



**HAL**  
open science

# Sur les triangulations des structures CR-sphériques

Juliette Genzmer

► **To cite this version:**

Juliette Genzmer. Sur les triangulations des structures CR-sphériques. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2010. Français. NNT: . tel-00502363

**HAL Id: tel-00502363**

**<https://theses.hal.science/tel-00502363>**

Submitted on 13 Jul 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Pierre et Marie Curie

École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre

# THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

présentée par

**Juliette GENZMER**

---

## Sur les triangulations des structures CR-sphériques

---

dirigée par Elisha FALBEL

Soutenue le 25 juin 2010 devant le jury composé de :

M. Nicolas BERGERON	Université Paris VI
M. Daniel BURNS	Université du Michigan
M. Gilles COURTOIS	École Polytechnique
M. Martin DERAUX	Université de Grenoble I
M. Elisha FALBEL	Université Paris VI
M. Julien MARCHÉ	École Polytechnique
M. Jean-Marc SCHLENKER	Université Toulouse III
M. Richard WENTWORTH	Université de Baltimore

au vu des rapports de :

M. Jean-Marc SCHLENKER	Université Toulouse III
M. Morwen THISTLETHWAITE	Université du Tennessee

Institut de Mathématiques de Jussieu  
175, rue du Chevaleret  
75 013 Paris

École doctorale Paris centre Case 188  
4 place Jussieu  
75 252 Paris cedex 05

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance envers Elisha Falbel. Il m'a proposé un sujet riche et passionnant. J'ai pu bénéficier de son intuition mathématique et de sa vision géométrique des problèmes. Je voudrais le remercier pour sa grande disponibilité : durant ces quatre années, sa porte était toujours ouverte (littéralement) et il a pris le temps de créer entre ses étudiants une atmosphère studieuse et chaleureuse en organisant régulièrement des groupes de travail. Ses constants encouragements et sa profonde gentillesse m'ont permis d'avancer sereinement dans mon travail. Cela dit, je ne voudrais pas que l'aspect formel de ces remerciements minimise le plaisir et l'intérêt que j'ai trouvé à travailler avec mon chef.

Jean-Marc Schlenker et Morwen Thistlethwaite ont accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Je les remercie pour leur lecture attentive et minutieuse ainsi que pour leurs remarques qui ont permis d'améliorer le manuscrit.

Je voudrais remercier Nicolas Bergeron pour tout le temps qu'il a consacré à me faire découvrir les réseaux arithmétiques. J'ai eu aussi le plaisir d'imaginer avec lui un atelier pour la Fête de la Science sur la beauté de la géométrie non-euclidienne. C'est un réel privilège qu'il ait accepté d'être membre de mon jury.

Je remercie très sincèrement Daniel Burns, Gilles Courtois, Martin Deraux, Julien Marché, Richard Wentworth qui me font l'honneur de participer au jury.

Le chapitre 5 s'appuie sur des résultats de John Parker et Pierre Will. Je les remercie d'avoir partagé avec moi leurs découvertes. Pierre Will m'a suivie tout au long de ma thèse. En tant que "grand frère", il a d'abord accompagné mes premiers pas dans le monde de la géométrie hyperbolique complexe. Ensuite, il m'a invitée à l'Institut Fourier à Grenoble où nous avons eu de nombreuses discussions fructueuses. Plus tard, il a relu avec beaucoup d'attention ce manuscrit. Aujourd'hui, je le remercie d'avoir le privilège de le compter parmi mes amis.

C'est avec beaucoup de pédagogie que Maxime Wolff m'a appris tout ce que je sais sur les surfaces de translations. Je peux témoigner ici à quel point son enthousiasme est communicatif. Avec une patience infinie, il a relu et corrigé mon travail. Sa rigueur dans la rédaction m'ont permis d'améliorer cette thèse. J'ai d'ailleurs glissé à son attention une erreur typographique qu'il n'a sans doute pas manquée.

Je remercie aussi Ben McReynolds pour ses conseils et ses corrections sur le dernier chapitre de la thèse.

Pendant ma thèse, j'ai rejoint l'équipe de la Fête de la Science de Chevaleret. Toute l'année, ils organisent des ateliers pour le grand public dans le but de répondre à cette question "A quoi ça sert les maths?". Et ces actions me semblent tout à fait essentielles. Pour ne rien gâcher, cette équipe rassemble des gens pour qui j'ai énormément de sympathie. Je remercie en particulier ceux qui ont été, sont, seront les organisateurs : Séverine

Leidwanger, Frédérique Petit, Matthieu Romagny.

Je remercie tous les doctorants qui peuplent (ou ont peuplé) le plateau C du septième. Il m'est impossible de tous les citer, mais chacun a contribué à rendre l'ambiance au bureau conviviale et chaleureuse. Je pense en particulier aux fabuleux membres du BDD, aux filles des Bourbakettes (et aux garçons aussi...). J'ai aussi une tendresse toute particulière pour mes derniers co-bureaux, Paloma et Louis-Hadrien.

Je voudrais remercier pour son soutien constant ma mère dont je suis fier de prendre aujourd'hui la relève. La présence protectrice de mon père (et ses limericks euclidiens) sont toujours d'un grand réconfort pour moi. Je remercie aussi mes deux frères, Yohann qui a suivi ce travail avec un regard protecteur et bienveillant, Clément pour son enthousiasme à toute épreuve (s.m.l.p. j'ai fini).

Ma tante Marie-Agnès a relu le français de cette thèse avec une rapidité impressionnante. Cette aide là m'a été précieuse, mais je la remercie plus particulièrement pour nos conversations chaque premier week-end de septembre. A chaque étape, elle a su m'encourager, attiser mon ambition et mon envie d'aller plus loin.

Pendant tout le temps que j'ai passé à Chevaleret, j'ai été accompagnée par mes deux amis Laura et François. Je veux qu'ils sachent combien notre trio des inséparables de Chevaleret va me manquer.

J'ai eu la chance d'être entourée d'amis qui m'ont toujours soutenue, je pense notamment à tous les Pyrénées. En particulier, je voudrais remercier Noémi qui a partagé mon quotidien quand nous habitons si près du labo. Elle sait toujours comment m'apaiser grâce à sa qualité d'écoute et son amitié m'est très précieuse.

Et enfin, il y a Pierre. Bien qu'étranger aux mathématiques, son implication dans ce travail, je la retrouve partout : il m'a été indispensable, et il le reste.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Le plan hyperbolique complexe et son bord</b>	<b>13</b>
1.1 Le plan hyperbolique complexe . . . . .	14
1.2 Les sous-espaces totalement géodésiques dans $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . . . . .	16
1.3 Isométries de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . . . . .	17
1.4 Le bord de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . . . . .	20
1.5 Structure géométrique . . . . .	24
1.6 Classification des $n$ -uplets de $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . . . . .	26
<b>2 Tétraèdres géométriques et abstraits</b>	<b>31</b>
2.1 Tétraèdres hyperboliques réels et birapport . . . . .	31
2.2 Tétraèdres CR et invariants . . . . .	33
2.3 L'espace $\mathcal{T}$ . . . . .	37
<b>3 Les équations de recollement</b>	<b>43</b>
3.1 Représentations de groupes fondamentaux . . . . .	43
3.2 Géométrisation hyperbolique réelle de la variété $M$ . . . . .	49
3.3 Représentations dans $\text{PU}(2,1)$ . . . . .	54
<b>4 Rang des équations de recollement</b>	<b>63</b>
4.1 Rigidité géométrique et rang des équations de recollement . . . . .	63
4.2 Solutions aux équations de recollement . . . . .	64
4.3 Rang des équations . . . . .	65
4.4 La forme symplectique $\Omega$ . . . . .	68
4.5 Espace des solutions dans $\mathcal{T}$ . . . . .	74
4.6 Rang des équations dans le cas réel . . . . .	79
4.7 Rang des équations dans le cas CR . . . . .	80
4.8 Nature des surfaces composées par les étoiles . . . . .	84
<b>5 Représentations pour l'entrelacs de Whitehead</b>	<b>89</b>
5.1 Le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead . . . . .	89
5.2 La famille de représentations de Parker-Will . . . . .	91
5.3 Géométrisation CR par Schwartz pour l'entrelacs de Whitehead . . . . .	94
5.4 Des solutions aux équations . . . . .	95
<b>6 Corps de trace de sous-groupes de <math>\text{SU}(n,1)</math></b>	<b>99</b>
6.1 Corps de trace . . . . .	99
6.2 Corps des invariants pour une variété triangulée . . . . .	103

6.3	Corps de trace de groupes arithmétiques . . . . .	106
<b>A</b>	<b>Des exemples de solutions aux équations</b>	<b>109</b>
A.1	Le programme SnapPea . . . . .	109
A.2	Des solutions aux équations de compatibilité . . . . .	110
A.3	Une solution aux équations pour une variété compacte . . . . .	115
	<b>Bibliographie</b>	<b>121</b>

# Introduction

Ce travail s'inscrit dans le domaine de la géométrie CR-sphérique en dimension trois. Le modèle d'une telle géométrie est la sphère  $S^3$ , bord de la boule unité dans  $\mathbb{C}^2$ , sur laquelle agit par CR-automorphismes le groupe  $\text{PU}(2,1)$ . Cette structure apparaît au bord du plan hyperbolique complexe  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Une variété est dite CR-sphérique complète si elle est homéomorphe à un quotient  $\Omega(\Gamma)/\Gamma$  où  $\Gamma$  est un groupe discret de  $\text{PU}(2,1)$  et  $\Omega(\Gamma)$  est son domaine de discontinuité. Un exemple de variété CR-sphérique complète est le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead, construit par Schwartz dans [Sch07]. Les autres exemples connus sont des fibrés en cercle sur des surfaces (voir [BS76], [GKL01]). On dispose donc de peu d'exemples.

En géométrie hyperbolique réelle, Thurston montre dans ses notes [Thu79] comment munir le complémentaire du nœud de huit d'une structure hyperbolique réelle complète. Il montre que l'espace  $S^3 - K$  (où  $K$  désigne le nœud) peut être obtenu comme recollement de deux tétraèdres hyperboliques. La démonstration permet une construction effective de cette structure géométrique. La méthode est la suivante : chaque tétraèdre de la triangulation est caractérisé par un invariant qui est le birapport des quatre sommets. Pour obtenir une structure hyperbolique sur le recollement des tétraèdres, les invariants doivent satisfaire un certain nombre d'équations polynomiales. Elles assurent que certaines conditions de compatibilité au niveau du recollement sont vérifiées :

- les équations dites *d'arêtes* qui permettent que les structures hyperboliques de chaque tétraèdre se recollent de façon compatible pour donner une structure géométrique globale.
- les équations dites *d'holonomie* qui assurent la complétude du recollement.

Lorsque ces équations sont résolues, on obtient une géométrisation du complémentaire du nœud, c'est à dire que  $S^3 - K$  est homéomorphe à  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3/\Gamma$  où  $\Gamma$  est un groupe libre, discret de covolume fini. C'est une application d'holonomie  $h: \Pi_1(M) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{C})$  qui envoie le groupe fondamental sur  $\Gamma$ .

À l'exception des nœuds toriques et des nœuds satellites, Thurston prouve que tous les complémentaires dans  $S^3$  de nœuds ou d'entrelacs admettent une structure hyperbolique réelle complète qui est unique.

La méthode s'étend à d'autres recollements. D'après [Mat07], si  $M$  désigne l'intérieur d'une variété de dimension trois compacte à bord, alors elle présente une triangulation idéale. Dans ce travail, ses composantes de bord seront toujours des tores. La variété  $M$  peut donc être envisagée comme le recollement de  $n$  tétraèdres privés de leurs sommets tel que l'étoile de chaque sommet est un tore. Le programme informatique SnapPea développé par Weeks (voir [HW89] et [MT05]) calcule numériquement les solutions des équations d'arêtes et d'holonomie. Si  $M$  admet une structure hyperbolique complète, alors il existe une triangulation hyperbolique idéale d'après [EP88] (éventuellement dégénérée). Cette triangulation de la variété  $M$  apporte donc sa géométrisation hyperbolique. Si le découpage

initial de  $M$  n'est pas une triangulation hyperbolique géométrique, changer la triangulation sera suffisant pour obtenir la solution. Dans [CHW99], les auteurs recensent toutes les variétés obtenues comme le recollement de moins de sept tétraèdres qui admettent une structure hyperbolique réelle.

Dans [Fal08], Falbel adapte cette méthode au cas CR. Il définit des invariants qui caractérisent les classes de conjugaison de quadruplets de points à  $\mathrm{PU}(2,1)$  près. Pour chaque simplexe, ce sont quatre nombres complexes, calculés comme des birapports dans  $\mathbb{C}P^1$ . Falbel construit pour le complémentaire du nœud de huit une structure CR-sphérique branchée à holonomie périphérique parabolique. L'objectif central de cette thèse a été d'enrichir cette approche, en l'utilisant pour construire des représentations de  $\Pi_1(M)$  dans  $\mathrm{PU}(2,1)$  et pour étudier la rigidité des structures géométriques CR.

Pour un tétraèdre hyperbolique réel idéal, la donnée des sommets détermine entièrement le simplexe en passant à l'enveloppe convexe. De ce point de vue, les conditions de compatibilité sur le recollement ne porte que sur les sommets. Dans le cas complexe, il n'y a pas de façon canonique de relier deux points de  $S^3$ . Le terme *tétraèdre CR* désigne en fait un quadruplet ordonné de points de la sphère. On peut demander le même type de compatibilité dans le recollement qu'avec les tétraèdres réels. Cela se traduit par des relations entre les invariants :

- les équations dites *de faces* car dans  $S^3$ , deux triplets ne sont pas nécessairement isométriques.
- les équations *d'arêtes*.
- les équations *d'holonomie* qui spécifient pour une représentation de  $\Pi_1(M)$  l'image d'un lacet dans l'étoile d'un sommet.

Dans le cas réel, une solution aux équations donne une application d'holonomie. En l'absence de structure géométrique sur les tétraèdres CR, la résolution de ces équations nous permet de construire une représentation :

$$h: \Pi_1(M) \rightarrow \mathrm{PU}(2,1).$$

Pour obtenir une géométrisation du recollement, il faut faire un choix cohérent pour relier les points des simplexe afin d'avoir des tétraèdres pleins.

La résolution de ces équations est en général délicate, même pour un petit nombre de tétraèdres. Néanmoins, pour certaines variétés, nous proposons ici de nouvelles solutions et nous construisons une représentation pour le groupe fondamental de chacune dans  $\mathrm{PU}(2,1)$ . L'adaptation brute du programme SnapPea au cas CR n'étant pour l'instant pas concluante, il a fallu aborder la résolution de façon "artisanale".

En parallèle des problématiques envisagées ci-dessus, la rigidité de ces structures géométriques est un problème naturel. Le rang des équations indique la dimension de l'espace des solutions dès lors que celui-ci est non vide. Si le rang est maximal, alors on ne peut pas déformer la structure géométrique triangulée. Dans le cas hyperbolique réel, la rigidité est assurée par le théorème de Mostow affirmant l'unicité de la structure géométrique d'une variété hyperbolique complète de volume fini. Précisément, un isomorphisme entre les groupes fondamentaux de deux variétés hyperboliques complètes de volume fini de dimension au moins trois est toujours induit par une isométrie entre ces variétés. Au contraire, la structure CR-sphérique de variétés compactes, homéomorphes à un fibré en cercle sur une surface, peut être déformée (voir [BS76]). Dans le cas complexe, un théorème de rigidité est établi par Goldman, Millson [GM87] et Toledo [Tol89] : ils montrent la rigidité pour

les actions des groupes qui préservent une droite complexe et agissent de façon cocompacte dessus.

Sur une idée de Thurston, Neumann et Zagier calculent dans [NZ85] une minoration du rang des équations d'arêtes et d'holonomie à la solution complète. Le théorème de rigidité de Mostow leur permet de conclure que le rang du système d'équations est maximal. L'article [Cho04] étend ce résultat aux solutions à partie imaginaire positive, à holonomie périphérique quelconque. Dans le quatrième chapitre, nous adaptons cette méthode au cas complexe. Malheureusement, cette approche n'est pas définitivement concluante. Nous obtenons des minoration du rang. Néanmoins, sur les exemples de solutions déjà évoquées, nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème 0.1.** *Pour le complémentaire de la sœur du nœud huit, pour le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead et pour les recollements recensés dans [CHW99] comme  $M_{433}$  et  $M_{434}$ , nous trouvons des solutions aux équations de compatibilité. Systématiquement, le rang des équations est maximal, c'est-à-dire qu'il y a rigidité.*

Dans le cas hyperbolique réel, lorsqu'on ordonne les sommets d'un tétraèdre  $p_0, p_1, p_2, p_3$ , cela induit une orientation sur le simplexe. Si le birapport des quatre points ordonnés est à partie imaginaire positive, alors l'orientation du tétraèdre géométrique est la même que celle induite par l'ordre des points. On dit d'un tel tétraèdre qu'il est orienté positivement. Le chevauchement de deux tétraèdres recollés d'orientation opposée complique l'obtention d'une structure compatible sur les deux simplexes. La méthode de géométrisation du nœud de huit n'utilise que des tétraèdres positivement orientés. Lorsqu'on accepte des tétraèdres ayant des orientations opposées, la question de savoir si le recollement des tétraèdres associé admet une géométrisation hyperbolique (même incomplète) est beaucoup plus compliquée que dans le cas où ils ont tous la même orientation. Petronio et Porti dans [PP00] traitent d'un cas très particulier mais, aucune réponse en toute généralité n'a encore été trouvée.

En géométrie CR, il n'existe pas de tétraèdre dont tous les invariants sont à partie imaginaire positive, comme nous le prouvons à la proposition 3.26. C'est ce qui constitue l'une des difficultés majeures tant dans la géométrisation CR du recollement que dans le calcul du rang. Le signe de la partie imaginaire des invariants d'un tétraèdre n'induit pas une orientation du simplexe. On ne peut donc pas prévoir le chevauchement de deux tétraèdres ayant une face en commun. De même, lorsque des tétraèdres se recollent autour d'une arête, on ne maîtrise pas *a priori* le nombre de tours qu'ils font autour de celle-ci. (voir l'exemple construit en 3.34). D'ailleurs, dans le cas du complémentaire du nœud de huit, la structure CR-sphérique construite par Falbel est branchée autour de chaque arête. Dans le calcul du rang des équations de compatibilité, l'argument final de [Cho04] utilise explicitement la stricte positivité des parties imaginaires des invariants.

Pour autant, en dimension deux, les difficultés liées aux invariants à partie imaginaire négative sont surmontables. Les étoiles des sommets de la triangulation de  $M$  sont des surfaces obtenues comme recollement de triangles. Nous étudions, à la fin du chapitre quatre, les structures géométriques qui peuvent leur être associées. La résolution d'équations type arêtes et holonomie permet d'obtenir une structure plate sur une telle surface. Nous donnons le rang exact de ces équations, même à une solution qui contient des invariants à partie imaginaire négative. Dans [Fra06], l'auteur met en évidence des conditions d'existence de structure euclidienne sur une surface obtenue comme recollement de triangles, dont les orientations peuvent être éventuellement opposées. En employant un résultat de [Fra06], nous démontrons la proposition suivante :

**Proposition 0.2.** *Dans le cas d'un recollement de tétraèdres CR, l'étoile torique d'un sommet de la triangulation ne peut jamais être munie d'une structure euclidienne.*

## Corps de trace de sous-groupes de $SU(n,1)$

La dernière partie de ce mémoire peut être abordée indépendamment des autres. Ici, une classe d'équivalence de groupes arithmétiques de  $PSL(2, \mathbb{C})$  à conjugaison et commensurabilité près est construite à partir d'une paire  $(k, \mathcal{A})$  où  $k$  est un corps de nombres qui a exactement une place complexe et  $\mathcal{A}$  est une algèbre quaternionique (voir par exemple [MR03]). Réciproquement, à partir d'un groupe arithmétique  $\Gamma$ , on peut retrouver ces deux objets. Par exemple, le corps  $k$  est engendré par les traces des éléments de  $\Gamma^{(2)}$  qui est le sous-groupe engendré par les carrés. Ce corps est un invariant de commensurabilité. On le note  $k(\Gamma)$ . Il est défini de manière générale pour tout sous-groupe de  $PSL(2, \mathbb{C})$ . Neumann et Reid dans [NR92] mettent en évidence les informations que le corps  $k(\Gamma)$  apporte sur le groupe. Lorsque  $\Gamma$  est un groupe libre, discret, de covolume fini, le corps  $k(\Gamma)$  est attaché à un invariant géométrique : d'après [EP88], la variété  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3/\Gamma$  admet une triangulation hyperbolique idéale. Le corps engendré par les invariants des tétraèdres est exactement  $k(\Gamma)$ . Pour établir cette égalité, les auteurs utilisent le corps  $\mathbb{Q}(\text{Tr}(\Gamma))$  engendré par les traces des éléments. Ce n'est pas un invariant de commensurabilité comme cela est montré dans [Rei90]. Ils montrent que le groupe  $\Gamma$ , à conjugaison de groupe près, est dans  $PSL(2, \mathbb{Q}(\text{Tr}(\Gamma)))$ , c'est-à-dire que quitte à conjuguer  $\Gamma$ , les coefficients des matrices du groupe sont dans le corps de trace. Ce résultat est en fait vrai plus généralement, dès lors que  $\Gamma$  est un groupe qui ne fixe pas un point et qu'il contient un élément parabolique. La discrétion du groupe est une hypothèse superflue.

Nous avons prolongé ces résultats au cas complexe. Dans  $SU(2,1)$ , le corps à considérer est  $\mathbb{Q}(\text{Tr}(\Gamma^{(3)}))$ , où  $\Gamma^{(3)}$  est le groupe engendré par les cubes. Dans [McR], l'auteur montre que c'est un invariant de commensurabilité. Le corps de trace est relié sous certaines hypothèses au corps des coefficients. Nous démontrons le résultat suivant :

**Théorème 0.3.** *Soit  $G$  un sous-groupe de  $SU(2,1)$ . On suppose que  $G$  contient un élément parabolique. Si  $G$  est Zariski dense, alors il est conjugué à un sous-groupe contenu dans  $SU(2,1, \mathbb{Q}(\text{Tr}(G)))$ .*

Les chapitres précédents nous ont conduit à la construction de représentations  $h : \Pi_1(M) \rightarrow PU(2,1)$  pour une variété  $M$  obtenue comme recollement de tétraèdres, à étoiles toriques telles que les images des lacets autour des sommets sont des transformations paraboliques. Dans ce cas, nous avons la proposition suivante démontrée en 6.13 :

**Proposition 0.4.** *Soit  $\Gamma = h(\Pi_1(M)) \subset PU(2,1)$ . Le corps engendré par les invariants des tétraèdres est exactement le corps de trace :  $\mathbb{Q}(\text{Tr}\Gamma)$ .*

Nous terminons par une étude du corps de trace pour les groupes arithmétiques de type 1 inclus dans  $SU(2,1)$ .

## Plan de la thèse

**Chapitre un :** Dans un premier moment, nous évoquons la description du plan hyperbolique complexe, de ses sous-espaces et de ses isométries. Le bord de cet espace est le modèle de la géométrie CR-sphérique. Les variétés localement modelées sur  $S^3$  munie de  $PU(2,1)$  sont dites CR-sphériques. C'est un cas particulier de  $(X, G)$ -structure avec

$X = S^3$  et  $G = \text{PU}(2,1)$ . On rappelle la définition générale de  $(X, G)$ -structure, ainsi que la construction d'une application développante qui en découle. Au cours du chapitre, il est mis en évidence qu'il n'y a pas de façon canonique de relier deux points de  $S^3$ . La fin de cette partie est dédiée à l'invariant angulaire de Cartan qui classifie à isométrie près les triplets de points de  $S^3$ , mais qui ne suffit pas à caractériser les tétraèdres. La définition des invariants pour ces simplexes est l'objet du deuxième chapitre. Les références principales pour ce premier chapitre sont l'article de Burns et Shnider [BS76] et le livre de Goldman ([Gol99]).

**Chapitre deux :** Nous rappelons, dans un second temps, la définition d'un tétraèdre hyperbolique réel idéal, ainsi que la fonction birapport qui caractérise les classes de conjugaison de ces simplexes. Les invariants de Falbel qui classifient les tétraèdres CR à  $\text{PU}(2,1)$  près, sont des birapports standards dans  $\mathbb{C}P^1$ . Pour les tétraèdres CR, on ne travaille *a priori* qu'avec les sommets ordonnés. Pour garder le vocabulaire de face, arête, on verra aussi ces simplexes comme des objets abstraits : des complexes symplectiques décorés. Sous ce point de vue, on peut réunir les deux types de tétraèdres géométriques (hyperbolique réel et CR) dans un même espace qu'on notera  $\mathcal{T}$ . C'est ce qui occupe la troisième section de ce chapitre. On cherche les sous-espaces de  $\mathcal{T}$  qui sont en bijection avec l'ensemble des classes de conjugaison de tétraèdres géométriques.

**Chapitre trois :** La technique de construction d'une représentation  $h: \Pi_1(M) \rightarrow \text{PU}(2,1)$  pour une variété  $M$  telle qu'introduite précédemment occupe le début de ce chapitre. On mime la construction d'une application développante  $D$ , avec la nuance majeure qu'ici,  $D$  n'est déterminée que sur les sommets de la triangulation. Les *conditions de compatibilité de recollement* entre tétraèdres apparaissant naturellement sont les mêmes que celles qui, dans le cas réel, permettent une géométrisation hyperbolique de  $M$ . Nous verrons que l'application  $D$  ainsi obtenue a plus de contraintes qu'une application développante, mais qu'elle permet néanmoins de définir la représentation d'holonomie.

Dans un second temps, on décrit les équations qui découlent des conditions de compatibilité de recollement dans le cas réel et dans le cas complexe. La mise en parallèle de ces deux situations met en évidence les difficultés qui peuvent apparaître quand on travaille dans  $\text{PU}(2,1)$ .

**Chapitre quatre :** Nous commençons ce chapitre en établissant le lien entre la rigidité d'une structure géométrique triangulée et le rang des équations de compatibilité. Nous détaillons ici le théorème 0.1. Dans la suite, nous démontrons certaines minoration pour le rang des équations de compatibilité. Nous terminons le chapitre en étudiant les structures géométriques sur les étoiles des sommets de la triangulation de  $M$ . Nous y donnons la preuve de la proposition 0.2.

**Chapitre cinq :** Dans [PW], les auteurs déterminent à conjugaison près, tous les groupes dans  $\text{PU}(2,1)$  engendrés par deux transformations unipotentes dont le produit est encore unipotent. L'un d'eux est le groupe  $\Gamma_3$  décrit dans [Sch07] : c'est l'image d'une holonomie du groupe fondamental du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead, noté  $K_W$ . Le quotient  $\Omega(\Gamma_3)/\Gamma_3$  est homéomorphe à  $S^3 \setminus K_W$  assimilable au recollement de quatre tétraèdres. On constate que tous les groupes de Parker et Will sont les images de représentations de  $\Pi_1(S^3 - K_W)$ . On obtient ainsi une famille de représentations à deux paramètres qui viennent toutes d'une solution des équations associées au recollement. Nous présentons par ailleurs une autre famille de solutions, à un paramètre, qui ne sont pas dans la famille de groupes de Parker et Will, mais qui se révèlent être dégénérées.

**Chapitre six :** La définition de groupe arithmétique de type un est rappelée dans ce chapitre. Nous y démontrons le théorème 0.3, ainsi que la proposition qui relie le corps de trace aux corps des coefficients des réseaux arithmétiques. La preuve du résultat 0.4 clôt la dernière partie de ce mémoire.

**Annexes :** En annexe, nous rappelons brièvement l'algorithme qui permet au programme SnapPea, dans le cas réel, de calculer les solutions aux équations d'arêtes et d'holonomie. Nous avons prolongé et implémenté cet algorithme pour traiter les cas CR mais cette adaptation directe ne converge pas. Nous donnons quelques pistes qui pourraient expliquer pourquoi. Dans le reste de l'annexe, nous détaillons les représentations dans  $PU(2,1)$  obtenues pour les variétés listées précédemment. Le dernier exemple est une variété CR-sphérique compacte, homéomorphe à un fibré en cercle non trivial sur un tore. Nous donnons une solution aux équations liées à la triangulation de cet espace.

# Chapitre 1

## Le plan hyperbolique complexe et son bord

On note  $\mathbb{C}^{n,1}$  l'espace  $\mathbb{C}^{n+1}$  muni d'une forme hermitienne  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de signature  $(n, 1)$ , linéaire par rapport à la première variable et antilinéaire par rapport à la seconde. Sa matrice représentative est :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour tout  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1}$ , la quantité  $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle$  est réelle. On peut donc définir une partition de  $\mathbb{C}^{n+1}$  par les sous-espaces suivants :

$$V_+ = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1} : \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle > 0\},$$

$$V_0 = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1} : \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = 0\},$$

$$V_- = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1} : \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle < 0\}.$$

On considère la projection canonique  $\mathbb{P} : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$  dans l'espace projectif complexe  $\mathbb{C}P^n$ . L'espace hyperbolique complexe de dimension  $n$ , noté  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ , est l'image par  $\mathbb{P}$  de  $V_-$  muni de la distance  $d$  donnée ci-dessous. Son bord est  $\mathbb{P}(V_0)$ .

La distance entre deux points  $q_1$  et  $q_2$  dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  est donnée par la formule suivante :

$$\cosh^2 \left( \frac{1}{2}d(q_1, q_2) \right) = \frac{\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1 \rangle}{\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1 \rangle \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_2 \rangle}$$

où  $\mathbf{q}_i$  est un relevé de  $q_i$  dans  $\mathbb{C}^{n+1}$ . La fonction  $d$  ne dépend pas du choix de ces relevés. Cette distance correspond à la métrique de Bergmann de la boule unité. Ce choix de normalisation pour la distance  $d$  donne la courbure sectionnelle holomorphe à  $-1$ , tandis que la courbure sectionnelle réelle est pincée entre  $-1$  et  $-1/4$ .

Le groupe de Lie  $\text{PU}(n, 1)$  agit par isométrie sur  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ , de même que la conjugaison complexe. Le théorème suivant prouve qu'il n'y en a pas d'autre.

**Théorème 1.1.** (voir [Gol99]). *Le groupe des isométries de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  est engendré par  $\text{PU}(n, 1)$  et la conjugaison complexe. On le note  $\widehat{\text{PU}}(n, 1)$ .*

Le choix d'une forme hermitienne de signature  $(n, 1)$  sur  $\mathbb{C}^{n+1}$  donne différents modèles de l'espace hyperbolique complexe. On passe d'un modèle à l'autre *via* une *transformation de Cayley*. Par la suite, l'étude se fera exclusivement pour le plan hyperbolique complexe. La suite détaille deux des modèles pour cette dimension.

## 1.1 Le plan hyperbolique complexe

Le premier modèle qu'on décrit au paragraphe suivant est celui de la boule, analogue du disque de Poincaré dans le cas hyperbolique réel.

### 1.1.1 Le modèle de la boule

Dans ce paragraphe, la matrice représentative de la forme hermitienne choisie est la suivante :

$$J_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

autrement dit pour  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^3$ ,  $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle_0 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2$ . L'espace  $\mathbb{P}(V_-)$  est entièrement contenu dans la carte affine  $z_3 = 1$ . Il est alors identifié à la boule unité ouverte, plongée dans  $\mathbb{C}^2$  :

$$\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 = \{(w_1, w_2) \mid |w_1|^2 + |w_2|^2 < 1\}.$$

Le bord  $\mathbb{P}(V_0)$  est lui aussi entièrement contenu dans la même carte affine. Il est homéomorphe à la sphère  $S^3$  :

$$\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 = \{(w_1, w_2) \mid |w_1|^2 + |w_2|^2 = 1\}.$$

**Remarque 1.2.** Le sous-ensemble  $V_{-1} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1} : \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle_0 = -1\}$  est connexe dans  $\mathbb{C}^3$ . Pour chaque droite négative de  $\mathbb{C}^3$  (c'est-à-dire  $\mathbb{C}v$  avec  $v \in V_-$ ), ses représentants dans  $V_{-1}$  sont :  $e^{i\theta} \frac{v}{\sqrt{-\langle v, v \rangle_0}}$ . On a donc tout un cercle pour chaque droite négative.

Même si on fait le choix d'un représentant pour chaque droite, cela ne sera pas conservé sous l'action de  $SU(2,1)$ . On n'a donc pas l'équivalent du modèle de l'hyperboloïde de la géométrie hyperbolique réelle.

Par la suite, on aura besoin du lemme suivant :

**Lemme 1.3.** Soient  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  dans  $V_0$ . Alors  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0$  si et seulement si  $\mathbf{q} = \lambda\mathbf{p}$ .

*Démonstration.* Dans  $\mathbb{C}^3$ , on a :  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = p_1\bar{q}_1 + p_2\bar{q}_2 - p_3\bar{q}_3$ . D'après l'inégalité triangulaire, puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$|\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle| \geq |p_1\bar{q}_1 + p_2\bar{q}_2| - |p_3\bar{q}_3| \geq \sqrt{(|p_1|^2 + |p_2|^2)(|q_1|^2 + |q_2|^2)} - |p_3q_3| \quad (1.1)$$

Comme  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  sont dans  $V_0$ , le terme de droite est nul. Si  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0$ , alors il y a égalité dans les deux inégalités. Pour la deuxième, ceci implique  $q_i = \lambda p_i$  pour  $i = 1, 2$ . Comme  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0$ , on en déduit :  $\mathbf{q} = \lambda\mathbf{p}$ . La réciproque est évidente.  $\square$

### 1.1.2 Le modèle de Siegel

Dans la suite de cette étude, le plus souvent, on utilisera le modèle obtenu avec la forme hermitienne donnée par la matrice  $J_1$  ci-dessous. En l'absence de précision, on sous-entend que l'on travaille avec ce modèle.

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans  $\mathbb{C}^3$ , l'expression de la forme hermitienne est :  $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle_1 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_3) + |z_2|^2$ . Par la projection  $\mathbb{P}$ , dans la carte affine  $z_3 = 1$ , on obtient :

$$\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 = \{(w_1, w_2) \mid 2 \operatorname{Re}(w_1) + |w_2|^2 < 0\}.$$

Le relevé normalisé dans  $\mathbb{C}^3$  d'un point  $p \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  est de la forme suivante :

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-|z|^2 + it - u) \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}, u \in ]0, +\infty[.$$

Le triplet  $(z, t, u)$  est formé des *coordonnées horosphériques* de  $p$ .

**Définition 1.4.** Les sous-ensembles du domaine de Siegel  $H_u = \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \{u\}$  sont appelés *horosphères centrées en  $\infty$* .

Ce modèle du plan hyperbolique complexe est appelé *modèle de Siegel*. Il est l'analogie du demi-espace de Poincaré dans le cas de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ .

Les points de coordonnées horosphériques  $(z, t, 0)$  font partie du bord  $\partial \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Celui-ci n'est pas entièrement contenu dans la carte affine  $z_3 = 1$ . Pour compactifier le bord du domaine de Siegel, on lui ajoute un point à l'infini, noté  $\infty$ . Un de ses relevés à  $\mathbb{C}^3$  est :

$$\mathbf{p}_{\infty} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On identifie ainsi  $\partial \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  et  $(\mathbb{C} \times \mathbb{R}) \cup \{\infty\}$ .

Le groupe unitaire  $U(2,1)$  rassemble les matrices  $G$  de  $GL(3, \mathbb{C})$  vérifiant :

$${}^t \bar{G} J_1 G = J_1.$$

Le groupe projectif  $PU(2,1)$  est le quotient de  $U(2,1)$  par son centre. Par la suite, on utilisera plutôt  $SU(2,1)$ , le sous-groupe des matrices de déterminant un. C'est un revêtement triple de  $PU(2,1)$  :

$$PU(2,1) \simeq SU(2,1) / \{Id, \omega Id, \omega^2 Id\}$$

où  $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  est une racine cubique de l'unité.

### 1.1.3 Transformations de Cayley

On passe du modèle de la boule au domaine de Siegel via l'homographie involutive  $C$  dont un des relevés à  $GL(3, \mathbb{C})$  est :

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dans la carte affine  $z_3 = 1$  dans laquelle les deux modèles sont contenus, l'action de  $C$  s'écrit :

$$\begin{aligned} C : \mathbb{C}^2 - \{w_1 = 1\} &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (w_1, w_2) &\longmapsto \left( \frac{w_1 + 1}{w_1 - 1}, \sqrt{2} \frac{w_2}{w_1 - 1} \right). \end{aligned}$$

On a bien :  $CJ_0C = J_1$ . Il n'y a bien sûr pas unicité de l'application qui échange les deux modèles. On peut composer à droite et à gauche par une application préservant  $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ . Ainsi, lorsqu'on restreint  $C$  au bord de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , on a toujours le choix du point de  $S^3$  qui sera envoyé à l'infini dans le bord du domaine de Siegel. Cette restriction induit une projection stéréographique, dont l'écriture est la suivante :

$$\begin{aligned} \pi : S^3 - \{(1, 0)\} &\longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R} \\ (w_1, w_2) &\longmapsto \left( \sqrt{2} \frac{w_2}{w_1 - 1}, 2 \operatorname{Im} \left( \frac{w_1 + 1}{w_1 - 1} \right) \right). \end{aligned} \quad (1.2)$$

## 1.2 Les sous-espaces totalement géodésiques dans $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$

La théorie des espaces riemanniens symétriques implique que les seuls espaces totalement géodésiques sont des sous-espaces linéaires complexes ou totalement réels. On en trouve une démonstration dans [Gol99] à la section 3.1.11.

Cela donne trois types de sous-espaces totalement géodésiques contenus dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  :

1. les géodésiques,
2. les  $\mathbb{R}$ -plans,
3. les droites complexes.

En particulier, il n'y a pas d'hypersurface réelle totalement géodésique.

### 1.2.1 Les droites complexes

Une droite complexe de  $\mathbb{C}P^2$  est la projection d'un plan complexe vectoriel de  $\mathbb{C}^3$ .

**Définition 1.5.** Une *droite complexe* de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  est l'intersection d'une droite complexe de  $\mathbb{C}P^2$  avec le plan hyperbolique complexe.

On note  $\mathbf{c}^{\perp} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^3 \mid \langle \mathbf{c}, \mathbf{z} \rangle = 0\}$ . Le lemme suivant montre la dualité entre  $\mathbb{P}(V_+)$  et l'ensemble des droites complexes.

**Lemme 1.6.** *Pour toute droite complexe  $L$  de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , il existe un unique  $c \in \mathbb{P}(V_+)$  tel que  $L = \mathbb{P}(\mathbf{c}^{\perp}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  où  $\mathbf{c}$  est un relevé de  $c$  dans  $\mathbb{C}^3$ . Un tel vecteur  $\mathbf{c}$  est dit vecteur polaire à  $L$ .*

**Remarque 1.7.** L'ensemble des droites complexes est invariant sous l'action de  $\operatorname{PU}(2,1)$  puisque :  $\forall g \in \operatorname{PU}(2,1), g(\mathbb{P}(\mathbf{c}^{\perp})) = \mathbb{P}((G(\mathbf{c}))^{\perp})$ , où  $G$  est un relevé de  $g$  à  $\operatorname{U}(2,1)$ .

**Exemple 1.8.** Un exemple de droite complexe dans le modèle de la boule est :

$$\mathbb{P} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{\perp} \right) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 = \{(z_1, 0) \mid |z_1|^2 < 1\}.$$

C'est une copie de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$  plongée dans le plan hyperbolique. Dans le modèle de Siegel, cette droite complexe s'identifie à :  $\{(0, t, u) \mid t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}_*^+\}$ .

**Définition 1.9.** Un  $\mathbb{C}$ -*cercle* est l'intersection du bord de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  avec l'adhérence d'une droite complexe.

**Exemple 1.10.** Le  $\mathbb{C}$ -cercle associé à la droite complexe de l'exemple 1.8 est la droite verticale  $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cup \{\infty\}$  représentée à la figure 1.1.

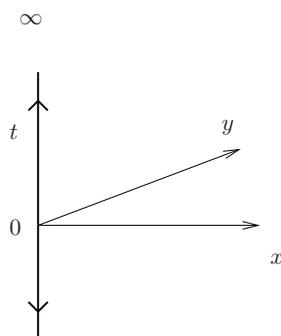


FIG. 1.1: Dans  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ , le  $\mathbb{C}$ -cercle passant par 0 et  $\infty$  est  $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cup \{\infty\}$ . On a le choix entre deux portions pour relier ces deux points.

**Proposition 1.11.** (voir [Gol99]). *Dans le bord du domaine de Siegel identifié à  $(\mathbb{C} \times \mathbb{R}) \cup \{\infty\}$ , un  $\mathbb{C}$ -cercle est soit une droite verticale soit une ellipse. Sa projection sur  $\mathbb{C}$  le long de l'axe vertical est un cercle ou un point.*

**Remarque 1.12.** Soient  $p$  et  $q$  deux points distincts du bord. Vus dans  $\mathbb{C}P^2$ , il existe une unique droite complexe de  $\mathbb{C}P^2$  qui passe par ces deux points. De ce fait, on a unicité du  $\mathbb{C}$ -cercle joignant  $p$  à  $q$ .

Pour les relier, on a toujours le choix entre les deux portions du  $\mathbb{C}$ -cercle qui les joint. Sur notre exemple précédent, entre  $(0,0)$  et  $\infty$ , on a le choix entre  $\{0\} \times \mathbb{R}_+$  et  $\{0\} \times \mathbb{R}_-$ .

### 1.2.2 Les $\mathbb{R}$ -plans

**Définition 1.13.** Un sous-espace vectoriel réel  $R$  de  $\mathbb{C}^{2,1}$  est dit lagrangien si  $\dim_{\mathbb{R}}(R) = 3$  et s'il est totalement réel :  $\forall(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in R^2, \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbb{R}$ .

**Définition 1.14.** Un  $\mathbb{R}$ -plan est l'intersection de la projection d'un sous-espace lagrangien  $R$  avec le plan hyperbolique complexe :  $\mathbb{P}(R) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . L'adhérence d'un  $\mathbb{R}$ -plan rencontre le bord de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  en ce qu'on appelle un  $\mathbb{R}$ -cercle.

**Exemple 1.15.** Dans le modèle de la boule, un exemple de  $\mathbb{R}$ -plan est  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\} \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . C'est une copie du plan hyperbolique réel  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ . Dans le modèle de Siegel, en coordonnée horosphérique, cela devient :  $\{(x, 0, u) \mid x \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}_+^*\}$ . Le  $\mathbb{R}$ -cercle correspondant dans  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  est :  $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup \{\infty\}$ .

**Remarque 1.16.** L'action de  $\text{PU}(2,1)$  est transitive sur l'ensemble des  $\mathbb{R}$ -cercles, mais il n'y a pas unicité du  $\mathbb{R}$ -cercle joignant deux points du bord.

## 1.3 Isométries de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$

Dans cette section, on rappelle brièvement les différents types d'isométries de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . On détaillera dans la section suivante leur action au bord de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Dans le modèle de la boule, une application de  $\text{PU}(2,1)$  envoie continument l'union  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \cup \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  identifiée à la boule, dans elle-même. D'après le théorème de Brouwer, cette application admet au moins un point fixe. D'autre part, il n'existe pas d'isométrie ayant

exactement trois points fixes au bord. Ces remarques permettent une classification des éléments de  $\text{PU}(2,1)$  selon leurs points fixes. Soit  $g \in \text{PU}(2,1) \setminus \{Id\}$ . Alors  $g$  est nécessairement dans l'une des catégories suivantes :

1.  $g$  est *elliptique* si elle a au moins un point fixe dans l'intérieur de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .
2.  $g$  est *parabolique* si elle admet un unique point fixe qui est au bord de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .
3.  $g$  est *loxodromique* si elle a exactement deux points fixes qui sont dans  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Les éléments de  $\text{SU}(2,1)$  sont classifiés selon le type de leur image dans  $\text{PU}(2,1)$ . Un point fixe pour  $g \in \text{PU}(2,1)$  correspond à un vecteur propre pour les matrices dans  $\text{SU}(2,1)$  qui représentent  $g$ . On peut d'ailleurs classier les isométries de  $\text{PU}(2,1)$  selon les valeurs propres de leurs relevés, comme le montre la proposition ci-dessous tirée de [Par] :

**Proposition 1.17.** *Soit  $G \in \text{SU}(2,1)$ ,  $G \neq Id$ . On a alors l'une des trois possibilités :*

1.  $G$  a une valeur propre  $\lambda$  telle que  $|\lambda| \neq 1$ . Alors  $G$  est *loxodromique*.
2. les valeurs propres de  $G$  sont toutes de module un et l'un de ses vecteurs propres  $v \in V_0$ . Alors  $G$  est *parabolique*.
3. l'un des vecteurs propres de  $G$  est dans  $V_-$ . Dans ce cas,  $G$  est *elliptique*. Les valeurs propres sont alors toutes de module un, mais elles ne sont pas toutes égales.

### 1.3.1 Les isométries paraboliques

Une transformation parabolique fixe un point du bord. Quitte à la conjuguer, on peut supposer qu'il s'agit de l'infini. Une application qui fixe  $\infty$  et qui n'est pas loxodromique se relève dans  $\text{SU}(2,1)$  en une matrice de la forme suivante :

$$G = e^{i\theta} \begin{pmatrix} 1 & -e^{-3i\theta}\bar{z} & \frac{-|z|^2+it}{2} \\ 0 & e^{-3i\theta} & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } t \text{ réel.} \quad (1.3)$$

Les valeurs propres de  $G$  sont  $e^{i\theta}$ , associée au vecteur  ${}^t(1, 0, 0) \in V_0$  et  $e^{-2i\theta}$  reliée à un vecteur de  $V_+$ .

**Définition 1.18.** Une application parabolique  $g$  est dite *parabolique pure* si tout relevé  $G \in \text{SU}(2,1)$  a trois valeurs propres égales. Dans le cas contraire, on dira que  $g$  est *ellipto-parabolique*.

Une application parabolique pure a un relevé à  $\text{SU}(2,1)$  qui est unipotent. Ce sont les seules isométries de  $\text{PU}(2,1)$  à être dans ce cas. Le degré de nilpotence pour une matrice  $G$  est le plus petit entier  $n$  tel que  $G^n = 0$ . Il permet de distinguer les classes de conjugaison des isométries paraboliques pures :

**Proposition 1.19.** *Les transformations paraboliques pures se regroupent en deux classes de conjugaison dans  $\widehat{\text{PU}}(2,1)$  :*

1. La première classe de conjugaison rassemble les isométries qui se relèvent dans  $\text{SU}(2,1)$  en une matrice  $G$  unipotente telle que le degré de nilpotence de  $G - Id$  est deux. Un représentant est obtenu en prenant  $z = 0$ ,  $t = 1$ ,  $\theta = 0$  dans la matrice présentée en (1.3). Si on regarde les classes de conjugaison par  $\text{PU}(2,1)$ , il y en a deux, l'une représentée par  $G_+$ , l'autre par  $G_-$  :

$$G_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \pm \frac{i}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Pour les isométries qui se relèvent dans  $SU(2,1)$  en une matrice  $G$  unipotente telle que le degré de  $G - Id$  est trois, la classe de conjugaison est représentée par :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Définition 1.20.** Dans la proposition précédente, les isométries paraboliques de la première classe de conjugaison seront désignées comme des *transformations paraboliques de type vertical*, tandis que les secondes seront dites *horizontales*.

Pour les isométries ellipto-paraboliques, il y a autant de classes de conjugaison dans  $\widehat{PU}(2,1)$  que de valeurs propres  $e^{i\theta}$ . Une matrice représentante d'une classe conjugaison est :

$$G = e^{i\theta} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{i}{2} \\ 0 & e^{-3i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Remarque 1.21.** Les applications ellipto-paraboliques ainsi que les isométries paraboliques de type vertical préservent chacune une droite complexe sur laquelle elles agissent comme une translation. Les premières tournent en plus autour de la droite d'un angle de  $-3\theta$ . Les transformations paraboliques de type horizontal préservent un  $\mathbb{R}$ -cercle.

### 1.3.2 Les isométries loxodromiques

Une transformation loxodromique fixe deux points du bord. Quitte à la conjuguer, on peut supposer que ces deux points sont  $\infty$  et  $(0, 0)$  dans le domaine de Siegel. Une matrice de  $SU(2,1)$  ayant  ${}^t(1, 0, 0)$  et  ${}^t(0, 0, 1)$  comme vecteurs propres est :

$$G = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{\lambda}}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Des deux points du bord fixés par  $G$ , l'un est attractif, l'autre répulsif. Les applications loxodromiques fixent globalement la droite complexe reliant leurs deux points fixes. Sur celle-ci, elles agissent comme des homothéties de rapport  $|\lambda|^2$ .

### 1.3.3 Les isométries elliptiques

Dans le modèle de la boule, à conjugaison près, un relevé dans  $SU(2,1)$  d'une transformation elliptique est :

$$G = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(\theta_1+\theta_2)} \end{pmatrix}.$$

**Exemple 1.22.** Dans le modèle de la boule, l'application  $(w_1, w_2) \mapsto (e^{i\alpha}w_1, e^{i\beta}w_2)$  est elliptique et le seul point qu'elle fixe est le centre de la boule dès que  $e^{i\alpha}$  et  $e^{i\beta}$  sont différents de 1.

**Définition 1.23.** Une isométrie elliptique sera dite *régulière* si ses trois valeurs propres sont distinctes. Sinon, elle a au plus deux valeurs propres égales. Dans ce cas, on la qualifie de *spéciale*.

**Définition 1.24.** Dans le modèle de la boule, les isométries conjuguées à la transformation elliptique  $(w_1, w_2) \mapsto (w_1, -w_2)$  sont appelées *réflexions complexes*. Elles fixent point par point toute une droite complexe.

**Proposition 1.25.** Soit  $L$  une droite complexe, de vecteur polaire  $\mathbf{c}$ . Alors la réflexion complexe par rapport à  $L$  est obtenue comme la projection par  $\mathbb{P}$  dans  $\text{PU}(2, 1)$  de l'application suivante :

$$z \mapsto z - 2 \frac{\langle z, \mathbf{c} \rangle}{\langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle} \mathbf{c}.$$

### 1.3.4 Trace des isométries

La trace d'un élément de  $\text{PU}(2,1)$  n'est pas bien définie puisque chaque isométrie  $g \in \text{PU}(2,1)$  possède trois relevés dans  $\text{SU}(2,1)$  :  $G, \omega G, \omega^2 G$ . Par contre,  $\text{Tr}(G)^3$  ou  $|\text{Tr}(G)|$  ne dépendent pas du choix du relevé. L'étude de la trace des matrices dans  $\text{SU}(2,1)$  permet leur classification grâce au lemme suivant dû à Goldman (voir le chapitre 6 de [Gol99]) :

**Lemme 1.26.** On note  $f(z) = |z|^4 - 8 \text{Re}(z^3) + 18|z|^2 - 27$ . Soit  $G$  une matrice de  $\text{SU}(2,1)$ . Alors :

- $G$  elliptique régulière si et seulement si  $f(\text{Tr}(G)) < 0$ .
- $G$  est loxodromique si et seulement si  $f(\text{Tr}(G)) > 0$ .
- $G$  est ellipto-parabolique si et seulement si  $f(\text{Tr}(G)) = 0$ ,  $G$  n'est pas elliptique et  $\text{Tr}(G)$  n'est pas  $3\omega$  où  $\omega$  est l'une des racines cubiques de l'unité.
- $G$  est unipotente si et seulement si  $\text{Tr}(G)$  est égale à  $3\omega$ . ( $f(\text{Tr}(G)) = 0$ ).

## 1.4 Le bord de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$

Dans cette partie, on s'intéresse au bord de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Celui-ci, vu comme  $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$  dans le modèle de Siegel est naturellement muni de la structure de groupe d'Heisenberg sur  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ . On reprend la classification des applications de  $\text{PU}(2,1)$  pour détailler leur action sur le groupe. Dans le modèle de la boule, l'inclusion  $S^3 \subset \mathbb{C}^2$  le munit naturellement d'une structure géométrique. Nous détaillons ces deux points de vue dans cette section.

### 1.4.1 Le groupe d'Heisenberg

**Définition 1.27.** Le groupe d'Heisenberg  $\mathcal{H}$  de dimension trois est  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  muni du produit non commutatif suivant :

$$(z, t) * (z', t') = (z + z', t + t' + 2 \text{Im}(z\overline{z'})).$$

Le centre est donné par l'axe vertical :  $Z = \{(0, t)\}$ . L'inverse d'un élément est :  $(z, t)^{-1} = (-z, -t)$ .

### Action de $\text{PU}(2,1)$ sur $\mathcal{H}$

Soit  $g$  dans  $\text{PU}(2,1)$  qui fixe l'infini. Elle agit alors naturellement sur  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 - \{\infty\}$  identifié au groupe d'Heisenberg.

**Définition 1.28.** On note  $\text{Sim}(\mathcal{H})$  le groupe engendré par les restrictions à  $\mathcal{H}$  des applications de  $\text{PU}(2,1)$  qui fixent  $\infty$ . Les éléments de ce groupe sont appelés *automorphismes d'Heisenberg*. (On verra plus loin que ce sont effectivement des similitudes pour la métrique de Cygan).

Le choix d'un point  $p$  du bord donne une identification entre  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \{p\}$  et  $\mathcal{H}$ , ainsi qu'un groupe d'automorphismes d'Heisenberg.

Dans  $SU(2,1)$ , le relevé d'une application qui fixe l'infini est de la forme suivante :

$$G = \begin{pmatrix} \lambda & -\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}\bar{z} & \frac{1}{\lambda} \frac{-|z|^2 + it}{2} \\ 0 & \frac{\bar{\lambda}}{\lambda} & \frac{1}{\lambda}z \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

L'application associée à la matrice  $G$  ci-dessus agit sur le bord de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  de la façon suivante :

$$H : (w, s) \mapsto \left( \frac{\bar{\lambda}^2}{\lambda}w + z, |\lambda|^2s + t - 2\operatorname{Im}\left(\frac{\bar{\lambda}^2}{\lambda}\bar{z}w\right) \right) \quad (1.5)$$

avec  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  et  $t \in \mathbb{R}$ .

**Remarque 1.29.** 1. Si  $\lambda = 1$ , l'application  $H$  est une transformation parabolique unipotente. Si  $|\lambda| \neq 1$ , c'est une transformation loxodromique.

2. La formule (1.5) assure qu'il y a un morphisme surjectif  $p: SU(2,1) \rightarrow \operatorname{Sim}_+(\mathbb{C})$  où  $\operatorname{Sim}_+(\mathbb{C})$  désigne les similitudes directes de  $\mathbb{C}$ .

### Action des isométries paraboliques sur le bord

Toutes les applications paraboliques laissent globalement invariante chaque horosphère. Elles y agissent comme sur le bord.

**Définition 1.30.** Les applications paraboliques pures de  $PU(2,1)$  agissent sur  $\mathcal{H}$  comme les translations pour le produit d'Heisenberg :

$$t_{z,t} : (w, s) \mapsto (w + z, s + t - 2\operatorname{Im}(w\bar{z})) = (z, t) * (w, s). \quad (1.6)$$

On appelle ces transformations  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  des *translations d'Heisenberg*.

**Remarque 1.31.** Lorsqu'on compose deux translations d'Heisenberg, on trouve :  $t_{z,t} \circ t_{z',t'} = t_{(z,t)*(z',t')}$ . Ainsi, le groupe des transformations unipotentes de  $PU(2,1)$  fixant l'infini est isomorphe au groupe d'Heisenberg.

On rappelle qu'on a deux classes de conjugaison dans  $\widehat{PU(2,1)}$  pour les isométries paraboliques pures. Pour les éléments de type vertical, leur représentant agit sur  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  comme :

$$(w, s) \mapsto (w, s + 1).$$

On parle de *translations verticales*.

Pour celles de type horizontal, l'action du représentant est :

$$(w, s) \mapsto (w + 1, s + t - 2\operatorname{Im}(w)).$$

Pour les transformations ellipto-paraboliques, au bord on a :  $(w, s) \mapsto (e^{-3i\theta}w, s + 1)$ .

### Action des isométries loxodromiques sur le bord

**Définition 1.32.** Une *dilatation d'Heisenberg* est un automorphisme d'Heisenberg conjugué à :

$$\delta_\mu : (w, s) \longmapsto (\mu w, |\mu|^2 s).$$

Lorsque  $|\mu| \neq 1$ , elle est reliée à une isométrie loxodromique de  $\text{PU}(2,1)$ . Sinon, c'est une application elliptique spéciale.

**Proposition 1.33.** *Le groupe des automorphismes d'Heisenberg est engendré par les translations d'Heisenberg et par les dilatations d'Heisenberg qui fixent  $(0,0)$ .*

### Commutativité dans $\text{Sim}(\mathcal{H})$

**Lemme 1.34.** *Le centre de  $\text{Sim}(\mathcal{H})$  est réduit à l'identité.*

*Démonstration.* Soit  $H$  dans  $\text{Sim}(\mathcal{H})$ . Si  $H$  est dans le centre, alors en particulier, son action de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  commute avec les similitudes de  $\mathbb{C}$ . C'est donc l'identité. Nécessairement,  $H$  est une translation verticale. Or une translation verticale non triviale ne commute pas avec les dilatations  $\delta_\mu$ . Finalement,  $H = \text{Id}$ .  $\square$

Dans le chapitre 3, on sera amené à étudier des paires d'automorphismes d'Heisenberg qui commutent. La proposition suivante détaille les cas possibles :

**Proposition 1.35.** *Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux éléments de  $\text{PU}(2,1)$  qui fixent un même point et qui commutent. Alors, l'une des situations suivantes est nécessairement vérifiée :*

1. *l'une est triviale ou une translation verticale,*
2. *elles sont toutes les deux unipotentes et elles agissent sur  $\mathbb{C}$  comme deux translations colinéaires non triviales.*
3. *elles sont toutes les deux non-unipotentes.*

*Démonstration.* Quitte à les conjuguer simultanément, on peut supposer que  $H_1$  et  $H_2$  fixent l'infini. Dans le groupe d'Heisenberg, elles agissent sur  $\mathbb{C}$ . On note respectivement  $h_1$  et  $h_2$  leurs projections de  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Les similitudes  $h_1$  et  $h_2$  commutent. Si aucune n'est triviale, tout point fixe de l'une est fixé par l'autre. On a donc trois cas possibles :

1.  $h_1$  ou  $h_2$  est triviale,
2.  $h_1$  et  $h_2$  n'ont pas de points fixes, elles sont donc deux translations,
3.  $h_1$  et  $h_2$  ont un point fixe commun.

Dans le premier cas, si  $h_1$  est trivial, alors  $H_1 = \text{Id}$  ou  $H_1$  est une translation verticale. Dans le deuxième cas, pour  $H_1$  et  $H_2$ , il existe un relevé unipotent dans  $\text{SU}(2,1)$ , ce qui donne avec les notations des translations d'Heisenberg :  $H_1 = t_{z_1, t_1}$ ,  $H_2 = t_{z_2, t_2}$ . Le calcul du commutateur donne :  $[H_1, H_2] = t_{z, t}$  où  $(z, t) = (z_1, t_1) * (z_2, t_2) * (z_1, t_1)^{-1} * (z_2, t_2)^{-1} = (0, 4 \text{Im}(z_1 \bar{z}_2))$ . C'est l'élément neutre lorsque  $z_2 = k z_1$  avec  $k \in \mathbb{R}$ . Autrement dit,  $h_1$  et  $h_2$  sont deux translations colinéaires.

Dans le dernier cas,  $h_1$  et  $h_2$  sont deux dilatations. Cela implique que  $H_1$  et  $H_2$  ne sont pas unipotentes.  $\square$

### Distances sur le groupe d'Heisenberg

La métrique riemannienne dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  est dégénérée au bord. Une étude infinitésimale de celle-ci permet de construire une métrique sur le groupe d'Heisenberg appelée distance de *Carnot-Carathéodory* (voir p124 de [Gol99]). Elle est équivalente à la *distance de Cygan* dont l'expression est donnée par la formule :

$$d((z, t), (w, s)) = |(z, t)^{-1} * (w, s)| \quad \text{où} \quad |(z, t)| = (|z|^4 + t^2)^{1/4}.$$

**Proposition 1.36.** *La fonction  $d$  définie ci-dessus est une distance sur  $\mathcal{H}$ . Restreinte à  $\mathbb{C}$ , la distance de Cygan est la métrique euclidienne.*

On en trouve une preuve au chapitre 4 de [Par].

**Définition 1.37.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Une fonction  $f : X \rightarrow X$  est une *similitude* s'il existe  $r > 0$  vérifiant :

$$\forall (x, y) \in X^2, \quad d(f(x), f(y)) = rd(x, y).$$

**Proposition 1.38.** *Les automorphismes d'Heisenberg sont des similitudes.*

*Démonstration.* Comme  $Sim(\mathcal{H})$  est engendré par les translations d'Heisenberg et par les dilatations  $\delta_{\mu}$ , il suffit de le vérifier pour celles-ci. D'après la formule (1.6), les translations d'Heisenberg agissent comme multiplication à gauche :

$$\begin{aligned} d(t_{z,t}(w, s), t_{z,t}(w', s')) &= d((z, t) * (w, s), (z, t) * (w', s')) \\ &= |((z, t) * (w, s))^{-1} * (z, t) * (w', s')| \\ &= d((w, s), (w', s')). \end{aligned}$$

Pour les dilatations  $\delta_{\mu}$ , on a :

$$\begin{aligned} d(\delta_{\mu}(w, s), \delta_{\mu}(w', s')) &= |(\mu w, |\mu|^2 s)^{-1} * (\mu w', |\mu|^2 s')| \\ &= |(\mu(-w + w'), |\mu|^2(-s + s') - 2\text{Im}(|\mu|^2 w \overline{w'}))| \\ &= |\mu| d((w, s), (w', s')). \end{aligned}$$

□

**Définition 1.39.** La longueur d'un chemin  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}$  est donnée par la formule :

$$L(\gamma([0, 1])) = \sup_{0=t_0 < t_1 < \dots < t_n=1} \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$$

où le sup est pris sur l'ensemble des partitions de  $[0, 1]$ . Si ce supremum est fini, on dit que le chemin est *rectifiable*. Un espace métrique est dit de *longueur* si la distance entre deux points est toujours réalisée par un chemin rectifiable.

**Proposition 1.40.** (voir p27 de [Par]) *L'espace métrique  $(\mathcal{H}, d)$  n'est pas un espace de longueur.*

**Remarque 1.41.** Par la suite, nous travaillerons avec des quadruplets de points inclus dans  $S^3$ . Pour en faire des tétraèdres, il faut définir les arêtes. Or, l'étude précédente nous montre qu'il n'y a pas de façon naturelle de relier deux points du bord, cela procède toujours d'un choix.

### 1.4.2 Structure CR-sphérique

Dans les définitions suivantes, on se limitera à la dimension trois qui est le cadre de notre étude.

#### Structure de contact, structure complexe

Soit  $M$  une variété lisse de dimension trois. Elle est munie d'une *structure de contact* s'il existe une distribution d'hyperplans dans le fibré tangent qui est localement le noyau d'une 1-forme  $\alpha$  qui vérifie :  $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ . On dit alors que  $\alpha$  est une *forme de contact*. Si on peut munir ces hyperplans d'une structure complexe  $J$  qui varie continument, on dit que  $M$  possède une *structure CR* (CR pour Cauchy-Riemann).

L'exemple canonique est la sphère  $S^3$  incluse dans  $\mathbb{C}^2$  :

**Proposition 1.42.** *La sphère  $S^3$  peut être munie d'une structure CR. La distribution d'hyperplans est donnée par l'ensemble des droites complexes tangentes à  $S^3$ . Cette distribution est invariante par  $\text{PU}(2,1)$ .*

*Démonstration.* Soit  $p \in S^3$ . On considère la droite complexe donnée par :  $L_p = \mathbb{P}(\mathbf{p}^\perp)$  où  $\mathbb{P}(\mathbf{p}) = p$ . Comme  $\mathbf{p} \in V_0$ , le point  $p$  appartient à  $L_p$ . D'autre part, d'après le lemme 1.3, un point  $\mathbf{q} \in V_0$  vérifie  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0$  si et seulement si  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{p}$  sont sur la même droite. Ainsi, seul  $p$  appartient à la fois à  $L_p$  et à  $S^3$  : la droite est bien tangente à la sphère. Chaque droite  $L_p$  est munie naturellement d'une structure complexe. L'ensemble  $\{L_p \mid p \in S^3\}$  est clairement invariant sous l'action de  $\text{PU}(2,1)$ . Il reste à voir que cette distribution définit une structure de contact. Dans le lemme suivant, on écrit la 1-forme de contact dans le modèle de Siegel, ce qui nous permettra de conclure.  $\square$

**Lemme 1.43.** *En un point  $(z, t) = (x + iy, t) \in \mathcal{H}$ , la distribution de contact est donnée par le noyau de la 1-forme suivante :*

$$\alpha = dt + 2xdy - 2ydx.$$

*Démonstration.* La droite complexe de  $\mathbb{C}^2$  tangente à  $S^3$  au point  $(-1, 0)$  est  $\mathbb{C} \times \{0\}$ . L'image de la droite affine par la projection stéréographique  $\pi$  dans le groupe d'Heisenberg est  $\mathbb{C} \times \{0\}$ , d'après les formules données en (1.2). On cherche les coordonnées du plan de contact en un point  $(z, t) \in \mathcal{H}$ . La distribution est invariante sous l'action de  $\text{PU}(2,1)$  et l'image de  $(0, 0)$  par la translation d'Heisenberg  $t_{z,t}$  est :  $t_{z,t}(0, 0) = (z, t) * (0, 0) = (z, t)$ . Les points du plan de contact cherché sont donc :

$$(z, t) * (w, 0) - (z, t) = (z + w, t + 2\text{Im}(z\bar{w})) - (z, t) = (w, 2\text{Im}(z\bar{w})).$$

Autrement dit, le plan de contact est :  $\{(w, s) \mid s - 2\text{Im}(z\bar{w}) = 0\}$ , soit exactement le noyau de la forme  $\alpha$ .

Sous cette forme, on a tout de suite :  $\alpha \wedge d\alpha = (dt + 2xdy - 2ydx) \wedge (2dx \wedge dy - 2dy \wedge dx) = 4dx \wedge dy \wedge dt \neq 0$ , ce qui finit la preuve de la proposition 1.42.  $\square$

## 1.5 Structure géométrique

Dans cette section, on rappelle la définition de  $(X, G)$ -structure ainsi que la construction d'une application développante. Une référence pour cette section est l'article [Gol88]. Nous nous appuyerons aussi sur [Ber].

**Définition 1.44.** On note  $X$  une variété connexe et  $G$  un groupe de difféomorphismes de  $X$ . Le groupe agit *analytiquement* sur  $X$  si dès que  $g_1, g_2 \in G$  sont égaux sur un ouvert non vide, alors ils sont égaux partout. On suppose désormais que le groupe  $G$  agit transitivement et analytiquement sur  $X$ .

Une variété  $M$  est *munie d'une  $(X, G)$ -structure* s'il existe un atlas maximal  $(U_i, \phi_i)_i$  tel que :

1. les  $U_i$  forment un recouvrement d'ouverts de  $M$ .
2.  $\phi_i: U_i \rightarrow X$  est un difféomorphisme sur  $\phi_i(U_i)$ .
3. si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  alors la restriction de  $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$  à chaque composante connexe de  $\phi_\beta(U_i \cap U_j)$  est la restriction d'un élément de  $G$ .

Une variété  $M$  munie de cette structure est appelée  $(X, G)$ -variété.

Soit  $f: M \rightarrow N$  une application entre deux  $(X, G)$ -variétés. On dit que  $f$  est un  $(X, G)$ -morphisme si pour toute paire de cartes  $\phi_i: U_i \rightarrow X$  de  $M$  et  $\psi_j: U_j \rightarrow X$  de  $N$ , dès que  $V$  est une composante connexe de  $U_i \cap f^{-1}(U_j)$ , alors il existe un élément  $g \in G$  tel que  $f$  restreint à  $V$  est égal à  $\psi_j^{-1} \circ g \circ \phi_i$ .

On détaille maintenant la construction d'une application développante pour une  $(X, G)$ -variété  $M$  connexe.

**Proposition 1.45.** *On peut construire un  $(X, G)$ -morphisme  $D$  de  $\widetilde{M}$  dans  $X$ . Si  $D'$  est un autre  $(X, G)$ -morphisme, alors il existe un unique  $g \in G$  tel que  $D' = g \circ D$ .*

*Démonstration.* Soit  $x_0 \in M$  et  $\tilde{x}_0$  un de ses relevés dans  $\widetilde{M}$ . Si  $x_1$  est un autre point de  $M$ , il est relié à  $x_0$  par un chemin  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ . Si  $\tilde{\gamma}$  est un relevé du chemin issu de  $\tilde{x}_0$ , alors on note  $\tilde{x}_1$  la deuxième extrémité. Il existe une partition  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$  telle que pour tout  $i$ ,  $\gamma([t_i, t_{i+1}])$  est inclus dans l'un des ouverts de l'atlas. On le notera  $U_i$ . Les difféomorphismes associés à ces ouverts  $U_i$  sont notés  $\phi_i$  et les changements de cartes :  $\phi_{i-1} \phi_i^{-1} = g_i$ . On pose :  $D(\tilde{x}_1) = g_1 \circ \dots \circ g_m(\phi_m(x_1))$ . Cette définition ne dépend pas des cartes  $\phi_1, \dots, \phi_m$  choisies. En effet, si on choisit  $\phi'_1$ , il existe  $h_1 \in G$  tel que :  $\phi'_1 = h_1 \circ \phi_1$ . Dans ce cas,  $g'_1 = \phi_0 \circ (\phi'_1)^{-1} = g_1 \circ h_1^{-1}$  et  $g'_2 = \phi'_1 \circ \phi_2^{-1} = h_1 \circ g_2$ . Les deux produits  $g'_1 \circ g'_2$  et  $g_1 \circ g_2$  sont égaux. De là, on en déduit que la définition de  $D$  est indépendante de la partition et du chemin  $\gamma$  choisi. Soit  $D'$  un autre  $(X, G)$ -morphisme. On relève l'ouvert de départ tel que  $\tilde{x}_0 \in \tilde{U}_0 \subset \widetilde{M}$ . L'application  $g$  qui envoie  $D(\tilde{U}_0)$  sur  $D'(\tilde{U}_0)$  vérifie finalement partout :  $D' = gD$ .  $\square$

**Définition 1.46.** L'homéomorphisme local  $D: \widetilde{M} \rightarrow X$  est appelé *application développante*. Si  $\gamma$  est un élément de  $\Pi_1(M)$ , alors  $D \circ \gamma$  est une autre application développante. La proposition précédente montre qu'il existe un unique  $g_\gamma \in G$  tel que  $D \circ \gamma = g_\gamma \circ D$ . Le morphisme  $h_D: \Pi_1(M) \rightarrow G$  défini par  $h_D(\gamma) = g_\gamma$  est l'*holonomie* associée à  $D$ .

**Définition 1.47.** Si  $G$  est un groupe de Lie, il est muni par définition d'une topologie. On peut donc parler de sous-groupes  $\Gamma \subset G$  *discrets*. Un groupe discret agit *proprement discontinument* sur  $X$  si l'ensemble  $\{g \in \Gamma \mid K \cap g(K) \neq \emptyset\}$  est fini pour tout compact  $K$  de  $X$ .

### Variété CR-sphérique

Une structure *CR-sphérique* est une  $(X, G)$ -structure pour  $X = S^3$  et  $G = \text{PU}(2, 1)$ . Pour un groupe discret  $\Gamma$  de  $\text{PU}(2, 1)$ , on définit son *ensemble limite* noté  $\Lambda(\Gamma)$  comme l'adhérence prise dans  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  de l'orbite  $\Gamma(z)$  pour un  $z \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . On montre que la définition

ne dépend pas du choix de  $z$ . Le *domaine de discontinuité* est  $\Omega(\Gamma) = S^3 - \Lambda(\Gamma)$ . Le groupe  $\Gamma$  agit proprement discontinument sur son domaine de discontinuité.

Soit  $\Gamma \subset \text{PU}(2, 1)$  un sous-groupe discret, qui agit librement sur  $\Omega(\Gamma)$ . Alors, le quotient  $\Omega(\Gamma)/\Gamma$  est muni canoniquement d'une structure CR-sphérique. On dit d'une variété  $M$  de dimension trois qui est homéomorphe à un tel quotient qu'elle est munie d'une structure CR-sphérique *complète*.

Par la suite, nous n'aurons pas accès nécessairement à une structure géométrique. On verra comment on peut généraliser la construction d'une application holonomie, pour obtenir une *représentation* du groupe fondamental dans  $\text{PU}(2, 1)$ . On en rappelle la définition :

**Définition 1.48.** Soit  $\Gamma$  un groupe et  $E$  un espace vectoriel. On appelle *représentation de  $\Gamma$*  un morphisme de groupe de  $\Gamma$  dans  $\text{GL}(E)$ , autrement dit, une application  $\rho: \Gamma \rightarrow \text{GL}(E)$  telle que  $\rho(\gamma_1\gamma_2) = \rho(\gamma_1)\rho(\gamma_2)$ .

**Exemple 1.49.** Une application holonomie  $h_D$  est une représentation de  $\Pi_1(M)$  dans  $\text{PU}(2, 1)$ .

Sur l'ensemble des représentations  $\text{Hom}(\Pi_1(M), \text{PU}(2, 1))$ , le groupe  $\text{PU}(2, 1)$  agit par conjugaison. Deux représentations sont dites équivalentes si elles sont conjuguées l'une à l'autre par un élément de  $\text{PU}(2, 1)$ .

**Définition 1.50.** L'*espace des déformations* est l'ensemble formé des classes de conjugaison. On le note :

$$\mathcal{D}(M) = \text{Hom}(\Pi_1(M), \text{PU}(2, 1))/\text{PU}(2, 1).$$

## 1.6 Classification des $n$ -uplets de $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$

**Définition 1.51.** Deux  $n$ -uplets de points ordonnés de  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  sont dits  $\text{PU}(2, 1)$ -équivalents s'il existe un élément de  $\text{PU}(2, 1)$  qui envoie le premier  $n$ -uplet sur le second.

Dans cette section, on cherche des invariants qui caractérisent les  $\text{PU}(2, 1)$ -classes d'équivalence de  $n$ -uplets. On commence avec les couples de points avec la proposition suivante :

**Proposition 1.52.** L'action de  $\text{PU}(2, 1)$  est doublement transitive sur  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

*Démonstration.* La matrice d'inversion suivante est dans  $\text{SU}(2, 1)$  et lorsqu'on la regarde dans le groupe d'Heisenberg, elle échange  $(0, 0)$  et  $\infty$  :

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La translation d'Heisenberg  $t_{z,t}$  fixe l'infini et envoie  $(0, 0)$  sur  $(z, t)$ . Si on a deux points du bord  $p$  et  $q$ , si  $p$  n'est pas déjà l'infini, à l'aide d'une première translation, on envoie ce point sur  $(0, 0)$  puis sur  $\infty$  avec  $I$ . Tout en gardant  $\infty$  fixe, on peut alors déplacer  $q$  sur  $(0, 0)$ . De cette façon, tout couple de points est  $\text{PU}(2, 1)$ -équivalent à  $(\infty, (0, 0))$ .  $\square$

### 1.6.1 Les triplets de points

**Notation 1.53.** Pour trois points de  $\mathbb{C}^3$ ,  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ , on note :

$$\langle \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = \langle \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1 \rangle \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_0 \rangle.$$

**Définition 1.54.** Soient  $p_0, p_1, p_2$  trois points distincts dans  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . L'invariant angulaire de Cartan du triplet ordonné  $(p_0, p_1, p_2)$  est donné par :

$$\mathbb{A}(p_0, p_1, p_2) = -\arg(\langle \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle)$$

où  $\mathbf{p}_i$  est un relevé de  $p_i$  dans  $\mathbb{C}^3$ .

L'invariant est bien défini car d'après le lemme 1.3,  $\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j \rangle$  n'est jamais nul pour des points  $p_i$  distincts. Enfin, l'argument n'est pas modifié si on choisit un autre relevé  $\mathbf{p}_i$ . La proposition suivante décrit la position des points pour certaines valeurs prises par  $\mathbb{A}$  :

**Proposition 1.55.** (voir [Gol99])

1.  $-\frac{\pi}{2} \leq \mathbb{A}(p_0, p_1, p_2) \leq \frac{\pi}{2}$ .
2.  $\mathbb{A}(p_0, p_1, p_2) = 0$  si et seulement si les trois points sont dans un même  $\mathbb{R}$ -cercle.
3.  $\mathbb{A}(p_0, p_1, p_2) = \pm\frac{\pi}{2}$  si et seulement si les trois points sont dans un même  $\mathbb{C}$ -cercle.

L'invariant de Cartan est clairement invariant sous l'action de  $\mathrm{PU}(2,1)$ . En fait, il caractérise les  $\mathrm{PU}(2,1)$ -classes d'équivalences de triplets de points de  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  :

**Théorème 1.56.** [Car32],[Gol99] Soient  $(p_0, p_1, p_2)$  et  $(q_0, q_1, q_2)$  deux triplets de points ordonnés de  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  tels que  $\mathbb{A}(p_0, p_1, p_2) = \mathbb{A}(q_0, q_1, q_2)$ , alors il existe une application  $g \in \mathrm{PU}(2,1)$  telle que :

$$\forall i \in \{0, 1, 2\} \quad g(p_i) = q_i.$$

Si le premier triplet n'est pas inclus dans un  $\mathbb{C}$ -cercle, alors  $g$  est unique.

**Remarque 1.57.** Dans le cas hyperbolique réel, il existe un unique triangle idéal (avec ses sommets au bord) modulo l'action de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ . Deux triplets sont donc toujours isométriques.

**Proposition 1.58.** (voir section 7.1 de [Gol99]). L'invariant de Cartan vérifie la relation de cocycle suivante :

$$\forall (p_0, p_1, p_2, p_3) \in (\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2)^4, \quad \mathbb{A}(p_0, p_1, p_2) + \mathbb{A}(p_0, p_3, p_1) + \mathbb{A}(p_0, p_2, p_3) + \mathbb{A}(p_1, p_3, p_2) = 0. \quad (1.7)$$

**Exemple 1.59.** L'invariant de Cartan du triplet  $p_0 = \infty, p_1 = (0, 0), p_2 = (1, t)$  est :

$$\tan(\mathbb{A}(p_0, p_1, p_2)) = t.$$

**Remarque 1.60.** Soit un triplet  $(p_0, p_1, p_2)$  dans le bord de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  qui n'est pas inclus un  $\mathbb{C}$ -cercle. Alors il existe une unique application  $g \in \mathrm{PU}(2,1)$  qui permute les points ainsi :  $p_0 \rightarrow p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow p_0$ . Elle est d'ordre trois.

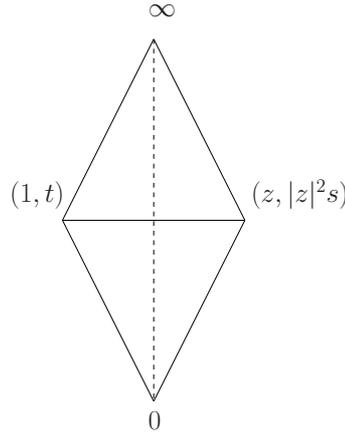


FIG. 1.2: Quatre points dans  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  en position générique.

### 1.6.2 Les quadruplets de points

**Proposition 1.61.** ([Fal08]) *Soit  $(p_0, p_1, p_2, p_3)$  un quadruplet de points deux à deux distincts dans  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  tels qu'aucun triplet pris parmi les quatre points ne soit jamais inclus dans un  $\mathbb{C}$ -cercle. Alors, il existe une unique application de  $\text{PU}(2, 1)$  qui envoie  $(p_0, p_1, p_2, p_3)$  sur un quadruplet qui en coordonnées d'Heisenberg s'écrit :  $(\infty, (0, 0), (1, t), (z, s|z|^2))$  avec  $z \neq 0, 1$  et  $\bar{z}\frac{i+s}{i+t} \neq 1$ .*

*Quatre points avec de telles coordonnées sont dits en position générique (voir figure 1.2).*

*Démonstration.* D'après le théorème 1.56 et l'exemple 1.59, il existe une application  $g$  dans  $\text{PU}(2, 1)$  qui envoie  $(p_0, p_1, p_2)$  sur  $(\infty, (0, 0), (1, \tan(\mathbb{A}(p_0, p_1, p_2))))$ . Les trois points n'étant pas dans une même droite complexe, seule l'identité fixe les trois points. On ne peut donc pas déplacer le dernier point.

Trois points sont dans un même  $\mathbb{C}$ -cercle si et seulement si  $\text{Re}(\langle p_i, p_j, p_k \rangle) = 0$  d'après la proposition 1.55. Pour un tétraèdre en position générique, le calcul donne :

$$\begin{aligned} \text{Re}(\langle p_0, p_1, p_2 \rangle) &= -\frac{1}{2}, & \text{Re}(\langle p_0, p_3, p_1 \rangle) &= \frac{1}{2}|z|^2, \\ \text{Re}(\langle p_0, p_2, p_3 \rangle) &= -\frac{1}{2}|1-z|^2, & \text{Re}(\langle p_1, p_3, p_2 \rangle) &= -\frac{|z|^2}{8}|\bar{z}(i+s) - (i+t)|^2. \end{aligned}$$

Donc les triplets ne sont jamais dans un même  $\mathbb{C}$ -cercle si et seulement si  $z \neq 0, 1$  et  $\bar{z}\frac{i+s}{i+t} \neq 1$ .  $\square$

**Remarque 1.62.** A isométrie holomorphe près, il y a exactement deux classes d'équivalence de triplets de points contenus dans des  $\mathbb{C}$ -cercles. Le triplet  $(\infty, 0, (0, 1))$  représente la première classe,  $(\infty, 0, (0, -1))$  la seconde.

Un quadruplet inclus dans un  $\mathbb{R}$ -cercle est  $\text{PU}(2,1)$ -équivalent à :  $[\infty, 0, (1, 0), (x, 0)]$  avec  $x$  réel.

La proposition suivante montre que l'invariant de Cartan ne suffit pas à caractériser un quadruplet de points :

**Proposition 1.63.** (Falbel) *Soient  $A_0, A_1, A_2, A_3$  quatre réels vérifiant :*

1.  $-\frac{\pi}{2} \leq A_i \leq \frac{\pi}{2}$ ,
2. la condition de cocycle :  $A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 0$ .

Alors il existe une famille à un paramètre de quadruplets de points  $(p_0, p_1, p_2, p_3)$  du bord, tel que :

$$A_0 = \mathbb{A}(p_0, p_1, p_2), \quad A_1 = \mathbb{A}(p_0, p_3, p_1), \quad A_2 = \mathbb{A}(p_0, p_2, p_3), \quad A_3 = \mathbb{A}(p_1, p_3, p_2).$$

**Remarque 1.64.** En fait, pour voir que l'invariant de Cartan ne suffit pas à classifier les quadruplets, il suffit de constater que quatre points en position générique sont caractérisés par la donnée de  $(z, t, s) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Pour un tel quadruplet, on peut calculer quatre invariants de Cartan qui sont reliés par la condition de cocycle (1.7). On a donc trois nombres réels indépendants qui ne peuvent suffire à caractériser les quatre points. Le chapitre 2 est consacré à la définition d'invariants qui classifient les quadruplets. Pour un  $n$ -uplet  $(p_0, \dots, p_n)$  avec  $n \geq 4$ , les invariants de tous les quadruplets contenus dans  $(p_0, \dots, p_n)$  suffiront à caractériser le  $n$ -uplet.



## Chapitre 2

# Tétraèdres géométriques et abstraits

Dans ce chapitre, on rappelle la définition d'un tétraèdre idéal hyperbolique réel. Leurs classes de conjugaison sous l'action de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  sont caractérisées grâce à la fonction birapport dont on rappelle les principales propriétés. On étudiera ensuite les équivalents de ces objets dans le cas CR.

### 2.1 Tétraèdres hyperboliques réels et birapport

Une référence pour cette section est le livre [Rat06].

**Définition 2.1.** Un *tétraèdre idéal hyperbolique réel* est la donnée de quatre points deux à deux distincts dans le bord  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$  et de l'enveloppe convexe géodésique de ces points.

**Remarque 2.2.** La donnée des sommets détermine entièrement le tétraèdre. Les arêtes sont les géodésiques reliant les sommets et les faces sont les enveloppes convexes des triplets. Dans le cas complexe, lorsqu'on travaille dans  $S^3$ , il n'y a pas de façon canonique de relier deux points entre eux. Pour "remplir" un tétraèdre, cela procède toujours d'un choix.

**Définition 2.3.** La fonction *birapport*, notée  $X$  est définie sur l'ensemble des quadruplets de points ordonnés de  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$  deux à deux distincts, à valeur dans  $\mathbb{C}$ . Dans le modèle de Poincaré, si  $p_0, p_1, p_2, p_3$  appartiennent à  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3 \simeq \widehat{\mathbb{C}}$ , on pose :

$$X(p_0, p_1, p_2, p_3) = \frac{p_2 - p_0}{p_3 - p_0} \cdot \frac{p_3 - p_1}{p_2 - p_1}.$$

Si l'un des sommets est l'infini, par exemple  $p_0$ , on prolonge :  $X(\infty, p_1, p_2, p_3) = \frac{p_3 - p_1}{p_2 - p_1}$ . Avec cette convention,  $X(\infty, 0, 1, z) = z$ .

**Proposition 2.4.** La fonction  $X$  est une bijection entre  $\mathbb{C} - \{0, 1\}$  et l'ensemble des quadruplets de points ordonnés, deux à deux distincts dans  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$  modulo l'action de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ .

*Démonstration.* Pour  $z \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ , le birapport du tétraèdre  $[\infty, 0, 1, z]$  est  $z$ . La fonction  $X$  est donc surjective. Si  $X(p_0, p_1, p_2, p_3) = z$  alors l'homographie  $g$  donnée ci-dessous envoie  $[\infty, 0, 1, z]$  sur le deuxième tétraèdre :

$$g(w) = \frac{p_0(p_2 - p_1)w + p_1(p_0 - p_2)}{(p_2 - p_1)w + p_0 - p_2}.$$

□

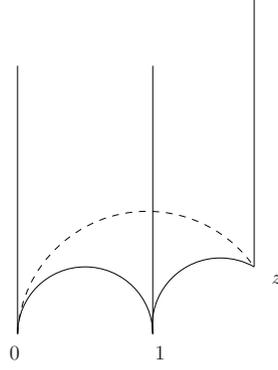
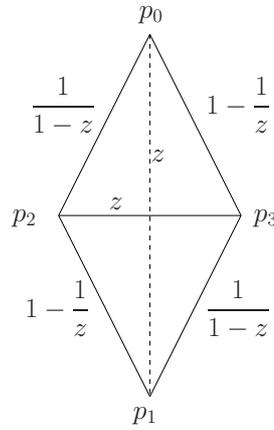
FIG. 2.1: Tétraèdre hyperbolique réel idéal avec un sommet en  $\infty$ .

FIG. 2.2: Schéma d'un tétraèdre hyperbolique réel idéal, décoré avec un invariant par arête.

La fonction  $X$  suit certaines symétries :

$$X(p_0, p_1, p_2, p_3) = X(p_1, p_0, p_3, p_2) \quad (2.1)$$

$$X(p_2, p_3, p_0, p_1) = X(p_0, p_1, p_2, p_3) \quad (2.2)$$

$$X(p_0, p_2, p_3, p_1) = \frac{1}{1 - X(p_0, p_1, p_2, p_3)}. \quad (2.3)$$

D'après (2.1) pour le tétraèdre  $[p_0, p_1, p_2, p_3]$ , cela a un sens d'associer à l'arête  $p_0p_1$  l'invariant  $X(p_0, p_1, p_2, p_3)$ . Dans ce cas, deux arêtes opposées ont même invariant d'après (2.2). Si on pose  $z = X(p_0, p_1, p_2, p_3)$ , les arêtes d'un tétraèdre idéal sont décorées suivant le schéma de la figure 2.2.

**Définition 2.5.** Un tétraèdre hyperbolique réel sera dit *dégénéré* si les quatre points sont dans l'intersection  $\partial\mathbb{H}_2^{\mathbb{R}} \cap \overline{S}$  où  $S$  est une surface totalement géodésique. Le tétraèdre est plat, ce qui dans  $\mathbb{C} - \{0, 1\}$  se traduit par un birapport réel.

## 2.2 Tétraèdres CR et invariants

L'objectif est de trouver des invariants qui caractérisent les  $\text{PU}(2,1)$ -classes d'équivalence de tétraèdres CR.

### 2.2.1 Tétraèdres CR

On commence par définir les tétraèdres CR :

**Définition 2.6.** Un *tétraèdre CR* est la donnée de quatre points distincts ordonnés dans le bord  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  tels que trois sommets parmi les quatre ne sont jamais inclus dans un  $\mathbb{C}$ -cercle.

Dans le premier chapitre, on a mis en évidence qu'il n'y avait pas de façon canonique de relier des points de  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , donc il n'y a pas une manière naturelle de définir arêtes, faces d'un tétraèdre. Néanmoins, même si ces objets géométriques ne sont pas définis, on voudra quand même parler des  $m$ -squelettes d'un tétraèdre CR. Pour cela, on utilisera le vocabulaire des complexes simpliciaux abstraits.

**Définition 2.7.** Le *complexe simplicial abstrait* de  $V = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$  est l'ensemble des parties de  $V$ . Les *faces* du tétraèdres sont les éléments de cardinal trois du complexe simplicial, les *arêtes* cardinal deux et les *sommets* cardinal un.

**Remarque 2.8.** On pourrait considérer les tétraèdres qui ont des sommets alignés dans un  $\mathbb{C}$ -cercle comme dégénérés, mais ils posent problème dans la définition des invariants. On préfère donc les exclure. La définition de dégénérescence fait intervenir l'autre type de surface totalement géodésique :

**Définition 2.9.** Un tétraèdre CR sera dit *dégénéré* si les quatre points sont dans l'intersection  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \cap \overline{S}$  où  $S$  est un  $\mathbb{R}$ -plan : les quatre points sont dans un même  $\mathbb{R}$ -cercle.

### 2.2.2 Birapport complexe et invariants

La fonction birapport est généralisée à l'espace hyperbolique complexe par Korányi et Reimann dans [KR87].

**Définition 2.10.** Le birapport complexe de quatre points distincts de  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  est :

$$KR(p_0, p_1, p_2, p_3) = \frac{\langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_0 \rangle}{\langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_0 \rangle} \cdot \frac{\langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_1 \rangle}{\langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1 \rangle}$$

où  $\mathbf{p}_i$  est un relevé de  $p_i$  dans  $\mathbb{C}^3$ .

**Remarque 2.11.** Le birapport complexe vérifie les symétries suivantes :

$$KR(p_0, p_1, p_2, p_3) = KR(p_1, p_0, p_3, p_2), \quad KR(p_0, p_1, p_2, p_3) = \overline{KR(p_2, p_3, p_0, p_1)}.$$

$$KR(p_0, p_1, p_3, p_2) = \frac{1}{KR(p_0, p_1, p_2, p_3)}.$$

On rappelle que tout tétraèdre CR est  $\text{PU}(2,1)$ -équivalent à un quadruplet du type  $(\infty, 0, (1, t), (z, |z|^2 s))$  (voir figure 1.2). Le triplet  $(z, t, s)$  permet de classifier les quadruplets de points ordonnés de  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . C'est un invariant pour chaque tétraèdre CR. Mais il est peu maniable. Les deux sections suivantes sont consacrées à introduire deux autres invariants définis par Falbel.

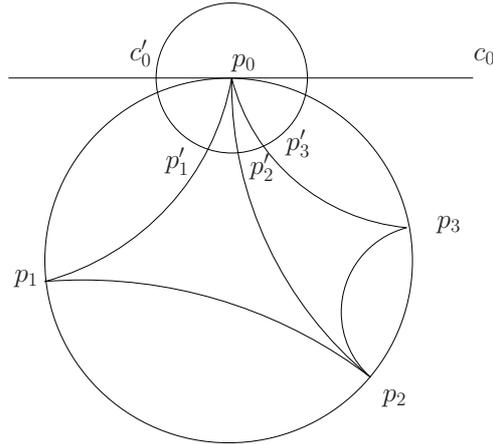


FIG. 2.3: Un tétraèdre  $[p_0, p_1, p_2, p_3]$  dans  $S^3$ . Le cercle autour de  $p_0$  représente l'ensemble  $\mathbb{C}P^1$  des droites complexes issues de  $p_0$ .

### Les invariants $z_{ij}$

On se place dans le modèle de la boule. L'espace  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  est plongé dans  $\mathbb{C}^2$  et sa frontière est identifiée avec  $S^3$ . On cherche à caractériser un quadruplet ordonné de points du bord  $[p_0, p_1, p_2, p_3]$  modulo l'action de  $\text{PU}(2,1)$ . A chaque arête orientée, on associe un birapport de la façon décrite ci-dessous.

L'ensemble des droites complexes de  $\mathbb{C}^2$  issues de  $p_0$  est identifié avec  $\mathbb{C}P^1$ . La droite qui relie  $p_0$  à  $p_i$  y est représentée par  $p'_i \in \mathbb{C}P^1$  (pour  $i = 1, 2, 3$ ). On note  $c_0$  la droite complexe passant par  $p_0$  tangente à  $S^3$  (elle est obtenue comme la projection de  $\mathbf{p}_0^\perp$ ). On note  $c'_0$  le représentant de  $c_0$  dans  $\mathbb{C}P^1$  (voir la figure 2.3).

Alors on peut définir le birapport des quatre points qu'on a obtenus dans  $\mathbb{C}P^1$  :

$$z_{01} = X(c'_0, p'_1, p'_2, p'_3).$$

Ce birapport est associé à l'arête orientée  $[01]$ , côté 0. De la même façon, à chaque arête orientée, on peut définir deux birapports (un à chaque extrémité de l'arête). On obtient ainsi 12 invariants, comme sur la figure 2.4.

**Proposition 2.12.** *Les 12 paramètres  $z_{ij}$  précédemment obtenus sont invariants sous l'action de  $\text{PU}(2,1)$  sur  $[p_0, p_1, p_2, p_3]$ . Ils caractérisent un tétraèdre modulo l'action de  $\text{PU}(2,1)$ . Enfin, ils vérifient les équations hyperboliques classiques :*

$$z_{ij}z_{ik}z_{il} = -1$$

et

$$z_{02} = \frac{1}{1 - z_{01}}, \quad z_{13} = \frac{1}{1 - z_{10}}, \quad z_{20} = \frac{1}{1 - z_{23}}, \quad z_{31} = \frac{1}{1 - z_{32}}.$$

*Démonstration.* Le groupe  $\text{PU}(2,1)$  laisse globalement invariant l'ensemble des droites complexes tangentes à  $S^3$ . D'autre part, il agit par homographie sur l'ensemble des droites complexes issues d'un point. Les paramètres  $z_{ij}$  sont donc invariants par  $\text{PU}(2,1)$ . Ils satisfont les équations proposées. En effet, le paramètre  $z_{02}$  est donné par :

$$z_{02} = X(c'_0, p'_2, p'_3, p'_1) = \frac{1}{1 - X(c'_0, p'_1, p'_2, p'_3)} = \frac{1}{1 - z_{01}}$$

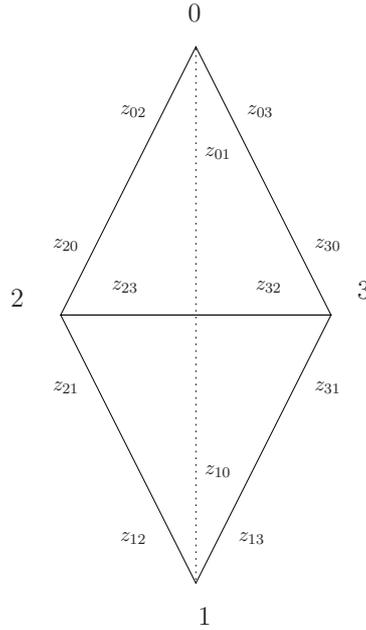


FIG. 2.4: Schéma d'un tétraèdre CR décoré, un invariant à chaque extrémité d'arête.

d'après (2.3). De la même façon,  $z_{03} = \frac{1}{1-z_{02}} = 1 - \frac{1}{z_{01}}$ . Le lemme 2.14 termine la preuve en démontrant que les coordonnées des sommets du tétraèdre en position générique s'écrivent avec les invariants.  $\square$

Dans [Wil], l'auteur montre que les  $z_{ij}$  sont calculés comme des birapports complexes :

**Proposition 2.13.** *Soit  $[p_0, p_1, p_2, p_3]$  un tétraèdre CR. Si  $\mathbf{p}_i$  est un relevé de  $p_i$  dans  $\mathbb{C}^3$  et  $\mathbf{c}_{ij}$  un vecteur polaire à la droite complexe passant par  $p_i$  et  $p_j$ , alors on obtient les  $z_{ij}$  comme les birapports complexes suivants :*

$$z_{01} = \frac{\langle \mathbf{p}_3, \mathbf{c}_{01} \rangle \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_0 \rangle}{\langle \mathbf{p}_2, \mathbf{c}_{01} \rangle \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_0 \rangle} = KR(p_0, c_{01}, p_2, p_3)$$

$$z_{10} = KR(p_1, c_{01}, p_3, p_2) \quad z_{23} = KR(p_2, c_{23}, p_0, p_1) \quad z_{32} = KR(p_3, c_{23}, p_1, p_0).$$

*Démonstration.* La définition des tétraèdres CR assure que  $\langle \mathbf{p}_k, \mathbf{c}_{ij} \rangle \neq 0$  pour  $i, j, k$  distincts car on exclut les cas où trois points sont dans un même  $\mathbb{C}$ -cercle. Donc, les formules sont bien définies. Pour cette preuve, nous travaillerons dans le modèle de la boule, plongée dans  $\mathbb{C}^2$ . Comme les paramètres  $z_{ij}$  sont invariants sous l'action de  $\text{PU}(2,1)$ , on peut toujours supposer que les quatre points sont :

$$p_0 = (1, 0), \quad p_1 = (-1, 0), \quad p_2 = (z_1, z_2), \quad p_3 = (w_1, w_2).$$

La droite complexe tangente à  $S^3$  en  $p_0$  est  $\{1\} \times \mathbb{C}$ . Cette droite considérée dans l'ensemble des droites issues de  $p_0$  est de coordonnées homogènes  $[0 : 1]$ . Ce sont les coordonnées du point  $c'_0 \in \mathbb{C}P^1$ . La droite qui relie  $p_0 = (1, 0)$  à  $p_2 = (z_1, z_2)$  est représentée dans  $\mathbb{C}P^1$  par  $p'_2 = [z_1 - 1 : z_2]$ . De la même façon, on obtient :  $p'_1 = [1 : 0]$  et  $p'_3 = [w_1 - 1 : w_2]$ . Le birapport de ces quatre points est :

$$z_{01} = X(c'_0, p'_1, p'_2, p'_3) = \frac{w_2}{w_1 - 1} \cdot \frac{z_1 - 1}{z_2}.$$

D'un autre côté, le calcul du birapport complexe suivant nous donne (ici,  $\mathbf{c}_{01} = {}^t(0, 1, 0)$ ) :

$$\frac{\langle \mathbf{p}_3, \mathbf{c}_{01} \rangle \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_0 \rangle}{\langle \mathbf{p}_2, \mathbf{c}_{01} \rangle \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_0 \rangle} = \frac{w_2}{z_2} \cdot \frac{z_1 - 1}{w_1 - 1}.$$

On trouve bien deux fois la même expression.  $\square$

**Lemme 2.14.** *Dans le modèle de Siegel, pour un tétraèdre CR de sommets  $p_0 = \infty$ ,  $p_1 = (0, 0)$ ,  $p_2 = (1, t)$  et  $p_3 = (z, s|z|^2)$ , les invariants sont donnés par les formules suivantes :*

$$z_{01} = z, \quad z_{10} = \bar{z} \frac{i + s}{i + t}, \quad z_{23} = z \frac{t + i - \bar{z}(s + i)}{(z - 1)(t - i)}, \quad z_{32} = \bar{z} \frac{(z - 1)(s - i)}{t + i - \bar{z}(s + i)}.$$

Inversement,  $z$ ,  $t$  et  $s$  sont donnés par :

$$z = z_{01},$$

$$t = -i \frac{z_{23}(1 - z_{01}) - z_{01}(1 - z_{10})}{z_{23}(1 - z_{01}) + z_{01}(1 - z_{10})}, \quad s = -i \frac{z_{32}(1 - z_{10}) - z_{10}(1 - z_{01})}{z_{32}(1 - z_{10}) + z_{10}(1 - z_{01})}.$$

*Démonstration.* On remplace dans les formules données dans la proposition 2.13 et on obtient le résultat. Si les  $z_{ij}$  sont les invariants d'un tétraèdre CR, alors  $z = z_{01}$ ,  $i + s = \frac{z_{10}}{z_{01}}(i + t)$ . Quand on remplace dans l'expression de  $z_{23}$ , on trouve :

$$z_{23} = z_{01} \frac{(t + i)(1 - z_{10})}{(z_{01} - 1)(t - i)}.$$

On en tire l'expression de  $t$  et par suite celle de  $s$  comme elles sont proposées dans l'énoncé.  $\square$

Tout quadruplet  $(z_{01}, z_{10}, z_{23}, z_{32}) \in (\mathbb{C} - \{0, 1\})^4$  n'est pas le quadruplet des invariants d'un tétraèdre CR. On verra plus loin les conditions nécessaires qu'il doit vérifier pour cela.

**Exemple 2.15.** Dans le cas dégénéré où les quatre sommets sont inclus dans un  $\mathbb{R}$ -cercle, les invariants sont  $z_{01} = z_{10} = z_{23} = z_{32} = x$  avec  $x$  réel.

### Les invariants $\omega_a$

Dans [Fal07], l'auteur définit les invariants suivants (avec une normalisation différente) :

#### Définition 2.16.

$$\omega_a = KR(p_0, p_1, p_2, p_3), \quad \omega_b = KR(p_0, p_2, p_3, p_1), \quad \omega_c = KR(p_0, p_3, p_1, p_2).$$

**Remarque 2.17.** En utilisant les symétries évidentes de ces nouveaux invariants, on peut associer  $\omega_i$  à chaque arête d'un tétraèdre CR comme indiqué sur la figure 2.5.

**Remarque 2.18.** 1. Dans le cas dégénéré  $p_0 = \infty$ ,  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = (1, 0)$ ,  $p_3 = (x, 0)$ , les invariants sont :

$$\omega_a = x^2, \quad \omega_b = \left( \frac{1}{1 - x} \right)^2, \quad \omega_c = \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^2.$$

C'est le seul cas où les trois invariants sont tous réels.

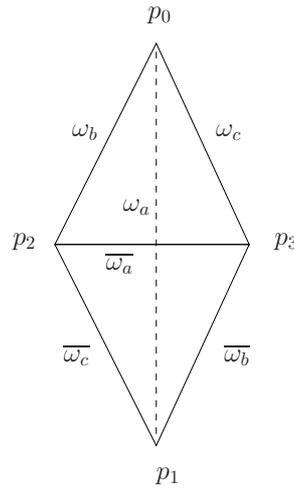


FIG. 2.5: Schéma d'un tétraèdre CR décoré d'un invariant  $\omega$  par arête.

2. La définition de ces invariants s'étend aux tétraèdres dont trois points sont dans un même  $\mathbb{C}$ -cercle. Par exemple, si  $p_0 = \infty, p_1 = 0, p_2 = (0, 1), p_3 = (x, t)$ , alors :

$$\omega_a = t + ix^2, \quad \omega_b = \frac{1}{1 - t - ix^2}, \quad \omega_c = 1 - \frac{1}{t - ix^2}.$$

**Lemme 2.19.** ([Fal07]) *Pour passer des  $z_{ij}$  aux  $\omega_k$ , on a les formules suivantes :*

$$\omega_a = z_{01}z_{10}, \quad \omega_b = z_{02}z_{20}, \quad \omega_c = z_{03}z_{30}.$$

*Réciproquement :*

$$z_{01} = \frac{\omega_a(1 - \overline{\omega_c}\omega_b\overline{\omega_c})}{1 + \omega_a\omega_b\overline{\omega_c}}, \quad z_{10} = \frac{1 - \overline{\omega_c} + \omega_b\overline{\omega_c}}{1 + \omega_a\omega_b\overline{\omega_c}},$$

$$z_{23} = -\frac{1 - \omega_b + \omega_a\omega_b}{\omega_b(1 - \omega_a + \omega_a\overline{\omega_c})}, \quad z_{32} = -\frac{\omega_b(1 - \omega_a + \omega_a\overline{\omega_c})}{\overline{\omega_a}(1 - \omega_b + \omega_a\omega_b)}.$$

**Remarque 2.20.** Les conditions pour que  $(\omega_a, \omega_b, \omega_c)$  soient les invariants d'un tétraèdre CR sont peu maniables et peu symétriques (celles-ci sont énoncées dans [Fal07] à la proposition 4.2). En revanche, on verra dans la prochaine section que pour les  $z_{ij}$ , ces conditions s'écrivent facilement. C'est pour cette raison que par la suite, nous ne travaillerons plus qu'avec les invariants  $z_{ij}$ .

## 2.3 L'espace $\mathcal{T}$

On cherche maintenant à réunir les deux objets géométriques (tétraèdre hyperbolique réel et CR) dans un ensemble  $\mathcal{T}$  plus grand, où les tétraèdres sont des complexes simpliciaux abstraits. Ensuite, on cherchera les sous-ensembles de  $\mathcal{T}$  qui sont en bijection avec l'ensemble des simplexes CR et ceux en bijection avec l'ensemble des tétraèdres hyperboliques réels.

**Définition 2.21.** Un tétraèdre  $T$  décoré abstrait est un complexe simplicial engendré par quatre sommets ordonnés :  $[p_0, p_1, p_2, p_3]$ . On décore chaque arête orientée de deux paramètres  $z_{ij}$  et  $z_{ji}$  dans  $\mathbb{C} - \{0, 1\}$  de la façon indiquée par la figure 2.4.

**Définition 2.22.** Le 12-uplet d'un tétraèdre  $T$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{T}$  si ces paramètres vérifient les relations suivantes :

$$z_{ij}z_{ik}z_{il} = -1, \quad (2.4)$$

$$z_{02} = \frac{1}{1 - z_{01}}, \quad z_{13} = \frac{1}{1 - z_{10}}, \quad z_{20} = \frac{1}{1 - z_{23}}, \quad z_{31} = \frac{1}{1 - z_{32}}. \quad (2.5)$$

Dans ce cas, on dira abusivement qu'un tétraèdre  $T$  appartient à  $\mathcal{T}$ .

**Remarque 2.23.** Un tétraèdre de  $\mathcal{T} \simeq (\mathbb{C} - \{0, 1\})^4$  est caractérisé par  $(z_{01}, z_{10}, z_{23}, z_{32})$ . Par la suite, on identifiera un 12-uplet de  $\mathcal{T}$  avec son quadruplet  $(z_{01}, z_{10}, z_{23}, z_{32})$  caractéristique.

Dans la suite, nous allons nous attacher à caractériser les paramètres des tétraèdres de  $\mathcal{T}$  qui seront dits *géométriques* (ie hyperbolique réel ou CR). Pour un tétraèdre abstrait  $T \in \mathcal{T}$ , la condition pour le qualifier de CR est immédiate :

**Définition 2.24.** Un tétraèdre  $T \in \mathcal{T}$  représente une classe de conjugaison de tétraèdres CR si ses paramètres sont les invariants d'un tétraèdre CR.

Pour les tétraèdres réels, il y a deux sous-ensembles qui se projettent sur l'ensemble des classes de conjugaison des tétraèdres hyperboliques réels.

**Définition 2.25.** Un tétraèdre  $T \in \mathcal{T}$  est dit  $HR_1$  (hyperbolique réel de type un) si les paramètres de  $T$  vérifient :  $z_{01} = z_{10} = z_{23} = z_{32}$ .

**Remarque 2.26.** Les tétraèdres  $HR_1$  sont en bijection évidente avec les tétraèdres hyperboliques réels.

**Notation 2.27.** On définit l'application suivante :

$$\begin{aligned} \Pi : \mathcal{T} &\longrightarrow (\mathbb{C} - \{0, 1\})^6 \\ (z_{01}, z_{10}, z_{23}, z_{32}) &\longmapsto (z_{01}z_{10}, z_{02}z_{20}, z_{03}z_{30}, z_{23}z_{32}, z_{13}z_{31}, z_{12}z_{21}). \end{aligned}$$

A chaque arête est associée le produit des paramètres ; autrement dit, à l'arête  $ij$  est associé  $z_{ij}z_{ji}$ . L'image par  $\Pi$  d'un tétraèdre  $T$  est un tétraèdre dont chaque arête est décorée d'un paramètre.

**Remarque 2.28.** D'après le lemme 2.19, l'application  $\Pi$  est une bijection entre les invariants  $z_{ij}$  et  $\omega_a$  des tétraèdres CR.

L'application  $\Pi$  nous permet de donner la définition suivante :

**Définition 2.29.** Un tétraèdre  $T \in \mathcal{T}$  est dit  $HR_2$  (hyperbolique réel de type deux) si les paramètres de  $\Pi(T)$  sont les invariants d'un tétraèdre hyperbolique réel.

La proposition suivante donne des conditions nécessaires sur les paramètres d'un tétraèdre  $T$  pour qu'il soit géométrique.

**Proposition 2.30.** *Si  $T \in \mathcal{T}$  est  $HR_2$ , alors il vérifie ce qu'on appelle les équations de compatibilité réelle :*

$$z_{01}z_{10} = z_{23}z_{32} \quad (R1)$$

$$z_{02}z_{20} = z_{13}z_{31} \quad (R2)$$

$$z_{03}z_{30} = z_{12}z_{21} \quad (R3).$$

*Si  $T \in \mathcal{T}$  est  $CR$ , alors il vérifie ce qu'on appelle les équations de conjugaison :*

$$z_{01}z_{10} = \overline{z_{23}z_{32}} \quad (C1)$$

$$z_{02}z_{20} = \overline{z_{13}z_{31}} \quad (C2)$$

$$z_{03}z_{30} = \overline{z_{12}z_{21}} \quad (C3).$$

*Démonstration.* Dans les deux cas, les paramètres de  $\Pi(T)$  doivent vérifier les symétries des tétraèdres géométriques.  $\square$

**Remarque 2.31.** C'est pour respecter la symétrie des tétraèdres que nous avons écrit ici toutes les équations ( $R_i$ ) et ( $C_i$ ). On notera cependant que grâce aux équations (2.4) et (2.5), ( $R_3$ ) par exemple découle de ( $R_1$ ) et ( $R_2$ ), de même ( $C_3$ ) découle de ( $C_1$ ) et ( $C_2$ ).

Pour qu'il y ait bijection entre l'ensemble des classes de conjugaison des tétraèdres  $CR$  et les paramètres qui vérifient les équations de conjugaison, il faut retirer une sous-variété à ce dernier espace, comme le montrent les propositions suivantes :

**Proposition 2.32.** *L'ensemble des classes de conjugaison des tétraèdres  $CR$  non dégénérés est paramétré par la sous-variété algébrique réelle de  $\mathcal{T}$  définie par les équations de conjugaison, privée de l'ensemble des solutions de compatibilité réelle.*

*Démonstration.* Sur l'arête 01 d'un tétraèdre  $CR$  non dégénéré, on a  $z_{01} = z$  et  $z_{10} = \bar{z} \frac{i+s}{i+t}$  avec  $s$  et  $t$  réel. Tout couple de nombres  $(z_{01}, z_{10})$  ne peut pas être écrit sous cette forme. Un nombre  $\xi$  égale  $\frac{i+s}{i+t}$  si et seulement si  $\xi = 1$  et  $s = t$  ou bien  $\text{Im}(\xi) \neq 0$  et  $s = \frac{\text{Re}(\xi) - |\xi|^2}{\text{Im}(\xi)}$  et  $t = \frac{1 - \text{Re}(\xi)}{\text{Im}(\xi)}$ .

A partir de cette remarque, on va montrer que tout tétraèdre abstrait qui vérifie les hypothèses de la proposition est effectivement  $CR$  non dégénéré. Si pour tout  $(i, j)$   $\text{Im}(z_{ij}z_{ji}) = 0$ , alors non seulement les paramètres vérifient les équations de conjugaison, mais aussi celles de compatibilité réelle ( $z_{ij}z_{ji} = \overline{z_{ij}z_{ji}} = z_{kl}z_{lk}$ ). Ce qui est interdit par les hypothèses. Quitte à ré-indexer les sommets, on peut supposer que sur l'arête 01, on a :  $\text{Im}(z_{01}z_{10}) \neq 0$ . Dans ce cas, on peut poser :  $z = z_{01}$ ,  $s = \frac{|z_{01}|^2 - \text{Re}(z_{01}z_{10})}{\text{Im}(z_{01}z_{10})}$  et  $t = \frac{\text{Re}(z_{01}z_{10}) - |z_{10}|^2}{\text{Im}(z_{01}z_{10})}$ . Par suite :

$$z_{01} = z, \quad z_{10} = \bar{z} \frac{i+s}{i+t}. \quad (2.6)$$

L'équation ( $C1$ ) s'écrit :

$$z_{32} = \frac{\overline{z_{01}z_{10}}}{z_{23}}. \quad (2.7)$$

Le quotient de ( $C2$ ) avec ( $C3$ ) nous donne :  $\frac{(1 - z_{01})z_{10}z_{23}}{(1 - z_{10})} = \frac{(1 - \overline{z_{10}})\overline{z_{01}z_{32}}}{(1 - \overline{z_{01}})}$ . Avec la relation (2.7), on obtient :  $|z_{23}| = \frac{|1 - z_{10}||z_{01}|}{|1 - z_{01}|}$ . Enfin, si on réinjecte ceci dans la deuxième

équation de conjugaison, on finit par :

$$z_{23} = \overline{z_{01}} \frac{(\overline{z_{10}} - z_{01})(1 - z_{10})}{(z_{01} - z_{10})(1 - z_{01})}, \quad z_{32} = \overline{z_{10}} \frac{(\overline{z_{01}} - z_{10})(1 - z_{01})}{(z_{10} - z_{01})(1 - z_{10})}.$$

Lorsqu'on remplace  $z_{01}$  et  $z_{10}$  par les expressions (2.6), on obtient les formules des invariants d'un tétraèdre CR données à la proposition 2.14. Comme  $\text{Im}(z_{01}z_{10}) \neq 0$ , on ne peut pas avoir  $z_{01} = z_{10} \in \mathbb{R}$ . Donc il n'est pas dégénéré.

Réciproquement, un tétraèdre CR non dégénéré vérifie les équations de conjugaison mais pas toutes les équations de compatibilité réelle, sinon ses invariants  $(\omega_a, \omega_b, \omega_c)$  seraient tous réels. La remarque 2.18 prouve qu'il serait alors dégénéré.  $\square$

**Proposition 2.33.** *L'ensemble des tétraèdres  $HR_2$  non dégénérés est paramétré par la sous-variété algébrique complexe de  $\mathcal{T}$  définie par les équations de compatibilité réelle, privée de l'ensemble des solutions des équations de conjugaison et de la droite complexe  $z_{01} = z_{10} = z_{23} = z_{32}$  des tétraèdres  $HR_1$ .*

*Démonstration.* Les trois équations de compatibilité réelle sont de rang deux ce qui permet d'exprimer  $z_{23}$  et  $z_{32}$  en fonction des deux autres variables. Voyons comment :

L'équation (R1) implique :  $z_{32} = \frac{z_{01}z_{10}}{z_{23}}$ .

L'équation (R2) est  $(1 - z_{01})(1 - z_{23}) = (1 - z_{10})(1 - z_{32})$ .

Le quotient de (R2) avec (R3)  $\frac{(1 - z_{01})(1 - z_{32})}{z_{01}z_{32}} = \frac{(1 - z_{10})(1 - z_{23})}{z_{10}z_{23}}$  donne :

$$z_{10}z_{23} \frac{1 - z_{01}}{1 - z_{10}} = z_{01}z_{32} \frac{1 - z_{10}}{1 - z_{01}} \Rightarrow (z_{23})^2 = \left( z_{01} \left( \frac{1 - z_{10}}{1 - z_{01}} \right) \right)^2.$$

Il existe donc un  $\epsilon$  dans  $\{-1, 1\}$  tel que :

$$z_{23} = \epsilon z_{01} \frac{1 - z_{10}}{1 - z_{01}}.$$

Si  $\epsilon = 1$ , (R2) implique  $z_{10} = z_{01}$  ce qui donne comme quadruplet  $(z_{01}, z_{01}, z_{01}, z_{01})$  qui est clairement une solution.

Si  $\epsilon = -1$  le quadruplet  $\left( z_{01}, z_{10}, -z_{01} \frac{1 - z_{10}}{1 - z_{01}}, -z_{10} \frac{1 - z_{01}}{1 - z_{10}} \right)$  résout les équations de compatibilité réelle.

Dans la variété  $\mathcal{T} \simeq (\mathbb{C} - \{0, 1\})^4$ , la sous-variété algébrique des solutions aux équations de compatibilité réelle a deux composantes : une première de dimension un, la droite complexe  $(z_{01}, z_{01}, z_{01}, z_{01})$  qui paramètre les tétraèdres  $HR_1$ , et une deuxième de dimension deux  $(z_{01}, z_{10}, -z_{01} \frac{1 - z_{10}}{1 - z_{01}}, -z_{10} \frac{1 - z_{01}}{1 - z_{10}})$ . Les points de ce dernier ensemble paramètrent un tétraèdre  $HR_2$ . En effet,  $\Pi(z_{01}, z_{10}, -z_{01} \frac{1 - z_{10}}{1 - z_{01}}, -z_{10} \frac{1 - z_{01}}{1 - z_{10}})$  vérifie les symétries d'un tétraèdre hyperbolique réel. Ensuite, si on pose  $z_{01}z_{10} = z$ , sur l'arête 02, on a :

$$z_{20}z_{02} = \frac{1}{1 - z_{23}} \frac{1}{1 - z_{01}} = \frac{1}{1 - \left( \frac{z - z_{01}}{1 - z_{01}} \right)} \frac{1}{1 - z_{01}} = \frac{1}{1 - z}.$$

De la même façon, à l'arête 03 est associé :

$$z_{30}z_{03} = \left( 1 - \frac{1}{z_{32}} \right) \left( 1 - \frac{1}{z_{01}} \right) = \left( 1 - \frac{z - z_{01}}{z(1 - z_{01})} \right) \left( 1 - \frac{1}{z_{01}} \right) = 1 - \frac{1}{z}.$$

On a bien un tétraèdre hyperbolique réel caractérisé par l'invariant  $z$ . Les paramètres ne vérifient pas les équations de conjugaison ce qui veut dire que sur une arête,  $z_{ij}z_{ji} = z_{kl}z_{lk} \neq \overline{z_{ij}z_{ji}}$ . L'invariant sur l'arête  $ij$  n'est pas réel. Donc le tétraèdre n'est pas plat.

Par contre, pour les éléments de la droite  $(z, z, z, z)$ , l'image par  $\Pi$  est :

$$\left( z^2, \left( \frac{1}{1-z} \right)^2, \left( 1 - \frac{1}{z} \right)^2, z^2, \left( \frac{1}{1-z} \right)^2, \left( 1 - \frac{1}{z} \right)^2 \right).$$

Or dans  $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ , on n'a jamais  $\frac{1}{1-z^2} = \left( \frac{1}{1-z} \right)^2$  ou  $1 - \frac{1}{z^2} = \left( 1 - \frac{1}{z} \right)^2$ .

La réciproque de la proposition est claire : l'image inverse par  $\Pi$  d'un tétraèdre hyperbolique réel non dégénéré est contenue dans la variété proposée.  $\square$

**Remarque 2.34.** L'application  $\Pi$  est injective, sauf sur l'ensemble des points de  $HR_2$ . Dans ce cas, l'image réciproque d'un point est une fibre du type :  $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ .

**Lemme 2.35.** *Il y a deux types de tétraèdres qui vérifient à la fois les équations de conjugaison et les équations de compatibilité réelle. Le premier rassemble tous les tétraèdres CR dégénérés, l'autre, tous les tétraèdres  $HR_2$  dégénérés.*

*Démonstration.* On a vu dans le lemme 2.33 que les solutions des équations de compatibilité réelle sont de deux types :  $(z_{01}, \frac{z}{z_{01}}, \frac{z-z_{01}}{1-z_{01}}, z \frac{1-z_{01}}{z-z_{01}})$  ou  $(z, z, z, z)$ . Le premier quadruplet est aussi solution des équations de conjugaison si  $z_{01}z_{10} = z$ ,  $z_{02}z_{20} = \frac{1}{1-z}$  et  $z_{03}z_{30} = 1 - \frac{1}{z}$  sont réels, autrement dit si  $z \in \mathbb{R}$ . La projection par  $\Pi$  donne bien un tétraèdre hyperbolique plat.

Pour la deuxième forme, il faut que  $z^2, (1-z)^2$  et  $(1 - \frac{1}{z})^2$  soient réels, donc que  $z = x \in \mathbb{R}$ . Ce sont là les invariants d'un tétraèdre CR dégénéré et tout tétraèdre de ce type se trouve dans cette sous-variété.  $\square$

La figure 2.6 schématise la répartition des différents types de tétraèdres dans  $\mathcal{T}$  (les dimensions ne sont pas respectées ; on a mis entre parenthèses la dimension réelle de chaque espace).

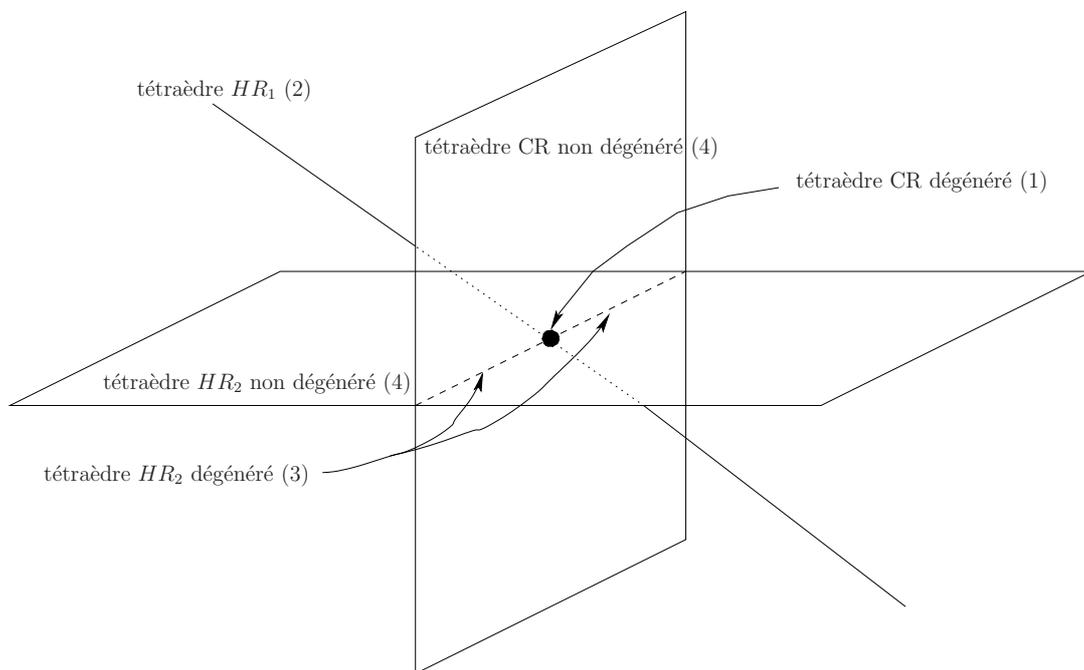


FIG. 2.6: Répartition des tétraèdres géométriques (CR,  $HR_2$ ,  $HR_1$ ) dans  $\mathcal{T}$ . Entre parenthèse est indiquée la dimension réelle des sous-espaces.

## Chapitre 3

# Les équations de recollement

Dans ce chapitre, on commence par décrire la construction d'une représentation

$$h_D: \Pi_1(M) \rightarrow \mathrm{PU}(2,1).$$

Cette construction impose des conditions qui se traduisent en équations sur les invariants que l'on détaille par la suite.

### 3.1 Représentations de groupes fondamentaux

Dans le cadre des tétraèdres CR, nous n'avons pas de structure géométrique puisque nous n'avons accès qu'à des quadruplets de points de  $S^3$  à isométrie près. L'objectif dans cette section est de mimer la construction des applications développantes et d'holonomies rappelée à la proposition 1.45, dans le cas des  $(X, G)$ -structures. Ce qu'on obtient alors est une représentation du groupe fondamental dans  $\mathrm{PU}(2,1)$ .

#### 3.1.1 Cadre

Dans toute la thèse,  $M$  désigne l'intérieur d'une variété de dimension trois compacte à bord et on supposera que ce bord est la réunion de  $k$  tores de dimension deux. D'après [Mat07], la variété  $M$  admet une triangulation topologique idéale, c'est-à-dire qu'on peut la voir comme le recollement de  $n$  tétraèdres privés de leurs sommets :

$$M = \bigcup T_i - \text{sommets} / \sim$$

où  $\sim$  est la relation d'équivalence entre deux faces lorsqu'elles sont recollées. Ce qu'on obtient n'est pas forcément une "vraie" triangulation, c'est-à-dire que deux arêtes d'un même tétraèdre peuvent être identifiées. L'étoile de chaque sommet est un tore.

#### 3.1.2 Construction des représentations de $\Pi_1(M)$

L'objectif est d'obtenir une représentation du groupe fondamental de  $M$  à image dans  $\mathrm{PU}(2,1)$ . Dans le cas des  $(X, G)$ -structures, on commence par construire l'application développante. Dans notre cas, à défaut d'être définie sur le revêtement universel, notre application sera définie sur des quadruplets de sommets de la triangulation. Le découpage de  $M$  induit une triangulation  $\Pi_1$ -invariante dans le revêtement universel. On note  $T_i^0$  les

0-squelettes ordonnés de  $T_i$ .

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} & = & \bigcup \widetilde{T}_i - \text{sommets} & \rightsquigarrow & \bigcup \widetilde{T}_i^0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ M & = & \bigcup T_i - \text{sommets} / \sim & \rightsquigarrow & \bigcup T_i^0. \end{array}$$

Chaque  $\widetilde{T}_i^0$  est décoré, deux invariants CR pour chaque arête orientée comme dans la figure 2.4, avec la règle suivante : si deux tétraèdres se projettent sur un même  $T_i$ , alors, ils sont décorés avec les mêmes invariants. A partir d'un choix d'invariants, on va construire une application  $D$  définie sur l'ensemble de tous les relevés  $\widetilde{T}_i^0$  :

$$D : \{\widetilde{T}_i^0\} \longrightarrow S^3.$$

A un tétraèdre abstrait décoré  $\widetilde{T}_i^0$ , l'application  $D$  associe un tétraèdre CR dont les invariants sont les paramètres de  $\widetilde{T}_i^0$ . La fonction  $D$  est définie sur les quadruplets ordonnés de points. Par abus de langage, on parlera aussi des images par  $D$  des faces des tétraèdres.

**Remarque 3.1.** Une construction à la manière d'une application développante serait : on choisit arbitrairement l'image d'un premier tétraèdre  $\widetilde{T}^0$ . Un chemin qui part de  $\widetilde{T}^0$  rencontre  $\widetilde{T}^1$ . Son image par  $D$  serait un tétraèdre qui a une face commune avec  $D(\widetilde{T}^0)$ , etc ... Avec un choix quelconque d'invariants, une telle construction dépend du choix du chemin choisit. Il faut donc imposer une condition de recollement définie ci-dessous.

**Définition 3.2.** L'application  $D$  respecte ce qu'on appelle les *conditions de compatibilité de recollement* si lorsque deux tétraèdres  $\widetilde{T}_i^0$  et  $\widetilde{T}_j^0$  ont une face commune dans  $\widetilde{M}$ , alors leurs images par  $D$  ont en commun l'image de cette face.

Cette contrainte est très forte. D'une part, elle impose des conditions de compatibilité entre les faces car deux triplets de  $S^3$  ne se recollent pas nécessairement. Elle induit aussi des conditions de compatibilité autour des arêtes. Pour préciser cette dernière notion, on introduit la

**Définition 3.3.** Soient  $m$  tétraèdres  $[p_0, p_1, p_2, p_3]$ ,  $[p_0, p_1, p_3, p_4]$ ,  $\dots$ ,  $[p_0, p_1, p_{m+1}, p_{m+2}]$  ayant une arête commune  $p_0, p_1$  (voir figure 3.1). On dit que le collage des  $m$  tétraèdres est *cohérent* autour de  $p_0 p_1$  si  $p_{m+2} = p_2$ .

Les  $m$  tétraèdres forment un collage cohérent s'ils tournent, éventuellement plusieurs fois, et que cela se referme autour de l'arête.

Si  $D$  respecte les conditions de compatibilité de recollement, alors  $D$  préserve la cohérence des collages autour de chaque arête.

**Remarque 3.4.** Dans la construction de la développante, l'image du premier point est arbitraire et on a une construction algorithmique de la fonction. La condition de compatibilité de recollement ne permet pas une telle souplesse. Pour que  $D$  vérifie cette condition, on verra que les valeurs des invariants sont presque toutes déterminées.

Dans la suite, on suppose qu'on a déjà une fonction  $D$  vérifiant les conditions de compatibilité de recollement. A partir de  $D$ , on va construire une application  $h_D$  définie sur les lacets de  $M$  à valeur dans  $\text{PU}(2,1)$ . C'est en suivant les chemins qu'on va définir leurs images.

On fixe  $x_0$  un point de  $M$  qui appartient à une face de la triangulation. On considère un lacet  $\gamma$ , issu de  $x_0$  et qui ne coupe pas les arêtes. Il se relève dans  $\widetilde{M}$  en un chemin  $\tilde{\gamma}$

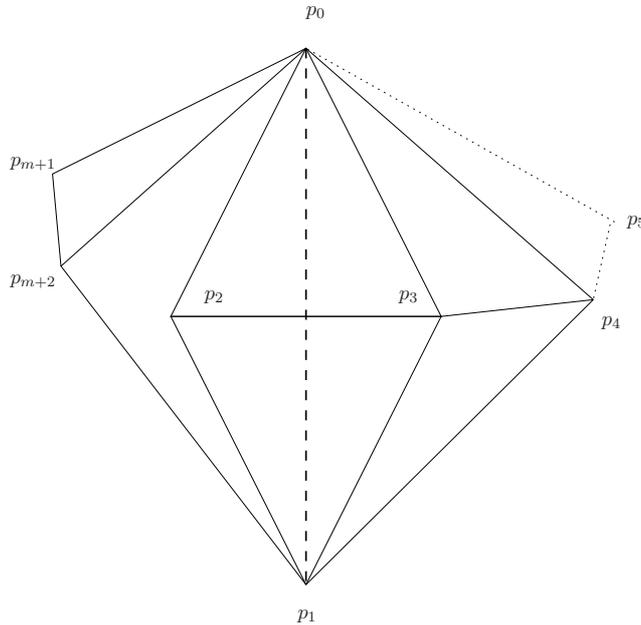


FIG. 3.1: Les  $m$  tétraèdres qui tournent autour de leur arête commune.

d'extrémité  $\tilde{x}_0$  et  $\tilde{x}_1$  (voir la figure 3.2). Sur son parcours,  $\tilde{\gamma}$  croise différents tétraèdres : il part de la face  $[\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2]$  du tétraèdre  $[\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3]$ . Le dernier tétraèdre est  $[\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3]$  avec  $\tilde{x}_1$  dans la face  $[\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2]$ . Comme  $\tilde{\gamma}$  se projette sur un lacet, il existe une copie du premier tétraèdre, qu'on notera  $[\tilde{p}'_0, \tilde{p}'_1, \tilde{p}'_2, \tilde{p}'_3]$  qui a une face commune avec le dernier tétraèdre :  $[\tilde{p}'_0, \tilde{p}'_1, \tilde{p}'_2] = [\tilde{q}_0, \tilde{q}_2, \tilde{q}_1]$ .

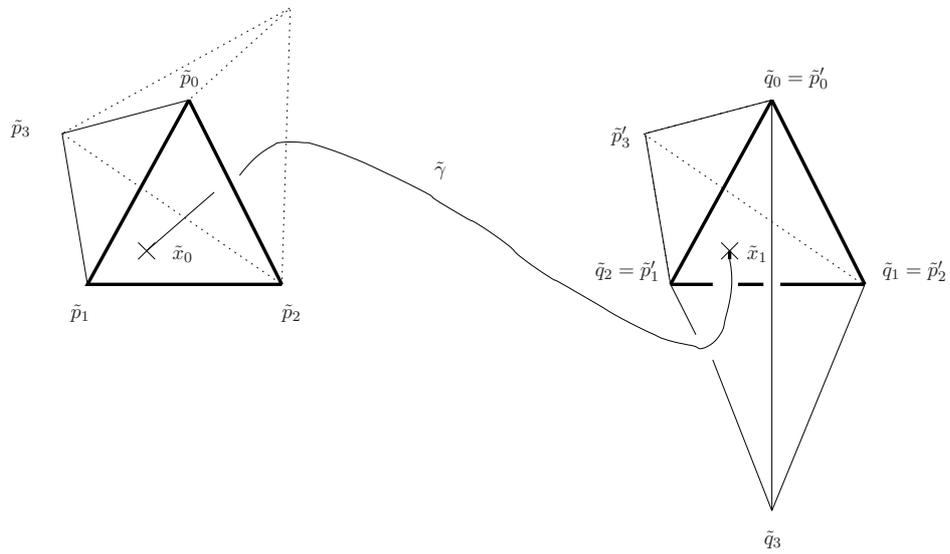
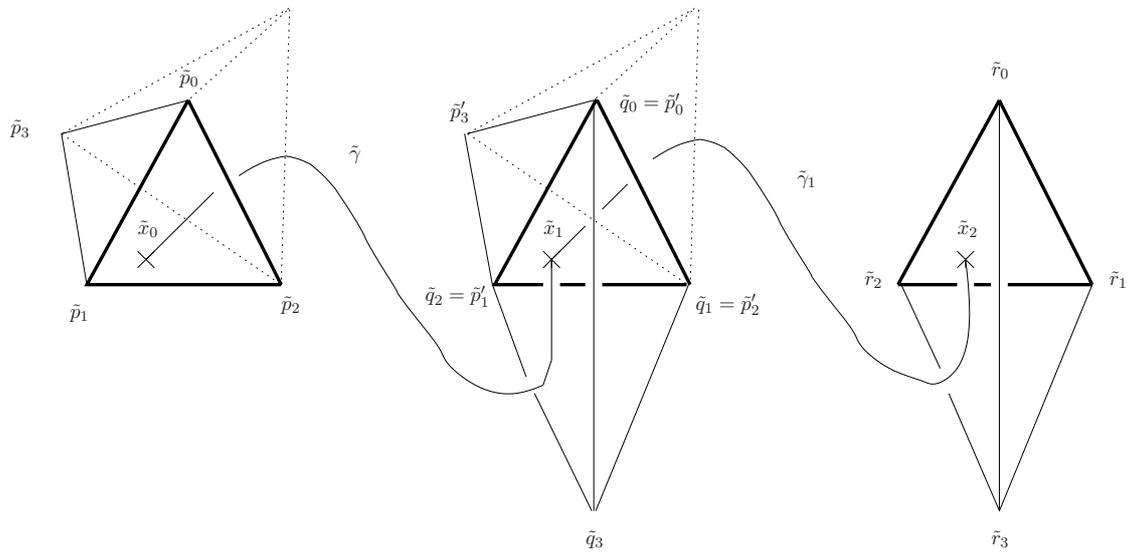
La condition de compatibilité de recollement impose que les faces  $D([\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2])$  et  $D([\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2])$  ont le même invariant de Cartan. Il existe donc une unique application  $g_\gamma$  qui envoie le premier triplet sur le second. On pose par définition :

$$h_D(\gamma) = g_\gamma.$$

**Remarque 3.5.** L'existence de  $g_\gamma$  est assurée par le théorème 1.56. Pour avoir l'unicité, on a besoin que les trois points ne soient pas dans une même droite complexe. Comme on travaille avec des tétraèdres CR, ce cas est systématiquement exclu.

**Lemme 3.6.** *La définition de  $h_D(\gamma)$  ne dépend pas du choix du relevé  $\tilde{\gamma}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\tilde{\gamma}_1$  un relevé du lacet qui est issu cette fois-ci de  $\tilde{x}_1$ . On obtient la figure 3.3. La fonction  $g_\gamma$  envoie la première face  $D([\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2])$  sur  $D([\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2])$ . Comme  $D$  respecte les conditions de compatibilité de recollement,  $D([\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2]) = D([\tilde{p}'_0, \tilde{p}'_1, \tilde{p}'_2])$ . Dans  $S^3$ , on considère les deux tétraèdres  $D([\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3])$  et  $D([\tilde{p}'_0, \tilde{p}'_1, \tilde{p}'_2, \tilde{p}'_3])$ . Ils ont les mêmes invariants. L'isométrie  $g_\gamma$  identifie en plus deux de leurs faces. Donc  $g_\gamma$  envoie le premier tétraèdre sur le second. De proche en proche, on montre que  $g_\gamma$  identifie tous les tétraèdres que rencontrent  $\tilde{\gamma}$  et  $\tilde{\gamma}_1$  le long de leur parcours. En particulier, les deux faces  $D([\tilde{p}'_0, \tilde{p}'_1, \tilde{p}'_2])$  et  $D([\tilde{r}_0, \tilde{r}_1, \tilde{r}_2])$  sont images l'une de l'autre par  $g_\gamma$ .

FIG. 3.2: Le chemin  $\tilde{\gamma}$  relie  $\tilde{x}_0$  à  $\tilde{x}_1$ .FIG. 3.3: Les deux chemins  $\tilde{\gamma}$  et  $\tilde{\gamma}_1$  proviennent d'un même lacet. L'application  $g_\gamma$  qui envoie le premier triangle en gras sur le second envoie également celui-ci sur le troisième triangle.

Si on choisit un relevé quelconque du lacet  $\gamma$ , la méthode précédente montre que de proche en proche l'application utilisée est toujours  $g_\gamma$ .  $\square$

**Théorème 3.7.** *Si l'application  $D$  respecte les conditions de compatibilité de recollement, alors la fonction  $h_D$  est constante sur la classe d'homotopie d'un lacet. L'application  $h_D : \Pi_1(M) \rightarrow \text{PU}(2, 1)$  est alors une représentation du groupe fondamental de  $M$ . Le groupe  $h_D(\Pi_1(M))$  est engendré par les applications de recollement de faces.*

*Démonstration.* Dans la construction de l'image par  $h_D$  d'un lacet  $\gamma$ , on constate que cela ne dépend que des faces auxquelles appartiennent les extrémités d'un relevé  $\tilde{\gamma}$ . Donc  $h_D$  est définie sur  $\Pi_1(M, x_0)$ . Enfin, comme  $h_D$  ne dépend pas du choix du relevé, on a bien :  $h_D(\gamma'\gamma) = h_D(\gamma')h_D(\gamma)$ .  $\square$

**Remarque 3.8.** Dans la suite de ce chapitre, nous allons nous attacher à traduire les conditions de compatibilité de recollement de  $D$  en équations sur les paramètres  $z_{ij}$ . On obtiendra ainsi ce qu'on appelle :

- les équations de faces (pour que les faces des tétraèdres se recollent),
- les équations d'arêtes (pour que les tétraèdres "tournent bien" autour des arêtes),
- les équations d'holonomie (pour spécifier l'holonomie au bord),
- les équations de conjugaison (pour avoir des tétraèdres CR).

Si les invariants  $z_{ij}$  vérifient ces équations, alors on sait construire l'application  $D$ . Cela nous permet d'obtenir une représentation  $h_D : \Pi_1(M) \rightarrow \text{PU}(2, 1)$ .

**Remarque 3.9.** La construction d'une représentation  $h_D$  à image dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  est identique à ce que nous venons de décrire. Les tétraèdres hyperboliques réels sont naturellement munis d'une structure géométrique. Si on ajoute certaines conditions de compatibilité géométriques,  $h_D$  devient une application d'holonomie. Nous détaillons ceci à la section suivante.

### 3.1.3 Notations

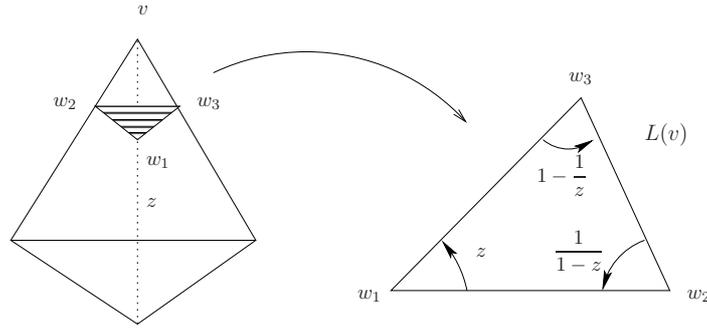
Pour finir, on définit l'étoile d'un sommet. On l'utilise pour calculer le nombre d'arêtes dans la triangulation de  $M$ . Commençons par fixer les notations.

**Notation 3.10.** La variété  $M$  est obtenue par recollement de  $n$  tétraèdres pris en enlevant un voisinage de chacun des sommets. L'application identification est notée  $I$ . On distingue les objets avant recollement (notés en petits caractères) de ceux après identification (notés avec de grands caractères). Le tableau suivant dénombre les  $m$ -squelettes ( $m = 0, 1, 2$ ) avant et après  $I$  :

$m$ -squelette	avant identification		après identification	
	Notation	Nombre	Notation	Nombre
Face	$f_i$	$4n$	$F_i$	$2n$
Arête	$a_{ij}$	$6n$	$A_{ij}$	$n_A$
Sommet	$v_i$	$4n$	$V_i$	$k$

Les arêtes sont orientées. on pourra ainsi distinguer les extrémités de chaque arête. La notation  $a_{ij}$  désigne l'arête orientée  $[ij]$ , vers l'extrémité  $j$ . Dans un tétraèdre, chaque arête est décorée de deux paramètres, l'un relié à  $a_{ij}$ , l'autre à  $a_{ji}$ . La fonction Inv associe l'invariant relié à une arête orientée :

$$\text{Inv}(a_{ij}) = z_{ij}.$$

FIG. 3.4: Un triangle qui compose l'étoile de  $L(V)$ .

### Etoile d'un sommet dans la triangulation de $M$

On définit l'étoile d'un sommet  $V$ . On n'en donne pas la définition générale, mais juste la façon dont elle se présente dans notre étude.

Soit  $v$  un sommet avant identification dans un tétraèdre  $T$  tel que  $I(v) = V$ . On place six points  $w_i$  au milieu de chaque arête de  $T$ . Le triangle formé par les trois points des arêtes issues de  $v$  est noté  $L(v)$  (voir figure 3.4).

**Définition 3.11.** L'étoile du sommet  $V$  est obtenue comme le recollement de ces triangles :

$$L(V) = I \left( \bigcup_{v \in I^{-1}(V)} L(v) \right).$$

C'est une donnée combinatoire. Dans notre étude, les étoiles sont des tores. Les arêtes  $vw_1$ ,  $vw_2$ ,  $vw_3$  sont respectivement décorées des invariants  $z$ ,  $\frac{1}{1-z}$ ,  $1 - \frac{1}{z}$ . On décore le triangle  $L(v)$  comme sur la figure 3.4, ce qui rend le triangle euclidien.

### Nombre d'arêtes dans la triangulation de $M$

Le lemme suivant permet de relier le nombre de tétraèdres  $n$  au nombre d'arêtes  $n_A$ .

**Lemme 3.12.** (voir [Thu97]) *Si on note  $g_i$  le genre de la  $i$ ème composante de bord de  $\bar{M}$ , alors :*

$$n_A = n + \sum_{i=1}^k (1 - g_i).$$

*Démonstration.* On se place dans l'étoile d'un sommet. D'après la formule d'Euler, on a :

$$\text{nombre de triangles} - \text{nombre d'arêtes} + \text{nombre de sommets} = 2 - 2g_i.$$

Chaque arête appartient à deux triangles, ce qui donne :

$$2 \text{ nombre d'arêtes} = 3 \text{ nombre de triangles}.$$

Donc pour la  $i$ ème étoile :

$$-\frac{1}{2} \text{ nombre de triangles} + \text{nombre de sommets} = 2 - 2g_i. \quad (3.1)$$

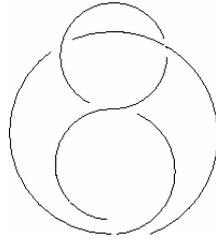


FIG. 3.5: Le nœud de huit

Les triangles des étoiles sont en correspondance avec les faces des tétraèdres avant recollement et les sommets des étoiles sont en bijection avec chaque extrémité des arêtes orientées  $A_{ij}$ . Si on fait la somme de toutes les égalités (3.1), on obtient :

$$-\frac{1}{2} * (4n) + 2n_A = \sum_{i=1}^k (2 - 2g_i).$$

ce qui nous donne la formule annoncée.  $\square$

**Remarque 3.13.** Dans le cas de notre étude, toutes les composantes de bord sont des tores. Ainsi :  $n_A = n$ .

### 3.1.4 L'exemple du nœud de huit

Dans [Ril75], Riley montre qu'on peut munir le complémentaire du nœud de huit d'une structure hyperbolique complète. La construction de cette structure sur le complémentaire du nœud vu comme recollement de deux tétraèdres est due à Thurston dans [Thu79] (voir la figure 3.6). La suite du chapitre est consacrée aux équations sur les invariants  $z_{ij}$  qui découlent des conditions de compatibilité de recollement des tétraèdres. A chaque fois, nous prendrons le complémentaire du nœud de huit comme exemple.

## 3.2 Géométrisation hyperbolique réelle de la variété $M$

Dans le cas réel, les constructions de  $D$  et  $h_D$  sont analogues à ce qu'on a décrit précédemment. Les quadruplets de points sont envoyés dans  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$  et on obtient une représentation dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ . La théorie sur les équations de compatibilité de recollement qui relie les invariants des tétraèdres est très bien comprise (voir [Thu79], [NZ85], [BP92]). On se permet de répéter dans cette section comment on établit ces équations et les résultats classiques quant à leur résolution. Par la suite, cela nous permettra de mettre en parallèle chaque étape du cas réel avec le cas complexe.

Dans le cas réel, chaque tétraèdre  $\tilde{T}_i$  peut être réalisé comme un vrai tétraèdre géométrique dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ . On peut donc exiger plus qu'un collage cohérent autour des arêtes, comme on va le voir avec la définition suivante :

**Définition 3.14.** Soient  $m$  tétraèdres hyperboliques idéaux  $[p_0, p_1, p_2, p_3]$ ,  $[p_0, p_1, p_3, p_4]$ ,  $\dots$ ,  $[p_0, p_1, p_{m+1}, p_{m+2}]$  ayant une arête commune  $p_0, p_1$  (voir figure 3.7). On dit que le *col-*

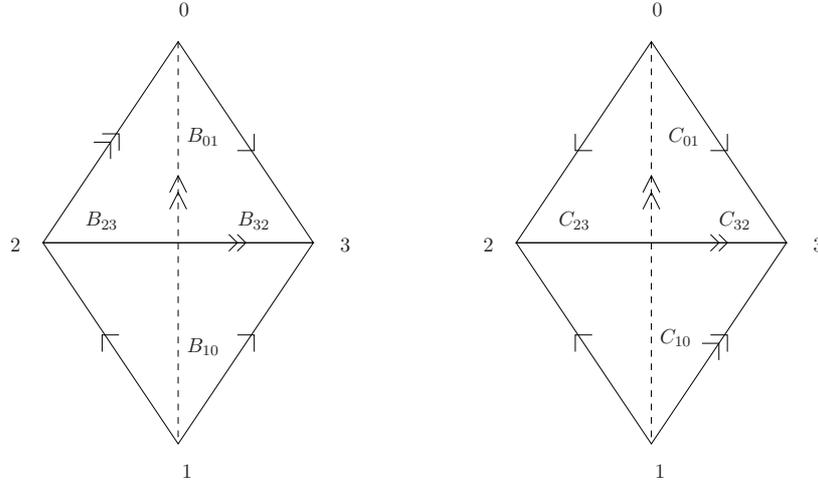


FIG. 3.6: Le complémentaire du nœud de huit vu comme recollement de deux tétraèdres. Après identification, on a quatre faces, deux arêtes, et un sommet. Chaque tétraèdre est décoré de ses invariants CR.

lage pave autour de  $p_0p_1$  si les  $m$  tétraèdres pavent dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$  un voisinage de la géodésique reliant  $p_0$  à  $p_1$ .

### 3.2.1 Partie imaginaire des invariants :

**Lemme 3.15.** Soient deux tétraèdres hyperboliques réels  $T_0 = [p_0, p_1, p_2, p_3]$  et  $T_1 = [p_0, p_1, p_3, p_4]$ . (voir figure 3.7). Alors  $\text{Im}(X([p_0, p_1, p_2, p_3])) \text{Im}(X([p_0, p_1, p_2, p_4])) < 0$  si et seulement si  $\overset{\circ}{T}_0 \cap \overset{\circ}{T}_1$  est non vide.

*Démonstration.* Si on place  $p_0 = \infty, p_1 = 0, p_2 = 1$  alors  $p_3 = X([p_0, p_1, p_2, p_3])$  et  $p_4 = X([p_0, p_1, p_2, p_3])X([p_0, p_1, p_2, p_4])$ . La projection sur  $\mathbb{C}$  de  $T_0$  et  $T_1$  donne la figure 3.8. Il devient clair que les deux tétraèdres se rencontrent en leurs intérieurs.  $\square$

**Définition 3.16.** Un tétraèdre hyperbolique réel  $[p_0, p_1, p_2, p_3]$  est dit orienté positivement si  $\text{Im}(X[p_0, p_1, p_2, p_3]) > 0$ .

Pour obtenir un collage qui pave autour de chaque arête, on impose de ne travailler qu'avec des tétraèdres orientés positivement. (Remarque : si  $z$  est de partie imaginaire strictement positive, alors il en est de même pour  $\frac{1}{1-z}$  et  $1 - \frac{1}{z}$ .)

### 3.2.2 Les équations d'arêtes

On reprend les  $m$  tétraèdres de la figure 3.7. Notons  $z_1, \dots, z_m$  les invariants respectifs de  $[p_0, p_1, p_2, p_3], [p_0, p_1, p_3, p_4], \dots, [p_0, p_1, p_{m+1}, p_{m+2}]$ . Les coordonnées des sommets sont alors :

$$p_0 = \infty, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = 1, \quad p_3 = z_1, \quad p_4 = z_1 z_2, \quad p_{m+2} = z_1 \cdots z_m.$$

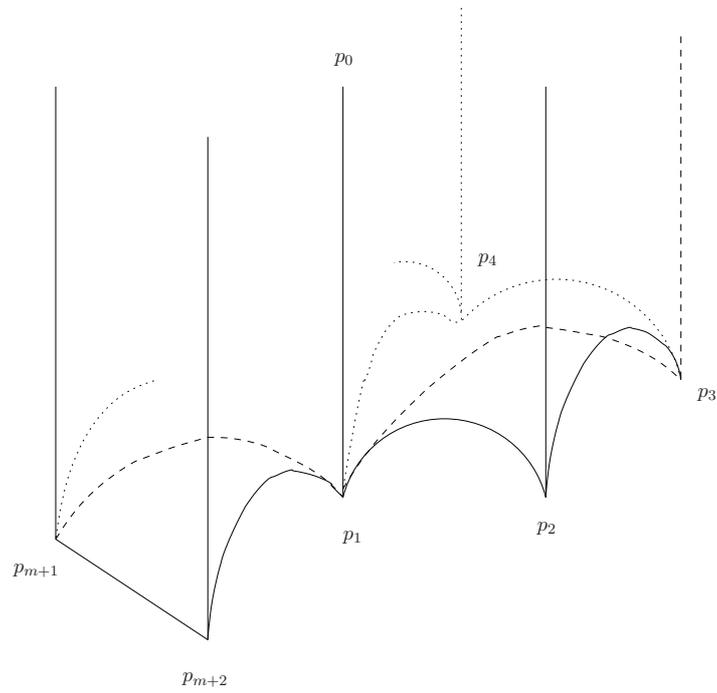


FIG. 3.7: Les  $m$  tétraèdres avec une arête commune. On a placé  $p_0 = \infty, p_1 = 0$

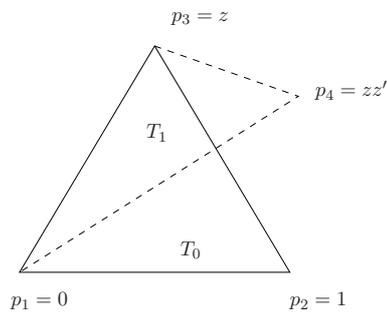


FIG. 3.8: Projection sur  $\mathbb{C}$  de deux tétraèdres qui ont une orientation opposée.

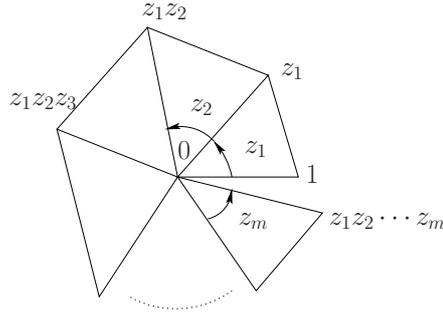


FIG. 3.9: Projection de  $m$  tétraèdres qui tournent autour de  $0\infty$ .

La figure 3.9 représente la projection des tétraèdres sur  $\mathbb{C}$ .

**Proposition 3.17.** *Le collage des  $m$  tétraèdres pave autour de  $p_0 p_1$  si et seulement si :*

$$\prod_j z_j = 1, \quad (3.2)$$

$$\sum_j \arg z_j = 2\pi. \quad (3.3)$$

(la fonction  $\arg$  est prise ici par convention à valeur dans  $[0, 2\pi[$ ).

**Lemme 3.18.** *Si les équations de type (3.2) sont réalisées alors les équations de type (3.3) sont nécessairement vérifiées, à condition de ne travailler qu'avec des tétraèdres positivement orientés.*

*Démonstration.* On appelle  $N_i$  le nombre de tours autour de la  $i$ ème arête. En passant aux arguments dans l'équation de type (1), il vient :

$$\sum_{j : z_j \text{ est associé à l'arête } i} \arg(z_j) = 2\pi * N_i.$$

On fait la somme sur toutes les arêtes. Dans le terme de gauche apparaissent les invariants de toutes les arêtes du recollement. Si on note  $n$  le nombre de tétraèdres (qui est aussi le nombre d'arêtes), cela devient :

$$\sum_{i=1}^n \left( 2 \arg(z_i) + 2 \arg\left(\frac{1}{1-z_i}\right) + 2 \arg\left(1 - \frac{1}{z_i}\right) \right) = 2 \sum_{i=1}^n \pi N_i. \quad (3.4)$$

Comme  $\text{Im}(z_i) > 0$ , on a :  $\arg(z_i) + \arg\left(\frac{1}{1-z_i}\right) + \arg\left(1 - \frac{1}{z_i}\right) = \pi$ . (Voir figure 3.10). Les  $N_i$  sont des entiers strictement positifs. D'après (3.4), ils sont nécessairement tous égaux à un.  $\square$

**Remarque 3.19.** Si on travaille avec des invariants à partie imaginaire négative, le résultat précédent n'est plus valable. En effet, ces invariants vérifient :  $\arg(z) + \arg\left(\frac{1}{1-z}\right) + \arg\left(1 - \frac{1}{z}\right) = 5\pi$  (voir figure 3.10).

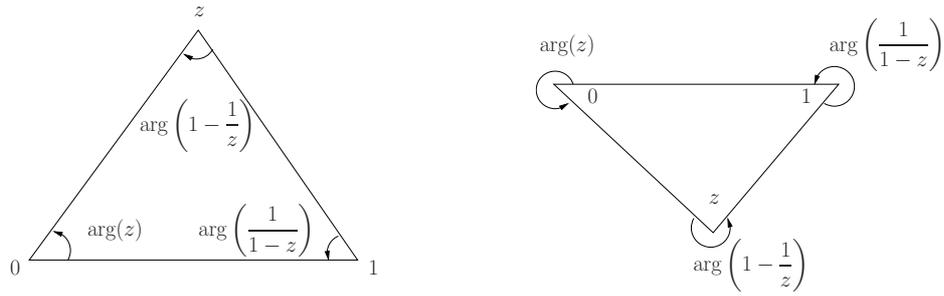


FIG. 3.10: Un tétraèdre orienté positivement et un négativement. La somme des angles orientés est respectivement  $\pi$  et  $5\pi$ .

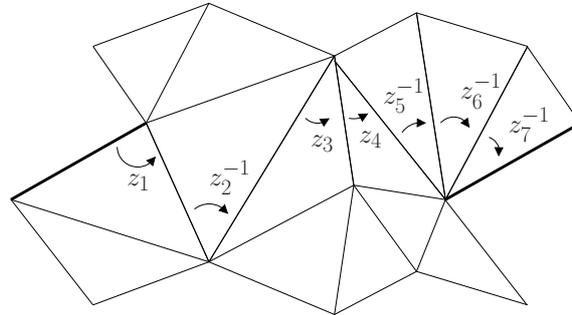


FIG. 3.11: Exemple d'une étoile. Les deux côtés représentés en gras sont identifiés par l'application  $H_l$ . Restreinte à  $\mathbb{C}$ , elle agit comme une similitude. La multiplication des invariants que l'on trouve en suivant la longueur donne le coefficient de dilatation de cette similitude.

### 3.2.3 Les équations d'holonomie

Les équations d'holonomie vont permettre de spécifier la nature de l'image d'une petite boucle qui entoure un sommet  $V$ .

**Notation 3.20.** L'étoile  $L(V)$  étant un tore, son groupe fondamental est groupe abélien libre engendré par le méridien  $m_V$  et la longueur  $l_V$ .

On s'intéresse aux deux lacets  $l_V$  et  $m_V$  vus dans la variété  $M$ . On note  $H_m$  (respectivement  $H_l$ ) l'image du lacet  $m_V$  (resp.  $l_V$ ) par la représentation du groupe fondamental dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ . Les applications  $H_m$  et  $H_l$  fixent un point du bord (l'image du sommet  $V$ ) et commutent.

Pour obtenir une variété de volume fini, il faut imposer que  $H_l$  et  $H_m$  soient paraboliques. Ces deux applications fixent  $V$  qu'on peut placer en  $\infty$ . Sur  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , elles agissent comme des similitudes directes :  $z \mapsto az + b$ . Elles sont paraboliques (éventuellement triviales) si et seulement si  $a = 1$ . Pour calculer le coefficient  $a$ , on procède comme sur l'exemple de la figure 3.11 :  $a = z_1 z_2^{-1} z_3 z_4 z_5^{-1} z_6^{-1} z_7^{-1}$ .

**Définition 3.21.** On obtient ainsi deux équations par étoile, qu'on appelle *équations d'holonomie*.

On a donc deux équations d'holonomie par étoile. En fait, la remarque suivante montre qu'on n'a besoin que d'une seule :

**Remarque 3.22.** Les applications  $H_m$  et  $H_l$  commutent. Donc, leurs projections sur  $\mathbb{C}$  commutent aussi. Dans le cas de deux similitudes, en raisonnant sur les points fixes, on voit que cela ne se produit que dans trois cas :

1. l'une est triviale.
2. les deux sont des translations.
3. elles ont un point fixe commun.

Dans le cas non dégénéré (c'est-à-dire si ni  $H_m$  ni  $H_l$  n'est l'identité), alors si l'une est une translation, nécessairement l'autre aussi.

### 3.2.4 Solutions des équations

Le théorème suivant précise certaines propriétés de la représentation obtenue lorsqu'on a une solution aux équations d'arêtes et d'holonomie. Le chapitre 10 de [Rat06] en propose une preuve.

**Théorème 3.23.** *Soit  $M$  obtenue comme le recollement de  $n$  tétraèdres idéaux, à étoile torique. Il existe au plus une solution aux équations d'arêtes et d'holonomie telle que tous les invariants vérifient  $\text{Im}(z) > 0$ . A la solution, l'application  $h_D : \Pi_1(M) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{C})$  obtenue est discrète et fidèle. On peut munir la variété  $M \simeq \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3 / h_D(\Pi_1(M))$  d'une structure hyperbolique complète.*

*L'image des  $n$  tétraèdres par  $D$  est un domaine fondamental pour l'action de  $h_D(\Pi_1(M))$ .*

**Remarque 3.24.** Ce sont les équations d'holonomie qui assurent la complétude de la variété.

Les recollements qui sont les complémentaires de nœuds hyperboliques possèdent une solution, mais ce ne sont pas les seuls. Dans [CHW99], les auteurs énumèrent les recollements avec moins de sept tétraèdres qui possèdent une solution.

Si on travaille avec un recollement qui possède une solution hyperbolique réelle, on la retrouve dans  $\mathcal{T}$  :

**Proposition 3.25.** *Dans  $\mathcal{T}$ , la solution du cas hyperbolique réel apparaît dans  $HR_1$  (espace défini en 2.25).*

*Démonstration.* Lorsqu'on travaille avec des tétraèdres dans  $HR_1$ , c'est-à-dire que les quatre invariants  $z_{01}, z_{10}, z_{23}, z_{32}$  sont tous égaux, alors les équations de faces sont résolues, comme on l'a vu à la remarque 3.29. Les équations d'arêtes du "haut" et du "bas" sont les mêmes :  $A_{ij} = A_{ji}$ . Ce sont les équations qu'on obtient dans le cas hyperbolique réel classique. C'est la même remarque pour les équations d'holonomie. Si on se place dans le cas où il existe une solution dans le cas réel alors cette solution apparaît dans  $HR_1$ .  $\square$

## 3.3 Représentations dans $\text{PU}(2,1)$

Dans le cas CR, les équations découlent des conditions de compatibilité d'une façon similaire au cas réel. L'une des différences est l'apparition d'équations de faces car deux triplets de  $S^3$  ne sont en général pas isométriques. Une autre différence est l'apparition d'invariants à partie imaginaire négative. Nous verrons les difficultés que cela entraîne.

### 3.3.1 Partie imaginaire des invariants

On a vu que dans le cas réel, on imposait  $\text{Im}(z) > 0$  pour les invariants pour éviter les chevauchements. Ici, comme on ne définit pas *a priori* de face aux tétraèdres, on ne sait pas si ce problème se posera, donc on n'impose pas cette condition. D'ailleurs, le lemme suivant nous en empêche :

**Lemme 3.26.** *Il n'existe pas de tétraèdre CR dont tous les invariants ont une partie imaginaire strictement positive.*

*Démonstration.* On note  $\theta_{ij}$  l'argument de l'invariant  $z_{ij}$ , pris entre 0 et  $2\pi$ . Les équations vérifiées par les invariants induisent des relations pour les angles. A chaque sommet  $i$ , on a un triangle euclidien :

$$\theta_{ij} + \theta_{ik} + \theta_{il} = \pi [2\pi]. \quad (3.5)$$

Dans un même tétraèdre, les deux arêtes opposées  $ij$  et  $kl$  vérifient les équations de conjugaison :

$$\theta_{ij} + \theta_{ji} + \theta_{kl} + \theta_{lk} = 0 [2\pi]. \quad (3.6)$$

On raisonne par l'absurde en supposant que tous les  $\theta_{ij}$  sont dans  $]0, \pi[$ . Dans ce cas, on sait exactement combien valent les équations 3.5 et 3.6. La première vérifie  $0 < \theta_{ij} + \theta_{ik} + \theta_{il} < 3\pi$  et la deuxième :  $0 < \theta_{ij} + \theta_{ji} + \theta_{kl} + \theta_{lk} < 4\pi$ . Ainsi :

$$\theta_{ij} + \theta_{ik} + \theta_{il} = \pi \quad (3.5) \qquad \theta_{ij} + \theta_{ji} + \theta_{kl} + \theta_{lk} = 2\pi \quad (3.6)$$

Il y a quatre équations du type (3.5) dans un tétraèdre, une à chaque sommet. Leur somme donne la somme de tous les angles du tétraèdre.

$$\sum_{\substack{i \neq j \\ (i,j) \in \{0, \dots, 3\}}} \theta_{ij} = 4\pi.$$

Les équations du type (3.6) sont au nombre de trois dans un tétraèdre et leur somme vaut :

$$\sum_{\substack{i \neq j \\ (i,j) \in \{0, \dots, 3\}}} \theta_{ij} = 6\pi.$$

La contradiction prouve le résultat. □

### 3.3.2 Les équations de faces

Au contraire du cas réel, deux triplets de points de  $S^3$  ne sont pas toujours  $\text{PU}(2,1)$ -équivalents. Il faut l'égalité entre les invariants de Cartan pour qu'une application entre les deux triplets existe. Voyons comment on peut écrire cet invariant à l'aide des  $z_{ij}$ . Dans un tétraèdre CR, d'après les formules données en 2.14 :

$$z_{03}z_{13}z_{23} = \left(1 - \frac{1}{z}\right) \frac{1}{1 - \frac{i+s}{i+t}} \frac{z((t+i) - \bar{z}(s+i))}{(z-1)(t-i)} = \frac{t+i}{t-i},$$

où on sait que  $\tan(\mathbb{A}(p_0, p_1, p_2)) = t$ . On a donc la formule générale pour la face  $i$  de sommets  $[p_j, p_k, p_l]$  (points ordonnés dans le sens direct) :

$$z_{ji}z_{ki}z_{li} = \frac{\tan(\mathbb{A}(p_j, p_k, p_l)) + i}{\tan(\mathbb{A}(p_j, p_k, p_l)) - i}.$$

Pour la face  $[q_j, q_k, q_l]$ , on a aussi :

$$w_{ji}w_{ki}w_{li} = \frac{\tan(\mathbb{A}(q_j, q_k, q_l)) + i}{\tan(\mathbb{A}(q_j, q_k, q_l)) - i}.$$

Pour préserver l'orientation, les deux faces sont recollées ainsi :  $[p_j, p_k, p_l] \longrightarrow [q_j, q_l, q_k]$ . Les deux faces se recollent si et seulement si  $\mathbb{A}(q_j, q_l, q_k) = \mathbb{A}(p_j, p_k, p_l)$ , ce qui est équivalent à :

$$\mathcal{F}_i \quad : \quad z_{ji}z_{ki}z_{li}w_{ji}w_{ki}w_{li} = 1. \quad (3.7)$$

**Définition 3.27.** Les équations (3.7) sont appelées *équations de faces*. Si on recolle  $n$  tétraèdres entre eux, on obtient de cette façon  $2n$  équations.

**Exemple 3.28.** Pour l'exemple du nœud de huit, avec les notations de la figure 3.6, les quatre équations de faces sont :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 & : B_{10}B_{20}B_{30}C_{01}C_{21}C_{31} = 1 & \mathcal{F}_1 & : B_{01}B_{21}B_{31}C_{02}C_{12}C_{32} = 1 \\ \mathcal{F}_2 & : B_{02}B_{12}B_{32}C_{03}C_{13}C_{23} = 1 & \mathcal{F}_3 & : B_{03}B_{13}B_{23}C_{10}C_{20}C_{30} = 1. \end{aligned}$$

**Remarque 3.29.** Pour les tétraèdres hyperboliques réels, les équations de faces n'ont pas lieu d'être puisque deux triplets de points du bord de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  sont toujours isométriques. D'ailleurs, si on travaille avec un tétraèdre dans  $HR_1$ , donné par  $(z_{01}, \frac{z}{z_{01}}, \frac{z-z_{01}}{1-z_{01}}, z\frac{1-z_{01}}{z-z_{01}})$ , alors  $z_{ji}z_{ki}z_{li} = 1$ . Quant aux tétraèdres de  $HR_2$ ,  $z_{ji}z_{ki}z_{li} = -1$ . Dans les deux cas, les équations de faces sont toujours réalisées.

### 3.3.3 Les équations d'arêtes

Dans cette section, à la manière de la figure 3.1, on prend  $m$  tétraèdres, cette fois-ci CR. Les invariants respectifs de  $[p_0, p_1, p_2, p_3]$ ,  $[p_0, p_1, p_3, p_4]$ ,  $\dots$ ,  $[p_0, p_1, p_{m+1}, p_{m+2}]$  sont :  $(z_{01}^{(1)}, z_{10}^{(1)}, z_{23}^{(1)}, z_{32}^{(1)})$ ,  $\dots$ ,  $(z_{01}^{(m)}, z_{10}^{(m)}, z_{23}^{(m)}, z_{32}^{(m)})$ . On calcule les coordonnées des sommets. On place le premier tétraèdre en position générique :  $p_0 = \infty$ ,  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = (1, t_1)$ ,  $p_3 = (z_{01}^{(1)}, s_1|z_{01}^{(1)}|^2)$ . Le deuxième en position générique est  $p_0 = \infty$ ,  $p_1 = 0$ ,  $p_3 = (1, t_2)$ ,  $p_4 = (z_{01}^{(2)}, s_2|z_{01}^{(2)}|^2)$ . Il se recolle avec le premier grâce à la dilatation d'Heisenberg suivante :  $(z, t) \mapsto (zz_{01}^{(1)}, t|z_{01}^{(1)}|^2)$ . Le sommet  $p_4$  a donc pour coordonnées :

$$p_4 = (z_{01}^{(1)}z_{01}^{(2)}, s_2|z_{01}^{(1)}z_{01}^{(2)}|^2).$$

On en déduit les coordonnées des points suivants :

$$p_5 = (z_{01}^{(1)}z_{01}^{(2)}z_{01}^{(3)}, s_3|z_{01}^{(1)}z_{01}^{(2)}z_{01}^{(3)}|^2) \quad \dots \quad p_{m+2} = (z_{01}^{(1)} \dots z_{01}^{(m)}, s_m|z_{01}^{(1)} \dots z_{01}^{(m)}|^2).$$

Les tétraèdres se recollent de façon cohérente si  $p_2 = p_{m+2}$  ce qui se traduit par les équations :

$$z_{01}^{(1)} \dots z_{01}^{(m)} = 1 \quad (3.8)$$

$$t_1 = s_m. \quad (3.9)$$

L'égalité (3.9) est assurée par les équations de faces. L'équation (3.8) est obtenue en posant  $p_0 = \infty, p_1 = 0$ . Si on place les points différemment :  $p_1 = \infty, p_0 = 0$ , l'équation qu'on obtient est :  $z_{10}^{(1)} \dots z_{10}^{(m)} = 1$ .

Maintenant, on se place dans le cas où on recolle  $n$  tétraèdres. Sur l'arête  $A_{ij}$  se projettent  $m$  arêtes  $a_{kl}$ . La proposition suivante définit *les équations d'arêtes* :

**Proposition 3.30.** *Si le collage des tétraèdres autour de  $A_{ij}$  est cohérent, alors :*

$$\mathcal{A}_{ij} : \prod_{(k,l) : I(a_{kl})=A_{ij}} \text{Inv}(a_{kl}) = 1$$

$$\mathcal{A}_{ji} : \prod_{(k,l) : I(a_{lk})=A_{ji}} \text{Inv}(a_{lk}) = 1.$$

Ces équations sont dites équations d'arêtes. Si on recolle  $n$  tétraèdres, on a  $n$  arêtes et donc  $2n$  équations d'arêtes.

On verra plus loin, au lemme 4.17 que dès lors que les équations de faces sont vérifiées, les deux équations d'une arête sont conjuguées. Donc si ça "tourne bien" en haut, ça tourne bien en bas.

**Exemple 3.31.** Pour le nœud de huit, on a deux paires d'équations d'arêtes, qui sont (avec les notations 3.6) :

$$\mathcal{A}_{01} : B_{01}C_{01}B_{02}C_{32}B_{32}C_{31} = 1 \quad \mathcal{A}_{30} : B_{30}C_{30}B_{31}C_{21}B_{21}C_{20} = 1$$

$$\mathcal{A}_{10} : B_{10}C_{10}B_{20}C_{23}B_{23}C_{13} = 1 \quad \mathcal{A}_{03} : B_{03}C_{03}B_{13}C_{12}B_{12}C_{02} = 1.$$

**Remarque 3.32.** Au contraire du cas réel, on n'impose pas que la somme des arguments égale  $2\pi$ . On donne plusieurs raisons à cela :

- 1) Dans le cas d'un recollement à bord torique, ceci est impossible autour de toutes les arêtes comme le montre le lemme suivant 3.33.
- 2) Les tétraèdres peuvent faire un recollage qui pave autour d'une arête même si la somme des arguments n'est pas  $2\pi$  comme le montre l'exemple ci-dessous 3.34. En effet, pour avoir un tétraèdre CR plein, on peut choisir de relier les points par des portions de  $\mathbb{C}$ -cercles. Dans l'exemple ci-dessous, lorsqu'on tourne autour de l'arête, on peut "revenir en arrière" sans pour autant chevaucher le tétraèdre précédent.

**Lemme 3.33.** *Dans un recollement de  $n$  tétraèdres CR, à étoile torique, il existe toujours une arête  $A_{ij}$  telle que :*

$$\sum_{l : I(a_{il})=A_{ij}} \arg(\text{Inv}(a_{il})) > 2\pi$$

(la fonction  $\arg$  est prise à la valeur dans  $[0, 2\pi[$ ).

*Démonstration.* D'après le lemme 3.26, parmi les invariants  $(z_{01}, z_{10}, z_{23}, z_{32})$  d'un tétraèdre CR, l'un au moins est à partie imaginaire négative. Or si  $\text{Im}(z) < 0$ , alors il en est de même pour  $\frac{1}{1-z}$  et  $1 - \frac{1}{z}$ . Parmi les  $8n$  invariants qui décorent la triangulation, il y en a au moins  $3n$  qui sont à argument plus grand que  $\pi$ . Dans les  $2n$  équations d'arêtes, tous les invariants apparaissent une fois et une seule. Donc, il y a au moins une équation qui fait intervenir deux invariants  $z$  et  $z'$  tels que  $\arg z + \arg z' > \pi + \pi$ .  $\square$

**Exemple 3.34.** On recolle quatre tétraèdres autour d'une arête comme sur la figure 3.12, avec les invariants suivants :

$$B_{01} = C_{01} = D_{01} = E_{01} = i$$

$$B_{10} = e^{i\frac{7\pi}{4}} \quad C_{01} = e^{i\frac{5\pi}{4}} \quad D_{01} = 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad E_{01} = -\frac{\sqrt{2}}{6} + i\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{2}{3}.$$

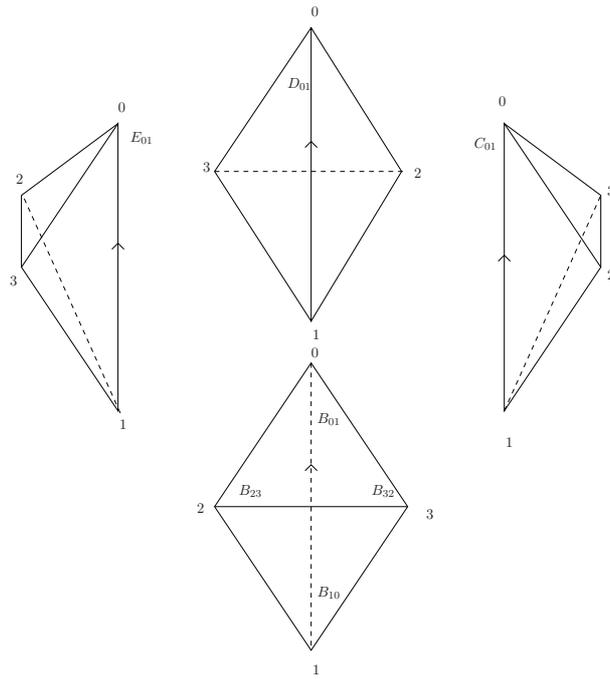


FIG. 3.12: Quatre tétraèdres CR se recollent autour d'une arête centrale.

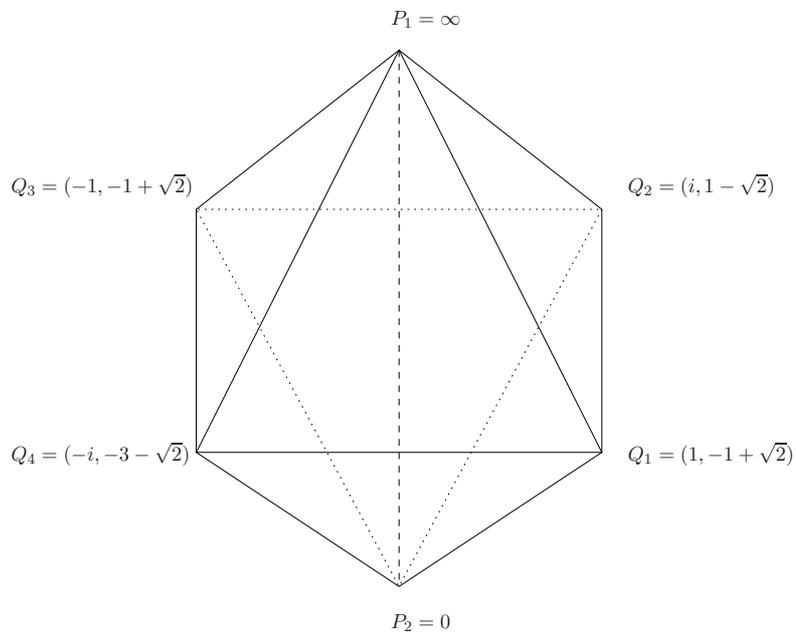


FIG. 3.13: On a fixé des valeurs pour les invariants des tétraèdres. Cela détermine les coordonnées des sommets.

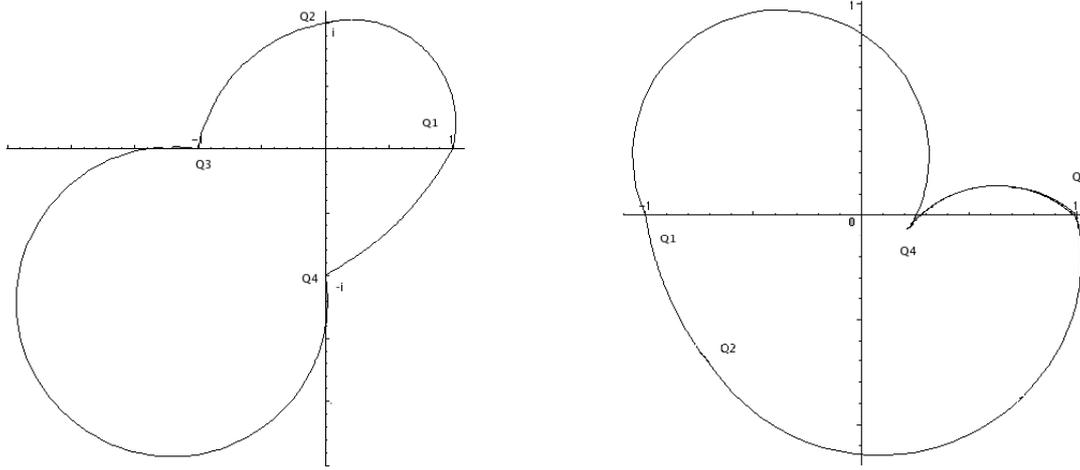


FIG. 3.14: Projection sur  $\mathbb{C}$  des arêtes des tétraèdres qui sont des portions de  $\mathbb{C}$ -cercles. A gauche, on a placé  $P_1 = \infty$  et  $P_2 = 0$ . A droite, on a inversé les rôles :  $P_1 = 0$  et  $P_2 = \infty$ .

Les autres sont tels que tout se recolle comme indiqué. Les coordonnées de sommets sont notés figure 3.13. La somme des arguments autour de l'arête est :

-“en haut” :  $\arg B_{01} + \arg C_{01} + \arg D_{01} + \arg E_{01} = 4 \arg i = 2\pi$ ,

-“en bas” :  $\arg B_{10} + \arg C_{10} + \arg D_{10} + \arg E_{10} = \frac{7\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \arctan(3 - 2\sqrt{2}) + \pi - \arctan(3 - 2\sqrt{2}) = 4\pi$ .

On relie les sommets par des  $\mathbb{C}$ -cercles. Sur la figure 3.14 on a projeté le choix des portions de  $\mathbb{C}$ -cercles qu'on fait pour chaque arête. A gauche, on regarde “d'en haut” :  $P_1 = \infty$  et  $P_2 = 0$ . Si on échange les rôles de  $P_1$  et  $P_2$  en mettant :  $P_1 = (0, 0)$ ,  $P_2 = \infty$ , on obtient le dessin de droite (on obtient ces figures à l'aide de Maple). Si on remplit les tétraèdres, on constate qu'on pave autour de l'arête centrale, même si la somme des arguments ne fait pas  $2\pi$ .

### 3.3.4 Les équations de conjugaison

Comme on travaille avec les variables  $z_{ij}$ , il faut vérifier qu'on travaille bien avec un tétraèdre CR. Cela implique que les équations de conjugaison définies à la proposition 2.30 soient résolues. D'après la proposition 2.32, il faudra encore confirmer que les invariants ne sont pas solutions des équations de compatibilité réelle, pour éviter d'avoir un tétraèdre plat ou même un quadruplet non CR.

**Exemple 3.35.** Pour les deux tétraèdres qui triangulent le complémentaire du nœud de huit, cela donne six équations. Pour le premier tétraèdre, elles sont :

$$B_{01}B_{10} = \overline{B_{23}B_{32}} \quad B_{02}B_{20} = \overline{B_{13}B_{31}} \quad B_{03}B_{30} = \overline{B_{12}B_{21}}.$$

### 3.3.5 Les équations d'holonomie

On se place dans une étoile. Les équations d'holonomie sont calculées de la même façon que dans le cas réel au paragraphe 3.2.3.

**Exemple 3.36.** Dans le cas du complémentaire du nœud de huit, on a un seul sommet. L'étoile décorée qui lui est associée est donnée figure 3.15. Le coefficient pour la longitude est  $B_{01} \frac{1}{C_{02}} B_{13} \frac{1}{C_{10}} B_{23} \frac{1}{C_{20}} B_{31} \frac{1}{C_{32}}$ , pour le méridien  $\frac{1}{B_{03}} C_{01}$ .

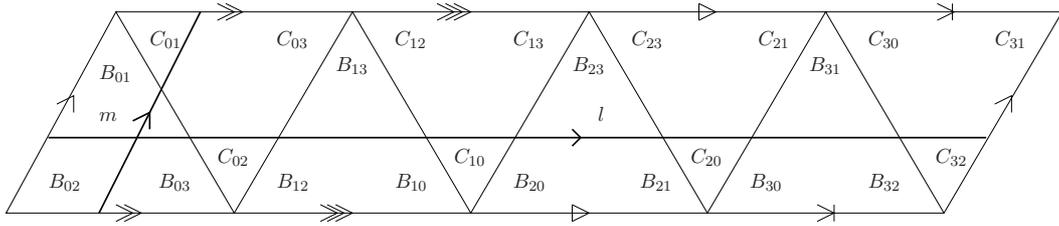


FIG. 3.15: L'étoile du sommet pour complémentaire du nœud de huit

On reprend les notations données en 3.20. Le méridien et la longitude du tore ont pour image  $H_m$  et  $H_l$  par la représentation du groupe fondamental dans  $PU(2,1)$ . Les deux applications fixent un point du bord et commutent. Quitte à conjuguer, ce sont des automorphismes d'Heisenberg. On rappelle que ces automorphismes agissent sur  $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  et s'écrivent (voir 1.5) :

$$H : (w, s) \mapsto \left( \frac{\bar{\lambda}^2}{\lambda} w + z, |\lambda|^2 s + t - 2 \operatorname{Im} \left( \frac{\bar{\lambda}^2}{\lambda} \bar{z} w \right) \right).$$

Les équations d'holonomie calculent  $\frac{\bar{\lambda}^2}{\lambda}$  qui est le coefficient de dilatation de la projection de  $H$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ . On a ainsi deux équations d'holonomie par étoile : une pour le coefficient de  $H_m$ , une pour celui de  $H_l$ .

Les équations d'holonomie imposent :  $\frac{\bar{\lambda}^2}{\lambda} = 1$ , autrement dit  $H$  est une transformation parabolique unipotente.

**Remarque 3.37.** Dans le cas hyperbolique réel, on a vu que en dehors des cas triviaux, si dans une étoile, l'une des deux équations d'holonomie est réalisée, alors l'autre aussi. Dans le cas complexe, le résultat de la proposition 1.35 implique que :

1.  $H_l$  ou  $H_m$  est triviale, ce qu'on considère comme cas dégénéré,
2.  $H_l$  ou  $H_m$  est une translation verticale,
3.  $H_l$  et  $H_m$  sont unipotentes,
4. ni  $H_l$  ni  $H_m$  n'est unipotente.

Donc les deux équations d'holonomie ne sont pas indépendantes, sauf dans le cas où l'une des applications se trouve être une translation verticale.

### 3.3.6 Solutions des équations

Admettons que nous ayons une solution au système des équations. Les invariants  $z_{ij}$  solutions nous permettent de calculer les sommets des tétraèdres. On est donc en mesure de déterminer l'expression des matrices qui recollent les faces. Le théorème 3.7 implique la proposition suivante :

**Proposition 3.38.** *Pour notre variété  $M$ , toute solution du système composé des équations de faces, d'arêtes, de conjugaison permet la construction de l'applications  $h_D$  qui est alors une représentation de  $\Pi_1(M)$  dans  $PU(2,1)$ . L'image de  $h_D$  est le groupe engendré par les matrices qui recollent les faces.*

**Remarque 3.39.** Au contraire du cas réel, rien n'implique que le groupe  $h_D(\Pi_1(M))$  est discret ou que la représentation est fidèle. D'autre part, la représentation n'est pas nécessairement complète.

Pour finir avec l'exemple du nœud de huit, on donne toutes les solutions trouvées par Falbel :

**Théorème 3.40.** (voir [Fal08] ) *Il existe 6 solutions au système rassemblant les équations de faces, d'arêtes, d'holonomie et de conjugaison pour le nœud de huit. Elles sont données par les formules ci-dessous. (A chaque fois, la conjugaison complexe donne une deuxième solution.)*

$$\text{Solution } n^{\circ 1} : \quad B_{01} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad B_{10} = \overline{B_{01}} \quad B_{23} = B_{01} \quad B_{32} = \overline{B_{01}}$$

$$C_{01} = B_{01} \quad C_{10} = B_{10} \quad C_{23} = B_{23} \quad C_{32} = B_{32}$$

$$\text{Solution } n^{\circ 2} : \quad B_{01} = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{7}}{4} \quad B_{10} = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2} \quad B_{23} = \overline{B_{01}} \quad B_{32} = \overline{B_{10}}$$

$$C_{01} = B_{32} \quad C_{10} = B_{23} \quad C_{23} = B_{10} \quad C_{32} = B_{01}$$

$$\text{Solution } n^{\circ 3} : \quad B_{01} = \frac{5}{4} + i\frac{\sqrt{7}}{4} \quad B_{10} = \frac{3}{8} + i\frac{\sqrt{7}}{8} \quad B_{23} = \overline{B_{01}} \quad B_{32} = \overline{B_{10}}$$

$$C_{01} = B_{10} \quad C_{10} = B_{01} \quad C_{23} = B_{32} \quad C_{32} = B_{23}$$

A la solution 1, la représentation est discrète et l'holonomie pour le bord est fidèle. Pour les solutions 2 et 3, le groupe engendré par  $H_l$  et  $H_m$  est monogène.

Pour la solution  $n^{\circ 1}$ , Falbel "remplit" les tétraèdres CR et munit ainsi le complémentaire du nœud de huit d'une structure CR-sphérique branchée autour des arêtes.



## Chapitre 4

# Rang des équations de recollement

Ce chapitre est consacré à l'étude du rang des équations. Dans un premier temps, on établit le lien entre rang et rigidité de la structure géométrique. Pour plusieurs exemples de recollement, nous avons trouvé des solutions aux systèmes d'équations. Nous exposons ces cas en annexe et calculons ici le rang du système pour chaque solution. La suite du chapitre étudie le rang en général. En particulier, on verra que si on travaille dans  $\mathcal{T}$  avec des tétraèdres qui ne sont pas forcément CR, le rang n'est jamais maximal. D'un autre côté, si on recolle des tétraèdres CR sans imposer l'holonomie, là aussi, le rang n'est jamais maximal. La dernière section étudie les structures géométriques qu'admettent les surfaces formées par les étoiles des sommets.

### 4.1 Rigidité géométrique et rang des équations de recollement

Dans ce paragraphe, on se place dans un cadre plus restrictif : la variété  $M$  est munie d'une structure CR-sphérique qui est compatible avec une triangulation géométrique, c'est-à-dire que  $M$  peut être obtenue comme recollement de tétraèdres CR. (Dans le cas réel, pour une variété hyperbolique complète de volume fini, il existe toujours une triangulation par des tétraèdres hyperboliques idéaux, éventuellement plats d'après [EP88]). Ce recollement induit des équations de compatibilité qu'on a décrites au chapitre précédent : les équations de faces, d'arêtes, de conjugaison et d'holonomie.

Comme  $M$  est munie d'une structure géométrique, on a une vraie application développante  $D$  et une application holonomie  $h_D$  qui lui est associée. Celle-ci peut s'obtenir à partir de la triangulation CR, comme c'est décrit à la section 3.1. Dans l'espace des déformations  $\mathcal{D}(M) = \text{Hom}(\Pi_1(M), \text{PU}(2, 1))/\text{PU}(2, 1)$ , on s'intéresse au sous-ensemble des représentations qui sont associées à une structure géométrique CR-sphérique triangulée. La proposition suivante relie la rigidité de ces structures et le rang du système rassemblant les équations de compatibilités.

**Proposition 4.1.** *On se place en une solution des équations qui provient d'une structure CR-sphérique triangulée de  $M$ . Si en ce point le rang du système est maximal, alors cette structure est rigide.*

*Démonstration.* On part d'une triangulation CR de la variété  $M = \bigcup T_i - \text{sommets} / \sim$ . On se place en une solution du système. A cette solution est associée une holonomie  $h_0 : \Pi_1(M) \rightarrow \text{PU}(2, 1)$ . On raisonne par contraposée. Ainsi, on suppose que  $h_0$  appartient à une famille à un paramètre  $(h_t)_t \subset \mathcal{D}(M)$  telle que chaque représentation  $h_t$  est construite

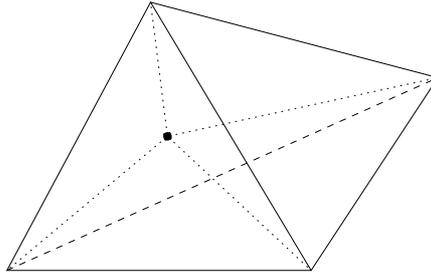


FIG. 4.1: Lorsqu'on ajoute un point au centre d'un tétraèdre, on peut le découper en quatre simplexes qui contiennent ce sommet.

à partir d'une triangulation CR de  $M$ . Si on se place dans un voisinage assez petit de  $h_0$ , on peut toujours supposer que la triangulation de  $h_t$  est la même que celle utilisée avec  $h_0$ .

Les groupes images des holonomies  $h_t$  sont engendrés par les applications de recollement de faces. Les matrices qui les représentent dépendent continument du paramètre  $t$ . Les  $T_i$  sont des tétraèdres CR dans  $S^3$ . Les coordonnées des sommets se calculent à l'aide de ces matrices. Enfin, les invariants sont des birapports complexes de ces sommets. On obtient de cette façon une famille à un paramètre d'invariants qui sont solutions du système d'équations associé à la triangulation  $\bigcup T_i$ . La solution que l'on considère n'est donc pas isolée et ainsi, le rang du système n'est pas maximal en ce point.  $\square$

**Remarque 4.2.** La réciproque n'est pas vraie. Si le rang n'est pas maximal, on a une famille de solutions qui peuvent éventuellement toujours engendrer la même holonomie.

Par exemple, dans le cas d'une variété compacte, les étoiles autour des sommets sont des sphères. On se place en une solution du système d'équations, les sommets sont fixés. On choisit un tétraèdre qu'on redécoupe en quatre tétraèdres comme sur la figure 4.1. Cela revient à ajouter un sommet. On peut positionner ce sommet où l'on veut dans le tétraèdre, on obtiendra toujours la même holonomie. Pourtant, le système obtenu avec cette triangulation voit la dimension de son espace de solutions augmenter de un, puisqu'on a un paramètre de liberté en plus avec le sommet ajouté.

## 4.2 Solutions aux équations de recollement

Dans [CHW99], les auteurs recensent les recollements de tétraèdres (sept au plus) à bords toriques qui ont une solution hyperbolique réelle. Pour certains éléments de cette liste, nous avons cherché des solutions CR, c'est-à-dire des solutions aux équations de faces, arêtes, holonomie, conjugaison. On obtient le résultat suivant :

**Théorème 4.3.** *Pour les recollements suivants, on trouve des solutions : la sœur du complémentaire du nœud de huit, le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead, deux recollement qui sont référencés dans [CHW99] comme étant :  $M_{4_{33}}$  et  $M_{4_{34}}$  (quatre tétraèdres, un sommet). A chaque fois, à la solution, le rang du système rassemblant toutes les équations (faces, arêtes, holonomie, conjugaison) est maximal.*

En annexe, nous avons détaillé pour chaque solution : le recollement des tétraèdres, la représentation obtenue, le rang de la jacobienne et certaines propriétés des groupes images

obtenus.

**Remarque 4.4.** La représentation pour l'entrelacs de Whitehead est étudié au chapitre 5. Nous utilisons des groupes étudiés par Parker et Will. Leur travail en cours traite de la discrétion de ces groupes. Pour les autres variétés du théorème 4.3, l'image de chaque représentation obtenue est discrète dans  $\text{PU}(2,1)$  car contenue dans un réseau du type  $\text{U}(2,1, \mathbb{Z}[\omega])$ .

Dans le cas CR, on accepte que les tétraèdres fassent plusieurs tours autour d'une arête. Il se peut donc que certains sommets de la triangulation *a priori* distincts aient les mêmes coordonnées à la solution. Elle peut alors être ce qu'on définit comme une solution dégénérée :

**Définition 4.5.** Soit  $(z_{ij})_{ij}$  un choix d'invariants qui vérifient les équations de compatibilité de recollement pour une triangulation donnée. On note  $T = [p_0, p_1, p_2, p_3]$  et  $T' = [p_0, p_1, p_3, p_4]$  deux tétraèdres qui se recollent. Si leurs invariants respectifs vérifient :  $z'_{01} = \frac{1}{z_{01}}$ ,  $z'_{10} = \frac{1}{z_{10}}$ ,  $z'_{23} = \frac{1}{z_{32}}$ ,  $z'_{32} = \frac{1}{z_{23}}$ , alors la solution est dite *dégénérée*.

**Remarque 4.6.** Si les invariants de  $[p_0, p_1, p_2, p_3]$  sont  $(z_{01}, z_{10}, z_{23}, z_{32})$ , alors ceux de  $[p_0, p_1, p_3, p_2]$  sont  $(\frac{1}{z_{01}}, \frac{1}{z_{10}}, \frac{1}{z_{32}}, \frac{1}{z_{23}})$ . A une solution dégénérée, deux tétraèdres sont confondus.

**Remarque 4.7.** C'est le cas pour une solution du Whitehead décrite au paragraphe 5.4.3.

Dans le recensement des recollements hyperboliques de [CHW99], nous avons testé des solutions sur le modèle des solutions du nœud de huit, c'est-à-dire avec des tétraèdres du type  $B_{01} = B_{10} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $B_{23} = B_{32} = \overline{B_{01}}$ . Pour un certain nombre de recollements, cela a abouti à des solutions dégénérées, comme pour l'exemple présenté à la section A.2.3 en annexe. Dans ce cas précis, la solution est très dégénérée puisque les six tétraèdres de la triangulation sont confondus. Le calcul de la jacobienne du système indique que le rang des équations de recollement n'est pas maximal. On exhibe d'ailleurs une famille à un paramètre de solutions. On en conclut que le rang n'est pas maximal en toute solution.

### 4.3 Rang des équations

Dans la suite de ce chapitre, on va s'attacher à étudier le rang des équations. Pour cette section, on travaille dans l'espace  $\mathcal{T}$ , c'est-à-dire que les tétraèdres ne sont pas nécessairement CR. On recolle  $n$  tétraèdres, ce qui induit  $2n$  équations de faces  $\mathcal{F}_i$ ,  $2n$  équations d'arêtes  $\mathcal{A}_{jk}$ ,  $k$  équations d'holonomie  $\mathcal{H}_l$ , qui relient  $4n$  inconnues  $z_{ij}$ . Ces équations ne sont pas toutes indépendantes. Pour étudier le rang, on va utiliser la jacobienne du système en coordonnées logarithmiques. Précisément, on va travailler avec :

$$\left( \begin{array}{c} \frac{\partial \log \mathcal{F}_i}{\partial \log z_{ij}} \\ \frac{\partial \log \mathcal{A}_{jk}}{\partial \log z_{ij}} \\ \frac{\partial \log \mathcal{H}_l}{\partial \log z_{ij}} \end{array} \right) \quad (4.1)$$



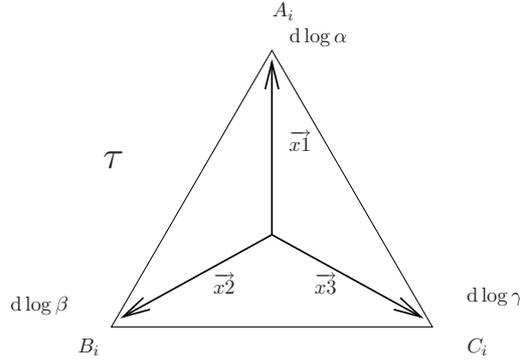


FIG. 4.3: Le découpage barycentrique de chaque triangle de l'étoile.

La fonction duale  $f^*$  est définie de  $T^*\mathbb{C}^F$  dans  $T^*\mathcal{T}^T$ . Si  $u_1, \dots, u_{2n}$  sont des coordonnées de  $\mathbb{C}^F$ , alors  $\mathbf{F}_i = d \log u_i$  est une base de l'espace cotangent. Sur cette base,  $f^*$  vaut :

$$f^*(\mathbf{F}_i) = \sum_{j: a_{ji} \text{ quitte } F_i \text{ côté } j} d \log \text{Inv}(a_{ji}).$$

**Exemple 4.8.** Dans le cas de la figure huit, l'équation pour la face  $F_0$  est (voir l'exemple 3.28) :  $B_{10}B_{20}B_{30}C_{01}C_{21}C_{31} = 1$ . Dans ce cas,

$$f^*(\mathbf{F}_0) = d \log B_{10} + d \log B_{20} + d \log B_{30} + d \log C_{01} + d \log C_{21} + d \log C_{31}.$$

On procède de la même façon pour les équations d'arêtes.

$$a : \mathcal{T}^T \longrightarrow (\mathbb{C}^2)^A.$$

Pour chaque arête  $A_{ij}$  :

$$a(z_1, \dots, z_{8n})(A_{ij}) = \left( \prod_{(k,l): I(a_{kl})=A_{ij}} \text{Inv}(a_{kl}), \prod_{(k,l): I(a_{lk})=A_{ji}} \text{Inv}(a_{lk}) \right).$$

Pour avoir une base de l'espace cotangent  $T^*(\mathbb{C}^2)^A$ , on prend  $w_1^1, w_1^2, \dots, w_n^1, w_n^2$  coordonnées de  $(\mathbb{C}^2)^A$  qui donnent la base :  $\mathbf{A}_{ij} = d \log w_i^j$ . Sur cette base,  $g^*$  vaut :

$$g^*(\mathbf{A}_{ij}) = \sum_{(k,l): I(a_{kl})=A_{ij}} d \log \text{Inv}(a_{kl}).$$

Pour la fonction holonomie  $h$ , on se place dans l'étoile d'un des sommets. Chaque triangle  $\tau$  est redécoupé comme sur la figure 4.3. Soit  $\xi$  une courbe orientée dans une des étoiles, qui ne passe ni par les sommets ni par les centres des triangles et qui intersecte chaque  $\vec{x}_i$  en un nombre fini de points. L'entier  $\mathbf{u}_i(\xi)$  compte le nombre d'intersections avec orientation entre  $\xi$  et  $\vec{x}_1$  dans le triangle  $\tau_i$  :  $\mathbf{u}_i(\xi) = \xi \cdot \vec{x}_1$ , la fonction  $\mathbf{v}_i(\xi)$  est pour  $\vec{x}_2$  et  $\mathbf{w}_i(\xi)$  pour  $\vec{x}_3$ . Avec ces notations, on définit  $h$  :

$$h(\xi) = \sum_{\tau_i \in \Upsilon} \mathbf{u}_i(\xi) d \log \alpha_i + \mathbf{v}_i(\xi) d \log \beta_i + \mathbf{w}_i(\xi) d \log \gamma_i.$$

**Exemple 4.9.** A nouveau, dans le complémentaire du noeud huit, si on note  $l$  la longueur dans l'étoile, l'équation d'holonomie associée est :  $-B_{32}B_{31}A_{32} = 1$ . Alors,  $h(l) = d \log B_{32} + d \log B_{31} + d \log A_{32} = -d \log B_{30} + d \log A_{32}$ .

**Remarque 4.10.** Le vecteur  $f^*(\mathbf{F}_i)$  écrit dans la base  $(d \log \alpha_i)_i$  est exactement la  $i$ ème ligne de la jacobienne donnée en (4.1). Le calcul de la dimension de l'espace engendré par les vecteurs  $f^*(\mathbf{F}_i)$ ,  $a^*(\mathbf{A}_{jk})$ ,  $h(l_q)$  donne le rang du système des équations de compatibilité.

## 4.4 La forme symplectique $\Omega$

Dans cette section, on définit une forme symplectique sur l'espace vectoriel engendré par les  $d \log \alpha_i$ , espace de dimension complexe  $4n$ . Ici, à chaque tétraèdre sont associés quatre vecteurs :  $d \log z_{01}$ ,  $d \log z_{10}$ ,  $d \log z_{23}$ ,  $d \log z_{32}$ . Dans le cas hyperbolique réel, il n'y a qu'un vecteur par tétraèdre construit à partir de l'invariant du simplexe. La forme symplectique introduite dans [Cho04] permet de réécrire les résultats de Neumann et Zagier de [NZ85]. Dans le cas réel, cela permet de calculer le rang du système des équations d'arêtes et d'holonomie, dans le cas où tous les invariants sont à partie imaginaire positive. Dans notre cas, cela nous permettra, à la section suivante, de donner une minoration du rang.

Dans toute la suite du chapitre, on supposera que la partie imaginaire des invariants est non nulle. On introduit une forme  $\mathbb{R}$ -bilinéaire (mais pas  $\mathbb{C}$ -linéaire), anti-symétrique, notée  $\Omega$  définie sur  $T^*(\mathcal{T}^T)$ , l'espace vectoriel de dimension complexe  $4n$ , de base  $(d \log \alpha_i)_i$ . On commence par la définir sur chaque triangle  $\tau_i$  de l'étoile :

$$\Omega(d \log \alpha, d \log \beta) = 1.$$

Ce produit va déterminer tous les autres sur  $T^*(\mathcal{T}^{\tau_i})$  :

$$\Omega(d \log \beta, d \log \gamma) = \Omega(d \log \beta, -d \log \alpha - d \log \beta) = -\Omega(d \log \beta, d \log \alpha) = 1$$

$$\Omega(d \log \alpha, d \log \beta) = \Omega\left(d \log \alpha, \frac{z}{1-z} d \log \alpha\right) = \Omega\left(d \log \alpha, i \operatorname{Im}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) d \log \alpha\right) = 1$$

dont on déduit :

$$\Omega(d \log \alpha, i d \log \alpha) = \frac{1}{\operatorname{Im}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)}.$$

Dans deux triangles  $\tau$  et  $\tau'$  distincts,  $T^*(\mathcal{T}^\tau)$  et  $T^*(\mathcal{T}^{\tau'})$  sont orthogonaux :

$$\Omega(d \log \alpha, d \log \alpha') = 0.$$

On peut voir  $\Omega$  comme la partie imaginaire d'une forme hermitienne  $H$  définie par :

$$H(d \log \alpha, d \log \alpha) = \frac{1}{\operatorname{Im}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)} \quad \text{et} \quad H(d \log \alpha, d \log \alpha') = 0.$$

**Remarque 4.11.** Si  $\xi$  est une courbe fermée, comme  $d \log \alpha_i + d \log \beta_i + d \log \gamma_i = 0$ , le produit  $\Omega(h(\xi), d \log \alpha)$  ne change pas quand on déforme  $\xi$ , pourvu qu'on ne traverse pas les sommets des triangles.

On note  $l_1, \dots, l_k$  les  $k$  longueurs dans les étoiles toriques de chaque sommet.

**Proposition 4.12.** *L'espace engendré par  $f^*(\mathbf{F}_i)$ ,  $a^*(\mathbf{A}_{jk})$ ,  $h(l_q)$  est totalement réel pour la forme hermitienne  $H$ . En fait, on va prouver :*

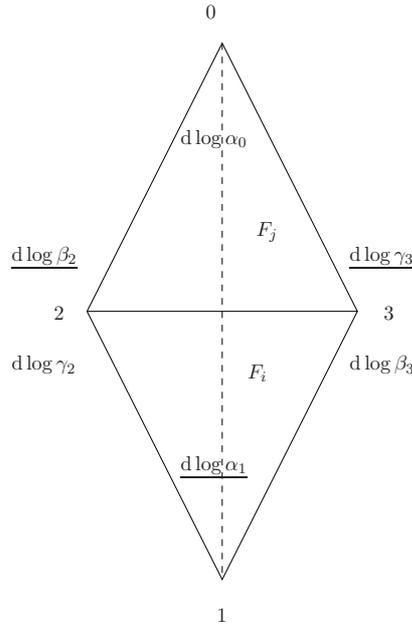


FIG. 4.4: L'écriture de  $f^*(\mathbf{F}_i)$  contient  $d \log \alpha_1 + d \log \beta_2 + d \log \gamma_3$ .

1.  $\Omega(f^*(\mathbf{F}_i), f^*(\mathbf{F}_j)) = 0$
2.  $\Omega(f^*(\mathbf{F}_i), a^*(\mathbf{A}_{ij})) = 0$
3.  $\Omega(a^*(\mathbf{A}_{ij}), a^*(\mathbf{A}_{kl})) = 0$

Si  $\xi$  est une courbe fermée :

1.  $\Omega(f^*(\mathbf{F}_i), h(\xi)) = 0$
2.  $\Omega(a^*(\mathbf{A}_{ij}), h(\xi)) = 0$
3.  $\Omega(h(\xi), h(\xi')) = 2\xi \cdot \xi'$

*Démonstration.* 1.  $\Omega(f^*(\mathbf{F}_i), f^*(\mathbf{F}_j)) = 0$

Si les faces  $F_i$  et  $F_j$  ne proviennent pas de deux faces d'un même tétraèdre, alors  $\Omega(f^*(\mathbf{F}_i), f^*(\mathbf{F}_j)) = 0$ . Sinon, la figure 4.4 représente deux faces  $F_i$  et  $F_j$  d'un même tétraèdre et dans ce cas, on a le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \Omega(f^*(\mathbf{F}_i), f^*(\mathbf{F}_j)) &= \Omega(d \log \alpha_1 + d \log \beta_2 + d \log \gamma_3, d \log \alpha_0 + d \log \gamma_2 + d \log \beta_3) \\ &= \Omega(d \log \beta_2, d \log \gamma_2) + \Omega(d \log \gamma_3, d \log \beta_3) = 0. \end{aligned}$$

2.  $\Omega(f^*(\mathbf{F}_i), a^*(\mathbf{A}_{jk})) = 0$

$F_i$  est associée à deux faces de la triangulation comme représenté figure 4.5. Le produit  $\Omega(f^*(\mathbf{F}_i), d \log z_{ij})$  est non nul seulement pour les invariants rattachés aux arêtes qui sont tracées en gras. Par exemple avec l'invariant  $d \log \beta_0$ , sur l'arête 01 du premier tétraèdre. Cette arête est recollée avec l'arête 02 du deuxième tétraèdre. Donc dans  $a^*(\mathbf{A}_{jk})$ , si  $d \log \beta_0$  apparaît,  $d \log \gamma'_0$  aussi. Dans ce cas,

$$\Omega(f^*(\mathbf{F}_i), d \log \beta_0 + d \log \gamma'_0) = \Omega(d \log \alpha_0 + d \log \alpha'_0, d \log \beta_0 + d \log \gamma'_0) = 1 - 1 = 0$$

Ainsi,  $\Omega(f^*(\mathbf{F}_i), a^*(\mathbf{A}_{jk}))$  sera toujours nul.

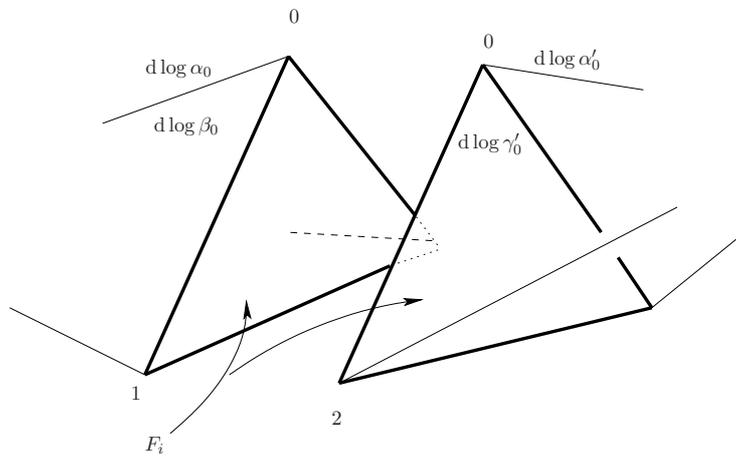


FIG. 4.5: L'écriture du vecteur  $f^*(\mathbf{F}_i)$  contient :  $d \log \alpha_0 + d \log \alpha'_0$ .

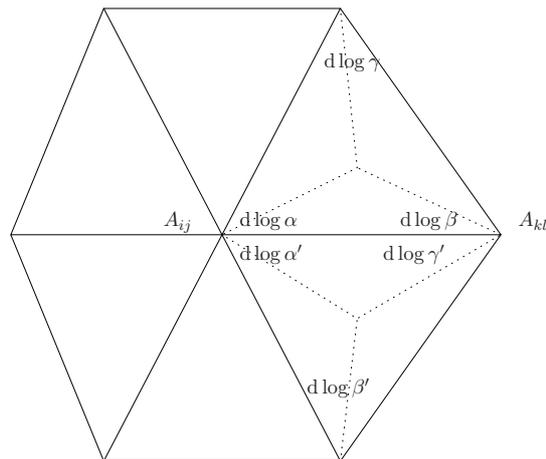


FIG. 4.6: Les deux arêtes  $A_{ij}$  et  $A_{kl}$  pointent deux sommets de deux triangles adjacents.

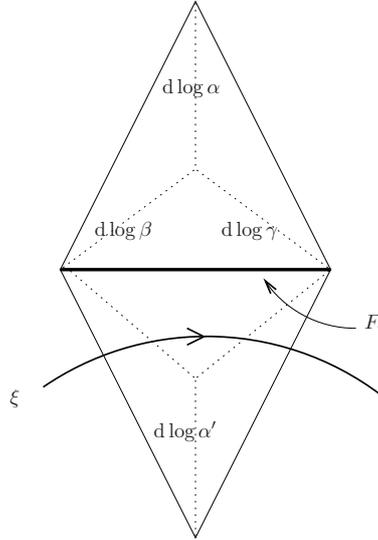


FIG. 4.7: L'écriture du vecteur  $f^*(\mathbf{F}_i)$  contient  $d \log \alpha + d \log \alpha'$ .

3.  $\Omega(a^*(\mathbf{A}_{ij}), a^*(\mathbf{A}_{kl})) = 0$ .

Pour l'arête  $A_{ij}$ , voyons l'étoile autour de son sommet côté  $i$  (voir figure 4.6). Si les  $A_{kl}$  ne pointent pas dans les triangles de sommet  $A_{ij}$ , alors :

$$\Omega(a^*(\mathbf{A}_{ij}), a^*(\mathbf{A}_{kl})) = 0.$$

Sinon, on est dans le cas représenté à la figure 4.6.

$$\Omega(a^*(\mathbf{A}_{ij}), a^*(\mathbf{A}_{kl})) = \Omega(d \log \alpha + d \log \alpha', d \log \beta + d \log \gamma') = 0.$$

4.  $\Omega(f^*(\mathbf{F}_i), h(\xi)) = 0$ .

La courbe  $\xi$  est fermée. On se place dans l'une des étoiles où  $\xi$  apparaît. Si  $F_i$  est la face tracée en gras sur la figure 4.7, dans  $f^*(\mathbf{F}_i)$ , on trouve :  $d \log \alpha + d \log \alpha'$ . On a vu qu'on peut déformer  $\xi$  dans chaque triangle. Il ne reste que donc trois cas où le produit n'est pas sûrement nul. Ils sont illustrés à la figure 4.8. Dans chaque cas, on a :

- Cas n°1 :  $\Omega(f^*(\mathbf{F}_i), h(\xi)) = \Omega(d \log \alpha + d \log \alpha', d \log \alpha) = 0$ .
- Cas n°2 :  $\Omega(f^*(\mathbf{F}_i), h(\xi)) = \Omega(d \log \alpha + d \log \alpha', d \log \beta + d \log \gamma') = 0$ .
- Cas n°3 :  $\Omega(f^*(\mathbf{F}_i), h(\xi)) = \Omega(d \log \alpha + d \log \alpha', d \log \beta - d \log \beta') = 0$ .

Finalement, pour chaque cas, on a encore  $\Omega(f^*(\mathbf{F}_i), h(\xi)) = 0$ .

5.  $\Omega(a^*(\mathbf{A}_{ij}), h(\xi)) = 0$  : On se place dans l'étoile qui correspond à  $A_{ij}$ . Si  $\xi$  est une courbe qui reste dans les triangles dessinés figure 4.9, quitte à la déformer, on peut considérer qu'elle parcourt un certain nombre de fois un petit lacet qui entoure  $A_{ij}$ . Dans ce cas,  $h(\xi) = N a^*(\mathbf{A}_{ij})$  ( $N \in \mathbb{Z}$ ) et le produit est nul.

Sinon, à un instant donné,  $\xi$  entre dans un premier triangle qui entoure  $A_{ij}$ , elle en traverse  $N$ , puis elle ressort comme cela est illustré à la figure 4.9. Pour chaque triangle rencontré, la figure 4.10 permet de calculer la contribution au produit  $\Omega(a^*(\mathbf{A}_{ij}), h(\xi))$  :

- Cas 1 :  $\Omega(d \log \alpha_1, h(\xi)) = 1$ .
- Cas  $i$  :  $\Omega(d \log \alpha_i, h(\xi)) = 0$ .
- Cas  $N$  :  $\Omega(d \log \alpha_N, h(\xi)) = -1$ .

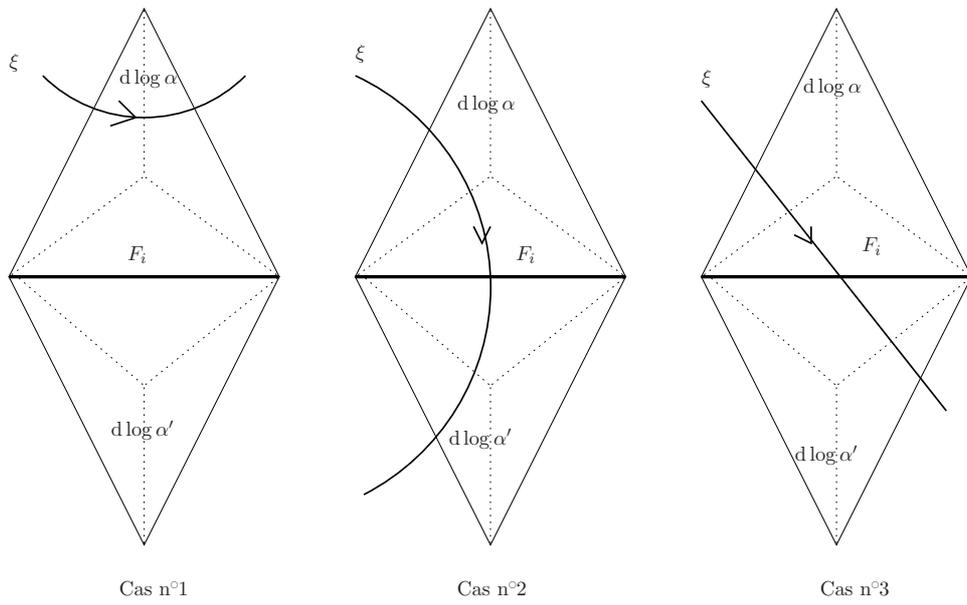


FIG. 4.8: Quitte à déformer la courbe  $\xi$ , on est nécessairement dans l'un des trois cas présentés.

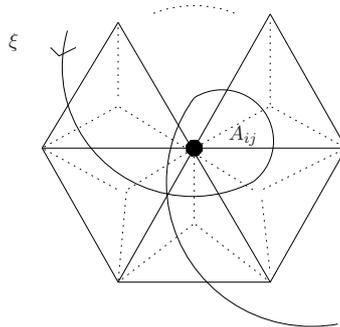


FIG. 4.9: La courbe  $\xi$  tourne autour de l'arête  $A_{ij}$ .

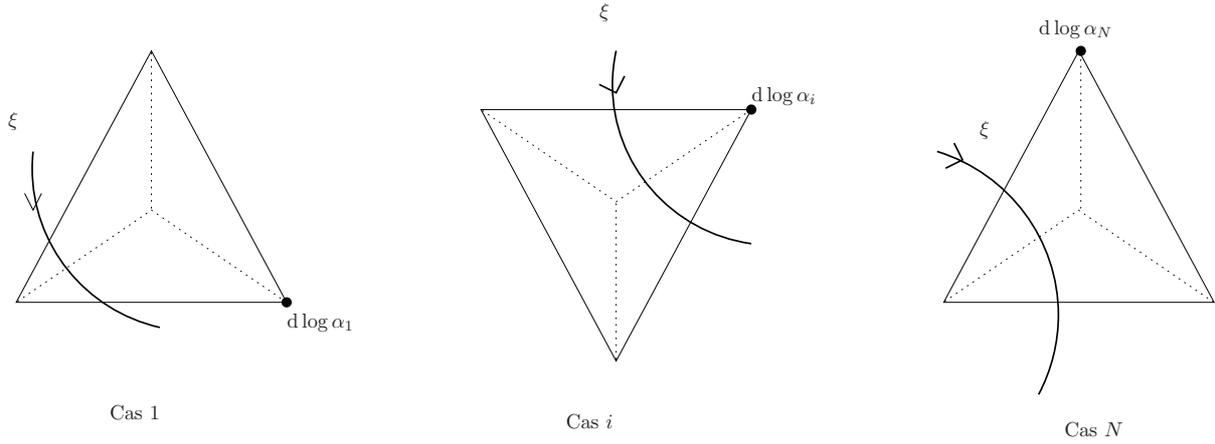


FIG. 4.10: Pour calculer  $\Omega(a^*(\mathbf{A}_{ij}), h(\xi))$ , on regarde ce qui se passe dans chaque triangle. Le cas 1 (resp.  $N$ ) apparaît quand  $\xi$  entre (resp. sort) dans les triangles de sommets  $A_{ij}$ . Les cas  $i$  ont lieu quand  $\xi$  tourne autour de  $A_{ij}$ .

Ainsi :  $\Omega(a^*(\mathbf{A}_{ij}), h(\xi)) = \sum_{i=1}^N \Omega(d \log \alpha_i, h(\xi)) = 0$ .

6.  $\Omega(h(\xi), h(\xi')) = 2\xi \cdot \xi'$  :

Pour cette partie on reprend exactement les arguments de Choi dans [Cho06]. Le point précédent montre qu'on peut déformer  $\xi$  même à travers les sommets des triangles, sans modifier  $\Omega(h(\xi), h(\xi'))$ . Cette quantité est donc bien définie sur la classe d'homologie des courbes dans  $H_1(\partial M)$ . Pour chaque  $\xi$ , on peut définir son cocycle dual  $\kappa$  ainsi :  $\kappa(\text{arête de l'étoile } AB) = \xi \cdot \overrightarrow{AB}$ . Avec les notations de la figure 4.3, on a par exemple :  $\mathbf{v}_i(\xi) - \mathbf{u}_i(\xi) = \kappa(A_i B_i)$ .

La valeur de  $h$  en  $\xi$  s'écrit :  $h(\xi) = \sum_{\tau_i \in \Upsilon} \mathbf{u}_i(\xi) d \log \alpha_i + \mathbf{v}_i(\xi) d \log \beta_i + \mathbf{w}_i(\xi) d \log \gamma_i$ . Pour  $\xi'$ , c'est :  $h(\xi') = \sum_{\tau_i \in \Upsilon} \mathbf{u}_i(\xi') d \log \alpha_i + \mathbf{v}_i(\xi') d \log \beta_i + \mathbf{w}_i(\xi') d \log \gamma_i$ . En distribuant, il reste :

$$\begin{aligned} \Omega(h(\xi), h(\xi')) = \\ \sum_{\tau_i \in \Upsilon} \mathbf{u}_i(\xi) \mathbf{v}_i(\xi') - \mathbf{u}_i(\xi) \mathbf{w}_i(\xi') - \mathbf{v}_i(\xi) \mathbf{u}_i(\xi') + \mathbf{v}_i(\xi) \mathbf{w}_i(\xi') + \mathbf{w}_i(\xi) \mathbf{u}_i(\xi') - \mathbf{w}_i(\xi) \mathbf{v}_i(\xi'). \end{aligned}$$

Après factorisation, on obtient :

$$\begin{aligned} \Omega(h(\xi), h(\xi')) = \\ \sum_{\tau_i \in \Upsilon} (\mathbf{v}_i(\xi) - \mathbf{u}_i(\xi)) (\mathbf{w}_i(\xi') - \mathbf{v}_i(\xi')) - (\mathbf{v}_i(\xi') - \mathbf{u}_i(\xi')) (\mathbf{w}_i(\xi) - \mathbf{v}_i(\xi)) \end{aligned}$$

Avec  $\kappa$ , cela s'écrit :

$$\begin{aligned}
\Omega(h(\xi), h(\xi')) &= \sum_{\tau_i \in \Upsilon} \xi \cdot \overrightarrow{A_i B_i} \xi' \cdot \overrightarrow{B_i C_i} - \xi' \cdot \overrightarrow{A_i B_i} \xi \cdot \overrightarrow{B_i C_i} \\
&= \sum_{\tau_i \in \Upsilon} \kappa(A_i B_i) \kappa'(B_i C_i) - \kappa'(A_i B_i) \kappa(B_i C_i) \\
&= \sum_{\tau_i \in \Upsilon} \kappa \smile \kappa'(\tau_i) - \kappa' \smile \kappa(\tau_i) \\
&= 2\xi \cdot \xi'.
\end{aligned}$$

□

## 4.5 Espace des solutions dans $\mathcal{T}$

La proposition suivante donne la dimension de l'espace réel engendré par les lignes de la jacobienne. On se place toujours dans le cas où  $\text{Im}(z_{ij}) \neq 0$ .

**Théorème 4.13.** *Si tous les paramètres vérifient  $\text{Im}(z_{ij}) \neq 0$ , alors la dimension réelle de l'espace réel engendré par les  $f^*(\mathbf{F}_i)$ ,  $a^*(\mathbf{A}_{jk})$ ,  $h(l_q)$  est  $4n - k$ , où  $k$  est le nombre d'étoiles que compte la variété  $M$ .*

On a immédiatement le corollaire suivant :

**Corollaire 4.14.** *Le rang de la jacobienne est au plus  $4n - k$ . Dans  $\mathcal{T} \simeq \mathbb{C}^{4n}$ , la dimension complexe de l'espace des solutions des équations de faces, arêtes, holonomie, s'il est non vide, est au moins  $k > 0$ .*

*Démonstration.* On commence par chercher toutes les combinaisons liantes du type :

$$\sum_i r_i f^*(\mathbf{F}_i) + \sum_{j,k} (s_{jk} a^*(\mathbf{A}_{jk}) + s_{kj} a^*(\mathbf{A}_{kj})) = 0 \quad (4.3)$$

avec  $r_i$  et  $s_{jk}$  réels.

Le coefficient  $s_{ij}$  est associé à l'arête orientée  $[ij]$ , côté  $i$  et  $r_l$  est relié à la face  $F_l$ . On se place dans le tétraèdre  $ijkl$  de la figure 4.11. La variable  $z_{ij}$  apparaît dans l'équation de face  $F_j$  et dans l'équation d'arête  $[ij]$  côté  $i$ . Donc, dans l'équation (4.3) les coefficients devant  $d \log z_{ij}$ ,  $d \log z_{ik}$  et  $d \log z_{il}$  sont :

$$(r_j + s_{ij}) d \log z_{ij} + (r_k + s_{ik}) d \log z_{ik} + (r_l + s_{il}) d \log z_{il},$$

ce qui d'après (4.2) vaut :

$$\left( (r_j + s_{ij}) + (r_k + s_{ik}) \frac{z_{ij}}{1 - z_{ij}} + (r_l + s_{il}) \frac{-1}{1 - z_{ij}} \right) d \log z_{ij}. \quad (4.4)$$

La famille  $(d \log z_{ij}, \dots)$  forme une base du cotangent. Les coordonnées dans (4.4) sont donc toutes nulles :

$$(1 - z_{ij})(r_j + s_{ij}) + z_{ij}(r_k + s_{ik}) - (r_l + s_{il}) = 0$$

En passant à la partie imaginaire, on obtient :  $-(r_j + s_{ij}) + (r_k + s_{ik}) \text{Im}(z_{ij}) = 0$ . La partie imaginaire des paramètres étant supposée non nulle, on en déduit que c'est le terme entre parenthèses qui est nul. En remplaçant dans l'égalité précédente, il vient :

$$r_j + s_{ij} = r_l + s_{il} = r_k + s_{ik}.$$

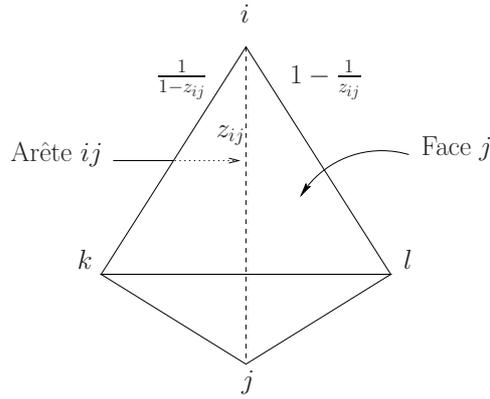


FIG. 4.11: Un tétraèdre  $ijkl$  avec ces paramètres. Le coefficient  $s_{ij}$  est relié à l'équation de l'arête orientée  $[ij]$ . Le coefficient  $r_l$  est relié à l'équation de la face  $F_l$ . Il est donc associé aux paramètres :  $z_{il}, z_{jl}, z_{kl}$ .

Ces deux égalités ont été obtenues en travaillant au sommet  $i$  du tétraèdre 4.11. On procède de la même façon aux trois autres sommets ce qui donne le système suivant :

$$(S) = \begin{cases} r_j + s_{ij} = r_k + s_{ik} = r_l + s_{il} \\ r_i + s_{ji} = r_k + s_{jk} = r_l + s_{jl} \\ r_i + s_{ki} = r_j + s_{kj} = r_l + s_{kl} \\ r_i + s_{li} = r_j + s_{lj} = r_k + s_{lk} \end{cases}$$

On cherche à résoudre ce système. Les variables  $r_i$  et  $s_{jk}$  sont attachées respectivement aux faces et aux arêtes après identification. Elles peuvent donc apparaître plusieurs fois dans le système  $(S)$  ou dans d'autres tétraèdres.

La somme de toutes les lignes du système  $(S)$  donne :

$$\begin{aligned} r_j + s_{ij} + r_i + s_{ji} + r_l + s_{kl} + r_k + s_{lk} &= r_k + s_{ik} + r_l + s_{jl} + r_i + s_{ki} + r_j + s_{lj} \\ &= r_l + s_{il} + r_k + s_{jk} + r_j + s_{kj} + r_i + s_{li} \end{aligned}$$

ce qui se simplifie en :

$$(s_{ij} + s_{ji}) + (s_{kl} + s_{lk}) = (s_{ik} + s_{ki}) + (s_{jl} + s_{lj}) = (s_{il} + s_{li}) + (s_{jk} + s_{kj}). \quad (4.5)$$

La quantité  $s_{ij} + s_{ji}$  est liée à l'arête  $ij$ . On la note  $S_{ij}$ . Elle vérifie  $S_{ij} = S_{ji}$ . Les égalités en (4.5) se réécrivent :

$$S_{ij} + S_{kl} = S_{ik} + S_{jl} = S_{il} + S_{jk}. \quad (4.6)$$

La variable  $S_{ij}$  est reliée à l'arête  $ij$ . On va voir qu'en fait elle ne dépend que des sommets extrémités de l'arête. A chaque sommet  $V_i$  après identification, on joint une variable  $q_i$  (dans le cas d'un seul cusp par exemple, on n'a qu'une seule variable). Si l'arête  $ij$  joint le sommet  $V_i$  au sommet  $V_j$ , on va montrer :

$$S_{ij} = q_i + q_j.$$

On définit les  $q_i$  comme suit. Soit une face  $ijk$  qui contient le sommet  $V_i$  comme sur la figure 4.12. Alors on pose :

$$q_i = \frac{1}{2}(S_{ij} - S_{jk} + S_{ki})$$

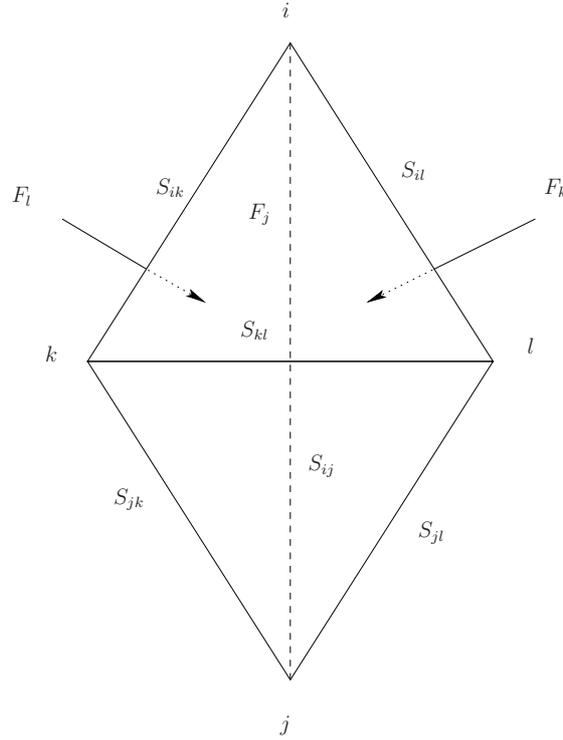


FIG. 4.12: Un tétraèdre  $ijkl$ . On y a indiqué trois des faces :  $F_j$ ,  $F_k$ ,  $F_l$ . La variable  $S_{ij}$  est reliée à l'arête non-orientée  $(ij)$ .

Cette définition doit être indépendante du choix de la face contenant  $V_i$ . Pour commencer, dans un même tétraèdre, il y a trois faces qui partent du sommet  $V_i$ . Chacune donne une valeur pour  $q_i$ . Avec les notations de la figure 4.12 et grâce aux égalités (4.6), on en déduit :

$$\text{face } ijk : q_i = \frac{1}{2}(S_{ij} - S_{jk} + S_{ki})$$

$$\begin{aligned} \text{face } ijl : \quad \frac{1}{2}(S_{ij} - S_{jl} + S_{li}) &= \frac{1}{2}(S_{ij} - (S_{ij} + S_{kl} - S_{ik}) + (S_{ij} + S_{kl} - S_{jk})) \\ &= \frac{1}{2}(S_{ij} + S_{ik} - S_{jk}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{face } ikl : \quad \frac{1}{2}(S_{ik} - S_{kl} + S_{li}) &= \frac{1}{2}(S_{ik} - (S_{ik} + S_{jl} - S_{ij}) + (S_{ik} + S_{jl} - S_{jk})) \\ &= \frac{1}{2}(S_{ik} + S_{ij} - S_{jk}) \end{aligned}$$

On constate bien qu'on obtient à chaque fois le même résultat. De proche en proche on montre ainsi que la définition des  $q_i$  est cohérente. Donc,  $q_i$  est bien une variable liée au sommet  $V_i$ . Maintenant, toujours dans le tétraèdre de la figure 4.12,

$$q_i + q_j = \frac{1}{2}(S_{ij} - S_{jk} + S_{ki}) + \frac{1}{2}(S_{jk} - S_{ki} + S_{ij}) = S_{ij}.$$

Ainsi,  $s_{ij} + s_{ji} = q_i + q_j$ . On a donc déterminé la somme  $s_{ij} + s_{ji}$ . Pour avoir chacune des variables, il faut spécifier la différence  $D_{ij} = s_{ij} - s_{ji}$ . Avec ces variables, on a :

$$s_{ij} = \frac{1}{2}(S_{ij} + D_{ij}) = \frac{1}{2}(q_i + q_j + D_{ij})$$

Le système  $(S)$  devient :

$$\begin{aligned}
r_j + \frac{1}{2}(q_i + q_j + D_{ij}) &= r_k + \frac{1}{2}(q_i + q_k + D_{ik}) = r_l + \frac{1}{2}(q_i + q_l + D_{il}) \\
r_i + \frac{1}{2}(q_j + q_i + D_{ji}) &= r_k + \frac{1}{2}(q_j + q_k + D_{jk}) = r_l + \frac{1}{2}(q_j + q_l + D_{jl}) \\
r_i + \frac{1}{2}(q_k + q_i + D_{ki}) &= r_j + \frac{1}{2}(q_k + q_j + D_{kj}) = r_l + \frac{1}{2}(q_k + q_l + D_{kl}) \\
r_i + \frac{1}{2}(q_l + q_i + D_{li}) &= r_j + \frac{1}{2}(q_l + q_j + D_{lj}) = r_k + \frac{1}{2}(q_l + q_k + D_{lk})
\end{aligned}$$

ce qui donne après simplification :

$$\begin{aligned}
2r_j + q_j + D_{ij} &= 2r_k + q_k + D_{ik} = 2r_l + q_l + D_{il} \\
2r_i + q_i + D_{ji} &= 2r_k + q_k + D_{jk} = 2r_l + q_l + D_{jl} \\
2r_i + q_i + D_{ki} &= 2r_j + q_j + D_{kj} = 2r_l + q_l + D_{kl} \\
2r_i + q_i + D_{li} &= 2r_j + q_j + D_{lj} = 2r_k + q_k + D_{lk}
\end{aligned}$$

On pose :  $D_{ij} = 2r_i + q_i - 2r_j - q_j + x_{ij}$  avec  $x_{ij} = -x_{ji}$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned}
2r_i + q_i + x_{ij} &= 2r_i + q_i + x_{ik} = 2r_i + q_i + x_{il} \\
2r_j + q_j + x_{ji} &= 2r_j + q_j + x_{jk} = 2r_j + q_j + x_{jl} \\
2r_k + q_k + x_{ki} &= 2r_k + q_k + x_{kj} = 2r_k + q_k + x_{kl} \\
2r_l + q_l + x_{li} &= 2r_l + q_l + x_{lj} = 2r_l + q_l + x_{lk}
\end{aligned}$$

D'après ce système, les variables  $x_{ij}$  sont toutes égales entre elles. Comme en plus  $x_{ij} = -x_{ji}$ , c'est qu'elles sont toutes nulles. Donc,

$$s_{ij} = \frac{1}{2}(S_{ij} + D_{ij}) = \frac{1}{2}(q_i + q_j + 2r_i + q_i - 2r_j - q_j) = q_i + r_i - r_j$$

On vérifie aisément que le système (S) est alors résolu. Encore faut-il que  $q_i + r_i - r_j$  soit bien associé à une arête orientée. Il faut pour cela que  $r_i - r_j$  soit constant sur les arêtes orientées décorées par  $s_{ij}$ .

Par exemple, sur la figure 4.13, deux faces sont recollées comme l'indiquent les pointillés. Les arêtes  $ij$  et  $i'j'$  sont identifiées, donc :  $s_{ij} = s_{i'j'}$ . De la même façon,  $q_i = q_{i'}$ . Dans le premier tétraèdre,  $s_{ij} = q_i + r_i - r_j$  et dans le deuxième,  $s_{ij} = s_{i'j'} = q_i + r_{i'} - r_{j'}$ . Il faut donc l'égalité suivante :

$$r_i - r_j = r_{i'} - r_{j'} \quad (4.7)$$

Pour les arêtes  $il$  et  $i'k'$  on a :  $s_{il} = q_i + r_i - r_l$  et  $s_{i'k'} = q_i + r_{i'} - r_{k'}$ . Ces deux arêtes étant identifiées, il vient l'égalité suivante :

$$r_i - r_l = r_{i'} - r_{k'} \quad (4.8)$$

Encore une fois, on va voir que  $r_i$  ne dépend que des sommets de la face  $F_i$ . Une nouvelle variable  $p_l$  est ajoutée à chaque sommet  $V_l$ . Si les trois sommets de la face  $F_i$  sont  $V_j, V_k, V_l$  (ils peuvent être éventuellement les mêmes), alors on montre que  $r_i = p_j + p_k + p_l$ .

On définit comme suit  $p_i$  : dans un tétraèdre de sommets  $V_i, V_j, V_k, V_l$  de faces  $F_i, F_j, F_k, F_l$  (voir figure 4.14) :

$$p_i = \frac{1}{3}(r_j + r_k + r_l - 2r_i).$$

Voyons comment cette définition ne dépend pas du tétraèdre choisi. On prend deux tétraèdres  $T$  et  $T'$  qui ont une face en commun qui contient le sommet  $V_i$ . On reprend les notations de la figure 4.13. Dans le premier tétraèdre  $T$ ,  $p_i = \frac{1}{3}(r_j + r_k + r_l - 2r_i)$ . Dans  $T'$ , on aurait :  $\frac{1}{3}(r_{j'} + r_{k'} + r_{l'} - 2r_{i'})$ . D'après (4.7) et (4.8) :  $r_{j'} + r_{k'} - 2r_{i'} = r_j + r_l - 2r_i$ .

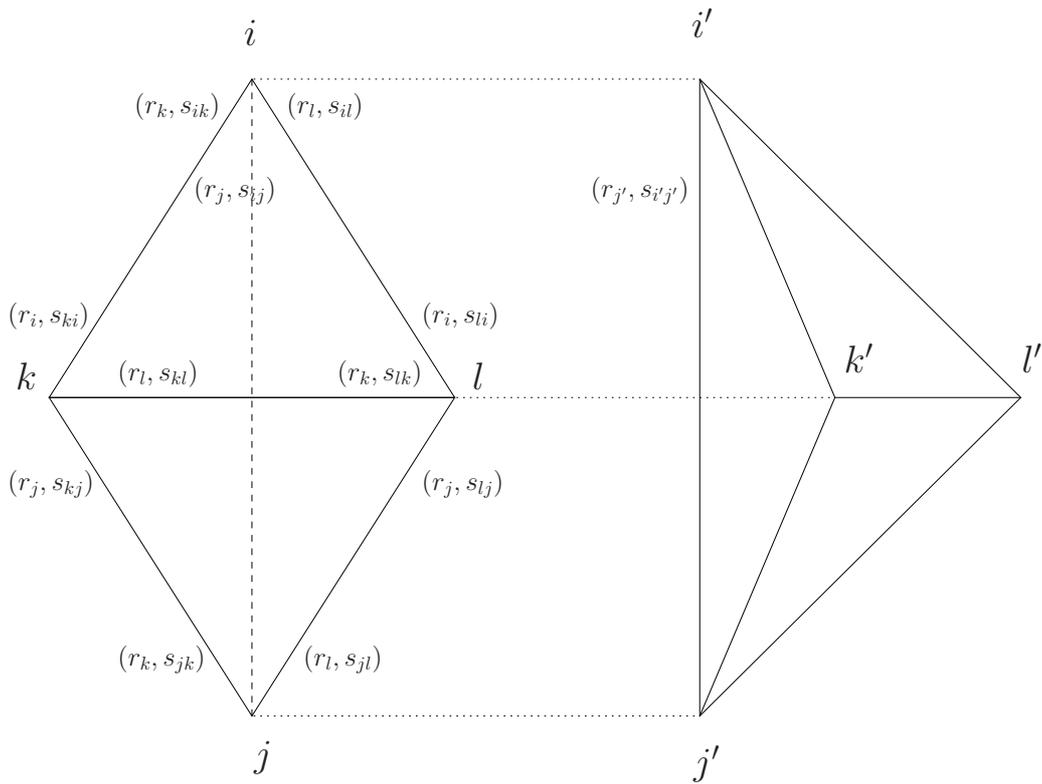


FIG. 4.13: Deux tétraèdres qui se recollent suivant les pointillés. Les variables  $r_i$  et  $s_{jk}$  sont associées respectivement à une face et une arête orientée. Aux côtés de  $z_{ij}$ , on a indiqué  $(r_j, s_{ij})$  car le paramètre  $z_{ij}$  apparaît dans l'équation de face  $\mathcal{F}_j$  et l'équation d'arête  $\mathcal{A}_{ij}$ .

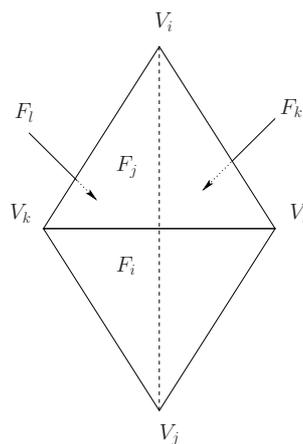


FIG. 4.14: Un tétraèdre de faces  $F_i, F_j, F_k, F_l$ .

Enfin, la face  $k$  de  $T$  et la face  $l'$  de  $T'$  sont recollées ensemble, ce qui donne :  $r_{l'} = r_k$ . On trouve bien dans les deux tétraèdres la même définition de  $p_i$ . De proche en proche, cela prouve que la définition de  $p_i$  est indépendante du choix du tétraèdre dans lequel on se place.

En résumé, dans un tétraèdre  $ijkl$ , nécessairement :

$$r_i = p_j + p_k + p_l \quad s_{ij} = q_i + r_i - r_j = q_i + p_j - p_i.$$

Réciproquement, les  $r_i$  et les  $s_{ij}$  sont bien associés chacun à l'objet géométrique qui leur correspond et ils annulent bien (4.3). On a  $k$  variables  $p_i$  et  $k$  variables  $q_i$ . Donc les  $4n$  lignes de faces et d'arêtes de la jacobienne engendrent un espace vectoriel de dimension  $4n - 2k$ .

**Remarque 4.15.** En fait, les équations de face  $\mathcal{F}_j$  et d'arêtes  $\mathcal{A}_{kl}$  vérifient toujours :

$$\prod_j \mathcal{F}_j^{r_j} \prod_{k,l} \mathcal{A}_{kl}^{s_{kl}} \mathcal{A}_{lk}^{s_{lk}} = 1$$

On ajoute maintenant les équations d'holonomie. A nouveau, on part d'une combinaison linéaire reliant les lignes de la jacobienne :

$$\sum_i \rho_i f^*(\mathbf{F}_i) + \sum_{j,k} (\sigma_{jk} a^*(\mathbf{A}_{jk}) + \sigma_{kj} a^*(\mathbf{A}_{kj})) + \sum_q \lambda_q h(l_q) = 0$$

La courbe  $m_p$  est le méridien dans la  $p$ ème étoile. La seule courbe qu'il rencontre parmi les  $l_1, \dots, l_k$  est la longitude de la  $p$ ème étoile. D'après la proposition 4.12, le produit par  $\Omega$  donne :

$$\Omega \left( h(m_p), \sum_i \rho_i f^*(\mathbf{F}_i) + \sum_{j,k} \sigma_{jk} a^*(\mathbf{A}_{jk}) + \sigma_{kj} a^*(\mathbf{A}_{kj}) + \sum_q \lambda_q h(l_q) \right) = \lambda_p(m_p \cdot l_p) = \lambda_p$$

Ainsi,  $\lambda_p$  est nul et ceci est vrai pour tout  $p$ . Donc, la famille  $(h(l_1), \dots, h(l_k))$  est  $\mathbb{R}$ -libre et la dimension réelle de l'espace réel engendré par  $f^*(\mathbf{F}_i)$ ,  $a^*(\mathbf{A}_{kj})$ ,  $h(l_p)$  est  $4n - k$ .  $\square$

## 4.6 Rang des équations dans le cas réel

Dans le cas hyperbolique réel, on peut décider de ne travailler qu'avec des invariants à partie imaginaire strictement positive. Dans une telle configuration, la proposition suivante calcule le rang exact de la jacobienne :

**Proposition 4.16.** *On suppose que tous les invariants  $z_{ij}$  sont à partie imaginaire strictement positive. Alors la dimension de l'espace complexe engendré par  $f^*(\mathbf{F}_i)$ ,  $a^*(\mathbf{A}_{kj})$ ,  $h(l_p)$  est  $4n - k$ . Autrement dit, au voisinage d'une solution des équations de faces, arêtes, holonomie, telle que  $\text{Im}(z_{ij}) > 0$ , la dimension de l'espace des solutions dans  $\mathcal{T}$  est  $k$ .*

*Démonstration.* On part d'une combinaison liante à coefficients complexes :

$$\sum_{i,j,k,q} r_i f^*(\mathbf{F}_i) + s_{jk} a^*(\mathbf{A}_{jk}) + \lambda_q h(l_q) + i \sum_{i,j,k,q} r'_i f^*(\mathbf{F}_i) + s'_{jk} a^*(\mathbf{A}_{jk}) + \lambda'_q h(l_q) = C + iC' = 0$$

avec les  $r, r', s, s', \lambda, \lambda'$  réels. On reprend la forme hermitienne définie à la section 4.4. On a :

$$H(C + iC', C + iC') = H(C, C) + H(C', C') - 2 \text{Im}(H(C, C')) = 0. \quad (4.9)$$

D'après la proposition 4.12, l'espace réel engendré par les  $f^*(\mathbf{F}_i)$ ,  $a^*(\mathbf{A}_{kj})$ ,  $h(l_p)$  est totalement réel. Ainsi,  $\text{Im}(H(C, C')) = 0$ . Ici, on suppose que  $\text{Im}(z_{ij}) > 0$ . La matrice représentative de  $H$  est diagonale, avec comme coefficients :  $\frac{1}{\text{Im}\left(\frac{z_{ij}}{1-z_{ij}}\right)} = \frac{|1-z_{ij}|^2}{\text{Im} z_{ij}}$ .

Donc la forme hermitienne  $H$  est définie positive :  $H(C, C) \geq 0$  et s'annule si et seulement si  $C = 0$ . D'après (4.9),  $C = C' = 0$ . La proposition 4.13 a déterminée les combinaisons liantes réelles. On en déduit que la dimension de l'espace complexe engendré par les lignes de la jacobienne est  $4n - k$ .  $\square$

## 4.7 Rang des équations dans le cas CR

Dans cette section, on travaille avec des tétraèdres CR, c'est-à-dire qu'on suppose résolues les équations de conjugaison. On a quatre variables réelles par tétraèdres :  $(z = x + iy, s, t)$ .

**Lemme 4.17.** *Si toutes les équations de faces sont vérifiées, alors sur une arête  $[ij]$ , les deux équations d'arêtes satisfont :  $\mathcal{A}_{ij} = \overline{\mathcal{A}_{ji}}$ .*

*Démonstration.* Avec les notations de la figure 4.15, on a  $T_1, \dots, T_m$  tétraèdres CR, caractérisés respectivement par  $(z_1, t_1, s_1), \dots, (z_m, t_m, s_m)$ . Les équations de faces donnent les égalités des invariants de Cartan. Par exemple, la face commune entre  $T_1$  et  $T_2$  a comme invariant côté  $T_1$  :  $\mathbb{A}(\infty, 0, (z_1, |z_1|^2 s_1)) = s_1$ . Côté  $T_2$ ,  $\mathbb{A}(\infty, 0, (1, t_2)) = t_2$ . Donc  $\mathcal{F}_1 : s_1 - t_2 = 0$ . Plus généralement :

$$\mathcal{F}_j : s_j - t_{j+1} = 0 \quad \text{pour } j = 1 \dots m-1 \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_m : s_m - t_1 = 0.$$

La première équation d'arêtes est le produit des invariants associés à l'arête en pointillée côté  $\infty$  :

$$\mathcal{A}_{01} : \prod_{j=1}^m z_j.$$

La deuxième calcule le produit des invariants reliés à l'arête côté 0 :

$$\mathcal{A}_{10} : \prod_{j=1}^m \frac{i + s_j}{z_j} \frac{i + t_j}{i + t_j}.$$

Par suite, si les équations de faces sont vérifiées, alors :  $\mathcal{A}_{10} = \overline{\mathcal{A}_{01}}$ .  $\square$

**Lemme 4.18.** *La dimension réelle de l'espace des solutions aux équations de faces pour  $n$  tétraèdres CR est  $2n + 1$ .*

*Démonstration.* Dans le cas où les tétraèdres sont CR, les équations de faces, a priori complexes, égalisent les invariants de Cartan. Ce sont donc en fait des équations réelles. Le produit de toutes les équations de faces est 1 puisque tous les invariants  $z_{ij}$  vont apparaître une fois et une seule dans ce produit. A chaque sommet,  $z_{ij_1} z_{ij_2} z_{ij_3} = -1$ . Le produit vaut donc  $(-1)^{4n} = 1$ . Ainsi, le rang réel des équations de faces est au plus  $2n - 1$ .

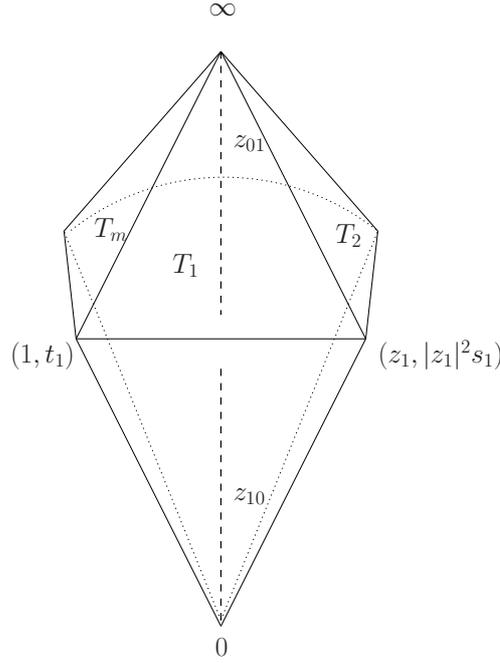


FIG. 4.15: Les  $m$  tétraèdres  $T_i$  tournent autour de l'arête centrale. On a indiqué les coordonnées des sommets.

Pour l'autre inégalité, on se place dans un tétraèdre générique ( $z = x + iy, s, t$ ). Ici, les invariants de Cartan des quatre faces sont :

$$\begin{aligned} \text{face 0 : } \tan(\mathbb{A}(p_1, p_3, p_2)) &= -\frac{2y - s + 2sx - 2tx - st^2 + 2tsy + t(1 + s^2)(x^2 + y^2)}{(x - 1)^2 + y^2 + 2sy + s^2x^2 + s^2y^2 + t^2 - 2ty - 2tsx} \\ \text{face 1 : } \tan(\mathbb{A}(p_0, p_2, p_3)) &= \frac{(x^2 + y^2)s - t + 2x}{(x - 1)^2 + y^2} \\ \text{face 2 : } \tan(\mathbb{A}(p_0, p_3, p_1)) &= -s \\ \text{face 3 : } \tan(\mathbb{A}(p_0, p_1, p_2)) &= t. \end{aligned}$$

Chaque invariant est égal à un autre, et celui-ci ne dépend pas des variables de notre tétraèdre  $x, y, s, t$ . On calcule la jacobienne du système des équations de faces :

$$\left( \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}, \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial y_j}, \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial s_j}, \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial t_j} \right)_{i=0..2n, j=1..n}$$

$$\begin{array}{l} \text{face 0} \\ \text{face 1} \\ \text{face 2} \\ \text{face 3} \\ \vdots \end{array} \begin{pmatrix} x & y & s & t & \cdots \\ a & c & * & * & * & \cdots & * \\ b & d & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & -1 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

La matrice extraite formée par les 4 premières colonnes est exactement de rang 3. Elle est au plus de rang trois car dans un tétraèdre, les 4 invariants de Cartan vérifient la relation

de cocycle suivante :

$$\mathbb{A}(p_0, p_1, p_2) + \mathbb{A}(p_0, p_3, p_1) + \mathbb{A}(p_0, p_2, p_3) + \mathbb{A}(p_1, p_3, p_2) = 0.$$

Les deux premières lignes de la matrice extraite sont donc proportionnelles. L'un des termes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ou  $d$  est non nul. Si ce n'était pas le cas, le calcul nous donne :

$$a = \frac{\partial \tan(\mathbb{A}(p_1, p_3, p_2))}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow s(x - x^2 + y^2) + t(x - 1) = 2y(x - 1)$$

$$b = \frac{\partial \tan(\mathbb{A}(p_0, p_2, p_3))}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow sy(1 - 2x) + ty = -(1 - x)^2 + y^2.$$

Les solutions où  $x = 1$  et  $y = 0$  (c'est-à-dire  $z = 1$ ) sont refusées. En dehors de celles-ci, le système est inversible en  $s$  et  $t$  et on trouve :  $s = \frac{x-1}{y}$  et  $t = \frac{x^2 + y^2 - x}{y}$ . Mais alors

l'invariant  $z_{10} = (x - iy)\frac{i+s}{i+t} = 1$ , ce qui est également refusé. Finalement, la matrice formée par les 4 premières colonnes est de rang 3.

La jacobienne a  $2n$  lignes (il y a  $2n$  faces),  $4n$  colonnes (il y a 4 variables réelles par tétraèdre). On considère une combinaison liante des  $2n$  lignes :  $\sum_{i=0}^{2n-1} r_i L_i = 0$ . Si  $r_0$  est fixé, comme les quatre premières colonnes sont de rang trois,  $r_1, r_2, r_3$  sont déterminés. La face 0 appartient à un deuxième tétraèdre. De même que pour le premier, on lui associe 4 colonnes de la jacobienne qui engendrent un espace de dimension 3. Comme  $r_0$  est donné, on a encore trois  $r_i$  reliés à ce tétraèdre qui sont fixés. Ainsi, de proche en proche, tous les  $r_i$  sont déterminés. L'espace engendré par les lignes est donc au plus de dimension  $2n - 1$ .  $\square$

**Remarque 4.19.** Si on a  $n$  tétraèdres, cela fait  $4n$  invariants de Cartan. Le lemme précédent montre que la dimension de l'espace des invariants de Cartan compatibles avec le recollement est  $n + 1$ .

**Théorème 4.20.** *L'espace des tétraèdres CR est de dimension réelle  $4n$ . Le sous-ensemble de ceux qui sont solutions des équations de faces et d'arêtes est lui au moins de dimension réelle  $2k$ .*

*Démonstration.* On se place en un point où les équations de faces sont réalisées. Le lemme 4.18 montre que le rang réel des équations de faces seules est  $2n - 1$ . D'après 4.17, on sait aussi que les équations d'arêtes  $\mathcal{A}_{ij}$  et  $\mathcal{A}_{ji}$  sont conjuguées. Dans le cas où il n'y a qu'un seul sommet, on constate que le produit des équations d'arêtes vaut 1 :  $\prod \mathcal{A}_{ij} \mathcal{A}_{ji} = \prod |\mathcal{A}_{ij}|^2 = 1$ . Les  $4n$  équations réelles d'arêtes sont conjuguées deux par deux, et sont reliées par cette dernière équation réelle. Le rang des équations de faces et d'arêtes est donc au plus :  $(2n - 1) + (4n - (2n + 1)) = 4n - 2$  pour  $k = 1$ .

Pour un plus grand nombre de sommets, la situation est la même. Le produit des équations d'arêtes qui pointent sur un même sommet vaut un, ce qui implique :

$$\prod_j |\mathcal{A}_{ij}| = 1.$$

Pour les arguments des  $\mathcal{A}_{ij}$ , à chaque sommet  $\nu_i$  (il y en a  $k$ ), on associe deux réels :  $q_i$  et  $p_i$ . Si les sommets de l'arête  $A_{ij}$  sont  $\nu_i$  et  $\nu_j$ , on pose :

$$s_{ij} + s_{ji} = 2(q_i + q_j)$$

$$d_{ij} - d_{ji} = 2(p_i - p_j).$$

Alors les équation d'arêtes vérifient :

$$P(q) = \prod_{i,j} |\mathcal{A}_{ij}|^{s_{ij}} |\mathcal{A}_{ji}|^{s_{ji}} \quad (4.10)$$

$$S(p) = \sum_{i,j} d_{ij} \arg(\mathcal{A}_{ij}) + d_{ji} \arg(\mathcal{A}_{ji}) \equiv 0 [2\pi]. \quad (4.11)$$

En effet, comme  $\mathcal{A}_{ij} = \overline{\mathcal{A}_{ji}}$ , on obtient :

$$P(q) = \prod_{i,j} |\mathcal{A}_{ij}|^{q_i+q_j} |\mathcal{A}_{ji}|^{q_i+q_j}$$

$$S(p) = \sum_{i,j} (p_i - p_j) \arg(\mathcal{A}_{ij}) + (p_j - p_i) \arg(\mathcal{A}_{ji}).$$

Les invariants d'un tétraèdre  $(z_{01}, z_{10}, z_{23}, z_{32})$  apparaissent dans la première formule (4.10) ainsi :

$$|(z_{01}z_{10})^{q_0+q_1} (z_{23}z_{32})^{q_2+q_3} (z_{02}z_{20})^{q_0+q_2} (z_{13}z_{31})^{q_1+q_3} (z_{03}z_{30})^{q_0+q_3} (z_{12}z_{21})^{q_1+q_2}|.$$

Comme on travaille avec des tétraèdres CR, les équations de conjugaison sont satisfaites et entraînent :

$$|(z_{01}z_{10})^{q_0+q_1+q_2+q_3} (z_{02}z_{20})^{q_0+q_2+q_1+q_3} (z_{03}z_{30})^{q_0+q_3+q_1+q_2}| = |\omega_a \omega_b \omega_c|^{q_0+q_1+q_2+q_3}$$

où  $\omega_i$  sont les invariants introduits à la définition 2.16. Ils vérifient :  $|\omega_a \omega_b \omega_c| = 1$ . Ainsi, l'équation (4.10) est vérifiée.

Pour le même tétraèdre, l'équation 4.11 relie les invariants ainsi :

$$\begin{aligned} & p_0 - p_1)(\arg z_{01} - \arg z_{10}) + (p_2 - p_3)(\arg z_{23} - \arg z_{32}) \\ & + (p_0 - p_2)(\arg z_{02} - \arg z_{20}) + (p_1 - p_3)(\arg z_{13} - \arg z_{31}) \\ & + (p_0 - p_3)(\arg z_{03} - \arg z_{30}) + (p_1 - p_2)(\arg z_{12} - \arg z_{21}) \\ = & p_0(\arg(-1) - \arg z_{10} - \arg z_{20} - \arg z_{30}) + p_1(\arg(-1) - \arg z_{01} - \arg z_{31} - \arg z_{21}) \\ & + p_2(\arg(-1) - \arg z_{32} - \arg z_{02} - \arg z_{12}) + p_3(\arg(-1) - \arg z_{23} - \arg z_{13} - \arg z_{03}). \end{aligned}$$

Dans la somme  $S(p)$ , le terme en facteur de  $p_0$  est :

$$p_0(\arg(-1)N_0 - \sum_i \arg(z_{i0})),$$

où  $N_0$  est le nombre de représentants du sommet  $\nu_0$  dans la triangulation. C'est aussi le nombre de triangles dans l'étoile associée à  $\nu_0$ , donc  $N_0$  est un entier pair. D'autre part,  $\sum_i \arg(z_{i0}) \equiv \arg(\prod_i z_{i0}) [2\pi]$ . Or,  $\prod_i z_{i0} = \prod_j \mathcal{A}_{j0} = \prod_j \overline{\mathcal{A}_{0j}} = \prod_i \overline{z_{0i}}$ . Ce dernier produit rassemble tous les invariants qui apparaissent dans l'étoile de  $\nu_0$ . Comme l'étoile est composée de triangles euclidiens :

$$\sum_i \arg(z_{i0}) \equiv - \sum_i \arg(z_{0i}) \equiv N_0\pi \equiv 0 [2\pi].$$

Ainsi, le terme en facteur de  $p_0$  dans  $S(p)$  est nul modulo  $2\pi$ . Il en est de même pour tous les sommets. On a donc bien  $S(p) = 1$ .

On comptabilise les relations entre les  $4n$  équations réelles d'arêtes : il y a  $k$  variables  $q_i$ , donc  $n + k$  variables  $s_{ij}$ . Pour les  $p_i$ , il y a  $k - 1$  différences  $p_i - p_j$ , donc  $n + k - 1$  relations indépendantes qui lient les arguments des  $\mathcal{A}_{ij}$ . Le rang des équations d'arêtes est au plus :  $4n - (n + k) - (n + k - 1) = 2n - 2k + 1$ . Ajoutées aux équation de faces, le rang est au plus  $4n - 2k$ .  $\square$

## 4.8 Nature des surfaces composées par les étoiles

Dans cette section, on s'intéresse aux structures dont peuvent être munies les surfaces obtenues comme étoile d'un sommet. On oublie les tétraèdres sous-jacents aux triangles qui composent l'étoile. Tout se passe comme si on avait une surface  $\Sigma$  triangulée avec  $N$  triangles paramétrés chacun par un invariant  $z$ .

**Définition 4.21.** Le cône standard d'angle  $\theta$  est :

$$V_\theta = \{(r, t) \mid r \geq 0, t \in \mathbb{R}/\theta\mathbb{Z}\} / (0, t) \sim (0, t').$$

**Définition 4.22.** Soit  $\Sigma$  une surface. Une structure de surface plate sur  $\Sigma$  est la donnée de :

1. un ensemble de points de la surface  $\mathcal{S} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_S\}$  et un ensemble d'angles :  $\{\theta_1, \dots, \theta_S\}$ .
2. un atlas  $(U_i, \phi_i)$  sur  $\Sigma - \mathcal{S}$  tel que :
  - (a) tout  $x \in \Sigma \setminus \mathcal{S}$  est dans une carte  $\phi: U_i \rightarrow \phi(U_i) \subset \mathbb{R}^2$ , où  $\mathbb{R}^2$  est muni de sa structure euclidienne.
  - (b) tout point  $\sigma_i$  de  $\mathcal{S}$  est dans une carte  $\phi_{\sigma_i}: U_i \rightarrow V_{\theta_i}$ .
  - (c) Les changements de cartes sont des isométries.

Dans notre cas, la surface  $\Sigma$  est un tore. Elle est obtenue en recollant  $N$  triangles paramétrés chacun par un invariant  $z$ . Si on note  $S$  le nombre de sommets, la formule de la caractéristique d'Euler nous donne :

$$N = 2S.$$

Afin d'obtenir une structure de surface plate, on impose des conditions sur les invariants  $z_i$ . Autour de chaque sommet, on note  $\mathcal{A}_i$  le produit des invariants. Lorsque les équations  $\mathcal{A}_i = 1$  sont résolues, on a deux applications de recollement, l'une  $h_l$  associée à la longueur du tore, l'autre  $h_m$  liée au méridien. Toutes les deux sont des similitudes :  $h_l : z \rightarrow az + b$ . De la même façon qu'à la section 3.2.3, le coefficient  $a$  pour la longueur et le méridien sont calculés par les équations d'holonomie :  $\mathcal{H}_l$  et  $\mathcal{H}_m$ .

**Proposition 4.23.** Soit  $z_1, \dots, z_N$  un choix d'invariants qui sont solutions des équations  $\mathcal{A}_i = 1$ ,  $\mathcal{H}_m = 1$  et  $\mathcal{H}_l = 1$ . Alors ils définissent une structure de surface plate sur  $\Sigma$ . Les points marqués  $\mathcal{S} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_S\}$  sont les sommets.

**Remarque 4.24.** Dans [Fra06], l'auteur étudie les structures globales sur les recollement de triangles, c'est-à-dire sans en retirer les sommets des triangles. Il montre qu'un choix d'invariants  $z_i$  définit une structure euclidienne sur le tore triangulé si et seulement si les équations  $\mathcal{A}_i = 1$  et  $\mathcal{H}_l = 1$  sont vérifiées et que le groupe engendré par  $h_l$  et  $h_m$  est de rang deux. Cette dernière condition est équivalent au fait que la somme des aires des triangles est non nulle.

**Proposition 4.25.** *Dans le cas CR, la surface obtenue comme l'étoile d'un sommet ne peut jamais être munie d'une structure euclidienne globale.*

*Démonstration.* D'après la proposition 1.35, pour les deux automorphismes d'Heisenberg  $H_l$  et  $H_m$  qui engendrent l'holonomie du bord, on a trois cas :

1. l'un est trivial ou une translation verticale.
2. les applications  $H_m$  et  $H_l$  agissent sur  $\mathbb{C}$  comme deux translations colinéaires non triviales.
3. ils ne sont pas unipotents.

Dans le troisième cas,  $H_l$  et  $H_m$  n'agissent pas sur  $\mathbb{C}$  comme des translations. Pour les deux premiers cas, les projections de  $H_l$  et  $H_m$  sur  $\mathbb{C}$  engendrent toujours un groupe de rang un. On n'a donc jamais une structure euclidienne sur l'étoile.  $\square$

**Remarque 4.26.** Dans le cas CR, lorsque les équations de faces, arêtes et holonomie sont résolues, d'après [Fra06], la somme des aires des triangles d'une étoile est toujours nulle.

**Définition 4.27.** Un choix d'invariants  $z_i$  donne une solution *dégénérée* si l'une des applications  $h_l$  ou  $h_m$  est triviale.

La similitude  $h_l$  s'écrit  $z \mapsto az + b$ . La valeur de  $a$  est calculée par les équations d'holonomie. Les invariants  $z_i$  ne suffisent pas à déterminer  $b$  sauf dans le cas où il est nul. Pour préciser cette dernière assertion, on pose la définition suivante :

**Définition 4.28.** Pour une courbe  $\xi$  orientée tracée dans l'étoile, on définit  $t(\xi)$  avec les notations de la figure 4.16 ainsi :

$$t(\xi) = 1 - Z_1 + Z_1 Z_2 - \cdots + (-1)^{p-1} Z_1 \cdots Z_{p-1}$$

où  $Z_i$  est le produit des invariants qu'il rencontre :  $Z_1 = Z_1 = z_1^{(1)} z_2^{(1)} \cdots z_{p_1}^{(1)}$ . Cette valeur n'est pas constante sur la classe d'homotopie de  $\xi$ .

**Lemme 4.29.** *Les invariants  $z_i$  donnent une solution non dégénérée si et seulement si  $t(l)$  et  $t(h)$  sont non nuls.*

*Démonstration.* On reprend les notations de la figure 4.16 : on a recollé des triangles et on suppose que les équations autour des sommets ainsi que les équations d'holonomie sont vérifiées. Lorsqu'on plonge le recollement dans  $\mathbb{C}$ , les coordonnées des sommets sont des complexes  $u_i \in \mathbb{C}$ . La courbe  $\xi$  représentée est supposée être la longitude  $l$ . Les deux arêtes extrémales sont identifiées par  $h_l$ .

Le vecteur  $\overrightarrow{u'_0 u_1}$  est l'image de  $\overrightarrow{u_0 u_1}$  par l'homothétie de rapport  $z_1^{(1)}$  de centre  $u_1$  :  $u'_0 - u_1 = z_1^{(1)}(u_0 - u_1)$ . De proche en proche, on en déduit les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 &= Z_1(u_0 - u_1) \\ u_3 - u_2 &= Z_2(u_1 - u_2) = -Z_1 Z_2(u_0 - u_1) \\ &\vdots \\ u_{i+1} - u_i &= Z_i(u_{i-1} - u_i) = (-1)^i Z_1 \cdots Z_i(u_0 - u_1) \\ &\vdots \\ u_p - u_{p-1} &= Z_{p-1}(u_{p-2} - u_{p-1}) = (-1)^{p-1} Z_1 \cdots Z_{p-1}(u_0 - u_1) \end{aligned}$$

La somme de ces lignes donne :

$$u_p - u_0 = -(u_0 - u_1)t(l).$$

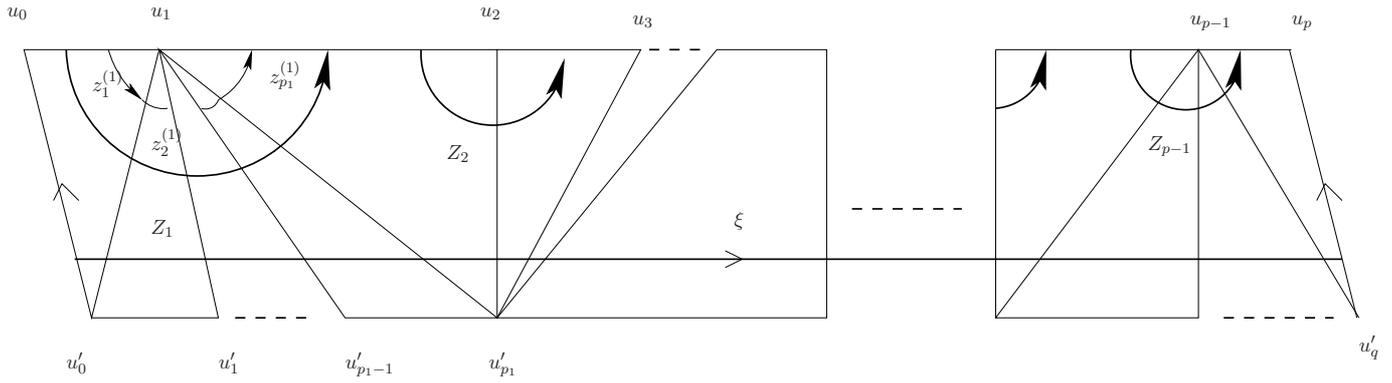


FIG. 4.16: Schéma d'un recollement de triangles. Les  $Z_i$  sont les produits des invariants qu'ils rencontrent :  $Z_1 = z_1^{(1)} z_2^{(1)} \cdots z_{p_1}^{(1)}$ .

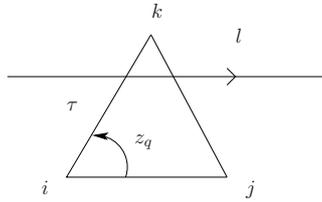


FIG. 4.17: Un triangle  $\tau$ , paramétré par l'invariant  $z_q$ , traversé par la longueur  $l$ .

La translation  $h_l$  est triviale si et seulement si les points  $u_0$  et  $u_p$  sont confondus. Comme  $u_1 - u_0$  n'est jamais nul, l'application  $h_l$  est triviale si et seulement si  $t(l) = 0$ .  $\square$

La proposition suivante calcule le rang des équations  $\mathcal{A}_i$  et  $\mathcal{H}_l$  :

**Proposition 4.30.** *En dehors des cas dégénérés, les  $S$  équations  $\mathcal{A}_i = 1$  sont de rang  $S - 1$ . Elles sont indépendantes des équations d'holonomie.*

*Démonstration.* Le produit de toutes les équations est

$$\prod_{j=1}^S \mathcal{A}_j = \prod_{i=1}^N z_i \frac{1}{1 - z_i} \left(1 - \frac{1}{z_i}\right) = (-1)^N = (-1)^{2S} = 1.$$

Donc, le rang est au plus  $S - 1$ .

On veut calculer le rang de la jacobienne du système  $\log \mathcal{A}_1, \dots, \log \mathcal{A}_S, \log \mathcal{H}_l$  par rapport aux variables  $\log z_i$ . On va déterminer les éléments du noyau de la jacobienne transposée, c'est-à-dire les éléments  ${}^t(s_1, \dots, s_S, h)$  qui vérifient :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \log \mathcal{A}_1}{\partial \log z_1} & \frac{\partial \log \mathcal{A}_2}{\partial \log z_1} & \cdots & \frac{\partial \log \mathcal{H}_l}{\partial \log z_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \log \mathcal{A}_1}{\partial \log z_N} & \frac{\partial \log \mathcal{A}_2}{\partial \log z_N} & \cdots & \frac{\partial \log \mathcal{H}_l}{\partial \log z_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ h \end{pmatrix} = 0.$$

Pour la  $q$ ème ligne, dans le triangle  $\tau$  d'invariant  $z_q$ , avec les notations de la figure 4.17, cela donne :

$$s_i \frac{\partial \log \mathcal{A}_i}{\partial \log z_q} + s_j \frac{\partial \log \mathcal{A}_j}{\partial \log z_q} + s_k \frac{\partial \log \mathcal{A}_k}{\partial \log z_q} + \epsilon_q \frac{\partial \log \mathcal{H}_l}{\partial \log z_q} = 0$$

$$s_i \frac{\partial \log z_q}{\partial \log z_q} + s_j \frac{\partial \log \frac{1}{1-z_q}}{\partial \log z_q} + s_k \frac{\partial \log(1 - \frac{1}{z_q})}{\partial \log z_q} + \epsilon_q \frac{\partial \log(1 - \frac{1}{z_q})}{\partial \log z_q} = 0$$

ce qui d'après les formules données en (4.2) :

$$s_i + \frac{z_q}{1-z_q} s_j + \frac{-1}{1-z_q} s_k + \epsilon_q \frac{-1}{1-z_q} h = 0$$

où  $\epsilon_q = 0$  si  $l$  la longitude ne traverse pas le triangle,  $\epsilon_q = 1$  si  $l$  est orientée dans le sens de la figure 4.17 et  $\epsilon_q = -1$  si l'orientation est contraire. Si on pose  $\delta_{i,j} = s_i - s_j$ , l'équation précédente devient :

$$\delta_{i,k} - z_q \delta_{i,j} - \epsilon_q h = 0.$$

On reprend les notations de la figure 4.16. Dans ce cas, on a :

pour le premier triangle :  $\delta_{1,0'} - z_1^{(1)} \delta_{1,0} + h = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_{1,0} = \frac{\delta_{1,0'} + h}{z_1^{(1)}}$

pour le second :  $\delta_{0',1} - \frac{1}{1-z_2^{(1)}} \delta_{0',1'} - h = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_{1,0'} + h = \frac{\delta_{1,1'} + h}{z_2^{(1)}}$

⋮

pour le  $p_1$ -ième triangle :  $\delta_{p_1-1,1} - \frac{1}{1-z_{p_1-1}^{(1)}} \delta_{p_1-1,p_1-1} - h = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_{1,p_1-1} + h = \frac{\delta_{1,p_1-1} + h}{z_{p_1-1}^{(1)}}$

pour le  $p_1$ ème triangle :  $\delta_{2,p_1} - \left(1 - \frac{1}{z_{p_1}^{(1)}}\right) \delta_{2,1} + h = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_{1,p_1} + h = \frac{\delta_{1,2}}{z_{p_1}^{(1)}}$ .

ce qui, mis bout à bout amène à :

$$\delta_{1,0} = \frac{1}{z_1^{(1)} z_2^{(1)} \cdots z_{p_1-1}^{(1)} z_{p_1}^{(1)}} \delta_{1,2} = \frac{1}{Z_1} \delta_{1,2}.$$

Pour les autres côtés qui suivent la longitude, de la même façon, on obtient :

$$\delta_{3,2} = Z_2 \delta_{1,2} \quad \delta_{i+1,i} = Z_i \delta_{i-1,i} \quad \delta_{p,p-1} = Z_{p-1} \delta_{p-2,p-1}.$$

La somme de ces termes donne d'une part :

$$\delta_{0,1} + \delta_{1,2} + \delta_{2,3} + \cdots + \delta_{p-1,p} = \delta_{0,1} (1 - Z_1 + Z_1 Z_2 - \cdots + (-1)^p Z_1 \cdots Z_{p-1}) = \delta_{0,1} t(l). \quad (4.12)$$

D'autre part, cette somme vaut aussi  $s_0 - s_p$ . Or comme les deux arêtes extrémales sont identifiées, on a  $s_p = s_0$ . Dans (4.12), cela donne :

$$\delta_{0,1} t(l) = 0.$$

Dans le cas non-dégénéré,  $t(l)$  n'est pas nul. C'est donc :  $\delta_{0,1} = 0$ . En faisant le même raisonnement avec un méridien qui passe par le premier triangle on obtient que :  $\delta_{0,0'} = 0$ , autrement dit  $s_0 = s_1 = s'_0$ . Dans le premier triangle, on avait l'égalité :  $\delta_{1,0'} - z_1^{(1)} \delta_{1,0} + h = 0$ . On en déduit  $h = 0$ . Les équations  $\mathcal{A}_i$  et celle d'holonomie sont donc indépendantes. Ensuite, dans chaque triangle, on a une égalité du type  $\delta_{i,j} = z_i \delta_{i,k}$ . Comme  $\delta_{0,1} = 0$ , cela se propage à tous les  $\delta_{i,j}$ . Ainsi, tous les  $s_i$  sont égaux. Le noyau de la transposée de la jacobienne est engendré par le vecteur :  ${}^t(1, \dots, 1, 0)$ . Il est donc de dimension 1.  $\square$

On se place dans  $\mathcal{T}$  et on ne considère que les équations d'arêtes et d'holonomie. Si on ne travaille pas avec les équations de faces, tout se passe comme si on avait  $k$  surfaces obtenues comme le recollement de triangles euclidiens. La proposition 4.30 implique :

**Corollaire 4.31.** *Dans  $\mathcal{T}$ , pour un choix d'invariants, si dans chaque étoile,  $t(m_p)$  et  $t(l_p)$  sont non nulles, alors l'ensemble des équations d'arêtes est de rang  $2n - k$  et elles sont indépendantes des  $k$  équations d'holonomie.*

**Remarque 4.32.** Dans le cas CR, si  $t(l_p)$  est nul, alors l'image de la longitude peut être triviale ou une translation verticale.

## Chapitre 5

# Représentations pour l'entrelacs de Whitehead

Dans [PW], Parker et Will étudient les groupes engendrés par deux applications unipotentes dont le produit est aussi unipotent. On constate que ces groupes forment une famille de représentations du groupe fondamental du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead. Si on voit cette variété comme le recollement de quatre tétraèdres, on obtient ainsi une famille à deux paramètres de solutions aux équations liées au recollement des tétraèdres. Dans cette famille, l'holonomie n'est pas constante. Pour un des sommets, elle est parabolique unipotente, pour l'autre, elle varie avec les paramètres.

### 5.1 Le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead

Le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead est obtenu en recollant les faces d'un octogone comme l'indique la figure 5.2. Les faces  $f_i$  et  $f'_i$  sont identifiées. L'octogone compte 12 arêtes et 6 sommets avant recollement. Après identification, il reste 3 arêtes, symbolisées par  $>$ ,  $\gg$  et  $>|$  et deux sommets (le premier représenté par  $\circ$  et le second avec  $\bullet$ ).

Le groupe fondamental du complémentaire de l'entrelacs est engendré par les applications de recollement de faces. Celle qui associe  $f_i$  à  $f'_i$  est notée  $g_i$ . Les figures 5.2, 5.3 et 5.4 nous permettent de déterminer l'holonomie autour de chaque sommet. Pour le premier sommet de la figure 5.3, l'image par la représentation de la longitude est  $g_3 g_4 g_3^{-1} g_4^{-1} = [g_3, g_4]$  et pour le méridien :  $g_1 g_4^{-1}$  Pour le second sommet, on a pour

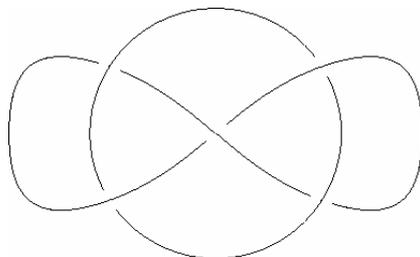


FIG. 5.1: L'entrelacs de Whitehead

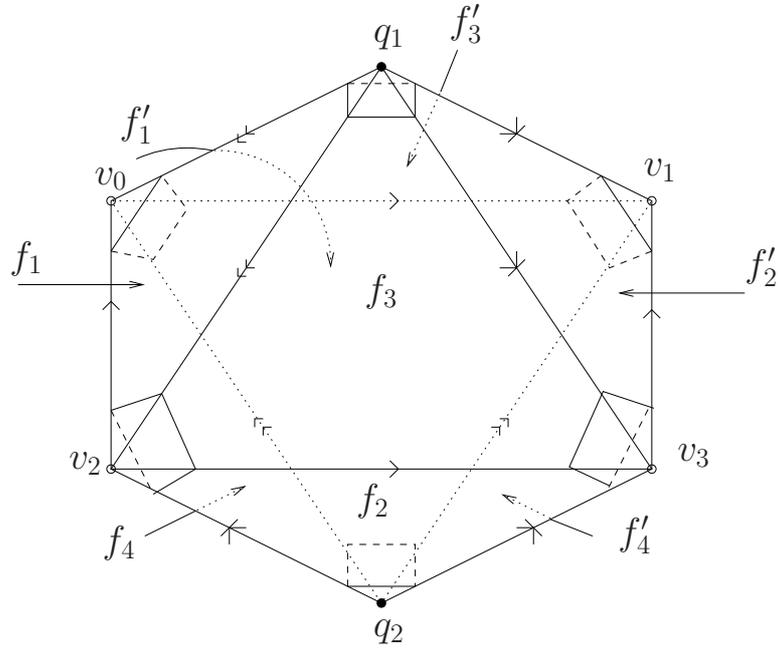


FIG. 5.2: Le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead obtenu comme recollement de quatre tétraèdres. On identifie les faces  $f_i$  et  $f'_i$ .

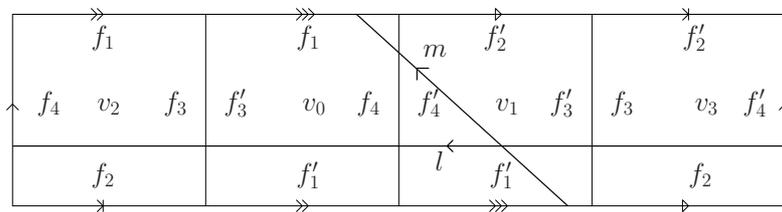
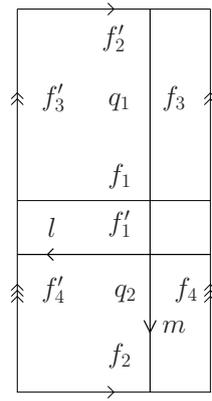


FIG. 5.3: L'étoile du premier sommet  $\circ$  avec une médiane et une longueur

FIG. 5.4: L'étoile du second sommet  $\bullet$  avec une médiane et une longitude

la longitude :  $g_4^{-1}$  et le méridien :  $g_1 g_2$ .

## 5.2 La famille de représentations de Parker-Will

Dans [PW], les auteurs déterminent à conjugaison près tous les couples de matrices  $(A, B)$  de  $\text{PU}(2,1)$  tels que  $A$ ,  $B$ ,  $AB$  sont paraboliques unipotentes. Ils obtiennent une famille de paires  $(A, B)$  à deux paramètres. Ces matrices permettent de construire une famille de représentations pour l'entrelacs du nœud de Whitehead. Parmi ces représentations, l'une est celle de R. Schwartz, décrite dans [Sch07].

**Théorème 5.1.** *Soient  $A$  et  $B$  deux applications paraboliques unipotentes. Le produit  $AB$  est parabolique unipotent si et seulement si  $A$  et  $B$  sont conjuguées dans  $\text{PU}(2,1)$  à une paire du type :*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2\sqrt{2}\sqrt{\cos \alpha_1} \cos \alpha_2 & -4 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 e^{-i\alpha_2} \\ 0 & 1 & 2\sqrt{2}\sqrt{\cos \alpha_1} \cos \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2}\sqrt{\cos \alpha_1} \cos \alpha_2 e^{i\alpha_1} & 1 & 0 \\ -4 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 e^{i\alpha_2} & -2\sqrt{2}\sqrt{\cos \alpha_1} \cos \alpha_2 e^{-i\alpha_1} & 1 \end{bmatrix}$$

avec  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  deux paramètres dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

Le commutateur  $[A, B]$  est parabolique si et seulement si les paramètres  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  vérifient la relation suivante :

$$-4096 \cos^4 \alpha_1 \cos^6 \alpha_2 \sin^2 \alpha_2 + 1152 \cos^2 \alpha_1 \cos^4 \alpha_2 - 27 = 0. \quad (5.1)$$

$[A, B]$  est aussi unipotente dans l'unique cas où  $\alpha_1 = 0$  et  $\alpha_2 = \arccos(\frac{\sqrt{6}}{4})$ .

**Notation 5.2.** Si  $G$  est une transformation parabolique,  $p_G$  désigne l'unique point à l'infini fixé par  $G$ . Si  $G$  est loxodromique,  $p_{G,\lambda}$  désigne le point fixe de  $G$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . On place aux sommets d'un octogone comme indiqué figure 5.5 les points suivants :  $p_A, p_B, p_{AB}, p_{BA}$ . Les deux commutateurs  $[A, B]$  et  $[A^{-1}, B^{-1}]$  sont conjugués par  $BA$ . Ils sont donc tous les deux du même type. Par la suite, on suppose que le commutateur est soit parabolique, soit loxodromique. On parlera donc de  $p_{[A,B]}$  et  $p_{[A^{-1}, B^{-1}]}$  ou bien de  $p_{[A,B],\lambda}$  et  $p_{[A^{-1}, B^{-1}],\lambda}$ .

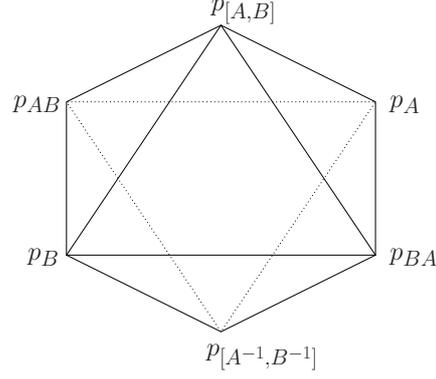


FIG. 5.5: Dans le cas où  $[A, B]$  est parabolique, tous les sommets  $p_G$  sont des points fixes paraboliques.

Les coordonnées des relevés des points dans  $\mathbb{C}^3$  sont :

$$\mathbf{p}_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_{AB} = \begin{bmatrix} -e^{-i\alpha_1} \\ \sqrt{2} \cos \alpha_1 e^{i\alpha_2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_{BA} = \begin{bmatrix} -e^{-i\alpha_1} \\ -\sqrt{2} \cos \alpha_1 e^{-i\alpha_2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Remarque 5.3.** Dans, [PW], les auteurs montrent que les deux paramètres sont des invariants de Cartan de triplets de points pris parmi les  $p_G$  :

$$\alpha_1 = \mathbb{A}(p_A, p_B, p_{AB}) = \mathbb{A}(p_A, p_B, p_{BA})$$

$$\alpha_2 = \mathbb{A}(p_A, p_{BA}, p_{AB}) = \mathbb{A}(p_B, p_{BA}, p_{AB}).$$

D'après la remarque faite en 1.59, il existe deux applications qui permutent les sommets de la façon suivante :

$$S : p_A \longrightarrow p_B \longrightarrow p_{AB} \longrightarrow p_A \quad T : p_A \longrightarrow p_B \longrightarrow p_{BA} \longrightarrow p_A.$$

Les trois points  $p_A, p_B, p_{AB}$  ne sont pas dans une même droite complexe (le cas  $\cos \alpha_1 = 0$  est exclu). Les applications  $S$  et  $T$  sont donc déterminées de façon unique. Elles sont elliptiques, d'ordre 3. Dans  $SU(2,1)$ , elles sont représentées par les matrices suivantes :

$$S = -e^{i\frac{2}{3}\alpha_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{-i\alpha_1} \\ 0 & 1 & -\sqrt{2}\sqrt{\cos \alpha_1} e^{i\alpha_2} \\ e^{-i\alpha_1} & \sqrt{2}\sqrt{\cos \alpha_1} e^{-i\alpha_2} e^{i\alpha_1} & -1 \end{bmatrix}$$

$$T = -e^{i\frac{2}{3}\alpha_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{-i\alpha_1} \\ 0 & 1 & \sqrt{2}\sqrt{\cos \alpha_1} e^{-i\alpha_2} \\ e^{-i\alpha_1} & \sqrt{2}\sqrt{\cos \alpha_1} (-2 \cos \alpha_2 e^{-i\alpha_1} + e^{-i\alpha_2} e^{i\alpha_1}) & -1 \end{bmatrix}.$$

**Proposition 5.4.** *Le groupe  $\langle S, T \rangle$  est une représentation du groupe fondamental du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead.*

*L'holonomie pour le premier sommet est toujours unipotente. Pour le second, l'holonomie dépend du commutateur  $[A, B]$ .*

*Démonstration.* On commence par exprimer  $A$  et  $B$  en fonction de  $S$  et  $T$ . Par un calcul direct, on montre que :

$$A = S^{-1}T \quad \text{et} \quad B = TS^{-1}.$$

En utilisant les relations  $S^3 = T^3 = 1$ , les commutateurs s'écrivent :

$$\begin{aligned} [A, B] &= S^{-1}TTS^{-1}T^{-1}SST^{-1} = (TS)^{-3} \\ [A^{-1}, B^{-1}] &= T^{-1}SST^{-1}S^{-1}TTS^{-1} = (ST)^{-3}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Il vient que les commutateurs sont conjugués *via*  $S$  et  $T$  :

$$S[A, B]S^{-1} = [A^{-1}, B^{-1}] \quad T[A^{-1}, B^{-1}]T^{-1} = [A, B]. \quad (5.3)$$

Dans le cas où  $[A, B]$  est parabolique, on en déduit que  $S$  et  $T$  échangent les points fixes des commutateurs :

$$S(p_{[A, B]}) = p_{[A^{-1}, B^{-1}]} \quad T(p_{[A^{-1}, B^{-1}]}) = p_{[A, B]}.$$

Si le commutateur  $[A, B]$  est loxodromique,  $[A^{-1}, B^{-1}]$  l'est aussi et a les mêmes valeurs propres. A nouveau, les égalités (5.3) impliquent que :

$$S(p_{[A, B], \lambda}) = p_{[A^{-1}, B^{-1], \lambda}} \quad T(p_{[A^{-1}, B^{-1], \lambda}) = p_{[A, B], \lambda}.$$

Par la suite, on omettra l'indice  $\lambda$  car les deux cas fonctionnent de la même façon. Le groupe fondamental est engendré par les applications d'identification de faces  $g_i$ . La transformation  $S$  envoie  $(p_B, p_{AB}, p_{[A, B]})$  sur  $(p_{AB}, p_A, p_{[A^{-1}, B^{-1}]})$ , autrement dit  $f_1$  sur  $f'_1$ . En suivant ainsi les images de sommets, on identifie les  $g_i$  :

$$g_1 = S, \quad g_2 = T, \quad g_3 = S^{-1}T^{-1}, \quad g_4 = T^{-1}S^{-1}.$$

On détermine l'holonomie pour chaque étoile. Pour la première :

$$\begin{aligned} \text{méridien} : \quad g_1 g_4^{-1} &= SST = S^{-1}T = A \\ \text{longitude} : \quad [g_3, g_4] &= S^{-1}T^{-1}T^{-1}S^{-1}T SST = (S^{-1}T)^3 = A^3. \end{aligned}$$

A chaque fois, on a une transformation parabolique unipotente. Pour la deuxième étoile, on a :

$$\text{méridien} : g_1 g_2 = ST \quad \text{longitude} : g_4^{-1} = ST.$$

D'après (5.2), on a :  $(ST)^3 = [A^{-1}, B^{-1}]^{-1}$ . Dans ce cas, l'holonomie dépend du commutateur.  $\square$

**Proposition 5.5.** *Lorsque  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  varient, l'holonomie du second sommet n'est jamais constante. Quand  $(\alpha_1, \alpha_2)$  vérifient la relation (5.1), l'holonomie est ellipto-parabolique sauf en  $\alpha_1 = 0$  et  $\alpha_2 = \arccos(\frac{\sqrt{6}}{4})$  où elle est unipotente.*

*Démonstration.* L'holonomie pour le second sommet est  $ST$ . Sa nature est spécifiée par sa trace. Comme  $(ST)^3 = [A^{-1}, B^{-1}]^{-1}$ , on étudie la trace du commutateur donnée par la formule ci-dessous, démontrée dans [PW] :

$$\text{Tr}([A, B]) = 3 - 192 \cos^2 \alpha_1 \cos^4 \alpha_2 + 512 \cos^3 \alpha_1 \cos^6 \alpha_2 e^{-i\alpha_1}.$$

Le jacobien de la fonction  $(\alpha_1, \alpha_2) \mapsto (\operatorname{Re} \operatorname{Tr} [A, B], \operatorname{Im} \operatorname{Tr} [A, B])$  sur  $]-\pi/2, \pi/2[^2$  est :

$$\frac{-393216 \cos^6 \alpha_1 \cos^9 \alpha_2 (1 - 4 \cos^2 \alpha_2)}{\sin \alpha_1}.$$

Il s'annule pour  $\cos \alpha_2 = \pm \frac{1}{2}$  qui, toujours d'après [PW] correspond au cas où le commutateur est une réflexion complexe donc elliptique, cas qu'on a exclu. Une variation des paramètres  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  entraîne une variation de la trace, ce qui implique que la classe de conjugaison de l'holonomie varie.

Lorsque  $(\alpha_1, \alpha_2)$  vérifient la relation (5.1), d'après le théorème 5.1, le commutateur est parabolique et ainsi l'holonomie l'est aussi. L'application  $(ST)^3 = [A^{-1}, B^{-1}]^{-1}$  est unipotente si et seulement si le commutateur l'est, ce qui est le cas uniquement lorsque :  $\alpha_1 = 0$  et  $\cos \alpha_2 = \frac{\sqrt{6}}{4}$ .  $\square$

**Remarque 5.6.** On obtient une famille d'invariants solutions du système d'équations liées au recollement des tétraèdres. Mais la valeur de l'équation d'holonomie pour le second sommet n'est jamais constante. Si on fixe cette valeur, on a au plus une solution dans la famille. Il y a ici rigidité à holonomie fixée.

### 5.3 Géométrisation CR par Schwartz pour l'entrelacs de Whitehead

Dans [Sch07], Schwartz munit le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead d'une structure CR-sphérique complète. Il obtient une représentation du groupe fondamental à partir d'un groupe triangulaire de réflexion complexe.

**Définition 5.7.** Un groupe *triangulaire idéal de réflexions complexes* est l'image d'une représentation  $\rho : G \rightarrow \operatorname{PU}(2,1)$ . Le groupe  $G$  est le produit libre :  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ . Les images par  $\rho$  des générateurs sont notées  $I_0, I_1, I_2$ . Elles sont chacune une réflexion complexe. Elles vérifient :  $I_i I_j$  ( $i \neq j$ ) est parabolique.

Goldman, Parker dans [GP92] puis Schwartz dans [Sch01] classifient les représentations qui sont fidèles, discrètes parmi les groupes triangulaires de réflexions complexes. Il existe notamment une représentation  $\rho_0$  telle que  $I_0 I_1 I_2$  est parabolique. Schwartz note  $\Gamma'$  l'image de  $\rho_0$  dans  $\operatorname{PU}(2,1)$ . Le groupe  $\Gamma$  est le sous-groupe d'indice deux engendré par  $I_0 I_1, I_1 I_2$  et  $I_2 I_0$ . Il existe une application  $\Sigma$  qui permute les  $\mathbb{C}$ -cercles fixés par les  $I_j$ . En fait :  $\Sigma I_j \Sigma^{-1} = I_{j+1}$  pour  $j = 0, 1$ . Le groupe  $\Gamma_3 = \langle \Sigma, \Gamma' \rangle$  est commensurable avec  $\Gamma$  (l'indice 3 est en référence à l'ordre de  $\Sigma$ ). On retrouve  $\Gamma_3$  dans la famille de représentations précédemment étudiée :

$$\text{pour } \cos \alpha_1 = \frac{\sqrt{6}}{16} \text{ et } \alpha_2 = 0 \quad \text{on a : } \langle S, T \rangle = \Gamma_3.$$

On identifie les différents éléments :

$$\begin{aligned} S &= \Sigma & T &= I_0 \Sigma I_0^{-1} \\ A &= I_2 I_0 & B &= I_0 I_1 & AB &= I_2 I_1 & [A, B] &= (I_2 I_1 I_0)^2. \end{aligned}$$

**Théorème 5.8.** ([Sch07]) *Le groupe  $\Gamma_3$  est discret et le quotient  $\Omega/\Gamma_3$  est homéomorphe au complémentaire de l'entrelacs de Whitehead.*

## 5.4 Des solutions aux équations

Pour trianguler l'octogone, on ajoute une arête centrale et on obtient quatre tétraèdres qu'on décore comme sur la figure 5.6. Les équations de recollement qu'on obtient sont les suivantes (avec les notations de la figure 5.6) :

Équations de faces :

$$\begin{array}{ll} B_{10}B_{20}B_{30}D_{10}D_{20}D_{30} = 1 & C_{10}C_{20}C_{30}D_{01}D_{21}D_{31} = 1 \\ B_{01}B_{21}B_{31}E_{10}E_{20}E_{30} = 1 & C_{01}C_{21}C_{31}E_{01}E_{21}E_{31} = 1 \\ B_{02}B_{12}B_{32}E_{03}E_{13}E_{23} = 1 & C_{03}C_{13}C_{23}D_{02}D_{12}D_{32} = 1 \\ B_{03}B_{13}B_{23}C_{02}C_{12}C_{32} = 1 & E_{02}E_{12}E_{32}D_{03}D_{13}D_{23} = 1 \end{array}$$

Équations d'arêtes :

$$\begin{array}{ll} \text{Arête } \epsilon : & B_{01}C_{01}D_{01}E_{01} = 1 \quad \text{Arête } b : \quad B_{20}B_{30}B_{31}C_{30}D_{21}E_{21}E_{31}E_{20} = 1 \\ & B_{10}C_{10}D_{10}E_{10} = 1 \quad \quad \quad B_{02}B_{03}B_{13}C_{03}D_{12}E_{12}E_{13}E_{02} = 1 \\ \text{Arête } a : & B_{23}C_{32}D_{32}E_{23} = 1 \quad \text{Arête } c : \quad B_{21}C_{31}C_{21}C_{20}D_{30}D_{20}D_{31}E_{30} = 1 \\ & B_{32}C_{23}D_{23}E_{32} = 1 \quad \quad \quad B_{12}C_{13}C_{12}C_{02}D_{03}D_{02}D_{13}E_{03} = 1 \end{array}$$

Équations d'holonomie :

$$\begin{array}{l} \text{pour le sommet } \circ : \quad B_{32} \frac{1}{D_{21}} E_{30} = 1 \quad C_{20} \frac{1}{D_{31}} \frac{1}{B_{21}} C_{30} E_{20} \frac{1}{B_{31}} \frac{1}{D_{21}} E_{30} = 1 \\ \text{pour le sommet } \bullet : \quad E_{02} \frac{1}{B_{01}} C_{03} = 1 \quad B_{03} \frac{1}{E_{01}} D_{02} C_{12} \frac{1}{D_{10}} E_{13} = 1 \end{array}$$

### 5.4.1 La solution de Schwartz

Les invariants qui correspondent à la solution de Schwartz sont :

$$\begin{array}{llll} B_{01} = -\frac{1}{8} + i \frac{\sqrt{5}\sqrt{3}}{8} & B_{10} = -2 & B_{23} = -\frac{3}{4} + i \frac{\sqrt{5}\sqrt{3}}{4} & B_{32} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{5}\sqrt{3}}{6} \\ C_{01} = B_{10} & C_{10} = B_{01} & C_{23} = B_{32} & C_{32} = B_{23} \\ D_{01} = \overline{B_{01}} & D_{10} = \overline{B_{10}} & D_{23} = \overline{B_{23}} & D_{32} = \overline{B_{32}} \\ E_{01} = \overline{B_{10}} & E_{10} = \overline{B_{01}} & E_{23} = \overline{B_{32}} & E_{32} = \overline{B_{23}}. \end{array}$$

Dans ce cas, les équations d'holonomie associées au sommet  $\bullet$  ne sont pas vérifiées car le commutateur n'est pas une transformation unipotente.

### 5.4.2 Une solution à holonomie périphérique unipotente

Lorsque  $\alpha_1 = 0$  et  $\alpha_2 = \arccos(\frac{\sqrt{6}}{4})$ , les images des longitudes et méridiens sont des applications unipotentes. Les équations d'holonomie sont donc vérifiées. Les invariants sont dans ce cas :

$$B_{01} = \frac{7}{4} - i \frac{\sqrt{5}\sqrt{3}}{4} \quad B_{10} = -\frac{1}{8} + i \frac{\sqrt{5}\sqrt{3}}{8} \quad B_{23} = \overline{B_{01}} \quad B_{32} = \overline{B_{10}}.$$

Les autres invariants vérifient les mêmes relations que la solution de Schwartz.

### 5.4.3 Une solution dégénérée

Il existe des solutions qui ne sont pas issues de la famille de Parker-Will. Ses solutions sont données par les invariants ci-dessous. On obtient une solution dégénérée puisque deux tétraèdres sont confondus (voir la figure 5.7).

$$\begin{aligned}
 B_{01} &= e^{it} & B_{10} &= e^{-it} & B_{23} &= e^{it} & B_{32} &= e^{-it} \\
 C_{01} &= B_{01} & C_{10} &= B_{10} & C_{23} &= B_{23} & C_{32} &= B_{32} \\
 D_{01} &= e^{-it} & D_{10} &= e^{it} & D_{23} &= e^{it} & D_{32} &= e^{-it} \\
 E_{01} &= D_{01} & E_{10} &= D_{10} & E_{23} &= D_{23} & E_{32} &= D_{32}.
 \end{aligned}$$

La représentation obtenue est engendrée par les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E = e^{-it/3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{it} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

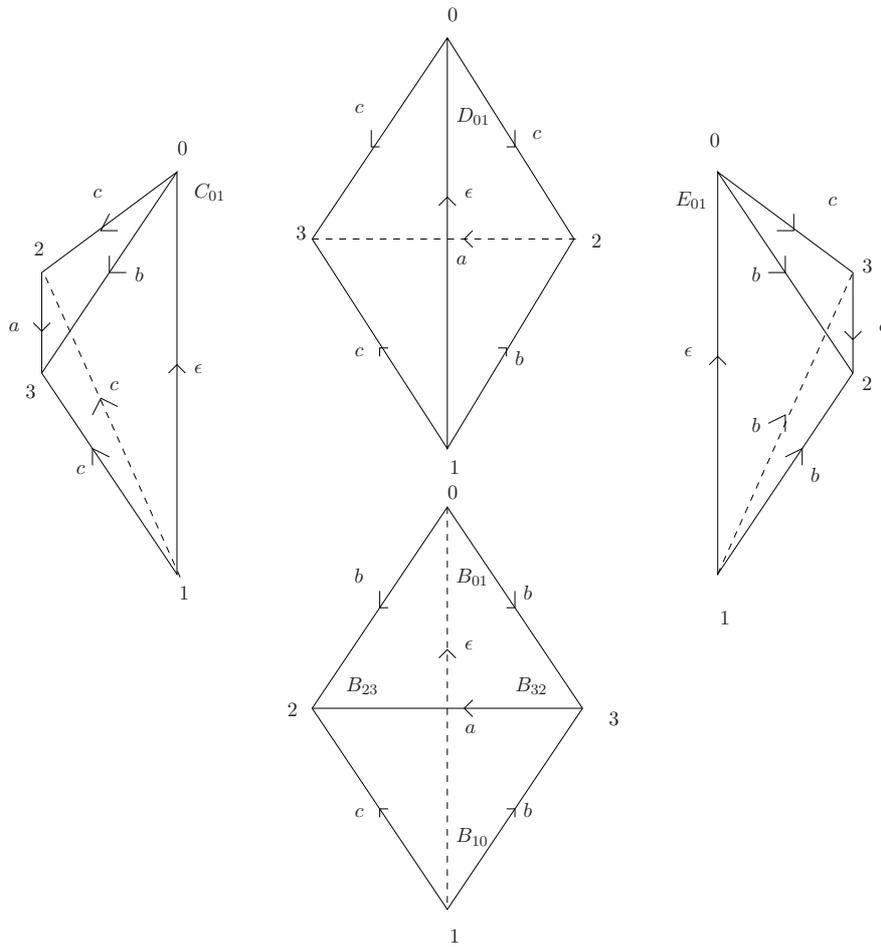


FIG. 5.6: Les quatre tétraèdres CR avec leurs invariants qui triangulent le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead.

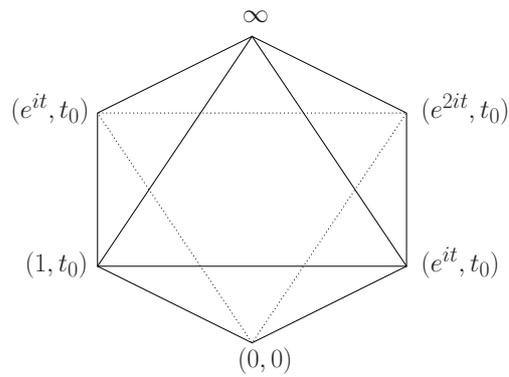


FIG. 5.7: Coordonnées des sommets à la solution dégénérée avec  $t_0 = i \frac{e^{it} + 1}{e^{it} - 1}$ . Les tétraèdres sont confondus.



## Chapitre 6

# Corps de trace de sous-groupes de $SU(n,1)$

Dans ce chapitre, nous étudions le corps engendré par les traces des éléments de sous-groupes de  $SU(n,1)$ . Sous certaines hypothèses, le corps de trace d'un groupe  $\Gamma \subset SU(2,1)$  est égal au corps engendré par les coefficients des matrices de  $\Gamma$ . Si le groupe est l'image d'une représentation du groupe fondamental d'une variété de dimension trois, triangulée, alors on peut relier le corps de trace à un invariant géométrique. Dans la dernière partie, on étudiera le corps de trace pour des groupes arithmétiques de type un de  $SU(n,1)$ .

### 6.1 Corps de trace

**Notation 6.1.** Pour tout groupe  $G$  dans  $SU(2,1)$ , on définit le corps  $\text{Tr}(G)$  et l'algèbre  $A(G)$  comme suit :

$$\text{Tr}(G) = \mathbb{Q}(\text{Tr}(\gamma) : \gamma \in G),$$
$$A(G) = \left\{ \sum_i a_i \gamma_i : a_i \in \text{Tr}(G), \gamma_i \in G \right\}.$$

Le groupe engendré par les cubes est noté :

$$G^{(3)} = \langle g^3 \mid g \in G \rangle.$$

Si on considère un groupe  $\Gamma$  de  $PU(2,1)$ , chacun de ses éléments  $\gamma \in \Gamma$  a trois relevés dans  $SU(2,1)$  :  $\tilde{\gamma}, \omega\tilde{\gamma}, \omega^2\tilde{\gamma}$  (où  $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ , racine cubique de l'unité). La trace de  $\gamma$  n'est pas bien définie. Par contre, on peut donner un sens à  $\text{Tr} \gamma^3 = \text{Tr} \tilde{\gamma}^3$ . On note  $\tilde{\Gamma}$  le groupe de tous les relevés dans  $SU(2,1)$  de tous les éléments de  $\Gamma$ . Ce groupe des relevés satisfait la suite exacte :  $0 \rightarrow \mathbb{Z}_3 \rightarrow \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma \rightarrow 1$ . Le corps  $\text{Tr} \tilde{\Gamma}$  est stable par conjugaison. En effet, pour  $M \in SU(2,1)$ ,  $M^{-1} = J_1 {}^t \overline{M} J_1$  et donc :  $\text{Tr}(M^{-1}) = \overline{\text{Tr} M}$ .

On s'intéressera au corps  $\text{Tr}(\tilde{\Gamma}^{(3)})$ . Il est noté  $k(\Gamma)$ .

**Exemple 6.2.** Soit  $\mathcal{O}_d$  l'anneau d'entier du corps quadratique  $\mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ , où  $d$  est un entier positif, sans facteur carré. Si  $d \equiv 3[4]$ ,  $\mathcal{O}_d = \mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{d}}{2}]$  et dans les autres cas,  $\mathcal{O}_d = \mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$ . On considère  $G$  le sous-groupe de  $SU(2,1)$  à coefficients dans  $\mathcal{O}_d$ , et on note  $\Gamma$  son projeté dans  $PU(2,1)$ . Alors  $k(\Gamma) = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ . En effet, par définition,  $G^{(3)} = \tilde{\Gamma}^{(3)}$ . L'inclusion

$\text{Tr}(\tilde{\Gamma}^{(3)}) \subset \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$  est évidente. Pour la seconde, il suffit de considérer la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} i\sqrt{d} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{SU}(2,1, \mathcal{O}_d).$$

La trace de  $M^3$  donne :  $\text{Tr}(M^3) = i\sqrt{d}(3-d) - 1$ . Donc  $i\sqrt{d} \in \text{Tr}(\tilde{\Gamma}^{(3)})$ .

**Définition 6.3.** Deux groupes  $G$  et  $G'$  sont dits *commensurables* si leur intersection est d'indice fini à la fois dans  $G$  et  $G'$ .

**Exemple 6.4.** D'après les solutions au problème de Burnside, si  $\Gamma$  est un groupe engendré par un nombre fini d'éléments,  $\Gamma^{(3)}$  est d'indice fini dans  $\Gamma$  : ils sont commensurables.

Dans [McR], l'auteur prouve que  $k(\Gamma)$  est un invariant de commensurabilité. On répète ici la preuve :

**Proposition 6.5.** ([McR])  $k(\Gamma)$  est un invariant de commensurabilité.

*Démonstration.* Soit  $G$  un groupe dans  $SU(2,1)$ . On commence par prouver que pour tout sous-groupe d'indice fini  $G_1 \subset G$ , on a :

$$\text{Tr}(G^{(3)}) \subset \text{Tr} G_1.$$

Plutôt que  $G_1$ , on va plutôt considérer  $\bigcap_{g \in G} gG_1g^{-1}$  qu'on notera encore  $G_1$ . C'est un sous-groupe normal de  $G$  par construction et il est encore d'indice fini. La conjugaison par un élément  $g \in G$  induit un automorphisme de  $G_1$  :

$$\begin{aligned} G_1 &\longrightarrow G_1 \\ g_1 &\longmapsto gg_1g^{-1}. \end{aligned}$$

Cette application s'étend à l'algèbre  $A(G_1)$  en un automorphisme  $\phi_g$ . D'après [McR], l'ensemble  $A(G_1)$  est une algèbre centrale simple sur  $\text{Tr} G_1$ . Le théorème de Skolem-Noether implique que  $\phi_g$  est un automorphisme intérieur :

$$\exists g_1 \in (A(G_1))^\times, \forall x \in A(G_1) \quad \phi_g(x) = g_1 x g_1^{-1}.$$

Dans  $A(G_1) \otimes \mathbb{C} \cong M(3, \mathbb{C})$ , tous les éléments commutent avec  $g_1^{-1}g$ . Le centre de  $M(3, \mathbb{C})$  étant réduit aux homothéties, il existe  $\beta \in \mathbb{C}^*$  tel que :  $g_1^{-1}g = \beta \text{Id}$ . Comme  $g \in \text{SU}(2,1)$ , le calcul du déterminant donne :  $\det(g_1^{-1}g) = \det(g_1^{-1}) = \beta^3$ . Le polynôme caractéristique d'une matrice  $M$  est à coefficient dans  $\text{Tr} \langle M \rangle$  (voir [Rei03]). Ainsi,  $\det(g_1) \text{Id} \in A(G_1)$ . D'où :  $\beta^3 \in \text{Tr}(G_1)$  et ainsi :  $g^3 = \beta^3 g_1^3 \in A(G_1)$ . En particulier, le groupe engendré par les cubes est inclus dans  $A(G_1)$ , ce qui permet de conclure :  $\text{Tr}(G^{(3)}) \subset \text{Tr}(G_1)$ .

Maintenant, on prend  $\Gamma$  et  $\Delta$  deux groupes commensurables dans  $\text{PU}(2,1)$ . D'après la remarque 6.4,  $\Gamma^{(3)} \cap \Delta^{(3)}$  est d'indice fini à la fois dans  $\Gamma$  et  $\Delta$ . C'est aussi le cas pour les groupes de relevés :  $[\tilde{\Gamma} : \tilde{\Gamma}^{(3)} \cap \tilde{\Delta}^{(3)}] < \infty$ . Cela implique l'inclusion :  $\text{Tr} \tilde{\Gamma}^{(3)} \subset \text{Tr}(\tilde{\Gamma}^{(3)} \cap \tilde{\Delta}^{(3)})$ . Comme par ailleurs  $\tilde{\Gamma}^{(3)} \cap \tilde{\Delta}^{(3)} \subset \tilde{\Delta}^{(3)}$ , cela entraîne :

$$k(\Gamma) = \text{Tr} \tilde{\Gamma}^{(3)} \subset \text{Tr} \tilde{\Delta}^{(3)} = k(\Delta).$$

Par symétrie des rôles, on prouve le résultat. □

### 6.1.1 Corps des coefficients d'un groupe de matrices

La proposition suivante relie le corps de trace  $\text{Tr } \tilde{\Gamma}$  et les coefficients des matrices de  $\tilde{\Gamma}$  :

**Théorème 6.6.** *Soit  $G$  un sous-groupe de  $\text{SU}(2,1)$ . On suppose que  $G$  contient un élément parabolique, noté  $P$ . Si  $G$  est Zariski dense, alors il est conjugué à un groupe contenu dans  $\text{SU}(2,1, \text{Tr}(G))$ .*

Pour la preuve, on aura besoin des deux lemmes suivants :

**Lemme 6.7.** *On considère le groupe des applications paraboliques qui fixent l'infini. Les dilatations  $\delta_\mu$  qui fixent  $\infty$  et  $(0,0)$  agissent par conjugaison sur le groupe. Les classes d'équivalence relative à cette action sont représentées par :*

$$e^{i\theta} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{i}{2} \\ 0 & e^{-3i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad e^{i\theta} \begin{pmatrix} 1 & -e^{3i\theta} & \frac{-1+is}{2} \\ 0 & e^{-3i\theta} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{avec } s \text{ réel}). \quad (6.1)$$

*Démonstration.* On se place dans le groupe d'Heisenberg. Les paraboliques qui fixent l'infini agissent sur  $\mathcal{H}$  comme :

$$P_{e^{i\theta}, z, t} : (w, s) \mapsto (e^{-3i\theta}w + z, s + t - 2 \text{Im}(e^{-3i\theta}w\bar{z})).$$

Les dilatations considérées agissent ainsi :  $\delta_\mu(w, s) = (\mu w, |\mu|^2 s)$ . Le calcul du conjugué de  $P$  par  $\delta_\mu$  donne :

$$\delta_\mu \circ P_{e^{i\theta}, z, t} \circ \delta_\mu^{-1} = P_{e^{i\theta}, z\mu, t|\mu|^2}.$$

Quand  $z = 0$ , on obtient la classe représentée par la première matrice. Dans le cas contraire, avec  $\delta_{1/z}$ , on obtient la seconde matrice.  $\square$

**Lemme 6.8.** *Soit  $P$  une matrice parabolique non-unipotente. Alors ses valeurs propres sont dans le corps engendré par  $\text{Tr } P, \overline{\text{Tr } P}$ .*

*Démonstration.* Les valeurs propres et la trace sont invariantes par conjugaison. À la section 1.3.1, on a vu que  $P$  est conjuguée à une matrice de la forme suivante :

$$P = e^{i\theta} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{i}{2} \\ 0 & e^{-3i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On cherche à écrire  $e^{i\theta}$  en fonction de  $\text{Tr}(P)$  :

$$\text{Tr}(P) = 2 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta - 1 + 2i \sin \theta (1 - \cos \theta) \quad \text{et} \quad |\text{Tr}(P)|^2 = 5 + 4 \cos 3\theta.$$

Par suite :

$$\cos \theta = \frac{\frac{|\text{Tr}(P)|^2 - 5}{4} + 2 \text{Re}(\text{Tr } P) + 2}{2 \text{Re}(\text{Tr } P) + 3} \quad \text{et} \quad i \sin \theta = \frac{i \text{Im}(\text{Tr } P)}{2(1 - \cos \theta)},$$

ce qui montre le résultat.  $\square$

On donne maintenant la preuve du théorème.

*Démonstration.* On commence par trouver huit matrices  $A_i \in G$  telles que  $(Id, A_1, \dots, A_8)$  est une base de  $M_9(\mathbb{C})$  et telles que les coefficients des  $A_i$  sont dans  $\text{Tr}(G)$ . Alors si  $X$  est une matrice dans  $G$ , ses coefficients sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} \text{Tr}(X) = a_0 \\ \text{Tr}(XA_1) = a_1 \\ \dots \\ \text{Tr}(XA_8) = a_8 \end{cases}$$

avec  $a_i$  dans  $\text{Tr}(G)$ . Ce système est linéaire, inversible, à coefficients dans  $\text{Tr}(G)$ . Donc  $X \in \text{SU}(2,1, \text{Tr}(G))$ .

Pour construire les huit matrices, on utilise la matrice parabolique  $P \in G$ . Comme le groupe  $G$  est supposé non-élémentaire, on peut toujours trouver une matrice  $L \in G$  qui ne fixe pas le point fixe de  $P$  et telle que  $P$  et  $L$  ne stabilisent pas une même droite complexe.

L'objectif est de montrer qu'il existe une représentation du groupe  $G$  telle que les coefficients de  $P$  et  $L$  sont dans  $\text{Tr}(G)$ . Quitte à conjuguer, on peut supposer que  $P$  fixe l'infini et que  $L$  envoie  $\infty$  sur  $0$ . Pour conserver ces deux propriétés, les seules conjugaisons autorisées sont celles obtenues par des dilatations type  $\delta_\mu$ . D'après le lemme 6.7, il y a deux types de classes d'équivalence pour  $P$  à dilatation près. On peut supposer que  $P$  est de la forme de l'une ou l'autre matrice données en (6.1).

La matrice  $L$  envoie l'infini sur  $0$ . Donc en toute généralité,  $L$  est de la forme suivante :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & -\bar{\lambda} & \frac{1}{\lambda}\xi \\ \lambda & \bar{\lambda}\xi & \frac{1}{2} \frac{-|\xi|^2 + iu}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Pour chaque cas, on montre que  $P$  et  $L$  sont dans  $\text{SU}(2,1, \text{Tr}(G))$ .

**Premier cas :**

$$P = e^{i\theta} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{i}{2} \\ 0 & e^{-3i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme  $L$  et  $P$  ne stabilisent pas une même droite complexe, on sait que  $\xi \neq 0$ . Pour éliminer  $\xi$  des matrices, on conjugue le groupe  $G$  par la matrice  $Y = \text{diag}(\frac{1}{\xi}, i, \xi)$ . Les éléments  $P$  et  $L$  deviennent :

$$P = e^{i\theta} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{i}{2|\xi|^2} \\ 0 & e^{-3i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\lambda|\xi|^2} \\ 0 & -\bar{\lambda} & \frac{i}{\lambda} \\ \lambda|\xi|^2 & -i|\xi|^2\bar{\lambda} & \frac{1}{2} \frac{-|\xi|^2 + iu}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

D'après le lemme 6.8, la valeur propre  $e^{i\theta}$  est dans  $\text{Tr} G$ . On pose :

$$t(X) = (\text{Tr} PX - e^{i\theta}\text{Tr} X)(e^{-2i\theta} + e^{i\theta}) - (\text{Tr} P^2X - e^{2i\theta}\text{Tr} X).$$

Un calcul rapide donne :  $t(L) = -\frac{e^{3\theta}-1}{2e^{i\theta}}i\lambda$ . Si  $e^{i\theta} \neq 1$ , comme  $e^{i\theta}$  et  $t(L)$  sont dans le corps de trace, alors la quantité  $i\lambda$  est dans  $\text{Tr}(G)$ . Dans le cas unipotent, lorsque  $e^{i\theta} = 1$ , on a alors  $\text{Tr}(LP) - \text{Tr}(L) = \frac{i\lambda}{2}$ . A nouveau :  $i\lambda \in \text{Tr}(G)$ .

Enfin,  $\text{Tr}(L) = -\frac{\bar{\lambda}}{\lambda} + \frac{1}{2} \frac{-|\xi|^2 + iu}{\lambda}$ . Comme  $\text{Tr}(G)$  est stable par conjugaison complexe, les quantités  $i|\xi|^2$  et  $u$  sont dans le corps de trace. Donc les matrices  $P$  et  $L$  sont dans  $\text{SU}(2,1, \text{Tr}(G))$ .

**Second cas :**

$P$  est de la forme suivante :  $e^{i\theta} \begin{pmatrix} 1 & -e^{3i\theta} & \frac{-1+is}{2} \\ 0 & e^{-3i\theta} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

A nouveau,  $e^{i\theta} \in \text{Tr } G$ . Ici, on a :  $t(L) = -\frac{1}{2}\lambda e^{-i\theta}(-1 - e^{3i\theta} - is + ie^{3i\theta}s)$ . Cette quantité est non nulle, sinon  $s$  serait égale au réel  $i\frac{1+e^{3i\theta}}{1-e^{3i\theta}}$ , et  $P = e^{i\theta} \begin{pmatrix} 1 & -e^{-3i\theta} & \frac{-1}{1-e^{3i\theta}} \\ 0 & e^{-3i\theta} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est

elliptique. Donc  $\frac{t(L^{-1})}{t(L)} = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda}$  est dans le corps de trace. Avec  $\text{Tr}(L)$  et  $\text{Tr}(L^{-1})$ , on montre que  $\frac{|\xi|^2}{\lambda}$  et  $i\frac{\xi}{\lambda}$  sont dans  $\text{Tr}(G)$ . La ligne suivante nous permet de conclure pour  $\xi$  :

$$4e^{i\theta} \frac{t([P, L])}{t(L)} - \text{Tr}((LP)^{-1}) - e^{-i\theta} \text{Tr}(L^{-1}) = -e^{2i\theta} \frac{\bar{\lambda}^2}{\lambda^2} \bar{\xi} + (e^{2i\theta} - e^{-i\theta}) \left( \frac{|\xi|^2}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda} \right) \in \text{Tr}(G).$$

Il s'ensuit que  $\lambda$  est dans le corps de trace. Pour le dernier coefficient  $is$ , on constate :

$$\text{Tr}(PL) - e^{i\theta} \text{Tr}(L) = \frac{e^{i\theta} \lambda}{2} is - \frac{e^{i\theta}}{2} \lambda - \frac{\bar{\lambda}}{\lambda} (e^{i\theta} - e^{-2i\theta} + e^{i\theta} \bar{\xi}) \in \text{Tr}(G).$$

On peut ainsi conclure que  $is \in \text{Tr}(G)$  de même que tous les coefficients de  $P$  et  $L$ .

Le groupe  $G$  étant supposé Zariski dense, on peut trouver dans  $\langle P, L \rangle$  une base de  $M_9(\mathbb{C})$ . Cette base est à coefficient dans  $\text{Tr } G$ . C'est la base  $(Id, A_1, \dots, A_8)$  cherchée qui complète la preuve.  $\square$

**Remarque 6.9.** L'hypothèse Zariski dense est nécessaire. Si on autorise  $G$  à fixer un point, un groupe d'isométries paraboliques unipotentes qui fixent l'infini vérifie  $\text{Tr}(G) = \mathbb{Q}$  tandis qu'on n'a aucun contrôle sur les coefficients des matrices.

Quant aux groupes fixant une droite complexe, on prend par exemple celui engendré par  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{i}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{i}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 2i & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Il satisfait :  $\text{Tr}(G) = \mathbb{Q}$ , mais aucun de ses groupes conjugués n'a ses coefficients dans  $\mathbb{R}$ .

## 6.2 Corps des invariants pour une variété triangulée

On peut trouver une description plus géométrique du corps de trace. On introduit pour cela un autre corps, celui des invariants. On reprend le cadre du chapitre 3 :  $M$  est l'intérieur d'une variété compacte avec  $k$  composantes de bord. On suppose que  $M$  admet une représentation  $\rho : \Pi_1(M) \rightarrow \text{PU}(2,1)$  construite à partir d'une triangulation CR de  $M$ .

**Définition 6.10.** On note  $k_\Delta$  le corps engendré par tous les invariants  $z_{ij}$  de tous les tétraèdres.

**Remarque 6.11.** On note  $\widehat{M}$  un revêtement fini de  $M$ . Les tétraèdres dans  $S^3$  qui triangulent  $\widehat{M}$  sont des images par  $\text{PU}(2,1)$  des tétraèdres de la triangulation de  $M$ . Le corps des invariants associé à  $\widehat{M}$  est alors le même que pour  $M$ .

On commence par prouver certaines propriétés de  $k_\Delta$ .

**Proposition 6.12.**

1.  $k_\Delta$  est stable par conjugaison complexe.
2. On peut toujours supposer que  $0, \infty$  et  $(1, t)$  sont des sommets de l'un des tétraèdres. Dans ce cas, le corps  $k_\Delta$  est engendré par les coordonnées des sommets de la triangulation. Plus précisément, si les relevés des points dans  $\mathbb{C}^3$  sont  $(w_1^{(j)}, w_2^{(j)}, 1)$ , alors  $k_\Delta = \mathbb{Q}(w_1^{(j)}, \overline{w_1^{(j)}}, w_2^{(j)}, \overline{w_2^{(j)}})$ .

*Démonstration.* (i) La formule suivante donne le conjugué complexe de  $z_{01}$  :

$$\overline{z_{01}} = \frac{(-z_{10} + z_{01}z_{10} + z_{32}z_{10} - z_{32})z_{23}}{z_{23}z_{01} - z_{23} + z_{01}z_{10} - z_{01}}$$

Donc,  $\overline{z_{01}} \in k_\Delta$ . Pour les autres invariants, on conclut avec le même type de formule.

(ii) La formule donnée à la proposition 2.13 donne les invariants comme des birapports complexes des sommets. Les invariants se calculent donc en fonction des coordonnées des sommets, ce qui nous permet de conclure pour la première inclusion. Pour la seconde, on sait que  ${}^t(1, 0, 0)$ ,  ${}^t(0, 0, 1)$  et  ${}^t(it, 0, 1)$  sont les sommets d'un tétraèdre. La quantité  $it$  est calculée à l'aide des invariants comme le montre la formule obtenue au lemme 2.14 :

$$it = \frac{z_{23}(z_{01} - 1) - z_{01}(z_{10} - 1)}{z_{23}(z_{01} - 1) + z_{01}(z_{10} - 1)}$$

Pour conclure, voyons comment dans un tétraèdre  $[p_0, p_1, p_2, p_3]$ , on peut calculer les coordonnées de  $p_3$  à l'aide des invariants et des trois autres sommets. Avec les expressions de  $z_{01}$  et  $z_{10}$  vus comme birapports complexes, on a :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{c}_{01} \rangle - \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_0 \rangle \frac{\langle \mathbf{p}_2, \mathbf{c}_{01} \rangle z_{01}}{\langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_0 \rangle} &= \left\langle \mathbf{p}_3, \mathbf{c}_{01} - \mathbf{p}_0 \frac{\langle \mathbf{c}_{01}, \mathbf{p}_2 \rangle \overline{z_{01}}}{\langle \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2 \rangle} \right\rangle = 0 \\ \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{c}_{01} \rangle - \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_1 \rangle \frac{\langle \mathbf{p}_2, \mathbf{c}_{01} \rangle}{\langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1 \rangle z_{10}} &= \left\langle \mathbf{p}_3, \mathbf{c}_{01} - \mathbf{p}_1 \frac{\langle \mathbf{c}_{01}, \mathbf{p}_2 \rangle}{\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle \overline{z_{10}}} \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

Les coordonnées de  $\mathbf{p}_3 = {}^t(w_1^{(3)}, w_2^{(3)}, 1)$  sont solutions d'un système linéaire inversible et donc sont dans  $k_\Delta$ .

De proche en proche, on montre ainsi que les coordonnées des sommets sont dans  $k_\Delta$ .  $\square$

**Proposition 6.13.** *Si les sommets de la triangulation sont tous des points fixes paraboliques et si le groupe  $\Gamma = \rho(\Pi_1(M))$  est Zariski dense alors  $k_\Delta = k(\Gamma)$ .*

**Remarque 6.14.** Dans le cas réel, les points à l'infini d'une variété hyperbolique réelle de volume fini sont tous paraboliques.

La première inclusion  $k(\Gamma) \subset k_\Delta$  est toujours vraie, même sans les hypothèses de la proposition. C'est une conséquence du lemme suivant :

**Lemme 6.15.** *Soit  $g \in \Gamma$  et  $M \in SU(2,1)$  un relevé de  $g$ . Les images par  $g$  de  $0, \infty, (1, t)$  sont respectivement  $p_0, p_1, p_2$ . Leurs coordonnées non-homogènes dans  $\mathbb{C}^3$  sont notées  $\mathbf{p}_i = {}^t(w_1^{(i)}, w_2^{(i)}, 1)$ . Soit  $K$  le corps stable par conjugaison complexe engendré par les coordonnées :  $K = \mathbb{Q}(it, w_k^{(j)}, \overline{w_k^{(j)}})$ . Alors  $M^3 \in SU(2, 1, K)$ .*

*Démonstration.* Si  $g$  envoie  $\infty$  sur  $p_0$  et  $(0,0)$  sur  $p_1$ , alors  $M$  est de la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} \mu w_1^{(0)} & a & \lambda w_1^{(1)} \\ \mu w_2^{(0)} & b & \lambda w_2^{(1)} \\ \mu & c & \lambda \end{pmatrix}.$$

La matrice  $M$  est dans  $SU(2,1)$  si elle satisfait  ${}^t\overline{M}JM = Id$  ce qui induit les relations suivantes pour les coefficients :

$$a = \frac{\overline{\lambda} \overline{w_1^{(0)} w_2^{(1)}} - \overline{w_2^{(0)} w_1^{(1)}}}{\lambda \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_0 \rangle} \quad b = \frac{\overline{\lambda} \overline{w_1^{(0)}} - \overline{w_1^{(1)}}}{\lambda \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_0 \rangle} \quad c = \frac{\overline{\lambda} \overline{w_2^{(1)}} - \overline{w_2^{(0)}}}{\lambda \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_0 \rangle} \quad \mu = \frac{1}{\overline{\lambda} \langle \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1 \rangle}.$$

$$M = \lambda \begin{pmatrix} \frac{w_1^{(0)}}{|\lambda|^2 \langle \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1 \rangle} & \frac{|\lambda|^2 \overline{w_1^{(0)} w_2^{(1)}} - \overline{w_2^{(0)} w_1^{(1)}}}{\lambda^3 \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_0 \rangle} & w_1^{(1)} \\ \frac{w_2^{(0)}}{|\lambda|^2 \langle \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1 \rangle} & \frac{|\lambda|^2 \overline{w_1^{(0)}} - \overline{w_1^{(1)}}}{\lambda^3 \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_0 \rangle} & w_2^{(1)} \\ 1 & \frac{|\lambda|^2 \overline{w_2^{(1)}} - \overline{w_2^{(0)}}}{\lambda^3 \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_0 \rangle} & 1 \end{pmatrix}.$$

L'image de  $(1, t)$  est la projection de  $\mathbf{p}_3$  :  $M \begin{pmatrix} \frac{-1+it}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} w_1^{(2)} \\ w_2^{(2)} \\ 1 \end{pmatrix}.$

En éliminant  $\alpha$ , on trouve :

$$|\lambda|^2 = \frac{-1+it}{2} \frac{\langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_0 \rangle}{\langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1 \rangle \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_0 \rangle} \quad \lambda^3 = -\frac{-1+it}{2} \frac{\langle \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1 \rangle \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_0 \rangle^2}{\det(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1 \rangle \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_0 \rangle^2}.$$

On constate que  $|\lambda|^2$  et  $\lambda^3$  sont dans  $K$ , mais  $\lambda$  ne l'est pas nécessairement. Les coefficients de la matrice  $\frac{1}{\lambda}M$  sont dans  $K$ , donc on ne peut rien conclure quant à  $M$ . Par contre, il devient évident que  $M^3$  est dans  $SU(2,1,K)$ .  $\square$

On utilise ce lemme pour démontrer la proposition.

*Démonstration.* Le groupe  $\tilde{\Gamma}$  est le groupe de tous les relevés des éléments de  $\Gamma$  dans  $SU(2,1)$ . Le lemme précédent montre que les coefficients des matrices de  $\tilde{\Gamma}^3$  sont dans  $k_\Delta$ . Ceci prouve la première inclusion.

Pour la seconde, on utilise le théorème 6.6, ainsi  $\tilde{\Gamma} \subset SU(2,1, \text{Tr}(\tilde{\Gamma}))$ . Pour calculer  $k_\Delta$ , on utilise les coordonnées des sommets. Par hypothèse, ce sont des points fixes paraboliques. Le lemme ci-dessous démontre que les coordonnées de ces points sont des fonctions rationnelles des coefficients des matrices de  $\tilde{\Gamma}$ . Cela nous permet de conclure que :  $k_\Delta \subset \text{Tr}(\tilde{\Gamma})$ . Le groupe  $\tilde{\Gamma}^{(3)}$  est d'indice fini dans  $\tilde{\Gamma}$ . D'après la remarque 6.11,  $k_\Delta \subset \text{Tr}(\tilde{\Gamma}^3) = k(\Gamma)$ .  $\square$

**Lemme 6.16.** *On note  $P$  un relevé dans  $SU(2,1)$  d'une transformation parabolique. Les coordonnées non-homogènes de son point fixe au bord sont données par  $\mathbf{p} = {}^t(w_1, w_2, 1)$ . Alors  $w_1$  et  $w_2$  sont dans le corps engendré par les coefficients de  $P$  et de  $\overline{P}$ .*

*Démonstration.* On note  $e^{i\theta}$  la valeur propre associée au vecteur propre  $\mathbf{p}$  de  $P$ . D'après le lemme 6.8, elle s'écrit avec la trace de  $P$  et de  $\overline{P}$ , donc elle est dans le corps des coefficients. Le vecteur  $\mathbf{p}$  satisfait la relation :  $(P - e^{i\theta} Id)\mathbf{p} = 0$ . On obtient un système linéaire en les variables  $w_1, w_2$  à coefficients dans le corps des entrées de  $P$ . Il est inversible car l'espace propre lié à  $e^{i\theta}$  est de dimension un. Donc les solutions  $(w_1, w_2)$  sont des fonctions rationnelles des coefficients de  $P$  et de  $\overline{P}$ .  $\square$

### 6.3 Corps de trace de groupes arithmétiques

On cherche à établir un lien entre corps de trace et corps des coefficients pour certains réseaux arithmétiques de  $SU(n,1)$ . On ne travaillera qu'avec les groupes arithmétiques de type un, donc on ne définira que ceux là. Une description complète des réseaux arithmétiques de  $SU(n,1)$  est faite dans [McR].

**Définition 6.17.** Soit  $F$  un corps de nombre totalement imaginaire et  $E$  une extension quadratique totalement imaginaire de  $F$ . On notera :  $E = F(\alpha)$ . Le degré  $[F : \mathbb{Q}]$  est noté  $d$ . A conjugaison près, il existe  $d$  plongements  $\tau_i : E \rightarrow \mathbb{C}$  et associés à chacun  $\sigma_i : F \rightarrow \mathbb{R}$ . On peut toujours supposer que  $E \subset \mathbb{C}$  et  $F = \mathbb{R} \cap E \subset \mathbb{R}$  et ainsi :  $\sigma_1 = Id$  et  $\tau_1 = Id$ .

Soit  $H$  une matrice hermitienne, de signature  $(n, 1)$  dont les coefficients sont dans  $E$ . On note  ${}^{\tau_i}H$  la matrice obtenue en remplaçant dans  $H$  les coefficients par leur image par  $\tau_i$ . La paire  $(H, E/F)$  est dite *admissible* si  $SU({}^{\tau_i}H)$  est compact pour  $i = 2, \dots, d$ .

L'ensemble  $\mathcal{O}_E$  est l'anneau d'entier de  $E$ . Le groupe  $SU(H, \mathcal{O}_E)$  est l'ensemble des matrices qui préservent  $H$  et dont les coefficients sont dans  $\mathcal{O}_E$ . C'est l'exemple canonique d'un réseau arithmétique quand  $(H, E/F)$  est admissible.

Un groupe  $G \subset SU(n, 1)$  est un *réseau arithmétique de type un* s'il est conjugué à un groupe commensurable avec  $SU(H, \mathcal{O}_E)$  pour un couple  $(H, E/F)$  admissible.

**Lemme 6.18.** Soit  $G$  un sous-groupe de  $SU(H, \mathcal{O}_E)$ . Si  $G$  contient une transformation loxodromique, alors  $Tr(G) = E$  ou  $Tr(G) = F$ .

*Démonstration.* On a toujours l'inclusion :  $Tr(G) \subset E$ . Soit  $Tr(G) = E$ , soit l'inclusion est stricte. Dans le second cas, comme  $[E : F] = 2$ , le corps  $Tr(G)$  est inclus dans  $F$ . On montre par l'absurde que dans ce cas,  $Tr(G) = F$ . Supposons  $Tr(G) \subsetneq F$ . Il existe alors un plongement  $\sigma : F \rightarrow \mathbb{R}$  qui n'est pas trivial et qui est tel que  $\sigma|_{Tr(G)} = Id$ . L'application  $\sigma$  est la restriction à  $F$  d'un plongement  $\tau : E \rightarrow \mathbb{C}$  qui n'est ni l'identité ni la conjugaison complexe.

On note  $g$  une transformation loxodromique de  $G$ . Deux de ses valeurs propres ne sont pas de module un :  $\lambda, \frac{1}{\lambda}$ . Les autres sont notées  $e^{i\theta_j}$ . Alors :

$$Tr g^m = \lambda^m + \frac{1}{\lambda^m} + e^{im\theta_1} + \dots + e^{im\theta_{n-1}}.$$

Ainsi,  $\lim_{m \rightarrow +\infty} Tr g^m = \infty$ . D'autre part,  $Tr(g) = \sigma(Tr(g)) = \tau(Tr(g)) = Tr({}^{\tau}g)$ . Le groupe  $G$  est inclus dans le groupe arithmétique  $SU(H, \mathcal{O}_E)$ . Donc  ${}^{\tau}g$  est dans le groupe compact  $SU({}^{\tau}H)$  et la fonction trace  $y$  est bornée. Cette contradiction prouve le résultat.  $\square$

**Proposition 6.19.** Soit  $G$  un réseau arithmétique de type un dans  $SU(n,1)$ . Alors, quitte à le conjuguer, les coefficients des matrices de  $G$  sont dans le corps  $Tr(G)(\alpha)$  (où  $E = F(\alpha)$ ).

*Démonstration.* Après conjugaison, on peut supposer que  $G$  est commensurable avec  $SU(H, \mathcal{O}_E)$ . On note  $G_1$  un groupe qui est d'indice fini dans les deux groupes à la fois. Le groupe  $G_1$  est lui-même arithmétique. Il contient donc une application loxodromique. D'après le lemme 6.18,  $\text{Tr}(G_1) = E$  ou  $\text{Tr}(G_1) = F$ . Ainsi,  $F \subset \text{Tr}(G_1) \subset \text{Tr}(G)$ .

De la même façon que dans la démonstration de la proposition 6.5, le théorème de Skolem-Noether implique que pour tout  $g \in G$ , il existe  $g_1 \in A(G_1)$  et  $\beta \in \mathbb{C}^*$  tels que  $g = \beta g_1$ . Les coefficients de  $g_1$  sont dans  $E = F(\alpha)$ , lui-même inclus dans  $\text{Tr}(G)(\alpha)$ .

On montre que  $\beta$  est dans le corps de trace. Comme  $\text{Tr} g = \beta \text{Tr} g_1$ , si  $\text{Tr} g \neq 0$ , cela complète la preuve. Dans le cas contraire, on prend  $\gamma$  un élément loxodromique du groupe. Pour un  $n$  assez grand,  $\text{Tr} \gamma^n$  et  $\text{Tr} \gamma^{-n} g$  sont non nuls. D'après l'argument précédent,  $\gamma^n$  et  $\gamma^{-n} g$  ont leurs coefficients dans  $\text{Tr}(G)(\alpha)$  et donc  $g$  aussi.  $\square$

Le lemme 6.18 montre que si  $G$  est un réseau arithmétique qui est contenu dans  $SU(H, \mathcal{O}_E)$ , alors  $\text{Tr}(G) \subset E$ . En général, ceci n'est plus vrai quand  $G$  est juste commensurable à  $SU(H, \mathcal{O}_E)$ , comme c'est démontré par le contre exemple suivant : dans  $SU(1,1)$ , on construit un groupe arithmétique tel que  $E \subsetneq \text{Tr}(G)$ .

**Exemple 6.20.** Soit  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{15}, i)$ ,  $F = \mathbb{Q}(\sqrt{15})$  et  $H = \text{diag}(-\sqrt{15}, 1)$ . On note  $G$  le groupe arithmétique  $SU(H, \mathcal{O}_E)$  et  $M = \sqrt{4 + \sqrt{15}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \sqrt{15} & 2 \end{pmatrix}$ . La matrice  $M$  vérifie :  ${}^t \overline{M} H M = H$ ,  $\det(M) = 1$  et  $M^2 \in G$ . Le groupe  $G$  est d'indice deux dans  $G' = \langle G, M \rangle$  et donc  $G'$  est arithmétique. Le corps de trace de  $G'$  contient  $\text{Tr} M = \sqrt{4 + \sqrt{15}}$  qui n'est pas dans  $E$ .

**Remarque 6.21.** Dans le cas réel, certains réseaux arithmétiques sont construits en suivant la définition 6.17. On note  $k$  un corps de nombre totalement réel et les  $\tau_i$  sont les plongements réels de  $k$ . Dans  $SO(n, 1)$ , la matrice  $h$  est symétrique, de signature  $(n, 1)$  et est telle que  $SO(\tau_i h)$  est toujours compact. Le groupe  $SO(h, \mathcal{O}_k)$  est un réseau arithmétique. Dans  $SO(2m, 1)$ , on obtient tous les groupes arithmétiques de cette façon (à conjugaison et commensurabilité près). Une application du théorème de Skolem-Noether prouve que ces réseaux satisfont  $k = \text{Tr}(G)$ . Par contre, de la même façon que pour le cas complexe, c'est généralement faux pour  $n$  impair.



# Annexe A

## Des exemples de solutions aux équations

### A.1 Le programme SnapPea

Dans le cas réel, il existe un programme SnapPea, développé par Weeks (voir [HW89] ou pour une approche plus visuelle [MT05]), qui calcule numériquement les solutions du système. C'est une méthode de Newton améliorée. Elle peut s'appliquer au cas CR. Malheureusement, pour l'instant, à chaque essai, la méthode de Newton que nous avons implémentée sur Maple diverge. C'est-à-dire que les valeurs des  $z_{ij}$  tendent vers les valeurs interdites :  $\infty, 0$  ou  $1$ . Nous n'avons pas encore d'explications convaincantes à ce phénomène, néanmoins, nous avons quelques pistes de réflexion.

On rappelle le principe de la méthode dans le cas réel. On a  $n$  variables  $\log(z_i)$  et  $n$  équations complexes indépendantes : les log des équations d'arêtes et d'holonomie. On part d'un vecteur  $X_0 \in \mathbb{C}^n$  auquel on a donné des valeurs quelconques. On calcule  $F(X_0)$ , le vecteur des valeurs des équations en ce point. On passe à l'étape 1 de la façon suivante :

$$X_1 = X_0 - Jac(X_0)^{-1}.F(X_0)$$

où  $Jac(X_0)^{-1}$  est l'inverse de la jacobienne du système, calculée en  $X_0$ .

La méthode de Weeks comprend quelques garde-fous qui empêchent à chaque étape que les variables ne s'approchent trop vite des valeurs interdites (ils ne garantissent pas pour autant la convergence) :

- Pour chaque variable, on a le choix entre  $z_1 = z$ ,  $z_2 = \frac{1}{1-z}$ ,  $z_3 = 1 - \frac{1}{z}$ . Le plan se découpe en trois régions comme sur la figure A.1.

On choisit la variable ainsi : si  $z \in A$  (respectivement dans  $B, C$ ) alors on choisit  $z_1$  (respectivement  $z_2, z_3$ ) comme variable. On peut alors montrer que les coefficients de la jacobienne sont bornés et que les invariants  $z_i$  ne s'approchent pas trop des valeurs interdites.

- Pour éviter de faire un "trop grand pas" en une seule étape, autrement dit si  $\|X_1 - X_0\|_\infty > 1/2$ , alors, on prendra plutôt  $\tilde{X}_1 = X_0 - \frac{1}{\|X_1 - X_0\|_\infty/2} Jac(X_0)^{-1}.F(X_0)$ .

On constate que en 40 étapes, on a une excellente approximation des solutions. Cela se vérifie quel que soit le point de départ, même si celui-ci est très proche des valeurs interdites.

L'adaptation au cas CR présente quelques aménagements qui peuvent expliquer que l'algorithme ne converge plus :

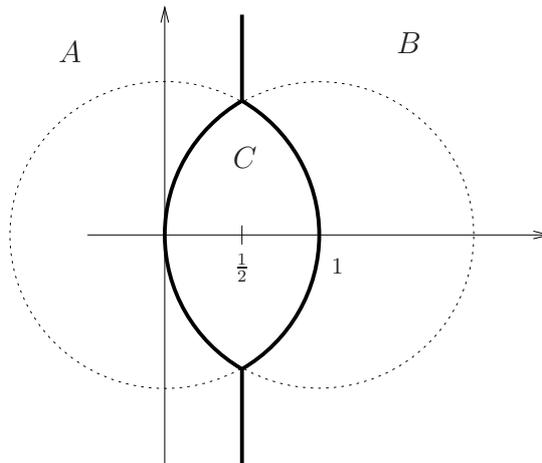


FIG. A.1: Une partition du plan  $\mathbb{C}$  en trois parties. La région dans laquelle se trouve la valeur de  $z$  décide de la variable utilisée entre  $z$ ,  $\frac{1}{1-z}$  et  $1 - \frac{1}{z}$ .

- Les équations égalisent un produit d'invariants avec 1. Quand on passe au log, on doit faire un choix pour  $\log(1) = 2i\pi q$ . Cet entier  $q$  est prescrit dans le cas réel : pour les équations d'arêtes,  $q = 1$  car les tétraèdres font exactement un tour autour de l'arête, pour celles d'holonomie,  $q = 0$ . Dans le cas CR, comme on ne travaille pas avec des variables à partie imaginaire positive, il n'y a pas de valeur que l'on puisse privilégier.
- Pour obtenir des tétraèdres CR, on doit ajouter les équations de conjugaison. Ce ne sont pas des équations complexes. On peut travailler avec les parties réelles et imaginaires des équations, mais le système d'équations perd alors en symétrie.
- On pourrait se passer des équations de conjugaison. Mais dans ce cas, la jacobienne n'est jamais de rang maximal d'après le corollaire 4.14 et son inverse explose à mesure qu'on s'approche des solutions.

## A.2 Des solutions aux équations de compatibilité

### A.2.1 La sœur du complémentaire du noeud huit

Pour la sœur du complémentaire du noeud de huit, on donne des solutions aux équations de compatibilité. La triangulation de l'espace est donnée figure A.2. Les identifications de faces sont les suivantes :

la face 0 de  $B$  est identifiée avec la face 1 de  $C$  par une application qu'on notera  $G_{01}$ ,

la face 1 de  $B$  avec 0 de  $C$  par  $G_{10}$ ,

la face 2 de  $B$  avec 3 de  $C$  par  $G_{23}$ ,

la face 3 de  $B$  avec 2 de  $C$  par  $G_{32}$ .

A la lecture des figures A.2 et A.3, les équations de recollement sont :

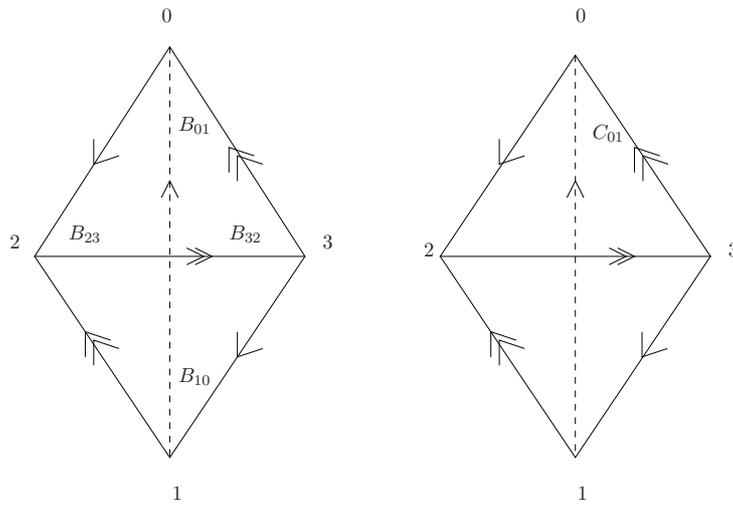


FIG. A.2: Triangulation par deux tétraèdres de la sœur du complémentaire du nœud de huit.

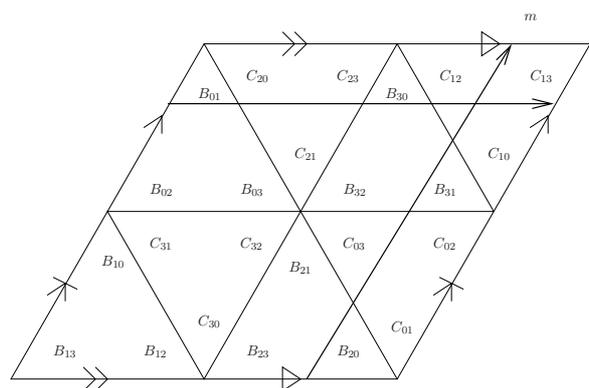


FIG. A.3: Etoile du sommet de la triangulation.

Équations de faces :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_0 &: B_{10}B_{20}B_{30}C_{01}C_{21}C_{31} = 1 \\ \mathcal{F}_1 &: B_{01}B_{21}B_{31}C_{10}C_{20}C_{30} = 1 \\ \mathcal{F}_2 &: B_{02}B_{12}B_{32}C_{03}C_{13}C_{23} = 1 \\ \mathcal{F}_3 &: B_{03}B_{13}B_{23}C_{02}C_{12}C_{32} = 1\end{aligned}$$

Équations d'arêtes :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{12} &: B_{12}B_{23}B_{30}C_{12}C_{23}C_{30} = 1 \\ \mathcal{A}_{21} &: B_{21}B_{32}B_{03}C_{21}C_{32}C_{03} = 1 \\ \mathcal{A}_{01} &: B_{01}B_{13}B_{20}C_{01}C_{13}C_{20} = 1 \\ \mathcal{A}_{10} &: B_{10}B_{31}B_{02}C_{10}C_{31}C_{02} = 1\end{aligned}$$

Équations d'holonomie :

$$\mathcal{H}_l : B_{01}\frac{1}{C_{21}}B_{30}\frac{1}{C_{10}} = 1 \quad \mathcal{H}_m : B_{20}\frac{1}{C_{03}}B_{31}\frac{1}{C_{12}} = 1$$

Les équations de conjugaison définies au chapitre 2 sont les mêmes pour chaque simplexe.

Une solution à toutes ces équations est donnée par :  $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned}B_{01} = -\omega^2 \quad B_{10} = -\omega^2 \quad B_{23} = -\omega \quad B_{32} = -\omega \\ C_{01} = -\omega \quad C_{10} = -\omega \quad C_{23} = -\omega^2 \quad C_{32} = -\omega^2\end{aligned}$$

On obtient deux tétraèdres, symétriques. Les applications qui recollent les faces sont dans ce cas :

$$\begin{aligned}G_{01} = \omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \omega^2 \end{pmatrix}, \quad G_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \omega^2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -i\sqrt{3} & -i\sqrt{3} & \omega \end{pmatrix}, \quad G_{23} = Id, \\ G_{32} = \begin{pmatrix} 1 & \omega^2 & \omega \\ -\omega & 0 & 1 \\ \omega^2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

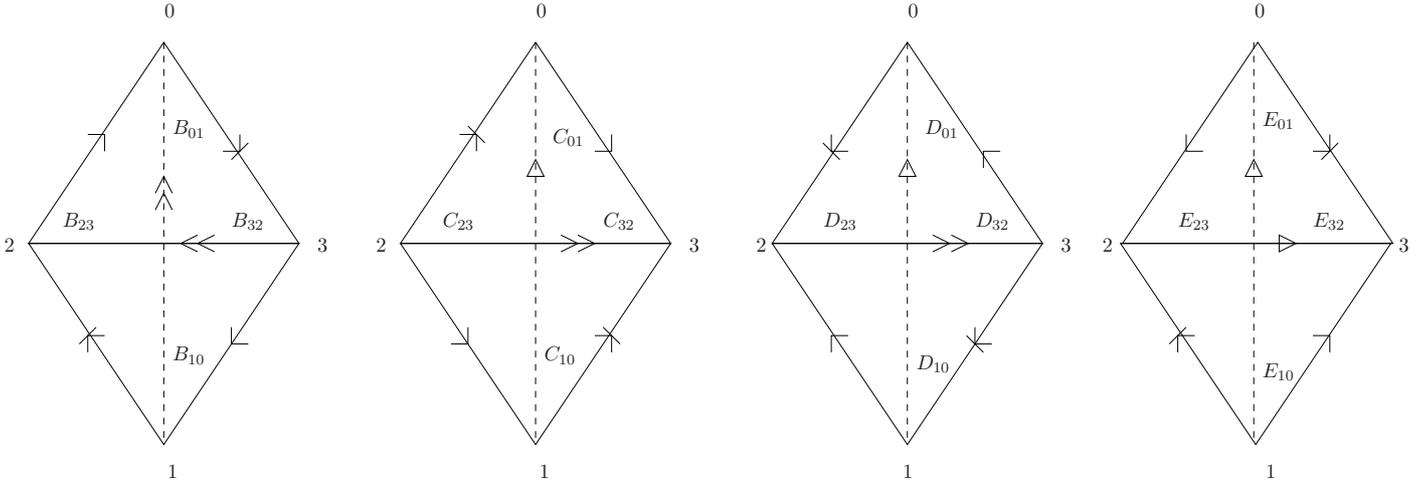
Les matrices  $G_{01}$  et  $G_{10}$  représentent deux isométries loxodromiques, tandis que  $G_{32}$  est une transformation elliptique d'ordre 6. L'image de la longitude et du méridien sont les matrices suivantes :

$$\begin{aligned}H_l = G_{23}^{-1}G_{32}G_{01}^{-1}G_{32} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \omega \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ H_m = G_{01}^{-1}G_{23}G_{10}^{-1}G_{32} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2\omega - 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dans le groupe d'Heisenberg, elles agissent comme deux translations horizontales :  $t_{(1,3\sqrt{3})}$  et  $t_{(2,2\sqrt{3})}$ . Leurs projections de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  sont bien deux translations colinéaires. On retrouve le résultat vu à la proposition 4.25.

Le groupe  $\langle G_{01}, G_{10}, G_{23}, G_{32} \rangle$  est inclus dans  $SU(2,1, \mathbb{Z}[\omega])$ . Il est donc discret. Le corps engendré par les coefficients des matrices est  $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$  qui est aussi le corps de trace.

A l'aide de Maple, on calcule la jacobienne du système à la solution. Elle est de rang maximale.

FIG. A.4: Recollement des quatre tétraèdres pour  $M_{433}$ .

### A.2.2 Une solution pour le recollement de la variété $M_{433}$

Pour la variété recensée dans [CHW99] comme  $M_{433}$ , le recollement est codé par : ebdbcdadaahhx (c'est la version dite "déshydratée" du recollement.) Réhydraté, on obtient le recollement représenté à la figure A.4 : quatre tétraèdres, un sommet après identification. L'étoile de ce sommet est en A.5. Les équations de recollement sont :

Équations de faces :

$$\begin{aligned}
 B_{10}B_{20}B_{30}C_{10}C_{20}C_{30} &= 1 & C_{02}C_{12}C_{32}E_{03}E_{13}E_{23} &= 1 \\
 B_{01}B_{21}B_{31}D_{01}D_{21}D_{31} &= 1 & C_{03}C_{13}C_{23}E_{01}E_{21}E_{31} &= 1 \\
 B_{02}B_{12}B_{32}D_{10}D_{20}D_{30} &= 1 & D_{02}D_{12}D_{32}E_{10}E_{20}E_{30} &= 1 \\
 B_{03}B_{13}B_{23}C_{01}C_{21}C_{31} &= 1 & D_{03}D_{13}D_{23}E_{02}E_{12}E_{32} &= 1
 \end{aligned}$$

Équations d'arêtes :

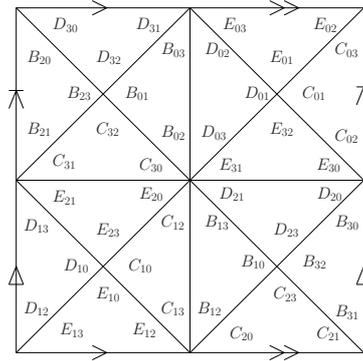
$$\begin{aligned}
 B_{20}B_{31}C_{03}C_{21}D_{12}D_{30}E_{02}E_{13} &= 1 & B_{10}B_{32}C_{23}D_{23} &= 1 \\
 B_{02}B_{13}C_{30}C_{12}D_{03}D_{21}E_{20}E_{31} &= 1 & B_{23}B_{01}C_{32}D_{32} &= 1 \\
 B_{03}B_{12}C_{20}C_{13}D_{02}D_{31}E_{03}E_{12} &= 1 & C_{10}D_{10}E_{10}E_{23} &= 1 \\
 B_{30}B_{21}C_{02}C_{31}D_{20}D_{13}E_{30}E_{21} &= 1 & C_{01}D_{01}E_{01}E_{32} &= 1
 \end{aligned}$$

Équations d'holonomie :

$$D_{13} \frac{1}{E_{23}} C_{12} B_{13} \frac{1}{D_{23}} B_{30} = 1 \qquad E_{02} \frac{1}{C_{01}} E_{30} D_{20} \frac{1}{B_{32}} C_{21} = 1$$

Une solution est donnée par :

$$\begin{aligned}
 B_{01} &= -\omega, & B_{10} &= -\omega^2, & B_{23} &= -\omega^2, & B_{32} &= -\omega, \\
 C_{01} &= -\omega^2, & C_{10} &= -\omega^2, & C_{23} &= -\omega, & C_{32} &= -\omega, \\
 D_{01} &= -\omega, & D_{10} &= -\omega, & D_{23} &= -\omega^2, & D_{32} &= -\omega^2, \\
 E_{01} &= -\omega, & E_{10} &= -\omega^2, & E_{23} &= -\omega, & E_{32} &= -\omega^2.
 \end{aligned}$$

FIG. A.5: Etoile du sommet de la triangulation de  $M4_{33}$ .

Les applications de recollement de faces sont représentées par les matrices suivantes : ( $G_{X_iY_j}$  est la matrice qui recolle la face  $i$  de  $X$  et la face  $j$  de  $Y$ ) :

$$G_{B_2D_0} = \begin{pmatrix} 1 & -\omega & \omega \\ \omega^2 & 0 & -\omega \\ \omega^2 & \omega^2 & 1 \end{pmatrix} \quad G_{C_3E_1} = \begin{pmatrix} 1 & \omega^2 & \omega \\ -\omega & 0 & 1 \\ \omega^2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad G_{C_3E_1} = \begin{pmatrix} 1 & \omega^2 & \omega \\ -\omega & 0 & 1 \\ \omega^2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_{D_3E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \omega^2 & -1 + \omega \\ -1 + \omega^2 & 1 + 3\omega^2 & 1 - \omega^2 \\ -1 + \omega & -1 + \omega^2 & 1 \end{pmatrix} \quad G_{D_2E_0} = \omega \begin{pmatrix} \omega^2 & -2\omega & -2\omega^2 \\ -\omega^2 & -1 + \omega & -2\omega \\ 1 & -\omega^2 & \omega^2 \end{pmatrix}$$

L'image de la représentation obtenue pour  $\Pi_1(M4_{33})$  est le groupe engendré par ces matrices. C'est un groupe discret car contenu dans  $SU(2,1, \mathbb{Z}[\omega])$ .

### A.2.3 Une solution très dégénérée pour la variété $M6_2^{13}$

Déshydratée, la triangulation de  $M6_2^{13}$  est codée par : gddabbcedfffaaxxaax. Le recollement, représenté à la figure A.6, comprend 6 tétraèdres. Il y a deux sommets après identification.

Une solution aux équations de recollement est donnée par :

$$\begin{aligned} B_{01} &= e^{it}, & B_{10} &= e^{-it}, & B_{23} &= e^{it}, & B_{32} &= e^{-it}, \\ C_{01} &= e^{-it}, & C_{10} &= e^{it}, & C_{23} &= B_e^{it}, & C_{32} &= B_e^{-it}. \end{aligned}$$

Les invariants des tétraèdres  $E$  et  $F$  sont les mêmes que pour  $B$ , quant à  $D$ ,  $G$  leurs invariants sont ceux de  $C$ . Les équations d'holonomie sont constantes égales à 1.

A la solution, les tétraèdres  $B$ ,  $E$ ,  $F$  sont tous égaux au tétraèdre dont les coordonnées sont :

$$p_0 = \infty, \quad p_1 = (0, 0), \quad p_2 = \left(1, \frac{1}{\tan(t/2)}\right), \quad p_3 = \left(e^{it}, \frac{1}{\tan(t/2)}\right).$$

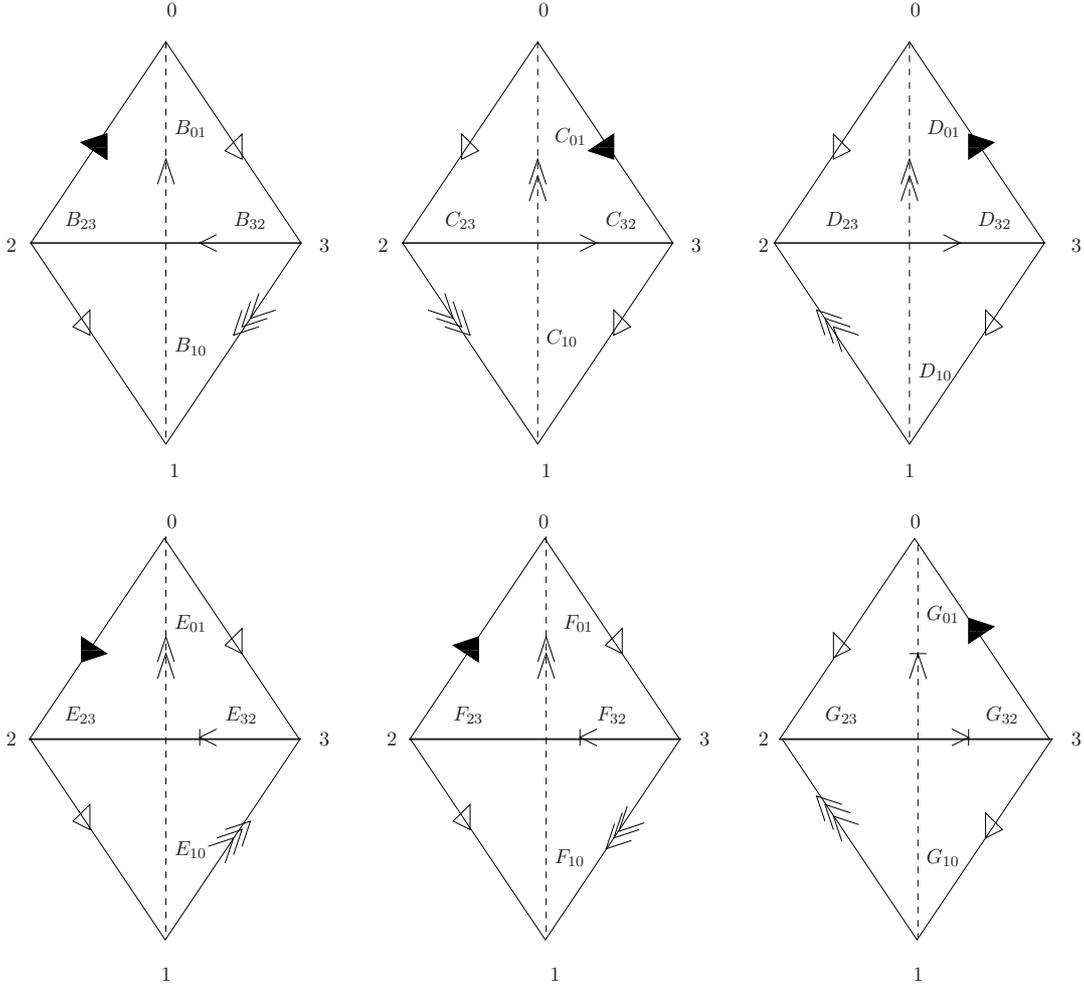


FIG. A.6: Recollement des 6 tétraèdres pour  $M6_{13}^2$ .

Les trois derniers tétraèdres  $C$ ,  $D$ ,  $G$  sont tous égaux au tétraèdre opposé :  $[p_0, p_1, p_3, p_2]$ . On est donc en présence d’une solution très dégénérée. La représentation ne dépend pas du paramètre  $t$ . C’est toujours le groupe engendré par une réflexion complexe.

Le rang ne peut pas être maximal puisqu’on a exhibé une famille à un paramètre de solutions. Le rang de la jacobienne en ce point, calculé à l’aide de Maple, est 22, pour  $6.4 = 24$  variables.

### A.3 Une solution aux équations pour une variété compacte

Dans l’article [FP06], les auteurs déterminent un domaine fondamental dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  pour le groupe d’Eisenstein-Picard  $\Gamma = \text{PU}(2, 1, \mathbb{Z}[\omega])$  où  $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  est une racine cubique de l’unité. Ce groupe est obtenu comme le projectivisé de  $\text{U}(2, 1, \mathbb{Z}[\omega])$ , sous-groupe de  $\text{U}(2, 1)$  à coefficients dans l’anneau d’entier. Le sous-groupe stabilisateur de l’infini est noté  $\Gamma_{\infty}$ . On note  $\mathbf{T}$  un tétraèdre CR dont les sommets sont les suivants (voir la figure A.7) :

$$p_0 = (0, -\sqrt{3}), \quad p_1 = (-\omega, 0), \quad p_2 = (1, 0), \quad p_3 = (0, \sqrt{3}).$$

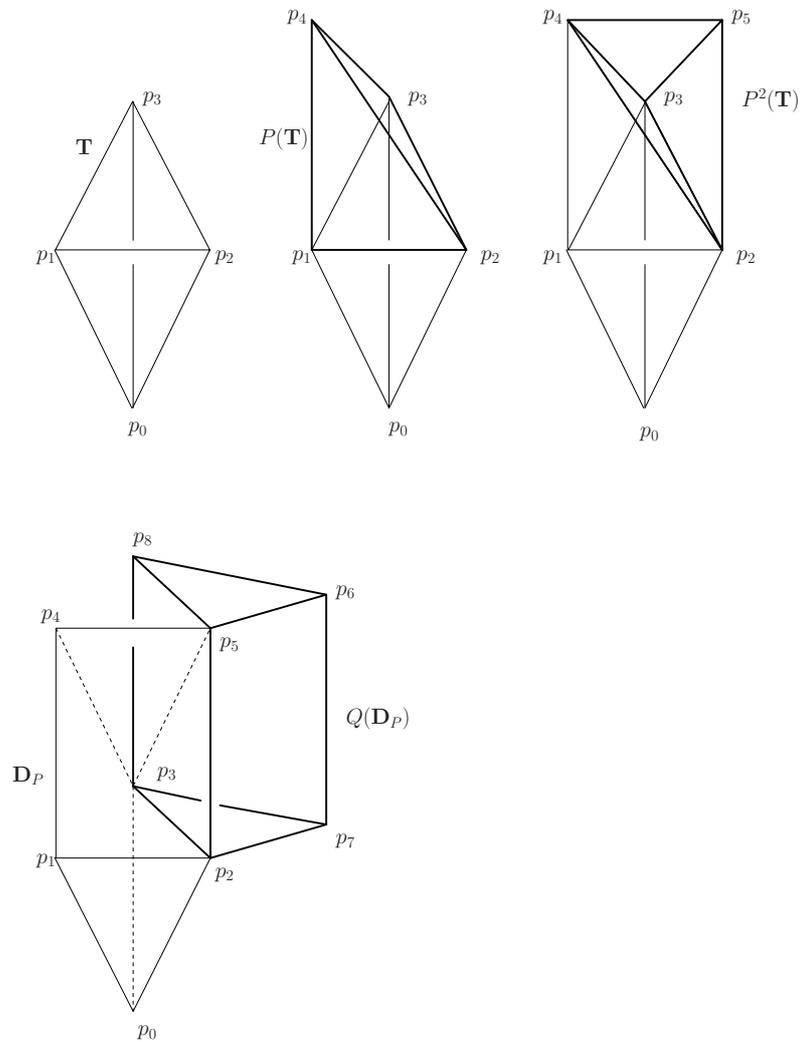


FIG. A.7: Un domaine fondamental  $\mathbf{D}$  pour  $\Gamma_T$  construit à partir d'un domaine fondamental  $\mathbf{T}$  du groupe  $\langle P, Q \rangle$ .

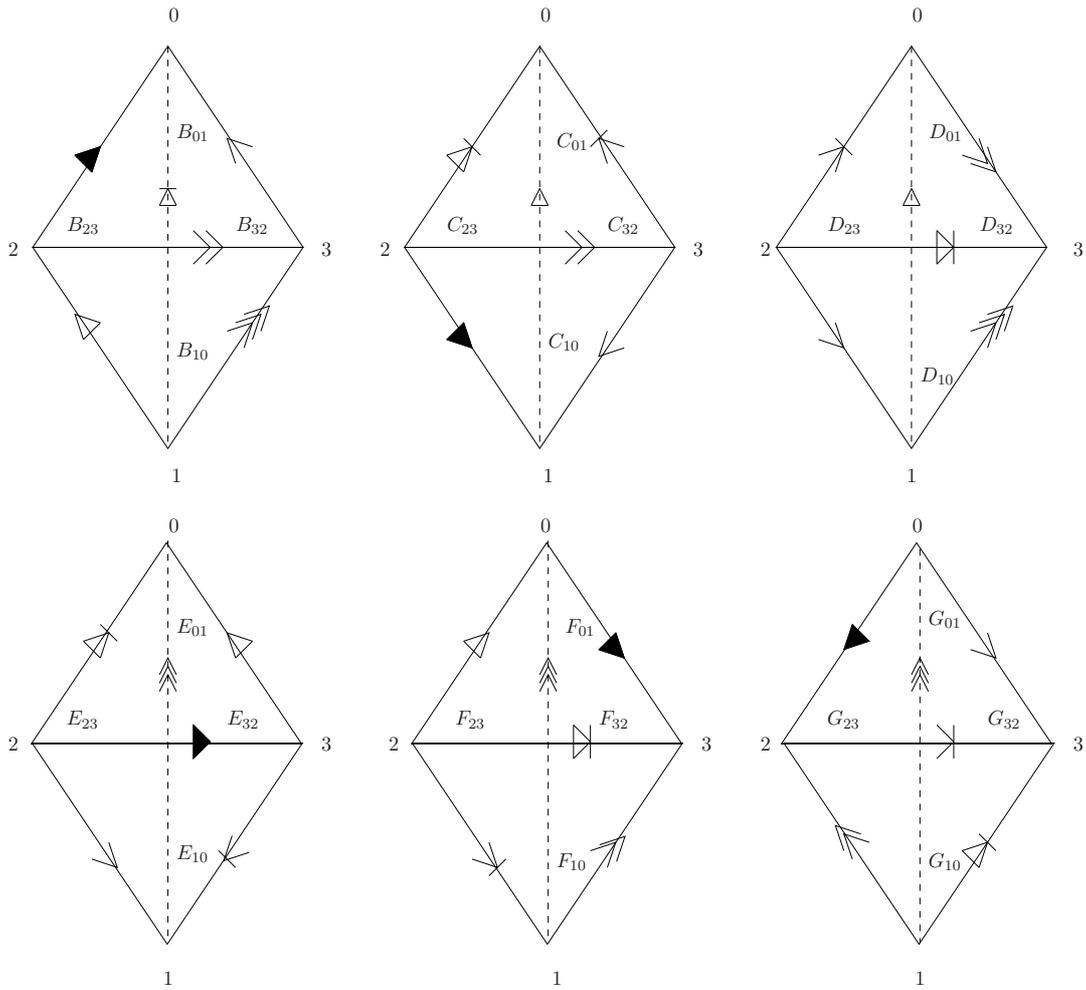


FIG. A.8: Identification des six tétraèdres qui composent le domaine fondamental de  $\Gamma_T$ . Après identification, il y a sept arêtes et un sommet.

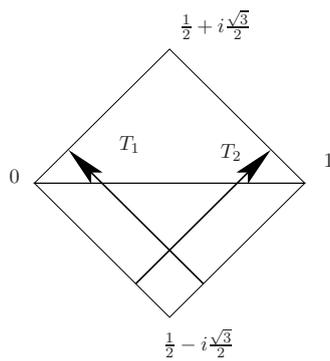


FIG. A.9: Projection sur  $\mathbb{C}$  du domaine fondamental  $\mathbf{D}$  de  $\Gamma_T$ . Les deux translations horizontales  $T_1$  et  $T_2$  identifient les côtés du carré. Les sommets  $p_0, p_3$ , et  $p_8$  se projettent sur 0,  $p_1$  et  $p_4$  sur  $-\omega$ ,  $p_2$  et  $p_5$  sur 1 et enfin,  $p_6$  et  $p_7$  sur  $-\omega^2$ .

Ici, les points sont reliés par des segments affines, le tétraèdre est donc plein.

**Proposition A.1.** ([FP06]) *Un domaine fondamental pour l'action de  $\Gamma_\infty$  dans le groupe d'Heisenberg est  $\mathbf{T}$ . Une présentation du groupe est :  $\langle P, Q \mid (PQ^{-1})^6 = 1, P^3 = Q^2 \rangle$  où  $P$  et  $Q$  sont représentés par les matrices suivantes :*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \omega \\ 0 & \omega & -\omega \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \omega \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les applications  $P$  et  $Q$  agissent sur  $\mathbb{C}$  comme des rotations. La première est d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ , de centre  $\frac{\omega}{\omega-1}$  (qui est le centre du triangle obtenu par la projection sur  $\mathbb{C}$  de  $\mathbf{T}$ ). La seconde est un demi-tour centré en  $\frac{1}{2}$ .

Le sous-groupe sans torsion de  $\Gamma_\infty$  est d'indice six. On le notera  $\Gamma_T$ . Un domaine fondamental pour  $\Gamma_T$  est la réunion de six copies de  $\mathbf{T}$ . On les obtient en prenant d'abord  $\mathbf{D}_P = T \cup P(\mathbf{T}) \cup P^2(\mathbf{T})$  représenté à la figure A.7. Le recollement de ces trois tétraèdres nous donne un prisme  $\mathbf{D}_P$ . Si on lui ajoute son image par  $Q$ , on obtient un domaine fondamental de  $\Gamma_T$  :  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_P \cup Q(\mathbf{D}_P)$ . Les coordonnées d'Heisenberg des sommets sont les suivantes :

$$p_4 = (-\omega, 2\sqrt{3}), \quad p_5 = (1, 2\sqrt{3}), \quad p_6 = (-\omega^2, 2\sqrt{3})$$

$$p_7 = (-\omega^2, 0), \quad p_8 = (0, 3\sqrt{3}).$$

La projection de ces points sur  $\mathbb{C}$  est illustrée à la figure A.9 :  $p_0, p_3$  et  $p_8$  sont sur la même droite verticale, de même que les couples  $(p_1, p_4), (p_2, p_5), (p_6, p_7)$ .

Le groupe  $\Gamma_T$  est le groupe engendré par les trois translations d'Heisenberg associées aux matrices suivantes :

$$T_0 = P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ 0 & 1 & -\omega^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\omega^2 & \omega^2 \\ 0 & 1 & \omega \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'application  $T_0$  (qui est le commutateur  $[T_2, T_1]$ ) est une translation verticale, tandis que  $T_1$  et  $T_2$  sont horizontales. Les projections de leurs actions de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  sont représentées à la figure A.9. La transformation  $T_0$  recolle la face de la base du prisme  $\mathbf{D}_P$  avec la face du dessus :  $(p_0, p_1, p_2) \rightarrow (p_3, p_4, p_5)$ , *idem* pour le prisme image  $Q(\mathbf{D}_P)$ . Les translations  $T_1$  et  $T_2$  permettent d'identifier les faces latérales des deux prismes :

$$(p_1, p_3, p_4) \xrightarrow{T_1} (p_2, p_7, p_5), \quad (p_0, p_1, p_3) \xrightarrow{T_0 T_1} (p_7, p_5, p_6), \quad (\text{A.1})$$

$$(p_2, p_4, p_5) \xrightarrow{T_2} (p_7, p_3, p_6), \quad (p_1, p_2, p_4) \xrightarrow{T_0 T_2} (p_3, p_6, p_8). \quad (\text{A.2})$$

Le groupe de translations  $\Gamma_T$  est discret dans  $\text{PU}(2,1)$ . Son ensemble limite est tout le groupe d'Heisenberg  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ . La variété CR-sphérique complète obtenue par le quotient  $\Omega(\Gamma_T)/\Gamma_T$  est homéomorphe à un fibré en cercle non-trivial sur le tore. Celui-ci vient de l'action de  $T_1$  et  $T_2$  sur  $\mathbb{C}$  (voir A.9). Le fibré est non trivial car d'après les formules (A.2), l'application  $T_2$  ne translate pas le carré de devant  $(p_1, p_2, p_5, p_4)$  sur celui de derrière  $(p_3, p_7, p_6, p_8)$  (la remarque est la même pour  $T_1$ ).

La figure A.8 représente les six tétraèdres avec les identifications d'arêtes. On remarque qu'après recollement, il y a un sommet et sept arêtes. Ce dessin nous permet de déterminer les équations de compatibilité. Comme nous avons déjà les coordonnées des sommets, nous calculons par la suite la solution aux équations qui leur est associée.

Équations de faces :

$$\begin{array}{ll}
B_{10}B_{20}B_{30}D_{02}D_{12}D_{32} = 1 & C_{03}C_{13}C_{23}E_{01}E_{21}E_{31} = 1 \\
B_{01}B_{21}B_{31}C_{10}C_{20}C_{30} = 1 & D_{10}D_{20}D_{30}E_{03}E_{13}E_{23} = 1 \\
B_{02}B_{12}B_{32}G_{02}G_{12}G_{32} = 1 & D_{01}D_{21}D_{31}F_{10}F_{20}F_{30} = 1 \\
B_{03}B_{13}B_{23}F_{01}F_{21}F_{31} = 1 & E_{10}E_{20}E_{30}G_{01}G_{21}G_{31} = 1 \\
C_{01}C_{21}C_{31}G_{10}G_{20}G_{30} = 1 & E_{02}E_{12}E_{32}F_{03}F_{13}F_{23} = 1 \\
C_{02}C_{12}C_{32}D_{03}D_{13}D_{23} = 1 & F_{02}F_{12}F_{32}G_{03}G_{13}G_{23} = 1
\end{array}$$

Équations d'arêtes :

$$\begin{array}{ll}
B_{30}C_{31}D_{21}E_{21}G_{03} = 1 & \\
B_{03}C_{13}D_{12}E_{12}G_{30} = 1 & B_{10}C_{20}D_{23}E_{20}F_{23}G_{13} = 1 \\
B_{12}C_{10}D_{10}E_{30}F_{20} = 1 & B_{01}C_{02}D_{32}E_{02}F_{32}G_{31} = 1 \\
B_{21}C_{01}D_{01}E_{03}F_{02} = 1 & B_{13}D_{13}E_{10}F_{10}G_{10} = 1 \\
B_{23}C_{23}D_{03}F_{13}G_{12} = 1 & B_{31}D_{31}E_{01}F_{01}G_{01} = 1 \\
B_{32}C_{32}D_{30}F_{31}G_{21} = 1 & B_{20}C_{21}E_{23}F_{03}G_{02} = 1 \\
C_{30}D_{20}E_{31}F_{21}G_{23} = 1 & B_{02}C_{12}E_{32}F_{30}G_{20} = 1 \\
C_{03}D_{02}E_{13}F_{12}G_{32} = 1 &
\end{array}$$

Les solutions calculées à partir des sommets sont :

$$\begin{array}{llll}
B_{01} = -\omega^2 & B_{10} = -\omega & B_{23} = \omega & B_{32} = \omega^2 \\
C_{01} = -\omega^2 & C_{10} = 1 - \omega & C_{23} = -\omega & C_{32} = 2 + \omega \\
D_{01} = \omega^2 & D_{10} = \omega & D_{23} = -\omega & D_{32} = -\omega^2 \\
E_{01} = -\omega^2 & E_{10} = 1 - \omega & E_{23} = -\omega & E_{32} = 2 + \omega \\
F_{01} = \omega^2 & F_{10} = \omega & F_{23} = -\omega & F_{32} = -\omega^2 \\
G_{01} = 2 + \omega & G_{10} = -\omega & G_{23} = 1 - \omega & G_{32} = -\omega^2.
\end{array}$$

**Remarque A.2.** Un calcul du rang de la jacobienne en cette solution nous indique qu'il n'est pas maximal. En effet, la structure CR-sphérique admet des déformations.



# Bibliographie

- [Ale30] James W. ALEXANDER : The combinatorial theory of complexes. *Ann. of Math. (2)*, 31(2):292–320, 1930.
- [Ber] N. BERGERON : *Sous-groupes discrets de groupes de Lie et géométrie hyperbolique*. Note de cours, disponible sur <http://people.math.jussieu.fr/bergeron>.
- [BP92] Riccardo BENEDETTI et Carlo PETRONIO : *Lectures on hyperbolic geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [BS76] D. BURNS, Jr. et S. SHNIDER : Spherical hypersurfaces in complex manifolds. *Invent. Math.*, 33(3):223–246, 1976.
- [Car32] Elie CARTAN : Sur le groupe de la géométrie hypersphérique. *Comment. Math. Helv.*, 4(1):158–171, 1932.
- [Cho04] Young-Eun CHOI : Positively oriented ideal triangulations on hyperbolic three-manifolds. *Topology*, 43(6):1345–1371, 2004.
- [Cho06] Young-Eun CHOI : Neumann and Zagier’s symplectic relations. *Expo. Math.*, 24(1):39–51, 2006.
- [CHW99] Patrick J. CALLAHAN, Martin V. HILDEBRAND et Jeffrey R. WEEKS : A census of cusped hyperbolic 3-manifolds. *Math. Comp.*, 68(225):321–332, 1999. With microfiche supplement.
- [EP88] D. B. A. EPSTEIN et R. C. PENNER : Euclidean decompositions of noncompact hyperbolic manifolds. *J. Differential Geom.*, 27(1):67–80, 1988.
- [Fal] E. FALBEL : *A Volume function for Spherical CR tetrahedra*. Quarterly Journal of Mathematics, à paraître.
- [Fal05] Elisha FALBEL : Constructing spherical CR manifolds by gluing tetrahedra. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 340(7):503–506, 2005.
- [Fal07] E. FALBEL : Geometric structures associated to triangulations as fixed point sets of involutions. *Topology Appl.*, 154(6):1041–1052, 2007.
- [Fal08] Elisha FALBEL : A spherical CR structure on the complement of the figure eight knot with discrete holonomy. *J. Differential Geom.*, 79(1):69–110, 2008.
- [FP06] Elisha FALBEL et John R. PARKER : The geometry of the Eisenstein-Picard modular group. *Duke Math. J.*, 131(2):249–289, 2006.
- [Fra06] Stefano FRANCAVIGLIA : Similarity structures on the torus and the Klein bottle via triangulations. *Adv. Geom.*, 6(3):397–421, 2006.
- [GKL01] William M. GOLDMAN, Michael KAPOVICH et Bernhard LEEB : Complex hyperbolic manifolds homotopy equivalent to a Riemann surface. *Comm. Anal. Geom.*, 9(1):61–95, 2001.
- [GM87] W. M. GOLDMAN et J. J. MILLSON : Local rigidity of discrete groups acting on complex hyperbolic space. *Invent. Math.*, 88(3):495–520, 1987.

- [Gol88] William M. GOLDMAN : Geometric structures on manifolds and varieties of representations. *In Geometry of group representations (Boulder, CO, 1987)*, volume 74 de *Contemp. Math.*, pages 169–198. Amer. Math. Soc., 1988.
- [Gol99] William M. GOLDMAN : *Complex hyperbolic geometry*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1999. Oxford Science Publications.
- [GP92] William M. GOLDMAN et John R. PARKER : Complex hyperbolic ideal triangle groups. *J. Reine Angew. Math.*, 425:71–86, 1992.
- [HW89] Martin HILDEBRAND et Jeffrey WEEKS : A computer generated census of cusped hyperbolic 3-manifolds. pages 53–59, 1989.
- [KR87] A. KORÁNYI et H. M. REIMANN : The complex cross ratio on the Heisenberg group. *Enseign. Math. (2)*, 33(3-4):291–300, 1987.
- [Mat07] Sergei MATVEEV : *Algorithmic topology and classification of 3-manifolds*, volume 9 de *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer, Berlin, second édition, 2007.
- [McR] D. B. MCREYNOLDS : *Arithmetic lattices in  $SU(n,1)$* . A paraître.
- [Mil82] John MILNOR : Hyperbolic geometry : the first 150 years. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 6(1):9–24, 1982.
- [Mos80] G. D. MOSTOW : On a remarkable class of polyhedra in complex hyperbolic space. *Pacific J. Math.*, 86(1):171–276, 1980.
- [MR03] Colin MACLACHLAN et Alan W. REID : *The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds*, volume 219 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [MT05] William MENASCO et Morwen THISTLETHWAITE, éditeurs. *Handbook of knot theory*. Elsevier B. V., Amsterdam, 2005.
- [NR92] Walter D. NEUMANN et Alan W. REID : Arithmetic of hyperbolic manifolds. *In Topology '90 (Columbus, OH, 1990)*, volume 1 de *Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ.*, pages 273–310. de Gruyter, Berlin, 1992.
- [NY99] Walter D. NEUMANN et Jun YANG : Bloch invariants of hyperbolic 3-manifolds. *Duke Math. J.*, 96(1):29–59, 1999.
- [NZ85] Walter D. NEUMANN et Don ZAGIER : Volumes of hyperbolic three-manifolds. *Topology*, 24(3):307–332, 1985.
- [Par] John PARKER : *Notes on complex hyperbolic geometry*. 2010.
- [Par98] John R. PARKER : On the volumes of cusped, complex hyperbolic manifolds and orbifolds. *Duke Math. J.*, 94(3):433–464, 1998.
- [Pie88] Riccardo PIERGALLINI : Standard moves for standard polyhedra and spines. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.*, (18):391–414, 1988. Third National Conference on Topology (Italian) (Trieste, 1986).
- [PP00] Carlo PETRONIO et Joan PORTI : Negatively oriented ideal triangulations and a proof of Thurston's hyperbolic Dehn filling theorem. *Expo. Math.*, 18(1):1–35, 2000.
- [PW] J. PARKER et P. WILL : *Representations of the 3-punctured sphere group in  $PU(2,1)$  with unipotent generators*. En préparation.
- [Rat06] John G. RATCLIFFE : *Foundations of hyperbolic manifolds*, volume 149 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second édition, 2006.

- [Rei90] Alan W. REID : A note on trace-fields of Kleinian groups. *Bull. London Math. Soc.*, 22(4):349–352, 1990.
- [Rei03] I. REINER : *Maximal orders*, volume 28 de *London Mathematical Society Monographs. New Series*. The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford, 2003. Corrected reprint of the 1975 original, With a foreword by M. J. Taylor.
- [Ril75] Robert RILEY : A quadratic parabolic group. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 77:281–288, 1975.
- [Sch01] Richard Evan SCHWARTZ : Degenerating the complex hyperbolic ideal triangle groups. *Acta Math.*, 186(1):105–154, 2001.
- [Sch07] Richard Evan SCHWARTZ : *Spherical CR geometry and Dehn surgery*, volume 165 de *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2007.
- [Thu79] William P. THURSTON : *The Geometry and topology of 3-manifolds*. Mimeographed notes. Princeton University Mathematics Department, 1979.
- [Thu97] William P. THURSTON : *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, volume 35 de *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Edité par Silvio Levy.
- [Tol89] Domingo TOLEDO : Representations of surface groups in complex hyperbolic space. *J. Differential Geom.*, 29(1):125–133, 1989.
- [Wil] P. WILL : *Bending Fuchsian representations of fundamental groups of cusped surfaces in  $PU(2,1)$* . Prépublication.