



Commande prédictive généralisée non linéaire à temps continu des systèmes complexes

Marcelin Dabo

► To cite this version:

Marcelin Dabo. Commande prédictive généralisée non linéaire à temps continu des systèmes complexes. Automatique / Robotique. Université de Rouen, 2010. Français. NNT : . tel-00497319

HAL Id: tel-00497319

<https://theses.hal.science/tel-00497319>

Submitted on 4 Jul 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Doctorat Université de Rouen

THESE

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'Université de Rouen

Discipline : Automatique et Traitement du Signal
Spécialité : Contrôle/Commande

Présentée et soutenue publiquement par

M. Marcelin Dabo

le 12 Mai 2010

Commande prédictive généralisée non linéaire à temps continu des systèmes complexes

Directeur de thèse : M. Houcine Chafouk
Co-encadrement : M. Nicolas Langlois

Jury

Président : M. Yves Lecourtier, Professeur à l'Université de Rouen

M. Patrick Boucher, Professeur, E3S, Supélec, Paris	Rapporteur
M. Tarek Ahmed-Ali, Professeur, GREYC, ENSI, Caen	Rapporteur
M. Jean-Pierre Corriou, Professeur, ENSIC, Nancy	Examineur
M. Nicolas Marchand, Chargé de Recherche CNRS, Gipsa-Lab, Grenoble	Examineur
Mme Estelle Courtial, Maître de Conférences, PRISME, Université d'Orléans	Examineur
M. Houcine Chafouk, Dr (HDR), IRSEEM, ESIGELEC, Rouen	Examineur
M. Nicolas Langlois, Dr (HDR), IRSEEM, ESIGELEC, Rouen	Examineur

Résumé : Nous abordons, dans cette thèse, la poursuite asymptotique de trajectoire basée sur la commande prédictive généralisée non linéaire à temps continu (NCGPC). L'application de cette technique de commande requiert la vérification d'assumptions précises. La NCGPC est caractérisée par deux paramètres : le degré relatif et l'horizon de prédiction, respectivement, intrinsèque et extrinsèque au système. Sa loi de commande résulte de la minimisation d'un critère quadratique basée sur l'erreur de prédiction (jusqu'à un ordre égal au degré relatif) entre la(es) sortie(s) choisie(s) et le(es) signal(aux) de référence correspondant(s). Elle linéarise le système non linéaire en boucle fermée dans un nouvel espace de coordonnées et lui garantit la stabilité (degré relatif inférieur ou égal à quatre) de facto. Au-delà de quatre, il y a instabilité. Pour résoudre ce problème, Chen *et al.* ont introduit un troisième paramètre, qui est l'ordre des dérivées successives de la commande par rapport au temps, choisi de sorte que sa différence avec le degré relatif soit inférieure à quatre. Nous proposons dans ce travail, deux approches qui vérifient les mêmes assumptions mentionnées ci-dessus et dont les points communs sont la modification du critère avec le maintien à zéro de l'ordre des dérivées successives de la commande et la garantie de la stabilité pour le système linéaire bouclé résultant. La première approche consiste au rajout d'un terme linéaire en commande au critère, tandis que la deuxième consiste au rajout d'une matrice de correction "intelligente" à la matrice de prédiction du critère. Quelques propriétés de la NCGPC sont données pour des systèmes SISO de degré relatif un ou deux.

Mots-clés : Commande prédictive, système continu (degré relatif), non minimum de phase, correction linéaire, correction matricielle intelligente, moteur Diesel turbocompressé, EGR-VGT, chaise roulante électrique.

Abstract: We address through this thesis asymptotic output tracking based on nonlinear continuous-time generalized predictive control (NCGPC). Some specific assumptions are necessary for the application of this control design method. NCGPC has two parameters that are the relative degree and the prediction horizon time which are, respectively, intrinsic and extrinsic to the nonlinear system. Its control law is derived from the minimization of a quadratic criterion based on the prediction error (up to an order equal to the relative degree) between the chosen output(s) and their corresponding reference signal(s). This control law leads to a linear closed-loop system with a guaranteed stability for a relative degree less than or equal to four. Beyond four, instability occurs. To avoid this issue, Chen *et al.* introduce as a third parameter the order r of the successive derivatives of the control with respect to time, chosen so that its difference in relation to the relative degree must be less than four. We propose, in this work, two approaches verifying the above assumptions, having in common the modification of the criterion while keeping parameter r equal to zero with guaranteed closed-loop stability (for a relative degree greater than four). The first approach consists in adding a linear term with respect to the control to the criterion while the second consists in adding to the prediction matrix of the criterion an "intelligent" matrix of correction (it vanishes when correction is not necessary). Important properties are presented for SISO nonlinear systems of relative degree one or two.

Keywords: Predictive control, continuous-time (relative degree), non-minimum phase, linear correction, intelligent matrix correction, turbocharged Diesel engine, EGR-VGT, Electric wheelchair.

*Voici le jour que fit le Seigneur,
Qu'il soit pour nous jour de fête et de joie !
Psaume 118 : 24.*

"Avant la création du monde, avant le commencement de toute chose, il n'y avait rien, sinon "un être". Cet Être était un Vide sans nom et sans limite, mais c'était un Vide vivant, couvant potentiellement en lui la somme de toutes les existences possibles. Le Temps infini, intemporel, était la demeure de cet Être-un.

L'être "un" se dota de deux yeux. Il les ferma : la nuit fut engendrée. Il les rouvrit : il en naquit le jour. La nuit s'incarna dans (...) la Lune. Le jour s'incarna dans (...) le Soleil. Le Soleil épousa la Lune. Ils procrèèrent le Temps temporel divin."

Cosmogonie mandé d'après Amadou Hampâté Bâ, voir [Fllm 05], (1^{er} et 2 Janvier).

"Il faut se souvenir que la non-visibilité, la non-palpabilité et la non-sensibilité d'une chose ne sont pas pour autant des preuves absolues de sa non-existence."

Amadou Hampâté Bâ, voir [Fllm 05], (18 Janvier).

"... A connaissance égale, la vérité triomphe ..." Pr. Cheikh Anta Diop

Remerciements

Je tiens à remercier, ici, toutes les personnes qui ont toujours contribué, sans relâche et avec excellence, à faire et à parfaire mon éducation, chaque jour, par des critiques intelligentes et constructives, pour que je cherche toujours à donner le meilleur de moi-même : mes parents, des amis, ma famille.

Je remercie très particulièrement, mon épouse Ingrid pour sa présence et son soutien.

Je remercie mon directeur de thèse, M. le Professeur Houcine Chafouk, qui m'a fait confiance et donné des conseils forts utiles, durant ces trois années de thèse.

Je remercie M. Nicolas Langlois grâce à qui j'ai acquis, absolument irrévocablement et incontestablement, l'indépendance scientifique et scripturale.

Je remercie M. le Professeur Witold Respondek pour le temps qu'il m'a consacré, sur le partage de ses connaissances érudites, excellentes et exceptionnelles en théorie du contrôle et pour son haut savoir dans la pédagogie et dans les relations humaines. Assister à vos cours a été pour moi un honneur et une grande opportunité. Djenkouyan !

Je remercie M. Gay Tall, Directeur des programmes, de l'innovation et du développement durable à Esigelec, qui m'a consacré de son temps pour la préparation de mon séjour à Azania (Afrique du Sud) au sein du F'SATIE (French South African Technological Institute in Electronics) à Tshwané University of Technologie (TUT). J'en garde un excellent souvenir. Jajef, Abaraka, Ngiabonga !

Je remercie M. François Rocary, M. Yskandar Hamam et M. Karim Djouani pour l'accueil qu'ils m'ont réservé au sein de leur équipe au F'SATIE, à TUT, à Azania.

Je remercie Mme Anne Louis, Directrice de Recherche, M. Belhacène Mazari, Directeur du laboratoire IRSEEM (Institut de Recherche en Systèmes Electroniques EMbarquées), et M. Claude Guillermet, Directeur Général de l'Esigelec, pour les conditions dans lesquelles cette thèse s'est déroulée.

Je remercie tout particulièrement M. Mazari et Mme Louis pour la confiance qu'ils m'ont accordée durant les deux années d'exercice dans mon rôle de Représentant des doctorants au sein de l'IRSEEM.

Je remercie Mme Christine Tsafack et les collègues doctorants, M. Amin Belaïdi, M. Jerry Mamboundou, M. Mamadou Kanté, ..., post-doctorants, M. Ouadie Bennouna, Melle Lise Aline Coyitanyé et quelques étudiants de l'ESIGELEC, M. Wagane Faye, M. Gilles Bandza, Melle Fatou Kiné Keïta, ... qui m'ont soutenu moralement dans la réalisation de ce travail.

Je remercie tous les membres du jury :

- M. le Professeur Yves Lecourtier de l'Université de Rouen,
- M. le Professeur Patrick Boucher du E3S à Paris,
- M. le Professeur Tarek Ahmed-Ali du GREYC à Caen,
- M. le Professeur Jean-Pierre Corriou de l'ENSIC de Nancy,
- M. Nicolas Marchand, chargé de recherche CNRS au Gipsa-Lab à Grenoble,

– Mme Estelle Courtial, Maître de Conférence au PRISME à Orléans,
pour leurs appréciations constructives vis à vis de ce travail.

Un grand merci à Mamadou Thiao : ton sens aigu des mathématiques et ton humilité m'ont beaucoup inspirés. Ce n'est pas comme certain : ta contribution à mes théorèmes a été significative.

Un grand merci à ma soeur Amélie Dabo, véritable connaisseuse de la langue française, pour avoir accepté de lire ce rapport de thèse et d'y apporter ses précieuses et constructives appréciations.

Je remercie CJE, structure dans laquelle, chaque jour je tends vers l'excellence avec mes amis Jacqueline Konaté, Mamadou Bachir Bah, Pamela Yoboué, Lanciné Kourouma, Amadou Diakhaté,... : "*... même à pas de Caméléon, nous menons nos projets...*"

Obrigadou, jerejef, barane, ngiabonga, merci à tous et à toutes !

A Ingrid, pour son soutien.

*A mon père, tu me dis un jour :
"si j'avais eu l'encadrement adéquat, j'aurais fait des "cours supérieurs"."*

*A ma mère, tu me dis un jour :
"sois excellent à la maison comme tu l'es à l'école."*

Paransa Deus pa cabou cou bo sta aos, pa bo discansa.

*A l'un de mes meilleurs enseignants du primaire, M. Dionou.
A l'un de mes meilleurs enseignants du secondaire, M. Abdoulaye Diatta :
merci de m'avoir donné le goût pour les Sciences Physiques.*

*Au Professeur Jacques Dufour :
c'est par vous que j'ai découvert et voulu faire l'Automatique. Je vous en suis reconnaissant.*

*Aux Professeurs Philippe Ferrari et Lionel Duvillaret :
merci pour vos conseils et votre ouverture au monde.*

*Au Professeur Witold Respondek :
la lumière de votre savoir m'a ébloui.*

*A mes Pères de l'Afrique noire pharaonique :
Imhotep (2700-2625 avant J.C.), architecte, grand prêtre, philosophe et scribe, astronome, médecin,
créateur de la première construction en pierre de taille dans l'histoire de l'humanité, Père de la
Science ;
A'h-mosè (vers 1650 av. J.C.), qui recopia, il y a quatre mille ans, l'un des plus célèbres papyrus
mathématiques de l'Afrique noire pharaonique, nous transmettant ainsi l'idéal scientifique du monde
pharaonique qui vante la puissance du nombre.*

*Aux grands érudits de l'Afrique impériale :
Muhammad ibn Muhammad al-Fullani al-Kishnawi (ca-1741), grand érudit du Nord du Nigéria,
Ahmed Ibn Ahmed Al-Takruri Al-Massufi (1526-1620), grand érudit du Mali.*

*Au Pharaon, Grand prêtre, Eminent Professeur Cheikh Anta Diop (1923-1986) :
"...à connaissance égale, la vérité triomphe..."*

*A l'un des plus grands navigateurs interplanétaires, Cheikh Modibo Diarra (NASA) :
tu m'as tant fait rêver...*

Aux Reines Africaines depuis l'Afrique noie pharaonique jusqu'à nos jours.

Aux hommes et femmes honnêtes de sciences à travers toute l'humanité.

*A Vous qui avez révélé et continuer de révéler les sciences à l'humanité, puisses cette modeste
oeuvre vous plaire et qu'elle soit au service de bonnes choses dans l'humanité.*

Au chercheur honnête

Ô toi mon frère, je te salue
Toi dont la force intellectuelle
S'allie à tes grandes valeurs de sagesse
Je te salue
Ô toi dont l'Intelligence est éclairée par
La lumière de Tata Nzambé, je te salue.

*Tes idées sont pures et ne sont pas corrompues.
Tu vis dans les hauteurs de la Sagesse-même
Et l'amour de la sagesse devient secondaire pour toi.*

Ô toi, mon frère, mon Grand-frère, mon Koro-ké
Aurais-tu enseigné à

Imhotep (2700-2625),

Ahmed Baba (1526-1620),

Anton Wilhelm Amo (1703-1759),

Cheikh Anta Diop (1923-1986),

Philip Emeagwali (1954-),

*Si c'est toi qui leur as enseigné,
Révèle moi le chemin d'accès à ton Ecole,
Montre-moi la route
Afin que je vienne vers toi
Car tu le sais si bien, je veux suivre tes Voies.*

*Epargne-moi le chemin de la malhonnêteté intellectuelle.
Epargne-moi le chemin du pervers narcissique.
Epargne-moi le chemin de l'homme-loup, de l'homme-hyène, de l'homme-chien.
(... du chien-tessu-cagna-voleur-de-voyage-et-trafiquant-de-base-de-données-kaccor-bi-nga-done ...).*

Eclaire-moi de ta lumière de Vérité, de Maât.

Ô toi Grand-prêtre du Savoir, du bon Savoir
Puisses-tu m'enseigner dans ton Temple Sacré où
La Science est conscience et où l'ordre
Des choses est sauvegardé, tout dans l'Absolu, la pureté et l'incorruptibilité
De l'infiniment Petit et de l'infiniment Grand.

Marcelin Dabo

Table des matières

Table des figures	xv
Liste des tableaux	xix
Liste des algorithmes	xxi
Avant-propos	xxiii
Introduction générale	xxv

Chapitre 1

Concepts généraux de la commande prédictive

1.1	Introduction	2
1.2	Théorie de la commande	2
1.3	Philosophie et Principe de la commande prédictive	3
1.4	Etat de l'art	4
1.4.1	La commande prédictive linéaire	4
1.4.2	La commande prédictive non linéaire	10
1.5	Conclusion	17

Chapitre 2

Commande prédictive généralisée non linéaire à temps continu (NCGPC) : garantie de stabilité

2.1	Introduction	20
2.2	Présentation de la commande sans contraintes : le cas SISO	21
2.2.1	Elaboration de la loi de commande pour un système SISO carré de degré relatif inférieur ou égal à quatre	22
2.2.2	Proposition de méthodes de correction (degré relatif strictement supérieur à quatre)	49
2.3	Présentation de la commande sans contraintes : le cas MIMO	68
2.3.1	Elaboration de la loi de commande pour un système MIMO carré	68

2.4 Conclusion	82
--------------------------	----

Chapitre 3

Linéarisation entrée-sortie par retour d'état

3.1 Introduction	84
3.2 Présentation de la linéarisation entrée-sortie par retour d'état	84
3.2.1 Cas d'un système SISO non linéaire	84
3.2.2 Cas d'un système MIMO non linéaire	89
3.3 Conclusion	95

Chapitre 4

Etude comparative et applications

4.1 Introduction	98
4.2 Etude comparative	98
4.2.1 Cas de la commande prédictive généralisée non linéaire à temps continu (NCGPC)	98
4.2.2 Cas de la linéarisation entrée-sortie par retour d'état (FL)	99
4.2.3 Comparaison des deux méthodes de commande : NCGPC et FL	100
4.3 Applications	100
4.3.1 Application au biomédical : cas d'une chaise roulante électrique	100
4.3.2 Application à l'automobile : cas d'un moteur Diesel turbocompressé (MDT)	116
4.4 Conclusion	129

Conclusion générale	131
----------------------------	------------

Publications et présentations	135
--------------------------------------	------------

Annexe A

Calcul de la matrice de prédiction Π et de ses termes simplifiés Π_s et Π_{ss}

A.1 Calcul de la matrice de prédiction	138
--	-----

Annexe B

Détermination des racines des polynômes caractéristiques $P_{1T}(\lambda)$ et $P_{2T}(\lambda)$

B.1 Racine de $P_{1T}(\lambda)$	142
B.2 Racines de $P_{2T}(\lambda)$	142

Annexe C

Equations de mouvement de la chaise roulante électrique

Annexe D

Quelques propriétés sur le modèle réduit du moteur Diesel turbocompressé (MDT)

D.1	Involutivité de la distribution $\mathcal{D} = \text{span}\{g_1, g_2\}$	154
D.2	Calcul du vecteur degré relatif	154
D.2.1	Cas du premier vecteur de sortie	155
D.2.2	Cas du vecteur de sortie changé	155
D.3	Détermination de la dynamique des zéros	158
D.4	Linéarisation par approximation de la dynamique des zéros	160

Bibliographie	163
----------------------	------------

Table des figures

1.1	Représentation de la dynamique du système linéaire (1.1) dans l'espace d'état. . .	3
1.2	Schéma de principe de la commande prédictive.	4
1.3	Généalogie approximative des algorithmes de la MPC linéaire, tirée de [Qin 03]. .	5
1.4	Dynamique du système avec une contrainte terminale égalité, voir [Mayn 90]. . .	12
1.5	Dynamique du système avec une contrainte terminale inégalité, voir [Mich 93]. . .	13
1.6	Dynamique d'un système non linéaire de degré relatif strictement supérieur à quatre bouclé par NCGPC.	16
2.1	Systèmes à minimum de phase (a) et à non minimum de phase (b).	22
2.2	Schéma fonctionnel de l'élaboration de la loi de commande NCGPC.	22
2.3	Position des pôles dans le plan complexe et nombre de pôles instables pour un horizon de prédiction $T = 0.1s$ et un degré relatif $1 \leq \rho \leq 10$	29
2.4	Position des pôles dans le plan complexe et nombre de pôles instables pour un horizon de prédiction $T = 1s$ et un degré relatif $1 \leq \rho \leq 10$	30
2.5	Position des pôles dans le plan complexe et nombre de pôles instables pour un horizon de prédiction $T = 10s$ et un degré relatif $1 \leq \rho \leq 10$	30
2.6	Position des pôles dans le plan complexe et nombre de pôles instables pour un horizon de prédiction $T = 15s$ et un degré relatif $1 \leq \rho \leq 10$	31
2.7	Position des pôles dans le plan complexe et nombre de pôles instables pour un horizon de prédiction $T = 0.1s$ et un degré relatif $1 \leq \rho \leq 60$	31
2.8	Position des pôles dans le plan complexe et nombre de pôles instables pour un horizon de prédiction $T = 1s$ et un degré relatif $1 \leq \rho \leq 60$	32
2.9	Position des pôles dans le plan complexe et nombre de pôles instables pour un horizon de prédiction $T = 10s$ et un degré relatif $1 \leq \rho \leq 60$	32
2.10	Position des pôles dans le plan complexe et nombre de pôles instables pour un horizon de prédiction $T = 15s$ et un degré relatif $1 \leq \rho \leq 60$	33
2.11	Cas du degré relatif un : position des pôles dans le plan complexe en fonction de l'horizon de prédiction T	37
2.12	Diagramme donnant la fréquence de coupure ω_c , la constante de temps θ et le temps de réponse t_r en fonction de l'horizon de prédiction T ($1 \leq T \leq 50$ secondes). .	37
2.13	Cas du degré relatif deux : position des pôles dans le plan complexe pour différentes valeurs de l'horizon de prédiction.	41
2.14	Diagramme des paramètres fréquentiels et temporels du système linéaire bouclé d'ordre 2 en fonction de l'horizon de prédiction.	41
2.15	NCGPC : temps de réponse pour un système non linéaire de dimension 1 (égal au degré relatif), pour différentes valeurs de l'horizon de prédiction : $T = 1$ à 5 secondes.	46
2.16	NCGPC : dépassement pour un système non linéaire de dimension 2 (égal au degré relatif), pour différentes valeurs de l'horizon de prédiction : $T = 1$ à 5 secondes. .	48

2.17	NCGPC avec correction linéaire : poursuite du signal de référence ω par la sortie x_1	55
2.18	Degré relatif ρ en fonction de l'horizon de prédiction T pour lequel la stabilité en boucle fermée est garantie.	60
2.19	Cas instable : position des pôles dans le plan complexe (à gauche) et nombre de pôles instables (à droite) pour un degré relatif $\rho = 10$ et un horizon de prédiction $T = 1s$	63
2.20	Cas stable : position des pôles dans le plan complexe (à gauche) et nombre de pôles stables (à droite) pour un degré relatif $\rho = 10$ et un horizon de prédiction $T = 1s$	63
2.21	Cas instable : position des pôles dans le plan complexe (à gauche) et nombre de pôles instables (à droite) pour un degré relatif $\rho = 40$ et un horizon de prédiction $T = 15s$	64
2.22	Cas stable : position des pôles dans le plan complexe (à gauche) et nombre de pôles instables (à droite) pour un degré relatif $\rho = 40$ et un horizon de prédiction $T = 15s$	64
2.23	NCGPC avec correction matricielle : poursuite de la référence ω par la sortie x_1	67
2.24	NCGPC MIMO avec correction matricielle sur la loi de commande de la première composante du vecteur de sortie.	79
2.25	Degré relatif 5 : position des pôles dans le plan complexe pour les lois de commande corrigée (cercle) et non corrigée (étoile). Remarquez les deux pôles instables (étoile)	80
3.1	Poursuite de trajectoire de la référence ω par la sortie x_1	89
3.2	Poursuite de trajectoire du vecteur de référence $[\omega_1, \omega_2]^t$ par le vecteur de sortie $[x_1, x_6]^t$	95
4.1	Position de la chaise roulante électrique sur une pente.	101
4.2	Chaise roulante électrique dans le repère inertiel.	102
4.3	Système non holonome.	102
4.4	Coordonnées de la chaise roulante électrique dans le repère inertiel, voir [Onya 09].	104
4.5	Validation de modèle (20 secondes de simulation) : trajectoires du CDG de la chaise sur une surface plane.	109
4.6	Validation de modèle (20 secondes de simulation) : trajectoires du CDG de la chaise sur une surface de pente positive.	110
4.7	Validation de modèle (20 secondes de simulation) : trajectoires du CDG de la chaise sur une surface de pente positive.	111
4.8	Poursuite asymptotique d'une trajectoire circulaire par la chaise roulante électrique sur une surface plane.	113
4.9	Poursuite asymptotique d'une trajectoire circulaire par la chaise roulante électrique sur une surface de pente positive : $\phi = 6^\circ$	113
4.10	Poursuite asymptotique d'une trajectoire circulaire par la chaise roulante électrique sur une surface de pente négative : $\phi = -6^\circ$	114
4.11	Poursuite asymptotique d'une trajectoire sinusoïdale (évitement d'obstacles) par la chaise roulante électrique sur une surface de pente positive : $\phi = 6^\circ$	114
4.12	NCGPC appliquée à la poursuite asymptotique d'une trajectoire sinusoïdale par la chaise roulante électrique sur une surface de pente positive : $\phi = 6^\circ$	115

4.13	Poursuite asymptotique d'une trajectoire circulaire par la chaise roulante électrique sur une surface de pente négative, $\phi = -45^\circ$: cas de la simulation avec joystick.	115
4.14	Premier moteur Diesel (1897).	116
4.15	Moteur Diesel injection directe à quatre cylindres en ligne, voir [Gron 04].	117
4.16	Cycle à quatre temps du moteur Diesel, voir [Gron 04].	117
4.17	Représentation schématique du turbocompresseur.	118
4.18	Normes Euro 1 à Euro 6 (1992 à 2015).	119
4.19	Distribution dans $\mathbf{R}^n$	122
4.20	Distributions involutive (a) et non involutive (b).	123
4.21	Dynamique des zéros du modèle réduit du moteur Diesel turbocompressé (MDT) : $p_{20} = 1.6$ bar (a) et $p_{20} = 1.8$ bar (b).	125
4.22	Poursuite de trajectoire sur la pression dans le collecteur d'admission et sur le débit d'air à travers le compresseur, voir [Dabo 08c].	126
4.23	Poursuite de trajectoire sur la pression dans le collecteur d'admission et sur le débit d'air à travers le compresseur, voir [Dabo 09c].	129
C.1	Position de la chaise roulante électrique sur une pente.	146
C.2	Chaise roulante électrique dans le repère inertiel.	146

Liste des tableaux

1.1	Liste d'entreprises et de produits incluant la MPC, tirée de [Qin 03].	8
1.2	Liste d'entreprises et de produits incluant la NMPC, tirée de [Qin 03].	11
2.1	Degré relatif ρ , nombre de pôles instables n_p et stabilité en boucle fermée.	34
2.2	Paramètres temporels et fréquentiels du système linéaire bouclé d'ordre 1.	38
2.4	Paramètres constants du système de degré relatif $\rho = 2$ bouclé.	42
2.3	Paramètres temporels et fréquentiels du système linéaire bouclé d'ordre 2.	43
2.5	Horizon de prédiction T , matrice de gain correspondante K_1 pour un système de degré relatif $\rho = 1$	46
2.6	Horizon de prédiction T et matrice de gain correspondante K_2 pour un système de degré relatif $\rho = 2$	47
2.7	Stabilité du système linéaire bouclé en fonction du critère et du degré relatif. . .	52
2.8	Valeurs du degré relatif et de l'horizon de prédiction (en seconde) garantissant la stabilité du système linéaire bouclé.	59
2.9	Stabilité du système linéaire bouclé en fonction du critère et du degré relatif. . .	65
4.1	Nomenclature des variables relatives au modèle de la chaise roulante électrique. .	103
4.2	Les constantes du modèle dynamique de la chaise roulante considérée.	108
4.3	Matrice de gain pour la poursuite de la vitesse linéaire et de la position angulaire de la chaise roulante.	112
4.4	Nomenclature des variables du modèle du moteur Diesel turbocompressé (MDT)	121

Liste des algorithmes

1	Algorithme d'application de la NCGPC en fonction du degré relatif.	44
2	Algorithme d'application de la loi de commande avec correction linéaire en fonction du degré relatif.	53
3	Algorithme d'application de la loi de commande avec correction matricielle en fonction du degré relatif.	65
4	Algorithme résumant l'application de la NCGPC pour la résolution d'un problème de tracking quelque soit le degré relatif du système considéré.	81

Avant-propos

"Rien n'est vraiment une distraction simple. Le profane n'existe pas ; tout est religieux, tout a un but, tout à un motif. Le hasard n'existe pas. Il y a seulement des "lois de coïncidence" dont nous ignorons le mécanisme, un ordre supérieur que nous ne comprenons pas."

Tradition orale africaine, voir [Fllm 05], (21 Février).

"Prenez conscience d'être impliqué dans quelque chose de bien plus grand que vous-même."
Sobonfu Somé, Burkina Faso, voir [Fllm 05], (31 Octobre).

De nos jours, l'avancée technologique est partout présente, même dans les activités journalières les plus simples : prendre une douche, chauffer un repas, communiquer d'un continent à l'autre, etc. Ainsi, l'homme vit au coeur de systèmes devenant de plus en plus complexes. Cependant, comment commander de tels systèmes ?

Depuis des temps forts éloignés dans l'histoire de l'humanité, l'homme a toujours essayé de s'adapter à son environnement pour se nourrir, se loger, améliorer ses conditions de vie, bref en un mot, pour survivre. Ce long processus a débuté en Afrique noire (berceau de l'humanité et de la civilisation) avec les "... créations de nos ancêtres : judaïsme, christianisme, islam, dialectique, théorie de l'être, sciences exactes, arithmétique, géométrie, mécanique, astronomie, médecine, littérature (roman, poésie, drame), architecture, arts, etc. [...]", voir [Diop 81], avant de se propager dans le reste du monde. Aujourd'hui, l'homme moderne continue de poursuivre le réflexe de créer, d'inventer des méthodes, de trouver des solutions aux problèmes qu'il rencontre dans son environnement immédiat, tout en s'appuyant sur les fondements solides légués par ces ancêtres d'Afrique noire.

Au fil du progrès, de nouvelles technologies se sont greffées aux acquis les rendant plus complexes. De nos jours, par exemple, la pêche ne se fait plus uniquement avec une canne à pêche et un appât, même si ces méthodes sont révolutionnaires, à partir du rivage ou d'une pirogue, mais à partir de bateaux-usines avec les conséquences écologiques évidentes actuelles.

D'après certaines cosmogonies sur la création, le Dmiurge aurait créé l'univers au son de sa voix. Il aurait donc "commandé" à la création entière d'exister, depuis les insectes, jusqu'aux dieux, en passant par l'homme. Il aurait alors fait une "commande vocale" sur l'existence de la création en lui imposant des lois de fonctionnement que le "mathématicien" cherche à découvrir. C'est le cas de l'illustre phrase : "Que la lumière soit, et la lumière fut". Phrase ô combien illustre reprise par le mathématicien quand il dit : "soit une variable x appartenant à un ensemble donné dont la dimension est fixée". Le mathématicien, à la manière du Dmiurge "commande", l'existence d'êtres mathématiques dans le but de "... connaître [dans la nature] tout ce qui existe, chaque mystère, tous les secrets.", voir [Oben 95]. Nous pouvons donc dire ici, vu sous un certain angle, que le mathématicien reprend un acte sacré, un geste sacré, un rituel qui est celui de la création. Dès lors, la notion de "commander" devient sacrée, divine.

Mais pourquoi l'homme a-t-il besoin de commander ces systèmes qu'il fabrique ? L'innovation technologique se fait souvent dans le but d'améliorer notre cadre de vie en résolvant un problème précis par exemple, trouver un lieu dans une ville que l'on ne connaît pas (à condition qu'elle soit répertoriée), où on ne connaît personne, qui plus est, où l'on se rend pour la première fois. Ces systèmes nécessitent, bien sûr, une source d'énergie pour leur fonctionnement. Cependant, ils ont besoin d'être contrôlés ou commandés afin que l'homme soit sûr de l'exécution des tâches qu'il leur a assignées. En revanche, le contrôle ne se limite pas uniquement à l'exécution des tâches mais prend également en compte tout ce qui est sûreté et sécurité de fonctionnement. D'où les notions de robustesse aux perturbations extérieures pour le système, de stabilité lors du fonctionnement, d'optimalité pour une meilleure économie d'énergie, etc. Ces aspects sont donc à tenir en compte pour qui souhaite prendre la commande des systèmes dans sa globalité.

Introduction générale

"Chéris les études, fuis la danse ; alors tu feras un excellent fonctionnaire. Ne désire pas le fourré (pour ses plaisirs de chasse et de pêche). Tourne le dos au fait de jeter le bâton (le boomerang) et de chasser. Ecris beaucoup de jour avec tes doigts ; récite de nuit. Que te soient amis le rouleau (de papyrus) et la palette. C'est plus agréable que le vin. Ecrire en effet pour celui qui connaît, c'est bien meilleur que toutes les (autres) professions. C'est plus agréable que le pain et la bière, plus que l'habillement et l'onguent. C'est plus précieux qu'un héritage en Egypte, qu'une tombe à l'Occident (i.e. au pays des Morts)".

Scribe royal, Neb-Maâ-Rê Nakht, 20^e dynastie, [Oben 90].

"Heureux le coeur qui écrit, car il est toujours jeune, chaque jour. Le scribe, dit le texte, est semblable à la femme qui accouche sans aversion, et même la fonction de scribe est encore au-dessus de cet acte qui donne la vie à un individu". [Oben 90].

La notion de commande rime avec celle de donner un ordre pour l'exécution d'une tâche quelconque. Cependant, au cours de l'exécution, lente ou rapide, de cette tâche, il est fort souhaitable que l'environnement immédiat dans lequel se déroule l'opération de commande ne soit pas endommagé et que le système considéré, qui subit la commande, ne soit, en aucun cas, altéré. D'où les soucis de stabilité pour notre système, de robustesse, de prise en considération de contraintes (délimitation de l'espace, limitation de la force de commande, ...), afin de limiter ses éventuels mouvements dans l'espace considéré.

La notion de prédiction, quant à elle, est souvent liée à la notion de prophétie : dire ce qui arrivera demain en fonction de ce qui se passe aujourd'hui et de ce qui s'est passé hier. Prédire pour savoir comment agir, prédire pour mieux se préparer à un événement donné, prédire pour survivre.

C'est cette philosophie qui est utilisée dans la méthode de commande intitulée Commande prédictive généralisée non linéaire à temps continu que nous présentons dans ce mémoire. Elle est appelée commande puisqu'elle permet de contrôler un système complexe donné ; prédictive car elle est basée sur la technique de prédiction des séries de Taylor ; généralisée non linéaire à temps continu, puisqu'ayant rapport avec des systèmes non linéaires à temps continu. En effet, *le mécanisme, pour celui qui sait observer, révèle lui-même son nom.*

Comme il faut agir sur les systèmes efficacement sur la base de prédictions, autant le faire en s'assurant que l'énergie à mettre en oeuvre est minimale. Ainsi, l'efficacité de notre action sur le système considéré, se résume à son optimalité et aux contraintes qu'il peut prendre en compte sur l'état du système, sur son entrée et sa sortie au cours de son fonctionnement.

La problématique essentielle que nous abordons dans ces travaux de thèse est la poursuite asymptotique de trajectoire basée sur la commande prédictive non linéaire avec garantie de stabilité sous certaines conditions tout en minimisant une fonction coût bien définie. Autrement dit, nous cherchons à définir des lois de commande optimales telles que, pour un système non linéaire donné, affine en contrôle, si nous considérons un (ou plusieurs) signal(aux) de référence à poursuivre par la (le vecteur de) sortie du système, l'erreur entre cette dernière et le signal de référence tende vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini.

Le mémoire est organisé comme suit.

Dans le chapitre 1, nous présentons l'état de l'art de la commande prédictive après une brève présentation de la théorie de la commande. Quelques méthodes développées dans le contexte académique sont présentées aussi bien pour les systèmes linéaires que non linéaires. Leurs applications dans le domaine industriel sont également présentées.

Le chapitre 2 renferme les contributions majeures de nos travaux sur la stabilisation d'une classe de systèmes non linéaires dont le degré relatif est strictement supérieur à quatre. Pour cela, nous présentons deux méthodes de correction :

- la première, qui est une correction linéaire (ajout d'un terme proportionnel au contrôle au critère de départ), permet d'assurer la stabilité du système bouclé par placement de pôles. Cependant, le caractère prédictif de la loi de commande résultante n'est pas conservé, d'où la proposition de la seconde méthode ;
- intitulée correction matricielle "intelligente" (ajout d'une matrice, qui s'annule de facto, à la matrice de prédiction du critère, lorsque la correction n'est pas nécessaire (degré relatif

inférieur ou égal à quatre)), la seconde permet de garder l'esprit prédictif de la loi de commande. Avec cette méthode, la stabilité du système bouclé est garantie pour un degré relatif pouvant atteindre 40 avec un horizon de prédiction de 15s.

Nous présentons, également dans ce chapitre, quelques résultats importants qui se dégagent d'une étude comparative entre les systèmes non linéaires de degré relatif un ou deux, sans dynamique de zéros (ou, le cas échéant de dynamique de zéros stable), bouclés par commande prédictive généralisée non linéaire à temps continu (NCGPC) et les systèmes linéaires (au sens de la fonction de transfert dans le domaine de Laplace) d'ordre 1 ou 2.

Nous abordons, dans le chapitre 3, la poursuite asymptotique de trajectoire aussi bien pour les systèmes non linéaires à une entrée et une sortie (SISO) que pour ceux qui sont multi-entrées multi-sorties (MIMO). Le principe d'élaboration de la loi de commande reste le même dans les deux cas. En effet, il suffit de :

- définir l'erreur entre le signal de sortie et la référence (cas du tracking),
- changer de coordonnées et appliquer la loi de commande de sorte que le système bouclé soit commandable et observable, et,
- faire, enfin, un placement de pôles pour stabiliser le système linéaire résultant.

Quelques exemples sont proposés et des résultats de simulation présentés.

Enfin, nous faisons, dans le dernier chapitre, une étude comparative entre la commande prédictive et la poursuite asymptotique de trajectoire. Pour ces deux méthodes, la structure de la loi de commande est la même. Cependant la loi de commande prédictive est optimale et stabilisante, par construction même. De plus, avec les méthodes de correction proposées au chapitre 2, la limite de stabilité en boucle fermée, fixée par le degré relatif, est repoussée.

Nous présentons également dans ce chapitre les applications étudiées durant cette thèse que sont le moteur Diesel turbocompressé (MDT) et la chaise roulante électrique (au cours d'un séjour d'un mois à Tshwane, en Afrique du Sud).

La première application a été faite sur un modèle d'ordre réduit du MDT dont l'une des caractéristiques principales, en fonction du vecteur de sortie choisi, est le non minimum de phase. Deux méthodes ont été proposées pour résoudre ce problème : le changement du vecteur de sortie et la linéarisation de la dynamique de zéros autour de son point d'équilibre.

La deuxième application, quant à elle, a fait l'objet d'une modélisation sur la base des équations de Lagrange. Cependant aucun problème de non minimum de phase n'a été rencontré. Les lois de commande ont, ensuite, été appliquées aux deux systèmes.

Quelques annexes viennent compléter cette étude.

1

Concepts généraux de la commande prédictive

"Omnis cognitio sine applicatione ad finem inutilis est; quodsi non per se, tamen per accidens et intentionaliter. Nam cujusvis rei utilitas, fine indicatur. Finis philosophiae conservatio et perfectio humani generis".

Traduction : *"Toute connaissance non utilisée en fonction d'une fin est inutile, sinon en elle-même, du moins dans son effet et par l'intention dont elle procède. L'utilité de chaque chose est en effet jugée selon sa fin. La fin de la philosophie est la conservation et le perfectionnement du genre humain",*

Antonius Guilielmus AMO, voir [Some 05].

"Quand on ne sait pas où l'on va, on retourne d'où l'on vient". Sagesse africaine

Sommaire

1.1	Introduction	2
1.2	Théorie de la commande	2
1.3	Philosophie et Principe de la commande prédictive	3
1.4	Etat de l'art	4
1.4.1	La commande prédictive linéaire	4
1.4.2	La commande prédictive non linéaire	10
1.5	Conclusion	17

1.1 Introduction

La commande prédictive ou commande à horizon glissant est une technique de commande basée sur la notion de prédiction du comportement de la dynamique des systèmes (linéaires ou non). Elle a fait ses débuts en 1962 suite aux travaux de Zadeh et Whalen, [Zade 62] dans [Garc 89]. Elle sera connue plus tard dans le monde industriel, particulièrement dans le secteur de la pétrochimie, suite aux travaux de Richalet *et al.* [Rich 78] à cause de la dynamique lente des systèmes pétrochimiques. Grâce à sa capacité à prendre en compte les contraintes, à contrôler les systèmes multivariables et la possibilité qu'elle offre d'utiliser différentes structures de modèle, la commande prédictive (non linéaire (NMPC)) est à présent largement reconnue comme l'une des techniques de contrôle les plus puissantes si ce n'est la seule approche possible dans beaucoup de problèmes de contrôle à résoudre, [Alam 06]. Au fil du temps, beaucoup d'améliorations ont été faites sur cette technique, notamment les travaux de Mayne et Michalska [Mayn 90] et Michalska et Mayne [Mich 93]. Aujourd'hui, elle est également adaptée à la commande des systèmes rapides, [Chem 06] et [Zava 06].

Ce chapitre est organisé comme suit : nous présentons brièvement la théorie de la commande, ensuite l'état de l'art sur la commande prédictive dans les cas linéaire et non linéaire.

1.2 Théorie de la commande

L'objectif de la commande est de pouvoir imposer un comportement voulu par l'opérateur (stabilisation, poursuite de trajectoire, rejet de perturbations) à un système donné, sous réserve qu'il soit commandable. Ce système peut être linéaire ou non. Dans la littérature, les systèmes linéaires sont souvent donnés soit par une représentation d'état, soit par une fonction de transfert. Considérons un système linéaire se déplaçant dans un espace d'état de dimension n à valeurs réelles. Sa dynamique est donnée par la représentation d'état

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

où $x \in X \in \mathbf{R}^n$ est le vecteur d'état, $y \in Y \in \mathbf{R}^p$ le vecteur de sortie, $u \in U \in \mathbf{R}^m$ le vecteur de commande, $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ la matrice de dynamique, $B \in \mathbf{R}^{n \times p}$ la matrice de commande, $C \in \mathbf{R}^{q \times n}$ la matrice d'observation directe, $D \in \mathbf{R}^{n \times p}$ la matrice d'action directe et t le temps. Les ensembles X , Y et U sont, respectivement, des ouverts de $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^p$ et $\mathbf{R}^m$. Dans le cas où $p = q = 1$, le système linéaire est dit single-input single-output (SISO) et multi-input multi-output (MIMO) dans tous les autres cas. Une représentation de la dynamique du système dans l'espace d'état est donnée sur la figure 1.1.

La seconde technique de représentation des systèmes linéaires, appelée fonction de transfert, est basée sur les transformées de Laplace. Soit $G(s)$ la fonction de transfert de notre système :

$$G(s) = Y(s)U^{-1}(s) \quad (1.2)$$

où Y et U sont les transformées de Laplace, respectivement, de la sortie et de la commande de notre système. La variable $s \in \mathbf{C}$, est un nombre complexe. La représentation d'état est temporelle tandis que la fonction de transfert est fréquentielle.

Considérons, à présent, un système non linéaire dont le vecteur d'état se déplace dans un ouvert X de $\mathbf{R}^n$. Il peut être représenté de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = h(x(t), u(t), t) \end{cases} \quad (1.3)$$

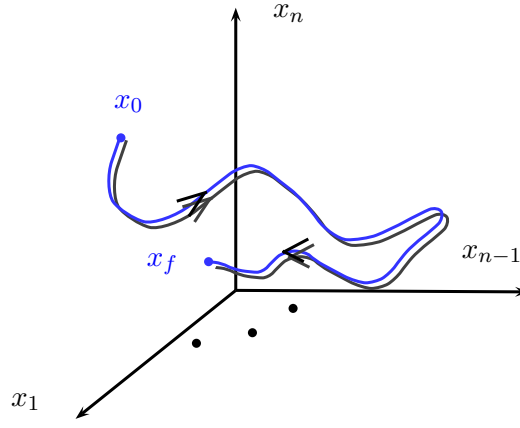


FIGURE 1.1 – Représentation de la dynamique du système linéaire (1.1) dans l'espace d'état.

Parmi ces systèmes non linéaires pouvant être SISO ou MIMO, nous avons, entre autres, des systèmes affines en contrôle. Ce type de systèmes est très répandu dans le cas des méthodes de commande basées sur la linéarisation entrée-sortie par retour d'état, [Isid 95]. Dans le cas SISO, ils ont la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (1.4)$$

où $x \in X \in \mathbf{R}^n$, $y \in Y \in \mathbf{R}$, $u \in U \in \mathbf{R}$ avec X un ouvert de $\mathbf{R}^n$, U et Y des ouverts de $\mathbf{R}$, f et g des champs de vecteurs, h une fonction à valeurs réelles et t le temps. Dans la suite, nous nous intéresserons particulièrement à ce type de système aussi bien dans les cas SISO que MIMO.

Pour commander de tels systèmes, linéaires ou non, différentes techniques de commande ont été développées parmi lesquelles, la commande optimale, la commande linéaire quadratique gaussienne (LQG), la commande linéaire quadratique (LQ), la commande robuste, la commande H_∞ , la commande par retour d'état et la commande prédictive. Le cadre de notre étude porte essentiellement sur la commande prédictive dont nous présenterons l'état de l'art dans la suite.

1.3 Philosophie et Principe de la commande prédictive

La philosophie de la commande prédictive ou commande à horizon glissant, est basée sur la notion essentielle de prédiction, d'où son nom. Il faut prédire le comportement futur du système afin de pouvoir le contrôler par anticipation.

C'est à partir de ce comportement futur, que le problème d'optimisation est posé à travers un critère quadratique, pour l'élaboration d'une loi de commande dans le but de poursuivre une consigne donnée par l'opérateur tout en minimisant le critère construit. Dans le cas d'un problème de poursuite de trajectoire, ce critère est construit sur l'erreur entre le signal de sortie considéré et le signal de référence (à poursuivre).

Outre sa philosophie, le principe de la commande prédictive consiste à utiliser un modèle dynamique du processus à l'intérieur du contrôleur, en temps réel, afin d'anticiper le futur comportement du procédé. Cette méthode de commande est souvent illustrée par le schéma représenté à la figure 1.2. En effet, à chaque pas de calcul, un retour d'état est appliqué au système. Ce retour

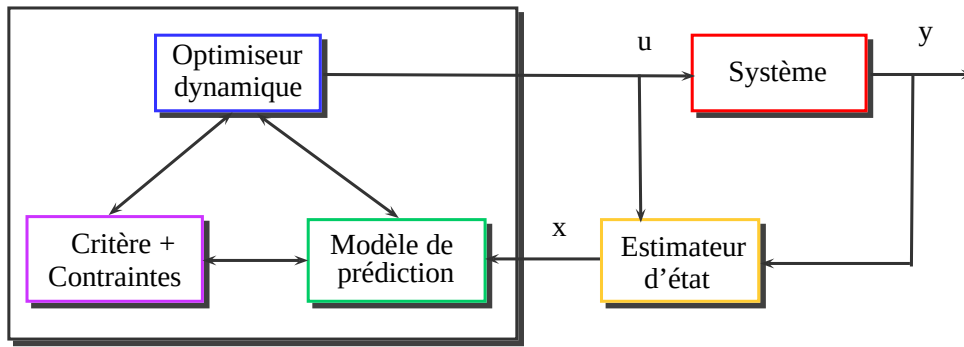


FIGURE 1.2 – Schéma de principe de la commande prédictive.

d'état est la première commande parmi une séquence de commandes calculées par la résolution d'un problème de commande optimale en boucle ouverte à horizon fini. Le critère d'optimisation traduit l'erreur à annuler (cas du tracking) entre un comportement désiré et un comportement prédit par un modèle de prédiction. L'état actuel du système (mesuré ou estimé) est utilisé comme valeur initiale pour la prédiction, voir [Ibra 06].

1.4 Etat de l'art

Notre objectif, dans cette partie, n'est pas de donner un état de l'art exhaustif et détaillé de la commande prédictive mais de permettre au lecteur d'avoir une idée des différentes approches dans le domaine, aussi bien pour la commande prédictive linéaire que pour celle non linéaire. La présentation que nous adoptons ici, qui consiste à exposer séparément le cas académique du cas industriel pour chacune des parties de la commande prédictive, linéaire ou non, n'est faite que par souci de clarté. Loin de nous l'idée selon laquelle il existerait une frontière distincte entre les cas académique et industriel pour la commande prédictive linéaire qui, elle, serait absolument distincte de la non linéaire.

1.4.1 La commande prédictive linéaire

Le cas industriel

En 1962, les relations étroites entre le problème de contrôle optimal et la programmation linéaire ont été reconnues, en premier, par Zadeh et Whalen, [Zade 62] voir dans [Garc 89]. En 1963, Propoi propose une approche à horizon glissant qui est au coeur de tous les algorithmes de commande prédictive (MPC), [Prop 63]. Elle sera connue sous le nom de "Open-Loop Optimal Feedback", [Garc 89]. En 1967, Lee et Markus [Lee 67] proposent un algorithme très proche de la MPC, [Qin 03].

Redécouverte en 1976 suite aux travaux de Richalet *et al.* [Rich 76] sous le nom de Model Predictive Heuristic Control (MPHC), [Garc 89], la commande prédictive a connu, au cours de ces dernières décennies un essor grandissant auprès des industriels. En effet, depuis la méthode IDCOM, pour IDentification-COMmand de Richalet *et al.*, [Rich 78], nombre de méthodes ont été proposées pour des applications industrielles de la commande prédictive. C'est le cas de Cutler et Ramaker en 1979, voir [Cutl 80], qui ont développé, au sein de Shell Oil, un algorithme de commande multivariable sans contraintes qu'ils ont nommé "Dynamic Matrix Control (DMC)". Cet algorithme a été amélioré suite aux travaux de Prett et Gillette [Pret 79] pour permettre

la prise en compte de nonlinéarités et contraintes. Son application a été faite sur une unité de cracking catalytique (FCCU), voir [Qin 03].

D'autres méthodes ont également été proposées et ont trouvé divers champs d'application notamment dans l'aérospatial, l'industrie du papier et la pétrochimie, [Garc 89] et [Qin 03]. Une généalogie de quelques méthodes utilisées dans l'industrie est représentée en figure 1.3.

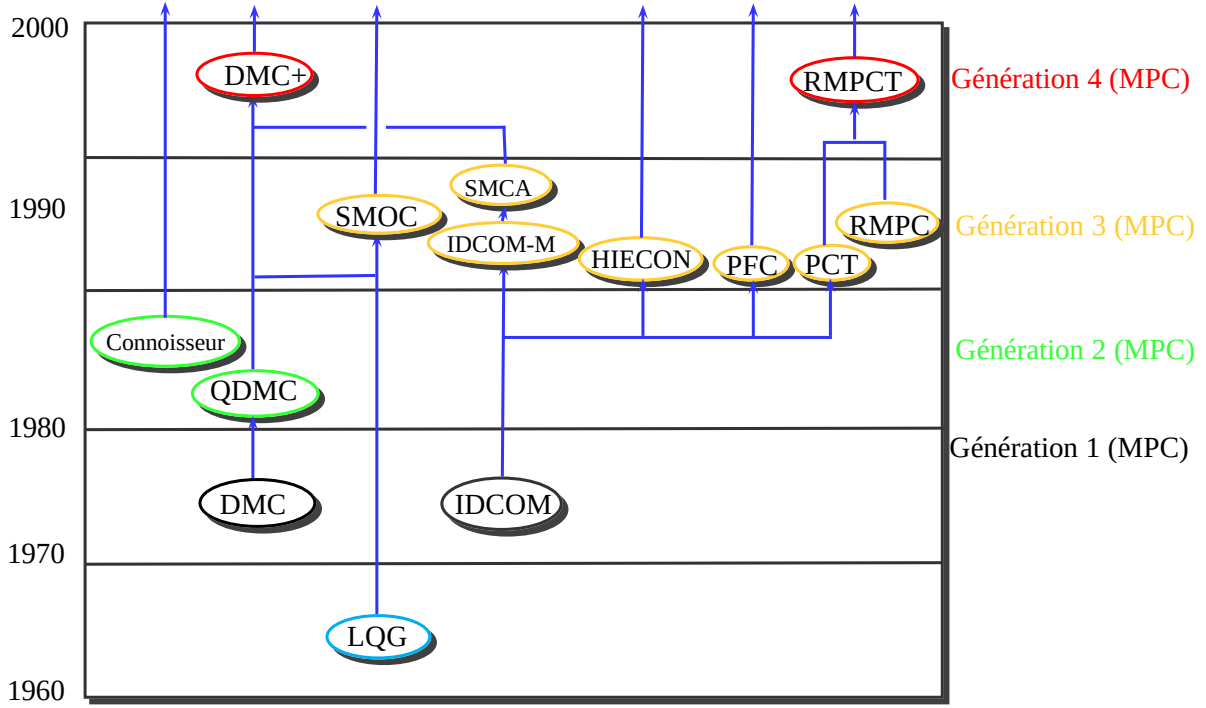


FIGURE 1.3 – Généalogie approximative des algorithmes de la MPC linéaire, tirée de [Qin 03].

Nous présentons brièvement les points-clés de quelques unes d'entre elles ci-dessous, voir [Qin 03]. La première est la commande linéaire quadratique gaussienne.

La méthode LQG (Linear Quadratic Gaussian) : l'origine des techniques de contrôle moderne peut être ramenée aux travaux de Kalman au début des années 60 [Kalm 60a] et [Kalm 60b]. La méthode qu'il propose pour les systèmes linéaires discrets est présentée comme suit :

soit un système linéaire discret de représentation d'état

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Gw_k \\ y_k &= Cx_k + \xi_k \end{aligned} \quad (1.5)$$

où u représente l'entrée du système, x son état et y sa sortie. La matrice G est la matrice des perturbations et w_k leur vecteur bruit d'état. Les bruits mesurés sont représentés par ξ_k . Les vecteurs w_k et ξ_k sont des bruits indépendants gaussiens de moyenne nulle. L'état initial x_0 du système est supposé gaussien de moyenne non nulle.

La loi de commande est élaborée à partir du critère J suivant :

$$J = \sum_{j=1}^{\infty} (\|x_{k+j}\|_Q^2 + \|u_{k+j}\|_R^2), \quad (1.6)$$

où les matrices Q et R sont des matrices de pondération, respectivement, de l'état et de l'entrée. La norme utilisée dans le critère est telle que :

$$\|x\|_Q^2 = x^T Q x.$$

La solution à ce problème connu sous le nom de LQG (Linear Quadratic Gaussian) se calcule en deux étapes.

Dans un premier temps, la mesure y_k de la sortie correspondant à l'instant k est utilisée pour déterminer l'état optimal estimé $\hat{x}_{k|k}$:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k-1} &= A\hat{x}_{k-1|k-1} + Bu_{k-1} \\ \hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1} + K_f(y_k - C\hat{x}_{k|k-1}) \end{aligned} \quad (1.7)$$

où $\hat{x}_{i|j}$ désigne l'état estimé à l'instant i contenant les informations de l'instant j . Enfin, dans un second temps, la commande optimale u_k est donnée par :

$$u_k = -K_c \hat{x}_{k|k}.$$

La matrice K_f est le gain du filtre de Kalman. Il est calculé à partir de la résolution de l'équation de Ricatti. Le gain K_c de la loi de commande peut être déterminé en construisant une équation de Ricatti duale telle que les mêmes techniques numériques utilisées pour déterminer K_f puissent l'être également pour K_c , [Qin 03]. L'utilisation d'un horizon de prédiction infini dote le LQG de véritables propriétés de stabilité sous les conditions de stabilisabilité du système et de détectabilité de ses états.

Seulement, les contraintes sur l'entrée et la sortie ne sont pas prises en compte dans l'élaboration de la loi de commande. Cela n'a pas empêché son utilisation dans de nombreux cas. Cependant, elle ne connaît pas un véritable essor dans le monde industriel à cause de certaines raisons, dont les plus significatives, sont :

- les contraintes ;
- les nonlinéarités du process ;
- les incertitudes de modèle ;
- le critère de performance ;
- et des raisons culturelles (les personnes, l'éducation, etc.), voir [Rich 76] et [Garc 89].

Ce sont, entre autres, ces critères qui ont motivé le développement de la commande prédictive au sens de la méthode de Richalet.

L'approche IDCOM (IDentification-COMmand) : développée en 1978 par Richalet *et al.* [Rich 78], sous le nom de Model Predictive Heuristic Control (MPHC), cette approche est basée sur :

- un modèle à réponse impulsionnelle pour le système, linéaire en entrée (ou des variables internes),
- un critère quadratique à horizon de prédiction fini,
- et une trajectoire de référence.

L'élaboration de lois de commande avec la prise en compte de contraintes sur l'entrée et la sortie, pour une telle approche, est basée sur une heuristique itérative, interprétée comme le dual d'une identification.

L'objectif de la MPHC est d'amener la trajectoire de la sortie future le plus près possible de la trajectoire de référence, définie comme une trajectoire de premier ordre à partir d'une valeur de la sortie à l'instant présent jusqu'à la consigne désirée. La dynamique désirée en boucle fermée est fixée par la constante de temps de la trajectoire de référence : c'est ce qui permet d'avoir un moyen simple de contrôle de l'algorithme. Plus la constante de temps est grande, plus le contrôleur est lent et plus il est robuste.

La DMC (Dynamic Matrix Control) développée au sein de Shell Oil suite aux travaux de Cutler et Ramaker pour les systèmes multivariables sans contraintes a été adaptée par Prett et Gillette, [Pret 79] aux systèmes linéaires à contraintes. Cette nouvelle technique a été appliquée sur une unité de cracking catalytique (FCCU). L'élaboration de la loi de commande à partir d'un problème de moindres carrés nécessite :

- un modèle à réponse indicielle pour le système,
- un critère quadratique à horizon de prédiction fini,
- et une trajectoire de référence.

L'objectif de la commande DMC est d'amener la sortie le plus proche possible de la consigne au sens des moindres carrés, avec un terme de pénalité sur les variables de commande. Ce qui permet d'avoir de faibles signaux de commande et une réponse moins agressive sur la sortie.

Ces deux approches, IDCOM et DMC, font partie de la première génération de la "technologie" MPC. Ils ont eu un important impact sur le contrôle des processus industriels et ont contribué à définir le paradigme de la MPC dans le monde industriel.

La QDMC (Quadratic-program Dynamic Matrix Control) représentant la deuxième génération de la "technologie" MPC (1970 à 1980) est principalement marquée par une amélioration significative de la méthode DMC basée sur la programmation quadratique. En 1983, une dizaine d'années après la DMC, les ingénieurs de Shell, Cutler et Ramaker [Cutl 80], ont posé à nouveau l'algorithme DMC en prenant en compte, cette fois-ci, les contraintes sur les entrées et les sorties de manière explicite. Cette approche a été décrite de manière plus approfondie par Garcia et Morshedi en 1986, [Garc 86]. Nous n'exposerons pas ici ces méthodes dans les détails. Le lecteur pourra se référer à [Qin 03].

Les méthodes MPC de la troisième génération prennent en compte, en plus des contraintes sur l'entrée et la sortie du système, les éventuelles perturbations qui peuvent être à l'origine d'équations sans solution avec l'utilisation de la QDMC entre autres.

Parmi elles, nous avons la méthode IDCOM-M, développée par Shell (France), [Gros 88] et [Froi 90], la méthode HIECON (Hierarchical constraint control) introduite par Adersa et la méthode SMOC (Shell Multivariable Optimizing Controller) développée par Shell (France) [Marq 98] et [Yous 91] décrit comme un lien entre l'espace d'état et les algorithmes MPC.

Les algorithmes de la quatrième génération que sont DMC-plus (Dynamic Matrix Control package) et RMPTC (Robust Model Predictive Control Technology) sont le fruit de la concurrence sur le marché, voir [Qin 03]. La table 1.1 donne une liste non-exhaustive d'entreprises proposant des produits de commande prédictive linéaire dont les étapes pour l'implémentation sont détaillées dans [DMC 94], [Setp 93] et [Inc 95].

TABLE 1.1 – Liste d’entreprises et de produits incluant la MPC, tirée de [Qin 03].

Entreprise	Désignation du produit	Description
Adersa	HIECON	Hierarchical constraint control
	PFC	Predictive functional control
	GLIDE	Identification package
Aspen Tech	DMC-plus	Dynamic matrix control package
	DMC-plus model	Identification package
Honeywell	RMPCT	Robust model predictive control technology
Hi-Spec		
Shell Global Solutions	SMOC-II	Shell multivariable optimizing control
Invensys	Connoisseur	Control and identification package

Le cas académique

Du point de vue académique, d’autres méthodes de commande prédictive axées sur la commande adaptative ont été proposées. Ainsi, nous citons les travaux de Peterka [Pete 84], Ydstie [Ydst 84], DeKeyser [DeKe 88] et l’algorithme assez connu de la commande prédictive généralisée (GPC) de Clarke *et al.* [Clar 87]. Cependant, toutes ces méthodes ont été développées dans le cadre de la commande prédictive linéaire discrète. Nous donnons un peu plus de détails sur la commande prédictive généralisée dans la suite.

L’approche GPC (Generalized Predictive Control) : proposée en 1987 par Clarke *et al.*, [Clar 87], cette méthode est basée sur un modèle CARIMA (Controlled auto-Regressive and Integrated Moving-Average) dont l’équation est donnée par

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + C(q^{-1})\xi(t)/\Delta, \quad (1.8)$$

où A et B sont des polynômes en (q^{-1}) tels que

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_naq^{-na} \\ B(q^{-1}) &= b_0 + b_1q^{-1} + \dots + a_n bq^{-nb} \end{aligned} \quad (1.9)$$

et l’opérateur de différenciation Δ est égal à $1 - q^{-1}$, voir [Clar 87] et [Tuff 85]. La prédiction du vecteur de sortie se fait en s’appuyant sur une équation de Diophante donnée par :

$$1 = E_j q^{-1} A \Delta + q^{-1} F_j(q^{-1}) \quad (1.10)$$

où E_j et F_j sont des polynômes définis à partir de $A(q^{-1})$ et de l’intervalle de prédiction j . D’où l’équation de la sortie prédite :

$$y(t+j|t) = G_j \Delta u(t+j-1) + F_j y(t) \quad (1.11)$$

avec $G_j(q^{-1}) = E_j B = B(q^{-1}) [1 - q^{-j} F_j(q^{-1})] / A(q^{-1}) \Delta$.

La loi de commande GPC est élaborée à partir de la minimisation d'un critère quadratique construit sur l'erreur entre la sortie et le signal de référence et la commande pondérée, voir [Clar 87]. Cependant, aucune contrainte, ni sur l'entrée, ni sur la sortie, n'est prise en compte dans cette méthode. Il a fallu attendre 1993, avec les travaux de Camacho, pour que les contraintes soient prises en compte dans la GPC, [Cama 93].

Par ailleurs, d'autres méthodes s'appuyant sur les systèmes à temps continu ont été développées pour la commande prédictive. L'une d'entre elles, nommée Continuous-time Generalized Predictive Control (CGPC), a été proposée en 1987 par Gawthrop [Gawt 87]. Cependant, son algorithme de base n'apparaît que deux ans plus tard grâce aux travaux de Gawthrop, [Gawt 89] et de Demircioglu et Gawthrop [Demi 91]. Une brève présentation pour le cas monovariable en est donnée dans la suite.

La méthode CGPC (Continuous-time Generalized Predictive Control) s'appuie sur les modèles de système SISO strictement propre :

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)}U(s) + \frac{C(s)}{A(s)}V(s), \quad (1.12)$$

où A , B et C sont des polynômes fonction de la variable de Laplace s . Les variables $Y(s)$, $U(s)$ et $V(s)$ désignent, respectivement, la sortie, la commande et les perturbations.

La prédiction de la sortie est faite à partir du développement en séries de Maclaurin tronquées, [Demi 91]. Elle est donnée par :

$$\hat{y}(t+T) = y(t) + \sum_{k=1}^{N_y} y_k(t) \frac{T^k}{k!}$$

où

$$y_k(t) = \frac{d^k \hat{y}(t+T)}{d(t+T)^k} (T=0) = \frac{d^k y(t)}{dt^k}$$

et N_y est l'ordre de prédiction, [Demi 91].

La loi de commande CGPC est obtenue à partir de la minimisation d'un critère quadratique construit sur l'erreur de prédiction entre la sortie et la référence et sur le développement en séries de Taylor du signal de commande pondéré tel que, [Demi 91]

$$J = \int_{T_1}^{T_2} [y_r^*(t, T) - \omega_r^*(t, T)]^2 dT + \lambda \int_0^{T_2-T_1} [u_r^*(t, T)]^2 dT$$

avec $y_r^*(t, T) = y^*(t+T) - y(t)$ et $u_r^*(t, T) = \sum_{k=0}^{N_u} u_k(t) \frac{T^k}{k!}$.

Plus de détails sont donnés dans les travaux de thèse de Demircioglu, [Demi 89].

La CGPC a été proposée aussi bien pour les systèmes monovariabiles [Demi 91] que multivariabiles [Demi 92b]. Quelques études de cette technique avec prise en compte des contraintes ont été proposées par Demircioglu [Demi 99] et par Demircioglu et Yavuziyilmaz, [Demi 02]. Aussi, quelques propriétés sur la stabilité garantie en boucle fermée pour la CGPC sont données dans [Demi 92a]. Elles sont essentiellement basées sur deux points :

- le premier consiste à forcer l'état du système à zéro, lorsque l'horizon de prédiction est atteint, [Kwon 77] ;

- le second, quant à lui, propose de rajouter un terme quadratique pondéré de l'état final du système (quand l'horizon de prédiction est atteint), au critère quadratique de départ, [Kwon 77].

Ainsi, lorsque la pondération tend vers l'infini, le second point coïncide avec le premier. En revanche, si elle tend vers zéro, cela équivaut à traiter le problème CGPC avec son critère de départ, [Demi 92b].

Quelques études comparatives ont été faites entre la commande prédictive linéaire à temps continu et celle à temps discret, [Demi 00]. Une analyse de stabilité robuste de la CGPC est, par ailleurs, donnée dans [Wang 06].

1.4.2 La commande prédictive non linéaire

La commande prédictive non linéaire (NMPC) est une technique de commande robuste, car pouvant fonctionner avec des incertitudes et perturbations sans directement les prendre en compte. Cette propriété vient du fait que la NMPC est très proche de la commande optimale. Quelques résultats concernant la robustesse inhérente à la NMPC instantanée sont donnés dans [Magn 97], [Chen 82] et [Mayn 00]. D'autres méthodes prenant en compte directement les incertitudes et perturbations sont basées sur la formulation min-max. Nous ne donnerons pas de détails sur ces méthodes de commande dont les principales sont :

- la NMPC robuste qui résout un problème min-max en boucle ouverte, [Lall 94], [Chen 97] et [Blau 99] ;
- la NMPC basée sur la commande H_∞ , [Chen 97], [Magn 01a] et [Magn 01b] ;
- la NMPC robuste qui utilise une optimisation "multi-objective", [Darl 00] et [Rust 94] ;
- la NMPC robuste à travers l'optimisation d'un contrôleur par retour d'état utilisé entre deux pas de calculs, [Koth 96] et [Magn 01b].

D'après Allgöwer et Findeisen, les points clés de la commande prédictive non linéaire (NMPC) sont les suivants, [Allg 04] :

- utilisation directe de modèles non linéaires pour la prédiction ;
- considération explicite des contraintes sur l'état et l'entrée ;
- minimisation "en ligne" d'une fonction coût définie ;
- comportement prédit généralement différent du comportement en boucle fermée ;
- nécessité d'une solution temps réel d'un problème de contrôle optimal en boucle ouverte pour l'application ;
- accessibilité des états du système à la mesure ou à l'estimation pour la prédiction.

Le cas industriel

La NMPC a connu, tout comme la MPC, de nombreuses applications dans le monde industriel. Cependant ces dernières, une centaine, sont beaucoup moins nombreuses que celles de la commande prédictive linéaire (4500 applications industrielles, [Qin 03]). La table 1.2 donne une liste non-exhaustive des entreprises qui commercialisent quelques produits basés sur la technologie de la NMPC.

TABLE 1.2 – Liste d'entreprises et de produits incluant la NMPC, tirée de [Qin 03].

Entreprise	Désignation du produit	Description
Adersa	PFC	Predictive functional control
Aspen Tech	Aspen Target	Nonlinear MPC package
Continental Controls Inc.	MVC	Multivariable control
DOT products	NOVA-NLC	NOVA nonlinear controller
Pavilion Technologies	Process Perfector	Nonlinear control

Nous ne donnerons pas dans cette partie, contrairement à celle de la commande prédictive linéaire, de détails sur quelques uns des différents algorithmes répertoriés dans la table 1.2. Le lecteur pourra se référer à [Qin 03].

Le cas académique

Beaucoup d'efforts ont été faits au cours de ces dernières années pour adapter la commande prédictive aux systèmes non linéaires, voir [Allg 98]. Cependant, elle n'atteindra jamais la simplicité de la commande prédictive linéaire, [Mayn 97].

Après avoir posé le problème général de la NMPC, nous rappèlerons assez rapidement les points essentiels de quelques méthodes de stabilisation utilisées dans la NMPC.

Problème général de la commande prédictive non linéaire Considérons le système non linéaire suivant, [Corr 03] :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (1.13)$$

avec $x(0) = x_0$, soumis aux contraintes d'état et d'entrée :

$$x(t) \in \mathbf{X}, \text{ avec } \mathbf{X} = \{x \in \mathbf{R}^n : x_{min} \leq x \leq x_{max}\}$$

$$u(t) \in \mathbf{U}, \text{ avec } \mathbf{U} = \{u \in \mathbf{R}^{n_u} : u_{min} \leq u \leq u_{max}\}$$

Résoudre un problème de commande prédictive non linéaire (avec contraintes), revient à résoudre le problème de commande optimale en boucle ouverte à horizon fini suivant :

$$\min_{\hat{u}} J(x, \hat{u}, T_p) = \int_t^{t+T_p} (\|\hat{x}(\tau; x(t), t)\|_Q^2 + \|\hat{u}(\tau)\|_R^2) d\tau \quad (1.14)$$

soumis à :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}, \hat{u}) \\ \hat{x}(t; x, t) = x(t) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \hat{x}(\tau; x(t), t) \in \mathbf{X} \\ \hat{u}(\tau) \in \mathbf{U}. \end{cases}$$

Les variables en chapeau sont celles qui sont estimées.

La résolution d'un tel problème soulève deux obstacles majeurs :

- la stabilité pour les systèmes contraints à horizon fini

- et la lourdeur du calcul numérique. En effet, un problème d'optimisation non linéaire doit être résolu "en ligne" et il n'est pas garanti de trouver un optimum global, ou, au pire des cas, même local, voir [Chen 00].

Pour contourner ces obstacles, plusieurs méthodes ont été proposées.

D'une part, pour résoudre le problème de stabilité pour un système sous contraintes à horizon fini, le premier résultat intéressant a été celui de Mayne et Michalska, [Mayn 90]. Ils ont introduit une contrainte d'égalité terminale dans le critère :

$$\hat{x}(t + T_p) = 0.$$

Autrement dit, ils forcent l'état du système à atteindre zéro à la fin de l'horizon de prédiction T_p . Ce retour au critère donne raison au sage : *"quand on ne sait pas où l'on va, on retourne d'où l'on vient"*.

Des résultats similaires ont été proposés par Genceli et Nikolaou, [Genc 93] et Rawlings et Muske, [Rawl 93]. Une illustration de cette idée est donnée figure 1.4.

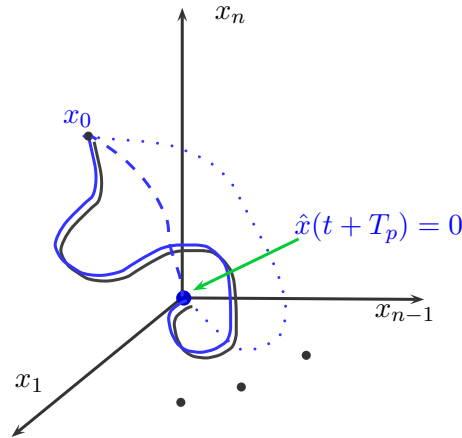


FIGURE 1.4 – Dynamique du système avec une contrainte terminale égalité, voir [Mayn 90].

Cependant, en terme de calcul numérique, résoudre un problème d'optimisation dynamique avec une contrainte égalité est très lourd, voire impossible à résoudre en un temps fini [Chen 00]. En plus de cela, la contrainte terminale imposée se résume en une région très restreinte : un point.

Pour éviter ce problème, Michalska et Mayne [Mich 93] ont proposé d'agrandir la région terminale, voir figure 1.5, en relaxant la contrainte d'égalité terminale au profit d'une contrainte d'inégalité terminale, toujours sur l'état. Elle est telle que :

$$\hat{x}(t + T_p) \leq 0.$$

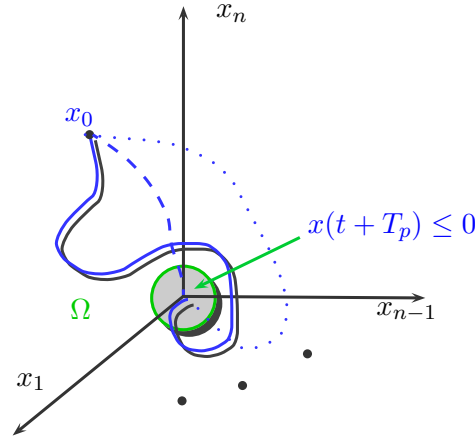


FIGURE 1.5 – Dynamique du système avec une contrainte terminale inégalité, voir [Mich 93].

Avec cette méthode, l'espace d'état du système considéré est divisé en deux parties, [Corr 03] :

- un premier sous-espace, dans laquelle la loi de commande prédictive est appliquée, correspondant à l'extérieur de la région terminale Ω , soit $\mathbf{R}^n \setminus \Omega$
- et un second sous-espace, qui est la région terminale Ω , dans laquelle une loi de commande de retour d'état linéaire est appliquée.

Cette technique reste faisable si le passage entre les deux lois de commande est possible. Autrement dit, il faut que l'état de notre système, à la fin de l'horizon de prédiction T_p , se trouve à la frontière de la région terminale Ω . Le problème de stabilité est alors résolu par une méthode duale.

Suite à leurs travaux, Chen et Allgöwer [Chen 98] ont proposé d'introduire un terme de pénalité terminale

$$\|\hat{x}(t + T_p; x(t), t)\|_P^2$$

dans le critère afin de garantir la stabilité du système dans la région terminale. Cette méthode est appelée commande prédictive non linéaire à horizon quasi-infini. Elle garantit la stabilité du système bouclé. Nous en exposerons les différentes étapes dans la suite.

La QIH-NMPC (Quasi-Infinite Horizon NMPC) C'est une technique basée sur la linéarisation par approximation du système non linéaire considéré. Ses différentes étapes sont les suivantes, [Chen 98] et [Corr 03] :

- **Étape 1** : calculer la linéarisation jacobienne (A,B) du système non linéaire de départ, puis déterminer le retour d'état localement stabilisant : $u = Kx$
- **Étape 2** : choisir une constante positive $\alpha < -\lambda_{\max}(A_K)$ et résoudre l'équation de Lyapunov

$$(A_K + \alpha I)^T P + P(A_K + \alpha I) = -(Q + K^T R K)$$

afin d'obtenir la matrice symétrique et définie positive P , avec $A_K = A + BK$.

- **Étape 3** : trouver le plus grand β_1 définissant la région Ω_1 telle que les contraintes d'état et d'entrée soient satisfaites lorsque $x \in \Omega_1$

$$\Omega_1 = \{x \in \mathbf{R}^n : x^T P x \leq \beta_1\}, \quad \Omega_1 \subseteq \mathbf{X} \text{ et } Kx \in \mathbf{U}, \quad \forall x \in \Omega_1$$

- **Étape 4** : trouver le plus grand $\beta \in]0, \beta_1[$ spécifiant une région terminale Ω

$$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n : x^T P x \leq \beta\}$$

telle que l'état optimal solution du problème d'optimisation suivant soit non positive

$$\max_x = \{x^T P \phi(x) - \alpha x^T P x : x^T P x \leq \beta\}$$

avec $\phi(x) = f(x, Kx) - A_K x$.

- **Etape 5** : choisir l'horizon de prédiction T_p satisfaisant

$$T_p \geq T_c + T_s$$

où T_s est le temps maximum nécessaire pour que le système non commandé atteigne Ω en partant de x_0 .

Cependant, la loi de commande par retour d'état linéaire dans la région terminale n'est jamais implémentée. Avec cette méthode et à chaque pas d'échantillonnage, le problème d'optimisation non linéaire est résolu "en ligne" avec des contraintes sur l'entrée et les contraintes d'inégalité terminale.

Mis à part les méthodes ci-dessus, sur la stabilité du NMPC, d'autres méthodes basées sur une approche d'optimalité inverse (c'est-à-dire telle que la loi de commande reste également optimale même si le problème de contrôle optimal a été transformé en un problème à horizon infini, [Allg 04]) ont été examinées par Magni et Sepulchre, voir [Magn 97].

Bien que d'autres résultats rigoureux pour la stabilité de la NMPC aient été établis, ils ne sont pas implémentables en pratique, [Magn 97] et [Gyur 98].

D'autre part, la longueur du calcul numérique pour la NMPC génère deux sous-problèmes pour son implémentation : un problème de retard et un problème de minimum global puisqu'en général, le problème d'optimisation non linéaire à contraintes est un problème non convexe, [Chen 00]. Face à une telle situation et suite aux travaux de Chen et Allgöwer [Chen 98], Scokaert *et al.* [Scok 99] ont proposé une alternative pour les systèmes discrets où ils soulignent que la faisabilité implique la stabilité pour les MPC avec retour d'état linéaire. Le problème des retards dus aux calculs a été investigué par beaucoup d'auteurs dont Pierre et Pierre, [Pier 95] ainsi que Rattan, [Ratt 89]. D'autres propositions ont été faites pour les systèmes linéaires, voir [Wiss 97] et [Casa 98] ainsi que les travaux de Gomma et Owen, [Gomm 98]. Ces derniers ont proposé une commande prédictive généralisée à retard dont le contrôle dépend plus des mesures passées, que des mesures passées et présentes.

Bien que la charge de calcul soit plus lourde pour la NMPC, seul l'algorithme proposé par Ronco *et al.* [Ronc 99] appelé Open-Loop Intermittent Feedback Optimal controller (OLIFO), considère les retards de calcul pour son implémentation, [Chen 00]. Aussi, la mesure du retard est considérée dans les travaux de Chen et Allgöwer, [Chen 98].

Il y a une dizaine d'années (1999), Chen *et al.* [Chen 99c] ont proposé un algorithme pour résoudre les problèmes de stabilité et de charge de calcul que pose la NMPC. Avec cette méthode, l'optimisation "en ligne" n'est pas nécessaire et la stabilité est garantie. De plus, il est montré que la méthode de contrôle par inversion dynamique est un cas particulier de cet algorithme MPC, [Chen 99b]. Cependant, cette méthode n'est applicable que sur des systèmes non linéaires à dynamique des zéros stable et à degré relatif bien défini, [Chen 00].

Une autre approche a été proposée pour la résolution des problèmes d'optimisation "en ligne". En effet, Lu [Lu 95], M. Soroush et H.M. Soroush [Soro 97] et Siller-Alcalá [Sill 98] ont fixé l'ordre du signal de contrôle à zéro, ce qui revient à rendre constant l'effort de contrôle dans un intervalle de prédiction donné. Cependant, cette méthode présente une limite puisque le développement en

séries de Taylor ne peut se faire que jusqu'à un ordre égal au degré relatif.

Une autre méthode a été proposée en 1998 par Siller-Alcalá, sous le nom de Nonlinear Continuous-time Generalized Predictive Control (NCGPC), [Sill 98] et [Gawt 98b]. C'est une méthode de commande qui s'appuie sur les séries de Taylor et qui est robuste, [Sill 08]. De plus, elle permet d'éviter les problèmes d'optimisation "en ligne" puisque la loi de commande prédictive est calculée "hors ligne". Seules les mesures de l'état sont faites pour la mise à jour de la loi de commande. Aussi, cette technique se fait en boucle fermée et est très proche de la méthode de linéarisation entrée/sortie par retour d'état, [Sill 98] et [Gawt 98a]. Un bref rappel en est donné dans la suite.

NCGPC (Nonlinear Continuous-time Generalized Predictive Control) L'objectif avec cette méthode de commande est de faire de la poursuite asymptotique de trajectoire de la sortie $y(t)$ sur la référence $\omega(t)$ tout en minimisant un critère quadratique construit sur l'erreur de prédiction entre la référence et la sortie. Comme nous le verrons plus en détail dans le chapitre 2, son algorithme est basé sur un modèle non linéaire affine en contrôle tel que :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u.$$

La prédiction de la sortie est faite à partir de son développement en séries de Taylor. Son équation est donnée par :

$$\hat{y}(t + \tau) \simeq \sum_{k=0}^{\rho} \frac{\tau^k}{k!} y^{(k)}(t).$$

Il en est de même pour la référence. La loi de commande NCGPC est élaborée à partir de la minimisation d'un critère quadratique de façon analytique. En plus de son caractère robuste, la NCGPC permet de résoudre des problèmes de commande de systèmes à non minimum de phase mais également de systèmes dont le degré relatif est mal défini, [Sill 98]. Une approche plus générale de cette technique de commande pour une classe de systèmes non linéaires utilisant les approximations est donnée dans [Chen 04]. Mrabet *et al.* [Mrab 04] se sont appuyés sur la NCGPC pour proposer une technique de commande adaptative pour des systèmes non linéaires. Par ailleurs, des études ont été menées sur les contrôleurs PID (proportional-integral-derivative) prédictifs non linéaires pour des systèmes SISO, [Chen 99c] et MIMO, [Feng 02]. Une étude comparative entre la commande LQR (linear quadratic regulator) et la NCGPC, [Chen 99a], montre, entre autres, que la stabilité en boucle fermée est obtenue pour la NCGPC avec un horizon de prédiction fini et un changement de coordonnées adéquat. De plus, comme montré par Chen, [Chen 03], quelque soit l'horizon de prédiction fixé, le système bouclé est instable si son degré relatif est strictement supérieur à quatre. Nous y reviendrons. En effet, *optimalité n'implique pas stabilité*, [Kalm 60a]. Pour résoudre ce problème d'instabilité, Chen propose de choisir l'ordre des dérivées successives du contrôle suffisamment grand, tel que sa différence avec le degré relatif soit inférieure ou égale à quatre, [Chen 03].

Par contre, avec cette approche, des calculs supplémentaires sont nécessaires sur les dérivées d'ordre supérieur au degré relatif de la sortie ou, dans le cas MIMO, de chaque composante du vecteur de sortie de degré relatif strictement supérieur à quatre. De plus, un paramètre supplémentaire, qui est l'ordre des dérivées successives de la commande, est rajouté aux deux paramètres originels de la NCGPC que sont le degré relatif, paramètre intrinsèque au système non linéaire considéré et l'horizon de prédiction, paramètre extrinsèque.

Dans la suite de leurs travaux, nous proposons deux alternatives basées sur la modification du critère quadratique servant à l'élaboration de la loi de commande. Ces dernières permettent

de résoudre le problème de stabilité d'une classe de systèmes non linéaires de degré relatif strictement supérieur à quatre bouclés par NCGPC, sans rajouter de paramètres supplémentaires mais seulement quelques termes de correction. En effet, la première approche consiste à rajouter un terme, proportionnel au contrôle, au critère initial. Ce terme a pour rôle d'agir comme un placement de pôles sur le système linéaire bouclé, dans un nouveau système de coordonnées obtenu par difféomorphisme. Nous pouvons noter que le paradigme que nous proposons ici permet de conduire l'état du système dès le départ (dès les conditions initiales de l'équation différentielle), jusqu'à sa position d'équilibre. La figure 1.6, où x_0 est l'état initial du système, x_f^1 et x_f^2 ses états finaux instables et x_f^c son état final stable, en est une illustration. Les traits discontinus représentent les trajectoires instables et les traits continus celles stables.

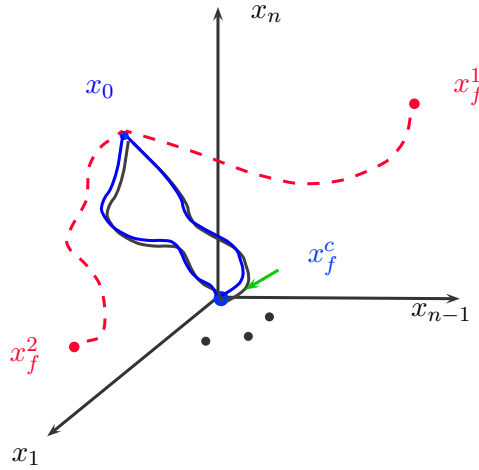


FIGURE 1.6 – Dynamique d'un système non linéaire de degré relatif strictement supérieur à quatre bouclé par NCGPC.

Cependant, avec cette approche, le caractère prédictif de la loi de commande n'est pas conservé, voir [Dabo 09a]. La seconde approche est menée en rajoutant une matrice de correction "intelligente" à la matrice de prédiction du critère de départ. Nous qualifions cette matrice d'intelligente du fait qu'elle s'annule de facto lorsque la correction n'est pas nécessaire, en d'autres termes, lorsque le degré relatif est inférieur ou égal à quatre. Avec cette méthode, la stabilité du système bouclé par NCGPC est garantie pour des systèmes dont le degré relatif peut atteindre 40 avec des valeurs spécifiques de l'horizon de prédiction et, de surcroît, le caractère prédictif de la loi de commande est conservé.

Dans le même sens, nous mettons en exergue quelques propriétés entre les systèmes SISO non linéaires de degré relatif 1 ou 2 bouclés par NCGPC et les systèmes linéaires (au sens de fonction de transfert) de mêmes ordres, respectivement. Les résultats sont donnés en détail au chapitre 2 suivant.

Cependant, dans cette étude, nous ne prenons pas en compte les contraintes, ni sur l'entrée, ni sur la sortie et non plus sur l'état de notre système.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné une présentation succincte de la théorie de la commande pour des systèmes aussi bien linéaires que non. Nous avons, par ailleurs, présenté l'état de l'art de la commande prédictive pour chacun de ces deux types de systèmes en mettant en lumière les cas industriel et académique. Le contexte de nos travaux a été situé. Dans le chapitre 2 suivant, nous donnerons les détails de l'approche de commande prédictive à temps continu et proposerons quelques algorithmes pour la garantie de stabilité en boucle fermée d'une classe de systèmes non linéaires dont le degré relatif est strictement supérieur à quatre.

2

Commande prédictive généralisée non linéaire à temps continu (NCGPC) : garantie de stabilité

"Parfois, il vaut mieux que certaines choses gardent leur défaut au lieu qu'elles soient corrigées, car en leur apportant la correction désirée, nous les améliorons certes, mais nous les dénaturons". Marcelin Dabo

"Il existe des phénomènes optimaux, stabilisants, qui restent optimaux, et dont on améliore considérablement le caractère stabilisant, si l'on apporte, dans la mesure du possible, des modifications intelligentes, sans toutefois les dénaturer, au sein d'eux-mêmes". Marcelin Dabo

"L'intelligence, c'est agir, uniquement, quand l'action s'impose, par rapport à nos objectifs". Marcelin Dabo

"La nature est bien ordonnée : l'atemporel a des conséquences atemporelles, le temporel des conséquences temporelles et le fréquentiel des conséquences fréquentielles". Marcelin Dabo

Sommaire

2.1	Introduction	20
2.2	Présentation de la commande sans contraintes : le cas SISO	21
2.2.1	Elaboration de la loi de commande pour un système SISO carré de degré relatif inférieur ou égal à quatre	22
2.2.2	Proposition de méthodes de correction (degré relatif strictement supérieur à quatre)	49
2.3	Présentation de la commande sans contraintes : le cas MIMO	68
2.3.1	Elaboration de la loi de commande pour un système MIMO carré	68
2.4	Conclusion	82

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une méthode de commande basée sur la minimisation d'un critère quadratique construit sur la prédiction de l'erreur entre la sortie choisie et la référence, jusqu'à un ordre fixé égal au degré relatif du système non linéaire considéré. Notre objectif est de faire une poursuite asymptotique de trajectoire.

Cette méthode, entre autres, permet de traiter le problème de la poursuite de trajectoire sans aucune opération préalable de discrétisation. En effet, le modèle mathématique du système non linéaire est considéré dans sa forme naturelle, autrement dit, dans le domaine continu. La méthode fait appel à des techniques de la géométrie différentielle. Quelques caractéristiques importantes de la linéarisation entrée-sortie par retour d'état ou "Input/Output Feedback Linearization" (I/O FL) (que nous noterons simplement (FL) dans la suite), tel le degré relatif, sont utilisées.

Comme énoncé précédemment, le critère quadratique est construit sur l'erreur de prédiction, qui elle, est bâtie sur la différence entre la sortie (ou vecteur de sortie) et la référence (ou vecteur de référence) ce qui justifie le terme commande prédictive (optimale) ici invoqué. De plus, cette méthode est appliquée à un système non linéaire à temps continu, d'où l'appellation de commande prédictive (optimale) généralisée non linéaire à temps continu ou "Nonlinear Continuous-time Generalized Predictive Control" (NCGPC).

L'utilisation de cette technique de commande conduit à un système linéaire bouclé dont la stabilité est garantie. Ce résultat reste vrai pour les systèmes dont le degré relatif est, au plus, égal à 4.

Dans le cas où le degré relatif est strictement supérieur à 4, un problème d'instabilité du système bouclé se pose.

Pour le contourner, Chen *et al.*, [Chen 01], proposent d'introduire, en plus des deux paramètres de la NCGPC que sont le degré relatif (paramètre intrinsèque au système) et l'horizon de prédiction (paramètre extrinsèque au système), un troisième paramètre qui est l'ordre des dérivées successives de la commande. Ils ont montré que la stabilité en boucle fermée est assurée, si la différence entre le degré relatif et l'ordre des dérivées successives de la commande est inférieure à quatre.

Dans le même sens, nous proposons ici deux approches dont le point commun est la modification du critère avec le maintien à zéro de l'ordre des dérivées successives de la commande et la garantie de stabilité du système linéaire bouclé résultant. Cependant, aucun paramètre supplémentaire n'est ajouté aux paramètres originels de la NCGPC.

La première approche consiste à ajouter un terme linéaire en contrôle u au critère quadratique. Ainsi, la minimisation du critère donne lieu à une loi de commande avec possibilité de faire un placement de pôles. Ce qui garantit la stabilité du système linéaire résultant. Cependant, la manière dont les pôles sont placés ne permet pas de garder le caractère prédictif de la commande. Autrement dit, l'action de l'horizon de prédiction est, entre autres, vaine sur le(s) temps de réponse du système linéaire bouclé.

C'est donc pour garder ce caractère prédictif que nous proposons une deuxième approche de correction qui consiste à rajouter, à la matrice de prédiction du critère, une matrice de correction "intelligente". En effet, elle s'annule de facto lorsque la correction n'est pas nécessaire, c'est-à-dire lorsque le degré relatif est inférieur ou égal à quatre. Avec la méthode de placement de pôles proposée ici, nous garantissons la stabilité du système linéaire bouclé, pour un degré relatif au plus égal à quarante avec des valeurs spécifiques de l'horizon de prédiction. Le caractère prédictif de la commande est donc sauvegardé. Avec cette approche et au-delà d'une certaine valeur du degré relatif, l'action de l'horizon de prédiction est double. En effet, il agit sur le(s) temps de réponse du système linéaire bouclé mais également sur sa stabilité.

Ce chapitre s'articule autour de deux axes principaux : la NCGPC dans le cas single-input single-output (SISO) et la NCGPC dans le cas multi-input multi-output (MIMO). Dans le premier cas, nous présenterons la NCGPC proprement dite. Nous présenterons, ensuite, les méthodes de correction de la loi de commande que nous proposons, toujours dans le cas particulier du degré relatif strictement supérieur à quatre, qui nous intéresse.

Dans le deuxième cas, nous donnerons les différentes étapes d'élaboration de la loi de commande à partir d'un système non linéaire MIMO carré (dont le nombre d'entrées est égal au nombre de sorties). Les méthodes de correction proposées dans le cas SISO, étant les mêmes que dans le cas MIMO, ne sont pas rappelées en détail. Cependant, une illustration des méthodes de correction proposées est présentée à travers un exemple académique.

2.2 Présentation de la commande sans contraintes : le cas SISO

Soit un système non linéaire SISO de la forme suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{2.1}$$

où le vecteur d'état $x \in X \subset \mathbf{R}^n$, la sortie $y \in Y \subset \mathbf{R}$ et la commande $u \in U \subset \mathbf{R}$, avec X un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et U et Y des ouverts de $\mathbf{R}$. La NCGPC sans contraintes, consiste à élaborer une loi de commande, à partir de la minimisation d'un critère quadratique basé sur l'erreur de prédiction, dans le but de poursuivre un signal de référence $\omega(t)$ tel que l'erreur entre la sortie et la référence tende asymptotiquement vers zéro. Ceci, sans tenir compte de contraintes sur le vecteur d'état, la commande et la sortie. Pour une meilleure clarté de l'exposé, nous donnons quelques rappels sur les dérivées de Lie, le degré relatif et la dynamique des zéros.

Notre objectif, tout au long de ce chapitre, est de traiter un problème de poursuite asymptotique de trajectoire sur un signal de référence tout en minimisant une fonction coût définie. Autrement dit, il s'agit de fixer un signal de référence $\omega(t)$ et de faire tendre la sortie $y(t)$ vers $\omega(t)$ en utilisant une loi de commande optimale et prédictive.

Dérivées de Lie : Pour simplifier la présentation dans la suite du mémoire, nous utilisons la notation standard des dérivées de Lie. Ainsi, pour une fonction donnée h dans $\mathbf{R}^n$ à valeurs réelles et un champ de vecteurs $f = (f_1, \dots, f_n)^t$ dans $\mathbf{R}^n$, la dérivée de Lie de h le long de f en $x \in \mathbf{R}^n$ est donnée par :

$$L_f h(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) f_i(x).$$

De façon inductive, on définit

$$L_f^k h(x) = L_f L_f^{k-1} h(x) = \frac{\partial L_f^{k-1} h}{\partial x}(x) f(x),$$

avec $L_f^0 h(x) = h(x)$, [Isid 95].

Degré relatif : Un système SISO non linéaire, de la forme (2.1) ci-dessus, a un degré relatif ρ autour de x^0 si :

- (i) $L_g L_f^k h(x) = 0$ pour tout x dans un voisinage de x^0 et tout $k < \rho - 1$,
- (ii) $L_g L_f^{\rho-1} h(x^0) \neq 0$, [Isid 95].

Le degré relatif ρ du système (2.1) est bien défini si la condition (ii) est vérifiée en tout point d'un ensemble $\overline{X}$ fixé, [Chen 01].

Dynamique des zéros : Elle correspond à la dynamique qui régit le comportement "interne" du système étudié quand l'entrée et les conditions initiales ont été choisies de manière à ce que la sortie soit identiquement nulle, [Isid 95].

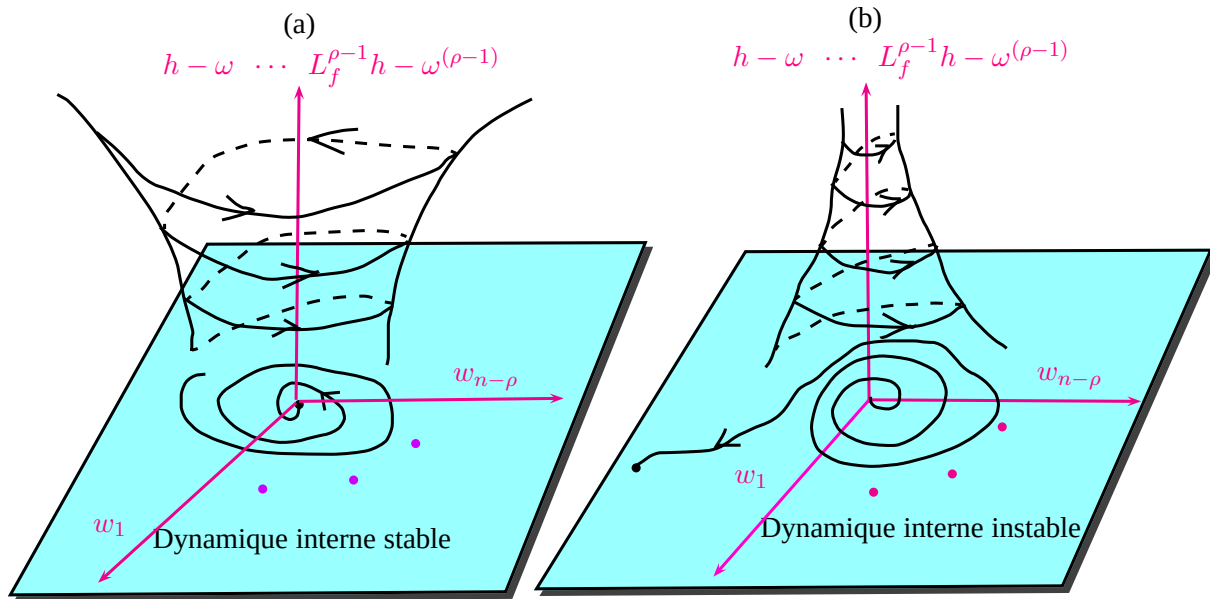


FIGURE 2.1 – Systèmes à minimum de phase (a) et à non minimum de phase (b).

2.2.1 Elaboration de la loi de commande pour un système SISO carré de degré relatif inférieur ou égal à quatre

Elle se fait à partir de la minimisation d'un critère quadratique construit sur l'erreur de prédiction. Cette prédiction est la différence entre les prédictions de la sortie et du signal de référence, voir figure 2.1.

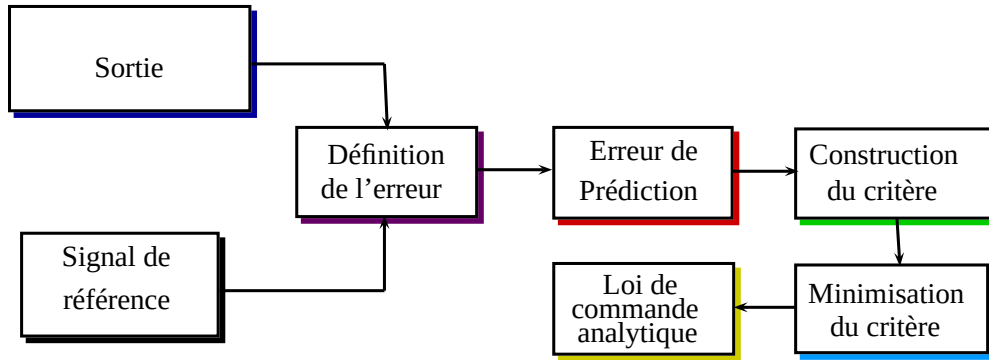


FIGURE 2.2 – Schéma fonctionnel de l'élaboration de la loi de commande NCGPC.

Prédiction de la sortie

Le développement en série de Taylor de la sortie y à l'instant τ jusqu'à un ordre fixé quelconque N_y , ici égal au degré relatif ρ est :

$$\hat{y}(t + \tau) = \sum_{k=0}^{\rho} y^{(k)}(t) \frac{\tau^k}{k!} + R(\tau^\rho) \quad (2.2)$$

où t correspond à l'instant présent et $t + \tau$ à l'instant de prédiction. Le terme $R(\tau^\rho)$ représente les éléments d'ordre supérieur du développement qui, lorsqu'ils sont négligés, donnent l'équation suivante :

$$\hat{y}(t + \tau) \approx \sum_{k=0}^{\rho} y^{(k)}(t) \frac{\tau^k}{k!}. \quad (2.3)$$

En réécrivant cette équation sous forme matricielle, il vient

$$\hat{y}(t + \tau) \cong \begin{bmatrix} 1 & \tau & \frac{\tau^2}{2!} & \cdots & \frac{\tau^\rho}{\rho!} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(\rho-1)}(t) \\ y^{(\rho)}(t) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

dont la sortie $y(t)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre ρ sont données par

$$\begin{cases} y(t) = h(x(t)) \\ \dot{y}(t) = L_f h(x(t)) \\ \vdots \\ y^{(\rho-1)}(t) = L_f^{\rho-1} h(x(t)) \\ y^{(\rho)}(t) = L_f^\rho h(x(t)) + L_g L_f^{\rho-1} h(x(t)) u(t) \end{cases}. \quad (2.5)$$

Par conséquent, la prédiction de la sortie est :

$$\hat{y}(t + \tau) \cong \begin{bmatrix} 1 & \tau & \frac{\tau^2}{2!} & \cdots & \frac{\tau^\rho}{\rho!} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(x(t)) \\ L_f h(x(t)) \\ \vdots \\ L_f^{\rho-1} h(x(t)) \\ L_f^\rho h(x(t)) + L_g L_f^{\rho-1} h(x(t)) u(t) \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Développement du signal de référence

Nous supposons, dans cette étude, que la trajectoire de référence $\omega(t)$ est connue. Par analogie au développement de la sortie, voir équation (2.4), nous avons l'expression suivante pour le signal de référence :

$$\hat{\omega}(t + \tau) \cong \begin{bmatrix} 1 & \tau & \frac{\tau^2}{2!} & \cdots & \frac{\tau^\rho}{\rho!} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) \\ \vdots \\ \omega^{(\rho-1)}(t) \\ \omega^{(\rho)}(t) \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Notre but est de trouver une loi de commande telle que, la sortie y poursuive asymptotiquement, pour un horizon de prédiction fixé, le signal de référence ω , lorsque le temps t tend vers l'infini. Pour atteindre cet objectif, définissons l'erreur e telle que

$$e(t) = y(t) - \omega(t). \quad (2.8)$$

Elle tendra vers zéro lorsque la sortie tend vers le signal de référence, sous l'effet optimal d'une loi de commande résultant de la NCGPC. Le développement de cette erreur est obtenu à partir des équations (2.6) et (2.7) précédentes.

Erreur de prédiction

Soit $\hat{e}(t + \tau)$ l'erreur de prédiction à l'instant $(t + \tau)$, défini comme suit :

$$\hat{e}(t + \tau) = \hat{y}(t + \tau) - \hat{\omega}(t + \tau). \quad (2.9)$$

Soit $\Lambda(\tau)$, un vecteur ligne tel que

$$\Lambda(\tau) = \left[1 \quad \tau \quad \frac{\tau^2}{2!} \quad \cdots \quad \frac{\tau^\rho}{\rho!} \right]. \quad (2.10)$$

Posons

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(\rho-1)}(t) \\ y^{(\rho)}(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Omega(t) = \begin{bmatrix} \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) \\ \vdots \\ \omega^{(\rho-1)}(t) \\ \omega^{(\rho)}(t) \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Alors, l'erreur prédite s'écrit

$$\hat{e}(t + \tau) = \Lambda(\tau)Y(t) - \Lambda(\tau)\Omega(t), \quad (2.12)$$

ou, de manière équivalente

$$\hat{e}(t + \tau) = \Lambda(\tau)[Y(t) - \Omega(t)]. \quad (2.13)$$

En posant

$$E(t) = Y(t) - \Omega(t),$$

il vient

$$\hat{e}(t + \tau) = \Lambda(\tau)E(t). \quad (2.14)$$

La construction du critère peut donc être faite pour l'élaboration de la loi de commande.

Construction du critère et élaboration de la loi de commande

L'élaboration de la loi de commande NCGPC va se faire dans un but de poursuite asymptotique d'un signal de référence tout en minimisant un critère quadratique construit sur l'erreur de prédiction. Cependant, cette opération nécessite la vérification des hypothèses A1 à A4 suivantes, [Chen 03] et [Chen 01] :

- A1 : la dynamique des zéros existe et est asymptotiquement stable ;
- A2 : tous les états sont mesurables ;
- A3 : le système étudié a un degré relatif ρ bien défini ;

A4 : la sortie $y(t)$ et le signal de référence $\omega(t)$ sont suffisamment plusieurs fois continument différentiables par rapport au temps [Nijm 90].

Supposons ces assomptions vraies et considérons le critère quadratique J défini de la façon suivante :

$$J(t) = \frac{1}{2} \int_0^T [\hat{e}(t + \tau)]^2 d\tau, \quad (2.15)$$

où T est l'horizon de prédiction, t l'instant présent et τ , l'instant auquel la présentation est faite, appartenant à l'intervalle $[t, t + T]$.

L'équation (2.14) dans (2.15) entraîne :

$$J(t) = \frac{1}{2} \int_0^T E^t(t) \Lambda^t(\tau) \Lambda(\tau) E(t) d\tau \quad (2.16)$$

ou, de manière équivalente,

$$J(t) = \frac{1}{2} E^t(t) \left[\int_0^T \Lambda^t(\tau) \Lambda(\tau) d\tau \right] E(t) \quad (2.17)$$

car le vecteur E n'est pas fonction de la variable τ mais de la variable t . Pour des raisons pratiques, posons $\Pi(T, \rho)$ de dimensions $(\rho + 1) \times (\rho + 1)$, la "matrice de prédiction" définie comme suit :

$$\Pi(T, \rho) = \int_0^T \Lambda^t(\tau) \Lambda(\tau) d\tau. \quad (2.18)$$

Les détails de calcul de cette matrice et de ses expressions simplifiées Π_s et Π_{ss} sont donnés à l'annexe A.

Le critère J peut donc être réécrit comme :

$$J(t) = \frac{1}{2} E^t(t) \Pi(T, \rho) E(t). \quad (2.19)$$

Ainsi, la loi de commande est élaborée à partir de la minimisation du critère (2.19) par rapport à la commande u . D'où :

$$\frac{\partial J}{\partial u} = 0. \quad (2.20)$$

Par conséquent

$$\left(\frac{\partial E(t)}{\partial u(t)} \right)^t \Pi(T, \rho) E(t) = 0. \quad (2.21)$$

Le vecteur E , défini plus haut est :

$$E = \begin{bmatrix} y - \omega \\ \dot{y} - \dot{\omega} \\ \vdots \\ y^{(\rho-1)} - \omega^{(\rho-1)} \\ y^{(\rho)} - \omega^{(\rho)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h - \omega \\ L_f h - \dot{\omega} \\ \vdots \\ L_f^{\rho-1} h - \omega^{(\rho-1)} \\ L_f^\rho h - \omega^{(\rho)} + u L_g L_f^{\rho-1} h \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Séparant les termes qui contiennent la commande u de ceux qui ne la contiennent pas, implique :

$$E = \begin{bmatrix} h - \omega \\ L_f h - \dot{\omega} \\ \vdots \\ L_f^{\rho-1} h - \omega^{(\rho-1)} \\ L_f^\rho h - \omega^{(\rho)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{\rho \times 1} \\ u L_g L_f^{\rho-1} h \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Ainsi :

$$\frac{\partial E}{\partial u}(x(t)) = \begin{bmatrix} 0_{\rho \times 1} \\ L_g L_f^{\rho-1} h(x(t)) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

et sa transposée est

$$\left(\frac{\partial E}{\partial u} \right)^t (x(t)) = \begin{bmatrix} 0_{1 \times \rho} & L_g L_f^{\rho-1} h(x(t)) \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Pour des raisons de simplicité d'écriture, définissons D tel que

$$D(x(t)) = L_g L_f^{\rho-1} h(x(t)). \quad (2.26)$$

Nous écrirons également, pour les mêmes raisons, les équations suivantes jusqu'à (2.35) sans leurs arguments. Donc, en remplaçant l'équation (2.26) dans (2.25) et (2.22) puis le résultat de la première opération dans (2.21) et en introduisant l'équation (2.22) dans l'équation (2.21), il vient :

$$\begin{bmatrix} 0_{1 \times \rho} & D \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} h - \omega \\ \vdots \\ L_f^\rho h - \omega^{(\rho)} + Du \end{bmatrix} = 0 \quad (2.27)$$

et après simplifications

$$D \Pi_s \begin{bmatrix} h - \omega \\ \vdots \\ L_f^\rho h - \omega^{(\rho)} + Du \end{bmatrix} = 0 \quad (2.28)$$

où Π_s , de dimensions $1 \times (\rho + 1)$, correspond à la dernière ligne de la matrice de prédiction Π , voir annexe A. Comme le degré relatif est supposé bien défini, D ne peut en aucun cas s'annuler, quelque soit $x \in X$. Par conséquent, en séparant l'équation (2.28) en deux parties dont l'une contient u et l'autre non, il vient :

$$\Pi_s \begin{bmatrix} 0_{\rho \times 1} \\ Du \end{bmatrix} = \Pi_s \begin{bmatrix} \omega - h \\ \vdots \\ \omega^{(\rho)} - L_f^\rho h \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

En simplifiant la partie qui contient u dans l'équation (2.29) ci-dessus, il vient

$$\Pi_{ss} Du = \Pi_s \begin{bmatrix} \omega - h \\ \vdots \\ \omega^{(\rho)} - L_f^\rho h \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

où Π_{ss} , voir (A.7) dans l'annexe A, de dimensions 1×1 , correspond au dernier élément du vecteur Π_s . La loi de commande est alors :

$$u = D^{-1} (\Pi_{ss}^{-1} \Pi_s) \begin{bmatrix} \omega - h \\ \vdots \\ \omega^{(\rho)} - L_f^\rho h \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Soit la matrice de gain $K = K(T, \rho)$ telle que

$$K = \Pi_{ss}^{-1} \Pi_s. \quad (2.32)$$

Elle est égale à :

$$K(T, \rho) = \begin{bmatrix} \frac{\rho!}{T^\rho} \frac{2\rho+1}{\rho+1} & \cdots & \frac{\rho!}{T^{\rho-k}} \frac{2\rho+1}{(k)!(\rho+k+1)} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

voir (A.11) dans l'annexe A. Soit $K_{\rho l}$ la $(l+1)$ ^{ème} (ou j ^{ème}) colonne de la matrice $K(T, \rho)$. Alors $K_{\rho l}$ est égal à :

$$K_{\rho l} = \frac{\rho!}{T^{\rho-l}} \frac{(2\rho+1)}{l!(\rho+l+1)} \quad (2.34)$$

pour tout $0 \leq l = j-1 \leq \rho$. D'où la loi de commande suivante :

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h} K \begin{bmatrix} \omega - h \\ \vdots \\ \omega^{(\rho)} - L_f^\rho h \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

qui, réécrite sous une forme développée, donne

$$u(x(t)) = \frac{-\sum_{l=0}^{\rho} K_{\rho l}(T, \rho) [L_f^l h(x(t)) - \omega^{(l)}(t)]}{L_g L_f^{\rho-1} h(x(t))}. \quad (2.36)$$

Remarque 2.2.1.1 Lorsque le signal de référence $\omega(t)$ est annulé dans la loi de commande (2.36), on obtient la loi de commande suivante :

$$u(x(t)) = \frac{-\sum_{l=0}^{\rho} K_{\rho l}(T, \rho) L_f^l h(x(t))}{L_g L_f^{\rho-1} h(x(t))}$$

qui est celle de la linéarisation entrée-sortie par retour d'état (FL) sans les termes de placement de pôles, en l'occurrence v . En effet, pour des systèmes non linéaires SISO, de degré relatif au plus égal à quatre, la stabilité en boucle fermée est assurée de façon implicite, voir [Chen 03]. Pour $\omega(t)$ différent de zéro, la loi de commande (2.36) est, exactement, celle de la FL, [Isid 95]. La seule différence est que les coefficients $K_{\rho l}$ qui caractérisent la stabilité du système bouclé sont différents de ceux de la FL.

En effet, pour la NCGPC, ils résultent directement de la minimisation du critère, tandis que pour la FL, ils sont choisis arbitrairement de manière à garantir la stabilité en boucle fermée.

La NCGPC est alors une FL optimale dans un nouveau système de coordonnées ou une poursuite asymptotique optimale de trajectoire.

Analyse de stabilité du système linéaire bouclé

La linéarisation du système SISO non linéaire en boucle fermée va se faire par changement de coordonnées et par bouclage. Pour la première opération est écrit un nouveau système non linéaire (2.38), voir ci-dessous, dont les nonlinéarités ne se trouvent que sur l'équation correspondante à la ρ ^{ème} dérivée de la sortie par rapport au temps, en supposant que la dynamique de zéros n'existe pas. L'application de la loi de commande (2.36) à cette équation nous donne un système linéaire bouclé commandable dont le degré du polynôme caractéristique n'est rien d'autre que le degré relatif ρ du système SISO non linéaire initial (2.1). Nous essaierons, dans cette analyse, de donner une structure générale de la position des pôles du polynôme caractéristique dans le plan complexe.

Cependant, depuis le mathématicien, Evariste Galois (1811-1832), il est connu que, pour un polynôme de degré strictement supérieur à quatre, il n'y a pas de formules précises pour le calcul

de racines. En revanche, cette analyse de stabilité peut se faire de manière plus formelle à partir de fonctions de Lyapunov. Cependant nous n'avons pas exploré cette piste. Pour mener à bien cette étude, nous avons recours à l'analyse numérique sous Matlab, en choisissant un degré relatif pouvant varier de 1 à 60. Les résultats de simulation sont présentés dans la suite.

Changement de coordonnées Le changement de coordonnées, considéré ici, est le même qui est effectué dans le cas de la FL en général, [Isid 95]. De l'équation (2.22) il vient le nouveau vecteur d'état (les nouvelles coordonnées), de dimension égale au degré relatif, données par :

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{\rho-1} \\ z_\rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - \omega \\ \dot{y} - \dot{\omega} \\ \vdots \\ y^{(\rho-2)} - \omega^{(\rho-2)} \\ y^{(\rho-1)} - \omega^{(\rho-1)} \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Ce qui nous conduit au système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_{\rho-1} = z_\rho \\ \dot{z}_\rho = L_f^\rho h - \omega^{(\rho)} + u L_g L_f^{\rho-1} h \end{cases}. \quad (2.38)$$

En remplaçant la loi de commande (2.36) dans la dernière équation du système (2.38), nous obtenons le système linéaire autonome suivant :

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= A_\rho Z \\ O &= C_\rho Z \end{aligned} \quad (2.39)$$

où les matrices A_ρ et C_ρ sont, respectivement, données par :

$$A_\rho = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline -K_{\rho 0} & -K_{\rho 1} & -K_{\rho 2} & \cdots & -K_{\rho(\rho-1)} \end{array} \right] \quad (2.40)$$

et

$$C_\rho = [1 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0]. \quad (2.41)$$

Le polynôme caractéristique $P_{\rho T}(\lambda)$ de la matrice A_ρ est :

$$P_{\rho T}(\lambda) = \sum_{l=0}^{\rho} K_{\rho l} \lambda^l = 0 \quad (2.42)$$

où $K_{\rho l}$ est donné par l'équation (2.34), pour tout $0 \leq l \leq \rho$, avec $K_{\rho \rho} = 1$, quelque soit l'horizon de prédiction T et le degré relatif ρ . L'analyse de stabilité en boucle fermée peut être faite à partir du polynôme caractéristique $P_{\rho T}(\lambda)$, en calculant ses racines qui sont les valeurs propres de la matrice A_ρ .

Conditions de stabilité : Un polynôme est dit de Hurwitz si et seulement si tous ses pôles sont à partie réelle négative. Dans le cas de la NCGPC et comme souligné par Chen *et al.*, [Chen 03], la stabilité du système linéaire bouclé, dont le degré relatif est inférieur ou égal à quatre est garantie. Par conséquent, un tel système a son polynôme caractéristique qui est Hurwitz. Cependant, dans le cas où le système considéré a un degré relatif strictement supérieur à quatre, le système linéaire bouclé devient instable.

Pour illustrer ces résultats, nous avons considéré deux cas d'intervalles du degré relatif :

- premièrement, le degré relatif varie entre 1 et 10,
- deuxièmement, le degré relatif varie entre 1 et 60.

Pour chacun de ces intervalles, nous avons considéré différentes valeurs de l'horizon de prédiction. En effet, nous avons fait les simulations successivement pour $T = 0.1s$, $1s$, $10s$ et $15s$. Les résultats sont exposés sur les figures 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, pour le premier intervalle et 2.7, 2.8, 2.9 et 2.10 pour le deuxième intervalle.

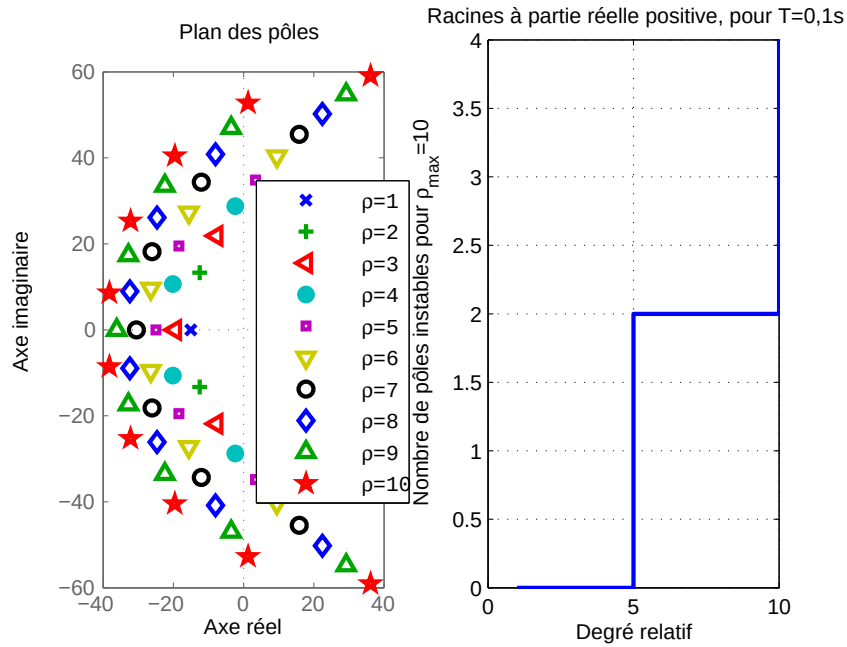


FIGURE 2.3 – Position des pôles dans le plan complexe et nombre de pôles instables pour un horizon de prédiction $T = 0.1s$ et un degré relatif $1 \leq \rho \leq 10$.

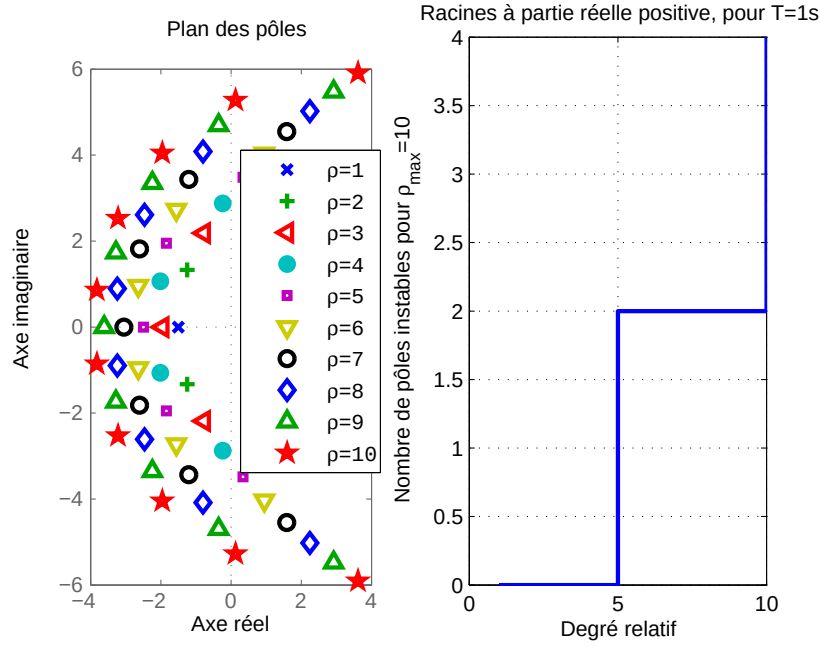


FIGURE 2.4 – Position des pôles dans le plan complexe et nombre de pôles instables pour un horizon de prédiction $T = 1s$ et un degré relatif $1 \leq \rho \leq 10$.

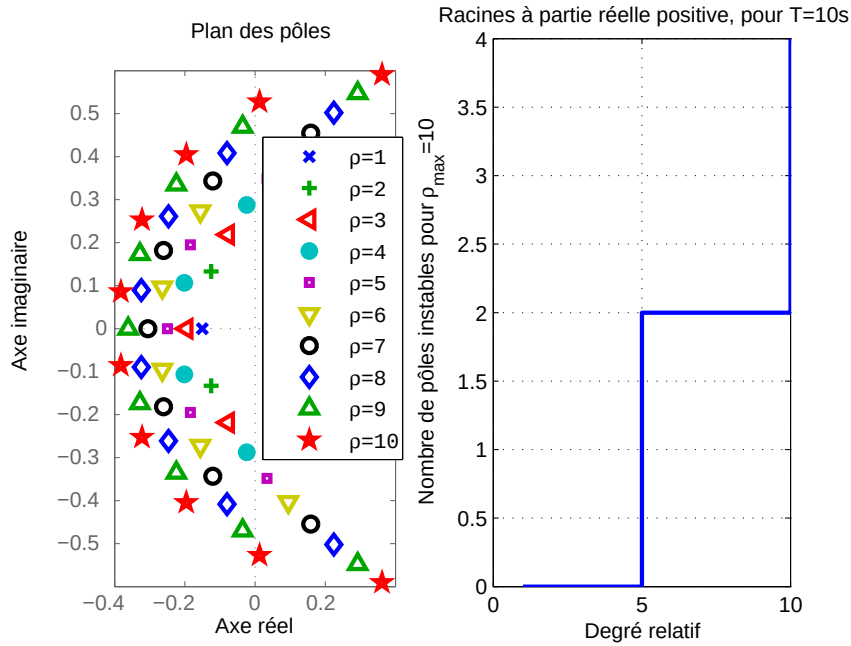


FIGURE 2.5 – Position des pôles dans le plan complexe et nombre de pôles instables pour un horizon de prédiction $T = 10s$ et un degré relatif $1 \leq \rho \leq 10$.

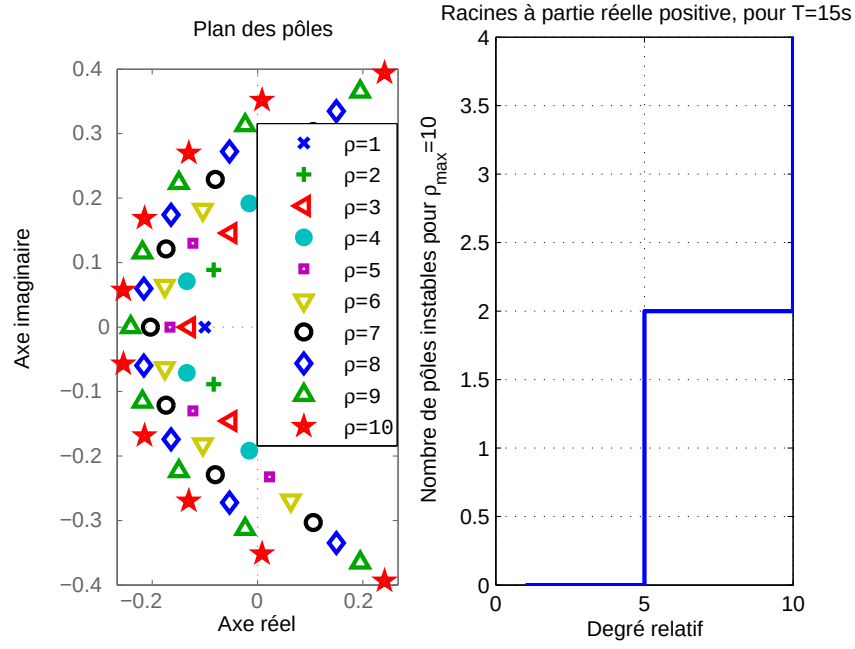


FIGURE 2.6 – Position des pôles dans le plan complexe et nombre de pôles instables pour un horizon de prédiction $T = 15s$ et un degré relatif $1 \leq \rho \leq 10$.

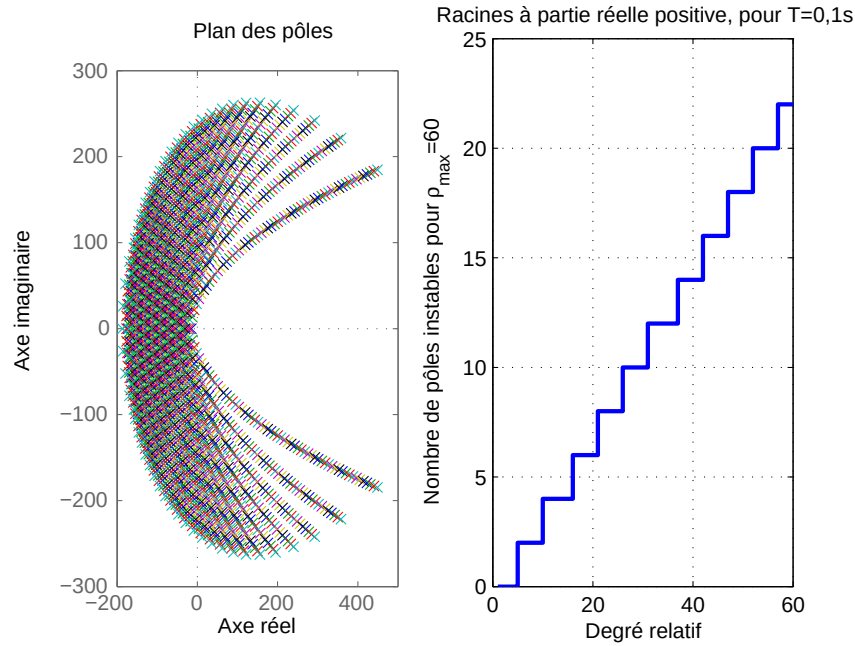


FIGURE 2.7 – Position des pôles dans le plan complexe et nombre de pôles instables pour un horizon de prédiction $T = 0.1s$ et un degré relatif $1 \leq \rho \leq 60$.

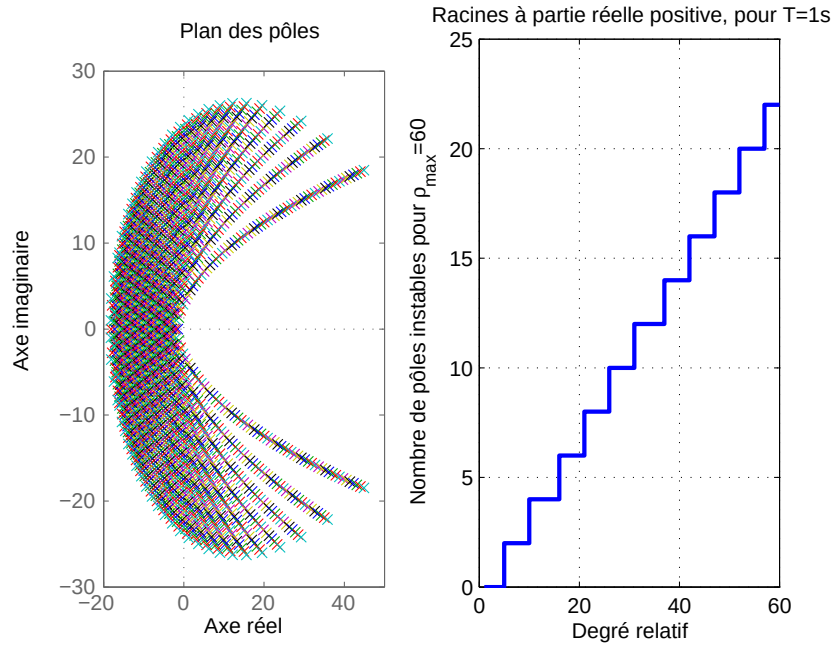


FIGURE 2.8 – Position des pôles dans le plan complexe et nombre de pôles instables pour un horizon de prédiction $T = 1s$ et un degré relatif $1 \leq \rho \leq 60$.

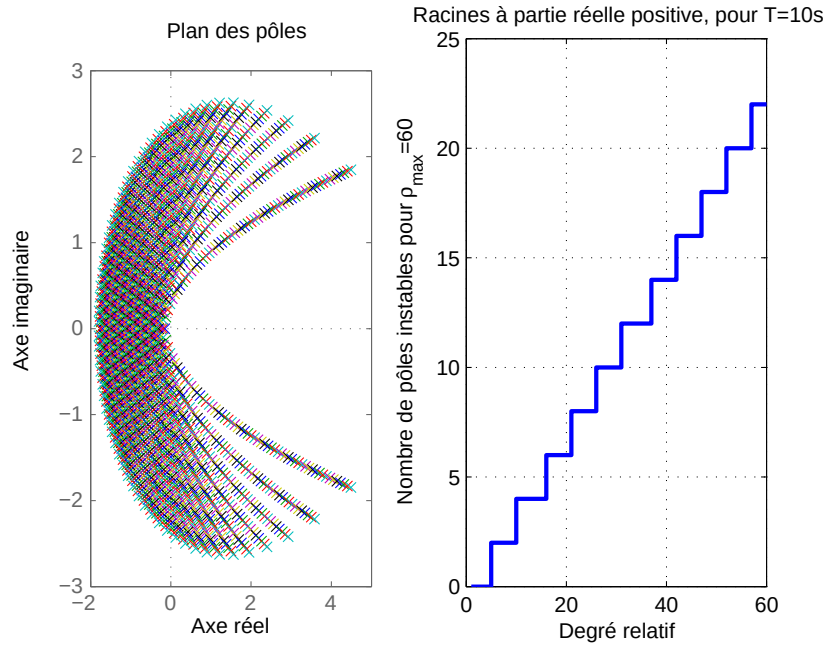


FIGURE 2.9 – Position des pôles dans le plan complexe et nombre de pôles instables pour un horizon de prédiction $T = 10s$ et un degré relatif $1 \leq \rho \leq 60$.

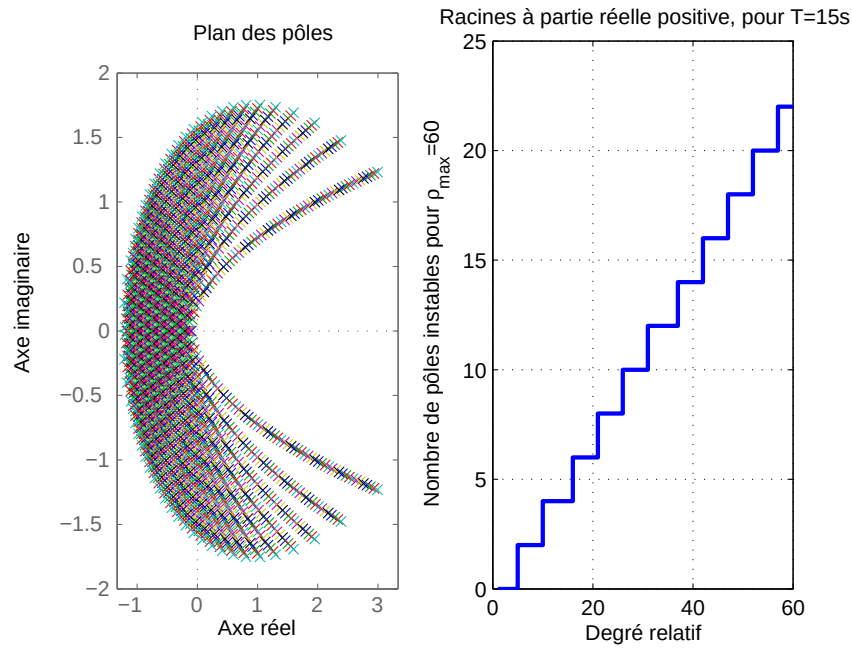


FIGURE 2.10 – Position des pôles dans le plan complexe et nombre de pôles instables pour un horizon de prédiction $T = 15s$ et un degré relatif $1 \leq \rho \leq 60$.

Remarque 2.2.1.2 Dans le plan complexe, le lieu des pôles a la structure de branches de palmier dont l'axe des réels, axe de symétrie, peut être considéré comme le tronc. Cette structure semble invariante par rapport au degré relatif ($\rho \leq 60$) et par rapport à l'horizon de prédiction.

Pour un (intervalle de) degré relatif donné, l'horizon de prédiction T semble n'être rien d'autre que l'inverse du coefficient k_h d'une homothétie H définie. En effet, sur les figures 2.8 et 2.7, par exemple, nous pouvons voir que, pour passer du plan des pôles correspondant à $T = 1s$ à celui qui correspond à $T = 0.1s$, il suffit de multiplier les dimensions du plan de départ des pôles, 2.8, par l'inverse de l'horizon de prédiction correspondant au plan d'arrivée des pôles, 2.7, c'est-à-dire 10. En d'autres termes, si nous considérons un point M_0 du plan de départ tel que sa distance au centre du plan complexe est OM_0 , alors il est possible de donner et avec exactitude, dans le plan d'arrivée, sa position M'_0 . Cette dernière est telle que :

$$OM_0 = k_H \cdot OM'_0$$

avec

$$k_H = \frac{1}{T'}$$

où T' est l'horizon de prédiction correspondant au nouveau plan des pôles. Par conséquent, plus l'horizon de prédiction est grand (resp. petit), plus les valeurs des pôles du plan d'arrivée sont petites (resp. grandes) et plus la dynamique du système bouclé est lente (resp. rapide). Ainsi, l'horizon de prédiction permet de faire un choix précis de la localisation des pôles dans le plan complexe et, par conséquent, de la dynamique du système bouclé. Ce résultat sera démontré de manière plus formelle dans la suite, voir théorème 2.2.1.

Par ailleurs, du degré relatif découle le nombre de pôles instables. En effet, le degré relatif est la somme du nombre des pôles stables et du nombre des pôles instables. Notez que ces derniers sont toujours complexes conjugués et jamais réels. Leur nombre croît de façon linéaire en escalier,

par pas de 2, en fonction d'intervalles du degré relatif, voir figure 2.7, par exemple, pour plus de clarté. Ce résultat est résumé dans la table 2.1 où ρ est le degré relatif, n_p le nombre de pôles instables et "+" (resp. "-") désigne le caractère stable du système linéaire bouclé (resp. instable) par rapport aux différentes valeurs du degré relatif.

TABLE 2.1 – Degré relatif ρ , nombre de pôles instables n_p et stabilité en boucle fermée.

ρ	n_p	stabilité	ρ	n_p	stabilité
1 à 4	0	+	31 à 36	12	-
5 à 9	2	-	37 à 41	14	-
10 à 15	4	-	42 à 46	16	-
16 à 20	6	-	47 à 51	18	-
21 à 25	8	-	52 à 56	20	-
26 à 30	10	-	57 à 60	22	-

Généralisation du caractère homothétique de l'horizon de prédiction dans la NCGPC

Théorème 2.2.1 $\heartsuit$ Soient T_1 et T_2 deux horizons de prédiction tels que $T_1 \neq T_2 \neq 0$. Soient λ_{T_1} et λ_{T_2} deux solutions respectives des polynômes caractéristiques $P_{\rho T_1}(\lambda)$ et $P_{\rho T_2}(\lambda)$. Alors, λ_{T_1} est lié à λ_{T_2} par la relation :

$$\lambda_{T_2} = \frac{T_1}{T_2} \lambda_{T_1}.$$

Autrement dit, les deux solutions sont liées par un coefficient d'homothétie égal au rapport des deux horizons de prédiction $\heartsuit$.

Démonstration Soit le polynôme

$$P_{\rho T}(\lambda) = \sum_{l=0}^{\rho} \frac{\rho!}{T^{\rho-l}} \frac{2\rho+1}{l!(\rho+l+1)} \lambda^l.$$

Soient $f_T(\rho)$ et $g(\rho, l)$ les fonctions suivantes :

$$f_T(\rho) = \rho! \frac{2\rho+1}{T^\rho} \quad \text{et} \quad g(\rho, l) = \frac{1}{l!(\rho+l+1)}.$$

D'où le polynôme caractéristique $P_{\rho T}(\lambda)$ peut être écrit comme suit :

$$P_{\rho T}(\lambda) = f_T(\rho) \sum_{l=0}^{\rho} g(\rho, l) \lambda^l T^l.$$

Soit λ_T une solution du polynôme $P_{\rho T}(\lambda)$. Alors, $P_{\rho T}(\lambda_T) = 0$. Ce qui est équivalent à :

$$\sum_{l=0}^{\rho} g(\rho, l) \lambda_T^l T^l = 0$$

puisque $f_T(\rho) \neq 0$, pour tout ρ et T .

Soient T_1 et T_2 deux horizons de prédiction distincts et tous deux non nuls tels que λ_{T_1} et λ_{T_2} sont tous deux solutions de $P_{\rho T}$. Il vient :

$$\sum_{l=0}^{\rho} g(\rho, l)(T_1 \lambda_{T_1})^l = \sum_{l=0}^{\rho} g(\rho, l)(T_2 \lambda_{T_2})^l = 0.$$

Comme la fonction $g(\rho, l)$ est la même pour tous les termes des deux équations, il vient alors

$$T_1 \lambda_{T_1} = T_2 \lambda_{T_2} \quad \text{et} \quad \lambda_{T_2} = \frac{T_1}{T_2} \lambda_{T_1},$$

CQFD ■.

Corollaire 2.2.1.1 Dans le cas particulier où l'horizon de prédiction $T_1 = 1$ et T_2 est quelconque, égal à T , il vient :

$$T \lambda_T = \lambda_1 \Leftrightarrow \lambda_T = \frac{\lambda_1}{T}.$$

Remarque 2.2.1.3 Ce qui donne la possibilité, dans la recherche de racines, d'étudier le polynôme caractéristique d'un système dont l'horizon de prédiction est égal à 1 et d'en déduire la solution pour un horizon de prédiction quelconque.

Choix de la dynamique du système bouclé : Nous mènerons ici une étude pour des systèmes SISO non linéaires de degré relatif égal à un ou deux et par conséquent avec une stabilité garantie. L'approche que nous utilisons ici est celle d'une étude comparative entre un système SISO non linéaire de degré relatif un ou deux bouclé par NCGPC et une fonction autonome d'ordre égal au degré relatif considéré. Nous omettons volontairement l'existence de la dynamique des zéros dans cette étude pour mieux nous fixer sur les résultats importants énoncés dans la suite.

Cas du degré relatif égal à 1 : à un système non linéaire de la forme (2.1) de degré relatif égal à 1, est appliqué le changement de coordonnées suivant :

$$z_1 = h - \omega$$

et le système résultant est donné par :

$$\dot{z}_1 = L_f h - \dot{\omega} + u L_g h.$$

Avec la loi de commande :

$$u(x(t)) = \frac{-\sum_{l=0}^1 K_{1l}(T, \rho) [L_f^l h(x(t)) - \omega^{(l)}(t)]}{L_g h(x(t))},$$

il vient le système linéaire suivant :

$$\dot{z}_1 = L_f h - \dot{\omega} - K_{10}(h - \omega) - (L_f h - \dot{\omega}) = -K_{10} z_1$$

qui, réécrit plus simplement, donne

$$\dot{z}_1 = -K_{10} z_1.$$

D'où le polynôme caractéristique $P_{1T}(\lambda)$ du système bouclé :

$$P_{1T}(\lambda) = K_{10} + \lambda. \quad (2.43)$$

Soit $D_1(p)$ le dénominateur d'une fonction de transfert du premier ordre $H_1(p)$ telle que :

$$H_1(p) = \frac{G_1}{1 + \theta p}$$

où G_1 et θ représentent, respectivement, le gain statique et la constante de temps. Alors $D_1(p)$ est donné par $D_1(p) = 1 + \theta p$. Le seul et unique pôle de H_1 est $p = -\frac{1}{\theta}$. Aussi, la seule racine du polynôme $P_{1T}(\lambda)$ est $\lambda = -K_{10}$. En égalisant ces deux expressions littérales, il vient :

$$K_{10} = \frac{1}{\theta}. \quad (2.44)$$

Or l'expression littérale de K_{10} peut être calculée à partir de

$$K_{\rho l} = \frac{\rho!}{T^{\rho-l}} \frac{(2\rho+1)}{l!(\rho+l+1)}. \quad (2.45)$$

D'où :

$$K_{10} = \frac{2\rho+1}{\rho+1} \frac{\rho!}{T^\rho}. \quad (2.46)$$

Comme $\rho = 1$, son expression en fonction de l'horizon de prédiction est :

$$K_{10} = \frac{3}{2T}. \quad (2.47)$$

Or $K_{10} = \frac{3}{2T} = \frac{1}{\theta}$. Par conséquent, l'horizon de prédiction est donné par :

$$T = \frac{3\theta}{2}. \quad (2.48)$$

Nous pouvons alors déduire le temps de réponse t_r en fonction de l'horizon de prédiction qui est égal à trois fois la constante de temps. Ainsi :

$$t_r = 3\theta = 3 \frac{2T}{3} = 2T. \quad (2.49)$$

Par conséquent, la fréquence de coupure du système bouclé, inverse de la constante de temps, est égale à K_{10} et il vient :

$$\omega_c = K_{10} = \frac{3}{2T}. \quad (2.50)$$

Remarque 2.2.1.4 Notez que lorsque T croît, la racine $\lambda = -\frac{3}{2T}$ tend vers zéro, tout en étant dans la partie gauche du plan complexe sans jamais la quitter, voir figure 2.11, alors que la fréquence de coupure décroît et que le temps de réponse croît linéairement, voir figure 2.12. Aussi, le gain statique du système linéaire bouclé est fixé par la consigne (si cette dernière est une constante).

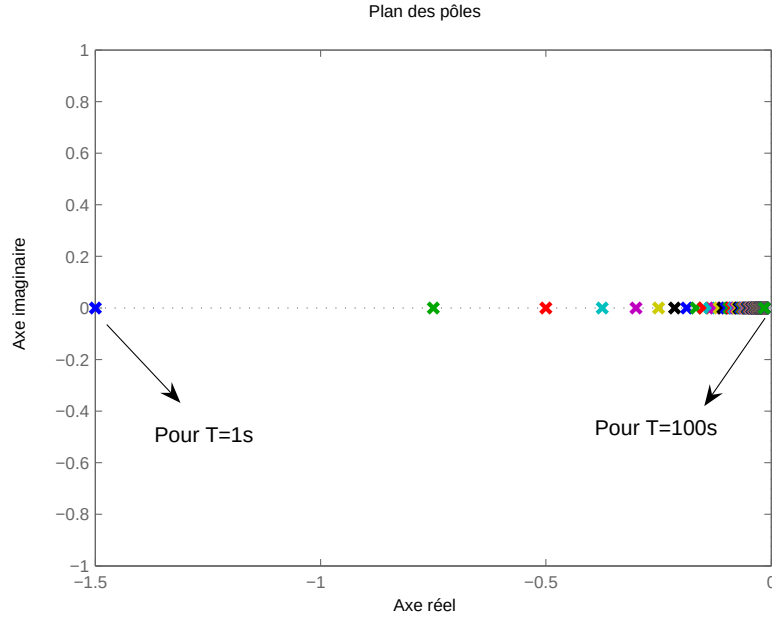


FIGURE 2.11 – Cas du degré relatif un : position des pôles dans le plan complexe en fonction de l’horizon de prédiction T .

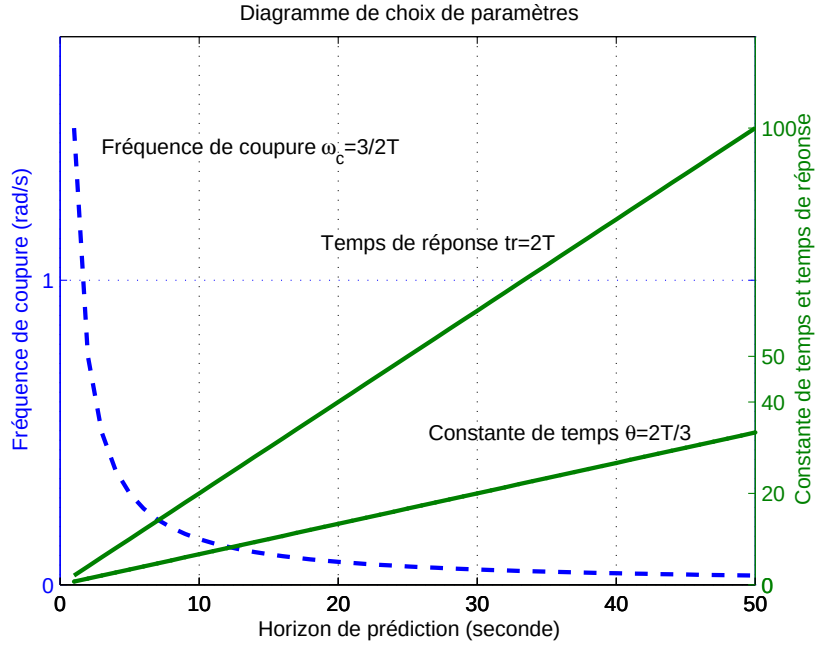


FIGURE 2.12 – Diagramme donnant la fréquence de coupure ω_c , la constante de temps θ et le temps de réponse t_r en fonction de l’horizon de prédiction T ($1 \leq T \leq 50$ secondes).

Les résultats de calcul ci-dessus sont résumés dans la table 2.2.

TABLE 2.2 – Paramètres temporels et fréquentiels du système linéaire bouclé d'ordre 1.

	Fonction de T	Fonction de ω_c
Horizon de prédiction	T	$T = \frac{3}{2\omega_c}$
Constante de temps	$\theta = \frac{2T}{3}$	$\theta = \frac{1}{\omega_c}$
Temps de réponse	$t_r = 2T$	$t_r = \frac{3}{\omega_c}$
Fréquence de coupure	$\omega_c = \frac{3}{2T}$	ω_c
Polynôme caractéristique	$\lambda + \frac{3}{2T} = 0$	$\lambda + \omega_c = 0$
Pôles	$\lambda = -\frac{3}{2T}$	$\lambda = -\omega_c$

Théorème 2.2.2 ♡ *Un système SISO non linéaire de dimension 1 égal à son degré relatif ρ bouclé par NCGPC, est équivalent à "une fonction de transfert" (système autonome) du premier ordre de gain statique égal au signal de référence (en le supposant constant) et de temps de réponse égal au double de l'horizon de prédiction ♡.*

Corollaire 2.2.1.2 ♡ *Pour deux horizons de prédiction distincts et non nuls T_1 et T_2 , il vient alors les relations suivantes*

$$\lambda_{T_2} = \frac{T_1}{T_2} \lambda_{T_1} = \frac{t_{r1}}{t_{r2}} \lambda_{T_1} = \frac{\theta_1}{\theta_2} \lambda_{T_1} = \frac{\omega_{c2}}{\omega_{c1}} \lambda_{T_1}$$

où t_{r1} et t_{r2} , θ_1 et θ_2 et ω_{c1} et ω_{c2} correspondent, respectivement, aux temps de réponse, constantes de temps et fréquences de coupure du système linéaire bouclé par NCGPC avec les horizons de prédiction T_1 et T_2 ♡.

Cas du degré relatif égal à 2 Pour un système de la forme (2.1) dont l'objectif de l'étude est la poursuite du signal de référence ω , le changement de coordonnées est donné par

$$\begin{cases} z_1 = h - \omega \\ z_2 = L_f h - \dot{\omega} \end{cases} \quad (2.51)$$

d'où le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = L_f^2 h + u L_g L_f h - \ddot{\omega} \end{cases} \quad (2.52)$$

En bouclant ce système avec la loi de commande :

$$u(x(t)) = \frac{-\sum_{l=0}^2 K_{2l}(T, \rho) \left[L_f^l h(x(t)) - \omega^{(l)}(t) \right]}{L_g L_f h(x(t))},$$

il vient le système linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = - \begin{bmatrix} K_{20} & K_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.53)$$

qui, réécrit sous forme matricielle, donne :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_{20} & -K_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

D'où le polynôme caractéristique suivant

$$P_{2T}(\lambda) = K_{20} + K_{21}\lambda + \lambda^2. \quad (2.55)$$

Ce polynôme est équivalent au dénominateur $D_2(p)$ de la fonction de transfert $H_2(p)$ d'ordre 2 donnée par :

$$H_2(p) = \frac{G_2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} \quad (2.56)$$

où G_2 est le gain statique, ξ le coefficient d'amortissement et ω_n la pulsation naturelle. Par analogie, il vient :

$$\begin{cases} K_{20} = \omega_n^2 \\ K_{21} = 2\xi\omega_n \end{cases}. \quad (2.57)$$

A partir de l'équation (2.34), il vient :

$$\begin{cases} \frac{\rho!}{T^\rho} \frac{2\rho+1}{\rho+1} = \omega_n^2 \\ \frac{\rho!}{T^{\rho-1}} \frac{2\rho+1}{\rho+2} = 2\xi\omega_n \end{cases} \quad (2.58)$$

ou, de manière équivalente,

$$\begin{cases} \frac{\rho!}{T^\rho} \frac{2\rho+1}{\rho+1} = \omega_n^2 \\ \frac{1}{2\xi} \frac{\rho!}{T^{\rho-1}} \frac{2\rho+1}{\rho+2} = \omega_n \end{cases}. \quad (2.59)$$

En élevant la seconde équation du système ci-dessus au carré, il vient :

$$\begin{cases} \frac{\rho!}{T^\rho} \frac{2\rho+1}{\rho+1} = \omega_n^2 \\ \left(\frac{1}{2\xi} \frac{\rho!}{T^{\rho-1}} \frac{2\rho+1}{\rho+2} \right)^2 = \omega_n^2 \end{cases}. \quad (2.60)$$

Par conséquent, nous avons :

$$\xi(T, \rho) = \frac{1}{2} \frac{\rho!}{T^{\rho-2}} \sqrt{\frac{(\rho+1)(2\rho+1)}{(\rho+2)^2}}. \quad (2.61)$$

Remarque 2.2.1.5 Comme le degré relatif est $\rho = 2$, l'horizon de prédiction T n'a aucun effet sur le coefficient d'amortissement ξ puisque $T^{\rho-2}=1$.

Donc

$$\xi(T, \rho) = \xi_D(\rho) = \frac{\rho!}{2} \sqrt{\frac{(\rho+1)(2\rho+1)}{(\rho+2)^2}}$$

et a pour valeur numérique $\xi_D = 0.685$. Par conséquent, nous sommes dans le cas d'un régime oscillatoire amorti puisque $0 < \xi_D < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

De là, nous déduisons le dépassement en pourcent d et le facteur de surtension Q qui sont des constantes car fonction uniquement du coefficient d'amortissement, comme nous pouvons le voir dans les équations suivantes

$$d = 100e^{-\frac{\pi\xi_D}{\sqrt{1-\xi_D^2}}} \text{ et } Q = \frac{1}{2\xi_D\sqrt{1-\xi_D^2}}.$$

Par application numérique, il vient $d \simeq 5.21$ et $Q \simeq 1$.

La pulsation naturelle ω_n est :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\rho!}{T^\rho} \frac{2\rho+1}{\rho+1}} \quad (2.62)$$

ou, de manière équivalente, pour $\rho = 2$

$$\omega_n \simeq \frac{1.83}{T}. \quad (2.63)$$

Nous sommes en présence d'un régime oscillatoire amorti. Par conséquent, les pôles résultants pour $P_{2T}(\lambda)$, voir annexe B pour les détails de calcul, sont :

$$\lambda_{1,2}(T, \rho) = -\frac{K_{21}(T, \rho)}{2} \pm \frac{j}{2} \sqrt{4K_{20}(T, \rho) - K_{21}^2(T, \rho)}.$$

Ces pôles sont uniquement fonction de l'horizon de prédiction. En effet, en remplaçant K_{20} et K_{21} par leurs valeurs, il vient :

$$\lambda_{1,2}(T) = -\frac{1}{T}(1.25 \pm 1.33j),$$

voir [Chen 99b].

Remarque 2.2.1.6 La position des racines du polynôme caractéristique $P_2(\lambda)$ par rapport à l'horizon de prédiction T est donnée en figure 2.13. Lorsque T croît, les racines de $P_{2T}(\lambda)$ tendent vers zéro en suivant une droite.

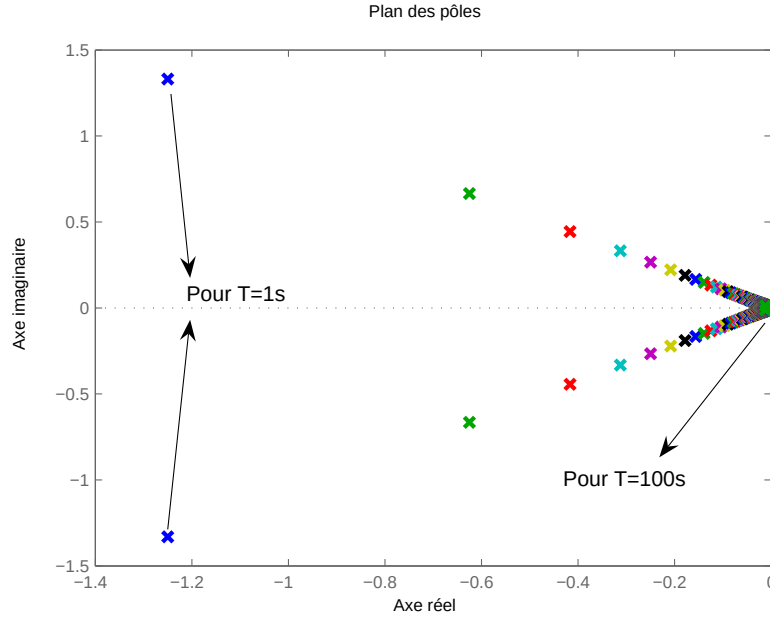


FIGURE 2.13 – Cas du degré relatif deux : position des pôles dans le plan complexe pour différentes valeurs de l’horizon de prédiction.

Le diagramme de la figure 2.14, présente l’évolution des paramètres du système linéaire bouclé de degré relatif deux en fonction de l’horizon de prédiction T .

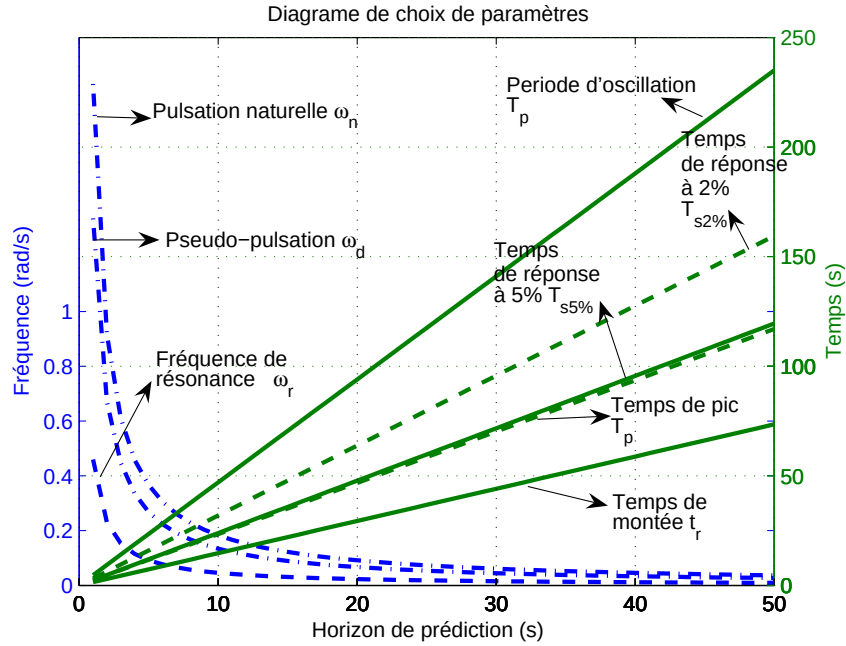


FIGURE 2.14 – Diagramme des paramètres fréquentiels et temporels du système linéaire bouclé d’ordre 2 en fonction de l’horizon de prédiction.

Ainsi, nous pouvons déduire la fréquence de résonance, la pseudo-pulsation et la pulsation naturelle d’une part, la période d’oscillation, les temps de montée et de réponse, le temps de pic

ainsi que les pôles d'autre part, voir [Gran 03]. Les résultats sont résumés dans la table 2.3. Les constantes sont données dans la table 2.4.

TABLE 2.4 – Paramètres constants du système de degré relatif $\rho = 2$ bouclé.

Coefficient d'amortissement	Facteur de surtension	Dépassement en pourcent
$\xi_D \simeq 0.685$	$Q \simeq 1$	$d \simeq 5.21\%$

Remarque 2.2.1.7 *A partir des trois tables que sont 2.2, 2.3 et 2.4, nous observons qu'en réalité, la nature est bien ordonnée. En effet, l'atemporel a des conséquences atemporelles, le temporel des conséquences temporelles, le fréquentiel des conséquences fréquentielles.*

Théorème 2.2.3 $\heartsuit$ *Un système SISO non linéaire de dimension 2 égale à son degré relatif ρ , bouclé par NCGPC, est équivalent à "une fonction de transfert" (système autonome) du second ordre dont le coefficient d'amortissement est $\xi_D \simeq 0.685$ et la pulsation naturelle $\omega_n \simeq \frac{1.83}{T}$ $\heartsuit$.*

Corollaire 2.2.1.3 *Pour deux horizons de prédiction distincts et non nuls T_1 et T_2 , il vient alors les relations suivantes :*

$$\lambda_{T_2} = \frac{T_1}{T_2} \lambda_{T_1} = \frac{\omega_{n_2}}{\omega_{n_1}} \lambda_{T_1}$$

où ω_{n_1} et ω_{n_2} correspondent, respectivement, aux pulsations naturelles du système linéaire bouclé par NCGPC avec les horizons de prédiction de T_1 et T_2 . La même relation peut être posée pour tous les autres paramètres, qu'ils soient temporels ou fréquentiels.

Remarque 2.2.1.8 *Ces propriétés restent vraies pour chaque sous-système de dimension un ou deux d'un système non linéaire multi-input multi-output (MIMO) découplé. Voir l'application sur la chaise roulante électrique au chapitre 4.*

Un résumé de la méthode présentée est donné dans l'algorithme 1.

TABLE 2.3 – Paramètres temporels et fréquentiels du système linéaire bouclé d'ordre 2.

	Formule	Fonction de T	Fonction de ω_n
Horizon de prédiction	$T = \sqrt[\rho]{\frac{\rho!}{\omega_n^2} \frac{2\rho+1}{\rho+1}}; T \in \mathbf{R}_*^+$	T	$T \simeq \frac{1.83}{\omega_n}$
Fréquence de résonance	$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi_D^2}$	$\omega_r \simeq \frac{0.46}{T}$	$\omega_r \simeq 0.25\omega_n$
Pseudo-pulsation	$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi_D^2}$	$\omega_d \simeq \frac{1.34}{T}$	$\omega_d \simeq 0.73\omega_n$
Pulsation naturelle	$\omega_n = \sqrt{\frac{\rho!}{T^\rho} \frac{2\rho+1}{\rho+1}}$	$\omega_n \simeq \frac{1.83}{T}$	ω_n
Temps de montée	$t_r = \frac{(\pi - \arccos \xi_D)}{\omega_n \sqrt{1 - \xi_D^2}}$	$t_r \simeq 1.47T$	$t_r \simeq \frac{3.19}{\omega_n}$
Temps de pic	$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi_D^2}}$	$t_p \simeq 2.34T$	$t_p \simeq \frac{4.3}{\omega_n}$
Temps de réponse à 5%	$t_{s5\%} = \frac{1}{\omega_n \xi_D} \ln\left(\frac{100}{5}\right)$	$t_{s5\%} \simeq 2.39T$	$t_{s5\%} \simeq \frac{4.38}{\omega_n}$
Temps de réponse à 2%	$t_{s2\%} = \frac{1}{\omega_n \xi_D} \ln\left(\frac{100}{2}\right)$	$t_{s2\%} \simeq 3.19T$	$t_{s2\%} \simeq \frac{5.84}{\omega_n}$
Periode d'oscillation	$T_p = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi_D^2}}$	$T_p \simeq 4.71T$	$T_p \simeq \frac{8.62}{\omega_n}$
Polynôme caractéristique	$\lambda^2 + 2\xi_D \omega_n \lambda + \omega_n^2 = 0$	$\lambda^2 + \frac{5}{2T} \lambda + \frac{10}{3T^2} = 0$	$\lambda^2 + 1.37\omega_n \lambda + \omega_n^2 = 0$
Pôles	$p_{1,2} = -\omega_n[\xi_D \pm j\sqrt{1 - \xi_D^2}]$	$p_{1,2} \simeq -\frac{1}{T}(1.25 \pm 1.33j)$	$p_{1,2} \simeq -\omega_n(0.685 \pm 0.73j)$

- Chercher le degré relatif ρ et calculer la dynamique des zéros (nous la supposons stable).
- Si $\rho \leq 4$ et $\rho = 1$:
 - Choisir, entre autres, le temps de réponse désiré et en déduire l'horizon de prédiction de T à partir de l'équation $t_r = 2T$
 - Appliquer la loi de commande stabilisante

$$u(x(t)) = \frac{-\sum_{l=0}^1 K_{1l}(T, \rho) [L_f^l h(x(t)) - \omega^{(l)}(t)]}{L_g h(x(t))}$$

résultant de la minimisation du critère

$$J(t) = \frac{1}{2} E^t(t) \Pi(T, \rho) E(t)$$

au nouveau système non linéaire.

- Si $\rho \leq 4$ et $\rho = 2$:
 - Choisir, entre autres, la pulsation naturelle ω_n désirée et en déduire l'horizon de prédiction à partir de l'équation $\omega_n \simeq \frac{1.83}{T}$. Le coefficient d'amortissement est une constante.
 - Appliquer la loi de commande stabilisante

$$u(x(t)) = \frac{-\sum_{l=0}^2 K_{2l}(T, \rho) [L_f^l h(x(t)) - \omega^{(l)}(t)]}{L_g L_f h(x(t))}$$

résultant de la minimisation du même critère ci-dessus au nouveau système non linéaire.

- Si $\rho \leq 4$ et $\rho \neq 1, 2$:
 - Appliquer la loi de commande stabilisante pour $\rho = 3, 4$. (En notre connaissance, aucune méthode n'a été établie pour le choix de caractéristiques du système linéaire bouclé de degré relatif 3 ou 4 comme le temps de réponse, par exemple).
- Si $\rho > 4$:
 - Le système devient instable avec la loi de commande ci-dessus.
 - Il faut donc trouver une loi de commande stabilisante. C'est la suite de nos travaux.

Algorithme 1: Algorithme d'application de la NCGPC en fonction du degré relatif.

Robustesse de la NCGPC

La loi de commande qui résulte de la NCGPC est, par construction même, robuste par rapport à la stabilité du système linéaire bouclé résultant. Cette robustesse est liée au degré relatif du système non linéaire considéré et à l'horizon de prédiction fixé par l'utilisateur. En effet, plus le degré relatif est petit (proche de 1), plus le système est stable, puisque pour un degré relatif égal à 1, nous avons un seul pôle situé bien à gauche dans le plan complexe. Cette position est modulée par l'inverse de l'horizon de prédiction.

Propriétés de la NCGPC sans correction

L'étude précédente révèle, en tenant compte des assumptions A1 à A4, les propriétés suivantes de la NCGPC :

- la loi de commande est optimale, linéarisante et, de plus, stabilisante (pour $\rho \leq 4$) ;
- le degré relatif, paramètre intrinsèque au système, donne la position des pôles dans le plan complexe dont la structure est en branches de palmier ; elle donne également la stabilité du système bouclé (pour $\rho \leq 4$) ;
- l'inverse de l'horizon de prédiction, paramètre extrinsèque au système, est le coefficient d'une homothétie H de centre, le centre du plan complexe ;
- la stabilité est garantie, quelque soit l'horizon de prédiction, pour des systèmes dont le degré relatif est inférieur ou égal à quatre, [Chen 03].

Illustration

Cas d'un système non linéaire SISO de degré relatif $\rho = 1$ Soit le système SISO non linéaire de dimension 1 suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 3x^2(t) + u(t) \\ y(t) = h(x(t)) = x(t) \end{cases} \quad (2.64)$$

dont l'objectif reste la poursuite de trajectoire par la sortie y d'un signal de référence.

Application de la NCGPC L'erreur $e(t)$ entre la sortie $y(t)$ et le signal de référence $\omega(t)$ est telle que :

$$e(t) = y(t) - \omega(t). \quad (2.65)$$

Le degré relatif résultant est égal à 1 qui est la dimension du système SISO. Par conséquent, la dynamique des zéros n'existe pas. En appliquant la loi de commande NCGPC :

$$u(x(t)) = \frac{-\sum_{l=0}^1 K_{1l}(T, \rho) [L_f^l h(x(t)) - \omega^{(l)}(t)]}{L_g e(t)},$$

où $K_1 = \begin{bmatrix} K_{10} & K_{11} \end{bmatrix}$ avec $K_{11} = 1$, au nouveau système non linéaire ci-dessous :

$$\dot{z}(t) = L_f h(x(t)) - \dot{\omega}(t) + L_g e(x(t))u(t)$$

résultant du changement de coordonnées suivant

$$z(t) = h(x(t)) - \omega(t),$$

il vient le système linéaire bouclé stable

$$\dot{z}(t) = -K_{10}z(t).$$

Quelques résultats de simulation : Les simulations présentées dans la suite ont été faites sous matlab simulink version 7.0.1. La matrice de gain K_1 est donnée dans la table 2.5 pour différentes valeurs de l'horizon de prédiction et les résultats de simulation sont montrés sur les figures 2.15 (a), (b), (c) et (d).

Les figures 2.15 (a) et (b) montrent que le temps de réponse est toujours égal au double de l'horizon de prédiction, voir table 2.2. La poursuite de trajectoire est satisfaisante puisque confirmée

par les différentes courbes de l'erreur sur la figure 2.15 (d) avec une loi de commande qui ne prend pas de trop grandes valeurs, voir figure 2.15 (c).

TABLE 2.5 – Horizon de prédiction T , matrice de gain correspondante K_1 pour un système de degré relatif $\rho = 1$.

Horizon de prédiction T (s)	Matrice de gain $K_1 =$	K_{10}	K_{11}
$T = 1$	$K_1 =$	1.5	1
$T = 2$	$K_1 =$	0.75	1
$T = 3$	$K_1 =$	0.5	1
$T = 4$	$K_1 =$	0.375	1
$T = 5$	$K_1 =$	0.3	1

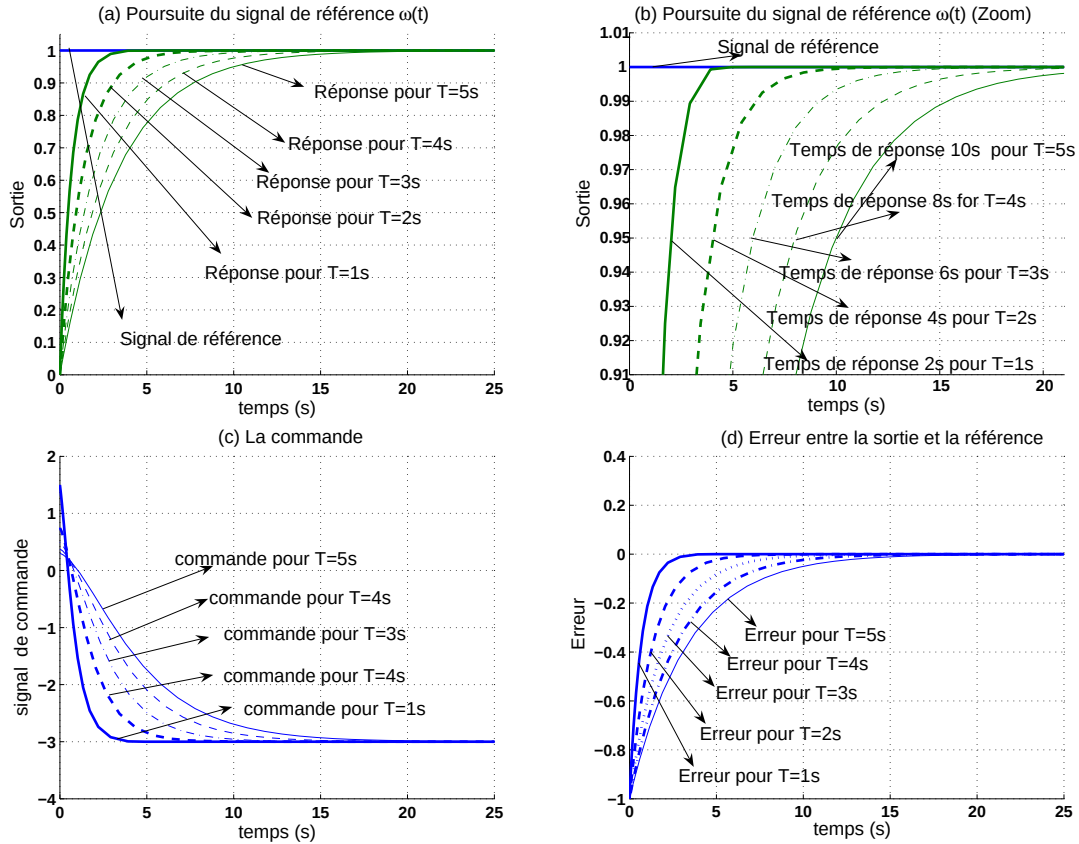


FIGURE 2.15 – NCGPC : temps de réponse pour un système non linéaire de dimension 1 (égal au degré relatif), pour différentes valeurs de l'horizon de prédiction : $T = 1$ à 5 secondes.

Cas d'un système non linéaire SISO de degré relatif $\rho = 2$ Soit le système non linéaire SISO de dimension 2 suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1^2(t) - 3u(t) \\ y(t) = h(x(t)) = x_1(t) \end{cases} \quad (2.66)$$

dont la sortie est donnée.

Application de la NCGPC Notre but étant de faire de la poursuite de trajectoire, nous définissons l'erreur comme dans l'exemple précédent, entre le signal de référence $\omega(t)$ et la sortie $y(t)$. D'où le système de coordonnées suivant

$$\begin{cases} z_1(t) = h(x(t)) - \omega(t) \\ z_2(t) = L_f h(x(t)) - \dot{\omega}(t) \end{cases} \quad (2.67)$$

qui conduit au système non linéaire

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = L_f^2 h(x(t)) - \ddot{\omega}(t) + L_g L_f h(x(t)) u(t) \end{cases} \quad (2.68)$$

En appliquant la loi de commande NCGPC u telle que

$$u(x(t)) = \frac{-\sum_{l=0}^2 K_{2l}(T, \rho) [L_f^l h(x(t)) - \omega^{(l)}(t)]}{L_g L_f h(x(t))}$$

au système (2.68) il vient le système linéaire bouclé stable (2.69) (car de degré relatif inférieur ou égal à quatre) :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_{20} & -K_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

où K_{20} et K_{21} sont les première et deuxième composantes de la matrice de gain K_2 donnée par $K_2 = \begin{bmatrix} K_{20} & K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$ avec la troisième composante $K_{22} = 1$.

Quelques résultats de simulation sont présentés en figure 2.16 pour différentes valeurs de la matrice de gain K_2 donnée dans la table 2.6.

TABLE 2.6 – Horizon de prédiction T et matrice de gain correspondante K_2 pour un système de degré relatif $\rho = 2$.

Horizon de prédiction T (s)	Matrice de gain $K_2 = \begin{bmatrix} K_{20} & K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$
$T = 1$	$K_2 = \begin{bmatrix} 3.33 & 2.5 & 1 \end{bmatrix}$
$T = 2$	$K_2 = \begin{bmatrix} 0.83 & 1.25 & 1 \end{bmatrix}$
$T = 3$	$K_2 = \begin{bmatrix} 0.37 & 0.83 & 1 \end{bmatrix}$
$T = 4$	$K_2 = \begin{bmatrix} 0.21 & 0.63 & 1 \end{bmatrix}$
$T = 5$	$K_2 = \begin{bmatrix} 0.13 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$

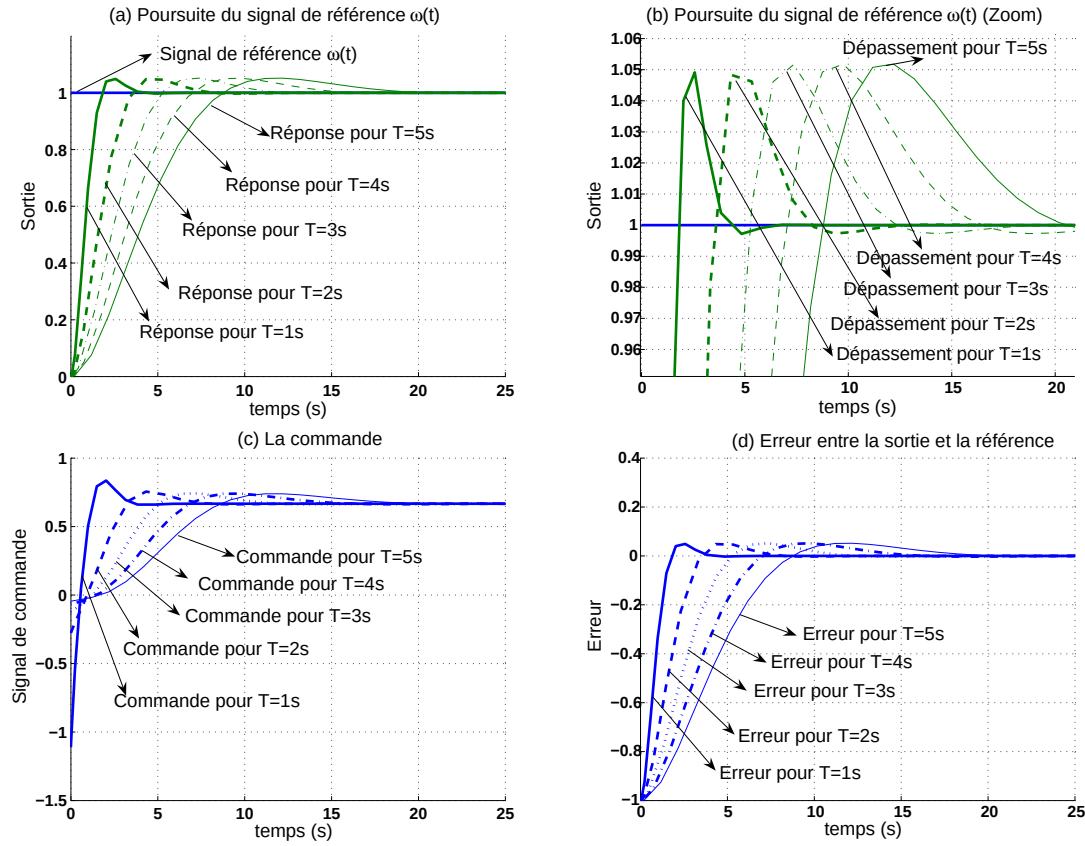


FIGURE 2.16 – NCGPC : dépassement pour un système non linéaire de dimension 2 (égal au degré relatif), pour différentes valeurs de l’horizon de prédiction : $T = 1$ à 5 secondes.

Comme nous pouvons le voir sur la figure 2.16, la poursuite de trajectoire se fait correctement et le dépassement prévu est celui qui est obtenu, c’est-à-dire approximativement 5.21%. La loi de commande prend des valeurs "raisonnables" et l’erreur converge vers zéro, pour chaque valeur fixée de l’horizon de prédiction.

En somme, dans l’étude présentée ci-dessus, la stabilité du système bouclé est garantie si et seulement si le degré relatif est au plus égal à quatre. Cependant, dans le cas où ce dernier est strictement supérieur à quatre, Chen *et al.*, [Chen 03] ont introduit un troisième paramètre qui est l’ordre des dérivées successives de la commande. Ils ont montré que la stabilité en boucle fermée est garantie si la différence entre le degré relatif et l’ordre de la commande est inférieure à quatre, [Chen 03]. En d’autres termes, ils proposent d’avoir recours, au moins, aux quatre premiers termes, à partir de l’ordre égal au degré relatif, du développement en série de Taylor de l’erreur pour palier le problème d’instabilité en boucle fermée.

Par ailleurs, les méthodes de correction que nous proposons comme alternative à celle de Chen sont présentées ci-dessous.

2.2.2 Proposition de méthodes de correction (degré relatif strictement supérieur à quatre)

Les approches que nous proposons dans cette partie ont en commun la modification du critère d'optimisation avec l'ordre des dérivées successives de la commande fixé à zéro et la stabilisation du système linéaire bouclé garantie. En effet, la première consiste à rajouter un terme linéaire en commande au critère initial J , voir [Dabo 09a], tandis que la seconde consiste à rajouter une matrice de correction "intelligente" à la matrice de prédiction du critère initial J . Le terme "intelligent" est utilisé du fait que la matrice de correction s'annule totalement lorsque la correction n'est pas nécessaire, en d'autres termes, lorsque le degré relatif est inférieur ou égal à quatre. Dans les deux cas la stabilité en boucle fermée est garantie.

Cependant, l'horizon de prédiction n'a plus d'effet sur le temps de réponse du système bouclé, dans le premier cas. Ce dernier ne dépend plus que du placement de pôles fait sans tenir compte de la commande prédictive. Le prix à payer avec cette méthode est la perte du caractère prédictif de la loi de commande résultante.

En revanche, dans le second cas, la matrice de correction utilisée est, par construction, une matrice "intelligente". Elle s'annule de facto lorsque la correction n'est pas nécessaire. Autrement dit, elle ne produit aucune action sur la matrice de prédiction et donc sur la matrice de gain K de la commande lorsque le degré relatif du système non linéaire de départ est inférieur ou égal à quatre. L'efficacité de cette méthode pour la stabilisation du système linéaire bouclé est testée avec succès en simulation pour un degré relatif pouvant atteindre 40 avec des valeurs correspondantes spécifiques de l'horizon de prédiction. Avec cette méthode, l'horizon de prédiction, paramètre extrinsèque au système, n'agit plus uniquement comme paramètre de positionnement des pôles dans le plan complexe mais, avec le degré relatif, comme paramètre de stabilisation. Ainsi, le concepteur de la loi de commande dispose, avec cette méthode, de la possibilité d'agir sur le caractère stabilisant de sa loi de commande tout en conservant son caractère prédictif.

Correction linéaire de la loi de commande

L'objectif de cette méthode est de pouvoir faire un placement de pôles, à partir de la loi de commande résultant de la minimisation du critère quadratique J modifié.

Construction du nouveau critère La modification à apporter est l'ajout d'un terme linéaire en commande u au critère. Nous le définissons comme $J_c = Gvu$ où G est donné par $G = -\Pi_{ss}D$, v est la loi de commande permettant d'effectuer le placement de pôles dans le futur système de coordonnées et u est le signal de contrôle du système SISO considéré. Pour rappel, Π_{ss} est donné par :

$$\Pi_{ss} = \frac{T^{2\rho+1}}{\rho! \rho! (2\rho+1)} \quad \text{et} \quad D = L_g L_f^{\rho-1} h.$$

Soit J_v le critère corrigé tel que

$$J_v = J + J_c$$

ou, de façon équivalente :

$$J_v = \frac{1}{2} \int_0^T [\hat{e}(t + \tau)]^2 d\tau + Gvu. \quad (2.70)$$

Elaboration de la loi de commande En minimisant ce critère par rapport au contrôle u et en appliquant la loi de commande résultante au système non linéaire (2.37) obtenu par changement de coordonnées, il vient un système linéaire bouclé sous les formes compagnes commandable et observable, voir les équations (2.83) et (2.84). Ainsi, nous sommes sûrs d'atteindre notre objectif de placement de pôles. Notez que l'erreur de prédiction est déterminée de la même manière que dans le cas de la NCGPC sans correction. Seul le résultat de la minimisation du critère corrigé change du fait du terme de correction rajouté.

Ainsi :

$$\frac{\partial J_v}{\partial u} = \frac{\partial J}{\partial u} + \frac{\partial J_c}{\partial u} = 0 \quad (2.71)$$

ou, de manière équivalente :

$$\left(\frac{\partial E(t)}{\partial u} \right)^t \Pi(T, \rho) E(t) + Gv = 0 \quad (2.72)$$

où E est donné dans les équations (2.22) et (2.23). Ce qui entraîne

$$\begin{bmatrix} 0_{1 \times \rho} & D \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} h - \omega \\ L_f h - \dot{\omega} \\ \vdots \\ L_f^\rho h - \omega^{(\rho)} + Du \end{bmatrix} + Gv = 0. \quad (2.73)$$

Après simplifications et en remplaçant G par son expression, il vient

$$D\Pi_s \begin{bmatrix} h - \omega \\ L_f h - \dot{\omega} \\ \vdots \\ L_f^\rho h - \omega^{(\rho)} + Du \end{bmatrix} - D\Pi_{ss}v = 0. \quad (2.74)$$

Comme D ne s'annule pas (parce que le degré relatif ρ est supposé bien défini, voir l'assomption A3) il vient

$$\Pi_s \begin{bmatrix} h - \omega \\ L_f h - \dot{\omega} \\ \vdots \\ L_f^\rho h - \omega^{(\rho)} + Du \end{bmatrix} - \Pi_{ss}v = 0. \quad (2.75)$$

D'où

$$\Pi_s \begin{bmatrix} 0_{\rho \times 1} \\ Du \end{bmatrix} - \Pi_{ss}v = \Pi_s \begin{bmatrix} \omega - h \\ \vdots \\ \omega^{(\rho)} - L_f^\rho h \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

et

$$\Pi_{ss}Du - \Pi_{ss}v = \Pi_s \begin{bmatrix} \omega - h \\ \vdots \\ \omega^{(\rho)} - L_f^\rho h \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

ou

$$\Pi_{ss}(Du - v) = \Pi_s \begin{bmatrix} \omega - h \\ \vdots \\ \omega^{(\rho)} - L_f^\rho h \end{bmatrix}. \quad (2.78)$$

Par conséquent

$$Du - v = \Pi_{ss}^{-1} \Pi_s \begin{bmatrix} \omega - h \\ \vdots \\ \omega^{(\rho)} - L_f^\rho h \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

et

$$Du = \Pi_{ss}^{-1} \Pi_s \begin{bmatrix} \omega - h \\ \vdots \\ \omega^{(\rho)} - L_f^\rho h \end{bmatrix} + v \quad (2.80)$$

ce qui donne finalement

$$u(x(t)) = \frac{-\sum_{l=0}^{\rho} K_{\rho l} [L_f^l h(x(t)) - \omega^{(l)}(t)]}{L_g L_f^{\rho-1} h(x(t))} + \frac{v}{L_g L_f^{\rho-1} h(x(t))}, \quad (2.81)$$

où les $K_{\rho l}$ sont tels que

$$K_{\rho l} = \frac{\rho!}{l! T^{\rho-l}} \frac{2\rho+1}{\rho+l+1},$$

pour tout $0 \leq l \leq \rho$.

Analyse de stabilité du système linéaire bouclé La méthode que nous utilisons dans ce cas pour l'analyse de stabilité est la même que précédemment. Nous changeons de coordonnées, dans un premier temps, construisons le nouveau système de coordonnées d'où est déduit le système non linéaire dans un second temps et enfin, dans un troisième temps, appliquons à ce système la loi de commande.

Changement de coordonnées En reprenant le même changement de coordonnées qu'en (2.37) qui conduit au système non linéaire (2.38), nous passons à l'application de la loi de commande corrigée (2.81).

Application de la loi de commande corrigée En substituant u à la loi de commande corrigée (2.81) dans la dernière équation du système (2.37), il vient

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= A_\rho Z + B_\rho v \\ O &= C_\rho Z \end{aligned} \quad (2.82)$$

où

$$A_\rho = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline -K_{\rho 0} & -K_{\rho 1} & -K_{\rho 2} & \cdots & -K_{\rho(\rho-1)} \end{array} \right], \quad (2.83)$$

$$B_\rho = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } C_\rho^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

qui constituent les formes compagnes commandable et observable. Le système (2.82) est alors contrôlable et observable. Par conséquent, il existe une matrice L tel qu'un placement de pôles soit réalisable. Pour ce faire, choisissons le contrôle v tel que

$$v = -LZ = -\sum_{l=0}^{\rho-1} L_l \left[L_f^l h(x) - \omega^{(l)} \right].$$

La somme est faite jusqu'à l'ordre $(\rho - 1)$ pour éviter d'introduire à nouveau les nonlinéarités déjà compensées par les premiers termes de la loi de commande (2.81). D'où le résultat suivant, voir [Dabo 09a].

Théorème 2.2.4 $\heartsuit$ Soit un système non linéaire de la forme (2.1) vérifiant les assomptions A1 à A4, avec un degré relatif strictement supérieur à quatre. La stabilité en boucle fermée pour un tel système peut être obtenue avec une loi de commande de la forme

$$u(x) = \frac{-\sum_{l=0}^{\rho} K_{\rho l} \left[L_f^l h(x) - \omega^{(l)} \right]}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} - \frac{\sum_{l=0}^{\rho-1} L_l \left[L_f^l h(x) - \omega^{(l)} \right]}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)},$$

résultant de la minimisation du critère

$$J_v = \frac{1}{2} \int_0^T [\hat{e}(t + \tau)]^2 d\tau + Gvu$$

où $\hat{e}(t + \tau)$ est l'erreur de prédiction à l'instant τ et Gvu un terme de correction linéaire par rapport au contrôle u , avec $G = -D\Pi_{ss}$ et $v = -\sum_{l=0}^{\rho-1} L_l \left[L_f^l h(x) - \omega^{(l)} \right] \heartsuit$.

La loi de commande (2.81) appliquée à tout système non linéaire SISO de degré relatif strictement supérieur à quatre, assure la stabilité en boucle fermée du système linéaire résultant faisant appel à un placement de pôles. La table 2.7 montre l'importance du choix du critère, en fonction du degré relatif, pour garantir la stabilité du système linéaire bouclé. L'algorithme 2 résumant la méthode est présenté.

TABLE 2.7 – Stabilité du système linéaire bouclé en fonction du critère et du degré relatif.

Degré relatif ρ	$\rho \leq 4$	$\rho > 4$
Critère sans correction $J = \frac{1}{2} \int_0^T [\hat{e}(t + \tau)]^2 d\tau$	stable	instable
Critère avec correction $J_v = \frac{1}{2} \int_0^T [\hat{e}(t + \tau)]^2 d\tau + Gvu$	stable	stable

- Chercher le degré relatif ρ et calculer la dynamique des zéros (nous la supposons stable).
- Si $\rho \leq 4$
 - appliquer la méthode détaillée dans l'algorithme 1
- Si $\rho > 4$:
 - Fixer l'horizon de prédiction et calculer les coefficients $K_{\rho l}$
 - En déduire la matrice du système linéaire bouclé A et construire la matrice B :

$$A = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline -K_{\rho 0} & -K_{\rho 1} & -K_{\rho 2} & \cdots & -K_{\rho \rho-1} \end{array} \right] \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Construire la matrice P des pôles désirés
- En déduire le vecteur L tel que les valeurs propres de la matrice $A - BL$ soient égaux aux éléments de la matrice P . Le vecteur L est donné par

$$L = [L_0 \quad L_1 \quad \cdots \quad L_{\rho-1}]$$

- Appliquer la loi de commande corrigée suivante

$$u(x(t)) = \frac{-\sum_{l=0}^{\rho} K_{\rho l}(T, \rho) [L_f^l h(x(t)) - \omega^{(l)}(t)]}{L_g L_f^{\rho-1} h(x(t))} - \frac{\sum_{l=0}^{\rho-1} L_l [L_f^l h(x(t)) - \omega^{(l)}(t)]}{L_g L_f^{\rho-1} h(x(t))}$$

qui garantit la stabilité pour toutes valeurs du degré relatif du système considéré.

Algorithme 2: Algorithme d'application de la loi de commande avec correction linéaire en fonction du degré relatif.

Remarque 2.2.2.1 Cette méthode de placement de pôles, annihile l'action de l'horizon de prédiction sur le temps de réponse du système linéaire bouclé, ce qui ne permet pas de garder le caractère prédictif de la loi de commande.

Pour rester dans l'esprit de la NCGPC, nous proposons une deuxième méthode qui consiste à rajouter une matrice de correction à la matrice de prédiction du critère initial et à utiliser une autre alternative pour le placement de pôles que nous expliciterons. La particularité de la matrice en question est qu'elle n'agit que sur la dernière ligne de la matrice de prédiction Π du critère J transformant ainsi la matrice de gain K de la loi de commande u afin de garantir la stabilité du système bouclé.

Propriétés de la NCGPC avec correction linéaire En considérant les mêmes hypothèses que dans le cas non corrigé, nous avons les propriétés suivantes :

- la NCGPC linéairement corrigée conserve le caractère optimal, linéarisant et stabilisant (en boucle fermée) de la NCGPC. De plus, sous réserve que le placement de pôles soit faisable, cette stabilisation est obtenue, quelque soit le degré relatif considéré ;

- cependant, le degré relatif (pour des valeurs strictement supérieures à 5) n'influe plus sur la position des pôles dans le plan complexe, puisque ces derniers sont fixés par placement de pôles ; il n'influe non plus sur la stabilité du système bouclé ;
- aussi, nous avons la perte du caractère homothétique de l'inverse de l'horizon de prédiction et la perte du caractère prédictif de la loi de commande.

En réalité, il vaut toujours mieux que certains phénomènes gardent leur défaut, si les corrections que nous devons leur apporter les dénaturent.

Illustration Soit le système SISO non linéaire suivant, de dimension 6,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + x_1^2 \\ \dot{x}_3 = x_4 - x_2 \\ \dot{x}_4 = x_5 - x_1 \\ \dot{x}_5 = x_2 - 3u \\ \dot{x}_6 = x_5 - x_6 \end{cases} \text{ et } y = h(x) = x_1 \quad (2.85)$$

dont l'objectif demeure la poursuite de trajectoire de sa sortie y . Pour ce faire, nous suivrons les différentes étapes résumées dans l'algorithme 2.

Degré relatif et dynamique des zéros Soit ρ le degré relatif du système (2.85) calculé comme suit :

$$\begin{cases} y = h(x) = x_1 \\ \dot{y} = L_f h(x) = \dot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{y} = L_f^2 h(x) = \dot{x}_2 = x_3 + x_1^2 \\ y^{(3)} = L_f^3 h(x) = 2x_1 x_2 + x_4 - x_2 \\ y^{(4)} = L_f^4 h(x) = 2x_2^2 + (2x_1 - 1)(x_3 + x_1^2) \\ \quad + x_5 - x_1 \\ y^{(5)} = L_f^5 h(x) + u L_g L_f^4 h(x) = (2x_3 + 2x_1^2 \\ \quad + 2(2x_1 - 1)x_1 - 1)x_2 + 4x_2(x_3 + x_1^2) \\ \quad + (2x_1 - 1)(x_4 - x_2) + x_2 + 3u \end{cases} \quad (2.86)$$

Il est bien défini et est égal à 5. Par conséquent, nous avons une dynamique des zéros stable donnée par $\dot{x}_6 = -x_6$.

Calcul de la matrice de gain K et placement de pôles Nous choisissons pour cette application un horizon de prédiction de $T = 0.1$ seconde. Ce qui entraîne

$$K \cong \begin{bmatrix} 2.2 & 0.19 & 82.10^{-4} & 2.10^{-4} & 0 & 1.10^{-7} \end{bmatrix} * 10^7.$$

Comme le degré relatif ρ est plus grand que quatre, nous construisons arbitrairement le vecteur des pôles désirés P tel que

$$P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 & -4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Nous en déduisons ensuite le vecteur L tel que les valeurs propres de la matrice $A - BL$ soient toutes éléments de la matrice P . Ainsi, le vecteur L est donné par

$$L \cong \begin{bmatrix} -2.2 & -0.19 & -82.10^{-4} & -2.10^{-4} & 0 \end{bmatrix} * 10^7.$$

Par conséquent, la loi de commande stabilisante ci-dessous

$$u(x) = -\frac{L_f^5 h(x) - \omega^{(5)}}{L_g L_f^4 h(x)} - \frac{\sum_{l=0}^4 (K_{5l} + L_l) [L_f^l h(x) - \omega^{(l)}]}{L_g L_f^4 h(x)},$$

est appliquée au système non linéaire considéré dans un nouveau système de coordonnées et les résultats de simulation sont présentés en figure 2.17.

Quelques résultats de simulation La poursuite de trajectoire est correcte puisque l'erreur converge vers zéro et que la commande ne prend pas des valeurs "disproportionnées".

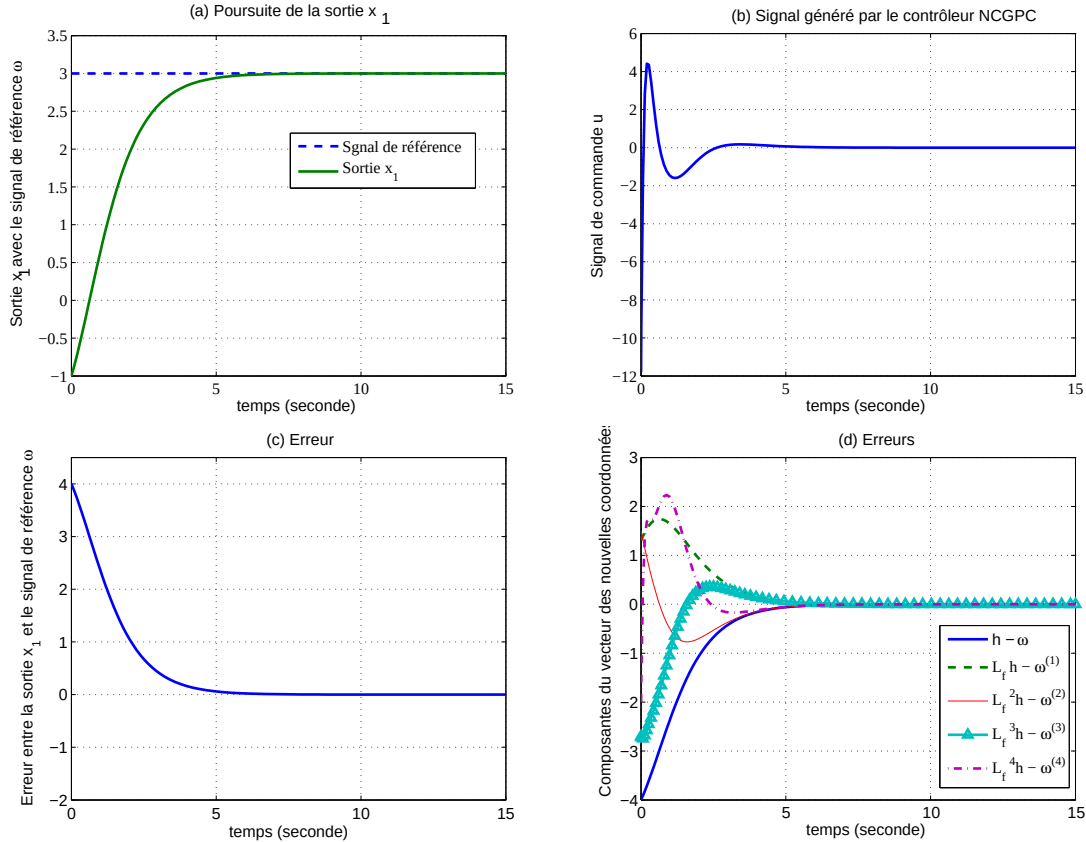


FIGURE 2.17 – NCGPC avec correction linéaire : poursuite du signal de référence ω par la sortie x_1 .

Cependant, si cette méthode nous permet de résoudre le problème d'instabilité d'une classe de systèmes SISO non linéaires (dont le degré relatif est strictement supérieur à quatre), il ne nous permet pas de garder l'esprit de la commande prédictive. D'où la méthode de correction matricielle suivante comme alternative.

Correction matricielle de la loi de commande

Construction du nouveau critère Soit M un vecteur donné par

$$M = [M_1 \quad M_2 \quad \cdots \quad M_\rho \quad M_{\rho+1}], \quad (2.87)$$

avec $M_{\rho+1} = 0$. Chacun des termes M_l , pour $1 \leq l \leq \rho + 1$, est choisi de sorte que la stabilité du système bouclé, résultant de la loi de commande "corrigée", soit garantie.

Soit P la matrice de correction telle que

$$P = \Pi_{ss} \begin{bmatrix} 0_{\rho \times (\rho+1)} \\ \hline M_1 \quad \dots \quad M_\rho \quad 0 \end{bmatrix}, \quad (2.88)$$

où Π_{ss} est donnée dans (A.7).

Pour modifier convenablement le critère, il suffit d'ajouter à la matrice de prédiction Π du critère, la matrice de correction P . Il vient alors la matrice de prédiction corrigée Π^c telle que

$$\Pi^c = \left[\begin{array}{c|c} \Pi_{(m,n)}(T, \rho) & \Pi_{(m,\rho+1)}(T, \rho) \\ \hline \Pi_{sn}(T, \rho) + \Pi_{ss}(T, \rho)M_p & \Pi_{ss}(T, \rho) + \Pi_{ss}(T, \rho)M_{\rho+1} \end{array} \right] \quad (2.89)$$

pour tous entiers naturels m, n, p tels que $1 \leq m, n, p \leq \rho$.

En remplaçant la matrice de prédiction Π par la matrice de prédiction corrigée Π^c , il vient le critère "corrigé" suivant :

$$J_c(t) = \frac{1}{2} E^t(t) \Pi^c(T, \rho) E(t). \quad (2.90)$$

Ainsi, la loi de commande "corrigée" peut être déduite par minimisation par rapport à la commande u de ce critère.

Elaboration de la loi de commande Les assumptions A1 à A4 mentionnées dans la partie 2.2.1 restent valables ici et dans la suite. La prédiction du signal de sortie, le développement en série de Taylor du signal de référence et de l'erreur de prédiction sont les mêmes ici que dans la section présentant la loi de commande sans correction. Le critère corrigé (2.90) est obtenu à partir de l'équation (2.19). En le minimisant par rapport à la commande u , il vient

$$\frac{\partial J_c}{\partial u} = 0 \quad (2.91)$$

soit plus explicitement

$$\left(\frac{\partial E(t)}{\partial u(t)} \right)^t \Pi^c(T, \rho) E(t) = 0 \quad (2.92)$$

où le vecteur E , est donné dans les équations (2.22) et (2.23). Ainsi,

$$\begin{bmatrix} 0_{1 \times \rho} & D \end{bmatrix} \Pi^c \begin{bmatrix} h - \omega \\ \vdots \\ L_f^\rho h - \omega^{(\rho)} + Du \end{bmatrix} = 0. \quad (2.93)$$

Après simplifications, il vient :

$$D \Pi_s^c \begin{bmatrix} h - \omega \\ \vdots \\ L_f^\rho h - \omega^{(\rho)} + Du \end{bmatrix} = 0 \quad (2.94)$$

où Π_s^c , dernière ligne de la matrice Π^c , est donnée par :

$$\Pi_s^c = [\Pi_{sn} + \Pi_{ss}M_p \mid \Pi_{ss}]$$

pour tout $1 \leq n, p \leq \rho$, puisque $M_{\rho+1}$ est égal à zéro.

Comme D ne s'annule pas (parce que le degré relatif ρ est supposé bien défini, voir assomption A3), il vient

$$\Pi_s^c \begin{bmatrix} h - \omega \\ \vdots \\ L_f^\rho h - \omega^{(\rho)} + Du \end{bmatrix} = 0. \quad (2.95)$$

Par conséquent :

$$\Pi_s^c \begin{bmatrix} 0_{\rho \times 1} \\ Du \end{bmatrix} = \Pi_s^c \begin{bmatrix} \omega - h \\ \vdots \\ \omega^{(\rho)} - L_f^\rho h \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

et avec des simplifications :

$$\Pi_{ss}^c Du = \Pi_s^c \begin{bmatrix} \omega - h \\ \vdots \\ \omega^{(\rho)} - L_f^\rho h \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

donc

$$Du = [\Pi_{ss}^c]^{-1} \Pi_s^c \begin{bmatrix} \omega - h \\ \vdots \\ \omega^{(\rho)} - L_f^\rho h \end{bmatrix}. \quad (2.98)$$

Comme Π_{ss}^c est le dernier élément du vecteur ligne Π_s^c et que $M_{\rho+1} = 0$, alors $\Pi_{ss}^c = \Pi_{ss}$. En posant $K^c = \Pi_{ss}^{-1} \Pi_s^c$, il vient, pour chaque élément $K_{\rho i}^c$ de K^c :

$$K_{\rho i}^c = \frac{\rho!}{i!} \frac{(2\rho + 1)}{(\rho + i + 1)T^{\rho-i}} + M_i \quad (2.99)$$

avec $M_i = M_{l-1}$ pour tout $0 \leq i = l - 1 \leq \rho$. Le terme $K_{\rho i}^c$ peut être réécrit comme

$$K_{\rho i}^c = K_{\rho i} + M_i \quad (2.100)$$

où M_i est le terme qui agit comme correction sur $K_{\rho i}$. Finalement, nous obtenons la loi de commande suivante :

$$u(x(t)) = \frac{-\sum_{i=0}^{\rho} K_{\rho i}^c(T, \rho) [L_f^i h(x(t)) - \omega^{(i)}(t)]}{L_g L_f^{\rho-1} h(x(t))} \quad (2.101)$$

qui est optimale car résulte de la minimisation d'un critère et "intelligente" puisque les termes M_i s'annulent de facto lorsque le degré relatif est inférieur ou égal à quatre. En effet, *l'intelligence, c'est agir, uniquement, quand l'action s'impose, par rapport à nos objectifs.*

Analyse de stabilité du système linéaire bouclé Pour ce faire, le principe reste le même. Nous allons :

- changer de coordonnées
- en déduire un nouveau système non linéaire
- appliquer la loi de commande corrigée.

Changement de coordonnées et système non linéaire Nous utilisons le même changement de coordonnées qu'en 2.2.2 ainsi que le système non linéaire qui en découle. Ce qui nous conduit à l'application de la loi de commande comme suit.

Application de la loi de commande En appliquant la loi de commande (2.101) au système non linéaire obtenu par changement de coordonnées, il vient

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= A_\rho^c Z \\ O &= C_\rho^c Z\end{aligned}\tag{2.102}$$

où

$$A_\rho^c = \left[\begin{array}{c|ccc} 0_{(\rho-1) \times 1} & Id_{(\rho-1) \times (\rho-1)} & & \\ \hline -K_{\rho 0}^c & -K_{\rho 1}^c & \dots & -K_{\rho(\rho-1)}^c \end{array} \right]\tag{2.103}$$

et

$$C_\rho^c = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0].\tag{2.104}$$

Par conséquent, le polynôme caractéristique $P_{\rho T}^c$ est donné par l'équation

$$P_{\rho T}^c = \sum_{l=0}^{\rho} K_{\rho l}^c(T, \rho) \lambda^l$$

où

$$K_{\rho l}^c = \frac{\rho!}{l!} \frac{(2\rho + 1)}{(\rho + l + 1)T^{\rho-l}} + M_l$$

pour tout $0 \leq l \leq \rho - 1$.

Choix des éléments de la matrice M Nous rappelons ici, que les éléments de la matrice M sont choisis de sorte à garder le caractère prédictif de la loi de commande dans le futur placement de pôles. Aussi, l'horizon de prédiction devient un paramètre important pour la stabilité du système bouclé.

Analyse de stabilité du système linéaire bouclé Soit B , une matrice de dimensions $\rho \times 1$, telle que :

$$B = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^t.$$

Soit Ω un vecteur composé, en partie, des pôles stables du système non linéaire bouclé (2.102) complété par les pôles instables du même système, rendus stables par la méthode suivante :

- prendre le minimum de la partie réelle de tous les pôles,
- le rajouter à chacun des pôles instables,
- si le résultat est négatif, le garder ainsi,
- sinon, le forcer à être négatif en lui affectant un signe moins.

La stabilité en boucle fermée, pour ρ variant entre 1 et 16 et $T = 1$ seconde, est garantie, si les valeurs propres de la matrice $A - BM$ sont égales aux éléments de la matrice Ω . La matrice A est donnée dans l'équation (2.103). Il est important de noter que dans tout le reste du document, l'unité de l'horizon de prédiction est, et restera, la seconde.

Dans le cas où le degré relatif varie entre 17 et 40, la stabilité en boucle fermée peut être atteinte

avec des valeurs spécifiques de l'horizon de prédiction comprises entre 1 et 15 secondes. Cependant, dans le cas de notre étude, nous n'avons pas trouvé de moyen pour garantir la stabilité pour un degré relatif égal à 60. En effet, à partir de $T = 15$ s, la valeur du degré relatif pour laquelle la stabilité en boucle fermée est garantie commence à décroître à partir de $\rho = 40$. Ce résultat est résumé dans la table 2.8, et une illustration en est donnée sur la figure 2.18.

ρ	$T(s)$	ρ	$T(s)$	ρ	$T(s)$
1-16	1	38	13	23	28
17-19	2	39	14	22	29 ;30
20-22	3	40	15	21	31 ;32
23-25	4	38	16	20	33-35
24-26	5	36	17	19	36 ;37
27-29	6	35	18	18	38-40
30	7	32	19	17	41-45
31-32	8	30	20 ;21	16	46-49
33-34	9	28	22	15	50-57 et 59 ;60
35	10	26	23	14	58
36	11	25	24-26		
37	12	24	27		

TABLE 2.8 – Valeurs du degré relatif et de l'horizon de prédiction (en seconde) garantissant la stabilité du système linéaire bouclé.

Dans la table 2.8, nous avons 6 colonnes classées deux à deux : une colonne du degré relatif et une colonne de l'horizon de prédiction dont les valeurs garantissent la stabilité du système bouclé. Si nous considérons les deux premières colonnes par exemple, 1 – 16 signifie que le degré relatif varie de 1 à 16 et que le chiffre 1 en face de cette colonne, est une valeur de l'horizon de prédiction qui permet de garantir la stabilité en boucle fermée.

Pour la deuxième ligne, toujours en considérant les deux premières colonnes, 17 – 19 signifie que la valeur numérique du degré relatif, à partir de laquelle on peut utiliser un horizon de prédiction de 2 secondes, dans le même objectif de stabilité, est 17. Pour la même valeur de l'horizon de prédiction, la valeur maximale du degré relatif est 19. Cependant, la stabilité du système bouclé est conservée, si, pour $T = 2$ secondes on considère l'intervalle 1 – 19 pour le degré relatif. Ceci reste vrai pour tous les intervalles de la première colonne. Notez que la valeur 2 de l'horizon de prédiction, n'est pas l'unique valeur qui garantit la stabilité. Nous n'avons pas, cependant, dans cette étude, fait un recensement exhaustif des autres valeurs garantissant la stabilité.

Dans le cas où nous n'avons qu'une seule valeur du degré relatif, ce qui est le cas pour la dernière ligne des deux premières colonnes, par exemple, 37 voudrait dire que de 1 à 37, la stabilité du système bouclé est garanti avec $T = 12$.

En considérant les deux colonnes suivantes :

- 30 et 20 ; 21 signifie que les 2 valeurs de l'horizon de prédiction 20 et 21 assure la stabilité du système bouclé pour un degré relatif variant de 1 à 30
 - 25 et 24-26 signifie que pour un horizon de prédiction variant de 24 à 26, l'objectif de stabilité du système bouclé est atteint pour un système de degré relatif égal à 25.
- Enfin, dans les deux dernières colonnes, le cas 15, 50 – 57 et 59 ; 60 veut dire que pour un horizon de prédiction variant de 50 à 57 ou prenant les valeurs 59 et 60, l'objectif de stabilité en boucle fermée est atteint pour un système de degré relatif égal à 15.

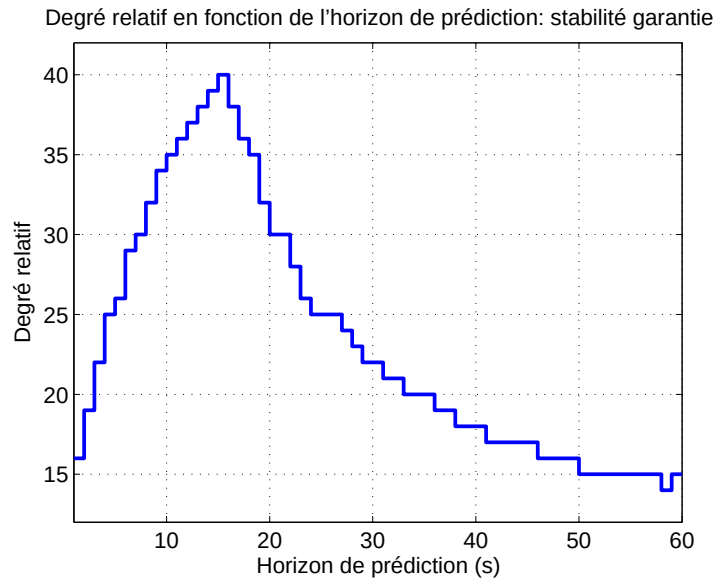


FIGURE 2.18 – Degré relatif ρ en fonction de l'horizon de prédiction T pour lequel la stabilité en boucle fermée est garantie.

Notez que dans le cas où il y a un intervalle de l'horizon de prédiction, ce sont exclusivement ces valeurs qu'il faudra considérer et ne pas partir de 1 comme pour le degré relatif.

Sur la figure 2.18, nous atteignons le maximum du degré relatif, 40, pour lequel la stabilité du système bouclé est garantie. Ceci est possible avec un horizon de prédiction égal à 15 mais également, variant par pas de 0,1 à partir de 15 jusqu'à 15,9 s.

Nous pouvons alors dire que *plus on va loin dans la prédiction, au sens de l'horizon, moins le résultat attendu, au sens de la stabilité, est performant*. Il y a donc ici une limite, un compromis à faire entre l'horizon de prédiction et la performance du système, en tenant compte du degré relatif.

Remarque 2.2.2.2 Avec des valeurs spécifiques de l'horizon de prédiction, variant entre 1 et 15 secondes, une telle méthode de placement de pôles permet de garantir la stabilité en boucle fermée, pour un système de la forme (2.1) dont le degré relatif peut atteindre 40. Dans le cas où l'horizon de prédiction est supérieur ou égal à 16, on obtient certes la stabilité, mais avec une dynamique lente pour le système bouclé.

Remarque 2.2.2.3 Avec la NCGCP "sans correction", les paramètres T et ρ servent, respectivement, à choisir la dynamique du système bouclé et à déterminer sa stabilité.

Cependant, pour la NCGPC "avec correction matricielle", l'horizon de prédiction T permet, en plus de fixer la dynamique du système bouclé (pour $\rho > 4$), d'en garantir la stabilité. Dans ce cas, le rôle stabilisateur de l'horizon de prédiction prédomine sur celui du degré relatif lorsque ce dernier dépasse la valeur quatre. Alors le paramètre extrinsèque prend le relais lorsque le paramètre intrinsèque n'a plus de marge de manoeuvre.

Observations numériques 2.2.1 ♡ Soit un système SISO non linéaire de la forme (2.1), vérifiant les assumptions A1 à A4, dont le degré relatif peut atteindre 40. La stabilité en boucle

fermée d'un tel système, dans le cas de la FL, est garantie avec une loi de commande de la forme

$$u(x(t)) = \frac{-\sum_{l=0}^{\rho} K_{\rho l}^c(T, \rho) \left[L_f^l h(x(t)) - \omega^{(l)}(t) \right]}{L_g L_f^{\rho-1} h(x(t))},$$

résultant de la minimisation, par rapport à la commande u , du critère corrigé

$$J_c(t) = \frac{1}{2} E^t(t) (\Pi(T, \rho) + P) E(t)$$

dont la matrice de prédiction $\Pi(T, \rho)$ est corrigée avec la matrice P définie comme :

$$P = \Pi_{ss} \begin{bmatrix} 0_{\rho \times (\rho+1)} \\ \hline M_1 & \dots & M_{\rho} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.105)$$

Chaque terme M_i , pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq \rho$, est choisi de telle sorte que les valeurs propres de la matrice $A - BM$ restent égales aux éléments de la matrice Ω des pôles désirés $\heartsuit$.

Corollaire 2.2.2.1 La matrice P "disparaît" totalement pour $\rho \leq 4$ (la stabilité en boucle fermée est garantie) ce qui n'est pas le cas lorsque $\rho > 4$ (nous perdons la stabilité en boucle fermée). Donc **pas de pôles instables, pas de correction**.

Remarque 2.2.2.4 Si le signal de référence $\omega(t)$ est fixé à zéro, la loi de commande ci-dessus devient simplement linéarisante et, de plus, elle garantit la stabilité en boucle fermée, pour des systèmes dont le degré relatif peut atteindre 40, avec des valeurs spécifiques de l'horizon de prédiction.

Le théorème 2.2.1 peut être présenté sous l'angle de la loi de commande et également sous l'angle du polynôme caractéristique. Il vient alors les deux résultats suivants.

Observations numériques 2.2.2 $\heartsuit$ Soit une loi de commande :

$$u(x(t)) = \frac{-\sum_{l=0}^{\rho} K_{\rho l}(T, \rho) \left[L_f^l h(x(t)) - \omega^{(l)}(t) \right]}{L_g L_f^{\rho-1} h(x(t))},$$

optimale, stabilisante pour $\rho \leq 4$, résultant de la minimisation du critère quadratique :

$$J(t) = \frac{1}{2} E^t(t) \Pi(T, \rho) E(t).$$

Soit A la matrice du système linéaire, résultant du bouclage par la commande ci-dessus, dans un nouveau système de coordonnées.

Alors u reste optimale si, à chacun de ses coefficients $K_{\rho l}$ on rajoute un terme M_i tel que les pôles de la matrice $A - BM$ soient égaux aux éléments de la matrice Ω . De plus, pour des valeurs spécifiques de l'horizon de prédiction T , $1 \leq T \leq 15s$, cette loi de commande est stabilisante quelque soit $\rho \leq 40$ $\heartsuit$.

Nous pouvons dire qu'il existe des phénomènes optimaux, stabilisants, qui restent optimaux, et dont on améliore considérablement le caractère stabilisant, si l'on apporte, dans la mesure du possible, des modifications intelligentes, au sein de ces mêmes phénomènes.

Observations numériques 2.2.3 ♡ Soit $P_{\rho T}(\lambda)$, un polynôme à coefficients réels, de la forme :

$$P_{\rho T}(\lambda) = \sum_{l=0}^{\rho} K_{\rho l} \lambda^l$$

dont chacun des coefficients $K_{\rho l}$ est de la forme

$$K_{\rho l} = \frac{(2\rho + 1)}{l!(\rho + 1 + l)} \frac{\rho!}{T^{\rho-l}}.$$

$P_{\rho T}(\lambda)$ est Hurwitz, pour toute valeur du degré relatif ρ compris entre un et quatre et ceci, quelque soit l'horizon de prédiction T .

Alors $P_{\rho T}(\lambda)$ le reste si, à chacun de ses coefficients $K_{\rho l}$ on rajoute un terme M_l tel que, les racines du nouveau polynôme caractéristique :

$$P_{\rho T}^c(\lambda) = \sum_{l=0}^{\rho} (K_{\rho l} + M_l) \lambda^l$$

soient égales aux éléments de la matrice Ω . Le caractère Hurwitz de $P_{\rho T}(\lambda)$ est maintenue pour $\rho \leq 40$ si l'horizon de prédiction est choisi entre 1 et 15 secondes ♡.

Une illustration de ce résultat est donnée en figures 2.19, 2.20, 2.21 et 2.22 où il est possible de voir, plus clairement, pour le cas $\rho = 40$, que la structure en branche de palmier est conservée et que, seuls les pôles instables sont poussés vers le demi-plan gauche complexe. C'est le cas aussi pour $\rho \leq 10$. On peut donc qualifier cette nouvelle structure de branches de palmiers soufflées vers le haut.

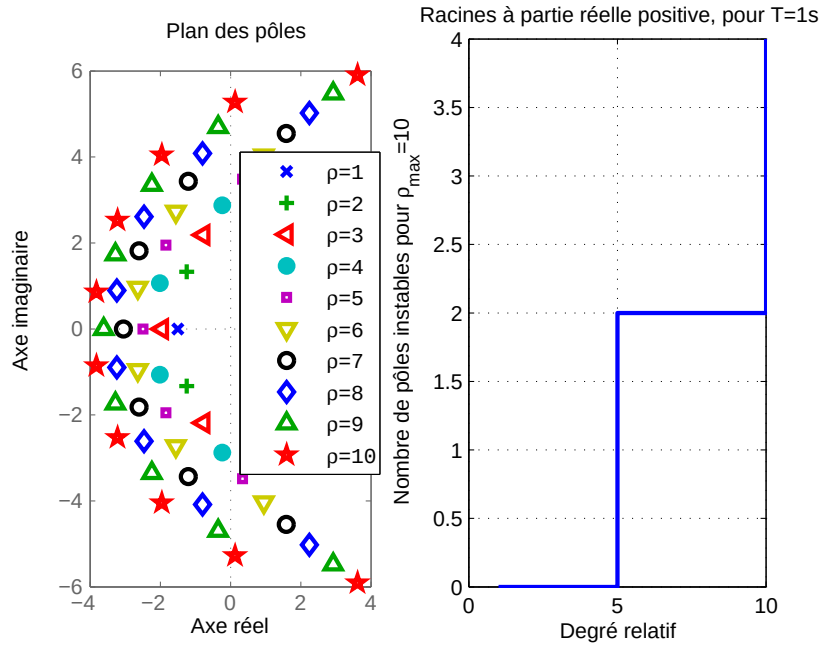


FIGURE 2.19 – Cas instable : position des pôles dans le plan complexe (à gauche) et nombre de pôles instables (à droite) pour un degré relatif $\rho = 10$ et un horizon de prédiction $T = 1s$.

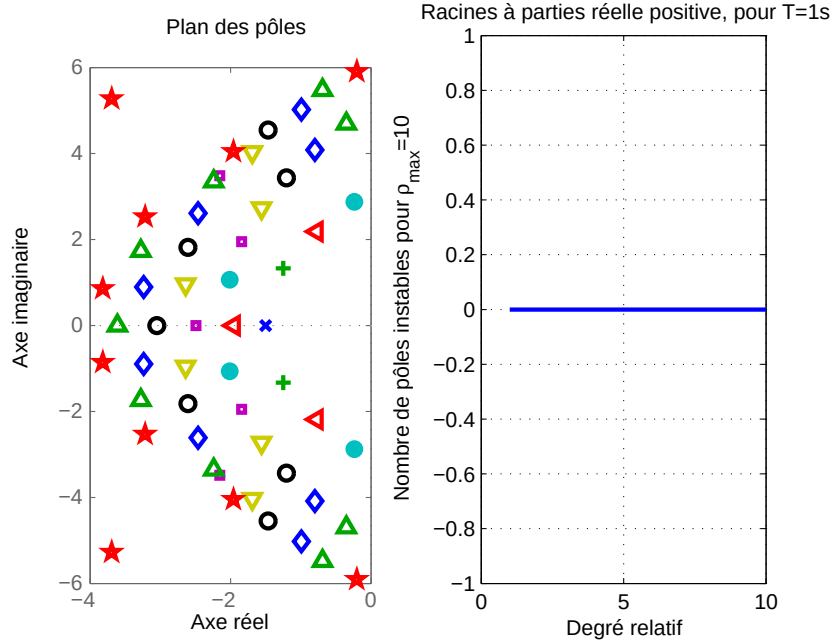


FIGURE 2.20 – Cas stable : position des pôles dans le plan complexe (à gauche) et nombre de pôles stables (à droite) pour un degré relatif $\rho = 10$ et un horizon de prédiction $T = 1s$.

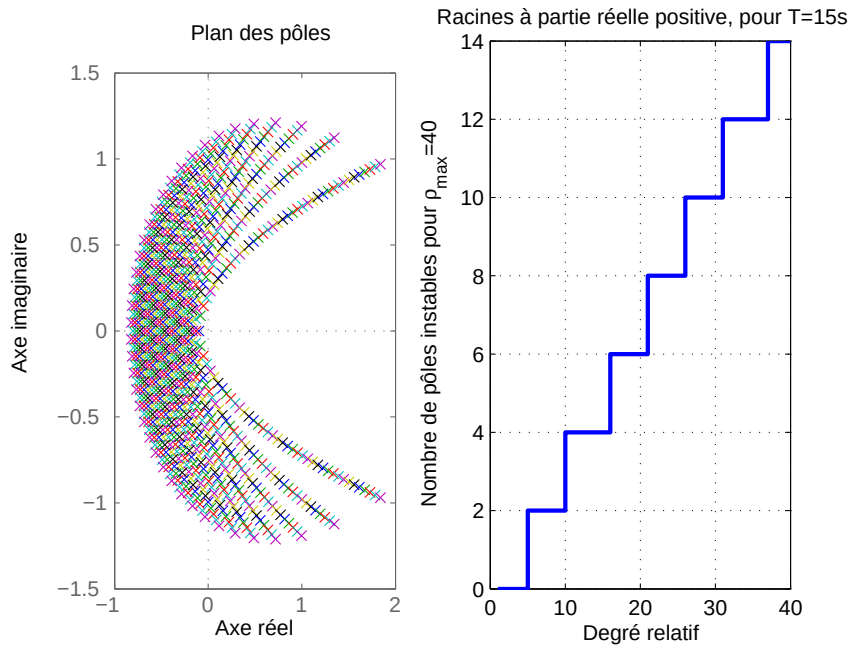


FIGURE 2.21 – Cas instable : position des pôles dans le plan complexe (à gauche) et nombre de pôles instables (à droite) pour un degré relatif $\rho = 40$ et un horizon de prédiction $T = 15s$.

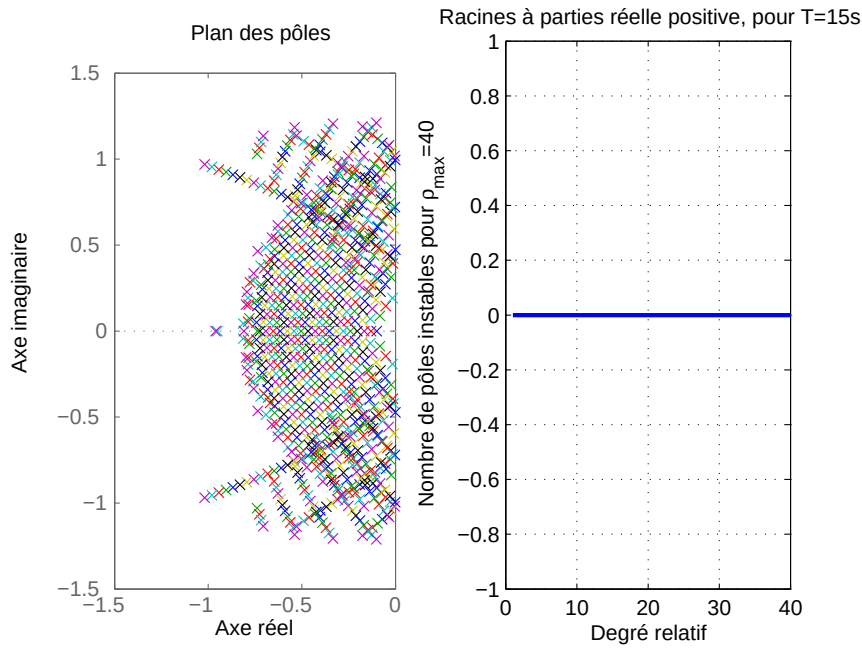


FIGURE 2.22 – Cas stable : position des pôles dans le plan complexe (à gauche) et nombre de pôles instables (à droite) pour un degré relatif $\rho = 40$ et un horizon de prédiction $T = 15s$.

Nous résumons ce résultat, en ce qui concerne la stabilité du système bouclé, dans la table 2.9 et un algorithme de la méthode utilisée est présenté.

TABLE 2.9 – Stabilité du système linéaire bouclé en fonction du critère et du degré relatif.

Degré relatif ρ	$\rho \leq 4$	$\rho > 4$
Critère sans correction $J = \frac{1}{2}E^t\Pi E$	stable	instable
Critère avec correction $J_v = \frac{1}{2}E^t\Pi^c E$	stable	stable

- Chercher le degré relatif ρ et calculer la dynamique des zéros (nous la supposons stable).

- **Si $\rho \leq 4$:**

- *appliquer la méthode détaillée dans l'algorithme 1*

- **Si $\rho > 4$:**

- Fixer l'horizon de prédiction et calculer les coefficients $K_{\rho l}$
- Construire la matrice A à partir de K et la matrice B :

$$A = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline -K_{\rho 0} & -K_{\rho 1} & -K_{\rho 2} & \cdots & -K_{\rho(\rho-1)} \end{array} \right] \quad \text{et} \quad B = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{array} \right]$$

- Déterminer les valeurs propres de A
- Construire la matrice Ω à partir d'elles et en déduire le vecteur M tel que

$$M = [M_1 \quad M_2 \quad \cdots \quad M_\rho \quad M_{\rho+1}]$$
 et tel que les valeurs propres de la matrice $A - BM$ soient égales aux éléments de la matrice Ω .
- Appliquer la loi de commande corrigée

$$u(x(t)) = \frac{-\sum_{l=0}^{\rho} K_{\rho l}^c(T, \rho) [L_f^l h(x(t)) - \omega^{(l)}(t)]}{L_g L_f^{\rho-1} h(x(t))}$$

qui garantit la stabilité jusqu'à $\rho = 40$ avec $1 \leq T \leq 15$ secondes.

Algorithme 3: Algorithme d'application de la loi de commande avec correction matricielle en fonction du degré relatif.

Propriétés de la NCGPC avec correction matricielle intelligente La NCGPC corrigée, sous vérification des assumptions A1 à A4, a les propriétés suivantes :

- elle conserve l’optimalité, les caractères linéarisant et stabilisant de la loi de commande (pour $\rho \leq 4$) ;
- elle confère à l’horizon de prédiction, en plus de son rôle de coefficient d’homothétie, le rôle de garant de la stabilité en boucle fermée à partir de certaines valeurs du degré relatif ;
- elle conserve le rôle intrinsèque du degré relatif qui se limite à caractériser la stabilité ;
- elle garantit la stabilité du système bouclé pour un degré relatif variant de 1 à 40 avec des valeurs de l’horizon de prédiction entre 1 et 15 secondes ;
- elle modifie légèrement la structure des pôles en branche de palmier dans le plan complexe ;
- elle garde le caractère prédictif de la NCGPC.

Illustration Reprenons le système (2.85) pour le même objectif de poursuite de trajectoire. La sortie n’ayant pas été changée, le degré relatif du système et sa dynamique des zéros sont les mêmes, à savoir $\rho = 5$ et $\dot{x}_6 = -x_6$.

Calcul de la matrice de gain K et placement de pôles Soit $T = 1$ s l’horizon de prédiction. Alors la matrice K est donnée par

$$K \simeq \begin{bmatrix} 220 & 189 & 83 & 24 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nous pouvons alors déduire la matrice A qui est égal à

$$A = \left[\begin{array}{c|ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 220 & 189 & 83 & 24 & 6 \end{array} \right]$$

dont les valeurs propres sont composées de

- 2 nombres complexes conjugués à partie réelle négative : $-1.8 \pm 2i$,
- 1 nombre réel strictement négatif : -2.5
- et 2 nombres complexes conjugués à partie réelle positive : $0.3 \pm 3.5i$.

Soit Ω la matrice des pôles désirés. Elle est égale à

$$\Omega \simeq \begin{bmatrix} -1.8 + 2i; & -1.8 - 2i; & -2, 5; & -2.2 + 3.5i; & -2.2 - 3.5i \end{bmatrix}.$$

Par conséquent $M \simeq \begin{bmatrix} 81 & 164 & 110 & 35 & 5 \end{bmatrix}$ et la matrice P est donnée par

$$P \simeq 6.10^{-6} \begin{bmatrix} & & 0_{5 \times 6} & \\ 81 & 164 & 110 & 35 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, la loi de commande corrigée suivante

$$u(x) = \frac{-\sum_{l=0}^5 (K_{5l}^c) \left[L_f^l h(x) - \omega^{(l)} \right]}{L_g L_f^4 h(x)}$$

peut être appliquée au système non linéaire résultant d’un changement de coordonnées, avec

$$K^c \simeq \begin{bmatrix} 301 & 353 & 193 & 59 & 11 & 1 \end{bmatrix}.$$

Les résultats de simulation sont présentés ci-dessous.

Quelques résultats de simulation La poursuite de trajectoire présentée est satisfaisante puisque l'erreur tend vers zéro sous l'effet d'un signal de commande qui ne prend pas des valeurs trop importantes, voir figure 2.23. Avec cette méthode, la stabilité du système non linéaire bouclé, de degré relatif égal à 5 (strictement supérieur à quatre), est garantie, tout en gardant le caractère prédictif de la loi de commande.

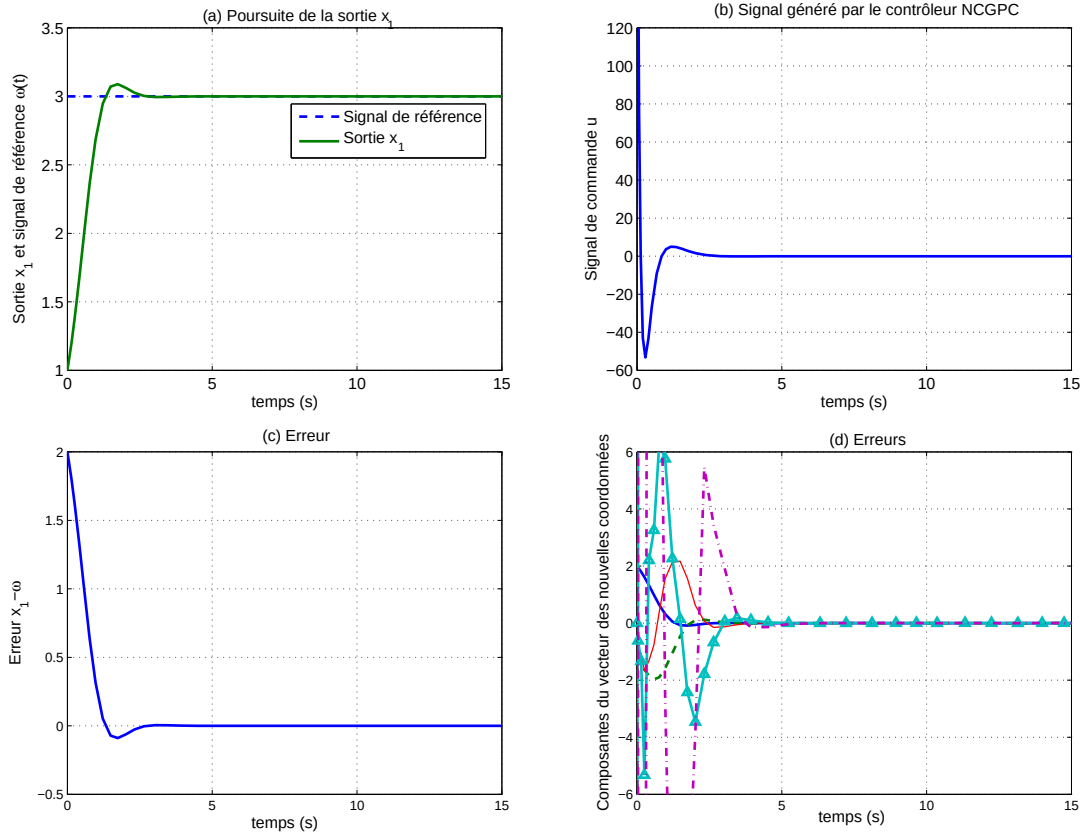


FIGURE 2.23 – NCGPC avec correction matricielle : poursuite de la référence ω par la sortie x_1 .

Comparaison des deux méthodes de correction

Les deux méthodes de correction présentées ci-dessus ont la même finalité qui est la résolution des problèmes de poursuite de trajectoire de sortie de systèmes non linéaires affines en contrôle. Les lois de commande résultantes sont toutes deux optimales car résultent de la minimisation d'un critère défini. Seulement, avec la correction linéaire, nous disposons d'une marge de manoeuvre plus importante pour le choix de la dynamique du système bouclé. Cependant, le caractère prédictif de la loi de commande est totalement perdu.

Néanmoins, dans le cas de la correction matricielle, le caractère prédictif de la loi de commande est conservé et la dynamique du système bouclé choisie à l'aide d'un seul paramètre : l'horizon de prédiction. Cependant un dilemme se pose dans cette méthode entre la stabilité et la rapidité du système bouclé pour les systèmes dont le degré relatif est strictement supérieur à quatre : c'est le dilemme du Caméléon. En effet, plus le degré relatif est grand, plus l'horizon de prédiction doit prendre des valeurs importantes pour assurer la stabilité et plus le système bouclé devient lent.

Dans la suite, nous examinerons la NCGPC sans contraintes pour le cas des systèmes non linéaires

MIMO carrés (dont le nombre d'entrées est égal au nombre de sorties).

2.3 Présentation de la commande sans contraintes : le cas MIMO

Soit le système MIMO carré non linéaire suivant donné par :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \\ y &= (h_1(x), \dots, h_m(x))^t\end{aligned}\quad (2.106)$$

où $x \in X \subset \mathbf{R}^n$, $y \in Y \subset \mathbf{R}^m$ et $u \in U \subset \mathbf{R}^m$ avec X un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et U et Y des ouverts de $\mathbf{R}^m$. Comme dans le cas SISO, nous ferons un bref rappel sur le vecteur degré relatif.

Rappel sur le vecteur degré relatif ρ Un système MIMO carré de la forme (2.106) a un (vecteur) degré relatif $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_m)$ en un point x^0 si :

(i)

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0$$

pour tout $1 \leq j \leq m$, pour tout $k < \rho_i - 1$, pour tout $1 \leq i \leq m$, et tout x dans un voisinage de x^0 ,

(ii) la matrice $D(x)$ de dimensions $m \times m$, appelée matrice de découplage, donnée par :

$$D(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

est non singulière en $x = x^0$, [Isid 95]. Par analogie au cas SISO, [Chen 01], le vecteur degré relatif ρ du système (2.106) est bien défini si les conditions (i) et (ii) sont vérifiées en tout point de l'ensemble de définition considéré.

Pour la suite, nous ferons l'hypothèse que la dynamique des zéros résultante, si elle existe, est stable.

2.3.1 Elaboration de la loi de commande pour un système MIMO carré

Elle se fait, comme dans le cas SISO, à partir de la minimisation d'un critère quadratique. Dans ce cas, le critère à minimiser est la somme des critères quadratiques des différentes erreurs correspondantes aux signaux de référence à poursuivre. Ainsi, soit ω le vecteur de signaux de référence tel que $\omega = (\omega_1(t), \dots, \omega_m(t))^t$. Soit $y_i(t) = h_i(x(t))$ la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur de sortie y . Nous définissons l'erreur $e_i(t)$ comme l'écart entre le signal de référence $\omega_i(t)$ et la sortie $h_i(x(t))$. Alors cette erreur est donnée par l'expression suivante :

$$e_i(t) = h_i(x(t)) - \omega_i(t). \quad (2.108)$$

La variable t est ici considérée comme l'instant présent. Nous désignons par τ l'instant auquel la prédiction va se faire. Par conséquent, l'erreur de prédiction $e_i(t)$, notée $\hat{e}_i(t + \tau)$, est égale à :

$$\hat{e}_i(t + \tau) \cong \begin{bmatrix} 1 & \tau & \frac{\tau^2}{2!} & \dots & \frac{\tau^{\rho_i}}{\rho_i!} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_i(t) \\ \dot{e}_i(t) \\ \vdots \\ e_i^{(\rho_i-1)}(t) \\ e_i^{(\rho_i)}(t) \end{bmatrix}. \quad (2.109)$$

En posant :

$$E_i(t) = \begin{bmatrix} e_i(t) \\ \dot{e}_i(t) \\ \vdots \\ e_i^{(\rho_i-1)}(t) \\ e_i^{(\rho_i)}(t) \end{bmatrix} \text{ et } \Lambda_i(\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ \tau \\ \vdots \\ \frac{\tau^{\rho_i-1}}{\rho_i-1!} \\ \frac{\tau^{\rho_i}}{\rho_i!} \end{bmatrix}^t, \quad (2.110)$$

l'erreur prédite devient :

$$\hat{e}_i(t + \tau) = \Lambda_i(\tau) E_i(t). \quad (2.111)$$

Construction du critère quadratique

Le critère que nous allons considérer ici est la somme de tous les critères quadratiques, construits sur chacune des sorties de notre système. Supposons que la poursuite de trajectoire se fasse sur les m composantes du vecteur de sortie. Par conséquent, pour chacune des composantes $h_i(x(t))$, nous avons le critère J_i tel que :

$$J_i = \frac{1}{2} \int_0^{T_i} [\hat{e}_i(t + \tau)]^2 d\tau, \quad (2.112)$$

avec T_i l'horizon de prédiction sur l'erreur e_i . D'où le critère global J_m tel que :

$$J_m = \sum_{i=1}^m J_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left\{ \int_0^{T_i} [\hat{e}_i(t + \tau)]^2 d\tau \right\} \quad (2.113)$$

dont la minimisation va conduire à la loi de commande u du système non linéaire MIMO carré.

Minimisation du critère et élaboration de la loi de commande

Les hypothèses A1 à A4 énoncées plus haut dans le cas SISO sont pratiquement les mêmes ici. Sauf les hypothèses A3 et A4 pour lesquels il convient mieux de parler, respectivement, de vecteur degré relatif que de degré relatif et de composantes des vecteurs de sortie et de référence que de sortie et de référence.

Dans le cas SISO, l'expression matricielle du critère est donnée par :

$$J(t) = \frac{1}{2} E^t(t) \Pi(T, \rho) E(t). \quad (2.114)$$

C'est cette expression que nous reprenons ici pour chaque vecteur E_i de l'erreur $e_i(t)$. Par conséquent, le critère J_m s'écrit :

$$J_m(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m E_i^t(t) \Pi_i(T_i, \rho_i) E_i(t). \quad (2.115)$$

Posons $u = [u_1, \dots, u_m]^t$ le vecteur de contrôle du système (2.106). La minimisation du critère J_m par rapport au contrôle u est :

$$\frac{\partial J_m}{\partial u} = 0_{m \times 1} \quad (2.116)$$

ou, de façon équivalente :

$$\frac{\partial J_m}{\partial u} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{\partial [E_i^t(t) \Pi_i(T_i, \rho_i) E_i(t)]}{\partial u} = 0_{m \times 1}. \quad (2.117)$$

Comme $\frac{1}{2}$ est différent de zéro, il vient

$$\frac{\partial J_m}{\partial u} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial E_i(t)}{\partial u} \right)^t \Pi_i(T_i, \rho_i) E_i(t) = 0_{m \times 1} \quad (2.118)$$

et, par conséquent :

$$\frac{\partial J_m}{\partial u} = \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial E_i(t)}{\partial u_1} \quad \dots \quad \frac{\partial E_i(t)}{\partial u_m} \right]^t \Pi_i(T_i, \rho_i) E_i(t) = 0_{m \times 1}. \quad (2.119)$$

Le vecteur $E_i(t)$ est donné par la relation suivante :

$$E_i(t) = \begin{bmatrix} h_i(x(t)) - \omega_i(t) \\ L_f h_i(x(t)) - \dot{\omega}_i(t) \\ \vdots \\ L_f^{\rho_i-1} h_i(x(t)) - \omega_i^{(\rho_i-1)}(t) \\ L_f^{\rho_i} h_i(x(t)) - \omega_i^{(\rho_i)}(t) + u L_g L_f^{\rho_i-1} h_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_i - \omega_i \\ L_f h_i - \dot{\omega}_i \\ \vdots \\ L_f^{\rho_i-1} h_i - \omega_i^{(\rho_i-1)} \\ L_f^{\rho_i} h_i - \omega_i^{(\rho_i)} + [L_{g_1} L_f^{\rho_i-1} h_i \quad \dots \quad L_{g_m} L_f^{\rho_i-1} h_i] \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (2.120)$$

Ainsi, la dérivée du critère J_m par rapport au vecteur de contrôle u est le suivant :

$$\frac{\partial J_m}{\partial u} = \sum_{i=1}^m \left[\begin{array}{ccc} 0_{\rho_i \times 1} & \dots & 0_{\rho_i \times 1} \\ L_{g_1} L_f^{\rho_i-1} h_i & \dots & L_{g_m} L_f^{\rho_i-1} h_i \end{array} \right]_{[m \times (\rho_i+1)]}^t \Pi_i(T_i, \rho_i) E_i(t) = 0_{m \times 1} \quad (2.121)$$

ou, de façon équivalente :

$$\frac{\partial J_m}{\partial u} = \sum_{i=1}^m \left[\begin{array}{ccc} 0_{\rho_i \times m} & & \\ L_{g_1} L_f^{\rho_i-1} h_i & \dots & L_{g_m} L_f^{\rho_i-1} h_i \end{array} \right]_{[m \times (\rho_i+1)]}^t \Pi_i(T_i, \rho_i) E_i(t) = 0_{m \times 1}. \quad (2.122)$$

Par conséquent, il vient :

$$\frac{\partial J_m}{\partial u} = \sum_{i=1}^m \left[\begin{array}{c} L_{g_1} L_f^{\rho_i-1} h_i \\ \vdots \\ L_{g_m} L_f^{\rho_i-1} h_i \end{array} \right]_{[m \times (\rho_i+1)]} 0_{m \times \rho_i} \Pi_i(T_i, \rho_i) E_i(t) = 0_{m \times 1}. \quad (2.123)$$

Ainsi, l'équation (2.123) simplifiée donne :

$$\frac{\partial J_m}{\partial u} = \sum_{i=1}^m \left[\begin{array}{c} L_{g_1} L_f^{\rho_i-1} h_i \\ \vdots \\ L_{g_m} L_f^{\rho_i-1} h_i \end{array} \right]_{(m \times 1)} \Pi_i^s(T_i, \rho_i) E_i(t) = 0_{m \times 1}, \quad (2.124)$$

où la matrice $\Pi_i^s(T_i, \rho_i)$ est de dimensions $1 \times (\rho_i + 1)$. En réécrivant l'équation (2.124) sous la forme développée d'une somme, il vient :

$$\left[\begin{array}{c} L_{g_1} L_f^{\rho_1-1} h_1 \\ \vdots \\ L_{g_m} L_f^{\rho_1-1} h_1 \end{array} \right] \Pi_1^s(T_1, \rho_1) E_1(t) + \dots + \left[\begin{array}{c} L_{g_1} L_f^{\rho_m-1} h_m \\ \vdots \\ L_{g_m} L_f^{\rho_m-1} h_m \end{array} \right] \Pi_m^s(T_m, \rho_m) E_m(t) = 0_{m \times 1}. \quad (2.125)$$

En considérant l'équation correspondante à la $j^{\text{ième}}$ ligne du système (2.125), il vient :

$$L_{g_j} L_f^{\rho_1-1} h_1 \Pi_1^s E_1 + L_{g_j} L_f^{\rho_2-1} h_2 \Pi_2^s E_2 + \dots + L_{g_j} L_f^{\rho_m-1} h_m \Pi_m^s E_m = 0 \quad (2.126)$$

qui peut être réécrite sous forme matricielle comme :

$$\begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_1-1} h_1 & \cdots & L_{g_1} L_f^{\rho_m-1} h_m \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_m} L_f^{\rho_1-1} h_1 & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_m-1} h_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_1^s E_1 \\ \vdots \\ \Pi_m^s E_m \end{bmatrix} = 0. \quad (2.127)$$

En procédant de la sorte pour chaque ligne du système d'équations (2.125), il vient :

$$\begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_1-1} h_1 & \cdots & L_{g_1} L_f^{\rho_m-1} h_m \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_m} L_f^{\rho_1-1} h_1 & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_m-1} h_m \end{bmatrix}_{m \times m} \begin{bmatrix} \Pi_1^s E_1 \\ \vdots \\ \Pi_m^s E_m \end{bmatrix}_{m \times 1} = 0_{m \times 1}. \quad (2.128)$$

Or, la matrice suivante

$$\begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_1-1} h_1 & \cdots & L_{g_1} L_f^{\rho_m-1} h_m \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_m} L_f^{\rho_1-1} h_1 & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_m-1} h_m \end{bmatrix}_{m \times m} \quad (2.129)$$

n'est rien d'autre que la transposée de la matrice de découplage inversible $D(x)$ donnée en (2.107). Par conséquent, en multipliant l'équation (2.128) par l'inverse de la transposée de la matrice de découplage $D(x)$, il vient le système d'équations :

$$\begin{bmatrix} \Pi_1^s E_1 \\ \vdots \\ \Pi_m^s E_m \end{bmatrix} = 0_{m \times 1} \quad (2.130)$$

qui, réécrit sous forme développée donne :

$$\begin{bmatrix} \Pi_1^s & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \Pi_m^s \end{bmatrix}_{m \times \sum_{i=1}^m (\rho_i+1)} \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_m \end{bmatrix}_{[\sum_{i=1}^m (\rho_i+1) \times 1]} = 0_{m \times 1}. \quad (2.131)$$

Par conséquent, il vient :

$$\begin{bmatrix} \Pi_1^s & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Pi_m^s \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c} h_1 - \omega_1 \\ L_f h_1 - \dot{\omega}_1 \\ \vdots \\ L_f^{\rho_1-1} h_1 - \omega_1^{(\rho_1-1)} \\ L_f^{\rho_1} h_1 - \omega_1^{(\rho_1)} \end{array} & + & \begin{array}{c} 0_{\rho_1 \times 1} \\ \vdots \\ \left[L_{g_1} L_f^{\rho_1-1} h_1 \quad \cdots \quad L_{g_m} L_f^{\rho_1-1} h_m \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \end{array} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \begin{array}{c} h_m - \omega_m \\ L_f h_m - \dot{\omega}_m \\ \vdots \\ L_f^{\rho_m-1} h_m - \omega_m^{(\rho_m-1)} \\ L_f^{\rho_m} h_m - \omega_m^{(\rho_m)} \end{array} & + & \begin{array}{c} 0_{\rho_m \times 1} \\ \vdots \\ \left[L_{g_1} L_f^{\rho_m-1} h_m \quad \cdots \quad L_{g_m} L_f^{\rho_m-1} h_m \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \end{array} \end{array} \right] = 0_{m \times 1}. \quad (2.132)$$

Ainsi, en séparant ce système d'équations en deux parties, une contenant le vecteur de contrôle u , l'autre ne le contenant pas, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \Pi_1^{ss} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Pi_m^{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{g1} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{gm} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g1} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) & \cdots & L_{gm} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Pi_1^s & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Pi_m^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 - \omega_1 \\ \vdots \\ L_f^{\rho_1} h_1 - \omega_1^{(\rho_1)} \\ \vdots \\ h_m - \omega_m \\ \vdots \\ L_f^{\rho_m} h_m - \omega_m^{(\rho_m)} \end{bmatrix} \quad (2.133)$$

où les termes Π_i^{ss} de dimensions 1×1 , pour tout $1 \leq i \leq m$, viendraient de simplifications entre les Π_i^s et la deuxième partie du deuxième facteur de l'équation (2.132). Par conséquent,

$$D(x) \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} (\Pi_1^{ss})^{-1} \Pi_1^s & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (\Pi_m^{ss})^{-1} \Pi_m^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 - \omega_1 \\ \vdots \\ L_f^{\rho_1} h_1 - \omega_1^{(\rho_1)} \\ \vdots \\ h_m - \omega_m \\ \vdots \\ L_f^{\rho_m} h_m - \omega_m^{(\rho_m)} \end{bmatrix}. \quad (2.134)$$

En multipliant le système d'équations (2.134) par l'inverse de la matrice de découplage et en posant $K_i = (\Pi_i^{ss})^{-1} \Pi_i^s$, de dimensions $1 \times (\rho_i + 1)$, pour tout $1 \leq i \leq m$, il vient la loi de commande suivante :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}_{m \times 1} = -D^{-1}(x)_{m \times m} \begin{bmatrix} K_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & K_m \end{bmatrix}_{m \times [\sum_{i=1}^m (\rho_i + 1)]} \begin{bmatrix} h_1 - \omega_1 \\ \vdots \\ L_f^{\rho_1} h_1 - \omega_1^{(\rho_1)} \\ \vdots \\ h_m - \omega_m \\ \vdots \\ L_f^{\rho_m} h_m - \omega_m^{(\rho_m)} \end{bmatrix}_{[\sum_{i=1}^m (\rho_i + 1)] \times 1} \quad (2.135)$$

pour tout système MIMO carré de la forme (2.106).

Analyse de stabilité du système linéaire bouclé

Cette analyse se fera dans un nouveau système de coordonnées construit sur chaque composante choisie du vecteur de sortie. Notez que la particularité de cette loi de commande c'est son caractère découplant. Autrement dit, le système bouclé sera constitué par un ensemble de sous-systèmes totalement découplés les uns des autres.

Changement de coordonnées Pour une composante du vecteur de sortie h_i considérée, nous avons le vecteur de coordonnées suivant :

$$Z^i = \begin{bmatrix} h_i - \omega_i \\ \vdots \\ L_f^{\rho_i-1} h_i - \omega_i^{(\rho_i-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1^i \\ \vdots \\ z_{\rho_i}^i \end{bmatrix} \quad (2.136)$$

dont résulte le système de coordonnées ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} Z^1 \\ \vdots \\ Z^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1^1 \\ \vdots \\ z_{\rho_1}^1 \\ \vdots \\ z_1^m \\ \vdots \\ z_{\rho_m}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 - \omega_1 \\ \vdots \\ L_f^{\rho_1-1} h_1 - \omega_1^{(\rho_1-1)} \\ \vdots \\ h_m - \omega_m \\ \vdots \\ L_f^{\rho_m-1} h_m - \omega_m^{(\rho_m-1)} \end{bmatrix}. \quad (2.137)$$

D'où le système non linéaire :

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}^1 \\ \vdots \\ \dot{Z}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1^1 \\ \vdots \\ \dot{z}_{\rho_1}^1 \\ \vdots \\ \dot{z}_1^m \\ \vdots \\ \dot{z}_{\rho_m}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2^1 \\ \vdots \\ L_f^{\rho_1} h_1 - \omega_1^{(\rho_1)} + \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \\ \vdots \\ z_2^m \\ \vdots \\ L_f^{\rho_m} h_m - \omega_m^{(\rho_m)} + \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (2.138)$$

En regroupant toutes les équations de ce système qui contiennent le vecteur de contrôle u , nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{\rho_1}^1 \\ \vdots \\ \dot{z}_{\rho_m}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{\rho_1} h_1 - \omega_1^{(\rho_1)} \\ \vdots \\ L_f^{\rho_m} h_m - \omega_m^{(\rho_m)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (2.139)$$

auquel nous pouvons appliquer la loi de commande MIMO (2.135). Il en résulte alors le système d'équations :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{\rho_1}^1 \\ \vdots \\ \dot{z}_{\rho_m}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1^b & 0 \\ & \ddots \\ 0 & K_m^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z^1 \\ \vdots \\ Z^m \end{bmatrix} \quad (2.140)$$

où les K_i^b sont de dimensions $1 \times \rho_i$ pour tout $1 \leq i \leq m$. En remettant chacune de ces équations à sa place initiale dans le système obtenu par changement de coordonnées, voir l'équation (2.138), il vient m systèmes d'équations bouclés, indépendants, dont le $i^{\text{ième}}$ s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{Z}^i &= A^i Z^i \\ O^i &= C^i Z^i \end{aligned} \quad (2.141)$$

où les matrices A^i et C^i sont données par :

$$A^i = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline -K_{\rho_i 0} & -K_{\rho_i 1} & -K_{\rho_i 2} & \cdots & -K_{\rho_i(\rho_i-1)} \end{array} \right], \quad (2.142)$$

et

$$C^i = [1 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0]. \quad (2.143)$$

Comme dans le cas SISO, deux cas peuvent se présenter :

- soit tous les degrés relatifs ρ_i pour tout $1 \leq i \leq m$, sont inférieurs ou égaux à quatre. Dans ce cas appliquer la loi de commande (2.135) ;
- soit, il existe au moins un degré relatif qui est strictement supérieur à quatre. Dans ce cas faire appel à l'une des deux techniques de correction présentées dans le cas SISO pour agir sur la composante concernée du vecteur de sortie. Le principe reste le même. Il suffit d'adapter le cas SISO au cas MIMO. Une illustration détaillée de la méthode de correction, dans le cas MIMO, est donnée dans la suite.

Illustration Soit le système MIMO carré suivant avec $x \in X \in \mathbf{R}^6$, $y \in Y \in \mathbf{R}^2$ et $u \in U \in \mathbf{R}^2$, dont l'objectif principal reste la poursuite de trajectoires de son vecteur de sortie. Il est donné par

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + x_1^2 \\ \dot{x}_3 = x_4 - x_2 \\ \dot{x}_4 = x_5 - x_1 \\ \dot{x}_5 = x_2 - 3u_1 + 4u_2 \\ \dot{x}_6 = x_5 - 2u_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_1 = h_1(x) = x_1 \\ y_2 = h_2(x) = x_6 \end{cases} \quad (2.144)$$

où les champs de vecteur $f(x)$, $g_1(x)$ et $g_2(x)$ sont tels que :

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 + x_1^2 \\ x_4 - x_2 \\ x_5 - x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad g_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.145)$$

Nous pouvons calculer le vecteur degré relatif ainsi que la dynamique des zéros.

Vecteur degré relatif et dynamique des zéros Supposons que le vecteur degré relatif du système (2.144) existe et est bien défini. Nous le désignons par ρ tel que $\rho = (\rho_1, \rho_2)$. Il est

calculé comme suit, respectivement, pour les deux composantes y_1 et y_2 du vecteur de sortie :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = h_1(x) = x_1 \\ \dot{y}_1 = L_f h_1(x) = \dot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{y}_1 = L_f^2 h_1(x) = \ddot{x}_1 = x_3 + x_1^2 \\ y_1^{(3)} = L_f^3 h_1(x) = 2x_1 x_2 + x_4 - x_2 \\ y_1^{(4)} = L_f^4 h_1(x) = 2x_2^2 + (2x_1 - 1)(x_3 + x_1^2) \\ \quad + x_5 - x_1 \\ y_1^{(5)} = L_f^5 h_1(x) + \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^4 h_1(x) & L_{g_2} L_f^4 h_1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \quad = 6x_2 x_3 + 10x_2 x_1^2 - 4x_1 x_2 + x_2 + 2x_1 x_4 - x_4 + \begin{bmatrix} -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (2.146)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} y_2 = h_2(x) = x_6 \\ \dot{y}_2 = L_f h_2(x) + \begin{bmatrix} L_{g_1} h_2(x) & L_{g_2} h_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = x_5 + \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{array} \right. . \quad (2.147)$$

D'où la matrice de découplage $D(x)$ donnée par :

$$D(x) = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.148)$$

qui est inversible, puisque son déterminant $|D| = 8$, est différent de zéro en tout point de l'espace d'étude considéré. La commande NCGPC peut alors être appliquée. Le vecteur degré relatif $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ est égal à $(5, 1)$. La somme de ses composantes est 6, la dimension du système considéré. Par conséquent, la dynamique des zéros n'existe pas.

Elaboration de la loi de commande et application de la NCGPC corrigée Pour cette illustration, nous utiliserons plutôt la deuxième approche basée sur la correction matricielle du critère. Notre objectif étant de faire de la poursuite asymptotique de trajectoire, nous construirons le critère quadratique du vecteur de sortie à partir de l'erreur de prédiction de chacune des erreurs en tenant compte de la correction. Ensuite, l'élaboration de la loi de commande se fera à partir de la minimisation du critère quadratique et son application sur le nouveau système résultant d'un changement de coordonnées.

Soit $\hat{e}_1(t + \tau)$ et $\hat{e}_2(t + \tau)$ les erreurs de prédiction, respectivement, sur les première et deuxième composantes du vecteur de sortie. Elles sont données par les équations suivantes :

$$\hat{e}_1(t + \tau) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \frac{\tau^5}{5!} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 - \omega_1 \\ \vdots \\ L_f^5 h_1 - \omega^{(5)} \end{bmatrix}$$

et

$$\hat{e}_2(t + \tau) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\tau}{1!} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_2 - \omega_2 \\ L_f h_2 - \omega^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Soit J le critère du vecteur de sortie. Il est donné par :

$$J = J_1 + J_2$$

où chacun des critères J_i , pour tout $1 \leq i \leq 2$, est donnée par

$$J_i = \frac{1}{2} \int_0^{T_i} [\hat{e}_i(t + \tau)]^2 d\tau.$$

Il vient alors que :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_0^{T_i} [\hat{e}_i(t + \tau)]^2 d\tau$$

ou, de manière équivalente :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 E_i^t(t) \Pi_i E_i(t).$$

La première composante du vecteur degré relatif est égale à 5. Par conséquent, la correction matricielle sera effectuée sur le premier terme du critère J . Ce qui donne :

$$J = \frac{1}{2} E_1^t(t) \Pi_1^c E_1(t) + \frac{1}{2} E_2^t(t) \Pi_2 E_2(t).$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial J}{\partial u} = \frac{\partial J_1^c}{\partial u} + \frac{\partial J_2}{\partial u}$$

où :

$$\frac{\partial J_1^c}{\partial u} = \frac{\partial E_1^t}{\partial u} \Pi_1^c E_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial J_2}{\partial u} = \frac{\partial E_2^t}{\partial u} \Pi_2 E_2.$$

Ainsi :

$$\frac{\partial J_1^c}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 1} & 0_{5 \times 1} \\ L_{g1} L_f^4 h_1 & L_{g2} L_f^4 h_1 \end{bmatrix}^t \Pi_1^c E_1(t)$$

et, par équivalence :

$$\frac{\partial J_1^c}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 2} \\ L_g L_f^4 h_1 \end{bmatrix}^t \Pi_1^c E_1 \quad (2.149)$$

avec $L_g L_f^4 h_1 = \begin{bmatrix} L_{g1} L_f^4 h_1 & L_{g2} L_f^4 h_1 \end{bmatrix}$.

En réécrivant l'équation (2.149), il vient :

$$\frac{\partial J_1^c}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 5} & \begin{bmatrix} L_{g1} L_f^4 h_1 \\ L_{g2} L_f^4 h_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \Pi_1^c E_1.$$

Par simplification, et en posant $D_{1i} = L_{gi} L_f^4 h_1$, pour i prenant les valeurs successives 1 et 2, il vient :

$$\frac{\partial J_1^c}{\partial u} = \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{12} \end{bmatrix} \Pi_1^{cs} E_1$$

où Π_1^{cs} est de dimensions 1×6 . Par analogie, il vient, pour la deuxième composante du vecteur de sortie h_2 :

$$\frac{\partial J_2}{\partial u} = \begin{bmatrix} D_{21} \\ D_{22} \end{bmatrix} \Pi_2^s E_2,$$

où Π_2^s est de dimensions 1×2 et avec, pour les mêmes valeurs de i , $D_{2i} = L_{gi} h_2$. Ainsi, la minimisation du critère J donne :

$$\frac{\partial J}{\partial u} = \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{12} \end{bmatrix} \Pi_1^{cs} E_1 + \begin{bmatrix} D_{21} \\ D_{22} \end{bmatrix} \Pi_2^s E_2 = 0_{2 \times 1}$$

ou, de manière équivalente :

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} \\ D_{12} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_1^{cs} E_1 \\ \Pi_2^s E_2 \end{bmatrix} = 0_{2 \times 1}. \quad (2.150)$$

Or, la matrice :

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} \\ D_{12} & D_{22} \end{bmatrix}$$

n'est rien d'autre que la transposée de la matrice de découplage :

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

qui est inversible. En multipliant la transposée par son inverse dans l'équation (2.150), il vient :

$$\begin{bmatrix} \Pi_1^{cs} E_1 \\ \Pi_2^s E_2 \end{bmatrix} = 0_{2 \times 1}$$

qui, par factorisation, donne l'équation :

$$\left[\begin{array}{c|c} \Pi_1^{cs} & 0_{1 \times 2} \\ \hline 0_{1 \times 6} & \Pi_2^s \end{array} \right] \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = 0_{2 \times 1}.$$

La détermination du vecteur de contrôle se fait à partir de la séparation des composantes E_1 et E_2 en deux parties : une qui contient le vecteur de commande et l'autre qui ne le contient pas. D'où l'équation :

$$\left[\begin{array}{c|c} \Pi_1^{cs} & 0_{1 \times 2} \\ \hline 0_{1 \times 6} & \Pi_2^s \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} h_1 - \omega_1 \\ \vdots \\ L_f^5 h_1 - \omega^{(5)} \end{array} & \begin{array}{c} 0_{5 \times 1} \\ [D_{11} \ D_{12}] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} h_2 - \omega_2 \\ L_f h_2 - \dot{\omega} \end{array} & \begin{array}{c} 0_{1 \times 1} \\ [D_{21} \ D_{22}] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{array} \end{array} \right] = 0_{2 \times 1}$$

qui donne

$$\left[\begin{array}{c|c} \Pi_1^{css} & 0_{1 \times 1} \\ \hline 0_{1 \times 1} & \Pi_2^{ss} \end{array} \right] \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = - \left[\begin{array}{c|c} \Pi_1^{cs} & 0_{1 \times 2} \\ \hline 0_{1 \times 6} & \Pi_2^s \end{array} \right] \begin{bmatrix} h_1 - \omega_1 \\ \vdots \\ L_f^5 h_1 - \omega^{(5)} \\ h_2 - \omega_2 \\ L_f h_2 - \dot{\omega} \end{bmatrix}$$

où Π_1^{css} et Π_2^{ss} sont tous deux scalaires. D'où l'équation :

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = - \left[\begin{array}{c|c} \Pi_1^{css} & 0 \\ \hline 0 & \Pi_2^{ss} \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c|c} \Pi_1^{cs} & 0_{1 \times 2} \\ \hline 0_{1 \times 6} & \Pi_2^s \end{array} \right] \begin{bmatrix} h_1 - \omega_1 \\ \vdots \\ L_f^5 h_1 - \omega^{(5)} \\ h_2 - \omega_2 \\ L_f h_2 - \dot{\omega} \end{bmatrix}$$

et finalement la loi de commande MIMO suivante

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L_{g1}L_f^4h_1 & L_{g2}L_f^4h_1 \\ L_{g1}h_2 & L_{g2}h_2 \end{bmatrix}^{-1} \left[\begin{array}{c|c} K_1^c & 0_{1 \times 2} \\ \hline 0_{1 \times 6} & K_2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} h_1 - \omega_1 \\ \vdots \\ L_f^5h_1 - \omega^{(5)} \\ h_2 - \omega_2 \\ L_fh_2 - \dot{\omega} \end{bmatrix} \quad (2.151)$$

où

$$K_1^c = (\Pi_1^{css})^{-1} \Pi_1^{cs} = \begin{bmatrix} K_{10}^c & K_{11}^c & K_{12}^c & K_{13}^c & K_{14}^c & K_{15}^c \end{bmatrix}$$

et

$$K_2 = (\Pi_2^{ss})^{-1} \Pi_2^s = \begin{bmatrix} K_{20} & K_{21} \end{bmatrix},$$

avec $K_{15}^c = K_{21} = 1$, correspondant, respectivement, au dernier terme des matrices de gain K_1^c et K_2 .

L'application de la loi de commande ci-dessus se fera sur le système MIMO suivant

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1^1 \\ \vdots \\ \dot{z}_5^1 \\ \dot{z}_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_fh_1 - \dot{\omega}_1 \\ \vdots \\ L_f^5h_1 - \omega^{(5)} + \begin{bmatrix} L_{g1}L_f^4h_1 & L_{g2}L_f^4h_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ L_fh_2 - \dot{\omega}_2 + \begin{bmatrix} L_{g1}h_2 & L_{g2}h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.152)$$

obtenu à partir du changement de coordonnées :

$$\begin{bmatrix} z_1^1 \\ \vdots \\ z_5^1 \\ z_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 - \omega_1 \\ \vdots \\ L_f^4h_1 - \omega^{(4)} \\ h_2 - \omega_2 \end{bmatrix}.$$

En regroupant les deux équations du système (2.152) contenant le vecteur de contrôle et en leur appliquant la loi de commande (2.151), il vient

$$\begin{cases} \dot{z}_5^1 = \begin{bmatrix} K_{10}^c & K_{11}^c & K_{12}^c & K_{13}^c & K_{14}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 - \omega_1 \\ L_f^1h_1 - \omega^{(1)} \\ L_f^2h_1 - \omega^{(2)} \\ L_f^3h_1 - \omega^{(3)} \\ L_f^4h_1 - \omega^{(4)} \end{bmatrix} \\ \dot{z}_1^2 = K_{20} \begin{bmatrix} h_2 - \omega_2 \end{bmatrix} \end{cases}.$$

En remplaçant ces équations dans le système (2.152), il vient les deux systèmes linéaires découplés suivants dont la stabilité est garantie.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{z}_1^1 \\ \dot{z}_2^1 \\ \dot{z}_3^1 \\ \dot{z}_4^1 \\ \dot{z}_5^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -K_{10}^c & -K_{11}^c & -K_{12}^c & -K_{13}^c & -K_{14}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^1 \\ z_2^1 \\ z_3^1 \\ z_4^1 \\ z_5^1 \end{bmatrix} \\ \dot{z}_1^2 = -K_{20}z_1^2 \end{cases}.$$

Les résultats de simulation sont présentés ci-dessous pour illustrer cette application.

Quelques résultats de simulation Nous pouvons voir sur la figure 2.24 que la poursuite de trajectoire est correcte pour les deux sorties considérées, puisque les erreurs correspondantes, pour différentes valeurs de l'horizon de prédiction, convergent vers zéro. Notez que les signaux de commande prennent des valeurs importantes mais reviennent très vite dans un ensemble de valeurs "acceptables".

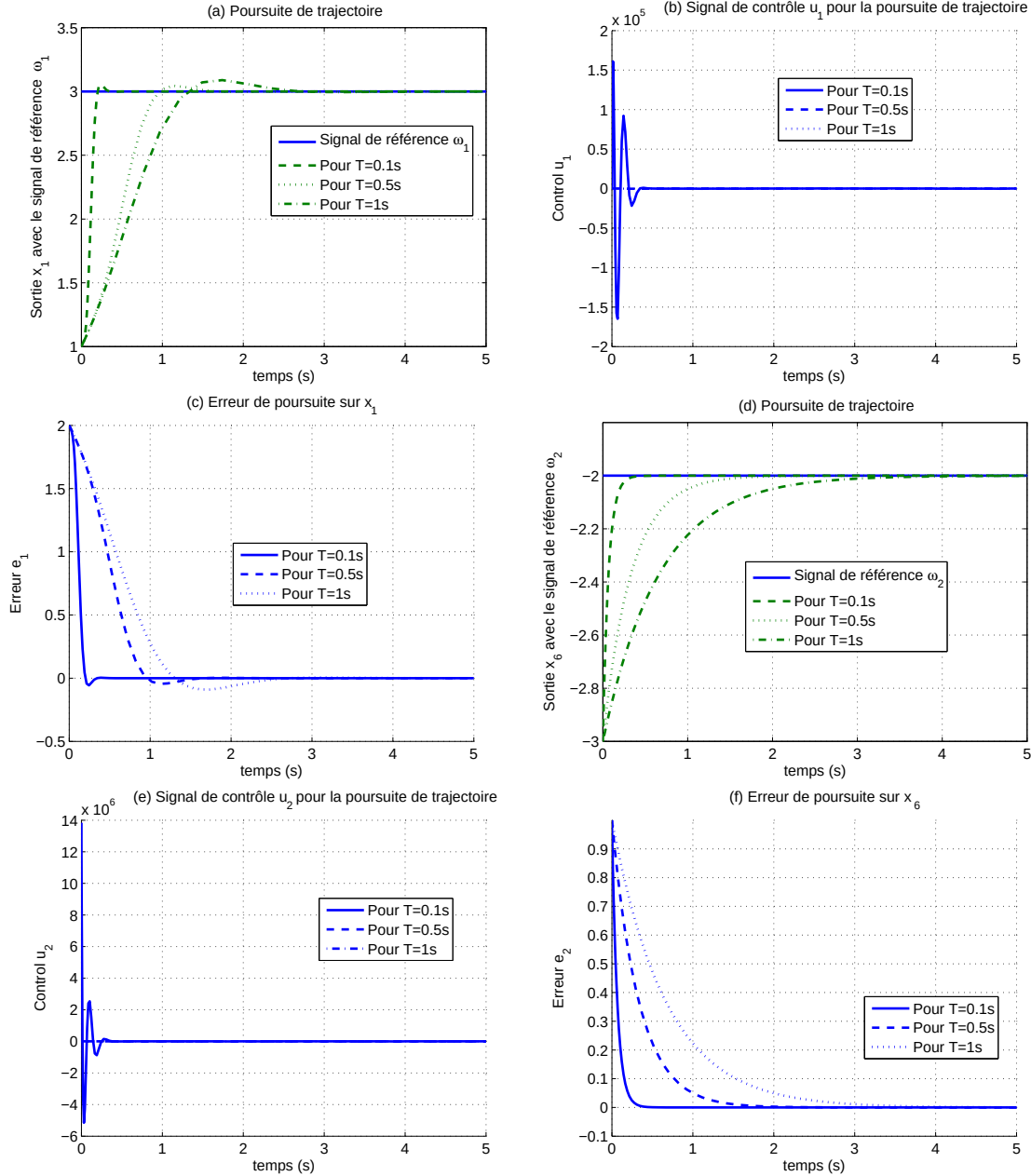


FIGURE 2.24 – NCGPC MIMO avec correction matricielle sur la loi de commande de la première composante du vecteur de sortie.

La position des pôles dans le plan complexe, concernant la première composante du vecteur

de sortie (degré relatif 5), est donnée dans la figure 2.25, pour illustrer l'effet des "branches de palmier soufflées vers le haut" apporté par la correction matricielle "intelligente".

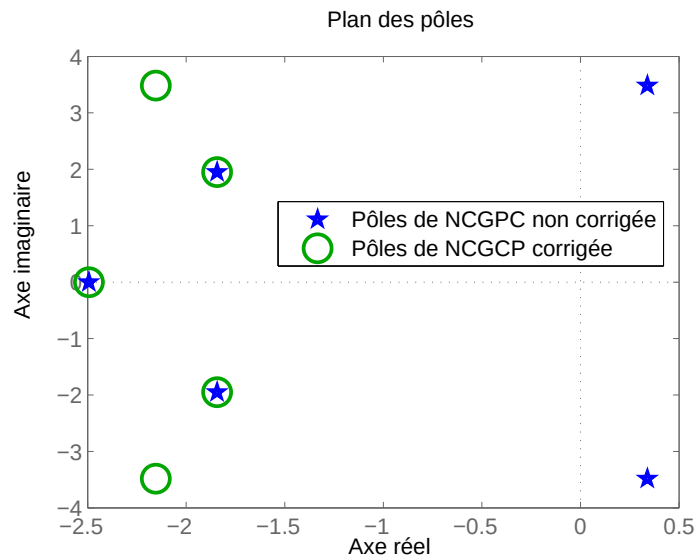


FIGURE 2.25 – Degré relatif 5 : position des pôles dans le plan complexe pour les lois de commande corrigée (cercle) et non corrigée (étoile). Remarquez les deux pôles instables (étoile)

L'ensemble des méthodes présentées ici est résumé dans l'algorithme 4.

- Chercher le degré relatif ρ et calculer la dynamique des zéros (nous la supposons stable).
- **Si $\rho \leq 4$ et $\rho = 1$:** choisir, entre autres, le temps de réponse désiré et en déduire l'horizon de prédiction de T à partir de l'équation $t_r = 2T$
 - Appliquer la loi de commande stabilisante

$$u(x(t)) = \frac{-\sum_{l=0}^1 K_{1l}(T, \rho) [L_f^l h(x(t)) - \omega^{(l)}(t)]}{L_g h(x(t))} \text{ résultant de } J(t) = \frac{1}{2} E^t(t) \Pi(T, \rho) E(t).$$

- **Si $\rho \leq 4$ et $\rho = 2$:** choisir, entre autres, la pulsation naturelle ω_n désirée et en déduire l'horizon de prédiction à partir de l'équation $\omega_n \simeq \frac{1.83}{T}$. Le coefficient d'amortissement est une constante ($\xi_D = 0.685$).
 - Appliquer la loi de commande stabilisante

$$u(x(t)) = \frac{-\sum_{l=0}^2 K_{2l}(T, \rho) [L_f^l h(x(t)) - \omega^{(l)}(t)]}{L_g L_f h(x(t))} \text{ résultant également de } J.$$

- **Si $\rho \leq 4$ et $\rho \neq 1, 2$:** appliquer la loi de commande stabilisante pour $\rho = 3, 4$.
- **Si $\rho > 4$:**

- Fixer l'horizon de prédiction et calculer les coefficients $K_{\rho l}$ de la matrice K
- Construire la matrice A à partir de K et déterminer ses valeurs propres. Construire la matrice B
- **Pour la correction matricielle**
 - Construire la matrice Ω à partir des valeurs propres de A et en déduire le vecteur M tel que les valeurs propres de la matrice $A - BM$ soient égales aux éléments de Ω .
 - Appliquer la loi de commande corrigée

$$u(x(t)) = \frac{-\sum_{l=0}^{\rho} (K_{\rho l}(T, \rho) + M_l) [L_f^l h(x(t)) - \omega^{(l)}(t)]}{L_g L_f^{\rho-1} h(x(t))}$$

qui garantit la stabilité jusqu'à $\rho = 40$ avec $1 \leq T \leq 15$ secondes.

- **Pour la correction linéaire**
 - Construire la matrice P des pôles désirés
 - En déduire le vecteur L tel que les valeurs propres de la matrice $A - BL$ soient égales aux éléments de la matrice P
 - Appliquer la loi de commande corrigée

$$u(x(t)) = \frac{-\sum_{l=0}^{\rho} K_{\rho l}(T, \rho) [L_f^l h(x(t)) - \omega^{(l)}(t)]}{L_g L_f^{\rho-1} h(x(t))} - \frac{\sum_{l=0}^{\rho-1} L_l [L_f^l h(x(t)) - \omega^{(l)}(t)]}{L_g L_f^{\rho-1} h(x(t))}$$

qui garantit la stabilité du système linéaire résultant.

Algorithme 4: Algorithme résumant l'application de la NCGPC pour la résolution d'un problème de tracking quel que soit le degré relatif du système considéré.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, la commande prédictive non linéaire à temps continu a été présentée aussi bien pour les systèmes single-input single-output (SISO) que pour les systèmes multi-input multi-output (MIMO) carrés. Une propriété importante de cette technique de commande pour la résolution des problèmes de poursuite de trajectoire est qu'en boucle fermée la stabilité est garantie pour les systèmes non linéaires de degré relatif inférieur ou égal à quatre, voir [Chen 03]. Aussi l'optimisation est faite "hors-ligne" puisque la loi de commande est calculée une fois pour toute, de façon analytique, à partir de la minimisation du critère quadratique construit sur l'erreur de prédiction entre le signal de référence et la sortie considérée. Ce qui se fait "en-ligne", c'est uniquement la mesure de l'état du système considéré, à chaque pas de calcul.

Cependant, un problème majeur se pose : comment garantir la stabilité en boucle fermée lorsque le système non linéaire considéré a un degré relatif strictement supérieur à quatre. Pour cela, Chen *et al.* ont proposé d'introduire un troisième paramètre qui est l'ordre des dérivées successives de la commande. Ce dernier est choisi de sorte que sa différence avec le degré relatif soit inférieure à quatre.

Dans cette étude, nous avons proposé deux approches essentiellement basées sur la modification du critère. En effet, elles consistent, respectivement, en :

- l'ajout d'un terme linéaire en commande au critère initial, dont l'objectif final est de permettre un placement de pôles,
- l'ajout d'une matrice de correction "intelligente" à la matrice de prédiction du critère initial dont les éléments sont choisis également par un placement de pôles spécifique.

Quelques propriétés des systèmes non linéaires bouclés par NCGPC ont été présentées. Elles s'énoncent comme suit :

- pour un système non linéaire de degré relatif fixé quelconque, l'inverse de l'horizon de prédiction est un coefficient d'homothétie pour toutes les racines du polynôme caractéristique résultant ;
- tout système SISO non linéaire de dimension 1, égal au degré relatif, bouclé par NCGPC, est équivalent à "une fonction de transfert" (un système autonome) du premier ordre dont le temps de réponse est le double de l'horizon de prédiction, la fréquence de coupure 1.5 fois l'inverse de l'horizon de prédiction et la constante de temps $\frac{2}{3}$ de l'horizon de prédiction ;
- tout système SISO non linéaire de dimension 2, égal au degré relatif ρ , bouclé par NCGPC, est équivalent à "une fonction de transfert" (un système autonome) du second ordre avec un coefficient d'amortissement $\xi_D \simeq 0.685$ et une pulsation naturelle $\omega_n \simeq \frac{1.83}{T}$.

Comme nous avons pu le voir dans ce chapitre, les lois de commandes NCGPC sont très proches de celles de la FL que nous présenterons dans le chapitre suivant. Une étude comparative sera faite par la suite, dans le dernier chapitre de ce mémoire, entre la NCGPC et la FL.

3

Linéarisation entrée-sortie par retour d'état

"En effet, ce qui est trivial n'est pas forcément optimal". Marcelin Dabo.

Sommaire

3.1	Introduction	84
3.2	Présentation de la linéarisation entrée-sortie par retour d'état	84
3.2.1	Cas d'un système SISO non linéaire	84
3.2.2	Cas d'un système MIMO non linéaire	89
3.3	Conclusion	95

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une approche basée sur des techniques de géométrie différentielle, pour la résolution des problèmes communément appelés poursuite de trajectoire. Cette méthode, plus ancienne que la commande prédictive généralisée non linéaire à temps continu (NCGPC), est la linéarisation entrée/sortie par retour d'état (FL), [Isid 95]. Notre objectif, ici, est d'en donner un bref rappel afin de permettre une étude comparative entre elle et la NCGPC au chapitre 4.

Le présent chapitre est articulé autour de deux axes principaux que sont la FL pour les systèmes non linéaires single-input single-output (SISO) et pour les systèmes non linéaires multi-input multi-output (MIMO). Quelques exemples académiques sont présentés dans chacun des deux cas afin d'illustrer la partie théorique détaillée.

3.2 Présentation de la linéarisation entrée-sortie par retour d'état

L'un des principes fondamentaux de cette méthode est qu'elle s'appuie sur des techniques de linéarisation entrée-sortie. Nous présenterons dans la suite un bref rappel sur la notion de difféomorphisme. Concernant les notions de dérivées de Lie, de (vecteur) degré relatif, de dynamique des zéros et de matrice de découplage, le lecteur pourra se reporter au chapitre précédent où toutes ces notions ont été rappelées.

Difféomorphisme Soient $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit $\mathbf{O}$ un ouvert de $\mathbf{E}$ et f une application de $\mathbf{O}$ dans $\mathbf{F}$.

L'application f est un difféomorphisme de $\mathbf{O}$ dans $f(\mathbf{O})$ si :

- f est injective sur $\mathbf{O}$ (bijective de $\mathbf{O}$ dans $f(\mathbf{O})$) ;
- f est différentiable sur $\mathbf{O}$, sa réciproque est différentiable sur $f(\mathbf{O})$.

3.2.1 Cas d'un système SISO non linéaire

Soit le système non linéaire SISO donné au chapitre 2 :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y(t) &= h(x) \end{aligned} \tag{3.1}$$

où le vecteur d'état $x \in X \subset \mathbf{R}^n$, la sortie $y \in Y \subset \mathbf{R}$ et la commande $u \in U \subset \mathbf{R}$ avec X un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et Y et U deux ouverts de $\mathbf{R}$. Nous rappelons que notre objectif ici est de faire de la poursuite de trajectoire.

Soit $\omega(t) \in \mathbf{R}$ le signal de référence. Nous supposons la sortie et la référence suffisamment continûment différentiables par rapport au temps. Cette hypothèse est importante pour que le changement de coordonnées se fasse dans des conditions adéquates.

L'élaboration de la loi de commande va se faire en plusieurs étapes :

- la recherche du (vecteur) degré relatif et de la dynamique des zéros ;
- le changement de coordonnées par difféomorphisme ;
- l'application de la loi de commande au nouveau système non linéaire, résultant du changement de coordonnées ;
- et la stabilisation du système linéaire résultant par placement de pôles.

Degré relatif et dynamique des zéros

Comme il a été dit au préalable, notre problème concerne la poursuite de trajectoire. Pour ce faire, nous allons changer de coordonnées, ce qui nous permettra de ramener notre problème de poursuite de sortie à un problème de stabilisation de l'erreur entre la sortie à poursuivre et le signal de référence au voisinage de zéro.

Soit $e(t)$, l'erreur entre la sortie considérée $y(t)$ et le signal de référence $\omega(t)$. Elle est donnée par

$$e(t) = y(t) - \omega(t).$$

Soit ρ le degré relatif du système SISO (3.1). Supposons qu'il existe et est bien défini. Il est calculé à partir des dérivées successives de l'erreur comme suit :

$$\begin{cases} e(t) = h(x(t)) - \omega(t) \\ \dot{e}(t) = L_f h(x(t)) - \dot{\omega}(t) \\ \vdots \\ e^{(\rho-1)}(t) = L_f^{\rho-1} h(x(t)) - \omega^{(\rho-1)}(t) \\ e^{(\rho)}(t) = L_f^\rho h(x(t)) - \omega^{(\rho)}(t) + L_g L_f^{\rho-1} h(x(t)) u(x(t)) \end{cases} \quad (3.2)$$

Dans le cas où le degré relatif ρ est strictement inférieur à la dimension n du système SISO considéré, la dynamique des zéros existe et est de dimension $n - \rho$. Par contre, dans le cas où le degré relatif est égal à la dimension du système, la dynamique des zéros est vide, [Isid 95].

Changement de coordonnées et nouveau système non linéaire

Le changement de coordonnées est effectué de sorte que la dérivée par rapport au temps de la dernière composante du vecteur Z ci-dessous, z_ρ , soit la première qui dépende explicitement de u . Nous supposons dans ce cas que la dynamique de zéros est vide. Les nouvelles coordonnées sont :

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{\rho-1} \\ z_\rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - \omega \\ \dot{y} - \dot{\omega} \\ \vdots \\ y^{(\rho-2)} - \omega^{(\rho-2)} \\ y^{(\rho-1)} - \omega^{(\rho-1)} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

D'où le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_{\rho-1} = z_\rho \\ \dot{z}_\rho = L_f^\rho h - \omega^{(\rho)} + u L_g L_f^{\rho-1} h \end{cases} \quad (3.4)$$

dont les nonlinéarités n'apparaissent que sur la dérivée d'ordre ρ de l'erreur z_1 .

Application de la loi de commande et stabilisation du système linéaire résultant

Pour linéariser un tel système non linéaire, (3.4), il suffit de choisir une loi de commande telle que les non linéarités qui apparaissent dans l'équation $\dot{z}_\rho$ du nouveau système (3.4) soient

totalelement compensées. Cette loi de commande est donnée par, [Isid 95] :

$$u(x(t)) = -\frac{L_f^\rho h - \omega^{(\rho)}}{L_g L_f^{\rho-1} h(x(t))} + \frac{v}{L_g L_f^{\rho-1} h(x(t))} \quad (3.5)$$

où v est une commande qui permettra de garantir la stabilité du système linéaire résultant et de choisir la dynamique de l'erreur $e(t)$ ou, de manière équivalente, celle de la sortie considérée. *Le caractère trivial de cette loi de commande n'implique pas son optimalité par rapport au contrôle.*

Analyse de stabilité en boucle fermée

En appliquant la loi de commande (3.5), il vient le système linéaire bouclé résultant :

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= A_\rho Z + B_\rho v \\ O &= C_\rho Z \end{aligned} \quad (3.6)$$

dont les matrices A_ρ , B_ρ et C_ρ sont données, respectivement, par :

$$A_\rho = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right], B_\rho = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } C_\rho = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^t. \quad (3.7)$$

Le système (3.6) est commandable et observable. Par conséquent, il existe une matrice F telle qu'un placement de pôles soit faisable.

Pour ce faire, appelons P la matrice des pôles désirés. Soit v une commande telle que :

$$v = -FZ = -\sum_{l=0}^{\rho-1} F_l z_l = -\sum_{l=0}^{\rho-1} F_l \left[L_f^l h(x(t)) - \omega^{(l)}(t) \right].$$

Les coefficients F_l de la matrice F , pour tout $0 \leq l \leq \rho - 1$, sont choisis tels que les valeurs propres de la matrice $A - BF$ soient celles de la matrice P . Avec ce placement de pôles, la stabilité de l'erreur est garantie, sa dynamique fixée et l'objectif de poursuite atteint.

Remarque 3.2.1.1 *Il est important de noter que la méthode est très simple d'utilisation. Cependant, la stabilité n'est atteinte qu'au bout de la deuxième étape (la première étant la linéarisation entrée-sortie) de l'application de la loi de commande, à savoir le placement de pôles.*

Un exemple académique est donné pour bien illustrer la méthode présentée.

Illustration

Nous reprenons ici le système SISO non linéaire, de dimension 6 présenté dans le chapitre précédent. Il est donné par

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + x_1^2 \\ \dot{x}_3 = x_4 - x_2 \\ \dot{x}_4 = x_5 - x_1 \\ \dot{x}_5 = x_2 - 3u \\ \dot{x}_6 = x_5 - x_6 \end{cases} \text{ et } y = h(x) = x_1. \quad (3.8)$$

L'objectif demeure la poursuite de trajectoire, d'un signal de référence fixé $\omega(t)$, par la sortie $y(t)$. Soit l'erreur $e(t)$ tel que :

$$e(t) = y(t) - \omega(t).$$

Nous considérerons comme nouvelle sortie l'erreur $e(t)$. Par conséquent, faire converger la sortie vers la référence équivaut à faire converger l'erreur vers zéro.

Degré relatif et dynamique des zéros Soit ρ le degré relatif du système (3.8). Il s'obtient comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} e = h(x) - \omega = x_1 - \omega \\ \dot{e} = L_f h(x) - \dot{\omega} = \dot{x}_1 - \dot{\omega} = x_2 - \dot{\omega} \\ \ddot{e} = L_f^2 h(x) - \ddot{\omega} = \dot{x}_2 - \ddot{\omega} = x_3 + x_1^2 - \ddot{\omega} \\ e^{(3)} = L_f^3 h(x) - \omega^{(3)} = 2x_1 x_2 + x_4 - x_2 - \omega^{(3)} \\ e^{(4)} = L_f^4 h(x) - \omega^{(4)} = 2x_2^2 + (2x_1 - 1)(x_3 + x_1^2) \\ \quad + x_5 - x_1 - \omega^{(4)} \\ e^{(5)} = L_f^5 h(x) - \omega^{(5)} + u L_g L_f^4 h(x) = (2x_3 + 2x_1^2 \\ \quad + 2(2x_1 - 1)x_1 - 1)x_2 + 4x_2(x_3 + x_1^2) \\ \quad + (2x_1 - 1)(x_4 - x_2) + x_2 - \omega^{(5)} + 3u \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Il est bien défini et est égal à 5. Par conséquent, une dynamique des zéros de dimension 1 existe et est stable. En effet, elle est donnée par l'équation $\dot{x}_6 = -x_6$, en supposant le signal de référence ω constant.

Changement de coordonnées et nouveau système non linéaire Soit Z un nouveau vecteur tel que :

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \\ \ddot{e} \\ e^{(3)} \\ e^{(4)} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Ce qui nous conduit au système non linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dot{z}_3 = z_4 \\ \dot{z}_4 = z_5 \\ \dot{z}_5 = (2x_3 + 2x_1^2 \\ \quad + 2(2x_1 - 1)x_1 - 1)x_2 + 4x_2(x_3 + x_1^2) \\ \quad + (2x_1 - 1)(x_4 - x_2) + x_2 - \omega^{(5)} + 3u \end{array} \right. \quad (3.11)$$

dont toutes les nonlinéarités ne sont présentes que dans la dérivée d'ordre 5 de l'erreur z_1 .

Application de la loi de commande linéarisante et placement de pôles En appliquant la loi de commande suivante :

$$u(x(t)) = -\frac{L_f^5 h - \omega^{(5)}}{L_g L_f^4 h(x(t))} + \frac{v}{L_g L_f^4 h(x(t))} \quad (3.12)$$

il vient le système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \\ \dot{z}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \\ e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (3.13)$$

qui est commandable et observable. L'équation de l'erreur e_1 est également donnée en fonction des nouvelles coordonnées.

Soit P la matrice des pôles désirés telle que :

$$P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 & -4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Alors, la matrice de gain F est donnée par :

$$F = \begin{bmatrix} 144 & 324 & 260 & 95 & 16 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, la loi de commande stabilisante ci-dessous :

$$v = - \begin{bmatrix} 144 & 324 & 260 & 95 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix}$$

est appliquée au système (3.13). D'où le système linéaire et stable :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \\ \dot{z}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -144 & -324 & -260 & -95 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

dont quelques résultats de simulation sont présentés dans la suite. Nous rappelons que toutes les simulations ont été faites sous Matlab Simulink version 7.0.1.

Quelques résultats de simulation Nous pouvons voir sur la figure 3.1 que la poursuite de trajectoire est correcte puisque l'erreur converge vers zéro. Cependant, la commande prend des valeurs relativement importantes dans les premiers instants de la poursuite pour ensuite rejoindre un intervalle de valeurs "acceptables", dès le premier instant où l'erreur s'annule.

La linéarisation entrée-sortie par retour d'état pour le cas MIMO est présentée ci-après avec un exemple pour illustration.

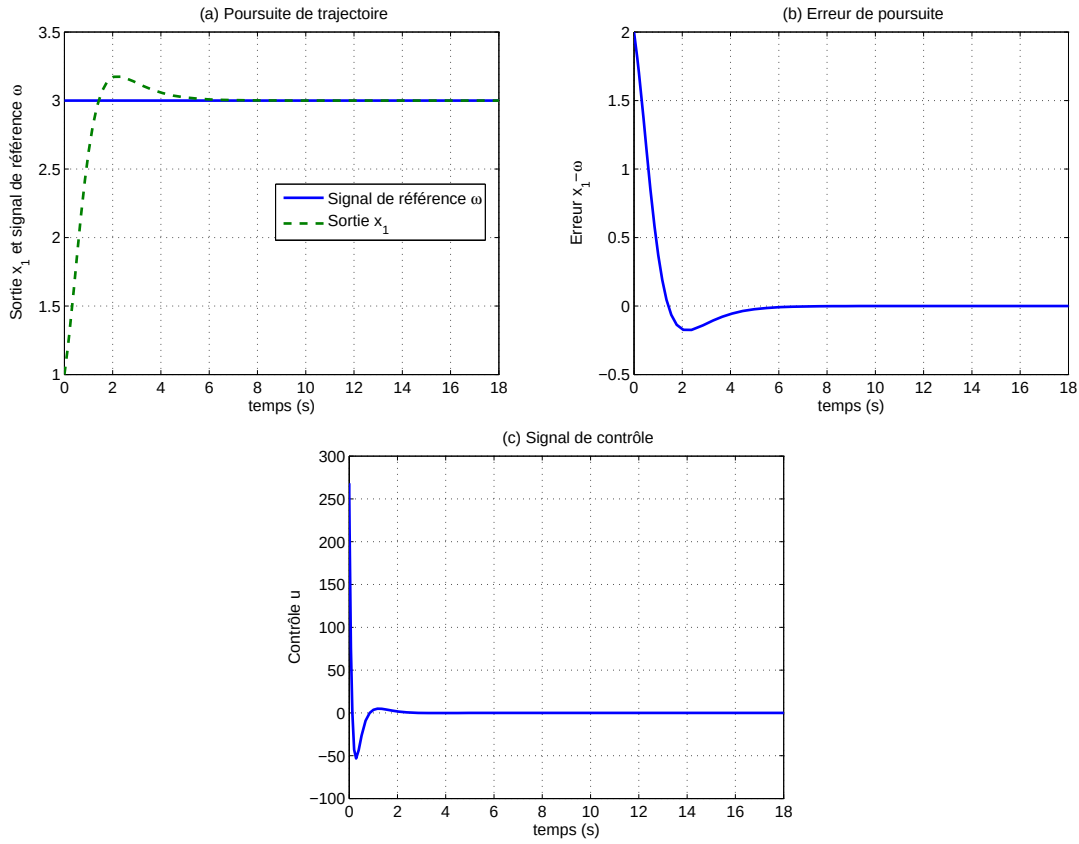


FIGURE 3.1 – Poursuite de trajectoire de la référence ω par la sortie x_1 .

3.2.2 Cas d'un système MIMO non linéaire

Nous reprenons, le même système MIMO carré non linéaire exposé dans le précédent chapitre. Il est donné par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \\ y &= (h_1(x), \dots, h_m(x))^t \end{aligned} \quad (3.15)$$

où $x \in X \subset \mathbf{R}^n$, $y \in Y \subset \mathbf{R}^m$ and $u \in U \subset \mathbf{R}^m$. Notre objectif reste la poursuite (asymptotique) de trajectoire (de composantes choisies) du vecteur de sortie. Soit ω le vecteur de signaux de référence tel que $\omega(t) = (\omega_1(t), \dots, \omega_m(t))^t$. Soit $h_i(x(t))$ la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur de sortie $y(t)$. Soit $e_i(t)$, l'erreur entre les composantes $\omega_i(t)$ et $h_i(x(t))$ des vecteurs de référence et de sortie, respectivement. Elle est donnée par l'expression :

$$e_i(t) = h_i(x(t)) - \omega_i(t). \quad (3.16)$$

L'application de la loi de commande se fait en plusieurs étapes que sont :

- le changement de coordonnées ;
- la construction d'un nouveau système non linéaire dans le nouveau système de coordonnées ;
- l'application de la loi de commande de linéarisation entrée-sortie par retour d'état ;
- et la stabilisation du système linéaire résultant par placement de pôles.

Changement de coordonnées et nouveau système non linéaire

Pour une composante du vecteur de sortie h_i considérée, nous avons le vecteur de coordonnées suivant, basé sur la composante de l'erreur e_i :

$$Z^i = \begin{bmatrix} h_i - \omega_i \\ \vdots \\ L_f^{\rho_i-1} h_i - \omega_i^{(\rho_i-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1^i \\ \vdots \\ z_{\rho_i}^i \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

qui correspond au nouveau système de coordonnées donné par :

$$\begin{bmatrix} Z^1 \\ \vdots \\ Z^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1^1 \\ \vdots \\ z_{\rho_1}^1 \\ \vdots \\ z_1^m \\ \vdots \\ z_{\rho_m}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 - \omega_1 \\ \vdots \\ L_f^{\rho_1-1} h_1 - \omega_1^{(\rho_1-1)} \\ \vdots \\ h_m - \omega_m \\ \vdots \\ L_f^{\rho_m-1} h_m - \omega_m^{(\rho_m-1)} \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

D'où le système non linéaire :

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}^1 \\ \vdots \\ \dot{Z}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1^1 \\ \vdots \\ \dot{z}_{\rho_1}^1 \\ \vdots \\ \dot{z}_1^m \\ \vdots \\ \dot{z}_{\rho_m}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2^1 \\ \vdots \\ L_f^{\rho_1} h_1 - \omega_1^{(\rho_1)} + \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \\ \vdots \\ z_2^m \\ \vdots \\ L_f^{\rho_m} h_m - \omega_m^{(\rho_m)} + \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Application de la loi de commande et stabilisation du système linéaire résultant

En regroupant toutes les équations du système (3.19) qui contiennent le vecteur de contrôle u , il vient le système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{\rho_1}^1 \\ \vdots \\ \dot{z}_{\rho_m}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{\rho_1} h_1 - \omega_1^{(\rho_1)} \\ \vdots \\ L_f^{\rho_m} h_m - \omega_m^{(\rho_m)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

auquel nous pouvons appliquer la loi de commande MIMO :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}_{m \times 1} = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) \end{bmatrix}_{m \times m}^{-1} \begin{bmatrix} -L_f^{\rho_1} h_1 + \omega_1^{(\rho_1)} + v_1 \\ \vdots \\ -L_f^{\rho_m} h_m + \omega_1^{(\rho_m)} + v_m \end{bmatrix}_{m \times 1} \quad (3.21)$$

où les v_i , pour tout $1 \leq i \leq m$, sont les lois de commande qui vont permettre la stabilisation de chaque sous-système linéaire de dimension ρ_i .

Il en résulte ainsi le système d'équations :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{\rho_1}^1 \\ \vdots \\ \dot{z}_{\rho_m}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

En remettant chaque équation de (3.22) dans le système (3.19), il vient le système linéaire suivant, pour chaque sortie h_i (resp. chaque erreur e_i) considérée,

$$\begin{aligned} \dot{Z}^i &= A^i Z^i + B^i v_i \\ O^i &= C^i Z^i \end{aligned} \quad (3.23)$$

où les matrices A^i , B^i et C^i sont données par

$$A^i = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right], B^i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } C^i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^t. \quad (3.24)$$

Il est aisé de voir que chaque sous-système est commandable et observable et que par conséquent, il existe, pour chacune d'elles, une matrice F^i telle qu'un placement de pôles soit possible, avec les dynamiques désirées pour les erreurs e_i correspondantes.

Analyse de stabilité en boucle fermée

La stabilisation de chaque sous-système se faisant par placement de pôles, soit v_i telle que :

$$v_i = -F^i Z^i = -\sum_{l=0}^{\rho_i-1} F_l^i z_l^i = -\sum_{l=0}^{\rho_i-1} F_l^i \left[L_f^l h_i(x(t)) - \omega_i^{(l)}(t) \right]. \quad (3.25)$$

En appliquant la loi de commande stabilisante (3.25) au système (3.23), il vient :

$$\begin{aligned} \dot{Z}^i &= A_c^i Z^i \\ O^i &= C^i Z^i \end{aligned} \quad (3.26)$$

où la matrice A_c^i est donnée par :

$$A_c^i = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline -F_0^i & -F_1^i & \cdots & -F_{\rho_i-1}^i & -F_{\rho_i}^i \end{array} \right]. \quad (3.27)$$

Nous présentons dans la suite un exemple pour illustration de la méthode présentée.

Illustration

Soit le système MIMO carré suivant, présenté au chapitre précédent, dont l'objectif principal reste la poursuite de trajectoire d'un signal de référence. Il est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + x_1^2 \\ \dot{x}_3 = x_4 - x_2 \\ \dot{x}_4 = x_5 - x_1 \\ \dot{x}_5 = x_2 - 3u_1 + 4u_2 \\ \dot{x}_6 = x_5 - 2u_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_1 = h_1(x) = x_1 \\ y_2 = h_2(x) = x_6 \end{cases} \quad (3.28)$$

où les champs de vecteur $f(x)$, $g_1(x)$ et $g_2(x)$ sont tels que :

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 + x_1^2 \\ x_4 - x_2 \\ x_5 - x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad g_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Nous pouvons calculer le vecteur degré relatif et en déduire la dynamique des zéros.

Vecteur degré relatif et dynamique des zéros Soit $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ le vecteur degré relatif du système (3.28). Il est calculé comme suit, respectivement, pour les deux composantes y_1 et y_2 du vecteur de sortie :

$$\begin{cases} y_1 = h_1(x) = x_1 \\ \dot{y}_1 = L_f h_1(x) = \dot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{y}_1 = L_f^2 h_1(x) = \dot{x}_2 = x_3 + x_1^2 \\ y_1^{(3)} = L_f^3 h_1(x) = 2x_1x_2 + x_4 - x_2 \\ y_1^{(4)} = L_f^4 h_1(x) = 2x_2^2 + (2x_1 - 1)(x_3 + x_1^2) + x_5 - x_1 \\ y_1^{(5)} = L_f^5 h_1(x) + \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^4 h_1(x) & L_{g_2} L_f^4 h_1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \quad = 6x_2x_3 + 10x_2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2 + 2x_1x_4 - x_4 + \begin{bmatrix} -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.30)$$

et

$$\begin{cases} y_2 = h_2(x) = x_6 \\ \dot{y}_2 = L_f h_2(x) + \begin{bmatrix} L_{g_1} h_2(x) & L_{g_2} h_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = x_5 + \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.31)$$

D'où la matrice de découplage $D(x)$:

$$D(x) = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

qui est inversible, puisque son déterminant $|D| = 8$ est différent de zéro. La poursuite de trajectoire peut donc être faite par la méthode présentée. Le vecteur degré relatif $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ est égal à $(5, 1)$. La somme de ses composantes est 6, la dimension du système considéré. Par conséquent, la dynamique des zéros n'existe pas, [Isid 95].

Changement de coordonnées et nouveau système non linéaire Le changement de coordonnées, correspondant aux sorties à poursuivre, est le suivant :

$$\begin{bmatrix} z_1^1 \\ z_2^1 \\ z_3^1 \\ z_4^1 \\ z_5^1 \\ \hline z_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \\ \ddot{e}_1 \\ e_1^{(3)} \\ e_1^{(4)} \\ \hline e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 - \omega_1 \\ L_f h_1 - \dot{\omega}_1 \\ L_f^2 h_1 - \ddot{\omega}_1 \\ L_f^3 h_1 - \omega_1^{(3)} \\ L_f^4 h_1 - \omega_1^{(4)} \\ \hline h_2 - \omega_2 \end{bmatrix}.$$

D'où le système non linéaire tel que

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1^1 \\ \vdots \\ \dot{z}_5^1 \\ \hline \dot{z}_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f h_1 - \dot{\omega}_1 \\ \vdots \\ L_f^5 h_1 - \omega_1^{(5)} + [L_{g1} L_f^4 h_1 \quad L_{g2} L_f^4 h_1] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \hline L_f h_2 - \dot{\omega}_2 + [L_{g1} h_2 \quad L_{g2} h_2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

En regroupant les équations contenant le vecteur de contrôle u , il vient

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1^1 \\ \vdots \\ \dot{z}_5^1 \\ \hline \dot{z}_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^5 h_1 - \omega_1^{(5)} \\ L_f h_2 - \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{g1} L_f^4 h_1 & L_{g2} L_f^4 h_1 \\ L_{g1} h_2 & L_{g2} h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Application de la loi de commande linéarisante et placement de pôles En appliquant la loi de commande suivante

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{g1} L_f^4 h_1 & L_{g2} L_f^4 h_1 \\ L_{g1} h_2 & L_{g2} h_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -L_f^5 h_1 + \omega_1^{(5)} + v_1 \\ -L_f h_2 + \dot{\omega}_2 + v_2 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

au système (3.34), il vient :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_5^1 \\ \dot{z}_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

qui, réintroduit dans le système (3.33), en prenant en compte les changements de coordonnées, nous conduit aux deux sous-systèmes linéaires découplés suivants avec leurs sorties

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{z}_1^1 \\ \dot{z}_2^1 \\ \dot{z}_3^1 \\ \dot{z}_4^1 \\ \dot{z}_5^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^1 \\ z_2^1 \\ z_3^1 \\ z_4^1 \\ z_5^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ e_1 = z_1^1 \end{array} \right. \quad (3.37)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1^2 = v_2 \\ e_2 = z_1^2 \end{array} \right. \quad (3.38)$$

qui sont, tous deux, commandables et observables. Notre objectif étant de stabiliser ces deux sous-systèmes (3.37) et (3.38), nous choisissons en conséquence, pour le premier sous-système, la matrice des pôles désirés P_1 . Elle est donnée par :

$$P_1 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 & -4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Ce qui donne la matrice de gain

$$F_1 = \begin{bmatrix} 144 & 324 & 260 & 95 & 16 \end{bmatrix}.$$

D'où la loi de commande stabilisante v_1 :

$$v_1 = - \begin{bmatrix} 144 & 324 & 260 & 95 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^1 \\ z_2^1 \\ z_3^1 \\ z_4^1 \\ z_5^1 \end{bmatrix}$$

qui garantit la convergence de l'erreur e_1 vers zéro.

Le cas du second sous-système est plus simple. Il suffit, pour le stabiliser, de choisir v_2 telle que

$$v_2 = -3z_1^2.$$

Ce qui donne le système stable

$$\dot{z}_1^2 = -3z_1^2.$$

Avec ces deux lois de commande, la poursuite de trajectoire du vecteur de sorties est "parfaite".

Quelques résultats de simulation Nous pouvons voir sur la figure 3.2 que la poursuite de trajectoire est correcte pour les deux sorties considérées, puisque les erreurs correspondantes convergent vers zéro. Notez que les signaux de commande, en régime permanent, ne prennent pas de "très grandes" valeurs.

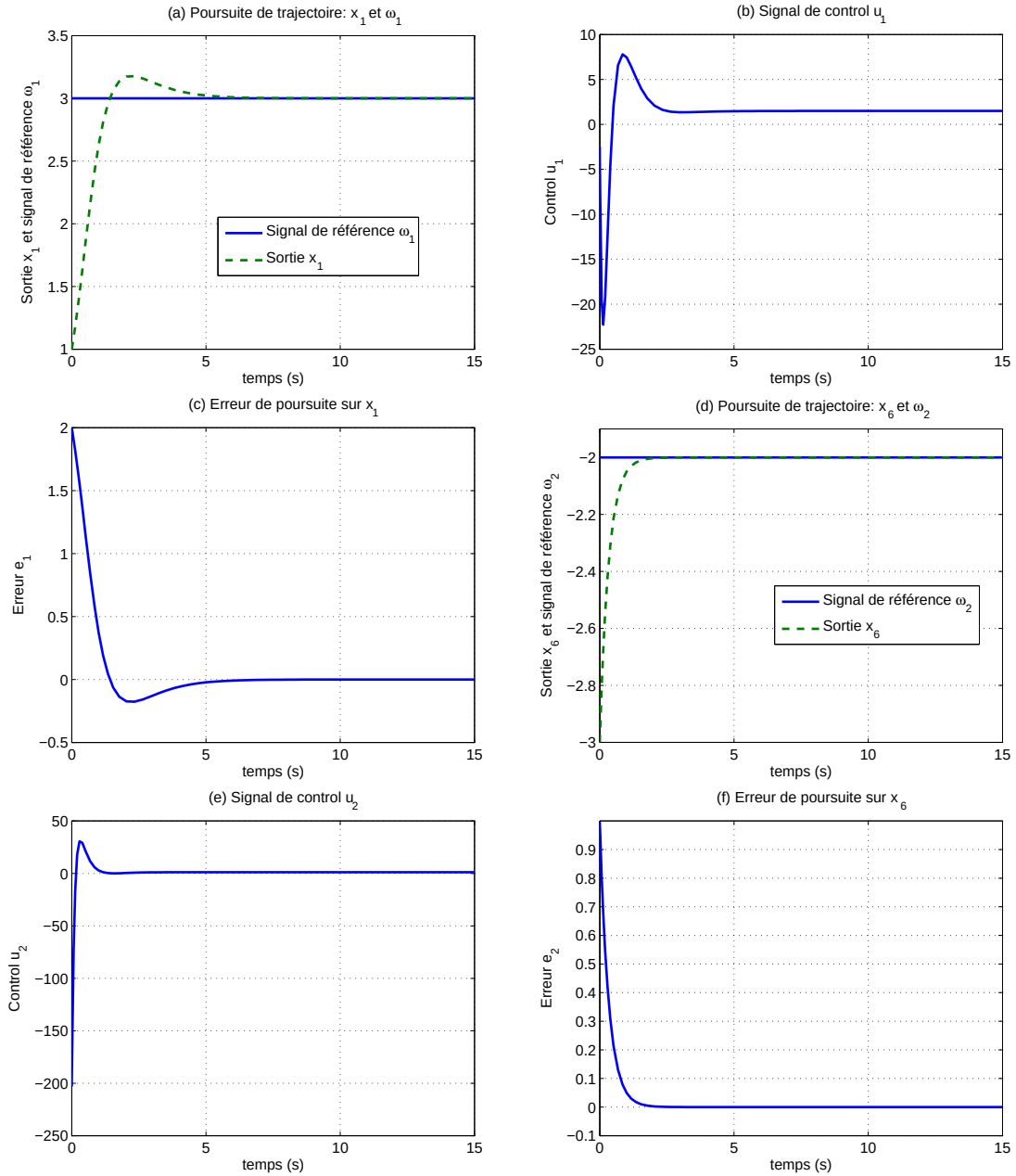


FIGURE 3.2 – Poursuite de trajectoire du vecteur de référence $[\omega_1, \omega_2]^t$ par le vecteur de sortie $[x_1, x_6]^t$.

3.3 Conclusion

Ce chapitre a fait l'objet d'un bref rappel sur les techniques de la linéarisation entrée-sortie par retour d'état autant pour le cas de systèmes non linéaires single-input single-output (SISO) que pour les systèmes non linéaires multi-input multi-output (MIMO). Dans chacun des deux cas, un exemple académique a été étudié et quelques résultats de simulation présentés pour illustrer l'efficacité de la méthode. L'intérêt de cette partie est de nous préparer à bien aborder l'étude comparative, que nous présentons au chapitre suivant, entre la commande prédictive généralisée

non linéaire à temps continu (NCGPC) et la linéarisation entrée-sortie par retour d'état (FL). Nous donnerons également dans le prochain chapitre les applications sur lesquelles notre étude a portées au cours de nos travaux de thèse à savoir la chaise roulante électrique et le moteur Diesel turbocompressé.

4

Etude comparative et applications

"A puissance égale, la chose qui rétablit le plus vite l'ordre et, qui plus est, de façon optimale, est effectivement préférable". Marcelin Dabo.

"En voulant trop s'occuper de sa stabilité pendant ses déplacements, le Caméléon perd en rapidité. Le dilemme rapidité-stabilité est le dilemme du Caméléon". Marcelin Dabo.

"Pour devenir excellent, il suffit de suivre l'enseignement de l'essence même de l'excellence". Marcelin Dabo.

Sommaire

4.1	Introduction	98
4.2	Etude comparative	98
4.2.1	Cas de la commande prédictive généralisée non linéaire à temps continu (NCGPC)	98
4.2.2	Cas de la linéarisation entrée-sortie par retour d'état (FL)	99
4.2.3	Comparaison des deux méthodes de commande : NCGPC et FL	100
4.3	Applications	100
4.3.1	Application au biomédical : cas d'une chaise roulante électrique	100
4.3.2	Application à l'automobile : cas d'un moteur Diesel turbocompressé (MDT)	116
4.4	Conclusion	129

4.1 Introduction

Nous abordons, entre autres, dans ce chapitre, une étude comparative entre la linéarisation entrée-sortie par retour d'état (FL) et la commande prédictive généralisée non linéaire à temps continu (NCGPC) aussi bien pour le cas des systèmes non linéaires single-input single-output (SISO) que pour le cas des systèmes non linéaires multi-input multi-output (MIMO).

Comme le montre les deux précédents chapitres, les lois de commande résultant des deux méthodes sus-citées sont structurellement très proches, puisque basées sur des techniques géométriques de linéarisation entrée-sortie par feedback. L'un des principaux avantages que présente la commande prédictive est la stabilité garantie en boucle fermée quelque soit le système considéré. La comparaison que nous faisons dans cette étude entre la NCGPC et la FL a pour but de montrer les "forces" et "faiblesses" de chacune des deux méthodes devant un objectif de tracking donné, mais également, de permettre à quiconque devant un problème de tracking, de faire un choix effectif, rigoureux et sans appel.

La deuxième partie de ce chapitre est consacrée aux applications de la commande prédictive à une chaise roulante électrique et à un moteur Diesel turbocompressé (MDT). La première application, faites au cours d'un séjour d'un mois au French South African Technological Institute in Electronics (F'SATIE) au sein du Tshwane University of Technology (TUT) en Afrique du Sud, a permis de travailler sur le contrôle de la vitesse linéaire et de la position angulaire de la chaise roulante électrique après modélisation de celle-ci. La deuxième application a eu pour objectif le contrôle de certaines grandeurs physiques du MDT. Quelques résultats de simulation concernant ces deux applications sont présentés.

4.2 Etude comparative

Notre principal objectif dans cette étude comparative est de donner les forces et faiblesses de chacune des méthodes que sont la NCGPC et la FL, en vue de permettre un meilleur choix de la méthode de commande face à un problème de tracking donné.

Pour ce faire, nous donnerons à un bref rappel des deux lois de commande et procéderons, ensuite, à l'étude comparative elle-même.

Pour des raisons de simplification, nous n'évoquerons que le cas des systèmes non linéaires SISO, les conclusions étant transposables aux systèmes non linéaires MIMO.

4.2.1 Cas de la commande prédictive généralisée non linéaire à temps continu (NCGPC)

La loi de commande obtenue à partir de la minimisation d'un critère quadratique construit sur l'erreur de prédiction entre la sortie $y(t) = h(x(t))$ et le signal de référence $\omega(t)$ est :

$$u(x(t)) = \frac{-\sum_{l=0}^{\rho} K_{\rho l}(T, \rho) \left[L_f^l h(x(t)) - \omega^{(l)}(t) \right]}{L_g L_f^{\rho-1} h(x(t))}.$$

Cette loi de commande est optimale, linéarisante et stabilisante (dans le cas où le degré relatif est inférieur ou égal à quatre, [Chen 03]) pour le système non linéaire considéré comme nous l'avons vu dans le deuxième chapitre.

Avec cette loi de commande, la dynamique du système linéaire bouclé n'est fixée que par un seul paramètre qui est l'horizon de prédiction. En effet, plus ce dernier est grand, plus la dynamique

du système bouclé est lente. Le degré relatif, quant à lui, ne sert uniquement qu'à positionner les pôles dans le plan complexe et donc agit sur leurs stabilités.

Dans le cas où le degré relatif est égal à un, le temps de réponse du système bouclé, que l'on souhaite avoir, est **toujours le double de l'horizon de prédiction et sa fréquence de coupure égale à 1.5 fois l'inverse de l'horizon de prédiction.**

Dans le cas où le degré relatif est égal à deux, la NCGPC donne toujours lieu à **un régime oscillatoire amorti du système bouclé avec un taux d'amortissement constant de $\xi_D = 0.685$ et une pulsation naturelle de 1.83 fois l'inverse de l'horizon de prédiction.** Avec la NCGPC et pour un système de degré relatif 2, **le dépassement est constant et est égal 5.21%.**

Dans le cas où le degré relatif est strictement supérieur à deux et au plus égal à quatre, en l'état actuel de nos connaissances, aucune loi n'a été établie entre l'horizon de prédiction et le temps de réponse du système linéaire bouclé. Dans notre étude, nous n'avons pas cherché à établir cette relation.

Considérons, à présent, le cas où le degré relatif est strictement supérieur à quatre. Dans ce cas, l'optimalité de la loi de commande et son caractère prédictif sont conservés grâce à la correction matricielle "intelligente". Cependant, avec cette correction, plus le degré relatif augmente, plus nous sommes en face du dilemme stabilité-rapidité. En effet, plus le degré relatif croît, plus il faut faire croître l'horizon de prédiction pour garantir la stabilité et plus le système linéaire bouclé devient lent, voir corollaire 2.2.1.2 chapitre 2. Cette loi reste valable pour un système de degré relatif pouvant aller de 1 à 40, voir figure 2.18 au chapitre 2.

Nous pouvons, d'après ces observations, dire que *si quelqu'un s'occupe trop de sa stabilité pendant ses déplacements, il perd en rapidité. C'est le cas du Caméléon : il passe tout son temps, dans ses déplacements, à "tester" si son appui est toujours stable et ce, à chaque pas qu'il fait. Par conséquent il est très lent dans ses déplacements, sauf cas d'urgence. Le dilemme rapidité-stabilité est le dilemme du Caméléon.*

Pour éviter cela, la stabilisation peut être obtenue à l'aide de la correction linéaire. Avec cette méthode, il y a plus de marge de manoeuvre. Le prix à payer, cependant, est la perte du caractère prédictif de la loi de commande, se référer au chapitre 2 pour plus de détails sur la méthode et sur la correction matricielle "intelligente".

4.2.2 Cas de la linéarisation entrée-sortie par retour d'état (FL)

Sa loi de commande est structurellement identique à celle de la NCGPC. En effet, elle est donnée par l'équation suivante

$$u(x(t)) = -\frac{L_f^\rho h - \omega^{(\rho)}}{L_g L_f^{\rho-1} h(x(t))} + \frac{-\sum_{l=0}^{\rho-1} F_l \left[L_f^l h(x(t)) - \omega^{(l)}(t) \right]}{L_g L_f^{\rho-1} h(x(t))}.$$

Avec cette loi de commande qui n'est pas optimale, la marge de manoeuvre est plus importante pour le choix de la dynamique de la sortie à "tracer". Cependant, le choix de cette dynamique ne se fait guère à partir d'un seul paramètre mais de pôles arbitrairement fixés.

Il est important de remarquer que, dans le premier terme de la loi de commande de la FL, le coefficient qui multiplie la composante d'ordre ρ est volontairement fixé à 1 dans le but d'an-

nuler toutes les nonlinéarités qui apparaissent dans la dernière équation du nouveau système non linéaire, résultant du changement de coordonnées obtenu par difféomorphisme. Par conséquent, la stabilité du système bouclé est assurée grâce aux termes F_l résultant du placement de pôles.

4.2.3 Comparaison des deux méthodes de commande : NCGPC et FL

Nous aborderons la comparaison des deux méthodes de commande par rapport au degré relatif du système étudié. Pour cela, plusieurs cas peuvent se présenter.

Premier cas, le degré relatif est inférieur ou égal à quatre :

- si ce dernier est égal à un ou deux, la loi de commande NCGPC est préférable puisqu'étant optimale et stabilisante. Toutefois, si un quelconque dépassement n'est pas souhaité (cas où le degré relatif est égal à deux), la loi de commande découlant de la FL est préférable puisque, par construction même, celle de la NCGPC impose un dépassement fixé de 5.21% ;
- si ce dernier est différent de un et deux et au plus égal à quatre, la NCGPC demeure préférable pour les mêmes raisons.

Il est important de noter que les solutions ci-dessus sont proposées sous réserve que les dynamiques souhaitées du système linéaire bouclé soient atteignables.

Deuxième cas, le degré relatif est strictement supérieur à quatre. Dans ce cas, nous préconisons également l'utilisation de la NCGPC sachant que la loi de commande corrigée résultante est optimale. Cependant le "dilemme du Caméléon" apparaît à partir d'une certaine valeur de l'horizon de prédiction.

L'étude comparative ci-dessus donne juste quelques pistes que nous pensons efficaces dans l'utilisation de la NCGPC pour résoudre un problème donné de tracking. Nous présentons les applications dans la suite.

4.3 Applications

4.3.1 Application au biomédical : cas d'une chaise roulante électrique

Cette application a été faite au cours d'un séjour d'un mois (Février 2009) en Afrique du Sud au sein du French South African Technological Institute in Electronics (F'SATIE) dans les locaux de Tshwane University of Technology (TUT) à Tshwane. Ce voyage a pu se faire dans le cadre du programme région sans frontières.

L'objectif de cette étude est porté sur la modélisation et la commande de la position angulaire et de la vitesse linéaire d'une chaise roulante électrique que ce soit sur une pente, positive ou négative, ou sur une surface plane. L'étude en elle-même fut très enrichissante puisque qu'elle a été menée depuis la phase de modélisation de la chaise roulante jusqu'à la phase de conception de la loi de commande.

Nous exposons cette partie comme suit : nous donnons, dans un premier temps, le modèle de la chaise roulante électrique sur une pente, ensuite nous faisons les analyses préliminaires, degré relatif, linéarisabilité, pour ensuite concevoir et appliquer une loi de commande découlant de la commande prédictive ou une loi de commande construite à partir de la linéarisation entrée-sortie par retour d'état. Au cours des simulations, nous avons utilisé un joystick pour nous rapprocher le plus possible de la réalité de pilotage de la chaise roulante. Quelques résultats de simulation sont présentés dans la suite, pour les simulations avec et sans joystick. Cependant, l'implémentation de la loi de commande sur la chaise roulante électrique n'a pas été possible car le banc d'essais est en cours d'installation.

Les résultats de cette application ont été publiés dans une conférence IEEE AFRICON qui s'est déroulée à Nairobi, au Kenya en Septembre dernier, voir [Onya 09].

Modélisation et validation du modèle

Soit une chaise roulante électrique équipée de deux roues motrices à l'arrière et de deux roues folles à l'avant, se déplaçant sur une pente donnée (positive ou négative) comme indiquée sur la figure 4.1, voir [Emam 07]. Les deux roues arrières, de plus grand diamètre, sont indépendantes et chacune d'elle est pilotée par un moteur à courant continu. La vitesse angulaire de la chaise roulante est définie comme étant la différence entre les vitesses angulaires des roues droites et gauches. Les deux moteurs de la chaise sont identiques afin de lui assurer une trajectoire rectiligne, lorsqu'ils sont soumis à un couple identique, [Onya 09].

Nous ferons la modélisation de la chaise à partir des équations mécaniques du lagrangien dont un rappel est donné ci-après. Aussi, un bref rappel sur les systèmes non holonomes est présenté.

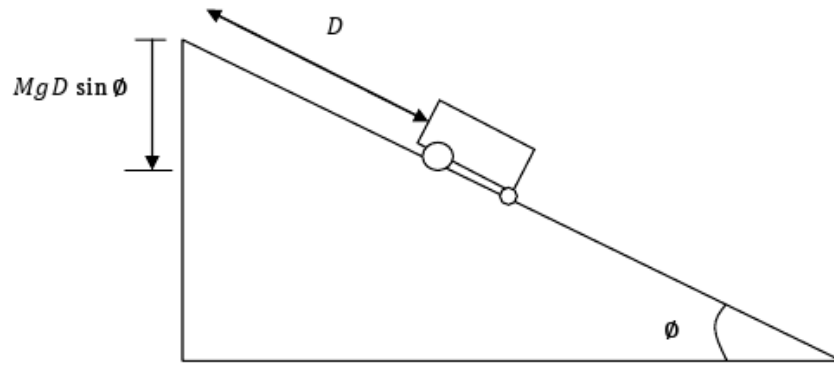


FIGURE 4.1 – Position de la chaise roulante électrique sur une pente.

Rappel sur le lagrangien Le lagrangien d'un système dynamique, dont le nom vient de Joseph Louis Lagrange (1736-1813), est une fonction de variables dynamiques qui décrit de manière concise les équations du mouvement de ce système. En mécanique classique, le lagrangien vaut généralement la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

Considérons un système dynamique dont l'énergie cinétique est désignée par $\mathcal{T}$ et l'énergie potentielle par $\mathcal{U}$. Soit $\mathcal{L}$ son lagrangien. Alors, il est donné par l'équation suivante :

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}. \quad (4.1)$$

L'équation de mouvement du système considéré est :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = F_{qr} \quad (4.2)$$

où t représente le temps, q le vecteur d'état du système considéré et F_{qr} l'ensemble des forces qui s'appliquent sur le système, composé des forces de propulsion de la chaise roulante, des forces de frottement (négligées dans notre cas) et des forces générées par les contraintes non holonomes.

Rappel sur les systèmes non holonomes Un système est dit non holonome s'il lui est soumis à des contraintes qui dépendent des vitesses et ne peuvent pas se réduire à des fonctions des positions seulement, voir figure 4.3.

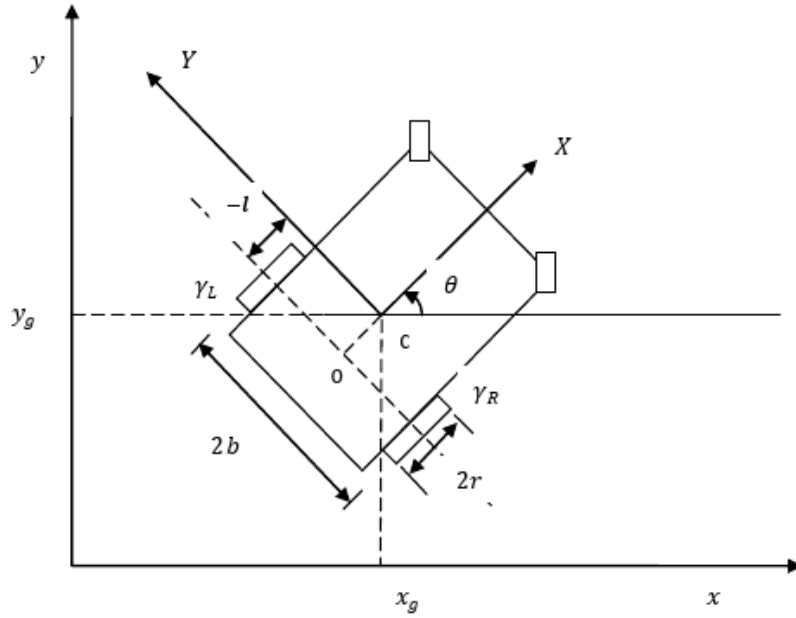


FIGURE 4.2 – Chaise roulante électrique dans le repère inertiel.

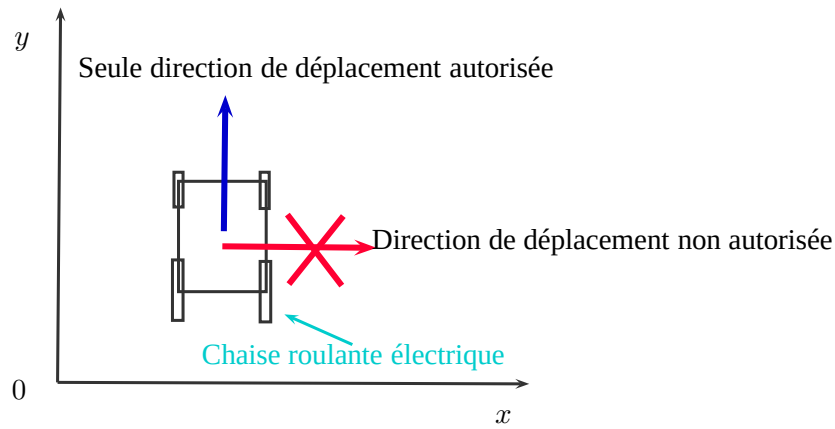


FIGURE 4.3 – Système non holonome.

Modélisation de la chaise roulante électrique Considérons la chaise roulante, en mouvement sur une pente d'angle ϕ par rapport à l'horizontal, comme un corps rigide, voir figure 4.1. Soit $\mathcal{T}$ son énergie cinétique. Elle est donnée par

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}M (\dot{x}_g^2 + \dot{y}_g^2 + \dot{z}_g^2) + \frac{1}{2}I_z \dot{\theta}^2 + M\dot{\theta} (\dot{y}_g \bar{x} - \dot{x}_g \bar{y}) \quad (4.3)$$

où les différentes variables de l'équation (4.3) sont regroupées dans la table 4.4. Les composantes

TABLE 4.1 – Nomenclature des variables relatives au modèle de la chaise roulante électrique.

Variable	Description
x_g, y_g et z_g	position du centre de gravité (CDG) de la chaise dans le repère inertiel (O, x, y, z)
$\dot{x}_g, \dot{y}_g$ et $\dot{z}_g$	vitesse du CDG de la chaise dans (O, x, y, z)
θ et $\dot{\theta}$	position et vitesse angulaires de la chaise dans (O, x, y, z)
$\bar{x}, \bar{y}$ et $\bar{z}$	position de la chaise dans le repère qui lui est lié (O, X, Y, Z)
M_ω	masse globale de la chaise (tous les composants)
M_p	masse de la personne assise sur la chaise
M	masse totale de la personne et de la chaise : $M = M_p + M_\omega$
I_z	moment d'inertie de la chaise par rapport à l'axe z
l	distance entre l'axe des roues arrières et le CDG de la chaise

$\bar{x}, \bar{y}$ et $\bar{z}$, voir figure 4.4, sont données par les équations (4.4)

$$\begin{cases} \bar{x} = -l \cos \phi \cos \theta \\ \bar{y} = -l \cos \phi \sin \theta \\ \bar{z} = -l \sin \phi \end{cases} \quad (4.4)$$

où ϕ est l'angle d'inclinaison de la pente, voir figures 4.1 et 4.4. Par conséquent, en remplaçant ces équations dans l'équation (4.3), il vient l'expression suivante pour l'énergie cinétique :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}M (\dot{x}_g^2 + \dot{y}_g^2 + \dot{z}_g^2) + \frac{1}{2}I_z \dot{\theta}^2 + lM \dot{\theta} (\dot{x}_g \cos \phi \sin \theta - \dot{y}_g \cos \phi \cos \theta). \quad (4.5)$$

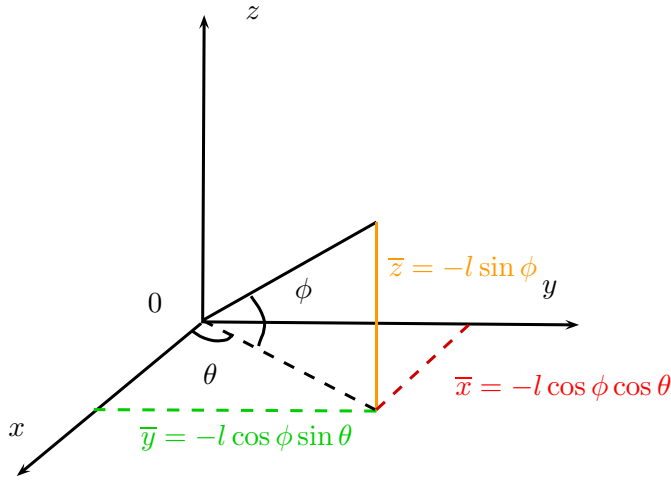


FIGURE 4.4 – Coordonnées de la chaise roulante électrique dans le repère inertiel, voir [Onya 09].

L'énergie potentielle est donnée par la relation suivante

$$\mathcal{U} = Mg \sin \theta (x_g \cos \theta + y_g \sin \theta). \quad (4.6)$$

D'où le lagrangien, voir [Emam 07] et [Well 67],

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M (\dot{x}_g^2 + \dot{y}_g^2 + \dot{z}_g^2) + \frac{1}{2}I_z \dot{\theta}^2 + lM\dot{\theta} (\dot{x}_g \cos \phi \sin \theta - \dot{y}_g \cos \phi \cos \theta) - Mg \sin \theta (x_g \cos \theta + y_g \sin \theta). \quad (4.7)$$

En résolvant l'équation du mouvement donnée en (4.2), voir Annexe C pour les détails de calcul, il vient le système suivant pour la chaise roulante électrique :

$$\begin{cases} M\ddot{x}_g + lM \cos \phi (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) + Mg \sin \phi \cos \theta = F_{qr1} \\ M\ddot{y}_g - lM \cos \phi (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) + Mg \sin \phi \sin \theta = F_{qr2} \\ M\ddot{z}_g = F_{qr3} \\ I_z \ddot{\theta} + lM \cos \phi (\ddot{x}_g \sin \theta + \dot{x}_g \dot{\theta} \cos \theta + \dot{y}_g \dot{\theta} \sin \theta - \ddot{y}_g \cos \theta) - lM \dot{\theta} \cos \phi (\dot{x}_g \cos \theta + \dot{y}_g \sin \theta) \\ + Mg \sin \phi (y_g \cos \theta - x_g \sin \theta) = F_{qr4} \end{cases} \quad (4.8)$$

ou, de manière équivalente

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = F_{qr} \quad (4.9)$$

avec q le vecteur de position de la chaise dont les composantes sont x_g , y_g , z_g et θ . La matrice $M(q)$ est la matrice d'inertie. Elle est symétrique, définie positive et est donnée par :

$$M(q)_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & Ml \cos \phi \sin \theta \\ 0 & M & 0 & -Ml \cos \phi \cos \theta \\ 0 & 0 & M & 0 \\ Ml \cos \phi \sin \theta & -Ml \cos \phi \cos \theta & 0 & I_z \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

La matrice $V(q, \dot{q})$ est celle des forces centripètes et de Coriolis. Elle est telle que :

$$V(q, \dot{q})_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & Ml\dot{\theta} \cos \phi \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 & Ml\dot{\theta} \cos \phi \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Le vecteur de forces gravitationnelles $G(q)$ est tel que :

$$G(q)_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} Mg \sin \phi \cos \theta \\ Mg \sin \phi \sin \theta \\ 0 \\ Mg \sin \phi (y_g \cos \theta - x_g \sin \theta) \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Comme dit précédemment, les forces de frottement étant négligées dans cette étude, l'ensemble des forces qui s'appliquent à la chaise est composé, uniquement, des forces motrices F_m de la chaise et des forces générées par les contraintes non holonomes F_{cn} . Elles sont données par les relations suivantes :

$$F_m = E(q)\tau \text{ et } F_{cn} = A^t(q)\lambda. \quad (4.13)$$

où

$$E(q)_{4 \times 2} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \\ \frac{\sin \theta}{r} & \frac{\sin \theta}{r} \\ 0 & 0 \\ \frac{b}{r} & \frac{-b}{r} \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_R \\ \tau_L \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

et

$$A(q)_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} -\cos \phi \sin \theta & \cos \phi \cos \theta & \sin \phi & -l \\ \sin \phi \sin \theta & -\sin \phi \cos \theta & \cos \phi & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Le vecteur λ est celui des multiplicateurs de Lagrange.

Par ailleurs, l'équation de la cinétique de la chaise roulante est donnée par

$$\dot{q} = S(q)\eta \quad (4.16)$$

où la matrice $S(q)$ est telle que :

$$S(q) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -l \cos \phi \sin \theta \\ \sin \theta & l \cos \phi \cos \theta \\ 0 & l \sin \phi \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

et le vecteur η des vitesses linéaire v et angulaire ω est donné par

$$\eta = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

En dérivant l'équation (4.16) une fois par rapport au temps, il vient :

$$\ddot{q} = \dot{S}(q)\eta + S(q)\dot{\eta} \quad (4.19)$$

avec la matrice $\dot{S}(q)$ donnée par

$$\dot{S}(q) = \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta & -\dot{\theta} l \cos \phi \cos \theta \\ \dot{\theta} \cos \theta & \dot{\theta} l \cos \phi \sin \theta \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Remplaçons chacune des équations (4.16) et (4.19) par son expression dans l'équation (4.9). Après simplifications, voir les détails de calcul dans l'annexe C, il vient le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{v} = -g \sin \phi + \frac{1}{Mr} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_R \\ \tau_L \end{bmatrix} \\ \dot{\omega} = \frac{gM \sin \phi (y_g \cos \theta - x_g \sin \theta)}{Ml^2 \cos 2\phi - I_z} + \frac{b}{r(I_z - Ml^2 \cos 2\phi)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_R \\ \tau_L \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.21)$$

qui peut être réécrit sous la forme classique des fonctions non linéaires affines en contrôle c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \sin \phi \\ \frac{gM \sin \phi (y_g \cos \theta - x_g \sin \theta)}{Ml^2 \cos 2\phi - I_z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{Mr} & \frac{1}{Mr} \\ \frac{b}{r(I_z - Ml^2 \cos 2\phi)} & -\frac{b}{r(I_z - Ml^2 \cos 2\phi)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_R \\ \tau_L \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

avec r le rayon d'une roue arrière et b la moitié de la "largeur" de la chaise roulante, voir figure 4.2. Dans la suite, nous considérerons comme vecteur d'entrées de notre système, le vecteur des couples sur les roues arrières gauche et droite $\tau = \begin{bmatrix} \tau_R & \tau_L \end{bmatrix}^t$.

Application de la loi de commande

Notre objectif est de poursuivre les trajectoires de référence de la vitesse linéaire v_r et de la position angulaire θ_r de la chaise roulante électrique. D'où le vecteur de sortie e dont les composantes sont :

$$\begin{cases} e_1^1 = v - v_r \\ e_1^2 = \theta - \theta_r \end{cases} \quad (4.23)$$

où v_r est considérée comme une constante dans la suite de l'étude et θ_r comme une fonction du temps.

Vecteur degré relatif et linéarisabilité Soit $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ le vecteur degré relatif. Il s'obtient en calculant les dérivées successives par rapport au temps de chaque terme de l'équation (4.23) jusqu'à ce que le vecteur de contrôle τ apparaisse. Ainsi

$$\begin{cases} \dot{e}_1^1 = \dot{v} = -g \sin \phi + \frac{1}{Mr} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_R \\ \tau_L \end{bmatrix} \\ \dot{e}_1^2 = \dot{\theta} - \dot{\theta}_r = \omega - \dot{\theta}_r = e_2^2 \\ \ddot{e}_1^2 = \ddot{\omega} - \ddot{\theta}_r = -\ddot{\theta}_r + \frac{gM \sin \phi (y_g \cos \theta - x_g \sin \theta)}{Ml^2 \cos 2\phi - I_z} + \frac{b}{r(I_z - Ml^2 \cos 2\phi)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_R \\ \tau_L \end{bmatrix} = \dot{e}_2^2 \end{cases} \quad (4.24)$$

En réécrivant le système (4.24) à l'aide des dérivées de Lie, il vient

$$\begin{cases} \dot{e}_1^1 = L_f e_1^1 + \begin{bmatrix} L_{g1} e_1^1 & L_{g2} e_1^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \dot{e}_1^2 = e_2^2 \\ \dot{e}_2^2 = L_f^2 e_1^2 + \begin{bmatrix} L_f L_{g1} e_1^2 & L_f L_{g2} e_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.25)$$

où

$$\begin{cases} L_f e_1^1 = -g \sin \phi \\ L_f^2 e_1^2 = \frac{gM \sin \phi (y_g \cos \theta - x_g \sin \theta)}{Ml^2 \cos 2\phi - I_z} - \ddot{\theta}_r \end{cases} \quad (4.26)$$

et la matrice de découplage que nous nommons $D(x)$ est telle que :

$$D(x) = \begin{bmatrix} L_{g1} e_1^1 & L_{g2} e_1^1 \\ L_f L_{g1} e_1^2 & L_f L_{g2} e_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Mr} & \frac{1}{Mr} \\ \frac{b}{r(I_z - Ml^2 \cos 2\phi)} & -\frac{b}{r(I_z - Ml^2 \cos 2\phi)} \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Elle est inversible puisque son déterminant, qui est donné par :

$$|D(x)| = -\frac{2b}{r^2 M (I_z - Ml^2 \cos 2\phi)},$$

est bien défini. En effet son dénominateur ne peut pas s'annuler dans notre cas, voir annexe C à partir de l'équation (C.30) et est toujours différent de zéro puisque b qui est la moitié de la largeur de la chaise roulante ne peut, non plus, s'annuler.

Il devient alors possible d'appliquer la commande prédictive ou la linéarisation entrée-sortie par retour d'état à la chaise roulante électrique. D'après l'équation (4.24), le vecteur degré relatif est donné par $\rho = (1, 2)$. La somme de ses composantes est égale à trois qui est supérieur à deux, la dimension du système (4.21). Pour éviter cette situation, nous procédons à une extension du système (4.21). D'où le système étendu suivant :

$$\begin{cases} \dot{v} = -g \sin \phi + \frac{1}{Mr} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_R \\ \tau_L \end{bmatrix} \\ \dot{\omega} = \frac{gM \sin \phi (y_g \cos \theta - x_g \sin \theta)}{Ml^2 \cos 2\phi - I_z} + \frac{b}{r(I_z - Ml^2 \cos 2\phi)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_R \\ \tau_L \end{bmatrix} \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \quad (4.28)$$

de dimension égal à la somme des composantes du vecteur degré relatif. Par conséquent, la dynamique des zéros n'existe pas. En réécrivant ce système sous la forme suivante

$$\dot{x} = f(x) + \begin{bmatrix} g_1(x) & g_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

il vient

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \sin \phi \\ \frac{gM \sin \phi (y_g \cos \theta - x_g \sin \theta)}{Ml^2 \cos 2\phi - I_z} \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{Mr} & \frac{1}{Mr} \\ \frac{b}{r(I_z - Ml^2 \cos 2\phi)} & -\frac{b}{r(I_z - Ml^2 \cos 2\phi)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_R \\ \tau_L \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

où les champs de vecteurs $f(x)$, $g_1(x)$ et $g_2(x)$, avec $x = [v \ \omega \ \theta]^t$, sont donnés par :

$$f(x) = \begin{bmatrix} -g \sin \phi \\ \frac{gM \sin \phi (y_g \cos \theta - x_g \sin \theta)}{Ml^2 \cos 2\phi - I_z} \\ \omega \end{bmatrix}, \quad g_1(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{Mr} \\ \frac{b}{r(I_z - Ml^2 \cos 2\phi)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad g_2(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{Mr} \\ -\frac{b}{r(I_z - Ml^2 \cos 2\phi)} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

Validation du modèle Nous procédons à la validation du modèle (4.30) avant de passer à l'application de la loi de commande. Les constantes du modèle dynamique de la chaise roulante sont données dans la table 4.2.

TABLE 4.2 – Les constantes du modèle dynamique de la chaise roulante considérée.

Dimensions de la chaise	$b = 0.35m, l = 0.25m, r = 0.2m$
Masse totale (personne + chaise)	$M = 80kg$
Moment d'inertie par rapport à l'axe z	$I_z = 39.733kgm^2$

Toutes les simulations sont faites sous Matlab-Simulink version 7.01 et les résultats donnés dans les figures 4.5, 4.6 et 4.7.

Trois cas ont été considérés :

- le premier présente les mouvements de la chaise roulante (deux cercles et une droite) sur une surface plane. Le premier cercle, voir figure 4.5 (a), est réalisé en fixant le couple de la roue gauche à 0Nm et celui de la roue droite à 50Nm. Le deuxième cercle, voir figure 4.5 (b), est réalisé en choisissant les couples des roues gauche et droite opposés algébriquement et égaux en valeur absolue à 50Nm. La trajectoire générée par le centre de gravité (CDG) de la chaise est celle d'un petit cercle. Enfin, avec un couple identique de 50Nm sur les deux roues, le CDG de la chaise roulante effectue une trajectoire rectiligne et uniforme (frottement négligé), voir figure 4.5 (c).

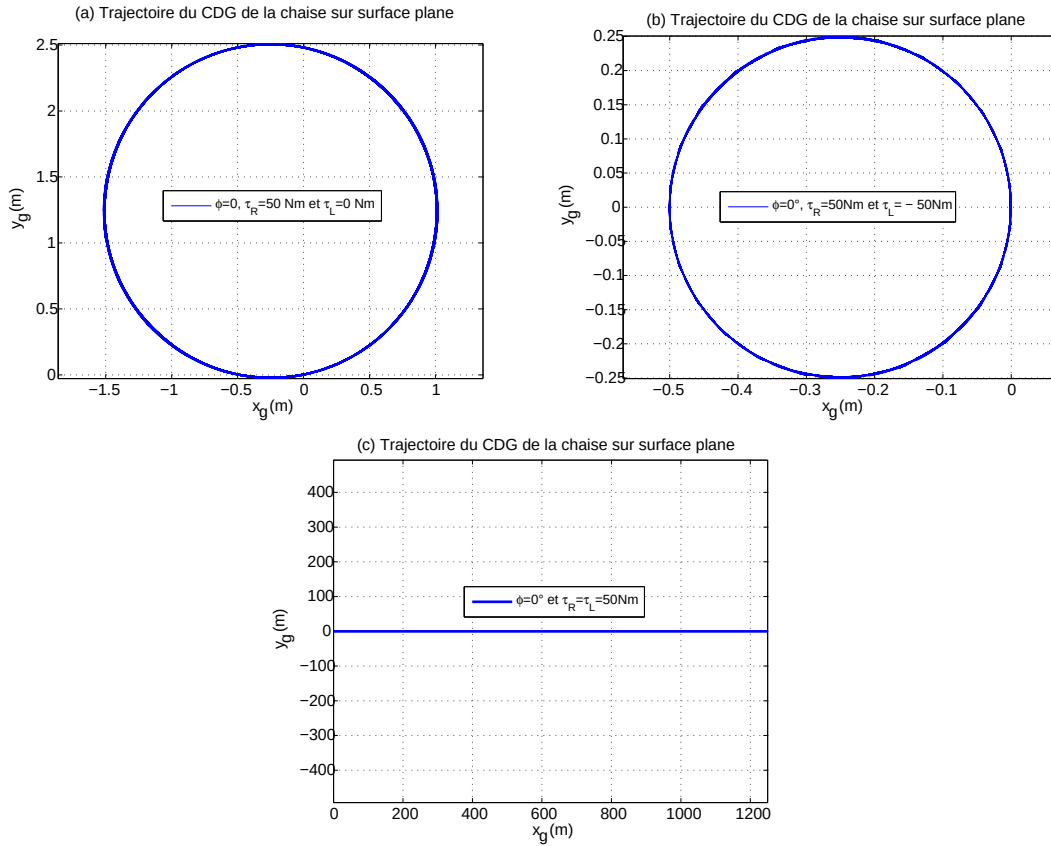


FIGURE 4.5 – Validation de modèle (20 secondes de simulation) : trajectoires du CDG de la chaise sur une surface plane.

- le deuxième cas présente celui des mouvements de la chaise roulante sur une pente positive (6° et 45°). Dans le cas d'une pente positive faible (6°), le CDG de la chaise roulante effectue une succession de cercles ascendants, si les couples de 50Nm et 0Nm sont appliqués, respectivement, sur ses roues droite et gauche, voir figure 4.6 (a). La chaise roulante descend la pente si aucun couple n'est appliqué sur ses roues, voir figure 4.6 (b). Avec un couple suffisant (50Nm sur les deux roues), la chaise grimpe la pente sans beaucoup de difficultés, voir figure 4.6 (c).

Dans le cas où la pente est plus forte (45°), un couple de 50Nm est insuffisant pour faire le plus petit déplacement avec la chaise roulante vers le sommet de la pente. Par conséquent, elle descend la pente en marche arrière comme montré sur la figure 4.6 (d). Il est clair que si aucun couple ne lui était appliqué, elle serait allée plus bas que dans le cas de la pente de 6° . Cependant, un couple de 500Nm sur la roue droite de la chaise et de 0Nm sur sa roue gauche lui permettent de faire un mouvement circulaire ascendant, voir figure 4.6 (e).

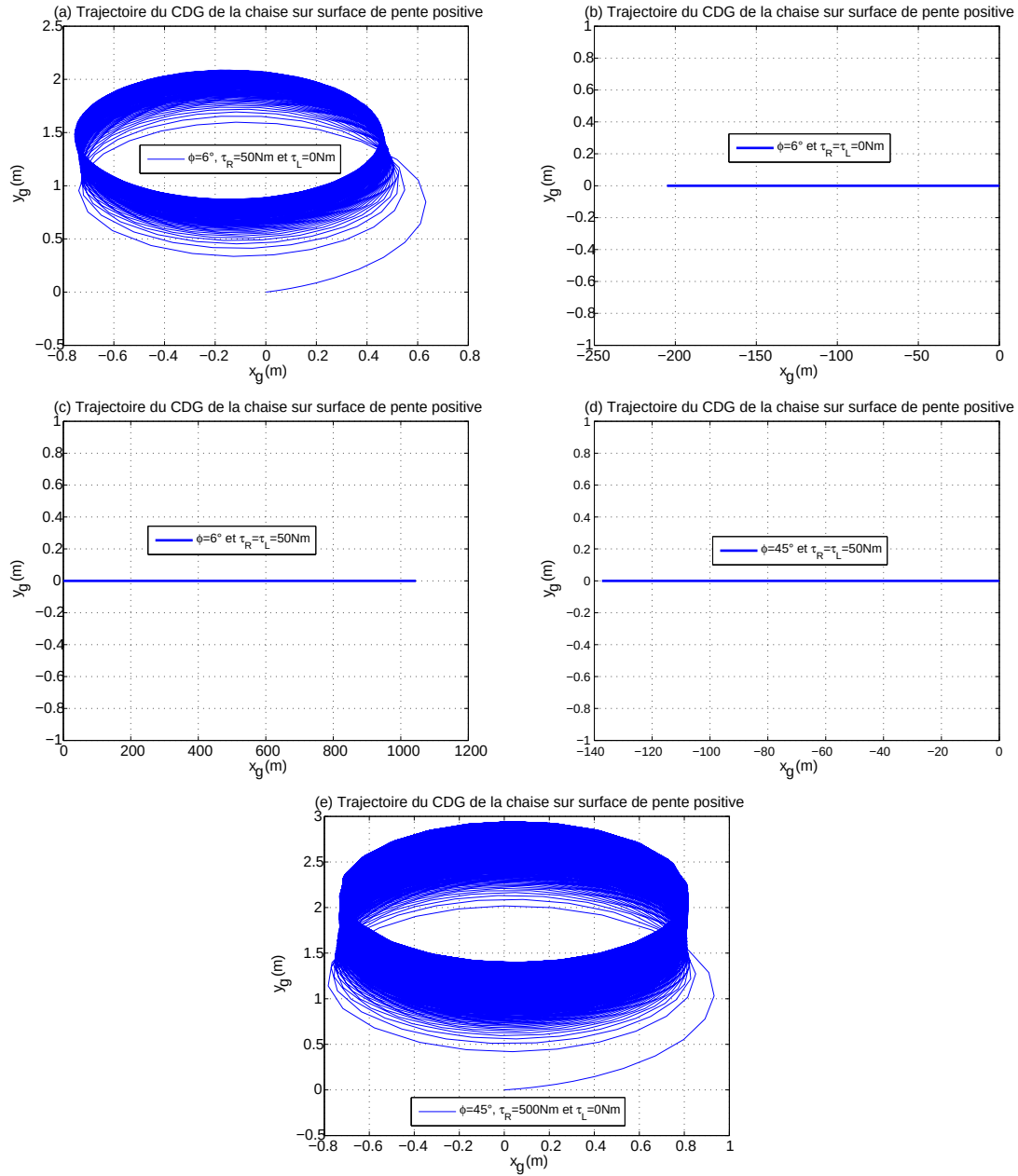


FIGURE 4.6 – Validation de modèle (20 secondes de simulation) : trajectoires du CDG de la chaise sur une surface de pente positive.

- le troisième cas expose les mouvements de la chaise sur une surface de pente négative (-6°). En n'appliquant aucun couple à ses roues motrices, la chaise descend la pente sous l'effet de la gravité, voir figure 4.7 (a). De plus, elle descend la pente encore plus vite si un couple identique non nul est appliqué à ses roues motrices, voir figure 4.7 (b). Enfin, un couple de 500Nm sur la roue droite de la chaise et de 0Nm sur sa roue gauche lui permettent de faire un mouvement circulaire descendant, voir figure 4.7 (c).

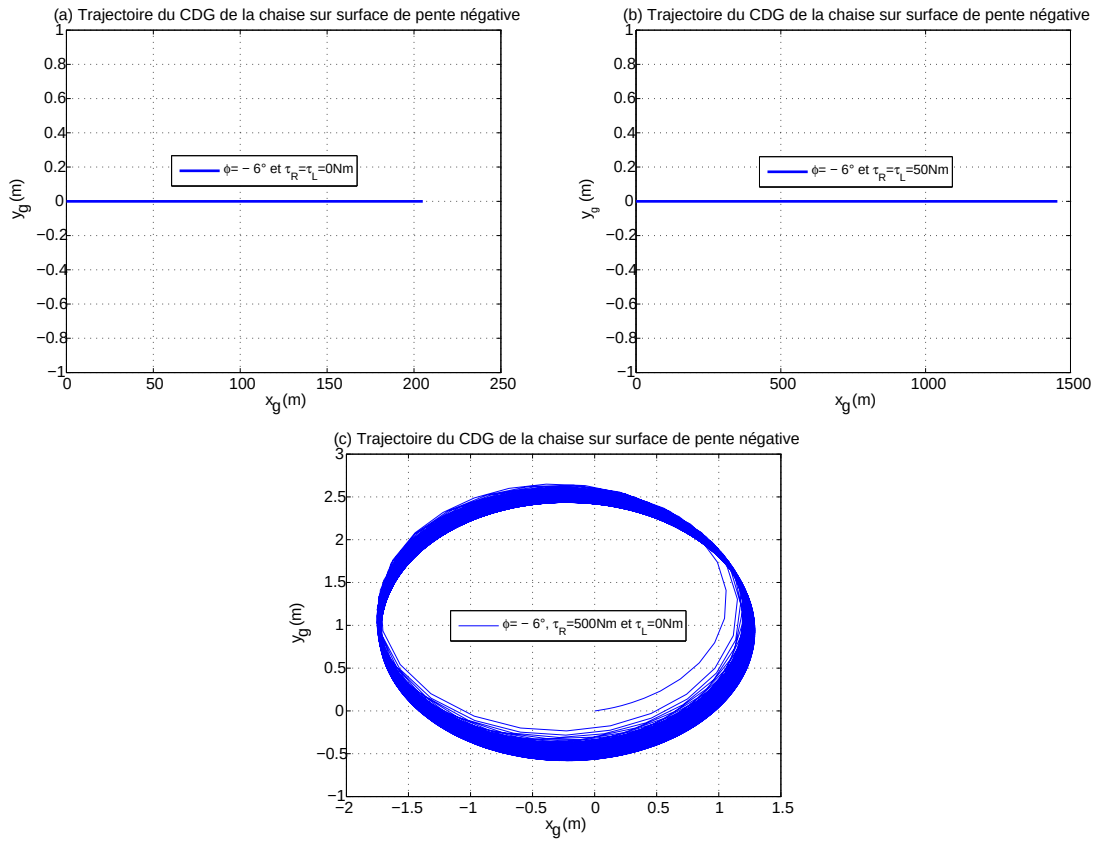


FIGURE 4.7 – Validation de modèle (20 secondes de simulation) : trajectoires du CDG de la chaise sur une surface de pente positive.

Nous passons à présent à l'application des lois de commande et à la présentation des résultats de simulation qui en découlent.

Application de la loi de commande Comme nous l'avons montré dans la première partie de ce chapitre, nous avons ici le choix entre l'application de la loi de commande découlant de la FL, donnée par :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{g1}e_1^1 & L_{g2}e_1^1 \\ L_{g1}e_1^2 & L_{g2}e_1^2 \end{bmatrix}^{-1} \left[\begin{array}{c|c} -K_1(v - v_r) & -L_f e_1^1 \\ \hline [-K_{21} & -K_{21}] \begin{bmatrix} \theta - \theta_r \\ \dot{\theta} - \dot{\theta}_r \end{bmatrix} & -L_f e_1^2 \end{array} \right] \quad (4.32)$$

et celle découlant de la NCGPC, donnée par :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{g1}e_1^1 & L_{g2}e_1^1 \\ L_{g1}e_1^2 & L_{g2}e_1^2 \end{bmatrix}^{-1} \left[\begin{array}{cc|cc} -k_{11} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{21} & -k_{22} & -1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_1^1 \\ L_f e_1^1 \\ e_1^2 \\ L_f e_1^2 \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

Quelques résultats de simulation

Nous présentons, dans cette partie, les résultats de simulation faite sur la chaise roulante électrique contrôlée par les deux techniques de commande que sont la NCGPC et la FL. Certains

de ces résultats ont été obtenus en utilisant un joystick, ce dernier permettant de se rapprocher le plus possible du cas réel pour le pilotage de la chaise. Toutes les simulations ont été réalisées sous le logiciel Matlab-Simulink version 7.0.1. Nous prenons les valeurs suivantes pour les matrices de gain :

- pour la FL, la matrice de gain choisie est telle que :

$$K_1 = 7 \text{ et } K = \begin{bmatrix} K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 20 \end{bmatrix}.$$

- et pour la NCGPC la matrice de gain est résumée dans la table 4.3 en fonction de l’horizon de prédiction choisie.

TABLE 4.3 – Matrice de gain pour la poursuite de la vitesse linéaire et de la position angulaire de la chaise roulante.

Horizon de prédiction T (s)	Matrice de gain $K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}^t$
$T = 1$	$K = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.33 & 2.5 & 1 \end{bmatrix}$
$T = 2$	$K = \begin{bmatrix} 0.75 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.83 & 1.25 & 1 \end{bmatrix}$
$T = 3$	$K = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.37 & 0.83 & 1 \end{bmatrix}$

Les résultats de simulation, dans le cas où le joystick n’est pas utilisé, sont donnés sur les figures 4.8, 4.9, 4.10, 4.11 et 4.12. Sur la figure 4.8 (a), nous pouvons noter une bonne poursuite de trajectoire sur une surface plane, aussi bien pour la vitesse linéaire de la chaise que pour sa position angulaire. C’est le cas pour une surface de pente positive et une surface de pente négative, aussi bien pour la linéarisation entrée-sortie que pour la commande prédictive, voir les figures 4.9 à 4.12. Il est important, dans le cas de la commande prédictive, voir figure 4.12, de noter un faible dépassement sur le signal correspondant à la position angulaire de la chaise roulante dans le plan. En effet, puisque son degré relatif est égal à deux, son sous-système correspondant, en boucle fermée, est équivalent à un système linéaire du second ordre de taux d’amortissement $\xi_D \simeq 0,685$ et de dépassement $d = 5,21\%$, voir chapitre 2.

Le cas avec le joystick est présenté dans la figure 4.13. Les résultats de poursuite sont satisfaisants. Les pics que nous pouvons observer dans les figures 4.13 (c), (d), (e) et (f) sont dus aux changements de position brusque du joystick.

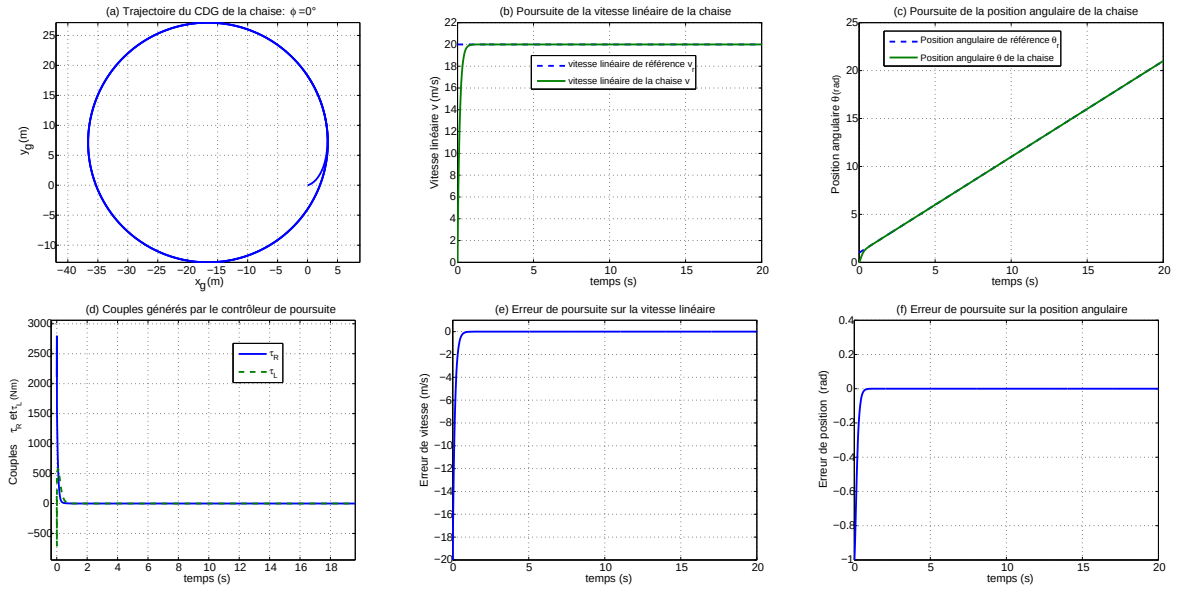


FIGURE 4.8 – Poursuite asymptotique d’une trajectoire circulaire par la chaise roulante électrique sur une surface plane.

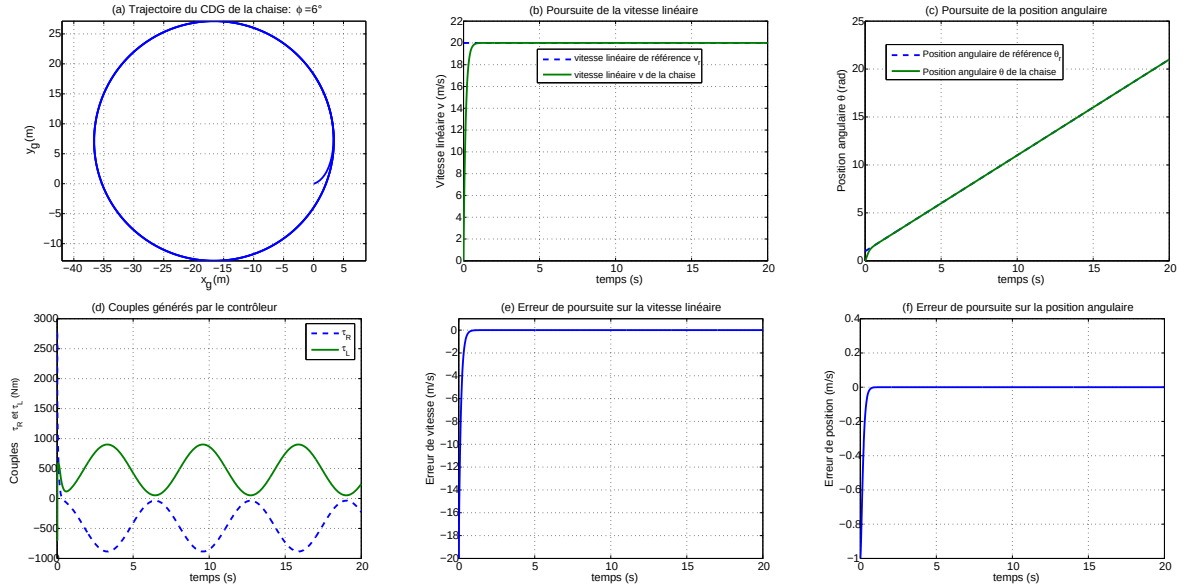


FIGURE 4.9 – Poursuite asymptotique d’une trajectoire circulaire par la chaise roulante électrique sur une surface de pente positive : $\phi = 6^\circ$.

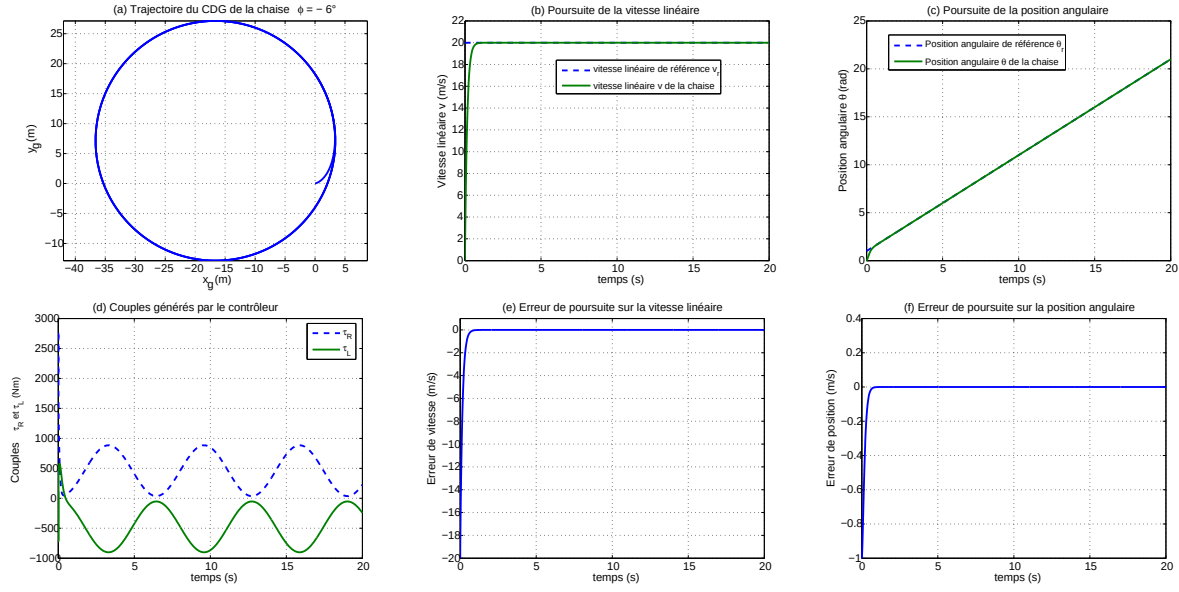


FIGURE 4.10 – Poursuite asymptotique d’une trajectoire circulaire par la chaise roulante électrique sur une surface de pente négative : $\phi = -6^\circ$.

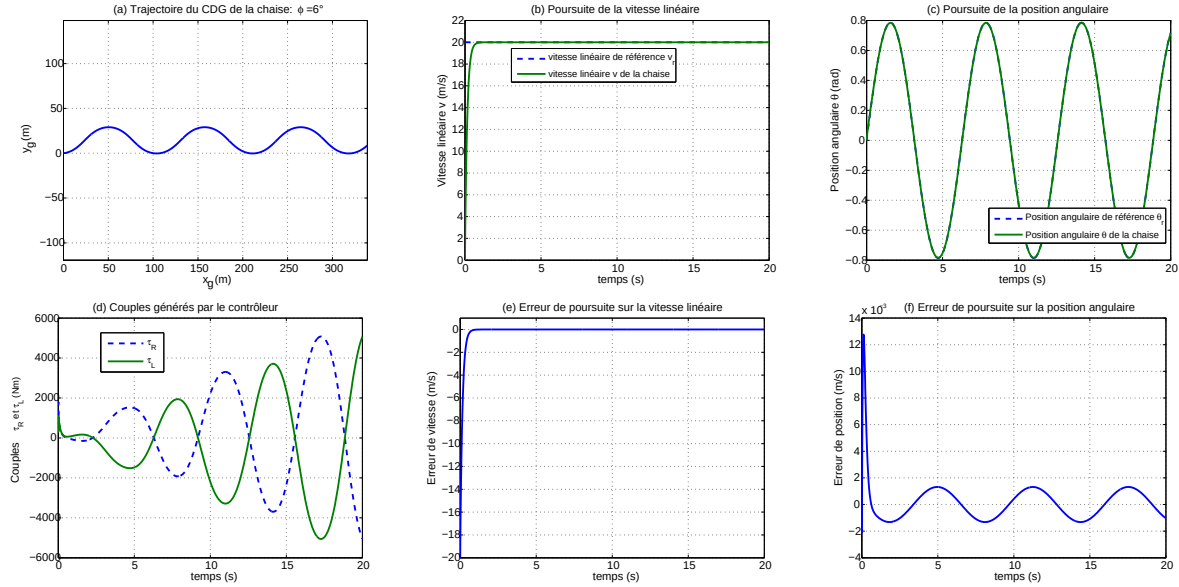


FIGURE 4.11 – Poursuite asymptotique d’une trajectoire sinusoïdale (évitement d’obstacles) par la chaise roulante électrique sur une surface de pente positive : $\phi = 6^\circ$.

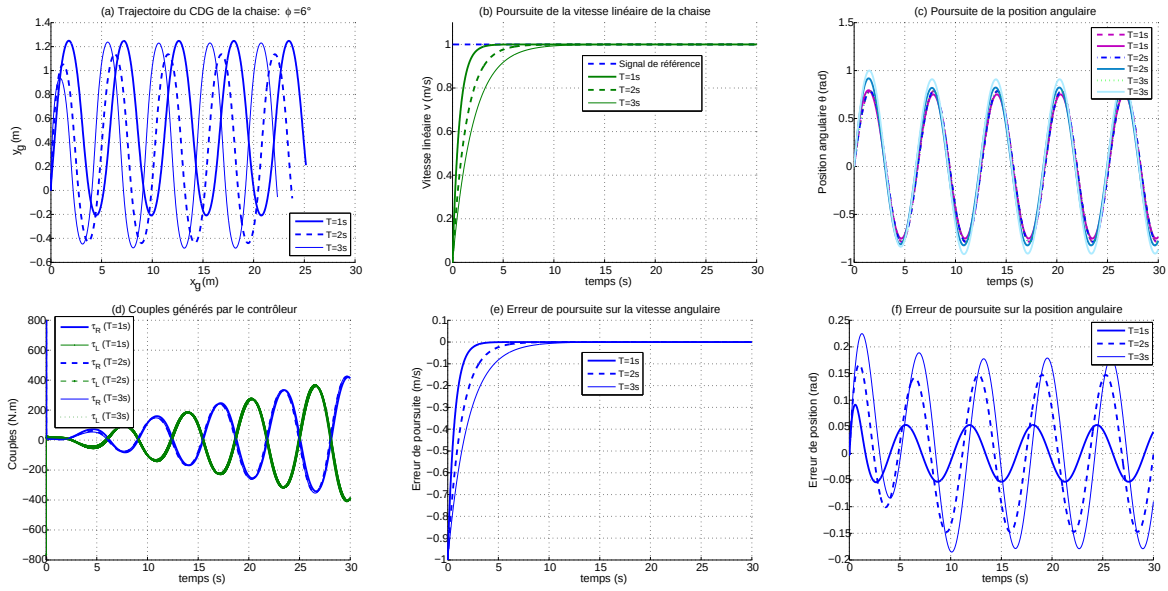


FIGURE 4.12 – NCGPC appliquée à la poursuite asymptotique d’une trajectoire sinusoïdale par la chaise roulante électrique sur une surface de pente positive : $\phi = 6^\circ$.

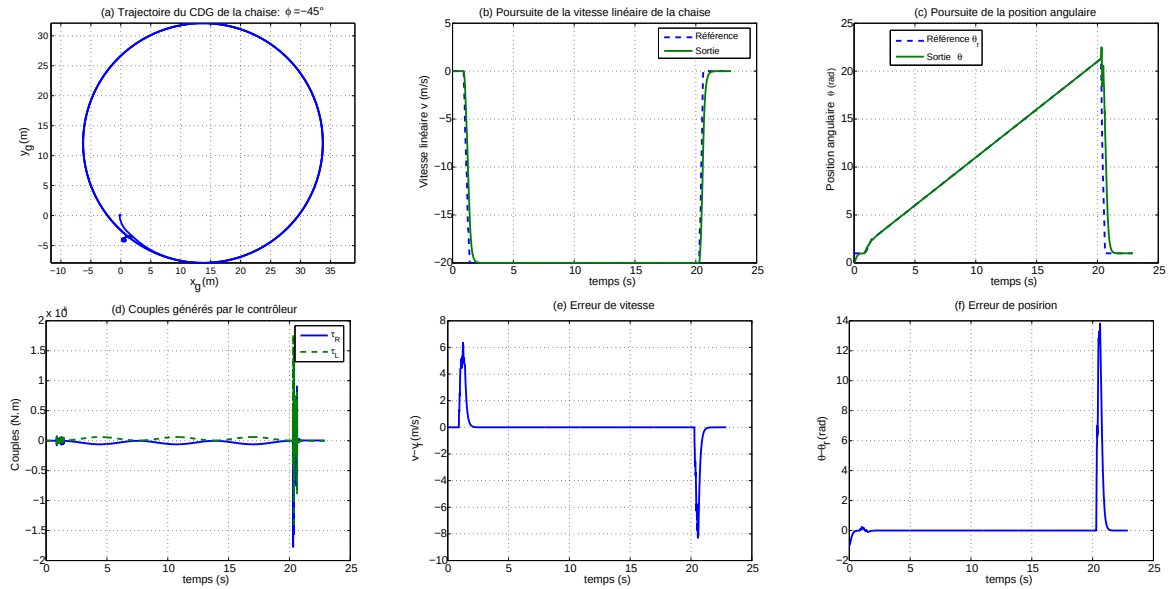


FIGURE 4.13 – Poursuite asymptotique d’une trajectoire circulaire par la chaise roulante électrique sur une surface de pente négative, $\phi = -45^\circ$: cas de la simulation avec joystick.

Dans cette partie, une étude théorique a été menée sur la chaise roulante électrique depuis sa modélisation jusqu’à l’élaboration des lois de commande et leur application. Les résultats de simulation présentés, aussi bien pour la validation du comportement physique de la chaise que pour sa commande, sont concluants. Nous exposons à présent l’application sur l’automobile.

4.3.2 Application à l'automobile : cas d'un moteur Diesel turbocompressé (MDT)

L'application de la NCGPC que nous faisons dans cette partie, se fera sur un modèle du moteur Diesel turbocompressé (MDT) issu de la littérature, [Jank 00] et [Kolm 97].

C'est dans ce cadre que nous donnerons un bref historique de la modélisation des moteurs thermiques et, en particulier, du MDT.

Cette partie se décline comme suit : après un bref historique du MDT et de son modèle, nous exposons, ensuite, succinctement, sa présentation et le modèle considéré. Puis, vient l'application de lois de commande (commande prédictive, linéarisation entrée-sortie par retour d'état et placement de pôles). Enfin, les résultats de simulation sont présentés.

Présentation du moteur Diesel

Le moteur Diesel, voir figure 4.14, réalisé en 1897, tient sa dénomination de son inventeur, l'ingénieur allemand Rudolf Diesel (1858-1913).

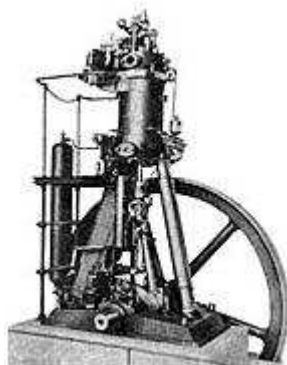


FIGURE 4.14 – Premier moteur Diesel (1897).

Au fil du temps, des améliorations considérables ont été apportées à ce moteur, voir figure 4.15, et de nombreuses applications faites, entre autres, dans le domaine de l'automobile. En effet, en 1936, Mercedes produit en petite série la première voiture à moteur Diesel, la 260D. Deux ans plus tard, Peugeot réalise une série d'un millier d'exemplaires du modèle 402 qui continuera d'être produit même après la seconde guerre. Avec la crise pétrolière de 1973, l'utilisation des voitures équipées d'un moteur Diesel se généralise. Par ailleurs, des travaux sont menés visant à améliorer ce moteur et en 1988, Fiat produit la première voiture de série équipée d'un moteur à injection directe. En 1989, Audi présente la première voiture équipée d'un moteur à injection directe à régulation électronique. Neuf ans plus tard (1998), les premières applications de l'injection directe à rampe commune réalisée par Bosch sur des véhicules de série sont faites. En 2000 certains constructeurs européens produisent des véhicules de prestige, équipé d'un moteur Diesel à huit cylindres en V à injection directe à rampe commune, [auto].

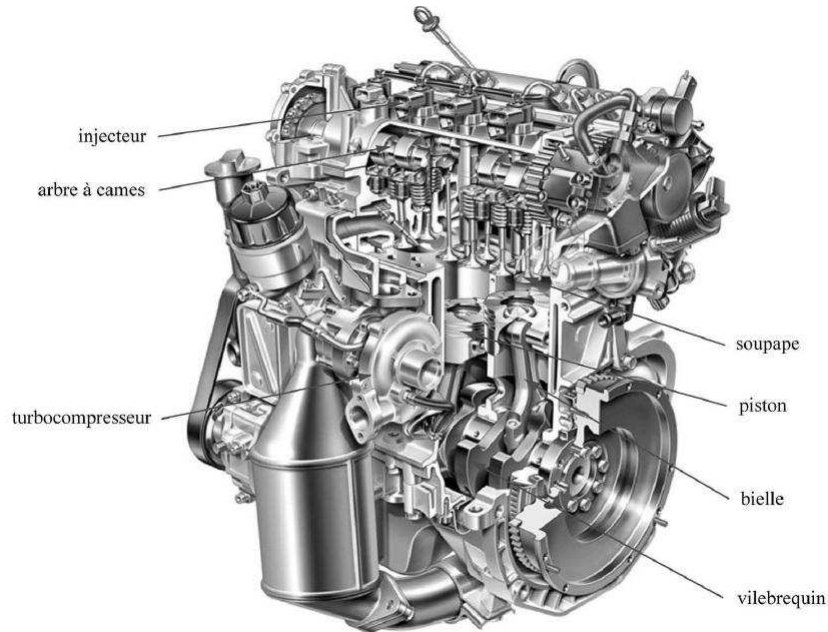


FIGURE 4.15 – Moteur Diesel injection directe à quatre cylindres en ligne, voir [Gron 04].

Bien que plus connu de nos jours comme un moteur à quatre temps, le moteur Diesel peut également fonctionner à deux temps. Cependant, nous ne présenterons dans cette étude que les différentes étapes de fonctionnement d'un moteur à quatre temps, qui sont les suivantes, voir figure 4.16 ;

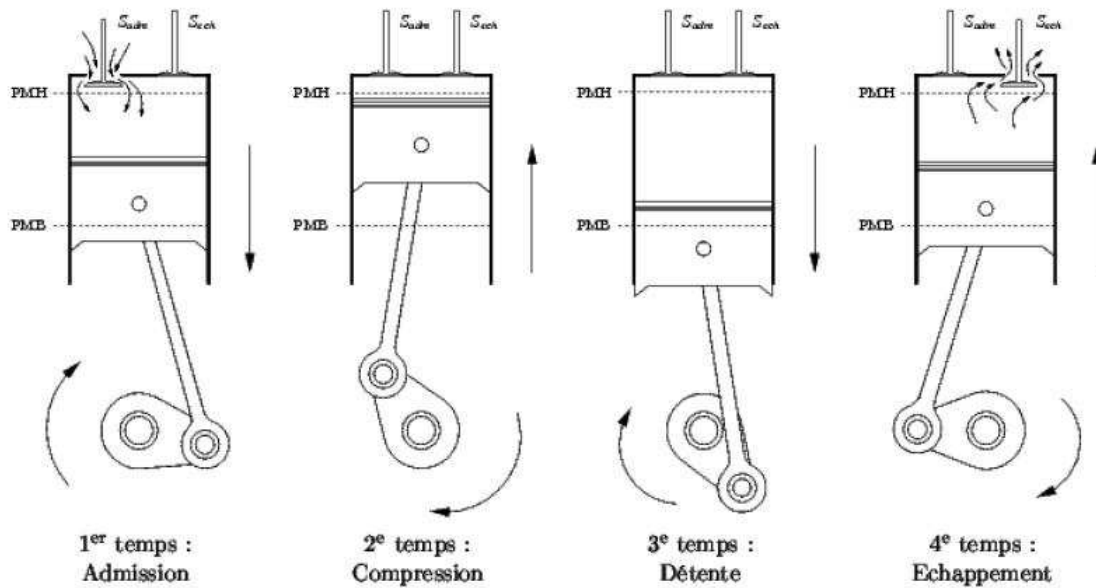


FIGURE 4.16 – Cycle à quatre temps du moteur Diesel, voir [Gron 04].

- **l'admission** : la soupape d'admission est ouverte et la soupape d'échappement fermée. Le piston descend du point mort haut (PMH) vers le point mort bas (PMB) aspirant ainsi de l'air frais dans la chambre de combustion via le collecteur d'admission. En fin d'admission,

le piston est au PMB ;

- **la compression** : les deux soupapes sont fermées et par conséquent la chambre de combustion hermétiquement close. Le piston remonte vers le PMH, comprimant ainsi l'air aspiré pendant le temps d'admission. La température et la pression augmentent dans la chambre de combustion. En fin de compression, le piston arrive au PMH et le gazoil est injecté dans la chambre ;
- **la détente** : les deux soupapes sont toujours fermées. La combustion du carburant par auto-inflammation génère une augmentation de la pression interne, poussant ainsi sur le piston qui poursuit son mouvement jusqu'au PMB ;
- **l'échappement** : la soupape d'admission est fermée et la soupape d'échappement ouverte. Le piston remonte en chassant les gaz brûlés vers l'air libre via le collecteur d'échappement. A la fin de l'échappement, le piston est au PMH.

L'ensemble de ces étapes constituent un cycle dans le fonctionnement pour le moteur Diesel, [Arno 07].

L'application que nous présentons dans la suite se fait sur un moteur diesel équipé d'un turbocompresseur à géométrie variable ou VGT pour *variable geometry turbocharger*, voir figure 4.17 et d'une vanne de recirculation de gaz d'échappement ou vanne EGR pour *exhaust gas recirculation valve*. Les gaz d'échappement, en passant par le VGT, voir figure 4.17, lui trans-

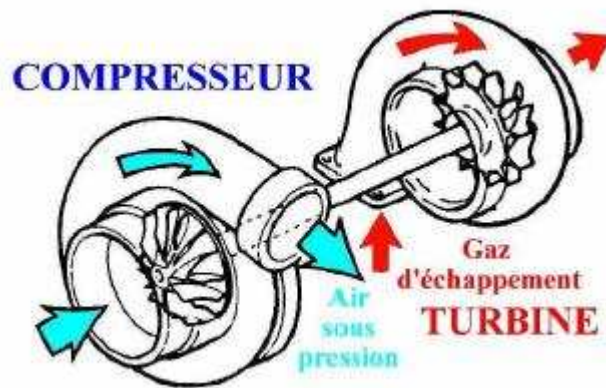


FIGURE 4.17 – Représentation schématique du turbocompresseur.

mettent, à travers ses pâles, leur énergie. Comme la turbine est liée au compresseur par un arbre mécanique, ce dernier entre également en rotation, amenant ainsi de l'air frais dans la chambre de combustion.

Notre objectif dans cette application, est d'imposer des trajectoires de références à certaines variables du MDT qui ont une influence significative sur les émissions de polluants comme la fumée, les oxydes d'azote (NO_x) et le dioxyde de carbone (CO_2) dans le but de respecter les contraintes environnementales, [Tran 04] et [Umwe 03], telles les normes EURO en ce qui concerne l'Europe, voir figure 4.18.

Modèle du moteur Diesel considéré

Au cours des années 60, Borman [Borm 64] fut l'un des premiers à réaliser un simulateur basé sur l'analyse thermodynamique du moteur. Le premier modèle non linéaire a été développé

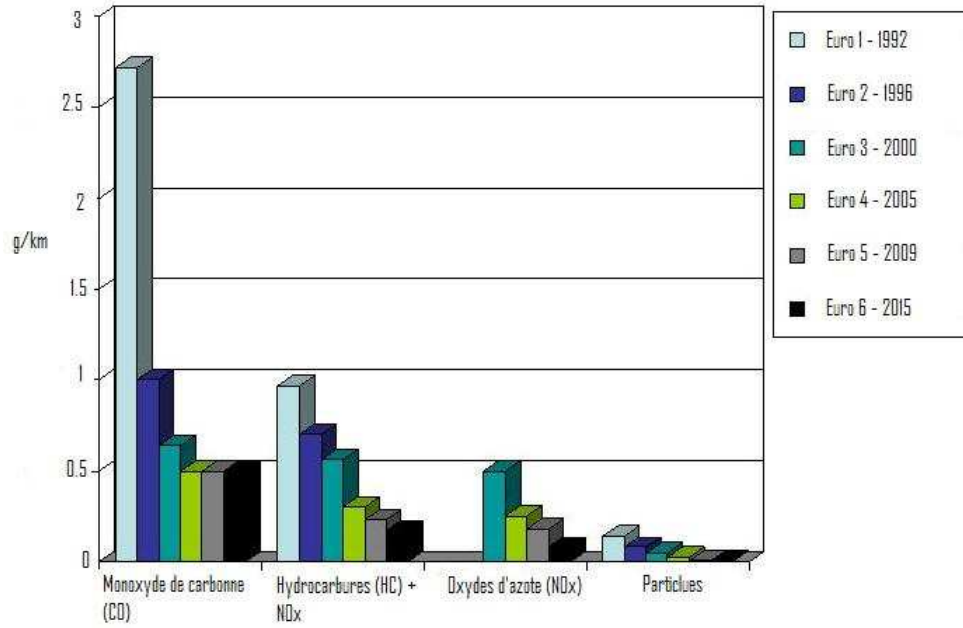


FIGURE 4.18 – Normes Euro 1 à Euro 6 (1992 à 2015).

suite aux travaux de Hazell et Flower [Haze 71], en 1971. Les modèles basés sur le concept de "vidange remplissage" de Watson et Marzouk, [Wats 77], viendront six ans plus tard (1977). Tous ces modèles ne présentent aucun lien direct avec le contrôle moteur.

Il faudra attendre 1984, et les travaux de Watson [Wats 84], pour que les modèles "vidange remplissage" destinés à l'étude des lois de commande voient le jour. En 1989, Hendricks [Hend 89] propose les modèles à valeurs moyennes pour lesquels, le pas de calcul élémentaire est le cycle et tous les phénomènes qui se déroulent entre deux points morts hauts (PMH) sont considérés en valeur moyenne. En 1995, les modèles "cylindre-à-cylindre" sont proposés par Kao et Moskwa [Kao 95]. Deux ans plus tard, Kolmanovsky *et al.* [Kolm 97] proposent un modèle d'ordre 7 essentiellement basé sur la variation par rapport au temps des pressions de gaz, des fractions de masse de gaz et des fractions de gaz brûlés dans les collecteurs d'admission et d'échappement. Les équations correspondantes sont données, respectivement par les systèmes (4.34), (4.35) et (4.36) suivantes, voir [Kolm 97] :

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = \frac{\gamma R}{V_1} (W_c T_c + W_{egr} T_{egr} - W_e T_1) \\ \dot{p}_2 = \frac{\gamma R}{V_2} [(W_e + W_f) T_e - W_{egr} T_2 - W_t T_2] \end{cases}, \quad (4.34)$$

$$\begin{cases} \dot{m}_1 = W_c + W_{egr} - W_e \\ \dot{m}_2 = W_e - W_{egr} - W_t + W_f \end{cases} \quad (4.35)$$

et

$$\begin{cases} \dot{F}_1 = \frac{W_{egr}(F_2 - F_1) - W_c F_1}{m_1} \\ \dot{F}_2 = \frac{W_e [15.6(1 - F_1) + (AF + 1)F_1 / (1 + AF)] - W_e F_2}{m_2} \end{cases}. \quad (4.36)$$

Elles sont complétées par la dynamique de l'arbre du VGT dont l'équation est

$$\dot{\omega}_{tc} = \frac{1}{J_{tc}\omega_{tc}(\eta_m P_t - P_c)}. \quad (4.37)$$

Une nomenclature détaillée de ces variables est donnée dans la table 4.4.

En 2000, Jankovic *et al.* réduisent l'ordre de ce modèle sur la base d'hypothèses simplificatrices suivantes, [Jank 00] :

- les fractions de gaz brûlés dans les collecteurs d'admission et d'échappement, F_1 et F_2 sont difficiles à mesurer et, par conséquent, ne sont pas considérées dans le modèle ;
- pour les mêmes raisons, les fractions de masses de gaz dans les collecteurs d'admission et d'échappement, m_1 et m_2 , ne sont pas considérées dans le modèle ;
- les dynamiques du turbocompresseur sont représentées comme une fonction de transfert du premier ordre avec une constante de temps τ ;
- les capteurs mesurant la température dans les collecteurs d'admission et d'échappement sont lents et par conséquent les variations temporelles des mesures relevées sont négligées ;
- le débit de fuel est considéré comme un bruit extérieur et n'est donc pas pris en compte dans le modèle.

C'est sur ce modèle d'ordre réduit que se fera notre étude. Il est donné par le système d'équations suivantes, [Jank 00] :

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = k_1(W_c + W_{egr} - k_e p_1) \\ \dot{p}_2 = k_2(k_e p_1 - W_{egr} - W_t) , \\ \dot{P}_c = \frac{1}{\tau}(\eta_m P_t - P_c) \end{cases} \quad (4.38)$$

où le débit du compresseur (respectivement de la turbine) est lié à sa puissance (resp. la puissance de la turbine) par la relation

$$W_c = P_c \frac{k_c}{p_1^\mu - 1} \quad (4.39)$$

$$\left(\text{resp. } P_t = k_t(1 - p_2^{-\mu})W_t \right). \quad (4.40)$$

En dépit du fait que les entrées réelles de notre système sont les ouvertures de la vanne EGR et du VGT, nous considérerons, dans cette étude, le débit de gaz à travers la vanne EGR, W_{egr} , comme première entrée du MDT et le débit de gaz à travers le turbocompresseur, W_t , comme seconde entrée du MDT, voir [Plia 07]. D'où le système

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = k_1(W_c + u_1 - k_e p_1) \\ \dot{p}_2 = k_2(k_e p_1 - u_1 - u_2) \\ \dot{P}_c = \frac{1}{\tau}(\eta_m P_t - P_c) \end{cases} \quad (4.41)$$

avec $u_1 = W_{egr}$ et $u_2 = W_t$ et où p_1 , p_2 et P_c appartiennent à l'ensemble Ω défini comme suit

$$\Omega = \{(p_1, p_2, P_c) : 1 < p_1 < p_1^{max}, 1 < p_2 < p_2^{max}, 0 < P_c < P_c^{max}\} .$$

Les variables p_1^{max} , p_2^{max} et P_c^{max} constituent, respectivement, les valeurs maximales de pressions dans les collecteurs d'admission et d'échappement ainsi que la puissance maximale du compresseur. Les constantes k_1 , k_2 , k_c , k_e , k_t , τ et η_m sont identifiées à partir du modèle à valeurs

TABLE 4.4 – Nomenclature des variables du modèle du moteur Diesel turbocompressé (MDT)

Variable	Description
EGR	Gaz d'échappement recirculé
AFR	Rapport air carburant
N	Fréquence de rotation de l'arbre moteur
F_1	Fraction de gaz brûlés dans le collecteur d'admission
F_2	Fraction de gaz brûlés dans le collecteur d'échappement
m_1	Masse de gaz dans le collecteur d'admission
m_2	Masse de gaz dans le collecteur d'échappement
p_1	Pression de gaz dans le collecteur d'admission
p_2	Pression de gaz dans le collecteur d'échappement
P_c	Puissance du compresseur
P_t	Puissance de la turbine
W_e	Débit total de gaz à travers le moteur
W_c	Débit d'air à travers le compresseur
W_t	Débit de gaz à travers la turbine
W_f	Débit de carburant
W_{egr}	Débit de gaz à travers la vanne EGR
V_1	Volume du collecteur d'admission
V_2	Volume du collecteur d'échappement
T_1	Température dans le collecteur d'admission
T_2	Température dans le collecteur d'échappement
T_c	Température dans le compresseur
T_e	Température des gaz d'échappement
T_{egr}	Température des gaz recirculés
ω_{tc}	Vitesse de rotation du turbocompresseur
J_{tc}	Moment d'inertie du turbocompresseur
V_d	Volume total de déplacement
η_c	Rendement isentropique du compresseur
η_t	Rendement isentropique de la turbine
η_m	Rendement mécanique du turbocompresseur
c_p, c_v	Capacités thermiques massiques à pression constante c_p et à volume constant c_v
γ	Rapport des capacités thermiques
R	Constante spécifique des gaz parfaits
μ	$\frac{\gamma-1}{\gamma}$

moyennes d'ordre 7 à une fréquence de rotation de 1600 tr/min et un débit de carburant de 7.2 kg/h, [Dabo 08d].

En remplaçant P_t et W_c par leurs expressions dans l'équation (4.41) et en posant $K_0 = \frac{\eta_m}{\tau} k_t$, il vient :

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = k_1 \left(P_c \frac{k_c}{p_1^\alpha - 1} + u_1 - k_e p_1 \right) \\ \dot{p}_2 = k_2 (k_e p_1 - u_1 - u_2) \\ \dot{P}_c = -\frac{P_c}{\tau} + K_0 (1 - p_2^{-\mu}) u_2 \end{cases} \quad (4.42)$$

Application de la loi de commande

Le moteur diesel étant un système assez complexe, l'élaboration de la loi de commande ne se fera pas sans analyse préalable. Et puisque nous faisons appel à une technique de commande prédictive non linéaire à temps continu, partageant les mêmes propriétés que la linéarisation entrée-sortie par retour d'état, [Sill 98], nous mènerons l'analyse géométrique de notre système. Nous examinerons également, sur la base de l'involutivité de distribution, si notre système est dynamiquement ou statiquement linéarisable ainsi que les conséquences que ce résultat implique sur le choix du vecteur de sorties. Une fois ce dernier choisi, nous chercherons le vecteur degré relatif de notre système. S'en suivra l'analyse de la dynamique des zéros.

Quelques notions géométriques Avant d'entrer dans le vif du sujet, nous ferons un bref rappel de la notion de distribution, du crochet de Lie et de distributions involutive et non involutive.

Distribution Une distribution D est une application $X \ni x \mapsto D(x) \subset T_x X$ qui associe à tout $x \in X$ un sous-espace linéaire $D(x)$ de $T_x X$.

Si $f_1, \dots, f_d$ une collection de champs de vecteurs, on définit D par

$$D(x) = \text{Vect} f_1(x), \dots, f_d(x).$$

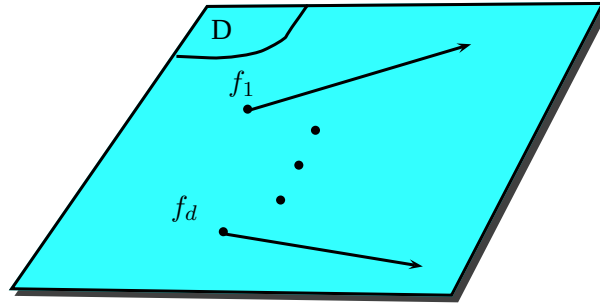


FIGURE 4.19 – Distribution dans $\mathbf{R}^n$.

Crochet de Lie Soient deux champs de vecteurs f et g dans $\mathbf{R}^n$. On appelle crochet de Lie, le champ de vecteur noté $[f, g]$ donné, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, par :

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x).$$

Dans cette expression :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad (4.43)$$

voir [Isid 95].

Distribution involutive et distribution non involutive Une distribution D est dite involutive si pour $f \in D$ et $g \in D$, le crochet de Lie $[f, g]$ est aussi dans D . D est dite non involutive, si on peut trouver $f, g \in D$ tels que le crochet de Lie $[f, g]$ n'appartient pas à D , voir figure 4.20.

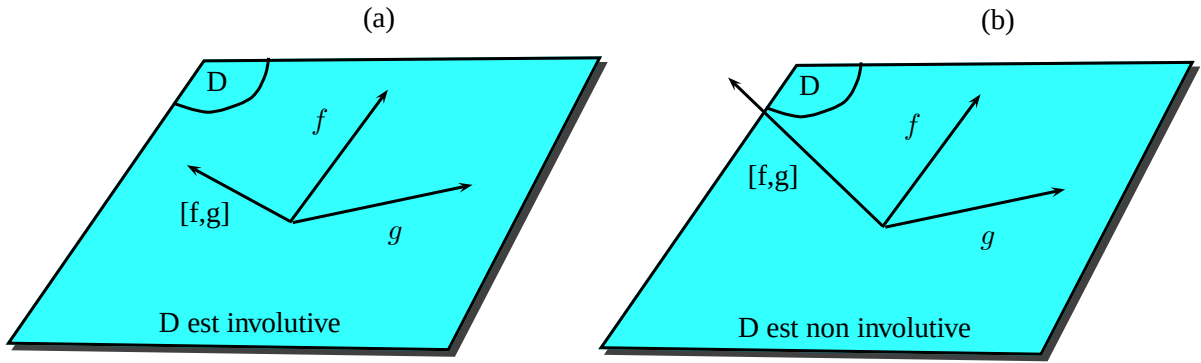


FIGURE 4.20 – Distributions involutive (a) et non involutive (b).

Le système (4.41) peut être réécrit sous la forme classique des systèmes non linéaires à temps continu, affines en contrôle, c'est-à-dire sous la forme :

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^2 g_i(x)u_i, \quad (4.44)$$

où les champs de vecteur $f(x)$, $g_1(x)$ et $g_2(x)$ sont donnés par :

$$f(x) = \begin{bmatrix} k_1(k_c \frac{P_c}{p_1^\mu - 1} - k_e p_1) \\ k_2 k_e p_1 \\ -\frac{P_c}{\tau} \end{bmatrix}, \quad g_1(x) = \begin{bmatrix} k_1 \\ -k_2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -k_2 \\ K_0(1 - p_2^{-\mu}) \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Soit D la distribution engendrée par les deux champs de vecteur g_1 et g_2 . Il résulte, après calcul, voir Annexe D, que le système (4.41) n'est pas statiquement linéarisable par bouclage, [Dabo 08d]. Par conséquent, il n'est pas possible de trouver un vecteur de sortie telle que le système (4.41) devienne statiquement linéarisable entrée-sortie par retour d'état, [Dabo 09b].

Choix du vecteur de sortie Notre objectif dans cette étude est de faire de la poursuite de trajectoire sur des valeurs désirées de la pression dans le collecteur d'admission p_1 et du débit de gaz à travers le compresseur W_c en lieu et place du rapport air-carburant ou AFR pour *air-fuel ratio* et de la fraction de gaz recyclés qui ne sont pas accessibles à la mesure, [Jank 00]. D'où le vecteur de sortie :

$$y = \begin{bmatrix} p_1 \\ W_c \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Soient p_{1d} et W_{cd} les valeurs désirées (constantes) de la pression dans le collecteur d'admission et du débit d'air à travers le compresseur. Nous définissons à partir de ces deux termes et de l'équation (4.46) le vecteur erreur e tel que

$$e = \begin{bmatrix} p_1 - p_{1d} \\ W_c - W_{cd} \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

Elaborer une loi de commande pour faire converger p_1 vers p_{1d} et W_c vers W_{cd} revient à faire converger le vecteur erreur (4.47) vers zéro.

Recherche du vecteur degré relatif Soit $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ le vecteur degré relatif du système (4.41) avec la sortie (4.47). Il s'obtient en calculant les dérivées successives par rapport au temps de chacune des composantes du vecteur erreur (4.47), voir Annexe D. Il est donné par $\rho = (1, 1)$. La somme de ses composantes valant 2 est par conséquent inférieure à la dimension de notre système (4.41) qui vaut 3. Par conséquent, il existe une dynamique des zéros de dimension 1 (3-2=1) dont nous discuterons la stabilité.

Analyse de stabilité de la dynamique des zéros L'analyse de stabilité qui suit, va nous permettre de savoir si le système étudié est à minimum de phase (dynamique des zéros stable) ou à non minimum de phase (dynamique des zéros instable), voir figure 2.1 du chapitre 2. L'équation de cette dynamique des zéros est donnée par :

$$\dot{p}_2 = k_2 W_{cd} \left[1 - \frac{(p_{1d}^\mu - 1)}{\eta_m k_t k_c (1 - p_2^\mu)} \right], \quad (4.48)$$

voir Annexe D. L'analyse de ce système révèle une instabilité, puisqu'il en résulte un point d'équilibre impliquant un pôle à partie réelle strictement positive dont on peut voir une illustration sur la figure 4.21 et par conséquent un système à non minimum de phase. Autrement dit, le système (4.41) avec le vecteur de sortie (4.47) est un système à dynamique interne instable.

Commande du modèle réduit du MDT Nous l'avons vu, le modèle réduit du MDT avec le vecteur erreur (4.47) découlant du vecteur de sortie (4.46) est un système à non minimum de phase. Pour contourner ce problème, nous proposons deux approches :

- la première est plus décisive car correspondant à la modification du vecteur de sortie telle que la dynamique des zéros devienne triviale, voir [Dabo 08d] et [Dabo 08c] ;
- enfin la seconde, quant à elle, se résume à la linéarisation de la dynamique des zéros autour de son point d'équilibre, [Dabo 09c].

Changement du vecteur de sortie Comme vu au cours de l'analyse géométrique, le modèle d'ordre 3 du MDT est linéarisable entrée-sortie par retour d'état dynamique. Donc, en

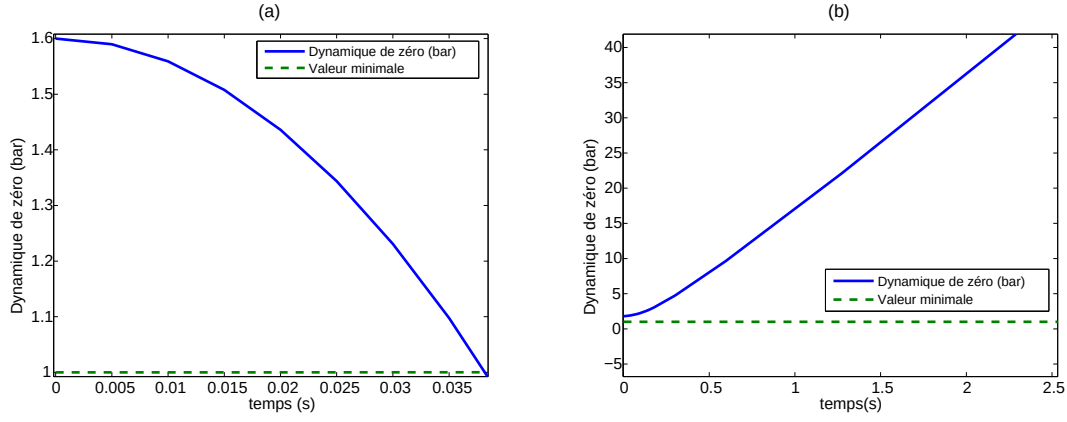


FIGURE 4.21 – Dynamique des zéros du modèle réduit du moteur Diesel turbocompressé (MDT) : $p_{20} = 1.6$ bar (a) et $p_{20} = 1.8$ bar (b).

plus du changement du vecteur de sortie, nous lui appliquerons une extension dynamique. La matrice de découplage obtenue avec le vecteur de sortie (4.46) est donnée par :

$$D(x) = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ -\frac{\mu k_1 k_c P_c p_1^{\mu-1}}{(p_1^\mu - 1)^2} & \frac{k_c K_0 (1 - p_2^{-\mu})}{p_1^\mu - 1} \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

Notre objectif ici est de changer le vecteur de sortie de sorte que la condition $L_{g2}h_2 = 0$ soit vérifiée, pour tout vecteur $(p_1, p_2, P_c) \in \Omega$. Par conséquent, le nouveau vecteur de sortie est :

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} p_1 \\ P_c + \frac{K_0}{k_2} \left[p_2 - \frac{1}{1-\mu} p_2^{(1-\mu)} \right] \end{bmatrix}, \quad (4.50)$$

le lecteur pourra se reporter à l'Annexe D pour les détails de calcul. D'où la matrice de découplage suivante :

$$\tilde{D}(x) = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ -K_0(p_2^{-\mu} - 1) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

qui est non inversible puisque son déterminant est nul. Par conséquent le vecteur degré relatif du système n'est pas défini. Pour contourner ce double obstacle (dynamique des zéros instable et matrice de découplage non inversible), il suffit de retarder l'apparition de la première composante u_1 du vecteur de commande dans le calcul du vecteur degré relatif. Autrement dit, notre seul salut, dans ce cas, est d'appliquer l'extension dynamique à notre système.

Pour ce faire, soit $z = u_1$ un nouvel état et $\dot{z} = v_1$. Il vient alors le système étendu suivant :

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = k_1(W_c + z - k_e p_1) \\ \dot{p}_2 = k_2(k_e p_1 - z - u_2) \\ \dot{P}_c = \frac{1}{\tau}(\eta_m P_t - P_c) \\ \dot{z} = v_1 \end{cases} \quad (4.52)$$

dont l'état $x^e = (p_1, p_2, P_c, z) \in \Omega^e = \Omega \times [W_{egr}^{min}, W_{egr}^{max}]$ avec W_{egr}^{min} et W_{egr}^{max} respectivement, les valeurs minimale et maximale du débit de gaz à travers la vanne EGR.

Le degré relatif du système étendu (4.52), avec le même vecteur de sortie (4.50) est $\tilde{\rho} = (2, 2)$. En effet, sa matrice de découplage est donnée par

$$D^e(x) = \left[\begin{array}{c|c} k_1 & k_1 k_c K_0 \frac{1-p_2^{-\mu}}{p_1^{\mu}-1} \\ \hline K_0(p_2^{-\mu} - 1) & \mu k_2 K_0(z - k_c p_1) p_2^{-\mu-1} + \frac{K_0}{\tau} (p_2^{-\mu} - 1) \end{array} \right] \quad (4.53)$$

qui est inversible sur l'ensemble Ω^e . Par conséquent, la loi de commande NCGPC ou la FL peuvent être appliquées.

Les simulations sont faites sous Matlab Simulink version 7.0.1. Nous avons fixé l'ordre des dérivées successives du vecteur de sortie à 3 pour ses deux composantes, [Dabo 08d]. Les horizons de prédiction pour les première et deuxième composantes du vecteur de sortie sont $T_1 = T_2 = 2$ s.

La matrice de gain de la loi de commande est $L \cong \begin{bmatrix} 3.75 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.75 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Les résultats de simulations sont présentés dans la figure 4.23. Nous pouvons noter une bonne poursuite de trajectoire sur le vecteur de sortie. La loi de commande prend, cependant, des valeurs importantes, voir la deuxième colonne de la figure 4.23.

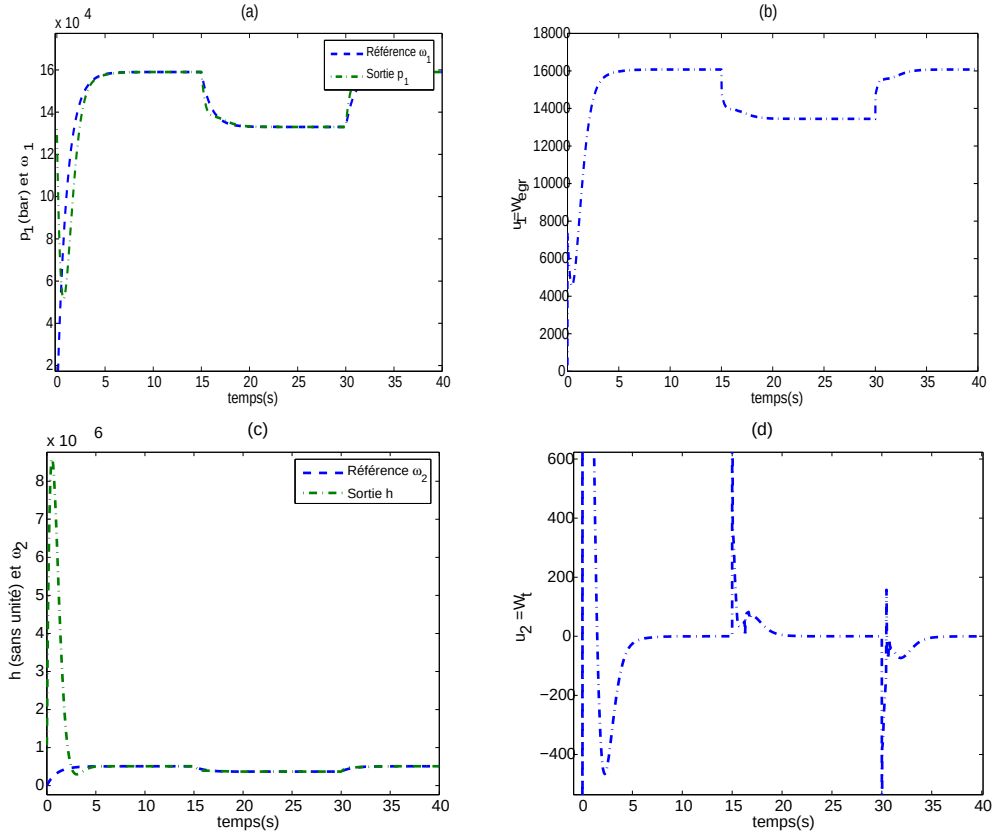


FIGURE 4.22 – Poursuite de trajectoire sur la pression dans le collecteur d'admission et sur le débit d'air à travers le compresseur, voir [Dabo 08c].

Cependant, l'utilisation de cette méthode n'est pas sans conséquence, puisqu'elle pose la question implicite de la faisabilité des mesures en ce qui concerne la deuxième composante du vecteur de sortie. En effet, c'est la somme d'une puissance (celle du compresseur) et d'une fonction de

la pression (dans le collecteur d'échappement). Nous avons émis l'idée selon laquelle un tableau de correspondance pourrait être fait entre les valeurs désirées du débit du compresseur (seconde composante du vecteur de sortie (4.46)), de la pression dans le collecteur d'échappement et les valeurs correspondantes de la seconde composante du nouveau vecteur de sortie (4.50). Cependant cette piste n'a pas été exploitée par manque de moyens. De plus, les composantes de la loi de commande que sont W_t et W_{egr} prennent des valeurs qui nous semblent trop importantes avec cette méthode. La prise en compte de contraintes sur l'entrée au moment de l'élaboration de la loi de commande nous permettrait d'éviter, entre autres, une telle situation.

La seconde solution, exposée dans la suite, est celle qui consiste à conserver le vecteur de sortie (4.46) puis à faire l'extension de notre système avec le résultat de la linéarisation par approximation de la dynamique des zéros, autour de son point d'équilibre.

Conservation du vecteur de sortie et linéarisation de la dynamique des zéros

Reprenons le modèle étendu (4.52) du MDT ainsi que le vecteur de sortie (4.46). Ce système a un vecteur degré relatif donné par $\rho = (2, 1)$ pour tout $x^e = (p_1, p_2, P_c, z) \in \Omega^e$. Sa matrice de découplage :

$$\bar{D}(x) = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 k_c K_0 \frac{p_2^{-\mu} - 1}{p_1^{\mu} - 1} \\ 0 & -k_c K_0 \frac{p_2^{-\mu} - 1}{p_1^{\mu} - 1} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

est inversible.

Notre objectif étant la poursuite de trajectoires, reprenons le vecteur de sortie (4.47). Il est égal à

$$\begin{aligned} e_1^1 &= p_1 - p_{1d} \\ e_1^2 &= W_c - W_{cd} \end{aligned} \quad (4.55)$$

Comme dans la suite, nous faisons une linéarisation par approximation de la dynamique des zéros autour de son point d'équilibre, nous préférons, pour des raisons d'harmonisation, faire un nouveau changement de coordonnées autour du point d'équilibre du système étendu du MDT. Toutefois, cette opération n'est pas nécessaire puisque la linéarisation entrée-sortie par retour d'état du modèle étendu du MDT aurait pu se faire sans le souci particulier de mentionner le point d'équilibre.

Soit x_e^e le point d'équilibre du système étendu tel que :

$$x_e^e = \begin{cases} p_{1e} = \frac{z_e + v_{2e}}{k_e} \\ p_{2e} = \left(1 - \frac{P_{ce}}{\tau v_{2e} K_0}\right)^{\frac{-1}{\mu}} \\ P_{ce} = \frac{W_{ce}(p_{1e}^{\mu} - 1)}{k_c} \\ z_e = k_e p_{1e} - W_{ce} \end{cases}.$$

Le second changement de vecteur de sortie est donné par :

$$\begin{cases} \tilde{e}_1^1 = e_1^1 - e_{1e}^1 = p_1 - p_{1d} - p_{1e} + p_{1d} = p_1 - p_{1e} \\ \tilde{e}_1^2 = e_1^2 - e_{1e}^2 = W_c - W_{cd} - W_{ce} + W_{cd} = W_c - W_{ce} \end{cases} \quad (4.56)$$

Par conséquent, lorsque (4.56) poursuit les signaux $p_{1d} - p_{1e}$ et $W_{cd} - W_{ce}$, le vecteur de sortie (4.46) poursuit les valeurs désirées de la pression p_{1d} et du débit d'air à travers le compresseur W_{cd} et le vecteur erreur (4.55) les valeurs $e_1^1 = 0$ et $e_1^2 = 0$.

Le changement de coordonnées (4.56) entraîne le système non linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{e}}_1^1 \\ \dot{\tilde{e}}_2^1 \\ \dot{\tilde{e}}_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{e}_2^1 \\ L_f^2 \tilde{e}_1^1 \\ L_f \tilde{e}_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L_{g_1} L_f \tilde{e}_1^1 & L_{g_2} L_f \tilde{e}_1^1 \\ L_{g_1} \tilde{e}_1^2 & L_{g_2} \tilde{e}_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

où

$$\begin{aligned} L_f^2 \tilde{e}_1^1 &= -k_1^2 (z - k_e p_1 + W_c) \left(k_e + \frac{\mu p_1^{\mu-1}}{p_1^{\mu-1}} W_c \right) - \frac{k_1}{\tau} W_c, \\ L_f \tilde{e}_1^2 &= \frac{-W_c}{\tau} - \frac{\mu k_1 k_c p_1^{\mu-1}}{(p_1^{\mu-1})^2} (z - k_e p_1 + W_c) \end{aligned}$$

et la matrice de découplage :

$$D(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f \tilde{e}_1^1 & L_{g_2} L_f \tilde{e}_1^1 \\ L_{g_1} \tilde{e}_1^2 & L_{g_2} \tilde{e}_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_c K_0 \frac{1-p_2^{-\mu}}{p_1^{\mu-1}} \\ 0 & k_c K_0 \frac{1-p_2^{-\mu}}{p_1^{\mu-1}} \end{bmatrix}.$$

En appliquant la loi de commande linéarisante suivante, voir [Isid 95] :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = D(x)^{-1} \begin{bmatrix} w_1 - L_f^2 \tilde{e}_1^1 \\ w_2 - L_f \tilde{e}_1^2 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

où w_1 et w_2 sont les signaux de commande à définir pour un futur placement de pôles, il vient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{e}}_1^1 \\ \dot{\tilde{e}}_2^1 \\ \dot{\tilde{e}}_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}_1^1 \\ \tilde{e}_2^1 \\ \tilde{e}_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}_1^1 \\ \tilde{e}_2^1 \\ \tilde{e}_1^2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.59)$$

qui, étendu avec le linéarisé de la dynamique des zéros (D.38) donne :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\zeta}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \tilde{\zeta} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\zeta} \end{cases} \quad (4.60)$$

avec $\tilde{\zeta} = [\tilde{e}_1^1 \quad \tilde{e}_2^1 \quad \tilde{e}_1^2 \quad \tilde{\eta}]^t$. Le problème de poursuite de trajectoire sur des valeurs désirées du vecteur de sortie (4.46) peut ainsi être résolu par un placement de pôles, dont la loi de commande suivante (4.61)

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = -K\tilde{\zeta} + G \begin{bmatrix} v_{d1} \\ v_{d2} \end{bmatrix}, \quad (4.61)$$

est appliquée au système (4.60).

Les simulations sont faites sous Matlab Simulink version 7.0.1. Les valeurs désirées de la pression dans le collecteur d'admission sont, successivement, $p_{1d} = 1.25$ bar et $p_{1d} = 2$ bar. Le débit d'air dans le compresseur a pour valeurs désirées $W_{cd} = 0.07$ kg/s et $W_{cd} = 0.15$ kg/s. Leurs points d'équilibre sont donnés par $p_{1e} = 2.06$ bar et $W_{ce} = 0.18$ kg/s. Les matrices K et G sont telles que $K \cong \begin{bmatrix} 6232 & 82 & 0 & 5104 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ et $G = \begin{bmatrix} -0.1581 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. La figure 4.23 montre la poursuite de trajectoire sur le vecteur erreur. Les résultats sont satisfaisants. Les signaux de commande ne prennent pas des valeurs "disproportionnées".

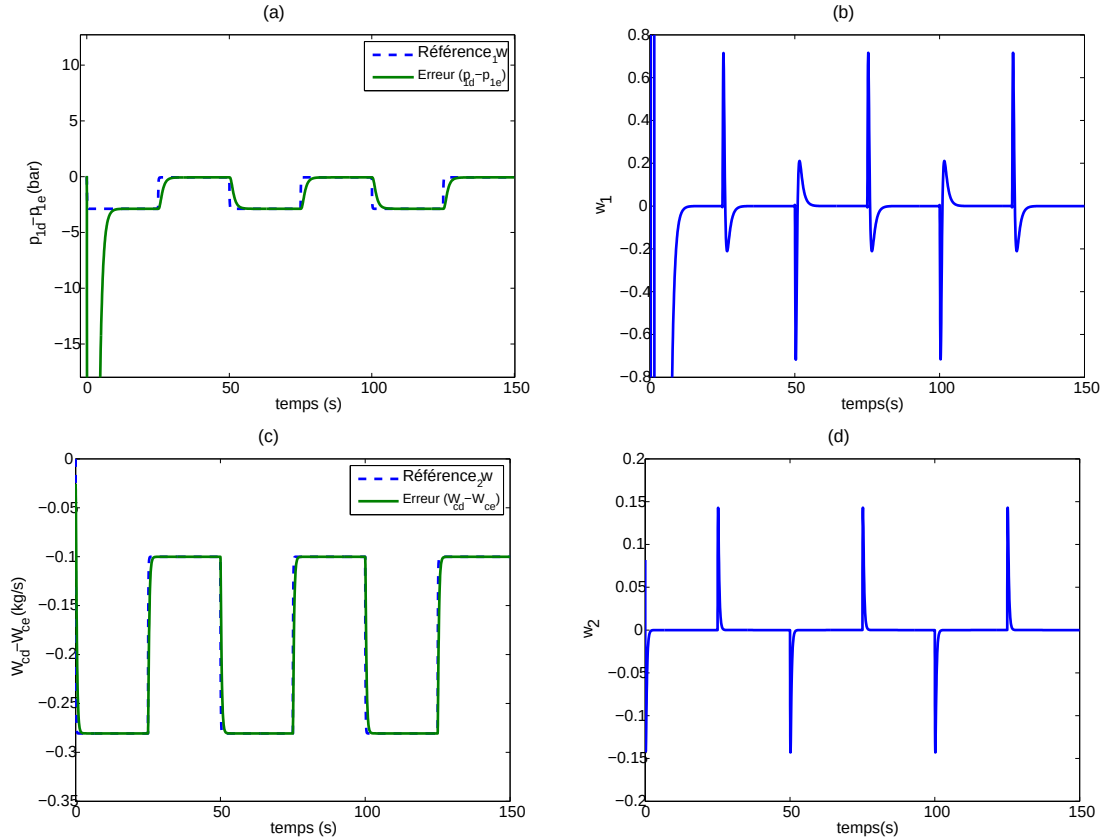


FIGURE 4.23 – Poursuite de trajectoire sur la pression dans le collecteur d'admission et sur le débit d'air à travers le compresseur, voir [Dabo 09c].

Par ailleurs, la FL a été appliquée au modèle réduit du MDT, voir [Dabo 08a]. Aussi, quelques études comparatives ont été faites entre la NCGPC et la commande par placement de pôles, [Dabo 08b], la NCGPC et la FL, [Dabo 08c].

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une étude comparative entre la commande prédictive généralisée non linéaire à temps continu et la linéarisation entrée-sortie par retour d'état. Nous avons montré qu'entre les deux méthodes de commande, la commande prédictive est préférable,

puisque'elle est optimale et stabilisante, par construction même, pour un système (ou un système correspondant à une sortie, dans le cas MIMO) de degré relatif inférieur ou égal à quatre. Dans le cas où le degré relatif est strictement supérieur à quatre, nous avons recours à la correction matricielle "intelligente" ou à la correction linéaire dont les lois de commande sont tout aussi stabilisantes qu'optimales.

Nous avons également présenté les applications de cette technique de commande sur la chaise roulante électrique et le moteur Diesel turbocompressé (MDT) et les résultats obtenus sont satisfaisants.

Conclusion générale

"Don o Don tulo be ta kalanso". Proverbe Bambara.
"Chaque jour, l'oreille va à l'école". Proverbe Bambara.

"Le véritable expert n'existe pas car les limites de l'art sont inatteignables". Afrique noire pharaonique.

"Il n'existe pas de maître absolu, on est toujours élève et maître à la fois. Car le maître apprend aux autres mais lui-même apprend des autres".
Chef de village dogon (Mali, Afrique de l'Ouest).

Conclusion

Les travaux abordés au cours de cette thèse ont essentiellement porté sur la stabilisation par la commande prédictive, d'une classe de systèmes non linéaires dont le degré relatif est strictement supérieur à quatre. Les méthodes que nous avons proposées s'appuient essentiellement sur la modification du critère quadratique à minimiser. Il s'agit de la correction linéaire et de la correction matricielle "intelligente".

La première consiste à rajouter un terme linéaire en contrôle au critère. Cependant, le caractère prédictif de la loi de commande résultante n'est pas conservé avec cette méthode.

D'où le recours à la seconde méthode de correction, qui consiste à rajouter une matrice de correction à la matrice de prédiction du critère. Cette matrice, par construction même, s'annule lorsque la correction n'est pas nécessaire. Autrement dit, lorsque le degré relatif est inférieur ou égal à quatre (condition de stabilité du système linéaire bouclé par commande prédictive généralisée non linéaire à temps continu (NCGPC)) la correction ne se fait pas. D'où l'expression de correction matricielle "intelligente". Contrairement à la première méthode, cette dernière garde le caractère prédictif de la loi de commande.

Dans les deux cas les méthodes utilisées conduisent à des lois de commande optimales. Donc la garantie de stabilité du système linéaire bouclé n'est pas obtenue de façon sous-optimale mais bien de façon optimale.

En terme de stabilité, la première méthode offre une plus grande marge de manoeuvre, puisque permettant de placer les pôles n'importe où (sous réserve de faisabilité) dans le plan complexe. La deuxième méthode garantit la stabilité de systèmes non linéaires de degré relatif au plus égal à quarante (40) et bouclés par NCGPC avec un horizon de prédiction fixé.

Nous avons également donné quelques propriétés de la NCGPC pour des systèmes non linéaires de degré relatif au plus égal à deux. En effet :

- pour les systèmes single-input single-output (SISO) de degré relatif 1, nous avons montré que, bouclés par NCGPC, ils sont équivalents à des systèmes linéaires de temps de réponse égal au double de l'horizon de prédiction ;
- pour les systèmes SISO de degré relatif 2 bouclés par NCGPC, ils sont équivalents à des systèmes linéaires de taux d'amortissement $\xi_D = 0.685$ et de pulsation naturelle $\omega_n \simeq \frac{1.83}{T}$.

Aussi, une étude comparative a été présentée montrant le lien étroit qui existe entre la NCGPC et la linéarisation entrée-sortie par retour d'état. Effectivement, les deux lois de commande sont structurellement identiques. La différence se situe au niveau de la matrice de gain. De plus, la première est optimale. Ce qui n'est pas le cas de la deuxième.

Concernant les applications, nos travaux ont porté sur deux systèmes : la chaise roulante électrique et le moteur Diesel turbocompressé (MDT).

Pour la chaise roulante électrique, l'application a été plus orientée sur la vérification des propriétés de la NCGPC. Les résultats ont été concluants.

Pour le MDT, nous avons été confronté à un problème de non minimum de phase. Deux méthodes ont été proposées pour le contourner :

- le changement du vecteur de sortie ;
- la conservation de ce vecteur et la linéarisation par approximation de la dynamique de zéros autour de son point d'équilibre.

Avec la première solution, s'est soulevée la question implicite de faisabilité des mesures pour la deuxième composante du vecteur de sortie, ce qui a encouragé la proposition de la deuxième solution.

Perspectives

Les approches de modification du critère proposées au cours de ces travaux en vue de garantir la stabilité d'une classe de systèmes non linéaires bouclés par NCGPC méritent d'être approfondies. Mayne et Michalska ainsi que Chen et Allgöwer ont modifié le critère du problème de commande prédictive non linéaire de départ, qui avec une contrainte d'(in)égalité terminale, qui avec un terme de pénalité terminale pour garantir la stabilité du système contrôlé.

En utilisant le paradigme proposé dans nos travaux, pourrait-on éviter les solutions sous-optimales concernant les problèmes de stabilité qu'ils ont résolus ?

Par ailleurs, la prise en compte de contraintes sur l'entrée, l'état et la sortie, ainsi que les perturbations permettrait de formaliser de manière plus complète ce problème d'optimisation. En outre, il serait possible d'en dégager une solution analytique, évitant ainsi l'optimisation "en ligne" (qui n'est pas toujours possible) pour l'élaboration de la loi de commande prédictive en ce qui concerne, tout au moins, les systèmes non linéaires à temps continu affines en contrôle.

Du côté applicatif, il serait très intéressant d'embarquer, sur calculateur électronique, les lois de commande développées au cours de nos travaux sur le moteur Diesel turbocompressé et la chaise roulante électrique afin d'en juger de manière plus pragmatique les performances en terme de stabilité, de robustesse, etc.

Publications et présentations

Publications

Congrès internationaux IEEE

1. **M. Dabo**, N. Langlois & H. Chafouk. “Unconstrained NCGPC and asymptotic tracking applied to the tracking problem for a turbocharged Diesel engine : a comparative study”. *Proceedings of the 16th Mediterranean Conference on Control and Automation (Ajaccio, France)*, pp. 1886–1891, June 2008.
2. **M. Dabo**, N. Langlois & H. Chafouk. “Dynamic feedback linearization applied to asymptotic tracking : generalization about the turbocharged Diesel engine outputs choice”. *Proceedings of American Control Conference (St. Louis, USA)*, pp. 3458–3463, June 2009.
3. S. O. Onyango, Y. Hamam, **M. Dabo**, K. Djouani & G. Qi. “Dynamic Control of an Electrical Wheelchair on an Incline”. *Proceedings of IEEE AFRICON, Nairobi, Kenya*, September 2009.
4. **M. Dabo**, H. Chafouk & N. Langlois. “Unconstrained NCGPC with a Guaranteed Closed-Loop Stability : Case of Nonlinear SISO Systems with the Relative Degree Greater Than Four”. *Proceedings of 48th IEEE Conference on Decision and Control (Shanghai, China)*, pp. 1980–1985, December 2009.

Congrès internationaux

1. **M. Dabo**, N. Langlois, W. Respondek & H. Chafouk. “NCGPC with dynamic extension applied to a Turbocharged Diesel Engine”. *Proceedings of the 17th IFAC World Congress (Seoul, Korea)*, pp. 12065–12070, July 2008.
2. **M. Dabo**, N. Langlois & H. Chafouk. “Asymptotic Tracking applied to the Control of a Turbocharged Diesel Engine”. *Proceedings of the UKACC (Manchester, UK)*, September 2008.
3. **M. Dabo**, N. Langlois & H. Chafouk. “NCGPC sans contraintes et placement de pôles avec extension dynamique : une étude comparative appliquée au moteur diesel” *Conférence internationale francophone d’Automatique (Bucarest, Roumanie)*, September 2008.
4. **M. Dabo**, N. Langlois & H. Chafouk. “Output tracking of a non-minimum phase system : An application to a turbocharged Diesel engine”. *Proceedings of the European Control Conference (Budapest, Hungary)*, pp. 4127–4132, August 2009.

Présentations

1. “NCGPC avec extension dynamique appliquée au moteur Diesel”. *GT CPNL (ENSAM, Paris, France)*, June 2008.

2. “Asymptotic Tracking applied to the Control of a Turbocharged Diesel Engine”. *GT CPNL (GIPSA-Lab, Grenoble, France)*, January 2009.
3. “Unconstrained NCGPC with a guaranteed closed-loop stability : Case of nonlinear SISO systems with the relative degree greater than four”. *GT CPNL (ENSAM, Paris, France)*, October 2009.



Calcul de la matrice de prédiction Π et de ses termes simplifiés Π_s et Π_{ss}

Sommaire

A.1	Calcul de la matrice de prédiction	138
-----	--	-----

A.1 Calcul de la matrice de prédiction

Le lecteur pourra se référer aux détails de calcul présentés ici afin de déterminer la matrice de prédiction et ses dérivées pour une sortie choisie h . Ce résultat est transposable dans le cas multi-input multi-output (MIMO) pour chacune des composantes h_i de la sortie considérée. Dans l'équation (2.18) nous avons posé que la matrice $\Pi(T, \rho)$ est égale à :

$$\Pi(T, \rho) = \int_0^T \Lambda^t(\tau) \Lambda(\tau) d\tau. \quad (\text{A.1})$$

Soit $M(\tau, \rho) = \Lambda^t(\tau) \Lambda(\tau)$. Ainsi, il vient

$$M(\tau, \rho) = \begin{bmatrix} 1 \\ \tau \\ \vdots \\ \frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} \\ \vdots \\ \frac{\tau^{\rho-1}}{(\rho-1)!} \\ \frac{\tau^\rho}{\rho!} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \tau & \cdots & \frac{\tau^{j-1}}{(j-1)!} & \cdots & \frac{\tau^{\rho-1}}{(\rho-1)!} & \frac{\tau^\rho}{\rho!} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

et

$$M(\tau, \rho) = \begin{bmatrix} 1 & \tau & \cdots & \frac{\tau^{\rho-1}}{(\rho-1)!} & \frac{\tau^\rho}{\rho!} \\ \tau & \tau^2 & \cdots & \frac{\tau^\rho}{(\rho-1)!} & \frac{\tau^{\rho+1}}{1!\rho!} \\ & & \vdots & & \\ \frac{\tau^{\rho-1}}{(\rho-1)!} & \frac{\tau^\rho}{(\rho-1)!} & \cdots & \frac{\tau^{2\rho-2}}{(\rho-1)!(\rho-1)!} & \frac{\tau^{2\rho-1}}{\rho!(\rho-1)!} \\ \frac{\tau^\rho}{\rho!} & \frac{\tau^{\rho+1}}{1!\rho!} & \cdots & \frac{\tau^{2\rho-1}}{\rho!(\rho-1)!} & \frac{\tau^{2\rho}}{\rho!\rho!} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Considérons l'élément de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne de $M(\tau, \rho)$, voir (A.3). Son expression est donnée par

$$m_{(i,j)}(\tau, \rho) = \frac{\tau^{i+j-2}}{(i-1)!(j-1)!} \quad \text{avec } 1 \leq j \leq \rho + 1. \quad (\text{A.4})$$

En l'intégrant par rapport à τ entre l'instant 0 et l'instant T égal à l'horizon de prédiction, il vient

$$\Pi_{(i,j)}(T) = \frac{T^{i+j-1}}{(i-1)!(j-1)!(i+j-1)}. \quad (\text{A.5})$$

De là, posons $\Pi_s(T, \rho)$ comme dernière ligne de la matrice Π et $\Pi_{sj}(T, \rho)$ l'élément de la $j^{\text{ième}}$ colonne du vecteur $\Pi_s(T, \rho)$. Par conséquent

$$\Pi_{sj}(T, \rho) = \frac{T^{\rho+j}}{\rho!(j-1)!(\rho+j)}. \quad (\text{A.6})$$

Soit $\Pi_{ss}(T, \rho)$ le dernier élément du vecteur $\Pi_s(T, \rho)$ donné par

$$\Pi_{ss}(T, \rho) = \frac{T^{2\rho+1}}{\rho!\rho!(2\rho+1)}. \quad (\text{A.7})$$

En posant

$$K(T, \rho) = \Pi_{ss}^{-1}(T, \rho) \Pi_s(T, \rho) \text{ et } l = j - 1 \quad (\text{A.8})$$

il vient

$$K_{\rho l}(T, \rho) = \frac{\rho!}{l! T^{\rho-l}} \frac{(2\rho+1)}{(\rho+l+1)} \quad (\text{A.9})$$

quelque soit $0 \leq l = j - 1 \leq \rho$. Dans le cas où $j = \rho + 1$ (ou $l = \rho$),

$$K_{\rho\rho}(T, \rho) = \frac{\rho!(2\rho+1)}{\rho!(2\rho+1)T^0} = 1. \quad (\text{A.10})$$

En réécrivant $K(T, \rho)$ sous forme matricelle, il vient :

$$K(T, \rho) = \begin{bmatrix} \frac{\rho!}{T^\rho} \frac{2\rho+1}{\rho+1} & \cdots & \frac{\rho!}{T^{\rho-l}} \frac{2\rho+1}{(l)!(\rho+l+1)} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

où les expressions $K_{\rho l}$, exceptées $K_{\rho\rho}$, sont coefficients de $P_{\rho T}(\lambda)$, polynôme caractéristique (2.42) du système linéaire bouclé résultant (2.39).

B

Détermination des racines des polynômes caractéristiques $P_{1T}(\lambda)$ et $P_{2T}(\lambda)$

Sommaire

B.1	Racine de $P_{1T}(\lambda)$	 142
B.2	Racines de $P_{2T}(\lambda)$	 142

B.1 Racine de $P_{1T}(\lambda)$

Le polynôme caractéristique $P_{1T}(\lambda)$ est donné par

$$P_{1T}(\lambda) = \lambda + K_{10}.$$

De l'équation (A.9) découle la seule racine de $P_{1T}(\lambda)$ qui est :

$$\lambda(T, \rho) = -K_{10}(T, \rho) = -\frac{\rho!}{T^\rho} \frac{2\rho + 1}{\rho + 1}.$$

Comme le degré relatif $\rho = 1$, la racine λ est donc égale à $\lambda(T) = -\frac{1.5}{T}$.

B.2 Racines de $P_{2T}(\lambda)$

Soit le polynôme caractéristique $P_{2T}(\lambda)$ donné par

$$P_{2T}(\lambda) = \lambda^2 + K_{21}\lambda + K_{20}.$$

L'équation suivante

$$P_{2T}(\lambda) = 0 \tag{B.1}$$

est vraie si et seulement si

$$\lambda^2 + K_{21}\lambda + K_{20} = 0. \tag{B.2}$$

Soit Δ le discriminant de l'équation (B.2). Il est égal à

$$\Delta = K_{21}^2 - 4K_{20}. \tag{B.3}$$

Son signe est déterminé par le signe de $K_{21}^2 - 4K_{20}$. De l'équation (A.9) il vient

$$K_{20}(T, \rho) = \frac{\rho!}{T^\rho} \frac{2\rho + 1}{\rho + 1}$$

et

$$K_{21}(T, \rho) = \frac{\rho!}{T^{\rho-1}} \frac{2\rho + 1}{\rho + 2}.$$

Par conséquent Δ est égal à

$$\Delta(\rho, T) = \frac{(\rho!)^2}{T^{2\rho-2}} \frac{(2\rho + 1)^2}{(\rho + 2)^2} - \frac{4\rho!}{T^\rho} \frac{2\rho + 1}{\rho + 1} \tag{B.4}$$

ou

$$\Delta(\rho, T) = (2\rho + 1) \frac{\rho!}{T^\rho} \left[\frac{\rho!}{T^{\rho-2}} \frac{2\rho + 1}{(\rho + 2)^2} - \frac{4}{\rho + 1} \right]. \tag{B.5}$$

Finalement le discriminant est donné par

$$\Delta(\rho, T) = (2\rho + 1) \frac{\rho!}{T^\rho} \left[\frac{\rho!(\rho + 1)(2\rho + 1) - 4T^{\rho-2}(\rho + 2)^2}{(\rho + 1)(\rho + 2)^2 T^{\rho-2}} \right]. \tag{B.6}$$

Posons

$$N_\Delta(T, \rho) = \rho!(\rho + 1)(2\rho + 1) - 4T^{\rho-2}(\rho + 2)^2,$$

ou par équivalence

$$N_\Delta(T, \rho) = (\rho + 1)!(2\rho + 1) - 4T^{\rho-2}(\rho + 2)^2.$$

Par conséquent, le signe de Δ est celui de N_Δ puisque

$$\frac{\rho!(2\rho+1)}{(\rho+1)(\rho+2)^2 T^{2\rho-2}}$$

est strictement positif. Comme $\rho = 2$, il vient

$$N_\Delta = (3!)5 - 4 * T^0 * 16 = 30 - 64 = -34 < 0$$

et donc $\Delta < 0$ pour tout $T \in \mathbf{R}_*^+$. Ainsi, $-\Delta = j^2 \Delta > 0$ et $-\Delta = 4K_{20} - K_{21}^2$ ou alors

$$j^2 \Delta(T, \rho) = (2\rho+1) \frac{\rho!}{T^\rho} \left[\frac{4}{\rho+1} - \frac{\rho!}{T^{\rho-2}} \frac{2\rho+1}{(\rho+2)^2} \right]. \quad (\text{B.7})$$

Nous déduisons alors les racines du polynôme $P_{2T}(\lambda)$ qui sont

$$\lambda_{1,2}(T, \rho) = -\frac{K_{21}(T, \rho)}{2} \pm \frac{j}{2} \sqrt{\Delta(T, \rho)}$$

et donc

$$\lambda_{1,2}(T, \rho) = -\frac{1}{2} \frac{\rho!}{T^{\rho-1}} \frac{2\rho+1}{\rho+2} \pm \frac{j}{2} \sqrt{(2\rho+1) \frac{\rho!}{T^\rho} \left[\frac{4}{\rho+1} - \frac{\rho!}{T^{\rho-2}} \frac{2\rho+1}{(\rho+2)^2} \right]}. \quad (\text{B.8})$$

Comme $\rho = 2$, il vient

$$\lambda_{1,2}(T) = -\frac{1}{T} \frac{5}{4} \pm \frac{j}{2} \sqrt{\frac{10}{T^2} \left(\frac{4}{3} - \frac{10}{16} \right)}$$

et donc finalement

$$\lambda_{1,2}(T) = -\frac{1}{T} (1.25 \pm 1.33j).$$

Notez que $\frac{1}{T}$ est le coefficient d'homothétie dans le plan complexe, pour les pôles respectifs des polynômes caractéristiques $P_{1T}(\lambda)$ et $P_{2T}(\lambda)$.



Equations de mouvement de la chaise roulante électrique

Considérons la chaise roulante dans son ensemble comme un corps rigide, voir les figures C.1 et C.2. Soit $\mathcal{L}$ le lagrangien de ce corps. Il est donné par

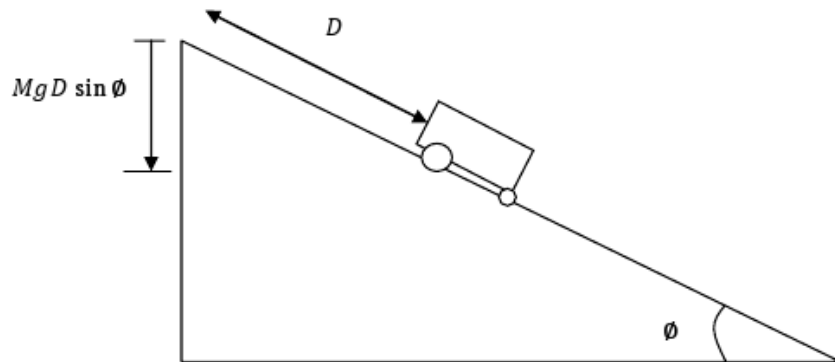


FIGURE C.1 – Position de la chaise roulante électrique sur une pente.

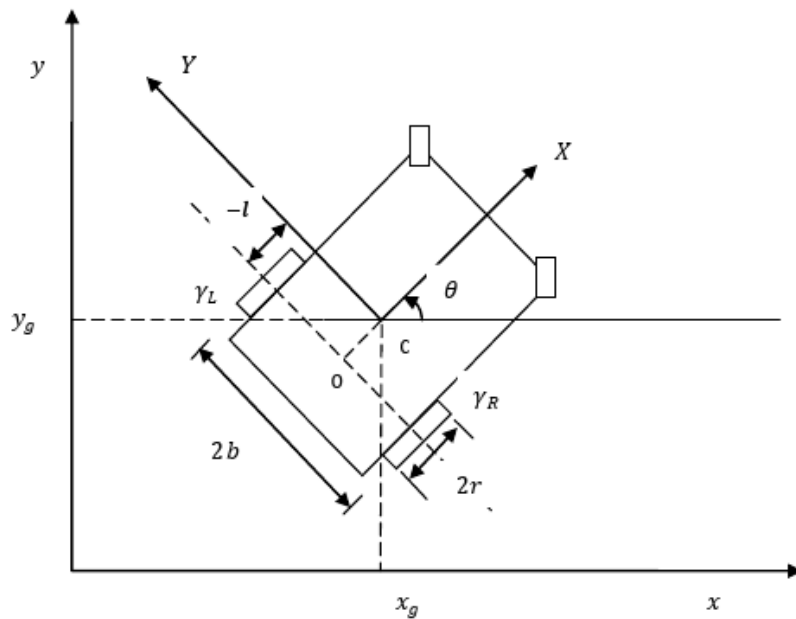


FIGURE C.2 – Chaise roulante électrique dans le repère inertiel.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M(\dot{x}_g^2 + \dot{y}_g^2 + \dot{z}_g^2) + \frac{1}{2}I_z\dot{\theta}^2 + lM\dot{\theta}\cos\phi(\dot{x}_g\sin\theta - \dot{y}_g\cos\theta) - Mg\sin\phi(x_g\cos\theta + y_g\sin\theta). \quad (\text{C.1})$$

L'équation du mouvement peut donc être déduite à partir du lagrangien par la relation

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = F_{qr}, \quad (\text{C.2})$$

où t représente le temps, q le vecteur de position de la chaise roulante, $\dot{q}$ son vecteur vitesse et F_{qr} l'ensemble des forces qui s'appliquent au système. Les vecteurs q et $\dot{q}$ sont donnés, respectivement, par

$$q = \begin{bmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \\ \theta \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x}_g \\ \dot{y}_g \\ \dot{z}_g \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

Nous verrons, plus loin, la composition du vecteur des forces F_{qr} .

Calculons, à présent, les différents termes de l'équation de mouvement (C.2). Il vient :

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_g} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_g} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_g} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

avec

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_g} = -Mg \sin \phi \cos \theta \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_g} = -Mg \sin \phi \sin \theta \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_g} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = lM\dot{\theta} \cos \phi (\dot{x}_g \cos \theta + \dot{y}_g \sin \theta) - Mg \sin \phi (-x_g \sin \theta + y_g \cos \theta) \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

Par analogie $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$ est telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_g} = M\dot{x}_g + lM\dot{\theta} \cos \phi \sin \theta \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_g} = M\dot{y}_g - lM\dot{\theta} \cos \phi \cos \theta \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_g} = M\dot{z}_g \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = I_z \dot{\theta} + lM \cos \phi (\dot{x}_g \sin \theta - \dot{y}_g \cos \theta) \end{cases}. \quad (\text{C.6})$$

D'où leurs dérivées premières par rapport au temps

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_g} \right) = M\ddot{x}_g + lM \cos \phi (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_g} \right) = M\ddot{y}_g - lM \cos \phi (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_g} \right) = M\ddot{z}_g \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = I_z \ddot{\theta} + lM \cos \phi [\ddot{x}_g \sin \theta + \dot{x}_g \dot{\theta} \cos \theta - (\ddot{y}_g \cos \theta - \dot{y}_g \dot{\theta} \sin \theta)] \end{cases}. \quad (\text{C.7})$$

Puisque l'équation du mouvement est donnée par

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_g} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_g} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_g} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_g} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_g} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_g} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{qr1} \\ F_{qr2} \\ F_{qr3} \\ F_{qr4} \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

il vient

$$\begin{cases} M\ddot{x}_g + lM \cos \phi (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) + Mg \sin \phi \cos \theta = F_{qr1} \\ M\ddot{y}_g - lM \cos \phi (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) + Mg \sin \phi \sin \theta = F_{qr2} \\ M\ddot{z}_g = F_{qr3} \\ I_z \ddot{\theta} + lM \cos \phi (\ddot{x}_g \sin \theta + \dot{x}_g \dot{\theta} \cos \theta + \dot{y}_g \dot{\theta} \sin \theta - \ddot{y}_g \cos \theta) - lM \dot{\theta} \cos \phi (\dot{x}_g \cos \theta + \dot{y}_g \sin \theta) \\ \quad + Mg \sin \phi (y_g \cos \theta - x_g \sin \theta) = F_{qr4} \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

L'ensemble des forces F_{qr} qui s'appliquent au système, est composé des forces résultant de contraintes non holonomes de la chaise roulante F_{cn} et des forces motrices F_m de la chaise. Elles sont données par

$$F_m = E(q)\tau \text{ et } F_{cn} = A^t(q)\lambda. \quad (\text{C.10})$$

où

$$E(q)_{4 \times 2} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \\ \frac{\sin \theta}{r} & \frac{\sin \theta}{r} \\ 0 & 0 \\ \frac{b}{r} & \frac{-b}{r} \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_R \\ \tau_L \end{bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

et

$$A(q)_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} -\cos \phi \sin \theta & \cos \phi \cos \theta & \sin \phi & -l \\ \sin \phi \sin \theta & -\sin \phi \cos \theta & \cos \phi & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.12})$$

Le vecteur λ est celui des multiplicateurs de Lagrange. Les forces de frottement entre les roues de la chaise et le sol sont négligées.

En simplifiant la dernière ligne du système (C.9), il vient

$$\begin{cases} M\ddot{x}_g + lM \cos \phi (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) + Mg \sin \phi \cos \theta = F_{qr1} \\ M\ddot{y}_g - lM \cos \phi (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) + Mg \sin \phi \sin \theta = F_{qr2} \\ M\ddot{z}_g = F_{qr3} \\ I_z \ddot{\theta} + lM \dot{\theta} \cos \phi (\ddot{x}_g \sin \theta - \ddot{y}_g \cos \theta) + Mg \sin \phi (y_g \cos \theta - x_g \sin \theta) = F_{qr4} \end{cases} \quad (\text{C.13})$$

Posons les matrices $M(q)$, $C(q, \dot{q})$ et $G(q)$, telles que

$$M(q) = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & lM \cos \phi \sin \theta \\ 0 & M & 0 & -lM \cos \phi \cos \theta \\ 0 & 0 & M & 0 \\ lM \cos \phi \sin \theta & -lM \cos \phi \cos \theta & 0 & I_z \end{bmatrix}, \quad (\text{C.14})$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dot{\theta} l M \cos \phi \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 & \dot{\theta} l M \cos \phi \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G(q) = \begin{bmatrix} Mg \sin \phi \cos \theta \\ Mg \sin \phi \sin \theta \\ 0 \\ Mg \sin \phi (y_g \cos \theta - x_g \sin \theta) \end{bmatrix} \quad (\text{C.15})$$

avec les vecteurs de position, de vitesse et d'accélération de la chaise roulante, respectivement, donnés par

$$q = \begin{bmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \\ \theta \end{bmatrix}, \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x}_g \\ \dot{y}_g \\ \dot{z}_g \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_g \\ \ddot{y}_g \\ \ddot{z}_g \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.16})$$

Il vient l'équation suivante :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = E(q)\tau + A^t(q)\lambda \quad (\text{C.17})$$

ou, de manière équivalente

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q) = E(q)\tau + A^t(q)\lambda \quad (\text{C.18})$$

avec $C(q, \dot{q})\dot{q} = V(q, \dot{q})$. Les matrices $E(q)$, τ et $A(q)$ sont données dans les équations (C.11) et (C.12), ci-dessus et la matrice V est telle que

$$V(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}^2 l M \cos \phi \cos \theta \\ \dot{\theta}^2 l M \cos \phi \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.19})$$

Considérons, à présent, l'équation de la cinétique de la chaise roulante. Elle est donnée par

$$\dot{q} = S(q)\eta \quad (\text{C.20})$$

où la matrice $S(q)$ est telle que

$$S(q) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -l \cos \phi \sin \theta \\ \sin \theta & l \cos \phi \cos \theta \\ 0 & l \sin \phi \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.21})$$

et le vecteur η des vitesses linéaire et angulaire de la chaise :

$$\eta = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}. \quad (\text{C.22})$$

En dérivant l'équation (C.20) une fois par rapport au temps, il vient

$$\ddot{q} = \dot{S}(q)\eta + S(q)\dot{\eta} \quad (\text{C.23})$$

avec la matrice $\dot{S}(q)$ donnée par

$$\dot{S}(q) = \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta & -\dot{\theta} l \cos \phi \cos \theta \\ \dot{\theta} \cos \theta & -\dot{\theta} l \cos \phi \sin \theta \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.24})$$

Remplaçons les équations (C.20) et (C.23) dans l'équation (C.18). Ainsi, nous obtenons l'équation suivante

$$M(q)(\dot{S}\eta + S\dot{\eta}) + V(q, \dot{q}) + G(q) = E(q)\tau + A^t(\dot{q})\lambda. \quad (\text{C.25})$$

Quelques hypothèses sont faites sur la chaise roulante électrique : nous supposons que les roues de la chaise roulent sans glisser. Autrement dit, elles sont soumises à des contraintes non holonomes c'est à dire pas de mouvements parallèles aux axes des roues arrières, voir figure C.2. Ces contraintes, non intégrables et indépendantes, sont telles que

$$A(q)\dot{q} = 0. \quad (\text{C.26})$$

Les matrices $A(q)$ et $S(q)$ sont telles que

$$S^t(q)A^t(q) = 0. \quad (\text{C.27})$$

En effet,

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -l \cos \phi \sin \theta & l \cos \phi \cos \theta & l \sin \phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos \phi \sin \theta & \sin \phi \sin \theta \\ \cos \phi \cos \theta & -\sin \phi \cos \theta \\ \sin \phi & \cos \phi \\ -l & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En multipliant l'expression développée de l'équation (C.25) par la transposée $S^t(q)$ de la matrice $S(q)$, il vient

$$S^t(q)M(q)\dot{S}(q)\eta + S^t(q)M(q)S(q)\dot{\eta} + S^t(q)[V(q, \dot{q}) + G(q)] = S^t(q)E(q)\tau + S^t(q)A^t(\dot{q})\lambda \quad (\text{C.28})$$

et de manière équivalente et simplifiée (sans introduire le terme q et avec $S^t A^t = 0$)

$$S^t M S \dot{\eta} + S^t M \dot{S} \eta + S^t (V + G) = S^t E \tau. \quad (\text{C.29})$$

Or, la matrice $S^t M S$, donnée par

$$S^t M S = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I_z - l^2 M \cos 2\phi \end{bmatrix} \quad (\text{C.30})$$

est inversible, puisque son déterminant est différent de zéro. En effet, son déterminant est

$$|S^t M S| = M(I_z - l^2 M \cos 2\phi).$$

Il est nul si et seulement si

$$I_z - l^2 M \cos 2\phi = 0.$$

Or, le moment d'inertie de la chaise roulante par rapport à l'axe z est $I_z = 39,733 \text{ kgm}^2$, la distance entre l'axe des roues arrières et le centre de gravité, voir figure C.2, est $l = 0,25 \text{ m}$ et la masse totale de la chaise (personne plus chaise) est $M = 80 \text{ kg}$. D'où l'équation

$$39,733 - 0,0625 \times 80 \cos 2\phi = 0$$

qui est équivalent à

$$39,733 - 5 \cos 2\phi = 0.$$

Or, le cosinus de tout angle est toujours compris entre -1 et 1 . Par conséquent, le déterminant ne peut jamais s'annuler sauf dans le cas d'une chaise roulante de moment d'inertie égal à $5kgm^2$ se déplaçant sur une surface plane ($\phi = 0$), ce qui n'est pas notre cas. La matrice S^tMS est donc bien inversible.

En multipliant l'équation (C.29) par l'inverse de la matrice S^tMS , il vient

$$\dot{\eta} + (S^tMS)^{-1}[S^tM\dot{S}\eta + S^t(V + G)] = (S^tMS)^{-1}S^tE\tau. \quad (C.31)$$

D'où

$$\dot{\eta} = -(S^tMS)^{-1}(S^tM\dot{S})\eta - (S^tMS)^{-1}S^t(V + G) + (S^tMS)^{-1}S^tE\tau. \quad (C.32)$$

Pour des raisons de simplification d'écriture, posons les matrices $\mathcal{M}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{B}$ telles que

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{2 \times 2} = -(S^tMS)_{2 \times 2}^{-1}(S^tM\dot{S})_{2 \times 2} \\ \mathcal{G}_{2 \times 1} = -(S^tMS)_{2 \times 2}^{-1}S_{2 \times 4}^t(V + G)_{4 \times 1} \\ \mathcal{B}_{2 \times 2} = (S^tMS)_{2 \times 2}^{-1}S_{2 \times 4}^tE_{4 \times 2} \end{cases} \quad (C.33)$$

Par conséquent

$$\dot{\eta} = \mathcal{M}\eta + \mathcal{G} + \mathcal{B}\tau \quad (C.34)$$

avec

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}l \cos \phi \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G} = - \begin{bmatrix} \dot{\theta}^2 l \cos \phi + g \sin \phi \\ -\frac{gM(y_g \cos \theta - x_g \sin \theta) \sin \phi}{-I_z + l^2 M \cos 2\phi} \end{bmatrix} \quad (C.35)$$

et

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Mr} & \frac{1}{Mr} \\ \frac{b}{r(I_z - Ml^2 \cos 2\phi)} & -\frac{b}{r(I_z - Ml^2 \cos 2\phi)} \end{bmatrix}. \quad (C.36)$$

Ce qui nous conduit, après simplifications, au système non linéaire suivant,

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \sin \phi \\ \frac{gM \sin \phi (y_g \cos \theta - x_g \sin \theta)}{Ml^2 \cos 2\phi - I_z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{Mr} & \frac{1}{Mr} \\ \frac{b}{r(I_z - Ml^2 \cos 2\phi)} & -\frac{b}{r(I_z - Ml^2 \cos 2\phi)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_R \\ \tau_L \end{bmatrix} \quad (C.37)$$

réglissant la dynamique de la vitesse linéaire et celle de la vitesse angulaire de la chaise roulante électrique considérée sur une surface de pente ϕ , CQFD ■.



Quelques propriétés sur le modèle réduit du moteur Diesel turbocompressé (MDT)

Sommaire

D.1	Involutivité de la distribution $\mathcal{D} = \text{span}\{g_1, g_2\}$	154
D.2	Calcul du vecteur degré relatif	154
D.2.1	Cas du premier vecteur de sortie	155
D.2.2	Cas du vecteur de sortie changé	155
D.3	Détermination de la dynamique des zéros	158
D.4	Linéarisation par approximation de la dynamique des zéros	160

D.1 Involutivité de la distribution $\mathcal{D} = \text{span}\{g_1, g_2\}$

Pour des raisons pratiques, nous rappelons ici le modèle d'ordre réduit du moteur Diesel turbocompressé (MDT). Il est donné par

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = k_1 \left(P_c \frac{k_c}{p_1^\mu - 1} + u_1 - k_e p_1 \right) \\ \dot{p}_2 = k_2 (k_e p_1 - u_1 - u_2) \\ \dot{P}_c = -\frac{P_c}{\tau} + K_0 (1 - p_2^{-\mu}) u_2 \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

Le crochet de Lie, $[g_1, g_2]$, des deux champs de vecteurs g_1 et g_2 est donné par

$$[g_1(x), g_2(x)] = \frac{\partial g_2(x)}{\partial x} g_1(x) - \frac{\partial g_1(x)}{\partial x} g_2(x). \quad (\text{D.2})$$

Il est égal à

$$[g_1(x), g_2(x)] := \text{ad}_{g_1} g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu K_0 (1 - p_2^{-\mu-1}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ -k_2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -k_2 \\ K_0 (1 - p_2^{-\mu}) \end{bmatrix}. \quad (\text{D.3})$$

Par conséquent, son expression finale est

$$[g_1(x), g_2(x)] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mu k_2 K_0 (1 - p_2^{-\mu-1}) \end{bmatrix}. \quad (\text{D.4})$$

Soit la matrice $B(x)$ telle que $B(x) = [g_1(x), g_2(x), \text{ad}_{g_1} g_2(x)]$. Elle est donnée par

$$B(x) = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & K_0 (1 - p_2^{-\mu}) & -\mu k_2 K_0 (1 - p_2^{-\mu-1}) \end{bmatrix}. \quad (\text{D.5})$$

La distribution $\mathcal{D}$ est non involutive puisque le rang de la matrice B est égal à trois. En effet, le déterminant de la matrice $B(x)$ donné par

$$|B(x)| = \mu k_1 k_2^2 K_0 (1 - p_2^{-\mu-1})$$

est différent de zéro pour tout p_2 dans Ω , où Ω est tel que

$$\Omega = \{(p_1, p_2, P_c) : 1 < p_1 < p_1^{\max}, 1 < p_2 < p_2^{\max}, 0 < P_c < P_c^{\max}\}.$$

D.2 Calcul du vecteur degré relatif

Deux cas sont à examiner ici :

- le premier est celui du vecteur de sortie choisie ;
- le second, est celui de la sortie changée.

Dans le second cas, nous examinerons la situation avec la prise en compte de l'extension dynamique et celle sans.

D.2.1 Cas du premier vecteur de sortie

Le vecteur de sortie choisi est

$$y = \begin{bmatrix} p_1 \\ W_c \end{bmatrix}. \quad (D.6)$$

Cependant, comme notre objectif est de faire de la poursuite asymptotique de trajectoire, nous définissons le vecteur erreur e suivant donné par

$$e = \begin{bmatrix} p_1 - p_{1d} \\ W_c - W_{cd} \end{bmatrix} \quad (D.7)$$

où les termes p_{1d} et W_{cd} sont, respectivement, les valeurs désirées constantes de la pression dans le collecteur d'admission et du débit d'air à travers le compresseur.

Soit $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ le vecteur degré relatif du modèle réduit (D.1) du MDT. Il est calculé comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_1 - \dot{p}_{1d} \\ \dot{W}_c - \dot{W}_{cd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{W}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 k_c \frac{P_c}{p_1^{\mu-1}} + k_1 u_1 - k_1 k_e p_1 \\ k_c \frac{\dot{P}_c (p_1^{\mu-1}) - \mu P_c \dot{p}_1 p_1^{\mu-2}}{(p_1^{\mu-1})^2} \end{bmatrix}. \quad (D.8)$$

D'où

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_1 - \dot{p}_{1d} \\ \dot{W}_c - \dot{W}_{cd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 k_c \frac{P_c}{p_1^{\mu-1}} + k_1 u_1 - k_1 k_e p_1 \\ k_c \frac{[-\frac{P_c}{\tau} + K_0(1-p_2^{-\mu})u_2](p_1^{\mu-1}) - \mu P_c [k_1 k_c \frac{P_c}{p_1^{\mu-1}} + k_1 u_1 - k_1 k_e p_1] p_1^{\mu-2}}{(p_1^{\mu-1})^2} \end{bmatrix}. \quad (D.9)$$

Par conséquent, la matrice de découplage est

$$D(x) = \begin{bmatrix} L_{g1}h_1(x) & L_{g2}h_1(x) \\ L_{g1}h_2(x) & L_{g2}h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ -\frac{\mu k_1 k_c P_c p_1^{\mu-2}}{(p_1^{\mu-1})^2} & \frac{k_c K_0(1-p_2^{-\mu})}{p_1^{\mu-1}} \end{bmatrix}. \quad (D.10)$$

Elle est inversible puisque son déterminant

$$|D(x)| = k_1 k_c K_0 \frac{1 - p_2^{-\mu}}{p_1^{\mu-1}} \neq 0 \quad (D.11)$$

est différent de zéro pour toutes valeurs de p_1 et p_2 dans Ω .

Par conséquent, le vecteur degré relatif ρ est bien défini et est égal à $(1, 1)$. Dans ce cas, la dynamique des zéros existe et est de dimension 1.

D.2.2 Cas du vecteur de sortie changé

La matrice de découplage obtenue avec le premier vecteur de sortie est

$$D(x) = \begin{bmatrix} L_{g1}h_1(x) & L_{g2}h_1(x) \\ L_{g1}h_2(x) & L_{g2}h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ -\frac{\mu k_1 k_c P_c p_1^{\mu-2}}{(p_1^{\mu-1})^2} & \frac{k_c K_0(1-p_2^{-\mu})}{p_1^{\mu-1}} \end{bmatrix}. \quad (D.12)$$

L'idée, pour le changement de vecteur de sortie, consiste à choisir une deuxième composante de ce dernier, h_2 , sous la contrainte $L_{g_2}h_2(x) = 0$, voir [Dabo 08d]. Ce qui conduit à l'équation suivante

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_2}{\partial p_1} & \frac{\partial h_2}{\partial p_2} & \frac{\partial h_2}{\partial P_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -k_2 \\ K_0(1 - p_2^{-\mu}) \end{bmatrix} = 0$$

ou, de façon équivalente

$$-k_2 \frac{\partial h_2}{\partial p_2} + K_0(1 - p_2^{-\mu}) \frac{\partial h_2}{\partial P_c} = 0.$$

Il suffit de prendre $\frac{\partial h_2}{\partial P_c} = 1$ ce qui donne $\frac{\partial h_2}{\partial p_2} = -\frac{K_0}{k_2}(p_2^{-\mu} - 1)$.

D'où l'expression de h_2 ,

$$h_2 = P_c + \frac{K_0}{k_2} \left[p_2 - \frac{1}{1-\mu} p_2^{(1-\mu)} \right].$$

Par conséquent, le nouveau vecteur de sortie est

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ P_c + \frac{K_0}{k_2} \left[p_2 - \frac{1}{1-\mu} p_2^{(1-\mu)} \right] \end{bmatrix}. \quad (D.13)$$

Sans prise en compte de l'extension dynamique Nous calculons les dérivées successives par rapport au temps, de chacune des composantes du vecteur de sortie (D.13) jusqu'à l'apparition du vecteur de commande. Ce qui donne

$$\dot{\tilde{y}}_1 = \dot{p}_1 = k_1 k_c \frac{P_c}{p_1^\mu - 1} + k_1 u_1 - k_1 k_e p_1. \quad (D.14)$$

La dérivée de la seconde composante du vecteur de sortie est donnée par

$$\dot{\tilde{y}}_2 = \dot{h}_2 = \dot{P}_c + \frac{K_0}{k_2} \dot{p}_2 \left[1 - p_2^{-\mu} \right]$$

ou de façon équivalente

$$\dot{\tilde{y}}_2 = -\frac{P_c}{\tau} + K_0(1 - p_2^{-\mu})u_2 + \frac{K_0}{k_2} k_2 (k_e p_1 - u_1 - u_2) (1 - p_2^{-\mu})$$

ou encore

$$\dot{\tilde{y}}_2 = -\frac{P_c}{\tau} + K_0(1 - p_2^{-\mu})u_2 + K_0(k_e p_1 - u_1) (1 - p_2^{-\mu}) - K_0 u_2 (1 - p_2^{-\mu})$$

qui, simplifiée, donne

$$\dot{\tilde{y}}_2 = -\frac{P_c}{\tau} + K_0(1 - p_2^{-\mu})(k_e p_1 - u_1)$$

et finalement

$$\dot{\tilde{y}}_2 = -\frac{P_c}{\tau} + k_e K_0 p_1 (1 - p_2^{-\mu}) - u_1 K_0 (1 - p_2^{-\mu}). \quad (D.15)$$

Par conséquent, la matrice de découplage associée est

$$\tilde{D}(x) = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ K_0(p_2^{-\mu} - 1) & 0 \end{bmatrix}. \quad (D.16)$$

Elle est non inversible et donc son vecteur degré relatif n'est pas défini. Par conséquent la dynamique des zéros n'existe pas.

Avec prise en compte de l'extension dynamique Le système étendu est donné par

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = k_1(W_c + z - k_e p_1) \\ \dot{p}_2 = k_2(k_e p_1 - z - u_2) \\ \dot{P}_c = \frac{1}{\tau}(\eta_m P_t - P_c) \\ \dot{z} = v_1 \end{cases} \quad (\text{D.17})$$

Les résultats obtenus précédemment changent si l'extension dynamique est prise en compte. En effet, les équations (D.14) et (D.15) deviennent

$$\dot{y}_1 = \dot{p}_1 = k_1 k_c \frac{P_c}{p_1^\mu - 1} + k_1 z - k_1 k_e p_1 \quad (\text{D.18})$$

et

$$\dot{y}_2 = -\frac{P_c}{\tau} + K_0(1 - p_2^{-\mu})(k_e p_1 - z), \quad (\text{D.19})$$

puisque le nouvel état est $z = u_1$ et $\dot{z} = v_1$ et $u_2 = v_2$. En dérivant l'équation (D.18) une fois par rapport au temps, il vient

$$\ddot{y}_1 = \ddot{p}_1 = k_1 \dot{z} - k_1 k_e \dot{p}_1 + k_1 k_c \frac{\dot{P}_c(p_1^\mu - 1) - P_c \dot{p}_1^\mu}{(p_1^\mu - 1)^2}$$

ou

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 = & k_1 v_1 - k_1 k_e \left(k_1 k_c \frac{P_c}{p_1^\mu - 1} + k_1 z - k_1 k_e p_1 \right) \\ & + k_1 k_c \frac{-\frac{P_c}{\tau} + [K_0(1 - p_2^{-\mu})]v_2(p_1^\mu - 1) - \mu P_c \dot{p}_1 p_1^{\mu-1}}{(p_1^\mu - 1)^2} \end{aligned}$$

et son expression finale est donc

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 = & k_1 v_1 + k_1 k_c \frac{-\frac{P_c}{\tau} + [K_0(1 - p_2^{-\mu})]v_2}{p_1^\mu - 1} \\ & - k_1 k_e \left(k_1 k_c \frac{P_c}{p_1^\mu - 1} + k_1 z - k_1 k_e p_1 \right) \\ & - \mu k_1 k_c \frac{\left(k_1 k_c \frac{P_c}{p_1^\mu - 1} + k_1 z - k_1 k_e p_1 \right) p_1^{\mu-1} P_c}{(p_1^\mu - 1)^2}. \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

En faisant de même pour l'équation (D.19), il vient

$$\ddot{y}_2 = -\frac{\dot{P}_c}{\tau} + K_0 \left[(k_e \dot{p}_1 - \dot{z}) (1 - p_2^{-\mu}) + (k_e p_1 - z) [-(-\mu) \dot{p}_2 p_2^{-\mu-1}] \right]$$

ou de façon équivalente

$$\ddot{y}_2 = -\frac{\dot{P}_c}{\tau} + K_0 \left[(k_e \dot{p}_1 - v_1) (1 - p_2^{-\mu}) + \mu p_2^{-\mu-1} (k_e p_1 - z) [k_2 (k_e p_1 - z - v_2)] \right]$$

ce qui donne sous forme développée, avec $\dot{P}_c = -\frac{P_c}{\tau} + K_0(1 - p_2^{-\mu})v_2$,

$$\begin{aligned} \ddot{y}_2 = & \frac{P_c}{\tau^2} - \frac{K_0}{\tau} (1 - p_2^{-\mu})v_2 - K_0(1 - p_2^{-\mu})v_1 + K_0 k_e \dot{p}_1 (1 - p_2^{-\mu}) \\ & - \mu k_2 K_0 p_2^{-\mu-1} (k_e p_1 - z)v_2 + \mu k_2 K_0 p_2^{-\mu-1} (k_e p_1 - z)^2. \end{aligned}$$

Son expression finale est

$$\begin{aligned}\ddot{y}_2 &= \frac{P_c}{\tau} + K_0 k_e (1 - p_2^{-\mu}) \left[k_1 k_c \frac{P_c}{p_1^\mu - 1} + k_1 u_1 - k_1 k_e p_1 \right] \\ &+ \mu k_2 K_0 p_2^{-\mu-1} (k_e p_1 - z)^2 - v_2 \left[\frac{K_0}{\tau} (1 - p_2^{-\mu}) + \mu k_2 K_0 p_2^{-\mu-1} (k_e p_1 - z) \right] \\ &- K_0 (1 - p_2^{-\mu}) v_1.\end{aligned}$$

Par conséquent la matrice de découplage du nouveau vecteur de sortie avec le système étendu est

$$D^e(x) = \left[\begin{array}{c|c} k_1 & k_1 k_c K_0 \frac{1-p_2^{-\mu}}{p_1^\mu-1} \\ \hline K_0(p_2^{-\mu} - 1) & \mu k_2 K_0 (z - k_e p_1) p_2^{-\mu-1} + \frac{K_0}{\tau} (p_2^{-\mu} - 1) \end{array} \right]. \quad (D.21)$$

Le vecteur degré relatif du système étendu est bien défini et donné par $\tilde{\rho} = (2, 2)$. Dans ce cas, la dynamique des zéros n'existe pas.

D.3 Détermination de la dynamique des zéros

Elle est faite à partir de la sortie (D.7). Il suffit de l'annuler identiquement.

Autrement dit, de poser $e(t) \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Ainsi,

$$\begin{bmatrix} p_1(t) \\ W_c(t) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} p_{1d} \\ W_{cd} \end{bmatrix} \quad (D.22)$$

avec p_{1d} et W_{cd} des constantes relatives à la pression dans le collecteur d'admission et le débit de gaz à travers le compresseur.

Par conséquent

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_1(t) \\ \dot{W}_c(t) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (D.23)$$

puisque p_{1d} et W_{cd} sont choisies constantes. D'où

$$\begin{bmatrix} k_1 W_{cd} + k_1 u_1 - k_1 k_e p_{1d} \\ k_c \frac{\dot{P}_c(p_{1d}^\mu - 1) - \mu P_{cd} \dot{p}_1 p_{1d}^{\mu-1}}{(p_{1d}^\mu - 1)^2} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (D.24)$$

La première ligne de (D.24) donne alors

$$u_1 = k_e p_{1d} - W_{cd} \quad (D.25)$$

puisque $k_1 \neq 0$. Dans la deuxième ligne, l'équation $\dot{p}_1 \equiv 0$, voir (D.23), entraîne

$$\dot{W}_c = k_c \frac{\dot{P}_c(p_{1d}^\mu - 1)}{(p_{1d}^\mu - 1)^2} \equiv 0 \quad (D.26)$$

ou, de façon équivalente

$$\dot{W}_c = k_c \dot{P}_c (p_{1d}^\mu - 1) \equiv 0 \quad (D.27)$$

car $p_{1d}^\mu - 1 \neq 0$ quelque soit p_1 dans Ω . Alors, il vient

$$\dot{P}_c \equiv 0, \quad (\text{D.28})$$

puisque k_c est une constante non nulle. La dérivée de P_c par rapport au temps, $\dot{P}_c$, est telle que :

$$\dot{P}_c = -\frac{P_c}{\tau} + K_0(1 - p_2^{-\mu})u_2 = \frac{1}{\tau} \left[-P_c + \eta_m k_t (1 - p_2^{-\mu})u_2 \right]. \quad (\text{D.29})$$

D'après la deuxième équation du système (D.22), $W_c(t) \equiv W_{cd}$ et

$$W_c = P_c \frac{k_c}{p_{1d}^\mu - 1}. \quad (\text{D.30})$$

Aussi, d'après (D.22), une valeur constante de W_c en implique une constante de p_1 et donc de P_c . Ce qui entraîne que $W_{cd} = P_{cd} \frac{k_c}{p_{1d}^\mu - 1}$. Autrement dit, le système (D.22) implique que $P_c(t) \equiv P_{cd}$. Par conséquent l'équation (D.29) devient

$$\dot{P}_c = \frac{1}{\tau} \left[-P_{cd} + \eta_m k_t (1 - p_2^{-\mu})u_2 \right] \equiv 0.$$

Le contrôle u_2 est alors déduit de cette équation, comme

$$u_2 = \frac{P_{cd}}{\eta_m k_t (1 - p_2^{-\mu})} \quad (\text{D.31})$$

ou, de façon équivalente

$$u_2 = \frac{W_{cd}(p_{1d}^\mu - 1)}{\eta_m k_t k_c (1 - p_2^{-\mu})}. \quad (\text{D.32})$$

En remplaçant u_1 et u_2 par leurs expressions (D.25) et (D.32) dans la deuxième équation du modèle réduit du MDT, il vient

$$\dot{p}_2 = k_2 \left[k_e p_{1d} - k_e p_{1d} + W_{cd} - \frac{W_{cd}(p_{1d}^\mu - 1)}{\eta_m k_t k_c (1 - p_2^{-\mu})} \right] \quad (\text{D.33})$$

et finalement, l'expression de la dynamique des zéros

$$\dot{p}_2 = k_2 W_{cd} \left[1 - \frac{(p_{1d}^\mu - 1)}{\eta_m k_t k_c (1 - p_2^{-\mu})} \right]. \quad (\text{D.34})$$

Son expression, en tenant compte du changement de coordonnées suivant

$$\begin{aligned} e_1^1 &= p_1 - p_{1d} \\ e_1^2 &= W_c - W_{cd} \\ \eta &= p_2 \end{aligned} \quad (\text{D.35})$$

est donnée par

$$\dot{\eta} = k_2 \left[\frac{k_c P_c}{(e_1^1 + p_{1d})^\mu - 1} - e_1^2 \right] \left[1 - \frac{(p_1 - e_1^1)^\mu - 1}{\eta_m k_c k_t (1 - \eta^{-\mu})} \right]. \quad (\text{D.36})$$

Nous allons à présent procéder à la linéarisation par approximation de ce système.

D.4 Linéarisation par approximation de la dynamique des zéros

Notre objectif étant de faire l'extension du système linéaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{e}}_1^1 \\ \dot{\tilde{e}}_2^1 \\ \dot{\tilde{e}}_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}_1^1 \\ \tilde{e}_2^1 \\ \tilde{e}_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}_1^1 \\ \tilde{e}_2^1 \\ \tilde{e}_1^2 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{D.37})$$

avec le résultat de la linéarisation par approximation de la dynamique des zéros autour de son point d'équilibre, définissons un nouveau vecteur de coordonnées ζ tel que

$$\zeta = \begin{bmatrix} e_1^1 \\ e_2^1 \\ e_1^2 \\ \eta \end{bmatrix}.$$

Alors, à l'équilibre, ζ_e est donné par

$$\zeta_e = \begin{cases} e_{1e}^1 = p_{1e} - p_{1d} \\ e_{2e}^1 = 0 \\ e_{1e}^2 = W_{ce} - W_{cd} \\ \eta_e = p_{2e} \end{cases}.$$

Par conséquent, la linéarisation de la dynamique des zéros se fera autour de ζ_e . D'où sa dérivée

$$\frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta_e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial e_1^1} & \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial e_2^1} & \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial e_1^2} & \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \Big|_{\zeta_e}.$$

Soit A_{zd} la matrice jacobienne de la dynamique des zéros $\dot{\eta}$ en ζ_e . Soient $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbf{R}^4$ tels que

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial e_1^1} \Big|_{\zeta_e} \\ a_2 = \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial e_2^1} \Big|_{\zeta_e} \\ a_3 = \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial e_1^2} \Big|_{\zeta_e} \\ a_4 = \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta} \Big|_{\zeta_e} \end{cases}.$$

Alors

$$A_{zd} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, le linéarisé de la dynamique des zéros autour de ζ_e est

$$\tilde{\eta} = A_{zd}\tilde{\zeta} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}_1^1 \\ \tilde{e}_2^1 \\ \tilde{e}_1^2 \\ \tilde{\eta} \end{bmatrix} \quad (\text{D.38})$$

où

$$\tilde{\zeta} = \begin{cases} \tilde{e}_1^1 = e_1^1 - e_{1e}^1 \\ \tilde{e}_2^1 = e_2^1 - e_{2e}^1 \\ \tilde{e}_1^2 = e_1^2 - e_{1e}^2 \\ \tilde{\eta} = \eta - \eta_e \end{cases}.$$

Bibliographie

- [Alam 06] M. Alamir & F. Allgöwer(Eds). “Proceedings of the first IFAC Workshop on Nonlinear Model Predictive Control for Fast Systems NMPC-FS’06”. 2006.
- [Allg 04] F. Allgöwer, R. Findeisen & Z. K. Nagy. “Nonlinear Model Predictive Control : From Theory to Application”. *J. Chin. Inst. Chem. Engrs.*, Vol. 35, No. 3, pp. 299–315, 2004.
- [Allg 98] F. Allgöwer & A. Zheng. *Proceedings of international symposium on nonlinear model predictive control : assessment and future directions*. Ascona, Switzerland, 1998.
- [Arno 07] J. F. Arnold. *Proposition d’une stratégie de contrôle à base de logique floue pour la commande du circuit d’air d’un moteur diesel*. Thèse de doctorat, Université de Rouen, 2007.
- [auto] A. nationale pour la formation automobile. *L’injection diesel haute pression à rampe commune*.
- [Blau 99] R. Blauwkamp & T. Basar. “A receding-horizon approach to robust output feedback control for nonlinear systems”. *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 5, pp. 4879–4884, 1999.
- [Borm 64] G. L. Borman. *Mathematical simulation of internal combustion engine processes and performance including comparison with experiment*. Thèse de doctorat, University of Wisconsin, Mechanical Engineering Department, 1964.
- [Cama 93] E. F. Camacho. “Constrained Generalized Predictive Control”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 38, No. 2, pp. 327–332, 1993.
- [Casa 98] A. Casavola & E. Mosca. “Predictive reference governor with computational delay”. *European Journal of Control*, Vol. 4, No. 3, pp. 241–248, 1998.
- [Chem 06] A. Chemori & N. Marchand. “A prediction based controller for stabilization of a non-minimum phase PVTOL aircraft”. *Proceedings of the first IFAC Workshop on Nonlinear Model Predictive Control for Fast Systems NMPC-FS’06*, pp. 65–70, 2006.
- [Chen 00] W. H. Chen, D. J. Ballance & J. O’Reilly. “Model predictive control of nonlinear systems : computational burden and stability”. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, Vol. 147, No. 4, 2000.
- [Chen 01] W. H. Chen. “Analytic predictive controllers for nonlinear systems with ill-defined relative degree”. *Proc.-Control Theory Appl.*, Vol. 148, No. 1, 2001.
- [Chen 03] W. H. Chen. “Optimal control of nonlinear systems : a predictive control approach”. *Automatica*, Vol. 39, No. 1, pp. 633–641, 2003.
- [Chen 04] W. H. Chen. “Predictive control of general nonlinear systems using approximation”. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, Vol. 151, No. 2, pp. 137–144, 2004.

- [Chen 82] C. Chen & L. Shaw. “On receding horizon feedback control”. *Automatica*, Vol. 18, No. 3, pp. 349–352, 1982.
- [Chen 97] H. Chen, C. W. Scherer & F. Allgöwer. “A game theoretic approach to nonlinear robust receding horizon control of constrained systems”. *Proceedings of American Control Conference*, pp. 3073–3077, 1997.
- [Chen 98] H. Chen & F. Allgöwer. “A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability”. *Automatica*, Vol. 34, pp. 1205–1217, 1998.
- [Chen 99a] W. H. Chen, D. J. Ballance & P. J. Gawthrop. “Analytic approach to generalised predictive control of nonlinear systems”. *IEE Two-Day Workshop on Model Predictive Control : Techniques and Applications - Day 1 (Ref. No. 1999/095)*, pp. 9/1–9/3, 1999.
- [Chen 99b] W. H. Chen, D. J. Ballance & P. J. Gawthrop. “Nonlinear generalised predictive control and optimal dynamic inversion control”. *Proceedings of the 14th IFAC World Congress*, Vol. E, pp. 415–420, 1999.
- [Chen 99c] W. H. Chen, D. J. Ballance, P. J. Gawthrop, J. J. Gribble & J. O’Reilly. “Non-linear PID predictive controller”. *IEE Proceedings, Part D - Control Theory and Applications*, Vol. 146, No. 6, pp. 603–611, 1999.
- [Clar 87] D. W. Clarke, C. Mohtadi & P. S. Tuffs. “Generalized predictive control-part I : the basic algorithm”. *Automatica*, Vol. 23, No. 2, pp. 137–148, 1987.
- [Corr 03] J. P. Corriou. *Commande prédictive des procédés*. Lavoisier Tec & Doc, Paris, 2003.
- [Cutl 80] C. R. Cutler & B. L. Ramaker. “Dynamic Matrix Control – A computer control algorithm”. *Proceedings joint Automatic Control Conference*, 1980.
- [Dabo 08a] M. Dabo, N. Langlois & H. Chafouk. “Asymptotic Tracking applied to the Control of a Turbocharged Diesel Engine”. *Proceedings of the UKACC (Manchester, UK)*, 2008.
- [Dabo 08b] M. Dabo, N. Langlois & H. Chafouk. “NCGPC sans contraintes et placement de pôles avec extension dynamique : une étude comparative appliquée au moteur diesel”. *Conférence internationale francophone d’Automatique (Bucarest, Roumanie)*, 2008.
- [Dabo 08c] M. Dabo, N. Langlois & H. Chafouk. “Unconstrained NCGPC and asymptotic tracking applied to the tracking problem for a turbocharged diesel engine : a comparative study”. *Proceedings of the 16th Mediterranean Conference on Control and Automation (Ajaccio, France)*, pp. 1886–1891, 2008.
- [Dabo 08d] M. Dabo, N. Langlois, W. Respondek & H. Chafouk. “NCGPC with dynamic extension applied to a Turbocharged Diesel Engine”. *Proceedings of the 17th IFAC World Congress (Seoul, Korea)*, pp. 12065–12070, 2008.
- [Dabo 09a] M. Dabo, H. Chafouk & N. Langlois. “Unconstrained NCGPC with a Guaranteed Closed-Loop Stability : Case of Nonlinear SISO Systems with the Relative Degree Greater Than Four”. *to appear in Proceedings of 48 th IEEE Conference on Decision and Control*, 2009.
- [Dabo 09b] M. Dabo, N. Langlois & H. Chafouk. “Dynamic feedback linearization applied to asymptotic tracking : generalization about the turbocharged diesel engine outputs choice”. *Proceedings of American Control Conference (St. Louis, USA)*, pp. 3458–3463, 2009.

-
- [Dabo 09c] M. Dabo, N. Langlois & H. Chafouk. "Output tracking of a non-minimum phase system : An application to a turbocharged diesel engine". *Proceedings of the European Control Conference (Budapest, Hungary)*, pp. 4127–4132, 2009.
 - [Darl 00] J. Darlington, C. C. Pantelides, B. Rustem & B. A. Tanyi. "Decreasing the sensitivity of open-loop optimal solutions in decision making under uncertainty". *European Journal of Operational Research*, Vol. 121, No. 2, pp. 343–362, 2000.
 - [DeKe 88] R. M. C. DeKeyser, Ph. G. A. van de Velde & F. A. G. Dumortier. "A comparative study of self-adaptive long-range predictive control methods". *IFAC symposium on Identification and System Parameter Estimation.*, pp. 1317–1322, 1988.
 - [Demi 00] H. Demircioglu & E. Karasu. "Generalized predictive control. A practical application and comparison of discrete- and continuous-time versions". *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 20, No. 5, pp. 36–47, 2000.
 - [Demi 02] H. Demircioglu & C. Yavuzylmaz. "Constrained predictive control in continuous time". *IEEE control systems Magazine*, Vol. 22, pp. 57–67, 2002.
 - [Demi 89] H. Demircioglu. *Continuous-time Self-tuning Algorithms*. Thèse de doctorat, Glasgow University, Department of Mechanical Engineering, 1989.
 - [Demi 91] H. Demircioglu & P. J. Gawthrop. "Continuous-time Generalized Predictive Control". *Automatica*, Vol. 27, No. 1, pp. 55–74, 1991.
 - [Demi 92a] H. Demircioglu & D. W. Clarke. "CGPC with guaranteed stability properties". *IEE Proceedings, Part D - Control Theory and Applications*, Vol. 139, No. 4, pp. 371–380, 1992.
 - [Demi 92b] H. Demircioglu & P. J. Gawthrop. "Multivariable Continuous-time Generalized Predictive Control". *Automatica*, Vol. 28, No. 4, pp. 697–713, 1992.
 - [Demi 99] H. Demircioglu. "Constrained continuous-time generalised predictive control". *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, Vol. 146, No. 5, pp. 470–476, 1999.
 - [Diop 81] C. A. Diop. *Civilisation ou barbarie*. Présence Africaine, 1981.
 - [DMC 94] D. C. [DMC]. "Technology overview". *Product literature from DMC Corp.*, 1994.
 - [Emam 07] H. Emam, Y. Hamam, E. Monacelli & I. Mougharbel. "Dynamic Model of An Electrical Wheelchair with Slipping Detection". *EUROSIM*, 2007.
 - [Feng 02] W. Feng, J. O'Reilly & D. J. Ballance. "MIMO nonlinear PID predictive controller". *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, Vol. 149, No. 3, pp. 203–208, 2002.
 - [Fllm 05] D. Föllmi & O. Föllmi. *Origines 365 pensées de sages Africains*. 2005.
 - [Froi 90] J. B. Froisy & T. Matsko. "IDCOM-M application to the Shell fundamental control problem". *AIChE annual meeting*, 1990.
 - [Garc 86] C. E. García & A. M. Morshedi. "Quadratic programming solution of dynamic matrix control (QDMC)". *Chemical Engineering Communications*, Vol. 46, pp. 73–87, 1986.
 - [Garc 89] C. E. García, D. M. Prett & M. Morari. "Model predictive control : theory and practice – a survey". *Automatica*, Vol. 25, No. 3, pp. 335–348, 1989.
 - [Gawt 87] P. J. Gawthrop. "Continuous-time self-tuning control". *Letchworth, U.K. : Reaserch studies Press*, Vol. 1, 1987.
 - [Gawt 89] P. J. Gawthrop & H. Demircioglu. "Continuous-time Generalised Predictive Control". *Preprints of the 3rd IFAC workshop on adaptive systems in control and signal processing, Glasgow, U.K.*, 1989.

- [Gawt 98a] P. J. Gawthrop & T. Arsan. "Exact Linearisation is a Special Case of Non-linear GPC (Abstract only)". Eds. : F. Allgower & A. Zheng, *Preprints of int. symposium on nonlinear model predictive control : assessment and future directions, Ascona, Switzerland*, p. 37, June 1998.
- [Gawt 98b] P. J. Gawthrop, H. Demircioglu & I. I. Siller-Alcalá. "Multivariable continuous-time generalised predictive control : A state-space approach to linear and nonlinear systems". *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, Vol. 145, No. 3, pp. 241–250, 1998.
- [Genc 93] H. Genceli & M. Nikolaou. "Robust stability analysis of constrained L1-norm model predictive control". *AIChE Journal*, Vol. 39, No. 12, pp. 1954–1965, 1993.
- [Gomm 98] H. W. Gomma & D. H. Owens. "Delayed generalised predictive control". *Proceedings of the UKACC conference Control, UK*, pp. 793–797, 1998.
- [Gran 03] Y. Granjon. *Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discrets, représentation d'état*. Belgique, 1ère edition, Ed., 2003.
- [Gron 04] O. Grondin. *Modélisation du moteur à allumage par compression dans la perspective du contrôle et du diagnostic*. Thèse de doctorat, Université de Rouen, 2004.
- [Gros 88] P. Grosdidier, B. Froisy & M. Hammann. "The IDCOM-M controller". *Proceedings of the 1988 IFAC workshop on model based process control*, pp. 31–36, 1988.
- [Gyur 98] E. Gyurkovics. "Receding horizon control via Bolza-type optimization". *Systems and Control Letters*, Vol. 35, No. 3, pp. 195–200, 1998.
- [Haze 71] P. A. Hazell & J. O. Flower. "Discrete modelling of spark ignition engine for control purposes". *International Journal of Control*, Vol. 13, No. 4, 1971.
- [Hend 89] E. Hendricks. "Mean value modeling of large turbocharged two-stroke Diesel engines". *SAE paper*, No. 890564, 1989.
- [Ibra 06] F. Ibrahim. *Commande prédictive non linéaire d'un lit mobile simulé*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2006.
- [Inc 95] H. Inc. "RMPCT concepts reference". *Product literature from Honeywell, Inc.*, 1995.
- [Isid 95] A. Isidori. *Nonlinear control systems*. Springer Verlag, Englewood Cliffs, New York, 3rd edn. Ed., 1995.
- [Jank 00] M. Jankovic, M. Jankovic & I. Kolmanovsky. "Constructive Lyapunov control design for turbocharged Diesel engines". *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 8, No. 2, pp. 288–299, 2000.
- [Kalm 60a] R. E. Kalman. "Contributions to the theory of optimal control". *Bulletin de la Société Mathématique de Mexicana*, Vol. 5, pp. 102–119, 1960.
- [Kalm 60b] R. E. Kalman. "A new approach to linear filtering and prediction problems". *Transactions of ASME Journal of Basic Engineering*, Vol. 87, pp. 35–45, 1960.
- [Kao 95] M. Kao & J. J. Moskwa. "Turbocharged Diesel engine modelling for nonlinear engine control and state estimation". *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 117, No. 1, pp. 20–30, 1995.
- [Kolm 97] I. Kolmanovsky, P. E. Moraal, M. van Nieuwstadt & A. Stefanopoulou. "Issue in modelling and control of intake flow in variable geometry turbocharged engines". *18th IFIP Conference on System Modelling and Optimisation*, 1997.

-
- [Koth 96] M. Kothare, V. Balakrishnan & M. Morari. "Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities". *Automatica*, Vol. 32, No. 10, pp. 1361–1379, 1996.
- [Kwon 77] W. H. Kwon & A. E. Pearson. "A modified quadratic cost problem and feedback stabilization of a linear system". *IEEE Trans.*, Vol. AC-22, No. 5, pp. 838–842, 1977.
- [Lall 94] S. Lall & K. Glover. *A game theoretic approach to moving horizon control*. Oxford University Press, 1994.
- [Lee 67] E. B. Lee & L. Markus. *Foundations of optimal control theory*. Wiley, 1967.
- [Lu 95] P. Lu. "Optimal predictive control for continuous nonlinear systems". *International Journal of Control*, Vol. 62, No. 3, pp. 633–649, 1995.
- [Magn 01a] L. Magni, G. de Nicolao, R. Scattolini & F. Allgöwer. "Robust receding horizon control for nonlinear discrete-time systems". *Proceedings of the 15th IFAC World Congress, Barcelona, Spain*, 2001.
- [Magn 01b] L. Magni, H. Nijmeijer & A. J. van der Schaft. "A receding horizon approach to the nonlinear H_∞ control problem". *Automatica*, Vol. 37, No. 5, pp. 429–435, 2001.
- [Magn 97] L. Magni & L. Sepulchre. "Stability margins of nonlinear receding-horizon control via inverse optimality". *Systems and Control Letters*, Vol. 32, pp. 241–245, 1997.
- [Marq 98] P. Marquis & J. P. Broustail. "SMOC, a bridge between state space and model predictive controllers : application to the automation of a hydrotreating unit". *Proceedings of the 1988 IFAC workshop on model based process control*, pp. 37–43, 1998.
- [Mayn 00] D. Q. Mayne, J. B. Rawlings, C. V. Rao & P. O. M. Scokaert. "Constrained model predictive control : stability and optimality". *Automatica*, Vol. 26, No. 6, pp. 789–814, 2000.
- [Mayn 90] D. Q. Mayne & H. Michalska. "Receding horizon control of nonlinear systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 35, No. 7, pp. 814–824, 1990.
- [Mayn 97] D. Q. Mayne. "Nonlinear model predictive control : an assessment. In J. C. Kantor, C.E. Garcia & B. Carnahan (Eds)". *Fifth International Conference on Chemical Process Control, CACHE, AIChE*, pp. 217–231, 1997.
- [Mich 93] H. Michalska & D. Q. Mayne. "Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 38, No. 11, pp. 1623–1633, 1993.
- [Mrab 04] M. Mrabet, F. Fnaiech & K. Al-Haddad. "Nonlinear predictive adaptive controllers for nonlinear systems". *IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, Vol. 1, pp. 453–458, 2004.
- [Nijm 90] H. Nijmeijer & A. J. van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer Verlag, New York, 1990.
- [Oben 90] T. Obenga. *La philosophie africaine de la période pharaonique 2780-330 avant notre ère*. L'Harmattan, 1990.
- [Oben 95] T. Obenga. *La géométrie égyptienne*. L'Harmattan/Khepera, 1995.
- [Onya 09] S. O. Onyango, Y. Hamam, M. Dabo, K. Djouani & G. Qi. "Dynamic Control of an Electrical Wheelchair on an Incline". *Proceedings of the IEEE AFRICON, Nairobi, Kenya*, 2009.
- [Pete 84] V. Peterka. "Predictor-based self-tuning control". *Automatica*, Vol. 20, pp. 39–50, 1984.

- [Pier 95] D. A. Pierre & J. W. Pierre. "Digital controller design-alternative emulation approaches". *ISA Trans.*, Vol. 34, No. 3, pp. 219–228, 1995.
- [Plia 07] A. Plianos, A. Achir, R. Stobart, N. Langlois & H. Chafouk. "Dynamic feedback linearization based control synthesis of the turbocharged diesel engine". *Proceedings of American Control Conference*, pp. 4407–4412, 2007.
- [Pret 79] D. M. Prett & R. D. Gillette. "Optimization and constrained multivariable control of a catalytic cracking unit". *AIChE National meeting, Houston, Texas; also Proceedings joint Automatic Control Conference, San Francisco, California*, 1979.
- [Prop 63] A. I. Propoi. "Use of LP methods for synthesizing sampled-data automatic systems". *Automn Remote Control*, Vol. 24, No. 7, pp. 837–844, 1963.
- [Qin 03] S. J. Qin & T. A. Badgwell. "A survey of industrial model predictive control technology". *Control Engineering Practice*, Vol. 11, pp. 733–764, 2003.
- [Ratt 89] K. S. Rattan. "Compensating for computational delay in digital equivalent of continuous control systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, pp. 895–899, 1989.
- [Rawl 93] J. B. Rawlings & K. R. Muske. "The stability of constrained receding horizon control". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 38, No. 10, pp. 1512–1516, 1993.
- [Rich 76] J. Richalet, A. Rault, J. L. Testud & J. Papon. "Algorithmic control of industrial processes". *Proceedings of the Fourth IFAC symposium on identification and system parameter estimation*, pp. 1119–1167, 1976.
- [Rich 78] J. Richalet, A. Rault, J. L. Testud & J. Papon. "Model predictive heuristic control : Application to industrial processes". *Automatica*, Vol. 14, pp. 413–428, 1978.
- [Ronc 99] E. Ronco, T. Arsan & P. J. Gawthrop. "Open-loop intermittent feedback control : Practical continuous-time GPC". *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, Vol. 146, No. 5, pp. 426–434, 1999.
- [Rust 94] B. Rustem. "Stochastic and robust control of nonlinear economic systems". *European Journal of Operational Research*, Vol. 73, pp. 304–318, 1994.
- [Scok 99] P. O. M. Scokaert, D. Q. Mayne & J. B. Rawlings. "Suboptimal model predictive control (feasibility implies stability)". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, No. 3, pp. 648–654, 1999.
- [Setp 93] Setpoint & I. SMC-IDCOM. "A state-of-the-art multivariable predictive controller". *Product literature from Setpoint, Inc.*, October 1993.
- [Sill 08] I. I. Siller-Alcalá, J. Jaimes-Ponce & R. Alcántara-Ramírez. "Output feedback model predictive control for nonlinear systems". *WSEAS Trans. Sys. Ctrl.*, Vol. 3, No. 12, pp. 983–991, 2008.
- [Sill 98] I. I. Siller-Alcalá. *Nonlinear Continuous Time Generalized Predictive Control*. Thèse de doctorat, Glasgow University, Faculty of Engineering, 1998. (Supervised by P.J. Gawthrop).
- [Some 05] Y. Somet. *L'Afrique dans la philosophie : Introduction à la philosophie africaine pharaonique*. KHEPERA, 2005.
- [Soro 97] M. Soroush & H. M. Soroush. "Input-output linearising nonlinear model predictive control". *International Journal of Control*, Vol. 68, No. 6, pp. 1449–1473, 1997.

-
- [Tran 04] Transport & E. E. Federation. "Euro V and euro VI emission standards, european Union". March 2004.
- [Tuff 85] P. S. Tuffs & D. W. Clarke. "Self-tuning control of offset : a unified approach". *IEE Proceedings, Part D - Control Theory and Applications*, Vol. 132, No. 3, pp. 100–110, 1985.
- [Umwe 03] Umweltbundesamt. "Future Diesel : Exhaust gas legislation for passengers cars, light-duty commercial vehicles and heavy-duty vehicle - updating of limit values for diesel vehicle". No. :, Federal Environmental German Agency, July 2003.
- [Wang 06] Z. Wang, Z. Chen, Q. Sun & Z. Yuan. "Robust Stability Analysis of CGPC". *Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation, China*, pp. 324–328, 2006.
- [Wats 77] N. Watson & N. Marzouk. "A nonlinear digital simulation of turbocharged Diesel engines under transient conditions". *SAE paper*, No. 770123, 1977.
- [Wats 84] N. Watson. "Dynamic turbocharged Diesel engine simulator for electronic control system development". *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 106, 1984.
- [Well 67] D. A. Wells. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Lagrangian Dynamics : With a Treatment of Euler's Equations of Motion, Hamilton's Equations and Hamilton's Principle*. 1st edition Ed., 1967.
- [Wiss 97] D. von Wissel, R. Nikoukhah, S. L. Campbell & F. Delebecque. "Effects of computational delay in descriptor-based trajectory tracking control". *International Journal of Control*, Vol. 67, No. 2, pp. 251–273, 1997.
- [Ydst 84] B. E. Ydstie. "Extended horizon adaptive control". *9th World Congress of the IFAC, Budapest, Hungary*, 1984.
- [Yous 91] C. Yousfi & R. Tournier. "Steady-state optimization inside model predictive control". *Proceedings of American Control Conference*, pp. 1866–1870, 1991.
- [Zade 62] L. A. Zadeh & B. H. Whalen. "On optimal control and linear programming". *IRE Trans. Aut. Control*, Vol. 7, No. 4, pp. 45–46, 1962.
- [Zava 06] V. M. Zavala, C. D. Laird & L. Biegler. "Fast solvers and rigorous models : can both be accomodated in NMPC?". *Proceedings of the first IFAC Workshop on Nonlinear Model Predictive Control for Fast Systems NMPC-FS'06*, pp. 97–109, 2006.

*Le véritable Maître, pour grandir et faire grandir son
élève, accepte les questions pointues de ce dernier.
Celui ou celle qui n'a pas compris cela, n'est pas digne
d'un vrai et véritable Maître.*

Rouen (France) le 12/06/2010,

Marcelin Dabo

*Rendez grâce au Seigneur : Il est bon !
Eternel est son amour !
Psaume 118 : 28.*

Résumé : Nous abordons, dans cette thèse, la poursuite asymptotique de trajectoire basée sur la commande prédictive généralisée non linéaire à temps continu (NCGPC). L'application de cette technique de commande requiert la vérification d'assumptions précises. La NCGPC est caractérisée par deux paramètres : le degré relatif et l'horizon de prédiction, respectivement, intrinsèque et extrinsèque au système. Sa loi de commande résulte de la minimisation d'un critère quadratique basée sur l'erreur de prédiction (jusqu'à un ordre égal au degré relatif) entre la(es) sortie(s) choisie(s) et le(es) signal(aux) de référence correspondant(s). Elle linéarise le système non linéaire en boucle fermée dans un nouvel espace de coordonnées et lui garantit la stabilité (degré relatif inférieur ou égal à quatre) de facto. Au-delà de quatre, il y a instabilité. Pour résoudre ce problème, Chen *et al.* ont introduit un troisième paramètre, qui est l'ordre des dérivées successives de la commande par rapport au temps, choisi de sorte que sa différence avec le degré relatif soit inférieure à quatre. Nous proposons dans ce travail, deux approches qui vérifient les mêmes assumptions mentionnées ci-dessus et dont les points communs sont la modification du critère avec le maintien à zéro de l'ordre des dérivées successives de la commande et la garantie de la stabilité pour le système linéaire bouclé résultant. La première approche consiste au rajout d'un terme linéaire en commande au critère, tandis que la deuxième consiste au rajout d'une matrice de correction "intelligente" à la matrice de prédiction du critère. Quelques propriétés de la NCGPC sont données pour des systèmes SISO de degré relatif un ou deux.

Mots-clés : Commande prédictive, système continu (degré relatif), non minimum de phase, correction linéaire, correction matricielle intelligente, moteur Diesel turbocompressé, EGR-VGT, chaise roulante électrique.

Abstract: We address through this thesis asymptotic output tracking based on nonlinear continuous-time generalized predictive control (NCGPC). Some specific assumptions are necessary for the application of this control design method. NCGPC has two parameters that are the relative degree and the prediction horizon time which are, respectively, intrinsic and extrinsic to the nonlinear system. Its control law is derived from the minimization of a quadratic criterion based on the prediction error (up to an order equal to the relative degree) between the chosen output(s) and their corresponding reference signal(s). This control law leads to a linear closed-loop system with a guaranteed stability for a relative degree less than or equal to four. Beyond four, instability occurs. To avoid this issue, Chen *et al.* introduce as a third parameter the order r of the successive derivatives of the control with respect to time, chosen so that its difference in relation to the relative degree must be less than four. We propose, in this work, two approaches verifying the above assumptions, having in common the modification of the criterion while keeping parameter r equal to zero with guaranteed closed-loop stability (for a relative degree greater than four). The first approach consists in adding a linear term with respect to the control to the criterion while the second consists in adding to the prediction matrix of the criterion an "intelligent" matrix of correction (it vanishes when correction is not necessary). Important properties are presented for SISO nonlinear systems of relative degree one or two.

Keywords: Predictive control, continuous-time (relative degree), non-minimum phase, linear correction, intelligent matrix correction, turbocharged Diesel engine, EGR-VGT, Electric wheelchair.

