

Modélisation numérique d'écoulements de mousse

Ibrahim Cheddadi

Laboratoire Jean Kuntzmann, Grenoble

le 22 juin 2010

Domaine de recherche : Rhéologie

- Fluides non-newtoniens : entre **solide** et **fluide**

Visco-Plasticité (VP)

Argile humide



contrainte seuil
modèle de Bingham

Visco-Élasticité (VE)

Suspension de maïzena

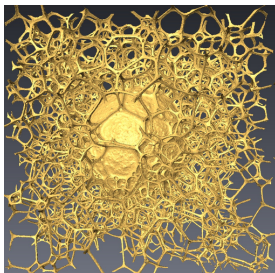


temps caractéristique
modèle d'Oldroyd

- Applications : industrie, géophysique, matériaux biologiques

Rhéologie de la mousse

mousse = gaz + liquide + surfactant

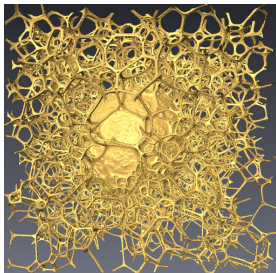


Rhéologie de la mousse

mousse = gaz + liquide + surfactant



solide



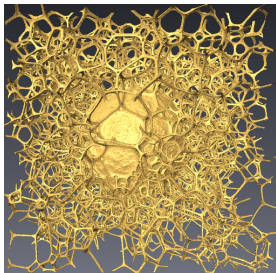
fluide

Rhéologie de la mousse

mousse = gaz + liquide + surfactant



solide

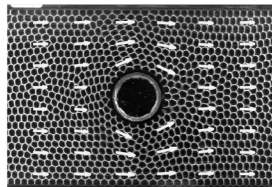
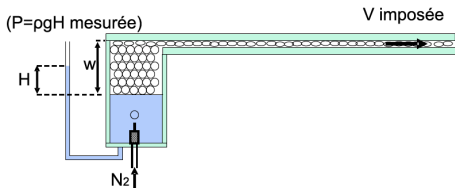


fluide

La mousse est **non-newtonienne**

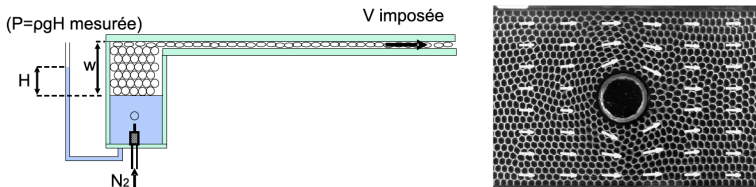
Mousses 2D : tout est visible (ou presque)

- visualisation **facile**/comportement **complexe**

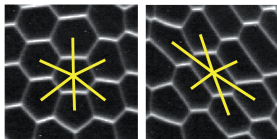


Mousses 2D : tout est visible (ou presque)

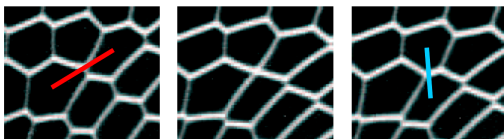
- visualisation **facile**/comportement **complexe**



- Analyse d'images : informations **quantitatives**



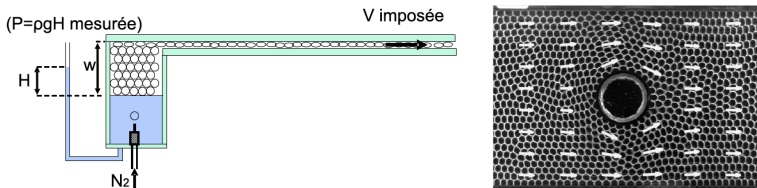
élasticité (anisotropie)



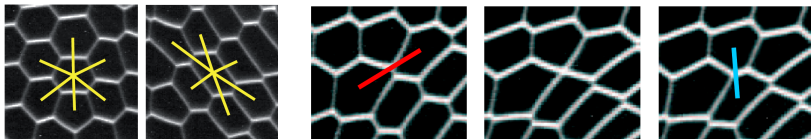
plasticité (échanges de voisins)

Mousses 2D : tout est visible (ou presque)

- visualisation **facile**/comportement **complexe**



- Analyse d'images : informations **quantitatives**



élasticité (anisotropie)

plasticité (échanges de voisins)

Comportement **Visco-Élasto-Plastique** (VEP)

Plan de l'exposé

Objectif : **comprendre** et **prédire** le comportement des matériaux VEP

Méthode : **modélisation continue** et **comparaison** à des expériences

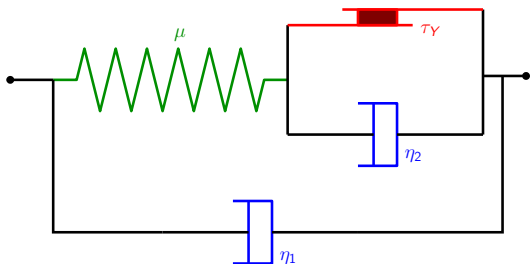
- 1 Modèle VEP
- 2 Résolution numérique
- 3 Écoulements de cisaillement
- 4 Écoulements autour d'un obstacle
- 5 Conclusions & perspectives

Plan de l'exposé

- 1 **Modèle VEP**
 - Équation constitutive
 - Formalisme tensoriel
- 2 Résolution numérique
- 3 Écoulements de cisaillement
- 4 Écoulements autour d'un obstacle
- 5 Conclusions & perspectives

Équation constitutive VEP

[Saramito JNNFM 07]



μ : module élastique

τ_Y : contrainte seuil

η_1 : viscosité newtonienne

η_2 : viscosité plastique

$\lambda = \eta_2/\mu$: temps caractéristique



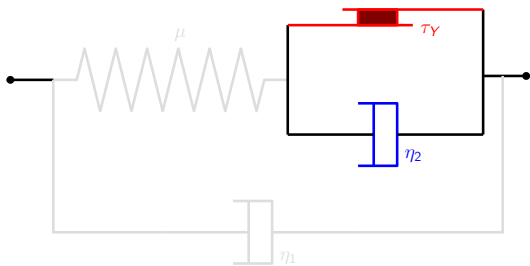
$$\lambda \frac{D\tau}{Dt} + \max\left(0, \frac{|\tau| - \tau_Y}{|\tau|}\right) \tau = 2\eta_2 D(\mathbf{v})$$

$$\sigma_{tot} = -pl + \tau + 2\eta_1 D(\mathbf{v})$$

où $D(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$, τ : contrainte élastique

Équation constitutive VP : Bingham

[Saramito JNNFM 07]



μ : module élastique

τ_Y : contrainte seuil

η_1 : viscosité newtonienne

η_2 : viscosité plastique

$\lambda = \eta_2/\mu$: temps caractéristique



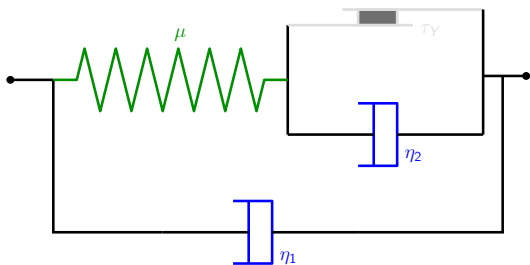
$$\lambda \frac{D\tau}{Dt} + \max\left(0, \frac{|\tau| - \tau_Y}{|\tau|}\right) \tau = 2\eta_2 D(\mathbf{v})$$

$$\sigma_{tot} = -pl + \tau$$

où $D(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$, τ : contrainte élastique

Équation constitutive VE : Oldroyd

[Saramito JNNFM 07]



μ : module élastique

τ_Y : contrainte seuil

η_1 : viscosité newtonienne

η_2 : viscosité plastique

$\lambda = \eta_2/\mu$: temps caractéristique



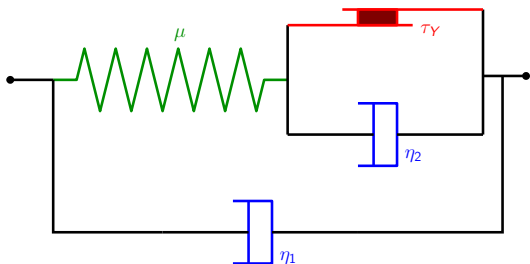
$$\lambda \frac{D\tau}{Dt} + \max\left(0, \frac{|\tau| - \tau_Y}{|\tau|}\right) \tau = 2\eta_2 D(\mathbf{v})$$

$$\sigma_{tot} = -pl + \tau + 2\eta_1 D(\mathbf{v})$$

où $D(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$, τ : contrainte élastique

Équation constitutive VEP

[Saramito JNNFM 07]



μ : module élastique

τ_Y : contrainte seuil

η_1 : viscosité newtonienne

η_2 : viscosité plastique

$\lambda = \eta_2/\mu$: temps caractéristique



$$\lambda \frac{D\tau}{Dt} + \max\left(0, \frac{|\tau| - \tau_Y}{|\tau|}\right) \tau = 2\eta_2 D(\mathbf{v})$$

$$\sigma_{tot} = -pl + \tau + 2\eta_1 D(\mathbf{v})$$

où $D(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$, τ : contrainte élastique

Formalisme tensoriel

- $\tau = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} \end{pmatrix}$ est un tenseur symétrique.
- Évolution d'un **tenseur** \Rightarrow **dérivée objective** (indépendante de l'observateur) :

$$\frac{D\tau}{Dt} = \frac{\partial\tau}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\tau + \beta_a(\tau, \nabla\mathbf{v}),$$

où

$$\beta_a(\tau, \nabla\mathbf{v}) = \tau \cdot \mathbf{W}(\mathbf{v}) - \mathbf{W}(\mathbf{v}) \cdot \tau - a(D(\mathbf{v}) \cdot \tau + \tau \cdot D(\mathbf{v})),$$

avec $a \in [-1, 1]$, et $\mathbf{W}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\nabla\mathbf{v} - \nabla\mathbf{v}^T)$.

Ingrédients simples, cadre général

- Modèle **simple**

- ▶ Élasticité linéaire
- ▶ Critère de plasticité de Von Mises : $|\tau| = \tau_Y$
- ▶ Dissipation plastique = visqueuse, newtonienne

- Cadre **général** : formalisme **tensoriel** valide en 2D/3D

- Intérêt de cette approche

- ▶ non linéarités les moins complexes possible
- ▶ modèle basé sur Oldroyd et Bingham
- ▶ η_2 , μ , τ_Y pour décrire un matériau V , E , P
- ▶ **couplage VEP**

Plan de l'exposé

1 Modèle VEP

2 Résolution numérique

- Position du problème
- Discrétisation en temps
- Discrétisation spatiale
- Mise en oeuvre des calculs

3 Écoulements de cisaillement

4 Écoulements autour d'un obstacle

5 Conclusions & perspectives

Position du problème

Équations sans dimension

À partir de la condition initiale (τ^0, \mathbf{v}^0) , trouver τ, \mathbf{v}, p tel que

$$\mathbf{We} \frac{\mathcal{D}\tau}{\mathcal{D}t} + \kappa(|\tau|)\tau = 2\alpha D(\mathbf{v}) \text{ dans } \Omega, \quad (1)$$

$$-(1 - \alpha)\Delta \mathbf{v} - \operatorname{div} \tau + \nabla p = -C_F \mathbf{v} \text{ dans } \Omega, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (3)$$

où

$$\kappa(z) = \max\left(0, \frac{z - \mathbf{Bi}}{z}\right),$$

$$\mathbf{Bi} = \frac{\tau_Y}{(\eta_1 + \eta_2)V/L}, \quad \mathbf{We} = \frac{\eta_2}{\mu} V/L, \quad \alpha = \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2},$$

$$C_F = \frac{\beta L^2}{\eta_1 + \eta_2}$$

Difficultés

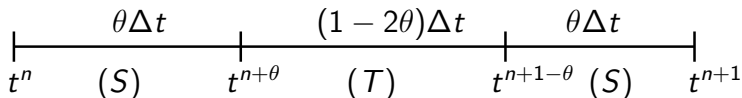
- problème couplé à **trois champs** (τ, \mathbf{v}, p)
- non linéarité liée au **transport des contraintes**
- non-linéarité liée à la **plasticité**
- conditions de **glissement sur bords courbes**
- modèle nouveau \Rightarrow comportement **inconnu**

Discrétisation en temps : θ -schéma

Problème d'évolution en temps :

$$m\partial_t X + A(X) = 0$$

Idée : **diviser** chaque pas de temps en trois



Décomposition d'opérateur : $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$.

$$m \frac{X^{n+\theta} - X^n}{\theta\Delta t} + \mathbf{A}_1(X^{n+\theta}) + A_2(X^n) = 0 \quad (S),$$

$$m \frac{X^{n+1-\theta} - X^{n+\theta}}{(1-2\theta)\Delta t} + A_1(X^{n+\theta}) + \mathbf{A}_2(X^{n+1-\theta}) = 0 \quad (T),$$

$$m \frac{X^{n+1} - X^{n+1-\theta}}{\theta\Delta t} + \mathbf{A}_1(X^{n+1}) + A_2(X^{n+1-\theta}) = 0 \quad (S).$$

Séparation des non-linéarités

$$X = {}^t(\tau, \mathbf{v}, p), \quad m = \text{diag}(We, 0, 0).$$

$$A_1(X) = \begin{pmatrix} \kappa(|\tau|)\tau - 2\alpha D(\mathbf{v}) \\ -(1 - \alpha)\Delta \mathbf{v} - \text{div} \tau + \nabla p + C_F \mathbf{v} \\ \text{div} \mathbf{v} \end{pmatrix},$$

et

$$A_2(X) = \begin{pmatrix} We(\mathbf{v} \cdot \nabla \tau + \beta_a(\tau, \nabla \mathbf{v})) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- A_1 : problème de **Stokes non-linéaire à trois champs**, linéarisé avec une méthode de **point-fixe**
- A_2 : problème de **transport de la contrainte**, résolu avec la méthode de **Galerkin discontinu**

Problème de Stokes à trois champs

Trouver (τ, \mathbf{v}, p) vérifiant les CL et tel que

$$\left(\frac{We}{\theta \Delta t} + \kappa(|\tilde{\tau}|) \right) \tau - 2\alpha D(\mathbf{v}) = T^n, \quad (4)$$

$$-(1 - \alpha)\Delta \mathbf{v} - \operatorname{div} \tau + \nabla p + C_F \mathbf{v} = 0, \quad (5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (6)$$

T^n : second membre venant de l'itération n .

Éléments finis mixtes :

- **contrainte** : $\mathbf{P}_1 \mathbf{d}$, permet de résoudre (4) facilement
- **vitesse** : \mathbf{P}_2 , incorpore les conditions de glissement
- **pression** : \mathbf{P}_1

L'approximation vitesse-pression vérifie les conditions **inf-sup**.

Problème de transport : Méthode de Galerkin discontinu

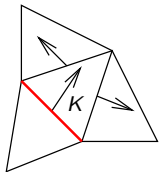
Calcul explicite de la vitesse : $\mathbf{v}^{n+1-\theta} = \frac{1-\theta}{\theta} \mathbf{v}^{n+\theta} - \frac{1-2\theta}{\theta} \mathbf{v}^n$.

⇒ on se ramène à un **transport pur** : trouver τ tel que

$$\nu \tau + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau = f,$$

où \mathbf{v} et f sont connus.

Décentrage du schéma sur les arêtes où il y a flux rentrant.



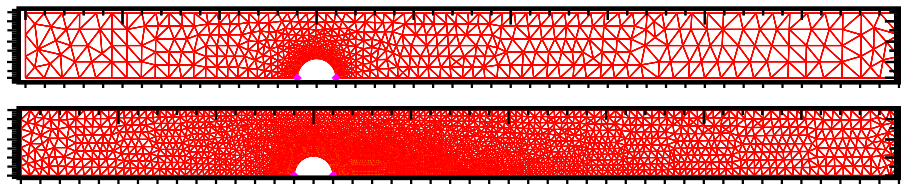
$$\sum_K \left\{ \int_K (\nu \tau_h + (\mathbf{v}_h \cdot \nabla) \tau_h - f_h) : \gamma_h dx - \int_{\partial K} \frac{\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} - |\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}|}{2} [\tau_h] : \gamma_h ds \right\} = 0,$$

$$\text{où } [\tau_h] = \tau_h^{int} - \tau_h^{ext}.$$

Possible car les contraintes sont $\mathbf{P}_1 \mathbf{d}$.

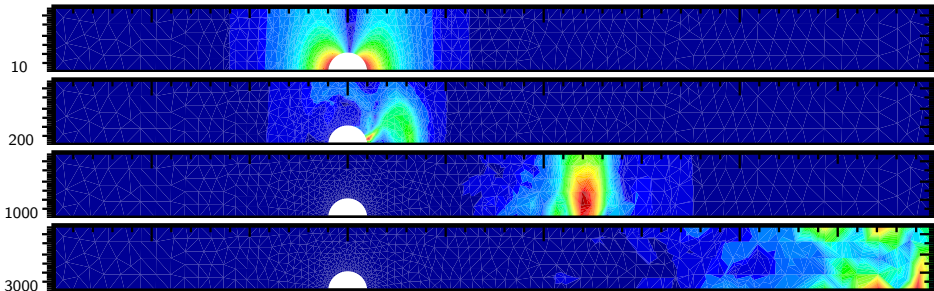
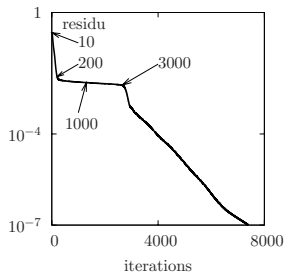
Calculs

- Librairie RHEOLEF (C++)
- Validation de l'algorithme : convergence vers des solutions connues des modèles VE (Oldroyd) et VP (Bingham)
- Convergence en fonction du pas de maillage : 1102 et 6053 triangles



Décroissance du résidu

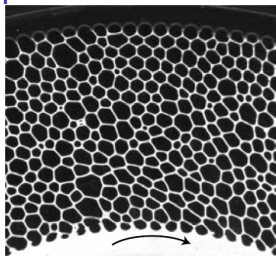
- critère d'arrêt pour la solution stationnaire : résidus à 10^{-7}
- $\approx 5h$ de calculs pour le maillage 1



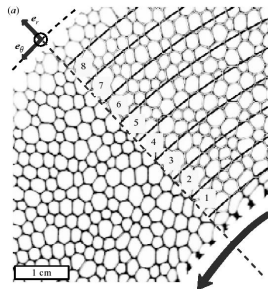
Plan de l'exposé

- 1 Modèle VEP
- 2 Résolution numérique
- 3 **Écoulements de cisaillement**
 - Présentation de l'expérience
 - Choix des paramètres
 - Résultats
- 4 Écoulements autour d'un obstacle
- 5 Conclusions & perspectives

Expérience de G. Debrégeas



[Debrégeas et al., PRL 2001]



[Janiaud, Graner, JFM 2005]

- [Debrégeas et al., PRL 2001] :
expériences + mesure de la vitesse
⇒ **localisation de la vitesse**
- [Janiaud, Graner, JFM 2005] :
contrainte élastique
transitoire et stationnaire
⇒ **données**
- **1er test** du modèle ; résolution **1D**
Exploration des paramètres

Choix des paramètres

- paramètres géométriques et cinématiques :

$$V_{cylindre} = 0.25 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1} \quad r_0 = 71 \text{ mm} \quad r_e = 122 \text{ mm}$$

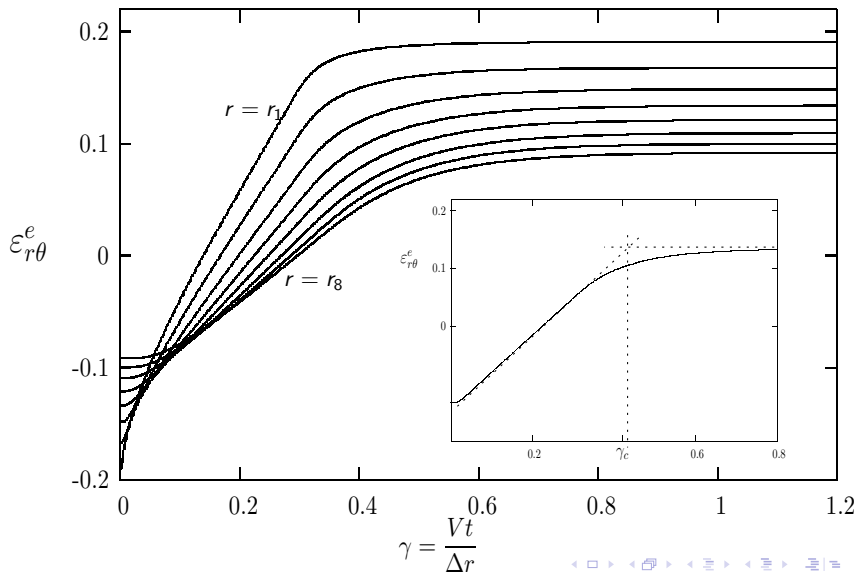
- paramètres physiques : obtenus après exploration systématique

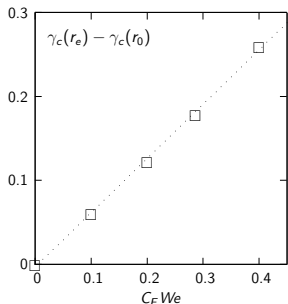
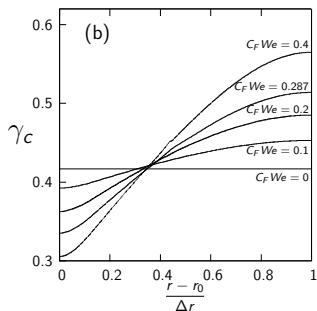
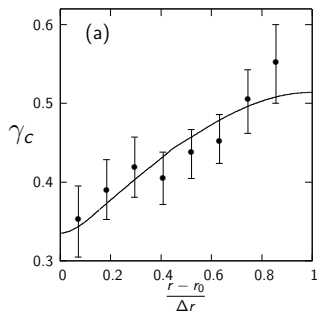
$$\mu = 10.9 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \quad \tau_Y = 5.2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \quad \eta_1 = 0$$

$$\eta_2 = 13.1 \text{ Pa} \cdot \text{s} \quad \beta = 613 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$$

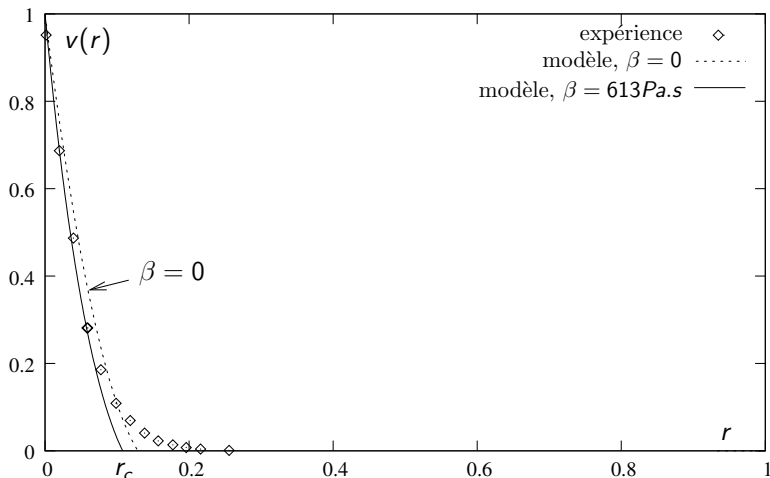
- condition initiale : $\tau = 0$ et $\mathbf{v} = 0$, puis rotation jusqu'au stationnaire

$\varepsilon_{r\theta}^e = \frac{\tau_{r\theta}}{2\mu}$: déformation élastique ; γ_c : fin du transitoire



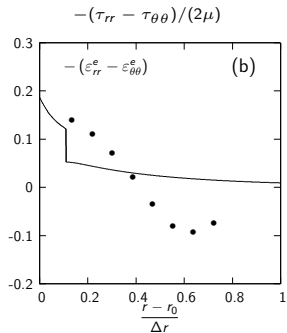
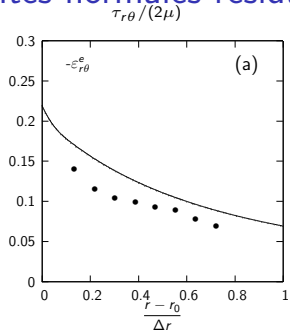


- ne dépend que de $C_F We \propto \beta/\mu$
- \Rightarrow compétition **friction/élasticité**
- contraignant pour $C_F We$

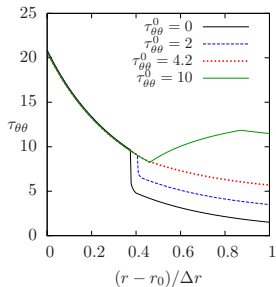


- **friction = effet secondaire**
- r_c dépend principalement de Bi
géométrie cylindrique $\Rightarrow \tau$ non homogène \Rightarrow localisation

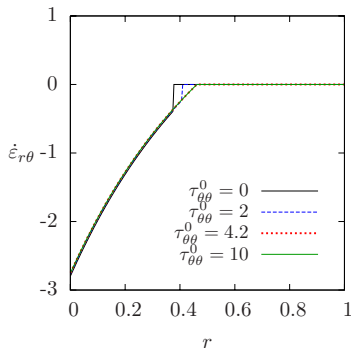
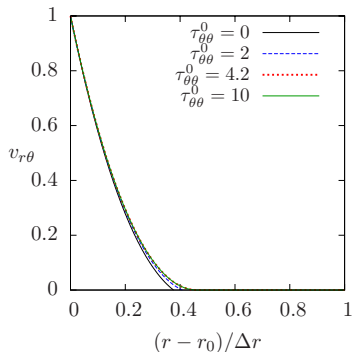
Contraintes normales résiduelles



- contrainte de cisaillement : **imposée par la géométrie**
- contraintes normales : dépendent des **conditions initiales** dans la zone "rigide"



Rupture de pente de la vitesse : effet des conditions initiales

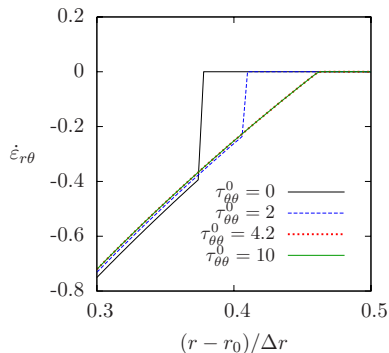
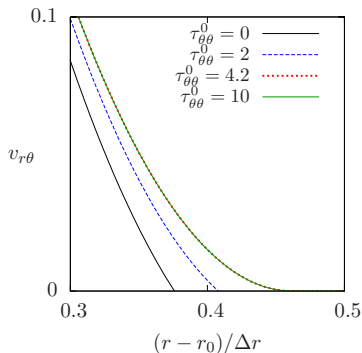


⇒ lié au caractère **VEP tensoriel** de la mousse : contraintes normales résiduelles dans la zone en-dessous du seuil

Explication possible pour observations expérimentales

[Rodts *et al.*, *Eur. Phys.* 2005]

Rupture de pente de la vitesse : effet des conditions initiales



⇒ lié au caractère **VEP tensoriel** de la mousse : contraintes normales résiduelles dans la zone en-dessous du seuil

Explication possible pour observations expérimentales

[Rodts et al., *Eur. Phys.* 2005]

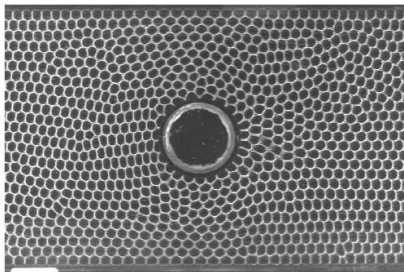
Bilan cisaillement

- 1ère résolution du modèle avec dépendance spatiale : comportement inattendu
- Bon accord avec toutes les données de cette expérience
- Jeu de paramètres unique avec valeurs réalistes
- Contributions à des débats en cours :
 - ▶ Propagation du seuil
 - ▶ Localisation
 - ▶ **Contraintes résiduelles** : VEP
 - ▶ **Rupture de pente de la vitesse** : VEP
- Expérience peu discriminante

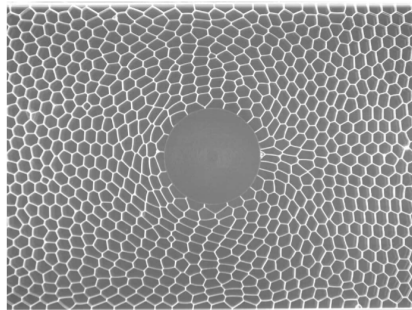
Plan de l'exposé

- 1 Modèle VEP
- 2 Résolution numérique
- 3 Écoulements de cisaillement
- 4 Écoulements autour d'un obstacle**
 - Présentation des expériences
 - Choix des paramètres
 - Résultats
- 5 Conclusions & perspectives

Écoulements autour d'un obstacle



mousse **humide**



mousse **sèche**

Expérience **contraignante** : hétérogène, anisotrope, VEP

Objectif : **ajuster** le modèle sur la mousse humide et

prédire la mousse sèche

[Dollet, Graner, *JFM* 07, Marmottant, Raufaste, Graner, *EPJE* 08]

Choix des paramètres

- Exploration systématique des paramètres :
 $\varepsilon_Y = \tau_Y / (2\mu)$ est le **paramètre dominant**
- ε_Y est **directement mesurable** :
0.15 pour l'expérience humide
0.3 pour l'expérience sèche
- β est estimée pour l'expérience humide,
mais pas d'effet visible $\Rightarrow \beta = 0$
- η_1 , η_2 , et μ sont **ajustés** pour l'expérience humide à partir de
l'expérience de cisaillement :

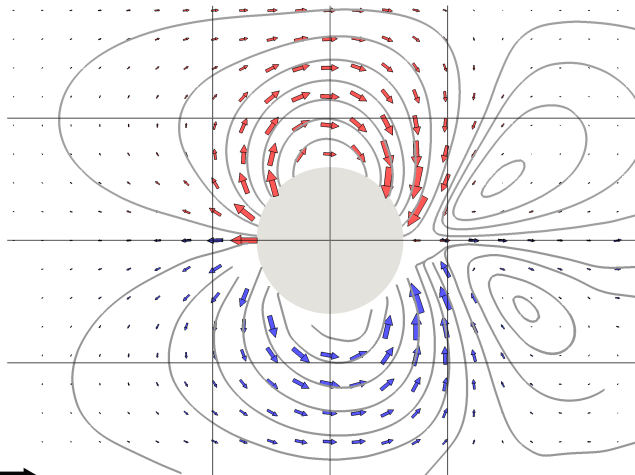
$$\eta_1 = 0.26 \text{ Pa} \cdot \text{s} \quad \eta_2 = 2.6 \text{ Pa} \cdot \text{s} \quad \mu = 13.1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$$

\Rightarrow **très bon accord** avec l'expérience humide

- **Prédiction** de l'expérience sèche avec $\varepsilon_Y = 0.3$

Excellent accord : $\mathbf{v} - \mathbf{V}_{in}$

calculs numériques

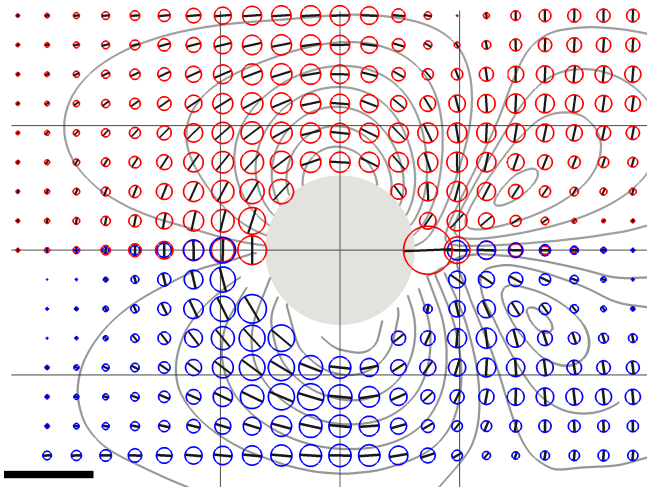


→
expérience sèche

amplitude et **orientation** du vecteur vitesse,
zones de recirculation, **points d'arrêt**

Excellent accord : contrainte élastique

calculs numériques

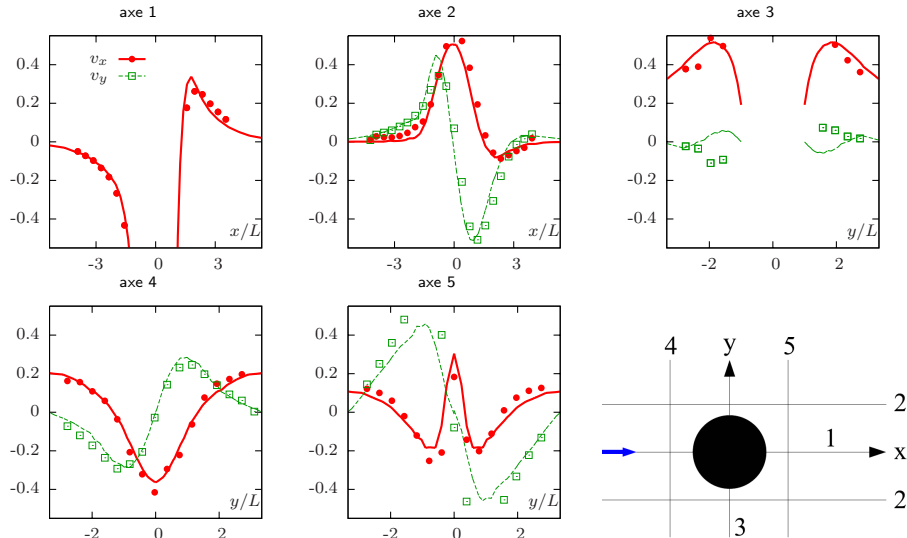


expérience sèche

Représentation : **direction** de plus grande élongation et **amplitude**

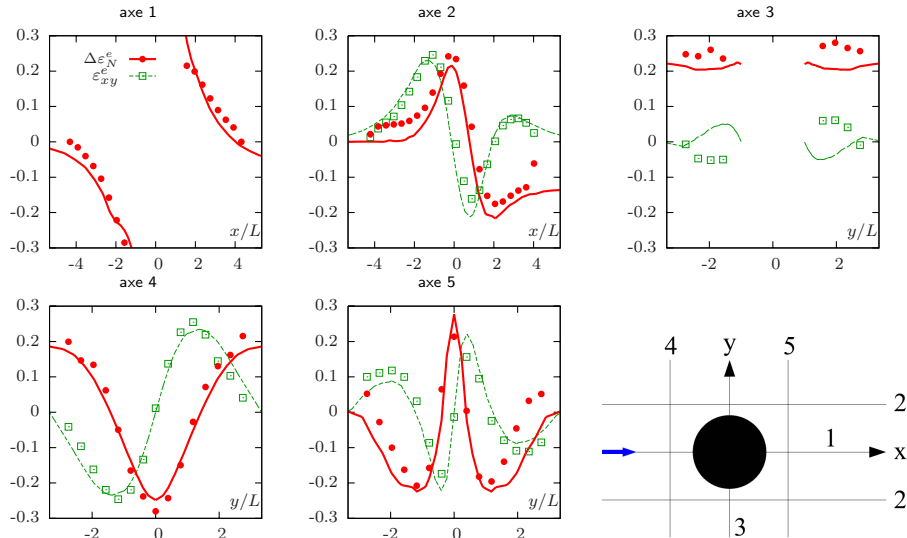
Lignes de courant **décorrélées** de l'orientation

Accord quantitatif : coupes de $\mathbf{v} - \mathbf{V}_{in}$



Accord sur la **position** et l'**amplitude** des extrema locaux

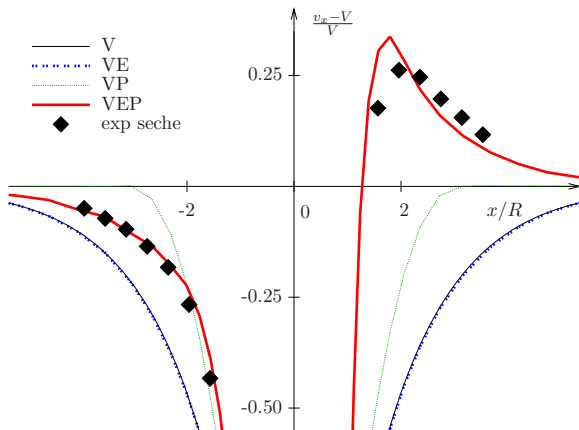
Accord quantitatif : coupes de τ



Accord sur la **position** et l'**amplitude** des extrema locaux

Sursaut de la vitesse : VE ou VEP ?

Observé pour fluides VE à haute vitesse ; ici **basse vitesse**



Spécificité VEP : réponse élastique à basse vitesse

Bilan écoulement autour d'un obstacle

- Excellent accord avec l'expérience
- Prédiction sans paramètre ajustable
- Paramètre dominant : déformation seuil
- Effet dominant : élasticité
- Sursaut : $VEP \gg VE + VP$
- Expérience discriminante

Plan de l'exposé

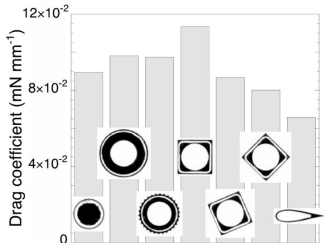
- 1 Modèle VEP
- 2 Résolution numérique
- 3 Écoulements de cisaillement
- 4 Écoulements autour d'un obstacle
- 5 Conclusions & perspectives
 - Conclusions
 - Perspectives

Conclusions

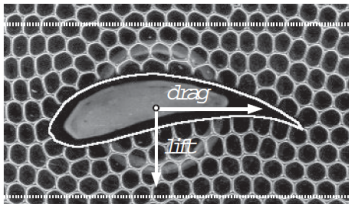
- Algorithme efficace pour toute géométrie 2D
- Première comparaison d'un modèle avec un écoulement VEP complexe
- Modèle prédictif
- Ingrédients simples mais comportement complexe : prise en compte simultanée d'effets VEP
- Approche continue validée

Perspectives

- Force sur l'obstacle

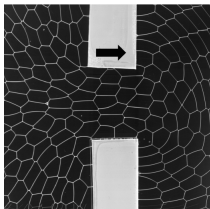


[Dollet et al. PRE 2005]

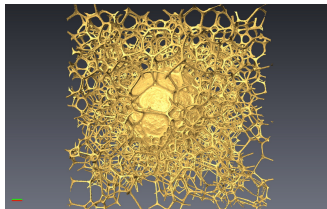


[Dollet et al. PRL 2005]

- Autres géométries



[Dollet 2009, preprint]



[P. Cloetens]

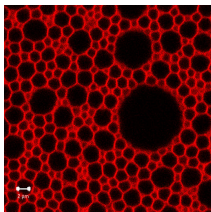
Perspectives

- Améliorations du modèle

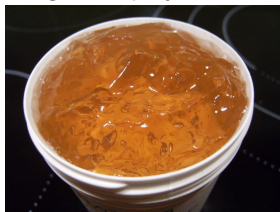
- ▶ Haute vitesse : dissipation plastique en loi de puissance [Saramito *JNNFM* 2009], et friction des plaques en loi de puissance
- ▶ Très basse vitesse : Plasticité progressive [Marmottant Graner *EPJE* 2008]

- Autres matériaux

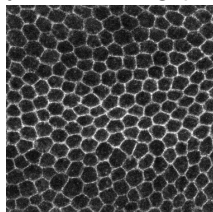
émulsions



gels de polymères



systèmes biologiques

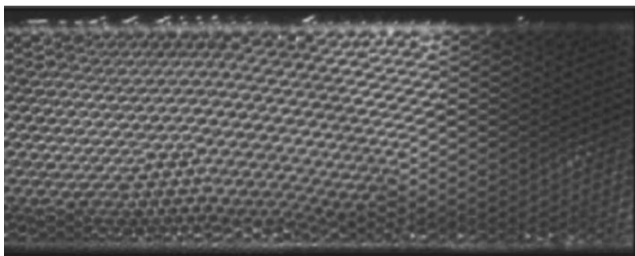


[Pierre-Luc Bardet]

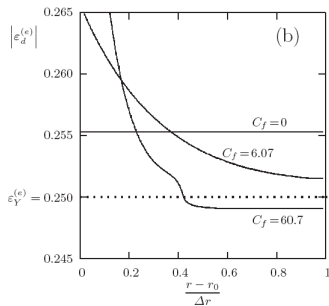
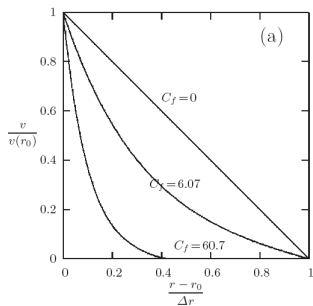
Merci de votre attention !

Calcul numérique :
tenseur de "texture" $exp(\varepsilon^e)$, advecté par la vitesse le long des lignes de courant

Résultat du modèle en écoulement de cisaillement plan

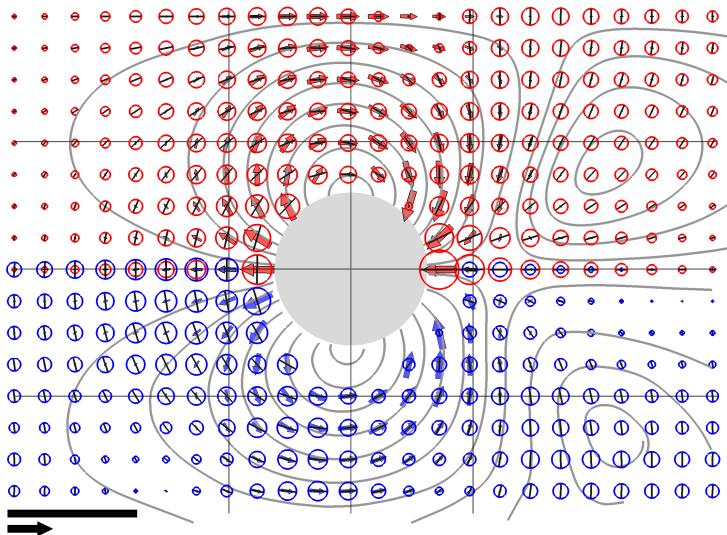


[Wang et al., PRE 2006]



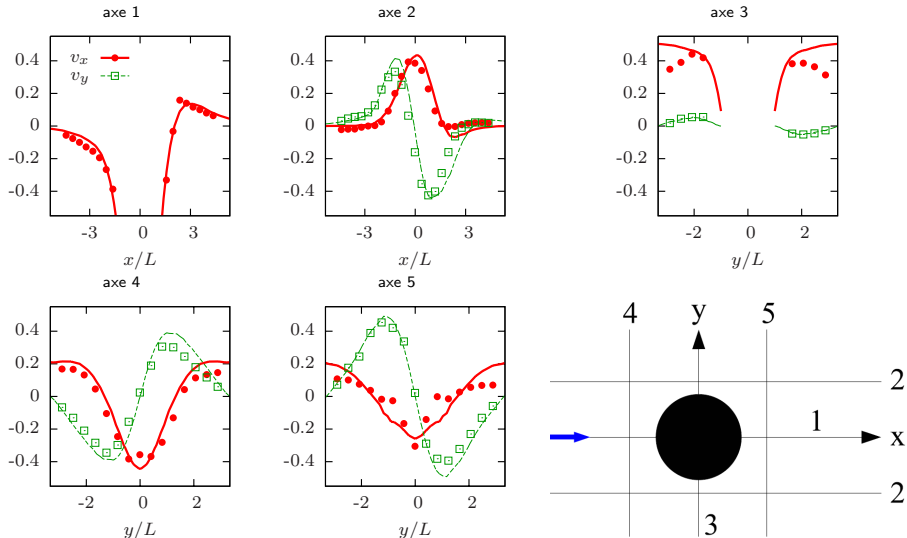
Expérience mousse humide

calculs numériques



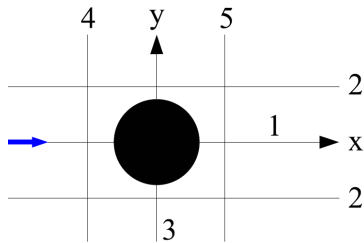
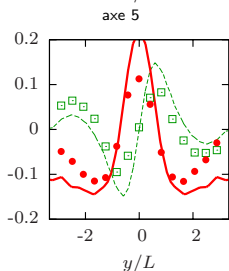
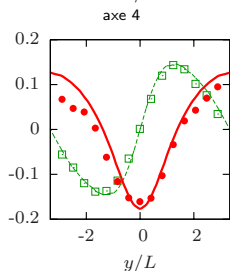
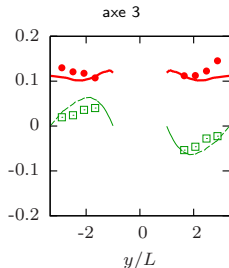
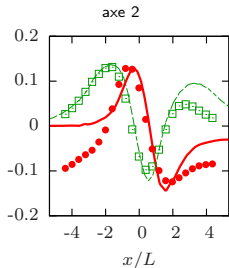
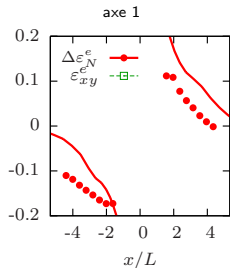
expérience humide

Expérience mousse humide : coupes de $\mathbf{v} - \mathbf{V}_{in}$



Accord sur la **position** et l'**amplitude** des extrema locaux

Expérience mousse humide : coupes de τ



Accord sur la **position** et l'**amplitude** des extrema locaux