Commande Prédictive Non linéaire à temps continu des Systèmes Complexes

Par Marcelin Dabo

le 12 Mai 2010

Université de Rouen
Institut de Recherche en Systèmes Electroniques EMbarqués (IRSEEM) - EA 4353

Directeur de Thèse: Houcine Chafouk
Co-encadrement: Nicolas Langlois

Sagesse Africaine

La parole est tout.
Elle coupe, écorche.
Elle modèle, module.
Elle perturbe, rend fou.
Elle guérit ou tue net.
Elle amplifie, abaisse selon sa charge.
Elle excite ou calme les âmes.

Tradition bambara.

Plan

1. Introduction
2. Etat de l'art sur la commande prédictive
3. Comm. Préd. Gén. Non linéaire à temps continu (NCGPC)
4. Linéarisation E/S par retour d'état (FL)
5. Etude comparative NCGPC/FL et applications
6. Conclusion et perspectives

Pourquoi commander des systèmes?

- les **amener** (si possible) à un **état accessible** que nous **désirons**
  - consignes à suivre
- en prenant (si possible) toutes les **dispositions**
  - stabilité
  - robustesse
  - limites physiques du système
  - limites de l'actionneur
  - contraintes environnementales
  - ...

1 Introduction

2 Etat de l'art sur la commande prédictive

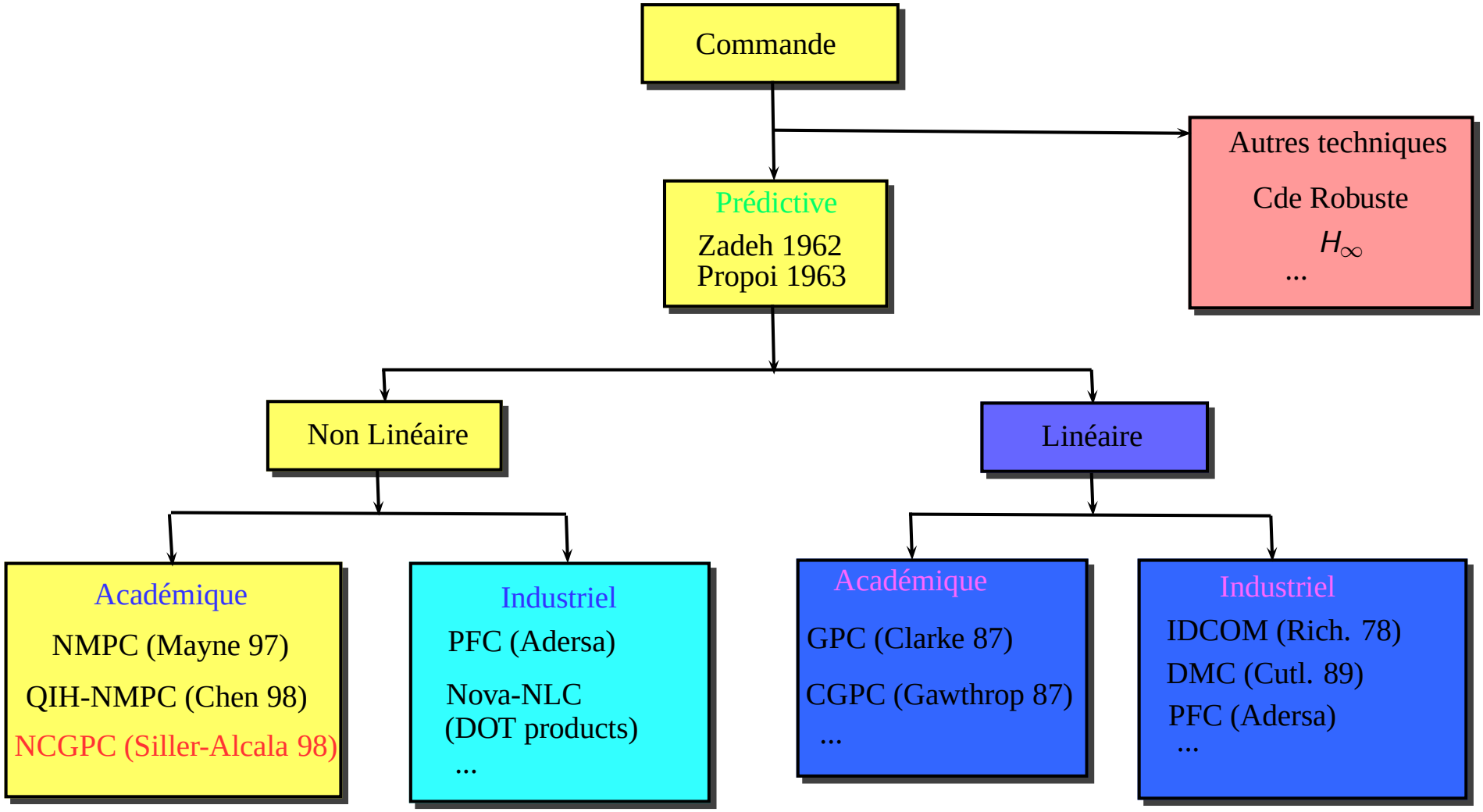
3 Comm. Préd. Gén. Non linéaire à temps continu (NCGPC)

4 Linéarisation E/S par retour d'état (FL)

5 Etude comparative NCGPC/FL et applications

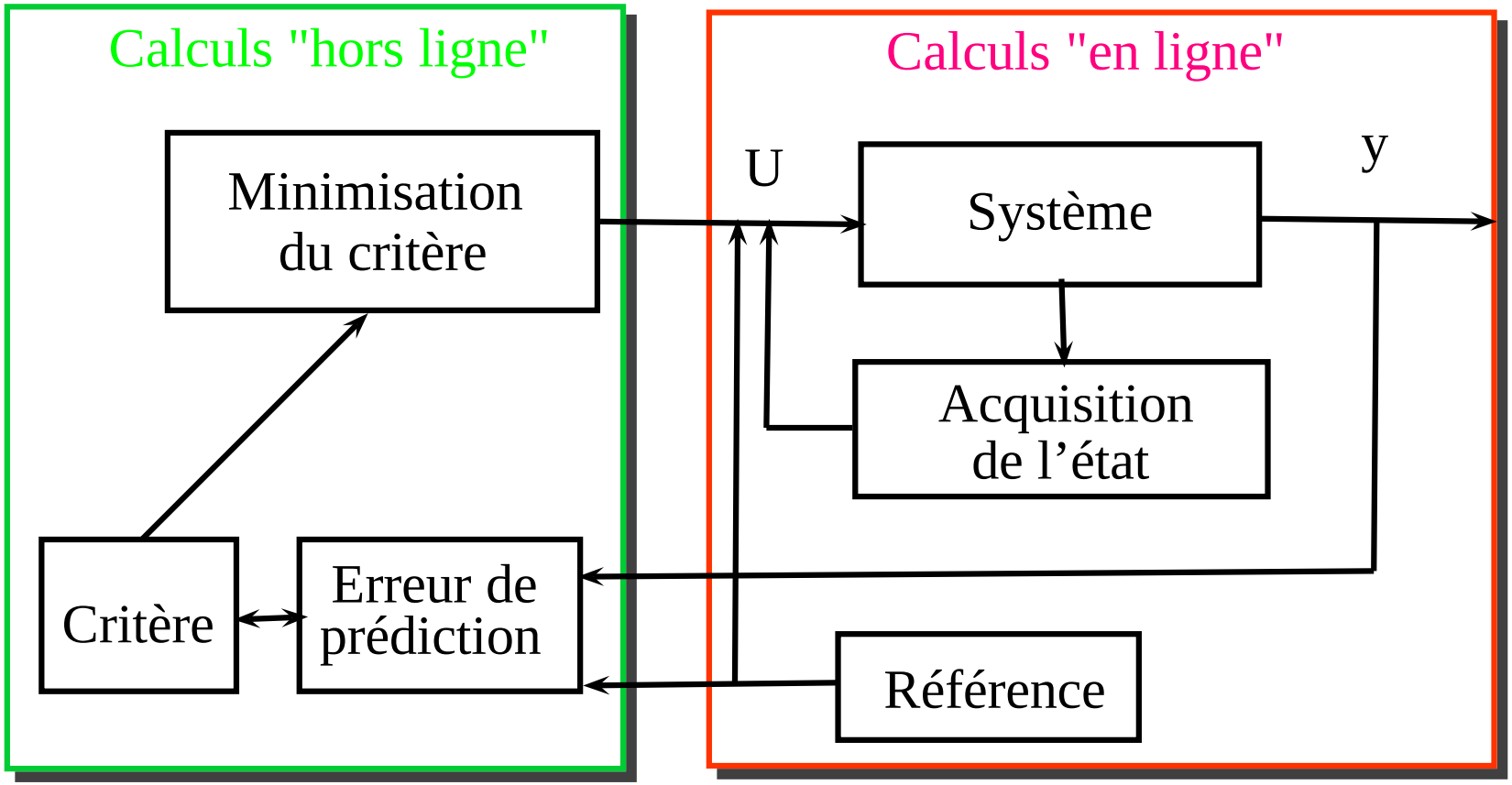
6 Conclusion et perspectives

Etat de l'art sur la commande prédictive



Etat de l'art sur la commande prédictive

- **Schéma de principe de la NCGPC**



1 Introduction

2 Etat de l'art sur la commande prédictive

3 Comm. Préd. Gén. Non linéaire à temps continu (NCGPC)

4 Linéarisation E/S par retour d'état (FL)

5 Etude comparative NCGPC/FL et applications

6 Conclusion et perspectives

Comm. Préd. Gén. Non linéaire à temps continu

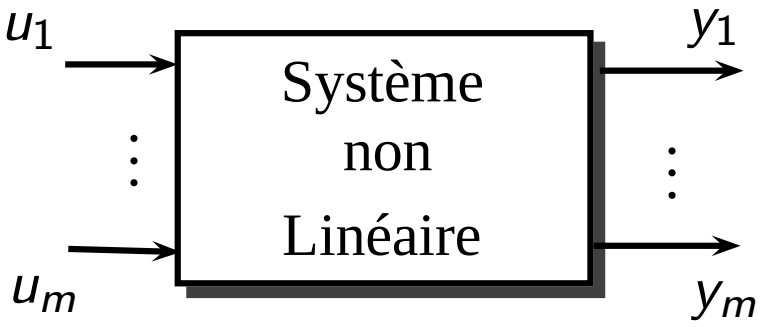
- **Pourquoi NCGPC ?**
  - Commande: permet la commande d'une classe de systèmes
  - Prédictive: s'appuie sur le développement en séries de Taylor
  - Généralisée: pilote une classe de systèmes affines en contrôle
  - Non linéaire: pilote une classe de systèmes non linéaires
  - à temps continu: pas de discrétisation des systèmes étudiés

NCGPC: problèmes et objectifs

- **Problèmes**

Système non linéaire SISO

Système non linéaire MIMO



- **Objectifs**

Poursuite de trajectoire

Loi de commande optimale

Stabilité garantie

NCGPC cas SISO: principes de base ($\rho \leq 4$)

- **Assomptions**
- Conditions d'élaboration de la loi de commande NCGPC: [1]
  - $A1$: la dynamique des zéros existe et est asymptotiquement stable;
  - $A2$: tous les états sont mesurables;
  - $A3$: le système étudié a un degré relatif ρ bien défini;
  - $A4$: la sortie $y(t)$ et le signal de référence $\omega(t)$ sont suffisamment plusieurs fois continument différentiables par rapport au temps.[2]

[1] W. H. Chen "Analytic predictive controllers for nonlinear systems with ill-defined relative degree". Proc.-Control Theory Appl., Vol. 148, No. 1, 2001.

[2] H. Nijmeijer and A. J. van der Schaft. Nonlinear Dynamical Control Systems. New York, 1990.

NCGPC cas SISO: principes de base ($\rho \leq 4$)

- **Elaboration de la loi de commande**

$$J(t) = \frac{1}{2}E^t(t)\Pi(T,\rho)E(t) \quad \text{avec} \quad \Pi(T,\rho) = \int_0^T \Lambda^t(\tau)\Lambda(\tau)d\tau$$

$$\frac{\partial J}{\partial u} = \left(\frac{\partial E(t)}{\partial u(t)}\right)^t \Pi(T,\rho)E(t) = 0$$

$$\boxed{u(x(t)) = \frac{-\sum_{l=0}^{\rho} K_{\rho l}(T,\rho)\left[L_f^l h(x(t)) - \omega^{(l)}(t)\right]}{L_g L_f^{\rho-1} h(x(t))}}$$

avec

$$K_{\rho l} = \frac{\rho!}{T^{\rho-l}} \frac{(2\rho+1)}{l!(\rho+l+1)} \quad \text{pour tout} \quad 0 \leq l = j-1 \leq \rho$$

et $K_{\rho\rho} = 1$ pour tout ρ.

NCGPC cas SISO: principes de base ($\rho \leq 4$)

- **Analyse de stabilité en boucle fermée**
  - **Nouvelles coordonnées et nouveau système**

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{\rho-1} \\ z_\rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - \omega \\ \dot{y} - \dot{\omega} \\ \vdots \\ y^{(\rho-2)} - \omega^{(\rho-2)} \\ y^{(\rho-1)} - \omega^{(\rho-1)} \end{bmatrix} \Rightarrow \sum : \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_{\rho-1} = z_\rho \\ \dot{z}_\rho = L_f^\rho h - \omega^{(\rho)} + u L_g L_f^{\rho-1} h \end{cases}$$

  - **Système linéarisé**

$$\begin{matrix} \dot{Z} = A_\rho Z \\ O = C_\rho Z \end{matrix} \quad \text{avec} \quad P_{\rho T}(\lambda) = \sum_{l=0}^{\rho} K_{\rho l}(T, \rho)\lambda^l = 0$$

où

$$A_\rho = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline -K_{\rho 0} & -K_{\rho 1} & -K_{\rho 2} & \cdots & -K_{\rho(\rho-1)} \end{array}\right] \quad et \quad C_\rho = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

NCGPC cas SISO: principes de base ($\rho \leq 4$)

- **Analyse de stabilité en BF: propriétés**

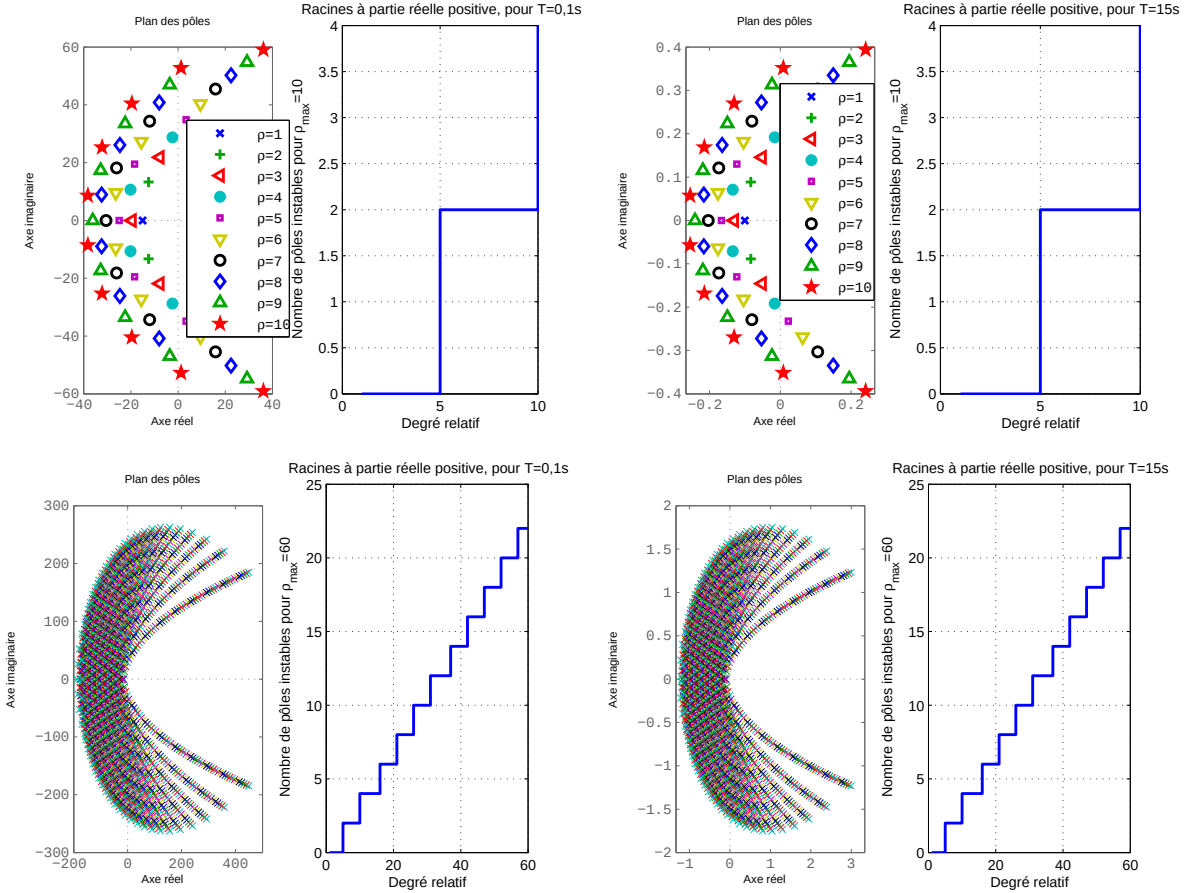
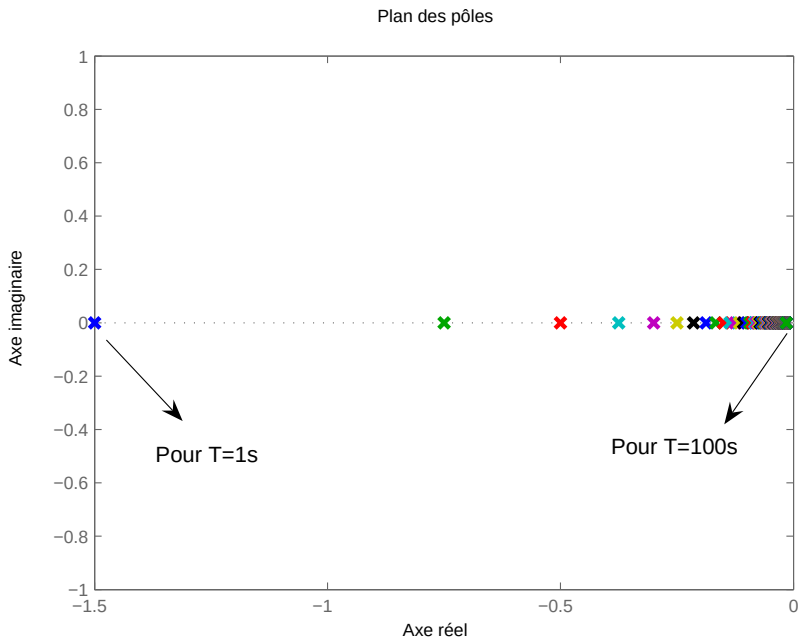


Figure: Position des pôles et nombre de pôles instables $T = 0.1$s, et $T = 15$s avec $1 \leq \rho \leq 10$ (en haut) et $1 \leq \rho \leq 60$ (en bas).

NCGPC cas SISO: propriétés ($\rho \leq 4$)

- ♡ **Propriétés de système SISO avec** $\rho = 1$ ♡

$$P_{1T}(\lambda) = K_{10} + \lambda \equiv 1 + \theta p \Rightarrow \boxed{\lambda = -\frac{1.5}{T}}$$



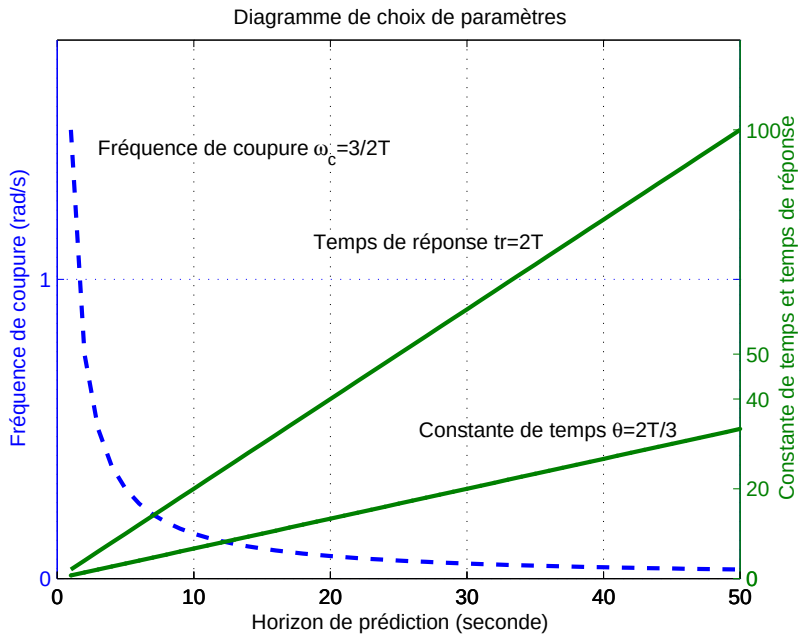


Figure: Position des pôles et diagramme de choix de paramètres.

NCGPC cas SISO: propriétés ($\rho \leq 4$)

- ♡ **Propriétés de système SISO avec $\rho = 1$: illustration** ♡

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x^2 + u \\ y = x \end{cases} \quad \text{avec} \quad \text{pour} \quad T = 1s \Rightarrow K_1 = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \end{bmatrix}$$

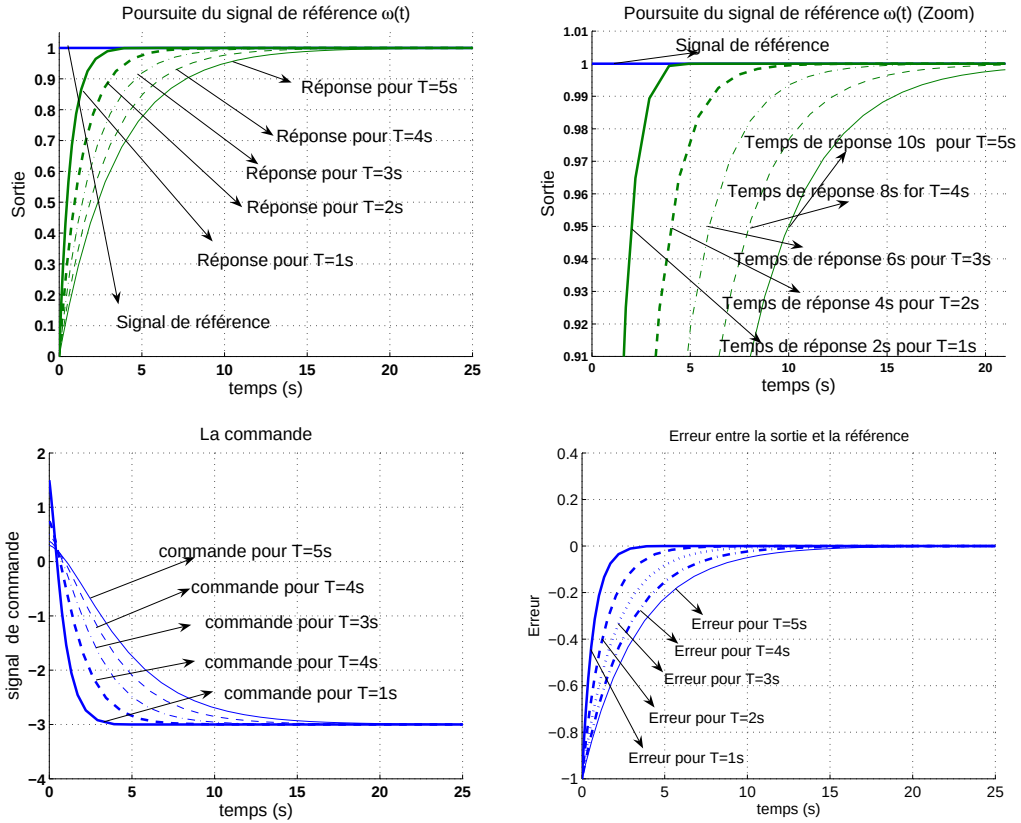


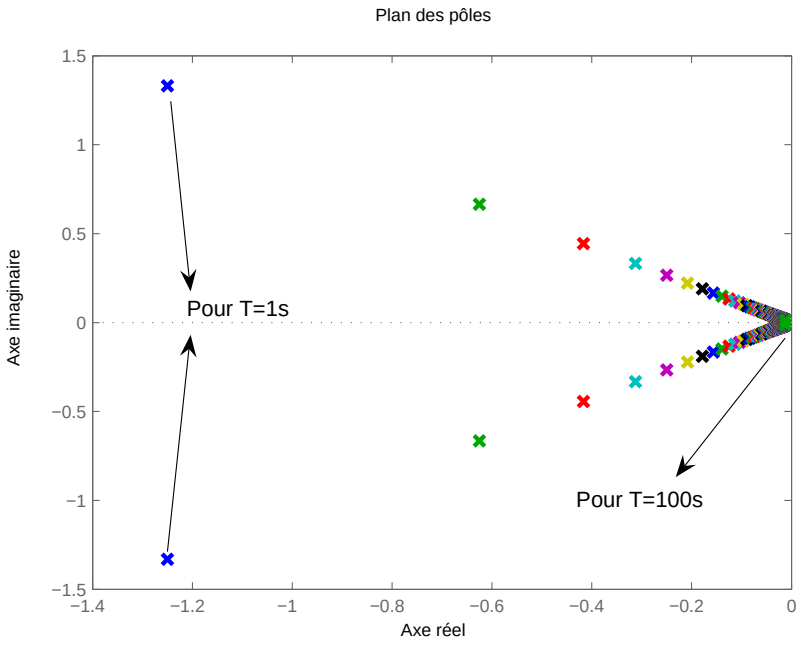
Figure: NCGPC: signaux de poursuite, d'erreur et de commande.

NCGPC cas SISO: propriétés ($\rho \leq 4$)

- **Propriétés de système SISO avec $\rho = 2$**

$$P_{2T}(\lambda) = K_{20} + K_{21}\lambda + \lambda^2 \equiv p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2 \Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2} \simeq -\frac{1}{T}(1.25 \pm 1.33j)}$$

$$\boxed{\xi \simeq 0.685 \quad Q \simeq 1 \quad d = 5.21\%}$$



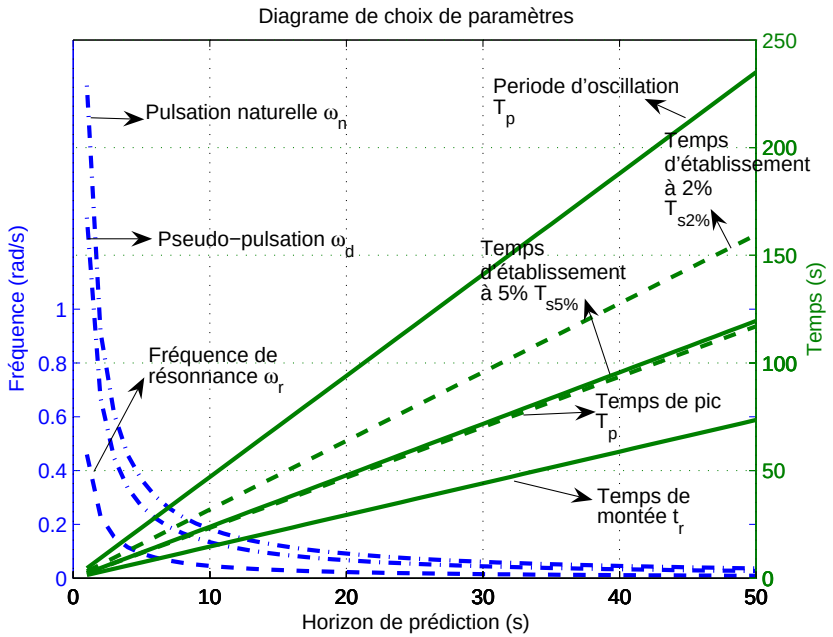
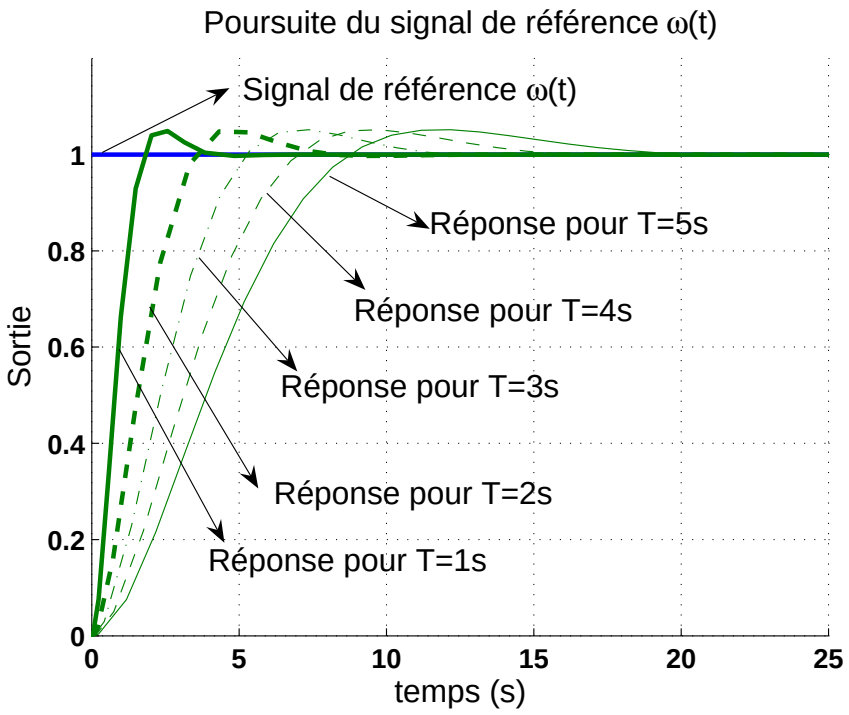


Figure: Position des pôles et diagramme de choix de paramètres.

NCGPC cas SISO: propriétés ($\rho \leq 4$)

- **Propriétés de système SISO avec $\rho = 2$: illustration**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1^2 - 3u \\ y(t) = x_1 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \text{pour} \quad T = 1s \Rightarrow K_2 = \begin{bmatrix} 3.33 & 2.5 & 1 \end{bmatrix}$$



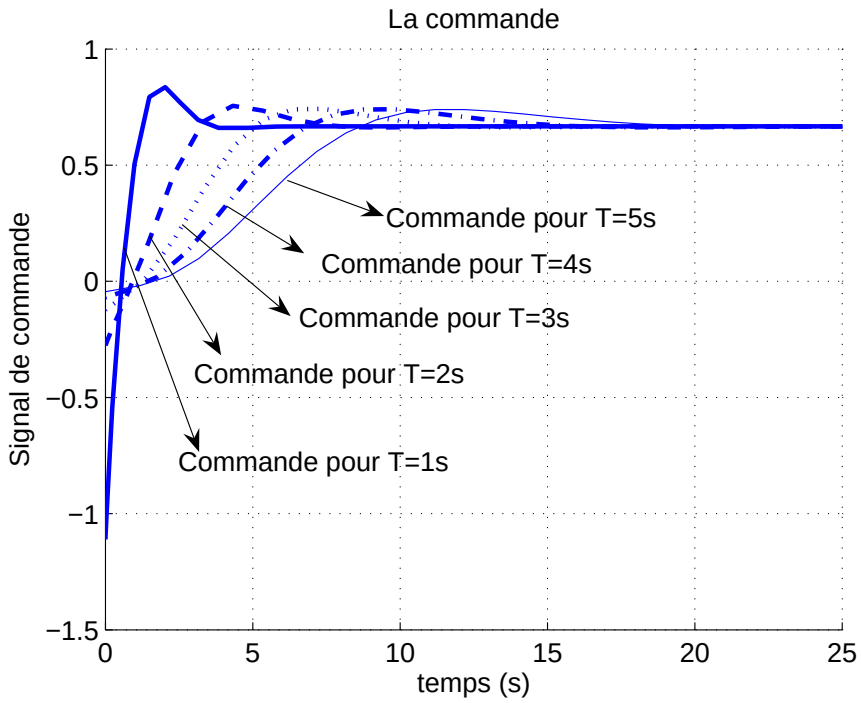


Figure: NCGPC: signaux de poursuite, de commande et d'erreur.

NCGPC cas SISO: correction de Chen ($\rho > 4$)

- Stabilisation de systèmes avec $\rho > 4$ (Chen *et al.*[3])

Table: Table de stabilité du système bouclé en fonction de ρ et r ($+$: stable; $-$: instable)

ρ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r = 0$	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-
$r = 1$	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-
$r = 2$	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
$r = 3$	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-
$r = 4$	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-
$r = 5$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-
$r = 6$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$r = 7$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

[3] W. H. Chen "Optimal control of nonlinear systems : a predictive control approach". Automatica, Vol. 39, No. 1, 2003.

NCGPC cas SISO: correction linéaire ($\rho > 4$)

- **Théorème: correction linéaire de la NCGPC**
  - **Critère linéairement corrigé**

$$J_v = \frac{1}{2}\int_0^T [\hat{e}(t+\tau)]^2 d\tau + \mathbf{Gvu}$$

  - **Loi de commande et système linéarisé**

$$\boxed{u(x(t)) = \frac{-\sum_{l=0}^{\rho} K_{\rho l}\left[L_f^l h(x(t)) - \omega^{(l)}(t)\right]}{L_g L_f^{\rho-1} h(x(t))} + \frac{v}{L_g L_f^{\rho-1} h(x(t))}}$$

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= A_\rho^{cl} Z + B_\rho^{cl} v \\ O &= C_\rho^{cl} Z \end{aligned} \quad \text{Commandable et Observable}$$

$$\text{avec} \quad A_\rho^{cl} = A_\rho, \quad C_\rho^{cl} = C_\rho \quad \text{et} \quad B_\rho^{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^t$$

$$\boxed{v = -LZ = -\sum_{l=0}^{\rho-1} L_l \left[L_f^l h(x) - \omega^{(l)}\right]}$$

NCGPC cas SISO: correction linéaire ($\rho > 4$)

- **Analyse de stabilité en boucle fermée**
  - **Placement de pôles**

$$\dot{Z} = A_\rho^{cl} Z - B_\rho^{cl} L Z \Rightarrow \dot{Z} = (A_\rho^{cl} - B_\rho^{cl} L) Z$$

  - **Conditions de stabilité**
    - Fixer la matrice des pôles désirés P
    - Choisir L: les valeurs propres de $A_\rho^{cl} - B_\rho^{cl} L$ soient les éléments de P
  - **Inconvénient:** perte du caractère prédictif de la loi de commande
  - **Avantage:** possibilité de stabiliser le système bouclé en tout point de l'espace accessible

NCGPC cas SISO: correction linéaire ($\rho > 4$)

- **Correction linéaire de la NCGPC: illustration ($\rho = 5$)**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + x_1^2 \\ \dot{x}_3 = x_4 - x_2 \\ \dot{x}_4 = x_5 - x_1 \\ \dot{x}_5 = x_2 - 3u \\ \dot{x}_6 = x_5 - x_6 \end{cases} \quad \text{et} \quad y = h(x) = x_1 \quad \text{avec}$$

$$K \cong \begin{bmatrix} 2.2 & 0.19 & 82.10^{-4} & 2.10^{-4} & 0 & 1.10^{-7} \end{bmatrix} * 10^7$$

$$P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 & -4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$L \cong \begin{bmatrix} -2.2 & -0.19 & -82.10^{-4} & -2.10^{-4} & 0 \end{bmatrix} * 10^7$$

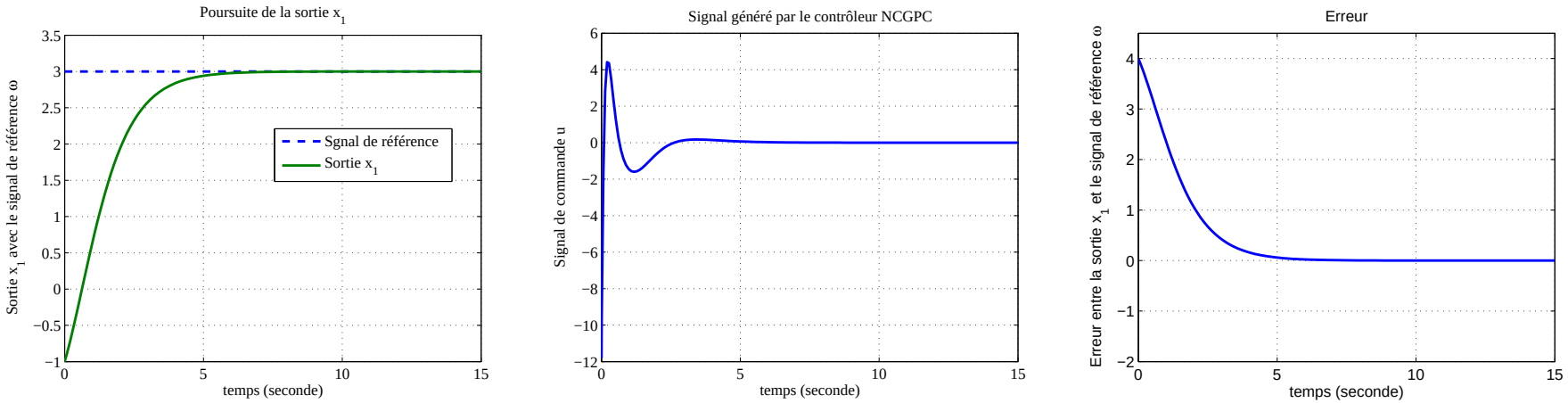


Figure: NCGPC avec correction linéaire: sortie, commande et erreur.

NCGPC cas SISO: correction matricielle

- **Théorème: correction matricielle de la NCGPC**
  - **Critère matriciellement corrigé**

$$J_c(t) = \frac{1}{2} E^t(t) \Pi^c(T,\rho) E(t)$$

où $\Pi_c = \left[\begin{array}{c|c} \Pi_{(m,n)}(T,\rho) & \Pi_{(m,\rho+1)}(T,\rho) \\ \hline \Pi_{sn}(T,\rho) + \Pi_{ss}(T,\rho) M_p & \Pi_{ss}(T,\rho) + \Pi_{ss}(T,\rho) M_{\rho+1} \end{array}\right]$ avec

$1 \leq m, n, p \leq \rho$

  - **Loi de commande et système linéarisé**

$$\boxed{u(x(t)) = \frac{-\sum_{l=0}^{\rho} K_{\rho l}^c(T,\rho)\left[L_f^l h(x(t)) - \omega^{(l)}(t)\right]}{L_g L_f^{\rho-1} h(x(t))}}$$

avec $K_{\rho l}^c = K_{\rho l} + M_l \quad \forall \quad 0 \leq l \leq \rho \quad et \quad K_{\rho\rho}^c = K_{\rho\rho} = 1 \; M_\rho = 0 \quad \forall \quad \rho$

$$\begin{cases} \dot{Z} = A_\rho^c Z \\ O = C_\rho^c Z \end{cases}$$

Observable avec $C_\rho^c = C_\rho$

NCGPC cas SISO: correction matricielle

- **Analyse de stabilité en boucle fermée**
  - **Préliminaires**
    - Considérer la matrice B:
      $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^t_{\rho \times 1}$
    - Construction de la matrice Ω
      conserver tous les pôles à partie réelle négative,
      prendre le minimum de la partie réelle de tous les pôles,
      le rajouter à chacun des pôles instables,
      si le résultat est négatif, le garder ainsi,
      sinon, le forcer à être négatif en lui affectant un signe moins.
  - **Conditions de stabilité**
    Les valeurs propres de $A^c_\rho - BM$ sont les éléments de Ω
  - **Inconvénient:** limite par rapport au degré relatif ($\rho \leq 40$)
  - **Avantage:** conservation du caractère prédictif de la loi de commande

Dilemme du Caméléon

NCGPC cas SISO: correction matricielle

- **Analyse de stabilité en boucle fermée**

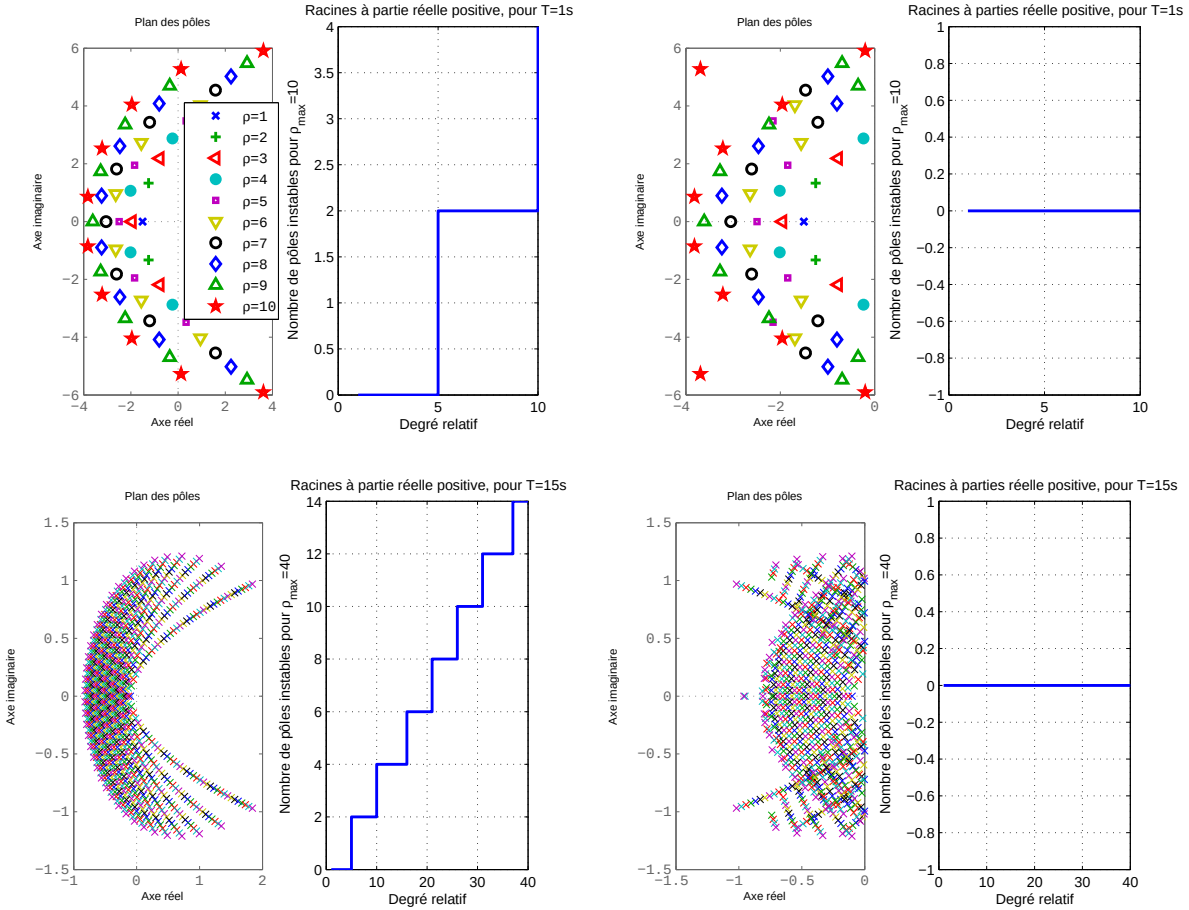


Figure: NCGPC avec correction matricielle: $1 \leq \rho \leq 10$ et $T = 1$s (en haut); $1 \leq \rho \leq 40$ et $T = 15$s (en bas).

NCGPC cas SISO: correction matricielle

- **Correction matricielle: illustration** ($\rho = 5$)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + x_1^2 \\ \dot{x}_3 = x_4 - x_2 \\ \dot{x}_4 = x_5 - x_1 \\ \dot{x}_5 = x_2 - 3u \\ \dot{x}_6 = x_5 - x_6 \end{cases} \quad \text{et } y = x_1 \quad ; \quad \begin{array}{l} \Omega \simeq \begin{bmatrix} -1.8+2i; & -1.8-2i; & -2,5; & -2.2+3.5i; & -2.2-3.5i \end{bmatrix} \\ M \simeq \begin{bmatrix} 81 & 164 & 110 & 35 & 5 \end{bmatrix} \\ K^c \simeq \begin{bmatrix} 301 & 353 & 193 & 59 & 11 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

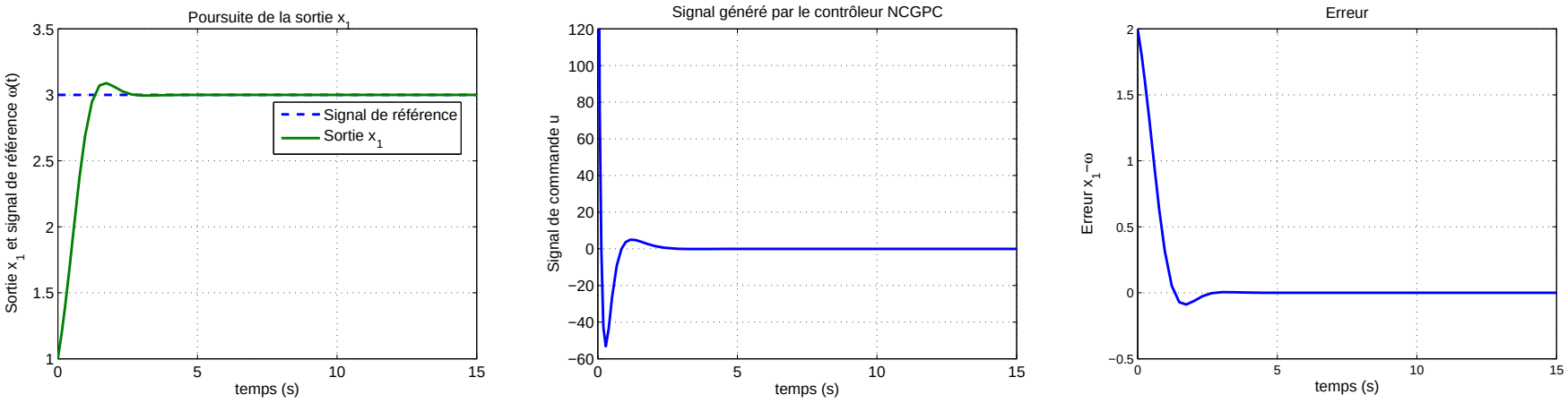


Figure: NCGPC avec correction matricielle: sortie, commande et erreur.

NCGPC cas MIMO: principes de base

- **Construction du critère**

$$J_m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left\{\int_0^{T_i}[\hat{e}_i(t+\tau)]^2 d\tau\right\}$$

T_i horizon de prédiction de la sortie h_i, t instant présent, $t+\tau \in [t, t+T_i]$,

$\hat{e}_i(t+\tau)$ développement en séries de Taylor en τ (prédiction) de l'erreur e_i.

- **Elaboration de la loi de commande**

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}_{m\times 1} = -D_{m\times m}^{-1}\begin{bmatrix} K_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & K_m \end{bmatrix}_{m\times[\sum_{i=1}^{m}(\rho_i+1)]}\begin{bmatrix} h_1-\omega_1 \\ \vdots \\ L_f^{\rho_1}h_1-\omega_1^{(\rho_1)} \\ \hline \vdots \\ \hline h_m-\omega_m \\ \vdots \\ L_f^{\rho_m}h_m-\omega_m^{(\rho_m)} \end{bmatrix}_{[\sum_{i=1}^{m}(\rho_i+1)]\times 1}$$

NCGPC cas MIMO: principes de base

- **Analyse de stabilité en boucle fermée**
  - **Nouvelles coordonnées et nouveaux sous-sytèmes**

$$Z^i = \begin{bmatrix} z_1^i \\ \vdots \\ z_{\rho_i}^i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1^i = z_2^i \\ \vdots \\ \dot{z}_{\rho_i}^i = L_f^{\rho_i} h_i - \omega_i^{(\rho_i)} + \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_i - 1} h_i & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_i - 1} h_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \end{cases}$$

  - **Equations contenant le vecteur de contrôle**

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{\rho_1}^1 \\ \vdots \\ \dot{z}_{\rho_m}^m \end{bmatrix}_{m\times 1} = \begin{bmatrix} L_f^{\rho_1} h_1 - \omega_1^{(\rho_1)} \\ \vdots \\ L_f^{\rho_m} h_m - \omega_m^{(\rho_m)} \end{bmatrix}_{m\times 1} + D(x)_{m\times m} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

  - **Sous-système $\sum_i$ bouclé**

$$\begin{cases} \dot{Z}^i = A_{\rho_i}^i Z^i \\ O^i = C_{\rho_i}^i Z^i \end{cases} \qquad A_{\rho_i}^i = \left[\begin{array}{c|ccc} 0_{(\rho_i-1)\times 1} & & Id_{(\rho_i-1)\times(\rho_i-1)} & \\ \hline -K_{\rho_i 0} & -K_{\rho_i 1} & \cdots & -K_{\rho_i(\rho_i-1)} \end{array} \right]$$

$$C_{\rho_i}^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

NCGPC cas MIMO: principes de base

- **Illustration: système (1) avec** $(\rho_1, \rho_2) = (5, 1)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + x_1^2 \\ \dot{x}_3 = x_4 - x_2 \\ \dot{x}_4 = x_5 - x_1 \\ \dot{x}_5 = x_2 - 3u_1 + 4u_2 \\ \dot{x}_6 = x_5 - 2u_1 \end{cases} \quad \text{et} \begin{cases} y_1 = h_1(x) = x_1 \\ y_2 = h_2(x) = x_6 \end{cases}$$

$$K \simeq \begin{bmatrix} 2.2 & 0.19 & 82.10^{-4} & 2.10^{-4} & 0 & 1.10^{-7} \end{bmatrix} * 10^7$$

$$P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 & -4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$F \simeq \begin{bmatrix} -2.2 & -0.19 & -82.10^{-4} & -2.10^{-4} & 0 \end{bmatrix} * 10^7$$

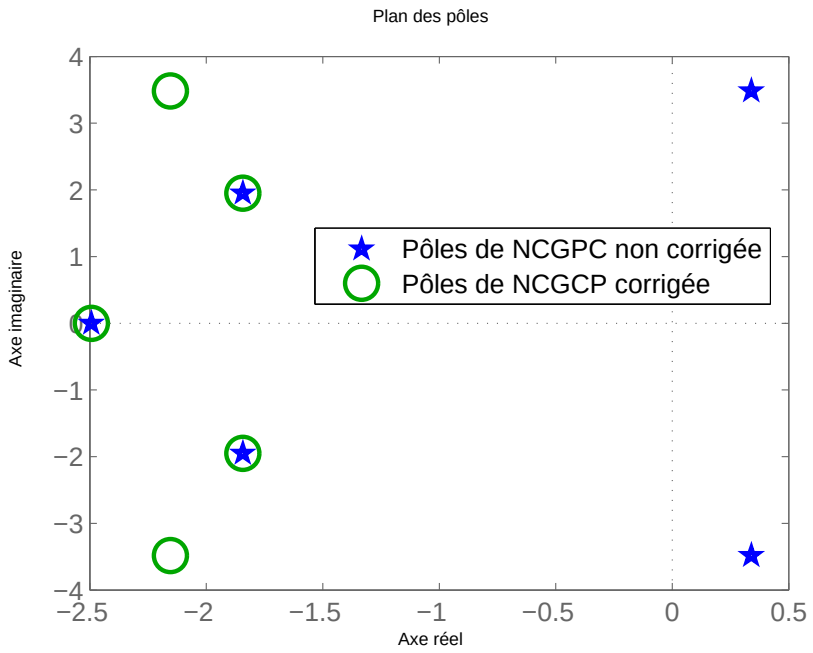


Figure: NCGPC MIMO: position des pôles dans le plan complexe.

NCGPC cas MIMO: principes de base

- **Illustration: système (1) avec** $(\rho_1, \rho_2) = (5, 1)$

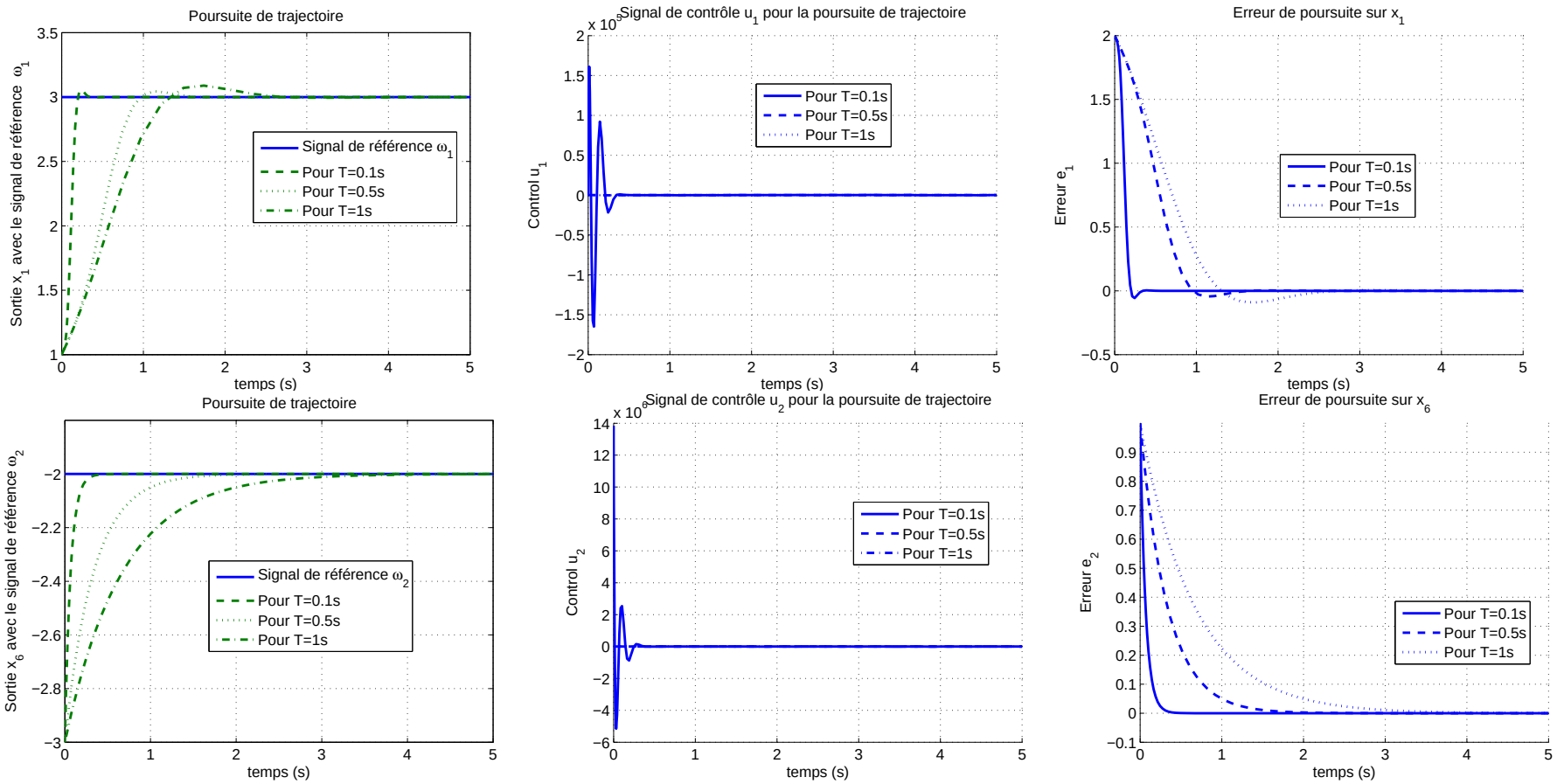
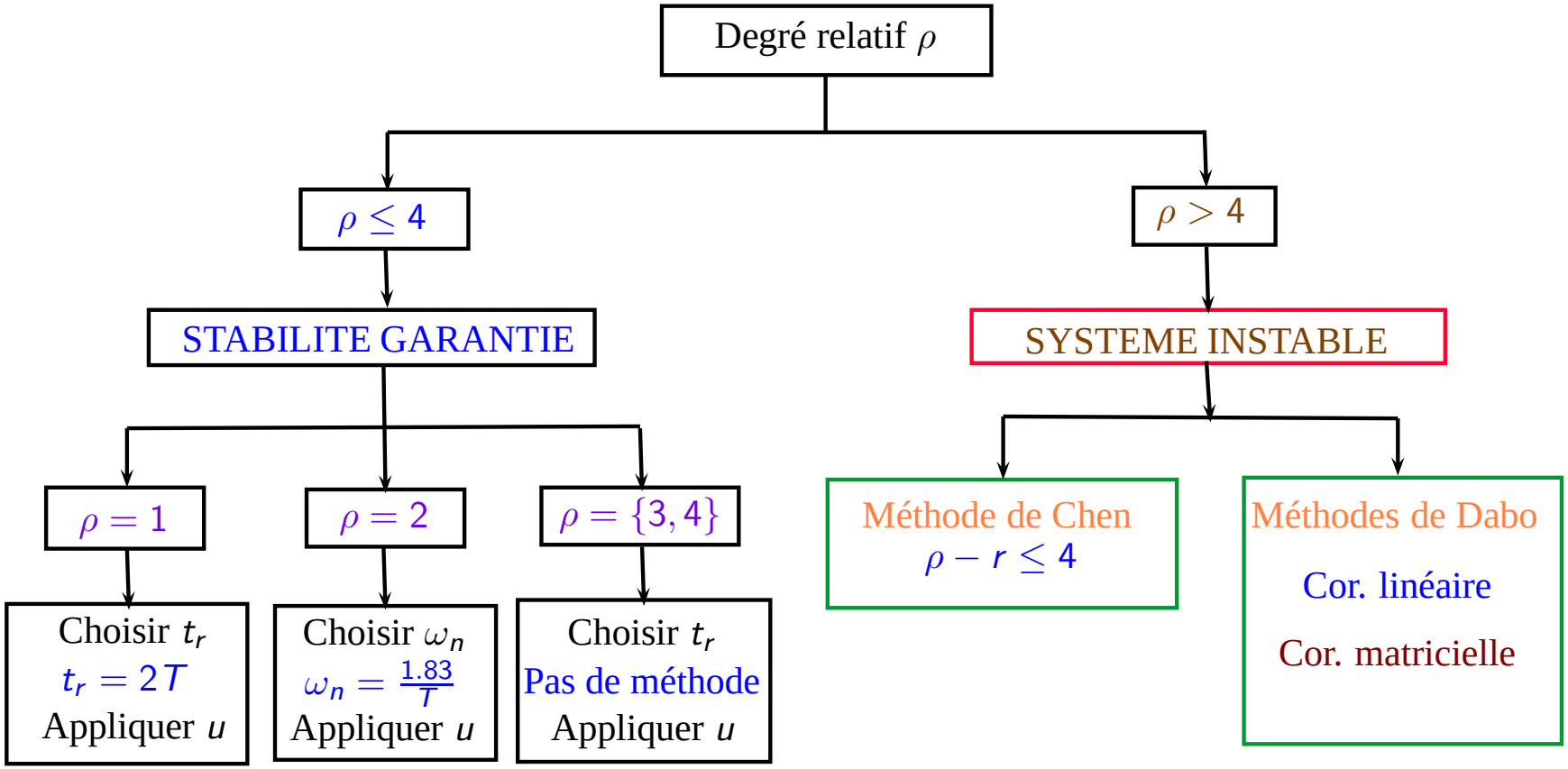


Figure: NCGPC MIMO: sorties, commandes et erreurs.

Algorithme de la NCGPC pour stabilité garantie

- Résultat général



$$u = \frac{-\sum_{l=0}^{\rho} K_{\rho l}\left[L_f^l h - \omega^{(l)}\right]}{L_g L_f h} \qquad u_{cl} = \frac{-\sum_{l=0}^{\rho} K_{\rho l}\left[L_f^l h - \omega^{(l)}\right]}{L_g L_f^{\rho-1} h} + \frac{\sum_{l=0}^{\rho-1} L_l\left[L_f^l h - \omega^{(l)}\right]}{L_g L_f^{\rho-1} h} \qquad u_{cm} = \frac{-\sum_{i=0}^{\rho} K_{\rho i}^c\left[L_f^i h - \omega^{(i)}\right]}{L_g L_f^{\rho-1} h}$$

1 Introduction

2 Etat de l'art sur la commande prédictive

3 Comm. Préd. Gén. Non linéaire à temps continu (NCGPC)

4 Linéarisation E/S par retour d'état (FL)

5 Etude comparative NCGPC/FL et applications

6 Conclusion et perspectives

FL cas SISO: principes

- **Elaboration de la loi de commande**
  - **Changement de coordonnées et nouveau système**

$$Z = \begin{bmatrix} h - \omega \\ \vdots \\ L_f^{\rho-1} h - \omega^{(\rho-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_\rho \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_{\rho-1} = z_\rho \\ \dot{z}_\rho = L_f^\rho h - \omega^{(\rho)} + u L_g L_f^{\rho-1} h \end{cases}$$

$$u(x(t)) = -\frac{L_f^\rho h(x(t)) - \omega(t)^{(\rho)}}{L_g L_f^{\rho-1} h(x(t))} + \frac{v(t)}{L_g L_f^{\rho-1} h(x(t))}$$

  - **Système bouclé linéaire**

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= A_\rho Z + B_\rho v \\ O &= C_\rho Z \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} A_\rho &= \left[\begin{array}{c|c} 0_{(\rho-1)\times 1} & Id_{(\rho-1)\times(\rho-1)} \\ \hline 0 & 0_{1\times\rho} \end{array}\right] \\ B_\rho &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^t \\ C_\rho &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$v = -F_\rho Z = -\sum_{l=0}^{\rho-1} F_{\rho l} z_l$: pôles de $A_\rho - B_\rho F_\rho$ soient tous des pôles désirés

FL cas SISO: principes

- **Illustration: système avec $\rho = 5$**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + x_1^2 \\ \dot{x}_3 = x_4 - x_2 \\ \dot{x}_4 = x_5 - x_1 \\ \dot{x}_5 = x_2 - 3u \\ \dot{x}_6 = x_5 - x_6 \end{cases} \quad \text{et } y = h(x) = x_1 \text{ avec} \quad \begin{array}{l} P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 & -4 & -6 \end{bmatrix} \\ F = \begin{bmatrix} 144 & 324 & 260 & 95 & 16 \end{bmatrix} \end{array}$$

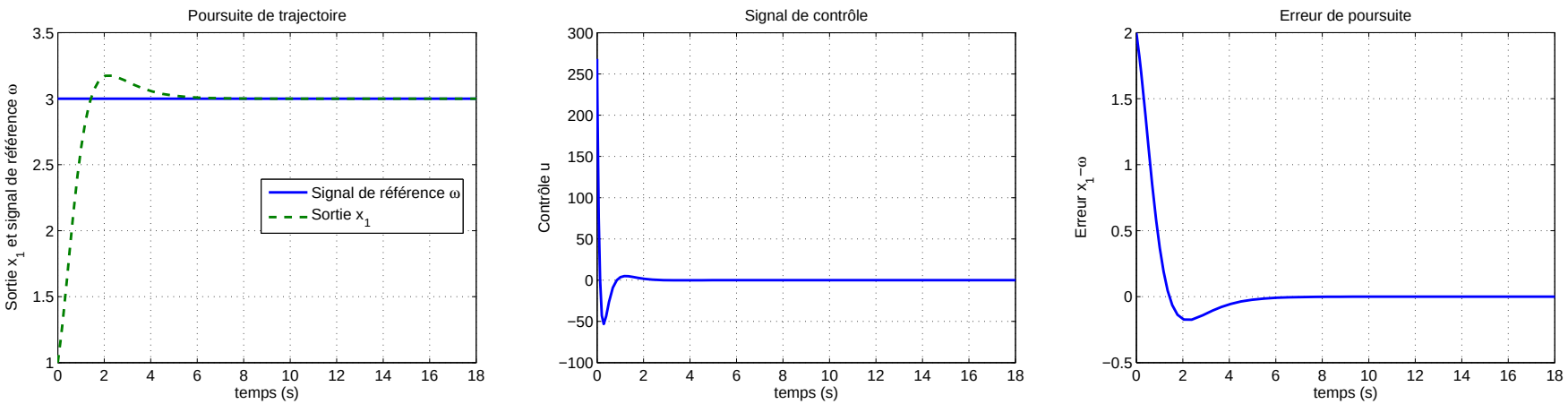


Figure: FL SISO: signal de sortie, de commande et d'erreur.

FL cas MIMO: principes

- **Elaboration de la loi de commande**
  - **Changement de coordonnées et nouveau système**

$$Z^i = \begin{bmatrix} z_1^i \\ \vdots \\ z_{\rho_i}^i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1^i = z_2^i \\ \vdots \\ \dot{z}_{\rho_i}^i = L_f^{\rho_i} h_i - \omega_i^{(\rho_i)} + \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_i - 1} h_i & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_i - 1} h_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_1 - 1} h_1 & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_1 - 1} h_1 \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{\rho_m - 1} h_m & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_m - 1} h_m \end{bmatrix}_{m \times m}^{-1} \begin{bmatrix} -L_f^{\rho_1} h_1 + \omega_1^{(\rho_1)} + v_1 \\ \vdots \\ -L_f^{\rho_m} h_m + \omega_1^{(\rho_m)} + v_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

  - **Système bouclé linéaire**

$$\begin{aligned} \dot{Z}^i &= A_{\rho_i}^i Z^i + B_{\rho_i} v_i \\ O^i &= C_{\rho_i} Z^i \end{aligned} \quad \text{avec} \quad v_i = -F^i Z^i = -\sum_{l=0}^{\rho_i - 1} F_l^i z_l^i$$

tels que pôles de $A_\rho - B_\rho F_\rho$ soient tous des pôles désirés

FL cas MIMO: principes

- **Illustration: système (1) avec** $(\rho_1, \rho_2) = (5, 1)$

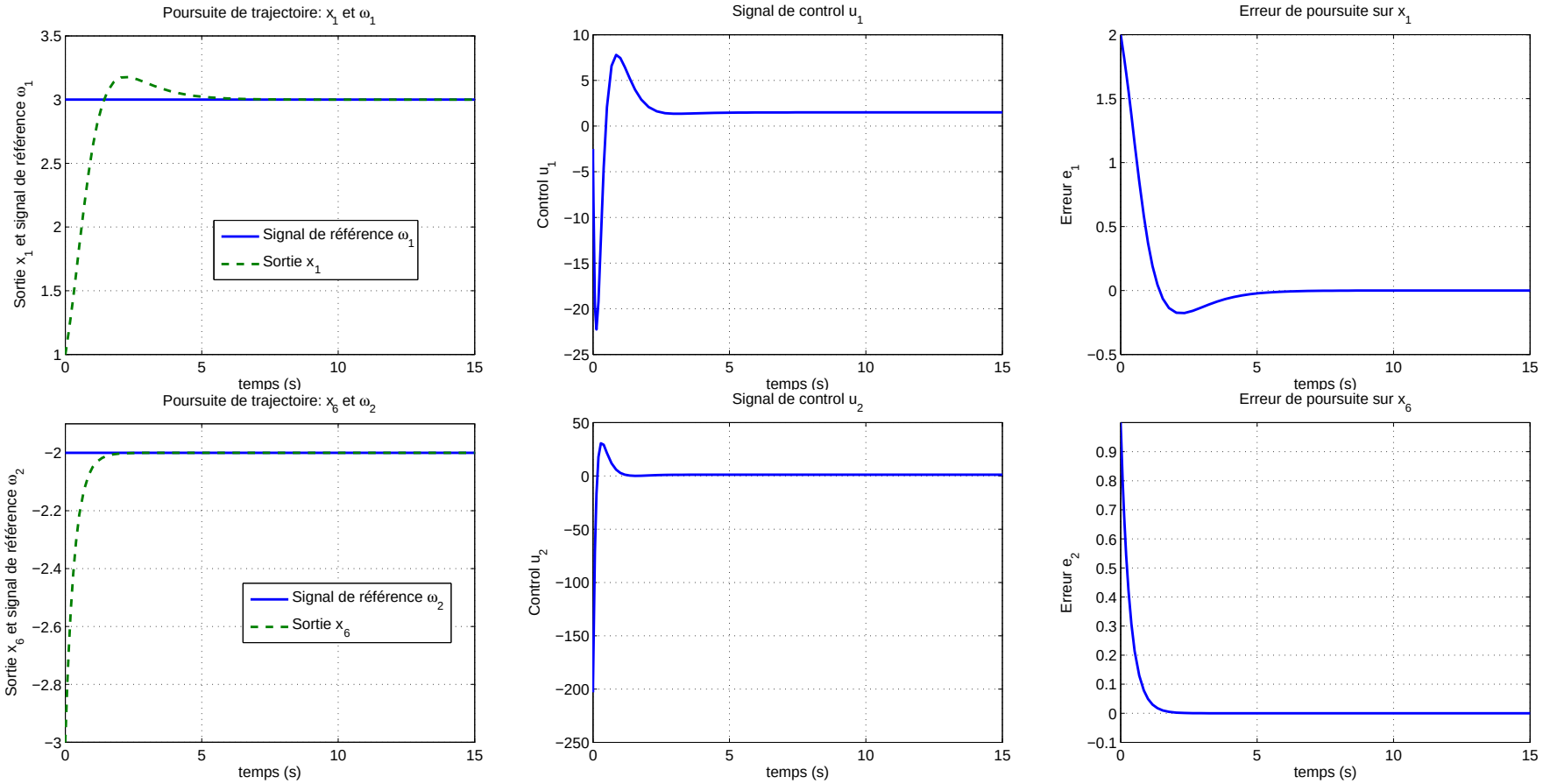


Figure: NCGPC MIMO: signaux de sortie, de commande et d'erreur.

1 Introduction

2 Etat de l'art sur la commande prédictive

3 Comm. Préd. Gén. Non linéaire à temps continu (NCGPC)

4 Linéarisation E/S par retour d'état (FL)

5 Etude comparative NCGPC/FL et applications

6 Conclusion et perspectives

Etude comparative entre NCGPC et FL

Table: Tableau comparatif entre NCGPC et FL

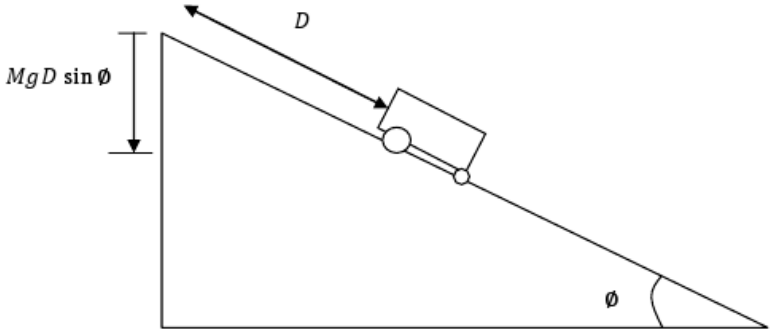
	NCGPC	NCGPC cor. mat.	NCGPC cor. lin.	FL
Optimalité	oui	oui	oui	non
Caractère prédictif	oui	oui	non	non
Stabilité ($\rho \leq 4$)	oui	oui	oui	oui
Stabilité ($\rho > 4$)	non	oui	oui	oui
Param. de stabilité	ρ	T	non	non
Param. de dynamique	T	T	non	non

$$\text{NCGPC}: \; u = -\frac{L_f^{\rho} h - \omega^{(\rho)}}{L_g L_f^{\rho-1} h} - \frac{\sum_{l=0}^{\rho-1} K_{\rho l} \left[L_f^{l} h - \omega^{(l)} \right]}{L_g L_f^{\rho-1} h}$$

$$\text{FL}: \; u = -\frac{L_f^{\rho} h - \omega^{(\rho)}}{L_g L_f^{\rho-1} h} - \frac{\sum_{l=0}^{\rho-1} F_{l} \left[L_f^{l} h - \omega^{(l)} \right]}{L_g L_f^{\rho-1} h}$$

Application au biomédical : chaise roulante électrique

- **Représentation de la chaise sur plan incliné**



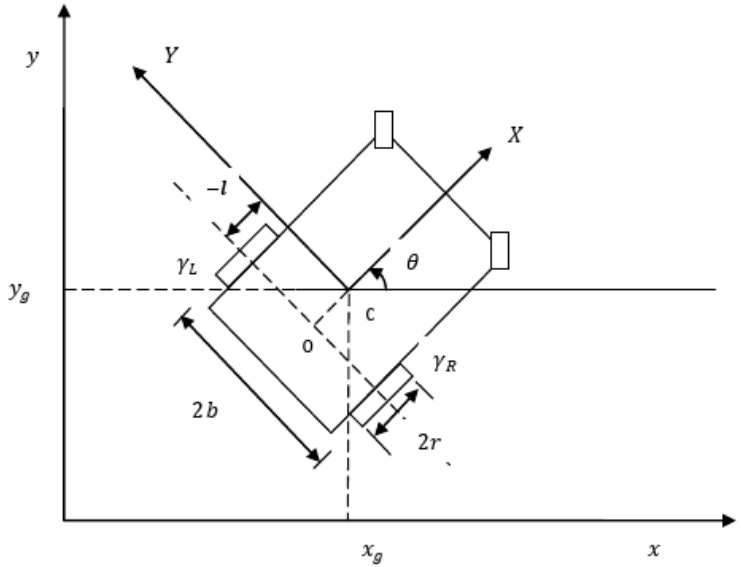


Figure: Chaise roulante électrique dans le plan.

Application au biomédical : chaise roulante électrique

- **Modélisation de la chaise roulante**
  - **Lagrangien**

$$\begin{cases} \mathscr{L} = \mathscr{T} - \mathscr{U} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q} = F_{qr} \end{cases} \Rightarrow M(q)\ddot{q} + V(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = F_{qr}$$

  - **Cinétique de la chaise**

$$\begin{cases} \dot{q} = S(q)\eta \\ \ddot{q} = \dot{S}(q)\eta + S(q)\dot{\eta} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \eta = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}.$$

  - **Modèle de la chaise**

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \sin\phi \\ \frac{gM \sin\phi (y_g \cos\theta - x_g \sin\theta)}{Ml^2 \cos 2\phi - I_z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{Mr} & \frac{1}{Mr} \\ \frac{b}{r\left(I_z - Ml^2 \cos 2\phi\right)} & -\frac{b}{r\left(I_z - Ml^2 \cos 2\phi\right)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_R \\ \tau_L \end{bmatrix}$$

$$b = 0.35m,\ l = 0.25m,\ r = 0.2m,\ M = 80kg \text{ et } I_z \simeq 40kg.m^2$$

Application au biomédical : chaise roulante électrique

- **Validation du modèle (simulation)**

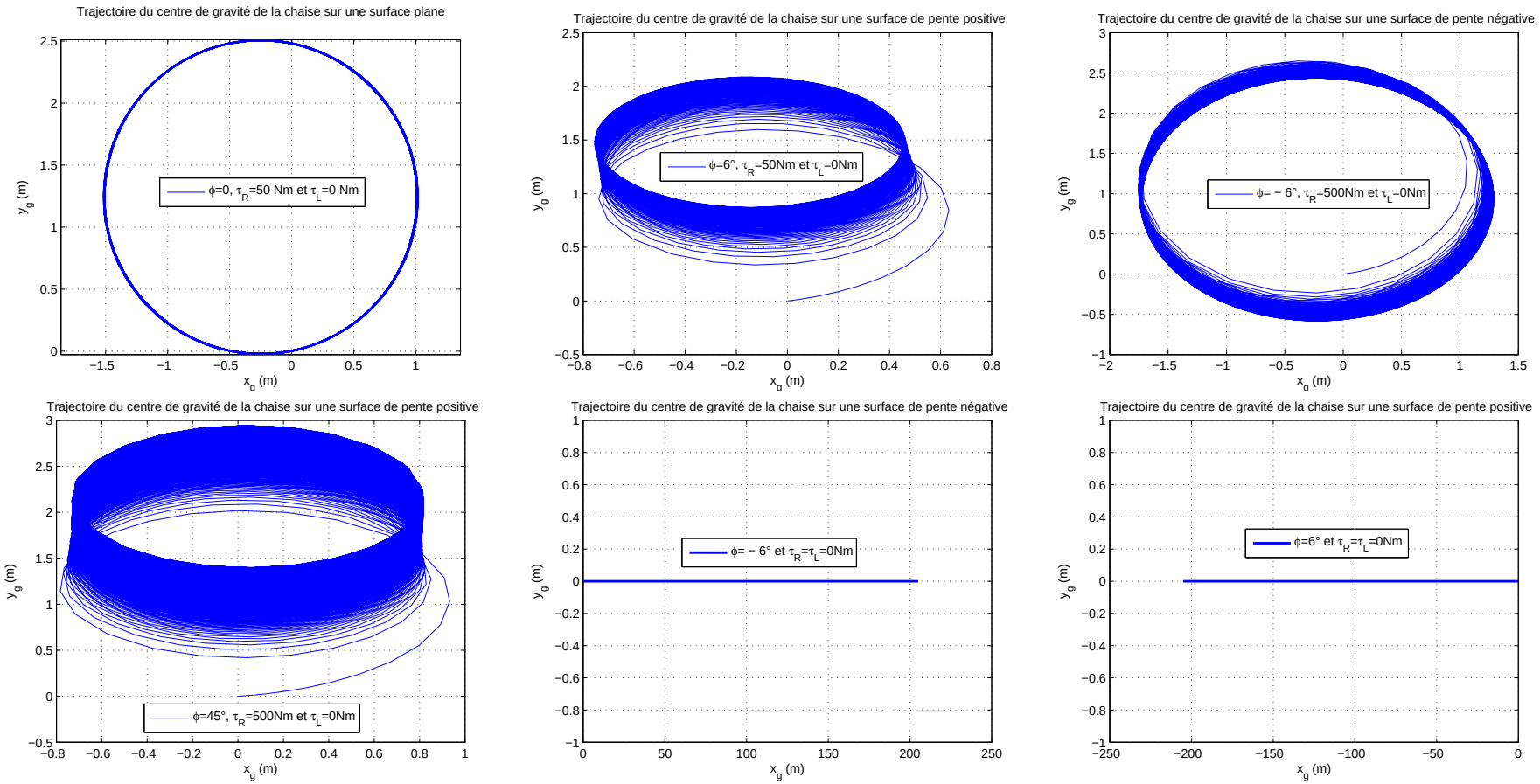


Figure: Trajectoires du CDG de la chaise sur surfaces plane et inclinée (simulation 20 secondes).

Application au biomédical : chaise roulante électrique

- **Etudes prélimlinaires**
  - **Vecteur degré relatif**

$$\eta = \begin{bmatrix} v \\ \theta \end{bmatrix} \Rightarrow (\rho_1, \rho_2) = (1, 2)$$

  - **Analyse géométrique**

$$D(x) = \begin{bmatrix} L_{g1} e_1^1 & L_{g2} e_1^1 \\ L_f L_{g1} e_1^2 & L_f L_{g2} e_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Mr} & \frac{1}{Mr} \\ \frac{b}{r\left(I_z - Ml^2 \cos 2\phi\right)} & -\frac{b}{r\left(I_z - Ml^2 \cos 2\phi\right)} \end{bmatrix}$$

  - **Système étendu**

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \sin \phi \\ \frac{gM \sin \phi (y_g \cos \theta - x_g \sin \theta)}{Ml^2 \cos 2\phi - I_z} \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{Mr} & \frac{1}{Mr} \\ \frac{b}{r\left(I_z - Ml^2 \cos 2\phi\right)} & -\frac{b}{r\left(I_z - Ml^2 \cos 2\phi\right)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_R \\ \tau_L \end{bmatrix}$$

$$(\rho_1, \rho_2) = (1, 2) \Rightarrow 1 + 2 = 3$$

Application au biomédical : chaise roulante électrique

- **Résultats de simulation (1/2):** $\phi = 6°$

$K_1 = 7$ et $K = \begin{bmatrix} K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 20 \end{bmatrix}$

$T = 1$ et $K = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.33 & 2.5 & 1 \end{bmatrix}$

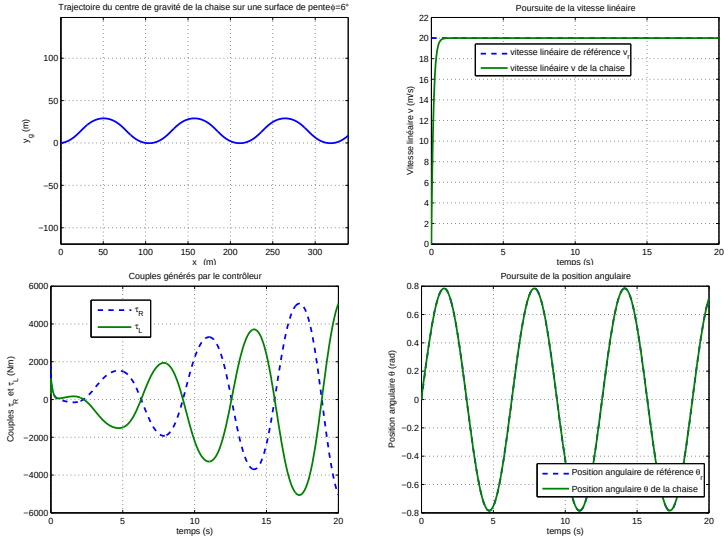


Figure: FL: "évitement d'obstacles".

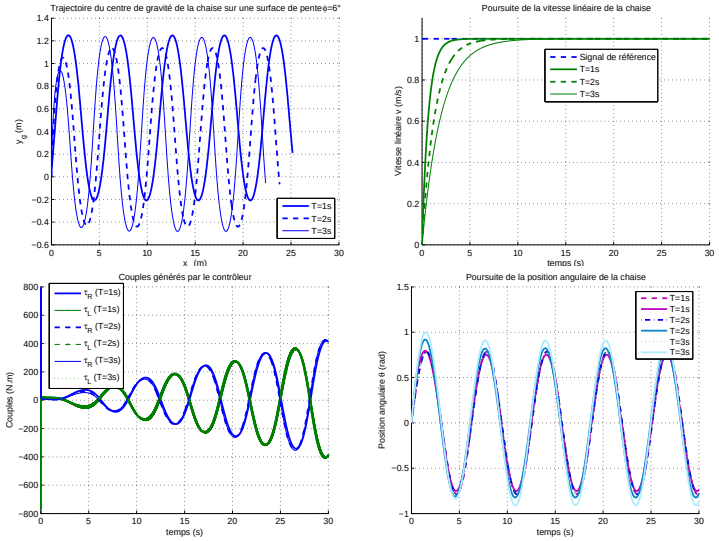


Figure: NCGPC: "évitement d'obstacles".

Application au biomédical : chaise roulante électrique

- **Résultats de simulation (2/2): $\phi = -45°$ (joystick)**

$$K_1 = 7 \quad \text{et} \quad K = \begin{bmatrix} K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 20 \end{bmatrix}$$

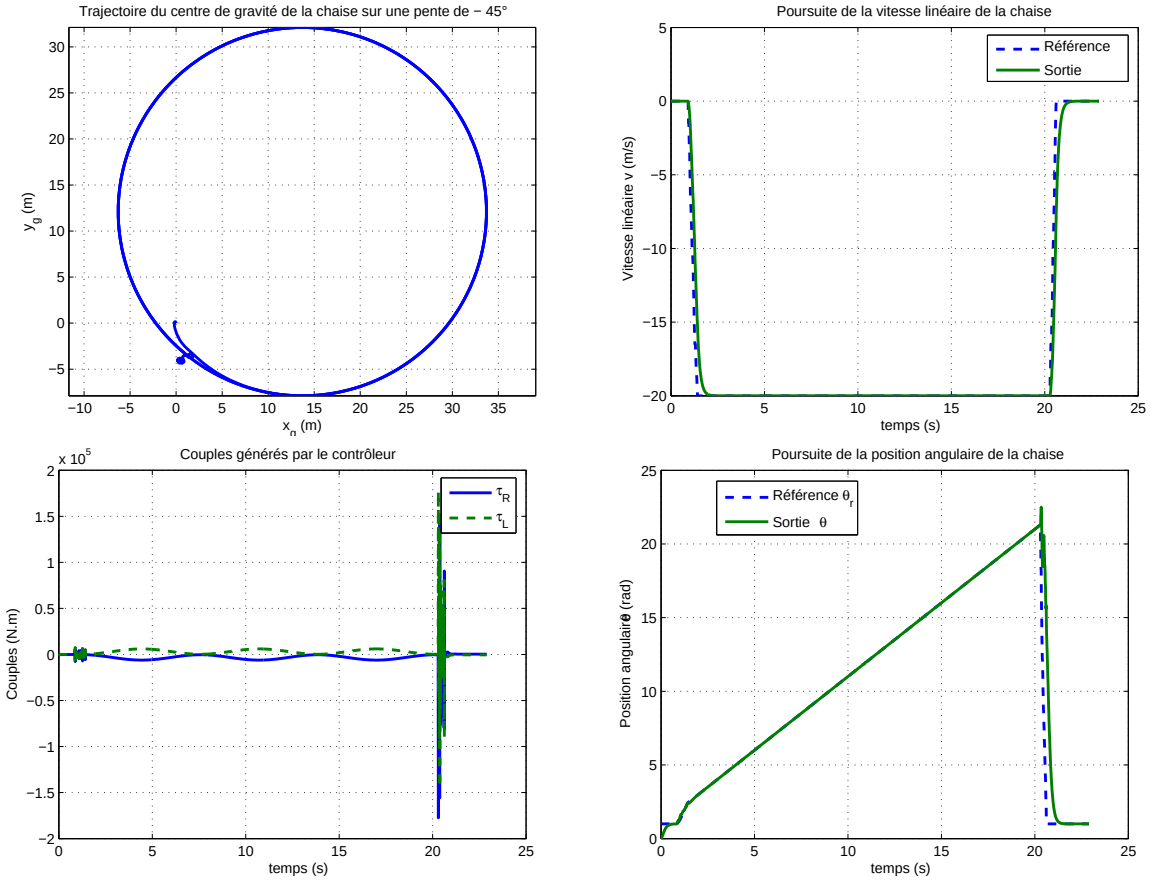


Figure: FL:trajectoire circulaire sur pente négative de $\phi = -45°$.

Application à l'automobile : moteur Diesel turbocompressé

- **MDT: objectifs de l'étude**

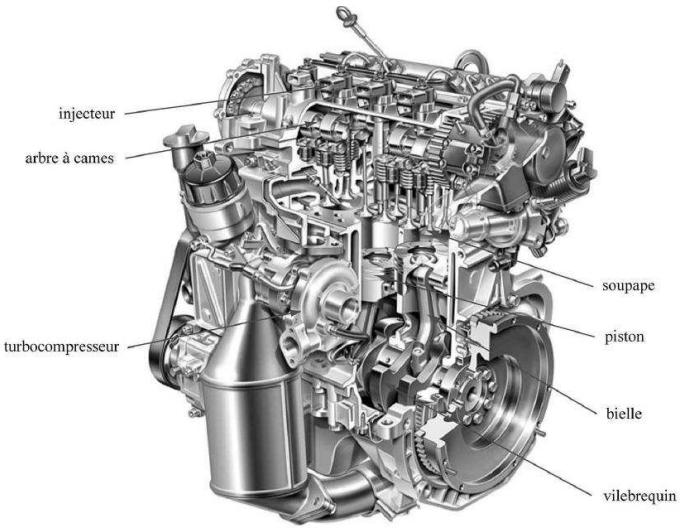


Figure: Moteur Diesel injection directe à quatre cylindres en ligne.

- Respecter les normes Euro 5
  - Contrôle de la vanne EGR
  - Cntrôle du VGT

Application à l'automobile : moteur Diesel turbocompressé

- **Modèle d'ordre 3 du MDT (Jankovic et al.)**

$$\begin{cases} \dot{p_1} = k_1(W_c + W_{egr} - k_e p_1) \\ \dot{p_2} = k_2(k_e p_1 - W_{egr} - W_t) \\ \dot{P_c} = \frac{1}{\tau}(\eta_m P_t - P_c) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} W_c = P_c \frac{k_c}{p_1^{\mu} - 1} \\ P_t = k_t(1 - p_2^{-\mu}) W_t \end{cases}$$

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{2} g_i(x) u_i, \quad \text{avec} \quad u_1 = W_{egr} \ , \ u_2 = W_t$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} k_1(k_c \frac{P_c}{p_1^{\mu} - 1} - k_e p_1) \\ k_2 k_e p_1 \\ -\frac{P_c}{\tau} \end{bmatrix}, \quad g_1(x) = \begin{bmatrix} k_1 \\ -k_2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \quad g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -k_2 \\ K_0\left(1 - p_2^{-\mu}\right) \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \{(p_1, p_2, P_c) : 1 < p_1 < p_1^{max}, 1 < p_2 < p_2^{max}, 0 < P_c < P_c^{max}\}$$

Application à l'automobile : moteur Diesel turbocompressé

- **Etudes préliminaires**
  - **Analyse géométrique**
    - $\mathscr{D} = \text{span}\{g_1, g_2\}$ n'est pas involutive
    - le MDT est alors linéarisable par feedback dynamique
    - Linéarisation par feedback statique: impossible pour toute sortie choisie.
  - **Choix du vecteur de sortie**

$$\begin{bmatrix} AFR \\ EGR \end{bmatrix} \text{ pas mesurables } \Rightarrow y = \begin{bmatrix} p_1 \\ W_c \end{bmatrix}$$

  - **Vecteur erreur et degré relatif**

$$e = \begin{bmatrix} p_1 - p_{1d} \\ W_c - W_{cd} \end{bmatrix} \Rightarrow (\rho_1, \rho_2) = (1, 1)$$

Existence d'une dynamique de zéros de dimension 1 (3-2=1)

Application à l'automobile : moteur Diesel turbocompressé

- **Etudes préliminaires**
  - **Dynamique de zéros**

$$\dot{p_2} = k_2 W_{cd} \left[1 - \frac{(p_{1d}^{\mu} - 1)}{\eta_m k_t k_c (1 - p_2^{-\mu})} \right]$$

  - **Stabilité de la dynamique de zéros**

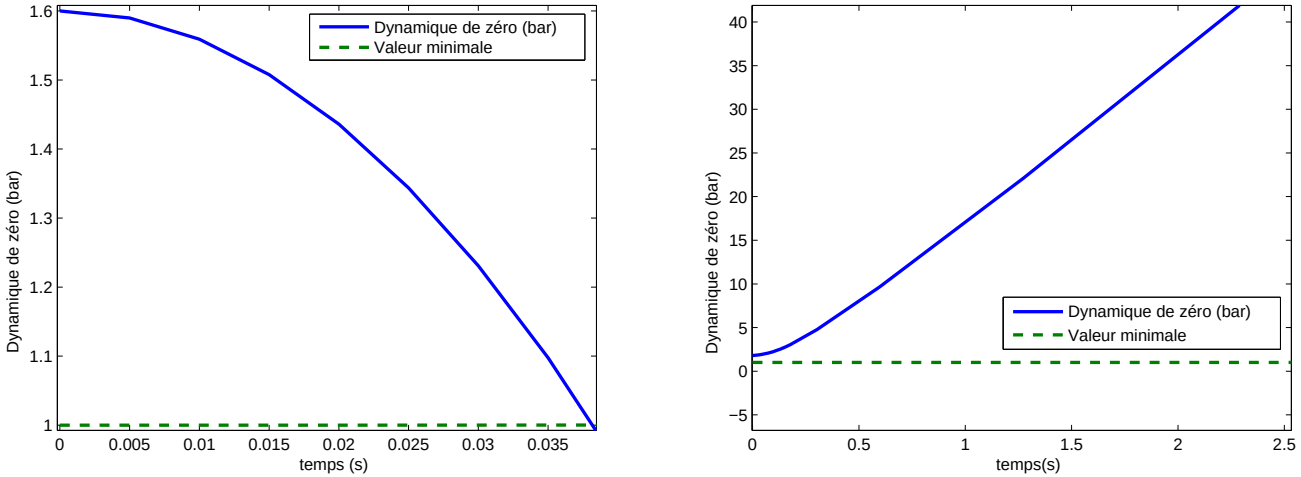


Figure: MDT est un système à non minimum de phase: figure de gauche $p_{20} = 1.6$ bar et figure de droite $p_{20} = 1.8$ bar.

Application à l'automobile : moteur Diesel turbocompressé

- **Changement du vecteur de sortie**

$$D(x) = \begin{bmatrix} L_{g1}h_1 & L_{g2}h_1 \\ L_{g1}h_2 & L_{g2}h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ -\frac{\mu k_1 k_c P_c p_1^{\mu-1}}{(p_1^{\mu}-1)^2} & \frac{k_c K_0 (1-p_2^{-\mu})}{p_1^{\mu}-1} \end{bmatrix}$$

$$L_{g2}h_2 = 0 \quad \Rightarrow \tilde{y} = \begin{bmatrix} p_1 \\ P_c + \frac{K_0}{k_2}\left[p_2 - \frac{1}{1-\mu}p_2^{(1-\mu)}\right] \end{bmatrix}$$

- **Extension dynamique**

$$\tilde{D}(x) = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ -K_0(p_2^{-\mu}-1) & 0 \end{bmatrix} \quad Posons \quad \begin{cases} z = u_1 \\ \dot{z} = v_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{p_1} = k_1(W_c + z - k_e p_1) \\ \dot{p_2} = k_2(k_e p_1 - z - u_2) \\ \dot{P_c} = \frac{1}{\tau}(\eta_m P_t - P_c) \\ \dot{z} = v_1 \end{cases}$$

Matrice de découplage du système étendu

$$D^e(x) = \left[\begin{array}{c|c} k_1 & k_1 k_c K_0 \frac{1-p_2^{-\mu}}{p_1^{\mu}-1} \\ K_0(p_2^{-\mu}-1) & \mu k_2 K_0 (z - k_e p_1) p_2^{-\mu-1} + \frac{K_0}{\tau}(p_2^{-\mu}-1) \end{array}\right]$$

Inversible sur $\Omega^e = \Omega \times \left[W_{egr}^{min}; W_{egr}^{max}\right]$

Application à l'automobile : moteur Diesel turbocompressé

- **Application de la NCGPC et Illustrations**

$$T_1 = T_2 = 2 \text{ s avec } G \cong \begin{bmatrix} 3.75 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.75 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

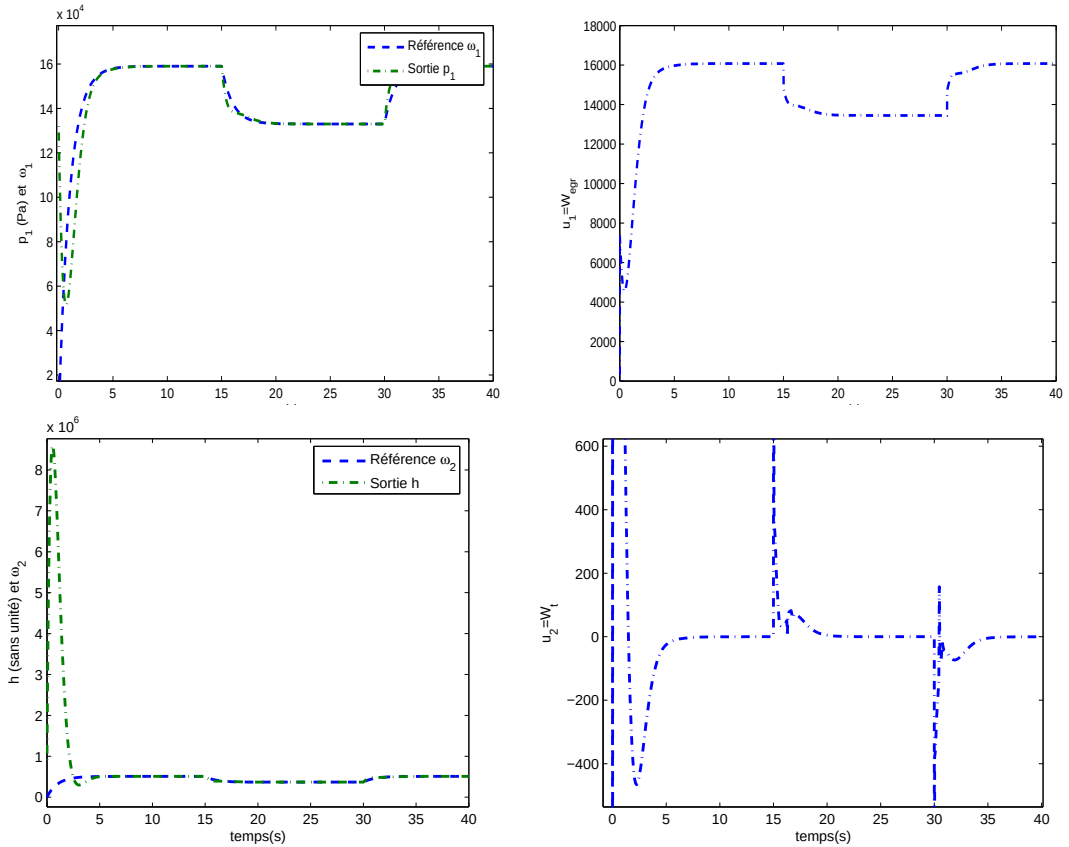


Figure: Poursuite de trajectoire sur p_1 et W_c.

Application à l'automobile : moteur Diesel turbocompressé

- **Conservation du vecteur de sortie**

$$\begin{cases} \dot{p_1} = k_1(W_c + z - k_e p_1) \\ \dot{p_2} = k_2(k_e p_1 - z - u_2) \\ \dot{P_c} = \frac{1}{\tau}(\eta_m P_t - P_c) \\ \dot{z} = v_1 \end{cases} \quad \text{avec} \quad y = \begin{bmatrix} p_1 \\ W_c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} e_1^1 = p_1 - p_{1d} \\ e_1^2 = W_c - W_{cd} \end{cases}$$

$$\bar{D}(x) = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 k_c K_0 \frac{p_2^{-\mu} - 1}{p_1^{\mu} - 1} \\ 0 & -k_c K_0 \frac{p_2^{-\mu} - 1}{p_1^{\mu} - 1} \end{bmatrix} \Rightarrow (\rho_1, \rho_2) = (2, 1) \Rightarrow \quad \dot{p_2} = k_2 W_{cd} \left[1 - \frac{(p_{1d}^{\mu} - 1)}{\eta_m k_t k_c (1 - p_2^{-\mu})} \right]$$

- **Linéarisation E/S par retour d'état**

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{e}}_1^1 \\ \dot{\tilde{e}}_2^1 \\ \dot{\tilde{e}}_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}_1^1 \\ \tilde{e}_2^1 \\ \tilde{e}_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}_1^1 \\ \tilde{e}_2^1 \\ \tilde{e}_1^2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Application à l'automobile : moteur Diesel turbocompressé

- **Linéarisation de la dynamique de zéros autour d'un pt d'équilibre**

$$x_e^e = \begin{cases} p_{1e} = \frac{z_e + v_{2e}}{k_e} \\ p_{2e} = \left(1 - \frac{P_{ce}}{\tau v_{2e} K_0}\right)^{\frac{-1}{\mu}} \\ P_{ce} = \frac{W_{ce}(p_{1e}^{\mu} - 1)}{k_c} \\ z_e = k_e p_{1e} - W_{ce} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{e}_1^1 = e_1^1 - e_{1e}^1 = p_1 - p_{1e} \\ \tilde{e}_1^2 = e_1^2 - e_{1e}^2 = W_c - W_{ce} \end{cases}$$

$$\dot{p_2} = k_2 W_{cd}\left[1 - \frac{(p_{1d}^{\mu} - 1)}{\eta_m k_t k_c (1 - p_2^{-\mu})}\right] \Rightarrow \tilde{\eta} = A_{zd}\tilde{\zeta} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}_1^1 \\ \tilde{e}_2^1 \\ \tilde{e}_1^2 \\ \tilde{\eta} \end{bmatrix}$$

- **Extension du système linéarisé par la dynamique zéros**

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\zeta}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \tilde{\zeta} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}_1^1 \\ \tilde{e}_2^1 \\ \tilde{e}_1^2 \\ \tilde{\eta} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Application à l'automobile : moteur Diesel turbocompressé

- **Application de la loi de cmde et résultats de sim.**

$p_{1d} = 1.25$ et $p_{1d} = 2$ bar $W_{cd} = 0.07$ et $W_{cd} = 0.15$ kg/s, $p_{1e} = 2.06$ bar et $W_{ce} = 0.18$ kg/s

$$K \cong \begin{bmatrix} 6232 & 82 & 0 & 5104 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } G = \begin{bmatrix} -0.1581 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

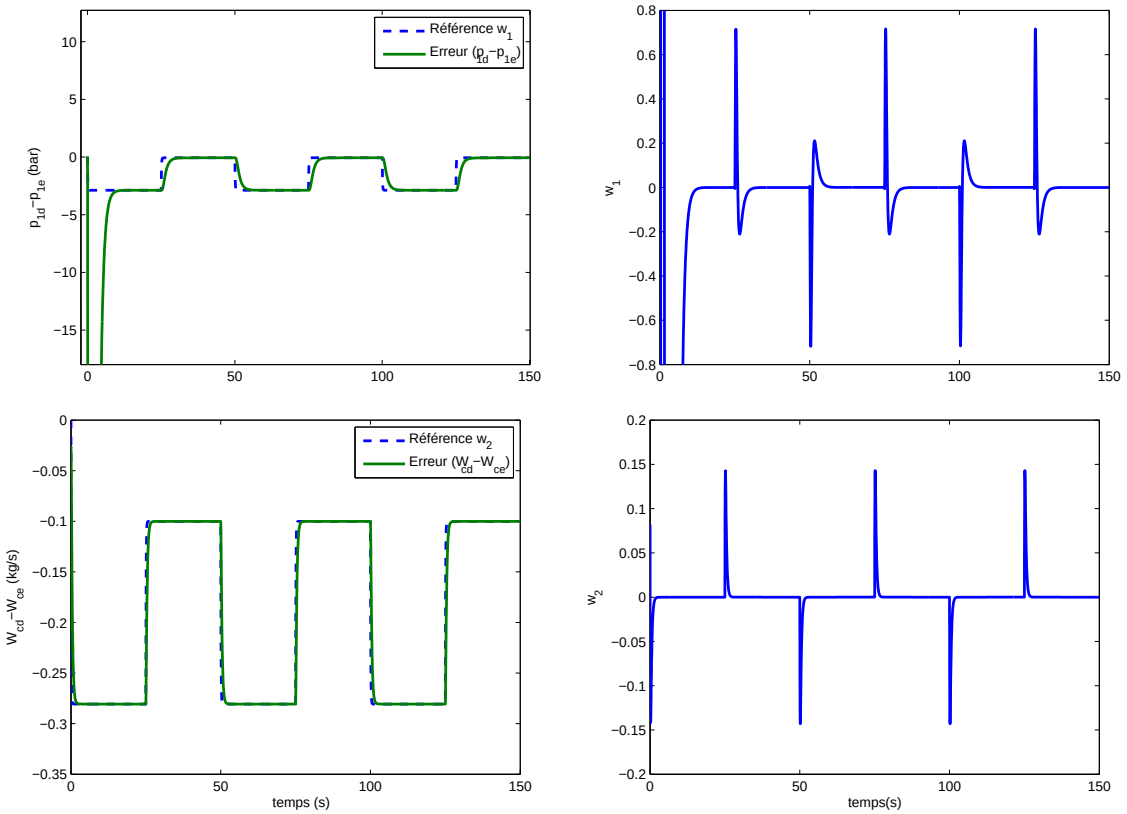


Figure: Poursuite de trajectoire sur p_1 et W_c.

1 Introduction

2 Etat de l'art sur la commande prédictive

3 Comm. Préd. Gén. Non linéaire à temps continu (NCGPC)

4 Linéarisation E/S par retour d'état (FL)

5 Etude comparative NCGPC/FL et applications

6 Conclusion et perspectives

Conclusion et perspectives (1/2)

Conclusion: Problématique:

- Stabilisation en boucle fermée de systèmes nonlinéaires
  - SISO ou MIMO affines en contrôle
  - de degré relatif strictement supérieur à 4

Contributions:

- Propriétés:
  - SISO degré relatif 1: $\omega_c = \frac{1.5}{T}$ et $t_r = 2T$
  - SISO degré relatif 2: $\omega_n \simeq \frac{1.83}{T}$ et $\xi \simeq 0.685$
- Lois de commande stabilisante:
  - avec la correction linéaire du critère
  - avec la correction matricielle intelligente du critère

Applications:

- MDT: modification et conservation du vecteur de sortie
- Chaise roulante électrique: validation des propriétés NCGPC

Conclusion et perspectives (2/2)

Perspectives:

- Théorie
  - Etudier la NCGPC avec un observateur non linéaire
  - Etudier la robustesse de la NCGPC
  - Reformuler le problème d'optimisation de la NCGPC avec prise en compte des contraintes sur le vecteur d'état, les entrées et les sorties
- sur les applications
  - Embarquer les lois de commande développées sur le MDT et la chaise roulante électrique

Sagesse Africaine

Chef de village Dogon, Afrique de l'Ouest (Mali):

"Il n'existe pas de maître absolu, on est toujours élève et maître à la fois. Car le maître apprend aux autres mais lui-même apprend des autres".

"Don o Don tulo be ta kalanso". Proverbe Bambara.
Traduction:*"Chaque jour, l'oreille va à l'école".*

Abaraka

Asante

Dunke

Thank you

Imhotep, Cheikh Anta Diop, Philip Emeagwali, Ah'mose, Daniel Hale Williams, Loth Bounatiro, Cheikh Modibo Diarra, George Washington Carvey, Mamadou Bagayogo, Ahmed Ibn Ahmed Al-Takruri Al-Massufi ou Ahmed Baba, Georges Nicolo, Amadou Hampâté Ba, Albert Einstein, Garett Augustus Morgan, Granville T. Woods, Stephen Hawkins, Isaac Newton, Patricia S. Cowings, Jean Paul Mbelek, Alexandre Miles, Pierre et Marie Curie, Ahmed Hassan Zewail, Lotfi Zadeh, Muhammad Ibn Mohammad al-Fullani al-Kishnawi, Rose Dieng-Kuntz, Witold Respondek, Souleymane Mboup, Patricia Bath, Abbé Mariotte, Alberto Isidori, William Arthur Lewis, Amadou Issa Tall, Awa Marie Coll Seck, Diola Bagayoko, Olufunmilayo Olopade, Tebello Nyokong, Shem wandiga, Marina Massougbodji, Les sages de l'Afrique, Peseshet

♡

Ngiabonga

Jerejef

Merci

Gracias