Gamma_{C2} \quad (5.8)$$

La formulation faible du problème est quant à elle donnée par l'équation (4.7). Ces relations sont les équations du problème que nous qualifierons de "direct" par la suite (problème Newtonien ou problème spatial).

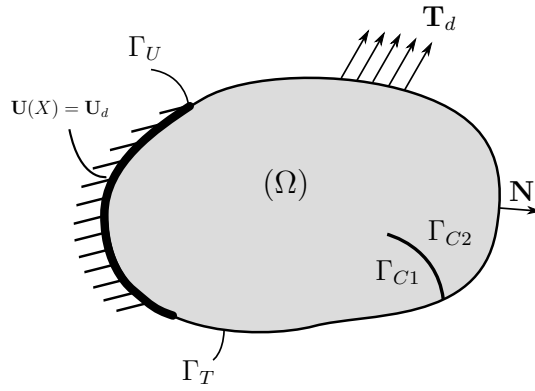


FIGURE 5.3: Le problème de référence.

### Équilibre configurationnel (eshelbien)

La formulation forte du problème spatial (4.1) et (5.8) peut être réécrite en une formulation forte configurationnelle en suivant les travaux de [Maugin et Trimarco \(1992\)](#) :

$$\text{Div } \underline{\underline{M}} + \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \quad (5.9)$$

où  $\text{Div}$  est l'opérateur divergence par rapport aux coordonnées dans la configuration de référence,  $\underline{\underline{M}}$  est le tenseur configurationnel de contraintes (ou tenseur des contraintes d'Eshelby) qui s'écrit généralement, dans le cas de la mécanique linéaire de la rupture :

$$\underline{\underline{M}} = W(\underline{\underline{F}}, \mathbf{X}) \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\nabla}}(\mathbf{u})^T \underline{\underline{\sigma}} \quad (5.10)$$

et  $\mathbf{B}$  sont les forces volumiques configurationnelles :

$$\mathbf{B} = \underline{\underline{F}}^T \mathbf{b} + \left. \frac{\partial W}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\text{expl}} \quad (5.11)$$

Le second terme de l'équation (5.11) représente la dérivation explicite de  $W$  par rapport à la position  $\mathbf{X}$  dans la configuration de référence (pour prendre en compte la présence d'inhomogénéités). Si le corps est homogène et sans forces volumiques physiques, le tenseur des contraintes d'Eshelby satisfait une loi de conservation stricte :

$$\text{Div } \underline{\underline{M}} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \quad (5.12)$$

La formulation faible associée à ce problème configurationnel (5.9) est donnée par :

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{V} \mathbf{B} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} \delta \mathbf{V} \mathbf{T}_d^* \, dA = \int_{\mathcal{B}} \underline{\underline{\nabla}}_0 \delta \mathbf{V} : \underline{\underline{M}} \, d\Omega \quad \forall \delta \mathbf{V} \quad (5.13)$$

où  $\mathbf{T}_d^*$  sont les forces surfaciques configurationnelles,  $\underline{\underline{\nabla}}_0$  représente l'opérateur gradient par rapport à la position dans la configuration de référence et  $\delta \mathbf{V}$  sont les déplacements matériels virtuels.

Les propriétés du tenseur d'Eshelby ont été récemment étudiées dans le cas de problèmes de thermo-hyperélasticité ([Kuhl et al., 2004](#)), d'inélasticité ([Nguyen et al., 2005](#)), d'élasto-électromagnétisme ([Maugin et al., 1992](#)) et d'endommagement isotrope ([Liebe et al., 2003](#)). Cependant, en examinant les équations (5.10-5.11) et (5.13), on constate que la résolution du problème d'équilibre configurationnel ne peut se faire indépendamment de la résolution du problème spatial car  $\underline{\underline{M}}$  dépend de  $W$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}$ . C'est pourquoi les applications pratiques des forces configurationnelles ont été proposées comme des opérations de post-traitement après résolution du problème spatial. Récemment, Larsson et Fagerström ([Larsson et Fagerström, 2005](#); [Fagerström et Larsson, 2005](#)) ont néanmoins proposé une résolution couplée des problèmes configurationnels et spatiaux, en utilisant une approche de type partition de l'unité pour la discrétisation des équations matérielles.

**Remarque 5.2** *Interprétation de la formulation faible :*

- ▷ Dans la formulation faible du problème spatial, les fonctions test  $\delta \mathbf{v}$  représentent des variations infinitésimales de la configuration déformée ;

▷ Dans la formulation faible du problème configurationnel, les fonctions test  $\delta\mathbf{V}$  représentent des variations infinitésimales de la configuration de référence.

Rechercher la stationnarité de la formulation faible configurationnelle revient donc à déterminer les changements dans la configuration de référence permettant la minimisation de l'énergie totale du système.◇

### Application à la mécanique de la rupture

Suivant l'approche de Steinmann (Steinmann, 2000), considérons l'équilibre configurationnel d'un volume matériel  $\mathcal{B}$  contenant la pointe de la fissure  $\Gamma_C$  et défini sur la figure 5.4. Notons  $\mathcal{F}^r$  et  $\mathcal{F}^s$  les résultantes

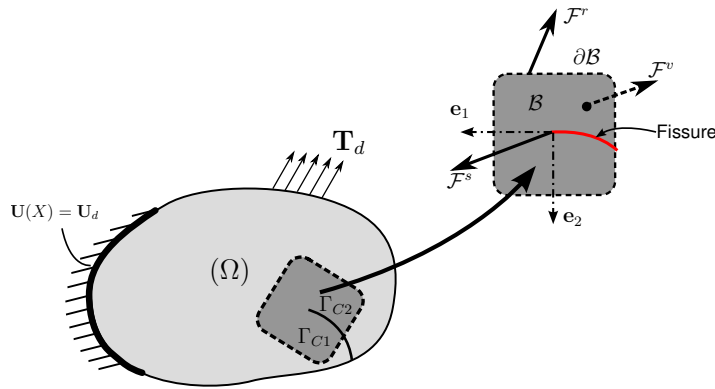


FIGURE 5.4: Équilibre configurationnel de  $\mathcal{B}$ .

des forces configurationnelles appliquées respectivement sur  $\partial\mathcal{B}$  (surface de  $\mathcal{B}$ ) et sur la pointe de la fissure. En introduisant  $\mathcal{F}^v$ , la résultante des forces configurationnelles de volume dans  $\mathcal{B}$ , l'équilibre configurationnel s'écrit :

$$\mathcal{F}^s + \mathcal{F}^r + \mathcal{F}^v = \mathbf{0} \quad (5.14)$$

Après quelques manipulations (Steinmann, 2000), l'équation précédente devient :

$$J = \mathcal{F}^r \cdot \mathbf{e}_1 = -\mathcal{F}^s \cdot \mathbf{e}_1 \quad (5.15)$$

où  $J$  est l'intégrale  $J$  introduite dans le paragraphe 3.6. Cette relation peut être utilisée pour évaluer le taux de restitution d'énergie en mécanique de la rupture. En outre, l'équation (5.14) a une autre propriété importante mise en évidence par l'équation (5.7) : la variation d'énergie totale dans la structure  $\delta\Pi^{Tot}$  est maximale si la variation de position  $\delta\mathbf{X}$  du défaut dans la configuration de référence est colinéaire à  $-\mathcal{F}^s$ . A partir de cette relation, Mueller et Maugin (2002) ont proposé d'utiliser la direction  $-\mathcal{F}^s$  comme critère de direction de propagation. La fissure est propagée selon la relation :

$$\mathbf{X}_c = \mathbf{X}_c - k \mathcal{F}^s \quad (5.16)$$

où  $\mathbf{X}_c$  est la position de la pointe de fissure dans la configuration de référence et  $k$  est un paramètre arbitraire qui devrait être identifié expérimentalement. Une approche similaire a été proposée par Heintz (2006) qui lui aussi propage la fissure dans cette direction, mais jusqu'à l'élément suivant. En effet, bien qu'utilisant une méthode de type Nitsche qui permet de définir la fissure indépendamment du maillage, celle-ci doit absolument se terminer sur la frontière d'un élément. Ici, la méthode X-FEM permet à la pointe de fissure d'être située arbitrairement par rapport au maillage.

**Remarque 5.3** Ce type d'approche peut être appliqué au cas des inclusions et des trous pour caractériser leur changement de topologie (Steinmann et al., 2001), au cas des défauts pour caractériser leur migration (Mueller et al., 2002) ainsi qu'aux dislocations pour modéliser leur glissement (Menzel et al., 2005).◇

### 5.3 Mise en œuvre numérique

L'évaluation numérique des forces configurationnelles peut être effectuée de deux façons :

- ▷ D'une part, par l'évaluation de forces configurationnelles nodales (Steinmann *et al.*, 2001; Mueller et Maugin, 2002; Mueller *et al.*, 2002; Gross *et al.*, 2003; Denzer *et al.*, 2003). Cette approche est adaptée au contexte éléments finis classique dans lequel la pointe de fissure est située en un nœud (en 2D), de sorte que le calcul de  $\mathcal{F}^s$  (voir la figure 5.4) est relativement facile. En effet, dans ce cas de figure, la force configurationnelle nodale  $\mathcal{F}_{\text{nod}}$  calculée au nœud en pointe de fissure correspond à  $\mathcal{F}^s$ . Dans le contexte des méthodes de type partition de l'unité, la pointe de la fissure est située arbitrairement par rapport à la discrétisation éléments finis. C'est pourquoi Glaser et Steinmann (2005) ont proposé de calculer non seulement les forces configurationnelles nodales associées aux degrés de liberté classiques  $\mathcal{F}_{\text{nod}}$  (qui peuvent être reliées à l'intégrale  $J$ ), mais aussi les forces configurationnelles nodales  $\bar{\mathcal{F}}_{\text{nod}}$  associées aux degrés de liberté enrichis (dans le cas où seul l'enrichissement de type Heaviside est utilisé). Les auteurs choisissent alors la direction  $-\bar{\mathcal{F}}_{\text{nod}}$  comme direction de propagation, si  $\|\mathcal{F}_{\text{nod}} \cdot \mathbf{e}_1\| > J_{\text{crit}}$ . Le paramètre  $J_{\text{crit}}$  est le taux de restitution d'énergie critique du matériau qui peut être déterminé expérimentalement.

Cependant, si la signification physique des forces configurationnelles nodales classiques est bien établie (force thermodynamique associée au mouvement d'un nœud), la signification physique des forces configurationnelles associées aux degrés de liberté enrichis (qui représentent le saut du champ de déplacement au travers de la fissure) n'est pas claire. De plus, les auteurs ont récemment montré que ces forces configurationnelles additionnelles dépendaient fortement du maillage (Glaser et Steinmann, 2006). Nous ne considérerons donc pas cette approche par la suite.

- ▷ La seconde méthode pour calculer les forces configurationnelles agissant sur la pointe de la fissure consiste à modifier la méthode de calcul de l'intégrale  $J$  sous forme d'intégrale de domaine (voir le paragraphe 3.6) afin de calculer le vecteur  $\mathbf{J}$  et non plus sa seule projection sur les lèvres de la fissure (voir l'équation (5.15)). Cette approche a été proposée récemment par Heintz (2006) dans le cadre de la méthode Galerkin discontinue (Hansbo et Hansbo, 2003). Cependant, la précision du calcul du vecteur  $\mathbf{J}$  n'a pas du tout été étudiée.

### Calcul des forces configurationnelles nodales

Le calcul des forces configurationnelles nodales est fondé sur la formulation faible de l'équilibre configurationnel (5.13). En premier lieu, un calcul éléments finis spatial est utilisé afin d'obtenir les champs de déplacement, de déformation et de contrainte dans le corps. Ensuite, le champ test configurationnel  $\delta\mathbf{V}$  est approché en utilisant l'interpolation éléments finis :

$$\delta\mathbf{V}|_{\Omega_e} = \sum_{\alpha=1}^n \delta V^\alpha \mathbf{N}^\alpha(\mathbf{X}) \quad (5.17)$$

L'introduction de cette fonction test dans la formulation faible devrait donner lieu à un vecteur résidu nul en chaque nœud sans singularité. Cependant, les champs éléments finis qui sont utilisés pour le calcul du tenseur des contraintes d'Eshelby ne satisfont pas exactement les équations d'équilibre (elles ne sont vérifiées qu'en moyenne sur la structure). C'est ainsi qu'on obtient un résidu non nul, qui induit ensuite des forces configurationnelles parasites. Ces forces sont conjuguées énergétiquement avec le mouvement configurationnel des nœuds du maillage. L'expression de la composante  $k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) de ces forces configurationnelles s'écrit, en l'absence de forces configurationnelles de volume :

$$\mathcal{F}_k^{\text{nod}} = \bigcup_{e=1}^{\text{Nel}} \int_{\Omega_e} (\underline{M} : \underline{\nabla} \mathbf{N}^k) d\Omega \quad (5.18)$$

où Nel est le nombre d'éléments dont le support contient le nœud considéré, et  $\bigcup$  représente l'opération algorithmique d'assemblage. Les forces configurationnelles apparaîtront principalement aux inhomogénéités. Par exemple, la force configurationnelle qui apparaît en pointe de fissure représente l'approximation de la "force motrice" qui agit en pointe de fissure (Steinmann *et al.*, 2001; Denzer *et al.*, 2003). Dans le cas des inclusions, les forces configurationnelles qui apparaissent à l'interface représentent la tendance de l'inclusion à changer de forme (Steinmann *et al.*, 2001; Mueller *et al.*, 2002). Cependant, les forces configurationnelles aux autres nœuds du maillage n'ont aucune signification physique. Mueller et Maugin (2002) proposent de les utiliser pour optimiser la topologie du maillage. Ils obtiennent alors une amélioration de la solution numérique.

**Remarque 5.4** Le calcul des forces configurationnelles nodales est maintenant communément utilisé. Néanmoins, il n'existe à notre connaissance aucune étude quant à la convergence de ces quantités. ◊

### Intégrales de domaine

Dans ce paragraphe, nous nous basons sur les développements présentés dans le paragraphe 3.6. Steinmann *et al.* (2001) ont montré l'équivalence entre intégrales de domaine et forme faible configurationnelle : l'intégrale de domaine peut être vue comme l'écriture de la formulation faible configurationnelle avec un champ test  $\delta \mathbf{V} = Q \mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_1$  étant le vecteur unitaire tangent à la surface de la fissure, et  $Q$  une fonction scalaire suffisamment régulière valant 1 en pointe de fissure et 0 sur le contour du domaine. Rappelons que l'intégrale  $J$  vectorielle se définit par :

$$\mathbf{J} = \int_{\Gamma \rightarrow 0} \underline{\underline{M}} \cdot \mathbf{n} \, dA \quad (5.19)$$

Les fonctions test  $\mathbf{q}_1$  et  $\mathbf{q}_2$  sont définies par :

$$\mathbf{q}_1 = \alpha \mathbf{E}_1, \mathbf{q}_2 = \alpha \mathbf{E}_2 \quad \text{et } \alpha \text{ est telle que } \alpha = 1 \text{ sur } \Gamma_s, \alpha = 0 \text{ sur } \Gamma_e \quad (5.20)$$

En fait, le champ  $\mathbf{q}_1$  est tangent à la surface de la fissure, et  $\mathbf{q}_2$  est normal à la fissure.

En appliquant le même raisonnement qu'en 3.6, mais en remplaçant la fonction test  $\mathbf{q}$  par les fonctions  $\mathbf{q}_1$  et  $\mathbf{q}_2$ , la  $k^{\text{ième}}$  composante ( $k = 1$  ou  $k = 2$ ) dans la base  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)$  (base locale de la fissure) de l'intégrale vectorielle  $\mathbf{J}$  de domaine est obtenue par la forme faible suivante :

$$J_k = \int_{\Gamma_{C^+} \cup \Gamma_{C^-}} \mathbf{q}_k \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \mathbf{n} \, dA - \int_{\mathcal{V}} \nabla_{\mathcal{V}} \mathbf{q}_k : \underline{\underline{M}} \, d\Omega \quad (5.21)$$

La fonction  $\alpha$  est, tout comme au paragraphe 3.6, une fonction plateau. Le terme sur les lèvres de la fissure qui apparaît dans l'équation (5.21) s'annule par construction dans le cas de l'intégrale  $J_1$  (qui correspond à l'intégrale  $J$ ). Cependant, pour le calcul de l'intégrale  $\mathbf{J}$  vectorielle, l'intégrale  $J_2$  doit également être évaluée, bien que dans ce cas le terme sur les lèvres ne s'annule pas. L'aspect primordial du calcul de l'intégrale  $\mathbf{J}$  vectorielle est la précision du calcul de ce terme. En mécanique linéaire de la rupture, cela revient à intégrer le saut d'énergie à travers les faces de la fissure :

$$J_k = \underbrace{\int_{\Gamma_C^+ \cup \Gamma_C^-} \mathbf{q}_k \cdot \llbracket W \rrbracket \cdot \mathbf{n} \, dA}_{J_k^B} - \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \nabla_{\mathcal{V}} \mathbf{q}_k : \underline{\underline{M}} \, d\Omega}_{J_k^V} \quad (5.22)$$

où  $J_k^V$  est le terme "de domaine" de cette expression, et  $J_k^B$  le terme "de frontière". Dans le cas général, le saut de l'énergie de déformation ne s'annule pas. En effet, Eftis *et al.* (1977) ont montré que pour un corps plan fissuré, la forme générale des champs de contrainte est :

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{11}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{11}^{II}(\theta) + \sigma_{x0} + O(r^{1/2}) \quad (5.23)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{22}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{22}^{II}(\theta) + O(r^{1/2}) \quad (5.24)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{12}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{12}^{II}(\theta) + O(r^{1/2}) \quad (5.25)$$

$$(5.26)$$

où  $\sigma_{x0}$  est un terme constant communément appelé *T-stress* (Rice, 1974). Eischen (1987) a montré que dans ce cas, le saut de l'énergie de déformation s'écrit :

$$\llbracket W \rrbracket(r)_{\text{Surface de la fissure}} = \frac{-4K_{II}\sigma_{x0}}{E^* \sqrt{2\pi} r} + O(r^{1/2}) \quad (5.27)$$

Ce saut sera nul uniquement en mode I ou pour  $\sigma_{x0} = 0$ . L'intégration de ce terme sera alors problématique à cause de son évolution en  $1/\sqrt{r}$ . Eischen a également montré que le calcul de ce terme était imprécis avec des éléments finis classiques (nécessité d'utiliser des éléments de Barsoum (Barsoum, 1974)). Pour l'intégration numérique de ce terme, deux approches sont possibles :

1. D'une part, l'utilisation d'une intégration de type Gauss de haut degré (degré 90 par la suite) avec un grand nombre de points de Gauss. Ce type d'intégration a un faible coût en 1D (fissuration d'un domaine 2D) ;
2. D'autre part, l'utilisation d'une procédure d'intégration spéciale avec un changement de variables singulier (Béchet *et al.*, 2005) qui intègre exactement les termes en  $1/\sqrt{r}$ . Ce type d'approche devient attractif dans le cas de fissures 2D (fissuration d'un domaine 3D).

Nous verrons par la suite que les imprécisions ne viennent pas de la précision de l'intégration de ce terme, mais plutôt de la qualité de la grandeur intégrée.

### Relation entre intégrale de domaine et forces configurationnelles nodales

Nous nous intéressons ici à la relation entre la force configurationnelle nodale apparaissant en pointe de fissure et l'intégrale  $\mathbf{J}$  vectorielle calculée par une intégrale de domaine. Rappelons tous d'abord l'expression de la  $k^{\text{ième}}$  composante de la force configurationnelle qui s'applique sur le nœud  $I$  de la pointe de fissure :

$$\mathcal{F}_k^{\text{nod}} = \bigcup_{e=1}^{N_{\text{el}}} \int_{\Omega_e} (\underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{N}^k) d\Omega \quad (5.28)$$

où  $N_{\text{el}}$  est le nombre d'éléments constituant le support  $\mathcal{V}_I$  du nœud  $I$  (voir la figure 5.5). Considérons à

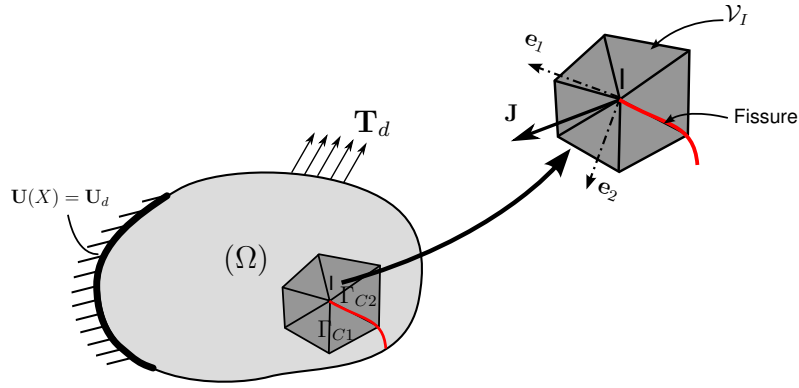


FIGURE 5.5: Force configurationnelle agissant sur le nœud  $I$ . Support de ce nœud.

présent l'expression de l'intégrale  $\mathbf{J}$  de domaine apparaissant en pointe de fissure (nœud  $I$ ), exprimée sur le support  $\mathcal{V}_I$  du nœud  $I$  (dans le cas où le terme sur les lèvres de la fissure n'est pas pris en compte) :

$$J_k^V = - \int_{\mathcal{V}_I} \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{q}_k : \underline{\underline{M}} d\Omega \quad (5.29)$$

le champ  $\mathbf{q}_k$  est interpolé à partir de la base éléments finis et des degrés de liberté  $\alpha_n$  :

$$\mathbf{q}_k = \sum_{n=1}^{N_{\text{nœuds}}} \alpha_n N^n \mathbf{e}_k \quad (5.30)$$

où  $N_{\text{nœuds}}$  est le nombre de nœuds dans le support  $\mathcal{V}_I$  du nœud  $I$ . On peut alors écrire :

$$J_k^V = - \sum_{n=1}^{N_{\text{nœuds}}} \alpha_n \int_{\mathcal{V}_I} \underline{\underline{\nabla}} (N^n \mathbf{e}_k) : \underline{\underline{M}} d\Omega \quad (5.31)$$

Le seul coefficient  $\alpha_n$  non nul est celui associé au nœud  $I$  qui vaut 1 ( $\alpha_I = 1$ ), d'où :

$$J_k^V = - \int_{\mathcal{V}_I} \underline{\underline{\nabla}} (N^I \mathbf{e}_k) : \underline{\underline{M}} d\Omega = - \bigcup_{e=1}^{N_{\text{elem}}} \int_{\Omega_e} \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{N}^k : \underline{\underline{M}} d\Omega \quad (5.32)$$

En examinant (5.28), on note que  $J_k^V = -\mathcal{F}_k^{\text{nod}}$ . Cela montre que la force configurationnelle nodale calculée au nœud  $I$  n'est pas correcte dans la mesure où le terme sur les lèvres de la fissure  $J_k^B$  est absent (voir



l'équation 5.22). Si seule la composante  $J_1$  est recherchée, alors la somme des forces configurationnelles des nœuds situés dans une zone proche de la pointe de fissure fournit le même résultat que le calcul de l'intégrale  $J$  avec une fonction plateau (Denzer *et al.*, 2003). Cependant, à cause du terme manquant  $J_2^B$ , les résultats selon  $J_2$  sont différents.

### Le cas tridimensionnel

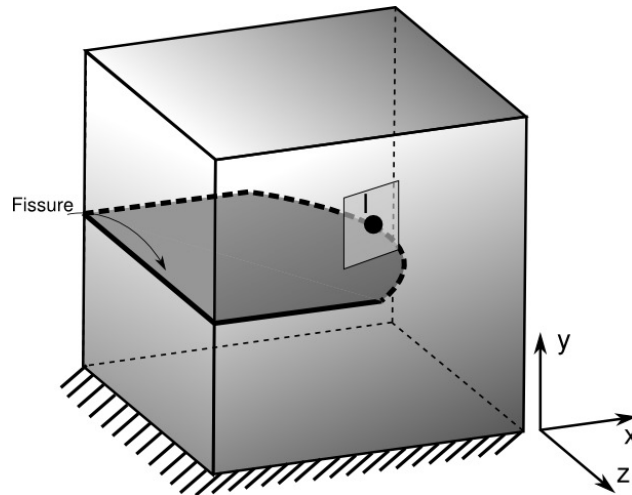


FIGURE 5.6: Domaine tridimensionnel fissuré, et plan normal à la fissure au point  $I$ .

Il a été montré qu'en 2D le calcul de l'intégrale  $\mathbf{J}$  par l'intermédiaire d'une intégrale de domaine était une adaptation de la méthode présentée en 3.6. Nous nous intéressons à présent au cas tridimensionnel présenté sur la figure 5.6. Pour cela, nous nous appuyons sur les travaux de Nikishkov et Atluri (1987) et Dolbow et Gosz (2002).

Dans le cas tridimensionnel, un taux de restitution d'énergie est défini en chaque point  $I$  du front de fissure. Ce taux de restitution d'énergie est en fait le taux de restitution d'énergie bidimensionnel de la fissure dans son plan normal en  $I$  (voir la figure 5.6). La procédure est alors identique au calcul de l'intégrale  $\mathbf{J}$  : l'intégrale

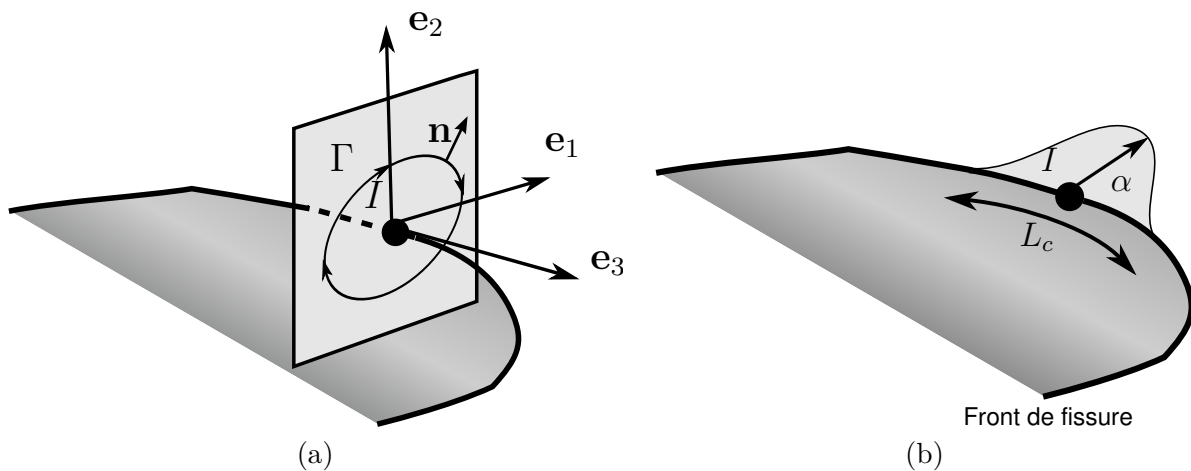


FIGURE 5.7: (a) Plan normal au front en  $I$ , et contour pour le calcul de l'intégrale  $\mathbf{J}$ ; (b) Définition de la fonction poids  $\alpha$ .

(5.19) est calculé en chaque point  $I$  du front sur un contour  $\Gamma$  défini dans le plan normal à la fissure en  $I$  (voir la figure 5.7 (a)). Il vient alors :

$$J_k = \mathbf{e}_k \int_{\Gamma \rightarrow 0} \underline{\underline{M}} \cdot \mathbf{n} \, dA \quad (5.33)$$

où  $(\mathbf{e}_k)_{k=1,2}$  est la direction d'extension virtuelle de la fissure. Les vecteurs  $\mathbf{e}_k$  sont définis sur la figure 5.7 : le vecteur  $\mathbf{e}_3$  est le vecteur tangent au front de la fissure en  $I$ , le vecteur  $\mathbf{e}_1$  est le vecteur tangent au plan de la fissure en  $I$ , et enfin  $\mathbf{e}_2$  est le vecteur normal au plan de la fissure en  $I$ . La fonction poids  $\alpha$  représentant la magnitude du champ d'extension virtuelle est ensuite introduite. Cette dernière a un support compact  $L_c$  centré sur le point  $I$ , et vaut 1 en ce point : un exemple de fonction  $\alpha$  est schématisé sur la figure 5.7 (b). Le champ d'extension virtuelle s'écrit alors  $\mathbf{q}_k = \alpha \mathbf{e}_k$  et la quantité  $\bar{\mathbf{J}}(s)$  est introduite :

$$\bar{\mathbf{J}}(s) = \int_{L_c} \alpha(s) \mathbf{J}(s) ds \quad (5.34)$$

**Remarque 5.5**  $\mathbf{J}(s)$  est l'intégrale  $\mathbf{J}$  ponctuelle au point  $I$ , et  $\bar{\mathbf{J}}(s)$  l'intégrale  $\mathbf{J}$  totale sur le segment  $L_c$ .

L'intégrale  $\bar{\mathbf{J}}$  est maintenant réécrite sous forme d'une intégrale de surface sur le tube  $S_\Gamma$  centré sur la fissure et de longueur  $L_c$  (voir la figure 5.8) :

$$\bar{J}_k = \int_{L_c} \alpha(s) \mathbf{e}_k \int_{\Gamma \rightarrow 0} \underline{\underline{M}} \cdot \mathbf{n} dA ds = \int_{S_\Gamma} \alpha_k(s) \underline{\underline{M}} \cdot \mathbf{n} dS \quad (5.35)$$

Définissons enfin l'intégrale  $\bar{\mathbf{J}}'$  qui s'écrit sur la surface fermée  $S_{\Gamma'} = S_\Gamma \cup S_{\Gamma_c^+} \cup S_{\Gamma_e} \cup S_{\Gamma_c^-} \cup S^+ \cup S^-$

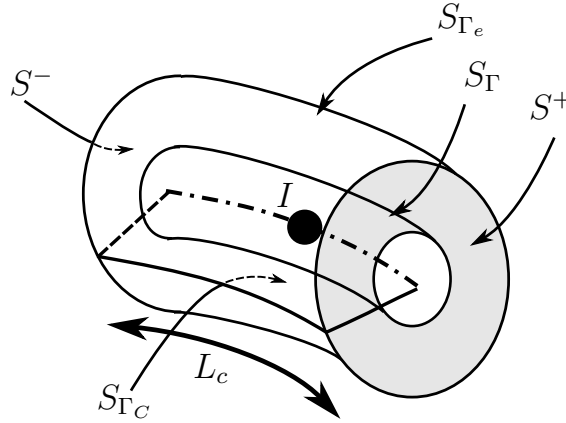


FIGURE 5.8: Définition des domaines pour le calcul de l'intégrale  $\mathbf{J}$  sous forme volumique.

(voir la figure 5.8).

$$\bar{J}'_k = \int_{S_{\Gamma'}} \mathbf{q}_k(s) \underline{\underline{M}} \cdot \mathbf{n} dS \quad (5.36)$$

où  $\mathbf{q}_k = \alpha_k$  sur  $S_\Gamma$  et  $\mathbf{q}_k = \mathbf{0}$  sur  $S^+ \cup S^- \cup S_{\Gamma_e}$ . La singularité ne se situant pas dans le domaine d'intégration, il est possible d'appliquer le théorème de la divergence afin d'obtenir une intégrale de volume. En tenant compte du fait que le tenseur d'Eshelby est à divergence nulle, il vient :

$$\bar{J}'_k = - \int_{V(s)} \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{q}_k(s) : \underline{\underline{M}} d\Omega \quad (5.37)$$

Comme en 2D,  $\bar{\mathbf{J}}'$  peut être reliée à  $\bar{\mathbf{J}}$  (avec les mêmes hypothèses qu'en 2D :  $\|\mathbf{q}_k\| = 1$  sur  $S_\Gamma$ ,  $\|\mathbf{q}_k\| = 0$  sur  $S_{\Gamma_e}$ ) :

$$\bar{J}_k = -\bar{J}'_k + \int_{S_{\Gamma_c}} \mathbf{q}_k \underline{\underline{M}} \cdot \mathbf{n} dS = -\bar{J}'_k + \int_{S_{\Gamma_c}} \mathbf{q}_k \llbracket W \rrbracket \mathbf{n} dS \quad (5.38)$$

Nous obtenons une intégrale de volume similaire à celle obtenue en 2D :

$$\bar{J}_k = - \int_{V(s)} \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{q}_k(s) : \underline{\underline{M}} d\Omega + \int_{S_{\Gamma_c}} \mathbf{q}_k \llbracket W \rrbracket \mathbf{n} dS \quad (5.39)$$

En supposant que l'intégrale  $\mathbf{J}$  est constante sur  $L_c$  (Nikishkov et Atluri, 1987; Gosz et al., 1998), on peut écrire :

$$\mathbf{J}(s) = \frac{\bar{\mathbf{J}}(s)}{\int_{L_c} \alpha ds} = \frac{\bar{\mathbf{J}}(s)}{\bar{\alpha}(s)} \quad (5.40)$$

Soit finalement :

$$J_k = \frac{-1}{\bar{\alpha}(s)} \int_{V(s)} \underline{\nabla} \mathbf{q}_k(s) : \underline{M} d\Omega + \frac{1}{\bar{\alpha}(s)} \int_{S_{\Gamma_C}} \mathbf{q}_k \llbracket W \rrbracket \mathbf{n} dS \quad (5.41)$$

Cette expression nous permet d'évaluer l'intégrale  $\mathbf{J}$  vectorielle le long de la fissure. Comme dans le cas bidimensionnel, un certain nombre de choix dans les paramètres de cette expression nous permettent de simplifier le calcul numérique :

- ▷  $S_{\Gamma}$  doit tendre vers la pointe de fissure ;
- ▷ Une fonction poids  $\mathbf{q}_k$  de norme égale à 1 dans le domaine  $V(s)$  et décroissant linéairement pour s'annuler sur la frontière de  $V(s)$  (fonction volumique "plateau") doit être privilégiée. Un exemple de fonction de ce type est présentée sur la figure 5.9.

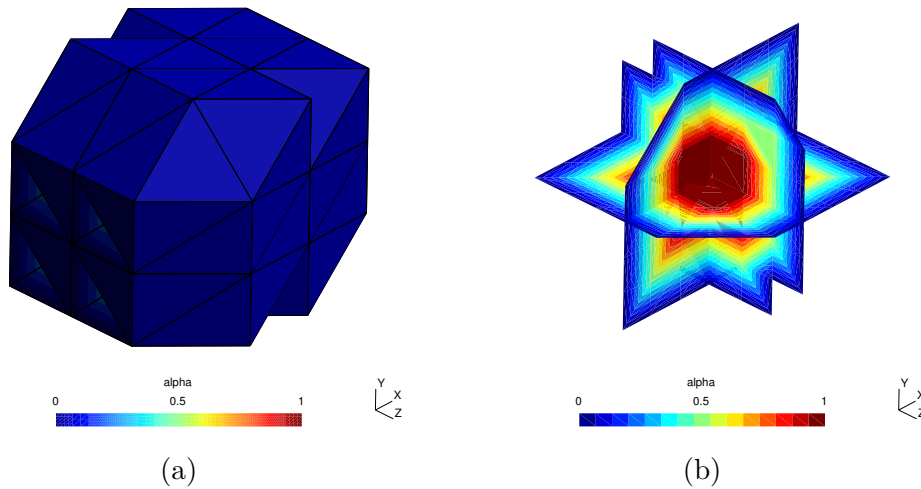


FIGURE 5.9: Fonction volumique "plateau". (a) La fonction est nulle sur la frontière du domaine  $S_{\Gamma}$ , (b) Coupes de la figure (a) selon  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$  : la fonction vaut 1 au point  $I$  (centre du domaine) et diminue linéairement sur la dernière couche d'éléments pour s'annuler sur la frontière de  $S_{\Gamma}$

## 5.4 Étude de la précision du calcul des forces configurationnelles

L'objectif de ce paragraphe est d'étudier la précision des calculs de forces configurationnelles avec les méthodes proposées ci-dessus. La méthode proposée par Glaser et Steinmann (2005) ne sera pas considérée car les résultats sont trop aléatoires (très forte dépendance à la position de la fissure par rapport au maillage) : cette constatation est également partagée par les auteurs (Glaser et Steinmann, 2006). Nous nous baserons sur une étude de convergence et le comportement des méthodes précédemment citées est étudié lors du raffinement du maillage. Dans un second temps, nous chercherons à améliorer la précision de ces approches.

### Étude de convergence

Considérons un domaine  $\Omega = [-1; 1] \times [-1; 1]$  soumis à des tractions, présenté sur la figure 5.10. Les tractions qui sont appliquées sur la frontière de  $\Omega$  correspondent à celles d'un corps infini fissuré soumis à un chargement mixte avec  $K_I = 1$  et  $K_{II} = 1$  (voir les équations (5.23-5.25)). Le module d'Young  $E$  est fixé à 1 MPa et le coefficient de Poisson  $\nu$  à 0,3. Les maillages considérés lors de cette étude sont structurés et construits de sorte que la fissure passe toujours à travers les éléments (voir la figure 5.10(a)). Deux stratégies d'enrichissement sont utilisées en pointe de fissure :

1. Pas d'enrichissement en pointe de fissure (enrichissement de type Heaviside seul),
2. Enrichissement géométrique de rayon de 0,1 en pointe de fissure (voir (Béchet *et al.*, 2005) ainsi que la remarque 3.9).

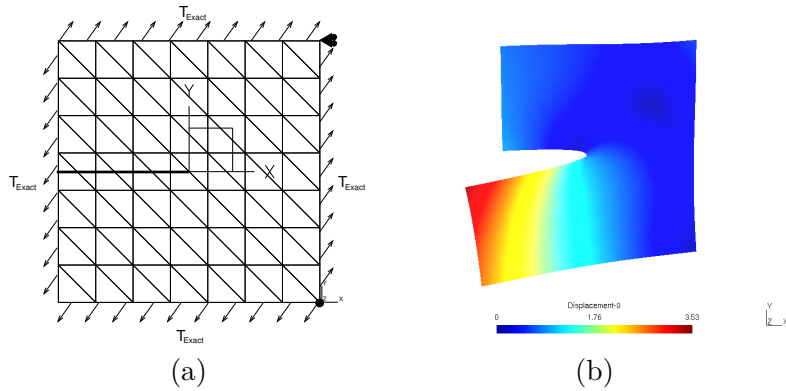


FIGURE 5.10: (a) Domaine d'intérêt ; (b) Déformée du problème pour  $K_I = 1,0$  et  $K_{II} = 1,0$ .

L'objectif de cet exemple est double : chercher à étudier la convergence de  $\mathbf{J}$  en pointe de fissure et montrer l'influence du terme intégré sur la fissure  $J_k^B$  sur le calcul des forces configurationnelles nodales (5.18) et de l'intégrale de domaine (5.22). Les expressions analytiques de  $J_1$  et  $J_2$  sont connues (Bui, 1978) :

$$J_1 = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E^*} \quad J_2 = -2 \frac{K_I K_{II}}{E^*} \quad (5.42)$$

avec  $E^* = \frac{E}{1 - \nu^2}$  en déformations planes et  $E^* = E$  en contraintes planes. Notons que dans la suite, l'étude de convergence des forces configurationnelles nodales est effectuée en éléments finis classiques, sans éléments de Barsoum.

### Convergence pour $\sigma_{x0} = 0$

Considérons tout d'abord le cas où le terme  $\sigma_{x0}$  est posé à zéro : aucun terme n'apparaît sur les lèvres de la fissure lors du calcul de  $\mathbf{J}$  et toutes les approches doivent donc converger vers la solution exacte. A titre d'exemple, la figure 5.11 représente la répartition des forces configurationnelles sur le maillage déformé : la force configurationnelle en pointe de fissure est beaucoup plus grande que les autres (elle est de plus directement opposée à  $\mathbf{J}$ ). Les résultats de l'étude de convergence sont présentés sur la figure 5.12.

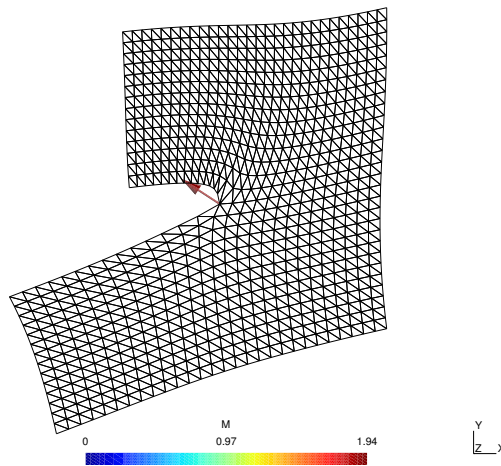
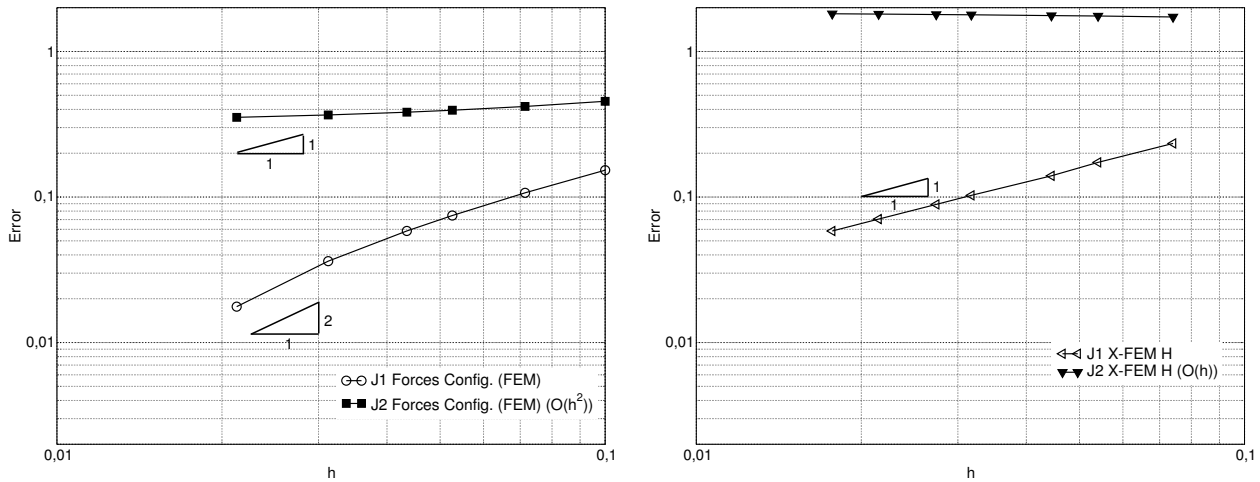


FIGURE 5.11: Forces configurationnelles nodales pour  $K_I = 1,0$ ,  $K_{II} = 1,0$  et  $\sigma_{x0} = 0$ .

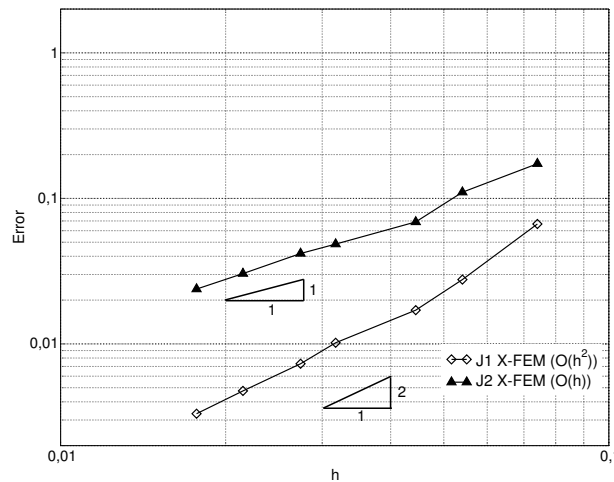
La composante  $J_1$  de l'intégrale  $\mathbf{J}$  de domaine converge comme prévu en  $O(h^2)$  pour l'enrichissement géométrique et en  $O(h)$  pour l'enrichissement de type Heaviside seul (Béchet *et al.*, 2005). Finalement, la force

configurationnelle projetée sur les faces de la fissure converge également en  $O(h)$ . La variation d'erreur initiale entre l'intégrale de domaine et les forces configurationnelles provient du fait que dans ce dernier cas, une approche éléments finis classique est utilisée. La composante  $J_2$  de l'intégrale  $\mathbf{J}$  de domaine converge approxi-



Forces configurationnelles nodales

X-FEM avec enrichissement Heaviside



X-FEM avec enrichissement en pointe de fissure

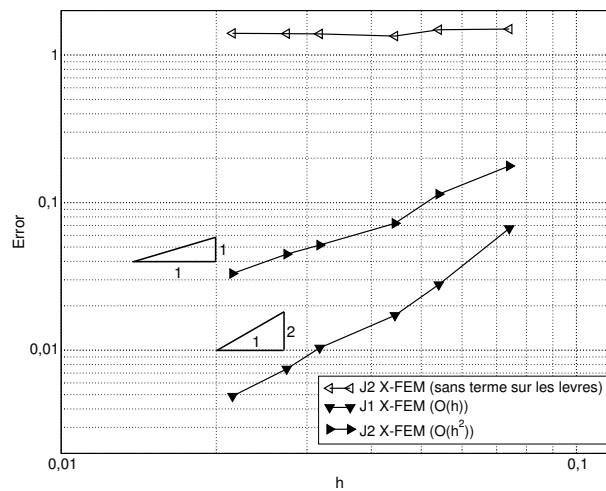
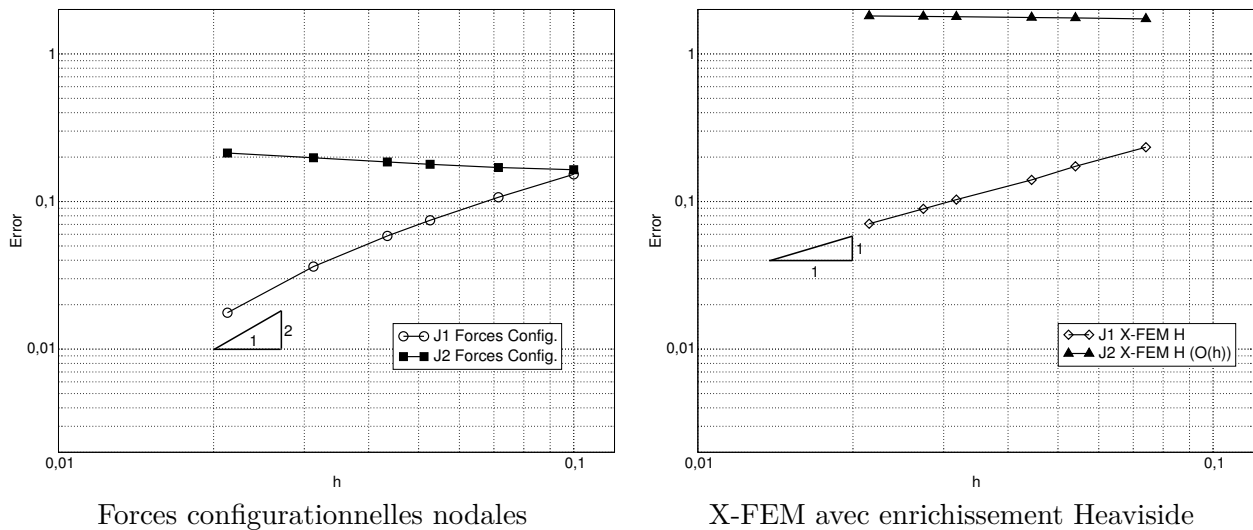
 FIGURE 5.12: Convergence pour  $K_I = 1$ ,  $K_{II} = 1$  et  $\sigma_{x0} = 0$ .

mativement en  $O(h)$  pour l'enrichissement géométrique et ne converge pas du tout pour l'enrichissement de type Heaviside seul. De plus, la force configurationnelle projetée perpendiculairement aux lèvres de la fissure converge très lentement. Ainsi, même lorsque le terme sur les lèvres est nul, l'enrichissement de type Heaviside seul n'est pas suffisant pour obtenir des résultats fiables. En réalité, suivant la topologie du maillage, il est possible d'obtenir une (faible) convergence avec l'intégrale de domaine et ce type d'enrichissement. Cependant, la mauvaise qualité du champ de contraintes en pointe de fissure ne permet pas d'évaluer précisément du terme  $J_2^B$  de l'intégrale de domaine. Au contraire, l'enrichissement géométrique converge vers la solution exacte. En ce qui concerne les forces configurationnelles nodales, elles convergent vers la solution exacte mais à un taux relativement faible. Cela s'explique par le fait que le domaine de l'intégrale  $J$  équivalente est très proche de la pointe de fissure, c'est-à-dire là où le champ de contraintes est le plus imprécis.

### Convergence pour $\sigma_{x0} \neq 0$

A présent, nous posons  $\sigma_{x0} = 2$  (le terme sur les lèvres n'est plus nul dans (5.22)), et procédons de façon identique au cas précédent. Les résultats de l'étude de convergence sont présentés sur la figure 5.13.

Comme prévu, les convergences de  $J_1$  et de la force matérielle en pointe de fissure projetée sur les faces de cette dernière ne sont pas affectées par le terme sur les lèvres de la fissure. En ce qui concerne  $J_2$ , les résultats obtenus avec X-FEM et l'enrichissement en pointe de fissure ne sont satisfaisants que si le terme sur les lèvres



X-FEM avec enrichissement en pointe de fissure

FIGURE 5.13: Convergence pour  $K_I = 1$ ,  $K_{II} = 1$  et  $\sigma_{x0} \neq 0$ .

est pris en compte. En optant pour un enrichissement de type Heaviside seul, les résultats ne convergent pas que l'on prenne en compte ou non le terme sur les lèvres.

**Remarque 5.6** Les résultats obtenus dans (Heintz, 2006) devraient être équivalents à ceux obtenus dans cette étude par la méthode X-FEM et l'enrichissement de type Heaviside seul : corrects lorsque la topologie du maillage s'y prête et mauvais dans le cas général. Malheureusement l'auteur a seulement vérifié si l'évolution de  $J_1$  était correcte dans un cas simple (mode I). $\diamond$

Finalement, la seconde composante de la force configurationnelle nodale en pointe de fissure ne converge pas non plus. Ce dernier résultat était prévisible, pour les raisons évoquées dans le section 5.3.

Nous venons donc de montrer que les résultats obtenus par le calcul des forces configurationnelles nodales ne sont pas fiables dans la mesure où le terme sur la fissure n'est pas pris en compte. Au contraire, les résultats obtenus à l'aide des intégrales de domaine convergent, pour peu que l'enrichissement en pointe de fissure soit utilisé. Malheureusement, le taux de convergence de  $J_2$  est inférieur à celui de  $J_1$ , et l'erreur commise sur  $J_2$  est à peu près dix fois plus grande que celle commise sur  $J_1$ . Enfin, la précision du calcul du terme  $J_2^B$  de l'intégrale de domaine dépend fortement de la qualité des champs en pointe de fissure, puisque les résultats ne convergent pas sans enrichissement en pointe de fissure. Dans le cas où cette qualité est mauvaise (cela pourrait arriver, même en enrichissant en pointe), alors de fortes erreurs peuvent être commises lors de l'évaluation de  $J_2$ .

## Amélioration de la précision de la méthode

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à l'amélioration de la méthode de calcul proposée plus haut (paragraphe 5.3). L'objectif est d'obtenir les mêmes taux de convergence pour les deux composantes de  $\mathbf{J}$ . Pour cela, les différentes sources d'imprécision du calcul doivent tout d'abord être quantifiées afin de proposer les modifications adaptées.

### Mise en évidence des sources d'imprécision

Comme le montre l'équation (5.22), l'intégrale  $\mathbf{J}$  peut s'écrire comme la somme d'un terme de domaine  $\mathbf{J}^V$  et d'un terme défini sur les lèvres de la fissure  $\mathbf{J}^B$ . Ce dernier conduit à l'intégration du saut d'énergie sur les lèvres de la fissure. Toutefois, l'énergie comporte aussi des termes en  $1/r$  qui s'annulent lors du calcul du saut. Si ceux-ci ne s'annulent pas numériquement, alors  $\mathbf{J}^B$  n'est pas intégrable. Le premier test proposé a un double objectif : d'une part quantifier les erreurs dans le calcul de  $\mathbf{J}$  et d'autre part étudier la présence éventuelle de termes parasites en  $1/r$  dans le saut d'énergie.

Considérons un maillage structuré du même type que celui présenté sur la figure 5.10, constitué de 882 triangles linéaires et entièrement enrichi par la base Eq.(2.72). Le champ de déplacement analytique correspondant à un mode  $I + II$  est ensuite projeté sur le champ de déplacement éléments finis par une projection  $L^2$ . L'intégrale  $\mathbf{J}$  est ensuite évaluée sur un domaine de 0,2 mm de rayon, le terme sur les lèvres de la fissure étant intégré avec 46 points de Gauss par élément. Les résultats sont présentés dans le tableau 5.1 et montrent que le calcul de  $J_1$  est plus précis que celui de  $J_2$  (0,01% d'erreur pour  $J_1$  contre 0,31% pour  $J_2$ ). Cependant la précision globale du calcul de  $\mathbf{J}$  est satisfaisante. Par ailleurs, la présence de termes en  $1/r$  dans l'intégration du terme

$J_1$ calculé	Erreur	$J_2^V$ calculé	$J_2^B$ calculé	$J_2$ calculé	Erreur
1,999757	0,01%	-3,389003	1,38271	-2,006292	0,31%

TABLE 5.1: Résultats du calcul de l'intégrale  $\mathbf{J}$  après projection  $L^2$  du champ de déplacement analytique du mode  $I+II$  sur le champ élément finis.

sur les lèvres de la fissure est recherchée en faisant varier le nombre de points de Gauss utilisés. En cas de présence de termes parasites, la valeur de  $J_2^B$  calculée devrait fortement se dégrader avec l'augmentation du nombre de points de Gauss. La figure 5.14 montre qu'il n'en est rien et qu'une convergence en  $O(n)$  est obtenue en fonction du nombre  $n$  de points de Gauss. Ces résultats montrent que le calcul de  $\mathbf{J}$  est précis lorsque le champ de déplacement éléments finis est de bonne qualité.

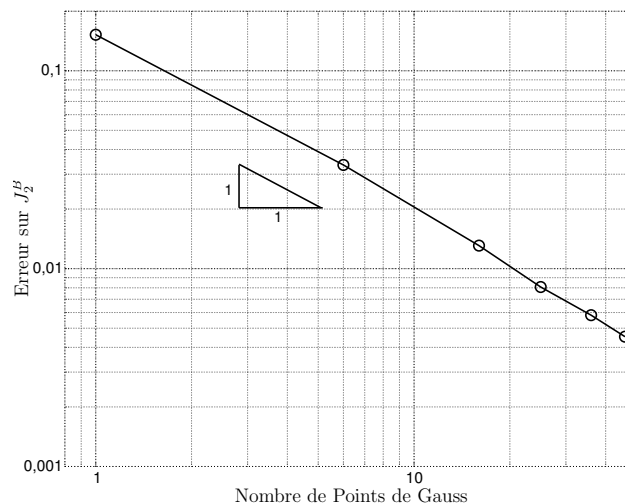


FIGURE 5.14: Convergence de  $J_2^B$  en fonction du nombre de points de Gauss lorsque la solution éléments finis est obtenue par projection  $L^2$ .



**Remarque 5.7** Des résultats identiques sont obtenus en utilisant un maillage non-structuré. ◊

La précision du calcul est maintenant étudiée dans le cas où le champ éléments finis provient d'un calcul classique. Pour cela, la contrainte exacte correspondant au champ de déplacement utilisé plus haut est appliquée sur le bord du maillage. Seuls les noeuds situés à moins de 0,4 mm de la pointe sont enrichis avec les quatre fonctions asymptotiques (Eq.2.72) et le vecteur  $\mathbf{J}$  est de nouveau calculé. Le tableau 5.2 montre que par rapport à la solution précédente, la précision de  $J_1$  s'est peu dégradée, contrairement à celle de  $J_2$ . De plus, ce tableau indique que cette dégradation du calcul de  $J_2$  provient principalement du terme sur les lèvres  $J_2^B$  (10,09% d'erreur). Finalement en étudiant la courbe de convergence de  $J_2^B$  en fonction du nombre de points de Gauss (figure 5.15), il est clair que  $J_2^B$  converge, mais vers une valeur erronée. Les imprécisions

$J_1$ calculé	Erreur	$J_2^V$ calculé	Erreur	$J_2^B$ calculé	Erreur	$J_2$ calculé	Erreur
1,970936	1,45%	-3,329226	1,76%	1,52225	10,09%	-1,806975	9,65%

TABLE 5.2: Résultats du calcul de l'intégrale  $\mathbf{J}$ .

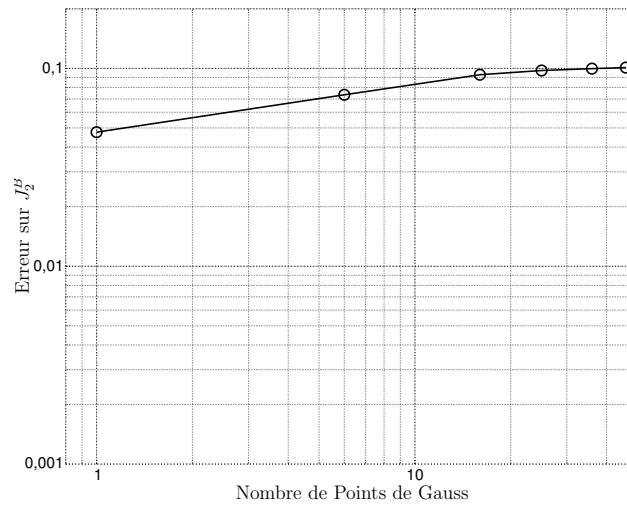


FIGURE 5.15: Convergence de  $J_2^B$  en fonction du nombre de points de Gauss.

du calcul de  $J_2^B$  proviennent donc d'un manque de qualité de la solution éléments finis en pointe de fissure. Dans le cas présent, le maillage est extrêmement grossier et ces imprécisions peuvent être réduites en raffinant le maillage. En revanche, si la position de la fissure par rapport au maillage conduit à une solution de très mauvaise qualité en pointe de fissure (et seulement en pointe), alors la valeur calculée pour  $J_2$  peut devenir peu précise, voire erronée. Une méthode permettant de rendre les calculs plus robustes s'avère nécessaire.

### Solutions pour rendre le calcul de $\mathbf{J}$ plus robuste

Nous venons de voir que d'importantes imprécisions pouvaient survenir lors de l'intégration du saut d'énergie sur les lèvres de la fissure. Une approche permettant de rendre les résultats plus robustes dans le cas où  $\mathbf{J}$  est intégrée sur un contour a déjà été proposée par Eischen (1987).

**Approche proposée par Eischen** L'auteur évalue  $J_2$  sous forme d'intégrale de contour :

$$J_2 = \mathbf{E}_2 \cdot \int_{\Gamma} \underline{\underline{M}} \cdot \mathbf{n} \, dA + \int_{\Gamma_C} \llbracket W \rrbracket \, dA \tag{5.43}$$

Au lieu d'intégrer le saut d'énergie à partir de la pointe, Eischen propose de calculer cette intégrale à partir d'une distance  $\delta$  de celle-ci. L'intégrale du saut d'énergie peut alors être décomposée comme suit :

$$\int_{\Gamma_C} \llbracket W \rrbracket \, dA = \int_{\delta}^d \llbracket W \rrbracket \, dA + \int_0^{\delta} \llbracket W \rrbracket \, dA \tag{5.44}$$

où  $d$  représente la longueur totale de la zone où l'intégrale est évaluée. Si les champs asymptotiques sont prépondérants entre la pointe et  $\delta$ , alors la deuxième intégrale peut être obtenue analytiquement et  $J_2$  peut être approchée par  $J_2^\delta$  qui s'écrit :

$$J_2 \simeq J_2^\delta = \mathbf{E}_2 \cdot \int_{\Gamma} \underline{\underline{M}} \cdot \mathbf{n} \, dA + \int_{\delta}^d \llbracket W \rrbracket \, dA + \frac{8 K_{II} \sigma_{x0} \delta^{1/2}}{E^* \sqrt{2\pi}} \quad (5.45)$$

Pour évaluer  $J_2$ , L'auteur procède alors en trois phases :

1. Calcul de  $J_1$  par l'équation (3.34) ;
2. Calcul de deux valeurs de  $J_2^\delta$  en posant  $\delta = \delta_1$  et  $\delta = \delta_2$  ;
3. Inversion du système afin d'obtenir  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $\sigma_{x0}$ .

Il est alors possible de calculer  $J_1$  et  $J_2$  sans intégrer le saut d'énergie jusqu'à la pointe de la fissure. Malheureusement, la précision de la méthode dépend du choix des distances  $\delta_1$  et  $\delta_2$ , et requiert le calcul des facteurs d'intensité de contrainte pour obtenir de nouveau  $\mathbf{J}$  ! Dans le cas X-FEM, l'utilisation d'intégrales d'interaction serait beaucoup plus précise et rapide. C'est pourquoi, nous tentons de procéder différemment.

**Première proposition** L'idée est de ne plus avoir à calculer le terme  $J_2^B$  : nous cherchons à transformer l'expression (5.22) en une intégrale de domaine. Pour cela, il suffit de d'évaluer le T-Stress  $\sigma_{x0}$  permettant de rendre  $J_2^B$  nul, puis de calculer  $\mathbf{J}^V$  en retranchant la contribution du T-Stress. En procédant ainsi, la valeur de  $\mathbf{J}$  reste inchangée puisque le champ de contrainte est modifié par un champ régulier ; en revanche, le terme sur les lèvres  $J_2^B$  devient nul.

L'énergie de déformation s'écrit en termes des composantes de  $\underline{\underline{\sigma}}$  :

$$W(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2E} (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - 2\nu\sigma_{xx}\sigma_{yy}) + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy}^2 \quad (5.46)$$

La condition de surface libre sur les lèvres de la fissure implique la nullité de  $\sigma_{xy}$  et  $\sigma_{yy}$  sur la fissure. A cet endroit, l'énergie s'écrit alors :

$$W^{\Gamma_C}(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2E} \sigma_{xx}^2 \quad (5.47)$$

La superposition d'un champ de contrainte constant  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = \tilde{\sigma} \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1$  modifie l'énergie en :

$$W^{\Gamma_C}(\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}) = \frac{1}{2E} (\sigma_{xx} + \tilde{\sigma})^2 \quad (5.48)$$

Finalement, le saut d'énergie sur les lèvres de la fissure s'écrit :

$$\llbracket W^{\Gamma_C}(\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}) \rrbracket = \llbracket W^{\Gamma_C}(\underline{\underline{\sigma}}) \rrbracket + \tilde{\sigma} \llbracket \sigma_{xx}/E \rrbracket \quad (5.49)$$

Cette relation est linéaire en  $\tilde{\sigma}$  ; son intégration sur les lèvres de la fissures le sera donc aussi, et on peut écrire :

$$\tilde{J}_2^B = J_2^B + \beta \tilde{\sigma} \quad (5.50)$$

$$\beta = \int_{\Gamma_C} \mathbf{q}_2 \llbracket \sigma_{xx}/E \rrbracket \mathbf{n} \, dS \quad (5.51)$$

Les intégrales  $J_2^B$  et  $\tilde{J}_2^B$  peuvent être obtenues en considérant une contrainte  $\tilde{\sigma}$  arbitraire ; il est alors possible d'évaluer  $\beta$  :

$$\beta = \frac{\tilde{J}_2^B - J_2^B}{\tilde{\sigma}} \quad (5.52)$$

Nous cherchons ensuite  $\hat{\sigma}$  tel que  $\hat{J}_2^B$  s'annule. Il vient alors :

$$\hat{\sigma} = -\frac{J_2^B}{\beta} \quad (5.53)$$

Ce terme correspond à une approximation de l'opposé du T-stress. Remarquons que contrairement à Eischen (1987), aucune hypothèse n'a été faite sur la forme du champ de contraintes. De plus, l'évaluation des facteurs d'intensité de contrainte n'est pas nécessaire. Par ailleurs, il est intéressant de noter qu'en pratique le terme  $J_2^B$  calculé après soustraction du T-stress est rigoureusement nul (de l'ordre de la précision machine). Par la suite, nous nous référerons à cette méthode sous l'appellation "Méthode 1".

**Remarque 5.8** Les résultats sont identiques si les intégrales dans (5.52) sont évaluées (comme pour Eischen (1987)) jusqu'à une distance  $\delta$  de la pointe de fissure.◊

**Deuxième proposition** Une deuxième méthode légèrement différente est proposée ici pour évaluer le terme  $\beta$  de l'expression (5.50). Pour cela, remarquons que la valeur de  $J_2$  doit être constante quelle que soit la valeur du T-stress considérée lors du calcul de l'intégrale de domaine :

$$J_2 = J_2^V + J_2^B = \tilde{J}_2^V + \tilde{J}_2^B = \text{cste} \quad (5.54)$$

où  $\tilde{J}_2^V$  et  $\tilde{J}_2^B$  correspondent au cas où un T-stress  $\tilde{\sigma}$  a été ajouté par l'expression (5.50), on en déduit :

$$\tilde{J}_2^V = J_2^V - \beta \tilde{\sigma} \quad (5.55)$$

De la même façon que pour la première méthode, la constante  $\beta$  peut être évaluée à partir du calcul de deux intégrales de domaine correspondant à deux valeurs de  $\tilde{\sigma}$ . Par la suite, nous nous référerons à cette méthode sous l'appellation "Méthode 2".

**Troisième proposition** Cette dernière proposition est fondée sur l'utilisation d'une intégrale d'interaction permettant d'évaluer le T-stress. Nous considérons pour cela deux états d'équilibre indépendants ( $A$ ) et ( $B$ ). Le premier correspond au champ de contrainte calculé par éléments finis, et le second à un champ de contrainte auxiliaire adapté. L'intégrale  $J$  appliquée à la superposition de ces deux champs s'écrit :

$$J^{A+B} = J^A + J^B + I^{A+B} \quad (5.56)$$

où  $J^A$  et  $J^B$  représentent les intégrales  $J$  calculées respectivement à partir des champs ( $A$ ) et ( $B$ ). Le terme  $I^{A+B}$  représente quant à lui l'intégrale d'interaction entre les champs ( $A$ ) et ( $B$ ) :

$$I^{A+B} = J^{A+B} - J^A - J^B \quad (5.57)$$

Cette intégrale d'interaction est indépendante du contour dans la mesure où  $J^A$ ,  $J^B$  et  $J^{A+B}$  le sont (Sladek et Sladek, 1997). De même, comme ces intégrales de contour peuvent être écrites sous forme d'intégrale de domaine,  $I^{A+B}$  aussi. L'expression de l'intégrale d'interaction est alors :

$$I^{A+B} = \int_A \left( \sigma_{ij}^A u_{i,1}^B + \sigma_{ij}^B u_{i,1}^A - \sigma_{ik}^A \varepsilon_{ik}^B \delta_{1j} \right) q_{,j} dS \quad (5.58)$$

où  $q$  est une fonction poids du même type que celle utilisée pour le calcul des intégrales de domaine. Détaillons maintenant le choix d'une fonction auxiliaire adaptée au calcul du T-stress. Cette fonction correspond à la solution mécanique d'une plaque semi-infinie homogène fissurée selon  $x_1$  et dont la pointe de fissure est chargée par une force  $f$  (voir la figure 5.16). Les champs de déplacement et de déformation de la solution de ce problème sont donnés par Michell (1900) (voir l'annexe B.1). Sladek et Sladek (1997) montrent alors la relation suivante :

$$I^{A+B} = \frac{T}{E^*} f \quad (5.59)$$

où  $E^* = E/(1 - \nu^2)$  en déformations planes et  $E^* = E$  en contraintes planes. Grâce à cette procédure, le T-stress peut être évalué en pointe de fissure. Il est ensuite possible de calculer l'intégrale  $J$  par intégrale de domaine en éliminant l'influence de ce terme. Par la suite, nous nous référerons à cette méthode sous l'appellation "Méthode 3".

**Étude de convergence** Ces différentes stratégies sont maintenant comparées par une étude de convergence. Le problème considéré est identique à celui du paragraphe 5.4 (chargement en mode mixte, mais  $\sigma_{x0} = 1$ ). Les résultats de cette étude sont présentés sur la figure 5.17 où les trois améliorations proposées ci-dessus sont considérées.

**Remarque 5.9** Sur les figures 5.17(a) et (b), la courbe intitulée "J2 (T-stress=1.0)" représente le cas où le T-stress est remplacé par sa valeur analytique (1).

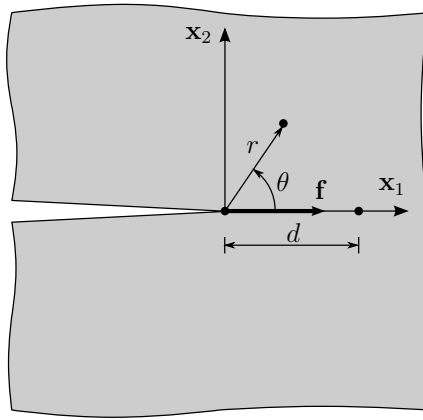
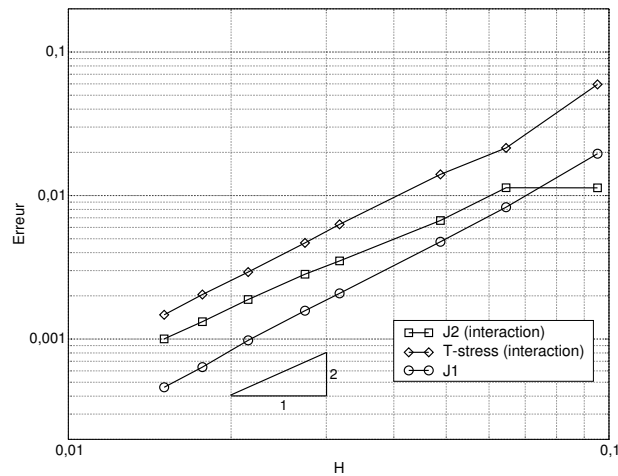
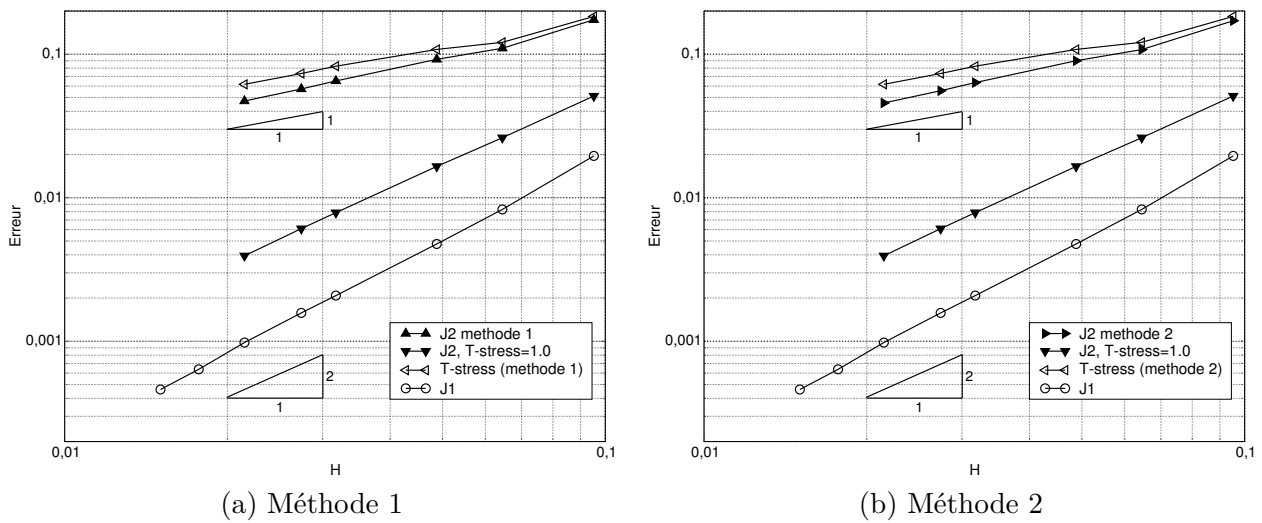


FIGURE 5.16: Force ponctuelle appliquée en pointe de fissure dans un corps semi-infini.



(c) Méthode 3 (T-stress calculé par intégrale d'interaction).

FIGURE 5.17: Étude de convergence, méthodes améliorées.

L'observation de ces courbes permet de conclure que :

- ▷  $J_1$  converge à un taux légèrement supérieur à  $O(h^2)$  ;
- ▷ Le T-stress évalué par la première méthode converge à un taux de  $O(h)$  ;
- ▷  $J_2$  calculé par la première méthode converge en  $O(h)$  : la précision n'est pas améliorée par rapport au

calcul tenant compte du terme sur la fissure (les deux courbes sont confondues) ;

- ▷ Le calcul de  $J_2$  par la seconde méthode n'améliore pas les résultats.

La perte de convergence est donc directement liée à la mauvaise convergence du T-stress. Cela provient du fait qu'une fois  $\beta$  calculé (et même s'il est précis), le T-stress est évalué à partir de  $J_2^B$  qui est entaché d'erreurs (erreurs en  $O(h)$ )

- ▷ Le T-stress évalué par une intégrale d'interaction converge à un taux de  $O(h^2)$  : la précision de cette méthode de calcul du T-stress est ainsi illustrée ;
- ▷ Enfin,  $J_2$  calculé à partir de la troisième méthode converge au taux optimal de  $O(h^2)$  : grâce à cette approche,  $J_1$  et  $J_2$  convergent au même taux et avec des niveaux d'erreur très proches. Notons que dans le problème que nous avons traité, le calcul de  $\mathbf{J}$  est précis même avec des maillages très grossiers.

Nous venons de montrer que sur ce benchmark des taux de convergence optimaux pouvaient être obtenus pour les deux composantes de  $\mathbf{J}$ , et cela sans intégrer le saut d'énergie sur la fissure. Il suffit pour cela de calculer le T-stress par l'intermédiaire d'une méthode d'intégrale d'interaction. Néanmoins, seul le cas où le T-stress est constant dans le domaine a été considéré ici. Une étude complémentaire serait nécessaire pour évaluer la pertinence de cette approche dans le cas général. Nous nous intéressons maintenant à l'influence des imprécisions du calcul de  $\mathbf{J}$  sur la trajectoire d'une fissure.

## 5.5 Calculs de propagation

L'objectif de l'exemple suivant est d'illustrer les différences pouvant apparaître entre les trajectoires de propagation en fonction de la méthode utilisée pour calculer la force configurationnelle en pointe de fissure. En effet, il est inutile de comparer les résultats numériques de propagation avec des résultats expérimentaux si le critère de propagation ne peut être calculé précisément.

### Interaction fissure-inclusion

Considérons le problème proposé par [Bouchard et al. \(2003\)](#) : une fissure se propage dans une plaque contenant une inclusion circulaire dont les dimensions et les propriétés des matériaux sont présentées sur la figure 5.18. Dans le cas où  $E_i < E_m$ , l'inclusion est dite *souple*. Au contraire, lorsque  $E_i > E_m$ , elle est dite

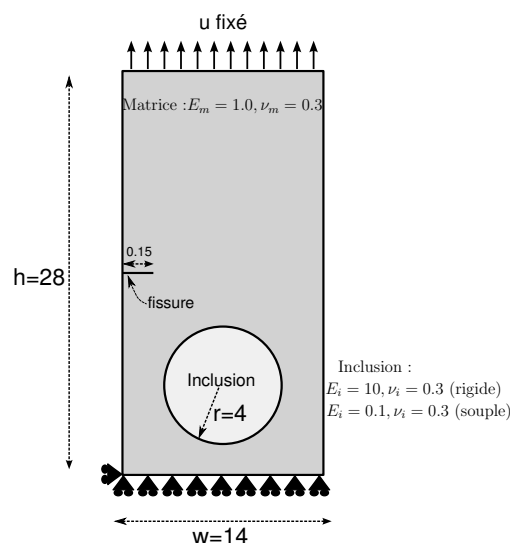


FIGURE 5.18: Géométrie du problème d'interaction fissure-inclusion

*rigide*. L'objectif est de mettre en évidence les interactions entre les propriétés de l'inclusion et le trajet de propagation de la fissure. Dans [Bouchard et al. \(2003\)](#), les auteurs ont simulé cette propagation en appliquant un critère de propagation fondé sur la maximisation du taux de restitution d'énergie. Le maillage utilisé ici pour la simulation est non-structuré et comporte 6300 degrés de liberté. L'approximation éléments finis est

enrichie géométriquement en pointe de rayon 0,2 et le domaine de calcul du vecteur  $\mathbf{J}$  est de rayon 0,2. La force configurationnelle en pointe de fissure est tout d'abord calculée par intégrale de domaine et intégration du terme  $J_2^B$  sur les lèvres de la fissure. Les trajectoires de la fissure, qui sont similaires à celles obtenues dans (Bouchard *et al.*, 2003) sont présentées sur la figure 5.19(a) dans le cas de l'inclusion souple et 5.19(b) dans le cas de l'inclusion rigide. Nous observons que la fissure est "attirée" par l'inclusion souple et "repoussée" par l'inclusion rigide.

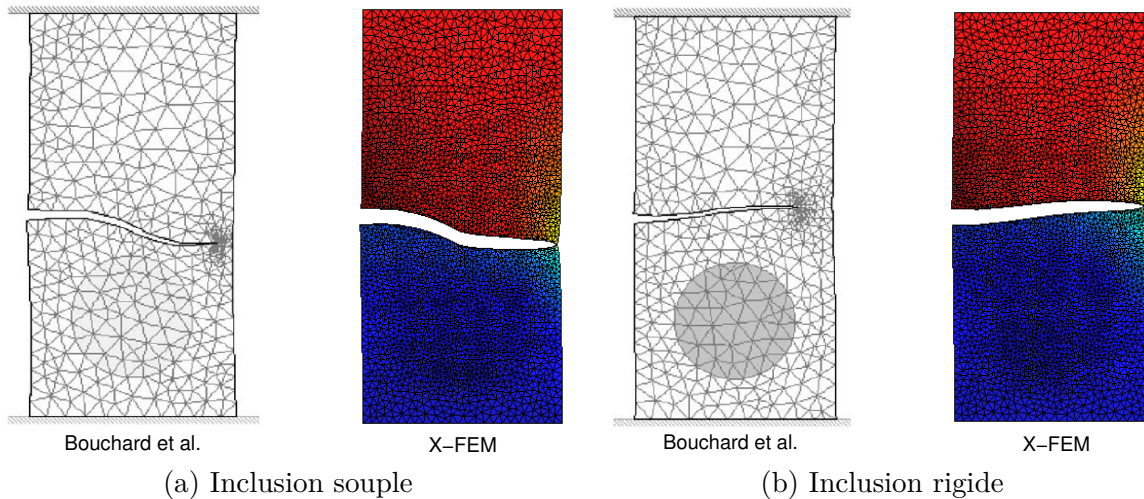


FIGURE 5.19: Problème d'interaction fissure-inclusion : comparaison qualitative avec les résultats de Bouchard *et al.* (2003). Le maillage est globalement plus fin dans le cas X-FEM, mais il n'est pas raffiné en pointe de fissure.

Considérons maintenant le même problème, mais en évaluant  $\mathbf{J}$  de trois manières différentes :

1. A partir d'une intégrale de domaine et en tenant compte de  $J_2^B$  ;
2. A partir de la troisième méthode proposée ci-dessus (soustraction du T-stress calculé par une intégrale d'interaction) ;
3. En calculant  $K_I$  et  $K_{II}$  par intégrales d'interaction, puis en évaluant  $J_1(K_I, K_{II})$  et  $J_2(K_I, K_{II})$ .

Seul le cas de l'inclusion souple est considéré et les trajectoires de la fissure sont comparées sur la figure 5.20. Nous observons ici des résultats identiques quelle que soit la méthode utilisée pour le calcul de  $\mathbf{J}$ .

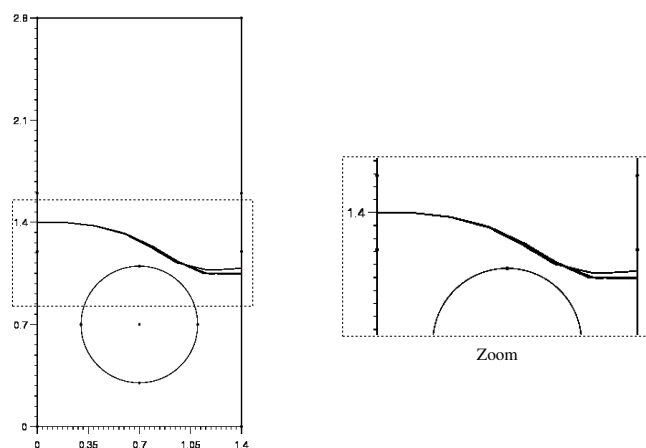


FIGURE 5.20: Comparaison des trajets de propagation pour les trois méthodes de calcul de  $\mathbf{J}$ .

Néanmoins, il est possible d'observer dans certains cas de figure un manque de robustesse lors du calcul du terme  $J_2^B$  : considérons pour cela le maillage présenté sur la figure 5.21(a). Le vecteur  $\mathbf{J}$  est évalué par la méthode initiale (calcul du terme  $J_2^B$ ) et par la méthode 3 (T-stress). Dans la zone grisée représentée sur la figure 5.21(b), il apparaît en début de propagation une différence de trajectoire entre les deux approches (visible par la différence entre les tangentes aux deux courbes). Cette différence provient d'un manque de précision lors du calcul de  $J_2^B$  et reste visible jusqu'à la fin de la propagation. En fait, il apparaît que ce

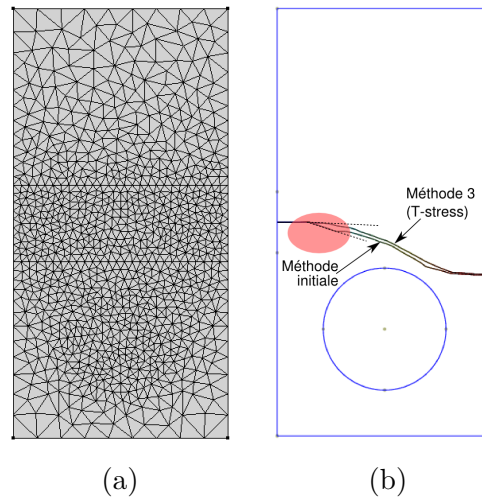


FIGURE 5.21: (a) Maillage utilisé pour la comparaison des deux méthodes d'évaluation de  $\mathbf{J}$ ; (b) Trajectoire obtenues.

manque de robustesse est effectivement lié à la qualité de la solution en pointe de fissure. En effet, si le champ de déplacement en pointe est enrichi seulement avec le premier terme du développement asymptotique du déplacement ( $\sqrt{r} \sin(\theta/2)$ ), alors la trajectoire de propagation devient aberrante, comme illustré sur la figure 5.22. Dans ce cas, la qualité du champ de contrainte est mauvaise, car le champ de déplacement

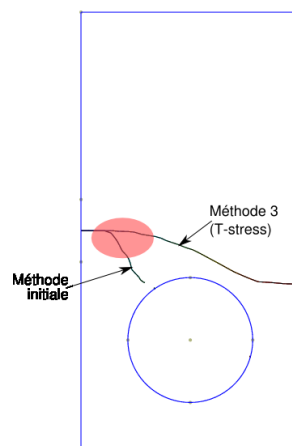


FIGURE 5.22: Trajectoire de la fissure obtenue en changeant le maillage pour deux méthodes de calcul de  $\mathbf{J}$  (un seul terme d'enrichissement en pointe).

est moins enrichi. La trajectoire obtenue par la méthode 3 (en soustrayant le T-stress) est identique au cas précédent, alors que la trajectoire obtenue en intégrant sur la surface de la fissure est totalement erronée.

Ainsi, en mécanique linéaire de la rupture, la méthode la plus robuste pour calculer le vecteur  $\mathbf{J}$  en pointe consiste à évaluer le T-stress par une intégrale d'interaction, puis de calculer  $\mathbf{J}$  par une intégrale de domaine.



## Fissure en pièce de monnaie

Dans ce dernier exemple, nous appliquons le critère de propagation au cas tridimensionnel par la méthode d'intégrale de domaine présentée au paragraphe 5.3. Considérons l'exemple présenté sur la figure 5.23(a). Celui-ci représente une fissure en forme de pièce de monnaie inclinée à  $45^\circ$  dans un cube en traction. La pointe de fissure est enrichie géométriquement par les quatre fonctions de la base (2.72) dans un rayon de 0,1 autour du front, le rayon du domaine de calcul de  $\mathbf{J}$  est 0,1, et le maillage utilisé contient 69500 tétraèdres linéaires non-structurés. Notons que la méthode du T-stress n'a pas été utilisée dans cet exemple car son extension au cas tridimensionnel est délicate.

**Remarque 5.10** Dans cet exemple, une procédure d'intégration singulière est utilisée pour le calcul du terme  $J_2^B$ . ◊

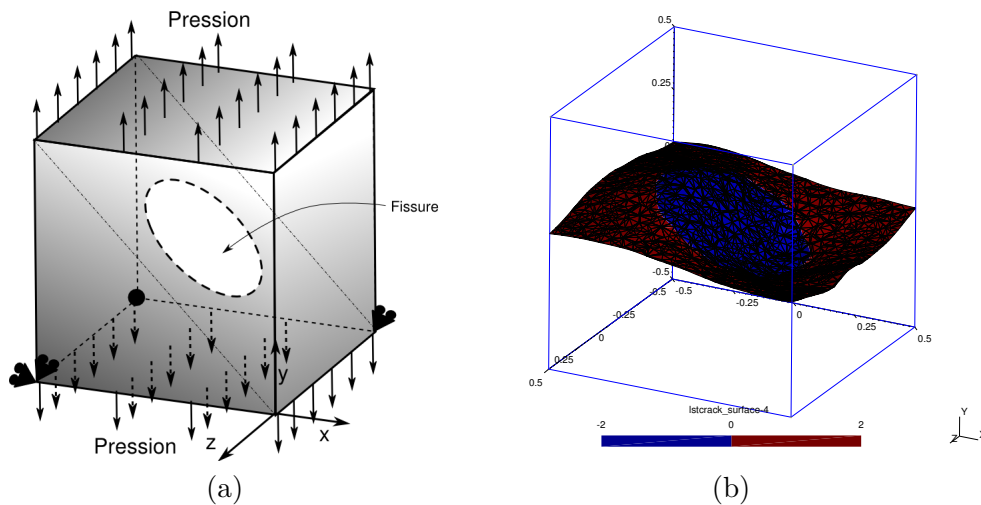


FIGURE 5.23: (a) Fissure en pièce de monnaie inclinée; (b) Trajectoire de la fissure.

Les résultats présentés sur la figure 5.23(b) sont cohérents avec ceux obtenus par Béchét *et al.* (2005) : la fissure se propage d'abord en direction des faces du cube. Ensuite, le front de fissure se transforme en quatre fronts indépendants aux quatre coins du cube jusqu'à le couper en deux.

## 5.6 Le cas des grandes transformations

### Introduction

Nous venons d'illustrer qu'en mécanique linéaire de la rupture, une mauvaise évaluation de la force configurationnelle en pointe de fissure pouvait avoir une forte influence sur la simulation de la trajectoire de propagation. Il a également été montré qu'une augmentation du nombre de fonctions d'enrichissement limitait ce phénomène. Une approche permettant de rendre plus robuste le calcul de  $\mathbf{J}$  a été proposée dans le cas linéaire. Malheureusement, celle-ci requiert l'évaluation du T-stress qui n'a plus de signification directe lors du passage en non linéaire. Nous utiliserons donc dans cette section la méthode présentée au paragraphe 5.3. Par ailleurs, contrairement au cas linéaire où il est possible d'améliorer la qualité du champ de contrainte par l'utilisation de la base (2.72) en entier, nous ne disposons ici que d'un faible nombre de fonctions d'enrichissement. Il s'est donc avéré relativement fréquemment que la qualité de la solution éléments finis en pointe de fissure était insuffisante. Le fait que ce critère de branchement ne puisse être appliqué de façon fiable ne remet cependant pas en cause la robustesse de la méthode X-FEM en grandes transformations. C'est pourquoi nous présentons tout de même dans la suite quelques exemples *qualitatifs* illustrant les possibilités de la méthode dans ce cas de figure.

## Propagations bidimensionnelles

### Interaction fissure-inclusion (contraintes planes)

Le problème considéré est celui de la plaque contenant une inclusion matérielle, mais cette fois-ci en grandes transformations. Le matériau est ici néo-hookéen incompressible sous l'hypothèse des contraintes planes. Le module de cisaillement  $\mu$  a pour valeur 0,33333 Mpa pour la matrice, 0,033333 Mpa pour l'inclusion souple et 3,333 Mpa pour l'inclusion rigide. Un déplacement vertical de 2 mm est appliqué sur la face supérieure de la plaque (élongation finale de 171%), et nous nous intéressons à la propagation en fatigue de la fissure. L'approximation éléments finis est enrichie en pointe de fissure en utilisant les solutions asymptotiques présentées dans le paragraphe 3, dans un rayon de 0,1 mm autour de la pointe. Enfin, le maillage utilisé pour le calcul est composé de 4614 éléments linéaires (voir la figure 5.24(a)).

La configuration déformée pour deux pas de propagation est présentée sur les figures 5.24(b) et (c). Tout comme dans le cas linéaire l'inclusion rigide repousse la fissure et l'inclusion souple l'attire.

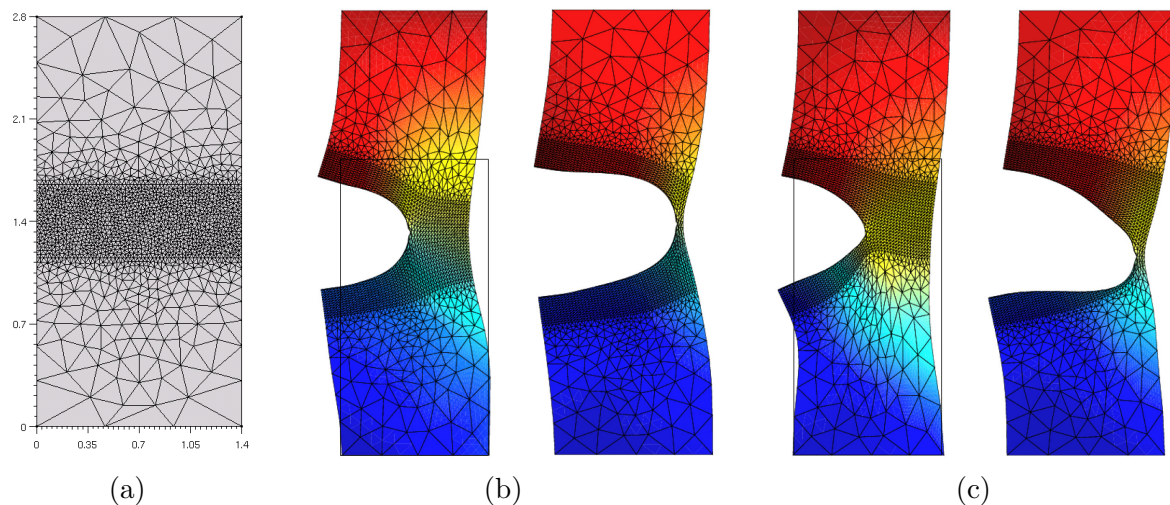


FIGURE 5.24: Propagation de la fissure (contraintes planes, élongation = 171%) : (a) maillage utilisé ; (b) trajet de propagation dans le cas d'une inclusion rigide ; (c) trajet de propagation dans le cas d'une inclusion souple.

## Propagations tridimensionnelles

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la mise en oeuvre du critère de branchement dans le cas tridimensionnel non linéaire. Nous utilisons une version parallélisée du code de calcul `xfem` initiée dans la thèse de Mathieu Cloirec (Cloirec, 2005). La méthode de parallélisation est très simple dans la mesure où il s'agit d'une décomposition de domaine primale : la continuité du champ de déplacement est imposée "en dur" entre chaque sous-domaine. De plus, la bibliothèque scientifique PETSC (Balay et al., 2001) est utilisée pour la gestion des vecteurs et matrices parallèles, ainsi que les opérations de "scatter-gather"<sup>2</sup> et les solveurs linéaires. Les routines de gestion des levelsets sont modifiées afin de permettre leur propagation en parallèle. Cette implémentation est encore limitée car même s'il est possible de simuler des problèmes de fissuration de géométrie quelconque, le code ne permet pas actuellement d'imposer une vitesse de propagation variable sur le front de la fissure. Ce paragraphe est donc restreint à des problèmes bidimensionnels extrudés selon la direction  $e_3$ .

### Interaction fissure-inclusion en 3D

Le problème, présenté sur la figure 5.25(a) est équivalent à celui présenté en 2D, mais extrudé selon  $e_3$ . Les cas compressible et incompressible sont considérés. Dans le cas compressible, les paramètres matériaux

2. L'opération de scatter consiste à répartir les composantes du vecteur parallèle global vers les vecteurs séquentiels locaux à chaque sous-domaine. L'opération de gather consiste à faire l'inverse (des vecteurs locaux vers le vecteur parallèle)

sont choisis tels que  $\lambda = 5,76$  MPa et  $\mu = 3,84$  MPa pour la matrice (dix fois plus ou dix fois moins pour l'inclusion). Dans le cas incompressible, le module de cisaillement est fixé à  $\mu = 0,4225$  MPa pour la matrice (dix fois plus ou dix fois moins pour l'inclusion).

La propagation de la fissure est alors simulée :

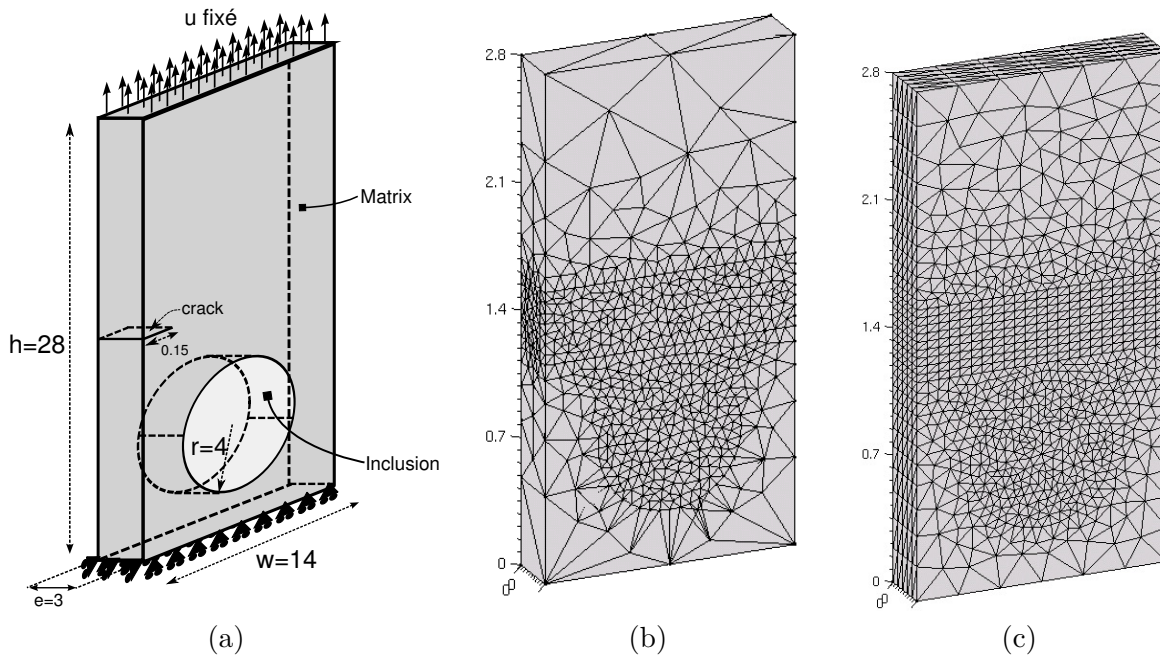


FIGURE 5.25: (a) Problème d'interaction fissure-inclusion en 3D ; (b) Maillage (non extrudé) utilisé pour le calcul compressible ; (c) Maillage utilisé pour le calcul incompressible.

- ▷ Dans le cas compressible : un déplacement vertical de 20 mm est appliqué en 20 pas sur la face supérieure du domaine. Le calcul est effectué en parallèle sur 16 sous-domaines, et le maillage de tétraèdres linéaires est présenté sur la figure 5.25(b).  
La trajectoire de la fissure est présentée sur la figure 5.26, en haut pour l'inclusion rigide et en bas pour l'inclusion souple. Le comportement est identique au cas bidimensionnel, c'est-à-dire une attraction de la fissure par l'inclusion souple et une répulsion dans le cas d'une inclusion rigide.
- ▷ Dans le cas incompressible : un déplacement vertical de 5 mm est appliqué en 5 pas sur la face supérieure du domaine. Le calcul est effectué en *séquentiel*<sup>3</sup> et le maillage de tétraèdres Mini est présenté sur la figure 5.25(c).  
La trajectoire de la fissure au cours de la propagation est présentée sur la figure 5.27 à gauche pour l'inclusion rigide et à droite pour l'inclusion souple. Les résultats montrent les mêmes tendances que dans le cas compressible.

3. Un problème informatique empêchant de lancer des calculs incompressibles en parallèle nous a conduit à effectuer ces calculs séquentiel, d'où la plus faible élévation permettant de limiter le temps de calcul.



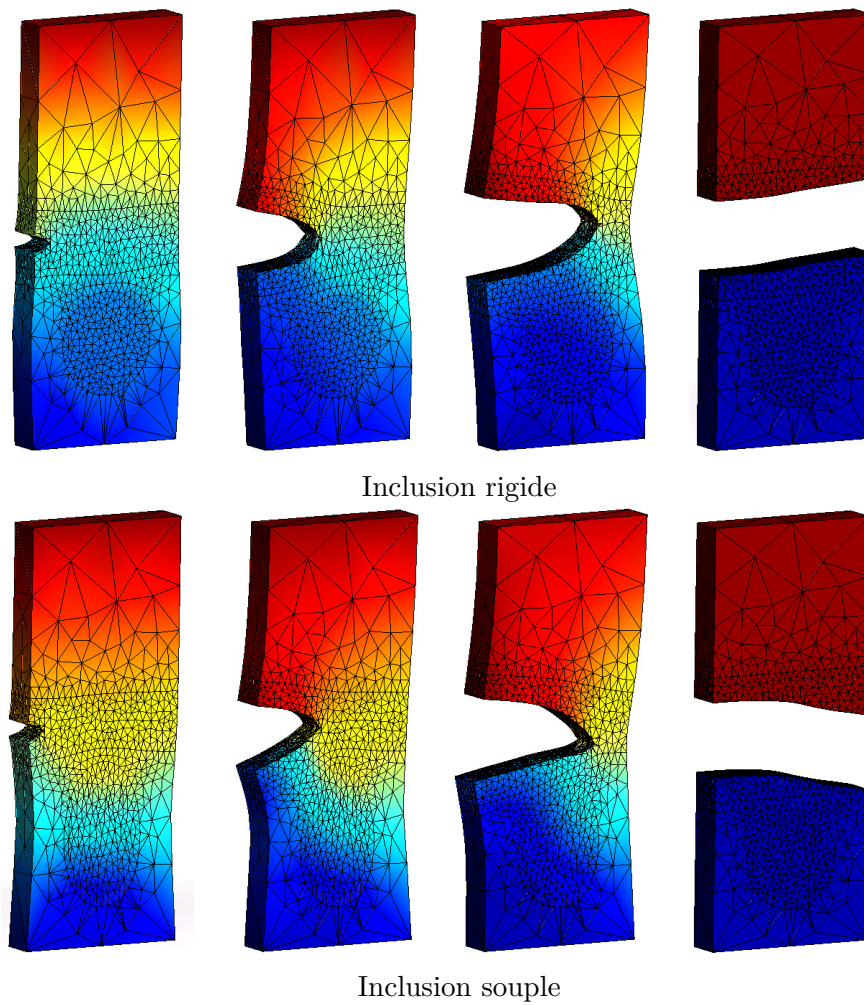


FIGURE 5.26: Séquence de propagation de la fissure dans la configuration déformée (cas compressible).

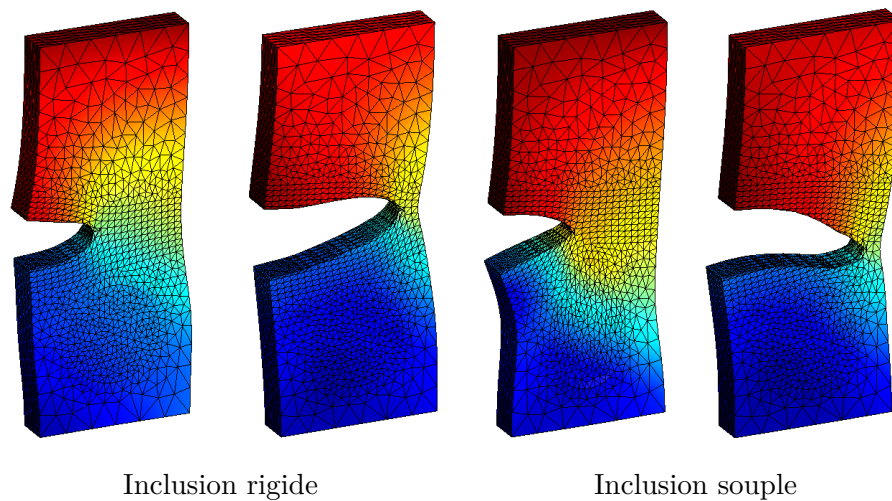


FIGURE 5.27: Séquence de propagation de la fissure dans la configuration déformée (cas incompressible).

## 5.7 Conclusion - perspectives

Au cours de ce chapitre, un critère de propagation de fissure fondé sur la mécanique configurationnelle a été proposé et implémenté. Tout d'abord, nous avons présenté brièvement un certain nombre de critères

de propagation classiquement utilisés en mécanique linéaire de la rupture, ainsi que la mécanique configurationnelle et les équations qui la régissent. La notion de force configurationnelle a été introduite, ainsi que la relation entre cette force et le tenseur des contraintes d'Eshelby. Cela nous a conduit à proposer un critère de propagation fondé sur cette notion, ce dernier ayant été initialement proposé par [Mueller et Maugin \(2002\)](#). Par la suite, nous avons exposé plusieurs stratégies permettant d'évaluer les forces configurationnelles en mécanique linéaire de la rupture. La première approche utilise une intégrale de domaine, mais requiert l'intégration d'un terme singulier sur les lèvres de la fissure. Les différentes validations ont démontré que cette méthode converge seulement lorsque le champ de déplacement est enrichi en pointe de fissure. Malheureusement, l'ordre de convergence est différent suivant les composantes du vecteur  $\mathbf{J}$ . Nous avons donc cherché à améliorer ce taux de convergence en proposant des méthodes permettant de ne pas évaluer le terme de  $\mathbf{J}$  sur les lèvres de la fissure. Celles-ci consistent en l'extraction du champ de contrainte uniforme (T-stress) responsable du terme  $J_2^B$  sur les lèvres de la fissure. Grâce à une opération de soustraction du T-stress au champ de contraintes calculé, il n'est plus nécessaire de calculer  $J_2^B$ . Il a été montré qu'en évaluant le T-stress par une intégrale d'interaction, un taux de convergence optimal peut être obtenu. Nous avons aussi mis en évidence que les forces configurationnelles nodales ne convergeaient pas, et n'étaient donc pas fiables comme critère de propagation.

Dans un second temps, un exemple de propagation illustrant l'influence de la précision du calcul de l'intégrale  $\mathbf{J}$  sur la propagation de la fissure a été présenté. Il a été montré que cette influence est catastrophique si le champ de contrainte est de mauvaise qualité. Dans le cas de la méthode X-FEM, l'utilisation des quatre fonctions d'enrichissement de la base (2.72) conduit à des champs de suffisamment bonne qualité pour que l'influence des imprécisions du calcul de  $J_2^B$  soit faible. Dans le cas où seul le terme singulier de cette base est considéré, alors la qualité des champs mécaniques n'est plus suffisante. Par contre, la méthode de calcul de  $\mathbf{J}$  fondée sur le T-stress n'est pas influencée par ces problèmes de qualité de la solution.

Enfin, nous nous sommes placés dans le cas non linéaire. Il a été mentionné que dans ce cas, les problèmes de qualité de la solution éléments finis deviennent problématiques. Il n'est malheureusement plus possible d'utiliser la méthode du T-stress en non linéaire car le terme provenant du saut d'énergie sur les faces de la fissure ne dépend plus explicitement de cette contrainte homogène. Aussi, seuls des calculs qualitatifs bi-dimensionnels et tridimensionnels ont donc été présentés. Ceux-ci mettent en évidence la robustesse de la méthode X-FEM en non linéaire, mais aussi la nécessité de rechercher à améliorer la qualité du calcul de la force configurationnelle en pointe de fissure.

Ainsi, la perspective principale de ce chapitre concerne la recherche de stratégies adaptées au cas non linéaire pour l'évaluation des forces configurationnelles. Pour cela, une compréhension plus fine des causes de l'apparition du terme  $J_2^B$  est nécessaire. Grâce à cette compréhension, peut-être serait-il possible de développer une stratégie de calcul permettant de se passer de l'évaluation de  $J_2^B$ . Pour les problèmes linéaires, il serait aussi intéressant d'étudier de quelle façon la méthode proposée pour l'évaluation des forces configurationnelles pourrait être étendue au cas tridimensionnel, ainsi que sa pertinence dans le cas d'un champ de T-stress non-uniforme.

# Conclusion générale

Dans cette étude, nous nous sommes intéressés au développement d'une méthode originale permettant la simulation numérique de la fissuration des matériaux hyperélastiques en grandes déformations. Après avoir présenté différentes méthodes numériques permettant de traiter la problématique de la fissuration, nous nous sommes dirigés vers l'utilisation de la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) en raison de sa capacité à traiter ce type de problème sans remaillage. Les spécificités de cette méthode ainsi que le comportement des matériaux considérés nous ont conduit à privilégier trois axes de recherche qui ont été développés tout au long de ce travail.

En premier lieu, nous avons traité de l'extension de la méthode X-FEM à la mécanique non linéaire de la rupture. En effet, peu de travaux s'étaient intéressés auparavant à cet aspect. Seul le comportement néo-hookéen incompressible sous l'hypothèse des contraintes planes a été considéré dans ce chapitre. L'étude a porté sur deux points principaux : tout d'abord, le choix d'une formulation pour la résolution du problème éléments finis. Dans le cas des éléments finis classiques, deux types de formulations peuvent être considérées en mécanique du solide : les formulations lagrangienne totale et lagrangienne réactualisée. Nous avons montré que la formulation lagrangienne réactualisée était difficile à mettre en œuvre à cause des fonctions d'enrichissement. Au contraire, ces enrichissements n'empêchent en rien l'utilisation d'une formulation lagrangienne totale.

Le deuxième point concerne le choix de fonctions d'enrichissement adaptées au cas non linéaire. Classiquement, celles-ci sont fondées sur le champ de déplacement asymptotique en pointe de fissure. Ces développements asymptotiques peuvent être obtenus pour la famille des matériaux néo-hookéens généralisés, mais aucun résultat n'est disponible pour les autres classes de matériaux hyperélastiques. Des calculs de mécanique non linéaire de la rupture ont permis de comparer les résultats obtenus avec la méthode X-FEM à des résultats analytiques. Ces derniers ont montré que la méthode permettait un calcul précis de l'intégrale  $J$  en grandes transformations, sans se conformer à la géométrie de la fissure (Legrain *et al.*, 2005).

Dans le chapitre suivant, nous nous sommes intéressés à l'application de la méthode X-FEM aux matériaux incompressibles. Dans un premier temps, seul le cas des petites perturbations a été traité, afin de profiter des nombreux travaux traitant du sujet. Après avoir présenté une sélection de méthodes classiquement utilisées pour ce type de problème, nous nous sommes orientés vers l'utilisation d'une formulation mixte à deux champs. Cette formulation n'est stable que si les espaces des déplacements et de la pression vérifient la condition dite du "inf-sup". Nous avons donc recherché des couples d'enrichissement (déplacement-pression) vérifiant cette condition. L'utilisation d'un test numérique du inf-sup a montré que certains couples d'enrichissement, bien que vérifiant la condition inf-sup, conduisent à des résultats dépendant de la topologie du maillage. Nous avons néanmoins proposé des couples d'enrichissement adaptés aux trous, aux interfaces matériaux et aux fissures permettant de traiter de façon stable et non-conforme des problèmes linéaires incompressibles (Legrain *et al.*, 2006, 2008).

Dans le cas des grandes transformations, il a été choisi d'utiliser le même type de formulation qu'en petites perturbations, afin de réutiliser les stratégies développées dans ce cas. Nous nous sommes alors orientés vers une formulation en Lagrangien avec décomposition volumique-déviatorique qui a été validée sur un ensemble de cas-tests.

Un critère de propagation devenait ensuite nécessaire afin de pouvoir simuler des problèmes de fatigue. Ainsi, un critère fondé sur la mécanique configurationnelle a été mis en œuvre. Contrairement à la plupart des critères proposés dans la littérature, celui-ci n'a pas été développé dans le cadre des métaux. Nous avons étudié sa mise en œuvre numérique dans le cadre de la méthode X-FEM et avons finalement opté pour une méthode fondée sur une intégrale de domaine corrigée par un terme sur les faces de la fissure. Il a alors été mis en évidence que ce terme correcteur était sensible à la qualité de la solution éléments finis. Nous avons donc proposé une approche fondée sur l'évaluation du T-Stress permettant de calculer de manière robuste le critère.

Dans le cas non linéaire, il est apparu que la stratégie de calcul précédente n'est plus applicable. De plus, la qualité de la solution éléments finis n'est plus suffisante pour une évaluation robuste du critère par la méthode de l'intégrale de domaine corrigée. Néanmoins des exemples qualitatifs bidimensionnels et tridimensionnels, illustrant l'utilisation de la méthode X-FEM pour la simulation de la ruine de structures hyperélastiques, sont présentés.

Les travaux développés dans cette étude soulèvent un certain nombre de questions sur chacun des aspects précédents. A court terme, il sera nécessaire de rechercher, pour le cas non linéaire, une méthode robuste permettant le calcul du critère de propagation présenté dans le Chapitre 5. En effet, malgré l'illustration des possibilités offertes par la méthode X-FEM, il est encore impossible de tirer des conclusions autres que qualitatives sur les résultats obtenus. Une fois ce critère correctement calculé, il sera alors possible de traiter des cas industriels afin de se confronter à la réalité. Pour cela, il sera indispensable de développer une version parallèle du code de calcul pleinement fonctionnelle afin de pouvoir résoudre des problèmes les plus généraux possibles (tridimensionnels incompressibles). De même, il serait utile de proposer des fonctions d'enrichissement adaptées à des comportements hyperélastiques complexes. Dans ce cas une approche fondée sur une identification numérique serait peut-être suffisante.

A moyen terme, le couplage de la méthode avec une approche multi-échelle sera essentiel pour le traitement de cas industriels complexes. En effet, le maillage doit être suffisamment fin pour permettre une représentation correcte de la géométrie et être robuste vis-à-vis des distorsions du maillage. Ce type d'approche permettrait de raffiner le maillage en pointe de fissure, même dans le cas d'un maillage initialement grossier (Cloirec *et al.*, 2005; Guidault *et al.*, 2006).

Enfin, à long terme, l'utilisation de la mécanique de l'endommagement permettrait de simuler l'initiation de fissures dans des structures initialement vierges. Pour cela, il serait tout d'abord nécessaire de définir les grandeurs micromécaniques adaptées à la représentation de ce phénomène (Le-Cam, 2005; Mars et Fatemi, 2004). Ensuite, un couplage permettant une transition entre la mécanique de l'endommagement et la mécanique de la rupture permettrait de simuler la ruine d'une structure industrielle depuis son état sain et jusqu'à sa ruine (Areias et Belytschko, 2005; Perego *et al.*, 2006). Finalement, notons que les développements proposés dans cette thèse sont applicables au domaine de la biomécanique. En effet, le comportement des tissus



humains est classiquement modélisé par un modèle hyperélastique. Des premiers travaux ont déjà eu lieu afin de simuler les conséquences des actes chirurgicaux (Vigneron *et al.*, 2004).

## Solutions de référence en incompressible

### A.1 Solution analytique de l'exemple à interface courbe

La solution analytique du problème détaillé dans la section 4.2 est présentée ici. Considérons deux matériaux différents parfaitement liés l'un à l'autre (voir la figure 4.16). Le chargement est choisi tel que :

$$b_{1r}(r) = 3W_3 c^2 + 2W_2 c + W_1 \quad (\text{A.1})$$

$$b_{2r}(r) = 3V_3 c^2 + 2V_2 c + V_1 \quad (\text{A.2})$$

$$T_r = W_3 c^3 + W_2 c^2 + W_1 c + W_0 \quad (\text{A.3})$$

$$T_\theta = -2 \frac{\mu_1 \mu_2 a^2 b^2}{c} \left( -a^2 \mu_1 c^2 + a^2 \mu_2 c^2 - \mu_2 b^2 c^2 + a^2 b^2 \mu_1 \right) \quad (\text{A.4})$$

Sous ces conditions limites, le champ de contrainte s'écrit :

$$\sigma_{rr}^1 = - \left( W_3 r^3 + W_2 r^2 + W_1 r + W_0 \right) \quad (\text{A.5})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^1 = \sigma_{rr}^1 \quad (\text{A.6})$$

$$\sigma_{r\theta}^1 = \frac{-2\mu_1 \mu_2 c a^2 b^2}{(-a^2 \mu_1 c^2 + a^2 \mu_2 c^2 - \mu_2 b^2 c^2 + a^2 b^2 \mu_1) r^2} \quad (\text{A.7})$$

$$\sigma_{rr}^2 = - \left( V_3 r^3 + V_2 r^2 + V_1 r + V_0 \right) \quad (\text{A.8})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^2 = \sigma_{rr}^2 \quad (\text{A.9})$$

$$\sigma_{r\theta}^2 = \frac{-2\mu_1 \mu_2 c a^2 b^2}{(-a^2 \mu_1 c^2 + a^2 \mu_2 c^2 - \mu_2 b^2 c^2 + a^2 b^2 \mu_1) r^2} \quad (\text{A.10})$$

Les composantes du champ de déplacement sont :

$$u_{\theta}^1(r) = -\frac{cb^2\mu_2(r^2 - a^2)}{(-a^2\mu_1c^2 + a^2\mu_2c^2 - \mu_2b^2c^2 + a^2b^2\mu_1)r} \quad (\text{A.11})$$

$$u_r^1(r) = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$u_{\theta}^2(r) = -c\frac{-r^2a^2\mu_2 + r^2a^2\mu_1 + r^2\mu_2b^2 - a^2b^2\mu_1}{(-a^2\mu_1c^2 + a^2\mu_2c^2 - \mu_2b^2c^2 + a^2b^2\mu_1)r} \quad (\text{A.13})$$

$$u_r^2(r) = 0 \quad (\text{A.14})$$

Et la distribution de pression est :

$$p^1(r) = W_3r^3 + W_2r^2 + W_1r + W_0 \quad (\text{A.15})$$

$$p^2(r) = V_3r^3 + V_2r^2 + V_1r + V_0 \quad (\text{A.16})$$

Dans la section 4.2, les paramètres suivants ont été choisis :

$$\mu_1 = 1/3 \quad \mu_2 = 10/3$$

$$a = 0.4 \quad b = 1.0 \quad c = 2.0$$

$$W_3 = -10.0 \quad W_2 = 20.0 \quad W_1 = -5.0 \quad W_0 = -10.0$$

$$V_3 = 0.0 \quad V_2 = -10.0 \quad V_1 = 5.0 \quad V_0 = 0.0$$

## A.2 Solution analytique de l'exemple à interface droite

Le problème présenté sur la figure 4.22 est construit tel que l'interface entre les deux matériaux soit droite, et le chargement est choisi tel que :

$$b_{1x} = 6\mu_1 x \quad (\text{A.17})$$

$$b_{1y} = -6\mu_1 y - 2\mu_2 + 3y^2 \quad (\text{A.18})$$

$$b_{2x} = -24\mu_2 x \quad (\text{A.19})$$

$$b_{2y} = 24\mu_2 y - 2\mu_2 + 6y^2 \quad (\text{A.20})$$

$$T_{1x} = 6\mu_1 x \quad (\text{A.21})$$

$$T_{1y} = -6\mu_1 y - 2\mu_2 + 3y^2 \quad (\text{A.22})$$

$$T_{2x} = -24\mu_2 x \quad (\text{A.23})$$

$$T_{2y} = 24\mu_2 y - 2\mu_2 + 6y^2 \quad (\text{A.24})$$

Sous ces conditions limites, les composantes du champ de contrainte sont :

$$\underline{\underline{\sigma}}_1 = \begin{pmatrix} 2\mu_1 \left(-3y^2 - \frac{2\mu_2 y}{\mu_1}\right) - y^3 & \mu_1 \left(-\left(6y + \frac{2\mu_2}{\mu_1}\right)x + 2\right) \\ \mu_1 \left(-\left(6y + \frac{2\mu_2}{\mu_1}\right)x + 2\right) & 2\mu_1 \left(3y^2 + \frac{2\mu_2 y}{\mu_1}\right) - y^3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.25})$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_2 = \begin{pmatrix} 2\mu_2 (12y^2 - 2y) - 2y^3 & \mu_2 \left(-(-24y + 2)x + 2\frac{\mu_1}{\mu_2}\right) \\ \mu_2 \left(-(-24y + 2)x + 2\frac{\mu_1}{\mu_2}\right) & 2\mu_2 (-12y^2 + 2y) - 2y^3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

Celles du champ de déplacement sont :

$$u_{1x} = -\left(3y^2 + 2\frac{\mu_2}{\mu_1}y\right)x + 2y - 1 \quad (\text{A.27})$$

$$u_{1y} = y^3 + \frac{\mu_2}{\mu_1}y^2 - 1 \quad (\text{A.28})$$

$$u_{2x} = \left(12y^2 - 2y\right)x + 2\frac{\mu_1}{\mu_2}y - 1 \quad (\text{A.29})$$

$$u_{2y} = -4y^3 + y^2 - 1 \quad (\text{A.30})$$

Et l'évolution du champ de pression est :

$$p_1 = y^3 \tag{A.31}$$

$$p_2 = 2y^3 \tag{A.32}$$

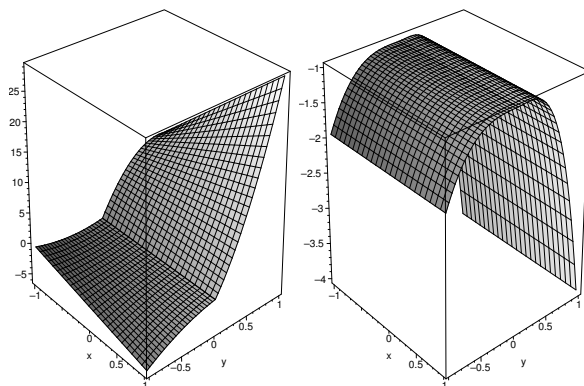


FIGURE A.1: Problème à deux matériaux avec une interface droite : déplacement (gauche :  $u_x$ , droite :  $u_y$ ).

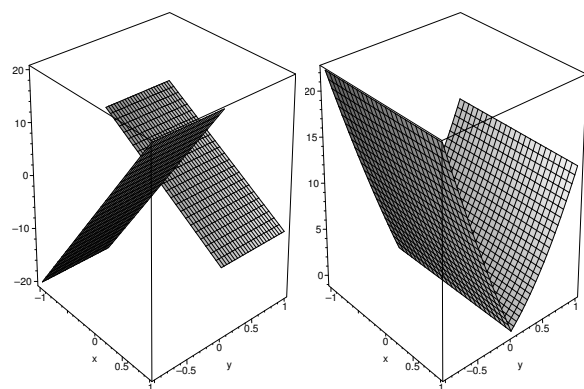


FIGURE A.2: Problème à deux matériaux avec une interface droite : forces de volume (gauche :  $b_x$ , droite :  $b_y$ ).

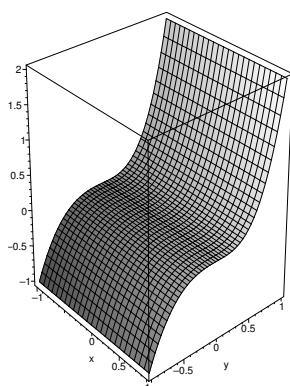


FIGURE A.3: Problème à deux matériaux avec une interface droite : champ de pression.

# Évaluation numérique du T-stress

## B.1 Champs auxiliaire pour l'extraction du T-stress

La solution du problème représentée sur la figure 5.16 a été proposée par [Michell \(1900\)](#) :  
Champ de déplacement :

$$u_1 = -\frac{F}{\pi E}(1-\nu^2) \ln \frac{r}{d} - \frac{F}{2\pi E}(1+\nu) \sin^2 \theta \quad (\text{B.1})$$

$$u_2 = -\frac{F}{2\pi E}(1+\nu)(1-2\nu)\theta + \frac{F}{2\pi E}(1+\nu) \sin(\theta) \cos(\theta) \quad (\text{B.2})$$

Champ de contrainte :

$$\sigma_{11} = -\frac{F}{\pi r} \cos^3 \theta \quad (\text{B.3})$$

$$\sigma_{22} = -\frac{F}{\pi r} \cos \theta \sin^2 \theta \quad (\text{B.4})$$

$$\sigma_{12} = -\frac{F}{\pi r} \cos^2 \theta \sin \theta \quad (\text{B.5})$$

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (\text{B.6})$$

## B.2 Validation de la méthode

La bonne implémentation du calcul du T-stress par intégrale d'interaction est vérifiée en considérant un problème dont on connaît la solution analytique ([Paulino et Kim, 2004](#)). Ce problème est représenté sur

la figure B.1 et représente une plaque fissurée en extension biaxiale dont la fissure est paramétrée par son inclinaison. Les dimensions de la fissure sont choisies telles qu'elle soit de taille très faible devant les dimensions

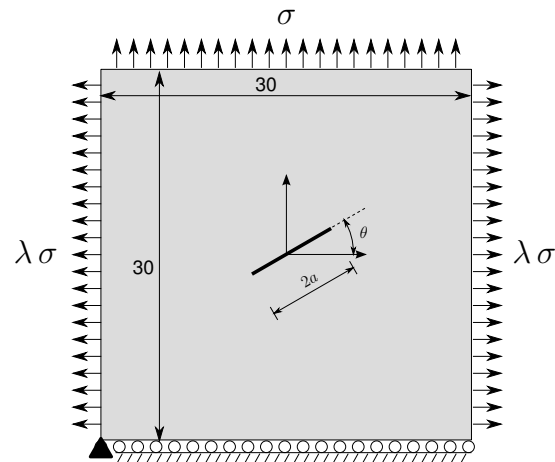


FIGURE B.1: Validation du calcul du T-stress.

de la structure ( $a = 0.3$ ). Il est ainsi possible de comparer les résultats à ceux obtenus pour un domaine infini. L'évolution du T-stress en fonction de la biaxialité  $\lambda$  du chargement et l'inclinaison de la fissure est donnée par la relation :

$$T = \sigma(\lambda - 1) \cos(2\theta) \quad (\text{B.7})$$

Lors du calcul, les pointes de fissure sont enrichies topologiquement, et le T-stress est calculé sur un domaine de rayon 0,1. L'inclinaison de la fissure varie par pas de  $15^\circ$ , et deux facteurs de biaxialité sont utilisés :  $\lambda = 0$  et  $\lambda = 0.5$ . Notons finalement que le maillage considéré pour ce calcul est très grossier (voir la figure B.2). Les résultats sont présentés sur la figure B.3, et ceux-ci sont de bonne qualité malgré un maillage grossier.

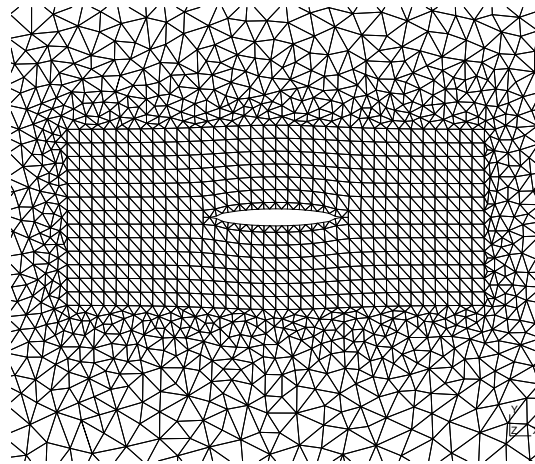


FIGURE B.2: Maillage utilisé pour le calcul éléments finis.

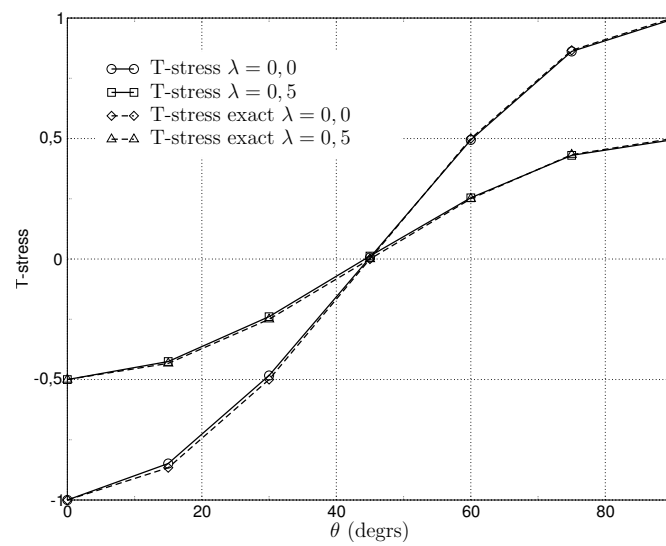


FIGURE B.3: Comparaison des valeurs du T-stress par intégrale d'interaction avec la solution analytique.



## Bibliographie

- P. M. A. AREIAS et T. BELYTSCHKO : Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63 (5):760–788, 2005. [16](#), [32](#), [98](#), [126](#)
- P.M.A. AREIAS et T. BELYTSCHKO : A comment on the article "a finite element method for simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics" by a. hansbo and p. hansbo [comput. methods appl. mech. engrg. 193 (2004) 3523-3540]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 (9-12):1275–1276, 2006. [22](#)
- D.N. ARNOLD, F. BREZZI et M. FORTIN : Stable finite element for stokes equations. *Calcolo*, 21:337–344, 1984. [60](#)
- S.N. ATLURI et E. REISSNER : On the formulation of variational theorems involving volume constraints. *Computational Mechanics*, 5:337–344, 1989. [84](#)
- M.M. ATTARD : Finite strain-isotropic hyperelasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 40:4353–4378, 2003. [8](#)
- F. AURICCHIO, L. Beirão da VEIGA, C. LOVADINA et A. REALI : Analysis of some mixed-enhanced finite element for plane linear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(27-29):2947–2968, 2004a. [88](#)
- F. AURICCHIO, L. Beirão da VEIGA, C. LOVADINA et A. REALI : A stability study of some mixed finite elements for large deformation elasticity problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(9-11):1075–1092, 2004b. [88](#)
- I. BABUSKA et J. Y. MELENK : The partition of unity finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(4):727–758, 1997. [13](#), [15](#)
- S. BALAY, K. BUSCHELMAN, W. D. GROPP, D. KAUSHIK, M. KNEPLEY, L. C. MCINNES, B. F. SMITH et H. ZHANG : Petsc home page. Rapport technique, 2001. URL <http://www.mcs.anl.gov/petsc>. [121](#)
- R.S. BARSOUM : Application of quadratic isoparametric elements in linear fracture mechanics. *International*

- Journal of Fracture*, 10:603–605, 1974. 104
- Klaus-Jürgen BATHE : *Finite Element Procedures*. Prentice All, 1996. 12, 59, 61, 65
- E. BÉCHET, H. MINNEBO, N. MOËS et B. BURGARDT : Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64(8):1033–1056, 2005. 16, 44, 78, 79, 96, 105, 109, 120
- T. BELYTSCHKO et L.P. BINDEMAN : Assumed strain stabilization of the 4-node quadrilateral with 1-point quadrature for nonlinear analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 88:311–340, 1991. 88
- T. BELYTSCHKO et T. BLACK : Elastic Crack Growth in Finite Elements with Minimal Remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(5):601–620, 1999. 16, 39
- T. BELYTSCHKO, Y. KRONGAUZ, D. ORGAN, M. FLEMING et P. KRYSL : Meshless methods : An overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:3–47, 1998. 23, 24
- T. BELYTSCHKO, N. MOËS, S. USUI et C. PARIMI : Arbitrary discontinuities in finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50:993–1013, 2001. 32
- C.M. BENDER et S.A. ORSZAG : *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. 1978. 40
- J. BONET et R. WOOD : *Non linear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press, 1997. ISBN 0-521-57272-X. B2. 3, 8, 9, 10
- P. O. BOUCHARD, F. BAY et Y. CHASTEL : Numerical modelling of crack propagation : automatic remeshing and comparison of different criteria. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(35-36):3887–3908, 2003. 97, 117, 118
- P. O. BOUCHARD, F. BAY, Y. CHASTEL et I. TOVENA : Crack propagation modelling using an advanced remeshing technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 189(35-36):723–742, 2000. 97
- F. BREZZI et M. FORTIN : *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer, New York, 1991. 58, 59, 88
- U. BRINK et E. STEIN : On some mixed finite element methods for incompressible and nearly incompressible finite elasticity. *computational mechanics*, 19:105–119, 1996. 8, 85, 87, 88
- E. BUDYN, G. ZI, N. MOËS et T. BELYTSCHKO : A method for multiple crack growth in brittle materials without remeshing. *International journal for numerical methods in engineering*, 61:1741–1770, 2004. 16
- H.D. BUI : *Mécanique de la rupture fragile*. Masson, 1978. 109
- P. CHADWICK : Applications of an energy-momentum tensor in non-linear elastostatics. *Journal of Elasticity*, 5(3-4):249–258, 1975. 99
- G. CHAGNON : *Modélisation de l'effet Mullins dans les élastomères*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes - Université de Nantes, 2003. 9
- J.H. CHANG et J.F. LI : Evaluation of asymptotic stress field around a crack tip for Neo-Hookean hyperelastic materials. *International Journal of Engineering Science*, 42:1675–1692, 2004. 40, 90
- T.Y.P. CHANG, A.F. SALEEB et G. LI : Large strain analysis of rubber-like materials based on a perturbed Lagrangian variational principle. *Computational Mechanics*, 8(8):221–233, 1991. 9, 85
- D. CHAPELLE et K.J. BATHE : The inf-sup test. *Computers & structures*, 47(4-5):537–545, 1993. 59, 70
- J.S. CHEN, W. HAN, C.T. WU et W. DUAN : On perturbed Lagrangian formulation for nearly incompressible and incompressible hyperelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 142:335–351, 1997. 86
- J. CHEMA et T. BELYTSCHKO : An extended finite element method for two-phase fluids. *Journal of Applied Mechanics*, 70(1):10–17, 2003. 16
- J. CHEMA et T. BELYTSCHKO : Arbitrary discontinuities in space-time finite elements by level sets and x-fem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61(15):2595–2614, 2004. 16
- J. CHEMA et T. BELYTSCHKO : A local space-time discontinuous finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:1325–1343, 2006. 16
- J. CHEMA, H. WANG et T. BELYTSCHKO : On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57:1015–1038, 2003. 67
- M. CLOIREC, N. MOËS, G. MARCKMANN et P. CARTRAUD : Two-scale analysis of cracks using the extended finite element method. In *8th International Conference on Computational Plasticity (COMPLAS VIII)*, 2005. 16, 126

- Mathieu CLOIREC : *Application de l'approche X-FEM aux calculs parallèles et problèmes multi-échelles*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 2005. 121
- M.A. CRISFIELD, G.F. MOITA, G. JELENIC et L.P.R. LYONS : Enhanced low-order element formulations for large strains. *Computational Mechanics*, 17(1-2):62–73, 1995. 88
- E. CUETO, M. BOBLARÉ et L. GRACIA : Imposing essential boundary conditions in the natural element method by means of density-scaled  $\alpha$ -shapes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49(4):519–546, 2000. 25
- Y. DAI et G.H. ZHENG : On fatigue crack growth under mixed mode cyclic loading. In *Fracture mechanics, Proc of 4th International Conference*, pages 659–676, 1987. 98
- C. DAUX, N. MOËS, J. DOLBOW, N. SUKUMAR et T. BELYTSCHKO : Arbitrary branched and intersecting cracks with the eXtended Finite Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48:1741–1760, 2000. 16, 67
- R. DENZER, F.J. BARTH et P. STEINMANN : Studies in elastic fracture mechanics based on the material force method. *international journal for numerical methods in engineering*, 58:1817–1835, 2003. 100, 103, 106
- Ph. DESTUYNDER, M. DJAOUA et S. LESCURE : Quelques remarques sur la mécanique de la rupture élastique. *Journal de mécanique théorique et appliquée*, 2(1):113–135, 1983. 37, 38
- J. DOLBOW, N. MOËS et T. BELYTSCHKO : Modeling fracture in Mindlin-Reissner plates with the eXtended finite element method. *Int. J. Solids Structures*, 37:7161–7183, 2000. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683\(00\)00194-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00194-3). 16, 97
- J. DOLBOW, N. MOËS et T. BELYTSCHKO : An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.*, 190:6825–6846, 2001. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(01\)00260-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00260-2). 16
- J.E. DOLBOW et A. DEVAN : Enrichment of Enhanced Assumed Strain Approximations for representing Strong Discontinuities : Addressing Volumetric Incompressibility and the Discontinuous Patch Test. *International journal for numerical methods in engineering*, 59:47–67, 2004. 16, 32, 67, 82
- J.E. DOLBOW et M. GOSZ : On the computation of mixed-mode stress intensity factors in functionally graded materials. *international journal of solids and structures*, 29:2557–2574, 2002. 37, 106
- J. DONEA : *Computational Methods for Transient Analysis*, chapitre Computational Methods for Transient Analysis, pages 473–516. North-Holland, 1983. 31
- Jean DONEA et Antonio HUERTA : *Finite Element Methods for Flow Problems*. 2003. 63
- W. EHLERS et G. HEIPPER : The simple tension problem at large volumetric strains computed from finite hyperelastic material laws. *Acta Mechanica*, 130:17–27, 1998. 9
- J.W. EISCHEN : An improved method for computing the J2 integral. *Engineering Fracture Mechanics*, 26(5):691–700, 1987. 104, 113, 114, 115
- J. ELFTIS, N. SUBRAMONIAN et H. LIEBOWITZ : Crack border stress and displacement equations revisited. *Engineering Fracture Mechanics*, 9:189–210, 1977. 104
- T. ELGUEJ, A. GRAVOUIL et A. COMBESCURE : Appropriate extended functions for X-FEM simulation of elastic-plastic crack growth with frictional contact. *Revue européenne de mécanique numérique*, Spécial Giens 2005:155–166, 2006a. 16
- T. ELGUEJ, A. GRAVOUIL et A. COMBESCURE : Appropriate extended functions for X-FEM simulation of plastic fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(7-8):501–515, 2006b. 16, 17
- Thomas ELGUEJ : *Simulation numérique de la propagation de fissures en fatigue par la méthode des éléments finis étendus : prise en compte de la plasticité et du contact-frottement*. Thèse de doctorat, INSA Lyon, 2006. 35
- M. EPSTEIN et G.A. MAUGIN : The energy-momentum tensor and material uniformity in finite-elasticity. *Acta Mechanica*, 83:127–133, 1990a. 100
- M. EPSTEIN et G.A. MAUGIN : Sur le tenseur de moment matériel d'Eshelby en élasticité non linéaire. *C.R. Acad. Sci. Paris*, II(310):675–678, 1990b. 100
- M. EPSTEIN et G.A. MAUGIN : Sur le tenseur de moment matériel d'Eshelby en élasticité non linéaire. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 310:675–678, 1990c. 100
- F. ERDOGAN et G.C. SIH : On the crack extension in plates under plane loading and transversal shear. *Journal of Basic Engineering*, 85:519–527, 1963. 97

- J.D. ESHELBY : The force on an elastic singularity. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 244:87–112, 1951. 99
- J.D. ESHELBY : The elastic energy-momentum tensor. *Journal of Elasticity*, 5(3-4):321–335, 1975. 98, 99
- M. FAGERSTRÖM et R. LARSSON : Theory and numerics for finite deformation fracture modelling using strong discontinuities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66(6):911–948, 2005. 101
- S. FERNÁNDEZ-MÉNDEZ et A. HUERTA : Imposing essential boundary conditions in mesh-free methods. 2004. 20
- M. FLEMING, Y.A. CHU, B. MORAN et T. BELYTSCHKO : Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997. 16, 24, 39
- C. FREISCHLÄGER et K. SCHWEIZERHOF : On a systematic development of trilinear 3D solid elements based on Simo's enhanced strain formulation. *International Journal of Solids and Structures*, 33(20-22):2993–3017, 1996. 66
- T.C. GASSER et G.A. HOLZAPFEL : 3d crack propagation in unreinforced concrete. : A two-step algorithm for tracking 3d crack paths. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(37-40):5198–5219, 2006. 33
- E.E. GDOUTOS : *Fracture mechanics criteria and applications*. Fracture mechanics criteria and applications, 1990. 98
- S. GENIAUT, P. MASSIN et N. MOËS : A stable 3D contact formulation using X-FEM. *Revue européenne de mécanique numérique*, 16(2):259 – 275, 2007. 16
- P.H. GEUBELLE et W.G. KNAUSS : Finite Strains at the Tip of a Crack in a Sheet of Hyperelastic Material : I. Homogeneous Case. *Journal of Elasticity*, 35:61–98, 1994a. 40
- P.H. GEUBELLE et W.G. KNAUSS : Finite Strains at the Tip of a Crack in a Sheet of Hyperelastic Material : II. Special Bimaterial Case. *Journal of Elasticity*, 35:99–137, 1994b. 40
- P.H. GEUBELLE et W.G. KNAUSS : Finite Strains at the Tip of a Crack in a Sheet of Hyperelastic Material : III. General Bimaterial case. *Journal of Elasticity*, 35:139–174, 1994c. 40
- J. GLASER et P. STEINMANN : X-FEM crack simulation based on the material force method. In *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik - Luxembourg*, 2005. 100, 103, 108
- J. GLASER et P. STEINMANN : On material forces within the extended finite element method. In *6th European Solid Mechanics Conference ESMC 2006, Budapest Hungary*, 2006. 103, 108
- R. GLOWINSKI et P. Le TALLEC : A numerical method in nonlinear incompressible elasticity. *Comptes rendus de l'académie des sciences, série B-Sciences physiques*, 290:23–26, 1980. 85, 87
- R. GLOWINSKI et P. Le TALLEC : Numerical solution of problems in incompressible finite elasticity by augmented lagrangian methods. I. Two-dimensional and axisymmetric problems. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 42:400–429, 1982a. 87
- R. GLOWINSKI et P. Le TALLEC : Numerical solution of problems in incompressible finite elasticity by augmented lagrangian methods. I. Two-dimensional and axisymmetric problems. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 44:710–733, 1982b. 87, 88
- J.C. GOEBEL et A.V. TOBOLSKY : Volume change accompanying rubber extension. *Rubber Chem Technol*, 44(5):1391–1394, 1971. 55
- M. GOSZ, J. DOLBOW et B. MORAN : Domain integral formulation for stress intensity factor computation along curved three-dimensional interface cracks. *International Journal of Solids and Structures*, 35(15): 1763–1783, 1998. 108
- A. GRAVOUIL, N. MOËS et T. BELYTSCHKO : Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets. Part II : level set update. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53:2569–2586, 2002. 16, 19, 20, 96
- H.W. GREENSMITH : Rupture of Rubber Part 10 : The changes in stored energy on making a small cut in a test piece held in simple extension. *J. Appl. Polym. Sci.*, 7:993–1002, 1963. 46
- A.A. GRIFFITH : The phenomena of rupture and flow in solids. *Transactions of Royal Society London*, 221, 1920. 35, 36
- D. GROSS, S. KOLLING, R. MUELLER et I. SCHMIDT : Configurational forces and their application in solid mechanics. *European journal of mechanics A/solids*, 22:669–692, 2003. 100, 103
- Yosra GUETARI : *Vers une meilleure compréhension de la coupe : aspects rhéologiques et simulation numérique par l'approche X-FEM*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 2005. 64
- P.A. GUIDAULT, O. ALLIX, L. CHAMPANEY et C. CORNUAULT : Une approche micro-macro pour le suivi de



- fissure avec enrichissement local. *Revue européenne de mécanique numérique*, Spécial Giens 2005:187–198, 2006. [16](#), [126](#)
- Pierre Alain GUIDAULT : *Une stratégie de calcul pour les piÃŒces fissurées : analyse locale globale et approche multiéchelle pour la fissuration*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2005. [16](#)
- Morton E. GURTIN : *Configurational Forces As Basic Concepts Of Continuum Physics*. Springer-Verlag, 1999. [100](#)
- B. HÄGGBLAD et J.A. SUNDBERG : Large strain solutions of rubber components. *Computers and Structures*, 17(5-6):835–843, 1983. [83](#)
- A. HANSBO et P. HANSBO : A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in elasticity. *preprint Chamler*, 09, 2003. [20](#), [21](#), [103](#)
- P. HEINTZ : On the numerical modelling of quasi-static crack growth in linear elastic fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(2):174–189, 2006. [22](#), [100](#), [102](#), [103](#), [111](#)
- T.K. HELLEN et W.S. BLACKBURN : The calculation of stress intensity factors for combined tensile and shear loading. *International Journal of Fracture*, 11:605–617, 1975. [98](#)
- L.R. HERRMANN : Elasticity equations for incompressible and nearly incompressible materials by a variational theorem. *AAIA Journal*, 3(10):1896–1900, 1986. [58](#), [84](#)
- T. HETTICH et E. RAMM : Interface material failure modeled by the extended finite-element method and level sets. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, n/a:n/a, 2006. [16](#)
- HKS : *Abaqus/Standard user manual*. [42](#)
- N. AÏT HOCINE : *Approche globale de la mécanique de la rupture appliquée aux Élastomères*. Thèse de doctorat, U.S.T.L., 1996. [36](#)
- G.A. HOLZAPFEL : *Nonlinear solid mechanics - A continuum approach for engineering*. Wiley, 2001. [3](#), [8](#), [9](#), [84](#)
- M. HUSSAIN, S. PU et J. UNDERWOOD : Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode II. *ASTM STP*, 560:2–28, 1974. [97](#)
- M. JIRASEK : Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 188:307–330, 2000. [26](#)
- M. KALISKE et H. ROTHERT : A viscoelastic damage model for elastomeric materials. *In Eropean Conference on Constitutive Models for Rubber*, 1999. [9](#)
- P.L. KEY : A relation between crack surface displacement and the strain energy release rate. *Int. J. Fracture Mech.*, 5:287–296, 1969. [50](#)
- J.K. KNOWLES et E. STERNBERG : On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 44(3):187–211, 1972. [37](#)
- J.K. KNOWLES et E. STERNBERG : An Asymptotic Finite-Deformation Analysis of the Elastostatic Field Near the tip of a Crack. *Journal of Elasticity*, 3:67–107, 1973. [40](#)
- J.K. KNOWLES et E. STERNBERG : Finite-Deformation Analysis of the Elastostatic Field Near the tip of a Crack : Reconsideration of Higher Order results. *Journal of Elasticity*, 4:201–233, 1974. [40](#)
- J. KORELC et P. WRIGGERS : Consistent gradient formulation for a stable enhanced strain method for large deformations. *Engineering Computations*, 13(1):103–123, 1996. [83](#)
- E. KÜHL, R. DENZER, F.J. BARTH et P. STEINMANN : Application of the material force method to thermo-hyperelasticity. *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.*, 2004. in press. [100](#), [101](#)
- P. LABORDE, J. POMMIER, Y. RENARD et Michel SALAÜN : High-order extended finite element method for cracked domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64(3):354–381, 2005. [16](#)
- G.J. LAKE : Application of fracture mechanics to failure in rubber articles, with particular reference to groove cracking in tyres. *Int. Conf. Yield, Deformation and fracture of polymers*, Cambridge, 1970. [47](#)
- P. LANCASTER et K. SALKAUSKAS : Surfaces generated by moving least squares methods. *Mathematics of Computation*, 37:141–158, 1981. [23](#)
- R. LARSSON et M. FAGERSTRÖM : A framework for fracture modelling based on the material forces concept with xfm kinematics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(13):1763–1788, 2005. [101](#)
- Jean Benoit LE-CAM : *Endommagement en fatigue des élastomères*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 2005. [126](#)
- E.H. LEE : Elastic-plastic deformation at finite strains. *Journal of Applied Mechanics*, 36:1–6, 1969. [8](#)

- A. LEGAY, J. CHESSA et T. BELYTSCHKO : An Eulerian-Lagrangian method for fluid-structure interaction based on level sets. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(17-18):2070–2087, 2006. 16
- A. LEGAY, H.W. WANG et T. BELYTSCHKO : Strong and weak arbitrary discontinuities in spectral finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64:991–1008, 2005. 16, 67, 68, 73
- G. LEGRAIN, N. MOËS et A. HUERTA : Etude de la stabilité d'une formulation incompressible traitée par X-FEM. *Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 15(1-3):257–268, 2006. 126
- G. LEGRAIN, N. MOËS et A. HUERTA : Stability of incompressible formulations enriched with X-FEM. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(21-24):1835–1849, 2008. 126
- G. LEGRAIN, N. MOËS et E. VERRON : Stress analysis around crack tips in finite strain problems using the eXtended Finite Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63:290–314, 2005. 16, 125
- Stéphane LEJEUNES : *Modélisation de structures lamifiées élastomère - métal à l'aide d'une méthode de réduction de modèles*. Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille II, 2006. 82
- T. LIEBE, R. DENZER et P. STEINMANN : Application of the material force method to isotropic continuum damage. *Computational Mechanics*, 30(3):171–184, 2003. 101
- P.B. LINDLEY : Energy for crack growth in model rubber components. *J. Strain Anal.*, 7:132–140, 1972. 46
- S. LIU et W.K. LIU : Meshfree and particle methods and their applications. *Applied Mechanics Review*, 55(1):1–34, 2002. 23
- C. LOVADINA : Analysis of strain-pressure finite element methods for the Stokes problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, xxx:xxx, 1998. 88
- C. LOVADINA et F. AURICCHIO : On the enhanced strain technique for elasticity problems. *computers and structures*, 81:777–787, 2003. 66
- L.B. LUCY : Generalizing the finite element method : diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, 10:307–318, 1992. 23
- R.A. LUND et R.A. WESTMANN : Finite element analysis of hyperelastic large deformation crack tip fields. *International Journal of Fracture*, 43:257–270, 1990. 52
- D.S. MALKUS : Eigenproblems associated with the discrete LBB condition for incompressible finite elements. *Int. J. Eng. Sci.*, 139(10):1299–1310, 1981. 59
- D.S. MALKUS et T.J.R. HUGHES : Mixed finite element methods. Reduced and selective integration techniques. A unification of concepts. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 15(1):63–81, 1978. 63, 83
- G. MARCKMANN : *Contribution à l'étude des élastomères et des membranes soufflées*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 2004. 11
- W. V. MARS et A. FATEMI : Analysis of fatigue life under complex loading : Revisiting cadwell, merill, sloman, and yost. *In Rubber Division, American Chemical Society, Grand Rapids, MI*, 2004. 126
- G. Martin BORRET : *Sur la propagation de fissure dans les elastomères*. Thèse de doctorat, LMS - Ecole Polytechnique, 1998. 40, 41
- G.A. MAUGIN : *Material Inhomogeneities in Elasticity*. Chapman and Hall, London, 1993. 100
- G.A. MAUGIN : Material forces : Concept and applications. *Applied Mechanical Reviews*, 48(5), 1995. 100
- G.A. MAUGIN, M. EPSTEIN et C. TRIMARCO : Pseudomomentum and material forces in inhomogeneous materials. (Application to the fracture of electromagnetic materials in electromagnetoelastic fields). *International Journal of Solids and Structures*, 29(14-15):1889–1900, 1992. 101
- G.A. MAUGIN et C. TRIMARCO : Pseudomomentum and material forces in nonlinear elasticity. Variational formulations and application to brittle fracture. *Acta Mechanica*, 94(1-2):1–28, 1992. 100, 101
- J.M. MELENK et I. BABUŠKA : The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.*, 139:289–314, 1996. 13, 14
- A. MENZEL, R. DENZER et P. STEINMANN : Material forces in computational single-slip crystal-plasticity. *Comput. Mater. Sci.*, 32(3-4):446–454, 2005. 102
- J. MERGHEIM, E. KUHL et P. STEINMANN : A finite element method for the computational modelling of cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63(2):276–289, 2005. 21, 22
- J. MERGHEIM, E. KUHL et P. STEINMANN : Towards the algorithmic treatment of 3d strong discontinuities. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 23(2):97–108, 2006. URL <http://mechanik.mv.uni-kl.de/deutsch/mitarbeiter/kuhl/PAPER/CNME05a.pdf>. 22, 33

- J. MERGHEIM et P. STEINMANN : A geometrically nonlinear fe approach for the simulation of strong and weak discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, n/a:n/a, 2006. 22
- J.H. MICHELL : Elementary distributions of plane stress. *Proceedings of the Royal Mathematical Society of London*, 32:35–61, 1900. 115, 131
- C. MIEHE : Aspects of the formulation and finite element implementation of large strain isotropic elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:1981–2004, 1994. 87
- N. MOËS, E. BÉCHET et M. TOURBIER : Imposing dirichlet boundary conditions in the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67(12):1641–1669, 2006. 16
- N. MOËS et T. BELYTSCHKO : Extended Finite Element Method for Cohesive Crack Growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 69:813–834, 2002. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0013-7944\(01\)00128-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0013-7944(01)00128-X). 16
- N. MOËS, M. CLOIREC, P. CARTRAUD et J.-F. REMACLE : A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.*, 192:3163–3177, 2003. URL [http://dx.doi.org/doi:10.1016/S0045-7825\(03\)00346-3](http://dx.doi.org/doi:10.1016/S0045-7825(03)00346-3). 16, 67
- N. MOËS, J. DOLBOW et T. BELYTSCHKO : A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46:131–150, 1999. 16, 17, 18, 19, 37, 39, 97
- N. MOËS, A. GRAVOUIL et T. BELYTSCHKO : Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets. Part I : Mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53:2549–2568, 2002. 16, 19, 37, 96, 97
- R. MUELLER, S. KOLLING et D; GROSS : On configurational forces in the context of the finite element method. *international journal for numerical methods in engineering*, 53:1557–1574, 2002. 100, 102, 103
- R. MUELLER et G.A. MAUGIN : On material forces and finite element discretizations. *Computational mechanics*, 29:52–60, 2002. 102, 103, 124
- J.C. NAGTEGAAL, D.M. PARKS et J.R. RICE : On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 4(8):153–177, 1974. 87
- B. NAYROLES, G. TOUZOT et P. VILLON : Generalizing the finite element method : Diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, 10:307–318, 1992. 23
- E.A. De Souza NETO, D. PERIĆ, G.C. HUANG et D.R.J. OWEN : Remarks on the stability of enhanced strain elements in finite elasticity and elastoplasticity. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 11:951–961, 1995. 88
- T.D. NGUYEN, S. GOVINDJEE, P.A. KLEIN et H. GAO : A material force method for inelastic fracture mechanics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53(1):91–121, 2005. 101
- G.P. NIKISHKOV et S.N. ATLURI : Calculation of fracture mechanics parameters for an arbitrary three-dimensional crack, by the 'equivalent domain integral' method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:1801–1821, 1987. 37, 106, 108
- J. NITSCHKE : Über ein Variationprinzip zur lösung von Dirichlet-Problem bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 36:9–15, 1971. 20, 24
- R.W. OGDEN : Recent advances in the phenomenological theory of rubber elasticity. *Rubber Chem. Technol.*, 59:361–383, 1984. 8
- D. ORGAN, M. FLEMING, T. TERRY et T. BELYTSCHKO : Continuous meshless approximations for nonconvex bodies by diffraction and transparency. *Computational Mechanics*, 18:1–11, 1996. 24
- S. OSHER et J.A. SETHIAN : Fronts propagations with curvature dependent speed : Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79:12–49, 1988. 19
- D. PANTUSO et K.J. BATHE : A four nodes quadrilateral mixed-interpolated element for solids and fluids. *Mathematical models and methods in applied sciences*, 5(8):1113–1128, 1995. 66, 88
- D. PANTUSO et K.J. BATHE : On the stability of mixed finite elements in large strain analysis of incompressible solids. *finite elements in analysis and design*, 28:83–104, 1997. 83, 86, 88
- K.D. PAPOULIA : Mixed and selective reduced integration procedures in large strain hyperelastic analysis of nearly incompressible solids. *Computational Mechanics*, 23:63–74, 1999. 9
- G.H. PAULINO et J.H. KIM : A new approach to compute T-stress in functionally graded materials by means of the interaction integral method. *Engineering Fracture Mechanics*, pages 1907–1950, 2004. 131
- R.W. PENN : Volume changes accompanying the extension of rubber. *Transaction of the society of Rehology*, 14(4):509–517, 1970. 9
- U. PEREGO, C. COMI et S. MARIANI : An adaptative approach to the analysis of damage growth and crack



- propagation in concrete. *In Challenges in Computational Mechanics (Cachan)*, 2006. 98, 126
- J. QIAN et A. FATEMI : Mixed mode fatigue crack growth : A literature survey. *Engineering Fracture Mechanics*, 55(6):969–990, 1996. 97
- Pierre Arnaud RAVIART et Jean-Marie THOMAS : *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Dunod, Paris, 1998. 73
- B.D. REDDY et J.C. SIMO : stability and convergence of a class of enhanced strain methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 32(6):1705–1728, 1994. 64
- J. RETHORE, A. GRAVOUIL et A. COMBESCURE : A combined space-time extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64(2):260–284, 2005. 16
- J. RÉTHORÉ, A. GRAVOUIL et A. COMBESCURE : An energy-conserving scheme for dynamic crack growth using the eXtended Finite Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53:2569–2586, 2005. 16
- J. RICE : A Path Independent Integral and the approximation analysis of strain concentration by notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35:379–386, 1968. 36
- J.R. RICE : Limitations to the small scale yielding approximation for crack tip plasticity. *Journal of Mechanics and Physics Solids*, 22:17–26, 1974. 104
- R.S. RIVLIN et A.G. THOMAS : Rupture of rubber. I. Characteristic energy for tearing. *Journal for Polymer science*, 3:291–318, 1953. 35, 45
- T. SCHARNHORST et T.H.H. PIAN : Finite element analysis of rubber-like materials by a mixed model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12:665–676, 1978. 9
- R. SIBSON : A brief description of natural neighbour interpolation. *In Interpreting Multivariate Data*, pages 21–36. Wiley, 1981. 23, 24
- F. SIDOROFF : Variables internes en viscoélasticité - milieux avec configuration intermédiaire. *Journal de Mécanique*, 14(3):545–566, 1975. 8
- G.C. SIH : Discussion on "Some observations on Sih's strain energy density approach for fracture prediction". *International Journal of Fracture*, 10:279–284, 1974. 97
- G.C. SIH : *Mechanics of fracture initiation and propagation*. Kluwert, 1991. 97
- J.C. SIMO : On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model : formulation and computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 60(6,8):153–173, 1987. 87
- J.C. SIMO : A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition : Part I. Continuum formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66:199–219, 1988. 8, 9
- J.C. SIMO et F. ARMERO : Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:1413–1449, 1992. 82
- J.C. SIMO, F. ARMERO et R.L. TAYLOR : Improved version of assumed enhanced strain tri-linear element for 3D finite deformation problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 10:359–386, 1993. 66
- J.C. SIMO et S. RIFAI : A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29:1595–1638, 1990. 26, 64
- J.C. SIMO et R.L. TAYLOR : Penalty function formulations for incompressible non-linear elastostatics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 35:107–118, 1982. 9
- J.C. SIMO et R.L. TAYLOR : Quasi incompressible finite elasticity in principal stretches. Continuum basis and numerical algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 85(2,6,8):273–310, 1991. 87
- F. SIRODOFF : Cours sur les grandes transformations. Rapport technique, GRECO Grandes transformations et endommagement, 1982. 3
- J. SLADEK et V. SLADEK : Evaluation of T-stresses and intensity factors in stationary thermoelasticity by the conservation integral method. *International Journal of Fracture*, 86:199–219, 1997. 115
- P. STEINMANN : Application of material forces to hyperelastostatic fracture mechanics. I. Continuum mechanical setting. *International Journal of Solids and Structures*, 37:7371–7391, 2000. 100, 102
- P. STEINMANN, D. ACKERMANN et F.J. BARTH : Application of material forces to hyperelastostatic fracture mechanics. II. Computational setting. *International Journal of Solids and Structures*, 38:5509–5526, 2001. 100, 102, 103, 104

- R.A. STEPHENSON : The Equilibrium Field Near the tip of a Crack for finite plane strain of incompressible elastic materials. *Journal of Elasticity*, 12:65–99, 1982. 40, 90
- M. STOLARSKA, D. L. CHOPP, N. MOËS et T. BELYTSCHKO : Modelling Crack Growth by Level Sets and the Extended Finite Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51(8):943–960, 2001a. URL [mypapers/stola.pdf](#). 19, 96
- M. STOLARSKA, D.L. CHOPP, N. MOËS et T. BELYTSCHKO : Modelling crack growth with Level-Set and the Extended Finite Element Method. *International journal for numerical methods in Engineering*, 51:943–960, 2001b. 97
- T. STROUBOULIS, I. BABUŠKA et K. COPPS : The design and analysis of the generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181:43–69, 2000. 15
- T. STROUBOULIS, L. ZHANG et I. BABUŠKA : Generalized finite element method using mesh-based handbooks : application to problems in domains with many voids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(28-30):3109–3161, 2003. 15
- H. STUMPF et K.C. LE : Variational principles of nonlinear fracture mechanics. *Acta Mechanica*, 83:25–37, 1990. 100
- N. SUKUMAR : *The Natural Element Method in Solid Mechanics*. Thèse de doctorat, Northwestern University Evanston, Illinois, 1998. 25
- N. SUKUMAR, D. L. CHOPP, N. MOËS et T. BELYTSCHKO : Modeling Holes and Inclusions by Level Sets in the Extended Finite Element Method. *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.*, 190:6183–6200, 2001. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(01\)00215-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00215-8). 16, 19, 67, 69
- N. SUKUMAR, J. DOLBOW, A. DEVAN, J. YVONNET, P. CHINESTA, D. RYCKELYNCK, P. LORONG, I. ALFARO, M.A. MARTINEZ, E. CUETO et M. DOBLARÉ : Meshless methods and partition of unity finite elements. *International Journal of Forming Processes*, 8:409–427, 2005. 23
- N. SUKUMAR, Z.Y. HUANG, J.H. PRÉVOST et Z. SUO : Partition of unity enrichment for bimaterial interfacial cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59:1075–1102, 2004. 16
- N. SUKUMAR, N. MOËS, T. BELYTSCHKO et B. MORAN : Extended Finite Element Method for three-dimensional crack modelling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(11):1549–1570, 2000. URL [mypapers/3d.pdf](#). 16, 37, 97
- N. SUKUMAR et J.H. PRÉVOST : Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method Part I : Computer implementation. *International journal of solids and structures*, 40:7513–7537, 2003. 17
- T. SUSSMAN et K.J. BATHE : A finite element formulation for nonlinear incompressible elastic and inelastic analysis. *computers and structures*, 26(1/2):357–409, 1987. 85
- R.L. TAYLOR, P.J. BERESFORD et E.L. WILSON : A non-conforming element for stress analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10:1211–1219, 1976. 64, 66
- Matthieu TOURBIER : *Contribution à la résolution de problèmes d'interfaces mobiles de type Dirichlet*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 2005. 16
- L. R. G. TRELOAR : Stress-strain data for vulcanised rubber under various types of deformation. *Trans. Faraday Soc.*, 40:59–70, 1944. 47
- L.R.G. TRELOAR : The elasticity of a network of long chains molecules I. *Trans. Faraday Soc.*, 39:36–41, 1943a. 11
- L.R.G. TRELOAR : The elasticity of a network of long chains molecules II. *Trans. Faraday Soc.*, 39:241–246, 1943b. 11
- K.C. VALANIS et R.F. LANDEL : The strain-energy function of a hyperelastic material in terms of the extension ratios. *Journal of Applied Physics*, 38:2997–3002, 1967. 9
- P.A.J van den BOGERT, R. de BORST, G.T. LUITEN et J. ZEILMAKER : Robust finite elements for 3D-analysis of rubber-like materials. *Engineering Computations*, 8(8):3–17, 1991. 8, 9, 85
- G. VENTURA : On the elimination of quadrature subcells for discontinuous functions in the eXtended Finite Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66:761–795, 2006. 18
- G. VENTURA, J.X. XU et T. BELYTSCHKO : A vector levelset method and new discontinuity approximations for crack growth by EFG. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54:923–944, 2002. 24
- L.M. VIGNERON, J.G. VERLY et S.K. WARFIELD : Modelling surgical cuts, retractions, and resections via extended finite element method. In *Proceedings of the 7th Int. Conf on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention - MICCAI 2004 (2)*, 2004. 127

- G.J. WAGNER et W.K. LIU : Hierarchical enrichment for bridging scales and mesh-free boundary conditions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(3):507–524, 2001. [24](#)
- G.J. WAGNER, N. MOËS, W.K. LIU et T. BELYTSCHKO : The Extended Finite Element Method for Stokes Flow Past Rigid Cylinders. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51:293–313, 2001. [16](#)
- G.N. WELLS et L.J. SLUYS : A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50:2667–2682, 2001. [16](#)
- P. WRIGGERS et J. KORELC : On enhanced strain methods for small and finite deformation of solids. *Computational Mechanics*, 18:413–428, 1996. [66](#)
- P. WRIGGERS et S. REESE : A note on enhanced strain methods for large deformations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 135:201–209, 1996. [88](#)
- O.H. YEOH : Relation between crack surface displacement and strain energy release rate in thin rubber sheets. *Mechanics of Materials*, 32:459–474, 2002. [45](#), [49](#), [50](#)
- J. YVONNET, D. RYCKELYNCK, P. LORONG et P. CHINESTA : A new extension of the natural element method for non-convex and discontinuous problems : the constrained natural element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60:1451–1474, 2004. [25](#)
- O. C. ZIENKIEWICZ et R. TAYLOR : *The Finite Element Method, Vol. 1, 2, 3*. McGraw-Hill, London, 1991. [12](#), [26](#)
- O.C. ZIENKIEWICZ, Y.C. LIU et G.C. HUANG : Error estimates and convergence rates for various incompressible elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28:2191–2202, 1989. [69](#)

## Crédits photos :

- ▷ Page de garde : "Bucky", *Android 3.0 Honeycomb SDK* ;
- ▷ Introduction générale : <http://www.fingerpainrelief.com> ;
- ▷ Adaptation de la méthode... (chapitre 3) : *Center for Nonlinear Dynamics, University of Texas at Austin* ;
- ▷ Conclusion générale : "Mike Kirk's Photography Blog", <http://mikekirkphotographyblog.wordpress.com> ;

Classe  $\LaTeX$ fortement inspirée de la classe *samplebookdesign* du *Malaysian  $\LaTeX$ user group* : <http://latex-my.blogspot.com>

# Résumé en français

Le caoutchouc industriel est présent dans de nombreuses applications, de la plus basique à la plus technique. Son mode de défaillance prépondérant est la rupture due à la propagation de fissures par fatigue : les sollicitations mécaniques ainsi que l'atmosphère extérieure provoquent dans un premier temps l'apparition d'une amorce de fissure. Sous l'effet des sollicitations mécaniques, cette fissure se propage jusqu'à rupture de la pièce. L'objectif de ce travail est de faciliter la simulation numérique de la propagation de fissures dans les élastomères. Pour cela, on utilise la méthode des éléments finis étendus X-FEM. Cette méthode a été développée afin de limiter le recours au remaillage dans le cadre de la fissuration des métaux. En outre, elle permet d'enrichir l'approximation éléments finis par des fonctions provenant de la physique du problème. La première partie de ce travail consiste à adapter cette méthode à la mécanique non-linéaire de la rupture. On s'intéresse en particulier au choix de la formulation de résolution ainsi qu'à la recherche de fonctions d'enrichissement adaptées.

Dans un deuxième temps, on s'intéresse à l'enrichissement des formulations mixtes pour la gestion de la contrainte d'incompressibilité. Des stratégies ont été développées afin de préserver la stabilité de ces formulations. Ces enrichissements permettent la vérification de la condition inf-sup dans le cas de trous, des inclusions et des fissures sous l'hypothèse des petites perturbations.

Enfin, dans une troisième partie, on détaille l'application du concept de forces configurationnelles comme critère directionnel pour la propagation de fissures 2D et 3D.

*Mots-clés* : Mécanique non-linéaire de la rupture, éléments finis, X-FEM, partition de l'unité, formulations mixtes, inf-sup, forces configurationnelles.

# Titre et résumé en anglais

*Extension of the X-FEM Approach to large strain for the simulation of hyperelastic materials fracture.*

Rubber-like materials are used in a wide range of applications (from basic to high-tech one). Failure of rubbers is mainly caused by rupture because of cracks : In a first step, mechanical solicitations and external atmosphere make the crack initiate. Then, under mechanical loading, it propagates until the part breaks. The main subject of this work is to facilitate the numerical simulation of crack propagation in rubber-like materials. The eXtended Finite Element Method (X-FEM), which was developed as a mean to reduce remeshing in linear fracture mechanics is used here. Moreover, the method allows the enrichment of the finite element approximation with physical based functions. The first part of this work consists in an application of the X-FEM in the field of nonlinear fracture mechanics. In particular, we insist on the choice of a well fitted formulation for resolution, and on the use of adapted enrichment functions. In a second part, we focus on the enrichment of mixed formulations under incompressibility constraint. Strategies have been developed in order to preserve the stability of the formulations. These enrichments allow the fulfilment of the inf-sup condition in the case of holes, material inclusions and cracks under the small strain assumption. Finally, in a last part, we focus on the application of the configurational forces concept as a criterion for crack propagation in both 2D and 3D.

*Keywords* : Nonlinear fracture mechanics, finite element, X-FEM, partition of unity, mixed formulations, inf-sup, configurational forces.

*Discipline* : Sciences de l'Ingénieur