HAL
open science

# Modélisation numérique d'écoulements de mousse

Ibrahim Cheddadi

## To cite this version:

Ibrahim Cheddadi. Modélisation numérique d'écoulements de mousse. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I; Université de Grenoble, 2010. Français. NNT : . tel-00497436

**HAL Id: tel-00497436**

**https://theses.hal.science/tel-00497436**

Submitted on 5 Jul 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITÉ DE GRENOBLE**

Thèse pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité **Mathématiques Appliquées**

préparée au Laboratoire Jean Kuntzmann de Grenoble
et au Laboratoire de Spectrométrie Physique de Grenoble,
dans le cadre de **l'Ecole Doctorale**
**Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information, Informatique**

présentée et soutenue publiquement le 22 juin 2010 par

Ibrahim Cheddadi

# Modélisation numérique d'écoulements de mousse.

Dirigée par Pierre Saramito et co-dirigée par François Graner

JURY

| | | |
|---|---|---|
| Isabelle Cantat | PR, IPR, Rennes, | Présidente |
| Philippe Coussot | Ingénieur en chef des Ponts, des Eaux et Forêts, LCPC, Champs sur Marne, | Rapporteur |
| Marco Picasso | Maître d'enseignement et de Recherche, EPFL, Lausanne, | Rapporteur |
| François Graner | DR, CNRS, Institut Curie, Paris, | Examinateur |
| Stéphane Labbé | PR, UJF, Grenoble, | Examinateur |
| Pierre Saramito | DR, CNRS, LJK, Grenoble, | Examinateur |

# Remerciements

*In V.E.P. veritas.*

Début 2005, je croise Pierre Saramito sur le campus de Grenoble, nous discutons du sujet qu'il propose : modélisation numérique d'écoulements de mousse. Il me montre quelques images, me parle des enjeux, de l'interaction avec des physiciens ; ça me paraît passionnant. Mais attention me prévient-il, c'est un sujet difficile. Qu'importe ! Ça correspond tout à fait à ce que je veux faire : des maths avec de la physique. Pierre m'envoie au LSP où je rencontre François Graner, Benjamin Dollet, et Christophe Raufaste. C'est la première fois que je mets les pieds dans un labo de physique et que je rencontre des physiciens en chair et en os. L'interaction prend un sens plus concret, ils me montrent le dispositif expérimental, et même si je ne saisis pas forcément toutes les explications, ils dégagent un dynamisme et un enthousiasme qui achèvent de me convaincre. Je me lance dans l'aventure le 1er octobre 2005.

Quelques années et une thèse plus tard, j'ai maintenant l'occasion de vous exprimer, Pierre et François, toute ma gratitude pour m'avoir proposé ce sujet d'une très grande richesse scientifique, un projet de recherche authentiquement pluridisciplinaire, puis pour m'avoir aidé, soutenu, poussé, et formé à la recherche par votre exigence scientifique, tout en me laissant une grande liberté de mouvement. Merci ! J'ai eu beaucoup de plaisir à travailler avec vous, ainsi qu'avec Philippe Marmottant, Benjamin et Christophe. La petite équipe de mousseux que nous avons formée est encore active aujourd'hui, et j'espère que notre collaboration se poursuivra encore longtemps, sur la mousse ou d'autres sujets.

J'adresse mes plus vifs remerciements aux membres de mon jury, Philippe Coussot et Marco Picasso qui ont eu la grande gentillesse de rapporter mon travail dans un délai très court, et Isabelle Cantat et Stéphane Labbé, qui ont accepté d'y participer. Cette soutenance a constitué un moment important pour moi et je remercie très sincèrement les nombreuses personnes venues m'encourager.

L'idée de faire une thèse ne m'est pas venue un matin en me rasant (et pour cause), au contraire, elle a été le résultat d'influences diverses étalées dans le temps : Edouard-Roger Tantart, mon professeur de physique en math-spé à Saint-Louis, qui m'a donné le goût de cette matière, n'a sans doute pas été pour rien dans le choix de ce sujet ; coïncidence amusante, il avait été quelques années auparavant le professeur de François, avec les mêmes effets. C'est plus tard, à l'ENSIMAG, que j'ai pour la première fois

envisagé de faire une thèse : Jean Della Dora nous la conseillait comme une expérience unique, qui nous donnerait l'occasion d'aller au bout de nous-mêmes ; de quoi donner du grain à moudre... Quant à la décision elle-même, je la dois en bonne partie à Elie Bretin, camarade de promo depuis l'ENSIMAG et ami, qui a su trouver les bons mots pour me pousser vers la recherche à un moment où j'allais basculer dans le monde de l'entreprise. Rétrospectivement, je pense que faire une thèse a été pour moi un excellent choix, j'ai eu la possibilité d'approfondir un sujet qui m'a passionné pendant plusieurs années, une opportunité finalement rare dans le monde qui nous entoure. Merci donc à vous tous, et à tous ceux que je n'ai pas cités qui m'ont orienté vers cette voie.

La thèse donne également l'opportunité de rencontrer et d'échanger avec de nombreuses personnes, d'autant plus si on fréquente plusieurs labos, et plus encore si on joue les prolongations comme je l'ai fait... Je remercie Georges-Henri Cottet, qui a permis aux prolongations d'avoir lieu, et Franck Pérignon pour tout le temps qu'il a consacré à m'aider pendant cette période chargée. Merci aux membres des équipes MOISE et EDP pour le cadre scientifique qu'ils ont apporté. Merci à vous, Cathy et Juana, Claudine, Hélène pour votre aide, votre gentillesse, et votre patience face à mon incapacité administrative. Merci également à Dominique Moreira de l'école doctorale pour son suivi parfois autoritaire mais toujours efficace. Je remercie Catherine, Jos, Shirin, et David de l'équipe DyFCoM au LSP, qui, avec François, Christophe, et Philippe m'ont toujours réservé un bon accueil. Au LJK, j'ai pu compter sur la présence et la bonne humeur des nombreux thésards du labo, pour les pauses déjeuner et café, les coinches, et bien plus encore. Les divers occupants de la salle 3, avec qui nous avons su concilier convivialité et sérieux ; mes camarades de promo bien sûr, Elie, Thomas, Claire T, Fred et Florian ; l'ancienne garde : Morgan, Marc, Céline, William, Ehouarn, Claire B ; et puis les nouveaux (pas si nouveaux pour certains...), grâce à qui je me suis senti moins seul dans mes vieux jours de thésard : Souleymane, Adrien, Mélanie, Emilie, Aymen, Damien, David, Brice, Roland, Samuel, Thomas, et enfin l'irremplaçable Madison. Merci à vous tous, pour tous les moments agréables que nous avons passés ensemble.

Je ne saurais clore ces remerciements sans saluer mes chers colocs, qui ont du nourrir et supporter cet animal reclus et renfermé qu'est le thésard en phase terminale de rédaction. Un merci particulier à Ali avec qui nous avons fait un petit bout de chemin depuis le début de notre cohabitation en septembre 2005.

Enfin, je remercie affectueusement mes parents Sonoé et Abdeslam, et mes soeurs Maryam et Aya, pour le soutien et l'intérêt constants qu'ils ont portés à mon travail et à son avancée.

# Table des notations

| | |
|---|---|
| $\Omega$ | domaine de l'écoulement, |
| $\Gamma$ | frontière de $\Omega$, |
| $N$ | dimension de l'espace, |
| $\eta_1,\ \eta_2$ | viscosités, en $\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}$, |
| $\mu$ | module élastique, en $\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-2}$, |
| $\tau_Y$ | contrainte seuil, en $\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-2}$, |
| $\varepsilon_Y$ | déformation seuil, sans dimension, |
| $\beta$ | coefficient de friction visqueuse, en $\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s} \cdot \mathrm{m}^{-2}$, |
| $\rho$ | densité de masse, en $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$, |
| $a$ | paramètre de la dérivée objective, |
| $L, V, \Sigma$ | respectivement longueur, vitesse, contrainte caractéristiques, |
| $Re$ | nombre de Reynolds, |
| $We$ | nombre de Weissenberg, |
| $Bi$ | nombre de Bingham, |
| $\alpha$ | paramètre de retard, |
| $C_F$ | coefficient de friction visqueuse adimensionné, |
| $\mathbf{v}$ | vecteur vitesse, |
| $D(\mathbf{v})$, $\dot{\varepsilon}$ | tenseur des taux de déformation, |
| $W(\mathbf{v})$ | partie antisymétrique du gradient de vitesse, |
| $p$ | pression, |
| $\sigma$ | tenseur des contraintes totales, |
| $\tau$ | tenseur des contraintes élastiques, |
| $\overset{\square}{\tau}$ | dérivée objective de Gordon-Schowalter, |
| $\beta_a$ | terme de rotation dans $\overset{\square}{\tau}$, |
| $\lvert\tau\rvert = (\tau_{ij}^2)^{1/2}$ | norme de Frobënius du tenseur $\tau$, |
| $\tau_d = \tau - I_d\ \mathrm{tr}(\tau)/N$ | partie déviatrice de $\tau$ |
| $\varepsilon^e$ | tenseur de déformation élastique, |
| $\dot{\varepsilon}^p$ | tenseur de taux de déformation plastique, |
| $\phi$ | fraction liquide, |
| $U$ | tenseur de déformation statistique, |
| $P$ | tenseur de taux de déformation plastique statistique, |
| $\kappa$ | critère de plasticité, |
| $\Delta t$ | pas de temps, |
| $\vartheta$ | paramètre de la discrétisation en temps, |
| $n$ | itération en temps, |
| $\mathcal{T}_h$ | triangulation ou subdivision. |

# Table des matières


**1 Introduction** **1**
1.1 Motivations . . . 1
1.1.1 Les mousses liquides . . . 1
1.1.2 Un comportement complexe . . . 3
1.2 Rhéologie des mousses : un bref état de l'art . . . 5
1.2.1 Rhéométrie oscillatoire . . . 5
1.2.2 Caractérisation du régime fluide . . . 7
1.3 Débats . . . 8
1.3.1 Discret ou continu ? . . . 8
1.3.2 Localisation de l'écoulement . . . 8
1.3.3 Rhéologie non-locale . . . 9
1.4 Outils pour une description VEP de la mousse . . . 9
1.4.1 Déformation élastique . . . 9
1.4.2 Contrainte élastique . . . 10
1.4.3 Taux de déformation . . . 10
1.4.4 Taux de déformation plastique . . . 11
1.4.5 Apports de ces outils . . . 12
1.5 Modélisation VEP . . . 13
1.5.1 Modèles non-newtoniens les plus courants . . . 13
1.5.2 Modèles VEP existants . . . 14
1.6 Introduction spécifique à cette thèse . . . 15

**I Le modèle et sa résolution numérique** **17**

**2 Modélisation** **19**
2.1 Cadre de la mécanique des milieux continus . . . 19
2.1.1 Position du problème . . . 19
2.1.2 Lois de conservation . . . 19
2.1.3 Construction de lois de comportement à l'aide d'un formalisme thermodynamique . . . 20
2.2 Exemples de modèles dans ce cadre . . . 23
2.2.1 Fluides visqueux . . . 23

2.2.2 Modèle de Bingham . . . . . 24
2.2.3 Modèle d'Oldroyd . . . . . 25
2.3 Le modèle proposé . . . . . 27
2.3.1 Comportement rhéologique élémentaire . . . . . 27
2.3.2 Formalisme thermodynamique . . . . . 28
2.3.3 Dérivation de la loi de comportement . . . . . 28
2.3.4 Modèle complet pour la simulation d'écoulements de mousse . . . 30
2.3.5 Adimensionnements . . . . . 30

**3 Résolution numérique du modèle 33**
3.1 Position du problème . . . . . 33
3.2 Remarques préliminaires . . . . . 34
3.2.1 Résolution numérique du modèle de Bingham . . . . . 34
3.2.2 Résolution numérique du modèle d'Oldroyd . . . . . 34
3.2.3 Approche retenue . . . . . 35
3.3 Discrétisation en temps . . . . . 35
3.3.1 Présentation du $\vartheta$-schéma . . . . . 35
3.3.2 Application au modèle visco-élasto-plastique . . . . . 36
3.4 Sous-problème de type Stokes à trois champs (étape 1) . . . . . 37
3.4.1 Algorithme de point-fixe . . . . . 37
3.4.2 Formulation variationnelle . . . . . 37
3.4.3 Discrétisation spatiale par éléments finis . . . . . 40
3.5 Sous-problème de type transport (étape 2) . . . . . 43
3.5.1 Calcul explicite de la vitesse . . . . . 43
3.5.2 Méthode de Galerkin discontinu . . . . . 44
3.6 Algorithme complet . . . . . 45
3.6.1 Définition des résidus . . . . . 45
3.6.2 Écriture de l'algorithme . . . . . 45
3.7 Résolution des sous-modèles . . . . . 46
3.7.1 Résolution du modèle d'Oldroyd . . . . . 46
3.7.2 Résolution du modèle de Bingham . . . . . 47
3.8 Conclusion . . . . . 48

**II Écoulements de cisaillement 49**

**4 Écoulement simples : étude numérique 51**
4.1 Géométrie de l'écoulement et symétries . . . . . 51
4.2 Algorithme 1D . . . . . 52
4.2.1 Étape 1 . . . . . 52
4.2.2 Étape 2 . . . . . 54
4.3 Validation de l'algorithme . . . . . 54
4.3.1 Modèle d'Oldroyd . . . . . 54
4.3.2 Modèle de Bingham . . . . . 55

4.4 Étude numérique du modèle VEP . . . . . 58
4.4.1 Convergence vers une solution stationnaire . . . . . 58
4.4.2 Aspect général de la solution . . . . . 59
4.4.3 Étude de la discontinuité . . . . . 61
4.5 Conclusion . . . . . 65

**5 Prédiction d'écoulements de cisaillement 67**
5.1 Problématique . . . . . 67
5.2 Description de l'expérience . . . . . 68
5.3 Choix des paramètres . . . . . 69
5.3.1 Paramètres physiques directement exploitables dans le modèle . . 69
5.3.2 Jeu de paramètres retenu . . . . . 69
5.4 Régime transitoire . . . . . 70
5.4.1 Profil de vitesse . . . . . 70
5.4.2 Contrainte élastique . . . . . 70
5.4.3 Passage du transitoire au stationnaire . . . . . 71
5.4.4 Interprétation . . . . . 72
5.5 Régime stationnaire . . . . . 75
5.5.1 Vitesse et taux de déformation . . . . . 75
5.5.2 Contrainte élastique . . . . . 76
5.6 Le mécanisme de localisation . . . . . 77
5.6.1 Exploration des paramètres . . . . . 77
5.6.2 Autres interprétations . . . . . 79
5.7 Conclusion . . . . . 79

**III Écoulements autour d'un obstacle 81**

**6 Écoulements 2D : étude numérique 83**
6.1 Validation de l'algorithme en géométrie de Couette . . . . . 84
6.1.1 Domaine de calcul et conditions aux limites . . . . . 84
6.1.2 Convergence vers des solutions connues . . . . . 85
6.1.3 Modèle VEP . . . . . 88
6.1.4 Bilan . . . . . 90
6.2 Écoulement autour d'un obstacle . . . . . 90
6.2.1 Domaine de calcul et conditions aux limites . . . . . 90
6.2.2 Génération de maillages raffinés localement . . . . . 91
6.2.3 Mise en œuvre des calculs . . . . . 92
6.2.4 Représentation des données . . . . . 93
6.2.5 Résultats . . . . . 93
6.3 Conclusion . . . . . 95

**7 Prédiction d'écoulements autour d'un obstacle 101**
7.1 Présentation des expériences . . . 101
7.1.1 Expérience de Dollet . . . 101
7.1.2 Expérience de Raufaste . . . 103
7.2 Comparaisons modèle/expérience . . . 104
7.2.1 Protocole . . . 104
7.2.2 Correspondance des quantités expérimentales/théoriques . . . 106
7.2.3 Comparaison avec l'expérience de mousse humide . . . 107
7.2.4 Comparaison à l'expérience mousse sèche . . . 112
7.3 Exploration des paramètres . . . 116
7.3.1 Effet de $We$ . . . 118
7.3.2 Effet de $\varepsilon_Y$ . . . 120
7.3.3 Effet de $C_F$ . . . 120
7.3.4 Effet de $\alpha$ . . . 123
7.3.5 Effet de $a$ . . . 125
7.4 Discussion des résultats . . . 126
7.4.1 Le modèle . . . 126
7.4.2 Paramètres . . . 131
7.4.3 Comparaison avec l'expérience . . . 135
7.4.4 Le sursaut de la vitesse . . . 136
7.4.5 Valeur prédictive du modèle . . . 137
7.5 Conclusion . . . 138

**8 Conclusion générale 141**
8.1 Résumé . . . 141
8.2 Perspectives . . . 143

**A Minimisation de fonctions convexes 147**
A.1 Définitions et propriétés . . . 147
A.2 Calculs pour la dérivation des modèles . . . 148

**B Opérateurs différentiels 153**
B.1 Divergence . . . 153
B.2 Gradient . . . 154
B.3 Opérateur $\mathbf{v} \cdot \nabla$ . . . 154
B.4 Dérivée objective . . . 155

**C Calcul de la fonction courant 157**

# Chapitre 1

# Introduction

## 1.1 Motivations

### 1.1.1 Les mousses liquides

#### Généralités sur les mousses liquides

La mousse liquide est un matériau familier que nous rencontrons fréquemment dans notre vie quotidienne, banal au point qu'il peut sembler futile de consacrer du temps et de l'énergie à comprendre et mettre en équations son comportement. Ses propriétés mécaniques sont pourtant loin d'être triviales [18, 102] : chacun en a fait l'expérience, la mousse, constituée de bulles de gaz emprisonnées dans des parois liquides, se comporte parfois comme un solide, parfois comme un liquide. Ainsi, la mousse à raser a le bon goût de s'étaler facilement comme un liquide, puis de rester en place comme un solide, avant de s'effacer sous la lame du rasoir ; les mousses de blancs d'oeufs (les blancs en neige) s'incorporent comme un fluide à de la pâte mais c'est leur rigidité qui est mise à profit pour apporter structure et volume à de délicieuses pâtisseries.

Dans ces deux exemples, l'utilisation de mousse est directement liée à son comportement si particulier, solide ou fluide selon le besoin. Ces propriétés mécaniques combinées à une faible densité sont recherchées dans de nombreuses applications industrielles [18] en cosmétique et en agro-alimentaire, mais également pour l'extraction pétrolière, la lutte contre les incendies, la flottation de minerais, le nettoyage industriel. En outre, les mousses solides, fabriquées en général à partir de mousses liquides, sont omniprésentes dans l'industrie à cause de leurs très grandes résistance et capacité d'isolation, rapportées à leur densité (mousse de polyuréthane ou d'aluminium pour fabriquer des pare-chocs ou des parois légères). Savoir décrire et prédire le comportement mécanique de la mousse permettrait de mieux comprendre puis d'optimiser ces processus industriels qui mettent tous en œuvre des écoulements de mousse.

Par ailleurs, la mousse partage ces propriétés mécaniques avec de nombreux fluides complexes comme les fluides multiphasiques (émulsions), les gels de polymères (carbopol), ou certains systèmes biologiques (cytosquelette, suspensions et assemblées de cellules). Bien que les structures microscopiques de ces matériaux soient différentes, on peut

supposer l'existence de mécanismes génériques émergeant à une échelle mésoscopique où les détails de la composition physico-chimique ne sont plus pertinents. La mousse, facile à produire, et dont l'échelle des constituants élémentaires (les bulles) est accessible à l'oeil nu, constitue un fluide modèle idéal pour l'étude de ces matériaux.

Disposer d'un modèle rhéologique de la mousse, assorti d'un outil numérique permettant de prédire des écoulements dans tout type de géométrie, ouvrirait donc la voie à de nombreuses applications industrielles ainsi qu'à des connaissances fondamentales sur les fluides complexes en général.

### Qu'est-ce qu'une mousse liquide ?

Les mousses liquides sont constituées de bulles de gaz emprisonnées dans un réseau continu de liquide. Suivant le rapport entre la quantité de liquide et de gaz, appelée fraction liquide, l'aspect et les propriétés de la mousse sont très différents : avec peu d'eau (fraction liquide de l'ordre de 1%), la mousse est formée de bulles polyédriques, séparées par des parois très fines (Fig. 1.1A) ; au contraire, avec beaucoup d'eau (fraction liquide de 10 à 30% environ), la mousse est formée de bulles arrondies séparées par des films épais (Fig. 1.1B).

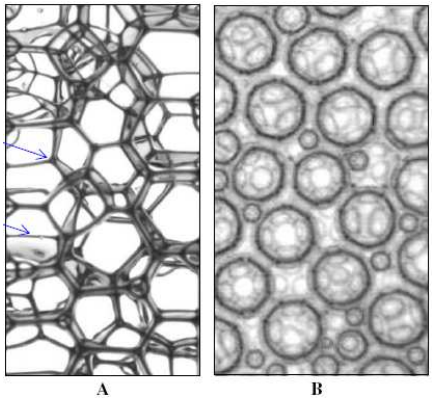


Fig. 1.1 – Structures typiques de mousses sèche (A) et humide (B). D'après [50].

La stabilité de la mousse est assurée par la présence de molécules amphiphiles appelées tensioactifs ou surfactants (par exemple du savon), composées d'une partie hydrophile et d'une partie hydrophobe, qui se disposent aux interfaces gaz/liquide et stabilisent les films. La durée de vie d'une mousse est néanmoins limitée par les phénomènes de drainage et de mûrissement : le drainage est l'écoulement sous l'effet de la gravité du liquide présent dans les films, il tend à assécher les mousses vers le haut ; par ailleurs, les bulles dont la pression est élevée se vident dans leurs voisines par diffusion du gaz à travers les films liquides, c'est le mûrissement (l'utilisation d'azote, peu diffusant, permet de limiter ce phénomène). Pour plus de détails sur les mousses liquides, consulter [18, 102].

### 1.1.2 Un comportement complexe

#### Écoulements de mousse

Fabriquer de la mousse est très facile, il suffit par exemple de faire buller un gaz dans une solution savonneuse ; les bulles remontent à la surface et on peut récupérer la mousse. La mousse obtenue est tridimensionnelle, et son observation est complexe : les bulles diffusent la lumière (Fig. 1.2a), et l'analyse de la structure spatiale nécessite des techniques sophistiquées comme la tomographie à rayons X (Fig. 1.2b).

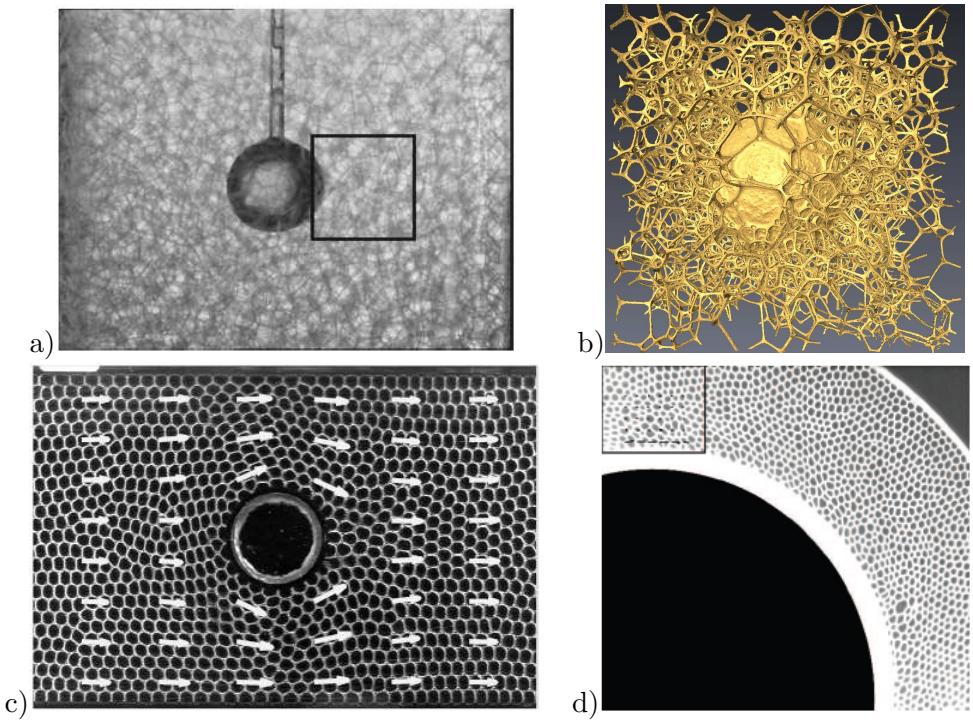


Fig. 1.2 – Exemples d'écoulements de mousse. a) et b) : écoulements tridimensionnels autour d'une sphère ; a) : photographie, d'après [14]. b) : tomographie aux rayons-X [65] ; données non-publiées, image réalisée par P. Cloetens. c) et d) : photographies d'écoulements bidimensionnels et champ de vitesse (flèches). c) écoulement autour d'un obstacle circulaire [30], d) cisaillement de Couette [23].

Cette difficulté technique peut être contournée en confinant la mousse suivant une dimension de manière à ne conserver qu'une seule épaisseur de bulles. Il est alors possible d'imager l'ensemble de l'écoulement avec une simple caméra. Il existe trois dispositifs de ce type : le radeau de bulles où les bulles flottent librement sur une surface liquide (Fig. 1.3i), le radeau de bulles confinées, où la mousse est confinée entre une surface liquide et une plaque de verre (Figs. 1.3.ii et 1.2c), et enfin, la cellule de Hele-Shaw où la mousse est confinée entre deux plaques de verre (Figs. 1.3.iii et 1.2d). Un avantage de ces systèmes est qu'ils sont peu influencés par le drainage lorsqu'ils sont placés horizontalement.

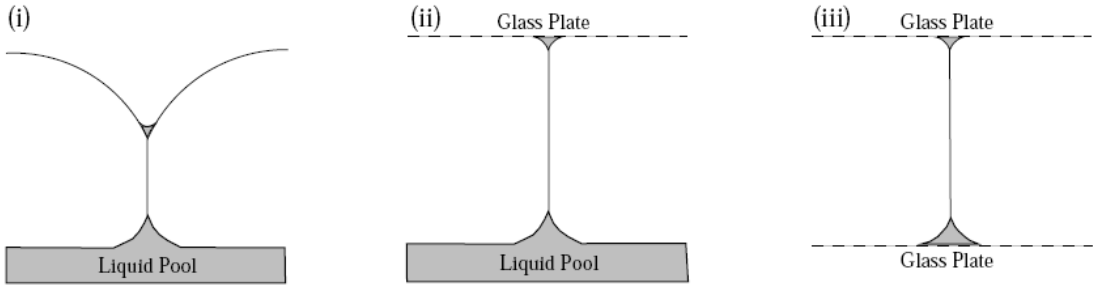


FIG. 1.3 – Systèmes à une bulle d'épaisseur : (i) eau-air (radeau de bulles) ; (ii) eau-verre (radeau de bulles confinées) ; verre-verre (cellule de Hele-Shaw) (iii). D'après [20].

Ces dispositifs permettent de réaliser la plupart des écoulement rhéologiques classiques : cisaillement (Fig. 1.2d), écoulement de Poiseuille, constriction, écoulements autour d'obstacles (Fig. 1.2c). Dans le cas des systèmes eau-verre, on observe une légère compressibilité effective 2D due à la liberté laissée aux bulles d'ajuster leur profondeur en réponse à une variation de pression [31]. Visuellement, l'aire apparente des bulles diminue, ce qui a été mis à profit pour mesurer localement et de manière non invasive le champ de pression [31]. Cet effet est par contre absent des géométries verre-verre : les bulles elles-mêmes sont incompressibles car les différences de pression auxquelles on les soumet sont négligeables devant la pression atmosphérique.

L'utilisation des systèmes 2D soulève tout de même des questions : perd-on en généralité en passant de 3D à 2D ? Nous verrons que ces géométries sont suffisantes pour explorer chacun des aspects du comportement visco-élasto-plastique (VEP) de la mousse. De fait, les comportements observés sont très riches et leur étude est loin d'être terminée. Une autre question a suscité de nombreux débats : la présence des plaques de confinement et la friction qu'elles induisent modifient-elles en profondeur le comportement de la mousse ? Ce point a été abordé par des études expérimentales et théoriques sur lesquelles nous reviendrons par la suite, et nous y apporterons notre propre contribution (cf. chapitre 5).

### Une dynamique non-linéaire

La structure de la mousse lui confère des propriétés mécaniques complexes, non-linéaires par rapport à la déformation appliquée. Considérons une mousse ordonnée "idéale" (cristal parfait de bulles très sèches) initialement au repos et qu'on soumet à un cisaillement (Fig. 1.4).

Au repos, les bulles serrées les unes contre les autres sont dans un minimum d'énergie locale qui correspond à une certaine topologie du réseau (Fig. 1.4a). Au début du cisaillement, la mousse se comporte comme un solide élastique, les bulles se déforment sans modifier cette topologie et développent des contraintes *élastiques* qui augmentent linéairement avec la déformation appliquée (Fig. 1.4b). Lorsque la contrainte atteint une

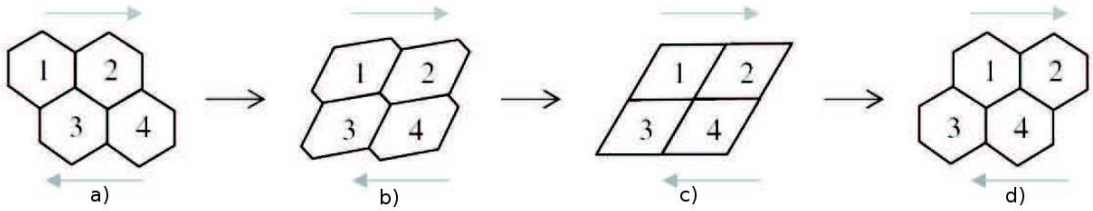


FIG. 1.4 – Comportement d'une mousse de Princen [77] sous cisaillement. D'après [50].

valeur *seuil* (Fig. 1.4c), les bulles ne peuvent plus se déformer et préfèrent se réarranger (Fig. 1.4d) pour relaxer cette contrainte ; on parle d'évènement *plastique*, ou encore de réarrangement topologique (T1) [103]. Après un T1, le mouvement du fluide intersticiel dans les films provoque une dissipation *visqueuse*, c'est un phénomène irréversible. Cette approche simplifiée est bien sûr insuffisante pour décrire la dynamique des mousses, mais elle met en évidence ses aspects fondamentaux : réponse élastique à faible déformation appliquée ; existence d'une contrainte/déformation seuil ; régime fluide au-delà du seuil pour des échelles de temps supérieures au temps de relaxation des T1, lorsque leur superposition permet aux bulles de s'écouler les unes par rapport aux autres. *A priori*, ces caractéristiques VEP interviennent simultanément et il faut pouvoir les intégrer dans un cadre unique.

La compréhension et la modélisation de ce comportement constitue un véritable défi et a suscité de nombreuses recherches ces dernières années ; nous en présentons une brève revue, non exhaustive. Pour des revues plus complètes, le lecteur pourra consulter [102, 50, 18].

## 1.2 Rhéologie des mousses : un bref état de l'art

### 1.2.1 Rhéométrie oscillatoire

Pour obtenir des informations sur le comportement mécanique de la mousse, une première approche consiste à mesurer sa réponse globale à contrainte ou taux de cisaillement imposés à l'aide d'un appareil nommé rhéomètre. La rhéométrie apporte donc des informations *scalaires* sur le comportement *global* du matériau.

Nous présentons ici des expériences de rhéométrie oscillatoire réalisées sur des mousses. Une déformation sinusoïdale $\gamma = \gamma_0 \sin(\omega t)$ est appliquée à un échantillon et la contrainte $\sigma$ développée est mesurée sur les parois du rhéomètre. On en déduit les modules de charge $G'$ et de perte $G''$ qui correspondent respectivement aux parties en phase et en opposition

de phase de la réponse complexe du système $G = \sigma/\gamma$ [69] :

$$\begin{aligned} G' &= \frac{\omega}{\gamma_0 \pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sigma(t) \sin(\omega t) \mathrm{d}t, \\ G'' &= \frac{\omega}{\gamma_0 \pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sigma(t) \cos(\omega t) \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

La réponse en phase ($G'$) est interprétée comme la réponse élastique du matériau tandis que la réponse en opposition de phase ($G''$) est interprétée comme une dissipation. Nous reproduisons figure 1.5 des mesures expérimentales de $G'$ et $G''$ réalisées sur des mousses liquides a) à fréquence constante et amplitude variable [81] et b) inversement [42].

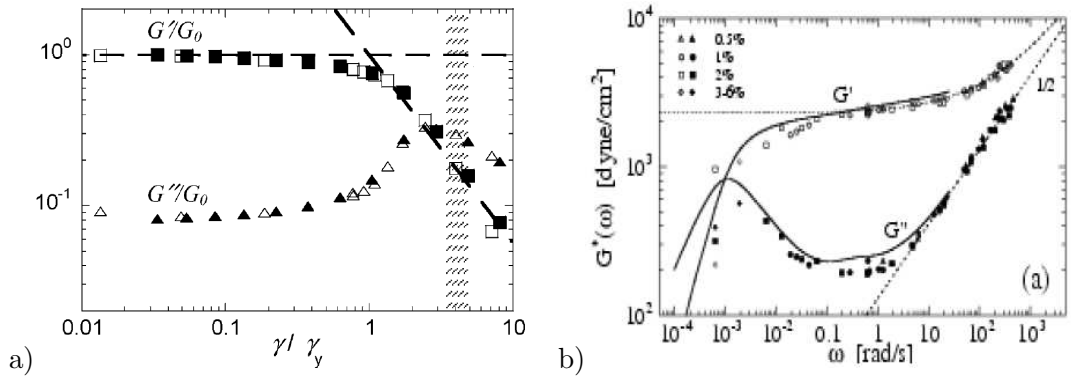


FIG. 1.5 – Rhéométrie oscillatoire de mousses liquides : $G'$ et $G''$ (définis dans le texte) a) en fonction de l'amplitude et à fréquence fixée, d'après [81] ; la partie hachurée correspond à l'apparition de la localisation de la déformation. b) en fonction de la fréquence et à amplitude fixée, d'après [42].

- Réponse à fréquence fixée :
  Le comportement est très différent suivant l'amplitude $\gamma$, et on peut définir une amplitude seuil $\gamma_Y$ qui sépare les régimes à petite et grande amplitude. A faible amplitude ($\gamma \leq \gamma_Y$), $G' \gg G''$, la réponse est essentiellement élastique ; le plateau de $G'$ est le signe d'une élasticité linéaire, tandis que le plateau de $G''$ indique une dissipation visqueuse newtonienne. Cette réponse à basse amplitude correspond au régime élastique évoqué à la section précédente (Fig. 1.4a et b)) que la mesure rhéométrique permet de caractériser quantitativement ; elle permet également de caractériser la dissipation visqueuse qui se produit dans les films entre bulles. A grande amplitude ($\gamma \geq \gamma_Y$), le comportement de la mousse est plus complexe : $G'$ diminue tandis que $G''$ augmente puis diminue : la réponse élastique de la mousse n'est plus linéaire par rapport à la déformation appliquée, et la dissipation visqueuse n'est plus newtonienne(Figs. 1.4c et d). On atteint alors la limite de l'approche rhéométrique : une localisation de la déformation apparaît dans l'entrefer du rhéomètre [82], ce qui fausse la mesure de la réponse du matériau.

- Réponse à amplitude fixée :
  L'amplitude est choisie suffisamment faible pour que le seuil ne soit pas dépassé. A part à très basse fréquence où le mûrissement modifie les propriétés de la mousse [42], on a $G' > G''$ ce qui indique que la réponse est majoritairement élastique. Notons également que les réponses élastiques et surtout visqueuses augmentent à haute fréquence. Les propriétés viscoélastiques de la mousse sont modifiées selon la fréquence à laquelle elle est sollicitée.

Si l'on fait abstraction du drainage et du mûrissement, les résultats présentés sont principalement affectés par des variations de la fraction liquide : la contrainte seuil et le module élastique s'annulent pour $\phi = \phi_c = 36\%$ pour des mousses 3D, et $\phi = \phi_c = 16\%$ pour des mousses 2D [8], correspondant à l'empilement dense aléatoire de sphères. Des lois d'échelle ont été prédites pour le module élastique : $G' \propto \phi(\phi - \phi_c)$, ainsi que pour la contrainte seuil : $\sigma_Y \propto (\phi - \phi_c)^2$. Notons également que ces courbes rhéométriques (Fig. 1.5) sont très proches de celles d'autres fluides complexes comme les émulsions [85] et les suspensions [25].

Les mesures rhéométriques mettent en évidence les régimes pressentis avec l'exemple élémentaire présenté à la section précédente : régime élastique en-dessous d'un seuil, fluide au delà. Elles apportent des informations quantitatives : on peut caractériser module élastique et seuil de plasticité. En revanche, l'étude du régime fluide est perturbée par la présence de bandes de cisaillement dans l'entrefer du rhéomètre. L'approche rhéométrique, qui apporte des informations globales, est donc insuffisante pour explorer tous les aspects du comportement de la mousse.

### 1.2.2 Caractérisation du régime fluide

La mousse est un fluide à seuil, et dans les écoulements de cisaillement, son comportement en régime permanent est souvent caractérisé à l'aide de modèles viscoplastiques ; citons le modèle de Bingham qui introduit un seuil de plasticité : la contrainte $\sigma$ et le taux de déformation $\dot{\varepsilon}$ vérifient la relation

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_Y \dfrac{\dot{\varepsilon}}{|\dot{\varepsilon}|} + \eta\dot{\varepsilon} & \text{si} \quad \dot{\varepsilon} \neq 0, \\ |\sigma| \leq \sigma_Y & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.1}$$

où $\sigma_Y$ désigne la contrainte seuil, et $\eta$ la viscosité. Le modèle d'Herschel-Bulkley, qui décrit un comportement rhéofluidifiant, est plus adapté pour les mousses [50].

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_Y \dfrac{\dot{\varepsilon}}{|\dot{\varepsilon}|} + k|\dot{\varepsilon}|^{n-1}\dot{\varepsilon} & \text{si} \quad \dot{\varepsilon} \neq 0, \\ |\sigma| \leq \sigma_Y & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.2}$$

où $k$ est un paramètre de consistance, et $n$ est un index de puissance.

Ces modèles ne prennent pas en compte l'élasticité et sont donc insuffisants pour modéliser les mousses dans le cas général. Néanmoins, ils doivent constituer la limite stationnaire des modèles de mousse.

## 1.3 Débats

### 1.3.1 Discret ou continu ?

De manière fondamentale, le niveau de description à adopter pour les mousses fait débat : la modélisation doit-elle tenir compte du caractère discret de la mousse ?

Le comportement des mousses et de matériaux similaires, composés d'éléments pouvant se déformer et se réarranger, résiste encore à la modélisation. A cause de la nature discrète de ces matériaux, il se pourrait que les fluctuations restent pertinentes même à grande échelle, et des théories statistiques décrivant des corrélations à longue portée et des avalanches seraient requises [73, 76]. L'effet des fluctuations a été observé expérimentalement dans le cas d'écoulements de cisaillement simple, où la géométrie de l'écoulement n'impose aucune contrainte sur la répartition de la contrainte [83], puis exploré par le biais d'études numériques à partir de simulations de type Surface Evolver et Potts [55] (où les bulles sont représentées individuellement).

Ce point de vue est mis en doute par des expériences récentes qui suggèrent que ces matériaux peuvent être décrits par des équations tensorielles continues [75, 31] : leur réponse macroscopique peut être décrite expérimentalement en termes de mécanismes physiques génériques *via* une échelle mésoscopique suffisamment grande pour que les concepts de la mécanique des milieux continus comme la vitesse, la contrainte, la déformation, et la déformation seuil soient bien définis, et suffisamment petite pour que les variations spatiales de ces quantités soient bien résolues.

### 1.3.2 Localisation de l'écoulement

En 2001, Debrégeas *et al.* [23] ont cisaillé une mousse entre deux cylindres et montré que le profil de vitesse était localisé près du bord interne. Ce résultat a suscité de nombreux débats car d'autres expériences ont montré que l'apparition des bandes de cisaillement (localisation de l'écoulement) n'est pas systématique. Leur occurrence dépend de la géométrie (cisaillement entre deux cylindres ou entre deux plans parallèles), du dispositif expérimental (présence ou non de plaques servant à confiner l'écoulement), du taux de cisaillement appliqué, de la fraction fluide, et d'autres paramètres plus fins comme le degré de désordre de la mousse utilisée (*i.e.* la présence de bulles de tailles différentes). Pour une revue, consulter [97]. La localisation n'est pas spécifique aux systèmes bidimensionnels puisqu'elle apparaît également dans des rhéomètres [81], mais la question du lien entre les localisations 2D et 3D est encore ouverte [18]. Ce comportement n'est pas pas non plus spécifique aux mousses, puisqu'il a été observé sur des matériaux aussi divers que les émulsions [19], les micelles géantes [86], ou les matériaux granulaires humides [52].

D'autres phénomènes peuvent intervenir, comme la présence des plaques de confinement et la friction qu'elles induisent [101, 54, 17, 58, 59]. Dans une publication récente [59], Katgert *et al.* ont mis en évidence un lien entre l'indice de puissance de la loi d'Herschel-Bulkley (1.2) et le désordre de la mousse dans le cas de mousses humides.

### 1.3.3 Rhéologie non-locale

La loi d'Herschel-Bulkley ne semble plus valable dans certains cas, par exemple dans les zones où la contrainte est en-dessous du seuil de plasticité [60]. En s'inspirant d'une étude réalisée à partir d'expériences d'écoulements confinés d'émulsions [44, 43], Katgert *et al.* [60] ont fait intervenir une fonction de "fluidité" qui permettrait d'ajuster les profils de vitesse de manière à ce qu'ils se superposent aux profils expérimentaux. Cette fluidité $f = \dot{\varepsilon}/\sigma$, qui correspond à l'inverse de la viscosité, se diffuse avec une longueur caractéristique dite de "coopérativité". Cette longueur quantifierait l'extension spatiale de l'activité plastique due à une relaxation élastique non-locale [43]. Ainsi, ce modèle tiendrait compte d'une certaine façon de l'élasticité de la mousse.

A l'inverse, on peut se demander si des modèles qui décriraient de manière plus intrinsèque l'élasticité de la mousse ne pourraient pas prédire également ces écoulements confinés.

## 1.4 Outils pour une description VEP de la mousse

Les géométries décrites à la section 1.1.2 permettent d'extraire de nombreuses informations grâce à une simple caméra et des techniques d'analyse d'image [31] : les bulles elles-mêmes servent de traceur passif pour mesurer la vitesse (Fig. 1.2c) et d)), mais également d'autres quantités comme la déformation élastique et le taux de déformation plastique grâce à des outils tensoriels [45] valides en 2D et 3D, que nous présentons brièvement. La description continue de la mousse est obtenue à partir de moyennes réalisées sur des centaines de bulles dans des volumes représentatifs de l'écoulement (Fig. 1.6).

Parmi les géométries étudiées, citons : cisaillement de Couette [53], constriction [3, 27], écoulements autour d'obstacles [31, 28].

### 1.4.1 Déformation élastique

L'élasticité des mousses est liée à l'étirement des bulles qui peut se quantifier à partir de l'analyse de leur forme : le tenseur de texture $M$ [45, 71] (Fig. 1.7), basé sur la mesure des liens $\mathbf{l}$ entre les barycentres des bulles voisines, permet dans un premier temps de mesurer l'anisotropie des bulles :

$$M = < \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} >, \tag{1.3}$$

où $< \cdot >$ désigne la moyenne dans le temps sur les volumes représentatifs de l'écoulement. Le tenseur $M$ est par construction symétrique défini positif, il est diagonalisable dans une base orthonormée et possède deux valeurs propres strictement positives. En chaque point du plan, on peut le représenter par une ellipse (Fig. 1.7) : la longueur des axes est donnée par les valeurs propres et leur direction est donnée par les vecteurs propres associés. On construit ensuite le tenseur de déformation statistique $U$ [71] à partir de $M$ :

$$U = \frac{1}{2}(\log M - \log M_0), \tag{1.4}$$

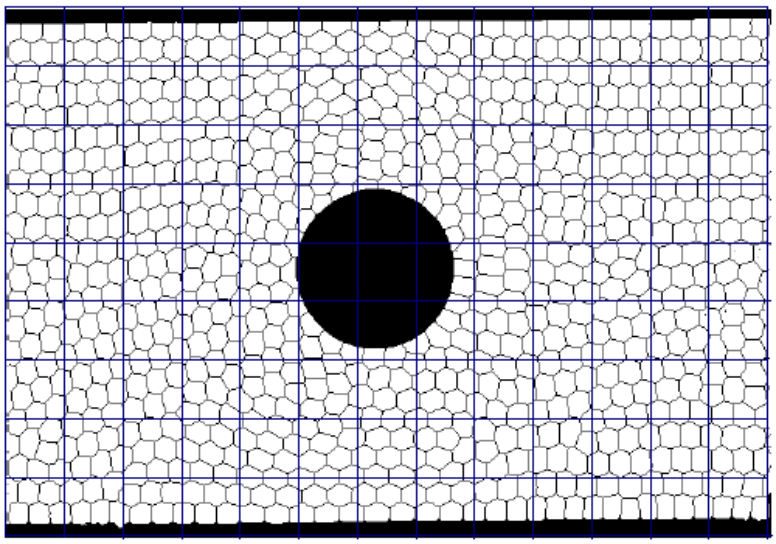

FIG. 1.6 – Image de mousse traitée pour extraire les côtés de bulles, et matérialisation de l'échelle mésoscopique : les boîtes rectangulaires sont les volumes représentatifs de l'écoulement sur lesquelles sont réalisées les moyennes qui conduisent à une description continue de la mousse. D'après [26].

où $M_0$ correspond à une configuration de référence dans laquelle on considère que la mousse est au repos (Fig. 1.7A). Cette définition de la déformation coïncide avec la définition classique (gradient du déplacement) en élasticité et l'étend au-delà du premier réarrangement plastique. De fait, même en régime fluide, les bulles sont étirées, ce qui engendre de l'élasticité. Dans le cas des mousses, l'élasticité est bien liée à la déformation (discuté en détail dans [71], y compris les hypothèses sous-jacentes).

### 1.4.2 Contrainte élastique

Pour une mousse sèche, il est possible de définir le tenseur des contraintes d'origine interfaciale, qu'on peut assimiler au tenseur des contraintes élastiques (voir [53] et les références de cet article pour une discussion approfondie). Ce tenseur est défini à partir du réseau des côtés de bulles :

$$\sigma_{el} = \nu\rho \left\langle \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \right\rangle, \tag{1.5}$$

où $\nu$ désigne la tension de ligne (en N), $\rho$ la densité surfacique (en $\mathrm{m}^{-2}$) des côtés de bulles notés $\mathbf{r}$.

### 1.4.3 Taux de déformation

Connaissant les variations spatiales de la vitesse, il est possible de définir et de tracer le tenseur de taux de déformation $D(\mathbf{v}) = (\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T)/2$. Une autre mesure de cette

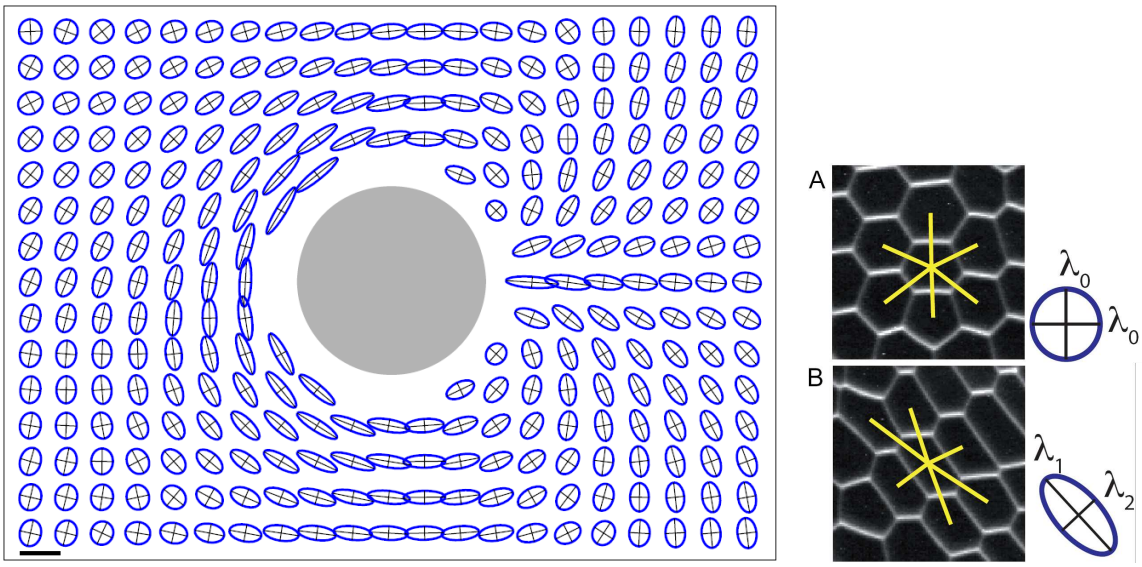


FIG. 1.7 – Tenseur de texture $M$. A gauche, carte globale du tenseur. A droite, Instantanés de deux régions de la mousse et mode de représentation : A) mousse isotrope de référence ; B) mousse déformée. Les traits jaunes sont les liens entre centres de bulles. Le tenseur $M$ est représenté par des ellipses (explications dans le texte). D'après [45].

quantité peut être obtenue [45, 71] à partir du tenseur

$$< \dot{\mathbf{l}} \otimes \mathbf{l} > .$$

### 1.4.4 Taux de déformation plastique

De la même façon, la plasticité de la mousse peut être caractérisée par la mesure d'une quantité tensorielle basée sur l'analyse d'image : les bulles peuvent se réarranger entre elles et modifier la topologie de la mousse, ce qui peut être suivi image par image. En analysant les liens entre bulles qui apparaissent ou disparaissent, on construit $T$, le tenseur de réarrangements topologiques :

$$T = \dot{n}_a < \mathbf{l}_a \otimes \mathbf{l}_a > -\dot{n}_d < \mathbf{l}_d \otimes \mathbf{l}_d >, \tag{1.6}$$

où $\dot{n}_a$ (resp. $\dot{n}_d$), exprimé en $s^{-1}$, est le taux d'apparition (resp. de disparition) de lien par unité de temps et par lien existant, et $\mathbf{l}_a$ (resp. $\mathbf{l}_d$) désigne les liens apparus (resp. disparus). Le tenseur $P$ [45], qui dans le cas des mousses s'identifie au taux de déformation plastique (discuté dans [71]), permet de quantifier la localisation, l'orientation, et la fréquence des T1s, est obtenu à partir de $T$ et de $M$ :

$$P = -\frac{1}{2}\frac{M^{-1}T + TM^{-1}}{2}. \tag{1.7}$$

Pour toutes les grandeurs présentées, l'approche milieu continu a été validée expérimentalement sur de nombreux exemples [3, 53, 31, 27] jusqu'à une échelle inférieure à la taille des bulles, suffisamment petite pour capturer les variations locales.

### 1.4.5 Apports de ces outils

- Description tensorielle : l'aspect tensoriel des fluides non-newtoniens visco-élastiques est connu de longue date. La mesure des contraintes élastiques l'a mis en évidence dans le cas des mousses avec la présence d'une différence des contraintes normales non nulle [3]. L'importance de la description tensorielle est également visible dans le cas d'écoulements complexes comme celui autour d'un obstacle (Fig. 1.2c), où les orientations des tenseurs considérés varient considérablement (Fig. 1.7). Nous visualisons directement le transport de l'élasticité par la vitesse. Cet aspect sera discuté dans la suite (chapitre 2, section 2.1.3).
- Description simultanée des régimes fluide et solide : tous les outils présentés sont valides aussi bien en régime élastique que fluide, ce qui permet d'étudier le couplage entre l'élasticité, la plasticité, et l'écoulement.
- La description locale de la plasticité a mis en évidence l'existence à basse vitesse d'une plasticité progressive : des T1s peuvent apparaître avant le seuil [71].
- Définition consistante de la déformation et de la contrainte élastiques : Asipauskas *et al.* [3] ont examiné la corrélation entre ce tenseur et le tenseur de déformation statistique pour un écoulement de constriction, qui comprend des zones en régime fluide et d'autres en régime solide. Les deux tenseurs sont proportionnels (Fig. 1.8), ce qui montre d'une part la validité de cette définition de la déformation, et d'autre part que l'élasticité reste linéaire même pour un écoulement aussi contraignant qu'une constriction.
- L'étude d'écoulements dans des géométries bidimensionnelles complexes a montré que l'élasticité de la mousse engendre des comportements inattendus, comme le sursaut de la vitesse derrière un obstacle [31] ou une portance inversée dans le cas d'un écoulement autour d'un profil asymétrique [28]. Même si la mousse est confinée suivant une dimension, ces écoulements sont suffisamment contraignants pour tester les modèles rhéologiques.

Ces outils mettent l'accent sur les propriétés macroscopiques de la mousse ; le couplage de l'élasticité, de la plasticité, et de la viscosité, plutôt que le détail de la structure microscopique, régit le comportement de la mousse à grande échelle. C'est en cela que la mousse peut être considérée comme un fluide VEP modèle. La mousse est donc plus que visco-plastique, ce qui n'est pas forcément visible quand on se limite à la mesure des profils de vitesse stationnaires dans des écoulements de cisaillement ou de Poiseuille, où la contrainte élastique est entièrement déterminée par le taux de cisaillement.

Pour modéliser ce comportement, il apparaît nécessaire de disposer d'un modèle tensoriel qui intègre dans un même cadre viscosité, élasticité, et plasticité. Il s'agit de notre hypothèse fondamentale dans cette thèse : nous avons l'ambition de modéliser la mousse avec un modèle VEP tensoriel continu.

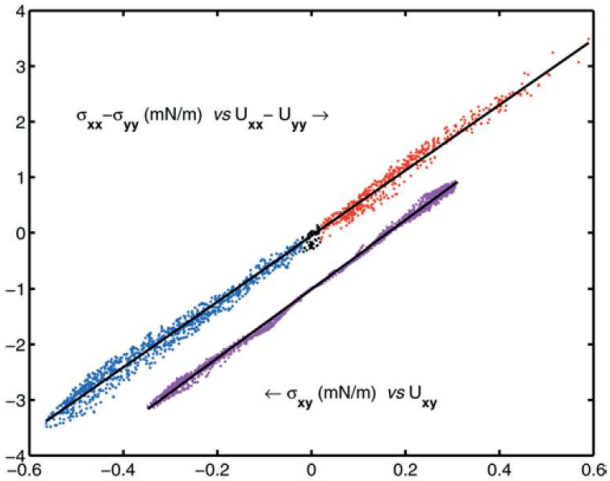


FIG. 1.8 – D'après [3]. Mesure d'élasticité pour une expérience de constriction. Les composantes du tenseur des contraintes élastiques $\sigma_{el}$ sont tracées en fonction de celles du tenseur de déformation statistique $U$. Les composantes $xy$ sont décalées par souci de clarté.

## 1.5 Modélisation VEP des mousses et des fluides non newtoniens

### 1.5.1 Modèles non-newtoniens les plus courants

Entre les limites bien connues de l'élasticité linéaire (comportement solide) et de l'hydrodynamique newtonienne (comportement fluide), la rhéologie, littéralement science de l'écoulement, s'attache à décrire le comportement mécanique des fluides dits complexes, dont le comportement est intermédiaire. Parmi les comportements les plus étudiés, la visco-plasticité (par exemple, modèles de Bingham et d'Herschel-Bulkley) décrit des matériaux comme l'argile qui ne s'écoulent qu'au-delà d'un certain seuil ; la visco-élasticité (par exemple, modèles d'Oldroyd, FENE-CR, Phan-Thien-Tanner) s'intéresse aux fluides qui, comme les polymères fondus, couplent une réponse élastique aux temps courts, et visqueuse aux temps longs ; enfin, l'élastoplasticité, que l'on rattache le plus souvent à la mécanique des solides, décrit par exemple les phénomènes de rupture dans les métaux.

Or, nous l'avons vu, la mousse est visco-élasto-plastique (VEP) et son comportement complexe ne peut être prédit par aucune des approches ci-dessus, ni par leur superposition : une approche VEP est nécessaire. L'utilisation de modèles VEP est déjà ancienne, mais la plupart d'entre eux ne sont pas adaptés à l'étude des mousses (cf. [92] pour une revue). Ce n'est que très récemment que des modèles VEP à même de le faire ont été proposés. Nous en présentons une brève revue.

### 1.5.2 Modèles VEP existants

#### Modèle de Janiaud et al. (2006)

Dans ce modèle VEP phénoménologique scalaire, la contrainte totale $\sigma$ est la somme de deux contributions [54] :

$$\sigma = \sigma_Y f(\varepsilon/\varepsilon_Y) + \eta\dot{\varepsilon}, \tag{1.8}$$

où $\sigma_Y$ est la contrainte seuil, $\varepsilon_Y$ est la déformation seuil, $\eta$ est la viscosité, et $\dot{\varepsilon}$ est le taux de déformation. La fonction $f(\varepsilon/\varepsilon_Y) = \tanh(\varepsilon/\varepsilon_Y)$ décrit la relation contrainte déformation de manière à ce que la contrainte augmente linéairement avec la déformation en-dessous du seuil et sature au-delà. Cette équation constitutive est complétée par la conservation de la quantité de mouvement qui inclut la contribution des plaques de confinement sous la forme d'une friction visqueuse. Ces équations, formulées en 1D, ont été résolues dans des géométries de cisaillement plan [54] ou cylindrique [17], de manière à retrouver les profils de vitesse observés dans des expériences utilisant ces géométries (respectivement [23] et [101]). La généralisation à 2D ou 3D de ce modèle ne nous paraît néanmoins pas immédiate, de sorte qu'il n'est pas certain qu'il puisse traiter des géométries complexes comme celle de l'écoulement autour d'un obstacle.

#### Modèle de Marmottant Graner (2007)

Marmottant et Graner [70] ont proposé un modèle VEP tensoriel qui décrit une plasticité progressive, conformément à ce qui a été observé à basse vitesse [71]. Ce modèle postule que le taux de déformation $\dot{\varepsilon}$ se partage en une déformation élastique $\varepsilon^e$ et un taux de déformation plastique $\dot{\varepsilon}_p$ :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\varepsilon^e}{\mathrm{d}t} + \dot{\varepsilon}_p. \tag{1.9}$$

Le terme de plasticité

$$\dot{\varepsilon}_p = h(\varepsilon^e/\varepsilon_Y)\mathcal{H}(\varepsilon^e : \dot{\varepsilon})\dot{\varepsilon} \tag{1.10}$$

décrit, grâce à la fonction $h$, une transition douce entre le régime purement élastique ($h = 0$) et le régime purement fluide ($h = 1$) ; la fonction de Heaviside $\mathcal{H}$ décrit le fait qu'il n'y a pas de plasticité lorsque le cisaillement n'est pas orienté suivant la déformation.

Ce modèle a été comparé à des expériences [71] sans être résolu : le terme de plasticité a été comparé avec succès au tenseur de taux de réarrangements plastiques $P$ (défini par (1.7)).

#### Modèle de Saramito (2007)

Il s'agit du modèle que nous avons choisi pour décrire les mousses. Il est adapté à une vitesse plus grande : $\lambda\nabla v > 1$, où $\lambda$ est temps caractéristique de relaxation. Ce modèle VEP tensoriel [92] est construit à partir d'un formalisme thermodynamique qui garantit qu'il vérifie le second principe de la thermodynamique en petites déformations.

Comme [70], il est basé sur la décomposition (1.9), il emploie une élasticité linéaire, mais une dissipation plastique plus simple que (1.10) : le taux de plasticité s'écrit

$$\dot{\varepsilon}_p = \frac{1}{\lambda}\max\left(0, \frac{|\varepsilon^e| - \varepsilon_Y}{|\varepsilon^e|}\right)\varepsilon^e. \tag{1.11}$$

Il a l'avantage de généraliser les modèles d'Oldroyd et de Bingham, dont le comportement est bien connu. Nous expliquerons en détail sa construction au chapitre suivant et nous justifierons sa pertinence pour l'étude des mousses.

Ce modèle a été résolu pour des écoulements simples [92] : cisaillement simple, élongation uniaxiale, et cisaillement oscillatoire à grande amplitude. Les courbes de $G'$ et $G''$ obtenues à partir de ce dernier écoulement montrent un comportement qualitativement proche de celui observé pour les mousse (Fig. 1.5). Une extension a été proposée récemment [93], qui décrit une dissipation plastique de type Herschel-Bulkley, afin d'obtenir un comportement rhéofluidifiant à contrainte élevée.

#### Modèle de Benito et al. (2008)

Ce modèle VEP tensoriel [13] s'apparente à [92], mais il a été écrit dans un cadre plus général qui permet de prendre en compte une élasticité non-linéaire. De ce fait, sa formulation est un peu plus complexe et sa résolution numérique dans des géométries quelconques ne paraît pas évidente. A notre connaissance, ce modèle a été résolu pour un écoulement de cisaillement constant et homogène [13], et un écoulement de cisaillement bidimensionnel plan (non publié à notre connaissance).

## 1.6 Introduction spécifique à cette thèse

Cette thèse s'inscrit dans la problématique de la rhéologie des mousses et des fluides complexes en général. Elle se base d'une part sur les séries d'expériences réalisées par Dollet[31] et Raufaste [78], d'autre part sur le modèle VEP de Saramito [92]. Ces expériences sont analysées par des outils [45] qui décrivent la mousse comme un milieu continu ; cette description utilise des quantités scalaires, vectorielles, et tensorielles qui sont directement comparables aux variables du modèle [92].

Nous nous proposons de mettre en œuvre cette comparaison, ce qui passe avant tout par l'élaboration d'un outil de résolution numérique du modèle efficace. Nos objectifs sont les suivants : valider la description continue des mousses ; valider la pertinence du modèle pour les fluides VEP ; permettre une meilleure compréhension de la rhéologie des mousses.

Cette thèse se décompose en trois parties :

#### 1ère partie : Le modèle et sa résolution numérique

Nous décrivons au chapitre 2 le formalisme des matériaux standards généralisés qui permet de construire des modèles vérifiant le second principe de la thermodynamique.

Des modèles classiques comme ceux de Navier-Stokes, de Bingham, ou d'Oldroyd s'intègrent dans ce cadre. Nous explicitons ensuite la construction du modèle [92] et justifions sa pertinence pour l'étude des mousses. Nous proposons enfin deux adimensionnements du modèle, selon que l'on veut mettre l'accent sur les propriétés fluides ou solides de la mousse.

L'algorithme de résolution est détaillé au chapitre 3 : d'une part la discrétisation en temps qui permet à la fois de découpler le calcul des vitesses et des contraintes et de séparer les non-linéarités du modèle ; d'autre part la discrétisation en espace par une méthode d'éléments finis.

**2ème partie : Écoulements de cisaillement**

Le modèle que nous utilisons et l'algorithme que nous proposons étant tous les deux nouveaux, nous l'avons d'abord testé. Dans cette deuxième partie, nous avons donc traité des écoulements de cisaillement, dont la résolution se ramène à celle d'équations 1D, ce qui simplifie grandement la mise en place de l'algorithme et l'exploration des paramètres du modèle.

Au chapitre 4, nous examinons le comportement de l'algorithme : convergence vers les solutions connues des modèles d'Oldroyd et de Bingham en fonction du pas d'espace, choix du pas de temps ; pour le modèle VEP, nous analysons en détail les solutions obtenues.

Traiter ce type de géométrie présente un autre intérêt : il est possible de comparer les solutions du modèle à l'expérience de cisaillement entre deux cylindres de Debrégeas [23], et à l'analyse qui en a été faite par Janiaud et Graner [53]. Nous pourrons ainsi vérifier la pertinence du modèle, estimer la valeur de ses paramètres, et nous positionner dans le débat évoqué plus haut, section 1.2.2, sur les causes de la localisation de l'écoulement dans cette expérience (chapitre 5).

**3ème partie : Écoulements autour d'un obstacle**

Dans cette dernière partie, nous abordons l'objet principal de la thèse : la résolution d'écoulements autour d'un obstacle. Par rapport aux écoulements de cisaillement, la difficulté est nettement supérieure : tout d'abord, la géométrie est réellement bidimensionnelle, donc l'algorithme est plus difficile à mettre en place, et les calculs prennent plus de temps. Ensuite, l'écoulement lui-même est beaucoup plus riche et complexe, et la comparaison avec l'expérience semble *a priori* plus difficile.

Comme dans la partie précédente, nous commençons par valider numériquement l'algorithme (chapitre 6) : nous vérifions que les modèles d'Oldroyd et de Bingham sont bien résolus, avant de nous assurer que nous pouvons obtenir en temps raisonnable des solutions suffisamment précises pour être comparées aux expériences.

Enfin, nous présentons au chapitre 7 les comparaisons proprement dites : d'abord avec une expérience de mousse humide [31], puis avec une expérience de mousse sèche [78]. L'effet des paramètres du modèle est exploré systématiquement. Nous terminons le chapitre par une discussion détaillée sur le modèle et sur les comparaisons.

# Première partie

# Le modèle et sa résolution numérique

# Chapitre 2

# Modélisation

Nous présentons ici notre modèle [92] de fluide visco-élasto-plastique (VEP) construit dans le cadre de la mécanique des milieux continus. La mécanique des milieux continus permet de décrire l'évolution d'un matériau soumis à diverses contraintes grâce à un système fermé d'équations aux dérivées partielles : d'une part les lois de conservation, qui traduisent des principes généraux de la physique et s'appliquent à tous les matériaux continus ; d'autre part la loi de comportement, qui est spécifique du matériau. Cette dernière est obtenue ici à l'aide du formalisme des *matériaux standards généralisés* [48] qui garantit que le modèle vérifie le second principe de la thermodynamique et constitue un outil robuste et pratique pour combiner plusieurs comportements rhéologiques élémentaires [96]. Il permet ainsi de retrouver facilement des modèles de fluides newtoniens et non-newtoniens classiques. Enfin, nous exposons en détail la construction du modèle VEP proprement dit en justifiant sa pertinence pour la modélisation d'écoulements de mousse.

## 2.1 Cadre de la mécanique des milieux continus

### 2.1.1 Position du problème

Nous considérons un matériau continu occupant un domaine borné $\Omega$ dans $\mathbb{R}^N$ ($N = 2$ ou 3) dans sa configuration actuelle, soumis à une force volumique $\mathbf{f}$.

Le problème consiste à déterminer le champ de vitesse $\mathbf{v}(x,t)$ et le champ de contrainte $\sigma(x,t)$ en tout point $x$ de $\Omega$ et pour tout temps $t$ positif, à condition initiale donnée. Pour cela, deux classes d'équations sont utilisées en mécanique des milieux continus : les lois de conservation et les lois de comportement.

### 2.1.2 Lois de conservation

Elles sont au nombre de trois : conservation de la masse, de la quantité de mouvement, et de l'énergie ; seules les deux premières nous intéressent car nous supposons que les évolutions du milieu sont isothermes.

- **Conservation de la masse :**

Soit $\rho$ la densité de masse ; le principe de conservation de la masse s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Dans la suite nous comparons le modèle à des écoulements bidimensionnels de mousse de type verre-verre, incompressible, ou eau-verre, faiblement compressible (cf. introduction). En première approximation, cette compressibilité peut être négligée et nous nous plaçons dans le cadre des fluides incompressibles. La conservation de la masse se réduit alors à

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega. \tag{2.1}$$

- **Conservation de la quantité de mouvement :**
  Soit $\mathbf{f}$ la densité de forces volumiques s'exerçant sur le matériau. La conservation de la quantité de mouvement implique la relation

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right) - \operatorname{div} \sigma \quad = \quad \mathbf{f} \text{ dans } \Omega. \tag{2.2}$$

$$\tag{2.3}$$

### 2.1.3 Construction de lois de comportement à l'aide d'un formalisme thermodynamique

Les lois de conservation ne suffisent pas à elles seules à décrire complètement l'évolution du système : tout d'abord il y aurait plus d'inconnues que d'équations, mais surtout, ces lois ne sont pas spécifiques du matériau. Les lois de comportement apportent les ingrédients physiques en exprimant le tenseur des contraintes $\sigma$ en fonction de la variable choisie pour décrire les déformations du milieu.

Nous résumons ici un formalisme issu de la thermodynamique des milieux continus [38, 96] qui permet de construire des lois de comportement sous l'hypothèse des petites déformations. Ce cadre étant bien sûr insuffisant pour l'étude d'un écoulement permanent, nous montrons par la suite comment étendre ces lois aux grandes déformations.

#### Hypothèse des petites déformations

Nous faisons dans un premier temps l'hypothèse des petites déformations qui stipule que le matériau étudié ne varie pas durant un intervalle de temps élémentaire d$t$, et que le gradient $\nabla \mathbf{u}$ du champ de déplacement $\mathbf{u}$ reste petit durant la déformation. Pour toute quantité $h(x,t)$ scalaire ou tensorielle, les dérivées matérielles et les dérivées partielles par rapport au temps peuvent alors être identifiées :

$$\dot{h} = \frac{\partial h}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)h \approx \frac{\partial h}{\partial t}.$$

### Formalisme thermodynamique

Sous l'hypothèse précédente, le cadre des *matériaux standards généralisés* [48, 96] permet de construire des équations constitutives qui vérifient par construction le second principe de la thermodynamique ; l'évolution du matériau est décrite de manière synthétique à partir des expressions d'une énergie libre $\psi$ et d'un potentiel de dissipation positif $\mathcal{P}$, toutes deux fonctions convexes. Si on ne considère que des évolutions isothermes, la loi de comportement du matériau est définie par les relations

$$\sigma = \rho\frac{\partial\psi(\chi)}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\mathcal{P}(\dot{\chi})}{\partial\dot{\varepsilon}}, \tag{2.4}$$

$$0 = \rho\frac{\partial\psi(\chi_i)}{\partial\chi_i} + \frac{\partial\mathcal{P}(\dot{\chi}_i)}{\partial\dot{\chi}_i}, \forall i = 2, \ldots, r, \tag{2.5}$$

où

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T\right)$$

est le tenseur de déformation linéarisé car $|\nabla\mathbf{u}| \ll 1$ et $\chi = (\varepsilon, \chi_2, \ldots, \chi_r)$ est un ensemble donné de variables d'état internes qui caractérisent l'état thermodynamique du matériau. Si la fonction $\mathcal{P}$ n'est pas différentiable, on utilise la notion de sous-différentielle (cf. annexe A) et les équations (2.4)-(2.5) se réécrivent

$$\left(\sigma - \rho\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}, \left(-\rho\frac{\partial\psi}{\partial\chi_i}\right)_{i=2,r}\right) \in \partial\mathcal{P}(\dot{\chi}). \tag{2.6}$$

On peut alors montrer [96] que la loi de comportement obtenue vérifie le second principe de la thermodynamique en conséquence directe de la convexité de $\mathcal{P}$ et $\psi$.

Sous l'hypothèse des petites déformations, les lois de comportement construites avec ce formalisme sont objectives, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas du repère adopté pour leur formulation (principe d'indifférence matérielle).

### Extension aux grandes déformations : introduction des dérivées objectives

Les grandes déformations appellent des développements particuliers pour la description de l'évolution de quantités tensorielles comme le tenseur des contraintes, ce que nous illustrons par l'exemple suivant qui nous a été inspiré par Christophe Raufaste.

Considérons un disque d'un matériau quelconque en rotation solide (fig. 2.1) à vitesse constante $\mathbf{v}(r,\theta) = (0, Ar)$ où $A$ est une constante. Nous supposons que les composantes $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta\theta}$ du tenseur des contraintes $\sigma$ en coordonnées cylindriques ne dépendent pas de $\theta$ et $t$. Examinons maintenant la dérivée matérielle $\dot{\sigma} = \frac{\partial\sigma}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\sigma$ exprimée en coordonnées cylindriques (les expressions détaillées sont données en annexe B) ; on trouve

$$(\dot{\sigma})_{rr} = -2A\sigma_{r\theta}, \tag{2.7}$$

$$(\dot{\sigma})_{r\theta} = A(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}), \tag{2.8}$$

$$(\dot{\sigma})_{\theta\theta} = 2A\sigma_{r\theta}. \tag{2.9}$$

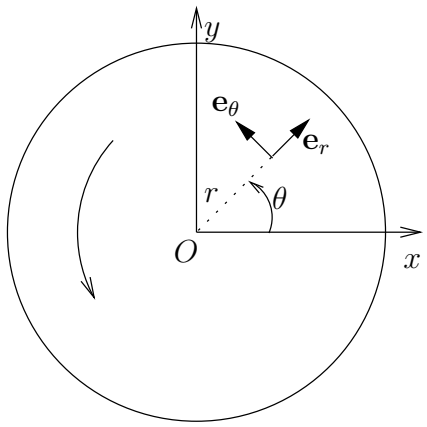


FIG. 2.1 – Disque en rotation solide.

Cela prouve que la dérivée matérielle de $\sigma$ est affectée par une rotation rigide alors qu'intrinsèquement $\sigma$ n'est pas modifiée. Cette quantité n'est donc pas objective, et ne peut pas intervenir telle quelle dans une loi constitutive.

Les dérivées dites objectives ont été introduites pour décrire l'évolution de quantités tensorielles en tenant compte de ces effets de rotation. Citons tout d'abord la dérivée de Jauman

$$\overset{\circ}{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\sigma + \sigma \cdot W(\mathbf{v}) - W(\mathbf{v}) \cdot \sigma,$$

où $W(\mathbf{v}) = (\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T)/2$ et $\nabla \mathbf{v} = (\partial v_i / \partial x_j)$. Pour l'exemple proposé on aurait $\overset{\circ}{\sigma} = 0$. Il s'agit d'une dérivée objective "minimale" dans la mesure où les termes $\sigma \cdot W(\mathbf{v}) - W(\mathbf{v}) \cdot \sigma$ sont nécessaires pour tenir compte des effets de rotation. On peut construire d'autres dérivées objectives en ajoutant d'autres termes. En viscoélasticité, les dérivées dites convectées supérieure

$$\overset{\nabla}{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\sigma + \sigma \cdot W(\mathbf{v}) - W(\mathbf{v}) \cdot \sigma - (D(\mathbf{v}) \cdot \tau + \tau \cdot D(\mathbf{v}))$$

et inférieure

$$\overset{\triangle}{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\sigma + \sigma \cdot W(\mathbf{v}) - W(\mathbf{v}) \cdot \sigma + (D(\mathbf{v}) \cdot \tau + \tau \cdot D(\mathbf{v}))$$

sont les plus fréquemment utilisées. La dérivée de Gordon-Schowalter

$$\overset{\square}{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\sigma + \beta_a(\sigma, \nabla \mathbf{v}), \tag{2.10}$$

où

$$\beta_a(\sigma, \nabla \mathbf{v}) = \sigma \cdot W(\mathbf{v}) - W(\mathbf{v}) \cdot \sigma - a(D(\mathbf{v}) \cdot \sigma + \sigma \cdot D(\mathbf{v})), a \in [-1, 1], \tag{2.11}$$

regroupe ces différents cas : dérivée de Jauman pour $a = 0$, convectée supérieure pour $a = 1$, et convectée inférieure pour $a = -1$.

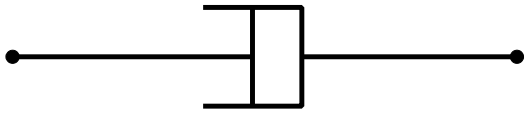

FIG. 2.2 – Fluide newtonien.

**Conclusion**

Nous disposons maintenant d'un outil robuste pour construire des lois de comportement qui vérifient le second principe de la thermodynamique en petites déformations et qui sont objectives en petites et grandes déformations.

## 2.2 Exemples de modèles dans ce cadre

Dans cette série d'exemples, nous allons introduire les éléments de base de notre modèle : tout d'abord, la viscosité, et comment il est possible d'introduire la pression en tant que multiplicateur de Lagrange lié à la contrainte d'incompressibilité ; ensuite, avec le modèle de Bingham, la notion de contrainte seuil ; enfin, avec le modèle d'Oldroyd, la viscoélasticité tensorielle qui impose l'utilisation d'une dérivée objective en grandes déformations.

La description du cadre mathématique ainsi que les calculs nécessaires à la dérivation des modèles sont regroupés dans l'annexe A.

### 2.2.1 Fluides visqueux

Pour des notions élémentaires sur les fluides visqueux et plus généralement sur la dynamique des fluides, on pourra se référer avec profit à [10, *pp. 249-264*]. Les fluides visqueux les plus simples, dits newtoniens, correspondent à des énergies libres et à des potentiels de dissipation de la forme

$$\begin{aligned} \psi(\varepsilon) &= \psi_0, \\ \mathcal{P} &= \varphi(\dot{\varepsilon}), \end{aligned}$$

où $\psi_0$ est une constante qui dépend de la température (considérée homogène dans le matériau) et

$$\varphi(D) = \begin{cases} \eta|D|^2 & \text{si } tr(D) = 0, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $|\cdot|$ est la norme matricielle définie par

$$|D|^2 = D : D = D_{ij}^2, \tag{2.12}$$

et $\eta > 0$ est la viscosité du fluide. Le schéma rhéologique associé est représenté figure 2.2. La loi de comportement est donnée par

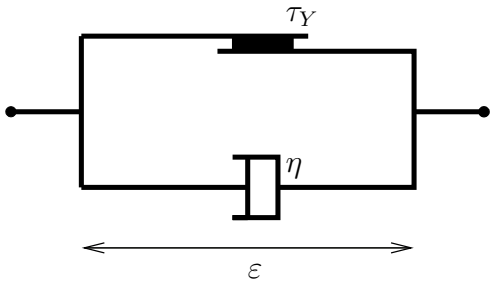


FIG. 2.3 – Modèle de Bingham

$$\sigma \in \partial\varphi(\dot{\varepsilon}).$$

En écrivant

$$\dot{\varepsilon} = D(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T),$$

et avec (A.4), on trouve

$$\begin{aligned} \sigma &= 2\eta D(\mathbf{v}) - pI, \\ \operatorname{div}\mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Le multiplicateur de Lagrange $p$ coïncide ici avec la pression du fluide. En injectant ces expressions dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement (2.2), on obtient les équations de Navier-Stokes. Ces équations restent objectives en dehors de l'hypothèse des petites déformations puisqu'elles n'impliquent pas de dérivée de tenseur par rapport au temps.

### 2.2.2 Modèle de Bingham

Le modèle de Bingham [7] est représenté fig. 2.3 ; un palet frottant (frottement solide) de seuil $\tau_Y$ est mis en parallèle avec un amortisseur visqueux de viscosité $\eta$. Lorsque la contrainte appliquée est inférieure au seuil, l'ensemble se comporte comme un solide rigide ; lorsque la contrainte dépasse le seuil, le matériau s'écoule comme un fluide visqueux. L'énergie libre et le potentiel de dissipation correspondants sont

$$\begin{aligned} \psi(\varepsilon) &= \psi_0, \\ \mathcal{P}(\dot{\varepsilon}) &= \varphi(\dot{\varepsilon}), \end{aligned}$$

où $\psi_0$ est une constante dépendant de la température et

$$\varphi(D) = \begin{cases} \eta|D|^2 + \tau_Y|D| \text{ si } tr(D) = 0, \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases}$$

La loi de comportement est donnée par

$$\sigma \in \partial\varphi(\dot{\varepsilon}).$$

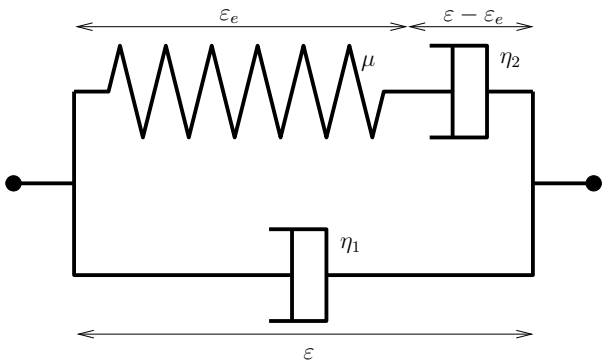


FIG. 2.4 – Modèle d'Oldroyd

En prenant comme précédemment $\dot{\varepsilon} = D(\mathbf{v})$, on trouve avec (A.6)

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{div} \mathbf{v} & = & 0, \\ \sigma & = & -pI + \sigma_d, \\ \sigma_d & = & 2\eta D(\mathbf{v}) + \tau_Y \frac{D(\mathbf{v})}{|D(\mathbf{v})|} \text{ si } D(\mathbf{v}) \neq 0, \\ |\sigma_d| & \leq & \tau_Y \text{ sinon.} \end{array} \tag{2.14}$$

Ces équations restent objectives en dehors de l'hypothèse des petites déformations.

Comme précédemment, nous avons utilisé la norme (2.12) : $|\tau| = (\tau_{ij}^2)^{1/2}$. Le modèle de Bingham est parfois écrit avec la norme $|\tau|/\sqrt{2}$ ; dans ce cas la contrainte seuil vaut $\tau_Y/\sqrt{2}$.

### 2.2.3 Modèle d'Oldroyd

Le modèle viscoélastique d'Oldroyd [74] est l'un des plus simples pour modéliser le comportement de solutions diluées de polymères. Son schéma rhéologique est représenté fig. 2.4. L'énergie libre et le potentiel de dissipation correspondants sont

$$\begin{array}{rcl} \psi(\varepsilon, \varepsilon^e) & = & \mu|\varepsilon^e|^2, \\ \mathcal{P}(\dot{\varepsilon}, \dot{\varepsilon^e}) & = & \varphi_1(\dot{\varepsilon}) + \varphi_2(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^e), \end{array}$$

où

$$\varphi_1(D) = \begin{cases} \eta_1|D|^2 \text{ si } tr(D) = 0 \\ +\infty \text{ sinon,} \end{cases}$$

et

$$\varphi_2(D) = \begin{cases} \eta_2|D|^2 \text{ si } tr(D) = 0, \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases}$$

On en déduit la loi de comportement

$$\sigma \in \partial\varphi_1(\dot{\varepsilon}) + \partial\varphi_2(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^e), \tag{2.15}$$

$$-2\mu\varepsilon^e \in -\partial\varphi_2(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^e). \tag{2.16}$$

En faisant (2.15) + (2.16), on obtient

$$\sigma - 2\mu\varepsilon^e \in \partial\varphi_1(\dot{\varepsilon}),$$

d'où, avec (A.4)

$$\sigma = 2\mu\varepsilon^e + 2\eta_1\dot{\varepsilon} - pI, \tag{2.17}$$

et

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{2.18}$$

Par ailleurs,

$$(2.16) \Longleftrightarrow \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^e \in \partial\varphi_2^*(2\mu\varepsilon^e),$$

d'où, avec (A.5),

$$\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^e = 2\mu\varepsilon_d^e.$$

Avec (2.18), on déduit que $\varepsilon^e$ est à trace nulle et on peut omettre le suffixe $_d$ ; en introduisant une contrainte élastique $\tau = 2\mu\varepsilon^e$, on obtient

$$\lambda\dot{\tau} + \tau = 2\eta_2\dot{\varepsilon}, \tag{2.19}$$

où $\lambda = \eta_2/\mu$ a la dimension d'un temps et peut être interprété comme un temps de relaxation élastique.

Comme nous l'avons vu auparavant, il est nécessaire d'utiliser une dérivée objective pour étendre la loi de comportement aux grandes déformations. La dérivée de Gordon-Schowalter (2.10) notée $\overset{\square}{\tau}$, est paramétrée par un réel $a \in [-1, 1]$ et permet de retrouver les modèles d'Oldroyd-A ($a = -1$) et d'Oldroyd-B ($a = 1$).

Finalement, en prenant $\dot{\varepsilon} = D(\mathbf{v})$, la loi de comportement s'écrit

$$\begin{aligned} \sigma &= \tau + 2\eta_1 D(\mathbf{v}) - pI, \\ \lambda\overset{\square}{\tau} + \tau &= 2\eta_2 D(\mathbf{v}), \\ \operatorname{div}\mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Pour $a = 0$, le terme $\beta_a$ de (2.10) est à trace nulle (cf. annexe B). La trace de l'équation constitutive s'écrit

$$\lambda\frac{\partial(\operatorname{tr}(\tau))}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)(\operatorname{tr}(\tau)) + \operatorname{tr}(\tau) = 0.$$

Si la condition initiale du tenseur des contraintes élastiques $\tau$ est à trace nulle, $\tau$ reste à trace nulle ; le multiplicateur de Lagrange $p$ associé à la contrainte d'incompressibilité coïncide avec la pression physique (définie comme l'opposé de la trace du tenseur des contraintes total divisé par 2 ou 3 suivant la dimension de l'espace). Ce n'est plus le cas si $a \neq 0$.

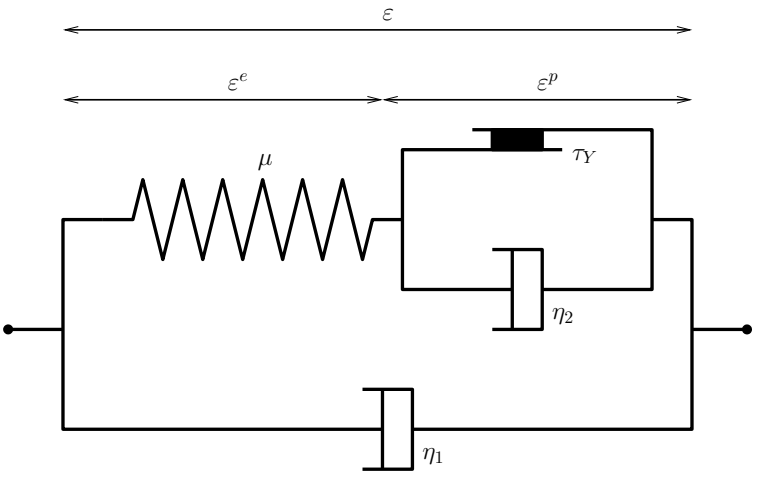


FIG. 2.5 – Modèle visco-élasto-plastique proposé [92].

## 2.3 Le modèle proposé

### 2.3.1 Comportement rhéologique élémentaire

Comme on l'a vu en introduction, la mousse est un matériau qui peut accumuler des contraintes élastiques jusqu'à un certain seuil au-delà duquel elle les dissipe par un mécanisme de ré-arrangements plastiques. Le modèle proposé par Pierre Saramito [92] (Fig. 2.5) se comporte de la même façon : il comprend un module viscoplastique composé d'un palet frottant de seuil $\tau_Y$ avec en parallèle un amortisseur visqueux de viscosité $\eta_2$ ; ce module est mis en série avec un ressort de module élastique $\mu$, et ces deux éléments sont mis en parallèle avec un deuxième amortisseur visqueux de viscosité $\eta_1$. Si on applique une contrainte au système en partant d'une situation de repos, le palet frottant est dans un premier temps bloqué, et l'ensemble réagit comme un ressort en parallèle avec un amortisseur ; la tension du ressort augmente jusqu'à atteindre la valeur de la contrainte seuil. Le deuxième amortisseur n'est plus bloqué par le palet frottant et dissipe alors les contraintes imposées au système.

Les deux amortisseurs jouent des rôles très différents : le premier, de viscosité $\eta_1$, correspond à la dissipation visqueuse apparaissant dans les films entre bulles dès qu'il y a un gradient de vitesse, qu'il y ait plasticité ou pas ; il permet de retrouver le plateau de $G''$ de la figure 1.5. Le deuxième, de viscosité $\eta_2$, modélise la dissipation plastique à l'œuvre lors des ré-arrangements plastiques notés T1s (cf. introduction).

Dans le cas des mousses, les T1s apparaissent lorsque la taille de certains films est réduite à zéro. Les forces visqueuses s'opposent à ces évolutions et retardent l'occurrence des T1s [50], ce qui se traduit par l'observation de déformations plus importantes à haute vitesse. Cet aspect a été prédit théoriquement avec un modèle 2D de mousse sèche [63] et confirmé expérimentalement avec une mousse sèche 3D [83]. Le modèle proposé reproduit ce phénomène [92].

Dans la limite basse vitesse, le modèle prédit une plasticité abrupte : plus la dissipation visqueuse devient petite, plus la transition entre les régimes solide et fluide s'effectue sur une gamme réduite de contrainte. A basse vitesse, le modèle s'écarte donc de l'expérience, pour laquelle cette transition est progressive [71]. Un modèle a été spécifiquement proposé pour tenir compte de cet aspect [70].

### 2.3.2 Formalisme thermodynamique

Dans le cadre d'une simplification 1D, nous pouvons écrire une décomposition du tenseur de déformation sous la forme $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$ où $\varepsilon^e$ et $\varepsilon^p$ désignent respectivement les tenseurs de déformation élastique et plastique. Dans le cas général, nous pouvons toujours définir la déformation élastique $\varepsilon^e$ qui est une *variable d'état* [70], c'est-à-dire qu'il s'agit d'une propriété intrinsèque de l'état actuel de déformation de la mousse ; nous notons $\mathrm{d}\varepsilon^e/\mathrm{d}t$ sa dérivée par rapport au temps pour insister sur le fait qu'il s'agit d'une dérivée temporelle de variable d'état. A l'opposé, nous ne définissons pas la déformation ni la déformation plastique mais plutôt le taux de déformation $\dot{\varepsilon}$ et le taux de déformation plastique $\dot{\varepsilon}^p$. Ces quantités sont reliées par la relation

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\varepsilon^e}{\mathrm{d}t} + \dot{\varepsilon}^p. \tag{2.21}$$

Nous postulons que l'état du système est décrit par la déformation élastique $\varepsilon^e$, par sa dérivée temporelle $\mathrm{d}\varepsilon^e/\mathrm{d}t$, et par le taux de déformation $\dot{\varepsilon}$. La loi de comportement est obtenue à partir du potentiel de dissipation et de l'énergie libre suivants :

$$\begin{aligned} \psi(\varepsilon^e) &= \mu|\varepsilon^e|^2, \\ \mathcal{P}(\dot{\varepsilon}, \mathrm{d}\varepsilon^e/\mathrm{d}t) &= \varphi(\dot{\varepsilon}) + \varphi_p(\dot{\varepsilon} - \mathrm{d}\varepsilon^e/\mathrm{d}t), \end{aligned}$$

où, $\forall D \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{sym}$,

$$\varphi(D) = \begin{cases} \eta_1|D|^2 & \text{si } tr(D) = 0, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$\varphi_p(D) = \begin{cases} \eta_2|D|^2 + \tau_Y|D| & \text{si } tr(D) = 0, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

### 2.3.3 Dérivation de la loi de comportement

#### En petites déformations

La loi de comportement (2.4), (2.5) s'écrit

$$\sigma \in \partial\varphi(\dot{\varepsilon}) + \partial\varphi_p(\dot{\varepsilon} - \mathrm{d}\varepsilon^e/\mathrm{d}t), \tag{2.22}$$

$$-2\mu\varepsilon^e \in -\partial\varphi_p(\dot{\varepsilon} - \mathrm{d}\varepsilon^e/\mathrm{d}t). \tag{2.23}$$

L'addition de ces deux relations donne $\sigma - 2\mu\varepsilon^e \in \partial\varphi(\dot{\varepsilon})$ ; de la même façon que précédemment, nous introduisons le multiplicateur de Lagrange $p$ associé à la contrainte $tr(D) = 0$ et nous obtenons

$$\sigma = -pI + 2\eta_1\dot{\varepsilon} + 2\mu\varepsilon^e.$$

(2.23) est équivalente à $\dot{\varepsilon} - \mathrm{d}\varepsilon^e/\mathrm{d}t \in \partial\varphi_p^*(2\mu\varepsilon^e)$, d'où, avec (A.8),

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon^e}{\mathrm{d}t} + \frac{\mu}{\eta_2}\max\left(\frac{|\varepsilon_d^e| - \varepsilon_Y}{|\varepsilon_d^e|}, 0\right)\varepsilon_d^e = \dot{\varepsilon},$$

où $\varepsilon_Y = \tau_Y/(2\mu)$. L'expression du taux de déformation plastique défini en (2.21) est

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\mu}{\eta_2}\max\left(\frac{|\varepsilon_d^e| - \varepsilon_Y}{|\varepsilon_d^e|}, 0\right)\varepsilon_d^e.$$

La déformation élastique $\varepsilon_e$ est nécessairement à trace nulle, et (2.23) s'écrit

$$\frac{\eta_2}{\mu}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} + \max\left(0, \frac{|\tau| - \tau_Y}{|\tau|}\right)\tau = 2\eta_2\dot{\varepsilon} \tag{2.24}$$

où $\tau = 2\mu\varepsilon^e$ est la contrainte élastique ; ceci correspond à un choix d'élasticité linéaire, cohérent avec le comportement de la mousse dans le régime que nous étudions, comme nous l'avons vu en introduction.

### En grandes déformations

De la même façon qu'en 2.2.3, l'équation (2.24) n'est plus valide en grandes déformations car elle n'est pas objective. Nous remplaçons la dérivée matérielle $\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t$ par la dérivée objective $\overset{\square}{\tau}$ définie en (2.10). De même que pour Oldroyd, le tenseur élastique $\tau$ n'est pas à trace nulle si $a \neq 0$, et le multiplicateur de Lagrange $p$ ne coïncide pas avec la pression physique. Nous *choisissons* l'expression suivante de la loi de comportement en grandes déformations :

$$\sigma = -pI + 2\eta_1 D(\mathbf{v}) + \tau, \tag{2.25}$$

et

$$\frac{\eta_2}{\mu}\overset{\square}{\tau} + \max\left(0, \frac{|\tau_d| - \tau_Y}{|\tau_d|}\right)\tau = 2\eta_2 D(\mathbf{v}). \tag{2.26}$$

Ce choix revient à dire que seule la partie déviatrice du tenseur des contraintes élastiques doit intervenir dans le critère de plasticité, ce qui correspond au critère de Von Mises couramment utilisé pour définir la frontière de la région plastique en viscoplasticité. Des travaux expérimentaux récents ont montré la pertinence de ce critère pour une émulsion, un gel physique (carbopol), et un gel colloïdal (Bentonite).

### Remarque :

Cette loi de comportement généralise les modèles cités dans la section 2.2 : avec $\tau_Y = 0$ et $\eta_2 = 0$, on retrouve le modèle de Navier-Stokes ; avec $\mu \to +\infty$, on obtient le modèle de Bingham ; enfin, avec $\tau_Y = 0$, on retrouve le modèle d'Oldroyd. Nous verrons plus loin que ces limites sont singulières.

### 2.3.4 Modèle complet pour la simulation d'écoulements de mousse

En plus de la modélisation visco-élasto-plastique, nous devons tenir compte de la friction des plaques évoquée en introduction ; cette friction est souvent modélisée par un terme en loi de puissance, de la forme $-\beta\, v^\gamma$ où $\beta$ est un coefficient de friction. L'exposant $\gamma$ est souvent évalué à 2/3 pour les mousses [24]. Dans un souci de simplification et en suivant [54], nous modélisons la friction des plaques par un terme de frottement visqueux linéaire en vitesse. Nous discutons cette simplification à la section 5.6 du chapitre 5.

Le modèle complet s'écrit alors

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right) - \operatorname{div}\tau + \nabla p = -\beta\mathbf{v}, \tag{2.27}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{2.28}$$

$$\frac{\eta_2}{\mu}\overset{\square}{\tau} + \max\left(0, \frac{|\tau_d| - \tau_Y}{|\tau_d|}\right)\tau = 2\eta_2 D(\mathbf{v}). \tag{2.29}$$

La valeur précise du paramètre $a \in [-1, 1]$ de la dérivée objective (2.10) sera discutée lors de la présentation des simulations numériques. La fermeture du système d'équations (2.27)-(2.28)-(2.29) nécessite des conditions initiales et des conditions aux limites qui seront précisées en temps voulu.

### 2.3.5 Adimensionnements

Dans la pratique, les calculs seront réalisés à partir d'équations adimensionnées que nous détaillons ici. Soient $L$, $V$, $\Sigma$ respectivement une longueur, une vitesse, et une contrainte caractéristiques, et soit $T = L/V$ le temps caractéristique. Nous réécrivons les équations (2.27), (2.28), (2.29) avec des variables et des opérateurs sans dimension mais en gardant les mêmes notations qu'auparavant ; en divisant (2.27) par $\Sigma/L$, (2.28) par $V/L$, et (2.29) par $\Sigma$, nous obtenons le modèle adimensionné suivant

$$\begin{aligned}
\frac{\rho V^2}{\Sigma}\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right) - \frac{\eta_1 V/L}{\Sigma}\Delta\mathbf{v} - \operatorname{div}\tau + \nabla p &= -\frac{\beta V L}{\Sigma}\mathbf{v} \\
\operatorname{div}\mathbf{v} &= 0 \\
\eta_2/\mu\frac{V}{L}\overset{\square}{\tau} + \max\left(0, \frac{|\tau_d| - \tau_Y/\Sigma}{|\tau_d|}\right)\tau &= \frac{2\eta_2 V/L}{\Sigma}D(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

Deux choix possibles nous semblent pertinents pour la contrainte caractéristique.

#### Adimensionnement fluide

Le choix $\Sigma = (\eta_1+\eta_2)V/L$ correspond à l'adimensionnement habituel pour les fluides viscoélastiques. Nous le notons (ADIM1). Avec ce choix le modèle s'écrit

$$Re\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right) - (1-\alpha)\Delta\mathbf{v} - \operatorname{div}\tau + \nabla p = -C_F\mathbf{v}, \tag{2.30}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{2.31}$$

$$We\,\overset{\square}{\tau} + \max\left(0, \frac{|\tau_d| - Bi}{|\tau_d|}\right)\tau = 2\alpha D(\mathbf{v}), \tag{2.32}$$

où on utilise les nombres sans dimension usuels des modèles de Navier-Stokes, Bingham et Oldroyd :

- $Re = \frac{\rho V L}{\eta_1+\eta_2}$ : nombre de Reynolds, s'interprète comme le rapport entre forces d'inertie et forces visqueuses.
- $We = \frac{\eta_2 V}{\mu L}$ : nombre de Weissenberg, il s'interprète comme le rapport entre forces visqueuses et forces élastiques. En remarquant que le rapport $\eta_2/\mu$ a la dimension d'un temps, on peut également interpréter $We$ comme le rapport entre un temps caractéristique du matériau ($\lambda = \eta_2/\mu$) et un temps caractéristique de l'écoulement ($T = L/V$).
- $Bi = \frac{\tau_Y L}{(\eta_1+\eta_2)V}$ : nombre de Bingham, correspond au rapport entre contrainte seuil et contraintes visqueuses. En viscoplasticité, ce nombre détermine l'existence et le cas échéant, la taille des zones rigides.
- $\alpha = \frac{\eta_2}{\eta_1+\eta_2}$ : souvent appelé paramètre de retard, il vaut 0 pour $\eta_2 = 0$ et 1 pour $\eta_1 = 0$.
- $C_F = \frac{\beta L^2}{\eta_1+\eta_2}$ : ce paramètre, spécifique aux systèmes de mousses bidimensionnelles, représente le rapport entre la friction exercée par les parois sur la mousse et la viscosité interne de celle-ci.

### Adimensionnement élastique

Le choix $\Sigma = 2\mu$ met l'accent sur les propriétés élastiques "solides" à basse vitesse. Il est utile pour la comparaison avec des écoulements de mousse car il fait apparaître la déformation élastique $\varepsilon^e = \tau/(2\mu)$, directement comparable à la déformation statistique $U$ telle qu'elle est définie et mesurée par Graner et al. [45]. Nous le notons (ADIM2). Les équations adimensionnées s'écrivent

$$Re\frac{We}{2\alpha}\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right) - (1-\alpha)\frac{We}{2\alpha}\Delta\mathbf{v} - \operatorname{div}\varepsilon^e + \nabla p = -C_F\frac{We}{2\alpha}\mathbf{v}, \quad (2.33)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad (2.34)$$

$$\overset{\square}{\varepsilon^e} + \frac{1}{We}\max\left(0, \frac{|\varepsilon^e_d| - \varepsilon_Y}{|\varepsilon^e_d|}\right)\varepsilon^e = D(\mathbf{v}). \quad (2.35)$$

Cet adimensionnement utilise donc les nombres sans dimension suivants :

- $Re\frac{We}{2\alpha} = \frac{\rho V^2}{2\mu}$, ce qui s'interprète comme le rapport entre force d'inertie et force élastique.
- $(1-\alpha)\frac{We}{2\alpha} = \frac{\eta_1 V/L}{2\mu}$ : il s'agit du rapport entre les contraintes visqueuses liées à la viscosité $\eta_1$ et les contraintes élastiques de la mousse.
- $C_F\frac{We}{2\alpha} = \frac{\beta V L}{2\mu}$ : ce paramètre spécifique des mousses 2D permet de comparer la force de friction exercée par les plaques et les contraintes élastiques au sein de la mousse.
- $\varepsilon_Y = \tau_Y/(2\mu) = BiWe/(2\alpha)$ : ce paramètre sans dimension correspond à la déformation élastique seuil au-dessus de laquelle la plasticité relaxe les contraintes élastiques. Expérimentalement, la déformation statistique maximale $U_Y$ donne un ordre de grandeur de ce paramètre.

**Remarque :** pour la définition de $U_Y$, les expérimentateurs utilisent la norme

$$\frac{|\cdot|}{\sqrt{2}}, \tag{2.36}$$

où $|\cdot|$ est la norme (2.12). Ainsi, c'est $\sqrt{2}U_Y$ que l'on doit comparer à $\varepsilon_Y$.

Adimensionner les équations d'un modèle de fluide par un paramètre typique de la mécanique des solides peut paraître surprenant, mais nous justifierons dans la suite (chapitres 5 et 7) la pertinence de ce choix pour la comparaison aux expériences. Nous utiliserons l'adimensionnement (ADIM1) pour l'écriture de l'algorithme de résolution (chapitre 3) et pour la validation numérique du modèle (chapitres 4 et 6), et l'adimensionnement (ADIM2) pour la comparaison aux expériences (chapitres 5 et 7).

# Chapitre 3

# Résolution numérique du modèle

L'objet de ce chapitre est d'introduire une discrétisation des équations du modèle et d'élaborer un algorithme de résolution. Nous décrivons cet algorithme pour les équations adimensionnées (2.30)-(2.31)-(2.32).

## 3.1 Position du problème

Les écoulements étant supposés lents, nous négligeons le terme d'inertie $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}$ dans (2.30). Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $\Gamma$ sa frontière, partitionnée en trois sous-domaines $\Gamma^D, \Gamma^N, \Gamma^G$. Nous introduisons également $\Gamma^- = \{x \in \Gamma, \mathbf{v}(x)\cdot\mathbf{n}(x) < 0\}$, où $\mathbf{n}$ désigne la normale sortante. Le problème à résoudre s'écrit :

**Problème 3.1.** *Étant donnée la condition initiale $(\tau^0, \mathbf{v}^0)$, trouver $\tau, \mathbf{v}, p$ tel que*

$$
\begin{aligned}
We\,\overset{\square}{\tau} + \kappa(|\tau_d|)\tau &= 2\alpha D(\mathbf{v}) \ \textit{dans}\ \Omega, && (3.1)\\
Re\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - (1-\alpha)\Delta\mathbf{v} - \operatorname{div}\tau + \nabla p &= -C_F\mathbf{v} \ \textit{dans}\ \Omega, && (3.2)\\
\operatorname{div}\mathbf{v} &= 0 \ \textit{dans}\ \Omega, && (3.3)
\end{aligned}
$$

*avec les conditions aux limites*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} = \mathbf{v}^D \quad &\textit{sur} \quad \Gamma^D \text{ (Dirichlet)}, && \text{(CL.1)}\\
\sigma\cdot\mathbf{n} = 0 \quad &\textit{sur} \quad \Gamma^N \text{ (Neuman homogène)}, && \text{(CL.2)}\\
\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0 \ \textit{et}\ \mathbf{n}\cdot\sigma\cdot\mathbf{t} = 0 \quad &\textit{sur} \quad \Gamma^G \text{ (glissement aux parois)}, && \text{(CL.3)}\\
\tau = \tau^- \quad &\textit{sur} \quad \Gamma^- \text{ (flux rentrant)}, && \text{(CL.4)}
\end{aligned}
$$

*où $\forall z > 0$,*

$$\kappa(z) = \max\left(0, \frac{z - Bi}{z}\right), \tag{3.4}$$

$\mathbf{t}$ *est le vecteur tangent correspondant à* $\mathbf{n}$ *;* $\mathbf{v}^D$ *et* $\tau^-$ *sont des données du problème. Nous rappelons que* $\sigma = 2(1-\alpha)D(\mathbf{v}) - pI + \tau$ *est la contrainte totale.*

Nous cherchons des solutions stationnaires du problème (3.1) à l'aide d'un algorithme de résolution en temps.

## 3.2 Remarques préliminaires

Le modèle [92] étant obtenu par une combinaison des modèles de Bingham et d'Oldroyd, il n'est pas inutile d'examiner comment ces derniers sont résolus numériquement.

### 3.2.1 Résolution numérique du modèle de Bingham

Grâce à la formulation du modèle (éqs. (2.14), page 25) en terme d'inéquations variationnelles [33], ses solutions peuvent s'exprimer dans de nombreux cas pratiques comme le minimum d'une fonctionnelle convexe [41], ce qui leur garantit existence et unicité. Elles sont caractérisées par la coexistence de deux zones distinctes de l'écoulement : une au-dessus du seuil de plasticité, et une en-dessous. La détermination précise de la frontière entre ces deux zones constitue la difficulté majeure pour la résolution de ce modèle. Il existe deux grandes classes de méthodes : d'une part, les méthodes de régularisation [37] qui introduisent un paramètre $\varepsilon$ voué à tendre vers zéro, de manière à ce que les équations soient bien définies lorsque $D(\mathbf{v}) = 0$ ; d'autre part les méthodes basées sur l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange [40]. Ces dernières reposent sur la formulation du modèle en terme d'inéquations variationnelles [33]. Elles permettent une détermination plus précise de la frontière liquide/solide, comme par exemple dans le cas de l'écoulement autour d'un cylindre [80].

### 3.2.2 Résolution numérique du modèle d'Oldroyd

La résolution de ce modèle (éqs. (2.20), page 26) est difficile pour de nombreuses raisons [4] : ce modèle couple un système de type Stokes pour les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, et une équation non linéaire hyperbolique qui décrit la relation constitutive entre le tenseur de contrainte élastique et la vitesse. Le problème de type Stokes impose une condition inf-sup sur les espaces d'approximation de la vitesse et de la pression, tandis que le terme convectif dans l'équation constitutive nécessite l'utilisation d'une méthode de décentrage amont pour tenir compte de sa nature hyperbolique.

À cela s'ajoute le fait que le modèle peut ne pas posséder de solution pour les grands nombre de Weissenberg [47]. Dans le cas général, l'existence et l'unicité des solutions de ce modèle reste un problème ouvert. L'existence globale de solutions n'a été obtenue que pour des données suffisamment petites [46]. Il existe par contre plusieurs résultats d'analyse d'erreur d'approximations par éléments finis, selon la méthode de décentrage amont utilisée : avec une formulation de Galerkin discontinu [5], avec une méthode de stabilisation de type SUPG [87], ou encore avec une méthode des caractéristiques [6].

Parmi les méthodes de résolutions, celles utilisant un splitting [90, 9, 16] sont particulièrement intéressantes : elles permettent de séparer la résolution du problème de type Stokes et celle de l'équation constitutive. En particulier, la méthode dite $\vartheta$-schéma [91, 89, 95, 16] permet de découpler le traitement de la vitesse/pression de celui des contraintes, ce qui réduit la taille des systèmes à résoudre.

### 3.2.3 Approche retenue

Le problème 3.1 que nous voulons résoudre combine les difficultés de ces deux modèles
- termes non-linéaires : le terme de plasticité, de type Bingham, et le terme de transport des contraintes ;
- trois variables indépendantes : vitesse, pression, contraintes. Une méthode de résolution directe nécessiterait la résolution de grands systèmes d'équations non-linéaires à chaque pas de temps ;
- avec en plus des conditions aux limites de glissement, non standard.

Par sa structure, il se rapproche du modèle d'Oldroyd. Nous en tirons profit pour adapter le $\vartheta$-schéma [91, 89, 95, 16] à notre problème.

## 3.3 Discrétisation en temps

Pour l'écriture de l'algorithme de résolution, les équations précédentes sont réécrites sous la forme $m\partial_t X + A(X) = 0$ avec

$$X = {}^t(\tau, \mathbf{v}, p), \quad m = \begin{pmatrix} WeI_t & & \\ & ReI_v & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

où $I_t$ et $I_v$ désignent respectivement les opérateurs identités sur l'espace des tenseurs symétriques et sur l'espace des vecteurs, et

$$A(X) = \begin{pmatrix} We(\mathbf{v}.\nabla\tau + \beta_a(\tau, \nabla\mathbf{v})) + \ \kappa(|\tau_d|)\tau - 2\alpha D(\mathbf{v}) \\ -(1-\alpha)\Delta\mathbf{v} - \operatorname{div}\tau + \nabla p + C_F\mathbf{v} \\ \operatorname{div}\ \mathbf{v} \end{pmatrix},$$

où la forme bilinéaire $\beta_a$ est définie au chapitre précédent, équation (2.11), page 22.

### 3.3.1 Présentation du $\vartheta$-schéma

Si on se donne une décomposition $A = A_1 + A_2$, le $\vartheta$-schéma, basé sur la méthode des directions alternées, consiste à diviser chaque pas de temps de longueur $\Delta t$ en trois fractions de longueurs $\vartheta\Delta t$, $(1-2\vartheta)\Delta t$, et $\vartheta\Delta t$, avec $\vartheta \in ]0, 1/2[$ puis à construire une suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie de la façon suivante :
- $n = 0$ : $X := X_0$.
- $n \geq 0$ : En supposant $X^n$ connu, calculer successivement $X^{n+\vartheta}$, $X^{n+1-\vartheta}$ et $X^{n+1}$ tels que :

$$m\,\frac{X^{n+\vartheta} - X^n}{\vartheta\Delta t} \quad + \ A_1(X^{n+\vartheta}) + A_2(X^n) \quad = 0, \tag{3.5}$$

$$m\,\frac{X^{n+1-\vartheta} - X^{n+\vartheta}}{(1-2\vartheta)\Delta t} \ + \ A_1(X^{n+\vartheta}) + A_2(X^{n+1-\vartheta}) \ = 0, \tag{3.6}$$

$$m\,\frac{X^{n+1} - X^{n+1-\vartheta}}{\vartheta\Delta t} \ + \ A_1(X^{n+1}) + A_2(X^{n+1-\vartheta}) \ = 0. \tag{3.7}$$

- Arrêt lorsque la norme du résidu de l'équation stationnaire est inférieure à un certain seuil.

### 3.3.2 Application au modèle visco-élasto-plastique

#### Choix d'une décomposition

Nous choisissons

$$A_1(X) = \begin{pmatrix} \kappa(|\tau_d|)\tau - 2\alpha D(\mathbf{v}) \\ -(1-\alpha)\Delta\mathbf{v} - \operatorname{div}\tau + \nabla p + C_F\mathbf{v} \\ \operatorname{div}\mathbf{v} \end{pmatrix},$$

et

$$A_2(X) = \begin{pmatrix} We(\mathbf{v}.\nabla\tau + \beta_a(\tau, \nabla\mathbf{v})) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme nous allons le voir, ce choix permet d'une part de découpler le calcul des composantes $\mathbf{v}$ et $\tau$, et d'autre part de traiter séparément les deux non-linéarités du problème. Suivant [90], nous fixons dès à présent la valeur $\vartheta = 1 - 1/\sqrt{2}$.

#### Sous-problèmes obtenus

Soient $\tau_0$ et $\mathbf{v}_0$ donnés ; pour tout $n \geq 0$, $(\tau^{n+1}, \mathbf{v}^{n+1}, p^{n+1})$ est défini à partir de $(\tau^n, \mathbf{v}^n, p^n)$ grâce aux trois étapes successives (3.5)-(3.6)-(3.7). Chacune de ces étapes correspond à un sous-problème :

**Problème 3.3.1** (Etape 1)**.** *Trouver* $(\tau^{n+\vartheta}, \mathbf{v}^{n+\vartheta}, p^{n+\vartheta})$ *vérifiant (CL.1)-(CL.4) et tel que*

$$\frac{We}{\vartheta\Delta t}\tau^{n+\vartheta} + \kappa(|\tau_d^{n+\vartheta}|)\tau^{n+\vartheta} - 2\alpha D(\mathbf{v}^{n+\vartheta}) = T^n, \tag{3.8}$$

$$\frac{Re}{\vartheta\Delta t}\mathbf{v}^{n+\vartheta} - (1-\alpha)\Delta\mathbf{v}^{n+\vartheta} - \operatorname{div}\tau^{n+\vartheta} + \nabla p^{n+\vartheta} + C_F\mathbf{v}^{n+\vartheta} = \frac{Re}{\vartheta\Delta t}\mathbf{v}^n, \tag{3.9}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}^{n+\vartheta} = 0, \tag{3.10}$$

*où* $T^n = \frac{We}{\vartheta\Delta t}\tau^n - We(\mathbf{v}^n.\nabla\tau^n + \beta_a(\tau^n, \nabla\mathbf{v}^n))$.

Ce premier sous-problème s'apparente au problème de Stokes à trois champs qui peut apparaître dans la résolution d'écoulements viscoélastiques [84].

**Problème 3.3.2** (Etape 2)**.** *Trouver* $(\tau^{n+1-\vartheta}, \mathbf{v}^{n+1-\vartheta}, p^{n+1-\vartheta})$ *vérifiant (CL.1)-(CL.4) et tel que*

$$\frac{We}{(1-2\vartheta)\Delta t}\tau^{n+1-\vartheta} + We\left(\mathbf{v}^{n+1-\vartheta}.\nabla\tau^{n+1-\vartheta} + \beta_a(\tau^{n+1-\vartheta}, \nabla\mathbf{v}^{n+1-\vartheta})\right) = S^{n+\vartheta}, \tag{3.11}$$

$$\frac{Re}{\vartheta\Delta t}\mathbf{v}^{n+1-\vartheta} - (1-\alpha)\Delta\mathbf{v}^{n+\vartheta} - \mathbf{div}\,\tau^{n+\vartheta} + \nabla p^{n+\vartheta} + C_F\mathbf{v}^{n+\vartheta} = \frac{Re}{\vartheta\Delta t}\mathbf{v}^{n+\vartheta}, \tag{3.12}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}^{n+1-\vartheta} = 0, \tag{3.13}$$

*où* $S^{n+\vartheta} = \frac{We}{(1-2\vartheta)\Delta t}\tau^{n+\vartheta} + \kappa(|\tau_d^{n+\vartheta}|)\tau^{n+\vartheta} - 2\alpha D(\mathbf{v}^{n+\vartheta})$.

Ce sous-problème est identique au sous-problème de transport abordé dans [89]. Enfin, l'étape 3 est obtenue à partir de l'étape 1 en remplaçant $n$ par $n+1-\vartheta$ et $n+\vartheta$ par $n+1$.

## 3.4 Sous-problème de type Stokes à trois champs (étape 1)

### 3.4.1 Algorithme de point-fixe

Le sous-problème (3.3.1) s'apparente à un problème de Stokes à trois champs, mais il comporte un terme non linéaire $\kappa(|\tau_d^{n+\vartheta}|)\tau^{n+\vartheta}$ qui empêche sa résolution directe. Nous traitons cette non linéarité par un algorithme de point fixe, ce qui nous amène à résoudre de manière itérative le problème linéaire suivant :

**Problème 3.4.1.** *Pour* $\widetilde{\tau}$ *fixé, trouver* $(\tau, \mathbf{v}, p)$ *vérifiant (CL.1)-(CL.4) et tel que*

$$\frac{We}{\vartheta\Delta t}\tau + \kappa(|\widetilde{\tau}_d|)\tau - 2\alpha D(\mathbf{v}) = T^n, \tag{3.14}$$

$$\frac{Re}{\vartheta\Delta t}\mathbf{v} - (1-\alpha)\Delta\mathbf{v} - \operatorname{div}\tau + \nabla p + C_F\mathbf{v} = \frac{Re}{\vartheta\Delta t}\mathbf{v}^n, \tag{3.15}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{3.16}$$

L'algorithme de point fixe s'écrit

- initialisation : $\tau_0 = \tau^n$, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}^n$.
- soit $k \geq 0$ ; en supposant $\tau_k$ et $\mathbf{v}_k$ connus, $(\tau_{k+1}, \mathbf{v}_{k+1}, p_{k+1})$ est défini comme la solution du problème (3.4.1) en prenant $\widetilde{\tau} = \tau_k$.
- arrêt lorsque la norme du résidu des équations du problème (3.3.1) est inférieur à un paramètre numérique $\varepsilon$. On prend alors $\tau^{n+\vartheta} = \tau_{k+1}$ et $\mathbf{v}^{n+\vartheta} = \mathbf{v}_{k+1}$.

Le problème (3.4.1) est similaire au problème de Stokes à trois champs qui apparaît dans la résolution du modèle d'Oldroyd par un $\vartheta$-schéma, mais les conditions aux limites de glissement (CL.3) demandent une attention particulière. Ce type de conditions aux limites a été étudié pour les équations de Stokes [61, 62], de Navier-Stokes [98, 99, 100, 11, 12] ainsi que pour le modèle d'Oldroyd [68]. Deux voies ont été explorées pour leur prise en compte : dans [99, 100, 68], elles sont imposées au sens faible par un multiplicateur de Lagrange, tandis qu'elles sont directement incorporées dans l'espace d'approximation des vitesses dans [61, 62, 98, 11]. Cette dernière approche paraît plus simple et naturelle, ce qui a été confirmé par des comparaisons numériques [12] ; c'est celle que nous adoptons. Des estimations d'erreur optimales pour les équations de Navier-Stokes résolues avec l'élément de Taylor-Hood ont été proposées pour cette approche dans [61, 62, 11].

### 3.4.2 Formulation variationnelle

Conformément à notre choix, nous écrivons la formulation variationnelle du problème (3.4.1) : on pose

$$T = \{\tau = (\tau_{ij}); \tau_{ij} = \tau_{ji}; \tau_{ij} \in L^2(\Omega); i, j = 1, \ldots, N\},$$

$$X(\mathbf{u}) = \{\mathbf{w} \in H^1(\Omega)^N, \mathbf{w} = \mathbf{u} \text{ sur } \Gamma^D, \mathbf{w}\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma^G\},$$

$$Q = L^2_0(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega); \int_\Omega q = 0 \right\}$$

et on note par

$$(p,q) = \int_\Omega pq(x)\mathrm{d}x, \qquad (\mathbf{v},\mathbf{w}) = \int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}(x)\mathrm{d}x, \qquad (\tau,\gamma) = \int_\Omega \tau : \gamma(x)\mathrm{d}x$$

les produits scalaires sur $L^2(\Omega)$, $L^2(\Omega)^N$,$L^2(\Omega)^{N^2}$, et $\|\cdot\|$ les normes correspondantes. Dans la suite, $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$, $C_5$ désigneront des constantes réelles strictement positives. En notant $\nu(\widetilde{\tau}) = \left(\frac{We}{\vartheta\Delta t} + \kappa(|\widetilde{\tau}_d|)\right)$, une formulation variationnelle du problème (3.4.1) avec $\widetilde{\tau} = \tau_k$ s'écrit :

**Problème 3.4.2.** *Trouver* $(\tau,\mathbf{v},p) \in T \times X(\mathbf{v}^D) \times Q$ *tel que*

$$(\nu(\tau_k)\tau,\gamma) - 2\alpha(D(\mathbf{v}),\gamma) = (T^n,\gamma), \tag{3.17}$$

$$\left(\frac{Re}{\vartheta\Delta t} + C_F\right)(\mathbf{v},\mathbf{w}) + 2(1-\alpha)(D(\mathbf{v}),D(\mathbf{w})) \tag{3.18}$$

$$+(\tau,D(\mathbf{w})) - (p,\operatorname{div}\mathbf{w}) = \frac{Re}{\vartheta\Delta t}(\mathbf{v}^n,\mathbf{w}), \tag{3.19}$$

$$(q,\operatorname{div}\mathbf{v}) = 0, \tag{3.20}$$

$\forall(\gamma,\mathbf{w},q) \in T \times X(\mathbf{0}) \times Q$.

Suivant Baranger et Sandri [5], nous écrivons ce problème sous la forme

*Trouver* $(\tau,\mathbf{v},p) \in T \times X(\mathbf{v}^D) \times Q$ *tel que*

$$\begin{aligned} a((\tau,\mathbf{v}),(\gamma,\mathbf{w})) + b(\mathbf{w},p) &= (T^n,\gamma) + 2\alpha\frac{Re}{\vartheta\Delta t}(\mathbf{v}^n,\mathbf{w}), \\ b(\mathbf{v},q) &= 0, \end{aligned}$$

$$\forall(\gamma,\mathbf{w},q) \in T \times X(\mathbf{0}) \times Q,$$

où

$$\begin{aligned} a((\tau,\mathbf{v}),(\gamma,\mathbf{w})) &= (\nu(\tau_k)\tau,\gamma) - 2\alpha(D(\mathbf{v}),\gamma) + 2\alpha\left(\frac{Re}{\vartheta\Delta t} + C_F\right)(\mathbf{v},\mathbf{w}) \\ &\quad +4\alpha(1-\alpha)(D(\mathbf{v}),D(\mathbf{w})) + 2\alpha(\tau,D(\mathbf{w})), \end{aligned}$$

et $b(\mathbf{w},p) = -(p,\operatorname{div}\mathbf{w})$. Alors

$$\begin{aligned} a((\tau,\mathbf{v}),(\tau,\mathbf{v})) &= (\nu(\tau_k)\tau,\tau) + 2\alpha\left(\tfrac{Re}{\vartheta\Delta t} + C_F\right)\|\mathbf{v}\|^2 + 4\alpha(1-\alpha)\|D(\mathbf{v})\|^2 \\ &\geq \tfrac{We}{\vartheta\Delta t}\|\tau\|^2 + 2\alpha\left(\tfrac{Re}{\vartheta\Delta t} + C_F\right)\|\mathbf{v}\|^2 + 4\alpha(1-\alpha)\|D(\mathbf{v})\|^2, \end{aligned}$$

et la forme bilinéaire $a$ est coercive sur $X(\mathbf{0})$ pour $0 < \alpha < 1$. Elle est par ailleurs clairement continue sur cet espace. La condition inf sup entre $\mathbf{v}$ et $p$

$$\inf_{q\in Q} \sup_{\mathbf{w}\in X(\mathbf{0})} \frac{b(\mathbf{w}, q)}{\|q\|\|\mathbf{w}\|} \geq C_1 > 0 \tag{3.21}$$

étant vérifiée [99], le problème (3.4.2) possède une solution unique pour $0 < \alpha < 1$.

Dans le cas où $\alpha = 1$, $a$ n'est plus coercive sur $X(\mathbf{0})$ ; nous introduisons

$$V(\mathbf{u}) = \{\mathbf{v} \in X(\mathbf{u}), (q, \operatorname{div} \mathbf{v}) = 0, \forall q \in Q\}.$$

Le problème (3.4.1) s'écrit alors sous la forme

*Trouver* $(\tau, \mathbf{v}) \in T \times V(\mathbf{v}^D)$ *tel que*

$$c(\tau, \gamma) + d(\gamma, \mathbf{v}) = (T^n, \gamma) \tag{3.22}$$

$$-e(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + d(\tau, \mathbf{w}) = -2\frac{Re}{\vartheta \Delta t}(\mathbf{v}^n, \mathbf{w}), \tag{3.23}$$

$\forall(\gamma, \mathbf{w}) \in T \times V(\mathbf{0})$, où

$$c(\tau, \gamma) = (\nu(\tau_k)\tau, \gamma), \quad d(\gamma, \mathbf{v}) = -2(\tau, D(\mathbf{v})), \quad e(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 2\left(\frac{Re}{\vartheta \Delta t} + C_F\right)(\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

La forme bilinéaire $c$ est continue et coercive et on dispose de la condition inf sup

$$\inf_{v\in X(\mathbf{0})} \sup_{\tau\in T} \frac{(\tau, D(\mathbf{v}))}{\|\tau\|\|D(\mathbf{v})\|} \geq C_2 > 0. \tag{3.24}$$

En soustrayant (3.23) à (3.22) et en prenant $\gamma = \tau$ et $\mathbf{w} = \mathbf{v}$, on obtient grâce à la coercivité de $c$

$$C_3\|\tau\|^2 \leq c(\tau, \tau) \leq c(\tau, \tau) + e(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq \|T^n\|\|\tau\|,$$

d'où

$$\|\tau\| \leq \frac{\|T^n\|}{C_3}. \tag{3.25}$$

Ensuite, avec (3.23), on a

$$2\|\gamma\|\|D(\mathbf{v})\| \leq |d(\gamma, \mathbf{v})| \leq |c(\tau, \gamma)| + |(T^n, \gamma)|.$$

Grâce à l'inégalité de Korn et à la continuité de $c$, il vient

$$C_4\|\gamma\|\|\mathbf{v}\| \leq C_5\|\tau\|\|\gamma\| + \|T^n\|\|\gamma\|,$$

d'où avec (3.25)

$$\|\mathbf{v}\| \leq \frac{1}{C_4}\left(\frac{C_5}{C_3} + 1\right)\|T^n\|. \tag{3.26}$$

Avec (3.25) et (3.26), on obtient finalement l'unicité de la solution du problème (3.4.2) pour $\alpha = 1$. L'existence s'obtient lorsqu'on passe à des espaces d'approximation discrets (cf. section suivante).

### 3.4.3 Discrétisation spatiale par éléments finis

Soit $\Omega_h$ une approximation polygonale du domaine $\Omega$ (qui n'est pas forcément polygonal) et $\mathcal{T}_h$ une triangulation de $\Omega_h$. La frontière de $\Omega_h$, notée $\Gamma_h$, est partitionnée en trois sous-domaines $\Gamma_h^D, \Gamma_h^N, \Gamma_h^G$ qui correspondent à $\Gamma^D, \Gamma^N, \Gamma^G$. Soient $T_h$, $X_h(\mathbf{u})$, et $Q_h$ des espaces d'éléments finis correspondant à $T$, $X(\mathbf{u})$ et $Q$. Les variables discrétisées sont notées avec un indice $h$ (par exemple $\tau_{k,h}$ pour $\tau_k$). Le terme $\nu(\tau_k)$ est approché par $\nu_h(\tau_{k,h})$ dont nous donnons la définition plus loin. Le problème (3.4.2) est approché par

**Problème 3.4.3.** *Trouver* $(\tau_h, \mathbf{v}_h, p_h) \in T_h \times X_h(\mathbf{v}^D) \times Q_h$ *tel que*

$$(\nu_h(\tau_{k,h})\tau_h, \gamma_h) - 2\alpha(D(\mathbf{v}_h), \gamma_h) = (T_h^n, \gamma_h), \tag{3.27}$$

$$\left(\frac{Re}{\vartheta \Delta t} + C_F\right)(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) + 2(1-\alpha)(D(\mathbf{v}_h), D(\mathbf{w}_h)) \tag{3.28}$$

$$+(\tau_h, D(\mathbf{w}_h)) - (p_h, \operatorname{div} \mathbf{w}_h) = \frac{Re}{\vartheta \Delta t}(\mathbf{v}_h^n, \mathbf{w}_h), \tag{3.29}$$

$$(q_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) = 0, \tag{3.30}$$

$\forall (\gamma_h, \mathbf{w}_h, q_h) \in T_h \times X_h(\mathbf{0}) \times Q_h$.

Le choix des espaces d'approximation est restreint par des conditions de compatibilité de type Babuska-Brezzi, d'une part entre $X_h(\mathbf{0})$ et $Q_h$ (équivalent discret de (3.21)), et d'autre part entre $T_h$ et $X_h(\mathbf{0})$ (équivalent discret de (3.24)). Il convient également de préciser de quelle façon la condition de glissement (CL.3) est traduite au niveau discret dans la définition de $X_h(\mathbf{0})$.

Pour la vitesse $\mathbf{v}$ et la pression $p$, nous faisons le choix de l'élément fini de Taylor-Hood [51] qui présente un bon compromis entre ordre d'approximation et simplicité de mise en œuvre. Nous introduisons donc

$$\widetilde{X}_h = \{\mathbf{v}_h : \Omega_h \to \mathbb{R}^2 \,|\, \mathbf{v}_h \in C(\overline{\Omega}_h)^2,\, \mathbf{v}_h \in \mathcal{P}_2(K)^2,\, \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

et nous prenons

$$Q_h = \{q_h : \Omega_h \to \mathbb{R} \,|\, q_h \in C(\overline{\Omega}_h),\, \mathbf{v}_h \in \mathcal{P}_1(K),\, \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Cette combinaison vérifie les conditions de Babuska-Brezzi (Cf. par exemple [39]). Nous notons $\mathcal{N}_h$ l'ensemble des sommets de $\mathcal{T}_h$ et des milieux des côtés des triangles de $\mathcal{T}_h$, et $\mathbf{n}_h$ une approximation de la normale unité $\mathbf{n}$. Nous prenons

$$X_h(\mathbf{u}_h) = \left\{\mathbf{v}_h \in \widetilde{X}_h \,|\, \mathbf{v}_{h|\Gamma_h^D} = \mathbf{u}_h,\, \mathbf{v}_h(x_s) \cdot \mathbf{n}_h(x_s) = 0,\, \forall x_s \in \mathcal{N}_h \cap \Gamma_h^G\right\}.$$

Dans [11, 98], $\mathbf{n}_h$ est définie à partir de la projection $P_\Gamma$ de $\Gamma_h^G$ vers $\Gamma_G$ :

$$\mathbf{n}_h(x_s) = \mathbf{n}(P_\Gamma(x_s)), \qquad \forall x_s \in \mathcal{N}_h \cap \Gamma_h^G.$$

On peut alors montrer [11, 98] que le couple d'espaces $X_h(\mathbf{0})$, $Q_h$ vérifie les conditions de Babuska-Brezzi, et on dispose d'estimations d'erreur en $O(h^{3/2})$.

D'un point de vue numérique, il est possible de définir la normale approchée $\mathbf{n}_h$ sans passer par la normale continue ; $\mathbf{n}_h$ est alors définie comme une moyenne pondérée des normales de chaque face de la frontière polygonale $\Gamma_h^G$ [12] : soit $\mathcal{O}_h$ l'ensemble des côtés de $\Gamma_h^G$ et

$$\mathbf{n}_h = \frac{\mathbf{m}_h}{|\mathbf{m}_h|}, \qquad \mathbf{m}_h(x_v) := \sum_{\Gamma_i \in \mathcal{O}_h | x_v \in \Gamma_i} |\Gamma_i| \mathbf{n}_h^i, \tag{3.31}$$

où $\mathbf{n}_h^i$ est le vecteur normal unité de la face $\Gamma_i \in \Gamma_h^G$. Il est montré numériquement [12] que ce choix de la normale conduit au même ordre de convergence en $O(h^{3/2})$ que le choix précédent. C'est celui que nous retenons pour sa simplicité d'utilisation : la normale approchée est déterminée directement à partir du maillage, sans avoir à spécifier la normale continue.

Reste à choisir l'espace d'approximation des contraintes : une condition suffisante pour que l'équivalent discret de la condition (3.24) soit vérifié [36] est $D(X_h(\mathbf{0})) \subset T_h$. Ceci implique d'utiliser des éléments discontinus pour les contraintes et la méthode de Lesaint-Raviart [67] pour le décentrage amont. Nous choisissons donc

$$T_h = \{\tau \in T; \tau_{|K} \in \mathcal{P}_1(K)^4, \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Soit

$$Y_h = \{\nu \in L^2(\Omega); \nu_{|K} \in \mathcal{P}_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

l'espace des composantes de contrainte. Pour tout $\sigma_h \in T_h$, nous définissons maintenant $\nu_h(\sigma_h) \in Y_h$ tel que pour chaque degré de liberté $i$ de l'espace $Y_h$, on a

$$\nu_h(\sigma_h)_i = \left( \frac{We}{\vartheta \Delta t} + \kappa(|(\sigma_h)_d|_i) \right),$$

où $\nu_h(\sigma_h)_i$ (resp. $|(\sigma_h)_d|_i$) désigne le coefficient associé au degré de liberté $i$ de $\nu_h(\sigma_h)$ (resp. $|(\sigma_h)_d|$).

### Construction d'une base d'éléments finis vérifiant les conditions de glissement

Soit $\mathcal{N}_h^G$ l'ensemble des noeuds associés à l'élément fini de la vitesse situés sur la frontière $\Gamma_h^G$. En chacun de ces noeuds, nous voulons imposer la condition de glissement $\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_h = 0$. Dans la base usuelle $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$, cette condition correspond à une combinaison linéaire des composantes de $\mathbf{v}_h$ ; nous modifions localement cette base de façon qu'en chacun des noeuds de $\mathcal{N}_h^G$, elle coïncide avec la base $(\mathbf{n}_h, \mathbf{t}_h)$ (Cf. fig. 3.1). Dans cette base, la condition de glissement est assurée en imposant que la composante normale est nulle.

### Écriture matricielle

La mise en œuvre pratique de cette méthode d'éléments finis a été réalisée récemment dans la librairie RHEOLEF [94] par Jocelyn Etienne pour une normale définie par des

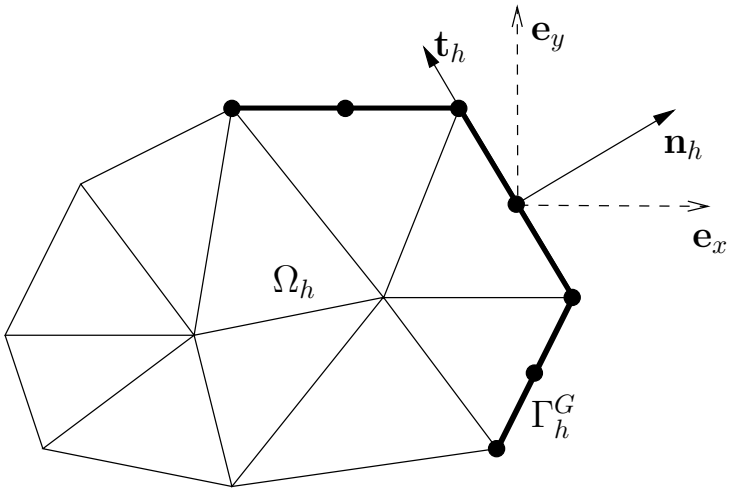


FIG. 3.1 – Base locale pour la prise en compte des conditions de glissement. Les "•" désignent les noeuds associés à l'élément fini de la vitesse qui sont sur $\Gamma_h^G$.

éléments $P_0$ ; nous avons implémenté l'utilisation de la normale $P_1$ définie en (3.31). Il est maintenant possible de construire des bases d'éléments finis et des matrices de formes bilinéaires qui prennent en compte des conditions de glissement comme nous venons de le préciser. Pour une inconnue donnée (par exemple $\tau_h$), nous notons avec une barre supérieure (par exemple $\overline{\tau}_h$) le vecteur de degrés de liberté associé. Soient $\mathbf{v}_h^D$ et $\mathbf{w}_h^D$ des fonctions continues et $\mathcal{P}_2$ quelconques définies sur la frontière $\Gamma_h^D$ ; nous introduisons les matrices suivantes :

– les matrices $M_t$ et $M(\nu_h(\tau_{k,h}))$ sont telles que, $\forall \tau_h, \gamma_h \in T_h$,

$$\overline{\gamma}_h^T\, M_t\, \overline{\tau}_h = (\tau_h, \gamma_h); \qquad \overline{\gamma}_h^T\, M(\nu_h(\tau_{k,h}))\, \overline{\tau}_h = (\nu_h(\tau_{k,h})\tau_h, \gamma_h);$$

– les matrices $M_v$ et $A$ sont telles que, $\forall \mathbf{v}_h \in X_h(\mathbf{v}_h^D)$ et $\forall \mathbf{w}_h \in X_h(\mathbf{w}_h^D)$,

$$\overline{\mathbf{w}}_h^T\, M_v\, \overline{\mathbf{v}}_h = (\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h); \qquad \overline{\mathbf{w}}_h^T\, A\, \overline{\mathbf{v}}_h = 2(D(\mathbf{v}_h), D(\mathbf{w}_h));$$

– la matrice $B$ est telle que, $\forall \mathbf{v}_h \in X_h(\mathbf{v}_h^D)$ et $\forall \gamma_h \in T_h$,

$$\overline{\gamma}_h^T\, B\, \overline{\mathbf{v}}_h = -2(D(\mathbf{v}_h), \gamma_h);$$

– la matrice $C$ est telle que, $\forall \mathbf{v}_h \in X_h(\mathbf{v}_h^D)$ et $\forall p_h \in Q_h$,

$$\overline{p}_h^T\, C\, \overline{\mathbf{v}}_h = -(p_h, \mathbf{v}_h).$$

– la matrice $M_p$ est telle que $\forall p_h, q_h \in Q_h$,

$$\overline{q}_h^T\, M_p\, \overline{q}_h = (p_h, q_h).$$

Le problème (3.4.3) s'écrit alors

**Problème 3.4.4.** *Trouver* $(\overline{\tau}_h, \overline{\mathbf{v}}_h, \overline{p}_h)$ *tel que*

$$\begin{aligned} M(\nu_h(\tau_{k,h}))\overline{\tau}_h + \alpha B\overline{\mathbf{v}}_h &= M_t\overline{T}_h^n, && (3.32)\\ \left(\frac{Re}{\vartheta\Delta t} + C_F\right) M_v\overline{\mathbf{v}}_h + (1-\alpha)A\overline{\mathbf{v}}_h & \\ -1/2B^T\overline{\tau}_h + C\overline{p}_h &= \frac{Re}{\vartheta\Delta t}M_v\overline{\mathbf{v}}_h^n, && (3.33)\\ C^T\overline{\mathbf{v}}_h = 0. & && (3.34) \end{aligned}$$

La matrice $M(\nu_h(\tau_{k,h}))$ est construite sur l'espace $T_h$ des contraintes dont les composantes sont des fonctions $\mathcal{P}_1$ discontinues sur chaque élément. En conséquence, cette matrice est diagonale par blocs de taille $3 \times 3$ et peut être inversée facilement, ce qui permet d'exprimer directement $\overline{\tau}_h$ à partir de $D(\mathbf{v}_h)$ grâce à (3.32) :

$$\overline{\tau}_h = M(\nu_h(\tau_{k,h}))^{-1}\left(M_t\overline{T}^n - \alpha B\overline{\mathbf{v}}_h\right).$$

On peut alors écrire le problème (3.4.4) sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} M & C \\ C^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{\mathbf{v}}_h \\ \overline{p}_h \end{pmatrix} = F$$

où

$$M = \left(\frac{Re}{\vartheta\Delta t} + C_F\right) M_v + (1-\alpha)A + \frac{\alpha}{2}B^T M(\nu_h(\tau_{k,h}))^{-1}B,$$

et

$$F = \begin{pmatrix} \frac{Re}{\vartheta\Delta t}M_v\overline{\mathbf{v}}^n + 1/2B^T M(\nu_h(\tau_{k,h}))^{-1}M_t\overline{T}^n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce problème est résolu dans RHEOLEF au moyen de l'algorithme de gradient conjugué préconditionné [94, p. 41] en prenant comme préconditionneur la matrice de masse de la pression $M_p$.

## 3.5 Sous-problème de type transport (étape 2)

### 3.5.1 Calcul explicite de la vitesse

La décomposition $A = A_1 + A_2$ permet d'exprimer explicitement $\mathbf{v}^{n+1-\vartheta}$ en fonction des itérés précédents : avec (3.9) et (3.12), on obtient, pour $Re > 0$,

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1-\vartheta} - \mathbf{v}^{n+\vartheta}}{(1-2\vartheta)\Delta t} = \frac{\mathbf{v}^{n+\vartheta} - \mathbf{v}^n}{\vartheta\Delta t},$$

d'où

$$\mathbf{v}^{n+1-\vartheta} = \frac{1-\vartheta}{\vartheta}\mathbf{v}^{n+\vartheta} - \frac{1-2\vartheta}{\vartheta}\mathbf{v}^n.$$

Ainsi, $\mathbf{v}^{n+1-\vartheta}$ est explicitement connu à l'étape 2, et il reste à calculer $\tau^{n+1-\vartheta}$ tel que

$$\frac{We}{(1-2\vartheta)\Delta t}\tau^{n+1-\vartheta} + We\left(\mathbf{v}^{n+1-\vartheta}.\nabla\tau^{n+1-\vartheta} + \beta_a(\tau^{n+1-\vartheta}, \nabla\mathbf{v}^{n+1-\vartheta})\right) = S^{n+\vartheta}.$$

### 3.5.2 Méthode de Galerkin discontinu

A cause du terme convectif $\mathbf{v}^{n+1-\vartheta}.\nabla\tau^{n+1-\vartheta}$, l'application directe d'une méthode de Galerkin ne permet pas de traiter le problème pour de grands nombres de Weissenberg. Il est alors nécessaire d'utiliser une méthode de décentrage amont ; le choix d'éléments discontinus pour les contraintes amène naturellement à utiliser la méthode de Lesaint-Raviart [67], dite méthode de Galerkin discontinue.

Nous reprenons les notations de la section précédente : $\mathbf{v}^{n+1-\vartheta}$ est approché par $\mathbf{v}_h^{n+1-\vartheta} \in X_h(\mathbf{v}_h^D)$. Pour un triangle $K \in \mathcal{T}_h$, nous notons $\Gamma_K^-$ la partie de sa frontière où $\mathbf{v}_h^{n+1-\vartheta} \cdot \mathbf{n}_h < 0$. L'approximation de $\tau^{n+1-\vartheta}$ par $\tau_h^{n+1-\vartheta} \in T_h$ au sens de la méthode de Galerkin discontinue est la solution du problème

**Problème 3.5.1.** *Trouver $\tau_h \in T_h$ tel que, $\forall \gamma_h \in T_h$,*

$$\begin{aligned}\left(We\left(\frac{1}{(1-2\vartheta)\Delta t}\tau_h + \mathbf{v}_h^{n+1-\vartheta}.\nabla\tau_h + \beta_a(\tau_h, \nabla\mathbf{v}_h^{n+1-\vartheta})\right), \gamma_h\right)& \\ -We\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_{\Gamma_K^-}(\mathbf{v}_h^{n+1-\vartheta}\cdot\mathbf{n}_h)((\tau_h-\tau_{ext}):\gamma_h)\mathrm{d}s &= (S_h^{n+\vartheta}, \gamma_h) \\ -We\int_{\Gamma_h^-}(\mathbf{v}_h^{n+1-\vartheta}\cdot\mathbf{n}_h)(\tau_h^- : \gamma_h)\mathrm{d}s,& \end{aligned} \tag{3.35}$$

*où*

$$\tau_{ext} = \begin{cases} 0 \text{ si } \Gamma_K^- \subset \Gamma_h, \\ \text{trace extérieure de } \tau_h \text{ sur } \Gamma_K^- \text{ sinon.} \end{cases}$$

Le second terme du second membre permet d'assurer la condition de flux rentrant (CL.4) sur $\Gamma_h^-$. Une condition suffisante pour l'existence de solution du problème (3.5.1) est [88] :

$$\frac{1}{(1-2\vartheta\Delta t)} < 2|a|\|D(\mathbf{v}_h^{n+1-\vartheta})\|_\infty.$$

Soit $\mathbf{u}_h \in Xh(\mathbf{v}_h^D)$, nous notons $G(\mathbf{u}_h)$ la matrice telle que $\forall \tau_h, \gamma_h \in T_h$,

$$\overline{\gamma}_h^T G(\mathbf{u}_h)\overline{\tau}_h = (\mathbf{u}_h.\nabla\tau_h, \gamma_h) - \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_{\Gamma_K^-}(\mathbf{u}_h\cdot\mathbf{n}_h)((\tau_h-\tau_{ext}):\gamma_h)\mathrm{d}s\ ;$$

nous notons $B_a(\mathbf{u}_h)$ la matrice telle que $\forall \tau_h, \gamma_h \in T_h$,

$$\overline{\gamma}_h^T B_a(\mathbf{u}_h)\overline{\tau}_h = (\beta_a(\tau_h, \nabla\mathbf{v}_h^{n+1-\vartheta}), \gamma_h).$$

Soit enfin $F^- \in Y_h$ défini par

$$F^- = -We\int_{\Gamma_h^-}(\mathbf{v}_h^{n+1-\vartheta}\cdot\mathbf{n}_h)(\tau_h^- : \gamma_h)\mathrm{d}s.$$

Le problème (3.5.1) s'écrit matriciellement : trouver $\tau_h \in T_h$ tel que

$$WeG(\mathbf{v}_h^{n+1-\vartheta})\overline{\tau}_h + WeB_a(\mathbf{v}_h^{n+1-\vartheta})\overline{\tau}_h = M_t\overline{S}_h^n + F^-.$$

Nous avons réalisé l'implémentation de cette méthode dans la librairie RHEOLEF.

## 3.6 Algorithme complet

Pour conclure ce chapitre, nous décrivons l'algorithme complet. Il comporte deux critères d'arrêt basés sur des résidus que nous définissons à partir des problèmes discrétisés, tels qu'ils sont résolus en pratique.

### 3.6.1 Définition des résidus

#### Résidu de l'algorithme de point fixe

Soit $n > 0$ ; le problème de point fixe correspondant à l'étape 1 de l'itération $n$ du $\vartheta$-schéma, écrit sous forme variationnelle puis discrétisé, a pour solution exacte la solution du problème

**Problème 3.6.1.** *Trouver* $(\tau_h, \mathbf{v}_h, p_h) \in T_h \times X_h(\mathbf{u}_h^D) \times Q_h$ *tel que*

$$\begin{aligned} M(\nu_h(\tau_h))\overline{\tau}_h + \alpha B\overline{\mathbf{v}}_h &= M_t\overline{T}_h^n, && (3.36)\\ \left(\frac{Re}{\vartheta\Delta t} + C_F\right) M_v\overline{\mathbf{v}}_h + (1-\alpha)A\overline{\mathbf{v}}_h & \\ -1/2B^T\overline{\tau}_h + C\overline{p}_h &= \frac{Re}{\vartheta\Delta t}M_v\overline{\mathbf{v}}^n, && (3.37)\\ C^T\overline{\mathbf{v}}_h = 0. & && (3.38) \end{aligned}$$

En conséquence, les résidus de la $k$-ème itération du problème de point fixe s'écrivent

$$\begin{aligned} \rho_{PF,\tau}^k &= M_t^{-1}\left[M(\nu_h(\tau_{k,h}))\overline{\tau}_{k,h} + \alpha B\overline{\mathbf{v}}_{k,h} - M_t\overline{T}_h^n\right],\\ \rho_{PF,\mathbf{v}}^k &= M_v^{-1}\left[\left(\tfrac{Re}{\vartheta\Delta t} + C_F\right)M_v(\overline{\mathbf{v}}_{k,h} - \overline{\mathbf{v}}_h^n) + (1-\alpha)A\overline{\mathbf{v}}_{k,h} - 1/2B^T\overline{\tau}_{k,h} + C\overline{p}_{k,h}\right],\\ \rho_{PF,p}^k &= M_p^{-1}[C^T\overline{\mathbf{v}}_{k,h}]. \end{aligned}$$

#### Résidu de l'algorithme global

Soit $n > 0$ ; les résidus de la solution stationnaire à l'itération $n$ sont

$$\begin{aligned} \rho_{G,\tau}^n &= M_t^{-1}\left[(We(G(\mathbf{v}_h^n) + B_a(\mathbf{v}_h^n)) + M(\nu_h(\tau_h^n)))\overline{\tau}_h^n - F^- + \alpha B\overline{\mathbf{v}}_h^n\right] && (3.39)\\ \rho_{G,\mathbf{v}}^n &= M_v^{-1}\left[(C_F M_v + (1-\alpha)A)\overline{\mathbf{v}}_h^n - 1/2B^T\overline{\tau}_h^n + C\overline{p}_h^n\right], && (3.40)\\ \rho_{G,p}^n &= M_p^{-1}[C^T\overline{\mathbf{v}}_h^n]. && (3.41) \end{aligned}$$

### 3.6.2 Écriture de l'algorithme

Soient $\varepsilon_{PF}$ et $\varepsilon_G$ deux réels strictement positifs.

- **Initialisation** : $\tau_h^0$ et $\mathbf{v}_h^0$ sont donnés.
- Soit $n > 0$. On suppose $\tau_h^n$ et $\mathbf{v}_h^n$ connus. Le calcul de $\tau_h^{n+1}$, de $\mathbf{v}_h^{n+1}$ et de $p_h^{n+1}$ se déroule en trois étapes : nous calculons successivement $(\tau_h^{n+\vartheta}, \mathbf{v}_h^{n+\vartheta}, p_h^{n+\vartheta})$, $(\tau_h^{n+1-\vartheta}, \mathbf{v}_h^{n+1-\vartheta})$ et enfin $(\tau_h^{n+1}, \mathbf{v}_h^{n+1}, p_h^{n+1})$

- ▶ Étape 1 (point fixe) : nous introduisons une suite $(\tau_{k,h}, \mathbf{v}_{k,h}, p_{k,h})_{k\geq 0}$ définie de la façon suivante :
  on prend $\tau_{0,h} = \tau_h^n$, $\mathbf{v}_{0,h} = \mathbf{v}_h^n$ ;
  $\forall k \geq 0$, $(\tau_{k+1,h}, \mathbf{v}_{k+1,h}, p_{k+1,h})$ est la solution du problème (3.4.4). Cet algorithme de point fixe est interrompu lorsque

$$\|\rho_{PF,\tau}^k\| + \|\rho_{PF,\mathbf{v}}^k\| + \|\rho_{PF,p}^k\| \leq \varepsilon_{PF},$$

  et on prend alors

$$\tau_h^{n+\vartheta} = \tau_{k+1,h} \ ; \quad \mathbf{v}_h^{n+\vartheta} = \mathbf{v}_{k+1,h} \ ; \quad p_h^{n+\vartheta} = p_{k+1,h}.$$

- ▶ Étape 2 (transport) :
  $\mathbf{v}_h^{n+1-\vartheta}$ est donné explicitement par

$$\mathbf{v}^{n+1-\vartheta} = \frac{1-\vartheta}{\vartheta}\mathbf{v}^{n+\vartheta} - \frac{1-2\vartheta}{\vartheta}\mathbf{v}^n,$$

  et $\tau_h^{n+1-\vartheta}$ est solution du problème de transport (3.5.1).
- ▶ Étape 3 : cette étape est identique à l'étape 1, en remplaçant $n+\vartheta$ par $n+1$ et $n$ par $n+1-\vartheta$.

• La boucle en temps est interrompue lorsque

$$\|\rho_{G,\tau}^n\| + \|\rho_{G,\mathbf{v}}^n\| + \|\rho_{G,p}^n\| \leq \varepsilon_G.$$

## 3.7 Résolution des sous-modèles

Le modèle que nous proposons admet entre autres comme sous-modèles les modèles d'Oldroyd (en prenant $Bi = 0$ et $C_F = 0$ dans (2.30)-(2.31)-(2.32)) et de Bingham (en prenant $We = 0$, $\alpha = 1$, et $C_F = 0$ dans (2.30)-(2.31)-(2.32)). Que devient l'algorithme avec ces valeurs des paramètres ?

### 3.7.1 Résolution du modèle d'Oldroyd

En prenant $Bi = 0$, le terme de plasticité $\kappa(|\tau_d|)$ est égal à 1, ce qui supprime la non-linéarité correspondante. Examinons ce que deviennent les sous-problèmes matriciels, tels qu'ils sont résolus en pratique.

#### Étape 1

Lors de l'étape 1, le problème matriciel (3.4.4) est résolu de manière itérative, jusqu'à convergence. Avec $Bi = 0$, le terme $\nu_h(\tau_{k,h})$ est constant et égal à $We/(\vartheta\Delta t) + 1$ et la convergence est immédiate (2 itérations).

**Étape 2**

Le terme de plasticité n'intervient qu'en second membre lors de cette étape qui n'est donc pas affectée.

L'algorithme devient alors similaire au $\vartheta$-schéma utilisé par Saramito [89] avec une discrétisation par volumes finis. D'ordre deux en temps, cette méthode permet le calcul de solutions stationnaires.

### 3.7.2 Résolution du modèle de Bingham

La résolution du modèle de Bingham pose plus de problèmes : en prenant $We = 0$ dans le problème matriciel (3.4.4) de l'étape 1, le terme $\nu_h(\tau_{k,h})$ vaut $\kappa(|(\tau_{k,h})_d|)$ et donc s'annule aux degrés de liberté où $|(\tau_{k,h})_d| < Bi$. Dans ce cas, la matrice $M(\nu_h(\tau_{k,h}))$ est tridiagonale par bloc $3 \times 3$ avec des blocs nuls, et n'est donc pas inversible ; l'algorithme tel quel ne permet pas la résolution du modèle de Bingham.

Revenons au problème continu 3.1 : lorsque $We = 0$, et avec $Re = 0$ et $\alpha = 1$, ces équations correspondent au modèle de Bingham qui possède une solution unique avec des conditions aux limites appropriées [22]. Nous modifions l'équation (3.1) de la façon suivante :

$$s\frac{\partial \tau}{\partial t} + We\,\overset{\square}{\tau} + \kappa(|\tau_d|)\tau = 2\alpha D(\mathbf{v}), \tag{3.42}$$

où

$$s = \begin{cases} 0 \text{ si } We \neq 0, \\ 1 \text{ si } We = 0. \end{cases}$$

Lorsque $We \neq 0$, le modèle reste inchangé ; lorsque $We = 0$, on obtient un problème d'évolution en temps dont la solution stationnaire, si elle existe, coïncide avec la solution (unique) du problème de Bingham. En utilisant les notations de la section 3.3, cette modification consiste à écrire

$$m = \begin{pmatrix} (s + We)I_t & & \\ & ReI_v & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

L'algorithme qui en découle s'obtient à partir du précédent en remplaçant dans les étapes 1 et 3 $\frac{We}{\vartheta\Delta t}$ par $\frac{s+We}{\vartheta\Delta t}$. L'algorithme obtenu est identique au précédent pour $We \neq 0$ ; pour $We = 0$, on a $\nu_h(\tau_{k,h}) = s/(\vartheta\Delta t) + \kappa(|(\tau_{k,h})_d|) > 0$, donc la matrice $M(\nu_h(\tau_{k,h}))$ est inversible, et le problème (3.4.4) qui apparaît dans la boucle de point fixe de l'étape 1 possède une solution unique.

Quant à l'étape 2, elle est inutile ici puisque le terme de transport est nul ; nous simplifions l'algorithme en supprimant cette étape pour $We = 0$. Durant chaque pas de temps, deux points fixes sont résolus, chacun sur un intervalle en temps $\vartheta\Delta t$, et nous choisissons $\vartheta = 1/2$ de manière à récupérer un pas de temps complet.

## 3.8 Conclusion

Nous avons décrit dans ce chapitre l'algorithme de résolution du modèle visco-élasto-plastique. La discrétisation en temps est réalisée à l'aide d'un $\vartheta$-schéma et une décomposition d'opérateur qui s'inspirent d'un algorithme utilisé pour la résolution du modèle viscoélastique d'Oldroyd [89]. Chaque pas de temps est divisé en trois sous-pas de temps dans lesquels sont traitées de manière découplée les deux non-linéarités du problème : dans les étapes 1 et 3, celle liée à la plasticité, et dans l'étape 2, celle liée au transport des contraintes. Nous ne prouvons pas la convergence de l'algorithme, mais nous garantissons que les sous-problèmes sont bien posés. L'algorithme permet la résolution des modèles d'Oldroyd et de Bingham ; dans le cas du modèle d'Oldroyd, l'algorithme se ramène à une méthode déjà éprouvée [89], alors que dans le cas du modèle de Bingham, l'algorithme est à notre connaissance totalement nouveau. La validation numérique de l'algorithme sera effectuée dans les chapitres suivants.

# Deuxième partie

# Écoulements de cisaillement

# Chapitre 4

# Écoulement simples : étude numérique

L'algorithme et le modèle que nous étudions étant tous les deux nouveaux, nous disposons d'assez peu de repères sur leurs comportements : comment choisir les paramètres du modèle et les paramètres numériques ? Avant de simuler des écoulements autour d'un obstacle, nous avons préféré traiter des écoulements de cisaillement simple entre deux plans ou entre deux cylindres concentriques. Les symétries de ces écoulements permettent de se ramener à une résolution 1D ; l'algorithme est plus simple à mettre en place qu'en 2D, en particulier, nous n'avons pas à traiter le terme de transport des contraintes. Par ailleurs, le nombre de degrés de liberté est beaucoup plus faible qu'en 2D, et les temps de calculs en sont raccourcis d'autant ; ceci permet une exploration tous azimuts du modèle et de l'algorithme. Dans ce chapitre, nous étudions spécifiquement le comportement du modèle d'un point de vue numérique. L'interprétation physique du résultat ainsi que la comparaison aux expériences sont présentés au chapitre suivant.

Après avoir décrit comment les symétries simplifient les écoulements et l'algorithme, nous vérifions que l'algorithme peut résoudre les modèles d'Oldroyd et de Bingham, puis nous examinons les solutions du modèle complet.

## 4.1 Géométrie de l'écoulement et symétries

Nous ne décrivons le cas de l'écoulement de Couette qu'en coordonnées cylindriques. Le cas plan, en coordonnées cartésiennes, se traite de manière similaire.

Nous voulons résoudre les équations (2.30)-(2.32) sur le domaine $\Omega$ défini figure 4.1 avec les conditions aux limites

$$\mathbf{v} = V_0\mathbf{e}_\theta \text{ sur } \Gamma_0 \ ; \ \mathbf{v} = V_e\mathbf{e}_\theta \text{ sur } \Gamma_e. \tag{4.1}$$

Les paramètres géométriques et cinématiques sont adimensionnés. Nous supposons l'écoulement suffisamment lent de sorte que $Re$ est petit, et l'écoulement laminaire. D'après les symétries du problème, la vitesse est de la forme $\mathbf{v} = v_\theta(r,t)\mathbf{e}_\theta$, la pression $p$ et les

composantes $\tau_{rr}$, $\tau_{r\theta}$, $\tau_{\theta\theta}$ du tenseur de contraintes élastiques $\tau$ ne dépendent que de $r$ et $t$, et le terme de convection de la vitesse $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ s'annule.

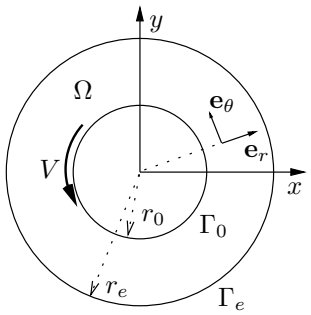


FIG. 4.1 – Géométrie de Couette.

## 4.2 Algorithme 1D

Nous examinons maintenant les conséquences de ces symétries sur les étapes 1 et 2 de l'algorithme.

### 4.2.1 Étape 1

Le problème de point fixe (problème 3.4.1) résolu dans la première étape de l'algorithme est considérablement simplifié : la forme de la vitesse assure que sa divergence est toujours nulle, et la condition d'incompressibilité (3.16) est toujours vérifiée. L'équation (3.15) correspondant à la conservation de la quantité de mouvement s'écrit (cf. annexe B pour l'expression des opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques) :

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial(r\tau_{rr})}{\partial r} + \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \tag{4.2}$$

$$\left(\frac{Re}{\vartheta\Delta t} + C_F\right) v_\theta - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sigma_{r\theta}) = \frac{Re}{\vartheta\Delta t} v_\theta^n, \tag{4.3}$$

où $\sigma_{r\theta} = 2(1-\alpha)\dot{\varepsilon}_{r\theta} + \tau_{r\theta}$, avec $\dot{\varepsilon}_{r\theta} = 1/2\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - v_\theta/r\right)$. L'équation (4.3) ci-dessus et l'équation (3.14) de l'étape 1 suffisent pour déterminer entièrement la vitesse et les contraintes avec les conditions aux limites (4.1) ; la pression peut s'obtenir à partir de l'équation (4.2).

Soit $B$ l'opérateur tel que

$$B\tau_{r\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{r\theta}), \quad \forall \tau_{r\theta} \in L^2(r_0, r_e).$$

Soit $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire pondéré (à cause des coordonnées cylindriques) sur $L^2(r_0, r_e)$ :

$$(v, w) = \int_{r_0}^{r_e} vwr\mathrm{d}r. \tag{4.4}$$

Nous notons $B^*$ l'adjoint formel de $B$ pour $(\cdot,\cdot)$ :

$$\int_{r_0}^{r_e} B\tau_{r\theta} w r \mathrm{d}r = \int_{r_0}^{r_e} \tau_{r\theta} B^* w r \mathrm{d}r, \quad \forall \tau_{r\theta} \in L^2(r_0, r_e), \text{ et } \forall w \in H_0^1(r_0, r_e).$$

On trouve

$$B^* w = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r}.$$

Le problème à résoudre est alors :

**Problème 4.1.** *Trouver $\tau$ et $v_\theta$ tels que*

$$\left(\frac{Re}{\vartheta \Delta t} + C_F\right) v_\theta + B\sigma_{r\theta} = \frac{Re}{\vartheta \Delta t} v_\theta^n \text{ sur } ]r_0, r_e[, \tag{4.5}$$

$$\frac{We}{\vartheta \Delta t}\tau + \kappa(|\widetilde{\tau}_d|)\tau - 2\alpha D(\mathbf{v}) = T^n, \tag{4.6}$$

où $\sigma_{r\theta} = (1-\alpha)B^* v_\theta + \tau_{r\theta}$ et avec les conditions aux limites

$$v_\theta(r_0) = V_0, \quad v_\theta(r_e) = V_e. \tag{4.7}$$

**Formulation variationnelle**

Soit

$$X = \{v \in H^1(r_0, r_e), v(r_0) = V_0, v(r_e) = V_e\}$$

l'espace des vitesses, et

$$T = \{\tau = (\tau_{ij}); \tau_{ij} = \tau_{ji}; \tau_{ij} \in L^2(r_0, r_e); i, j = r \text{ ou } \theta\}$$

l'espace des contraintes, et soient $w \in H_0^1(r_0, r_e)$ et $\gamma \in T$ des fonctions test ; le produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ est défini par (4.4). Une formulation variationnelle du problème 4.1 est

**Problème 4.2.1.** *Trouver $v_\theta \in X$, et $\tau \in T$ tels que, $\forall \gamma \in T, \forall w \in H_0^1(r_0, r_e)$*

$$\left(\frac{Re}{\vartheta \Delta t} + C_F\right)(v_\theta, w) + (BB^* v_\theta, w) + (B\tau_{r\theta}, w) = \frac{Re}{\vartheta \Delta t}(v_\theta^n, w) \tag{4.8}$$

$$\left(\frac{We}{\vartheta \Delta t} + \kappa(|\tau_d|)\right)(\tau, \gamma) - 2\alpha(D(\mathbf{v}, \gamma) = (T^n, \gamma). \tag{4.9}$$

**Espaces d'approximation**

Soit $\mathcal{T}_h$ une subdivision de $[r_0, r_e]$ ; nous choisissons les espaces d'approximation suivants : pour la vitesse,

$$X_h = \{v_h \in C^0(r_0, r_e), v_h|_K \in \mathcal{P}_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

et pour les contraintes,

$$T_h = \{\tau_h \in T, \tau_{ij} \in \mathcal{P}_0(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Avec ce choix, on a $T_h = \nabla(X_h)$. Si on utilise la formule de quadrature des trapèzes, ce schéma coïncide avec le schéma aux grilles décalées en différences finies, et la matrice de masse est diagonale.

L'écriture du système matriciel à résoudre se fait de la même façon que précédemment, nous ne la détaillons pas.

### 4.2.2 Étape 2

La forme de l'étape 2 n'est pas modifiée, mais sa réalisation pratique est grandement facilitée du fait que les deux termes de bord qui apparaissent dans le problème 3.5.1 (page 44) sont nuls.

Les symétries du problème permettent donc de simplifier les équations du modèle et l'algorithme de résolution : la résolution se fait suivant une dimension d'espace, et nous n'avons pas à traiter le terme de transport des contraintes.

## 4.3 Validation de l'algorithme

Nous validons l'algorithme en vérifiant que les sous-problèmes d'Oldroyd et de Bingham, pour lesquels nous disposons de solutions exactes dans cette géométrie, sont bien résolus. Nous utilisons des subdivisions régulières de l'intervalle $[r_0, r_e]$ et nous mesurons l'erreur par rapport à la solution exacte en fonction du pas de discrétisation.

### 4.3.1 Modèle d'Oldroyd

Nous commençons par vérifier que l'algorithme est capable de résoudre le modèle d'Oldroyd qui est obtenu à partir des équations (2.30)-(2.32) en prenant $Bi = 0$ et $C_F = 0$. Nous mesurons la convergence d'un itéré de l'algorithme vers la solution stationnaire par la norme des résidus (3.39)-(3.40)-(3.41) du problème stationnaire. Le $\theta$-schéma apparaît comme une méthode itérative découplée pour la résolution du problème stationnaire, les résidus convergeant vers zéro pour $\Delta t$ assez petit. On montre [90] que pour des écoulements simples (écoulement uniaxial, cisaillement simple), le schéma est stable sous des conditions de type $\Delta t < \Delta t_c$, où $\Delta t_c$ ne dépend pas du pas d'espace ; pour des écoulements plus complexes comportant des singularités, on met en évidence de manière empirique [90] que la condition de stabilité dépend de la nature de la singularité et du maillage au voisinage de la singularité.

Dans la géométrie définie figure 4.1 et pour $a = 1$, le modèle d'Oldroyd admet une solution stationnaire quels que soient les paramètres ; avec les conditions aux limites 4.1, son expression explicite en coordonnées cylindriques se détermine facilement. On trouve

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(r,\theta) &= \left(\frac{C_1}{r} + C_2 r\right)\mathbf{e}_\theta, \\
\tau_{rr} &= 0, \\
\tau_{r\theta} &= \alpha\dot{\varepsilon}_{r\theta}, \\
\tau_{\theta\theta} &= 2\alpha We\dot{\varepsilon}_{r\theta}^2,
\end{aligned}$$

où $\dot{\varepsilon}_{r\theta} = -2C_1/r^2$ et

$$C_1 = \frac{V_0 r_0 r_e^2 - V_e r_e r_0^2}{r_e^2 - r_0^2} \quad ; \quad C_2 = \frac{V_e r_e - V_0 r_0}{r_e^2 - r_0^2}.$$

Les calculs ont été réalisés avec une condition initiale nulle et les paramètres suivants :

$$We = 0.1, \quad Bi = 0, \quad \alpha = 0.8, \quad C_F = 0, \quad a = 1, \tag{4.10}$$

avec pour les conditions aux limites :

$$V_0 = 1, \quad V_e = 0, \quad r_0 = 71/51, \quad r_e = r_0 + 1.$$

Ces valeurs de $r_0$ et $r_e$ sont celles utilisées pour la comparaison aux expériences au chapitre suivant. L'intervalle $[r_0, r_e]$ est subdivisé en $N = 20, 50, 100, 200$ points. Pour chacune des subdivisions utilisées, nous avons considéré que la solution stationnaire est atteinte lorsque la somme de la norme des résidus (3.39)-(3.40)-(3.41) est inférieure à $10^{-6}$.

Le champs de vitesse (le même que pour un écoulement purement visqueux), de la forme $C_1/r + C_2 r$, est capturé exactement, à l'erreur machine près, par l'approximation $P_1$ de la vitesse même pour les subdivisions les plus grossières que nous avons utilisées : l'erreur par rapport à la solution exacte plafonne à $10^{-15}$. Au contraire, les composantes du tenseur des contraintes, en $1/r^2$ et $1/r^4$, sont capturées plus difficilement par l'approximation $P_0$ ; nous les utilisons pour mesurer la convergence de l'algorithme. Nous présentons figure 4.2, en fonction du pas de discrétisation, l'évolution de la norme $L^2$ de l'erreur sur le tenseur des contraintes $e_\tau = \tau_h - \Pi_{T_h}(\tau_{ex})$, où $\tau_h$ (resp. $\tau_{ex}$) désigne la solution approchée (resp. exacte), et $\Pi_{T_h}$ est l'opérateur de projection sur l'espace d'approximation $T_h$ des contraintes. Les résidus décroissent régulièrement quelque soit le pas de temps utilisé. On observe une superconvergence en $\mathcal{O}(h^2)$ (où $h = 1/N$), ce qui est plus qu'optimal dans la mesure où cette erreur est d'ordre plus élevé que l'erreur d'interpolation d'une fonction régulière par des éléments finis $P_0$ (ordre 1). Cela doit tenir au fait que nous ne calculons pas à strictement parler l'erreur $L^2$ par rapport à la solution exacte, mais par rapport à sa projection sur l'espace d'approximation $P_0$ des contraintes.

### 4.3.2 Modèle de Bingham

Le modèle de Bingham est obtenu à partir des équations (2.30)-(2.32) en prenant $We = 0$, $\alpha = 1$, et $C_F = 0$ ; dans la géométrie définie figure 4.1, et en prenant $V_0 = 1$ et $V_e = 0$ dans les conditions aux limites 4.1, la solution exacte de ce modèle se calcule facilement en coordonnées cylindriques. Son expression est

$$\mathbf{v}(r, \theta) = v(r)\mathbf{e}_\theta,$$

où

$$v(r) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{4} Bi\ r(1 - r_s^2/r^2 - 2\ln(r/r_s)) & \text{si} \quad r \leq r_s, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

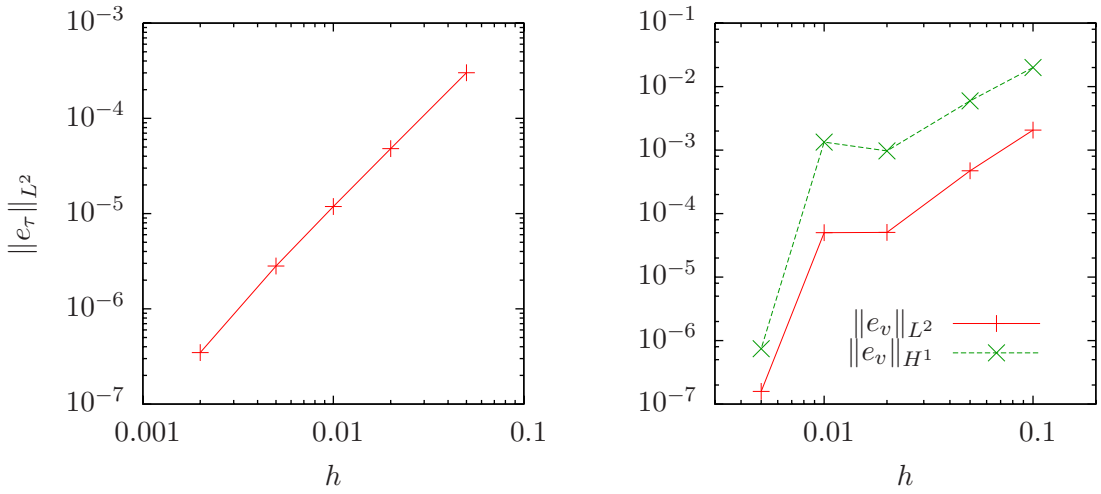


FIG. 4.2 – Convergence de l'algorithme 1D vers les solutions exactes des sous-problèmes d'Oldroyd (à gauche) et de Bingham (à droite), pour des subdivisions régulières : erreurs en normes $L^2$ et $H^1$ pour la vitesse (cas Bingham) et $L^2$ pour les contraintes (cas Oldroyd) en fonction du pas de maillage $h = 1/N$, pour $N = 20, 50, 100, 200$.

où $r_s$ désigne la coordonnée radiale à partir de laquelle la vitesse s'annule ; si $r_s > r_e$, il n'y a pas de zone rigide. Le rayon $r_s$ est défini implicitement par la relation

$$(r_s/r_0)^2 - 2\ln(r_s/r_0) = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{Bi}.$$

Lorsque $Bi$ tend vers zéro, le rapport $r_s/r_0$ tend vers l'infini (Fig. 4.3) : la zone rigide est envoyée à l'infini. A l'inverse, quand $Bi$ tend vers l'infini, le rapport $r_s/r_0$ tend vers 1, et l'écoulement est localisé en $r = r_0$.

Le nombre de Bingham critique à partir duquel il n'y a pas de zone rigide est

$$Bi_c = \frac{2\sqrt{2}}{(r_e/r_0)^2 - 2\ln(r_e/r_0) - 1}.$$

Dans le cas $Bi < Bi_c$, le problème ne pose aucune difficulté numérique (du moins pas plus que la résolution du modèle de Stokes). Avec la géométrie utilisée, on trouve $Bi_c \approx 3.25$.

Les calculs sont réalisés avec

$$Bi = 10,\ We = 0,\ \alpha = 1,\ C_F = 0, \tag{4.11}$$

ce qui correspond à $r_s \approx 1.857$, en partant d'une solution initiale nulle. Nous présentons figure 4.2, en fonction du pas de discrétisation $h$, l'évolution des normes $L^2$ et $H^1$ de l'erreur $e = \mathbf{v}_h - \Pi_{Vh}(\mathbf{v}_{ex})$ où $\mathbf{v}_h$ (resp. $\mathbf{v}_{ex}$) désigne la solution approchée (resp. exacte) et $\Pi_{V_h}$ est l'opérateur de projection sur l'espace d'approximation $V_h$ des vitesses. La

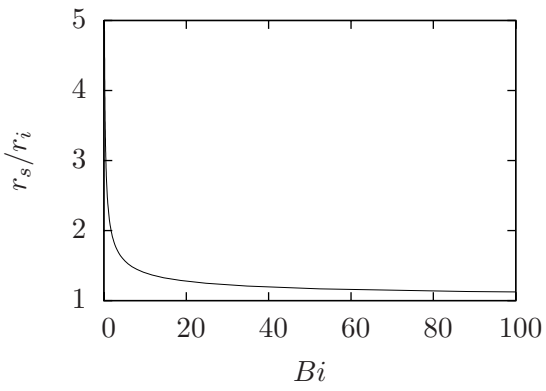


FIG. 4.3 – Modèle de Bingham : localisation ($r_s/r_0$) en fonction de $Bi$ avec les paramètres précisés dans le texte.

convergence de la méthode en fonction de $h$ n'est pas très régulière car la solution n'est pas régulière au point $r = r_s$ : la valeur de l'erreur peut être très faible si un point de la subdivision est proche de $r_s$. Une méthode d'adaptation de maillage comme dans [80] permettrait de raffiner la subdivision autour de ce point.

Comme précédemment pour la résolution du modèle d'Oldroyd, nous n'avons pas observé de pas de temps critique au-delà duquel l'algorithme ne convergerait plus, mais le comportement est plus complexe : au cours de chaque itération en temps, 2 points-fixes sont résolus ; chaque point-fixe demande la résolution de sous-problèmes de Stokes jusqu'à convergence au seuil fixé. Les sous-problèmes de Stokes étant les opérations les plus coûteuses réalisées dans la boucle en temps, une bonne mesure du coût algorithmique du calcul complet d'une solution est le nombre total $N_{fx}$ de sous-itérations de point-fixe réalisées. Nous présentons dans le tableau 4.1 le comportement de l'algorithme à pas d'espace fixé ($N = 200$) et en faisant varier le pas de temps. Le point fixe converge

| $\Delta t$ | $N_t$ | $N_{fx}$ | $N_{fx}/(2N_t)$ | $k_{max}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 296 | 1197 | 2.02 | 3 |
| 1 | 30 | 202 | 3.37 | 7 |
| 10 | 8 | 151 | 9.44 | 29 |
| 100 | 31 | 733 | 11.82 | 137 |

TAB. 4.1 – Modèle de Bingham : comportement de l'algorithme en fonction du pas de temps $\Delta t$ choisi pour une subdivision comportant 200 points. $N_t$ : nombre d'itérations en temps ; $N_{fx}$ : nombre total de sous-itérations de point-fixe ; $N_{fx}/(2N_t)$ : nombre moyen de sous-itérations de point-fixe par itération en temps ; $k_{max}$ : nombre maximal de sous-itérations de point-fixe au cours des itérations en temps.

d'autant plus difficilement que le pas de temps est grand : 2 itérations en moyenne pour

$\Delta t = 0.1$, contre près de 12 pour $\Delta t = 100$. D'un autre côté, les grands pas de temps accélèrent l'évolution de la solution vers la solution stationnaire : 296 pas de temps sont nécessaires pour $\Delta t = 0.1$ contre seulement 8 pour $\Delta t = 10$ ; par contre les trop grandes valeurs de $\Delta t$ dégradent le taux de convergence (31 pas de temps pour $\Delta t = 100$). L'équilibre entre ces deux tendances est ici obtenu pour $\Delta t = 10$ : c'est pour cette valeur de $\Delta t$ que le coût algorithmique (indiqué par $N_{fx}$) est le plus faible. Le nombre de sous-itérations reste raisonnable, même pour de grands pas de temps.

A notre connaissance, cette méthode de résolution du modèle de Bingham est nouvelle, elle se distingue notamment des méthodes à base de Lagrangien augmenté [40, 80].

## 4.4 Étude numérique du modèle VEP

Maintenant que nous avons confirmé que l'algorithme est capable de résoudre les modèles d'Oldroyd et de Bingham, nous pouvons nous attaquer au modèle VEP complet.

### 4.4.1 Convergence vers une solution stationnaire

Nous commençons par examiner la convergence de l'algorithme vers une solution stationnaire en utilisant un jeu de paramètres qui combine ceux utilisés précédemment :

$$We = 0.1, \quad Bi = 10, \quad \alpha = 0.8, \quad C_F = 0, \quad a = 1, \tag{4.12}$$

avec les paramètres géométriques et cinématiques suivants :

$$V_0 = 1, \quad V_e = 0, \quad r_0 = 71/51, \quad r_e = r_0 + 1,$$

et une condition initiale nulle. Nous prenons $C_F = 0$ pour simplifier l'analyse. Comme pour le modèle de Bingham, nous présentons dans le tableau 4.2 le comportement de l'algorithme à pas d'espace fixé ($N = 200$) et en faisant varier le pas de temps. À la

| $\Delta t$ | $N_t$ | $N_{fx}$ | $N_{fx}/(2N_t)$ | $k_{max}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.01 | 1528 | 4877 | 1.60 | 3 |
| 0.1 | 186 | 932 | 2.51 | 6 |
| 1 | 727 | 2134 | 1.59 | 16 |

TAB. 4.2 – Modèle VEP : comportement de l'algorithme en fonction du pas de temps $\Delta t$ choisi pour une subdivision comportant 200 points. $N_t$ : nombre d'itérations en temps ; $N_{fx}$ : nombre total de sous-itérations de point-fixe ; $N_{fx}/(2N_t)$ : nombre moyen de sous-itérations de point-fixe par itération en temps ; $k_{max}$ : nombre maximal de sous-itérations de point-fixe au cours des itérations en temps.

différence du cas Bingham, l'algorithme ne converge pas pour les grands $\Delta t$ ($\Delta t = 10$ dans la figure 4.4). Pour les autres valeurs de $\Delta t$, le nombre de sous-itérations de point-fixe reste raisonnable. Ainsi, le choix de $\Delta t$ est plus délicat que pour les modèles d'Oldroyd et de Bingham : même en l'absence de singularité, il existe une valeur limite de $\Delta t$ au-delà de laquelle l'algorithme ne converge pas.

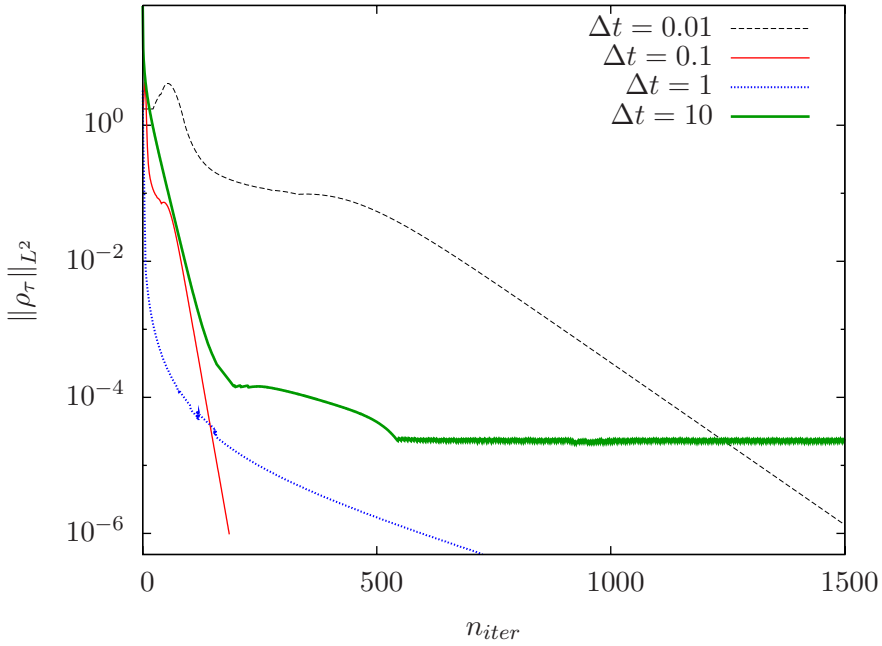


FIG. 4.4 – Cas VEP : norme $L^2$ du résidu (3.39) en fonction de l'itéré en temps $n_{iter}$ pour différentes valeurs de $\Delta t$.

### 4.4.2 Aspect général de la solution

Nous présentons figure 4.5 la solution stationnaire fournie par l'algorithme pour le jeu de paramètres (4.12), avec une subdivision assez fine (500 points de discrétisation), et un pas de temps $\Delta t = 10^{-3}$. Nous présentons également les solutions de modèles de Bingham et d'Oldroyd. Il possible de distinguer pour l'ensemble des champs considérés (sauf la composante $\tau_{r\theta}$) deux zones bien distinctes, selon la distance $r$ au cylindre intérieur : comme pour le modèle de Bingham, la norme $|\tau_d|$ des contraintes déviatrices est supérieure au seuil $Bi$ dans la région proche du cylindre intérieur et inférieure dans celle proche du cylindre extérieur. Notons $r_s$ le point où s'effectue la transition. Nous trouvons ici $r_s \approx 1.77$, une valeur assez proche de ce qu'on obtiendrait avec le modèle de Bingham (en prenant $We = 0$, nous trouvons $r_s \approx 1.857$, cf. section précédente). Le modèle d'Oldroyd présente des différences de contraintes normales non nulles, mais leur valeur est beaucoup plus faible que celles du modèle VEP.

Le point $r_s$ est remarquable pour l'ensemble des champs considérés : pour la vitesse (Fig. 4.5a)), il correspond au point où celle-ci s'annule. Contrairement au modèle de Bingham, le gradient de vitesse est discontinu en ce point (Fig. 4.5c)), et la vitesse est seulement continue (au lieu d'être continue et dérivable). Nous relevons la présence de contraintes normales $\tau_{\theta\theta}$ non nulles et également discontinues en $r = r_s$. Leur valeur est nettement plus importante que pour le modèle d'Oldroyd (d'un facteur supérieur à 10).

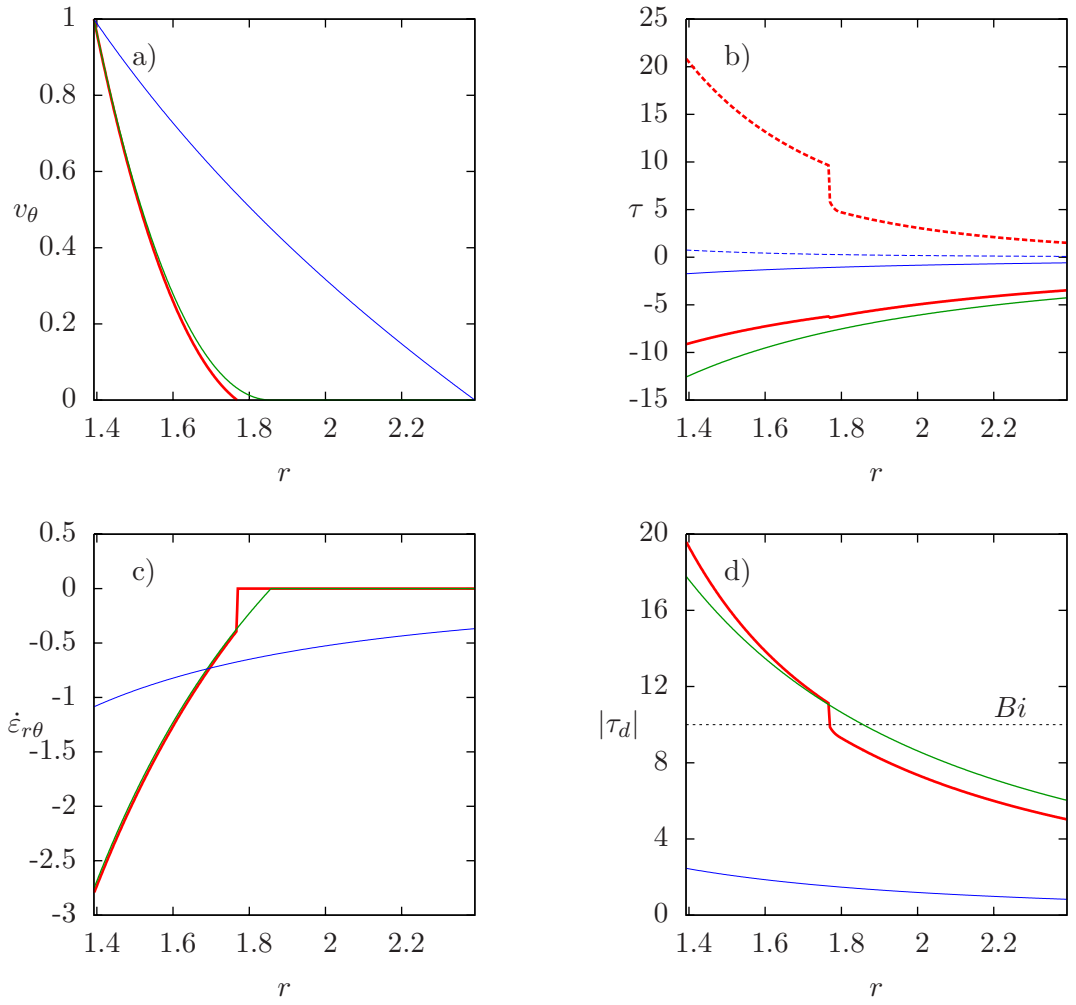


FIG. 4.5 – Comparaison VEP/Bingham/Oldroyd : 500 points de discrétisation, et pas de temps $\Delta t = 10^{-3}$. VEP : rouge très épais, paramètres (4.12) ; Bingham : vert épais, paramètres (4.11) ; Oldroyd : bleu fin, paramètres (4.10) ; a) vitesse (traits continus : composante $v_r$), b) contrainte élastique (traits continus : composante $\tau_{r\theta}$ ; traits discontinus : composante $\tau_{\theta\theta}$, nulle pour Bingham donc non tracée) c) taux de déformation (trait continu : $\dot{\varepsilon}_{r\theta}$), d) norme de la contrainte déviatrice $|\tau_d|$ (traits continus). La composante $\tau_{rr}$ est nulle, nous ne la représentons pas.

Ainsi, si le modèle VEP combine des comportements des sous-modèles d'Oldroyd (contraintes normales non nulles) et de Bingham (localisation de l'écoulement près du cylindre intérieur, zones au-dessus et en-dessous du seuil), il s'en écarte par une régularité plus faible de ses solutions, avec notamment des contraintes et des gradients de vitesse discontinus. Néanmoins, ce comportement ne s'observe pas pour toutes valeurs

des paramètres : comme dans le cas du modèle de Bingham, $r_s$ augmente lorsque $Bi$ diminue, jusqu'à ce que $r_s \geq r_e$, ce qui correspond à une situation où le seuil est dépassé dans tout l'intervalle $[r_0, r_e]$ ; dans ce cas, les solutions ont une régularité qui semble être la même que celle du modèle d'Oldroyd.

### 4.4.3 Étude de la discontinuité

La discontinuité observée dans les solutions stationnaires est surprenante à plus d'un titre : la géométrie de l'écoulement considéré est régulière et ne présente pas de singularité comme des coins rentrants par exemple, et le modèle est obtenu par combinaison de deux autres modèles dont les solutions dans cette géométrie sont plus régulières. On s'attendrait au pire à ne récupérer que la régularité du modèle de Bingham. On peut dès lors se demander si ce comportement n'est pas un artefact dû à la discrétisation, et questionner la validité de notre méthode de résolution. Nous avons abordé cette question sous plusieurs angles de vue que nous présentons ici.

#### Vérification numérique

A pas de temps $\Delta t = 10^{-3}$ fixé, nous avons augmenté le nombre de points de discrétisation jusqu'à $N = 1000$, sans que la discontinuité ne soit modifiée significativement (cf. figure 4.6).

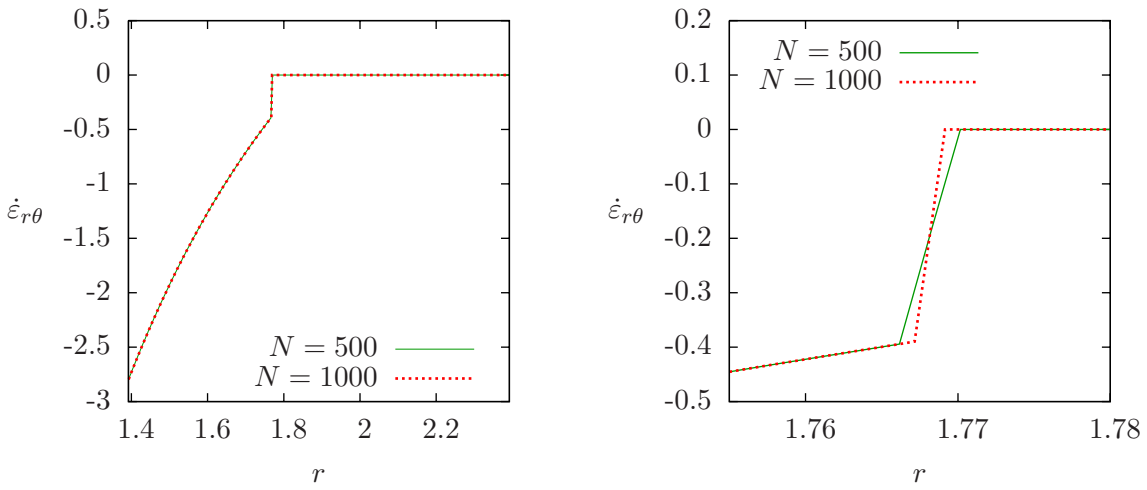


FIG. 4.6 – Taux de déformation $\dot{\varepsilon}_{r\theta}$ en fonction de la coordonnée radiale $r$, pour $N = 500, 1000$ points de discrétisation. Les calculs sont réalisés avec un pas de temps $\Delta t = 10^{-3}$. A gauche : vue d'ensemble ; à droite : détail de la discontinuité.

Par ailleurs, l'algorithme de résolution nécessite le calcul dans le terme de plasticité du signe de $|\tau_d| - Bi$. Toute erreur sur ce terme entraîne une erreur sur la position de la frontière entre zones au-dessus et au-dessous du seuil et donc sur $r_s$. Afin de s'assurer

que la discontinuité n'est pas due à un artefact numérique qui causerait une incertitude sur $r_s$, Pierre Saramito a intégré à la librairie RHEOLEF la possibilité d'effectuer des calculs en précision arbitraire. Il a ainsi pu mener des calculs avec une précision de $10^{-30}$, sans aucune incidence sur la discontinuité.

### Non-unicité des solutions stationnaires

Durant nos investigations, nous avons constaté avec surprise que la discontinuité de la solution stationnaire disparaît lorsqu'on augmente le pas de temps (Fig. 4.7), en passant par des stades intermédiaires où la taille du saut diminue progressivement (Fig. 4.7). Le problème stationnaire semble donc être mal posé : il n'admet pas de solution

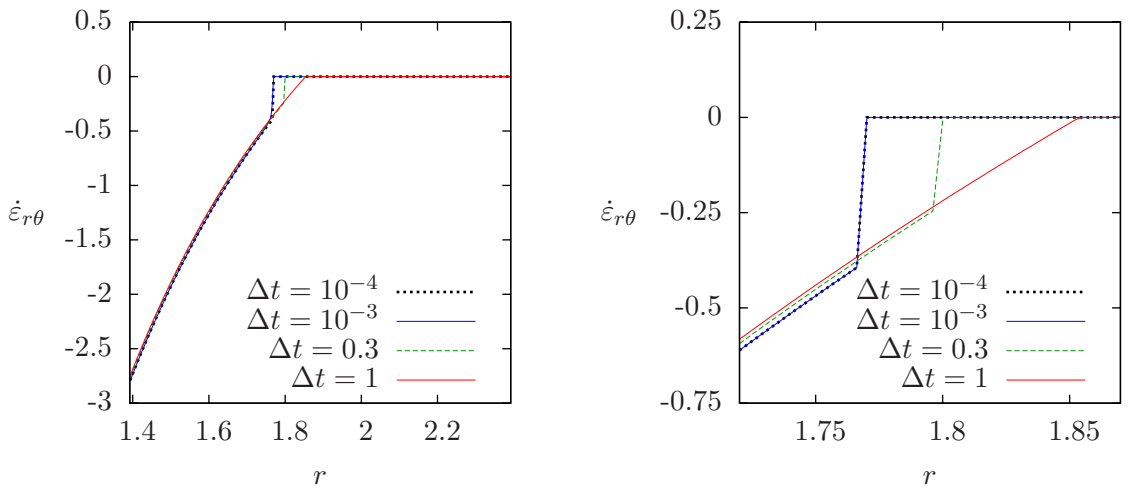


FIG. 4.7 – Influence du pas de temps sur la solution stationnaire : taux de déformation $\dot{\varepsilon}_{r\theta}$, pour différentes valeurs de $\Delta t$. A gauche : vue d'ensemble ; à droite : détail de la discontinuité. Calculs effectués avec 500 points de discrétisation.

unique puisque chacune des solutions obtenues, discontinue ou pas, vérifie les équations stationnaires, dans le sens où le résidu de ces équations peut être amené à une valeur arbitrairement petite. Puisque le pas de temps influe sur la solution stationnaire, c'est la façon dont la solution évolue, et donc son *histoire*, qui détermine la solution stationnaire. En particulier, il peut être intéressant d'examiner l'influence des conditions initiales ; pour cela, nous devons nous affranchir de l'influence du pas de temps : nous vérifions que les solutions stationnaires convergent vers une solution limite quand le pas de temps tend vers zéro (figure 4.7), ce qui permet de définir une solution stationnaire unique pour une condition initiale donnée.

La condition initiale est donnée par les valeurs initiales de $v_\theta$, $\tau_{rr}$, $\tau_{\theta\theta}$, et $\tau_{r\theta}$. Étudions l'effet d'une valeur initiale $\tau^0_{\theta\theta}$ non nulle sur le caractère discontinu des solutions : les valeurs initiales de $v_\theta$, $\tau_{rr}$, et $\tau_{r\theta}$ sont nulles et nous prenons successivement $\tau^0_{\theta\theta} = 2, 4.2, 10$. Les calculs sont réalisés avec un pas de temps $\Delta t = 10^{-3}$ de manière à ce que l'effet de la

discrétisation en temps ne soit pas perceptible. Les résultats sont représentés figure 4.8. La solution devient progressivement continue lorsque $\tau^0_{\theta\theta}$ augmente. Les zones au-dessus ($r < r_s$) et au-dessous du seuil ($r \geq r_s$) ont un comportement très différent. Considérons par exemple les courbes de $\tau_{\theta\theta}$ : elles sont quasiment superposées dans la zone au-dessus du seuil, tandis qu'elles sont décalées les unes par rapport aux autres dans la région au-dessous du seuil : à part pour la condition initiale $\tau^0_{\theta\theta} = 10$, les différentes courbes semblent identiques à une translation près, la hauteur de la translation étant liée à la valeur initiale : plus celle-ci est élevée, plus la valeur stationnaire est décalée vers le haut. Ainsi, la région au-dessous du seuil garde la mémoire de la condition initiale, tandis que la zone au-dessus du seuil la perd : l'une a subi une déformation élastique, réversible, tandis que l'autre a subi des ré-arrangements plastiques, et donc des déformations irréversibles. La discontinuité apparaît quand la valeur de la contrainte normale dans la région au-dessus du seuil, qui semble imposée par le mouvement, est trop différente de sa valeur dans la région au-dessous du seuil, qui elle, dépend de la condition initiale.

### Approche explicite

Si la résolution explicite des solutions stationnaires du modèle VEP paraît hors de portée dans cette géométrie, nous pouvons au moins vérifier que les équations n'excluent pas la possibilité de solutions discontinues. Nous choisissons les paramètres du modèle de manière à simplifier au maximum les équations : nous prenons $Re = 0$, $\alpha = 1$, $C_F = 0$ et $a = 1$. Nous nous sommes assurés numériquement que nous pouvons obtenir des solutions discontinues avec ces paramètres. En tenant compte des symétries du problème, le problème à résoudre est :

**Problème 4.4.1.** *Trouver $v_\theta$, et $(\tau_{rr}, \tau_{\theta\theta}, \tau_{r\theta})$ tels que*

$$\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} - \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} = 0, \tag{4.13}$$

$$-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \tau_{r\theta}\right) = 0, \tag{4.14}$$

$$We\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial t} + \kappa(|\tau_d|)\tau_{rr} = 0, \tag{4.15}$$

$$We\left(\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial t} - 2\dot{\varepsilon}_{r\theta}\tau_{rr}\right) + \kappa(|\tau_d|)\tau_{r\theta} = 2\dot{\varepsilon}_{r\theta}, \tag{4.16}$$

$$We\left(\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial t} - 4\dot{\varepsilon}_{r\theta}\tau_{r\theta}\right) + \kappa(|\tau_d|)\tau_{\theta\theta} = 0, \tag{4.17}$$

*avec les conditions aux limites*

$$v_\theta(t, r_0) = V_0,\ v_\theta(t, r_e) = 0,\ \forall t > 0,$$

*et les conditions initiales*

$$v_\theta(0, r) = 0,\ \tau_{rr}(0, r) = 0,\ \tau_{r\theta}(0, r) = 0,\ \tau_{\theta\theta}(0, r) = \tau^0_{\theta\theta},\ \forall r \in ]r_0, r_e[.$$

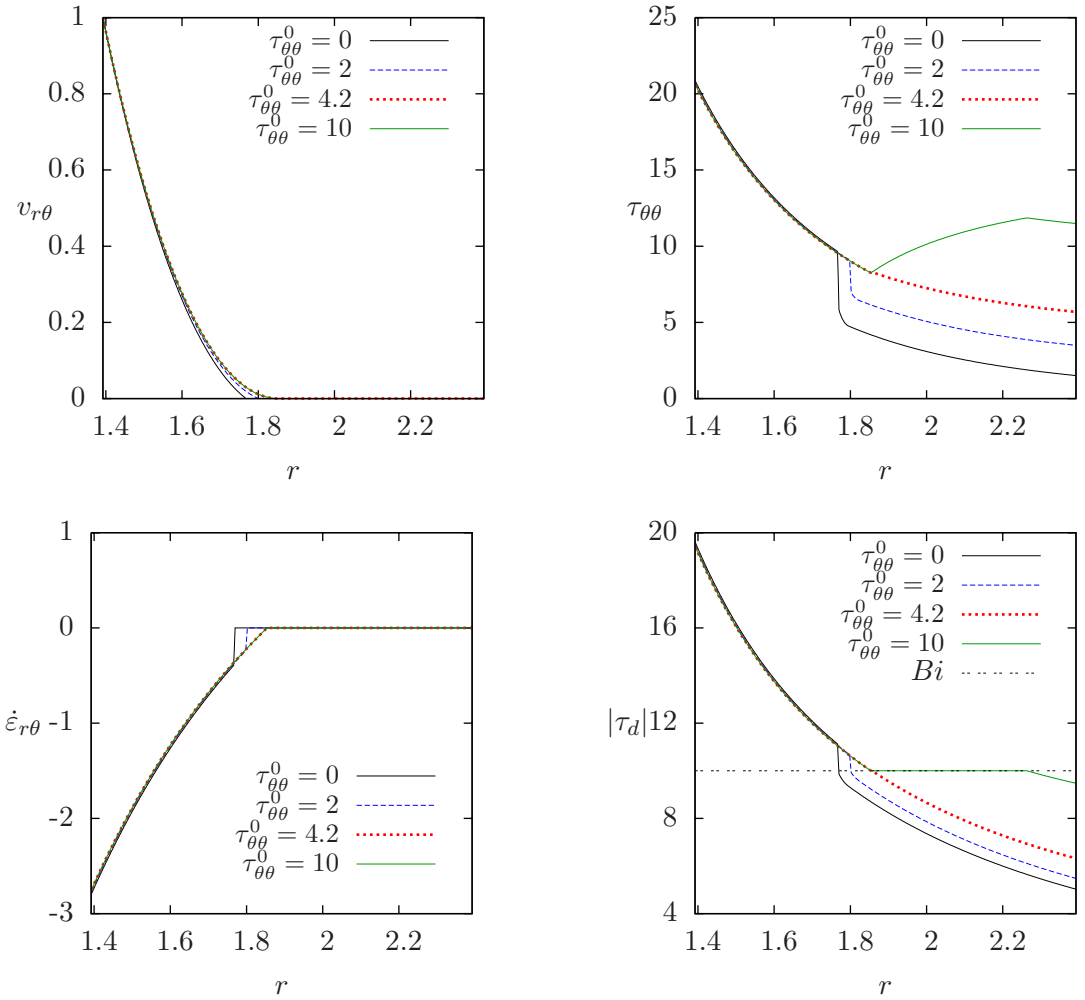


FIG. 4.8 – Effet de la condition initiale sur la discontinuité du gradient de vitesse, de la composante $\tau_{\theta\theta}$, et de la norme $|\tau_d|$ : $v^0_\theta = 0$, $\tau^0_{rr} = 0$, $\tau^0_{r\theta} = 0$, et $\tau^0_{\theta\theta}$ prenant les valeurs 0, 2, 4.2, et 10. Calculs effectués avec 500 points de discrétisation, et un pas de temps $\Delta t = 10^{-3}$.

Tout d'abord, la conservation de la quantité de mouvement (équations (4.13) et (4.14)) impose que la contrainte de cisaillement $\tau_{r\theta}$ soit de la forme $C/r^2$ (où $C$ est une constante non nulle), donc continue, mais autorise des composantes normales discontinues car elles peuvent s'équilibrer avec la pression. Pour l'examen des composantes (4.15) à (4.17) de l'équation constitutive, nous allons supposer qu'il existe $r_s \in ]r_0, r_e[$ tel que $|\tau_d| > Bi$ (et $\kappa(|\tau_d|) \neq 0$) pour $r < r_s$, et $|\tau_d| \leq Bi$ (et $\kappa(|\tau_d|) = 0$) pour $r \geq r_s$. Les solutions stationnaires ($\partial/\partial t = 0$) impliquent :

- pour $r \geq r_s$ :
  comme $\kappa(|\tau_d|) = 0$, (4.17) se réduit à $\dot{\varepsilon}_{r\theta}\tau_{r\theta} = 0$ ; d'après ce qui précède, $\tau_{r\theta} \neq 0$, donc nécessairement $\dot{\varepsilon}_{r\theta} = 0$ dans la région $r > r_s$. Avec la condition au bord $v_\theta(r_e) = 0$, on trouve $v_\theta(r) = 0$ pour $r > r_s$. Les équations (4.15) et (4.16) se réduisent à $0 = 0$, et les contraintes normales ne peuvent pas être déterminées par les seules équations stationnaires dans la région $r \geq r_s$.
- pour $r < r_s$ :
  $\kappa(|\tau_d|) \neq 0$, donc (4.15) implique $\tau_{rr} = 0$. Ensuite, avec (4.16), on

  $$2\dot{\varepsilon}_{r\theta} = \kappa(|\tau_d|)\tau_{r\theta},$$

  d'où, avec (4.17),

  $$\tau_{\theta\theta} = 2We\tau_{r\theta}^2.$$

  Comme $r_s$ est indéterminé, il n'est pas possible de pousser la résolution plus avant, mais nous avons mis en évidence dans les équations stationnaires le fait que les valeurs des composantes normales $\tau_{rr}$ et $\tau_{\theta\theta}$ sont imposées par le mouvement dans la zone $r < r_s$, alors qu'elles ne sont pas contraintes dans la zone $r \geq r_s$. Dès lors, des quantités discontinues en $r = r_s$ peuvent être solutions du modèle.

## 4.5 Conclusion

Après avoir présenté comment les équations du modèle et l'algorithme de résolution se simplifient dans le cas d'un écoulement de cisaillement entre deux cylindres concentriques (écoulement de Couette), nous avons vérifié que l'algorithme résout bien les modèles d'Oldroyd et de Bingham ; ce dernier cas permet de tester la méthode de point-fixe utilisée pour la résolution de la non-linéarité associée au terme de plasticité. Nous avons étudié l'influence du pas de temps sur la convergence de l'algorithme vers la solution stationnaire : la vitesse de convergence diminue jusqu'à un pas de temps critique au-delà duquel elle augmente. Le nombre de sous-itérations de point-fixe est raisonnable (de l'ordre de 10), et l'utilisation de méthode de résolution de point-fixe plus efficaces (comme une méthode de Newton) ne nous paraît pas indispensable.

Nous avons ensuite résolu numériquement les équations du modèle VEP : à la différence du modèle de Bingham, il existe un pas de temps au-delà duquel l'algorithme ne converge pas. Le nombre de sous-itérations de point-fixe reste raisonnable.

L'étude des solutions révèle un comportement inattendu : les solutions stationnaires ne sont pas uniques, leur régularité dépend des conditions initiales ; il peut apparaître

des sauts de contraintes normales et de gradient de vitesse à la frontière entre les zones qui ont subi des ré-arrangements plastiques irréversibles et celles qui n'ont subi que des déformations élastiques réversibles. Pour autant que nous pouvons en juger, cette discontinuité n'est pas un artefact numérique. Elle traduit le fait que, physiquement, les conditions initiales, c'est-à-dire la préparation de la mousse, influent sur son état dans le régime stationnaire.

# Chapitre 5

# Prédiction d'écoulements de cisaillement

## 5.1 Problématique

Nous exploitons maintenant le cadre mis en place au chapitre précédent pour confronter pour la première fois notre modèle à l'expérience. Le choix de l'expérience de Debrégeas *et al.* [23] (2001) pour ce premier test du modèle nous a paru pertinent à plus d'un titre : tout d'abord, la géométrie axisymétrique permet de se ramener à résoudre le modèle sur un axe radial, ce qui simplifie considérablement l'algorithme et diminue le temps de calcul par rapport à une résolution 2D. Ceci a rendu possible l'exploration d'une large gamme de paramètres, étape indispensable pour avoir une idée globale du comportement du modèle. Ensuite, cette expérience a joué un rôle pionnier dans l'étude des écoulements bidimensionnels de mousse. La localisation de la vitesse, trait marquant de cette expérience, a suscité de nombreux débats et donné lieu à de nombreux articles expérimentaux [101, 58, 59] et théoriques [56, 57, 54, 17] pour en déterminer l'origine.

En 2005, Janiaud et Graner [53] ont ré-analysé cette expérience, et en plus du champs de vitesse, ils ont extrait des données tensorielles permettant de remonter au tenseur des contraintes élastiques. Ces données ont également été mesurées en régime transitoire, ce qui enrichit considérablement la compréhension de cette expérience. Jusqu'à maintenant, les résolutions d'un modèle numérique sur cette géométrie [17, 54] se sont focalisées sur la profil de vitesse dans l'entrefer du rhéomètre en régime stationnaire, sans s'intéresser à ces données supplémentaires. L'aspect marquant de cette expérience, la localisation de l'écoulement près du cylindre interne, a été interprété comme un effet de la friction des plaques, ce qui les a amenés à conclure que leur présence modifie en profondeur la structure de l'écoulement et que leur prise en compte est essentielle pour une bonne compréhension des écoulements bidimensionnels.

Notre objectif est le suivant : trouver un jeu de paramètres, si possible unique, qui conduise à un bon accord avec l'ensemble des données mesurées sur cette expérience, de manière à valider le modèle. Nous examinerons ensuite à la lumière de cette comparaison l'hypothèse avancée [17, 54] sur le rôle des plaques de confinement.

Les travaux présentés ont fait l'objet d'une publication [15].

## 5.2 Description de l'expérience

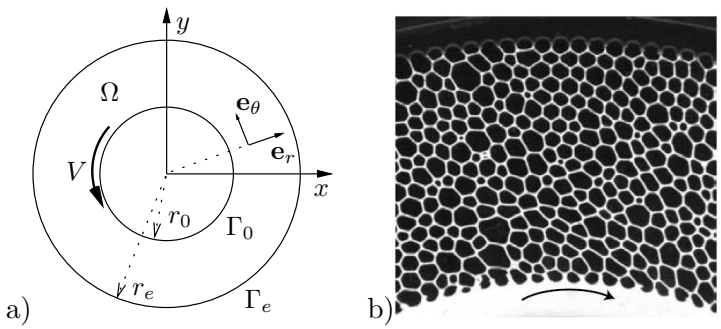


FIG. 5.1 – Dispositif expérimental : a) définition des paramètres géométriques et cinématiques ; b) image de la mousse bidimensionnelle (d'après [23]).

Le dispositif expérimental [23] présenté figure 5.1 est composé d'une roue interne mobile de rayon $r_0$ et d'une roue externe fixée de diamètre $r_e$. Notons $\Delta r = r_e - r_0$ la largeur du rhéomètre. Les roues sont dentées pour s'assurer qu'il n'y a pas de glissement aux parois. La fraction liquide (5.2 %) est homogène et la taille des bulles est de l'ordre de 2 mm. La mousse est confinée entre deux plaques de verre transparent séparées par un intervalle $h = 2$ mm. La roue interne tourne à une vitesse $V = 0.25$ mm.s$^{-1}$. Nous disposons de deux jeux de données :

- Le premier concerne l'écoulement transitoire, dont l'analyse est présentée dans [53]. Le rayon interne est $r_0 = 71$ mm et le rayon externe est $r_e = 112$ mm. Pour préparer la mousse, la roue interne commence par tourner dans le sens antihoraire jusqu'à ce qu'un régime stationnaire soit atteint ; puis, à un temps arbitraire choisi comme l'origine ($t = 0$), la direction de cisaillement bascule dans le sens horaire, l'expérience commence et des images sont enregistrées à intervalles réguliers afin de réaliser des mesures par analyse d'image. Dans [53], les quantités mesurées sont moyennées dans huit boîtes circulaires orthoradiales et équiréparties correspondant aux positions $r_j = r_0 + 1.7 \cdot 10^{-3} \times (0.4 + 2.7 \times (j - 0.5)), j = 1, \ldots, 8$.
- Le deuxième jeu de données concerne le régime stationnaire, pour lequel des mesures sont présentées dans [23, 53, 71]. De même que pour le jeu précédent, le rayon interne est $r_0 = 71$ mm, mais par contre le rayon externe est $r_e = 122$ mm. Après un cisaillement préparatoire dans le sens horaire, le sens de rotation est inversé et les images sont enregistrées après un tour complet, une fois que l'écoulement a atteint un régime stationnaire.

## 5.3 Choix des paramètres

### 5.3.1 Paramètres physiques directement exploitables dans le modèle

Les paramètres de contrôle de l'expérience–la fraction fluide, la nature des surfactants, la taille des bulles–n'étant pas utilisables directement dans le modèle, nous cherchons une évaluation des paramètres du modèle. Celui-ci, donné par les équations (2.27), (2.28), et (2.29) met en jeu quatre paramètres physiques : les viscosités $\eta_1$ et $\eta_2$, la friction des plaques $\beta$, le module élastique $\mu$, et la contrainte seuil $\tau_Y$.

D'après [78], la force de friction surfacique exercée par les plaques exprimée en N.m$^{-2}$ est donnée par la loi de puissance $f = 31v^{0.64}$ ; la force volumique s'obtient en intégrant sur l'épaisseur et vaut $f/h$. Pour des raisons de simplicité, nous avons choisi un modèle de friction linéaire de la forme $\tilde{f} = \beta v$, en N.m$^{-3}$. Nous obtenons un ordre de grandeur de la valeur de $\beta$ en considérant que les valeurs maximales de la friction, atteintes pour $V = 0.25$ mm.s$^{-1}$ doivent être égales pour les deux expressions :

$$\beta \approx 31 \times \left(0.25 \cdot 10^{-3}\right)^{0.64} / (0.25 \cdot 10^{-3} \times 2 \cdot 10^{-3}) = 3.065 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Dans [15], nous avons exprimé la force de friction sous la forme $f = -\beta/h\ v$, ce qui explique que l'unité et la valeur de $\beta$ y soit différentes ; la valeur dans l'article, en Pa $\cdot$ s $\cdot$ m$^{-1}$, s'obtient à partir de la valeur utilisée ici, en Pa $\cdot$ s $\cdot$ m$^{-2}$, en la multipliant par $h = 2$ mm. D'après [78] encore, le module élastique bidimensionnel vaut $\bar{\mu} \approx 2 \cdot 10^{-2}$ N.m$^{-1}$, ce dont nous déduisons le module élastique

$$\mu \approx \bar{\mu}/h \approx 10 \text{ N.m}^{-2},$$

Nous évaluons la contrainte seuil $\tau_Y$ à partir de la valeur maximale $U_Y$ de la norme du déviateur du tenseur de déformation statistique $|U_d|$ mesurée en expérience, ce qui donne

$$\tau_Y \approx 2\mu U_Y \approx 5.2 \text{ N.m}^{-2}.$$

Les paramètres les plus difficiles à évaluer sont les viscosités $\eta_1$ et $\eta_2$. Un ordre de grandeur de $\eta_1$ peut être obtenu par des expériences de rhéométrie oscillatoire (Cf. introduction), mais nous n'en disposons pas pour la mousse utilisée dans cette expérience. Néanmoins, nous pouvons supposer que cette viscosité $\eta_1$ est plus petite la viscosité $\eta_2$ correspondant à la dissipation plastique ; des tests préliminaires ont montré que les variations de $\eta_1$ avaient peu d'influence sur la solution, aussi nous prenons $\eta_1 = 0$ pour simplifier l'analyse. En remarquant que le rapport $\eta_2/\mu$ a la dimension d'un temps, nous pouvons l'interpréter comme le temps de relaxation des évènements plastiques qui est évalué à 1 s dans [57] ; d'où l'ordre de grandeur

$$\eta_2 \approx 10 \text{ N.m}^{-2}.$$

### 5.3.2 Jeu de paramètres retenu

Partant des évaluations précédentes, nous avons obtenu un bon accord du modèle avec les données transitoires et stationnaires avec le jeu de paramètres légèrement modifié

suivant :

$\beta = 3.065{\cdot}10^5$ Pa.s.m$^{-2}$; $\mu = 10.9$ N.m$^{-2}$; $\tau_Y = 5.47$ N.m$^{-2}$; $\eta_2 = 13.1$ Pa.s.

Nous indiquons dans le tableau 5.1 les paramètres sans dimension utilisés dans les équations adimensionnées (2.30)-(2.31)-(2.32) et (2.33)-(2.34)-(2.35). Pour la comparaison

| jeu | $Bi$ | $We$ | $C_F$ | $\alpha$ | $\varepsilon_Y$ | $C_F We/(2\alpha)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. transitoire | 68.3 | $7.31 \times 10^{-3}$ | 39.2 | 1 | 0.25 | 0.14 |
| 2. stationnaire | 85.0 | $5.88 \times 10^{-3}$ | 60.7 | 1 | 0.25 | 0.18 |

TAB. 5.1 – Choix des paramètres sans dimension. Les paramètres diffèrent d'un jeu à l'autre car la longueur caractéristique n'est pas la même.

avec les expériences, les résultats exprimés sous forme adimensionnée sont tracés en fonction du temps adimensionné $\gamma = Vt/\Delta r$ (qui coïncide avec la déformation appliquée totale), et de $(r_0 - r_e)/\Delta r$, la distance au cylindre intérieur normalisée par la largeur du rhéomètre.

## 5.4 Régime transitoire

Les calculs numériques sont conduits de la façon suivante : partant d'un état initial où toutes les variables sont prises à zéro, nous prenons comme conditions au bord $v(r_0) = V$, et $v(r_e) = 0$ et nous lançons l'algorithme. L'état stationnaire est considéré atteint lorsque le résidu est inférieur à $10^{-6}$. A ce moment-là, pris comme l'origine ($t = 0$), le sens du cisaillement est inversé en prenant les conditions au bord $v(r_0) = -V$ et $v(r_e) = 0$ ; les résultats sont enregistrés à chaque pas de temps.

### 5.4.1 Profil de vitesse

La figure 5.2a représente le profil de vitesse en fonction de $r$ à différents temps, tandis que la figure 5.2b représente le profil de vitesse en fonction de $t$ pour différents rayons, de $r = r_1$ à $r = r_8$. Lorsque $\gamma = 0.01$, la direction de cisaillement vient d'être changée, et le profil de vitesse est approximativement exponentiel. Après une courte transition ($0 \leq \gamma \leq 0.1$), le profil de vitesse devient presque linéaire, jusqu'à $\gamma \approx 0.3$. Pour $r = r_1$, c'est-à-dire près de la roue en mouvement, la vitesse décroît rapidement. Plus loin, pour $r = r_8$ par exemple, cette décroissance démarre plus tard, à $\gamma = 0.35$. Enfin, à $\gamma = 1$, la mousse a atteint un régime transitoire où l'écoulement est fortement localisé près de la roue en mouvement.

### 5.4.2 Contrainte élastique

La figure 5.3 montre la composante de cisaillement de la déformation élastique $\varepsilon^e_{r\theta}$ par rapport au temps pour $r = r_1$ à $r = r_8$. Après une courte transition, $\varepsilon^e_{r\theta}$ atteint un

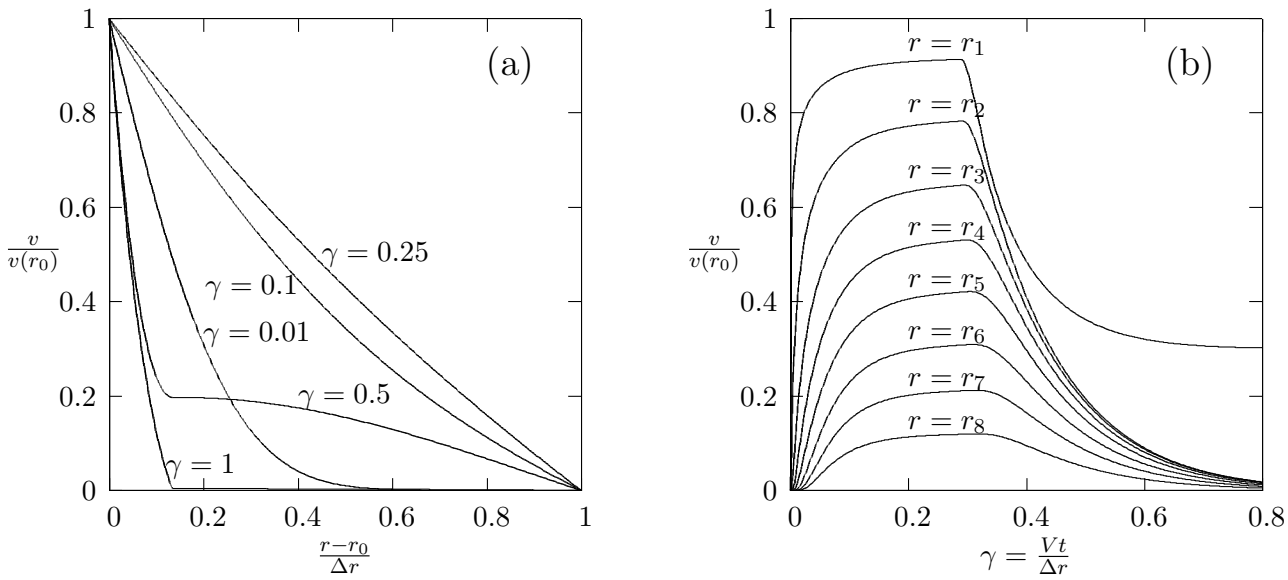


FIG. 5.2 – Cas transitoire (a) profil de vitesse en fonction de $r$ à différents temps ; (b) profil de vitesse en fonction de $t$ pour $r = r_1$ à $r_8$.

premier régime ($0.05 \leq \gamma \leq 0.3$ pour $r = r_1$ et $0.2 \leq \gamma \leq 0.4$ pour $r = r_8$) où elle varie linéairement avec $\gamma$. Le matériau se comporte donc comme un solide élastique dans ce régime. Après une deuxième transition, $\varepsilon^e_{r\theta}$ sature et atteint un état stationnaire. Pour un rayon $r$ donné, la valeur caractéristique de $\gamma$ associée à cette seconde transition est notée $\gamma_c(r)$ ; plus précisément, elle est définie comme l'intersection de l'asymptote de $\varepsilon^e_{r\theta}$ pour $\gamma$ grand et de la tangente au point de courbure minimale, comme indiqué dans l'insert de figure 5.3.

### 5.4.3 Passage du transitoire au stationnaire

Il est alors possible de tracer $\gamma_c$ en fonction de $r$ (fig. 5.4a). Les résultats numériques sont dans la barre d'erreur des résultats expérimentaux. On voit que les régions proches de la roue mobile saturent plus tôt que celles qui sont loin. Avec le modèle, nous étudions comment cette inhomogénéité varie en fonction des paramètres : en utilisant l'adimensionnement $(We, BiWe/2, C_FWe/2)$ correspondant aux équations (2.33)-(2.34)-(2.35), nous trouvons que lorsque $C_FWe/2 = 1.4$ est maintenu constant et que $BiWe/2$ et $We$ varient, la courbe $\gamma_c(r)$ est translatée vers le haut ou vers le bas, son amplitude restant inchangée. A l'inverse, lorsqu'on fixe $BiWe/2$ et $We$ aux valeurs indiquées dans le tableau 5.1, cette amplitude varie avec $C_FWe/2$ (fig. 5.4b). Nous traçons figure 5.5 l'amplitude $\gamma_c(r_e) - \gamma_c(r_0)$ en fonction de $C_FWe$ ; la dépendance est presque linéaire. En particulier, lorsque $C_FWe = 0$, l'amplitude est nulle, ce qui signifie que toutes les régions de la mousse saturent en même temps ; si $C_FWe \neq 0$ les régions loin de la roue mobile saturent plus tard que les régions qui lui sont proches.

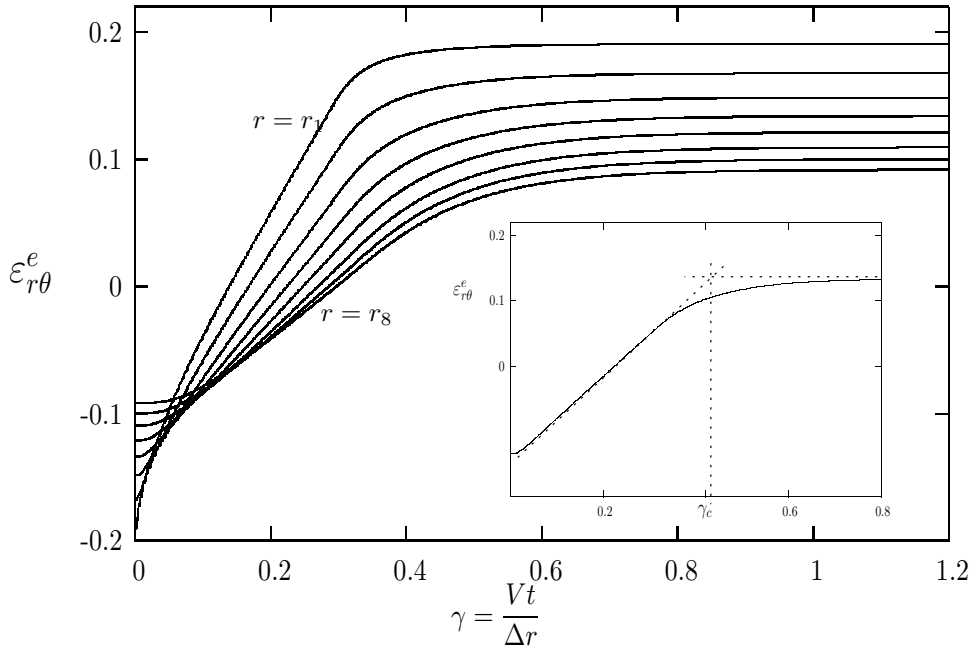


FIG. 5.3 – Cas transitoire : composante de cisaillement de la déformation élastique $\varepsilon^e_{r\theta}$ en fonction de $t$ pour $r = r_1$ à $r_8$. Insert : la ligne verticale en pointillés indique la limite $\gamma_c$ entre les régimes transitoire et stationnaire. Elle est définie comme l'intersection de l'asymptote pour $\gamma$ grand et de la tangente au point de courbure minimale. Nous la traçons ici pour $r = r_4$.

En remarquant que $C_F We/2 = \beta VL/(\mu h)$ (car $\eta_1 = 0$), on peut interpréter ce phénomène comme le résultat de la compétition entre la friction des plaques et l'élasticité de la mousse : plus le coefficient de friction $\beta$ est grand, plus le retard est important ; à l'inverse, plus le module élastique $\mu$ est grand, c'est-à-dire plus la mousse est rigide, plus ce retard diminue.

### 5.4.4 Interprétation

Pour faciliter l'interprétation, nous traçons figure 5.6 la norme de la partie déviatrice du tenseur de déformation élastique

$$|\varepsilon^e_d| = \left[2\left(\varepsilon^e_{r\theta}\right)^2 + 0.5\left(\varepsilon^e_{rr} - \varepsilon^e_{\theta\theta}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{5.1}$$

Nous rappelons que la plasticité apparaît lorsque $|\varepsilon^e_d| \geq \varepsilon_Y = 0.25$. On voit figure 5.6 que cela n'arrive que près de la roue mobile, pour $r = r_1$ : soit au tout début de l'expérience, quand le sens de rotation vient d'être changé ; soit aux temps longs, dans le régime stationnaire. A $t = 0$, on est encore dans le régime stationnaire correspondant au cisaillement dans le sens antihoraire, et $|\varepsilon^e_d|$ dépasse $\varepsilon_Y$ près de la roue interne.

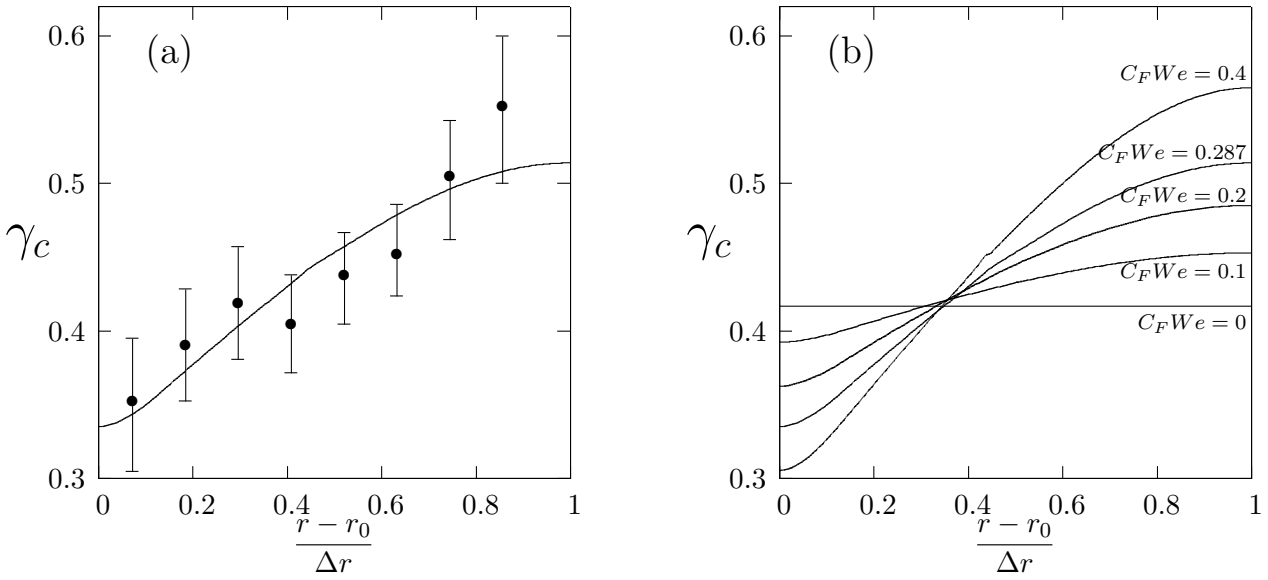


FIG. 5.4 – Cas transitoire : (a) $\gamma_c$ *vs* $r$ avec les paramètres du tableau 5.1. • : données expérimentales avec barres d'erreur. Traits pleins : données numériques. (b) $\gamma_c$ *vs* $r$ avec $Bi$ et $We$ comme dans le tableau 5.1. et $C_F We = 0,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.287,\ 0.4$.

Pour $t > 0$, le sens de rotation change ; la vitesse et son gradient changent de signe ; $|\varepsilon_d^e|$ diminue ; l'ensemble de la mousse se retrouve assez vite sous le seuil. Le terme de plasticité s'annule et l'équation constitutive (2.35) se réduit à

$$\overset{\square}{\varepsilon^e} = D(\mathbf{v}),$$

ce qui signifie que toute la déformation appliquée à la mousse est convertie en déformation élastique : la mousse se comporte comme un solide élastique et $\varepsilon_{r\theta}$ augmente linéairement avec la déformation appliquée $\gamma$. A cause de la géométrie cylindrique et de la friction des plaques, les contraintes sont plus importantes près de la roue intérieure, et la mousse sature en premier dans cette région. La plasticité relaxe les contraintes élastiques jusqu'à ce qu'un équilibre soit atteint ; on passe en régime stationnaire.

Le scénario que nous proposons pour le passage du transitoire au stationnaire est donc le suivant : tout d'abord, la mousse se comporte comme un solide élastique, le profil de vitesse est presque linéaire, et la contrainte de cisaillement augmente linéairement avec la déformation appliquée. La contrainte atteint la valeur seuil en premier près de la roue intérieure, la plasticité équilibre l'énergie apportée par le cisaillement et la saturation se propage de proche en proche dans toute la largeur du rhéomètre. C'est la friction des plaques qui est à l'origine de cette propagation non instantanée. Lorsque le régime stationnaire est atteint, l'écoulement est localisé près de la roue intérieure.

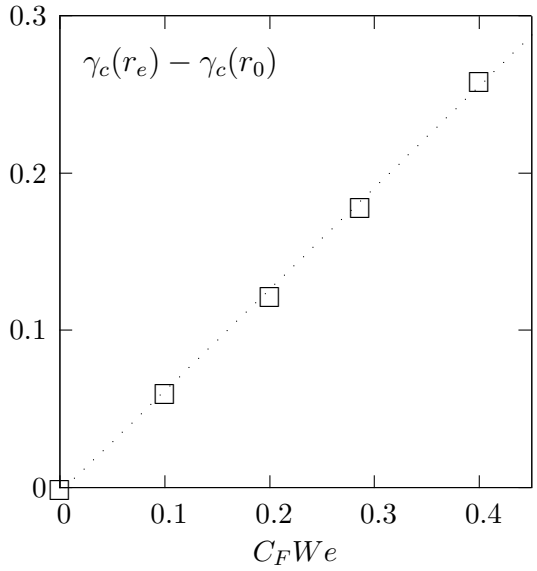


FIG. 5.5 – Cas transitoire : $\gamma_c(r_e) - \gamma_c(r_0)$ *vs* $C_F We$. □ : données numériques ; ligne pointillée : régression linéaire de ces données.

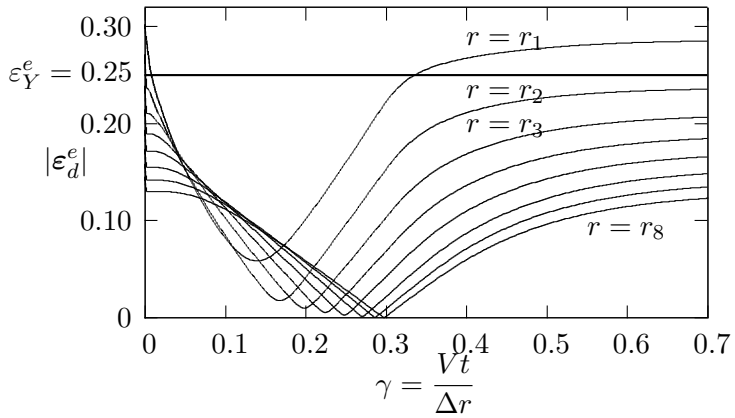


FIG. 5.6 – Cas transitoire : $|\boldsymbol{\varepsilon}_d^e|$ *vs* $t$ pour $r$ de $r = r_1$ à $r_8$.

## 5.5 Régime stationnaire

Nous examinons maintenant plus en détail le régime stationnaire. Les calculs numériques sont conduits comme auparavant : partant d'un état initial où toutes les variables sont prises à zéro, on prend comme conditions au bord $v(r_0) = -V$, et $v(r_e) = 0$ et on lance l'algorithme. On considère qu'un premier état stationnaire est atteint lorsque le résidu est inférieur à $10^{-6}$. Après quoi le sens de rotation est inversé ($v(r_0) = -V$, et $v(r_e) = 0$) et un deuxième état stationnaire est atteint, c'est celui-ci que nous analysons.

### 5.5.1 Vitesse et taux de déformation

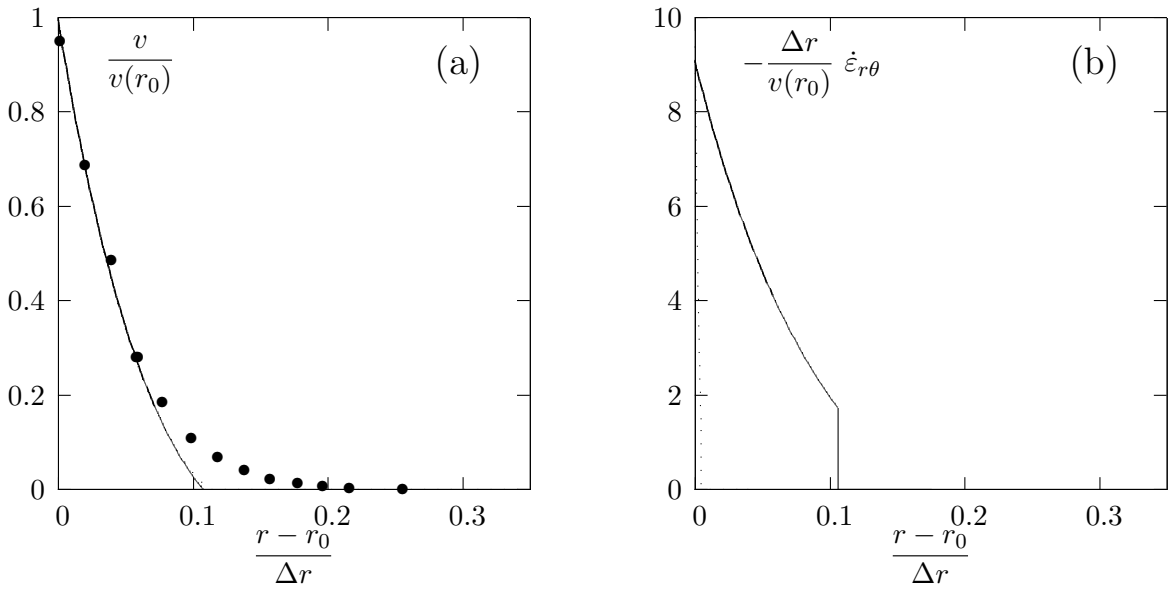


FIG. 5.7 – Cas stationnaire : (a) Vitesse *vs* $r$. Traits pleins : calculs numériques ; • : données expérimentales [23]. (b) taux de déformation (composante de cisaillement) $\dot{\varepsilon}_{r\theta}$ *vs* $r$.

La figure 5.7a compare les résultats numériques aux mesures réalisées dans [23]. La vitesse est fortement localisée près de la roue mobile, comme dans le cas transitoire (fig. 5.2a). Les données expérimentales et numériques présentent la même pente à l'origine, mais la transition à zéro est plus abrupte pour la résolution numérique. Nous appelons $r_c$ le rayon pour lequel la vitesse passe à zéro. Dans le cas de la résolution numérique, on trouve $r_c = 77.6$ mm, et $r_c = 84.0$ mm pour l'expérience, ce qui correspond à une erreur de 12% par rapport à l'entrefer du rhéomètre.

La composante de cisaillement $\dot{\varepsilon}_{r\theta}$ du tenseur de taux de déformation $D(\mathbf{v})$ (fig. 5.7b) est également localisée près de la roue mobile, mais elle est discontinue en $r = r_c$. Cette composante est strictement négative pour $r < r_c$ et nulle pour $r \geq r_c$. Notons que des profils discontinus ont été observés avec d'autres matériaux que la mousse [19, 66, 86].

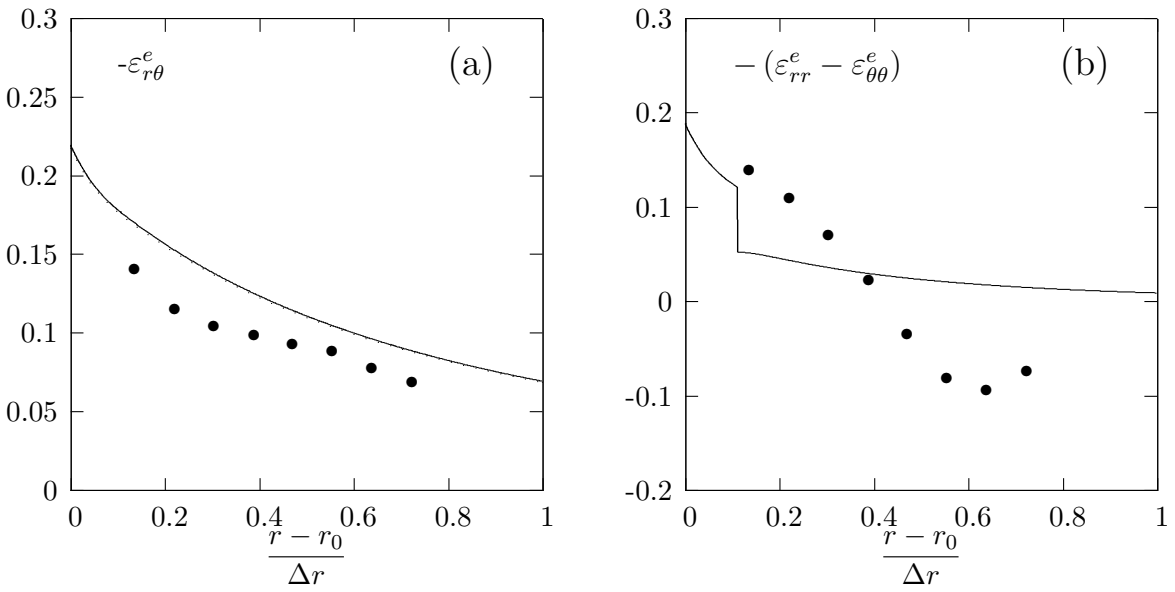


FIG. 5.8 – Cas stationnaire : Traits pleins : résolution numérique. • : données expérimentales [53]. (a) Composante de cisaillement $-\varepsilon^e_{r\theta}$ *vs* $r$. (b) Différence des composantes normales $-(\varepsilon^e_{rr}-\varepsilon^e_{\theta\theta})$ *vs* $r$.

### 5.5.2 Contrainte élastique

La déformation élastique $\varepsilon_e$ (fig. 5.8) est comparée aux données expérimentales [53]. La composante de cisaillement $\varepsilon^e_{r\theta}$ calculée numériquement est légèrement surestimée, mais se comporte qualitativement de la même façon que dans l'expérience : elle ne localise pas près de la roue mobile et décroît progressivement avec $r$. Numériquement, on trouve que la différence des composantes normales est discontinue au point $r = r_c$, alors que les données expérimentales changent de signe au milieu de l'entrefer. Ce résultat confirme que $\varepsilon^e_{rr} - \varepsilon^e_{\theta\theta}$ n'est pas aussi contraint géométriquement que $\varepsilon^e_{r\theta}$ ; sa valeur dépend de la préparation de la mousse dans le cas expérimental, et des conditions initiales dans le cas numérique. Ceci est particulièrement vrai dans la région loin de la roue interne qui reste constamment en dessous du seuil : des contraintes normales peuvent rester bloquées aussi bien expérimentalement [53, 64] que numériquement (Cf. chapitre précédent).

Enfin, nous traçons $|\varepsilon^e_d|$ en fonction de $r$ (fig. 5.9) ; cette quantité est également discontinue en $r = r_c$, et $|\varepsilon^e_d| > \varepsilon_Y$ pour $r < r_c$, tandis que $|\varepsilon^e_d| \leq \varepsilon_Y$ pour $r \geq r_c$. Nous retrouvons le comportement observé dans le cas transitoire : la région au-dessus du seuil est la seule où se produit un écoulement. L'expérience semble proche du numérique, mais nous manquons d'éléments pour conclure.

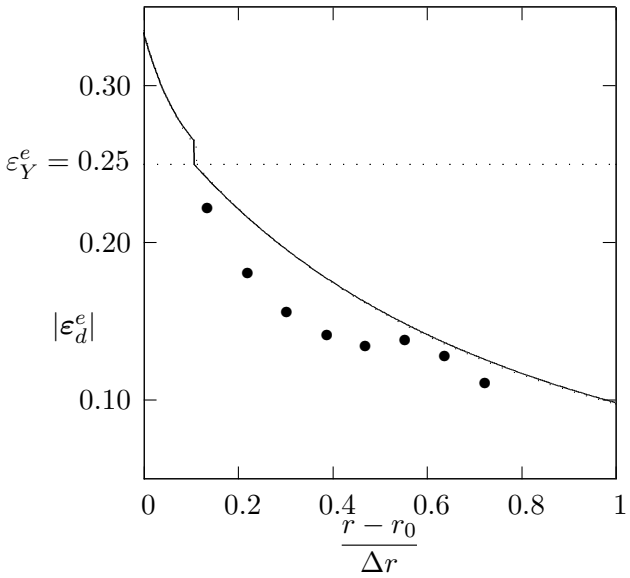


FIG. 5.9 – Cas stationnaire : $|\varepsilon_d^e|$ *vs* $r$. Traits pleins : résolution numérique ; • : données expérimentales [53].

## 5.6 Le mécanisme de localisation

### 5.6.1 Exploration des paramètres

Afin de bien comprendre le mécanisme de la localisation, nous examinons plus en détail l'effet de la friction des plaques. Nous avons effectué un calcul numérique avec les paramètres $Bi = 85$ et $We = 5.88 \cdot 10^{-3}$ inchangés et $C_F = 0$ ou 60.7. Les deux profils de vitesse obtenus (fig. 5.10) sont très proches, en tout cas ils sont tous deux fortement localisés près de la roue intérieure. Dans le cadre du modèle, avec ce choix de paramètres, la friction des plaques n'est donc pas responsable de la localisation.

Nous examinons ensuite l'effet des autres paramètres : la dépendance de la localisation par rapport à $We$ est presque négligeable : pour des valeurs de $Bi$ dans l'intervalle $[0, 153]$, la variation de $r_c/\Delta r$ par rapport à $We$ dans l'intervalle $[0, 1.96 \cdot 10^{-3}]$ est de l'ordre de 3%. A l'opposé, la variation de $r_c$ par rapport au nombre de Bingham est très importante : pour le modèle de Bingham, on montre facilement[35] que

$$\left(\frac{r_c}{r_0}\right)^2 - 2\ln\left(\frac{r_c}{r_0}\right) = 1 + 2\sqrt{2}\left(\frac{\Delta r}{r_0}\right) Bi^{-1}. \tag{5.2}$$

Un développement limité pour $r_c/r_0$ proche de 1 donne

$$\frac{r_c - r_0}{\Delta r} \approx 2^{1/4}\left(\frac{r_0}{\Delta r}\right)^{1/2} Bi^{-1/2}. \tag{5.3}$$

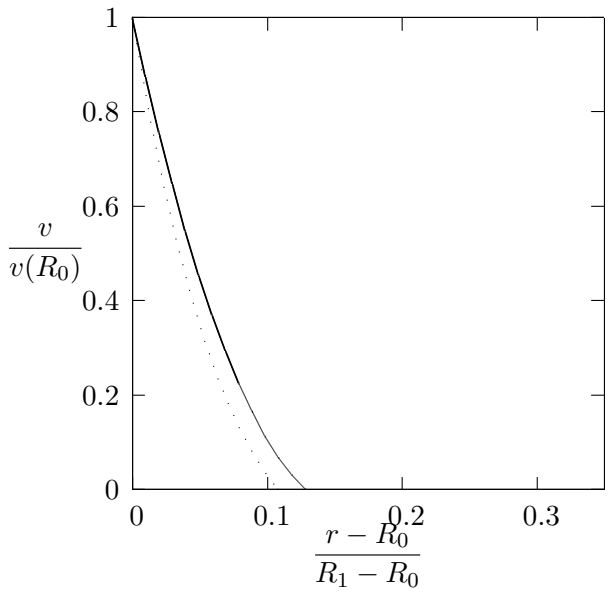


FIG. 5.10 – Cas stationnaire : profil de vitesse pour $Bi = 85$, $We = 5.88 \times 10^{-3}$ ; $C_F = 0$ (traits pleins) ou $C_F = 60.7$ (traits pointillés).

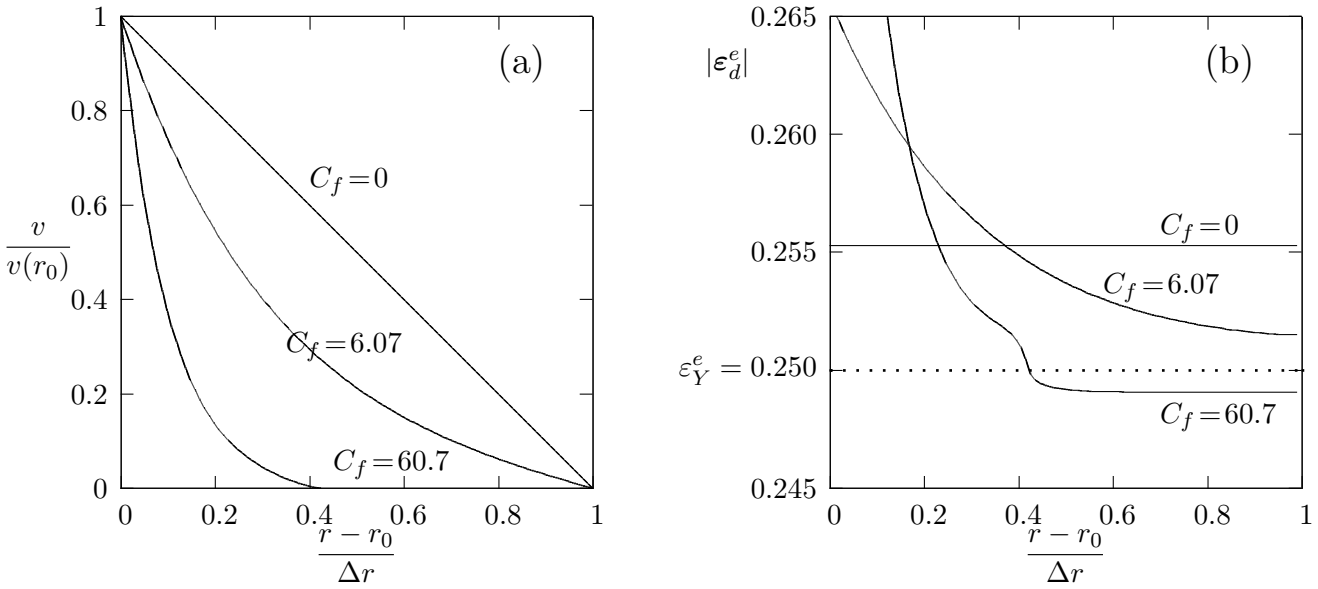


FIG. 5.11 – Cisaillement plan en régime stationnaire, avec $Bi = 85$, $We = 5.88 \times 10^{-3}$ et $C_F$ variable : (a) profil de vitesse ; (b) $|\varepsilon_d^e|$.

### 5.6.2 Autres interprétations

Nous revenons maintenant à la question évoquée en introduction concernant le rôle de la friction des plaques dans la localisation de l'écoulement. Selon l'équipe de Denis Weaire à Dublin [54, 17], l'écoulement serait dans le régime haute vitesse, où le seuil de plasticité est dépassé dans l'ensemble de la mousse. Dans ce régime où la mousse se comporte comme un fluide visqueux, la localisation résulterait de la compétition entre la friction des plaques et la viscosité effective de la mousse ; il ne s'agirait pas de bandes de cisaillement, avec coexistence d'une zone fluide et d'une zone solide. Ces auteurs ont justifié leur approche par le fait qu'ils ont réussi à reproduire le profil exponentiel de la vitesse en régime stationnaire, mais remarquons qu'ils n'ont pas examiné les champs de contraintes élastiques, ni le régime transitoire.

A l'inverse, notre analyse a tenu compte de ces données supplémentaires ; l'adéquation du modèle avec l'ensemble de ces données exclut l'hypothèse haute vitesse dans le cas de *cette* expérience, notamment à cause de la durée du régime transitoire. Le profil de vitesse que nous obtenons est certes plus abrupt que celui de l'expérience, mais cela peut être imputable à de nombreux facteurs : l'incertitude sur les mesures, la modélisation linéaire de la friction des plaques, la modélisation de la dissipation plastique, ou encore la non prise en compte de phénomènes de non localité [60].

Reste l'objection soulevée par une expérience réalisée en cisaillement plan, avec et sans plaques de verre [101] : sans plaques (dispositif eau-air), le profil de vitesse est presque linéaire, tandis qu'avec plaques, la mousse localise près des bords mobiles. Que prédit notre modèle dans cette situation ? Nous avons résolu le modèle dans une géométrie correspondante en exploitant les symétries du problème pour nous ramener à des équations unidimensionnelles. Avec un entrefer de 40 mm et un bord mobile avec une vitesse de 0.25 mm $\cdot$ s$^{-1}$ comme dans [101], nous avons pris $Bi = 85$ et $We = 5.88 \times 10^{-3}$ (ce qui correspond à des paramètres physiques proches de ceux utilisés dans l'écoulement en géométrie cylindrique puisque le rapport $V/L$ est presque le même). En faisant varier $C_F$, nous obtenons les résultats représentés figure 5.11 : sans friction ($C_F = 0$), il n'y a pas de localisation, le profil de vitesse est linéaire (fig. 5.11a), et la norme de la contrainte déviatrice $|\varepsilon_d^e|$ est constante et supérieure à $\varepsilon_Y$ (fig. 5.11b) ; avec une friction faible ($C_F = 6.07$), il n'y a toujours pas de localisation, mais le profil de vitesse n'est plus linéaire, tandis que $|\varepsilon_d^e|$ est inhomogène et partout supérieure à $\varepsilon_Y$ ; enfin, avec une friction forte ($C_F = 60.7$), il y a localisation près du bord mobile ; $|\varepsilon_d^e|$ est supérieure au seuil $\varepsilon_Y$ dans la région en écoulement, et inférieure au seuil $\varepsilon_Y$. L'inhomogénéité des contraintes est donc responsable de la localisation de l'écoulement ; pour des raisons géométriques dans le cas du cisaillement cylindrique ; à cause de la friction des plaques dans le cas du cisaillement plan.

## 5.7 Conclusion

Cette première confrontation du modèle avec des expériences de mousses a montré qu'il permet de reproduire avec un jeu de paramètres unique et réaliste tout un ensemble de données très variées : les champs de vitesse et de déformation élastique, en transitoire

et en stationnaire.

L'origine de la localisation est principalement liée aux propriétés viscoplastiques de la mousse. Nous avons replacé l'expérience de Debrégeas dans le régime basse vitesse et montré que les bandes de cisaillement observées ne résultent pas d'un artefact dû au dispositif expérimental. En revanche, en cisaillement plan, la friction des plaques est responsable de la localisation, mais le mécanisme est fondamentalement le même : la mousse ne s'écoule de manière fluide que dans les zones au-dessus du seuil. L'inhomogénéité des contraintes est donc responsable de la localisation de l'écoulement ; pour des raisons géométriques dans le cas de du cisaillement cylindrique ; à cause de la friction des plaques dans le cas du cisaillement plan.

Les effets de l'élasticité se manifestent d'une part en régime transitoire, avec une première phase où les contraintes élastiques augmentent linéairement avec la déformation appliquée, jusqu'à ce qu'elles atteignent la contrainte seuil près du cylindre intérieur et s'équilibrent alors avec la dissipation plastique. L'effet de la friction des plaques est perceptible lors de cette transition vers le régime saturé : *les zones proches du cylindre intérieur saturent plus tôt que les zones éloignées, avec un écart d'autant plus grand que la friction est importante.* Ce phénomène, observé dans [53], était jusqu'à maintenant resté inexpliqué.

D'autre part, l'élasticité se traduit par l'apparition d'une *différence des contraintes normales non nulle* dont la valeur dépend des conditions initiales. Là aussi, cela corrobore des observations expérimentales [53] jusqu'à maintenant inexpliquées. Par ailleurs, cette différence des contraintes normales peut être discontinue ou continue selon les conditions initiales, comme on l'a montré au chapitre précédent. Les expériences de cisaillement seraient donc assez sensibles à la préparation de la mousse, ce qui pose des problèmes de robustesse et de reproductibilité. Si on y ajoute le fait que la localisation observée peut apparaître pour des raisons très différentes selon le taux de cisaillement imposé, nous concluons que l'expérience de Couette n'est pas la meilleure pour explorer les propriétés VEP de la mousse.

# Troisième partie

# Écoulements autour d'un obstacle

# Chapitre 6

# Écoulements 2D : étude numérique

L'étude aux chapitres 4 et 5 d'un écoulement simple dont la résolution se ramène à celle d'équations unidimensionnelles a montré que de nombreuses difficultés apparaissent : solutions peu régulières (par exemple gradients de vitesse discontinus), non-unicité des solutions des équations stationnaires, non-convergence de l'algorithme pour certaines gammes de valeurs des paramètres. Qu'en est-il pour des géométries et des résolutions bidimensionnelles ? Outre le fait que le passage en 2D entraîne des difficultés supplémentaires comme l'existence de singularités par exemple, les temps de calcul sont bien plus importants et limitent de fait la possibilité d'explorer le modèle de manière aussi détaillée qu'en 1D.

L'étude de l'écoulement 1D et la comparaison aux expériences correspondantes a permis de fixer un ordre de grandeur des paramètres du modèle adaptés pour la comparaison aux expériences de mousse : faible nombre de Weissenberg, mais nombre de Bingham relativement élevé, ce qui correspond à un régime *basse vitesse*. L'objectif principal de ce chapitre est de nous assurer que nous pouvons obtenir en temps raisonnable des solutions du modèle avec des paramètres de cet ordre de grandeur, suffisamment précises pour permettre une comparaison quantitative avec les expériences.

Nous procédons de manière progressive en traitant des cas de difficulté croissante : nous commençons par la résolution des modèles d'Oldroyd et de Bingham dont le comportement est mieux connu dans la géométrie de Couette, avant de nous attaquer à la résolution du modèle VEP, également dans la géométrie de Couette, puis dans la géométrie réellement multidimensionnelle d'un écoulement dans un canal autour d'un obstacle circulaire.

## 6.1 Validation de l'algorithme en géométrie de Couette

### 6.1.1 Domaine de calcul et conditions aux limites

Nous résolvons les équations (2.30)-(2.32) sur le domaine $\Omega$ défini figure 6.1 avec les conditions aux limites

$$\mathbf{v} = V_i \mathbf{e}_\theta \text{ sur } \Gamma_i \ ; \ \mathbf{v} = V_e \mathbf{e}_\theta \text{ sur } \Gamma_e. \tag{6.1}$$

Les paramètres géométriques sont ceux de l'écoulement de Couette étudié au chapitre 5

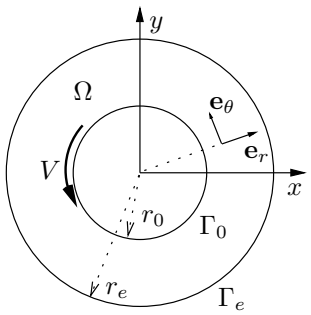


FIG. 6.1 – Domaine de calcul pour la validation de l'algorithme. Les dimensions sont celles de l'écoulement de Couette étudié au chapitre précédent.

($r_i = 71/51$, $r_e = r_i + 1$). Nous avons pris les mêmes quantités caractéristiques $L$ et $V$ pour la définition des nombres sans dimension, ce qui permettra de comparer les solutions de l'algorithme 2D à celles de l'algorithme 1D. Nous vérifions que les solutions stationnaires fournies par l'algorithme convergent vers des solutions de référence lorsqu'on raffine le maillage. Nous utilisons deux jeux de maillages :

- pour le modèle de Bingham, trois maillages triangulaires uniformes avec des pas de maillage de $h = 0.2,\ 0.1,\ 0.05$, comportant respectivement 601, 2469, 9862 éléments (figure 6.2a)).
- pour les modèles d'Oldroyd et VEP, le pas de maillage est proportionnel au rayon $r$ : il vaut $h$ en $r = r_i$, et $h \times r_e/ri$ en $r = r_e$, avec $h = 0.2$, $h = 0.1$, $h = 0.05$, et respectivement 352, 1386, 5392 éléments (figure 6.2). Pour le modèle d'Oldroyd, dont la résolution est plus rapide, nous utilisons en plus un maillage avec $h = 0.025$, composé de 22344 éléments (non représenté).

Les maillages présentés sont réalisés à l'aide du générateur de maillage anisotrope BAMG [49] qui permet de préciser localement le pas du maillage que nous voulons utiliser. La convergence de l'algorithme vers la solution stationnaire est mesurée à partir de la norme $L^2$ de la somme des résidus (définis en (3.39)-(3.40)-(3.41)).

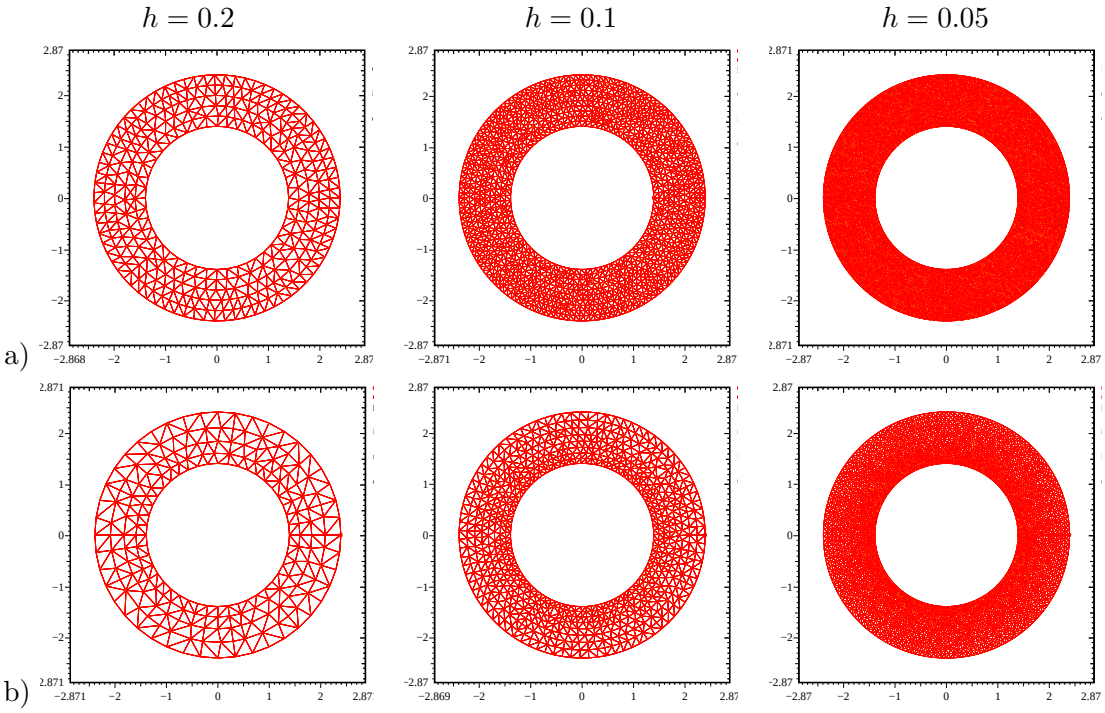


FIG. 6.2 – Maillages quasi-uniformes utilisés pour la validation de l'écoulement de Couette ; a) maillages utilisés pour le modèle de Bingham : de gauche à droite, $h = 0.2$, $h = 0.1$, $h = 0.05$, avec respectivement, 601, 2469, 9862 éléments. b) maillages utilisés pour les modèles d'Oldroyd et VEP ; le pas de maillage est proportionnel au rayon $r$ : il vaut $h$ en $r = r_i$, et $h \times r_e/ri$ en $r = r_e$, avec, de gauche à droite, $h = 0.2$, $h = 0.1$, $h = 0.05$, avec respectivement 352, 1386, 5392 éléments.

### 6.1.2 Convergence vers des solutions connues

#### Modèle de Bingham

Dans les équations (2.30)-(2.32) nous prenons

$$We = 0, \quad Bi = 10, \quad \alpha = 1, \quad C_F = 0, \quad a = 1, \tag{6.2}$$

avec la géométrie définie figure 6.1, et $V_i = 1$ et $V_e = 0$. Le modèle de Bingham admet une solution stationnaire dont on connaît l'expression exacte pour tout $Bi$ (cf. chapitre 4). Avec ces paramètres la vitesse s'annule en $r_s \approx 1.857$. Les calculs sont réalisés avec un pas de temps $\Delta t = 1$. En comparaison avec l'algorithme 1D, les résidus décroissent beaucoup plus lentement (en nombre d'itérations en temps), pour des pas de temps comparables. Pour des raisons de temps de calcul, nous avons interrompu les calculs lorsque la norme des résidus est inférieure à $10^{-5}$.

Nous présentons figure 6.3, en fonction du pas de maillage, l'évolution des normes $L^2$ et $H^1$ de l'erreur $e = \mathbf{v}_h - \mathbf{v}$ où $\mathbf{v}_h$ (resp. $\mathbf{v}$) désigne la solution approchée (resp.

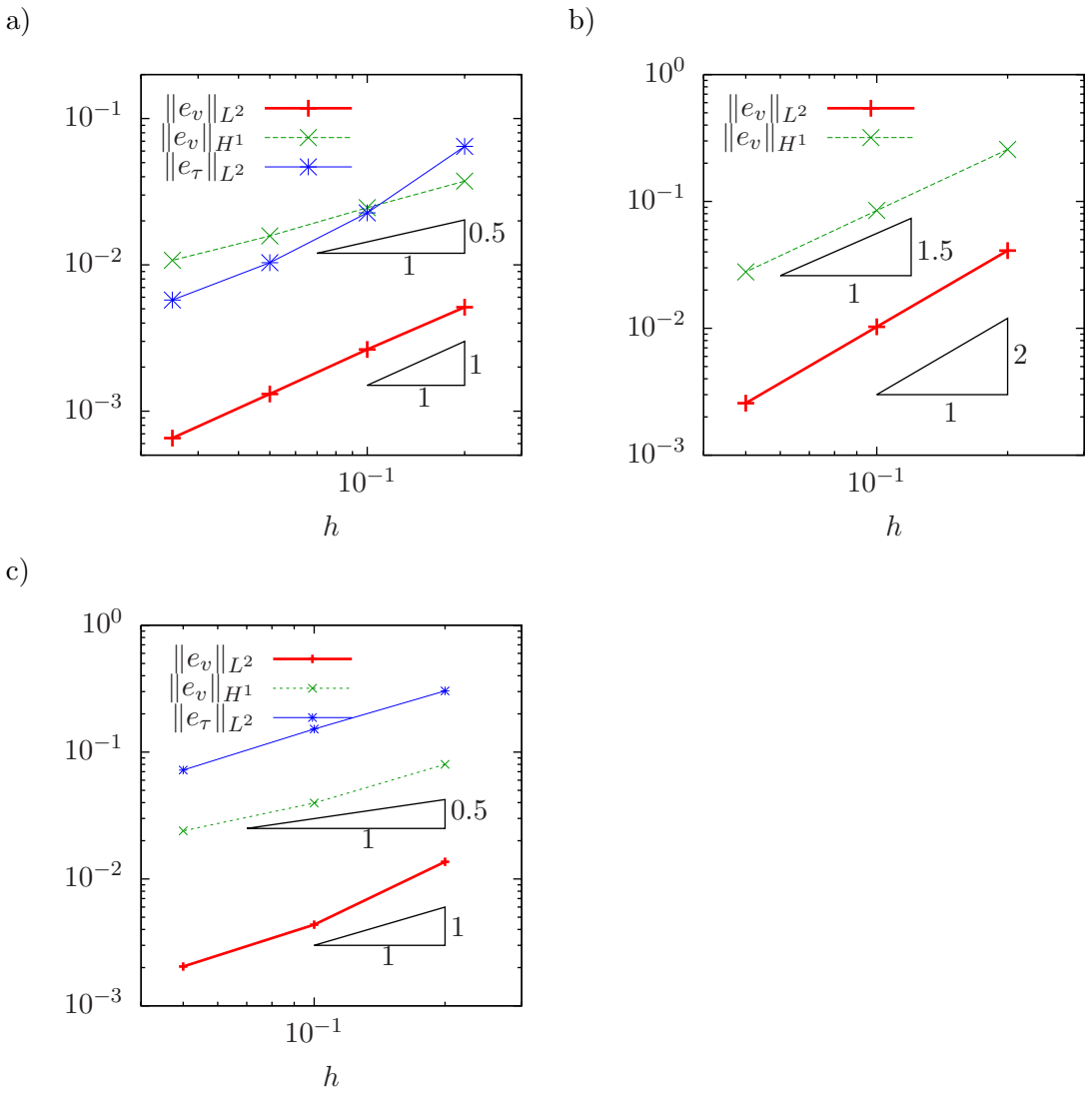


FIG. 6.3 – Convergence de l'algorithme vers les solutions exactes des sous-problèmes a) d'Oldroyd et b) de Bingham et c) vers la solution du problème VEP complet obtenue avec l'algorithme 1D, pour des maillages uniformes : logarithme décimal des erreurs en normes $L^2$ et $H^1$ pour la vitesse et $L^2$ pour les contraintes (cas Oldroyd et VEP) en fonction du pas de maillage $h$. Le modèle d'Oldroyd a été résolu avec un maillage supplémentaire avec $h = 0.025$.

exacte). Nous trouvons des pentes de 2 pour la norme $L^2$ et 1.5 pour la norme $H^1$. L'erreur théorique est de l'ordre de l'erreur d'interpolation, et peut donc être optimale ($O(h^2)$ pour la norme $H^1$) sur un maillage quasi-uniforme à condition simplement que la solution soit assez régulière [79]. La présence de zones rigides est associée à une perte

de la régularité de la solution qui explique la dégradation des propriétés de convergence.

En particulier, si on utilise des éléments $P_k - C^0$ pour $\mathbf{v}$, $k \geq 2$, $|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h|_{H^1}$ est du même ordre que l'erreur d'interpolation, soit $O(h^m)$ avec $m = \min(k, s-1)$ si, $\mathbf{v}$ appartient à $H^s$. Par exemple :

- si $\mathbf{v}$ est dans $H^3$ et $k = 2$ (Taylor-Hood), alors $|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h|_{H^1} = O(h^2)$ est optimal. En pratique, on peut avoir $\mathbf{v}$ dans $H^3$ si on n'a pas de zones rigides.
- Sinon, pour $k = 2$ toujours et $\mathbf{v}$ dans $H^s, s < 3$, $|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h|_{H^1} = O(h^{s-1})$ est sous-optimal. Ce cas se produit quand il y a des zones rigides ; il vaut mieux alors adapter les maillages

### Modèle d'Oldroyd

Nous vérifions que l'algorithme est capable de résoudre le modèle d'Oldroyd qui est obtenu à partir des équations (2.30)-(2.32) en prenant $Bi = 0$ et $C_F = 0$. La solution est considérée stationnaire lorsque la norme des résidus (3.39)-(3.40)-(3.41) du problème stationnaire est inférieure à $10^{-7}$.

Dans la géométrie définie figure 6.1, pour $a = 1$, et avec les conditions aux limites (6.1), le modèle d'Oldroyd admet une solution stationnaire dont on connaît l'expression exacte pour tout $We$ et $\alpha$ (cf. chapitre 4).

Nous avons utilisé les paramètres suivants : $We = 0.1$, et $\alpha = 0.8$, $V_i = 1$ et $V_e = 0$. On observe un équivalent de la condition de Courant-Friedrich-Levy (CFL) : si le pas de temps est trop important par rapport au pas de discrétisation, la distance parcourue en un pas de temps est supérieure à la taille des éléments, ce qui peut causer des instabilités. Ainsi, avec un pas de temps $\Delta t = 0.5$, la norme des résidus décroît régulièrement pour $h = 0.2$, mais diverge pour $h = 0.1$.

Avec les maillages quasi-uniformes utilisés pour le modèle de Bingham, la décroissance de l'erreur en fonction du pas de maillage n'est pas régulière, c'est pourquoi nous avons utilisé des maillages différents (cf. section 6.1.1). Nous présentons figure 6.3b, en fonction du pas de maillage, l'évolution des normes $L^2$ et $H^1$ de l'erreur sur la vitesse $e_v = \mathbf{v}_h - \mathbf{v}_{ex}$, ainsi que l'évolution de la norme $L^2$ de l'erreur sur le tenseur des contraintes $e_\tau = \tau_h - \tau_{ex}$, où $\tau_h$ (resp. $\tau_{ex}$) désigne la solution approchée (resp. exacte). Les normes $L^2$ et $H^1$ de la vitesse décroissent régulièrement avec $h$, respectivement en $O(h)$ et $O(h^{1/2})$. La décroissance de la norme $L^2$ de la contrainte est moins régulière, mais elle semble tendre vers un taux de $O(h^{1/2})$. Ces taux de convergence sont inférieurs à ceux estimés théoriquement par Baranger et Sandri [5], en $O(h^{3/2})$ pour la norme $H^1$ de la vitesse et la norme $L^2$ de la contrainte. Il semblerait que cela provienne de notre implémentation de la méthode de transport de Galerkin discontinu. Ce décalage entre convergence théorique et convergence effective nécessitera par la suite de revisiter cette implémentation afin de retrouver les résultats théoriques attendus. Notons que la validité de nos résultats n'est pas affectée par ces taux, puisque la convergence reste assurée.

### 6.1.3 Modèle VEP

Nous ne disposons pas de la solution exacte du modèle VEP dans cette géométrie, mais par contre, l'algorithme 1D fournit des solutions stationnaires que nous pouvons comparer à celles de l'algorithme 2D. Elles ont l'avantage d'être obtenues sur des subdivisions très fines. Nous pouvons donc les utiliser comme solutions de référence pour évaluer l'erreur commise par l'algorithme 2D. En effet, les calculs 1D sont réalisés sur une subdivision de l'intervalle $[r_i, r_e]$ de 500 points, avec une précision largement supérieure à celle de la résolution 2D avec le maillage le plus fin : le pas de maillage de ce dernier étant $h = 0.05$, un ordre de grandeur du nombre de triangles dans l'entrefer est $(r_e - r_i)/h \approx 20$. Le pas de temps sera choisi au cas par cas en fonction de plusieurs critères : tout d'abord, il doit être suffisamment petit pour que l'algorithme ne diverge pas, pour ne pas avoir d'effet trop important sur la solution stationnaire (cf chapitre 4), et pour que le nombre de sous-itérations de point-fixe soit raisonnable ; il doit être suffisamment grand pour que les calculs puissent être menés en temps raisonnable.

Nous avons vu au chapitre 4 qu'il y existe (au moins) deux types de solutions en fonction des paramètres du modèle :

- lorsque $Bi$ est suffisamment grand, on peut définir une valeur $r_s \in ]r_i, r_e[$ qui divise l'entrefer en une région au-dessus du seuil ($r < r_s$), et une région au-dessous ($r \geq r_s$), avec éventuellement un discontinuité en $r_s$ ;
- pour les petites valeurs de $Bi$, tout l'intervalle $[r_i, r_e]$ est au-dessus du seuil, il ne peut pas y avoir de discontinuité ; ce cas est nettement plus facile à traiter numériquement.

Nous validons l'algorithme 2D sur les solutions du deuxième type : cela permet d'éviter les problèmes liés à l'existence de solutions multiples évoqués au chapitre 4 ; et la décroissance de la norme des résidus est nettement plus rapide et régulière, de sorte que nous avons pu mener les calculs sur des maillages relativement fins, et ainsi obtenir des résidus inférieurs à $10^{-7}$. Les paramètres choisis sont

$$We = 0.1 \ ; \ Bi = 2 \ ; \ \alpha = 0.5 \ ; \ C_F = 0 \ ; \ a = 1.$$

Les calculs ont été réalisés avec un pas de temps $\Delta t = 10^{-2}$ pour les différents pas de maillage $h$. Nous présentons figure 6.3, en fonction de $h$, l'évolution des normes $L^2$ et $H^1$ de l'erreur sur la vitesse $e_v = \mathbf{v}_h - \mathbf{v}_{1D}$, ainsi que l'évolution de la norme $L^2$ de l'erreur sur le tenseur des contraintes $e_\tau = \tau_h - \tau_{1D}$, où $\mathbf{v}_{1D}$ et $\tau_{1D}$ désignent la solution obtenue avec l'algorithme 1D. La norme des erreurs diminue avec le pas d'espace, le taux de convergence décroît avec des taux similaires à ceux obtenus pour le modèle d'Oldroyd.

Nous vérifions ensuite que l'algorithme 2D est bien capable de retrouver les solutions à grand $Bi$, qui sont plus difficiles à capturer à cause de la perte de régularité en $r = r_s$ ; les paramètres utilisés sont

$$We = 0.1 \ ; \ Bi = 10 \ ; \ \alpha = 0.8 \ ; \ C_F = 0 \ ; \ a = 1. \tag{6.3}$$

Nous avons utilisé pour le calcul le maillage quasi-uniforme de pas d'espace $h = 0.1$ (Fig. 6.2a)), un pas de temps $\Delta t = 10^{-4}$, et une condition initiale nulle. La décroissance

des résidus est encore plus lente que dans le cas du modèle de Bingham, et nous avons arrête les itérations pour un résidu inférieur à $2 \cdot 10^{-3}$. Nous nous contentons ici d'une comparaison qualitative des solutions (Fig. 6.4). Le maillage utilisé ($h = 0.1$) est trop

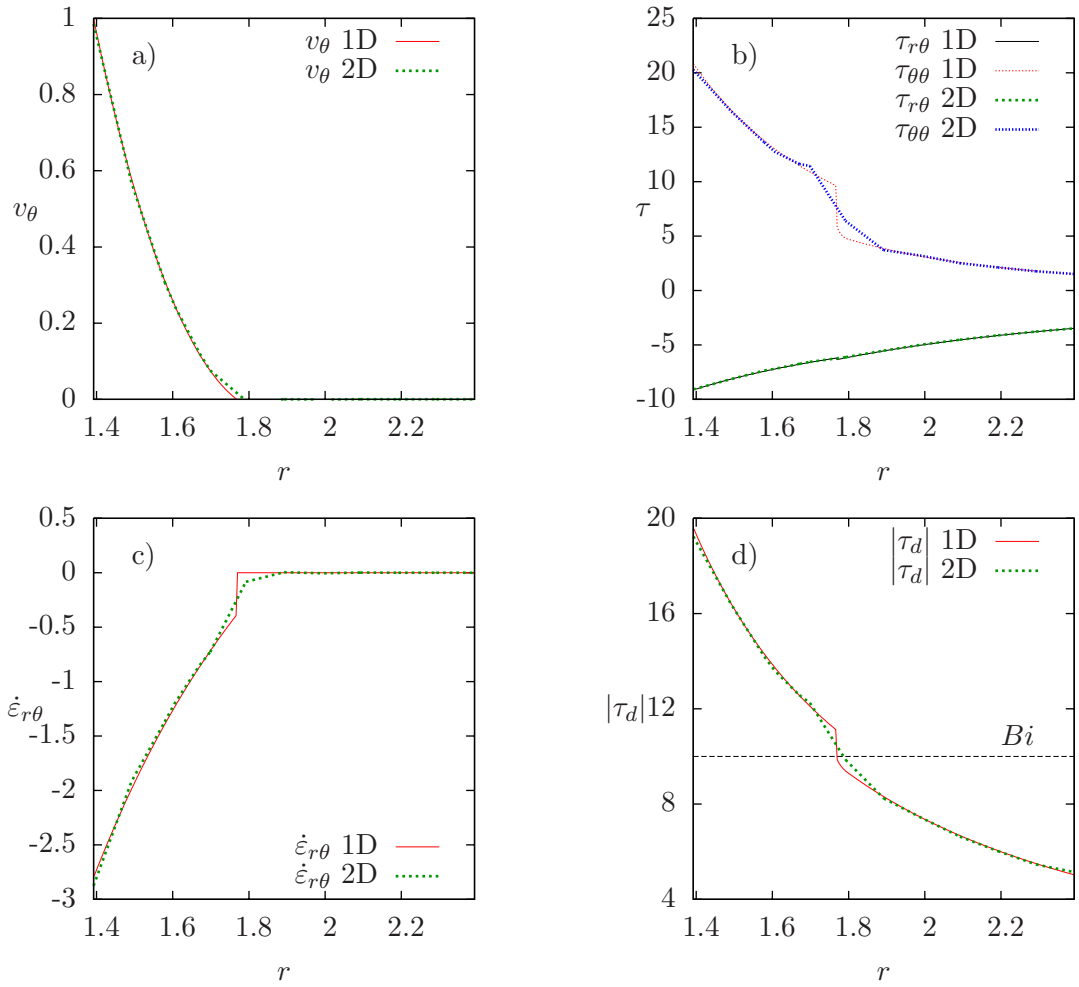


FIG. 6.4 – Géométrie de Couette : comparaison entre les solutions VEP des algorithmes 1D et 2D. a) vitesse ; b) tenseur des contraintes élastiques ; c) taux de déformation ; d) norme de la partie déviatrice du tenseur des contraintes.

grossier pour pouvoir capturer précisément et de manière indiscutable la discontinuité en $r = r_s$ que nous avons observée avec la solution 1D, mais il ne paraît pas invraisemblable qu'elle soit présente sur la solution 2D : le champs de vitesse arrive à zéro de manière abrupte, et la courbe de $\tau_{\theta\theta}$ semble divisée en deux parties bien distinctes séparées par $r = r_s$. En dehors du voisinage de $r = r_s$, les courbes 1D et 2D sont quasiment superposées, ce qui montre la robustesse de notre algorithme de résolution, y compris dans des cas difficiles.

Pour trancher définitivement la question, il faudrait raffiner le maillage, mais les temps de calculs deviendraient prohibitifs. Des techniques d'adaptation automatique de maillage permettrait de le faire tout en conservant un nombre raisonnable d'éléments.

### 6.1.4 Bilan

L'algorithme proposé permet donc de résoudre les sous-problèmes de Bingham et d'Oldroyd. Pour la résolution du modèle d'Oldroyd, l'algorithme est identique à celui proposé par Pierre Saramito [89], tandis qu'il est nouveau pour la résolution du modèle de Bingham. Il est notamment distinct de l'algorithme [80] basé sur une méthode de lagrangien augmenté. Le modèle VEP est également bien résolu, dans la mesure où nous retrouvons la solution calculée par l'algorithme 1D (chapitre 4). Pour les grands $Bi$, la résolution des modèles de Bingham et VEP est nettement plus difficile que celle du modèle d'Oldroyd car les résidus décroissent très lentement.

## 6.2 Écoulement autour d'un obstacle

Nous abordons maintenant notre principal défi numérique : la résolution numérique du modèle VEP dans le cas d'un écoulement dans un canal autour d'un obstacle circulaire avec des conditions de glissement sur les bords du canal et sur l'obstacle.

### 6.2.1 Domaine de calcul et conditions aux limites

A partir d'une solution initiale au repos, nous calculons le transitoire jusqu'à atteindre une solution stationnaire, pour laquelle nous disposons de tests expérimentaux. Nous résolvons les équations (2.30)-(2.32) sur le domaine $\Omega$ défini figure 6.5 avec les conditions aux limites suivantes :

$$\mathbf{v} = V\mathbf{e}_x \text{ sur } \Gamma^D \quad ; \quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma^G \quad ; \quad \partial\mathbf{v}/\partial n = 0 \text{ sur } \Gamma^N \quad ;$$
$$\tau = 0 \text{ sur } \Gamma^- \quad ; \quad \tau\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma^G \cap \Gamma^N.$$

Ici, $\Gamma^- = \Gamma^D$, et la constante $V > 0$ désigne la vitesse de l'écoulement bouchon en entrée ; cette condition en entrée est compatible avec les conditions de glissement sur les bords latéraux du canal. La condition $\tau = 0$ sur $\Gamma^-$ traduit le fait que la mousse en entrée n'est pas précontrainte. Dans le cas de conditions de non-glissement aux parois, il faudrait imposer au bord entrant $\Gamma^D$ la solution du modèle en écoulement de Poiseuille (qu'on pourrait calculer avec une très bonne précision à l'aide d'un algorithme 1D similaire à celui utilisé pour la résolution de l'écoulement en géométrie de Couette). Dans le cas expérimental, l'écoulement bouchon indépendant de la coordonnée $y$ en entrée est un approximation. En pratique, c'est le débit plutôt que la vitesse qui est imposé. Par ailleurs, la mousse peut être précontrainte en entrée du canal selon le mode de préparation. Nous discutons au chapitre suivant la validité de ces approximations.

En exploitant les symétries du problème, nous ne résolvons le modèle que sur la moitié du canal afin de diminuer la taille des systèmes à résoudre. Les paramètres géométriques

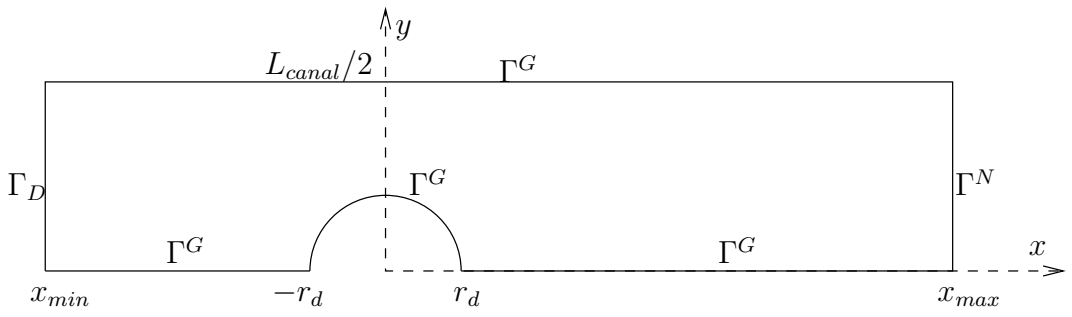


FIG. 6.5 – Géométrie de l'écoulement autour d'un obstacle ; nous exploitons les symétries du problème pour ne résoudre le modèle que sur la moitié du domaine.

du domaine de calcul sont données par :

$$\text{rayon de l'obstacle : } r_d \quad ; \quad \text{dimension du canal : } [x_{min}, x_{max}] \times [0, L_{canal}/2].$$

Nous devons nous assurer que le domaine de calcul est suffisamment étendu vers l'amont et l'aval pour que l'écoulement soit totalement développé et pour éviter que les conditions d'entrée de sortie exercent un effet sur l'écoulement dans le voisinage du cylindre. Nous prenons $x_{min} = -15\ r_d$ et $x_{max} = 30\ r_d$, une longueur du même ordre de grandeur que ce nous avons observé dans la littérature [1] pour des modèles viscoélastiques. Nous fixons dès à présent les paramètres géométriques de manière à ce qu'ils correspondent à ceux des expériences que nous simulons ; ces paramètres sont spécifiés sans dimension, la longueur caractéristique choisie étant le rayon de l'obstacle expérimental $R = 1.5$ cm : la demi-largeur du canal est $L_{canal} = 5/1.5 = 10/3$, et le rayon de l'obstacle est $r_d = 1$. Les dimensions du domaine numérique dans la direction $x$, de $-22.5$ cm à 45 cm, sont bien supérieures à celle de l'expérience [31].

### 6.2.2 Génération de maillages raffinés localement

Loin de l'obstacle, en amont et en aval, l'écoulement se réduit à un écoulement bouchon, où la mousse se déplace en bloc du fait des conditions de glissement aux parois ; l'obstacle perturbe cet écoulement uniforme en forçant la mousse à le contourner, ce qui engendre de forts gradients de vitesse et de fortes déformations. Ainsi, il est avantageux de raffiner le maillage dans la zone près de l'obstacle, tandis qu'on peut se contenter d'un maillage grossier plus loin. Le logiciel BAMG que nous avons employé pour la génération de maillage permet de spécifier le pas de maillage dans le voisinage de points prédéfinis. Nous avons utilisé principalement deux maillages (figure 6.6) :

- un maillage grossier comportant 1102 éléments triangulaires, avec un pas de maillage $h$ qui varie localement : $h = 1$ loin de l'obstacle, aux points de coordonnées $(-15, 0)$, $(-15, 10/3)$, $(30, 0)$, $(30, 10/3)$ ; $h = 0.5$ près de l'obstacle, aux points de coordonnées $(-10/3, 0)$, $(10/3, 0)$, $(10/3, 10/3)$, $(10/3, 10/3)$ ; enfin, $h = 0.1$ aux points du périmètre de l'obstacle.

- un maillage plus fin comportant 5594 éléments triangulaires, avec un pas de maillage $h$ qui varie localement : $h = 0.5$ loin de l'obstacle, aux points de coordonnées $(-15, 0)$, $(-15, 10/3)$, $(30, 0)$, $(30, 10/3)$ ; $h = 0.25$ près de l'obstacle, en amont et sur les bords du canal, aux points de coordonnées $(-10/3, 0)$, $(-10/3, 10/3)$, , $(10/3, 10/3)$ ; enfin, $h = 0.07$ aux points du périmètre de l'obstacle ainsi que dans son sillage proche, le long de l'axe $y = 0$, au point de coordonnées $(10/3, 0)$.

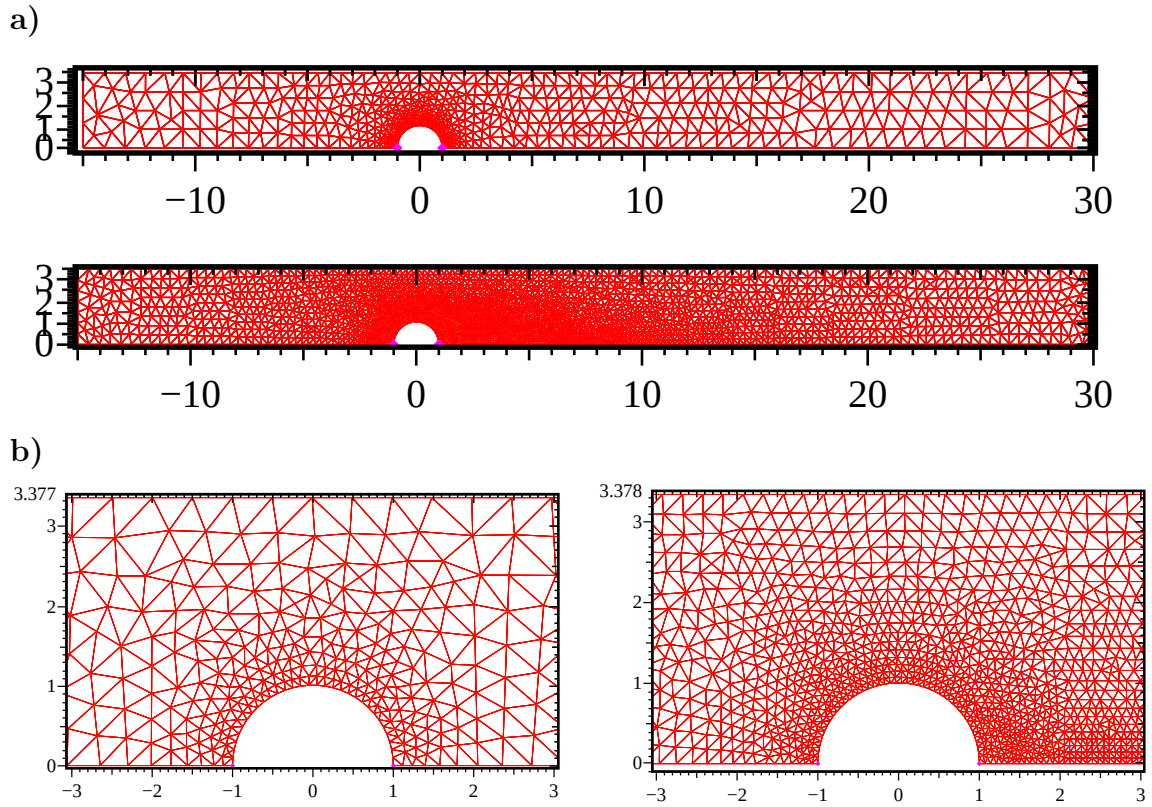


FIG. 6.6 – Maillages utilisés : a) vue d'ensemble (maillage grossier en haut et maillage fin en bas) ; b) zoom près de l'obstacle (maillage grossier à gauche et maillage fin à droite).

### 6.2.3 Mise en œuvre des calculs

Nous réalisons les calculs en partant d'une solution initiale nulle, en imposant dès le premier pas de temps la vitesse $V$ en entrée et avec les paramètres suivants :

$$We = 0.125; \quad Bi = 2.2; \quad \alpha = 0.91; \quad a = 0; \quad C_F = 0. \tag{6.4}$$

Ces paramètres sont du même ordre que ceux utilisés dans le chapitre suivant pour la comparaison aux expériences. Nous choisissons de prendre $a = 0$ afin d'obtenir un tenseur élastique à trace nulle. Les calculs sont réalisés avec un pas de temps $\Delta t = 10^{-2}$,

pour lequel nous avons compté en moyenne environ 4 sous-itérations par point-fixe. Afin d'examiner la sensibilité de la solution au maillage utilisé, nous réalisons le calcul sur le maillage grossier et sur le maillage fin et nous comparons le résultat.

### 6.2.4 Représentation des données

La résolution du modèle fournit des données scalaires, vectorielles, et tensorielles. Nous précisons ici comment nous les représentons.

#### Cartes 2D

Les cartes 2D permettent de représenter de manière synthétique les données. Nous traçons les lignes de courant associées à la vitesse $\mathbf{v} - V$ dans le référentiel de la mousse : comme nous sommes dans le cas d'un écoulement bidimensionnel incompressible, les lignes de courant sont obtenues à partir des lignes isovaleurs de la fonction courant $\psi$ (calcul détaillé dans l'annexe C). Nous représentons également la ligne de niveau zéro du champ $|\tau_d| - Bi$, qui matérialise la frontière entre zone au-dessus et au-dessous du seuil. Enfin nous représentons le tenseur élastique $\tau$. Il s'agit ici d'un tenseur symétrique à trace nulle (car $a = 0$), qui possède donc deux valeurs propres de signes opposés ; nous le représentons par un cercle dont le diamètre est égale à la valeur propre positive, la direction du vecteur propre correspondant est matérialisée par un diamètre du cercle. Cette direction est celle d'élongation, tandis que la direction perpendiculaire est celle de la contraction. La figure 6.10 donne un exemple de ce mode de représentation.

#### Coupes

Plus quantitativement, nous traçons les coupes de la pression $p$, des composantes de la vitesse $\mathbf{v}$ et du tenseur de contrainte élastique $\tau$ le long de cinq axes représentatifs de l'écoulement (Fig. 6.10). Ces axes sont les mêmes que ceux qui seront utilisés pour la comparaison avec les expériences au chapitre suivant.

### 6.2.5 Résultats

#### Convergence du résidu

Pour les deux maillages utilisés, l'évolution de la norme des résidus se fait en plusieurs étapes (Fig 6.8) : après une décroissance rapide à $10^{-2}$ en une centaine d'itérations, la norme des résidus atteint un plateau ; elle reprend une décroissance plus rapide après 3000 itérations environ, et atteint $10^{-7}$ après environ 7000 itérations. Alors que l'écoulement est *a priori* plus complexe qu'en géométrie de Couette, la convergence vers la solution stationnaire est atteinte beaucoup plus facilement. Si on visualise la carte de la norme des résidus en différentes itérations en temps, on constate que les valeurs élevées du résidu sont concentrées près de l'obstacle dans les premières itérations, lorsque la norme des résidus entame le plateau à $10^{-2}$. Au cours des itérations, cet "amas" se détache de l'obstacle puis se déplace vers l'aval, transporté par la vitesse (Fig. 6.9). Il

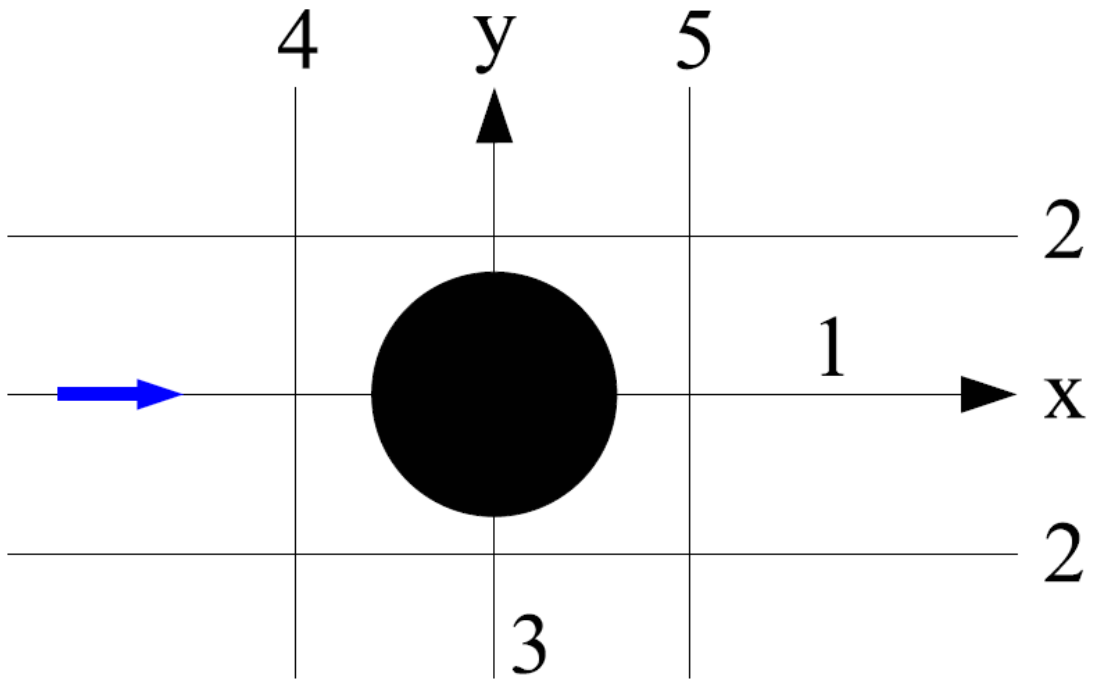


FIG. 6.7 – Axes représentatifs de l'écoulement utilisés pour les coupes. Axe 1 : $(y = 0)$ ; axe 2 : $(y = \pm 2.5 \text{ cm})$ ; axe 3 : $(x = 0)$ ; axe 4 : $(x = -2.4 \text{ cm})$ ; axe 5 : $(x = 2.4 \text{ cm})$.

atteint l'extrémité du canal au bout de 3000 itérations environ, ce qui correspond à un déplacement de $V \times \Delta t \times 3000 = 30$, soit la longueur du canal en aval de l'obstacle. Une fois qu'il est sorti, la courbe de convergence des résidus quitte le plateau et la décroissance reprend, cette fois-ci régulièrement jusqu'à $10^{-7}$. C'est ce qui explique le plateau.

Ainsi, des défauts se forment au voisinage de l'obstacle au début de l'écoulement, puis sont advectées par la vitesse. Ce mécanisme ne peut pas se produire en géométrie de Couette, puisque l'écoulement se fait en circuit fermé.

**Influence du maillage : carte 2D**

La carte 2D montre que les champs obtenus avec les maillages différents sont qualitativement très proches (Fig. 6.10), notamment la frontière entre zones au-dessus et au-dessous du seuil, et les lignes de courant dans le référentiel de la mousse.

**Influence du maillage : coupes**

La coupe permet ensuite une comparaison plus quantitative : les différents champs sont confondus, à la précision du maillage près : les courbes sont plus anguleuses avec le maillage grossier. Nous remarquons également sur les axes 1 et 2 que l'écoulement n'est

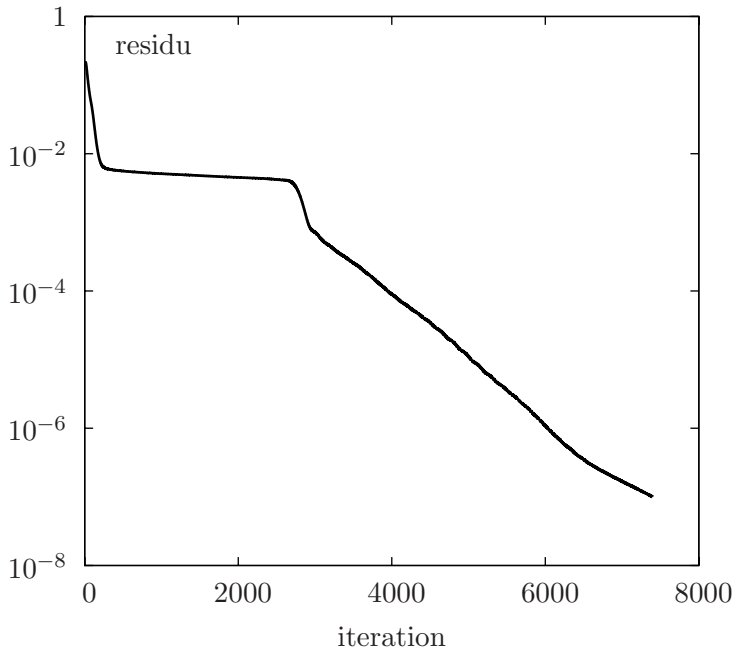


FIG. 6.8 – Écoulement autour d'un obstacle, maillage grossier : norme $L^2$ du résidu stationnaire des équations (2.30)-(2.32) en fonction de l'itération en temps, pour le calcul de la solution du modèle avec les paramètres (6.4).

pas perturbé par l'obstacle loin en amont et en aval, ce qui confirme que le domaine est suffisamment long.

Ainsi, pour l'ensemble des champs considérés, la résolution sur le maillage grossier semble suffisante pour la comparaison aux expériences. C'est ce maillage que nous utiliserons pour la comparaison aux expériences. Dans la suite, les lignes de courant seront calculées en interpolant la vitesse sur un maillage régulier fin (pas $h = 0.1$), de manière à ce qu'elles soient plus lisses. Notons que la résolution sur le maillage fin sera peut-être nécessaire pour la détermination des forces qui s'exercent sur l'obstacle.

## 6.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons validé l'algorithme 2D que nous voulons utiliser pour résoudre numériquement le modèle VEP et obtenir des solutions que nous pouvons comparer aux expériences. Tout d'abord, dans la géométrie de Couette que nous avons déjà étudiée en 1D, nous avons montré que l'algorithme 2D converge bien vers les solutions des modèles d'Oldroyd et de Bingham, et également vers une solution du modèle VEP que nous avions déjà calculé en 1D avec une très bonne précision. La discontinuité observée en 1D pour certains paramètres se retrouve en 2D où elle apparaît pour les mêmes

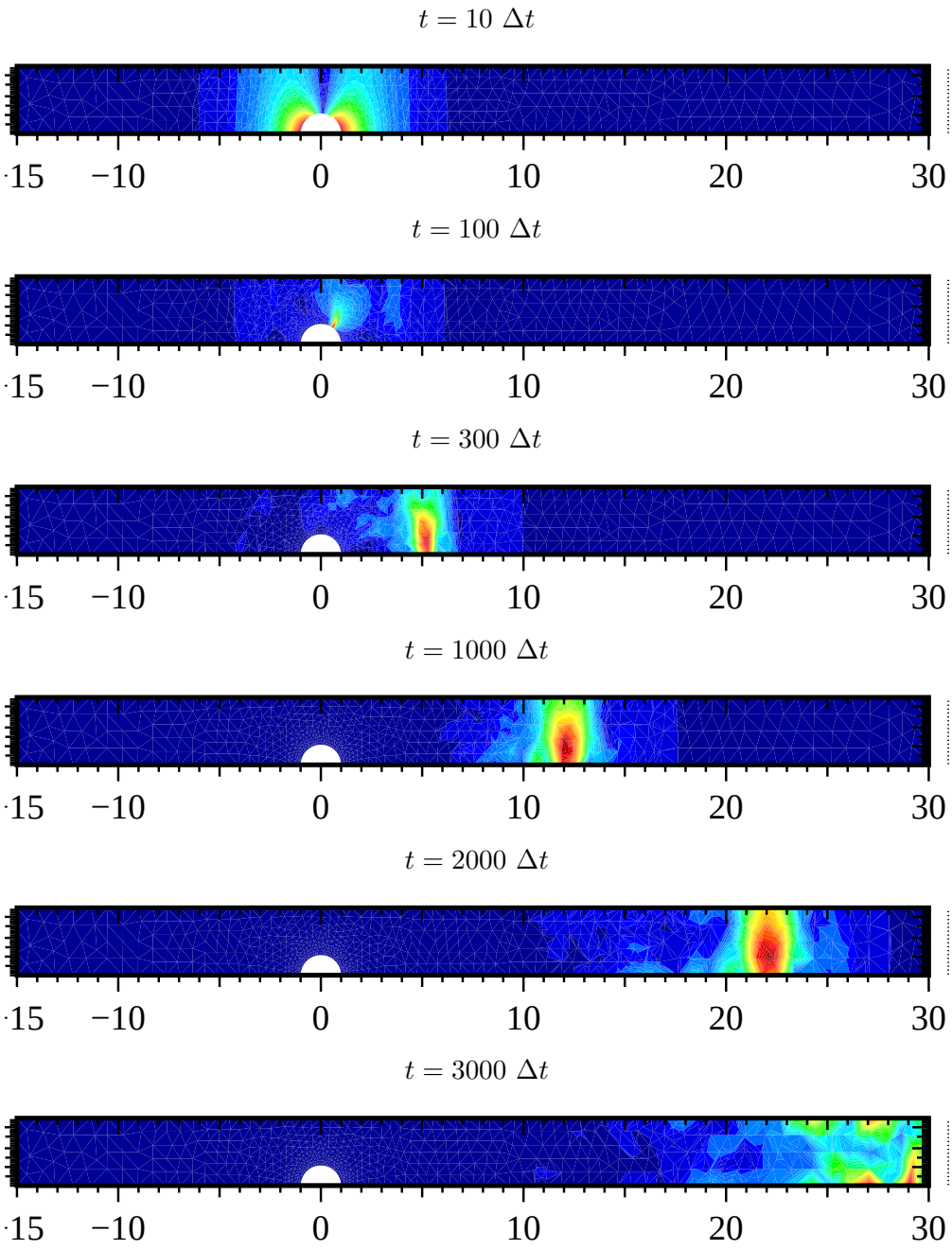


FIG. 6.9 – Visualisation de la norme des résidus (2.30)-(2.32) à différents temps. Par souci de visibilité, l'échelle des couleurs n'est pas la même suivant le temps.

raisons.

Nous avons ensuite pour la première fois résolu le modèle dans la géométrie complexe

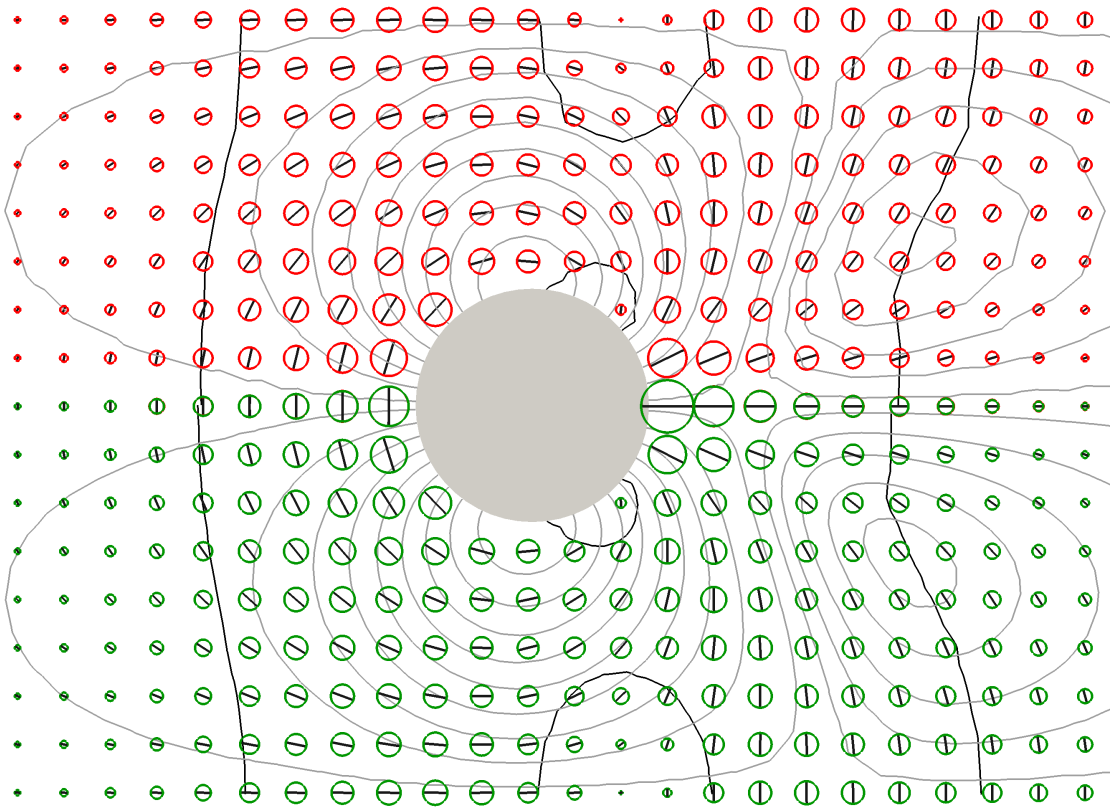

FIG. 6.10 – Comparaison entre la résolution sur maillages grossier (en haut, en rouge) et fin (en bas, en vert) : lignes de courant associées à la vitesse $\mathbf{v} - V$ dans le référentiel de la mousse (lignes grises) ; frontière entre zone au-dessous et zone au-dessus du seuil (lignes noires) ; tenseur de déformation élastique $\tau$ symétrique et à trace nulle (cercles : le diamètre tracé en noir correspond à la valeur propre positive, et sa direction au vecteur propre correspondant).

d'un écoulement autour d'un obstacle circulaire avec conditions aux limites de non-glissement. L'approche que nous avons choisie pour tenir compte de cette condition aux limites non usuelle s'est avérée efficace. Contrairement à l'écoulement de Couette, cet écoulement permet d'évacuer les contraintes normales, puisqu'elles sont advectées par la vitesse jusqu'à la sortie du canal. Cet effet est visible sur l'évolution du résidu en fonction des itérations en temps, qui après un plateau (correspondant à l'éjection de défauts créés au début de la simulation) décroît rapidement. Nous pouvons alors amener les résidus à une valeur arbitrairement petite (modulo la précision machine). Ainsi, de manière assez surprenante, cet écoulement *a priori* plus complexe est numériquement plus facile à traiter que l'écoulement de Couette. Par ailleurs, nous avons montré que même avec un maillage relativement grossier, on peut obtenir une précision suffisante pour effectuer des comparaisons quantitatives de tous les champs considérés avec l'expérience. La durée

typique d'une résolution complète (en amenant la norme des résidus à $10^{-7}$) est d'une demi-journée sur un ordinateur portable (processeur Intel T7300 Core 2 Duo, 2 GHz, 4 Mb de mémoire cache, 32 bits). Nous disposons maintenant d'un outil performant pour tester le modèle sur de grandes gammes de paramètres.

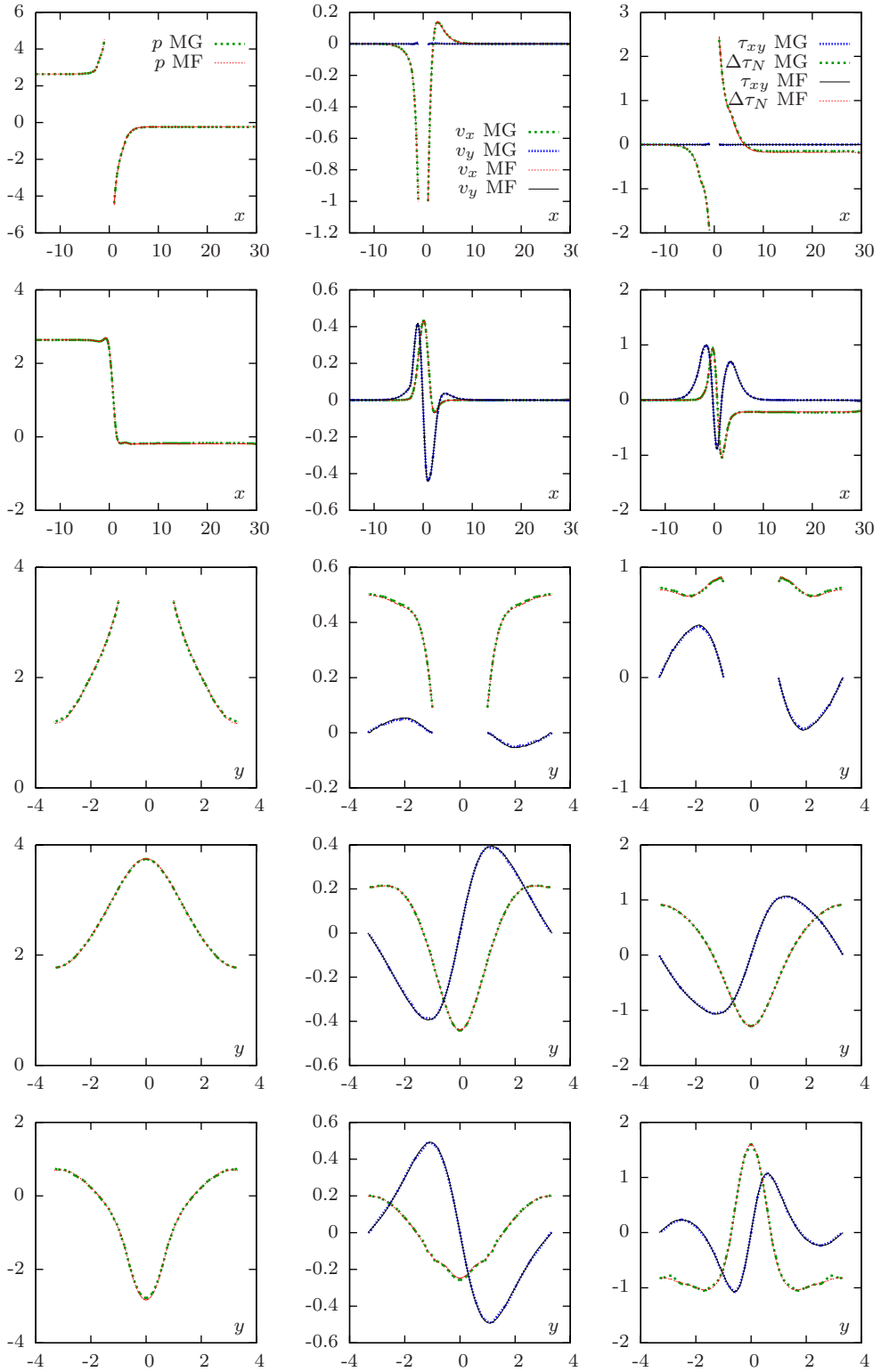


FIG. 6.11 – Résolution sur maillages grossier (MG, traits épais) et fin (MF, traits fins) avec, de haut en bas et de gauche à droite : coupes suivant les axes 1 à 5 définis figure 6.10 de $p$, et des composantes de $\mathbf{v} - V$ et $\tau$ (où $\Delta\tau_N$ désigne la différence des contraintes normales).

# Chapitre 7

# Prédiction d'écoulements autour d'un obstacle

Au chapitre 5, nous avons comparé le modèle à des expériences réalisées dans des géométries simples (cisaillement de Couette cylindrique et plan) qui simplifiaient la résolution numérique. Nous avons développé (chapitre 3), testé et validé (chapitre 6) un algorithme numérique permettant de traiter des géométries bidimensionnelles complexes. Nous voulons maintenant soumettre le modèle au test plus contraignant d'écoulements autour d'un obstacle.

Benjamin Dollet [31] et Christophe Raufaste [78] ont réalisé des expériences d'écoulement autour d'obstacles circulaires en faisant varier systématiquement tous les paramètres de contrôle. Nous disposons ainsi d'une banque de données de mesures locales de champs scalaires (comme la pression pour l'expérience [31]), vectoriels (comme la vitesse) et tensoriels (comme le tenseur de déformation élastique et le taux de déformation plastique). Ces mesures sont directement comparables au modèle moyennant des hypothèses détaillées dans [45, 71].

Après avoir décrit ces expériences, nous leur comparons directement le modèle : nous montrons que nous pouvons non seulement capturer qualitativement et quantitativement le comportement visco-élasto-plastique de la mousse, mais également le prédire. Ensuite, nous examinons l'effet séparé de chaque paramètre du modèle autour d'une configuration de référence, ce qui nous permettra de justifier *a posteriori* le choix des paramètres du modèle dans la discussion qui suivra.

Le travail présenté ici fait l'objet d'une publication en cours de soumission.

## 7.1 Présentation des expériences

### 7.1.1 Expérience de Dollet

Le dispositif expérimental utilisé par Dollet [26] est présenté figure 7.1. Les spécificités du dispositif permettent de mesurer la pression en tout point de l'écoulement : les bulles étant confinées entre de l'eau et la plaque de verre, elles ont la liberté d'ajuster leur

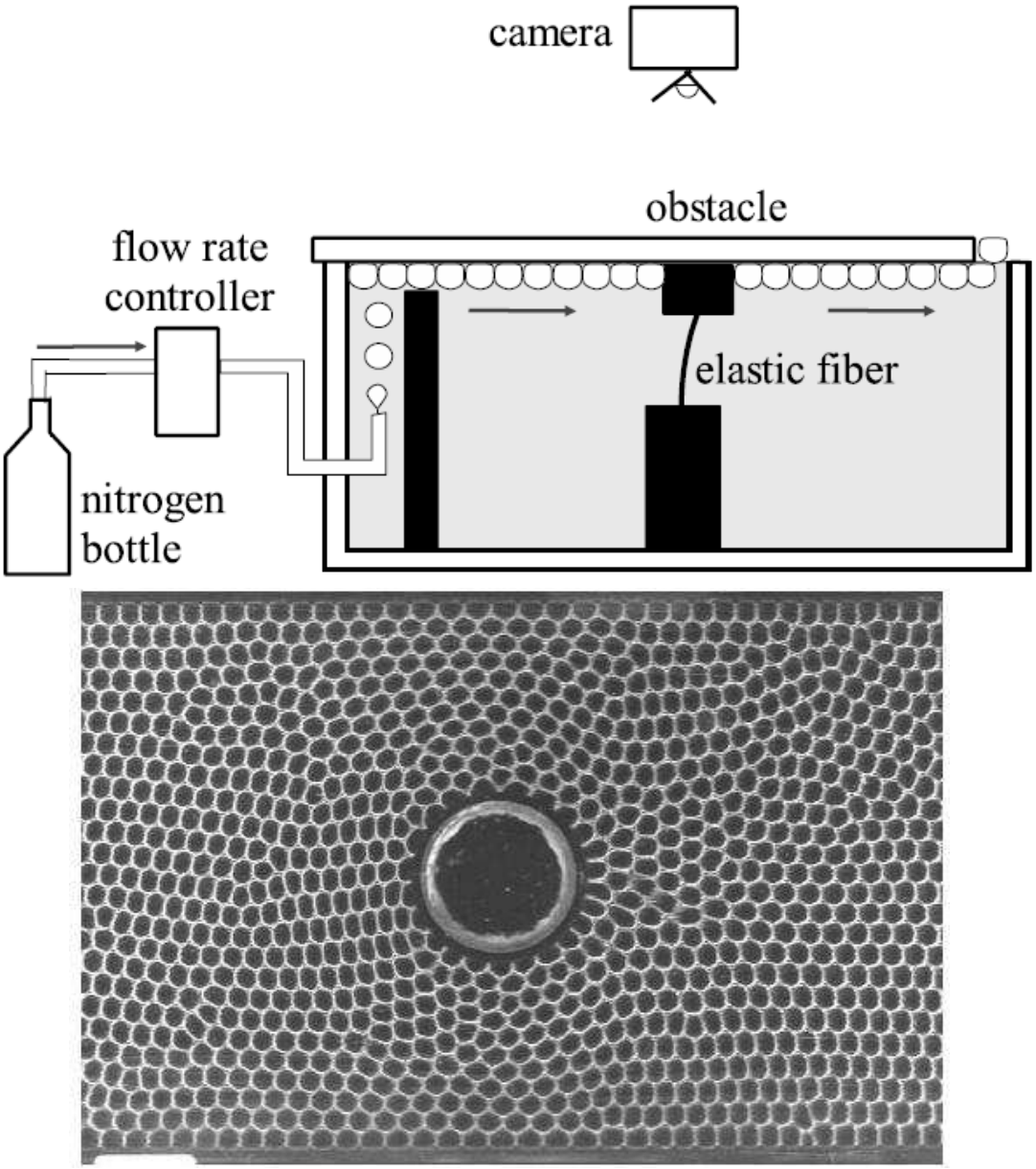


FIG. 7.1 – Dispositif mousse humide : schéma (en haut) et image typique de l'expérience (en bas) ; les bulles sont confinées entre de l'eau et une plaque de verre ; cela permet la mesure des forces sur l'obstacle et du champ de pression. D'après [26].

profondeur en réponse à une variation de pression [31] ; de ce fait leur aire apparente varie, ce dont on peut déduire la pression localement [31]. Le dispositif permet également une mesure de force : le flotteur est mobile, et il est relié à une partie fixe par une fibre

élastique. Quand l'obstacle subit une force exercée par la mousse, il a tendance à se déplacer ; il subit alors une force de rappel de la part de la fibre défléchie. Lorsque l'équilibre entre la force de la mousse et la force de rappel est atteint, la force de la mousse se déduit de la mesure du déplacement de l'obstacle par rapport à sa position au repos [30]. Les mesures de force ont notamment montré l'existence d'une *force de traînée seuil*, signature de la plasticité de la mousse.

Par une étude systématique [31] de l'influence des paramètres de contrôle sur les quantités mesurées, Dollet a mis en évidence un régime d'écoulement unique, dans la limite basse vitesse, qui ne dépend que de la fraction liquide de la mousse. Nous nous intéressons à l'expérience dite de référence : canal de largeur 10 cm, écoulement autour d'un cercle de rayon 1.5 cm, débit imposé de 176 $\mathrm{ml} \cdot \mathrm{min}^{-1}$ (ce qui correspond à une vitesse $V = 1\ \mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-1}$), aire des bulles de 16.0 $\mathrm{mm}^2$, fraction liquide effective $\phi$ évaluée à 7% ; la déformation seuil mesurée est $U_Y = 0.14 \approx 0.2/\sqrt{2}$. Nous l'appelons "expérience mousse humide".

### 7.1.2 Expérience de Raufaste

Le dispositif expérimental utilisé par Raufaste [78] est présenté figure 7.2. Par rapport aux expériences de Dollet, l'utilisation de la géométrie verre-verre permet d'atteindre des fractions liquides variant sur 3 à 4 décades (la plus petite est de l'ordre de 0.02 %) et des vitesses d'écoulement variant sur 3 décades (jusqu'à 1 $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, largement au-delà de la limite basse vitesse). A vitesse élevée, des instabilités apparaissent et peuvent littéralement casser la mousse. De même que pour la mousse humide, des mesures *locales* de la vitesse, de la déformation élastique, et du taux de ré-arrangements plastiques sont disponibles.

L'étude d'écoulements sur une grande gamme de fractions liquides montre que plus la mousse est sèche, plus les ré-arrangements sont localisés près de l'obstacle, et plus les bulles peuvent se déformer. Pour quantifier ce dernier point, nous introduisons la déformation statistique seuil $U_{max}$, définie [78] comme la valeur moyenne des dix valeurs les plus importantes de l'amplitude $|U|/\sqrt{2}$ du tenseur de déformation $U$. Cette quantité est un indicateur de la valeur maximale de la déformation que peut supporter la mousse avant de subir des ré-arrangements plastiques ; elle augmente lorsque la fraction liquide diminue (Fig. 7.3) : les mousses sèches sont plus extensibles que les mousses humides.

Nous nous intéressons à une expérience réalisée dans des conditions proches de celles de l'expérience mousse humide, mais avec une fraction liquide plus faible : canal de largeur 10 cm, écoulement autour d'un cercle de rayon 1.5 cm, vitesse d'écoulement $V = 0.6\ \mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, aire des bulles de 16.0 $\mathrm{mm}^2$, fraction liquide effective $\phi$ évaluée à 1.2 % ; la déformation seuil mesurée est $U_Y = 0.28 \approx 0.4/\sqrt{2}$. Nous l'appelons "expérience mousse sèche".

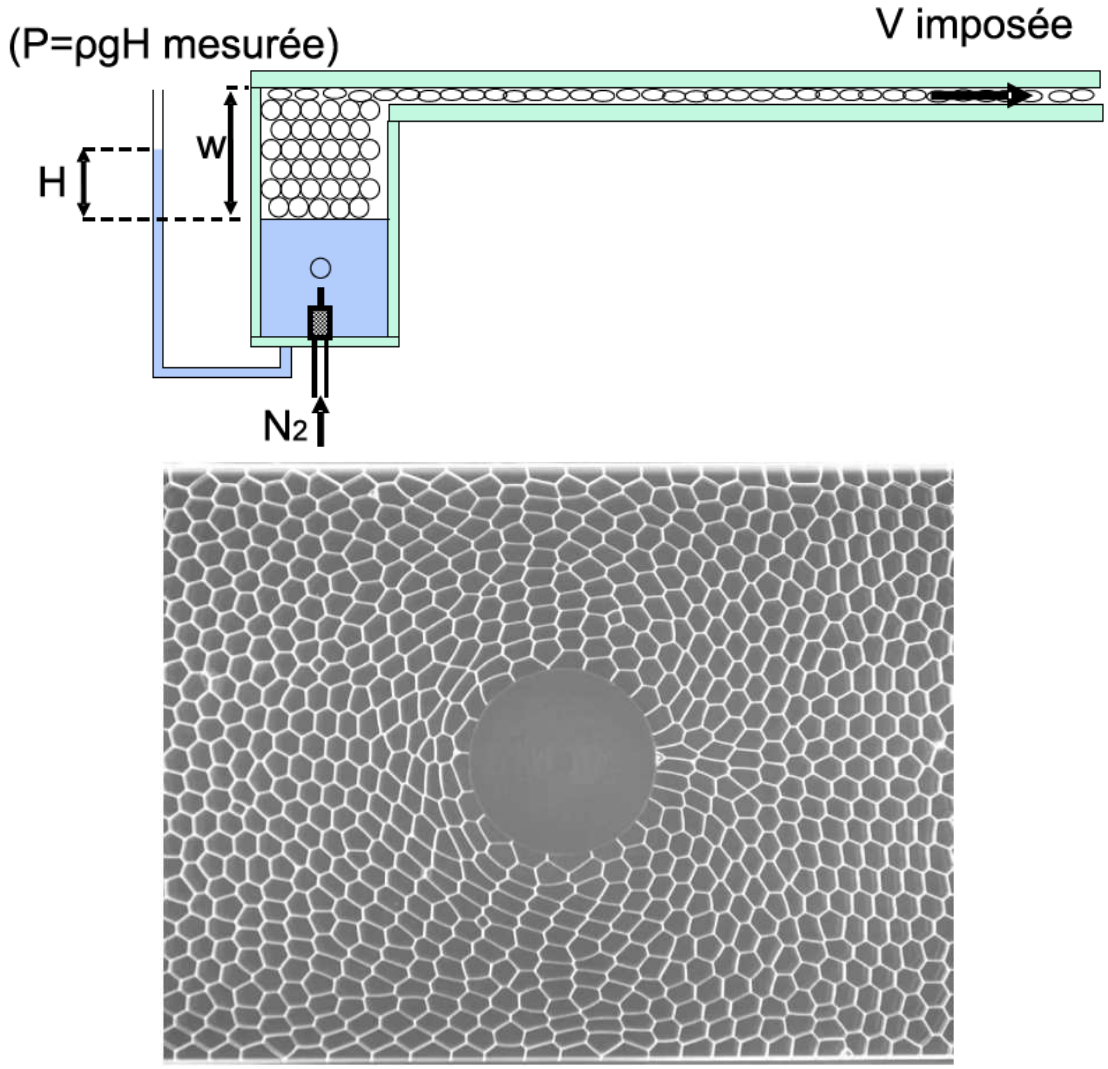


FIG. 7.2 – Dispositif mousse sèche : schéma (en haut) et image typique de l'expérience (en bas) ; les bulles sont confinées entre deux plaques de verre ; ce dispositif permet une grande gamme de vitesses et de fractions liquides. D'après [78].

## 7.2 Comparaisons modèle/expérience

### 7.2.1 Protocole

Comme nous l'avons dit à la section 7.1.1, la fraction liquide est le paramètre expérimental ayant la plus grande influence sur l'écoulement dans le régime basse vitesse mis en évidence par Benjamin Dollet, notamment par son effet sur la déformation seuil : ce

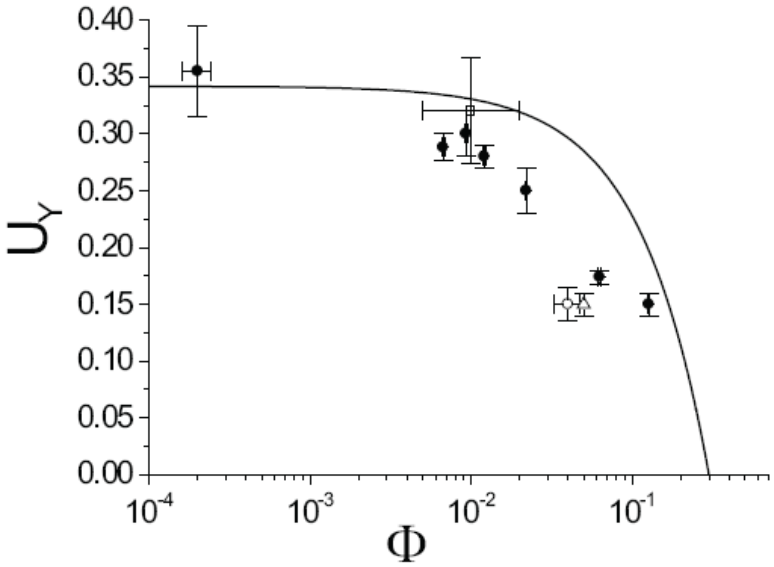


FIG. 7.3 – $U_Y$ en fonction de la fraction liquide $\Phi$ ; $U_Y$ doit être multiplié par $\sqrt{2}$ pour être comparé à $\varepsilon_Y$. Les symboles correspondent à des mesures sur divers dispositifs expérimentaux : ○, [31] ; •, plusieurs expériences de [45] ; □, [3] ; △, [23]. Les données provenant de [45] sont comparées qualitativement à une loi quadratique : $U_Y = C(\Phi - \Phi_c)^2$, avec $\Phi_c$ correspondant à la limite de rigidité de la mousse ($\approx 30$ %), et $C = 1.1$ fixé de manière empirique. D'après [71].

paramètre varie d'un facteur deux entre les expériences mousse humide et mousse sèche. Nous nous proposons de justifier la pertinence du modèle dans ce régime en deux étapes. Tout d'abord, nous ajustons les paramètres du modèle de manière à ce qu'il reproduise qualitativement et quantitativement les différents champs mesurés sur l'expérience de mousse humide. Ensuite, nous prédisons l'expérience de mousse sèche en multipliant par deux la déformation seuil utilisée dans le modèle.

D'un point de vue pratique, le modèle est résolu sur le maillage MG (Fig. 6.6) décrit au chapitre précédent, en vérifiant que les normes des résidus des équations stationnaires sont inférieurs à $10^{-7}$.

Pour la comparaison, nous représentons des champs scalaires comme la pression, des champs vectoriels comme la vitesse, et enfin des champs tensoriels comme la déformation élastique, et le tenseur de taux de ré-arrangements plastiques à l'aide des outils présentés au chapitre précédent (section 6.2.4, page 93). Plutôt que le champ de vitesse $\mathbf{v}$ dans le référentiel de l'obstacle, nous préférons tracer le champ de vitesse $\mathbf{v} - V\mathbf{e}_x$ dans le référentiel de la mousse. Ce champ, nul loin en amont et en aval, fait ressortir la façon dont l'obstacle perturbe l'écoulement.

Pour l'expérience de mousse humide, les valeurs sont disponibles avec une résolution de $24 \times 17$ points qui correspond aux boîtes utilisées pour l'analyse d'image ; elle est de $23 \times 17$ pour celle de mousse sèche (consulter [26, 78] pour plus de détails).

### 7.2.2 Correspondance des quantités expérimentales/théoriques

#### Vitesse

Dans le cas théorique, la vitesse $V$ de l'écoulement bouchon est connue exactement, puisqu'il s'agit de la vitesse imposée en entrée. Dans le cas expérimental, nous procédons comme dans [26] et nous définissons $V$ comme la moyenne de la vitesse sur la première colonne des boîtes utilisées pour l'analyse d'image. Nous représentons sur la même carte les lignes de courant de ce champ de vitesse. Dans le cas numérique, ces lignes de courant sont les isovaleurs de la fonction courant associée à la vitesse. Dans le cas expérimental, il s'agit de trajectoires lagrangiennes déterminées en remontant le vecteur vitesse à partir de "graines" que nous avons choisies de manière à obtenir une densité des lignes de courant comparable à celle du modèle. Les trajectoires expérimentales étant sensibles à la définition de $V$ et à la densité choisie pour les tracer, elles permettent surtout une comparaison qualitative avec les simulations numériques. Pour la comparaison quantitative, nous tracerons la vitesse adimensionnée $(\mathbf{v} - V\mathbf{e}_x)/V$.

#### Tenseur de déformation élastique

Le tenseur expérimental correspondant à $\varepsilon^e$ est le tenseur de déformation statistique $U$ [45]. C'est un tenseur symétrique dont la trace est petite, mais qui peut être non-nulle même dans le cas incompressible, si la déformation n'est pas affine. Pour éliminer cette contribution, nous comparons $\varepsilon^e$ à la partie déviatrice de $U$, c'est-à-dire $U_d = U - \mathrm{Tr}(U)/2$. Les deux tenseurs calculé et expérimental sont sans dimension, ils peuvent être comparés directement.

#### Tenseur de taux de déformation plastique

L'expression sans dimension de ce tenseur est donnée par

$$\dot{\varepsilon}^p = \overset{\square}{\varepsilon^e} - D(\mathbf{v}) = \frac{1}{We}\max\left(0, \frac{|\varepsilon_d^e| - \varepsilon_Y}{|\varepsilon_d^e|}\right)\varepsilon^e. \tag{7.1}$$

Le tenseur expérimental correspondant est le tenseur de ré-arrangement topologique statistique $P$ [45]. De la même manière que $U$, $P$ est un tenseur symétrique dont la trace est proche de zéro et nous comparons $\dot{\varepsilon}^p$ à $P_d = P - \mathrm{Tr}(P)/2$. Le tenseur expérimental a la dimension de l'inverse d'un temps, nous le multiplions par le temps caractéristique $L/V$ pour pouvoir le comparer à $\dot{\varepsilon}^p$.

#### Pression

La variation de la pression résulte de deux contributions : un gradient de pression global dû au terme de friction, et des variations locales induites par la présence de l'obstacle que nous appelons pression réduite, comme dans [26]. D'un point de vue pratique, nous la calculons en retranchant au terme de pression $p$ la pression qui serait obtenue dans un canal sans obstacle. Dans ce cas, l'écoulement se réduit à l'écoulement bouchon

de vitesse $\|\mathbf{v}\|/V = 1$, tous les champs sont constants et l'équation de conservation de la quantité de mouvement sans dimension s'écrit

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -C_F \frac{We}{2\alpha}, \tag{7.2}$$

La contribution de la friction des plaques au terme de pression s'écrit donc

$$p_{friction} = -xC_F \frac{We}{2\alpha},$$

en choisissant une constante d'intégration nulle. Nous pouvons maintenant définir la pression réduite $p_r$ adimensionnée :

$$p_r = p - p_{friction} = p + xC_F \frac{We}{2\alpha}. \tag{7.3}$$

La quantité expérimentale correspondante n'est mesurée que pour la mousse humide. Nous l'adimensionnons avec la contrainte caractéristique $\Sigma = 2\mu$ pour pouvoir la comparer directement à $p_r$, où $\mu$ est le module élastique de la mousse, dont la valeur est estimée à $13 \pm 0.1$ Pa dans le cas de la mousse humide.

### 7.2.3 Comparaison avec l'expérience de mousse humide

#### Choix des paramètres du modèle

Pour l'expérience mousse humide, nous retenons le jeu de paramètres suivant, que nous désignons dans la suite par P1 :

$$\varepsilon_Y = 0.15 \qquad We = 0.125 \qquad \alpha = 0.91 \qquad C_F = 0 \qquad a = 0. \qquad \text{(P1)}$$

Nous avons fait ce choix après une étude systématique de l'influence des paramètres que nous présentons plus loin à la section 7.3. Si l'on fixe le module élastique à la valeur $\mu = 13.1\ \mathrm{N \cdot m^{-2}}$ [31], P1 correspond aux paramètres physiques suivants :

$$\varepsilon_Y = 0.15 \qquad \lambda = 0.2\,\mathrm{s} \qquad \eta_1 = 0.26\,\mathrm{Pa \cdot s} \qquad \eta_2 = 2.6\,\mathrm{Pa \cdot s} \qquad \mu = 13.1\,\mathrm{N \cdot m^{-2}} \qquad \beta = 0.$$

#### Vitesse

L'écoulement bouchon est perturbé dans une zone restreinte autour de l'obstacle, dont l'étendue est similaire entre l'expérience et le modèle (Fig. 7.5) ; l'orientation du vecteur vitesse est également bien reproduite. Dans les deux cas, l'écoulement est caractérisé par une asymétrie amont/aval particulièrement visible au niveau des lignes de courant : il apparaît une deuxième zone de recirculation en aval de l'obstacle. Parmi les points remarquables, nous signalons le point d'arrêt le long de l'axe 1, immédiatement en aval de l'obstacle ; ce point, défini par $\mathbf{v} - V\mathrm{e}_x = 0$ se situe en $x = (2 \pm 0.1)R$ pour l'expérience et le modèle. Notons également les centres des zones de recirculation en aval de l'obstacle. Bien visibles sur la carte (Fig. 7.5), ils ont approximativement la même

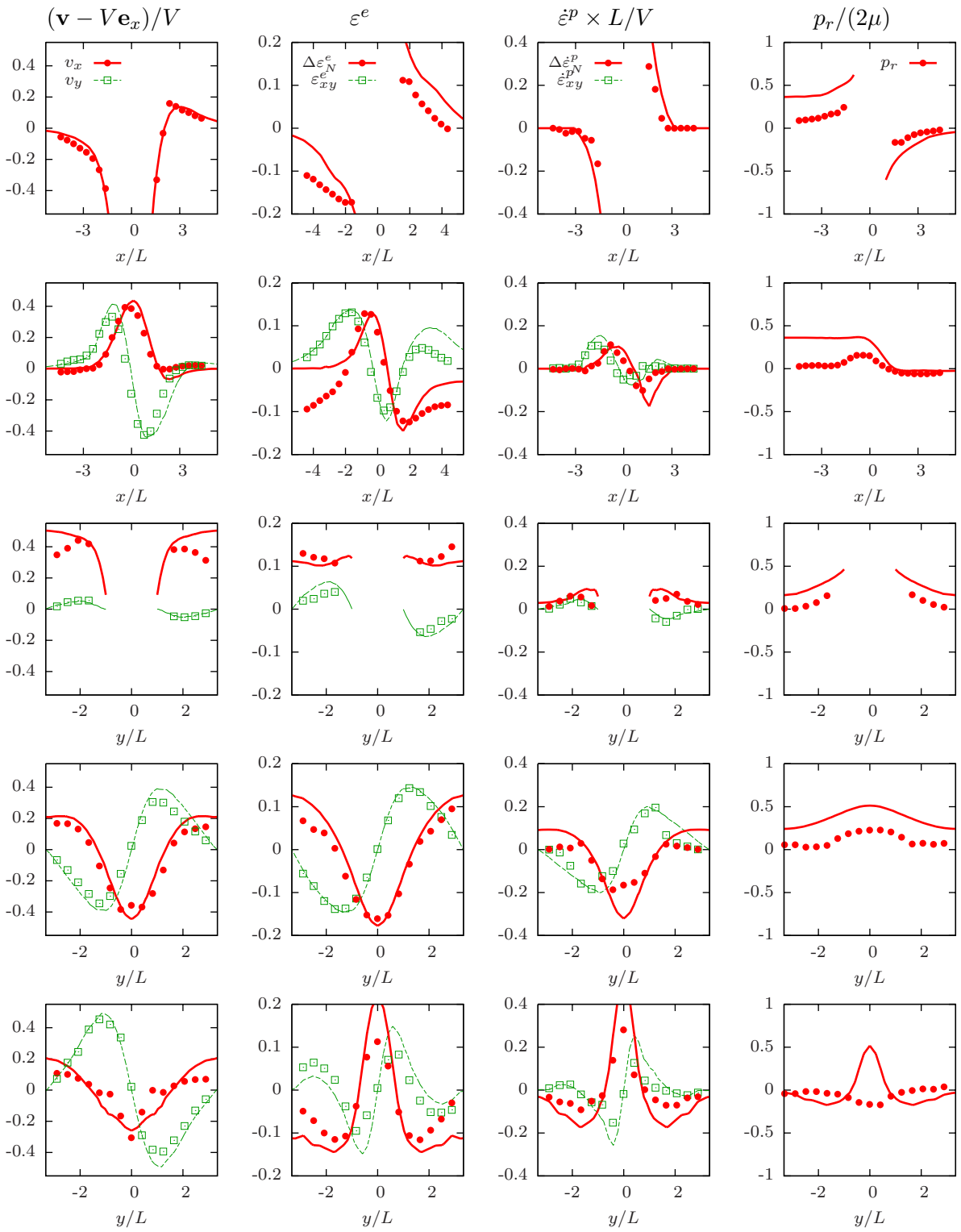


FIG. 7.4 – Modèle résolu avec les paramètres P1 (courbes) et expérience mousse humide [31] (points). De haut en bas : coupes suivant les axes 1 à 5 définis figure 6.7 page 94. Toutes les quantités sont adimensionnées, avec de gauche à droite : vitesse dans le référentiel de la mousse $(\mathbf{v} - V\mathbf{e}_x)/V$, déformation élastique $\varepsilon^e$, taux de déformation plastique $\dot{\varepsilon}^p \times L/V$, pression réduite $p_r/(2\mu)$. Les quantités $v_y$, $\varepsilon^e_{xy}$, et $\dot{\varepsilon}^p_{xy}$ sont nulles sur l'axe 1 : nous ne les traçons pas. Notations : $\Delta\varepsilon^e_N = (\varepsilon^e_{xx} - \varepsilon^e_{yy})/2$ et $\Delta\dot{\varepsilon}^p_N = (\dot{\varepsilon}^p_{xx} - \dot{\varepsilon}^p_{yy})/2$.

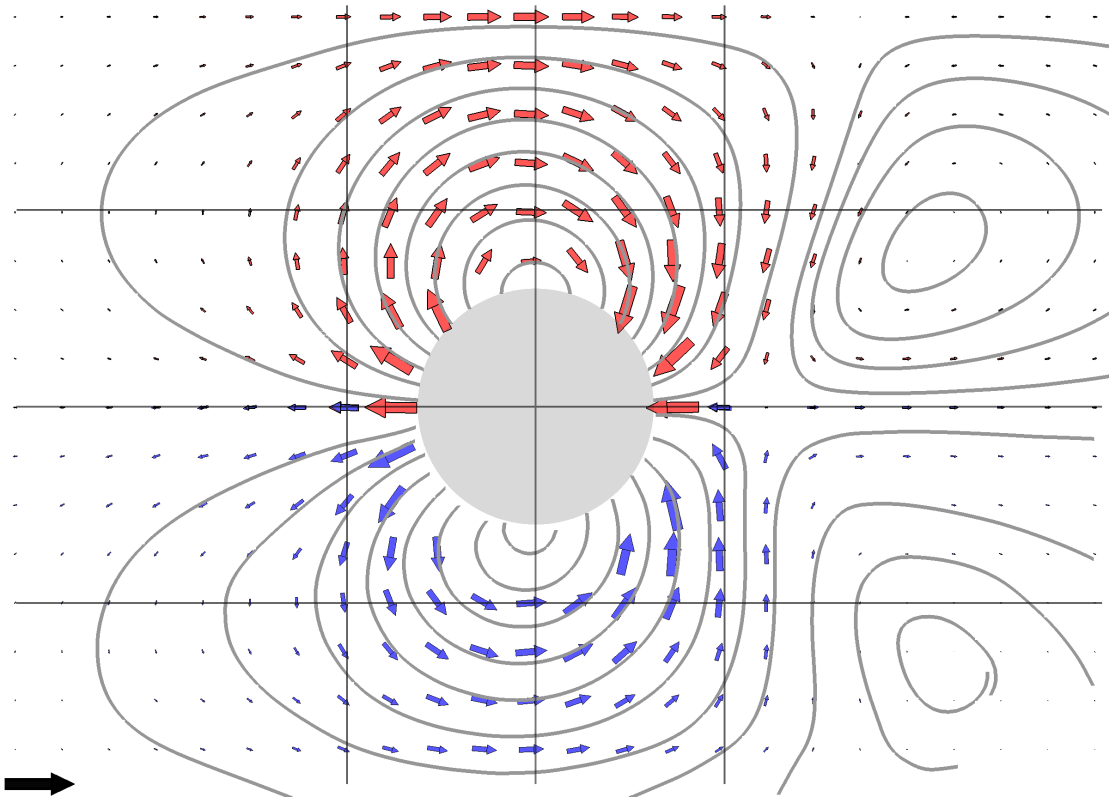

FIG. 7.5 – Champ de vitesse dans le référentiel de la mousse et lignes de courant associées ; modèle résolu avec le jeu de paramètres P1 (en haut) et expérience mousse humide [31] (en bas). Les lignes verticales et horizontales indiquent les axes 1 à 5 utilisés pour les coupes. Échelle : la flèche noire en bas à gauche correspond à la vitesse d'entrée $V$.

abscisse $x \approx 3.5R$ mais des ordonnées différentes, $y \approx 1.4R$ pour le modèle et $y \approx 2.1R$ pour l'expérience. La position de ces points dépend fortement des paramètres.

Les coupes (Fig. 7.4) montrent que l'accord sur la vitesse est également quantitatif : à part le long de l'axe 3, la solution du modèle est dans la barre d'erreur de l'expérience. En particulier, le sursaut de la composante $v_x$ de la vitesse derrière l'obstacle, le long de l'axe 1, est bien reproduit. Il semble même que le modèle parvienne à capturer le léger minimum local de la composante $v_x$ le long de l'axe 2 en aval de l'obstacle, près de $x = 3$ cm.

### Tenseur de déformation élastique

Nous distinguons trois zones de l'écoulement : la première zone, en amont de l'obstacle, jusqu'à l'axe 4 ; la deuxième zone, autour de l'obstacle, entre les axes 4 et 5 ; et enfin la troisième zone, en aval, au-delà de l'axe 5.

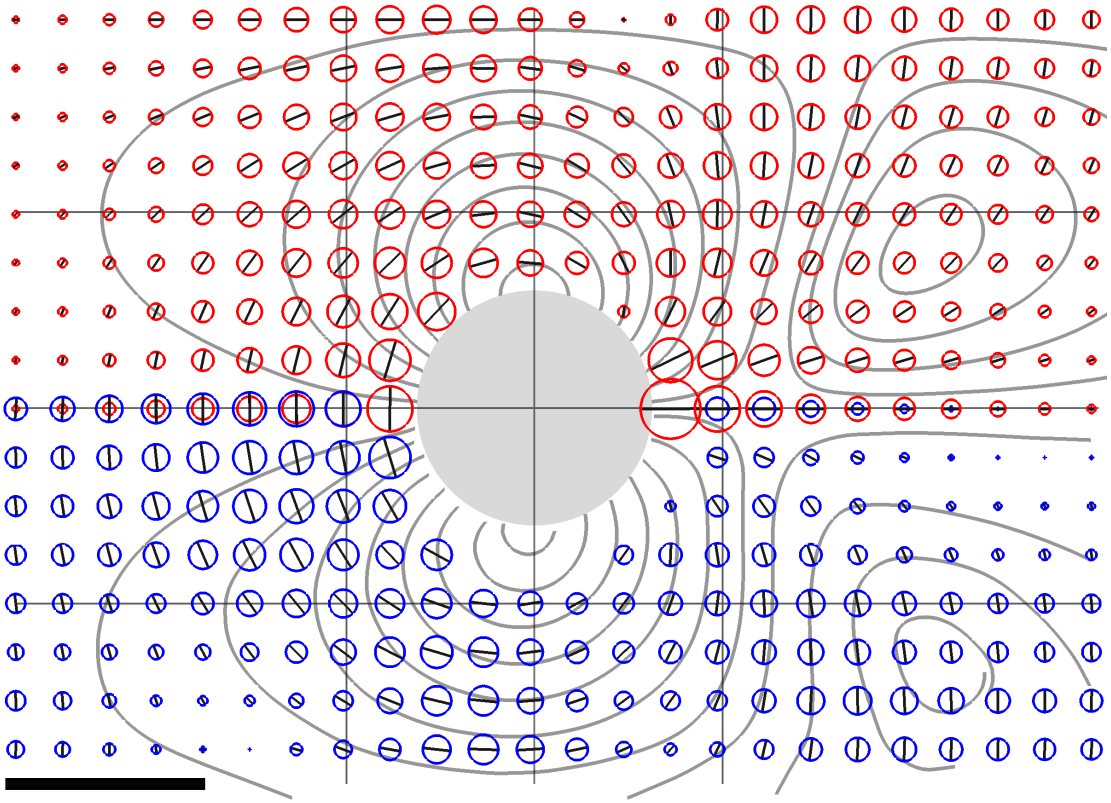

FIG. 7.6 – Tenseur de déformation élastique ; modèle résolu avec les paramètres P1 (en haut) et expérience mousse humide [31] (en bas). Les lignes de courant sont les mêmes que dans la figure 7.5. Échelle : la barre noire en bas à gauche correspond à une déformation unité.

La première zone correspond à la transition entre l'écoulement bouchon loin de l'obstacle et la partie où son influence se fait sentir. Dans la partie la plus à gauche, l'écart sur les composantes normales semble important : les coupes font état le long des axes 1 et 2 d'une composante $U_{xx} - U_{yy}$ négative qui correspond à un étirement vertical de la mousse dans la partie la plus lointaine de l'obstacle. Nous n'observons pas d'écart sur la composante de cisaillement. Au fur et à mesure que l'on se rapproche de l'axe 4, l'influence de l'obstacle se fait sentir, et la comparaison point à point montre une similitude de plus en plus grande entre expérience et modèle, tant au niveau de l'orientation que de la norme des tenseurs. A partir de $x = -3$ cm, les coupes de la différence des composantes normales sont confondues sur l'axe 2.

Dans la deuxième zone, l'écoulement est dominé par l'influence de l'obstacle. L'accord est très bon le long des axes 2, 3, et 4, un peu moins le long de l'axe 1, où le modèle a tendance à sous-évaluer (en valeur absolue) la différence des composantes normales en amont, et à la surévaluer en aval. Sur l'axe 5, le modèle a tendance à surévaluer les

déformations lorsqu'on se rapproche de l'axe de l'écoulement ($y = 0$) et au contraire à les sous-évaluer lorsqu'on se rapproche des bords, mais il parvient à capturer les extrema locaux de la composante de cisaillement en $y \pm 3.8$, ainsi que les minima de la composante normale en $y \pm 2.5$ cm. Cette bonne impression d'ensemble est confirmée par la comparaison point à point des orientations et normes des tenseurs sur la carte 7.6.

Enfin, dans la troisième zone, nous pouvons étudier l'influence de l'obstacle à longue distance. Dans le cas du modèle, une composante $\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}$ de faible amplitude mais non nulle persiste derrière l'obstacle jusqu'à la sortie du canal (figure 7.7).

Dans l'ensemble, si l'on fait abstraction des composantes normales présentes dans l'écoulement expérimental en entrée, les deux champs sont quasiment identiques, qualitativement et quantitativement.

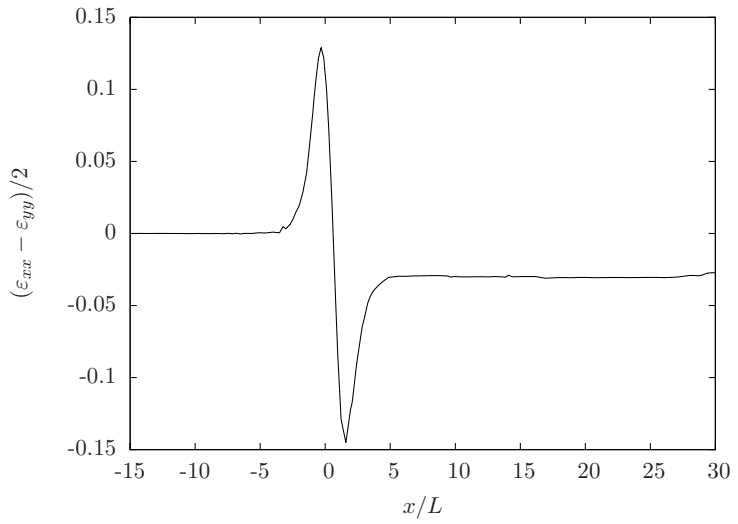


FIG. 7.7 – Composante $\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}$ le long de l'axe 2 sur toute la longueur du domaine de calcul.

### Taux de ré-arrangements plastiques

La carte 7.8 montre que les ré-arrangements plastiques sont concentrés dans la zone proche de l'obstacle, essentiellement sur l'axe 1. L'accord modèle/expérience est quantitativement moins bon que pour les quantités précédentes, mais toutes les tendances qualitatives sont reproduites. L'écart le plus important est observé dans les zones proches de l'obstacle sur l'axe 1.

### Pression

La carte de comparaison de la pression réduite est présentée figure 7.9. Nous notons un comportement qualitatif similaire entre l'expérience et le modèle : maximum de pression en amont de l'obstacle, minimum en aval, asymétrie amont/aval. Les coupes tracées

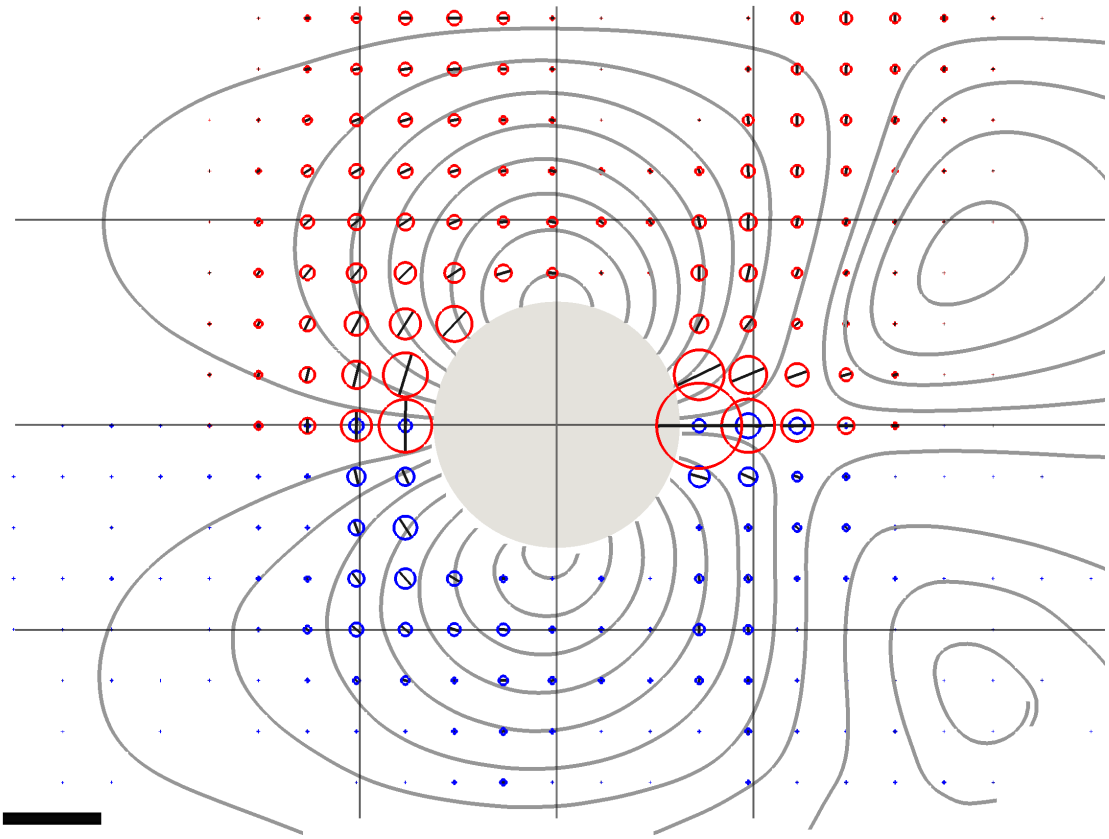

FIG. 7.8 – Taux de déformation plastique ; modèle résolu avec les paramètres P1 (en haut) et l'expérience mousse humide [31] (en bas). Les lignes de courant sont les mêmes que dans la figure 7.5. Échelle : la barre noire en bas à gauche correspond à un taux de déformation plastique de 1 $s^{-1}$.

figure 7.4 confirment cette tendance, mais révèlent une différence importante le long des axes 1 et 2 : malgré la présence de l'obstacle, les valeurs de la pression loin en amont et loin en aval sont sensiblement les mêmes dans le cas expérimental, mais ce n'est pas le cas pour le modèle. L'obstacle engendre une perte de charge dans le cas du modèle mais pas en expérience. Cet aspect n'a pas pu être corrigé en faisant varier les paramètres physiques du modèle. Voir la discussion à ce sujet au paragraphe 7.4.3.

### 7.2.4 Comparaison à l'expérience mousse sèche

Comme indiqué précédemment, nous *prédisons* l'expérience sèche de Raufaste en modifiant le jeu de paramètres utilisé pour la comparaison avec l'expérience humide. Nous trouvons $U_Y = 0.14 \approx 0.2/\sqrt{2}$ pour celle-ci, et $U_Y = 0.28 \approx 0.4/\sqrt{2}$ pour l'expérience sèche, soit un rapport de 2. Nous comparons maintenant l'expérience sèche au modèle en modifiant en conséquence la valeur de la déformation seuil : $\varepsilon_Y = 2 \times 0.15 = 0.3$. La

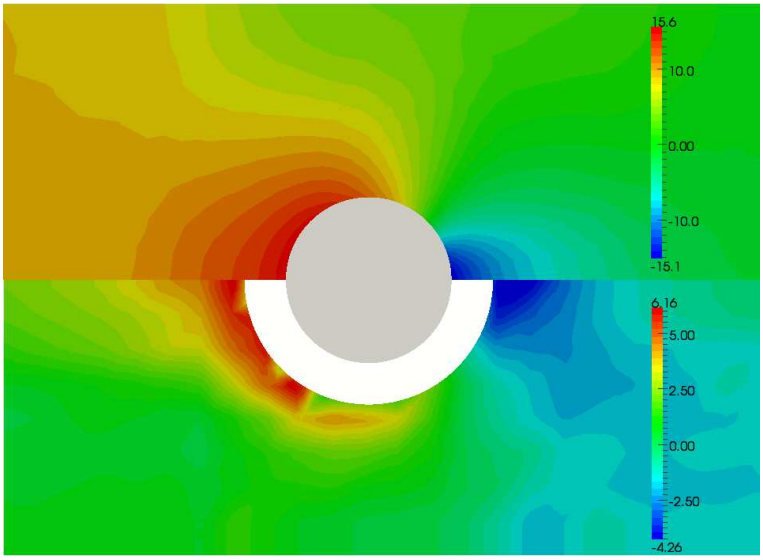


FIG. 7.9 – Champ de pression réduite ; modèle (en haut) avec les paramètres P1 et expérience humide [31] (en bas). L'obstacle est figuré par le cercle gris. L'anneau blanc dans la partie inférieure correspond à la zone autour de l'obstacle où les données expérimentales ne sont pas disponibles. Les échelles (en Pa) ne sont pas les mêmes.

vitesse caractéristique de l'écoulement est également modifiée ($V = 0.6$ cm $\cdot$ s$^{-1}$ contre $V = 1$ cm $\cdot$ s$^{-1}$) et nous modifions le nombre de Weissenberg en conséquence. Nous notons P2 jeu de paramètres utilisé :

$$\varepsilon_Y = 0.286 \qquad We = 0.085 \qquad \alpha = 0.91 \qquad C_F = 0 \qquad a = 0. \qquad \text{(P2)}$$

### Vitesse

Qualitativement, la carte figure 7.11 montre que l'écoulement de la mousse sèche est plus resserré autour de l'obstacle que celui de la mousse sèche, ce qui est particulièrement visible avec : les lignes de courant ; la position des points d'arrêt ($x \approx 1.3\ R$ pour le modèle et l'expérience) ; celle des centres des zones de recirculation en aval de l'obstacle ($(2.5, 0.8)\ R$ pour le modèle et $(2.9, 1)\ R$ pour l'expérience). La hauteur du sursaut de $v_x$ derrière l'obstacle sur l'axe 1 est plus importante, et nous observons une modification qualitative de la composante $v_x$ le long de l'axe 5, en aval de l'obstacle, avec l'apparition d'un pic en $y = 0$. L'ensemble de ces modifications est correctement prédit par le modèle, la correspondance au niveau des coupes (figure 7.10) étant encore meilleure que pour l'expérience humide.

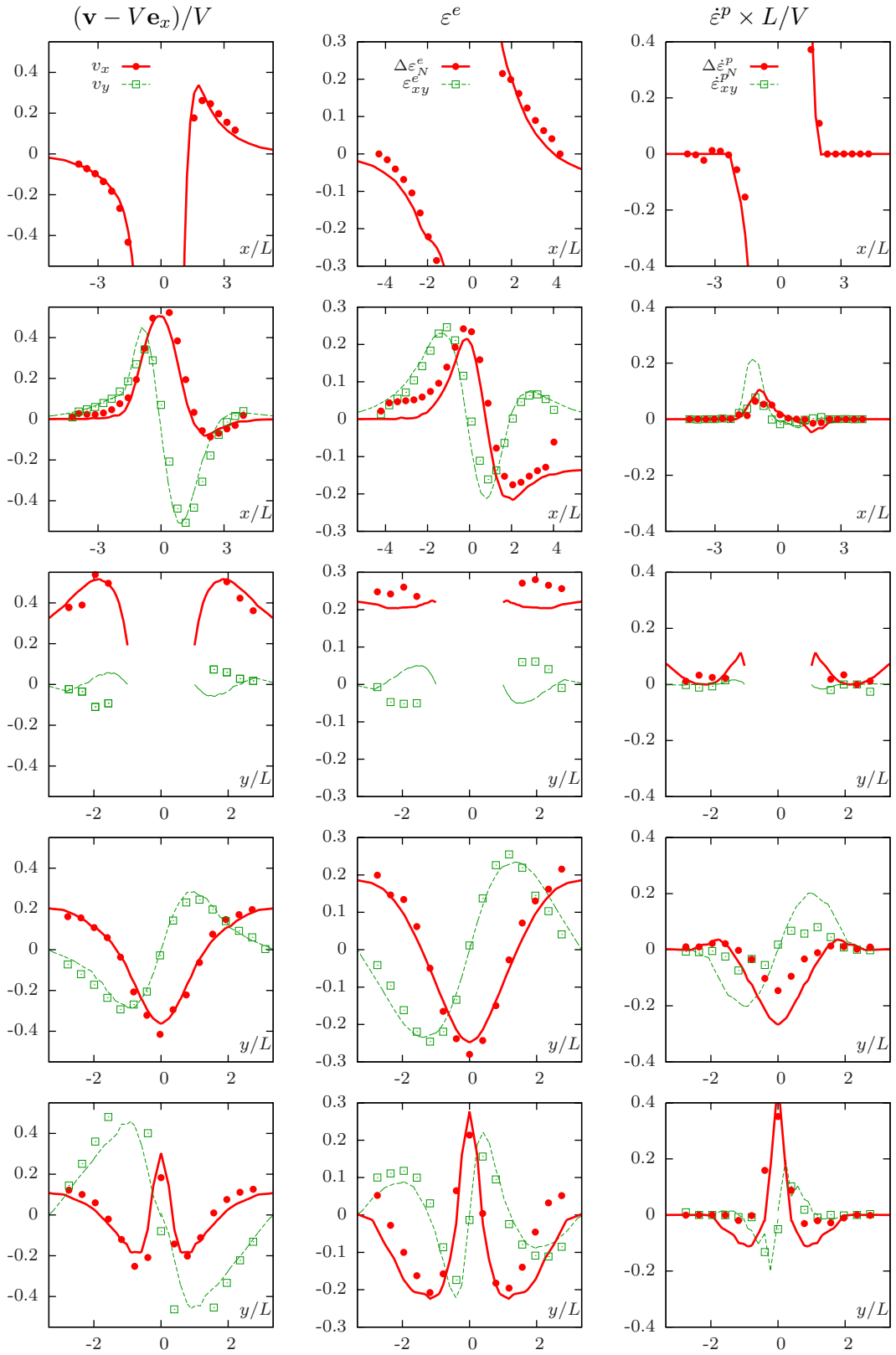


FIG. 7.10 – Modèle résolu avec les paramètres P2 (courbes) et expérience mousse sèche [78] (points). De haut en bas : coupes suivant les axes 1 à 5 définis figure 6.7 page 94. De gauche à droite : vitesse dans le référentiel de la mousse $(\mathbf{v} - V\mathbf{e}_x)/V$, déformation élastique $\varepsilon^e$, taux de déformation plastique $\dot{\varepsilon}^p \times L/V$. Les quantités $v_y$, $\varepsilon^e_{xy}$, et $\dot{\varepsilon}^p_{xy}$ sont nulles sur l'axe 1 : nous ne les traçons pas.

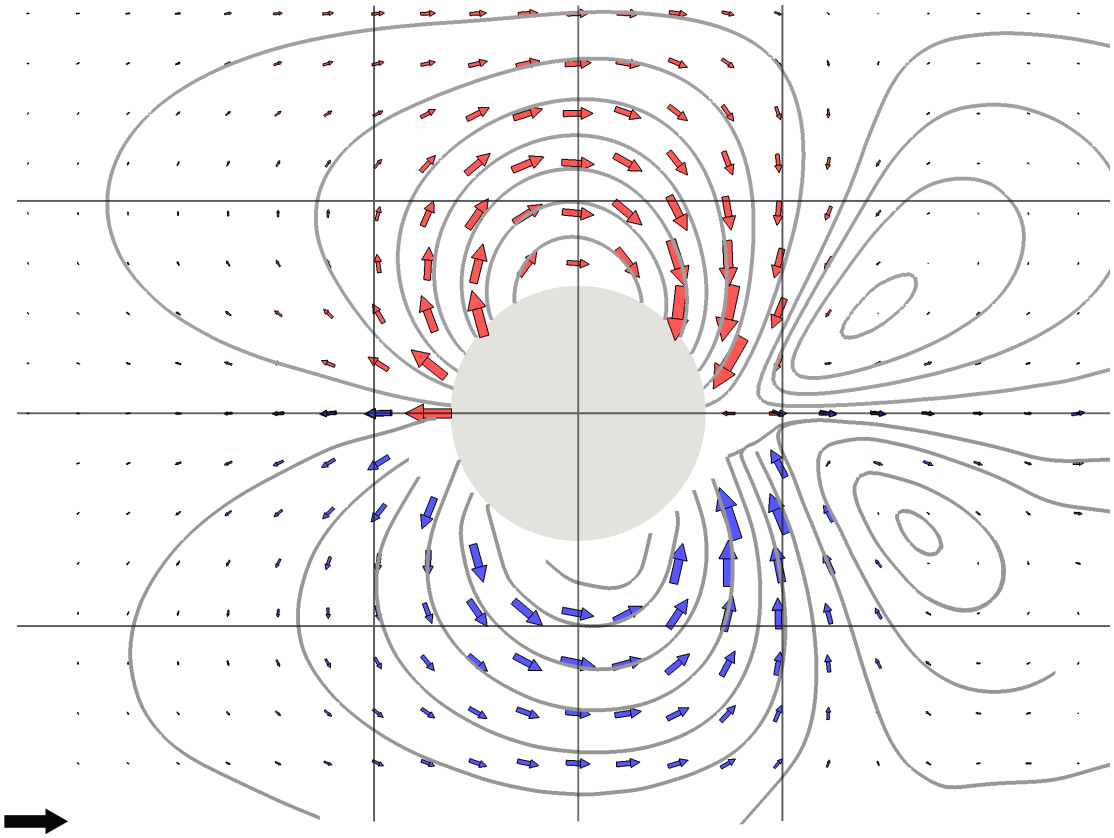

FIG. 7.11 – Champ de vitesse dans le référentiel de la mousse et lignes de courant associées ; modèle résolu avec le jeu de paramètres P2 (en haut) et expérience mousse sèche [78] (en bas). Les lignes verticales et horizontales indiquent les axes 1 à 5 utilisés pour les coupes. Échelle : la flèche noire en bas à gauche correspond à la vitesse d'entrée $V$.

### Tenseur de déformation élastique

La diminution de la fraction liquide se traduit par une augmentation de la déformation seuil $\varepsilon_Y$ et d'une augmentation globale de la norme du tenseur de déformation élastique, sans changement qualitatif. Notons que les contraintes normales observées en amont dans l'écoulement bouchon de l'expérience humide ne sont plus présentes, peut-être grâce au procédé de bullage différent. Elles restent par contre bien présentes en aval, pour le modèle et l'expérience. Encore une fois, tant la carte globale (figure 7.12) que les coupes (figure 7.10) montrent que le modèle prédit correctement l'expérience.

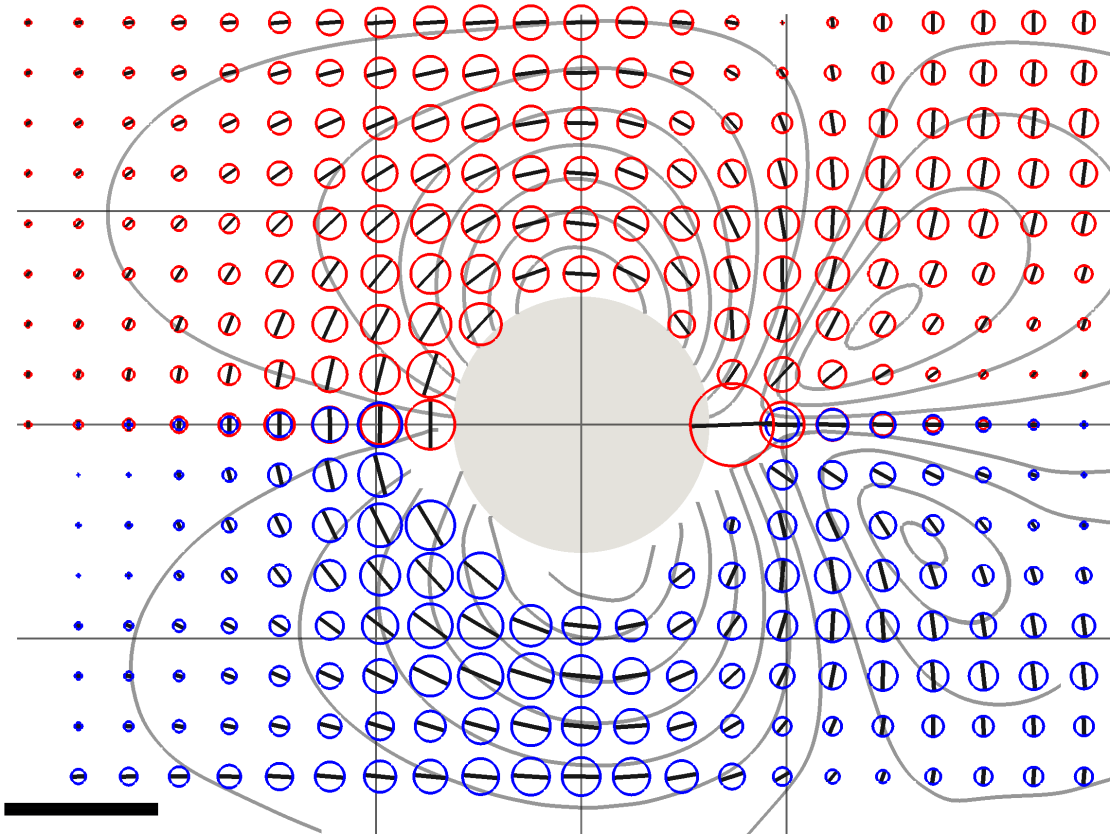

FIG. 7.12 – Tenseur de déformation élastique ; modèle résolu avec les paramètres P2 (en haut) et l'expérience mousse sèche [78] (en bas). Les lignes de courant sont les mêmes que dans la figure 7.11. Échelle : la barre noire en bas à gauche correspond à une déformation unité.

#### Tenseur de taux de ré-arrangements plastiques

Comme nous l'avons déjà observé, la diminution de la fraction liquide a pour conséquence de concentrer l'écoulement autour de l'obstacle. La carte du taux de déformation plastique (figure 7.13) montre que les ré-arrangements sont localisés de manière plus abrupte que pour l'expérience mousse liquide. L'accord expérience-modèle est moins bon que pour les autres quantités, mais meilleur que pour l'expérience humide.

## 7.3 Exploration des paramètres

Nous explorons maintenant les effets de chacun des paramètres du modèle autour d'une configuration de référence :

$$\varepsilon_Y = 0.2 \qquad We = 0.05 \qquad \alpha = 0.91 \qquad C_F = 0 \qquad a = 0 \qquad \text{(P3)}.$$

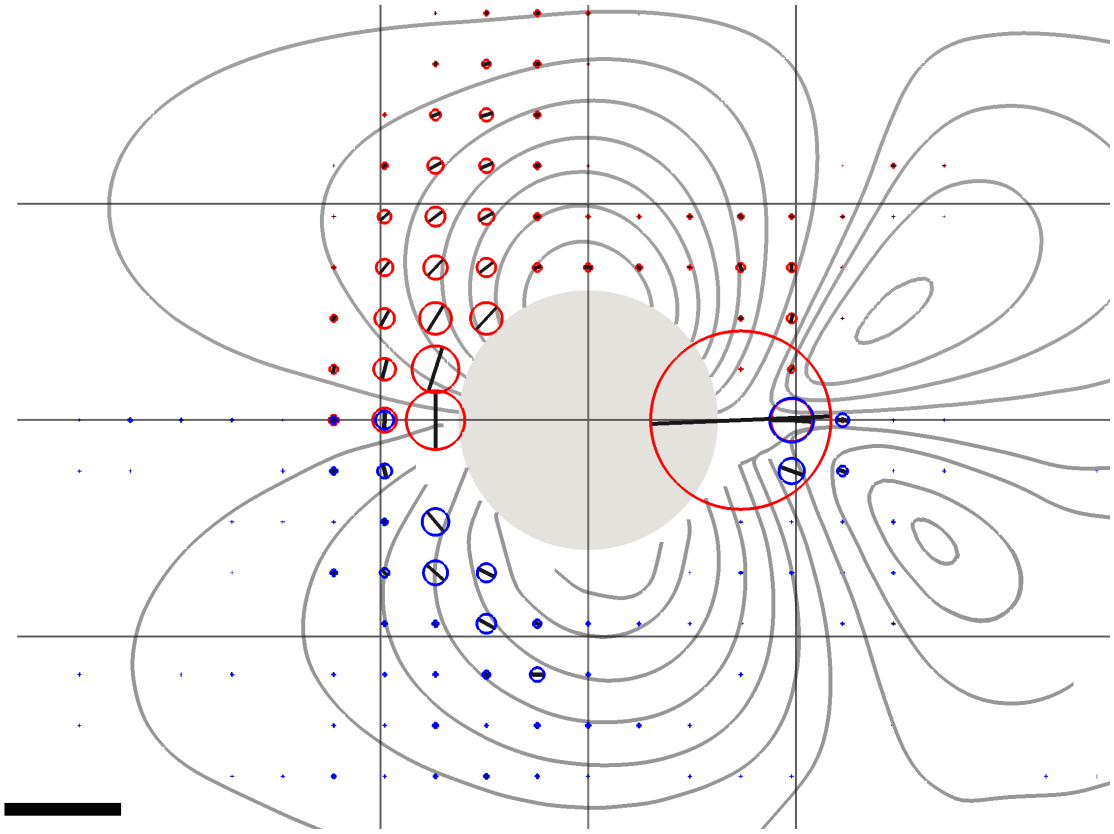

FIG. 7.13 – Taux de déformation plastique ; modèle résolu avec les paramètres P2 (en haut) et expérience mousse sèche [78] (en bas). Les lignes de courant sont les mêmes que dans la figure 7.11. Échelle : la barre noire en bas à gauche correspond à un taux de déformation plastique de 1 $s^{-1}$.

Ce jeu de paramètres est caractéristique de la région de l'espace des paramètres où nous avons situé la mousse de l'expérience de Debrégeas [23] au chapitre 4 : faible nombre de Weissenberg (temps caractéristique des ré-arrangements plastiques faible devant le temps caractéristique de l'expérience), $\alpha$ proche de 1 (friction entre bulles négligeable devant la dissipation liée aux ré-arrangements), déformation seuil $\varepsilon_Y$ relativement petite, dans l'intervalle observé pour les mousses (cf. figure 7.3), friction des plaques faible voire négligeable. Les mousses que nous considérons ici devraient avoir des propriétés similaires. Nous choisissons la dérivée corotationnelle ($a = 0$) essentiellement pour des raisons pratiques, afin d'obtenir un tenseur de déformation élastique à trace nulle. Nous faisons varier ces paramètres de façon à couvrir pour chacun l'ensemble de ses valeurs admissibles, ou du moins de manière à entraîner des modifications significatives de l'écoulement. Pour percevoir qualitativement l'effet des variations de paramètres, nous utilisons les mêmes représentations que pour la comparaison aux expériences (figures

6.10 et 6.11) avec : d'une part une carte avec le tenseur de déformation élastique, les lignes de courant de la vitesse dans le référentiel de la mousse, et en plus la limite des zones au-dessus et au-dessous du seuil ; d'autre part, des coupes de la composante $v_x - V$ de la vitesse, des composantes du tenseur de déformation élastique, et de la pression. Afin de ne pas multiplier le nombre de figures, nous ne traçons pas les autres composantes ; elles sont disponibles sur demande.

### 7.3.1 Effet de $We$

Nous commençons par étudier l'effet de variations de $We$ dont les valeurs possibles sont dans l'intervalle $[0, +\infty[$, la valeur 0 correspondant à une vitesse d'écoulement nulle. Nous comparons P3 à deux autres configurations :

- WE1 : $We = 0.005$, toutes choses égales par ailleurs ;
- WE2 : $We = 0.5$, toutes choses égales par ailleurs ;

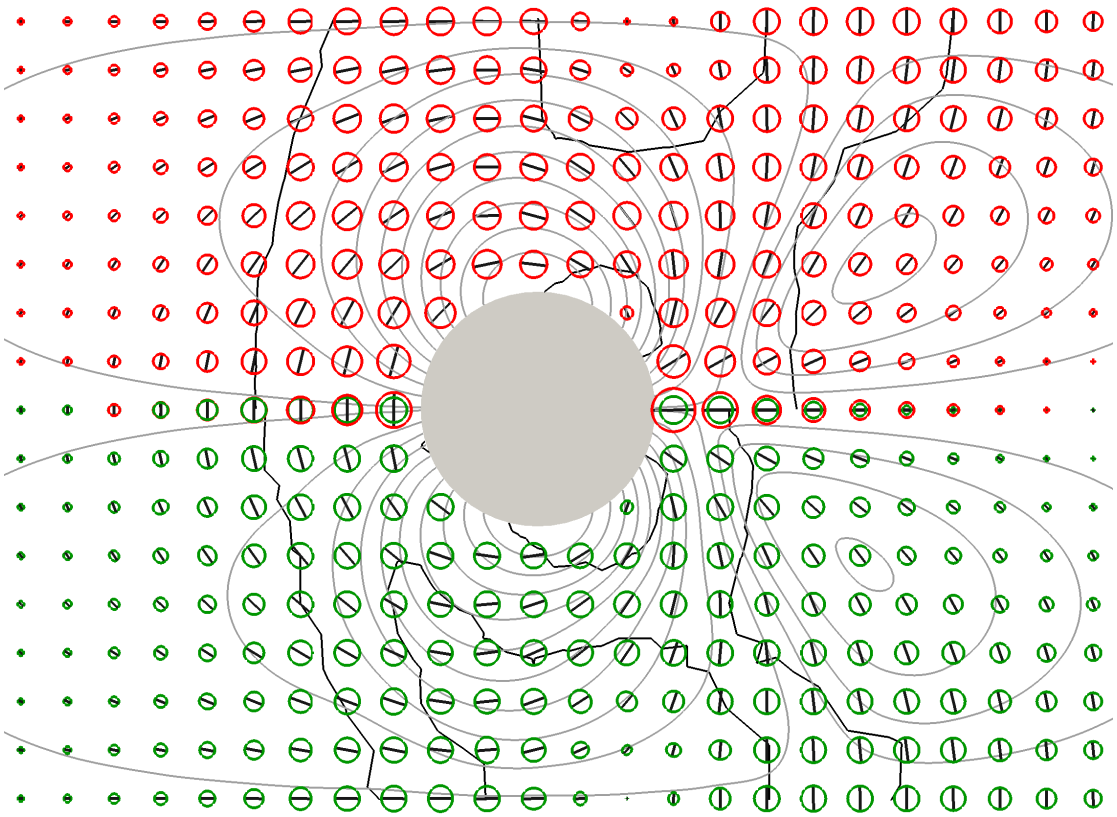

FIG. 7.14 – Comparaison entre P3 (haut, rouge, $We = 0.05$) et WE1 (bas, vert, $We = 0.005$). $We = \lambda V/L$ est le rapport du temps caractéristique de la mousse $\lambda$ au temps caractéristique de l'écoulement $L/V$.

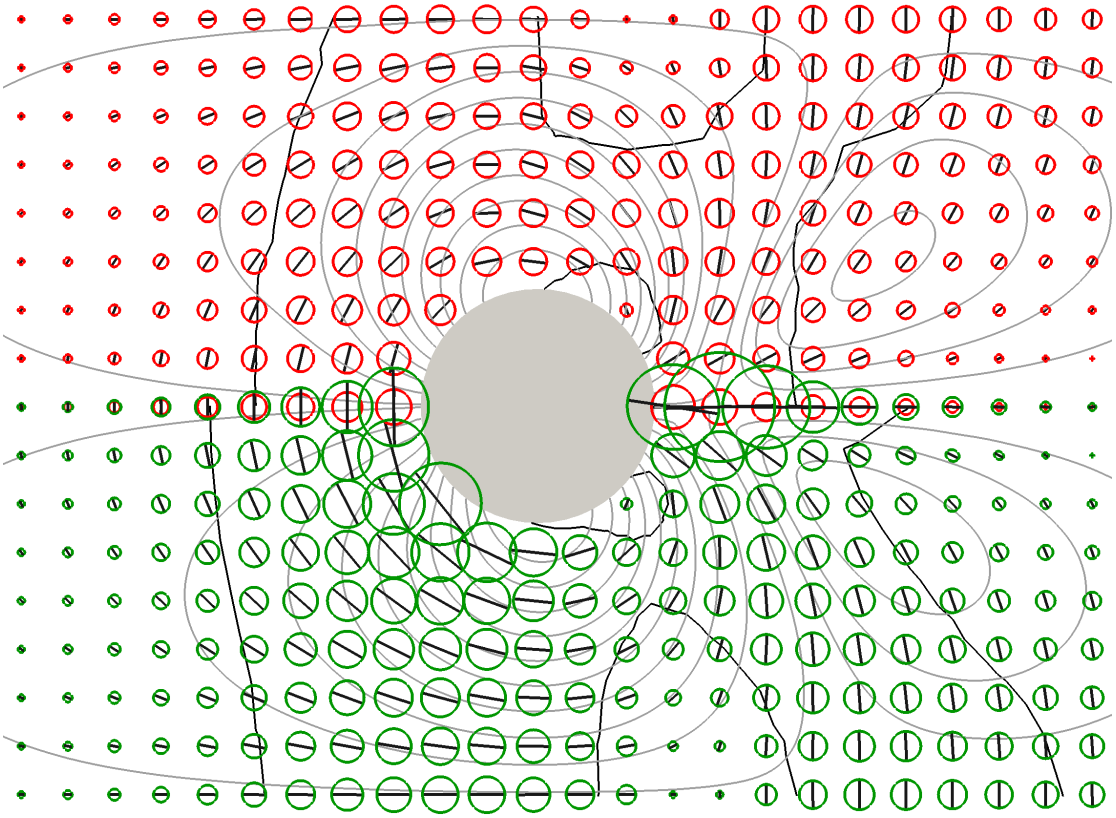

FIG. 7.15 – Comparaison entre P3 (haut, rouge, $We = 0.05$) et WE2 (bas, vert, $We = 0.5$).

Qualitativement, les lignes de courant sont peu affectées par ces variations que ce soit à petit (Fig. 7.14) ou à grand $We$ (Fig. 7.15). Le champ de vitesse n'est que peu affecté par ces variations, y compris le sursaut de la composante $v_x$ le long de l'axe 1 dont la hauteur et la position restent proches de celles de P3 (figure 7.16), autour de $x = 2R$ et $v_x - V = 0.2$. La position des points d'arrêts varie peu également, autour de $x = 1.5R$.

L'impact sur le tenseur de déformation élastique est plus important, particulièrement à grand $We$ : l'augmentation d'un facteur 10 a pour effet de doubler globalement la norme de $\varepsilon^e$ (Fig. 7.15) et d'augmenter l'amplitude des variations de ses composantes (Fig. 7.16). La taille de la région de l'écoulement au-dessus du seuil de plasticité $\varepsilon_Y$ s'en trouve augmentée. Une diminution d'un même facteur 10 a pour effet une légère diminution globale de la norme de $\varepsilon^e$, et une zone au-dessus du seuil plus réduite (Figs. 7.15 et 7.16).

La pression réagit de manière similaire aux variations de $We$ : seul WE2 entraîne un changement important en augmentant l'écart entre la valeur de la pression en entrée et en sortie.

Ainsi, les variations de $We$ n'ont qu'un faible impact sur le champ de vitesse ; en particulier, le sursaut derrière l'obstacle est peu affecté, et l'écoulement reste asymétrique à basse vitesse. Les champs de déformation élastique et de pression sont sensibles à une augmentation mais moins à une diminution de $We$.

### 7.3.2 Effet de $\varepsilon_Y$

La déformation seuil $\varepsilon_Y$ peut varier dans l'intervalle $[0, +\infty[$, la limite $\varepsilon_Y \to 0$ correspondant au modèle d'Oldroyd, et la limite $\varepsilon_Y \to +\infty$ à un solide élastique. Nous comparons P3 à deux autres configurations :

- EPS1 : $\varepsilon_Y = 0.1$, toutes choses égales par ailleurs ;
- EPS2 : $\varepsilon_Y = 0.3$, toutes choses égales par ailleurs.

Les effets d'une variation de $\varepsilon_Y$ sont multiples :

- sur le sursaut (Fig. 7.19, axes 1) :
  P3 : $v_x - V = 0.2$ en $x = 2.2R$ ;
  EPS1 : $v_x - V = 0.1$ en $x = 3.1R$ ;
  EPS2 : $v_x - V = 0.34$ en $x = 1.8R$ ;
  quand $\varepsilon_Y$ augmente, l'amplitude du sursaut augmente, et il se rapproche de l'obstacle.
- Sur le point d'arrêt derrière l'obstacle (Fig. 7.19, axes 1) :
  P3 : $x = 1.6R$ ;
  EPS1 : $x = 2.3R$ ;
  EPS2 : $x = 1.3R$ ;
  le point d'arrêt se rapproche de l'obstacle quand $\varepsilon_Y$ augmente.
- Sur les lignes de courant : d'autant plus asymétriques que $\varepsilon_Y$ augmente (Fig. 7.17 et 7.18) ;
- sur la norme de $\varepsilon^e$ : globalement divisée par 2 pour EPS1 (Fig. 7.17, 7.19) et multipliée par 2 pour EPS2 (Fig. 7.18, 7.19) ;
- sur la perte de charge amont/aval : plus petite pour EPS1 et plus grande pour EPS2 (Fig. 7.19, axes 1 et 2) ;
- pour toutes les quantités, quand $\varepsilon_Y$ augmente : l'asymétrie amont/aval est plus marquée le long de l'axe 2 ; l'écart entre les axes 4 (amont) et 5 (aval) est plus important.
- enfin, on remarque l'apparition d'un pic de la composante $v_x$ sur l'axe 5 pour EPS2.

Ainsi, l'écoulement dans son ensemble est très affecté par des variations de $\varepsilon_Y$.

### 7.3.3 Effet de $C_F$

Le paramètre $C_F$ peut varier de 0 à $+\infty$. Nous comparons P3 à deux autres configurations :

- CF1 : $C_F = 0.78$, toutes choses égales par ailleurs
- CF2 : $C_F = 7.8$, toutes choses égales par ailleurs

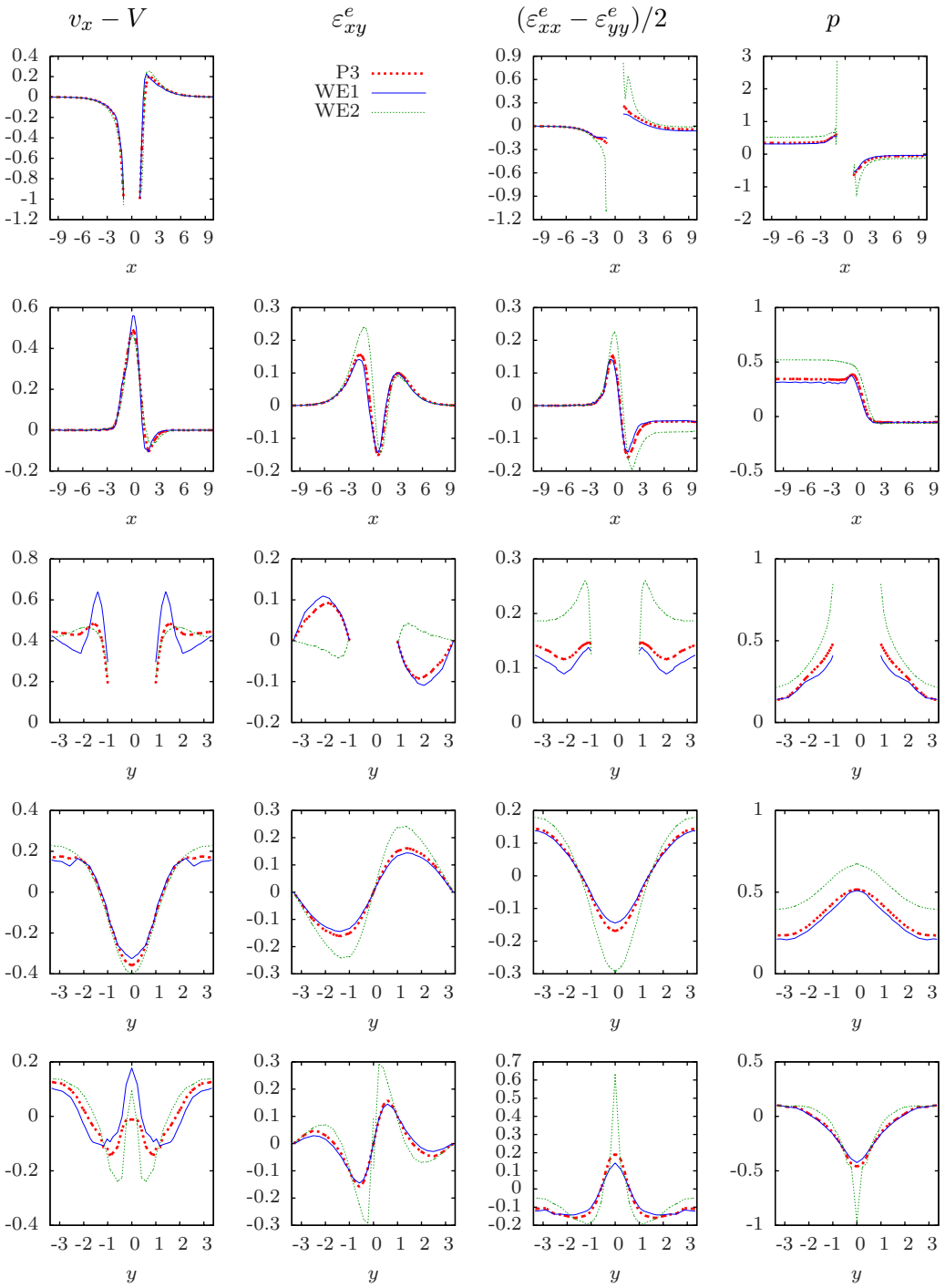


FIG. 7.16 – Effet d'une diminution (WE1, $We = 0.005$) et d'une augmentation (WE2, $We = 0.5$) de $We$ sur l'écoulement, par rapport à la configuration de référence P3 ($We = 0.05$) : de haut en bas, coupes suivant les axes 1 à 5. La composante $\varepsilon_{xy}$ est nulle sur l'axe 1, nous ne la traçons pas et indiquons à la place la légende commune à toutes les figures.

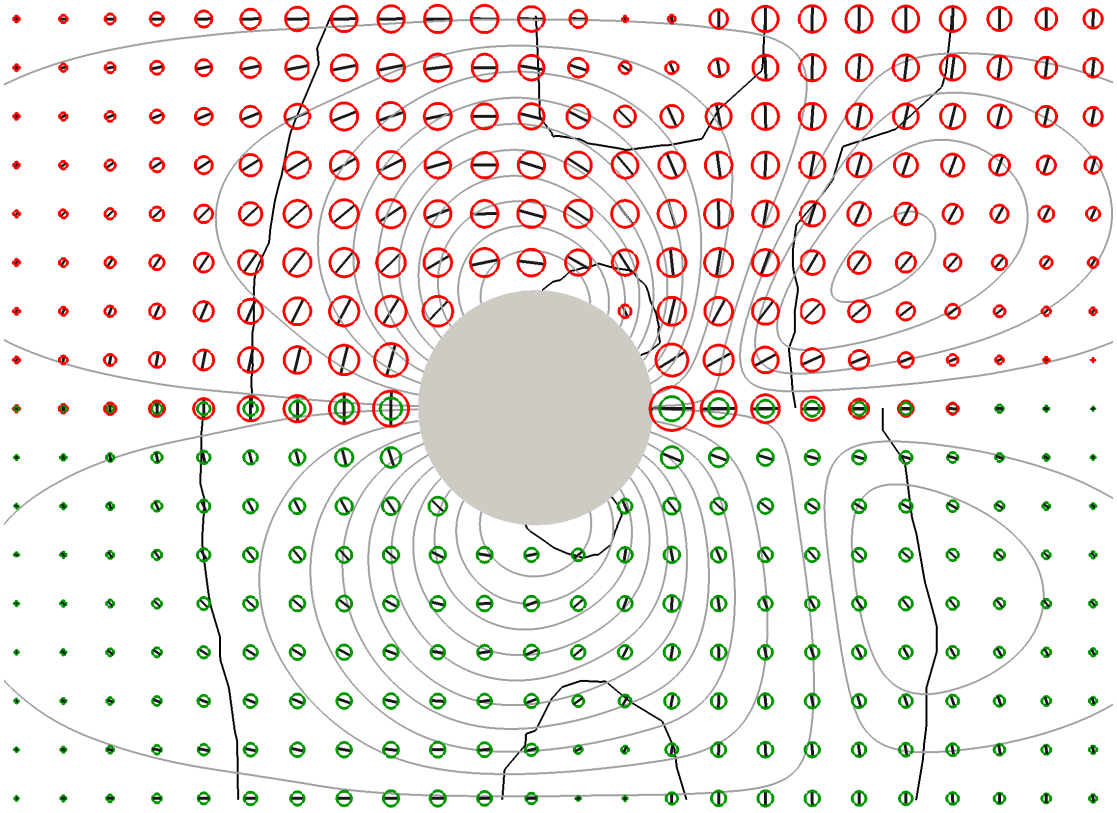

FIG. 7.17 – Comparaison entre P3 (haut, rouge, $\varepsilon_Y = 0.2$) et EPS1 (bas, vert, $\varepsilon_Y = 0.1$).

La valeur $C_F = 0.78$ correspond à une estimation faite sur l'expérience mousse humide, à partir du gradient de pression : expérimentalement, le gradient global de pression entre l'entrée et la sortie du canal n'est que peu modifié par la présence de l'obstacle, et ne dépend donc que de la friction des plaques. Sans obstacle, l'écoulement se réduit à l'écoulement bouchon, et le gradient de pression est donné par l'équation (7.2), dont on déduit

$$C_F = -\nabla p \frac{2\alpha}{We}.$$

Pour l'expérience humide, la valeur mesurée en $\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{m}^{-1}$ de $\nabla p$ est $-93 \pm 1\ \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{m}^{-1}$. Sa valeur adimensionnée est obtenue en multipliant par $L/(2\mu)$, d'où

$$C_F = 93\ \frac{2 \times 0.91}{0.125}\ \frac{1.5 \cdot 10^{-2}}{2 \times 13.1} = 0.78.$$

Tant la carte globale de $\varepsilon^e$ (figure 7.20) que les coupes (figure 7.22) montrent qu'il n'y a presque aucune différence entre P3 et CF1, ce qui justifie notre choix de négliger la friction des plaques. Néanmoins, une friction élevée engendre des effets importants : la carte de comparaison entre P3 et CF2 (figure 7.21) montre qu'une friction élevée entraîne

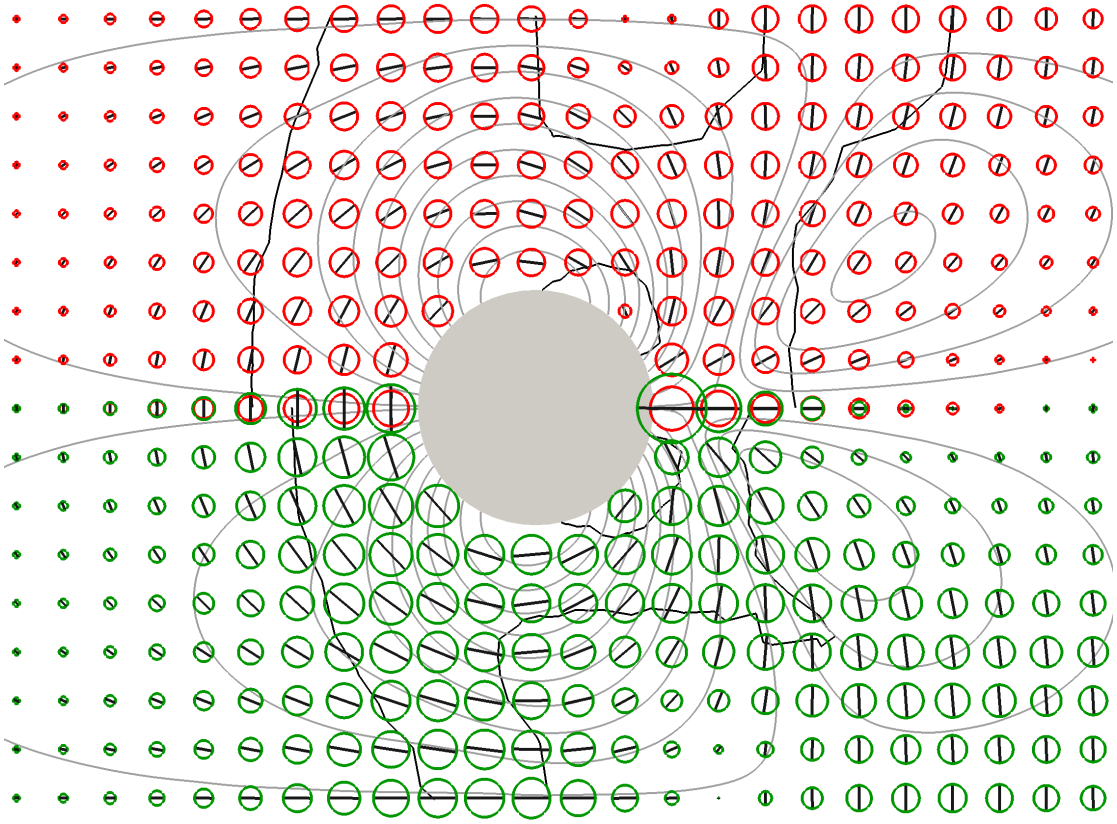

FIG. 7.18 – Comparaison entre P3 (haut, rouge, $\varepsilon_Y = 0.2$) et EPS2 (bas, vert, $\varepsilon_Y = 0.3$).

un sillage plus important derrière l'obstacle : la zone au-dessus du seuil est décalée vers la droite, ainsi que les points d'arrêt et les centres des zones de recirculation. Le sursaut de $v_x$ sur l'axe 1 et le minimum local de $v_x$ sont également décalés vers la droite et sont atténués. Nous relevons enfin un sillage de déformations normales, bien visible sur les coupes 1 et 2, qui s'additionne à celui observé pour $C_F = 0$.

### 7.3.4 Effet de $\alpha$

Le paramètre $\alpha$ peut varier dans l'intervalle $[0, 1]$, la valeur 0 correspondant à un modèle purement visqueux, et la valeur 1 à un modèle VEP purement élastique en dessous du seuil. Contrairement au cas 1D, l'algorithme est instable pour $\alpha = 1$. Nous comparons P3 à deux autres configurations :

- ALPHA1 : $\alpha = 0.66$, toutes choses égales par ailleurs
- ALPHA2 : $\alpha = 0.33$, toutes choses égales par ailleurs

Les cartes (figure 7.23) aussi bien que les coupes (figure 7.25) montrent que des variations de ce paramètre dans l'intervalle $[0.66, 0.91]$ exercent une influence quasiment nulle sur l'écoulement. C'est seulement pour la valeur plus faible $\alpha = 0.33$ que de légers effets se

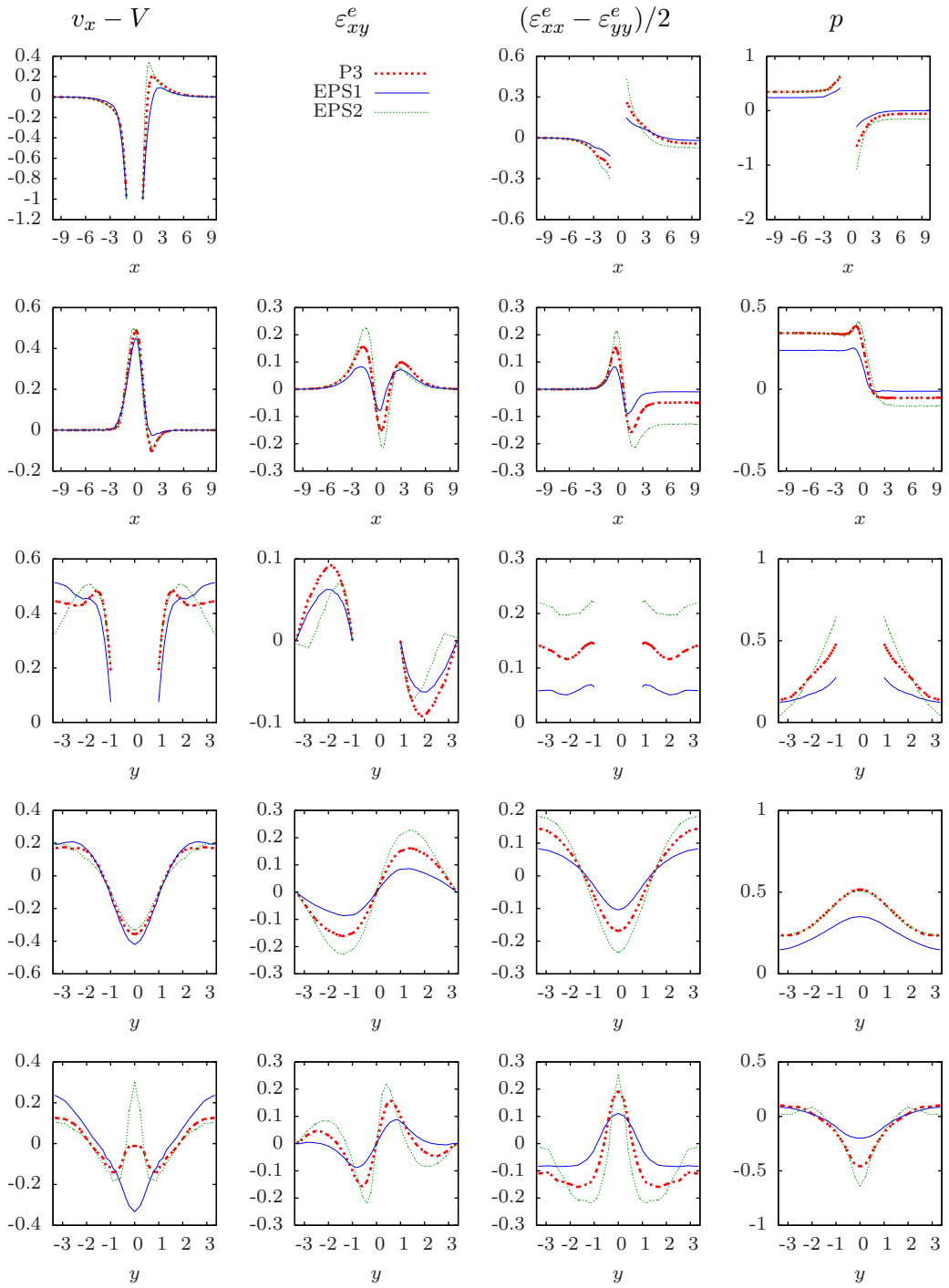


FIG. 7.19 – Effet d'une diminution (EPS1, $\varepsilon_Y = 0.1$ et d'une augmentation (EPS2, $\varepsilon_Y = 0.3$) par rapport à la configuration de référence P3 ($\varepsilon_Y = 0.2$). De haut en bas, coupes suivant les axes 1 à 5. La composante $\varepsilon_{xy}$ est nulle sur l'axe 1, nous ne la traçons pas et indiquons à la place la légende commune à toutes les coupes.

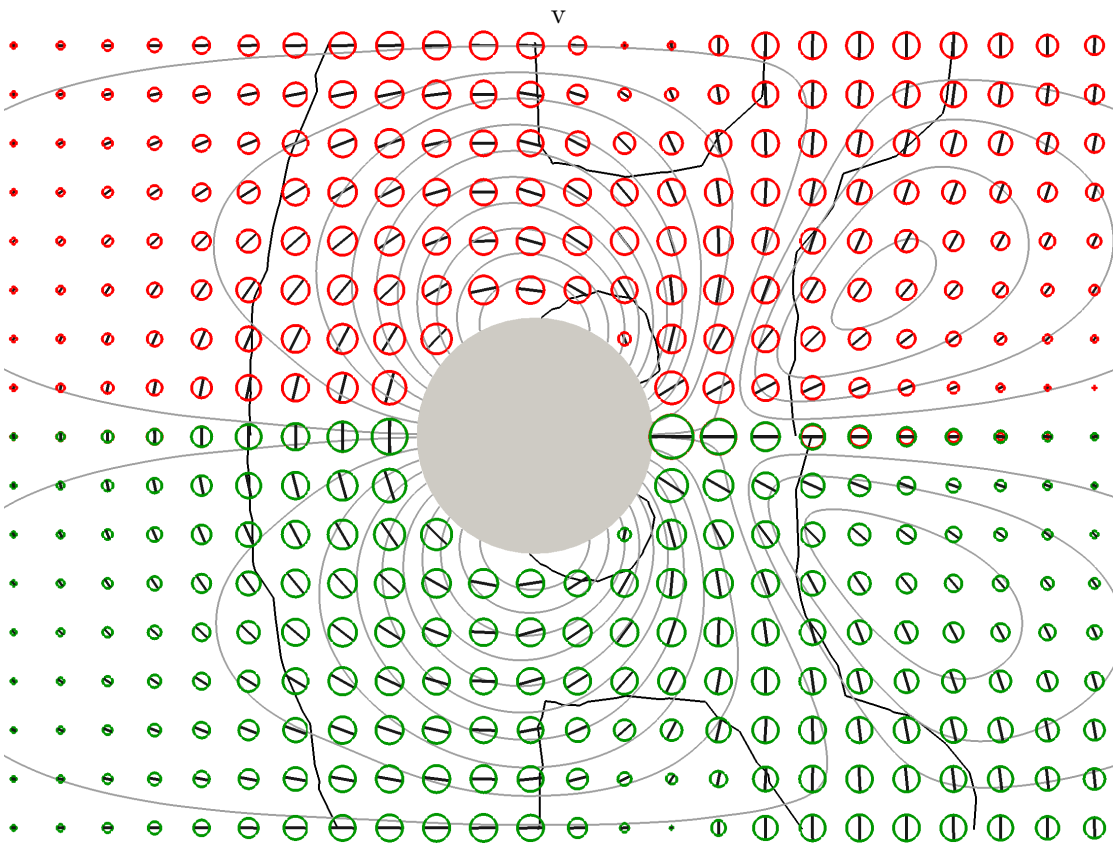


FIG. 7.20 – Comparaison entre P3 (haut, rouge, $C_F = 0$) et CF1 (bas, vert, $C_F = 0.78$).

font sentir : extension de la zone au-dessus du seuil (figure 7.24) ; augmentation globale de la norme de $\varepsilon^e$ (figure 7.25) ; décalage du point d'arrêt derrière l'obstacle et du sursaut vers l'aval, légère diminution de l'amplitude du sursaut.

### 7.3.5 Effet de $a$

Enfin, nous étudions l'effet du paramètre $a \in [-1, 1]$ de la dérivée objective (2.10) : $a = 0$ (P3) correspond à la dérivée corotationnelle, $a = 1$ à la dérivée convectée supérieure, et $a = -1$ à la convectée inférieure. Nous comparons P3 à deux autres configurations :

- A1 : $a = 1$, toutes choses égales par ailleurs
- A2 : $a = 0.5$, toutes choses égales par ailleurs

Nous n'explorons pas les valeurs négatives de $a$, qui se traduisent simplement par des différences des composantes normales de signe opposé par rapport aux valeurs positives. Les différentes valeurs de $a$ ne créent pas de différences visibles des champs que nous considérons, nous ne les reproduisons pas ici ; en particulier, la différence des composantes normales de la déformation reste inchangée. Dans le régime que nous considérons,

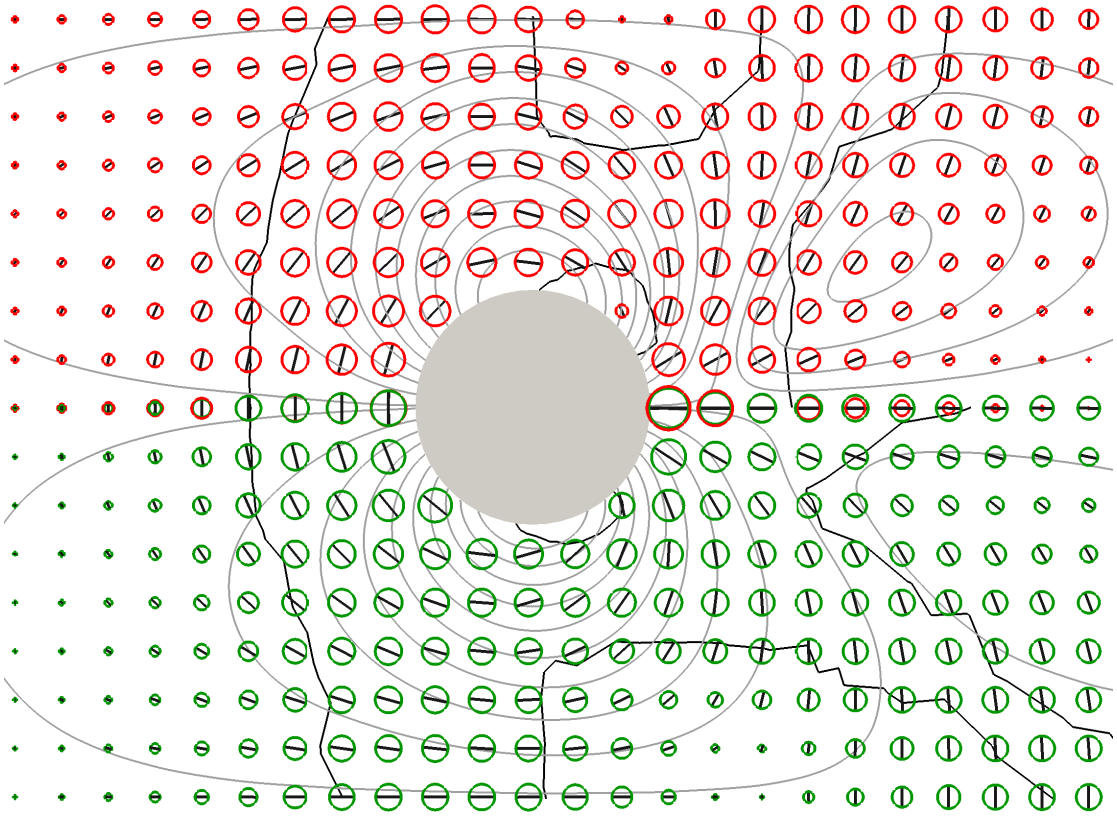

FIG. 7.21 – Comparaison entre P3 (haut, rouge, $C_F = 0$) et CF2 (bas, vert, $C_F = 7.8$).

le seul effet visible de $a$ est sur la trace de $\varepsilon^e$ : il apparaît une somme des déformations normales $(\varepsilon^e_{xx}+\varepsilon^e_{yy})/2$ dans le voisinage de l'obstacle en amont puis dans son sillage (Fig. 7.26) pour $a \neq 0$. Dans le cas de l'expérience sèche, l'écoulement est incompressible et la trace de $U$ est non nulle, certainement à cause d'une déformation non-affine. Il pourrait être intéressant de voir s'il est possible d'ajuster $a$ pour capturer cette trace.

## 7.4 Discussion des résultats

### 7.4.1 Le modèle

Le modèle que nous utilisons est composé d'éléments simples, mais leur combinaison engendre un comportement complexe, cohérent avec celui des mousses réelles que nous avons étudiées. Nous les resituons par rapport aux modèles existants.

– Formalisme tensoriel : il s'agit d'un élément essentiel de la modélisation : les écoulements de mousse font intervenir une déformation élastique qui ne peut pas être décrite par un scalaire ; en plus de la composante de cisaillement, des déformations normales apparaissent, y compris dans des écoulements de cisaillement [53].

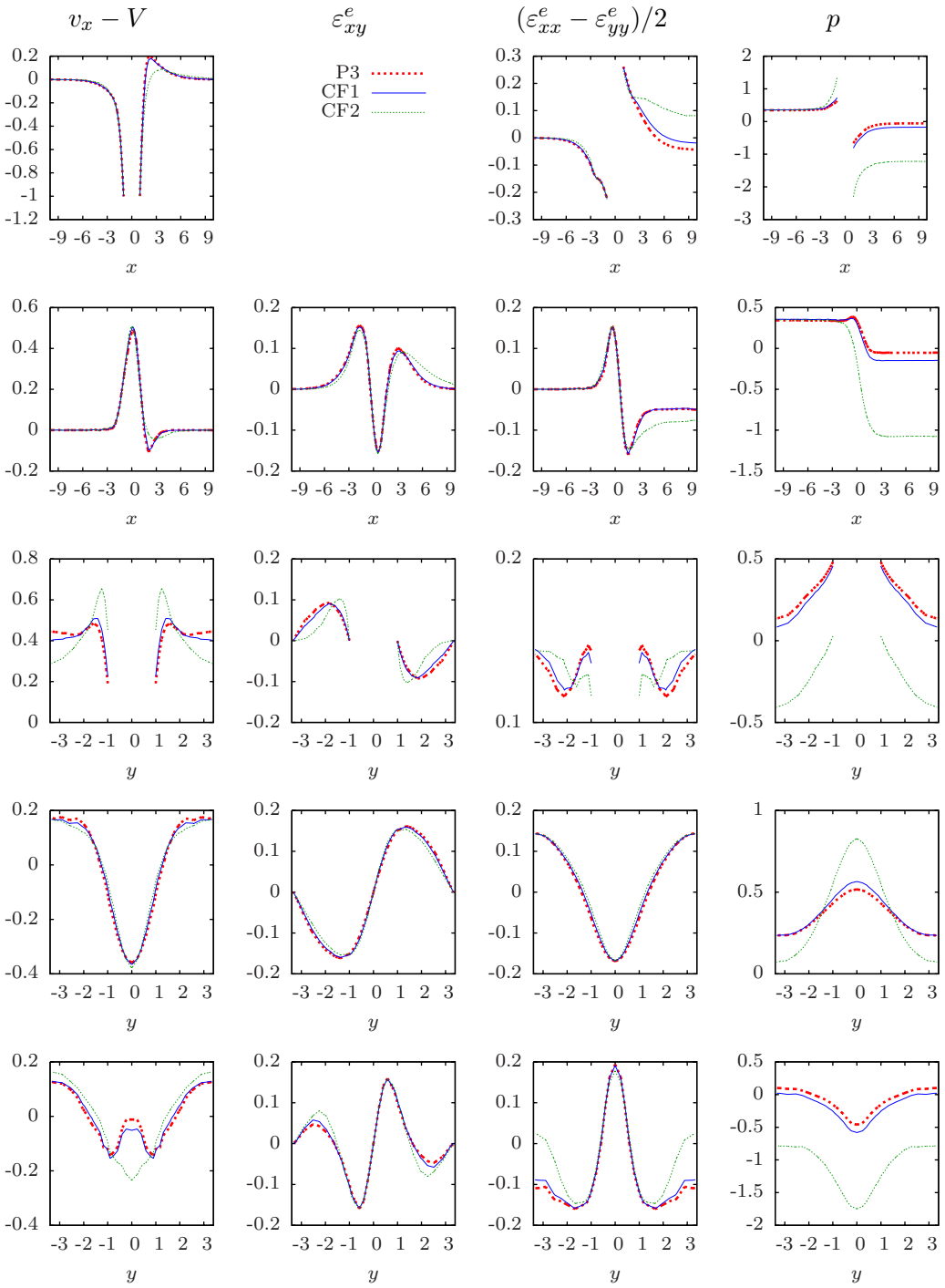


FIG. 7.22 – Effet d'une friction faible (CF1, $C_F = 0.78$) puis élevée (CF2, $C_F = 7.8$) par rapport à la configuration de référence P3 ($C_F = 0$). De haut en bas, coupes suivant les axes 1 à 5. La composante $\varepsilon_{xy}$ est nulle sur l'axe 1, nous ne la traçons pas et indiquons à la place la légende commune à toutes les coupes.

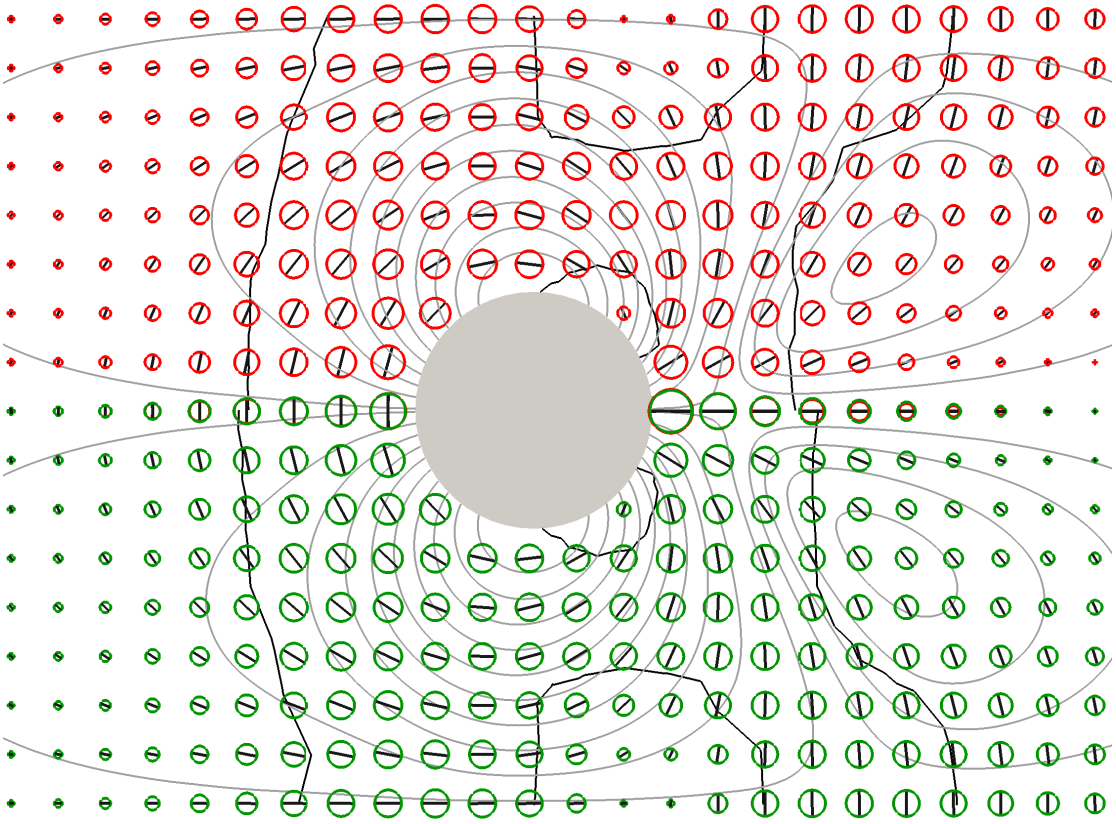

FIG. 7.23 – Comparaison entre P3 (haut, rouge, $\alpha = 0.91$) et ALPHA1 (bas, vert, $\alpha = 0.66$).

Le cadre tensoriel impose l'utilisation d'une dérivée objective pour la description de l'évolution du tenseur de déformation élastique ; cet outil, qui fait interagir entre elles les composantes du tenseur de déformation élastique, permet de capturer les variations de son orientation lorsque la mousse contourne l'obstacle. La comparaison aux expériences ont montré que cet aspect était bien pris en compte.

– Élasticité linéaire : certains modèles [13] intègrent la possibilité d'utiliser une élasticité non-linéaire. Cela ne nous a pas semblé nécessaire pour les mousses que nous avons étudiées : les plus grandes déformations observées sur les mousses liquides sont de l'ordre de $U_Y = 0.4$, et l'approximation linéaire reste valable.
– Friction des plaques linéaire : nous avons fait le choix d'une friction des plaques linéaire, à la différence de modèles scalaires [59] qui ont intégré une friction en loi de puissance, plus conforme à la réalité physique [78]. Néanmoins, dans le régime basse vitesse que nous étudions, la friction des plaques est négligeable et le fait de la choisir linéaire ou en loi de puissance importe peu.
– Dissipation plastique : dans le modèle, elle est affine par rapport au taux de défor-

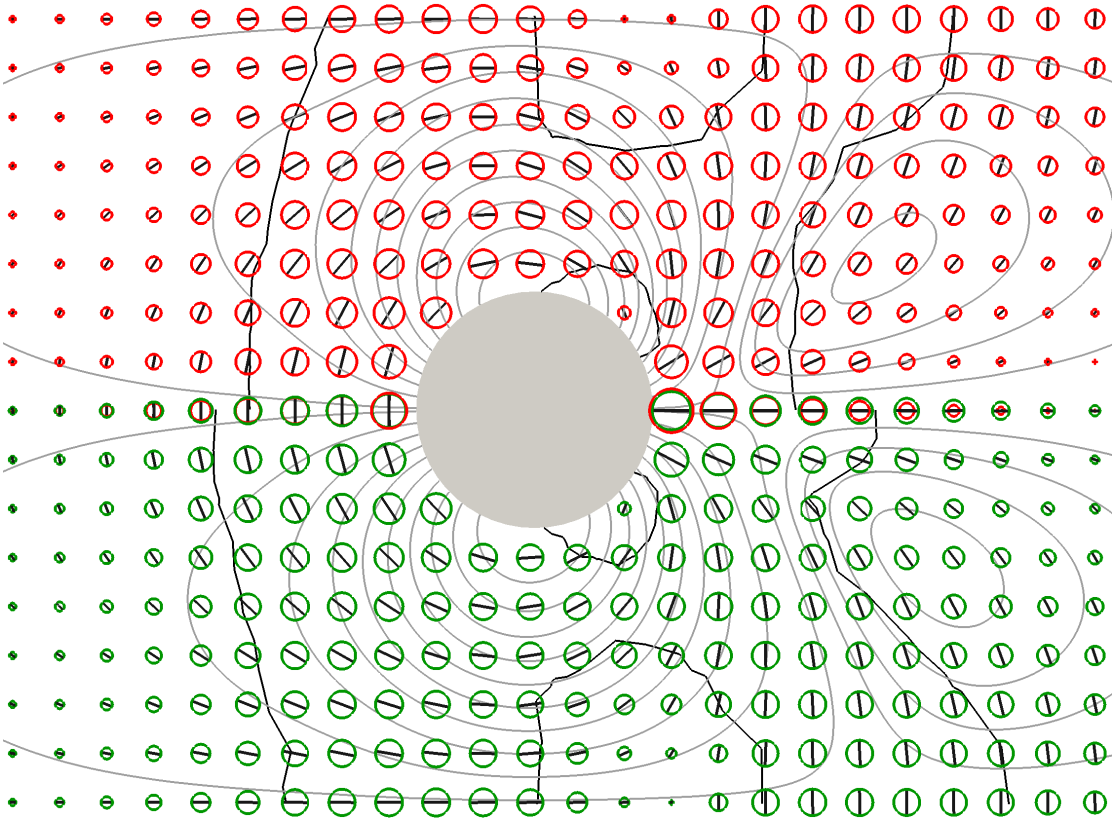

FIG. 7.24 – Comparaison entre P3 (haut, rouge, $\alpha = 0.91$) et ALPHA2 (bas, vert, $\alpha = 0.33$).

mation. Des expériences de cisaillement [59] montrent qu'une dissipation plastique en loi de puissance de type Herschel-Bulkley est plus appropriée à haut taux de cisaillement ; cette dissipation est alors en concurrence avec la friction des plaques. Ce type de dissipation plastique a été intégrée au modèle [93], mais pas encore à l'algorithme de résolution.

– Plasticité abrupte : nous considérons que la plasticité n'apparaît qu'au-dessus du seuil de déformation élastique $\varepsilon_Y$, ce qui est adapté aux mousses monodisperses employées dans les expériences sèches et humides. D'autres modèles [70, 71] proposent d'utiliser une plasticité dit progressive, où la transition entre le régime élastique et le régime plastique se fait plus progressivement, afin de pouvoir prendre en compte une distribution en taille de bulles plus large.

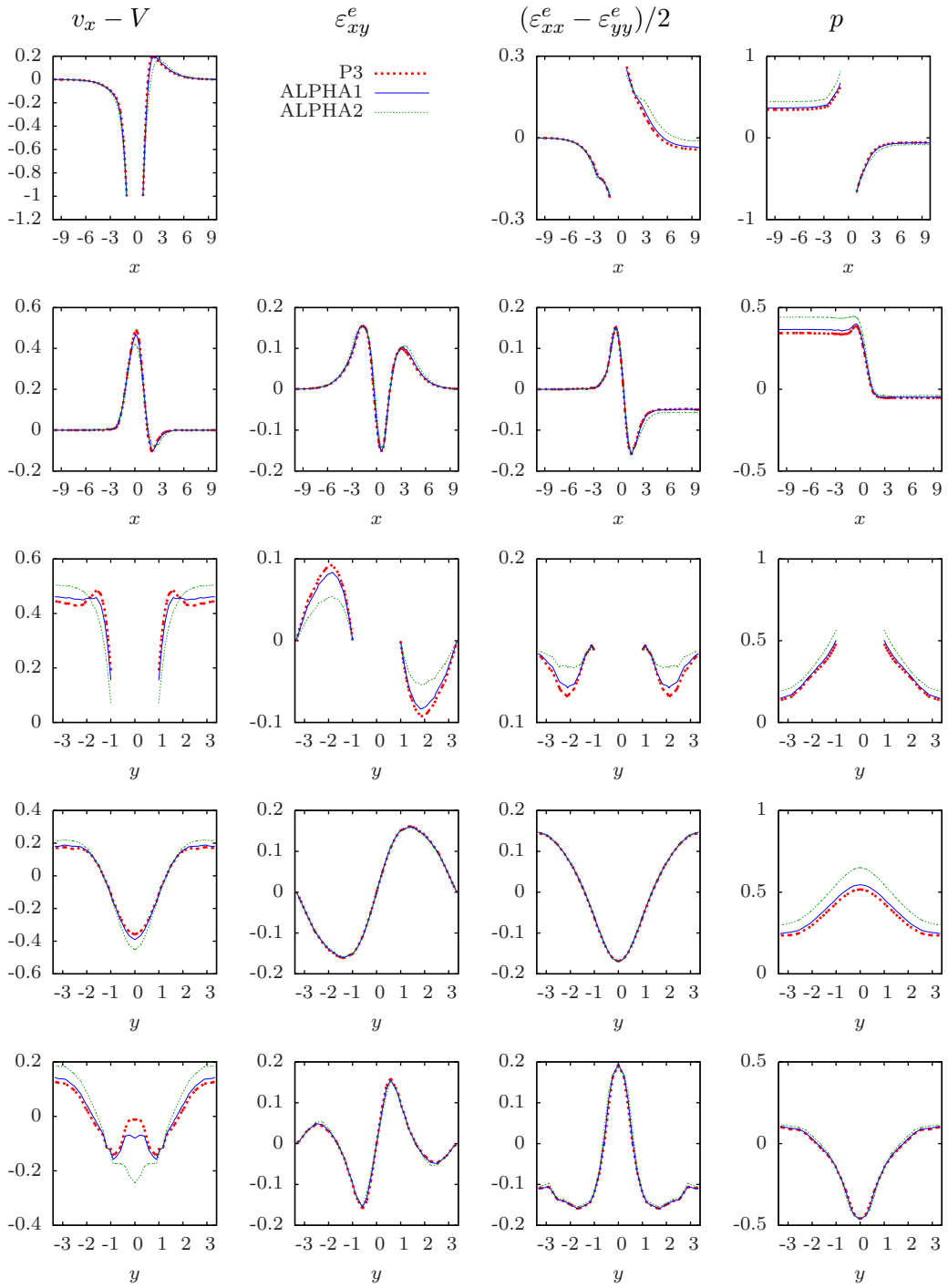


FIG. 7.25 – Effet de variation de $\alpha$ : A1, $\alpha = 0.66$ et A2, $\alpha = 0.33$ par rapport à la configuration de référence P3 ($\alpha = 0.91$). De haut en bas, coupes suivant les axes 1 à 5. La composante $\varepsilon_{xy}$ est nulle sur l'axe 1, nous ne la traçons pas et indiquons à la place la légende commune à toutes les coupes.

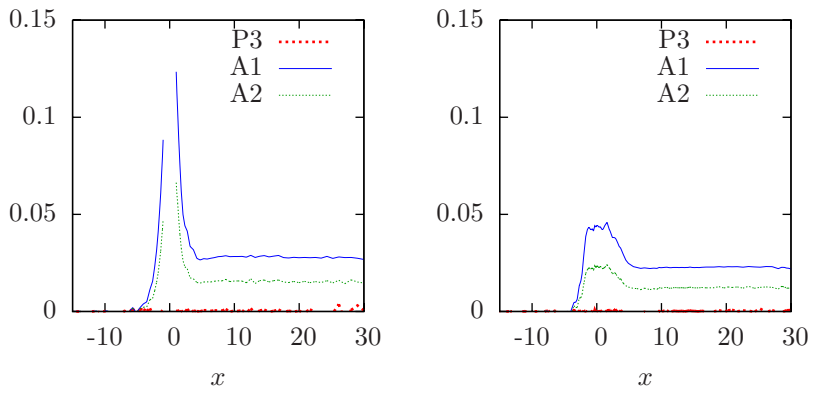


FIG. 7.26 – Effet du paramètre $a$ de la dérivée objective (2.10) sur la somme des déformations normales $(\varepsilon^e_{xx} + \varepsilon^e_{yy})/2$ le long des axes 1 (à gauche) et 2 (à droite) : $a = 0$ (P3) ; $a = 0.5$ (A1) ; $a = 1$ (A2).

### 7.4.2 Paramètres

#### Choix des paramètres

Nous justifions le choix des paramètres du modèle pour la comparaison avec les expériences :

- friction des plaques négligeable : nous l'avons confirmé par le fait qu'une friction des plaques cohérente avec le gradient de pression observé dans l'expérience humide n'entraîne pas de modification visible de l'écoulement ;
- régime basse vitesse : il est atteint lorsque le temps caractéristique de l'écoulement $L/V$ est grand devant le temps caractéristique $\lambda$ de la mousse, ce qui correspond à des petites valeurs de $We = \lambda V/L$. Comme nous négligeons la friction, ce paramètre est le seul à dépendre de la vitesse. L'exploration des paramètres a mis en évidence le fait que les solutions stationnaires du modèle varient moins pour $We$ petit, ce qui semble correspondre au régime basse vitesse identifié par Benjamin Dollet. Une fois ce régime atteint, la valeur précise de $We$ est difficile à identifier par simple comparaison à des mesures expérimentales en régime stationnaire. Dans la comparaison avec l'expérience de Debrégeas (chapitre 5), nous avons pu le faire en étudiant le couplage entre l'élasticité de la mousse et la friction des plaques en régime transitoire : à cause de cette dernière, la durée du transitoire variait suivant la position dans l'entrefer du rhéomètre (section 5.4.3, page 71). Dans ses expériences, Christophe Raufaste a testé l'effet de sauts de vitesse sur l'écoulement de la mousse ; par une démarche similaire, l'analyse du régime transitoire consécutif au saut permettrait d'identifier plus précisément la valeur de $We$. Notons enfin que ce régime basse vitesse n'est pas quasi-statique, puisque les solutions continuent d'évoluer lorsqu'on prend des valeurs de plus en plus petites de $We$, ce qui se voit aussi avec des expériences à très basse vitesse [45].

- Le rôle de la viscosité $\eta_1$ : cette viscosité, responsable d'une dissipation à l'œuvre au-dessous et au-dessus du seuil, et dont nous estimons la valeur *a priori* moins importante que celle de la viscosité effective $\eta_2$, semble jouer un rôle secondaire dans cet écoulement, même lorsque sa valeur est supérieure à celle de $\eta_2$ (cas $\alpha = 0.33$). Le cas $\eta_1 \gg \eta_2$ ($\alpha \to 0$) correspond au cas newtonien, donc inapproprié pour les mousses. A partir du moment où $\eta_1$ est de l'ordre de $\eta_2$, ou négligeable devant $\eta_2$ ($0.5 \leq \alpha \leq 1$), la valeur précise de $\alpha$ importe peu. De même, expérimentalement, les variations de la viscosité de la solution sont quasiment sans effet sur l'écoulement dans cette géométrie [26].
- le paramètre $a$ de la dérivée objective (2.10) : dans le régime que nous avons étudié, le seul effet de $a$ est de modifier la trace de $\varepsilon^e$. Nous avons choisi $a = 0$ de manière à ce que le tenseur de déformation élastique $\varepsilon^e$ soit à trace nulle, et que la variable $p$ du modèle coïncide avec la pression physique, ceci afin de simplifier l'analyse. Il faut noter que dans l'expérience sèche, alors même qu'elle est incompressible, la trace de $U$ est non-nulle. Des valeurs non-nulles de $a$ pourraient capturer cette trace mesurée expérimentalement. Par ailleurs, pour les grands $We$, l'écoulement semble plus stable pour $a \neq 0$ [92], mais ce régime n'a pas été étudié ici.
- Il nous reste à discuter de l'effet de la déformation seuil $\varepsilon_Y$. Dans le régime basse vitesse, toutes les caractéristiques de l'écoulement sont sensibles aux variations de ce paramètre : la norme de $\varepsilon^e$, la forme des lignes de courant de la vitesse dans le référentiel de la mousse, la position et l'amplitude du sursaut derrière l'obstacle, le point d'arrêt derrière l'obstacle, de manière générale l'asymétrie de l'écoulement. En particulier, c'est ce paramètre, plus que $We$, qui détermine l'amplitude du sursaut (cf. infra la discussion sur ce sujet). Il est remarquable que nous ayons pu trouver une valeur unique de ce paramètre qui permette de capturer avec un bonne précision l'ensemble de ces caractéristiques. Grâce à la grande sensibilité du modèle aux variations de $\varepsilon_Y$, nous avons pu identifier sa valeur à $0.15 \pm 0.03$ pour la mousse humide. Mieux encore, nous avons pu prédire sans paramètre ajustable l'expérience sèche.

### Choix de l'adimensionnement

Nous rappelons les deux choix que nous avons retenus pour la contrainte caractéristique $\Sigma$ : avec $\Sigma = (\eta_1 + \eta_2)V/L$, nous obtenons le jeu de paramètres sans dimension $(Bi, We, \alpha)$ ; avec $\Sigma = 2\mu$, nous obtenons le jeu de paramètres sans dimension $(\varepsilon_Y, We, \alpha)$. La première possibilité est adaptée à la description de nombreux fluides –elle est classiquement utilisée pour les modèles de Navier-Stokes, Oldroyd, Bingham– mais c'est la deuxième qui nous paraît la plus appropriée pour décrire la mousse dans le régime basse vitesse où nous l'observons :

- elle fait apparaître naturellement le tenseur de déformation élastique $\varepsilon^e$, directement comparable au tenseur de déformation statistique $U$ mesuré en expérience, sans avoir besoin d'évaluer le module élastique $\mu$ ;
- de manière concomitante, elle fait apparaître le paramètre sans dimension $\varepsilon_Y$, indépendant de la vitesse, et directement comparable à la déformation seuil $U_Y$

mesurée en expériences ;
- tant qu'on néglige la friction des plaques, seul le nombre de Weissenberg $We$ dépend de la vitesse (sinon, elle apparaîtrait dans $Bi$) ;
- dans le régime basse vitesse (déterminé par une faible valeur de $We$), l'exploration des paramètres a montré que c'est essentiellement $\varepsilon_Y$ qui pilote le comportement du modèle.

### Valeurs des paramètres physiques

Le jeu de paramètres P1 utilisé pour la comparaison avec l'expérience humide correspond aux valeurs suivantes des paramètres physiques :

$$\varepsilon_Y = 0.15 \quad \lambda = 0.2 \text{ s} \quad \eta_1 = 0.26 \text{ Pa} \cdot \text{s} \quad \eta_2 = 2.6 \text{ Pa} \cdot \text{s} \quad \mu = 13.1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \quad \beta = 0.$$

- La valeur de $\mu$ est indirectement estimée dans les expériences.
- Expérimentalement, nous trouvons $\sqrt{2}U_Y = 0.2$, une valeur supérieure à $\varepsilon_Y = 0.15$ (le facteur $\sqrt{2}$ est dû des définitions différente de la norme de tenseur, cf. chapitre 2, éq. (2.36), p. 32). Ces valeurs ne sont pas contradictoires dans la mesure où $\varepsilon_Y$ désigne la valeur de la déformation élastique à partir de laquelle la norme de $\varepsilon^e$ peut dépasser $\varepsilon_Y$ : avec le jeu de paramètres P1, la valeur maximale de $|\varepsilon^e|$ sur les points de grille où les valeurs expérimentales sont disponibles est $\varepsilon^e_{max} = 0.23$.
- les temps caractéristiques liés à la plasticité dans l'expérience [23] ont été évalués dans [57] : la durée de l'échange de films local après un T1 est évalué à $\tau_{T1} = 0.1$ s, tandis que l'échelle de temps pour la relaxation de la contrainte après un T1 est évaluée à $\tau_{relax} = 10\ \tau_{T1} = 1$ s, une valeur cohérente avec celle que nous obtenons pour $\lambda$.
- Les valeurs des viscosités $\eta_1$ et $\eta_2$ peuvent sembler importantes par rapport à celles des fluides usuels : ainsi la viscosité $\eta_2$ est plus de $10^4$ fois plus importante que celle de l'eau. Comme le cisaillement a lieu dans des zones spatialement petites, les viscosités effectives sont beaucoup plus importantes que celles de la phase continue, ce qui justifie cette valeur élevée. Expérimentalement, la dissipation visqueuse est difficile à mesurer à partir d'images, car elle est liée aux écoulements de liquide dans les films. Les mesures rhéométriques (cf. introduction, section 1.2.1 page 5) permettent d'évaluer la dissipation visqueuse à faible amplitude, celle qui correspond à la viscosité $\eta_1$ [18].
- La valeur $\beta = 0$ n'est pas physique, mais nous avons montré qu'ici, cette friction peut être négligée (cf. supra, section 7.3.3). Pour autant, nous pouvons l'inclure si nécessaire.

Les paramètres du modèle utilisés pour la comparaison aux expériences sont donc réalistes, ce qui renforce la validité de notre approche.

**Cohérence avec les paramètres utilisés pour la comparaison avec les expériences de cisaillement**

Le jeu de paramètres P1 utilisé pour la comparaison avec l'expérience humide [31] correspond aux valeurs suivantes des paramètres physiques :

$$\varepsilon_Y = 0.15 \quad \lambda = 0.2 \text{ s} \quad \eta_1 = 0.26 \text{ Pa} \cdot \text{s} \quad \eta_2 = 2.6 \text{ Pa} \cdot \text{s} \quad \mu = 13.1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \quad \beta = 0,$$

sachant que la vitesse caractéristique de l'écoulement est $V = 1$ cm/s et la longueur caractéristique est $L = 1.5$ cm. L'expérience est réalisée en configuration eau-verre, avec une mousse monodisperse (aire de bulle de 16 mm$^2$) de fraction liquide $\phi = 7\%$.

Le jeu de paramètres utilisé pour la comparaison à l'expérience de cisaillement de Debrégeas [23] correspond aux paramètres physiques suivants :

$$\varepsilon_Y = 0.25 \quad \lambda = 1.2 \,\text{s} \quad \eta_1 = 0 \quad \eta_2 = 13.1 \,\text{Pa} \cdot \text{s} \quad \mu = 10.9 \,\text{N} \cdot \text{m}^{-2} \quad \beta = 613 \,\text{Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1},$$

avec une vitesse caractéristique $V = 0.25$ mm/s et une longueur caractéristique $L = 5.1$ cm. L'expérience est réalisée en configuration verre-verre, avec une mousse bidisperse (diamètres de bulle de 2 et 2.7 mm. de fraction liquide effective $\phi = 5.2\%$.

Les mousses utilisées dans les deux expériences ont des fractions liquides très proches donc leurs propriétés rhéologiques devraient être similaires. Notamment les déformations maximales mesurées sont comparables : $U_Y = 0.22$ pour l'expérience de Debrégeas et $U_Y = 0.2$ pour l'expérience humide. Comment expliquer alors l'écart entre les valeurs des paramètres utilisés pour la résolution du modèle ?

- Tout d'abord, l'expérience de Debrégeas est réalisée à très basse vitesse, à $We = 0.006$ contre $We = 0.125$ pour l'expérience humide, or comme nous l'avons vu, l'effet d'une diminution de $We$ est de diminuer globalement la valeur de $|\varepsilon^e|$. Ceci expliquerait pourquoi il a été nécessaire de prendre une valeur de $\varepsilon_Y$ plus élevée pour l'expérience de Debrégeas que pour l'expérience humide (0.25 contre 0.15). De fait, pour la comparaison avec l'expérience de Debrégeas, $|\varepsilon^e|$ ne dépasse que de peu $\varepsilon_Y$ (Fig. 5.9), sa valeur maximale étant 0.33, contre 0.46 pour la comparaison avec l'expérience humide. Ceci souligne encore une fois la différence entre $\varepsilon_Y$ et $U_Y$ : la valeur minimale de $|\varepsilon^e|$ pour qu'il y ait plasticité augmente à basse vitesse, tandis que la valeur maximale de la déformation varie peu. Ceci est un argument en faveur de l'utilisation du modèle [70] à très basse vitesse, du modèle [92] à haute vitesse, et des deux dans le régime "basse vitesse" autour de $We = 1$.
- Pour l'expérience de Debrégeas, nous avons évalué avec une bonne précision la valeur $\lambda = 1.2$ s, une valeur cinq fois supérieure à celle que nous avons choisie pour l'expérience humide. Ceci a été rendu possible par les mesures réalisées en régime transitoire par Janiaud et Graner [53] : nous avons mis en évidence (chapitre 5) un lien direct entre le produit $\lambda\beta$ et un phénomène transitoire facilement mesurable, ce qui, connaissant une estimation de $\beta$, a permis de déterminer $\lambda$. Nous rappelons néanmoins que cette estimation a été réalisée avec une modélisation insuffisante de la friction des plaques (cf. supra), et que nous devons donc considérer la valeur obtenue avec circonspection.

Pour l'expérience mousse humide, nous ne disposions pas de données transitoires et nous n'avons pu mener ce type d'identification. La valeur que nous avons choisie pour *We* était simplement celle pour laquelle l'accord avec l'expérience était le meilleur.
L'écart observé pour la valeur de $\lambda$ est-il significatif ? Est-il dû à aux conditions expérimentales, à la modélisation ? Nous n'avons pas les moyens d'y répondre à l'heure actuelle ; pour y parvenir, nous devrions 1) inclure dans le modèle et l'algorithme de résolution une modélisation correcte de la friction des plaques, 2) analyser la réponse transitoire de la mousse dans l'expérience humide, 3) réanalyser l'expérience de Debrégeas avec la nouvelle modélisation.

### 7.4.3 Comparaison avec l'expérience

#### Vitesse

Le seul écart qualitatif est observé pour la comparaison à l'expérience humide : la coupe de $v_x$ le long de l'axe 3 (Fig. 7.4), dans l'axe de l'obstacle, perpendiculairement à l'écoulement. En partant du bord de l'obstacle, la composante $v_x$ expérimentale augmente puis diminue lorsqu'on se rapproche du bord, alors que la composante $v_x$ théorique ne diminue pas. Une explication possible serait la présence d'une force de friction visqueuse aux bords du canal (distincte de la force de friction des plaques) que nous n'avons pas prise en compte dans les conditions aux limites de glissement, mais dans ce cas, pourquoi l'effet de cette friction ne se fait-il sentir que sur l'axe 3 et pas sur les axes 4 et 5 ? De plus, le modèle prédit un profil correct de $v_x$ le long de l'axe 3 pour l'expérience sèche (Fig. 7.10). Une valeur légèrement plus élevée de $\varepsilon_Y$ permettrait peut-être de mieux prendre en compte cet aspect de l'écoulement, mais le sursaut serait moins bien prédit.

#### Déformation élastique

L'accord est très bon pour la comparaison à l'expérience sèche. Avec l'expérience humide, un écart des valeurs de contraintes normales en amont et en aval est bien visible sur la carte globale (Fig. 7.6) et sur les coupes (Fig. 7.4). L'étirement en amont est interprété soit comme une pré-déformation due à la préparation de la mousse dans la chambre de bullage, soit comme un effet de la perte de charge due à la friction des plaques [26]. Il n'est pas reproduit par le modèle, y compris en incluant une friction des plaques, ce qui nous conduit à privilégier la première hypothèse. Des composantes normales non nulles s'observent également loin en aval de l'obstacle, pour le modèle et les expériences sèche et humide. Dans le cas du modèle, cet étirement de la mousse en aval est causé par la présence de l'obstacle, et nous pouvons supposer qu'il en est de même pour l'expérience. Cet étirement n'aurait donc pas la même origine que celui observé en entrée du canal. Les différences de contraintes normales ne sont modifiées qu'au niveau de l'obstacle : avant et après, elles sont advectées sans modification. Elles n'ont pas de raison de s'annuler aux extrémités du canal, contrairement à $\dot{\varepsilon}_p$ et $\nabla\mathbf{v}$ qui s'y annulent car l'influence de l'obstacle a une portée finie.

**Taux de déformation plastique**

Le modèle prédit correctement l'orientation et la répartition spatiale des ré-arrangements plastiques (Fig. 7.8 et 7.13), mais a tendance à les surévaluer, notamment pour l'expérience humide. L'accord est meilleur pour l'expérience sèche. Nous ne disposons pas malheureusement de mesures dans le voisinage immédiat de l'obstacle pour le confirmer.

**Pression**

Dans le modèle, nous avons pris $a = 0$, de sorte que $p$ correspond bien à la pression physique, définie comme l'opposé de la trace du tenseur des contraintes totales divisée par 2. La mesure de pression n'est disponible que pour l'expérience humide. Même si certains aspects qualitatifs –maximum de pression en amont, minimum en aval, asymétrie– sont bien reproduits par le modèle, la comparaison avec l'expérience est moins bonne que pour les autres quantités : avec le modèle, l'obstacle engendre une perte de charge importante entre l'amont et l'aval, ce qui n'est pas le cas pour l'expérience. L'incorporation au modèle d'une dissipation plastique non-linéaire de type Herschel-Bulkley [93] résoudra peut-être ce problème.

### 7.4.4 Le sursaut de la vitesse

Enfin, nous discutons du sursaut de la vitesse dans le sillage de l'obstacle, un des aspects les plus remarquables de l'écoulement visco-élasto-plastique que nous étudions (Fig. 7.27). Ce phénomène a déjà été mis en évidence pour des écoulements viscoélastiques, expérimentalement [2] et numériquement [32, 1] : il apparaît pour des fluides et des modèles (par exemple FENE-CR mais pas Oldroyd-B) à viscosité élongationnelle bornée, et pour des $We$ élevés, de sorte que la déformation élastique ne s'annule pas.

Pour comparer avec le modèle VEP, nous avons calculé des écoulements visqueux, viscoplastique, et viscoélastique en adaptant les paramètres du modèle :

- écoulement visqueux : $\alpha = 0$, $We = 0$, $\varepsilon_Y = 0$
- écoulement viscoplastique : l'adimensionnement utilisé pour la comparaison aux expériences (avec la contrainte caractéristique $\Sigma = 2\mu$) ne permet pas de prendre $We = 0$, aussi, nous avons d'abord converti le jeu de paramètres P1 utilisé pour la comparaison avec l'expérience humide dans l'autre adimensionnement (avec $\Sigma = (\eta_1 + \eta_2)V/L$), ce qui donne

$$We = 0.125 \quad \alpha = 0.91 \quad Bi = 2\alpha\varepsilon_Y/We = 2.19 \quad C_F = 0,$$

  puis nous avons résolu le modèle en prenant ce jeu de paramètres avec $We = 0$.
- écoulement viscoélastique : nous avons pris $\varepsilon_Y = 0$ dans le jeu de paramètres P1.
- nous avons également calculé un écoulement VEP vingt fois plus lent que l'expérience humide ($We = 0.125/20 = 0.00625$).

Les résultats sont présentés figure 7.27. Les écoulements visqueux et viscoplastique sont symétriques, ce qui est toujours le cas en régime non turbulent ; de manière surprenante, c'est également le cas de l'écoulement viscoélastique, qui est même indiscernable

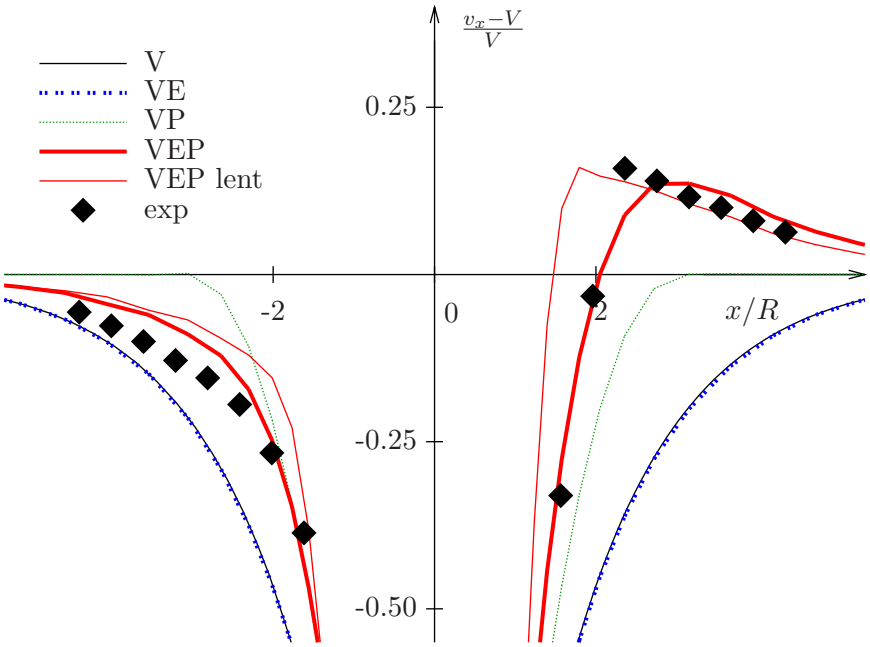


FIG. 7.27 – Écoulement autour d'un obstacle circulaire pour différents modèles. Vitesse adimensionnée $(v_x - V)/V$ le long de l'axe 1 ($y = 0$). Nous comparons l'expérience humide (exp), le modèle VEP avec les paramètres P1, des écoulements visqueux (V), viscoplastique (VP), viscoélastique (VE), et visco-élasto-plastique à très basse vitesse (VEP lent). La valeur précise des paramètres est donnée dans le texte.

de l'écoulement visqueux. A l'opposé, l'écoulement VEP à très basse vitesse reste asymétrique.

Ainsi, physiquement, dans l'écoulement VEP, des déformations élastiques sont présentes dans le sillage de l'obstacle à vitesse arbitrairement faible. La plasticité empêche l'augmentation de la déformation élongationnelle, ce qui casse la symétrie amont/aval (Fig. 7.27).

Ce résultat confirme la singularité des écoulements VEP par rapport aux écoulements V, VP, et VE, bien reproduite par le modèle que nous proposons.

### 7.4.5 Valeur prédictive du modèle

La valeur prédictive du modèle nous paraît bien établie dans le régime basse vitesse que nous avons étudié : nous avons obtenu un accord qualitatif et quantitatif entre le modèle et l'expérience pour des champs vectoriels et tensoriels indépendants, dans un écoulement complexe, en utilisant des paramètres du modèle cohérents avec les propriétés physiques de la mousse. Le modèle est également capable de capturer un comportement particulièrement singulier de la mousse, le sursaut de vitesse derrière l'obstacle persistant

à vitesse arbitrairement petite, hors de portée des modèles non-newtoniens usuels.

Pour l'exploration d'écoulements plus rapides, il est probable qu'il faille intégrer au modèle des mécanismes de dissipation plastique et de friction des plaques non-linéaires, mais ces modifications pourront se faire sans modifications majeures du modèle [93] ou de l'algorithme de résolution. A basse vitesse, la plasticité devient progressive [71], et le modèle [70] semble plus approprié. Sa résolution numérique paraît plus difficile : même s'il semble possible de s'inspirer de l'algorithme que nous avons développé pour la résolution du modèle [92], le comportement numérique du modèle est moins prévisible dans la mesure où il n'est pas comme lui basé sur les modèles d'Oldroyd et de Bingham.

L'effet du désordre (*i.e* la distribution de la taille des bulles) est une question ouverte, comme l'ont montré Katgert *et al.* [59] : ce paramètre modifie le comportement à haut taux de cisaillement de la mousse, dans le régime fluide, et plus précisément l'indice de puissance utilisé pour ajuster le modèle d'Herschel-Bulkley aux profils de vitesse mesurés. L'effet du désordre pourrait donc être bien décrit par le modèle [93] qui intègre la possibilité de faire varier cet indice de puissance. Dans une étude récente, Dollet [27] a néanmoins montré que le désordre n'exerçait pas une influence significative sur l'écoulement d'une mousse sèche en constriction, un écoulement complexe proche de celui que nous étudions. Ainsi, le fait que nous ne prenions pas en compte ce paramètre ne disqualifie en aucune manière notre approche.

## 7.5 Conclusion

Nous avons d'abord rappelé les caractéristiques des deux expériences auxquelles nous nous sommes intéressés : une expérience réalisée avec une mousse humide et une déformation seuil petite, et une expérience réalisée avec une mousse sèche et une déformation seuil plus élevée, toutes les deux en régime basse vitesse.

Ensuite, nous avons comparé directement le modèle à ces expériences : tout d'abord en ajustant les paramètres du modèle de manière à reproduire au mieux l'écoulement de la mousse humide ; nous sommes parvenus à en capturer toutes les spécificités, notamment l'asymétrie amont/aval, et nous avons obtenu un accord à la fois qualitatif et quantitatif de quasiment tous les champs disponibles. A partir de ce jeu de paramètres, nous avons prédit l'écoulement de la mousse sèche en faisant varier le paramètre de déformation seuil dans les mêmes proportions que ce qui est observé expérimentalement. Nous avons vérifié une fois de plus que l'accord est qualitatif et quantitatif.

L'exploration de l'effet des paramètres a justifié le choix de leurs valeurs, confirmé que les expériences étudiées se situent dans la limite basse vitesse, et montré que dans ce régime d'écoulement, le paramètre de déformation seuil joue un rôle déterminant.

Dans la discussion qui a suivi, nous avons examiné les hypothèses que nous avions formulées pour la construction du modèle à la lumière des comparaisons avec l'expérience. Il est apparu que la complexité des écoulements de la mousse émerge de la combinaison d'ingrédients simples. Nous avons validé la pertinence de l'adimensionnement choisi : dans le régime basse vitesse, c'est l'élasticité de la mousse qui domine, et l'adimensionnement mettant en avant les propriétés solides de la mousse s'est révélé le plus

approprié. Nous avons ensuite montré que les paramètres utilisés sont cohérents avec les propriétés physiques des mousses utilisées, puis nous avons discuté de la cohérence de ces paramètres par rapport à ceux utilisés pour la comparaison avec les expériences de cisaillement (chapitre 5). L'accord avec l'expérience n'est pas pour autant absolument parfait : il y a quelques points de désaccord modèle/expérience. Nous avons examiné un aspect de l'écoulement qui confirme la singularité des écoulements VEP : le sursaut de la vitesse dans le sillage de l'obstacle à basse vitesse. Enfin, nous avons conclu sur la valeur prédictive du modèle.

# Chapitre 8

# Conclusion générale

## 8.1 Résumé

Ce travail, à l'interface entre les mathématiques appliquées et la physique, s'articule autour de la résolution numérique d'un modèle visco-élasto-plastique récemment développé [92] dans le cadre de la mécanique des milieux continus, et la comparaison des solutions de ce modèle à des expériences de rhéologie des mousses. Il s'appuie sur les séries d'expériences de Benjamin Dollet [26] et Christophe Raufaste [78], qui ont fourni des données systématiques permettant de contraindre fortement les modèles rhéologiques.

Nous avons exposé en introduction les enjeux de l'étude de la rhéologie des mousses : ceux liés directement aux applications industrielles des mousses, et ceux purement scientifiques, liés à la compréhension des fluides complexes en général. Nous avons évoqué les deux principales tendances en modélisation des mousses : d'une part l'approche discrète qui prend en compte les bulles elles-mêmes, et qui peut de ce fait capturer les phénomènes d'avalanches liés aux fluctuations ; d'autre part l'approche continue, qui au contraire ne décrit pas l'échelle des bulles, mais directement le comportement macroscopique, visco-élasto-plastique, de la mousse.

Nous présentons ensuite la construction du modèle visco-élasto-plastique, tensoriel, et continu que nous voulons utiliser : basé sur un formalisme thermodynamique qui permet de formuler des modèles en petites déformations, nous l'étendons aux grandes déformations dans un cadre tensoriel qui permet de traiter tous les types de géométries bi- et tridimensionnelles. Il se distingue en cela des modèles rhéologiques utilisés jusqu'à présent pour la modélisation des mousses [54, 59], basés sur des formalismes scalaires. Parallèlement au nôtre, d'autres modèles tensoriels ont été proposés [13, 72, 70].

Les équations du modèle sont caractérisées par de nombreuses non-linéarités : un seuil de plasticité, comme dans le modèle de Bingham, et un terme de transport des contraintes, comme dans le modèle d'Oldroyd. Ces équations posent un défi pour la résolution numérique, car elles n'entrent pas dans les cadres déjà éprouvés pour la résolution des modèles viscoplastiques et viscoélastiques. Nous proposons un algorithme de résolution original, qui permet de découpler ces non-linéarités.

Avant de nous attaquer à des géométries tridimensionnelles complexes, nous avons

choisi de tester le modèle et l'algorithme sur des écoulements simples, dont la résolution se ramène à celles d'équations à une dimension en espace. Après des tests numériques concluants, nous avons confronté le modèle à des expériences de cisaillement de mousse. Nous avons montré que le modèle prédit qualitativement l'ensemble des champs mesurés, non seulement la vitesse, mais également des champs tensoriels comme la contrainte élastique, en régime transitoire et stationnaire. A notre connaissance, notre modèle est à ce jour le seul à avoir été comparé aussi systématiquement aux expériences.

Selon l'interprétation qui prévalait alors pour expliquer les particularités de cette expérience, l'écoulement de la mousse y est dominé par la friction des plaques qui servent à la confiner. Notre étude a montré au contraire que la friction des plaques joue un rôle secondaire : à cause de la géométrie cylindrique, les contraintes sont inhomogènes, et la mousse a un comportement fluide dans les zones au-dessus du seuil, et solide dans celles en-dessous du seuil. Nous avons par ailleurs pu expliquer des observations incomprises jusqu'à présent, comme la propagation du seuil de l'intérieur vers l'extérieur du canal ; et l'existence de contraintes normales résiduelles résultant de la préparation de la mousse. L'expérience de Couette apparaît finalement peu discriminante pour contraindre les modèles.

Le chapitre suivant est consacré à l'étude numérique du modèle dans des géométries bidimensionnelles : après avoir validé l'algorithme en vérifiant qu'il retrouve bien les solutions obtenues en écoulement de cisaillement, nous nous sommes assurés qu'il est capable d'obtenir en un temps raisonnable des solutions suffisamment précises pour la comparaison avec les expériences.

Dans le dernier chapitre, nous avons abordé l'objet principal de cette thèse : la comparaison du modèle à des expériences d'écoulement autour d'un obstacle. Tout d'abord avec une mousse humide : nous avons pu ajuster les paramètres du modèle de manière à reproduire l'amplitude, l'orientation, l'anisotropie et la distribution spatiale de trois champs physiquement indépendants : la vitesse, la déformation élastique, et le taux de déformation plastique. Le modèle est parvenu à capturer toutes les caractéristiques de l'écoulement, parmi lesquelles l'asymétrie amont/aval, le sursaut de la vitesse derrière l'obstacle, et les points d'arrêt de la vitesse. Nous avons vérifié que les paramètres utilisés étaient physiquement pertinents et réalistes.

Nous avons ensuite calculé l'écoulement d'une mousse sèche caractérisée par une déformation seuil deux fois supérieure. Nous avons prédit qualitativement, quantitativement et sans paramètre ajustable, la vitesse, la déformation élastique, et le taux de déformation plastique. Par rapport aux autres modèles rhéologiques visco-élasto-plastiques, nous avons poussé beaucoup plus loin la comparaison avec des expériences.

Enfin, nous avons étudié le sursaut de la vitesse derrière l'obstacle : dans l'écoulement VEP, des déformations élastiques sont présentes dans le sillage de l'obstacle à vitesse arbitrairement faible. La plasticité empêche l'augmentation de la déformation élongationnelle, ce qui casse la symétrie amont/aval. Cet aspect de l'écoulement illustre la singularité des écoulements visco-élasto-plastiques, intrinsèquement plus complexes que les écoulements viscoélastiques ou viscoplastiques.

L'outil numérique que nous avons développé s'est avéré efficace pour résoudre les équations du modèle et comparer ses solutions aux expériences. Nous avons montré que

les expériences sont dans une limite basse vitesse où la déformation seuil $\varepsilon_Y$ (et donc la fraction fluide) joue un rôle prépondérant sur les autres paramètres de la mousse (taille des bulles, tension de surface, désordre). Dans ce régime, les caractéristiques principales de l'écoulement des mousses sont des conséquences directes du couplage de l'élasticité, de la plasticité, et de l'écoulement. Ainsi, la combinaison de ces trois éléments décrits de manière simple, sans tenir compte explicitement de la nature discrète de la mousse ou des détails physico-chimiques de sa composition, suffit-elle à décrire son comportement macroscopique. Nous confirmons ainsi la validité de l'approche continue, qui, puisqu'elle est indépendante de la structure et des mécanismes sous-jacents, peut s'étendre à d'autres matériaux aux propriétés mécaniques similaires.

## 8.2 Perspectives

Elles sont nombreuses, car nous sommes loin d'avoir épuisé le sujet : tout d'abord, il existe encore de nombreuses données expérimentales que nous n'avons pas encore comparées au modèle.

### Géométrie de Couette

En géométrie de Couette cylindrique, une discontinuité apparemment similaire à celle que nous avons obtenue numériquement a été observée pour d'autres matériaux que la mousse [19, 66, 86]. Il serait intéressant d'examiner si c'est le même mécanisme physique, les contraintes normales initialement présentes dans le matériau, qui est en jeu.

Dans le même esprit, nous pourrions réexaminer la comparaison avec l'expérience de Debrégeas [23] en choisissant les conditions initiales de façon à obtenir des solutions stationnaires continues.

Enfin, nous pouvons comparer le modèle aux expériences de cisaillement réalisées par le groupe de Leiden [58, 59, 60].

### Écoulement bidimensionnel autour d'un obstacle

Dans la géométrie de l'écoulement autour d'un obstacle que nous avons étudiée, il nous reste à comparer le modèle aux régimes haute et très basse vitesse explorés par Christophe Raufaste [78]. Nous avons réalisé des calculs préliminaires à très petit nombre de Weissenberg, mais le problème devient difficile à résoudre dans ce régime, car les zones au-dessus du seuil deviennent spatialement plus réduites. L'introduction d'un plasticité progressive, plus conforme à la réalité physique, permettrait de relaxer cette difficulté. Les calculs à nombre de Weissenberg élevé sont réputés difficiles en visco-élasticité, mais la méthode numérique que nous avons choisie pour le transport des contraintes (Galerkin discontinue) est bien adaptée à ce type de problème, du moins en visco-élasticité. Dans le régime haute vitesse, les effets de $C_F$ et de $We$ devraient devenir plus importants. Il faudrait aussi tenir compte du caractère rhéofluidifiant de la mousse.

Toujours dans cette géométrie, Raufaste dispose de données de transitoire encore non publiées. L'analyse de ces données permettrait peut-être d'accéder au temps caractéristique de la mousse, comme nous l'avons fait pour l'expérience de Debrégeas [23].

Par ailleurs, nous avons comparé dans cette thèse des champs locaux comme la vitesse ou la contrainte, mais des données de mesures globales sont disponibles : les expériences de mousse humide permettent des mesures de forces sur l'obstacle (traînée, portance, et moment), ce qui donne d'autres points de comparaison avec le modèle. Plus en détail, nous pouvons examiner les points suivants :

- obstacles rond [30] et carré : existence d'une traînée seuil, signature de la plasticité de la mousse ; les mesures ont été effectuées en faisant varier tous les paramètres de contrôle ;
- obstacle elliptique [29, 21] : mesure du moment en fonction de l'angle entre l'écoulement et le grand axe de l'ellipse ;
- aile d'avion asymétrique [28] : la portance mesurée est inversée, anti-inertielle, à cause des propriétés élastiques de la mousse.

La mesure de force peut se faire facilement dans le modèle : il faut intégrer la contrainte totale sur la surface de l'obstacle, ce qui peut se faire avec une intégrale de volume. Par contre, l'écart entre la perte de charge mesurée et celle prédite par le modèle (§ 7.2.3, 107) se répercutera certainement sur la force de traînée.

### Autres géométries

Nous envisageons de comparer le modèle à des expériences tridimensionnelles axisymétriques d'écoulement autour d'un obstacle [65] ; dans ce cas la résolution se ramènerait à celle d'équations bidimensionnelles, sans modification majeure du code de calcul. Dans un futur plus lointain, nous pouvons imaginer de résoudre des écoulements tridimensionnels généraux : le modèle et l'algorithme sont déjà écrits sous forme 3D, il resterait donc à implémenter le code de calcul correspondant.

D'autres géométries sont disponibles : Dollet a réalisé très récemment des écoulements de constriction [27]. En variant le surfactant employé, il a fait varier le temps de relaxation de la mousse. De la sorte, il a fait varier le nombre de Weissenberg associé à ces expériences.

### Modélisation

Un autre champ de perspectives concerne la modélisation elle-même : nous prévoyons d'inclure dans l'algorithme de résolution une dissipation plastique de type Herschel-Bulkley et une friction des plaques en loi de puissance. Nous attendons de ces modifications une meilleure prédiction de la perte de charge (cf. *supra*), et un comportement mieux adapté au régime haute vitesse.

Nous avons évoqué en introduction des études faisant état d'une rhéologie non-locale de la mousse. En particulier, l'introduction d'un paramètre de "fluidité" couplé au modèle d'Herschel-Bulkley a permis de mieux capturer le comportement de d'émulsions en écoulement de Poiseuille [44], et de mousse en écoulement de Couette [60]. Notre modèle

n'inclut pas explicitement de description non-locale, mais il décrit par contre l'élasticité de la mousse. Il peut être intéressant d'examiner ses prédictions dans ces écoulements. Une collaboration avec Benjamin Dollet est en cours à ce sujet.

Enfin, rappelons que notre modèle n'est *a priori* pas spécifique aux mousses et émulsions : il serait intéressant de le comparer à des cellules biologiques (tissus, agrégats), du carbopol, ou encore d'autres matériaux VEP.

# Annexe A

# Minimisation de fonctions convexes

## A.1 Définitions et propriétés

Nous introduisons ici des outils pour la minimisation de fonction convexes a priori non différentiables qui seront utiles pour la dérivation du modèle. Ce cadre n'est pas minimal, mais suffisant pour ce qui nous concerne. Toutes les définitions et propriétés présentées sont détaillées dans [34].

Soit $X$ un espace vectoriel normé réel, $X^*$ son dual topologique, et $< \cdot, \cdot >$ la forme bilinéaire canonique sur $X \times X^*$. Soient $\psi, \psi_1$ et $\psi_2$ des fonctions définies sur $X$ et à valeur dans $\overline{\mathbb{R}}$, propres, convexes, et semi-continues inférieurement.

**Définition 1.** *On appelle fonction conjuguée (ou polaire) de $\psi$ et on note $\psi^*$ la fonction de $X^*$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ définie par*

$$\psi^*(u^*) = \sup_{u \in V} \{< u, u^* > -\psi(u)\}.$$

**Définition 2.** *Le sous-différentiel de $\psi$ en $u \in X$ est le sous-ensemble $\partial\psi(u)$ de $X^*$ défini par*

$$\partial\psi(u) = \{u^* \in X^*, < u^*, v - u > \leq \psi(v) - \psi(u), \forall v \in X\}.$$

On peut montrer que si $\psi$ est Gâteaux-différentiable en $u \in X$, alors $\partial\psi(u) = \{\psi'(u)\}$. Le calcul différentiel ordinaire s'étend dans une certaine mesure en calcul sous-différentiel :

**Propriété 1.** (Additivité) *S'il existe $u_0 \in \mathrm{dom}\psi_1 \cap \mathrm{dom}\psi_2$ tel que $\psi_1$ est continue en $u_0$, alors*

$$\partial(\psi_1 + \psi_2)(u) = \partial\psi_1(u) + \partial\psi_2(u).$$

**Propriété 2.** (Composition) *Soit $Y$ un espace vectoriel normé et $\varphi$ une fonction de $Y$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ propre, convexe, et semi-continue inférieurement ; soit $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$. S'il existe $v_0 \in Y$ tel que $\varphi$ est finie et continue en $v_0$, alors*

$$\partial(\varphi \circ \Lambda)(u) = \Lambda^T \circ \partial\varphi(\Lambda u), \forall u \in X.$$

**Propriété 3.** (Inversibilité) *On a*

$$u^* \in \partial\psi(u) \Longleftrightarrow u \in \partial\psi^*(u^*).$$

Soit maintenant $L = L(u,p)$ une fonction lagrangienne définie sur un ensemble $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, dont on cherche à déterminer un point-selle. On se donne deux espaces de Banach réflexifs $X$ et $Z$ et on suppose que $\mathcal{A} \subset X$ et $\mathcal{B} \subset Z$ sont convexes, fermés, non vides. On dispose alors du résultat suivant sur la caractérisation des points-selles :

**Proposition 1.** *On suppose que $L = m + l$ avec*

$$\begin{array}{ll} \forall u \in \mathcal{A}, p \mapsto l(u,p) & \textit{est concave, Gâteaux différentiable,} \\ \forall p \in \mathcal{B}, u \mapsto l(u,p) & \textit{est convexe, Gâteaux différentiable,} \\ \forall u \in \mathcal{A}, p \mapsto m(u,p) & \textit{est concave,} \\ \forall p \in \mathcal{B}, u \mapsto m(u,p) & \textit{est convexe.} \end{array}$$

*Alors $(\bar{u},\bar{p}) \in \mathcal{A}\times\mathcal{B}$ est point-selle de $L$ si et seulement si*

$$\left\langle \frac{\partial l}{\partial u}(\bar{u},\bar{p}), u-\bar{u} \right\rangle + m(u,\bar{p}) - m(\bar{u},\bar{p}) \geq 0, \qquad \forall u \in \mathcal{A}, \tag{A.1}$$

$$-\left\langle \frac{\partial l}{\partial p}(\bar{u},\bar{p}), p-\bar{p} \right\rangle - m(\bar{u},p) + m(\bar{u},\bar{p}) \geq 0, \qquad \forall p \in \mathcal{B}. \tag{A.2}$$

## A.2 Calculs pour la dérivation des modèles

- **Valeur absolue**
  Soit $F$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $|x|$. Soit $x \in \mathbb{R}$, nous cherchons à calculer le sous-différentiel $\partial F(x)$ de $h$ en $x$. Si $x \neq 0$, $F$ est dérivable en $x$ et $\partial F(x) = \{x/|x|\}$. Sinon, on a

  $$\partial F(0) = \{y \in \mathbb{R}, yz \leq |z|, \forall z \in \mathbb{R}\} = \{y \in \mathbb{R}, |y| \leq 1\}.$$

  En résumé,

  $$y \in \partial F(x) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{x}{|x|} \text{ si } x \neq 0, \\ |y| \leq 1 \text{ sinon.} \end{array} \right. \tag{A.3}$$

  Le sous-gradient en 0 représente l'ensemble des pentes des tangentes possibles en ce point, ce qui est illustré figure A.1.
- **Dissipation visqueuse**
  On se place dans $\mathbb{R}^{N\times N}_{sym}$ où $N = 2$ ou 3, l'espace des tenseurs symétriques à coefficients dans $\mathbb{R}$, et on considère la fonction

  $$\varphi(D) = \left\{ \begin{array}{ll} \eta|D|^2 & \text{si } tr(D) = 0, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{array} \right.$$

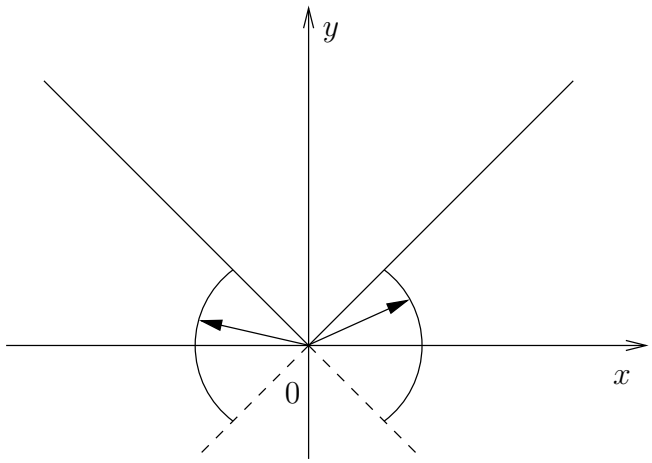


FIG. A.1 – Illustration de la notion de sous-gradient dans le cas de la fonction valeur absolue : $\partial F(0) = [-1, 1]$ correspond à l'ensemble des pentes des tangentes possibles.

où $\eta$ est un réel positif et $|\cdot|$ est la norme matricielle définie par $|D|^2 = D : D$. Soit $D \in \mathbb{R}^{N\times N}_{sym}$ ; par définition, le sous-différentiel de $\varphi$ en $D$ est donné par

$$\partial\varphi(D) = \left\{\tau \in \mathbb{R}^{N\times N}_{sym}, \tau : (H - D) \leq \varphi(H) - \varphi(D), \forall H \in \mathbb{R}^{N\times N}_{sym}\right\}.$$

Si $tr(D) \neq 0$, $\varphi(D) = +\infty$ et $\partial\varphi(D) = \emptyset$. On peut donc se restreindre à $V = \{D \in \mathbb{R}^{N\times N}_{sym}, tr(D) = 0\}$ ; on a alors

$$\partial\varphi(D) = \{\tau \in V^*, j_\tau(D) \leq j_\tau(H), \forall H \in V\},$$

où $j_\tau(H) = \eta|H|^2 - \tau : H$. Donc $D$ minimise $j_\tau$ sur le noyau de la trace, et en introduisant le multiplicateur de Lagrange $p$ associé à cette contrainte, et la fonction lagrangienne

$$L(D, p) = j_\tau(D) - p\ tr(D),$$

on montre avec la proposition 1 que $L$ possède un point-selle $(D, p)$ si et seulement si

$$\begin{aligned} &\nabla j_\tau(D) - p\nabla tr = 0, \\ &tr(D) = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &2\eta D - \tau - pI = 0, \\ &tr(D) = 0. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\partial\varphi(D) = \begin{cases} \{\tau, \tau = 2\eta D - pI\} & \text{si } tr(D) = 0, \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases} \tag{A.4}$$

Soit $\varphi^*$ la fonction duale de $\varphi$ ; son sous-différentiel est défini par l'équivalence

$$\tau \in \partial\varphi(D) \Longleftrightarrow D \in \partial\varphi^*(\tau).$$

Soit $D \in \mathbb{R}^{N\times N}_{sym}$, $tr(D) = 0$ et soit $\tau \in \partial\varphi(D)$. Alors

$$D = 1/(2\eta)\tau_d,$$

où $\tau_d = \tau - 1/Ntr(\tau)I$ est le déviateur de $\tau$.
Réciproquement, soit $\tau \in \mathbb{R}^{N\times N}_{sym}$ et $D = 1/(2\eta)\tau_d$ ; alors $tr(D) = 0$ et en prenant $p = -1/Ntr(\tau)$, on trouve $\tau = \tau_d - pI$ d'où

$$\tau = 2\eta D - pI.$$

Finalement,

$$D \in \partial\varphi^*(\tau) \Longleftrightarrow D = \frac{1}{2\eta}\tau_d. \tag{A.5}$$

- **Dissipation viscoplastique**
On se place à nouveau dans $\mathbb{R}^{N\times N}_{sym}$, $N = 2$ ou 3, et on considère la fonction

$$\varphi(D) = \begin{cases} 2\eta|D|^2 + \tau_Y|D| & \text{si } tr(D) = 0, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\eta$ et $\tau_Y$ sont des réels positifs. De la même façon que précédemment, pour $D \in V = \{D \in \mathbb{R}^{N\times N}_{sym}, tr(D) = 0\}$, le sous-différentiel de $\varphi$ est donné par

$$\partial\varphi(D) = \{\tau \in V^*, j_\tau(D) \leq j_\tau(H), \forall H \in V\},$$

où, cette fois-ci, $j_\tau(H) = 2\eta|H|^2 + \tau_Y|H| - \tau : H$. De même que dans l'exemple précédent, $D$ minimise $j_\tau$ sur le noyau de la trace, et on introduit un multiplicateur de Lagrange $p$ associé à cette contrainte. La fonction lagrangienne associée s'écrit

$$L(D,p) = j_\tau(D) - p\ tr(D) = m(D,p) + l(D,p)$$

avec $l(D,p) = 2\eta|D|^2 - \tau : D - p\ tr(D)$ et $m(D,p) = \tau_Y|H|$. D'après la proposition 1, $L$ possède un point-selle $(D,p)$ si et seulement si

$$\begin{aligned} &< 2\eta D - pI - \tau, H - D > + m(H,p) - m(D,p) \geq 0, \forall H, \\ &tr(D) = 0. \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} &pI + \tau - 2\eta D \in \partial m(D,p), \\ &tr(D) = 0. \end{aligned}$$

Avec (A.3), et en introduisant le déviateur de $\tau$, $\tau_d = \tau - 1/Ntr(\tau)I$, on en déduit le sous-différentiel de $\varphi$ :

$$\tau \in \partial\varphi(D) \Leftrightarrow \begin{cases} tr(D) = 0, \\ \tau_d = 2\eta D + \tau_Y \frac{D}{|D|} \text{ si } D \neq 0, \\ |\tau_d| \leq \tau_Y \text{ sinon.} \end{cases} \tag{A.6}$$

Soit $\varphi^*$ la fonction duale de $\varphi$ ; son sous-différentiel est défini par l'équivalence

$$\tau \in \partial\varphi(D) \Longleftrightarrow D \in \partial\varphi^*(\tau).$$

Soit $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{sym}$, $tr(D) = 0$, et $\tau \in \partial\varphi(D)$. Si $|\tau_d| \leq \tau_Y$ alors nécessairement $D = 0$. Sinon, $|\tau_d| = 2\eta|D| + \tau_Y$, et $|D| = (|\tau_d| - \tau_Y)/(2\eta)$, d'où

$$D = \frac{1}{2\eta}\frac{|\tau_d| - \tau_Y}{|\tau_d|}\tau_d.$$

On regroupe les deux cas dans l'expression

$$D = \frac{1}{2\eta}\max\left(\frac{|\tau_d| - \tau_Y}{|\tau_d|}, 0\right)\tau_d. \tag{A.7}$$

Réciproquement, soit $\tau \in \mathbb{R}^{N\times N}_{sym}$ et $D$ vérifiant (A.7). Alors $tr(D) = 0$ et on a

$$\begin{array}{lll} D = 0 & \Longrightarrow & |\tau_d| \leq \tau_Y, \\ D \neq 0 & \Longrightarrow & \tau_d = 2\eta D + \tau_Y \frac{D}{|D|}. \end{array}$$

On obtient finalement

$$D \in \partial\varphi^*(\tau) \Longleftrightarrow D = \frac{1}{2\eta}\max\left(\frac{|\tau_d| - \tau_Y}{|\tau_d|}, 0\right)\tau_d. \tag{A.8}$$

# Annexe B

# Opérateurs différentiels en coordonnées polaires

On munit $\mathbb{R}^2$ du repère $(O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ correspondant au système de coordonnées polaires (fig. B.1). Nous détaillons l'expression des différents opérateurs différentiels que nous utilisons, appliqués selon le cas à un scalaire $p$, un vecteur $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta)$, ou un tenseur symétrique $\tau = \begin{pmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} \\ \tau_{r\theta} & \tau_{\theta\theta} \end{pmatrix}$.

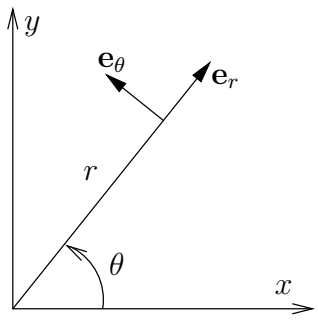


Fig. B.1 – Coordonnées polaires

## B.1 Divergence

**D'un vecteur :**

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}. \tag{B.1}$$

**D'un tenseur :**

$$(\text{div } \tau)_r = \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r}, \tag{B.2}$$

$$(\text{div } \tau)_\theta = \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2\frac{\tau_{r\theta}}{r}. \tag{B.3}$$

## B.2 Gradient

**D'un scalaire**

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta. \tag{B.4}$$

**D'un vecteur**

$$(\nabla \mathbf{v})_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \tag{B.5}$$

$$(\nabla \mathbf{v})_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r}, \tag{B.6}$$

$$(\nabla \mathbf{v})_{\theta r} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r}, \tag{B.7}$$

$$(\nabla \mathbf{v})_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}. \tag{B.8}$$

## B.3 Opérateur $\mathbf{v} \cdot \nabla$

**Pour un scalaire**

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)p = v_r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial p}{\partial r}. \tag{B.9}$$

**Pour un vecteur u**

$$((\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u})_r = v_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\right), \tag{B.10}$$

$$((\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u})_\theta = v_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\right). \tag{B.11}$$

**Pour un tenseur**

$$((\mathbf{v} \cdot \nabla)\tau)_{rr} = v_r \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial \theta} - 2\frac{v_\theta}{r}\tau_{r\theta}, \tag{B.12}$$

$$((\mathbf{v} \cdot \nabla)\tau)_{r\theta} = v_r \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r}(\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}), \tag{B.13}$$

$$((\mathbf{v} \cdot \nabla)\tau)_{\theta\theta} = v_r \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2\frac{v_\theta}{r}\tau_{r\theta}. \tag{B.14}$$

## B.4 Dérivée objective

Nous développons le terme $\beta_a(\tau, \nabla\mathbf{v})$ de la dérivée convective $\overset{\square}{\tau}$ (éq. (2.10), page 22) :

$$\beta_a(\tau, \nabla\mathbf{v}) = \tau \cdot W(\mathbf{v}) - W(\mathbf{v}) \cdot \tau - a(D(\mathbf{v}) \cdot \tau + \tau \cdot D(\mathbf{v})), a \in [-1, 1].$$

On a :

$$W(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} - \nabla\mathbf{v}^T) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix},$$

où $\omega = 1/2 \left( \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} + \dfrac{v_\theta}{r} \right)$, et

$$D(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{v_r}{r} \end{pmatrix},$$

où $\dot{\gamma} = 1/2 \left( \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - \dfrac{v_\theta}{r} \right)$. Les composantes de $\beta_a(\tau, \nabla\mathbf{v})$ sont :

$$\begin{aligned}
\beta_a(\tau, \nabla\mathbf{v})_{rr} &= 2\tau_{r\theta}(\omega - a\dot{\gamma}) - 2a\tau_{rr}\frac{\partial v_r}{\partial r}, \\
\beta_a(\tau, \nabla\mathbf{v})_{r\theta} &= \tau_{\theta\theta}(\omega - a\dot{\gamma}) - \tau_{rr}(\omega + a\dot{\gamma}) - a\tau_{r\theta}\left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right), \\
\beta_a(\tau, \nabla\mathbf{v})_{\theta\theta} &= -2\tau_{r\theta}(\omega + a\dot{\gamma}) - 2a\tau_{\theta\theta}\left( \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right).
\end{aligned}$$

On remarque que la trace de $\beta_a$ s'annule pour $a = 0$. Ce résultat est vrai quel que soit le système de coordonnées.

# Annexe C

# Calcul de la fonction courant

Soient **curl** et curl les opérateurs tels que

$$\mathbf{curl}\ \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, -\frac{\partial \phi}{\partial y}\right),$$

pour toute fonction $\phi$ scalaire, et

$$\text{curl}\ \mathbf{u} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y},$$

pour tout vecteur $\mathbf{u}$.

soit $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ le vecteur vitesse. Comme div $\mathbf{v} = 0$, il existe $\psi$ tel que

$$\mathbf{v} = \mathbf{curl}\ \psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, -\frac{\partial \psi}{\partial y}\right).$$

d'où

$$\Delta\psi = -\text{curl}\ \mathbf{v}.$$

Pour le calcul pratique de $\psi$, on écrit une formulation variationnelle :

$$\int_\Omega \Delta\psi\phi = \int_\Omega (\text{curl}\ \mathbf{v})\phi,$$

où $\phi$ est une fonction test, d'où

$$\int_\Omega \nabla\psi\nabla\phi - \int_{\partial\Omega} (\nabla\psi \cdot \mathbf{n})\phi = \int_\Omega (\text{curl}\ \mathbf{v})\phi,$$

où $\mathbf{n}$ est la normale sortante à $\Omega$. Or, on a

$$\nabla\psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = (-v_y, v_x),$$

et le problème à résoudre s'écrit : trouver $\psi$ tel que $\forall\phi$,

$$\int_\Omega \nabla\psi\nabla\phi = \int_\Omega (\text{curl}\ \mathbf{v})\phi + \int_{\partial\Omega} (-v_y n_x + v_x n_y)\phi.$$

Ce problème définit $\psi$ à une constante près ; pour la résolution numérique, nous fixons la valeur de $\psi$ en un point du domaine.

# Bibliographie


[1] A. Afonso, M. Alves, F. Pinho et P. Oliveira : Uniform flow of viscoelastic fluids past a confined falling cylinder. *Rheol. Acta*, 47:325–348, 2008.

[2] M. T. Arigo et G. H. McKinley : An experimental investigation of negative wakes behind spheres settling in a shear-thinning viscoelastic fluid. *Rheol. Acta*, 37:307–327, 1998.

[3] M. Asipauskas, M. Aubouy, J. A. Glazier, F. Graner et Y. Jiang : A texture tensor to quantify deformations : The example of two-dimensional flowing foams. *Granul. Matter*, 5:71–74, 2003.

[4] P. T. Baaijens : Mixed finite element methods for viscoelastic flow analysis : a review. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 79:361–385, 1998.

[5] J. Baranger et D. Sandri : Finite element approximation of viscoelastic fluid flow : Existence of approximate solutions and error bounds. *Numer. Math.*, 63:13–27, 1992.

[6] M. Bensaada, D. Esselaoui et P. Saramito : Second-order Galerkin-Lagrange method for the Navier-Stokes equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 21:1099–1121, 2005.

[7] E. C. Bingham : *Fluidity and Plasticity.* Mc Graw-Hill, New York, 1922.

[8] F. Bolton et D. Weaire : Rigidity loss transition in a disordered 2d froth. *Phys. Rev. Lett.*, 65:3449–3451, 1990.

[9] A. Bonito, M. Picasso et M. Laso : Numerical simulation of 3D viscoelastic flows with free surfaces. *Jour. Comp. Phys.*, 215:691–716, 2006.

[10] J. Bouloumié et E.-R. Tantart : *Mécanique des Solides et des Fluides.* PUF, 2001.

[11] E. Bänsch et K. Deckelnick : Optimal Error Estimates for the Navier-Stokes Equations with Slip Boundary Condition. *M2AN Math. Model Numer. Anal.*, 33:923–938, 1999.

[12] E. Bänsch et B. Höhn : Numerical Treatment of the Navier-Stokes Equations with Slip Boundary Condition. *SIAM J. Sci. Comput.*, 21:2144–2162, 2000.

[13] S. Bénito, C.-H. Bruneau, T. Colin, C. Gay et F. Molino : An elasto-visco-plastic model for immortal foams or emulsions. *Eur. Phys. J. E*, 25:225–251, 2008.

[14] I. Cantat et O. Pitois : Stokes experiment in a liquid foam. *Physics of Fluids*, 18:083302, 2006.

[15] I. Cheddadi, P. Saramito, C. Raufaste, P. Marmottant et F. Graner : Numerical modelling of foam Couette flows. *Eur. Phys. J. E*, 27:123–133, 2008.

[16] J. C. Chrispell, V. J. Ervin et E. W. Jenkins : A fractional step $\theta$-method for convection-diffusion problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 333:204–218, 2007.

[17] R. J. Clancy, E. Janiaud, D. Weaire et S. Hutzler : The response of 2D foams to continuous applied shear in a Couette rheometer. *Eur. Phys. J. E*, 21:123–132, 2006.

[18] Ouvrage collectif : *Les mousses liquides.* Collection Echelles, Belin, Paris, à paraître.

[19] P. Coussot, J. S. Raynaud, F. Bertrand, P. Moucheront, J. P. Guilbaud, H. T. Huynh, S. Jarny et D. Lesueur : Coexistence of liquid and solid phases in flowing soft-glassy materials. *Phys. Rev. Lett.*, 88:218301, 2002.

[20] S. J. Cox, M. F. Vaz et D. Weaire : Topological changes in a two-dimensional foam cluster. *Eur. Phys. J. E*, 11:29–35, 2003.

[21] I.T. Davies et S.J. Cox : Sedimentation of an elliptical object in a two-dimensional foam. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, *sous presse*, 2010.

[22] E. J. Dean, R Glowinski et G Guidoboni : On the numerical simulation of Bingham visco-plastic flow : Old and new results. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 142:36–62, 2007.

[23] G. Debrégeas, H. Tabuteau et J. M. di Meglio : Deformation and flow of a two-dimensional foam under continuous shear. *Phys. Rev. Letter*, 87, 2001.

[24] N.D. Denkov, V. Subramanian, D. Gurovich et A. Lips : Wall slip and viscous dissipation in sheared foams : Effect of surface mobility. *Coll. Surf. A, proceedings of EUFOAM 2004, Marne-la-Vallée*, 263:129, 2005.

[25] C. Derec, G. Ducouret, A. Adjari et F. Lequeux : Aging and nonlinear rheology suspensions of polyethylene oxide-protected silica particles. *Phys. Rev. E*, 67:061403, 2003.

[26] B. Dollet : *Écoulements bidimensionnels de mousse autour d'obstacles. Contribution à l'étude mécanique des mousses liquides.* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier - Grenoble 1, 2005.

[27] B. Dollet : Flow of foam through a contraction. *submitted to J. Rheol., Arxiv preprint arXiv :0907.0952*, 2009.

[28] B. Dollet, M. Aubouy et F. Graner : Anti-inertial lift in foams : A signature of the elasticity of complex fluids. *Phys. Rev. Lett.*, 95:168303, 2005.

[29] B. Dollet, M. Durth et F. Graner : Flow of foam past an elliptical obstacle. *Phys. Rev. E*, 73:61404, 2006.

[30] B. Dollet, F. Elias, C. Quillet, C. Raufaste, M. Aubouy et F. Graner : Two-dimensional flow of foam around an obstacle : Force measurements. *Phys. Rev. E*, 71:031403, 2005.

[31] B. Dollet et F. Graner : Two-dimensional flow of foam around a circular obstacle : local measurements of elasticity, plasticity and flow. *J. Fluid Mech.*, 585:181–211, 2007.

[32] H.-S. Dou et N. Phan-Thien : Negative wake in the uniform flow past a cylinder. *Rheol. Acta*, 42:383–409, 2003.

[33] G. Duvaut et J.-L. Lions : *Les Inéquations en Mécanique et en Physique.* Dunod, Paris, 1972.

[34] I. Ekeland et R. Temam : *Analyse convexe et problèmes variationnels.* Dunod, Paris, 1974.

[35] M. Fortin, D. Côté et P. A. Tanguy : On the imposition of friction boundary conditions for the numerical simulation of Bingham fluid flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 88:97–109, 1991.

[36] M. Fortin et R. Pierre : On the convergence of the mixed method of crochet and marchal for viscoelastic flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 73:341–350, 1989.

[37] I. A. Frigaard et C. Nouar : On the usage of viscosity regularisation methods for visco-plastic fluid flow computation. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 127:1–26, 2005.

[38] P. Germain : *Mécanique des Milieux Continus, tome 1.* Masson, 1973.

[39] V. Giraut et P.-A. Raviart : *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations.* Springer-Verlag Heidelberg, 1979.

[40] R. Glowinski : *Numerical Methods for Non-Linear Variational Problems.* Springer-Verlag, New York, 1984.

[41] R. Glowinski, J.L. Lions et R. Tremolieres : *Numerical analysis of variational inequalities.* North-Holland, 1981.

[42] A. D. Gopal et D. J. Durian : Relaxing in foam. *Phys. Rev. Lett.*, 91:188303, 2003.

[43] J. Goyon, A. Colin et L. Bocquet : How does a soft glassy material flow : finite size effects, non local rheology, and flow cooperativity. *Soft Matt.*, Accépté, 2010.

[44] J. Goyon, A. Colin, G. Ovarlez, A. Ajdari et L. Bocquet : Spatial cooperativity in soft glassy flows. *Nature*, 454:84–87, 2008.

[45] F. Graner, B. Dollet, C. Raufaste et P. Marmottant : Discrete rearranging disordered patterns, part I : Robust statistical tools in two or three dimensions. *Eur. Phys. J. E*, 25:349–369, 2008.

[46] C. Guillopé et J. C. Saut : Existence results for the flow of viscoelastic fluids with a differential constitutive law. *Nonlinear Anal.*, 15:849–869, 1990.

[47] C. Guillopé et J. C. Saut : Global existence and one-dimensional nonlinear stability of shearing motions of viscoelastic fluids of Oldroyd type. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér*, 24:369–401, 1990.

[48] B. Halphen et Q.S. N'Guyen : Sur les matériaux standards généralisés. *J. Méca.*, 14:39–63, 1975.

[49] F. Hecht : Bidimensional anisotropic mesh generator. Rapport technique, INRIA, 1997.

[50] R. Höhler et S. Cohen-Addad : Rheology of liquid foam. *J. Phys. : Condens. Matter*, 17:1041–1069, 2005.

[51] P. Hood et C. Taylor : A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique. *Comput. & Fluids*, 1:73–100, 1973.

[52] N. Huang, G. Ovarlez, F. Bertrand, S. Rodts, P. Coussot et D. Bonn : Flow of wet granular materials. *Phys. Rev. Lett.*, 94:028301, 2005.

[53] E. Janiaud et F. Graner : Foam in a two-dimensional Couette shear : a local measurement of bubble deformation. *J. Fluid Mech.*, 532:243–267, 2005.

[54] E. Janiaud, D. Weaire et S. Hutzler : Two-dimensional foam rheology with viscous drag. *Phys. Rev. Lett.*, 97:038302, 2006.

[55] Y. Jiang, P. J. Swart, A. Saxena, M. Asipauskas et J. A. Glazier : Hysteresis and avalanches in two-dimensional foam rheology simulations. *Phys. Rev. E*, 59: 5819–5832, 1999.

[56] A. Kabla et G. Debrégeas : Local stress relaxation and shear-banding in dry foams under shear. *Phys. Rev. Letter*, 90, 2003.

[57] A. Kabla, J. Scheibert et G. Debrégeas : Quasistatic rheology of foams II. Continuous shear flow. *J. Fluid Mech.*, 587:45–72., 2007.

[58] G. Katgert, A. Latka, M. E. Möbius et M. van Hecke : Flow in linearly sheared two-dimensional foams : From bubble to bulk scale. *Phys. Rev. E*, 79: 066318, 2009.

[59] G. Katgert, M. E. Möbius et M. van Hecke : Rate dependence and role of disorder in linearly sheared two-dimensional foams. *Phys. Rev. Lett.*, 101:058301, 2008.

[60] G. Katgert, B. P. Tighe, M. E. Möbius et M. van Hecke : Couette flow of two-dimensional flows. *Arxiv preprint arXiv :1001.4723*, 2010.

[61] P. Knobloch : Variational crimes in a finite element discretization of 3D Stokes equations with nonstandard boundary conditions. *East-West J. Numer. Math.*, 7:133–158, 1999.

[62] P. Knobloch : A Finite Element Convergence Analysis for 3D Stokes Equations in case of Variational Crimes. *Appl. of Math.*, 45:99–129, 2000.

[63] A.M. Kraynik et M.G. Hansen : Foam rheology : a model of viscous phenomena. *J. Rheol.*, 31:175–205, 1987.

[64] V. Labiausse, R. Höhler et S. Cohen-Addad : Shear induced normal stress differences in aqueous foams. *J. Rheol.*, 51:479–492, 2007.

[65] J. Lambert, I. Cantat, R. Delannay, R. Mokso, P. Cloetens, J.A. Glazier et F. Graner : Experimental Growth Law for Bubbles in a Moderately "Wet" 3D Liquid Foam. *Phys. rev. lett.*, 99:58304, 2007.

[66] J. Lauridsen, G. Chanan et M. Dennin : Velocity profiles in slowly sheared bubble rafts. *Phys. Rev. Lett.*, 93:018303, 2004.

[67] P. Lesaint et P.-A. Raviart : *A finite element method for solving the neutron transport equation.* In : de Boor, C., ed., Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations. Academic Press, New York, pp. 89-123, 1974.

[68] A. Liakos : Finite-element approximation of viscoelastic fluid flow with slip boundary condition. *Comp. Math. Appl.*, 49:281–294, 2005.

[69] C. W. Macosko : *Rheology : principles, measurements, and applications.* Wiley-VCH, New York, 1994.

[70] P. Marmottant et F. Graner : An elastic, plastic, viscous model for slow shear of a liquid foam. *Eur. Phys. J. E*, 23:337–347, 2007.

[71] P. Marmottant, C. Raufaste et F. Graner : Discrete rearranging disordered patterns, part II : 2D plasticity, elasticity and flow of a foam. *Eur. Phys. J. E*, 25:371–384, 2008.

[72] B. Nassar, P. R. de Souza Mendes et M. F. Naccache : Flow of elasto-viscoplastic liquids through an axisymmetric expansion-contraction. *J. non-Newt. Fluid Mech.*, *submitted*, 2009.

[73] T. Okozuno et K. Kawasaki : Intermittent flow behavior of random foams : A computer experiment on foam rheology. *Phys. Rev. E*, 51:1246–1253, 1995.

[74] J. G. Oldroyd : On the formulation of rheological equations of states. *Proc. Roy. Soc. London*, A 200:523–541, 1950.

[75] G. Ovarlez, Q. Barral et P. Coussot : Three-dimensional jamming and flows of soft glassy materials. *Nature Mat.*, 9:115–119, 2010.

[76] E. Pratt et M. Dennin : Nonlinear stress and fluctuation dynamics of sheared disordered wet foam. *Phys. Rev. E*, 67:051402, 2003.

[77] H. M. Princen : Rheology of foams and highly concentrated emulsions. *J. Coll. Int. Sci.*, 91:160–175, 1983.

[78] C. Raufaste : *Rhéologie et imagerie des écoulements 2D de mousse. Approche expérimentale, numérique et théorique.* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, France, 2007. `http ://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/19/32/48/PDF/TheseRaufaste.pdf`.

[79] N. Roquet, R. Michel et P. Saramito : Errors estimate for a viscoplastic fluid by using Pk finite elements and adaptive meshes. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 331:563–568, 2000.

[80] N. Roquet et P. Saramito : An adaptive finite element method for Bingham fluid flows around a cylinder. *Comput. Appl. Meth. Mech. Eng.*, 192:3317–3341, 2003.

[81] F. Rouyer, S. Cohen-Addad et R. Höhler : Is the yield stress of aqueous foam a well-defined quantity ? *Coll. Surf. A, Proceedings of EUFOAM 2004, Marne-la-Vallée*, 263:111–116, 2005.

[82] F. Rouyer, S. Cohen-Addad, R. Höhler, P. Sollich et S. M. Fielding : The large amplitude oscillatory strain response of aqueous foam : Strain localization and full stress Fourier spectrum. *Eur. Phys. J. E*, 27:309–321, 2008.

[83] F. Rouyer, S. Cohen-Addad, M. Vignes-Adler et R. Höhler : Dynamics of yielding observed in a three-dimensional aqueous dry foam. *Phys. Rev. E*, 67:021405, 2003.

[84] V. Ruas : Finite element methods for the three-field stokes system in $\mathbb{R}^3$ : Galerkin methods. *M2AN Math. Model Numer. Anal.*, 30:489–525, 1996.

[85] A. Saint-Jalmes et D. J. Durian : Vanishing elasticity for wet foams : equivalence with emulsions and role of polydispersity. *J. Rheol.*, 43:1411–1422, 1999.

[86] J.-B. Salmon, A. Colin, S. Manneville et F. Molino : Velocity profiles in shear-banding wormlike micelles. *Phys. Rev. Lett.*, 90:228303, 2003.

[87] D. Sandri : Finite element approximation of viscoelastic fluid flow : existence of approximate solutions and error bounds. Continuous approximation of the stress. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, pages 362–377, 1994.

[88] P. Saramito : *Simulation numérique d'écoulements de fluides viscoélastiques par éléments finis incompressibles et une méthode de directions alternées–applications.* Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1990. `http ://www-ljk.imag.fr/membres/Pierre.Saramito/these.pdf`.

[89] P. Saramito : Numerical simulation of viscoelastic fluid flows using incompressible finite element method and a $\theta$-method. *Math. Model. Numer. Anal.*, 28:1–35, 1994.

[90] P. Saramito : Operator splitting for viscoelastic fluid with a differential constitutive law. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II*, 319:267–270, 1994.

[91] P. Saramito : Efficient simulation of nonlinear viscoelastic fluid flows. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 60:199–223, 1995.

[92] P. Saramito : A new constitutive equation for elastoviscoplastic fluid flows. *J. Non Newtonian Fluid Mech.*, 145:1–14, 2007.

[93] P. Saramito : A new elastoviscoplastic model based on the Herschel-Bulkley viscoplasticity. *J. Non Newtonian Fluid Mech.*, 158:154–161, 2009.

[94] P. Saramito, N. Roquet et J. Etienne : *Rheolef users manual.* CNRS and LJK, 2009. `http ://www-ljk.imag.fr/membres/Pierre.Saramito/rheolef/usrman.pdf`.

[95] R. Sureshkumar, M. D. Smith, R. C. Armstrong et R. A. Brown : Linear stability and dynamics of viscoelastic flows using time-dependent numerical simulations. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 82:57–104, 1999.

[96] P. Le Tallec : *Numerical analysis of viscoelastic problems.* Masson, 1990.

[97] M. Van Hecke et P. Schall : Shear bands in matter with granularity. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 42:67–88, 2010.

[98] R. Verfürth : Finite element approximation of steady Navier-Stokes equations with mixed boundary conditions. *M2AN Math. Model Numer. Anal.*, 19:461–475, 1985.

[99] R. Verfürth : Finite element approximation of incompressible Navier-Stokes equations with slip boundary conditions I. *Num. Math.*, 50:697–721, 1987.

[100] R. Verfürth : Finite element approximation of incompressible Navier-Stokes equations with slip boundary conditions II. *Num. Math.*, 59:615–636, 1991.

[101] Y. Wang, K. Krishan et M. Dennin : Impact of boundaries on velocity profiles in bubble rafts. *Phys. Rev. E*, 73:031401, 2006.

[102] D. Weaire et S. Hutzler : *The Physics of Foams.* Oxford : Oxford University Press, 1999.

[103] D. Weaire et N. Rivier : Soap, cells and statistics—random patterns in two dimensions. *Contemp. Phys.*, 25:59–99, 1984.

**Résumé :** Les écoulements de mousse liquide sont directement impliqués dans de nombreuses applications dans des domaines aussi variés que les industries agro-alimentaire et cosmétique, l'extraction pétrolière, ou encore la décontamination nucléaire. Par ailleurs, l'étude des mousses apporte des connaissances fondamentales : plus facile à manipuler et analyser, la mousse est un fluide modèle pour comprendre des matériaux tels que les émulsions, les polymères, les pâtes, ou les agrégats de cellules, qui possèdent à la fois des propriétés liquides et solides.

Les expériences systématiques réalisées par l'équipe de F. Graner ont fourni une série de données précises qui mettent l'accent sur les propriétés non newtoniennes de la mousse. Dans le même temps, P. Saramito a proposé un modèle visco-élasto-plastique (VEP) continu et tensoriel, à même de prédire le comportement de la mousse. L'objectif de cette thèse est de comprendre ce comportement complexe en s'appuyant sur ces deux éléments.

Nous avons élaboré et validé un algorithme de résolution basé sur une méthode d'éléments finis bidimensionnelle. Les solutions numériques sont en excellent accord avec tous les champs mesurés (vitesse, déformation élastique, taux de déformation plastique), et nous avons confirmé le caractère prédictif du modèle. Nous avons identifié les paramètres dominants et établi la nécessité de traiter simultanément les contributions visqueuse, élastique, et plastique dans un formalisme tensoriel. Notre travail apporte une contribution substantielle à la compréhension des mousses et ouvre la voie à la simulation réaliste d'écoulements complexes de fluides VEP en vue d'applications industrielles.
**Mots clés :** Rhéologie, mousses liquides, visco-élasto-plasticité, équations aux dérivées partielles, éléments finis mixtes.

---

**Title :** Numerical modeling of foam flows

---

**Abstract:** Liquid foam flows are involved in numerous applications, *e.g.* food and cosmetics industries, oil extraction, nuclear decontamination. Moreover, their study leads to fundamental knowledge: as it is easier to manipulate and analyse, foam is used as a model material to understand the flow of emulsions, polymers, pastes, or cell agregates, all of which display both solid and liquid behaviour.

Systematic experiments performed by François Graner et al. provide precise data that emphasize the non newtonian properties of the foam. Meanwhile, Pierre Saramito proposed a visco-elasto-plastic continuous tensorial model, akin to predict the behaviour of the foam. The goal of this thesis is to understand this complex behaviour, using these two elements.

We have built and validated a resolution algorithm based on a bidimensional finite elements methods. The numerical solutions are in excellent agreement with the spatial distribution of all measured quantitities, and confirm the predictive capabilities of the model. The dominant parameters have been identified and we evidenced the fact that the viscous, elastic, and plastic contributions to the flow have to be treated simultaneously in a tensorial formalism. We provide a substantial contribution to the understanding of foams and open the path to realistic simulations of complex VEP flows for industrial applications.
**Keywords:** Rheology, liquid foams, visco-elasto-plasticity, partial derivative equations, mixed finite elements.