



HAL
open science

Sections hyperplanes à singularités simples et exemples de variations de structure de Hodge

Damien Mégy

► **To cite this version:**

Damien Mégy. Sections hyperplanes à singularités simples et exemples de variations de structure de Hodge. Mathématiques [math]. Université de Grenoble, 2010. Français. NNT : . tel-00502378

HAL Id: tel-00502378

<https://theses.hal.science/tel-00502378>

Submitted on 13 Jul 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE MATHÉMATIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

*préparée à l'Institut Fourier
Laboratoire de mathématiques
UMR CNRS 5582*

Sections hyperplanes à singularités simples et exemples de variations de structure de Hodge

Damien MÉGY

Soutenance à Grenoble le 18 mai 2010 devant le jury :

Frédéric CAMPANA (Université de Nancy), Rapporteur
Jean-Pierre DEMAILLY (Université Grenoble I), Examineur
Philippe EYSSIDIEUX (Université Grenoble I), Directeur
Stéphane GUILLERMOU (Université Grenoble I, CNRS), Examineur
Carlos SIMPSON (Université Nice - Sophia Antipolis, CNRS), Rapporteur
Claire VOISIN (Université Paris VI, CNRS), Examinatrice

Au vu des rapports de Frédéric CAMPANA et Carlos SIMPSON

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier Philippe Eyssidieux. Depuis le Master 2, il m'a formé à la recherche avec une grande patience et générosité. Travailler sous sa direction m'a permis d'apercevoir des théories élégantes dans des domaines extrêmement variés. Je lui suis profondément reconnaissant pour tout le temps qu'il m'a consacré et pour son optimisme communicatif. A l'avenir, j'essaierai de tirer parti de tout ce qu'il m'a enseigné.

Frédéric Campana et Carlos Simpson ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, et je les remercie vivement pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Enfin, je suis très reconnaissant à Claire Voisin, Jean-Pierre Demailly et Stéphane Guillermou d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Stéphane Guillermou m'a donné de nombreuses réponses et m'a guidé dans ma découverte d'une belle théorie. Merci pour toutes ces discussions pendant lesquelles j'ai beaucoup appris.

Mes pensées vont ensuite à mes professeurs. Stéphane Vassout, qui m'a donné goût aux mathématiques; Jean-Claude Sikorav et Étienne Ghys, dont les cours et les exposés donnent envie de faire de la géométrie; et Jean-Pierre Demailly qui m'a initié à la géométrie complexe durant mes stages de licence et maîtrise.

Cette thèse a été préparée à l'Institut Fourier, et c'est bien sûr un plaisir de remercier chaleureusement tous ses membres. Merci à Brigitte Loiodice, Gabrielle Michel, Marie-Hélène Biasini et Martine Barbelenet pour leur bonne humeur, leur disponibilité et leur efficacité, à toute l'équipe de notre belle bibliothèque, et à Emmanuel Peyre pour son aide sur la partie administrative de la soutenance.

Pendant ces années, j'ai pu discuter avec de nombreux enseignants et chercheurs. Les conseils de Michel Brion, Benoît Claudon, Stéphane Druel et Chris Peters m'ont été d'une grande aide. Sans oublier plusieurs discussions avec Christian Schnell très profitables. Au début de ma thèse, j'ai bénéficié de l'expérience des anciens thésards de l'IF qui finissaient la leur, en particulier Andreas et Amaël que j'ai ensuite croisés de nombreuses fois, et des encouragements de Catriona. Merci aussi à tous ceux qui animent la vie au laboratoire, à tous les thésards, en particulier à Guillaume et Matthieu, à mon nouveau cobureau Jérôme, et aux hispanophones.

Je n'oublie pas mes amis de Lyon, Alex, Antoine, Fred, Gwendal, Ivan, Jean et Maxime à l'hospitalité sans limite; mes colocataires à Grenoble, Chenchang, Gaël, et Bastien, avec qui j'ai partagé de bons moments; et les Parisiens dont l'amitié m'est précieuse, en particulier Anouch et Marie, et aussi Michel, Paul et Séb, pour ne citer qu'eux.

Enfin, la confiance et le soutien de mon père, et de ma famille en France et au Mexique m'ont été d'une aide inestimable.

Table des matières

| | | |
|------------|--|-----------|
| I | Une classe de VSH sur des bases compactes de dimension 3 à 6 | 15 |
| 1 | Sections hyperplanes à singularités simples | 15 |
| 1.1 | Rappels : variétés plongées, variété duale et hypersurface universelle | 16 |
| 1.2 | Rappels : singularités et déformations | 18 |
| 1.3 | Ensemble des sections hyperplanes ayant des singularités non isolées | 21 |
| 1.4 | Singularités de la variété duale. | 23 |
| 1.5 | Codimension de certains sous-ensembles | 24 |
| 1.6 | Résultat principal | 26 |
| 2 | Généralisation d'une construction de Carlson | 28 |
| 2.1 | Rappels : systèmes locaux et VSH | 28 |
| 2.2 | Rappels : pinceaux de Lefschetz | 29 |
| 2.3 | Représentation de monodromie d'une singularité isolée d'hypersurface | 32 |
| 2.4 | Complétion locale de revêtements, singularités simples et groupes de Coxeter | 33 |
| 2.5 | Groupes de monodromie locaux | 37 |
| 2.6 | Construction de Y et de \mathbb{V}_Y | 39 |
| 3 | Premières propriétés du système local \mathbb{V}_Y | 43 |
| 3.1 | Variations de structures de Hodge | 43 |
| 3.2 | Torelli infinitésimal si \mathbb{W} est de rang 1 | 43 |
| 3.3 | Taille du groupe de monodromie si $\mathbb{W} = \mathbb{C}_X$ | 45 |
| 3.4 | Déformations de \mathbb{V}_Y | 46 |
| 3.5 | VSH sur des champs de Deligne-Mumford | 46 |
| II | Autour du théorème de Torelli infinitésimal | 48 |
| 4 | Préliminaires | 48 |
| 4.1 | Applications des périodes | 48 |
| 4.2 | Images directes de fibrés plats et de VSH | 49 |
| 4.3 | Cohomologie à coefficients dans une VSH | 49 |
| 4.4 | Application des périodes et application de Kodaira-Spencer | 50 |
| 5 | Injectivité d'un cup-produit | 52 |
| 5.1 | Un lemme sur les suites spectrales | 52 |
| 5.2 | Démonstration de la proposition 5.2 | 53 |
| 6 | Applications | 55 |
| 6.1 | Application des périodes de $R^n \pi_* \mathbb{W}_x$ | 56 |
| 6.2 | Rang de l'application des périodes de \mathbb{V}_Y | 56 |
| III | Étude cohomologique de \mathbb{V}_Y | 58 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 7 | Le théorème de décomposition | 58 |
| 7.1 | Rappels : faisceaux pervers et modules de Hodge | 59 |
| 7.2 | Application à la famille universelle d'hypersurfaces | 65 |
| 7.3 | Exemple d'utilisation : calcul de la cohomologie d'intersection de \mathbb{V} | 71 |
| 7.4 | Cohomologie d'intersection sur des sous-familles | 73 |
| 7.5 | Une application du théorème de Nori | 78 |
| 8 | Dégénérescence de la suite spectrale de Leray | 79 |
| 8.1 | Un résultat préliminaire sur les extensions intermédiaires | 79 |
| 8.2 | Dégénérescence | 80 |
| 9 | Groupes de cohomologie sur Y et applications | 82 |
| 9.1 | Cohomologie équivariante et cohomologie d'intersection | 82 |
| 9.2 | Déformations de systèmes locaux | 83 |
| 9.3 | Autour de la conjecture de Toledo | 84 |

Introduction

Le fil rouge de ce mémoire est une classe de variations de structures de Hodge (VSH en abrégé) sur des variétés complexes compactes. Dans la première partie, on construit des variétés projectives lisses munies de VSH à partir de certaines familles de sections hyperplanes à singularités simples. On en donne ensuite quelques propriétés qui découlent de résultats connus. Les deux parties suivantes correspondent à l'étude de ces VSH de deux points de vue différents.

Dans la deuxième partie, on étudie leur application des périodes. Carlos Simpson a montré dans un cas particulier ([Sim93]) qu'elle était génériquement immersive, et nous généralisons ce résultat à toutes les VSH construites dans la première partie. Pour cela, on est amené à étudier l'application des périodes d'images directes supérieures de VSH et à adapter le théorème de Torelli infinitésimal de M. Green ([Green85]). En application, on obtient pour ces VSH un résultat de « non-factorisation » similaire à celui de C. Simpson (voir [Sim93], partie 8)

Dans la troisième partie, on étudie ces VSH d'un point de vue plus cohomologique. On commence par appliquer le théorème de décomposition de Saito aux familles de sections hyperplanes considérées dans la première partie. Au passage, ce théorème permet de calculer plusieurs groupes de cohomologie ainsi que leur structure de Hodge. Le premier résultat de cette partie est un théorème de dégénérescence de suite spectrale de Leray pour certaines familles de sections hyperplanes à singularités simples, qui généralise un résultat similaire portant sur les pincesaux de Lefschetz. Le second résultat est le calcul d'une partie des groupes de cohomologie des VSH ; ceci permet par exemple de construire des systèmes locaux possédant des déformations.

Présentation de la première partie

Comme point de départ, rappelons brièvement la définition d'une variation de structure de Hodge. Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie. Une structure de Hodge complexe (polarisée) de poids w sur V est la donnée d'une forme hermitienne non dégénérée S sur V et d'une décomposition $V = \bigoplus_{p+q=w} H^{p,q}$, orthogonale pour S , et telle que $(-1)^p S$ soit définie positive sur $H^{p,q}$. On note $h^{p,q} := \dim H^{p,q}$ et on appelle vecteur de Hodge le vecteur $\mathbf{h} := (h^{p,q})$.

Soit X une variété complexe. Une variation de structure de Hodge complexe polarisée de poids w sur X est la donnée d'un système local \mathbb{V} d'espaces vectoriels complexes de dimension finie sur X , de connexion plate D , et d'une forme hermitienne S non dégénérée et plate, tels que :

- (i) $\mathbb{V} \otimes \mathcal{O}_X$ soit muni d'une filtration décroissante F^\bullet par sous-fibrés holomorphes ;
- (ii) le fibré différentiel V sous-jacent à \mathbb{V} se décompose en une somme directe de sous-fibrés $V = \bigoplus_{p+q=w} H^{p,q}$ vérifiant $F^p = \bigoplus_{p' \geq p} H^{p',q}$;
- (iii) les fibres de \mathbb{V} , munies de la restriction de S et F^\bullet , soient des structures de Hodge complexes polarisées ;

(iv) la transversalité de Griffiths soit vérifiée : $DF^p \subset F^{p-1} \otimes \Omega_X^1$.

Les VSH ont une importance fondamentale dans l'étude des groupes fondamentaux de variétés projectives lisses grâce aux travaux de Carlos Simpson, qui a montré qu'une représentation linéaire d'un tel groupe peut toujours être déformée en une représentation provenant d'une VSH. Cependant, on dispose d'assez peu de classes d'exemples de VSH sur des variétés projectives lisses.

L'exemple classique de variation de structure de Hodge est dû à P. Griffiths, qui a montré que les fibrés de cohomologie primitive d'une famille lisse de variétés projectives lisses sont des VSH. Cependant, la base d'une telle famille est en général non compacte. Dans cette partie, on souhaite construire des VSH sur des bases compactes à partir d'une situation géométrique un peu plus générale.

Contexte général Étant donné un morphisme projectif $f : X \rightarrow Y$ entre deux variétés complexes, non lisse a priori, on obtient une VSH sur l'ouvert des valeurs régulières de f . L'idée générale est alors d'essayer d'étendre cette VSH à une complétion projective lisse. Malheureusement, ce n'est pas toujours possible. Rappelons un résultat classique d'extension de VSH :

THÉORÈME. ([Gri70], théorème 9.5) — *Soit \mathbb{V} une VSH sur le disque épointé Δ^* , telle que le système local sous-jacent ait une transformation de monodromie d'ordre fini. Alors, il existe un revêtement cyclique fini $\Delta^* \rightarrow \Delta^*$ tel que le tiré en arrière de \mathbb{V} s'étende en une VSH sur Δ .*

Ce théorème résulte du cas particulier où l'opérateur de monodromie autour de l'origine est trivial : on peut alors étendre \mathbb{V} en une VSH sur le disque. De façon plus générale, si une VSH sur un ouvert d'une variété s'étend en un système local, alors celui-ci est sous-jacent à une VSH.

Passons au principe général de construction de nos exemples. L'objectif est de construire un espace projectif P , un revêtement ramifié fini $p : \tilde{P} \rightarrow P$ avec \tilde{P} lisse, et une VSH \mathbb{V} sur l'ouvert de P au-dessus duquel p est étale, telle que $p^*\mathbb{V}$ s'étende en une VSH sur \tilde{P} . Pour cela, les monodromies locales de \mathbb{V} doivent nécessairement être d'ordre fini.

Description de la construction Soit X une variété projective lisse de dimension *impair* $n + 1$ plongée dans un espace projectif \mathbb{P} . Il existe une famille universelle de sections hyperplanes, $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{P}^\vee$, où \mathbb{P}^\vee est l'espace projectif dual de \mathbb{P} . Si $s \in \mathbb{P}^\vee$, on note X_s la section hyperplane de X correspondant à s . Soit U l'ouvert de \mathbb{P}^\vee qui paramètre les sections hyperplanes lisses, et X^\vee son complémentaire. Alors, U est muni d'une VSH, notée \mathbb{V} , dont la fibre en u est la cohomologie évanescence de la section hyperplane X_u . La représentation de monodromie de \mathbb{V} est notée $\rho : \pi_1(U, u) \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$. Si $s \in X^\vee$, on appelle groupe de monodromie local de \mathbb{V} au voisinage de s l'image du morphisme composé $\pi_1(\mathcal{B}(s, \varepsilon) \cap U, u) \rightarrow \pi_1(U, u) \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, où $\mathcal{B}(s, \varepsilon)$ est une petite boule de \mathbb{P}^\vee centrée en s . Il peut être fini ou infini.

Dans [Sim93], poursuivant une idée de J. Carlson (publié dans [CT93]), C. Simpson considère un plan projectif générique $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^\vee$. Quitte à composer le plongement $X \subset \mathbb{P}$ par un

plongement de Veronese, l'intersection $X^\vee \cap \mathbb{P}^2$ est une courbe irréductible dont les seules singularités sont des nœuds et des cusps. Les groupes de monodromie locaux de \mathbb{V} autour des points de cette courbe sont finis, ce qui permet de construire un revêtement ramifié de \mathbb{P}^2 auquel on étend \mathbb{V} . Sous certaines conditions, la VSH obtenue sur ce revêtement ramifié de \mathbb{P}^2 a une application des périodes génériquement immersive et un gros groupe de monodromie. En application de ses résultats sur les images directes supérieures de fibrés harmoniques, Simpson montre que la VSH ainsi construite est non rigide si l'on choisit bien X ([Sim93], théorème 9.2).

Le résultat principal de cette partie est la généralisation de cette construction en dimension 3 à 6 :

THÉORÈME 0.1. (théorème 2.35) — *Soit X une variété projective lisse de dimension impaire $n + 1$, plongée dans un espace projectif \mathbb{P} , linéairement normale, $U \subset \mathbb{P}^\vee$ l'ouvert des sections hyperplanes lisses de X et \mathbb{V} le système local sur U de cohomologie évanescence des sections hyperplanes.*

Soit m un entier compris entre 3 et 6, $\mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^\vee$ un sous-espace projectif générique de dimension m , et $U_m := U \cap \mathbb{P}^m$ l'ouvert paramétrant des sections hyperplanes lisses. La restriction de \mathbb{V} à U_m est encore notée \mathbb{V} .

- (a) *Si $\mathcal{O}_X(1)$ engendre ses m -jets, il existe une variété quasiprojective lisse \tilde{U}_m et un revêtement galoisien (fini) $p : \tilde{U}_m \rightarrow U_m$, tels que pour toute compactification $i : \tilde{U}_m \hookrightarrow Y$, $\mathbb{V}_Y := i_* p^* \mathbb{V}$ soit un système local sur Y (en particulier, pour une compactification Y lisse).*
- (b) *Si de plus $\mathcal{O}_X(1)$ est m -jet ample (voir 1.1), il existe une telle compactification lisse finie sur \mathbb{P}^m .*

Les conditions sur $\mathcal{O}_X(1)$ et sur m suffisent pour que les groupes de monodromie locaux de \mathbb{V} au voisinage de $\mathbb{P}^m \setminus U$ soient des groupes finis. En effet, par un argument de théorie de singularités détaillé en 1.6, les sections hyperplanes paramétrées par $s \in \mathbb{P}^m$ n'ont alors que des singularités de type ADE, et la monodromie de \mathbb{V} se déduit des représentations de monodromie de ces singularités. Or, celles-ci ont une image finie. Ceci permet de construire le revêtement.

Organisation de la partie La partie est constituée de trois sections. La première est essentiellement une étude de la variété duale de X . Pour $m \leq 6$, on définit des conditions de positivité sur $\mathcal{O}_X(1)$ qui suffisent à décrire une stratification de X^\vee jusqu'aux strates de codimension m :

THÉORÈME. (théorème 1.30) — *Soit X une variété projective lisse, plongée dans un espace projectif \mathbb{P} , linéairement normale, et \mathbb{P}^\vee l'espace projectif dual.*

Soit m un entier compris entre 3 et 6. Supposons que $\mathcal{O}_X(1)$ soit m -jet-ample. Alors, il existe un sous-ensemble fermé Z_m de X^\vee de codimension au moins $m + 1$ dans \mathbb{P}^\vee , tel que pour tout $s \in \mathbb{P}^\vee \setminus Z$, les singularités de la section hyperplane X_s soient isolées, simples, et la somme de leurs nombres de Tjurina soit inférieure ou égale à m .

La deuxième section regroupe des résultats sur les groupes de monodromie locaux de \mathbb{V} puis la démonstration du théorème 0.1.

À ce stade, signalons que la construction faite dans la partie I est en fait légèrement plus générale que celle décrite plus haut : au lieu de considérer les groupes de cohomologie évanescence $H^n(X_u, \mathbb{C})_{ev}$ de sections hyperplanes de X , on prend les groupes $H^n(X_u, \mathbb{W}_{|X_u})_{ev}$, où \mathbb{W} est une VSH quelconque sur X . La procédure fournit donc un couple (Y, \mathbb{V}_Y) à partir d'un couple (X, \mathbb{W}) , et peut être itérée si on choisit l'entier m impair. Si \mathbb{W} est une VSH réelle, rationnelle ou entière, il en est de même de \mathbb{V}_Y .

Dans la troisième section, on commence à établir quelques propriétés de \mathbb{V}_Y , essentiellement lorsque $\mathbb{W} = \mathbb{C}$. Dans l'exemple original en dimension deux, Carlson montre sous certaines conditions que le groupe de monodromie de la VSH est Zariski-dense dans un groupe orthogonal et même arithmétique ([CT93] p. 135, voir aussi [CT99] théorèmes 3.2 et 9.1), en utilisant des arguments de Deligne et de Beauville. On étend ces résultats en dimension supérieure, ainsi que les théorèmes de non rigidité et de Torelli infinitésimal de [Sim93]. Dans le cas où \mathbb{W} est de rang quelconque, le problème de Torelli infinitésimal est étudié dans la partie II.

On remarque enfin que la construction de Y et \mathbb{V}_Y fait apparaître en filigrane un champ de Deligne-Mumford et une VSH sur ce champ, qui semblent être les objets intrinsèques.

Présentation de la deuxième partie

Dans cette partie, on étudie l'application des périodes de \mathbb{V}_Y lorsque \mathbb{W} est une VSH de rang quelconque sur X . Rappelons d'abord quelques propriétés des applications et domaines de périodes.

Soit $\mathbf{h} := (h^{p,q})_{p+q=w}$ une suite finie de nombres entiers, $V_0 := \mathbb{C}^{\sum_p h^{p,q}}$ et S une forme hermitienne non dégénérée sur V_0 de signature $(P, Q) = (\sum_{p=0}^{[2]} h^{p,q}, \sum_{p=1}^{[2]} h^{p,q})$. L'espace de modules des structures de Hodge complexes sur V_0 de vecteur de Hodge \mathbf{h} et polarisées par S s'identifie à la variété complexe $\mathcal{D}(\mathbf{h}) := U(P, Q) / \prod_p U(h^{p,q})$. C'est un exemple de domaine de Griffiths.

Soit M une variété complexe, et \mathbb{V} une variation de structure de Hodge complexe polarisée sur M , de vecteur de hodge \mathbf{h} . Supposons que le système local sous-jacent à \mathbb{V} soit trivial. Alors, toutes les fibres sont canoniquement isomorphes à un espace vectoriel noté V . L'application des périodes de \mathbb{V} est l'application $\mathcal{P} : M \rightarrow \mathcal{D}(\mathbf{h})$ qui à un point $t \in M$ associe la structure de Hodge complexe polarisée sur $V_t = V$. Cette application est holomorphe. Lorsque le système local sous-jacent à \mathbb{V} n'est pas trivial, l'application des périodes de \mathbb{V} n'est pas bien définie, mais le devient en tirant en arrière \mathbb{V} sur le revêtement universel \tilde{M} de M .

Dans cette partie, on montre le

THÉORÈME 0.2. (théorème 6.2) — *Soit X une variété projective lisse de dimension impaire $n + 1$, et \mathbb{W} une VSH sur X . On suppose X plongée dans un espace projectif \mathbb{P} , linéairement normale, et on note $X \xleftarrow{\alpha} \mathfrak{X} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^V$ la famille universelle de sections hyperplanes de X .*

Soit m un entier tel que $\dim \mathbb{P}^\vee \geq m + \dim H^0(X, T_X)$ et que $\mathcal{O}_X(1)$ soit m -jet ample. Soit \mathbb{P}^m un sous-espace projectif générique de \mathbb{P}^\vee et (Y, \mathbb{V}_Y) le couple construit dans la généralisation du théorème 0.1. Alors, quitte à composer $X \hookrightarrow \mathbb{P}$ par un plongement de Veronese, l'application des périodes de \mathbb{V}_Y est génériquement de rang maximal.

La partie est composée de trois sections. Dans la première, on rappelle certains résultats sur l'application des périodes d'une VSH, sa connexion de Gauss-Manin ainsi que sur la structure de Hodge portée par ses groupes de cohomologie. Ces résultats sont classiques. On démontre ensuite un lemme qui fait le lien entre l'application de Kodaira-Spencer et la dérivée de l'application des périodes. Contrairement au cas classique, la différentielle de l'application des périodes ne se factorise pas par l'application de Kodaira-Spencer, mais après composition par un certain morphisme qui « oublie » une partie de l'information, c'est essentiellement le cas.

Dans la deuxième section, on montre un lemme d'injectivité de cup-produit similaire à celui de [Green85], dans un cadre un peu plus général.

Enfin, dans la troisième section, on étudie l'application des périodes de $(R^n \pi_* a^* \mathbb{W})|_U$ et on en déduit le théorème 6.2.

Présentation de la troisième partie

Dans cette dernière partie, on étudie la VSH \mathbb{V}_Y par des méthodes cohomologiques. Le point de départ de cette partie est le résultat suivant. Soit X une variété projective lisse quelconque et soit \mathbb{P}^1 la base d'un pinceau de Lefschetz de sections hyperplanes de X . On note $\pi : \mathfrak{X}_{\mathbb{P}^1} \rightarrow \mathbb{P}^1$ le morphisme projectif dont les fibres sont précisément les sections hyperplanes du pinceau. On sait qu'il existe un nombre fini de fibres singulières : ces fibres ont un seul point singulier, qui est un point quadratique ordinaire. Le résultat suivant est démontré dans l'exposé XVIII de SGA7 (« Étude cohomologique des pinceaux de Lefschetz ») :

THÉORÈME. ([SGA7], XVIII, 5.6.7) — *La suite spectrale de Leray du morphisme π dégénère en E_2 .*

Ce résultat découle assez directement du critère de dégénérescence de suites spectrales de Deligne ([Del68], théorème 1.5) lorsque X est de dimension impaire.

Le premier résultat de cette partie est la généralisation de ce théorème aux familles de section hyperplanes de dimension 2 à 6 déjà introduites, lorsque X est de dimension impaire. On démontre en fait un théorème de décomposition d'image directe dérivée qui entraîne la dégénérescence de la suite spectrale de Leray.

THÉORÈME 0.3. (voir théorème 8.1) — *Soit X une variété projective lisse de dimension impaire $n + 1$ plongée dans un espace projectif \mathbb{P} , linéairement normale, $X \xleftarrow{\alpha} \mathfrak{X} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^\vee$ la section hyperplane universelle, \mathbb{W} une VSH sur X et m un entier positif compris entre 2 et 6.*

Supposons que $\mathcal{O}_X(1)$ soit $\max(3, m)$ -jet ample. Soit \mathbb{P}^m un sous-espace projectif générique de \mathbb{P}^\vee , et $X \xleftarrow{\alpha_m} \mathfrak{X}_m \xrightarrow{\pi_m} \mathbb{P}^m$ la famille de sections hyperplanes paramétrée par \mathbb{P}^m . Alors, l'image directe dérivée $R\pi_{m}(a_m^* \mathbb{W})$ est décomposable dans $\mathcal{D}_c^b(\mathbb{P}^m, \mathbb{C})$.*

La preuve de ce théorème repose sur l'utilisation du théorème de décomposition de Saito pour les modules de Hodge, ainsi que sur l'existence de la variété Y construite dans la première partie.

Le deuxième théorème concerne les groupes de cohomologie $H^l(Y, \mathbb{V}_Y)$. Ils sont munis d'une action du groupe G du revêtement $Y \rightarrow \mathbb{P}^m$. On note B le lieu de base de la sous-famille $\mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^V$.

THÉORÈME 0.4. (théorème 9.1) — *On conserve les notations et hypothèses du théorème précédent.*

Si $l < m$, ou si $l = m$ et $m > n$, la structure de Hodge sur $H^l(Y, \mathbb{V}_Y)^G$ porte une filtration dont les gradués successifs sont isomorphes à

$$H^i(\mathbb{P}^V) \otimes H^{n+i-l+2}(X, \mathbb{W})_{\text{prim}}(i-l+1),$$

pour i variant entre 0 et $l-1$. Si $l = m$ et que $m \leq n$, la filtration a un cran de plus et le gradué supplémentaire est isomorphe à $H^{n-m}(B, \mathbb{W})_{\text{ev}}(-m)$.

En particulier si $H^{n+1}(X, \mathbb{W})_{\text{prim}}$ n'est pas nul, alors $H^1(Y, \mathbb{V}_Y)$ non plus. On donne deux applications de ce fait : la construction d'un système local déformable sur Y , et la vérification de la conjecture de Toledo pour Y .

Organisation de la partie Cette partie est composée de trois sections. Dans la première, on commence par rappeler quelques définitions et résultats fondamentaux sur les faisceaux pervers et des modules de Hodge, parmi lesquels le théorème de décomposition de Beilinson, Bernstein, Deligne et Gabber pour les faisceaux pervers, et le théorème de décomposition de Saito pour les modules de Hodge. On applique ensuite le théorème de Saito à la famille universelle de sections hyperplanes de X , ainsi qu'aux sous-familles paramétrées par des sous-espaces génériques \mathbb{P}^m , $m \leq 6$. Dans les deux cas, on détermine des conditions de positivité sur $\mathcal{O}_X(1)$ qui suffisent à identifier tous les modules de Hodge irréductibles qui apparaissent dans les deux décompositions (théorème 7.27). Dans le cas de la famille universelle, cette décomposition doit être considérée comme connue, même si elle donnée dans un cadre un peu plus général et avec une condition de positivité plus faible sur $\mathcal{O}_X(1)$ que ce qui figure dans la littérature (par exemple dans [BFNP09]).

Ayant déterminé ces deux décompositions, on en donne une application immédiate : le calcul des groupes de cohomologie d'intersection de \mathbb{V} sur \mathbb{P}^V et sur \mathbb{P}^m ainsi que leur structure de Hodge (proposition 7.34 et proposition 7.37). Cette section contient aussi une application du théorème de connexité de Nori au calcul des groupes de cohomologie classiques de \mathbb{V} , n'utilisant pas les modules de Hodge.

Dans la deuxième section, on démontre un lemme sur les extensions intermédiaires de faisceaux pervers, qui entraîne le théorème de dégénérescence 0.3 annoncé plus haut. Dans la troisième section, on prouve le théorème 0.4, puis les deux applications annoncées.

Conventions générales

Toutes les variétés, analytiques ou algébriques, sont définies sur \mathbb{C} . Les lettres X, Y, Z désigneront en général des variétés, \mathbb{V} et \mathbb{W} des systèmes locaux ou des variations de structure de Hodge et V, W les fibrés différentiables sous-jacents.

Dans la plus grande partie du mémoire, la lettre X désigne une variété projective lisse de dimension impaire $n + 1$ plongée dans un espace projectif \mathbb{P} , linéairement normale. Cette hypothèse sera rappelée dans les énoncés des théorèmes principaux. On énoncera sporadiquement des lemmes généraux en utilisant la notation X pour une variété quelconque (ou vérifiant d'autres hypothèses), notamment dans les paragraphes de rappels. Ceci sera alors précisé.

Par variation de structure de Hodge (VSH) on entendra, sauf mention du contraire, une variation de structure de Hodge *complexe et polarisable*. Dans la partie III, on supposera en général que les VSH sont rationnelles afin d'utiliser la théorie des modules de Hodge. Cette hypothèse sera précisée à chaque fois. Remarquons qu'il serait peut-être possible de supposer seulement les VSH réelles dans la partie III et de travailler avec des modules de Hodge réels.

Première partie

Une classe de VSH sur des bases compactes de dimension 3 à 6

1 Sections hyperplanes à singularités simples

Introduction

Dans cette section, nous démontrons principalement le résultat suivant :

THÉORÈME. 1.30 — *Soit X une variété projective lisse, plongée dans un espace projectif \mathbb{P} , linéairement normale, et \mathbb{P}^\vee l'espace projectif dual. Soit m un entier compris entre 3 et 6. Supposons que $\mathcal{O}_X(1)$ soit m -jet-ample. Alors, il existe un sous-ensemble fermé Z_m de X^\vee de codimension au moins $m + 1$ dans \mathbb{P}^\vee , tel que pour tout $v \in X^\vee \setminus Z_m$, les singularités de la section hyperplane X_v soient isolées, simples, et la somme de leurs nombres de Tjurina soit inférieure ou égale à m .*

La recherche de partitions ou stratifications naturelles de la variété duale est un problème relativement ancien. Considérons tout d'abord un cas particulier, celui des hypersurfaces de degré d d'un espace projectif. L'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré d à $n + 1$ variables est muni d'une action de $G := \mathrm{GL}(n + 1, \mathbb{C})$, et on cherche à décrire une stratification de Whitney G -invariante de cet espace. On peut alors considérer la partition par type et nombre de singularités des hypersurfaces. Dans [Bru80], J.W. Bruce a étudié le cas des surfaces cubiques et des courbes quartiques. Dans ces deux cas, les sections hyperplanes avec des singularités non isolées forment un nombre fini de G -orbites. Bruce a montré que les ensembles de courbes quartiques (resp. surfaces cubiques) à singularités simples ayant un nombre et un type fixé de singularités étaient lisses, réguliers au sens de Whitney, et que leur codimension était exactement la somme des nombres de Milnor des singularités.

Dans [Bru81], Bruce a ensuite étudié les sections hyperplanes d'une variété X qui est une hypersurface générique lisse de \mathbb{P}^{n+2} .

THÉORÈME. ([Bru81], 2.12) — *Soit $n \leq 5$, $d \geq 2n + 7$ et X une hypersurface générique lisse de degré d de \mathbb{P}^{n+2} . Alors, toutes les singularités des sections hyperplanes de X sont simples. De plus, la variété duale de X est localement l'union transverse de diagrammes de bifurcation de singularités simples.*

Bruce obtient donc une description très précise de la variété duale, mais la condition sur X d'être une hypersurface lisse de \mathbb{P}^{n+2} est extrêmement forte. Le résultat démontré dans cette section ne décrit qu'une partie d'une stratification de la variété duale, mais s'applique à toutes les variétés projectives lisses plongées par un faisceau inversible assez positif.

Les deux premiers paragraphes regroupent les rappels nécessaires de dualité projective (1.1) et de théorie des singularités (1.2). Nous minorons ensuite la codimension de l'ensemble des sections hyperplanes ayant des singularités non isolées (1.3). Nous donnons aussi une description locale de la variété duale au voisinage d'une section hyperplane à singularités isolées (1.4).

L'ensemble des sections hyperplanes à singularités isolées peut être écrit comme union disjointe de sous-ensembles qui paramètrent des sections hyperplanes ayant les mêmes singularités (en même nombre). Ces sous-ensembles sont analytiques et on minore leur codimension en fonction de la somme des nombres de Tjurina des singularités présentes (1.5). Cependant, cette partition n'est pas localement finie, ce qui motive l'introduction des singularités simples.

Dans le paragraphe 1.6, on minore la codimension de l'ensemble des sections hyperplanes ayant des singularités non simples, puis celle de l'ensemble des sections hyperplanes ayant des singularités simples mais dont la somme des nombres de Tjurina est supérieure à l , en utilisant les résultats du paragraphe précédent. Ceci permet d'obtenir le théorème 1.30.

1.1 Rappels : variétés plongées, variété duale et hypersurface universelle

Soit V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie. On note $\mathbb{P}(V)$ l'espace projectif associé, dont les points correspondent aux droites vectorielles de V . On note V^\vee le dual de V . L'espace projectif $\mathbb{P}(V^\vee)$ paramètre les hyperplans vectoriels de V , c'est-à-dire les hyperplans projectifs de $\mathbb{P}(V)$; on le note $(\mathbb{P}(V))^\vee$, et on l'appelle le dual de $\mathbb{P}(V)$.

Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une variété projective. Un hyperplan projectif de \mathbb{P}^N est dit tangent à X s'il existe un point lisse x de X tel que H contienne l'espace tangent à X en x . La variété duale de X est par définition l'adhérence de Zariski dans $(\mathbb{P}^N)^\vee$ de l'ensemble de tous les hyperplans tangents à X .

On note \mathfrak{Z} et on appelle variété conormale de X l'adhérence de Zariski dans $\mathbb{P}^N \times (\mathbb{P}^N)^\vee$ de l'ensemble

$$\{(x, H) \in X_{\text{lisse}} \times (\mathbb{P}^N)^\vee, H \text{ est tangent à } X \text{ en } x\}.$$

C'est une variété irréductible de dimension $N - 1$. Remarquons que X^\vee est l'image de \mathfrak{Z} par la projection sur le facteur $(\mathbb{P}^N)^\vee$. C'est donc une variété irréductible.

Définissons

$$def(X) := \text{codim } X^\vee - 1,$$

le *défait* de la variété X . Il s'annule si et seulement si la variété duale X^\vee est une hypersurface. Dans ce cas, elle est définie par un polynôme homogène irréductible appelé discriminant et noté Δ_X .

En fait, il suffit qu'il existe une section hyperplane avec une singularité quadratique ordinaire pour que la variété duale soit une hypersurface. En effet, la projection de la variété conormale sur la variété duale est une immersion aux points (x, H) tels que x soit un point quadratique ordinaire de $X \cap H$ (voir [Voi02], lemme 14.7).

Variétés linéairement normales La variété X est dite linéairement non dégénérée si elle n'est pas incluse dans un hyperplan projectif. Si une variété irréductible X est contenue dans un hyperplan H , alors sa variété duale est un cône de sommet H . Réciproquement, si la variété duale est un cône, alors X est contenue dans l'hyperplan qui correspond au sommet. Ceci permet de se restreindre au cas des variétés non dégénérées.

Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une variété projective, et $\mathcal{O}_X(1)$ la restriction à X de $\mathcal{O}(1)$. Considérons le morphisme de restriction :

$$r : H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(1)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(1)).$$

Ce morphisme est injectif si et seulement si X est non dégénérée. S'il est bijectif, on dit que la variété plongée X est linéairement normale. C'est le cas si et seulement si le plongement provient d'un système linéaire complet.

Jets Soit X une variété projective lisse et \mathcal{L} un faisceau inversible sur X . On appelle $J^1(\mathcal{L})$ le fibré des 1-jets de \mathcal{L} . C'est un fibré vectoriel algébrique de rang $\dim X + 1$.

À toute section f de \mathcal{L} on peut associer son jet d'ordre un, noté $j^1(f)$. Supposons maintenant que \mathcal{L} soit très ample, et que X soit plongée par le système linéaire complet $|\mathcal{L}|$. Alors, $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$ représente un point de X^\vee si et seulement si $j^1(f)$ s'annule en un point.

REMARQUE 1.1. — Si $\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) > \dim X + 1$, alors pour tout $x \in X$, il existe une section hyperplane ayant une singularité en x . En effet, le morphisme $j_x^1 : H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) \rightarrow J_x^1$ ne peut être injectif pour des raisons de dimension, et son noyau est exactement l'ensemble des sections globales de $\mathcal{O}_X(1)$ qui s'annulent et sont singulières en x .

THÉORÈME 1.2. (voir [Tev03]) — Soit X une variété projective lisse plongée de dimension d , et $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(1)$. Alors X^\vee est une hypersurface si et seulement si $c_d(J^1(\mathcal{L})) \neq 0$, et dans ce cas son degré est $\int_X c_d(J^1(\mathcal{L}))$.

On rappelle enfin plusieurs notions de positivité pour des faisceaux inversibles.

NOTATIONS 1.3. On dit qu'un faisceau inversible \mathcal{L} engendre ses k -jets si pour tout point $x \in X$, on a une surjection :

$$H^0(X, \mathcal{L}) \rightarrow \frac{\mathcal{O}_{X,x}}{\mathfrak{m}_x^{k+1}}.$$

Soit \underline{k} un multi-indice de longueur l . On dit que \mathcal{L} engendre ses \underline{k} -multijets si pour tout l -uplet (x_i) de points distincts de X , on a une surjection :

$$H^0(X, \mathcal{L}) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^l \frac{\mathcal{O}_{X,x_i}}{\mathfrak{m}_{x_i}^{k_i+1}}.$$

On dit que \mathcal{L} est k -jet ample ([BeSo]) si pour l -uplet d'entiers naturels $(k_i)_{1 \leq i \leq l}$ tels que $\sum k_i = k + 1$ et tout l -uplet (x_i) de points distincts de X , on a une surjection :

$$H^0(X, \mathcal{L}) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^l \frac{\mathcal{O}_{X,x_i}}{\mathfrak{m}_{x_i}^{k_i}}.$$

REMARQUE 1.4. — $\mathcal{O}_X(1)$ est 1-jet ample (équivalent à très ample).

REMARQUE 1.5. — Si \mathcal{L}_1 est p -jet ample et \mathcal{L}_2 est q -jet ample, alors $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$ est $(p+q)$ -jet ample.

REMARQUE 1.6. — Si $\mathcal{O}_X(1)$ est 2-jet ample, alors pour tout $x \in X$, il existe une section hyperplane singulière en x et lisse aux autres points. En effet, considérons le sous-espace $\text{Ker } j_x^1 \subset H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$ des sections hyperplanes singulières en x ; il est de dimension au moins deux, puisque $\mathcal{O}_X(1)$ engendre ses 2-jets en x . De plus, le faisceau engendrant ses $(1, 0)$ -multijets, le lieu de base de $\text{Ker } j_x^1$ est réduit à x . Par le théorème de Bertini, un élément générique de ce système linéaire est donc lisse en-dehors de x .

1.2 Rappels : singularités et déformations

Nous rappelons quelques définitions et propriétés des germes d'espaces analytiques et de leurs déformations, en particulier dans le cas des germes de singularités isolées d'hypersurface.

Germes de fonctions holomorphes et germes d'hypersurfaces

Soit X une variété lisse de dimension $n + 1$, et f une fonction holomorphe sur un ouvert U de X . Le sous-espace analytique fermé de U défini par f est noté X_f . Si x est un point de X , alors à tout idéal $I \subset \mathcal{O}_{X,x}$ on associe un germe (Y, x) de sous-espace analytique de X , avec $\mathcal{O}_{Y,x} = \mathcal{O}_{X,x}/I$. Lorsque $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ est un germe de fonction holomorphe en x s'annulant en x , l'idéal principal engendré par f , souvent noté I_f , définit un germe d'hypersurface de X , que l'on note (X_f, x) .

LEMME 1.7. ([Dim87], prop. 3.16 p. 23) — Soient f et g deux fonctions holomorphes définies au voisinage de x , f_x et g_x leurs germes dans $\mathcal{O}_{X,x}$. Alors, les algèbres locales $\mathcal{O}_{X_f,x}$ et $\mathcal{O}_{X_g,x}$ sont isomorphes si et seulement s'il existe un germe α défini au voisinage de x , non nul en x , et un biholomorphisme φ d'un ouvert contenant x et fixant x tels qu'au voisinage de x , on ait :

$$g(z) = \alpha(z).f(\varphi(z)).$$

DÉFINITION 1.8. — Lorsque les conditions équivalentes précédentes sont vérifiées, on dit que les germes f_x et g_x sont \mathcal{K} -équivalents (V -équivalents dans la terminologie d'Arnold). L'ensemble des germes \mathcal{K} -équivalents à f_x forme la classe (ou orbite) de \mathcal{K} -équivalence de f_x dans $\mathcal{O}_{X,x}$. C'est l'orbite de f sous l'action d'un groupe que l'on note \mathcal{K} (voir [Dim87], 3.8 p. 18).

DÉFINITION 1.9. — Soient f et g deux germes de fonction dans $\mathcal{O}_{X,x}$. On dit que g est dans la grande orbite de \mathcal{K} -équivalence de f s'il existe un ouvert U de X contenant x sur lequel g est défini et un point $y \in U$ tel que le germe de g en y soit \mathcal{K} -équivalent à f_x . Il est équivalent de dire qu'il existe un germe $\alpha \in \mathcal{O}_{X,y}^\times$, et un germe φ de biholomorphisme envoyant y sur x tel que, dans des coordonnées holomorphes locales en y , on ait :

$$g(z) = \alpha(z).f(\varphi(z)).$$

DÉFINITION 1.10. — Soit f un germe de fonction holomorphe en x s'annulant en x . On appelle idéal jacobien de f l'idéal $\text{Jac}(f) = (\frac{\partial f}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n})$ de $\mathcal{O}_{X,x}$, et idéal de Tjurina de f l'idéal $\text{Tju}(f) = (f, \frac{\partial f}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n})$. Si ces idéaux sont de codimension finie, on note μ et τ leur codimension. Par abus de langage, on désigne également par nombre de Milnor et de Tjurina ces codimensions même lorsqu'elles sont infinies, et on les note de la même manière.

Le germe f est singulier (en x) si et seulement si l'idéal jacobien est de codimension strictement positive, et la singularité du germe (X_f, x) en x est isolée si et seulement si cette codimension est finie.

DÉFINITION 1.11. — Soit l un entier. Le quotient de $\mathcal{O}_{X,x}$ par \mathfrak{m}_x^{l+1} est par définition l'espace des l -jets en x . On note J_x^l cet espace et j^l la projection canonique $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow J_x^l$.

On dit qu'un germe $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ est l -suffisant si tout germe g ayant même jet d'ordre l que f lui est \mathcal{K} -équivalent. Lorsqu'il existe un entier k tel que f soit k -suffisant, on dit qu'il est de détermination finie. C'est le cas si et seulement si l'idéal de Tjurina est de codimension finie. De plus, si l'idéal de Tjurina de f contient \mathfrak{m}_x^k , alors f est $k+1$ -suffisant ([Dim87], théorème 6.11 p. 67).

PROPOSITION 1.12. (voir [Dim87], 4.24 p. 39) — Soit $f \in \mathcal{O}_{X,x}$, et l un entier positif. L'image dans J_x^l de l'orbite de \mathcal{K} -équivalence de f est l'orbite de $j^l f$ sous l'action d'un groupe algébrique \mathcal{K}^l qui agit sur J_x^l . C'est donc une sous-variété lisse. Son espace tangent en f est l'espace vectoriel $j^l(\mathfrak{m}.\text{Jac}(f) + I_f)$.

PROPOSITION 1.13. (voir [Dim87], 6.52 p. 92) — Soit $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ un germe de singularité isolée, et l un entier positif. La trace dans J_x^l de la grande orbite $G\text{Orb}(f)$ est au voisinage de j^l une sous-variété complexe de J_x^l . Son espace tangent en $j^l f$ est $j^l(Tju(f))$.

Déformation miniverselle d'une singularité isolée d'hypersurface

On décrit maintenant de façon explicite la déformation miniverselle d'un germe de singularité isolée d'hypersurface, en suivant l'exposition de [Loo]. Soit $f \in \mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ un germe de fonction défini sur $U \subset X$. On suppose que (X_f, x) est un germe d'hypersurface à singularité isolée en x , et on note (a_1, \dots, a_τ) une base d'un supplémentaire de l'idéal de Tjurina dans $\mathcal{O}_{X,x}$.

Le germe g en $(x, 0)$ de la fonction holomorphe

$$U \times \mathbb{C}^\tau \rightarrow \mathbb{C},$$

$$(z, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau) \mapsto f(z) + \sum_{i=1}^{\tau} \lambda_i a_i(z)$$

est appelé *déploiement miniversel* de f , et l'espace des paramètres \mathbb{C}^τ en est la *base*.

Considérons alors φ , le germe de l'application

$$U \times \mathbb{C}^\tau \longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\tau,$$

$$(z, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau) \mapsto (g(z, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau), \lambda_1, \dots, \lambda_\tau),$$

et

$$\Phi : (Y, y) \rightarrow (\mathbb{C}^\tau, 0)$$

sa restriction au-dessus de l'hyperplan $\{0\} \times \mathbb{C}^\tau$, où $y = (x, 0)$.

DÉFINITION 1.14. — L'ensemble des valeurs critiques de Φ est le discriminant ou diagramme de bifurcation de la singularité f .

On obtient un carré cartésien de germes d'espaces analytiques :

$$\begin{array}{ccc} (X_f, x) & \longrightarrow & (Y, y) \\ \downarrow & & \downarrow \Phi \\ \{x\} & \longrightarrow & (\mathbb{C}^\tau, 0) \end{array}$$

C'est la *déformation miniverselle* de (X_f, x) , qui vérifie les propriétés universelles suivantes ([Loo], p. 101) :

– pour tout autre carré cartésien de germes d'espaces analytiques

$$\begin{array}{ccc} (X_f, x) & \longrightarrow & (Y', y') \\ \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ \{x\} & \longrightarrow & (B', b') \end{array}$$

avec $\{Y', y'\}$ et $\{B', b'\}$ lisses, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & (X, x) & & \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ (Y, y) & \xleftarrow{\tilde{g}} & & \xrightarrow{\tilde{g}} & (Y', y') \\ \downarrow \Phi & & \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ & & \{x\} & & \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ (\mathbb{C}^\tau, 0) & \xleftarrow{g} & & \xrightarrow{g} & (B', b') \end{array}$$

– la différentielle

$$dg : T_{b'}B' \longrightarrow T_0\mathbb{C}^\tau$$

est unique pour tous les tels morphismes de déformations.

Singularités simples

Soit $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ un germe définissant une singularité isolée. Sa \mathcal{H} -orbite est donc de codimension finie. On dit que la singularité est simple si une transversale locale à la \mathcal{H} -orbite de f ne rencontre qu'un nombre fini de classes de \mathcal{H} -équivalence. Ces germes ont été classifiés par Arnold et se répartissent en deux familles infinies et trois singularités exceptionnelles :

THÉORÈME 1.15. — ([Arn], théorème 2.10 p. 256)
Tout germe de singularité simple en $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ est \mathcal{H} -équivalent à l'un des suivants

- $A_k : x^{k+1} + Q$, avec $k \geq 1$;
- $D_k : x^2y + y^{k-1} + Q$, avec $k \geq 4$;
- $E_6 : x^3 + y^4 + Q$;
- $E_7 : x^3 + xy^3 + Q$;
- $E_8 : x^3 + y^5 + Q$; où l'on a noté Q une forme quadratique non dégénérée en les variables manquantes.

Dans le même article, Arnold donne la codimension dans $\mathcal{O}_{X,x}$ de l'ensemble des germes ayant une singularité non simple au voisinage de x .

THÉORÈME 1.16. (*[Arn], théorème 2.11 p. 256*) —

Si $n \geq 2$, l'ensemble des germes en $n + 1$ variables ayant une singularité non simple au voisinage de x est de codimension 6 dans \mathfrak{m}^2 , ou dans $\mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^k$ pour tout $k \geq 4$. Si $n = 1$, cette codimension est 7 dans \mathfrak{m}^2 ou dans $\mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^k$ pour tout $k \geq 5$; si $n = 0$, tout germe non simple est nul.

Remarquons que la borne est optimale pour $n \geq 2$: l'ensemble des singularités non simples contient l'ensemble des singularités de corang 3 ou plus, et ce dernier ensemble est de codimension 6. Lorsque $n = 1$, les germes ont deux variables et il n'y a plus de singularités de corang 3. Lorsque $n = 0$, on sait que les singularités isolées à une variable sont toutes simples, du type A_k .

Nous utiliserons ce résultat en faisant appel au corollaire suivant.

COROLLAIRE 1.17. — *Soit $n \geq 2$ et $f \in \mathbb{C}\{x_0, \dots, x_n\}$ un germe de singularité non simple en 0, $E \subset \mathbb{C}\{x_0, \dots, x_n\}$ un sous-espace de dimension finie contenant f , et B une boule de E centrée en f . Alors, il existe une boule U centrée en 0 dans \mathbb{C}^{n+1} tel que tous les éléments de B soient des germes définis sur U . Soit $N \subset B$ le sous-ensemble des germes ayant une singularité non simple dans U .*

Si E s'envoie surjectivement sur $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}/\mathfrak{m}^4$ par l'application de 3-jet, alors N est un fermé analytique de codimension 7 dans B .

DÉMONSTRATION — Soit $N_0 = N \cap \mathfrak{m}^2$ le sous-ensemble des germes ayant une singularité non simple au point $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$. Alors, comme E s'envoie surjectivement sur l'espace des 3-jets, le théorème 1.16 entraîne que N_0 est un fermé analytique de codimension 6 dans $\mathfrak{m}^2 \cap B$. Or, un germe est dans N si et seulement si c'est le composé d'un germe de N_0 par une translation de \mathbb{C}^{n+1} . Par [Dim87], 6.52 p. 92, N est de codimension 6 dans $B \cap \mathfrak{m}$. Il est donc de codimension 7 dans B .

1.3 Ensemble des sections hyperplanes ayant des singularités non isolées

Soit X_{ni}^\vee le sous-ensemble de X^\vee paramétrant les section hyperplanes de X dont les singularités ne sont pas isolées. C'est un sous-ensemble constructible (voir 1.19), dont nous cherchons à minorer la codimension. On s'attend à ce que la codimension de X_{ni}^\vee soit arbitrairement grande quitte à composer le plongement $X \subset \mathbb{P}$ par un plongement de Veronese. La raison principale à ceci est que les germes de singularités non isolées forment un sous-ensemble de codimension infinie dans l'espace des germes de fonctions (une variété proalgébrique de codimension infinie dans $J^\infty := \lim_{\leftarrow} J^l$, voir [Dim87]).

PROPOSITION 1.18. — *Si les m -jets de $\mathcal{O}_X(1)$ sont engendrés par ses sections globales, alors*

$$\text{codim } X_{ni}^\vee \geq m + 1.$$

DÉMONSTRATION — La démonstration suivante est similaire à celle rédigée dans [Sch08]. Il existe des stratifications de Whitney pour $\mathfrak{X} \subset X \times \mathbb{P}^\vee$ et $X^\vee \subset \mathbb{P}^\vee$ telles que la projection $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{P}^\vee$ soit un morphisme stratifié ([Dim92], chapitre 1). On peut de plus

supposer que la variété conormale $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{X}$ est elle-même une union de strates de \mathfrak{X} . Si S est une strate de \mathbb{P}^\vee , alors $\pi^{-1}(S)$ est une fibration topologique sur S . En particulier, le type topologique des sections hyperplanes ne varie pas le long d'une strate de \mathbb{P}^\vee . De plus, $\pi^{-1}(S)$ est une union de strates de \mathfrak{X} , et chacune d'elles est envoyée submersivement sur S .

Soit $s \in H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$, et $p = [s]$ sa classe dans \mathbb{P}^\vee . L'espace tangent à \mathbb{P}^\vee en p est

$$T_{\mathbb{P}^\vee, p} \simeq \frac{H^0(X, \mathcal{O}_X(1))}{\mathbb{C} \cdot s}.$$

Si S est une strate de \mathbb{P}^\vee , et $p \in S$, l'espace tangent à S en p peut être décrit par un sous-espace de $H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$ qui s'envoie sur $T_{S, p}$ par la projection $H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) \rightarrow T_{\mathbb{P}^\vee, p}$.

On utilisera le lemme suivant, qui m'a été indiqué par Christian Schnell :

LEMME 1.19. ([Sch08], lemma 6.5.1 p. 127) — Soit $S \subset \mathbb{P}^\vee$ une strate, et $p \in S$. Soit T une composante arbitraire d'une strate dans $\pi^{-1}(S) \cap \mathfrak{Z}$, $Z := T \cap \mathfrak{X}_p$, $V(x) := \{f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) \mid f(x) = 0\}$ et $V(Z) = \bigcap_{x \in Z} V(x)$. Alors :

$$T_{S, p} \subset \frac{V(Z)}{\mathbb{C} \cdot s}.$$

DÉMONSTRATION — Soit $x \in Z$, et montrons que $T_{S, p}$ est inclus dans l'image de $V(x)$. Soit $v \in T_{S, p}$. La strate S étant lisse au point p , on peut trouver une famille à un paramètre de sections hyperplanes tangente à v en p . Fixons des coordonnées locales holomorphes au voisinage de x et de p pour X et pour la famille à un paramètre. On est alors réduit au problème suivant : soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}^{n+1} \times \mathbb{D}$, avec $f(0, 0) = 0$. De plus, il existe une section $\sigma : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}^{n+1}$ avec $\sigma(0) = 0$, et pour tout $t \in \mathbb{D}$, le point $(\sigma(t), t)$ est un point singulier de l'hypersurface $\{x \in X; f(x, t) = 0\}$. Dérivons la relation $f(\sigma(t), t) = 0$ et évaluons en $(0, 0)$. On obtient :

$$0 = \sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(0, 0) \cdot \sigma'_i(0) + \frac{\partial f}{\partial t}(0, 0).$$

Mais tous les termes $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0, 0)$ sont nuls, donc

$$\frac{\partial f}{\partial t}(0, 0) = 0,$$

ce qui signifie que $v \in V(x)$. □

Terminons la preuve de la proposition. L'ensemble $X_{ni}^\vee \subset X^\vee$ est une union de strates de \mathbb{P}^\vee ; en effet, si X_p a une singularité non isolée et que S est la strate contenant p , alors toutes les sections hyperplanes X_q sont homéomorphes à X_p lorsque q décrit S . Ces sections hyperplanes ont donc une singularité non isolée.

Soit S une strate incluse dans X_{ni}^\vee , et $p \in S$. Soit Z une composante de dimension positive du lieu singulier de X_p . Alors, on a l'inclusion

$$T_p S \subset \frac{V(Z)}{\mathbb{C} \cdot s},$$

ce qui donne l'estimation

$$\text{codim}(S, \mathbb{P}^\vee) \geq \text{codim}(V(Z), H^0(X, \mathcal{O}_X(1))).$$

Il suffit donc de montrer la majoration $\text{codim}(V(Z), H^0(X, \mathcal{O}_X(1))) \geq m+1$. Soit $z \in Z$, et (z_0, z_1, \dots, z_n) un système de coordonnées locales holomorphes de X en z , tel que z_0 fasse aussi partie d'un système de coordonnées locales de Z en z . Par hypothèse, il existe des sections globales $f_0, f_1, \dots, f_m \in H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$ dont le jet d'ordre m en z s'écrit localement $1, z_0, z_0^2, \dots, z_0^m$. Ces $m+1$ sections globales sont donc linéairement indépendantes, et ne s'annulent pas le long de Z donc n'appartiennent pas au sous-espace $V(Z)$. On en déduit la majoration souhaitée, ce qui termine la démonstration. \square

Remarquons que dans certains cas, X_{ni}^\vee est vide : toutes les sections hyperplanes de X ont alors un nombre fini de singularités. En fait, on a l'énoncé suivant, dû à Dimca ([Dim86]) :

PROPOSITION 1.20. — *Les sections hyperplanes de X sont toutes à singularités isolées si et seulement si $N_{X/\mathbb{P}}(-1)$ est ample au sens d'Hartshorne. C'est le cas par exemple si X est une intersection complète de multidegré (d_1, \dots, d_c) , avec $d_i \geq 2 \forall i$.*

Dans la suite on note $X_i^\vee \subset \mathbb{P}^\vee$ le complémentaire de X_{ni}^\vee dans X^\vee , c'est-à-dire l'ensemble des sections hyperplanes singulières n'ayant que des singularités isolées.

1.4 Singularités de la variété duale.

Étudions la variété duale X^\vee en un point de X_i^\vee .

Soit $p \in X_i^\vee$. La section globale X_p a donc k singularités aux points x_1, \dots, x_k , et on note f_1, \dots, f_k les germes de singularités correspondants. On note aussi τ_1, \dots, τ_k les nombres de Tjurina de ces singularités.

Le germe de \mathbb{P}^\vee au point p est la base d'une déformation de la variété singulière X_p . Cette déformation induit une déformation de chaque singularité de X_p . Par la propriété universelle des déploiements miniversels de singularités, il existe des morphismes de germes d'espaces analytiques

$$(\mathbb{P}^\vee, p) \xrightarrow{g_i} (\mathbb{C}^{\tau_i}, 0),$$

et les différentielles en p de ces morphismes de germes sont déterminées de manière unique. Ainsi, il existe un morphisme

$$g : (\mathbb{P}^\vee, p) \rightarrow \prod_{i=1}^k (\mathbb{C}^{\tau_i}, 0),$$

dont la différentielle en p est déterminée de manière unique (et non nulle car $\mathcal{O}_X(1)$ est très ample).

Notons $\Sigma_i \subset \mathbb{C}^{\tau_i}$ les diagrammes de bifurcation des singularités, U_i les ouverts complémentaires, $U = \prod U_i$ et Σ le complémentaire de U dans $\prod_{i=1}^k \mathbb{C}^{\tau_i}$, autrement dit

$$\Sigma := \{(t_i) \in \prod_{i=1}^k \mathbb{C}^{\tau_i}, \exists i, t_i \in \Sigma_i\}.$$

Le résultat qui suit décrit la variété duale au point p .

PROPOSITION 1.21. — *Le germe de X^\vee en p est exactement le germe de $g^{-1}(\Sigma)$.*

DÉMONSTRATION — La variété conormale est fermée, donc si p' est assez proche de p , les singularités de $X_{p'}$ proviennent toutes par déformation des singularités de X_p . Ainsi, les p proches de p qui appartiennent à la variété duale sont dans l'image réciproque par g d'au moins un diagramme de bifurcation Σ_i . \square

PROPOSITION 1.22. — *Si le faisceau $\mathcal{O}_X(1)$ engendre ses $(\tau_1 - 1, \dots, \tau_k - 1)$ -multijets au k -uplet (x_1, \dots, x_k) (en particulier, s'il est $((\sum \tau_i) - 1)$ -jet ample), alors le morphisme g est lisse.*

DÉMONSTRATION — Notons $Tju(f_i)$ les idéaux de Tjurina des singularités. Alors on a $\mathfrak{m}_{x_i}^{\tau_i} \subset Tju(f_i)$, d'où une surjection

$$\bigoplus_{i=1}^k J_{x_i}^{\tau_i-1} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^k \underbrace{\mathcal{O}_{X,x_i}/Tju(f_i)}_{\mathbb{C}^{\tau_i}}.$$

La différentielle de g se factorise par cette surjection. Par hypothèse, l'évaluation des $(\tau_1 - 1, \dots, \tau_k - 1)$ -multijets en (x_i) est surjective, donc la différentielle de g en p est surjective.

1.5 Codimension de certains sous-ensembles

Dans cette section nous minorons la codimension de certains sous-ensembles de X_i^\vee , en fonction des nombres de Tjurina et de la positivité de $\mathcal{O}_X(1)$. Le résultat principal est le suivant :

PROPOSITION 1.23. — *Soient f_1, \dots, f_k des germes de singularités isolées (éventuellement les mêmes), τ_1, \dots, τ_k leurs nombres de Tjurina. Supposons que $\mathcal{O}_X(1)$ engendre ses $(l_1 - 1, \dots, l_k - 1)$ -multijets avec $l_i < \tau_i$. Si l'ensemble S des sections globales de $\mathcal{O}_X(1)$ ayant exactement pour singularités les singularités f_i est non vide, c'est un sous-ensemble analytique de codimension au moins $\sum l_i$.*

En pratique, nous utiliserons le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.24. *Soit l un entier et supposons que $\mathcal{O}_X(1)$ soit m -jet ample. Soient f_1, \dots, f_k des germes de singularités isolées (éventuellement les mêmes), τ_1, \dots, τ_k leurs nombres de Tjurina, avec $\sum \tau_i > m$. Alors l'ensemble S de la proposition ci-dessus est (vide ou) de codimension au moins $m + 1$.*

DÉMONSTRATION du corollaire — Soient a_1, \dots, a_k des entiers naturels tels que $a_i \leq \tau_i$ et $\sum a_i = m + 1$. Alors, comme $\mathcal{O}_X(1)$ est m -jet ample, on a une surjection

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) \rightarrow \bigoplus_{1 \leq i \leq k} J_{x_i}^{a_i-1}.$$

En appliquant la proposition 1.23, on obtient que S est de codimension au moins $\sum a_i = m + 1$. \square

Nous démontrons la proposition 1.23 pour le cas particulier $k = 2$ singularités, dont on déduit facilement le cas général.

PROPOSITION 1.25. — Soient f_1 et f_2 deux germes de singularités isolées (éventuellement les mêmes), dont on note τ_1 et τ_2 les nombres de Tjurina. Soit S l'ensemble des sections globales de $\mathcal{O}_X(1)$ ayant exactement une singularité f_1 et une singularité f_2 et lisse en-dehors de ces deux points. Supposons que le morphisme

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) \xrightarrow{j_{x_1}^{p-1} \oplus j_{x_2}^{q-1}} \frac{\mathcal{O}_{X,x_1}}{\mathfrak{m}^p} \oplus \frac{\mathcal{O}_{X,x_2}}{\mathfrak{m}^q}$$

soit surjectif, avec $p < \tau_1$ et $q < \tau_2$. Alors, si S est non vide, c'est un sous-ensemble analytique de codimension au moins $p + q$.

DÉMONSTRATION — Soit $\sigma \in S$. On note x_1 et x_2 les deux points singuliers de σ . Au voisinage de σ , S est l'intersection de l'ensemble S_1 des sections globales ayant une singularité f_1 proche de x_1 , et de l'ensemble S_2 des sections globales ayant une singularité f_2 proche de x_2 . La preuve de la proposition se fait alors en deux étapes.

étape 1 : S_1 (resp. S_2) est de codimension au moins p (resp. q)

Considérons l'application d'évaluation des germes

$$j_{x_1} : H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x_1}.$$

On note $H \subset \mathcal{O}_{X,x_1}$ l'image de j_{x_1} , σ_{x_1} le germe de σ en x_1 , $GOrb(\sigma_{x_1}) \subset \mathcal{O}_{X,x_1}$ la grande orbite du germe σ_{x_1} et $T \subset \mathcal{O}_{X,x}$ l'idéal de Tjurina de σ_x .

Le morphisme j_{x_1} est injectif, c'est donc un isomorphisme sur H . De plus, j_{x_1} est au voisinage de x_1 une bijection entre S_1 et la trace de la grande orbite $GOrb(\sigma_{x_1}) \cap H$. Or, par la proposition 1.13, $GOrb(\sigma_{x_1}) \cap H$ est un sous-ensemble analytique de H au voisinage de σ_{x_1} , et son espace tangent de Zariski en σ_{x_1} est exactement la trace dans H de l'idéal de Tjurina, c'est-à-dire $T \cap H$.

On en déduit qu'au voisinage de σ , S_1 est un sous-ensemble analytique de $H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$, et que son espace tangent de Zariski $T_{S_1, \sigma}$ est de codimension $c := \text{codim}(T \cap H, H)$.

On a alors la suite d'inégalités :

$$\begin{aligned} c &= \text{codim}(T \cap H, H) \\ &\geq \text{codim}((T + \mathfrak{m}^p) \cap H, H) \\ &\geq \text{codim}((T + \mathfrak{m}^p) \cap (H + \mathfrak{m}^p), (H + \mathfrak{m}^p)) \\ &\geq \text{codim}((T + \mathfrak{m}^p), \mathcal{O}_{X,x}) \\ &\geq p, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle du lemme suivant :

LEMME 1.26. — Soit $x \in X$, $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ une singularité isolée, T son idéal de Tjurina, τ son nombre de Tjurina et j un entier naturel. Si $j \leq \tau$, alors

$$\text{codim}(T + \mathfrak{m}^j) \geq j.$$

Sinon, cette codimension est égale à τ .

DÉMONSTRATION — Si $\text{codim}(T + \mathfrak{m}^j) = \text{codim}(T + \mathfrak{m}^{j+1})$, alors $\mathfrak{m}^j \subset T$. Il s'ensuit que la suite d'entiers $(\text{codim}(T + \mathfrak{m}^n))_{n \geq 0}$ est strictement croissante jusqu'à ce qu'elle stationne à $\tau = \text{codim } T$. Elle stationne donc à partir d'un rang inférieur à τ . On en déduit les deux résultats. \square

Un raisonnement similaire montre que S_2 est un sous-ensemble analytique de codimension au moins q .

étape 2 : étude de l'intersection

Il suffit de montrer que l'intersection $T_{S_1, \sigma} \cap T_{S_2, \sigma}$ est de codimension au moins $p + q$. La condition de génération des multijets implique qu'il existe deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 de $H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$ vérifiant :

$$\begin{aligned} j_{x_1}(E_1) + \mathfrak{m}_{x_1}^p &= \mathcal{O}_{X, x_1}, \\ j_{x_2}(E_2) + \mathfrak{m}_{x_2}^q &= \mathcal{O}_{X, x_2}, \\ j_{x_2}(E_1) &\subset \mathfrak{m}_{x_2}^q, \end{aligned}$$

Remplaçons E_1 et E_2 par des sous-espaces de telle sorte que $j_{x_1}(E_1)$ soit un supplémentaire de $T_1 + \mathfrak{m}_{x_1}^p$ dans \mathcal{O}_{X, x_1} , et que $j_{x_2}(E_2)$ soit un supplémentaire de $T_2 + \mathfrak{m}_{x_2}^q$ dans \mathcal{O}_{X, x_2} .

Par le lemme 1.26 on a $\dim E_1 \geq p$ et $\dim E_2 \geq q$; de plus, E_1 et E_2 sont d'intersection triviale, et enfin, $E_2 \cap T_{S_2, \sigma} = \{0\} = E_1 \cap T_{S_1, \sigma}$. On en déduit que

$$\text{codim}(T_{S_1, \sigma} \cap T_{S_2, \sigma}) \geq \dim(E_1 \oplus E_2) \geq p + q.$$

Ceci implique que $S_1 \cap S_2$ est de codimension au moins $p + q$. \square

1.6 Résultat principal

Soit $X_s^\vee \subset X_i^\vee$ l'ensemble des sections hyperplanes à singularités simples, et X_{ns}^\vee son complémentaire dans X_i^\vee .

PROPOSITION 1.27. — *Il existe une collection finie de singularités simples à laquelle appartiennent toutes les singularités des sections hyperplanes X_p pour tout $p \in X_s^\vee$.*

DÉMONSTRATION — Par [Dim86], la somme des nombres de Milnor des singularités de X_p est égale à la multiplicité de X^\vee en p . On en déduit qu'il existe μ_{max} tel que pour tout $p \in X_s^\vee$, les singularités aient toutes un nombre de Milnor inférieur à μ_{max} . Or, il n'y a qu'un nombre fini de telles singularités simples.

REMARQUE 1.28. *La preuve de la proposition montre aussi que le nombre de singularités d'une section hyperplane X_p avec $p \in X_s^\vee$ est borné indépendamment de p .*

Nous étudions maintenant le complémentaire de X_s^\vee .

PROPOSITION 1.29. — *Supposons que les sections globales de $\mathcal{O}_X(1)$ engendrent les 3-jets en tout point de X . Alors X_{ns}^\vee est de codimension au moins 7 dans \mathbb{P}^\vee . Si X est de dimension au moins 3, alors sous la même condition, cette codimension est égale à 7.*

DÉMONSTRATION — On démontre la proposition dans le cas où $\dim X \geq 3$. Il suffit de démontrer que le cône $\mathbb{C}^* \cdot X_{ns}^\vee$ est de codimension 7 dans $H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$. Soit σ une section globale de $\mathcal{O}_X(1)$ dont les singularités sont isolées, et qui a l singularités non simples, aux points x_1, \dots, x_l . Soient U_i des petites boules de X centrées aux points x_i et disjointes. Soit B une boule de $H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$ centrée en σ telle que si $\nu \in B$, alors les singularités de ν sont toutes isolées et dans les ouverts U_i .

Écrivons $B \cap \mathbb{C}^* \cdot X_{ns}^\vee = \bigcup_i NS_i$, où NS_i est l'ensemble des éléments de B ayant une singularité non simple dans U_i , et montrons que NS_i est un sous-ensemble analytique de codimension 7 de B .

Soit $j_{x_i} : H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) \rightarrow \mathcal{O}_{X, x_i}$ l'évaluation des jets en x_i , et H son image. On note B' l'image de B , et C l'image de NS_i . Par le corollaire 1.17, C est de codimension 7 dans B' , et comme j_{x_i} est un isomorphisme sur son image, NS_i est de codimension 7 dans B . Ainsi, $B \cap \mathbb{C}^* \cdot X_{ns}^\vee$ est une union finie de sous-ensembles de codimension 7 de B , ce qu'il fallait démontrer. \square

On arrive donc au résultat principal de cette section :

THÉORÈME 1.30. — *Soit X une variété projective lisse, plongée dans un espace projectif \mathbb{P} , linéairement normale, et \mathbb{P}^\vee l'espace projectif dual.*

Soit m un entier compris entre 3 et 6. Supposons que $\mathcal{O}_X(1)$ soit m -jet-ample. Alors, il existe un sous-ensemble fermé Z_m de X^\vee de codimension au moins $m + 1$ dans \mathbb{P}^\vee tel que pour tout $v \in X^\vee \setminus Z_m$, les singularités de la section hyperplane X_v soient isolées, simples, et la somme de leurs nombres de Tjurina soit inférieure ou égale à m .

DÉMONSTRATION — Écrivons \mathbb{P}^\vee sous forme d'union disjointe

$$\mathbb{P}^\vee = \underbrace{X_{ni}^\vee \cup X_{ns}^\vee \cup X_{s, \sum \tau_i > m}^\vee}_{Z_m} \cup V_m,$$

où $X_{s, \sum \tau_i > m}^\vee$ est l'ensemble des sections hyperplanes à singularités simples dont la somme des nombres de Tjurina est strictement supérieure à m . Nous savons que V_m est un ouvert de \mathbb{P}^\vee . Montrons que son complémentaire est de codimension au moins $m + 1$.

Les ensembles X_{ni}^\vee et X_{ns}^\vee sont tous deux de codimension au moins $m + 1$ par les propositions 1.18 et 1.29. On remarque ensuite que par la proposition 1.27, l'ensemble $X_{s, \sum \tau_i > m}^\vee$ est une union disjointe finie de sous-ensembles du type

$$\{p \in X_s^\vee, \text{ les singularités de } X_p \text{ sont exactement } f_1, \dots, f_k\},$$

où la somme des nombres de Tjurina des singularités f_i est strictement supérieure à m . Par le corollaire 1.24, ces ensembles sont des sous-ensembles analytiques de codimension au moins $m + 1$. On en déduit le résultat. \square

Le corollaire suivant est immédiat.

COROLLAIRE 1.31. — *Sous les hypothèses du théorème 1.30, soit \mathbb{P}^m un sous-espace projectif générique de \mathbb{P}^\vee . Alors, pour tout $p \in \mathbb{P}^m$, la section hyperplane X_p n'a que des singularités isolées simples et la somme des nombres de Tjurina de ses singularités est inférieure ou égale à m .*

2 Généralisation d'une construction de Carlson

Introduction

Soit m un entier compris entre 2 et 6, X une variété projective lisse de dimension impaire $n + 1$ plongée dans un espace projectif \mathbb{P} , non dégénérée et projectivement normale. Nous notons $X^\vee \subset \mathbb{P}^\vee$ la variété duale, et U son complémentaire. Supposons que $\mathcal{O}_X(1)$ soit m -jet ample. Soit \mathbb{P}^m un sous-espace projectif générique de \mathbb{P}^\vee . Dans cette section, nous construisons une variété projective lisse Y de dimension m munie d'un système local \mathbb{V}_Y (théorème 2.35). La variété Y est obtenue comme revêtement d'un sous-espace projectif générique de \mathbb{P}^\vee , ramifié au-dessus de la variété duale.

Dans les trois premiers paragraphes, on rappelle des résultats connus sur les systèmes locaux, les pincesaux de Lefschetz à coefficients « tordus » et la monodromie des singularités.

On donne ensuite un résultat de complétion locale de revêtements en utilisant certaines propriétés des groupes de Coxeter finis (proposition 2.33), puis, on détermine les monodromies locales de la famille de sections hyperplanes lisses paramétrée par $U \cap \mathbb{P}^m$ (proposition 2.34).

Dans le dernier paragraphe, on construit la variété Y et le système local \mathbb{V}_Y sur Y (théorème 2.35).

2.1 Rappels : systèmes locaux et VSH

Généralités sur les systèmes locaux

Soit A un anneau commutatif, M un A -module, et X un espace topologique localement connexe. Un *système local* sur X de fibre M est un faisceau de A -modules localement isomorphe au faisceau constant M . On rappelle les faits suivants :

- le tiré en arrière d'un système local par une application continue est un système local ;
- si X est connexe, localement connexe par arcs et simplement connexe, tout système local sur X est trivial ;
- si X est connexe et localement connexe par arcs, on a une bijection naturelle entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de systèmes locaux de fibre M et l'ensemble noté $H^1(\pi_1(X), \text{Aut}(M))$ des morphismes $\pi_1(X) \rightarrow \text{Aut}(M)$ modulo l'action par conjugaison de $\text{Aut}(M)$;
- si X est localement contractile et $\varphi : Y \rightarrow X$ est une fibration topologique, les images directes supérieures de systèmes locaux sur Y sont des systèmes locaux sur X .

Un système local est *semi-simple* quand la représentation associée est semi-simple.

THÉORÈME 2.1. (C. Simpson, [Sim92] lemme 2.6) — Soit X une variété projective lisse sur \mathbb{C} de dimension d , \mathbb{V} un système local semi-simple sur X et L l'opérateur de Lefschetz. Alors, pour $0 \leq i \leq d$,

$$L^{d-i} : H^i(X, \mathbb{V}) \rightarrow H^{2d-i}(X, \mathbb{V})$$

est un isomorphisme. En notant $H^i(X, \mathbb{V})_{\text{prim}} \subset H^i(X, \mathbb{V})$ le noyau de L^{d-i+1} , on a une décomposition de Lefschetz

$$H^k(X, \mathbb{V}) = \bigoplus L^i H^{k-2i}(X, \mathbb{V})_{\text{prim}}.$$

Variations de structure de Hodge

DÉFINITION 2.2. — Soit X une variété complexe et $w \in \mathbb{N}$. Une variation de structure de Hodge complexe polarisée de poids w est la donnée d'un fibré \mathcal{C}^∞ en \mathbb{C} -espaces vectoriels de dimension finie, V , muni d'une décomposition en somme directe $V = \bigoplus_{p+q=w} V^{p,q}$, d'une connexion plate D sur V vérifiant la condition de transversalité de Griffiths :

$$D : V^{p,q} \rightarrow A^{1,0}(V^{p,q}) \oplus A^{0,1}(V^{p+1,q-1}) \oplus A^{0,1}(V^{p,q}) \oplus A^{1,0}(V^{p-1,q+1}),$$

et d'une forme hermitienne parallèle S pour laquelle la décomposition de Hodge est orthogonale, et dont la restriction à $V^{p,q}$ est définie positive si p est pair et définie négative sinon. Le système local des sections plates de V est noté \mathbb{V} .

De façon équivalente, une variation de structure de Hodge complexe polarisée de poids w est la donnée d'un système local \mathbb{V} de \mathbb{C} -espaces vectoriels de dimension finie de connexion plate D , d'une filtration décroissante finie F^\bullet de $\mathbb{V} \otimes \mathcal{O}_X$ par des sous-faisceaux analytiques cohérents localement libres, et d'une forme S hermitienne plate et non dégénérée, vérifiant :

- le fibré différentiable V associé à \mathbb{V} se décompose en une somme directe de sous-fibrés $V = \bigoplus_{p+q=w} V^{p,q}$ vérifiant $F^p = \bigoplus_{p \geq P} V^{p,q}$;
- $(p, q) \neq (r, q) \Rightarrow S(V^{p,q}, V^{r,s}) = 0$ et $(-1)^p S$ est définie positive sur $V^{p,q}$;
- $D^{1,0} F^p \subset F^{p-1} \otimes \mathcal{A}_X^{1,0}$.

On munit les fibrés différentiables $V^{p,q}$ de la structure holomorphe de F^p/F^{p+1} .

DÉFINITION 2.3. — Une variation de structure de Hodge réelle de poids w est la donnée d'une \mathbb{C} -VSH de poids w et d'une structure réelle plate $V_{\mathbb{R}} \subset V$ telle que $V^{p,q} = \overline{V^{q,p}}$. Une polarisation réelle est une forme bilinéaire $S : V_{\mathbb{R}} \otimes V_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$, symétrique si w est paire et alternée sinon, telle que $\langle u, v \rangle = i^w S(u, \bar{v})$ soit une polarisation complexe.

THÉORÈME 2.4. (P. Griffiths, [Gri70]) — Soit X une variété projective lisse, U un ouvert de Zariski, et \mathbb{V} un système local sur U sous-jacent à une VSH. Si \mathbb{V} s'étend en un système local sur X , ce dernier est sous-jacent à une VSH sur X .

THÉORÈME 2.5. (P. Deligne, voir [Sim93], p. 408) — Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme projectif lisse entre variétés quasiprojectives lisses, et \mathbb{W} une VSH sur X . Alors les images directes supérieures de \mathbb{W} par f sont des systèmes locaux sous-jacents à des VSH.

THÉORÈME 2.6. (C. Simpson, [Sim92] corollaire 4.3) — Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme entre variétés kählériennes compactes tel que le morphisme induit entre groupes fondamentaux soit surjectif, et \mathbb{V} un système local sur X tel que $f^* \mathbb{V}$ soit sous-jacent à une VSH sur Y . Alors \mathbb{V} est sous-jacent à une VSH sur X .

2.2 Rappels : pinceaux de Lefschetz

Soit X une variété projective lisse de dimension $n + 1$, plongée dans un espace projectif \mathbb{P} , linéairement normale.

Pinceaux de Lefschetz

DÉFINITION 2.7. — Un pinceau d'hypersurfaces (ou de sections hyperplanes) sur X est la donnée d'une droite projective $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^V$. Chaque élément $t \in \mathbb{P}^1$ de ce pinceau fournit une section hyperplane $X_t \subset X$. Le lieu de base du pinceau est $B := \bigcap_{t \in \mathbb{P}^1} X_t$.

DÉFINITION 2.8. — *Un pinceau d'hypersurfaces $(X_t)_{t \in \mathbb{P}^1}$ est un pinceau de Lefschetz si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- *le lieu de base B est lisse de codimension deux dans X ;*
- *chaque hypersurface X_t possède au pire une singularité quadratique ordinaire.*

La proposition suivante permet de caractériser les pinceaux de Lefschetz parmi les pinceaux d'hypersurfaces de X :

PROPOSITION 2.9. — *Un pinceau d'hypersurfaces est de Lefschetz si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

- *X^\vee est une hypersurface de \mathbb{P}^\vee et la droite $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^\vee$ définissant le pinceau rencontre transversalement X^\vee en son lieu lisse ;*
- *X^\vee est de codimension supérieure et la droite $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^\vee$ ne rencontre pas X^\vee .*

On en déduit qu'un pinceau générique est un pinceau de Lefschetz.

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{P}^1}$ un pinceau de Lefschetz, et X_0 une section hyperplane lisse de ce pinceau. Pour tout $s \in \mathbb{P}^1$ un point du pinceau tel que X_s ait un point double ordinaire, on peut choisir $u \in \mathbb{P}^1$ un point proche de s tel que X_u soit lisse et construire dans la section hyperplane X_u une sphère réelle de dimension $2n - 1$, appelée sphère évanescence (associée à la singularité de X_s). Le choix d'un chemin reliant u à 0 dans $\mathbb{P}^1 \setminus X^\vee$ permet de transporter (de manière non canonique) cette sphère dans la section hyperplane X_0 . Les différentes sphères obtenues lorsque s décrit $\mathbb{P}^1 \cap X^\vee$ sont les sphères évanescences du pinceau.

Soit X comme plus haut, Y une section hyperplane lisse. Alors on a un morphisme de Gysin

$$j_* : H^k(Y, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{k+2}(X, \mathbb{Q}).$$

La cohomologie évanescence de Y est par définition le noyau du morphisme de Gysin.

PROPOSITION 2.10. (voir [Voi02], 14.26 et 14.27) — *La cohomologie évanescence est nulle sauf quand $k = \dim Y$. Dans ce dernier cas, la cohomologie évanescence est contenue dans la cohomologie primitive, et engendrée par les classes des sphères évanescences de tout pinceau de Lefschetz passant par Y . Enfin, on a une décomposition en somme directe orthogonale relativement à la forme d'intersection*

$$H^n(Y, \mathbb{Q}) = H^n(Y, \mathbb{Q})_{ev} \oplus j^* H^n(X, \mathbb{Q}).$$

Représentation de monodromie

Soit U le complémentaire dans \mathbb{P}^\vee de la variété duale X^\vee . Le faisceau $R^n \pi_* \mathbb{Q}$ sur \mathbb{P}^\vee restreint à U est un système local de \mathbb{Q} -espaces vectoriels de dimension finie sur U . Fixons un point-base $u \in U$. Alors on a la représentation de monodromie

$$\rho : \pi_1(U, u) \rightarrow \text{Aut}((R^n \pi_* \mathbb{Q})_u).$$

La fibre $(R^n \pi_* \mathbb{Q})_u$ est isomorphe à $H^n(X_u, \mathbb{Q})$ et de plus, la forme d'intersection est invariante par monodromie, c'est-à-dire que ρ est à valeurs dans $\text{Aut}(H^n(X_u, \mathbb{Q}), \langle, \rangle)$.

PROPOSITION 2.11. (Zariski) — *Soit $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^\vee$ une droite rencontrant transversalement X^\vee en son lieu lisse. Alors l'inclusion $\mathbb{P}^1 \cap U \rightarrow U$ induit au niveau des groupes fondamentaux un morphisme surjectif.*

En particulier, le groupe $\pi_1(U, u)$ est engendré par un nombre fini de lacets de $\mathbb{P}^1 \cap U$ tournant autour de chaque s tel que la section hyperplane X_s soit singulière. Il suffit donc de décrire l'effet de la monodromie pour ces lacets. C'est la formule de Picard-Lefschetz :

PROPOSITION 2.12. — Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{P}^1}$ un pinceau de Lefschetz, X_s une section hyperplane singulière et X_u une section hyperplane lisse proche. On note $T \in \text{Aut}(H^n(X_u, \mathbb{Q}))$ l'endomorphisme de monodromie autour de s , et δ la classe de la sphère évanescence de X_u associée à la singularité de X_s . Alors, on a :

$$T(\alpha) = \alpha - (-1)^{n(n+1)/2} \langle \alpha, \delta \rangle \delta.$$

Une conséquence de la formule de Picard-Lefschetz est

PROPOSITION 2.13. — Les cycles évanescents d'un pinceau de Lefschetz sont conjugués sous l'action de monodromie.

THÉORÈME 2.14. — Le monodromie laisse stable la cohomologie évanescence et la représentation induite

$$\rho' : \pi_1(U, u) \rightarrow \text{Aut}(H^n(X_u, \mathbb{Q})_{ev})$$

est irréductible.

Enfin, on rappelle un résultat sur les vecteurs invariants de ρ .

PROPOSITION 2.15. (théorème local des cycles invariants) — Soit $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^V$ un pinceau de Lefschetz, $s \in \mathbb{P}^1 \cap X^\vee$, $u \in U \cap \mathbb{P}^1$ un point proche de s , et γ un lacet de $U \cap \mathbb{P}^1$ basé en u tournant une fois autour de s . Alors, on a un isomorphisme

$$H^n(X_u, \mathbb{Q})^\gamma \simeq H^n(X_s, \mathbb{Q}).$$

Résultats additionnels sur la monodromie

Dans [Del80], Deligne étudie l'adhérence de Zariski du groupe de monodromie d'un pinceau de Lefschetz de sections hyperplanes. Il démontre plusieurs résultats qui sont résumés dans [CT99], Theorem 3.2 :

THÉORÈME 2.16. (Deligne) — L'image de $\rho' : \pi_1(U, u) \rightarrow \text{Aut}(H^n(X_u, \mathbb{Q})_{ev}, \langle, \rangle)$ est soit finie, soit Zariski-dense dans le groupe $\text{Aut}(H^n(X_u, \mathbb{Q})_{ev}, \langle, \rangle)$, qui est orthogonal ou symplectique selon la parité de n .

Il existe un résultat un peu plus précis sur l'image de la représentation de monodromie, démontré par Beauville [Bea86] dans le cas des hypersurfaces de degré d de \mathbb{P}^N en utilisant des résultats d'Ebeling [Ebe] et Janssen [Jan], et qui se généralise comme suit :

THÉORÈME 2.17. ([CT99], Theorem 9.1) — On suppose que X est de dimension au moins 3, et qu'il existe une section hyperplane admettant une des quatorze singularités unimodulaires exceptionnelles, par exemple la singularité $U_{12} : x_1^3 + x_2^3 + x_3^4 + \sum_{i>3} x_i^2 = 0$. Alors l'image de ρ' est d'indice fini dans $\text{Aut}_{\mathbb{Z}}(H^n(X_u, \mathbb{Z})_{ev}, \langle, \rangle)$.

En ce qui concerne le noyau de la représentation de monodromie, il est démontré dans le même article [CT99] que ce sous-groupe est gros, c'est-à-dire qu'il est muni d'un morphisme dans un groupe de Lie réel non compact et semi-simple, dont l'image est Zariski-dense.

Généralisations

Nous rappelons enfin comment se généralisent les énoncés standard sur la monodromie des pinceaux de Lefschetz dans un cadre un peu plus général, à condition d'utiliser le théorème de Lefschetz difficile à coefficients dans un système local semi-simple.

Soit X une variété projective lisse de dimension $n + 1$, plongée dans un espace projectif \mathbb{P} , linéairement normale, \mathbb{W} un système local semi-simple sur X , et \mathfrak{X} la section hyperplane universelle, munie des deux projections π et a vers \mathbb{P}^V et X . On note \mathbb{V}^k le système local $(R^k \pi_*(a^* \mathbb{W}))|_U$ sur U . Le faisceau localement constant de fibre $H^k(X, \mathbb{W})$ sur U est muni d'un morphisme vers \mathbb{V}^k , dont on note \mathbb{V}_{ev}^k le conoyau.

PROPOSITION 2.18. ([Sim93], lemma 2.4) — *Le système local \mathbb{V}_{ev}^k est nul sauf si $k = n$.*

PROPOSITION 2.19. ([Sim93], lemma 2.5) — *Le système local \mathbb{V}_{ev}^n n'a pas de vecteurs fixes par monodromie.*

PROPOSITION 2.20. ([Sim93], lemma 2.7, 2.8) — *Si \mathbb{W} est de rang un, alors \mathbb{V}_{ev}^n est irréductible, \mathbb{V}^n est semi-simple, somme directe de la partie invariante et de la partie irréductible \mathbb{V}_{ev}^n .*

Dans la suite, on note simplement \mathbb{V} le système local \mathbb{V}_{ev}^n . Sa fibre en un point u est $\mathbb{V}_u = H^n(X_u, \mathbb{W})_{ev}$.

On peut également considérer le système local sur U dont la fibre en un point u est le groupe d'homologie $H_n(X_u, \mathbb{W})$. Ce système local est muni d'un morphisme naturel vers le système local constant de fibre $H_n(X, \mathbb{W})$, et le noyau de ce morphisme est le système local d'homologie évanescence. Ce système local a des propriétés similaires à celles de \mathbb{V} .

2.3 Représentation de monodromie d'une singularité isolée d'hypersurface

Soit f un germe de singularité isolée en $n + 1$ variables, τ son nombre de Tjurina, g un déploiement miniversel de f , et $\Phi : (Y, y) \rightarrow (\mathbb{C}^\tau, 0)$ la déformation miniverselle de f associée. On note $U \subset \mathbb{C}^\tau$ son complémentaire du diagramme de bifurcation, B_Y une boule de Y centrée en y , et B une boule de \mathbb{C}^τ centrée en 0 , petite par rapport à B_Y .

Le groupe $\pi_1(U \cap B)$ est appelé le groupe fondamental de la singularité f . L'ouvert $U \cap B$ est la base d'une fibration, dont la fibre F_u au-dessus de $u \in U \cap B$ est le fibre de Φ intersectée avec la boule B_Y . On appelle ces fibres les fibres de Milnor.

PROPOSITION 2.21. ([AVG], tome 2, p. 32) — *Les fibres de Milnor contiennent μ sphères réelles, les sphères évanescences, et sont homotopes au bouquet de ces sphères. Les groupes d'homologie de degré n de toutes les fibres de Milnor sont de rang μ , engendrés par les classes des sphères évanescences.*

DÉFINITION 2.22. — *Le système local de rang μ sur $U \cap B$ dont les fibres sont les groupes d'homologie à coefficients des fibres de Milnor est noté \mathbb{V}_f , et sa représentation de monodromie est notée*

$$\rho_f : \pi_1(U \cap B, u) \rightarrow \mathrm{GL}(F_u, \mathbb{Z}).$$

C'est la représentation de monodromie de la singularité f . Son image est le groupe de monodromie de la singularité f . La même construction est possible avec les groupes de cohomologie.

La forme d'intersection de la singularité est la forme d'intersection sur la cohomologie de la fibre de Milnor. On dit que le réseau de Milnor de la singularité est non dégénéré si la forme d'intersection est non dégénérée. C'est par exemple le cas pour les singularités ADE en dimension paire.

REMARQUE 2.23. — Soit $\varphi' : (Y', y') \rightarrow (B', b')$ une déformation de la singularité f . Si $U' \subset B'$ est l'ensemble des valeurs régulières de φ' , alors U' est la base d'une fibration et du système local associé, que l'on note $\mathbb{V}_{U'}$.

Par la propriété universelle de la déformation miniverselle, on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} (Y', y') & \xrightarrow{\tilde{g}} & (Y, y) \\ \downarrow \varphi' & & \downarrow \Phi \\ (B', b') & \xrightarrow{g} & (\mathbb{C}^\tau, 0) \end{array}$$

Ceci montre que $\mathbb{V}_{U'}$ est exactement $g^*\mathbb{V}_f$.

2.4 Complétion locale de revêtements, singularités simples et groupes de Coxeter

Le but de cette section est d'établir le résultat suivant :

PROPOSITION. 2.33— Soit $(f_j)_{j \in J}$ une famille finie de singularités ADE à un nombre impair de variables, \mathbb{C}^{τ_j} des bases de déploiement miniversels, $\Sigma_j \subset \mathbb{C}^{\tau_j}$ les diagrammes de bifurcation.

Soient $\rho_j : \pi_1(\mathbb{C}^{\tau_j} \setminus \Sigma_j) \rightarrow \mathrm{GL}(E_j)$ les représentations de monodromie des singularités.

Soit $B = \prod \mathbb{C}^{\tau_i}$, $U = \prod_j (\mathbb{C}^{\tau_j} \setminus \Sigma_j)$ et $\rho : \pi_1(U) = \prod \pi_1(\mathbb{C}^{\tau_j} \setminus \Sigma_j) \rightarrow \bigoplus_j \mathrm{GL}(E_j)$ le produit des ρ_j . Le noyau de ρ correspond à un revêtement étale (galoisien) de U , noté $p : \tilde{U} \rightarrow U$.

Alors, il existe une variété lisse \tilde{B} , un morphisme fini $\tilde{p} : \tilde{B} \rightarrow B$ et une immersion ouverte $\tilde{U} \hookrightarrow \tilde{B}$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \hookrightarrow & \tilde{B} \\ \downarrow p & & \downarrow \tilde{p} \\ U & \hookrightarrow & B \end{array}$$

soit un carré cartésien, et \tilde{U} soit étale sur U .

Ce résultat sera utilisé pour montrer la lissité d'un espace analytique normal, dans la section 2.6

Rappels sur les groupes de Coxeter

DÉFINITION 2.24. — Soit W un groupe et S un ensemble de générateurs vérifiant $S = S^{-1}$ et $1 \notin S$. On demande de plus que les éléments de S soient d'ordre deux. Si s et s' sont dans S , on note $m(s, s')$ l'ordre de ss' . On dit que (W, S) est un système de Coxeter si les générateurs dans S et les relations $(ss')^{m(s, s')} = 1$ pour $m(s, s') \neq \infty$ forment une présentation du groupe W . Par abus de langage, on dit aussi que W est un groupe de Coxeter.

DÉFINITION 2.25. Soit I un ensemble. Un graphe de Coxeter de type I est un couple (Γ, f) , où Γ est un graphe ayant I pour ensemble de sommets, et f une application de l'ensemble des arêtes de Γ vers $\{3, 4, 5, \dots, +\infty\}$. On dit que Γ est le graphe sous-jacent au graphe de Coxeter.

Soit (W, S) un groupe de Coxeter. On peut lui associer le graphe de Coxeter dont le graphe sous-jacent a S pour ensemble de sommets, et deux sommets s et s' sont reliés par une arête si $m(s, s') \geq 3$. Ceci définit une bijection entre les groupes de Coxeter et les graphes de Coxeter. Un groupe de Coxeter est dit de type A, D ou E si son graphe l'est ([LIE], annexe).

DÉFINITION 2.26. — On dit qu'un graphe de Coxeter est irréductible si le graphe sous-jacent est connexe. Un groupe de Coxeter est irréductible si son graphe de Coxeter l'est.

PROPOSITION 2.27. — Soit W un groupe de Coxeter, Γ son graphe, $\Gamma_j, j \in J$ les composantes connexes de Γ , S_j les ensembles de sommets des Γ_j , et W_j les sous-groupes de W engendrés par les éléments $(s_j)_{j \in J}$. Les W_j sont des groupes de Coxeter irréductibles, et W est isomorphe au produit direct des W_j . On dit que les W_j sont les composantes irréductibles de W .

DÉFINITION 2.28. — Soit W un groupe de Coxeter fini. Le groupe de tresses associé à W , noté $B(W)$, est le groupe défini par l'ensemble de générateurs $(t_s)_{s \in S}$ et les relations

$$\underbrace{t_s t_{s'} t_s \dots t_{s'}}_{m(s, s') \text{ termes}} = \underbrace{t_{s'} t_s t_{s'} \dots t_s}_{m(s, s') \text{ termes}} .$$

Ce groupe est muni de l'application canonique vers le groupe de Coxeter W qui envoie t_s sur s . Le noyau de ce morphisme est le groupe des tresses pures, ou encore groupe des tresses colorées. On le note $\tilde{B}(W)$. C'est le sous-groupe normal engendré par les carrés des générateurs t_s .

REMARQUE 2.29. — Si W a pour composantes irréductibles W_j , alors $B(W)$ est isomorphe au produit des $B(W_j)$, et l'application $B(W) \rightarrow W$ s'identifie avec l'application produit $\prod B(W_i) \rightarrow \prod W_i$.

Les groupes de Coxeter admettent une représentation géométrique naturelle : si S est un ensemble fini et (W, S) est un système de Coxeter, alors l'espace vectoriel $E_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^S$ est muni d'une forme bilinéaire symétrique associée à (W, S) , et de réflexions orthogonales $(\sigma_s)_{s \in S}$. Il existe un unique homomorphisme

$$\sigma : W \rightarrow \text{GL}(E_{\mathbb{R}})$$

tel que $\sigma(s) = \sigma_s$ pour tout $s \in S$, et cet homomorphisme est injectif. Les éléments de $\sigma(W)$ préservent la forme bilinéaire, et envoient les vecteurs de la base canonique de $E_{\mathbb{R}}$ sur leur opposé.

Si W a pour composantes irréductibles $W_j, j \in J$, alors $\mathbb{R}^S = \prod \mathbb{R}^{S_j}$, et la représentation est simplement la représentation produit.

Revêtement, groupe fondamental, systèmes locaux.

Soit W un groupe de Coxeter fini, et $E_{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel réel sur lequel il agit comme groupe de réflexions. Cette action se prolonge en une action sur le complexifié de $E_{\mathbb{R}}$, que l'on note E . Soit

$$p : E \longrightarrow E/W$$

l'application quotient. L'espace quotient E/W peut être muni d'une structure d'espace vectoriel complexe faisant de p un morphisme analytique fini, c'est-à-dire un revêtement ramifié (galoisien de groupe W). Dans la suite on note F le quotient E/W vu comme espace vectoriel.

L'ensemble H des points de E ayant un stabilisateur non trivial est un ensemble d'hyperplans de E . L'image de H dans F est un sous-ensemble analytique Δ contenant l'origine. L'application restreinte

$$p : E \setminus H \longrightarrow F \setminus \Delta$$

est un revêtement galoisien étale, et induit une injection de groupes fondamentaux :

$$\pi_1(E \setminus H) \xrightarrow{p_*} \pi_1(F \setminus \Delta).$$

LEMME 2.30. ([Del72]) — *Le groupe fondamental de $F \setminus \Delta$ est isomorphe au groupe de tresses $B(W)$, et l'image de $\pi_1(E \setminus H)$ dans $\pi_1(F \setminus \Delta)$ par p_* est exactement $\tilde{B}(W)$.*

Notons \mathcal{F} le système local sur $F \setminus \Delta$ qui a pour représentation de monodromie le morphisme composé $B(W) \rightarrow W \rightarrow GL(E)$. Le tiré en arrière $p^*\mathcal{F}$ sur $E \setminus H$ est un système local dont la représentation monodromie est le morphisme $\pi_1(E \setminus H) \rightarrow \pi_1(F \setminus \Delta) \rightarrow W \rightarrow GL(E)$. Mais ce morphisme est identiquement nul, puisque $p_*(\pi_1(E \setminus H)) = \text{Ker}(B(W) \rightarrow W)$ d'après le lemme précédent. Le tiré en arrière de \mathcal{F} est donc trivial et s'étend donc au système local trivial sur tout l'espace vectoriel E .

Dans le cas où le groupe de Coxeter W a pour composantes irréductibles les groupes W_j , on peut faire les remarques suivantes :

- Le sous-ensemble $H \subset E = \bigoplus E_j$ est formé des éléments $h = (h_j)$ avec $h_j \in H_j$ pour au moins un $j \in J$; Le complémentaire de $E \setminus H$ est donc le produit des $E_j \setminus H_j$;
- Le complémentaire de Δ dans F est isomorphe au produit des $F_j \setminus \Delta_j$.

Groupes de Coxeter et singularités

THÉORÈME 2.31. (voir [Arnold]) — *Soit f un germe de singularité simple (de type A , D , ou E) à un nombre impair de variables. On note B la base d'un déploiement miniversel de f , et $\Sigma \subset B$ le diagramme de bifurcation de f . Si $\xi \in B \setminus \Sigma$, alors on note M_ξ la fibre de Milnor en ξ . Enfin, on note W le groupe de Coxeter irréductible de même type que la singularité f (type A , D , ou E d'indice adéquat). Les notations E , F , $B(W)$, sont celles définies plus haut pour les groupes de Coxeter.*

Alors, il existe un isomorphisme de paires d'espaces analytiques $\Phi : (B, \Sigma) \rightarrow (F, \Delta)$ et un isomorphisme $\Psi : H^n(M_\xi, \mathbb{C}) \rightarrow E$ envoyant une base de cycles évanescents sur la base

canonique de E , de telle sorte que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_1(B \setminus \Sigma, \xi) & \xrightarrow[\sim]{\Phi_*} & \pi_1(F \setminus \Delta, \zeta) & \xrightarrow{\simeq} & B(W) \\
\downarrow \text{monodromie de } f & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{GL}(H^n(M_\xi, \mathbb{C})) & \xrightarrow[\sim]{\Psi \circ - \circ \Psi^{-1}} & \mathrm{GL}(E) & \xleftarrow{\sigma} & W
\end{array}$$

Ce résultat s'étend au cas d'un groupe de Coxeter fini réductible dont les composantes irréductibles sont de type ADE :

COROLLAIRE 2.32. — Soit W un groupe de Coxeter fini dont les composantes irréductibles $(W_j)_{j \in J}$ sont de type A, D ou E.

Soient f_j des germes de singularités simples (à un nombre impair de variables) correspondant à chaque composante irréductible de W , \tilde{f}_j des déploiements miniversels, B_j les bases de ces déploiements, et $\Sigma_j \subset B_j$ les diagrammes de bifurcation.

Soit $B := \prod B_j$, et Σ le complémentaire dans B de $\prod_j (B_j \setminus \Sigma_j)$.

Soit enfin $\xi = (\xi_j)_{j \in J} \in B \setminus \Sigma$, et M_{ξ_j} la fibre de Milnor en ξ_j de la singularité f_j .

Alors, il existe un isomorphisme de paires d'espaces analytiques $\Phi : (B, \Sigma) \rightarrow (F, \Delta)$ et un isomorphisme $\Psi : \bigoplus_j H^n(M_{\xi_j}, \mathbb{C}) \rightarrow E$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
\prod_j \pi_1(B_j \setminus \Sigma_j, \xi_j) & \simeq & \pi_1(B \setminus \Sigma, \xi) & \xrightarrow[\sim]{\Phi_*} & \pi_1(F \setminus \Delta, \zeta) & \xrightarrow{\simeq} & B(W) \\
\downarrow \text{produit des monodromies des } f_j & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{GL}(\bigoplus_j H^n(M_{\xi_j}, \mathbb{C})) & \xrightarrow[\sim]{\Psi \circ - \circ \Psi^{-1}} & \mathrm{GL}(E) & \xleftarrow{\sigma} & W
\end{array}$$

Des résultats sur les revêtements associés aux groupes de Coxeter et du théorème de comparaison ci-dessus, on déduit la proposition suivante :

PROPOSITION 2.33. — Soit $(f_j)_{j \in J}$ une famille finie de singularités ADE, \mathbb{C}^{τ_j} des bases de déploiement miniversels, $\Sigma_j \subset \mathbb{C}^{\tau_j}$ les diagrammes de bifurcation.

Soient $\rho_j : \pi_1(\mathbb{C}^{\tau_j} \setminus \Sigma_j) \rightarrow \mathrm{GL}(E_j)$ les représentations de monodromie des singularités.

Soit $B = \prod \mathbb{C}^{\tau_j}$, $U = \prod_j (\mathbb{C}^{\tau_j} \setminus \Sigma_j)$ et $\rho : \pi_1(U) = \prod \pi_1(\mathbb{C}^{\tau_j} \setminus \Sigma_j) \rightarrow \bigoplus_j \mathrm{GL}(E_j)$ le produit des ρ_j . Le noyau de ρ correspond à un revêtement étale (galoisien) de U , noté $p : \tilde{U} \rightarrow U$.

Alors, il existe une variété lisse \tilde{B} , un morphisme fini $\tilde{p} : \tilde{B} \rightarrow B$ et une immersion ouverte $\tilde{U} \hookrightarrow \tilde{B}$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{U} & \hookrightarrow & \tilde{B} \\
\downarrow p & & \downarrow \tilde{p} \\
U & \hookrightarrow & B
\end{array}$$

soit un carré cartésien.

2.5 Groupes de monodromie locaux

On étudie maintenant les groupes de monodromie locaux. Rappelons que $X \subset \mathbb{P}$ est une variété projective lisse linéairement normale de dimension impaire $n + 1$, $X \xleftarrow{a} \mathfrak{X} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^\vee$ la famille universelle de sections hyperplanes, X^\vee la variété duale et U son complémentaire dans \mathbb{P}^\vee , qui paramètre les sections hyperplanes lisses, \mathbb{W} une VSH sur X , dont on note S la polarisation, et $\mathbb{V} = (R^n \pi_* a^* \mathbb{W})_{ev}$ la VSH de cohomologie évanescence des fibres, sur l'ouvert U . Enfin, on note

$$\rho : \pi_1(U, u) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{V}_u)$$

la représentation de monodromie de \mathbb{V} .

Soit s un point de X^\vee . On définit la représentation de monodromie locale et le groupe de monodromie local (de \mathbb{V} , en s) de la façon suivante. Soit B_s une petite boule de \mathbb{P}^\vee centrée en s , $U_s := B_s \cap U$ et $u \in U_s$. On note \mathbb{V}_{U_s} la restriction à U_s du système local \mathbb{V} , et

$$\rho_s : \pi_1(U_s, u) \rightarrow \text{GL}(H^n(X_u, \mathbb{W})_{ev})$$

sa représentation de monodromie. On l'appelle la représentation de monodromie locale de \mathbb{V} en s . Son image est le groupe de monodromie local de \mathbb{V} en s .

PROPOSITION 2.34. — *Avec les notations précédentes, soit $s \in X^\vee$ tel que la section hyperplane de X correspondante X_s n'ait que des singularités simples. Alors, l'image de ρ_s est finie. Si de plus $\mathcal{O}_X(1)$ est m -jet ample, avec m un entier supérieur à la somme des nombres de Tjurina des singularités de X_s , alors $\pi_1(U_s, u)$ est isomorphe au produit des groupes fondamentaux des singularités de X_s et la représentation de monodromie locale est isomorphe au produit des représentations de monodromie des singularités (voir 2.22) de X_s .*

DÉMONSTRATION — Pour faciliter l'exposition, nous étudions plutôt la représentation de monodromie locale sur le groupe d'homologie

$$H_n(X_u, \mathbb{W})_{ev} := \text{Ker}(H_n(X_u, \mathbb{W}) \rightarrow H_n(X, \mathbb{W})).$$

Soient x_1, \dots, x_l les points singuliers de X_s et (B_i) une famille de petites boules disjointes centrées en x_i . Soit i un entier compris entre 1 et l . Alors $F_i := X_u \cap B_i$ s'identifie à « la » fibre de Milnor de la singularité de X_s en x_i . L'inclusion $j_i : F_i \hookrightarrow X_u$ induit une flèche en homologie :

$$j_{i*} : H_n(F_i, \mathbb{W}) \rightarrow H_n(X_u, \mathbb{W}).$$

Remarquons que le système local \mathbb{W} est trivial sur la boule B_i , et donc que l'espace vectoriel $H_n(F_i, \mathbb{W})$ est isomorphe à $H_n(F_i, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{W}_{x_i}$.

Soit δ une sphère évanescence de la fibre de Milnor F_i , v une section de \mathbb{W} sur δ et $\delta.v \in H_n(F_i, \mathbb{W})$ le cycle correspondant. L'image de ce cycle par la composée

$$H_n(F_i, \mathbb{W}) \rightarrow H_n(X_u, \mathbb{W}) \rightarrow H_n(X, \mathbb{W})$$

est nulle. En effet, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_n(F_i, \mathbb{W}) & \longrightarrow & H_n(X_u, \mathbb{W}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(B_i, \mathbb{W}) & \longrightarrow & H_n(X, \mathbb{W}) \end{array}$$

Or, le groupe $H_n(B_i, \mathbb{W})$ est trivial car la boule est contractile. Mais les éléments $\delta.v$ comme plus haut engendrent $H_n(F_i, \mathbb{W})$. On en déduit que l'image de j_{i*} est incluse dans l'homologie évanescence $H_n(X_u, \mathbb{W})_{ev}$. Nous notons donc :

$$j_{i*} : H_n(F_i, \mathbb{W}) \rightarrow H_n(X_u, \mathbb{W})_{ev}.$$

Les espaces vectoriels $H_n(F_i, \mathbb{W})$ et $H_n(X_u, \mathbb{W})_{ev}$ sont munis de formes hermitiennes obtenues en combinant la forme d'intersection sur les cycles topologiques et la polarisation de \mathbb{W} sur les sections de \mathbb{W} . Ces formes hermitiennes seront notées \langle , \rangle . La forme hermitienne correspondante sur $H_n(F_i, \mathbb{W}) \simeq H_n(F_i, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{W}_{x_i}$ est le produit de la forme d'intersection et de la forme hermitienne S sur la fibre \mathbb{W}_{x_i} .

La forme S est par hypothèse non dégénérée sur \mathbb{W}_{x_i} . De plus, la forme d'intersection sur l'homologie de la fibre de Milnor F_i est non dégénérée. Alors, la forme hermitienne \langle , \rangle sur $H_n(F_i, \mathbb{W})$ est non dégénérée. D'autre part, le morphisme j_{i*} est compatible aux deux formes hermitiennes ci-dessus ; il est donc injectif.

Soient i et k deux entiers différents compris entre 1 et l , $\alpha \in \text{Im}(j_{i*})$ et $\beta \in \text{Im}(j_{k*})$; ce sont des cycles de X_u à valeurs dans \mathbb{W} dont le support est disjoint, puisque F_i et F_k sont disjoints. Donc $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$. On en déduit que les images des morphismes j_{i*} et j_{k*} sont orthogonales pour la forme \langle , \rangle sur $H_n(X_u, \mathbb{W})$. D'autre part ces images sont non dégénérées. Elles sont donc d'intersection triviale. Autrement dit, on a une injection compatible aux structures hermitiennes

$$\bigoplus^{\perp} H_n(F_i, \mathbb{W}) \hookrightarrow H_n(X_u, \mathbb{W}).$$

Dans la suite on écrira par abus de langage les espaces $H_n(F_i, \mathbb{W})$ comme des sous-espaces de $H_n(X_u, \mathbb{W})_{ev}$.

Revenons à la représentation de monodromie locale $\rho_s : \pi_1(U_s, u) \rightarrow \text{GL}(H_n(X_u, \mathbb{W})_{ev})$. Le groupe $\pi_1(U, u)$ est engendré par des lacets tournant autour des points du lieu lisse de X^\vee . Ces lacets agissent sur $H_n(X_u, \mathbb{W})_{ev}$ par des réflexions de Picard-Lefschetz. Parmi ces lacets, ceux qui sont homotopes à des lacets inclus dans U_s engendrent $\pi_1(U_s, u)$ et agissent par des transformations de Picard-Lefschetz de la forme

$$\gamma \cdot \alpha = \alpha \pm \langle \alpha, \delta \rangle \delta,$$

où δ est la sphère évanescence correspondant au lacet γ (située dans une des fibres de Milnor F_i), et l'écriture $\langle \alpha, \delta \rangle$ désigne l'intersection du \mathbb{W} -cycle α avec la sphère δ , c'est-à-dire la section de \mathbb{W} sur $\text{Supp } \alpha \cap \delta$ suivante : $\langle \text{Supp } \alpha, \delta \rangle \cdot \alpha|_{\delta}$. Avec ces notations, $\langle \alpha, \delta \rangle \delta$ est bien un n -cycle à valeurs dans \mathbb{W} .

La formule de Picard-Lefschetz montre que $\pi_1(U_s, u)$ stabilise les sous-espaces (images de) $H_n(F_i, \mathbb{W})$. La représentation quotient

$$\rho'_s : \pi_1(U_s, u) \rightarrow \text{GL}(H_n(X_u, \mathbb{W})_{ev} / (\bigoplus H_n(F_i, \mathbb{W})))$$

est triviale, également par la formule de Picard-Lefschetz. On en déduit que la représentation de monodromie locale ρ_s admet une décomposition en sous-représentations

$$H_n(X_u, \mathbb{W})_{ev} = (\oplus H_n(F_i, \mathbb{W})) \oplus H_n(X_u, \mathbb{W})_{ev}^{\pi_1(U_s, u)}.$$

Il reste à identifier les sous-représentations

$$\rho_{s,i} : \pi_1(U_s, u) \rightarrow \mathrm{GL}(H_n(F_i, \mathbb{W}))$$

dans la décomposition ci-dessus.

La boule B_s est la base d'une déformation de la variété singulière X_u et donc de chacune de ses singularités. Quitte à rétrécir cette boule, on a donc des morphismes

$$g_i : B_s \rightarrow \mathbb{C}^{\tau_i},$$

où τ_i est le nombre de Tjurina de la singularité de X_u en x_i , et \mathbb{C}^{τ_i} est la base de la déformation miniverselle de cette singularité. L'image de U_s par ce morphisme est incluse dans $\mathbb{C}^{\tau_i} \setminus \Sigma_i$, le complémentaire du discriminant de la singularité. On note $g_{i*} : \pi_1(U_s, u) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^{\tau_i} \setminus \Sigma_i, g_i(u))$ le morphisme induit au niveau des groupes fondamentaux. Le diagramme suivant est commutatif (voir la remarque 2.23) :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_s, u) & \xrightarrow{g_{i*}} & \pi_1(\mathbb{C}^{\tau_i} \setminus \Sigma_i, g_i(u)) \\ \downarrow \rho_{s,i} & & \downarrow \rho_{f_i} \\ \mathrm{GL}(H_n(F_i, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{W}_{x_i}) & \xleftarrow{-\otimes \mathrm{Id}} & \mathrm{GL}(H_n(F_i, \mathbb{C})) \end{array}$$

On en déduit que l'image de la représentation de monodromie locale en s est finie. En effet, l'image de la représentation de monodromie locale est un sous-groupe du produit des groupes de monodromie des singularités de X_s . Or le groupe de monodromie d'une singularité simple est fini, c'est le groupe de Weyl de type ADE correspondant.

Si de plus $\mathcal{O}_X(1)$ est m -jet ample, avec m supérieur à la somme des nombres de Tjurina des singularités de X_s , alors la déformation de X_s de base B_s engendre simultanément les déformations miniverselles de toutes les singularités de X_s , c'est-à-dire que les morphismes g_i sont tous submersifs. Donc, les morphismes induits g_{i*} entre groupes fondamentaux sont bijectifs. Le diagramme commutatif précédent permet de conclure que le groupe de monodromie locale en s est exactement le produit des groupes de monodromie de toutes les singularités. \square

2.6 Construction de Y et de \mathbb{V}_Y

Dans cette section, on démontre le résultat principal de cette première partie :

THÉORÈME 2.35. — *Soit X une variété projective lisse de dimension impaire $n + 1$, plongée dans un espace projectif \mathbb{P} , linéairement normale, $X \xleftarrow{\alpha} \mathfrak{X} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^V$ la famille universelle de sections hyperplanes, $U \subset \mathbb{P}^V$ l'ouvert paramétrant les sections hyperplanes lisses et \mathbb{V} le système local de cohomologie évanescence sur U . Soit m un entier compris entre 3 et 6, $\mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^V$ un sous-espace projectif générique de dimension m et $U_m := U \cap \mathbb{P}^m$. La restriction de \mathbb{V} à U_m est encore notée \mathbb{V} .*

- (a) Si $\mathcal{O}_X(1)$ engendre ses m -jets, il existe une variété quasiprojective lisse \tilde{U}_m et un revêtement galoisien (fini) $p : \tilde{U}_m \rightarrow U_m$, tels que pour toute compactification $i : \tilde{U}_m \hookrightarrow Y$, $\mathbb{V}_Y := i_* p^* \mathbb{V}$ soit un système local sur Y (en particulier, pour une compactification Y lisse).
- (b) Si de plus $\mathcal{O}_X(1)$ est m -jet ample, il existe une telle compactification lisse finie sur \mathbb{P}^m .

DÉMONSTRATION —

Démonstration du point (a) :

Soit $u \in U_m$, ρ la représentation de monodromie de \mathbb{V} sur U_m , et Γ le groupe de monodromie, c'est-à-dire l'image de $\pi_1(U_m, u)$ par ρ dans $\mathrm{GL}(\mathbb{V}_u)$. Le groupe fondamental $\pi_1(U_m, u)$ est de type fini, donc Γ aussi.

Par le théorème de Selberg ([Sel60]), il existe un sous-groupe distingué d'indice fini G' de Γ , sans torsion. Son image inverse dans $\pi_1(U_m, u)$ est notée G . C'est un sous-groupe distingué d'indice fini. On note

$$p : \tilde{U}_m \rightarrow U_m$$

le revêtement étale galoisien correspondant à G , de groupe de Galois $\pi_1(U_m, u)/G$. Par le théorème d'existence de Riemann ([SGA1], th. 5.1 p. 251), la catégorie des revêtements étales finis analytiques de U_m est équivalente à celle des revêtements étales finis algébriques de U_m . On peut supposer que \tilde{U}_m est une variété algébrique quasiprojective.

Montrons maintenant que le système local $p^* \mathbb{V}$ s'étend en un système local sur toute complétion Y de \tilde{U}_m .

Pour cela, on étudie la structure locale du revêtement $\tilde{U}_m \rightarrow U_m$. Soit $s \in \mathbb{P}^m \cap X^\vee$, B_s une petite boule de \mathbb{P}^m centré en s , $U_s := U_m \cap B_s$ et $\tilde{U}_s = p^{-1}(U_s)$. Ainsi, la flèche $\tilde{U}_s \rightarrow U_s$ est la restriction du revêtement $\tilde{U}_m \rightarrow U_m$ au-dessus de U_s . Ce revêtement restreint n'est en général pas connexe, mais c'est une somme disjointe finie de revêtements connexes galoisiens identiques. Déterminons ces revêtements.

Fixons des points base u et \tilde{u} dans U_s et $p^{-1}(u)$. Alors, le diagramme suivant est un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\tilde{U}_s, \tilde{u}) & \longrightarrow & \pi_1(\tilde{U}_m, \tilde{u}) = G \\ \downarrow p_* & & \downarrow p_* \\ \pi_1(U_s, u) & \longrightarrow & \pi_1(U_m, u) \end{array}$$

D'autre part, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_s, u) & \longrightarrow & \pi_1(U_m, u) \hookrightarrow G \\ \downarrow \rho_s & & \downarrow \rho \\ \Gamma_s := \mathrm{Im} \rho_s & \hookrightarrow & \mathrm{Im} \rho \hookrightarrow G' \end{array}$$

Puisque $\mathcal{O}_X(1)$ engendre ses m -jets, le groupe de monodromie local $\text{Im } \rho_s$ est fini par la proposition 2.34. Or, le groupe G' est sans torsion, il intersecte donc trivialement le sous-groupe fini $\text{Im } \rho_s$. On en déduit que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker } \rho_s & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(U_s, u) & \longrightarrow & \pi_1(U_m, u) \end{array}$$

est un carré cartésien. Par unicité d'un tel carré, on a $\text{Ker } \rho_s = \pi_1(\tilde{U}_s, \tilde{u})$, ce qui signifie que la composante connexe de \tilde{U}_s contenant \tilde{u} est exactement le revêtement galoisien de U_s correspondant au sous-groupe distingué $\text{Ker } \rho_s$. En particulier, la représentation tirée en arrière

$$p^* \rho_s : \pi_1(\tilde{U}_s, \tilde{u}) \rightarrow \pi_1(U_s, u) \rightarrow \text{GL}(\mathbb{V}_u)$$

est triviale. Autrement dit, le système local $p^*\mathbb{V}$ restreint à \tilde{U}_s est trivial. Ceci suffit à montrer que pour toute complétion Y de \tilde{U}_m , le système local $p^*\mathbb{V}$ s'étend en un système local \mathbb{V}_Y sur Y .

Démonstration du point (b) :

Notons $[\tilde{U}_s]$ la composante connexe de \tilde{U}_s contenant \tilde{u} . On a vu dans la démonstration du point (a) que le revêtement $[\tilde{U}_s] \rightarrow U_s$ est donné par le sous-groupe distingué

$$\text{Ker}(\rho_s : \pi_1(U_s, u) \rightarrow \text{GL}(\mathbb{V}_u)).$$

Montrons que le revêtement $[\tilde{U}_s] \rightarrow U_s$ est isomorphe à un autre revêtement de U_s qui admet une complétion naturelle.

La section hyperplane X_s a l singularités, de type ADE. On note τ_i leurs nombres de Tjurina, \mathbb{C}^{τ_i} des bases de déploiements miniversels, $\Sigma_i \subset \mathbb{C}^{\tau_i}$ les diagrammes de bifurcation, $B = \prod \mathbb{C}^{\tau_i}$ et $\Sigma = B \setminus \prod (\mathbb{C}^{\tau_i} \setminus \Sigma_i)$. Alors, par la proposition 2.33, il existe une variété \tilde{B} lisse, un morphisme fini $p : \tilde{B} \rightarrow B$ ramifié au-dessus de Σ et étale ailleurs, tel que le revêtement étale

$$\tilde{B} \setminus p^{-1}(\Sigma) \rightarrow B \setminus \Sigma$$

correspond exactement au noyau du produit des représentations de monodromie

$$\pi_1(B \setminus \Sigma) \rightarrow \prod_{i=1}^l \text{GL}(H_n(F_i, \mathbb{C})).$$

Par la propriété universelle des déformations miniverselles, on a un morphisme

$$g : (\mathbb{P}^m, s) \rightarrow (B, 0).$$

Comme $\mathcal{O}_X(1)$ est supposé m -jet ample, g est submersif par la remarque 1.21. Quitte à rétrécir B_s , on peut supposer que g est défini sur B_s .

On peut alors former le produit fibré :

$$U_s \times_B \tilde{B}.$$

Muni de la projection canonique sur U_s , c'est un revêtement galoisien étale (fini) de U_s , isomorphe au revêtement

$$[\tilde{U}_s] \rightarrow U_s.$$

Soit $[\tilde{B}_s] := B_s \times_B \tilde{B}$. Alors, $[\tilde{B}_s]$ est une variété lisse, et $[\tilde{B}_s] \rightarrow B_s$ est un revêtement fini qui complète $[\tilde{U}_s] \rightarrow U_s$. C'est la complétion (locale) recherchée.

En complétant de la sorte chaque composante connexe de \tilde{U}_s , on obtient le résultat suivant : il existe une variété complexe lisse \tilde{B}_s un morphisme analytique *fini* vers B_s tel que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U}_s & \hookrightarrow & \tilde{B}_s \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_s & \hookrightarrow & B_s \end{array}$$

soit un carré cartésien.

Ceci montre que l'on peut compléter localement le revêtement étale \tilde{U}_m en une variété finie sur \mathbb{P}^m . Il reste à montrer que ces complétions locales se recollent bien. Rappelons alors le théorème suivant :

THÉORÈME 2.36. (*Grauert-Remmert, voir [SGA1], théorème 5.4 p. 254*) — Soient \mathcal{X} un espace analytique normal, \mathcal{Y} un sous-ensemble analytique fermé tel que $\mathcal{U} := \mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$ soit dense dans \mathcal{X} . Soit \mathcal{U}' un revêtement normal fini de \mathcal{U} ; on suppose qu'il existe une partie analytique fermée rare \mathcal{S} de \mathcal{X} telle que la restriction de \mathcal{U}' à $\mathcal{U} \setminus \mathcal{U} \cap \mathcal{S}$ soit étale. Alors il existe un revêtement fini normal \mathcal{X}' de \mathcal{X} qui prolonge \mathcal{U}' , et \mathcal{X}' est unique à isomorphisme près.

On applique ce théorème au revêtement $\tilde{U}_m \rightarrow U_m$, ce qui donne une variété Y normale, finie sur \mathbb{P}^m , qui complète le revêtement $\tilde{U}_m \rightarrow U_m$. Elle est unique à isomorphisme près. La restriction du revêtement ramifié $Y \rightarrow \mathbb{P}^m$ au-dessus de la boule B_s est une complétion du revêtement étale $\tilde{U}_m \rightarrow U_m$. Toujours par le théorème de Grauert-Remmert, c'est la seule à isomorphisme près. Elle coïncide donc avec le revêtement ramifié $\tilde{B}_s \rightarrow B_s$ construit explicitement un peu plus haut. Mais \tilde{B}_s est lisse. On en déduit qu'au-dessus de B_s , la variété Y est lisse.

Comme ceci vaut pour tout $s \in \mathbb{P}^m \cap X^\vee$, on en déduit que Y est lisse. \square

REMARQUE 2.37. — Reprenons les hypothèses du théorème 1.30. Notons V_m le complémentaire du fermé Z_m : pour tout $u \in V_m$, X_u est à singularités simples et la somme des nombres de Tjurina de ses singularités est inférieure ou égale à m . Alors, la preuve du théorème 2.35 montre qu'il existe en fait un revêtement étale $p : \tilde{U} \rightarrow U$ et une variété lisse \tilde{V}_m formant un

carré cartésien

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{U} & \xrightarrow{\text{inclusion}} & \tilde{V}_m \\
 \downarrow p & & \downarrow \text{fini} \\
 U & \xrightarrow{\text{inclusion}} & V_m
 \end{array}$$

et tels que $p^*\mathbb{V}$ s'étende en un système local sur \tilde{V}_m . La variété Y est une sous-variété compacte de \tilde{V}_m .

3 Premières propriétés du système local \mathbb{V}_Y

La plupart des propriétés de Y et \mathbb{V}_Y établies dans cette section sont des adaptations de résultats présents dans [Sim93] ou [CT93].

3.1 Variations de structures de Hodge

PROPOSITION 3.1. — *Si \mathbb{W} est sous-jacent à une VSH sur X , alors le système local \mathbb{V}_Y est sous-jacent à une variation de structures de Hodge sur Y .*

DÉMONSTRATION — Le système local \mathbb{V} sur U_k est une image directe supérieure de VSH par un morphisme projectif lisse, il est donc sous-jacent à une VSH par la proposition 2.5. Le tiré en arrière par un revêtement étale d'une VSH est encore une VSH. Enfin, cette VSH s'étend en un système local sur Y , donc par le théorème d'extension de Griffiths (2.4), le système local \mathbb{V}_Y est également sous-jacent à une VSH sur Y .

3.2 Torelli infinitésimal si \mathbb{W} est de rang 1

Dans le cas où \mathbb{W} est une VSH de rang 1 sur X , et sous certaines conditions sur le plongement $X \subset \mathbb{P}$, l'application des périodes de \mathbb{V}_Y est génériquement de rang maximal.

THÉORÈME 3.2. — *Soit X une variété projective lisse de dimension impaire $n+1$, \mathbb{W} une VSH de rang 1 sur X et $\delta := \dim H^0(X, T_X)$. On suppose X plongée dans un espace projectif \mathbb{P} , linéairement normale, et on note $X \xleftarrow{\alpha} \mathfrak{X} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^V$ la famille universelle de sections hyperplanes de X .*

Soit m un entier tel que $\dim \mathbb{P}^V \geq m + \delta$ et que $\mathcal{O}_X(1)$ soit m -jet ample. Soit \mathbb{P}^m un sous-espace projectif générique \mathbb{P}^V et (Y, \mathbb{V}_Y) le couple construit dans le théorème 2.35. Alors, quitte à composer $X \hookrightarrow \mathbb{P}$ par un plongement de Veronese, l'application des périodes de \mathbb{V}_Y est génériquement de rang maximal.

La démonstration de Simpson ([Sim93], proposition 8.2 et corollaire 8.3; le résultat est également mentionné dans [CT93], p. 136, pour des familles d'hypersurfaces de l'espace projectif) en dimension deux consiste à montrer que l'application des périodes de \mathbb{V} sur U est de rang supérieur au rang de l'application de Kodaira-Spencer, puis à minorer ce rang par 2. Elle s'étend sans changement majeur en dimension 3 à 6. La généralisation de ce résultat lorsque \mathbb{W} est de rang quelconque est traitée dans la partie II.

DÉMONSTRATION — On commence par démontrer un lemme.

LEMME 3.3. — Soit m un entier. Si on a l'inégalité

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) \geq m + 1 + \dim H^0(X, T_X),$$

alors l'application Kodaira-Spencer est de rang supérieur à m .

DÉMONSTRATION — Soit G le sous-groupe de $\text{Aut}(X)$ qui préserve $\mathcal{O}_X(1)$. Alors, G agit sur \mathbb{P}^\vee , et l'orbite d'un point $b \in \mathbb{P}^\vee$ est l'ensemble des $b' \in \mathbb{P}^\vee$ tels que $X_{b'}$ soit isomorphe à X_b . L'espace tangent à l'orbite de b s'identifie à l'espace des champs de vecteurs holomorphes sur X préservant $\mathcal{O}_X(1)$, sa dimension est donc inférieure à la dimension d de l'espace de tous les champs de vecteurs sur X . D'autre part, cet espace tangent est exactement le noyau de l'application de Kodaira-Spencer (en b) :

$$\rho_b : T_{\mathbb{P}^\vee, b} \rightarrow H^1(X_b, T_{X_b}).$$

Ceci donne l'estimation indépendante de $\mathcal{O}_X(1)$:

$$\dim \text{Ker } \rho_b \leq \dim H^0(X, T_X).$$

Par hypothèse, on a $\dim \mathbb{P}^\vee \geq m + \dim H^0(X, T_X)$. Soit $b \in U$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} \text{rk } \rho_b &= \dim \mathbb{P}^\vee - \dim \text{Ker } \rho_b \\ &\geq \dim \mathbb{P}^\vee - \dim H^0(X, T_X) \\ &\geq m. \end{aligned}$$

□

Continuons la démonstration du théorème.

On sait que la différentielle en b de l'application des périodes de \mathbb{V}_{U_m} est la composée de l'application de Kodaira-Spencer $T_{U_m, b} \rightarrow H^1(X_b, T_{X_b})$, et d'un morphisme de cup-produit qui est injectif par le théorème de Torelli infinitésimal de M. Green [Green85], si $\mathcal{O}_X(1)$ est assez positif. Il reste donc à montrer que si $\mathcal{O}_X(1)$ est assez ample et si le sous-espace \mathbb{P}^m est générique, l'application de Kodaira-Spencer est injective pour b dans un ouvert dense.

Or, quitte à composer le plongement $X \subset \mathbb{P}$ par un plongement de Veronese (ou imposer une condition de positivité suffisante sur $\mathcal{O}_X(1)$), on a $\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) \geq m + 1 + \dim H^0(X, T_X)$. Par le lemme 3.3, on sait alors qu'en tout point $b \in U$, le morphisme de Kodaira-Spencer

$$T_{U, b} \rightarrow H^1(X_b, T_{X_b})$$

est de rang supérieur ou égal à m . On en déduit que si \mathbb{P}^m est générique dans \mathbb{P}^\vee , l'application de Kodaira-Spencer restreinte

$$T_{U_m, b} \rightarrow H^1(X_b, T_{X_b})$$

est injective pour tout b dans un ouvert de Zariski non vide de U_m .

□

Le théorème précédent a pour corollaire important que \mathbb{V}_Y ne provient pas d'une variété de dimension inférieure par tiré en arrière. Ce fait est démontré dans [Sim93], lemme 8.5, pour $m = 2$, et se généralise avec la même démonstration en dimension supérieure. On redonne rapidement la démonstration d'un énoncé un peu plus faible, puis l'énoncé général, sans démonstration.

COROLLAIRE 3.4. — *Avec les notations du théorème 3.2, il n'existe pas de variété lisse quasiprojective C de dimension strictement inférieure à m et de morphisme $\pi : Y \rightarrow C$ tel que la représentation de monodromie de \mathbb{V}_Y se factorise par $\pi_* : \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(C)$.*

DÉMONSTRATION — Supposons qu'une telle factorisation existe. Quitte à prendre la factorisation de Stein, on peut supposer que π est à fibres connexes et surjectif. Alors, le système local sur C dont \mathbb{V}_Y est le tiré en arrière doit également être sous-jacent à une VSH, par le théorème de « descente » de Simpson 2.6. Le rang de l'application des périodes de cette VSH ne peut être supérieur à la dimension de C , pourtant, son tiré en arrière \mathbb{V}_Y a une application des périodes de rang génériquement égal à $m > \dim C$, ce qui est absurde. \square

Le corollaire auquel on aboutit en suivant [Sim93], lemme 8.5, est le suivant.

COROLLAIRE 3.5. — *Avec les notations du théorème 3.2, il n'existe pas de variété quasiprojective lisse C de dimension $< m$, de variété lisse quasiprojective Z et de couple de morphismes $(g : Z \rightarrow Y, p : Z \rightarrow C)$ tels que le système local $g^*\mathbb{V}_Y$ soit isomorphe au tiré en arrière par p d'un système local sur C .* \square

3.3 Taille du groupe de monodromie si $\mathbb{W} = \mathbb{C}_X$

Supposons que la variété X soit de dimension (impaire) au moins trois.

Dans le cas où \mathbb{W} est le système local trivial \mathbb{C}_X , le système local \mathbb{V} est sous-jacent à une VSH entière, et son groupe de monodromie est un sous-groupe de $\text{Aut}(H^n(X_u, \mathbb{Z})_{ev}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Des résultats d'Ebeling ([Ebe]) et Beauville ([Bea86]), rappelés par Carlson et Toledo dans [CT99], conduisent alors au résultat suivant :

PROPOSITION 3.6. — *Soient $X \subset \mathbb{P}^m$, $\mathcal{O}_X(1)$, m , $\mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^V$, Y et \mathbb{V}_Y comme dans le théorème 2.35. Si $n \geq 2$ et $\mathbb{W} = \mathbb{C}$, le groupe de monodromie de \mathbb{V}_Y est d'indice fini dans le groupe orthogonal $\text{Aut}(H^n(X_u, \mathbb{Z})_{ev}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.*

DÉMONSTRATION — Comme rappelé dans [CT99], théorème 9.1, la condition sur n et sur $\mathcal{O}_X(1)$ implique qu'il existe une section hyperplane de X avec une singularité U_{12} ; on sait alors que le groupe de monodromie de \mathbb{V} est d'indice fini dans $\text{Aut}(H^n(X_u, \mathbb{Z})_{ev}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Par le théorème de Zariski de type Lefschetz, le groupe de monodromie de la restriction de \mathbb{V} à U_m est donc d'indice fini dans le même groupe orthogonal. Comme le revêtement étale $\tilde{U}_m \rightarrow U_m$ est fini, l'image de $\pi_1(\tilde{U}_m, u)$ dans $\pi_1(U_m, u)$ est d'indice fini. Donc le groupe de monodromie du système local tiré en arrière $p^*\mathbb{V}$ est toujours d'indice fini dans le groupe orthogonal $\text{Aut}(H^n(X_u, \mathbb{Z})_{ev}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Enfin, \mathbb{V}_Y est l'extension de $p^*\mathbb{V}$ à Y , il a donc le même groupe de monodromie.

3.4 Déformations de \mathbb{V}_Y

Soit Γ un groupe de présentation finie, et r un entier positif. On note $\mathcal{M}_B(\Gamma, r)$ l'espace des modules des représentations de rang r de Γ ([Sim93], p. 345).

Une famille de représentations de Γ paramétrée par un schéma T est dit non stationnaire ([Sim93], p. 346) si le morphisme correspondant

$$T \rightarrow \mathcal{M}_B(\Gamma, r)$$

n'est pas constant. Le résultat qui suit est dû à Simpson pour $m = 2$ ([Sim93], théorème 9.2). La démonstration, qui repose sur les théorème généraux de Simpson sur les familles d'images directes supérieures de fibrés harmoniques, s'adapte sans changement en dimension ≥ 2 .

PROPOSITION 3.7. — *Soient $X \subset \mathbb{P}$, $\mathcal{O}_X(1)$, m , $\mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^\vee$, Y et \mathbb{V}_Y comme dans le théorème 2.35. Si \mathbb{W} fait partie d'une famille non stationnaire de représentations de $\pi_1(X)$, paramétrée par une variété irréductible T , alors \mathbb{V}_Y fait également partie d'une famille non stationnaire de représentations de $\pi_1(Y)$.*

DÉMONSTRATION — Par [Sim93], théorème 5.1 p. 386, le système local $(R^n \pi_*(a^* \mathbb{W}))|_U$ fait partie d'une famille non stationnaire sur $U \subset \mathbb{P}^\vee$. Par le théorème de Zariski de type Lefschetz et puisque $\mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^\vee$ est générique, le morphisme

$$\pi_1(U \cap \mathbb{P}^m) \rightarrow \pi_1(U)$$

est surjectif; la restriction à \mathbb{P}^m de $(R^n \pi_*(a^* \mathbb{W}))|_U$ fait donc également partie d'une famille non stationnaire. Enfin, par [Sim93], lemme 1.5, le tiré en arrière par un revêtement étale fini vérifie également la même propriété.

Une conséquence de ce résultat est que si \mathbb{W} fait partie d'une famille non stationnaire, alors \mathbb{V}_Y est un système local non rigide sur Y . Ceci entraîne que la conjecture de Toledo est vraie pour $\pi_1(Y)$ (voir par exemple [Rez98], proposition 8.1). Un argument similaire sera utilisé dans la troisième partie, proposition 9.9.

3.5 VSH sur des champs de Deligne-Mumford

On peut interpréter le couple (Y, \mathbb{V}_Y) en termes de systèmes locaux ou de VSH sur des champs de Deligne-Mumford.

Reprenons la construction de Y et de \mathbb{V}_Y . Une fois choisis l'entier m (entre 2 et 6) et le plongement $X \subset \mathbb{P}$, alors pour tout $\mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^\vee$ générique, la structure de la variété discriminante et les groupes de monodromie locaux ne changent pas. Cependant la construction de Y dépend encore d'un choix : celui d'un sous-groupe distingué G de $\pi_1(U \cap \mathbb{P}^m)$, qui n'est pas explicite. De fait, on choisit arbitrairement un revêtement parmi tous ceux qui pourraient convenir : tout revêtement étale fini de Y pourrait remplacer Y dans les applications.

On peut alors se demander s'il existe un revêtement canonique, minimal, qui serait entièrement déterminé par la structure de la variété duale, et les monodromies locales. En cherchant à répondre à cette question, on voit apparaître un champ de Deligne-Mumford, le champ quotient $[Y/G]$. C'est un champ de Deligne-Mumford, muni d'un morphisme vers \mathbb{P}^m , son espace

grossier. Au-dessus du complémentaire de la variété duale, ce morphisme est un isomorphisme.

La VSH \mathbb{V} se prolonge alors en une VSH $\tilde{\mathbb{V}}$ sur $[Y/G]$. En un sens, l'objet principal dans cette partie est $([Y/G], \tilde{\mathbb{V}})$ et non (Y, \mathbb{V}_Y) . Nous reviendrons brièvement sur cette interprétation dans la partie III, où apparaissent les groupes de cohomologie $H^l([Y/G], \tilde{\mathbb{V}})$. Cependant nous n'étudieront pas directement $[Y/G]$.

REMARQUE 3.8. — *La remarque 2.37 montre que sous les hypothèses du théorème 2.35, (b), il existe en fait un champ plus gros (à savoir $[\tilde{V}_m/G]$) dont $[Y/G]$ est un sous-champ fermé.*

Deuxième partie

Autour du théorème de Torelli infinitésimal

On étudie maintenant le problème de Torelli infinitésimal pour \mathbb{V}_Y lorsque \mathbb{W} est de rang quelconque. On obtient le théorème suivant.

THÉORÈME. 6.2 — *Soit X une variété projective lisse de dimension impaire $n+1$, \mathbb{W} une VSH sur X et $\delta := \dim H^0(X, T_X)$. On suppose X plongée dans un espace projectif \mathbb{P} , linéairement normale, et on note $X \xleftarrow{\alpha} \mathfrak{X} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^\vee$ la famille universelle de sections hyperplanes de X .*

Soit m un entier tel que $\dim \mathbb{P}^\vee \geq m + \delta$ et que $\mathcal{O}_X(1)$ soit m -jet ample. Soit \mathbb{P}^m un sous-espace projectif générique de \mathbb{P}^\vee et (Y, \mathbb{V}_Y) le couple construit dans le théorème 2.35. Alors, quitte à composer $X \hookrightarrow \mathbb{P}$ par un plongement de Veronese, l'application des périodes de \mathbb{V}_Y est génériquement de rang maximal.

La démonstration de ce théorème occupe toute la partie. Dans les deux premières sections on rappelle ou on établit des résultats préliminaires, puis on termine la démonstration dans la troisième section.

4 Préliminaires

Dans cette section, les notations sont indépendantes de ce qui précède. On rappelle quelques résultats connus sur les variations de structures de Hodge et leurs applications des périodes. Ensuite, on démontre un lemme sur la contribution de la géométrie dans l'application des périodes d'une image directe supérieure d'une VSH (lemme 4.2).

4.1 Applications des périodes

Soit \mathbb{V} une variation de structure de Hodge de poids w sur une variété complexe M , que l'on supposera simplement connexe pour simplifier. On note V le fibré différentiable sous-jacent à \mathbb{V} , et D sa connexion plate. Alors, V se décompose en somme de sous-fibrés différentiables $V = \bigoplus_{p+q=w} V^{p,q}$, de telle sorte que la restriction de cette décomposition à une fibre définisse une structure de Hodge de poids w . On note $h^{p,q}$ le rang de $V^{p,q}$.

Soit $0 \in M$ un point de la base. Comme le fibré V est trivial, on peut voir la variation de structure de Hodge comme une famille de sous-espaces $(V_t^{p,q})_{t \in M}$ de l'espace vectoriel V_0 .

Considérons la dernière composante de l'application des périodes :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^w : M &\rightarrow \text{Grass}(h^{w,0}, V_0), \\ t &\mapsto V_t^{w,0} \subset V_0. \end{aligned}$$

Sa différentielle en 0 s'écrit

$$d\mathcal{P}_0^w : T_{M,0} \rightarrow T_{\text{Grass}(h^{w,0}, V_0), V_0^{w,0}} \simeq \text{Hom}(V_0^{w,0}, V_0/V_0^{w,0}),$$

et se calcule comme suit. Pour $u \in T_{M,0}$, $\sigma \in V_0^{w,0}$, et $\tilde{\sigma}$ une section différentiable du sous-fibré $V^{w,0}$ valant σ en 0, on a :

$$d\mathcal{P}_0^w(u)(\sigma) = D_u(\tilde{\sigma}) \text{ mod. } V_0^{w,0}.$$

Enfin, par transversalité de Griffiths, l'image de $d\mathcal{P}_0^w$ est incluse dans le sous-espace $\text{Hom}(V_0^{w,0}, V_0^{w-1,1})$.

4.2 Images directes de fibrés plats et de VSH

Soit $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme projectif lisse entre variétés complexes, et \mathbb{W} une VSH sur X , dont on note W le fibré différentiable sous-jacent, et D_X la connexion plate associée. On note X_s la fibre de π au-dessus d'un point $s \in S$, et V le fibré $R^k \pi_* W$ et D sa connexion plate. Au voisinage de $b \in S$, on peut décrire cette connexion comme suit : une section \mathcal{C}^∞ de V sur un voisinage de b peut-être représentée par une famille \mathcal{C}^∞ de k -formes σ_s à valeurs dans W sur X_s . Il existe alors une k -forme σ à valeurs dans W sur X telle que $\sigma|_{X_s} = \sigma_s$. Si u est un champ de vecteurs sur S et \tilde{u} un relèvement à X , la connexion plate D sur V en b est donnée par la formule :

$$D_u([\sigma_s]) = [int(\tilde{u})(D_X \sigma)|_{X_b}].$$

On peut vérifier que ceci ne dépend pas du choix de \tilde{u} ni de celui de la forme σ .

4.3 Cohomologie à coefficients dans une VSH

Soit Z une variété de dimension n , \mathbb{W} une variation de structure de Hodge de poids w sur Z , W le fibré \mathcal{C}^∞ sous-jacent et $W^{p,q}$ les sous-fibrés de Hodge, avec $W = \bigoplus_{p+q=w} W^{p,q}$.

On note \mathcal{A}^k le faisceau de k -formes différentielles \mathcal{C}^∞ sur Z , et $\mathcal{A}^{r,s}$ celui des (r,s) -formes différentielles. Le faisceau des k -formes holomorphes est noté Ω^k . De même, on note $\mathcal{A}^k(W)$ et $\mathcal{A}^{r,s}(W)$ (resp. $\mathcal{A}^k(W^{p,q})$ et $\mathcal{A}^{r,s}(W^{p,q})$) les faisceaux de formes différentielles à valeurs dans le fibré W (resp. $W^{p,q}$). Le faisceau des formes holomorphes à valeurs dans W est noté $\Omega^k(W)$.

Écrivons la connexion D sous la forme $D = \underbrace{\partial + \bar{\theta}}_{D'} + \underbrace{\bar{\partial} + \theta}_{D''}$, avec :

$$\begin{aligned} \partial(\mathcal{A}^{r,s}(W^{p,q})) &\subset \mathcal{A}^{r+1,s}(W^{p,q}), \\ \bar{\partial}(\mathcal{A}^{r,s}(W^{p,q})) &\subset \mathcal{A}^{r,s+1}(W^{p,q}), \\ \theta(\mathcal{A}^{r,s}(W^{p,q})) &\subset \mathcal{A}^{r+1,s}(W^{p-1,q+1}), \\ \bar{\theta}(\mathcal{A}^{r,s}(W^{p,q})) &\subset \mathcal{A}^{r,s+1}(W^{p+1,q-1}). \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{A}(W)^{P,Q} = \bigoplus_{p+r=P, s+q=Q} \mathcal{A}^{r,s}(W^{p,q})$. Alors D' est de type $(1,0)$ et D'' de type $(0,1)$. De plus, on a $D''^2 = 0$. Soit $K_{P,Q}^\bullet$ le complexe $K_{P,Q}^i = \mathcal{A}(W)^{P,Q-n+i}$, muni de la différentielle D'' . Deligne a montré que $H^n(Z, \mathbb{W})$ admet une structure de Hodge

$$H^n(Z, \mathbb{W}) = \bigoplus_{P+Q=n+w} H^n(Z, \mathbb{W})^{P,Q}, \text{ avec } H^n(Z, \mathbb{W})^{P,Q} := \mathbb{H}^n(Z, K_{P,Q}^\bullet).$$

Terminons avec deux remarques sur les termes $(n+w, 0)$ et $(n+w-1, 1)$ de cette décomposition.

PROPOSITION 4.1. — *Avec les notations précédentes, on a un isomorphisme*

$$H^n(Z, \mathbb{W})^{n+w,0} = H^0(Z, \Omega_Z^n \otimes W^{w,0}).$$

De plus, il existe un morphisme

$$H^n(Z, \mathbb{W})^{n+w-1,1} \rightarrow \mathbb{H}^n(Z, \mathcal{A}^{n-1, \bullet}(W^{w,0})[1-n]) \simeq H^1(Z, \Omega^{n-1} \otimes W^{w,0}).$$

DÉMONSTRATION — Le complexe $K_{n+w,0}^\bullet[n]$ coincide avec la résolution de Dolbeault de $\Omega^n \otimes W^{w,0}$, donc

$$H^n(Z, \mathbb{W})^{n+w,0} = H^0(Z, \Omega_Z^n \otimes W^{w,0}).$$

D'autre part, le morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccc} \Omega_Z^{n-1} \otimes W^{w,0} & & \Omega_Z^{n-1} \otimes W^{w,0} \\ \downarrow D'' = \bar{\partial} + \theta & & \downarrow \bar{\partial} \\ \Omega_Z^n \otimes W^{w-1,1} \oplus \mathcal{A}^{n-1,1} \otimes W^{w,0} & \rightarrow & \mathcal{A}^{n-1,1} \otimes W^{w,0} \\ \downarrow \bar{\partial} + \theta & & \downarrow \bar{\partial} \\ \mathcal{A}^{n,1} \otimes W^{w-1,1} \oplus \mathcal{A}^{n-1,2} \otimes W^{w,0} & & \mathcal{A}^{n-1,2} \otimes W^{w,0} \end{array}$$

donne en hypercohomologie un morphisme

$$H^n(Z, \mathbb{W})^{n+w-1,1} \rightarrow \mathbb{H}^n(Z, \mathcal{A}^{n-1,\bullet}(W^{w,0})[1-n]) \simeq H^1(Z, \Omega_Z^{n-1} \otimes W^{w,0}).$$

4.4 Application des périodes et application de Kodaira-Spencer

Pour finir cette section, on démontre un résultat qui relie l'application de Kodaira-Spencer à l'application des périodes d'une image directe supérieure d'une VSH.

Soit $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme projectif lisse entre variétés complexe, de dimension relative n . Si $s \in S$, on note X_s la fibre de π au-dessus de s , et

$$\rho_s : T_{S,s} \rightarrow H^1(X_s, T_{X_s})$$

l'application de Kodaira-Spencer en s .

Soit \mathbb{W} une VSH de poids w sur X , $\mathbb{V} = R^n \pi_* \mathbb{W}$, qui est une VSH de poids $n+w$ sur S , et $V^{p,q}$ les fibrés de Hodge (différentiables) de \mathbb{V} . Pour $0 \leq p \leq n+w$, on note \mathcal{P}^p la p -ème composante de l'application des périodes. Sa différentielle est à valeurs dans

$$\mathrm{Hom}(V^{p,q}, V^{p-1,q+1}).$$

Si $\mathbb{W} = \mathbb{C}_X$, il est connu que cette différentielle est simplement le cup-produit par la classe de Kodaira-Spencer. Autrement dit, la variation au premier ordre de la structure de Hodge ne dépend que de la variation au premier ordre des fibres du morphisme.

Lorsque \mathbb{W} est une VSH quelconque, la différentielle de l'application des périodes de \mathbb{V} dépend certes de la façon dont varient les fibres de π , mais également aussi de la variation de structure de Hodge \mathbb{W} elle-même. En général, il n'est pas immédiat d'isoler la contribution de π ou de \mathbb{W} dans la différentielle de l'application des périodes de \mathbb{V} . Cependant, pour certaines composantes de \mathcal{P} , on peut arriver à un résultat qui sera suffisant pour les applications en vue.

Soit \mathcal{P}^{n+w} la dernière composante de l'application des périodes de \mathbb{V} , qui à un point $s \in S$ associe $V_s^{n+w,0} \subset V_s$ (la dernière composante de la filtration de Hodge).

Soit 0 un point de S . La différentielle de \mathcal{P}^{n+w} en 0 est à valeurs dans $\mathrm{Hom}(V_0^{n+w,0}, V_0^{n+w-1,1})$.

Par la proposition 4.1, l'espace vectoriel $V_0^{n+w,0}$ est isomorphe à $H^0(X_0, \Omega_{X_0}^n \otimes W^{w,0})$. D'autre part, toujours par 4.1, on sait qu'il existe un morphisme

$$V_0^{n+w-1,1} \rightarrow H^1(X_0, \Omega_{X_0}^{n-1} \otimes W^{w,0}).$$

Par composition, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} T_{S,0} & \xrightarrow{d\mathcal{P}^{n+w}} & \text{Hom}(V_0^{n+w,0}, V_0^{n+w-1,1}) \\ & \searrow \Phi & \downarrow \\ & & \text{Hom}(H^0(X_0, \Omega_{X_0}^n \otimes W^{w,0}), H^1(X_0, \Omega_{X_0}^{n-1} \otimes W^{w,0})). \end{array}$$

LEMME 4.2. — *Le diagramme ci-dessus se complète en un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} T_{S,0} & \xrightarrow{d\mathcal{P}^{n+w}} & \text{Hom}(V_0^{n+w,0}, V_0^{n+w-1,1}) \\ \rho_0 \downarrow & \searrow \Phi & \downarrow \\ H^1(X_0, T_{X_0}) & \longrightarrow & \text{Hom}(H^0(X_0, \Omega_{X_0}^n \otimes W^{w,0}), H^1(X_0, \Omega_{X_0}^{n-1} \otimes W^{w,0})). \end{array}$$

où $\rho_0 : T_{S,0} \rightarrow H^1(X_0, T_{X_0})$ est l'application de Kodaira-Spencer, et la seconde flèche horizontale est le cup produit :

$$\alpha \mapsto \alpha \cup -.$$

DÉMONSTRATION — Soit $u \in T_{S,0}$. Calculons l'effet du morphisme $\Phi(u)$ sur un élément $\sigma \in H^0(X_0, \Omega_{X_0}^n \otimes W^{w,0})$.

Soit \tilde{u} un champ de vecteurs de type $(1,0)$ sur X défini au voisinage de X_0 et tel que $\pi_*\tilde{u}|_{X_0} = u$, et $\tilde{\sigma}$ une n -forme sur X à valeurs dans $W^{w,0}$, définie au voisinage de X_0 , dont la restriction aux fibres proches de X_0 est D -fermée. On suppose aussi que la classe de la composante de type $(n+w,0)$ de $\tilde{\sigma}|_{X_0}$ est égale à σ . Alors, on a

$$d\mathcal{P}^{n+w}(u)(\sigma) = [(int(\tilde{u})(D\tilde{\sigma})|_{X_0})^{n+w-1,1}].$$

La composition par $H^n(X_0, \mathbb{W})^{n+w-1,1} \rightarrow H^1(\Omega_{X_0}^{n-1} \otimes W^{w,0})$ consiste à projeter les représentants dans $\mathcal{A}_{X_0}^{n-1,1} \otimes W^{w,0}$ avant de prendre leur classe de Dolbeault classique. En écrivant $D = \partial + \bar{\partial} + \theta + \bar{\theta}$, on voit que l'image de $[(int(\tilde{u})(D\tilde{\sigma})|_{X_0})^{n+w-1,1}]$ dans $H^1(\Omega_{X_0}^{n-1} \otimes W^{w,0})$ est pour des raisons de type $[int(\tilde{u})(\bar{\partial}\tilde{\sigma}^{n+w,0})|_{X_0}]$. Donc

$$\Phi(u)(\sigma) = [int(\tilde{u})(\bar{\partial}\tilde{\sigma}^{n+w,0})|_{X_0}].$$

Soit $int(\bar{\partial}\tilde{u})(-)$ l'opérateur qui combine le produit extérieur pour la partie covariante et la contraction pour la partie contravariante. En dérivant terme à terme, on obtient

$$\bar{\partial}(int(v)(\tilde{\sigma}^{n+w,0})) = int(\bar{\partial}\tilde{u})(\tilde{\sigma}^{n+w,0}) - int(\tilde{u})(\bar{\partial}\tilde{\sigma}^{n+w,0}).$$

Ceci implique l'égalité de classes de Dolbeault :

$$[int(\tilde{u})(\bar{\partial}\tilde{\sigma}^{n+w,0})|_{X_0}] = [int(\bar{\partial}\tilde{u})(\tilde{\sigma}^{n+w,0})|_{X_0}].$$

Enfin, $\alpha := \overline{\partial\tilde{u}}|_{X_0}$ est précisément un représentant de Dolbeault de la classe de Kodaira-Spencer $\rho_0(u)$ du vecteur u . On a donc :

$$\Phi(u)(\sigma) = [\text{int}(\alpha)(\tilde{\sigma}|_{X_0}^{n+w,0})] = \rho_0(u) \cup [\tilde{\sigma}|_{X_0}^{n+w,0}] = \rho(u) \cup \sigma. \quad \square$$

La section suivante vise à démontrer que dans certains cas, le morphisme de cup-produit obtenu est injectif.

5 Injectivité d'un cup-produit

On démontre ici qu'un morphisme de cup-produit est injectif, dans un cadre un peu plus général que dans [Green85]. Les notations sont toujours indépendantes de la première partie.

PROPOSITION. 5.2 — *Soit Y une variété lisse de dimension $n + 1 > 2$, F un fibré vectoriel holomorphe sur Y , L un fibré en droites holomorphe très ample sur Y . Quitte à remplacer L par $L^{\otimes k}$ où k est un entier dépendant de Y , L et F , alors pour toute section globale s de L dont le lieu d'annulation $Z \subset Y$ est lisse, le morphisme de cup-produit*

$$H^1(Z, T_Z) \rightarrow H^0(Z, K_Z \otimes F)^* \otimes H^1(Z, \Omega_Z^{n-1} \otimes F)$$

est injectif.

Pour plus de simplicité, on regroupe dans un lemme les arguments généraux (extraits de [Green85]) portant sur les suites spectrales. On finit ensuite la démonstration.

5.1 Un lemme sur les suites spectrales

LEMME 5.1. — *Soit $E_r^{p,q}$ une suite spectrale de premier quadrant.*

- *Si la suite aboutit à 0 et que tous ses termes sont concentrés dans la zone $0 \leq p \leq n$, alors la flèche $d_n : E_n^{0,n} \rightarrow E_n^{n,1}$ est un isomorphisme.*
- *Si de plus on a $E_n^{n,1} \simeq E_{n-1}^{n,1} \simeq \dots \simeq E_2^{n,1}$, alors il existe un morphisme injectif*

$$E_2^{n,1} \rightarrow E_1^{0,n}.$$

DÉMONSTRATION — Les flèches $d_{n+1}^{p,q} : E_{n+1}^{p,q} \rightarrow E_{n+1}^{p+n+1, q+n}$ sont forcément nulles par l'hypothèse sur la localisation des termes non nuls, donc la suite dégénère en E_{n+1} . Comme elle aboutit à zéro, tous les termes $E_{n+1}^{p,q}$ sont nuls. Or, ceux-ci sont définis comme les groupes de cohomologie des complexes formant la n -ème page de la suite spectrale :

$$E_{n+1}^{p,q} := \frac{\text{Ker}(d_n : E_n^{p,q} \rightarrow E_n^{p+n, q+n-1})}{\text{Im}(d_n : E_n^{p-n, q-n+1} \rightarrow E_n^{p,q})}.$$

On en déduit que le complexe

$$\underbrace{E_n^{-n, 2n-1}}_0 \xrightarrow{d_n} E_n^{0,n} \xrightarrow{d_n} E_n^{n,1} \xrightarrow{d_n} \underbrace{E_n^{2n, 2-n}}_0$$

est exact, ce qui donne le premier point.

Pour le deuxième point, il suffit de remarquer que pour tout i et tout q , $E_{i+1}^{0,q}$ s'injecte dans $E_i^{0,q}$, puis de considérer la chaîne de morphismes suivante :

$$E_2^{n,1} \simeq E_3^{n,1} \simeq \dots \simeq E_n^{n,1} \xleftarrow{d_n(\text{isom})} E_n^{0,n} \hookrightarrow E_{n-1}^{0,n} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow E_1^{0,n}. \quad \square$$

5.2 Démonstration de la proposition 5.2

On rappelle l'énoncé de la proposition :

PROPOSITION 5.2. — *Soit Y une variété lisse de dimension $n + 1 > 2$, F un fibré vectoriel holomorphe sur Y , L un fibré en droites holomorphe très ample sur Y . Quitte à remplacer L par $L^{\otimes k}$ où k est un entier dépendant de Y , L et F , alors pour toute section globale s de L dont le lieu d'annulation $Z \subset Y$ est lisse, le morphisme de cup-produit*

$$H^1(Z, T_Z) \rightarrow H^0(Z, K_Z \otimes F)^* \otimes H^1(Z, \Omega_Z^{n-1} \otimes F)$$

est injectif.

DÉMONSTRATION — Soit k un entier tel qu'en remplaçant L par $L^{\otimes k}$, on ait :

- (i) $H^1(Y, K_Y^2 \otimes L^n \otimes F) = 0$;
- (ii) $H^q(Y, F \otimes \Omega_Y^p \otimes L^{p+1-n}) = 0$ et $H^{q+1}(Y, F \otimes \Omega_Y^p \otimes L^{p-n}) = 0$ si $p < n - 1$ et $0 < q < n$;
- (iii) $H^q(Y, K_Y^{-1} \otimes \Omega_Y^p \otimes L^{p-n}) = 0$ et $H^{q+1}(Y, K_Y^{-1} \otimes \Omega_Y^p \otimes L^{p-(n+1)}) = 0$ si $p < n$ et $0 < q < n$;
- (iv) le morphisme $H^0(Y, K_Y \otimes L \otimes F) \otimes H^0(Y, K_Y \otimes L^{(n)} \otimes F^*) \rightarrow H^0(Y, L^{(n+1)} \otimes K_Y^2)$ est surjectif.

Pour les trois premières conditions, l'existence de k résulte des théorèmes d'annulation et dualité de Serre. Pour la dernière condition de surjectivité, l'existence de k résulte plus précisément du lemme suivant :

LEMME 5.3. (voir lemme 1.28 de [Green85]) — *Soit Y une variété lisse de dimension $n + 1$, E_1 et E_2 des fibrés holomorphes sur Y , (a, b) un couple d'entiers supérieurs à 1 et L un fibré en droites positif. Alors, quitte à remplacer L par une puissance tensorielle assez grande de L , la flèche*

$$H^0(Y, E_1 \otimes L^a) \otimes H^0(Y, E_2 \otimes L^b) \rightarrow H^0(Y, E_1 \otimes E_2 \otimes L^{a+b})$$

est surjective.

Dans la suite, on suppose, quitte à remplacer L par $L^{\otimes k}$, que L vérifie toutes les conditions énumérées ci-dessus.

Pour démontrer la proposition, il suffit de prouver qu'il existe des morphismes

$$H^0(Z, K_Z \otimes F)^* \otimes H^1(Z, \Omega_Z^{n-1} \otimes F) \rightarrow H^0(Z, K_Z \otimes F)^* \otimes H^n(Z, L^{(1-n)} \otimes F)$$

et

$$H^1(Z, T_Z) \hookrightarrow H^n(Z, L^{(1-n)} \otimes K_Z^{-1})$$

formant un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
H^0(Z, K_Z \otimes F)^* \otimes H^1(Z, \Omega_Z^{n-1} \otimes F) & \longrightarrow & H^0(Z, K_Z \otimes F)^* \otimes H^n(Z, L^{(1-n)} \otimes F), \\
\uparrow & & \uparrow \\
H^1(Z, T_Z) & \xrightarrow{\subset} & H^n(Z, L^{(1-n)} \otimes K_Z^{-1})
\end{array}$$

où la première flèche verticale est le cup-produit, et la seconde flèche verticale est duale de la multiplication :

$$H^0(Z, K_Z \otimes F) \otimes H^0(Z, L^{(n-1)} \otimes K_Z \otimes F^*) \rightarrow H^0(Z, L^{(n-1)} \otimes K_Z^2).$$

On considère les deux suites exactes obtenues en tordant par $F|_Z$ ou par K_Z^{-1} la suite exacte de Koszul

$$0 \rightarrow L|_Z^{(1-n)} \rightarrow \Omega_Y^1 \otimes L|_Z^{(2-n)} \rightarrow \dots \rightarrow \Omega_Y^{n-2} \otimes L|_Z^{-1} \rightarrow \Omega_Y^{n-1} \otimes \mathcal{O}_Z \rightarrow \Omega_Z^{n-1} \rightarrow 0.$$

Soient \mathbf{E} et \mathbf{E}^* les suites spectrales d'hypercohomologie de ces deux complexes. Ce sont des suites spectrales de premier quadrant, concentrées dans la zone $0 \leq p \leq n$ et aboutissant à zéro puisque les complexes sont exacts. De plus, la plupart de leurs termes $E_1^{p,q}$ et $E_1^{*p,q}$ sont nuls. En effet, la suite exacte courte de faisceaux sur Y

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(L^{-1}) \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0$$

tordue respectivement par $F \otimes \Omega_Y^p \otimes L^{p+1-n}$ et $K_Z^{-1} \otimes \Omega_Y^p \otimes L^{p+1-n}$ fournit deux suites exactes longues en cohomologie :

$$\begin{aligned}
H^q(Y, F \otimes \Omega_Y^p \otimes L^{p+1-n}) &\rightarrow H^q(Z, F \otimes \Omega_Y^p \otimes L^{p+1-n}) \rightarrow H^{q+1}(Y, F \otimes \Omega_Y^p \otimes L^{p-n}); \\
H^q(Y, K_Z^{-1} \otimes \Omega_Y^p \otimes L^{p-n}) &\rightarrow H^q(Z, K_Z^{-1} \otimes \Omega_Y^p \otimes L^{p+1-n}) \rightarrow H^{q+1}(Y, K_Z^{-1} \otimes \Omega_Y^p \otimes L^{p-(n+1)}).
\end{aligned}$$

Comme L vérifie les conditions d'annulation (ii) et (iii), on en déduit que :

$$E_1^{p,q} = H^q(Z, F \otimes \Omega_Y^p \otimes L^{p+1-n}) = 0 \text{ si } p < n-1 \text{ et } 0 < q < n,$$

$$E_1^{*p,q} = H^q(Z, K_Z^{-1} \otimes \Omega_Y^p \otimes L^{p+1-n}) = 0 \text{ si } p < n \text{ et } 0 < q < n.$$

Ceci force $E_n^{n,1} = E_2^{n,1}$ et $E_n^{*n,1} = E_2^{*n,1} = E_1^{*n,1}$.

Le lemme 5.1 donne des flèches $E_2^{n,1} \rightarrow E_1^{0,n}$ et $E_1^{*n,1} = E_2^{*n,1} \hookrightarrow E_1^{*0,n}$, c'est-à-dire :

$$\frac{H^1(Z, F \otimes \Omega_Z^{n-1})}{H^1(Z, F \otimes \Omega_Y^{n-1} \otimes \mathcal{O}_Z)} \rightarrow H^n(Z, F \otimes L^{(1-n)}),$$

$$H^1(Z, T_Z) \hookrightarrow H^n(Z, K_Z^{-1} \otimes L^{(1-n)}).$$

La première flèche fournit enfin un morphisme

$$H^1(Z, F \otimes \Omega_Z^{n-1}) \rightarrow H^n(Z, F \otimes L^{(1-n)}).$$

D'autre part, la multiplication par $H^0(Z, K_Z \otimes F^*)$ définit un morphisme de suites spectrales entre \mathbf{E}^* et \mathbf{E} ; elle commute donc aux différentielles des deux suites spectrales et donc aux deux flèches construites plus haut. On obtient donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^0(Z, K_Z \otimes F)^* \otimes H^1(Z, \Omega_Z^{n-1} \otimes F) & \longrightarrow & H^0(Z, K_Z \otimes F)^* \otimes H^n(Z, L^{(1-n)} \otimes F) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^1(Z, T_Z) \subset & \longrightarrow & H^n(Z, L^{(1-n)} \otimes K_Z^{-1}) \end{array}$$

Il suffit donc maintenant de montrer que la flèche

$$H^n(Z, L^{(1-n)} \otimes K_Z^{-1}) \rightarrow H^0(Z, K_Z \otimes F)^* \otimes H^n(Z, L^{(1-n)} \otimes F)$$

est injective ou, ce qui revient au même, de montrer que la flèche duale

$$H^0(Z, K_Z \otimes F) \otimes H^0(Z, L^{(n-1)} \otimes K_Z \otimes F^*) \rightarrow H^0(Z, L^{(n-1)} \otimes K_Z^2)$$

est surjective. Considérons le diagramme commutatif formé par les flèches de restriction et de multiplication :

$$\begin{array}{ccc} H^0(Z, K_Z \otimes F) \otimes H^0(Z, L^{(n-1)} \otimes K_Z \otimes F^*) & \longleftarrow & H^0(Y, K_Y \otimes L \otimes F) \otimes H^0(Y, K_Y \otimes L^{(n)} \otimes F^*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(Z, L^{(n-1)} \otimes K_Z^2) & \longleftarrow & H^0(Y, L^{(n+1)} \otimes K_Y^2) \end{array}$$

Par hypothèse sur L (condition (i)), on a $H^1(Y, K_Y^2 \otimes L^n \otimes F) = 0$ et donc le morphisme de restriction $H^0(Y, L^{(n+1)} \otimes K_Y^2) \rightarrow H^0(Z, L^{(n-1)} \otimes K_Z^2)$ est surjectif. D'autre part, toujours par hypothèse sur L (condition (iv)), le morphisme

$$H^0(Y, K_Y \otimes L \otimes F) \otimes H^0(Y, K_Y \otimes L^{(n)} \otimes F^*) \rightarrow H^0(Y, L^{(n+1)} \otimes K_Y^2)$$

est également surjectif. On en déduit que le morphisme

$$H^0(Z, K_Z \otimes F) \otimes H^0(Z, L^{(n-1)} \otimes K_Z \otimes F^*) \rightarrow H^0(Z, L^{(n-1)} \otimes K_Z^2)$$

est surjectif, ce qu'il fallait démontrer. \square

6 Applications

Dans cette section, on reprend les notations et les objets de la première partie : X est une variété projective lisse de dimension impaire $n + 1$ plongée dans un espace projectif \mathbb{P} , linéairement normale. On note \mathfrak{X} la section hyperplane universelle. Elle est munie d'un morphisme π vers \mathbb{P}^\vee . Les fibres de ce morphisme sont exactement les sections hyperplanes de X .

Soit \mathbb{W} une VSH de poids w sur X et $\mathbb{W}_{\mathfrak{X}}$ la VSH tirée en arrière sur l'hypersurface universelle \mathfrak{X} . Si $U \subset \mathbb{P}^\vee$ est l'ouvert des valeurs régulières de π , alors $R^n \pi_* \mathbb{W}_{\mathfrak{X}}$ est une VSH de poids $k = n + w$ sur U .

6.1 Application des périodes de $R^n \pi_* \mathbb{W}_{\mathfrak{X}}$

On note $\mathbb{V}' := (R^n \pi_* \mathbb{W}_{\mathfrak{X}})|_U$, et, si $b \in U$, on note

$$\rho_b : T_{\mathbb{P}^V, b} \rightarrow H^1(X_b, T_{X_b})$$

l'application de Kodaira-Spencer en b . On note également $\mathfrak{X}_b \subset \mathfrak{X}$ la fibre de π au-dessus de b . Lorsque c'est pratique, on identifie \mathfrak{X}_b et X_b . Dans cette section, on montre le résultat suivant :

PROPOSITION 6.1. — *Quitte à composer $X \hookrightarrow \mathbb{P}$ par un plongement de Veronese, le rang de l'application des périodes de \mathbb{V}' est supérieur au rang de l'application de Kodaira-Spencer.*

DÉMONSTRATION — Soit \mathcal{P}^{n+w} la dernière composante de l'application des périodes de \mathbb{V}' , qui à un point $b \in U$ associe $V_b^{m+w,0} \subset V'_b$ (la dernière composante de la filtration de Hodge). Pour démontrer la proposition, il suffit de montrer que le rang de \mathcal{P}^{n+w} est supérieur au rang de l'application de Kodaira-Spencer.

Soit 0 un point de U , et $d_0 \mathcal{P}^{n+w,0}$ la différentielle de \mathcal{P}^{n+w} en 0 . Par les lemmes 4.1, et 4.2, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T_{\mathbb{P}^V, 0} & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}(V_0^{m+w,0}, V_0^{m+w-1,1}) \\ \downarrow \rho_0 & \searrow \Phi & \downarrow \\ H^1(X_0, T_{X_0}) & \longrightarrow & \text{Hom}(H^0(X_0, \Omega_{X_0}^n \otimes W^{w,0}), H^1(X_0, \Omega_{X_0}^{n-1} \otimes W^{w,0})) \end{array}$$

où $\rho : T_{\mathbb{P}^V, 0} \rightarrow H^1(X_0, T_{X_0})$ est l'application de Kodaira-Spencer, et la seconde flèche horizontale est

$$\alpha \mapsto \alpha \cup -.$$

Par la proposition 5.2, le morphisme de cup-produit

$$H^1(X_0, T_{X_0}) \rightarrow \text{Hom}(H^0(X_0, \Omega_{X_0}^n \otimes W^{w,0}), H^1(X_0, \Omega_{X_0}^{n-1} \otimes W^{w,0})),$$

$$\alpha \mapsto \alpha \cup -,$$

est injectif quitte à composer le plongement $X \subset \mathbb{P}$ par un plongement de Veronese de degré assez haut. Le carré cartésien du lemme ci-dessus montre alors que le rang de $d_0 \mathcal{P}^{n+w}$ est supérieur au rang de l'application de Kodaira-Spencer ρ .

6.2 Rang de l'application des périodes de \mathbb{V}_Y

On peut enfin démontrer le théorème déjà annoncé :

THÉORÈME. — *Soit X une variété projective lisse de dimension impaire $n + 1$, et \mathbb{W} une VSH sur X . On suppose X plongée dans un espace projectif \mathbb{P} , linéairement normale, et on note $X \xleftarrow{\alpha} \mathfrak{X} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^V$ la famille universelle de sections hyperplanes de X .*

Soit m un entier tel que $\dim \mathbb{P}^V \geq m + \dim H^0(X, T_X)$ et que $\mathcal{O}_X(1)$ soit m -jet ample. Soit \mathbb{P}^m un sous-espace projectif générique de \mathbb{P}^V et (Y, \mathbb{V}_Y) le couple construit dans le théorème 2.35. Alors, quitte à composer $X \hookrightarrow \mathbb{P}$ par un plongement de Veronese, l'application des périodes de \mathbb{V}_Y est génériquement de rang maximal.

DÉMONSTRATION — La proposition 5.2 d’injectivité du cup-produit implique que l’application des périodes de $R^n \pi_* \mathbb{W}_{\mathfrak{X}}$ est de rang supérieur au rang de l’application de Kodaira-Spencer, quitte à composer le plongement $X \subset \mathbb{P}$ par un plongement de Veronese.

Mais par le lemme 3.3, la condition $\dim \mathbb{P}^\vee \geq m + \dim H^0(X, T_X)$ entraîne que l’application de Kodaira-Spencer est de rang supérieur à m . On en déduit que le rang de l’application des périodes de $R^n \pi_* \mathbb{W}_{\mathfrak{X}}$ est supérieur à m . Si \mathbb{P}^m est un sous-espace générique de \mathbb{P}^\vee , alors la restriction de $(R^n \pi_* \mathbb{W}_{\mathfrak{X}})|_U$ à \mathbb{P}^m est une VSH sur $U \cap \mathbb{P}^m$ dont l’application des périodes est génériquement immersive. Il en est donc de même pour \mathbb{V}_Y . \square

On en déduit des résultats de non factorisation du même type que ceux rappelés dans 3.2.

Troisième partie

Étude cohomologique de \mathbb{V}_Y

Dans cette partie, on étudie la variété Y et la VSH \mathbb{V}_Y par des méthodes cohomologiques. Les deux principaux résultats obtenus sont les suivants.

THÉORÈME. 8.1 — *Soit X une variété projective lisse de dimension impaire $n+1$ plongée dans un espace projectif \mathbb{P} , linéairement normale, $X \xleftarrow{\alpha} \mathfrak{X} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^\vee$ la section hyperplane universelle, \mathbb{W} une VSH sur X et m un entier positif compris entre 2 et 6.*

Supposons que $\mathcal{O}_X(1)$ soit $\max(3, m)$ -jet ample. Soit \mathbb{P}^m un sous-espace projectif générique de \mathbb{P}^\vee , et $X \xleftarrow{a_m} \mathfrak{X}_m \xrightarrow{\pi_m} \mathbb{P}^m$ la famille de sections hyperplanes paramétrée par \mathbb{P}^m . Alors, l'image directe dérivée $R\pi_{m}(a_m^* \mathbb{W})$ est décomposable dans $\mathcal{D}_c^b(\mathbb{P}^m, \mathbb{C})$.*

THÉORÈME. 9.1 — *On conserve les notations et hypothèses du théorème précédent.*

Si $l < m$, ou si $l = m$ et $m > n$, la structure de Hodge sur $H^l(Y, \mathbb{V}_Y)^G$ porte une filtration dont les gradués successifs sont isomorphes à

$$H^i(\mathbb{P}^\vee) \otimes H^{n+i-l+2}(X, \mathbb{W})_{\text{prim}}(i-l+1),$$

pour i variant entre 0 et $l-1$. Si $l = m$ et que $m \leq n$, la filtration a un cran de plus et le gradué supplémentaire est isomorphe à $H^{n-m}(B, \mathbb{W})_{\text{ev}}(-m)$.

On donne ensuite deux applications de ce dernier résultat. En rapport avec la conjecture de Toledo, on montre d'abord que $H^2(\pi_1(Y), \mathbb{R})$ est non nul. On construit ensuite un système local sur Y ayant des déformations infinitésimales non obstruées.

7 Le théorème de décomposition

Introduction

La section est organisée comme suit. Pour commencer (7.1), on effectue quelques rappels sur les faisceaux pervers et les modules de Hodge, puis on énonce les théorèmes de décomposition de Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber, et de Saito (théorèmes 7.15 et 7.26).

Dans (7.2), on applique le théorème de décomposition de Saito à la famille universelle d'hypersurfaces de X , puis on détermine explicitement la décomposition. Le calcul est similaire à celui effectué dans la partie 5 de [BFNP09] et améliore légèrement ce dernier. On étudie ensuite la décomposition de Saito pour des sous-familles de sections hyperplanes.

On donne dans (7.3) et (7.4) deux applications de ce qui précède : le calcul de certains groupes de cohomologie d'intersection $IH^k(\mathbb{P}^\vee, \mathbb{V})$ et $IH^k(\mathbb{P}^m, \mathbb{V}_{|\mathbb{P}^m})$ ainsi que leurs structures de Hodge, en fonction des groupes de cohomologie primitive de X (et de la cohomologie évanescence du lieu de base de \mathbb{P}^m pour le second).

Enfin (7.5), en utilisant le théorème de connexité de Nori et quitte à composer $X \subset \mathbb{P}$ par un plongement de Veronese, il est possible de déterminer les groupes de cohomologie usuelle $H^k(U, \mathbb{V})$ en fonction des groupes de cohomologie $H^l(U)$ et des groupes de cohomologie primitive de X .

Les résultats qui seront utilisés par la suite sont ceux de (7.2) et (7.4).

7.1 Rappels : faisceaux pervers et modules de Hodge

On rappelle brièvement quelques définitions et propriétés indispensables. Les notations utilisés dans ces rappels sont indépendantes du reste du mémoire.

Catégories dérivées, catégories triangulées On suppose connues les notions de catégorie additive, abélienne, et triangulée ([Ver],[GM96]). La catégorie dérivée (resp. dérivée bornée) d'une catégorie abélienne A est notée $D(A)$ (resp. $D^b(A)$).

DÉFINITION 7.1. — *Un objet K de $D^b(A)$ est décomposable s'il est isomorphe dans $D(A)$ à un complexe avec des différentielles nulles. Dans ce cas, on a*

$$K \simeq \bigoplus H^i(K)[-i].$$

Une décomposition de K est le choix d'un tel isomorphisme induisant l'identité sur les objets de cohomologie.

DÉFINITION 7.2. ([BBD], définition 1.3.1) — *Une t -catégorie est une catégorie triangulée \mathcal{D} , munie de deux sous-catégories pleines $\mathcal{D}^{\leq 0}$ et $\mathcal{D}^{\geq 0}$, telles que, posant $\mathcal{D}^{\leq n} := \mathcal{D}^{\leq 0}[-n]$ et $\mathcal{D}^{\geq n} := \mathcal{D}^{\geq 0}[n]$, on ait :*

- (i) pour α dans $\mathcal{D}^{\leq 0}$ et β dans $\mathcal{D}^{\geq 1}$, on a $\text{Hom}(\alpha, \beta) = 0$;
- (ii) $\mathcal{D}^{\leq 0} \subset \mathcal{D}^{\leq 1}$ et $\mathcal{D}^{\geq 0} \supset \mathcal{D}^{\geq 1}$;
- (iii) pour tout γ dans \mathcal{D} , il existe un triangle distingué (α, γ, β) avec α dans $\mathcal{D}^{\leq 0}$ et β dans $\mathcal{D}^{\geq 0}$.

On dira aussi que $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ est une t -structure sur \mathcal{D} . Son cœur est la sous-catégorie pleine

$$\mathcal{C} := \mathcal{D}^{\leq 0} \cap \mathcal{D}^{\geq 0}.$$

Dans la suite de cette section de rappels, X désigne une variété algébrique complexe quelconque. Les faisceaux sont des faisceaux de \mathbb{C} -espaces vectoriels.

DÉFINITION 7.3. — *On note $\mathcal{D}(X, \mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{D}^b(X, \mathbb{C})$) la catégorie dérivée (resp. dérivée bornée) de la catégorie des faisceaux de \mathbb{C} -vectoriels sur X . C'est une catégorie triangulée.*

Soit $j : U \rightarrow X$ l'inclusion d'un ouvert, et $i : F \rightarrow X$ celle du fermé complémentaire. Par dérivation des foncteurs (exacts) i_* et j^* entre les catégories de faisceaux sur F , X et U , on obtient des foncteurs entre catégories dérivées, que l'on note :

$$\mathcal{D}(F, \mathbb{C}) \xrightarrow{i_*} \mathcal{D}(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{j^*} \mathcal{D}(U, \mathbb{C}).$$

On a alors les propriétés suivantes :

- Les foncteurs i_* et j^* ci-dessus admettent des adjoints à gauche, que l'on note i^* et $j_!$, et à droite, que l'on note $i^!$ et Rj_* .
- On a $j^*i_* = 0$;
- Pour tout objet $K \in \mathcal{D}(X, \mathbb{C})$, on a des triangles distingués :

$$j_!j^*K \rightarrow K \rightarrow i_*i^*K \xrightarrow{[1]},$$

$$i_*i^!K \rightarrow K \rightarrow Rj_*j^*K \xrightarrow{[1]};$$

– Les foncteurs i_* , $j_!$ et j^* sont pleinement fidèles.

Faisceaux pervers sur une variété stratifiée Soit Σ une stratification de X , c'est-à-dire dans la suite de ces rappels une partition finie en sous-ensembles algébriques localement fermés, tels que l'adhérence d'une strate est union de strates. Comme une partition algébrique admet toujours un raffinement de Whitney ([Dim92], chapitre 1), on supposera que les stratifications sont de Whitney.

Soit $p : X \rightarrow \mathbb{Z}$ une application constante sur chaque strate, appelée *perversité*. Construisons une t -structure associée à p .

DÉFINITION 7.4. ([BBD], définition 2.1.2) — On note ${}^p\mathcal{D}(X, \mathbb{C})^{\leq 0}$ (resp. ${}^p\mathcal{D}(X, \mathbb{C})^{\geq 0}$) la sous-catégorie de $\mathcal{D}(X, \mathbb{C})$ formée des complexes K (resp. K dans $\mathcal{D}^+(X, \mathbb{C})$) tels que pour chaque strate S , notant i_S l'inclusion de S dans X , on ait $\mathcal{H}^n i_S^* K = 0$ pour $n > p(S)$ (resp. $\mathcal{H}^n i_S^! K = 0$ pour $n < p(S)$).

PROPOSITION 7.5. ([BBD], proposition 2.2.3 et corollaire 2.1.4) — Pour chaque perversité p , le couple

$$({}^p\mathcal{D}(X, \mathbb{C})^{\leq 0}, {}^p\mathcal{D}(X, \mathbb{C})^{\geq 0})$$

est une t -structure sur $\mathcal{D}(X, \mathbb{C})$, et induit des t -structures sur $\mathcal{D}^+(X, \mathbb{C})$, $\mathcal{D}^-(X, \mathbb{C})$, $\mathcal{D}^b(X, \mathbb{C})$.

Comme Σ est une stratification algébrique, toutes les strates sont de dimension paire, et il y a un choix privilégié de perversité. Elle est donnée par

$$p_\Sigma(S) = -\frac{1}{2} \dim S,$$

et on l'appelle la perversité autoduale. C'est celle que l'on utilisera dans la suite.

Cette perversité induit une t -structure sur $\mathcal{D}(X, \mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{D}^b(X, \mathbb{C})$), dont le cœur est la catégorie des faisceaux p_Σ -pervers.

Faisceaux pervers sur les variétés algébriques On note $\mathcal{D}_\Sigma(X, \mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{D}_\Sigma^b(X, \mathbb{C})$, $\mathcal{D}_c(X, \mathbb{C})$, $\mathcal{D}_c^b(X, \mathbb{C})$) la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}(X, \mathbb{C})$ formée des complexes Σ -constructibles (resp. Σ -constructibles bornés, constructibles, constructibles bornés).

La catégorie $\mathcal{D}_c^b(X, \mathbb{C})$ est la réunion filtrante des sous-catégories $\mathcal{D}_\Sigma^b(X, \mathbb{C})$. Sur chacune de ces catégories, la perversité autoduale associée à Σ fournit une t -structure. Par passage à la limite sur les stratification de plus en plus fines ([BBD], proposition 2.1.14), on obtient une t -structure sur $\mathcal{D}_c^b(X, \mathbb{C})$.

DÉFINITION 7.6. Cette t -structure est dite de perversité autoduale. Les foncteurs de troncation sont notés ${}^p\tau_{\leq 0}$ et ${}^p\tau_{\geq 0}$. Le cœur de cette t -structure est appelée la catégorie des faisceaux pervers sur X . Le foncteur cohomologique associé à cette t -structure est noté ${}^p\mathcal{H}^0 = {}^p\tau_{\leq 0} \circ {}^p\tau_{\geq 0}$. Les faisceaux pervers de cohomologie perverse d'un complexe K sont notés ${}^p\mathcal{H}^i(K) := {}^p\mathcal{H}^0(K[i])$.

Soit $j : U \rightarrow X$ l'inclusion d'un ouvert union de strates, et $i : F \rightarrow X$ l'inclusion de son complémentaire. On rappelle que l'on a deux suites de trois foncteurs adjoints $(j_!, j^*, Rj_*)$, $(i^*, i_*, i^!)$ entre les catégories dérivées adéquates. Par ([BBD], proposition 1.4.16), les foncteurs $j_!$ et i^* (resp. j^* et i_* , resp. Rj_* et $i^!$) soient t -exacts à droite (resp. t -exacts, resp. t -exacts à gauche). Si on note \mathcal{C} , \mathcal{C}_U et \mathcal{C}_F les cœurs des t -structures, il existe deux suites de trois foncteurs adjoints $({}^p j_!, {}^p j^*, {}^p j_*)$, $({}^p i^*, {}^p i_*, {}^p i^!)$ qui les relient.

Si B est un objet de $\mathcal{D}(U, \mathbb{C})$, on appelle prolongement de B un objet X de $\mathcal{D}(X, \mathbb{C})$ tel que $j^* X \simeq B$. Il existe un foncteur $j_{!*} : \mathcal{C}_U \rightarrow \mathcal{C}$, appelé foncteur d'extension intermédiaire, tel que ([BBD], corollaires 1.4.24 et 1.4.25) :

- Si B est un objet de \mathcal{C}_U , $j_{!*} B$ est l'unique prolongement X de B dans $\mathcal{D}(X, \mathbb{C})$ tel que $i^* X$ soit dans $\mathcal{D}(F, \mathbb{C})^{\leq -1}$ et $i^! X$ soit dans $\mathcal{D}(F, \mathbb{C})^{\geq 1}$;
- Si B est un objet de \mathcal{C}_U , $j_{!*} B$ est l'unique prolongement X de B dans \mathcal{C} sans sous-objet ou quotient non trivial dans l'image essentielle de \mathcal{C}_F par i_* .

Enfin, la proposition suivante caractérise les objets simples de \mathcal{C} :

PROPOSITION 7.7. ([BBD], prop. 1.4.26) — *Les objets simples de \mathcal{C} sont les ${}^p i_* S$, pour S simple dans \mathcal{C}_F , et les $j_{!*} S$, pour S simple dans \mathcal{C}_U .*

PROPOSITION 7.8. ([BBD], th. 4.3.1) — *La catégorie des faisceaux pervers est noethérienne et artinienne : tout objet est de longueur finie.*

Enfin, on rappelle quelques résultats sur la t -exactitude des foncteurs image directe, que l'on utilisera dans la suite.

PROPOSITION 7.9. ([BBD], cor. 2.2.6) — *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme fini. Alors, Rf_* est t -exact.*

PROPOSITION 7.10. ([dCM07], 4.1.13 p. 45) — *Soit $f : X \rightarrow Y$. Si la dimension des fibres est inférieure ou égale à d et si f est propre, alors Rf_* envoie les faisceaux pervers dans ${}^p \mathcal{D}_c^b(Y)^{\geq -d} \cap {}^p \mathcal{D}_c^b(Y)^{\leq d}$.*

PROPOSITION 7.11. ([dCM07], 4.3.9 p. 56) — *Soit $i : X \rightarrow Y$ une inclusion normalement régulière de codimension d transverse à une stratification Σ de Y . Alors*

$$i^*[-d] = i^![d] : \mathcal{D}_\Sigma^b(Y, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{D}_c^b(X, \mathbb{C})$$

est t -exact.

Cette proposition a pour corollaire le résultat suivant (changement de base transverse pour les extensions intermédiaires)

COROLLAIRE 7.12. — *Soit X une variété projective lisse sur \mathbb{C} de dimension n , Y une sous-variété projective irréductible (éventuellement singulière), U son complémentaire, $j : U \rightarrow X$ l'inclusion, L un système local simple sur U . Soit Σ une stratification de X telle que $j_{!*} L[n]$ soit Σ -constructible.*

Soit Z une sous-variété lisse de dimension m de X transverse à la stratification Σ , $i : Z \rightarrow X$ l'inclusion, $U_Z := U \cap Z$, $Y_Z := Y \cap Z$, j' l'inclusion de U_Z dans Z , et i' l'inclusion de U_Z dans U .

Alors, on a un isomorphisme de faisceaux pervers sur Z :

$$i^*(j_{!*} L[n])[m - n] \simeq j'_{!*}(i'^* L[m]).$$

DÉMONSTRATION Comme l'inclusion $i : Z \rightarrow X$ est transverse à Σ , le foncteur $i^*[n - m] : D_{\Sigma}^b(X, \mathbb{C}) \rightarrow D^b(Z)$ est t -exact : il envoie les faisceaux Σ -pervers sur X dans les faisceaux pervers sur Z . Donc $i^*(j_{!*}L[n])[m - n]$ est pervers sur Z . Sa restriction à $Z \cap U$ est $i'^*L[m]$, il contient donc l'extension intermédiaire $j'_{!*}(i'^*L[m])$ comme sous-objet. Or, il est simple car $j_{!*}L[n]$ est un faisceau pervers simple. Il est donc isomorphe à $j'_{!*}(i'^*L[m])$. \square

Et enfin, la dernière propriété de t -exactitude dont on aura besoin est la

PROPOSITION 7.13. ([BBD], th. 4.1.1) — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme affine. Alors, Rf_* est t -exact à droite.

Une conséquence de cette proposition est le résultat suivant, de type « Lefschetz faible ».

THÉORÈME 7.14. ([dCM07], p. 78) — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre, Z une sous-variété fermée de X , U son complémentaire et $C \in {}^p\mathcal{D}(X, \mathbb{C})^{\geq 0}$. Supposons que le morphisme h dans le diagramme commutatif suivant soit affine.

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & Z \\ & \searrow h & \downarrow f & \swarrow g & \\ & & Y & & \end{array}$$

Alors le morphisme

$${}^p\mathcal{H}^j(Rf_*C) \rightarrow {}^p\mathcal{H}^j(Rg_*i^*C)$$

est un isomorphisme pour $j < -1$ et un monomorphisme pour $j = -1$.

Le théorème de décomposition et la suite de Leray perverse La classe des objets d'origine géométrique est définie dans [BBD], 6.2. Elle contient entre autres le complexe d'intersection de X . Nous ne redonnons pas la définition car on utilisera par la suite une autre version du théorème de décomposition, dans le cadre des modules de Hodge.

THÉORÈME 7.15. [BBD], théorème de décomposition 6.2.5, p. 163 — Soient X et Y des variétés algébriques complexes, $K \in D_c^b(X)$ un objet d'origine géométrique, et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre. Alors on a un isomorphisme

$$Rf_*K \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} {}^p\mathcal{H}^i(Rf_*K)[-i],$$

et chacun des termes de cette décomposition est un faisceau pervers semi-simple.

Dans la suite on supposera que K est un faisceau pervers.

REMARQUE 7.16. — Si les fibres de f sont de dimension au plus d , alors par la proposition 7.10, ${}^p\mathcal{H}^i(Rf_*K) = 0$ pour $|i| > d$. Dans ce cas, on écrira la somme directement pour $-d \leq i \leq d$.

REMARQUE 7.17. — Filtrons le complexe Rf_*K à l'aide de la troncature perverse : ${}^p\tau_{\geq \bullet}Rf_*K$. Cette filtration induit une filtration sur l'hypercohomologie de ce complexe. On note ${}^pLer^{\bullet}$ cette filtration, et on l'appelle la filtration de Leray perverse. La suite spectrale d'objet filtré associée s'appelle la suite spectrale de Leray perverse, on l'écrit

$$\mathbb{H}^p(Y, {}^p\mathcal{H}^q(Rf_*K)) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X, K).$$

Le théorème de décomposition implique que cette suite dégénère en E_2 .

REMARQUE 7.18. *Supposons que K soit autodual. Alors ${}^p\mathcal{H}^{-i}(Rf_*K)$ est le dual de Verdier de ${}^p\mathcal{H}^i(Rf_*K)$. En effet, on a la chaîne d'égalités :*

$$D {}^p\mathcal{H}^{-i}(Rf_*K) = {}^p\mathcal{H}^i(D(Rf_*K)) = {}^p\mathcal{H}^i(Rf_!(DK)) = {}^p\mathcal{H}^i(Rf_*(DK)) = {}^p\mathcal{H}^i(Rf_*(K)).$$

*En particulier, si un faisceau pervers simple F est facteur direct dans un des ${}^p\mathcal{H}^i(Rf_*K)$, son dual de Verdier est facteur direct (avec même multiplicité) dans ${}^p\mathcal{H}^{-i}(Rf_*K)$.*

PROPOSITION 7.19. — *Sous les hypothèses du théorème de décomposition, si $f : X \rightarrow Y$ est de dimension relative d et F est un faisceau pervers irréductible facteur direct dans un des ${}^p\mathcal{H}^i(Rf_*K)$ et c est la codimension de son support, alors $c + i \leq d$ si i est positif, et $c - i \leq d$ si i est négatif.*

DÉMONSTRATION — Remarquons que ce résultat est une amélioration de la proposition 7.10. L'argument suivant est attribué à Goresky et MacPherson dans [Chau08] théorème 2 p. 188. Supposons que i soit positif. Alors, F est un complexe d'intersection $IC_Z(L)$. Soit p un point dans l'ouvert de Z sur lequel F est un système local, et F_p la fibre de F en ce point. Alors F_p est un espace vectoriel placé en degré $-\dim Y + c$.

Par hypothèse, le complexe $F[-i]$ est facteur direct dans Rf_*K , et donc $\mathbb{H}^{-\dim Y + i}(F[-i])$ est facteur direct dans $\mathbb{H}^{-\dim Y + i}(X, K)$. Par changement de base propre pour l'inclusion $\{p\} \hookrightarrow Y$, $H^{d+i+c}(X_p, K)$ contient donc un espace vectoriel non trivial. Ceci force $d + i + c \leq 2d$, c'est-à-dire $c + i \leq d$, car X_p est de dimension $2d$.

Si i est négatif, on remarque que F et son dual de Verdier DF ont même support, et que DF est facteur direct de ${}^p\mathcal{H}^{-i}(Rf_*DK)$, et on applique le même raisonnement. \square

Enfin, lorsque le morphisme est projectif, on a la version suivante du théorème de Lefschetz difficile :

THÉORÈME 7.20. ([BBD], théorème 6.2.10 p. 165) — *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme projectif lisse, où X est lisse. Notons η la première classe de Chern d'un faisceau inversible f -ample sur X , alors on a un théorème de Lefschetz difficile relatif dans le cadre des faisceaux pervers :*

$$\eta^i : {}^p\mathcal{H}^{-i}(Rf_*\mathbb{C}[\dim X]) \xrightarrow{\simeq} {}^p\mathcal{H}^i(Rf_*\mathbb{C}[\dim X]).$$

Modules de Hodge Les résultats précédents ont été généralisés par M. Saito dans son travail sur les modules de Hodge. Dans [Sa88], Saito construit la catégorie des modules de Hodge (resp. modules de Hodge polarisables) de poids n sur une variété complexe X , notée $MH(X, n)$ (resp. $MH(X, n)^p$). Ce sont des sous-catégories pleines de la catégorie des \mathcal{D}_X -modules holonomes filtrés munis d'une structure rationnelle. Ses objets sont notés (M, F, K) , où (M, F) est un \mathcal{D}_X -module filtré par F , et $K \in \text{Perv}(X, \mathbb{Q})$ un faisceau pervers tel que $K \otimes \mathbb{C} \simeq DR(M)$.

On dit que $(M, F, K) \in MH(X, n)$ est à support strict Z si $\text{Supp } M = Z$, Z est irréductible, et M (ou K) n'a pas de sous-objet ou de quotient non trivial dont le support est plus petit que Z . On note $MH_Z(X, n)$ la catégorie des modules de Hodge polarisables de poids n à support strict Z .

Nous ne détaillons pas la construction de la catégorie $MH(X, n)$, mais ses propriétés les plus importantes sont résumées ci-dessous.

PROPOSITION 7.21. ([Sa88], lemme 4 p. 854 et lemme 5.1.10 p. 957) — Si (M, F, K) est un module de Hodge polarisable sur X , de support strict $Z \subset X$, alors le faisceau pervers K associé est un complexe d'intersection $IC_Z(L)$, où L est un système local défini sur un ouvert de Zariski de Z , sous-jacent à une variation de structure de Hodge.

PROPOSITION 7.22. ([Sa88], lemme 3 p. 854) — Si $(M, F, K) \in MH_X(X, n)^p$ et que K est un système local sur X , alors K est sous-jacent à une variation de structure de Hodge.

De ces deux propositions on déduit qu'un module de Hodge polarisable est génériquement une variation de structure de Hodge polarisée. La réciproque de ce résultat est plus difficile (voir plus bas). Nous n'aurons besoin ici que d'une réciproque partielle, démontrée dans le premier article [Sa88] :

PROPOSITION 7.23. ([Sa88], théorème 2 p. 856 et théorème 5.4.3 p. 989) — Une variation de structure de Hodge rationnelle polarisée (de poids w) sur X est un module de Hodge polarisé (de poids $\dim X + w$).

Enfin, les catégories $MH(X, n)$, $MH(X, n)^p$, $MH_Z(X, n)$ et $MH_Z(X, n)^p$ jouissent de bonnes propriétés :

PROPOSITION 7.24. ([Sa88], lemme 5 p. 854) — Les catégories $MH(X, n)$, $MH(X, n)^p$, $MH_Z(X, n)$ et $MH_Z(X, n)^p$ sont abéliennes, et leurs morphismes sont strictement compatibles avec les filtrations. De plus les catégories $MH(X, n)^p$ et $MH_Z(X, n)^p$ sont semi-simples.

Le point culminant de cette théorie est la généralisation par Saito du théorème de Lefschetz difficile et du théorème de décomposition de Beilinson-Bernstein et Deligne.

THÉORÈME 7.25. ([Sa88], théorème 1 p. 852 et théorème 5.3.1 p. 977) — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme projectif entre variétés complexes, l la première classe de Chern d'un faisceau inversible relativement ample, et $(M, F, K) \in MH(X, w)^p$. Alors les faisceaux pervers ${}^p\mathcal{H}^i(Rf_*K)$ sont sous-jacents à des modules de Hodge E_i de poids $w + i$. De plus, on a le théorème de Lefschetz difficile :

$$l^i : E_{-i} \xrightarrow{\sim} E_i(i), \text{ pour } i > 0.$$

THÉORÈME 7.26. ([Sa88], corollaire 5.4.8 p. 992) — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme projectif entre variétés analytiques (non nécessairement lisses), L un système local sur un ouvert de Zariski de X , sous-jacent à une variation de structure de Hodge polarisée localement semi-géométrique relativement à X , et $K = IC_X(L)$. Alors, on a la décomposition suivante dans $D_c^b(Y, \mathbb{C})$:

$$Rf_*K \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} {}^p\mathcal{H}^i(Rf_*K)[-i].$$

De plus, les faisceaux pervers ${}^p\mathcal{H}^i(Rf_*K)[-i]$ sont des sommes directes de complexes d'intersection.

Ce théorème s'applique si K est une variation de structure de Hodge polarisée sur X , d'après la définition des objets localement semi-géométriques ([Sa88], 5.4.4 p. 992). C'est ce cas particulier que nous utiliserons par la suite. Soulignons que K n'est pas supposé d'origine géométrique.

On peut également définir une suite spectrale de Leray perverse dans le contexte des modules de Hodge de la même manière que plus haut. C'est une suite spectrale de structures de Hodge.

Enfin, un module de Hodge (polarisé) sur un point est une structure de Hodge (polarisée). On en déduit les résultats suivants :

- (a) Si X est une variété projective lisse et \mathbb{W} est une variation de structure de Hodge (rationnelle) de poids w sur X , les espaces vectoriels de cohomologie $H^k(X, \mathbb{W})$ sont munis d'une structure de Hodge (canonique) de poids $w + k$. Ce résultat était déjà connu, il est dû à Deligne (voir [Zuc79]).
- (b) Si X est lisse, U est un ouvert de Zariski de X , et \mathbb{W} une variation de structure de Hodge (rationnelle, polarisable) sur U qui s'étend en un module de Hodge sur X , alors les groupes de cohomologie d'intersection $IH^k(X, \mathbb{W})$ sont munis d'une structure de Hodge de poids $w + k$. Ceci est à rapprocher des résultats de Catani, Kaplan, Schmid ([CKS]), et de Kashiwara et Kawai ([KK87]), qui établissent ceci si le complémentaire de U est à croisement normaux et X est kählérienne.

La question consiste à savoir quelles VSH sur des ouverts sont des restrictions de modules de Hodge. Le problème est partiellement résolu dans [Sa88] (voir le corollaire 1 p. 856) et complètement résolu dans [Sa90], théorème 3.21 p. 303 : une variation de structure de Hodge (rationnelle) polarisée sur un ouvert de Zariski U de X s'étend en un unique module de Hodge polarisé à support strict X si la monodromie est quasi-unipotente au voisinage de $X \setminus U$.

Autres généralisations Le théorème de décomposition reste vrai lorsque l'on remplace les modules de Hodge par des faisceaux pervers semi-simples quelconques. Ceci a été démontré par Drinfel'd en 2001 en utilisant une conjecture (démontrée en 2003), par voie arithmétique. Une démonstration analytique a été donnée par C. Sabbah ([Sab05]) lorsque X est lisse et pour l'image directe d'un système local semi-simple, et le cas général des faisceaux pervers semi-simples a été démontré par voie analytique par T. Mochizuki ([Moch07]). Nous n'utiliserons aucune de ces généralisations, mais il serait intéressant de vérifier si les constructions présentées dans cette partie s'étendent dans ce cadre.

7.2 Application à la famille universelle d'hypersurfaces

On reprend les notations de la première partie. X désigne une variété projective lisse de dimension $n + 1$, plongée dans un espace projectif \mathbb{P} de dimension N , et linéairement normale. La section hyperplane universelle \mathfrak{X} est munie de projections sur X et sur \mathbb{P}^\vee , que l'on note a et π . Notons que π est propre. Le complémentaire de la variété duale $X^\vee \subset \mathbb{P}^\vee$ est noté U . La dimension $n + N$ de \mathfrak{X} sera parfois notée $d_{\mathfrak{X}}$.

On désigne par \mathbb{W} une VSH de poids w (rationnelle, polarisable) sur X , et par $\mathbb{W}_{\mathfrak{X}}$ le tiré en arrière $a^*\mathbb{W}$. Comme \mathfrak{X} est lisse, $\mathbb{W}_{\mathfrak{X}}[d_{\mathfrak{X}}]$ est un faisceau pervers sur \mathfrak{X} , sous-jacent par 7.23 à un module de Hodge (polarisable) sur \mathfrak{X} , de poids $\omega := w + n + N$.

La notation \underline{G}_Z désigne le système local constant de fibre G sur une variété Z . On omettra de noter la variété lorsque cela ne crée pas de confusion.

Dans ce paragraphe, on applique le théorème de décomposition de Saito à l'image directe dérivée $R\pi_*\mathbb{W}_{\mathfrak{X}}[d_{\mathfrak{X}}]$ et on détermine une condition sur $\mathcal{O}_X(1)$ qui suffit à expliciter tous les termes qui apparaissent dans la décomposition. Ce résultat figure dans la littérature ([BFNP09] dans le cas particulier $\mathbb{W} = \underline{\mathbb{C}}_X$, et avec une condition sur $\mathcal{O}_X(1)$ non optimale.

Remarquons que contrairement à [BFNP09], l'objectif n'est pas d'étudier la famille universelle toute entière, mais surtout certaines sous-familles. Il n'est donc pas nécessaire d'expliquer tous les modules de Hodge irréductibles dans la décomposition de Saito, seulement ceux dont le support est de petite codimension. Ceci permet d'affaiblir les hypothèses sur $\mathcal{O}_X(1)$.

THÉORÈME 7.27. — *Soit $X \subset \mathbb{P}$ une variété projective lisse linéairement normale de dimension impaire $n + 1 \geq 3$, $X \xleftarrow{a} \mathfrak{X} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^V$ la famille universelle de sections hyperplanes, \mathbb{W} une VSH sur X , et $\mathbb{W}_{\mathfrak{X}} = a^*\mathbb{W}$.*

(a) *Si $\mathcal{O}_X(1)$ est n -jet ample, on a la décomposition explicite suivante :*

$$\begin{aligned} R\pi_*\mathbb{W}_{\mathfrak{X}}[d_{\mathfrak{X}}] = & \left(\bigoplus_{i=-n}^{-1} \underline{H^{n+i}(X, \mathbb{W})}[N-i] \right) \\ & \oplus j_{!*}\mathbb{V}[N] \oplus \underline{H^n(X, \mathbb{W})}[N] \\ & \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^n \underline{H^{n-i}(X, \mathbb{W})}[N-i] \right). \end{aligned}$$

(b) *Soit $m > 1$ un entier. Si $\mathcal{O}_X(1)$ est m -jet ample, alors on a la décomposition :*

$$\begin{aligned} R\pi_*\mathbb{W}_{\mathfrak{X}}[d_{\mathfrak{X}}] = & \left(\bigoplus_{i=-n}^{-1} \underline{H^{n+i}(X, \mathbb{W})}[N-i] \right) \\ & \oplus j_{!*}\mathbb{V}[N] \oplus \underline{H^n(X, \mathbb{W})}[N] \oplus R \\ & \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^n \underline{H^{n-i}(X, \mathbb{W})}[N-i] \right), \end{aligned}$$

où R est un faisceau pervers dont le support est de codimension au moins $m + 1$.

On démontre d'abord trois propositions, puis on termine la démonstration du théorème.

Le morphisme π est propre de dimension relative n . Le théorème de décomposition de Saito 7.26 pour l'image directe dérivée de $\mathbb{W}_{\mathfrak{X}}$ s'écrit :

$$R\pi_*\mathbb{W}_{\mathfrak{X}}[d_{\mathfrak{X}}] = \bigoplus_{i=-n}^n E_i[-i], \quad (7.2.1)$$

où les E_i sont des modules de Hodge de poids $\omega + i$, dont les faisceaux pervers sous-jacents sont ${}^p\mathcal{H}^i(R\pi_*\mathbb{W}_{\mathfrak{X}}[d_{\mathfrak{X}}])[-i]$.

Par le théorème de Lefschetz difficile de Saito, on a $E_{-i} \simeq E_i(i)$, et si E est un module de Hodge simple facteur direct d'un des E_i , alors $i + \text{codim Supp } E \leq n$ par la proposition 7.19.

PROPOSITION 7.28. — Si $i < 0$, alors $E_i = \underline{H^{n+i}(X, \mathbb{W})}[N]$ et $E_{-i} = \underline{H^{n+i}(X, \mathbb{W})}[N](i)$.

DÉMONSTRATION — La première assertion découle du théorème de Lefschetz faible relatif, qui résulte du théorème général 7.14, en remplaçant X, Y, f et Z par $X \times \mathbb{P}^\vee, \mathbb{P}^\vee, pr_2$ et \mathfrak{X} . La seconde assertion est une conséquence du théorème de Lefschetz difficile rappelé plus haut. \square

Le seul module de Hodge qu'il reste donc à calculer est E_0 .

PROPOSITION 7.29. — Le module de Hodge E_0 contient $j_{1*}\mathbb{V}[N]$ et $\underline{H^n(X, \mathbb{W})}[N]$ en facteurs directs. Si n est pair, alors tout autre facteur direct irréductible \bar{E} de E_0 a un support de codimension strictement supérieure à un.

DÉMONSTRATION — La restriction de E_0 à l'ouvert U , complémentaire de la variété duale, est exactement

$$\mathbb{V}[N] \oplus \underline{H^n(X, \mathbb{W})}[N].$$

Donc, E_0 contient $j_{1*}\mathbb{V}[N]$ et $\underline{H^n(X, \mathbb{W})}[N]$ en facteurs directs, et les autres facteurs directs sont supportés dans la variété duale.

Supposons qu'il existe E un facteur irréductible non trivial de E_0 supporté en codimension un. Son support est donc dense dans la variété duale X^\vee . Soit p un point général de $S := \text{Supp } E$. Alors, $(\mathcal{H}^{-N+1}(E))_p$ est non trivial et donc l'espace vectoriel $H^{n+1}(X_p, \mathbb{W}) = (\mathcal{H}^{-N+1}R\pi_*\mathbb{W}_{\mathfrak{X}}[d_{\mathfrak{X}}])_p$ n'est pas isomorphe $(\mathcal{H}^{-N+1}(E_1[-1]))_p \simeq H^{n-1}(X)$.

Soit maintenant $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^\vee$ un pinceau de Lefschetz passant par p . On note j_1 l'inclusion $\mathbb{P}^1 \setminus X^\vee \subset \mathbb{P}^1$. Par [SGA7], XVIII, 6.3, si n est pair, on a la propriété suivante (notée « (A) » dans [SGA7], XVIII, 5.3.2) :

$$R^l\pi_{1*}\mathbb{W}_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{\sim} j_{1*}j_1^*R^l\pi_{1*}\mathbb{W}_{\mathfrak{X}}, \forall j.$$

En particulier, pour $l = n + 1$, on obtient en prenant la tige en p :

$$H^{n+1}(X_p, \mathbb{W}) \simeq H^{n+1}(X_u, \mathbb{W})^\gamma,$$

où $u \in \mathbb{P}^1$ est une valeur régulière de π proche de p et γ est un lacet d'origine u tournant une fois autour de p . En appliquant le théorème de Lefschetz difficile sur X_u à coefficients dans \mathbb{W} , on obtient :

$$H^{n+1}(X_p, \mathbb{W}) \simeq H^{n-1}(X_u, \mathbb{W})^\gamma \simeq H^{n-1}(X, \mathbb{W}).$$

On en déduit une contradiction, donc il n'existe pas de tel facteur E non trivial. \square

REMARQUE 7.30. — La condition de parité sur n n'est utilisée que dans cette étape de la démonstration, et peut être enlevée quitte à composer le plongement $X \subset \mathbb{P}$ par un plongement de Veronese. Voir la remarque qui suit la démonstration du théorème pour un exemple et une référence.

PROPOSITION 7.31. — *Si E est un module de Hodge irréductible facteur direct de E_0 tel que $\text{codim Supp } E > 1$, alors son support est contenu dans le lieu des sections hyperplanes réductibles ou à singularités non isolées.*

DÉMONSTRATION — Soit S le support de E , $c > 1$ la codimension de S , et p un point général de S . Alors la fibre de E en p est un espace vectoriel non nul placé en degré $-N + c$.

Calculons $\mathcal{H}^{-N+c}(R\pi_*\mathbb{W}_{\mathfrak{X}}[d_{\mathfrak{X}}])$. Par le théorème de décomposition, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{-N+c}(R\pi_*\mathbb{W}[d_{\mathfrak{X}}]) &= \mathcal{H}^{-N+c}\left(\bigoplus E_i[-i]\right) \\ &= \mathcal{H}^{-N+c}(E_0) \oplus \mathcal{H}^{-N+c}\left(\bigoplus_{i \neq 0} E_i[-i]\right) \\ &= \mathcal{H}^{-N+c}(E_0) \oplus \mathcal{H}^{-N+c}(E_c[-c]) \\ &= \mathcal{H}^{-N+c}(E_0) \oplus \underline{H^{n-c}(X, \mathbb{W})}(-c). \end{aligned}$$

Ainsi, la fibre en p de $\mathcal{H}^{-N+c}(R\pi_*\mathbb{W}_{\mathfrak{X}}[d_{\mathfrak{X}}])$ contient en facteur direct l'espace vectoriel $H^{n-c}(X, \mathbb{W})$, ainsi que la fibre de E en p , qui est un espace vectoriel non trivial. Par le changement de base propre pour l'inclusion $p \hookrightarrow \mathbb{P}^V$, on en déduit que $H^{n+c}(X_p, \mathbb{W})$ n'est pas isomorphe à $H^{n-c}(X, \mathbb{W})$.

Ceci n'est possible que si X_p est réductible, ou à singularités non isolées. En effet, s'il était irréductible et à singularités isolées, alors par le théorème 7.33 dont on donne un énoncé et une preuve plus bas, on aurait, puisque $c > 1$:

$$H^{n+c}(X_p, \mathbb{W}) \simeq H^{n-c}(X_p, \mathbb{W}).$$

En appliquant le théorème de Lefschetz faible, on obtiendrait donc $H^{n+c}(X_p, \mathbb{W}) \simeq H^{n-c}(X, \mathbb{W})$, contradiction. \square

On peut maintenant achever la démonstration du théorème 7.27.

DÉMONSTRATION du théorème 7.27 — Montrons d'abord la partie (a). Supposons qu'il y ait un autre facteur direct E non trivial dans E_0 . Par les deux propositions précédentes, son support est contenu dans le lieu des sections hyperplanes réductibles, ou à singularités non isolées. Comme $n \geq 2$, ces sections hyperplanes ont dans tous les cas des singularités non isolées. Mais le lieu des sections hyperplanes avec singularités non isolées est de codimension au moins $n + 1$ puisque $\mathcal{O}_X(1)$ est n -jet ample (voir 1.3), donc $\text{codim Supp } E \geq n + 1$. Or on sait que le support de E doit être de codimension au plus n , par la proposition 7.19, contradiction.

Passons à la partie (b). Le support de tels facteurs directs est inclus dans le lieu des sections hyperplanes réductibles, donc à singularités non isolées. Comme $\mathcal{O}_X(1)$ est m -jet ample, ce lieu est de codimension au moins $m + 1$ par la proposition 1.3.

REMARQUE 7.32. — *Si n est impair, la proposition 7.29 ne s'applique pas, la condition (A) n'est pas forcément vérifiée, et il peut y avoir des facteurs directs irréductibles supportés en*

codimension un dans E_0 . Ce problème peut être éliminé en composant le plongement $X \subset \mathbb{P}$ par un plongement de Veronese ([SGA7], XVIII, corollaire 6.4). Modulo cette modification, le théorème reste vrai pour X de dimension paire.

Enfin, on énonce le théorème utilisé dans la démonstration principale, et on donne une démonstration. Les notations dans l'énoncé et la démonstration sont indépendantes du reste du mémoire.

THÉORÈME 7.33. — *Soit X une variété projective lisse de dimension $n + 1$ et Y une section hyperplane irréductible de X à singularités isolées, \mathbb{W} un système local semi-simple sur X , $U = Y_{reg}$ et $Z = Y_{sing}$. Alors*

$$H^{n+k}(Y, \mathbb{W}) \simeq H^{n-k}(Y, \mathbb{W}) \text{ pour } k > 1.$$

Dans le cas où $\mathbb{W} = \underline{\mathbb{Q}}_X$, Fakhruddin remarque dans ([BFNP09] p. 25) que ce résultat est une conséquence d'un théorème de dualité de Kaup [Kaup]. Toujours dans ce cas particulier, une preuve utilisant les faisceaux pervers est connue (voir [Dim04], et [Dur95]). Cette preuve s'adapte sans difficulté au cas de la cohomologie à coefficients dans un système local semi-simple.

DÉMONSTRATION — On procède en plusieurs étapes. On note j l'inclusion de U dans Y , et i celle de Z dans Y . Les foncteurs $j^* = j^!$, $j_!$, $i_* = i_!$ et i^* sont exacts et on note de la même manière leur foncteur dérivé. Le foncteur dérivé de j_* est noté Rj_* .

Étape 1 : si $k < n$, alors $IH^k(Y, \mathbb{W}) \simeq H^k(U, \mathbb{W})$.

Ceci n'utilise pas le fait que les singularités de Y soient des singularités d'hypersurface. On considère le triangle distingué

$$\tau_{\leq -1}(Rj_*\mathbb{W}|_U[n]) \rightarrow Rj_*\mathbb{W}|_U[n] \rightarrow \tau_{\geq 0}(Rj_*\mathbb{W}|_U[n]) \xrightarrow{1}.$$

Comme les singularités de Y sont isolées, ce triangle coïncide avec le triangle

$$IC_Y(\mathbb{W}) \rightarrow Rj_*j^*IC_Y(\mathbb{W}) \rightarrow i_!i^!IC_Y(\mathbb{W})[1] \xrightarrow{1}.$$

La suite exacte longue d'hypercohomologie donne :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{H}^{k-n-1}(\tau_{\geq 0}(Rj_*\mathbb{W}|_U[n])) & & & & & & \\ \downarrow & & & & & & \\ \mathbb{H}^{k-n}(IC_Y(\mathbb{W})) & \longrightarrow & \mathbb{H}^{k-n}(Rj_*j^*IC_Y(\mathbb{W})) & \longrightarrow & \mathbb{H}^{k-n}(\tau_{\geq 0}(Rj_*\mathbb{W}|_U[n])) & & \end{array}$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{H}^{k-n-1}(\tau_{\geq 0}(Rj_*\mathbb{W}|_U[n])) \rightarrow IH^k(Y, \mathbb{W}) \rightarrow H^k(U, \mathbb{W}) \rightarrow \mathbb{H}^{k-n}(\tau_{\geq 0}(Rj_*\mathbb{W}|_U[n])).$$

Il suffit donc de prouver que pour tout entier $l < 0$, on a $\mathbb{H}^l(\tau_{\geq 0}(Rj_*\mathbb{W}|_U[n])) = 0$. Pour $q < 0$, on a $\mathcal{H}(\tau_{\geq 0}(Rj_*\mathbb{W}|_U[n])) = 0$, donc pour tout couple d'entiers (p, q) tel que $p + q < 0$, on a $\mathbb{H}^p(Y, \mathcal{H}^q(\tau_{\geq 0}(Rj_*\mathbb{W}|_U[n]))) = 0$. On reconnaît le terme $E_2^{p,q}$ d'une suite spectrale qui aboutit à $\mathbb{H}^{p+q}(\tau_{\geq 0}(Rj_*\mathbb{W}|_U[n]))$, ce qui prouve le résultat.

Étape 2 : si $k > n$, alors $IH^k(Y, \mathbb{W}) \simeq H^k(Y, \mathbb{W})$.

On considère le triangle distingué

$$j_!j^!IC_Y(\mathbb{W}) \rightarrow IC_Y(\mathbb{W}) \rightarrow i_*i^*IC_Y(\mathbb{W}) \xrightarrow{1}.$$

Remarquons dès à présent que $i_*i^*IC_Y(\mathbb{W}) = D(i_!i^!IC_Y(\mathbb{W}^\vee)) = D(\tau_{\geq 0}(Rj_*\mathbb{W}_U^\vee[n])[-1])$. La suite exacte longue d'hypercohomologie associée à ce triangle donne :

$$\mathbb{H}^{k-n-1}(i_*i^*IC_Y(\mathbb{W})) \rightarrow \mathbb{H}^{k-n}(j_!j^!IC_Y(\mathbb{W})) \rightarrow \mathbb{H}^{k-n}(IC_Y(\mathbb{W})) \rightarrow \mathbb{H}^{k-n}(i_*i^*IC_Y(\mathbb{W})),$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{H}^{k-n-1}(i_*i^*IC_Y(\mathbb{W})) \rightarrow \mathbb{H}_c^k(U, \mathbb{W}) \rightarrow IH^k(Y, \mathbb{W}) \rightarrow \mathbb{H}^{k-n}(i_*i^*IC_Y(\mathbb{W})).$$

Il suffit donc de prouver que pour tout $l > 0$, on a $\mathbb{H}^l(i_*i^*IC_Y(\mathbb{W})) = 0$. Or, par dualité, on a

$$\mathbb{H}^l(i_*i^*IC_Y(\mathbb{W})) \simeq \mathbb{H}^{-l}(D(i_*i^*IC_Y(\mathbb{W})))^\vee \simeq \mathbb{H}^{-l}(i_!i^!IC_Y(\mathbb{W}^\vee))^\vee,$$

et si $l > 0$, on conclut comme dans la première étape que cet espace vectoriel est nul. Donc pour $k > n$, on a l'isomorphisme :

$$IH^k(Y, \mathbb{W}) \simeq H_c^k(U, \mathbb{W}).$$

Considérons maintenant le triangle distingué

$$j_!j^!\mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W} \rightarrow i_*i^*\mathbb{W} \xrightarrow{1}.$$

La suite exacte d'hypercohomologie donne l'isomorphisme $H_c^k(U, \mathbb{W}) \xrightarrow{\simeq} H^k(Y, \mathbb{W})$, puisque $k > n$.

Étape 3 : si $k < n - 1$, alors $H^k(U, \mathbb{W}) \simeq H^k(Y, \mathbb{W})$.

On montre le résultat pour $k > 0$. On considère le triangle distingué

$$i_!i^!\mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W} \rightarrow Rj_*j^*\mathbb{W} \xrightarrow{1}.$$

La suite exacte longue d'hypercohomologie donne

$$\mathbb{H}^k(i_!i^!\mathbb{W}) \rightarrow H^k(Y, \mathbb{W}) \rightarrow \mathbb{H}^k(Rj_*j^*\mathbb{W}) \rightarrow \mathbb{H}^{k+1}(i_!i^!\mathbb{W}),$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{H}^k(Y, U, \mathbb{W}) \rightarrow H^k(Y, \mathbb{W}) \rightarrow H^k(U, \mathbb{W}) \rightarrow \mathbb{H}^{k+1}(Y, U, \mathbb{W}).$$

Notons, pour chaque point singulier p_α de Y , B_α une boule de Y centrée en p_α , $U_\alpha = B_\alpha \setminus \{p_\alpha\}$, et $L_\alpha = \partial B_\alpha$. On sait que B_α est un cône sur L_α , de sommet p_α , donc contractile. On appelle L_α le *link* de la singularité. Par le théorème d'excision, on a $H^k(Y, U, \mathbb{W}) \simeq \bigoplus_\alpha H^k(B_\alpha, U_\alpha, \mathbb{W})$. Par hypothèse, Y est une hypersurface, donc L_α est $(n-2)$ -connexe pour tout α , et donc $H^l(B_\alpha, U_\alpha, \mathbb{W}) \simeq H^{l-1}(L_\alpha, \mathbb{W}) = 0$ si $2 \leq l \leq n-1$. Si $l < 2$, on a aussi $H^l(B_\alpha, U_\alpha, \mathbb{W}) = 0$. On en déduit que $H^k(Y, \mathbb{W}) \simeq H^k(U, \mathbb{W})$ pour $k < n-1$.

Finalement, pour $1 < k < n$, on a la chaîne d'isomorphismes

$$H^{n-k}(Y, \mathbb{W}) \simeq IH^{n-k}(Y, \mathbb{W}) \simeq IH^{n+k}(Y, \mathbb{W}) \simeq H^{n+k}(Y, \mathbb{W}),$$

où le second isomorphisme est obtenu par le théorème de Lefschetz difficile sur la cohomologie d'intersection. \square

7.3 Exemple d'utilisation : calcul de la cohomologie d'intersection de \mathbb{V}

La décomposition du théorème 7.27 permet de déterminer les groupes de cohomologie d'intersection $IH^l(\mathbb{P}^\vee, \mathbb{V})$, ainsi que leur structure de Hodge.

PROPOSITION 7.34. — Soit $X \subset \mathbb{P}$ une variété projective lisse linéairement normale de dimension impaire $n+1 \geq 3$, $X \xleftarrow{\alpha} \mathfrak{X} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^\vee$ la famille universelle de sections hyperplanes de X , \mathbb{W} une VSH sur X et \mathbb{V} la VSH de cohomologie évanescence sur l'ouvert $U \subset \mathbb{P}^\vee$ paramétrant les sections hyperplanes lisses. Supposons que $\mathcal{O}_X(1)$ soit n -jet ample.

Soit $k < n$ un entier positif. La structure de Hodge sur $IH^k(\mathbb{P}^\vee, \mathbb{V})$ porte une filtration par sous-structures de Hodge dont les gradués successifs sont isomorphes à

$$H^i(\mathbb{P}^\vee) \otimes H^{n+i-k+2}(X, \mathbb{W})_{\text{prim}}(i-k+1),$$

pour i variant entre 0 et $k-1$.

Ce résultat figure dans la littérature pour $l=1$ ([BFNP09]) lorsque $\mathbb{W} = \underline{\mathbb{C}}_X$. On rappelle que la notation *prim* en indice désigne la cohomologie primitive.

La démonstration de cette proposition utilise le lemme suivant :

LEMME 7.35. — Soit E et H deux espaces vectoriels de dimension finie, et $F^\bullet E, F^\bullet H$ des filtrations décroissantes indéxées par \mathbb{N} , birégulières¹. Soit $r : E \rightarrow H$ un morphisme compatible aux filtrations. On note $r_i : F^i E \rightarrow F^i H$ et $q_i : Gr^i E \rightarrow Gr^i H$ les morphismes induits.

Supposons que r soit injectif, et qu'il existe i_0 tel que q_i soit bijectif si $i > i_0$, injectif si $i = i_0$, et surjectif si $i < i_0$. Alors $\text{Coker } q_{i_0}$ porte une filtration dont les gradués sont $\text{Coker } r$ et $\text{Ker } q_i$, pour $0 \leq j \leq i_0 - 1$.

REMARQUE 7.36. — Le même énoncé est vrai en remplaçant la catégorie des espaces vectoriels par la catégorie des structures de Hodge.

DÉMONSTRATION du lemme 7.35 — On considère le morphisme de suites exactes courtes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F^{i+1}H & \longrightarrow & F^iH & \longrightarrow & Gr^iH & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow r_{i+1} & & \uparrow r_i & & \uparrow q_i & & \\ 0 & \longrightarrow & F^{i+1}E & \longrightarrow & F^iE & \longrightarrow & Gr^iE & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Les flèches r_i sont toutes injectives, donc le lemme du serpent donne une suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{Ker } q_i \rightarrow \text{Coker } r_{i+1} \rightarrow \text{Coker } r_i \rightarrow \text{Coker } q_i \rightarrow 0.$$

Si $i > i_0$, q_i est par hypothèse un isomorphisme et donc $\text{Coker } r_{i+1} \simeq \text{Coker } r_i$. Pour i assez grand, on a $\text{Coker } r_i = 0$ donc par récurrence descendante, on obtient :

$$\forall i > i_0, \text{Coker } r_i = 0.$$

1. c'est-à-dire vérifiant $\bigcup_i F^i E = E$ et $\bigcap_i F^i E = \{0\}$, $\bigcup_i F^i H = H$ et $\bigcap_i F^i H = \{0\}$

Si $i = i_0$, on obtient

$$\text{Coker } r_{i_0} \simeq \text{Coker } q_{i_0}.$$

Si $i < i_0$, q_i est surjectif et on a la suite exacte courte :

$$0 \rightarrow \text{Ker } q_i \rightarrow \text{Coker } r_{i+1} \rightarrow \text{Coker } r_i \rightarrow 0.$$

On définit alors une filtration de $K := \text{Coker } r_{i_0}$ par $F^{-1}K := K$ et :

$$F^j K := \text{Ker}(\text{Coker } r_{i_0} \xrightarrow{\text{Id}} \text{Coker } r_{i_0} \rightarrow \text{Coker } r_{i_0-1} \rightarrow \dots \rightarrow \text{Coker } r_j), \quad 0 \leq j \leq i_0,$$

(en particulier, $F^{i_0} K = \{0\}$). Alors, on a $Gr^{-1} K \simeq \text{Coker } r_0$ et, pour $0 \leq j \leq i_0 - 1$,

$$\begin{aligned} Gr^j K &= \frac{\text{Ker}(\text{Coker } r_{i_0} \rightarrow \dots \rightarrow \text{Coker } r_j)}{\text{Ker}(\text{Coker } r_{i_0} \rightarrow \dots \rightarrow \text{Coker } r_j)} \\ &\simeq \text{Ker}(\text{Coker } r_j \rightarrow \text{Coker } r_{j+1}) \\ &\simeq \text{Ker } q_j. \end{aligned}$$

On peut maintenant démontrer la proposition.

DÉMONSTRATION de la proposition 7.34 — On cherche à appliquer le lemme précédent. On note $pr_2 : \mathbb{P}^\vee \times X \rightarrow X$ la deuxième projection et $a : \mathfrak{X} \rightarrow X$ sa restriction à \mathfrak{X} .

Les morphismes $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{P}^\vee$ et $pr_1 : \mathbb{P}^\vee \times X \rightarrow \mathbb{P}^\vee$ donnent des suites spectrales de Leray perverses

$$\begin{aligned} {}^p E_2^{p,q}(\pi) &\Rightarrow H^{p+q}(\mathfrak{X}, a^* \mathbb{W}), \\ {}^p E_2^{p,q}(pr_1) &\Rightarrow H^{p+q}(\mathbb{P}^\vee \times X, pr_2^* \mathbb{W}), \end{aligned}$$

qui dégènèrent en E_2 .

Le morphisme $pr_1 : \mathbb{P}^\vee \times X \rightarrow \mathbb{P}^\vee$ est projectif lisse, donc la suite spectrale de Leray perverse coïncide avec la suite spectrale de Leray classique et on a :

$${}^p E_2^{p,q}(pr_1) = E_2^{p,q}(pr_1) = H^p(\mathbb{P}^\vee, \mathbb{C}) \otimes H^q(X, \mathbb{W}).$$

D'autre part, avec les notations du théorème 7.27, on a :

$${}^p E_2^{p,q}(\pi) \simeq \mathbb{H}^{p-N}(\mathbb{P}^\vee, E_{q-n}).$$

Utilisons maintenant la functorialité de la suite spectrale de Leray perverse. On note $E = H^{n+k}(\mathbb{P}^\vee \times X, pr_2^* \mathbb{W})$, $H = H^{n+k}(\mathfrak{X}, a^* \mathbb{W})$, $r : E \rightarrow H$ le morphisme de restriction, $F^\bullet E$ et $F^\bullet H$ les filtrations de Leray perverses sur E et H . Ce sont des filtrations décroissantes indexées par l'indice i , avec $0 \leq i \leq n+k$. La suite de Leray perverse est fonctorielle en structures de Hodge, ce qui implique que r est compatible aux filtrations de Leray perverses sur E et sur H . Ceci se traduit par des diagrammes commutatifs à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F^{i+1} H & \longrightarrow & F^i H & \longrightarrow & Gr^i H \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow r_{i+1} & & \uparrow r_i & & \uparrow q_i \\ 0 & \longrightarrow & F^{i+1} E & \longrightarrow & F^i E & \longrightarrow & Gr^i E \longrightarrow 0 \end{array}$$

Pour appliquer le lemme 7.35, il reste à vérifier les hypothèses sur les morphismes r et q_i .

On sait que \mathfrak{X} est un fibré projectif sur X , et que l'inclusion $\mathfrak{X} \hookrightarrow \mathbb{P}^\vee \times X$ en fait un sous-fibré projectif du fibré projectif trivial $\mathbb{P}^\vee \times X$. Par le théorème de Leray-Hirsch, l'inclusion $\mathfrak{X} \hookrightarrow \mathbb{P}^\vee \times X$ induit en cohomologie un isomorphisme

$$H^{n+k}(\mathbb{P}^\vee \times X, pr_2^*\mathbb{W}) \xrightarrow{\sim} H^{n+k}(\mathfrak{X}, a^*\mathbb{W}).$$

Autrement dit, $r : E \rightarrow H$ est un isomorphisme.

Vérifions maintenant les hypothèses sur les morphismes $q_i : Gr^i H^{n+k}(\mathbb{P}^\vee \times X, \mathbb{W}) \rightarrow Gr^i H^{n+k}(\mathfrak{X}, \mathbb{W})$. Les gradués sont calculables explicitement car les suites dégèrent en E_2 . On a :

$$\begin{aligned} Gr^i H &\simeq {}^p E_2^{i, n+k-i}(\pi) \simeq \mathbb{H}^{i-N}(\mathbb{P}^\vee, E_{k-i}), \text{ et} \\ Gr^i E &\simeq E_2^{i, n+k-i}(pr_1) \simeq H^i(\mathbb{P}^\vee, \mathbb{C}) \otimes H^{n+k-i}(X, \mathbb{W}). \end{aligned}$$

Par le théorème 7.27, on a :

$$\begin{aligned} E_{k-i} &\simeq \underline{H^{n+k-i}(X, \mathbb{W})}[N] \text{ si } k-i < 0, \\ E_0 &\simeq \underline{H^n(X, \mathbb{W})}[N] \oplus j_{!*}\mathbb{V}[N], \text{ et} \\ E_{k-i} &\simeq \underline{H^{n-k+i}(X, \mathbb{W})}[N](-k+i) \text{ si } k-i > 0. \end{aligned}$$

Les noyaux et conoyaux de q_i sont alors donnés par les théorèmes de Lefschetz. Pour $k+n \geq i > k$, le morphisme

$$q_i : H^i(\mathbb{P}^\vee, \mathbb{C}) \otimes H^{n+k-i}(X, \mathbb{W}) \rightarrow \mathbb{H}^{i-N}(\mathbb{P}^\vee, \underline{H^{n+k-i}(X, \mathbb{W})}[N])$$

est un isomorphisme, son noyau et conoyau sont donc nuls.

Pour $i = k$,

$$q_k : H^k(\mathbb{P}^\vee, \mathbb{C}) \otimes H^n(X, \mathbb{W}) \rightarrow \mathbb{H}^{k-N}(\mathbb{P}^\vee, \underline{H^n(X, \mathbb{W})}[N] \oplus j_{!*}\mathbb{V}[N])$$

est injectif, et on a $\text{Coker } q_k = \mathbb{H}^{k-N}(\mathbb{P}^\vee, j_{!*}(\mathbb{V}[N])) =: IH^k(\mathbb{P}^\vee, \mathbb{V})$.

Pour $0 \leq i < k$,

$$q_i : H^i(\mathbb{P}^\vee, \mathbb{C}) \otimes H^{n+k-i}(X, \mathbb{W}) \rightarrow \mathbb{H}^{i-N}(\mathbb{P}^\vee, \underline{H^{n-k+i}(X, \mathbb{W})}[N](-k+i))$$

est surjectif et son noyau est isomorphe à $H^i(\mathbb{P}^\vee) \otimes H^{n+i-k+2}(X, \mathbb{W})_{prim}(i-k+1)$.

Les conditions sont réunies pour appliquer le lemme 7.35 à $(E, H, F^\bullet E, F^\bullet H, r)$, ce qui termine la démonstration. \square

7.4 Cohomologie d'intersection sur des sous-familles

On démontre ici un analogue du résultat précédent, mais pour des sous-familles.

PROPOSITION 7.37. — Soit X une variété projective lisse de dimension impaire $n + 1 \geq 3$, plongée dans un espace projectif \mathbb{P} , linéairement normale, et \mathbb{W} une VSH (rationnelle et polarisable) sur X . On note $X \xleftarrow{\alpha} \mathfrak{X} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^\vee$ la famille universelle de sections hyperplanes, et \mathbb{V} le système local de cohomologie évanescence sur l'ouvert U des sections hyperplanes lisses.

Soit m un entier compris entre 2 et 6. Supposons que $\mathcal{O}_X(1)$ soit m -jet ample. Soit \mathbb{P}^m un sous-espace projectif générique de \mathbb{P}^\vee , $B \subset X$ son lieu de base et $X \xleftarrow{a_m} \mathfrak{X}_{\mathbb{P}^m} \xrightarrow{\pi_m} \mathbb{P}^m$ la famille correspondante de sections hyperplanes. La restriction de \mathbb{V} à $U \cap \mathbb{P}^m$ est toujours notée \mathbb{V} .

Soit l un entier. Si $l < m$, ou si $l = m$ et $m > n$, la structure de Hodge sur $IH^l(\mathbb{P}^m, \mathbb{W})$ porte une filtration dont les gradués successifs sont isomorphes à

$$H^i(\mathbb{P}^m) \otimes H^{n+i-l+2}(X, \mathbb{W})_{\text{prim}}(i-l+1),$$

pour i variant entre 0 et $l-1$. Si $l = m$ et que $m \leq n$, la filtration a un cran de plus et le gradué supplémentaire est isomorphe à $Ev^{n-m}(B, \mathbb{W})(-m)$.

Les hypothèses de la proposition entraînent que \mathbb{P}^m n'intersecte pas le support de R , où R est le faisceau pervers défini en 7.27 et que le lieu de base $B := \{x \in X \mid x \in H, \forall H \in \mathbb{P}^m\}$ est une sous-variété lisse de codimension $m+1$ de X . On remarque que si $m > n$, alors le lieu de base est vide.

Les notations pour le changement de base $\mathbb{P}^m \hookrightarrow \mathbb{P}^\vee$ seront les suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}_{\mathbb{P}^m} & \longrightarrow & \mathfrak{X} \\ \downarrow \pi_m & & \downarrow \pi \\ \mathbb{P}^m & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}^\vee \\ \uparrow j_m & & \uparrow j \\ U_m & \xrightarrow{k} & U \end{array}$$

Avant de démontrer la proposition, on démontre un lemme qui admet un corollaire important.

LEMME 7.38. — L'image directe dérivée $Ra_{m*}a_m^*\mathbb{W}$ est décomposable, et on a, dans la catégorie dérivée $\mathcal{D}_c^b(X)$, la décomposition

$$Ra_{m*}a_m^*\mathbb{W} \simeq \left(\bigoplus_{0 \leq i \leq 2m-2} \underline{H^i(\mathbb{P}^m, \mathbb{C})} \otimes \mathbb{W}[-i] \right) \oplus \underline{H^{2m}(\mathbb{P}^m, \mathbb{C})} \otimes \mathbb{W}|_B[-2m].$$

DÉMONSTRATION du lemme 7.38 — La fibre du morphisme a_m au-dessus de $x \in X$ est :

- l'espace projectif \mathbb{P}^m si $x \in B$;
- un hyperplan projectif de \mathbb{P}^m sinon.

Considérons la restriction de $a_m : \mathfrak{X}_{\mathbb{P}^m} \rightarrow X$ au-dessus de $X \setminus B$. C'est un sous-fibré projectif du fibré trivial $X \times \mathbb{P}^m$. En particulier, $a_m : a_m^{-1}(X \setminus B) \rightarrow X \setminus B$ est projectif lisse. D'après le critère de dégénérescence de Deligne, on a une décomposition

$$Ra_{m*}a_m^*\mathbb{W} \simeq \bigoplus_{i=0}^{2m-2} (R^i a_{m*} a_m^* \mathbb{W})[-i]$$

Dans $\mathcal{D}^b(X \setminus B)$. Calculons ces images directes supérieures. Pour $0 \leq i \leq 2m - 2$ et $x \in X \setminus B$, l'inclusion $a_m^{-1}(x) \hookrightarrow \mathbb{P}^m$ induit des isomorphismes en cohomologie :

$$H^i(a_m^{-1}(x), a_m^* \mathbb{W}) \xleftarrow{\sim} H^i(\mathbb{P}^m, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{W}_x.$$

Finalement, on a, sur $X \setminus B$, l'isomorphisme $R^i a_{m*} a_m^* \mathbb{W} \simeq \underline{H^i(\mathbb{P}^m, \mathbb{C})} \otimes \mathbb{W}$ pour $0 \leq i \leq 2m - 2$. Si B est vide (c'est-à-dire si $m > n$), ceci termine la démonstration.

Sinon, le théorème de décomposition pour $a_m : \mathfrak{X}_{\mathbb{P}^m} \rightarrow X$ dit que l'image directe dérivée se décompose en somme directe de faisceaux pervers sur X décalés convenablement. La restriction à $X \setminus B$ de cette décomposition est exactement celle obtenue par le critère de Deligne, écrite ci-dessus. On en déduit que les complexes $\underline{H^i(\mathbb{P}^m, \mathbb{C})} \otimes \mathbb{W}$ pour $0 \leq i \leq 2m - 2$, sont facteurs directs de $Ra_{m*} a_m^* \mathbb{W}$, et que les autres termes apparaissant dans la décomposition de Beilinson-Bernstein-Deligne pour $a_{m*} a_m^* \mathbb{W}$ sont supportés dans B .

Considérons donc maintenant la restriction de $a_m : \mathfrak{X}_{\mathbb{P}^m} \rightarrow X$ au-dessus de B . C'est le fibré trivial $B \times \mathbb{P}^m$. On en déduit la décomposition

$$Ra_{m*} a_m^* \mathbb{W} = \bigoplus_{i=0}^{2m} (R^i a_{m*} a_m^* \mathbb{W})[-i] = \bigoplus_{0 \leq i \leq 2m} \underline{H^i(\mathbb{P}^m, \mathbb{C})} \otimes \mathbb{W}|_B[-i].$$

Finalement, l'image directe dérivée $Ra_{m*} \mathbb{W}$ sur X admet la décomposition suivante :

$$Ra_{m*} a_m^* \mathbb{W} \simeq \left(\bigoplus_{0 \leq i \leq 2m-2, i \text{ pair}} \underline{H^i(\mathbb{P}^m, \mathbb{C})} \otimes \mathbb{W}[-i] \right) \oplus \underline{H^{2m}(\mathbb{P}^m, \mathbb{C})} \otimes \mathbb{W}|_B[-2m]. \quad \square$$

COROLLAIRE 7.39. — *Soit l un entier positif strictement inférieur à m . Alors, le morphisme de restriction*

$$H^{n+l}(\mathbb{P}^m \times X, pr_2^* \mathbb{W}) \rightarrow H^{n+l}(\mathfrak{X}_{\mathbb{P}^m}, a_m^* \mathbb{W})$$

est un isomorphisme, et le morphisme

$$H^{n+m}(\mathbb{P}^m \times X, pr_2^* \mathbb{W}) \rightarrow H^{n+m}(\mathfrak{X}_{\mathbb{P}^m}, a_m^* \mathbb{W})$$

est injectif de cocycle isomorphe à $Ev^{n-m}(B, \mathbb{W}) := \text{Coker}(H^{n-m}(X, \mathbb{W}) \rightarrow H^{n-m}(B, \mathbb{W}))$ si $m \leq n$, bijectif sinon.

DÉMONSTRATION — On considère la décomposition du lemme 7.38, ainsi que la décomposition pour la projection $pr_2 : \mathbb{P}^m \times X \rightarrow X$, qui est un fibré projectif :

$$Rpr_{2*} pr_2^* \mathbb{W} \simeq \left(\bigoplus_{0 \leq i \leq 2m} \underline{H^i(\mathbb{P}^m, \mathbb{C})} \otimes \mathbb{W}[-i] \right).$$

Le morphisme de restriction en cohomologie est compatible avec ces deux décompositions.

Si $m > n$, le lieu de base est vide, et donc pour tout $l \leq m$, le morphisme de restriction

$$H^{n+l}(\mathbb{P}^m \times X, pr_2^* \mathbb{W}) \rightarrow H^{n+l}(\mathfrak{X}_{\mathbb{P}^m}, a_m^* \mathbb{W})$$

est un isomorphisme.

Si $m \leq n$, le lieu de base est non vide et pour tout l on a

$$\begin{aligned} & \text{Ker}(H^{n+l}(\mathbb{P}^m \times X, pr_2^* \mathbb{W}) \rightarrow H^{n+l}(\mathfrak{X}_{\mathbb{P}^m}, a_m^* \mathbb{W})) \\ &= \text{Ker}(H^{n+l-2m}(X, \mathbb{W}) \rightarrow H^{n+l-2m}(B, \mathbb{W})), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \text{Coker}(H^{n+l}(\mathbb{P}^m \times X, pr_2^* \mathbb{W}) \rightarrow H^{n+l}(\mathfrak{X}_{\mathbb{P}^m}, a_m^* \mathbb{W})) \\ &= \text{Coker}(H^{n+l-2m}(X, \mathbb{W}) \rightarrow H^{n+l-2m}(B, \mathbb{W})). \end{aligned}$$

Par le théorème de Lefschetz faible pour l'inclusion de B dans X , on en déduit que $H^{n+l}(\mathbb{P}^m \times X, pr_2^* \mathbb{W}) \rightarrow H^{n+l}(\mathfrak{X}_{\mathbb{P}^m}, a_m^* \mathbb{W})$ est un isomorphisme pour $l < m$ et est injectif pour $l = m$. \square

On peut maintenant démontrer la proposition 7.37, utilisant le corollaire précédent.

DÉMONSTRATION de la proposition 7.37 — On cherche encore à appliquer le lemme 7.35. On note $pr_2 : \mathbb{P}^m \times X \rightarrow X$ la deuxième projection et $a_m : \mathfrak{X}_{\mathbb{P}^m} \rightarrow X$ sa restriction à $\mathfrak{X}_{\mathbb{P}^m}$.

Les morphismes $\pi : \mathfrak{X}_{\mathbb{P}^m} \rightarrow \mathbb{P}^m$ et $pr_1 : \mathbb{P}^m \times X \rightarrow \mathbb{P}^m$ donnent des suites spectrales de Leray perverses

$$\begin{aligned} {}^p E_2^{p,q}(\pi) &\Rightarrow H^{p+q}(\mathfrak{X}_{\mathbb{P}^m}, a_m^* \mathbb{W}), \\ {}^p E_2^{p,q}(pr_1) &\Rightarrow H^{p+q}(\mathbb{P}^m \times X, pr_2^* \mathbb{W}), \end{aligned}$$

qui dégénèrent en E_2 .

Le morphisme $pr_1 : \mathbb{P}^m \times X \rightarrow \mathbb{P}^m$ est projectif lisse, donc la suite spectrale de Leray perverse coïncide avec la suite spectrale de Leray classique et on a :

$${}^p E_2^{p,q}(pr_1) \simeq E_2^{p,q}(pr_1) = H^p(\mathbb{P}^m, \mathbb{C}) \otimes H^q(X, \mathbb{W}).$$

D'autre part, la décomposition du théorème 7.27 peut être restreinte de \mathbb{P}^\vee à \mathbb{P}^m , et on a :

$${}^p E_2^{p,q}(\pi) \simeq \mathbb{H}^{p-N}(\mathbb{P}^m, (E_{q-n})|_{\mathbb{P}^m}).$$

Utilisons maintenant la functorialité de la suite spectrale de Leray perverse. On note $E = H^{n+l}(\mathbb{P}^m \times X, pr_2^* \mathbb{W})$, $H = H^{n+l}(\mathfrak{X}_{\mathbb{P}^m}, a_m^* \mathbb{W})$, $r : E \rightarrow H$ le morphisme de restriction, $F^\bullet E$ et $F^\bullet H$ les filtrations de Leray perverses sur E et H . Ce sont des filtrations décroissantes indexées par l'indice i , avec $0 \leq i \leq n+l$. La suite de Leray perverse est functorielle en structures de Hodge, ce qui implique que r est compatible aux filtrations de

Leray perverses sur E et sur H . Ceci se traduit par des diagrammes commutatifs à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F^{i+1}H & \longrightarrow & F^iH & \longrightarrow & Gr^iH \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow r_{i+1} & & \uparrow r_i & & \uparrow q_i \\ 0 & \longrightarrow & F^{i+1}E & \longrightarrow & F^iE & \longrightarrow & Gr^iE \longrightarrow 0 \end{array}$$

Pour appliquer le lemme 7.35, il reste à vérifier les hypothèses sur les morphismes r et q_i .

Par le corollaire 7.39, on sait que r est bijectif si $l < m$ ou $m > n$, et qu'il est injectif, de conoyau isomorphe à $Ev^{n-m}(B, \mathbb{W})$, si $l = m$ et que $m \leq n$.

Vérifions maintenant les hypothèses sur les morphismes

$$q_i : Gr^i H^{n+l}(\mathbb{P}^m \times X, pr_2^* \mathbb{W}) \rightarrow Gr^i H^{n+l}(\mathfrak{X}_{\mathbb{P}^m}, a_m^* \mathbb{W}).$$

Les gradués sont calculables explicitement car les suites dégénèrent en E_2 :

$$Gr^i H \simeq {}^pE_2^{i, n+l-i}(\pi) \simeq \mathbb{H}^{i-m}(\mathbb{P}^\vee, (E_{l-i})_{|\mathbb{P}^m}[m-N]), \text{ et}$$

$$Gr^i E \simeq E_2^{i, n+l-i}(pr_1) \simeq H^i(\mathbb{P}^\vee, \mathbb{C}) \otimes H^{n+l-i}(X, \mathbb{W}).$$

Si $l - i < 0$, on a $(E_{l-i})_{|\mathbb{P}^m}[m-N] \simeq \overline{H^{n+l-i}(X, \mathbb{W})}[m]$ et donc :

$$Gr^i H \simeq {}^pE_2^{i, n+l-i}(\pi) \simeq H^i(\mathbb{P}^m, \mathbb{C}) \otimes H^{n+l-i}(X, \mathbb{W}).$$

Comme \mathbb{P}^m est pris génériquement, il ne rencontre pas le support du module de Hodge R (voir le théorème 7.27), et donc $(E_0)_{|\mathbb{P}^m}[m-N] \simeq H^n(X, \mathbb{W})[m] \oplus (j_{!*} \mathbb{V}[N])_{|\mathbb{P}^m}[m-N]$. De plus, par le lemme de changement de base pour les extensions intermédiaires par un morphisme transverse (7.12), on a

$$(j_{!*} \mathbb{V}[N])_{|\mathbb{P}^m}[m-N] \simeq j_{m!*}(\mathbb{V}_{|U_m}[m]).$$

On en déduit que

$$Gr^l H \simeq {}^pE_2^{i, n}(\pi) \simeq H^l(\mathbb{P}^m, \mathbb{C}) \otimes (H^n(X, \mathbb{W}) \oplus IH^l(\mathbb{P}^m, \mathbb{V})).$$

Enfin, si $k - i > 0$, on a :

$$Gr^i H \simeq {}^pE_2^{i, n+l-i}(\pi) \simeq H^i(\mathbb{P}^m, \mathbb{C}) \otimes H^{n-l+i}(X, \mathbb{W})(i-l).$$

Les noyaux et conoyaux de q_i sont alors donnés par les théorèmes de Lefschetz. Pour $l + n \geq i > l$, le morphisme q_i est un isomorphisme. Pour $i = l$, q_i est injectif, et on a $\text{Coker } q_l = IH^l(\mathbb{P}^m, \mathbb{V})$. Enfin, pour $0 \leq i < l$, q_i est surjectif et son noyau est isomorphe à

$$H^i(\mathbb{P}^m) \otimes H^{n+i-l+2}(X, \mathbb{W})_{\text{prim}}(i-l+1).$$

Les conditions sont réunies pour appliquer le lemme 7.35, qui donne le résultat. \square

7.5 Une application du théorème de Nori

Soit k un entier strictement inférieur à n , et supposons $\mathbb{W} = \mathbb{C}$. L'utilisation de la functorialité de la suite spectrale de Leray (non perverse), du théorème de connexité de Nori et du lemme 7.35 permet d'obtenir une filtration de $H^k(U, \mathbb{V})$ par sous-structures de Hodge mixtes. Le calcul des gradués associés à cette filtration n'est pas complètement explicite, puisqu'il fait intervenir les groupes $H^k(U, \mathbb{C})$ et leur structure de Hodge, et que le résultat est non effectif en ce qui concerne la positivité demandée pour $\mathcal{O}_X(1)$. Cependant, dans certains cas la formule obtenue peut être utile. Ce résultat est présent dans la littérature ([Nor93]) pour $k = 1$.

Rappelons d'abord le théorème de connexité de Nori :

THÉORÈME 7.40. (Nori, [Nor93]) — Soit X une variété projective lisse de dimension $n + 1$ plongée dans un espace projectif \mathbb{P} , \mathbb{P}^\vee l'espace dual et $U \subset \mathbb{P}^\vee$ l'ouvert paramétrant les sections hyperplanes lisses de X . Soit Y une variété quasiprojective lisse sur U , et $\mathfrak{X}_Y := \mathfrak{X} \times_U Y$. Quitte à composer le plongement $X \subset \mathbb{P}$ par un plongement de Veronese, l'inclusion $\mathfrak{X}_Y \hookrightarrow Y \times X$ induit un isomorphisme

$$H^k(\mathfrak{X}_Y, \mathbb{C}) \simeq H^k(X \times Y, \mathbb{C}),$$

pour k strictement inférieur à $2n$.

REMARQUE 7.41. — Pour des familles d'hypersurfaces de degré d de l'espace projectif \mathbb{P}^{n+1} , le degré $d = 2n + 1$ convient et est optimal ([Voi02], remarque 20.13). Cependant, on s'intéresse surtout à des variétés X ayant de la cohomologie primitive (voir 9.2).

PROPOSITION 7.42. — Avec les notations précédentes, soit $l < n$, et $\mathcal{O}_X(1)$ assez ample pour que le théorème de Nori s'applique. La structure de Hodge mixte sur $H^l(U, \mathbb{V})$ porte une filtration de SHM dont les gradués sont isomorphes aux structures mixtes

$$H^i(U) \otimes H^{n+i-l+2}(X, \mathbb{C})_{\text{prim}}(i - l + 1),$$

pour i variant entre 0 et $l - 1$.

DÉMONSTRATION — La démonstration est similaire à celle de 7.34 et 7.37. On considère les suites spectrales de Leray pour $\pi_U : \mathfrak{X}_U \rightarrow U$ et pour la projection $X \times U \rightarrow U$. Ce sont des suites spectrales de structures de Hodge mixtes ([Ara05]), et les morphismes étant projectifs et lisses, elles dégénèrent toutes les deux en E_2 par le critère de dégénérescence de Deligne ([Del68], 2.6.2). On note F^i et Gr^i les filtrés et gradués associés à ces suites spectrales.

L'inclusion $\mathfrak{X}_U \hookrightarrow X \times U$ induit par functorialité un morphisme de suite spectrale, donc le morphisme de restriction $r : H^{n+l}(X \times U, \mathbb{C}) \rightarrow H^{n+l}(\mathfrak{X}_U, \mathbb{C})$ est compatible aux filtrations de Leray sur $H^{n+l}(X \times U, \mathbb{C})$ et $H^{n+l}(\mathfrak{X}_U, \mathbb{C})$. Le théorème de Nori implique que r est un isomorphisme pour $l < n$.

Les morphismes induits par r sur les gradués sont

$$q_i : Gr^i H^{n+l}(X \times U, \mathbb{C}) \rightarrow Gr^i H^{n+l}(\mathfrak{X}_U, \mathbb{C}), \text{ c'est-à-dire}$$

$$q_i : H^i(U, \mathbb{C}) \otimes H^{n+l-i}(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^i(U, R^{n+l-i}\pi_{U*}\mathbb{C}).$$

Par le théorème de Lefschetz faible, q_i est un bijectif pour $i > l$, injectif pour $i = l$ avec un conoyau isomorphe à $H^l(U, \mathbb{V})$, et surjectif pour $i < l$ avec un noyau isomorphe à $H^i(U) \otimes H^{n+i-l+2}(X, \mathbb{C})_{\text{prim}}(i-l+1)$. Le lemme 7.35 s'applique donc et donne le résultat.

8 Dégénérescence de la suite spectrale de Leray

Lorsque l'on restreint la famille complète \mathbb{P}^V d'hypersurfaces à une droite générique, on obtient un pinceau de Lefschetz. Un résultat frappant sur la cohomologie des pinceaux de Lefschetz est le suivant : si on note $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^V$ le pinceau et $\pi : \mathfrak{X}_{\mathbb{P}^1} \rightarrow \mathbb{P}^1$ la famille d'hypersurfaces associée, alors la suite spectrale de Leray de π dégénère en E_2 . Ce résultat est exposé dans SGA7, II, exposé XVIII, 5.6.1.

Dans cette section, on démontre ce résultat pour des sous-familles génériques de dimension 2 à 6, si n est pair :

THÉORÈME 8.1. — *Soit X une variété projective lisse de dimension impaire $n+1$ plongée dans un espace projectif \mathbb{P} , linéairement normale, $X \xleftarrow{\alpha} \mathfrak{X} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^V$ la section hyperplane universelle, \mathbb{W} une VSH sur X et m un entier positif compris entre 2 et 6.*

Supposons que $\mathcal{O}_X(1)$ soit $\max(3, m)$ -jet ample. Soit \mathbb{P}^m un sous-espace projectif générique de \mathbb{P}^V , et $X \xleftarrow{\alpha_m} \mathfrak{X}_m \xrightarrow{\pi_m} \mathbb{P}^m$ la famille de sections hyperplanes paramétrée par \mathbb{P}^m . Alors, l'image directe dérivée $R\pi_{m}(a_m^*\mathbb{W})$ est décomposable dans $\mathcal{D}_c^b(\mathbb{P}^m, \mathbb{C})$.*

COROLLAIRE 8.2. — *La suite spectrale de Leray associée à $\pi_m : \mathfrak{X}_{\mathbb{P}^m} \rightarrow \mathbb{P}^m$ dégénère en E_2 .*

On commence par énoncer un lemme général qui donne une condition suffisante pour qu'une extension intermédiaire d'un système local coïncide avec l'extension au sens des faisceaux du système local. On l'applique ensuite à \mathbb{V} .

8.1 Un résultat préliminaire sur les extensions intermédiaires

Les notations de ce paragraphe sont indépendantes du reste du document.

PROPOSITION 8.3. — *Soit X une variété algébrique lisse sur \mathbb{C} de dimension d , $j : U \rightarrow X$ l'inclusion d'un ouvert de Zariski, L un système local sur U . Supposons qu'il existe $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement galoisien fini de groupe G , tel que le revêtement restreint $\pi_U : \tilde{U} \rightarrow U$ soit étale, et que $L_{\tilde{U}} := \pi_U^*L$ s'étende un système local $L_{\tilde{X}}$ sur \tilde{X} .*

Alors, l'extension intermédiaire $j_{!}(L[d])$ est un faisceau (à décalage près) :*

$$j_{!*}(L[d]) \simeq (j_*L)[d].$$

DÉMONSTRATION — Les morphismes π et π_U sont finis, donc les foncteurs image directe associés sont exacts sur les faisceaux, égaux à leurs foncteurs dérivés. On les note simplement π_* et π_{U*} . Notons \tilde{j} l'inclusion de \tilde{U} dans \tilde{X} .

Le faisceau image directe $\pi_{U*}L_{\tilde{U}}$ est muni d'une action naturelle de G , et on a

$$L = (\pi_{U*}L_{\tilde{U}})^G.$$

On en déduit que $j_{!*}(L[d]) = j_{!*}((\pi_{U*}L_{\tilde{U}})^G[d])$, c'est-à-dire, puisque $j_{!*}$ est un foncteur entre faisceaux pervers équivariants sur U et sur X ([BeLu], 5.2 p. 41) :

$$j_{!*}(L[d]) = j_{!*}(\pi_{U*}L_{\tilde{U}}[d])^G.$$

Montrons maintenant que l'extension intermédiaire $j_{!*}(\pi_{U*}L_{\tilde{U}}[d])$ est isomorphe à $(\pi_*L_{\tilde{X}})[d]$. Le morphisme $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ est fini, donc le foncteur (dérivé) π_* est exact pour les t -structures perverses sur $D_c^b(\tilde{X})$ et $D_c^b(X)$. Ceci signifie exactement que l'image d'un faisceau pervers est un faisceau pervers. Le faisceau $L_{\tilde{X}}$ est un système local sur la variété lisse \tilde{X} , ce qui fait de $L_{\tilde{X}}[d]$ un faisceau pervers sur \tilde{X} . Par ce qui précède, $\pi_*L_{\tilde{X}}[d]$ est un faisceau pervers sur X . Ce faisceau pervers est semi-simple (par le théorème de décomposition), et il contient forcément comme sous-objet l'extension intermédiaire de sa restriction à U . On a donc un isomorphisme de faisceaux pervers :

$$\pi_*L_{\tilde{X}}[d] \simeq j_{!*}(\pi_{U*}L_{\tilde{U}}[d]) \oplus R,$$

où le reste R est un faisceau pervers supporté sur le complémentaire de U , qui est une sous-variété de dimension strictement inférieure à d . Or, on sait que $(\pi_*L_{\tilde{X}})[d]$ est un faisceau placé en degré $-d$. On en déduit que $R = 0$ et donc

$$j_{!*}(\pi_{U*}L_{\tilde{U}}[d]) = \pi_*L_{\tilde{X}}[d].$$

Mais alors, on a :

$$\begin{aligned} j_{!*}(L[d])[-d] &= j_{!*}(\pi_{U*}L_{\tilde{U}}[d])^G[-d] \\ &= (\pi_*L_{\tilde{X}})^G \\ &= ((\pi_* \circ \tilde{j}_*)L_{\tilde{U}})^G \\ &= ((j_* \circ \pi_{U*})L_{\tilde{U}})^G \\ &= j_*(\pi_{U*}L_{\tilde{U}})^G \\ &= j_*L. \quad \square \end{aligned}$$

8.2 Dégénérescence

On peut maintenant démontrer le théorème 8.1. On en rappelle l'énoncé ci-dessous

THÉORÈME. 8.1 — *Soit X une variété projective lisse de dimension impaire $n+1$ plongée dans un espace projectif \mathbb{P} , linéairement normale, $X \xleftarrow{\alpha} \mathfrak{X} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^V$ la section hyperplane universelle, \mathbb{W} une VSH sur X et m un entier positif compris entre 2 et 6.*

Supposons que $\mathcal{O}_X(1)$ soit $\max(3, m)$ -jet ample. Soit \mathbb{P}^m un sous-espace projectif générique de \mathbb{P}^V , et $X \xleftarrow{\alpha_m} \mathfrak{X}_m \xrightarrow{\pi_m} \mathbb{P}^m$ la famille de sections hyperplanes paramétrée par \mathbb{P}^m . Alors, l'image directe dérivée $R\pi_{m}(\alpha_m^*\mathbb{W})$ est décomposable dans $\mathcal{D}_c^b(\mathbb{P}^m, \mathbb{C})$.*

DÉMONSTRATION — On fixe les notations suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{X}_{\mathbb{P}^m} & \xrightarrow{i'} & \mathfrak{X} \\
\downarrow \pi_m & & \downarrow \pi \\
\mathbb{P}^m & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}^V \\
\uparrow j_m & & \uparrow j \\
U_m & \xrightarrow{k} & U
\end{array}$$

Par changement de base propre, on a l'isomorphisme de foncteurs :

$$i^* R\pi_* \simeq R\pi_{m*} i'^*,$$

donc on a :

$$i^* R\pi_* \mathbb{W}_{\mathfrak{X}}[n+m] \simeq R\pi_{m*} i'^* \mathbb{W}_{\mathfrak{X}}[n+m],$$

En écrivant la décomposition de Saito de $R\pi_* \mathbb{W}[N+n]$, on obtient :

$$R\pi_{m*} i'^* \mathbb{W}_{\mathfrak{X}}[n+m] \simeq i^* \left(\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} E_i[-i] \right) [m-N],$$

c'est-à-dire, en explicitant la décomposition (voir 7.27) :

$$\begin{aligned}
R\pi_{m*}(\mathbb{W}_{\mathfrak{X}}[m+n]) &= \left(\bigoplus_{i=-n}^{-1} \underline{H^{n+i}(X, \mathbb{W})}[m-i] \right) \\
&\oplus i^*(j_{!*} \mathbb{V}[N])[m-N] \oplus \underline{H^n(X, \mathbb{W})}[m] \\
&\oplus \left(\bigoplus_{i=1}^n \underline{H^{n-i}(X, \mathbb{W})}[m-i] \right).
\end{aligned} \tag{8.2.2}$$

Par la proposition 7.12, on a un isomorphisme de faisceaux pervers sur \mathbb{P}^m :

$$i^*(j_{!*} \mathbb{V}[N])[m-N] \simeq j_{m!*}(\mathbb{V}_{|U_m}[m]).$$

Enfin, on rappelle qu'il existe une variété projective lisse Y et un morphisme fini $p : Y \rightarrow \mathbb{P}^m$ satisfaisant les conditions suivantes (voir le théorème 2.35) :

- le morphisme p au-dessus de U_m est un revêtement galoisien étale $p : \tilde{U}_m \rightarrow U_m$;
- le tiré en arrière $p_{|\tilde{U}_m}^* \mathbb{V}$ sur \tilde{U}_m s'étend en un système local \mathbb{V}_Y sur Y .

Par la proposition 8.3, le faisceau pervers $j'_{!*}(\mathbb{V}_{|U_m}[m])$ est isomorphe au complexe composé du faisceau $j'_* \mathbb{V}_{|U_m}$ placé en degré $-m$.

Reprenons la décomposition 8.2.2 : tous les termes apparaissant dans la décomposition sont des faisceaux, à décalage près. On en déduit que l'image directe est décomposable.

9 Groupes de cohomologie sur Y et applications

Pour commencer, on détermine dans (9.1) les parties G -invariantes des groupes de cohomologie $H^l(Y, \mathbb{V}_Y)$, puis on donne deux applications : dans (9.2), on construit un système local déformable sur Y , et dans (9.3) on montre que la conjecture de Toledo est vérifiée pour la variété Y .

Ces deux applications dépendent du choix de X et de \mathbb{W} , mais ne nécessitent pas que \mathbb{W} soit non rigide.

9.1 Cohomologie équivariante et cohomologie d'intersection

THÉORÈME 9.1. — *Soit X une variété projective lisse de dimension impaire $n+1$ plongée dans un espace projectif \mathbb{P} , linéairement normale, $X \xleftarrow{\alpha} \mathfrak{X} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^\vee$ la section hyperplane universelle, \mathbb{W} une VSH sur X et m un entier positif compris entre 2 et 6.*

Supposons que $\mathcal{O}_X(1)$ soit $\max(3, m)$ -jet ample. Soit \mathbb{P}^m un sous-espace projectif générique de \mathbb{P}^\vee . Si $l < m$, ou si $l = m$ et $m > n$, la structure de Hodge sur $H^l(Y, \mathbb{V}_Y)^G$ porte une filtration dont les gradués successifs sont isomorphes à

$$H^i(\mathbb{P}^\vee) \otimes H^{n+i-l+2}(X, \mathbb{W})_{\text{prim}}(i-l+1),$$

pour i variant entre 0 et $l-1$. Si $l = m$ et que $m \leq n$, la filtration a un cran de plus et le gradué supplémentaire est isomorphe à $H^{n-m}(B, \mathbb{W})_{\text{ev}}(-m)$.

Ce théorème découle en fait de la proposition suivante, et de la proposition 7.37 qui donne la structure de Hodge sur la cohomologie d'intersection :

PROPOSITION 9.2. — *Sous les hypothèses du théorème ci-dessus, on a les isomorphismes*

$$H^k(Y, \mathbb{V}_Y)^G \simeq IH^k(\mathbb{P}^m, \mathbb{V}).$$

DÉMONSTRATION — On a la chaîne d'isomorphismes

$$H^k(Y, \mathbb{V}_Y)^G \simeq H^k(\mathbb{P}^m, p_*\mathbb{V}_Y)^G \simeq H^k(\mathbb{P}^m, (p_*\mathbb{V}_Y)^G) \simeq H^k(\mathbb{P}^m, j_*\mathbb{V}).$$

D'après la proposition 8.3, $j_*\mathbb{V}[m] = j_{!*}\mathbb{V}[m]$, ce qui donne le résultat. \square

La partie G -invariante est sans doute la plus intéressante, car elle reflète uniquement des propriétés de la VSH \mathbb{V} sur \mathbb{P}^m et ne dépend pas du choix du groupe G . En fait, cette partie invariante est la cohomologie du champ $[Y/G]$ à coefficients dans $\tilde{\mathbb{V}}$ (voir partie I, 3.5).

PROPOSITION 9.3. — *On a :*

$$H^k([Y/G], \tilde{\mathbb{V}}) \simeq H^k(Y, \mathbb{V}_Y)^G.$$

DÉMONSTRATION — On utilise l'isomorphisme $H^k([Y/G], \tilde{\mathbb{V}}) \simeq H_G^k(Y, \mathbb{V}_Y)$ et le lemme suivant :

LEMME 9.4. — *Soit $H_G^k(Y, \mathbb{V}_Y)$ la cohomologie équivariante de \mathbb{V}_Y sur Y . Alors, on a*

$$H_G^k(Y, \mathbb{V}_Y) \simeq H^k(Y, \mathbb{V}_Y)^G.$$

DÉMONSTRATION — Considérons l'application G -équivariante $Y \rightarrow \{\text{pt}\}$, et la suite spectrale de Leray équivariante associée ([McK01], p. 500) :

$$E_2^{p,q} = H^p(G, H^q(Y, \mathbb{V}_Y)) \Rightarrow H_G^{p+q}(Y, \mathbb{V}_Y).$$

Le groupe G étant fini, ses groupes de cohomologie supérieurs à coefficients dans une représentation complexe sont nuls, et donc

$$E_2^{p,q} = 0, \forall p > 0.$$

Ceci implique que la suite spectrale dégénère en E_2 , et que

$$H_G^k(Y, \mathbb{V}_Y) = H^0(G, H^k(Y, \mathbb{V}_Y)) = H^k(Y, \mathbb{V}_Y)^G. \quad \square$$

Ce lemme donne le résultat. □

9.2 Déformations de systèmes locaux

Soit \mathbb{L}_Y le système local $\mathbb{C}_Y \oplus \mathbb{V}_Y$. Il est sous-jacent à une variation de structures de Hodge sur Y .

PROPOSITION 9.5. — *Supposons que $H^1(Y, \mathbb{V}_Y)$ soit non nul. Alors, \mathbb{L}_Y admet des déformations infinitésimales.*

REMARQUE 9.6. — *Sous les hypothèses des propositions 9.2 et 7.37, il suffit que $H^{n+1}(X, \mathbb{W})_{\text{prim}}$ soit non nul pour que $H^1(Y, \mathbb{V}_Y)$ le soit également.*

DÉMONSTRATION de la proposition 9.5 — Remarquons que $\text{End}(\mathbb{L}_Y) \simeq \mathbb{L}_Y^\vee \otimes \mathbb{L}_Y$. En utilisant $\mathbb{L}_Y = \mathbb{C}_Y \oplus \mathbb{V}_Y$, on voit que \mathbb{V}_Y est un sous-système local de $\text{End}(\mathbb{L}_Y)$, et donc que $H^1(Y, \mathbb{V}_Y)$ est un sous-espace de $H^1(Y, \text{End}(\mathbb{L}_Y))$. Par hypothèse, on a $H^1(Y, \mathbb{V}_Y) \neq \{0\}$, donc $H^1(Y, \text{End}(\mathbb{L}_Y)) \neq \{0\}$. Rappelons que l'espace tangent de Zariski à la variété des représentations (ou des systèmes locaux) est l'espace des cocycles $Z^1(Y, \text{End}(\mathbb{L}_Y))$ (voir [LuMa], chapitre 2). Par ce qui précède, il est non nul, ce qui signifie exactement que \mathbb{L}_Y admet des déformations infinitésimales.

Enfin, on étudie les obstructions à ce que ces déformations infinitésimales se relèvent en des déformations analytiques.

On appelle obstruction de Goldman-Millson l'application

$$\Phi : H^1(Y, \text{End}(\mathbb{L}_Y)) \rightarrow H^2(Y, \text{End}(\mathbb{L}_Y)),$$

donnée sur un $\pi_1(Y)$ -cocycle tordu par la formule

$$u \mapsto \Phi(u)(g_1, g_2) = [u(g_1), g_2 \cdot u(g_2)].$$

Le système local \mathbb{L}_Y est sous-jacent à une VSH, donc par le corollaire du théorème 2 p. 44 de [GM88], une déformation infinitésimale $u \in H^1(Y, \mathbb{L}_Y)$ se relève en une déformation analytique de \mathbb{L}_Y si et seulement si $\Phi(u) = 0$.

PROPOSITION 9.7. — *L'obstruction de Goldman-Millson est nulle sur $H^1(Y, \mathbb{V}_Y)$ vu comme sous-espace de $H^1(Y, \text{End}(\mathbb{L}_Y))$.*

DÉMONSTRATION — Soit $u \in H^1(Y, \mathbb{V}_Y) \subset H^1(Y, \text{End}(\mathbb{L}_Y))$. Alors le 2-cocycle $\Phi(u)$, évalué sur un couple (g_1, g_2) d'éléments de $\pi_1(Y, y)$, est donné par le crochet de Lie de deux éléments dans $(\mathbb{V}_Y)_y \subset (\text{End}(\mathbb{L}_Y))_y$.

Or la décomposition $\mathbb{L}_Y = \mathbb{C} \oplus \mathbb{V}_Y$ donne une décomposition par blocs des éléments de $(\text{End} \mathbb{L}_Y)_y$, et les éléments dans $(\mathbb{V}_Y)_y \subset (\text{End} \mathbb{L}_Y)_y$ sont de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}$. Le crochet de Lie de deux tels éléments est donc nul.

COROLLAIRE 9.8. — Si $H^1(Y, \mathbb{V}_Y)$ est non nul, alors le système local \mathbb{L}_Y admet des déformations analytiques.

Soulignons pour finir que les déformations construites vivent dans la variété des représentations, et non dans l'espace des modules qui ne voit que les représentations semi-simples. Les arguments qui précèdent ne permettent donc pas de construire une famille « non stationnaire » de déformations de \mathbb{L}_Y , au sens de Simpson (voir 3.4).

9.3 Autour de la conjecture de Toledo

En rapport avec la conjecture de Toledo sur les groupes fondamentaux des variétés kählériennes et en application du résultat sur $H^1(Y, \mathbb{V}_Y)$, on a la proposition suivante.

PROPOSITION 9.9. — Si $H^1(Y, \mathbb{V}_Y)$ est non triviale, alors $H^2(\pi_1(Y), \mathbb{C})$ non plus.

DÉMONSTRATION — L'argument est plus ou moins le même que dans [Rez98], prop. 8.1, déjà évoqué dans la première partie. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(Y, \mathbb{V}_Y) \otimes H^1(Y, \mathbb{V}_Y) & \longrightarrow & H^2(Y, \mathbb{C}) \xrightarrow{\wedge \omega^{m-1}} \mathbb{C} \\ \sim \uparrow & & \uparrow \\ H^1(\pi_1(Y), \mathbb{V}_Y) \otimes H^1(\pi_1(Y), \mathbb{V}_Y) & \longrightarrow & H^2(\pi_1(Y), \mathbb{C}) \end{array}$$

où les morphismes

$$H^1(Y, \mathbb{V}_Y) \otimes H^1(Y, \mathbb{V}_Y) \rightarrow H^2(Y, \mathbb{C})$$

et

$$H^1(\pi_1(Y), \mathbb{V}_Y) \otimes H^1(\pi_1(Y), \mathbb{V}_Y) \rightarrow H^2(\pi_1(Y), \mathbb{C})$$

sont donnés par cup-produit et contraction par la polarisation de \mathbb{V}_Y . Le morphisme composé

$$H^1(Y, \mathbb{V}_Y) \otimes H^1(Y, \mathbb{V}_Y) \rightarrow H^2(Y, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

est non dégénéré. Ceci implique la non annulation de $H^2(\pi_1(Y), \mathbb{C})$.

Ce groupe est conjecturalement non trivial pour toute variété kählérienne compacte dont le groupe fondamental est infini. Comme on l'a annoncé dans la première partie (section 3.4), l'existence d'un système local non rigide sur Y implique que la conjecture de Toledo est vraie pour Y . En particulier, si \mathbb{W} est non rigide sur X , les résultats de Simpson montrent que \mathbb{V}_Y est non rigide et en particulier que la conjecture est vraie pour Y .

Cependant, si \mathbb{W} est rigide sur X , on ne peut pas conclure sur la (non) rigidité de \mathbb{V}_Y . Mais si $H^{n+1}(X, \mathbb{W})_{\text{prim}}$ est non trivial et que la proposition 9.2 s'applique, alors $H^1(Y, \mathbb{V}_Y)$

est non trivial et la proposition ci-dessus permet de vérifier d'une façon légèrement différente que la conjecture est vraie pour Y .

Pour conclure, remarquons qu'il serait très intéressant d'en savoir plus sur l'éventuelle rigidité de \mathbb{V}_Y dans le cas où \mathbb{W} est rigide.

Références

- [AVG] V. Arnold, A. Varchenko, S. Goussein-Zade, Singularités des applications différentiables, 2ème partie, Mir (1986).
- [Ara05] D. Arapura, The Leray spectral sequence is motivic, *Invent. Math.* 160 (2005), no. 3, p. 567-589.
- [Arn] V. Arnold, Normal forms of functions near degenerate critical points, the Weyl groups of A_k , D_k , and E_k and lagrangian singularities, *Functionnal Analysis and its applications*, 6.
- [Arn2] V. Arnold, Local normal forms of functions, *Invent. Math.* 35 (1976), p. 87-109.
- [BBD] A. A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, Faisceaux pervers, *Astérisque* 100 (1982).
- [Bea86] A. Beauville, Le groupe de monodromie des familles universelles d'hypersurfaces et d'intersections complètes, *Lecture Notes* 1194, Springer (1986), p. 8-19.
- [Ben] Y. Benoist, Sous-groupes discrets des groupes de Lie, 1997 European Summer School in Group Theory.
- [BeLu] J. Bernstein, V. Lunts, Equivariant sheaves and functors, *Lect. Notes in Math.* 1578, Springer.
- [Bou] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4-6, Hermann.
- [BDIP96] J. Bertin, J.-P. Demailly, L. Illusie, C. Peters, Introduction à la théorie de Hodge, *Panoramas et Synthèses*, no. 3 (1996), SMF.
- [BFNP09] P. Brosnan, H. Fang, Z. Nie, G. Pearlstein, Singularities of admissible normal functions, with an appendix by N. Fakhruddin, *Invent. Math.* 177 (2009), p. 599-629.
- [BeSo] M. Beltrametti, A.J. Sommese, On k -jet ampleness, in « Complex analysis and geometry », ed. by Ancona and Silva, Plenum Press, New York, 1993, p. 355-376.
- [Bru80] J.W. Bruce, Canonical stratifications of functions : the simple singularities, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 88 (1980), p.265-272.
- [Bru81] J.W. Bruce, The duals of generic hypersurfaces, *Math. Scand.* 49 (1981), p. 36-60.
- [Chau08] N. B. Châu, Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie, arXiv : 0801.0446
- [CKS] E. Cattani, A. Kaplan, W. Schmid, Degeneration of Hodge structures, *Ann. of Math.* 123 (1986) p. 457-535
- [CT93] J. Carlson, D. Toledo, Rigidity of harmonic maps of maximum rank, *Journal of Geometric Analysis*, Vol. 3, No. 2 (1993), p. 99-140.
- [CT99] J. Carlson, D. Toledo, Discriminant complements and kernels of monodromy representations, *Duke Math. J.* 97 (1999), no. 3, p.621-648.
- [dCM05] M.A. de Cataldo, L. Migliorini, The Hodge theory of algebraic maps, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 4ème série, t.38 (2005), p. 693-750.

- [dCM07] M. de Cataldo, L. Migliorini, The decomposition theorem and the topology of algebraic maps, arxiv :0712.0349
- [Del68] P. Deligne, Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. no 35 (1968), p. 259-278.
- [Del72] P. Deligne, Les immeubles des groupes de tresses généralisés, Invent. Math., vol. 17 (1972), p.273
- [Del80] P. Deligne, La conjecture de Weil : II, Publ. Math. I.H.É.S. 52 (1980), p. 137-252.
- [Dem89] M. Demazure, Géométrie - catastrophes et bifurcations, Ellipses (1989)
- [Dim87] A. Dimca, Topics on real and complex singularities : an introduction, Vieweg Advanced Lectures, Braunschweig, Wiesbaden, 1987.
- [Dim86] A. Dimca, Milnor numbers and multiplicities of dual varieties, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 31 (1986), 535-538.
- [Dim92] A. Dimca, Singularities and topology of hypersurfaces, Springer, Universitext (1992).
- [Dim04] A. Dimca, Sheaves in topology, Springer, Universitext (2004).
- [Don] R. Donagi, Generic Torelli for projective hypersurfaces, Compositio Math. 50 (1983), no. 2-3, p. 325-353
- [Dou-Ver] A. Douady, J.-L. Verdier, Séminaire de géométrie analytique de l'ENS (1971-1972), Astérisque 36-37
- [Dur95] A.H. Durfee, Intersection homology Betti numbers, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), p. 989-993
- [Ebe] Ebeling, An arithmetic characterisation of the symmetric monodromy groups of singularities, Inventiones Math. 77 (1984), no. 1, p. 85-99.
- [Eys] P. Eyssidieux, La caractéristique d'Euler du complexe de Gauss-Manin, J. reine angew. Math. 490 (1997), p. 155-212
- [GM96] S.I. Gelfand, Y.I. Manin, Methods of homological Algebra, Springer (1996).
- [Gir] J. Giraud, Cohomologie non abélienne, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 179, Springer-Verlag (1971)
- [GM88] W. Goldman, J. Millson, The deformation theory of representations of fundamental groups of compact Kähler manifolds, Publ. Math. IHES 67 (1988), p. 43-96
- [Green85] M. Green, The period map for hypersurface sections of high degree of an arbitrary variety, Compositio Math. 55 (1985), no. 2, p. 135-156.
- [Gri70] P. Griffiths, Periods of integrals on algebraic manifolds, III, Publ. Math. IHES 38 (1970), p. 25-180.
- [Jan] W.A.M. Janssen, Skew-symmetric vanishing lattices and their monodromy group. Math. Ann. 266 (1983), 115-133 ; 272 (1985), 17-22.
- [Katz] N. Katz, Perversity and exponential sums II. Estimates for and inequalities among A-numbers, Barsotti Symposium in Algebraic geometry (Abano Terme, 1991), vol. 15 of Perspect. Math., p. 205-252. Academic Press, San Diego, CA, 1994.
- [KK87] M. Kashiwara, T. Kawai, The Poincaré lemma for variations of polarized Hodge structures, Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ., 23 (1987), p. 345-407.
- [Kaup] L. Kaup, Zur Homologie projektiv algebraischer Varietäten, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Classe si scienze, 3ème série, tome 26, tome 26, no. 2 (1972), p. 479-513

- [Lê] Lê, Sur les cycles évanouissants des espaces analytiques, C R Acad. Sci. Paris, série A, 288 (1979) 283-285.
- [LuMa] A. Lubotzky, A.R. Magid, Varieties of representations of finitely generated groups, Memoirs of the A.M.S. vol. 58, no. 336 (1985).
- [Loo] Looijenga, Isolated singular points on complete intersections, LMS Lecture Notes Series 77, Cambridge University Press (1984).
- [McK01] J. McCleary, A user's guide to spectral sequences, Cambridge Studies in advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2001.
- [Mil] Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Annals of Math. Studies 61, Princeton University Press, 1968.
- [Moch07] T. Mochizuki, Asymptotic behaviour of tame harmonic bundles and an application to pure twistor D-modules, Memoirs of the AMS vol. 185, no. 869 et 870 (2007)
- [Noo] B. Noohi, Foundations of topological stacks, arXiv : math/0503247v1
- [Nor93] M. Nori, Algebraic cycles and Hodge theoretic connectivity, Invent. Math. 111 (1993), p. 349-373
- [Rez98] A Reznikov, The structure of Kähler groups, I : second cohomology, dans : Motives, polylogarithms and Hodge theory, part II, Hodge theory. Papers from the international press. conf. Univ. California, Irvine, CA, june 1998. Ed. Bogomolov, Katzarkov. International Press Lect. Series, 3, II.
- [Sab05] C. Sabbah, Polarizable twistor D-modules, Astérisque 300, SMF, 2005
- [Sa88] M. Saito, Modules de Hodge polarisables, Publ. RIMS 24 (1988) p. 849-995
- [Sa90] M. Saito, Mixed Hodge modules, Publ. RIMS 26 (1990) p. 221-333
- [Sch73] W. Schmid, Variation of Hodge structure : the singularities of the period mapping, Invent. Math. 22 (1973) p. 211-319
- [Sch08] C. Schnell, The boundary behavior of cohomology classes and singularities of normal functions, Ph.D. thesis, Ohio State University (2008), disponible sur http://etd.ohiolink.edu/view.cgi?acc_num=osu1218036000
- [Sel60] A. Selberg, On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces, Contributions to Function Theory, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1960, p. 161-183.
- [SGA1] Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1960-61, Documents Mathématiques, SMF (2003)
- [SGA7] Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, Lect. Notes in Math. 340
- [Sim92] C. Simpson, Higgs bundles and local systems, Publ. Math. IHES 75 (1992) p. 5-95
- [Sim93] C. Simpson, Some families of local systems over smooth projective varieties, Annals of Math. 138 (1993) p. 337-425
- [Tev03] E.A. Tevelev, Projectively dual varieties, Journal of Mathematical Sciences, vol. 117, no. 6 (2003)
- [Ver] J.-L. Verdier Catégories abéliennes, état 0, dans SGA 4 1/2, Lect. Notes in Math. 569 (1977), Springer-Verlag, p. 262-308
- [Voi02] C. Voisin, Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe, cours spécialisés de la SMF, 10.

- [Zak] Zak, Tangents and secants of algebraic varieties, AMS Transl. of Math. Monographs, 127 (1993)
- [Zuc79] S. Zucker, Hodge theory with degenerating coefficients : L^2 -cohomology in the Poincaré metric, Ann. Math. 109 (1979), p. 415-476.

RÉSUMÉ

Dans cette thèse, on construit puis on étudie une classe d'exemples de variations de structure de Hodge (VSH) sur des variétés complexes compactes. Dans la première partie, on construit des variétés projectives lisses munies de VSH à partir de certaines familles de sections hyperplanes à singularités simples. Les deux parties suivantes correspondent à l'étude de ces VSH de deux points de vue différents : on montre d'abord que leur application des périodes est génériquement immersive, puis on utilise le théorème de décomposition de M. Saito pour calculer certains invariants cohomologiques.

ABSTRACT

We construct and study a class of examples of variations of Hodge structure (VHS) on compact complex varieties. In the first part, we construct smooth projective varieties carrying VHS by using certain families of hyperplane sections with ADE singularities. Then we analyse these VHS from two different points of view : we first study their period map, then we use the decomposition theorem of M. Saito to explore their cohomological properties.

MOTS-CLÉS

Groupes kählériens, variations de structure de Hodge, singularités d'hypersurfaces, problème de Torelli, modules de Hodge

CLASSIFICATION MATHÉMATIQUE

14B05, 14D05, 14D07, 14C34, 55N33