



HAL
open science

Contribution à l'introduction des probabilités au collège : rapports d'élèves à quelques notions probabilistes

Mounir Dhieb

► To cite this version:

Mounir Dhieb. Contribution à l'introduction des probabilités au collège : rapports d'élèves à quelques notions probabilistes. Mathématiques [math]. Université de Tunis; Université Paris Descartes, 2009. Français. NNT: . tel-00507751

HAL Id: tel-00507751

<https://theses.hal.science/tel-00507751v1>

Submitted on 30 Jul 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université de Tunis
Institut Supérieur de l'Éducation
et de la Formation Continue



Université Paris Descartes
Faculté des Sciences Humaines
et Sociales - Sorbonne

THESE en cotutelle

Pour l'obtention du

DIPLÔME DE DOCTORAT

en didactique des mathématiques

Présentée par

Mounir DHIEB

**Contribution à l'introduction des probabilités au collège :
rapports d'élèves à quelques notions probabilistes**

Sous la direction de Mme Sylvette MAURY et de M. Abdennebi ACHOUR

Soutenue publiquement le 21 / 03 / 2009

Membres du jury

M. Belhassen DEHMAN, Professeur, Université El Manar, Tunis, Président

M. Abdennebi ACHOUR, Professeur, Université El Manar, Directeur

M. Yves CHEVALLARD, Professeur, IUFM Aix Marseille, Rapporteur

Mme Sylvette MAURY, Professeur, Université René DESCARTES, Directrice

Mme Hikma SMIDA, Professeur, Université El Manar, Tunis, Rapporteur

M. Gérard VERGNAUD, Directeur de Recherche Emérite, CNRS, Examineur

Dédicace

*Je dédie ce travail
à mes chers parents **Abdellatif** et **Aïcha**,
à mon épouse **Jawaher** et
à mes enfants **Oussama**, **Balkis** et **Ghassen**.*

Remerciements

Au terme de ce travail, je tiens d'abord à adresser ma très vive reconnaissance à Mme Sylvette MAURY et à M. Abdennebi ACHOUR qui ont accepté de diriger ma thèse. Leur contribution était primordiale au développement et à l'aboutissement de ce travail de recherche. Tout au long des travaux faisant l'objet de ce mémoire, j'ai pu apprécier leur disponibilité et leurs grandes qualités ; leurs conseils et leurs critiques m'ont été précieux. J'avoue que j'ai eu la chance d'être encadré par deux personnalités très généreuses, je les remercie profondément.

Toute ma gratitude s'adresse également à Mme Hikma SMIDA et à M. Yves CHEVALLARD qui ont accepté de se rendre disponible pour rapporter sur mon travail de thèse et qui m'ont fait l'honneur de faire partie du jury.

Je suis reconnaissant à M. Belhassen DAHMEN pour l'honneur qu'il m'a fait de présider le jury de ce travail.

Je suis également reconnaissant à M. Gérard VERGNAUD qui m'a honoré en acceptant d'être membre du jury.

Il m'est agréable d'exprimer toute ma gratitude à M. Mahdi ABDELJAOUAD qui a su trouver le temps de me lire, de m'encourager et de m'éclairer de ses remarques judicieuses.

Mes remerciements vont aussi à tous ceux qui m'ont beaucoup appris, notamment mes professeurs de DEA.

Le travail de thèse a été réalisé entre l'Institut Supérieur de l'Education et de la Formation Continue de Tunis et la Faculté des Sciences Humaines et Sociales de la Sorbonne. Je tiens à remercier les responsables de ces deux institutions, M. Mohamed Kameleddine GAHA et Mme Sylvette MAURY, leur équipe administrative et les laboratoires EDIPS et EDA.

Je remercie les responsables de l'Institut Français de Coopération de Tunis.

Je remercie également les responsables de l'Institut Supérieur de Comptabilité et d'Administration des Entreprises notamment pour l'aide matérielle dont j'ai bénéficiée.

Je tiens à adresser mes remerciements à mes chers amis Samia ACHOUR et Marc VANTOUROUT. Je les adresse aussi à mes amis et collègues Hanène ABROUGUI, Chiraz BEN KILANI, Leila BEN YOUSSEF, Adrien BOURG, Charles CHANDLER, Faïza CHELLOUGUI, Imène GHEDAMSI, Sassi HADDAD, Hatem KEFI, Imed KILANI, Rahim KOUKI, Fatine MAGHREBI, Chiraz MARJENE, Faten MEDDAH, Ali SELMI et Mondher TANGOUR.

Mes remerciements vont également à mes collègues Hatem ACHOUR, Mohamed Salah ACHOURI, Lazhar AMOUS, Basma BELHAJ BRAHIM, Mohamed BELLASSOUAD, Yosr BEN NACEUR, Saïd BOUCHAHWA, Karim CHAHDOURA, Abdellatif FARID, Salah GUESMI, Youssef HAMMOU, Héla KHANFIR, Ahmed KHEMAKHEM, Mohamed Ali MEKNI, Mongi OUNI, Nabil OUNISSI, Makram WARTANI et Nabil YAHIAOUI qui ont eu l'amabilité de m'aider dans la réalisation des expérimentations de ce mémoire de thèse.

Merci à tous les élèves qui ont voulu participer à ces expérimentations.

Merci à toutes les personnes qui ont contribué par une quelconque aide à la réalisation de ce travail.

Enfin, j'exprime ma plus profonde gratitude et mes remerciements à ma famille :

- Tout d'abord, à mon père Abdellatif et à ma mère Aïcha qui m'ont tout donné.*
- Ensuite, à ma belle famille dont le soutien ne m'a jamais manqué.*
- Enfin à ma petite famille, ma femme Jawaher et mes petits Oussama, Balkis et Ghassen. Je les remercie du fond du cœur pour ce qu'ils ont enduré et pour tout ce qu'ils ont représenté pour moi dans cette aventure.*

SOMMAIRE

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| INTRODUCTION..... | 15 |
| CHAPITRE I..... | 23 |
| ELEMENTS THEORIQUES..... | 23 |
| 1. INTRODUCTION..... | 24 |
| 2. MODELISATION ET MODELE..... | 24 |
| 2.1. <i>La notion de modèle</i> | 24 |
| 2.2. <i>Modèles d'urnes</i> | 28 |
| 3. SIMULATION..... | 29 |
| 4. CONNAISSANCES ET SAVOIRS..... | 31 |
| 4.1. <i>Connaissances</i> | 31 |
| 4.2. <i>Savoirs</i> | 33 |
| 5. MODELISATION DU SAVOIR..... | 34 |
| 5.1. <i>Une modélisation de l'activité mathématique</i> | 35 |
| 5.2. <i>Une modélisation du savoir</i> | 35 |
| 6. MODELISATION DE LA CONNAISSANCE : LES CONCEPTIONS..... | 36 |
| 6.1. <i>Quelques usages des conceptions</i> | 36 |
| 6.2. <i>Une définition pragmatique</i> | 38 |
| 6.3. <i>Le modèle cKç (conception, connaissance et concept)</i> | 40 |
| 7. CONCEPTIONS ET TAD..... | 41 |
| 7.1. <i>Conceptions et rapport au savoir</i> | 42 |
| 7.2. <i>Une modélisation des conceptions</i> | 44 |
| 7.2.1. <i>Articulation du modèle des organisations et du modèle cKç</i> | 44 |
| 7.2.2. <i>Un modèle des conceptions dans la TAD</i> | 45 |
| <i>Organisation personnelle</i> | 45 |
| <i>Conception</i> | 46 |
| 8. MODELISATIONS DE L'ENSEIGNEMENT..... | 46 |
| 8.1. <i>Modélisation de l'enseignement dans la TAD</i> | 47 |
| 8.2. <i>Modélisation de l'enseignement dans la TSD</i> | 47 |
| 8.2.1. <i>La structuration du milieu</i> | 48 |
| 8.2.2. <i>Le contrat didactique</i> | 49 |
| 8.2.3. <i>La structuration du contrat</i> | 50 |
| 8.3. <i>Modélisations de l'enseignement par approches multiples</i> | 51 |
| 8.3.1. <i>La double approche</i> | 51 |
| 8.3.2. <i>Le modèle des genèses</i> | 52 |
| 9. CONCLUSION : CADRE THEORIQUE..... | 54 |
| CHAPITRE II..... | 57 |
| ELEMENTS HISTORIQUES ET EPISTEMOLOGIQUES..... | 57 |
| 1. INTRODUCTION..... | 58 |
| 2. CHRONOGENESE HISTORIQUE..... | 58 |
| 2.1. <i>L'équiprobabilité</i> | 58 |
| 2.1.1. <i>Le problème des parties</i> | 58 |
| 2.1.2. <i>Remarque</i> | 62 |
| 2.2. <i>Probabilité et fréquence</i> | 62 |
| 2.3. <i>Fondement moderne des probabilités</i> | 63 |
| 3. LES COURANTS PROBABILISTES..... | 63 |
| 3.1. <i>Le courant objectiviste</i> | 64 |
| 3.2. <i>Le courant subjectiviste</i> | 64 |
| 4. LE HASARD..... | 65 |
| 4.1. <i>Hasard et déterminisme</i> | 65 |
| 4.2. <i>Hasard et mathématiques</i> | 66 |
| 4.3. <i>Hasard et enseignement des probabilités</i> | 69 |

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.3.1. <i>Le hasard concerné</i> | 69 |
| 4.3.2. <i>Quelques définitions</i> | 70 |
| 5. CONCLUSION | 72 |
| CHAPITRE III | 75 |
| REVUE DE LA LITTÉRATURE | 75 |
| 1. INTRODUCTION | 76 |
| 2. PROBABILITES ET DEVELOPPEMENT GENETIQUE | 76 |
| 2.1. <i>J. Piaget et B. Inhelder (1951)</i> | 76 |
| 2.1.1. <i>Exposé d'une partie du travail</i> | 77 |
| 2.1.2. <i>Résultats complémentaires</i> | 79 |
| 2.2. <i>Travaux de Fischbein</i> | 81 |
| 2.2.1. <i>Un processus d'initiation aux probabilités à l'école primaire</i> | 81 |
| 2.2.2. <i>Innuitions dans l'initiation aux probabilités</i> | 85 |
| 2.2.3. <i>Remarques</i> | 86 |
| 2.3. <i>Quand peut-on initier l'enfant à la combinatoire ?</i> | 86 |
| 2.4. <i>Conclusion</i> | 87 |
| 3. PROBABILITES ET SIMULATIONS | 88 |
| 3.1. <i>Une expérience de modélisation par les probabilités en CM2</i> | 89 |
| 3.2. <i>Des conditions didactiques pour se familiariser à l'aléatoire dès le collège</i> | 94 |
| 3.3. <i>Conclusion</i> | 96 |
| 4. PROBABILITES ET PRATIQUES ENSEIGNANTES | 96 |
| 4.1. <i>Résistances dans l'enseignement des probabilités</i> | 96 |
| 4.2. <i>Les notions d'indépendance et de dépendance des évènements chez les enseignants</i> | 97 |
| 4.3. <i>Conclusion</i> | 100 |
| 5. CONCLUSIONS | 101 |
| CHAPITRE IV | 103 |
| LES PROGRAMMES TUNISIENS | 103 |
| 1. INTRODUCTION | 104 |
| 2. LA REFORME DE 1958 | 104 |
| 2.1. <i>Les programmes</i> | 104 |
| 3. LA REFORME DE 1968 | 106 |
| 3.1. <i>Une première étape</i> | 107 |
| 3.1.1. <i>Sixième année secondaire</i> | 107 |
| 3.1.2. <i>Septième année secondaire</i> | 107 |
| 3.2. <i>Une deuxième étape</i> | 108 |
| 3.2.1. <i>Cinquième année secondaire</i> | 108 |
| 3.2.2. <i>Sixième année secondaire</i> | 108 |
| 3.2.3. <i>Septième année secondaire</i> | 109 |
| 3.3. <i>Conclusion</i> | 109 |
| 4. LA REFORME DE 1978 | 110 |
| 4.1. <i>Cinquième année secondaire</i> | 110 |
| 4.2. <i>Sixième année secondaire</i> | 111 |
| 4.3. <i>Septième année secondaire</i> | 112 |
| 4.4. <i>Conclusion</i> | 112 |
| 5. LA REFORME DE 1993 | 113 |
| 5.1. <i>Troisième année secondaire</i> | 113 |
| 5.2. <i>Quatrième année secondaire</i> | 114 |
| 5.3. <i>Conclusion</i> | 115 |
| 6. LA REFORME DE 2002 | 116 |
| 6.1. <i>Au secondaire</i> | 116 |
| 6.1.1. <i>Première année secondaire</i> | 116 |
| 6.1.2. <i>Deuxième année secondaire</i> | 116 |
| 6.1.3. <i>Troisième année secondaire</i> | 117 |
| 6.1.4. <i>Quatrième année secondaire</i> | 118 |
| 6.1.5. <i>Conclusion</i> | 119 |
| 6.2. <i>Au collège</i> | 119 |
| 6.2.1. <i>Septième année de base</i> | 119 |
| 6.2.2. <i>Huitième année de base</i> | 120 |
| 6.2.3. <i>Neuvième année de base</i> | 121 |

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 6.2.4. Conclusion..... | 121 |
| 7. LES MANUELS DU COLLEGE..... | 121 |
| 7.1. Le manuel de 7 ^{ème} année de base (2006-2007)..... | 122 |
| 7.2. Le manuel de 8 ^{ème} année de base (2007-2008)..... | 124 |
| 7.3. Conclusion..... | 127 |
| 8. CONCLUSIONS..... | 128 |
| CHAPITRE V..... | 131 |
| UNE PREMIERE EXPERIMENTATION : DIFFICULTES RENCONTREES PAR LES ELEVES DANS L'APPRENTISSAGE DES PROBABILITES..... | 131 |
| 1. INTRODUCTION..... | 132 |
| 2. PRESENTATION DE L'EXPERIMENTATION..... | 132 |
| 2.1. Les tâches choisies..... | 132 |
| 2.1.1. La tâche de l'équiprobabilité « te »..... | 132 |
| 2.1.2. La tâche de l'indépendance des épreuves « ti »..... | 133 |
| 2.2. La population..... | 133 |
| 2.3. Principaux buts..... | 133 |
| 2.4. Plan expérimental et méthode..... | 134 |
| 3. ANALYSE A PRIORI..... | 135 |
| 3.1. Le biais d'équiprobabilité (Lecoutre et Durant, 1988)..... | 135 |
| 3.2. Les acquisitions spontanées relatives à la notion d'indépendance en..... | 137 |
| probabilité (Maury 1985)..... | 137 |
| 3.3. Nos attentes..... | 139 |
| 4. LA TACHE « TE » DE L'EQUIPROBABILITE : RESULTATS ET DISCUSSION..... | 141 |
| 4.1. Comparaison 2S / 3M..... | 141 |
| 4.2. Comparaison avec des groupes étrangers..... | 143 |
| 4.3. Quelles conceptions ?..... | 143 |
| 4.4. Conclusion pour la tâche « te »..... | 144 |
| 5. LA TACHE « TI » D'INDEPENDANCE : RESULTATS ET DISCUSSION..... | 145 |
| 5.1. Les conceptions mobilisées..... | 145 |
| 5.1.1. La conception EA « Expérience Aléatoire »..... | 145 |
| 5.1.2. La conception LPN « Lois des Petits Nombres »..... | 146 |
| 5.1.3. La conception FR « Fréquence Relative »..... | 147 |
| 5.1.4. La conception M « Mécanique »..... | 148 |
| 5.1.5. Une catégorie I « Non Identifiée »..... | 149 |
| 5.2. Conceptions et reconnaissance de l'indépendance..... | 150 |
| 5.3. Comparaison des performances..... | 151 |
| 5.3.1. Comparaison 2S / 3M..... | 151 |
| 5.3.2. Comparaison avec un groupe étranger..... | 153 |
| 5.4. Conclusion pour la tâche « ti »..... | 154 |
| 6. CONCLUSIONS..... | 154 |
| CHAPITRE VI..... | 157 |
| UNE EXPERIMENTATION AVEC DES SUJETS AYANT EU UNE FORMATION PLUS APPROFONDIE EN PROBABILITES..... | 157 |
| 1. INTRODUCTION..... | 158 |
| 2. PRESENTATION DE L'EXPERIMENTATION..... | 158 |
| 2.1. Les tâches choisies..... | 158 |
| 2.1.1. La tâche de l'équiprobabilité « te »..... | 158 |
| 2.1.3. La tâche de l'indépendance des épreuves « ti »..... | 158 |
| 2.2. La population..... | 159 |
| 2.3. Principaux buts..... | 159 |
| 2.4. Plan expérimental et méthode..... | 160 |
| 3. ANALYSE A PRIORI..... | 160 |
| 3.1. Enseignement complémentaire de probabilités..... | 160 |
| 3.2. Nos attentes..... | 161 |
| 3.2.1. Pour la tâche « te » d'équiprobabilité..... | 161 |
| 3.2.2. Pour la tâche « ti » d'indépendance..... | 161 |
| 4. LA TACHE « TE » DE L'EQUIPROBABILITE : RESULTATS ET DISCUSSION..... | 162 |
| 4.1. Comparaison entre les groupes EM, ES et EG..... | 162 |
| 4.1.1. Les performances..... | 163 |

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.1.2. Le biais d'équiprobabilité..... | 163 |
| 4.2. Comparaison avec le groupe 3M..... | 163 |
| 4.2.1. Les performances..... | 163 |
| 4.2.2. Le biais d'équiprobabilité..... | 164 |
| 4.3. Les conceptions mobilisées..... | 165 |
| 4.4. Conclusion pour la tâche « te »..... | 166 |
| 5. LA TACHE « TI » D'INDEPENDANCE : RESULTATS ET DISCUSSION | 167 |
| 5.1. Les conceptions mobilisées..... | 167 |
| 5.2. Conceptions et indépendance des épreuves..... | 169 |
| 5.3. Conclusion pour la tâche « ti »..... | 170 |
| 6. CONCLUSIONS | 170 |
| CHAPITRE VII..... | 173 |
| PREMIER TEST DIAGNOSTIC : QUANTIFICATION DES PROBABILITES EN SITUATION DE PREVISION | 173 |
| 1. INTRODUCTION..... | 174 |
| 2. ARGUMENTS-ELEVES RELEVANT DE LA QUANTIFICATION DES PROBABILITES | 174 |
| 3. PRESENTATION DU PREMIER TEST DIAGNOSTIC | 179 |
| 3.1. Principaux buts..... | 179 |
| 3.2. La population..... | 181 |
| 3.3. Types de tâches choisies..... | 181 |
| 3.4. Plan expérimental et méthode | 182 |
| 4. ANALYSE A PRIORI | 183 |
| 5. LES ORGANISATIONS PERSONNELLES DEVELOPPEES | 185 |
| 5.1. Les types d'organisations pertinentes..... | 186 |
| 5.1.1. Le type « aire » | 186 |
| 5.1.2. Le type « cas favorables / cas possibles »..... | 188 |
| 5.1.3. Le type « cas favorables / cas défavorables »..... | 191 |
| 5.1.4. Le type « collection intermédiaire » | 193 |
| 5.2. Les types d'organisations non pertinentes..... | 194 |
| 5.2.1. Le type « répartition » | 194 |
| 5.2.2. Le type « mécanique » | 196 |
| 5.2.3. Le type « cardinal partie »..... | 197 |
| 5.2.4. Le type « cardinal tout » | 198 |
| 5.2.5. Le type « différence »..... | 200 |
| 5.3. Un type « organisations non identifiées » | 202 |
| 5.4. Organisations combinées..... | 202 |
| 5.5. Récapitulatif des organisations personnelles | 203 |
| 6. CLASSIFICATION DES REPONSES | 204 |
| 7. ÉTUDE GLOBALE DES PERFORMANCES..... | 205 |
| 7.1. Le premier exercice | 205 |
| 7.2. Les autres exercices..... | 206 |
| 7.3. Les organisations combinés..... | 208 |
| 8. IMPACT DU REFERENT SUR LES ORGANISATIONS | 209 |
| 8.1. Impact sur les organisations pertinentes..... | 209 |
| 8.2. Impact sur les organisations non pertinentes | 211 |
| 9. IMPACT DU TYPE DE TACHES SUR LES ORGANISATIONS | 213 |
| 9.1. Impact sur les organisations pertinentes..... | 213 |
| 9.2. Impact sur les organisations non pertinentes | 214 |
| 10. STABILITE DES ORGANISATIONS | 215 |
| 10.1. Stabilité des organisations du type P, P' ou G..... | 215 |
| 10.2. Fréquence de la stabilité et référent..... | 218 |
| 10.3. Organisations stables et référent..... | 219 |
| 11. UN TEST COMPLEMENTAIRE | 220 |
| 11.1. Objectifs..... | 220 |
| 11.2. Tâches choisies..... | 220 |
| 11.3. La population..... | 221 |
| 11.4. Plan expérimental et méthode | 221 |
| 11.5. Résultats | 222 |
| 11.5.1. Les organisations développées | 222 |
| 11.5.2. Les performances..... | 224 |

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 12. CONCLUSIONS | 225 |
| CHAPITRE VIII..... | 229 |
| DEUXIEME TEST DIAGNOSTIC : PORTEE DU JUGEMENT PROBABILISTE DES JEUNES ELEVES..... | 229 |
| 1. INTRODUCTION..... | 230 |
| 2. L' APPREHENSION DES SITUATIONS PROBABILISTES CHEZ DES ELEVES DE 12-14 ANS (ALARCON 1982) | 230 |
| 3. PRESENTATION DU DEUXIEME TEST DIAGNOSTIC | 234 |
| 3.2. <i>Population et situation choisies</i> | 234 |
| 3.2. <i>Objectifs du test</i> | 235 |
| 3.3. <i>Types de tâches choisies</i> | 236 |
| 3.4. <i>Plan expérimental et méthode</i> | 238 |
| 4. ANALYSE A PRIORI | 238 |
| 5. LES ORGANISATIONS PERSONNELLES DEVELOPPEES..... | 242 |
| 5.1. <i>Le cas de deux sacs connus</i> | 242 |
| 5.1.1. <i>Le type « compatibilité »</i> | 243 |
| 5.1.2. <i>Le type « différence »</i> | 244 |
| 5.1.3. <i>Le type « cardinaux parties »</i> | 244 |
| 5.1.4. <i>Le type « cardinal tout »</i> | 247 |
| 5.1.5. <i>Le type « proportion »</i> | 248 |
| 5.1.6. <i>Le type « non identifié »</i> | 251 |
| 5.1.6. <i>Le type « combiné »</i> | 251 |
| 5.2. <i>Le cas du sac inconnu</i> | 252 |
| 5.3. <i>Récapitulation</i> | 253 |
| 6. RESULTATS POUR L' EXERCICE 1 : COMPREHENSION DE LA REMISE | 254 |
| 7. RESULTATS POUR L' EXERCICE 6 : LE SAC INCONNU..... | 255 |
| 8. AUTRES RESULTATS | 257 |
| 8.1. <i>Étude globale</i> | 257 |
| 8.1.1. <i>Le cas des organisations développées</i> | 257 |
| 8.1.2. <i>Le cas des raisonnements événementiels</i> | 258 |
| 8.1.3. <i>Le cas des modalités choisies</i> | 258 |
| 8.1.4. <i>Modalités et organisations</i> | 259 |
| 8.2. <i>Du côté des techniques</i> | 260 |
| 8.2.1. <i>Le choix non équiprobable</i> | 260 |
| 8.2.1. <i>Le choix équiprobable</i> | 263 |
| 8.3. <i>Conclusions concernant l'analyse des exercices 2, 3, 4 et 5</i> | 264 |
| 9. CONCLUSION | 265 |
| CHAPITRE IX..... | 269 |
| TROISIEME TEST DIAGNOSTIC : SITUATION DE PREVISION, SITUATION D'INDEPENDANCE ET SITUATION STATISTIQUE..... | 269 |
| 1. INTRODUCTION..... | 270 |
| 2. PRESENTATION DU TROISIEME TEST DIAGNOSTIC | 270 |
| 2.1. <i>La population</i> | 270 |
| 2.2. <i>La passation</i> | 271 |
| 3. SITUATION DE PREVISION : PRESENTATION ET ANALYSE A PRIORI : | 272 |
| 3.1. <i>Tâches, objectifs et plan expérimental</i> | 272 |
| 3.1.1. <i>Les tâches choisies</i> | 272 |
| 3.1.2. <i>Objectifs</i> | 272 |
| 3.1.3. <i>Plan expérimental et méthode</i> | 273 |
| 3.2. <i>Analyse a priori</i> | 273 |
| 4. RESULTATS POUR LA SITUATION DE PREVISION | 274 |
| 4.1. <i>Sans demande de justification : exercices 1 et 2 des versions (A) et (B)</i> | 274 |
| 4.1.1. <i>Les réponses apportées</i> | 274 |
| 4.1.2. <i>Effet du niveau scolaire</i> | 277 |
| 4.1.3. <i>Effet de l'ordre des tâches</i> | 278 |
| 4.2. <i>Avec demande de justification : exercices 1 et 2 des versions (C) et (D)</i> | 278 |
| 4.2.1. <i>Les conceptions construites</i> | 279 |
| 4.2.2. <i>Les réponses apportées</i> | 282 |
| 4.2.3. <i>Effet du niveau scolaire</i> | 284 |
| 4.2.4. <i>Effet de l'ordre des tâches</i> | 285 |
| 4.2.5. <i>Impact de la demande de justification</i> | 286 |

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4. 3. Conclusion..... | 286 |
| 5. SITUATION D'INDEPENDANCE : PRESENTATION ET ANALYSE A PRIORI | 287 |
| 5.1. Tâches, objectifs et plan expérimental..... | 287 |
| 5.1.1. Les tâches choisies..... | 287 |
| 5.1.2. Objectifs..... | 288 |
| 5.1.3. Plan expérimental et méthode..... | 289 |
| 5.2. Analyse a priori | 289 |
| 6. RESULTATS POUR LA SITUATION D'INDEPENDANCE | 290 |
| 6.1. Sans demande de justification | 291 |
| 6.1.1. Les réponses apportées..... | 291 |
| 6.1.2. Effet du niveau scolaire | 292 |
| 6.2. Avec demande de justification | 293 |
| 6.2.1. Les réponses apportées..... | 293 |
| 6.2.2. Les conceptions construites | 294 |
| 6.2.3. Effet du niveau scolaire | 296 |
| 6.2.4. Impact de la demande de justification | 297 |
| 6. 3. Conclusion..... | 298 |
| 7. SITUATION STATISTIQUE : PRESENTATION ET ANALYSE A PRIORI | 299 |
| 7.1. Tâches, objectifs et plan expérimental..... | 299 |
| 7.1.1. Les tâches choisies..... | 299 |
| 7.1.2. Objectifs..... | 300 |
| 7.1.3. Plan expérimental et méthode..... | 301 |
| 7.2. Analyse a priori | 301 |
| 8. RESULTATS POUR LA SITUATION STATISTIQUE | 303 |
| 8.1. Sans demande de justification | 303 |
| 8.1.1. La situation statistique de prévision | 303 |
| 8.1.2. La situation statistique de décision..... | 306 |
| 8.2. Avec demande de justification | 307 |
| 8.2.1. Les réponses apportées..... | 307 |
| 8.2.2. Les conceptions construites | 310 |
| 8.3. Conclusion..... | 313 |
| 9. CONCLUSIONS | 314 |
| CHAPITRE X..... | 317 |
| POUR UNE SEQUENCE INTRODUCTIVE DES PROBABILITES | 317 |
| 1. INTRODUCTION..... | 318 |
| 2. PRESENTATION DE LA PRE-EXPERIMENTATION, CADRE THEORIQUE ET METHODOLOGIE | 318 |
| 2.1. Esquisse de la situation | 318 |
| 2.2. Les acteurs de la pré-expérimentation..... | 319 |
| 2.3. Un objectif principal..... | 320 |
| 2.4. Cadre théorique..... | 320 |
| 2.5. Plan expérimental et méthode | 321 |
| 2.5.1. Plan expérimental..... | 321 |
| 2.5.1. Méthode | 321 |
| 3. PREPARATION DES DEUX PREMIERES SEANCES | 322 |
| 3.1. Préparation de la première séance..... | 322 |
| 3.1.1. La tâche prescrite | 322 |
| 3.1.2. Le scénario envisagé | 323 |
| 3.1.3. Quelques échanges | 323 |
| 3.2. Préparation de la deuxième séance..... | 326 |
| 3.2.1. La tâche prescrite | 326 |
| 3.2.2. Le scénario envisagé | 326 |
| 3.2.3. Quelques échanges | 327 |
| 4. ANALYSE A PRIORI DES DEUX PREMIERES SEANCES | 328 |
| 4.1. La première séance, 1 ^{ère} expérience (le dé)..... | 329 |
| 4.1.1. Analyse en termes d'actions et de tâches..... | 329 |
| 4.1.2. Analyse en termes de potentialités du milieu | 330 |
| 4.1.3. Analyse en termes de contrats | 331 |
| 4.2. La première séance, 2 ^{ème} expérience (les balles)..... | 332 |
| 4.2.1. Analyse en termes d'actions et de tâches..... | 332 |
| 4.2.2. Analyse en termes de potentialités du milieu | 333 |
| 4.2.3. Analyse en termes de contrats | 334 |
| 4.3. La deuxième séance..... | 334 |

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.3.1. Analyse en termes d'actions et de tâches..... | 334 |
| 4.3.2. Analyse en termes de potentialités du milieu..... | 336 |
| 4.3.3. Analyse en termes de contrats..... | 336 |
| 5. DEROULEMENT ET ANALYSE A POSTERIORI DES DEUX PREMIERES SEANCES..... | 336 |
| 5.1. La première séance, 1 ^{ère} expérience (le dé)..... | 337 |
| 5.1.1. Analyse en termes d'actions et de tâches..... | 337 |
| 5.1.2. Analyse en termes de potentialités du milieu..... | 340 |
| 5.1.3. Analyse en termes de contrats..... | 344 |
| 5.2. La première séance, 2 ^{ème} expérience (les balles)..... | 344 |
| 5.2.1. Analyse en termes d'actions et de tâches..... | 344 |
| 5.2.2. Analyse en termes de potentialités du milieu..... | 347 |
| 5.2.3. Analyse en termes de contrats..... | 349 |
| 5.3. La deuxième séance..... | 349 |
| 5.3.1. Analyse en termes d'actions et de tâches..... | 349 |
| 5.3.2. Analyse en termes de potentialités du milieu..... | 353 |
| 5.3.3. Analyse en termes de contrats..... | 354 |
| 6. PREPARATION DES SEANCES 3 ET 4..... | 355 |
| 6.1. La tâche prescrite..... | 355 |
| 6.2. Le scénario envisagé..... | 355 |
| 7. ANALYSE A PRIORI DES SEANCES 3 ET 4..... | 357 |
| 7.1. Analyse en termes d'actions et de tâches..... | 357 |
| 7.2. Analyse en termes de potentialités du milieu..... | 358 |
| 7.3. Analyse en termes de contrats..... | 360 |
| 8. DEROULEMENT ET ANALYSE A POSTERIORI DES SEANCES 3 ET 4..... | 361 |
| 8.1. Analyse en termes d'actions et de tâches..... | 361 |
| 8.2. Analyse en termes de potentialités du milieu..... | 366 |
| 8.3. Analyse en termes de contrats..... | 367 |
| 9. COMPLEMENT..... | 367 |
| 10. CONCLUSIONS..... | 369 |
| CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES..... | 373 |
| 1. SUR LES ARTICULATIONS THEORIQUES..... | 374 |
| 2. SUR LES EFFETS DE L'ENSEIGNEMENT DES PROBABILITES..... | 375 |
| 3. SUR LE JUGEMENT PROBABILISTE..... | 376 |
| 4. SUR LA SITUATION DE PREVISION..... | 377 |
| 5. SUR LA SITUATION D'INDEPENDANCE CHRONOLOGIQUE..... | 378 |
| 6. SUR LES SITUATIONS STATISTIQUES..... | 379 |
| 7. SUR LA NECESSITE DES DEUX APPROCHES DES PROBABILITES..... | 379 |
| 8. SUR L'INTRODUCTION DES PROBABILITES AU COLLEGE..... | 380 |
| 9. PERSPECTIVES DE LA RECHERCHE..... | 380 |
| BIBLIOGRAPHIE..... | 383 |
| ANNEXES..... | 395 |
| ANNEXE 1 : PREMIER TEST DIAGNOSTIC, ENONCES..... | 395 |
| Test 1 : Énoncés, version arabe..... | 395 |
| Test 1 : Énoncés, version française..... | 398 |
| ANNEXE 2 : PREMIER TEST DIAGNOSTIC, TYPES D'ORGANISATIONS..... | 401 |
| ANNEXE 3 : DEUXIEME TEST DIAGNOSTIC, ENONCES..... | 409 |
| Test 2 : Énoncés, version arabe..... | 409 |
| Test 2 : Énoncés, version française..... | 413 |
| ANNEXE 4 : DEUXIEME TEST DIAGNOSTIC, TYPES D'ORGANISATIONS..... | 417 |
| ANNEXE 5 : TROISIEME TEST DIAGNOSTIC, ENONCES..... | 420 |
| Test 3 : Énoncés, version arabe..... | 420 |
| Test 3 : Énoncés, version française..... | 428 |
| ANNEXE 6 : PRE-EXPERIMENTATION, TRANSCRIPTION DES DEUX PREMIERES SEANCES..... | 436 |
| 1 ^{ère} séance..... | 436 |
| 2 ^{ème} séance..... | 448 |
| ANNEXE 7 : UNE SEQUENCE INTRODUCTIVE DES PROBABILITES..... | 455 |

Introduction

Situation de la recherche

Le champ des probabilités présente un terrain problématique aussi bien du côté de l'enseignement que du côté de l'apprentissage.

Du côté de l'enseignement : d'abord, par les "hésitations" d'ordre épistémologique concernant notamment le choix de leur approche ; ensuite, par les difficultés d'ordre didactique, concernant notamment le manque de moyens de contrôle pour les enseignants (Steinbring 1989 ; Maury 1992 ; Brousseau et al. 2002, 2005).

Du côté de leur apprentissage : de nombreux travaux ont montré les difficultés qu'ont généralement les étudiants universitaires, les lycéens, les collégiens et les élèves du primaire dans la résolution de problèmes probabilistes, ces difficultés étant concrétisées notamment par les rapports inadéquats qu'ils ont à des objets probabilistes.

Au niveau du supérieur, citons M-P. Lecoutre qui s'intéresse à des problèmes de lancers de dés (par exemple : dans le lancer de deux dés, la comparaison des probabilités des événements « obtenir un 5 et un 6 » et « obtenir deux 6 »). Elle nous enseigne, entre autres, que le taux de réussite des étudiants ayant une formation approfondie en probabilités (étudiants en maîtrise ou DEA de mathématiques) est sensiblement plus faible que celui des étudiants ayant déclaré n'avoir reçu aucune formation (Lecoutre 1985a) et que « les étudiants ayant reçu un début de formation en théorie des probabilités (dans le cadre des études secondaires) ne se différencient pas notablement des étudiants ayant déclaré n'avoir reçu aucune formation » (Lecoutre 1985b, p.211).

Au niveau du secondaire, quelques travaux en didactique des mathématiques montrent certains dysfonctionnements, comme par exemple l'existence de rapports inadéquats aux notions de probabilité, d'indépendance ou de probabilité conditionnelle (Maury 1984, 1985, 1986 ; Gras et Totohasina 1995). Ils montrent aussi une appréhension de l'équiprobabilité plus problématique chez des élèves ayant entamé une formation d'une année en probabilités que chez ceux n'ayant pas eu cette formation (Lecoutre et Durand 1988 ; Dhieb 2003a, 2003b, 2005).

Au niveau du primaire et du collège, d'autres travaux nous montrent l'existence de difficultés lors de l'accomplissement de tâches probabilistes. C'est le cas par exemple dans les travaux de Fischbein et al. (1967, 1970) où la tendance déterministe de l'enseignement des

mathématiques est mise en cause, un grand nombre de réponses correctes étant d'ailleurs constaté chez les préscolaires. C'est également le cas de situations de prévision (choix parmi deux collections de boules de deux couleurs différentes de celle qui est profitable à l'obtention d'une boule d'une couleur indiquée) qui présente un problème au cas où les contenus des deux collections sont proportionnels (Bordier 1991). C'est aussi le cas de situations d'indépendance (exemple : est-il plus aisé d'obtenir trois fois la face 5 avec trois dés lancés simultanément ou avec un dé lancé 3 fois de suite) qui posent problème, le jet simultané étant supposé défavoriser l'obtention de l'événement en question (Fischbein et al. 1991 ; Truran et Truran 1999).

Ainsi, l'enseignement des probabilités apparaît comme problématique à tous les niveaux et dans de nombreux pays, les références précédentes intéressant notamment des sujets canadiens, italiens, français et la tunisiens.

L'intérêt que nous portons au domaine des probabilités est en partie dû aux difficultés associées aussi bien à son enseignement qu'à son apprentissage, difficultés que nous avons esquissées en haut. Il est encore dû à l'importance dernièrement accordée à l'approche des probabilités par les fréquences dans les curricula tunisiens (cf. chapitre IV).

Outre l'approche axiomatique, qui est généralement une affaire de l'enseignement supérieur, les probabilités sont généralement introduites de manière "intuitive" ou "expérimentale". Leur enseignement ne peut s'effectuer alors que selon deux approches, une approche dite « laplacienne » ou « a priori » et une autre dite « fréquentiste » ou « a posteriori » (cf. chapitre II, sous 2.1 et 2.2).

Nous faisons l'hypothèse de l'intérêt des deux approches et leur complémentarité dans la culture de l'esprit aléatoire à côté de l'esprit déterministe et nous en tiendrons compte dans nos investigations.

Parler d'une estimation des probabilités par les fréquences, c'est parler d'une mathématique expérimentale. Borel nous rappelle dans ce sens que "les conventions que font les mathématiciens leur sont suggérées par l'observation et par l'expérimentation appliquées aux phénomènes naturels" (Borel 1941, p. 46). Par ailleurs, il nous apprend qu'en mathématiques, les définitions proviennent d'abord par analogie à des objets réels ; elles peuvent être ensuite "de pures créations de l'esprit humain [...] justifiées par le fait qu'elles ont permis de résoudre plus facilement des problèmes que se posaient les mathématiciens ou les

physiciens’’¹. Cet auteur utilise les probabilités pour répondre à maintes questions notamment biologiques et sociales. Pour lui, la “théorie des probabilités est la science des collectivités’’ (Borel 1950, p. 250).

Nous situons alors notre travail dans une intersection de deux lieux. Nous le plaçons d’abord dans la lignée de recherche et de construction des situations didactiques. Nous le situons ensuite dans le contexte d’évolution des programmes mathématiques relatifs à divers pays qui ont officialisé l’approche expérimentale des probabilités.

L’objet des probabilités, un objet équivoque

L’objet des probabilités qui est l’étude des phénomènes aléatoires paraît équivoque.

Dans la résolution de problèmes probabilistes, il y a différents types de difficultés. Ces difficultés peuvent être liées au contexte de la tâche (Maury 1984), elles peuvent être liées à la forme de la question (Maury 1985), mais elles sont surtout liées à une expérience individuelle, à un rapport à l’aléatoire assujéti à l’institution de la vie quotidienne.

Il existe, entre autres, des difficultés d’ordre épistémologique : est-ce que le « hasard » peut être gouverné par des lois ? Est-il mathématisable ? Ne serait-il pas chez un nombre considérable l’antithèse de l’idée de loi ?

Il est aussi des difficultés d’ordre linguistique qui interviennent dans la résolution de problèmes probabilistes : les sens attribués à la notion de « hasard », les sens donnés aux termes « chance » au singulier et « chances » au pluriel, les nuances entre les termes « possible » et « probable »...

Problématique générale

Nous rejoignons Maury (1986, p. 16) en disant qu’à l’université, bien qu’intimement liées, la statistique et les probabilités “s’ignorent généralement”.

Par ailleurs, c’est un peu grâce aux nombreuses applications de la théorie des probabilités que son enseignement au secondaire était introduit ou réintroduit², un peu partout dans le monde, vers le milieu du 20^{ème} siècle (Unesco 1973).

Le champ des statistiques et des probabilités est unanimement reconnu comme indispensable pour la compréhension du monde actuel par les élèves à travers notamment l’importance sociale des questions liées au traitement (graphique, statistique, ...) de l’information.

¹ BOREL E., La définition en Mathématique, In *LE LIONNAIS* (1998), pp. 24-34.

² Les probabilités sont réintroduites dans l’enseignement car, ayant peu "d’applications intéressantes", elles ont disparu au début du 20^{ème} siècle.

Introduction

Aujourd'hui, les probabilités sont un objet d'étude dans les institutions scolaires de divers pays ; mais, leur transposition diffère d'un pays à l'autre. Pour ne parler que du cas de l'Europe, il suffit de procéder à une lecture de Boni et al. (2001) pour s'apercevoir des différences dans cette transposition, parfois au sein d'un même pays. Elle n'est pas effectuée dans une même approche et elle ne concerne pas les mêmes niveaux scolaires.

En Tunisie, les probabilités sont restées une affaire du secondaire. Leur introduction au niveau du collège est récente. Elles font effectivement l'objet d'un enseignement pendant l'année scolaire 2006-2007 en 7^{ème} année de base et pendant l'année scolaire 2007-2008 en 8^{ème} année de base. Leur enseignement se poursuivra en 2008-2009 en 9^{ème} année de base³.

Apparaît alors la nécessité d'aborder les rapports qu'ont les élèves, notamment ceux du collège, avec des notions probabilistes.

Notre travail se veut une contribution à l'étude didactique de quelques notions probabilistes, les notions de la quantification des probabilités et d'expérience aléatoire étant les notions particulièrement visées. Nous y étudions les rapports d'élèves notamment à la quantification des probabilités et à l'indépendance chronologique, notion essentielle pour aborder l'objet qu'est une expérience aléatoire.

Dans ce travail, nous abordons ce qui existe afin de répondre à la question de ce qui peut exister. Ce qui existe est approché du côté des transformations des curricula ; il est surtout abordé du côté des connaissances des élèves, singulièrement les connaissances disponibles avant tout enseignement probabiliste, les « connaissances spontanées ». Nous imputons l'importance de l'exploration du terrain spontané des connaissances au fait qu'une « connaissance trop partielle de l'enseignant à propos des difficultés de ses élèves et des outils effectivement disponibles chez eux peut provoquer un décalage important entre les connaissances que l'élève met en œuvre et celles qu'attendait l'enseignant » (Grenier 1988, pp. 404-405).

Ce sont des rapports particuliers aux objets de savoir qui sont ici ciblés, les conceptions spontanées (cf. chapitre I, sous 7.2.2), notamment celles de collégiens.

L'un de nos objectifs consiste à relever les conceptions les plus mobilisées dans certaines situations probabilistes. Les situations utilisées sont la situation de prévision selon la terminologie de Piaget (chapitres VII et IX), la situation de décision à posteriori selon la terminologie d'Alarcon (chapitre VIII) et d'autres situations que nous nommons situation

³ Le niveau du collège comporte trois années : la 7^{ème} année, la 8^{ème} année et la 9^{ème} année de base.

d'équiprobabilité (chapitres V et VI), situation d'indépendance (chapitres V, VI et VII), situation statistique de prévision et situation statistique de décision (chapitre IX).

À côté des conceptions spontanées produites dans une situation, nous importent les variables qui les ont favorisées, les « variables de commande ». Parmi ces variables qui sont d'une importance capitale aussi bien pour l'avancée de la recherche que pour le praticien qu'est le professeur, nous citons le contenu des sacs (dans le cas d'une situation où figurent par exemple deux sacs contenant chacun des boules blanches et des boules noires), le référent (boules, roulettes, dés, ...) et la forme de la question (ouverte, QCM, ...). C'est au sens qu'une certaine modalité favorise certaines conceptions et disqualifient d'autres que ces variables sont importantes.

Un autre objectif consiste à préparer une séquence didactique visant l'introduction des probabilités par les fréquences.

Notre travail, qui tente de répondre à des questions se présentant avant et pendant chacune de nos expérimentations, est, cependant, en permanence guidé par une hypothèse relative à la spontanéité de la conception P « *cas favorables / cas possibles* » correspondant à la définition "habituelle" de quantification de la probabilité uniforme dans l'institution scolaire.

Plan du travail

Ce travail est composé de trois parties : une première partie réunissant éléments théoriques et état des lieux, une deuxième partie contenant des tests diagnostics et une troisième partie visant une séquence d'enseignement.

La première partie est composée de six chapitres. Suite à un travail synthétique, le premier chapitre présente, une modélisation de l'objet « conception » et débouche sur les éléments théoriques constitutifs du cadre théorique de ce travail. Le deuxième chapitre présente des éléments historiques et épistémologiques concernant le domaine des probabilités. Le troisième chapitre constitue une revue de la littérature en relation avec notre sujet. Le quatrième chapitre présente les différents programmes tunisiens relatifs au champ des probabilités dans les différentes réformes. Les cinquième et sixième chapitres traitent l'impact d'un enseignement des probabilités sur les conceptions des élèves. Sont étudiées les notions de l'équiprobabilité et d'indépendance des épreuves.

La deuxième partie est composée de trois chapitres constituant des tests diagnostics, où l'étude porte sur les conceptions spontanées. Les septième et huitième chapitres s'intéressent au niveau de la 8^{ème} année de base et le neuvième chapitre teste différents niveaux allant de la

Introduction

6^{ème} année de base⁴ à la 1^{ère} année secondaire⁵. Ces tests portent sur différentes situations appelant les deux approches des probabilités. Sont étudiés essentiellement la quantification des probabilités et l'indépendance chronologique.

La dernière partie comporte un seul chapitre. Nous y présentons une pré-expérimentation visant la construction d'une séquence d'enseignement qui introduit les probabilités dans une approche fréquentiste.

⁴ Dernière année de l'enseignement primaire.

⁵ Première année du lycée.

Chapitre I.

Eléments théoriques

- 1. Introduction*
- 2. Modélisation et modèle*
- 3. Simulation*
- 4. Connaissances et savoirs*
- 5. Modélisation du savoir*
- 6. Modélisation de la connaissance : les conceptions*
- 7. Conceptions et TAD*
- 8. Modélisations de l'enseignement*
- 9. Conclusion : cadre théorique*

1. Introduction

La finalité de cette partie est l'exposé du cadre théorique de notre recherche.

Notre travail porte essentiellement sur les connaissances probabilistes des élèves et sur la pratique enseignante dans le domaine des probabilités. Nous intéressent, en grande partie dans ce travail, aux rapports personnels aux objets de savoir qu'est le domaine des probabilités, nous sommes amenés à modéliser ces rapports en termes de conceptions.

Avant d'explicitier notre acception de la notion de conception qui est centrale dans notre travail, clarifions ce que nous entendons par modèle et simulation.

2. Modélisation et modèle

Nous nous proposons dans cette partie d'aborder la notion de modèle dans différents champs, notamment en mathématiques.

2.1. La notion de modèle

Les notions de modélisation et de modèle sont utilisées dans plusieurs champs et, au sein d'un même champ, elles peuvent être utilisées dans des sens différents. Dans l'abord de ces notions, nous commençons par des acceptions relevant de dictionnaires qui parlent entre autres du modèle mathématique et sa relation avec d'autres disciplines telle que la physique avant de passer aux spécificités de ces notions en didactique des mathématiques.

Commençons par quelques acceptions du terme « modèle » :

“Ce que l'on reproduit par imitation [...]. Toute structure formalisée utilisée pour rendre compte d'un ensemble de phénomènes qui possèdent entre eux certaines relations. [...]. Modèle mathématique, représentation mathématique d'un phénomène (physique, biologique, social, etc.) réalisée dans le dessein d'étudier celui-ci plus aisément...” (Larousse 3 vol. 1983, p. 2052)

D'après un autre dictionnaire, il paraît que l'utilisation la plus fréquente du modèle mathématique soit “celle du « physicien », qui utilise les notions de la mathématique (y compris celles de la théorie des modèles) pour réduire, décrire, étudier le monde sensible ou celui qui est conceptualisé dans le langage naturel” (Encyclopaedia Universalis 1996, 15, p. 530).

D'après Zerner, cité par Dupin (1995, p. 247) le terme "modèle" s'est manifesté au tournant du 20^{ème} siècle "dans les sciences physiques. Depuis, l'usage du terme a envahi tous les champs scientifiques et a même débordé sur d'autres champs". En effet, après la parution de la théorie des modèles en logique mathématique vers la fin de la première moitié du 20^{ème} siècle, cette notion s'est vue envahir les sciences sociales avant de prendre d'autres dimensions avec le développement de l'informatique.

On peut trouver une acception assez générale de la notion de modèle ainsi formulée :

“Dans sa définition la plus large, la notion de modèle recouvre toute représentation d'un système réel, qu'elle soit mentale ou physique, exprimée sous forme verbale, graphique ou mathématique » (Walliser, 1997, p. 116).

La modélisation peut être considérée à double sens dans le monde informatique : “Le ressort des micromondes⁶ tient donc à cette double démarche de modélisation, de la théorie à un modèle sous forme de réalités élaboré par le concepteur du micromonde, du monde des réalités à une théorie reconstruite par le sujet qui interagit avec le micromonde” (Caponi et Laborde 1995, p. 266).

En didactique des mathématiques, la notion de modèle est entre autres utilisée pour rendre compte du comportement et des activités des élèves dans une situation.

Brousseau (1972, pp. 10-11), par exemple, commence par se référer à la théorie des modèles avant d'en donner quelques types. Il parle alors de modèles implicites et de modèles explicites. Un modèle implicite, dit-il, est utilisé par un observateur pour formuler, prévoir et expliquer les comportements d'un sujet placé dans une situation. “Les modèles explicites sont, d'une part, ceux à l'aide desquels le sujet formule, prévoit et explique cette situation, d'autre part, ceux avec lesquels il justifie ses comportements devant la situation » (ibid., p. 11).

Il rédige par ailleurs des définitions de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques (TSDM ou TSD) dont la suivante :

“*Modèle implicite d'action* : C'est d'abord une description systématique aussi simple que possible des comportements d'un actant dans une situation. On l'appellera stratégie (valable pour tous les cas) ou tactique (pour certains seulement). Ce modèle peut être utilisé pour tenter de prévoir les comportements effectifs d'un sujet, mais il est construit par l'observateur

⁶ “Un micromonde est une création d'un monde de réalités artificielles fournissant un modèle (au sens des logiciens) d'une théorie” (Caponi et Laborde 1995, p. 265).

d'après des critères objectifs, que le sujet observé ait conscience ou non de ce qu'il fait et qu'il soit capable de l'expliquer ou non.

En T.S.D.M un *Modèle implicite d'action* est, de plus, une représentation simplifiée mais suffisante de la façon dont une connaissance sous une forme particulière (ex. théorème en acte...) peut déterminer les comportements d'un actant dans une situation donnée. Cette représentation du fonctionnement des connaissances dans les décisions, suivant leur validité et leur utilité dans des circonstances précises est l'instrument fondamental de la TSDM comme épistémologie expérimentale." (Brousseau 2003, p. 3)

Ainsi la notion de modèle est utilisée pour décrire les comportements des élèves par exemple. Elle peut aussi servir à la description des comportements du professeur, les élèves et le professeur étant des « actants ».

Il est unanime qu'une modélisation - quel que soit l'acceptation qu'on fait du terme - nécessite deux systèmes, le système étudié (modélisé) et le système du modèle (modélisant). Les auteurs qui ont travaillé sur la modélisation exigent du modèle quelques caractéristiques. Alors quelles sont ces caractéristiques ?

Julo, s'intéressant aux modèles mathématiques, considère qu'un modèle est un outil de résolution de problèmes. Pour lui, un "modèle possède deux caractéristiques principales : il est une simplification d'un système donné et il permet une action sur ce système" (Julo 1995, p. 63). Cet auteur donne peu d'importance au fait que la modélisation⁷ soit une "abstraction" ou une "particularisation".

Achour admet que "certains phénomènes en sciences humaines peuvent être modélisés par des systèmes de diagrammes, d'enchaînements, etc. non forcément calculables mathématiquement. Cependant les principales caractéristiques d'un modèle [...] doivent rester présentes : simplification (mais sans perdre des informations importantes), adéquation à l'observation, prévision." (Achour 2005, p. 30)

Nous retenons plutôt l'hypothèse selon laquelle le modèle est du côté de la théorie ; toutefois, quelles relations entretient-il avec elle ?

Une première réponse est qu'ils sont différents et que la différence réside au fait que les modèles permettent l'action et que les théories "ont plus vocation à expliquer les choses qu'à agir sur elles" (Julo op. cit., p. 63).

⁷ Il entend par modélisation, la construction de modèles.

Une deuxième réponse dit que la théorie est “une famille de modèles” (Johsua et Dupin 1993, p. 17).

Une troisième réponse, que nous rejoignons, confond les deux termes (Chevallard 1992).

D’ailleurs, ce dernier donne une définition métaphorique mettant à nue l’illusion de ressemblance qui pourrait-être exigée entre modélisant et modélisé :

“Je dirai donc qu’une théorie ou un modèle d’un système donné est une *machine* dont la mise en fonctionnement permet *de produire des connaissances* relatives au système modélisé (ou théorisé).” (ibid., p. 77)

Aussi dit-il, “nous pouvons parler aujourd’hui de *modèle euclidien de l’espace*” (Chevallard 1989-1990, p. 11) pour désigner la théorie qu’est la géométrie euclidienne.

Assez souvent, le modèle fait partie du domaine théorique et le système étudié est extra mathématique.

Chevallard étend cette vision des choses au cas où le système étudié est lui aussi mathématique. Il désigne alors “ le registre du système comme celui du **mathématisé**, celui dans lequel se conduit la modélisation comme registre **mathématique**” (Chevallard 1989, p. 54), le mathématisé pouvant être mathématique.

D’ailleurs, c’est dans ce contexte qu’il prend l’exemple d’un carré de côté $(a + b)$. Les rapports des aires sont modélisés par l’égalité algébrique $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Il remarque que la figure géométrique peut-être regardée comme étant un modèle géométrique de l’égalité algébrique.

| | | |
|----------------|----------------|---|
| | a | b |
| a ² | ab | |
| ab | b ² | |

Autrement dit, une représentation, dans un registre sémiotique au sens de Duval⁸ (1993, 1996), peut être considérée comme un modèle. Nous ajoutons que c’est faisable dans le cas où cette représentation est, elle-même, productrice de connaissances.

Remarquons ici qu’en plus qu’une théorie peut être considérée comme étant un modèle, les systèmes mathématisé et mathématique peuvent constituer eux-mêmes des théories. C’est dans ce sens que le “modèle” est pris comme étant une “« interprétation » d’une théorie mathématique à l’aide d’une autre” (Bourbaki 1974, p. 35) dans une vision unificatrice des « sciences mathématiques ».

⁸ Cf. par exemple Duval 1993, p. 41.

C'est aussi dans le sens d'une interprétation que Henry donne la définition suivante :

“Un modèle est une interprétation abstraite, simplifiée et idéalisée d'un objet du monde réel, ou d'un système de relations, ou d'un processus évolutif issu d'une description de la réalité.”

(Henry 2001, p. 151)

Nous convenons qu'*un modèle est une interprétation abstraite, ou l'une de ses représentations, permettant l'accès à des connaissances à propos d'un système étudié.*

Il faut dire qu'une représentation d'un modèle laisse voir des éléments et en cache d'autres et que, donc, le choix d'une représentation dépend du sujet de l'étude.

Pour notre recherche, nous considérons que la modélisation peut aussi bien signifier l'utilisation que la construction d'un outil théorique appelé modèle, afin de produire de nouvelles connaissances en répondant à une question à propos d'un système, ce système pouvant être mathématique ou non.

Ainsi, l'équiprobabilité est un modèle - mathématique - pour le système « jet d'une pièce de monnaie » ; les combinaisons et les graphes sont deux modèles - mathématiques - servant à dénombrer les cas possibles ou favorables dans une expérience aléatoire. La théorie des situations didactiques (TSD) et la théorie de l'anthropologie didactique (TAD) sont deux modèles - didactiques - servant à produire des réponses à des questions relatives au système didactique enseignement - apprentissage.

L'étude précédente montre qu'un modèle peut-être présenté dans plusieurs systèmes de signes ou registres sémiotiques. Dans le cas où un modèle est présenté en langage courant, en y introduisant « des objets idéalisés de la réalité » (dé parfait, urne, ...), Henry (2001) le qualifie de « pseudo-concret ».

2.2. Modèles d'urnes

Parmi les modèles pseudo-concrets dans le domaine des probabilités, nous distinguons les modèles d'urnes.

Dans les exercices relevant du domaine qui nous importe, il est assez souvent fait référence à des urnes contenant des boules de couleurs différentes. Dans ces cas, des expériences aléatoires peuvent être représentées par des extractions « au hasard » de boules à partir d'une urne déterminée ou choisie parmi un nombre donné d'urnes et, le résultat d'une épreuve

correspond alors aux couleurs des boules extraites⁹. Ces extractions sont faites selon une modalité - "un schéma" - bien déterminée.

Il y a aussi des exercices modélisables en terme d'extractions d'une ou de plusieurs urnes. On peut par exemple représenter le jet d'une pièce de monnaie par l'extraction d'une boule dans une urne contenant des boules de deux couleurs différentes dans le même rapport. On peut aussi remplacer le lancer d'un dé par le tirage d'une boule dans une urne contenant n boules blanches et $5n$ boules noires si l'on s'intéresse au résultat « obtenir 6 » par exemple.

Dans chacun des cas mentionnés, nous avons affaire à un modèle d'urne basé sur l'hypothèse de l'équiprobabilité du tirage d'une quelconque boule et décrivant une certaine loi de probabilité.

Par ailleurs, un nombre considérable de phénomènes ou de processus réels peuvent être modélisés par des lois discrètes, lois qui nous importent dans ce travail. Ces lois sont souvent introduites à partir de modèles pseudo-concrets qui les représentent ; il est question de modèles d'urnes qui "ont l'avantage d'être simples et de se prêter à une réalisation pratique" (Raymondaut 2003, p. 51). Ainsi, un modèle d'urne aide à décrire quelques "expériences aléatoires composées d'une ou plusieurs épreuves dont les résultats possibles sont résumés par un certain nombre de caractéristiques qualitatives" (ibid. p. 51), une caractéristique étant représentée par une couleur déterminée des boules de l'urne.

La notion d'expérience aléatoire nous amène à étudier l'objet « simulation » qui intervient souvent à son propos.

3. Simulation

La simulation est un terme aujourd'hui utilisé dans plusieurs domaines. Elle est utilisée dans le domaine qui nous intéresse, celui des probabilités. Nous voulons dans cette partie clarifier ce que nous entendons par ce terme et commençons par présenter quelques acceptions trouvées dans des dictionnaires.

En général une simulation renvoie à des verbes tels que imiter, reproduire. Ainsi par exemple, simuler, c'est "donner les apparences de" et simulateur veut dire un "appareil simulant un phénomène c'est-à-dire capable de reproduire le comportement d'un autre appareil dont on désire étudier le fonctionnement, ou d'un corps dont on veut suivre l'évolution." (Larousse 3 vol. 1983, pp. 2845-2846)

⁹ Pour les notions d'expérience aléatoire et d'épreuve, voir le chapitre suivant sous 4.2.2.

Par ailleurs, une simulation est considérée comme étant “l’*expérimentation sur un modèle*. C’est une procédure de recherche scientifique qui consiste à réaliser une reproduction artificielle (*modèle*) du phénomène que l’on désire étudier...” (Encyclopaedia Universalis 1996, 21, p. 30),

Aussi, la simulation peut être prise pour un ensemble de “techniques permettant d’étudier le comportement futur d’un système à partir d’un *modèle mathématique* approprié, programmé de manière à étudier l’évolution des différentes variables représentatives du phénomène que l’on cherche à analyser” (Morvan 1981, p. 266).

En probabilités, Glayman et Varga (1973) considèrent que l’objectif principal “de la simulation consiste à remplacer l’étude d’un phénomène aléatoire par celle d’une table de nombres aléatoires qui *imite* le phénomène” (p.150). Il est question de déterminer les probabilités d’avoir, dans les familles de 4 enfants, 0 fille, 1 fille, 2 filles, 3 filles, 4 filles, tout en supposant qu’il y a autant de « chances » d’avoir un garçon qu’une fille. Les auteurs commencent par donner une réponse basée sur le dénombrement après quoi ils donnent des valeurs approchées issues de deux simulations. La première simulation consiste à introduire 2000 billes dans une planche de Galton à 4 niveaux comportant 5 cases (A, B, C, D, et E) et à chercher les fréquences relatives des billes obtenues dans chacune des cases. La deuxième simulation consiste à lancer 600 fois un dé (bien équilibré !) dont 3 faces portent le chiffre 0 et les 3 autres faces portent le chiffre 1 (0 correspond à une fille et 1 à un garçon), à regrouper les résultats obtenus par tranches de 4 chiffres (une tranche de 4 chiffres correspond ainsi à une famille de 4 enfants) et à chercher les fréquences relatives aux 5 compositions possibles d’une famille en utilisant la "statistique" obtenue.

La question de la relation entre simulation et modèle se pose alors. Est-ce qu’une simulation est un modèle ?

La réponse semble affirmative pour des auteurs tels que Glayman et Varga (1973) qui utilisent des simulations manuelles. Ils pensent la simulation comme étant un modèle approché (pp. 149-150).

Pour les auteurs qui pensent le modèle du point de vue théorique, la simulation ne pourrait être un modèle.

Nous rejoignons Girard (2003) qui place la simulation entre réalité (expérience) et modèle. Il fait référence à une définition donnée par Dodge : “*La simulation est la méthode statistique permettant la reconstitution fictive de l’évolution d’un phénomène. C’est une **expérimentation***”

*qui suppose la constitution d'un **modèle** théorique présentant une similitude de propriétés ou de relations avec le phénomène faisant l'objet de l'étude'' (In Girard 2003, p. 144).*

La probabilité fréquentiste repose sur le fait que "lorsque les épreuves deviennent très nombreuses, on peut, comme il est naturel, considérer leur résultat global comme fournissant une indication assez exacte de la probabilité inconnue" (Borel 1950, p. 236).

La calculatrice et surtout l'ordinateur permettent de résoudre le problème du coût, en temps, dans la répétition d'une expérience aléatoire un grand nombre de fois. Cette répétition est une simulation de l'expérience. Mais est-ce que l'élève voit dans une simulation une expérience aléatoire effective ?

Etant donné que, dans ce travail, notre intérêt porte essentiellement sur les phénomènes aléatoires, nous entendons par simulation la reproduction artificielle d'une expérience aléatoire réelle, cette reproduction étant l'exécution informatique d'un objet mathématique qui est supposé modéliser l'expérience en question. Simuler l'expérience du jet d'une pièce de monnaie revient donc à faire fonctionner, sur calculatrice ou ordinateur, l'équiprobabilité considérée comme modèle adéquat pour cette expérience.

4. Connaissances et savoirs

Dans cette partie, nous nous intéressons à la distinction faite entre les notions de connaissance et de savoir au niveau des travaux en didactique des mathématiques. Cette distinction nous semble nécessaire avant d'étudier la modélisation de ces notions que nous proposons dans la partie suivante.

4.1. Connaissances

Dans la TSD, une connaissance est un moyen de contrôle d'une situation, "elle n'est pas analysée mais exigée comme une performance relevant de la responsabilité de l'acteur" (Brousseau et Centeno 1991, p. 176).

Dans la TAD, la connaissance est déterminée à l'aide de la notion de rapport. Une personne X connaît un objet O si cet objet existe pour X, c'est-à-dire s'il existe un rapport personnel $R(X, O)$ de X à O (Chevallard 1992, pp. 86-87). Le rapport en question désigne le système de toutes les interactions possibles de X avec O (Chevallard 2003, p. 81), interactions constituant la connaissance qu'a X de O. Il en est de même pour une institution (Bosch et Chevallard 1999, p. 83) avec, cette fois, un rapport institutionnel $R_I(O)$ d'une institution I à un objet O.

Dans la suite, nous abordons deux types de connaissances utilisées dans notre recherche : les connaissances intuitives ou « intuitions » et les connaissances spontanées.

Dans une définition constituant la 3^{ème} règle pour la direction de l'esprit de Descartes, une intuition relève du domaine de "l'évidence" : «Par intuition j'entends non le témoignage variable des sens, ni le jugement trompeur de l'imagination naturellement désordonnée, mais la conception d'un esprit attentif, si distincte et si claire qu'il ne lui reste aucun doute sur ce qu'il comprend ; ou, ce qui revient au même, la conception évidente d'un esprit sain et attentif, conception qui naît de la seule lumière de la raison.» (Descartes 1824-1826, p. 212)

Pour Fischbein et al., une intuition découle d'heuristiques (Maury 1986). Ces auteurs distinguent deux types d'intuitions : «On va nommer *intuitions primaires* celles qui se manifestent avant et en dehors d'un enseignement systématique conduit intentionnellement (par ex. l'intuition de l'identité de l'objet qui subit différents changements, les intuitions spatiales et temporelles élémentaires etc.). On va nommer *intuitions secondaires* celles qui ont été construites systématiquement dans le processus d'enseignement (par ex. l'idée qu'un mobile conserve son état de mouvement ou de repos tant qu'il n'intervient pas une force extérieure.» (Fischbein et al. 1971, pp. 265-266)

Signalons que ces auteurs adhèrent au point de vue disant que l'intuition est fondée sur des "habitudes mentales" résultant des expériences personnelles (ibid. p. 265).

Dans un travail ultérieur, Fishbein utilise, en général, le terme "intuition" comme étant un équivalent de connaissance intuitive¹⁰.

Pour notre travail, nous rejoignons Maury en disant que les intuitions sont des «connaissances globales non explicitement justifiées, ressenties par le sujet comme des évidences et s'exprimant dans l'action immédiate» (Maury 1986, p. 22).

Par ailleurs, nous qualifions une connaissance d'un élève de spontanée au cas où elle se réfère à un objet qui n'a pas été enseigné.

Il faut souligner toutefois la différence entre connaissance spontanée et intuition primaire qui se manifestent avant l'enseignement : la première est observée dans des situations où le chercheur marque qu'il veut que les testés exercent leurs cognitions (demande explicite de justification notamment) contrairement à la seconde qui est observée dans des situations où l'on demande une réponse immédiate.

¹⁰ In this present work the term "intuition" will be used generally as an equivalent to *intuitive knowledge*, in other terms not as a source, not as a method, but, rather, as a type of cognition (Fischbein 1987, p. 13).

4.2. Savoirs

Il est communément admis, en didactique des mathématiques, qu'un savoir est un objet culturel particulier, il est vu comme étant un type particulier de connaissances.

La définition d'un savoir dans la TSD est la suivante :

“Le savoir est le produit culturel d'une institution qui a pour objet de repérer, d'analyser et d'organiser les connaissances afin de faciliter leur communication, leur usage sous forme de connaissance ou de savoir, et la production de nouveaux savoirs” (Brousseau et Centeno 1991, p. 176).

Connaissance et savoir se distinguent alors par leur statut culturel, un savoir étant une connaissance institutionnalisée (Brousseau 1998, p. 100).

Dans une situation didactique¹¹, l'enseignant dévolue aux élèves la responsabilité de résoudre un problème où le savoir à enseigner est contextualisé ; il procède avec eux, après accomplissement de la tâche, à la décontextualisation de la connaissance produite par eux donc à l'institutionnalisation d'un savoir universel.

Pour Rouchier, le processus de dévolution permet la conversion d'un savoir à enseigner en une connaissance chez l'élève et le processus et l'institutionnalisation, à l'inverse, permet la conversion d'une connaissance produite en un savoir culturel (Rouchier 1991).

Remarquons que Conne (1992) parle de rapport de connaissance à la situation et de rapport de savoir à la situation. En s'intéressant à la relation sujet / situation, il distingue deux cas : quand le contrôle de cette relation est du côté de la situation, le sujet est en rapport de connaissance à la situation et quand le contrôle est du côté du sujet, le rapport à la situation devient un rapport de savoir. Ainsi dit-il, “*le savoir est de l'utilité des connaissances pour transformer les situations*” (Conne 1992, p. 123).

Quant à nous, nous retenons plutôt la vision "classique" (celle de Brousseau) en considérant que la connaissance est une production des élèves et que le savoir est une production culturelle d'une institution, le savoir étant une connaissance institutionnalisée.

Soulignons toutefois que le « savoir » est pris généralement en TAD au sens où les mathématiques, la théorie des probabilités par exemple sont des savoirs.

¹¹ Dans une telle situation, l'intention d'enseignement n'est pas visible.

5. Modélisation du savoir

Le programme d'enseignement dans une institution scolaire est souvent considéré comme une reconstruction didactique, une "transposition didactique", d'un ensemble de théories qualifiées de savantes, afin d'en faciliter l'accès aux apprenants. Commençons par donner un petit aperçu de la théorie qui a fourni une modélisation du savoir ou des « objets de savoir », la théorie de la transposition didactique.

À ses débuts, la théorie de la transposition didactique a axé l'analyse des contenus scolaires sur la distinction des objets *mathématiques*, *paramathématiques* et *protomathématiques*¹² (Chevallard 1991, pp. 49-51).

“La *problématique écologique* viendra élargir le champ d'analyse et permettra d'aborder les contraintes qui se créent entre les différents objets de savoir à enseigner” (Bosch et Chevallard 1999, p. 83).

Cette théorie a, ensuite, été enrichie en adoptant une approche anthropologique, c'est à dire en replaçant la problématique de la transposition dans un cadre institutionnel. Dans son modèle des rapports au savoir, Chevallard situe la didactique ou “la didactique des savoirs” dans “la didactique des connaissances” qui, elle, se situe dans “l'anthropologie cognitive” (Chevallard 1992). La théorie de la transposition didactique prend ainsi le nom de Théorie Anthropologique du Didactique (TAD).

La notion de "praxéologie" ou d' "organisation praxéologique" vient finalement combler un manque, celui de l'élaboration d'un modèle pour l'analyse des pratiques institutionnelles dans la TAD : “on y admet en effet que *toute* activité humaine régulièrement accomplie peut être subsumée sous un modèle *unique*, que résume ici le mot de *praxéologie*.” (Chevallard 1999, p. 223)

Avant l'aborder les praxéologies, notons que dans la TAD tout est objet et que c'est en terme d'objet qu'un savoir est caractérisé :

“Les savoirs constituent une catégorie particulière d'objets que l'on peut caractériser rapidement ainsi. Tout d'abord, ces objets peuvent être *appris*, et ils peuvent être *enseignés* ; qui plus est, ils ne peuvent être *connus* sans avoir été *appris*. En outre, ils peuvent être *utilisés*, et, pour exister, ils doivent être *produits*.” (Chevallard 1992, p. 107)

¹² Chevallard propose l'addition, le cercle, la dérivation, les équations du 1^{er} degré comme exemples de notions mathématiques. Il cite la notion de paramètre, d'équation, de démonstration comme exemples de notions paramathématiques. Il ajoute qu' “il existe une strate plus profonde de « notions », mobilisées implicitement par le *contrat didactique*” qu'il qualifie de protomathématiques.

5.1. Une modélisation de l'activité mathématique

En tant "qu'activité humaine régulièrement accomplie", l'activité mathématique peut être décrite à l'aide du modèle praxéologique.

Une organisation mathématique - ou praxéologie mathématique - est constituée de *types de tâches* T à réaliser, de *techniques* τ permettant de réaliser les types de tâches, de *technologies* θ justifiant, expliquant et produisant les techniques et de *théories* Θ expliquant et produisant les technologies.

La praxéologie formée autour d'un type de tâches est appelée praxéologie *ponctuelle*. L'agrégation de plusieurs praxéologies ponctuelles donne une organisation *locale* ou une organisation *régionale* selon que l'élément unificateur est, respectivement, une technologie ou une théorie. L'amalgamation de plusieurs praxéologies régionales donne une praxéologie *globale*. En fin, l'ensemble de toutes les organisations globales constitue une *discipline*, les mathématiques par exemple.

5.2. Une modélisation du savoir

Une organisation praxéologique est ainsi composée d'un bloc *pratico-technique* $[T/\tau]$ constituant « un savoir-faire » et d'un bloc *technologico-théorique* $[\theta/\Theta]$ constituant, usuellement, « un savoir ».

Cette acception du savoir a pu être élargie par le biais des définitions des praxéologies locales, régionales et globales :

“La notion de *savoir* peut maintenant être reliée à ces nouveaux termes : un savoir renvoie à une *organisation praxéologique* particulière, douée d'une certaine « générativité » lui permettant de fonctionner comme appareil de production de connaissances, c'est-à-dire de nouvelles praxéologies.” (Bosch et Chevillard 1999, p. 87)

Dans l'enseignement des mathématiques, la mise en place d'une organisation ponctuelle $[T/\tau/\theta/\Theta]$, c'est-à-dire d'une organisation ne renvoyant qu'à un seul type de tâches n'est pas, en général, concevable. En classe, c'est, en général, un amalgame d'organisations ponctuelles autour d'une même technologie, c'est-à-dire une organisation locale $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]_{i \in I}$, que le professeur vise à mettre en place.

Remarquons que les organisations ponctuelles, locales, régionales et globales sont identifiées à des niveaux de détermination mathématique différents. Ces niveaux sont respectivement

ceux de *sujet d'études*, de *thème d'études*, de *secteur d'études* et de *domaine d'études* (Chevallard 2002).

Intéressons nous à l'enseignement des mathématiques au collège ou au lycée.

À un niveau scolaire donné, correspond tout un domaine d'études mathématiques constituant une organisation mathématique globale $[T_{ji}/\tau_{ji}/\theta_j/\Theta_k]_{i \in I, j \in J_k}$. Ce domaine est départagé en plusieurs secteurs d'études constituant chacun une organisation mathématique régionale $[T_{ji}/\tau_{ji}/\theta_j/\Theta]_{i \in I, j \in J}$.

Quand on parle de savoir à enseigner, on pense soit à une organisation régionale soit à une organisation globale.

Dans ce travail, nous nous intéressons essentiellement à un secteur d'études, celui des probabilités. Nous parlons alors de savoir probabiliste pour désigner ce secteur, c'est-à-dire pour désigner une organisation mathématique régionale. *Ainsi, un savoir probabiliste est un ensemble d'organisations mathématiques locales ; il est relatif à une institution scolaire.*

6. Modélisation de la connaissance : les conceptions

Un individu ou un groupe d'individus entretiennent des relations avec des objets mathématiques. Ces relations peuvent changer en fonction du temps ; elles peuvent se développer par exemple après un enseignement des objets en question. Elles n'ont pas ainsi de caractère définitif : "Le réel n'est jamais « ce qu'on pourrait croire » mais il est toujours ce qu'on aurait dû penser." (Bachelard 1999, p. 13)

En didactique, notamment en didactique des mathématiques, l'élève acquiert le statut de sujet connaissant et la connaissance devient une propriété du système sujet/milieu, c'est à dire du sujet en situation. Dans ce cadre, l'erreur serait témoin d'une connaissance antérieure, "l'erreur est un point de vue d'une connaissance sur une autre connaissance (éventuellement chez un même sujet, d'une connaissance nouvelle sur une connaissance ancienne)" (Balacheff 1995, p. 222). Elle témoigne, donc, d'un "déjà-là", de certaines relations à l'objet d'étude.

6.1. Quelques usages des conceptions

Pour rendre compte des rapports qu'entretiennent des élèves avec un objet de savoir avant ou après son enseignement, des chercheurs en didactique des mathématiques ont fait usage de plusieurs termes tels que modèles ou conceptions.

Dans quelques travaux en didactique des mathématiques, en particulier dans les premiers, le terme *conception* semble importé du langage courant. Il fonctionne “sans qu’au départ les auteurs semblent éprouver le besoin d’en donner une définition didactique” (Artigue 1990, p. 266). Il fonctionne ainsi comme un objet « paradidactique » : “il est présent, de fait, dans les travaux de recherche comme un outil mais sans accéder au rang d’objet d’étude, pour lui même.” (Balacheff 1995, p. 223).

Dans une reprise de son travail de DEA soutenu en 1982, Duroux définit la notion de *conception* :

“Dans le déroulement du processus d’acquisition pour diverses causes [...] certaines de ces situations¹³ sont privilégiées au détriment d’autres, ce qui provoque l’apparition de connaissances locales, opérantes sur des sous-classes du champ conceptuel et pour certaines valeurs des variables des situations concernées. C’est ce savoir local que nous appellerons *conception*” (Duroux 1983, p. 53).

Un usage assez intéressant, à notre sens, du terme *conception* apparaît dans un article dû à Artigue et Robinet. En proposant à des élèves de l’école élémentaire des situations, où l’utilisation de formes géométriques est effective, les deux chercheurs ont remarqué l’apparition de plusieurs conceptions, à propos d’une même figure, selon la tâche proposée. Elles ont donc décidé “d’observer, dans un premier temps, le comportement des élèves dans des situations variées, de recenser dans chaque cas les procédures utilisées, et d’étudier s’il était possible d’associer à ces procédures des conceptions des figures géométriques (qui seraient à définir).” (Artigue et Robinet 1982, p. 7)

Elles focalisent, ensuite, sur le cercle et lui attribuent plusieurs définitions qui sont toutes logiquement équivalentes mais qui correspondent à plusieurs manières de le percevoir. Elles établissent que ces définitions présentent, d’une part, deux *points de vue* distincts “*ponctuel* (un ensemble de points) et *global* (une courbe)” et, d’autre part, deux aspects différents “*statique* et *dynamique* (idée de mouvement)”. Elles établissent ainsi une catégorisation des conceptions du cercle selon les critères « ponctuel-global » et « statique-dynamique ». Elles exploitent, ensuite, cette catégorisation pour les situations expérimentales de la recherche et pour l’analyse des procédures utilisées par les élèves :

“La distinction que nous avons opérée entre l’objet mathématique qui est unique et les conceptions variées qui peuvent lui être associées nous paraît importante. Elle constitue, dans

¹³ L’auteur parle ici des situations problèmes qui sont mises en correspondance avec un concept donné et qui lui donnent un sens.

la recherche, un outil d'analyse des situations-problèmes proposées aux élèves comme de leurs procédures'' (ibid. p. 18).

Remarquons que cette recherche met en relief l'étroite dépendance entre les situations et les conceptions du cercle mises en œuvre "de façon opératoire" par les élèves de l'école élémentaire.

La notion de point de vue, rencontrée dans le paragraphe précédent, est définie de la manière suivante : "Un *point de vue* est un découpage dans le corps des savoirs mathématiques sur un objet donné, rassemblant définitions, théorèmes, situations et signifiants. Il introduit une différenciation au sein des propriétés identifiées « naturellement » par le mathématicien car logiquement équivalentes." (Castella 1995, p. 10)

Castella introduit une distinction entre « point de vue » (qui est une caractérisation du savoir puisqu'il relève de son analyse) et « conception » (élaborée à travers les comportements de l'élève) : "Chaque point de vue ainsi dégagé donne usuellement naissance à une conception derrière laquelle il s'efface" (ibid. p. 11). Ainsi, pour elle, une conception est une modélisation qui est élaborée par le chercheur, qui n'a pas de portée globale et qui n'est pas non plus strictement locale (ibid. pp. 9-10).

Nous voyons ainsi, d'après les textes précédents, que le terme conception renvoie plutôt à un "objet local" en étroite relation avec un savoir mathématique et avec les problèmes dans lesquels il est opératoire. Cet objet est construit par le chercheur afin de constituer un outil d'analyse des comportements des élèves ; c'est aussi un outil pour l'élaboration de situations didactiques.

6.2. Une définition pragmatique

Dans sa théorie des champs conceptuels¹⁴ - qui propose un découpage des connaissances tenant compte du fonctionnement de l'élève et d'une analyse mathématique - Vergnaud dit que la conceptualisation (processus de formation d'un concept) est une construction du sujet à partir des schèmes existants qui s'adaptent aux nouvelles situations (Vergnaud 1990, 2005). Cette théorie pragmatique de la connaissance met le concept de schème au centre de la conceptualisation. Un schème est défini de 4 façons complémentaires ; il est défini, entre autres, comme étant "une organisation invariante de l'activité pour une classe définie de situations." (Vergnaud 2005, p. 128)

¹⁴ Un champ conceptuel est défini comme étant "à la fois un ensemble de situations (plus précisément de classes de situations) et un ensemble de concepts, dont toutes les propriétés ne se développent pas en même temps au cours de l'expérience et de l'apprentissage." (Vergnaud 2005, p. 132)

La notion de champ conceptuel est ainsi définie à partir de la notion de concept. En 1982, Vergnaud donne une définition, ou une formalisation, pragmatique d'un *concept* comme étant un triplet de trois ensembles :

- un ensemble S de situations qui lui donnent du sens (*la référence*),
- un ensemble I d'invariants opératoires, c'est-à-dire de concepts-en-acte et théorèmes-en-acte, qui interviennent dans les schèmes de traitement de ces situations (*le signifié*),
- un ensemble de représentations langagières ou non permettant de représenter le concept, ses propriétés, les situations et les procédures concernées (*le signifiant*).

Pour Vergnaud, la notion de *conception* est l'analogue du concept, à un moment donné, du côté du sujet. Il s'explique d'ailleurs sur ce point, répondant à une question de Brousseau, en disant qu'il n'y a pas une grande différence entre le mouvement de construction de concepts dans la culture et celui chez un sujet individuel. Il ajoute : "Si l'on regarde l'histoire des mathématiques, on est frappé par le fait que les connaissances nouvellement produites ont un caractère local, comme chez l'élève qui apprend." (Vergnaud 2005, p. 136)

Dans sa thèse, soutenue en 1984, Artigue reprend la définition de Vergnaud en d'autres termes :

- “Comme l'on distingue dans un concept mathématique :
- la notion mathématique telle qu'elle est définie dans le contexte du savoir savant à une époque donnée,
 - l'ensemble des signifiants associés au concept,
 - la classe des problèmes dans la résolution desquels il prend son sens,
 - les outils : théorèmes, techniques algorithmiques, spécifiques du traitement du concept,
- on distinguera dans les conceptions des sujets ces diverses composantes et, en particulier :
- la classe des situations-problèmes qui donnent son sens au concept pour l'élève,
 - l'ensemble des signifiants qu'il est capable de lui associer, en particulier les images mentales, les expressions symboliques,
 - les outils, théorèmes, algorithmes dont il dispose pour manipuler le concept.” (Artigue 1990, op. cit. p. 271)

Elle conteste toutefois l'utilité et la pertinence d'une telle définition globale pour le didacticien qui ne pourrait prétendre la globalité d'une conception détectée à partir de quelques situations.

Ce qui intéresserait le didacticien, c'est plutôt la détection de conceptions locales (se manifestant en situation de résolution de quelques problèmes) et l'analyse des conditions de passage d'une conception à une autre.

En didactique des mathématiques, ce sont les invariants opératoires qui se trouvent au premier plan dans l'attribution des conceptions aux réponses des élèves. On le constate même dans les travaux où le terme « conception » n'est pas explicité (Maury 1984, 1985, 1986, 1987, Grenier 1988, ...).

En 1984, Maury met en évidence l'impact du « contexte »¹⁵, utilisé dans les énoncés des exercices, sur les arguments (pertinents et non) développés par les élèves. Elle conclut par dire : “Cela met en évidence que des problèmes équivalents d'un point de vue probabiliste ne le sont pas forcément sur le plan cognitif ; cela permet aussi de penser que les élèves disposent de plusieurs *modèles probabilistes spontanés* dont la mobilisation dépend entre autres du contexte” (Maury 1984, pp. 208-209). Notons d'ailleurs qu'elle a décelé des conceptions probabilistes différentes dans un même contexte ou référent.

6.3. Le modèle cKç (conception, connaissance et concept)

Dans les recherches précédentes s'intéressant aux “conceptions”, on voit paraître, chez les élèves, plusieurs *conceptions* se rapportant au même savoir mathématique. Ces conceptions, pouvant être concurrentes, forment en quelque sorte l'historique de la connaissance de cet élève. Elles sont cohérentes dans le référentiel de l'élève et peuvent apparaître contradictoires en référence à un savoir mathématique.

Pour résoudre le problème de l'existence chez un même élève de “connaissances recouvrant une multiplicité de conceptions éventuellement contradictoires”¹⁶, en référence à un concept particulier”, Balacheff choisit de faire un détour théorique par une *formalisation* où il redéfinit les termes de *conception, connaissance et concept* :

Une *conception* C est, dans cette formalisation, caractérisée par un quadruplet (P, R, L, Σ) dans lequel :

- P est un ensemble de problèmes,
- R est un ensemble d'opérateurs,
- L est un système de représentation,
- Σ est une structure de contrôle. (Balacheff 1995, Balacheff et Margolinas 2005)

Cette définition est issue de la définition pragmatique de Vergnaud pour le concept. Elle s'en distingue notamment par “l'explicitation des structures de contrôle” (Balacheff 1995, p. 224) qui sont implicites dans la définition de Vergnaud. En effet, dans cette dernière, ces structures

¹⁵ Les contextes (référents) retenus dans la recherche sont le contexte *boule* et le contexte *roulette*.

¹⁶ Du point de vue d'un observateur.

sont intégrées dans les *schèmes* et sont déterminées essentiellement par les théorèmes-en-acte et les inférences.

Pour rendre compte de la coexistence, éventuelle, de plusieurs conceptions à propos d'une même notion, Balacheff postule l'existence d'une conception particulière de référence C_μ , la conception du chercheur "dont la particularité est qu'elle est plus générale que toute autre" (ibid. p. 226).

Balacheff définit une *connaissance* (respectivement un *concept*) comme étant un ensemble de conceptions (respectivement de connaissances) qui renvoient au même μ -objet (ibid. p. 227).

Ajoutons que dans cette formalisation, les conceptions entretiennent des relations entre elles. Ces relations sont la généralité, la fausseté et l'objet d'une conception (Balacheff et Margolinas 2005, pp. 87-98).

Ainsi a-t-on une représentation à trois niveaux : le niveau « conception » "répond à une nécessité cognitive et pragmatique de reconstitution de la caractérisation d'un sujet rationnel cohérent en situation" ; le niveau « connaissance », où le principe de cohérence est abandonné, "répond à une nécessité épistémique, c'est-à-dire à la nécessité de caractérisation de l'état, dans toute sa complexité, d'un rapport au savoir à un moment donné" ; le niveau concept quant à lui, "répond à une nécessité ontologique, c'est-à-dire de la potentialité de définition d'un objet indépendamment de ses instances". La conception C_μ , qui rend compte du texte du savoir mathématique et où μ renvoie à un objet de ce savoir, est ainsi un bon représentant d'un concept (ibid. pp. 98-99).

Faudrait-il ajouter qu'à propos de la notion de « concept » qui est considérée par Vergnaud comme étant en évolution continue, Balacheff et Margolinas sont plutôt proches de l'acception de Brousseau : "L'étape finale, celle qui met le concept sous le contrôle d'une théorie mathématique, permet de le définir exactement par les structures où il intervient et les propriétés qu'il satisfait. Seule cette étape lui donne son *statut de concept mathématique* et le met à l'abri des ambiguïtés et des « erreurs » - mais non des reprises et des mises à l'écart." (Brousseau 1998, p. 95)

7. Conceptions et TAD

Dans la TAD, les rapports à un objet de savoir sont de deux sortes, un rapport institutionnel et un rapport personnel, ce dernier représentant la connaissance qu'a une personne de l'objet en question (cf. sous 4.1.).

Quelle place a la notion de conception dans le modèle anthropologique des rapports aux savoirs ?

7.1. Conceptions et rapport au savoir

Nous citons, ici, un article dû à Assude. Cet article présente une relecture d'une expérimentation faite en 1988 concernant les conceptions d'élèves de 4^{ème} et de 3^{ème} à propos de la racine carrée. En utilisant le modèle anthropologique des rapports, l'auteur explique l'uniformité des réponses des élèves de 3^{ème} ; en tenant compte de la contrainte *topogénétique* (la contrainte des positions dans l'institution scolaire), elle explique la non-apparition de la conception « fonction inverse » pour la racine carrée. Lisons plutôt : “La racine carrée (en tant que fonction réciproque de la fonction carrée en \mathbb{R}_+) n'apparaît pas dans le topos de l'élève (on ne lui demande rien à faire dans ce sens-là si on regarde le cours et les exercices) mais elle apparaît explicitement dans le topos de l'enseignant soit dans les manuels soit dans les programmes (objet appartenant au topos de l'enseignant et non au topos de l'élève)” (Assude 1995, pp. 12-13).

Elle identifie, ensuite, “la notion de conception au *rapport institutionnel des élèves* c'est à dire le rapport existant dans l'institution « élèves » (institution non soumise à la contrainte topogénétique de l'institution scolaire) à propos de l'objet de savoir en question” (ibid. p. 14). Elle voit ainsi que le modèle des conceptions - dans lequel le chercheur attribue à l'élève des conceptions, relatives à un champ conceptuel donné, en puisant dans l'histoire, l'épistémologie et l'enseignement des mathématiques - est un modèle descriptif. Ce modèle devrait donc faire appel à d'autres qui seraient explicatifs tel que le modèle des rapports aux savoirs.

Maury réagit à la dernière définition comme suit :

“Si tel était le cas, la notion de rapport personnel perdrait de son intérêt au plan théorique ; plus précisément son rôle serait comparable à celui des conceptions pour la théorie des situations, en ce sens qu'il permettrait d'assurer le lien entre la théorie et l'empirie, c'est-à-dire ici le lien entre le sujet institutionnel et le sujet individuel impliqué dans les observations. Chez Chevallard, l'analyse du rapport institutionnel est un préalable à l'analyse des rapports personnels, et il nous paraît en fait préférable de retenir l'idée que, dans l'approche anthropologique, les conceptions correspondent aux « rapports personnels », lesquels sont largement déterminés par le rapport institutionnel et par la position occupée par l'élève dans l'institution” (Maury 2005, p. 342).

Il faut ajouter à ce stade que le rapport personnel d'un élève, par exemple, à un objet de savoir peut être multiple au sens où c'est un amalgame de rapports dus à l'assujettissement à plusieurs institutions. Dans une institution donnée, cet élève dévoile une seule dimension : "Ce qu'il donne ainsi « à voir » est désigné par la terminologie *composante publique de son rapport personnel*. Mais, à côté de cette composante publique, il reste toute une dimension cachée qu'il n'expose pas dans l'institution envisagée et qui est appelée la *composante privée de son rapport personnel*." (Maury et Caillot 2003, p. 24)

Ces propos sont illustrés par un exemple extrait d'une expérimentation menée par l'un d'entre eux (Maury 1987) auprès d'élèves de classe terminale en France. La question concerne le choix du sac donnant le plus de chances d'obtenir une boule rouge, en un seul tirage, parmi deux sacs S1 et S2 (S1 contient 4 boules bleues et 6 boules rouges et S2 contient 2 boules bleues et 3 boules rouges). Un des élèves testés a, dans un premier paragraphe, écrit que, mathématiquement, les chances dans les deux sacs sont les mêmes ($6/10 = 3/5$). Dans un deuxième paragraphe, il choisit le sac S1 à cause du plus grand "écart" entre les boules.

Au cours d'un entretien avec l'expérimentatrice, l'élève en question a donné le commentaire suivant : "Madame vous nous avez demandé de dire exactement ce qu'on en pensait. Si ça avait été pour une « interro » (*interrogation écrite*), bien entendu, je me serais arrêté là (*il montre la fin du premier paragraphe*)" (ibid. p. 25).

Dans le cadre théorique des conceptions, une telle réponse est interprétée par le fait que les élèves "disposent généralement de plusieurs conceptions relatives à une même notion et que les conceptions sont mobilisées de manière sélective en fonction d'éléments contextuels" (ibid. p. 25)

Le cadre du rapport au savoir permet une nouvelle lecture de ce type de réponses : "ce qui était privé dans une institution (le cours de mathématiques en l'occurrence) peut prendre un caractère public dans une autre institution (l'institution « expérimentation »).

Avec l'idée du rapport personnel au savoir, nous récupérons donc dans un cadre théorique plus ouvert la notion de conception. En outre la multiplicité des conceptions susceptibles de coexister chez un même élève, [...], est bien prise en charge par la théorie : elle correspond en effet à la dépendance institutionnelle de la dimension publique du rapport personnel." (ibid. pp. 25-26).

7.2. Une modélisation des conceptions

Avant de donner notre formalisation de l'objet « conception », commençons par voir un exemple correspondant à une mise en relation de deux cadres théoriques.

7.2.1. Articulation du modèle des organisations et du modèle cK ϕ

Nous rapportons ici une étude qui s'intéresse à la notion de « vecteur » au niveau de la première année secondaire en Tunisie¹⁷.

L'auteur étudie le chapitre « *Les vecteurs du plan* » du livre scolaire du niveau en question. Il commence par faire une étude praxéologique séparée des quatre thèmes « Définition d'un vecteur du plan », « L'addition des vecteurs », « Multiplication d'un vecteur par un réel » et « Introduction à l'étude analytique des vecteurs », la totalité de ces thèmes formant le domaine d'étude. Il fait ensuite une analyse conceptuelle sur l'ensemble des thèmes, à l'aide du modèle cK ϕ . Il détermine ainsi l'ensemble P générateur de problèmes, l'ensemble R d'opérateurs de transformations, le système L de représentations des éléments de P et de R et la structure Σ de contrôle minimal. Il considère que « le quadruplet (P, R, L, Σ) déterminé par référence aux connaissances et savoirs donnés dans le manuel scolaire, définit une « *conception a priori* » résultante des épistémologies des auteurs et influencée par des contraintes institutionnelles » (Najar 2006, p. 78).

Cette étude montre la conformité des "programmes d'étude", dans leur ensemble, aux objectifs des programmes officiels. Elle montre, par ailleurs, certaines faiblesses notamment au niveau du travail des opérateurs de transformations tels que les connecteurs logiques d'implication et d'équivalence.

Ainsi conclut-il, qu'en identifiant les éventuelles difficultés d'enseignement qui résultent de « l'organisation des connaissances proposées dans le manuel scolaire », l'analyse conceptuelle montre « le rôle dévolu à l'enseignant pour gérer en classe l'aspect implicite de certains savoirs et remédier aux insuffisances et faiblesses pouvant apparaître dans le manuel » (ibid. p. 79).

Cette étude s'inscrit dans le cadre de l'articulation entre deux modèles : le modèle des organisations appliqué aux objets mathématiques et le modèle cK ϕ qui, habituellement utilisé dans l'analyse des connaissances des élèves, est ici élargi au niveau des objets de savoir.

¹⁷ Ce niveau correspond à des élèves de 15 à 16 ans.

La « conception a priori » définie par Najjar pourrait correspondre à la conception générale C_{μ} , abordée en haut (cf. sous 6.3), qui rend compte du texte du savoir mathématique. Seulement, la conception C_{μ} renvoie à un objet local, par contre la conception a priori renvoie à un objet plutôt global : le savoir vectoriel à enseigner.

7.2.2. Un modèle des conceptions dans la TAD

Dans la TAD, nous avons vu que la connaissance d'un élève relative à un objet est modélisée par le rapport personnel de l'élève à cet objet, ce rapport personnel étant construit sous l'effet des rapports institutionnels à cet objet au sein des institutions auxquelles il appartient ou a appartenu. Nous avons aussi abordé la dimension publique et la dimension privée du rapport personnel.

Notre but n'est pas d'articuler plusieurs cadres théoriques dans l'étude de la connaissance ; il est plutôt d'élargir un cadre pour pouvoir analyser connaissance et savoir.

Ceci dit, nous allons donner une modélisation de la dimension publique du rapport personnel en termes de conceptions, la dimension privée pouvant être modélisée de la même façon et on parlera alors de conceptions implicites.

Cette modélisation constitue un élargissement du champ d'application du modèle des organisations qui est plutôt utilisé pour les savoirs : on parle habituellement d'organisations mathématiques (cf. sous 5.1) et d'organisations didactiques (cf. sous 8.1). Nous voulons ainsi rendre fonctionnel le modèle des organisations au niveau des connaissances.

Organisation personnelle

Prenons le cas d'un sujet d'une institution didactique dans l'accomplissement d'un type de tâche T .

Nous appelons organisation personnelle un triplet $[T, \tau, \theta]$ formé autour du type de tâche T donné, τ étant une technique personnelle utilisée pour effectuer T , et θ la technologie personnelle (théorème ou définition en acte) qui a produit ou qui justifie la technique τ .

En général, on relève dans un discours justificatif d'un élève deux fonctions, une fonction technique permettant de trouver le résultat et une fonction technologique justifiant la technique.

Conception

L'ensemble des organisations personnelles $[T_i, \tau_i, \theta]$ formées autour d'un même discours technologique personnel où les types de tâches T_i relèvent d'un même objet mathématique est ce que nous appelons une conception de cet objet.

Ainsi, une organisation personnelle est l'indice ou le représentant d'une conception, les conceptions qui nous intéressent ici étant celles d'objets relevant du champ des probabilités.

Cette formalisation a aux moins deux avantages. Elle permet le calcul de la distance entre les conceptions des élèves et les organisations mathématiques après enseignement. Elle permet aussi de calculer la distance, à combler, entre les conceptions des élèves et les organisations mathématiques si les premières sont spontanées c'est-à-dire si elles sont développées avant l'enseignement.

Bien entendu, ce qui nous intéresse n'est pas un élève singulier, c'est plutôt un niveau scolaire déterminé pour lequel le savoir probabiliste correspond au secteur probabiliste à enseigner.

De la même façon que nous parlons de savoir probabiliste, nous parlons désormais aussi de connaissance probabiliste, cette connaissance étant l'ensemble des conceptions probabilistes développées par les élèves d'un certain niveau, les conceptions les plus fréquentes étant celles qui nous importent le plus.

Dans ce chapitre nous avons focalisé sur l'élève bien qu'il soit possible de parler de conceptions des enseignants, ces conceptions pouvant être pertinentes ou non. Elles peuvent en effet être non pertinentes : il suffit de penser aux rapports qu'entretient un enseignant avec un objet de savoir non rencontré dans une institution didactique. Même pour les enseignants ayant reçu une bonne formation en probabilités, "lequel d'entre eux n'a jamais été surpris par l'écart entre le résultat issu d'un calcul théorique et l'attente intuitive qu'il en avait, sur laquelle il aurait été prêt à parier !" (Maury 1992, p. 77).

8. Modélisations de l'enseignement

Les travaux sur les pratiques enseignantes sont d'actualité en didactique des mathématiques ; ils ont débuté depuis une quinzaine d'années environ.

Nous allons dans la suite nous intéresser à quelques approches théoriques de l'interaction didactique entre enseignants et élèves autour d'un objet d'enseignement. Nous abordons

d'abord succinctement l'approche dans la TAD ; nous traitons ensuite ceux relevant de la TSD et nous concluons par le cas d'approches multiples.

8.1. Modélisation de l'enseignement dans la TAD

Dans la TAD l'enseignement, comme toute action humaine, est considéré comme dérivant d'une praxéologie. L'un des premiers types de tâches devant être accompli par un enseignant est la détermination des organisations mathématiques, objets d'étude, à partir du "programme d'études officiel" ; ensuite il a à gérer la direction de l'étude de ces organisations (Chevallard 1997).

En classe, le travail quotidien du professeur consiste donc essentiellement dans la gestion de la mise en place d'une organisation (ou des éléments d'une organisation) mathématique qui est, comme nous l'avons dit précédemment (cf. sous 5.2), en général locale, c'est-à-dire d'une organisation déterminée par une seule technologie. Pour atteindre son objectif, l'enseignant est sensé aménager l'étude selon une certaine organisation didactique.

L'étude des pratiques enseignantes se fait essentiellement en TAD selon deux volets :

- la description et l'analyse d'une organisation mathématique, enjeu de l'étude,
- la description et l'analyse d'une organisation didactique prétendant mettre en place l'organisation mathématique considérée.

Une organisation didactique nécessite des types de situations appelés « *moments de l'étude ou moments didactiques* » (Chevallard 1999, p. 250). Il ya le moment de la première rencontre, celui de l'exploration d'un type de tâches et de l'élaboration d'une technique correspondante, celui de la constitution de l'environnement technologico-théorique, celui du travail de la technique, celui de l'institutionnalisation et celui de l'évaluation. Remarquons que l'ordre des moments est arbitraire et qu'un moment didactique se réalise en général en plusieurs fois (ibid., p. 250).

Ainsi dans la TAD, le modèle descriptif d'une organisation didactique serait le modèle des moments. Il serait utile d'ajouter qu'au sein de ce modèle, les notions de chronogenèse, de topogenèse et de mésogenèse ont une place privilégiée. Nous reviendrons sur ces notions un peu plus loin (cf. sous 8.3.2).

8.2. Modélisation de l'enseignement dans la TSD

Les travaux sur les pratiques enseignantes focalisent actuellement sur les classes dites ordinaires, c'est-à-dire sur des classes dans lesquelles les situations sont préparées par le

professeur, sans intervention du chercheur. Parmi eux, les travaux relevant de la TSD focalisent essentiellement sur deux notions : le milieu et le contrat didactique.

8.2.1. La structuration du milieu

La notion du milieu est l'une des notions fondamentales dans la TSD. Elle apparaît, dans une situation, comme étant le système antagoniste de l'élève jouant "un rôle central dans l'apprentissage, comme cause des adaptations et dans l'enseignement, comme référence et objet épistémologique" (Brousseau 1990, p. 320). Ce système constitue pour le chercheur un instrument mesurant la pertinence d'une situation à partir des réponses qu'elle provoque.

Au départ, la notion du « milieu » est utilisée dans le but de construction d'ingénieries didactiques ; elle est donc rattachée à la notion de situation a-didactique. Ensuite, son usage s'est élargi à l'analyse d'une situation didactique quelconque.

Le « milieu » est alors structuré par Brousseau (1990) en six niveaux sous une forme emboîtée allant du milieu matériel (au niveau le plus intérieur) jusqu'au milieu de la recherche en didactique, chaque milieu correspondant à un type de situations et chaque type de situations correspondant au milieu du niveau suivant.

La structuration de Brousseau est complétée par Margolinas (1995) pour contenir sept niveaux avec trois niveaux négatifs (les niveaux les plus bas) correspondant aux situations a-didactiques et trois niveaux positifs correspondant aux situations sur-didactiques (les situations propres à l'enseignant), la situation S0 étant la situation didactique.

Elle est améliorée par la suite par Bloch (1999, 2002) afin notamment de mieux prendre en compte le professeur et de questionner sa position d'observateur dans la structuration proposée par Margolinas (1995). Bloch (1999) utilise son modèle dans l'analyse d'une séance d'enseignement de la notion de fonction en première scientifique.

Dans Comiti, Grenier et Margolinas (1995), on trouve une illustration de l'usage de la structuration du milieu dans l'étude des pratiques d'enseignement de la notion de racine carrée en troisième. Pour faire fonctionner ce modèle dans le cas de classes ordinaires, elles ont dû recourir d'abord à une analyse préalable basée sur un scénario (écrit par le professeur avant enseignement) et des entretiens ; ensuite elles font une analyse a priori sur une situation reconstruite sur la base du protocole produit.

Ces auteures sont amenées, à partir des observables à relever un phénomène de « dédoublement de la situation », phénomène montrant un décalage entre le milieu supposé

propice à l'apprentissage et celui avec lequel des élèves interagissent et révélant ainsi un dysfonctionnement du contrat didactique compte tenu que les élèves ne comprennent pas les attentes du professeur et que ce dernier ne comprend pas leurs productions.

Elles ont aussi constaté un phénomène de « résonance d'une intervention », phénomène déjà identifié dans Comiti et Grenier (1994) et illustré par la prise en compte ou non de certaines interventions d'élèves.

Pour sa part, Bloch utilise le modèle de structuration du milieu dans une situation comportant une dimension a-didactique au sens où la situation « qui n'était pas a-didactique, ménage cependant des moments où les élèves se saisissent du problème [...] ; ils contraignent l'enseignant à pousser plus loin qu'il ne le prévoyait son investigation mathématique de la problématique posée ; le professeur fournit quant à lui, des éléments à la réflexion des élèves (Bloch 1999, p. 182).

8.2.2. Le contrat didactique

Une autre notion fondamentale dans la TSD est celle de « contrat didactique ». Il est question de la partie des responsabilités établies entre l'enseignant et l'enseigné « spécifique du "contenu" : la connaissance mathématique visée » (Brousseau 1986, p. 51).

Dans la TSD, l'objectif n'est pas de reconnaître si un contrat est bon ou mauvais, ce qui est visé est plutôt « le processus de recherche d'un contrat hypothétique. C'est ce processus qui représente les observations et doit les modéliser et les expliquer » (ibid., p. 53).

À l'école d'été de 1995 (Brousseau 1996) que Brousseau donne une typologie de contrats modélisant les régulations didactiques selon le partage des responsabilités entre un émetteur et un récepteur d'une connaissance, les situations d'action étant exclues de cette modélisation.

Comiti et Grenier (1997) complètent leur dernier travail (Comiti et al. 1995) par une analyse du même corpus. S'intéressant « aux interactions survenant en situation de classe et notamment aux régulations qui s'exercent sur le contenu mathématique en jeu », elles voient que le modèle « global » basé sur l'étude des ruptures du contrat est insuffisant (Comiti et Grenier 1997, p. 85). Elles modélisent alors les régulations entreprises par le professeur afin de maintenir la relation didactique par des contrats « locaux » en se basant sur la typologie de Brousseau (1996). Ce travail a permis de modéliser "les décisions locales" du professeur par la mise en place, la rupture ou le remplacement d'un contrat didactique local (ibid., p. 100). Elles se réfèrent alors à des contrats locaux tels que contrat de rappel, contrat de production

collective¹⁸, contrat d'utilisation des connaissances, contrat d'adhésion¹⁹ et contrat d'utilisation des connaissances.

Il faut dire que bien que l'analyse focalise sur les contrats, le milieu (milieu objectif) est présent. Sa présence est plus visible dans un autre article où l'auteure considère qu'il est possible d'interpréter les interventions du professeur comme des "palliatives aux insuffisances du milieu". Par exemple, "une intervention de l'enseignant consistant à invalider une action d'élève peut-être analysée comme un moyen d'enrichir le milieu de la situation du point de vue de la rétroaction, mais aussi comme la poursuite de la négociation d'un contrat avec les élèves" (Grenier 1998, pp. 129-130). Nous pensons d'ailleurs que cette intervention pourrait être vue comme enrichissement du milieu en vue du maintien du contrat en cours.

8.2.3. La structuration du contrat

Dans les travaux précédents réside un premier pas vers la structuration du contrat : des contrats globaux axés sur le contenu mathématique et des contrats locaux basés sur le partage des responsabilités entre enseignant et enseigné.

Une proposition de structuration du contrat vient avec un travail ultérieur (Perrin-Glorian et Hersant 2003). Dans ce travail, les auteures utilisent conjointement les notions de milieu et de contrat didactiques dans l'analyse de quelques exemples relevant des domaines algébriques et numériques correspondant à des niveaux du 8^{ème} grade au 10^{ème} grade.

Elles s'intéressent aux contrats fortement didactiques (où le système enseignant a une forte responsabilité vis à vis du système enseigné) de Brousseau (1996). Trois composantes : "le domaine mathématique, le statut didactique du savoir" et "les caractéristiques de la situation" sont alors ajoutées, à la répartition des responsabilités autour du contenu scolaire entre l'enseignant et les élèves pris en compte par Brousseau (Perrin-Glorian et Hersant 2003, p. 238).

Le domaine mathématique "agit à un niveau relativement global (contrat arithmétique, algébrique ou géométrique par exemple) mais peut intervenir aussi dans les changements de cadres"²⁰. Le statut didactique du savoir en jeu et les caractéristiques d'une situation sont en relation, respectivement, avec "le degré de familiarité du savoir en jeu pour les élèves" et avec le milieu de la situation. Les deux dernières composantes (le statut didactique du savoir en jeu

¹⁸ Brousseau (1996) parle de contrat non didactique de production.

¹⁹ Dénomination choisie par les auteures.

²⁰ Les auteures font allusion à Douady (1987) qui considère le changement de cadres comme moteur de l'apprentissage.

et les caractéristiques d'une situation) peuvent être reliées à celle du partage des responsabilités (ibid., p. 239).

Trois niveaux de structurations sont alors définies : “le macrocontrat (à l'échelle d'un objectif d'enseignement voire plus), le mésocontrat (à l'échelle de la réalisation d'une activité, par exemple de la résolution d'un exercice), le microcontrat (à l'échelle d'un épisode qui correspond à une unité de contenu mathématique, par exemple question précise d'un exercice, et à une unité d'activité du professeur et des élèves, par exemple travail individuel ou collectif)” (ibid., pp. 239-240).

Les macrocontrats sont déterminés selon le domaine mathématique, les mésocontrats selon le statut didactique du savoir et les caractéristiques de la situation et les microcontrats selon le partage des responsabilités que le professeur décide au sein d'un mésocontrat.

8.3. Modélisations de l'enseignement par approches multiples

Nous nous limitons ici à deux cas d'approches doubles de l'interaction didactique en classe de mathématiques.

8.3.1. La double approche

Le cadre théorique de la double approche des pratiques enseignantes consiste en une utilisation conjointe d'une approche concernant l'apprentissage des élèves et d'une autre concernant le métier d'enseignant, la première étant faite par l'intermédiaire des activités des élèves provoquées par l'enseignant et la seconde par le biais des déterminants institutionnels, sociaux et personnels rendant compte du travail du dernier (Robert 2001, Robert et Rogalski 2002).

Nous présentons deux travaux de recherche utilisant ce cadre :

Le premier travail élucide, dans une étude portant sur les séquences de quatre professeurs, la question de la régularité des pratiques enseignantes dans le cas de la multiplication des nombres décimaux en sixième (Roditi 2003).

Dans la première approche, l'auteur évalue les enjeux didactiques “par l'étude des dynamiques ancien / nouveau ; des dialectiques contextualisations / décontextualisation ; des dialectiques outil / objet ; des représentations symboliques utilisées ; des tâches prescrites aux élèves” (ibid., p. 188). Dans la deuxième approche, il retient des hypothèses relevant de la

psychologie ergonomique (Leplat 1997) postulant un décalage entre les tâches scolaires prescrites et les tâches effectives.

Le travail aboutit à l'existence dans les pratiques enseignantes de régularités résultant de contraintes institutionnelles (contenu à enseigner, durée d'enseignement), une variabilité s'expliquant par "les conceptions de l'apprentissage et de l'enseignement" de chacun des professeurs et les traces d'une cohérence individuelle portant sur "les décisions locales", "la gestion de la classe et notamment de l'imprévu" (Roditi 2003, pp. 213-214).

Le deuxième travail qui s'intéresse à la formation des enseignants de mathématiques présente une hypothèse sur la stabilité des pratiques enseignantes. Cette hypothèse est présentée suite à l'analyse de deux extraits de séances d'une même enseignante (l'un en quatrième et l'autre en troisième) correspondant à la résolution de deux exercices de géométrie (Robert 2007).

Dans la première approche, l'auteure procède à une étude suivant trois dimensions supposées être des variables de l'apprentissage : la dimension "des dynamiques globales entre cours (exposition des connaissances), exercices et problèmes", celle "de la variété (quantité, ordre, nature) des tâches proposées aux élèves à travers les énoncés d'exercices et de problèmes" et celle "des conditions de travail des élèves, qui conditionnent la « qualité » des activités correspondantes" (ibid. pp. 276-277). Dans la deuxième approche, outre l'étude des déterminants institutionnels, sociaux et personnels, l'auteure procède à un autre type d'analyse moins global selon trois niveaux : un niveau micro correspondant à l'étude des automatismes (discours non préparé, routines, mode d'écriture au tableau), un niveau local du travail quotidien du professeur (lieu de rencontre des préparations et des improvisations) et "un niveau macro, qui est celui des projets, des préparations, des lignes d'action mais aussi celui des conceptions, des valeurs" (ibid. p. 281).

L'hypothèse à laquelle aboutit le travail dit que ce qui se stabilise dans les pratiques enseignantes "serait essentiellement les choix de gestion, de déroulements étudiés à une échelle graduée toutes les 5 à 10 minutes, dans des conditions analogues" (ibid. p. 302).

8.3.2. Le modèle des genèses

Il est question d'un modèle, en cours d'élaboration, qui est présenté dans un article décrivant l'action d'un professeur dans une séance de la course à 20 (Brousseau 1998) et reposant sur les genèses : chronogenèse (production des temps de l'enseignement et de l'apprentissage), topogenèse (production des lieux de l'élève et du professeur) et mésogenèse (production des objets des milieux des situations et organisation des apports à ces objets). Plus précisément, il

procède de l'articulation de deux cadres théoriques (la TAD et la TSD)²¹ : il s'appuie essentiellement sur les travaux de Chevallard (notamment ceux de 1991 et 1992) concernant "l'identification des contraintes de fonctionnements didactiques" et ceux de Brousseau (notamment celui de 1996) sur l'activité de régulation menée par le professeur, cette dernière comportant la mésogénèse et la recherche d'un contrat didactique (Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni 2000).

Ce modèle descriptif est établi selon trois niveaux : "niveau ND1 des structures fondamentales de l'action professorale, niveau ND2 des grands types de tâches, niveau ND3 des classes de techniques" (ibid. p. 294).

Les structures de l'action professorale contiennent quatre éléments fondamentaux : *définir, réguler, dévoluer et instituer*. Remarquons ici que le verbe *dévoluer* constitue un élargissement au sens donné par Brousseau (1986) à la dévolution d'une situation a-didactique ; il est question plutôt "d'un processus qui accompagne, avec plus ou moins d'intensité, l'ensemble du travail didactique. [...]. Cela signifie que le professeur doit mobiliser à chaque fois des techniques propres à inciter les élèves à assumer des conditions nouvelles, à propos bien sûr des questions qui leur sont personnellement posées" (Sensevy et al. 2000, p. 271), la dévolution pouvant être à la classe toute entière. Remarquons aussi qu'*instituer* correspond à un élargissement de la notion d'institutionnalisation, "en particulier à des objets qui ne sont pas des objets de savoir" (ibid., p. 271).

Les tâches d'enseignement sont la dénomination, l'organisation de l'action dans le milieu, l'analyse de l'action, l'organisation de l'interaction et l'intégration des objets. Et les techniques servant à accomplir ces tâches sont classées en techniques topogénétiques, techniques chronogénétiques et techniques d'enseignement (mésogénétiques).

Les auteurs lancent un appel au travail consistant à étendre le modèle des jeux entrepris par Brousseau à l'action du professeur et ajoutent : "il convient de poursuivre l'étude de l'objet du jeu du professeur - sur et avec le jeu de l'élève -, que nous avons caractérisé en termes de topogénèse, chronogénèse, mésogénèse : l'action du professeur consiste à jouer à la fois sur le contrat didactique (topogénèse et chronogénèse) et sur le milieu (mésogénèse)" (ibid., p. 299).

²¹ Remarquons ici que Coulange (2001) analyse l'activité de l'enseignant en articulant la TSD et la TAD d'une autre façon : elle utilise la structuration du milieu et les praxéologies.

9. Conclusion : cadre théorique

Avant de présenter le cadre théorique choisi pour l'analyse du dernier chapitre, déterminons quelques notions dont nous avons besoin.

Dans notre travail, nous avons demandé à un professeur de faire fonctionner quelques situations d'enseignement auprès de quelques élèves du niveau du collège. Pour analyser son travail, nous avons besoin de notions telles que tâche, tâche prescrite, tâche effective et activité.

La tâche est prise au sens ergonomique, ou dans celui retenu en didactique professionnelle (Leplat 1985 et 1997 ; Rogalski 2003 ; Pastré, Mayen et Vergnaud 2006) ; elle désigne ce qui est à accomplir. Elle peut être définie comme étant « un but dans des conditions déterminées »²². L'activité, quand à elle, désigne la manière dont un individu réalise la tâche ou atteint le but. Pour les tâches figurant dans le projet d'enseignement, nous parlons de tâches prescrites. La tâche réellement effectuée est appelée tâche effective.

L'analyse de la pré-expérimentation est conduite en référence aux tâches prescrites à l'enseignant, ces tâches correspondent aux objectifs à atteindre. Autrement dit, une séance par exemple peut correspondre à une tâche prescrite (cf. dernier chapitre).

Chaque tâche est décrite à l'aide des actions attendues de l'enseignant, actions exposées notamment par les verbes définir, dévoluer, réguler et institutionnaliser. Soulignons que la distance entre la tâche prescrite et la tâche effective est prise en considération.

L'analyse des activités du professeur se fait en termes de tâches, des potentialités du milieu et des contrats didactiques locaux déterminés par la structuration du contrat didactique (cf. sous 8.2.3).

Nous reviendrons à ce cadre théorique avec plus de détails au dernier chapitre.

Pour les tests passés auprès des élèves, l'élément théorique que nous utilisons est la formalisation que nous avons faite de la notion de conception (cf. sous 7.2.2). Faisons en un rappel en commençant par la notion d'organisation personnelle.

Une organisation personnelle est un triplet $[T, \tau, \theta]$ formé autour du type de tâche T donné, τ étant une technique personnelle utilisée pour effectuer T , et θ la technologie personnelle (théorème ou définition en acte) qui a produit ou qui justifie la technique τ .

²² Définition empruntée par Leplat à Leontiev (1975)

I. Eléments théoriques

Nous appelons alors conception d'un objet mathématique l'ensemble des organisations personnelles $[T_i, \tau_i, \theta]$ formées autour d'un même discours technologique personnel où les types de tâches T_i relèvent de l'objet en question.

Mais avant de faire fonctionner notre modèle des conceptions, nous nous proposons d'aborder la question de ce qui a existé et ce qui existe en étudiant un état des lieux d'un point de vue historique et épistémologique, en évoquant des travaux touchant la didactique des probabilités et en analysant dans les différents programmes tunisiens introductifs des probabilités.

Chapitre II.

Éléments historiques et épistémologiques

- 1. Introduction*
- 2. Chronogenèse historique*
- 3. Les courants probabilistes*
- 4. Le hasard*
- 5. Conclusion*

1. Introduction

La finalité de ce chapitre est de déterminer les différentes définitions de la probabilité susceptibles de faire objet d'enseignement.

Pour atteindre cet objectif, nous allons tout d'abord traiter la question de l'émergence des probabilités, les situations et les différentes approches dans lesquelles elles sont utilisées au cours des développements théoriques probabilistes prévalant de la fin du dix-septième siècle au début du vingtième.

Nous passons ensuite par les courants probabilistes avant de traiter le statut du « hasard » et ses différentes catégorisations dans le monde scientifique, notamment dans le monde mathématique.

Nous clôturons par différentes définitions de la probabilité d'un événement que nous rattachons notamment à un type de hasard et à un cadre mathématique bien déterminés.

2. Chronogénèse historique

Dans cette partie, nous allons aborder l'émergence de la notion de probabilité, les situations et les différentes approches dans lesquelles elle est utilisée au cours des développements théoriques probabilistes prévalant de la fin du 17^{ème} siècle au début du 20^{ème}.

2.1. L'équiprobabilité

2.1.1. Le problème des parties

Pour utiliser la terminologie employée par Pichard (2001), disons que le premier écrit en probabilité serait celui de Cardan (1526) intitulé *Traité De Ludo Aleae*, publié en 1663, où il est question de jeu équitable avec 2 et 3 dés "honnêtes" et que le début officiel revient à Pascal et Fermat avec leur correspondance autour de la résolution du problème des parties en 1654 (cf. Pascal 1922, pp. 188-229).

Le problème des parties consiste à départager deux joueurs (ou plus), ayant engagé chacun une somme convenue, lorsque le jeu est interrompu. Ce problème est passé par plusieurs solutions avant celles données par Pascal et Fermat, les deux premières ayant paru au 15^{ème} siècle.

La première solution est celle de Pacioli (1523). Ce dernier pose le problème comme suit : “Deux camps jouent à la balle ; chaque manche est de 10 points et il faut 60 points pour gagner le jeu ; la mise totale est de 10 ducats. Il arrive que, pour quelque raison accidentelle, le jeu ne puisse s’achever. On demande ce que touche de la mise totale chacun des deux camps, lorsque l’un a 50 points et l’autre 20 points.” (Cléro 1990, p. 22). La solution qu’il apporte constitue une répartition proportionnelle aux parties déjà remportées. Il considère que les deux camps ont à jouer au maximum 11 manches, qu’ils ont obtenu respectivement 5/11 et 2/11 de ces manches et que 7/11 gagnent 10 ducats. Il conclut que les deux camps auront respectivement 7 ducats $1/7$ et 2 ducats $6/7$.

La seconde est celle de Tartaglia (1556) qui qualifie d’injuste la dernière résolution. Tartaglia remarque que, d’après le raisonnement de Pacioli, si un camp a 10 points, il gagnera toute la mise si l’autre n’a aucun point, ce qui lui paraît “déraisonnable” (ibid., p.24). Il tient alors compte de la différence des scores déjà obtenus. Seulement, son raisonnement donne "injustement" le même poids à une différence connue des scores quelle que soit leur situation dans la partie.

La troisième solution est celle de Forestani : elle “combine un partage à la façon de Pacioli pour une partie de l’enjeu avec une considération – très simpliste – de l’avenir” (ibid., p. 25). La quatrième a vu le jour en 1539. Il s’agit de la solution de Cardan qui a compris que le passé ne peut apporter la solution adéquate au problème des partis et qui, bien qu’il se soit trompé dans le détail de sa solution, a posé le principe qui sera, plus tard, à l’origine de la démonstration de Pascal : « Si la division une fois faite, le jeu recommençait à nouveau, les parties en présence devraient miser la même somme que celle qu’elles ont reçue à condition de s’arrêter de jouer » (ibid., p. 25).

Désormais, l’acte de naissance du concept « probabilité » peut être accordé à Pascal et à Fermat par le biais de la correspondance qui s’était effectuée entre eux en 1654.

Dans les quatre lettres constituant cette correspondance, les deux mathématiciens traitent le problème des partis donné par le Chevalier de Méré : “on lance une pièce plusieurs fois. Pour chaque 1 obtenu, A reçoit un point et pour chaque 0, B reçoit un point. Le premier qui a 5 points emporte la mise. Au bout de sept coups, A possède 4 points et B 3 points. Le jeu est alors interrompu.

Comment partager la mise de la façon la plus équitable : proportionnellement aux résultats déjà obtenus soit $3/4$, ou proportionnellement aux points non encore distribués soit $1/2$?” (Engel 1975, pp. 93-94).

L'originalité dans la solution est que Pascal et Fermat considèrent seulement les parties qui restent à jouer, c'est-à-dire qu'ils prennent en compte "*l'attente, l'espérance*" des deux joueurs A et B ; ce qui constitue une rupture épistémologique avec les anciens raisonnements.

“Pascal tient le raisonnement suivant : supposons que la mise est 64 pistoles. A peut emporter cette mise au coup suivant avec la probabilité 1/2. On doit donc lui remettre 32 pistoles pour le coup suivant. S'il perd, les deux joueurs sont alors à égalité et le reste de la mise doit être partagé également. Le partage le plus équitable est donc 48 pistoles pour A et 16 pour B, c'est à dire dans le rapport 3/1. Ce rapport n'était pas prévu par Méré.” (ibid., p. 95).

Cette méthode semble être courte et généralisable.

Il semble que Fermat ait traité le même problème, mais différemment. Sa méthode consiste à “établir en quel nombre maximum de coups le jeu, s'il avait pu continuer, se serait nécessairement achevé” (Thirouin 1991, p. 119). Il semble d'ailleurs que la résolution de Fermat ait conforté Pascal en lui donnant confiance dans sa méthode originale et étrange (ibid. p. 121).

Voyons le raisonnement de Fermat dans un problème similaire avec une petite variante : il manque deux points à A et quatre points à B pour gagner.

Prenons le cas où l'objectif est de 3 gains et où A a déjà gagné une partie. Dans ce cas, Fermat fait un tableau dans lequel il écrit abstraitement tous les cas (réels et fictifs) de gains et de pertes possibles (Raymond 1975) :

“ 1-0

| | | | | | | | | | |
|-----|------------|------------|-----|------------|-----|------------|-----|------------|------|
| | | 2-0 | | | | 1-1 | | | |
| | <u>3-0</u> | | 2-1 | | 2-1 | | 1-2 | | |
| 4-0 | 3-1 | <u>3-1</u> | 2-2 | <u>3-1</u> | 2-2 | 2-2 | 1-3 | | |
| 5-0 | 4-1 | 4-1 | 3-2 | 4-1 | 3-2 | <u>3-2</u> | 2-3 | 4-1 | 3-2 |
| | | | | | | <u>3-2</u> | 2-3 | <u>3-2</u> | 2-3 |
| | | | | | | | | 2-3 | 1-4” |

Ainsi, le joueur A aura $\frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$ de la mise.

Ce raisonnement provoque des critiques adressées de la part de Roberval qui ne voit pas pourquoi prendre en compte des parties, qui n'ont pas à se jouer.

Pascal, résume la solution de Fermat en se référant à la dernière ligne où il y a 11 gains dans 16 parties. Il donne à ce problème deux solutions, une sans démonstration se basant sur une formule combinatoire complexe et une autre où il raisonne à partir de la fin “*sur la partie du gain assuré* :

II. Eléments historiques et épistémologiques

| | | | |
|-----|-----|-----|-----|
| | 3-1 | 2-2 | |
| 3-0 | | 2-1 | |
| 2-0 | | | 1-1 |
| | 1-0 | | |

En 2-2, le joueur A peut gagner $\frac{1}{2}$ de la somme engagée ; en 3-1, il gagne tout : en 2-1, il gagne donc au moins $\frac{1}{2}$ plus le reste avec une chance sur deux, soit au total $\frac{3}{4}$. Le même raisonnement recommence une autre fois, ce qui donne $\frac{7}{8}$ de la somme en 2-0, première partie intéressante. Comme en 1-1, le gain peut être aussi $\frac{1}{2}$, ce joueur a bien enfin $\frac{7/8+1/2}{2} = \frac{11}{16}$ de la somme” (ibid., pp. 77-78).

Il y a lieu de remarquer que cette solution n’est pas généralisable.

Et c’est en 1654 que Pascal regroupe les résultats trouvés dans un traité connexe au *Traité du triangle arithmétique* et qu’il appelle “La Géométrie du Hasard” la nouvelle discipline découverte, étant donné qu’elle joint *la rigueur des démonstrations à l’incertitude du sort*.

Cette nouvelle discipline a été l’objet d’une théorie élaborée par Laplace dans l’*Essai philosophique sur les probabilités* en 1825 dans le cadre du dénombrement. Cette théorie est basée sur 10 principes dont le premier est la définition de la probabilité comme *rapport du nombre de cas favorables à celui de tous les cas possibles* (Henry 1997, p. 258), Fermat étant le premier à faire fonctionner cette définition.

Ainsi avec l’approche dite *laplacienne* ou *a priori*, représentant la mathématisation du calcul des probabilités, la liaison entre dénombrement et probabilité est incontestable.

Il nous semble important de terminer sur une réserve faite à propos de la définition laplacienne de la probabilité d’un événement qui comporterait un cercle vicieux. En effet, dans cette définition, la probabilité est définie à partir de cas équiprobables. À ce propos, lisons la citation suivante : “En réalité, il n’y a pas de cercle vicieux à supposer que l’on a la notion vulgaire du sens des mots « également probable », lorsque l’on veut définir le sens mathématique précis du mot probabilité” (Borel 1950, p. 32).

Remarquons que dans les travaux de Pascal et de Fermat, comme dans les jeux de hasard en général, l’équiprobabilité des issues possibles est annoncée que ce soit explicitement ou implicitement.

2.1.2. Remarque

Notre remarque concerne le problème des partis. Ce problème semble exister avant Pacioli. Il est mentionné dans des manuscrits italiens de 1380 (Hacking 2002, p. 87 ; Meusnier 2004, p. 8)²³. Il paraît aussi dans un manuscrit de la « Bibliothèque Apostolique Vaticane » datant du début du 15^{ème} siècle (Meusnier 2004, p. 14).

Ces découvertes, de l'existence du problème des parties « et de solutions "correctes" dans des arithmétiques commerciales », faites par des historiennes italiennes conduisent Meusnier à soupçonner une origine arabo-musulmane. Cette hypothèse, fondée sur le fait que le problème de 1380 concerne un jeu d'échecs, ce jeu étant d'origine arabe et persane (ibid., p. 22), n'est pas évoquée par les historiens des mathématiques arabes.

2.2. Probabilité et fréquence

Une autre approche des probabilités voit le jour à la suite de Huygens qui fut le premier à introduire le concept de l'espérance mathématique²⁴ et à le transposer dans le cadre de la durée de vie (Huygens 1895, pp. 515-517) et de Leibniz qui est parmi les « premiers à ouvrir la voie aux utilisations statistiques des probabilités dans les domaines sociaux, démographiques surtout » (Henry 1997, p. 136). Cette approche, dite *fréquentiste*, a été formalisée²⁵ par Jakob Bernoulli (1654-1705) qui est le « fondateur du concept de probabilité » avec son œuvre *Ars conjectandi*, (l'art de mesurer aussi exactement que possible les probabilités des choses), écrit vers 1692 et publié en 1713. Notant que l'équiprobabilité s'applique à des situations aléatoires simples comme celles des jeux de hasard, Bernoulli voit dans le calcul d'une probabilité par dénombrement de cas une restriction qui exclue son application aux phénomènes naturels complexes. Lisons plutôt ses propos : « Mais à la vérité ici s'offre à nous un autre chemin pour obtenir ce que nous cherchons. Ce qu'il n'est pas donné d'obtenir a priori l'est du moins a posteriori, c'est-à-dire qu'il sera possible de l'extraire en observant souvent l'issue d'exemples semblables » (ibid., p. 257).

Ainsi, Bernoulli crée le lien entre statistique et probabilité et fait entrer cette dernière dans le cadre de l'analyse en démontrant son "*théorème d'or*", dénommé depuis Denis Poisson (1781-1840) « la loi des grands nombres » :

²³ Ces auteurs se réfèrent à ORE O. (1960), Pascal and the intervention of probability theory, *American Mathematical Monthly*, **67**, 409-419.

²⁴ FORTET R., Opinions modernes sur les fondements du calcul des probabilités, In *LE LIONNAIS (1998)*, pp. 216-220.

²⁵ D'après Hacking 2002 (pp. 90-91), le "concept fréquentiste de probabilité" revient à Cardan dans l'écrit cité en haut (cf. 2.1.1) intitulé *Traité De Ludo Aleae*.

“Lorsque l’on répète un assez grand nombre de fois une expérience aléatoire à deux issues, succès de probabilité p et échec de probabilité q , la probabilité que la fréquence des succès obtenus soit aussi voisine que l’on veut de p est aussi proche que l’on veut de la certitude” (ibid., p. 257).

2.3. Fondement moderne des probabilités

Le calcul d’une probabilité était ainsi appréhendé dans deux approches différentes avant qu’en 1933, Kolmogorov ne suive la voie axiomatique dans son traité sur « *Les fondements du calcul des probabilités* » et place ce calcul dans la théorie de la mesure.

Notons ici que plusieurs développements théoriques ont précédé l’axiomatique de Kolmogorov. “En 1881, A. Harnack introduit la notion d’ensemble discret, puis, en 1882, celle d’« égalité en général », qui mesure le concept d’égalité presque sûre” (Droesbeke et Tassi 1997, p. 37). La théorie de la mesure de Borel (notion d’ensemble de mesure nulle en 1894 et les ensembles mesurables en 1897) va ouvrir la voie à l’intégrale de Lebesgue. Enfin, “apparaîtra la théorie de la mesure abstraite définie sur un ensemble quelconque muni d’une tribu (1913). C’est cette notion de mesure abstraite qui a permis le développement de la théorie mathématique des probabilités” (ibid., p. 38).

Dans son axiomatique présentant le fondement moderne des probabilités, Kolmogorov identifie la probabilité à une mesure. Il n’ignore pas pour autant “la géométrie du hasard” de Laplace, qui s’intéresse au cas de l’équiprobabilité des événements élémentaires et qui trouve son origine dans les jeux de hasard, puisque cette théorie occupe aussi une place dans la théorie de Kolmogorov. En effet, “elle revient au choix de la mesure uniforme sur un ensemble fini d’événements élémentaires” (Henry 1999, p.39).

3. Les courants probabilistes

La notion de probabilité était déjà présente au 2^{ème} siècle avant JC. Cette présence était concrétisée par l’existence d’une école philosophique dite « probabiliste » dirigée par Carnéade, un successeur de Platon (In Raymond 1975, p.15). Pour cette école la notion de probabilité, étant un degré entre l’ignorance et le savoir, est située dans un champ subjectif.

Jusqu’à nos jours et après que les probabilités se soient constituées en une discipline scientifique, “les auteurs s’étant intéressés au domaine de “l’incertitude” ont-ils adopté - sans toujours les expliciter - des interprétations diverses des fondements des probabilités” (Maury 1986 p. 21).

3.1. Le courant objectiviste

Nous distinguons, dans les interprétations des fondements des probabilités, deux grands courants.

Le premier est le courant « objectiviste ». Ce courant est composé de ceux qui adoptent soit l'approche laplacienne (a priori ou classique) soit l'approche fréquentiste (a posteriori). Le rassemblement de ces deux approches est légitimé par le fait que les définitions théorique et empirique de la probabilité sont liées par l'intermédiaire de la loi des grands nombres. Ainsi, ce courant est en accord avec la théorie mathématique des probabilités et s'intéresse donc aux situations modélisables par cette théorie.

D'ailleurs, selon Kolmogorov, « la probabilité n'a de sens que si elle est « mathématique », au sein d'un modèle décrivant les lois du hasard. Cette probabilité mathématique prend du sens si elle représente la stabilisation objective de la fréquence d'un événement observé lors de la répétition d'une expérience aléatoire un grand nombre de fois » (Henry 1999, pp. 39-40). Dans la théorie de Kolmogorov, la probabilité serait un modèle adapté à des phénomènes statistiques. En effet, pour Gnedenko et Kolmogorov :

« La valeur épistémologique de la théorie des probabilités est basée sur ceci : dans leur action collective les phénomènes aléatoires, à large échelle, créent des régularités strictes et non aléatoires. Le concept même de la probabilité mathématique serait sans utilité, s'il ne trouvait sa concrétisation dans la fréquence d'arrivée d'événements, suite à des expériences nombreuses réalisées dans des conditions uniformes. »²⁶

3.2. Le courant subjectiviste

Le second courant est le courant « subjectiviste »²⁷. Les tenants de ce courant croient que la probabilité est une mesure d'incertitude relative à chaque sujet, à ses convictions, à sa lecture des informations disponibles relatives à un événement donné. Ils s'intéressent donc à diverses situations, qu'elles soient modélisables ou non par la théorie mathématique.

Ce courant comporte une école aujourd'hui en expansion : l'école bayésienne. Cette école « va probabiliser tout ce qui est incertain et même des phénomènes non aléatoires » (Saporta 2006, p. 13). Le calcul des probabilités y est utilisé afin de contribuer à la réduction de l'incertitude : en utilisant une distribution de probabilité a priori sur les valeurs d'une probabilité p à estimer, les bayésiens peuvent trouver « les valeurs de p a posteriori les plus

²⁶ Traduction de Bordier (1991, p. 4).

²⁷ Savage (1954), cité par Gras et Totohasina (1995), parle de courant subjectiviste ou personnaliste. Cohen (1963) préfère parler de probabilité psychologique au lieu de probabilité subjective.

probables, donc estimer p '' (ibid., p. 13). C'est dans cette école que la statistique dite bayésienne exploite de nouvelles informations pour réduire l'incertitude (cf. par exemple McGEE 1975).

Dans la suite, nous nous intéressons plutôt au courant objectiviste. Et nous commençons par poser la question du hasard : quel hasard la théorie des probabilités modélise ?

4. Le hasard

Nous nous intéressons dans cette partie au statut du « hasard » et à ses différentes catégorisations dans le monde scientifique, notamment dans le monde des mathématiques.

Pourrait-on rejoindre Bertrand (1889, p. VI) en disant que le terme « hasard » est « intelligible de soi » et qu'il « éveille dans l'esprit une idée parfaitement claire » ?

4.1. Hasard et déterminisme

L'usage du terme « hasard » par Pascal semble témoigner d'une « *incertitude sémantique* [...] : le hasard désigne à la fois les chances, les probabilités des différentes issues du jeu, et le caractère aléatoire du processus qui règle le jeu » (Lahanier-Reuter 1999, p. 30).

Mais d'une façon générale, le hasard est pris, dans une vision déterministe de cause à effet, comme étant révélateur de l'état d'ignorance dans laquelle se trouvent les connaissances scientifiques, état pouvant être modifié par l'avancée des sciences.

« Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur et comme la cause de celui qui va suivre » (Laplace 1886, p.VI) et « La probabilité est relative en partie à cette ignorance, en partie à nos connaissances » (ibid., p. VIII) sont deux citations révélatrices d'un déterminisme radical et d'un hasard dû à l'ignorance.

Et c'est dans ce contexte déterministe de Laplace que Cournot indique à plusieurs reprises que le hasard est lié à l'idée de causes indépendantes : « Les événements amenés par la combinaison ou la rencontre de phénomènes qui appartiennent à des séries indépendantes, dans l'ordre de causalité, sont ce qu'on nomme des événements *fortuits* ou des résultats du *hasard* » (Cournot 1843, p. 73). Cet auteur donne comme exemple de causes indépendantes "les forces impulsives" intervenant dans le jet répété d'un dé (ibid., p. 83).

Au début du 20^{ème} siècle, Poincaré, pour qui le hasard est une mesure de l'ignorance, explique: « Il faut bien que le hasard soit autre chose que le nom que nous donnons à notre ignorance, que parmi les phénomènes dont nous ignorons les causes, nous devons distinguer

les phénomènes fortuits, sur lesquels le calcul des probabilités nous renseignera provisoirement, et ceux qui ne sont pas fortuits et sur lesquels nous ne pouvons rien dire, tant que nous n'aurons pas déterminé les lois qui les régissent'' (Poincaré, 1987, p. 3). Pour lui, le hasard se manifeste soit par l'effet d'une cause infime qui nous échappe soit par celui des causes complexes.

Pour le cas de cause très petite, il donne quelques exemples dont nous citons deux :

- L'effet d'un léger défaut de symétrie ou de l'effet d'un souffle d'air sur l'équilibre d'un cône posé droit sur sa pointe.
- L'effet de l'impulsion donnée à l'aiguille d'une roulette sur sa position finale.

De même pour le cas des causes complexes, il donne quelques exemples dont nous citons aussi deux, le premier se rapportant à la théorie cinétique des gaz :

- L'état des molécules d'un gaz qui sont affectées de grandes vitesses et qui sillonnent un récipient dans tous les sens en choquant sa paroi et en se choquant entre elles.
- L'ordre final de cartes battues assez longtemps par un joueur.

Poincaré s'oppose à une conception qu'il appelle des "anciens", conception disant que les phénomènes aléatoires sont interdits de prédiction et qu'ils ne sont régis par aucune loi. Il montre en effet, en reprenant quelques exemples, comment des causes négligeables ou complexes peuvent aboutir à la prédiction des effets (ibid. pp. 11-16).

Nous terminons cet exposé par une citation assez ancienne datant du début du 19^{ème} siècle :
"Les choses de toutes natures sont soumises à une loi universelle qu'on peut appeler *la loi des grands nombres*" (Poisson 1837, p. 7).

Sans entrer dans les détails du déterminisme laplacien qui, ces derniers temps, est contesté (Dahan Dalmedico 1992), disons qu'en terme de l'étude précédente, le hasard est vu dans le sens que l'ignorance, au niveau microscopique des causes, produit des effets macroscopiques régis par des lois, les lois du hasard. Il est question d'un hasard révélateur, d'un hasard essentiel au développement des sciences.

Mais quelle catégorisation pourrait-on faire du hasard dans le monde mathématique ?

4.2. Hasard et mathématiques

Notre intérêt dans cette partie porte sur l'objet « hasard » dans le monde des mathématiques. Comment est conçu cet objet dans ce monde et à quel hasard s'intéresse la théorie des probabilités ?

Notre référence est un travail de Lahanier-Reuter (1999) qui étudie le « hasard » en tant que concept scientifique et qui s'intéresse aussi à sa transposition en tant qu'objet d'enseignement et à ses appréhensions au sens commun.

L'auteure de ce travail distingue dans le monde des mathématiques cinq « conceptions »²⁸ du hasard, chacune d'entre elles étant identifiée selon « les problématiques qui lui sont attachées ainsi que le cadre théorique mathématique qui assure la cohérence et la production des résultats » (ibid., p. 9).

La première conception est dénommée « hasard du tirage au sort » et qui est rattachée à ce qu'on appelle les jeux de hasard. « Il s'agit d'un hasard défini conventionnellement, mobilisable à volonté, qui permet de séparer un passé où tous les joueurs ont le droit à une même espérance et un futur où l'inégalité entre joueurs est irréversible. Les effets possibles de l'intervention du hasard sont en nombre fini et peuvent être entièrement décrits, par des outils empruntés à l'arithmétique » (ibid., p. 10). Il est question ainsi d'un hasard équitable (au sens de l'équiprobabilité des événements élémentaires) aidant à modéliser les jeux de hasard par l'intermédiaire de la combinatoire ou plus précisément par l'intermédiaire d'un dénombrement de cas.

Lahanier-Reuter (1999) emprunte à Mandelbrot²⁹ les dénominations des trois conceptions suivantes: « hasard bénin », « hasard lent » et « hasard sauvage » mobilisées dans le cadre de l'analyse. Ces conceptions sont déterminées respectivement par la conformité, la conformité à long terme et la non-conformité aux hypothèses assurant la validité des théorèmes limites que sont les lois des grands nombres et les théorèmes limite central³⁰.

²⁸ Le terme « conception » désigne « une organisation de connaissances » pouvant être établies par un quelconque mode de connaissances (par exemple scientifique ou de sens commun) (Lahanier-Reuter 1999, p. 3).

²⁹ MANDELBROT B. (1996), Du hasard bénin au hasard sauvage, *Pour la science* (Dossier hors série : Le hasard).

³⁰ * Il existe deux lois des grands nombres :

- La loi faible des grands nombres est une loi de convergence en probabilité, due à Jakob BERNOULLI et permettant de faire le lien entre statistique et probabilités, énoncée en haut (cf. 2.2) et disant que « lors de la répétition n fois d'une même expérience aléatoire comportant deux issues (une issue dite « succès » de probabilité p ou une issue dite « échec » de probabilité $1 - p$), la probabilité que la fréquence F_n des succès s'écarte de p de plus d'un nombre ε donné, est aussi petite que l'on veut pourvu que n soit assez grand » (Courtebras, 2001, p. 127).

- « La loi forte des grands nombres, due à Emile BOREL, énonce que la probabilité que la suite numérique des fréquences effectivement obtenues F_n ne tende pas vers p est nulle : la convergence est presque sûre » (ibid., p. 128).

* Le théorème limite central (car central dans la théorie), dû à MOIVRE et à LAPLACE, peut être énoncé élémentairement de la manière suivante : dans l'exemple précédent, la loi de la fréquence F_n des succès qui vont se présenter quand on répète n expériences de Bernoulli, est approchée - pour n assez grand - par une loi normale de moyenne p et de variance $\frac{p(1-p)}{n}$ » (ibid., p. 128).

Le « hasard bénin » correspond à ce que nous avons formulé dans la conclusion de la dernière partie (4.2). Il est question d'un hasard reproductible à volonté, modélisé par exemple par le jet d'une pièce de monnaie, le lancer d'un dé ou le tirage dans une urne. À un niveau microscopique (au niveau de quelques épreuves), on constate des irrégularités et à un niveau macroscopique (au niveau d'un nombre d'épreuves assez grand), des régularités et des lois apparaissent. C'est le cas par exemple de la théorie cinétique des gaz où le niveau des vitesses et des positions instantanées d'un volume d'un gaz (niveau microscopique) présente une complexité et le niveau de la pression moyenne du gaz (niveau macroscopique) présente une certaine stabilité. Le calcul de la pression moyenne est rendu simple grâce à la modélisation probabiliste basée sur l'hypothèse que les phénomènes aléatoires étudiés (les positions des molécules et leurs vitesses) sont distribuées au hasard (suivant les trois directions de l'espace).

Pour Lahanier-Reuter, le « hasard bénin » est caractérisé, d'une part, par le « lien entre phénomènes micro et phénomènes macro » mettant en évidence la moyenne comme la valeur la plus probable et, d'autre part, par « le fait que la dispersion des variations autour de la moyenne tend à suivre une loi normale » (ibid., p. 14).

Le « hasard lent » devient bénin à long terme mais, à court terme, il est sauvage. Le « hasard sauvage », par contre, n'obéit pas aux théorèmes limites. Les phénomènes gouvernés par ce type de hasard sont ceux dont les moments (espérance mathématique³¹ et variance³²) ne sont pas définis. C'est le cas par exemple des phénomènes boursiers, des turbulences et des phénomènes météorologiques. Il est question d'un type de hasard qui, contrairement au hasard bénin, est représenté par des irrégularités aussi bien au niveau microscopique qu'au niveau macroscopique. Il faut dire que cette catégorie de hasard, « selon la terminologie de Kuhn, a été à l'origine de la révolution scientifique que constitue en particulier la théorie du chaos » (ibid., p. 15).

La cinquième catégorie est celle du « hasard formel ». Il est question de la « conception » la plus récente qui se rapporte au cadre de la théorie de l'information dont les travaux datent de 1960. « Le projet est différent : il s'agit de distinguer les objets étudiés, les suites aléatoires,

³¹ Dans le cas discret, l'espérance mathématique est la moyenne, pondérée par la probabilité, des valeurs d'une série de nombres aléatoires $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$: $E(X) = \sum x_i p_i$ où p_i est la probabilité d'avoir x_i .

³² Dans le cas discret, la variance est la moyenne, pondérée par la probabilité, des carrés des écarts par rapport à l'espérance mathématique des valeurs d'une série de nombres aléatoires $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$: $V(X) = E((X - E(X))^2)$.

selon la quantité de hasard qu'elles renferment. Le hasard devient objet explicite de recherche, en devenant quantifiable'' (ibid., p. 17).

Quel type de hasard nous importe alors dans l'enseignement des probabilités.

4.3. Hasard et enseignement des probabilités

La théorie des probabilités forme un domaine mathématique qui, dans son exposé axiomatique moderne, possède une cohérence interne et n'a pas à se justifier en dehors des mathématiques : «une fois ses axiomes posés, elle se développe de façon autonome par rapport à la réalité concrète'' (Saporta 2006, p. 7).

Dans le but de son enseignement, le savoir savant qu'est « la théorie des probabilités » est transposé en savoir à enseigner. Il est alors, surtout au niveau de la fin du secondaire et à celui de l'université, rattaché aux phénomènes fortuits qui forment alors son objet.

Dans l'étude de ces phénomènes, la notion de « hasard » est une notion de base. Alors de quel hasard s'agit-il ?

4.3.1. Le hasard concerné

En tenant compte de la catégorisation de Lahanier-Reuter du hasard (cf. sous 4.2), il n'est pas question que le « hasard lent » soit un objet d'étude de la théorie des probabilités.

Bien que la théorie des probabilités traite le « hasard sauvage » en s'occupant aussi de variables aléatoires n'ayant pas de moments, les types de hasard qui nous concernent ici, dans l'enseignement au niveau primaire et secondaire, sont le « hasard du tirage au sort » et le « hasard bénin ».

Ce sont les types de hasard créateurs de connaissances relatives aux phénomènes étudiés, c'est-à-dire producteurs d'effets macroscopiques gouvernés par des régularités. Ces deux types de hasard caractérisent des phénomènes qui sont représentés par des modèles d'urnes (cf. chapitre I, sous 2.2) ; «ce hasard est reproductible, une séquence finie peut accumuler les variations, peut sembler n'obéir à aucune loi. Par contre, si le nombre d'épreuves devient suffisamment grand, des lois, des régularités apparaissent'' (Lahanier-Reuter 1999, p. 13).

Pour traiter ces types de hasard, quelles sont les définitions données à la probabilité ?

4.3.2. Quelques définitions

Nous nous intéressons ici à la transposition de la notion de probabilité qui est définie dans le savoir savant, autrement dit dans l'axiomatique de Kolmogorov, dans le cadre de la théorie de la mesure, comme étant une mesure de masse totale 1. Soulignons que dans le savoir savant, les probabilités sont attribuées à des ensembles.

Cette transposition est alors faite de différentes manières selon les choix de la noosphère (Chevallard 1991), sphère où l'on pense aux programmes entre autres.

L'objet de la théorie des probabilités est l'étude mathématique des lois qui gouvernent les phénomènes aléatoires ou, en d'autres mots, l'étude mathématique de la notion de hasard (Neveu 1970, Ventsel 1973, Saporta 2006). Essayons d'abord d'esquisser brièvement la notion de probabilité dans le savoir à enseigner au niveau du supérieur, c'est-à-dire dans une approche axiomatique.

Parmi les notions de base (notions primitives) de la théorie des probabilités, nous trouvons la notion d'événement et celle d'épreuve. Un événement n'est considéré que "du seul point de vue" de sa réalisation et une épreuve est pensée comme étant "une expérience dans laquelle le hasard intervient, ou plutôt comme au résultat de cette expérience aléatoire" (Neveu 1970, pp. 2-5). Notons Ω l'ensemble des événements. Deux événements particuliers sont alors déterminés : l'événement impossible \emptyset et l'événement certain Ω .

Considérons maintenant une classe C de parties de Ω constituant l'ensemble des événements et demandons à C qu'il soit une σ -algèbre de Boole (ou une tribu), c'est-à-dire que soient vérifiées les propriétés suivantes :

“ $\forall A \in C, \bar{A}^{33} \in C$;

- pour tout ensemble fini ou dénombrable formé d'événements A_1, A_2, \dots, A_n de $C, \cup A_i \in C$;

- $\Omega \in C$.”

Le couple (Ω, C) est alors appelé espace probabilisable et on peut définir la probabilité de la façon suivante :

“On appelle probabilité sur (Ω, C) (ou loi de probabilité) une application P de C dans $[0, 1]$ telle que :

- $P(\Omega) = 1$;

³³ \bar{A} est l'événement contraire de A . En langage ensembliste, \bar{A} est la partie complémentaire de A dans Ω .

- Pour tout ensemble dénombrable d'événements incompatibles³⁴ A_1, A_2, \dots, A_n , on a $P(\cup A_i) = \sum P(A_i)$ (Saporta 2006, pp. 4-5).

Remarquons que dans ce qui précède, il aurait fallu écrire (A_1, A_2, \dots) au lieu de (A_1, A_2, \dots, A_n) étant donné qu'il est question d'un ensemble dénombrable.

Le triplet (Ω, C, P) est ce qu'on appelle espace probabilisé.

D'une manière générale, lorsqu'on veut définir une axiomatique du calcul des probabilités, on vise essentiellement à maintenir trois propriétés. La première dit que la probabilité d'un événement est dans l'intervalle $[0, 1]$. La deuxième est que la probabilité de Ω est 1. La troisième est que la probabilité d'un nombre fini ou dénombrable d'événements incompatibles est égale à la somme de leurs probabilités.

Dans la transposition de la notion de probabilité notamment au niveau de la fin du secondaire, il n'est souvent pas fait référence à la notion de tribu bien que parfois, dans le cas de la réforme dite des mathématiques modernes (correspondant aux années 1970), on utilise la notion d'espace probabilisé fini.

Le hasard étudié étant du type « hasard du tirage au sort » ou du type « hasard bénin », il est déterminé par la reproductibilité dans « les mêmes conditions » ainsi que par l'imprévisibilité du résultat. Nous trouvons là les caractéristiques de la notion d'expérience aléatoire qui pourrait être définie de la façon suivante que ce soit au supérieur, au secondaire ou même au collège :

“Une **expérience** est qualifiée d'**aléatoire** si on ne peut prévoir par avance son résultat et si, répétée dans des conditions identiques, elle peut (on aurait pu s'il s'agit d'une expérience par nature unique) donner lieu à des résultats différents” (Saporta 2006, p. 7). C'est le cas par exemple du tirage de deux boules dans une urne contenant des boules blanches et des boules noires.

Dans une définition de probabilité d'un événement, on est “conduit à introduire l'ensemble Ω des épreuves³⁵ (ou résultats possibles de l'expérience considérée) et à identifier chaque événement avec le sous-ensemble des épreuves qui le réalisent ; une probabilité devient ainsi

³⁴ Deux événements sont dits incompatibles si la réalisation de l'un exclut la réalisation de l'autre. Autrement dit, dans un langage ensembliste, cela veut dire que leur intersection est vide.

³⁵ Cet ensemble est aussi appelé, relativement à une expérience aléatoire, ensemble fondamental ou ensemble des éventualités ou univers des possibles.

une fonction d'ensembles, analogue en cela à un volume défini sur certaines parties d'un espace euclidien'' (Neveu 1970, p. 1).

Disons pour conclure que dans une approche axiomatique, les probabilités sont définies comme étant des applications dont les valeurs sont dans l'intervalle $[0, 1]$.

Outre l'abord de probabilité d'un événement dans une axiomatique, nous distinguons deux définitions possibles qui relèvent du courant objectiviste et qui sont associées aux deux types de hasard retenus. Ces deux définitions peuvent être abordées aux niveaux du collège, du secondaire et du supérieur.

La première définition est celle due à Laplace ; elle consiste à identifier la probabilité d'un événement au nombre des cas favorables sur celui de tous les cas possibles. Cette définition constitue un modèle qui suppose l'équiprobabilité de tous les cas possibles, notamment par l'intermédiaire des régularités qui caractérisent les générateurs considérés du hasard (boules indiscernables, dé parfait, ...). D'ailleurs, quelques auteurs tels que Calot parlent de notion « intuitive » de probabilité (Calot 1967, p. 42). Elle correspond au « hasard du tirage au sort » relié au cadre de l'arithmétique par le biais de dénombrement de cas.

La deuxième définition est due à Bernoulli ; elle consiste à approcher la probabilité d'un événement par l'intermédiaire de sa fréquence relative, le nombre d'épreuves étant considérable. Cette définition correspond au « hasard bénin » rattaché au cadre de l'analyse par le biais de la notion de limite. L'utilisation, ici, de la définition fréquentiste paraît fondée, elle confirme la puissance de la théorie des probabilités :

«Lors de l'introduction du concept de probabilité, nous avons assigné une probabilité à des événements dont la fréquence relative, au cours d'une longue série d'épreuves, manifestait une certaine stabilité. Ce fait, la stabilité de la fréquence relative, vient d'être démontré mathématiquement. Il est remarquable que la théorie rende possible une description précise de cette stabilité ; cela témoigne sans aucun doute en faveur de sa puissance'' (Rényi 1966, p. 144).

5. Conclusion

Le sens donné au hasard a évolué au cours de l'histoire dans des problématiques différentes et ce sont seulement deux types de hasard, « le hasard du tirage au sort » et « le hasard bénin », qui sont caractérisés par l'obéissance à des lois au niveau macroscopique, qui se sont vu former l'objet d'étude de la théorie des probabilités.

La notion de probabilité d'un événement a émergé dans des situations de jeu au sein d'une certaine « géométrie du hasard ». Elle a commencé par être définie, par l'intermédiaire de

dénombrement de cas dans le cadre arithmétique, comme étant le rapport du nombre des cas favorables au nombre des cas possibles. Elle a été abordée ensuite, dans le cadre de l'analyse, dans une approche fréquentiste après la découverte et la démonstration de la loi des grands nombres de Jakob Bernoulli.

Et ce sont ces deux approches dites laplacienne et fréquentiste qui sont nées aux alentours du 17^{ème} siècle qui restent d'actualité dans l'introduction du calcul des probabilités notamment aux collèges et dans les lycées qui dispensent ce type d'enseignement. Il convient d'ajouter qu'au niveau du lycée, l'approche laplacienne peut prendre place à côté d'une définition plutôt axiomatique introduisant les probabilités comme étant des applications dont les valeurs sont dans l'intervalle $[0, 1]$.

Par ailleurs, nous avons vu plus haut (cf. 3.1) que la valeur épistémologique de cette théorie est basée sur les régularités créées au niveau macroscopique par les phénomènes aléatoires qui constituent son champ d'investigation. Il nous paraît, dans cette vision des choses, qu'une approche axiomatique est non fondée surtout au niveau du collège. L'introduction des probabilités à ce niveau ne peut être que dans une approche laplacienne ou dans une approche fréquentiste ; mais on ne peut en aucun cas délaissier l'approche fréquentiste.

La question de l'approche par laquelle on doit commencer nous semble secondaire pourvu qu'on ait recours aux deux approches.

Avant de passer à ce qui existe relativement aux deux approches, laplacienne et fréquentiste, au niveau de la transposition didactique de la théorie des probabilités dans l'enseignement tunisien, posons la question de ce qui existe au niveau des travaux en relation avec la didactique des probabilités.

Chapitre III.

Revue de la littérature

- 1. Introduction*
- 2. Probabilités et développement génétique*
- 3. Probabilités et simulation*
- 4. Probabilités et pratiques enseignantes*
- 5. Conclusions*

1. Introduction

Dans ce chapitre nous questionnons ce qui existe dans la littérature qui est en rapport avec notre travail.

Remarquons d'emblée que les travaux relatifs aux mathématiques discrètes en rapport avec les probabilités sont très rares, ainsi que ceux sur l'analyse combinatoire. Citons les travaux de Grenier (1995) et de Grenier et Payan (1998) qui s'inscrivent dans une problématique de recherche d'un *milieu* qui permette l'introduction du domaine discret et l'approche des concepts de preuve et de modélisation au sein de ce domaine. Citons aussi le travail de Batanero et al. (1997) qui est basé sur les erreurs que font les élèves dans les raisonnements combinatoires et qui s'inscrit dans une problématique de recherche de variables didactiques. Citons enfin le travail de Rudat (2007) qui est situé dans la problématique de recherche d'un modèle "qui décrive les liens entre les productions et l'activité des élèves d'une part et les contextes sémantiques d'autre part" dans la résolution de problèmes combinatoires du type C_n^p par des élèves de 4^{ème}.

Nous allons aborder dans ce chapitre quelques écrits concernant les probabilités dans leurs rapports avec le développement génétique, la simulation et la pratique enseignante. Nous focalisons sur les travaux portant essentiellement sur les niveaux du primaire et du collège.

2. Probabilités et développement génétique

Dans cette partie, nous allons traiter les rapports aux objets du champ conceptuel des probabilités (au sens de Vergnaud 2005) à deux niveaux : le niveau structurel (Piaget) et le niveau fonctionnel (Fischbein et al. ; Maury et Fayol).

Commençons d'abord par les rapports spontanés dans l'approche structurale ou développementale de Piaget.

2.1. J. Piaget et B. Inhelder (1951)

Dans cette partie, nous commençons par l'exposé d'une partie d'un travail s'inscrivant dans le cadre du développement génétique et nous terminons par quelques remarques.

2.1.1. *Exposé d'une partie du travail*

« La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant » nous intéresse dans cette partie. Il est question du titre d'un ouvrage en trois parties. La première s'intéresse au hasard dans la réalité physique, la deuxième au tirage au sort et la troisième aux opérations combinatoires.

Piaget et Inhelder (1951) montrent une étroite relation entre la formation des idées de hasard, de probabilité élémentaire et de dénombrement d'une part et les stades de développement de l'enfant, d'autre part.

- Pendant la première période (stade sensori-moteur : de 4 à 7 ans environ), l'enfant ne distingue pas la nécessité du possible. Sa pensée balance entre le prévisible (le déductible) et l'imprévisible (l'aléatoire).

- Pendant la deuxième période (stade des opérations concrètes : de 7 à 11 ans environ) et avec l'acquisition des opérations logico-arithmétiques ou déductives, l'enfant différencie le déductible du non-déductible. Il oppose les opérations au hasard.

- Au cours de la troisième période (stade des opérations formelles : à partir de 11-12 ans), l'enfant tend vers une synthèse entre le hasard et les opérations, «celles-ci permettant de structurer le champ des dispersions fortuites en un système de probabilités, par une sorte d'assimilation analogique du fortuit à l'opérateur.» (p. 198). Le jugement probabiliste est favorisé par l'accès aux opérations combinatoires et au raisonnement proportionnel propres au stade formel.

Dans la deuxième partie de leur travail, les auteurs décrivent une expérimentation s'intéressant à la quantification des probabilités. Pour cela, ils utilisent, une situation assez reconnue dénommée situation de prévision :

L'enfant est mis devant deux collections de jetons dont certains portent une croix au verso. On mélange séparément les deux collections (chaque jeton n'étant visible qu'au recto) et on demande à l'enfant, qui connaît la composition exacte des deux collections, de décider du choix de la collection où il y a plus de chances de trouver, du premier coup, une croix.

Les collections présentées aux enfants sont formées d'un petit nombre de jetons. Il y a en tout 10 items :

1. *double impossibilité*, aucune collection ne contient de croix (exemple 2/2 et 4/4)³⁶,
2. *double certitude*, dans les deux collections, chaque jeton porte une croix,

³⁶ Dans l'écriture 2/2, par exemple, le premier nombre désigne le nombre de croix et le second le nombre total des jetons (il y a donc 2 croix et 0 sans croix).

3. *certitude-impossibilité*, par exemple 2/2 et 0/2, l'une des collections ne contient que des jetons favorables (avec croix), l'autre que des jetons défavorables (sans croix) avec le même nombre de cas possibles (total des jetons),
4. *possibilité-certitude*, par exemple (1/2 et 1/1) ou (1/3 et 3/3),
5. *possibilité-impossibilité*, par exemple 1/2 et 0/2,
6. *compositions identiques*, par exemple 1/2 et 1/2,
7. *proportionnalité*, par exemple (1/2 et 2/4) ou (1/3 et 2/6),
8. *inégalité* des cas favorables et *égalité* des cas possibles, par exemple 1/4 et 2/4,
9. *égalité* des cas favorables et *inégalité* des cas possibles, par exemple 1/2 et 1/3,
10. *inégalités* respectives des cas favorables et des cas possibles, sans proportionnalité, par exemple (1/2 et 2/3) ou (1/3 et 2/5).

Ainsi, les items utilisés sont répartis en 3 catégories :

- Cas de *comparaison à une seule variable* : il y a les mêmes nombres de cas favorables ou défavorables dans les deux collections avec des nombres de cas possibles différents ; c'est le cas par exemple du 9^{ème} item.
- Cas de *proportionnalité* : il y a égalité du rapport du nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles dans les deux collections, le 7^{ème} item nous en donne deux exemples.
- Cas de *comparaison à deux variables* : les nombres de cas favorables, de cas défavorables et de cas possibles diffèrent d'une collection à l'autre sans qu'il y ait proportionnalité, c'est le cas du 2^{ème} exemple de l'item 10.

Au stade I, les auteurs, en analysant les réponses, concluent que, faute d'un système d'opérations, les enfants n'attestent aucun jugement probabiliste cohérent. Ils citent, entre autres, un exemple de réponse relatif à l'item 4, où l'enfant choisit la collection 1/3 car pour lui c'est plus facile quand il n'y a qu'une seule croix (p. 132).

Au stade II, il y a réussite générale dans les items de comparaison à une seule variable. À la fin de ce stade, les enfants arrivent à résoudre d'une façon empirique certains cas de proportionnalité : pour l'exemple de proportionnalité (1/3 et 2/6), l'enfant peut donner la bonne réponse "c'est pareil" quand l'expérimentateur dispose la collection 2/6 en deux paquets égaux de 1/3. Seulement, chose curieuse, quand les deux paquets sont rassemblés, l'enfant préfère la collection 1/3.

À ce stade, nous remarquons l'existence de justifications se basant sur la comparaison des nombres de cas favorables, la comparaison des nombres de cas défavorables ou celle de leurs

différences dans chacune des collections. Il y a aussi des préférences pour la collection contenant le nombre le plus petit de jetons.

Et c'est seulement au stade III que les enfants arrivent à résoudre les questions à deux variables. Ainsi, tous les cas sont résolus par l'établissement des relations entre les cas favorables et les cas possibles assurant la compréhension des probabilités.

Les exemples donnés qui sont relatifs aux réponses de deux enfants de ce stade montrent que les problèmes ne sont pas résolus à l'aide des fractions : c'est plutôt à l'aide de l'idée des collections proportionnelles.

Pour les cas de proportionnalité, un enfant nommé BOS arrive à trouver le nombre de sans croix dans une collection contenant 3 croix pour avoir des chances égales avec la collection (3/6).

La réponse relative au cas de comparaison à deux variables est la suivante :

LUT (12;5). Question 10 (1/3 et 2/5) : « *C'est plus facile ici (2/5) parce que ça fait deux chances contre trois et là une contre deux. Il faudrait qu'il y ait 4 sans croix là (donc 2/6) pour que ce soit égal. Alors, puisqu'il y en a une de moins, c'est plus facile.* » (p.148)

Cette citation montre que LUT crée un système de correspondance en utilisant une collection fictive proportionnelle à la première et ayant le même nombre de cas favorables qu'elle. Il compare alors cette collection à la seconde.

Voici ce qu'en disent les auteurs :

“On voit que, à défaut d'un calcul des fractions, le sujet détermine les doubles rapports par un système de correspondances (cf. Lut) lorsque les proportions ou disproportions ne sont pas immédiatement visibles.” (p. 149)

Il faut remarquer que le dernier enfant a éprouvé des difficultés et a donné des réponses fausses dans le cas (2/5 avec 4/9).

2.1.2. Résultats complémentaires

Nassefat³⁷ (cité dans Maury 1986, pp. 30-33) a repris, en les standardisant, les épreuves précédentes de Piaget-Inhilder. Il a retenu pour les deux collections les items suivants :

Item 1 : 1/4 contre 2/4, item 2 : 1/6 contre 1/6, item 3 : 2/4 contre 2/5, item 4 : 3/5 contre 2/4, item 5 : 2/4 contre 1/2, item 6 : 1/3 contre 2/5 et item 7 : 1/4 contre 3/12.

³⁷ NASSEFAT M. (1963), *Etude quantitative sur l'évolution des opérations intellectuelles. Le passage des opérations concrètes aux opérations formelles*, Neuchâtel, Delachaux et Niestlé.

Les items 1, 2, 3 et 4 sont des cas de comparaison à une seule variable, les items 5 et 7 sont des cas de proportionnalité et l’item 6 représente un cas de comparaison à deux variables. Remarquons, comme le souligne Maury (1986, p. 32), que dans l’item 4 (3/5 contre 2/4) qui présente une égalité des cas favorables, la solution est concrète³⁸ ; par contre, dans l’item 3 (2/4 contre 2/5), il existe deux solutions, une concrète³⁹ et une formelle⁴⁰.

Parmi les résultats trouvés, citons qu’à 13 ans, les items 1, 2, 3 et 4 sont réussis à 100 %, les items 5 et 7 sont réussis à 57 % et l’item 6 est réussi à 30 %. Par contre à 12 ans, les items 1, 2 et 4 sont réussis à 100 % et l’item 3 est réussi à 77 %.

En se référant au pourcentage global de réussite, Nassefat montre une antériorité des items 1, 2 et 4 sur l’item 3 (93 % contre 64 %) et une antériorité de l’item 3 sur les items 5, 6 et 7 (dans ces items la réussite varie de 11 % à 28 % selon les cas). Nassefat se base sur des résultats tels que les derniers pour “émettre l’hypothèse de l’existence d’un palier intermédiaire” (ibid. p. 33). Il conclut à un accord entre l’ordre de difficulté de la tâche à accomplir avec l’ordre génétique. Ainsi, confirme-t-il les conclusions de Piaget et Inhelder tout en suggérant un palier intermédiaire dans le développement génétique entre le stade des opérations concrètes et le stade des opérations formelles qu’il suggère de nommer *stade pré-formel*.

Toutefois, dans sa thèse, Bordier critique sérieusement les résultats de Piaget et Inhelder dans une situation de prévision, et plus exactement dans un cas de proportionnalité (un chapeau bleu contenant 2 boules blanches et 3 boules noires et un chapeau rouge contenant 4 boules blanches et 6 boules noires). Pour gagner 100 \$, on doit obtenir une boule blanche en tirant sans regarder une boule dans l’un des chapeaux. La question consiste à choisir parmi les attitudes suivantes : tirer dans le chapeau bleu, tirer dans le chapeau rouge ou ne pas avoir de préférence. Laissons l’auteur s’exprimer :

“Nous avons déjà signalé que selon Piaget et Inhelder, au stade formel 11 ans et davantage, l’enfant peut percevoir la *chance* comme un invariant de transformations telle celle de doubler le nombre de boules de chaque couleur. Or comme dans notre enquête, d’une part, seulement 30 élèves (31 %) de 13 - 14 ans n’ont pas montré de préférence pour l’un des chapeaux et que, d’autre part, seulement 3 de ces 30 élèves ont mentionné plus ou moins explicitement l’égalité des rapports comme raison de leur indifférence entre les deux chapeaux, il convient de mettre sérieusement en doute l’affirmation de Piaget et d’Inhelder.” (Bordier 1991, pp. 40-41)

³⁸ “Plus de chances en 3/5 car il y a plus de croix” (Maury 1986, p. 32).

³⁹ “Plus de chances en 2/4 parce qu’il y a moins de sans-croix” (ibid. p. 32).

⁴⁰ “Plus de chances en 2/4 car il y a deux croix contre deux sans-croix tandis que dans l’autre collection, il y a deux croix contre trois sans croix” (ibid. p. 32).

En mettant en doute l'affirmation de Piaget et Inhelder, Bordier semble comprendre dans les conclusions de ces derniers que les cas de proportionnalités de la situation de prévision sont à 100 % résolus par les élèves du stade formel. Or les conclusions de ces derniers nous paraissent dire que les enfants du stade formel possèdent les structures nécessaires à la résolution des cas de proportionnalité. D'ailleurs, les derniers résultats de Nassefat dans son test standardisé conforte nos dires.

2.2. Travaux de Fischbein

Fischbein, qui a écrit un ouvrage très complet sur la pensée probabiliste (Fischbein 1975) s'intéresse à la mise en relation entre l'intuition (associée à l'action immédiate) et l'intelligence (les opérations mentales et les actions intériorisées). D'après Maury, "Piaget adopte une approche structurale et étudie, les concepts achevés, spontanément développés par les enfants ; alors que Fischbein s'intéresse à l'aspect fonctionnel de la connaissance" (Maury 1986, p. 47).

Pour Fischbein, l'évolution des conceptions des élèves ne pourrait pas être ramenée aux stades de développement : les opérations représentent des potentialités que l'école devrait renforcer en développant chez l'enfant des intuitions probabilistes correctes.

Dans cette partie, nous exposons deux travaux dont Fischbein est co-auteur et nous clôturons par quelques remarques.

2.2.1. Un processus d'initiation aux probabilités à l'école primaire

Dans leur travail, E. Fischbein, I. Pampu et I. Minzat (1969) commencent par mentionner l'importance que les probabilités et la statistique ont acquise pour la "pensée scientifique" au milieu du 20^{ème} siècle et les difficultés auxquelles se heurtent les adultes en les abordant. Ils font référence à Servais (1968)⁴¹ en disant que les probabilités ne sont pas seulement "un ensemble de techniques de calcul, mais *un mode de pensée spécifique*, exprimant une orientation distincte de l'intellect" (Fischbein et al. 1969, p. 16). Ils en déduisent que ces deux disciplines doivent être cultivées graduellement comme l'arithmétique, l'algèbre ou la géométrie et que certaines notions probabilistes et statistiques doivent être introduites assez tôt. Ils citent quelques travaux dont le plus ancien est celui de Piaget et Inhelder (1951) pour conclure qu'au stade des opérations formelles et même à celui des opérations concrètes, l'enfant devient capable d'opérer avec le concept de probabilité. Ils ajoutent :

⁴¹ Servais w. (1968), *Sujets futurs et nouvelles méthodes de l'enseignement mathématique*, C.I.E.S. Congrès de Varna.

III. Revue de la littérature

“l'évolution mentale ne prépare, en réalité, qu'une série de potentialités. Leur mise en valeur effective ne peut se réaliser que par un exercice systématique, de longue durée, au cours de ces stades de l'évolution intellectuelle.” (Fischbein et al. 1969, p. 16).

Ils signalent la rareté d'expériences didactiques sur l'introduction des probabilités à l'école élémentaire puis exposent le contenu de l'article : il est question de leçons d'initiation qui ont été données,

- en avril et mai 1968, à quatre classes de IV^{ème} (10-11ans) et à trois classes de V^{ème} (11-12 ans) ;
- l'année scolaire suivante, en décembre 1968, les leçons ont continué avec deux classes de V^{ème} qui sont passées en VI^{ème}.

Les leçons ont été effectuées par les professeurs des classes choisies et par les auteurs. Elles ont été organisées sur la base d'une hypothèse, qualifiée de théorique et didactique, disant que “la statistique et les probabilités décrivent la même réalité fondamentale - les phénomènes aléatoires” (ibid. p. 17). Ces leçons ont été précédées d'un résumé sur les fractions et d'exercices de simplification.

Dans la suite, nous focalisons sur les leçons données en IV^{ème} classe.

Quelques notions de base font l'objet de la 1^{ère} leçon en IV^{ème} classe. Ces notions sont ceux d'événement "dans un sens très général", d'événement *certain, possible, impossible*. Elles sont abordées à partir de situations idéalisées comme le lancement d'un dé, le tirage d'une bille. D'après les auteurs, les expériences idéalisées facilitent "la transposition mathématique" et représentent "un modèle intuitif direct".

La 2^{ème} leçon est consacrée au concept de probabilité. Les auteurs expliquent qu'ils n'ont pas utilisé des billes car ils ont constaté que les enfants, dans leurs premiers contacts avec le concept de probabilité, ont tendance à comparer les parties entre elles au lieu de comparer une partie au tout. Ils ont présenté aux élèves deux tas d'enveloppes en leur disant qu'il y a des billets gagnants dans certaines d'entre elles. Les élèves, connaissant le nombre d'enveloppes de chaque tas (le tout) et le nombre de billets gagnants, ont à choisir le tas offrant plus de chances de trouver un billet gagnant. Les auteurs remarquent que le concept de chance n'a pas à être défini et que même les préscolaires le possèdent avant même de le prononcer. Ils commencent, en s'appuyant sur quelques exemples, par un cas où les chances, étant égales (par exemple 2/4, 4/8), sont à découvrir par les élèves. Ils traitent ensuite le cas où les tas sont à chances inégales.

Ainsi définissent-ils la *probabilité* comme rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas "également" possibles.

La 3^{ème} leçon est une leçon à caractère expérimental. Les enseignants présentent une boîte opaque dans laquelle sont introduites des billes rouges et des billes noires (par exemple respectivement 3 et 12). Dans ce cas, les élèves ont à calculer une somme pour trouver le nombre de cas possibles. La probabilité de l'extraction d'une bille rouge étant calculée ($P = 3/15 = 1/5 = 0,20$), il y a un passage à des extractions effectives. Les élèves effectuent par exemple 30 tirages en les regroupant par 10. Après chaque groupe de tirages, ils calculent "le rapport défini par la probabilité (fréquence relative)" (ibid. p. 19) et notent les valeurs obtenues. Ils calculent finalement, pour tous les tirages, la fréquence relative, l'expression de fréquence relative n'étant pas utilisée. L'expérimentation permet de constater que les fréquences relatives oscillent autour de la probabilité calculée et que celle de la totalité des tirages est la plus proche de cette probabilité. "Les élèves acquièrent ainsi *le sens statistique* du concept de probabilité et réciproquement, l'idée de l'existence d'une tendance constante qui oriente la succession des événements aléatoires. On a créé, de cette manière, les conditions pour la fusion de l'aléatoire et du nécessaire, qui est, du point de vue psychologique, la base du concept de probabilité" (ibid. p. 20).

La 4^{ème} leçon permet d'élargir le sens statistique du concept de probabilité. Elle permet aussi de consolider la compréhension de ce concept en tant que *mesure des chances* permettant d'établir une relation d'ordre entre elles, chose déjà vue à la 2^{ème} leçon. Il est question d'effectuer un nombre égal de tirages (par exemple 30) dans deux urnes à contenus déterminés (3/15, 10/20). Les élèves constatent, jusqu'à la fin, que le nombre de billes gagnantes tirées de la seconde urne est plus grand.

La 5^{ème} leçon s'intéresse encore à la stabilité des fréquences relatives, mais à l'aide des *échantillons*. D'une urne contenant 400 graines de haricots dont 100 sont colorées ($P = 1/4 = 0,25$), les élèves procèdent à l'extraction des échantillons à l'aide d'un verre de capacité approximative 80 haricots. Ils tirent, avec remise, cinq échantillons successifs pour chacun desquels ils comptent les haricots blancs et colorés tirés, les notent au tableau et calculent la fréquence relative. Les auteurs trouvent que les élèves ont ainsi vu que c'est la moyenne qui s'approche le plus de la valeur théorique calculée. Ils remarquent que les élèves ne connaissent pas les moyennes mais connaissent les opérations arithmétiques nécessaires. À la suite des expériences, les enseignants introduisent la notion d'*échantillon* comme étant une

partie prélevée au hasard permettant de connaître approximativement la composition du tout. Ils parlent alors de l'importance de l'échantillonnage.

Les auteurs signalent que les élèves montrent de l'intérêt dans les activités qui représentent des jeux collectifs et que les leçons se sont basées sur les connaissances antérieures des élèves à propos des fractions.

Ils soulignent que "*l'initiation expérimentale au domaine des probabilités représente une occasion extraordinaire pour familiariser les enfants avec des concepts fondamentaux de la science : prévision, expérience, et vérification, nécessité et hasard, certitude et probabilité, loi et loi statistique, connaissance par induction*" (ibid. p. 21).

Ces leçons sont couronnées par "une épreuve écrite de contrôle" à laquelle ont participé 137 élèves. Les auteurs concluent en disant que les élèves ont assimilé les notions d'événements certains, impossibles et possibles et ont compris le procédé de calcul de la probabilité. Toutefois, ils ont encore des difficultés quand il est question de calculer une somme de deux termes pour chercher le tout ; presque un tiers d'entre eux est tenté, dans un problème de calcul de probabilité, de rapporter les parties favorables et défavorables entre elles.

Pour les classes de V^{ème}, les enseignants n'ont disposé que de 3 heures. Pour les deux premières leçons, ils ont repris le même programme enseigné en IV^{ème} ; pour la troisième, ils ont essayé d'introduire la règle de multiplication des probabilités.

Les auteurs disent que le temps d'enseignement étant restreint, les résultats de l'épreuve écrite ne sont pas concluants.

Dans les classes de VI^{ème}, les leçons, qui constituent une continuation du programme enseigné quelques mois auparavant en V^{ème}, ont porté essentiellement sur les *événements indépendants* et sur la *règle de multiplication des probabilités*.

Le cycle de leçons est suivi d'une épreuve écrite de contrôle à laquelle ont participé 69 élèves. À partir des résultats, les auteurs déduisent :

- que l'identification de la probabilité de l'événement certain à 1 n'est pas aussi naturelle que l'on peut croire et
- qu'il faut insister, au cours des séances d'initiation aux probabilités, sur les modalités *avec* et *sans* remise.

En définitive, les auteurs sont satisfaits par les résultats des leçons et des épreuves qui montrent l'intérêt des enfants et leur réceptivité pour des notions faisant partie d'un champ représentant un mode de pensée complémentaire du mode déterministe.

Ils concluent que les procédés mentaux essentiels à ce mode "doivent être formés à temps, pas à pas, tout au long des grandes étapes du développement intellectuel, par des moyens didactiques appropriés à ces stades" (ibid. p. 29) ; ils abordent ensuite quelques idées qui ont montré leur pertinence dans l'organisation des leçons introductives des probabilités et de la statistique :

- un caractère expérimental (effectif) doit être attribué à ces leçons,
- les expériences effectives doivent être aménagées de façon que les deux aspects statistique et probabiliste soient saisis dans leur "unité intime",
- les enfants doivent être familiarisés, simultanément, avec l'analyse combinatoire.

L'article se termine par l'énoncé du principal objectif des leçons de probabilités et de statistiques à l'école élémentaire :

"Leur fin est celle de former, par des exercices amples et systématiques, les structures intuitives et les habitudes mentales fondamentales qui devront intervenir plus tard dans les raisonnements probabilistes et statistiques abstraits." (ibid. p. 30)

2.2.2. Intuitions dans l'initiation aux probabilités

Dans un autre article qui s'intéresse aux intuitions dans l'initiation aux probabilités, E. Fischbein, I. Barbat et I. Minzat (1971) comparent le terrain intuitif par rapport à quelques concepts et procédés fondamentaux de la théorie des probabilités.

Les élèves testés, n'ayant aucune connaissance sur la théorie des probabilités, proviennent d'écoles générales et de lycées de Bucarest. L'étude s'est faite sur trois niveaux d'âge : VI^{ème} (entre 12,5 et 13,8 ans), VIII^{ème} (entre 14,6 et 15,5 ans) et X^{ème} (entre 16 et 16,9 ans).

Les auteurs, favorables à "l'hypothèse que pour être efficace l'enseignement d'une discipline devrait être précédé de la prospection du terrain intuitif" (Fischbein et al. 1971, p. 265), concluent à l'existence d'un terrain intuitif favorable pour le concept de chance, le concept de mesure des chances, l'attribution de valeurs 0 et 1 respectivement pour les événements impossible et certain, la mesure de la chance comme étant le rapport entre le nombre des événements favorables et le nombre des événements également possibles.

Ils ajoutent que l'âge n'apporte aucune amélioration systématique due à ces intuitions (en dehors d'un processus instructif).

Terminons par une conclusion découlant du travail étudié :

“Un exercice prolongé (en situations variées) est donc nécessaire non pas simplement pour la construction d’un fond intuitif adéquat, c’est-à-dire d’une intuition secondaire, mais également pour l’articulation d’un fond intuitif primaire existant avec une technique de calcul correspondante.” (ibid. p. 279)

2.2.3. Remarques

L’enseignement que nous apportent ces deux travaux est qu’une introduction des probabilités doit se faire simultanément dans les deux approches "statistique et probabiliste" (laplacienne et fréquentiste) et que cette introduction est possible dès l’école primaire à l’aide de moyens didactiques appropriés.

Et ce sont justement ces moyens didactiques qui sont au cœur de cette introduction précoce du champ qui nous intéresse. Remarquons, dans ce contexte, que le détour fait dans le premier article par l’utilisation des enveloppes au lieu des billes à cause de la tendance, constatée chez les enfants, à comparer les deux parties des cas favorables et des cas défavorables au lieu de comparer une partie au tout (l’ensemble des cas possibles) est quelque peu inefficace. En effet, les auteurs retrouvent dans l’épreuve écrite la tendance mentionnée chez un tiers des élèves testés.

Pour terminer, il faut dire aussi que ces travaux portent l’idée que l’introduction précoce des probabilités doit être accompagnée avec un travail sur l’analyse combinatoire.

2.3. Quand peut-on initier l’enfant à la combinatoire ?

Dans le cadre de la didactique des probabilités, les travaux de Maury sont, à notre sens, incontournables pour quiconque s’intéresse à l’enseignement et à l’apprentissage du domaine de l’aléatoire, parce qu’ils comportent un travail de synthèse sur les recherches psychologiques portant sur les probabilités (Maury 1986). Ils le sont aussi car ils portent sur les conceptions des élèves de différents niveaux relativement aux notions de la quantification des probabilités, de l’indépendance et de la probabilité conditionnelle.

Notre intérêt porte ici sur un travail où Maury est co-auteur, un travail s’inscrivant dans le cadre des possibilités génétiques au niveau du domaine de la combinatoire.

Dans leur article portant sur la recherche de l'âge d'une possible initiation au calcul combinatoire, S. Maury et M. Fayol (1986) complètent d'autres travaux⁴² qui ont montré, dans des situations où le contexte est familier (exemple : couples de danseurs), que le "schème de la combinatoire EXF"⁴³ serait disponible chez de jeunes enfants pour la manipulation d'un nombre d'éléments assez faible (par exemple : éléments d'un produit cartésien 3 x 3 et élèves de 8 ans et demi pour Vergnaud et Cohen.

La population testée comporte 54 enfants de CM1 et CM2 (9-10 ans)⁴⁴. Les élèves sont confrontés à deux problèmes ayant trait à la combinatoire où un matériel relevant du domaine de l'électricité est mis en jeu.

Sans entrer dans les détails de l'expérimentation, focalisons sur l'un des résultats trouvés par les auteurs. Ce résultat formule la disponibilité du schème de la combinatoire EXF (4 x 4) chez les élèves de 9-10 ans. En effet, deux élèves seulement (un seul élève dans chacun des deux niveaux CM1 et CM2) "ne mettent jamais en œuvre une procédure d'énumération systématique" (ibid., p. 96) :

"L'hypothèse de cette disponibilité est renforcée par l'observation suivante : dans les groupes, en cas de différence entre les points de vue des deux élèves, l'accord quant à la règle d'action à utiliser s'est toujours très vite établi au bénéfice de l'énumération systématique ; l'élève pour lequel la situation n'avait pas immédiatement « sollicité » l'intervention du schème s'aurait rapidement capable de le mettre en œuvre" (ibid., p. 97).

2.4. Conclusion

Des travaux précédents, nous tirons les quelques enseignements suivants :

Au niveau structurel, Piaget et Inhelder (1951) nous apprennent que c'est au cours du stade des opérations formelles (à partir de 11-12 ans) que les enfants arrivent à résoudre les problèmes de quantification des probabilités par l'accès aux opérations combinatoires et au raisonnement proportionnel propres à ce stade. Nassefat (1963) confirme ces résultats en proposant un stade intermédiaire entre le stade concret et le stade formel.

Au niveau fonctionnel, Fishbein et al. (1969 et 1971), tout en pensant que le champ des probabilités et de la statistique doit être graduellement cultivé, considèrent que certaines

⁴² - VERGNAUD G., COHEN R. (1969), Sur l'activité combinatoire des enfants de 8 ans, *Psychologie française* **14** (4), 321-332.

- MAURY S., ROGALSKY J. (1970), Produit cartésien et complément, étude génétique, *L'année psychologique*, **70** (1), 53-71.

- LONGEOT F. (1969), *Psychologie différentielle et théorie opératoire de l'intelligence*, Paris : Dunod.

⁴³ Le "schème de la combinatoire EXF" rend compte de "la compétence qui consiste à énumérer de manière exhaustive et sans répétition les éléments d'un produit cartésien par des procédures d'exploration fiables" (Maury et Fayol 1986, pp. 68-69)

⁴⁴ CM1 : cours moyen, 1^{ère} année ; CM2 : cours moyen, 2^{ème} année.

notions probabilistes et statistiques doivent être introduites assez tôt. Ils voient que les stades ne présentent que des potentialités que l'enseignement pourrait renforcer. Pour eux, les enfants seraient capables vers 10 ans, en suivant un enseignement systématique, d'estimer les chances en comparant correctement des rationnels. Ils montrent l'existence d'un terrain intuitif favorable à l'enseignement des probabilités dès l'âge de 10 ans, enseignement devant être fait simultanément dans les deux approches fréquentiste et laplacienne et devant être accompagné d'un travail d'analyse combinatoire.

Et c'est au même niveau fonctionnel que Maury et Fayol (1986) dévoilent la possibilité d'une introduction précoce (vers 10 ans) du domaine de la combinatoire. Ils montrent la disponibilité d'un schème combinatoire relatif au produit cartésien à cet âge.

3. Probabilités et simulations

Dans le domaine des probabilités, l'approche fréquentiste, notamment par l'intermédiaire des simulations sur ordinateur, sont utilisées dans diverses recherches didactiques dont les problématiques et les résultats semblent être intéressants à divers degrés.

Zaki (1990), s'intéressant à trois situations dont le problème connu sous le nom de « la ruine du joueur »⁴⁵, utilise un logiciel préétabli pour simuler des situations qui sont complexes au niveau du traitement probabiliste direct mais qui sont connues par les étudiants universitaires de 1^{ère} année scientifique. La simulation est ici, entre autres, un moyen permettant d'avoir "un contact expérimental" avec les situations explorées, de faire des estimations et de contrôler des résultats mathématiques préétablis.

Concevant l'enseignement des probabilités sur trois étapes : l'identification des "conceptions intuitives" des élèves, la construction par ces derniers d'une "science expérimentale" des probabilités et la formalisation de cette dernière, Bordier (1991) fait intervenir dans la deuxième phase une simulation basée sur un modèle général, le modèle des urnes. Ainsi, c'est à l'élève, après avoir produit une réponse, de déterminer le modèle adéquat de l'expérience aléatoire étudiée en introduisant le nombre d'urnes (bouliers) et leur contenu dans l'ordinateur⁴⁶ qui se charge du reste. Les résultats donnés par l'ordinateur sont ensuite

⁴⁵ "Deux joueurs A et B jouent une partie qui se compose d'une suite de coups indépendants. A chaque coup, la probabilité que A gagne est p et celle de B est $q = 1 - p$; le joueur qui perd donne 1 franc à son adversaire. Initialement, le joueur A dispose de a francs et le joueur B dispose de b francs.

(1) Quelle est la probabilité que le joueur A soit ruiné au cours de ce jeu ?

(2) Le jeu s'arrête dès que l'un des deux joueurs est ruiné. Si X désigne le nombre de coups jusqu'à la fin de la partie, calculer la valeur moyenne de X " (Zaki et Pluvinage 1991, p. 152).

⁴⁶ Les élèves ont donc à connaître le langage utilisé par le logiciel.

confrontés aux réponses préalables, puis discutés. Ce "laboratoire de probabilité" est testé auprès de quatre élèves de niveau secondaire⁴⁷ et d'une enseignante de mathématiques enseignant ce niveau.

Le niveau qui nous intéresse le plus étant celui du collège, nous nous limitons dans la suite à deux travaux, le premier concerne le niveau primaire et le second le niveau du collège.

3.1. Une expérience de modélisation par les probabilités en CM2

G. Brousseau, N. Brousseau et G. Warfield (2005) rendent compte⁴⁸ d'une expérience effectuée, en 1973-1974, à l'école Jules Michelet de Talence dans une classe de CM2 composée de 17 élèves, dans le cadre des recherches "sur la possibilité d'un enseignement des probabilités dans la scolarité obligatoire". Cette expérience (processus) conçue par G. Brousseau, s'étale sur 32 séances qui, à l'exception de quelques unes, occupent chacune, en moyenne, une dizaine de minutes du temps réservé quotidiennement aux mathématiques. Le compte rendu est divisé en 6 phases.

La première phase intitulée « *une introduction au test d'hypothèse* » comporte 5 séances. La 1^{ère} séance commence par un défi lancé aux élèves : d'une boîte contenant des jetons noirs et blancs, la maîtresse prend, après avoir bien brassé, 5 jetons qu'elle met dans un sac A, refait la même chose avec deux autres sac B et C puis demande aux élèves de deviner la composition de chaque sac. Elle leur donne le droit de regarder un jeton tiré d'un sac donné avant de l'y remettre.

Les élèves passent, un à un, pour tirer un jeton de chaque sac, le montrer aux autres et le remettre dans le sac. Les résultats obtenus sont écrits au tableau sous la demande de certains élèves et les premières déclarations des élèves montrent une certaine mise en rapport entre les tirages effectués et les contenus des sacs. Mais, l'idée implicite que dans tel sac, il y a plus de noirs car on a tiré plus de noirs n'est pas partagée par tout le monde. En effet des objections sont vite apparues, elles sont basées sur le fait qu'on peut tirer le même jeton ou "fondées sur des modèles spontanés bien connus : "si on a vu beaucoup de noirs, alors le tour des blancs va venir"" (Brousseau et al. 2005, p.3).

Les tirages se poursuivent dans les autres séances dont nous retenons deux événements. Le premier est la proposition d'un élève de faire des séries de 5 tirages au cours de la 2^{ème} séance. Le deuxième est la proposition d'un autre élève, Claude, de diviser le nombre total de tirages

⁴⁷ Les élèves sont canadiens et le niveau considéré correspond à celui de la seconde en France.

⁴⁸ C'est la version française d'un article des mêmes auteurs publié en anglais en 2002. L'article de 2002 s'arrêtait à la 5^{ème} phase (25^{ème} séance), celui de 2005 le reprend et le complète jusqu'à la 32^e séance.

par le nombre de séries de 5 : par exemple, 15 tirages (3 séries de 5) effectués par trois élèves ont donné le total 10n5b et une division par 3 est faite pour trouver la composition du sac A ($10 : 3 = 3,33$ et $5 : 3 = 1,66$). Cet événement qualifié d'heureux par les auteurs, permet aux élèves de passer d'une comparaison entre des effectifs sur des compositions possibles considérées à une comparaison entre des décimaux rendant compte de tous les tirages effectifs dans un sac. Ces décimaux seront supposés "comme des « modèles » approchés du contenu d'un sac" (ibid. p.11).

La deuxième phase intitulée « *modélisation et expérience* » s'étale sur 3 séances (de la 6^{ème} à la 8^{ème} séance). La 6^{ème} séance correspond à la construction de « modèles » pour savoir si les statistiques correspondent au contenu. La maîtresse propose de représenter un sac par une bouteille en plastique et les jetons par des billes, ce qui permettra d'avoir des expériences plus rapides et donc plus nombreuses. Elle a en fait préparé, à l'avance, des bouteilles transparentes et des bouteilles opaques munies chacune d'un bouchon transparent. Les bouteilles opaques remplaceraient les sacs de compositions inconnues. Au lieu de faire un tirage, on secoue la bouteille, on la retourne et on note la couleur de la bille qui se loge dans le bouchon. La question du fonctionnement analogue d'une bouteille avec des billes et d'un sac avec des jetons se pose, les élèves pouvant même refuser que deux sacs identiques donnent les mêmes résultats. Cependant, ils acceptent "l'idée fortement suggérée par leur maîtresse, que « la bouteille ou le sac c'est pareil »" (ibid., p. 13). Et les élèves passent de 3 séries à un nombre supérieur de séries de 5 tirages chacune.

Ainsi, la "perspective d'obtenir une réponse aux questions soulevées à propos du passé de la machine de hasard par de nouvelles séries de tirages va être exploitée systématiquement par les organisateurs pendant toute la deuxième phase du processus, à chaque moment où ils sentaient que les élèves avaient tendance à se lasser" (ibid. p. 14). Notons qu'il n'y avait eu de discussions au sujet du cumul des résultats de plusieurs expériences successives et que vers la fin de cette phase, les élèves semblent convaincus de la « modélisation » d'un sac par une bouteille ; ils pensent aussi qu'à partir de grandes séries de tirages, ils peuvent tirer des informations. Cette séance marque "l'aboutissement d'un processus a-didactique et peut être le maximum de ce qu'il peut produire" (ibid. p. 18).

Le concepteur note que le moteur du processus est le test d'hypothèse et que les hypothèses émises à propos de la structure d'une machine de hasard, sur la base des statistiques, vont être examinées à l'aide des probabilités. Pour ce faire, il faut disposer de procédés puissants

permettant de produire des séries « assez longues ». Le passage aux bouteilles est conçu dans ce sens ; c'est une étape qui sera suivie de l'utilisation de l'ordinateur.

La troisième phase intitulée « *représentation graphique de longues séries* » s'étale sur 8 séances (de la 9^{ème} à la 16^{ème} séance). À la 9^{ème} séance, la maîtresse propose de reprendre la deuxième méthode (cumul et divisions) en introduisant le cumul de manière systématique : diviser l'effectif des blancs ou des noirs par le nombre de tirages au lieu de le diviser par le nombre de séries de 5 tirages. La classe est organisée en trois groupes qui font chacun des tirages avec une seule bouteille opaque (A, B ou C) et les résultats sont disposés dans des tableaux.

Les élèves espèrent que le prolongement des tirages et les calculs "inexplicables" des décimaux (fréquences cumulées) pourront les convaincre quant à la composition des sacs que la maîtresse refuse d'ouvrir. Et la tâche débouche sur un travail avec quatre bouteilles transparentes représentant les contenus possibles des sacs dans lesquels chacun des 4 groupes formés fait 180 tirages. La 15^{ème} séance est consacrée aux représentations graphiques, chaque groupe étant invité à représenter les tirages effectués : sont indiqués, horizontalement les effectifs des tirages (par 10) et verticalement les rapports correspondants (fréquences cumulées).

La 16^{ème} séance est consacrée à la simulation par ordinateur. Il est expliqué aux enfants que la machine effectue des opérations similaires au remplissage du sac et aux tirages. Chaque groupe vient lui demander de faire 10, puis 20, etc. jusqu'à 180 tirages, après avoir choisi le contenu (celui de sa bouteille transparente). Une calculatrice est mise à leur disposition pour leur faciliter le calcul des fréquences cumulées.

La 3^{ème} phase vise ainsi la convergence des fréquences cumulées vers des valeurs traduisant le contenu des bouteilles, convergence qui « est souvent utilisée pour introduire le calcul des probabilités auprès des élèves » (ibid. p. 29).

Remarquons qu'avec le refus d'ouvrir les bouteilles, qui est indispensable au processus, apparaît une rupture du contrat didactique habituel qui n'est plus idoine dans le cas de l'enseignement de "la pensée probabiliste et statistique (ibid. p. 26).

Au début de la quatrième phase, « *la convergence et la décision statistique* » (de la 17^{ème} à la 20^{ème} séance), les élèves retracent sur du papier quadrillé les deux courbes représentant les tirages blancs faits avec les bouteilles transparentes et ceux donnés par l'ordinateur. Ils observent que les courbes sont très écartées au début puis se rapprochent de plus en plus ; ils se demandent alors si les courbes vont se rapprocher encore ou s'écarter en continuant les

III. Revue de la littérature

tirages. Ils s'aperçoivent au 180^{ème} tirage que les courbes indiquent des rapports autour de 0,20, 0,40, 0,60 et 0,80 respectivement pour les bouteilles contenant 1, 2, 3 et 4 billes blanches et s'en assurent en demandant à l'ordinateur de faire un grand nombre de tirages (2000, 4000, 5000).

La maîtresse leur propose alors, la classe étant organisée en 4 groupes, de jouer à un jeu dont les règles sont fixées comme suit : un groupe peut "acheter" des résultats de tirages avec des jetons, chaque groupe disposant de 20 jetons et 1 jeton permettant d'avoir les résultats de 5 tirages. Le groupe qui est presque sûr de la composition peut faire un pari : il mise le nombre de jetons qu'il veut, il propose une composition, il indique la valeur à laquelle il pense que la fréquence cumulée se rapproche dans le cas de beaucoup de tirages, il vérifie le contenu du sac ; il récupère alors le double de la mise si la composition proposée est la bonne et il perd la mise dans le cas contraire. Le groupe qui devine la bonne composition et qui a le plus de jetons à la fin de la partie est déclaré gagnant. Ce jeu montre que les statistiques permettent d'obtenir des informations sur une machine de hasard et que l'obtention d'information étant coûteuse, les élèves ont à chercher un équilibre entre deux coûts : la perte en demandant peu d'informations et le gain faible en demandant trop. Ainsi, décider suppose une prise de risque.

La 4^{ème} phase débouche sur un travail sur les valeurs limites des fréquences cumulées (fréquences théoriques) dans le cas d'un sac contenant un certain nombre de billes ; une comparaison avec les "fréquences limites" données par l'ordinateur, à qui les élèves font faire 5000 tirages, est alors accomplie.

La cinquième phase nommée « *les intervalles de décision* » est répartie sur 5 séances (de la 21^{ème} à la 25^{ème} séance). On y trouve une reprise du jeu de pari, à quitte ou double, sur la composition d'un sac et les valeurs limites.

Les élèves sont invités alors à produire un découpage de l'intervalle $[0, 1]$ permettant de deviner le contenu d'un sac à partir de la fréquence observée de la couleur blanche.

Et la maîtresse finit par signaler que le "meilleur" découpage en intervalles ne peut pas donner une décision sûre au bout de 10, 20 ou 50 tirages. "Pour être à peu près sûr de la composition d'un sac de 5 billes, il faut au moins 200 tirages. Au bout de 5000 tirages, on peut être certain du résultat" (ibid. p. 35).

La sixième phase qui est dénommée « *les événements et leur probabilité* » et s'étale sur 7 séances (de la 26^{ème} à la 32^{ème} séance).

La maîtresse commence par présenter un sac de tissu opaque contenant des cartons carrés de deux couleurs différentes portant des chiffres. Elle parle du tirage d'un seul carton, appelle "ce qui peut se produire" un "évènement" et écrit sur le tableau tous les événements trouvés par les élèves : "il sort un carton rouge", "il sort un carton jaune", "il sort le carton 1", "il sort le carton 2", ... ou "il sort le carton 6".

La maîtresse parle alors de l'expérience déjà vécue par les élèves ; elle rappelle que les fréquences cumulées des observations de billes blanches se rapprochent du nombre de billes blanches divisé par le nombre total de billes dans la bouteille. Elle parle alors des chances de tirer une blanche lors d'une seule observation et dit que le dernier rapport va être appelé "probabilité d'observer une bille blanche en une observation". Elle propose ensuite de leur apprendre comment on peut attribuer, dans certains cas, une probabilité à des événements dans diverses expériences⁴⁹.

Suite à ces déclarations, les élèves font le rapprochement des cartons aux billes (Brousseau et al. 2005, p. 37).

Cette dernière phase dite "classique" concerne la notion d'évènement, la recherche des évènements relatifs à plusieurs expériences, le calcul de sommes de probabilités, la notion d'expériences consécutives et celle de produit de probabilités. Et "les exercices furent réussis dans des conditions raisonnables, probablement grâce à la familiarité des concepts de base. Les valeurs avancées comme probabilités pour des raisons implicites de symétrie peuvent toujours être vérifiées par des expériences connues des élèves" (ibid., p. 46).

Quels enseignements pourrait-on tirer de cette expérimentation ?

D'abord, la simulation est prise comme étant l'aboutissement d'un processus permettant d'avoir des "expériences" plus nombreuses, le nombre important d'expériences permettant de modéliser une "machine de hasard" par une probabilité par l'intermédiaire des fréquences cumulées et de leur représentation graphique. Il faut dire qu'une simulation remplace l'expérience réelle. Mais est-ce que les élèves voient en elle cette expérience réelle ?

Ensuite, cette expérimentation est placée dans le cadre théorique de la TSD au sens où les situations sont conçues afin de dégager des modèles au sens d'invariants opératoires.

L'initiation des probabilités est faite dans une le modèle laplacien et les calculs sont effectués au sein du modèle. Toutefois, le concepteur, tout en parlant d'une familiarité avec les concepts de base, aborde la question de la possibilité de vérification des calculs faits à l'aide des "expériences connues des élèves".

⁴⁹ Ce paragraphe est écrit suite à une correspondance avec Guy Brousseau.

Notons finalement qu'outre la difficulté liée au changement dans les "conditions habituelles de validation", le concepteur met en relief une difficulté qui est vite apparue lors de la mise en œuvre du processus par l'enseignant : "l'inquiétude du professeur de ne pas voir se réaliser les événements caractéristiques du processus", ce qui "montre que la reproduction d'une situation n'est envisageable dans l'enseignement que dans la mesure où le professeur pense pouvoir la diriger et la contrôler" (ibid. p. 47).

3.2. Des conditions didactiques pour se familiariser à l'aléatoire dès le collège

Dans sa thèse de doctorat, comparant l'évolution des programmes de mathématiques en France à celui du Brésil, C. Coutinho (2001) s'intéresse aux conditions didactiques dans lesquelles les élèves peuvent se familiariser avec le domaine de l'aléatoire dès le collège.

Dans ce travail, l'auteure opte pour une « ingénierie didactique » basée sur une introduction en termes de modèle d'urne de Bernoulli⁵⁰ suivie d'un travail de simulation dans l'environnement dynamique Cabri-géomètre II. Cette ingénierie, expérimentée avec des élèves de 3^{ème} et de seconde (14-15 ans) comporte trois situations :

- la situation A : "Expérience de Bernoulli",
- la situation B : "Urne à Pixels",
- la situation C : "Franc-Carreau".

Dans la première activité de la situation A, il est demandé aux élèves de donner deux situations aléatoires, d'observer les couleurs de voitures à la sortie d'un parking ainsi que "la répartition entre garçons et filles à la sortie du collège à la fin des cours" ; les dernières demandes ayant pour but l'amorce du processus de modélisation à l'aide d'une urne de Bernoulli. La deuxième activité est conçue dans le but de la construction du modèle en question. Elle est composée de trois demandes : procéder à un "tirage au hasard" dans un pot de perles, analyser l'expérience « sortie du collège » à l'aide de l'expérience du pot et lui associer une composante de l'urne de Bernoulli qui peut la modéliser. Ces activités sont choisies aussi pour dégager la notion d'expérience aléatoire au sens de l'intervention du hasard et de la reproductibilité de l'expérience (Coutinho 2001, p. 100).

Dans la première activité de la situation B, une discrétisation d'une région de l'écran est proposée aux élèves par l'intermédiaire de la définition d'un pixel : "*Nous proposons aux élèves la définition suivante d'un pixel : un petit carré unitaire qui tapisse la figure à l'écran.*

⁵⁰ Dans ce modèle, utilisé pour des expériences aléatoires à 2 issues (succès et échec), il est question de tirages avec remise d'une urne fictive contenant des boules de deux couleurs avec les proportions respectives p et $1-p$.

On leur demande de dégager les proportionnalités en jeu dans les rectangles représentés par les Cabri-dessins ABCD et Aefd⁵¹. Dans ce but, on leur propose des comparaisons successives entre longueurs, aires et nombres de pixels qui recouvrent chacun de ces rectangles'' (ibid., p. 103). Cette activité vise le lien entre probabilité géométrique et probabilité laplacienne (rapport entre le nombre des cas favorables et le nombre des cas possibles). La deuxième activité constitue une mise à l'œuvre du dispositif informatique "urne à pixels", permettant le passage entre les deux approches, laplacienne et fréquentiste, des probabilités.

La Situation C : « Franc-Carreau » a pour but la mobilisation des connaissances rencontrées lors des deux premières situations.

La première activité de cette situation a pour but la modélisation du jeu franc-carreau⁵² par une urne de Bernoulli. Elle "met en œuvre le changement d'environnements : le jeu est d'abord proposé par le jet effectif d'une pièce sur un carrelage. Ensuite on propose sa présentation informatique, qui consiste à représenter à l'écran seulement le carreau dans lequel se situe le centre de la pièce après immobilisation'' (ibid., p. 105). L'objectif (contenu de l'urne) peut-être atteint aussi bien par l'approche laplacienne (rapport d'aires) que par l'approche fréquentiste par le biais de la simulation. Et c'est la comparaison entre les valeurs trouvées par les deux approches qui permet une validation de la simulation.

La deuxième activité vise aussi la modélisation par une urne de Bernoulli. Seulement, l'expérience étudiée ne peut-être abordée a priori dans une interprétation géométrique. Il est question en effet du dernier jeu où le disque (la pièce de monnaie) est remplacée par un triangle équilatéral : dans ce cas, la position du centre par rapport aux côtés du carré ne peut déterminer à elle seule la position du triangle (tout entier dans le carreau ou non). La question de la composition approximative de l'urne de Bernoulli modélisant ce jeu peut, par contre, être traitée d'une façon expérimentale.

L'auteure conclut que la démarche suivie dans son travail "est accessible aux élèves en charnière collège-lycée'' (ibid. p. 304). Elle a pu "constater que les élèves acceptent le modèle pseudo-concret d'urne de Bernoulli pour représenter les situations aléatoires proposées [...]. Ils sont capables de formuler une composition d'urne de Bernoulli modélisant une situation bien déterminée, à partir de l'association entre cette expérience en jeu et une

⁵¹ Le rectangle Aefd est inclus dans le rectangle ABCD.

⁵² Ce jeu consiste à jeter une pièce de monnaie sur un carrelage et le pari est fait sur la position finale de la pièce : sur un ou plusieurs joints entre les carreaux ou entièrement dans un seul carreau (position franc-carreau). La question ici est de connaître la probabilité de faire franc-carreau.

expérience de référence : le tirage au hasard dans un pot de perles ou le choix au hasard d'un pixel dans un Cabri-dessin (ibid., p. 304). Elle pointe l'intérêt de la simulation, comme outil de validation, dans le développement des raisonnements des élèves : "The possibility of manipulating simulation parameters as a tool for operational validation is very important in the construction of pupils' reasoning" (Coutinho 2002).

3.3. Conclusion

Nous avons focalisé dans cette partie sur deux travaux qui s'intéressent à la modélisation et qui pointent l'intérêt de la simulation : Brousseau et al. (2005) et Coutinho (2001).

Le dernier travail, dont les élèves testés sont assez grands (fin du collège et début du lycée), s'intéresse à la modélisation à l'aide de l'urne de Bernoulli et considère la simulation du point de vue de la validation (pragmatique) du modèle pseudo-concret à construire.

Par contre, le premier travail, dont les élèves testés sont du niveau primaire (fin du primaire en France), considère la simulation comme moyen favorisant le recueil d'un nombre important d'informations à propos d'une machine de hasard en vue de la modéliser par un invariant dépendant de son contenu (une probabilité). Il faut dire que le point crucial du déroulement du processus expérimenté est le passage au travail sur les fréquences puis sur les fréquences cumulées, passage qui n'est pas évident. D'ailleurs, dans une reprise de ce travail dans une version modifiée au niveau de la seconde (1^{ère} classe du lycée en France), la fréquence, sinon la fréquence cumulée, est suggérée par l'enseignant (Briand 2005).

4. Probabilités et pratiques enseignantes

Notre intérêt dans cette partie porte sur les pratiques enseignantes dans le domaine des probabilités. À notre connaissance, les travaux sur les pratiques enseignantes dans le domaine des probabilités sont peu nombreux. Nous commençons d'abord par un travail de Maury (1992) s'intéressant aux probables difficultés que peuvent avoir les enseignants dans l'enseignement des probabilités du point de vue conceptuel et épistémologique. Nous passons ensuite au travail de Nabbout et Maury (2005) s'intéressant plutôt au niveau conceptuel.

4.1. Résistances dans l'enseignement des probabilités

L'article de S. Maury (1992) traite de la résistance du "système éducatif" à l'enseignement des probabilités et des représentations graphiques qui interviennent dans le traitement de l'information. L'auteure se fixe comme objectif la mise en évidence de l'un des facteurs

contribuant à freiner le développement de cet enseignement : "la représentation qu'ont les enseignants du savoir de référence", le terme « représentation » étant à prendre dans un "sens très général".

Par rapport aux représentations graphiques, Maury note que "les professeurs n'ont jamais été familiarisés avec la sémiologie graphique qui peut être considérée comme le savoir de référence" (Maury 1992, p. 77) et que ces objets ne sont pas "traditionnellement" des objets d'enseignement. Elle traite alors l'adaptabilité d'une représentation graphique à la situation et montre le travail préalable à l'élaboration d'une représentation graphique.

Par rapport aux probabilités, l'auteure distingue les préoccupations d'ordre épistémologiques des préoccupations d'ordre conceptuel.

Pour le premier type de préoccupations, elle pose la question, qui semble être d'ordre pédagogique, de la préférence de l'approche laplacienne ou de l'approche fréquentiste dans l'enseignement des probabilités. Elle penche toutefois à dire que, "dans bien des cas", cette question cache "une interrogation sur la légitimité de telle ou telle approche (légitimité par rapport au cadre des mathématiques) ou sur sa validité, c'est-à-dire sur sa capacité à représenter un certain aspect de la réalité" (ibid., p. 76). Remarquons ici que les programmes français en probabilité ont reconnu au début des années 1990 un changement radical : ils ont fait le choix d'approcher les probabilités par les fréquences, l'enseignement des probabilités étant fait auparavant dans l'approche laplacienne.

Pour le deuxième type de préoccupations, Maury pose le problème des intuitions probabilistes erronées qui peuvent être mobilisées même chez un enseignant ayant une formation de bon niveau en probabilités.

Ainsi, "ce décalage entre les prévisions associées au modèle mathématique et celle provenant de certaines intuitions erronées, créerait un sentiment d'angoisse, angoisse elle-même amplifiée par l'incertitude relative aux fondements. En définitive, le malaise ainsi engendré contribuerait, au niveau global, à freiner le développement de l'enseignement des probabilités" (ibid., p. 77).

4.2. Les notions d'indépendance et de dépendance des événements chez les enseignants

Dans un article rendant compte d'une partie de la thèse de Nabbout (2006), M. Nabbout et S. Maury (2005) commencent par mentionner l'existence de deux sortes d'indépendance :

- l'indépendance "stochastique" ou "formelle" : deux événements sont indépendants signifie que la probabilité de leur intersection est égale au produit de leur probabilités ;
- l'indépendance "intuitive", "a priori" ou "chronologique" au sens naïf d'indépendance d'épreuves successives (Steinbring 1986, Maury 1985).

Elles signalent que, bien qu'elle ne soit d'aucune utilité dans la théorie des probabilités, l'idée intuitive de l'indépendance est présente chez des enseignants et dans des manuels dans le but de donner du sens au concept d'indépendance (Maury 1984b).

Ce travail traite les représentations⁵³ de la notion d'indépendance des événements de 16 professeurs libanais. L'étude de ces représentations est réalisée, en partie, à partir des corrections faites par ces enseignants de copies d'élèves fictifs et à partir de leurs réponses concernant les évaluations des copies.

Dans cet article, les auteures traitent deux situations, les situations 4 et 6 (S4 et S6).

À S4 sont associées quatre réponses d'élèves (S4E1, S4E2, S4E3 et S4E4) :

S4 : « On lance un dé parfaitement équilibré et on désigne

- par A, l'événement 'sortie d'un nombre pair',
- par B l'événement 'sortie d'un nombre supérieur ou égal à 4', et
- par C l'événement 'sortie d'un multiple de 3'.

- 1) A et B sont-ils indépendants ?
- 2) A et C sont-ils indépendants ».

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>S4E1</p> <p>1) Non car on a des éléments en commun dans A et B. Même, si dans A on n'a que des nombres pairs, on aura dans B des nombres pairs aussi.</p> <p>2) On peut avoir un multiple de 3 qui soit un nombre pair tel que 6. Il y a une relation entre A et C ; ils ne sont pas indépendants.</p> | <p>S4E2</p> <p>1) A : {2, 4, 6} et B : {4, 5, 6}. Non, les événements ne sont pas indépendants puisqu'ils ont 4 et 6 en commun.</p> <p>2) A : {2, 4, 6} et C : {3, 6}. Non, puisqu'ils ont 6 en commun.</p> |
| <p>S4E3</p> <p>1) A et B sont indépendants car si A est réalisé ou non cela n'a aucune influence sur B. Si A réalisé ou non, B peut l'être ou ne pas l'être.</p> <p>2) Si A est réalisé, C peut être réalisé ou ne pas l'être. Si A n'est pas réalisé, C peut l'être ou ne pas l'être.</p> | <p>S4E4</p> <p>1) $P(A) = 1/2$; $P(B) = 1/2$; $P(A \cap B) = 1/3$. $P(A) \times P(B) = 1/4 \neq P(A \cap B) \Rightarrow A$ et B ne sont pas indépendants.</p> <p>2) $P(A) = 1/2$; $P(C) = 1/3$; $P(A \cap C) = 1/6$. $P(A) \times P(C) = 1/4 \neq P(A \cap C) \Rightarrow A$ et C sont indépendants.</p> |

À S6 sont associées 4 réponses d'élèves (S6E1, S6E2, S6E3 et S6E4):

S6 : « On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. On désigne

- par E, l'événement 'tirer un pique', et par F, l'événement 'tirer une dame'.

⁵³ Représentation est prise au sens de représentation sociale.

Les deux événements E et F sont-ils indépendants ? ».

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>S6E1 <i>Non, car il existe une dame de pique donc il y a une relation entre E et F. D'où, les événements ne sont pas indépendants.</i></p> | <p>S6E2 <i>Les deux événements sont indépendants car chaque événement désigne une chose différente de l'autre.</i></p> |
| <p>S6E3 <i>Si on tire un pique, on peut avoir la dame de pique et on peut ne pas l'avoir ; si on ne tire pas un pique, on peut aussi avoir une dame ou ne pas l'avoir. Donc, on peut avoir E sans F ou F sans E ; par suite E et F sont indépendants.</i></p> | <p>S6E4 $P(E \cap F) ?? P(E) \times P(F).$ $P(E \cap F) = \frac{1}{32}; P(E) \times P(F) = \frac{8}{32} \times \frac{4}{32} = \frac{1}{32}.$ $P(E \cap F) = P(E) \times P(F).$ <i>Donc E et F sont indépendants.</i></p> |

Il ressort de ce travail que les 16 professeurs reconnaissent les solutions correctes S4E4 et S6E4 pour les deux situations.

Cependant, plusieurs d'entre eux ne distinguent pas entre l'indépendance chronologique et l'indépendance stochastique⁵⁴ : il y en a seulement trois qui les distinguent (un seul parmi eux fait la distinction d'une façon explicite). Et peu d'entre eux ont reconnu l'existence de situations où "le bon sens" ne peut pas être utilisé pour interpréter la notion formelle d'indépendance.

Aussi, la confusion entre "événements incompatibles" et "événements indépendants"⁵⁵ qui est souvent constatée chez les étudiants (Sanchez 2000), est observée explicitement chez quatre professeurs : deux d'entre eux n'ont pas pu réfuter les réponses S4E1 et S4E2 même après avoir constaté qu'elles sont fausses par la comparaison à S4E4, les deux autres les ont acceptées au départ et réfutées par la suite et ont reconnu la confusion sous-jacente. Mais les 14 enseignants ayant réfuté les réponses S4E1 et S4E2 n'étaient pas tous en mesure de justifier la fausseté de ces réponses ni celle de la réponse S6E1.

Disons que les six réponses fausses sont réfutés généralement en partie et avec des degrés différents d'un professeur à l'autre.

Outre les corrections (jugement quantitatif) des réponses des élèves fictifs et l'activité évaluative (jugement qualitatif) de ces réponses, les professeurs sont invités à répondre aux deux questions directes suivantes :

⁵⁴ Ce sont les réponses fausses S4E3, S6E2 et S6E3 qui montrent cette confusion par le biais du sens "naïf de l'influence".

⁵⁵ Ce sont les réponses fausses S4E1, S4E2 et S6E1 qui montrent cette confusion, deux événements incompatibles étant représentés par deux ensembles d'intersection nulle.

Q1 : “Comment définissez-vous deux événements indépendants ?”

Q2 : “J’ai remarqué que parfois, certains utilisent l’expression « événements non indépendants » et d’autres parlent d’ « événements dépendants ». Qu’en pensez-vous ? Est-ce qu’on peut utiliser l’une ou l’autre des expressions dans l’enseignement ? Pourquoi ?”⁵⁶

Des réponses à la première question, les auteures constatent que tous les professeurs utilisent la définition formelle de l’indépendance dans leurs cours et qu’un seul d’entre eux distingue explicitement l’indépendance chronologique de l’indépendance stochastique. Par ailleurs, il s’avère que plusieurs enseignants accompagnent la définition formelle par des explications sous-tendues par des conceptions "intuitives" de la notion en question.

Pour la question Q2, retenons que sept enseignants trouvent que parler de deux « événements non indépendants » ou de deux « événements dépendants » revient au même et que six enseignants acceptent la première expression et refusent la deuxième.

Ainsi, dans un souci de donner du sens à une notion abstraite telle que l’indépendance, la majorité des enseignants montrent une certaine confusion que ce soit entre l’indépendance intuitive et l’indépendance stochastique ou entre cette dernière et l’incompatibilité.

En conclusion, une confusion entre incompatibilité et indépendance est constatée explicitement chez deux professeurs et implicitement chez six professeurs. Les auteures terminent par un questionnaire concernant le possible impact de cette conclusion sur les confusions que font les étudiants : “Might that be a factor inducing the same confusion that appears explicitly among students ?” (Nabbout et Maury 2005, p. 8)

4.3. Conclusion

Le premier travail que nous avons abordé montre deux difficultés : l’une est conceptuelle et se traduit par la distance entre les prévisions associées aux intuitions erronées et celles provenant du modèle mathématique et l’autre est épistémologique et se traduit par la question de légitimité de l’approche à enseigner.

Le deuxième travail porte sur les difficultés engendrées par la volonté pédagogique de donner du sens à une notion abstraite : l’indépendance stochastique.

⁵⁶ Remarquons ici que ce qui est visé est le « sens » donné à la notion d’indépendance par les professeurs testés. “La « dépendance » de deux événements figure dans certaines références comme étant la négation de leur « indépendance » ; mais elle n’a jamais été définie comme notion précise” (Nabbout 2006, p. 71).

Ces difficultés, rencontrées chez les enseignants, sont à ajouter à celles dues aux conceptions, entre autres spontanées, des élèves.

5. Conclusions

Des travaux précédents, nous tirons trois points essentiels : le premier traite les possibilités génétiques pour une introduction des probabilités, le deuxième concerne la place de la simulation dans cet enseignement et le troisième touche les difficultés que peuvent rencontrer les enseignants dans l'enseignement des probabilités.

Pour le premier point, nous avons abordé cinq travaux. Les deux premiers (Piaget et Inhelder 1951 ; Nassefat 1963) montrent que la quantification des probabilités est une affaire du stade des opérations formelles. Deux autres travaux (Fishbein et al. 1969 et 1971), favorables à un enseignement précoce des probabilités et de la statistique, voient dans les stades de développement des potentialités que l'enseignement peut consolider. Ils montrent, entre autres, l'existence d'intuitions favorables à l'enseignement des probabilités (dès 10 ans) et prônent pour un enseignement dans les deux approches laplacienne et fréquentiste accompagné d'un travail sur le dénombrement. Le cinquième travail (Maury et Fayol 1986) montre la possibilité d'introduire la combinatoire à un âge précoce (vers 10 ans).

Pour la place de la simulation dans l'enseignement des probabilités, nous avons passé en revue deux travaux.

Un de ces travaux (Coutinho 2001), où les élèves testés sont assez grands (fin du collège et début du lycée), s'intéresse à la modélisation à l'aide de l'urne de Bernoulli et considère la simulation du point de vue de la validation (pragmatique) du modèle pseudo-concret à construire (l'urne de Bernoulli).

L'autre travail, où les élèves testés sont du niveau primaire (fin du primaire en France), s'intéresse à la modélisation d'une machine de hasard (un sac de contenu inconnu) par un invariant rendant compte de son contenu (une probabilité). Dans ce travail, la simulation remplace l'expérience et favorise le recueil d'un nombre considérable d'informations à propos de la machine étudiée. Nous retenons l'aide que peut apporter une simulation dans la recherche de régularités provenant du hasard dans une expérience aléatoire. Mais nous reposons une question abordée précédemment (cf. chapitre I, sous 3) : est ce qu'une simulation remplace, du point de vue de l'élève, une expérience aléatoire effective ?

Le dernier travail (Brousseau et al. 2005) rejoint d'autres formulant des possibilités pour l'introduction des probabilités dès l'école primaire (Fischbein et al. 1969 et 1971). Soulignons que les derniers auteurs (Fischbein et al.) postulent qu'une telle introduction doit être faite simultanément dans les deux approches laplacienne et fréquentiste et doit être accompagnée d'un travail introductif de l'analyse combinatoire, travail possible au niveau du primaire (Maury et Fayol 1986).

Nous concluons sur deux remarques relatives aux difficultés de l'introduction des probabilités dans une approche statistique, par les fréquences. D'abord, dans cette approche, les enseignants se trouvent souvent démunis de moyens de contrôle des situations fortuites. Ensuite, l'atteinte des régularités voulues dans une étude expérimentale en probabilités est basée sur un point décisif, celui du passage aux fréquences puis aux fréquences cumulés, passages qui ne sont pas évidents dans une classe de mathématiques. En effet, un tel passage n'est souvent réalisable que par l'intermédiaire d'une autorité sociale, celle de l'enseignant.

Les difficultés des enseignants sont d'abord d'ordre conceptuel. Nous les avons vues dans les comportements des enseignants qui veulent donner du sens à une notion telle que l'indépendance stochastique dans un contexte de la transposition didactique introduisant cette notion par l'intermédiaire de « l'influence » que peut avoir la réalisation d'un événement sur celle d'un autre. Ces comportements nous dévoilent de vrais problèmes : beaucoup d'enseignants ne reconnaissent pas les situations qui sont exclusivement d'indépendance stochastique (Nabbout et Maury 2005 ; Nabbout 2006). Nous voyons ainsi ces difficultés dans les écarts pouvant exister entre les jugements découlant des intuitions probabilistes ancrées dans la pensée des enseignants et les réponses provenant des modèles probabilistes (Maury 1992).

Ces difficultés sont ensuite d'ordre épistémologique. Elles sont sous-tendues par la question de la légitimité de l'approche à enseigner (Maury 1992).

Dans le cadre de ces difficultés conceptuelles et épistémologiques, nous posons la question suivante : quels rapports entretiennent les enseignants, notamment ceux du collège, avec les approches laplacienne et fréquentiste ?

Ce chapitre et le chapitre précédent nous montrent la légitimité et la nécessité de l'approche fréquentiste dans l'introduction des probabilités. Mais qu'est-ce qui existe au niveau de la transposition didactique de la théorie des probabilités dans l'enseignement tunisien ?

Chapitre IV.

Les programmes tunisiens

- 1. Introduction*
- 2. La réforme de 1958*
- 3. La réforme de 1968*
- 4. La réforme de 1978*
- 5. La réforme de 1993*
- 6. La réforme de 2002*
- 7. Les manuels du collège*
- 8. Conclusions*

1. Introduction

Notre intérêt porte ici sur l'analyse combinatoire, la statistique et les probabilités prescrites par les programmes officiels tunisiens depuis 1958.

Nous nous intéressons aux cinq grandes réformes qu'a connues la Tunisie depuis son indépendance en insistant sur les probabilités et leurs rapports avec l'analyse combinatoire (le dénombrement) et la statistique.

Pour terminer, nous nous focalisons sur la dernière réforme, notamment sur les nouveaux programmes de la réforme de 2002 introduisant les probabilités au collège.

2. La réforme de 1958

La première réforme, se voulant unifier les systèmes d'enseignement existants⁵⁷, promouvoir l'égalité des chances et favoriser un enseignement moderne (Smida 2005, p. 3), a vu le jour en 1958.

2.1. Les programmes

Cette réforme a conduit à la mise au point, en 1959, de programmes portant sur 6 ans d'études primaires et 6 ans d'études secondaires débouchant sur le baccalauréat. Ces six dernières années comportent un premier cycle (de la 1^{ère} à la 3^{ème} année secondaire) qui correspond à un tronc commun et un deuxième cycle (de la 4^{ème} à la 6^{ème} année secondaire) qui se termine par une 6^{ème} année (classe terminale) comportant neuf sections (Mathématiques, Sciences, Lettres Modernes, Lettres Classiques, Économique, Normale, Technique-Mathématiques, Industrielle et Métiers de l'Habillement).

L'un des objectifs essentiels de l'enseignement des mathématiques est "le développement de l'esprit de l'enfant et son initiation à divers modes de raisonnement." (PO⁵⁸ 1959, p. 2).

Un certain enseignement des probabilités apparaît en terminale ; plus exactement, cet enseignement est dispensé aux seules sections de « Lettres Modernes » et « Lettres

⁵⁷ Avant la réforme coexistent 3 systèmes d'enseignement en Tunisie : français, tuniso-français et zeitounien (coranique).

⁵⁸ Programmes Officiels de l'Enseignement Secondaire des Mathématiques.

IV. Les programmes tunisiens

Classiques ». On y trouve les probabilités rattachées à des éléments d'analyse combinatoire : « Arrangements - Permutations - Combinaisons sans répétition - Factorielles - Application à des exemples très simples de calcul de probabilités » (PO 1959, p. 37). Les éléments d'analyse combinatoire et les probabilités simples sont accompagnés de quelques notions d'analyse statistique telles que l'étude d'un caractère sur une population, la moyenne arithmétique, la moyenne géométrique, la médiane et le mode (ibid. p. 37).

Le programme de la section « Économique » comporte les mêmes parties d'analyse combinatoire et d'analyse statistique, ceux des sections « Mathématiques », « Sciences » et « Technique - Mathématiques » contiennent la seule partie d'analyse combinatoire.

Les programmes des autres sections (« Normale », « Industrielle » et « Métiers de l'Habillement ») ne comportent aucune des parties considérées.

Quelques ajustements sont introduits en 1966 : L'enseignement des probabilités concerne aussi les sections « Sciences » et « Économique ». Le programme d'analyse combinatoire, resté inchangé pour les sections littéraires, est augmenté de la formule du binôme pour les autres sections et touche aussi la section « Industrielle ». Nous assistons aussi à une extension à la section « Sciences » du programme de statistique qui comporte alors quelques éclaircissements quant aux objets d'enseignement : « ... observation, enregistrement et groupement de données ; tableaux numériques ; diverses représentations graphiques : diagrammes cartésiens ; polygone et courbe de fréquence, courbe cumulative.... » (PO 1966, p. 66)

Ainsi, dans la première réforme, les probabilités, dans leur enseignement, se limitent à de simples calculs et paraissent liées au champ de l'analyse combinatoire par le biais d'utilisations de quelques formules de dénombrement. Elles sont alors abordées dans une approche laplacienne fondée sur l'équiprobabilité des événements élémentaires.

Tout se passe comme si les domaines des probabilités et de la statistique sont étrangers aux mathématiques, ces deux domaines ne faisant pas un objet d'enseignement pour la section « Mathématiques ».

3. La réforme de 1968

La 2^{ème} réforme est celle des mathématiques modernes. Elle envisage d'amener les élèves à la notion fondamentale de structure dès la fin du premier cycle secondaire (vers 14 ans) et entraîne un changement important dans les programmes de mathématiques.

C'est à partir de cette réforme que l'enseignement secondaire commence à s'étaler sur 7 ans, le tronc commun se prolongeant à la 4^{ème} année secondaire pour les mathématiques.

On parle alors de l'intérêt de la théorie des ensembles et du profit que les élèves, toutes sections confondues, peuvent tirer des études statistiques et probabilistes au point de recommander de "commencer l'étude des statistiques et de la probabilité au cours du 1^{er} trimestre." (PO 1968, p. 26) et on insiste, à propos des probabilités et de la statistique, en section « Sciences de l'éducation » : "Il s'agit essentiellement d'ouvrir à de futurs enseignants polyvalents les portes de deux domaines qui occupent une place importante dans notre société." (PO 1969, p. 48)

Au début de la réforme, 11 sections ont été créées aux niveaux des 6^{ème} et 7^{ème} années secondaires : Mathématiques, Technique - Mathématiques, Sciences, Sciences Agricoles, Pédagogique, Lettres Modernes, Lettres Classiques, Économique, Technique Agricole, Technique Industrielle et Comptabilité (PO 1968).

Vers la fin de 1970, un réaménagement est introduit au niveau des sections et des programmes.

- Cinq sections longues débouchent en fin de 7^{ème} année secondaire sur le baccalauréat : « Mathématiques », « Sciences », « Sciences Économiques », « Sciences Techniques » et « Lettres ».

- Trois sections courtes : « Technique Économie Gestion », « Technique Économie Administrative » et « Technique Industrielle » débouchent en fin de 6^{ème} année sur un diplôme de fin d'études secondaires.

Nous allons étudier l'évolution de l'enseignement des probabilités au cours de ces deux étapes.

3.1. Une première étape

3.1.1. Sixième année secondaire

Au niveau de la 6^{ème} année secondaire, parmi les domaines qui nous intéressent, seule la statistique est enseignée.

À ce niveau, le programme de statistique semble ambitieux : il comporte, outre la partie d'analyse statistique abordée précédemment (cf. sous 2), l'ajustement linéaire et les notions de corrélations. Les sections « Mathématiques », « Technique – Mathématiques », « Technique Industrielle » et « Comptabilité » mises à part, la partie statistique est programmée pour toutes les autres sections. Cette partie est augmentée par les indices de la vie économique (indices des prix), les indices élémentaires (simple), les indices symétriques et par les séries chronologiques pour les sections « Économique » et « Technique agricole ». (PO 1968, p. 67)

3.1.2. Septième année secondaire

Au niveau de la 7^{ème} année secondaire, l'enseignement de la statistique se poursuit dans les sections « Économique » et « Technique Agricole » sous le nom de statistique appliquée qui traite entre autre de l'estimation d'une moyenne et de l'intervalle de confiance.

Contrairement aux sections « Mathématiques » et « Technique - Mathématiques » qui ont seulement un cours d'analyse combinatoire et aux sections « Technique Industrielle » et « Comptabilité », les autres sections suivent un enseignement de probabilités succédant à un enseignement d'analyse combinatoire.

Cet enseignement est le même que pour la première réforme relativement aux sections « Pédagogique », « Lettres Modernes » et « Lettres Classiques » ; il comporte les notions de variable aléatoire, de lois de probabilité (binomiale, normale, de Poisson) et de loi des grands nombres pour les autres sections.

3.2. Une deuxième étape

3.2.1. Cinquième année secondaire

Au niveau de la 5^{ème} année secondaire, les trois sections longues « Sciences », « Sciences Économiques » et « Sciences Techniques » reçoivent un enseignement de statistique. Cet enseignement s'intéresse aux séries statistiques discrètes, continues avec intervalles de classes-égaux (PO 1970, p. 40).

3.2.2. Sixième année secondaire

Avec l'introduction de la théorie des ensembles, les programmes d'analyse combinatoire et de probabilités ont vu quelques modifications.

Un chapitre de dénombrement, programmé dans toutes les sections longues, comporte alors les objets : ensemble de parties d'un ensemble, application d'un ensemble fini vers un ensemble fini [cas des applications injectives (arrangements), bijectives (permutations) et leur dénombrement], parties à p éléments d'un ensemble fini (combinaisons) et leur dénombrement et binôme de newton.

Au niveau de la 6^{ème} année secondaire, les probabilités sont une affaire des sections scientifiques. Le programme des probabilités comporte les notions d'espaces probabilisés finis $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$, de variables aléatoires numériques, de fonction de répartition et de distribution binomiale (PO 1970, pp. 49-53).

Quant au programme de statistique, il reste au niveau de la description statistique d'une population ou d'un échantillon pour la section « Mathématiques » et il s'intéresse aux paramètres de dispersion d'une série statistiques (fluctuation, écart-type, variable réduite) au niveau de la section « Lettres » (ibid. p. 40). Il est conçu autrement pour les autres sections scientifiques ainsi que pour les deux sections courtes « Technique Économie Gestion » et « Technique Économie Administrative » : on parle alors d'initiation à la statistique faisant partie du programme de mathématiques appliquées (généralités, élaboration des statistiques, analyse statistique, indices de la vie économique).

3.2.3. Septième année secondaire

Les probabilités se poursuivent en 7^{ème} année, sections scientifiques, dans le cadre des espaces probabilisés finis par l'abord des notions de couple de variables aléatoires réelles, de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{R}^2 , de la variance et de l'écart-type d'une variable aléatoire réelle, d'épreuves répétées, de l'inégalité de Bienaymé Tchebychev et de la loi faible des grands nombres. Ces notions sont augmentées de celles de probabilités totales et composées en section « Sciences Économiques ».

Dans la section « Lettres », l'introduction des probabilités comprend les notions de probabilités composées, de l'indépendance en probabilité, de la formule de Bayes, des tirages avec remise, de variable aléatoire finie ou discrète, de fonction de répartition, de l'espérance mathématique, de médiane, de variance, d'écart-type et de distribution binomiale (ibid. p. 72).

L'enseignement statistique ne concerne alors que les deux sections « Lettres » et « Sciences Économiques ». Le programme comporte l'ajustement linéaire et la corrélation ; il est plus approfondi et comporte, en plus, les séries chronologiques pour la deuxième section.

3.3. Conclusion

L'enseignement de la statistique reste plutôt au niveau de la description d'une population ou d'un échantillon pour les sections « Mathématiques » et « Sciences » ; il ne se poursuit pas en terminale pour ces deux sections et il est plus approfondi pour les sections littéraires et la section « Sciences Économiques ».

Les probabilités, exclusives aux sections scientifiques en 6^{ème} année secondaire, sont présentées d'une façon axiomatique. Elles sont introduites dans les termes d'espaces probabilisés finis, de variables aléatoires numériques, de fonction de répartition et de distribution binomiale.

Elles sont détachées de la statistique et paraissent plutôt liées au programme de dénombrement qui est affecté par l'intérêt porté à la théorie des ensembles par l'intermédiaire de l'insistance des prescripteurs sur l'importance du langage ensembliste.

4. La réforme de 1978

La réforme des mathématiques modernes, où « la mathématique »⁵⁹ est conçue comme étant un langage, “a mis trop tôt entre les mains des élèves des instruments trop puissants, qui ne pouvaient que rarement leur servir à résoudre des problèmes, à travailler des applications. *La construction du sens dans ces circonstances se faisait trop lentement pour les élèves*, et beaucoup ont décroché” (Bkouche et al. 1991, p. 50). Et l'échec scolaire en mathématiques est incontestable dans tous les pays ayant adopté cette réforme. C'est le cas de la Tunisie où l'on peut constater cet échec, entre autres, “dans la chute du taux de réussite aussi bien au niveau de l'examen de 6^{ème} primaire qu'au niveau du baccalauréat, la section « Mathématiques » étant la seule épargnée (Smida 2005, p. 9).

Étalée sur une quinzaine d'années, la réforme de 1978 essaye de corriger les résultats désastreux produits par la dernière réforme (dite des mathématiques modernes).

Les objectifs de l'enseignement sont alors “éduquer par les mathématiques, faire prendre goût aux mathématiques” (PO 1982, p.3). Les programmes sont conçus de façon à éviter, dans la mesure du possible, toute présentation axiomatique des concepts et toute formalisation inutile (PO 1988, p. 24).

De la même façon que pour la réforme précédente, l'enseignement secondaire comporte un cycle long et un cycle court. Le cycle long comprend les sections « Math - Sciences », « Math – technique » et « Lettres ». Quand au cycle court, il comprend les sections Technique Industrielle et Technique Économique avec des options différentes, les excellents élèves de ce cycle pouvant accéder à une 7^{ème} année dite spéciale.

4.1. Cinquième année secondaire

À ce niveau, sont programmés pour la section « Lettres » un chapitre de dénombrement pour lequel il est indiqué d'utiliser des tableaux, des diagrammes ou des arbres et un autre d'initiation au calcul des probabilités avec des exercices simples (PO 1988, p. 62).

L'enseignement des dénombrements est aussi conçu au niveau de la 5^{ème} année secondaire en sections « Technique Économie, option Comptabilité » et « Technique Économique, option Secrétariat » (ibid. pp. 81-82).

⁵⁹ Lors de la réforme, dite des mathématiques modernes, on parle plutôt de « mathématique » au singulier.

IV. Les programmes tunisiens

Aussi bien pour la dernière section « Technique Économique, option Secrétariat » que pour celle de « Technique Industrielle, Métiers de l'Habillement - Coiffure - Esthétique » est programmée une partie s'intéressant essentiellement aux paramètres de position (mode, moyenne, médiane) d'une série statistique.

Remarquons finalement que des activités statistiques (construction et interprétation de divers tableaux statistiques) sont conçues pour la section littéraire en 4^{ème} année secondaire⁶⁰ (ibid. p. 57).

4.2. Sixième année secondaire

Un chapitre de dénombrement est conçu pour les trois sections longues. Il réunit des objets tels que les arrangements, les permutations, les combinaisons, la formule du binôme et le nombre d'applications d'un ensemble fini dans un autre.

L'enseignement des probabilités reste au niveau de la 6^{ème} année « Math - Sciences » et « Math – technique » sous la forme d'espaces probabilisés finis $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$. Pour la section longue « Lettres » et la section courte « Technique Industrielle, Métiers de l'Habillement - Coiffure - Esthétique », cet enseignement se fait au niveau de la probabilité d'un événement. Pour la section « Lettres » par exemple, nous lisons : « La probabilité est définie comme étant le rapport du nombre des cas favorables et du nombre des cas possibles. On parlera d'événement certain, d'événement impossible et d'événement contraire. On établira que $\Pr(A) + \Pr(\bar{A}) = 1$ » (ibid. p. 66).

Un enseignement statistique tournant autour des tableaux statistiques et des effectifs et fréquences est dispensé aux sections « Math - Sciences » et « Math – technique ». Pour la section « Lettres », après une pause au niveau de la 5^{ème} année, l'enseignement statistique se poursuit avec les objets « caractères de position » et « caractères de dispersion » (écart moyen, variance, écart type) d'une série statistique.

Quant à la section courte « Technique Économique, option Comptabilité », elle est concernée pour la 1^{ère} fois par un programme spécifique qui comporte, outre les généralités, les méthodes (l'enquête exhaustive, l'enquête partielle ou par sondage) et les instruments d'observation des faits (ou collectes), le dépouillement des observations, la représentation

⁶⁰ On assiste dans la réforme de 1978 à une première orientation en 4^{ème} année secondaire.

IV. Les programmes tunisiens

des résultats, les paramètres de position (entre autres moyenne arithmétique simple et moyenne arithmétique pondérée) et les paramètres de dispersion (quartiles, écarts interquartiles, variance, écart-type).

4.3. Septième année secondaire

Au niveau de la terminale, sections « Math - Sciences » et « Math - technique », les études statistiques se poursuivent par l'étude des caractéristiques de position et de dispersion d'une série statistique (ibid. p. 47). Au niveau de la section « Lettres », ces études portent sur les séries à deux caractères (tableau à double entrée, distributions et fréquences marginales, nuage de points, point moyen, idée d'ajustement linéaire) (ibid. p. 69).

Les trois sections du cycle long poursuivent l'étude des probabilités amorcée en 6^{ème} année. Les sections « Math - Sciences » et « Math - technique » sont concernées par un programme d'enseignement des probabilités autour des notions d'espaces probabilisés finis, du cas de la probabilité uniforme, de la probabilité conditionnelle, d'événements indépendants, de variable aléatoire réelle, de distribution de probabilité, de fonction de répartition, d'espérance mathématique, de variance, d'écart-type et de distribution binomiale (ibid. pp. 47-48). Quant à la section « Lettres », le programme porte sur les notions de probabilité sur un univers fini, de probabilité d'un événement, d'événements élémentaires équiprobables, de variable aléatoire discrète, de loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète et de fonction de répartition (ibid. p. 69).

4.4. Conclusion

L'enseignement de la statistique se poursuit jusqu'à la classe terminale pour les sections longues ; il reste toutefois au niveau de la statistique descriptive pour les sections scientifiques.

Les probabilités concernent toutes les sections longues aussi bien en 6^{ème} année secondaire qu'en terminale. Leur introduction reste inchangée pour les sections scientifiques : elles sont introduites en termes d'espaces probabilisés finis.

Tel était le cas dans les réformes précédentes, les probabilités sont rattachées au programme de dénombrement qui est quelque peu modifié par rapport à la réforme précédente.

5. La réforme de 1993

Cette réforme coïncide avec la mise en place de l'école de base introduisant un enseignement obligatoire portant sur neuf années.

Le cursus scolaire comporte alors six années (de la 1^{ère} à la 6^{ème} année de base) dans les écoles primaires, trois années (de la 7^{ème} à la 9^{ème} année de base) dans les collèges appelés écoles préparatoires et quatre années (de la 1^{ère} à la 4^{ème} année secondaire) dans les lycées où les élèves commencent par suivre un tronc commun de deux ans. Les sections courtes disparaissent et ne subsistent à partir de la 3^{ème} année secondaire que cinq sections : « Mathématiques », « Sciences Expérimentales », « Technique », « Économie et Gestion » et « Lettres ».

À partir de 1994-1995, les mathématiques sont enseignées en arabe au niveau du collège à partir de la 7^{ème} année de base.

À partir de 1995-1996, en 8^{ème} année de base, un chapitre intitulé "Tableaux statistiques et leurs représentations" est conçu à ce niveau. Ce chapitre comporte le diagramme en bâtons, l'histogramme, le diagramme à secteurs comme représentations de tableaux statistiques et le concept de la moyenne arithmétique.

L'enseignement des objets de la statistique ne réapparaît alors qu'au niveau de la 3^{ème} année secondaire (ancienne 6^{ème} année), année de spécialisation.

5.1. Troisième année secondaire

Dans la suite, nous allons nous référer aux programmes de 1998 (PO 1998). Remarquons toutefois que ces derniers programmes font partie d'une contre-réforme, dite d'allègement des programmes et du poids des manuels, qui a mutilé l'esprit de la réforme de 1993. Ajoutons que pour le champ qui nous concerne, le contenu est resté inchangé et l'allègement des programmes n'a affecté que la partie statistique au niveau de la 4^{ème} année secondaire, section « Mathématiques ». Autrement dit, à ce niveau, l'enseignement conçu dans PO 1993 ne fait plus partie de PO 1998.

En 3^{ème} année secondaire, toutes les sections sont concernées par un programme de dénombrement qui est pratiquement analogue à celui de la réforme précédente :

IV. Les programmes tunisiens

arrangements, nombre d'arrangements, permutations, nombre de permutations, combinaisons, nombre de combinaisons, formule du binôme, nombre de parties d'un ensemble fini, nombre d'applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini (PO 1998). Pour la section « Lettres », ce programme est privé de la formule du binôme et du nombre de parties d'un ensemble fini (ibid. p. 52).

Pour les probabilités, il est question pour toutes les sections du même programme de la section « Lettres » de la réforme précédente. Dans le programme officiel de 1998, le contenu du « thème » est la probabilité d'un événement et les recommandations disent que la probabilité est définie comme étant le rapport du nombre des cas favorables et du nombre des cas possibles, qu'on parlera d'événement certain, d'événement impossible et d'événement contraire et qu'on établira que $\Pr(A) + \Pr(\bar{A}) = 1$.

La section « Économie et Gestion » mise à part, un enseignement de statistique est programmé pour les autres sections. Pour les sections scientifiques, il est question de statistique descriptive : vocabulaire statistique, tableaux statistiques à un caractère, effectifs et fréquences, effectifs et fréquences cumulées, représentations graphiques (diagramme en bâtons, histogramme, polygone statistique, diagramme circulaire), paramètres de position (mode, classe modale, moyenne, médiane) et paramètres de dispersion (écart-moyen, variance, écart-type). La section « Lettres », elle, se voit attribuer le même programme privé des paramètres de position et de dispersion.

5.2. Quatrième année secondaire

Toutes les sections poursuivent l'enseignement des probabilités. Le contenu du programme touche le langage probabiliste, la probabilité sur un ensemble fini (définition d'une probabilité, propriétés, cas de probabilités uniformes, probabilité conditionnelle, événements indépendants, épreuves indépendantes, schéma de Bernoulli), les aléas numériques [loi de probabilité d'un aléa numérique, fonction de répartition (représentation graphique), espérance mathématique, variance, écart-type (cas d'une distribution binomiale)] (PO 1998). Dans ces programmes, il est recommandé de définir l'univers comme étant l'ensemble des éventualités d'une épreuve et d'insister sur l'aspect qualitatif des concepts d'espérance mathématique, de variance et d'écart type.

IV. Les programmes tunisiens

Les sections concernées par un programme de statistique en 4^{ème} année secondaire sont les sections « Sciences Expérimentales », « Technique », et « Lettres ». Pour les deux premières sections, il est question de séries statistiques à deux caractères avec l'abord des tableaux à double entrée, des distributions marginales, des fréquences marginales, du nuage de points, d'ajustement linéaire (méthode des moindres carrés), des droites de régression (de X en Y et de Y en X) et de corrélation linéaire : coefficient de corrélation linéaire. Pour la section « Lettres », le contenu concerne les séries statistiques à un seul caractère ; il complète le programme de 3^{ème} année par les paramètres de position et de dispersion. Insister sur l'aspect qualitatif des concepts est une recommandation faite pour les trois sections.

5.3. Conclusion

Aussi bien pour le dénombrement que pour les probabilités, toutes les sections sont concernées par un enseignement. Si le programme de dénombrement est le même que celui de la réforme précédente, celui des probabilités a comporté des modifications : le programme des littéraires s'est vu étendu à toutes les sections au niveau de la 3^{ème} année secondaire et toutes les sections en 4^{ème} année, se sont vu attribuer le même programme.

Les sections « Mathématiques », « Sciences Expérimentales » et « Technique » se voient attribuer un programme de statistique descriptive au cours de la 3^{ème} année secondaire ; les deux dernières sections recevant aussi un programme de séries statistiques à deux caractères en terminale. La section « lettres » reçoit le même contenu d'enseignement sur deux ans. Et chose surprenante, nous semble-t-il, la section « Économie et Gestion » ne reçoit aucun enseignement de statistique que ce soit en classe de mathématiques ou dans une discipline de spécialité.

La probabilité d'un événement étant définie explicitement comme étant le rapport du nombre des cas favorables et du nombre des cas possibles, les probabilités sont rattachées au dénombrement et n'entretiennent aucun lien avec la statistique. D'ailleurs, la statistique succède aux probabilités que ce soit au niveau des programmes qu'au niveau des manuels⁶¹.

⁶¹ En Tunisie, à chaque niveau scolaire correspond un seul manuel de mathématiques.

6. La réforme de 2002

Pour cette réforme, le système éducatif reste composé d'un enseignement obligatoire de base s'étalant sur neuf années (six ans à l'école primaire et trois ans au collège) et d'un enseignement secondaire s'étalant sur quatre années, dont la première est une année de tronc commun et les trois suivantes se distribuent sur quatre sections en 2^{ème} année secondaire : « Sciences », « Technologie de l'Informatique », « Économie et Services » et « Lettres » et six sections à partir de la 3^{ème} année : « Mathématiques », « Sciences Expérimentales », « Sciences Techniques », « Sciences de l'Informatique », « Économie et Gestion » et « Lettres ».

6.1. Au secondaire

Depuis septembre 2004, un nouveau programme de mathématiques a pris place, au secondaire; il a atteint en septembre 2007 le niveau de la terminale (4^{ème} année secondaire).

Les domaines qui nous intéressent touchent en totalité ou en partie tous les niveaux secondaires, l'étude de la statistique commençant en première année secondaire et celle des probabilités en troisième année secondaire.

6.1.1. Première année secondaire

En première année secondaire, année du tronc commun, sont programmées des activités statistiques dont le contenu correspondant aux séries statistiques à un caractère englobe les objets suivants : moyenne, médiane, mode, étendue, histogramme, diagramme en bâtons et diagramme circulaire (PO 2005, p.12).

Parmi les aptitudes à développer chez les élèves, les prescripteurs insistent sur la production des représentations graphiques de séries statistiques ou chronologiques et l'exploitation de ces représentations pour, entre autres, faire des interprétations et des prédictions sur la fréquence d'apparition de phénomènes aléatoires (ibid. p. 12).

6.1.2. Deuxième année secondaire

Le contenu statistique pour la deuxième année secondaire, toutes sections confondues, comprend les paramètres de position (médiane, quartiles, moyenne et mode) et de

IV. Les programmes tunisiens

dispersion (étendue, variance et écart type) et les représentations graphiques (diagrammes, histogramme, courbes graphiques) d'une série statistique ou chronologique (PO 2005).

Outre les aptitudes indiquées en haut, l'utilisation de la calculatrice ou d'un logiciel pour, entre autres, représenter graphiquement une série statistique ou simuler une expérience aléatoire, est recommandée.

6.1.3. Troisième année secondaire

C'est au niveau de la 3^{ème} année secondaire qu'une première rencontre avec le dénombrement et les probabilités est organisée.

Pour toutes les sections est programmé un enseignement de dénombrement dont le contenu comporte les notions de cardinal d'un ensemble fini, de combinaison, de permutation, d'arrangement et de la formule du binôme (PO 2006a). Dans ce programme, il est demandé d'amener les élèves à construire des arbres de choix.

La section « Sciences de l'informatique » mise à part, un enseignement de statistique est programmé pour toutes les autres sections. Le programme reprend les séries statistiques à un caractère du niveau précédent et le complète par les séries statistiques à deux caractères (tableau à deux entrées, distributions et fréquences marginales, paramètres de position et de dispersion des distributions marginales, nuage de points et point moyen). Pour la section « Lettres », il y a l'ajustement affine en plus. Il est alors mentionné, pour toutes les sections concernées par un enseignement statistique, d'utiliser des exemples puisés dans l'environnement de l'élève dans l'étude des séries statistiques (ibid.).

Toutes les sections sont concernées par un enseignement des probabilités. Il est question de probabilité uniforme et les objets ciblés se résument dans les notions de loi de probabilité sur un ensemble fini, de probabilité de la réunion et de l'intersection de deux événements, de l'équiprobabilité, des épreuves successives indépendantes et des épreuves successives dépendantes (ibid.). Remarquons que les deux derniers points ne concernent pas les deux sections « Sciences Techniques » et « Sciences de l'informatique ». Notons que ces programmes parlent de simulations d'expériences aléatoires amenant l'élève à distinguer entre "modèle probabiliste" et "modèle statistique". Parmi les aptitudes visées, soulignons

IV. Les programmes tunisiens

celle de l'estimation de la probabilité d'un événement à partir de la fréquence de sa réalisation et celle de son calcul dans le cas de l'équiprobabilité.

Remarquons que pour les sections « Sciences Expérimentales », « Sciences Techniques », « Économie et Gestion » et « Lettres », nous trouvons une rubrique intitulée "Statistiques - Dénombrement – Probabilités". Pour la section « Sciences de l'Informatique », nous trouvons une rubrique "Dénombrement, probabilité". Pour la section « Mathématiques », nous constatons l'existence d'une rubrique intitulée "Statistiques – probabilités" et d'une autre "Arithmétique et dénombrement".

6.1.4. Quatrième année secondaire

Toutes les sections sont concernées par le même programme dans les domaines de la statistique et des probabilités, à l'exception de celui de la section « Lettres » qui diffère légèrement.

Le programme de statistique reprend les séries statistiques à deux caractères ; il examine les ajustements affines (méthode des moindres carrés, méthode de Mayer), les droites de régression, la corrélation linéaire et la covariance et s'intéresse à quelques exemples d'ajustements non affines (PO 2006a).

Quant au programme de probabilités, il s'intéresse aux objets : probabilité conditionnelle, formule des probabilités totales, formule de Bayes, variable aléatoire, loi de probabilité, schéma de Bernoulli, loi binomiale, espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire ; il porte aussi sur des exemples de lois continues (loi uniforme et loi exponentielle (ibid.).

Outre la sensibilisation, à travers des simulations d'expériences aléatoires, à la distinction entre "modèle probabiliste" et "modèle statistique", l'utilisation d'un arbre de choix pour la détermination de la probabilité d'un événement est une aptitude visée par le programme.

Notons pour la section « Lettres » l'existence d'une rubrique nommée "Statistiques - Dénombrement - Probabilités" et pour les autres sections l'existence d'une rubrique intitulée "Statistiques – Probabilités".

6.1.5. Conclusion

Les nouveaux programmes du secondaire montrent que pour la première fois la statistique et les probabilités concernent toutes les spécialités. Ils montrent aussi, d'une façon explicite, une orientation vers une double approche des probabilités, l'approche fréquentiste et l'approche laplacienne dans le cas de l'équiprobabilité. La probabilité d'un événement est ainsi estimée d'abord par la fréquence de sa réalisation par l'intermédiaire de simulations d'expériences aléatoires.

6.2. Au collège

Mis en application à partir de septembre 2005, les nouveaux programmes prévoient l'utilisation en fin du primaire (6^{ème} année de base) des tableaux et des représentations graphiques de données et leur utilisation dans la résolution de problèmes et il est décidé de la mise en place à partir de septembre 2006, d'un nouveau programme comportant la statistique et les probabilités à tous les niveaux du collège (de la 7^{ème} année à la 9^{ème} année de base), la statistique n'étant programmée auparavant qu'au niveau de la 8^{ème} année de base.

6.2.1. Septième année de base

Le nouveau programme de 7^{ème} année de base se situe dans la continuité de celui de la fin de l'école primaire. Son objectif est de contribuer à développer chez l'élève le jugement critique et le traitement des données. Il focalise sur l'activation de l'expérience et le traitement de situations concrètes et de jeux qui, étant basés sur le sensible, permettent à l'élève l'apprentissage et la compréhension de quelques expériences aléatoires situées dans son environnement.

La partie du nouveau programme, intitulée "domaine de statistique et des probabilités", comporte les tableaux statistiques, les notions de population statistique, d'individu, d'échantillon, de caractère quantitatif, de caractère qualitatif, d'effectif et de fréquence. Elle aborde aussi les représentations graphiques d'une série statistique (diagramme à bâtons, diagrammes circulaire, polygone des effectif, polygone des fréquences), le pourcentage, la moyenne arithmétique, l'étendue et le mode. Aussi comprend-elle des exemples

IV. Les programmes tunisiens

d'expériences aléatoires et les notions d'événement certain, d'événement possible et d'événement impossible (PO 2006b).

Parmi les aptitudes visées soulignons le calcul du pourcentage ou de la fréquence de réalisation d'un événement, la reconnaissance d'une expérience aléatoire, la reconnaissance du fait qu'un événement est plus probable qu'un autre et l'estimation, la prédiction et la détermination des probabilités des résultats prévus ainsi que l'exploitation d'un tableau statistique, d'un diagramme ou d'une représentation graphique pour interpréter, expliquer, prédire ou décider.

Le programme spécifie la nécessité, d'une part, d'habituer l'élève à la notion d'expérience aléatoire à partir de jeux tels que celui des dés ou à partir du tirage d'une carte d'un jeu de cartes ou du jet d'une pièce de monnaie et, d'autre part, d'exploiter l'usage de la calculatrice et de l'ordinateur.

6.2.2. Huitième année de base

Le programme de 8^{ème} année de base est entré en vigueur en septembre 2007. Il préconise que l'élève consolide les notions statistiques et probabilistes abordées au niveau précédent et les exploite dans la résolution de problèmes ou dans l'étude de situations aléatoires liées à son environnement. Il demande aussi que l'élève continue à développer ses capacités à saisir, ordonner et représenter les données, à exploiter les diagrammes et les représentations graphiques et à traiter les informations.

Pour la statistique, le programme prescrit les séries statistiques discrète et continue et leurs représentations. Il aborde les notions de polygone des fréquences, la moyenne arithmétique, la médiane, l'étendue et le mode.

Quant au contenu probabiliste du programme, il reste inchangé par rapport au niveau précédent. Il comprend les notions d'expérience aléatoire, d'événement certain, d'événement possible et d'événement impossible, les mêmes explications concernant la manière d'aborder la notion d'expérience aléatoire et l'exploitation de la calculatrice et de l'ordinateur.

IV. Les programmes tunisiens

6.2.3. Neuvième année de base

L'entrée en vigueur du programme de 9^{ème} année de base est prévue en septembre 2008. Il prescrit la découverte de nouveaux concepts et la sensibilisation à quelques méthodes d'échantillonnage.

Le contenu statistique de ce programme comporte, outre les représentations d'une série statistique discrète ou continue, le polygone des effectifs cumulés, le polygone des fréquences cumulées, le choix des échantillons, les paramètres de position et les paramètres de dispersion. Le programme des probabilités vise de nouvelles aptitudes telles que la comparaison des probabilités de réalisation d'événements donnés ainsi que la modélisation d'une expérience aléatoire.

6.2.4. Conclusion

Le programme du collège en statistique et en probabilités prépare celui du secondaire. Il est question d'un programme allant dans le domaine de la statistique jusqu'à l'introduction de l'échantillonnage.

Dans le domaine des probabilités, le contenu du programme reste le même le long des trois années du collège ; il comprend les notions d'expérience aléatoire, d'événement certain, d'événement possible et d'événement impossible. Il introduit la notion de probabilité, nous semble-t-il, dans une approche double (l'approche fréquentiste et l'approche laplacienne) et il vise, entre autres, la modélisation d'une expérience aléatoire dans ses objectifs finaux.

Mais un programme ne vaut que par sa mise en exécution. Qu'en est-il alors de sa traduction dans les manuels scolaires ?

7. Les manuels du collège

Deux nouveaux manuels scolaires de mathématiques ont été mis en circulation au niveau du collège ; ceux des 7^{ème} et des 8^{ème} années de base. Nous allons nous intéresser à leurs contenus en nous focalisant sur le programme des probabilités.

7.1. Le manuel de 7^{ème} année de base (2006-2007)

Le manuel de mathématiques de la 7^{ème} année de base comprend un chapitre intitulé « Statistique et Probabilités » divisé en deux parties (Dargaa et al. 2006, pp. 131-141).

La partie I traite des « Situations statistiques » et comporte six activités (1 à 6) et quatre applications relatives aux notions programmées. La partie II traite des « Exemples d'expériences aléatoires » et comporte quatre activités (7 à 10) (ibid. pp. 137-139).

L'activité 7 traite une expérience de tir à la flèche sur une cible rectangulaire divisée en 30 carrés comportant chacun un chiffre (19 chiffres impairs et 11 chiffres pairs). Dans la première question, il est demandé en premier lieu de déterminer l'événement le plus probable parmi les événements « la flèche atteint un carré comprenant un nombre pair » et « la flèche atteint un carré comprenant un nombre impair » puis de justifier la réponse ; il est demandé, en deuxième lieu, d'écrire sous forme d'un nombre rationnel la probabilité du 2^{ème} événement. Dans la deuxième question, la tâche consiste à produire un diagramme au choix correspondant à une série statistique donnée sous forme d'un tableau récapitulant les résultats de 50 tirs.

Dans l'activité 8, on donne les résultats consécutifs de 40 lancers, réalisés par Ali, d'un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6, un résultat étant le chiffre de la face supérieure. On demande d'abord d'ordonner les résultats de cette expérience aléatoire dans un tableau associant à chaque chiffre le nombre de ses apparitions. On demande ensuite de déterminer la fréquence d'apparition du chiffre 2 dans le jeu, le résultat demandé est à écrire sous forme d'un nombre rationnel, puis sous forme de pourcentage.

Dans l'activité 9, on donne un diagramme à bâtons représentant le nombre de boules dans un sac selon la couleur (il y a 3 couleurs). Les deux premières tâches à accomplir consistent en la recherche du nombre total des boules et la production d'un tableau correspondant au diagramme donné. Dans la troisième question, il est dit qu'on a demandé à Ahmed de tirer une seule boule du sac sans voir les boules et il est demandé, d'abord, d'écrire sous forme d'un nombre rationnel, puis sous forme de pourcentage la probabilité de tirer une boule rouge et, ensuite, d'ordonner les couleurs selon la probabilité de leur tirage.

IV. Les programmes tunisiens

La dernière activité, l'activité 10, est illustrée par une roulette comportant des secteurs isométriques (4 bleus, 3 jaunes, 8 orange et 1 vert) et une flèche fixée au centre et pointant un secteur de couleur jaune. Il est dit qu'en tournant la flèche, chaque secteur possède la même probabilité d'être indiqué par elle. On indique que le quart des secteurs est coloré en bleu, $\frac{3}{16}$ d'entre eux sont en jaune, 50 % en orange et le reste en vert et on demande dans la première question de remplir un tableau (il est question de remplir la 2^{ème} ligne intitulée pourcentage relativement au nombre total des secteurs, la première ligne correspondant aux 4 couleurs). Dans la deuxième question, on demande de déterminer la couleur ayant la plus petite probabilité d'être indiquée par la flèche après l'avoir tournée. Dans la troisième question, on donne les événements A « la flèche s'arrête à un secteur de couleur bleue ou jaune ou orange ou verte » et B « la flèche s'arrête à un secteur de couleur rouge » et on demande l'événement certain et la probabilité de chacun des événements A et B. A la fin de cette activité, deux énoncés instituant les notions d'événement impossible et d'événement certain sont donnés :

- Si un événement est impossible alors sa probabilité est égale à zéro (ou 0 %)
- Si un événement est certain alors sa probabilité est égale à un (ou 100 %)

Dans la partie « Exercices », sont proposés trois exercices (6 à 8, p.141) relatifs aux probabilités.

Dans l'exercice 6, il est question de deux boîtes, une boîte contenant 6 jetons blancs et 11 jetons noirs et l'autre 9 jetons blancs et 15 jetons noirs. La tâche à accomplir consiste à déterminer la boîte dans laquelle le tirage d'un jeton blanc est le plus probable.

Dans l'exercice 7, il est question d'un sac contenant 16 boules numérotées de 1 à 16 dans lequel on tire une de façon aléatoire. Il est demandé d'écrire sous forme d'un nombre rationnel, puis sous forme de pourcentage les probabilités suivantes :

- a) la probabilité de tirer la boule numéro 5 ;
- b) la probabilité de tirer une boule portant un nombre impair ;
- c) la probabilité de tirer une boule portant un nombre pair divisible par 3 ;
- d) la probabilité de tirer une boule portant un nombre compris entre 0 et 20 ;

e) la probabilité de tirer une boule portant un nombre divisible par 3 et 5 à la fois.

Dans le dernier exercice, un grand cube est coupé en trois parties selon trois directions différentes pour donner des petits cubes isométriques. Dans la représentation, en perspective cavalière, du cube subdivisé, les trois faces visibles sont de trois couleurs différentes. On demande d'abord de déterminer le nombre de petits cubes, puis de compléter un tableau donnant le nombre de petits cubes en fonction du nombre de faces coloriées, ce dernier variant entre 0 et 3. Il est enfin dit qu'on a mis les petits cubes dans un sac et qu'on en a tiré un seul d'une façon aléatoire. La tâche à réaliser est alors d'écrire sous forme d'un nombre rationnel la probabilité de tirer un cube ayant trois faces coloriées puis celle de tirer un cube ayant au moins une face coloriée.

7.2. Le manuel de 8^{ème} année de base (2007-2008)

Le manuel de mathématiques de la 8^{ème} année de base comprend un chapitre intitulé « Activités en Statistique et en Probabilités » divisé en deux parties (Rahmouni et al. 2007, pp. 105-126).

La première partie du chapitre comporte trois rubriques. Sous la première rubrique « Je me rappelle » sont placées quatre activités. Dans la première activité, les notions de série à caractère quantitatif, de valeurs et d'effectif total d'une série statistique, de mode et d'étendue sont institutionnalisées ; dans les trois autres activités, est effectué un travail de rappel notamment sur les différentes représentations d'une série statistique. Sous la deuxième rubrique « Je découvre et j'applique », trois activités traitent des séries statistiques continues. La première se termine par la notion d'histogramme et la deuxième traite puis institutionnalise la notion de centre d'une classe et de polygone des effectifs. Sous forme d'activités, la troisième rubrique « Applications », traite et institutionnalise, entre autres, les notions de polygone des fréquences et de médiane.

La deuxième partie, intitulée « Exemples d'expériences aléatoires », comprend cinq activités et des applications (ibid. pp. 116-119).

La première activité traite un exemple de tirage avec remise d'une façon aléatoire dans un sac contenant 3 jetons rouges et 3 jetons bleus. Dans le cadre de la première question, sont proposées une liste des couleurs correspondant à 24 épreuves est donnée (rouge est écrit 12

IV. Les programmes tunisiens

fois et bleu 13 fois) ainsi qu'un énoncé définissant l'expérience aléatoire comme étant une expérience où l'on ne connaît pas d'avance le résultat ; la tâche à accomplir consiste à remplir un tableau dans lequel on demande l'effectif et la fréquence en pourcentage du tirage d'un jeton rouge et de celui d'un jeton bleu. On demande, dans la deuxième question, si l'on peut dire que 50 % des tirages correspondent à un jeton rouge et, dans la troisième question, la fréquence d'apparition de la couleur bleu. Dans la quatrième question, l'expérience est répétée 40 fois par Mohamed. On propose alors une liste des couleurs obtenus (rouge est écrit 21 fois et bleu 19 fois) et on demande d'abord de remplir un tableau analogue au précédent et ensuite de répondre si la couleur rouge est tirée dans plus de 50 % des épreuves. Dans la dernière question, un camarade de Mohamed, voulant faire l'expérience 40 fois, s'arrête à la 25^{ème} épreuve en disant : "si je continue, la fréquence d'apparition de la couleur rouge sera supérieure à celle de la couleur bleu" ; on demande alors au lecteur : "es-tu d'accord avec lui ?".

La deuxième activité comporte trois questions. On annonce d'abord qu'à l'aide de la touche « RANDOM », une calculatrice scientifique présente des nombres aléatoires compris entre 0 et 1. Il est dit ensuite qu'Ahmed appuie 30 fois sur la touche « RANDOM » d'une calculatrice donnant des nombres aléatoires à trois chiffres après la virgule, une liste de 30 nombres à 3 chiffres est alors donnée. Dans la première question, deux tâches sont à accomplir : la première consiste à remplir un tableau récapitulatif l'effectif et la fréquence en pourcentage relatifs aux chiffres allant de 0 à 9 et la seconde à la représentation du polygone des fréquences. Les mêmes tâches sont réitérées, dans la deuxième question on demande à l'élève de refaire l'expérience 60 fois à l'aide de la calculatrice ; la définition de la taille d'un échantillon est donnée à côté de cette question. Enfin, une demande de comparaison des fréquences avec le nombre 0,1 succède à la question "Que remarques-tu quand la taille de l'échantillon devient grande ?"

Dans la troisième activité, l'élève est invité à lancer 25 fois un dé de faces numérotées de 1 à 6 et à noter le chiffre figurant sur la face supérieure. Les deux premières questions correspondent à produire un tableau statistique et à construire le polygone des fréquences. Il est demandé ensuite de rassembler dans un tableau les résultats d'un élève avec ceux de trois autres et de les représenter par un polygone des fréquences. Enfin, une demande de

IV. Les programmes tunisiens

comparaison des fréquences avec le nombre 0,16 succède à la question “Que remarques-tu quand la taille de l'échantillon devient grande ?”

Dans la quatrième activité, des élèves participent à un jeu télévisé. Le jeu consiste à répondre à une question tirée d'une boîte de façon aléatoire. Sachant qu'il y a cinq questions en culture générale, quatre questions en histoire et une question en sport, il est demandé de répondre aux questions suivantes :

- a) Quelle question est la plus probable au tirage ? La moins probable au tirage,
- b) Quelle est la probabilité de tirer une question en histoire ? Donner le résultat sous forme de pourcentage ?
- c) Quelle est la probabilité de tirer une question en culture générale ou en sport ?

La situation de la dernière activité est plutôt une situation de dénombrement. Ayman, Aziz et Ahmed ont oublié leurs stylos en sortant de la classe de mathématiques et leur professeur, qui les a récupérés, les leurs a distribués d'une façon aléatoire à la séance suivante. Il est d'abord demandé de compléter un tableau représentant les possibilités de distribution des stylos, 3 lignes correspondant à trois possibilités étant remplies et 4 lignes vides. Les questions suivantes concernent le nombre de possibilités de distribution, la probabilité que Ayman aie son stylo et la probabilité que chacun des élèves reçoive son stylo.

Ces activités sont suivies de trois applications.

La première demande le nombre de façons de construire un nombre de 2 chiffres différents et le nombre de façons de construire un nombre de 2 chiffres différents ou égaux en utilisant les chiffres 0, 2 et 3.

La deuxième application est présentée comme suit : deux voitures entrent dans un parking de forme rectangulaire qui comprend 4 places adjacentes vides dont chacune peut être occupée par une seule voiture. On demande alors de combien de façons peut-on diriger les deux voitures vers 2 places vides et quelle est la probabilité que les deux voitures s'arrêtent dans 2 places adjacentes.

La situation de la troisième application est une situation de dénombrement : Tarak qui a trois crayons de couleur veut colorier 3 formes géométriques (sont dessinés un carré, une

IV. Les programmes tunisiens

ellipse et un triangle). La question concerne les choix possibles des couleurs sachant, dans un premier temps, que Tarak peut utiliser une couleur au moins et, dans un deuxième temps, qu'il utilise 3 couleurs.

Dans la partie « Exercices », les exercices 11, 12 et 13 (ibid. p. 126) sont relatifs aux probabilités, les deux derniers étant des exercices de dénombrement.

Dans l'exercice 11, on veut former un comité composé de 2 personnes dans un ensemble de 3 hommes et deux femmes. On demande d'abord, combien de façons permettent de former ce comité puis, la probabilité que le comité soit composé de 2 hommes ensuite, la probabilité qu'il soit composé de 2 femmes et enfin, de déduire la probabilité qu'il soit composé d'un homme et d'une femme.

La situation de l'exercice 12 est la suivante : une institution scolaire offre à ses élèves le choix de participer dans les clubs suivants : C1 (musique), C2 (danse), C3 (théâtre), C4 (poésie). On demande le nombre de choix possibles pour un seul élève si on lui permet de participer dans 2 clubs seulement puis si on lui permet de participer dans 3 clubs au maximum.

Le dernier exercice est présenté comme suit : un restaurant offre à ses clients 3 types de dessert. On demande le nombre de choix possibles connaissant que le client, dans une première question, doit choisir un seul type et, dans une deuxième question, peut choisir plus qu'un type.

7.3. Conclusion

Les manuels de mathématiques de la 7^{ème} année et de la 8^{ème} année de base semblent, en gros, respecter le contenu du programme. Tel qu'on le voit dans les programmes, la notion d'expérience aléatoire est rencontrée dans des jeux et les notions d'événement certain, d'événement possible et d'événement impossible sont abordées au sein des deux niveaux.

Pour le manuel de 7^{ème} année de base, deux remarques s'imposent. D'abord, nous ne trouvons pas de trace concernant l'exploitation de la calculatrice ou de l'ordinateur, même pas au niveau de la statistique. Ensuite, nous remarquons d'après le contenu du manuel que les probabilités sont plutôt une question de dénombrement : en effet, aucune réalisation

IV. Les programmes tunisiens

effective d'une expérience aléatoire n'est demandée et aucune question n'est donnée dans le sens d'une approche par les fréquences.

Par ailleurs, l'introduction des probabilités telle qu'elle est faite, dans l'activité 7, pourrait poser problème. Nous nous demandons d'abord si cette activité de « tir à la flèche » constitue la bonne introduction à l'aléatoire, ne s'agit-il pas d'une expérience dans laquelle l'adresse (du tireur) est quelque part présente ?

Ensuite, dans cette activité, on demande d'emblée et explicitement l'écriture d'une probabilité sous forme d'un nombre rationnel. Nous nous demandons alors si les élèves donnent, sans difficulté, la réponse basée sur la définition de la probabilité d'un événement comme étant le rapport du nombre des cas favorables et du nombre des cas possibles.

Le manuel de 8^{ème} année de base traite les probabilités dans une approche fréquentiste dans 3 activités sur les 5 données. D'abord, avec une expérience répétée un certain nombre de fois et dont les résultats sont donnés, il est demandé l'avis des élèves relativement à un énoncé (activité 1). Ensuite, la calculatrice supposée comme étant une machine produisant des chiffres aléatoires, la question du comportement de la fréquence quant la taille de l'échantillon devient grande est traitée (activité 2). Enfin, la même question est traitée dans une expérience réelle de jet de dé (activité 3).

Notons aussi que pour les deux dernières activités, pour les applications et pour les exercices, il est question de probabilités rattachées au dénombrement.

Remarquons enfin une ambiguïté au niveau de la 3^{ème} application : la question concerne-t-elle seulement les choix possibles des couleurs ?

Par ailleurs, nous constatons que l'usage de l'ordinateur n'est pas mentionné, la calculatrice étant utilisée dans la seule activité indiquée. Sera-t-il présent dans le manuel de 9^{ème} année secondaire ?

8. Conclusions

Pour la première réforme, l'enseignement des probabilités se limite à de simples calculs utilisant quelques formules de dénombrement et ne concerne pas la section « Mathématiques » : tout se passe comme si elles sont, avec la statistique, étrangères aux mathématiques.

IV. Les programmes tunisiens

Depuis les débuts de la réforme dite des maths modernes, l'accent est mis sur l'importance de la place qu'occupent les deux domaines de la statistique et des probabilités dans notre société (PO 1969). Avec cette réforme, les probabilités sont plutôt une affaire des sections scientifiques contrairement à la statistique dont l'étude est plus approfondie pour les littéraires et les économistes. Elles sont introduites sous une forme axiomatique dans les termes d'espaces probabilisés finis, de variables aléatoires numériques, de fonction de répartition et de distribution binomiale. Aussi faudrait-il noter que l'analyse combinatoire a observé un changement radical, ne dépassant pas d'ailleurs la durée de vie de cette réforme, lié à l'intérêt porté à la théorie des ensembles.

Pour la troisième réforme, l'introduction des probabilités, qui concernent toutes les sections longues aussi bien en 6^{ème} année secondaire qu'en terminale, reste en termes d'espaces probabilisés pour les sections scientifiques ; pour ces mêmes sections, l'enseignement statistique, qui se poursuit en classe terminale pour toutes les sections longues, reste au niveau de la statistique descriptive.

Malgré des assertions disant ne pas faire de l'analyse combinatoire un préalable à l'étude de "la probabilité" (PO 1968) ou préconisant ne pas enfermer le calcul des probabilités dans la formule "nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles" (PO 1969), les probabilités restent en général rattachées aux dénombrements le long des trois premières réformes tunisiennes.

Pour la 4^{ème} réforme, la section « Économie et Gestion » est exclue de tout enseignement statistique. Toutes les autres sections se voient attribuer un même programme de probabilités en 3^{ème} année secondaire et en terminale, le programme de la 3^{ème} étant celui des littéraires de la réforme précédente.

La probabilité d'un événement est définie en troisième année explicitement comme étant le rapport du nombre des cas favorables et du nombre des cas possibles même si dans les manuels quelques auteurs commencent par définir la probabilité comme étant une application de l'ensemble des parties d'un ensemble fini dans l'intervalle $[0, 1]$. Les probabilités sont ainsi rattachées au dénombrement et n'entretiennent aucun lien avec la statistique. D'ailleurs, la statistique succède aux probabilités que ce soit au niveau des programmes qu'au niveau des manuels.

IV. Les programmes tunisiens

Il faut souligner deux manuels de terminales, les seuls à notre connaissance, où les auteurs introduisent les probabilités par les fréquences en parlant d'estimation statistique de la probabilité d'un événement (Smida et al. 1997, 2001). Pour un événement A par exemple, il est dit que pour un nombre n assez grand d'expériences, la fréquence $\frac{n(A)}{n}$ "tend (souvent) à se stabiliser autour d'un nombre qui constitue « l'estimation statistique de la probabilité de A »" (Smida et al. 1997, p. 267).

La 5^{ème} réforme étend l'enseignement de la statistique et des probabilités à toutes les sections ; elle l'étend même au niveau du collège. Ses programmes de mathématiques attestent d'une orientation explicite vers une double approche des probabilités, l'approche fréquentiste et l'approche laplacienne dans le cas de l'équiprobabilité. Ainsi, la statistique et les probabilités se rattachent officiellement sans rompre le lien qui existe depuis la première réforme entre dénombrement et probabilités.

Nous nous intéressons dans notre recherche à ce qui existe et ce qui peut exister surtout au niveau du collège. Aujourd'hui, ce qui existe au niveau du collège, ce sont les programmes et leurs traductions dans les manuels. Mais la mise en exécution d'un programme ne s'arrête pas au niveau de sa traduction dans le contenu du manuel scolaire en organisations ou éléments d'organisations mathématiques ; il s'étend à ce qui se fait entre les partenaires didactiques en classes de mathématiques.

Outre les remarques que nous avons relevées au niveau des contenus des manuels de 7^{ème} année et de 8^{ème} année de base, il serait intéressant de toucher les rapports qu'entretiennent les enseignants et les élèves avec des objets relevant du champ des probabilités.

Nous entamons dans les chapitres suivants des études sur les conceptions mobilisées, notamment les conceptions spontanées des élèves du collège.

Mais avant d'engager la recherche des conceptions au niveau du collège, commençons par une étude au niveau du lycée.

Chapitre V.

Une première expérimentation : Difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage des probabilités

1. Introduction

2. Présentation de l'expérimentation

3. Analyse a priori

4. La tâche « te » de l'équiprobabilité : résultats et discussion

5. La tâche « ti » d'indépendance : résultats et discussion

6. Conclusions

1. Introduction

Nous reprenons ici une partie du corpus d'un test élaboré dans le cadre de notre mémoire de DEA (Dhieb 2003a) rapportant certaines difficultés rencontrées par des élèves du secondaire dans l'apprentissage des notions de combinatoire et de probabilité.

Dans ce chapitre, notre intérêt porte sur des conceptions probabilistes d'élèves du lycée tunisien. Notre entrée aux conceptions se fait par le biais de ce que nous appelons une organisation personnelle : un triplet $[T, \tau, \theta]$ formé autour d'un type de tâche T donné, τ étant une technique utilisée pour effectuer T , et θ la technologie personnelle (théorème ou définition en acte) qui a produit la technique τ (cf. I - 7.2.2). En effet, nous convenons qu'une conception est l'ensemble des organisations personnelles $[T_i, \tau_i, \theta]$ formées autour d'un même discours technologique personnel où les types de tâches T_i relèvent d'un même objet mathématique. Dans l'étude des conceptions, nous allons essentiellement nous focaliser sur les technologies.

2. Présentation de l'expérimentation

2.1. Les tâches choisies

Nous nous limitons à deux tâches relevant du champ des probabilités :

2.1.1. La tâche de l'équiprobabilité « te »

Il est question d'une tâche portant sur la notion d'équiprobabilité des événements. Dans notre cas, il n'y a pas de demande de justification. Les conceptions de l'équiprobabilité sont visées.

Énoncé⁶² : On lance en même temps deux dés cubiques (les faces sont numérotées de 1 à 6).

Soient les événements : A : "obtenir un 5 et un 6"

B : "obtenir deux 6"

Choisis la réponse qui te paraît correcte : A a plus de chances que B

B a plus de chances que A

A et B ont les mêmes chances

⁶² L'énoncé de ce problème se trouve dans Lecoutre et Durand (1988).

2.1.2. La tâche de l'indépendance des épreuves « ti »

La tâche « ti » porte sur l'indépendance des épreuves, l'indépendance chronologique. L'énoncé du problème comporte une demande de justification et ce sont les conceptions de la notion d'indépendance des épreuves qui sont visées. Cet énoncé comporte une question correspondant à une des modalités choisies par Maury (1985).

Énoncé : Une personne jette trois fois de suite la même pièce de monnaie. Elle obtient dans l'ordre les résultats suivants : face, pile, pile. Elle jette la pièce une 4^{ème} fois.

Que penses-tu du résultat du 4^{ème} jet ? Pourquoi ?

2.2. La population

Au moment de l'expérimentation, l'enseignement des probabilités en Tunisie commençait en 3^{ème} année de l'enseignement secondaire (12^{ème} année du cursus scolaire).

La population testée correspond à une tranche d'âge allant de 17 à 18 ans approximativement ; elle est constituée de deux groupes :

Le premier groupe (2S) comporte 107 élèves ; il est composé d'élèves de quatre classes de 2^{ème} année secondaire et provient du lycée secondaire Assad Ibn al-Fourat de Oued Ellil. Ce lycée fait partie de la DRE (Direction Régionale de l'Enseignement) de Manouba.

Le deuxième groupe (3M) comporte 92 élèves de 3^{ème} année secondaire, section Mathématiques. Ce groupe est composé d'élèves de quatre classes : deux classes prises dans le lycée cité ci-dessus, une classe prise dans le lycée secondaire Hammouda Bacha relevant de la DRE de Mannouba et une classe prise dans le lycée secondaire al-Omrane relevant de la DRE de Tunis.

Les élèves retenus n'ont pas été obligés de passer le test, ils l'ont fait volontairement.

2.3. Principaux buts

Nous nous intéressons, ici, aux difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage des notions probabilistes.

Un des objectifs de cette expérimentation est l'identification des conceptions probabilistes apparaissant dans l'accomplissement des tâches choisies.

En ce qui concerne les élèves du groupe de 2^{ème} année secondaire (2S) qui n'ont pas encore abordé les probabilités, nous cherchons à identifier leurs conceptions spontanées, alors que pour les élèves de 3^{ème} année secondaire (3M), qui eux ont déjà suivi un enseignement de probabilités, nous cherchons à identifier leurs conceptions et aussi à évaluer l'impact de l'enseignement reçu sur leurs performances

2.4. Plan expérimental et méthode

Plan expérimental

Les groupes 2S et 3M choisis diffèrent par deux variables, le “niveau scolaire” en mathématiques et l’“enseignement” des probabilités.

Pour la variable “niveau scolaire”, les élèves de 3^{ème} année, section Mathématiques, sont sélectionnés parmi les élèves de 2^{ème} année secondaire ayant une très bonne moyenne annuelle en mathématiques et en physique.

Pour la variable “enseignement”, contrairement au groupe 3M, le groupe 2S n’a pas reçu d’enseignement en probabilités.

Méthode

Afin de procéder à une comparaison entre les résultats de 2S et 3M et, éventuellement, entre les résultats de 2S et 3M d’une part et ceux de groupes étrangers (GE) d’autre part, nous avons choisi d’utiliser, quand cela est possible, comme outil statistique le test de khi2 (χ^2). En général, nous nous plaçons dans le cas d’un risque de 5 %, mais parfois et pour améliorer l’analyse nous faisons référence au risque de 10 %.

Avant de faire passer le test aux populations choisies, nous avons procédé à une pré-enquête auprès de deux groupes, de cinq élèves chacun, de niveau de la 2^{ème} année secondaire.

Bien que la pré-enquête nous ait montré qu’il y avait un problème au niveau de la compréhension de la tâche « ti » (tâche d’indépendance), nous avons néanmoins conservé l’énoncé correspondant⁶³, pour comparer ses résultats à ceux trouvés par Maury (1985).

La pré-enquête nous a servi à donner des consignes précises aux professeurs ayant en charge la passation du test.

La passation s’est effectuée d’une façon *collective*, exercice par exercice, dans des salles de classe sous la direction des professeurs des classes en question. Elle s’est effectuée à la fin de l’année scolaire 2001-2002. Les professeurs chargés de la passation du test ont respecté les consignes suivantes :

- Dire aux élèves qu’il s’agit d’un test dont les résultats serviront une recherche s’intéressant à l’enseignement et l’apprentissage des Mathématiques.

⁶³ Nous avons apporté des modifications au niveau d’autres exercices que nous ne reprenons pas ici.

- Lire attentivement, aux moins deux fois, l'énoncé de chaque exercice et donner, si le cas s'impose, les explications nécessaires dans des termes similaires à ceux de l'énoncé.
- Ne demander aux élèves de répondre à l'exercice que si l'énoncé a été bien compris.
- Ne donner aucune autre modalité pour la question "Que penses-tu du résultat du 4^{ème} jet ?" de l'exercice 5.
- Demander aux élèves de justifier la réponse, même en arabe, dans les exercices où une justification est demandée.
- Ne passer d'un exercice à un autre qu'après s'être assuré(e) que tous les élèves ont répondu au premier exercice.

3. Analyse a priori

Avant de dire nos attentes, nous commençons par donner un aperçu des deux travaux d'où proviennent les tâches choisies.

3.1. Le biais d'équiprobabilité (Lecoutre et Durant, 1988)

Le problème expérimenté dans l'article de Lecoutre et Durand (1988) est celui d'un lancer, simultané, de deux dés où il est question de comparer les deux résultats R1 « obtenir un 5 et un 6 » et R2 « obtenir deux fois 6 ». La question est intitulée de la façon suivante : "*pensez-vous qu'il y a : autant de chances d'obtenir chacun des deux résultats ? plus de chances d'obtenir l'un des deux résultats, et dans ce cas, lequel (R1 ou R2) ? vous est-il impossible de vous prononcer, et dans ce cas, pourquoi ?*" (p. 357).

Puisqu'on peut obtenir 5, par exemple, avec l'un ou l'autre des dés, le résultat R1 est deux fois plus probable que R2 et la réponse correcte est qu'il y a plus de chances d'obtenir le résultat R1.

Dans les recherches antérieures (Lecoutre 1985a et Lecoutre 1985b par exemple), les étudiants ou lycéens consultés donnent la réponse correcte à 30 % et la réponse incorrecte d'équiprobabilité à 60 % environ. Il s'agit là d'un biais⁶⁴ appelé *biais d'équiprobabilité*.

Cet article résume une recherche trouvant sa motivation dans deux perspectives : *une perspective cognitive* où l'objectif est de cerner l'origine du biais mentionné et *une perspective didactique* se basant sur une hypothèse (partagée, entre autres, par Fischbein) qui

⁶⁴ Il s'agit d'une terminologie anglo-saxonne qui désigne une distorsion dans les jugements.

dit que l'enseignement doit être précédé d'une "prospection du terrain intuitif" et visant à prendre en compte les modèles cognitifs trouvés dans cette prospection.

La première partie de l'article est une synthèse des expériences précédemment effectuées. La finalité de cette partie est de tester la résistance du biais d'équiprobabilité à des variations de plusieurs facteurs divisés en deux catégories : "les *facteurs liés à la situation expérimentale*" et "les *facteurs de classification des sujets*". En s'appuyant sur l'absence d'effet massif des facteurs étudiés sur les réponses apportées et sur la grande résistance du biais d'équiprobabilité, les auteurs montrent l'intérêt d'une étude des modèles utilisés par les sujets dans le but de proposer "un mode d'apprentissage d'un raisonnement probabiliste correct".

La deuxième partie de l'article représente une caractérisation des principaux modèles cognitifs utilisés d'une façon spontanée par les sujets. L'expérience est une suite de trois problèmes de lancer de deux dés. Le troisième problème P3 est celui cité au début. Dans le problème P1, on a un dé rouge et un autre bleu, R1 « on obtient un 5 avec le dé rouge et un 6 avec le dé bleu » et R2 « on obtient un 6 avec le dé rouge et un 6 avec le dé bleu ». Dans le problème P2 aussi, on a un dé rouge et un autre bleu, R1 « on obtient un 5 avec le dé bleu et un 6 avec le dé rouge » et R2 « on obtient un 6 avec le dé rouge et un 6 avec le dé bleu ». La population testée est formée de lycéens âgés de 14 à 18 ans n'ayant entamé aucun enseignement sur les probabilités.

Les auteurs identifient cinq principaux modèles cognitifs utilisés en se basant sur les patrons de réponses cohérentes⁶⁵ aux problèmes P1 et P2 (ces réponses représentent 85 % de l'ensemble des réponses).

Au patron de réponses « + R1 + R1 »⁶⁶ (9 % de l'ensemble des réponses), ils associent le modèle « doubles plus rares ».

Au patron « +R2 + R2 » (11 % de l'ensemble des réponses), ils associent deux modèles : le modèle « condition supplémentaire », basé sur le fait que les dés doivent satisfaire une seule condition (sur les nombres) pour donner R2, et le modèle « doubles plus faciles ».

Au patron « = = » (66 % de l'ensemble des réponses), ils associent deux modèles : le modèle « hasard » selon lequel tout les événements ont les mêmes chances de se réaliser et le modèle « une chance par résultat » qui est le modèle correct.

Nous remarquons que le modèle « hasard » est largement majoritaire (65 % des réponses d'équiprobabilité justifiées).

⁶⁵ Il s'agit de patrons où une même réponse – correcte ou non - est donnée à P1 et P2.

⁶⁶ R1 est plus probable dans les problèmes P1 et P2.

De la troisième et dernière partie de l'article, nous retenons la citation suivante :

“Un apprentissage d'un modèle correct, qui serait à la fois stable dans le temps et généralisable à diverses situations d'incertitude, ne peut être envisageable sans que le sujet ait préalablement pris conscience de la non pertinence du modèle qu'il utilise spontanément.”
(ibid. p. 367)

En vue d'une comparaison avec nos résultats, nous retenons de l'article précédent les performances de deux groupes : le groupe GE1 où l'on compte 30 réponses correctes contre 70 réponses fausses et le groupe GE2, formé de sujets ayant entamé une formation d'une année en probabilités, où l'on compte 18 réponses correctes contre 64 réponses relevant du biais de l'équiprobabilité.

3.2. Les acquisitions spontanées relatives à la notion d'indépendance en probabilité (Maury 1985)

Il s'agit d'un travail s'intéressant aux “acquisitions spontanées” des élèves relativement à la notion d'indépendance “intuitive” ou “chronologique”, au sens chronologique de la répétition d'une expérience, en probabilité. Dans ce travail, l'auteure commence par présenter deux *conceptions* de l'indépendance en probabilité⁶⁷ : une conception intuitive et une autre stochastique, reposant sur la définition formelle de l'indépendance (cf. chapitre 3, sous 4.2).

Deux motivations sous-tendent le travail de Maury : l'étude des difficultés à percevoir comme indépendants des événements s'inscrivant dans une suite d'événements similaires et l'influence de la forme des questions sur les performances des élèves.

Ce travail est accompli suite à un article de Cohen et Hansel (1955) intitulé « The Idea of Independence ». Dans cet article, où il est question, entre autres, de prévoir le résultat du 4^{ème} jet d'une pièce de monnaie connaissant les résultats des trois jets consécutifs précédents de la même pièce, la formulation de la question n'est pas rapportée. Les élèves testés (âgés de 6 à 14 ans) répondent avec des faibles pourcentages que “l'une ou l'autre face peut apparaître” : 16 % à 14 ans, 7 % à 10 ans et 0 % à 7 ans. Et c'est cet échec massif, traduisant un effet négatif de la récence⁶⁸, qui a conduit Maury à se poser la question de l'influence de la formulation surtout que la formulation exacte de la question posée par Cohen et Hansel n'a pas été donnée.

⁶⁷ D'après une étude à caractère épistémologique de Steinbring faite en 1983 et que nous retrouvons en 1986.

⁶⁸ Fischbein (1975) utilise le nom de *negative recency effect* pour expliquer que les sujets, en situation de prévision d'un événement en connaissant les précédents, choisissent de manière significative l'événement non prédominant.

Maury reprend la même situation : “Une personne jette trois fois de suite la même pièce. Elle obtient dans l'ordre les résultats suivants : face, pile, pile. Elle jette la pièce une quatrième fois” (p. 286) avec quatre modalités différentes pour la variable question :

M1 : Penses-tu que le quatrième résultat a plus de chances d'être pile ou d'être face ?

M2 : (1) Penses-tu que le quatrième résultat a plus de chances d'être pile ?

(2) Penses-tu que le quatrième résultat a plus de chances d'être face ?

(3) Penses-tu que le quatrième résultat a autant de chances d'être pile que d'être face ?

M3 : Penses-tu que le quatrième résultat a plus de chances d'être pile ou d'être face ou qu'il a autant de chances d'être pile que face ?

M4 : Que penses-tu du quatrième résultat ? (ibid. pp. 287-288).

Le plan expérimental est croisé à deux variables indépendantes, la variable “question” comportant les quatre modalités ci-dessus et la variable “niveau scolaire”. La passation est effectuée d'une façon collective, chaque élève étant confronté à une seule modalité de la variable “question”.

Les modalités M2 et M3 se distinguent par la donnée de l'univers des possibles et l'inventaire de toutes les réponses possibles. La modalité M4 se distingue de la modalité M1 par la réduction des “incitations au choix exclusif de l'une des deux faces de la pièce”.

Quant à la variable “niveau scolaire”, elle comporte trois modalités. En effet, la population était formée d'élèves de seconde Det. (de détermination), de seconde B.E.P.⁶⁹ et de 4^{ème}, ce dernier niveau étant retenu en vue d'une comparaison avec les résultats de Cohen et Hansel. Les élèves de 2^{nde} sont testés avant l'enseignement des probabilités.

Les arguments recueillis ont permis à l'auteure de répartir les réponses en quatre catégories :

- "Le hasard" qui est évoqués dans la grande partie (74 %) des réponses argumentées.
- "La mécanique" qui correspond aux réponses semblant donner une interprétation déterministe de la situation en invoquant le mouvement de la pièce ou les forces en jeu.
- "L'équilibre, le partage équitable" qui conduit au choix de l'événement non prédominant.
- "Probabilité et fréquence relative" où la probabilité d'un événement est estimée à partir de sa fréquence relative dans les trois jets précédents.

⁶⁹ - La 2^{nde} Det. est une section permettant la poursuite d'études “longues”,

- La 2^{nde} B.E.P. est une section débouchant sur la préparation d'un diplôme professionnel,

- L'âge d'entrée en 2^{nde} est “théoriquement” 15-16 ans, mais beaucoup d'élèves de 2^{nde} B.E.P. ont un retard scolaire.

Un premier résultat de la recherche est l'absence d'une différence significative entre les niveaux scolaires, que ce soit au niveau global ou au niveau des modalités prises séparément. Maury penche alors pour l'explication, partielle, de ce résultat par la tendance déterministe de l'enseignement des mathématiques (ibid. p. 291).

Un deuxième résultat concerne l'effet de la forme de la question qui s'est avéré significatif.

Un troisième résultat est que les arguments des élèves semblent montrer que l'idée de hasard, dans la situation considérée, traduit une conception correcte de l'indépendance.

Nous relevons que, pour la modalité M4, les réponses correctes forment, relativement à l'ensemble des réponses, environ 50 % pour la 4^{ème} et 60 % pour la seconde Det. Ainsi, M4 représentant la modalité où la performance de la 4^{ème} est moindre, les derniers résultats correspondant à ce niveau mettent en doute les conclusions de Cohen et Hansel.

Il y a lieu de remarquer qu'au sein des réponses non pertinentes, l'événement non prédominant *face* représente globalement 70 %. Ce pourcentage assez élevé nous renvoie à l'heuristique de la représentativité qui pourrait être à l'origine d'une intuition erronée appelée par Kahneman et Tversky *la loi des petits nombres* (ibid. p. 296) disant que la loi des grands nombres s'appliquerait aussi bien à de petits nombres.

Notons que Kahneman et al. (1972) signalent que les sujets peuvent confondre entre probabilité et représentativité, la représentativité étant une qualité attribuée à un événement représentatif de l'ensemble des événements ou au processus qui l'a engendré.

Étant donné que nous avons choisi la modalité M4 dans l'énoncé de la tâche d'indépendance « ti », nous retenons, en vue d'une comparaison avec nos résultats, le groupe GE, de seconde Det., où l'on compte 60 % de réponses correctes contre 40 % de réponses fausses.

3.3. Nos attentes

Le premier exercice

Dans l'étude de l'équiprobabilité, les élèves de 3M ont abordé un exercice « résolu » où l'expérience aléatoire consiste en un jet simultané de deux dés cubiques de couleurs différentes et dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Dans cet exercice, on demande de déterminer la probabilité pour que la somme des deux nombres qui apparaissent soit paire, la probabilité pour que la somme des deux nombres qui apparaissent soit égale à 5 et la probabilité pour que le nombre 1 apparaisse sur un seul des deux dés.

La solution de cet exercice passe par la détermination de l'univers de possibles Ω ainsi que de son cardinal ($\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $\text{card } \Omega = 6^2 = 36$) et par la réalisation d'un tableau 6 x 6 dont les cases contiennent chacune la somme des nombres obtenus par les deux dés.

L'expérience dans notre premier exercice (tâche d'équiprobabilité « te » ainsi que l'univers des cas possibles) étant rencontrés par les élèves de 3M, nous envisageons une certaine différence dans les performances au profit de la 3M. Néanmoins, nous prévoyons trouver de faibles performances pour les deux niveaux 2S et 3M.

Notre prévision est basée sur le fait que, pour la 3M, le rapport des élèves à l'équiprobabilité serait superficiel puisque, dans les exercices du manuel scolaire, on annonce souvent que les événements élémentaires (tirages, permutations, distributions) sont équiprobables.

Aussi, nous prévoyons que les élèves de la 3M donnent fréquemment la réponse fautive d'équiprobabilité, ce qui nous permettrait de conclure que les issues tenues pour équiprobables sont les issues observables et non les issues possibles (événements élémentaires).

Estimant que la réponse d'équiprobabilité correspond à une conception résistante, nous prévoyons une certaine similarité des résultats de nos deux groupes avec ceux du groupe GE1.

Quant à la comparaison des performances de 3M avec GE2, nous sommes indécis sur les résultats qu'on va trouver. En effet, les résultats surprenants de GE2 et le fait que le biais d'équiprobabilité augmente avec l'âge (Lecoutre et Fischbein 1998) nous incitent à prévoir une certaine similarité entre les réponses de ce groupe et ceux du groupe 3M. Nous nous demandons cependant si le niveau performant en mathématiques des éléments du groupe 3M ne contredise pas notre prévision.

Le deuxième exercice

Nous prévoyons, dans l'accomplissement de la tâche « ti », un effet de l'heuristique de représentativité sur les réponses des élèves. Nous pensons précisément à une propriété attribuée au hasard : la compensation ou l'équité. En effet, nous prévoyons qu'un bon nombre d'élèves ne verrait pas l'indépendance des jets et ne reconnaîtrait pas l'univers des possibles. Une contagion, par *la compensation* ou *l'équité* du hasard, serait alors à l'origine d'une conception de l'équiprobabilité qui ne serait pas entre les événements élémentaires pile et face, mais entre le nombre d'apparitions de pile et celui de face. Lecoutre et Fischbein parlent

d'effet de récence négatif ou de l'« *illusion du joueur* » cette façon de penser « une séquence avec alternances est plus représentative du hasard qui est perçu comme un processus « auto-correcteur » » (Lecoutre et Fischbein 1998, p. 317).

Nous envisageons toutefois que cet effet soit moindre et que les performances soient meilleures au niveau du groupe 3M d'élèves de 3^{ème} année secondaire, section mathématiques.

Par conséquent nous nous attendons à une amélioration au niveau de la reconnaissance de l'indépendance des épreuves de l'expérience aléatoire correspondant à la tâche « ti » pour les élèves du groupe 3M.

Comme la pré-enquête nous a révélé des difficultés au niveau de la compréhension de la question, nous pensons trouver une légère différence entre les résultats de 2S et ceux du groupe GE de l'article de Maury (1985). Nous pensons par ailleurs que les performances des élèves du groupe 3M seraient mieux que celles de GE puisque les premiers ont entamé un cours sur les probabilités.

4. La tâche « te » de l'équiprobabilité : résultats et discussion

4.1. Comparaison 2S / 3M

Rappelons qu'il est question du lancer de deux dés cubiques et que la tâche consiste à comparer les chances qu'ont les événements A « obtenir un 5 et un 6 » et B « obtenir deux 6 ».

Commençons par les résultats obtenus dans les groupes 2S (2^{ème} année secondaire) et 3M (3^{ème} année Mathématiques). Dans le tableau suivant, A désigne que les chances de l'événement A sont plus grandes, B désigne que l'événement B sont plus grandes et = désigne que A et B ont les mêmes chances :

▪ Tableau V.1

Réponses apportées à la tâche « te » en fonction du groupe :

Effectifs et pourcentages associés

| Réponse Groupe | A (<i>correcte</i>) | B | = | NR ⁷⁰ | Total |
|-------------------|-----------------------|------------|--------------|------------------|--------------|
| 2S | 19 18 % | 60 56 % | 28 26 % | 0 0 % | 107 100 % |
| 3M | 19 20,5 % | 22 24 % | 50 54,5 % | 1 1 % | 92 100 % |

Il ressort de ce tableau que les performances de 2S et 3M sont presque les mêmes, les pourcentages de la réponse correcte A étant voisines. En d'autres termes, les données recueillies ne permettent pas de conclure à un effet significatif du niveau scolaire et de l'enseignement. En effet, l'indépendance de ces deux variables est attestée par le fait qu'on trouve $\chi^2_c = 0,11$ en comparant la réponse correcte A aux autres réponses pour les deux groupes.

La majorité des élèves (environ 55 %) voient qu'obtenir deux 6 a plus de chances d'avoir lieu qu'obtenir un 5 et un 6 au niveau du groupe 2S et que les chances sont les mêmes au niveau du groupe 3M.

Ce qui est surprenant, dans les résultats obtenus, c'est le passage de la fréquence de la réponse correspondant au biais d'équiprobabilité (=) de 26 % pour le groupe 2S à 54,5 % pour le groupe 3M. Ces résultats représentent une différence significative ($\chi^2_c = 15,32 > \chi^2_{0,01; 1}$). Tout se passe comme si, par rapport à la réponse d'équiprobabilité (=), il existe un apport négatif de l'enseignement des probabilités.

Ainsi, la plus grande partie d'élèves de 3M, prennent pour équiprobables toutes les issues observables au lieu de toutes les issues possibles (les événements élémentaires). Autrement dit, ils voient dans l'événement "obtenir un 5 et un 6" un résultat (qui a les mêmes chances d'avoir lieu que l'évènement "obtenir deux 6") et non un couple de deux nombres tel que l'envisage le modèle mathématique enseigné. Nous suspectons un effet de l'enseignement qui focalise sur l'équiprobabilité.

⁷⁰ Non réponse

4.2. Comparaison avec des groupes étrangers

Nous faisons ici une comparaison avec les deux groupes étrangers GE1 et GE2 abordés en haut (cf. 3.1). Dans le groupe GE1, il y a 30 réponses correctes contre 70 réponses fausses et dans le groupe GE2, il y a 18 réponses correctes contre 64 réponses relevant du biais de l'équiprobabilité, ce dernier groupe étant formé de sujets ayant entamé une formation d'une année en probabilités.

Nous constatons, d'une part, qu'au seuil de 95 % il n'y a pas de différence significative aussi bien entre les performances (la réponse A par rapport aux autres réponses) de 2S et celles de GE1 ($\chi^2_c = 3,63$) qu'entre les performances de 3M et GE1 ($\chi^2_c = 1,73$).

Nous remarquons, d'autre part, que les réponses (réponse fausse = / réponse correcte A) de 3M sont comparables à celles de GE2 ($\chi^2_c = 0,36$).

Ainsi, nos résultats paraissent semblables à ceux de Lecoutre et Durand (1988). Soulignons surtout, avec ces auteurs, le fait que le biais d'équiprobabilité est très important pour les élèves du groupe 3M, c'est-à-dire pour les élèves ayant entamé un début de formation en probabilité.

4.3. Quelles conceptions ?

Quelles sont les conceptions que nous soupçonnons être à l'origine des réponses des élèves testés ?

Pour répondre à ces questions, nous allons nous limiter aux technologies personnelles (théorèmes ou définitions en acte) que nous suspectons le plus, le nom d'une technologie étant attribué à la conception à laquelle elle appartient. Ces technologies sont implicites, l'énoncé de la tâche « te » ne comportant pas de demande de justification.

Intéressons-nous d'abord au niveau de la deuxième année secondaire 2S. Il nous semble que dire que l'événement "*obtenir un 5 et un 6*" a plus de chances d'avoir lieu que l'événement "*obtenir deux 6*" relève de la technologie DPR « *Doubles Plus Rares* ». Par contre, dire le contraire relèverait de la technologie DPF « *Doubles Plus Fréquents* ». Enfin, dire que les deux événements en question sont équiprobables est une réponse produite par la technologie EIO « *Équiprobabilité des Issues Observables* ».

Au niveau de la troisième année secondaire, section Mathématiques 3M, nous suspectons une quatrième technologie en plus des trois dernières citées. Il est question de la technologie

adoptée par l'institution scolaire qui est à l'origine de la réponse correcte (A) et que nous intituleons *EIP* « *Équiprobabilité des Issues Possibles* ».

Il nous semble que la dernière technologie est exclusivement utilisée par le groupe 3M des élèves ayant eu un cours en probabilités. Elle serait très rarement utilisée vues les fréquences voisines correspondant à la réponse (A) pour les deux groupes 2S et 3M (cf. 4.1).

Chaque technologie personnelle étant le signe d'une conception, nous aurions affaire, essentiellement, à quatre conceptions qui ont permis de donner les réponses recueillies.

La conception voulue par l'institution scolaire mise à part, les trois autres semblent être déclenchées par l'heuristique de la représentativité. Il serait question, dans chacun des trois cas, d'une qualité attribuée au hasard.

4.4. Conclusion pour la tâche « te »

En conclusion, l'enseignement des probabilités n'a pas contribué à améliorer les performances des élèves du groupe 3M. Ce résultat est d'autant plus important que ces derniers élèves sont de bons élèves en mathématiques.

Cet enseignement a plutôt contribué à rendre très fréquente la réponse de l'équiprobabilité qui correspond à la conception *EIO* « *Équiprobabilité des Issues Observables* ». Ce résultat va dans les sens du résultat trouvé par Lecoutre et Durand (1988) parlant de l'importance du biais de l'équiprobabilité pour les élèves qui débutent une formation en probabilités.

Pour cette conception *EIO*, tout se passe comme si “des événements aléatoires sont par nature équiprobables (Lecoutre et Fischbein 1998).

Notons que le biais d'équiprobabilité est, en partie, enclenché par l'heuristique de la représentativité.

Nous pensons que la focalisation du programme sur l'équiprobabilité ainsi que la donnée des événements équiprobables dans les exercices sont les causes essentielles de cet étrange résultat où l'on décèle une confusion entre événement et événement élémentaire.

Cette confusion représente, à notre sens, un problème de choix du modèle adéquat, problème que nous avons soulevé auparavant (cf. II - 5) : Pourquoi choisir un modèle où l'équiprobabilité est entre les couples possibles et non pas un modèle où les résultats observables seraient équiprobables ? Pourquoi le premier modèle de probabilité, choisi par l'institution scolaire, est-il plus adéquat ?

Ce sont des questions devant avoir, à notre sens, une réponse au sein de la classe de mathématiques.

5. La tâche « ti » d'indépendance : résultats et discussion

5.1. Les conceptions mobilisées

Contrairement au premier exercice, l'énoncé du deuxième exercice comporte une demande de justification.

La justification ayant une fonction technique et une fonction technologique, nous nous limitons encore ici dans l'abord de conceptions mobilisées aux technologies personnelles utilisées. Il nous semble en effet qu'une technique, dans le cas de notre type de tâches ne pourrait être qu'un énoncé de la technologie ou d'un énoncé « équivalent ».

5.1.1. La conception EA « Expérience Aléatoire »

La dénomination de cette conception tient au fait que dans une expérience aléatoire, l'issue n'est pas connue d'avance. La technologie correspondante est la suivante : « il y a équiprobabilité entre les issues possibles ».

Au sein de cette conception, nous plaçons les réponses correctes (=) disant que le résultat du 4^{ème} jet pourrait bien être aussi bien pile que face. Nous trouvons cependant, sur les 42 justifications du groupe 3M qui sont classées EA, une réponse pile (P) et deux réponses face (F).

Nous rapprochons cette conception à la catégorie "Le hasard" de Maury (cf. 3.2). En effet, dans les réponses que nous avons classées EA, les élèves font en général référence au hasard ou aux probabilités qui sont parfois énoncées en termes de chances.

Commençons par un exemple signalant l'imprévisibilité de l'issue :

Exemple 1 : Réponse de KHA. (Groupe 2S) : "On ne peut pas saisir les résultats du jet avant de voir la surface de la pièce (et il y a toujours la chance)."

Parfois, la référence aux probabilités se fait en termes de chances :

Exemple 2 : Réponse de YOU. (Groupe 3M) : "La pièce de monnaie a une chance sur deux de donner le résultat « face » ou « pile »."

Le terme « hasard » est quelquefois utilisé :

Exemple 3 : Réponse de MAR. (Groupe 2S) : "On ne peut jamais savoir le résultat du 4^{ème} jet parce que c'est le hasard et il n'existe pas dans la réalité une règle qui peut indiquer le résultat."

Nous constatons que des justifications telles que 'on ne connaît pas le résultat d'avance', 'il y a les mêmes chances' ou 'il n'y a pas de règle' sont présentes aussi bien dans les réponses du groupe 2S que dans celles du groupe 3M. Quelquefois, la réponse est complétée par "c'est Dieu qui sait". Mais les élèves de la 3^{ème} année font souvent référence aux probabilités quantifiées :

Exemple 4 : Réponse de JIH. (Groupe 3M) : "... $p(F) = 1/2$ et $p(P) = 1/2$. Donc on a obtenu 2 fois pile et on peut obtenir une autre fois pile ou face."

En définitive, la mobilisation de la conception EA traduit une bonne compréhension de l'indépendance des épreuves.

5.1.2. La conception LPN « Lois des Petits Nombres »

C'est une dénomination que nous empruntons à Kahneman et Tversky (1972) disant que la loi des grands nombres s'applique aussi aux petits nombres.

La technologie personnelle correspondante est un théorème en acte que nous énonçons comme suit : « dans la répétition d'une expérience aléatoire à deux issues équiprobables, les effectifs des deux issues sont égaux ».

Pour notre exercice, la mobilisation de cette conception engendre le choix de l'issue non prédominant face (F) comme le résultat le plus probable pour le 4^{ème} jet. Kahneman et Tversky (1972) parlent d'une intuition erronée enclenchée par l'heuristique de représentativité, autrement dit par la qualité d'équité ou de compensation attribuée au hasard.

Nous rapprochons cette conception à la catégorie "L'équilibre, le partage équitable" de Maury (cf. 3.2).

En effet, aussi bien pour le groupe 2S que pour le groupe 3M, les élèves parlent d'une façon nuancée de cet équilibre.

Le choix peut-être modéré :

Exemple 5 : Réponse de AHL. (Groupe 2S) : " À mon avis, la 1^{ère} fois face, la 2^{ème} et 3^{ème} pile, elle va revenir face à la 4^{ème} fois."

Il peut aussi être catégorique :

Exemple 6 : Réponse de AME. (Groupe 2S) : " Il faut avoir l'équilibre. On a obtenu deux fois pile il faut une autre fois face"

Exemple 7 : Réponse de IKR. (Groupe 2S) : " Car il a trouvé 2 fois pile. Sans doute il va trouver face."

La réponse peut-être donnée en termes de probabilités, bien entendu au niveau de la 3^{ème} année :

Exemple 8 : Réponse de WIE. (Groupe 3M) : " Face : parce que la probabilité d'avoir face = probabilité d'avoir pile = $\frac{1}{2}$."

Ainsi, pour la conception LPN, nous voyons une méconnaissance de l'univers de possibles et un déplacement de l'équiprobabilité entre pile et face à celle entre le nombre d'apparitions de pile et le nombre d'apparitions de face.

En définitive pensons-nous, la mobilisation d'une telle conception traduit une mauvaise compréhension de l'indépendance des épreuves.

5.1.3. La conception FR « Fréquence Relative »

La dénomination « fréquence relative » est prise dans le sens de la prise en compte des fréquences des événements passés. La technologie personnelle correspondante est un théorème en acte que nous énonçons comme suit : « l'évènement le plus probable est celui qui est le plus fréquent dans les épreuves effectuées ».

La mobilisation de cette conception engendre le choix de pile (P) comme le résultat le plus probable pour le 4^{ème} jet.

Nous rapprochons cette conception à la catégorie "Probabilité et Fréquence Relative" de Maury (cf. sous 3.2). En effet, dans la majorité écrasante des réponses que nous avons classées FR, les élèves sont guidés par le fait que pile est apparu deux fois :

Exemple 9 : Réponse de TAY. (Groupe 2S) : "Dans les trois jets passés, pile a plus de chances que face."

D'une manière générale, le choix de pile comme résultat du 4^{ème} jet est un choix modéré. Sur les 26 réponses (25 dans 2S et 1 dans 3M) classées dans la catégorie FR, nous comptons seulement deux cas où le choix de pile est catégorique :

Exemple 10 : Réponse de ABI. (Groupe 2S) : "Les deux dernières fois étaient pile alors la fin ne va être que pile aussi."

Il y a deux cas où l'expérimentateur, la personne qui jette la pièce, semble être tenu pour quelqu'un ayant la chance d'obtenir pile :

Exemple 11 : Réponse de OUS. (Groupe 2S) : "Elle a la chance de pile."

Il se pourrait d'ailleurs que dans la dernière réponse la "chance de pile" soit attribuée à la pièce de monnaie.

Notons finalement que dans deux réponses, il nous semble qu'on a affaire à une qualité attribuée au hasard, la persistance. Dans le premier cas nous lisons "c'est la chance" et dans l'autre "jamais deux sans troisième".

Tel était le cas pour la conception *LPN*, les réponses relevant de la conception *FR* sont aussi guidées par le fait que pile est apparu deux fois et face une seule fois mais d'une autre façon.

Pour la conception *FR*, tout se passe comme si la probabilité d'un événement, au lieu d'être estimée sur un grand nombre d'épreuves, est approchée sur la base de quelques unes.

En définitive, la mobilisation d'une telle conception ne pourrait pas remettre en cause la reconnaissance de l'indépendance des épreuves.

5.1.4. La conception M « Mécanique »

C'est une dénomination que nous empruntons à Maury (1985). Il est question d'une catégorie où il ya aussi prise en compte des résultats déjà obtenus mais le raisonnement est effectué à un autre niveau : l'élève essaie d'exploiter les informations données d'une façon déterministe en évoquant explicitement le mouvement de la pièce ou les forces qui sont en jeu.

La technologie personnelle associée à cette conception est résumée comme suit : « la comparaison des "probabilités" dépend des conditions initiales de l'expérience ».

Dans la tâche donnée, la mobilisation de la conception *M* n'engendre pas une réponse bien déterminée.

Cette conception explique sept réponses du groupe 2S (trois fois face, trois fois pile et une réponse indéterminée) et deux réponses du groupe 3M (deux fois pile).

Voici la réponse indéterminée :

Exemple 12 : Réponse de HIB. (Groupe 2S) : " Je ne sais pas. Cela dépend de la façon dont il la jette la 4^{ème} fois."

Parmi les trois cas où la réponse donnée est face, nous donnons l'exemple suivant :

Exemple 13 : Réponse de SAF. (Groupe 2S) : " Elle va jeter d'une autre façon. Puisqu'elle obtient les deux derniers pile, elle peut avoir face."

Pour les élèves optant pour la réponse pile, nous donnons 2 exemples, un du groupe 2S et l'autre du groupe 3M :

Exemple 14 : Réponse de OLF. (Groupe 2S) : " À mon avis la pièce prendra le même chemin. Alors il y aura trois piles successifs."

Exemple 15 : Réponse de AMI. (Groupe 3M) : " Puisque dans les trois fois on obtient deux pile, on peut constater que face a la masse plus grande et pour cela elle tombe à l'intérieur. Contrairement pile est plus légère, pour cela elle reste juste à la surface."

Ainsi, par la mobilisation de la conception *M*, l'élève semble se débarrasser de l'aspect aléatoire de la situation par l'intermédiaire d'une explication déterministe basée par exemple sur la façon du jet ou sur la forme de la pièce.

Finalement, la mobilisation d'une telle conception traduit une mauvaise compréhension de l'indépendance des épreuves.

5.1.5. Une catégorie I « Non Identifiée »

Dans l'ensemble, nous n'avons pas eu de difficultés à placer les justifications des élèves testés dans les dernières catégories.

Cependant, nous avons eu ce problème avec quelques-unes des justifications : onze au niveau du groupe 2S et sept au niveau du groupe 3M. Il est question d'énoncés tels que "c'est ce que je crois", "c'est mon choix", "Dieu seul sait", "j'ai fait l'expérience deux fois et je trouve pile" au niveau du groupe 2S. Au niveau du groupe 3M, nous trouvons un choix de pile accompagné de l'expression "au hasard" ; nous trouvons aussi des réponses que nous n'avons pas pu comprendre : le choix de pile avec les probabilités de pile et de face égales, une probabilité égale à $3/2$, deux cas où la réponse est indifférente et la justification est $C_2^1 = 2$. Il semble que les élèves qui ont donné les deux dernières justifications voulaient dire que l'univers de possibles contient deux éléments et qu'ils sont équiprobables.

Par ailleurs, la catégorie *I* contient aussi les cas où il n'y a pas de justification : 10 dans le groupe 2S et 24 dans le groupe 3M. Ces derniers cas comportent les effectifs des élèves n'ayant donné ni réponse ni justification : 1 dans 2S et 17 dans 3M.

5.2. Conceptions et reconnaissance de l'indépendance

Dans le tableau ci-dessous, nous exposons les effectifs et les pourcentages des conceptions mobilisés dans la réalisation de la tâche « ti » ainsi que ceux de la catégorie correspondant aux conceptions non identifiées.

Rappelons que les conceptions identifiées sont *EA* « *Expérience Aléatoire* », *LPN* « *Loi des Petits Nombres* », *FR* « *Fréquence Relative* », *M* « *Mécanique* » et que la catégorie des conceptions non identifiées est dénotée par *I*.

▪ Tableau V.2

*Conceptions développées dans la réalisation de la tâche « ti » en fonction du groupe :
Effectifs et pourcentages associés*

| Conception \ Groupe | <i>EA</i> | <i>LPN</i> | <i>FR</i> | <i>M</i> | <i>I</i> | Total |
|---------------------|--------------|------------|--------------|------------|--------------|-------------|
| 2S | 22 20,5 % | 32 30 % | 25 23,5 % | 7 6,5 % | 21 19,5 % | 107 100% |
| 3M | 42 46 % | 16 17 % | 1 1 % | 2 2 % | 31 34 % | 92 100% |

Si l'on s'accorde que la conception *EA* « *Expérience Aléatoire* » est la conception pertinente, nous pouvons conclure à une correction des conceptions ou à un certain effet positif au niveau du groupe 3M. En effet la comparaison de l'effectif de la conception *EA* à celui des autres conceptions entre les groupes 2S et 3M donne $\chi^2_c = 13,14$. Est-ce l'effet de la variable « enseignement » ou de la variable « niveau scolaire » ?

Pour répondre à cette question, nous avons procédé à une comparaison des réponses correctes aux autres réponses entre le groupe 2S et un groupe (3Ms) de 3^{ème} année Maths (22 élèves) testé en septembre 2002, au début de l'année scolaire, c'est-à-dire avant l'enseignement des probabilités. Cette comparaison est faite au niveau de six exercices relevant du champ des probabilités dont les tâches « te » et « ti » font partie. Nous avons trouvé une différence non significative, par l'intermédiaire du test de χ^2 , pour quatre exercices et des pourcentages assez proches pour les deux autres exercices. Pour la première tâche « te » de ce chapitre nous avons trouvé des performances correspondant à environ 18 % de la totalité des réponses aussi bien pour le groupe 2S que pour le groupe 3Ms.

Pour la tâche « ti » qui nous intéresse ici, nous avons obtenu $\chi^2_c = 0,81$. Ainsi pourrions-nous imputer la correction au niveau des conceptions à la seule variable « enseignement ».

Le tableau nous montre, outre l'amélioration au niveau de l'effectif de la conception *EA*, une division par 2 de l'effectif de la conception *LPN* « *Loi des Petits Nombres* », et une quasi-disparition des conceptions *FR* « *Fréquence relative* » et *M* « *Mécanique* ».

La mobilisation moindre de la conception *LPN* au niveau du groupe 3M serait en accord avec les résultats de Lecoutre et Fischbein (1998) disant que l'effet de récence négatif diminue avec l'âge.

Le dernier tableau nous montre aussi une augmentation nette de l'effectif de la catégorie *I* des conceptions non identifiées. Ce résultat est d'autant plus préoccupant si l'on connaît qu'il y a une seule non réponse dans 2S contre 17 dans 3M. Il semble que ces derniers 17 élèves, n'ayant pas une réponse certaine, n'ont pas voulu apporter de réponse.

Pour étudier la reconnaissance de l'indépendance des épreuves, nous devrions opposer la conception *EA* aux conceptions *LPN*, *M* et *I*, la mobilisation de la conception *FR* ne pouvant pas mettre en cause cette reconnaissance. Cette opposition nous donne $\chi^2_c = 6,10$ ce qui prouve au risque de 5 % une différence significative, c'est-à-dire une reconnaissance plus nette de l'indépendance des épreuves pour les élèves de la 3^{ème} année.

5.3. Comparaison des performances

Dans cette partie, nous nous limitons aux réponses. Dans un premier temps, nous procédons à une comparaison des réponses des deux groupes 2S et 3M et dans un deuxième temps, nous faisons une comparaison de nos résultats avec ceux d'un groupe étranger.

5.3.1. Comparaison 2S / 3M

Résumons les réponses apportées à la tâche « ti » dans le tableau suivant. Nous désignons par (*F*) le choix de face, par (*P*) le choix de pile et par (=) le choix indifférent pour le 4^{ème} jet.

▪ Tableau V.3

Réponses apportées à la tâche « ti » en fonction du groupe :

Effectifs et pourcentages associés

| Réponse Groupe | F | P | = (correcte) | NR | Total |
|-------------------|------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 2S | 46 43 % | 34 31,5 % | 26 24,5 % | 1 1 % | 107 100 % |
| 3M | 23 25 % | 7 7,5 % | 45 49 % | 17 18,5 % | 92 100 % |

La réponse *P* est assez fréquente chez les élèves de 2S. Tout se passe comme s'ils pensent que "si un événement s'est réalisé plusieurs fois, il va continuer à se réaliser (c'est la célèbre loi des séries !)" (Girard 2001, pp. 195-196). Il y a cependant une chute des effectifs relatifs à la dernière réponse, dû à l'enseignement, pour les élèves de 3M. Il semble que les élèves de 3M ne voient pas, en général, dans le hasard la qualité de persistance.

Passons aux deux autres réponses qui restent dominantes pour les élèves de 3M :

Le tableau précédent montre une différence significative, au seuil de 99 %, dans les performances (réponse correcte) de 2S et 3M au profit de la 3M ($\chi^2_c = 12,00$) et une différence significative, au seuil de 97,5 %, dans la comparaison de la réponse fautive *F* avec les autres réponses entre 2S et 3M ($\chi^2_c = 6,29$).

Si la réponse correcte (=), représentative du rapport de l'institution scolaire à l'équiprobabilité, montre en général un rapport correct à l'équiprobabilité, la réponse fautive *F* montre le contraire.

Intéressons-nous aux élèves de 3M, ayant donné la réponse *F*. Ou bien ils ont vu dans l'exercice un univers constitué par des arrangements de quatre éléments de l'ensemble $\{p, f\}$ et dans ce cas la question serait pour eux de reconnaître l'événement le plus probable parmi les événements (f, p, p, p) et (f, p, p, f) . Ou bien ils ne se seraient pas aperçus de l'indépendance des jets, ce qui est à rapprocher de la citation suivante mais pour une courte série :

"C'est surtout l'habitude des jeux de hasard qui rend certains esprits réfractaires à cette notion de l'indépendance des événements successifs ; comme ils ont observé que, dans une

longue série, les coups de pile ou face sont à peu près également nombreux, ils en concluent qu'une longue série de coups ayant amené pile doit être suivie d'un coup face'' (Borel 1950b, p. 11).

Aussi bien pour la réponse P que pour la réponse F , nous pouvons apporter une explication à l'aide du jeu le plus connu en Tunisie qui est le jeu du « Promo sport ». Ce jeu consiste à pronostiquer, chaque semaine, treize matches. Dans ce jeu qui ne peut être qualifié de jeu de hasard⁷¹, un joueur pourrait trancher pour «la compensation du hasard'' en optant en faveur d'une équipe qui a gagné un match et perdu deux autres s'il n'y a pas raison d'avantager l'une des deux équipes adverses ; il pourrait aussi faire le choix contraire et donc opter pour «la persistance du hasard''.

D'après l'étude des justifications, c'est la réponse F qui serait plutôt provoquée par l'heuristique de la représentativité telle que l'entendent Kahneman et Tversky (1972), c'est-à-dire par les qualités d'équité et de compensation attribuées au hasard.

5.3.2. Comparaison avec un groupe étranger

Dans cette partie, nous comparons les réponses correctes de 2S et 3M avec ceux du groupe GE constitué d'élèves de seconde Det. (cf. sous 3.2).

Les performances du groupe GE sont nettement meilleures que celles de 2S. En effet, dans la comparaison de la réponse correcte (=) avec les autres réponses, les données recueillies permettent de conclure à une différence significative entre les performances de ces deux groupes au seuil de 99 % ($\chi^2_c = 25,67$).

Par ailleurs, en procédant aux mêmes comparaisons entre 3M et GE, nous concluons à une différence due au hasard étant donné que $\chi^2_c = 1,95$. Cette différence non significative qui est contraire à nos attentes pourrait être expliquée par les différences culturelles entre les groupes 3M et GE. En effet, les entrevues avec 7 élèves parmi les 17 n'ayant pas apporté de réponse à l'exercice ont montré une non-compréhension de la question, incompréhension que nous avons signalée dans la pré-enquête. Par ailleurs, nous ne pouvons pas dire qu'il y a eu compensation entre l'effet de la question et l'effet de l'enseignement puisque, comme nous l'avons signalé en haut (cf. 3.3), le rapport des élèves à l'équiprobabilité serait superficiel.

⁷¹ Puisque le résultat d'un match pourrait dépendre de facteurs connus tels que le niveau des deux équipes, leurs préparations au cours de la semaine, le terrain dans lequel ils vont jouer ...

5.4. Conclusion pour la tâche « ti »

Dans l'accomplissement de la tâche « ti » d'indépendance, nous avons relevé quatre conceptions mobilisées par les élèves testés : la conception *EA* « *Expérience Aléatoire* » qui est conforme à la conception de l'institution scolaire et les conceptions *LPN* « *Loi des Petits Nombres* », *FR* « *Fréquence Relative* » et *M* « *Mécanique* » qui ne le sont pas.

La conception *LPN* « *Loi des Petits Nombres* » traduit un déplacement de la question vers les nombres d'apparitions de pile et de face. De ce fait, cette conception traduit une mauvaise compréhension de l'indépendance des épreuves.

La mobilisation de la conception *FR* « *Fréquence Relative* » semble montrer que les élèves concernés estiment la probabilité d'un événement à partir d'un nombre réduit d'épreuves et par conséquent ne pourrait pas remettre en cause la reconnaissance de l'indépendance des épreuves.

Quant à la conception *M* « *Mécanique* » qui est peu fréquente, elle reflèterait un raisonnement déterministe, voulant évacuer le caractère aléatoire de la situation essentiellement par l'intermédiaire de la manière du lancer de la pièce, et donc une mauvaise appréhension de l'indépendance des épreuves.

Nous avons observé pour le groupe de la 3^{ème} année 3M relativement au groupe de deuxième année 2S :

- une augmentation au double aussi bien au niveau de l'utilisation de la conception *EA* qu'au niveau de la réponse indifférente « pile ou face » correspondante,
- une division par 2 aussi bien pour les effectifs correspondant à la mobilisation de la conception *LPN* que pour ceux de la réponse « face » correspondante,
- une chute aussi bien pour les effectifs correspondant à la mobilisation des conceptions *FR* et *M* que pour ceux de la réponse « pile » correspondante.

Il ressort par ailleurs de l'étude faite dans ce chapitre (chapitre V) que la reconnaissance d'indépendance est plus nette au niveau de la 3^{ème} année secondaire, section mathématiques.

6. Conclusions

Bien que les groupes 2S et 3M soient différenciés a priori par l'enseignement des probabilités (les élèves de 3M ont entamé un enseignement) et par le niveau scolaire (les élèves de 3M

sont brillants en mathématiques), ce dernier ne semble pas avoir d'impact sur les résultats que nous avons trouvés (cf. 5.2).

Ceci est très net dans l'étude de la première tâche « te » de l'équiprobabilité. En effet, pour cette tâche, nous avons constaté, pour le groupe 3M, une augmentation remarquable de la réponse d'équiprobabilité entre les événements « avoir un 5 et un 6 » et « avoir deux 6 » dans le jet de deux dés et correspondant à la conception *EIO* « *Équiprobabilité des Issues Observables* ». Autrement dit, au lieu de construire des intuitions secondaires au sens de Fischbein (cf. chapitre I sous 4.1) relatives à l'équiprobabilité, les enseignants auraient plutôt contribué à la consolidation d'une conception erronée.

L'écart entre la dernière conception et celle voulue par l'institution scolaire *EIP* « *Équiprobabilité des Issues Possibles* » montre qu'un début de formation en probabilités favoriserait ce décalage dans les jugements probabilistes appelé biais de l'équiprobabilité. Qu'en est-il alors pour des sujets ayant une formation plus approfondie ?

Ces résultats semblent constituer une légitimation didactique d'une approche fréquentiste à côté de l'approche théorique (Dhieb 2003b et 2005).

L'étude des réponses apportées à la deuxième tâche « ti », par contre, a montré comme prévu un effet plutôt positif de la formation en probabilités. Cet effet est visible dans l'augmentation de la fréquence de mobilisation de la conception ciblée par l'institution scolaire *EA* « *Expérience Aléatoire* », la diminution de la fréquence d'utilisation de la conception *LPN* « *Loi des Petits Nombres* » et sa chute pour les conceptions *FR* « *Fréquence Relative* » et *M* « *Mécanique* ».

Par conséquent avons-nous relevé une amélioration au niveau de la reconnaissance de l'indépendance des épreuves de l'expérience aléatoire correspondant à la tâche « ti » et ce pour les élèves du groupe 3M.

Encore faudrait-il signaler le nombre considérable d'élèves du groupe 3M qui n'ont pas donné de réponse à la question de la tâche « ti ».

Nous enchaînons par trois questionnements relatifs au comportement du groupe 2S dans l'accomplissement de la tâche « ti » :

- Est-ce que la forme de la question est pour quelque chose dans la fréquence élevée des réponses fausses « pile » et « face » chez les élèves du groupe 2S ? Autrement dit, est-ce que ces élèves optent pour une réponse exclusive car ils n'ont pas l'habitude dans la classe de

mathématiques de donner une réponse indifférente, du type « pile ou face » dans notre cas ?

Le contrat didactique aurait, dans ce cas, un impact sur les réponses mentionnées.

- Qu'en serait-il pour une situation d'indépendance chronologique où les résultats des premières épreuves ne sont pas donnés ?

- Enfin, qu'en serait-il pour les deux tâches étudiées dans le cas d'une population ayant plus qu'une année d'enseignement des probabilités ?

Chapitre VI.

Une expérimentation avec des sujets ayant eu une formation plus approfondie en probabilités

1. Introduction

2. Présentation de l'expérimentation

3. Analyse a priori

4. La tâche « te » de l'équiprobabilité : résultats et discussion

5. La tâche « ti » d'indépendance : résultats et discussion

6. Conclusions

1. Introduction

Dans cette expérimentation, nous nous intéressons à des sujets ayant une formation plus approfondie en probabilités. Nous reprenons la dernière expérimentation avec des sujets ayant entamé une deuxième année d'enseignement en probabilités.

Tel était le cas dans le chapitre précédent, nous allons nous limiter aux technologies personnelles dans l'abord des conceptions.

2. Présentation de l'expérimentation

Dans cette partie, nous exposons les tâches choisies puis nous présentons la population testée, les objectifs de l'expérimentation ainsi que le plan expérimental et la méthode adoptés.

2.1. Les tâches choisies

Nous avons choisi de reprendre les tâches étudiées dans la dernière expérimentation avec quelques modifications concernant la tâche de l'équiprobabilité : la question est formulée en termes de probabilité avec une demande de justification.

2.1.1. La tâche de l'équiprobabilité « te »

Il est question d'une tâche portant sur la notion de l'équiprobabilité et notée « te ». Nous avons procédé à une modification de l'énoncé figurant dans la dernière expérimentation de la façon suivante :

Enoncé : On lance en même temps deux dés cubiques (les faces sont numérotées de 1 à 6).

Soient les évènements : A : "obtenir un 5 et un 6" et B : "obtenir deux 6".

Compare les probabilités $p(A)$ et $p(B)$

Justifie ta réponse :

2.1.3. La tâche de l'indépendance des épreuves « ti »

Pour la tâche « ti » portant sur l'indépendance d'épreuves, nous avons conservé l'énoncé de la première expérimentation :

Enoncé : Une personne jette trois fois de suite la même pièce de monnaie. Elle obtient dans l'ordre les résultats suivants : face, pile, pile. Elle jette la pièce une 4^{ème} fois.

Que penses-tu du résultat du 4^{ème} jet ? Pourquoi ?

2.2. La population

La population est constituée ici d'étudiants débutants. Ce sont des étudiants qui, ayant obtenu leur baccalauréat, sont affectés à l'Institut Supérieur de Comptabilité et d'Administration des Entreprises (ISCAE) relevant de l'Université de la Manouba. Ils forment trois groupes : un premier groupe (EM) composé de 41 étudiants provenant de la section « Mathématiques », un deuxième groupe (ES) composé de 37 étudiants provenant de la section « Sciences Expérimentales » et un troisième groupe (EG) comportant 58 étudiants qui proviennent de la section « Économie et Gestion ».

Les étudiants des groupes testés ont entamé un enseignement probabiliste au cours des deux dernières années du lycée (cf. IV - 5.1 et 5.2). C'est au niveau de la variable « filière » que nous différencions ces groupes, les modalités de cette variable étant les sections de provenance des groupes.

Les derniers groupes d'étudiants EM, ES et EG d'une part et le groupe 3M de l'expérimentation précédente d'autre part (cf. chapitre V) se différencient par la variable « enseignement ». En effet, le dernier groupe 3M a entamé un enseignement des probabilités au cours d'une seule année scolaire et les groupes qui nous intéressent ici ont subi un enseignement au cours de deux années scolaires consécutives.

2.3. Principaux buts

L'objectif principal de cette expérimentation consiste en l'étude de l'impact d'une deuxième année d'enseignement des probabilités sur les réponses des sujets lors de la réalisation des deux tâches « te » et « ti ».

Mais avant de traiter cet impact, nous nous assignons la tâche de procéder à une comparaison entre les groupes testés.

Les questions auxquelles nous voulons répondre sont les suivantes :

- Y-a-il une différence significative entre les réponses apportées par les groupes testés dans l'accomplissement des tâches assignées ?
- Y-a-il une différence significative entre les réponses de ces groupes testés et celles du groupe 3M de l'expérimentation précédente ?

Un autre objectif de cette expérimentation consiste à vérifier l'existence des conceptions dont nous avons suspecté la mobilisation, dans l'accomplissement de la tâche « te », dans le dernier chapitre (cf. V - 4.3).

2.4. Plan expérimental et méthode

Plan expérimental

Comme indiqué en haut, les groupes d'étudiants EM, ES et EG diffèrent au niveau de la variable « filière », les modalités de cette variable étant les sections de provenance.

Par ailleurs, le groupe 3M de la dernière expérimentation diffère de chacun des groupes d'étudiants au moins au niveau de la variable « enseignement », les modalités de cette variable étant une année pour le groupe 3M et deux années pour chacun des autres groupes étudiants.

Méthode

Afin de procéder aux comparaisons envisagées, nous utilisons, chaque fois que c'est possible, le test de khi2 (χ^2) comme outil statistique.

La passation s'est effectuée, comme pour la dernière expérimentation, d'une façon *collective* dans les salles de travaux dirigés au début de l'année universitaire 2004-2005.

Les étudiants testés sont mis au courant qu'il est question d'une recherche et que leurs réponses ne peuvent en aucun cas être exploitées en dehors du cadre de la recherche.

3. Analyse a priori

Dans cette partie, nous commençons par exposer quelques éléments du programme probabiliste qui distingue les groupes d'étudiants testés du groupe 3M avant de passer à nos attentes.

3.1. Enseignement complémentaire de probabilités

Par rapport au groupe 3M, les trois groupes testés ont reçu un enseignement complémentaire de probabilités en quatrième année secondaire. Ce programme s'intéresse au langage probabiliste, à la probabilité sur un ensemble fini et aux aléas numériques (cf. IV - 5.2).

Dans ce programme, les notions de probabilités uniformes, d'événements indépendants et d'épreuves indépendantes sont en relation directe avec les tâches à accomplir lors de cette expérimentation.

3.2. Nos attentes

3.2.1. Pour la tâche « te » d'équiprobabilité

Pour la tâche « te » d'équiprobabilité, le problème réside, à notre sens, dans la reconnaissance de l'univers des possibles, c'est-à-dire de l'ensemble des éventualités comme mentionné dans le programme de la classe terminale.

Nous pensons que, comme c'était le cas pour le groupe 3M, une grande partie des étudiants ne voient pas que cet ensemble est formé de 36 couples, que 2 couples sont favorables à la réalisation de l'événement A et qu'un seul couple est favorable à la réalisation de l'événement B.

Avec l'étude de la probabilité uniforme, nous prévoyons que les étudiants n'ont aucun problème à attribuer la probabilité $\frac{1}{6}$ pour l'obtention du chiffre 5 ou bien du chiffre 6 dans un dé. Et nous prévoyons qu'un certain nombre d'élèves vont se référer à la notion d'indépendance d'événements pour calculer aussi bien la probabilité de l'événement A que celle de l'événement B : ils pourraient multiplier $\frac{1}{6}$ par $\frac{1}{6}$.

En définitive, nous conjecturons que la réponse disant que « les événements A et B sont équiprobables » sera très fréquente au sein des trois groupes d'étudiants et nous estimons qu'il n'y aura pas une grande différence entre les fréquences de cette réponse dans ces groupes et celle de la même réponse trouvée dans le groupe 3M.

3.2.2. Pour la tâche « ti » d'indépendance

L'accomplissement de la tâche « ti » d'indépendance passe par la reconnaissance de l'indépendance des jets de la pièce de monnaie.

Nous nous posons la question de l'effet de la forme de la question : est-ce que la donnée des résultats des trois premiers lancers aurait un effet sur la réponse des étudiants ? Autrement dit, est-ce que cette donnée favoriserait une méconnaissance de l'univers de possibles et donc un déplacement de l'équiprobabilité entre pile et face à celle entre le nombre d'apparitions de pile et le nombre d'apparitions de face ?

Mais l'étude de la notion d'indépendance des épreuves par les étudiants considérés nous pousse à prévoir une performance de ces groupes meilleure que celle du groupe 3M.

Cependant, nous n'envisageons pas de différence significative dans les performances entre les trois groupes testés.

4. La tâche « te » de l'équiprobabilité : résultats et discussion

En vue d'une comparaison des résultats au sein des groupes testés EM, ES et EG (cf. 4.1) d'une part, puis entre ces groupes et le groupe 3M d'autre part, nous commençons par nous limiter aux réponses. Notre intérêt porte ensuite sur les conceptions mobilisées (cf. 4.3), ce qui nous amène à prendre en compte les justifications proposées par les étudiants.

4.1. Comparaison entre les groupes EM, ES et EG

Nous rappelons qu'il est question du lancer de deux dés cubiques et que la tâche consiste à comparer les probabilités des événements A « obtenir un 5 et un 6 » et B « obtenir deux 6 ».

Commençons par résumer les réponses des étudiants des trois groupes EM, ES et EG dans le tableau suivant où A désigne que « la probabilité de l'événement A est la plus grande », B désigne que « la probabilité de l'événement B est la plus grande » et = désigne que « A et B ont la même probabilité » :

▪ Tableau VI.1

Réponses apportées à la tâche « te » en fonction du groupe :

Effectifs et pourcentages associés

| Réponse Groupe | A (<i>correcte</i>) | B | = | X ⁷² | Total |
|-------------------|-----------------------|--------------|--------------|-----------------|-------------|
| EM | 6 15 % | 5 12 % | 28 68 % | 2 5 % | 41 100 % |
| ES | 10 27 % | 4 11 % | 21 57 % | 2 5 % | 37 100 % |
| EG | 15 26 % | 12 20,5 % | 28 48,5 % | 3 5 % | 58 100 % |

⁷² X désigne une autre réponse ou une non réponse.

4.1.1. Les performances

Il ressort du tableau précédent que les performances des groupes ES et EG sont voisines, elles paraissent supérieures à la performance du groupe EM. Mais s'agit-il d'une différence significative ?

La comparaison de la réponse correcte A aux autres réponses, pour les trois groupes pris deux à deux, nous donne $\chi^2_c = 1,15$ entre EM et ES, $\chi^2_c = 1,20$ entre EM et EG et $\chi^2_c = 0,01$ entre ES et EG. Ceci montre que les différences entre les performances des groupes ne sont pas significatives au seuil de 5 %.

Ainsi, tout se passe comme si la variable « filière » n'intervient pas dans les performances des groupes testés.

4.1.2. Le biais d'équiprobabilité

Notre intérêt porte ici sur la réponse (=) qui correspond au biais de l'équiprobabilité. Le dernier tableau nous montre une fréquence considérable pour cette réponse dans les groupes EM, ES et EG considérés. Elle est moins fréquente dans le groupe EG et plus fréquente dans le groupe EM.

Mais la comparaison de la réponse (=) aux autres réponses, pour les trois groupes pris deux à deux, nous donne $\chi^2_c = 0,66$ entre EM et ES, $\chi^2_c = 3,14$ entre EM et EG et $\chi^2_c = 0,35$ entre ES et EG. Ceci montre que pour la réponse (=), les différences entre les trois groupes sont dues au hasard au risque de 5 %.

Ainsi et aussi bien pour la réponse correcte A que pour la réponse (=) attestant un biais d'équiprobabilité, il n'y a pas de différence significative entre les trois groupes testés. Y-a-t-il une différence entre les résultats de ces groupes et ceux du groupe 3M de l'expérimentation précédente ?

4.2. Comparaison avec le groupe 3M

Nous allons dans cette partie procéder à une comparaison entre les résultats du groupe 3M (groupe de 3^{ème} année secondaire, section Mathématiques) et ceux des groupes EM, ES et EG.

4.2.1. Les performances

Rappelons que dans le groupe 3M, 19 élèves sur 92, soit 20,5 %, ont donné la réponse correcte A.

Une lecture du dernier tableau montre que cette fréquence est meilleure que celle du groupe EM (15 %) d'étudiants provenant de la section « Mathématiques » ; elle est inférieure des fréquences des groupes ES et EG (27 % et 26 %) provenant respectivement des sections « Sciences Expérimentales » et « Économie et Gestion ».

En comparant la réponse correcte A aux autres réponses, nous obtenons $\chi^2_c = 0,33$ entre 3M et EM, $\chi^2_c = 0,30$ entre 3M et ES et $\chi^2_c = 0,29$ entre 3M et EG. La comparaison entre 3M et les trois groupes réunis donne par ailleurs $\chi^2_c = 0,04$.

Ainsi pourrait-on conclure, pour la réponse correcte A, à une différence non significative entre le groupe 3M et les trois groupes EM, ES et EG pris séparément ou réunis.

Autrement dit, l'enseignement des probabilités pour deux années consécutives n'a pas permis l'amélioration des performances des élèves considérés.

4.2.2. Le biais d'équiprobabilité

Rappelons que dans le groupe 3M, 50 élèves sur 92, soit 54,5 %, ont donné la réponse incorrecte d'équiprobabilité (=).

Une lecture du dernier tableau montre que cette fréquence est inférieure à celle du groupe EM (68 %) d'étudiants provenant de la section « Mathématiques » ; elle est proche de la moyenne des fréquences des groupes ES et EG (57 % et 48,5 %) provenant respectivement des sections « Sciences Expérimentales » et « Économie et Gestion ».

En comparant la réponse biaisée (=) aux autres réponses, nous obtenons $\chi^2_c = 1,73$ entre 3M et EM, $\chi^2_c = 0,003$ entre 3M et ES et $\chi^2_c = 0,31$ entre 3M et EG. La comparaison entre 3M et les trois groupes réunis donne par ailleurs $\chi^2_c = 0,04$.

Ainsi pourrait-on conclure, pour la réponse d'équiprobabilité (=), à une différence non significative entre le groupe 3M et les trois groupes EM, ES et EG pris séparément ou réunis.

Autrement dit et conformément à nos attentes, l'enseignement des probabilités pour deux années consécutives n'a pas permis de diminuer la fréquence de la réponse d'équiprobabilité (=).

En conclusion, aussi bien pour la réponse correcte A que pour la réponse (=), il n'y a pas de différence significative entre le groupe 3M d'une part et les trois groupes de cette expérimentation d'autre part, que l'on prenne ces groupes séparément ou ensemble.

4.3. Les conceptions mobilisées

Dans le chapitre précédent, où aucune justification n'était requise pour la tâche « te », nous avons envisagé l'existence de quelques conceptions. Il est question, au niveau du groupe 3M, de quatre conceptions : la conception *DPR* « *Doubles plus rares* », la conception *DPF* « *Doubles plus fréquents* », la conception *EIO* « *Équiprobabilité des issues observables* » et la conception *EIP* « *Équiprobabilité des issues possibles* » (cf. V - 4.3).

Retrouvons-nous ces conceptions au niveau des groupes EM, ES et EG testés à partir des justifications apportées ?

Intéressons-nous d'abord aux justifications accompagnant la réponse correcte A, ces justifications étant susceptibles de nous informer sur l'existence des deux conceptions *DPR* « *Doubles plus rares* » et *EIP* « *Équiprobabilité des issues possibles* ».

Nous retrouvons d'une façon explicite la conception *DPR* chez un seul élève :

Exemple 1 : Réponse de SAW. (Groupe ES) : " $p(5 \text{ et } 6) > p(6 \text{ et } 6)$. La probabilité d'avoir deux nombres différents est plus fréquente."

Par contre, nous constatons la mobilisation de la conception correcte *EIP* chez 8 élèves (3 parmi les 6 du groupe EM, 4 parmi les 10 de ES et 1 parmi les 15 de EG). En voici une illustration :

Exemple 2 : Réponse de BEY. (Groupe EM) : " $p(5 \text{ et } 6) > p(6 \text{ et } 6)$ car pour $p(5 \text{ et } 6)$ on peut obtenir le chiffre 5 au dé n° 1 et le chiffre 6 au dé n° 2 ou contrairement, mais pour $p(6 \text{ et } 6)$ il faut que dans les deux dés on obtient le chiffre 6."

Avec presque 25 % de justifications correctes pour la réponse correcte A, nous nous apercevons de la difficulté de l'accomplissement de la tâche « te ». Il y a d'ailleurs un tiers de copies ne contenant pas de justification.

Passons maintenant à la réponse fautive B dont les justifications sont susceptibles de nous informer sur l'existence de la conception *DPF* « *Doubles plus fréquents* ». Il y a 9 cas parmi les 21 considérés qui ne contiennent pas de justification. Dans la plus grande majorité des autres cas, la justification comporte une comparaison des nombres 5 et 6 ou bien des nombres $(5 + 6)$ et $(6 + 6)$. Il n'y a cependant aucune justification pouvant être associée à la conception suspectée *DPF*.

Pour répondre à la question de l'existence de la conception *EIO* « *Équiprobabilité des issues observables* », notre intérêt porte sur les justifications accompagnant la réponse (=) qui est majoritaire (28 sur 41 pour le groupe EM, 21 sur 37 pour ES et 28 sur 58 pour EG).

Nous constatons que beaucoup de copies (21) ne renferment pas de justification et que quelques copies (6) comportent des justifications non compréhensibles.

Par ailleurs, les justifications font majoritairement allusion à l'équiprobabilité d'obtenir une face d'un dé. Nous relevons 10 cas où la probabilité de l'événement « obtenir 5 et 6 » (respectivement « obtenir 6 et 6 ») est prise pour la somme des probabilités des événements « obtenir 5 » et « obtenir 6 » (respectivement « obtenir 6 » et « obtenir 6 »). Dans les autres cas (11) où il y a un calcul des probabilités des événements considérés, ce calcul qu'il soit juste ou faux est plutôt effectué en référence à un produit de probabilités. Remarquons que nous nous attendons à ce type de calcul qui serait dû, à la notion d'événements indépendants étudiée en terminale.

Nous pouvons donc associer la conception *EIO* au moins aux 11 derniers cas qui ne prennent pas en compte la correspondance d'un numéro à obtenir avec l'un des deux dés. Nous pouvons aussi lui associer les 3 réponses suivantes :

Exemple 3 : Réponse de RAH. (Groupe ES) : " $p(5 \text{ et } 6) = p(6 \text{ et } 6)$ car dans un 1^{er} lancer on peut avoir (5 et 6) et dans un 2^{ème} lancer on peut avoir (6 et 6). Donc on ne peut pas savoir laquelle des 2 probabilités est plus grande."

Exemple 4: Réponse de NAH. (Groupe EG) : " $p(5 \text{ et } 6) = p(6 \text{ et } 6)$. La chance d'avoir les 2 résultats est la même."

Exemple 5 : Réponse de MAR. (Groupe EG) : " $p(5 \text{ et } 6) = p(6 \text{ et } 6)$. On peut trouver la 1^{ère} solution comme on peut trouver la 2^{ème} solution."

En conclusion, d'après les justifications apportées aux différentes réponses, nous constatons l'existence des deux conceptions *EIO* « *Équiprobabilité des issues observables* » et *EIP* « *Équiprobabilité des issues possibles* ». Aussi constatons-nous que la conception *DPR* « *Doubles plus rares* » est très rarement mobilisée et que la conception *DPF* « *Doubles plus fréquents* » n'est pas mobilisée.

4.4. Conclusion pour la tâche « te »

Dans notre étude de la tâche « te », nous nous sommes limités d'abord aux réponses. Nous avons alors montré que les différences des groupes EM, ES et EG, vis-à-vis de la réponse

correcte A et de la réponse d'équiprobabilité (=), sont dues au hasard, les fréquences de ces réponses étant indépendantes des filières de provenance des groupes. Ce résultat rejoint en quelque sorte une conclusion, à laquelle nous sommes arrivés dans le dernier chapitre, concernant la variable « niveau scolaire » (cf. V- 5.2).

Nous avons aussi montré, en nous référant aux résultats du groupe 3M, que l'enseignement des probabilités pendant deux années consécutives n'a permis ni l'amélioration des performances des groupes testés ni l'atténuation de la fréquence de la réponse d'équiprobabilité. En effet, aussi bien pour la réponse correcte A que pour la réponse (=), il n'y a pas de différence significative entre le groupe 3M d'une part et les trois groupes de cette expérimentation d'autre part, que l'on prenne ces groupes séparément ou réunis.

Afin de vérifier l'existence de conceptions dont la mobilisation est suspectée lors de l'accomplissement de la tâche « te » lors du chapitre précédent, nous nous sommes intéressés aux justifications données par les étudiants des groupes EM, ES et EG testés. Nous sommes parvenus à l'existence de deux conceptions : la conception *EIO* « *Équiprobabilité des issues observables* » et la conception *EIP* « *Équiprobabilité des issues possibles* ». Nous avons aussi conclu à la rareté de la mobilisation des deux autres conceptions : la conception *DPR* « *Doubles plus rares* » et la conception *DPF* « *Doubles plus fréquents* ».

5. La tâche « ti » d'indépendance : résultats et discussion

Dans cette partie, notre intérêt porte simultanément sur les réponses et les justifications. Autrement dit, nous nous intéressons aux conceptions. Dans un premier temps, nous étudions l'effet de la variable « filière » et l'effet de la variable « enseignement des probabilités » sur les conceptions mobilisées par les étudiants testés. Dans un deuxième temps, nous étudions l'effet de ces mêmes variables sur l'état de la reconnaissance de l'indépendance au sein des groupes testés.

5.1. Les conceptions mobilisées

Nous utilisons ici la catégorisation de conceptions faite au chapitre précédent relativement à la tâche « ti » (cf. V - 5.1).

Rappelons que les conceptions déjà identifiées sont *EA* « *Expérience Aléatoire* », *LPN* « *Loi des Petits Nombres* », *FR* « *Fréquence Relative* », *M* « *Mécanique* » et que la catégorie des conceptions non identifiées est dénotée par *I*.

Le tableau suivant résume les effectifs et les pourcentages des conceptions mobilisées dans l'accomplissement de la tâche « ti » par les groupes EM, ES et EG.

▪ Tableau VI.2

Conceptions développées dans la réalisation de la tâche « ti » en fonction du groupe :

Effectifs et pourcentages associés

| Conception \ Groupe | EA | LPN | FR | M | I | Total |
|---------------------|--------------|-------------|------------|------------|--------------|-------------|
| EM | 19 46,5 % | 6 14,5 % | 0 0 % | 0 0 % | 16 39 % | 41 100% |
| ES | 18 48,5 % | 5 13,5 % | 2 5,5 % | 0 0 % | 12 32,5 % | 37 100% |
| EG | 33 57 % | 4 7 % | 3 5 % | 1 1,5 % | 17 29,5 % | 58 100 % |

Intéressons nous à la conception EA « *Expérience Aléatoire* » tenue pour pertinente au sens où dans une expérience aléatoire, l'issue est imprévisible. Le tableau VI.2 montre que cette conception est plus fréquente chez les étudiants du groupe EG que chez ceux des deux autres groupes. Mais un traitement à l'aide de l'outil statistique khi2 montre qu'il n'en est rien. En effet, la comparaison de cette conception au reste nous donne $\chi^2_c = 0,0005$ entre EM et ES, $\chi^2_c = 0,69$ entre EM et EG et $\chi^2_c = 0,33$ entre ES et EG. Par ailleurs, la différence n'est pas significative entre le groupe 3M de la dernière expérimentation et les groupes ici considérés : $\chi^2_c = 0,01$ entre 3M et EM, $\chi^2_c = 0,01$ entre 3M et ES et $\chi^2_c = 1,37$ entre 3M et EG, $\chi^2_c = 0,52$ entre 3M et les trois groupes réunis. Ainsi, on pourrait conclure qu'une deuxième année d'enseignement des probabilités n'a rien apporté au niveau de la mobilisation de la conception considérée EA.

Le tableau VI.2 nous montre aussi que la catégorie I des conceptions non identifiées est plus fréquente chez les étudiants du groupe EM que chez ceux des deux autres groupes. La différence est cependant due au hasard. En effet, en comparant l'effectif relatif à I au reste, nous obtenons $\chi^2_c = 0,13$ entre EM et ES, $\chi^2_c = 0,62$ entre EM et EG et $\chi^2_c = 0,008$ entre ES et EG. De même, la différence n'est pas significative entre le groupe 3M de la dernière expérimentation et les groupes ici considérés : $\chi^2_c = 0,15$ entre 3M et EM, $\chi^2_c = 0,004$ entre 3M et ES et $\chi^2_c = 0,14$ entre 3M et EG, $\chi^2_c = 0,002$ entre 3M et les trois groupes rassemblés.

Ainsi, tout se passe comme si une deuxième année d'enseignement des probabilités n'a pas atténué la difficulté de l'accomplissement de la tâche « ti ».

Il ressort du même tableau que la conception *LPN*, traduisant une méconnaissance de l'univers des possibles, reste assez fréquente. Soulignons que les effectifs correspondant à cette conception ne nous permettent pas une comparaison statistique. Toutefois, avec des fréquences variant de 7% à 14% pour les trois groupes d'étudiants et une fréquence de 17% pour le groupe 3M pour cette conception, nos résultats semblent en accord avec les résultats de Lecoutre et Fischbein (1998) disant que l'effet de récence négatif, résidant dans le choix du résultat le moins fréquent, diminue avec l'âge.

Quant aux conceptions *FR* et *M*, elles restent généralement très négligeables comme c'est le cas pour le groupe 3M. D'ailleurs, la conception *M* est quasiment absente dans les trois groupes d'étudiants.

5.2. Conceptions et indépendance des épreuves

Le programme de terminale comportant la notion d'épreuves indépendantes, nous nous sommes attendus à avoir des justifications qui s'y réfèrent. Cependant, nous n'avons trouvé qu'une seule réponse évoquant l'indépendance :

Exemple 6 : Réponse de FAD. (Groupe ES) : " Pour le 4^{ème} jet, on peut obtenir pile que face car la pièce de monnaie n'est pas truquée et le 4^{ème} jet ne dépend pas des autres."

À la question de l'amélioration de la reconnaissance de l'indépendance des épreuves et compte tenu de la différence non significative entre les fréquences d'utilisation de la conception *EA* entre le groupe 3M et les groupes d'étudiants testés, il semble qu'il n'y en a pas.

Mais, nous allons, comme c'était le cas dans le dernier chapitre (cf. V - 5.2), opposer la conception *EA* aux conceptions *LPN*, *M* et *I* pour traiter la reconnaissance de l'indépendance des jets. Cette opposition nous donne $\chi^2_c = 0,04$ pour EM et ES, $\chi^2_c = 1,25$ pour EM et EG et $\chi^2_c = 0,33$ pour ES et EG. Elle nous donne aussi $\chi^2_c = 0,02$ pour 3M et EM, $\chi^2_c = 0,11$ pour 3M et ES et $\chi^2_c = 2,10$ pour 3M et EG, $\chi^2_c = 2,07$ pour 3M et les trois groupes rassemblés. Ainsi, nous pouvons conclure qu'une deuxième année d'enseignement des probabilités et notamment l'étude de la notion d'épreuves indépendantes n'ont pas contribué à une meilleure reconnaissance de l'indépendance des jets de la pièce de monnaie.

5.3. Conclusion pour la tâche « ti »

En nous référant à la même catégorisation de conceptions utilisée dans le chapitre précédent dans la réalisation de la tâche « ti » d'indépendance des épreuves, nous avons étudié l'effet des variables « filière » et « enseignement des probabilités » sur les conceptions des trois groupes EM, ES et EG d'étudiants testés.

Nous avons constaté que la conception *M* « *Mécanique* », qui reflète un raisonnement déterministe, est quasiment absente dans réponses des étudiants. Nous avons aussi remarqué que la fréquence de la conception *FR* « *Fréquence Relative* », prenant en compte la fréquence des résultats précédents, est négligeable dans ces réponses.

D'un autre côté, la fréquence des réponses que nous avons classées dans la catégorie *I* des conceptions non identifiées montre qu'une deuxième année d'enseignement des probabilités n'a pas amoindri la difficulté de l'accomplissement de la tâche « ti ».

Quant à la fréquence de mobilisation de la conception *LPN* « *Loi des Petits Nombres* » chez les étudiants testés, elle nous a conduit à placer nos résultats dans la lignée de ceux de Lecoutre et Fischbein (1998) disant que l'effet de récence négatif diminue avec l'âge.

Pour la conception pertinente *EA* « *Expérience Aléatoire* », nous avons montré que la fréquence de sa mobilisation est indépendante des modalités de la variable « filière » et qu'une deuxième année d'enseignement en probabilités n'apporte rien de significatif à cette fréquence.

Aussi, nous avons conclu qu'une deuxième année d'enseignement des probabilités et que l'étude de la notion d'épreuves indépendantes n'ont pas contribué à une meilleure reconnaissance de l'indépendance des jets de la pièce de monnaie par les étudiants.

6. Conclusions

Les groupes EM, ES et EG testés ici diffèrent les uns des autres par la filière d'où ils proviennent. Ils diffèrent du groupe 3M par une formation plus approfondie en probabilités.

L'étude des réponses et des justifications apportées lors de l'accomplissement de la tâche « te » d'équiprobabilité nous a permis de tirer quelques conclusions :

D'abord, l'étude nous révèle que les différences des fréquences des réponses des groupes EM, ES et EG ne sont pas significatives aussi bien pour la réponse correcte A que pour la réponse d'équiprobabilité (=).

Ensuite, elle nous dévoile que les différences des fréquences des mêmes réponses entre ces groupes (pris séparément ou ensemble) et le groupe 3M sont dues au hasard. Autrement dit, l'étude des probabilités pendant une année supplémentaire n'a rien apporté aussi bien au niveau des performances qu'au niveau de l'atténuation de la fréquence de la réponse d'équiprobabilité (=). Ces conclusions nous incitent à élargir le résultat trouvé par Lecoutre et Durand (1988), disant que le biais de l'équiprobabilité est important chez les élèves qui débutent une formation en probabilités, aux sujets ayant entamé deux années consécutives d'étude dans ce domaine.

Enfin, nous avons constaté que les conceptions suspectés être à l'origine des réponses des élèves du groupe 3M du chapitre précédent n'expliquent qu'une partie des réponses et justifications données par les trois groupes d'étudiants testés. Autrement dit, une étude raisonnable des conceptions mobilisées par ces étudiants nécessiterait une autre catégorisation que nous n'avons pas prévue pour ce travail.

Pour l'étude des réponses et des justifications apportées lors de l'accomplissement, par les étudiants, de la tâche « ti » d'indépendance, nous nous sommes rapportés à la catégorisation des conceptions utilisée dans le chapitre précédent. Cette étude nous a permis aussi d'aboutir à quelques conclusions :

Nous avons constaté que les conceptions *M* « Mécanique » et *FR* « Fréquence Relative », qui pourraient correspondre à un esprit déterministe, sont dans l'ensemble aussi rares que pour le groupe 3M.

Nous avons conclu que la fréquence de mobilisation de la conception pertinente *EA* « Expérience Aléatoire » est indépendante des modalités de la variable « filière » et qu'une deuxième année d'enseignement en probabilités n'apporte rien de significatif concernant cette fréquence.

Nous avons aussi montré qu'une deuxième année d'enseignement des probabilités où la notion d'épreuves indépendantes est étudiée n'a pas contribué à une meilleure reconnaissance de l'indépendance des épreuves par les étudiants.

Enfin, l'étude de la fréquence de mobilisation de la conception *LPN* « Loi des Petits Nombres », chez les étudiants testés, nous a permis de rejoindre la conclusion de Lecoutre et Fischbein (1998) disant que l'effet de récence négatif, qui implique le choix de l'issue non prédominante, diminue avec l'âge.

Ainsi, nos conclusions vont dans le sens qu'une deuxième année d'enseignement des probabilités n'a rien apporté de significatif quant aux réponses et justifications des sujets testés dans l'accomplissement des tâches « te » d'équiprobabilité et « ti » d'indépendance chronologique.

Dans ce chapitre et le chapitre précédent, nous avons étudié l'impact de l'enseignement des probabilités sur les conceptions des élèves. Nous nous proposons maintenant d'étudier le terrain spontané des connaissances d'élèves tunisiens dans des situations relevant du champ des probabilités, l'expression « spontané » est prise dans le sens où les élèves testés n'ont pas eu d'enseignement dans le domaine en question.

Ainsi, dans les trois chapitres suivants, l'objet de notre étude porte sur ce qui existe au niveau des conceptions spontanées d'élèves tunisiens, essentiellement ceux du collège.

Chapitre VII.

Premier test diagnostic : Quantification des probabilités en situation de prévision

- 1. Introduction*
- 2. Arguments-élèves relevant de la quantification des probabilités*
- 3. Présentation du premier test diagnostic*
- 4. Analyse a priori*
- 5. Les organisations personnelles développées*
- 6. Classification des réponses*
- 7. Etude globale des performances*
- 8. Impact du référent sur les organisations*
- 9. Impact du type de tâches sur les organisations*
- 10. Stabilité des organisations*
- 11. Un test complémentaire*
- 12. Conclusions*

1. Introduction

La notion de situation est centrale dans la construction d'un processus d'enseignement.

La pertinence d'une situation dépend, entre autres, du choix des variables didactiques, ou variables de commande, sur lesquelles l'enseignant peut jouer pour faire avancer la situation.

La recherche des variables didactiques représente notre centre d'intérêt dans les expérimentations constituant nos tests diagnostics et cette recherche sera faite à travers l'exploration du niveau spontané des connaissances des élèves :

“En fait, les modèles spontanés ne sont pas reconnaissables (par définition) par les élèves, mais ils sont une partie des connaissances nécessaires à la compréhension et à l'usage des savoirs enseignés et ils participent étroitement aux conceptions relatives à ces savoirs. C'est dans ce domaine que les études de didactique font l'apport le plus original, servant de pont et de filtre entre l'épistémologie, la psychologie et l'enseignement.” (Brousseau 2000-2001, p. 21)

Le caractère spontané des connaissances visées repose sur le fait que les élèves concernés n'ont pas reçu d'enseignement de probabilité.

Notre premier test diagnostic s'intéresse aux conceptions disponibles⁷³ chez les élèves du niveau que nous avons choisi (8^{ème} année de base) lors de l'accomplissement de types de tâches relatifs à l'objet "quantification des probabilités" et relevant de la situation classique de "prévision".

La situation classique "de prévision" selon la terminologie de Piaget (qu'on peut résumer par l'exemple suivant : choisir, parmi deux sacs comportant un nombre connu de boules bleues et de boules rouges, celui dans lequel on a le plus de chances de tirer une boule de couleur donnée) représente à notre sens une situation essentielle de "la quantification des probabilités".

Dans ce chapitre, nous allons essentiellement reformuler un travail de Maury dans un cadre nouveau qui n'existait pas dans le temps. Commençons par la présentation de ce travail sur lequel nous nous appuyons.

2. Arguments-élèves relevant de la quantification des probabilités

Notre intérêt porte ici sur un travail de Maury (1984) qui rend compte d'une partie d'une expérience qu'on retrouve avec détail dans sa thèse⁷⁴. Maury (1984) s'intéresse aux

⁷³ Le niveau de connaissances disponibles correspond à l'absence d'indication dans la résolution d'une tâche. L'élève sera amené à “aller rechercher soi-même dans sa connaissance ce qui peut intervenir.” (Robert 1998)

⁷⁴ Maury 1986.

arguments utilisés par des élèves de seconde dans la résolution de problèmes relevant de la quantification des probabilités. Le projet vise les conceptions spontanées des élèves avant qu'ils n'entament un enseignement de statistique et de probabilités.

L'hypothèse générale retenue dit que "l'activité cognitive impliquée dans la résolution de problèmes dépend, entre autres, de facteurs de tâche." (p. 189)

À l'époque, cette hypothèse était présente dans de nouvelles approches théoriques (Vergnaud 1981, Halbwachs 1981, Brousseau 1982). "Dans celles-ci, l'accent est mis, notamment sur la nécessité de l'étude des processus d'acquisition des connaissances scolaires et sur la place qui doit être accordée à la construction de situations-problèmes permettant aux concepts de prendre leur signification." (p. 189)

Situation probabiliste retenue

L'auteure a opté pour la "situation de prévision" (cf. sous 1). Elle s'est intéressée essentiellement aux situations de proportionnalité (le rapport entre le nombre des cas favorables et le nombre des cas possibles est le même pour les deux sacs) et de comparaison à deux variables (les nombres de cas favorables et de cas possibles pour les deux sacs diffèrent sans qu'il y ait proportionnalité ou égalité des nombres de cas défavorables).

Variables de la situation

Les variables indépendantes retenues sont le référent⁷⁵ et le vocabulaire. Notons que l'expérience comporte en réalité une autre variable qui est le "niveau scolaire" et qui comporte six modalités : seconde, trois terminales et deux premières années de Deug⁷⁶.

Pour la variable référent, deux modalités ont été choisies : "des boules de deux couleurs différentes (bleues et rouges) dans des sacs" et "deux roulettes, ayant le même rayon, découpées en secteurs (tous isométriques pour chacune des roulettes) dont certains sont colorés en bleu et les autres en rouge".

Notons que pour une roulette, l'expérience consiste à la faire tourner et noter la couleur indiquée par une aiguille. Ainsi, la question revient à choisir la roulette pour laquelle il y a plus de chances que l'aiguille indique une couleur donnée.

⁷⁵ Au lieu de l'expression "contexte" ou "domaine de référence" utilisé par Maury; nous utilisons le terme référent.

⁷⁶ Pour ces modalités, voir Maury 1986 ou 1987.

L'auteur explique que les deux modalités du référent, qui sont utilisés dans l'enseignement des probabilités, présentent des caractéristiques distinctes :

“- les boules constituent un ensemble discret *non structuré* alors que la roulette est un ensemble continu, et l'on peut considérer que l'ensemble des parties constituées par les secteurs possède une *structure séquentielle*. Il nous semble alors possible que la place d'un secteur dans la suite des secteurs de la roulette puisse être retenue comme pertinente pour quantifier la probabilité. En revanche, nous ne nous attendons pas à ce que les élèves prennent en compte les dispositions relatives des boules.

- les secteurs de la roulette apparaissent comme *les parties d'un tout* (la roulette) ayant lui-même une signification. Alors qu'avec les boules, la considération du « tout » (l'ensemble des boules) ne s'impose pas. Ainsi, nous prévoyons qu'avec ces dernières, les élèves seront plutôt tentés de comparer les sous-ensembles de boules bleues et de boules rouges, c'est-à-dire d'effectuer une comparaison entre parties ; alors qu'avec les roulettes, ils seront plutôt tentés de comparer une partie au tout. D'ailleurs, avec celles-ci la comparaison partie-tout devrait être renforcée par le fait que la roulette constitue une image culturelle très forte de la notion de fraction, les secteurs étant généralement perçus comme des fractions du disque complet.” (p.193)

Pour la variable vocabulaire, deux modalités ont été retenues : "vocabulaire courant" pour laquelle la question est posée en termes de chances (plus de chances) et "vocabulaire technique" pour laquelle la question est posée en termes de probabilité (plus probable).

Méthodologie

Dans l'article cité (Maury 1984), la population est composée de trois classes complètes de seconde, soit de 80 élèves.

L'auteur a mis au point une épreuve standardisée concrétisée par quatre cahiers comportant chacun six exercices à résoudre, le choix définitif des énoncés étant fait après une série d'entretiens individuels. Notons par ailleurs qu'il est demandé aux élèves de justifier leurs réponses.

Le nombre de cahiers s'explique par le choix, comme plan expérimental, d'un plan croisé à deux variables indépendantes ayant chacune deux modalités : dans un même cahier, le même référent et le même vocabulaire sont utilisés dans les énoncés des exercices.

La passation a été effectuée d'une façon collective : les quatre types de cahiers ont été répartis et distribués de manière uniforme dans chacune des classes, deux élèves assis côte à côte ne devant pas avoir la même modalité.

Classification des réponses

Pour chaque réponse, l'auteure distingue le choix de l'élève (sac ou roulette) de l'argumentation déterminant son choix.

Les réponses sont réparties en trois classes : les réponses justes, les réponses fausses et les réponses mixtes. Les réponses justes sont caractérisées par une argumentation⁷⁷ pertinente, les réponses fausses par une argumentation non pertinente et les réponses mixtes par la coexistence d'un argument pertinent et d'un argument non pertinent.

Arguments pertinents

Les trois types d'arguments pertinents exprimés assez fréquemment par les élèves sont les suivants :

- l'argument *A* (aire) qui consiste à comparer les aires de bleu ou de rouge dans les deux roulettes,
- les arguments *P* caractérisés par la procédure qui consiste à mettre en relation de manière pertinente le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles,
- les arguments *P'* caractérisés par la procédure qui consiste à mettre en relation de manière pertinente le nombre de cas favorables et le nombre de cas défavorables.

Pour l'auteur, les arguments *P* "semblent être sous-tendus par la même procédure" (p. 197), celle de la quantification habituelle des probabilités.

Les autres arguments jugés pertinents sont regroupés sous la notation *B*. Il s'agit essentiellement d'arguments peu explicites utilisés avec les boules dans le cas de proportionnalité (écrire par exemple que le nombre de boules en proportion est le même dans les deux sacs).

Arguments non pertinents

Les arguments non pertinents exprimés par les élèves sont les suivants :

- l'argument *R* (répartition) qui consiste à prendre en considération la répartition des secteurs d'une couleur donnée dans les roulettes pour répondre,
- l'argument *D* (différence) consistant à calculer les différences entre les nombres de cas favorables et de cas défavorables dans chacun des sacs (ou roulettes) et à les comparer,
- l'argument *N* (cas favorables) qui consiste à ne prendre en compte que les nombres de cas favorables.

Avant d'analyser l'impact du référent sur l'argumentation des élèves, l'auteur mentionne les résultats suivants :

⁷⁷ Notons que l'auteur a choisi le sens retenu par Vergnaud (1984) : "une procédure c'est une certaine manière d'interpréter et de traiter des informations dans un problème donné".

* L'argumentation a tendance à se stabiliser avec les roulettes au fil de la résolution des exercices et à varier avec les boules d'un exercice à l'autre. "Ainsi, la modalité « boules » permet, plus que la modalité « roulettes », de mettre en évidence la disponibilité chez un même élève de plusieurs conceptions spontanées de la probabilité." (p. 203)

* La variable vocabulaire n'a pas d'impact sur la nature des arguments mais a une forte influence sur les performances qui sont meilleures avec la modalité "vocabulaire courant".

Performances

Les deux premiers exercices, ayant pour but de familiariser les élèves avec la situation, ne font pas partie de l'analyse effectuée. L'analyse porte donc sur les 320 réponses apportées par les 80 élèves aux 4 exercices dont 2 représentent des situations de proportionnalité et 2 des situations de comparaison à deux variables ; 38 élèves ont répondu à la modalité roulettes et 42 à la modalité boules.

Les réponses justes, mixtes et fausses correspondent respectivement :

- à 31 %, 13 % et 56 % pour les roulettes et
- à 41 %, 11 % et 48 % pour les boules.

Ainsi, la réussite globale est de l'ordre de 36 % ; elle plus importante avec les boules qu'avec les roulettes (41 % contre 31 %).

Impact du référent sur les arguments pertinents

Notons pour commencer qu'on trouve les arguments pertinents aussi bien dans les réponses justes que dans les réponses mixtes.

Dans les réponses justes, les arguments P , P' , A et B ont été utilisées respectivement :

- avec les roulettes : 32, 5, 8, et 2 fois,
- avec les boules : 11, 38, 0, et 20 fois.

Chacun des arguments P et P' apparaît ainsi le même nombre de fois dans les réponses justes. P est essentiellement attaché aux roulettes et P' aux boules : Maury avance une hypothèse se basant sur le fait que le « tout » ne s'impose pas dans le cas des boules et a une signification (la roulette) pour les secteurs.

Dans les réponses mixtes,

- avec les roulettes, l'argument A intervient dans la quasi-totalité des réponses (17 fois sur 20),

- avec les boules, l'argument *P*' intervient dans la majorité des réponses (12 fois sur 19).

Comme l'argument *A* justifie 17 % des réponses justes et 85 % des réponses mixtes, l'auteur conclut que contrairement à l'argument *A*, l'argument *P* semble être le signe d'une bonne maîtrise de la quantification des probabilités.

Impact du référent sur les arguments non pertinents

Nous relevons les conclusions suivantes :

- l'argument *R* est très fréquent avec la modalité roulette (il représente 74 % des réponses non justes : 48 fois sur les 85 réponses fausses et 19 fois sur les 20 réponses mixtes),
- l'argument *D* - qui n'est jamais employé avec les roulettes - est exprimé fréquemment avec les boules (36 fois sur les 80 réponses fausses et 6 fois sur les 19 réponses mixtes),
- l'argument *N*, qui est le seul argument utilisé avec les deux modalités, est plus fréquent avec les boules qu'avec les roulettes (33 % contre 12 %).

En conclusion, l'auteure a mis en évidence l'effet du référent sur les arguments (pertinents et non pertinents) des élèves. Ceci l'a amené à conclure que "des problèmes équivalents d'un point de vue probabiliste ne le sont pas forcément sur le plan cognitif" (pp. 208-209) et à penser que les élèves disposent de plusieurs conceptions probabilistes spontanées dont la mobilisation dépend, entre autres, du référent.

Au vu des résultats trouvés, Maury conjecture que :

"En proposant aux élèves des problèmes présentés avec l'une puis l'autre des deux modalités de cette variable, on pourrait favoriser l'explicitation de conflits cognitifs et donc le rejet ou l'évolution de modèles erronés ou incomplets" (p. 209)

L'auteur termine son article en soulignant que les résultats, montrant que les élèves de seconde disposent de plusieurs conceptions spontanées non valides, vont à l'encontre de l'idée stipulant que la quantification de la probabilité dans des cas simples (espaces probabilisables finis, combinatoire « élémentaire ») ne pose pas problème au second cycle du lycée. Elle fait l'hypothèse que certaines de ces conceptions sont résistantes et peuvent être mobilisées longtemps après le début de l'apprentissage des probabilités.

3. Présentation du premier test diagnostic

3.1. Principaux buts

Les principaux buts de cette expérimentation consistent à :

- faire l'inventaire des conceptions construites par des élèves de 8^{ème} année de base devant une situation de prévision et plus précisément dans le cas de comparaison à deux variables et celui de proportionnalité.
- Etudier l'impact de la variable « référent » et poser la question de l'effet de la variable « type de tâches »⁷⁸ sur les conceptions mobilisées.

Pour le premier but, nous émettons l'hypothèse suivante :

La notion d'équiprobabilité déterminée par le modèle mathématique "nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles" ne correspond pas à une conception spontanée partagée par un certain nombre d'élèves de 8^{ème} année de base (13-14 ans).

Pour le second but, nous pensons confirmer un résultat trouvé par Maury : l'existence d'un impact considérable de la modalité du référent sur les réponses des élèves.

À propos de la variable « type de tâches », Maury (1987) notait que pour les six niveaux testés, le pourcentage des réponses justes est de 50 % pour la modalité « proportionnalité » et de 60 % pour la modalité « comparaison à deux variables ». Elle trouve ce résultat surprenant vu qu'il est en contradiction avec "le modèle piagétien" et avec divers travaux expérimentaux montrant un ordre de réussite tout à fait opposé. D'après elle, cet ordre de réussite se retrouve lorsque l'on combine les réponses justes et les réponses mixtes, elle obtient 68 % pour la modalité « proportionnalité » et 69 % pour la modalité « comparaison à deux variables ».

Par ailleurs, elle attribue la haute fréquence des réponses mixtes dans le cas de « proportionnalité » à un "effet de formulation" : la question "quel sac choisiriez-vous ..." inciterait l'élève à faire un choix exclusif de l'un des sacs. D'ailleurs l'argument non pertinent prend toujours la deuxième position : si dans le cas de « comparaison à deux variables » il est sensé confirmer la prévision associée à l'argument pertinent, dans le cas de « proportionnalité » - où l'argument pertinent donne un choix indifférent - il permet un choix exclusif de l'un des deux sacs.

Notre population étant plus jeune, nous pensons que le choix similaire dans les exercices du test tant au niveau des contenus des collections (sacs ou roulettes) qu'au niveau de la formulation rendrait similaire l'ordre de difficulté pour les deux modalités « comparaison à deux variables » et « proportionnalité » de la variable « type de tâches ». Nous essayons alors de répondre à la question suivante :

⁷⁸ Pour les variables : « référent » et « type de tâches » cf. sous 3.3 et sous 3.4

Quelle influence pour la variable « type de tâches » sur les conceptions mobilisées ?

3.2. La population

La population testée est constituée de huit groupes correspondant à huit classes de 8^{ème} année de base, soit un nombre total de 254 élèves (13-14 ans) :

- les groupes G1, G2 et G3 (91 élèves) qui font partie de l'école préparatoire (EP) al-Moezzia de Oued Ellil relevant de la direction régionale de l'enseignement (DRE) de Manouba,
- le groupe G4 (41 élèves) de l'EP 7 Novembre de Mateur et les groupes G7 et G8 (64 élèves) de l'EP Ghzala qui relèvent de la DRE de Bizerte,
- les groupes G5 et G6 (58 élèves) de l'EP Monji Slim de Sidi Rzig qui dépend de la DRE de Ben Arous.

3.3. Types de tâches choisies

Nous avons opté pour la situation de prévision que nous résumons comme suit :

« Choisir, parmi deux collections C1 et C2 comportant b_1 éléments blancs et n_1 éléments noirs pour la première et b_2 éléments blancs et n_2 éléments noirs pour la seconde, celle dans laquelle on a le plus de chances d'obtenir un élément blanc ».

Nous ne nous intéressons ici qu'aux cas de proportionnalité ou de comparaison à deux variables. D'après Piaget-Inhelder (1951), la résolution de ces cas relève du stade des opérations formelles sauf que le premier (proportionnalité) peut être résolu empiriquement dès la fin du stade des opérations concrètes.

Notre test est composé de six exercices (cf. annexe 1).

Le premier, supposé simple, est choisi afin de familiariser les élèves avec la situation.

Pour les autres exercices, nous pouvons les classer en deux types de tâches : Td (cas de comparaison à deux variables) et Tp (cas de proportionnalité). Les exercices 2, 3 et 5 appartiennent à la classe Td et les exercices 4 et 6 font partie de Tp.

Présentons les deux types de tâches :

- Td : « cas où $b_1 \neq b_2, n_1 \neq n_2, b_1 + n_1 \neq b_2 + n_2$ et $\frac{b_1}{n_1} \neq \frac{b_2}{n_2}$ »,

- Tp : « cas où $\frac{b_1}{n_1} = \frac{b_2}{n_2}$ »

Pour ne pas avoir de cas où la simple comparaison entre b_1 et b_2 ou celle entre n_1 et n_2 serait suffisante, nous avons, dans tous les exercices, choisi de donner des valeurs vérifiant :

$$b_1 < n_1, b_2 < n_2, b_1 < b_2 \text{ et } n_1 < n_2.$$

Remarquons finalement que bien que l'utilisation du terme probabilité soit possible, nous avons fait le choix d'énoncer les exercices dans un langage courant en posant la question en termes de "chances".

3.4. Plan expérimental et méthode

Plan expérimental

Contrairement à Maury qui a traité, dans l'article de 1984, deux variables indépendantes dans un plan croisé, dans notre test il y a deux éléments pouvant varier d'un exercice à l'autre : le type de tâches et le référent.

Les modalités de la variable type de tâches sont Td et Tp explicitées ci-dessus.

Pour la variable référent, les variables sont Sa (sacs contenant des boules de deux couleurs différentes : blanches et noires) et Ro (roulettes partagées en secteurs isométriques).

Les exercices 2, 5 et 6 sont énoncés avec la modalité Sa et les exercices 3 et 4 sont présentés avec la modalité Ro.

Il faut dire que le test est présenté de façon à répondre à la question d'un possible effet du référent Ro sur les réponses aux questions suivantes relevant du référent Sa.

Méthode

Notre test constitue une épreuve standardisée (qui s'apprête notamment aux analyses statistiques) avec demandes de justifications. Il est présenté sous forme d'un cahier comportant six exercices et soumis en passation collective aux huit groupes de notre population dans leur salle de classe sous la direction de leur professeur de mathématiques.

Cette épreuve a été d'abord testée auprès du groupe classe G1 et nous n'étions pas déçus quand à la diversité des réponses et des justifications indiquant la mobilisation de plusieurs conceptions spontanées erronées.

Nous avons conservé le dernier groupe et nous avons procédé à la passation de l'épreuve aux autres groupes vers le milieu du mois d'avril 2005.

Nous avons demandé aux professeurs chargés de la passation de préciser aux élèves que :

- le test n'affecte en aucun cas leurs moyennes et qu'il s'agit d'une recherche,
- la lettre S représente un sac, S1 représente le premier sac et S2 le second,
- « tirer au hasard » signifie tirer après mélange des boules et sans voir dans le sac,
- R1 désigne la première roulette et R2 la seconde,
- la rotation de la roulette doit s'effectuer sans tricher,
- les exercices doivent être traités dans l'ordre, sans retour à un exercice précédent,
- ce qui est demandé à chaque exercice, c'est la réponse et la justification.

4. Analyse a priori

Comment résoudre pertinemment les exercices de notre test et quelles sont nos attentes ?

Une réponse relevant de la modélisation dans le cadre des mathématiques formelles

Prenons le cas d'un sac S contenant b boules blanches et n boules noires et intéressons nous à l'expérience aléatoire « tirage d'une boule de S ».

Désignons par Ω l'univers (ensemble des possibilités ou éventualités) associé à cette expérience ; $\Omega = \{\omega_i ; 1 \leq i \leq b + n\}$, b étant le nombre de boules blanches et n celui des boules noires dans le sac S.

Posons $\Omega = \{B_1, B_2, \dots, B_b, N_1, N_2, \dots, N_n\}$, $B = \{B_1, B_2, \dots, B_b\}$ et $N = \{N_1, N_2, \dots, N_n\}$.

Prenons comme algèbre de Boole sur Ω l'algèbre la plus fine $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$: ensemble des parties de Ω .

Pour traduire un tirage au "hasard", on décide de munir l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, de la probabilité uniforme P.

$$\text{Ainsi, } \forall i \in \{1, \dots, b + n\}, P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{\text{card}\Omega} = \frac{1}{b+n} \text{ et } P(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{b}{b+n}.$$

Revenons à notre test où il y a deux collections C1 contenant b_1 éléments blancs et n_1 éléments noirs et C2 contenant b_2 éléments blancs et n_2 éléments noirs.

On définit deux espaces probabilisés finis $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), P_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2), P_2)$ avec Ω_i qui représente les éléments de C_i et P_1 et P_2 qui sont les probabilités uniformes respectivement sur $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1))$ et $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2))$.

La probabilité de B_i (avoir une boule blanche dans C_i) est alors $P_i(B_i) = \frac{b_i}{b_i + n_i}$ et le sac

devant être choisi est celui où $P_i(B_i)$ est le plus grand.

Une réponse équivalente

Nous remarquons que la solution institutionnelle passe par la comparaison des deux rapports du nombre des cas favorables par le nombre des cas possibles calculés dans chacune des collections, c'est-à-dire la comparaison des probabilités de l'événement « obtenir une boule blanche ».

Nous signalons toutefois que la comparaison des deux rapports du nombre des cas favorables par le nombre des cas défavorables calculés dans chacune des collections est supposée valide dans la réponse aux questions.

En fait, en prenant par exemple $\frac{b_1}{b_1+n_1} < \frac{b_2}{b_2+n_2}$, on aura :

$$\begin{aligned} \frac{b_1}{b_1+n_1} < \frac{b_2}{b_2+n_2} &\Leftrightarrow \frac{b_2+n_2}{b_2} < \frac{b_1+n_1}{b_1} \\ &\Leftrightarrow \frac{n_2}{b_2} < \frac{n_1}{b_1} \text{ (en retranchant 1 aux deux membres)} \\ &\Leftrightarrow \frac{b_1}{n_1} < \frac{b_2}{n_2}. \end{aligned}$$

Une troisième réponse

Cette réponse concerne exclusivement la modalité "Roulettes". Les roulettes étant isométriques, nous tenons pour correcte une réponse se basant sur la comparaison des surfaces blanches de chacune d'entre elles.

Signalons que les réponses tenues pour correctes aux exercices 2, 3, 4, 5 et 6 sont respectivement S1, R2, pas de préférence, S1 et pas de préférence.

Nos attentes

Les élèves testés, dont le test représente leur première rencontre dans l'institution scolaire avec la quantification des probabilités, vont avoir des difficultés dans l'accomplissement des tâches qui leur sont assignées.

Nous ne pouvons espérer atteindre la fréquence des réponses justes (31 % pour les roulettes et 41 % pour les boules) atteinte dans Maury (1984) et ce pour différentes raisons :

- l'âge moyen de notre population (13-14 ans), fait que notre population n'est pas comparable à celle de Maury du côté des connaissances sur les rationnels,

- l'inexistence d'une tradition du jeu de hasard dans la société tunisienne.

Ainsi et conformément à notre première hypothèse, nous nous attendons à ce que les élèves de 8^{ème} année de base mobilisent en masse des conceptions erronées dans la résolution de problèmes de prévision relevant des cas de comparaison à deux variables ou des cas de proportionnalité et que le nombre de réponses se basant sur les techniques "nombre des cas favorables sur nombre des cas possibles" ou "nombre des cas favorables sur nombre des cas défavorables" soit négligeable. Nous nous attendons aussi à ce que les réponses se basant exclusivement sur la comparaison d'une seule variable (nombre de cas favorables, nombre défavorables ou nombre de cas possibles) soient très fréquentes.

Aussi attendons-nous à ce que les conceptions mobilisées soient dépendantes du référent. En effet, outre la possibilité de recourir aux aires dans le cas des roulettes, les positions des secteurs d'une roulette peuvent être prises en compte pour quantifier la probabilité.

Par contre, il ne nous semble pas envisageable que les élèves retiennent comme pertinentes les dispositions relatives des boules. Cependant, nous pensons que quelques élèves, voulant utiliser toutes les données de l'énoncé, vont répondre par le biais de la comparaison :

- soit des différences, dans chaque sac, entre le nombre de cas défavorables et le nombre de cas favorables,
- soit des sommes des boules dans chacun des sacs.

Quant à la variable « type de tâches » qui se décline ici en deux modalités : Td (cas de comparaison à deux variables) et Tp (cas de proportionnalité), nous pensons qu'elle n'aurait pas d'impact visible sur les conceptions mobilisées.

5. Les organisations personnelles développées

Notre intérêt, dans ce chapitre porte sur les conceptions mobilisées par des élèves de 8^{ème} année de base lors de la résolution de problèmes relevant de la situation de "prévision". L'étude de ces conceptions se fera par le biais des organisations personnelles. Reprenons alors la définition d'organisation personnelle et celle de conception.

Nous avons appelé organisation personnelle un triplet $[T, \tau, \theta]$ formé autour d'un type de tâche T donné, τ étant une technique utilisée pour effectuer T , et θ la technologie personnelle (théorème ou définition en acte) qui a produit la technique τ .

Dans notre cas, le discours justificatif de l'élève a deux fonctions, une fonction technique permettant de trouver le résultat et une fonction technologique justifiant la technique.

L'ensemble des organisations personnelles $[T_i, \tau_i, \theta]$ formées autour d'un même discours technologique personnel où les types de tâches T_i relèvent d'un même objet mathématique est ce que nous appelons une conception de cet objet (cf.).

Ainsi, une organisation personnelle est l'indice ou le représentant d'une conception. Les conceptions qui nous intéressent ici sont celles de la quantification des probabilités.

Prenons un exemple :

Exemple 1 : Exercice 3 : (R1 : 1b-4n / R2 : 3b-6n)⁷⁹ ; événement attendu : blanc.

Réponse de MAN. (G2, n° 13) : "On choisit la roulette R2 pour avoir le plus de chances que l'aiguille indique la couleur blanche car la couleur blanche prend une plus grande surface sur R2."

Dans cet exemple, le type de tâche est celui de comparaison à deux variables ($T = T_d$), la technique τ est une technique perceptive de comparaison d'aires tandis que la technologie personnelle θ qui a produit la technique τ peut être considérée comme étant un théorème en acte disant que la comparaison des "probabilités" est dans le même sens que la comparaison des aires des parties favorables.

On parlera dans ce cas d'une organisation du type « aire » et on donne le même nom à la conception à laquelle cette organisation appartient.

Rappelons que la variable type de tâches se décline en deux modalités, un type de tâche T_d (cas de comparaison à deux variables) et un type de tâches T_p (cas de proportionnalité). Rappelons aussi que les exercices 2, 3 et 5 font partie de T_d et que les exercices 4 et 6 appartiennent à T_p .

5.1. Les types d'organisations pertinentes

5.1.1. Le type « aire »

Une organisation du type « aire » est désignée par la lettre A . Elle n'est développée que dans les exercices 3 et 4 où il est question de roulettes.

Pour un type de tâche T_d (cas de comparaison à deux variables) ou T_p (cas de proportionnalité), la technique τ_A relative à une telle organisation met à l'avant la comparaison des aires du blanc (ou du noir) dans les deux roulettes. Cette comparaison

⁷⁹ Désormais, nous indiquons entre parenthèses, d'une façon abrégée les contenus des deux sacs ou des deux roulettes. Pour cet exemple, il est question des deux roulettes R1 et R2 composées d'un secteur blanc et 4 secteurs noirs pour la première et de 3 secteurs blancs et 6 secteurs noirs pour la seconde.

s'effectue directement d'une façon perceptive étant donné que les deux roulettes ont le même rayon.

Quant à la technologie personnelle (ou théorème en acte) θ_A qui a produit la technique τ_A , elle peut être résumée de la façon suivante :

« La comparaison des "probabilités" est dans le même sens que la comparaison des aires des parties favorables ».

Nous avons donné ci-dessus un exemple pour le type de tâches Td. En voilà un autre où le type de tâches est Tp :

Exemple 2 : Exercice 4 : (R1 : 2b-3n / R2 : 4b-6n) ; événement attendu : blanc.

Réponse de AMA. (G6, n° 5) : "Je choisis R2 : la surface blanche est la même dans les deux roues."

Dans cet exemple, on peut se demander pourquoi AMA a choisi la roulette R2 bien que les aires soient les mêmes dans les deux roues.

Nous pensons, comme Maury, à un effet de la formulation de la question : "quel sac choisiriez-vous ..." inciterait l'élève à faire un choix exclusif de l'une des roues.

Ce choix exclusif peut être aussi expliqué par un effet du contrat didactique, l'élève n'ayant pas l'habitude, en mathématiques, de donner plus qu'une réponse.

Il faut remarquer que nous avons trouvé du mal à classer dans la même catégorie quelques réponses qui ne sont pas si explicites que celle du dernier exemple. Nous étions donc contraint à faire appel aux professeurs ayant assuré la passation du test. Ces derniers nous ont aidé à trancher après avoir consulté les élèves concernés.

Soulignons que parmi ces réponses, on a trouvé des justifications se basant sur le fait que les parties blanches ont une surface plus grande dans une roulette que dans l'autre. Après vérification, nous avons constaté que l'élève ne s'intéresse pas à la comparaison des aires, il pense plutôt à la grandeur des secteurs dans chacune des deux roues.

Nous avons rencontré des cas où l'aire (ou la surface) n'est pas explicitement mentionnée :

- L'élève peut évoquer la présence de la couleur blanche :

Exemple 3 : Exercice 3 : (R1 : 1b-4n / R2 : 3b-6n) ; événement attendu : blanc.

Réponse de SAM. (G3, n° 2) : "Je choisis la roulette R2 pour avoir le plus de chances d'obtenir la couleur blanche car la couleur blanche est plus présente."

- Il peut aussi parler de plus de couleur blanche :

Exemple 4 : Exercice 3 : (R1 : 1b-4n / R2 : 3b-6n) ; événement attendu : blanc.

Réponse de WIE. (G1, n° 6) : "La roulette que je choisis est R2 car la couleur blanche qui s'y trouve est plus que dans R1."

- Il y a aussi des cas où l'élève parle de proportionnalité :

Exemple 5 : Exercice 4 : (R1 : 2b-3n / R2 : 4b-6n) ; événement attendu : blanc.

Réponse de SAN. (G6, n° 9) : "Je choisis R1 car la proportion de la couleur blanche est plus grande que la proportion de la couleur blanche dans R2."

Dans cet exemple, l'élève SAN utilise la technique τ_A tout en se trompant dans l'estimation des aires. Nous décidons qu'une telle réponse relève d'une organisation A.

En conclusion, les organisations faisant partie du type A sont [Td, τ_A , θ_A] et [Tp, τ_A , θ_A].

Remarquons que pour la catégorisation de Maury (1984), il est question de l'argument « aire ». Comme cette catégorisation ne prend pas en compte de type de tâches, nous rapprochons l'argument aire au couple (τ_A , θ_A).

5.1.2. Le type « cas favorables / cas possibles »

Nous désignons ce type par la lettre P. Une organisation de ce type est construite aussi bien avec les boules (dans la résolution des exercices 2 et 6) qu'avec les roulettes (dans la résolution des exercices 3 et 4).

Nous énonçons la technologie personnelle θ_p , relative à ce type, comme suit :

« La "probabilité" d'un événement est déterminée par le rapport (nombre de cas qui lui sont favorables sur nombre des cas possibles) ».

Cette technologie serait ainsi une définition en acte qui n'est autre que la définition "habituelle" de quantification de la probabilité uniforme dans l'institution scolaire.

À partir des justifications, nous avons relevé deux techniques produites par θ_p :

- La technique $\tau_{f/p}$: « comparaison des rapports f/p »

Dans la réalisation d'une tâche appartenant à Td ou à Tp, un élève qui a utilisé une organisation du type P peut se ramener à la comparaison de rationnels ayant même dénominateur ou à la comparaison de rationnels ayant même numérateur. Nous aurions ainsi pu parler de deux techniques, mais, en fait, il est plus pertinent de parler d'une technique unique. En effet, d'une part, les deux comparaisons indiquées reviennent au même dans le cas

de proportionnalité et, d'autre part, il se trouve que certains élèves comparent les deux rationnels en question sans préciser leur façon de faire.

Nous avons donc opté pour une seule technique personnelle, notée $\tau_{f/p}$ et consistant à comparer les rapports « nombre des cas favorables sur nombre des cas possibles » dans les deux sacs (ou dans les deux roulettes).

Les exemples suivants relèvent cette technique :

Exemple 6 : Exercice 2 : (S1 : 2b-4n / S2 : 4b-9n) ; événement attendu : blanc.

Réponse de AHM. (G4, n° 11) : "On utilise les nombres rationnels pour comparer S1 et S2.

$\frac{2}{6}$ et $\frac{4}{13} = \frac{26}{78} < \frac{24}{78}$. Je choisis S1 car le nombre rationnel le représentant est plus grand que le nombre rationnel qui représente S2."

Il semble que la comparaison faite dans le dernier exemple soit le signe d'un obstacle d'origine didactique, au sens de Brousseau (1983) : il trouverait son explication dans un choix fait par le système éducatif.

Soulignons qu'actuellement en Tunisie :

- l'enseignement des mathématiques jusqu'à la neuvième année de base se fait en arabe et l'écriture symbolique qui est en arabe au niveau primaire (les six premières années) devient internationale au niveau collège (la 7^{ème}, 8^{ème} et 9^{ème} année de base) et
- au niveau du lycée, aussi bien l'enseignement que l'écriture symbolique se font en français.

Ainsi et au niveau collège que nous étudions, il y aurait un problème de "bilatéralité". C'est une notion inspirée de celle de l'expression "changement de latéralité" utilisée pour expliquer les difficultés éprouvées par des professeurs lorsqu'on leur propose d'effectuer une division à l'anglaise (où le diviseur et le quotient s'écrivent à gauche) (Bosch et Chevallard 1999, note de bas de page p. 96).

La notion de "bilatéralité" qui a été étudiée par Abdeljaouad (2004) traduit "la lecture dans une même phrase, de certaines séquences de droite à gauche et d'autres de gauche à droite". L'auteur montre que les registres ostensifs des classes de 6^{ème} et de 7^{ème} ne sont pas congruents et énonce une hypothèse : "La non congruence des registres ostensifs des classes de 6^e et de 7^e n'est pas suffisamment prise en compte par l'institution et entraîne d'importantes difficultés pour les élèves" (p. 59).

Nous imputons alors l'écriture $\frac{26}{78} < \frac{24}{78}$ à un effet de bilatéralité surtout que l'élève AHM a fait la même faute trois fois. En fait, bien qu'il ait dépassé une année et demi au collège, cet élève n'est pas encore totalement entré dans le registre ostensif du collège : pour lui le symbole "<" signifie "supérieur", chose qui est correcte si la lecture se fait de droite à gauche. Il veut dire ainsi que $\frac{26}{78}$ est supérieur à $\frac{24}{78}$.

Remarquons enfin que cet élève a commencé par réduire au même dénominateur avant de comparer.

Passons maintenant à un exemple qui relève du type de tâches Tp, le premier relevant de Td.

Exemple 7 : Exercice 4 : (R1 : 2b-3n / R2 : 4b-6n) ; événement attendu : blanc.

Réponse de MOH. (G7, n° 10) : "Les deux roues ont les mêmes chances pour s'arrêter à la couleur blanche car $(R1 = \frac{2}{5}) = (R2 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5})$."

Il y a lieu de signaler que cet exemple montre que le résultat est le même que l'on réduise au même numérateur ou au même dénominateur. Ajoutons que ce même élève a porté son attention aux numérateurs dans la résolution de l'exercice 3 en écrivant $\frac{1}{5} < \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ et en énonçant : si deux nombres rationnels ont le même numérateur, le plus grand est celui qui a le plus petit dénominateur.

Parfois, on peut se trouver devant une réponse où l'élève utilise la technique $\tau_{f/p}$ tout en se trompant dans la comparaison.

Voici un exemple :

Exemple 8 : Exercice 3 : (R1 : 1b-4n / R2 : 3b-6n) ; événement attendu : blanc.

Réponse de MAR. (G5, n° 4) : "Je choisis la roulette R1 pour avoir le plus de chances car la première partie représente $\frac{1}{5}$ des parties de la première et car dans la deuxième roulette, les parties blanches représentent $\frac{3}{9}$."

Cet exemple nous laisse dans l'incapacité de savoir sur quoi l'élève a, en premier lieu, porté son attention pour comparer : a-t-il pensé à une réduction au même numérateur ou bien à une réduction au même dénominateur ? Peut-être a-t-il procédé autrement ?

En dépit de ce qui précède, nous avons classé la dernière réponse dans la catégorie P.

Nous terminons par un exemple que nous avons supposé relevant de la technique $\tau_{f/p}$:

Exemple 9 : Exercice 3 : (R1 : 1b-4n / R2 : 3b-6n) ; événement attendu : blanc.

Réponse de SAY. (G1, n° 5) : "C'est la roulette R2 que je choisis pour avoir le plus de chances que l'aiguille indique la couleur blanche ; par contre, dans la première roulette, il y a une partie blanche parmi 5."

- La technique τ_{prop} : « proportion »

Il s'agit d'une technique où l'élève justifie sa réponse par l'intermédiaire de la proportion ou du pourcentage des éléments blancs ou noirs. La technique τ_{prop} relative à l'organisation du type P est exclusive au cas de proportionnalité. En effet, nous l'avons identifié dans deux réponses à l'exercice 4 et une réponse à l'exercice 6. En voici l'une d'elles :

Exemple 10 : Exercice 4 : (R1 : 2b-3n / R2 : 4b-6n) ; événement attendu : blanc.

Réponse de MOH. (G8, n° 22) : "La roulette que je choisis pour avoir le plus de chances que l'aiguille indique la couleur blanche est la roulette R2 ou la roulette R1 car R2 a plus de parties blanches et noires et R1 a un pourcentage qui lui est égal."

En conclusion, les organisations faisant partie du type P sont $[T_d, \tau_{f/p}, \theta_p]$, $[T_p, \tau_{f/p}, \theta_p]$ et $[T_p, \tau_{prop}, \theta_p]$.

Dans la catégorisation de Maury (1984), on trouve les arguments « cas favorables / cas possibles » qui sont sous-tendus par la même procédure notée P . Nous rapprochons la dernière procédure à la technologie personnelle θ_p et les arguments à la technique $\tau_{f/p}$.

5.1.3. Le type « cas favorables / cas défavorables »

Nous dénotons P' ce type d'organisations. Nous trouvons ce type aussi bien dans le cas des boules (résolution des exercices 2, 5 et 6) que dans celui des roulettes (résolution des exercices 3 et 4) ; c'est donc un type d'organisations développé aussi bien dans la réalisation du type de tâches T_d que dans celle du type de tâches T_p .

Nous énonçons la technologie personnelle $\theta_{p'}$, relative à ce type, comme suit :

« La "probabilité" d'un événement dépend des rapports « nombre des cas favorables sur nombre des cas défavorables » dans les deux sacs (ou dans les deux roulettes) ».

Cette technologie serait ainsi un théorème en acte.

Les réponses des élèves nous ont dévoilé trois techniques produites par la technologie personnelle θ_p .

- La technique $\tau_{f/d}$: « comparaison des rapports f/d »

Cette technique personnelle consiste à comparer les rapports « nombre des cas favorables sur nombre des cas défavorables » dans les deux collections.

Nous donnons ci-après deux exemples où les élèves utilisent cette technique. Le premier correspond à un cas de proportionnalité (Tp) et le second à un cas de comparaison à deux variables (Td).

Exemple 11 : Exercice 6 : (S1 : 2b-6n / S2 : 3b-9n) ; événement attendu : blanc.

Réponse de AHM. (G3, n° 7) : "Je choisis n'importe quel sac car $\frac{3}{9} = \frac{2}{6}$ c'est-à-dire $\frac{6}{18} = \frac{6}{18}$."

Exemple 12 : Exercice 2 : (S1 : 2b-4n / S2 : 4b-9n) ; événement attendu : blanc.

Réponse de AFI. (G8, n° 4) : "Le sac que je choisis pour avoir le plus de chances d'obtenir une boule blanche est S1 car la boule blanche a plusieurs possibilités dans le premier c'est $\frac{2}{4}$ et dans le deuxième c'est $\frac{4}{9}$."

Nous remarquons bien que le 12^{ème} exemple est moins explicite que son précédent, il lui manque la comparaison.

Nous classons dans la même catégorie les organisations où il est question de comparer les rapports « nombre de cas défavorables sur nombre de cas favorables ».

- La technique τ_{oi} : « opérateur interne »

Il est question de répondre par l'intermédiaire de la recherche des opérateurs faisant passer le nombre d'éléments blancs au nombre d'éléments noirs dans chacune des collections.

Nous trouvons cette technique aussi bien dans les exercices relevant du type de tâches Td (Ex. 2, 3 et 5) que dans ceux relevant du type Tp (Ex. 6). Nous en donnons l'exemple suivant relevé dans la résolution d'un exercice du type Td :

Exemple 13 : Exercice 2 : (S1 : 2b-4n / S2 : 4b-9n) ; événement attendu : blanc.

Réponse de CHI. (G7, n° 10) : "Le sac donnant le plus de chances de tirer une boule blanche est S1 car :

*Dans S1 il y a 2b et 4n , c'est-à-dire les boules noires sont le double des boules blanches ; par contre, dans S2 il y a 4b et 9n , c'est-à-dire $9 = (4*2) + 1$: les boules*

noires dépassent le double des boules blanches et par suite c'est dans S1 qu'il y a plus de chances de tirer une boule blanche."

Ici, l'élève cherche l'opérateur multiplicatif faisant passer du nombre de boules blanches au nombre de boules noires dans S1, met en relation le nombre de boules blanches et le nombre de boules noires dans S2 en utilisant cet opérateur puis conclut.

Voici maintenant un exemple de réalisation d'une tâche du type Tp :

Exemple 14 : Exercice 6 : (S1 : 2b-6n / S2 : 3b-9n) ; événement attendu : blanc.

*Réponse de MOH. (G2, n° 12) : "Je crois que la chance est la même car $2*3 = 6$ et $3*3 = 9$, alors les deux sacs sont égaux et ainsi la chance serait la même d'après moi."*

- La technique τ_{prop} : « proportion »

Nous trouvons cette technique utilisée deux fois par le même élève, une fois dans l'exercice 2 et une fois dans l'exercice 5, c'est-à-dire dans les exercices se référant aux boules et relevant du type de tâches Td. En voici une illustration :

Exemple 15 : Exercice 2 : (S1 : 2b-4n / S2 : 4b-9n) ; événement attendu : blanc.

Réponse de OUS. (G4, n° 7) : "Je choisis le sac S1 car la valeur des boules noires par rapport aux boules blanches est plus petite que dans l'autre sac."

En définitive, les organisations faisant partie du type P' sont $[Td, \tau_{f/d}, \theta_{P'}]$, $[Tp, \tau_{f/d}, \theta_{P'}]$, $[Td, \tau_{oi}, \theta_{P'}]$, $[Tp, \tau_{oi}, \theta_{P'}]$ et $[Td, \tau_{prop}, \theta_{P'}]$.

Dans la catégorisation de Maury (1984), on trouve les arguments « cas favorables / cas défavorables » qui sont sous-tendus par la même procédure notée P' . Nous rapprochons la dernière procédure à la technologie personnelle $\theta_{P'}$ et les arguments aux techniques $\tau_{f/d}$ et τ_{oi} .

5.1.4. Le type « collection intermédiaire »

Nous dénotons ce type d'organisations par la lettre G .

La technologie personnelle θ_G , relative à ce type, serait le théorème en acte suivant :

« La comparaison des "probabilités" d'un événement dépend de la comparaison des rapports des deux sacs ».

Nous trouvons ce type dans les réponses à l'exercice 2 (type de tâches Td) et dans les réponses à l'exercice 4 (type Tp).

À ce type d'organisations est associée la technique τ_{oe} « opérateur externe ». Cette technique consiste à chercher d'abord l'opérateur multiplicatif faisant passer le nombre de cas favorables dans S1 (ou R1) au nombre de cas favorables dans S2 (ou R2), ensuite l'opérateur multiplicatif permettant la même chose pour le nombre de cas défavorables puis comparer ces deux opérateurs pour conclure : c'est comme s'il s'agit de comparer la collection C2 à une collection intermédiaire C obtenue en multipliant le nombre des éléments de C1 par un opérateur bien choisi, d'où la dénomination.

Voici un exemple relatif au type Td :

Exemple 16 : Exercice 2 : (S1 : 2b-4n / S2 : 4b-9n) ; événement attendu : blanc.

Réponse de ISA. (G4, n° 8) : "Dans S1, on a plus de chance de tirer une boule blanche car de S1 à S2 le nombre de boules blanches double par contre les boules noires sont transformées au double plus 1."

Nous remarquons dans le dernier exemple que le deuxième opérateur n'est pas bien défini. Il faut remarquer aussi que la technique τ_{oe} permet, par le biais de la collection intermédiaire, le passage à une situation de comparaison à une seule variable (même nombre de cas favorables ou défavorables).

Passons maintenant à un autre exemple appartenant au type Tp :

Exemple 17 : Exercice 4 : (R1 : 2b-3n / R2 : 4b-6n) ; événement attendu : blanc.

Réponse de SAN. (G1, n° 7) : "Je choisis les deux roulettes en même temps car la roulette R1 contient 3 noires, en les divisant on trouve 6 et la roulette R2 contient 6 ; et R1 comporte 2, en les divisant on trouve 4 tel que c'est le cas dans R2."⁸⁰

En conclusion, les organisations personnelles appartenant au type G sont les organisations [Td, τ_{oe} , θ_G] et [Td, τ_{oe} , θ_G].

Dans Maury (1986), nous trouvons un argument noté G₁ qui correspond à la technique τ_{oe} .

5.2. Les types d'organisations non pertinentes

5.2.1. Le type « répartition »

Il s'agit du type dénoté R dont les organisations y figurant sont spécifiques au référent « roulettes » donc aux deux tâches T₃ et T₄ (correspondant aux exercices 3 et 4).

⁸⁰ En écrivant "R1 comporte 2", nous n'avons pas oublié de donner la couleur, mais nous avons procédé à une traduction exacte de la réponse de l'élève.

Pour les types de tâches Td et Tp contenant respectivement les tâches T₃ et T₄, une organisation du type R est caractérisée par le discours technologique θ_R :

« La comparaison des chances dans les deux collections dépend de la dispersion et de la grandeur des secteurs ».

Ainsi, pour une telle organisation, des particularités du dessin qui ne sont pas pertinentes pour la résolution sont prises en compte.

Il y a deux techniques produites par θ_R :

- La technique τ_{Rd} : « dispersion »

Il est question d'une technique relatant la dispersion des secteurs blancs ou/et noirs dans les roulettes.

En voici un exemple évoquant d'une façon imprécise la dispersion de la couleur blanche :

Exemple 18 : Exercice 3 : (R1 : 1b-4n / R2 : 3b-6n) ; événement attendu : blanc.

Réponse de HAY. (G1, n° 20) : "On choisit la roulette R2 car, comme on le voit, la couleur blanche est répartie d'une façon lui permettant de gagner."

Un autre élève, qui après avoir choisi dans l'exercice 3 la roulette R2 en justifiant par le fait que les parties blanches y sont relativement espacées, répond à l'exercice 4 comme suit :

Exemple 19 : Exercice 4 : (R1 : 2b-3n / R2 : 4b-6n) ; événement attendu : blanc.

Réponse de OUS. (G4, n° 7) : "Je choisis la roulette R1 car les deux surfaces y sont opposées, ce qui garantit plus de chances."

- La technique τ_{Rg} : « grandeur »

La technique τ_{Rg} consiste à comparer les grandeurs des secteurs blancs dans chacune des roulettes :

Exemple 20 : Exercice 4 : (R1 : 2b-3n / R2 : 4b-6n) ; événement attendu : blanc.

Réponse de TAR. (G6, n° 29) : " Je choisis la roulette R1. Bien que ses parties blanches ne soient que deux, elles sont grandes et la flèche peut s'arrêter sur chacune d'elles."

Remarquons que, pour cet élève, c'est la flèche qui tourne et non la roulette.

En définitive, les organisations personnelles appartenant au type R sont [Td, τ_{Rd} , θ_R],

[Td, τ_{Rg} , θ_R], [Tp, τ_{Rd} , θ_R] et [Tp, τ_{Rg} , θ_R].

Dans Maury (1984), on trouve seulement l'argument « répartition », noté R , correspondant à la technique « dispersion ». Par contre dans Maury (1986), on trouve aussi bien l'argument « répartition », noté R_1 que l'argument « grandeur », noté R_2 .

5.2.2. Le type « mécanique »

Nous avons emprunté cette dénomination à Maury (1985). Il y est question d'une catégorie d'arguments où l'élève fait allusion au mouvement d'une pièce de monnaie ou aux forces en jeu. Autrement dit, l'élève essaye d'expliquer l'incertitude du résultat du jet par les conditions initiales dans une vision mécanique ou déterministe.

Nous désignons le type « mécanique » par la lettre M .

La technique τ_M relative à une telle organisation, pour les types de tâches Td et Tp, met à l'avant les conditions initiales de l'expérience. Il est question d'une technique perceptive.

Quant à la technologie personnelle θ_M justifiant cette technique, nous la résumons comme suit :

« La comparaison des "probabilités" dépend des conditions initiales de l'expérience ».

C'est une technologie influencée par la présentation de l'énoncé.

Prenons un exemple faisant partie du type M avec les boules et pour le type Tp :

Exemple 21 : Exercice 6 : (S1 : 2b-6n / S2 : 3b-9n) ; événement attendu : blanc.

Réponse de SAN. (G6, n° 9) : " Je choisis le sac S2 : plus de chances car les blanches sont plus légères que les noires et les blanches sont avant les noires."

Cet exemple est représentatif du type M pour le cas des boules, le fait que les blanches soient au dessus des noires est fréquemment évoqué.

Prenons un exemple avec les roulettes et pour le type Td ; cet exemple est, lui aussi, représentatif du type d'organisations dans le cas des roulettes :

Exemple 22 : Exercice 3 : (R1 : 1b-4n / R2 : 3b-6n) ; événement attendu : blanc.

Réponse de INT. (G8, n° 31) : "Je vais choisir R1 car la flèche y est plus proche de la couleur blanche. Les chances sont meilleures pour que la flèche indique la couleur blanche."

Il y a même un élève qui indique, aussi bien dans l'exercice 3 que dans l'exercice 4, que la flèche est plus proche du blanc dans S1 que l'on tourne à gauche ou à droite.

En résumé, les réponses classées dans la catégorie M prennent la position des boules blanches et des boules noires (les premières sont considérées au dessus des secondes) ou la position de

l'aiguille par rapports aux secteurs blancs pour une donnée pertinente. On ne trouve pas chez Maury (1984 ou 1986) ce type de réponses.

Il est possible de considérer que la disposition des boules blanches et des boules noires dans les sacs soit l'analogie de la répartition des secteurs : il s'agit de répartition spatiale. Ce qui nous a empêché de fusionner les types R et M , c'est que dans le dernier il y a l'idée de l'évacuation du fortuit par la focalisation sur les conditions initiales qui n'ont pas à rester telles qu'elles, d'où l'idée de tricherie, ce qui n'est pas le cas pour le premier type.

Dans les réponses classées M , il semble que les élèves évacuent le caractère aléatoire de la situation en cherchant une interprétation déterministe, ce qui est à rapprocher des résultats obtenus par Fischbein et al. (1967) qui ont observé une chute des performances relatives à la quantification des probabilités entre 6 et 14 ans et qui ont avancé une explication dans le déterminisme adopté par l'institution scolaire.

Remarquons que notre catégorie M n'a pas d'équivalent dans la catégorisation de Maury dans la recherche à propos de la quantification des probabilités en seconde (1984) ; on trouve par contre cet équivalent, comme indiqué plus haut, dans un travail relatif à la notion d'indépendance (Maury 1985).

Finalement, notons que les organisations du type M sont $[Td, \tau_M, \theta_M]$ et $[Tp, \tau_M, \theta_M]$.

5.2.3. Le type « cardinal partie »

Ce type est noté N . Nous avons trouvé deux techniques qui font partie des organisations de type N et qui ne tiennent compte que d'une partie des données pertinentes.

La technologie personnelle θ_N productrice de ces techniques servant à accomplir des tâches de type Td ou Tp est résumée comme suit :

« La comparaison des "probabilités" dépend de la comparaison des cardinaux des parties correspondantes dans les deux collections ».

Dans la suite, nous donnons un exemple illustrant chacune des techniques utilisées.

- La technique τ_{Nf} : « cas favorables »

Cette technique consiste à comparer uniquement le nombre de cas favorables. On la trouve dans Piaget et Inhelder (1951) dès le stade sensori-moteur (de 4 à 7 ans environ). Voici un exemple correspondant au type de tâches Tp :

Exemple 23 : Exercice 6 : (S1 : 2b-6n / S2 : 3b-9n) ; événement attendu : blanc.

Réponse de HAN. (G2, n° 9) : "Les meilleures chances de tirer une boule blanche sont dans le deuxième sac car il contient plus de boules blanches."

- La technique τ_{Nd} : « cas défavorables »

Il est question de la technique qui consiste à comparer uniquement le nombre de cas défavorables. Nous la trouvons dans Piaget et Inhelder (1951) dans le stade des opérations concrètes (de 7 à 11 ans environ). Nous en donnons un exemple correspondant au type de tâches Td :

Exemple 24 : Exercice 5 : (S1 : 2b-5n / S2 : 3b-8n) ; événement attendu : blanc.

Réponse de HAJ. (G1, n° 13) : "Je choisis le sac S1 car il contient moins de boules noires et donc de meilleures chances d'obtenir une boule blanche."

Ainsi, les organisations personnelles que nous avons relevées et qui appartenant au type D sont : $[Td, \tau_{Nf}, \theta_N]$, $[Td, \tau_{Nd}, \theta_N]$, $[Tp, \tau_{Nf}, \theta_N]$ et $[Tp, \tau_{Nd}, \theta_N]$.

Le domaine de validité du type N , c'est-à-dire la portée des organisations qui le composent ou plus précisément la portée des techniques qui y figurent, comporte les situations de prévision à une seule variable : même nombre de cas possibles (pour toutes les techniques), même nombre de cas favorables (pour la technique τ_{Nd}) et même nombre de cas défavorables (pour la technique τ_{Nf}).

Dans Maury (1984), on trouve l'argument « nombre de cas favorables » et dans Maury (1986), on trouve une catégorie notée N dans laquelle figure l'argument Nf « nombre de cas favorables » qu'on peut rapprocher à la technique τ_{Nf} et l'argument Np « nombre de cas possibles ». Par contre, on ne trouve pas l'argument « nombre de cas défavorables ».

5.2.4. Le type « cardinal tout »

Ce type est noté T . La technique τ_T associée consiste à comparer la somme des éléments dans chacune des collections pour conclure. C'est une technique qu'on trouve dans Piaget et Inhelder (1951) dès le stade sensori-moteur (de 4 à 7 ans environ).

La technologie personnelle θ_T qui est à l'origine de ces techniques servant à accomplir des tâches de type Td ou Tp est résumée comme suit :

« La comparaison des "probabilités" dépend de la comparaison des totaux des deux collections ».

Ainsi, la solution dépend de la comparaison des sommes obtenues en ajoutant le nombre de cas favorables au nombre de cas défavorables dans chacune des deux collections. On trouve des élèves qui optent pour la collection dont la somme est la plus petite :

Exemple 25 : Exercice 5 : (S1 : $2b-5n$ / S2 : $3b-8n$) ; événement attendu : blanc.

Réponse de RYM. (G1, n° 12) : "On choisit le sac S1 car le nombre de boules est inférieur à celui de S2. Et car $2 + 5 = 7$ dans S1 et $8 + 3 = 11$ dans S2. On choisit donc S1."

Il faut dire que le choix de la plus petite collection est très rare avec les roulettes (six réponses dans l'exercice 3 et une réponse dans l'exercice 4). Soulignons que ce choix est parfois justifié explicitement par la facilité de tirer une boule blanche.

On trouve aussi des élèves qui choisissent la collection où la somme est la plus grande :

Exemple 26 : Exercice 6 : (S1 : $2b-6n$ / S2 : $3b-9n$) ; événement attendu : blanc.

Réponse de FAT. (G2, n° 24) : "On a tiré une boule noire.

Je choisis le sac S2 pour avoir plus de chances d'obtenir une boule blanche car dans ce sac il y a plus de boules que dans le premier."

Nous avons eu des réponses telles que celle de FAT dont le début serait une conséquence de la forme de l'énoncé. En fait, dans le cas des sacs par exemple, avant de demander la collection choisie pour avoir le plus de chances d'avoir une blanche, on présente l'expérience de la façon suivante « on choisit le sac que l'on veut, puis on tire au hasard une boule de ce sac et on note sa couleur ».

Dans l'impossibilité de faire effectivement l'expérience, il y a quelques élèves tels que FAT dont la réponse laisse à penser qu'ils le font mentalement. Le fait que l'élève indique qu'il a fait l'expérience et donne le résultat est propre à notre recherche, on ne le trouve pas dans les travaux de Maury.

Il faut remarquer que le choix de la plus grande collection est assez rare avec les boules (7 réponses dans l'exercice 2 et 6 réponses dans chacun des exercices 5 et 6) et qu'il n'existe pratiquement pas avec les roulettes (une seule réponse dans l'exercice 4).

Pour Maury (1986), ce choix est surtout fait dans le cas de proportionnalité : l'élève s'apercevant de la proportionnalité des deux collections, opte pour la plus grande pour avoir plus de chances (il fait un choix exclusif comme s'il est incité par la formulation de la question).

Les organisations faisant partie du type T sont $[Td, \tau_T, \theta_T]$ et $[Tp, \tau_T, \theta_T]$.

Le domaine de validité du type T comporte les situations de prévision à une seule variable : même nombre de cas favorables (si le choix est fait sur la petite collection) et même nombre de cas défavorables (si le choix est fait sur la petite collection).

Remarquons que pour la catégorisation de Maury (1986), l'argument Np « nombre de cas possibles », qui correspond à notre catégorie « cardinal tout », est placé avec l'argument Nf « nombre de cas favorables » dans la même catégorie.

Nous n'avons pas voulu rassembler les techniques τ_{Nf} , τ_{Nd} et τ_T dans la même catégorie car contrairement aux deux premières techniques la troisième prend en considération toutes les données pertinentes de l'énoncé bien que la mise en relation soit fausse.

5.2.5. Le type « différence »

Ce type est désigné par la lettre D . Dans le cas de notre test, nous avons relevé deux techniques faisant partie des organisations de type D .

Quant à la technologie personnelle θ_D qui a produit ces techniques servant à accomplir des tâches de type Td ou Tp , nous la résumons de la façon suivante :

« La comparaison des "probabilités" dépend de la comparaison de deux différences ».

Passons aux techniques développées.

- La technique $\tau_{D_{d-f}}$: « différence cas défavorables et cas favorables »

Il est question d'une technique qu'on trouve dans Piaget et Inhelder (1951) à la fin du stade des opérations concrètes (de 7 à 11 ans environ). Cette technique consiste à comparer en général les différences, effectuées dans chacune des deux collections, entre le nombre des cas défavorables et celui des cas favorables, le nombre des cas défavorables étant supérieur à celui des cas favorables.

Les deux exemples suivants illustrent bien la comparaison. Pour le premier exemple, il est question du type de tâches Tp tandis que pour le second, il est question du type de tâches Td .

Exemple 27 : Exercice 6 : (S1 : 2b-6n / S2 : 3b-9n) ; événement attendu : blanc.

Réponse de MOH. (G2, n° 7) : "On a plus de chances de tirer au hasard une boule blanche dans le premier sac car il est constitué de 8 boules, 2 blanches et 6 noires, et les boules noires dépassent les boules blanches de 4 boules seulement ; par contre, le deuxième sac est constitué de 12 boules, 3 blanches et 9 noires, et les boules noires dépassent les boules blanches de 6 boules...."

Exemple 28 : Exercice 5 : (S1 : 2b-5n / S2 : 3b-8n) ; événement attendu : blanc.

Réponse de SEN. (G7, n° 21) : "Je choisis S1 et ceci car le nombre de boules blanches dans S1 est plus grand que le nombre de boules blanches dans S2 par rapport au nombre de boules noires :

$$5 - 2 = 3 \text{ boules noires ; } 8 - 3 = 5 \text{ boules noires ; } 5 < 3."$$

Remarquons que le dernier exemple n'aurait pu être classé sans les calculs qui nous ont aidé à comprendre la signification de la phrase formulée.

La technique $\tau_{D_{d-f}}$ peut aussi être représentée par la comparaison des différences, effectuées dans chacune des deux collections, entre le nombre des cas favorables et celui des cas défavorables. L'exemple suivant illustre cette façon de faire qui aboutit à l'usage des nombres négatifs.

Exemple 29 : Exercice 5 : (S1 : 2b-5n / S2 : 3b-8n) ; événement attendu : blanc.

Réponse de BIL. (G5, n° 15) : "C'est le sac S1 car il y a un plus grand nombre de boules blanches que dans S2

$$1) 2 - 5 = -3$$

$$2) 3 - 8 = -5$$

$$-3 > -5."$$

Il faut remarquer que l'emploi de la technique $\tau_{D_{d-f}}$ est rare avec les roulettes (2 fois dans l'exercice 3 et 4 fois dans l'exercice 4).

- La technique $\tau_{D_{1-2}}$: « différence collections »

On peut identifier une telle technique dans des cas de comparaison des « chances » dans deux collections où le nombre de cas favorables et le nombre de cas défavorables varient dans le même sens, ce qui est le cas de notre test.

Cette technique consiste à comparer la différence entre le nombre de blanches de S2 et le nombre de blanches de S1 avec la différence entre le nombre de noires de S2 et le nombre de noires de S1 pour conclure :

Exemple 30 : Exercice 6 : (S1 : 2b-6n / S2 : 3b-9n) ; événement attendu : blanc.

Réponse de GAS. (G6, n° 15) : "Je choisis S1 pour avoir plus de chances de tirer une boule blanche car il contient moins de boules noires, leur différence est 3 ; par contre, la différence entre les boules blanches est 1."

Il faut remarquer que l'emploi de la technique $\tau_{D_{1-2}}$, exclusivement utilisée avec les boules, est rare (4 fois dans l'exercice 5 et 5 fois dans l'exercice 6).

Les deux techniques que nous avons relevées, dans les organisations de type D prennent en considération toutes les données pertinentes de l'énoncé ; seulement, ce qui fait défaut c'est leur mise en relation.

En conclusion, les organisations personnelles appartenant au type D sont $[Td, \tau_{D\ d-f}, \theta_D]$, $[Td, \tau_{D\ 1-2}, \theta_D]$, $[Tp, \tau_{D\ d-f}, \theta_D]$ et $[Tp, \tau_{D\ 1-2}, \theta_D]$.

Le domaine de validité du type D comporte les situations de prévision à une seule variable où il est question du même nombre de cas favorables ou du même nombre de cas défavorables (si le choix est fait sur la petite collection).

Dans Maury (1984),

- nous trouvons un argument que nous rapprochons à notre technique $\tau_{D\ d-f}$, il s'agit de l'argument « différence » noté D et exclusif pour les roulettes,
- nous ne trouvons pas d'argument correspondant à la technique $\tau_{D\ 1-2}$.

5.3. Un type « organisations non identifiées »

Dans le cas où on ne s'aperçoit pas que l'élève développe l'un des types précédents d'organisations, nous classons sa réponse dans le type I des organisations non identifiées.

Cette catégorie contient un nombre réduit de cas où l'élève :

- atteste une préférence pour une couleur ou un sac donné,
- base sa réponse sur le fait qu'il s'agit d'un jeu de chance,
- donne une réponse anecdotique ou
- ne donne pas de réponse.

En bref, cette catégorie contient les réponses sans justifications et celles dont la justification nous est incompréhensible.

5.4. Organisations combinées

Parfois, tout se passe comme si un élève, après avoir utilisé une organisation servant à exécuter un type de tâches du test, voit qu'il est nécessaire de développer une autre. Dans ce cas on parle de combinaison (composition ou association) d'organisations et on utilise un n -uplet pour la représenter.

Nous prenons l'exemple (T, D, N) . Ce triplet, que nous avons relevé dans une réponse au 3^{ème} exercice, résume les organisations utilisées et leur ordre d'action. L'élève commence par une organisation T qui donne la réponse R2 en optant pour le total le plus grand. Voulant

confirmer sa réponse, il fait appel à une autre organisation. La deuxième organisation D ne lui permettant pas de conclure (la différence des cas défavorables et des cas favorables est la même dans les deux sacs), il est contraint d'utiliser une troisième organisation qui est ici N . Cette dernière confirme son résultat R2 puisqu'il utilise la technique τ_{Nf} .

5.5. Récapitulatif des organisations personnelles

Nous terminons cette section par une présentation synthétique des organisations personnelles caractérisées ci-dessus.

Nous avons mis en évidence des types de tâches Td (cas de comparaison à deux variables) et Tp (cas de proportionnalité) dont la réalisation passe par la comparaison des "probabilités" de deux collections C1 et C2 contenant b_1 éléments blancs et n_1 éléments noirs pour la première et b_2 éléments blancs et n_2 éléments noirs pour la seconde et où $b_1 < b_2$ et $n_1 < n_2$.

Un type de tâches, une technique et une technologie personnelle forment ce que nous avons appelé une organisation personnelle.

Dans le tableau suivant (Tableau VII.1), nous donnons un récapitulatif des organisations personnelles évoquées lors de l'analyse des réponses des élèves à notre test.

Pour avoir plus de détails à propos des organisations construites par les élèves, consultez l'annexe 2. Les remarques suivantes sont indispensables pour une bonne lecture de l'annexe.

Nous avons remarqué quelques fautes d'appréciation ou de calcul lors de la mise en action de l'un des types A, P ou P'. Pour signaler ce genre de défaillance, nous utilisons comme codes A-, P- ou P'-. Par ailleurs, la notation N- est utilisée pour désigner les réponses où l'élève tout en utilisant la technique τ_{Nd} choisit la collection où le nombre de cas défavorables est le plus grand.

Pour l'exercice 1 : la lettre J intervenant comme code signifie qu'il est question d'une réponse juste ; la lettre I est utilisée pour dire que la réponse est fautive qu'elle soit accompagnée d'une justification ou non.

▪ Tableau VII.1

Codes, intitulés, technologies et techniques
des types d'organisations personnelles

| Code | Intitulé | Technologie | Techniques associées |
|------|-----------------------------------|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| A | aire | θ_A : comparaison des aires | τ_A : comparaison perceptive des aires favorables dans les deux roulettes |
| P | cas favorables / cas possibles | θ_P : dépendance du rapport f/p | - $\tau_{f/p}$: comparaison des rapports f/p - τ_{prop} : proportion |
| P' | cas favorables / cas défavorables | $\theta_{P'}$: dépendance du rapport f/d | - $\tau_{f/d}$: comparaison des rapports f/d - τ_{oi} : opérateur interne - τ_{prop} : proportion |
| G | collection intermédiaire | θ_G : dépendance du rapport des deux collections | - τ_{oe} : opérateur externe |
| R | répartition | θ_R : répartition des secteurs | - τ_{Rd} : « dispersion » - τ_{Rg} : « grandeur » |
| M | mécanique | θ_M : conditions initiales | τ_M : technique perceptive évacuant le fortuit |
| N | cardinal partie | θ_N : comparaison des cardinaux de deux parties | - τ_{Nf} : comparaison des cas favorables - τ_{Nd} : comparaison des cas défavorables |
| T | cardinal tout | θ_T : comparaison des totaux | τ_T : calcul des sommes des favorables et défavorables |
| D | différence | θ_D : comparaison de deux différences | - $\tau_{D d-f}$: différence cas défavorables et cas favorables - $\tau_{D 1-2}$: différence collections |
| I | non identifié | θ_I : absente ou incompréhensible | τ_I : inconnues |
| C | combiné | succession de technologies | succession de techniques |

6. Classification des réponses

Comme nous nous intéressons aux justifications, une réponse est classée en fonction du type d'organisation à laquelle elle appartient. Ainsi, les réponses sont réparties en trois catégories :

- Les *réponses justes* sont celles qui découlent d'une organisation personnelle pertinente, les erreurs de calculs n'ayant pas à être prises en compte.
- Les *réponses fausses* sont celles qui découlent d'une organisation non pertinente ou d'une organisation combinée dont les termes ne sont pas pertinents.
- Les *réponses mixtes* sont celles qui correspondent aux organisations combinées dans lesquelles coexistent une organisation pertinente et une organisation non pertinente.

Nous donnons ci-dessous deux exemples appartenant à la dernière classe :

Exemple 31 : Exercice 4 : (R1 : 2b-3n / R2 : 4b-6n) ; événement attendu : blanc.

Réponse de KAR. (G7, n° 5) : "Je choisis la roulette R2 pour avoir le plus de chances que l'aiguille indique la couleur blanche car les surfaces blanches dans R2 sont plus nombreuses que celles dans R1 mais elles ont la même aire."

Cette réponse mixte fait intervenir un couple d'organisations du type (A, N).

On peut penser que l'isométrie des surfaces blanches dans les deux roulettes paraît insuffisante pour KAR, il passe alors à la comparaison des nombres de cas favorables. Il aura ainsi accouplé l'organisation A à l'organisation N.

Exemple 32 : Exercice 2 : (S1 : 2b-4n / S2 : 4b-9n) ; événement attendu : blanc.

Réponse de WAE. (G4, n° 4) : "Je choisis le sac S1 les boules noires y sont moins nombreuses que dans S2 et en utilisant les nombres rationnels on trouve :

$$\text{Les boules blanches dans S1 : } \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = \frac{13}{39}$$

$$\text{Les boules blanches dans S2 : } \frac{4}{13} = \frac{12}{39}."$$

Remarquons que cet exemple appartient à l'organisation combinée (N, P).

Ici c'est l'organisation pertinente qui renforce la décision découlant de la première organisation qui n'est pas pertinente.

7. Étude globale des performances

Commençons par souligner que presque chaque réponse est accompagnée d'une justification. La consigne donnée à ce propos par les professeurs responsables de la passation a été respectée.

7.1. Le premier exercice

Parmi les réponses au premier exercice, nous spécifions :

- une seule réponse utilisant des fractions :

Exemple 33 : Exercice 1 : (S : 2b-3n) ; question : plus de chances pour n ou pour b ?

Réponse de KHA. (G1, n° 1) : "On a plus de chances de tirer une boule noire car le nombre des boules noires est supérieur à celui des blanches. Aussi car les noires sont

$$\frac{3}{5} \text{ et les blanches } \frac{2}{5}."$$

- une seule non réponse (nr),

- trois réponses justes utilisant des pourcentages faux,

- six réponses basées sur une préférence pour une couleur,

- dix réponses relevant d'une vision mécanique ou déterministe ("... les blanches sont en haut", "... si on mélange, les noires deviennent en haut", "... en bas 2b2n, il reste 1n en haut"),
 - vingt deux réponses disant qu'il y a des chances de tirer aussi bien une boule blanche qu'une boule noire puisque le sac contient les deux couleurs et nous laissant penser à une confusion entre le possible et le probable. Le fait que ces réponses soient formulées dans leur majorité à l'affirmative ("oui, on a plus de chances de tirer une blanche ou une noire car ...") nous fait pencher plutôt vers un effet de langue : nous soupçonnons que "plus de chances" est pris pour "beaucoup de chances" ou "grandes chances" car en arabe, "plus" et "beaucoup" peuvent avoir une ressemblance phonétique (homophones). Nous y reviendrons dans un chapitre ultérieur (cf. chapitre IX - 6.2.2)

En définitive, le premier exercice, dont le but est de familiariser les élèves à la situation, est assez bien réussi. Il y a 188 réponses justes (*J*) sur 254 soit 74 % des réponses (cf. annexe 2). Ces réponses sont justifiées en général par le fait que le nombre de boules noires est plus grand que le nombre de boules blanches.

7.2. Les autres exercices

Pour les autres exercices, nous donnons le tableau VII.2 résumant les fréquences des types d'organisations (cf. annexe 2 pour les détails).

▪ Tableau VII.2

Effectifs des types d'organisations selon les exercices et pourcentages associés

| Type \ Exercice | A | P | P' | G | R | M | N | T | D | I | C | Total |
|-----------------|----------|-----------|-----------|---------|-----------|-----------|-------------|-----------|-----------|-------------|----------|-------------|
| Ex.2 | 0 0% | 1 0,5% | 6 2,5% | 2 1% | 0 0% | 4 2% | 95 37% | 27 11% | 34 13% | 80 31% | 5 2% | 254 100% |
| Ex.3 | 21 8% | 6 2,5% | 1 0,5% | 0 0% | 30 12% | 21 8% | 88 35% | 5 2% | 2 1% | 67 26% | 13 5% | 254 100% |
| Ex.4 | 18 7% | 6 2,5% | 3 1% | 2 1% | 45 18% | 21 9% | 39 16% | 3 1% | 5 2% | 93 36,5% | 19 7% | 254 100% |
| Ex.5 | 0 0% | 0 0% | 3 1% | 0 0% | 0 0% | 1 0,5% | 83 32,5% | 30 12% | 36 14% | 94 37% | 7 3% | 254 100% |
| Ex.6 | 0 0% | 1 0,5% | 4 1,5% | 0 0% | 0 0% | 3 1% | 84 33% | 24 9% | 32 13% | 93 37% | 13 5% | 254 100% |

VII. Test diagnostic 1 : Quantification des probabilités en situation de prévision

Dans ce tableau, il n'y a pas de différence significative entre la ligne 2 (correspondant à l'exercice 2) et la ligne 5 (correspondant à l'exercice 5). Il semble ainsi que le référent "Roulettes" des exercices 3 et 4 n'a pas d'effet significatif sur la fréquence des types d'organisations utilisées. Nous consacrerons plus loin un paragraphe à l'effet du référent sur les organisations personnelles mobilisées dans les réponses justes, mixtes ou fausses (voir sous 8).

Désormais et sauf indication du contraire, nous allons nous limiter aux exercices 3, 4, 5 et 6 pour simplifier la tâche de comparaison.

Il ressort de l'examen des quatre dernières lignes du tableau que la fréquence des réponses justes est très faible. Ces réponses, correspondant aux types *A* et *P*, *P'* et *G* sont au nombre de 65 sur une totalité de 1016 réponses. Elles représentent donc un peu plus de 6% des réponses.

Remarquons que les organisations pertinentes qui font la différence sont celles du type *A*.

Le tableau suivant (tableau VII.3) donne une idée sur la fréquence des réponses justes (*J*), fausses (*F*) et mixtes (*Mx*) pour les quatre exercices qui nous intéressent.

▪ Tableau VII.3

*Effectifs des réponses justes, fausses et mixtes
selon les exercices, pourcentages associés*

| Exercice \ Type | <i>J</i> | <i>F</i> | <i>Mx</i> | Total |
|-----------------|--------------|---------------|-------------|--------------|
| Ex.3 | 28 11 % | 220 86,5 % | 6 2,5 % | 254 100 % |
| Ex.4 | 29 11,5 % | 211 83 % | 14 5,5 % | 254 100 % |
| Ex.5 | 3 1% | 251 99 % | 0 0 % | 254 100 % |
| Ex.6 | 5 2 % | 248 97,5 % | 1 0,5 % | 254 100 % |

Ainsi, la réussite globale est plus importante avec la modalité roulettes qu'avec la modalité boules (11 % contre 1,5 %). Cette tendance va à l'encontre des résultats de Maury (1984) qui donnent 31 % avec les roulettes et 41 % avec les boules.

Il ressort de l'examen de la 4^{ème} colonne que les organisations mixtes sont exceptionnelles et presque toutes rattachées aux roulettes. Soulignons que ces organisations sont incluses dans les organisations combinées et que, pour Maury (1984), les réponses mixtes sont présentes dans les deux modalités du référent.

7.3. Les organisations combinés

Parmi les 57 réponses du type combiné, on compte deux triplets, le triplet (T, D, N) abordé en haut et le triplet (P', R, P) .

Ce dernier triplet apparaît dans la réponse d'une élève qui choisit la roulette R1. Elle se réfère d'abord aux deux rapports f/d, ensuite à la grandeur des secteurs et enfin aux deux rapports f/p.

Outre les deux triplets cités, nous relevons 55 couples :

- Trois couples (N, N) donnant deux réponses contradictoires, la première technique étant τ_{Nf} et la seconde τ_{Nd} . On les trouve dans les trois réponses d'un même élève aux exercices 3, 5 et 6.
- Quatorze couples dans le cas de proportionnalité (Tp) où l'un des termes est une organisation pertinente : Treize dans l'exercice 4 et un dans l'exercice 6. Pour la majorité de ces couples, la deuxième organisation découle du fait que la première donne un choix indifférent. La première organisation pertinente ne permettant pas de conclure (pour les élèves concernés, les deux collections sont équivalentes ou semblent être équivalentes), les élèves se sont vus dans l'obligation de recourir à une seconde. Pour Maury (1984), dans le cas de proportionnalité, la deuxième organisation non pertinente permet de faire un choix effectif de l'une des deux collections dans toutes les réponses mixtes observées (coexistence d'un argument pertinent et d'un argument non pertinent). Il en est de même pour nous dans la majorité des cas (9 cas sur 14).
- Sept couples pour le type Td où l'un des termes est une organisation pertinente : un dans l'exercice 2 et six dans l'exercice 3 (il y a un seul cas où l'organisation pertinente constitue le premier terme du couple).
- Trente-un couples où les deux organisations sont non pertinentes.

Dans les trente-huit derniers cas, la deuxième organisation est appelée à confirmer le résultat sous tendu par la première. Elle apporte à l'élève un réconfort quant au bon choix de la collection.

Pour Maury (1984) et toujours dans le cas des réponses mixtes, pour le type de tâches Td, le deuxième argument qui est non pertinent confirme la prévision associée à l'argument pertinent. En ce qui concerne les 38 derniers cas combinés de notre test, nous pensons que la seconde organisation renforce le résultat trouvé par la première, que l'un des deux termes corresponde à une organisation pertinente ou non.

En définitive, nous estimons que les organisations combinées montrent l'état de déséquilibre dans lequel les élèves concernés se sont trouvés lors de l'accomplissement des tâches qui constituent notre test. Ils sont en général indécis quant à la pertinence de leur première technique.

8. Impact du référent sur les organisations

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'effet du référent sur les organisations personnelles mobilisées dans les réponses justes, mixtes ou fausses.

8.1. Impact sur les organisations pertinentes

Les organisations pertinentes apparaissent d'abord dans les réponses justes. Dans le tableau VII.4, nous avons associé à chacune des modalités "Roulettes" et "Boules" le nombre d'apparitions des types *A* (aire) et *P* (proportion).

▪ Tableau VII.4

*Réponses justes : effectifs des types d'organisations pertinentes
selon la modalité du référent et pourcentages associés*

| Type \ Référent | <i>A</i> | <i>P</i> | <i>P'</i> | <i>G</i> | Total justes |
|------------------------|--------------|-------------|------------|-----------|--------------|
| Roulettes Ex.3 et 4 | 39 68,5 % | 12 21 % | 4 7% | 2 3,5% | 57 100 % |
| Boules Ex.5 et 6 | 0 0 % | 1 12,5 % | 7 87,5% | 0 0% | 8 100 % |

Il faut dire que le type d'organisations *G* apparaît exactement 2 fois aussi bien dans l'exercice 2 que dans l'exercice 4. Nous avançons une possible explication à cette apparition : dans l'exercice 4, les roulettes étant équivalentes, la collection intermédiaire est l'une d'entre elles ; dans l'exercice 2, le passage de b_1 (nombre de boules blanches dans S1) à b_2 (nombre de boules blanches dans S2) se fait à l'aide d'un opérateur multiplicatif entier qui est 2, chose qui reste valable pour l'exercice 4.

Le tableau VII.4 nous montre l'importance de l'effectif des organisations du type A dans les réponses justes. Seulement, nous remarquons que parmi les 39 organisations du type A qui concernent exclusivement la modalité "Roulettes", nous comptons 23 réponses A- (réponses où il y a mauvaise appréciation des aires) : 7 dans l'exercice 3 et 16 dans l'exercice 4. On peut se demander si l'organisation en question montre une maîtrise de la quantification des probabilités.

Par ailleurs, il semble que la modalité "Roulettes" favorise mieux l'apparition du type d'organisations P « cas favorables / cas possibles ». Ainsi, pourrait-on conclure qu'avec les roulettes la prise en considération des cas possibles est favorisée, ce qui a été vérifié par Maury (1984) et expliqué par la perception du tout (la roulette) dans le cas des roulettes.

Nous pouvons aussi affirmer, avec Maury (1984), que le type d'organisations P' « cas favorables / cas défavorables » est plutôt lié aux "boules", ce type apparaissant 7 fois avec les boules et 4 fois avec les roulettes.

Rappelons que le test est présenté de façon à répondre à la question d'un possible effet du référent Ro (roulettes partagées en secteurs isométriques) sur les réponses aux questions suivantes où il est question du référent Sa (sacs contenant des boules de deux couleurs différentes : blanches et noires). Nous nous sommes demandés si les exercices 3 et 4 (Ro) qui devraient favoriser le type d'organisations P « cas favorables / cas possibles » pourraient contribuer à l'amélioration de cette technique dans les exercices 5 et 6 (Sa). Il semble que la réponse soit négative : ce type P, trouvé 1 seule fois dans l'exercice 2 (exercice relatif à Sa), apparaît 12 fois pour Ro (6 fois dans chacun des exercices 3 et 4) et 1 fois seulement pour Sa (0 fois dans l'exercice 5 et 1 fois dans l'exercice 6).

Les organisations pertinentes apparaissent aussi dans les réponses mixtes. Les types de ces organisations font l'objet du tableau suivant.

▪ Tableau VII.5

Réponses mixtes (couples) : effectifs des types d'organisations pertinentes selon la modalité du référent

| Type Référent | A | P | P' | G | Total mixtes |
|------------------------|------------|------------|-----------|-----------|--------------|
| Roulettes Ex.3 et 4 | 14 73 % | 3 16 % | 1 5,5% | 1 5,5% | 19 100 % |
| Boules Ex.5 et 6 | 0 0 % | 1 100 % | 0 | 0 | 1 100 % |

Nous remarquons d'abord que les couples « organisations mixtes » représentent par rapport aux organisations combinées 60 % pour les roulettes et 10 % pour les boules. Nous signalons ensuite que la technique « aire » τ_A justifie 70 % des réponses justes et 73 % des réponses mixtes.

Pour l'organisation du type *A*, la mauvaise appréciation des aires est fréquente : un peu moins de 60 % dans les réponses justes et un peu moins de 40 % dans les réponses mixtes. Ainsi, une organisation du type *A*, bien que supposée valide, ne semble pas être le signe d'une bonne maîtrise de la quantification des probabilités. D'ailleurs, dans une telle organisation, correspondant à une technique perceptive (souvent mal utilisée), « les élèves n'explicitent pas les informations numériques pertinentes. » (Maury 1987, p. 298)

Notons que le tableau VII.5 montre que les réponses mixtes sont presque exclusives aux exercices 3 et 4, c'est-à-dire aux cas des roulettes, contrairement à ce qui apparaît dans Maury (1984) où ces réponses sont départagées entre les deux modalités.

Le fait que dans ce tableau, les organisations de types *P* et *P'* apparaissent respectivement 3 et 1 fois pour les roulettes d'une part et 1 et 0 fois pour les boules d'autre part nous semble confirmer ce qui a été dit dans le cas des réponses justes : l'absence, dans notre test, d'un effet de la modalité *Ro* (roulettes partagées en secteurs isométriques) sur les organisations développées dans les exercices relevant de la modalité *Sa* (sacs contenant des boules).

À propos de l'effet du référent sur les organisations pertinentes mobilisées nous soulignons que l'organisation *A* est propre à la modalité *Ro* et que cette dernière semble mieux favoriser l'apparition des organisations du type *P*. Il faut cependant remarquer que ce type est peu fréquent dans le cas des roulettes (12 occurrences sur 508).

Remarquons finalement que la comparaison des types d'organisations pertinentes *P*, *P'* et *G* d'une part avec les autres types d'autre part pour chacune des deux modalités du référent nous donne un tableau carré dont le calcul de χ^2 (avec la correction de Yates) donne $\chi^2_c = 3,19$. Comme ($\chi^2_{0,05; 1} = 3,84$), nous pouvons conclure à une différence d'effectifs d'organisations pertinentes due au hasard à un risque de 5 %.

8.2. Impact sur les organisations non pertinentes

Dans le tableau VII.6, nous avons associé à chacune des modalités "Roulettes" et "Boules" le nombre d'apparitions des types *R* (répartition), *M* (mécanique), *N* (cardinal partie), *T* (cardinal tout), *D* (différence), *I* (organisation inconnue) et *C* (organisation combinée) dans les réponses fausses.

▪ Tableau VII.6

Réponses fausses : effectifs des types d'organisations non pertinentes
selon la modalité du référent, pourcentages associés

| Type \ Référent | R | M | N | T | D | I | C non mixte | Total fausses |
|------------------------|------------|------------|---------------|------------|------------|-------------|-------------|---------------|
| Roulettes Ex.3 et 4 | 75 17 % | 42 10 % | 127 29,5 % | 8 2 % | 7 1,5 % | 160 37 % | 12 3 % | 431 100 % |
| Boules Ex.5 et 6 | 0 0 % | 4 1 % | 167 33 % | 54 11 % | 68 14 % | 187 37 % | 19 4 % | 499 100 % |

Il ressort de ce tableau que :

- les organisations de type *R* sont fréquentes. Ceci montre, comme c'est le cas pour Maury (1984), l'important effet qu'ont la dispersion et la grandeur des secteurs sur les justifications des élèves,
- les organisations de type *D* et *T* sont presque exclusives aux boules (pour Maury, l'argument différence est exclusif aux boules),
- l'organisation mécanique *M*, qu'on ne trouve pas chez Maury (1984) représente, dans le cas des roulettes 10 % des réponses fausses,
- le type que l'on rencontre fréquemment avec les deux modalités du référent est *N*, il explique presque 30 % des réponses fausses dans chaque modalité. Il faut dire que pour Maury (1984), l'argument *N* est plus fréquent avec les boules, ce que nous retrouvons ici (remarquons que les organisations de types *N* et *T* doivent être rassemblées pour avoir un équivalent de l'argument *N* de Maury).

Revenons au type d'organisation *D* que nous avons relevé dans les deux modalités.

Avec les roulettes, il apparaît seulement exactement 7 fois (deux dans l'exercice 3 et cinq dans l'exercice 4) associé à la technique $\tau_{D\ d-f}$ qui est l'équivalent de l'argument « différence » de Maury. Avec les boules par contre, il est très fréquent, il apparaît 59 fois avec la technique $\tau_{D\ d-f}$ et 9 fois avec la technique $\tau_{D\ 1-2}$. Ainsi, pouvons-nous dire que les organisations du type *D* sont plutôt exclusives aux boules.

En définitive, les organisations de types *N*, *R* et *M* rassemblées représentent 57 % des organisations fausses pour les roulettes et celles de types *N*, *D* et *T* rassemblées représentent 58 % des organisations fausses pour les boules.

Il faut remarquer par ailleurs que concernant les réponses mixtes,

- le type non pertinent est soit *R* soit *N* dans l'exercice 4,
- il y a 4 cas sur 6 où le type non pertinent est soit *R* soit *N* dans l'exercice 3,
- il y a une fois sur 2 où le type non pertinent est *N* dans l'exercice 6.

Ainsi, l'impact du référent est incontestable sur les organisations non pertinentes mobilisées : les types d'organisations utilisées de manière remarquable sont dans l'ordre *N*, *R* et *M* et pour les roulettes et *N*, *D* et *T* pour les boules.

9. Impact du type de tâches sur les organisations

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'effet du type de tâches sur les organisations personnelles mobilisées aussi bien dans les réponses justes que fausses.

9.1. Impact sur les organisations pertinentes

Dans le tableau VII.7, nous avons associé à chacune des modalités Td (comparaison à deux variables) et Tp (proportionnalité) le nombre d'apparitions des types *A* (aire) et *P* (proportion).

▪ Tableau VII.7

*Réponses justes : effectifs des types d'organisations pertinentes
selon la modalité du type de tâches, pourcentages associés*

| T. Tâche \ Type | <i>A</i> | <i>P</i> | <i>P'</i> | <i>G</i> | Total justes |
|-----------------|------------|-------------|------------|----------|--------------|
| Td Ex.3 et 5 | 21 68 % | 6 19 % | 4 13% | 0 0% | 31 100 % |
| Tp Ex.4 et 6 | 18 53 % | 7 20,5 % | 7 20,5% | 2 6% | 34 100 % |

Ce tableau met en évidence une légère hausse des organisations pertinentes en faveur du type de tâches "proportionnalité" (34 contre 31).

Pour le tableau carré qui résume le dernier tableau en rassemblant les types d'organisations *P*, *P'* et *G* et dont le degré de liberté est 1, le calcul de khi2 (avec la correction de Yates) donne $\chi^2_c = 0,92$. Et comme ($\chi^2_{0,05 ; 1} = 3,84$). Nous pouvons conclure, à titre indicatif en supposant que la disposition des exercices n'a pas d'effet sur les justifications des élèves, à une différence non significative avec un risque d'erreur de 5 %, ce qui est en contradiction avec le

modèle piagétien formulant la primauté du cas de proportionnalité sur le cas de comparaison à deux variables.

Pour s'en assurer, il aurait fallu adopter un autre plan expérimental (donner à chaque élève un seul type de tâches), ce que nous ferons plus tard dans un test complémentaire (cf. sous 11).

9.2. Impact sur les organisations non pertinentes

Dans le tableau VII.8, nous associons à chacune des modalités Td "type 2 variables" et Tp "type proportionnalité" le nombre d'apparitions des types *R* (répartition), *M* (mécanique), *N* (cardinal partie), *T* (cardinal tout), *D* (différence), *I* (organisation inconnue) et *C* (organisation combinée) dans les réponses fausses.

▪ Tableau VII.8

*Réponses fausses : effectifs des types d'organisations non pertinentes
selon la modalité du type de tâches, pourcentages associés*

| Type T. Tâche | <i>R</i> | <i>M</i> | <i>N</i> | <i>T</i> | <i>D</i> | <i>I</i> | <i>C non mixte</i> | Total fausses |
|------------------|------------|-----------|-------------|-----------|-----------|-------------|--------------------|---------------|
| Td Ex.3 et 5 | 30 6 % | 23 5 % | 171 36 % | 36 8 % | 38 8 % | 161 34 % | 14 3 % | 473 100 % |
| Tp Ex.4 et 6 | 45 10 % | 25 5 % | 124 27 % | 26 6 % | 36 8 % | 186 40 % | 17 4 % | 459 100 % |

D'après le tableau VII.8, l'organisation *N* est majoritaire pour chacun des deux types de tâches Td et Tp. Elle est construite dans environ le tiers du test.

Sans avoir recours à un quelconque calcul statistique, il semble d'après ce tableau que les types de tâches Td et Tp correspondent au même ordre de difficulté dans les réponses fausses. En fait tous les types d'organisations semblent être répartis de la même manière pour les deux modalités. Il faut cependant remarquer une différence significative au niveau du type d'organisations *N* relativement aux autres types rassemblés ($\chi^2_c = 8,44$). Soulignons que cette différence est due aux effectifs du type d'organisations en question relevés dans les exercices 3 et 4 (respectivement 88 réponses contre 39).

Ainsi semble-t-il que pour les réponses fausses, le type de tâches n'a pas d'impact sur les organisations utilisées à l'exception de celui sur le type d'organisations *N*. Et c'est peut-être au niveau de la variable "nombre de secteurs des deux couleurs", que nous ne prenons pas en considération dans ce test, qu'il faut chercher une explication à cette exception.

10. Stabilité des organisations

Dans cette partie nous posons la question de la stabilité des types d'organisations utilisées. Dans un premier temps, nous étudions la stabilité des types d'organisations pertinentes P , P' et G . Dans un deuxième temps, nous nous intéressons à la fréquence de stabilité et aux organisations stables relativement au référent.

10.1. Stabilité des organisations du type P , P' ou G

Nous nous intéressons ici aux 24 élèves qui ont utilisé aux moins une organisation pertinente, tous les exercices ainsi que les organisations mixtes étant pris en compte. Notons d'abord que parmi ces élèves figure celui qui a développé l'organisation combinée (P' , R , P), P' étant associé à la technique $\tau_{f/d}$ (*comparaison des rapports f/d*) et P à la technique $\tau_{f/p}$ (*comparaison des rapports f/p*).

Commençons par citer chacun des cas où un élève utilise une seule organisation pertinente dans sa réponse aux exercices 2, 3, 4, 5 et 6.

Nous comptons quatre élèves utilisant une seule fois le type d'organisations P « *cas favorables / cas possibles* » : un dans l'exercice 3 avec la technique $\tau_{f/p}$ (*comparaison des rapports f/p*), deux dans l'exercice 4 et un autre dans l'exercice 6 avec la technique τ_{prop} (*proportion*).

Nous relevons six cas développant une seule fois le type d'organisations P' « *cas favorables / cas défavorables* » : un dans l'exercice 2, un dans l'exercice 3 et un dans l'exercice 6 avec la technique τ_{oi} (*opérateur interne*), un dans l'exercice 2, un dans l'exercice 4 et un dans l'exercice 6 avec la technique $\tau_{f/d}$ (*comparaison des rapports f/d*).

Nous comptons enfin quatre cas qui se réfèrent à une organisation du type G « *collection intermédiaire* » avec, bien entendu, la seule technique τ_{oe} (*opérateur externe*) : un dans l'exercice 2 et trois dans l'exercice 4.

Passons maintenant aux usages répétés d'un même type d'organisations pertinentes.

Deux fois

Nous comptons deux élèves qui emploient deux fois le même type pertinent d'organisations. L'un d'eux utilise le type d'organisations P « *cas favorables / cas possibles* » avec la technique $\tau_{f/p}$ (*comparaison des rapports f/p*) dans les exercices 3 et 4. L'autre par contre

utilise le type d'organisations P' « cas favorables / cas défavorables » avec la technique τ_{prop} (proportion) dans les exercices 2 et 5.

Nous remarquons qu'il y a deux élèves qui utilisent une fois une organisation de type P et une autre fois une organisation de type P' . L'un d'eux utilise $P'(\tau_{oi})$ dans l'exercice 2 et $P(\tau_{prop})$ dans l'exercice 4, cet élève étant le seul qui s'est référé au nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles pour justifier la réponse à la première question. L'autre utilise $P(\tau_{f/p})$ dans l'exercice 3 et $P'(\tau_{f/d})$ dans l'exercice 4.

Trois fois

Nous comptons deux élèves qui emploient le type d'organisations P « cas favorables / cas possibles » trois fois. Ils l'utilisent avec la technique $\tau_{f/p}$ (comparaison des rapports f/p) dans les exercices 2, 3 et 4.

Quatre fois

Nous relevons un seul élève qui, bien qu'il n'y ait pas stabilité dans les organisations développées, répond correctement à quatre exercices en utilisant chaque fois un type pertinent d'organisations. Il emploie $G(\tau_{oe})$ dans l'exercice 2, $P(\tau_{f/p})$ dans les exercices 3 et 4 et $P'(\tau_{oi})$ dans l'exercice 6. Il faut remarquer que dans l'exercice 5, bien que le type d'organisation utilisé soit inconnu, cet élève fait le bon choix du sac, il écrit : "on a plus de chances dans S1."

Cinq fois

Il y a un seul élève qui utilise le type P' « cas favorables / cas défavorables » cinq fois. Il emploie la technique τ_{oi} (opérateur interne) dans les exercices 2 et 3 et la technique $\tau_{f/d}$ (comparaison des rapports f/d) dans les exercices 4, 5 et 6.

Nous terminons par un élève qui utilise $P'(\tau_{oi})$ avec les boules (exercices 2, 5 et 6) et $P(\tau_{f/p})$ avec les roulettes (exercices 3 et 4).

En conclusion, l'étude de la stabilité dans les réponses des 24 élèves ayant utilisé au moins un type pertinent d'organisations montre le degré de difficulté qu'ils ont rencontré dans la résolution des exercices du test. Il suffit de remarquer que 14 parmi ces 24 élèves n'ont utilisé qu'une seule organisation pertinente lors de la résolution des exercices 2, 3, 4, 5 et 6.

VII. Test diagnostic 1 : Quantification des probabilités en situation de prévision

Pour avoir une idée plus précise sur ce degré de difficulté, nous donnons les réponses de ces 24 élèves aux exercices 2, 3, 4, 5 et 6 dans le tableau suivant dans lequel les types P , P' et G sont accompagnés des techniques produites :

▪ Tableau VII.9

Réponses, en termes de types d'organisations, des élèves ayant développé au moins un type pertinent

| Groupe/Numéro ⁸¹ | Exercice 2 | Exercice 3 | Exercice 4 | Exercice 5 | Exercice 6 |
|-----------------------------|---------------------|---------------------|------------------------------------|------------------|----------------------|
| G1 / 1 | $P' \tau_{oi}$ | N | $P \tau_{prop}$ | D | D |
| G1 / 4 | I | R | R | I | $P \tau_{prop}$ |
| G1 / 5 | D | $P \tau_{f/p}$ | D | D | D |
| G1 / 7 | N | N | $G \tau_{oe}$ | N | I |
| G1 / 16 | (D, N) | A | $(G \tau_{oe}, I)$ | N | (N, D) |
| G2 / 1 | D | R | $(P \tau_{prop}, R)$ | D | I |
| G2 / 12 | N | R | R | N | $P' \tau_{oi}$ |
| G3 / 7 | $P' \tau_{oi}$ | $(R, P' \tau_{oi})$ | $P' \tau_{f/d}$ | $P' \tau_{f/d}$ | $P' \tau_{f/d}$ |
| G4 / 4 | $(N, P \tau_{f/p})$ | $(N, P \tau_{f/p})$ | $P \tau_{f/p}$ | N | (N, D) |
| G4 / 7 | $P' \tau_{prop}$ | R | R | $P' \tau_{prop}$ | N |
| G4 / 8 | $G \tau_{oe}$ | $P \tau_{f/p}$ | $P \tau_{f/p}$ | I | $P' \tau_{oi}$ |
| G4 / 11 | $P \tau_{f/p}$ | $P \tau_{f/p}$ | $(P \tau_{f/p}, R)$ | D | D |
| G4 / 27 | $G \tau_{oe}$ | I | I | I | I |
| G5 / 3 | D | R | $(P' \tau_{f/d}, R, P \tau_{f/p})$ | D | D |
| G5 / 4 | N | $P \tau_{f/p}$ | $P \tau_{f/p}$ | I | I |
| G5 / 12 | N | N | N | D | $(D, P' \tau_{f/d})$ |
| G5 / 15 | D | N | $G \tau_{oe}$ | D | D |
| G6 / 1 | N | I | $P' \tau_{f/d}$ | I | I |
| G7 / 10 | $P' \tau_{oi}$ | $P \tau_{f/p}$ | $P \tau_{f/p}$ | $P' \tau_{oi}$ | $P' \tau_{oi}$ |
| G7 / 21 | D | $P' \tau_{oi}$ | (A, R) | D | D |
| G8 / 2 | T | $P \tau_{f/p}$ | $P' \tau_{f/d}$ | I | I |
| G8 / 4 | $P' \tau_{f/d}$ | I | I | I | I |
| G8 / 10 | $P' \tau_{oi}$ | R | R | D | D |
| G8 / 22 | I | I | $P \tau_{prop}$ | T | I |

⁸¹ Le premier nombre (chiffre) désigne le groupe et le second désigne le numéro donné à l'élève au sein du groupe.

Passons maintenant à une étude plus générale de la stabilité. Sont considérées aussi bien les organisations pertinentes que celles qui ne le sont pas.

10.2. Fréquence de la stabilité et référent

Dans les deux paragraphes suivants, les organisations étudiées sont les organisations simples (non combinées).

Nous nous intéressons aux organisations reproduites dans chacune des deux modalités du référent et nous liions la stabilité d'une organisation à son utilisation dans les exercices relevant de la même modalité. Nous consultons les exercices 3 et 4 pour la modalité "Roulettes" et nous nous restreignons aux exercices 5 et 6 pour la modalité "Boules".

Les questions nous concernant sont notamment celle de la fréquence de la stabilité et celle des arguments stables selon la modalité.

Le tableau VII.10 donne une idée sur la fréquence globale de la stabilité en fonction du référent.

▪ Tableau VII.10

Effectif global des couples d'organisations stables selon la modalité du référent, pourcentages associés par rapport à l'effectif des élèves

| Type \ Référent | Couples stables | Autres couples | Total |
|------------------------|-----------------|----------------|--------------|
| Roulettes Ex.3 et 4 | 75 30 % | 179 70 % | 254 100 % |
| Boules Ex.5 et 6 | 120 47 % | 134 53 % | 254 100 % |

Sous réserve que la résolution des exercices 3 et 4 n'ait pas augmenté la stabilité dans les exercices 5 et 6, la tendance de stabilité serait plus forte avec les boules qu'avec les roulettes (47 % des couples des réponses aux exercices 5 et 6 contre 30 % des couples des réponses aux exercices 3 et 4). Sous la dernière hypothèse la différence est significative ($\chi^2_c = 16,11$ et $\chi^2_{0,05; 1} = 3,84$). On trouverait ainsi une tendance allant à l'encontre de celle trouvée par Maury (1986).

Soulignons que dans les ensembles constitués des 75 élèves reproduisant une même organisation dans le cas des roulettes et des 120 élèves reproduisant une même organisation

dans le cas des boules, il y a une intersection de 35 élèves parmi lesquels 13 élèves utilisent, de l'exercice 2 à l'exercice 6, le type N « cardinal partie ».

10.3. Organisations stables et référent

La fréquence des organisations stables en fonction du référent est donnée dans le tableau VII.11.

▪ Tableau VII.11

Couples d'organisations stables, effectifs selon la modalité du référent, pourcentages associés par rapport au total des couples stables

| Type \ Référent | (A, A) | (P, P) | (P', P') | (R, R) | (M, M) | (N, N) | (T, T) | (D, D) | Total |
|------------------------|-----------|----------|----------|------------|------------|--------------|------------|--------------|--------------|
| Roulettes Ex.3 et 4 | 8 11 % | 3 4 % | 0 0 % | 15 20 % | 15 20 % | 32 43 % | 1 1 % | 1 1 % | 75 100 % |
| Boules Ex.5 et 6 | 0 0 % | 0 0 % | 2 2 % | 0 0 % | 0 0 % | 69 57,5 % | 23 19 % | 26 21,5 % | 120 100 % |

Les tendances apparaissant dans le tableau VII.11 semblent confirmer les distributions observées dans les tableaux VII.4 et VII.6 et montre l'impact du référent sur les organisations (pertinentes et non pertinentes) développées :

Pour les organisations pertinentes et malgré les fréquences assez basses, la stabilité semble confirmer le fait que la modalité "Roulettes" favorise mieux l'apparition du type d'organisations P « cas favorables / cas possibles », alors que le type d'organisations P' « cas favorables / cas défavorables » est plutôt lié aux "boules".

Pour les organisations non pertinentes,

- notons que les fréquences des couples remarquables d'organisations stables sont dans presque le même ordre que celui des fréquences que l'on trouve dans toutes les réponses fausses (cf. 8.2), cet ordre étant N, R et M pour les roulettes et N, D et T , pour les boules.
- on retrouve aussi le fait que les organisations de type D « différence » et celles de type T « cardinal tout » sont presque exclusives aux boules.

Ajoutons que si l'on s'intéresse aux types d'organisations stables dans les exercices 2, 5 et 6 relatifs aux boules, nous obtenons 49 triplets N , 15 triplets D , 8 triplets T et 2 triplets P' .

11. Un test complémentaire

Ce test complémentaire a été nécessité suite :

- au constat fait plus haut concernant les choix exclusifs des élèves, choix que nous avons imputé à la formulation des exercices du premier test et au contrat didactique instauré en classe de mathématiques.
- à une remarque faite en (9.1) concernant le modèle piagétien disant que l'ordre de réussite est meilleur pour le cas de proportionnalité (type Tp) que pour celui de comparaison à deux variables (type Td).

11.1. Objectifs

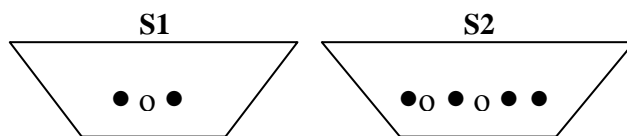
Les objectifs du test consistent essentiellement à vérifier notre hypothèse concernant la spontanéité du modèle mathématique "nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles" au niveau du collège ainsi que l'hypothèse piagétienne à propos de l'ordre de réussite dans les cas de proportionnalité et de comparaison à deux variables.

11.2. Tâches choisies

Nous avons choisi les deux exercices suivants, le premier étant une tâche relevant du cas de proportionnalité et le second du cas de comparaison à deux variables :

EXERCICE A1 (du type Tp)

Matériel : deux sacs, **S1** contenant 1 boule blanche et 2 boules noires (1b-2n) et **S2** contenant 2 boules blanches et 4 boules noires (2b-4n).



Question : quel sac choisiriez-vous pour avoir le plus de chances de tirer une boule blanche ?

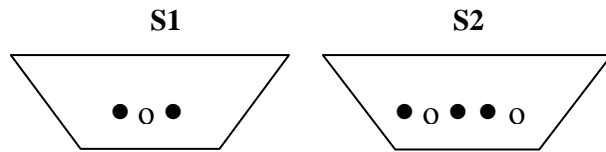
(Le tirage se fait au hasard)

Mettez une croix dans la case de votre choix et justifiez votre réponse.

| | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| le sac S1 | le sac S2 | pas de raison de préférer l'un des sacs |

EXERCICE B1 (du type Td)

Matériel : deux sacs, **S1** contenant 1 boule blanche et 2 boules noires (1b-2n) et **S2** contenant 2 boules blanches et 3 boules noires (2b-3n).



Question : quel sac choisiriez-vous pour avoir le plus de chances de tirer une boule blanche ?

(Le tirage se fait au hasard)

Mettez une croix dans la case de votre choix et justifiez votre réponse.

| | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| le sac S1 | le sac S2 | pas de raison de préférer l'un des sacs |

Par rapport aux exercices du premier test, nous avons apporté essentiellement deux modifications. La première modification est au niveau de la variable "contenu des sacs" que nous n'avons pas prise en considération dans notre premier test : les rapports "nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles" est, à notre sens, plus simple et l'opérateur multiplicatif faisant passer le nombre des boules blanches de S1 au nombre de boules blanches de S2 est égal à 2, ce qui pourrait favoriser le type d'organisation *G* « collection intermédiaire ». La deuxième modification est au niveau de la formulation : dans les exercices complémentaires, nous donnons toutes les réponses possibles.

11.3. La population

La population testée est constituée de deux classes de 9^{ème} année de base, soit un nombre total de 58 élèves (de 14 ans à peu près). La passation est effectuée au début du mois d'Octobre 2005 (début de l'année scolaire 2005-2006).

11.4. Plan expérimental et méthode

Ce test complémentaire est présenté sous la forme de deux versions : la version A comprenant l'exercice A1 et la version B l'exercice B1, chaque version commençant par un encadré où est écrit « tirer au hasard signifie que le tirage se fait sans voir dans le sac et après mélange des boules ».

Ce test est soumis, aux deux classes retenues, en passation collective sous la direction de leur professeur de mathématiques à qui nous avons demandé de lire l'encadré juste après la

distribution des feuilles ; il est distribué de façon que deux élèves occupant la même table n'aient pas la même version.

11.5. Résultats

Dans cette partie, nous abordons les organisations développées par les élèves testés ainsi que les performances.

11.5.1. Les organisations développées

Nous avons illustré les organisations développées par des exemples dans Dhieb (2007). Ici, nous allons nous limiter à la reprise du tableau VII.1 en ôtant les organisations que nous ne retrouvons pas, en ajoutant les organisations supplémentaires et en soulignant les techniques retrouvées dans ce complément :

▪ Tableau VII.12

Codes, intitulés, technologies et techniques
des types d'organisations personnelles (complément)

| Code | Intitulé | Technologie | Techniques associées |
|-----------|------------------------------------------|---------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>P</i> | <i>cas favorables / cas possibles</i> | θ_p : dépendance du rapport <i>f/p</i> | - $\tau_{f/p}$: <i>comparaison des rapports f/p</i> - τ_{prop} : <u>proportion</u> |
| <i>P'</i> | <i>cas favorables / cas défavorables</i> | $\theta_{p'}$: dépendance du rapport <i>f/d</i> | - $\tau_{f/d}$: <i>comparaison des rapports f/d</i> - τ_{oi} : <u>opérateur interne</u> - τ_{prop} : <i>proportion</i> |
| <i>G</i> | <i>collection intermédiaire</i> | θ_G : dépendance du rapport des deux collections | - τ_{oe} : <u>opérateur externe</u> |
| <i>N</i> | <i>cardinal partie</i> | θ_N : comparaison des cardinaux de deux parties | - τ_{Nf} : <u>comparaison des cas favorables</u> - τ_{Nd} : <u>comparaison des cas défavorables</u> |
| <i>T</i> | <i>cardinal tout</i> | θ_T : comparaison des totaux | τ_T : <u>calcul des sommes des favorables et défavorables</u> |
| <i>D</i> | <i>différence</i> | θ_D : comparaison de deux différences | - $\tau_{D d-f}$: <u>différence cas défavorables et cas favorables</u> - $\tau_{D 1-2}$: <u>différence collections</u> |
| <i>I</i> | <i>non identifié</i> | θ_I : absente ou incompréhensible | τ_I : <u>inconnues</u> |
| <i>C</i> | <i>combiné</i> | succession de technologies | <u>succession de techniques</u> |
| <i>CP</i> | <i>compatibilité</i> | θ_{CP} : compatibilité avec les deux collections | - $\tau_{comp fd}$: <i>comparaison cas favorables et cas défavorables</i> |

Bien entendu, dans ce tableau, nous ne retrouvons pas l'organisation A « aire » ni l'organisation R « répartition » qui sont exclusives aux roulettes. Quant à l'organisation M « mécanique », elle n'aura plus à avoir lieu puisqu'elle est liée à la présentation des sacs qui n'est plus la même dans ce test complémentaire puisque dans le premier test, nous avons présenté un sac dans lequel le nombre de boules blanches était écrit au dessus du nombre de boules noires.

Par ailleurs, nous trouvons un nouveau type d'organisations (dernière ligne du tableau, en gras) : le type CP « compatibilité ». Nous résumons la technologie personnelle θ_{CP} associée de la façon suivante :

« La probabilité d'un événement dépend de sa compatibilité avec la collection choisie ».

La technique relevée est la technique $\tau_{comp\ fd}$ (comparaison cas favorables et cas défavorables) qui consiste à comparer le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles dans chacun des deux sacs pour valider la réponse du choix indifférent :

Exemple 34 : Exercice A1 : (S1 : 1b-2n / S2 : 2b-4n) ; événement attendu : blanc.

Réponse de SIR. : "... on a les mêmes chances avec les deux sacs puisqu'on a toujours les boules noires qui sont plus nombreuses que les boules blanches."

Il faut dire que nous avons d'abord pensé qu'une telle réponse peut être classée dans la catégorie D et nous aurions aussi pu la classer dans la catégorie N , mais nous avons finalement choisi de la classer dans une catégorie à part : CP « compatibilité ». Ce choix revient au fait que d'une part, les différences des boules noires et des boules blanches n'est pas la même dans les deux sacs pour l'exercice 1 et d'autre part la comparaison ne se fait pas entre les boules de même couleur. Notons toutefois que la technique associée à une organisation du type CP consiste à signaler l'existence des deux couleurs dans les deux collections. Nous trouvons cette technique dans une autre situation où l'événement considéré est constitué de plus d'un élément (cf. chapitre suivant, 5.1.1).

Notons d'autre part qu'on assiste dans ce complément à la disparition des organisations mixtes, c'est-à-dire d'organisations combinées formées par une organisation pertinente (du type P , P' ou G) et une autre qui ne l'est pas. D'ailleurs, nous n'avons trouvé que seulement deux organisations combinées, l'une de type (T, N) et l'autre de type (I, N) .

Nous imputons aussi bien l'apparition des organisations du type CP « compatibilité » que la disparition des organisations mixtes à la formulation et notamment à la donnée de tous les choix possibles dans les énoncés.

Remarquons finalement que la disparition des techniques $\tau_{f/p}$ (comparaison des rapports f/p) et $\tau_{f/d}$ (comparaison des rapports f/d) pourrait être expliquée par la rareté des types d'organisations correspondantes.

11.5.2. Les performances

Commençons par mentionner un effet de formulation. Contrairement aux réponses au test 1, la fréquence des réponses correspondant à un choix indifférent est considérable : nous comptons 13 réponses dans le type de tâches Tp (exercice A1) et 11 réponses dans le type Td (exercice B1). Notons toutefois que bien que la réponse indifférente est juste dans le cas de proportionnalité (Tp), les justifications ne le sont pas dans la majorité des cas (8 cas sur 13).

Récapitulons les résultats obtenus dans le tableau suivant :

▪ Tableau VII.13

Effectifs des types d'organisations selon l'exercice et pourcentages associés (complément)

| Type \ Exercice | <i>P</i> | <i>P'</i> | <i>G</i> | <i>N</i> | <i>T</i> | <i>D</i> | <i>CP</i> | <i>I</i> | <i>C</i> | Total |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|------------|-----------|------------|----------|------------|
| A1 (Tp) | 1 3,5% | 1 3,5% | 3 11% | 12 43% | 2 7% | 1 3,5% | 2 7% | 6 21,5% | 0 0% | 28 100% |
| B1 (Td) | 0 0% | 1 3,5% | 1 3,5% | 9 32% | 3 11% | 4 14,5% | 1 3,5% | 7 25% | 2 7% | 28 100% |

Il ressort de ce tableau trois points :

D'abord et contrairement à la fréquence de la conception *N* « cardinal partie » qui est presque la même aussi bien dans le test 1 que dans le complément, nous constatons que la fréquence des conceptions inconnues a diminué de presque 10 % dans cette expérimentation.

Ensuite, nous remarquons que la fréquence moyenne des conceptions pertinentes (*P*, *P'* et *G* rassemblés) passe de moins de 2,5 % dans le test 1 à 12,5 % dans ce test complémentaire. Nous nous demandons si cette amélioration des performances est due à la différence de l'ordre de difficulté attaché à la variable "contenu des sacs" et/ou à la donnée de tous les choix possibles dans l'énoncé. Nous répondons à cette question dans un chapitre ultérieur (cf. chapitre IX, sous 4.4). Notons toutefois que la fréquence de la conception *P* qui est conforme à la définition "habituelle" de quantification de la probabilité uniforme dans l'institution scolaire est très négligeable, sinon presque nulle.

Enfin, ce complément nous permet de constater une adéquation avec "le modèle piagétien" montrant que la réussite est plus importante dans le cas de proportionnalité (Tp) que dans le cas de comparaison à deux variables (Td), chose qui n'a pas été nettement observée dans le test 1. Remarquons à ce propos qu'un des élèves a partagé, dans sa réponse à l'exercice A1, le contenu du sac S2 en deux ensembles équivalents chacun au contenu du sac S1, ce qui correspond à une résolution empirique d'un cas de proportionnalité qu'on peut rencontrer, d'après Piaget et Inhelder (1951) vers la fin du stade des opérations concrètes.

12. Conclusions

Nous avons appelé conception d'un objet mathématique l'ensemble des organisations personnelles $[T_i, \tau_i, \theta]$ formées autour d'un même discours technologique personnel où les types de tâches T_i relèvent de l'objet mathématique en question. Ainsi nos conclusions à propos des organisations personnelles sont les mêmes pour les conceptions correspondantes.

Grâce à la méthode d'interrogation retenue, cette expérimentation, représentant pour les élèves testés une première rencontre dans l'institution scolaire avec la quantification des probabilités, nous a permis d'accéder à une multitude de conceptions de quantification des probabilités, mobilisées par des élèves de 8^{ème} année de base lors de la résolution d'une situation de prévision a priori.

Nous avons eu affaire à des conceptions adéquates assez rares (représentant 6 % des 1016 réponses aux exercices 3, 4, 5 et 6 - contre 36 % pour Maury 1984) : la conception « aire » A, la conception P « cas favorables / cas possibles », la conception P' « cas favorables / cas défavorables » et la conception G « collection intermédiaire ».

Pour la conception A, les élèves n'explicitent pas les informations numériques pertinentes. La technique perceptive utilisée est souvent mal utilisée. Par contre, les conceptions P, P' et G nous semblent être le signe d'une maîtrise de la quantification des probabilités.

Nous avons aussi relevé cinq conceptions erronées mobilisées en masse (94 % des réponses), dont deux correspondent à des techniques perceptives (la conception R « répartition » et la conception M « mécanique ») et trois ont un domaine de validité comportant les problèmes relevant de la situation de prévision à une seule variable (la conception N « cardinal partie », la conception T « cardinal tout » et la conception D « différence »). Notons que les réponses se basant exclusivement sur la comparaison d'une seule variable (nombre de cas favorables, nombre défavorables ou nombre de cas possibles) sont assez fréquentes, elles dépassent le

tiers de la totalité des réponses. Par ailleurs, nous n'avons pas trouvé d'équivalent à la conception *M* « mécanique » dans Maury (1984).

Il faut aussi signaler que 34 % des réponses relèvent de conceptions qui nous sont inconnues et 5 % de réponses associées à des conceptions combinées parmi lesquelles 22 réponses mixtes (un triplet et 21 couples).

Soulignons, par ailleurs, que la réussite globale est plus importante avec la modalité "Roulettes" qu'avec la modalité "Boules" (11 % contre 1,5 %), ce qui est en désaccord avec les résultats de Maury (1984) qui donnent 31 % avec les roulettes 41 % avec les boules.

Les conceptions *P*, *P'* et *G*, qui représentent, rassemblées, environ 2,5 % des réponses sont utilisées très souvent d'une façon fugitive (parmi les 24 élèves ayant mobilisé au moins une conception pertinente, 14 ont développé l'une de ces conceptions une seule fois).

Quant à la conception *P*, elle ne concerne qu'environ 1 % de la totalité des réponses (dans le cas des boules, elle n'atteint même pas 0,3 % dans le test et elle est de l'ordre de 1,8 % dans le complément), ce qui nous permet de valider notre hypothèse disant que la notion d'équiprobabilité déterminée par le modèle mathématique « nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles » ne correspond pas à une conception spontanée partagée par un certain nombre d'élèves de 8^{ème} année de base (13-14 ans).

Nous retenons que la variable « référent » a un impact considérable sur les conceptions mobilisées. D'une part, il semble que la modalité "Roulettes" favorise mieux l'apparition de la conception *P* « cas favorables / cas possibles » et que la conception *P'* « cas favorables / cas défavorables » marque un léger avantage avec les boules (pour Maury (1984), la dernière conception est essentiellement liée aux boules).

D'autre part, les organisations *N*, *R* et *M* rassemblées représentent 48 % des organisations développées pour les roulettes et *N*, *D* et *T* rassemblées représentent 58 % des organisations utilisées dans le cas des boules, *D* et *T* étant presque exclusives aux boules.

À propos des réponses fausses, tout se passe comme si :

- pour les boules, l'attention des élèves se porte d'abord sur le cardinal d'une partie (ensemble de cas favorables ou ensemble de cas défavorables), ensuite sur la différence entre les parties et enfin sur le tout,
- pour les roulettes, l'attention des élèves se porte d'abord sur le cardinal d'une partie (le nombre de secteurs ayant la même couleur, la couleur favorable), ensuite sur une caractéristique perceptive de l'énoncé.

Notre test est présenté avec la modalité "Roulettes" (exercices 3 et 4) puis avec la modalité "Boules" (exercices 5 et 6) de façon à mettre en relief un effet éventuel de la première modalité sur la seconde. Cependant, nos résultats n'ont montré aucun effet de ce type.

La variable « type de tâches » se décline ici en deux modalités : Td "comparaison à deux variables" et Tp "proportionnalité". Les résultats de notre premier test ont mis en évidence une légère hausse des conceptions pertinentes en faveur du type de tâches "proportionnalité". Nous expliquons cette légère hausse aussi bien au fait que la question "quel sac choisiriez-vous ... ?" inciterait l'élève à faire un choix exclusif de l'un des sacs et donc ne favoriserait pas la modalité "proportionnalité" sur la modalité "comparaison à deux variables" qu'à un effet du contrat tel que signalé en haut (cf. 5.1.1). Il faut dire que l'adéquation avec l'hypothèse piagétienne donnant un ordre de réussite plus important pour le cas de proportionnalité est plutôt visible dans les exercices du complément que dans ceux du test 1.

Nous conjecturons toutefois, vus les résultats de notre test et ceux de Maury (1987), que l'effet de cette variable « type de tâches » sur les conceptions mobilisées par les élèves de 8^{ème} année de base dans la situation de prévision dépend de la difficulté des tâches.

Passons maintenant à la réponse de l'élève KHO. (G1, n° 14). Après avoir choisi la roulette R2 dans l'exercice 3, elle a souligné la possibilité de ne pas obtenir la couleur blanche qu'après répétition de l'expérience plusieurs fois.

Dans cette réponse, nous reconnaissons les caractéristiques d'une expérience aléatoire qui est une expérience *reproductible* devant conduire à *un ensemble d'issues possibles* qui dépendent du *hasard*.

La dernière réponse relève-t-elle d'un point de vue fréquentiste ? Autrement dit, cette élève pense-t-elle que choisir blanc correspond à une stratégie pouvant être localement contredite mais restant globalement valable ? Ou bien exprime-t-elle un point de vue événementiel : elle se place dans l'ensemble des événements possibles {B, N} ?

Alarcon (1982) insiste sur la coexistence de deux univers, celui des "événements" et celui des "choix possibles et des probabilités" dans les situations aléatoires. Dans les exercices de notre test où il est question de deux collections C1 et C2, le premier univers est {B, N} et le second est l'ensemble {probabilité de B dans C1 supérieure à probabilité de B dans C2 et choix de C1, probabilité de B dans C1 inférieure à probabilité de B dans C2 et choix de C2, égalité des probabilités et choix indifférent}.

Est-ce que la très faible fréquence des réponses relevant du type P et la très faible fréquence des réponses indifférentes dans le cas de proportionnalité permettent de conjecturer que la plupart des élèves ne distinguent pas ces univers et sont ainsi prisonniers de celui des événements ?

Pour le cas de proportionnalité, la fréquence considérable des élèves ayant préféré l'un des sacs nous a permis, avec Maury, de soupçonner une pression de la question. Cette explication est formulé autrement par Zaki (1988), il explique que ces élèves ont choisi l'un des sacs car ils se sont placés dans une situation de décision suite à la formulation de la question : "choisir ...". Nous ajoutons que le contrat didactique habituel instauré en classe de mathématique pourrait expliquer le choix exclusif : les élèves n'ont pas l'habitude de donner plus qu'une réponse à un exercice de mathématiques.

Quoiqu'il en soit, il semble que les élèves n'ont pas pu en général faire l'inventaire des choix possibles bien que d'après Piaget (1976) les enfants du niveau formel commencent par faire cet inventaire avant de donner la réponse. Même dans le cas où l'on énumère tous les choix possibles (cf. 11), les collégiens éprouvent des difficultés quant à l'abord spontané des probabilités.

Dans la situation de prévision que nous avons étudiée dans ce premier test, l'incertitude concerne le résultat du tirage. Alors que se passe-t-il dans le cas où l'incertitude concerne le choix du sac convenable (le résultat du tirage étant donné) et la question comprend l'inventaire des choix possibles ? C'est ce que nous analyserons dans le chapitre suivant.

Chapitre VIII.

Deuxième test diagnostic : Portée du jugement probabiliste des jeunes élèves

- 1. Introduction*
- 2. L'appréhension des situations probabilistes chez des élèves de 12-14 ans*
- 3. Présentation du deuxième test diagnostic*
- 4. Analyse a priori*
- 5. Les organisations personnelles développées*
- 6. Résultats de l'exercice 1 : compréhension de la remise*
- 7. Résultats pour l'exercice 6 : le sac inconnu*
- 8. Autres résultats*
- 9. Conclusion*

1. Introduction

Le premier test nous a permis de toucher les difficultés qu'éprouvent les élèves de la 8^{ème} année de base lors de la résolution de la situation "de prévision". Nous avons énuméré un certain nombre de conceptions spontanées non adéquates qu'un enseignement au collège devrait prendre en considération.

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à un autre type de situations. Notre point de départ est la thèse d'Alarcon 1982.

2. L'appréhension des situations probabilistes chez des élèves de 12-14 ans (Alarcon 1982)

Dans sa thèse de doctorat, Alarcon (1982) présente les résultats d'une enquête menée auprès d'élèves de 12-14 ans concernant leur appréhension des situations probabilistes. Il choisit une situation qui, à son avis, est plus propice à l'observation de l'univers sur lequel se centrent les raisonnements des enfants : l'univers des événements auquel appartient le résultat du tirage ou l'univers des choix possibles (les sacs) et leurs probabilités. Il s'intéresse ainsi à la portée du jugement probabiliste d'enfants d'un niveau avancé du point de vue génétique (de 12 à 14 ans).

Situation probabiliste retenue

Alarcon a choisi une situation type de décision "a posteriori". Il est question de retrouver, parmi deux sacs contenant des boules blanches et des boules noires celui dans lequel ont été fait un ou plusieurs tirages avec remise.

Cette situation reste proche de la situation de prévision dans son aspect comparaison des rapports provenant de chacun des sacs.

Il considère que, contrairement à la situation de prévision, l'incertitude ne concerne pas le résultat du tirage (qui est donné) dans la situation de décision, elle concerne seulement le choix du sac pris lors du tirage.

Méthodologie

La population testée est composée de six classes de cinquième (144 élèves) et de six classes de quatrième (159 élèves).

Alarcon a mis au point, après des entretiens préliminaires, une épreuve standardisée concrétisée par trois questionnaires (A, B et C) comportant des questions à choix multiples (QCM) nécessitant chacune une seule réponse et des questions vrai/faux (QVF). Dans toutes les questions, il n'y a pas de demande de justification. En ce qui concerne la probabilité, nous comptons en tout 21 exercices différents : 7 correspondant à un seul tirage et 14 à une série de tirages avec remise.

Dans chacun des questionnaires, sont d'abord posées cinq questions à choix multiples relevant de la situation de "mélange physique" : on présente à l'enfant deux carafes sous lesquelles il y a un certain nombre de verres de jus d'orange et un certain nombre de verres d'eau et on lui demande de mettre une croix là où le mélange aura le plus fort goût d'orange (trois carreaux sont dessinés, un sous chaque carafe et un entre les deux sous lequel est indiqué "même goût dans les deux carafes"). Cette situation est inspirée du travail de Noelting (1980a) sur les notions de rapport et de proportion. Notons que les questions de Noelting sont des questions ouvertes avec demande de justification.

Sont ensuite présentées des questions portant sur une série de tirages auxquelles succèdent des questions qui portent sur un seul tirage. Les questionnaires B et C comportent chacun neuf QCM pour le cas d'une série de tirages et cinq QVF pour le cas d'un seul tirage, par contre le questionnaire A comprend dans l'ordre sept QVF et sept QCM.

Les élèves ont à choisir, dans le cas des QCM, entre cinq modalités :

- (1) : forcément le sac 1,
- (2) : plutôt le sac 1,
- (3) : pas de raison de préférer l'un des sacs,
- (4) : plutôt le sac 2,
- (5) : forcément le sac 2.

La passation a été effectuée d'une façon collective (les trois questionnaires ont été répartis et distribués de manière équitable dans chacune des classes, deux élèves assis côte à côte ne

devant pas avoir le même questionnaire) et presque tous les élèves ont rendu leur questionnaire au bout de 40 minutes.

Classification des réponses

Pour les exercices présentés sous forme de QCM, les réponses considérées correctes sont :

- « forcément le sac 1 » (respectivement « le sac 2 ») si le résultat du tirage est incompatible avec la composition du sac 2 (respectivement du sac 1) ;
- « plutôt le sac 1 » (resp. « le sac 2 ») dans l'un des deux cas suivants :
 - (i) il est plus probable que le tirage ait été fait dans le sac 1 (resp. dans le sac 2),
 - (ii) la composition du sac 1 (resp. du sac 2) est inconnue et il est peu probable que le tirage ait été fait dans le sac connu ;
- pas de raison de préférer l'un des sacs dans les autres cas.

Quelques conclusions

Pour la situation probabiliste (un seul tirage ou une série de tirages), nous nous limitons dans la suite aux situations du type QCM.

* Situation probabiliste (un seul tirage)

Dans le cas d'un seul tirage, Alarcon conclut que dans leur réponse, un nombre considérable d'élèves se limitent à constater la compatibilité ou l'incompatibilité du tirage avec le contenu de chacun des deux sacs. D'ailleurs, il précise :

“On voit donc que les questions les mieux réussies et qui en même temps permettent d'observer des différences entre 4^{ème} et 5^{ème} sont celles pour lesquelles la réponse exacte n'implique pas la mise en jeu de la notion de probabilité, mais seulement la prise en compte de la compatibilité du tirage avec le contenu des sacs.” (p. 98)

Remarquons que l'auteur montre l'existence d'un décalage entre l'appréhension des rapports arithmétiques en situation de mélange physique et en situation probabiliste.

* Situation probabiliste (une série de tirages)

Pour les questionnaires B et C, le pourcentage de réussite en 4^{ème} est presque toujours supérieur à celui en 5^{ème}. La différence varie entre 12 % et 35 % environ.

Par exemple, la réussite simultanée aux deux items du questionnaire B où les contenus des deux sacs sont proportionnels (choix équiprobables) est de 37 % en 5^{ème} et de 57 % en 4^{ème}. Alarcon mentionne, pour ces cas, une difficulté qui est "masquée" dans le cas d'un seul tirage : reconnaître que le résultat, donc l'univers des événements n'intervient pas dans la

comparaison. Il remarque que la réussite aux choix équiprobables est signe que le jugement de l'enfant s'est porté sur les probabilités.

Il conclut toutefois que le raisonnement des enfants est en général prisonnier de l'univers des événements, il est centré sur le lien entre l'événement qui s'est produit et ce qui pourrait être tiré dans chaque sac et ceci pour des rapports arithmétiques simples ayant donné une réussite presque totale en situation de mélange physique. D'ailleurs, dans les cas d'incertitude, le choix du sac peut s'arrêter à la compatibilité de l'événement produit avec les deux sacs et l'élève opte pour la non préférence de l'un des sacs.

Il remarque aussi que, contrairement aux élèves de 5^{ème}, les élèves de 4^{ème} ont souvent réussi (12/51 fois) toutes les situations QCM du questionnaire B, ce qu'il considère comme significatif d'une réussite probabiliste.

Pour le cas du tirage peu probable dans le sac connu PPR6 (X-3b1n / 2b4n)⁸², Alarcon se demande si les élèves qui ont choisi le sac inconnu l'ont fait en se disant que cela paraît difficile de tirer 4n dans un sac contenant 1n ou en se basant sur le fait qu'il y a plus de blanches dans le sac et plus de noires dans le tirage. Il dit que si le premier raisonnement est purement événementiel, il serait très simpliste de compter le second comme étant un raisonnement probabiliste.

Il laisse finalement ouvert le problème de la compréhension du tirage avec remise.

Quelques remarques

Dans Noelting (1980a et 1980b), les justifications font penser aux organisations personnelles du type *N* « cardinal partie » et du type *D* « différence » que nous avons relevées dans le chapitre précédent. Par exemple, à l'item⁸³ (4, 2) vs (2, 1), une élève de plus de 11 ans donne une réponse en faveur de la carafe 1 (A) ; *'because there is 1 glass of juice more than in B'* (Noelting 1980a, p. 232). L'auteur explique :

$$(4, 2) = (2, 2) + (2, 0)$$

$$(2, 1) = (1, 1) + (1, 0)$$

$$(2, 0) > (1, 0).$$

⁸² Un contenu inconnu pour le premier sac, 3boules blanches et 1 boule noire pour le deuxième sac, 1 boule blanche et 2 boules noires pour le tirage.

⁸³ Pour cet item, la première carafe contient 4 verres de jus d'orange et 2 verres d'eau et la seconde contient 2 verres de jus d'orange et 1 verre d'eau.

On retrouve, relativement à l'item (4, 2) vs (5, 3), une explication similaire pour la réponse d'une élève de 13 ans qui donne un choix indifférent pour les deux carafes (ibid. p. 233).

Quant à une explication possible de la faible réussite dans l'item (4, 3) vs (3, 2) d'Alarcon, nous pensons que le nombre considérable d'élèves ayant choisi le même goût pour les deux carafes (aux alentours de 75% pour chacun des deux niveaux) ont développé une organisation du type *D* « *différence* », et en consultant son tableau récapitulatif des réponses (Alarcon 1982, p. 83), nous notons que les réponses les plus fréquentes dans les autres items de la situation du mélange proviennent d'une organisation du type *N* « *cardinal partie* » et plus précisément de la comparaison des nombres de verres favorables au goût du jus d'orange.

Compte tenu de notre ignorance des raisonnements produits par les enfants, nous nous interrogeons sur deux points :

- Peut-on parler d'une réussite presque totale en situation de mélange physique ?
- Peut-on conclure qu'en général le raisonnement des enfants est prisonnier de l'univers des événements ?

Nous convenons que « raisonnement événementiel » est synonyme de confusion entre possible et probable. Soit qu'il est orienté vers la comptabilité des contenus des sacs avec l'évènement qui s'est produit, soit qu'il est centré sur le lien entre le tirage effectué et ce qui pourrait être tiré des deux sacs.

3. Présentation du deuxième test diagnostic

3.2. Population et situation choisies

La population testée correspondant à 5 classes de 8^{ème} année de base, soit un nombre total de 152 élèves (13-14 ans).

Ces élèves proviennent de l'école préparatoire (EP) al-Moezzia de Oued Ellil relevant de la direction régionale de l'enseignement (DRE) de Manouba, de l'EP Monji Slim de Sidi Rzig qui dépend de la DRE de Ben Arous et de l'EP 7 Novembre de Mateur qui relève de la DRE de Bizerte.

Situation choisie

Nous exploitons dans ce deuxième test la situation qu'Alarcon (1982) nomme situation de décision "a posteriori" et que Zaki (1988) appelle situation de prévision "a posteriori".

Pour ce dernier, une situation de décision ne doit comporter, dans le cas de deux collections C_1 et C_2 , que deux alternatives dans la réponse (ou bien C_1 ou bien C_2) ; il n'y a donc pas de réponse indifférente, contrairement à la situation de prévision où les degrés dans le choix d'un sac sont admis. Il conclut :

‘‘En définitive, dans une situation de décision, le jugement probabiliste n'intervient pas tout seul. Par définition d'une décision, il y a comme on l'a déjà dit plus haut, apparition d'une fonction de risque, elle-même liée à la règle (ou fonction) de décision. Le sujet dans ce cas là sera amené à produire une réponse en faveur de l'un et un seul des deux sacs, moyennant une stratégie (pertinente ou non), toujours accompagnée d'un double risque : celui de ne pas choisir le bon sac (risque de première espèce), et celui de choisir le mauvais sac (risque de deuxième espèce), ces deux risques n'étant pas bien sûr symétriques.’’ (Zaki 1988, p. 207)

Signalons cependant que pour un mathématicien, la décision provient de la seule pondération des probabilités et le risque est calculé à partir de cette même pondération.

Pour notre travail, nous gardons le nom donné par Alarcon : situation de "décision a posteriori".

Dans ce test, notre choix est fait sur le cas d'une série de tirages car, il nous semble que pour un seul tirage les résultats auxquels on peut s'attendre ne diffèrent pas trop de ce que nous avons trouvé dans la situation de prévision du chapitre précédent.

3.2. Objectifs du test

Kahneman et Tversky (1972) nous apprennent que, dans quelques situations probabilistes, les sujets peuvent confondre probabilité et représentativité, la représentativité étant une qualité attribuée à un événement représentatif de l'ensemble des événements ou au processus (le hasard) qui l'a engendré. Il parle alors de « biais de représentativité ».

Étant donné que la situation retenue consiste en la recherche de la population la plus probable d'où provient un échantillon donné, nous nous demandons comment un élève, qui n'a qu'un rapport non scolaire à la notion de probabilité, pourrait raisonner dans sa recherche.

Notre deuxième test diagnostic s'intéresse aux conceptions mobilisées par des élèves de la 8^{ème} année de base dans l'accomplissement de types de tâches relevant de la situation de "décision a posteriori". Notre intérêt porte notamment sur les techniques faisant partie de ces conceptions. À ce propos, nous émettons l'hypothèse que les élèves de 8^{ème} année de base (de 13 à 14 ans) utilisent en masse, des techniques non basées sur la comparaison de fractions dans des problèmes relevant de la situation de "décision a posteriori".

Notons que Rouan et Pallascio (1994) testent la "représentativité de la population" en interrogeant les élèves devant l'expérience consistant à tirer six billes d'un sac contenant

60 000 billes noires et 30 000 billes blanches, de juger si les résultats BNNBNN, BBBNBN, BBBBNN et BBBBBB sont fort probables, probables, peu probables ou impossibles.

Pour notre test, la taille de chaque population (les sacs) étant inférieure à la taille de l'échantillon tiré (cf. 3.3.), nous voulons tester la compréhension du tirage avec remise. Notre hypothèse, à ce propos, est que beaucoup d'élèves de 8^{ème} année auront du mal à comprendre le tirage avec remise.

Par rapport aux conclusions d'Alarcon, nous posons les questions suivantes :

- Est-ce que la réponse indifférente (3) au choix équiprobable est un signe de raisonnement probabiliste ?
- Comment se comportent les élèves dans le cas du tirage peu probable dans le sac connu PPR6 (X-3b1n / 2b4n) ?
- Est-ce que le raisonnement des élèves est plutôt événementiel ?
- Dans l'incertitude, la réponse de l'élève s'arrêtera-elle généralement à la compatibilité du tirage avec les deux sacs ?

3.3. Types de tâches choisies

Nous avons opté pour une situation de "décision a posteriori" que nous résumons comme suit : « choisir, parmi deux sacs S1 et S2 comportant b_1 boules blanches et n_1 boules noires pour la première et b_2 boules blanches et n_2 boules noires pour la seconde, celui dans lequel a été tiré, avec remise, un échantillon comprenant b_t boules blanches et n_t boules noires ».

Notre test est composé de six exercices sous forme de QCM (cf. annexe 3). Les modalités proposées dans chacun de ces exercices sont :

- (1) forcément le sac S1,
- (2) plutôt le sac S1,
- (3) pas de raison de préférer l'un des sacs,
- (4) plutôt le sac S2,
- (5) forcément le sac S2.

Les modalités sont suivies d'une demande de justification.

Nous distinguons deux types de tâches : le type Tc où les deux sacs sont connus (ont une composition connue) et le type Ti où l'un des deux sacs est inconnu.

Les cinq premiers exercices appartiennent au type de tâches Tc et le sixième relève du type de tâches Ti.

Dans chacun des exercices 1, 2, 3, 4 et 5 les boules contenues dans un seul sac ne peuvent pas donner la série de tirages si l'on suppose que le tirage est sans remise.

Le premier exercice, noté SUR6 (2b1n-3n / 3b3n), est un cas de choix sûr.

Les 2^{ème}, 4^{ème} et 5^{ème} exercices sont des cas où l'un des sacs est plus probable que l'autre, nous les appelons des cas de choix non équiprobable. Les énoncés des exercices 2 et 4 présentent chacun un cas de contraste entre le tirage et le contenu de l'un des sacs, ce qui n'existe pas dans l'exercice 5 :

- Le 2^{ème} exercice, noté PRO6 (1b3n-3b1n / 2b4n), se trouve dans Alarcon (1982) ; dans cet exercice, le total des boules des deux sacs suffit pour avoir le contenu du tirage.

- Dans les exercices 4 et 5, notés PRO10 (3b2n-2b3n) et PRO100 (1b4n-4b6n / 25b75n), la totalité des boules des deux sacs n'est pas suffisante pour couvrir le tirage donné.

L'exercice 3, noté EQU10 (2b3n-4b6n / 3b7n), est un cas de choix équiprobable.

Le 6^{ème} exercice du choix peu probable dans le sac connu est noté PPX6 (X-3b1n / 2b4n).

Notre test est choisi de façon à répondre à nos objectifs :

- Paraissant simple, le premier exercice est choisi afin de familiariser les élèves à la situation et surtout au tirage avec remise. Il nous donnera aussi une réponse concernant la compréhension du tirage avec remise : dans cet exercice, l'un des deux sacs (le sac S2) n'est pas compatible avec le tirage et le total des boules des deux sacs n'est pas suffisant pour obtenir le contenu du tirage en question.

- Entre l'exercice 2 et l'exercice 4 du choix non équiprobable, il y a une variation dans le contraste entre le tirage et l'un des deux sacs. Dans ces exercices, le contraste peut à lui seul donner la réponse conforme à la norme mathématique⁸⁴. Il est utile de signaler que l'effectif total est le même dans les deux sacs.

- Dans l'exercice 5 qui est aussi un cas où l'un des deux sacs est plus probable que l'autre, la grandeur de l'effectif des boules dans le tirage est conçue pour tester une éventuelle tendance à l'utilisation des fractions.

- L'exercice 3 est un cas de choix équiprobable, il peut nous montrer si la réponse indifférente (3) découle toujours d'un raisonnement probabiliste.

- L'exercice 6 permet d'observer le comportement des élèves devant un sac dont le contenu est inconnu.

⁸⁴ Nous appelons une réponse correcte mathématiquement si elle coïncide avec la décision la plus probable (cf.4).

3.4. Plan expérimental et méthode

Plan expérimental

Dans notre test, il y a deux modalités pour la variable "type de tâches", la modalité Tc et la modalité Ti. La première concerne les exercices 1, 2, 3, 4 et 5 où, d'un exercice à l'autre, les contenus des sacs ainsi que la série de tirages diffèrent. La seconde concerne seulement l'exercice 6.

Méthode

Maury (1985) nous apprend à être prudents quant à l'interprétation des performances lors d'épreuves relatives aux statistiques ou aux probabilités. Nous ne voyons donc pas comment avoir des éléments de réponses à nos questions sans demande de justification.

Notre test constitue une épreuve standardisée (qui s'apprête notamment aux analyses statistiques) avec demandes de justifications. Il est présenté sous forme d'un cahier comportant six exercices et soumis en passation collective aux cinq classes constituant notre population, dans leur salle de classe, sous la direction de leur professeur de mathématiques.

Cette épreuve a été d'abord testée auprès d'un groupe de 12 élèves que nous ne prenons pas en considération dans la suite. Nous n'étions pas déçus quand à la diversité des réponses et des justifications indiquant la mobilisation de plusieurs conceptions spontanées erronées. De ce pré-test, nous avons remarqué un problème quant à la compréhension du tirage avec remise.

Nous avons demandé aux professeurs chargés de la passation de préciser aux élèves que le test n'aura aucun impact sur leurs moyennes et qu'il s'agit d'un travail de recherche. Nous avons insisté sur la demande de justification et de faire lire attentivement aux élèves la première page du cahier présentant le test (cf. annexe 3) ainsi que l'énoncé du premier exercice tout en explicitant le tirage avec remise. La passation a été effectuée à la fin du mois d'avril 2005.

4. Analyse a priori

Comment résoudre pertinemment les exercices de notre test et quelles sont nos attentes ?

Une réponse relevant de la modélisation dans le cadre des mathématiques formelles

Commençons par répondre à la question générale suivante : comment calculer la probabilité d'avoir k boules blanches dans n tirages avec remise dans un sac S contenant des boules blanches et des boules noires ?

Considérons un sac S contenant des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion $q = 1 - p$. Intéressons nous, pour l'instant, à l'expérience aléatoire consistant à tirer, avec remise, n boules du sac (il s'agit d'une succession de n expériences de Bernoulli indépendantes, identiques, de paramètre p si l'on suppose que le tirage d'une boule blanche correspond à un succès B et celui d'une boule noire à un échec N).

Désignons par Ω l'univers associé à cette expérience ; $\Omega = \{B, N\}^n$.

Définissons sur Ω la variable aléatoire réelle X_n de la manière suivante :

$$\forall \omega \in \Omega, X_n(\omega) = \text{nombre de } B \text{ de } \omega.$$

X_n désigne ainsi le nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages.

On a alors $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Le moyen le plus simple de déterminer la loi de probabilité de X_n est de déterminer la valeur de $\Pr(X_n = k)$ pour $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

L'événement $(X_n = k)$ est réalisé pour un n -uplet comportant k succès B et $(n-k)$ échecs N .

Les successions de B et de N étant indépendants (tirages avec remise), la probabilité d'obtenir k succès et $(n-k)$ échecs pour un n -uplet particulier de B et de N est, d'après la, formule des probabilités composées, $p^k (1 - p)^{n-k} = p^k q^{n-k}$.

Et comme le nombre des n -uplets en question est le nombre de façons de choisir k places parmi n , soit C_n^k alors :

$$\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}, \Pr(X_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

La dernière formule donne la probabilité de l'événement $(X_n = k)$ sachant que le tirage est fait dans le sac S : $\Pr(X_n = k) = \Pr(X_n = k / S)$.

X_n suit une loi dite binomiale de paramètres n et p notée $\mathcal{B}(n, p)$.

Pour notre test, l'expérience aléatoire décrite ci-dessus est associée à une première expérience : le choix du sac fait par Ali. L'ensemble $\{S1, S2\} = \{\text{choix du sac } S1, \text{ choix du sac } S2\}$ en constitue une base de probabilité. Supposons que le choix du sac est aléatoire et décidons alors que $\forall i \in \{1, 2\}, \Pr(Si) = 1/2$.

Les probabilités $\Pr(X_n = k)$ et $\Pr(Si)$ sont des probabilités a priori ; par contre les probabilités à comparer, $\Pr(Si / X_n = k)$, sont des probabilités a posteriori : ce sont les probabilités de causes ($S1$ ou $S2$) d'un événement $(X_n = k)$ qui s'est produit.

Le théorème de Bayes nous permet de conclure :

$$\Pr(S_i / X_n = k) = \frac{\Pr(S_i) \cdot \Pr(X_n = k / S_i)}{\sum_{i=1}^2 (\Pr(S_i) \cdot \Pr(X_n = k / S_i))} = \frac{\Pr(X_n = k / S_i)}{\sum_{i=1}^2 \Pr(X_n = k / S_i)}$$

Pour un événement $(X_n = k)$ connu, on aura $\Pr(S_i / X_n = k) = c \cdot \Pr(X_n = k / S_i)$ où c est une constante.

Notons par P_1 et P_2 les probabilités du résultat du tirage respectivement sous l'hypothèse des sacs S_1 et S_2 .

Nous remarquons que la comparaison de P_1 et P_2 suffit pour répondre. Nous calculons cependant dans la suite, quand cela est possible, les probabilités $\Pr(S_i / X_n = k)$ pour chacun des exercices de notre test :

Exercice 1 (SUR6)

SUR6 (2b1n-3n / 3b3n)

$$P_1 = \Pr(X_6 = 3/S_1) = C_6^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \approx 0,2195$$

$$P_2 = \Pr(X_6 = 3/S_2) = C_6^3 0^3 1^3 = 0$$

$$\Pr(S_1 / X_6 = 3) = \frac{P_1}{P_1 + P_2} = 1$$

$$\Pr(S_2 / X_6 = 3) = 0$$

On est certain que la population convenable est le premier sac.

La réponse à cet exercice est alors (1) : « forcément le sac S_1 ».

Exercice 2 (PRO6)

PRO6 (1b3n-3b1n / 2b4n)

$$P_1 = \Pr(X_6 = 2/S_1) = C_6^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^4 \approx 0,2966$$

$$P_2 = \Pr(X_6 = 2/S_2) = C_6^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \approx 0,0329$$

$$\Pr(S_1 / X_6 = 2) = \frac{P_1}{P_1 + P_2} \approx 0,900$$

$$\Pr(S_2 / X_6 = 2) = \frac{P_2}{P_1 + P_2} \approx 0,100$$

Ainsi, à l'exercice 2 correspond la réponse (2) : « plutôt le sac S_1 ».

Exercice 3 (EQU10)

EQU10 (2b3n-4b6n / 3b7n)

$$P1 = \Pr(X_{10} = 3/S1) = P2 = \Pr(X_{10} = 3/S2) \text{ d'où } \Pr(S1 / X_{10} = 3) = \Pr(S2 / X_{10} = 3) = 1/2$$

Dans cet exercice, les sacs sont équivalents (cas de proportionnalité : la même proportion pour les boules d'une même couleur dans chacun des deux sacs) donc la réponse est (3) : « il n'y a pas de raison de préférer l'un des sacs ».

Exercice 4 (PRO10)

PRO10 (3b2n-2b3n / 4b6n)

$$P1 = \Pr(X_{10} = 4/S1) = C_{10}^4 \left(\frac{3}{5}\right)^4 \left(\frac{2}{5}\right)^6 \approx 0,1115$$

$$P2 = \Pr(X_{10} = 4/S2) = C_{10}^4 \left(\frac{2}{5}\right)^4 \left(\frac{3}{5}\right)^6 \approx 0,2508$$

$$\Pr(S1 / X_{10} = 4) = \frac{P1}{P1 + P2} \approx 0,308$$

$$\Pr(S2 / X_{10} = 4) = \frac{P2}{P1 + P2} \approx 0,692$$

La réponse est donc (4) : « plutôt le sac S2 ».

Exercice 5 (PRO100)

PRO100 (1b4n-4b6n / 25b75n)

$$P1 = \Pr(X_{100} = 25/S1) = C_{100}^{25} \left(\frac{1}{5}\right)^{25} \left(\frac{4}{5}\right)^{75} \approx 0,0439$$

$$P2 = \Pr(X_{100} = 25/S2) = C_{100}^{25} \left(\frac{2}{5}\right)^{25} \left(\frac{3}{5}\right)^{75} \approx 0,0006$$

$$\Pr(S1 / X_{100} = 25) = \frac{P1}{P1 + P2} \approx 0,987$$

$$\Pr(S2 / X_{100} = 25) = \frac{P2}{P1 + P2} \approx 0,013$$

La réponse est alors (2) : « plutôt le sac S1 ».

Exercice 6 (PPX6)

PPX6 (X-3b1n / 2b4n)

$$P1 = \Pr(X_n = k/S1) = ?$$

$$P2 = \Pr(X_6 = 2/S2) = C_6^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \approx 0,033$$

Dans cet exercice, nous ne pouvons pas calculer les probabilités de causes $\Pr(Si / X_n = k)$, le contenu du sac S1 étant inconnu.

Si l'on décide que la probabilité P2 est petite, on peut prendre le risque d'opter pour la réponse (2) : « plutôt le sac S1 ».

Nos attentes

Conformément à notre première hypothèse, nous nous attendons à ce que les élèves de 8^{ème} année de base construisent en masse, dans la résolution de problèmes relevant de la situation de "décision a posteriori", des conceptions dont les techniques ne correspondent pas à la comparaison de fractions.

Ainsi, nous pensons que la fréquence des réponses relatant des techniques basées sur la comparaison de fractions dans des problèmes sera négligeable.

Nous nous attendons aussi, en accord avec notre deuxième hypothèse, à ce que la notion de tirage avec remise pose problème pour notre population malgré les explications du professeur responsable de la passation.

Par ailleurs, nous nous attendons à trouver différentes justifications prouvant que :

- la réponse indifférente (3) au choix équiprobable ne provient pas toujours d'un raisonnement probabiliste, un raisonnement probabiliste étant un raisonnement basé sur la comparaison de fractions.
- les raisonnements s'arrêtant à la compatibilité du tirage avec les deux sacs ne seront pas nombreuses.

5. Les organisations personnelles développées

Nous allons étudier, comme auparavant, les conceptions mobilisées lors de la résolution la situation de "décision a posteriori" par le biais des organisations personnelles.

Rappelons qu'une organisation personnelle est un triplet $[T, \tau, \theta]$ où T est un type de tâches donné, τ est une technique utilisée pour effectuer T et θ la technologie personnelle qui a produit la technique τ .

Toujours est-il utile de signaler que le discours justificatif de l'élève a deux fonctions, une fonction technique permettant de trouver le résultat et une fonction technologique justifiant la technique.

5.1. Le cas de deux sacs connus

Dans cette partie, nous nous intéressons au type de tâches T_c . Nous allons donc, dans l'exposition des organisations relevées, focaliser sur les technologies et les techniques

personnelles. Remarquons d'emblée que les sacs ainsi que les tirages effectués sont composés, dans notre test, de deux espèces différentes : noire et blanche.

5.1.1. Le type « compatibilité »

Une organisation du type « compatibilité » est désignée par CP . La technologie personnelle θ_{CP} de ce type d'organisations peut être résumée de la façon suivante :

« la population mère d'un échantillon donné est celle qui lui est compatible ».

Autrement dit, la population convenable est celle où sont représentées les espèces de l'échantillon tiré. Ainsi, un échantillon serait d'autant plus probable qu'il représente toutes les composantes de la population d'où il est tiré.

La technique τ_{CP} relevant de ce type d'organisations consiste à trouver la population contenant une partie de chacune des espèces (ici, il s'agit des couleurs noire et blanche des boules) de l'échantillon.

Pour l'exercice 1 (choix sûr SUR6 : 2b1n-3n / 3b3n), la technique d'une organisation du type compatibilité consiste à dire que le premier sac S1 est compatible avec le tirage, par contre le sac S2 ne l'est pas. D'où le choix sûr de S1.

Pour les exercices de 2 à 5 (PRO6, EQU10, PRO10 et PRO100), les deux sacs sont compatibles avec l'échantillon tiré. L'utilisation d'une technique compatibiliste entraîne ainsi la non préférence de l'un des deux sacs.

En voici un exemple illustratif :

Exemple 1 : Exercice 2 : PRO6 (1b3n-3b1n / 2b4n)

Réponse de KAM. (n° 55) : "Modalité (3) : pas de préférence. Justification : il existe dans les deux sacs des boules blanches et des boules noires et il peut prendre la même boule une deuxième fois puisqu'il la remet dans le sac."

Donc, l'organisation de type CP que nous relevons est $[Tc, \tau_{CP}, \theta_{CP}]$.

Il y a lieu de remarquer que tous les élèves ayant développé une organisation du type compatibilité ont saisi la notion du tirage avec remise ; ils auraient cependant un problème de distinction entre le possible et le probable.

Impliquant une confusion entre le possible et le probable, cette organisation est l'indice d'un raisonnement événementiel.

5.1.2. Le type « différence »

Il est question d'un type que nous trouvons très rarement dans notre test et que nous désignons par la lettre D .

La technologie personnelle θ_D peut être résumée comme suit :

« la population adéquate dépend de la comparaison de différences ».

Quant à la technique τ_D associée que nous avons relevée, elle consiste à comparer les différences, effectuées dans chacune des deux collections, entre les deux espèces qui y figurent.

Voici un exemple :

Exemple 2 : Exercice 3 : EQU10 (2b3n-4b6n / 3b7n)

Réponse de SEN. (n° 83) : " Modalité (4) : plutôt S2. Justification : $3 - 2 < 6 - 4$."

En utilisant la même organisation dans l'exercice 4 : PRO10 (3b2n-2b3n / 4b6n), la même élève a implicitement fait usage de la valeur absolue en justifiant par $3 - 2 = 3 - 2$.

Ainsi, l'organisation de type D est $[Tc, \tau_D, \theta_D]$.

Pour un élève qui développe une organisation du type D , tout se passe comme s'il opte pour la population dont la différence entre les composantes est la plus proche de la différence des composantes de l'échantillon tiré.

Pour ce type d'organisations, nous ne pouvons parler de raisonnements événementiels.

5.1.3. Le type « cardinaux parties »

Ce type est noté NN . Nous avons relevé trois techniques qui font partie des organisations de type NN .

La technologie personnelle θ_{NN} productrice de ces techniques est résumée de la façon suivante :

« La population origine de l'échantillon dépend de la comparaison des cardinaux de ses composantes ».

Dans la suite, nous illustrons chacune des techniques utilisées.

La technique τ_n : « comparaison même espèce »

Cette technique consiste à comparer, entre eux, les effectifs d'une même espèce (l'espèce noire ou l'espèce blanche) dans les deux populations (sacs). Voici un exemple illustrant cette technique :

Exemple 3 : Exercice 5 : PRO100 (1b4n-4b6n / 25b75n)

Réponse de SEN. (n° 83) : " Modalité (4) : plutôt S2. Justification : dans S2, il y a un plus grand nombre de boules noires et dans le résultat, le nombre de boules noires est plus grand que le nombre de boules blanches."

Il semble que ce qui emporte la décision est que la composition du sac choisi, au regard d'une seule couleur (mais peut-être que c'est implicite pour l'autre), est plus "représentative" du tirage effectué.

L'espèce noire étant la plus fréquente dans les tirages, les élèves la choisissent dans la comparaison.

Il existe cependant des cas très rares où le choix est fait sur l'espèce blanche dans la comparaison :

Exemple 4 : Exercice 2 : PRO6 (1b3n-3b1n / 2b4n)

Réponse de MOH. (n° 16) : " Modalité (1) : forcément S1. Justification : dans S1, le nombre de boules blanches est plus petit que le nombre de boules blanches dans S2 et Ali a tiré 4 boules noires et 2 boules blanches."

Dans cet exemple, l'élève s'arrête à la comparaison des nombres de boules blanches dans S1 et dans S2, mais le fait de mentionner la composition du tirage nous laisse penser, qu'il tient compte en réalité du fait que le nombre de boules blanches est inférieur au nombre de boules noires aussi bien dans S1 que dans le tirage. Tout se passe comme si l'élève pense que le tirage vient d'un sac où la couleur blanche est moins probable que la couleur noire. Le contraste qui existe entre la composition du deuxième sac et celle de l'échantillon serait ainsi décisif dans le choix fait par l'élève.

Signalons qu'il existe des cas non fréquents où l'élève, tel que celui du dernier exemple, opte pour un choix nécessaire de l'un des deux sacs alors que généralement, la technique τ_n est accompagnée d'un choix non exclusif (plutôt le sac ...).

Pour cette technique, l'effet du contraste mis à part, tout se passe comme si l'élève se dit qu'un sac est d'autant plus probable que le cardinal de l'une de ses espèces est proche de celui de la composante de même espèce du tirage effectué.

La technique $\tau_{n \wedge b}$: « comparaison mêmes espèces »

La technique $\tau_{n \wedge b}$ consiste à comparer, entre elles, toutes les parties de même espèce dans les deux populations. Voici une illustration :

Exemple 5 : Exercice 5 : PRO100 (1b4n-4b6n / 25b75n)

Réponse de MAR. (n° 3) : "Réponse (4) : plutôt S2. Justification : S2 contient le plus grand nombre de noires et de blanches. Il a une plus grande probabilité dans le choix."

Ainsi, le choix de MAR est basé sur le fait que les effectifs des composantes de S2 sont les plus proches de ceux des composantes du tirage effectué.

La technique $\tau_{n \wedge b}$ diffère de la précédente par la comparaison de toutes les espèces et non d'une seule.

Pour cette technique, l'effet du contraste mis à part, tout se passe comme si l'élève se dit qu'un sac est d'autant plus probable que les effectifs de ses composantes sont les plus proches de celles de l'événement qui s'est produit.

La technique τ_{nb} : « comparaison deux espèces »

La technique τ_{nb} consiste à comparer les cardinaux des deux espèces dans une même population. En voici un exemple :

Exemple 6 : Exercice 5 : PRO100 (1b4n-4b6n / 25b75n)

Réponse de MOH. (n° 13) : "Réponse (3) : pas de raison de préférer l'un des sacs. Justification : comme $25b < 75n$ et $4b < 6n$ il est raisonnable de ne pas préférer l'un des sacs car dans les deux sacs, les boules blanches sont inférieures aux boules noires."

Dans cet exemple, l'élève compare les effectifs des boules noires et des boules blanches dans les deux sacs. Dans les réponses relevées, parfois la comparaison s'arrête à un seul sac et le choix sera orienté vers ce sac.

Dans les exercices 2 et 4, la technique τ_{nb} consiste à éliminer le sac présentant un contraste avec l'échantillon tiré, ce sac n'étant pas "représentatif" du tirage effectué.

Pour la technique τ_{nb} , tout se passe comme si l'élève se dit que le sac à choisir est celui dont les composantes varient dans le même sens que celles du tirage effectué. Il serait ainsi question du choix du sac "représentatif" de l'échantillon tiré.

En conclusion, les organisations personnelles qui font partie du type NN sont les organisations $[Tc, \tau_n, \theta_{NN}]$, $[Tc, \tau_{n \wedge b}, \theta_{NN}]$ et $[Tc, \tau_{nb}, \theta_{NN}]$.

Pour les exercices 3 et 5, le type d'organisations NN serait l'indice d'un raisonnement événementiel. En effet, ce type d'organisations aboutit très fréquemment au choix modéré (4) ou au choix nécessaire (5) du sac S2. Ainsi, tout se passe comme si l'événement qui s'est produit ne pourrait être tiré que du sac contenant le plus de boules soit d'une même couleur soit des deux couleurs.

Il se pourrait qu'il y ait parfois, avec l'utilisation du type NN , une confusion, même implicite, entre le possible et le probable. En effet, l'élève MAY (n° 60), après avoir choisi la réponse modérée (4) correspondant au sac S2 pour l'exercice 3 du choix équiprobable, signale que le sac S1 est aussi possible.

Pour les exercices 2 et 4, nous ne pourrions pas, avec l'utilisation du type NN , conclure à l'existence d'un raisonnement événementiel. Même dans les cas où cela n'est pas écrit explicitement, il se pourrait que la réponse soit induite par le contraste existant entre l'échantillon qui est tiré et l'un des deux sacs.

5.1.4. Le type « cardinal tout »

Ce type est noté T . La technique τ_T associée consiste à comparer, entre eux, les sommes des éléments des deux espèces relatives à chacune des deux collections pour conclure.

La technologie personnelle θ_T qui est à l'origine de ces techniques servant à accomplir des tâches de type Tc est résumée comme suit :

« la population origine de l'échantillon dépend de la comparaison des totaux ».

Exemple 7 : Exercice 2 : PRO6 (1b3n-3b1n / 2b4n)

Réponse de GOF. (n° 38) : "Réponse (3) : pas de préférence. Justification : le sac S1 : $1 + 3 = 4$ et le sac S2 : $3 + 1 = 4$ alors les deux sacs donnent le même résultat."

Il faut remarquer que dans les exercices 2 et 4, quelques élèves, qui ont fait un choix indifférent, indiquent que le total est le même mais que les couleurs diffèrent.

Dans le cas où le total n'est pas le même pour les deux sacs, le choix est plutôt orienté vers le sac dont le total est le plus grand.

On trouve toutefois, mais d'une façon très rare, des cas où le total le plus petit l'emporte :

Exemple 8 : Exercice 3 : EQU10 (2b3n-4b6n / 3b7n)

Réponse de SAN. (n° 48) : "Réponse (1) : forcément S1. Justification : car dans le sac S1 il y a peu de boules et ceci va l'aider dans le choix de la couleur (noire ou blanche)."

Pour le dernier exercice, seulement deux élèves ont pris en considération le fait que les totaux dans S2 et dans l'échantillon sont les mêmes⁸⁵. Voici la réponse de l'un d'eux :

Exemple 9 : Exercice 3 : EQU10 (2b3n-4b6n / 3b7n)

Réponse de SAM. (n° 20) : "Réponse (4) : plutôt S2. Justification : car la somme des boules dans S2 est égale au nombre de tirages."

L'organisation de type T que nous avons trouvé est $[T_c, \tau_T, \theta_T]$.

Pour le cas du choix du total le plus petit, nous pensons qu'il est question d'un biais de représentativité tel que défini par Kahneman et Tversky (1972). En réalité, il s'agit d'une qualité attribuée au processus engendrant l'événement (cf. exemple 8).

Pour les exercices 2 et 4, nous sommes indécis quant au rapprochement du type d'organisations T donnant exclusivement la réponse indifférente (3) à un raisonnement événementiel.

Par contre, pour les exercices 3 et 5, l'utilisation de ce type T serait l'indice d'un raisonnement événementiel. Ce type d'organisations aboutit presque toujours au choix modéré (4) ou au choix nécessaire (5) du sac S2. Dans ce cas, tout se passe comme si l'événement qui s'est produit ne pourrait être tiré que du sac contenant le plus de boules, c'est-à-dire du sac dont la somme des éléments est proche de la somme des siens.

5.1.5. Le type « proportion »

Nous désignons ce type par la lettre PP . Nous énonçons la technologie personnelle θ_{PP} comme suit :

« la population mère de la série de tirages dépend de la comparaison de rapports ».

Dans notre test, la technologie θ_{PP} est à l'origine de cinq techniques.

La technique $\tau_{I=2s}$: « tirage proportionnel »

La technique « tirage proportionnel » est une technique très rare consistant à chercher l'opérateur multiplicatif faisant passer les effectifs des espèces dans un sac (population) aux effectifs des espèces dans le tirage effectué (échantillon).

⁸⁵ Dans l'annexe 4, nous distinguons ces élèves par la notation $T=$.

Voici un exemple illustrant cette technique :

Exemple 10 : Exercice 4 : EQU10 (3b2n-2b3n / 4b6n)

Réponse de ABB. (n° 18) : "Réponse (4) : plutôt S2. Justification : car le résultat est le double du contenu du sac S2

** contenu de S2 : 2b et 3n → * le résultat : 4b et 6n."*

Ainsi, le choix est fait sur la population dont les composantes sont proportionnelles à celles de l'événement qui s'est produit.

La technique $\tau_{\frac{b}{n}}$: « espèce / espèce »

La technique « espèce / espèce », utilisée rarement, consiste à comparer les rapports des effectifs des deux espèces dans chacune des deux populations pour conclure.

En voici une illustration :

Exemple 11 : Exercice 3 : EQU10 (2b3n-4b6n / 3b7n)

Réponse de AHM. (n° 25) : "Réponse (3) : aucune préférence.

Justification : car $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$."

Pour l'exercice 3, le rapport entre effectifs des espèces de l'échantillon n'intervient pas dans le choix de la population. Pour l'exercice 5 où les deux sacs ne donnent pas le même rapport, nous constatons la tendance à ce que le rapport le plus grand l'emporte :

Exemple 12 : Exercice 5 : PRO100 (1b4n-4b6n / 25b75n)

Réponse de HAM. (n° 36) : "Réponse (4) : plutôt S2.

Justification : $\frac{4}{6} > \frac{1}{4}$ donc le deuxième sac est celui utilisé par Ali."

La technique $\tau_{\frac{n}{t}}$: « espèce / total »

La technique « espèce / total » consiste à comparer les rapports des effectifs d'une espèce au total dans chacune des deux populations :

Exemple 13 : Exercice 5 : PRO100 (1b4n-4b6n / 25b75n)

Réponse de AHM. (n° 42) : "Réponse (2) : plutôt S1. Justification : on compare entre

les contenus des deux sacs : $\frac{4}{5}$ et $\frac{6}{10}$; $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$."

Comme pour la dernière technique, nous constatons la non prise en compte du rapport pour le tirage. Ceci pourrait être compréhensible dans les exercices 2 et 4 où les contenus des sacs présentent un contraste mais, assez étrange dans les exercices 3 et 5.

La technique $\tau_{\frac{n}{t} \wedge \frac{b}{t}}$: « deux rapports espèce / total »

La technique « deux rapports espèce / total » consiste à comparer les rapports des effectifs de chacune des deux espèces au total dans chacune des deux populations.

Une illustration est donnée ci-après :

Exemple 14 : Exercice 3 : EQU10 (2b3n-4b6n / 3b7n)

Réponse de WAE. (n° 37) : "Réponse (3) : aucune préférence. Justification : car

Le sac S1 contient $\frac{3}{5}n$ et $\frac{2}{5}b$

Le sac S2 contient $\frac{6}{10}n = \frac{3}{5}n$ et $\frac{4}{10}b = \frac{2}{5}b$."

Cette technique a été utilisée seulement 3 fois, exclusivement dans les exercices 3 et 5.

Comme pour les deux dernières techniques, nous constatons la non prise en considération explicite de l'échantillon. Si cela ne présente pas de problème dans l'exercice 3 où les deux populations sont équivalentes, ce n'est pas le cas pour l'exercice 5. Voici le seul exemple correspondant à cet exercice :

Exemple 15 : Exercice 5 : PRO100 (1b4n-4b6n / 25b75n)

Réponse de OUS. (n° 39) : "Réponse (3) : aucune préférence. Justification : car

$\frac{1}{5} < \frac{4}{10}$ et $\frac{6}{10} < \frac{4}{5}$."

Dans cet exemple, l'élève opte pour le choix indifférent voyant que la comparaison des deux rapports "espèce / total" est au profit de S2 pour les blanches et de S1 pour les noires.

La technique $\tau_{\frac{n_i}{t_i}}$: « tous les rapports espèce / total »

La technique « tous les rapports espèce / total », consistant à comparer les rapports des effectifs d'une espèce au total dans chacune des trois collections : les deux sacs et l'échantillon, est illustrée seulement deux fois, une fois dans l'exercice 2 et l'autre dans l'exercice 5. Examinons la dernière :

Exemple 16 : Exercice 5 : PRO100 (1b4n-4b6n / 25b75n)

Réponse de MOH. (n° 75) : "Réponse (2) : plutôt S1. Justification :

$$\text{car } \frac{25b}{100} = \frac{1b}{4}, \text{ dans S1 : } \frac{1b}{5}, \text{ dans S2 : } \frac{4b}{10} = \frac{2b}{5}."$$

Ainsi, avec cette technique, le choix serait fait plutôt sur la population dont le rapport des blanches au total est le plus proche à celui des blanches au total de l'événement qui s'est produit, bien que ce ne soit dit explicitement.

En définitive, les organisations personnelles du type « proportion » P sont les organisations $[Tc, \tau_{t=2s}, \theta_P]$, $[Tc, \tau_{\frac{b}{n}}, \theta_P]$, $[Tc, \tau_{\frac{n}{t}}, \theta_P]$, $[Tc, \tau_{\frac{n \wedge b}{t \wedge t}}, \theta_P]$ et $[Tc, \tau_{\frac{ni}{ii}}, \theta_P]$.

5.1.6. Le type « non identifié »

Nous classerons la réponse de tout élève ne développant pas l'un des types précédents d'organisations comme appartenant au type I des organisations non identifiées.

Cette catégorie contient :

- les réponses où l'élève reprend l'énoncé,
- celles montrant l'existence d'un problème d'incompréhension du tirage avec remise,
- celles dont les justifications nous sont incompréhensibles.

5.1.6. Le type « combiné »

Dans l'exécution des tâches figurant dans notre test, nous identifions trois réponses utilisant chacune successivement deux organisations de types différents, nous parlons alors de combinaison d'organisations ou d'organisations de type combiné.

Les seuls couples d'organisations de ce type, que nous avons identifiés, sont (I, NN) , (T, NN) et (NN, D) .

Pour le couple (I, NN) utilisé dans l'exercice 5, l'élève opte pour la réponse (3) du choix indifférent : il indique que le nombre de tirages est très grand (organisation I) puis que le nombre de boules noires est plus grand que le nombre de boules blanches dans les deux sacs (technique nb de l'organisation NN).

Pour le couple (T, NN) utilisé aussi dans l'exercice 5, l'élève opte pour la réponse (5) du choix nécessaire du sac S2 : il indique que S2 contient plus de boules que S1 puis ajoute que dans ce dernier sac, le nombre de boules noires est plus grand que le nombre de boules blanches.

Ainsi, la deuxième organisation de type *NN* vient confirmer ce que pourrait induire la première *T*, ce qui expliquerait le choix catégorique.

Pour le troisième couple (*NN*, *D*) utilisé dans l'exercice 3, l'élève opte pour la réponse (4) « plutôt le sac S2 » : il indique d'abord que S2 contient plus de boules noires et blanches que S1 puis, en remarquant la grandeur de l'effectif de l'espèce noire dans le tirage, ajoute que la différence entre noires et blanches est plus grande dans S2. Ainsi semble-t-il que la deuxième organisation de type *D* vient conforter la première de type *NN*, mais cette fois l'élève a fait un choix modéré.

5.2. Le cas du sac inconnu

Dans cette partie, nous nous intéressons au type de tâches T_i auquel appartient la tâche de l'exercice 6.

L'existence du sac inconnu a fait que les organisations trouvées sont en majorité de type *I*. Nous réservons toutefois la notation *Ir* aux cas de non compréhension du tirage avec remise et *Ix* aux justifications basées sur le fait que le sac S1 est inconnu (cf. annexe 4)⁸⁶.

Les autres organisations relevées sont celles du type *CP* « compatibilité » et celles du type *NN* « cardinaux parties ».

Pour le dernier type *NN*, la technique est toujours τ_{nb} « comparaison deux espèces » ; la réponse est basée sur le contraste existant entre les espèces du tirage et ceux du sac connu S2.

Ainsi, a-t-on une seule organisation personnelle du type *NN*. Il est question de l'organisation $[T_i, \tau_{nb}, \theta_N]$.

Remarquons finalement que nous avons relevé un seul cas d'organisation du type combiné. Il s'agit du couple (*CP*, *Ix*) :

Exemple 17 : Exercice 6 : PPX6 (X-3b1n / 2b4n)

Réponse de ABB. (n° 18) : "Réponse (3) : pas de raison de préférer. Justification : Le résultat peut provenir de S2 : Ali a tiré 2b des 3b et 4b de 1b, c'est-à-dire 2b des 3b et 1n quatre fois. Il est possible aussi que le résultat provienne du sac inconnu qui peut contenir 2b et 4n."

La dernière réponse montre que *ABB* a bien compris la notion de tirage avec remise quand il parle du tirage de la seule boule noire de S2 quatre fois. Cependant, le fait qu'il parle de tirer

⁸⁶ Notons que cette annexe est réservée aux réponses des 94 élèves qui ont répondu (1), (2) ou (1 et 2) au premier exercice (cf. sous 6).

deux blanches des trois blanches existantes nous laisse penser que la notion de tirage avec remise est une notion non stable. Tout se passe comme si l'expérience est interprétée de la façon suivante : si le nombre de boules est suffisant, on effectue un tirage simultané et s'il est insuffisant, on effectue un tirage avec remise.

5.3. Récapitulation

Dans ce récapitulatif, nous nous limitons au Type de tâches Tc correspondant à deux sacs dont les contenus sont connus.

Dans le tableau suivant (Tableau VIII.1), nous donnons un récapitulatif des organisations personnelles relevées dans notre test, une organisation personnelle étant constituée d'un type de tâches, d'une technique et d'une technologie personnelle. Pour les détails sur les organisations construites par les élèves, nous renvoyons le lecteur à l'annexe 4.

▪ Tableau VIII.1

*Codes, intitulés, technologies et techniques
des types d'organisations personnelles*

| Code | Intitulé | Technologie | Techniques associées |
|------|-----------------|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| CP | comptabilité | θ_{CP} : comptabilité avec la population | τ_{CP} : existence des mêmes espèces dans la population origine de l'échantillon |
| D | différence | θ_D : comparaison de différences | τ_D : différences entre espèces dans les deux populations |
| NN | cardinal partie | θ_{NN} : comparaison des cardinaux des espèces | - τ_n : comparaison même espèce - $\tau_{n \wedge b}$: comparaison mêmes espèces - τ_{nb} : comparaison deux espèces |
| T | cardinal tout | θ_T : comparaison des totaux | τ_T : calcul des sommes des espèces dans chacune des populations |
| PP | proportion | θ_{PP} : comparaison de rapports | - $\tau_{t=2s}$: tirage proportionnel - $\tau_{\frac{b}{n}}$: espèce / espèce - $\tau_{\frac{n}{t}}$: espèce / total - $\tau_{\frac{n \wedge b}{t \wedge t}}$: deux rapports espèce / total - $\tau_{\frac{ni}{ti}}$: tous les rapports espèce / total |
| I | non identifié | θ_I : absente ou incompréhensible | τ_I : inconnues |
| C | combiné | succession de technologies | succession de techniques |

6. Résultats pour l'exercice 1 : compréhension de la remise

Soulignons d'abord que, dans tous les exercices, presque chaque réponse est accompagnée d'une justification. La consigne donnée à ce propos par les professeurs responsables de la passation a été respectée.

Pour le premier exercice (SUR6 : 2b1n-3n / 3b3n), nous comptons 74 élèves sur les 152 testés (48 %) ayant utilisé sûrement l'organisation « compatibilité » CP. Dans ces réponses, l'élève choisit la modalité (1) "forcément le sac S1" en s'appuyant sur la non comptabilité du contenu du sac S2 avec la série de tirages : le sac S2 ne contient pas de boules blanches.

Nous comptons aussi 48 réponses sur 152 (32 %) utilisant un raisonnement montrant une non compréhension du tirage avec remise. Nous donnons ci-dessous quelques unes de ces réponses à titre d'illustration.

Dans le premier exemple, l'élève ne fait aucun choix (ne coche aucune des modalités), ce que nous notons par (0) :

Exemple 18 : Exercice 1 : SUR6 (2b1n-3n / 3b3n)

Réponse de AYM. : "Réponse (0). Justification :
Il n'a choisi aucun sac. Ce nombre n'existe pas."

Il semble que le nombre évoqué dans la dernière réponse est le nombre de boules tirées.

Au deuxième exemple, l'élève coche la modalité (3), mais pour lui, le choix indifférent correspondant à cette modalité signifie un non choix :

Exemple 19 : Exercice 1 : SUR6 (2b1n-3n / 3b3n)

Réponse de HOU. : "Réponse (3) : pas de raison de préférer l'un des deux sacs.
Justification : Je ne choisis aucun des deux sacs car le premier sac contient 2b et 1n et le second contient 3n."

Comme pour les exemples précédents, l'illustration suivante montre que la remise n'est pas comprise :

Exemple 20 : Exercice 1 : SUR6 (2b1n-3n / 3b3n)

Réponse de GHA. : "Réponse (25)⁸⁷. Justification : forcément le sac S2 pour tirer 3n et plutôt le sac S1 pour tirer les boules blanches."

En conclusion, le premier exercice dont l'énoncé doit être exploité par le professeur ayant en charge la passation du test pour expliquer la notion de tirage avec remise pose problème. Il n'est pas conforme aux habitudes scolaires (avec des données ne servant à rien) et beaucoup d'élèves sont mis en échec par rapport au contrat, l'un des deux sacs étant impossible.

⁸⁷ Cet élève a coché les deux modalités (2) et (5).

Nous avons fait le choix de nous limiter dans la suite aux 94 élèves qui ont répondu (1), (2) ou (12) au premier exercice.

Parmi ces réponses, nous comptons 79 réponses (1), c'est-à-dire 84% des 94 réponses retenues, 12 réponses (2), soit 13% des 94 réponses et 3 réponses (12), soit 3% des 94 réponses.

Ainsi, la fréquence 84 % de la réponse (1) se trouve entre les fréquences de la même réponse concernant les classes de 5^{ème} (65-66%)⁸⁸ et de 4^{ème} (92-93%) d'Alarcon (1982). Il faut toutefois remarquer la fréquence 84% de notre test tombe à 52% si l'on considère toutes les réponses.

7. Résultats pour l'exercice 6 : le sac inconnu

L'exercice 6 du tirage peu probable dans le sac connu (PPR6 : X-3b1n / 2b4n) présente une tâche du type Ti.

Dans cet exercice, nous comptons :

- 3 réponses (1) : forcément le sac S1, soit 3% des 94 réponses,
- 19 réponses (2) : plutôt le sac S1, soit 20% des réponses,
- 27 réponses (3) : pas de raison de préférer l'un des sacs, soit 29% des réponses,
- 18 réponses (4) : plutôt le sac S2, soit 19% des réponses,
- 11 réponses (5) : forcément le sac S2, soit 12% des réponses,
- 2 réponses (12), soit 2% des réponses,
- 1 réponse (45), soit 2% des réponses et
- 3 non réponses (nr), soit 14% des réponses.

La fréquence de la réponse (2) est proche de celle de 21% de la 4^{ème} dans Alarcon.

Parmi les 19 réponses (2), nous notons :

- sept réponses faisant partie du type d'organisations *NN*, signalant le contraste existant entre le tirage effectué et le contenu du sac connu S2,
- sept autres réponses, relevant de l'organisation *Ix*, dénotant le fait que le sac S1 est inconnu et n'évoquant pas explicitement le contraste :

⁸⁸ Désormais, nous nous référons aux résultats d'Alarcon (1982) de la façon suivante : quand nous écrivons deux pourcentages, le premier donne la réussite au questionnaire B et le second au questionnaire C et quand nous donnons un seul pourcentage, il correspond à la réussite au questionnaire B.

Exemple 21 : Exercice 6 : PPR6 (X-3b1n / 2b4n)

Réponse de BAC. (n° 43) : "Réponse (2) : plutôt le sac S1. Justification : car S1 a un contenu inconnu, peut être contient-il un nombre convenable au tirage de plusieurs boules noires."

Parmi les 27 réponses (3), nous notons :

- 1 seul cas correspondant au couple d'organisations (CP, Ix)⁸⁹,
- 14 autres réponses, relevant de l'organisation Ix évoquant le fait que le sac S1 est inconnu.

Parmi les 18 réponses (4), nous notons :

- 1 seul cas qui relève de l'organisation "compatibilité" CP,
- 14 autres réponses, relevant de l'organisation Ix. En voici une illustration :

Exemple 22 : Exercice 6 : PPR6 (X-3b1n / 2b4n)

Réponse de NAD. (n° 89) : "Réponse (4) : plutôt le sac S2. Justification : car S1 est inconnu, peut être contient-il plus de boules blanches et noires que S2 ; mais il est bien qu'Ali choisisse le sac connu S2 car le connu est mieux que l'inconnu."

Parmi les 11 réponses (5), nous comptons 10 réponses, relevant de l'organisation Ix :

Exemple 23 : Exercice 6 : PPR6 (X-3b1n / 2b4n)

Réponse de RAN. (n° 22) : "Réponse (5) : forcément le sac S2. Justification : le nombre de boules dans S1 est inconnu alors on ne peut choisir que le sac S2."

En définitive, presque 50 % des élèves testés n'ont pas voulu prendre le risque de choisir le sac inconnu ni même donner un choix indifférent. Dans ces cas, il n'est pas explicitement question de compatibilité.

Il semble que le nombre assez fréquent de cas où les élèves se basent sur le fait que le sac S1 est inconnu et le nombre modeste de cas évoquant le contraste entre la composition du tirage et le contenu du sac connu montre l'existence d'une confusion entre le possible et le probable.

Pour l'exercice 6, il nous semble qu'au mieux l'organisation de type N [T_i, τ_{nb}, θ_N], évoquant le contraste est la seule pouvant être considérée comme témoignant d'un raisonnement probabiliste. Ainsi, pourrait-on conclure avec la faible apparition (7% des réponses) de ce type d'organisations que les élèves développent un raisonnement plutôt événementiel.

⁸⁹ Cf. sous 5.2

8. Autres résultats

Nous nous intéressons dans cette partie aux exercices 2, 3, 4 et 5 ; nous mettons de côté, comme annoncé en haut, les élèves qui, d'après leurs réponses au premier exercice, ont un problème de compréhension de la notion de tirage avec remise.

8.1. Étude globale

8.1.1. Le cas des organisations développées

Le tableau VIII.2 suivant nous donne une idée générale sur les fréquences des organisations utilisées dans notre test.

▪ Tableau VIII.2

Effectifs des types d'organisations selon les exercices et pourcentages associés

| Exercice \ Type | CP | NN | T | D | PP | C | I | Total |
|-----------------|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------|-------------|------------|
| Ex.2 | 7 8% | 38 40% | 12 13% | 0 0% | 3 3% | 0 0% | 34 36% | 94 100% |
| Ex.3 | 2 2% | 25 27% | 18 19% | 2 2% | 7 8% | 1 1% | 39 41% | 94 100% |
| Ex.4 | 4 4% | 25 27% | 18 19% | 1 1% | 6 6,5% | 0 0% | 40 42,5% | 94 100% |
| Ex.5 | 1 1% | 18 19% | 17 18% | 5 5,5% | 6 6,5% | 3 3% | 44 47% | 94 100% |

Dans ce tableau, nous constatons la difficulté de la tâche proposée aux élèves, il suffit de consulter la colonne correspondant au type *I* d'organisations non identifiées.

Remarquons aussi la faiblesse des fréquences moyennes correspondant aux types *C*, *D*, *CP* et *PP* (1%, 2%, 4% et 6% respectivement). Notons que l'organisation de type *D* n'a pris un peu d'ampleur que pour l'exercice 5.

Le point de vue probabiliste est peu fréquent, l'organisation successible de nous renvoyer à ce point de vue étant celle de type *PP*.

Finalement, nous pouvons conclure que :

- mises à part les organisations de type *I*, les organisations les plus utilisées sont celles de type *NN* (28%) et celles de type *T* (17%),

- les variables de l'exercice 5 n'ont pas incité à l'usage d'une organisation du type *PP*,
- les réponses s'arrêtant à la compatibilité du tirage avec les deux sacs ne sont pas nombreuses, elles constituent un peu moins de 4% de toutes les réponses.

8.1.2. Le cas des raisonnements événementiels

Dans le paragraphe précédent, nous avons constaté que les types d'organisations les plus fréquentes sont les types *NN* et *T*. Par ailleurs, nous avons rattaché les raisonnements événementiels aussi bien à l'utilisation du type d'organisations *NN* (cf. 5.1.3) qu'à celle du type d'organisations *T* (cf. 5.1.4) dans les exercices 3 et 5. Plus précisément, il est question des réponses relevant de ces deux types et correspondant aux modalités (4) et (5).

Les réponses (4) et (5) représentant environ des fréquences de 75% dans l'exercice 3 et 74% dans l'exercice 5 relativement aux réponses correspondant au type d'organisations *NN* et des fréquences de 89% dans l'exercice 3 et 92% dans l'exercice 5 relativement aux réponses correspondant au type d'organisations *T*, les raisonnements des élèves seraient plutôt événementiels.

8.1.3. Le cas des modalités choisies

Dans le tableau VIII.3, nous donnons une idée globale sur les fréquences des modalités choisies par les élèves sans tenir compte des organisations qui les accompagnent.

▪ Tableau VIII.3

Effectifs des modalités selon les exercices et pourcentages associés⁹⁰

| Modalité \ Exercice | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) ⁹¹ | Total |
|---------------------|-----------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------|-------------------|------------|
| Ex.2 | 15 16% | 32 34% | 36 38% | 4 4,5% | 4 4,5% | 3 3% | 94 100% |
| Ex.3 | 5 5,5% | 7 8% | 23 24% | 38 40% | 16 17% | 5 5,5% | 94 100% |
| Ex.4 | 3 3% | 6 6% | 41 44% | 26 28% | 9 9,5% | 9 9,5% | 94 100% |
| Ex.5 | 4 4,5% | 14 15% | 20 21% | 19 20% | 24 25,5% | 13 14% | 94 100% |

⁹⁰ Les effectifs et les pourcentages en gras dans ce tableau correspondent à la modalité pertinente.

⁹¹ La modalité (6) correspond à toute réponse autre que les cinq modalités données dans le test.

Le choix non équiprobable

Pour l'exercice 2 noté PRO6 (1b3n-3b1n / 2b4n) où il y a un choix plus probable, les 34% de la réponse correcte (2) n'atteignent pas la fréquence, pour le même exercice, en 5^{ème} (35-52%) dans l'expérience d'Alarcon.

Nous pensons que la fréquence moindre, 28%, de la modalité (4), modalité correcte du point de vue mathématique dans l'exercice 4 du choix non équiprobable PR10 (3b2n-2b3n / 4b6n) pourrait être imputée au nombre total des boules dans les deux sacs S1 et S2 qui n'atteint pas l'effectif du tirage effectué et / ou à la différence moindre entre les effectifs des deux espèces de boules dans les deux sacs.

Pour l'exercice 5 du choix non équiprobable PR100 (1b4n-4b6n / 25b75n), le choix correct (2) du point de vue mathématique est peu fréquent, il représente 15% des réponses à l'exercice.

Il faut remarquer que dans les cas où il existe un sac plus probable que l'autre, le choix indifférent (3) est très fréquent, ce que nous constatons chez Alarcon. Dans notre recherche, ce choix est le plus fréquent dans les exercices 2 et 4, c'est-à-dire dans les exercices où le contenu d'un sac représente un contraste avec le tirage effectué.

Le choix équiprobable

Il est question de l'exercice 3 : EQU10 (2b3n-4b6n / 3b7n). La fréquence, dans cet exercice, du choix indifférent (3) est de 21%. Elle est de loin inférieure à la fréquence de la même modalité, calculée par Alarcon, dans le choix équiprobable EQU6 (2b2n-1b1n / 4b2n) en 5^{ème} et qui varie entre 52% et 54%. Elle n'atteint même pas la réussite simultanée aux deux choix équiprobables EQU6 (2b2n-1b1n / 4b2n) et EPR6 (2b2n-1b1n / 3b3n) qui est de 37% en 5^{ème}. Il faut signaler toutefois que nos données ne sont pas les mêmes.

8.1.4. Modalités et organisations

Des deux tableaux précédents, nous tirons les conclusions suivantes :

- Les données de l'exercice 3 du choix équiprobable ont favorisé la modalité (4).
- Les données des exercices 2 et 4, du choix non équiprobable, ont favorisé la modalité (3) du choix indifférent : la fréquence cumulée de la modalité exacte (du point de vue mathématique) et de la modalité (3) est aux alentours de 70% pour chacun de ces exercices.

- L'effet du contraste du tirage avec les contenus des sacs est nettement plus important dans l'exercice 2 avec 34% pour la modalité (2) et 16% pour la modalité (1) que dans l'exercice 4 où on obtient 26% pour la modalité (4) et 9,5% pour la modalité (5).

Les données de l'exercice 5 qui est aussi classé "choix non équiprobable" ont par contre contribué à la distribution des fréquences sur les modalités (2), (3), (4), et (5). L'inexistence de contraste pourrait être une cause de cette hésitation, la grandeur de l'échantillon tiré constituerait un autre élément d'explication.

Si la modalité nécessaire (1) est assez fréquente (16%) à l'exercice 2, la modalité nécessaire (5) l'est essentiellement aux exercices 3 et 5 avec respectivement 17% et 24%.

En nous référant au tableau VIII.2, nous mettons en relation les tendances indiquées ci-dessus avec l'utilisation très fréquente des organisations de types *NN* et *T*.

Affinons notre analyse en passant au niveau des techniques.

8.2. Du côté des techniques

Dans cette partie, nous laissons de côté les organisations non identifiées et les organisations combinées ; ces dernières sont d'ailleurs très peu fréquentes : elles représentent 0% pour les exercices 2 et 4 et respectivement 1% et 3% pour les exercices 3 et 5.

Les tableaux suivants mettent en relation les modalités choisies et les techniques utilisées par les élèves pour chacun des exercices 2, 3, 4 et 5. Il est question, pour chacun de ces exercices d'une cinquantaine de réponses environ.

8.2.1. Le choix non équiprobable

Le premier exercice du choix non équiprobable est l'exercice 2 :

▪ Tableau VIII.4

Exercice 2 : effectifs des techniques selon les modalités

| Technique \ Modalité | τ_{CP} | τ_n | $\tau_{n \wedge b}$ | τ_{nb} | τ_T | $\tau_{\frac{n}{i}}$ | $\tau_{\frac{ni}{ii}}$ | Total |
|----------------------|-------------|----------|---------------------|-------------|----------|----------------------|------------------------|-------|
| (1) | | 5 | | 5 | | | | 10 |
| (2) | | 6 | | 13 | | 2 | 1 | 22 |
| (3) | 7 | | 1 | | 12 | | | 20 |
| (4) | | 1 | | | | | | 1 |
| (5) | | | | | | | | |
| Total | 7 | 12 | 1 | 18 | 12 | 2 | 1 | 53 |

Les réponses à l'exercice 2 sont concentrées sur les modalités (1), (2) et (3). La première modalité représente 19% des 53 réponses avec techniques simples identifiées, la deuxième 41,5% et la troisième 38%.

Le choix de la modalité (2) n'est pas toujours dû au contraste, le choix dû au contraste, c'est-à-dire à la technique τ_{nb} , représentant une fréquence de 59 %.

Le choix de la modalité (3) n'est pas toujours dû à la compatibilité, le choix dû à la compatibilité, c'est-à-dire à la technique τ_{CP} , représentant une fréquence de 35%.

Les techniques les plus fréquentes sont τ_{CP} , τ_n , τ_{nb} et τ_T (13%, 22,5%, 40% et 22,5% respectivement).

Ainsi, nous pouvons affirmer que la centration des réponses sur les modalités (1), (2) et (3) est due à l'utilisation d'organisations contenant les dernières techniques, soit des organisations de types *CP*, *NN* et *T*. En fait, ces techniques expliquent les modalités les plus fréquentes dans un rapport de 42/53 soit avec une fréquence de 92%.

Les techniques relevant des organisations de types *NN* et *T* et expliquant les modalités en question atteignent la fréquence de 79%. Par ailleurs, les techniques relevant des organisations du type « proportion » *PP* n'expliquent qu'environ 6% des réponses.

Passons à l'exercice 4, deuxième exercice du choix non équiprobable :

▪ Tableau VIII.5

Exercice 4 : effectifs des techniques selon les modalités

| Technique Modalité | τ_{CP} | τ_n | τ_{nb} | τ_T | τ_D | $\tau_{t=2s}$ | $\tau_{\frac{b}{n}}$ | $\tau_{\frac{n}{t}}$ | Total |
|-----------------------|-------------|----------|-------------|----------|----------|---------------|----------------------|----------------------|-------|
| (1) | | | 1 | | | | | | 1 |
| (2) | | 2 | 2 | | | | | | 4 |
| (3) | 4 | | | 18 | 1 | | 1 | | 24 |
| (4) | | 7 | 10 | | | 2 | | 1 | 20 |
| (5) | | 2 | 1 | | | 1 | | 1 | 5 |
| Total | 4 | 11 | 14 | 18 | 1 | 3 | 1 | 2 | 54 |

Les réponses à l'exercice 4 sont plutôt concentrées sur les modalités (3), (4) et (5). La modalité (3) représente 44% des 54 réponses avec techniques simples identifiées, la quatrième 37% et la cinquième 9%.

Le choix de la modalité (4) n'est pas toujours dû au contraste, le choix dû au contraste, c'est-à-dire à la technique τ_{nb} , représentant une fréquence de 50%.

Le choix de la modalité (3) n'est pas toujours dû à la compatibilité, le choix dû à la compatibilité, c'est-à-dire à la technique τ_{CP} , ne correspondant qu'à une fréquence de 17%. Ce choix est surtout dû à la technique τ_T qui représente à elle seule une fréquence de 75%.

Les techniques les plus fréquentes sont τ_n , τ_{nb} et τ_T (20%, 26% et 33% respectivement).

Ainsi, pourrait-on dire que la centration des réponses sur les modalités (3), (4) et (5) est due à l'utilisation d'organisations contenant les dernières techniques, soit des organisations de types NN et T . En fait, ces techniques expliquent les modalités les plus fréquentes dans un rapport de 38/54 soit avec une fréquence de 70%.

Par ailleurs, nous soulignons que les techniques relevant des organisations du type « proportion » PP expliquent 11% des réponses.

Terminons par l'exercice 5, le dernier exercice qui est classé dans le choix non équiprobable :

▪ Tableau VIII.6

Exercice 5 : effectifs des techniques selon les modalités

| Technique \ Modalité | τ_{CP} | τ_n | $\tau_{n \wedge b}$ | τ_{nb} | τ_T | τ_D | $\tau_{\frac{b}{n}}$ | $\tau_{\frac{n}{t}}$ | $\tau_{\frac{n \wedge b}{t \wedge t}}$ | $\tau_{\frac{ni}{ti}}$ | Total |
|----------------------|-------------|----------|---------------------|-------------|----------|----------|----------------------|----------------------|----------------------------------------|------------------------|-------|
| (1) | | | | | | 2 | | | | | 2 |
| (2) | | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | | 2 | | 1 | 10 |
| (3) | 1 | | | 2 | | | | | 1 | | 4 |
| (4) | | 2 | 3 | 3 | 5 | 1 | 2 | | | | 16 |
| (5) | | 2 | 1 | 1 | 11 | | | | | | 15 |
| Total | 1 | 6 | 5 | 7 | 17 | 5 | 2 | 2 | 1 | 1 | 47 |

Les réponses à l'exercice 5 sont concentrées sur les modalités (2), (4) et (5). La deuxième modalité représente 21% des 47 réponses avec techniques simples identifiées, la quatrième représente 34 % et la cinquième 32%.

Les données de cet exercice ne présentent pas de contraste et la modalité (3) est peu fréquente, elle représente 8,5% des 47 réponses.

Les techniques les plus fréquentes sont τ_n , $\tau_{n\wedge b}$, τ_{nb} , τ_T et τ_D (13%, 10,5%, 15%, 36% et 10,5% respectivement).

Les techniques qui relèvent des organisations de types *NN* et *T* et qui ont été à l'origine des réponses (2), (4) et (5) sont dans un rapport de 33/47, elles ont donc une fréquence de 70%.

Dans cet exercice, les techniques qui relèvent des organisations de types *NN* et *T* et qui ont été à l'origine des réponses (4) et (5) expliquent environ 60% des 47 réponses, ce qui conforte la conclusion disant que les raisonnements des élèves sont plutôt événementiels (cf. 8.1.2).

Par ailleurs, nous remarquons que les techniques relevant des organisations du type « proportion » *PP* expliquent environ 13% de toutes les réponses.

8.2.1. Le choix équiprobable

Le seul exercice relevant du choix équiprobable est l'exercice 3 :

▪ Tableau VIII.7

Exercice 3 : effectifs des techniques selon les modalités

| Technique Modalité | τ_{CP} | τ_n | $\tau_{n\wedge b}$ | τ_{nb} | τ_T | τ_D | $\tau_{\frac{b}{n}}$ | $\tau_{\frac{n}{t}}$ | $\tau_{\frac{n}{t} \wedge \frac{b}{t}}$ | Total |
|-----------------------|-------------|----------|--------------------|-------------|----------|----------|----------------------|----------------------|-----------------------------------------|-------|
| (1) | | | | | 2 | | | | | 2 |
| (2) | | 1 | 1 | | | | | 1 | | 3 |
| (3) | 2 | | | 4 | | | 2 | 1 | 2 | 11 |
| (4) | | 6 | 5 | 2 | 10 | 1 | | | | 24 |
| (5) | | 3 | 2 | 1 | 6 | 1 | 1 | | | 14 |
| Total | 2 | 10 | 8 | 7 | 18 | 2 | 3 | 2 | 2 | 54 |

Les réponses à l'exercice 3 sont concentrées sur les modalités (3), (4) et (5). La troisième modalité représente 20% des 54 réponses avec techniques simples identifiées, la quatrième 44 % et la cinquième 26%. Ainsi, parmi les dernières modalités, la modalité (3), modalité correcte du point de vue mathématique, est la moins fréquente.

Le choix de la modalité (3) n'est pas toujours dû à la compatibilité : le choix dû à la compatibilité, c'est-à-dire à la technique τ_{CP} , représente une fréquence de 18%. Ce choix est surtout dû à la technique τ_{nb} (36,5%) et aux techniques relevant des organisations de type *PP*

(45,5%). Ainsi, constatons-nous que la réponse indifférente (3) au choix équiprobable ne provient pas toujours d'un raisonnement probabiliste, c'est-à-dire d'un raisonnement basé sur la comparaison de rapports.

Les techniques les plus fréquentes sont τ_n , $\tau_{n \wedge b}$, τ_{nb} et τ_T (18,5 %, 15 %, 13 % et 33 % respectivement).

Ces techniques, faisant partie d'organisations de types *NN* et *T*, expliquent le choix des modalités (3), (4) et (5) dans un rapport de 39/54 soit avec une fréquence de 72%.

Dans l'exercice 3, les techniques qui relèvent des organisations de types *NN* et *T* et qui ont été à l'origine des réponses (4) et (5) expliquent environ 65% des 54 dernières réponses, ce qui conforte aussi la conclusion disant que les raisonnements des élèves sont plutôt événementiels (cf. 8.1.2).

Par ailleurs, soulignons que les techniques relevant des organisations du type « proportion » *PP* expliquent 13 % de toutes les réponses.

8.3. Conclusions concernant l'analyse des exercices 2, 3, 4 et 5

A la suite de l'étude globale concernant les exercices 2, 3, 4 et 5, nous retenons que :

- les organisations de types *NN* et *T* sont les plus fréquentes,
- les données de l'exercice 5 n'ont pas favorisé l'apparition d'organisations du type *PP*,
- le choix indifférent (3) est toujours le plus fréquent, pour le choix non équiprobable où il y a un contraste entre le contenu d'un sac et le tirage (exercices 2 et 4),
- les fréquences des réponses correctes du point de vue mathématique sont inférieures à celles trouvées par Alarcon, elles le sont nettement dans le cas du choix équiprobable.

L'étude du rapport des techniques associées aux modalités choisies nous a permis de tirer les conclusions suivantes :

- Les organisations de types *NN* et *T* expliquent à elles seules et en grande partie (entre 70% et 79%) les réponses dominantes.
- Dans les cas du choix non équiprobable, le choix indifférent (3) est le plus fréquent dans l'exercice 4 ; il est très fréquent dans l'exercice 2 et apparaît d'une façon modeste dans l'exercice 5.
- La modalité (3) n'est pas essentiellement due, dans les exercices 2, 3 et 4, à la compatibilité.

- La modalité (3) dans le cas du choix équiprobable (exercice 3) ne provient pas toujours d'un raisonnement probabiliste.

- Les organisations de type *PP* sont utilisées avec une fréquence d'environ 6%, 11%, 13% et 13% respectivement dans les exercices 2, 4, 5 et 3. Dans tous ces exercices, leur fréquence moyenne est de 10,5%. Ceci nous permet d'affirmer que les réponses provenant d'un point de vue probabiliste ne sont pas fréquentes. Il faut toutefois se rappeler que ces dernières fréquences sont atteintes lorsque l'on ne tient pas compte des organisations non identifiées et des organisations combinées et tombe à environ 6 % lorsque l'on en tient compte.

Enfin, les résultats relatifs aux exercices 3 et 5 nous ont permis de conforter un résultat trouvé dans l'étude globale : les raisonnements des élèves sont plutôt événementiels.

9. Conclusion

En termes de conceptions, nous tirons les mêmes conclusions que pour les organisations, une conception d'un objet mathématique étant constituée par l'ensemble des organisations personnelles $[T_i, \tau_i, \theta]$ formées autour d'un même discours technologique personnel où les types de tâches T_i relèvent de l'objet mathématique en question.

Cette expérimentation nous a permis d'accéder à cinq conceptions probabilistes, mobilisées par des élèves de 8^{ème} année de base lors de la résolution de la situation de "décision a posteriori".

Ces conceptions sont, mises à part les conceptions non identifiées et les conceptions combinées, la conception « compatibilité » *CP*, la conception « différence » *D*, la conception « cardinaux parties » *NN*, la conception « cardinal tout » *T* et la conception « proportion » *PP*.

D'une manière générale, les conceptions *I* non identifiées mises à part, les conceptions les plus mobilisées sont les conceptions *NN* et *T*.

La conception pouvant témoigner d'un point de vue probabiliste⁹² est la conception *PP*. La conception *PP* n'étant pas fréquente par rapport aux autres (elle représente en total 6% des réponses⁹³), les réponses relatant des techniques basées sur la comparaison de fractions sont peu fréquentes et les élèves testés de 8^{ème} année de base construisent, en masse, des conceptions non pertinentes dans la résolution de problèmes relevant de la situation de "décision a posteriori".

⁹² Rappelons que nous parlons de point de vue probabiliste lorsqu'il est question de comparaison de fractions.

⁹³ Notons que les pourcentages évoqués sont relatifs aux 94 élèves retenus.

Dans ce test, les élèves cherchent des critères, pertinent à leur sens, pour choisir la population pouvant ou devant constituer la population de provenance de l'événement qui s'est produit. Ils utilisent diverses techniques.

Soulignons que souvent, les conceptions mobilisées dévoilent un effet de représentativité ; c'est le cas des conceptions *CP* « compatibilité », *NN* « cardinaux parties » et *T* « cardinal tout ». Dans les cas de la conception *CP* « compatibilité » et de la conception *T* « cardinal tout », il est plutôt question du biais de représentativité tel que défini par Kahneman et Tversky (1972) au sens où la représentativité est une qualité attribuée au processus qui a enfanté le tirage réalisé.

Le traitement du premier exercice, où l'un des sacs est inutile, montre qu'il y a un problème de compréhension de la notion du tirage avec remise.

De l'analyse des résultats de l'exercice 6 du sac inconnu, nous retenons que :

- la moitié des élèves testés ont évité de prendre le risque de choisir le sac inconnu et que leur choix n'est pas explicitement basé sur la compatibilité,
- le nombre modeste de cas évoquant le contraste (entre la composition du tirage et le contenu du sac connu) montre l'existence d'une confusion entre le possible et le probable,
- les élèves développent un raisonnement plutôt événementiel.

En général, les réponses s'arrêtant à la compatibilité du tirage avec les deux sacs ne sont pas nombreuses, elles constituent un peu moins de 4% de toutes les réponses. D'ailleurs, dans les exercices 2, 4 et 5 du choix non équiprobable, le choix de la modalité (3) dû à la compatibilité est de l'ordre de 35% dans l'exercice 2, de 17% dans l'exercice 4 et de 8,5% dans l'exercice 5.

Ainsi, dans l'incertitude, la réponse de l'élève ne s'arrête pas souvent à la compatibilité du tirage avec les deux sacs.

Par ailleurs, nos analyses montrent que, contrairement aux conclusions d'Alarcon, la réponse indifférente (3) au choix équiprobable (exercice 3) n'est pas signe d'un raisonnement probabiliste.

Il est intéressant de souligner que le choix de la modalité correspondant au choix émanant du contraste - modalité (2) pour l'exercice 2 et modalité (4) pour l'exercice 4 - n'est dû au contraste que dans l'ordre de 59% dans l'exercice 2 et 50% dans l'exercice 4.

Notons aussi que la grandeur de l'échantillon de l'exercice 5 n'a pas incité à la construction d'une organisation de type *PP*.

Au terme de ce test, nous voyons nos deux hypothèses validées :

- Les élèves de 8^{ème} année de base (de 13 à 14 ans) utilisent, en masse, des techniques non basées sur la comparaison de fractions dans des problèmes relevant de la situation de "décision a posteriori".
- Il existe beaucoup d'élèves de 8^{ème} année de base qui ont du mal à comprendre le tirage avec remise.

Ainsi, aussi bien pour le premier test que pour le deuxième, les élèves se trouvent devant d'énormes difficultés, ce qui prouverait la « pauvreté » des rapports personnels spontanés relativement à des situations probabilistes. Mais aussi, et peut-être surtout, la difficulté résiderait dans les énoncés des exercices traités.

Comment se comportent les élèves devant des situations probabilistes paraissant moins difficiles ? Quel est l'impact de la demande de justification sur leurs jugements ?

Chapitre IX.

Troisième test diagnostic : Situation de prévision, situation d'indépendance et situation statistique

- 1. Introduction*
- 2. Présentation du troisième test diagnostic*
- 3. Situation de prévision : présentation et analyse a priori*
- 4. Résultats pour la situation de prévision*
- 5. Situation d'indépendance : présentation et analyse a priori*
- 6. Résultats pour la situation d'indépendance*
- 7. Situation statistique : présentation et analyse a priori*
- 8. Résultats pour la situation statistique*
- 9. Conclusions*

1. Introduction

D'après les deux tests précédents, nous remarquons que les conceptions adéquates construites par des élèves de 8^{ème} année de base, aussi bien dans la situation "de prévision" que dans la situation de "décision a posteriori", sont assez rares. Les conceptions adéquates, dans le cas des boules, représentent environ 2,5 % des réponses dans la première situation et la conception supposée adéquate représente 6 % dans la seconde.

Notre troisième test se veut dans la continuité des deux précédents, il est composé de trois situations : "la situation de prévision", "la situation d'indépendance" et "la situation statistique".

2. Présentation du troisième test diagnostic

Comme ce test est composé de trois situations, nous abordons dans la partie relative à chacune des situations les tâches choisies, le plan expérimental ainsi que les objectifs.

Nous commençons par décrire ce qui est commun aux trois situations : la population et le procédé de passation.

2.1. La population

La population testée est composée de 565 élèves âgés de 11 à 16 ans. Elle est constituée de 19 groupes classes de différents niveaux :

- quatre classes de 6^{ème} année de base (6^{ème} année primaire) qui font partie de l'école primaire Ennajet de Oued Ellil relevant de la direction régionale de l'enseignement (DRE) de Manouba,
- trois classes de 7^{ème} année de base qui font partie de l'école préparatoire (EP) al-Moezzia relevant de la DRE de Manouba et de l'EP 15 octobre de la Kabbaria relevant de la DRE de Tunis,
- six classes de 8^{ème} année de base qui font partie de l'EP al-Moezzia relevant de la DRE de Manouba, de l'EP Aghlab Temimi d'al-Omrane relevant de la DRE de Tunis et de l'EP Massinissa de Teboursouk relevant de la DRE de Béja,
- six classes de 1^{ère} année secondaire qui font partie du lycée secondaire (LS) Ali Balhaouane relevant de la DRE de Béja et des LS de la Soukra et de la Rue du Pacha relevant tous deux de la direction régionale de Tunis.

2.2. La passation

Le test est présenté en quatre versions : versions A, B, C et D (cf. annexe 5). Chaque version est donnée sous forme d'une feuille recto-verso comportant six exercices, la situation d'indépendance comportant un exercice et les deux autres situations comprenant chacune deux exercices.

Les versions A et B, qui ne comportent pas de demande de justification, sont distribuées à tous les niveaux ; par contre les versions C et D où figurent des demandes de justification sont réservées à la 8^{ème} année de base et à la 1^{ère} année secondaire.

Dans chaque classe de 6^{ème} année et de 7^{ème} année de base, sont distribuées les deux versions A et B d'une façon uniforme de sorte que deux élèves assis côte à côte n'ont pas la même version.

De même, dans chaque classe de 8^{ème} année de base et de 1^{ère} année secondaire, sont distribuées les quatre versions A, B, C et D d'une façon uniforme.

La passation s'est déroulée vers le milieu du mois d'avril 2006. Elle s'est effectuée sous la direction de l'enseignant de mathématiques que nous avons chargé des tâches suivantes une fois les feuilles distribuées :

- Signaler aux élèves que le test fait partie d'une recherche et qu'il n'aura aucun rapport avec leurs notes et leurs moyennes.

- Lire l'encadré suivant figurant en haut de chaque feuille :

*Tirer au hasard une boule d'un sac signifie que le tirage se fait sans voir dans le sac et après mélange des boules.
Jeter au hasard un jeton signifie que le jet se fait sans voir les faces.*

- Donner quelques explications :

Pour l'exercice 1 de chaque version (cf. annexe 5) : demander aux élèves de voir le premier dessin et leur dire que S1 désigne le premier sac et que (1b-2n) qui se trouve à la deuxième ligne veut dire que le contenu de S1 est une boule blanche (b) et deux boules noires (n).

Pour l'exercice 4 : lire et expliquer l'énoncé.

Pour l'exercice 5 : dire qu'un jeton équilibré ressemble à une pièce de monnaie ne présentant aucun défaut, que la lettre X est marquée sur l'une des faces du jeton et que la lettre O est marquée sur l'autre.

Pour l'exercice 6 : lire et expliquer l'expérience.

- Remarquer que pour les versions A et B, on demande uniquement la réponse et que pour les versions C et D, on demande aussi bien la réponse que la justification.

3. Situation de prévision : présentation et analyse a priori :

3.1. Tâches, objectifs et plan expérimental

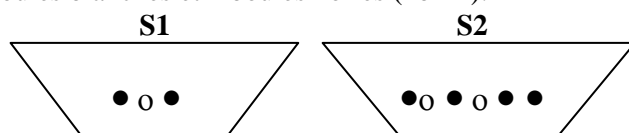
3.1.1. Les tâches choisies

Comme pour le premier test diagnostic, nous nous limitons à des tâches de proportionnalité et de comparaison à deux variables. Nous considérons cependant des cas où apparaît une difficulté moindre au niveau d'une variable que nous n'avons pas prise en considération, la variable « contenu des sacs ». Nous prenons pour cette variable des modalités que Piaget et Inhelder (1951) ont traitées.

Suivent les énoncés des deux exercices choisis :

Le cas de proportionnalité (tâche tp)

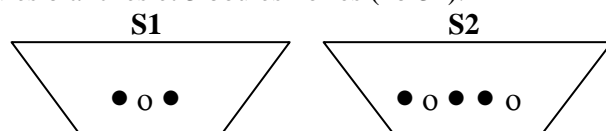
Matériel : deux sacs, **S1** contenant 1 boule blanche et 2 boules noires (1b-2n) et **S2** contenant 2 boules blanches et 4 boules noires (2b-4n).



Question : quel sac choisiriez-vous pour avoir le plus de chances de tirer une boule blanche ?
(Le tirage se fait au hasard)

Le cas de comparaison à deux variables (tâche td)

Matériel : deux sacs, **S1** contenant 1 boule blanche et 2 boules noires (1b-2n) et **S2** contenant 2 boules blanches et 3 boules noires (2b-3n).



Question : quel sac choisiriez-vous pour avoir le plus de chances de tirer une boule blanche ?
(Le tirage se fait au hasard)

Désormais, la tâche tp désigne l'exercice 1 des versions A et C et l'exercice 2 des versions B et D et la tâche td désigne l'exercice 2 des versions A et C et l'exercice 1 des versions B et D.

3.1.2. Objectifs

La première partie de ce test, relevant de la situation de prévision, vient compléter le premier test diagnostic.

Dans le complément du test diagnostic 1 (chapitre VII, sous 11), nous avons eu recours aux mêmes tâches que nous traitons ici mais la forme de la question était différente : dans ce complément, les modalités possibles sont données. Nous y avons montré que, relativement

aux tâches étudiées avant, la fréquence des conceptions inconnues a diminué de 10 % et celle des conceptions pertinentes est passée de 2,5 % à 12,5 % (cf. chapitre VII, sous 11.5.2). Nous nous sommes alors demandés si l'amélioration des performances est due à la différence de l'ordre de difficulté attaché à la variable "contenu des sacs" et/ou à la donnée de tous les choix possibles dans l'énoncé. L'un des objectifs de ce test est donc de répondre à cette question.

Par ailleurs et contrairement au premier test, la population est ici composée d'élèves de différents niveaux scolaires. Ensuite, dans ce test les tâches tp et td sont présentées dans des ordres différents (la tâche tp est présentée en premier lieu dans les versions A et C et en deuxième lieu dans les versions C et D). Notons aussi que les versions C et D de ce test diffèrent des versions A et B par la demande de justification. Nous espérons alors atteindre les objectifs suivants :

- Vérifier notre hypothèse concernant la spontanéité du modèle mathématique "nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles" à des niveaux allant du primaire (11-12 ans) au secondaire (15-16 ans).
- Relever l'effet du niveau scolaire sur les performances relatives aux tâches choisies.
- Étudier l'effet de l'ordre des tâches sur les performances.
- Traiter l'impact de la demande de justification sur les réponses des élèves. Autrement dit, nous nous demandons si les élèves ont de "bonnes" intuitions (dans le sens de réponses immédiates) et si la demande de justification contribue à les atténuer.

3.1.3. Plan expérimental et méthode

Dans cette partie, les variables indépendantes se situent au niveau du type de la tâche, de l'ordre des tâches, du contenu des sacs, du niveau scolaire et de la justification.

La situation de prévision constitue une épreuve standardisée qui se prête bien aux analyses statistiques. L'atteinte de nos objectifs se fait notamment par l'intermédiaire de l'outil statistique χ^2 .

3.2. Analyse a priori

Comment répondre d'une façon pertinente aux deux tâches choisies ? La réponse a été traitée dans le premier test diagnostic (cf. chapitre VII-4).

Disons pour résumer qu'une réponse correcte passe par la mobilisation d'une organisation personnelle de l'un des types suivants : P « cas favorables / cas possibles », P' « cas

favorables / cas défavorables » ou *G* « *collection intermédiaire* » (cf. chapitre VII, sous 5.1.2, 5.1.3 et 5.1.4).

Nos attentes

Pour toutes les situations présentées dans ce troisième test, les exercices constituent pour tous les élèves testés une première rencontre, dans l'institution scolaire, avec les probabilités. Nous nous attendons à ce que les réponses témoignent des difficultés rencontrées dans l'accomplissement des tâches assignées.

Nous prévoyons que les élèves testés mobilisent en masse des conceptions erronées dans l'accomplissement des tâches tp et td, quel que soit leur niveau scolaire. Nous nous attendons à ce que l'hypothèse vérifiée dans le premier test, formulant la non spontanéité du modèle mathématique "nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles", soit validée à des niveaux allant du primaire (11-12 ans) au secondaire (15-16 ans).

Compte tenu de la modification apportée, relativement aux exercices du test 1, dans la présentation des sacs, nous nous attendons à ne plus rencontrer de mobilisation de la conception *M* « *mécanique* ». En effet, cette conception relevée dans le premier test est basée, dans le cas des boules, sur le fait que les boules blanches sont présentées au dessus des noires.

4. Résultats pour la situation de prévision

4.1. Sans demande de justification : exercices 1 et 2 des versions (A) et (B)

Dans cette partie, notre étude porte sur les groupes de 6^{ème}, de 7^{ème}, de 8^{ème} de base et de 1^{ère} année secondaire ayant passé la version A ou B du test : 6A, 6B, 7A, 7B, 8A, 8B, 1A et 1B.

4.1.1. Les réponses apportées

Cas de proportionnalité (tâche tp)

Les fréquences des réponses apportées dans l'accomplissement de la tâche tp sont résumées dans le tableau suivant :

▪ Tableau IX.1

Effectifs des différentes réponses à la tâche tp selon les groupes et pourcentages associés

| Groupe \ Réponse | 6A | 6B | 7A | 7B | 8A | 8B | 1A | 1B |
|------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| = | 0 0% | 0 0% | 0 0% | 1 2% | 1 2% | 0 0% | 2 4% | 2 4% |
| S1 | 41 79% | 43 81% | 22 48% | 28 61% | 25 56% | 21 49% | 31 62% | 33 67% |
| S2 | 11 21% | 10 19% | 24 52% | 16 35% | 19 42% | 21 49% | 17 34% | 13 27% |
| X ⁹⁴ | 0 0% | 0 0% | 0 0% | 1 2% | 0 0% | 1 2% | 0 0% | 0 0% |
| Total | 52 100% | 53 100% | 46 100% | 46 100% | 45 100% | 43 100% | 50 100% | 48 100% |

Le choix indifférent (=) de l'un des sacs représente la réponse correcte du côté de la modélisation dans le cadre des mathématiques formelles.

Il ressort de l'examen du dernier tableau que la réponse correcte est d'une fréquence négligeable bien que les données de la tâche tp paraissent plus simples que celles des exercices correspondant au cas de proportionnalité du test 1. Autrement dit, le contenu du sac S2 étant le double de celui de S1, la tâche tp n'est pas bien accomplie bien que la réalisation d'une telle tâche puisse être résolue empiriquement dès la fin du stade des opérations concrètes d'après Piaget-Inhelder (1951).

À propos des réponses faisant un choix indifférent (=), l'élève du groupe 7B a répondu "S2 ou S1", celui du groupe 8A a justifié par les rationnels $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{4}$, les deux élèves du groupe 1A n'ont pas donné de justification, un des deux élèves du groupe 1B a parlé de chances égales et l'autre a donné une justification fautive : "S2 – S1 = 1b2n". Nous nous demandons si le dernier élève n'a pas voulu dire que le contenu du sac S2 est le double de celui de S1.

Nous rappelons ici que la consigne donnée lors de la passation des versions (A) et (B) est de ne donner que la réponse, ce qui nous a décidés à ne pas prendre en considération la justification.

⁹⁴ Désormais, dans ce chapitre X désigne une autre réponse ou une non réponse.

Ainsi, il apparaît que les élèves de tous les niveaux considérés (de 11 à 16 ans) ne pensent pas, dans l'accomplissement de la tâche tp à comparer des rapports.

Il faut signaler, par ailleurs, que le recours à la comparaison de rapports peut aussi donner lieu au choix effectif de l'un des sacs dans le cas de proportionnalité. En fait, nous avons relevé deux cas où l'élève, après avoir établi l'égalité des chances par le biais des fractions, choisit le sac S1 : en comparant les nombres de boules noires (un élève du groupe 7A) ou en optant pour le total de boules le plus petit (un élève du groupe 1B).

Tel était le cas dans le premier test, nous expliquons les derniers cas ainsi que d'autres où il y a choix exclusif de l'un des sacs par la pression de la question "quel sac choisiriez-vous ...". Plus précisément, il serait question d'un effet du contrat : les élèves n'ont pas l'habitude, en classe de mathématiques, de recourir indifféremment à deux réponses.

Cas de comparaison à deux variables (tâche td)

Nous résumons les fréquences des réponses apportées dans l'accomplissement de la tâche td dans le tableau suivant.

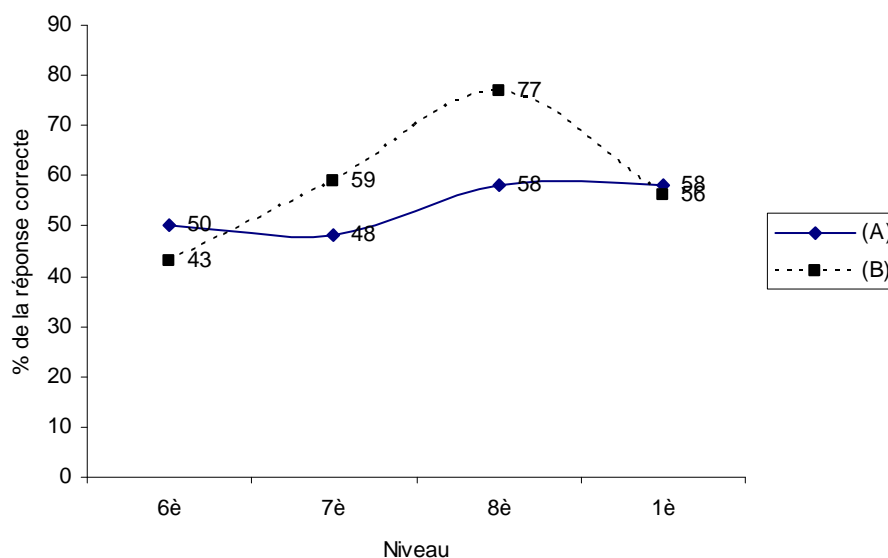
▪ Tableau IX.2

Effectifs des différentes réponses à la tâche td selon les groupes et pourcentages associés

| Groupe \ Réponse | 6A | 6B | 7A | 7B | 8A | 8B | 1A | 1B |
|------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| = | 0 0% | 0 0% | 1 2% | 0 0% | 0 0% | 0 0% | 0 0% | 1 2% |
| S1 | 26 50% | 30 57% | 23 50% | 18 39% | 18 40% | 10 23% | 21 42% | 20 42% |
| S2 | 26 50% | 23 43% | 22 48% | 27 59% | 26 58% | 33 77% | 29 58% | 27 56% |
| X | 0 0% | 0 0% | 0 0% | 1 2% | 1 2% | 0 0% | 0 0% | 0 0% |
| Total | 52 100% | 53 100% | 46 100% | 46 100% | 45 100% | 43 100% | 50 100% | 48 100% |

Remarquons que l'élève du groupe 1B qui a opté pour la réponse (=) a justifié, bien qu'on lui demande de se limiter à la réponse, de la façon suivante : "S2 – S1 = 1b1n". Il faut souligner qu'il s'agit du même élève ayant recouru, en haut, à la différence S2 – S1.

La figure IX.1 nous donne une idée sur l'évolution, relative à chacune des versions (A) et (B), de l'effectif de la réponse correcte S2 en fonction des 4 niveaux retenus : 6^{ème}, 7^{ème}, 8^{ème} année de base et 1^{ère} année secondaire.



▪ Fig. IX.1 : Variation de la performance relative à td, pour chacune des versions (A) et (B) en fonction du niveau scolaire

4.1.2. Effet du niveau scolaire

Bien entendu, l'effet du niveau scolaire sur les performances ne peut pas concerner la tâche tp, la fréquence de la réponse correcte pour cette tâche étant négligeable. Pour voir l'effet éventuel du niveau scolaire, nous nous limitons à la tâche td et nous rassemblons les résultats des deux versions A et B :

▪ Tableau IX.3

Effectifs opposant la réponse correcte S2 aux autres réponses relativement à la tâche td selon les niveaux et pourcentages associés

| Groupe \ Réponse | 6AB | 7AB | 8AB | 1AB |
|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| S2 | 49 47% | 49 53% | 59 67% | 56 57% |
| <i>Autres</i> | 56 53% | 43 47% | 29 33% | 42 43% |
| <i>Total</i> | 105 100% | 92 100% | 88 100% | 98 100% |

Ce tableau nous donne $\chi^2_c = 8,36$. Sachant que $\chi^2_{0,05; 3} = 7,81$, nous pouvons conclure que la performance dépend du niveau scolaire en acceptant un risque de 5 %. La différence statistiquement significative pourrait traduire la hausse des performances au niveau de la 8^{ème} année de base.

4.1.3. Effet de l'ordre des tâches

Le tableau IX.1 ne montre aucun effet d'ordre sur les performances relatives à la tâche tp. Pour chercher un éventuel effet de l'ordre des tâches, nous considérons alors la tâche td.

Nous nous rapportons d'abord aux deux tableaux suivant extraits du tableau IX.2 dans lesquels nous opposons les bonnes réponses à la tâche td aux autres réponses :

▪ Tableau IX.4

Performances relatives à la tâche td, version A, selon les groupes et pourcentages associés

| Groupe \ Réponse | 6A | 7A | 8A | 1A |
|------------------|------------|------------|------------|------------|
| S2 | 26 50% | 22 48% | 26 58% | 29 58% |
| Autres | 26 50% | 24 52% | 19 42% | 21 42% |
| Total | 52 100% | 46 100% | 45 100% | 50 100% |

▪ Tableau IX.5

Performances relatives à la tâche td, version B, selon les groupes et pourcentages associés

| Groupe \ Réponse | 6B | 7B | 8B | 1B |
|------------------|------------|------------|------------|------------|
| S2 | 23 43% | 27 59% | 33 77% | 27 56% |
| Autres | 30 57% | 19 41% | 10 23% | 21 44% |
| Total | 53 100% | 46 100% | 43 100% | 48 100% |

Le tableau IX.4 nous donne $\chi^2_c = 1,58$ et le tableau IX.5 nous donne $\chi^2_c = 10,90$. Il nous semble alors que le rejet de l'hypothèse d'indépendance entre la performance et le niveau scolaire abordé dans le paragraphe précédent (4.1.2) est dû principalement à la version B du test, c'est-à-dire à la version où la tâche td figure en premier.

Nous nous intéressons ensuite à opposer les résultats globaux de la version A à ceux de la version B. Ayant 103 réponses correctes et 90 réponses fausses dans la version A contre 110 réponses correctes et 80 réponses fausses dans la version B, nous concluons, avec $\chi^2_c = 0,62$, à un effet de l'ordre des tâches dû au hasard.

4.2. Avec demande de justification : exercices 1 et 2 des versions (C) et (D)

Ici, la partie de la population concernée par l'étude est constituée par les groupes de 8^{ème} de base et de 1^{ère} année secondaire ayant passé la version C ou D du test, soit les groupes 8C, 8D, 1C et 1D.

4.2.1. Les conceptions construites

L'accès aux conceptions développées par les élèves testés s'effectue à travers leurs justifications. Elle se fait par l'intermédiaire des organisations personnelles utilisées (cf. chapitre VII - 5).

Le cas de la tâche tp de proportionnalité

Nous rappelons que le cas de la proportionnalité correspond à (S1 : 1b-2n / S2 : 2b-4n).

Les conceptions construites par les élèves lors de l'accomplissement de la tâche tp sont rassemblées dans le tableau IX.6.

▪ Tableau IX.6

*Conceptions développées dans la réalisation de la tâche tp
selon les groupes et pourcentages associés*

| Conception \ Groupe | <i>PP'</i> | <i>N</i> | <i>D</i> | <i>T</i> | <i>CP</i> | <i>C</i> | <i>I</i> | <i>Total</i> |
|---------------------|------------|-------------|----------|-------------|-----------|-----------|-----------|--------------|
| 8C | 0 0% | 20 44,5% | 0 0% | 11 24,5% | 0 0% | 1 2% | 13 29% | 45 100% |
| 8D | 1 2,3% | 14 31% | 0 0% | 5 11% | 1 2,3% | 1 2,3% | 23 51% | 45 100% |
| 1C | 1 2% | 16 34% | 1 2% | 8 17% | 0 0% | 1 2% | 20 43% | 47 100% |
| 1D | 5 11% | 17 38% | 0 0% | 3 7% | 0 0% | 1 2% | 19 42% | 45 100% |

Pour les codes utilisés, nous renvoyons le lecteur au chapitre VII (sous5).

Notons toutefois que :

- *PP'* désigne qu'il y a mobilisation de la conception *P* « cas favorables / cas possibles » ou de la conception *P'* « cas favorables / cas défavorables ».
- *N* désigne la conception « cardinal partie ».
- *D* désigne la conception « différence ».
- *T* désigne la conception « cardinal tout ».
- *I* désigne une conception inconnue.
- *C* désigne la mobilisation de deux conceptions.
- *CP* désigne la conception compatibilité.

Le dernier tableau met en évidence l'importance de l'effectif des conceptions inconnues *I*.

Bien que l'effectif des conceptions pertinentes PP' , très faible en général, soit quelque peu élevé dans le groupe 1D, il faut souligner qu'un seul parmi les 5 élèves en question a opté pour la réponse indifférente (=). Cet élève a justifié sa réponse par le fait que " $b = \frac{1}{2} n$ ", il a ainsi mobilisé la conception P' « cas favorables / cas défavorables » avec la technique $\tau_{f/d}$ « comparaison des rapports f/d ».

Tous les autres ont choisi le premier sac S1 :

- un parle des chances de la façon suivante "1 de 3 dans S1 et 2 de 6 dans S2",
- le deuxième semble ne pas avoir su relever convenablement le nombre total des boules dans le premier sac, il a opposé le rapport nombre de blanches sur nombre de noires dans S1 au rapport nombre de blanches sur nombre total des boules dans S2, il écrit " $\frac{1}{2} > \frac{2}{6}$ ",

- le troisième oppose $\frac{1}{2}$ à $\frac{2}{4}$,

- le dernier écrit " $\frac{1}{2} < \frac{2}{4}$ " ! Puisqu'il a choisi S1, nous nous demandons si, pour lui, le symbole "<" signifie "supérieur". Dans ce cas, il serait question d'un effet de bilatéralité dû à l'enseignement arabe des mathématiques au niveau du primaire (cf. Chapitre VII - 5.1.2).

La conception « compatibilité » CP apparaît ici une seule fois. L'élève choisit les deux sacs en justifiant que la couleur noire existe dans les deux. Cette conception était absente au test diagnostic 1 et présente d'une façon modeste au test diagnostic 2.

Contrairement au test 1, la conception « différence » D n'est presque pas mobilisée dans l'accomplissement de la tâche tp : elle n'apparaît qu'une seule fois.

Quant aux conceptions du type « combiné », elles apparaissent une fois par groupe : on trouve deux fois la forme (N, I) , une fois la forme (T, P) et une fois la forme (G, T) , G désignant la conception « collection intermédiaire ».

Pour les deux derniers couples de conceptions, les élèves écrivent respectivement " $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ " et "S1 et S2 sont équivalents" mais optent pour le premier sac vu qu'il contient le moins de boules. Encore une fois, nous suspectons un effet de la pression de la question ou du contrat didactique.

Dans le test 1, pour le référent « boules », les conceptions non pertinentes identifiées utilisées de manière remarquable sont N , D et T . Pour l'accomplissement de la tâche tp de ce troisième

test, les conceptions non pertinentes qui sont mobilisées avec une fréquence remarquable sont plutôt N « cardinal partie » et T « cardinal tout ». Ceci nous inciterait à penser à un effet de la variable de commande « contenu des sacs ».

Bien entendu et comme prévu, la conception « mécanique » M , due au fait que les blanches sont au dessus des noires dans le premier test, n'est plus développée dans le cas de proportionnalité.

Le cas de la tâche td de comparaison à deux variables

Rappelons que le cas de comparaison à deux variables correspond à ($S1 : 1b-2n / S2 : 2b-3n$).

Les conceptions construites par les élèves lors de la réalisation de la tâche td sont rassemblées dans le tableau IX.7.

▪ Tableau IX.7

*Conceptions développées dans la réalisation de la tâche td
selon les groupes et pourcentages associés*

| Conception Groupe | PP' | N | D | T | C | I | Total |
|----------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------------|------------|
| 8C | 1 2% | 18 40% | 2 4,5% | 5 11% | 3 7% | 16 35,5% | 45 100% |
| 8D | 0 0% | 23 51% | 0 0% | 2 4,5% | 2 4,5% | 18 40% | 45 100% |
| 1C | 2 4,5% | 16 34% | 0 0% | 4 8,5% | 0 0% | 25 53% | 47 100% |
| 1D | 5 11% | 19 42% | 0 0% | 5 11% | 1 2% | 15 34% | 45 100% |

Le dernier tableau met en évidence l'importance de l'effectif des conceptions inconnues I .

La présence des conceptions PP' est très faible :

Au niveau du groupe 1D, 5 élèves ont mobilisé chacun une conception pertinente. Nous comptons cependant 3 parmi ces 5 cas où une conception pertinente est utilisée correctement : deux fois pour la conception P' « cas favorables / cas défavorables » avec la technique $\tau_{f/d}$ « comparaison des rapports f/d » et une fois pour la conception P « cas favorables / cas possibles » avec la technique $\tau_{p f/p}$ « comparaison des rapports f/p ». Nous comptons 2 cas où

la conception pertinente est mal exploitée : une fois dans la justification " $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{5}$ " et le choix du sac S1 et une fois par le choix indifférent suite à la justification " $\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ ".

Notons que la dernière justification est apportée par le même élève cité en haut et qui, dans la réalisation de la tâche tp a justifié " $\frac{1}{2} < \frac{2}{4}$ ". Nous nous demandons si cet élève pense une fraction comme étant la différence entre le dénominateur et le numérateur.

La conception « différence » D , apparaissant deux fois, est très peu fréquente.

Pour les conceptions du type « combiné », elles apparaissent 6 fois : on trouve 2 fois la forme (T, I) et 1 fois chacune des formes (I, P) , (N, I) , (N, D) et (I, I) .

Dans l'accomplissement de la tâche td, outre les conceptions I , les conceptions remarquables identifiées sont N et T . Puisque dans le test 1, pour le référent « boules », les conceptions non pertinentes identifiées utilisées de manière remarquable sont N , D et T , nous imputons la quasi disparition de la conception D à la variable de commande « contenu des sacs ».

Remarquons aussi que, comme prévu, la conception « mécanique » M n'est plus mobilisée dans le cas de comparaison à deux variables.

Comparaison avec les résultats du complément du test 1

Avec 4 % environ de conceptions pertinentes dans ce test (3,8 % pour la tâche tp et 4,2 % pour la tâche td) et 12,5 % de conceptions pertinentes dans le complément du test 1 (17,9 % pour la tâche tp et 7,1 % pour la tâche td), il serait raisonnable de conclure que l'amélioration des performances remarquée dans le complément du test 1 n'est pas due à la différence de l'ordre de difficulté attaché à la variable "contenu des sacs" ; elle est due à la donnée de tous les choix possibles dans l'énoncé.

4.2.2. Les réponses apportées

Ici, nous allons nous intéresser plutôt aux réponses données par la population sans prendre en considération les justifications utilisées.

Le cas de la tâche tp de proportionnalité

Les réponses apportées par les élèves testés lors de l'accomplissement de la tâche tp sont rassemblées dans le tableau IX.8.

▪ Tableau IX.8

*Effectifs des réponses apportées dans la réalisation de la tâche tp
selon les groupes et pourcentages associés*

| Réponse Groupe | = | S1 | S2 | X | Total |
|-------------------|-----------------------|-------------|-------------|---------|------------|
| 8C | 0 0% | 27 60% | 18 40% | 0 0% | 45 100% |
| 8D | 1 2% | 24 53,5% | 20 44,5% | 0 0% | 45 100% |
| 1C | 1 2% | 28 60% | 17 36% | 1 2% | 47 100% |
| 1D | 1 2% | 29 65% | 14 31% | 1 2% | 45 100% |

Les réponses correctes sont au nombre de 3. Ce sont les réponses accompagnées d'une justification correcte relevant de la conception « proportion » *P*.

La réponse majoritaire dans la réalisation de la tâche tp est la réponse S1.

Nous trouvons deux réponses autres que (=), S1 et S2 : une réponse, dans le groupe 1D, qui présente une interférence avec l'exercice 3 car l'élève a donné la réponse "impair" et une autre, dans le groupe 1C, où l'élève ne choisit pas de réponse car le nombre de boules blanches est inférieur au nombre de boules noires dans les deux sacs.

Le cas de la tâche td de comparaison à deux variables

Nous rassemblons les réponses données par les élèves dans la réalisation de la tâche td dans le tableau IX.9.

▪ Tableau IX.9

*Effectifs des réponses apportées dans la réalisation de la tâche td
selon les groupes et pourcentages associés*

| Réponse Groupe | = | S1 | S2 | X | Total |
|-------------------|---------|-------------|------------------|-----------|------------|
| 8C | 0 0% | 17 38% | 28 62% | 0 0% | 45 100% |
| 8D | 0 0% | 18 40% | 27 60% | 0 0% | 45 100% |
| 1C | 1 2% | 19 40,5% | 25 53% | 2 4,5% | 47 100% |
| 1D | 1 2% | 22 49% | 22 49% | 0 0% | 45 100% |

Ce tableau montre que la réponse S2 correcte sans tenir compte des justifications, réponse que nous notons (JS), est la réponse majoritaire. Il faut remarquer cependant que, les justifications prises en compte, il n'y a que 6 réponses justes qui sont notés (JJ).

Pour les réponses classées « X », nous comptons 2 qui figurent dans le groupe 1C : une non réponse et une autre où le même élève, cité en haut pour la tâche tp, n'ose pas choisir une réponse car le nombre de boules blanches est inférieur au nombre de boules noires dans les deux sacs.

4.2.3. Effet du niveau scolaire

Cas de proportionnalité

Au vu du tableau IX.8 rapportant les effectifs des réponses données dans la réalisation de la tâche tp, il ressort que la réponse correcte (=) est d'une fréquence très négligeable, tant pour le niveau de la 8^{ème} année de base que pour celui de la 1^{ère} année secondaire.

Ainsi le fait que les élèves des niveaux considérés ne pensent pas, dans l'accomplissement de la tâche tp, à comparer des rapports - fait soulevé pour les versions (A) et (B) - est confirmé.

Cas de comparaison à deux variables

Sous le tableau IX.9, nous avons mentionné que les réponses correctes en tenant compte des justifications (JJ) sont au nombre de 6 : 1 en 8C, 2 en 1C et 3 en 1D.

Pour traiter l'impact du niveau scolaire, nous limitons la comparaison au niveau de la réponse S2 correcte sans compter les justifications (JS) et nous rassemblons les résultats des deux versions C et D :

▪ Tableau IX.10

Effectifs opposant la réponse correcte S2 aux autres réponses relativement à la tâche td selon les niveaux et pourcentages associés

| Groupe \ Réponse | 8CD | 1CD |
|------------------|-------------------------|-------------------------|
| S2 | 55 61% | 47 51% |
| <i>Autres</i> | 35 39% | 45 49% |
| <i>Total</i> | 90 100% | 92 100% |

Ce tableau nous révèle une différence statistiquement non significative ($\chi^2_c = 1,47$) entre les deux niveaux scolaires considérés. Ceci nous permet de conclure que relativement au niveau scolaire, la différence dans les performances est due au hasard au risque de 5 %.

4.2.4. Effet de l'ordre des tâches

Effet sur les conceptions mobilisées

L'effectif des conceptions correctes étant très négligeable aussi bien pour la tâche tp que pour la tâche td, nous ne pouvons tirer de conclusion concernant l'effet de l'ordre des tâches.

Effet sur les réponses apportées

Qu'il s'agisse de tp ou de td, les réponses correctes, en tenant compte de la justification, sont quasi inexistantes.

Nous nous limitons alors à la réponse S2 dans la réalisation de la tâche td, sans considérer la justification, et nous opposons les résultats globaux de la version C à ceux de la version D. Ayant 53 réponses S2 et 39 autres réponses à la version C contre 49 réponses S2 et 41 autres réponses à la version D, nous concluons, avec $\chi^2_c = 0,07$, à un effet non significatif de l'ordre des tâches.

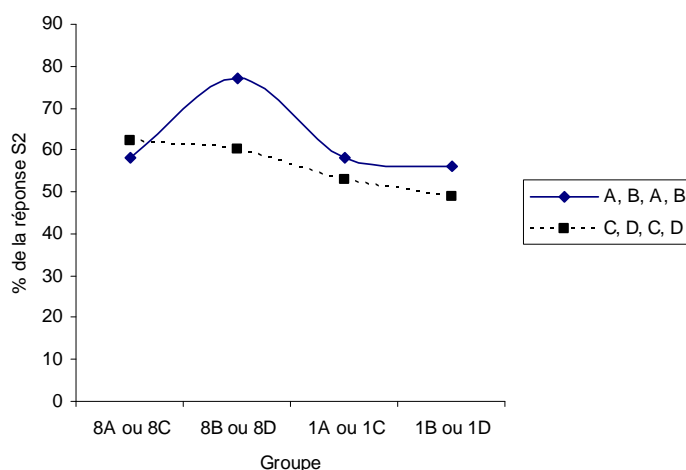
Il apparaît ainsi que l'effet de l'ordre des tâches, que l'on tienne compte de la justification ou non, est à négliger.

4.2.5. Impact de la demande de justification

Pour mesurer l'impact de la demande de justification, nous nous limitons à la tâche td. Nous opposons alors les résultats globaux (de la 8^{ème} année de base et de la 1^{ère} année secondaire) des versions A et B rassemblées à ceux des versions C et D rassemblées. Comme nous avons 115 réponses S2 et 71 autres réponses dans les versions A et B réunies contre 102 réponses S2 et 80 autres réponses dans les versions C et D réunies, nous concluons, avec $\chi^2_c = 1,04$, à un effet non significatif de la demande de justification au niveau global.

Remarquons que même que pour chaque niveau pris à part, nous aboutissons à une différence non significative avec $\chi^2_c = 0,44$ entre 8AB et 8CD et $\chi^2_c = 0,47$ entre 1AB et 1CD.

Illustrons l'effet de la demande de justification dans la figure suivante :



▪ Fig. IX.2 : Pourcentage de la réponse S2 apportée à td en fonction de la demande de justification

D'après la figure ci-contre, il semble qu'en général la réponse S2 donnée dans l'accomplissement de la tâche td soit plus importante en l'absence de la demande de justification.

Pourrions-nous alors dire que les élèves ont de bonnes intuitions (dans le sens où il est question de réponses immédiates) et que la demande de justification les a atténuées ?

4. 3. Conclusion

Au terme de la première partie de ce test, partie relative aux exercices 1 et 2, nous constatons que les conceptions pertinentes mobilisées sont très peu fréquentes. Les élèves testés, tous niveaux compris, mobilisent, en masse, des conceptions erronées et ne pensent pas à comparer des fractions dans l'accomplissement des tâches tp et td. Ainsi, l'hypothèse, vérifiée dans le premier test, formulant la non spontanéité du modèle mathématique "nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles" est consolidé ; il est validé à des niveaux allant du primaire (11-12 ans) au secondaire (15-16 ans).

L'étude faite dans la première partie de ce test nous a permis de conclure que la performance dans la situation de prévision dépend du niveau scolaire dans les versions A et B où ne figure

pas de demande de justification. Cette dépendance, pouvant être expliquée par la hausse des performances au niveau de la 8^{ème} année de base, serait due à la version B du test, version où la tâche de comparaison à deux variables td figure avant la tâche de proportionnalité tp.

Nous avons aussi montré que l'effet de l'ordre des tâches, que l'on tienne compte de la justification ou non, est à négliger.

Par ailleurs, nous avons relevé un effet non significatif de la demande de justification. Toutefois, remarquant qu'en général la réponse S2 donnée dans l'accomplissement de la tâche td est plus importante en l'absence de la demande de justification, l'existence, chez les élèves, de "bonnes" intuitions (au sens de réponses immédiates) pouvant être atténuées par la demande de justification est une question qui reste posée.

Dans le test 1, les conceptions les plus fréquentes sont *N* « cardinal partie », *D* « différence » et *T* « cardinal tout ». Sachant que dans le test en cours les conceptions *N* et *T* sont les conceptions les plus fréquemment mobilisées, nous concluons à un effet de la variable de commande « contenu des sacs » au sens où les modalités de cette variable dans ce test, contrairement à celles dans le premier test, ne favorisent pas l'apparition de la conception *D*.

Terminons par donner une réponse à une question que nous avons posée dans le premier test (cf. chapitre VII - 11.5.2) : suite aux résultats de cette première partie, il nous apparaît que l'amélioration des performances remarquée dans le complément du test 1 n'est pas due à la différence de l'ordre de difficulté attaché à la variable "contenu des sacs" ; elle s'explique plutôt par la donnée de tous les choix possibles dans l'énoncé.

5. Situation d'indépendance : présentation et analyse a priori

5.1. Tâches, objectifs et plan expérimental

5.1.1. Les tâches choisies

Nous avons abordé précédemment une tâche « ti » relevant de la situation d'indépendance chronologique (cf. chapitre V - 2.1.2 et chapitre VI - 2.1.3). Nous prenons ici une deuxième tâche « ti2 » relevant de la même situation dans laquelle, contrairement à la tâche « ti », nous ne donnons pas les résultats des premières épreuves :

Exercice 4 : tâche « ti2 »

Matériel : un sac **S** contient trois jetons circulaires équilibrés : sur l'un figure le chiffre 1, sur un autre le chiffre 2 et sur le troisième le chiffre 3.

Expérience : on tire au hasard quatre fois de suite un jeton de **S**, en remettant après chaque tirage le jeton tiré. On obtient ainsi un nombre à quatre chiffres :

- le premier tirage donne le chiffre des mille,
- le deuxième tirage donne le chiffre des centaines,
- le troisième tirage donne le chiffre des dizaines,
- le quatrième tirage donne le chiffre des unités.

Question : a-t-on plus de chances d'obtenir un nombre pair ou bien un nombre impair ?

Cet exercice est précédé d'une tâche introductive « t1 » correspondant à un exercice où on a le même matériel :

Exercice 3 : tâche « t1 »

Matériel : un sac **S** contient trois jetons circulaires équilibrés : sur l'un figure le chiffre 1, sur un autre le chiffre 2 et sur le troisième le chiffre 3.

Expérience : on tire au hasard un jeton de **S**.

Question : a-t-on plus de chances d'obtenir un chiffre pair ou bien un chiffre impair ?

5.1.2. Objectifs

Avec l'accomplissement des tâches « t1 » et « ti2 » par les groupes considérés, nous espérons atteindre quelques objectifs.

- Un premier objectif consiste à relever l'effet du niveau scolaire sur les performances réalisées, sur les conceptions mobilisées et sur la reconnaissance de l'indépendance des épreuves.
- Un deuxième objectif consiste à étudier l'impact de la demande de justification aussi bien sur les performances que sur la reconnaissance de l'indépendance des épreuves.
- Un troisième objectif consiste à vérifier l'hypothèse concernant la spontanéité du modèle mathématique "nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles".

Ainsi, ce test vient compléter les tests précédents. Il vient compléter les deux derniers tests diagnostics au niveau de la vérification de la dernière hypothèse. Il vient aussi compléter le test 2 ainsi que les expérimentations des chapitres V et VI où nous avons relevé un problème de compréhension au niveau de l'indépendance chronologique.

5.1.3. Plan expérimental et méthode

L'accomplissement de la tâche « t1 » de l'exercice 3 renferme deux fonctions. Il sert d'abord à introduire la tâche « ti2 » d'indépendance. Il sert ensuite à étudier la reconnaissance de l'indépendance des épreuves dans l'exercice 4.

Les deux exercices 3 et 4 figurent dans les deux versions A et B sans demande de justification et dans les deux versions C et D avec demande de justification. Ainsi, les réponses seront rassemblées aussi bien pour les versions A et B que pour les versions C et D.

La situation d'indépendance constitue une épreuve standardisée qui se prête aux analyses statistiques. L'atteinte de nos objectifs se fait notamment d'une façon quantitative par l'intermédiaire de l'outil statistique Khi2.

Pour la mesure de la reconnaissance de l'indépendance, nous nous basons sur les élèves ayant donné des réponses (ou ayant mobilisé des conceptions) pertinentes dans l'accomplissement de la tâche « t1 » de l'exercice 3. Nous comparons alors l'effectif de ces élèves avec l'effectif de ceux, parmi eux, qui ont aussi développé une réponse (ou une conception) pertinente dans l'accomplissement de la tâche « ti2 » de l'exercice 4.

5.2. Analyse a priori

Comment répondre d'une façon pertinente aux deux tâches choisies ?

Pour la tâche « t1 » (exercice 3), une première technique consiste à comparer les rationnels $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$ qui sont respectivement la probabilité d'obtenir un chiffre impair et celle d'obtenir un chiffre pair. Cette technique est à associer à la conception P « *cas favorables / cas possibles* » que nous avons relevé dans un chapitre antérieur (cf. chapitre VII - 5.1.2).

Une deuxième technique consiste à comparer les entiers 2 et 1 qui sont respectivement le nombre de chiffres impairs et le nombre de chiffres pairs. Cette technique est à associer à une conception NI « *cardinaux* ».

Remarquons que la conception NI « *cardinaux* » peut être rapprochée à la conception N « *cardinal partie* » du premier test diagnostic (cf. chapitre VII - 5.2.3) si l'on remplace l'énoncé de l'exercice 3 par un énoncé équivalent représentant un cas de comparaison à une seule variable de la situation de prévision : deux sacs contenant respectivement 2 cas favorables et 1 cas favorable, le nombre des cas possibles étant 3 pour chacun des sacs.

Nous convenons par ailleurs qu'il y a reconnaissance de l'indépendance des épreuves (tirages) dans le cas où une réponse pertinente pour la tâche « t1 » (exercice 3) est réitérée pour la tâche « ti2 » (exercice 4).

Nos attentes

La tâche « t1 » de l'exercice 3 ressemble à la tâche du premier exercice du test diagnostic 1, exercice bien réussi avec 74 % de réponses correctes. Nous nous attendons donc à une bonne réussite dans l'accomplissement de la tâche « t1 » pour tous les niveaux considérés et à une performance proche de celle du test 1 au niveau de la 8^{ème} année de base.

Pour la tâche de reconnaissance de l'indépendance, rappelons que nous avons relevé une performance de l'ordre de 25% au niveau de la 2^{ème} année secondaire dans une expérimentation précédente (cf. chapitre V - 5.3.1). Nous nous attendons dans ce test à une meilleure performance dans l'accomplissement de la tâche « ti2 » étant donné que l'énoncé ne comporte pas la donnée des résultats des premiers tirages.

Nous attendant à relever des difficultés de reconnaissance de l'indépendance des épreuves, nous prévoyons que les performances seront moindres dans la résolution de l'exercice 4 que dans celle de l'exercice 3 pour les deux niveaux où l'on demande une justification (8^{ème} année de base et 1^{ère} année secondaire) et ceci indépendamment de la demande de justification.

En nous appuyant sur les résultats trouvés dans la première partie de ce test, nous nous attendons à ce que la demande de justification n'affecte pas les performances.

Comme pour toutes les tâches testées, nous prévoyons que le recours à la définition laplacienne des probabilités "nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles" n'est pas spontané.

Enfin, nous nous attendons à avoir des performances meilleures en 1^{ère} année secondaire qu'en 8^{ème} année de base. D'ailleurs, nous prévoyons l'existence d'un problème langagier au niveau de la 8^{ème} année de base, niveau pour lequel l'enseignement des mathématiques est fait en arabe. Il est question d'un problème dévoilant une confusion entre le « possible » et le « probable » que nous avons soulevé précédemment (cf. chapitre VII - 7.1).

6. Résultats pour la situation d'indépendance

Comme signalé plus haut, nous nous intéressons ici aux versions A et B rassemblées et C et D rassemblées, les dernières versions diffèrent des premières par la demande de justification.

6.1. Sans demande de justification

Dans cette partie, notre étude porte sur les groupes de 6^{ème}, de 7^{ème}, de 8^{ème} de base et de 1^{ère} année secondaire ayant passé la version A ou B du test : 6AB, 7AB, 8AB et 1AB.

6.1.1. Les réponses apportées

Nous récapitulons les réponses données par les élèves testés dans les deux tableaux suivants : le tableau IX.11 concerne l'exercice 3 (tâche « t1 ») et le tableau IX.12 concerne l'exercice 4 (tâche « ti2 »). Dans les exercices 3 et 4, le matériel est constitué d'un sac qui contient deux jetons portant chacun un chiffre impair (1 et 3) et un jeton portant un chiffre pair (2). Nous convenons de noter *IM* une réponse disant qu'il y a plus de chances d'obtenir un chiffre impair dans l'exercice 3 (ou un nombre impair dans l'exercice 4). Nous convenons aussi de noter *PA* une réponse favorable à un chiffre ou un nombre pair. La notation *X* est choisie pour une autre réponse.

▪ Tableau IX.11

*Effectifs des réponses apportées dans
la réalisation de la tâche « t1 » selon les groupes et
pourcentages associés*

| Réponse Groupe | <i>IM</i> | <i>PA</i> | <i>X</i> | Total |
|-------------------|--------------------|-------------|-----------|-------------|
| 6AB | 83 79% | 18 17% | 4 4% | 105 100% |
| 7AB | 64 70% | 17 18% | 11 12% | 92 100% |
| 8AB | 57 65% | 17 19% | 14 16% | 88 100% |
| 1AB | 70 71,5% | 23 23,5% | 5 5% | 98 100% |

▪ Tableau IX.12

*Effectifs des réponses apportées dans la
réalisation de la tâche « ti2 » selon les groupes et
pourcentages associés*

| Réponse Groupe | <i>IM</i> | <i>PA</i> | <i>X</i> | Total |
|-------------------|--------------------|-------------|-----------|-------------|
| 6AB | 70 67% | 34 32% | 1 1% | 105 100% |
| 7AB | 49 53% | 25 27% | 18 20% | 92 100% |
| 8AB | 43 49% | 27 31% | 18 20% | 88 100% |
| 1AB | 68 69,5% | 27 27,5% | 3 3% | 98 100% |

Dans les réponses classées « *X* », nous rassemblons les réponses que nous n'avons pas comprises, les cas où l'élève choisit un chiffre (parmi 1, 2 et 3) pour répondre à l'exercice 3 ou un nombre dans la réponse à l'exercice 4, les cas de reprise de l'énoncé et ceux où il n'y a pas de réponse. Dans cette classe de réponses, nous relevons quelques-unes telles que « impair ou pair » ou bien « impair et pair ». Ces réponses que nous notons « *IM ou/et PA* » paraissent aux seuls niveaux de 7^{ème} année et de 8^{ème} année de base qui contiennent d'ailleurs un nombre considérable de réponses relevant de la catégorie « *X* ». Elles correspondent, au niveau de la 7^{ème} année, aux effectifs 4 et 5 respectivement dans les exercices 3 et 4 et, au

niveau de la 8^{ème} année, aux effectifs 7 et 5 respectivement dans les exercices 3 et 4. Nous reviendrons sur ce type de réponses à la suite (cf. 6.2.2).

Remarquons que comme attendu, la réussite dans la réalisation de la tâche « t1 » au niveau de la 8^{ème} année de base ne diffère pas de la réussite à l'exercice 1 du premier test diagnostic dont la population appartient au même niveau. En effet, avec 57 réponses correctes contre 31 réponses fausses pour la tâche t1 et 188 réponses correctes contre 66 réponses fausses pour l'exercice 1 du test 1, la différence est non significative au seuil de 5 % ($\chi^2_c = 2,31$).

Soulignons par ailleurs que les performances pour la tâche « ti2 » sont de loin meilleures à tous les niveaux scolaires testés que la performance pour la tâche « ti » d'indépendance étudiée, avec un niveau scolaire supérieur (2^{ème} année secondaire), au chapitre V (sous 5.3.1).

6.1.2. Effet du niveau scolaire

Sur les performances

À partir des deux tableaux précédents et en ajoutant la colonne *X* à la colonne *PA*, nous obtenons, au seuil de 5 %, une différence non significative pour la tâche t1 ($\chi^2_c = 5,06$) et une différence significative pour la tâche ti2 ($\chi^2_c = 11,83$). Ainsi, contrairement à la tâche t1, la performance dépend du niveau scolaire pour la tâche d'indépendance ti2, cette dépendance traduisant une meilleure performance aux niveaux de la 6^{ème} année de base et de la 1^{ère} année secondaire.

Sur la reconnaissance de l'indépendance

Intéressons-nous maintenant aux effectifs des élèves qui ont produit la même réponse *IM* dans l'accomplissement des deux tâches que nous résumons dans le tableau suivant :

▪ Tableau IX.13

Effectifs de la réponse IM produite à la fois dans la réalisation des deux tâches « t1 » et « ti2 » selon les groupes

| Réponse Groupe | 6AB | 7AB | 8AB | 1AB |
|------------------------------------|-----|-----|-----|-----|
| IM dans t1 et ti2 à la fois | 57 | 39 | 29 | 48 |
| <i>Autre</i> | 48 | 53 | 59 | 50 |

Des deux tableaux IX.11 et IX.13 il ressort que relativement aux élèves qui ont répondu *IM* dans t1, ceux qui ont reproduit la même réponse dans ti2 représentent 68 % en 6^{ème}, 61 % en 7^{ème}, 51 % en 8^{ème} et 71 % en 1^{ère}. Ceci est supposé comme étant le signe d'une certaine difficulté dans la reconnaissance de l'indépendance des tirages aux quatre niveaux testés.

Par ailleurs, le tableau IX.13 nous donne $\chi^2_c = 9,68$ et nous permet alors de conclure que la reconnaissance de l'indépendance des tirages dépend du niveau scolaire au risque de 5 %. La différence significative pourrait être traduite par la baisse de la fréquence de la réponse *IM* commune pour les deux tâches t1 et ti2 au niveau de la 7^{ème} année de base et de la 8^{ème} année de base.

6.2. Avec demande de justification

Ici, les groupes concernés par l'étude sont ceux qui ont répondu au test dans ses deux versions C et D. Autrement dit, nous avons affaire au groupe 8CD de 8^{ème} année de base et au groupe 1CD de 1^{ère} année secondaire.

6.2.1. Les réponses apportées

Dans cette partie, nous allons nous intéresser seulement aux réponses données par la population considérée, les justifications étant laissées de côté.

Comme dans le dernier paragraphe, nous récapitulons les réponses données par les groupes concernés dans les deux tableaux suivants :

▪ Tableau IX.14

*Effectifs des réponses apportées dans
la réalisation de la tâche « t1 » selon les groupes et
pourcentages associés*

| Réponse Groupe | IM | PA | X | Total |
|-------------------|---------------------------|---------------------------|-------------------------|--------------------------|
| 8CD | 58 64,5% | 12 13,5% | 20 22% | 90 100% |
| 1CD | 70 76% | 14 15% | 8 9% | 92 100% |

▪ Tableau IX.15

*Effectifs des réponses apportées dans la
réalisation de la tâche « ti2 » selon les groupes et
pourcentages associés*

| Réponse Groupe | IM | PA | X | Total |
|-------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|--------------------------|
| 8CD | 48 53,5% | 11 12% | 31 34,5% | 90 100% |
| 1CD | 65 70,5% | 19 20,5% | 8 9% | 92 100% |

Comme dans les versions A et B, nous relevons, au sein des réponses de la catégorie « X », quelques-unes que nous classons « *IM* ou/et *PA* ». Nous trouvons ces réponses aussi bien au niveau de la 8^{ème} année de base qu'à celui de la 1^{ère} année secondaire et elles sont plus fréquentes au niveau de la 8^{ème} année. Nous reprenons ce type de réponses dans le paragraphe suivant.

6.2.2. Les conceptions construites

Nous résumons les conceptions mobilisées dans l'accomplissement des tâches « t1 » et « ti2 » dans les tableaux suivants :

▪ Tableau IX.16

*Conceptions développés dans la réalisation
de la tâche « t1 » selon les groupes
et pourcentages associés*

| Conception Groupe | P | NI | XI | Total |
|----------------------|---------|-------------|-------------|------------|
| 8CD | 1 1% | 51 57% | 38 42% | 90 100% |
| 1CD | 3 3% | 50 54,5% | 39 42,5% | 92 100% |

▪ Tableau IX.17

*Conceptions développés dans la réalisation
de la tâche « ti2 » selon les groupes
et pourcentages associés*

| Conception Groupe | P | NI | XI | Total |
|----------------------|---------|-------------|-------------|------------|
| 8CD | 0 0% | 31 34,5% | 59 65,5% | 90 100% |
| 1CD | 3 3% | 25 27% | 64 70% | 92 100% |

Commençons par mentionner que la catégorie « XI » des conceptions autres que P et NI dans la réalisation des tâches t1 et ti2 correspond à des effectifs assez élevés, ces effectifs étant plus considérables pour la deuxième tâche. Nous nous demandons si cette catégorie n'est pas l'indice d'un problème au niveau de la compréhension de l'énoncé.

Nous trouvons dans cette catégorie, comme indiqué dans le paragraphe précédent, les réponses « IM ou/et PA ». Ces réponses, qui sont plutôt du type « IM ou PA », sont au nombre de 20 (dont 17 au groupe 8CD) pour la tâche t1 et au nombre de 19 (dont 15 au groupe 8CD) pour la tâche ti2. Elles illustrent surtout un problème dans la compréhension des énoncés.

Prenons un exemple :

Exemple 1 Exercice 3 : Réponse de NES. (8C) : "Oui on a plus de chances de tirer un chiffre impair ou de tirer un chiffre pair car les trois jetons se composent de trois chiffres impairs et pairs."

Cet exemple montre un problème que nous avons relevé dans le premier test diagnostic. La question "a-t-on plus de chances de tirer un chiffre pair ou bien un chiffre impair ?" serait comprise dans le sens « a-t-on de grandes chances de tirer un chiffre pair ou bien un chiffre impair ? ». Ceci peut être illustré par l'exemple suivant où l'élève parle de boules au lieu de jetons :

Exemple 2 Exercice 3 : Réponse de BIL. (8C) : "Oui on a plus de chances de tirer un chiffre impair car dans le sac il existe sur les boules deux chiffres impairs, alors c'est possible de tirer un chiffre impair au hasard. Oui on a plus de chances de tirer un chiffre pair car, au hasard, on peut tirer une boule comportant un chiffre pair."

Cet élève donne, pour l'exercice 4, une justification voisine de l'exemple 1 en omettant le mot d'introduction « oui ».

La question peut être même prise dans les sens « a-t-on des chances de tirer un chiffre pair ou bien un chiffre impair ? » :

Exemple 3 Exercice 4 : Réponse de WEJ. (8D) : "Oui on a des chances de tirer un nombre impair ou pair. Justification : car avec le tirage d'un jeton, on va remettre un jeton dans le sac ; ainsi on obtient un nombre composé de 4 chiffres « le premier tirage est le chiffre des mille »."

Dans cet exemple, l'élève semble ne pas avoir de problème de reconnaissance de l'indépendance des épreuves, chose que nous ne pouvons pas tirer des autres réponses à l'exercice 4 figurant dans la catégorie « *IM ou/et PA* ».

Ainsi, il serait question, dans la majorité des cas de réponses « *IM ou/et PA* » d'une confusion entre « probable » et « possible ». Ce problème est d'ailleurs abordé dans un chapitre antérieur (cf. chapitre VII - 7.1) comme étant un indice d'un effet de langue. Nous avons alors parlé d'homophones (ressemblance phonétique) : le mot « plus » de "plus de chances" est épilé « awfar » en arabe et le mot « grandes » de "grandes chances" est épilé « wéfira ». Cette explication est d'autant plus fondée que le problème est moindre au niveau de la 1^{ère} année secondaire, niveau pour lequel le test est en langue française.

Nous pouvons aussi soupçonner dans des réponses, telles que les deux exemples suivants, la mobilisation de la conception *CPI* «compatibilité» stipulant l'équiprobabilité entre les événements. Mais l'utilisation de cette conception est de l'ordre de l'implicite au niveau de la 8^{ème} année de base :

Exemple 4 Exercice 4 : Réponse de BIL. (8C) : "On a plus de chances de tirer un nombre impair ou un nombre pair car dans le sac il existe deux nombres impairs. Et par hasard, c'est possible de tirer un chiffre impair ou pair."

Par contre, la conception *CPI* «compatibilité» est présente d'une façon explicite, au niveau de la 1^{ère} année secondaire, dans toutes les réponses aux exercices 3 et 4 relevant de la catégorie « *IM ou/et PA* ». En voici une illustration :

Exemple 5 Exercice 3 : Réponse de ASM. (1C) : "Oui j'ai la même chance de tirer un chiffre pair et un chiffre impair, parce que ce sac contient deux jetons impairs et un jeton pair."

Passons maintenant aux conceptions pertinentes *P* « cas favorables / cas possibles » et *NI* « cardinaux ».

Pour la conception *P* « cas favorables / cas possibles », la technique utilisée consiste à comparer les rationnels $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$ représentant respectivement la proportion des chiffres impairs et celle des chiffres pairs sur les jetons. Des deux tableaux précédents ressort, comme prévu, une fréquence négligeable de cette conception.

Pour la conception *NI* « *cardinaux* », la technique utilisée consiste à comparer le nombre de chiffres impairs et le nombre de chiffres pairs. Pour l'exercice 3, nous avons classé dans cette conception 5 réponses *PA* dans le groupe 8CD et 5 réponses *PA* dans le groupe 1CD. Pour l'exercice 4, nous avons classé dans cette conception 5 réponses *PA* dans le groupe 8CD et 3 réponses *PA* dans le groupe 1CD. Signalons qu'il y a un seul élève qui est concerné dans les deux exercices à la fois. Les réponses récupérées dans cette catégorie attestent d'un problème auquel nous nous attendions. C'est un problème de compréhension de la signification des termes « pair » et « impair ». En effet, dans ces réponses, la réponse *PA* est accompagnée par une justification disant que le nombre des chiffres pairs est plus grand que le nombre des chiffres pairs, 1 et 3 étant supposés pairs et 2 supposé impair.

6.2.3. Effet du niveau scolaire

Sur les réponses

Les tableaux IX.14 et IX.15 nous donnent respectivement $\chi^2_c = 6,40$ et $\chi^2_c = 18,23$ et nous permettent alors de conclure que les réponses dépendent, au risque de 5 %, du niveau scolaire aussi bien pour la tâche t1 que pour la tâche ti2. Pour les deux tâches, la différence traduit une hausse de la fréquence des réponses *IM* et *PA* et une baisse de la fréquence de la réponse *X* au niveau de la 1^{ère} année secondaire.

Au niveau des conceptions

Des tableaux IX.16 et IX.17 nous tirons les deux tableaux de contingence suivants T1 et T2 où, pour pouvoir utiliser le test de khi2, nous sommes obligés d'ajouter les effectifs des colonnes relatives aux conceptions *P* et *NI* :

▪ Tableau T1 : *Effet du niveau scolaire sur les conceptions mobilisées dans la tâche t1*

| Conception \ Groupe | <i>P+NI</i> | <i>XI</i> | Total |
|---------------------|-------------|-----------|-------|
| 8CD | 52 | 38 | 90 |
| 1CD | 53 | 39 | 92 |

▪ Tableau T2 : *Effet du niveau scolaire sur les conceptions mobilisées dans la tâche ti2*

| Conception \ Groupe | <i>P+NI</i> | <i>XI</i> | Total |
|---------------------|-------------|-----------|-------|
| 8CD | 31 | 59 | 90 |
| 1CD | 28 | 64 | 92 |

Les deux derniers tableaux nous révèlent une différence statistiquement non significative avec respectivement $\chi^2_c = 0,01$ et $\chi^2_c = 0,17$. Ainsi, l'hypothèse d'indépendance entre le niveau scolaire et les conceptions mobilisées est retenue aussi bien pour la tâche t1 que pour la tâche ti2.

6.2.4. Impact de la demande de justification

Sur les réponses

Des tableaux IX.12 et IX.15 nous tirons les deux tableaux de contingence T3 et T4 suivants :

▪ Tableau T3 : *Effet de la demande de justification sur les réponses apportées à la tâche ti2 en 8^{ème}*

| Réponse \ Groupe | IM | PA | X | Total |
|------------------|----|----|----|-------|
| 8AB | 43 | 27 | 18 | 88 |
| 8CD | 48 | 11 | 31 | 90 |

▪ Tableau T4 : *Effet de la demande de justification sur les réponses apportées à la tâche ti2 en 1^{ère}*

| Réponse \ Groupe | IM | PA+X | Total |
|------------------|----|------|-------|
| 1AB | 68 | 27+3 | 98 |
| 1CD | 65 | 19+8 | 92 |

Avec $\chi^2_c = 0,001$, la différence n'est pas significative au niveau de la 1^{ère} année secondaire. Mais elle l'est en 8^{ème} année de base avec $\chi^2_c = 10,43$. Ainsi, au niveau de la 8^{ème} année de base, la demande de justification a un impact sur les réponses produites pour la tâche ti2. Cet impact est traduit par une baisse de l'effectif de la réponse PA et une hausse de celui de la réponse X.

Il en est de même si les versions A et B sont opposées aux versions C et D ($\chi^2_c = 12,23$)

En faisant de même pour la tâche t1 par l'intermédiaire des tableaux IX.11 et IX.14, nous aboutissons à une différence non significative aussi bien en 8^{ème} année de base qu'en 1^{ère} année secondaire ($\chi^2_c = 1,90$ en 8^{ème} et $\chi^2_c = 2,69$ en 1^{ère}).

Sur la reconnaissance de l'indépendance

Nous utilisons ici aux tableaux de contingence T5 et T6 qui donnent les effectifs de la production simultanée aux deux tâches t1 et ti2 de la réponse IM.

▪ Tableau T5 : *Effet de la demande de justification sur la reconnaissance de l'indépendance*

| Réponse \ Groupe | IM dans t1 et ti2 à la fois | Autre | Total |
|------------------|-----------------------------|-------|-------|
| 8AB | 29 | 59 | 88 |
| 8CD | 40 | 50 | 90 |

▪ Tableau T6 : *Effet de la demande de justification sur la reconnaissance de l'indépendance*

| Réponse \ Groupe | IM dans t1 et ti2 à la fois | Autre | Total |
|------------------|-----------------------------|-------|-------|
| 1AB | 48 | 50 | 98 |
| 1CD | 55 | 37 | 92 |

Avec respectivement $\chi^2_c = 2,01$ et $\chi^2_c = 1,81$ à partir des tableaux T5 et T6, nous concluons à un effet non significatif de la demande de justification sur la reconnaissance de l'indépendance.

6. 3. Conclusion

Au terme de cette deuxième partie du test, nous constatons que la performance, au niveau de la 8^{ème} année de base, pour la tâche t1 ne diffère pas significativement de celle relevée dans le test 1 (dont la population appartient au même niveau scolaire) pour l'exercice 1.

Que pourrions-nous conclure à propos des conceptions ?

Par l'intermédiaire des justifications, nous relevons d'abord des réponses témoignant d'un problème au niveau de la compréhension de la question et d'une confusion entre le « probable » et le « possible ».

Nous constatons que la conception *P* « *cas favorables / cas possibles* » est mobilisée, comme prévu, avec une fréquence très négligeable aux deux niveaux de la 8^{ème} année de base et de la 1^{ère} année secondaire.

Que pourrions-nous conclure dans le cas où la justification n'est pas demandée ?

D'abord, nous avons montré que contrairement à la tâche t1, la performance est affectée par le niveau scolaire pour la tâche d'indépendance ti2. Cet effet traduit une hausse des performances aux niveaux de la 6^{ème} année de base et de la 1^{ère} année secondaire.

Ensuite, nous avons constaté que relativement aux élèves qui ont donné une bonne réponse dans t1, ceux qui ont reproduit la même réponse dans ti2 représentent 68 % en 6^{ème}, 61 % en 7^{ème}, 51 % en 8^{ème} et 71 % en 1^{ère}, ce que nous avons considéré comme étant le signe d'une certaine difficulté dans la reconnaissance de l'indépendance des tirages aux quatre niveaux testés.

Nous avons alors montré que la reconnaissance de l'indépendance des tirages dépend du niveau scolaire au risque de 5 %. Cette différence significative explique d'ailleurs la baisse de la fréquence des réponses correctes, communes pour les deux tâches t1 et ti2, au niveau de la 7^{ème} année de base et à celui de la 8^{ème} année de base.

Que pourrions-nous conclure des cas où existe une demande de justification ?

Nous avons d'abord étudié l'effet du niveau scolaire sur les réponses apportés et sur les conceptions mobilisées.

Il s'est avéré que pour les deux tâches t1 et ti2, le niveau scolaire :

- a un effet significatif, au seuil de 5 %, sur les réponses apportées : cet effet traduit une hausse de la fréquence des réponses *IM* et *PA* et une baisse de la fréquence de la réponse *X* au niveau de la 1^{ère} année secondaire,

- n'a pas d'effet sur les conceptions mobilisées.

Nous avons ensuite étudié l'effet de la demande de justification sur les réponses apportées et sur la reconnaissance de l'indépendance.

Nous avons alors montré que la demande de justification a, au risque de 5 %, un effet significatif sur les réponses apportées lors de l'accomplissement de la tâche ti2 au niveau de la 8^{ème} année de base et au niveau global, cet effet étant traduit par une baisse de l'effectif de la réponse PA et une hausse de celui de la réponse X.

Par contre, en ce qui concerne la reconnaissance de l'indépendance, l'effet de la demande de justification s'avère non significatif pour les deux niveaux scolaires considérés.

7. Situation statistique : présentation et analyse a priori

La situation statistique est une situation où l'on s'intéresse à un grand nombre d'épreuves indépendantes à partir d'une machine de hasard (une collection) comportant des éléments de deux couleurs différentes. Elle se décline en deux types de situations, la situation statistique de prévision et la situation statistique de décision.

Pour la situation statistique de prévision, on connaît la composition de la machine et on demande le nombre d'éléments d'une des deux couleurs dans un nombre donné d'épreuves.

Pour la situation statistique de décision, on donne la composition d'un nombre donné d'épreuves et la question porte sur la machine de hasard (son contenu).

7.1. Tâches, objectifs et plan expérimental

7.1.1. Les tâches choisies

Pour la situation statistique de prévision, nous avons envisagé deux tâches.

Dans la première tâche « tse », les deux couleurs sont dans des rapports égaux ; c'est le cas de l'exercice 5 dans ses versions A et C :

Exercice 5 (A) : tâche « tse »

Matériel : un jeton équilibré dont la lettre **X** est marquée sur une face et **O** est marquée sur l'autre.

Expérience : on jette, au hasard, 1000 fois de suite ce jeton.

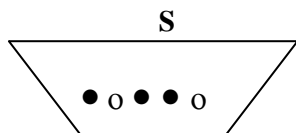
Question : combien de **X** obtiendra-t-on à peu près ?

Rappelons que les versions C et D diffèrent des versions A et B par la demande de justification.

Dans la deuxième tâche « tsn », les deux couleurs sont dans deux rapports non égaux ; c'est le cas de l'exercice 6 dans toutes les versions :

EXERCICE 6 (A et B) : tâche « tsn »

Matériel : un sac **S** contenant 2 boules blanches et 3 boules noires (2b-3n)



Expérience : on tire au hasard 1000 fois de suite une boule du sac, en remettant après chaque tirage la boule tirée.

Question : combien de boules blanches obtiendra-t-on à peu près ?

Pour la situation statistique de décision, nous avons envisagé une seule tâche « tsc » correspondant à l'exercice 5 dans ses deux versions B et D :

Exercice 5 (B) : tâche « tsc »

Matériel : un jeton dont la lettre **X** est marquée sur une face et **O** est marquée sur l'autre.

Expérience : on jette, au hasard, 1000 fois de suite ce jeton. On obtient ainsi 900 fois **X** et 100 fois **O**.

Question : pensez-vous que le jeton soit équilibré ?

7.1.2. Objectifs

Nous avons vu, aussi bien dans un chapitre précédent (chapitre VII) que dans ce chapitre (cf. sous 4), que lorsqu'il est question d'une seule épreuve, les élèves pensent très rarement à un rapport (nombre des cas favorables sur nombre des cas possibles).

C'est d'ailleurs le résultat trouvé par Bordier 1991 pour des élèves de 13-14 ans pour un cas de proportionnalité de la situation de prévision (cf. chapitre III - 2.1.2). Mais ce dernier pense que le résultat serait différent s'il est question de prévoir pour mille tirages par exemple : « En effet, dans une telle situation, l'élève devrait être porté à considérer les rapports. Lorsqu'il s'agit d'un tirage unique, les élèves semblent être portés à ne pas considérer ces rapports » (Bordier 1991, p. 41).

Par ailleurs, Nous avons aussi souligné, à la fin du premier test diagnostic, le cas d'une élève qui parle de la possibilité de ne pas obtenir une issue qu'après plusieurs épreuves (cf. chapitre VII, vers la fin). Nous nous sommes alors demandé si sa réponse relève d'un point de vue fréquentiste au sens d'une régularité à un niveau macroscopique.

C'est dans ce sens que les tâches « tse » et « tsn » relevant de la situation statistique de prévision sont choisies. Elles nous permettent de voir le comportement des élèves devant un grand nombre d'épreuves. Vont-ils les modéliser par une probabilité ?

L'objectif principal de cette partie de l'expérience consiste alors à voir si, dans une situation statistique, les élèves vont recourir spontanément au modèle laplacien "nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles".

Précisons que la tâche « tsc », relevant de la situation statistique de décision, nous permettra de voir comment se comportent les élèves devant une statistique donnée. Un des objectifs consiste alors à voir le rapport des élèves au hasard en jeu. Vont-ils développer des conceptions allant dans le sens d'un hasard mathématisable ?

Comme dans les deux premières parties de ce troisième test, les études de l'effet du niveau scolaire et de celui de la demande de justification sur les performances constituent deux autres objectifs.

7.1.3. Plan expérimental et méthode

Dans cette partie du test, nous avons envisagé une tâche faisant partie de la situation statistique de décision, elle correspond à l'exercice 5 dans les versions B et D.

Nous avons aussi choisi deux tâches au sein de la situation statistique de prévision. Il y a d'abord la tâche « tse » où la réussite et l'échec sont équiprobables, cette tâche correspondant à l'exercice 5 dans les versions A et C. Il y a ensuite la tâche « tsn » où la réussite et l'échec ne sont pas équiprobables, cette tâche correspondant à l'exercice 6 dans toutes les versions. Ainsi, pour cette dernière tâche, deux versions seront rassemblées : les versions A et B ou les versions C et D.

L'atteinte de nos objectifs se fait quelque part d'une façon qualitative. Mais elle se fait aussi d'une façon quantitative par l'intermédiaire de l'outil statistique Khi2, la situation statistique constituant une épreuve standardisée qui s'apprête aux analyses statistiques.

7.2. Analyse a priori

Comment répondre d'une façon pertinente aux tâches choisies ?

Comme dans le chapitre précédent, l'expérience aléatoire correspondant aux exercices choisis est appelé épreuve de Bernoulli. Les tâches choisies peuvent être modélisées par une loi binomiale $B(n, p)$ de paramètres n et p , n étant le nombre d'épreuves et p la probabilité d'un

succès. X étant la variable aléatoire correspondant au nombre de succès dans les n épreuves, nous avons, sur l'univers $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $\Pr(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $q = 1-p$ représente la probabilité d'un échec. L'espérance mathématique, la variance et l'écart type de la loi binomiale considérée sont respectivement $E(X) = np$, $V(X) = npq$ et $\sigma = \sqrt{npq}$.

Pour $n \geq 30$ et $npq \geq 10$ (ce qui est vrai dans le cas de notre expérimentation), la loi binomiale peut-être approchée par la loi de Laplace-Gauss ou la loi normale $N(m, \sigma)$ de paramètres m et σ où $m = np$.

À partir de la loi normale $N(m, \sigma)$, nous avons les probabilités d'intervalles suivantes : $\Pr[m - 2\sigma < X < m + 2\sigma] \approx 0,95$ et $\Pr[m - 3\sigma < X < m + 3\sigma] \approx 0,997$.

Ainsi, relativement à la tâche « tse » (exercice 5, versions A et C), $n = 1000$, $p = \frac{1}{2}$, $m = 500$, $\sigma \approx 15,8$ et donc $\Pr[468 < X < 532] \approx 0,95$. La réponse correcte est donc : on obtient à peu près 500 fois **X**.

Pour la tâche « tsn » (exercice 6, toutes les versions), $n = 1000$, $p = \frac{2}{5}$, $m = 400$, $\sigma \approx 15,49$ et donc $\Pr[369 < X < 431] \approx 0,95$. La réponse correcte est donc : on obtient à peu près 400 boules blanches.

Ainsi, la réponse correcte aux deux tâches précédentes passe par la recherche de l'espérance mathématique, donc par l'intermédiaire de la modélisation par la définition laplacienne des probabilités. Autrement dit, la réponse correcte passe par la mobilisation de la conception P « *cas favorables / cas possibles* ».

Pour la tâche « tsc » (exercice 5, versions B et D), si l'on suppose que le jeton est non truqué, on aura $\Pr[m - 3\sigma < X < m + 3\sigma] \approx 0,997$ soit $\Pr[452 < X < 548] \approx 0,997$. Comme l'on a obtenu 900 fois **X** et 100 fois **O**, il serait très peu probable que le jeton soit équilibré. La réponse correcte est alors : je ne pense pas que le jeton soit équilibré. La réponse correcte passe aussi par la mobilisation de la conception P « *cas favorables / cas possibles* ».

Nos attentes

Contrairement à l'hypothèse de Bordier citée en haut (cf. sous 7.1.2), nous pensons que la situation statistique ne pourrait pas apporter un plus quant au recours à la définition laplacienne des probabilités « nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles ».

Autrement dit, nous retenons l'hypothèse disant que le recours à cette réponse n'est pas spontané.

Nous nous attendons donc à ce que la mobilisation de la conception P « *cas favorables / cas possibles* » soit rare. Remarquons que, vue l'équiprobabilité des issues, cette conception n'est pas attendue dans l'accomplissement de la tâche « tse ». Nous ne pensons pas d'ailleurs qu'elle soit mobilisée dans la réalisation de la tâche « tsc » de la situation statistique de décision. Elle pourrait apparaître cependant avec les variables de tâche « tsn ».

Nous prévoyons aussi de relever, notamment par l'intermédiaire des réponses apportées dans la situation statistique de décision, des réponses provenant d'une conception que nous nommons HNM « *Hasard Non Modélisable* » dans laquelle le hasard paraît comme antithèse de loi.

Pour la situation statistique de prévision, la probabilité d'un succès et celle d'un échec étant les mêmes dans la tâche « tse » et différents dans la tâche « tsn », nous prévoyons que la performance soit meilleure dans la réalisation de la première tâche pour chacun des niveaux scolaires retenus. Nous pensons d'ailleurs que ce sera valable, qu'il y ait une demande de justification ou non.

Quant à l'effet du niveau scolaire, nous nous limitons à prédire que les performances vont être meilleures en 1^{ère} année secondaire qu'en 8^{ème} année de base.

Il nous semble enfin que les difficultés que vont rencontrer les élèves peuvent être, entre autres, attestés par la non justification des réponses aussi bien dans la situation statistique de prévision que dans la situation statistique de décision.

8. Résultats pour la situation statistique

8.1. Sans demande de justification

Dans cette partie, nous nous intéressons aux deux versions A et B. Notre étude porte sur les groupes de 6^{ème}, de 7^{ème}, de 8^{ème} de base et de 1^{ère} année secondaire ayant passé la version A ou B du test.

8.1.1. La situation statistique de prévision

Par rapport à la situation statistique de prévision, ce sont les tâches « tse » (exercice 5, version A) et « tsn » (exercice 6, versions A et B) qui nous importent.

Nous récapitulons les réponses des élèves dans les deux tableaux suivants, toute réponse non correcte étant comptée dans la catégorie notée « Autre » :

▪ Tableau IX.18

Effectifs des réponses apportées dans la réalisation de la tâche « tse » selon les groupes et pourcentages associés

| Réponse \ Groupe | 500 | Autre | Total |
|------------------|-----------|-----------|------------|
| 6A | 19 37% | 33 63% | 52 100% |
| 7A | 12 26% | 34 74% | 46 100% |
| 8A | 16 36% | 29 64% | 45 100% |
| 1A | 15 30% | 35 70% | 50 100% |

▪ Tableau IX.19

Effectifs des réponses apportées dans la réalisation de la tâche « tsn » selon les groupes et pourcentages associés

| Réponse \ Groupe | 400 | Autre | Total |
|------------------|-----------|-----------|-------------|
| 6AB | 25 23% | 80 77% | 105 100% |
| 7AB | 14 15% | 78 85% | 92 100% |
| 8AB | 19 22% | 69 78% | 88 100% |
| 1AB | 26 27% | 72 73% | 98 100% |

Si l'on s'intéresse aux deux tableaux à la fois, il apparaît, comme prévu, qu'à chaque niveau scolaire, la fréquence de la performance est moindre pour la tâche « tsn », tâche pour laquelle la probabilité d'un succès est différente de celle d'un échec. Mais l'outil statistique khi2 nous montre qu'il est question d'une différence non significative en acceptant un risque de 5 % à chacun des niveaux scolaires.

Tâche « tse »

Le tableau IX.18 nous donne $\chi^2_c = 1,58$, ce qui nous amène à déduire que les réponses sont indépendantes du niveau scolaire pour la tâche « tse » (exercice 5, version A).

Les performances sont aux alentours de 30 % pour les niveaux testés. Les réponses classées « Autre » correspondent, en majorité, à un choix quelconque d'un nombre entre 0 et 1000. Ce choix, nous semble-t-il, relève d'une conception disant que le hasard est l'antithèse de loi. D'ailleurs, il y a quelques élèves qui se sont abstenus à produire une réponse : il est question de 3 élèves en 7^{ème} année de base dont deux ont répondu "je ne sais pas" et le troisième a répondu "aucune idée". Notons par ailleurs l'existence de quelques cas donnant la réponse 1000 (une en 7^{ème} et 4 en 8^{ème}). Il serait question d'un effet de l'énoncé : le jeton ayant une face marquée **X** et une autre marquée **O**, ces élèves pensent que dans 1000 jets il y aura 1000 fois **X** et 1000 fois **O** ; c'est d'ailleurs ce que nous constatons dans le cas où la justification est demandée (cf. 8.2.2). Notons aussi que deux élèves n'ont pas donné de réponse (un en 8^{ème}

année de base et un en 1^{ère} année secondaire). Notons enfin une seule réponse supérieure à 1000 : cette réponse étant 4000 (en 6^{ème} année), elle pourrait être le signe d'une incompréhension de l'expérience comme elle pourrait être causée par une faute (au lieu d'écrire 400, l'élève aurait écrit 4000).

Tâche « tsn »

Le tableau IX.19 nous donne $\chi^2_c = 3,85$, ce qui nous amène à déduire que les réponses sont indépendantes du niveau scolaire pour la tâche « tsn » (exercice 6, versions A et B).

Le groupe 7AB mis à part, les performances sont d'une fréquence un peu supérieure à 20% pour les autres groupes. Les réponses classées « Autre » correspondent, en majorité, à un choix quelconque d'un nombre entre 0 et 1000. Ce choix nous semble dévoiler une conception disant que le hasard ne peut pas présenter de régularité. Notons l'existence de quelques cas donnant la réponse 500 que nous pouvons faire correspondre au « biais d'équiprobabilité »⁹⁵ (dix cas en 6AB, six cas en 7AB, onze cas en 8AB et deux cas en 1AB). Remarquons aussi l'existence de quelques cas donnant comme réponse le nombre 1000 (trois en 8AB) ou un nombre supérieur à 1000 (trois en 6AB, deux en 7AB, cinq en 8AB et deux en 1AB). Notons par ailleurs l'existence de quelques justifications, dans les niveaux autres que celui de la 6^{ème} année de base, bien qu'on ne demande que la réponse. La justification dominante dit que le nombre de boules blanches est inférieur au nombre de boules noires. Soulignons deux cas de réponses correctes au niveau de la 8^{ème} année de base (8B), disant qu'à chaque boule du sac correspond 200 boules tirées.

Mais, nous pensons qu'il est rare qu'un élève donne la réponse correcte en pensant au nombre des cas favorables sur le nombre des cas possibles. Le tableau suivant, récapitulant les cas de réponses correctes dans les exercices 5 et 6 de la version A, renforce nos dires. Dans ce tableau, J5(A) désigne une réponse juste dans l'exercice 5(A) et J6(A) désigne une réponse juste dans l'exercice 6(A).

⁹⁵ Cf. chapitre V, sous 3.1 et sous 4.1.

▪ Tableau IX.20

Effectifs des réponses justes dans l'exercice 5(A), dans l'exercice 6(A) et dans les deux exercices selon les groupes

| Réponse Groupe | J5(A) | J6(A) | J5(A) et J6(A) | Total |
|-------------------|-------|-------|----------------|-------|
| 6A | 19 | 7 | 5 | 52 |
| 7A | 12 | 9 | 5 | 46 |
| 8A | 16 | 8 | 5 | 45 |
| 1A | 15 | 12 | 7 | 50 |

8.1.2. La situation statistique de décision

Nous nous intéressons ici à la tâche « tsc » sans demande de justification, c'est-à-dire à l'exercice 5 de la version B.

Commençons par récapituler les réponses des élèves dans le tableau suivant :

▪ Tableau IX.21

Effectifs des réponses apportés dans la réalisation de la tâche « tsc » selon les groupes et pourcentages associés

| Réponse Groupe | Oui | Non | Autre | Total |
|-------------------|--------------|--------------|-------------|-------------|
| 6B | 4 8 % | 49 92 % | 0 0 % | 53 100 % |
| 7B | 16 34 % | 27 59 % | 3 7 % | 46 100 % |
| 8B | 17 39,5 % | 21 49 % | 5 11,5 % | 43 100 % |
| 1B | 17 35,5 % | 28 58,5 % | 3 6 % | 48 100 % |

Il ressort du dernier tableau que la performance de la 6^{ème} année de base est de loin meilleure que celles des autres niveaux. Pourrait-on parler de l'effet de l'enseignement déterministe ? Pourrait-on dire que les élèves qui sont habitués par les justifications sont les plus disposés à produire des réponses spontanées fausses dans ce type de situations ?

Avec six élèves pensant que le jeton est équilibré parmi les 11 élèves du groupe 8B qui ont répondu 400 à l'exercice 6(B) (2 parmi 18 en 6^{ème} année de base, 1 parmi 5 en 7^{ème} année de base et 2 parmi 14 en 1^{ère} année secondaire), il semble que le rapport au hasard est problématique au niveau de la 8^{ème} année de base.

En conclusion, tout se passe comme si les élèves de la fin du primaire ont un rapport adéquat au hasard en jeu dans l'expérience.

8.2. Avec demande de justification

Ici, les groupes concernés par l'étude sont les groupes 8C et 8D de la 8^{ème} année de base et les groupes 1C et 1D de la 1^{ère} année secondaire.

8.2.1. Les réponses apportées

Dans cette partie, nous laissons de côté les justifications et nous nous intéressons aux réponses seulement.

Situation statistique de prévision

Récapitulons les réponses dans les deux tableaux suivants, toute réponse non correcte étant comptée dans la catégorie notée « Autre » :

▪ Tableau IX.22

Effectifs des réponses apportées dans la réalisation de la tâche « tse » selon les groupes et pourcentages associés

| Réponse \ Groupe | 500 | Autre | Total |
|------------------|-----------|-----------|------------|
| 8C | 17 38% | 28 62% | 45 100% |
| 1C | 22 47% | 25 53% | 47 100% |

▪ Tableau IX.23

Effectifs des réponses apportées dans la réalisation de la tâche « tsn » selon les groupes et pourcentages associés

| Réponse \ Groupe | 400 | Autre | Total |
|------------------|-----------|-----------|------------|
| 8CD | 12 13% | 78 87% | 90 100% |
| 1CD | 19 21% | 73 79% | 92 100% |

Nous commençons par signaler qu'il est très rare d'avoir une réponse témoignant d'une incompréhension de l'indépendance des épreuves. En effet, nous relevons un seul cas pour la tâche « tse » au niveau de la 1^{ère} année secondaire et deux cas pour la tâche « tsn », un en 8^{ème} année de base et un en 1^{ère} année secondaire où la réponse donnée est supérieure à 1000.

Effet du niveau scolaire

Les tableaux IX.22 et IX.23 nous donnent respectivement $\chi^2_c = 0,44$ et $\chi^2_c = 1,22$. Nous concluons alors à un effet non significatif du niveau scolaire sur les réponses aussi bien pour la tâche « tse » que pour la tâche « tsn ».

Effet de la demande de justification

Des tableaux IX.18 et IX.22 nous tirons les deux tableaux de contingence T7 et T8 suivants relatifs à la tâche « tse » :

▪ Tableau T7 : *Effet de la demande de justification sur les réponses apportées à la tâche « tse » en 8^{ème}*

| Réponse \ Groupe | 500 | Autre | Total |
|------------------|-----|-------|-------|
| 8A | 16 | 29 | 45 |
| 8C | 17 | 28 | 45 |

▪ Tableau T8 : *Effet de la demande de justification sur les réponses apportées à la tâche « tse » en 1^{ère}*

| Réponse \ Groupe | 500 | Autre | Total |
|------------------|-----|-------|-------|
| 1A | 15 | 35 | 50 |
| 1C | 22 | 25 | 47 |

Ces deux tableaux donnent une différence non significative aussi bien au niveau de la 8^{ème} année qu'au niveau de la 1^{ère} année. Ainsi la justification n'a pas d'effet sur les réponses pour la tâche « tse ».

Des tableaux IX.19 et IX.23 nous tirons les deux tableaux de contingence T9 et T10 suivants relatifs à la tâche « tsn » :

▪ Tableau T9 : *Effet de la demande de justification sur les réponses apportées à la tâche « tsn » en 8^{ème}*

| Réponse \ Groupe | 400 | Autre | Total |
|------------------|-----|-------|-------|
| 8AB | 19 | 69 | 88 |
| 8CD | 12 | 78 | 90 |

▪ Tableau T10 : *Effet de la demande de justification sur les réponses apportées à la tâche « tsn » en 1^{ère}*

| Réponse \ Groupe | 400 | Autre | Total |
|------------------|-----|-------|-------|
| 1AB | 26 | 72 | 98 |
| 1CD | 19 | 73 | 92 |

Aussi, ces deux tableaux donnent une différence non significative aussi bien au niveau de la 8^{ème} année qu'au niveau de la 1^{ère} année. Ainsi la justification n'a pas d'effet sur les réponses pour la tâche « tsn ».

Situation statistique de décision

Pour la situation statistique de décision, nous nous intéressons à la tâche « tsc » avec demande de justification, c'est-à-dire à l'exercice 5, version D.

Récapitulons les réponses des élèves concernés dans le tableau suivant :

▪ Tableau IX.24

*Effectifs des réponses apportés dans la réalisation de la tâche « tsc »
selon les groupes et pourcentages associés*

| Réponse Groupe | Oui | Non | NR ⁹⁶ | Total |
|-------------------|------------|------------|------------------|-------------|
| 8D | 17 38 % | 26 58 % | 2 4 % | 45 100 % |
| 1D | 8 18 % | 36 80 % | 1 2 % | 45 100 % |

Effet du niveau scolaire

Le dernier tableau nous donne, avec l'ajout des deux colonnes *Oui* et *NR*, $\chi^2_c = 4,19$. Ainsi, il est question d'une différence significative au risque de 5 % et l'effet du niveau scolaire sur les réponses est traduit par la baisse des réponses fausses et la hausse de la réponse correcte au niveau de la 1^{ère} année secondaire.

Effet de la demande de justification

Des tableaux IX.21 et IX.24 nous tirons les deux tableaux de contingence T11 et T12 suivants relatifs à la tâche « tsc » :

▪ Tableau T11 : *Effet de la demande de justification sur les réponses apportées à la tâche « tsc » en 8^{ème}*

| Réponse Groupe | Non | Oui+Autre | Total |
|-------------------|-----|-----------|-------|
| 8B | 21 | 22 | 43 |
| 8D | 26 | 19 | 45 |

▪ Tableau T12 : *Effet de la demande de justification sur les réponses apportées à la tâche « tsc » en 1^{ère}*

| Réponse Groupe | Non | Oui+Autre | Total |
|-------------------|-----|-----------|-------|
| 1B | 28 | 20 | 48 |
| 1D | 36 | 9 | 45 |

Ce sont seulement les effectifs du tableau T12 qui donnent une différence significative au seuil de 5 % avec $\chi^2_c = 4,12$. Ainsi la demande de justification a un impact au seul niveau de la 1^{ère} année secondaire. Cet impact traduit la hausse de la performance et la baisse des réponses fausses au niveau de la 1^{ère} année.

⁹⁶ Non réponse.

8.2.2. Les conceptions construites

Situation statistique de prévision

Rappelons que pour la situation statistique de prévision, ce sont les tâches « tse » et « tsn » qui nous intéressent.

Notons que pour ces deux tâches, nous trouvons comme prévu beaucoup de réponses non justifiées. En effet, pour chacune des deux tâches, le tiers des élèves de la 8^{ème} année de base et les deux tiers des élèves de la 1^{ère} année secondaire n'ont pas justifié leurs réponses.

La tâche « tse » : exercice 5(C)

Commençons par la réponse 1000 que nous avons signalée en haut (sous 8.1.1). Cette réponse, que nous trouvons deux fois dans le groupe 8C, est induite par le fait que le jeton comporte les deux marques à la fois :

Exemple 6 Exercice 5(C) : Réponse de NAD. (8C) : "Nous obtenons à peu près 1000 fois X car la marque va apparaître à chaque fois sur l'une des deux faces."

Notons que les deux élèves concernés utilisent l'expression "à peu près" qui figure dans la question.

Il y a dans le groupe 1C une seule élève qui a répondu "on peut obtenir 1000 X". Mais dans ce cas, nous pensons qu'il n'est pas question d'un problème de compréhension de l'énoncé surtout qu'elle a ajouté l'expression "ou $X \leq 1000$ " qu'elle a barrée. Nous pensons plutôt que nous avons affaire à une conception *HNM* «*Hasard Non Modélisable* » disant que le hasard ne peut être régi par aucune loi même à un ordre macroscopique (dans le cas d'un grand nombre d'épreuves). Nous pourrions attribuer cette conception à environ un tiers des réponses, dans chacun des deux niveaux scolaires, où la réponse est un nombre, autre que 500, compris entre 0 et 1000 bien qu'en général la justification n'est pas donnée. Cette conception se présente d'une façon explicite dans deux cas. Nous la trouvons une fois en 8^{ème} année de base :

Exemple 7 Exercice 5(C) : Réponse de SAM. (8C) : "On peut obtenir 1000 comme on peut obtenir 0. Aussi, on peut obtenir 500 comme on peut obtenir tous les nombres inférieurs à 1000."

Nous la trouvons une autre fois en 1^{ère} année secondaire :

Exemple 8 Exercice 5(C) : Réponse de AHM. (1C) : " Je ne sais pas combien de X on obtiendra, mais je sais que le nombre est entre 0 et 1000, $0 < X < 1000$."

Passons maintenant à la réponse supposée correcte (à peu près 500 fois X). Nous constatons que parmi les élèves ayant donné la bonne réponse, quatre sur les 17 élèves du groupe 8C et 11 sur les 22 élèves du groupe 1C n'ont pas donné de justification. Pour les autres les

justifications parlent de chances égales, de 1000 jets au hasard ou de jeton équilibré. Elles iraient dans le sens de la mobilisation de la conception EA « *Expérience Aléatoire* » que nous avons relevée dans un chapitre antérieur (cf. chapitre V, sous 5.1.1) et dont la technologie correspondante est résumée par : « il y a équiprobabilité entre les issues possibles ». Mais ayant trouvé des justifications parlant de l'obtention alternée des lettres X et O, nous pouvons attribuer ces justifications à la mobilisation de la conception LPN « *Loi des Petits nombres* » qui permet d'appliquer la loi des grands nombres aux petits nombres, conception que nous avons rencontrée dans le même chapitre antérieur (cf. chapitre V, sous 5.1.2). Voici un exemple illustratif :

Exemple 9 Exercice 5(C) : Réponse de AIC. (1C) : " On obtiendra 500 X à peu près : parce que si on met une fois X et une fois O, on prend $\frac{1000}{2} = 500.$ "

En définitive et comme prévu, nous ne pouvons pas parler de la mobilisation de la conception P « *cas favorables / cas possibles* », c'est-à-dire de l'utilisation du modèle « nombre des cas favorable sur nombre des cas possibles » dans l'accomplissement de la tâche « tse ». D'ailleurs, le dernier exemple est le seul qui peut être compris dans le cadre de l'utilisation de ce modèle.

La tâche « tsn » : exercice 6 (C et D)

Commençons par la réponse 500 qui correspond à une fréquence proche de 8 % aussi bien en 8^{ème} année de base qu'en première année secondaire. Cette réponse pourrait être associée à la conception EIO « *Équiprobabilité des Issues Observables* » que nous avons abordée dans un chapitre antérieur (cf. chapitre VI - 4.3). Remarquons cependant qu'elle est rarement accompagnée d'une justification et soulignons deux réponses au niveau de la 8^{ème} année de base : une disant "cela dépend du hasard et on peut obtenir 500 boules blanches" et l'autre stipulant "nous allons obtenir la moitié de boules noires car elles sont plus nombreuses que les blanches (3n et 2b)".

Dire que "les boules noires sont plus nombreuses que les boules blanches" est une justification souvent utilisée : sa fréquence est voisine de 30 % en 8^{ème} année de base (26 cas sur les 90 élèves du groupe 8CD) et de 15 % en 1^{ère} année secondaire (15 cas sur les 92 élèves du groupe 1CD).

Cette justification est rarement accompagnée de la réponse supposée correcte 400 (2 fois en 8CD et 2 fois en 1CD).

Elle dévoile dans la majorité des cas (20 en 8CD et 11 en 1CD) la conception *NI* « *cardinaux* » que nous avons abordée en haut (cf. 5.2) par l'intermédiaire des réponses donnant un nombre inférieur à 500 et différent de 400. La conception *NI* est à rapprocher de la conception *NN* « *cardinaux parties* » que nous avons précédemment abordée (cf. chapitre VIII - 5.1.3) et qui fait associer un échantillon à une population par l'intermédiaire de la comparaison des composantes de cette dernière.

Par ailleurs, la conception pertinente *P* « *cas favorables / cas possibles* » est utilisée avec une fréquence voisine de 6,5 % à chacun des deux niveaux considérés (six cas dans chacun des deux niveaux scolaires). En voici deux illustrations :

Exemple 10 Exercice 6(C) : Réponse de SAL. (8C) : " On obtiendra à peu près 400 boules blanches car les boules blanches représentent dans le sac $\frac{2}{5}$ du total des boules et nous connaissons que $1000 \cdot \frac{2}{5}$ est 400."

Exemple 11 Exercice 6(D) : Réponse de HAM. (1D) : " On obtiendra à peu près 400 fois car $\frac{1000 \times 2}{5} = 400$."

Notons que nous avons classé dans la catégorie de la conception pertinente *P* deux cas provenant de la 8^{ème} année de base et donnant la réponse 40 au lieu de 400. Exposons l'un de ces deux cas :

Exemple 12 Exercice 6(C) : Réponse de SAB. (8C) : " On obtiendra 40 boules blanches car on $\frac{2}{5}$ blanches."

Nous imputons alors le résultat trouvé à une faute de calcul.

Situation statistique de décision

Rappelons que c'est la tâche « tsc » qui fait partie de la situation statistique de décision et que notre étude porte alors sur les réponses et les justifications apportées à l'exercice 5(D).

Commençons par la fréquence des élèves n'ayant pas donné de justification dans la réalisation de la tâche « tsc ». En 8^{ème} année de base, sur les 43 élèves ayant apporté une réponse, nous comptons 6 qui n'ont pas donné de justification. En 1^{ère} année secondaire, 22 élèves sur 44 ont donné une réponse sans la justifier.

D'une façon générale, les élèves qui ont répondu « oui » (qui pensent que le jeton est équilibré) ont mobilisé la conception *HNM* «*Hasard Non Modélisable* » que nous avons mentionné en haut (cf. sous 8.2.2). En fait, la majorité de ces élèves parlent de "jets au hasard" et surtout de "l'existence de X sur une face et de O sur l'autre". Remarquons qu'au niveau de la 1^{ère} année secondaire, un seul élève parmi les huit ayant répondu « oui » a justifié sa réponse en parlant de "chance". Notons par ailleurs, que nous trouvons en 8^{ème} année de base une réponse provenant de la conception *M* «*mécanique* » relatant une vision déterministe :

Exemple 13 Exercice 5(D) : Réponse de SAB. (8D) : " Je pense que le jeton est équilibré car si on met la marque X en bas et on lance, elle devient en haut et si on met la marque O en haut et on lance, elle devient à l'intérieur. On dit alors que le jeton est équilibré et c'est un jeu de chance."

Passons à la réponse « non » (disant que le jeton n'est pas équilibré). Nous relevons d'après les justifications des cas où l'expression «jeton équilibré » n'est pas bien comprise. D'ailleurs, le fait qu'en 1^{ère} année secondaire, 14 élèves parmi les 36 ayant répondu « non » n'ont pas justifié leurs réponses. Les justifications de la réponse « non » vont dans le sens de "100 < 900" ou "100 est différent de 900". Au mieux, nous trouvons une justification telle que la suivante :

Exemple 14 Exercice 5(D) : Réponse de MOH. (8D) : " Le jeton n'est pas équilibré car s'il l'était, on aura deux résultats proches ou égales."

Ainsi, les justifications apportées vont au mieux dans le sens de la mobilisation de la conception *EA* «*Expérience Aléatoire* » relatant l'équiprobabilité des issues possibles. Comme attendu, il n'y a pas d'utilisation, du moins explicite de la conception pertinente *P* «*cas favorables / cas possibles* ».

8.3. Conclusion

Au niveau des réponses apportées à la situation statistique de prévision, il semble que la performance est moindre pour la tâche «tsn », tâche correspondant à des probabilités différentes pour un succès et pour un échec, que pour la tâche «tse », tâche pour laquelle ces probabilités sont égales. Cette tendance est constatée que l'on demande une justification ou non.

Aussi bien pour la tâche «tse » que pour la tâche «tsn » de la situation statistique de prévision, nous avons montré que les réponses sont indépendantes du niveau scolaire que l'on demande la justification ou non.

Pour la tâche « tsc » relevant de la situation statistique de décision, il semble la performance de la 6^{ème} année de base, dans le cas où il n'y a pas demande de justification, est de loin meilleure que celles des autres niveaux. Seulement les effectifs trouvés ne s'approprient pas à l'étude statistique. Par contre, avec la demande de justification, nous avons conclu à un effet significatif du niveau scolaire sur les réponses, cet effet étant traduit par une baisse de la fréquence des réponses fausses et une hausse de la fréquence de la réponse correcte au niveau de la 1^{ère} année secondaire.

Nous avons par ailleurs montré que dans la situation statistique de prévision, la demande de justification n'affecte pas significativement les réponses que ce soit au niveau de la 8^{ème} année de base qu'à celui de la 1^{ère} année secondaire.

Par contre, pour la situation statistique de décision, la demande de justification a un impact au niveau de la 1^{ère} année secondaire, cet impact traduisant une hausse dans la performance et une baisse de la fréquence des réponses fausses.

Pour les conceptions, nous avons relevé quelques unes qui sont fausses. Nous spécifions la conception *HNM* «*Hasard Non Modélisable* » disant le hasard ne peut pas être régi par une quelconque loi même à un ordre macroscopique. Cette conception explique globalement environ un tiers des réponses des deux niveaux scolaires considérés, la 8^{ème} année de base et la 1^{ère} année secondaire.

Terminons par la conception *P* «*cas favorables / cas possibles* ». Cette conception n'est vraisemblablement mobilisée que dans l'accomplissement de la tâche « tsn », tâche relevant de la situation statistique de prévision pour laquelle les probabilités d'un succès et d'un échec sont différentes. Mais, dans ce dernier cas, elle n'explique que 6,5% des réponses de chacun des deux niveaux considérés, résultat confirmant nos attentes et validant encore une fois notre hypothèse concernant la non spontanéité de la définition laplacienne des probabilités.

9. Conclusions

Au terme de ce test diagnostic, nous sommes arrivés aux résultats résumés comme suit :

Pour la situation de prévision nous avons montré que la performance dépend du niveau scolaire dans les versions où la justification n'est pas demandée, cette dépendance pouvant être expliquée par une hausse au niveau des performances en 8^{ème} année de base.

Nous avons aussi montré que l'effet de l'ordre des tâches (tâche tp de proportionnalité et tâche td de comparaison à deux variables), que l'on tienne compte de la justification ou non, est à négliger.

Par ailleurs, nous avons relevé un effet non significatif de la demande de justification.

L'étude conjointe de ce test et du test diagnostic 1 nous a révélé que la variable « contenu des sacs » favorise les conceptions *N* « cardinal partie », *D* « différence » et *T* « cardinal tout » dans le test 1 et les conceptions *N* et *T* dans ce test. Elle nous a aussi révélé que la variable « forme de la question » a un effet sur la mobilisation des conceptions, les conceptions pertinentes étant plus présentes dans le cas de la donnée de tous les possibles dans l'énoncé.

Intéressons nous maintenant à la situation d'indépendance et plus précisément à la tâche ti2.

Pour la situation d'indépendance, il nous semble qu'il y ait une certaine difficulté dans la reconnaissance de l'indépendance des tirages aux quatre niveaux testés.

Nous avons montré pour la tâche ti2 que le niveau scolaire :

- a un impact sur la performance, effet traduisant une hausse des performances au niveau de la 1^{ère} année secondaire qu'il y ait demande de justification ou non, cette hausse étant attestée au niveau la 6^{ème} année de base dans l'absence de la demande de justification,
- a un effet sur la reconnaissance de l'indépendance des tirages, effet traduit par la baisse de la fréquence des réponses correctes, communes pour les deux tâches t1 et ti2, aux niveaux de la 7^{ème} année de base et de la 8^{ème} année de base.
- n'a pas d'effet sur les conceptions mobilisées.

Pour la même tâche, nous avons conclu que la demande de justification :

- a un effet significatif sur les réponses apportées au niveau de la 8^{ème} année de base et au niveau global, cet effet étant traduit par une baisse de l'effectif de la réponse *PA* et une hausse de celui de la réponse *X*,
- n'a pas d'impact sur la reconnaissance de l'indépendance.

Par ailleurs, les justifications nous ont permis de toucher un problème au niveau de la compréhension de la question et d'une confusion entre le « probable » et le « possible ».

Passons maintenant à la situation statistique de prévision et à la situation statistique de décision.

Nous avons montré que le niveau scolaire :

- n'a pas d'effet significatif sur les réponses dans le cas de la situation statistique de prévision qu'il y ait demande de justification ou non,

- affecte significativement les réponses dans le cas de la situation statistique de décision avec demande de justification, l'écart étant traduit par une baisse de la fréquence des réponses fausses et une hausse de la fréquence de la réponse correcte au niveau de la 1^{ère} année secondaire.

Par ailleurs, nous avons montré que la demande de justification :

- n'a pas d'effet significatif sur les réponses dans le cas de la situation statistique de prévision,
- a un effet significatif sur les réponses au niveau de la 1^{ère} année secondaire dans le cas de la situation statistique de décision, la différence étant traduite par une hausse de la fréquence des réponses correctes et une baisse de la fréquence des réponses fausses.

Pour les conceptions, nous soulignons la mobilisation fréquente (dans un tiers des réponses aussi bien dans la 8^{ème} année de base que dans la 1^{ère} année secondaire) de la conception *HNM* «*Hasard Non Modélisable* » disant que le hasard ne peut pas être régi par une quelconque loi même à un ordre macroscopique.

De ce test diagnostic, ont surgi deux questions. Une première question que nous avons posée lors de l'étude de la situation de prévision : existe-il chez les élèves de "bonnes intuitions" que la demande de justification peut atténuer ? Et une deuxième question que nous avons posée lors de l'étude de la situation statistique de décision où les élèves du primaire sont paru plus performants que les élèves des autres niveaux : la faiblesse relative des performances de ces derniers est-elle due à l'enseignement déterministe qui leur est dispensé ?

Finalement, les réponses au troisième test témoignent de la rareté de la conception pertinente *P* «*cas favorables / cas possibles* ». Cette conception étant rarement mobilisée dans ce test, nous montrons ainsi que la définition laplacienne des probabilités «*nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles*» constitue un modèle non spontané dans diverses situations probabilistes et à des âges différents.

Chapitre X.

Pour une séquence introductive des probabilités

- 1. Introduction*
- 2. Présentation de la pré-expérimentation, cadre théorique et méthodologie*
- 3. Préparation des deux premières séances*
- 4. Analyse a priori des deux premières séances*
- 5. Déroulement et analyse a posteriori des deux premières séances*
- 6. Préparation des séances 3 et 4*
- 7. Analyse a priori des séances 3 et 4*
- 8. Déroulement et analyse a posteriori des séances 3 et 4*
- 9. Complément*
- 10. Conclusions*

1. Introduction

Dans ce chapitre nous abordons la question de ce qui peut exister dans l'introduction des probabilités au niveau du collège. Et nous allons focaliser sur leur approche par les fréquences, approche actuellement officialisée dans l'enseignement des probabilités en Tunisie (cf. chapitre IV).

Cette approche s'avère indispensable du point de vue épistémologique (cf. chapitre II). Elle l'est aussi du point de vue didactique vu la difficulté de la notion d'équiprobabilité que nous avons relevée pour des élèves ayant entamé une ou deux années d'enseignement des probabilités dans une approche laplacienne (cf. chapitres V et VI) et la rareté de l'usage spontané de la définition laplacienne "nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles" que nous avons constaté chez des élèves de différents niveaux notamment ceux du collège (cf. chapitres VII, VIII et IX).

Dans le but de mettre en place une séquence d'enseignement, nous avons choisi de commencer par une pré-expérimentation.

2. Présentation de la pré-expérimentation, cadre théorique et méthodologie

Dans cette partie, nous procédons à la présentation respective des éléments principaux de la situation à mettre en place, des acteurs de la pré-expérimentation, des principaux buts, du cadre théorique, du plan expérimental et de la méthodologie adoptée.

2.1. Esquisse de la situation

Notons d'emblée que nous nous intéressons au « hasard du tirage au sort » caractérisé par des régularités au niveau macroscopique de phénomènes aléatoires (cf. chapitre II).

La situation que nous envisageons approche les probabilités par les fréquences et englobe une situation abordant la notion d'expérience aléatoire. Une entrée par la dernière situation, celle de l'expérience aléatoire, nous semble nécessaire surtout que nous avons montré l'existence d'un problème dans la reconnaissance de l'indépendance des épreuves dans une expérience aléatoire que ce soit dans l'accomplissement de tâches probabilistes (cf. chapitres V, VI, VII, VIII et IX) ou statistiques (cf. chapitre IX).

La simulation est aujourd'hui d'actualité dans l'enseignement des mathématiques. En probabilité, elle permet de donner une première réponse à un problème de probabilité (Achour 1997). Elle pourrait, aussi, faciliter le recueil d'un nombre important d'informations à propos d'une machine de hasard en vue de la modéliser par un invariant (Brousseau 2005). Quoiqu'il en soit, elle représente une expérience aléatoire. Mais est-ce que l'élève voit en elle une expérience aléatoire effective ? C'est une question que nous avons posée auparavant (cf. Chapitre I, sous 3) et à laquelle nous donnons une réponse négative. En fait, nous rejoignons Carranza et Kuzniak (2006) qui disent que les élèves "ne paraissent pas convaincus par l'usage des calculatrices et de la simulation à la place par exemple de dés réels". Ainsi, avons-nous conçu de commencer notre expérimentation par des jets et des tirages effectifs.

Cette expérimentation s'étale sur quatre séances d'une heure chacune. La notion d'expérience aléatoire fait l'objet des deux premières séances. Dans la première séance, les élèves ont d'abord à jeter un dé puis à tirer une balle dans un récipient et ce pour une dizaine de fois pour chaque expérience. L'approche fréquentiste des probabilités fait l'objet des deux dernières séances. Pour aboutir à cette approche, les élèves ont à utiliser les fréquences relatives, leur représentation graphique et la simulation d'une expérience aléatoire.

Passons maintenant aux acteurs de la pré-expérimentation, la séquence étant détaillée un peu plus loin (cf. sous 3 pour les deux premières séances et sous 6 pour les deux dernières).

2.2. Les acteurs de la pré-expérimentation

Pour cette pré-expérimentation nous avons recouru à un professeur que nous connaissons, un professeur travaillant au collège qui a suivi de près nos travaux de recherche. Il a contribué en effet à la passation des trois tests diagnostics au niveau du collège.

Aussi, avons-nous sollicité l'accord de onze élèves de la 7^{ème} année de base qui habitent près du professeur en question, quelques uns étant ses propres élèves. Remarquons que les deux dernières séances ont observé l'absence de l'un parmi ces élèves.

La pré-expérimentation s'est déroulée au local du professeur sur deux journées : le 22 avril 2007 pour les deux premières séances et le 29 avril 2007 pour les deux dernières.

Notons que les élèves retenus n'ont pas encore rencontré la notion de probabilité qui figure dans leur programme.

2.3. Un objectif principal

Comme nous l'avons signalé, le professeur connaît le travail que nous menons. On en a souvent parlé. Nous lui avons assigné quelques tâches à accomplir. Pour réaliser ces tâches, il doit faire accomplir certaines tâches aux élèves.

Le principal objectif de cette pré-expérimentation consiste à recueillir des informations complétant celles que nous avons eues dans les derniers chapitres et aidant à l'élaboration d'un projet introductif des probabilités.

Ces informations sont essentiellement de deux sortes. Elles répondent d'abord à la question de consistance du milieu installé que ce soit pour aborder la notion d'expérience aléatoire ou pour faire émerger la notion de fréquence cumulée, notion nécessaire dans l'approche des probabilités par les fréquences. Elles répondent ensuite à la question de l'action professorale : comment se comporte le professeur pour maintenir la relation didactique lors de l'accomplissement de quelques tâches prescrites ?

2.4. Cadre théorique

Nous avons esquissé le cadre théorique au début de ce manuscrit (cf. chapitre I, sous 9). Nous reprenons ici ce cadre en donnant les détails nécessaires.

Notre intérêt porte ici sur la mise en œuvre d'un scénario. Mais un scénario ne peut pas être reproduit à l'identique par un quelconque professeur. D'abord, il lui est difficile de reproduire une même leçon (Brousseau 1986, 1998). Ensuite, il lui est pénible de reproduire un scénario, il "pourra, selon les cas, poser des questions inductrices, ignorer les arguments de certains élèves, intervenir dans le débat, ... autant de choix didactiques improvisés, pas nécessairement conscients, qui, bien qu'anodins, modifient profondément la situation prévue par le chercheur" (Arsac et Mante⁹⁷ 1989 cité dans Sarrazy 1995). Ainsi, avons-nous emprunté les notions de tâche prescrite et de tâche effective à la didactique professionnelle pour répondre au besoin théorique de l'analyse de la pré-expérimentation. Au sens de Rogalski (2003), une tâche prescrite est prise dans le sens de buts et de scénario prévus et une tâche effective dans le sens de buts et scénario effectivement réalisés.

⁹⁷ ARSAC G., MANTE M. (1989), Le rôle du professeur : aspects pratiques et théoriques, reproductibilité, *Cahiers du Séminaire de Didactique des Mathématiques*, Grenoble : LSD-IMAG, 79-105.

Aussi, avons-nous choisi de décrire ces tâches en utilisant les éléments structurant l'action professorale (définir, dévoluer, réguler et instituer ou institutionnaliser) empruntés au modèle des genèses (Sensevy et al. 2000).

Or, des rôles essentiels du professeur, nous citons sa dévolution à l'élève d'un milieu initial à l'aide d'une action définitoire et ses actions de régulation progressive qu'il apporte à ce milieu au fur et à mesure de la progression dans le problème étudié. Dans le cas de notre expérimentation, nous avons affaire à un milieu évolutif au sens d'une structure emboîtée de Brousseau (1990). Nous acceptons que le milieu soit le système antagoniste de l'élève au sens de Brousseau (1990, 1998). Comme à un instant donné d'une situation, un milieu est plongé dans un contrat, ce dernier nous importe dans l'analyse de notre pré-expérimentation. Nous nous référons à la structuration du contrat faite par Perrin et Hersant (2003). Ainsi, nous avons emprunté à la TSD les notions de milieu et de contrat.

2.5. Plan expérimental et méthode

Ici, nous commençons par présenter le plan expérimental retenu pour la pré-expérimentation avant de passer à la méthodologie adoptée.

2.5.1. Plan expérimental

Nous avons convenu avec le professeur de nous entretenir pour préparer le travail à réaliser pour chaque double séance deux jours avant l'expérimentation (le 20 avril 2007 pour les deux premières séances et le 27 avril pour les deux dernières). Ces rencontres qui nous prennent chacune une grande partie de l'après midi font l'objet d'enregistrements audio sur dictaphone. Et le jour de l'expérimentation, nous nous concertons vers 8 heures du matin pour la mise au point finale, les séances de l'expérimentation avec les élèves étant fixées à 10 heures et faisant l'objet d'enregistrement vidéo par caméscope.

2.5.1. Méthode

Nous procédons alors comme suit : nous exposons les tâches assignées à l'enseignant en nous référant à l'entretien de préparation d'une double séance, nous entamons une analyse a priori et nous présentons une analyse du déroulement des séances.

Aussi bien dans l'a priori que dans l'a posteriori, nous entamons une analyse selon trois volets complémentaires. Nous abordons d'abord les actions et les tâches, nous étudions ensuite le milieu et ses potentialités et nous terminons par les contrats.

Pour l'analyse a priori, nous donnons nos attentes selon les buts et le scénario envisagés. L'analyse a posteriori, par contre, est menée selon le déroulement effectif des séances.

En termes de tâches, ce qui nous importe c'est la distance entre les tâches prescrites et les tâches effectives.

En termes de milieu, nous n'entrons pas dans les détails relatifs à la structuration du milieu. Ce qui nous intéresse, c'est l'étude de la consistance du milieu au sens des rétroactions qu'il permet et / ou des conceptions qu'il favorise et celles qu'il disqualifie.

En termes de contrats, nous nous intéressons essentiellement aux deux niveaux méso et micro au sens de Perrin et Hersant (2003).

3. Préparation des deux premières séances

Dans cette partie, nous nous intéressons aux deux premières séances, une à une. Nous abordons alors les tâches à accomplir par le professeur avec les buts et le scénario envisagés, nous ajoutons quelques échanges pour chacune des deux séances.

3.1. Préparation de la première séance

Dans la première séance, le matériel utilisé est de deux sortes. En un premier temps, il est constitué d'un dé dont 2 faces sont blanches et 4 faces sont noires, nous parlons alors de première expérience. Ensuite, il est question d'un récipient contenant deux balles blanches et trois balles orange, nous parlons alors de deuxième expérience. Quelles sont alors les tâches assignées au professeur ?

3.1.1. La tâche prescrite

Nous présentons ici la tâche que le professeur est invité à accomplir au cours de la première séance, séance correspondant à la partie essentielle d'une situation que nous intitulons situation « expérience aléatoire ».

Pour la première séance, la tâche assignée au professeur est la tâche T1 : « élaboration d'un protocole expérimental ».

Pour accomplir cette tâche, le professeur aura à atteindre, dans chacune des deux expériences, les buts suivants :

- B11 : « Mettre les élèves dans des conditions où ils vont essayer de tricher ».
- B12 : « Amener les élèves à soupçonner la fraude ».
- B13 : « Amener les élèves à établir des règles faisant du jeu un jeu équitable ».

La tâche prescrite est composée des trois derniers buts et d'un scénario pour atteindre ces buts.

3.1.2. Le scénario envisagé

Pour la première expérience, les élèves volontaires sont organisés en quatre groupes. Dans un premier temps, chaque groupe est invité à lancer le dé (dont 2 faces sont blanches et 4 noires) 10 fois et à noter le nombre de faces blanches obtenues. Il est dit alors que le groupe apportant le plus de faces blanches est déclaré gagnant. Cette étape correspond au but B11.

Dans un deuxième temps, après que les groupes aient terminé leurs jets, un débat autour de l'acceptabilité des résultats obtenus est mis en place afin d'atteindre le deuxième but B12.

Et dans un troisième temps, c'est le troisième but B13 qui est ciblé quand les élèves sont invités à établir des règles susceptibles de rendre les résultats acceptables par chacun d'entre eux.

Le même scénario est envisagé pour la deuxième expérience, le lancer du dé étant remplacé par le tirage dans un récipient contenant cinq balles dont deux sont blanches.

3.1.3. Quelques échanges

La présentation de la première séance avec la tâche à réaliser, c'est-à-dire avec les buts et le scénario envisagés, est faite lors de notre premier entretien préparatif avec le professeur en question. Ici, nous allons focaliser sur quelques échanges que nous avons eus pour compléter la présentation faite dans les deux derniers paragraphes.

Nous avons commencé par présenter oralement au professeur le travail à faire. Nous lui demandons ensuite de prendre note en lui disant que l'objectif est la notion d'expérience aléatoire et en reprenant étape par étape le scénario prévu.

La première expérience

Pour la première expérience, il a à présenter aux élèves un dé dont 2 faces sont blanches et quatre sont noires, les faces blanches étant les faces adjacentes correspondant aux numéros 3 et 6. Il a ensuite à leur donner la consigne suivante : On va jouer au dé. Voici un dé dont 2

faces sont blanches et les autres noires. Chaque groupe va lancer le dé 10 fois et le groupe qui obtient le plus de fois blanc, à la face supérieure, gagne.

Nous lui avons dit vouloir que chaque lancer soit fait sous le contrôle de tout le monde et que c'est un travail en commun qui s'effectue au sein d'un même groupe. Il réagit alors :

P⁹⁸- C'est-à-dire que dans un groupe de 2 élèves, chacun va lancer 5 fois.

N- Non, vous n'avez pas à intervenir là-dessus. Chaque groupe a à faire 10 jets et c'est à eux de se débrouiller entre eux.

Pour le professeur, les élèves vont essayer de tricher pour gagner. Dans ce contexte, nous avons posé la question suivante :

N- Dans le cas où quelqu'un essaie de tricher, y aurait-il une réaction de la part des autres élèves ?

P- J'imagine qu'il faudrait leur dire de ne pas regarder le dé.

N- Non, il ne faut rien dire.

P- Voulez-vous qu'ils se comportent d'une façon spontanée ?

Nous lui avons rappelé que l'objectif est la notion d'expérience aléatoire, contextualisée ici par le jet d'un dé. Nous avons ajouté que pour atteindre cet objectif, nous avons envisagé qu'il n'a pas à montrer aux élèves comment lancer le dé et que le soupçon de la fraude de la part d'un élève ou plus doit être exploité, après que les groupes aient terminés leurs jets, afin d'engager une discussion concernant les conditions faisant du jeu un jeu juste, équitable.

Nous avons fait remarquer au professeur qu'il faut munir chacun des groupes d'une feuille blanche sur laquelle ils sont invités à écrire leurs noms. Là, il intervient :

P- Peut-on exploiter le tableau pour écrire les scores des groupes ?

N- Non, nous préférons que non. En effet, nous voulons bien voir comment ils rassemblent leurs résultats. Ils ont à se débrouiller pour écrire les résultats obtenus.

Il est question ainsi d'un but supplémentaire que nous avons assigné au professeur, le but BS1 : « voir comment les élèves rassemblent leurs résultats ».

Nous avons par ailleurs signalé au professeur que si la tricherie n'est pas abordée, il aura à inviter les groupes à procéder à une deuxième dizaine de jets.

Mais, nous lui avons demandé de ne pas trop trainer une fois qu'un élève est soupçonné d'avoir triché. Il est préférable alors d'engager aussi vite que possible la discussion à propos des conditions faisant du jeu un jeu équitable. Dans cette discussion, nous avons invité le professeur à prendre ses distances. C'est aux élèves de donner ces conditions.

⁹⁸ Dans les échanges présentés, P désigne le professeur et N nous désigne.

La deuxième expérience

Nous exposons le travail programmé pour la deuxième partie de la première séance au professeur qui prend note. Pour la deuxième expérience, il a à présenter aux élèves un récipient contenant 2 balles blanches et 3 balles orange. Nous échangeons alors les propos suivants :

N- Vous allez leur montrer les boules que vous mettez dans l'enceinte. Vous allez leur dire que chaque groupe va tirer 10 fois dans l'enceinte et que le groupe gagnant est celui qui obtient le plus de blanches.

P- Avec remise.

N- Bien entendu puisque vous allez leur demander de reproduire le tirage 10 fois. Le fait de parler de 10 tirages suppose - implicitement - que le tirage est avec remise. Ce qui est important, c'est de ne pas leur demander de mélanger les balles ou de remuer l'enceinte.

P- C'est aux élèves donc de prendre l'initiative.

N- C'est ça, ils vont probablement tricher, par exemple essayer de retirer une balle blanche déjà tirée.

P- Sans regarder ? Naturellement, ils vont essayer de tricher.

N- L'enceinte est posée devant eux, on leur donne la consigne et c'est à eux de jouer.

...

P- J'imagine qu'il faut leur dire de ne pas regarder.

N- Même si quelqu'un regarde, ce n'est pas un problème, il y aura probablement des réactions signalant qu'il faut tirer sans regarder et qu'il faut refaire le tirage, de la part des autres. Je vous demande ainsi de ne pas intervenir sur ce point. C'est à eux de le faire. Est-ce clair ?

P- Oui.

Suite aux derniers échanges, nous lui remarquons que la situation est construite de façon à inciter à la fraude qui sera exploitée, comme pour la première expérience, à entamer une discussion aboutissant aux conditions à envisager pour que le jeu soit équitable :

N- Ce qui est intéressant, c'est la discussion. Une discussion aboutissant essentiellement à des conditions rendant le jeu équitable tels que bien mélanger les boules ...

P- Oui.

N- Bien entendu, comme j'ai dit auparavant, je veux que tout provienne des élèves.

P- Oui.

N- Comment le jeu peut-être équitable ? Est-ce ne pas regarder est suffisant ? On peut, par exemple, prendre la même balle qu'on a remise, non ?

...

N- Donc tu n'as pas à leur donner, au départ, d'indication que ce soit pour les lancers ou pour les tirages.

N- Ainsi, à la fin de la première séance, des protocoles expérimentaux seraient instaurés, des protocoles qui sont à l'origine de la reproductivité d'une expérience aléatoire dans des conditions similaires et de l'imprévisibilité d'un résultat ..., est-ce clair ?

P- C'est clair.

Ainsi, nous l'informons que l'objectif de la première séance est l'approche de la notion d'expérience aléatoire par l'intermédiaire de la construction de protocoles expérimentaux.

3.2. Préparation de la deuxième séance

La deuxième séance est envisagée dans la continuité de la première. Le matériel utilisé dans la deuxième séance est constitué du récipient utilisé dans la première (contenant cette fois une balle blanche et deux balles orange), de trois dés dont les faces 3 et 6 sont en blanc (le dé de la dernière séance et deux autres qui se ressemblent et dont l'un est pipé) placés chacun dans un gobelet et de trois pistes (couvercles de boîtes cartonnées).

3.2.1. La tâche prescrite

Pour nous, la tâche T2 prescrite au professeur comporte trois buts essentiels à atteindre :

- B21 : « Amener les élèves à faire fonctionner les protocoles expérimentaux établis lors de la première séance ».
- B22 : « Consolider la notion de variabilité ».
- B23 : « Amener les élèves à répondre à la question du cumul des résultats ».

Outre ces buts, la tâche englobe un scénario que nous avons conçu.

3.2.2. Le scénario envisagé

À la deuxième séance, les élèves sont toujours organisés en groupes, chaque groupe étant muni d'une feuille blanche. Le professeur distribue le matériel sur ces groupes : l'un aura à travailler avec l'enceinte contenant des balles (une blanche et deux orange) et les autres ont à utiliser chacun un dé (dont deux faces sont blanches) placé dans un gobelet et une piste où le jet sera effectué. Nous parlons alors d'une troisième expérience.

Il a à leur dire qu'en respectant les conditions sur lesquelles ils se sont mis d'accord lors de la première séance, les groupes ont à faire soit 10 jets soit 10 tirages selon leur matériel et à noter le nombre de faces ou de balles blanches obtenues sur les feuilles. Ils ont après à faire

20 jets ou 20 tirages. Seulement, ils ont d'abord à écrire le nombre de blanches qu'ils prévoient obtenir dans chacune des deux séries d'épreuves.

Il a aussi à poser la question du cumul des épreuves que nous abordons dans le paragraphe suivant.

Le professeur aura à terminer la séance au moment où chaque groupe aurait effectué plusieurs dizaines d'épreuves, le nombre d'épreuves devant être différent d'un groupe à l'autre.

3.2.3. Quelques échanges

Complétons la présentation faite dans les deux derniers paragraphes, présentation tirée de l'entretien préparatif des deux premières séances que nous avons eu avec le professeur.

Nous avons abordé la notion de variabilité qui serait touchée par les élèves notamment dans la comparaison des résultats obtenus pour 10 épreuves et pour 20 épreuves. Et à propos des 20 épreuves, nous avons abordé le problème du cumul des résultats :

N : Après avoir effectué les 10 jets ou tirages, vont-ils prendre en considération les résultats trouvés ou bien vont-ils reprendre les jets ou les tirages dès le départ ? Autrement dit, vont-ils procéder au cumul des résultats ?

P : Et quand ils me posent la question ?

N : Dans ce cas, tu engages une discussion. Si tu trouves un groupe qui a recouru au cumul, tu peux poser la question aux autres : ce groupe a ajouté 10 résultats aux 10 précédents, qu'en pensez-vous ?

P : Hum ... et si tout le monde refait 20 fois ?

N : Si tous les groupes n'ont pas utilisé le cumul, la question de la prise en compte des résultats antérieurs peut-être posée : peut-on prendre en considération les 10 premiers ?

Nous avouons alors au professeur nos doutes quant à l'utilisation du cumul par les élèves. Et nous lui avons demandé d'engager une discussion aussi bien dans le cas où un élève pose la question du cumul que dans le cas de l'existence d'un groupe qui ne s'y est pas référé. Cette discussion trancherait alors quant à la possibilité de prendre en compte les résultats antérieurs.

Nous lui avons aussi laissé le choix de continuer ou non à demander les prévisions avant de procéder à des séries d'épreuves, ces séries pouvant comporter une dizaine ou plus d'épreuves.

La notion d'expérience aléatoire étant centrale dans cette séance, nous avons abordé la question de l'influence de l'expérimentateur (celui qui jette ou tire) sur les résultats des

épreuves. Ainsi avons-nous encore demandé au professeur de ne pas intervenir dans la distribution des rôles au sein d'un même groupe.

Nous lui avons aussi légué un but supplémentaire BS2 : « voir comment les élèves notent les résultats obtenus ».

4. Analyse a priori des deux premières séances

La situation envisagée aux deux premières séances est appelée situation de l'expérience aléatoire. Remarquons que la notion d'expérience aléatoire est abordée dans les nouveaux programmes tunisiens en 7^{ème} année de base (cf. chapitre IV, sous 6.2.1) mais qu'elle n'apparaît pas explicitement dans le manuel officiel pour ce niveau (cf. chapitre 4, sous 7.1).

Comme mentionné en haut (sous 2.4), nous avons eu, le jour de l'expérimentation, un entretien avec le professeur vers 8 heures du matin, l'expérimentation avec les élèves étant programmée à 10 heures. Nous lui avons demandé s'il a des questions à poser concernant les deux premières séances et sa réponse fut négative. Nous avons alors fait le point sur les étapes à réaliser et il nous a semblé que le professeur est prêt pour les deux premières séances.

Aussi, comme signalé en haut (cf. sous 2.5.1), l'analyse a priori est envisagée selon un découpage fait sur la base de trois niveaux : niveau des tâches, niveau du milieu et niveau des contrats.

Avant de commencer l'analyse donnons quelques éclaircissements à propos du troisième niveau, celui des contrats.

La tâche assignée au professeur dépend entre autres du milieu dans lequel il travaille, de ce qui se passe réellement en situation d'enseignement. Elle dépend aussi de ses connaissances mathématiques et didactiques, de ses habitudes et des contrats qu'il installe dans les situations variées qu'il choisit. Mais, la situation dans laquelle nous l'avons mis est inhabituelle. Il lui est confié d'accomplir des tâches prescrites comportant chacune des buts et un scénario, à notre sens, bien précis. Par ailleurs, une tâche bien déterminée ne lui laisse pas un grand choix quand à l'installation des contrats. Ainsi avons-nous osé mener une analyse a priori en termes de contrats.

Mais, nous ne pouvons aller de l'avant sans aborder une contrainte pouvant être déterminante dans le choix d'un contrat didactique : la contrainte temporelle. La notion du temps didactique est une des contraintes à prendre en considération dans l'étude d'une relation didactique (voir par exemple Chevallard et Mercier 1987, Mercier 1992). S'il est question d'un "outil

indispensable à l'étude de l'élève, parce que la saisie du progrès de l'élève dans le savoir se fait en relation à la progression temporelle des institutions didactiques'' (Mercier 1992, p. 52), c'est aussi un outil d'analyse du comportement du professeur. Il est évident que le temps didactique est une contrainte qui explique certains effets pervers du contrat didactique (ibid. p. 119). Ainsi, si un professeur voit que le temps didactique n'avance pas, il peut installer un contrat où il garde toute la responsabilité. C'est dire que le temps didactique peut expliquer le recours à un tel contrat.

Notons enfin avant d'entamer l'analyse que le contrat global instauré est un contrat statistique caractérisé par la notion de variabilité.

Dans l'analyse menée ci-dessous, nous donnons nos attentes dans les trois niveaux considérés en nous référant à la situation construite et aux tâches prescrites.

4.1. La première séance, 1^{ère} expérience (le dé)

Ici, l'analyse porte sur la première expérience de la première séance, c'est-à-dire sur le jeu du lancer du dé.

4.1.1. Analyse en termes d'actions et de tâches

La première expérience correspond à la tâche prescrite T1 : « élaboration d'un protocole expérimental ». Cette tâche est composée des trois buts B11 : « Mettre les élèves dans des conditions où ils vont essayer de tricher », B12 : « Amener les élèves à soupçonner la fraude », B13 : « Amener les élèves à établir des règles faisant du jeu un jeu équitable » et du but supplémentaire BS1 : « voir comment les élèves rassemblent leurs résultats » ainsi que du scénario envisagé.

L'atteinte des trois buts étant envisagée dans un ordre chronologique, nous divisons la première expérience en trois phases, chacune de ces phases correspondant à un but.

La première phase : les 10 jets du dé

La première phase correspond au but B11 et aux moyens donnés au professeur pour l'atteindre. Ce dernier est sensé, dans cette phase, définir le jeu (jeter 10 fois pour chaque groupe) et ses règles (le gain du groupe) en vue de dévoluer une première tâche aux quatre groupes. Le début des activités des élèves poserait le problème de notation des résultats et le but secondaire BS1 pourrait être atteint.

Nous nous attendons à ce que les élèves adhèrent aux activités demandées et que le but B11 soit atteint. Autrement dit, nous prévoyons que quelques uns parmi eux essaieraient de tricher. Si c'est le cas, le professeur aura à poser la question de l'acceptabilité des résultats. Si ce n'est pas le cas, il aura à demander de reprendre 10 jets pour une deuxième fois.

La deuxième phase : l'acceptabilité des résultats

La deuxième phase correspond au but B12 et aux moyens donnés au professeur pour l'atteindre. Elle commence par l'action professorale qui consiste à réguler le milieu en posant la question de l'acceptabilité des résultats que les groupes ont obtenus. Cette question serait à l'origine d'une discussion où les élèves suspectent la fraude et où les groupes perdants essaieraient d'avancer des arguments montrant qu'ils n'acceptent pas les résultats. Nous nous demandons ici si la consigne de ne pas laisser trainer cette phase sera respectée.

La troisième phase : le protocole expérimental

La troisième phase correspond au but B13 et aux moyens donnés au professeur pour l'atteindre. Elle débute par une action du professeur consistant à réguler le milieu mis en place. Cette action consiste à poser la question d'un jeu équitable, dont les résultats ne soulèvent aucune contestation. Nous nous attendons à ce que les activités développées par les élèves aillent dans le sens de quelques règles tels que « ne pas regarder le dé, bien l'agiter, ... ». Le professeur aura donc à instituer avec les élèves un protocole expérimental traduisant ce qu'est un jet de dé équitable.

Ces derniers paragraphes exposent une esquisse de la tâche attendue qui devrait être à notre sens proche de la tâche prescrite bien qu'elle ne puisse être identique. Nos attentes sont données sur la base du « contrat expérimental » passé avec le professeur. En effet, nous lui avons tout dévoilé concernant les buts à atteindre et la façon de faire. De plus, nous avons vérifié les notes qu'il a prises.

4.1.2. Analyse en termes de potentialités du milieu

Les actions définitives et régulatrices attendues par le professeur sont prévues afin de mettre en place un milieu de base et / ou d'aménager un milieu déjà installé.

Le milieu relatif au travail à réaliser à la première expérience est un milieu évolutif. Nous pouvons le décrire comme étant un milieu de base en un premier temps, puis comme un milieu de référence en un second temps.

Nous pouvons parler d'abord d'un milieu de base (matériel / objectif) essentiellement constitué du dé et le nombre de ses faces blanches, de la familiarité des élèves avec le jet d'un dé, du travail en groupes et du gain. Les actions sur ce milieu peuvent être de deux sortes : des épreuves faites au hasard ou des essais de fraude. Ces actions peuvent aboutir aussi bien à un nombre de résultats blancs plus petit que plus grand par rapport au nombre de résultats correspondant à la deuxième couleur. Nous pouvons parler ensuite de milieu de référence englobant le gain, les résultats trouvés et les essais de fraude. Les actions sur ce milieu peuvent aboutir à des rétroactions allant dans le sens de l'imprévisibilité du résultat d'une épreuve même si on essaie de tricher. Autrement dit, un élève ne peut pas apporter toujours la face blanche quoiqu'il fasse.

La situation est conçue de sorte qu'elle incite dans la 1ère phase à la tricherie, c'est-à-dire à réaliser des expériences non aléatoires.

Avec la question de l'acceptabilité des résultats (2^{ème} phase), le milieu donnerait des rétroactions allant dans le sens de l'imprévisibilité du résultat d'un jet disqualifiant ainsi deux conceptions attendues. La première est la conception *NI* « *cardinaux* » où la technique consiste à comparer le nombre de faces blanches et le nombre de faces noires, conception fréquente que nous avons relevée précédemment (cf. chapitre IX, sous 6.2.2 et sous 8.2.2). La deuxième est la conception *M* « *Mécanique* » basée sur l'évacuation de l'aléatoire par l'intermédiaire notamment de la prise en compte des conditions initiales de l'expérience, conception que nous avons relevée dans les chapitres précédents (cf. chapitre V, sous 5.1.4 ; chapitre VII, sous 5.2.2 et chapitre IX, sous 8.2.2).

L'évolution du milieu favoriserait enfin, à la fin de la 3^{ème} phase, avec la construction du protocole expérimental, l'abord de la notion d'expérience aléatoire du côté de l'imprévisibilité du résultat d'une épreuve et de la reproductivité dans des conditions similaires.

4.1.3. Analyse en termes de contrats

Laisser tout provenir des élèves est une consigne que nous avons donnée au professeur qui, nous semble-t-il est d'accord pour la faire valoir. Ainsi, au niveau micro, nous prévoyons que le contrat que le professeur va installer durant les trois phases est un microcontrat de production collective⁹⁹ au sens où le professeur délègue aux élèves la responsabilité de

⁹⁹ Microcontrat de production collective : “le professeur laisse aux élèves la responsabilité de la production de la connaissance et une part de responsabilité dans la validation des réponses. Dans ce micro-contrat au sens strict, le rôle du professeur est souvent réduit à la gestion de la prise de parole dans la classe et à la retransmission à l'ensemble de la classe, sans déformation, des informations données par un élève. Dans ce cas, la part

produire une connaissance. Au niveau méso, nous attendant à ce que la situation - que nous supposons nouvelle - soit dévolue aux élèves, nous prévoyons que le contrat que va installer le professeur est un mésocontrat de dévolution d'une première situation¹⁰⁰ ou un mésocontrat de recherche¹⁰¹.

Ainsi, il est attendu que le professeur installe, le temps de la première expérience, un microcontrat de production collective dans un mésocontrat de recherche.

4.2. La première séance, 2^{ème} expérience (les balles)

Ici, l'analyse porte sur la deuxième expérience de la première séance, c'est-à-dire sur le jeu du tirage des balles.

4.2.1. Analyse en termes d'actions et de tâches

La deuxième expérience correspond à la même tâche prescrite T1 : « élaboration d'un protocole expérimental » de la première expérience. Cette tâche est donc composée des trois buts B11 : « Mettre les élèves dans des conditions où ils vont essayer de tricher », B12 : « Amener les élèves à soupçonner la fraude », B13 : « Amener les élèves à établir des règles faisant du jeu un jeu équitable » ainsi que du scénario envisagé.

L'atteinte des trois buts étant envisagée dans un ordre chronologique, nous divisons la première expérience en trois phases, chacune de ces phases correspondant à un but. Il faut cependant remarquer que les deux premières phases peuvent être rassemblées pour ne former qu'une.

La première phase : les 10 tirages

La première phase correspond au but B11. Le professeur aura, dans cette phase, à définir le jeu (tirer dans l'enceinte 10 balles pour chaque groupe) et ses règles (le gain du groupe) en vue de dévoluer une première tâche aux groupes. Le problème de la notation n'est plus posé puisqu'il est abordé lors de la première expérience.

d'adidacticité de la situation est importante s'il y a un savoir nouveau à produire. La responsabilité étant déléguée à l'ensemble de la classe, tous les élèves ne s'investissent pas de la même façon dans la production de la connaissance et la validation des réponses'' (Perrin-Glorian et al. 2003, p.276).

¹⁰⁰ Mésocontrat de dévolution d'une première situation : "On peut confier la première rencontre avec le savoir nouveau à une situation adidactique qui « porte » le savoir nouveau sous la forme de connaissances à mettre en œuvre pour traiter le problème, la production des connaissances pourra se faire à condition de faire dévolution de cette situation aux élèves. nous parlerons, dans ce cas, de mésocontrat de *dévolution d'une première situation*" (ibid., pp. 241-242).

¹⁰¹ A la première école d'été de didactique des mathématiques organisée par l'ATDM (Association Tunisienne de Didactique des Mathématiques) à Carthage (30 juillet-6 août 2008), M-J. Perrin-Glorian dit opter actuellement pour mésocontrat de recherche à la place de mésocontrat de dévolution d'une première situation.

Nous nous attendons à ce que les élèves adhèrent aux activités demandées et que le but B11 soit atteint. Nous prévoyons donc que les élèves vont essayer de tricher. La tentation d'apporter plus de balles blanche serait grande suite à ce qui aurait dû se passer lors de la première expérience.

La deuxième phase : l'acceptabilité des résultats

La deuxième phase correspond au but B12 et aux moyens donnés au professeur pour l'atteindre. Ici, nous nous attendons à ce que l'entrée dans cette phase se fasse très vite suite aux essais de fraudes attendues dans la première phase ; il est d'ailleurs attendu que les élèves interviennent au cours de la première phase pour dénoncer un tirage suspect. Le professeur n'aurait alors qu'à diriger la discussion. Des arguments montrant que la fraude a eu lieu seraient alors avancés.

La troisième phase : le protocole expérimental

La troisième phase correspond au but B13 et aux moyens donnés au professeur pour l'atteindre. Elle débute, comme pour la première phase, par une action du professeur consistant à réguler le milieu déjà installé. L'action professorale est traduite par la question d'un jeu équitable dont les résultats sont acceptés par la totalité des élèves. Nous nous attendons alors à ce que les activités des élèves aillent dans le sens de la production de quelques règles tels que « ne pas regarder dans le récipient, bien mélanger, ... ». Le professeur aura, comme prévu pour la première phase, à instituer avec les élèves un protocole expérimental traduisant ce qu'est un tirage au hasard.

En conclusion, la tâche attendue dépend en partie de ce qui aurait dû se passer lors de la première expérience. Cependant, nous nous attendons à ce que tous les buts de la tâche prescrite soient atteints et à ce que la tâche effective diffère de la tâche prescrite du côté du scénario.

4.2.2. Analyse en termes de potentialités du milieu

Les actions définitives et régulatrices attendues par le professeur sont prévues afin de mettre en place un nouveau milieu matériel (le récipient et les balles) et d'aménager un milieu déjà en place.

Après la mise en place du nouveau milieu matériel, les élèves interagissent avec un milieu plus vaste, un milieu englobant tous ce qui s'est produit lors de la première expérience.

Ainsi, les actions sur le milieu installé seraient plutôt des essais de fraude. Mais cette fois et contrairement à ce qui est prévu pour la première expérience, un élève peut obtenir une balle blanche à tous les coups.

Dans cette expérience, le milieu serait favorable surtout à la mobilisation de la conception *NI* « *cardinaux* ». Il serait aussi favorable à l'apparition de la conception *M* « *Mécanique* » basée sur l'exploitation de la position initiale des balles dans le récipient. Seulement, avec l'acharnement que nous prévoyons à tirer le plus de balles blanches, nous voyons le milieu, contrairement à la première expérience, incapable de donner des rétroactions invalidant ces deux conceptions.

Quant à la conception *IMMI* induisant l'imprévisibilité du résultat d'une épreuve, nous envisageons qu'elle pourrait apparaître à la dernière phase, phase dans laquelle la question du jeu équitable serait posée.

4.2.3. Analyse en termes de contrats

Nous pensons que, comme pour la première expérience, le professeur laisserait tout provenir des élèves. Il se limiterait alors à la direction de la discussion et laisserait la responsabilité du côté des élèves. Nous prévoyons par conséquent qu'il installe un microcontrat de production collective dans un mésocontrat de recherche.

4.3. La deuxième séance

Dans la deuxième séance, les élèves ont à réaliser des séries de lancers de dé ou de tirages d'une balle dans l'enceinte.

4.3.1. Analyse en termes d'actions et de tâches

Rappelons que la deuxième séance correspond à la tâche prescrite T2 et que cette dernière comporte les trois buts principaux B21, B22 et B23 ainsi que le but supplémentaire BS2 : « voir comment les élèves notent les résultats obtenus ».

Ici, les buts ne peuvent être atteints dans l'ordre. En effet, le premier but B21 : « Amener les élèves à faire fonctionner les protocoles expérimentaux établis lors de la première séance » et le deuxième but B22 : « Consolider la notion de variabilité » sont une affaire de la séance entière ; par contre, le troisième but B23 : « Amener les élèves à répondre à la question du cumul des résultats » correspond au moment du débat concernant la question du cumul des résultats.

À la deuxième séance, le professeur aura à munir chaque groupe d'une feuille blanche et à distribuer le matériel sur ces groupes : l'enceinte contenant des balles (une blanche et deux orange), les dés les gobelets et les pistes retenus pour l'expérimentation.

Il devrait commencer par leur définir le jeu auquel ils vont participer ainsi que ses règles. Le travail des groupes consiste à faire, chacun selon le matériel en possession, soit 10 jets soit 10 tirages en respectant les protocoles expérimentaux supposés élaborés lors de la première séance et à noter le nombre de blanches (faces ou balles) obtenues, les épreuves étant effectuées après la prévision du résultat et son écriture sur la feuille. L'action de définition attendue par le professeur peut être vue comme étant une action institutrice au sens où elle fait partie du processus d'institutionnalisation.

Ainsi le but supplémentaire BS2 : « voir comment les élèves notent les résultats obtenus » est une affaire du début de la séance.

Nous prévoyons que les élèves jouent le jeu en respectant, le long de la séance, des règles faisant que les jets ou les tirages soient dus au seul hasard. Ainsi le but B21 : « Amener les élèves à faire fonctionner les protocoles expérimentaux établis lors de la première séance » serait atteint.

Le professeur aurait à réguler la définition précédente en remplaçant la série de 10 épreuves par une série de 20 épreuves.

Avec les résultats qui ne peuvent se conformer aux prévisions et avec la difficulté de prévoir pour 20 épreuves à partir des résultats de 10, la notion de variabilité ne peut être que consolidée et le but B22 : « Consolider la notion de variabilité » serait atteint.

Aussi, le professeur a à réguler en posant la question du cumul au cas où un élève se demande si l'on doit considérer les 10 premières épreuves ou au cas où le professeur s'aperçoit qu'il existe un groupe qui n'a pas cumulé. Mais nos doutes sont forts quant à l'existence d'un élève ou d'un groupe qui pense spontanément au cumul. Nous nous attendons alors à ce que le professeur fasse la régulation en question après que les groupes aient terminé la série des 20 épreuves.

Et le professeur pourrait lors de cette discussion amener les élèves vers une même façon de faire : considérer ou non les résultats précédents. Le but B23 : « Amener les élèves à répondre à la question du cumul des résultats » serait ainsi atteint.

D'ailleurs, nous pensons que, outre le fait que le « contrat expérimental » passé avec le professeur est transparent, le temps alloué à la deuxième séance est suffisant pour que le professeur la mène à bien et accomplisse la tâche sur laquelle nous sommes convenus.

4.3.2. Analyse en termes de potentialités du milieu

Les actions définitives et régulatrices attendues par le professeur sont prévues afin d'aménager le milieu existant. Et le milieu installé jusque lors nous semble favorable à la consolidation de la notion de l'imprévisibilité et à la rencontre de la notion de reproductivité (avec la prise en compte d'un protocole expérimental), notions caractéristiques de l'objet « expérience aléatoire ».

Avec le respect du protocole expérimental, un élève n'aurait plus à mobiliser la conception *M* « Mécanique » ou déterministe. Par ailleurs, le milieu continue sans doute à favoriser les conceptions *IMMI* « Imprévisibilité Microscopique » et *NI* « cardinaux ».

4.3.3. Analyse en termes de contrats

Nos attentes ne diffèrent pas de celles de la première séance au sens que les activités des élèves sont mises à l'avant. Il serait alors généralement question d'un microcontrat de production collective.

Lors de la deuxième séance, les élèves auraient à réaliser des épreuves respectant certaines règles supposées rencontrées lors de la première séance. Tout se passe alors comme s'ils réinvestissaient des connaissances.

Ainsi, nos attentes vont dans le sens de l'installation d'un microcontrat de production collective dans un mésocontrat de réinvestissement de connaissances¹⁰².

5. Déroulement et analyse a posteriori des deux premières séances

Après l'entretien avec le professeur, nous avons aménagé les tables figurant dans le lieu de l'expérimentation sous forme d'un U, le lieu étant une salle munie d'un tableau blanc.

¹⁰² Mésocontrat de réinvestissement de connaissances : « Lorsque le professeur a utilisé une situation adidactique pour introduire la connaissance visée, les exercices permettent aux élèves de réinvestir leurs connaissances dans un nouvel exercice ; nous parlons de *réinvestissement de connaissances*. Le réinvestissement concerne ici une connaissance qui n'est pas encore identifiée comme un savoir par l'élève » (Perrin-Glorian et al. 2003, p.243).

5.1. La première séance, 1^{ère} expérience (le dé)

Ici, nous abordons le déroulement de la première expérience (celle du dé) de la première séance¹⁰³.

5.1.1. Analyse en termes d'actions et de tâches

A posteriori, l'analyse est menée, comme dans l'analyse a priori, en référence à trois phases. La première phase correspond à un travail en groupes consistant à lancer le dé 10 fois et à noter les faces blanches obtenues. La deuxième phase correspond au débat concernant l'acceptabilité des résultats obtenus. Quant à la troisième phase, elle correspond à l'élaboration d'un protocole expérimental.

La première phase : les 10 jets du dé

Après la formation des groupes (les trois premiers groupes comportent chacun 3 élèves et le quatrième est constitué de deux élèves), le professeur munit chacun des quatre groupes d'une feuille blanche sur laquelle il demande aux élèves d'écrire leurs noms. Il présente le dé à deux faces blanches et commence par définir le jeu, c'est-à-dire par donner la consigne (jeter le dé 10 fois sur la table, voir la couleur de la face supérieure ...). Mais, il n'a pas terminé de donner la consigne qu'un élève intervient¹⁰⁴ :

008 P : Noires. Bon, ce qui est demandé maintenant à chaque groupe c'est de lancer ce dé 10 fois sur la table et on va voir la couleur de la face supérieure, blanche ou noire. Donc vous, sur vos feuilles (*il est interrompu par une élève*)

009 E41 : On les met dans un tableau, monsieur.

010 P : Bon, tu vas faire un tableau, qu'est-ce que tu vas y mettre ?

011 E41 : Blanche et noire.

012 P : Blanche et noire. Vous pouvez mettre B pour blanche et N pour noire. Donc, on divise le tableau en deux et on met B et N.

013 E41 : Monsieur ...

014 P : Divise le tableau en deux et met B à gauche et N à droite par exemple.

015 *Les élèves tracent des tableaux à deux colonnes.*

016 P : Si on obtient une blanche, par exemple, où est-ce qu'on va la mettre ?

017 E13 : Je mets une croix.

018 P : Croix, d'accord.

019 E22 : C'est-à-dire ce qui arrive ?

020 P : Si le noir arrive, on met une croix en N ; si le blanc arrive, on met une croix en B. C'est compris ? On fait 10 fois, chaque groupe fait 10 fois. On commence par le premier groupe. Vous avez divisé votre feuille ?

021 EE1 : Oui monsieur.

022 P : On va jouer maintenant, débrouillez-vous.

¹⁰³ Pour le déroulement détaillé des deux premières séances, voir l'annexe 6.

¹⁰⁴ Dans les passages d'échanges relatifs à l'annexe 6, P désigne le professeur, E un élève non identifié, EE des élèves non identifiés et Eij l'élève numéro j du groupe i.

Les derniers passages montrent que le professeur a laissé de côté but supplémentaire BS1 : « voir comment les élèves rassemblent leurs résultats », ce qui, d'un côté, présente une modification de la tâche prescrite T1 et, d'un autre côté, nous prive d'une information que nous aurions voulu connaître.

Ils nous montrent aussi qu'il a modifié la consigne : au lieu de demander qu'on note les faces blanches obtenues, il opte pour la notation de tous les résultats.

Le professeur a oublié également de mentionner le gain (celui qui apporte le plus de blanches gagne), ce qui modifie le milieu de la situation envisagé et affecte par la suite le but B11 : « Mettre les élèves dans des conditions où ils vont essayer de tricher », but faisant partie de la première tâche T1.

La définition du jeu constituant une action de dévolution d'une tâche aux groupes, les élèves du premier groupe commencent les jets. Après que les élèves du premier groupe ont terminé leurs lancers (ils se les sont départagés) et au moment où le deuxième groupe est à son 2^{ème} jet, le professeur intervient. Il s'est rappelé en effet qu'il a oublié un élément important du milieu, celui du gain. Ainsi, s'est-il rattrapé :

032 P : Celui qui trouve blanc est considéré gagnant (*il répète cette phrase*).

033 E42 : Pourquoi ?

034 P : Celui qui trouve blanc gagne et celui qui trouve noir est considéré perdant.

035 E13 : Nous, nous sommes à égalité.

036 E32 : C'est-à-dire celui qui apporte le plus de blanches a gagné ?

037 P : C'est bien ça.

Le deuxième groupe, qui à la fin de ces échanges était à sa 6^{ème} épreuve, termine ses lancers et c'est le tour du troisième groupe. Au 7^{ème} jet de ce dernier groupe, E32 jette doucement le dé. Avec le jet de l'élève E32, le but B11 semble atteint. D'ailleurs, l'élève E23 intervient juste après ce jet :

042 E23 : Pourquoi tu triches, tu joues comme ça.

Les groupes terminent leurs épreuves et tous les élèves au sein d'un même groupe ont participé au jeu. Le seul groupe qui a posé la question du nombre de lancers revenant à chacun de ses éléments est le groupe 4 constitué de deux élèves :

044 E41 : Monsieur, pour nous, est-ce que chacun va faire cinq ? (*elle veut dire 5 jets*).

045 P : C'est 10 jets pour vous deux.

046 E41 : Oui, cinq cinq.

047 P : Non, c'est faux. Ah, vous êtes deux seulement, débrouillez-vous.

Les résultats trouvés sont 5b et 5n pour le 1^{er} groupe, 3b et 7n pour le 2^{ème}, 7b et 3n pour le 3^{ème}, 4b et 6n pour le 4^{ème} groupe¹⁰⁵.

C'est le groupe 3 qui a gagné. Les élèves de ce groupe sont contents, par contre d'autres élèves paraissent ennuyés.

La deuxième phase : l'acceptabilité des résultats

Nous considérons que la deuxième phase commence par l'intervention 042 citée en haut. Le professeur n'a donc pas besoin de réguler, c'est-à-dire de poser la question de l'acceptabilité des résultats pour atteindre le B12 : « Amener les élèves à soupçonner la fraude ».

La discussion s'étant engagée d'elle-même, le professeur ne fait que l'organiser. Il reprend les paroles d'un élève ou demande l'avis d'un élève à propos d'une intervention faite :

068 P : Qu'est-ce que vous avez. Y a-t-il quelqu'un qui a un commentaire ?

...

072 P : Qu'est-ce que vous pensez ?

La troisième phase : le protocole expérimental

La troisième phase correspond au but B13 : « Amener les élèves à établir des règles faisant du jeu un jeu équitable ». Pour atteindre ce but, le professeur régule ; il réaménage le milieu comme suit :

159 P : Maintenant, dites-moi comment jouer sans fraude.

160 E22 : Il doit jouer sous notre contrôle.

161 E13 : Moi, je suis d'accord.

161 E42 : On doit voir la personne qui joue, il doit faire comme ça (*elle montre comment jeter un dé*).

Mais la discussion a repris sur l'influence du jet sur le résultat. Après un bon moment, le professeur réitère la question :

201 P : Récapitulons, comment éliminer la fraude ?

Et une seule réponse lui parvient :

203 E23 : On fait comme ça (*Il ferme les deux mains formant un creux et les agite*) et on lâche le dé.

Les élèves continuent leurs interventions à propos de la fraude, les probabilités et les résultats trouvés. Le professeur reprend alors la question d'une autre façon et obtient quelques réactions :

210 P : Alors de quelle façon jouer sans tricher.

211 E32 : Pour ne pas tricher, on fait comme ça (*il agite les mains en forme de creux*) et on le lance.

212 E41 : Sans voir le dé, on fait comme ça (*elle agite les mains en forme de creux*) et on jette.

¹⁰⁵ La lettre « b » désigne une face blanche et la lettre « n » une face noire.

213 P : Dans le prochain jeu, on va jouer sans tricher.

214 E41 : Il ne faut pas nous dire que le gagnant est celui ayant plus de blanches ou de noires.

Les dernières interventions lui semblant suffisantes pour l'élaboration d'un protocole expérimental, le professeur s'y limite. En effet, après avoir laissé la discussion, déclenchée lors de la dernière phase, continuer et après avoir fait lui-même quelques lancers, il passe à la deuxième expérience après 40 minutes du début de la séance.

En définitive la tâche effective se distingue de la tâche prescrite correspondante T1 sur plusieurs plans :

- D'abord et contrairement à nos attentes, le professeur a omis le but supplémentaire BS1 : « voir comment les élèves rassemblent leurs résultats ». Cette omission peut s'expliquer soit par un oubli dû à un manque de maîtrise de la tâche à accomplir, soit par une redéfinition de la tâche.

- Puis et contrairement au scénario prescrit relatif à l'atteinte du but B11 : « Mettre les élèves dans des conditions où ils vont essayer de tricher », il n'a parlé du gain du groupe apportant le plus de faces blanches que d'une façon tardive. D'ailleurs, cette modification dans la tâche lui a permis de passer directement à la deuxième phase sans poser la question de l'acceptabilité du résultat et d'atteindre le but B12 : « Amener les élèves à soupçonner la fraude ».

- Enfin et toujours contrairement à nos attentes, il n'a pas institué ou élaboré, comme il se doit, avec les élèves un protocole expérimental faisant du jeu du dé un jeu équitable.

5.1.2. Analyse en termes de potentialités du milieu

Au début de la première expérience, l'action professorale consiste à définir en vue de dévoluer aux élèves un premier milieu matériel (le dé) avec lequel ils vont interagir. L'évolution du milieu paraît aller dans le sens de l'accomplissement des buts de la tâche prescrite de façon convenable. Il a permis, peut-être grâce à l'introduction un peu tardive de la notion du gain, l'entrée dans la deuxième phase sans que le professeur ait besoin de poser la question de l'acceptabilité des résultats trouvés.

Par ailleurs, le milieu installé favorise l'émergence de quelques conceptions lors de la deuxième phase. En effet, la deuxième phase est marquée par une discussion intéressante où l'on voit des conceptions probabilistes en acte.

D'abord, cette phase nous a dévoilé la mobilisation d'une conception que nous nommons *IMMI* « *Imprévisibilité Microscopique* » disant que le hasard ne peut être régi par une loi à un niveau microscopique (ici dans le cas d'une dizaine d'épreuves) :

074 P : À propos du blanc et du noir. Comment se fait-il que vos résultats ne sont pas les mêmes ?

075 E22 : C'est le hasard monsieur.

076 E23 : Le hasard monsieur.

...

079 E13 : Parce que le dé, le noir est plus que le blanc. De plus, chacun selon son hasard (*sa chance*)

...

097 P : Qu'est-ce que tu en penses, toi ? (*il s'adresse à E41*)

098 E41 : C'est le hasard, monsieur.

...

135 P : Alors dites moi, y a-t-il fraude ou non ?

136 E21 : C'est le hasard monsieur.

...

152 P : Est-ce que le groupe qui a obtenu 5b et 5n sait mieux jouer que celui qui a eu 3b et 7n.

153 EE (*E23, E41, E42, ...*) : Non monsieur, c'est le hasard.

...

184 E21 : Tout ceci sont des probabilités, ce n'est pas une chose réelle.

185 E22 : C'est vrai monsieur, ce ne sont pas des choses dont on est sûr.

...

188 E21 : Ce sont des probabilités car on n'est pas sûr.

189 P : Votre camarade dit que quand il lance le dé, il ne sait pas s'il va avoir blanc ou noir.

...

204 E21 : Ce sont des probabilités monsieur, ...

205 EE : Y a-t-il fraude ou non ?

206 E21 : Il n'y en a pas.

...

230 E12 : Pourquoi avons-nous obtenu 5 et 5 ?

231 E42 : Pour chacun son hasard (*sa chance*), c'est au hasard.

Les derniers passages montrent que même ceux qui parlent de probabilité pensent à l'imprévisibilité des résultats.

Remarquons que la conception *IMMI* « *Imprévisibilité Microscopique* » peut être inductrice de la conception *HNM* « *Hasard Non Modélisable* » fréquemment mobilisée dans l'accomplissement d'une tâche statistique que nous avons étudiée (cf. chapitre IX, sous 8.2.2).

Elle pourrait par ailleurs être rapprochée de la conception *EA* « *Expérience Aléatoire* » fréquemment développée dans la réalisation d'une tâche d'indépendance chronologique précédemment étudiée (cf. chapitre V, sous 5.1.1 et chapitre VI, sous 5.1).

Quoiqu'il en soit, il est question d'une conception pouvant être exploitée dans la définition d'une expérience aléatoire au sens de l'imprévisibilité du résultat d'une épreuve.

Ensuite, la discussion engagée dans la deuxième phase nous a révélé la mobilisation de la conception *NI* « *cardinaux* » que nous voyons dans la technique consistant à comparer le nombre de faces blanches et le nombre de faces noires. Remarquons que nous avons relevé à

plusieurs reprises le mot « proportion » mais que ce mot remplace presque exclusivement le mot nombre, nous y reviendrons d'ailleurs un peu plus loin (cf. sous 9) :

066 E21 : La proportion du noir est plus grande car il y a beaucoup de noir ...

...

071 E21 : La proportion du noir est plus grande car il y a beaucoup de noir dans le dé, plus que le blanc.

...

080 E21 : On a obtenu une proportion de noir plus grande car la proportion du noir dans le dé est plus grande.

...

232 E21 : Monsieur, quand je vais jouer au dé, il y a une grande possibilité pour avoir le noir plus que le blanc car la proportion du noir est plus grande que celle du blanc.

233 P : Votre camarade dit que la proportion du noir est plus grande que celle du blanc.

234 E23 : Oui monsieur, le noir c'est 4 et le blanc 2.

Notons que la seule fois où nous estimons que le terme proportion est pris dans un sens autre que celui de nombre réside dans les échanges suivants :

149 E21- (*Cet élève a pris la parole après avoir à maintes reprises levé la main*) Monsieur, ça dépend de la proportion du noir dans le dé.

150 P : Votre camarade vous dit que cela dépend de la proportion du noir.

151 E31 : La proportion des faces blanches est 20 % et la proportion des faces noires est ... 40 %.

Et même dans ce dernier cas, il n'est pas question de la conception *P* « *cas favorables / cas possibles* » qui est à rapprocher ici de la conception *LPN* « *Lois des Petits Nombres* » (cf. chapitre V, sous 5.1.2) et qui est très rarement mobilisée d'après les chapitres précédents. En effet, les pourcentages donnés par l'élève E31 sont induits directement des nombres 2 et 4, respectivement nombres de faces blanches et de faces noires.

Remarquons que les résultats trouvés par les groupes vont à l'encontre de la conception *NI* « *cardinaux* » et de la conception *P* « *cas favorables / cas possibles* », ces résultats étant 5b et 5n pour le 1^{er} groupe, 3b et 7n pour le 2^{ème}, 7b et 3n pour le 3^{ème}, 4b et 6n pour le 4^{ème}. Ajoutons que même si l'on soupçonne le troisième groupe de fraude, il n'est pas question de le faire pour le premier groupe qui a joué sans que la notion du gain soit prononcée.

La deuxième phase a également favorisé la mobilisation de la conception *M* « *Mécanique* » que nous avons relevée dans les chapitres précédents. Cette conception atteste un soupçon de fraude : à un certain moment plusieurs élèves (E12, E22, E23, E31, E33, E41 et E42) soupçonnent la fraude.

Il est question d'une conception déterministe évacuant l'aléatoire en mettant à l'avant les conditions initiales de l'expérience :

085 E23 : Ils font comme ça, monsieur (*il lance le dé doucement*).

086 E32 : Non monsieur.

087 E22 : Monsieur, sa théorie est juste.

X. Pour une séquence introductive des probabilités

088 E33 : Ce n'est pas le hasard, il y a fraude, la couleur blanche est toujours laissée en bas (*ses propos s'adressent à l'élève E32 de son groupe*) ...

089 E32 : Par exemple, quand je mets le blanc comme ça (*il place un doigt sur la paume de sa main*), quand je lance le dé, il tourne puis revient à la même position, la position reste toujours la même.

090 P : Tu parles de la façon du lancer ?

091 E33 : Il met toujours la face blanche en bas et lance, moi je ne me suis pas aperçu ...

092 P : C'est compris.

...

095 E31 : Non ce n'est pas de cette façon.

096 E42 : Monsieur, de cette façon je peux obtenir une face noire et non une blanche.

...

123 E32 montre à sa coéquipière E33 comment avoir une face blanche, il lance doucement le dé. Elle lui demande combien de tours le dé doit tourner. Il lui montre de nouveau comment faire.

...

163 E12 : Monsieur, quand nous avons joué, nous avons fait tourner le dé. Une fois, nous obtenons noire, une autre fois blanche n'est-ce pas ? C'est le hasard. Mais eux, ils tiennent le dé comme ça et ils le lancent (*il tourne sa main et la place doucement sur la table*), c'est de la fraude monsieur.

...

227 E41 : Pour nous, c'est 6 noires et 4 blanches.

228 E33 : C'est-à-dire, peut-être que nous avons jeté d'une façon opposée ; c'est-à-dire que nous avons jeté comme eux mais à l'envers.

Bien qu'elle fasse partie du groupe gagnant, l'élève E33 pense d'abord, en écoutant son coéquipier E32 qui lui a révélé avoir triché, que le résultat dépend de la position initiale du dé.

Elle suspecte ensuite la forme du dé et le nombre de tours qu'il fait :

181 E33 : Ça dépend du nombre de tours que fait le dé.

...

215 E33 : Monsieur, ce que j'ai déduit de ce jeu, c'est que le résultat est lié à la forme et le nombre de tours.

...

249 E33 : C'est-à-dire que j'ai vu juste, c'est selon le nombre de tours (*elle agite la main vide*) ... et selon la forme.

...

267 E33 : Monsieur, moi je dis que c'est lié à la forme et au nombre de rotations.

Cette élève ainsi que les élèves E21 et E22 sont persuadées de l'existence d'une explication déterministe aux résultats trouvés, d'une façon amenant une face blanche. Ils pensent que l'incertitude ne peut pas relever des mathématiques :

109 E22 : Monsieur, s'il vous plaît, dans un devoir si on ne nous donne pas un dé, allons-nous imaginer comment placer le dé dans la main !

...

170 E33 : Est-ce qu'on fait un devoir au hasard ? On doit utiliser une façon pour repérer ce qui va arriver.

199 E33 : Je pense que ce n'est pas du hasard, il y a une façon scientifique ou quelque chose qui est liée à la forme du dé.

...

218 E21 : Monsieur, on n'est pas arrivé au résultat du premier jeu pour passer au deuxième. On doit trouver la façon et la solution.

219 P : Est-ce qu'il y a une façon pour gagner ou perdre ?

220 E42 : Non, il n'y a aucune façon monsieur.

221 E21 : Ce n'est pas convainquant, monsieur. La fraude et le hasard, ce n'est pas convainquant.

222 P : Qu'est-ce qui est convainquant pour toi ?

223 E21 : Ce sont des probabilités. Dans chaque groupe, la proportion du noir doit être plus grande que la proportion du blanc.

...

261 E22 : J'ai une question monsieur. Y-a-il une façon pour avoir blanche ou noire ? Ne nous laissez pas parler comme ça (*en vain*).

262 P : Votre camarade vous dit qu'il faut tricher pour avoir blanche.

263 E22 : Ne connaissez-vous pas qu'il existe une façon ?

264 P : Moi, non.

265 E22 : Non monsieur, vous devez la connaître.

266 P : S'il y a une façon, c'est qu'il y a fraude.

En définitive, il semble que le milieu de base est incitateur, par l'intermédiaire de la notion du gain, à la fraude. Il nous paraît par ailleurs, comme prévu, qu'avec son enrichissement par les essais de fraude, le milieu favorise la conception *IMMI* « *Imprévisibilité Microscopique* » allant dans le sens de l'imprévisibilité du résultat d'une épreuve et disqualifie aussi bien la conception *NI* « *cardinaux* » basée sur la comparaison du nombre de faces blanches et celui de faces noires que la conception *M* « *Mécanique* » basée sur l'évacuation de l'aléatoire essentiellement par l'intermédiaire de la prise en compte des conditions initiales de l'expérience.

5.1.3. Analyse en termes de contrats

Dans la première expérience, le professeur s'est conformé à notre demande de prendre ses distances, de laisser tout venir des élèves. Au fait, il n'a fait en général qu'organiser la discussion en reprenant les propos de l'un des élèves ou en demandant leurs avis concernant une déclaration faite par l'un d'eux.

Nous pouvons ainsi conclure que le professeur a installé le long de la séance, conformément à nos attentes, un microcontrat de production collective dans un mésocontrat de recherche.

5.2. La première séance, 2^{ème} expérience (les balles)

La deuxième expérience correspondant aux tirages de balles dans une enceinte, le scénario et les tâches assignées au professeur sont analogues à ceux de la première expérience.

5.2.1. Analyse en termes d'actions et de tâches

La deuxième expérience correspond à la même tâche prescrite T1 : « élaboration d'un protocole expérimental » de la première expérience.

Dans cette partie nous distinguons, tel était le cas pour la première expérience, trois phases.

La première phase : les 10 tirages de balles

La première phase correspond au premier but B11 : « Mettre les élèves dans des conditions où ils vont essayer de tricher » prescrit au professeur.

Le professeur présente aux élèves un récipient (un bol opaque en plastic) qui contient cinq balles de tennis de table, deux balles blanches et trois balles orange. Il définit le jeu relevant de la deuxième expérience : chaque groupe va tirer 10 fois une balle (pp. 273, 275)¹⁰⁶. Spontanément, les élèves interviennent en parlant de la proportion des balles oranges et de la possibilité de tirer une balle blanche. Et le professeur définit la règle du jeu : le groupe gagnant est celui qui obtient le plus de balles blanches (p. 282). Il demande par ailleurs aux groupes d'écrire « 2^{ème} expérience, l'expérience des balles » sur leurs feuilles, de faire un autre tableau et pose le récipient devant le premier groupe.

Il faut dire qu'un écart entre la tâche prescrite T1 et la tâche effective correspondante est visible dans un passage que nous avons mentionné en haut et qui vient juste avant l'abond de la deuxième expérience : « dans le prochain jeu, on va jouer sans tricher » (p. 213). Mais semble-t-il, cette intervention n'a pas de conséquence sur les activités des élèves. En effet, au moment où le professeur a posé le récipient devant le premier groupe un élève demande à l'élève E12 de ne pas regarder. D'ailleurs la suite des événements va dans ce sens.

L'action définitoire est accomplie par le professeur afin de dévoluer aux élèves un nouveau milieu. Autrement dit, il définit le jeu et ses règles pour que les élèves prennent la responsabilité de s'engager dans les activités proposées.

Les résultats trouvés sont 7b et 3o pour le 1^{er} groupe, 8b et 2o pour le 2^{ème}, 7b et 3o pour le 3^{ème}, 6b et 4o pour le 4^{ème} groupe¹⁰⁷.

La deuxième phase : l'acceptabilité des résultats

Nous constatons que dans cette expérience, il n'y a pas de deuxième phase proprement dite, chose que nous avons soupçonnée. Cette fois, le but B12 : « Amener les élèves à soupçonner la fraude » est accompli de lui-même. Le professeur n'a pas donc à poser la question de l'acceptabilité des résultats trouvés. D'ailleurs, il intervient de la façon suivante : « Qu'en pensez-vous ? » (p. 372). Et les interventions, apparues au cours de la première phase, continuent à être évoquées. Ainsi, il n'est nul besoin d'une deuxième phase pour atteindre le

¹⁰⁶ Désormais, la lettre « p » entre parenthèse désigne un passage de l'annexe 6.

¹⁰⁷ La lettre « b » désigne une balle blanche et la lettre « o » une balle orange.

but B12. Disons que la première phase constitue un lieu effectif pour l'atteinte des deux buts B11 et B12.

La troisième phase : le protocole expérimental

La troisième phase correspond au but B13 : « Amener les élèves à établir des règles faisant du jeu un jeu équitable ». Mais dans cette deuxième expérience, nous assistons à l'absence de cette phase, le but B13 n'étant pas effectivement réalisé. Le professeur n'ayant pas en effet posé la question du jeu équitable, il n'a pas procédé à une action institutrice.

Remarquons toutefois que les interventions suspectant la fraude comportent implicitement et parfois explicitement des conditions telles que « ne pas regarder dans le récipient, bien mélanger les balles » faisant du jeu un jeu équitable.

En définitive, le professeur n'a pas procédé à une action de régulation afin d'atteindre aussi bien le but B12 que le but B13. Pour le but B12, il se pourrait qu'il n'ait pas régulé car les élèves se sont déjà engagés dans une activité correspondante. Pour le but B13 par contre, il n'a pas pu, nous semble-t-il, amener les élèves vers des activités correspondantes faute de temps. Remarquons en effet qu'il n'aurait pas su faire avancer le temps didactique de la première séance, la première expérience ayant pris 40 minutes.

En définitive la tâche effective se distingue de la tâche prescrite correspondante T1 à deux niveaux :

- D'abord au niveau du scénario. La question de l'acceptabilité des résultats n'est pas posée. D'ailleurs, elle n'a pas à être posée puisque d'emblée, les élèves soupçonnent la fraude, chose que nous avons prévue.

- Ensuite au niveau des buts. Le but B13 : « Amener les élèves à établir des règles faisant du jeu un jeu équitable » n'est pas atteint de la façon convenue. En effet, le professeur n'a pas posé la question du jeu équitable et n'a pas élaboré avec les élèves un protocole expérimental.

Il faut dire qu'il n'a pas su faire avancer le temps didactique en s'attardant dans la première expérience. Mais aussi faudrait-il ajouter que l'arrêt du temps didactique à la première expérience nous a permis de recueillir des informations précieuses concernant les conceptions permises et celles disqualifiées par le milieu.

5.2.2. Analyse en termes de potentialités du milieu

Au début de la deuxième expérience, l'action professorale consiste à définir en vue de dévoluer aux élèves un nouveau milieu matériel (les balles) avec lequel ils vont interagir. La première interaction avec ce milieu permet de soulever puis de résoudre un problème : doit-on remettre la balle :

293 *E12 met sa main droite dans le récipient et E11 lui prend la balle, déjà tirée, de sa main gauche.*

294 E11 : La remet-on ?

295 P : Doit-on la conserver ou la remettre ?

296 E22 : On la remet monsieur.

297 *E11 remet la balle.*

298 P : Puisqu'on va faire 10 tirages, doit-on conserver la balle ?

299 E22 : On la remet monsieur, si on tire 10 fois on aura un récipient vide.

Mais les élèves n'interagissent pas avec le seul dernier milieu mis en place. En fait, à ce moment de la séance, le milieu pour les élèves contient aussi la première expérience avec tout ce qui s'y est passé. C'est d'ailleurs ce qui explique le fait que les deux premières phases ne forment qu'une, les tâches effectives correspondant aux buts prescrits B11 et B12 apparaissant simultanément. Ainsi tout se passe comme si le milieu se charge effectivement de ces deux buts.

En termes de conceptions permises au cours de l'évolution du milieu, notons la mobilisation de deux conceptions parmi les trois construites lors de la première expérience.

Nous retrouvons la conception *NI* « *cardinaux* » s'intéressant à la comparaison des nombres d'apparitions des couleurs, le terme « proportion » étant toujours pris au sens de « nombre » :

291 E21 : (*E21 est debout*) Je vous l'ai dit monsieur, la proportion de l'orange va être plus grande que celle du blanc.

Nous constatons aussi la construction de la conception *M* « *Mécanique* » ou déterministe. Elle peut témoigner d'un soupçon de fraude dû à une dissemblance au niveau des balles :

355 *E33 tire le récipient vers elle, elle en tire une balle blanche et une orange et elle les examine.*

356 E32 : Si tu vas parler de forme et ..., il n'y en a pas.

357 E42 : Si, la balle blanche est plus grande que la balle orange, ça se voit. Tout à l'heure, j'allais le dire mais je me suis tu.

358 *E41 reprend le récipient et en tire une balle de chaque couleur, elle les pèse, une dans chaque main.*

359 E33 : Tu vois ?

360 E41 : La blanche est plus lourde, c'est bien.

361 E33 : Monsieur, une est plus grande que l'autre et une est plus lourde.

362 P : Comment ! Une balle qui est plus grosse que l'autre !

363 E33 : Oui.

La conception *M* « *Mécanique* » peut aussi provenir du fait que le mélange ne se fait pas convenablement :

383 P : Comment ?

384 E42 : Moi j'ai mélangé mais elles (*les balles*) ne changent pas de place.

385 E21 : Monsieur car le récipient n'est pas spacieux. De plus la proportion des balles orange est plus grande, c'est-à-dire les balles orange vont se déplacer beaucoup car elles sont nombreuses, par contre les balles blanches vont conserver leurs places.

Les derniers échanges montrent l'opportunité du milieu à la fraude, notamment par le nombre de boules supposé assez grand par rapport à l'espace qu'offre le récipient.

Mais, nous ne retrouvons pas explicitement la conception *IMMI* « *Imprévisibilité Microscopique* » estimant le hasard comme antithèse de loi à un niveau microscopique. Ceci peut s'expliquer par le fait que les élèves se sont intéressés à la fraude et ont, semble-t-il, essayé de diverses façons d'apporter la couleur blanche. D'ailleurs, le fait que la couleur blanche soit dominante dans les résultats de tous les groupes aurait contribué à l'absence de la conception *IMMI*.

Terminons par dire que la séance s'achève sur des interventions montrant que l'élève E21, qui n'a cessé de parler de proportion aussi bien dans la première expérience que dans la deuxième, essaie de trouver une explication calculatoire :

392 E21 : Monsieur, on peut faire une opération et on trouve 2,1.

393 P : Que peut-on faire ?

394 E21 : Une opération : 7 fois 3 sur 10.

395 P : C'est-à-dire ?

396 E21 : Pour nos résultats par exemple : le nombre de balles blanches fois le nombre de balles orange sur le nombre de jets (*il veut dire tirages*).

Bien entendu, dans le groupe 2, les résultats sont 8b et 2o et non 7b et 3o.

397 P : Qu'en pensez-vous ?

398 E32 : Que va-t-on trouver ?

399 E21 répète sa phrase répondant à la demande du professeur.

400 P : Que vas-tu chercher ?

401 E21 : Monsieur on va trouver ...

402 E12 : La proportion de fraude ?

403 E21 : La plus grande proportion pour trouver ...

En définitive, avec l'ajout du milieu matériel de la deuxième expérience (le récipient et les balles), le milieu semble se charger des deux buts B11 et B12 simultanément. En effet, le milieu favorise comme prévu les essais de fraude. D'ailleurs, le fait que la couleur blanche soit dominante dans les résultats pourrait constituer un argument dans ce sens.

Par ailleurs, le milieu installé favorise aussi comme prévu les conceptions *NI* « *cardinaux* » et *M* « *Mécanique* ». Par contre, il ne favorise pas la conception *IMMI* « *Imprévisibilité Microscopique* », un élève pouvant obtenir le nombre de balles blanches qu'il veut.

5.2.3. Analyse en termes de contrats

Comme c'était le cas pour la première expérience, le professeur s'est conformé à notre demande de laisser les élèves interagir avec le milieu. Le long de la deuxième expérience, il n'a fait en général qu'organiser la discussion.

La seule action significative de son intrusion dans le milieu est une action de réduction au sens d'Assude et al. (2007). Il est question d'une prise de position par rapport à des questions qui se sont posées auparavant par E41, E42, E33 et qui ont eu d'abord chez le professeur un effet de résonance nulle au sens que le professeur ne les entend pas (Comiti et al. 1994, 1995). Après la première phase et l'énoncé des résultats obtenus par les groupes, ces questions ont une résonance forte (Comiti et al. 1994, 1995) et le professeur intervient en contradicteur :

375 E42 : Il y a une différence entre les balles, la balle blanche est plus lourde que la balle orange.

376 P : (*En prenant dans la main une balle de chaque couleur*) Je ne vois pas de différence. Vous pensez que la blanche est plus lourde !

Ainsi pourrions-nous conclure, comme dans la première expérience, à l'installation par le professeur, d'un microcontrat de production collective dans un mésocontrat de recherche.

5.3. La deuxième séance

Après une pause d'une dizaine de minutes, la deuxième séance commence. Dans cette séance, il est question d'une troisième expérience et les élèves ont à faire fonctionner les protocoles expérimentaux supposés établis lors de la première séance.

5.3.1. Analyse en termes d'actions et de tâches

Comme indiqué en haut (cf. sous 4.3.1) et contrairement à la première séance, les principaux buts figurant dans la tâche prescrite ne se présentent pas dans un ordre chronologique. Nous allons donc procéder à l'analyse en nous référant aux buts.

Le premier but B21

Le professeur commence la deuxième séance par donner une nouvelle feuille blanche à chacun des quatre groupes auxquels il demande de recopier un tableau qu'il fait au tableau. Il est question d'un tableau à 10 colonnes dont la première ligne comporte les nombres de 1 à 10.

Ainsi, le but supplémentaire BS2 : « voir comment les élèves notent les résultats obtenus » semble ne pas avoir d'intérêt pour le professeur. En effet, avec la réalisation du tableau, les élèves ont à écrire le résultat correspondant à chaque épreuve.

Il présente le matériel à utiliser : 3 gobelets contenant chacun un dé dont deux faces sont blanches et le récipient de la dernière séance contenant des balles. Mais avant de distribuer le matériel, l'élève E21 ramène le débat vers la première séance en disant que la balle blanche ne bouge pas ou bouge à la même place (pp. 406, 408).

Le professeur clôture alors le débat en mentionnant que cette fois le nombre de balles est réduit, il y a une balle blanche et deux balles orange. Il distribue le matériel sur les groupes : le récipient pour le groupe 3, un dé noir D1 pour le groupe 1, le dé grisâtre D2 de la dernière séance pour le groupe 2 et un dé D3 pour le groupe 4 (D2 est moins volumineux que les deux autres, D1 et D3 sont de même volume mais le dé truqué D3 est plus lourd).

Des interventions relatives aux masses des dés apparaissent alors spontanément.

Le jeu des balles étant connu, le professeur définit le jeu et ses règles en s'intéressant essentiellement au jeu du dé :

437 P : On agite le gobelet et on jette le dé sur la piste. Je demande que chaque groupe écrive sa prévision pour le résultat avant de réaliser l'expérience.

...

443 P : Tu donnes les prédictions pour les dix jets, par exemple 3 blanches et 7 noires ou 5 blanches et 5 ...

Tous les élèves s'appliquent et entrent dans les activités demandées sauf un qui ne veut pas participer :

447 E22 dit, à voix basse, qu'on ne peut pas entrer dans l'au-delà.

...

450 E22 demande si on peut entrer dans l'au-delà au professeur qui répond à E21.

...

452 Le professeur insiste sur le fait d'écrire le nombre, approximatif, de blanches qu'on s'attend à avoir pour les dix épreuves aussi bien pour les dés que pour les balles.

453 Les élèves d'un même groupe se concertent entre eux.

Seul, E22 est à l'écart, la tête dans les mains, il ne cesse de dire, à basse voix, qu'on ne peut pas le faire. Il a même juré que c'est un péché.

Au bout de 10 minutes, l'action définitoire du professeur allant dans le sens du respect des conditions abordés lors de la première séance -conditions faisant que les jeux sont équitables- apporte ses fruits. En effet, les gobelets sont bien agités avant les lancers de dés, les balles sont bien mélangées sans être regardées et une d'entre elles est tirée « au hasard ». Et ceci dure le long de la séance montrant ainsi la réalisation du but B21 : « Amener les élèves à faire fonctionner les protocoles expérimentaux établis lors de la première séance ».

Les deux buts B22 et B23

Le deuxième but B22 n'est pas une affaire exclusive de la deuxième séance, il est quelque part atteint dans la première séance. En effet, la rencontre par les élèves de la notion de variabilité s'est effectuée depuis le début de la première séance.

Remarquons que l'enseignant n'a cessé de demander aux groupes de donner les prévisions selon les données du matériel utilisé (2 faces blanches et 4 faces noires, 1 balle blanche et deux balles orange), chose qui n'a pas été prévu dans notre entretien.

457 P : (*s'adressant à tous les élèves*) Avez-vous vu ce qu'il y a dans le dé avant de donner vos prévisions ?

...

462 P : C'est-à-dire que vous avez prévu le résultat selon ce que vous avez dans le dé hein, ce n'est pas n'importe comment ?

...

465 P : Dans le dé, il y a 2 blanches et 4 noires, n'est-ce pas ?

...

468 P : (*s'adressant au groupe 3*) Pour vous, vous avez une balle blanche et deux balles orange. Vous allez tirer 10 fois, combien de fois allez-vous avoir de blanches selon vous ?

...

472 P : Attendez, il ne faut pas oublier que dans un dé il y a 2 blanches et 4 noires et que pour les balles il y a 1 blanche et 2 orange. Vous donnez donc vos prévisions selon ces données.

Mais les prévisions, qui s'avèrent différentes des résultats obtenus, ne vont pas toutes dans le sens des injonctions faites par le professeur :

▪ Tableau X.1

Résultat prévu et résultat obtenu selon les groupes

| Résultat Groupe | <i>prévu</i> | <i>obtenu</i> |
|--------------------|------------------------------------------------------|-----------------|
| 1 | <i>7b et 3n</i> | <i>5b et 5n</i> |
| 2 | <i>1b et 9n pour E21</i> <i>5b et 5n pour E23</i> | <i>4b et 6n</i> |
| 3 | <i>2b et 8o</i> | <i>3b et 7o</i> |
| 4 | <i>3b et 7n</i> | <i>6b et 4n</i> |

Ainsi, l'imprévisibilité des résultats caractérise le travail accompli par les élèves.

Il faut dire que la variabilité est perçue jusque là dans les résultats différents entre les groupes. Il est question maintenant de consolider la notion de variabilité à partir des résultats au sein d'un même groupe au sens que ces résultats varient d'une série à l'autre.

Pour passer à une deuxième série d'épreuves, le professeur procède à une action d'aménagement du milieu, il régule :

496 P : Bon, d'après vos résultats trouvés dans les 10 premières fois, que pensez-vous si on fait 20 fois ?

Remarquons d'emblée que la question précédente montre un décalage avec ce qui a été prévu. Le professeur n'avait pas en fait à faire la liaison entre les dix premiers résultats et les prévisions suivantes.

Une première réponse à la dernière question va dans le sens du double de ce qui a été trouvé pour 10 épreuves. Les réponses vont ensuite dans le sens de l'imprévisibilité du résultat.

Remarquons par ailleurs que, contrairement à ce qui est convenu, la question du cumul est vite arrivée, avant que les élèves ne donnent les prédictions et ne fassent les épreuves. Le professeur commence d'ailleurs, en répondant à une question, par insinuer qu'il faut ajouter 10 autres épreuves avant de poser la question du cumul :

514 E21 : Est-ce qu'on trace de nouveau ?

515 P : Vous notez la 2^{ème} dizaine sous la 1^{ère}.

...

524 P : Attendez un moment. Va-t-on reprendre 20 fois ou bien ajouter 10 aux premières.

Une seule réponse, provenant de l'élève E32 du groupe 3, va dans le sens du cumul et d'autres dans le sens de nouvelles épreuves. Le professeur n'a pas su profiter de la situation pour amener tous les groupes à utiliser le cumul des résultats, les élèves s'étant engagés dans les activités proposées.

Le professeur demande pour un bon moment que le pronostic soit fait avant de passer effectivement à l'expérience. Avant 10 minutes de la fin de la séance qui n'a duré que 40 minutes, il leur demande de faire l'expérience et de noter le résultat sans procéder au pronostic.

Remarquons que l'élève E22 n'a participé au jeu qu'aux alentours de 30 minutes du début de la séance.

Bien que les pronostics coïncident parfois avec les résultats, les élèves ont rencontré d'une façon concrète la notion de la variabilité, notion caractéristique du domaine de la statistique. Il faut dire que vers la fin de la séance, nous constatons que la majorité des groupes optent pour un pronostic défavorable à la couleur blanche.

Ainsi, le but B22 : « Consolider la notion de variabilité » est atteint et le but B23 : « Amener les élèves à répondre à la question du cumul des résultats » ne l'était pas.

En définitive la tâche effective se distingue de la tâche prescrite correspondante T2 à deux niveaux :

- D'abord au niveau du scénario. Le professeur a, contrairement à ce qui est attendu, incité les élèves à utiliser les données (nombre de faces ou de balles blanches) pour faire les prévisions. Il a aussi, contrairement à ce qui est convenu, posé la question du cumul avant que les 20 épreuves ne soient effectuées.

- Ensuite au niveau des buts. D'un côté, le but BS2 : « voir comment les élèves notent les résultats obtenus » ne semble pas avoir d'intérêt pour le professeur, ce dernier ayant construit un tableau récapitulatif des résultats que les élèves ont à copier. D'un autre côté, il n'a pas su atteindre le but B23 : « Amener les élèves à répondre à la question du cumul des résultats ».

5.3.2. Analyse en termes de potentialités du milieu

Le milieu installé au cours de la deuxième séance s'avère favorable à la rencontre des caractéristiques d'une expérience aléatoire au sens de l'imprévisibilité du résultat d'une épreuve et de la possibilité de reproductivité des épreuves dans des conditions similaires (en respectant un protocole expérimental).

La fraude étant mise de côté, la conception *M* « Mécanique » ou déterministe n'a plus à être mobilisée. Les conceptions que permet le milieu mis en place au cours de la deuxième séance sont alors au nombre de deux, il est question de la conception *IMMI* « Imprévisibilité Microscopique » et de la conception *NI* « cardinaux » :

477 E21 : Monsieur, 9 noires et une blanche n'est-ce pas possible ?

...

480 E21 : Monsieur, il veut que ce soit 5, on peut avoir même 10.

500 E : Non, ils peuvent changer.

501 E21 : Ils peuvent changer. Monsieur, on peut avoir 10 noires et 10 blanches comme on peut obtenir plus de noires puisque les noires, dans le dé, sont plus nombreuses que les blanches.

...

506 E21 : Ça peut rester la même comme ça peut changer. Quand ça change, les noires deviennent plus nombreuses car la proportion du noir dans le dé est plus grande.

...

510 E31 : La proportion du noir dans le dé est plus grande que la proportion du blanc.

511 P : Vous avez trouvé 3 blanches et 7 noires. Et si vous faites 20 fois ...

512 E21 : Je vais avoir une proportion plus grande de noir.

513 P : Faisons 20 fois.

536 P : Qu'avez-vous obtenu ?

537 E32 : Ils ont changé, toutes sont devenues blanches et il y a 3 ... (*en réalité, il a obtenu 5b et 5o*)

...

557 E41 : Monsieur, j'ai dit "Je prévois que la proportion du noir est plus grande que la proportion du blanc", 21 noires et 9 blanches ...

....

591 E42 : Nous, nous mettons la proportion du noir plus grande que la proportion du blanc car il y a deux blanches (*faces*).

592 P : Donc, vous choisissez selon les résultats précédents ?

593 E42 : On choisit plus de noires car il y a plusieurs ...

En définitive, bien que les protocoles expérimentaux ne soient pas bien travaillés lors de la première séance, le milieu installé au cours de la deuxième séance favorise comme prévu la rencontre d'objets caractéristiques d'une expérience aléatoire, l'imprévisibilité d'un résultat lors d'une épreuve et la possibilité de reproductivité de cette dernière dans les mêmes conditions.

Par ailleurs et comme attendu, ce milieu, avec la fraude mise à part, défavorise la conception *M* « *Mécanique* » et permet les conceptions *IMMI* « *Imprévisibilité Microscopique* » et *NI* « *cardinaux* ».

5.3.3. Analyse en termes de contrats

Commençons par souligner une question allant à l'encontre du projet du professeur. Il s'agit d'une question posée par l'élève E22 et qui a eu un effet de résonance nulle chez le professeur :

450 E22 demande si on peut entrer dans l'au-delà au professeur qui répond à E21.

La notion d'expérience aléatoire étant visée dans cette deuxième séance, tout se passe comme si les élèves procèdent à une production collective en réinvestissant des connaissances rencontrées dans la première séance. Ainsi, le professeur a plutôt installé un microcontrat de production collective dans un mésocontrat de réinvestissement de connaissances.

Mais, quand il a abordé la question de prévision, le professeur a longuement parlé de prendre en considération les données du matériel utilisé comme s'il initie les élèves à un nouvel objet de savoir. Autrement dit, il n'a pas laissé les élèves interagir directement avec le milieu ; il leur montre, d'une façon déguisée les éléments à prendre en considération. Il procède ainsi par ostension déguisée, notion qu'on trouve dans les travaux de Berthelot et Salin (cf. par exemple Berthelot et Salin 1992). Nous parlons alors d'un microcontrat d'ostension déguisée¹⁰⁸ dans un mésocontrat d'initiation¹⁰⁹.

¹⁰⁸ Microcontrat d'ostension déguisée : "ce contrat est à prendre au sens du contrat local d'ostension (Salin, 1999). Le professeur assume entièrement la responsabilité dans la production des connaissances et l'évaluation des réponses des élèves, mais il dissimule cette responsabilité en utilisant une situation" (Perrin-Glorian et al. 2003, p.276).

¹⁰⁹ Mésocontrat d'initiation : "Dans le cas où la situation ne le permet pas ou dans le cas où l'enseignant ne laisse pas les élèves interagir directement avec le milieu, on a une transmission directe du savoir, par ostension. Le savoir montré par le professeur doit devenir une connaissance de l'élève. Il y a une conversion du savoir en

Ainsi pourrions-nous conclure à l'installation par le professeur, d'un microcontrat de production collective dans un mésocontrat de réinvestissement de connaissances. Mais faudrait-il signaler qu'à un moment donné de la séance, là où il a abordé la question de prévision, il a établi un microcontrat d'ostension déguisée dans un mésocontrat d'initiation.

6. Préparation des séances 3 et 4

Dans cette partie, nous nous intéressons aux deux dernières séances. Nous abordons les tâches à accomplir par le professeur, ces tâches comportant aussi bien les buts prescrits à atteindre que le scénario envisagé.

6.1. La tâche prescrite

La finalité de ces deux séances est l'approche fréquentiste des probabilités. La tâche assignée au professeur est la tâche T3 : « Approcher les probabilités par les fréquences ».

Pour accomplir cette tâche, le professeur aura à atteindre les buts suivants, les deux premiers buts étant programmés pour la 3^{ème} séance et le dernier but pour la 4^{ème} séance :

- B31 : « Amener les élèves à accepter le cumul ».
- B32 : « Amener les élèves à utiliser les fréquences ».
- B33 : « Amener les élèves à tirer des ressemblances et des dissemblances dans un graphique ».

La tâche prescrite est composée des deux derniers buts et d'un scénario pour atteindre ces buts.

6.2. Le scénario envisagé

Dans l'entretien préparatif des séances 3 et 4, nous commençons par lui demander de commencer par instituer ce qui est fait lors de la 3^{ème} séance de la façon suivante :

- la troisième expérience (celle du dé ou des balles) représente une expérience aléatoire.
- le jet du dé ou le tirage d'une balle était au hasard.

Nous lui faisons remarquer aussi qu'il n'a pas bien su, lors de la dernière séance, attirer l'attention des élèves sur la question du cumul. Nous l'invitons donc à reprendre la question par l'intermédiaire du tableau suivant correspondant à l'expérience du dé où la question à poser concerne le nombre total de jets effectués :

connaissance sans passer par une situation adidactique. Dans ce cas, nous parlerons de mésocontrat d'*initiation*' (ibid. p. 242).

X. Pour une séquence introductive des probabilités

| | | |
|------------------------------------|----|----|
| Nombre de jets | 10 | 20 |
| Nombres de faces blanches obtenues | 5 | 6 |

Nous lui avons demandé d'amener les élèves à accepter le cumul des jets, ce qui représente l'atteinte du but B31 nécessaire à la poursuite du travail. Ici, nous lui avons laissé le choix de faire à sa façon.

Nous lui avons demandé ensuite de présenter, sur le tableau blanc, le tableau suivant qui correspond aux résultats finaux de la 3^{ème} expérience, résultats que nous avons rassemblés :

| | | | | |
|------------------------------|----|----|-----|-----|
| Groupe | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Nombre de jets ou de tirages | 90 | 80 | 120 | 130 |
| Nombres de blanches obtenues | 33 | 30 | 45 | 65 |

Nous l'avons informé que le but de cette activité est d'amener les élèves à utiliser les fréquences, ce qui est le but prescrit B32. Nous lui avons laissé une certaine liberté pour atteindre ce but. Nous lui avons donné cependant quelques pistes : poser la question des ressemblances et des dissemblances des résultats dans le tableau, poser la question de la comparaison des résultats du jeu du dé (résultats correspondant aux groupes 1, 2 et 4), revenir au terme « proportion » utilisé dans les dernières séances. En dernier lieu, il pourrait poser la question des pourcentages. D'ailleurs, la notion de pourcentage était vue en 6^{ème} année de base et cette notion, nous a-t-il dit, vient d'être abordée en 7^{ème} année. Les élèves ont alors à ajouter une ligne pour les fréquences.

Rappelons que dans l'expérimentation de Brousseau et al. (2005) reprise dans Briand (2005), le passage au travail sur les fréquences n'est pas évident, ce passage étant suggéré par l'enseignant dans ces deux expériences (cf. chapitre III, sous 3.1 et 3.3).

Nous avons fait remarquer au professeur que nous ne pouvons pas espérer mieux que les résultats trouvés vu que les fréquences des blanches pour les trois premiers groupes sont proches de 0,33 correspondant aussi bien à la probabilité d'avoir une face blanche dans un dé parfait qu'à celle d'avoir une balle blanche dans l'enceinte.

Remarquons que dans le tableau précédant, le nombre d'épreuves est différent d'un groupe à l'autre, chose que nous avons programmée afin que la comparaison des résultats nécessite l'utilisation de l'objet « fréquence ».

Pour le troisième but B33 concernant la quatrième séance, nous avons préparé les résultats de la troisième expérience (de la 2^{ème} séance) propres à un groupe donné sur le dos de la feuille à

donner à ce groupe. La consigne à donner aux élèves est de compléter le tableau récapitulatif des résultats par une ligne correspondant aux fréquences.

Nous avons aussi rassemblé les polygones des fréquences relatifs à ces résultats sur quatre feuilles à distribuer aux groupes afin que chaque groupe lise et compare les fréquences calculées.

Le graphique est préparé en vue d'atteindre le but B33 : « Amener les élèves à tirer des ressemblances et des dissemblances dans un graphique ».

Un travail de simulation sur ordinateur est alors prévu afin de voir le comportement des polygones au fur et à mesure que les épreuves se multiplient.

Terminons par dire que nous avons demandé au professeur de laisser le maximum d'initiatives aux élèves.

7. Analyse a priori des séances 3 et 4

Nous rassemblons dans cette partie les analyses a priori concernant les deux dernières séances. Dans ces séances, nous avons conçu trois buts qui devraient être atteints dans l'ordre. Nous associons une phase à chacun ces buts.

7.1. Analyse en termes d'actions et de tâches

Rappelons que la tâche prescrite correspondant aux séances 3 et 4 est la tâche T3 : « Approcher les probabilités par les fréquences ». Cette tâche est composée des trois buts B31 : « Amener les élèves à accepter le cumul », B32 : « Amener les élèves à utiliser les fréquences » et B33 : « Amener les élèves à tirer des ressemblances et des dissemblances dans un graphique » ainsi que du scénario envisagé.

La première phase : le cumul

Le professeur devrait commencer par instituer, en se rapportant aux jeux de la troisième séance, ce qu'est une expérience aléatoire, un jet au hasard et un tirage au hasard.

Il enchaînerait par la dévolution d'une tâche aux élèves, celle de la recherche du nombre total des jets effectués à partir d'un tableau (cf. premier tableau sous 6.2). Il a ensuite à réguler selon les réponses des élèves. Il doit les amener à accepter l'idée du cumul nécessaire à la poursuite du travail, autrement dit, il doit atteindre le premier but B31.

La deuxième phase : les fréquences pour comparer

Il aura ensuite à définir le tableau comportant les résultats finaux de la 3^{ème} expérience (cf. deuxième tableau sous 6.2) et à poser une question allant dans le sens de la comparaison des résultats obtenus par les groupes. Puis, il aura à réguler selon les réponses des élèves. Ses actions devraient aller dans le sens d'amener les élèves à utiliser les fréquences, ce qui lui permettrait d'atteindre le deuxième but B32. Il est prévu que l'atteinte du dernier but corresponde à la fin de la 3^{ème} séance.

La troisième phase : ressemblances et dissemblances

Pour la quatrième séance, chaque groupe aura à compléter le tableau récapitulatif des résultats de la 3^{ème} expérience, figurant au dos de sa feuille blanche, par une ligne correspondant aux fréquences. Le professeur donnera alors à chaque groupe une feuille sur laquelle figurent les quatre polygones des fréquences. Il aura à définir ces polygones et à demander à chaque groupe de comparer les fréquences déjà calculées avec celles lues sur la feuille des polygones. Nous nous attendons à ce que la reconnaissance des fréquences correspondant aux sommets d'un polygone ne pose pas problème aux élèves, ces derniers ayant étudié au deuxième trimestre le repérage dans le plan.

Le professeur aura enfin à réguler afin d'atteindre le troisième but B33 : « Amener les élèves à tirer des ressemblances et des dissemblances dans un graphique ». Et la séance devrait se terminer sur un travail de simulation d'une expérience aléatoire sur ordinateur, travail montrant une certaine régularité des polygones des fréquences au niveau macroscopique, c'est-à-dire au niveau d'un grand nombre d'épreuves. Remarquons que les élèves ne savent pas ce qu'est simuler.

Ce que nous venons de décrire forme la tâche attendue du professeur. Mais la tâche effective ne pourrait qu'en différer, chose que nous avons constatée dans les deux premières séances malgré la transparence voulue dans le contrat expérimental effectué avec le professeur et les explications que nous n'avons cessé de lui donner. Elle peut en différer au niveau des buts ou au niveau du scénario.

7.2. Analyse en termes de potentialités du milieu

La première phase : le cumul

Il nous semble que le premier tableau présenté aux élèves ne peut pas favoriser la réponse « 20 jets » considérant le cumul. C'est plutôt la réponse « 30 jets », réponse conforme au

choix fait lors de la 2^{ème} séance, qui serait le plus produite. Ainsi, le milieu ne semble pas solide pour favoriser la réponse du cumul. Et les activités du professeur devraient aller dans le sens de réguler ce milieu afin d'atteindre le premier but B31, c'est-à-dire l'acceptabilité du cumul des jets aidant à la poursuite du travail.

La deuxième phase : les fréquences pour comparer

Nous pensons que le deuxième tableau comportant les résultats finaux de la 3^{ème} expérience présenté aux élèves ne favorise pas en lui-même l'utilisation des fréquences pour comparer les résultats obtenus. Ainsi, les régulations apportées par le professeur seraient déterminantes quant à l'atteinte du but B32, c'est-à-dire à l'utilisation des fréquences.

Notons que la notion de pourcentage que les élèves connaissent peut être utile, "mais à un niveau technique", quant à l'atteinte du but en question.

La troisième phase : ressemblances et dissemblances

Chaque groupe a d'abord à compléter le tableau récapitulatif de tous ses résultats de la 3^{ème} expérience.

Pour donner une idée claire au lecteur, nous rassemblons les résultats des quatre groupes comme suit :

▪ Tableau X.2

Les blanches obtenus selon les groupes

| Epreuves \ Groupe | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 | 130 |
|-------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|
| G1 | 5 | 6 | 11 | 16 | 21 | 23 | 24 | 28 | 33 | | | | |
| G2 | 2 | 8 | 12 | 17 | 21 | 24 | 26 | 30 | | | | | |
| G3 | 3 | 8 | 13 | 17 | 22 | 25 | 29 | 33 | 35 | 37 | 40 | 45 | |
| G4 | 6 | 10 | 15 | 18 | 23 | 31 | 36 | 43 | 48 | 52 | 58 | 62 | 65 |

Chaque groupe a au dos de la feuille blanche qui lui a été donnée la première ligne accompagnée de la ligne qui lui correspond. Il a donc à ajouter une troisième ligne, celle des fréquences. Il a ensuite à comparer ces fréquences avec celles lues sur la feuille des polygones qui lui est alors donnée.

Le milieu ainsi installé (comprenant les fréquences calculées ainsi que les polygones préparés) est en faveur de tirer les ressemblances et les dissemblances dans le graphique des polygones. Autrement dit, le milieu est propice à l'atteinte du troisième but B33.

Ce but serait consolidé par le travail de simulation sur ordinateur qui montre une régularité des polygones des fréquences au niveau d'un grand nombre d'épreuves.

7.3. Analyse en termes de contrats

Ce qui est dit dans le chapitre précédent nous donne une idée quand aux microcontrats pouvant être utilisés.

Les deux premières phases

Pour les deux premières phases, nous pensons que le milieu n'est pas robuste pour favoriser la référence au cumul ou l'utilisation des fréquences. Ainsi et bien que le professeur veuille, comme pour les deux premières séances, instaurer un microcontrat de production collective, il serait obligé de se référer soit à un microcontrat d'adhésion¹¹⁰, contrat dont la dénomination provient de Comiti et Grenier (1997), en s'appuyant sur un ou quelques élèves soit à un microcontrat d'ostension déguisée où le professeur assume toute la responsabilité. Nous nous attendons donc dans les deux premières phases à ce que le professeur installe soit un microcontrat d'adhésion dans un mésocontrat de recherche soit un microcontrat d'ostension déguisée dans un mésocontrat d'initiation.

La troisième phase

Pour la troisième phase et comme nous voyons que le milieu est robuste pour faire émerger les ressemblances et les dissemblances, nous nous attendons à ce que le professeur instaure un microcontrat de production collective dans un mésocontrat de recherche.

Terminons par quelques mots concernant le contrat global instauré. Nous convenons que dès le début de l'expérimentation, il est question d'un contrat statistique déterminé par la notion de variabilité. Avec la fréquence qui tend à se stabiliser pour un grand nombre d'épreuves, nous assistons à l'émergence des probabilités comme modèle de statistiques, donc au passage du contrat statistique à un contrat probabiliste.

¹¹⁰ Microcontrat d'adhésion : "le professeur s'appuie sur quelques élèves de la classe pour produire des connaissances et ainsi faire avancer son cours, sans réellement évaluer les réponses, et en laissant aux autres élèves la possibilité d'intervenir lorsqu'ils ne sont pas d'accord avec ce qui est dit. La responsabilité est donc partagée entre le professeur et les élèves" (Perrin-Glorian et al. 2003, p.276).

8. Déroulement et analyse a posteriori des séances 3 et 4

Nous abordons ici le déroulement des deux dernières séances selon les trois niveaux d'analyse choisis. Tel était le cas pour l'analyse a priori, nous subdivisons les séances 3 et 4 en trois phases dans chacun des niveaux d'analyse.

8.1. Analyse en termes d'actions et de tâches

La première phase : le cumul

Le professeur commence par dire que dans les jeux de la troisième expérience, "on a joué d'une façon aléatoire, par hasard, ..., soit on a tiré une balle par hasard soit on a jeté le dé par hasard. On dit qu'on a joué d'une façon aléatoire, c'est-à-dire sans fraude". Pourtant, il était convenu qu'il institue les notions d'expérience aléatoire, de jet au hasard et de tirage au hasard en référence aux jeux de la séance en question.

Il présente ensuite le premier tableau qui lui sert à dévoluer la tâche de recherche du nombre total des jets effectués. Il pose la question : "qu'est-ce que vous remarquez dans le tableau... Combien a-t-on lancé le dé de fois ? Il munie chaque groupe de sa feuille et demande que les élèves de chaque groupe discutent entre eux et écrivent la réponse (le nombre total de jets) sur la feuille. Il reprend la question du nombre total de jets pas mal de fois et quelques élèves répondent directement « 30 fois » sans se concerter dans le groupe.

Les élèves voient que d'après le tableau, il est question de 30 jets (la somme des 10 jets de la première colonne et des 20 jets de la seconde). Chaque groupe écrit, sur demande du professeur, la réponse sur sa feuille, « 30 jets » étant la réponse unanime.

Le professeur a alors posé la question de la possibilité de la réponse « 20 jets » et les élèves sont d'accord sur cette possibilité, ce qui lui permet d'atteindre le but B31. Mais au lieu de clore le débat pour faire avancer le temps didactique, il leur demande de se mettre d'accord sur une réponse, chose qu'il n'obtient pas. Il est alors obligé de leur imposer le choix de la réponse prenant en compte le cumul des jets pour poursuivre le travail.

La deuxième phase : les fréquences pour comparer

Le professeur commence par définir le tableau qu'il trace sur le tableau blanc en disant qu'il est question d'un tableau résumant les résultats finaux de la 3^{ème} expérience (cf. deuxième tableau sous 6.2). Il demande aux élèves de comparer les résultats puis de déterminer les ressemblances et les dissemblances. Les élèves remarquent que plus il y a des épreuves, plus les blanches obtenues sont nombreuses. Ils remarquent aussi que pour une différence de 10

jets ne correspond pas la même différence des blanches obtenues : le passage de 80 à 90 jets est accompagné d'une augmentation de 3 blanches obtenues et le passage de 120 à 130 jets est accompagné d'une augmentation de 20 blanches obtenues. Le professeur suppose alors que quelqu'un fait quatre fois une expérience et qu'il obtient les résultats du tableau : en 90 jets elle obtient 33 blanches, en 80 jets elle obtient 30 blanches, en 120 jets elle obtient 45 blanches et en 130 jets elle obtient 65 blanches. Il demande ensuite quelle est la différence des expériences puis comment évaluer les quatre expériences. La réponse s'oriente plutôt vers le calcul des sommes, ceux des jets et ceux des blanches obtenues. Soudain, un événement attendu par le professeur survient, une élève parle de pourcentage :

E41 : On fait la somme des jets et la somme des blanches obtenues ...

E12 : Et on cherche la proportion la plus grande. Celle du blanc ou celle du noir.

P : Comment la proportion ?

E12 : On fait la somme des jets et la somme de ...

P : Non, donnez-moi pour la première expérience.

E33 : On calcule la somme de tous les jets, on lui fait correspondre le nombre de blanches obtenues. Puis j'écris 100 sous le nombre de jets et je vois aussi combien ...

P : Avez-vous compris de quoi votre camarade parle ?

EE : Le pourcentage, on est en train de l'étudier.

P : Comment peut-on utiliser le pourcentage ? Pour le premier groupe par exemple qui a fait 90 jets et a obtenu 33 fois la face blanche.

E33 : Dans 90 jets il y a 33 balles blanches ; c'est-à-dire dans 100 jets combien il advient.

E41 : C'est-à-dire 100 fois 33 sur 90.

P : Pour trouver quoi, la proportion de quoi ?

E33 : La proportion des blanches obtenues.

E41 : Et on fait la même chose pour la deuxième fois (deuxième colonne).

P : Et la deuxième fois on fait la proportion des blanches obtenues, c'est-à-dire que j'ai fait quoi ?

EE : Le pourcentage.

P : Puis le troisième et le quatrième groupe. Qu'allons-nous faire maintenant ? Nous allons ajouter une quatrième ligne et nous faisons pour chaque groupe le pourcentage des balles blanches ...

Ainsi, chaque groupe ajoute une ligne pour le pourcentage et calcule le pourcentage lui correspondant.

Nous constatons donc que le professeur est arrivé, par l'intermédiaire de l'heureuse intervention de l'élève E33, à amener les élèves à utiliser les fréquences donc à atteindre le deuxième but B32.

Les élèves, aidés par le professeur, transforment les pourcentages sous forme d'écritures décimales. Les fréquences calculées des blanches obtenues sont les suivantes : pour le premier groupe 0,3666, pour le deuxième groupe ainsi que pour le troisième groupe 0,375 et pour le quatrième groupe 0,5.

Mais les élèves ne parlent de ressemblances des résultats des trois premiers groupes que suite à une question explicite du professeur :

P : Qu'est-ce que vous remarquez dans les pourcentages ?

E : Ils sont différents.

.....

P : Les résultats sont proches ou non ?

EE : Ils sont proches monsieur ... les trois premiers seulement.

E32 : Le dernier résultat est différent ... car le nombre de jets est plus grand.

Le professeur explique alors la ressemblance des résultats des trois premiers groupes en se basant sur la fréquence de la couleur blanche dans le matériel utilisé, le dé et les balles. Il ne fait cependant pas le rapprochement entre cette fréquence (0,33) et les fréquences trouvées pour les trois premiers groupes.

P : Quel est le pourcentage des faces blanches dans le dé.

E33 : Un sur deux.

E11 : Ah, deux sur six ?

P : Et pour les faces noires ?

E41 : Quatre sur six.

P : C'est pourquoi la proportion des blanches au tableau (*il désigne la première colonne*) est plus petite que celle des noires.

...

P : Pour les faces blanches, je peux simplifier $\frac{2}{6}$, ça devient quoi ?

E : Un sur trois.

P : Un sur trois, comment l'écrire sous forme de pourcentage ? Vous me donnez le résultat avec virgule.

...

EE : 0,33.

P : Et pour les balles blanches, quels est leur proportion, par rapport à toutes les balles ?

EE : Un sur 3

P : C'est la même que pour le dé... ceux qui ont joué au dé et ceux qui ont joué aux balles, c'est vrai que le jeu diffère ... mais d'après les calculs, c'est comme si on joue au même jeu.

Le professeur revient ensuite à la dissemblance entre les résultats du 4^{ème} groupe et ceux des autres. Il leur donne les dés utilisés, le dé truqué étant plus lourd que les autres :

P : Ce dé n'est pas équilibré.

E42 : Les deux autres dés ont le même poids.

E12 : C'est-à-dire que le pourcentage dépend du poids.

E13 : Monsieur, cela veut dire que le nombre de blanches obtenues diffère selon le type de dé.

Et la troisième séance se termine sur les derniers échanges. Il faut toutefois remarquer que dans cette séance ainsi que dans la suivante les élèves sont très agités. Ici, il faut remarquer que "l'utilisation des jeux à des fins éducatives, si elle reste légitime, est donc assez délicate" (Achour 1993, p. 4). Elle est délicate car, entre autres, les élèves ne voient pas que "le jeu, souvent assimilé au divertissement et à l'amusement, n'est pas toujours l'antithèse du sérieux" (ibid. p. 7).

La troisième phase : ressemblances et dissemblances

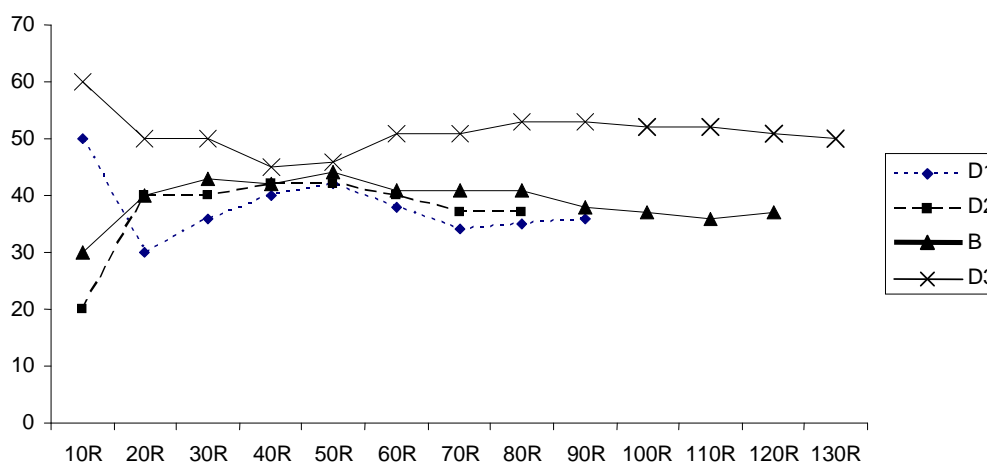
Cette phase correspond essentiellement à la quatrième séance. Le professeur demande aux élèves de compléter le tableau qui leur est donné en dos de la page (chaque groupe a les résultats qu'il a trouvés lors de la 3^{ème} expérience) par une ligne correspondant aux fréquences, ces derniers devant être calculés à deux chiffres après la virgule. Nous résumons le travail fait par les groupes dans le tableau suivant :

▪ Tableau X.2

Les blanches obtenus et les fréquences associées selon les groupes

| Epreuves \ Groupe | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 | 130 |
|-------------------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| G1 | 5 0,50 | 6 0,30 | 11 0,36 | 16 0,40 | 21 0,42 | 23 0,38 | 24 0,34 | 28 0,35 | 33 0,36 | | | | |
| G2 | 2 0,20 | 8 0,40 | 12 0,40 | 17 0,42 | 21 0,42 | 24 0,40 | 26 0,37 | 30 0,37 | | | | | |
| G3 | 3 0,30 | 8 0,40 | 13 0,43 | 17 0,42 | 22 0,44 | 25 0,41 | 29 0,41 | 33 0,41 | 35 0,38 | 37 0,37 | 40 0,36 | 45 0,37 | |
| G4 | 6 0,60 | 10 0,50 | 15 0,50 | 18 0,45 | 23 0,46 | 31 0,51 | 36 0,51 | 43 0,53 | 48 0,53 | 52 0,52 | 58 0,52 | 62 0,51 | 65 0,50 |

Le calcul des fréquences étant fait, le professeur donne à chaque groupe la feuille des polygones des fréquences :



▪ Fig. X.1 : Polygone des fréquences : groupe 1 (dé D1), groupe 2 (dé D2), groupe 3 (les balles B), groupe 4 (dé truqué D3)

Il procède à une action définitoire des polygones et demande à chaque groupe de comparer les fréquences calculées avec celles lues sur la feuille des polygones. Et chaque groupe reconnaît sur la représentation graphique qui le concerne les fréquences calculées.

Nous assistons ensuite aux échanges suivants :

P : Quelles sont les ressemblances entre les quatre représentations ?

E11 : La fréquence.

P : Comment la fréquence ?

E11 : Voilà monsieur, il y a des fréquences qui sont les mêmes (*elle lui montre des points confondus*)

E32 : Et les résultats sont très proches.

P : Comment ?

E32 : La fréquence est restée en 40. Elle a pris le niveau de 40

...

P : Et vous ? (*il s'adresse au groupe 4*)

E42 : Au départ, elles ne sont pas proches, puis elles se rapprochent. Toutes sont en zéro virgule cinquante, zéro virgule cinquante trois cinquante quatre.

...

P : Y a-t-il des résultats qui se ressemblent.

E32 : Il y en a car pour tous les groupes la fréquence commence par varier avant de rester dans le même niveau.

P : Dans tous les cas ?

E32 : Oui. Par exemple dans ce groupe, dans ce groupe. Sauf dans le quatrième groupe, ce n'est pas ...

...

E42 : Nous, c'est des valeurs proches.

P : Ce sont vos résultats qui sont proches, mais comparez avec les autres groupes.

E42 : Ah oui.

Mise à part la variabilité constatée au début des courbes, les élèves s'aperçoivent de la ressemblance des résultats des trois premiers groupes et de la dissemblance de ces résultats avec ceux du quatrième groupe.

Ainsi, le but B33 : « Amener les élèves à tirer des ressemblances et des dissemblances dans un graphique » est atteint. Il est atteint par le constat de variabilité au début des polygones et de régularités après. Il est atteint aussi par le constat de ressemblances, au sens de fréquences proches, des résultats des trois premiers groupes et de l'écart entre ces résultats d'une part et ceux du quatrième groupe d'autre part.

Le professeur, contraint par l'état dans lequel se trouvent les élèves, arrête l'expérience à ce stade. Il n'a pas pu réaliser le travail convenu de simulation sur ordinateur.

En définitive, malgré l'état agité et le manque de concentration dans lesquels se trouvent les élèves dans les deux dernières séances, le professeur a su atteindre les trois buts qui lui sont assignés : B31 : « Amener les élèves à accepter le cumul », B32 : « Amener les élèves à utiliser les fréquences » et B33 : « Amener les élèves à tirer des ressemblances et des

dissemblances dans un graphique ». C'est surtout dans le non accomplissement du travail de simulation sur ordinateur que nous voyons l'écart entre la tâche effective et la tâche prescrite.

8.2. Analyse en termes de potentialités du milieu

La première phase : le cumul

Comme prévu, le milieu installé au cours de la première phase n'est pas favorable à l'émergence de la notion du cumul. En effet, au départ la réponse unanime est celle qui considère qu'il y a en tout 30 jets. Et le cumul est accepté suite à une intervention du professeur.

La deuxième phase : les fréquences pour comparer

Le milieu établi au cours de la deuxième phase n'est pas favorable, comme prévu, à l'émergence de la notion de fréquence comme outil de comparaison des résultats finaux obtenus par les quatre groupes. En effet, le professeur est obligé de poser diverses questions ; il dirige le débat jusqu'à ce que soudainement une élève intervienne en parlant de pourcentage, notion que les élèves viennent de rencontrer dans la classe des mathématiques. Et c'est cette intervention qui permet au professeur d'amener les élèves à utiliser les fréquences.

La troisième phase : ressemblances et dissemblances

Lors de la troisième phase, les fréquences calculées ainsi que les polygones rendent le milieu favorable à l'apparition de ressemblances et de dissemblances dans les résultats d'un même groupe ou entre les résultats des différents groupes. En effet, les élèves s'aperçoivent, au niveau de chaque groupe, de la variabilité de la fréquence d'obtenir une face blanche ou une balle blanche à l'échelle microscopique et de sa régularité à l'échelle macroscopique. Ils découvrent aussi, au niveau macroscopique, la proximité des polygones des fréquences pour les trois premiers groupes et l'écart de ces derniers polygones avec celui du quatrième groupe.

Il faut dire que le rapprochement des polygones des fréquences aurait pu être constaté dans le travail de simulation sur ordinateur qui n'a pas été réalisé.

En définitive, le milieu installé au cours des deux premières phases n'est pas propice à l'émergence des objets ciblés (la notion du cumul et celle de la fréquence). Par contre, le milieu correspondant à la troisième phase est favorable à l'apparition d'irrégularités et de régularités relatives aux fréquences de l'obtention d'une face ou d'une balle blanche.

8.3. Analyse en termes de contrats

Pour la première phase et dans l'impossibilité d'instaurer un microcontrat de production collective, le professeur est contraint de choisir un microcontrat d'ostension déguisée.

Pour la deuxième phase, le milieu n'étant pas robuste pour l'émergence de la notion de fréquence comme outil de comparaison des résultats obtenus par les groupes, le professeur s'appuie sur la réponse de l'élève E33 pour instaurer un microcontrat d'adhésion dans un mésocontrat de recherche.

Pour la troisième phase, le milieu permettant l'émergence des ressemblances et des dissemblances des résultats relatives aussi bien à un même groupe qu'à tous les groupes, le professeur installe un microcontrat de production collective dans un mésocontrat de recherche.

Remarquons que cette dernière phase permet au niveau global le passage d'un contrat statistique à un contrat probabiliste.

En définitive, bien que le professeur semble tout faire pour que les notions visées proviennent des élèves, il n'a pu instaurer un microcontrat de production collective que lors de la dernière phase. Lors des deux premières phases, le milieu avec lequel interagissent les élèves n'étant pas robuste, le professeur se voit contraint de choisir un microcontrat d'ostension déguisée ou un microcontrat d'adhésion.

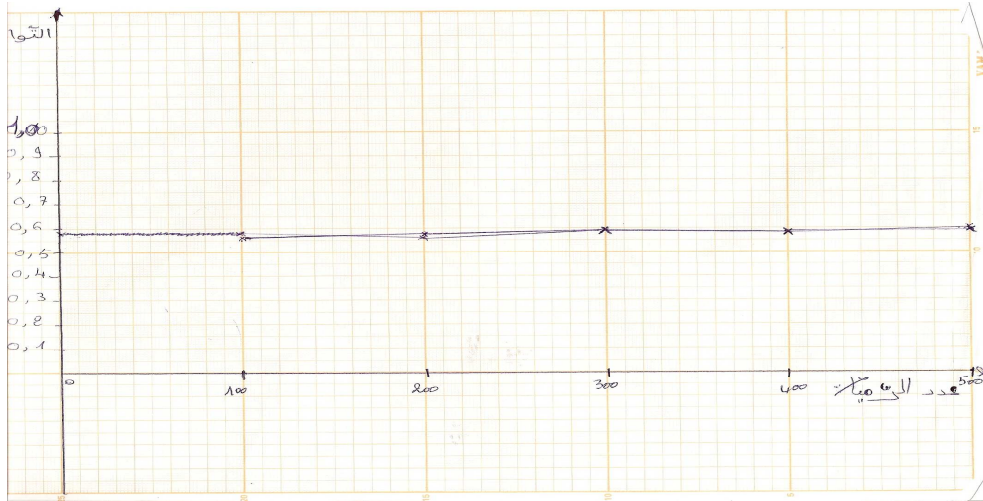
9. Complément

Dans cette partie, nous donnons un bref exposé d'une séance qui vient compléter les quatre séances précédentes et que nous avons réalisée avec deux élèves du groupe 1 (les élèves E11 et E13) et deux élèves du groupe 3 (les élèves E32 et E33).

D'abord, nous réalisons le travail de simulation sur ordinateur qui n'a pas été accompli à la fin de la quatrième séance. Ensuite, nous abordons la signification que les élèves donnent au terme « proportion ».

En premier lieu, notre intérêt porte sur la simulation par ordinateur. Nous expliquons aux élèves comment simuler sur ordinateur des tirages dans un sac contenant des boules de deux couleurs différentes. Au fait, nous leur montrons comment utiliser un logiciel déjà installé sur ordinateur. Les deux groupes font des simulations respectives de 100, de 200, de 300, de 400 et de 500 tirages sur ordinateur. Ces tirages sont faits dans un sac contenant trois boules

rouges et deux boules vertes. La figure suivante représente les fréquences d'obtention d'une boule rouge lors de ces tirages :



▪ Fig. X.2 : Polygones des fréquences des boules rouges dans une simulation de tirages dans un sac contenant 3 boules rouges et 2 boules vertes

Les élèves ont alors constaté la stabilisation de la fréquence des boules rouges autour de la valeur 0,4.

Remarquons qu'au cours du repérage du plan, nous avons constaté la mobilisation d'une conception maintenant connue, celle du nombre décimal comme étant deux entiers naturels séparés par une virgule. En effet, sur l'axe des ordonnées une élève écrit les nombres à un chiffre après la virgule allant de 0,1 jusqu'à 0,9. Ensuite elle écrit 0,10.

En second lieu, nous avons repris les deux exercices de la situation de prévision que nous avons testés dans le chapitre précédent : dans le premier exercice, nous avons un sac S1 contenant une balle blanche et deux balles noires et un sac S2 contenant deux balles blanches et quatre balles noires et dans le deuxième exercice, il s'agit d'un sac S1 contenant une balle blanche et deux balles noires et d'un sac S2 contenant deux balles blanches et trois balles noires, la question porte sur le sac à choisir pour avoir le plus de chances de tirer une balle blanche.

Nous résumons dans la suite les activités entreprises par les élèves :

D'abord, les deux élèves du premier groupe se sont mis d'accord sur le choix du sac contenant le plus de balles blanches. Par contre les deux élèves du troisième groupe ne sont pas arrivés à faire un choix commun : l'un d'eux est d'accord avec le choix fait par le premier groupe et

l'autre choisit le sac contenant le nombre minimum de balles en disant que s'est plus facile de tirer une balle blanche dans ce sac.

Ensuite, les trois élèves qui sont d'accord sur le même choix disent que la proportion des balles blanches dans le sac choisi est plus grande que celle dans l'autre sac. Pour eux, et même pour la quatrième élève, la proportion des balles blanches veut dire le nombre des balles blanches, chose que nous avons constaté en haut (cf. sous 5.1.2).

Remarquons par ailleurs que la discussion entamée avec ces élèves a montré que la quantification des « chances » est loin d'être intuitive. D'ailleurs, même quand ils acceptent de quantifier, ils disent par exemple que les chances sont un parmi trois, chose qui, pour eux, est différente de $\frac{1}{3}$.

10. Conclusions

L'analyse de la séquence confiée au professeur nous a révélé, comme c'est le cas dans toute action professionnelle, un décalage entre une tâche qui lui est prescrite et la tâche qu'il a effectivement réalisée. Ce décalage, perceptible au niveau du scénario et / ou au niveau des buts, peut-être induit soit par une redéfinition de la tâche de la part du professeur soit par le déroulement effectif des séances.

Le déroulement effectif des séances dépend entre autres des activités des élèves et des connaissances mises en œuvre par eux. Ces connaissances, dépendant de la situation où les élèves sont placés, sont le produit des interactions des élèves avec le milieu installé et parfois aménagé par le professeur.

L'aménagement du milieu montre que, par moments, les interactions ne produisent pas les connaissances ciblées et qu'il est question d'un milieu (de base) plutôt pauvre.

Par ailleurs et outre les particularités de l'action professorale, ce sont les potentialités du milieu qui pourraient être à l'origine des contrats locaux installés.

Le déroulement des deux premières séances nous montre que la situation de l'expérience aléatoire est plutôt bonne. Elle est bonne au sens où le milieu installé lors de la première expérience permet de favoriser une conception aidant à la définition d'une expérience aléatoire. En effet, le milieu matériel (le dé) favorise la conception *IMMI* « *Imprévisibilité Microscopique* » dans laquelle le résultat d'une épreuve est imprévisible et disqualifie aussi bien la conception *NI* « *cardinaux* » basée sur la technique de comparaison du nombre des

faces blanches que la conception *M* « *Mécanique* » qui s'appuie sur la prise en compte des conditions initiales de l'expérience.

Nous soulignons cependant que, pour la situation de l'expérience aléatoire, le professeur n'a pas œuvré pour l'élaboration d'un protocole expérimental qui garantisse contre la volonté de tricher de l'expérimentateur.

Il faut par ailleurs remarquer qu'à la situation de l'expérience aléatoire expérimentée manque un moment essentiel dans une quelconque séquence didactique, celui de l'institutionnalisation. Ici, il est question de l'institutionnalisation de l'objet "expérience aléatoire".

Dans les séances 3 et 4 et malgré l'état dans lequel s'est déroulée l'expérimentation, nous voyons que la troisième phase traitant les ressemblances et les dissemblances est prometteuse. Elle est prometteuse car les élèves s'aperçoivent surtout des ressemblances des polygones des fréquences au sens des régularités, c'est-à-dire de stabilisation de fréquence, au niveau macroscopique.

Et ce sont ces ressemblances en effet qui permettent le passage du cadre statistique au cadre des probabilités. Autrement dit, ce sont elles qui permettent une connaissance approximative de la probabilité.

Il faut signaler un point qui nous semble important, celui de l'émergence de la fréquence comme outil de comparaison des résultats finaux des différents groupes. Dans l'expérimentation que nous avons analysée, le professeur demande aux élèves d'abord de comparer les résultats, ensuite de déterminer les ressemblances et les dissemblances entre elles, puis de trouver une façon d'évaluer les quatre résultats. Mais le milieu aménagé est pauvre pour faire apparaître la nécessité de la fréquence comme outil de comparaison. Et c'est le mot « proportion », qui est compris dans cette expérience par les élèves au sens de « cardinal », qui est exploité par le professeur pour réaliser un événement ciblé mais qui aurait pu ne pas arriver, celui de l'utilisation des pourcentages.

Ainsi, cette expérimentation nous semble offrir des informations précieuses, informations qui portent essentiellement sur les possibilités qu'offre la notion de milieu dans les situations que nous avons choisies. Ces informations sont précieuses car elles peuvent constituer une aide didactique aux praticiens que sont les professeurs. Elles le sont aussi pour nous puisque l'expérimentation étudiée peut constituer un squelette d'une séquence d'enseignement.

Dans la séquence que nous envisageons, nous comptons, avec le tableau donnant les résultats finaux des quatre groupes, voir l'effet de la question suivante : quel est le groupe gagnant si l'on suppose que celui qui a obtenu le plus de blanches gagne ?

Par ailleurs, nous faisons le choix d'une simulation à l'aide de la calculatrice au sens où, "avec la calculatrice on « joue » réellement, même si ce n'est pas avec une pièce. Cette intervention d'une action réelle me semble également un élément important à prendre en compte, et c'est pourquoi je pense que le premier contact des élèves avec la simulation gagne à être effectué avec la calculatrice, même si, dans un deuxième temps, il est bien sûr souhaitable de travailler sur ordinateur pour des raisons évidentes d'efficacité (Parzysz 2007, p. 41).

Pour gagner la confiance des élèves en la simulation comme représentant d'une expérience effective, nous comptons aussi poser la question des points de ressemblance et de dissemblance entre un polygone issu de l'expérience et un autre issu de la simulation.

Reste alors à confronter la séquence que nous avons construite (cf. annexe 7), et dont nous venons de donner une esquisse, à la contingence.

Conclusion générale et perspectives

1. *Sur les articulations théoriques*
2. *Sur les effets de l'enseignement des probabilités*
3. *Sur le jugement probabiliste*
4. *Sur la situation de prévision*
5. *Sur la situation d'indépendance chronologique*
6. *sur les situations statistiques*
7. *Sur la nécessité des deux approches des probabilités*
8. *Sur l'introduction des probabilités au collège*
9. *Perspectives de la recherche*

Le travail de recherche que nous venons de clore s'intéresse au domaine de l'aléatoire, domaine problématique à plus d'un niveau.

Nous y avons abordé les rapports d'élèves à quelques notions probabilistes, particulièrement les notions de quantification des probabilités et d'indépendance chronologique.

Nous avons examiné ce qui existe du côté des connaissances des élèves, notamment les connaissances disponibles avant toute introduction de l'aléatoire, les « connaissances spontanées ». Nous avons aussi abordé la question de ce qui pourrait exister concernant l'introduction des probabilités dans une approche fréquentiste par l'observation de la stabilisation des fréquences au niveau du collège.

Ainsi, notre travail pourrait s'inscrire dans le contexte d'évolution des programmes mathématiques relatifs à divers pays, tels que la Tunisie (cf. chapitre IV), qui ont officialisé l'approche expérimentale des probabilités. Il s'inscrit certes dans la lignée de recherche de situations didactiques viables dans les classes de mathématiques. Ce travail de recherche nous paraît utile aussi bien pour la recherche en didactique des probabilités que pour les praticiens que sont les professeurs de la discipline.

Il ressort de cette recherche une conclusion qui nous paraît importante. Nous avons en effet montré que la conception P « cas favorables / cas possibles » qui correspond à la définition "habituelle" de quantification de la probabilité uniforme dans l'institution scolaire est très peu mobilisée, au moins dans les situations que nous avons utilisées. En conséquence, il est apparu que la notion d'équiprobabilité déterminée par le modèle mathématique "nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles" correspond à une conception spontanée partagée par un nombre négligeable d'élèves âgés de 11 à 16 ans (chapitres VII et IX).

Dans la suite, nous allons exposer les résultats, que nous pensons importants, auxquels nous sommes parvenu. Mais commençons d'abord par donner quelques mots au sujet du cadrage théorique adopté.

1. Sur les articulations théoriques

Dans le premier chapitre, nous avons procédé à une synthèse des travaux portant sur les conceptions et ceux s'intéressant à l'analyse de la pratique enseignante.

Pour les conceptions et sans sortir du cadre du modèle des conceptions dû à Vergnaud, nous avons fait une formalisation de la notion de conception. Cette formalisation pourrait, à notre

sens, concilier entre le modèle de Vergnaud et celui des organisations dû à Chevallard. Autrement dit, il est question d'une formalisation rendant le modèle des organisations fonctionnel au niveau des connaissances. Cet élargissement du modèle des organisations, qui est plutôt conçu pour l'étude des savoirs, à l'analyse des connaissances nous semble profitable à plus d'un niveau. Il permet, après enseignement, de calculer la distance entre les conceptions des élèves et les organisations mathématiques étudiées. Il permet aussi, avant enseignement, de calculer la distance, à combler, entre les conceptions des élèves et les organisations mathématiques ciblées.

La formalisation que nous avons faite et que nous avons utilisée notamment dans les chapitres VII et VIII semble prometteuse.

Pour l'analyse de la pratique enseignante ou de la relation didactique, nous sommes parvenus à un cadre théorique articulant essentiellement le cadre de la didactique professionnelle et la TSD, les éléments qui proviennent de la TSD étant la notion de milieu et la structuration du contrat didactique.

Ce cadrage théorique qui nous a permis les analyses a priori et a posteriori de la pré-expérimentation nous semble aussi prometteur. Il paraît pertinent pour l'analyse des séquences d'enseignement où des tâches prescrites sont bien connues.

2. Sur les effets de l'enseignement des probabilités

Ici nous allons rendre compte des résultats trouvés dans les chapitres V et VI où notre attention porte sur deux tâches, la tâche « te » de l'équiprobabilité et la tâche « ti » d'indépendance chronologique, le niveau concerné étant celui du secondaire.

Pour la tâche « te » où la question revient à comparer les probabilités des événements « avoir un 5 et un 6 » et « avoir deux 6 » dans le jet de deux dés, nous avons constaté qu'un début de formation en probabilités favoriserait un décalage dans les jugements probabilistes appelé biais de l'équiprobabilité (chapitre V). Autrement dit, les élèves ayant une formation d'une année en probabilités optent massivement pour l'équiprobabilité des deux événements concernés plus que les élèves qui ne sont pas initiés dans le domaine. Nous montrons que le même phénomène persiste avec des sujets ayant une formation de deux années en probabilités (chapitre VI). Le dernier constat nous a permis d'élargir le résultat trouvé par Lecoutre et Durand (1988), disant que le biais de l'équiprobabilité est important chez les élèves qui

débutent une formation en probabilités, aux sujets ayant subi deux années consécutives d'étude dans le domaine des probabilités.

Pour la tâche « ti » où la question consiste à prévoir le résultat du quatrième jet d'une pièce de monnaie connaissant les résultats des trois premiers jets, nous avons constaté une amélioration au niveau de la reconnaissance de l'indépendance des épreuves pour les élèves ayant subi une formation d'une année en probabilité (chapitre V). Nous avons par ailleurs montré qu'une deuxième année d'enseignement en probabilité où la notion d'épreuves indépendantes est étudiée n'a pas contribué à une meilleure reconnaissance de l'indépendance des épreuves par les sujets (chapitre VI). Mais, nous avons raisonnablement, nous semble-t-il, rejoins Lecoutre et Fischbein (1998) dans leur conclusion disant que l'effet de récence négatif, qui implique le choix de l'issue non prédominante, diminue avec l'âge.

3. Sur le jugement probabiliste

Nous rendons compte ici des résultats trouvés pour la situation dite de « décision a posteriori », les élèves testés étant du niveau de la 8^{ème} année de base (chapitre VIII).

Il est question d'une situation où l'on donne, dans la majorité des cas, les contenus de deux sacs (des boules blanches et des boules noires) ainsi que le résultat d'une série d'épreuves effectuées dans l'un de ces sacs, la question étant de déterminer le sac le plus probable de provenance du tirage effectué.

Dans cette expérimentation, nous avons constaté que les conceptions les plus mobilisées sont la conception *NN* « cardinaux parties » et la conception *T* « cardinal tout ». Pour la conception *NN*, le choix du sac est fait soit suite à la comparaison des effectifs des boules blanches ou des boules noires dans les deux sacs, soit suite à la comparaison des effectifs des boules blanches et celui des boules noires dans un même sac. Pour la conception *T*, le choix dépend du nombre total des boules dans chacun des deux sacs.

Nous constatons que les réponses révélant une comparaison de fractions sont peu fréquentes et que les élèves testés mobilisent fréquemment des conceptions fausses dans la résolution des tâches qui leur sont assignées.

Nous remarquons que les conceptions construites sont souvent induites par un effet de représentativité qui peut être rapproché au biais de représentativité tel que défini par Kahneman et Tversky (1972). Il est question de ce biais notamment dans le cas de la

conception *CP* « compatibilité » et de la conception *T* « cardinal tout » au sens où la représentativité est une qualité attribuée au processus qui a engendré l'événement réalisé.

Nous avons trouvé deux résultats semblant en contradiction avec ce que pense Alarcon (1982). D'abord, il nous paraît que dans l'incertitude, les réponses des élèves ne s'arrêtent pas souvent à la compatibilité du tirage avec les deux sacs. Ensuite, nous avons montré que dans le cas de l'équiprobabilité pour le choix des deux sacs, la réponse indifférente n'est pas signe d'un raisonnement probabiliste.

Nous avons par ailleurs constaté que dans le cas où le contenu de l'un des deux sacs est inconnu, les élèves développent un raisonnement plutôt événementiel au sens d'Alarcon.

Finalement, il ressort de l'étude de la situation de décision a posteriori que beaucoup d'élèves de 8^{ème} année de base (32 % de la population testée) n'ont pas bien saisi la notion de la remise (chapitre VIII, sous 6).

4. Sur la situation de prévision

La situation de prévision consiste à choisir la collection donnant le plus de chances d'avoir un élément de couleur bien déterminée parmi deux collections contenant chacune des éléments indiscernables dans deux couleurs différentes. Cette situation fait l'objet du chapitre VII, les élèves testés étant du niveau de la 8^{ème} année de base (13-14 ans).

Les conceptions adéquates et essentiellement la conception *P* « *cas favorables / cas possibles* », la conception *P'* « *cas favorables / cas défavorables* » et la conception *G* « *collection intermédiaire* », qui nous semblent être le signe d'une maîtrise de la quantification des probabilités, sont très rares. Les conceptions les plus fréquentes sont alors des conceptions erronées.

Nous avons montré que les conceptions aussi bien adéquates qu'erronées dépendent de la variable « référent ». En effet, au niveau des conceptions adéquates, il semble que la modalité "Roulettes" favorise mieux la mobilisation de la conception *P* « *cas favorables / cas possibles* » et que la conception *P'* « *cas favorables / cas défavorables* » est légèrement plus mobilisée avec les boules. Et au niveau des conceptions erronées, les conceptions *N* « *cardinal partie* », *R* « *répartition* » et *M* « *mécanique* » rassemblées représentent presque la moitié des conceptions mobilisées avec les roulettes et *N* « *cardinal partie* », *D* « *différence* » et *T* « *cardinal tout* » rassemblées représentent plus de la moitié des conceptions construites

avec les boules, *D* et *T* étant presque exclusives aux boules, ce qui confirme un résultat trouvé par Maury (1984) pourtant à des niveaux scolaires différents.

Pour les boules, tout se passe comme si l'attention des élèves portait d'abord sur le cardinal d'une partie (ensemble de cas favorables ou ensemble de cas défavorables), ensuite sur la différence entre les parties et enfin sur le tout. Pour les roulettes par contre, tout se passe comme si les élèves s'orientaient d'abord vers le cardinal d'une partie (surtout l'ensemble de cas favorables) puis vers une caractéristique perceptive de l'énoncé.

Dans le chapitre VII et pour vérifier l'hypothèse piagétienne disant que la réussite est plus importante dans le cas de proportionnalité que dans celui de comparaison à deux variables, nous avons recouru à un complément dans lequel les modalités de la variable « contenu du sac » nous paraissent plus simples que les modalités déjà testées. Nous relevons alors une amélioration dans la fréquence des conceptions *P*, *P'* et *G* qui passe de 2,5 % dans le test 1 à 12,5 % dans le test complémentaire. Cette amélioration est, d'après nos investigations au chapitre IX, due à la forme de la question qui, dans le chapitre VII, est d'abord sous la forme « quel sac choisiriez-vous ... ? » et ensuite, dans le complément, sous forme de QCM, ce qui modifie considérablement la tâche (cf. Maury 1985).

Dans le chapitre IX, nous avons montré que la performance relative à la tâche *td* de comparaison à deux variables dépend du niveau scolaire, la différence étant traduite par la hausse des performances au niveau de la 8^{ème} année de base. Nous avons aussi constaté qu'il n'y avait pas d'effet de la demande de justification ni d'effet de l'ordre des tâches que l'on tient compte de la demande de justification ou non.

Il ressort de l'étude de la situation de prévision au chapitre VII et au chapitre IX que les modalités de la variable « contenu des sacs » favorisent certaines conceptions plutôt que d'autres : ces modalités favorisent la mobilisation des conceptions *N* « cardinal partie », *D* « différence » et *T* « cardinal tout » dans le chapitre VII et les conceptions *N* et *T* dans le chapitre IX.

5. Sur la situation d'indépendance chronologique

La situation d'indépendance a été abordée en haut quand nous avons parlé de la tâche « *ti* » qui est testée sur une population du secondaire (cf. sous 2). Nous avons aussi testé dans le chapitre IX une autre tâche « *ti2* » relevant de la même situation, la situation d'indépendance. Dans cette tâche et contrairement à la tâche « *ti* », les résultats des premières épreuves ne sont

pas donnés et les élèves testés relèvent de différents niveaux, de la 6^{ème} année de base à la 1^{ère} année secondaire.

Nous avons alors relevé une fois de plus une difficulté dans la reconnaissance de l'indépendance des épreuves et ceci aux quatre niveaux considérés.

Nous avons relevé que le niveau scolaire a un effet significatif aussi bien sur les performances que sur la reconnaissance de l'indépendance. Par contre, l'effet du niveau scolaire sur la fréquence des conceptions mobilisées n'est pas significatif.

Par ailleurs, la demande de justification, qui a un effet significatif sur les réponses produites, nous a dévoilé l'existence d'un problème au niveau de la compréhension de la question ainsi qu'une confusion apparente entre le possible et le probable.

6. Sur les situations statistiques

Au chapitre IX, nous avons abordé deux types de situations statistiques, la situation statistique de prévision et la situation statistique de décision.

Nous avons alors montré que par rapport aux réponses produites, le niveau scolaire a un effet non significatif dans la situation statistique de prévision et un effet significatif dans la situation statistique de décision au cas où il y a demande de justification, les réponses correctes étant plus fréquentes au niveau de la 1^{ère} année secondaire.

De même, nous avons montré que la demande de justification affecte significativement les réponses au niveau de la 1^{ère} année secondaire dans le cas de la situation statistique de décision.

Pour les conceptions, nous soulignons la mobilisation fréquente (dans un tiers des réponses aussi bien en 8^{ème} année de base qu'en 1^{ère} année secondaire) de la conception *HNM* «*Hasard Non Modélisable* » postulant que le hasard ne peut pas être régi par une quelconque loi même à un ordre macroscopique.

7. Sur la nécessité des deux approches des probabilités

Nous avons vu au début de ce manuscrit (chapitre II) que la valeur épistémologique de la théorie des probabilités est basée sur les régularités créées au niveau macroscopique, c'est-à-dire pour un grand nombre d'épreuves, par les phénomènes aléatoires qui constituent son champ d'investigation. Ceci nous montre la nécessité d'introduire les probabilités dans ses deux approches, l'approche laplacienne et l'approche par les fréquences.

Dans notre travail, la nécessité de l'approche expérimentale des probabilités s'est parfois sentie. Elle s'est sentie comme étant une aide pouvant amener l'élève à réaliser la non pertinence d'une certaine conception.

La nécessité de cette approche, à côté de l'approche théorique, apparaît aussi explicitement dans les nouveaux programmes tunisiens (chapitre IV).

Se pose alors la question des conditions didactiques dans lesquelles les élèves peuvent rencontrer les probabilités et se familiariser avec elles.

8. Sur l'introduction des probabilités au collège

Nous avons abordé au dernier chapitre une possibilité d'organisation de la rencontre des collégiens avec l'aléatoire.

L'expérimentation du dernier chapitre nous montre qu'il est possible d'introduire expérimentalement les probabilités. En effet l'expérimentation testée auprès d'un groupe d'élèves de 7^{ème} année de base nous semble prometteuse. Elle est prometteuse au sens où, par moments, le milieu installé semble solide vu les rétroactions qu'il permet, c'est-à-dire vues les conceptions qu'il favorise et celles qu'il disqualifie.

Il faut dire cependant que l'organisation d'une rencontre efficace de l'aléatoire par les élèves ne dépend pas seulement d'une séquence prescrite, elle dépend aussi et surtout de l'aide que peut apporter le professeur le long de la séquence. Cette aide dépend essentiellement du contrôle que le professeur a sur la séquence en question.

9. Perspectives de la recherche

Avant de passer aux ouvertures que donne ce travail à la recherche, nous devons nous interroger sur le degré de généralisation des résultats trouvés. Comme réponse, nous pouvons avancer que comme dans toute recherche, les résultats trouvés ne peuvent être que limités.

Le travail que nous avons mené ici donne des éléments de réponses à des questions bien déterminées. Mais la vertu d'une recherche ne figure pas seulement dans les éléments de réponses qu'elle apporte, elle figure aussi dans les nouvelles questions qu'elle permet de poser.

Dans le cadre des difficultés conceptuelles et épistémologiques et vu que l'approche fréquentiste des probabilités nous semble étrangère aux enseignants tunisiens du secondaire et du collège, nous posons la question suivante : quels rapports entretiennent les enseignants,

notamment ceux du collège, avec les probabilités et particulièrement avec l'approche expérimentale des probabilités ?

A ce propos, notons que nous avons fait passer le test du chapitre VII auprès de cinq enseignants. Bien qu'ils n'aient aucun mal à y donner les bonnes réponses, il y a deux d'entre eux qui ont soupçonné un effet de la dispersion des secteurs dans les roulettes (pour les énoncés, voir les exercices 3 et 4 dans l'annexe 1).

La dernière question vient dans la lignée des travaux entrepris notamment par Nabbout et Maury (2005) qui s'intéressent aux rapports des enseignants aux objets relevant du champ des probabilités. Nous envisageons alors d'étudier les rapports des enseignants aux objets relevant du champ des probabilités, le dispositif expérimental élaboré par Vantourout (2004) et reposant sur la simulation pouvant nous servir dans cette étude.

Nous posons une autre question qui n'est pas si étrange à la question précédente et qui concerne la séquence que nous avons construite à la fin du dernier chapitre : est-ce qu'une telle séquence est viable au niveau d'une "vraie" classe de mathématiques ?

La viabilité est vue dans plusieurs sens. Elle est, entre autres, vue dans le comportement du professeur dans une séquence qui est, notamment par l'utilisation d'un matériel effectif (dés, boules), inhabituelle. Elle est aussi vue dans les rétroactions qu'elle favorise au sein d'une "vraie" classe de mathématiques.

Bibliographie

ABDELJAOUAD M. (2004), La bilatéralité dans le discours mathématique : une contrainte institutionnelle en Tunisie, « *petit x* » **64**, 36-59.

ACHOUR. A. (1993), Jeux et Mathématiques, *Miftah al-Hissab* **85**, 1-7, Tunis : ATSM (Association Tunisienne des Sciences Mathématiques).

ACHOUR. A. (1997), Probabilités, *Miftah al-Hissab* **90-91**, 14-27, Tunis : ATSM (Association Tunisienne des Sciences Mathématiques).

ACHOUR S. (2005), *L'introduction des fonctions linéaires et affines ans l'enseignement secondaire, d'une problématique de modélisation physique à l'ostension algébrique : quelles alternatives ?*, Mémoire de DEA, Tunis : ISEFC, Université de Tunis.

ALARCON J. (1982), *L'appréhension des situations probabilistes chez des élèves de 12-14 ans : résultats d'une enquête proposée à des élèves de 4^{ème} et de 5^{ème}*, Thèse, Strasbourg : irma.

ARTIGUE M. (1990), Epistémologie et didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **10** (2.3), 241-285.

ARTIGUE M. et ROBINET J. (1982), Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire, *Recherches en Didactiques des Mathématiques* **3** (1), pp. 5-64.

ASSUDE T. (1995), Sur les modèles des conceptions, relecture d'une expérimentation, In MARGOLINAS C., coord., *Les débats de didactique des Mathématiques*, pp. 9-19, Grenoble : La Pensée Sauvage.

ASSUDE T., MERCIER A., SENSEVY G. (2007), L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux, *Recherches en Didactiques des Mathématiques* **27** (2), pp. 221-252.

BACHELARD G. (1999, 1^{ère} édition 1938), *La formation de l'esprit scientifique*, Paris : Vrin.

BALACHEFF N. (1995), Conception, propriété du système sujet / milieu, *Actes de la 8^{ème} Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, 215-229, Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.

BALACHEFF N., MARGOLINAS C. (2005), cKç, modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques, In Mercier A. et Margolinas C. (Ed.), *Balises en Didactique des Mathématiques*, 75-106, Grenoble : La Pensée Sauvage.

BATANERO C., NAVARRO-PELAYO V. et GODINO J-D. (1997), Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils, In *Educational Studies in Mathematics* **32** (2), 181-199.

Bibliographie

BERTHELOT R., SALIN M-H. (1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse : Université de Bordeaux I.

BERTRAND J. (1989), *Calcul des probabilités*, Paris : Gauthier-Villars.
« <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99602b> »

BKOUICHE R., CHARLOT B., ROUCHE N. (1991), *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*, Paris : Colin.

BLOCH I. (1999), L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique, R *Recherches en Didactique des Mathématiques* **19** (2), 135-194.

BLOCH I. (2002), Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations, *Actes de la 11^{ème} Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, 125-139, Grenoble : La Pensée Sauvage.

BONI I., CHAIBAI F., PARZYSZ B., VAGOST D., VERDIER J. (2001), *L'enseignement des probabilités au collège et au lycée, exemples européens et propositions*, IREM de Lorraine.

BORDIER J. (1991), *Un modèle didactique, utilisant la simulation sur ordinateur, pour l'enseignement de la probabilité*, Thèse : Université Paris 7.

BOREL E. (1941), *Le jeu, la chance et les théories scientifiques modernes*, Paris : Gallimard.

BOREL E. (1950), *Eléments de la théorie des probabilités*, Paris : Editions Albin Michel.

BOREL E. (1950b), *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris : Gauthier-Villars, collection de monographies sur la théorie des fonctions.

BOSCH M., CHEVALLARD Y. (1999), La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs, objet d'étude et problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **19** (1), 77-123.

BOURBAKI N. (1974, 1^{ère} édition 1969), *Eléments d'histoire des mathématiques*, Paris : Hermann.

BRIAND J. (2005), Une expérience statistique et une première approche des lois du hasard au lycée par une confrontation avec une machine simple, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **25** (2), 247-282.

BROUSSEAU G. (1972), Vers un enseignement des probabilités à l'école élémentaire, *Enseignement élémentaire des Mathématiques*, IREM de Bordeaux.

BROUSSEAU G. (1983), Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **4** (2), 165-198.

BROUSSEAU G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **7** (2), 33-115.

BROUSSEAU G. (1990), Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **9** (3), 309-336.

BROUSSEAU G. (1996), L'enseignant dans la théorie des situations didactiques, *Actes de la 8^{ème} Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, 3-46, Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.

BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, Grenoble : La pensée sauvage.

BROUSSEAU G. (2000-2001), Les erreurs des élèves en Mathématiques, « *petit x* » **57**, 5-30.

BROUSSEAU G. (2003), *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*, « http://dipmat.math.unipa.it/~grim/Gloss_fr_Brousseau.pdf »

BROUSSEAU G., BROUSSEAU N., WARFIELD V. (2002), An experiment on the teaching of statistics and probability, *Journal of Mathematical Behavior* **20**, 363-411.

BROUSSEAU G., BROUSSEAU N. et WARFIELD V. (2005), Une expérience de premier enseignement des statistiques et des probabilités, In Mercier A. et Margolinas C. (Ed.), *Balises en Didactique des Mathématiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage : CD-Rom.

BROUSSEAU G., CENTENO J. (1991), Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **11** (2.3), 167-210.

CALOT G. (1967), *Cours de calcul des probabilités*, Paris : Dunod.

CAPPONI B., LABORDE C. (1995), Modélisation à double sens, *Actes de la 8^{ème} Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, 265-278, Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.

CARRANZA P., KUZNIAK A. (2006), Dualité de la notion de probabilité et enseignement de la statistique au Lycée en France, *Colloque EMF 2006*, Sherbrooke : CRP de la Faculté d'éducation, Université de Sherbrooke.

CASTELA C. (1995), Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **15** (1), 7-47.

CHEVALLARD Y. (1989), Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège (Deuxième partie), « *petit x* » **19**, 43-72.

CHEVALLARD Y. (1991), *La transposition didactique – Du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **12** (1), 73-112.

CHEVALLARD Y. (1997), Familiale et problématique, la figure du professeur, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **17** (3), 17-54.

CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **19** (2), 221-266.

CHEVALLARD Y. (2002), Ecologie et régulation, In Dorier J-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (Ed.), *Actes de la 11^{ème} Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, 41-56, Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (2003), Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques, In Maury S., Caillot M. (Ed.), *Rapport au savoir et didactiques*, 81-104, coll. « Education et sciences » **04**, Paris : Fabert.

CHEVALLARD Y., MERCIER A. (1987), *Sur la formation du temps didactique*, Marseille : IREM d'Aix Marseille.

CLERO J-P. (1990), *Epistémologie des mathématiques*, Paris : Nathan, coll. « Repères philosophiques ».

COHEN J. (1963), *Hasard, adresse et chance. La psychologie du pari et du jeu*, Paris : PUF.

COMITI C., GRENIER D. (1994), L'observation, outil de recherche pour la modélisation de phénomènes didactiques, *Séminaire Recherche / Réflexion / Interaction*, 55-72, IUFM de Grenoble.

COMITI C., GRENIER D. (1997), Régulations didactiques et changements de contrats, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **17** (3), 81-102.

COMITI C., GRENIER D. MARGOLINAS C. (1995), Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques, In Arsac G., Gréa J., Grenier D. et Tiberghien A. (Ed.), *Différents types de savoirs et leur articulation*, 93-127, Grenoble : La Pensée Sauvage.

CONNE F. (1992), Savoir et Connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **12** (2.3), 221-270.

COULANGE L. (2001), Enseigner les systèmes d'équations en troisième. Une étude économique et écologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **21** (3), 305-354.

COURNOT A-A. (1843), *exposition de la théorie des chances et des probabilités*, Paris : Hachette. « <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k679998> »

COUTINHO C. (2001), *Introduction aux situations aléatoires dès le collège : de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre II*, Thèse, Grenoble : Université Joseph Fourier.

COUTINHO C. (2002), Introducing the study of random situations and their model building process to 14-15 years old students, *ICOTS 6*, South Africa.
« <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php?show=1> »

Bibliographie

DAHAN DALMEDICO A. (1992), Le déterminisme de Pierre-Simon Laplace et le déterminisme aujourd'hui, In Dahan Dalmedico A., Chabert J-L. et Chemla K. (Ed.), *Chaos et déterminisme*, Paris : Editions du Seuil, Coll. « Points Sciences ».

DESCARTES R. (1824-1826), *Œuvres de Descartes* (tome onzième), publiées par V. COUSIN, Paris.

DHIEB M. (2003a), *Conceptions combinatoires et probabilistes d'élèves tunisiens de la troisième année secondaire, section Mathématiques*, Mémoire de DEA, Tunis : ISEFC, Université de Tunis.

DHIEB M. (2003b), Réflexions sur l'introduction des Probabilités en Tunisie, *Colloque EMF 2003*, Tozeur : CNP.

DHIEB M. (2005), Conceptions de l'équiprobabilité et des arrangements : l'exemple de la 3^{ème} année secondaire, section Mathématiques en Tunisie, In Mercier A. et Margolinas C. (Ed.), *Balises en Didactique des Mathématiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage : CD-Rom.

DHIEB M. (2007), Les élèves du collège tunisien et les probabilités, *Miftah al-Hissab* **105**, 67-76, Tunis : ATSM (Association Tunisienne des Sciences Mathématiques).

DOUADY R. (1987), Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **7** (2), 5-31.

DROESBEKE J-J., TASSI Ph. (1997, 1^{ère} édition 1990), *Histoire de la Statistique*, Paris : PUF, coll. « Que sais-je ».

DUPIN J-J. (1995), Modèles et modélisation dans l'enseignement. Quelques contraintes didactiques, *Actes de la 8^{ème} Ecole d'Été de Didactique des Mathématiques*, 247-257, Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.

DUROUX A. (1983), La valeur absolue : difficultés majeures pour une notion mineure, « *petit x* » **3**, 43-67.

DUVAL R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **5**, pp. 37-65 : IREM de Strasbourg.

DUVAL R. (1996), « Quel cognitif retenir en Didactique des Mathématiques ? », *Recherches en Didactique des Mathématiques* **16** (3), 349-382.

ENGEL A. (1975), *L'enseignement des probabilités et de la statistique*, Volume 1, Adapté de l'allemand par J. Pinchinat et J. Ultrici, Paris : CEDIC.

FISCHBEIN E. (1975), *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*, Holland : Reidel.

FISCHBEIN E. (1987), *Intuition in science and mathematics*, Holland: Reidel.

FISCHBEIN E., BARBAT I., MINZAT I. (1971), Intuitions primaires et intuitions secondaires dans l'initiation aux probabilités, *Educational Studies in Mathematics* **4**, 264-280.

Bibliographie

FISCHBEIN E., NELLO M-S., MARINO M-S. (1991), Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents, *Educational Studies in Mathematics* **22**, 523-549.

FISCHBEIN E., PAMPU I., MINZAT I. (1967), L'intuition probabiliste chez l'enfant, *Enfance*, **2**, 193-208.

FISCHBEIN E., PAMPU I., MINZAT I. (1969), Initiation aux probabilités à l'école élémentaire, *Educational Studies in Mathematics* **2**, 16-31.

FISCHBEIN E., PAMPU I., MINZAT I. (1970), Comparison of ratios and the chance concept in children, *Child Development* **41**, 377-389.

GIRARD J-C. (2001), Quelques hypothèses sur les difficultés rencontrées dans l'enseignement des probabilités, In Henry. M. (Ed.), *Autour de la modélisation en probabilités*, 189-200, Commission inter-IREM, Paris : PUF-C, Coll. « Didactiques ».

GIRARD J-C. (2003), Modélisation et simulation, *Probabilités au lycée, Brochure APMEP* **143**, 143-151.

GLAYMAN M., VARGA T. (1973), *Les probabilités à l'école*, Paris : CEDIC.

GRAS R., TOTOHASINA A. (1995), Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **15** (1), 49-95.

GRENIER D. (1995), Savoirs mis en jeu dans des problèmes de combinatoire, In Arzac et al., *Différents types de savoirs et leurs articulations*, pp. 235-251, Grenoble : La Pensée Sauvage.

GRENIER D. (1988), *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième*, Thèse, Grenoble I : Université Joseph Fourier.

GRENIER D. (1998), Milieu et contrat dans l'étude de l'enseignant et des interactions didactiques, *Actes des secondes journées didactiques de la Fouly*, 123-146, Genève.

GRENIER D., PAYAN C. (1998), Spécificité de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **18** (1), 59-100.

HACKING I. (2002), *L'émergence de la probabilité*, Traduit de l'anglais par M. Dufour, Paris : Editions du Seuil, Coll. « Liber ».

HENRY M. (1997), Les premiers apprentissages en géométrie et en probabilités. Des processus de modélisation comparables, *DidaTech, Didactique et technologies cognitives en Mathématiques*, Séminaires 1997, Grenoble : Institut IMAG Université Joseph Fourier.

HENRY M., (1999), *L'enseignement des probabilités : Perspectives historiques, épistémologiques et didactiques*, Publications de l'IREM de Besançon, Paris : PUF-C.

Bibliographie

HENRY M. (2001), Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement, In Henry. M. (Ed.), *Autour de la modélisation en probabilités*, 149-159, Commission inter-IREM, Paris : PUF-C, Coll. « Didactiques ».

HUYGENS C. (1895), *Œuvres complètes de Huygens, Tome 6*, La Haye : Martinus Nijhoff.
« <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k778547> »

JOHSUA S. et DUPIN J-J. (1993), *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*, Paris : PUF.

JULO J. (1995), *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*, Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

KAHNEMAN D., TVERSKY A. (1972), Subjective probability : a judgment of representativeness, *Cognitive Psychology* **3**, 430-454.

LAHANIER-REUTER. D. (1999), *Conceptions du hasard et enseignement des probabilités et statistiques*, Paris : PUF, coll. « Education et formation ».

LAPLACE P-S. (1886), *Œuvres complètes de Laplace, Tome 7*, Paris : Gauthier-Villars.
« <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k775950> »

LECOUTRE M-P. (1985a), Jugements probabilistes chez des adultes : pratique des jeux de hasard et formation en théorie des probabilités, *Bulletin de Psychologie* **38** (18), 891-899.

LECOUTRE M-P. (1985b), Effet d'informations de nature combinatoire et de nature fréquentielle sur les jugements probabilistes, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **6** (2-3), 193-213.

LECOUTRE M-P. et DURAND J-L. (1988), Jugements probabilistes et modèles cognitifs. Etude d'une situation aléatoire, *Educational Studies in Mathematics* **19**, 357-368.

LECOUTRE M-P. et FISCHBEIN E. (1998), Evolution avec l'âge de « misconceptions » dans les intuitions probabilistes en France et en Israël, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **18** (3), 311-332.

LEPLAT J. (1985), *Erreur humaine, fiabilité humaine dans le travail*, Paris : Armand Colin.

LEPLAT J. (1997), *Regard sur l'activité en situation de travail – Contribution à la psychologie ergonomique*, Paris : PUF.

LE LIONNAIS F. (1998), *Les grands courants de la pensée mathématique*, Paris : Hermann, Editeurs des Sciences et des Arts.

MARGOLINAS C. (1995), La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations, In Margolinas (Ed.), *Les débats de didactique des mathématiques, Actes du séminaire national 1993-1994*, 89-102.

MAURY S. (1984), La quantification des probabilités : analyse des arguments utilisés par les élèves de classe de seconde, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **5** (2), 187-214.

Bibliographie

MAURY S. (1984b), Tirages probabilistes : une aide pour « donner un sens » aux notions d'indépendance stochastique et de probabilité conditionnelle ?, *Publication de l'IREM de Montpellier*, ISBN 2-909916-42-1.

MAURY S. (1985), Influence de la question dans une épreuve relative à la notion d'indépendance, *Educational Studies in Mathematics* **16**, 283-301.

MAURY S. (1986), *Contribution à l'étude didactique de quelques notions de probabilité et de combinatoire à travers la résolution de problèmes*, Thèse d'état, Montpellier : Université des sciences et techniques du Languedoc.

MAURY S. (1987), Procédures dans la résolution de problèmes probabilistes, In Vergnaud G. et al. (Ed.), *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, 293-304, Grenoble : La Pensée Sauvage.

MAURY S. (1992), La représentation du savoir chez l'enseignant, source de difficultés dans l'enseignement de certaines connaissances ? *TREMA* **1**, IUFM de Montpellier.

MAURY S. (2005), Modélisations du sujet en psychologie et en didactique, dans les travaux intéressant l'enseignement des mathématiques, In Salin M-H., Clanché P. et Sarrazy B. (Ed.), *Sur la théorie des situations didactiques*, 335-343, Grenoble : La Pensée Sauvage.

MAURY S., CAILLOT M. (2003), Quand les didactiques rencontrent le rapport au savoir, In Maury S., Caillot M. (Ed.), *Rapport au savoir et didactiques*, 13-32, coll. « Education et sciences » **04**, Paris : Fabert.

MAURY S., FAYOL M. (1986), Combinatoire et résolution de problèmes au cours moyens première et deuxième années, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **7**, (1), 63-104.

McGEE V-E. (1975), *Principes de statistiques : approches traditionnelle et bayésienne*, Traduit de l'américain par A. Pigois et A. Fercoq, Paris : Vuibert.

MERCIER A. (1992), *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique*, Thèse du troisième cycle, Université de Bordeaux I.

MEUSNIER N. (2004), Le problème des parties avant Pacioli, In Barbin E. et Lamarche J-P. (Ed.), *Histoire de probabilités et de statistiques*, 3-23, Commission inter-IREM d'Épistémologie et d'Histoire des Mathématiques, Paris : Ellipses.

NABBOUT M. (2006), *Enseignement des probabilités en classe terminale au Liban: étude de représentations et de pratiques de professeurs dans des situations aménagées*, Thèse, Paris : Université René Descartes.

NABBOUT M., MAURY S. (2005), Teacher's representations of independent events : what might an attempt to make sense hide?, *CERME IV*, Espagne.
« <http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/5/NabboutMaury.pdf> »

NAJAR R. (2006), Analyse de la conception de vecteur émergente d'un manuel scolaire, « *petit x* » **72**, 52-81.

- NEVEU J. (1970), *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Paris : MASSON et Cie.
- NOELTING G. (1980a), The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I – Differentiation of stages, *Educational Studies in Mathematics* **11** (2), 217-253.
- NOELTING G. (1980b), The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II – Problem-structure at successive stages; problem-solving strategies and the mechanism of adaptative restructuring, *Educational Studies in Mathematics* **11** (3), 331-363.
- PARZYSZ B. (2007), Expérience aléatoire et simulation: le jeu de croix ou pile, *Repères-IREM* **66**, 27-44.
- PASCAL B. (1922), *Les lettres de Blaise Pascal : accompagnées de lettres de ses correspondants*, Publiées par M. Beau freton, Paris : Crès.
« <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k69975r> »
- PASTRÉ P., MAYEN P., VERGNAUD G. (2006), La didactique professionnelle, *Revue Française de Pédagogie*, **154**, 145-198.
- PERRIN-GLORIAN M-J, HERSANT M. (2003), Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **23** (2), 217-276.
- PICHARD J-F. (2001), Les probabilités au tournant du VIII^e siècle, In Henry. M. (Ed.), *Autour de la modélisation en probabilités*, 13-45, Commission inter-IREM, Paris : PUF-C, Coll. « Didactiques ».
- PIAGET J. (1976), Le possible, l'impossible et le nécessaire, *Archives de Psychologie*, XLIV **176**, 281-299.
- PIAGET J., INHELDER B. (1951), *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*, Paris : PUF.
- POINCARÉ H. (1987, 1^{ère} édition 1912), *Calcul des probabilités*, Paris : Gabay.
« <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k29064s> »
- POISSON S-D. (1837), *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*, Paris : Bachelier. « <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k110193z> »
- RAYMOND P. (1975), *De la combinatoire aux probabilités*, Paris : François Maspero, Coll. « Algorithme ».
- RAYMONDAUD H. (2003), Modèles d'urnes pour introduire et simuler quelques lois discrètes, In Commission inter-IREM (Statistique et Probabilités), *Probabilités au lycée : Brochure APMEP* **143**, 51-74, Paris : APMEP.
- RENYI A. (1966), *Calcul des probabilités*, Paris : Dunod.

- ROBERT A. (2001), Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **21** (1.2), 57-80.
- ROBERT A. (2007), Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse, des inférences en formation, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **27** (3), 271-312.
- ROBERT A., ROGALSKI J. (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *la revue canadienne des sciences, des mathématiques et des technologies* **2** (4), 505-528.
- RODITI E. (2003), Régularité et variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement. Le cas de la multiplication des nombres décimaux en sixième, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **23** (2), 183-216.
- ROGALSKI J. (2003), Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **23** (3), 343-388.
- ROUAN O., PALLASCIO R. (1994), Conceptions probabilistes d'élèves marocains du secondaire, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **14**, (3), 393-428.
- ROUCHIER, A. (1991), *Etude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires : proportionnalité, structures itéro-récurrentes, institutionnalisation*, Thèse d'état, Université d'Orléans, UFR: Sciences Fondamentales et Appliquées.
- RUDAT R. (2007), *Modèles combinatoires implicites et résolution de problèmes en classe de 4^{ème} : une étude des effets liés à la sémantique des situations*, Thèse, Paris : Université René Descartes.
- SANCHEZ E. (2000), Investigaciones didácticas sobre el concepto de eventos independientes en probabilidad, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **20** (3), 305-330.
- SAPORTA G. (2006, 1^{ère} édition 1990), *Probabilités, analyse des données et statistique*, Paris : Technip.
- SARRAZY B. (1995), Le contrat didactique, *Revue Française de Pédagogie*, **112**, 85-118.
- SENSEVY G., MERCIER A., SCHUBAUER-LEONI M-L. (2000), Vers un modèle de l'action didactique du professeur à propos de la course à 20, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **20** (3), 263-304.
- SMIDA H. (2005), L'enseignement des mathématiques en Tunisie : Genèse et destinée, *Miftah al-Hissab* **103**, 3-27, Tunis : ATSM (Association Tunisienne des Sciences Mathématiques).

Bibliographie

STEINBRING H. (1986), L'indépendance stochastique : Un exemple de renversement du contenu intuitif d'un concept et de sa définition mathématique formelle, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **7** (3), 5-49.

STEINBRING H. (1989), La relation entre modélisations mathématiques et situations d'expérience pour le savoir probabiliste, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **2**, 191-215, IREM de Strasbourg.

THIROUIN L. (1991), *Le hasard et les règles. Le modèle du jeu dans la pensée de Pascal*, Paris : Vrin.

TRURAN K., TRURAN J. (1999), Are dice independent ? Some responses from children and adults, *PME, 23rd Conf.* **4**, 289-296.

UNESCO (1973), *Tendances nouvelles de l'enseignement de la mathématique*, Volume III, Paris : Organisation des Nations Unies pour l'éducation, la science et la culture.

VANTOUROUT M. (2004), *Etude de l'activité et des compétences de professeurs des écoles et de professeurs de mathématiques dans des situations « simulées » d'évaluation à visée formative en mathématiques*, Thèse, Paris : Université René-Descartes - Paris 5 Sorbonne.

VENTSEL H. (1973), *Théorie des probabilités*, Traduit du russe par A. Sokova, Moscou : Editions Mir.

VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **10** (2.3), 133-169.

VERGNAUD G. (2005), Repères pour une théorie psychologique de la connaissance, In Mercier A. et Margolinas C. (Ed.), *Balises en Didactique des Mathématiques*, 123-136, Grenoble : La Pensée Sauvage.

WALLIZER B. (1997), *Systèmes et modèles – Introduction critique à l'analyse de systèmes*, Paris : Editions du Seuil.

ZAKI M. (1988), *Typologie des situations probabilistes et démarches de réponse*, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **1**, 203-216, IREM de Strasbourg.

ZAKI M. (1990), *Traitement de problèmes de probabilités en situation de simulation*, Thèse, Strasbourg : irma.

Dictionnaires utilisés

- Encyclopaedia Universalis France, Corpus 15* (1996), Paris.
Encyclopaedia Universalis France, Corpus 21 (1996), Paris.
Larousse 3 volumes (1983, 1^{ère} édition 1966), Paris : Larousse.
MORVAN P. (1981), *Dictionnaire de l'informatique*, Paris : Larousse.

Programmes Officiels

- PO (1959), *Programmes Officiels de l'Enseignement Secondaire, Fascicule VII, Mathématiques*, Tunis.
PO (1963 : réédition de 1959), *Programmes Officiels de l'Enseignement Secondaire, Fascicule VII, Mathématiques*, Tunis.
PO (1966 : nouvelle édition revue et corrigée), *Programmes Officiels de l'Enseignement Secondaire, Fascicule VII, Mathématiques*, Tunis.
PO (1968), *Programmes Officiels de l'Enseignement Secondaire, Fascicule XII, Mathématiques*, Tunis.
PO (1969), *Programmes Officiels de l'Enseignement du Second cycle (Applicables à compter du 16 / 9 / 69), Fascicule N° 3, Mathématiques*, Tunis.
PO (1970), *Programmes Officiels de l'Enseignement Secondaire, Fascicule XII, Mathématiques*, Tunis.
PO (1988), *Programmes Officiels de l'Enseignement Secondaire, Mathématique*, Tunis.
PO (1993), *Programmes officiels dans les lycées secondaires, Mathématiques*, Tunis.
PO (1998), *Programmes Officiels de l'Enseignement Secondaire, Annexe XI, Mathématiques*, Tunis.
PO (2005), *Programmes de mathématiques, 1^{ère} et 2^{ème} années secondaires*, Tunis.
PO (2006a), *Programmes de mathématiques, 3^{ème} et 4^{ème} année de l'enseignement secondaire*, Tunis.
PO (2006b), *Programmes de mathématiques, étape préparatoire de l'enseignement de base*, Tunis.

Manuels

- DARGAA T., YAHIA N., HAMROUNI S., BOULAYMENE S. (2006), *Mathématiques pour la 7^{ème} année de l'enseignement de base*, Tunis : Centre National Pédagogique.
RAHMOUNI A., HABBOUBI A., SOLTANI M-T., GHARBI F. (2007), *Mathématiques pour la 8^{ème} année de l'enseignement de base*, Tunis : Centre National Pédagogique.
SMIDA H., BOUIDA R., ZBIDI S., BEN YOUNES A. (1997), *Mathématiques 7^{ème} année de l'Enseignement Secondaire Section : Économie et Gestion*, Tunis : Centre National Pédagogique.
SMIDA H., BEN YOUNES A., BOUIDA R., ZBIDI S. (2001), *Mathématiques 4^{ème} année de l'Enseignement Secondaire Section : Sciences expérimentales et Technique - Tome I*, Tunis : Centre National Pédagogique.

Annexes

Annexe 1 : Premier test diagnostic, énoncés

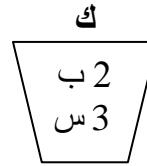
Test 1 : Énoncés, version arabe

القسم:
المدرسة:

الإسم و اللقب:
تاريخ الولادة:

الإجابة و التعليل

التمرين الأول



المعدّات: كيس ك يحتوي
على كرتين بيضاء وثلاث
كرات سوداء (2 ب - 3 س)

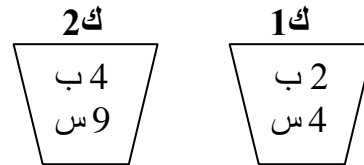
التجربة: نسحب عن طريق الصّدفّة كرّة من الكيس.

السؤال: هل لدينا حظوظ أوفر
- لسحب كرّة سوداء
أو
- لسحب كرّة بيضاء؟

الإجابة و التعليل

التمرين الثاني

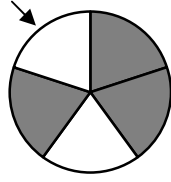
المعدّات: كيسان ك1 و ك2.



التجربة: نختار الكيس الذي نريد ثمّ نسحب منه عن
طريق الصّدفّة كرّة و نسجّل لونها.

السؤال: ما هو الكيس الذي تختار لتكون لديك أوفر
الحظوظ لسحب كرّة بيضاء؟

بالتدريبين المواليين، المعدّات مكوّنة من عجلتين 1ع و 2ع كل واحدة منهما مقسمة إلى أجزاء بيضاء و سوداء متقايسة (يختلف عدد الأجزاء من عجلة إلى أخرى).
يمثل الرسم التالي عجلة ع مقسمة إلى 5 أجزاء متقايسة :
اثنان منها بيضاء و ثلاث سوداء.

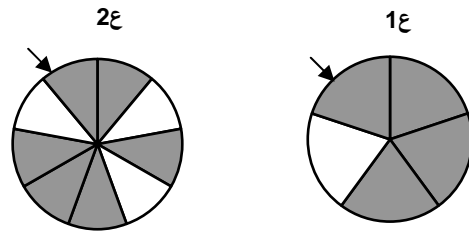


ندير العجلة و عندما تتوقف نحدّد لون الجزء المقابل للسهم.
مثلا : إذا توقفت العجلة في وضعية الرسم المصاحب فإن
"السهم يشير إلى اللون الأبيض".

الإجابة و التعليل

التمرين الثالث

المعدّات:



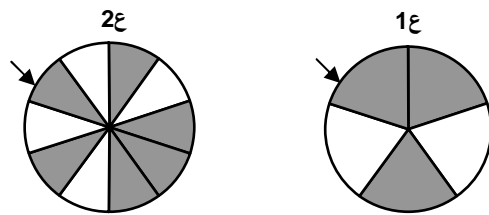
التجربة: نختار العجلة التي نريد ثم نديرها . عند
توقفها نسجل اللون المشار إليه بالسهم.

السؤال: ما هي العجلة التي تختار لتكون لديك أوفر
الحظوظ ليشير السهم إلى اللون الأبيض ؟

الإجابة و التعليل

التمرين الرابع

المعدّات:

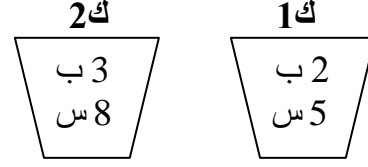


التجربة: نختار العجلة التي نريد ثم نديرها . عند
توقفها نسجل اللون المشار إليه بالسهم.

السؤال: ما هي العجلة التي تختار لتكون لديك أوفر
الحظوظ ليشير السهم إلى اللون الأبيض ؟

الإجابة و التعليلالتمرين الخامس

المعدّات: كيسان ك1 و ك2.

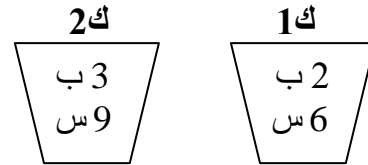


التجربة: نختار الكيس الذي نريد ثمّ نسحب منه عن طريق الصّدفّة كرّة و نسجّل لونها.

السؤال: ما هو الكيس الذي تختار لتكون لديك أوفر الحظوظ لسحب كرّة بيضاء؟

الإجابة و التعليلالتمرين السادس

المعدّات: كيسان ك1 و ك2.



التجربة: نختار الكيس الذي نريد ثمّ نسحب منه عن طريق الصّدفّة كرّة و نسجّل لونها.

السؤال: ما هو الكيس الذي تختار لتكون لديك أوفر الحظوظ لسحب كرّة بيضاء؟

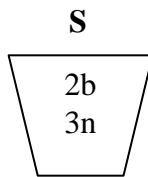
Test 1 : Énoncés, version française

Nom et Prénom :
Date de naissance :

Classe :
École Préparatoire :

EXERCICE 1

Matériel : un sac **S** contenant
2 boules blanches et 3 boules
noires (2b et 3n)



Expérience : on tire au hasard une boule du sac.

Question : a-t-on plus de chances
- de tirer une boule noire,
ou bien
- de tirer une boule blanche ?

RÉPONSE ET JUSTIFICATIONS

EXERCICE 2

Matériel : deux sacs **S1** et **S2**



*Expérience : on choisit le sac que l'on veut,
puis on tire au hasard une boule de ce sac et
on note sa couleur.*

Question : quel sac choisiriez-vous pour avoir
le plus de chances de tirer une boule blanche ?

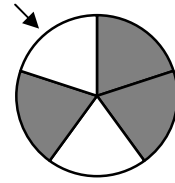
RÉPONSE ET JUSTIFICATIONS

Dans les deux exercices suivants, le matériel est constitué par deux roulettes **R1** et **R2** qui sont découpées chacune en plusieurs secteurs blancs et noirs, tous égaux (le nombre de secteurs varie d'une roulette à l'autre et d'un exercice à l'autre).

Le dessin suivant représente une roulette découpée en 5 secteurs égaux, 2 blancs et 3 noirs.

On fait tourner la roulette et quand elle s'arrête, on regarde la couleur du secteur qui se trouve à la pointe de l'aiguille.

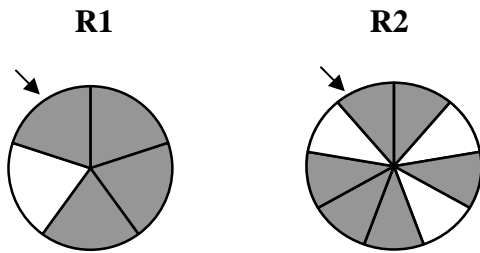
Par exemple : si la roulette s'arrête dans la position du dessin précédent, on dira que : "l'aiguille indique la couleur blanche".



EXERCICE 3

RÉPONSE ET JUSTIFICATIONS

Matériel :



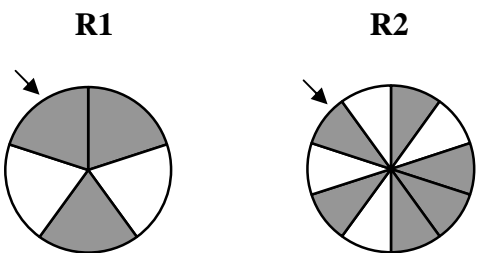
Expérience : on choisit la roulette que l'on veut, puis on fait tourner cette roulette ; quand elle s'arrête, on note la couleur indiquée par l'aiguille.

Question : quelle roulette choisiriez-vous pour avoir le plus de chances que l'aiguille indique la couleur blanche ?

EXERCICE 4

RÉPONSE ET JUSTIFICATIONS

Matériel :

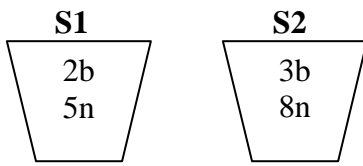


Expérience : on choisit la roulette que l'on veut, puis on fait tourner cette roulette ; quand elle s'arrête, on note la couleur indiquée par l'aiguille.

Question : quelle roulette choisiriez-vous pour avoir le plus de chances que l'aiguille indique la couleur blanche ?

EXERCICE 5

Matériel : deux sacs **S1** et **S2**



Expérience : on choisit le sac que l'on veut, puis on tire au hasard une boule de ce sac et on note sa couleur.

Question : quel sac choisiriez-vous pour avoir le plus de chances de tirer une boule blanche ?

RÉPONSE ET JUSTIFICATIONS

EXERCICE 6

Matériel : deux sacs **S1** et **S2**



Expérience : on choisit le sac que l'on veut, puis on tire au hasard une boule de ce sac et on note sa couleur.

Question : quel sac choisiriez-vous pour avoir le plus de chances de tirer une boule blanche ?

RÉPONSE ET JUSTIFICATIONS

Annexe 2 : Premier test diagnostic, types d'organisations

Groupe 1

| | Ex. 1 | Ex. 2 | Ex. 3 | Ex. 4 | Ex. 5 | Ex. 6 |
|----|----------|-----------------|--------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1 | <i>P</i> | <i>P'</i> | <i>N</i> | <i>P</i> | <i>D</i> | <i>D</i> |
| 2 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>D</i> | <i>I</i> |
| 3 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>N</i> | <i>D</i> | <i>N</i> | (<i>D, N</i>) |
| 4 | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>R</i> | <i>R</i> | <i>I</i> | <i>P-</i> |
| 5 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>P</i> | <i>D</i> | <i>D</i> | <i>D</i> |
| 6 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>A</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 7 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>G</i> | <i>N</i> | <i>I</i> |
| 8 | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>A</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 9 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>A</i> | <i>A-</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 10 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>A-</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 11 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>M</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 12 | <i>J</i> | <i>T</i> | <i>M</i> | <i>T</i> | <i>T</i> | <i>T</i> |
| 13 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 14 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>N</i> |
| 15 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 16 | <i>J</i> | (<i>D, N</i>) | <i>A</i> | (<i>G, I</i>) | <i>N</i> | (<i>N, D</i>) |
| 17 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 18 | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>M</i> | <i>M</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 19 | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>M</i> | <i>M</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 20 | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>R</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 21 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>nr</i> | <i>nr</i> |
| 22 | <i>J</i> | <i>M</i> | <i>I</i> | <i>R</i> | <i>I</i> | <i>N</i> |
| 23 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 24 | <i>J</i> | <i>I</i> | (<i>T, D, N</i>) | <i>D</i> | (<i>T, D</i>) | (<i>T, D</i>) |
| 25 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>M</i> | <i>I</i> | <i>D</i> | <i>D</i> |
| 26 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>R</i> | (<i>D, N</i>) | (<i>D, N</i>) |
| 27 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>D</i> | <i>D</i> | <i>D</i> | <i>N</i> |
| 28 | <i>J</i> | <i>N</i> | (<i>N, N</i>) | <i>N</i> | (<i>N, N</i>) | (<i>N, N</i>) |
| 29 | <i>I</i> | <i>T</i> | <i>A-</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 30 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>A</i> | <i>R</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |

Groupe 2

| | Ex. 1 | Ex. 2 | Ex. 3 | Ex. 4 | Ex. 5 | Ex. 6 |
|----|----------|----------|----------|----------------|----------|-----------|
| 1 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>R</i> | <i>(P, R)</i> | <i>D</i> | <i>I</i> |
| 2 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>R</i> | <i>R</i> | <i>D</i> | <i>I</i> |
| 3 | <i>I</i> | <i>D</i> | <i>R</i> | <i>(A, I)</i> | <i>D</i> | <i>D</i> |
| 4 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 5 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>D</i> | <i>I</i> | <i>D</i> | <i>D</i> |
| 6 | <i>J</i> | <i>M</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>M</i> |
| 7 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>D</i> |
| 8 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>R</i> | <i>R</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 9 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 10 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>D</i> | <i>N</i> |
| 11 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>M</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 12 | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>R</i> | <i>R</i> | <i>N</i> | <i>P'</i> |
| 13 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>A</i> | <i>A-</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 14 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 15 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 16 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 17 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 18 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 19 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 20 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>nr</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 21 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>N</i> |
| 22 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 23 | <i>J</i> | <i>T</i> | <i>I</i> | <i>(R, A-)</i> | <i>T</i> | <i>T</i> |
| 24 | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>T</i> | <i>T</i> |
| 25 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 26 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 27 | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>T</i> |
| 28 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 29 | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 30 | <i>I</i> | <i>M</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 31 | <i>I</i> | <i>T</i> | <i>R</i> | <i>I</i> | <i>T</i> | <i>T</i> |
| 32 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>T</i> | <i>I</i> | <i>T</i> | <i>I</i> |
| 33 | <i>J</i> | <i>T</i> | <i>M</i> | <i>M</i> | <i>T</i> | <i>T</i> |
| 34 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 35 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 36 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>R</i> | <i>R</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |

Groupe 3

| | Ex. 1 | Ex. 2 | Ex. 3 | Ex. 4 | Ex. 5 | Ex. 6 |
|----|----------|-----------|-----------------|----------------|-----------|-----------|
| 1 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>A-</i> | <i>R</i> | <i>D</i> | <i>D</i> |
| 2 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>A</i> | <i>(A, R)</i> | <i>T</i> | <i>T</i> |
| 3 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>R</i> | <i>A-</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 4 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>N</i> | <i>D</i> | <i>D</i> | <i>D</i> |
| 5 | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 6 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>(N, A)</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 7 | <i>J</i> | <i>P'</i> | <i>(R, P'-)</i> | <i>P'</i> | <i>P'</i> | <i>P'</i> |
| 8 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>D</i> | <i>D</i> |
| 9 | <i>J</i> | <i>T</i> | <i>A-</i> | <i>A-</i> | <i>T</i> | <i>N</i> |
| 10 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>(N, R)</i> | <i>R</i> | <i>D</i> | <i>D</i> |
| 11 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>R</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 12 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 13 | <i>J</i> | <i>T</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>T</i> | <i>T</i> |
| 14 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>(R, A-)</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 15 | <i>I</i> | <i>T</i> | <i>M</i> | <i>M</i> | <i>T</i> | <i>T</i> |
| 16 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>R</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 17 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 18 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>R</i> | <i>T</i> | <i>I</i> |
| 19 | <i>J</i> | <i>T</i> | <i>M</i> | <i>M</i> | <i>T</i> | <i>T</i> |
| 20 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 21 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 22 | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 23 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>R</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 24 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 25 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>R</i> | <i>N</i> | <i>D</i> |

Groupe 4

| | Ex. 1 | Ex. 2 | Ex. 3 | Ex. 4 | Ex. 5 | Ex. 6 |
|----|----------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 1 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>I</i> | (<i>A-</i> , <i>R</i>) | <i>D</i> | <i>D</i> |
| 2 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>N</i> | <i>A-</i> | <i>D</i> | <i>D</i> |
| 3 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>I</i> | <i>M</i> | <i>D</i> | <i>D</i> |
| 4 | <i>J</i> | (<i>N</i> , <i>P</i>) | (<i>N</i> , <i>P</i>) | <i>P</i> | <i>N</i> | (<i>N</i> , <i>D</i>) |
| 5 | <i>I</i> | <i>T</i> | <i>N</i> | <i>R</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 6 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>A-</i> | <i>D</i> | <i>D</i> |
| 7 | <i>J</i> | <i>P'</i> | <i>R</i> | <i>R</i> | <i>P'</i> | <i>N</i> |
| 8 | <i>J</i> | <i>G</i> | <i>P</i> | <i>P</i> | <i>I</i> | <i>P'</i> |
| 9 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 10 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>A-</i> | <i>R</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 11 | <i>J</i> | <i>P</i> | <i>P</i> | (<i>P</i> , <i>R</i>) | <i>D</i> | <i>D</i> |
| 12 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>R</i> | <i>R</i> | (<i>N</i> , <i>D</i>) | (<i>N</i> , <i>D</i>) |
| 13 | <i>J</i> | <i>T</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 14 | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>A-</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 15 | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>T</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 16 | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>A-</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 17 | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 18 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>R</i> | <i>D</i> | <i>N</i> |
| 19 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>A-</i> | <i>D</i> | <i>D</i> |
| 20 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>R</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 21 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>A</i> | <i>A-</i> | <i>N</i> | <i>I</i> |
| 22 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>M</i> | <i>M</i> | (<i>N</i> , <i>D</i>) | (<i>N</i> , <i>D</i>) |
| 23 | <i>J</i> | <i>T</i> | <i>N</i> | <i>R</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 24 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 25 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 26 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>R</i> | <i>R</i> | <i>T</i> | <i>D</i> |
| 27 | <i>J</i> | <i>G</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 28 | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 29 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N-</i> | (<i>A</i> , <i>R</i>) | <i>N</i> | <i>I</i> |
| 30 | <i>J</i> | <i>T</i> | <i>A-</i> | <i>M</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 31 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 32 | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>I</i> |
| 33 | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>A-</i> | <i>A-</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 34 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>M</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 35 | <i>I</i> | <i>M</i> | <i>R</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 36 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 37 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>A</i> | <i>R</i> | <i>M</i> | <i>I</i> |
| 38 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>M</i> | <i>M</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 39 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>A</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 40 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 41 | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |

Groupe 5

| | Ex. 1 | Ex. 2 | Ex. 3 | Ex. 4 | Ex. 5 | Ex. 6 |
|----|----------|-----------|---------------|-------------------|---------------|-----------------|
| 1 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>D</i> | <i>D</i> |
| 2 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>N</i> | <i>R</i> | <i>D</i> | <i>nr</i> |
| 3 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>R</i> | <i>(P', R, P)</i> | <i>D</i> | <i>D</i> |
| 4 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>P-</i> | <i>P-</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 5 | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 6 | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>A-</i> | <i>A-</i> | <i>I</i> | <i>N</i> |
| 7 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>T</i> | <i>T</i> |
| 8 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>R</i> | <i>R</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 9 | <i>I</i> | <i>nr</i> | <i>nr</i> | <i>nr</i> | <i>nr</i> | <i>nr</i> |
| 10 | <i>I</i> | <i>T</i> | <i>T</i> | <i>I</i> | <i>T</i> | <i>T</i> |
| 11 | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 12 | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>D</i> | <i>(D, P'-)</i> |
| 13 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>(N, R)</i> | <i>(N, R)</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 14 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>M</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 15 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>N</i> | <i>G</i> | <i>D</i> | <i>D</i> |
| 16 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 17 | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>nr</i> | <i>nr</i> | <i>nr</i> | <i>nr</i> |
| 18 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>M</i> | <i>M</i> | <i>T</i> | <i>I</i> |
| 19 | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 20 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 21 | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 22 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>N</i> | <i>R</i> | <i>I</i> | <i>nr</i> |
| 23 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>M</i> | <i>M</i> | <i>T</i> | <i>T</i> |
| 24 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>M</i> | <i>M</i> | <i>(N, D)</i> | <i>(N, D)</i> |
| 25 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 26 | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 27 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>(N, R)</i> | <i>(T, R)</i> | <i>nr</i> | <i>nr</i> |
| 28 | <i>I</i> | <i>T</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |

Groupe 6

| | Ex. 1 | Ex. 2 | Ex. 3 | Ex. 4 | Ex. 5 | Ex. 6 |
|----|----------|-----------------|----------|-----------------|-----------|-----------|
| 1 | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>P'</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 2 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>R</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 3 | <i>J</i> | <i>T</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>T</i> | <i>T</i> |
| 4 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>R</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 5 | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>A</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 6 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>D</i> |
| 7 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>R</i> | <i>T</i> | <i>T</i> |
| 8 | <i>J</i> | (<i>N, D</i>) | <i>N</i> | (<i>N, R</i>) | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 9 | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>R</i> | <i>A-</i> | <i>I</i> | <i>M</i> |
| 10 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>R</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 11 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>R</i> | <i>R</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 12 | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | (<i>N, R</i>) | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 13 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 14 | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 15 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>R</i> | <i>D</i> | <i>D</i> |
| 16 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 17 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 18 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>A</i> | <i>A-</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 19 | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>A</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 20 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>R</i> | <i>D</i> | <i>D</i> |
| 21 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>T</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 22 | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 23 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 24 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>R</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 25 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>T</i> | <i>T</i> |
| 26 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 27 | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>A-</i> | <i>nr</i> | <i>nr</i> |
| 28 | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>N</i> |
| 29 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>R</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 30 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>nr</i> | <i>nr</i> | <i>nr</i> |

Groupe 7

| | Ex. 1 | Ex. 2 | Ex. 3 | Ex. 4 | Ex. 5 | Ex. 6 |
|----|----------|---------------|---------------|----------------|---------------|---------------|
| 1 | <i>J</i> | <i>(T, D)</i> | <i>(T, R)</i> | <i>(A, R)</i> | <i>T</i> | <i>T</i> |
| 2 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>R</i> | <i>R</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 3 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>D</i> |
| 4 | <i>J</i> | <i>T</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>D</i> | <i>D</i> |
| 5 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>(M, A)</i> | <i>(A, N)</i> | <i>D</i> | <i>N</i> |
| 6 | <i>J</i> | <i>T</i> | <i>N-</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 7 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>M</i> | <i>M</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 8 | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 9 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>(A, R)</i> | <i>R</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 10 | <i>J</i> | <i>P'</i> | <i>P</i> | <i>P</i> | <i>P'</i> | <i>P'</i> |
| 11 | <i>I</i> | <i>D</i> | <i>R</i> | <i>N</i> | <i>D</i> | <i>D</i> |
| 12 | <i>J</i> | <i>T</i> | <i>R</i> | <i>I</i> | <i>T</i> | <i>D</i> |
| 13 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>R</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 14 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 15 | <i>I</i> | <i>T</i> | <i>M</i> | <i>M</i> | <i>T</i> | <i>T</i> |
| 16 | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 17 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>(N, A)</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 18 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>M</i> | <i>M</i> | <i>I</i> | <i>N</i> |
| 19 | <i>I</i> | <i>(T, M)</i> | <i>R</i> | <i>R</i> | <i>(T, M)</i> | <i>(T, M)</i> |
| 20 | <i>J</i> | <i>T</i> | <i>I</i> | <i>T</i> | <i>T</i> | <i>T</i> |
| 21 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>P'</i> | <i>(A-, R)</i> | <i>D</i> | <i>D</i> |
| 22 | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>T</i> | <i>T</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 23 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 24 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>A</i> | <i>A</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 25 | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>M</i> | <i>M</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 26 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>(N, T)</i> |
| 27 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>(M, N)</i> | <i>(M, R)</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 28 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>A</i> | <i>R</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 29 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 30 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>R</i> | <i>R</i> | <i>D</i> | <i>M</i> |

Groupe 8

| | Ex. 1 | Ex. 2 | Ex. 3 | Ex. 4 | Ex. 5 | Ex. 6 |
|----|-----------|-----------|------------------|------------|-----------|------------------|
| 1 | <i>J</i> | <i>T</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>N</i> |
| 2 | <i>I</i> | <i>T</i> | <i>P-</i> | <i>P'-</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 3 | <i>nr</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>T</i> | <i>T</i> |
| 4 | <i>I</i> | <i>P'</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 5 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 6 | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 7 | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N-</i> | <i>N</i> | <i>I</i> |
| 8 | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 9 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>M</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 10 | <i>J</i> | <i>P'</i> | <i>R</i> | <i>R</i> | <i>D</i> | <i>D</i> |
| 11 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>D</i> | <i>D</i> |
| 12 | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>R</i> | <i>M</i> | <i>T</i> | <i>T</i> |
| 13 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>D</i> | <i>D</i> |
| 14 | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>R</i> | <i>N</i> | <i>I</i> |
| 15 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | (<i>N, N-</i>) |
| 16 | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 17 | <i>I</i> | <i>T</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 18 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>M</i> | <i>R</i> | <i>N</i> | <i>I</i> |
| 19 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 20 | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>R</i> | <i>I</i> | <i>N</i> |
| 21 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>R</i> | <i>R</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 22 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>P</i> | <i>T</i> | <i>I</i> |
| 23 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 24 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 25 | <i>J</i> | <i>N</i> | (<i>M, A-</i>) | <i>M</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 26 | <i>J</i> | <i>N</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>T</i> | <i>T</i> |
| 27 | <i>J</i> | <i>T</i> | <i>N</i> | <i>N</i> | <i>T</i> | <i>N</i> |
| 28 | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |
| 29 | <i>J</i> | <i>D</i> | <i>R</i> | <i>I</i> | <i>T</i> | <i>T</i> |
| 30 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>N</i> | <i>nr</i> | <i>N</i> | <i>N</i> |
| 31 | <i>J</i> | <i>T</i> | <i>M</i> | <i>M</i> | <i>N</i> | <i>I</i> |
| 32 | <i>J</i> | <i>T</i> | <i>R</i> | <i>I</i> | <i>T</i> | <i>T</i> |
| 33 | <i>J</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>N-</i> | <i>N</i> |
| 34 | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> |

Annexe 3 : Deuxième test diagnostic, énoncés

Test 2 : Énoncés, version arabe

القسم:
المدرسة:

الإسم و اللقب:
تاريخ الولادة:

المعدّات

في كل التمارين، تتكوّن المعدّات من كيسين ك1 و ك2.
يحتوي كلّ كيس على عدد من الكرات : كرات بيضاء (ب) و كرات سوداء (س).
ملاحظة : في التمرين السادس، محتوى الكيس ك1 مجهول.

التجربة

يختار علي أحد الكيسين ويسحب منه - عن طريق الصّدفّة - عدّة مرّات على التّحو التالي :
- يخلط الكرات و دون أن يرى داخل الكيس يسحب كرة،
- يُدوّن لونها ثم يعيدها داخل الكيس،
- يكرر نفس العملية عدّة مرّات.

تقديم التمارين

في كل تمرين، نمُدكم بمحتوى الكيسين و عدد مرات السحب و النتيجة ثم نطرح عليكم سؤالا حول الكيس الذي استعمله علي.
المطلوب منكم هو الإجابة والتعليل.

التمرين الأول

محتوى الكيسين :

ك1

ب 2
س 1

ك2

س 3

عدد مرات السحب : 6
 النتيجة : 3 ب - 3 س (ثلاث كرات بيضاء وثلاث
 كرات سوداء)
 السؤال : ما هو الكيس الذي استعمله علي؟
 ضع علامة في المربع الذي تختار و علل جوابك.

| | | | | |
|-------------|--------------|-----------------------|--------------|-------------|
| بالضرورة ك1 | المرجح هو ك1 | لا داعي لتفضيل أي كيس | المرجح هو ك2 | بالضرورة ك2 |
|-------------|--------------|-----------------------|--------------|-------------|

التعليل

التمرين الثاني

محتوى الكيسين :

ك1

ب 1
س 3

ك2

ب 3
س 1

عدد مرات السحب : 6
 النتيجة : 2 ب - 4 س
 السؤال : ما هو الكيس الذي استعمله علي؟
 ضع علامة في المربع الذي تختار و علل جوابك.

| | | | | |
|-------------|--------------|-----------------------|--------------|-------------|
| بالضرورة ك1 | المرجح هو ك1 | لا داعي لتفضيل أي كيس | المرجح هو ك2 | بالضرورة ك2 |
|-------------|--------------|-----------------------|--------------|-------------|

التعليل

التمرين الثالث

محتوى الكيسين :

ك1

ب 2
س 3

ك2

ب 4
س 6

عدد مرات السحب : 10

النتيجة : 3 ب - 7 س

السؤال : ما هو الكيس الذي استعمله علي؟
ضع علامة في المربع الذي تختار و علل جوابك.

| | | | | |
|----------------|--------------|-----------------------|--------------|-------------|
| بالضرورة ك2 | المرجح هو ك2 | لا داعي لتفضيل أي كيس | المرجح هو ك1 | بالضرورة ك1 |
| <u>التعليل</u> | | | | |

التمرين الرابع

محتوى الكيسين :

ك1

ب 3
س 2

ك2

ب 2
س 3

عدد مرات السحب : 10

النتيجة : 4 ب - 6 س

السؤال : ما هو الكيس الذي استعمله علي؟
ضع علامة في المربع الذي تختار و علل جوابك.

| | | | | |
|----------------|--------------|-----------------------|--------------|-------------|
| بالضرورة ك2 | المرجح هو ك2 | لا داعي لتفضيل أي كيس | المرجح هو ك1 | بالضرورة ك1 |
| <u>التعليل</u> | | | | |

التمرين الخامس

محتوى الكيسين :

ك1

ب 1
س 4

ك2

ب 4
س 6

عدد مرات السحب : 100

النتيجة : 25 ب - 75 س

السؤال : ما هو الكيس الذي استعمله علي؟
ضع علامة في المربع الذي تختار و علل جوابك.

| | | | | |
|-------------|--------------|-----------------------|--------------|-------------|
| بالضرورة ك2 | المرجح هو ك2 | لا داعي لتفضيل أي كيس | المرجح هو ك1 | بالضرورة ك1 |
|-------------|--------------|-----------------------|--------------|-------------|

التعليل**التمرين السادس**

محتوى الكيسين :

ك1

المحتوى
مجهول

ك2

ب 3
س 1

عدد مرات السحب : 6

النتيجة : 2 ب - 4 س

السؤال : ما هو الكيس الذي استعمله علي؟
ضع علامة في المربع الذي تختار و علل جوابك.

| | | | | |
|-------------|--------------|-----------------------|--------------|-------------|
| بالضرورة ك2 | المرجح هو ك2 | لا داعي لتفضيل أي كيس | المرجح هو ك1 | بالضرورة ك1 |
|-------------|--------------|-----------------------|--------------|-------------|

التعليل

Test 2 : Énoncés, version française

Nom et Prénom :
Date de naissance :

Classe :
École Préparatoire :

Matériel

Dans tous les exercices, le matériel est constitué par deux sacs **S1** et **S2**.
Chaque sac contient un certain nombre de boules : des boules blanches (b) et/ou des boules noires (n).
Remarque : dans l'exercice 6, le contenu du sac **S1** est inconnu.

Expérience

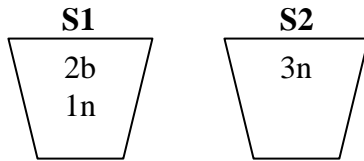
Ali a pris l'un des deux sacs et y a effectué plusieurs tirages de la façon suivante :
Il mélange les boules, tire une boule sans regarder dans le sac, note sa couleur puis la remet dans le sac.
Il refait la même chose plusieurs fois.

Présentation des exercices

Dans chacun des exercices suivants, on vous donne la composition des deux sacs, le nombre et le résultat des tirages effectués et on vous pose une question à propos du sac utilisé par Ali. On vous demande de répondre à la question et de justifier votre réponse.

EXERCICE 1

Composition des sacs :



Nombre de tirages : 6

Le résultat des tirages : 3b et 3n

Question : quel sac Ali a-t-il pris ?

Mettez une croix dans la case de votre choix et justifiez votre réponse.

| | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-----------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| forcément le sac S1 | plutôt le sac S1 | pas de raison de préférer l'un des sacs | plutôt le sac S2 | forcément le sac S2 |

JUSTIFICATION :

EXERCICE 2

Composition des sacs :



Nombre de tirages : 6

Le résultat des tirages : 2b et 4n

Question : quel sac Ali a-t-il pris ?

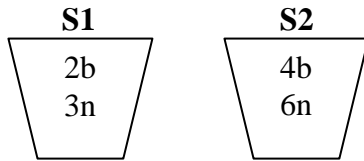
Mettez une croix dans la case de votre choix et justifiez votre réponse.

| | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-----------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| forcément le sac S1 | plutôt le sac S1 | pas de raison de préférer l'un des sacs | plutôt le sac S2 | forcément le sac S2 |

JUSTIFICATION :

EXERCICE 3

Composition des sacs :



Nombre de tirages : 10

Le résultat des tirages : 3b et 7n

Question : quel sac Ali a-t-il pris ?

Mettez une croix dans la case de votre choix et justifiez votre réponse.

| | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-----------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| forcément le sac S1 | plutôt le sac S1 | pas de raison de préférer l'un des sacs | plutôt le sac S2 | forcément le sac S2 |

JUSTIFICATION :

EXERCICE 4

Composition des sacs :



Nombre de tirages : 10

Le résultat des tirages : 4b et 6n

Question : quel sac Ali a-t-il pris ?

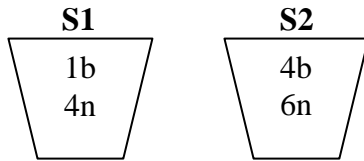
Mettez une croix dans la case de votre choix et justifiez votre réponse.

| | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-----------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| forcément le sac S1 | plutôt le sac S1 | pas de raison de préférer l'un des sacs | plutôt le sac S2 | forcément le sac S2 |

JUSTIFICATION :

EXERCICE 5

Composition des sacs :



Nombre de tirages : 100

Le résultat des tirages : 25b et 75n

Question : quel sac Ali a-t-il pris ?

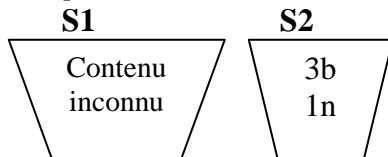
Mettez une croix dans la case de votre choix et justifiez votre réponse.

| | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-----------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| forcément le sac S1 | plutôt le sac S1 | pas de raison de préférer l'un des sacs | plutôt le sac S2 | forcément le sac S2 |

JUSTIFICATION :

EXERCICE 6

Composition des sacs :



Nombre de tirages : 6

Le résultat des tirages : 2b et 4n

Question : quel sac Ali a-t-il pris ?

Mettez une croix dans la case de votre choix et justifiez votre réponse.

| | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-----------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| forcément le sac S1 | plutôt le sac S1 | pas de raison de préférer l'un des sacs | plutôt le sac S2 | forcément le sac S2 |

JUSTIFICATION :

Annexe 4 : Deuxième test diagnostic, types d'organisations

| | Ex. 1 | Ex. 2 | Ex. 3 | Ex. 4 | Ex. 5 | Ex. 6 |
|----|-------|--------|--------|--------|-----------|------------|
| 1 | 2/CP | 4/I | 3/I | 4/I | 3/I | 4/Ix |
| 2 | 1/CP | 2/I | 4/I | 4/NN | 3/I | 2/NN |
| 3 | 2/CP | 3/I | 3/I | 3/I | 4/NN | 4/Ix |
| 4 | 2/- | 3/T | 2/I | 3/I | 3/- | 4/Ix |
| 5 | 1/CP | 2/NN | 2/NN | 2/NN | 3/NN | 2/NN |
| 6 | 1/CP | 2/NN | 4/NN | 4/NN | 3/(I, NN) | 2/NN |
| 7 | 1/CP | 3/I | 3/I | 3/I | 3/I | 2/Ix |
| 8 | 1/I | 4/I | 2/I | 5/I | 3/I | 3/I |
| 9 | 2/CP | 3/T | 3/I | 3/T | 1/I | 4/Ix |
| 10 | 2/I | 2/I | 4/T= | 2/NN | 4/T | 3/Ir |
| 11 | 1/I | 5/I | 3/I | 5/I | - | - |
| 12 | 1/CP | 2/- | 4/- | 3/- | 4/- | 2/- |
| 13 | 1/CP | 3/CP | 5/NN | 4/NN | 3/NN | 5/Ix |
| 14 | 1/CP | 2/NN | 4/NN | 4/NN | 4/NN | 3/Ix |
| 15 | 1/CP | 2/NN | 4/T | 3/CP | 4/T | 4/CP |
| 16 | 1/CP | 1/NN | 3/NN | 5/I | 5/(T, NN) | 3/Ix |
| 17 | 1/CP | 1/NN | 4/T | 4/NN | 5/T | 2/Ix |
| 18 | 1/CP | 3/CP | 4/T | 4/PP | 3/I | 3/(CP, Ix) |
| 19 | 1/CP | 2/NN | 3/NN | 4/NN | - | - |
| 20 | 1/CP | 3/I | 4/T= | 3/I | 2/I | 4/Ix |
| 21 | 1/CP | 2/NN | 4/T | 4/NN | 4/T | 2/Ix |
| 22 | 1/CP | 3/T | 5/T | 3/T | 5/T | 5/Ix |
| 23 | 1/CP | 3/CP | 5/NN | 3/- | 5/- | 5/Ix |
| 24 | 2/I | 2/NN | 4/NN | 4/NN | 2/(NN, D) | 4/Ix |
| 25 | 1/CP | 2/NN | 3/PP | 2/NN | 2/I | 4/Ix |
| 26 | 1/CP | 3/T | 4/T | 3/T | - | - |
| 27 | 1/CP | 2/I | 2/I | 4/I | 4/I | 2/Ix |
| 28 | 12/CP | 234/CP | 234/CP | 234/CP | - | - |
| 29 | 1/CP | 2/NN | 4/T | 3/T | 4/NN | 4/Ix |
| 30 | 1/CP | 5/I | 2/NN | 1/NN | 3/I | 3/Ix |
| 31 | 1/CP | 3/T | 4/I | 3/T | 3/I | 2/Ix |
| 32 | 1/I | 5/I | 3/I | 1/I | 2/NN | 1/I |
| 33 | 1/CP | 3/I | 3/I | 3/I | 3/I | 5/I |
| 34 | 1/CP | 1/NN | 4/NN | 4/- | - | - |
| 35 | 1/CP | 1/NN | 4/NN | 4/NN | - | - |

Annexes

| | Ex. 1 | Ex. 2 | Ex. 3 | Ex. 4 | Ex. 5 | Ex. 6 |
|----|------------|-------|-----------|-------|-------|-------|
| 36 | 1/(PP, CP) | 2/NN | 3/PP | 5/NN | 4/PP | 3/Ix |
| 37 | 1/CP | 2/NN | 3/PP | 5/PP | 2/PP | 5/Ix |
| 38 | 1/- | 3/T | 5/D | 3/T | 2/D | 4/Ix |
| 39 | 1/CP | 2/PP | 3/PP | 4/NN | 3/PP | 2/NN |
| 40 | 1/CP | 3/NN | 4/NN | 3/- | - | - |
| 41 | 1/CP | 2/PP | 4/- | 2/I | - | - |
| 42 | 1/CP | 2/PP | 2/PP | 4/PP | 2/PP | 3/Ix |
| 43 | 1/CP | 2/NN | 4/NN | 4/NN | 4/NN | 2/Ix |
| 44 | 1/I | 3/I | 4/NN | 3/I | 5/T | 2/Ix |
| 45 | 1/I | 3/I | 5/T | 3/- | 4/NN | 5/Ix |
| 46 | 2/I | 2/I | 4/I | 5/I | 2/I | 2/I |
| 47 | 2/b | 3/T | 1/T | 3/T | 4/D | 4/Ix |
| 48 | 1/CP | 3/T | 1/T | 3/T | 3/I | 4/Ix |
| 49 | 2/I | 1/NN | 3/I | 3/I | 3/I | 2/NN |
| 50 | 1/I | 1/I | - | - | 5/I | 3/- |
| 51 | 12/CP | 3/I | 345/I | 3/I | 45/I | 12/I |
| 52 | 1/CP | 3/I | 3/NN | 3/CP | 1/D | 3/Ix |
| 53 | 1/I | 3/I | 5/T | 3/T | 5/T | 3/Ix |
| 54 | 2/CP | 4/I | 4/I | 3/I | 3/I | 3/Ix |
| 55 | 1/CP | 3/CP | 3/CP | 3/CP | 3/CP | 4/Ix |
| 56 | 1/CP | 2/NN | 4/(NN, D) | 4/NN | 5/T | - |
| 57 | 1/CP | 3/T | 4/I | 2/I | 4/T | 2/Ix |
| 58 | 12/CP | 2/NN | 4/NN | 4/NN | 4/NN | 3/Ix |
| 59 | 2/CP | 3/I | 1/i | - | - | - |
| 60 | 1/CP | 2/NN | 4/NN | 4/NN | 4/NN | 3/Ix |
| 61 | 1/CP | 3/I | 3/I | 3/I | 3/I | 4/I |
| 62 | 1/I | 3/I | 1/I | 1/- | 2/T | 1/Ix |
| 63 | 1/CP | 2/I | 4/NN | 4/NN | 3/I | 5/Ix |
| 64 | 1/CP | 3/T | 5/T | 3/T | 5/T | 5/Ix |
| 65 | 1/CP | 5/I | 3/I | - | 5/T | 4/Ix |
| 66 | 1/CP | 3/CP | - | - | 2/D | 3/Ix |

Annexes

| | Ex. 1 | Ex. 2 | Ex. 3 | Ex. 4 | Ex. 5 | Ex. 6 |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 67 | 1/CP | 2/NN | 3/I | 4/PP | 4/I | 3/Ix |
| 68 | 1/CP | 2/I | 4/T | - | 5/- | 3/I |
| 69 | 1/CP | 1/NN | 5/NN | 3/T | 2/NN | 0/Ix |
| 70 | 1/I | 1/I | 5/I | 3/T | 5/T | 2/Ir |
| 71 | 1/I | 1/NN | 4/I | 3/T | 5/T | 1/Ix |
| 72 | 1/CP | 2/- | 2/I | 4/- | 1/I | 3/I |
| 73 | 1/CP | 45/I | 45/I | 12/I | 45/I | 45/I |
| 74 | 1/CP | 3/T | 4/I | 3/T | 2/NN | 3/Ix |
| 75 | 1/CP | 2/NN | 3/PP | 4/NN | 2/PP | 5/Ix |
| 76 | 1/CP | 1/NN | 5/NN | 4/NN | 5/NN | 3/Ix |
| 77 | 1/CP | 4/NN | 4/I | 2/NN | 4/T | 0/I |
| 78 | 1/CP | 3/T | 5/T | 3/T | 5/I | 3/Ix |
| 79 | 1/CP | 1/I | 5/I | 5/PP | 5/T | 3/Ix |
| 80 | 1/CP | 3/T | 5/NN | 3/T | 5/NN | 2/NN |
| 81 | 1/CP | 1/NN | 4/NN | 3/I | 5/NN | 5/Ix |
| 82 | 1/CP | 1/NN | 3/NN | 5/NN | 5/NN | 3/Ix |
| 83 | 1/CP | 2/I | 4/D | 3/D | 1/D | 3/Ix |
| 84 | 1/I | 3/I | 5/P | 3/P | 4/P | 2/NN |
| 85 | 1/CP | 2/NN | 5/NN | 24/I | 5/NN | 2/Ix |
| 86 | 1/I | 3/tr | 4/I | 3/I | 5/I | 3/Ir |
| 87 | 1/I | 3/I | 1/I | 4/I | 5/I | 3/I |
| 88 | 1/CP | 1/I | 5/T | 5/NN | 5/NN | 5/Ix |
| 89 | 2/CP | 2/NN | 4/I | 4/I | 2/NN | 4/Ix |
| 90 | 1/I | 45/I | 12/I | 12/I | 45/I | 12/I |
| 91 | 1/CP | 3/I | 4/I | 3/T | 4/NN | 4/I |
| 92 | 1/I | 1/I | 3/I | 3/I | 3/I | 3/I |
| 93 | 1/CP | 3/CP | 4/T | 3/T | 5/T | 4/Ix |
| 94 | 1/CP | 3/CP | 3/CP | 3/CP | - | - |

Annexe 5 : Troisième test diagnostic, énoncés

Test 3 : Énoncés, version arabe

(A)

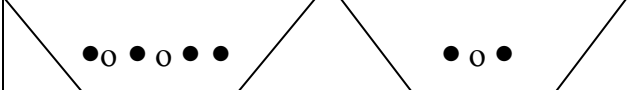

القسم:

المدرسة:

الإسم و اللقب:

تاريخ الولادة:

نسحب عن طريق الصدفة يعني أن السحب يتم دون أن نرى داخل الكيس و بعد خلط الكرات.
نرمي قرصا عن طريق الصدفة يعني أن الرمية تتم دون أن نرى أوجه القرص.

| الإجابة | التمرين الأول |
|---------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| | <p>المعدّات: كيس ك1 يحتوي على كرة بيضاء و كرتين سوداء (1 ب-2 س) و كيس ك2 يحتوي على كرتين بيضاء و 4 كرات سوداء (2 ب-4 س).</p> <p>ك1 ك2</p>  <p>السؤال: ما هو الكيس الذي تختار لتكون لديك أوفر الحظوظ لسحب كرة بيضاء؟ (يكون السحب عن طريق الصدفة)</p> |
| الإجابة | <p>المعدّات: كيس ك1 يحتوي على كرة بيضاء و كرتين سوداء (1 ب-2 س) و كيس ك2 يحتوي على كرتين بيضاء و 3 كرات سوداء (2 ب-3 س).</p> <p>ك1 ك2</p>  <p>السؤال: ما هو الكيس الذي تختار لتكون لديك أوفر الحظوظ لسحب كرة بيضاء؟ (يكون السحب عن طريق الصدفة)</p> |
| الإجابة | <p>المعدّات: كيس ك يحتوي على 3 أقراص دائرية متوازنة: قرص يحمل الرقم 1 و قرص يحمل الرقم 2 و قرص يحمل الرقم 3.</p> <p>التجربة: نسحب عن طريق الصدفة قرصا من الكيس.</p> <p>السؤال: هل لدينا حظوظ أوفر لسحب رقم فردي أو لسحب رقم زوجي؟</p> |

| | |
|---------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| الإجابة | <p><u>التمرين الرابع</u></p> <p>المعدّات: كيس ك يحتوي على 3 أقراص دائرية متوازنة: قرص يحمل الرقم 1 و قرص يحمل الرقم 2 و قرص يحمل الرقم 3.</p> <p>التجربة: نسحب عن طريق الصدفة-4 مرّات متتالية- قرصا من الكيس ؛ مع إعادة القرص داخل الكيس بعد كل سحب. نحصل هكذا على عدد مكون من 4 أرقام:</p> <ul style="list-style-type: none"> - السحب الأول يعطينا رقم الألاف ؛ - السحب الثاني يعطينا رقم المئات ؛ - السحب الثالث يعطينا رقم العشرات ؛ - السحب الرابع يعطينا رقم الأحاد. <p>السؤال: هل لدينا حظوظ أوفر لسحب عدد فردي أو لسحب عدد زوجي؟</p> |
| الإجابة | <p><u>التمرين الخامس</u></p> <p>المعدّات: قرص دائري متوازن يحمل العلامة \times على أحد الوجهين و العلامة \circ على الوجه الآخر.</p> <p>التجربة: نرمي القرص 1000 مرة متتالية -عن طريق الصدفة-</p> <p>السؤال: على كم من \times سنحصل تقريبا؟</p> |
| الإجابة | <p><u>التمرين السادس</u></p> <p>المعدّات: كيس ك يحتوي على كرتين بيضاء و3 كرات سوداء (2 ب-3 س):</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>التجربة: نسحب عن طريق الصدفة- 1000 مرة متتالية- كرة من الكيس ؛ مع إعادة الكرة داخل الكيس بعد كل سحب.</p> <p>السؤال: على كم من كرة بيضاء سنحصل تقريبا؟</p> |

| | |
|---------|----------------|
| الإجابة | التمرين الرابع |
| الإجابة | التمرين الخامس |
| الإجابة | التمرين السادس |

المعدّات: كيس ك يحتوي على 3 أقراص دائرية متوازنة: قرص يحمل الرقم 1 و قرص يحمل الرقم 2 و قرص يحمل الرقم 3.

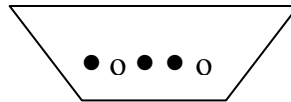
التجربة: نسحب عن طريق الصدفة-4 مرّات متتالية- قرصا من الكيس ؛ مع إعادة القرص داخل الكيس بعد كل سحب. نحصل هكذا على عدد مكون من 4 أرقام:
 - السحب الأول يعطينا رقم الألاف ؛
 - السحب الثاني يعطينا رقم المئات ؛
 - السحب الثالث يعطينا رقم العشرات ؛
 - السحب الرابع يعطينا رقم الأحاد.

السؤال: هل لدينا حظوظ أوفر لسحب عدد فردي أو لسحب عدد زوجي؟

المعدّات: قرص دائري يحمل العلامة \times على أحد الوجهين و العلامة 0 على الوجه الآخر.
 التجربة: رمينا القرص 1000 مرة متتالية - عن طريق الصدفة- فحصلنا 900 مرة على العلامة \times و 100 مرة على العلامة 0 .

السؤال: هل تظن أن القرص متوازن؟

المعدّات: كيس ك يحتوي على كرتين بيضاء و 3 كرات سوداء (2 ب-3 س):



التجربة: نسحب عن طريق الصدفة- 1000 مرة متتالية- كرة من الكيس ؛ مع إعادة الكرة داخل الكيس بعد كل سحب.

السؤال: على كم من كرة بيضاء سنحصل تقريبا؟

(C)

القسم:
المدرسة:

الإسم و اللقب:
تاريخ الولادة:

نسحب عن طريق الصدفة يعني أن السحب يتم دون أن نرى داخل الكيس و بعد خلط الكرات .
نرمي قرصا عن طريق الصدفة يعني أن الرمية تتم دون أن نرى أوجه القرص.

الإجابة والتعليق

التمرين الأول

المعدات: كيس ك1 يحتوي على كرة بيضاء و كرتين سوداء (1 ب-2 س) و كيس ك2 يحتوي على كرتين بيضاء و 4 كرات سوداء (2 ب-4 س).

ك2

ك1



السؤال: ما هو الكيس الذي تختار لتكون لديك أوفر الحظوظ لسحب كرة بيضاء؟
(يكون السحب عن طريق الصدفة)

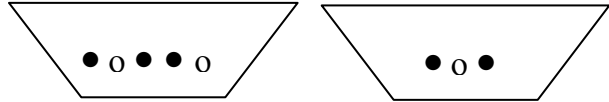
الإجابة والتعليق

التمرين الثاني

المعدات: كيس ك1 يحتوي على كرة بيضاء و كرتين سوداء (1 ب-2 س) و كيس ك2 يحتوي على كرتين بيضاء و 3 كرات سوداء (2 ب-3 س).

ك2

ك1



السؤال: ما هو الكيس الذي تختار لتكون لديك أوفر الحظوظ لسحب كرة بيضاء؟
(يكون السحب عن طريق الصدفة)

الإجابة والتعليق

التمرين الثالث

المعدات: كيس ك يحتوي على 3 أقراص دائرية متوازنة: قرص يحمل الرقم 1 و قرص يحمل الرقم 2 و قرص يحمل الرقم 3.

التجربة: نسحب عن طريق الصدفة قرصا من الكيس.

السؤال: هل لدينا حظوظ أوفر لسحب رقم فردي أو لسحب رقم زوجي؟

| | |
|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><u>الإجابة والتعليل</u></p> | <p><u>التمرين الرابع</u></p> <p>المعدّات: كيس ك يحتوي على 3 أقراص دائرية متوازنة: قرص يحمل الرقم 1 و قرص يحمل الرقم 2 و قرص يحمل الرقم 3.</p> <p>التجربة: نسحب عن طريق الصدفة-4 مرّات متتالية- قرصا من الكيس ؛ مع إعادة القرص داخل الكيس بعد كل سحب. نحصل هكذا على عدد مكون من 4 أرقام:</p> <ul style="list-style-type: none"> - السحب الأول يعطينا رقم الألاف ؛ - السحب الثاني يعطينا رقم المئات ؛ - السحب الثالث يعطينا رقم العشرات ؛ - السحب الرابع يعطينا رقم الأحاد. <p>السؤال: هل لدينا حظوظ أوفر لسحب عدد فردي أو لسحب عدد زوجي؟</p> |
| <p><u>الإجابة والتعليل</u></p> | <p><u>التمرين الخامس</u></p> <p>المعدّات: قرص دائري متوازن يحمل العلامة × على أحد الوجهين و العلامة 0 على الوجه الآخر.</p> <p>التجربة: نرمي القرص 1000 مرة متتالية -عن طريق الصدفة-</p> <p>السؤال: على كم من × سنحصل تقريبا؟</p> |
| <p><u>الإجابة والتعليل</u></p> | <p><u>التمرين السادس</u></p> <p>المعدّات: كيس ك يحتوي على كرتين بيضاء و3 كرات سوداء (2 ب-3 س):</p>  <p>التجربة: نسحب عن طريق الصدفة- 1000 مرة متتالية- كرة من الكيس ؛ مع إعادة الكرة داخل الكيس بعد كل سحب.</p> <p>السؤال: على كم من كرة بيضاء سنحصل تقريبا؟</p> |

(D)

القسم:
المدرسة:

الإسم و اللقب:
تاريخ الولادة:

نسحب عن طريق الصدفة يعني أن السحب يتم دون أن نرى داخل الكيس و بعد خلط الكرات .
نرمي قرصا عن طريق الصدفة يعني أن الرمية تتم دون أن نرى أوجه القرص.

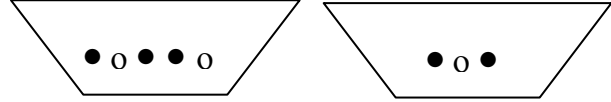
الإجابة والتعليق

التمرين الأول

المعدّات: كيس ك1 يحتوي على كرة بيضاء و كرتين سوداء (1 ب-2 س) و كيس ك2 يحتوي على كرتين بيضاء و 3 كرات سوداء (2 ب-3 س).

ك2

ك1



السؤال: ما هو الكيس الذي تختار لتكون لديك أوفر الحظوظ لسحب كرة بيضاء؟
(يكون السحب عن طريق الصدفة)

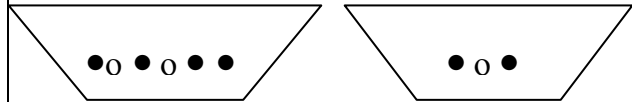
الإجابة والتعليق

التمرين الثاني

المعدّات: كيس ك1 يحتوي على كرة بيضاء و كرتين سوداء (1 ب-2 س) و كيس ك2 يحتوي على كرتين بيضاء و 4 كرات سوداء (2 ب-4 س).

ك2

ك1



السؤال: ما هو الكيس الذي تختار لتكون لديك أوفر الحظوظ لسحب كرة بيضاء؟
(يكون السحب عن طريق الصدفة)

الإجابة والتعليق

التمرين الثالث

المعدّات: كيس ك يحتوي على 3 أقراص دائرية متوازنة: قرص يحمل الرقم 1 و قرص يحمل الرقم 2 و قرص يحمل الرقم 3.

التجربة: نسحب عن طريق الصدفة قرصا من الكيس.

السؤال: هل لدينا حظوظ أوفر لسحب رقم فردي أو لسحب رقم زوجي؟

| | |
|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><u>الإجابة والتعليل</u></p> | <p><u>التمرين الرابع</u></p> <p>المعدّات: كيس ك يحتوي على 3 أقراص دائرية متوازنة: قرص يحمل الرقم 1 و قرص يحمل الرقم 2 و قرص يحمل الرقم 3.</p> <p>التجربة: نسحب عن طريق الصّدفّة-4 مرّات متتالية- قرصا من الكيس ؛ مع إعادة القرص داخل الكيس بعد كل سحب. نحصل هكذا على عدد مكون من 4 أرقام:</p> <ul style="list-style-type: none"> - السحب الأول يعطينا رقم الألاف ؛ - السحب الثاني يعطينا رقم المئات ؛ - السحب الثالث يعطينا رقم العشرات ؛ - السحب الرابع يعطينا رقم الأحاد. <p>السؤال: هل لدينا حظوظ أوفر لسحب عدد فردي أو لسحب عدد زوجي؟</p> |
| <p><u>الإجابة والتعليل</u></p> | <p><u>التمرين الخامس</u></p> <p>المعدّات: قرص دائري يحمل العلامة \times على أحد الوجهين و العلامة 0 على الوجه الآخر.</p> <p>التجربة: رمينا القرص 1000 مرة متتالية - عن طريق الصّدفّة- فحصلنا 900 مرة على العلامة \times و 100 مرة على العلامة 0.</p> <p>السؤال: هل تظن أن القرص متوازن؟</p> |
| <p><u>الإجابة والتعليل</u></p> | <p><u>التمرين السادس</u></p> <p>المعدّات: كيس ك يحتوي على كرتين بيضاء و 3 كرات سوداء (2 ب-3 س):</p> <p>ك</p>  <p>التجربة: نسحب عن طريق الصّدفّة- 1000 مرة متتالية- كرة من الكيس ؛ مع إعادة الكرة داخل الكيس بعد كل سحب.</p> <p>السؤال: على كم من كرة بيضاء سنحصل تقريبا؟</p> |

Test 3 : Énoncés, version française

(A)

Nom et Prénom :
Date de naissance :

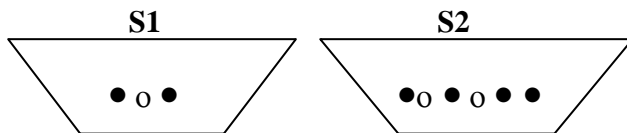
Classe :
École Préparatoire :

Tirer au hasard une boule d'un sac signifie que le tirage se fait sans voir dans le sac et après mélange des boules.

Jeter au hasard un jeton signifie que le jet se fait sans voir les faces.

EXERCICE 1

Matériel : deux sacs, **S1** contenant 1 boule blanche et 2 boules noires (1b-2n) et **S2** contenant 2 boules blanches et 4 boules noires (2b-4n).

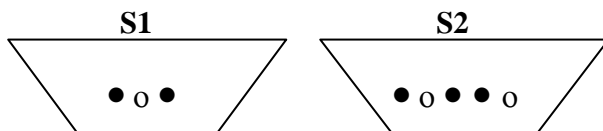


Question : quel sac choisiriez-vous pour avoir le plus de chances de tirer une boule blanche ?
(le tirage se fait au hasard)

RÉPONSE

EXERCICE 2

Matériel : deux sacs, **S1** contenant 1 boule blanche et 2 boules noires (1b-2n) et **S2** contenant 2 boules blanches et 3 boules noires (2b-3n).



Question : quel sac choisiriez-vous pour avoir le plus de chances de tirer une boule blanche ?
(le tirage se fait au hasard)

RÉPONSE

EXERCICE 3

Matériel : un sac **S** contient trois jetons circulaires équilibrés : sur l'un figure le chiffre 1, sur un autre le chiffre 2 et sur le troisième le chiffre 3.

*Expérience : on tire, au hasard, un jeton de **S**.*

Question : a-t-on plus de chances de tirer un chiffre pair ou bien un chiffre impair ?

RÉPONSE

EXERCICE 4

Matériel : un sac **S** contient trois jetons circulaires équilibrés : sur l'un figure le chiffre 1, sur un autre le chiffre 2 et sur le troisième le chiffre 3.

*Expérience : on tire au hasard quatre fois de suite un jeton de **S**, en remettant après chaque tirage le jeton tiré. On obtient ainsi un nombre à quatre chiffres :*

- *le premier tirage donne le chiffre des milles,*
- *le deuxième tirage donne le chiffre des centaines,*
- *le troisième tirage donne le chiffre des dizaines, et*
- *le quatrième tirage donne le chiffre des unités.*

Question : a-t-on plus de chances d'obtenir un nombre pair ou bien un nombre impair ?

RÉPONSE

EXERCICE 5

Matériel : un jeton équilibré dont la lettre **X** est marquée sur une face et **O** est marquée sur l'autre.

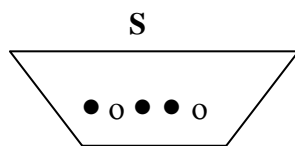
Expérience : on jette, au hasard, 1000 fois de suite ce jeton.

Question : combien de **X** obtiendra-t-on à peu près ?

RÉPONSE

EXERCICE 6

Matériel : un sac **S** contenant 2 boules blanches et 3 boules noires (2b-3n)



Expérience : on tire au hasard 1000 fois de suite une boule du sac, en remettant après chaque tirage la boule tirée.

Question : combien de boules blanches obtiendra-t-on à peu près ?

RÉPONSE

Nom et Prénom :
Date de naissance :

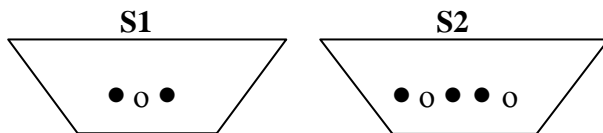
Classe :
École Préparatoire :

Tirer au hasard une boule d'un sac signifie que le tirage se fait sans voir dans le sac et après mélange des boules.

Jeter au hasard un jeton signifie que le jet se fait sans voir les faces.

EXERCICE 1

Matériel : deux sacs, **S1** contenant 1 boule blanche et 2 boules noires (1b-2n) et **S2** contenant 2 boules blanches et 3 boules noires (2b-3n).

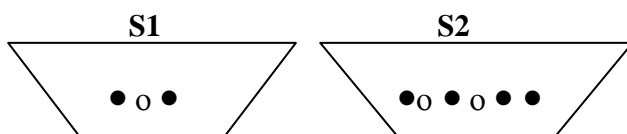


Question : quel sac choisiriez-vous pour avoir le plus de chances de tirer une boule blanche ?
(le tirage se fait au hasard)

RÉPONSE

EXERCICE 2

Matériel : deux sacs, **S1** contenant 1 boule blanche et 2 boules noires (1b-2n) et **S2** contenant 2 boules blanches et 4 boules noires (2b-4n).



Question : quel sac choisiriez-vous pour avoir le plus de chances de tirer une boule blanche ?
(le tirage se fait au hasard)

RÉPONSE

EXERCICE 3

Matériel : un sac **S** contient trois jetons circulaires équilibrés : sur l'un figure le chiffre 1, sur un autre le chiffre 2 et sur le troisième le chiffre 3.

Expérience : on tire, au hasard, un jeton de S.

Question : a-t-on plus de chances de tirer un chiffre pair ou bien un chiffre impair ?

RÉPONSE

EXERCICE 4

Matériel : un sac **S** contient trois jetons circulaires équilibrés : sur l'un figure le chiffre 1, sur un autre le chiffre 2 et sur le troisième le chiffre 3.

*Expérience : on tire au hasard quatre fois de suite un jeton de **S**, en remettant après chaque tirage le jeton tiré. On obtient ainsi un nombre à quatre chiffres :*
- le premier tirage donne le chiffre des milles,
- le deuxième tirage donne le chiffre des centaines,
- le troisième tirage donne le chiffre des dizaines, et
- le quatrième tirage donne le chiffre des unités.

Question : a-t-on plus de chances d'obtenir un nombre pair ou bien un nombre impair ?

RÉPONSE

EXERCICE 5

Matériel : un jeton dont la lettre **X** est marquée sur une face et **O** est marquée sur l'autre.

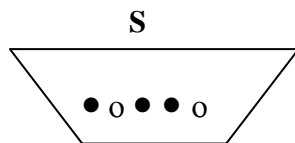
*Expérience : on jette, au hasard, 1000 fois de suite ce jeton. On obtient ainsi 900 fois **X** et 100 fois **O**.*

Question : pensez-vous que le jeton soit équilibré ?

RÉPONSE

EXERCICE 6

Matériel : un sac **S** contenant 2 boules blanches et 3 boules noires (2b-3n)



Expérience : on tire au hasard 1000 fois de suite une boule du sac, en remettant après chaque tirage la boule tirée.

Question : combien de boules blanches obtiendra-t-on à peu près ?

RÉPONSE

Nom et Prénom :
Date de naissance :

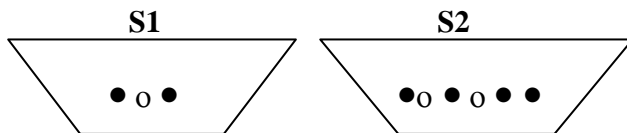
Classe :
École Préparatoire :

Tirer au hasard une boule d'un sac signifie que le tirage se fait sans voir dans le sac et après mélange des boules.

Jeter au hasard un jeton signifie que le jet se fait sans voir les faces.

EXERCICE 1

Matériel : deux sacs, **S1** contenant 1 boule blanche et 2 boules noires (1b-2n) et **S2** contenant 2 boules blanches et 4 boules noires (2b-4n).

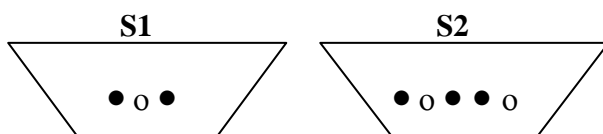


Question : quel sac choisiriez-vous pour avoir le plus de chances de tirer une boule blanche ?
(le tirage se fait au hasard)

RÉPONSE ET JUSTIFICATION

EXERCICE 2

Matériel : deux sacs, **S1** contenant 1 boule blanche et 2 boules noires (1b-2n) et **S2** contenant 2 boules blanches et 3 boules noires (2b-3n).



Question : quel sac choisiriez-vous pour avoir le plus de chances de tirer une boule blanche ?
(le tirage se fait au hasard)

RÉPONSE ET JUSTIFICATION

EXERCICE 3

Matériel : un sac **S** contient trois jetons circulaires équilibrés : sur l'un figure le chiffre 1, sur un autre le chiffre 2 et sur le troisième le chiffre 3.

Expérience : on tire, au hasard, un jeton de S.

Question : a-t-on plus de chances de tirer un chiffre pair ou bien un chiffre impair ?

RÉPONSE ET JUSTIFICATION

EXERCICE 4

Matériel : un sac **S** contient trois jetons circulaires équilibrés : sur l'un figure le chiffre 1, sur un autre le chiffre 2 et sur le troisième le chiffre 3.

*Expérience : on tire au hasard quatre fois de suite un jeton de **S**, en remettant après chaque tirage le jeton tiré. On obtient ainsi un nombre à quatre chiffres :*

- *le premier tirage donne le chiffre des milles,*
- *le deuxième tirage donne le chiffre des centaines,*
- *le troisième tirage donne le chiffre des dizaines, et*
- *le quatrième tirage donne le chiffre des unités.*

Question : a-t-on plus de chances d'obtenir un nombre pair ou bien un nombre impair ?

RÉPONSE ET JUSTIFICATION

EXERCICE 5

Matériel : un jeton équilibré dont la lettre **X** est marquée sur une face et **O** est marquée sur l'autre.

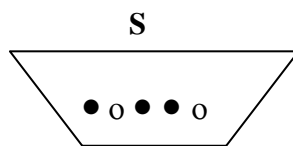
Expérience : on jette, au hasard, 1000 fois de suite ce jeton.

Question : combien de **X** obtiendra-t-on à peu près ?

RÉPONSE ET JUSTIFICATION

EXERCICE 6

Matériel : un sac **S** contenant 2 boules blanches et 3 boules noires (2b-3n)



Expérience : on tire au hasard 1000 fois de suite une boule du sac, en remettant après chaque tirage la boule tirée.

Question : combien de boules blanches obtiendra-t-on à peu près ?

RÉPONSE ET JUSTIFICATION

Nom et Prénom :
Date de naissance :

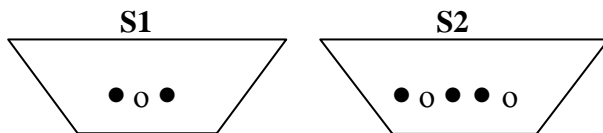
Classe :
École Préparatoire :

Tirer au hasard une boule d'un sac signifie que le tirage se fait sans voir dans le sac et après mélange des boules.

Jeter au hasard un jeton signifie que le jet se fait sans voir les faces.

EXERCICE 1

Matériel : deux sacs, **S1** contenant 1 boule blanche et 2 boules noires (1b-2n) et **S2** contenant 2 boules blanches et 3 boules noires (2b-3n).

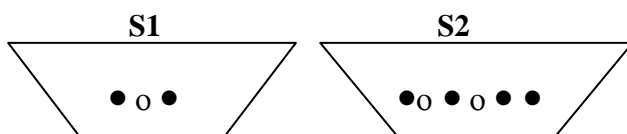


Question : quel sac choisiriez-vous pour avoir le plus de chances de tirer une boule blanche ?
(le tirage se fait au hasard)

RÉPONSE ET JUSTIFICATION

EXERCICE 2

Matériel : deux sacs, **S1** contenant 1 boule blanche et 2 boules noires (1b-2n) et **S2** contenant 2 boules blanches et 4 boules noires (2b-4n).



Question : quel sac choisiriez-vous pour avoir le plus de chances de tirer une boule blanche ?
(le tirage se fait au hasard)

RÉPONSE ET JUSTIFICATION

EXERCICE 3

Matériel : un sac **S** contient trois jetons circulaires équilibrés : sur l'un figure le chiffre 1, sur un autre le chiffre 2 et sur le troisième le chiffre 3.

Expérience : on tire, au hasard, un jeton de S.

Question : a-t-on plus de chances de tirer un chiffre pair ou bien un chiffre impair ?

RÉPONSE ET JUSTIFICATION

EXERCICE 4

Matériel : un sac **S** contient trois jetons circulaires équilibrés : sur l'un figure le chiffre 1, sur un autre le chiffre 2 et sur le troisième le chiffre 3.

*Expérience : on tire au hasard quatre fois de suite un jeton de **S**, en remettant après chaque tirage le jeton tiré. On obtient ainsi un nombre à quatre chiffres :*
- le premier tirage donne le chiffre des milles,
- le deuxième tirage donne le chiffre des centaines,
- le troisième tirage donne le chiffre des dizaines, et
- le quatrième tirage donne le chiffre des unités.

Question : a-t-on plus de chances d'obtenir un nombre pair ou bien un nombre impair ?

RÉPONSE ET JUSTIFICATION

EXERCICE 5

Matériel : un jeton dont la lettre **X** est marquée sur une face et **O** est marquée sur l'autre.

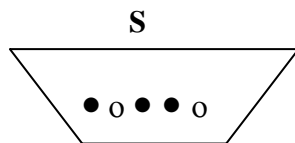
*Expérience : on jette, au hasard, 1000 fois de suite ce jeton. On obtient ainsi 900 fois **X** et 100 fois **O**.*

Question : pensez-vous que le jeton soit équilibré ?

RÉPONSE ET JUSTIFICATION

EXERCICE 6

Matériel : un sac **S** contenant 2 boules blanches et 3 boules noires (2b-3n)



Expérience : on tire au hasard 1000 fois de suite une boule du sac, en remettant après chaque tirage la boule tirée.

Question : combien de boules blanches obtiendra-t-on à peu près ?

RÉPONSE ET JUSTIFICATION

Annexe 6 : Pré-expérimentation, transcription des deux premières séances

Dans la suite, nous procédons à la transcription des deux premières séances effectuées avec un groupe d'élève du niveau « 7^{ème} année de base ». P désigne l'enseignant, E un élève non identifié, EE des élèves non identifiés et Eij l'élève numéro j du groupe i.

1^{ère} séance

De 0 mn à 10 mn

Le professeur P demande aux 11 élèves de former 4 groupes. Les groupes sont ainsi formés : chacun des 3 premiers est composé de 3 élèves et le 4^{ème} de 2 élèves. Les élèves sont placés autour de deux grandes tables.

Les éléments de chaque groupe inscrivent leurs noms sur une feuille blanche mise à leur disposition.

001 : *Le professeur montre aux élèves un dé.*

002 P : Vous connaissez c'est quoi ça ?

003 EE : Un dé, monsieur.

004 P : Voilà, on a 6 faces. Combien on a de faces ?

005 EE : 6.

006 P : On a fait deux faces blanches (*il montre aux élèves les deux faces marquées en blanc*). Les autres, on va les considérer comment ? (*La couleur du dé est grise et les points sont marqués en noir*)

007 EE : Non blanches, ..., noires.

008 P : Noires. Bon, ce qui est demandé maintenant à chaque groupe c'est de lancer ce dé 10 fois sur la table et on va voir la couleur de la face supérieure, blanche ou noire. Donc vous, sur vos feuilles (*il est interrompu par une élève*)

009 E41 : On les met dans un tableau, monsieur.

010 P : Bon, tu vas faire un tableau, qu'est-ce que tu vas y mettre ?

011 E41 : Blanche et noire.

012 P : Blanche et noire. Vous pouvez mettre B pour blanche et N pour noire. Donc, on divise le tableau en deux et on met B et N.

013 E41 : Monsieur ...

014 P : Divise le tableau en deux et met B à gauche et N à droite par exemple.

015 *Les élèves tracent des tableaux à deux colonnes.*

016 P : Si on obtient une blanche, par exemple, où est-ce qu'on va la mettre ?

017 E13 : Je mets une croix.

018 P : Croix, d'accord.

019 E22 : C'est-à-dire ce qui arrive ?

020 P : Si le noir arrive, on met une croix en N ; si le blanc arrive, on met une croix en B. C'est compris ? On fait 10 fois, chaque groupe fait 10 fois. On commence par le premier groupe. Vous avez divisé votre feuille ?

021 EE1 : Oui monsieur.

022 P : On va jouer maintenant, débrouillez-vous.

023 *Le professeur pose le dé sur la table devant le premier groupe.*

024 *Le jeu commence sous les regards des autres élèves. Les éléments du groupe se partagent les lancers et E11 note les résultats obtenus. Les lancers sont répartis comme suit : 2 pour E11, 2 pour E12, 2 pour E13, 2 pour E11.*

- 025 P : Ce n'est pas obligatoire que vous restiez assis, vous pouvez vous lever.
- 026 *E12 effectue les deux derniers jets.*
- 027 E11 : C'est à vous (*en s'adressant au deuxième groupe*).
- 028 P : Les dix jets sont terminés ?
- 029 E13 : Cinq cinq monsieur (*elle veut dire qu'ils ont trouvé 5 blanches et 5 noires*).
- 030 *E23 effectue le 1^{er} lancer et demande à E21 de noter les résultats.*
- 031 *Le professeur intervient au même temps que l'élève E23 fait le 2^{ème} jet :*
- 032 P : Celui qui trouve blanc est considéré gagnant (*il répète cette phrase*).
- 033 E42 : Pourquoi ?
- 034 P : Celui qui trouve blanc gagne et celui qui trouve noir est considéré perdant.
- 035 E13 : Nous, nous sommes à égalité.
- 036 E32 : C'est-à-dire celui qui apporte le plus de blanches a gagné ?
- 037 P : C'est bien ça.
- 038 *À ce stade, le groupe 2 a fait 5 jets. Après un petit moment, ce groupe termine les lancers : en tout E21 a effectué 3 lancers, E22 en a effectué 2 et E23 en a fait 5. Les résultats obtenus sont 3 blanches et 7 noires.*
- 039 P : Maintenant, c'est à vous (*en s'adressant au groupe 3*)
- 040 *E32 se lève et effectue 2 lancers (d'ailleurs, ce sont les seuls lancers qu'il effectue debout), E33 lance 2 fois et c'est elle qui prend note.*
- 041 E32 : Deux, chacun fait deux.
Au 7^{ème} lancer de ce groupe, E32 jette doucement le dé.
- 042 E23 : Pourquoi tu triches, tu joues comme ça.
- 043 *Le groupe 3 termine les 10 lancers et c'est E33 qui prend note. En définitive, E31, E32 et E33 ont fait respectivement 2, 4 et 4 lancers. Les résultats trouvés sont 7 blanches et 3 noires. Le dé est donné au groupe 4.*
- 044 E41 : Monsieur, pour nous, est-ce que chacun va faire cinq ? (*elle veut dire 5 jets*).
- 045 P : C'est 10 jets pour vous deux.
- 046 E41 : Oui, cinq cinq.
- 047 P : Non, c'est faux. Ah, vous êtes deux seulement, débrouillez-vous.
- 048 *E41 effectue 5 jets (elle refait le cinquième après que le dé est tombé sous la table, le résultat étant noir) et E42 prend la relève. Chacune des deux élèves constituant le groupe prend note quand l'autre lance. Au 8^{ème} lancer, les noires sont au nombre de 5.*
- 049 E32 : Une autre noire et vous perdez.
- 050 *Le 9^{ème} lancer donne noire.*
- 051 E32 : Une noire, ça y est, ils ont perdu.
- 052 *Les résultats obtenus pour le groupe 4 sont 4 blanches et 6 noires.*
- 053 P : Ça y est, vous avez terminé ?
- 054 E23 : Nous sommes les derniers.
- 055 E41 : (*Elle prend le dé entre ses doigts*) Voyez, parce que la blanche, il y en a deux.
- 056 E31 : Nous avons gagné.
- 057 E41 : Alors, ça veut dire que nous (*et elle se tait, elle semble déçue*).
- 058 E32 : (*En s'adressant au professeur*) N'avez-vous pas dit que celui qui trouve le plus de blanches gagne ? Nous avons gagné (*il montre la feuille au professeur*).
- 059 P : Et les autres, combien avez-vous ?
- 060 *Les résultats sont repris 5b et 5n pour le 1^{er} groupe, 3b et 7n pour le 2^{ème}, 7b et 3n pour le 3^{ème}, 4b et 6n pour le 4^{ème}.*
- 061 E32 : C'est nous qui avons gagné.
- 062 E33 : (*Chuchotant à son coéquipier E32*) Tu verras.
- 063 E13 : Nous, c'est cinq cinq.
- 064 P : Vous, c'est cinq cinq.

- 065 E13 : Ceux là (*elle indique le groupe 3*), puis nous, puis ceux là (*elle indique le groupe 4*), puis ceux là (*elle indique le groupe 2*).
- 066 E21 : La proportion du noir est plus grande car il y a beaucoup de noir ...
- 067 (*Brouhaha*)
- 068 P : Qu'est-ce que vous avez. Y a-t-il quelqu'un qui a un commentaire ?
- 069 E22 : Ils s'engueulent.
- 070 P : Il ne faut pas créer un problème si j'ai gagné et toi tu as perdu, ce n'est qu'une expérience que nous sommes en train de faire.
- 071 E21 : La proportion du noir est plus grande car il y a beaucoup de noir dans le dé, plus que le blanc.
- 072 P : Qu'est-ce que vous pensez ?
- 073 E : À propos de quoi monsieur ?
- 074 P : À propos du blanc et du noir. Comment se fait-il que vos résultats ne sont pas les mêmes ?
- 075 E22 : C'est le hasard monsieur.
- 076 E23 : Le hasard monsieur.
- 077 *Plusieurs élèves parlent en même temps.*
- 078 P : Organisez-vous, un élève de chaque groupe parle.
- 079 E13 : Parce que le dé, le noir est plus que le blanc. De plus, chacun selon son hasard (*sa chance*).
- 080 E21 : On a obtenu une proportion de noir plus grande car la proportion du noir dans le dé est plus grande.
- 081 E41 : Oui monsieur.
- 082 E22 : Je ne suis pas d'accord. Pourquoi l'autre groupe (*il pointe le groupe 3 avec son doigt*) a trouvé plus de blanc que de noir ?
- 083 E23 : Car ils trichent monsieur.
- 084 E22 : (*Réagissant à la dernière phrase*) Je peux être d'accord, mm ...
- 085 E23 : Ils font comme ça, monsieur (*il lance le dé doucement*).
- 086 E32 : Non monsieur.
- 087 E22 : Monsieur, sa théorie est juste.
- 088 E33 : Ce n'est pas le hasard, il y a fraude, la couleur blanche est toujours laissée en bas (*ses propos s'adressent à l'élève E32 de son groupe*) ...
- 089 E32 : Par exemple, quand je mets le blanc comme ça (*il place un doigt sur la paume de sa main*), quand je lance le dé, il tourne puis revient à la même position, la position reste toujours la même.
- 090 P : Tu parles de la façon du lancer ?
- 091 E33 : Il met toujours la face blanche en bas et lance, moi je ne me suis pas aperçu ...
- 092 P : C'est compris.
- 093 E23 : Il fait comme ça, monsieur, (*il jette le dé*) c'est un tricheur.
- 094 *Le résultat est noir !! E31 essaie de lui prendre le dé.*
- 095 E31 : Non ce n'est pas de cette façon.
- 096 E42 : Monsieur, de cette façon je peux obtenir une face noire et non une blanche.
- 097 P : Qu'est-ce que tu en penses, toi ? (*il s'adresse à E41*)
- 098 E41 : C'est le hasard, monsieur.
- 099 *Il y a des élèves qui sont d'accord avec les derniers propos et d'autres qui ne le sont pas.*
- 100 E41 : Monsieur, on a la proportion des noirs qui est plus grande que celle des blancs.
- 101 E22 : Alors pourquoi ont-ils trouvé plus de blanches ?
(*Brouhaha*)

De 10 mn à 20 mn

- 102 E32 : Un instant monsieur, je vous montre comment faire.
103 P : Montre nous donc.
104 E32- Voilà monsieur, quand je mets ainsi (*il place le dé dans sa main*).
105 *Échec et rires (il a obtenu une face noire).*
106 *E42 essaie à son tour. E31 prend le dé au creux de ses deux mains réunies, l'agite et le lance.*
107 *E41 place le dé dans sa main d'une façon voulue et le lance ; elle obtient une face noire.*
108 E42 : Non monsieur, je l'ai placé blanche (*elle veut dire la face blanche en bas*), mais j'ai obtenu une face noire.
109 E22 : Monsieur, s'il vous plait, dans un devoir si on ne nous donne pas un dé, allons-nous imaginer comment placer le dé dans la main !
110 (*Brouhaha*)
111 P : Voyons ce que pense votre camarade.
112 E33 : Peut-être, si la face inférieure ... tu lances un nombre qui doit être pair ou impair. Si l'un d'eux est bien déterminé, on aura toujours la face blanche, si c'est l'autre face, on aura toujours la face noire.
113 P : Que pensez-vous ?
114 *Bien qu'on ne comprenne pas grand-chose aux propos de E33, un élève est d'accord.*
115 P : Dans ce dé, a-t-on des faces paires et des faces impaires ?
116 E23 : La face 6 est noire.
117 *Les élèves demandent à voir le dé.*
118 E22 : Le 6 n'est pas noir, il est blanc.
119 E13 : Laisse moi voir (*elle ne récupère pas le dé*). Monsieur, il y a le 4 et 4 est pair et il y a 5 et 5 est impair et les deux sont en noir.
120 P : Quels sont les numéros des faces blanches ?
121 E : 6 et ... 1 (*les faces blanches sont en réalité la face 6 et la face 3*).
122 P : On a donc un nombre pair et un nombre impair.
123 *E32 montre à sa coéquipière E33 comment avoir une face blanche, il lance doucement le dé. Elle lui demande combien de tours le dé doit tourner. Il lui montre de nouveau comment faire.*
124 E32 : Venez voir monsieur. *Il refait l'expérience, mais c'est un échec.*
125 *E41 essaie à son tour d'avoir une face blanche, elle obtient une noire. Quelques élèves font de nouveaux essais.*
126 P : Récapitulons les résultats que vous avez.
127 *Les groupes redonnent un à un les résultats obtenus : 5b et 5n pour le 1^{er} groupe, 3b et 7n pour le 2^{ème}, 7b et 3n pour le 3^{ème}, 4b et 6n pour le 4^{ème}.*
128 P : On remarque bien que ce ne sont pas les mêmes résultats. Est-ce que ces résultats dépendent du jet ?
129 EE : Oui.
130 P : Comment ?
131 E41 et E21 : Non monsieur.
132 P : Mais voilà que quelqu'un parmi vous parle d'une certaine façon de faire donnant la blanche.
133 E11 : Mais, il a réessayé et il n'a pas trouvé blanche.
134 E41 : C'est une falsification monsieur.
135 P : Alors dites moi, y a-t-il fraude ou non ?
136 E21 : C'est le hasard monsieur.
137 (*Brouhaha*)

- 138 E22 : Monsieur, j'ai une suggestion. Ils ont dit que cela dépend du jet, qu'ils fassent ce qu'ils veulent (*il parle du groupe 3*) et s'ils obtiennent 7b et 3n, ils sont gagnants. En fait ça ne dépend pas du jet.
- 139 P : Vous voulez qu'on reprenne le jeu ? Mais dans ce jeu, y a-t-il tricherie ou non ?
- 140 EE : Oui.
- 141 E22 : En réalité oui. Le dé se joue comme ça (*il ferme ses deux mains pour former un creux et les remue*) et on le lance. Lui (*l'élève E32*), il la met sur la main puis la lance doucement.
- 142 E32 : Ce n'est pas une fraude, c'est une tactique.
- 143 E41 : Mais tactique veut dire fraude.
- 144 (*Brouhaha*)
- 145 P : Que ceux qui disent qu'il y a fraude dans ce jeu lèvent la main.
- 146 E33 *explique qu'il s'agit de l'existence d'une certaine façon pour avoir la blanche.*
- 147 *Sept élèves on levé la main : E12, E22, E23, E31, E33, E41 et E42.*
- 148 P : Si l'on veut alors que le jeu soit équitable ...
- 149 E21- (*Cet élève a pris la parole après avoir à maintes reprises levé la main*) Monsieur, ça dépend de la proportion du noir dans le dé.
- 150 P : Votre camarade vous dit que cela dépend de la proportion du noir.
- 151 E31 : La proportion des faces blanches est 20 % et la proportion des faces noires est ... 40 %.
- 152 P : Est-ce que le groupe qui a obtenu 5b et 5n sait mieux jouer que celui qui a eu 3b et 7n.
- 153 EE (*E23, E41, E42, ...*) : Non monsieur, c'est le hasard.
- ...
- 154 E21 : Ce sont des probabilités monsieur.
- 155 E11 : Monsieur, j'ai une idée. Pour savoir s'il y a quelqu'un qui a triché, pourquoi ne pas nous dire que le gagnant est celui qui obtient plus de noires. Dans ce cas, s'ils obtiennent plus de noires (*elle désigne le groupe 3*), c'est qu'ils trichent.
- 156 E32 : Il faut donc que nous perdions pour ne pas être traités de fraudeurs.
- 157 P : Ce qu'on veut, c'est quoi ? C'est jouer sans fraude.
- 158 E22 : Qu'ils jouent comme ils le veulent ; s'ils obtiennent plus de blanches, je serai d'accord que c'est eux qui ont gagné.
- 159 P : Maintenant, dites-moi comment jouer sans fraude.
- 160 E22 : Il doit jouer sous notre contrôle.
- 161 E13 : Moi, je suis d'accord.
- 161 E42 : On doit voir la personne qui joue, il doit faire comme ça (*elle montre comment jeter un dé*).
- 163 E12 : Monsieur, quand nous avons joué, nous avons fait tourner le dé. Une fois, nous obtenons noire, une autre fois blanche n'est-ce pas ? C'est le hasard. Mais eux, ils tiennent le dé comme ça et ils le lancent (*il tourne sa main et la place doucement sur la table*), c'est de la fraude monsieur.
- 164 P : Il y a donc de la fraude.
- 165 E12 : Il y a la fraude et le hasard.
- 166 P : On doit donc éliminer la fraude.
- 167 E13 : Monsieur j'ai une remarque, il n'y a pas de fraude sinon ils peuvent avoir le blanc à tous les coups, mais il doit y avoir du tactique car quand ils mettent ...
- 168 EE : Mais quelle est la différence ?

De 20 mn à 40 mn

169 *Les élèves se sont aperçu que mettre une face blanche en bas ne permet pas toujours d'avoir blanche.*

170 E33 : Est-ce qu'on fait un devoir au hasard ? On doit utiliser une façon pour repérer ce qui va arriver.

171 P : As-tu utilisé une certaine façon pour lancer le dé ?

172 E33 : Non.

173 E41 : Qu'il utilise maintenant sa technique (*elle parle de E32*).

174 *E32 laisse glisser doucement le dé et obtient une face blanche. E41 proteste.*

175 E41 : Il triche monsieur.

176 E11 : S'ils ont triché, ils auraient eu ...

177 E32 : Si nous avons triché, nous n'aurons dû avoir que des blanches.

178 E11 : C'est ce que je voulais dire.

179 E22 : S'il obtient 10 blanches, on va s'apercevoir qu'il triche. Mais, aucune façon ne peut donner 10 blanches. Cela ne peut arriver, ce n'est pas la peine d'essayer.

180 E11 : Même si j'ai lancé au hasard et c'est moi qui ai gagné, on va dire que j'ai triché.

181 E33 : Ça dépend du nombre de tours que fait le dé.

182 P : J'ai une question à vous poser. Doit-on voir le dé avant de le lancer ?

183 EE : Oui, ..., non, ...

184 E21 : Tout ceci sont des probabilités, ce n'est pas une chose réelle.

185 E22 : C'est vrai monsieur, ce ne sont pas des choses dont on est sûr.

186 *Quelques uns essayent de lancer le dé chacun à sa façon.*

187 E22 : Que celui qui a une solution, une façon ou une théorie nous la donne.

188 E21 : Ce sont des probabilités car on n'est pas sûr.

189 P : Votre camarade dit que quand il lance le dé, il ne sait pas s'il va avoir blanc ou noir.

190 E23 : Je vais, monsieur, vous dire pourquoi ils ont triché. Nous, nous n'avons pas posé la question de celui qui gagne ; eux par contre, car ils ont eu plus de blanches, ils vous ont demandé si ceux qui apportent plus de blanches gagnent et vous avez acquiescé. Nous, nous avons joué au hasard.

191 E41 : Non, il nous l'a dit dès le début.

192 P : Non, il a raison. Je ne l'ai pas dit exactement au début.

193 E31 : C'est avant notre tour !

194 E41 : Monsieur, vous n'auriez pas dû nous dire que celui qui apporte le plus de blanc gagne car, en entendant ceci quelques uns vont tricher.

195 E11 : Re commençons le jeu et voyons comment ils jouent.

196 E42 : Monsieur, reprenons le jeu et laissons les ainsi (*elle ferme les deux mains formant un creux*) puis jetons.

197 (*Brouhaha*)

198 P : Silence s'il vous plait, écoutons votre camarade, elle parle d'une certaine façon scientifique.

199 E33 : Je pense que ce n'est pas du hasard, il y a une façon scientifique ou quelque chose qui est liée à la forme du dé.

200 E41 : Donc, si j'ai une forme de losange, je vais avoir ...

...

201 P : Récapitulons, comment éliminer la fraude ?

202 E11 : Il n'y en a pas de.

203 E23 : On fait comme ça (*Il ferme les deux mains formant un creux et les agite*) et on lâche le dé.

204 E21 : Ce sont des probabilités monsieur, ...

- 205 EE : Y a-t-il fraude ou non ?
- 206 E21 : Il n'y en a pas.
- 207 E12 : J'ai une objection monsieur.
- 208 E31 : Les noires sont plus nombreuses que les blanches. Pourquoi avons-nous eu plus de blanches ? Ce n'est pas une question de probabilités, c'est une question de jets.
- 209 E12 : C'est seulement E31 qui triche, les autres ont joué au hasard.
- 210 P : Alors de quelle façon jouer sans tricher.
- 211 E32 : Pour ne pas tricher, on fait comme ça (*il agite les mains en forme de creux*) et on le lance.
- 212 E41 : Sans voir le dé, on fait comme ça (*elle agite les mains en forme de creux*) et on jette.
- 213 P : Dans le prochain jeu, on va jouer sans tricher.
- 214 E41 : Il ne faut pas nous dire que le gagnant est celui ayant plus de blanches ou de noires.
- 215 E33 : Monsieur, ce que j'ai déduit de ce jeu, c'est que le résultat est lié à la forme et le nombre de tours.
- 216 E41 : Moi aussi, j'ai déduit quelque chose. Si quelqu'un gagne, on lui dira qu'il a triché.
- 217 *Le professeur veut passer au deuxième jeu, mais la discussion continue.*
- 218 E21 : Monsieur, on n'est pas arrivé au résultat du premier jeu pour passer au deuxième. On doit trouver la façon et la solution.
- 219 P : Est-ce qu'il y a une façon pour gagner ou perdre ?
- 220 E42 : Non, il n'ya aucune façon monsieur.
- 221 E21 : Ce n'est pas convainquant, monsieur. La fraude et le hasard, ce n'est pas convainquant.
- 222 P : Qu'est-ce qui est convainquant pour toi ?
- 223 E21 : Ce sont des probabilités. Dans chaque groupe, la proportion du noir doit être plus grande que la proportion du blanc.
- 224 *Le professeur reprend les propos de E21 et lui demande les résultats de son groupe.*
- 225 E21 : 7 noires et 3 blanches.
- 226 P : Voilà qu'on a aussi 7 blanches et 3 noires.
- 227 E41 : Pour nous, c'est 6 noires et 4 blanches.
- 229 E33 : C'est-à-dire, peut-être que nous avons jeté d'une façon opposée ; c'est-à-dire que nous avons jeté comme eux mais à l'envers.
- 230 E42 : S'il y avait plus de blanches on aurait dû avoir plus de blanches que de noires.
- 230 E12 : Pourquoi avons-nous obtenu 5 et 5 ?
- 231 E42 : Pour chacun son hasard (*sa chance*), c'est au hasard.
- 232 E21 : Monsieur, quand je vais jouer au dé, il y a une grande possibilité pour avoir le noir plus que le blanc car la proportion du noir est plus grande que celle du blanc.
- 233 P : Votre camarade dit que la proportion du noir est plus grande que celle du blanc.
- 234 E23 : Oui monsieur, le noir c'est 4 et le blanc 2.
- 235 P : Vous voulez que je jette ? Je vais le faire une fois.
- 236 E41 : 3 fois monsieur.
- 237 P : Je vois ou non ?
- 238 E41 : Non monsieur, ne le voyez pas.
- 239 E42 : Si, si monsieur.
- 240 E33 : Jetez 2 fois, une en voyant le dé et l'autre non.
- 241 *Le professeur lance le dé sur la table en le voyant. Il obtient une face blanche.*
- 242 EE : Fraude ... fraude.
- 243 P : Voyons pour une deuxième fois en voyant le dé. Aurai-je une blanche ?
- 244 E41 : Non, ne le voyez pas maintenant. Ça va venir blanche, vous allez voir.

- 245 P : Si je ne le vois pas, qu'est-ce que je vais obtenir ? Noire ?
246 *Il lance le dé qui tombe sous la table.*
247 P : Refaisons le jet.
248 EE : Blanche monsieur, blanche.
249 E33 : C'est-à-dire que j'ai vu juste, c'est selon le nombre de tours (*elle agite la main vide*) ... et selon la forme.
250 E21 : Monsieur, quand vous faites tourner le dé dans votre main, il reste toujours ...
251 P : Voulez-vous que je la lance directement d'en haut ?
252 *Il tient le dé entre ses doigts et, sans le voir, il le laisse tomber sur la table.*
253 EE : Noire.
254 E33 : Voyez-vous, car cela dépend du nombre de ...
255 E41 : La première fois, quand vous avez mis la blanche en bas et vous avez jeté, vous avez eu blanche.
256 E33 : C'est-à-dire que c'est lié au nombre maintenant.
257 P : Alors je mets blanche en haut.
258 E41 : Oui, mettez la blanche en bas (*elle veut dire en haut*) et vous aurez noire, peut-être.
259 *Le professeur tient le dé, une face blanche tournée vers le haut, et le lâche sur la table.*
260 EE : Noire.
261 E22 : J'ai une question monsieur. Y-a-il une façon pour avoir blanche ou noire ? Ne nous laissez pas parler comme ça (*en vain*).
262 P : Votre camarade vous dit qu'il faut tricher pour avoir blanche.
263 E22 : Ne connaissez-vous pas qu'il existe une façon ?
264 P : Moi, non.
265 E22 : Non monsieur, vous devez la connaître.
266 P : S'il y a une façon, c'est qu'il y a fraude.
267 E33 : Monsieur, moi je dis que c'est lié à la forme et au nombre de rotations.
268 E42 : Monsieur, il n'y a aucune fraude et il n'y a aucune façon.

De 40 mn à 50 mn

- 269 *Le professeur présente un récipient (un bol) noir d'où il tire 5 balles (des balles de tennis de table), deux blanches et trois orange.*
270 P : Combien a-t-on de balles ? ... 3 balles orangères et 2 blanches, Combien en tout ?
271 EE : Cinq.
272 P : (*en remettant les balles dans le récipient*) On va reprendre le travail en groupes. Que va-t-on faire d'après vous ?
273 E21 : On va tirer une balle. On aura la proportion ... on tire la balle orange plus que la balle blanche.
274 E41 : Oui monsieur.
275 P : On a fait 10 fois avec le dé, maintenant on va tirer 10 fois une balle parmi ceux-ci.
276 E33 : Oui c'est vrai maintenant parce que le nombre de cette couleur est plus grand que l'autre couleur.
277 E41 : Oui monsieur, la proportion des balles orangères est plus grande que ...
278 P : On va expérimenter et on verra.
279 E21 : C'est-à-dire, la possibilité de tirer une balle blanche est plus petite que celle de tirer une blanche.
280 P : Vous écrivez « 2^{ème} expérience » sur vos feuilles. Voulez-vous que le gagnant soit celui qui apporte plus de blanches ?
281 EE : Oui monsieur, ..., non monsieur car la proportion des balles orangères est plus grande.

- 282 P : On va faire comme pour le dé, le groupe gagnant est celui qui obtient plus de blanches. Vous allez bien entendu faire un autre tableau.
- 283 E41 : On va faire la 2^{ème} expérience.
- 284 P : Vous écrivez 2^{ème} expérience, l'expérience des balles.
- 285 E42 : La première c'est l'expérience du dé.
- 286 *Les élèves s'appliquent et préparent un 2^{ème} tableau.*
- 287 P : On va voir combien de balles blanches ont été tirées.
- 288 *Il pose le récipient devant le 1^{er} groupe.*
- 289 E : Ne regarde pas.
- 290 *E12 tourne la tête, mélange les balles dans le récipient et en tire une qui est orange. E11 marque une croix dans la colonne O.*
- 291 E21 : (*E21 est debout*) Je vous l'ai dit monsieur, la proportion de l'orange va être plus grande que celle du blanc.
- 292 E32 : Pourquoi n'auraient-ils pas plus de blanches et gagner ?
- 293 *E12 met sa main droite dans le récipient et E11 lui prend la balle, déjà tirée, de sa main gauche.*
- 294 E11 : La remet-on ?
- 295 P : Doit-on la conserver ou la remettre ?
- 296 E22 : On la remet monsieur.
- 297 *E11 remet la balle.*
- 298 P : Puisqu'on va faire 10 tirages, doit-on conserver la balle ?
- 299 E22 : On la remet monsieur, si on tire 10 fois on aura un récipient vide.
- 300 *E12 tire une deuxième fois et c'est encore une balle orange qui sort.*
- 301 E33 : Monsieur, on tire deux fois seulement pour avoir deux blanches, deux oranges ou une de chaque couleur.
- 302 E32 : Non, 10 c'est mieux.
- 303 *E11 tire à son tour. Elle obtient deux fois de suite une balle blanche.*
- 304 EE : Elle triche, elle triche.
- 305 E13 : Non, non. Je jure que non.
- 306 E31 : Elle tient la boule dans sa main et fait semblant de mélanger.
- 307 E11 : Non monsieur. On me traite de tricheuse.
- ...
- 308 P : Laissez-la faire ce qu'elle veut. Après les 10 tirages, on commente.
- 309 *Répondant à la demande de quelques élèves, E11 efface du tableau la croix correspondant à la dernière balle obtenue. Elle reprend les tirages sous le contrôle de E21 qui est debout et elle tire encore une balle blanche.*
- 310 *E13 tire à son tour deux fois sous les voix de quelques éléments des autres groupes lui demandant de ne pas regarder, de tourner la tête. Elle obtient deux balles blanches. E12 reprend les tirages.*
- 311 E22 : Monsieur, je soupçonne quelque chose.
- 312 *E12 tire une balle blanche.*
- 313 E21 : (*E11 est toujours debout*) Non monsieur, ils font ainsi.
- 314 E22 : (*En tirant l'enceinte vers lui*) Ils la mettent dans un coin et font tourner l'enceinte comme ça.
- 315 E21 : Il tient la balle entre deux de ses doigts et ...
- 316 P : Laissez les terminer.
- 317 *Le professeur reprend l'enceinte et la remet devant E12 qui tire une balle orange puis une blanche.*
- 318 *E11 termine les tirages du premier groupe avec une balle blanche. En tout, le premier groupe a tiré 7 balles blanches et 3 balles orange.*

- 319 E42 : C'est vous qui allez gagner ! Avec plus de blanches.
320 *C'est au tour du 2^{ème} groupe de procéder aux tirages. E23 tire, sans voir dans le récipient, deux blanches et c'est E22 qui prend note. E21, toujours debout, tire, en tournant la tête, une balle orange et E22 lui chuchote quelque chose à l'oreille.*
321 E12 : *(E12 se met debout)* Ay ay, quand je te frappe ...
322 E11 : Il lui a dit : tire quand je te frappe.
323 *E21 tire une balle blanche.*
324 *E22 agite le récipient verticalement.*
325 E42 : De cette façon, les balles vont monter et descendre sans changer de place.
326 *E22 tire deux balles blanches.*
327 *E23 tire une balle blanche sous les protestations de E11 (ce tirage est quand même noté par E22).*
328 E11 : Il triche monsieur.
329 E22 : Non, laissez-nous jouer.
330 *E23 tire une blanche.*
331 E22 : La 9^{ème} maintenant.
332 *E23 tire une balle orange.*
E22 termine les tirages du 2^{ème} groupe avec une balle blanche.
333 E22 : Oui, 8 balles blanches et deux balles orange.
334 *C'est le tour du 3^{ème} groupe. E31 tire une blanche et c'est E32 qui marque (E12 et E21 sont maintenant debout, à côté du 3^{ème} groupe).*
335 E41 : *(S'adressant à E32)* Ne regarde pas.
336 E32 : *(En tirant une blanche)* Je n'ai pas regardé.
337 *E33 tire une balle blanche et E31 reprend le récipient.*
338 EE- Il l'a conservée dans sa main monsieur.
339 *E31 tire une balle blanche.*
340 E41 : Non non, il l'a conservée dans sa main.
341 EE : Il doit refaire le tirage. C'est nous qui mélangeons.
342 *E31 tourne la tête et tire une orange, E32 tire une orange et E33 une blanche.*
343 E33 : Voilà, c'est au hasard.

De 50 mn à 60 mn

- 344 E42 : Dans ce jeu, il y a beaucoup de fraude.
345 E41 : Monsieur, ces ceux-là trichent *(elle désigne E31 et E32)*.
346 *E31 tire une blanche, E33 tire une blanche, E31 tire une balle orange et E33 une blanche. En tout, le groupe 3 a obtenu 7 balles blanches et 3 balles orange.*
347 P : On passe au dernier groupe.
348 *Debout, les yeux tournés, E42 tire une balle orange et E41 prend note. E42 tire une deuxième balle orange, une balle blanche sortant en même temps du récipient.*
349 E41 : Monsieur, elle en a pris deux.
350 *E32, E21 et E23 sont debout pour inspecter E41 qui refait son 2^{ème} tirage, elle obtient une autre orange.*
351 EE : Elles trichent.
352 E33 : Non, elles ne trichent pas.
353 *E42 poursuit ses tirages : deux blanches puis une orange.*
354 *À ce stade, E41 a noté 1b et 4o au lieu de 2b et 3o.*
355 *E33 tire le récipient vers elle, elle en tire une balle blanche et une orange et elle les examine.*
356 E32 : Si tu vas parler de forme et ..., il n'y en a pas.

- 357 E42 : Si, la balle blanche est plus grande que la balle orange, ça se voit. Tout à l'heure, j'allais le dire mais je me suis tu.
- 358 E41 reprend le récipient et en tire une balle de chaque couleur, elle les pèse, une dans chaque main.
- 359 E33 : Tu vois ?
- 360 E41 : La blanche est plus lourde, c'est bien.
- 361 E33 : Monsieur, une est plus grande que l'autre et une est plus lourde.
- 362 P : Comment ! Une balle qui est plus grosse que l'autre !
- 363 E33 : Oui.
- 364 Maintenant, c'est E42 qui prend note et E41, debout, commence ses tirages.
- 365 Au bout de 2 tirages qui sont blancs, E31 et E32 essaient de voir ce qui se passe dans le récipient. Encore, une balle blanche.
- 366 E31 : Elle triche, elle laisse la balle à côté de la main.
- 367 E42 agite fortement le récipient et en tire deux autres blanches tout en étant accusée d'avoir triché.
- 368 E42 : Celui qui apporte blanche est accusé de fraude.
- 369 En tout, le groupe 4 a obtenu 6 balles blanches et 4 balles orange.
- 370 P : Récapitulons.
- 371 Chacun des élèves a rejoint sa place et un élément de chaque groupe énonce ses résultats : 7b (blanches) et 3o (orange) pour le 1^{er} groupe, 8b et 2o pour le 2^{ème}, 7b et 3o pour le 3^{ème}, 6b et 4o pour le 4^{ème}.
- 372 P : Qu'en pensez-vous ?
- 373 E42 : Il y en a monsieur ...
- 374 E41 : Il met la balle dans sa main puis il mélange.
- 375 E42 : Il y a une différence entre les balles, la balle blanche est plus lourde que la balle orange.
- 376 P : (En prenant dans la main une balle de chaque couleur) Je ne vois pas de différence. Vous pensez que la blanche est plus lourde !
- 377 E41 : Non mais ..., quelqu'un peut conserver la blanche dans la main et mélanger.
- 378 E42 : Autre chose monsieur, quelqu'un peut voir les boules avant de faire entrer la main. Il laisse la balle blanche de côté, mélange les autres puis tire la blanche.
- 379 P : Qu'en pensez-vous ?
- 380 E13 : Ce qu'elle a dit est vrai.
- 381 (Brouhaha)
- 382 E42 : Monsieur, le seul truquage, c'est de voir dans le récipient ... Moi je l'ai vu et quand j'ai tiré c'était une blanche, quand j'ai recommencé j'ai eu la même. Le mélange ne se fait pas convenablement.
- 383 P : Comment ?
- 384 E42 : Moi j'ai mélangé mais elles (les balles) ne changent pas de place.
- 385 E21 : Monsieur car le récipient n'est pas spacieux. De plus la proportion des balles orange est plus grande, c'est-à-dire les balles orange vont se déplacer beaucoup car elles sont nombreuses, par contre les balles blanches vont conserver leurs places.
- 386 E23 : Monsieur, par exemple il tient le récipient, voit ce qu'il y a dedans et fait semblant de mélanger (E23 tourne la tête en montrant la façon de faire).
- 387 E12 : La théorie de E23 est fausse monsieur, s'il tourne la tête, comment va-t-il tirer la blanche ?
- 388 E11 : (S'adressant au professeur) Je vous dis pourquoi il y a fraude, parce que dans notre groupe E13 a triché.
- 389 P : (S'adressant à E13) As-tu triché ?
- 390 E13 : Non ... (elle sourit)

391 (*Brouhaha*)

392 E21 : Monsieur, on peut faire une opération et on trouve 2,1.

393 P : Que peut-on faire ?

394 E21 : Une opération : 7 fois 3 sur 10.

395 P : C'est-à dire ?

396 E21 : Pour nos résultats par exemple : le nombre de balles blanches fois le nombre de balles orange sur le nombre de jets (*il veut dire tirages*).

Bien entendu, dans le groupe 2, les résultats sont 8b et 2o et non 7b et 3o.

397 P : Qu'en pensez-vous ?

398 E32 : Que va-t-on trouver ?

399 E21 *répète sa phrase répondant à la demande du professeur.*

400 P : Que vas-tu chercher ?

401 E21 : Monsieur on va trouver ...

402 E12 : La proportion de fraude ?

403 E21 : La plus grande proportion pour trouver ...

2^{ème} séance

De 0 mn à 10 mn

404 *Une feuille blanche est donnée à chacun des 4 groupes formés lors de la première séance. Le professeur commence par tracer, sur le tableau blanc, un tableau à 10 colonnes où il a écrit les nombres de 1 à 10. Il demande aux élèves de faire de même sur leurs feuilles.*

Le professeur P présente aux élèves 3 gobelets contenant chacun un dé et le récipient de la dernière séance contenant 1 balle blanche et 2 balles orange.

405 P : Dans le récipient, il n'y a plus 5 balles ...

406 E21 : (*Ramenant le débat vers la première séance*) Monsieur, pour les balles, la blanche ne bouge pas, je l'ai vérifié.

407 P : Comment ?

408 E21 : Même si elle bouge, c'est à la même place.

409 P : Précisément la blanche ?

410 E21 : Quand les rouges (*il pense aux balles orange*) sont plus nombreuses.

411 E33 : Je n'ai rien compris moi.

412 P : Votre collègue remarque que quand il y a une seule balle blanche et plusieurs balles orange et qu'on mélange, la blanche ne bouge pas.

413 E41 : On peut la considérer comme étant une balle orange !

414 E13 : Même si c'est la balle orange qui est au milieu et qu'il y a 2 blanches, elle ne bouge pas.

415 P : Bon voilà, maintenant que le nombre de balles est réduit, on a de l'espace pour que les balles bougent.

416 *Le professeur distribue le matériel entre les groupes, un gobelet pour chacun des groupes 1, 2 et 4 et le récipient pour le groupe 3. Ainsi, le groupe 1 prend un dé noir (D1), le groupe 2 le dé grisâtre (D2) utilisé lors de la première séance et le groupe 4 un autre dé noir (D3), le dé D2 étant moins volumineux que les deux autres. D1 et D3 sont de même volume mais le dernier est truqué, il est d'ailleurs plus lourd.*

417 P : Essayons de comprendre ce qu'on va faire.

418 E41 : C'est quoi ça ?

419 P : Un dé, c'est le même pour tout le monde, deux faces sont blanches et les autres noires.

420 *Chaque groupe examine son matériel.*

421 P : À propos des dés, c'est la même chose pour les 3 groupes.

422 E41 : Fais voir ton dé (*elle s'adresse à E21*), il est blanc, le mien est noir et il est plus lourd.

423 P : Je veux dire que dans chaque dé, il y a 2 faces blanches et 4 noires.

424 E33 : Ont-ils la même masse ?

425 *E41 prend le dé gris du 2^{ème} groupe.*

426 E41 : Monsieur, il y a une différence au niveau des poids.

427 P : Alors ...

428 E41 : Ce dé (*le gris*) est léger, il tourne facilement, l'autre (*le noir*) tourne difficilement.

429 P : On va faire l'expérience et on verra... Dans ce jeu, il n'y aura ni gain ni perte. Lors des dernières expériences, nous avons remarqué que la fraude existe, maintenant on va jouer sans tricher.

- 430 *Le professeur prend un gobelet pour expliquer.*
- 431 E41 : Pourquoi, ce groupe (*le groupe 3*) est le seul à avoir des balles ?
- 432 P : Il faut bien qu'un groupe ait les balles, puis j'ai distribué les matériels au hasard.
- 433 *Le professeur continue ses explications. Il agite le gobelet.*
- 434 P : On lance 10 fois le dé.
- 435 E41 : On le lance directement ? Sans ...
- 436 *Le professeur distribue des pistes (couverts de boîtes rectangulaires) aux groupes ayant un dé.*
- 437 P : On agite le gobelet et on jette le dé sur la piste. Je demande que chaque groupe écrive sa prévision pour le résultat avant de réaliser l'expérience.
- 438 E41 : C'est-à-dire ?
- 439 P : Tu vas lancer 10 fois n'est-ce pas ?
- 440 E41 : Ah, si j'obtiens blanche ...
- 441 P : Tu donnes ta prévision pour le résultat puis tu fais l'expérience.
- 442 E41 : Par exemple, je dis que je vais avoir une blanche et quand je lance (*elle lance le dé*) ...
- 443 P : Tu donnes les prédictions pour les dix jets, par exemple 3 blanches et 7 noires ou 5 blanches et 5 ...
- 444 E41 : Oui j'ai compris.
- 445 P : Et puis tu fais l'expérience.
- 446 E41 : La première, on prévoit qu'elle est blanche.
- 447 *E22 dit, à voix basse, qu'on ne peut pas entrer dans l'au-delà.*
- 448 P : Non, vous avez à vous concerter au sein d'un même groupe pour prévoir combien de blanches vous allez apporter dans les 10 jets, puis vous faites l'expérience.
- 449 E21 : Monsieur, on écrit ou on met une croix.
- 450 *E22 demande si on peut entrer dans l'au-delà au professeur qui répond à E21.*
- 451 P : Tu écris par exemple « je prévois 5 blanches dans les 10 lancers ». Bien entendu, c'est un exemple.
- 452 *Le professeur insiste sur le fait d'écrire le nombre, approximatif, de blanches qu'on s'attend à avoir pour les dix épreuves aussi bien pour les dés que pour les balles.*
- 453 *Les élèves d'un même groupe se concertent entre eux. Seul, E22 est à l'écart, la tête dans les mains, il ne cesse de dire, à basse voix, qu'on ne peut pas le faire. Il a même juré que c'est un péché.*
- ...
- 454 P : Avez-vous compris ce qui est à faire ?
- 455 E13 : Nous avons terminé monsieur.
- 456 E11 : Nous avons donné nos prévisions.
- 457 P : (*s'adressant à tous les élèves*) Avez-vous vu ce qu'il y a dans le dé avant de donner vos prévisions ?
- 458 E11 : Oui.
- 459 P : Combien ?
- 460 *E41 demande, entre temps, s'il faut écrire le nombre.*
- 461 E11 : 2 blanches et ...
- 462 P : C'est-à-dire que vous avez prévu le résultat selon ce que vous avez dans le dé hein, ce n'est pas n'importe comment ?
- 463 E13 : Oui.
- 464 E : Où est le dé ?
- 465 P : Dans le dé, il y a 2 blanches et 4 noires, n'est-ce pas ?
- 466 E13 : Oui.

- 467 E41 : Monsieur, j'écris par exemple la proportion ...
- 468 P : (*s'adressant au groupe 3*) Pour vous, vous avez une balle blanche et deux balles orange. Vous allez tirer 10 fois, combien de fois allez-vous avoir de blanches selon vous ?
- 469 E41 : Monsieur, dois-je écrire combien ?
- 470 P : Combien de blanches prévois-tu avoir en 10 fois ?
- 471 *Les élèves continuent à discuter au sein de chaque groupe.*
- 472 P : Attendez, il ne faut pas oublier que dans un dé il y a 2 blanches et 4 noires et que pour les balles il y a 1 blanche et 2 orange. Vous donnez donc vos prévisions selon ces données.
- 473 *Les groupes 1, 3 et 4 ont écrit leur prévision et commencent à jouer. Dans le groupe 2, E22, pensif, ne veut pas participer et E21 et E23 sont en désaccord.*
- 474 P : Qu'y-a-il ?
- 475 E23 : Est-ce à lui de décider ? Est-il meilleur que nous.
- 476 P : Mettez-vous d'accord.
- 477 E21 : Monsieur, 9 noires et une blanche n'est-ce pas possible ?
- 478 E23 : Non.
- 479 P : Ah, vous n'êtes pas d'accord ?
- 480 E21 : Monsieur, il veut que ce soit 5, on peut avoir même 10.
- 481 P : (*S'adressant à E23*) Lui a dit 10 et toi 5, vous pouvez voir ce que vous obtiendrez.
- 482 *Et le groupe 2 se met à jouer.*
- Tout le monde s'y met sauf E22 qui, pensif, poing sous la joue est à l'écart.*
- Les gobelets sont bien agités avant les lancers de dés, les balles sont bien mélangées sans être regardées et une d'entre elles est tirée « au hasard ».*

De 10 mn à 20 mn

...

- 483 P : Ça y est ?
- 484 E42 : Nous avons obtenu 6 blanches et 4 noires et notre prévision était 7 noires et 3 blanches.
- 485 E21 : On a obtenu le contraire.
- 486 E32 : Nous avons opté pour 8 balles orange et 2 blanches et nous avons eu 3 blanches et 7 orange.
- 487 E33 : La différence est de 1.
- 486 P : (*S'adressant à E21*) Et vous ?
- 487 E21 : Nous n'avons pas terminé.
- 488 E23 : (*termine les jets avec une face noire*) Ahh..., monsieur, j'ai prévu 5 blanches et 5 noires et nous avons obtenu 4 blanches et 6 noires.
- 489 P : Je pense que ton camarade (*E21*) a deviné 9.
- 490 E23 : Oui, nous avons fait des prévisions différentes.
- 491 E21 : Moi, j'ai prévu 9 noires et une blanche et le résultat obtenu est 4 blanches et 6 noires.
- 492 E23 : Une seule monsieur (*il veut dire que la différence entre sa prévision et le résultat obtenu est 1*).
- 493 E11 : Nous avons prévu 7 blanches et 3 noires et nous avons eu 5 de chaque couleur.
- 494 E13 : Cinq cinq.
- 495 E11 : Comme la première fois.
- 496 P : Bon, d'après vos résultats trouvés dans les 10 premières fois, que pensez-vous si on fait 20 fois ?
- 497 E : Même chose, même chose.

- 498 P : C'est-à-dire ? ... Commençons par le cas du 1^{er} groupe (*il prend la feuille du 1^{er} groupe*), vous avez eu 5 blanches et 5 noires. Si l'on fait 20 fois ?
- 499 E13 : J'obtiens 10 noires et 10 blanches.
- 500 E : Non, ils peuvent changer.
- 501 E21 : Ils peuvent changer. Monsieur, on peut avoir 10 noires et 10 blanches comme on peut obtenir plus de noires puisque les noires, dans le dé, sont plus nombreuses que les blanches.
- 502 P : Et pour les balles ? Si on fait 20 fois.
- 503 E32 : Non ça va changer.
- 504 P : C'est-à-dire ?
- 505 E32 : Ça va changer puisque le nombre de tirages va augmenter.
- 506 E21 : Ça peut rester la même comme ça peut changer. Quand ça change, les noires deviennent plus nombreuses car la proportion du noir dans le dé est plus grande.
- 507 P : Et toi (*il s'adresse à E31*), tu es avec qui ?
- 508 E31 : Avec eux monsieur (*il pointe le groupe 2*). Je suis d'accord avec la théorie de E21.
- 509 P : Laquelle ?
- 510 E31 : La proportion du noir dans le dé est plus grande que la proportion du blanc.
- 511 P : Vous avez trouvé 3 blanches et 7 noires. Et si vous faites 20 fois ...
- 512 E21 : Je vais avoir une proportion plus grande de noir.
- 513 P : Faisons 20 fois.
- 514 E21 : Est-ce qu'on trace de nouveau ?
- 515 P : Vous notez la 2^{ème} dizaine sous la 1^{ère}.
- 516 E32 : Refait-on les prévisions ?
- 517 P : Vous donnez vos prévisions pour 20 fois, avant de commencer l'expérience.
- 518 E11 : Les prévisions vont changer.
- 521 *Les groupes 1 et 2 écrivent leurs prévisions et commencent les jets.*
- 522 *E22 est toujours à l'écart, il ne veut pas participer.*
- 523 *Le groupe 3 commence les tirages sans écrire de prévision.*
- 524 P : Attendez un moment. Va-t-on reprendre 20 fois ou bien ajouter 10 aux premières.
- 525 E32 : On complète.
- 526 E42 : On reprend 20, moi j'ai fait 20 (*c.-à-d. qu'elle a préparé un tableau à 20 colonnes*).
- 527 P : Décidez-vous, allez vous compléter les 10 premières ou reprendre 20 nouvelles ?
- 528 E32 : Je complète par 10 autres.
- 529 *Le professeur répète la question pendant que les groupes 1, 2 et 3 se sont engagés dans l'expérience.*
- 530 E42 : Je fais 20 nouvelles.
- 531 E41 : Oui, on fait 20 nouvelles ; tout le monde fait 20 nouvelles.
- 532 P : Bon faites 20 nouvelles.
- ...
- 533 E32 : Monsieur.
- 534 P : Vous avez terminé les 20 ! As-tu ajouté 10 ou fait 20 ?
- 535 E32 : J'ai ajouté 10.
- 536 P : Qu'avez-vous obtenu ?
- 537 E32 : Ils ont changé, toutes sont devenues blanches et il y a 3 ... (*en réalité, il a obtenu 5b et 5o*)
- 538 P : Ajoute 10 autres. Mais, tu n'as pas donné de prévision ! Commence par écrire ta prévision pour 20 tirages.
- 539 *À ce stade, les deux élèves du groupe 4 ont commencé les lancers.*

...

540 P : (*s'adressant au groupe 1*) Avez-vous fait 20 nouvelles ou ajouté 10 ?

541 E13 : Nous avons fait 20.

542 *Au sein d'un même groupe, tous les élèves participent à l'expérience et l'élève E22 est finalement entré dans le jeu en participant aux jets.*

543 E23 : Monsieur, j'ai proposé 12 noires et 8 blanches et c'est ce qui est arrivé (*E23 a choisi de prévoir le double du premier résultat ; sur la feuille, c'est écrit 16n et 4b : c'est la prévision de E21*).

544 P : Donc d'après toi ...

545 E42 : (*Contente*) Monsieur, nous avons dit 10 noires et 9 blanches (*sur la feuille, c'est écrit 11 noires et 9 blanches*) et c'est ce qu'on a trouvé.

546 E41 : (*Souriante*) On a trouvé la même chose. Maintenant, c'est 30 fois ?

547 E32 : Monsieur, nous avons trouvé exact (*sur la feuille, c'est écrit 5b et 5o au dessus d'une première note qui est 10b et 10o*).

Le premier groupe a prévu 8b et 12n, il a obtenu 6b et 14n.

548 E42 : Maintenant, allons-nous faire 30 fois.

549 P : Oui, vous aller faire 30 fois et vous commencez aussi par donner vos prévisions.

550 E32 : Monsieur, on a prévu cinq cinq et on a trouvé cinq cinq (*au fait, ce groupe a trouvé 5b et 5o aussi bien dans la 2^{ème} dizaine que dans la 3^{ème}*).

De 20 mn à 40 mn

551 *Les élèves se concertent pour donner leurs pronostics et commencent les jets ou les tirages.*

552 P : (*S'adressant au groupe 1*) Quelle est votre prévision ?

553 E12 : 10 blanches et 20 noires. Tout à l'heure, nous avons eu 6 blanches et 14 noires.

...

554 *P passe auprès du groupe 3, puis auprès du groupe 2.*

555 E21- Nous avons prévu 10 blanches et 18 noires.

556 P : 18 et 10, il en manque 2.

557 E41 : Monsieur, j'ai dit "Je prévois que la proportion du noir est plus grande que la proportion du blanc", 21 noires et 9 blanches ...

558 E42 : On a obtenu égalité.

559 E41 : J'ai obtenu 15 blanches et 15 noires.

560 P : Passez à 40, qu'est-ce que vous prévoyez ?

561 E21 : Monsieur, 11 blanches et 19 euh... (*Sur la feuille, on remarque qu'il ya 12 blanches et qu'il manque un jet*).

562 P : Est-ce le pronostic ou le résultat de l'expérience ?

563 E21 : C'est l'expérience.

564 P : Quel était votre prévision ?

565 E21 : On a prévu 18 et 10.

566 P : Il manque 2.

567 *E21 corrige sur sa feuille : la prévision devient 18 noires et 12 blanches.*

568 P : Voyez pour 40. Donnez votre prévision puis faites l'expérience.

...

569 P : (*S'adressant au groupe 3*) Où est-ce que vous en êtes ?

570 E33- Nous avons prévu 28 blanches et 2 noires (*Il est plutôt question de balles orange. et le pronostic était au départ 26b et 4o*).

571 P : Et qu'avez-vous obtenu ?

572 E33 : Nous avons eu 21 balles orange et 9 blanches.

573 P : Voyez maintenant avec 40. Donnez votre prévision avant de passer à l'expérience.

...

574 P : (*S'adressant au premier groupe*) Et vous ?

575 E12 : Nous avons obtenu 12 et 18 (*c'est-à-dire 12 blanches et 18 noires pour une prévision de 10 blanches et 20 noires*).

576 P : Et pour 40, qu'aller vous prévoir ?

577 E12 : 20 et ... 20 je pense.

578 P : Ecrivez votre prévision puis faites l'expérience.

...

579 P : Etes-vous mis d'accord sur 20 et 20 ?

580 E13 : Oui.

...

581 E22 : Monsieur, nous demandera-t-on nos prévisions en classe ?

582 P : Tu l'as fait ici, n'as-tu pas tiré quelque chose ?

583 E22 : Je n'ai rien tiré ...

584 E22 : Ils ne m'ont pas laissé travailler avec eux (*pourtant, après sa réticence, il a participé aux lancers. En ce moment même, il lance le dé plusieurs fois et E21 prend note*).

...

585 E42 : Monsieur, nous avons prévu 23 noires et 17 blanches et nous avons eu 19 noires et 21 blanches... Maintenant, c'est 50 ?

586 P : Vous donnez vos prévisions avant de commencer.

587 E41 : 50 maintenant ?

588 P : Oui, faites 50.

589 P : Je veux vous poser une question. Comment donnez-vous vos prévisions ? Est-ce en fonction des résultats précédent ou n'importe comment ?

590 E : Selon les résultats précédents.

591 E42 : Nous, nous mettons la proportion du noir plus grande que la proportion du blanc car il y a deux blanches (*faces*).

592 P : Donc, vous choisissez selon les résultats précédents ?

593 E42 : On choisit plus de noires car il y a plusieurs ...

594 *Les élèves continuent à expérimenter, mais ils ne sont plus concentrés.*

595 P : Avez-vous terminé les 40 ?

596 EE : Oui.

597 P : Tout le monde a terminé ?

598 E : Non.

599 P : Bon, compléter les 40.

600 E41 : Nous sommes passés à 50, nous.

601 (*Brouhaha*)

602 P : Il vous reste 10 minutes. Vous avez à faire l'expérience et noter les résultats obtenus le long de ces dix minutes. Maintenant, vous n'avez plus à donner de prévision.

603 *En fin de séance, nous avons vérifié que les prévisions sont bien écrites sur les feuilles.*

604 *Pour les 40 fois, le groupe 1 a prévu 20b et 20n (il s'est arrêté au 38^{ème} jet), le groupe 2 a prévu 15b et 25n (il s'est arrêté au 22^{ème} jet), le groupe 3 a prévu 10b et 30o (il a obtenu 12b et 28o) et il a continué d'autres tirages, le groupe 4 a prévu 17b et 23n (il a eu 21b et 19n) et il a continué d'autres tirages.*

605 *Nous soulignons que dans la feuille du 2^{ème} groupe est écrit : "je prévois que la proportion d'obtention de la couleur noire est plus grande que pour les blanches", cette mention étant écrite une seule fois : avant de donner la prévision pour 10 jets.*

Pour le groupe 4, c'est écrit : "Je prévois que la proportion du noir est plus grande que la proportion du blanc". Cette mention est reconduite 3 fois, avant les prévisions faites pour 10, 20 et 30 lancers.

Annexe 7 : Une séquence introductive des probabilités

La situation « expérience aléatoire » (2 séances)

1^{ère} séance

Objectif principal : élaboration d'un protocole expérimental et définition d'une expérience aléatoire.

*** 1^{ère} expérience**

Phase 1- Travail en groupes (4 groupes), matériel : un dé dont les deux faces (le 3 et le 6) sont en blanc.

Consigne : lancez, dans chaque groupe, le dé 10 fois et notez le nombre de faces blanches obtenues (on s'intéresse à la face supérieure). Le groupe qui obtient le plus de blanches est déclaré gagnant.

Objectif 1 : mettre les élèves dans des conditions où ils vont tricher (rien ne doit être dit à propos de la façon de lancer).

Phase 2- Après l'exécution de la tâche déléguée aux élèves, un débat s'engage autour de l'acceptabilité des résultats obtenus (ce débat peut-être précédé d'une discussion au sein de chaque groupe).

Objectif 2 : soupçon de fraude.

Phase 3- Question : comment faire pour que les résultats soient acceptés par tout le monde ?

Objectif 3 : élaboration d'un protocole expérimental (règles précises) approuvé par tout les élèves faisant du jeu un jeu équitable.

*** 2^{ème} expérience (pour cette expérience, les objectifs sont les mêmes que dans la première)**

Phase 1- Travail en groupes (4 groupes), matériel : un récipient contenant une balle blanche et deux balles non blanches (de couleur orange).

Consigne : tirez, dans chaque groupe, 10 fois une balle (en remettant chaque fois la balle tirée) et notez le nombre de balles blanches obtenues. Le groupe qui obtient le plus de blanches est déclaré gagnant.

Phase 2- Après l'exécution de la tâche déléguée aux élèves, une discussion s'engage autour de l'acceptabilité des résultats obtenus (cette discussion peut-être précédée d'un débat au sein de chaque groupe).

Phase 3- Question : comment faire pour que les résultats soient acceptés par tout le monde ?

*** Institutionnalisation :**

Une expérience aléatoire est une expérience dont les résultats sont dus au hasard seulement.

Une expérience aléatoire est une expérience :

- où les issues possibles sont connues,
- où le résultat est imprévisible,
- reproductible dans les mêmes conditions (en respectant un protocole expérimental).

2^{ème} séance

Objectif principal : faire fonctionner les protocoles expérimentaux établis.

* 3^{ème} expérience

- Travail en groupes (4 groupes), matériel : le récipient de la 2^{ème} expérience (contenant 1 balle blanche et 2 balles orange), 3 dés dont chacune a 2 faces blanches et 4 noires (l'un d'eux est celui de la 1^{ère} expérience et deux autres qui se ressemblent mais dont l'un d'eux est pipé, il n'est pas question de donner cette information aux élèves) placés dans 3 gobelets, 3 pistes (des couvercles cartonnés de boîtes).

Consigne : il est question de faire des séries de 20 épreuves : tirages (avec remise) ou lancers de dés et de noter le nombre de blanches obtenues dans chaque série (pour les 3 groupes procédant aux jets de dés, il est demandé de secouer le dé dans le gobelet avant de le lancer sur la piste).

Le professeur aura à arrêter le jeu au moment où chaque groupe aura effectué au moins 5 séries et où le nombre de séries n'est pas le même pour au moins 3 groupes distincts. Il peut laisser un groupe terminer sa dernière série.

NB : chaque groupe est muni d'une feuille blanche afin de noter les résultats de toutes les expériences.

La situation « approche fréquentiste des probabilités » (2 séances)

3^{ème} séance

Phase 1-

Le professeur présente sur le tableau noir les résultats de la 3^{ème} expérience correspondant à la totalité des séries pour chaque groupe sous forme d'un tableau :

| Groupe | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----------------------------|---|---|---|---|
| Nombre d'épreuves | | | | |
| Nombre de blanches obtenues | | | | |

Un débat s'engage autour de la question : « quel est le groupe gagnant si l'on suppose que celui qui a obtenu le plus de blanches gagne ? » (Ce débat peut-être précédé d'une discussion au sein de chaque groupe).

Objectif 1 : la fréquence comme moyen de comparaison des résultats.

Phase 2-

Travail en groupes (4 groupes).

Chaque groupe est invité

- à faire un tableau correspondant aux fréquences cumulées des blanches obtenues,
- puis, à tracer le polygone des fréquences cumulées sur une feuille de papier millimétré.

Objectif 2 : tracer les polygones des fréquences cumulées.

Phase 3-

Le professeur donne à chaque groupe une feuille préparée à l'avance où figurent les polygones des fréquences cumulés des 4 groupes.

Il est demandé aux élèves de donner leurs avis à propos des polygones et le professeur engage un débat (ce débat peut-être précédé d'un travail au sein de chaque groupe).

Objectif 3 : points de ressemblance et de dissemblance entre les polygones.

4^{ème} séance

Phase 1-

Le professeur demande aux groupes de simuler avec la calculatrice l'expérience des dés :

Il leur montre comment simuler l'expérience du lancer d'un dé (6RANDOM+1 : en appuyant sur la touche =, on obtient un nombre dont le chiffre des unités est compris, au sens large, entre 1 et 6, ce nombre représente une épreuve de lancement de dé).

Il convient avec eux que les nombre 3 et 6 (tel qu'était le cas pour les dés utilisés) correspondent à la couleur blanche.

Il demande à chaque groupe de simuler des séries de 20 lancers (de 8 à 10 séries), de faire un tableau des fréquences cumulées des blanches obtenues et de tracer le polygone correspondant sur la même feuille de papier millimétré utilisée lors de la 3^{ème} séance.

Objectif 1 : points de ressemblance et de dissemblance entre le polygone issu de l'expérience et celui issu de la simulation.

Phase 2-

Le professeur organise un débat autour des points de ressemblance et de dissemblance d'abord, entre le polygone issu de l'expérience et celui issu de la simulation au sein de chaque groupe et ensuite, entre les 8 polygones :

Il y aura, en principe, 7 polygones montrant que plus le nombre d'épreuves augmente, plus les fréquences se rapprochent (la question de la valeur à laquelle les fréquences se rapprochent peut être posée).

Il y aura, en principe, un polygone qui se démarque des autres, c'est celui qui correspond au dé pipé.

Objectif 2 : approche fréquentiste des probabilités.

* Institutionnalisation :

Plus le nombre d'épreuves est grand, plus la fréquence cumulée d'un événement tend à se stabiliser autour d'une valeur. Cette valeur est la probabilité de l'événement en question.

Contribution à l'introduction des probabilités au collège : rapports d'élèves à quelques notions probabilistes

Résumé

Ce travail s'intéresse à l'aléatoire et, plus précisément, à l'introduction des probabilités au collège. Il s'inscrit dans le contexte de l'évolution des programmes qui ont officialisé l'approche fréquentiste des probabilités.

Nous y avons abordé ce qui existe au niveau des connaissances des élèves, notamment celles disponibles avant toute rencontre scolaire de l'aléatoire (les connaissances spontanées) et ce qui peut exister au niveau de l'introduction des probabilités au collège.

Pour étudier le terrain spontané des connaissances, nous avons procédé à une série d'expérimentations de type diagnostic portant sur des objets probabilistes tels que la notion de quantification des probabilités et celle d'indépendance. L'outil d'analyse adopté est la notion de *conception*, centrale dans notre travail, qui émerge de la théorie des champs conceptuels et que nous avons formalisée en termes empruntés à la Théorie Anthropologique du Didactique. Il en ressort notamment la difficulté de comprendre le tirage avec remise et la rareté de l'apparition de la conception "cas favorables/cas possibles".

Le besoin d'un enseignement approprié étant montré, nous avons mis en place une expérimentation didactique où nous ménageons les deux approches "a priori" et "fréquentiste". Dans l'analyse de cette expérimentation, nous avons recouru à l'articulation de la Théorie des Situations Didactiques et de la didactique professionnelle. Cette analyse nous a fourni des informations en termes de tâches prescrites et tâches effectives, de milieux et de contrats didactiques.

En conclusion, l'expérimentation précédente représente une esquisse d'une séquence d'enseignement qui reste à confronter à la contingence.

Mots clés : Probabilités ; Approche a priori ; Approche fréquentiste ; Quantification des probabilités ; Indépendance ; Organisation mathématique ; Organisation personnelle ; Conception ; Conception spontanée ; Tâche prescrite ; Tâche effective ; Milieu ; Contrat didactique.

Contribution to the introduction of probabilities in middle school: pupils' relationships with some probability notions'

Abstract

This work is connected with random and, more exactly, with the introduction of probabilities in the middle school. It comes within the framework of the evolution of the syllabus which has officialized the "frequentist" approach of probabilities.

We have dealt with what exists at the level of the pupils knowledge, in particular, the sort of notions previous to any school content (spontaneous knowledge) and also what can be done at the level of the introduction of probabilities at middle school.

In order to study the spontaneous aspect of knowledge, we have used a series of diagnosis experiments made on some probability objects such as the notion of quantification of probabilities and the notion of the independence. The analysis tool adopted is the notion of *conception*, which is essential in our work, and emerges from the conceptual fields theory that we have formulated in terms borrowed from the Didactic Anthropological Theory. We have especially noticed the difficulty conceiving the independence of the events and the rarity of the appearance of the conception "favourable cases / possible cases".

The need of an adequate teaching being shown, we have established a didactic experimentation in which we treat both "a priori" and "frequentist" approaches. In the analysis of this experimentation, we used, in particular, the articulation of the Theory of Didactical Situations and professional didactic. This analysis has provided us information with terms of prescribed tasks and effective ones, "milieu" and didactical contracts.

In conclusion, the above mentioned experimentation represents an outline of a teaching sequence which should be collated with contingency.

Key words: Probabilities; A priori approach; "Frequentist" approach; Quantification of probabilities; Independence; Mathematic organisation; Personal organisation; Conception; Spontaneous conception; Prescribed task; Effective task; "Milieu"; Didactical contract.

