



HAL
open science

Superfluidité et localisation quantique dans les condensats de Bose-Einstein unidimensionnels

Mathias Albert

► **To cite this version:**

Mathias Albert. Superfluidité et localisation quantique dans les condensats de Bose-Einstein unidimensionnels. Physique mathématique [math-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 2009. Français. NNT: . tel-00508419

HAL Id: tel-00508419

<https://theses.hal.science/tel-00508419>

Submitted on 3 Aug 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PARIS XI - U.F.R. DES SCIENCES D'ORSAY

Thèse de doctorat de l'université Paris XI

Spécialité :

Physique Théorique

présentée par

Mathias ALBERT

pour obtenir le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI

Sujet :

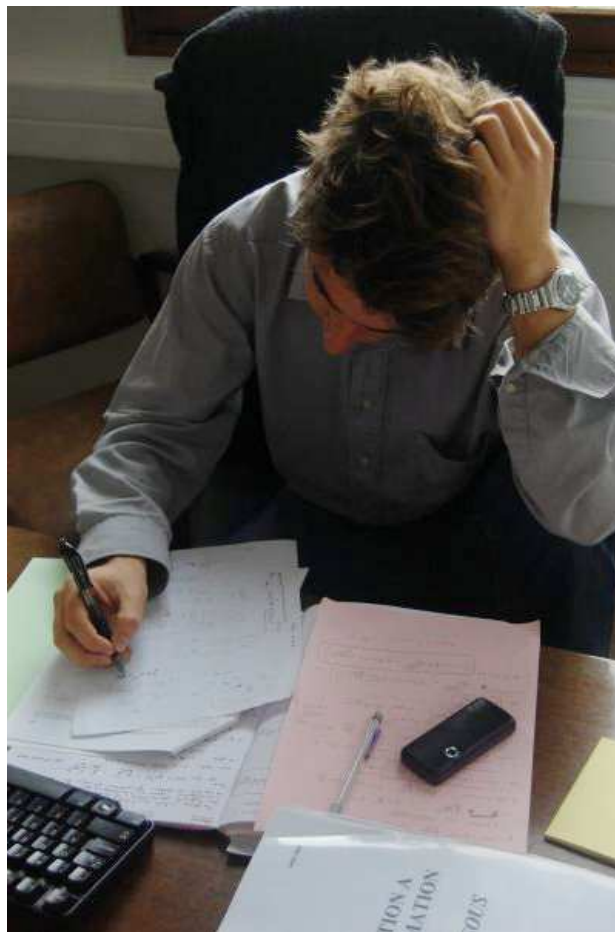
Superfluidité et localisation quantique dans les condensats de Bose-Einstein unidimensionnels

soutenue le 19 Octobre 2009

devant le jury composé de

| | |
|--------------------------|---------------------------|
| Philippe BOUYER | <i>Examineur</i> |
| Dominique DELANDE | <i>Rapporteur</i> |
| Thierry GIAMARCHI | <i>Rapporteur</i> |
| Hendrik HILHORST | <i>Président du jury</i> |
| Patricio LEOEUF | <i>Directeur de thèse</i> |
| Nicolas PAVLOFF | <i>Membre invité</i> |

*Celui qui trouve sans chercher est celui
qui a longtemps cherché sans trouver.*
Gaston Bachelard.



*Physics is like sex. Sure, it may give some
practical results, but that's not why we do it.*
R. P. Feynmann.

Remerciements

*De la raison ! Hélas je l'ai perdue, vos beaux
yeux sont les filous qui me l'ont volée.
Arlequin, le jeu de l'amour et du hasard, Marivaux.*

Chers lecteurs, si la plupart d'entre vous commencent la lecture de ce manuscrit par ces lignes, j'ai pour ma part attendu les derniers instants pour les rédiger. Plusieurs explications sont évidemment possibles. On peut imaginer tout d'abord l'incroyable plaisir et la libération que peut procurer ce petit exercice après avoir tant lutté pour rédiger les nombreuses lignes qui suivent. D'autre part, j'attendais bien sûr le dernier moment afin que tout le monde soit gentil et serviable pour figurer sur ces quelques pages, que j'avoue moi-même être les rares à maîtriser pleinement. À moins que la quantité de travail nécessaire à l'écriture de ce manuscrit m'eut obligé à travailler le contenu scientifique en priorité ? Peu importe... Quelle(s) qu'en soi(en)t la ou les raisons je n'ai pas moins de personnes à remercier pour autant et il est donc temps d'attaquer ce chantier qui, à l'ordre zéro, pourrait se résumer à remercier tout le monde.

Avant de perdre toute rationalité et de divaguer sur des détails historiques et vieilles blagues réservées à quelques initiés, je tiens tout d'abord à remercier les membres du jury qui ont bien voulu me faire l'honneur et le plaisir d'accepter (ont-ils eu le choix ?) de juger ce travail. Merci à Dominique DELANDE et Thierry GIAMARCHI pour avoir accepté la lourde tâche d'être rapporteurs de ce manuscrit. Leurs noms sont, malheureusement pour eux, venus si naturellement que je ne pouvais imaginer ce jury sans leur présence. Puisse Thierry me pardonner un jour de l'avoir harcelé jusqu'à l'abdication. Merci également à Philippe BOUYER et Henk HILHORST pour leurs participations.

Je ne saurais jamais assez remercier Patricio LEBOEUF pour tout ce qu'il m'a apporté en encadrant cette thèse. Il ne s'en souvient peut-être pas, et n'en savait bien sûr rien à l'époque, mais cette thèse fut le cadeau de mon vingt-deuxième anniversaire. Après l'avoir rencontré lors d'une conférence trois ans plus tôt, je n'ai cessé de lui rendre visite pour discuter de physique et en particulier de chaos quantique. C'est finalement le jour de mon anniversaire qu'il décida de m'accepter en stage de M2 au laboratoire. Outre cette parenthèse "instant émotion", travailler avec lui a été autant instructif que plaisant. Je le remercie grandement pour la confiance, l'autonomie et la liberté qu'il m'a laissés dans mes recherches. Sa grande culture en physique et son perfectionnisme scientifique m'ont été d'une grande aide au cours de cette thèse, tant au niveau de son contenu scientifique que pour la formation qu'elle m'a apportée.

Quelques maîtres plus loin, Nicolas PAVLOFF et Tobias PAUL. Je dois également énormément à ces deux personnages forts sympathiques. Si l'accent du sud de Nicolas était bien plaisant à entendre, les phrases qui allaient avec étaient généralement loin de m'ennuyer. Sorte de "sous Chef", Nicolas m'a plus que souvent éclairé sur la physique et a toujours été de bon conseil. Ce fut une véritable chance d'enseigner et de travailler avec lui. Tobias, quant à lui, fut un véritable camarade de travail. Rares sont les thésards qui ont la chance de pouvoir travailler avec quelqu'un au quotidien et discuter de leurs problèmes

de phases numériques exotiques (Nan, inf, segmentation fault, ...) ou autres problèmes d'intégration. Sans lui, cette thèse serait certainement bien moins épaisse qu'elle ne l'est, c'est pourquoi je ne saurais assez le remercier d'avoir combattu à mes côtés. Au delà de la physique, son palais fin de gourmet et sa grande sympathie m'ont permis de découvrir les délices de la culture Allemande lors de mes divers voyages de l'autre côté du Rhin. Pour ça je le remercie encore plus que pour la science !

Mais une thèse n'est pas seulement l'aboutissement de trois ans de travail. C'est la cerise sur le gâteau (oublions pour un instant que je n'aime pas la cerise et prétendons le contraire¹) de vingt cinq ans de vie passés dans les livres, discussions et autres activités scientifiques (ou non) pour trouver cette vocation, qui, compte tenu de l'espace de Hilbert visité, me semble la plus appropriée à mes désirs. Ce chemin, dont j'espère ne pas avoir atteint le bout, je ne l'ai bien sûr pas fait seul. C'est pourquoi il me semble bon de remercier l'ensemble des personnes, choses et évènements qui m'ont guidés et ont fait un bout de chemin avec moi sur la route de Physicland. Il est important de prévenir le lecteur que la prose risque désormais de devenir hautement aléatoire. Mais après tout, le mouvement Brownien n'est t-il pas efficace pour balayer le plan ?

Loin d'être tombé dans la marmite quand j'étais petit, je n'ai découvert ma passion pour la science qu'assez tardivement. N'éprouvant que très peu de plaisir à étudier dans ma jeunesse, je n'étais qu'un élève moyen ayant pour seul objectif d'amuser la galerie. Mes résultats étant moins mauvais en mathématiques et physique-chimie qu'ailleurs, c'est ma mère qui me recommanda fortement de suivre la filière scientifique au lycée. Après des débuts catastrophiques j'ai compris qu'il fallait peut-être ouvrir les cahiers et faire les exercices demandés, choses que j'ignorais pratiquement jusque-là. Mais ceci ne fut pas suffisant et ne me permit d'entrer en terminale que de justesse. Cette année fut probablement la plus riche en découvertes scientifiques de ma vie. Les rencontres avec mes professeurs de physique-chimie M. VIEILLEVIGNE, de mathématiques M. VENDITTI et de philosophie M. MOUNICOUX furent décisives dans la découverte de cette passion pour les sciences. En sortant des chemins battus par les manuels scolaires, ce sont les quelques mots échappés par ces professeurs qui suffirent à réveiller le démon. Mais quelle est donc cette théorie de la relativité dont j'entends si souvent parler ? Faisant mes premiers pas sur Internet, c'est ainsi que ma curiosité prit rapidement le dessus, me plongeant dans d'éternelles recherches qui me conduisent aux pieds d'un monument dont la beauté n'a d'égale que son étrangeté : la physique quantique. Je remercie donc ces personnes pour la métamorphose qu'ils ont initiée. Sans eux qu'aurais-je fait, nul ne le sait. Parfois la dynamique de notre vie ressemble à celle d'un système chaotique qui, par essence, est fortement sensible aux conditions initiales et d'autres fois à un oscillateur harmonique, nous ramenant sans cesse vers le même centre d'intérêt. Quel est mon cas je l'ignore, mais est-ce d'une quelconque importance dans la mesure où l'on est heureux de ce que l'on est ? Probablement pas.

En plus de cette incroyable découverte, cette année de terminale fut également très importante pour la prise de conscience de ma passion pour l'enseignement. C'est grâce à Barbara que j'ai connu mes premiers plaisirs de l'enseignement en esquivant les livres de physique volants à travers la cuisine lors de nos splendides mercredi après-midi papier crayon ("*Faire des mathématiques en binôme alors qu'ils pourraient être tranquilles tous les deux... quelle idée ! ?*" M.H. Cescut-Magot (ma mère).). Ces passions, je les ai encore aujourd'hui et même plus que jamais (*To infinity and Beyond ! Buzz l'éclair, Toy Story.*). Les deux grands plaisirs de ma thèse ont été l'incroyable joie d'obtenir un résultat après plusieurs mois de capillotraction ainsi que ce silence magique qui s'auto-organise lorsque, sorti des chemins battus du TD, j'expliquais la physique profonde cachée derrière les

¹Une hypothèse similaire sur le thé ne sera pas nécessaire pour ce qui suit.

longues lignes de calculs à mes étudiants².

Au cours de mes études, commencées à Limoges et finies à Orsay, les protagonistes importants pour mon développement scientifique n'ont pas été rares. Je remercie d'ailleurs le système universitaire Français pour la liberté et l'autonomie qu'il m'a laissé durant ces merveilleuses années. En ce qui concerne mes professeurs, je les remercie tous, les bons comme les mauvais, car si on apprend beaucoup des grands maîtres, les mauvais exemples sont également très instructifs. Ils permettent notamment de réaliser qu'on aime une science (ou pas) pour elle-même et pas seulement pour l'orateur qui en fait l'éloge. Parmi les plus importants je remercie Alain SARFATI pour d'innombrables raisons. Il fut et reste un véritable maître pour moi, tant du point de vue scientifique que pédagogique ou humain. Ce fut un immense plaisir de travailler avec lui au laboratoire Aimé Cotton lors de mon stage de maîtrise et des stages de Sophie et Flavien (un grand merci à eux deux par ailleurs et en particulier à Sophie qui m'a subi à plusieurs reprises) deux ans plus tard mais aussi d'enseigner à ses côtés à l'IFIPS et au L2 d'Orsay. Si la rencontre avec Alain est l'une des plus décisives de mon parcours, celle avec Christophe TEXIER est également très importante. Disciple de Christophe à trois reprises, il est peu à peu devenu une sorte de mentor que je n'ai jamais hésité à consulter pour parler de mon avenir. Sa passion pour la physique quantique a fini de sceller mon goût inestimable pour cette discipline. Je le remercie pour tous ses conseils et tout ce qu'il m'a appris avant et pendant la thèse. De manière générale je remercie tous mes anciens maîtres de stages avec qui j'ai fait mes premiers pas dans le monde de la recherche. J'ai toujours eu la chance de travailler avec des gens charmants et de grande compétence. Ainsi je remercie Marc RABAUD et Philippe GONDRET qui m'ont fait découvrir les joies de la physique expérimentale des liquides. Je garde un excellent souvenir de mon "vague" passage au FAST. Encore une fois je remercie Alain, Etienne BRION et Vladimir AKULIN, avec qui j'ai découvert la physique théorique et les condensats de Bose-Einstein au laboratoire Aimé Cotton³. L'ambiance très chaleureuse de ce laboratoire restera à jamais dans ma mémoire et mon seul regret est de ne pas avoir résolu la question de savoir "*de Bose et Einstein lequel des deux cons dansa*" (Merci Nouari KEBAILI pour tes enseignements de blagues pourries.). Ce fut aussi pour moi la découverte de la méthode Russe en physique théorique. Je remercie Daniel FOURNIER, Maurice HAGUENAUER et surtout Patrick PUZO qui m'ont initié à la physique expérimentale des particules. Merci également à Lydia FAYARD pour avoir défendu ma cause pour l'école d'été du CERN. Toujours dans le même registre, je remercie Gleb GRIBAKIN avec qui j'ai continué mon expérience de physique théorique à la Russe à Belfast. Quelle plaisir de faire de la vraie physique avec diagrammes et matrices aléatoires même si finalement nous n'avons jamais trouvé les diagrammes manquants. Ce voyage à Belfast fut extrêmement intense et épanouissant et ceci en grande partie grâce à lui, que je ne saurais assez remercier.

Parmi mes professeurs je remercie également Antoine VALANCE qui m'a reboosté sur la mécanique quantique quand mon moral n'était pas au top, Hubert DOUBRE pour ce fantastique cours d'électromagnétisme, bourré de références historiques passionnantes, que j'étais visiblement le seul à apprécier, Renaud PARENTANI pour ses légendaires cours de relativité générale que j'attendais chaque mardi avec impatience, Philippe LECHEMINANT et Yvan CASTIN pour leur sympathie et leurs précieux conseils, Françoise DECOSSAS, Daniel FREDON, Bernard GUILLE et Agnès DEFARGES-BERTHELEMOT pour toutes les grandes discussions que l'on a eues à Limoges et Michel HERITIER pour ses conseils.

Du côté des compagnons de route, il y a également quelques lignes à taper. Ma chère

²Petit bémol : -"Ça vous dit qu'on prenne cinq minutes pour discuter l'équation de Schrödinger ?"
- "Non Monsieur, on s'en fout !"

³Anciennement appelé laboratoire laine et coton.

Mimi est sans doute un des protagonistes les plus importants. Merci à toi Mimi pour ta grande patience et tous les bons moments qu'on a pu partager dans cette chambre 46 puis ailleurs. Le café bien sucré et le jeu de la cuillère sont à jamais gravés dans la région des excellents souvenirs de ma mémoire. Mon cher Manu, je te remercie pour tout ce que tu veux, tu te débrouilles avec ça. C'est avec toi que j'ai fait mes premiers pas dans la discussion scientifique de haut niveau et les vodka-pomme chocolats chauds quelques heures avant les exams. *"Mieux vaut être sale en cours que propre à la photocopieuse"* fut notre crédo, nourri de *"Vigilance en lettres d'or"* et autres *"pizza ticket, arrêtez de dire ticket tout est ticket"*. Sur tous les points ces années à Limoges furent les meilleures de toute ma vie et je remercie tous ceux qui ont participé à cet épanouissement, qu'il fut scientifique ou autre. Merci à Clac Clac, Bernard, Juju, Delph, Friponne, Cyril, Agnès, Capo de voiture, Gros caca, Pinpin, Barbara, Matthieu, Alexandra, Cacrole, Foxy, Thibault, Evelyne, la femme à barbe, etc... À Orsay l'ambiance fut plus sérieuse mais pas moins riche en protagonistes importants pour autant. Merci à Caro pour avoir déneigé la voiture, Jémil mon ex-compagnon de travaux pratiques grand fan de l'électronique numérique (il est tombé dedans quand il était grand...), Claire pauvre simple universitaire comme moi, JP (dit Jean Pascal) avec qui j'ai découvert que je n'étais pas le seul fou à passer mon samedi dans des conférences de théorie des cordes après s'être couché à 4h du matin dans un état d'alcoolémie avancée⁴, Nicolas (dit pinailleurs), cher voisin Orcéen jusqu'au bout, avec qui les soirées du vendredi s'écoulaient comme de rien, Alexandre que tout le monde connaît sous l'appellation Sous être (on se demande pourquoi) pour tous nos grands délires même si je ne le pardonnerai jamais d'avoir supprimé la liste mortelle, Julien mon cher collègue de physique des particules grand fan de la violation CP, mon pti Ben, grand maître de la théorie arctique des phoques et des soirées pinard fromage, Vincent et le Part (Charles) avec qui on formait un super trio lors des cours de l'eip au DEA, Fabien le pirate, Sacha mon camarade du DEA, Jean, Barbara bien sûr mais ça c'est une autre histoire, Jérémi sans e et Loic, Chloé, microbe (*"Parait qu't'as une voiture!!"*), Stéphane, etc... Un peu plus tard sont arrivés Tibo, mon cher colonel, grand maître du rhum arrangé, Jessica, Maud, Clémence, Marion, Élise, Karim, François, Gabriel, Xavier, Noémie, Yannick, etc, avec qui les bons moments n'ont pas manqué. N'oublions pas mes chers amis rencontrés au CERN, la French Mafia, composée de Nicolas PINTO, Nicolas POILVERT, Sylvain, Amo, Gaele, Chloé et le "Suisse" Romain, avec qui j'ai passé un incroyable été. Special thank to Marion et Vincent pour avoir mis au monde un être aussi magnifique, nommé Zoé, que je réserve dès à présent en mariage.

Une fois de l'autre côté du bureau, j'ai eu la chance et l'immense plaisir d'enseigner avec des gens formidables. Je remercie encore Alain SARFATI pour l'immense confiance qu'il m'a donné et tous les conseils qui allaient avec. Merci à toute l'équipe des "débutants de la physique quantique", Jacqueline RIDARD, Azzedine BENNANI, Alain SARFATI, Claudie MORY et Elena-Magdalena STAICU-CASAGRANDE, pour tous leurs conseils et pour m'avoir laissé traumatiser moi-même les étudiants de L2. Un grand merci à l'équipe des ondes de l'IFIPS, Alain SARFATI encore une fois et Jean-Noel FUCHS avec qui j'ai pris beaucoup de plaisir à enseigner. Merci également à Julien BOBROFF avec qui j'ai découvert les joies de la vulgarisation scientifique dans le secondaire via les exposés spectaculaires sur la supraconductivité. Enfin merci beaucoup à tous les membres de l'équipe de physique statistique du magistère de physique et en particulier à Christian BOULET, Jean-Noel FUCHS, Christophe TEXIER, Roland MASTRIPPOLITO, Guillaume ROUX, Alberto ROSSO et Nicolas PAVLOFF. Merci également à Nathalie NIHOARN du magistère, autant en tant qu'étudiant qu'enseignant au magistère. Enfin, merci à tous mes étudiants. Ils ne s'en doutaient probablement pas mais ils ont apporté

⁴Merci également de m'avoir indiqué ce fabuleux proverbe de chez toi qui sert de conclusion à ce manuscrit.

une contribution non négligeable au maintien de mon équilibre mental durant ces trois ans.

Un grand merci à toute l'équipe du SCAVO et ses pièces rapportées. Ce fut vraiment un immense plaisir de collaborer avec des gens aussi sympathiques que Serge, Christine, Max, Alain, Pierre, Maria, Alexandre, Laurent, Daniel, Daniele, etc... J'ai eu la chance de travailler sur le chef d'oeuvre du SCAVO, "Les magiciens de la lumière", depuis le stade cafésss-croissantssss-discussion jusqu'à sa projection accompagné d'un cocktail. Autant dire que les étapes intermédiaires ont été extrêmement passionnantes et enrichissantes pour moi c'est pourquoi je ne saurais jamais assez remercier tous ces gens.

Du côté de la vie au laboratoire, et parfois hors de ses murs, la liste est également longue. Je remercie Stéphane OUVRY de m'avoir accueilli au LPTMS. Merci à Géraldine, Claudine et Martine pour leur incroyable efficacité avec les paperasses et leur grande sympathie. Merci également à Vincent pour son aide informatique et sa bonne humeur surtout quand la machine à café lui endormait une capsule. Grand merci à mes collègues de bureau avec qui ces trois ans ont été du pur plaisir. Initialement cloîtré dans le bureau unidimensionnel avec Pierre et Paolo pour faire connaissance expérimentalement avec cette physique, j'ai exploré la seconde dimension avec Brice (mon fournisseur en Tahiti douche), Pierre, Simon, Jérôme puis l'ère Jason. Les concours de boulettes de papier et les yaourts pourris de Brice vont me manquer. Spécial thank to Simon pour nos interminables parties de pommes de pin devant le labo. Du côté du bureau Star Trek, grand grand merci à David pour toutes ces longues et interminables discussions de physique sur les fondements de la mécanique quantique entre autres. Merci également à lui pour tout ce qu'il m'a fait découvrir sur le plan cinématographique et musical (le guépard fut certes une erreur mais largement compensée par le reste). Merci à Julien pour tous les fous rires que l'on a pu avoir à la cantine et ailleurs. Encore une fois merci à Christophe TEXIER et à Alberto ROSSO pour toute leur science et leur sympathie. Je remercie également Jean DESBOIS, Hubert KRIVINE pour sa science et son humour débordants, Gora SHLYAPNIKOV pour ses précieux conseils ("*You should better put your nose in Landau-Lifshitz.*", "*If you want to become a real theoretical physicist (not one of these guys from quantum optics) you need three basic things : First of all, you have to read all the volumes of Landau-Lifshitz (even in Japanese). Secondly you should stay very late at lab especially during the week end (tomato soup is not mandatory). And above all, you have to smoke!*" mais aussi pour ses conseils en termes de post-docs), Alain COMTET, Denis ULLMO mon dealer d'or noir avec qui il est toujours plaisant de discuter, Oriol BOHIGAS, Guillaume ROUX et les autres. Merci au gang des italiens, à Aurélien, Céline, Alvaro, pour tous les bons moments passés ensemble. Merci également aux thésards de l'ancienne génération, Yacine, Jérôme, Mélanie, Nicolas, Maria, Rémy et aussi Benjamin. Merci à Jean-Paul, grand maître du modèle sphérique et de la renormalisation, pour tous nos délires dans les couloirs de l'IPN (je ne saurai jamais si tu m'a piqué ce chocolat mais je ne veux surtout pas d'embrouilles avec toi!). Merci à tous mes collègues Allemands, en particulier Peter, Sandro et Tobias, Alexej avec qui j'ai appris beaucoup mais j'ai également passé du très bon temps lors des conférences. Merci à David CLÉMENT, Laurent SANCHEZ-PALENCIA, Peter ENGELS, Yong P. CHEN, Dominique DELANDE et Benoit GRÉMAUD pour nos discussions. Un grand merci à Pascale pour ses délicieux cafés et sa bonne humeur à la cafette.

Merci à Jacky et Choupinette pour tous ces moments "*Ni Dieu, ni maître mais des frites bordel!*" et autres Jacky chaud. Merci à Nico et Vincent pour nos plans piscine-Jacky où la première partie a rapidement disparu à force de se croiser à chaque longueur de piscine et de demander l'heure pour aller manger les frites.

Je remercie tous mes camarades "des bleux", l'équipe de foot du LPS.

Merci à Thomas DUTRONC pour ses cartes postales.

Je ne remercie pas "tête de livre" pour avoir, par moments, pourri ma productivité. Cela dit j'assume l'entière responsabilité de ces actes car personne ne m'a jamais menacé pour faire des tests aussi instructifs que de savoir si on va mourir éventré par une brosse à dent Buzz l'éclair ou passer le reste de sa vie à regarder des films de Jean-Claude VANDAMME.

Je remercie le Rancor, le Clodo, Fantomas, John Wayne, la Chose, Wolverine, la trainée, le Troll, la Girafe, et autres déchets pour tous les fous rire qu'ils nous ont procurés.

Merci à Carlsberg pour avoir financé le Niels Bohr Institute à ses débuts.

Merci à tous ceux qui ont participé à la réalisation des séries TV indispensables à l'équilibre mental d'un thésard.

Notons d'autre part que le père Simon et moi-même tenons à remercier personnellement un certain Nan, vieil ami de la communauté.

Un grand merci à Jorge CHAM pour ses splendides PhD Comics.

Je remercie Naïg, amie commune de Ricoré l'ami du petit déjeuner, pour m'avoir accueilli à Toulouse lors du stade final de rédaction de la version 0 de ce manuscrit et pour les critiques ô combien pertinentes qu'elle y a apportées.

Merci à Nicolas TROUILH pour sa relecture attentive du chapitre 3.

Je remercie le responsable du rayon vin de Franprix pour l'incroyable spectre de bouteilles disponibles qui ont servies de lubrifiant social durant ma thèse.

Merci à kéké. Je n'en connais pas mais il paraît qu'il y en a un dans chaque village.

Merci à Bireli LAGRÈNE, SANSEVERINO, Django RHEINHART et Eric CLAPTON pour leurs supers CDs que j'ai écoutés en boucle pour me détendre (surtout la meilleure de l'album).

Un grand merci à L^AT_EX, gnuplot et au psychanalyste de emacs.

Je remercie également les montagnes, Alpines, "Jurassiques" ou Corses, qui m'ont permis de me défouler lors de conférences ou vacances tout en gardant un coin de tête pour réfléchir à la physique. J'en profite d'ailleurs pour remercier toutes les douches (Gleb me comprendrait) et lits dans lesquels mes pensées ont pu converger (ou pas) vers des solutions ou idées pertinentes.

Merci beaucoup à Noémie et aussi à Roméo pour tous les bons moments passés ensemble, notamment les nombreuses balades à Paris.

Merci merci à mes guitares pour le défoulement et le plaisir qu'elles m'ont apporté.

Merci Gérard, mon fidèle ami fan de Philippe RISOLI, même si tu n'as pas toujours voulu faire la lessive au moment opportun. Merci aussi à Mélanie, "la ptite Crozat".

Par contre je ne remercie pas Bernard pour ses Cocktails ignobles même s'ils m'ont bien fait marrer.

Merci à Barbara pour l'ensemble indénombrable des raisons qu'il est vain et inutile de détailler ici. Je sais qu'elle aurait rêvé que je lui dédicace cette thèse avec une superbe phrase bien craignosse en couverture mais je ne lui ferai pas ce plaisir.

MERCI à mes parents et ma famille pour toute la confiance qu'ils m'ont donnée dès le départ de ce grand projet. Sans eux je n'existerai pas de toute façon. Une gran merci a ma grenmaire maternel pourt lait corecsson d'ortografe.

Pour finir, et pour le fun⁵, "*je remercie Luigi*"...

⁵Car même s'il existe ce n'est pas lui qui a calculé les intégrales

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Remerciements | 10 |
| Introduction | 17 |
| 1 Théorie élémentaire des condensats de Bose-Einstein | 21 |
| 1.1 Description qualitative et grandeurs physiques pertinentes | 21 |
| 1.2 Gaz parfait de bosons | 22 |
| 1.3 Interactions dans un condensat et équation de Gross-Pitaevskii | 24 |
| 1.4 Exemple du piège harmonique : introduction de paramètres fondamentaux | 27 |
| 1.4.1 Loi d'échelle et rayon du condensat | 27 |
| 1.4.2 Limite de Thomas-Fermi | 28 |
| 1.5 Excitations d'un condensat : analyse de quelques expériences | 30 |
| 1.5.1 Équation de Gross-Pitaevskii dépendante du temps | 30 |
| 1.5.2 Formulation hydrodynamique : Thomas-Fermi généralisé | 32 |
| 1.5.3 Analyse de quelques expériences | 34 |
| 1.6 Condensats unidimensionnels | 37 |
| 1.6.1 Quelques généralités sur la condensation en dimension réduite | 37 |
| 1.6.2 Passage 3D-1D | 39 |
| 1.6.3 Régime Thomas-Fermi transverse : $an_1 \gg 1$ | 40 |
| 1.6.4 Régime de champ moyen 1D : $(a/a_\perp)^2 \ll an_1 \ll 1$ | 41 |
| 1.6.5 Interpolation entre les deux régimes | 42 |
| 1.6.6 Équations hydrodynamiques à une dimension | 43 |
| 1.6.7 Solitons | 44 |
| 2 Théorie de la superfluidité | 47 |
| 2.1 Histoire et phénoménologie de la superfluidité | 47 |
| 2.1.1 Découverte expérimentale dans l'hélium liquide | 48 |
| 2.1.2 Premières théories | 49 |
| 2.1.3 Connexion superfluide-condensat | 52 |
| 2.1.4 Caractère irrotationnel du flot et quantification de la circulation | 53 |
| 2.1.5 Vitesse critique | 54 |
| 2.2 Propriétés de transport d'un condensat à une dimension | 56 |
| 2.2.1 Cas libre stationnaire | 56 |
| 2.2.2 Potentiel δ | 59 |
| 2.2.3 Double barrière δ symétrique | 60 |
| 2.2.4 Série périodique de pics δ | 62 |
| 2.2.5 Potentiel quelconque | 62 |
| 2.2.6 Approche perturbative | 63 |
| 2.2.7 Critère de Superfluidité | 65 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3 | Localisation d'Anderson | 73 |
| 3.1 | Introduction générale | 73 |
| 3.1.1 | Description heuristique | 73 |
| 3.1.2 | Transition d'Anderson | 75 |
| 3.1.3 | Critères de localisation | 77 |
| 3.1.4 | Loi d'échelle et transition métal-isolant | 81 |
| 3.2 | Localisation à une dimension | 84 |
| 3.2.1 | Équation DMPK | 84 |
| 3.2.2 | Modèles de désordre | 87 |
| 3.2.3 | Formalisme de phase | 90 |
| 3.3 | Expériences | 91 |
| 3.3.1 | Transport par effet tunnel dans les semi-conducteurs amorphes | 91 |
| 3.3.2 | Transition d'Anderson | 92 |
| 3.3.3 | Quelques expériences avec des ondes classiques | 93 |
| 3.3.4 | Expansion d'un condensat à 1D en présence de désordre | 94 |
| 3.3.5 | Expansion d'un paquet d'onde dans un cristal photonique désordonné | 95 |
| 3.3.6 | Transition métal-isolant dans le rotateur pulsé | 96 |
| 4 | Oscillations dipolaires d'un condensat | 99 |
| 4.1 | Introduction | 99 |
| 4.2 | Décalage de fréquence dans le régime superfluide | 101 |
| 4.2.1 | Modèle de l'oscillateur perturbé | 101 |
| 4.2.2 | Approche hydrodynamique perturbative | 103 |
| 4.2.3 | Application au cas d'une barrière gaussienne | 103 |
| 4.2.4 | Application au cas d'un potentiel désordonné | 104 |
| 4.3 | Nucléation de solitons dans le régime dépendant du temps | 105 |
| 4.4 | Résultats expérimentaux récents | 106 |
| 4.5 | Remarque sur la symétrie du diagramme de phase en présence de désordre | 107 |
| 4.6 | Article 1 : Dipole oscillations of a Bose-Einstein Condensate in the presence of defects and disorder | 107 |
| 5 | Transport d'un faisceau d'atomes condensés en présence de désordre | 113 |
| 5.1 | Introduction | 113 |
| 5.2 | Article 2 : Anderson localization in a weakly interacting one dimensional Bose gas | 115 |
| 5.3 | Article 3 : Breakdown of superfluidity of a matter wave in a random environment | 134 |
| 5.4 | Quelques compléments sur la transition superfluide-dissipatif | 139 |
| 5.4.1 | Convergence vers la loi de Gumbel et frontière superfluide | 139 |
| 6 | Localisation par un potentiel quasi-périodique | 141 |
| 6.1 | Introduction | 141 |
| 6.2 | Phénoménologie du modèle d'Aubry et André à une dimension | 142 |
| 6.3 | Article 4 : Localization by bichromatic potentials versus Anderson localization | 144 |
| | Conclusion et perspectives | 153 |
| A | Fluctuations de la phase à une dimension | 157 |

| | | |
|----------|---|------------|
| B | Équations hydrodynamiques dans un piège harmonique très anisotrope | 161 |
| B.1 | Régime Thomas-Fermi transverse | 161 |
| B.2 | Régime de champ moyen 1D | 162 |
| C | Formule de Landauer | 163 |
| D | Méthode WKB | 167 |
| D.1 | Lien avec l'équation de Hamilton-Jacobi | 167 |
| D.2 | Développement en \hbar et validité de l'approximation | 168 |
| D.3 | Fonctions d'onde WKB | 169 |
| E | Méthodes numériques | 171 |
| | Bibliographie | 173 |

Introduction

*J'avais une vie un peu plate avant de vous rencontrer, Perrin.
Gérard Depardieu as Campana, La Chèvre.*

En 1924, A. Einstein reçoit un projet d'article écrit par un jeune physicien Bengali, Satyendra Nath Bose [37], qui démontre la loi de Planck sur le rayonnement thermique des corps noirs en considérant le champ électromagnétique comme un gaz de photons identiques. Immédiatement emballé par l'idée, Einstein veille à sa publication et généralise cette idée aux particules de matière via l'hypothèse de dualité onde-corpuscule récemment introduite par de Broglie. C'est ainsi qu'en 1925, il propose une incroyable prédiction [61], à savoir le phénomène de condensation d'un nombre macroscopique de particules dans un même état quantique.

Pendant longtemps considéré comme spéculatif, ce phénomène connaît un regain d'intérêt en 1937 avec la découverte de la superfluidité de l'hélium liquide [95, 8]. Le lien entre la superfluidité et la condensation de Bose-Einstein est immédiatement suggéré par Fritz London [122] mais également sévèrement critiqué par L. D. Landau. Ce système physique étant très éloigné de la théorie d'Einstein, il ne donne à ce stade qu'une confirmation partielle de la condensation. C'est alors que commence l'ère de nombreux développements théoriques dans le but de comprendre le lien entre les deux phénomènes. Un bref historique de cette aventure sera donné au chapitre 2 de ce manuscrit.

Sur le plan expérimental, c'est à partir des années 1970 que les gens commencent réellement à croire en leurs capacités à créer un condensat gazeux. La mise à profit de nouvelles techniques de physique atomique, basées sur le piégeage optique et magnétique et sur des mécanismes de refroidissement, puis les développements du refroidissement laser et des pièges magnéto-optiques dans les années 1980, initient la quête du graal qu'est le condensat de Bose-Einstein. 1995 est finalement l'année du triomphe, marquée par la naissance de deux condensats dans les groupes de E. A. Cornell et C. W. Wieman à Boulder [49] et de W. Ketterle à Cambridge (Massachusetts) [54] qui seront récompensés par le prix Nobel de physique en 2001.

Dès lors, c'est un nouveau laboratoire pour la physique à N-corps qui s'est ouvert. En effet, un condensat gazeux constitue un système unique en son genre dans la mesure où il est, suffisamment simple pour être traité théoriquement de manière quantitative, et suffisamment riche pour nous offrir un large spectre de phénomènes physiques non triviaux (superfluidité, cohérence quantique, vortex, etc...). Du côté expérimental, il offre également un contrôle extraordinaire, principalement via la magie de l'interaction lumière-matière. En effet, il est possible de contrôler à la fois les interactions entre particules, le nombre de particules, les potentiels extérieurs agissant sur les atomes, ..., mais aussi d'observer directement la fonction d'onde du système. C'est ainsi que, sur une même expérience, il devient possible de réaliser nombreux rêves de théoriciens jusqu'alors insensés.

Voilà par exemple comment la physique de la matière condensée et la physique atomique se sont rapprochées ces dernières années. La possibilité de placer les atomes froids

dans des réseaux optiques, de contrôler l'occupation des sites et les interactions, de supprimer ou de contrôler le désordre, de créer des guides d'ondes atomiques, etc... permet désormais d'étudier des problèmes de matière condensée avec une précision extraordinaire. Parmi ces problèmes, on peut citer la transition superfluide-isolant de Mott, la transition BEC-BCS (transition entre condensat de molécules et supraconducteur de paires de Cooper) ou encore la localisation d'Anderson.

La localisation d'Anderson est quant à elle née en 1958, suite aux travaux de P. W. Anderson [13] sur la transition métal-isolant dans des semi-conducteurs désordonnés. Découvert initialement dans le contexte du transport électronique, ce phénomène est en fait bien plus universel et peut se produire dès qu'une onde se propage dans un potentiel aléatoire. Alors que l'énergie de l'onde lui permettrait en principe de traverser une région désordonnée sans difficultés, les faibles réflexions de celle-ci sur le désordre produisent des effets d'interférences éventuellement destructives. Celles-ci sont destructives à cause de la nature désordonnée du potentiel diffuseur, qui rend les différentes ondes réfléchies totalement incohérentes entre elles et donc leur somme asymptotiquement nulle. C'est ainsi qu'une onde peut être profondément altérée par le désordre et être exponentiellement réduite lors de la traversée d'une région désordonnée, même si son énergie est bien plus grande que celle caractérisant le désordre. Dans le contexte du transport électronique, ce phénomène est alors purement quantique puisqu'il réclame la nature ondulatoire du porteur de charge.

Tout comme la condensation de Bose-Einstein, cette physique mit quelques années à s'imposer et ceci probablement pour plusieurs raisons. P. W. Anderson lui-même avoue, dans son discours de Nobel en 1977, ne pas avoir compris de suite l'ampleur et l'universalité du phénomène qu'il venait de découvrir. Il faut attendre une bonne dizaine d'années pour que les théoriciens s'intéressent de près à ce problème, notamment par le développement de la théorie d'échelle que nous décrirons au chapitre 3. Du côté expérimental, les données se sont longtemps faites rares car les échantillons solides sont très difficiles à contrôler. D'autre part, le modèle étudié par Anderson néglige totalement les interactions entre les électrons ainsi que les interactions électron-phonon qui compliquent grandement la physique mise en jeu. Le problème de l'effet des interactions sur la localisation continue d'ailleurs à hanter des physiciens de plusieurs communautés.

C'est au début des années 2000 que la condensation de Bose-Einstein rencontre la localisation d'Anderson. L'incroyable contrôle expérimental sur ces objets motive alors la communauté des atomes froids à s'intéresser à cette physique. L'histoire commence par plusieurs expériences d'oscillations et d'expansion de condensats en présence de désordre [177, 188, 68, 176, 64, 125, 44, 165, 70, 146], malheureusement peu concluantes, et marque un grand pas expérimental en 2008 avec l'observation directe de la localisation par les groupes de A. Aspect à Palaiseau [33] et de M. Inguscio à Florence [162] à une dimension, sans interactions.

À ce jour beaucoup de travail, tant théorique qu'expérimental, reste à fournir afin d'étudier notamment les effets d'interactions, de corrélations et de dimensionnalité.

Cette thèse s'articule justement autour de cette rencontre entre condensation de Bose-Einstein et localisation d'Anderson et ceci essentiellement à une dimension dans le régime où les interactions sont traitées en champ moyen (équation de Gross-Pitaevskii). Elle vise d'une part à étudier les effets d'interactions (répulsives) entre atomes mais également de la nature du désordre (potentiel aléatoire ou quasi-périodique, existence de corrélations spatiales) sur la localisation dans des situations les plus proches possibles de la réalité expérimentale.

Les deux premiers chapitres sont consacrés aux condensats de Bose-Einstein et à leurs

propriétés de transport de manière générale. Les équations et concepts essentiels y sont présentés pour la compréhension du travail effectué durant cette thèse. Une attention particulière est donnée à la théorie de la superfluidité et son lien avec la condensation de Bose-Einstein.

Le chapitre 3 est quant à lui dévoué à la localisation d'Anderson de particules sans interactions. Il présente les ingrédients théoriques essentiels comme les différents critères de localisation, la théorie d'échelle, l'équation DMPK et le formalisme de phase. Les différents modèles de désordre utilisés y sont également discutés et le tout est illustré par des résultats numériques et expérimentaux.

Après avoir introduit les concepts clefs des deux domaines, le chapitre 4 se consacre à l'étude théorique d'une situation expérimentale pertinente, à savoir celle des oscillations dipolaires d'un condensat en présence de désordre. On montre en particulier que l'amortissement de ces oscillations, observé expérimentalement, n'est pas relié à la localisation d'Anderson.

Le chapitre 5 contient une étude détaillée des propriétés de transport d'un condensat unidimensionnel infini (laser à atomes) en présence de désordre. La vitesse critique superfluide et les propriétés de localisation y sont discutées à travers deux articles distincts. Du côté superfluide on montre que la vitesse critique peut être reliée à un problème de statistique de valeurs extrêmes. Concernant la localisation, les effets d'interaction et de corrélations du potentiel aléatoire sont étudiés de manière exhaustive, ce qui nous permet de définir précisément les conditions adéquates pour l'observation de la localisation dans ce type de système.

Enfin, le chapitre 6 aborde la question du lien entre localisation par un potentiel aléatoire et localisation par un potentiel quasi-périodique. Encore une fois, ce travail s'inspire de résultats expérimentaux récents, qui sont quant à eux discutés à la fin du chapitre 3. Contrairement à ce qui est parfois admis, on montre que la localisation induite dans le modèle de Aubry et André [21] n'est pas reliée à la localisation d'Anderson car elle peut être comprise par sa dynamique classique.

Quelques annexes supplémentaires sont également présentes afin d'aider le lecteur qui ne connaîtrait pas certains concepts utilisés dans ce manuscrit.

L'annexe A décrit les fluctuations de phase à une dimension. Celles-ci font qu'un condensat de taille infinie ne peut exister à une dimension. On y montre que, si la taille du système est inférieure à une certaine longueur de cohérence de phase, il est alors possible de décrire le système en terme de condensat de Bose-Einstein.

L'annexe B discute une méthode pour obtenir des équations hydrodynamiques effectives à une dimension en partant des équations complètes à trois dimensions.

L'annexe C expose de manière intuitive l'approche de Landauer d'un conducteur de taille mésoscopique. Dans ce type de système, les propriétés de cohérence de phase modifient les propriétés de transport d'une particule qui doit alors être traitée comme une onde traversant un guide (conducteur).

L'annexe D présente la méthode d'approximation semi-classique WKB et notamment la formule de quantification de Bohr-Sommerfeld.

Chapitre 1

Théorie élémentaire des condensats de Bose-Einstein

Nothing shocks me. I'm a scientist.
Harrison Ford as Indiana Jones.

1.1 Description qualitative et grandeurs physiques pertinentes

Ce phénomène fort étrange qu'est la condensation de Bose-Einstein résulte du caractère quantique de la matière. La vision classique que l'on a d'un gaz est un ensemble de matière, formé d'un très grand nombre¹ de particules ponctuelles. En général, la densité spatiale est tellement faible qu'on en oublie même leurs interactions². Cette vision naïve, connue sous le nom de théorie cinétique des gaz, est tout de même applicable dans la plupart des cas. Cependant, du point de vue de la mécanique quantique, les particules parfaitement localisées n'existent pas. La relation d'indétermination de Heisenberg $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ stipule qu'une particule ne peut pas avoir à la fois une position et une vitesse bien déterminées. Une particule est alors décrite par un paquet d'onde (l'onde en question est une probabilité de présence) d'extension non nulle à la fois dans l'espace réel et celui des impulsions. Cette délocalisation est quantifiée par la *longueur d'onde thermique de de Broglie* (1.1) qui, à température ambiante, est complètement négligeable devant la distance moyenne entre atomes, ce qui justifie la vision classique du phénomène.

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \quad \text{longueur d'onde thermique} \quad (1.1)$$

Cependant, on peut imaginer des situations où la délocalisation des particules devient de l'ordre des distances interatomiques, par exemple quand la température est très basse (la longueur d'onde thermique est très grande), ou quand la densité est grande (la distance inter-atomique diminue).

Dans ce cas, les paquets d'ondes se chevauchent et il devient impossible de reconnaître les différentes particules et de les suivre à la trace, toutes celles-ci fusionnent en

¹Le nombre de particules dans un gaz est en général de l'ordre du nombre d'Avogadro N_A , ie $\sim 10^{24}$ atomes.

²En fait on n'oublie pas les interactions car physiquement l'équilibre thermodynamique ne peut être atteint que si les atomes entrent en collision. Cela dit, les quantités thermodynamiques sont calculées à partir du hamiltonien sans interactions. Les interactions entrent en scène à travers l'hypothèse du chaos moléculaire, nécessaire pour établir l'ergodicité.

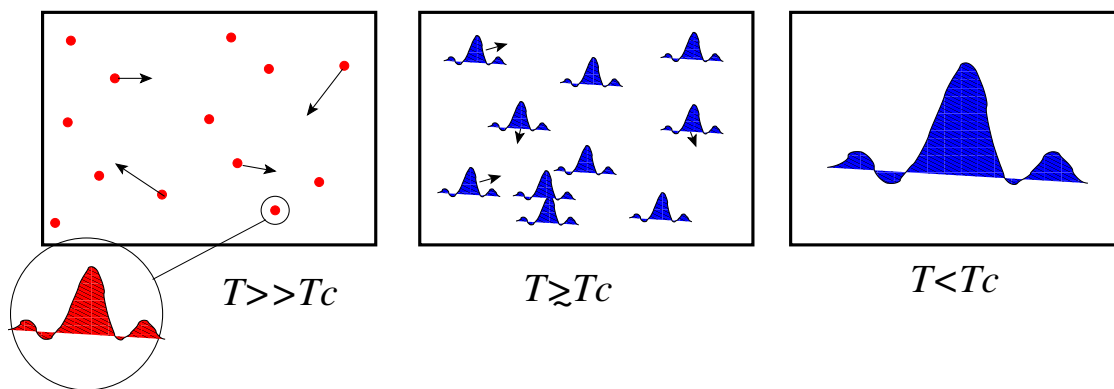


FIG. 1.1 – **À gauche** gaz d’atomes en mouvement désordonné à haute température. Vue de plus près, ces atomes révèlent leur nature ondulatoire. **Au centre**, la température est suffisamment basse pour que la vision classique s’effondre. **À droite** cet étalement a dépassé les distances interatomiques conduisant à une fusion de tous les paquets d’ondes en un seul. C’est ce qu’il se produit dans les gaz de bosons à très basse température ($T \sim 1\mu K$) conduisant les atomes à l’état de condensat Bose-Einstein.

un seul *paquet macroscopique*. Les atomes subissent alors une crise d’identité quantique : ils deviennent mutuellement indiscernables et c’est ainsi qu’ils se *condensent*³ tous dans le même état quantique d’énergie minimale⁴.

Ordres de grandeurs

La plupart des condensats atomiques sont réalisés expérimentalement à partir de gaz mono-atomiques, issus de la famille des alcalins (première colonne de la classification périodique), comme le rubidium ou le césium. Les ordres de grandeurs sont en général les suivants :

$$n \sim 10^{20} \text{ atomes/m}^3, \quad T \sim \mu K, \quad N \sim 10^5 \text{ atomes.}$$

1.2 Gaz parfait de bosons

Considérons un gaz de bosons indépendants dans une boîte, en nombre assez grand pour que le système soit thermodynamique. Ce gaz obéit à la statistique de Bose-Einstein :

$$\bar{N} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1}, \quad (1.2)$$

et sa densité d’états est

$$\begin{cases} \rho(\epsilon) = AV\sqrt{\epsilon} \\ \epsilon_0 = 0 \end{cases} \quad \text{avec } A = \frac{2s+1}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad (1.3)$$

(énergie du fondamental).

La conservation du nombre de particules implique

³Le terme de condensation est un peu ambigu et de ce fait parfois mal interprété. Il ne s’agit pas d’un état de la matière où tous les atomes sont serrés les uns contre les autres, comme dans un solide par exemple, mais d’une condensation dans l’espace des impulsions. En effet toutes les particules sont dans le même état quantique de particules libres et se mettent ainsi à se déplacer toutes en phase comme un tout. On ne peut pas dire qu’elles soient spatialement condensées mais leur recouvrement est tel qu’elles ne forment plus qu’un seul objet : le condensat.

⁴Bien évidemment ceci n’est possible que pour un gaz de bosons car les fermions obéissent tout de même au principe d’exclusion de Pauli.

$$\begin{cases} N = AV \int_0^\infty d\epsilon \sqrt{\epsilon} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}, \\ \mu < 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

En posant $x = \beta\epsilon$ et $\phi = e^{\beta\mu}$ (fugacité) il vient

$$\frac{N}{AV} = (k_B T)^{\frac{3}{2}} \underbrace{\int_0^\infty dx \sqrt{x} \frac{1}{\frac{1}{\phi} e^x - 1}}_{\text{intégrale de Bose } I_B(\phi)}. \quad (1.5)$$

Pour obtenir le potentiel chimique il faut résoudre

$$I_B(\phi) = \frac{4\pi^2}{2s+1} \left(\frac{\hbar^2}{2mk_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{N}{V}. \quad (1.6)$$

Cependant, à cause de la contrainte $\mu < 0$, l'intégrale de Bose est bornée par une valeur maximale qui est $I_B(1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) = 2,315^5$. Ainsi si on diminue la température tout en fixant la densité, il apparaît un paradoxe quand

$$\frac{N}{AV(k_B T)^{\frac{3}{2}}} > 2,315, \quad (1.7)$$

c'est-à-dire soit quand la densité est assez forte, soit quand la température est en dessous d'une température critique appelée température de Bose (1.8). Notons que ce critère revient à dire que la longueur d'onde de de Broglie devient de l'ordre de grandeur de la distance interatomique.

$$I_B(1) = \frac{N}{AV(k_B T_{Bose})^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.8)$$

Ce problème se traduit par le fait qu'en dessous de la température de Bose, qui est par définition la température limite à densité fixée, il n'y a pas de solution à (1.6) : on ne peut donc pas définir le potentiel chimique. Ce paradoxe se résout si on remarque que la formule (1.4) ne prend pas en compte la population du fondamental. En effet, le fait de prendre $\epsilon_0 = 0$ détruit la contribution du fondamental dans (1.4), ce qui oblige à la traiter à part. Si on s'intéresse à cette population \bar{N}_0 , il est facile de montrer (développement limité de \bar{N}) que quand $T \rightarrow T_{Bose}$ par valeurs positives $\mu \rightarrow 0^+$, ainsi

$$\bar{N}_0 = -\frac{k_B T}{\mu}, \quad (1.9)$$

et comme $\mu \ll k_B T$, \bar{N}_0 devient macroscopique : c'est le phénomène de *condensation de Bose-Einstein*.

Transition de phase

En dessous d'une certaine température critique T_B , la population de l'état fondamental devient macroscopique. Celle-ci joue le rôle de paramètre d'ordre pour cette transition de phase⁶. Cette dernière peut être déterminée par un argument de conservation du nombre de particules. À la transition, le nombre total de particules est donné par (1.8), mais on a d'autre part en dessous de T_B

⁵ ζ est la fonction de Riemann définie par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ elle joue un rôle fondamental dans la théorie des nombres premiers, cela dit elle apparaît souvent dans l'évaluation d'intégrales en physique.

⁶Notons qu'il s'agit ici d'une transition de phase exclusivement pilotée par la température et les effets de statistiques quantiques et donc qu'aucune interaction n'est nécessaire pour ordonner le système.

$$N = N_0 + N' \quad N' = AV(k_B T)^{3/2} I_B(1) = N \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2}, \quad (1.10)$$

d'où on tire aisément

$$N_0 = N \left(1 - \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \right). \quad (1.11)$$

La fraction condensée croit donc de zéro à T_B jusqu'à 1 à température nulle.

Critère de Landau pour la superfluidité

La superfluidité est un sujet que l'on aura l'occasion de discuter plus en détails par la suite mais il est déjà intéressant de l'évoquer à ce stade afin de motiver l'étude des interactions dans un condensat. Celle-ci est entre autres caractérisée par le fait qu'un fluide peut ne pas dissiper d'énergie à la traversée d'un obstacle (où inversement quand une particule le traverse). Plus précisément aucune excitation n'est émise tant que sa vitesse relative à l'obstacle est inférieure à une vitesse critique v_c . On va voir par la suite que ce caractère résulte d'une réponse collective du système qui est inexistante dans le cas d'un gaz sans interactions. En effet, cette vitesse critique est reliée au spectre des excitations élémentaires du système via le critère de Landau (voir chapitre 2)

$$v_c = \min_p \frac{\varepsilon(p)}{p}, \quad (1.12)$$

où p désigne l'impulsion d'une excitation et $\varepsilon(p)$ son énergie. Pour un gaz parfait $\varepsilon(p) = p^2/2m$ et la vitesse critique est alors zéro. Par contre, dans le cas d'un condensat en interactions, on va montrer que le comportement collectif apparaît à basse énergie sous forme de phonons $\varepsilon(p) = cp$. La vitesse c de propagation de ses ondes sonores correspond alors à la vitesse critique du superfluide.

1.3 Interactions dans un condensat et équation de Gross-Pitaevskii

Le modèle développé précédemment, dû initialement à Einstein, décrit un gaz parfait de bosons. Ce modèle est suffisant pour faire émerger théoriquement le phénomène mais insuffisant pour le confronter à l'expérience. En particulier, dans le modèle du gaz parfait, la distance interatomique est infinie. Il faudrait donc que la longueur d'onde de De Broglie soit elle aussi infinie pour permettre l'apparition du phénomène, et donc que la température soit nulle, ce qui est en pratique impossible. Pour réaliser des expériences, les physiciens ont dû faire un compromis entre les basses températures et les hautes densités, de sorte que les interactions ne sont plus négligeables. D'autre part, l'effet des interactions est en général physiquement intéressant et il est donc naturel de se poser la question de leurs conséquences.

Fort heureusement, compte tenu des conditions de très basse température il est possible de faire des approximations sévères pour traiter le problème. En particulier, la grande délocalisation des particules (grande longueur d'onde de De Broglie) et le fait que les collisions ont lieu à très basse énergie nous permettent d'oublier les détails du potentiel d'interaction à deux corps et de caractériser les collisions par un seul paramètre scalaire : la *longueur de diffusion* a^7 [48].

⁷Celle-ci peut être positive ou négative changeant ainsi le sens des interactions. Expérimentalement elle peut être ajustée avec un champ magnétique.

$$V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = g\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2). \quad (1.13)$$

Si les bosons n'interagissaient pas ils seraient tous dans l'état fondamental du piège qui les confine. En présence d'interactions, la structure d'un tel état est modifiée. En principe il faudrait calculer l'état fondamental du hamiltonien

$$\hat{H} = \underbrace{\sum_{i=1}^N \left[\frac{\vec{p}_i^2}{2m} + V_{ext}(\vec{r}_i) \right]}_{h_1 \text{ hamiltonien à 1 corps}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j(i \neq j)} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|), \quad (1.14)$$

où $V_{ext}(\vec{r})$ est le potentiel extérieur de piégeage des atomes qui est en général harmonique (pas forcément isotrope).

La détermination de cet état est en général impossible, mais on va voir qu'il est possible d'obtenir une approximation de l'état fondamental par une théorie de champ moyen avec une précision remarquable. Pour ce faire on applique la méthode de Bogoliubov [35] avec les approximations suivantes :

- Les N bosons sont sans spin, en interactions binaires à température nulle.
- Le gaz est dilué : $na^3 \ll 1$ où n est la densité atomique.
- Le condensat est presque pur, *ie* quasiment tous les atomes sont condensés.

Ceci nous permet de traiter les interactions avec le potentiel δ de diffusion et de faire un développement de l'opérateur champ⁸ suivant

$$\hat{\Psi}(\vec{r}) = \underbrace{\hat{a}_\phi \phi(\vec{r})}_{\text{mode du condensat}} + \underbrace{\hat{\psi}_\perp(\vec{r})}_{\text{nuage thermique}}, \quad (1.15)$$

On a

$$\hat{H} = \int d^3\vec{r} \left[\Psi^\dagger h_1 \Psi + \frac{g}{2} \Psi^\dagger \Psi^\dagger \Psi \Psi \right], \quad (1.16)$$

$$\hat{N} = a_\phi^\dagger a_\phi + \int d^3\vec{r} \psi_\perp^\dagger \psi_\perp = \hat{n}_\phi + \delta \hat{N}.$$

L'idée centrale est de faire un développement ordre par ordre du hamiltonien en puissance de ψ_\perp . A l'ordre 0 on obtient l'équation de *Gross-Pitaevskii* et à l'ordre 2 le hamiltonien de *Bogoliubov*.

- **Ordre 0** : On néglige la partie non condensée $\hat{\psi}_\perp$

$$\hat{H}_0 = \int d^3\vec{r} \left[\phi^* h_1 \phi a_\phi^\dagger a_\phi + \frac{g}{2} |\phi|^4 a_\phi^\dagger a_\phi^\dagger a_\phi a_\phi \right] \sim N \int d^3\vec{r} \left[\phi^* h_1 \phi + \frac{gN}{2} |\phi|^4 \right] = E[\phi], \quad (1.17)$$

où l'on fait une approximation de champ classique ($\hat{N} = a_\phi^\dagger a_\phi \sim N$) compte tenu du nombre macroscopique de particules dans le condensat.

La méthode variationnelle ($\frac{\delta E[\phi]}{\delta \phi^*(\vec{r})} = 0$ avec $\int d^3\vec{r} |\phi|^2 = 1$) conduit à une équation sur l'état fondamental, c'est-à-dire la *fonction d'onde du condensat*. C'est l'équation de *Gross-Pitaevskii* indépendante du temps [77, 157]

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{ext}(\vec{r}) \right] \phi(\vec{r}) + gN |\phi(\vec{r})|^2 \phi(\vec{r}) = \mu \phi(\vec{r}). \quad (1.18)$$

⁸Ce développement sépare la partie condensée de celle non condensée, *ie* le nuage thermique. La notation ψ_\perp signifie que ϕ et ψ_\perp sont orthogonaux

Cette équation a la structure d'une équation de Schrödinger non-linéaire semblable à celle de Ginzburg-Landau en supraconductivité. Cela dit, il faut bien avoir en tête qu'elle n'est a priori valable que pour l'état fondamental et qu'elle interdit (à cause du terme non-linéaire) le principe de superposition. D'autre part μ n'est pas l'énergie par particule du condensat $E[\phi]/N$ mais le potentiel chimique⁹ $\mu = \frac{\partial E[\phi]}{\partial N}$.

C'est une équation de champ moyen dans la mesure où l'on applique la méthode variationnelle dans le sous-espace des fonctions d'ondes produit tensoriel de N fonctions d'ondes identiques, *ie* on suppose que toutes les particules sont condensées dans la même fonction d'onde. On décrit donc le système par un modèle à une particule évoluant dans un champ moyen créé par les autres particules. Ceci néglige évidemment les corrélations entre particules et en particulier celles entre le condensat et le nuage thermique. Pour les prendre en compte il faut pousser le développement de Bogoliubov aux ordres supérieurs. Cela dit cette équation permet déjà d'expliquer une grande partie des expériences de condensation.

• **Ordre 1**

Compte tenu de l'équation de Gross-Pitaevskii $\hat{H}_1 = 0$.

• **Ordre 2 :**

On a deux corrections possibles :

– Il ne faut plus négliger $\delta\hat{N}$.

– On doit garder l'ordre 2 en $\hat{\psi}_\perp$ dans $\hat{\Psi}$ avec $\hat{N} = a_\phi^\dagger a_\phi$.

La première conduit à considérer

$$H_2^{\delta N} = \left[H_0(\hat{N} - \delta\hat{N}) - H_0(\hat{N}) \right]_{\text{ordre 1 en } \delta\hat{N}} = -\delta\hat{N} \frac{\partial H_0}{\partial N} = -\mu\delta\hat{N}. \quad (1.19)$$

La seconde

$$H_2^{\psi_\perp} = \int d^3\vec{r} \left[\psi_\perp^\dagger h_1 \psi_\perp + \frac{g}{2} \left(4|\phi|^2 a_\phi^\dagger a_\phi \psi_\perp^\dagger \psi_\perp + \phi^{*2} a_\phi^{\dagger 2} \psi_\perp^2 + \phi^2 a_\phi^2 \psi_\perp^{\dagger 2} \right) \right]. \quad (1.20)$$

Que l'on peut rassembler en débarrassant $a_\phi^{\dagger 2}$ et a_ϕ^2 via le changement d'opérateur champ¹⁰ (représentation phase-module de \hat{a}_ϕ) qui conserve le nombre de particules

$$\hat{\Lambda}(\vec{r}) = \hat{A}_\phi^\dagger \hat{\psi}_\perp(\vec{r}) \quad , \quad \hat{A}_\phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{\hat{n}_\phi + 1}} \hat{a}_\phi. \quad (1.21)$$

Soit finalement

$$H_{Bog} = E[\phi] + \int d^3\vec{r} \left[\hat{\Lambda}^\dagger (h_1 - \mu + 2Ng|\phi|^2) \hat{\Lambda} + \frac{Ng}{2} \left(\phi^2 \hat{\Lambda}^{\dagger 2} + \phi^{*2} \hat{\Lambda}^2 \right) \right], \quad (1.22)$$

qui est quadratique et donc diagonalisable par une transformation de Bogoliubov.

Le sens physique de $\hat{\Lambda}(\vec{r})$ est clair, il s'agit d'un opérateur qui détruit une particule du nuage thermique et qui en crée une dans le condensat. Le hamiltonien de Bogoliubov décrit le champ moyen et les corrélations entre le condensat et le nuage thermique. En le diagonalisant on obtient le spectre du système, encore appelé *spectre de Bogoliubov*

⁹Il est facile de le voir en multipliant l'équation par ϕ^* et en intégrant sur l'espace.

¹⁰Il faut aussi faire l'approximation que \hat{A}_ϕ est unitaire, c'est-à-dire négliger le projecteur sur l'état à zéro particules dans le condensat car $\hat{A}_\phi \hat{A}_\phi^\dagger = 1$ et $\hat{A}_\phi^\dagger \hat{A}_\phi = 1 - |0 : \phi\rangle\langle 0 : \phi|$

$$H_{Bog} = \underbrace{E_0}_{\text{correction au fondamental}} + \underbrace{\sum_{k \in \mathcal{F}_+} \epsilon_k b_k^\dagger b_k}_{\text{spectre de quasi-particules}}, \quad (1.23)$$

où \mathcal{F}_+ désigne l'ensemble des valeurs propres positives. La diagonalisation de H_{Bog} revient à diagonaliser la matrice dynamique \mathcal{L} des opérateurs $\hat{\Lambda}(\vec{r}, t)$ et $\hat{\Lambda}^\dagger(\vec{r}, t)$ en représentation de Heisenberg ($i\hbar\partial_t\hat{\Lambda}(\vec{r}, t) = [\hat{\Lambda}, H_{Bog}]$)

$$i\hbar\partial_t \begin{pmatrix} \hat{\Lambda}(\vec{r}, t) \\ \hat{\Lambda}^\dagger(\vec{r}, t) \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} \hat{\Lambda}(\vec{r}, t) \\ \hat{\Lambda}^\dagger(\vec{r}, t) \end{pmatrix}, \quad (1.24)$$

avec

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} h_1 + 2gN|\phi|^2 - \mu & Ng\phi^2 \\ -Ng\phi^{*2} & -h_1 - 2gN|\phi|^2 + \mu \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

qui conduit aux *équations de Bogoliubov-De Gennes* sur les amplitudes des quasi-particules, que l'on reverra dans la section 2 de ce chapitre.

1.4 Exemple du piège harmonique : introduction de paramètres fondamentaux

Maintenant que l'on dispose d'une équation pour décrire un condensat il est instructif de la manipuler sur des exemples simples afin d'en faire ressortir les éléments physiques essentiels. L'exemple du piège harmonique [48] est loin d'être sans intérêt dans la mesure où presque toutes les expériences sont réalisées avec un confinement de ce type¹¹. Il va nous permettre de montrer l'effet des interactions sur la forme d'un condensat, sa stabilité et de dégager une limite simple où l'on peut obtenir des résultats analytiques facilement. D'autre part, ce sera aussi l'occasion d'introduire quelques ordres de grandeurs.

1.4.1 Loi d'échelle et rayon du condensat

La première question que l'on peut se poser concerne le rayon typique R d'un condensat. En particulier comment évolue-t-il en fonction des interactions par rapport à l'extension σ du fondamental à une particule (sans interactions) dans le puits harmonique. Dans la suite on utilisera

$$V_{ext}(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}, \quad w = \frac{R}{\sigma}. \quad (1.26)$$

Pour obtenir l'évolution grossière de w en fonction des interactions (la valeur de a ¹²) on regarde l'ordre de grandeur de chaque contribution énergétique, en supposant le condensat sphérique de rayon R que l'on détermine par minimisation de l'énergie totale (1.27)¹³.

$$E_{tot} \sim N\hbar\omega_0 \left(\underbrace{\frac{1}{w^2}}_{\text{cinétique}} + \underbrace{\frac{1}{w^2}}_{\text{piégeage}} + \underbrace{\frac{\chi}{w^3}}_{\text{interactions}} \right), \quad (1.27)$$

¹¹Le potentiel de piègeage est harmonique mais pas isotrope en général. On peut avoir des pièges cylindriques pas très éloignés de l'isotropie comme le TOP par exemple mais aussi des pièges très anisotropes pour former des condensats à une ou deux dimensions.

¹²On donnera une condition plus précise un peu plus loin

¹³Les coefficients respectifs sont faux mais seul le comportement qualitatif nous intéresse.

avec $\chi = \frac{aN}{\sigma}$: paramètre d'interactions.

On voit ainsi que chaque terme a un comportement très différent, ce qui peut éventuellement conduire à un état d'équilibre d'énergie minimale.

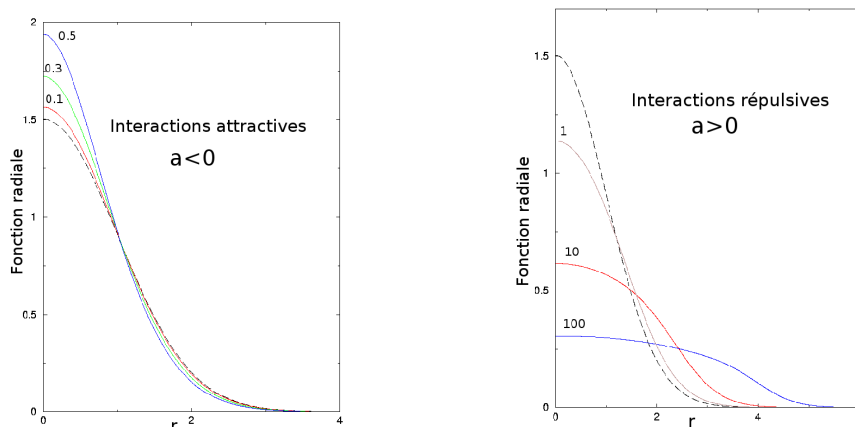


FIG. 1.2 – **À gauche** : fonction d'onde radiale du condensat pour des interactions attractives. **À droite** : même chose pour des interactions répulsives.

Celui-ci sera différent selon l'importance des interactions, qui sont caractérisées par a mais aussi par N ce qui n'est pas étonnant dans la mesure où le champ moyen dans (1.18) est proportionnel à la densité. Le comportement du condensat va être très différent en fonction du signe des interactions, en particulier il est facile de se convaincre que l'énergie possède toujours un minimum si $a > 0$ mais pas forcément pour $a < 0$ (interactions attractives). C'est le phénomène de *collapse* où le condensat s'effondre au profit de la formation d'êtres polyatomiques (molécules, agrégats...).

On peut résoudre numériquement l'équation de Gross-Pitaevskii très facilement dans ce potentiel ce qui donne les fonctions radiales (pour plusieurs valeurs de χ) des figures 1.2.

1.4.2 Limite de Thomas-Fermi

Au regard de la formule (1.27) il est clair que pour $\chi \ll 1$ les interactions sont négligeables. D'autre part pour $\chi \gg 1$ elles jouent un rôle prépondérant et cette fois-ci c'est l'énergie cinétique qui est négligeable. Mais attention, cette limite a-t-elle un sens compte tenu des hypothèses de l'équation (1.18). En effet, l'existence d'un régime où l'énergie cinétique est négligeable serait le bienvenu car l'équation (1.18) deviendrait algébrique, mais ceci est-il compatible avec l'hypothèse d'un gaz dilué? C'est ce qu'on se propose de montrer.

Tout d'abord, montrons que $\chi \gg 1$ permet de négliger l'énergie cinétique à partir de notre simple loi d'échelle (1.27). À des coefficients numériques près de l'ordre de 1 il s'agit de rechercher le minimum de $w^2 + \frac{\chi}{w^3}$ et de vérifier a posteriori que le w_{min} satisfait $E_{cin}/E_{int} \ll 1$. On trouve :

$$w_{min} \sim \chi^{\frac{1}{5}} \quad \Rightarrow \quad R \sim \sigma \chi^{\frac{1}{5}} \gg \sigma \quad \text{si } \chi \gg 1. \quad (1.28)$$

Soit

$$\left(\frac{E_{int}}{E_{cin}} \right)_{w=w_{min}} \sim \frac{\chi/w_{min}^3}{1/w_{min}^2} \sim \chi^{\frac{4}{5}} \gg 1. \quad (1.29)$$

Il est donc légitime de négliger l'énergie cinétique. Il est à noter que tout ceci est compatible avec notre intuition. En effet si les interactions (répulsives) augmentent, le condensat va se dilater (son rayon augmente avec χ) et ainsi s'uniformiser¹⁴ spatialement et donc minimiser l'énergie cinétique.

Cependant peut-on avoir un tel effet des interactions dans un gaz dilué ? Pour le voir nous devons comparer la longueur de diffusion (qui caractérise les collisions) à la distance moyenne ℓ entre les atomes. Comme les N atomes sont dans un volume $R^3 \sim w^3 \sigma^3$, on a $\ell \sim RN^{-\frac{1}{3}} > \sigma N^{-\frac{1}{3}}$ et par suite :

$$\frac{a}{\ell} < \frac{a}{\sigma} N^{\frac{1}{3}}. \quad (1.30)$$

Finalement comme $\frac{a}{\ell}$ croît au mieux comme $N^{\frac{1}{3}}$ et que χ croît comme N on conçoit qu'on puisse avoir des situations où $\chi \gg 1$ (interactions fortes) alors que $a \ll \ell$ (milieu dilué).

Par exemple, pour les expériences du MIT sur le sodium [135] : $a \sim 3\text{nm}$, $\sigma \sim 30 \mu\text{m}$, $N \sim 10^6$.

$$\Rightarrow \quad \chi = \frac{aN}{\sigma} \sim 10^2 \gg 1 \quad \text{et} \quad \frac{a}{\ell} < \frac{a}{\sigma} N^{\frac{1}{3}} \sim 10^{-2} \ll 1. \quad (1.31)$$

En conclusion, il existe un régime dit de *Thomas-Fermi* où les interactions jouent un rôle important même si le milieu est dilué. Dans ce régime l'équation (1.18) de champ moyen est encore valide est se simplifie terriblement car elle devient algébrique (on néglige le terme cinétique $\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi(\vec{r})$). On a alors

$$n(\vec{r}) = \phi(\vec{r})^2 = \frac{1}{gN} [\mu - V_{ext}(\vec{r})] = \frac{1}{gN} \left[\mu - \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 \right], \quad (1.32)$$

et 0 au delà d'un rayon maximal r_{max} qui vaut $r_{max} = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_0^2}}$ pour le piège harmonique.

Notons que l'approximation de Thomas-Fermi n'est plus valable au voisinage de r_{max} . Le fait de tenir compte du terme d'énergie cinétique au voisinage de ce point arrondit le profil et supprime la discontinuité de la dérivée [50, 89]. On remarque aussi que cette approximation semble équivalente à prendre la limite semi-classique de (1.18).

Condensat dans une boîte à 1D : longueur de relaxation

On considère le problème simple d'un condensat dans une boîte à 1D. En l'absence d'interactions, on sait que l'état fondamental est un sinus. En présence d'interactions répulsives on s'attend évidemment à voir la fonction d'onde s'aplatir jusqu'à devenir presque homogène. Cependant l'énergie cinétique est pénalisée par les forts gradients et il faut donc que le système trouve un compromis pour minimiser son énergie. La longueur sur laquelle s'effectue cette descente à zéro est appelée *longueur de relaxation* (healing length en anglais) que l'on note en général ξ . On verra plus loin que cette grandeur joue un rôle fondamental pour classer les excitations d'un condensat.

Avec une normalisation à N l'équation de Gross-Pitaevskii s'écrit à 1D

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \varphi''(z) + g \varphi^3(z) = \mu \varphi(z) \quad (1.33)$$

dont on tire le potentiel chimique en la regardant au centre, ie $\mu = gn_0 = gN/L$. En adimensionnant par $\tilde{\varphi} = \varphi/\sqrt{n_0}$ et $x = z/\xi$ on obtient

¹⁴Ceci est valable loin des bords où le confinement oblige la densité à s'écrouler et il n'est plus possible d'oublier l'énergie cinétique. On reviendra sur ce point plus loin.

$$\frac{1}{2} \tilde{\varphi}''(x) - \tilde{\varphi}^3(x) + \tilde{\varphi}(x) = 0, \quad \text{avec} \quad \xi = \frac{\hbar}{\sqrt{m\mu}}. \quad (1.34)$$

On peut facilement l'intégrer en séparant l'intervalle en deux selon le signe de $\tilde{\varphi}'$. Dans la première moitié de la boîte on obtient

$$\varphi(z) = \sqrt{n_0} \operatorname{th}(z/\xi). \quad (1.35)$$

L'équation de Gross-Pitaevskii reproduit donc bien notre intuition.

1.5 Excitations d'un condensat : analyse de quelques expériences

On a vu dans la partie précédente comment obtenir l'état fondamental d'un condensat de Bose-Einstein grâce à l'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire (1.18). L'objectif de cette partie est d'essayer de comprendre les excitations élémentaires d'un condensat quand il est soumis à une perturbation temporelle du potentiel de piégeage. Ceci a fait l'objet de plusieurs expériences [93, 135, 17] (pour ne citer que celles-ci) que l'on se propose d'analyser. Pour obtenir le spectre des excitations d'un condensat il existe plusieurs approches différentes : théorie de Bogoliubov, équation de Gross-Pitaevskii dépendante du temps ... qui conduisent aux mêmes résultats. Cela dit, la description par l'équation dépendante du temps (que l'on va dériver) se prête à une interprétation plus directe des expériences.

1.5.1 Équation de Gross-Pitaevskii dépendante du temps

L'important n'est pas ce qu'on fait du condensat mais ce que le condensat fait de ce qu'on a fait de lui. J. P. Sartre, quelque peu adapté.

Dérivation

Il existe plusieurs méthodes pour obtenir cette équation. Soit par un principe de moindre action [48] soit directement par les équations de Heisenberg et le hamiltonien (1.16) dans la limite où toutes les particules sont condensées ($\hat{\Psi}(\vec{r}) = \hat{a}_\phi \phi(\vec{r})$) et dans l'approximation de champ classique ($\hat{N} = \hat{a}_\phi^\dagger \hat{a}_\phi \sim N$).

On obtient finalement :

$$i\hbar \partial_t \varphi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{ext}(\vec{r}, t) \right] \varphi(\vec{r}, t) + Ng |\varphi(\vec{r}, t)|^2 \varphi(\vec{r}, t). \quad (1.36)$$

C'est l'équation de Gross-Pitaevskii dépendante du temps.

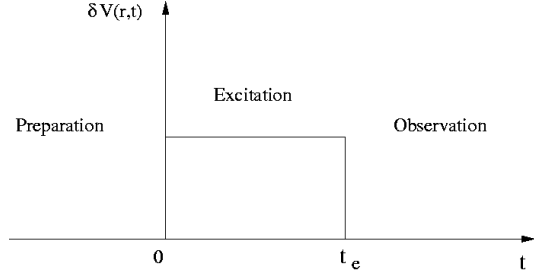
On note que si l'on cherche une solution stationnaire du type $\varphi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) e^{-i\mu t/\hbar}$ on retrouve l'équation indépendante du temps. Cela dit, à cause de la nonlinéarité de l'équation, il n'est pas possible d'appliquer l'analyse spectrale standard comme pour l'équation de Schrödinger, où l'on cherche les états stationnaires et on superpose les états. En d'autres termes, cette équation ne peut pas se ramener à un problème spectral d'algèbre linéaire. C'est ce qui fait à la fois la richesse et la difficulté de cette physique.

Cela dit, il existe tout de même un régime agréable, à savoir celui des *faibles excitations*. En effet, pour de faibles perturbations du potentiel il est possible de linéariser (1.36) autour d'une solution stationnaire. Physiquement ceci correspond aux excitations de basse énergie du condensat.

Limite des faibles excitations

Le principe d'une expérience d'excitation d'un condensat (à basse énergie) est le suivant.

On prépare un condensat dans son état fondamental dans un potentiel de piégeage $V_{ext}(\vec{r})$ indépendant du temps. À $t=0$ on "agite" le condensat via une légère perturbation temporelle du potentiel $\delta V(\vec{r}, t)$ ce qui excite ses modes propres. Au bout d'un temps d'excitation t_e on coupe la perturbation (tout en gardant le piégeage) et on laisse le condensat évoluer à sa guise dans une superposition de modes propres. Enfin on observe le condensat en fonction du temps selon des techniques sur lesquelles on reviendra.



Pour linéariser l'équation (1.36) autour de la solution d'équilibre $\phi(\vec{r})$ on pose :

$$\varphi(\vec{r}, t) = [\phi(\vec{r}) + \delta\varphi(\vec{r}, t)] e^{-i\mu t/\hbar} \quad , \quad V_{ext}(\vec{r}, t) = V_{ext}(\vec{r}) + \delta V(\vec{r}, t), \quad (1.37)$$

que l'on injecte dans (1.36) en ne gardant que le premier ordre en $\delta\varphi$ et δV . On obtient un système d'équations qui couple $\delta\varphi$, $\delta\varphi^*$ et un terme source δV :

$$i\hbar \partial_t \begin{pmatrix} \delta\varphi \\ \delta\varphi^* \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} \delta\varphi \\ \delta\varphi^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta V \phi(\vec{r}) \\ -\delta V \phi^*(\vec{r}) \end{pmatrix}, \quad (1.38)$$

où \mathcal{L} est exactement le même opérateur linéaire que dans la théorie de Bogoliubov¹⁵ (1.25).

Finalement la linéarisation de cette équation nous donne accès au spectre des excitations de basse énergie d'un condensat dans un contexte plus intuitif que celui de la théorie de Bogoliubov. On obtient les modes propres en diagonalisant \mathcal{L} , c'est à dire en cherchant les fréquences propres ω et les vecteurs propres (u, v) du système tels que

$$\mathcal{L} \begin{pmatrix} u(\vec{r}) \\ v(\vec{r}) \end{pmatrix} e^{-i\omega t} = \hbar\omega \begin{pmatrix} u(\vec{r}) \\ v(\vec{r}) \end{pmatrix} e^{-i\omega t}. \quad (1.39)$$

Soit

$$\begin{cases} [h_1 - \mu + 2gN|\phi|^2] u(\vec{r}) + gN\phi^2 v(\vec{r}) = \hbar\omega u(\vec{r}), \\ -gN\phi^{*2} u(\vec{r}) - [h_1 - \mu + 2gN|\phi|^2] v(\vec{r}) = \hbar\omega v(\vec{r}), \end{cases} \quad (1.40)$$

équations connues sous le nom d'*équations de Bogoliubov-De Gennes*, à la base de nombreux calculs d'excitations d'un condensat.

Une fois ces équations résolues on obtient la fonction d'onde du condensat comme une superposition linéaire de modes propres :

$$\varphi(\vec{r}, t) = [\phi(\vec{r}) + u(\vec{r})e^{-i\omega t} + v^*(\vec{r})e^{i\omega t}] e^{-i\mu t/\hbar}, \quad (1.41)$$

(car si (u, v) est vecteur propre avec la valeur propre $\hbar\omega$ alors (v^*, u^*) est aussi vecteur propre avec la valeur propre $-\hbar\omega$.)

¹⁵Ceci n'est pas complètement évident dans la mesure où dans la théorie de Bogoliubov on décrit les excitations comme des interactions avec le nuage thermique alors qu'ici il s'agit de fluctuations induites par le potentiel. Mais rien ne distingue vraiment le champ non condensé d'une fluctuation purement classique du champ dans une théorie linéaire. À méditer... (voir par exemple [121] qui montre que l'équation de GP peut faire apparaître une partie non condensée.)

Cas particulier du gaz homogène

Encore une fois il est instructif de regarder un exemple simple pour analyser la physique. Prenons le cas d'un condensat libre uniforme¹⁶. La solution d'équilibre est très simple car il s'agit d'une constante :

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{L^{3/2}} \rightarrow \rho = N\phi^2 = \frac{N}{L^3} \quad , \quad \mu = \rho g \quad , \quad V_{ext}(\vec{r}) = 0 \rightarrow h_1 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta. \quad (1.42)$$

On cherche $u(\vec{r})$ et $v(\vec{r})$ sous forme d'ondes planes, $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, ce qui donne la relation de dispersion de Bogoliubov

$$\hbar\omega = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2g\rho \right)}. \quad (1.43)$$

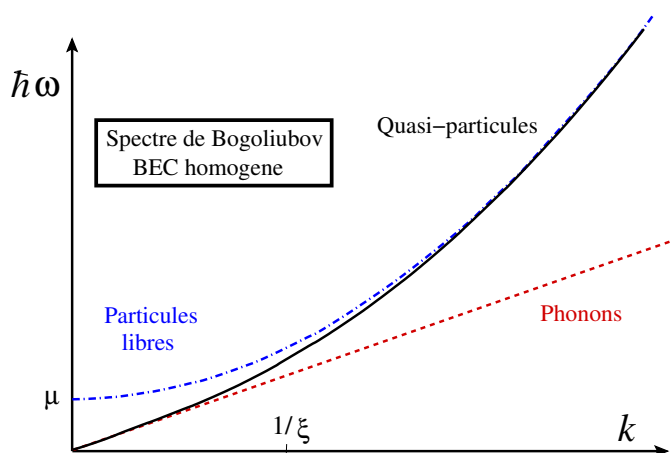


FIG. 1.3 – Spectre de Bogoliubov d'un condensat homogène.

Cette relation de dispersion (figure 1.3) suggère deux limites simples selon l'ordre de grandeur de k . Ainsi la nature des excitations élémentaires du condensat est classée en trois catégories selon la relation d'ordre entre la longueur d'onde des excitations λ et la longueur de relaxation ξ du condensat précédemment introduite.

- $\lambda \ll \xi$: la relation de dispersion se réduit à une relation de particule libre. L'effet du condensat ne se traduit que par un simple décalage des énergies du gaz.
- $\lambda \gg \xi$: cette limite conduit à une relation linéaire en ω et k caractéristique des phonons. Il s'agit d'ondes de densité à travers le condensat.
- $\lambda \sim \xi$: les excitations n'ont pas une interprétation physique simple, il s'agit de quasi-particules de Bogoliubov.

Il est à noter que l'on retrouve en général le même genre de distinction dans le cas de condensats inhomogènes, en particulier la longueur de relaxation reste une échelle essentielle pour classer les excitations.

1.5.2 Formulation hydrodynamique : Thomas-Fermi généralisé

Une des complications qui arrive lorsqu'on examine des problèmes dépendants du temps est que la fonction d'onde devient nécessairement complexe. En effet, dans le cas

¹⁶Même si ce cas semble académique il est tout de même très intéressant et peut s'appliquer sur une échelle de distance où la densité varie peu.

statique on peut toujours se ramener à une fonction réelle ce qui traduit le fait que le courant de probabilité est nul (état stationnaire!). Pour un problème dépendant du temps ce n'est en général pas le cas. Prenons par exemple une expérience de transport balistique où un condensat se déplace à vitesse constante. Cette vitesse est essentiellement liée au courant de probabilité et donc au gradient de phase de la fonction d'onde¹⁷.

Une conséquence de ceci est l'impossibilité de négliger directement l'énergie cinétique comme dans l'approximation de Thomas-Fermi pour le cas statique. L'objectif de cette partie est de développer un formalisme où il nous sera possible de séparer les fluctuations de phase et de densité pour généraliser cette approximation. Pour ce faire il s'agit juste de changer de point de vue en écrivant la fonction d'onde du condensat dans la *représentation phase-densité* :

$$\varphi(\vec{r}, t) = \sqrt{\rho(\vec{r}, t)} e^{iS(\vec{r}, t)} \quad \text{avec} \quad \int d^3\vec{r} |\varphi|^2 = N. \quad (1.44)$$

Ceci conduit à un jeu de trois équations totalement équivalentes à (1.36) :

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{r}, t) &= \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} S(\vec{r}, t) & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) &= 0, \\ m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= \vec{\nabla} \left[\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \Delta \sqrt{\rho} - \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - V_{ext}(\vec{r}, t) - g\rho \right], \end{aligned} \quad (1.45)$$

qui est une équation presque classique car un seul terme est proportionnel à \hbar . On appelle ce terme *pression quantique*.

Limite des grandes densités

Jusqu'ici il ne s'agit que d'une réécriture de (1.36) mais on voit déjà que l'on a séparé les fluctuations de phase et de densité, ce qui va nous permettre de faire une approximation simple.

En effet, dans la limite de grandes interactions (parfois appelée grandes densités) on a vu (pour des interactions répulsives) que la densité varie lentement dans l'espace (du moins loin des bords) et donc que le gradient de densité est faible. Il est donc justifié de négliger le terme de pression quantique dans ce régime. Plus quantitativement on peut faire cette approximation si on regarde, par exemple, des modes de vibrations du condensat dont l'échelle caractéristique d est telle que ce terme soit négligeable devant les autres et en particulier devant $g\rho$. Ceci donne le critère

$$\frac{\hbar^2}{2md^2} \ll g\rho \quad \Rightarrow \quad d \gg \xi. \quad (1.46)$$

Dans ce cas on obtient l'équation d'un superfluide :

$$m \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} + \vec{\nabla} (V_{ext}(\vec{r}, t) + g\rho) = \vec{0}, \quad (1.47)$$

qui dans le régime d'équilibre ($\rho = cte$, $\vec{v} = \vec{0}$) redonne l'approximation de Thomas-Fermi.

Limite des faibles excitations

Encore une fois pour obtenir les modes de basse énergie du condensat on peut reproduire la procédure de linéarisation autour de la solution d'équilibre. On a

¹⁷C'est un résultat bien connu de la mécanique quantique $\vec{j} \sim (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}) + \delta\rho(\vec{r}, t) \\ \vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_0(\vec{r}) + \delta\vec{v}(\vec{r}, t) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_0(\vec{r}) = \frac{1}{g} [\mu - V_{ext}(\vec{r})] \\ \vec{v}_0(\vec{r}) = \vec{0} \end{array} \right. \quad (1.48)$$

En injectant dans (1.47) et en ne gardant que les premiers ordres en $\delta\vec{v}$ et $\delta\rho$ on obtient

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta\rho(\vec{r}, t) = \frac{g}{m} \vec{\nabla} \left[\rho_0(\vec{r}) \vec{\nabla} \delta\rho(\vec{r}, t) \right] = \vec{\nabla} \left[c^2(\vec{r}) \vec{\nabla} \delta\rho(\vec{r}, t) \right], \quad (1.49)$$

où $c(\vec{r})$ est telle que $mc^2(\vec{r}) = \mu - V_{ext}(\vec{r})$ désigne une *vitesse du son locale*. En effet cette interprétation est claire si on regarde le cas homogène $\rho_0(\vec{r}) = \rho_0$ où l'on a

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta \right) \delta\rho(\vec{r}, t) = 0 \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{g\rho_0}{m}. \quad (1.50)$$

On retrouve les ondes sonores prédites par la théorie de Bogoliubov dans le régime $\lambda \gg \xi$ où s'applique l'approximation de Thomas-Fermi généralisée. Bien sûr le cas du condensat homogène semble encore une fois académique mais si on considère des excitations qui varient très rapidement à l'échelle des fluctuations de densité du condensat (dans la limite Thomas-Fermi c'est typiquement la taille du condensat car le profil de densité est relativement lisse) on peut avoir des ondes sonores dans un milieu inhomogène¹⁸. Cela dit il faut faire attention à la double contrainte

$$\xi \ll \lambda \ll R \quad \text{où } R \text{ est la taille typique du condensat} \quad (1.51)$$

qui assure d'avoir un milieu localement homogène et une excitation de type phonon.

On va voir par la suite que cette contrainte est réalisable expérimentalement, par exemple dans une expérience du MIT [17] où $\xi \sim 0.2\mu m$ et $R \sim 100\mu m$.

1.5.3 Analyse de quelques expériences

Les expériences d'atomes froids sont d'une simplicité évangélique. P. Nozières.

Quelques éléments sur le spectre des excitations

À cause du confinement d'un condensat dans un piège, le spectre des excitations n'est pas aussi simple que celui obtenu pour le cas homogène. En particulier on a vu que les premières excitations ne sont pas nécessairement des phonons qui nécessitent des conditions un peu plus subtiles. En fait il est facile de voir que les premières excitations ont un spectre discret (à cause du confinement) mais que l'on peut arriver à des ondes sonores en augmentant l'énergie. On pourra consulter à ce sujet deux articles de référence de S. Stringari [170, 171] où il résout l'équation (1.49) dans différentes configurations de piégeage harmonique et en particulier dans la limite très anisotrope du condensat en forme de cigare¹⁹ où la dynamique de basse énergie est unidimensionnelle.

Afin de comprendre les quelques expériences notons quelques propriétés des modes propres d'un condensat piégé.

¹⁸Ceci est lié à l'approximation adiabatique. La dynamique de la perturbation est bien plus rapide que celle du milieu, elle peut donc suivre de façon adiabatique ses modifications tout comme la dynamique électronique s'adapte aux mouvements des noyaux en physique moléculaire.

¹⁹Il s'agit d'un condensat dans un piège harmonique à symétrie cylindrique avec un confinement très faible dans la direction z ($\omega_z \ll \omega_\perp$).

- Les modes de plus basses énergies sont essentiellement des *modes collectifs* où l'ensemble du condensat est affecté (modes de grandes longueurs d'ondes) comme l'oscillation du centre de masse, des modes de compressions... mais dont les fréquences sont *discrètes*.
- Quand on augmente un peu l'énergie, le spectre se resserre pour ressembler à un continuum où l'on peut voir des ondes sonores selon les conditions (1.51).
- À encore plus haute énergie (ou plutôt moins basse...) le spectre devient plus complexe et finit par tendre vers un spectre de particule libre.

Dans cette partie on se propose d'analyser des expériences qui mettent en évidence les deux premières catégories d'excitations.

Modes collectifs de basse énergie

De manière générale deux types de quantités simples (et pertinentes pour ce qui est des excitations) sont accessibles à l'expériences : la *position du condensat* et ses différents *rappports d'aspects*. La première nous renseigne sur la dynamique du centre de masse et les secondes, définies comme les différents rapports des dimensions²⁰ du condensat, sur les modes de compressions par exemple. Il existe deux principales techniques (à ma connaissance) pour les mesurer : l'imagerie par absorption et l'imagerie par contraste de phase²¹. Cela dit le principe de ce genre d'expérience est en général le même. On prépare un condensat à l'équilibre puis à $t = 0$ on le perturbe pendant un temps t_e et on le laisse évoluer pendant un temps t avant de mesurer ses caractéristiques.

La difficulté essentielle de ce genre d'expérience est de pouvoir exciter intelligemment les modes du condensat. En effet, si on perturbe le piège n'importe comment on risque d'exciter un nombre arbitraire de modes propres conduisant à un résultat inexploitable. Il faut donc être capable d'exciter les modes un par un pour les mesurer proprement. La seule façon de le faire est de créer une déformation du piège qui coïncide exactement avec la géométrie d'un mode propre. Voilà pourquoi, en général, des expériences telles que [93, 135] ne peuvent explorer qu'un nombre très limité de modes.

Par exemple dans l'expérience [93] de l'équipe de Boulder en 1996 sur le ^{87}Rb (~ 5000 atomes), ils avaient la possibilité d'exciter deux modes différents ($m=0$, $m=2$, fig 1.4) grâce à la superposition d'un piège TOP²² (indépendant du temps) et de deux configurations complexes de champs magnétiques oscillants représentant des modulations de l'ordre de 1.5%.

Expérimentalement ils imposaient une géométrie d'excitation et observaient l'amplitude de l'excitation en fonction de la fréquence. Dans le cas d'un gaz condensé ils ont trouvé une fréquence de résonance alors que le gaz thermique ne répondait pas. D'autre part en maintenant cette fréquence et en changeant la géométrie il n'y avait aucune réponse. Voilà qui constitue une preuve des idées avancées jusqu'à présent.

²⁰En général les pièges sont harmoniques à symétrie cylindrique. Il n'y a donc qu'un seul rapport d'aspect possible.

²¹Nous n'entrerons pas dans les détails de ces techniques de mesures. La différence fondamentale entre les 2 est que celle par absorption est destructive (mesure de temps de vol dans une expérience de transport balistique (pour faire gongler le condensat et avoir une meilleure résolution) par absorption optique), ce qui nécessite de faire N expériences différentes pour mesurer le condensat à N temps différents, alors que par le contraste de phase on peut le mesurer directement sans le détruire.

²²C'est un piège harmonique à symétrie cylindrique tel que $\omega_{\perp}/\omega_z = \sqrt{8}$.

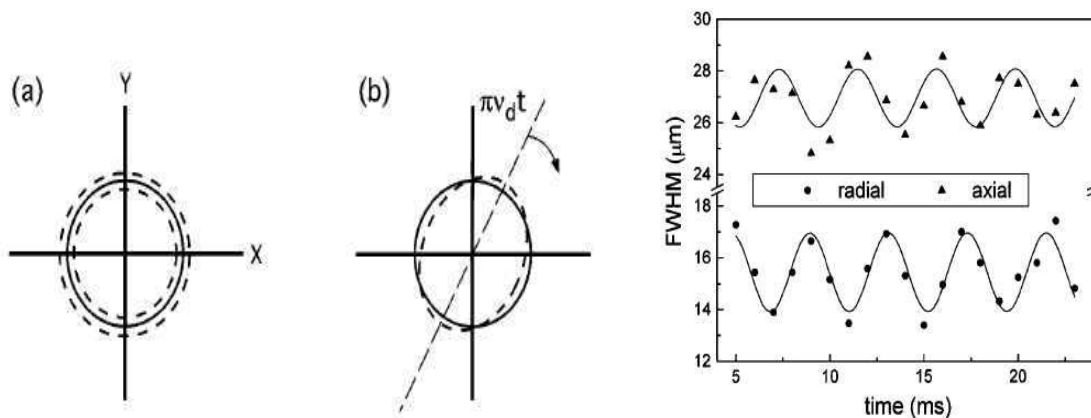
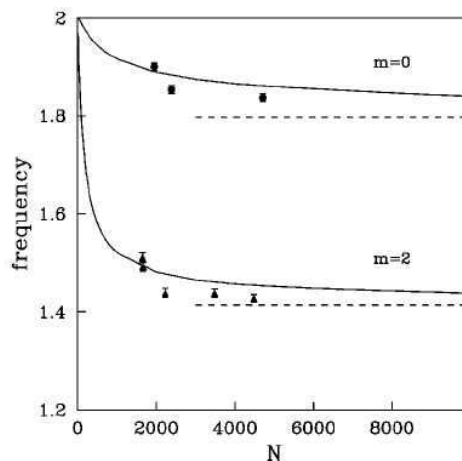


FIG. 1.4 – **À gauche** schéma des deux modes $m=0$ (a) et $m=2$ (b) (m est le nombre quantique de L_z du à la symétrie cylindrique). Le mode $m=0$ conserve la symétrie axiale : on a des oscillations radiales et axiales en oppositions de phases. Le mode $m=2$ brise la symétrie : on a des oscillations radiales anisotropes accompagnées d'une rotation à vitesse constante des axes d'oscillations sans dynamique en z . **À droite** : évolution des dimensions radiales et axiales du condensat au cours du temps pour le mode $m=0$ qui sont bien en opposition de phase. Ceci permet de mesurer la fréquence d'oscillation.

De plus ils ont aussi regardé l'effet des interactions sur les fréquences propres en changeant les paramètres du piège (ce qui change l'extension du fondamental). Les résultats sont présentés sur la figure ci-contre. Les courbes en traits pleins correspondent à des résolutions numériques de l'équation de Gross-Pitaevskii alors que les tirets sont les résultats asymptotiques de Stringari [170] dans la limite de Thomas-Fermi. Les résultats sont en excellent accord avec la théorie ce qui constitue une confirmation expérimentale de l'équation (1.36).



Ondes sonores dans un condensat

On a discuté dans la section 2.2.2 de l'existence d'onde sonores au sein d'un condensat, et ceci quand la longueur d'onde est à la fois grande devant la longueur de relaxation et petite devant l'échelle de variation de densité du condensat (voir par exemple [170]). Ceci a été mis en évidence, par exemple, dans une expérience au MIT sur le Sodium en 1997 [17].

Dans cette expérience, ils travaillaient avec environ $5 \cdot 10^6$ atomes formant un condensat en forme de cigare dont la dynamique est quasi unidimensionnelle. Compte tenu du nombre d'atomes et de l'interaction répulsive, le régime de Thomas-Fermi est atteint. Il s'agit donc de provoquer une déformation du condensat, petite devant ses dimensions et en particulier la dimension longitudinale. Pour ce faire ils ont appliqué un champ radiofréquence au centre du piège pour réaliser une perturbation localisée (fig 1.5).

Voilà de jolies images (les chiffres étant aussi en très bons accords) qui confirment une fois de plus la théorie de champ moyen exposée précédemment.

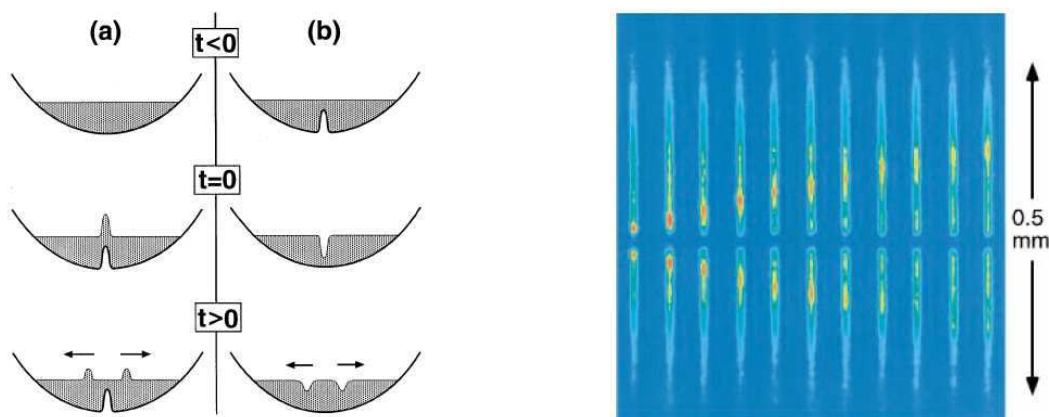


FIG. 1.5 – À gauche : schéma du principe de l'expérience. Il existe deux façons de perturber le condensat : soit en allumant la perturbation une fois qu'il est formé (a) soit en le formant avec et en le coupant après (b). Dans les 2 cas deux fronts se propagent en directions opposées de façon symétrique. À droite : images du condensat (contraste de phase) au cours du temps. On voit bien une structure se déplacer avec une vitesse constante (jusqu'à une certaine limite car elle est quand même locale) au sein du condensat.

1.6 Condensats unidimensionnels

Toto, I have a feeling we're not in Kansas anymore. Dorothy, Le magicien d'Oz.

Précédemment nous avons discuté les propriétés de condensats en dimension 3. Depuis plusieurs années il est possible de créer expérimentalement des gaz quantiques en dimension inférieure, dans le sens où les énergies d'excitations dans une ou plusieurs directions sont beaucoup plus importantes que dans les autres. Ainsi, grâce à la quantification de l'énergie, la dynamique du système est gelée (à basse énergie) dans certaines directions. On parle alors de systèmes quasi-bidimensionnels ou quasi-unidimensionnels. De tels systèmes peuvent être créés en confinant un gaz dans un piège anisotrope. Si le piège est relativement fort dans deux directions de l'espace et beaucoup plus faible dans la dernière on peut alors espérer créer un condensat quasi-unidimensionnel. Une question naturelle est bien sûr la suivante : existe-t-il des condensats de Bose-Einstein en dimension 1 ? Et si oui quelles sont les conditions d'existence et quelles sont les propriétés de tels systèmes. Nous allons voir dans ce qui suit que ce phénomène n'existe pas rigoureusement à la limite thermodynamique mais peut tout de même être observé expérimentalement (annexe A).

1.6.1 Quelques généralités sur la condensation en dimension réduite

Cas des bosons dans une boîte

On s'intéresse ici de manière assez qualitative à l'évolution du rapport N_1/N_0 en fonction du nombre de particules quelque soit la dimension.

Considérons N bosons sans interaction dans une boîte de longueur L en dimension d . Le spectre du système est le suivant :

$$\epsilon = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} [n_x^2 + n_y^2 + n_z^2] \sim \frac{1}{L^2}. \quad (1.52)$$

En dimension d , dire que l'état fondamental est macroscopiquement occupé signifie que

$$N_0 \sim L^d. \quad (1.53)$$

La population du premier état excité est quant à elle donnée par le facteur de Bose

$$N_1 \simeq \frac{1}{\beta(\epsilon_1 - \mu)} \sim L^2, \quad (1.54)$$

ce qui conduit au rapport N_1/N_0 suivant :

$$N_1/N_0 \sim L^{2-d}. \quad (1.55)$$

Il n'est donc a priori pas possible d'observer la condensation de Bose-Einstein pour $d \leq 2$ dans un système uniforme.

Cas des bosons dans un piège harmonique

La condensation de Bose-Einstein étant une condensation dans l'espace des phases, la présence d'un potentiel de piégeage est en général favorable. On considère ici un piège harmonique non nécessairement isotrope en dimension d :

$$V(x_1, \dots, x_d) = \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^d \omega_i^2 x_i^2. \quad (1.56)$$

Le nombre de particules qui occupent les états excités est comme précédemment donné par la somme des facteurs de Bose :

$$N_T = \sum_{\{n_i\}} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1}, \quad (1.57)$$

avec

$$\epsilon = \hbar \sum_{i=1}^d \omega_i (k_i + 1/2). \quad (1.58)$$

Soit à la limite continue, en introduisant la densité d'états en énergie $\rho(\epsilon)$ et à très basse température ($\mu \rightarrow \epsilon_0 = 0$ à la limite continue) :

$$N_T = \int \frac{\rho(\epsilon)d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1} = \frac{1}{\hbar^d (d-1)! \omega_1 \dots \omega_d} \int \frac{\epsilon^{d-1}}{e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon. \quad (1.59)$$

Cette intégrale présente un comportement singulier au voisinage de 0 selon la dimensionnalité du système. En dimension 2 et 3 elle converge ce qui conduit à une borne supérieure du nombre d'atomes dans les niveaux excités et donc à la nécessité de peupler le fondamental de façon macroscopique. En revanche elle diverge en dimension 1 ce qui exclut la possibilité d'observer une condensation de Bose-Einstein.

Si tout de même on cherche à définir une température de condensation à une dimension, en utilisant le critère $N = N_T$, on obtient (pour $k_B T_c \gg \hbar\omega$)

$$k_B T_c = \frac{N \hbar \omega}{\ln(2N)}. \quad (1.60)$$

À la limite thermodynamique, c'est à dire pour $N \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow 0$ avec $N\omega = cte$, la présence du logarithme entraine que T_c tende vers zéro. Cela dit les expériences sont bien entendu réalisées avec un nombre fini d'atomes ($\sim 10^5 - 10^6$ atomes) ce qui permet une occupation importante mais finie de l'état fondamental.

1.6.2 Passage 3D-1D

Dans la mesure où de nombreuses expériences sont réalisées dans des pièges très anisotropes, il est très utile de développer une théorie effective unidimensionnelle bien plus simple à utiliser que l'équation de Gross-Pitaevskii 3D. L'idée de base est d'utiliser une approximation adiabatique pour séparer la dynamique transverse de celle longitudinale. On pose donc comme ansatz pour la fonction d'onde du condensat

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(x, t)\phi_{\perp}(\vec{r}_{\perp}, x), \quad (1.61)$$

avec comme hypothèse $\partial_x \phi(\vec{r}_{\perp}, x) \ll \partial_{\perp} \phi(\vec{r}_{\perp}, x)$, ce qui revient à imposer que la taille transverse du condensat soit plus petite que l'échelle typique des variations de $\phi_{\perp}(\vec{r}_{\perp}, x)$ selon x .

De plus, on impose les conditions de normalisation suivantes :

$$\int d^2 \vec{r}_{\perp} |\phi_{\perp}|^2 = 1, \quad (1.62)$$

$$n_1(x, t) = \int d^2 \vec{r}_{\perp} |\Psi|^2 = |\psi(x, t)|^2. \quad (1.63)$$

Les équations du mouvement peuvent maintenant être obtenues par le principe de moindre action. L'action à minimiser est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[\Psi, \Psi^*] = & \frac{i\hbar}{2} \int d^3 \vec{r} dt (\Psi^* \partial_t \Psi - \Psi \partial_t \Psi^*) \\ & - \int d^3 \vec{r} dt \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Psi^* \Delta \Psi + \frac{g}{2} |\Psi|^4 + (V_{\parallel}(x) + V_{\perp}(\vec{r}_{\perp})) |\Psi|^2 \right), \end{aligned} \quad (1.64)$$

avec $g = 4\pi\hbar^2 a/m$.

La dérivation fonctionnelle par rapport à Ψ^* puis la division par Ψ conduit à l'égalité suivante :

$$\frac{i\hbar}{\psi} \partial_t \psi + \frac{\hbar^2}{2m\psi} \partial_x^2 \psi - V_{\parallel}(x) = -\frac{\hbar^2}{2m\phi_{\perp}} \Delta \phi_{\perp} + gn_1 |\phi_{\perp}|^2 + V_{\perp}(\vec{r}_{\perp}). \quad (1.65)$$

L'approximation $\partial_x \phi(\vec{r}_{\perp}, x) \ll \partial_{\perp} \phi(\vec{r}_{\perp}, x)$ permet de simplifier le membre de droite mais surtout de séparer les équations puisque ϕ_{\perp} ne dépend alors plus que de manière paramétrique de la dynamique longitudinale via n_1 . Chaque membre de (1.65) est alors égal à une constante (par rapport à \vec{r} et t) qui ne dépend que de n_1 . On note cette constante $\epsilon(n_1)$ ce qui conduit au système de deux équations différentielles suivant :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\perp} \phi_{\perp} + gn_1 |\phi_{\perp}|^2 \phi_{\perp} + V_{\perp} \phi_{\perp} = \epsilon(n_1) \phi_{\perp}, \quad (1.66)$$

$$i\hbar \partial_t \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi + V_{\parallel} \psi + \epsilon(n_1) \psi. \quad (1.67)$$

Il convient donc de résoudre le problème transverse en premier afin de déterminer la non-linéarité effective pour la dynamique longitudinale. Ceci peut être fait aisément dans deux cas limites. D'une part dans la limite où la densité transverse est très faible de sorte que la non-linéarité dans (1.66) puisse être traitée comme une perturbation : c'est le régime de *champ moyen 1D*. D'autre part, si la densité est au contraire grande, le régime de Thomas-Fermi est atteint dans la direction transverse : on parle alors de régime *Thomas-Fermi transverse*. Compte tenu du choix de normalisation, le paramètre clef est an_1 . Si $an_1 \ll 1$, le système est dans le régime champ moyen 1D alors que pour $an_1 \gg 1$ il est dans le régime Thomas-Fermi transverse.

1.6.3 Régime Thomas-Fermi transverse : $an_1 \gg 1$

Dans ce cas, le terme d'énergie cinétique dans (1.66) devient négligeable. Pour un piège harmonique transversalement isotrope $V_\perp = \frac{1}{2}m\omega_\perp^2 r_\perp^2$ on obtient par normalisation la non linéarité effective

$$\epsilon(n_1) = 2\hbar\omega_\perp\sqrt{an_1}. \quad (1.68)$$

L'équation longitudinale effective s'écrit alors

$$i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi + V_\parallel\psi + 2\hbar\omega_\perp\sqrt{a}|\psi|\psi, \quad (1.69)$$

qui n'est pas de la même forme que l'équation de Gross-Pitaevskii standard.

En l'absence de potentiel longitudinal cette équation admet une solution stationnaire uniforme $\sqrt{n_0}e^{-i\mu t}$, pour un condensat au repos dont le potentiel chimique est

$$\mu = 2\hbar\omega_\perp\sqrt{an_0} = g\sqrt{n_0}, \quad (1.70)$$

où l'on a défini la constante de couplage effective $g = 2\hbar\omega_\perp\sqrt{a}$.

Dans ce régime, le condensat garde une forme tridimensionnelle et le rayon pour lequel la densité s'annule est

$$R_\perp = 2a_\perp(an_0)^{1/4}, \quad a_\perp = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_\perp}}. \quad (1.71)$$

Précisons ici que, même dans ce régime, la densité tri-dimensionnelle n_{3D} doit toujours vérifier $n_{3D}^{1/3}a \ll 1$, ce qui est équivalent à $n_1a \ll (a_\perp/a)^4$, or a_\perp/a est typiquement de l'ordre de 10^3 ce qui permet clairement d'avoir les deux conditions remplies $n_1a \gg 1$ et $n_{3D}^{1/3}a \ll 1$.

On a de plus dans ce régime

$$R_\perp \gg \xi, \quad (1.72)$$

où ξ est la longueur de relaxation définie dans le cas uni-dimensionnel par

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{m\mu}}. \quad (1.73)$$

Ces deux longueurs typiques interviennent dans le spectre d'excitation qui, dans le cas d'un condensat homogène immobile, est présenté sur la figure 1.6.

On observe un changement de convexité au voisinage de $k = 1/R_\perp$. Cet effet correspond à des excitations élémentaires capables d'explorer les bords du condensats où la vitesse du son y est plus faible.

L'analyse linéaire de (1.69) en posant $\psi(x, t) = e^{-i\mu t}(\psi_0 + \delta\psi(x, t))$ conduit aux équations de Bogoliubov-De Gennes suivantes :

$$i\hbar\partial_t \begin{pmatrix} \delta\psi \\ \delta\psi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{3g}{2}|\psi_0| - \mu & \frac{g}{2}\psi_0 \\ -\frac{g}{2}\psi_0^* & \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{3g}{2}|\psi_0| + \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\psi \\ \delta\psi^* \end{pmatrix}, \quad (1.74)$$

ce qui conduit à la relation de dispersion

$$(\hbar\omega)^2 = \left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}\right)^2 + \frac{\hbar^2k^2}{2m}\mu. \quad (1.75)$$

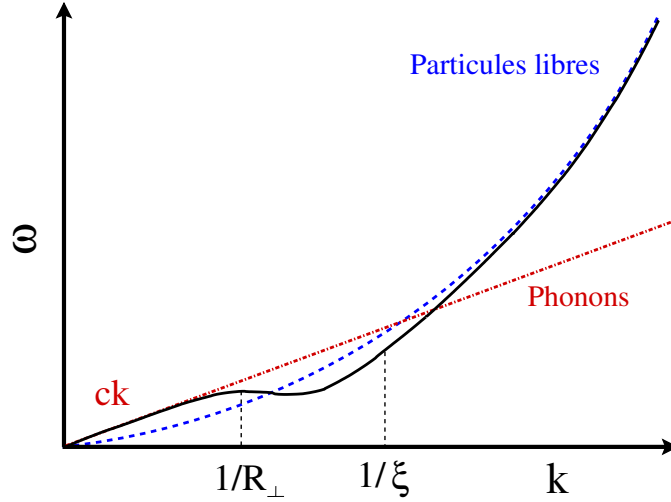


FIG. 1.6 – Branche de basse énergie du spectre d’excitation d’un condensat uniforme unidimensionnel dans le régime Thomas-Fermi transverse.

L’effet décrit précédemment échappe donc à l’approche adiabatique qui n’est alors valable, dans le régime Thomas-Fermi transverse, que pour des excitations de longueur d’onde supérieures à R_{\perp} . Cette condition peut aussi s’écrire $\omega \ll \omega_{\perp}$ qui n’est autre que la condition nécessaire pour que la dynamique transverse soit gelée.

On note au passage que dans ce régime la vitesse du son unidimensionnelle a pour expression

$$c = \sqrt{\mu/2m}. \quad (1.76)$$

1.6.4 Régime de champ moyen 1D : $(a/a_{\perp})^2 \ll an_1 \ll 1$

Dans ce régime la densité transverse est très faible permettant ainsi d’appliquer la théorie des perturbations pour résoudre l’équation (1.66). Cela dit, on va voir qu’il ne faut pas que la densité soit trop faible sinon on peut entrer dans un régime dit de *Tonks-Girardeau* où la cohérence de phase est perdue et les interactions sont très fortes (annexe A). Au premier ordre en perturbation on obtient

$$\epsilon(n_1) = \epsilon_0 + 4\pi an_1 \int d^2\vec{r}_{\perp} |\phi_{\perp}|^4 = \epsilon_0 + \frac{2\hbar^2 an_1}{ma_{\perp}^2}, \quad (1.77)$$

où ϵ_0 est l’énergie du fondamental non perturbé que l’on peut éliminer par choix de l’origine des énergies. Dans le cas où le confinement radial est harmonique isotrope on a $a_{\perp} = \sqrt{\hbar/m\omega_{\perp}}$. L’équation effective s’écrit alors

$$i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi + V_{\parallel}\psi + 2\hbar\omega_{\perp}a|\psi|^2\psi. \quad (1.78)$$

Comme précédemment on peut trouver une solution stationnaire de la forme $\sqrt{n_0} e^{-i\mu t}$ avec pour potentiel chimique

$$\mu = gn_0, \quad (1.79)$$

où cette fois $g = 2\hbar\omega_{\perp}a$.

La linéarisation de (1.78) autour de cette solution conduit aux équations de Bogoliubov-De Gennes

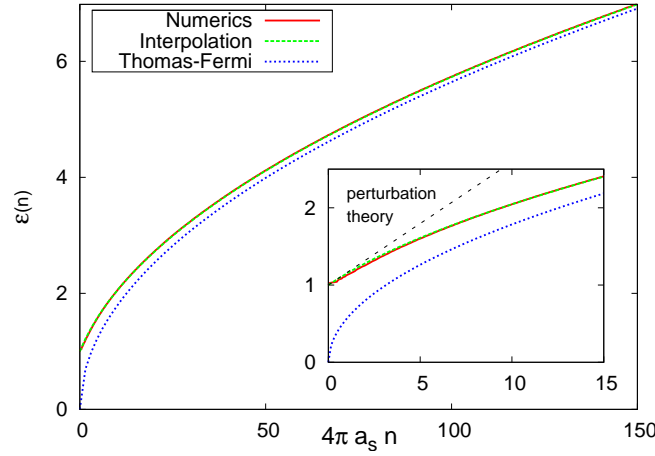


FIG. 1.7 – $\epsilon(n_1)$ calculée numériquement et via la formule d'interpolation (1.84). Les deux cas limites, à savoir le régime Thomas-Fermi transverse et le régime de champ moyen 1D, sont aussi dessinés.

$$i\hbar \partial_t \begin{pmatrix} \delta\psi \\ \delta\psi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + 2g|\psi_0|^2 - \mu & g\psi_0^2 \\ -g\psi_0^{*2} & \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - 2g|\psi_0|^2 + \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\psi \\ \delta\psi^* \end{pmatrix}, \quad (1.80)$$

et donc au spectre de Bogoliubov suivant

$$(\hbar\omega)^2 = \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right)^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{m} \mu. \quad (1.81)$$

Ainsi la vitesse du son est

$$c = \sqrt{\mu/m}. \quad (1.82)$$

A priori, la théorie de champ moyen n'est valide que si la distance moyenne entre particules $d = n_1^{-1}$ est beaucoup plus petite que l'échelle typique de variation de la fonction d'onde, soit ici la longueur de relaxation $\xi = \hbar/\sqrt{m\mu}$. Or le rapport

$$\frac{\xi}{d} = \sqrt{\frac{a_\perp^2}{4a} n_1}, \quad (1.83)$$

croît avec la densité. Ceci signifie que la théorie de champ moyen devient inadéquate à très faible densité longitudinale. Ce régime correspond au gaz de Tonks-Girardeau dont nous ne discuterons pas les propriétés dans ce manuscrit. Ainsi (1.83) impose un second critère pour que (1.78) soit pertinente, à savoir que $n_1 a \gg (a/a_\perp)^2$.

1.6.5 Interpolation entre les deux régimes

Une formule d'interpolation pour $\epsilon(n_1)$ a été suggéré par Paul et al [145] et démontrée récemment par Munoz et Delgado [141]. Elle permet de décrire de façon très précise la dynamique d'un condensat quasi-unidimensionnel

$$\epsilon(n_1) = \hbar\omega_\perp \sqrt{1 + 4an_1}. \quad (1.84)$$

De nombreux tests de cette formule sont présentés dans [141]. La figure 1.7 montre la comparaison entre la résolution numérique de (1.66) et (1.84).

1.6.6 Équations hydrodynamiques à une dimension

Tout comme dans le cas tridimensionnel, il est parfois commode d'utiliser le formalisme hydrodynamique. À l'aide de la transformation de Madelung, $\psi(x, t) = \sqrt{n_1(x, t)}e^{iS(x, t)}$, on peut transformer l'équation (1.67) en un jeu de deux équations

$$\partial_t n_1 + \partial_x(n_1 v) = 0, \quad (1.85)$$

$$m\partial_t v + \partial_x \left(V_{\parallel}(x) - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n_1}} \partial_x^2 \sqrt{n_1} + \epsilon(n_1) + \frac{mv^2}{2} \right) = 0, \quad (1.86)$$

avec $v = \frac{\hbar}{m} \partial_x S(x, t)$. On rappelle également que $\epsilon(n_1)$ est la non-linéarité effective qui peut s'écrire sous forme compacte (dans le cas d'un confinement radial parabolique)

$$\epsilon(n_1) = 2\hbar\omega_{\perp}(an_1)^{\nu} = g_{\nu}n_1^{\nu}, \quad (1.87)$$

où $\nu = 1/2$ dans le régime Thomas-Fermi transverse ($an_1 \gg 1$) et $\nu = 1$ dans le régime de champ moyen ($an_1 \ll 1$) et $g_{\nu} = 2\hbar\omega_{\perp}a^{\nu}$.

L'intérêt principal de ce formalisme est, comme dans le cas tridimensionnel, de négliger une partie de l'énergie cinétique souvent appelée pression quantique. Ce terme contenant une dérivée spatiale de la densité, il est clair que l'on pourra s'en débarrasser dans le cas où les fluctuations de densité s'effectuent sur une échelle suffisamment grande. Ceci est possible pour des potentiels "suffisamment lisses" et/ou pour des excitations de grande longueur d'onde. Pour être plus précis, il s'agit que ce terme soit petit devant le terme d'interaction, ce qui revient à dire que cette échelle typique de variation doit être grande devant la longueur de relaxation. Ainsi, en ce qui concerne les excitations, les équations hydrodynamiques simplifiées ne peuvent décrire que la partie linéaire du spectre. D'autre part, dans le régime Thomas-Fermi transverse il faut également satisfaire la contrainte $kR_{\perp} \ll 1$.

Négliger la pression quantique permet alors d'obtenir le profil d'équilibre via l'équation suivante :

$$\mu = V_{\parallel}(x) + \epsilon(n_0(x)), \quad (1.88)$$

qui, dans les deux régimes extrêmes, est très simple à résoudre. On obtient

$$g_{\nu}n_0(x) = [\mu - V_{\parallel}(x)]^{1/\nu}. \quad (1.89)$$

Dans le cadre de cette approximation, la version linéarisée de (1.85) et (1.86) est

$$\partial_t^2 \delta n(x, t) = \frac{1}{m} \partial_x \left[n_0(x) \partial_x \left\{ \delta n(x, t) \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial n} \right)_{n_0} \right\} \right], \quad (1.90)$$

qui est vraie quelque soit le régime considéré.

On définit enfin la vitesse du son locale par :

$$mc^2(x) = n_0(x) \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial n} \right)_{n_0}. \quad (1.91)$$

Régime de champ moyen 1D

Dans ce cas on a $\epsilon(n_1) = 2a\hbar\omega_{\perp}n_1$ et donc

$$\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial n} \right)_{n_0} = 2a\hbar\omega_{\perp}, \quad (1.92)$$

ce qui conduit à

$$\partial_t^2 \delta n = \partial_x [c^2(x) \partial_x \delta n] , \quad (1.93)$$

avec

$$c^2(x) = 2 \frac{an_0(x) \hbar \omega_\perp}{m} = \frac{gn_0(x)}{m} . \quad (1.94)$$

Dans le cas uniforme on retrouve l'expression (1.82) obtenue par les équations de Bogoliubov.

Régime Thomas-Fermi transverse

Cette fois-ci on a $\epsilon(n_1) = 2\hbar\omega_\perp\sqrt{an_1}$ ce qui donne une équation un peu plus complexe pour les excitations

$$\partial_t^2 \delta n = \partial_x \left[\frac{\hbar\omega_\perp\sqrt{an_0(x)}}{m} \left(\partial_x \delta n - \frac{1}{2} \delta n \frac{\partial_x n_0(x)}{n_0(x)} \right) \right] , \quad (1.95)$$

qui dans la limite où $n_0(x, t)$ varie spatialement beaucoup plus lentement que δn se réduit à :

$$\partial_t^2 \delta n = \partial_x [c^2(x) \partial_x \delta n] , \quad (1.96)$$

avec

$$c^2(x) = 2 \frac{\hbar\omega_\perp}{m} \sqrt{an_0(x)} = \frac{g\sqrt{n_0(x)}}{2m} . \quad (1.97)$$

Cette équation est identique à celle obtenue par Stringari [171] en moyennant les équations hydrodynamique tridimensionnelles sur les degrés de liberté transverses.

1.6.7 Solitons

Un soliton est une onde très robuste qui peut se propager sans déformation. Ce genre d'objet, qui existe grâce à la compétition entre des effets dispersifs et non-linéaires, a été observé pour la première fois par J. Russel un ingénieur Ecossais en 1834. Celui-ci montait à cheval le long de l'Union Canal à Edimburg lorsqu'il aperçut une vague mystérieuse, créée brusquement à la proue d'un bateau qui s'arrêtait soudainement. Il la baptisa "grande onde solitaire". Cette vague, d'environ cinquante centimètres de haut sur dix mètres de long, se propageait presque à quinze kilomètres à l'heure sans se déformer.

Russel décida alors de reproduire ce phénomène en laboratoire et publia en 1844 un rapport très critiqué par la communauté. Il fallut attendre 1895 et les travaux de Kortevég et de Vries pour pouvoir rendre compte théoriquement de ce phénomène. Le terme soliton ne fut introduit qu'en 1965 par Zabusky et Kruskal.

Les solitons intéressent désormais énormément de communautés différentes. Au delà de leur beauté mathématique et expérimentale, ces objets apparaissent dans une multitude de domaines allant de la matière condensée à la dynamique de macromolécules biologiques en passant par l'hydrodynamique, les télécommunications ou encore les condensats de Bose-Einstein.

En effet, la non-linéarité de l'équation de Gross-Pitaevkii permet l'existence de telles solutions qui ont d'ailleurs été observées à plusieurs reprises, tant dans des condensats où les interactions sont attractives que répulsives.

Dans ce qui suit on se propose de discuter brièvement la solution soliton de l'équation Gross-Pitaevskii unidimensionnelle avec interactions répulsives. On se restreint d'autre part au régime de champ moyen car, à ma connaissance, c'est le seul où l'on connaît l'expression analytique de cette solution.

Arguments qualitatifs

L'existence d'une solution localisée auto similaire est due à la compétition entre les effets dispersifs et non-linéaires. Pour que le soliton puisse se propager sans déformation, il est nécessaire que chaque composante élémentaire se déplace à la même vitesse. Il s'agit donc d'évaluer l'ordre de grandeur de chaque contribution pour en déduire la nature du soliton : pic de densité (soliton brillant) ou trou de densité (soliton sombre).

Rappelons alors la relation de dispersion donnée par le spectre de Bogoliubov :

$$\omega_q = qc\sqrt{1 + \frac{\xi^2 q^2}{4}}, \quad (1.98)$$

avec $c^2 = gn/m$ et $\xi = \hbar/\sqrt{mgn}$.

Sans faire de calculs, il est clair que la vitesse de groupe $v_g = \partial\omega_q/\partial q$ à laquelle se déplace les excitations est supérieure à la vitesse du son et augmente avec q .

Supposons maintenant que le soliton soit une déformation de densité d'amplitude Δn . Pour compenser cette augmentation, la non-linéarité doit diminuer la vitesse du son. Celle-ci étant proportionnelle à la racine carrée de la densité, on comprend que le soliton doit être un trou de densité.

En présence d'interactions répulsives, les solitons sont donc des solitons sombres.

Expression analytique

La dérivation de cette expression étant un peu longue et n'ayant que peu d'intérêt pour la suite du manuscrit, le lecteur est invité à consulter la thèse de Nicolas Bilas [32] ou le livre de Stringari et Pitaevskii [172], par exemples, pour plus de détails.

Si on considère un soliton se déplaçant à la vitesse v ($< c$) sur un condensat uniforme de densité n_∞ au repos, on peut démontrer que

$$\psi(x, t) = \sqrt{n_\infty} \left[\cos \theta \tanh \left\{ \frac{x - vt}{\xi} \cos \theta \right\} + i \sin \theta \right], \quad (1.99)$$

avec $\cos \theta = \sqrt{1 - (v/c)^2}$ et $\sin \theta = v/c$.

La densité s'écrit alors

$$n(x, t) = n_\infty \left[\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \tanh^2 \left\{ \frac{x - vt}{\xi/\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right\} + \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right]. \quad (1.100)$$

L'extension typique du soliton est donc $L = \xi/\sqrt{1 - (v/c)^2}$, qui diverge pour $v = c$ et son amplitude est $\Delta n = n_\infty \sqrt{1 - (v/c)^2}$ qui s'annule dans cette même limite. Ainsi, un soliton ne peut dépasser la vitesse du son car il disparaît à mesure qu'il s'en approche.

Des exemples de solitons sont représentés sur les figures 1.6.7.

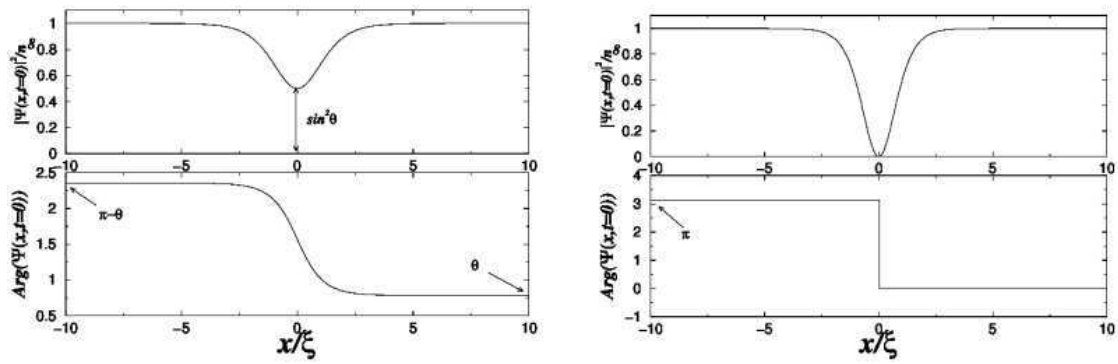


FIG. 1.8 – À gauche : Profils de densité et de phase pour $\theta = \pi/4$. À droite : Profils de densité et de phase pour $\theta = 0$.

Chapitre 2

Théorie de la superfluidité

Le fleuve est pareil à ma peine. Il s'écoule et ne tarit pas.
Guillaume Apollinaire.

La superfluidité désigne un ensemble de phénomènes hydrodynamiques étranges tels que l'absence de viscosité, les vortex, les ondes thermiques..., chez certains fluides à très basse température. D'origine purement quantique, elle est intimement liée à la condensation de Bose-Einstein à travers l'existence d'une fonction d'onde macroscopique. Cette connexion non triviale a été pour la première fois suggérée par Fritz London [122] en 1938, quelques mois après la découverte expérimentale de ce phénomène dans l'hélium liquide [95, 8]. Plus de soixante dix ans après, d'immenses progrès ont été faits dans la compréhension de cette physique (notamment grâce à l'avènement des condensats gazeux) et pourtant celle-ci reste encore assez superficielle. En particulier, la détermination théorique de la vitesse critique d'un superfluide reste à ce jour problématique à cause des effets non linéaires dus à la présence d'interactions entre les particules.

L'objectif de ce chapitre est dans un premier temps de raconter les grandes lignes historiques de la superfluidité, en commençant par sa découverte dans l'hélium liquide puis en discutant les théories pionnières de London, Tisza, Landau, Feynman... et de discuter le lien entre condensation de Bose-Einstein et superfluidité. Après ces considérations qualitatives, on discutera en détails la théorie du transport d'un condensat gazeux dans le cadre de l'approximation de champ moyen (équation de Gross-Pitaevskii) à une dimension.

2.1 Histoire et phénoménologie de la superfluidité

On ne connaît pas complètement une science tant qu'on en sait pas son histoire.

Auguste Comte.

L'histoire de la superfluidité est loin d'être ennuyeuse pour de nombreuses raisons. Tout d'abord sur le plan scientifique, la compréhension de cette physique (et de sa cousine la supraconductivité) a conduit au développement de nombreux concepts fondamentaux tels que les notions d'excitation élémentaire, de vortex, de fonction d'onde macroscopique, etc ... Mais elle nous apprend également beaucoup sur le plan humain à travers le comportement de certains scientifiques vis-à-vis de leurs collègues. Au coeur de cet aspect se trouvent, par exemples, les comportements étranges de Landau, London et Tisza, au sujet du modèle à deux fluides et du lien entre superfluidité et condensation de Bose-Einstein.

L'essentiel de ce qui suit est largement inspiré des ouvrages suivants. Le livre de Nozières et Pines [142], en particulier les chapitres I et VI ainsi que celui de Pitaevskii et Stringari [172]. Les articles de Balibar [24] et Pitaevskii [156], ainsi que le livre de

Matricon et Waysand "La guerre du froid" [130], en particulier en ce qui concerne les aspects historiques et humains.

2.1.1 Découverte expérimentale dans l'hélium liquide

L'hélium liquide tient une place fondamentale dans l'histoire de la superfluidité dans la mesure où il a eu le monopole de cette physique pendant près de soixante ans. En effet, l'hélium étant le seul corps à pouvoir rester liquide à des températures extrêmement basses (à pression standard, il est liquide même au zéro absolu) à cause de fluctuations quantiques très importantes,¹ il restera le seul² *liquide quantique*³ bosonique simple jusqu'à la fabrication des premiers condensats gazeux en 1995 [54, 12]. Liquéfié pour la première fois en 1911 dans le groupe de Kammerligh Onnes à Leiden, il fut d'ailleurs (et est toujours) utilisé comme outil de choix pour la cryogénie et l'étude des métaux à basse température (< 5.2 K qui est sa température de liquéfaction) conduisant Kammerlingh Onnes (ou plutôt son étudiant Gilles Holst⁴) à la découverte de la supraconductivité en 1911. Notons d'ailleurs que, dès cette époque, on avait déjà des indications du comportement superfluide via l'observation que l'hélium semblait plutôt s'étendre que se contracter aux très basses températures (< 2.2 K).

En 1924, Kammerligh Onnes et Boks observent que la courbe de densité en fonction de la température possède un maximum étroit autour de 2.19 K. La nature de cette transition fut clarifiée huit ans plus tard (1932) par les mesures de capacité calorifique par Keesom et Clausius et baptisée *transition λ* (voir figure 2.1). L'hélium liquide semble donc avoir deux phases thermodynamiques : l'He I et l'He II (< 2.19 K).

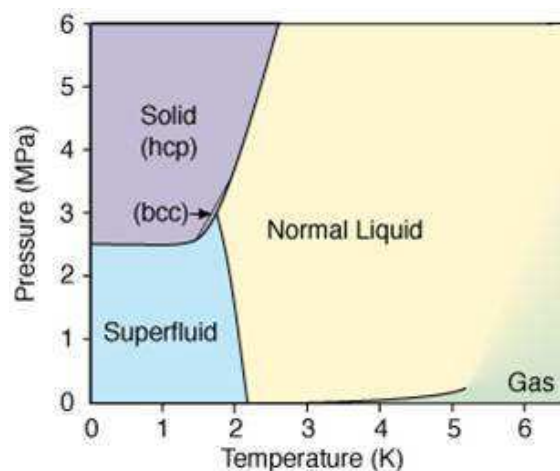


FIG. 2.1 – Diagramme de phase de l'hélium en fonction de la pression et de la température.

Une première propriété étrange est découverte en 1936 par Keesom père et fille [96] : la conductivité thermique de l'He II est anormalement grande par rapport aux liquides traditionnels. Un peu plus tard, Allen et Peierls observent que la chaleur ne se propage pas de manière diffusive dans l'He II. Tout ceci montre que l'He, en dessous du point λ ,

¹La masse d'un atome d'He est suffisamment faible pour que son énergie de point zéro soit supérieure à celle de la liaison He-He. L'hélium ne peut donc pas être solide à pression raisonnable.

²D'autres exemples de liquides quantiques sont l'hydrogène polarisé, la matière nucléaire et les liquides d'électrons dans les solides.

³Dans le sens où la mécanique quantique est indispensable pour comprendre ses propriétés.

⁴Kammerlingh Onnes publia les résultats sans mentionner le nom de son étudiant obtenant ainsi le prix Nobel de physique en 1913. Gilles Holst quant à lui, faute de reconnaissance académique, trouva le réconfort dans le monde industriel en étant le premier directeur de Philips Research.

ne se comporte pas comme un liquide standard. Mais ce n'est qu'en 1937 (publié en 1938) que la superfluidité est réellement découverte indépendamment par Kapitza [95] à Moscou et Allen et Misener [8] à Cambridge (Angleterre). En étudiant le flot à travers un tube capillaire, ils arrivent tous à la même conclusion : la viscosité de l'hélium II est réduite par plusieurs ordres de grandeurs (en fait, elle est nulle aux incertitudes de mesure près). Autrement dit, le liquide peut s'écouler sans la moindre résistance tout comme dans un supraconducteur. C'est ainsi que Kapitza introduit pour la première fois le terme superfluide : "by analogy with superconductors, ..., the He below the λ point enters a special state which might be called superfluid". Notons l'intuition extraordinaire de Kapitza bien avant la théorie BCS (1955) de la supraconductivité ni même la proposition de Fritz London d'associer la condensation de Bose-Einstein et la superfluidité.

Enfin, quelques mois plus tard, Allen et Jones découvrent l'effet fontaine [7].

2.1.2 Premières théories

Face à l'avènement de ces incroyables nouveaux phénomènes, il est stupéfiant de voir à quel point les théoriciens de l'époque ont été réactifs. Parmi eux figurent Fritz London, Laslo Tisza, et le célèbre Lev Landau, fraîchement libéré de prison pour l'occasion⁵.

En 1938, Fritz London publie un article fondamental [122] où il suggère une connexion entre la condensation de Bose-Einstein et la transition superfluide dans l'hélium liquide. Il s'appuie en particulier sur le fait que les atomes d'⁴He sont des bosons dans un régime fortement quantique. Il compare alors la température critique de condensation (sans interaction) $T_B = 3.13K$ à celle de la transition λ , $T_\lambda = 2.19K$. Bien sûr, la physique est altérée par les interactions fortes entre les atomes mais l'ordre de grandeur est correct. Il propose alors d'expliquer la superfluidité comme l'existence d'un courant quantique macroscopique associé au mouvement collectif des atomes du condensat. *"our understanding of a great number of the most striking peculiarities in liquid helium can be achieved without entering into any discussion of details of molecular mechanics, merely on the hypothesis that some of the general features of the degenerate ideal Bose-Einstein gas remain intact, at least qualitatively, for this liquid"*.

London, alors au collège de France à cette époque, aimait discuter en se promenant avec son collègue Russe Laslo Tisza qui travaillait à l'institut Henri Poincaré quelques rues plus loin. C'est ainsi que naquit le *modèle à deux fluides* décrivant l'hélium II comme le mélange d'un condensat et d'un liquide normal. Le liquide se compose donc de deux fluides ayant chacun un champ de vitesse et une densité propre. La vitesse et la densité du condensat sont associées à celles du superfluide v_s et ρ_s qui n'a ni viscosité ni entropie. La partie normale est quant à elle constituée d'excitations thermiques et a pour vitesse v_n et densité ρ_n . Elle a d'autre part une viscosité et une entropie non nulle. La densité totale est bien sûr $\rho = \rho_s + \rho_n$. Le rapport des différentes densités dépend alors de la température et satisfait $\rho_s(T = 0)/\rho = 1$ et $\rho_s(T = T_\lambda)/\rho = 0$.

Ce modèle phénoménologique est un succès dans la mesure où il permet d'expliquer, au moins qualitativement, les phénomènes déjà observés, mais permet également de faire des prédictions supplémentaires. Un exemple est l'existence d'ondes de température (second son). En effet, dans le cadre de ce modèle, une onde sonore correspond à une oscillation en phase de ρ_s et ρ_n (et donc une oscillation de la densité totale ρ) mais on peut imaginer un autre type d'onde où les oscillations seraient en opposition de phase. Dans

⁵Emprisonné en mars 1938 par le NKVD (KGB) pour avoir critiqué le régime Soviétique, il est libéré (mourant) en avril 1939 grâce à l'intervention de Kapitza pour travailler sur la superfluidité. Plus tard Landau aimait ironiser sur son séjour en prison en disant que ça lui avait permis d'apprendre à réaliser des calculs complexes de tête. Si les applications concrètes de la superfluidité ne sont pas très claires, Lev Pitaevskii se plaît à répondre qu'elle aura au moins permis de sauver la vie d'un des plus grands physiciens de tous les temps.

ce cas, la densité totale ρ reste constante mais l'entropie oscille, d'où l'existence d'onde de température. Ce phénomène intrigant a par ailleurs été prédit indépendamment par Landau [104] qui a également développé sa version du modèle à deux fluides, vérifiée expérimentalement en 1944 par Peshkov.

L'histoire de la paternité du modèle à deux fluides n'est pas une mince affaire et l'on renvoie le lecteur à l'article de Balibar [24] pour plus de précisions. Il semble a priori que London et Tisza [182, 181] étaient les premiers à le proposer (l'article de Landau [104] date de 1941 mais c'était la guerre à l'époque) mais l'apport de Landau n'est pas pour autant mineur. Dans sa version du modèle à deux fluides, Landau ne donne pas les mêmes interprétations aux différentes composantes. Tout d'abord, Landau ne croyait pas au lien entre condensation de Bose-Einstein et superfluidité. Une explication rationnelle à cela semble s'appuyer sur l'analogie proposée par Kapitza entre la supraconductivité et la superfluidité. En effet, puisqu'un phénomène similaire semblait se produire pour des fermions (on ne savait pas que les électrons formaient des paires de Cooper à l'époque) et des bosons, Landau ne voyait pas en quoi l'effet de la statistique quantique pouvait être déterminant⁶. Ainsi, Landau considère le superfluide comme l'état fondamental du liquide quantique (en interaction et qu'il soit bosonique ou fermionique) et la partie normale comme un gaz d'excitations élémentaires (quasi-particules)⁷. Il propose alors une forme particulière pour le spectre des excitations élémentaires de l'hélium [104, 105] (fig 2.2) dont il a ajusté les paramètres à partir de données expérimentales sur la chaleur spécifique. De ce point de vu, la théorie de Landau va plus loin, dans le sens où elle permet une détermination explicite des fractions superfluides et normales.

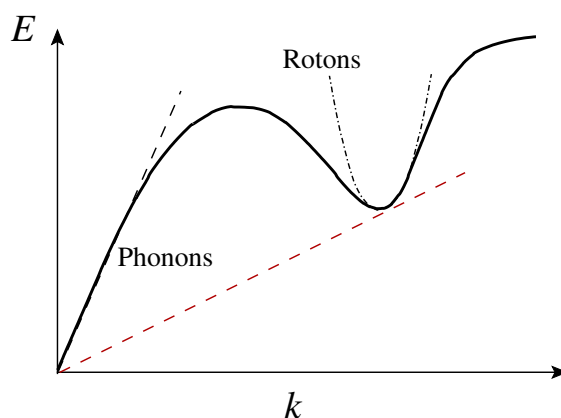


FIG. 2.2 – Spectre des excitations élémentaires dans l'hélium liquide proposé par Landau. Ce spectre se compose d'une branche de phonons à basse énergie et de rotons autour d'une longueur d'onde proche de la distance inter-particule. L'interprétation physique des rotons reste un objet de controverse. Selon Landau et Feynman ils correspondraient à des vortex élémentaires de taille proche de la distance interatomique tandis que d'autres pensent qu'ils n'ont rien à voir avec des vortex mais correspondent plutôt à des réminiscences de l'ordre cristallin [24, 142].

Un autre point extrêmement important, introduit par Landau, est la notion de vitesse critique. Cette notion, déjà vaguement abordée au cours du premier chapitre, s'appuie sur l'idée que, dans un gaz de Bose parfait, rien n'empêche la dissipation d'énergie à travers

⁶Un test important en faveur de l'hypothèse de London sera la comparaison expérimentale entre ^4He et ^3He par Osborne, Weinstock et Abraham en 1949 qui montre que le dernier n'est pas superfluide à 1K (plus tard on découvrira sa superfluidité en dessous de 2.5mK à cause de la formation de paires de Cooper).

⁷Notons que c'est à cette époque que le concept d'excitation élémentaire et de quasi-particule fut introduit pour la première fois par Landau.

l'excitation de particules individuelles. À l'aide du spectre précédemment introduit pour l'hélium liquide, Landau a été capable de prédire l'existence d'une vitesse critique en dessous de laquelle aucune excitation élémentaire ne peut être émise. On reviendra un peu plus en détail sur ce point dans les paragraphes suivants.

Sur le plan humain, la genèse de ces modèles est marquée par un des comportements relativement étranges entre les concurrents. D'un côté, Landau ignore totalement l'existence de Fritz London sur le plan théorique et attribue la découverte expérimentale de la superfluidité exclusivement à son sauveur Kapitza. Il est même relativement agressif quant aux propositions de Tisza qui fut pourtant son postdoc avant de rejoindre l'Institut Henry Poincaré et de collaborer avec London "*The explanation advanced by Tisza not only has no foundation in his suggestions but is in direct contradiction to them*". De son côté, Fritz London n'épargnait pas non plus Landau de critiques "*an interesting attempt to quantize hydrodynamics... based on the shaky grounds of imaginary rotons*"⁸. Et pourtant, ils avaient chacun découvert une partie de la vérité mais sont morts trop tôt pour le réaliser et enfin assembler les pièces du puzzle.

En 1947, N. Bogoliubov [35] apporte une contribution importante à la théorie de la superfluidité en justifiant rigoureusement l'allure qualitative du spectre introduit par Landau dans le cas d'un gaz de bosons en interactions faibles (voir chapitre 1). Seulement, l'hypothèse d'une occupation macroscopique d'un état quantique joue un rôle important pour l'existence d'une branche phonon à basse énergie. Ce travail, d'une portée très importante, puisqu'il met en évidence à la fois la nécessité de la condensation de Bose-Einstein et de la présence d'interactions pour la superfluidité, n'est pourtant pas encore satisfaisant puisqu'il n'est valable que dans le régime d'interactions faibles et donc pas pour l'hélium liquide. Il trouvera alors toute sa reconnaissance après la découverte expérimentale des condensats gazeux.

Notons d'ailleurs que, la notion de condensation de Bose-Einstein en présence d'interactions n'a été éclaircie⁹ qu'en 1951 par Penrose [149] et 1956 par Penrose et Onsager [150]. En effet, dans ce cas, il n'est pas évident d'identifier l'état macroscopiquement peuplé. Penrose et Onsager ont alors introduit le concept d'ordre à longue distance dans les éléments de matrices non diagonaux de la matrice densité à un corps $\rho_1(\vec{r}) = \langle \hat{\Psi}^\dagger(\vec{0}, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \hat{\Psi}(\vec{r}, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \rangle$, définissant ainsi la fraction condensée par : $\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho_1(r) = n_0$.

Beaucoup d'efforts ont été faits par la suite afin de décrire quantitativement la physique de l'hélium liquide, en particulier les travaux de R. P. Feynman mais ceci dépasse le cadre de ce manuscrit et on renvoie le lecteur à des ouvrages spécialisés comme celui de Nozières et Pines [142] par exemple.

Avant de fermer cette introduction historique et phénoménologique à la superfluidité dans l'hélium liquide, il nous reste à discuter d'une dernière propriété remarquable, à savoir le caractère irrotationnel d'un superfluide. En effet, une manifestation de la superfluidité est le fait que le liquide puisse ne pas être entraîné par le récipient qui le contient si la vitesse de rotation de celui-ci reste suffisamment faible. Au contraire, au-delà d'une certaine vitesse, le fluide commence à être entraîné, mais d'une manière absolument non triviale. À la place d'adopter un champ de vitesse usuel (pour un fluide visqueux), celui-ci se concentre sur des filaments étroits appelés vortex, dont le nombre augmente par paliers en fonction de la vitesse de rotation [115]. Ce n'est que lorsque la densité de vortex devient très grande que le fluide retrouve, en moyenne, un comportement normal. Nous allons voir par la suite que ce phénomène s'explique naturellement si l'on postule l'existence

⁸Le comble de cette histoire et qu'après la mort de Fritz London en 1954, un prix portant son nom a été créé et Landau fut l'un des premiers à le recevoir pour ses recherches sur la superfluidité.

⁹Aucune preuve mathématique du phénomène de condensation de Bose-Einstein en présence d'interaction n'a été donnée à ce jour.

d'une fonction d'onde macroscopique, comme remarqué par Feynman dans les années 50 [65].

2.1.3 Connexion superfluide-condensat

L'aspect fondamental de la condensation de Bose-Einstein est l'occupation macroscopique d'un état quantique, et ceci quel que soit l'état en question. Sans interaction, et au repos, on a vu qu'il s'agissait de l'état fondamental du piège ou dans le cas libre l'état d'impulsion $\vec{p} = \vec{0}$. En présence d'interactions, ce mode est donné par l'état propre de la matrice densité à un corps correspondant à une valeur propre macroscopique [150].

En toute généralité, la fonction d'onde du condensat $\phi(\vec{r}, t)$, également appelée paramètre d'ordre dans la mesure où elle correspond à un ordre de phase (phase de la fonction d'onde), peut présenter des fluctuations de densité mais aussi transporter un courant macroscopique, dit supercourant, qui constitue en fait un nouveau degré de liberté du système. La superfluidité apparaît alors comme un phénomène quantique collectif dans le sens où toutes les particules se déplacent pour conserver l'occupation macroscopique d'un état.

Une fois ce courant établi, toujours faut-il qu'il soit stable. Si on imagine, par exemple, qu'un superfluide s'écoule dans un tube parfait, il y a essentiellement deux moyens d'altérer ce courant via l'interaction avec les parois. Tout d'abord cette interaction peut modifier la fonction d'onde du condensat mais celle-ci étant macroscopiquement peuplée, ce processus est hautement improbable. L'autre possibilité consiste à dissiper l'énergie du supercourant via l'émission d'excitations élémentaires. On verra plus loin que ceci n'est possible qu'au dessus d'une vitesse critique, à cause de la présence d'interactions entre les particules.

Sous ces conditions, le système se trouve dans un état d'écoulement métastable de viscosité nulle. L'état est métastable dans le sens où il existe toujours un état d'énergie inférieure, comme l'état statique par exemple, mais la transition vers un tel état est inhibée par son occupation macroscopique ainsi que les interactions entre particules. C'est en ce sens que la superfluidité apparaît comme une conséquence directe de la condensation de Bose-Einstein (occupation macroscopique d'un état et cohérence de phase) et des interactions (critère de Landau).

Le lien entre les deux phénomènes est très subtil, c'est pourquoi, on se contente ici de donner quelques arguments qualitatifs pour illustrer l'importance d'une fonction d'onde macroscopique dans la superfluidité. Le lecteur curieux pourra consulter les références [142, 107, 172, 14, 87] par exemple.

Supposons que le fluide quantique soit décrit par un opérateur champ $\hat{\Psi}(\vec{r})$. L'existence d'un condensat se traduit par l'équation suivante

$$\langle \hat{\Psi}(\vec{r}) \rangle = \phi(\vec{r}), \quad (2.1)$$

où $\phi(\vec{r}) = \sqrt{n_0(\vec{r})} e^{iS(\vec{r})}$ est la fonction d'onde du condensat. L'occupation macroscopique d'un tel état est équivalente au fait que la valeur moyenne de l'opérateur champ (opérateur destruction) soit non nulle. Ceci signifie que le nombre de particules n'est pas déterminé. La phase de $\hat{\Psi}$ et le nombre de particules étant des variables conjuguées, cela entraîne un blocage de la phase globale du système [14, 87]. Cette phase, correspondant à la phase $S(\vec{r})$ du paramètre d'ordre $\phi(\vec{r})$, sera d'autant mieux déterminée que le condensat est peuplé.

Dans le cas d'une translation uniforme d'impulsion \vec{p} , la fonction d'onde du condensat peut être déterminée par une transformation de Galilée [172, 142]

$$\phi(\vec{r}) = \sqrt{n_0(\vec{r})} e^{iS(\vec{r})} = e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar} \phi_0(\vec{r}), \quad (2.2)$$

où ϕ_0 désigne la fonction d'onde du condensat dans son référentiel propre et n'est alors qu'une simple constante de normalisation. La vitesse du condensat est alors donnée par

$$\vec{v}_s = \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} S(\vec{r}). \quad (2.3)$$

Celle-ci est reliée au gradient de la phase du paramètre d'ordre et peut être identifiée à la vitesse du superfluide.

Notons cependant que même si la vitesse du condensat est égale à la vitesse du superfluide du liquide et si la fraction superfluide apparaît à la même température que la fraction condensée, les deux fractions ne sont pas directement identifiables. Le superfluide a besoin du condensat pour exister mais le superfluide n'est pas le condensat (sauf dans le cas d'un condensat contenant toutes les particules, bien entendu). Par exemple, l'hélium à température nulle ne possède qu'une fraction condensée de l'ordre de 10% alors que la fraction superfluide est totale. Les deux quantités ne sont d'ailleurs pas définies de la même façon. L'une correspond à la plus grande valeur propre de la matrice densité, tandis que l'autre est définie par le modèle à deux fluides comme la fraction massique apparaissant devant la vitesse superfluide.

Dans le cas d'un mouvement plus général, la transformation de Galilée ne permet d'obtenir qu'un état approché car elle néglige les corrélations entre le mouvement du superfluide et les fluctuations de densité. Dans ce cas, les propriétés du fluide ne sont plus entièrement déterminées par ses propriétés au repos et l'état superfluide exacte est en général impossible à déterminer exactement (même dans le cas d'un condensat gazeux). On reviendra sur ce point lors de la discussion de la vitesse critique du superfluide.

2.1.4 Caractère irrotationnel du flot et quantification de la circulation

Et pourtant elle tourne ! Galiléo Galilée.

La forme (2.3) du champ de vitesse du superfluide implique

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v}_s = \vec{0}, \quad (2.4)$$

ce qui signifie que le fluide est irrotationnel, comme mentionné précédemment. Cette propriété est une conséquence directe de la cohérence de phase ou encore de l'occupation macroscopique d'un état quantique. Notons par ailleurs qu'il s'agit d'une propriété du champ des vitesses et non pas de la densité du liquide (qui contient la majeure partie des effets d'interactions). En particulier, la fraction condensée n'apparaît pas dans cette relation c'est pourquoi la fraction superfluide peut être plus grande que la fraction condensée.

D'autre part la circulation \mathcal{C} de \vec{v}_s sur un contour fermé Γ

$$\mathcal{C} = \oint_{\Gamma} \vec{v}_s \cdot d\vec{l} \quad (2.5)$$

est quantifiée. L'origine de cette quantification est reliée au fait que la fonction d'onde macroscopique doit être mono-valuée.

Pour simplifier, examinons d'abord le cas unidimensionnel d'un système de taille L refermé sur lui même. L'invariance par translation de L implique que le vecteur d'onde soit quantifié

$$q = \frac{2\pi}{L} n, \quad (2.6)$$

où n est un entier relatif. Le courant porté par le condensat

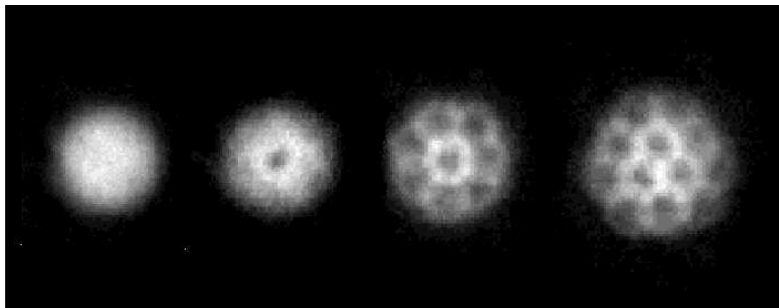


FIG. 2.3 – Observation expérimentale [128] de vortex dans un condensat de Bose-Einstein gazeux pour différentes vitesses de rotations.

$$J_s = \frac{N\hbar q}{m} \quad (2.7)$$

est alors quantifié en unités de Nh/mL qui est une échelle macroscopique. Une telle quantification macroscopique est bien sûr due à l'occupation macroscopique du condensat. Pour en revenir à la circulation, on a ici $v_s = J_s/N$ et celle-ci est simplement donnée par

$$\mathcal{C} = v_s L = n \frac{h}{m}, \quad (2.8)$$

ce qui prouve la quantification de la circulation dans ce cas précis.

De manière plus générale, on a

$$\mathcal{C} = \frac{\hbar}{m} \oint_{\Gamma} \vec{\nabla} S \cdot d\vec{l}, \quad (2.9)$$

et $m\mathcal{C}/m$ est alors égal au changement de phase de la fonction d'onde le long du chemin. La fonction d'onde devant être mono-valuée, ceci implique que cette quantité soit un multiple de 2π et finalement que la circulation soit quantifiée en unités de h/m .

Ces deux propriétés sont des caractéristiques fondamentales d'un superfluide dans le sens où elles rendent ses propriétés de rotation absolument non triviales. Le superfluide ne tourne pas de façon traditionnelle : sa circulation ne peut augmenter que par paliers et celle-ci est portée par des défauts de phase très concentrés dans l'espace que l'on nomme vortex. Pour plus de détails sur ces propriétés, le lecteur pourra consulter la revue de Leggett [115] par exemple.

2.1.5 Vitesse critique

I'm gonna make him an offer he won't refuse. Marlon Brando as Don Corleone,
The Godfather.

L'analyse précédente postule la stabilité du flot vis-à-vis de l'émission d'excitations élémentaires. Cet aspect, déjà brièvement discuté dans le chapitre 1, est en fait relié à la nature du spectre des excitations. Initialement proposé par Landau [104] en 1941, le concept de vitesse critique est un point fondamental de la superfluidité qui reste, à mon avis, encore quantitativement mal compris.

Considérons un liquide bosonique en translation uniforme dans un tube à la vitesse v_s . Le champ de vitesse de ce superfluide est alors homogène, contrairement au cas d'un liquide normal où il est maximum au centre et s'annule sur les bords à cause des forces de friction. Il est clair qu'une interaction avec les parois ne peut changer directement l'impulsion de ce fluide dans la mesure où cela demanderait de changer l'état d'un nombre

macroscopique de particules. Un processus bien plus probable consiste alors en un transfert d'énergie via la création d'excitations élémentaires. La question pertinente est alors de savoir s'il est préférable ou non au système d'émettre de telles excitations. L'idée de Landau est d'analyser le spectre de ces excitations en fonction de la vitesse du fluide et de voir si l'apparition d'une telle excitation peut diminuer ou non l'énergie du système. Or, nous connaissons a priori ce spectre dans le référentiel où le fluide est immobile. Puisque nous avons affaire à une translation uniforme, il s'agit alors d'appliquer une transformation de Galilée. Nous verrons par ailleurs que cette approche n'a de sens qu'en présence d'un fluide parfaitement uniforme, c'est pourquoi (en partie) le critère de Landau, sous cette forme simplifiée, n'est plus quantitativement correct dans le cas le plus général où un potentiel extérieur agit sur le fluide¹⁰. Si on note \vec{p}_i l'impulsion de chaque particule et $V(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ leurs interactions binaires, le hamiltonien, dans le référentiel du tube, s'écrit :

$$\begin{aligned} H &= \sum_i \frac{(\vec{p}_i + m\vec{v}_s)^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \\ &= \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \vec{p} \cdot \vec{v}_s + \frac{Nm v_s^2}{2}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

avec $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$ l'impulsion totale du fluide dans le référentiel du liquide ($= \vec{0}$ si le fluide est dans l'état fondamental).

Supposons maintenant qu'une seule quasi-particule, transportant l'impulsion \vec{p} et l'énergie $\varepsilon(p)$ ($\varepsilon(p)$ est le spectre d'excitation du fluide dans son référentiel), soit créée au sein du fluide. L'énergie vue dans le référentiel du tube est alors

$$E_0 + \varepsilon(p) + \vec{p} \cdot \vec{v}_s + \frac{Nm v_s^2}{2}, \quad (2.11)$$

où E_0 est l'énergie de l'état fondamental dans le référentiel du fluide. Ainsi, dans le référentiel du tube, l'énergie de l'excitation subit un décalage Doppler et s'écrit :

$$\varepsilon(p) + \vec{p} \cdot \vec{v}_s. \quad (2.12)$$

Ce processus est alors favorable au système si

$$\varepsilon(\vec{p}) + \vec{p} \cdot \vec{v}_s < 0, \quad (2.13)$$

pour au moins une valeur de \vec{p} . Cette instabilité énergétique introduit ainsi la notion de vitesse critique v_c qui est elle-même reliée à la forme du spectre des excitations. Celle-ci est donnée par

$$v_c = \min_p \frac{\varepsilon(p)}{p}, \quad (2.14)$$

qui est le fameux critère de Landau pour la superfluidité.

Ainsi, en dessous de cette vitesse critique, le fluide ne peut dissiper d'énergie et ne présente donc aucune viscosité.

Notons enfin que, selon ce critère, un gaz de bosons libres ne peut être superfluide à vitesse non nulle, alors que l'hélium liquide, ou encore un gaz de bosons en interactions faibles, possède une vitesse critique non nulle (donnée par le minimum roton dans le cas de l'hélium et la vitesse du son dans le cas du gaz dilué de bosons). C'est également

¹⁰C'est en ce sens que l'on dit souvent que le critère de Landau est perturbatif car il néglige les corrélations entre le mouvement du superfluide et les interactions entre particules.

une des raisons pour laquelle Landau pensait qu'il était impossible de décrire l'hélium superfluide avec comme point de départ un gaz de bosons sans interaction.

L'existence d'une vitesse critique a été observée à plusieurs reprises dans l'hélium liquide [153, 196] et les condensats alcalins [45, 161, 62, 128]. Par exemple, McClintock *et al* [153] ont observé l'émission de rotons par paires en déplaçant un électron au sein de l'hélium liquide en 1974. Cependant, la plupart des expériences montrent que cette vitesse critique est en général bien plus faible que celle prédite par le critère de Landau (2.14), notamment dû à l'émission de vortex (ou de solitons en dimension un) mais également car le critère de Landau, tel qu'il a été formulé précédemment, n'est que perturbatif. Il n'est donc valable que dans une situation où le fluide n'est que très peu affecté par l'environnement, comme dans le cas de l'expérience de McClintock *et al* [153]. Dans les autres cas, postuler que l'état du fluide peut être entièrement déterminé par une transformation de Galilée est une grossière erreur. Cependant l'approche conceptuelle, à savoir l'instabilité énergétique, reste correcte mais très difficile à mettre en oeuvre dans un cadre général. On reviendra en détails sur ce point par la suite dans le contexte des condensats gazeux à une dimension.

2.2 Propriétés de transport d'un condensat à une dimension

Dans cette partie, on s'intéresse à la physique d'un condensat en mouvement dans un guide unidimensionnel. On va en particulier discuter les différents régimes de transport possibles selon la vitesse du fluide, l'intensité du potentiel extérieur, etc ...

Dans tout ce qui suit, on considère un système quasi-unidimensionnel, au sens du chapitre 1, de longueur infinie. En réalité, un condensat unidimensionnel de longueur infinie ne peut pas exister mais en pratique la longueur de cohérence de phase excède la taille du système, c'est pourquoi l'étude de ce genre de système garde tout de même un sens (Annexe A).

La dynamique d'un tel système est décrite par les équations (1.66) et (1.67).

Commençons par étudier une classe de solutions bien particulières, à savoir celles où le flot est stationnaire. Dans ce cas la fonction d'onde admet la décomposition suivante

$$\psi(x, t) = e^{-i\mu t/\hbar} A(x) e^{iS(x)}, \quad (2.15)$$

où A et S sont des fonctions réelles et μ est le potentiel chimique du condensat. La densité est notée $n = A^2$, la vitesse $v = \hbar S'(x)/m$ et le flux $\Phi = n(x)v(x)$. En injectant cet ansatz dans (1.67) on obtient un nouveau jeu d'équations

$$\mu A(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} A''(x) + \left[V(x) + \epsilon(n) + \frac{\Phi^2}{2n^2} \right] A(x), \quad (2.16)$$

$$\Phi = n(x)v(x) = cte. \quad (2.17)$$

2.2.1 Cas libre stationnaire

Si $V(x) = 0$, on va voir qu'il existe déjà plusieurs solutions pour un flux stationnaire. Dans ce cas, l'équation (2.16) peut être intégrée une fois et donne

$$\frac{\hbar^2}{2m} A'^2 + W(n) = E_{cl}, \quad (2.18)$$

où E_{cl} est une constante d'intégration à déterminer en fonction des conditions aux limites et

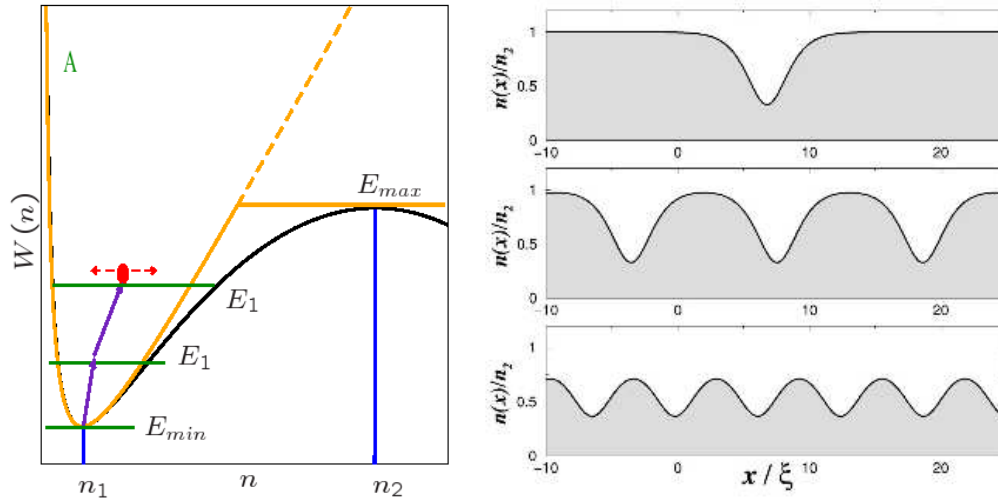


FIG. 2.4 – **À gauche** : potentiel effectif $W(n)$: la courbe noire correspond au cas en présence d'interactions, alors que la courbe orange (qui continue en pointillés) est celle sans interaction. Les points n_1 et n_2 correspondent aux deux solutions uniformes. **À droite** : solutions oscillantes avec interactions. La plus haute est un soliton gris et correspond à une énergie E_{cl} de la particule fictive égale à E_{max} . La plus basse correspond à une énergie classique très proche de E_{min} , de sorte que les oscillations sont quasi-sinusoidales. Le cas intermédiaire est le cas générique où les oscillations sont hautement non linéaires.

$$W(n) = -\varepsilon(n) + \mu n + \frac{\Phi^2}{2n}, \quad (2.19)$$

avec

$$\varepsilon(n) = \int_0^n d\rho \varepsilon(\rho). \quad (2.20)$$

L'équation (2.18) est analogue à l'équation de conservation de l'énergie d'une particule fictive qui aurait comme position A au temps x et qui évoluerait dans le potentiel $W(n)$. L'allure typique de ce potentiel, dictée par le flux et l'intensité des interactions, est présentée sur la figure 2.4.

À ce stade, il est important de noter l'effet des interactions sur la dynamique du condensat. Sans même faire de calculs, en utilisant cette analogie avec une particule fictive, il est clair qu'en l'absence d'interaction (équation de Schrödinger standard), il n'existe qu'une seule solution stationnaire uniforme. Celle-ci correspond à un faisceau incident de vecteur d'onde bien défini, ou encore à une particule fictive qui stagne au fond du potentiel $W(n)$ (qui est un minimum absolu). Cette solution s'écrit

$$\psi(x, t) = \sqrt{n_1} e^{-i\mu t / \hbar \pm ikx}, \quad (2.21)$$

avec $k = mv/\hbar$ et $\mu = \hbar^2 k^2 / 2m$.

Une solution correspondant à une particule fictive oscillant dans le potentiel $W(n)$ est quant à elle une superposition linéaire de deux faisceaux indépendants.

Par contre, en présence d'interactions, $W(n)$ possède un autre extrema local pour $n = n_2$ (voir figure 2.4). Il est alors possible d'avoir une seconde solution uniforme qui correspond en fait à la solution superfluide. On peut en effet évaluer les vitesses de ces deux solutions et les comparer à la vitesse du son qui, en présence d'interactions, est non nulle. Compte tenu de la définition de la vitesse du son (1.91) il est facile de montrer que

$$\frac{d^2W(n)}{dn^2} = [v^2 - c^2]/n. \quad (2.22)$$

et comme $d^2W(n)/dn^2$ en n_1 (n_2) est positive (négative), alors $v_1 > c(n_1)$ ($v_2 < c(n_2)$).

Ces deux solutions sont aussi des ondes planes mais cette fois le potentiel chimique est augmenté par l'énergie d'interaction :

$$\mu_i = \epsilon(n_i) + \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m}. \quad (2.23)$$

En ce qui concerne les solutions où la particule fictive oscille autour de n_1 , la zoologie est plus complexe. D'une part, elles ne sont plus des superpositions linéaires de solutions élémentaires car la non-linéarité de (2.16) détruit le principe de superposition, et d'autre part il existe désormais une séparatrice. Cela veut dire qu'il ne peut exister de solution stationnaire pour $E_{cl} > E_{max} = W(n_2)$ (autrement la densité serait infinie) mais aussi qu'il peut exister des solutions avec un nombre fini d'oscillations car une particule fictive d'énergie $E_{cl} \simeq E_{max}$ met un temps infini pour atteindre le sommet. Ces solutions sont des *trains de solitons*. La plus simple d'entre elle correspond à une seule oscillation de la particule fictive : c'est un *soliton gris*. Plusieurs de ces solutions sont représentées sur la figure 2.4.

Pour des oscillations de faibles amplitudes autour de n_1 , on peut décrire approximativement les solutions par un cosinus de la forme

$$A(x) = \sqrt{n_1} + \frac{1}{\sqrt{2\kappa}} (E_{cl} - W(n_1))^{1/2} \cos(2\kappa x + \theta), \quad (2.24)$$

où

$$\kappa = \frac{m}{\hbar} \sqrt{v^2 - c^2}, \quad (2.25)$$

est un vecteur d'onde effective que l'on utilisera beaucoup par la suite. Pour les autres, avec $E_{min} < E < E_{max}$, elles sont données par l'équation implicite suivante :

$$x - x_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \int_{A(x_0)}^{A(x)} \frac{dA}{\sqrt{E_{cl} - W(A^2)}}. \quad (2.26)$$

Relation de dispersion et condition de radiation

On s'intéresse ici à la relation de dispersion des excitations du condensat. Pour ce faire, on utilise encore la méthode de Bogoliubov mais cette fois-ci avec un condensat en mouvement. Ce problème peut être traité facilement en se plaçant dans le référentiel où le condensat est immobile puis en appliquant le décalage Doppler. On pose alors :

$$\psi(x, t) = e^{-i\mu t} A(x - ut) e^{iS(x-ut)}, \quad (2.27)$$

et donc $\Phi \rightarrow n(v - u)$ et $\mu \rightarrow \mu + u^2/2$. Ainsi, pour annuler la vitesse du condensat, il faut choisir u tel que $u + \Phi/n = 0$.

Le traitement perturbatif de (2.16), dans le référentiel où $v = 0$, conduit au spectre suivant

$$\omega_k^2 = k^2 \left(\frac{\hbar^2 k^2}{4m^2} + c^2(n) \right), \quad (2.28)$$

et donc dans le référentiel immobile :

$$\omega_k = kv \pm \sqrt{k^2 \left(\frac{\hbar^2 k^2}{4m^2} + c^2(n) \right)}. \quad (2.29)$$

Dans le référentiel mobile, les vitesses de phases et de groupes sont respectivement

$$v_p(k) = \frac{\omega_k}{k} = \frac{\hbar^2 k^2}{4m^2} + c^2(n), \quad (2.30)$$

et

$$v_g(k) = \frac{\partial \omega_k}{\partial k} = v_p(k) \left(1 + \frac{k^2}{k^2 + 4m^2 c^2(n)/\hbar^2} \right). \quad (2.31)$$

On a donc toujours $v_g(k) > v_p(k)$. Ceci est très important pour définir les conditions aux limites pour un problème de diffusion. En effet, si on cherche désormais à résoudre le problème de diffusion d'un condensat à travers un potentiel diffuseur de taille finie, il s'agit de raccorder deux solutions asymptotiques libres de paramètres E_{cl} différents. Seulement, pour qu'une solution soit stationnaire, il faut que la vitesse de phase v_g coïncide avec la vitesse relative entre l'obstacle et le condensat. Cela dit, l'énergie transférée se propage à la vitesse v_g qui est supérieure à v_p . Par conséquent, la condition de radiation impose que le sillage soit situé en avant de l'obstacle, c'est à dire en amont de l'écoulement et pas en aval.

2.2.2 Potentiel δ

Avant de discuter des résultats qualitatifs généraux en présence d'un potentiel quelconque, il est utile de s'arrêter sur un modèle simple d'obstacle que l'on peut résoudre analytiquement. Ceci est possible pour seulement quelques cas comme le pic delta, que nous allons considérer dans ce paragraphe, la marche de potentiel, la barrière et le puits carré [112] et la série périodique de pics delta [174].

Considérons donc un potentiel de la forme

$$V(x) = \lambda \delta(x), \quad (2.32)$$

où λ désigne l'amplitude de l'obstacle et peut être positif (répulsif) comme négatif (attractif).

Ce problème se résout en raccordant deux solutions libres avec la condition de raccordement suivante :

$$A'(0^+) - A'(0^-) = 2\lambda A(0). \quad (2.33)$$

Mais cette condition ne peut pas être satisfaite pour tout v et λ en présence d'interactions. Les domaines où des solutions stationnaires existent sont représentés sur la figure 2.5. L'allure du profil de densité y est aussi représenté dans chaque régime.

Les frontières entre les différents régimes peuvent être évaluées analytiquement (dans les cas limites pour $\epsilon(n)$). Dans la partie subsonique attractive, on peut trouver des solutions stationnaires jusqu'à la vitesse du son, ce qui est en accord avec le critère de Landau pour la superfluidité [148]. Par contre, si l'obstacle est répulsif, on ne trouve des solutions stationnaires que si¹¹

$$\lambda \xi \leq K \left(\frac{v}{c} \right) \quad \text{avec} \quad (2.34)$$

$$K(z) = \frac{\sqrt{2}}{4z} \left[-8z^4 - 20z^2 + 1 + (1 + 8z^2)^{3/2} \right]^{1/2}.$$

Dans la région supersonique on ne peut évaluer analytiquement la frontière que dans le régime de champ moyen 1D [112] :

¹¹Notons une différence de facteur $\sqrt{2}$ par rapport à [148] due à une définition différente de ξ .

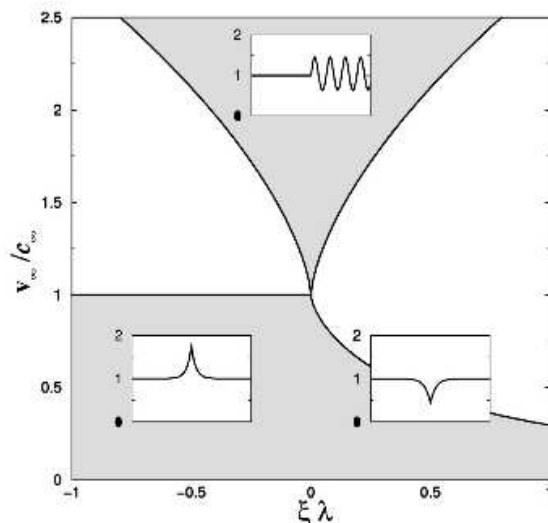


FIG. 2.5 – Diagramme de phase des états stationnaires en présence d’une impureté delta en fonction de la vitesse à l’infini (relative à la vitesse du son) et de l’amplitude de l’impureté (mesurée en terme de la longueur de relaxation ξ). Les régions grises correspondent aux domaines d’existence de solutions stationnaires. Les encadrés représentent le module de la fonction d’onde dans chaque cas. Figure extraite de [148].

$$4\lambda^2\xi^2 \leq F\left(\frac{v}{c}\right), \quad \text{avec} \quad (2.35)$$

$$F(z) = \left[\frac{z^2}{4} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8}{z^2}} \right) \right] \left[\frac{5z^2}{4} + 1 - \frac{3z^2}{4} \sqrt{1 + \frac{8}{z^2}} \right].$$

Notons qu’en l’absence d’interaction, seul le régime ”supersonique” stationnaire existe.

Dans le régime stationnaire subsonique, le flot est superfluide dans le sens où la transmission est parfaite et il n’y a pas de force de traînée [148]. Au contraire, dans le régime supersonique stationnaire, le flot se comporte pratiquement comme un condensat sans interactions car celles-ci deviennent peu à peu négligeables par rapport à l’énergie cinétique de transport. La transmission n’est pas parfaite et le fluide est faiblement dissipatif.

En ce qui concerne le régime dépendant du temps, on ne peut a priori rien dire analytiquement. La figure 2.6 montre l’évolution temporelle de la densité pour une barrière répulsive se déplaçant à une vitesse légèrement supérieure à celle du seuil stationnaire subsonique. On observe dans ce cas l’émission périodique de solitons [82] et d’une onde de choc. Plus on augmente la vitesse et plus la dynamique devient compliquée. En particulier, si $v_\infty > c_\infty$, on commence à observer beaucoup d’interférences et de solitons qui se mélangent.

Une question que l’on peut encore se poser concerne la stabilité des solutions stationnaires. On discutera ceci en détails dans la partie suivante et on se contentera pour l’instant du fait que les simulations numériques n’exhibent aucune instabilité dans les zones grises de la figure 2.5.

2.2.3 Double barrière δ symétrique

Ce problème a été résolu en 1995 par Zapata et Sols [198] dans le contexte de la supraconductivité. En effet, au voisinage de la température critique, le paramètre d’ordre supraconducteur $\psi(\vec{r}) \sim \langle \hat{\psi}_\uparrow \hat{\psi}_\downarrow \rangle$ obéit à l’équation de Ginzburg-Landau

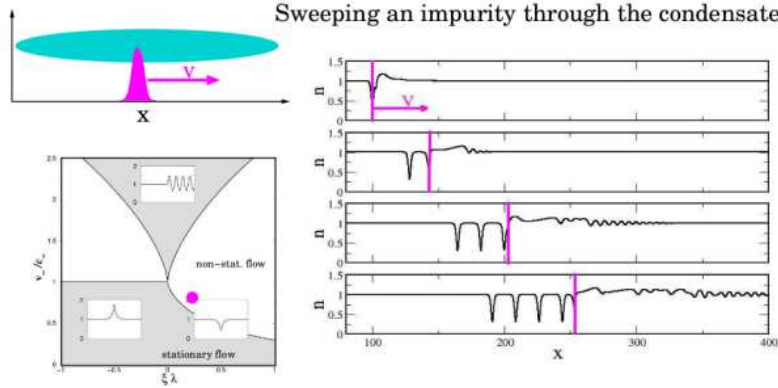


FIG. 2.6 – Résultats de simulations numérique d’une expérience de transport dans le régime dépendant du temps. L’équation de Gross-Pitaeskiï 1D (1.78) est résolue en présence d’une barrière gaussienne répulsive très étroite se déplaçant à vitesse constante au sein du condensat (de taille infinie). Le point rose sur la figure de gauche précise les paramètres utilisés tandis que la série de figures à droite montre l’évolution temporelle de la densité à mesure que l’obstacle se déplace. L’émission d’une onde de choc vers l’avant et l’apparition de solitons, à la traîne par rapport à l’obstacle, peuvent clairement être identifiées sur ces figures.

$$(i\hbar\nabla + e\vec{A})^2\psi - [\mu - V(\vec{r})]\psi + \lambda|\psi|^2\psi = 0, \quad (2.36)$$

où \vec{A} est le potentiel vecteur.

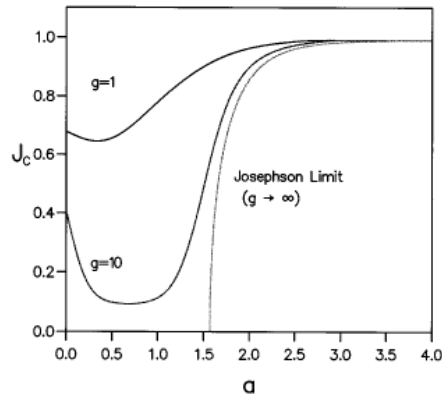


FIG. 2.7 – Courant critique en fonction de la distance entre les deux barrières renormalisé au courant critique en présence d’une seule barrière. On rappelle que g est ici l’amplitude des pics delta. Figure extraite de [198].

Cette équation est formellement équivalente à l’équation de Gross-Pitaevskii. Dans cet article, ils ont cherché les solutions stationnaires supraconductrices, ce qui est l’équivalent de nos solutions stationnaires superfluides, pour un potentiel de la forme

$$V(x) = g[\delta(x - a) + \delta(x + a)]. \quad (2.37)$$

Le principe de résolution est le même que pour un seul pic, c’est à dire que l’on cherche à satisfaire les conditions de raccordement. La figure 2.7 présente leurs résultats pour différentes intensités des barrières.

Bien sûr, si la distance entre les deux pics est nulle, on retrouve le critère pour un pic d’intensité double et si les deux pics sont très éloignés ($a \gg \xi$), tout se passe comme si

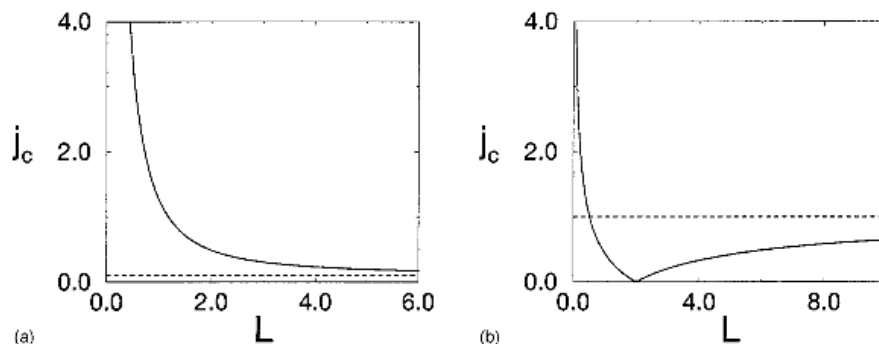


FIG. 2.8 – Courant critique en fonction de la distance entre les barrières (a) répulsives et (b) attractives. Figures extraites de [174].

il n'y avait qu'un seul pic. Notons que ce dernier résultat n'est pas si trivial car, dans le cas sans interaction, il existe toujours des solutions de grande énergie qui sont sensibles à la présence de l'autre barrière. Ici, pour une solution superfluide, ce n'est pas le cas, les barrières sont écrantées. Cela dit, les auteurs de ce travail n'ont pas considéré de solutions stationnaires supersoniques, qui auraient eu les mêmes propriétés que les ondes linéaires, car dans le contexte de la supraconductivité, elles ne sont pas pertinentes (le système n'est plus décrit par l'équation de Ginzburg-Landau dans ce régime).

Pour une distance intermédiaire, un phénomène intéressant se produit. L'évolution de la vitesse critique d'une limite à l'autre n'est pas monotone mais passe par un minimum quand la distance entre les deux barrières est de l'ordre de la longueur de relaxation.

2.2.4 Série périodique de pics δ

Dans ce cas il est encore possible d'écrire les conditions de raccordement et de les résoudre numériquement sans trop de difficultés [174]. Ceci a également été fait dans le contexte de la supraconductivité par Taras-Semchuk et Gunn en 1999 [174] qui n'ont ainsi étudié que la partie superfluide du diagramme. Pour un potentiel de la forme

$$V(x) = \sum_i g \delta(x - iL), \quad (2.38)$$

ils ont obtenu les résultats de la figure 2.8.

Un résultat amusant est la possibilité d'avoir un courant critique nul pour certaines longueurs dans le cas d'un potentiel attractif.

2.2.5 Potentiel quelconque

Si maintenant on considère un potentiel quelconque, la phénoménologie des solutions reste la même. En particulier, il existe toujours trois principaux régimes de transport, à savoir les régimes superfluide, dissipatif dépendant du temps et stationnaire supersonique faiblement dissipatif. Un résumé schématique des propriétés du fluide dans chaque régime est donné sur la figure 2.9.

Afin de décrire plus précisément les propriétés du fluide dans les différents régimes, nous allons présenter dans le paragraphe qui suit une théorie des perturbations de (2.16).

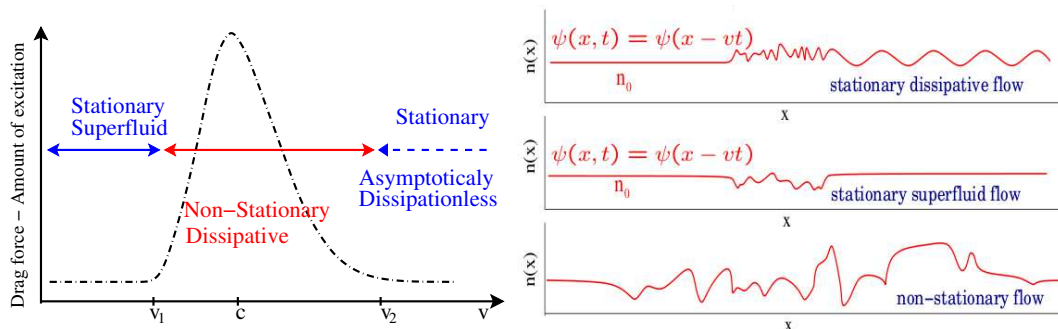


FIG. 2.9 – **À gauche** : représentation schématique d'une quantité caractéristique du régime de transport comme la force de traînée imposée par l'obstacle sur le condensat ou encore le degré d'excitations créées lors du passage de l'obstacle à travers le fluide en fonction de leur vitesse relative. **À droite** : profils de densité typiques dans les trois régimes. À basse vitesse ($v \leq c$), il existe un régime subsonique stationnaire et superfluide. À très grande vitesse ($v \gg c$), les interactions deviennent négligeables et la physique est dominée par l'énergie cinétique. On retrouve la phénoménologie de l'équation de Schrödinger. Entre les deux, autour de la vitesse du son c , le fluide est fortement dissipatif.

2.2.6 Approche perturbative

Pour un potentiel quelconque, il n'est en général pas possible de résoudre (2.16) exactement. Cela dit, si le potentiel n'est pas trop fort (on reviendra sur les conditions précises de validité à la fin du paragraphe), on peut développer une théorie des perturbations autour des solutions uniformes [112].

On considère donc un condensat traversant un obstacle de taille finie à la vitesse v vers les x décroissantes. Comme discuté précédemment on prend pour condition aux limites que la densité en aval est asymptotiquement uniforme $n(-\infty) = n_\infty$.

Le traitement perturbatif de (2.16), en posant $A(x) = A_\infty + \delta A(x)$, conduit à

$$\frac{\hbar^2}{m} \delta A'' + 4m(v_\infty^2 - c_\infty^2) \delta A = 2A_\infty V(x), \quad (2.39)$$

que l'on peut résoudre à l'aide de la fonction de Green. Celle-ci s'écrit, dans l'espace de Fourier

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{-k^2 + 4m^2(v_\infty^2 - c_\infty^2)/\hbar^2}, \quad (2.40)$$

avec $\tilde{G}(k) = \int e^{-ikx} G(x) dx$. Il ne reste alors plus qu'à faire l'inversion de Fourier via le théorème des résidus.

Cas subsonique

Je suis un excellent conducteur. Dustin Hoffman as Raymond, Rain man.

Dans ce cas, les pôles de la fonction de Green sont imaginaires purs et s'écrivent $\pm 2im\sqrt{|c_\infty^2 - v_\infty^2|}/\hbar = \pm 2i\kappa$.

Dans la région des $x \geq 0$, c'est à dire en amont, il faut intégrer sur le contour supérieur alors que pour $x < 0$, on intègre sur le contour inférieur. Au final, on obtient la fonction de Green suivante :

$$G(x) = -\frac{e^{-2\kappa|x|}}{4\kappa}. \quad (2.41)$$

Finalement, la correction à la densité uniforme s'obtient en convoluant la fonction de Green avec le potentiel $V(x)$

$$\delta A(x) = -\frac{mA_\infty}{2\hbar^2\kappa} \int_{-\infty}^{+\infty} V(y) e^{-2\kappa|x-y|} dy. \quad (2.42)$$

Cas supersonique

Inverse les fusées Chico et bloque les auxiliaires à mort. Harrison Ford as Han Solo, *La guerre des étoiles.*

Ici, le calcul est plus subtil, car plusieurs fonctions de Green sont possibles mais il faut choisir celle qui conduit à une densité finie (et constante) en $-\infty$. Les pôles sont cette fois réels mais la prescription précédente impose de les décaler vers le demi plan complexe supérieur en leur ajoutant $i\eta$ que l'on fait tendre vers 0 à la fin. Les pôles sont donc $i\eta \pm 2\kappa$. Ceci conduit à la fonction de Green suivante :

$$G(x) = \frac{\sin(2\kappa x)}{2\kappa} \theta(x), \quad (2.43)$$

et donc

$$\delta A(x) = \frac{mA_\infty}{\hbar^2\kappa} \int_{-\infty}^x V(y) \sin[2\kappa(x-y)] dy. \quad (2.44)$$

Loin de l'obstacle ($\kappa x \gg 1$), une évaluation asymptotique (2.44) donne

$$\delta A(x) = \frac{mA_\infty}{\hbar^2\kappa} \operatorname{Im}[e^{2i\kappa x} \tilde{V}(2\kappa)] + \frac{mA_\infty}{2\hbar^2\kappa^2} V(x) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\kappa^3}\right), \quad (2.45)$$

où $\tilde{V}(k) = \int dx e^{-ikx} V(x)$. La présence du terme oscillant révèle l'existence d'une réflexion quantique.

D'autre part, si l'échelle typique de variation du potentiel σ est bien plus grande que κ^{-1} , alors la fonction de Green peut être approximée par une distribution delta. Dans ce cas (2.44) se simplifie en

$$\delta A(x) = \operatorname{sgn}(v_\infty - c_\infty) \frac{mA_\infty}{2\hbar^2\kappa^2} V(x). \quad (2.46)$$

Notons que cette relation est valable dans les deux régimes. Elle stipule que, dans le cas superfluide, la densité diminue (augmente) au voisinage d'un obstacle répulsif (attractif), alors qu'exactement le contraire se produit dans le cas supersonique.

La condition de validité dû traitement perturbatif est $|\delta A/A_\infty| \ll 1$, ce qui se traduit, selon la relation d'ordre entre l'échelle typique σ de variation du potentiel et $1/\kappa$, par deux relations :

$$\frac{mV_0\sigma}{\hbar^2\kappa} \ll 1 \quad \text{quand} \quad \kappa\sigma \ll 1, \quad (2.47)$$

$$\frac{mV_0}{\hbar^2\kappa^2} \ll 1 \quad \text{quand} \quad \kappa\sigma \gg 1, \quad (2.48)$$

où V_0 désigne bien sûr l'amplitude typique du potentiel.

Notons également une propriété intéressante des solutions, à savoir le phénomène d'écrantage du potentiel due aux interactions. En effet, la convolution entre la fonction de Green et le potentiel élimine les détails de ce dernier sur une échelle de distance inférieure à κ^{-1} . À vitesse nulle, cette échelle coïncide avec la longueur de relaxation ξ , mais à mesure que l'on approche la vitesse du son, elle diverge (cela dit, la théorie des

perturbations diverge aussi). Au-delà de la vitesse du son, cette échelle décroît avec v jusqu'à 0 : dans ce régime, le transport redevient linéaire car l'énergie cinétique est très grande devant l'énergie d'interaction.

2.2.7 Critère de Superfluidité

Par souci de clarté, on se restreint ici au régime de champ moyen 1D mais les idées sont générales et s'appliquent à tous les régimes 1D.

Existence de solutions stationnaires

On a vu précédemment que selon le rapport v/c , les paramètres de l'obstacle, etc ..., il existe trois différents régimes de transport. Ces régimes sont caractérisés par l'existence ou non de solutions stationnaires, ainsi que d'autres propriétés comme l'existence d'une force de traînée par exemple. En particulier, le régime subsonique stationnaire est superfluide alors que les deux autres sont dissipatifs. Un critère naturel pour définir la vitesse critique d'un superfluide serait alors de l'associer à la vitesse en-deçà de laquelle les solutions stationnaires subsoniques disparaissent. Mais il reste encore à savoir si ces solutions sont stables et ainsi si elles peuvent être peuplées dans une expérience. Nous allons voir par la suite que dans la majeure partie des cas (même si nous n'avons pas de preuve rigoureuse), ce critère est correct. La seule exception à notre connaissance est le cas d'un potentiel périodique (infini).

En ce qui concerne l'analyse de stabilité des solutions, deux choses sont possibles. Un état stationnaire peut exister mais ne pas être l'état d'énergie le plus bas. Il est alors favorable au système de diminuer son énergie, par exemple en émettant des excitations élémentaires pour atteindre progressivement l'état fondamental (pas nécessairement statique). On parle alors d'*instabilité énergétique* ou dans le contexte des superfluides d'*instabilité de Landau*.

Une autre possibilité est que l'état ne soit pas dynamiquement stable, c'est à dire que n'importe quelle perturbation, aussi petite qu'elle soit, croît très rapidement et déforme totalement l'état initial : c'est l'*instabilité dynamique*.

Pour déterminer le seuil de ces instabilités, on procède à l'étude des solutions d'équations linéarisées. Dans le premier cas, on considère l'effet d'une déformation sur la fonctionnelle d'énergie, alors que dans le second, c'est directement les équations du mouvement que l'on analyse. Il est toutefois important de noter que ces analyses linéaires permettent uniquement de donner des informations sur le seuil de l'instabilité et éventuellement sur le taux de croissance d'une perturbation mais pas sur l'état final du système qui est gouverné par des équations non-linéaires. En particulier on va voir que l'instabilité dynamique se manifeste par une croissance exponentielle de certains modes mais il est clair que cette image n'est vraie que pour des temps très courts car ensuite le système se stabilise sous l'effet des non-linéarités, tout comme, dans un fluide normal, la formation de vagues sature à une certaine amplitude et ne croît pas jusqu'à l'infini.

Instabilité énergétique

On considère un fluide condensé unidimensionnel se déplaçant à la vitesse¹² $v = p/m$ dans un potentiel quelconque.

On pose alors comme ansatz

$$\psi(x, t) = e^{-i\mu t} e^{ipx/\hbar} [\phi_0(x) + \delta\psi(x)] , \quad (2.49)$$

¹²Notons que cette vitesse n'est parfaitement définie que si le potentiel s'annule à l'infini où l'on a alors un condensat uniforme. Pour être plus rigoureux on devrait parler de flux et non pas de vitesse.

pour linéariser la fonctionnelle d'énergie

$$E[\psi] = \int dx \psi^* \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V - \mu + \frac{g}{2} |\psi|^2 \right] \psi, \quad (2.50)$$

autour de la solution stationnaire. Au premier ordre en $\delta\psi$ il vient

$$E[\psi] = E_0 + \int dx (\delta\psi^*, \delta\psi) \mathcal{M} \begin{pmatrix} \delta\psi \\ \delta\psi^* \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

avec

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2m} \left[\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} + p \right]^2 + V - \mu + 2g|\phi_0|^2 & g\phi_0^2 \\ g\phi_0^2 & \frac{1}{2m} \left[\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} - p \right]^2 + V - \mu + 2g|\phi_0|^2 \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

et E_0 l'énergie de l'état stationnaire.

Le seuil de l'instabilité énergétique est alors donné par les propriétés spectrales de \mathcal{M} . Si cette matrice possède au moins une valeur propre négative, alors l'état est instable énergétiquement puisqu'il n'est pas l'état d'énergie minimale. Notons cependant que cette analyse ne donne aucune indication sur la façon dont le système peut relaxer vers un état d'énergie plus basse mais surtout à quel taux il le ferait.

Examinons maintenant le cas le plus simple où le condensat est homogène. On a alors $\phi_0 = \sqrt{n_0}$, $\mu = gn_0 + p^2/2m$, $c^2 = gn_0/m$ et $\delta\psi \sim e^{ikx}$. L'opérateur (2.52) se réduit alors à

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\hbar k p}{m} + mc^2 & mc^2 \\ mc^2 & \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar k p}{m} + mc^2 \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

dont les valeurs propres peuvent être calculées aisément et s'écrivent

$$\varepsilon_{\pm} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + mc^2 \pm \sqrt{\left(\frac{\hbar k p}{m} \right)^2 + m^2 c^4}. \quad (2.54)$$

Ainsi, pour que ε_{\pm} soit inférieure à zéro, il est nécessaire que

$$|p| \geq \sqrt{\hbar^2 k^2/4 + (mc)^2}, \quad (2.55)$$

soit au minimum que la vitesse v excède en norme la vitesse du son c . On retrouve ainsi le célèbre critère de Landau pour la superfluidité. En effet, on voit bien ici, qu'au delà de la vitesse du son, il est favorable (énergétiquement) au système d'émettre des excitations de grande longueur d'onde.

Pour un potentiel quelconque, il est très difficile de résoudre les équations précédentes pour plusieurs raisons. D'une part, il faut être capable de déterminer les solutions stationnaires avec une très grande précision. Puis il faut diagonaliser la matrice pour différentes vitesses en imposant des conditions aux limites judicieuses.

Instabilité dynamique

L'autre approche consiste à linéariser l'équation de Gross-Pitaevskii dépendante du temps (1.78). En posant l'ansatz suivant :

$$\psi(x, t) = e^{-i\mu t} e^{ipx/\hbar} [\phi_0(x) + \delta\psi(x, t)], \quad (2.56)$$

on obtient les équation de Bogoliubov-De Gennes avec l'opérateur

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2m} \left[\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} + p \right]^2 + V - \mu + 2g|\phi_0|^2 & g\phi_0^2 \\ -g\phi_0^{*2} & \frac{-1}{2m} \left[\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} - p \right]^2 - V + \mu - 2g|\phi_0|^2 \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

Cette fois, le critère d'instabilité dynamique correspond à l'existence de valeurs propres avec une partie imaginaire non nulle, ce qui signifie que certaines composantes de Fourier de la perturbation peuvent croître exponentiellement au cours du temps avec un taux $\sim \omega$.

Dans le cas homogène, on a

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\hbar k p}{m} + mc^2 & mc^2 \\ -mc^2 & -\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\hbar k p}{m} - mc^2 \end{pmatrix}, \quad (2.58)$$

dont les valeurs propres sont

$$\hbar\omega_{\pm} = \frac{\hbar k p}{m} \pm \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2mc^2 \right)}. \quad (2.59)$$

On ne peut donc pas avoir de fréquence complexes pour des vecteurs d'onde réels. L'instabilité dynamique n'existe donc pas dans l'espace libre.

Il est également utile de noter le lien entre \mathcal{M} et \mathcal{L} :

$$\mathcal{L} = \sigma \mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \mathcal{M}, \quad (2.60)$$

car il permet par exemple de montrer que si le système est stable énergétiquement, alors il l'est nécessairement aussi dynamiquement. En effet, si le système est énergétiquement stable, alors toutes ses valeurs propres de \mathcal{M} , ε_{\pm} , sont positives, et il en découle que toutes celles de $\mathcal{L} = \sigma \mathcal{M}$, $\hbar\omega_{\pm}$, sont réelles. Le point clef est que si on choisit X , vecteur propre de \mathcal{L} , on a alors

$$\hbar\omega_{\pm} X^{\dagger} \sigma X = X^{\dagger} \sigma (\sigma \mathcal{M}) X = X^{\dagger} \mathcal{M} X. \quad (2.61)$$

Or, le terme de droite de cette équation étant réel positif (puisque le système est stable énergétiquement) et $X^{\dagger} \sigma X$ aussi, alors $\hbar\omega_{\pm}$ est nécessairement réel et du signe de $X^{\dagger} \sigma X$.

Notons de plus que le critère de Landau peut également être déduit du spectre de \mathcal{L} puisque celui-ci représente le spectre d'excitation du système. En effet, quand les fréquences sont réelles, les oscillations peuvent être quantifiées et conduisent aux quasi-particules de Bogoliubov. La condition de commutation bosonique impose de choisir la normalisation $X^{\dagger} \sigma X = 1$ et non pas -1 , ce qui sélectionne seulement la partie ω_{+} du spectre. L'autre partie est souvent nommée spectre d'anti-phonons mais ne représente aucun degré de liberté supplémentaire. L'énergie d'un phonon est alors $\hbar\omega_{+}$. La figure 2.10 montre, qu'à vitesse non nulle, le spectre des phonons devient dissymétrique (selon le vecteur d'onde du phonon), et pour $v \geq c$, une des deux branches devient en partie négative. Ceci montre à nouveau qu'il est préférable pour le système d'émettre des phonons afin de minimiser son énergie.

Discussion

Il est désormais temps de se demander quel est le bon critère pour la superfluidité parmi les trois proposés. A priori, le plus restrictif est celui de l'instabilité énergétique mais nous allons voir que dans la majorité des cas, il est équivalent à l'existence de

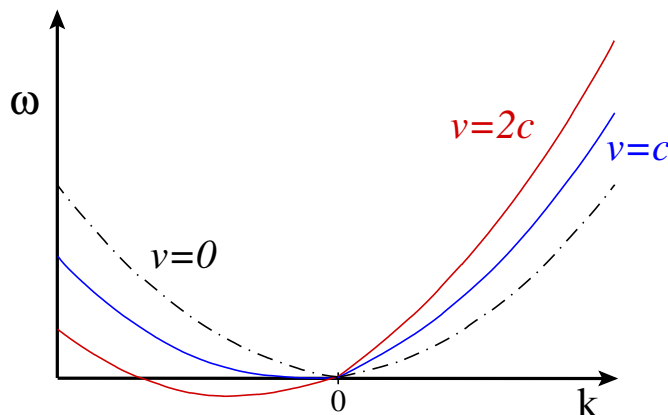


FIG. 2.10 – Spectre de Bogoliubov d'un condensat uniforme pour différentes vitesses. Pour $v < c$, une partie du spectre devient négative, rendant le système énergétiquement instable.

solutions stationnaires subsoniques. Cela dit, une expérience récente [56] a montré que dans certaines situations, le critère d'instabilité dynamique était plus pertinent. Les choses n'étant pas parfaitement claires pour l'instant, cette partie se vaut plus descriptive et intuitive que rigoureuse.

Commençons par discuter les résultats analytiques de Danshita et Tshuchiya [52] qui ont étudié la stabilité d'un supercourant à travers un potentiel de Kroening-Penney, c'est à dire une série de pics delta périodiquement agencés

$$V(x) = V_0 \sum_j \delta(x - ja). \quad (2.62)$$

D'autre part, ils ont étudié ce système dans un régime où $a \gg \xi$, pour simplifier l'expression de la densité du condensat. Cela réduit un peu la généralité du problème mais n'apporte pas de grands changements conceptuels.

Sans rentrer dans les détails de leur analyse, ils ont pu calculer les seuils d'apparition des deux instabilités et les comparer au critère d'existence de solutions stationnaires pour un seul pic et pour le potentiel périodique. Dans le premier cas, les critères d'instabilité énergétique et d'existence de solutions stationnaires sont confondus, alors que dans le second, ils trouvent que les critères d'instabilité énergétique et dynamique sont confondus mais sont plus restrictifs que l'existence de solutions stationnaires [174]. Ceci est en accord avec la hiérarchie proposée sur la figure 2.11. La première relation d'ordre entre instabilité dynamique et énergétique est rigoureuse (démontrée dans le paragraphe précédent), alors que la dernière n'est simplement qu'intuitive.

Dans leur cas, les seuils d'instabilité dynamique et énergétique sont confondus car la distance entre les barrières est bien plus grande que la longueur de relaxation. Ce résultat est en accord avec [126] qui ont étudié le cas d'un potentiel sinusoïdal et constaté que les deux critères se confondent si l'énergie de recul $E_R = \hbar^2 \pi^2 / 2ma^2$ est très petite devant l'énergie d'interaction gn . Des calculs numériques de Wu et Niu [194, 195] et Modugno [56] en présence d'un potentiel périodique ont également montré que le critère énergétique était plus restrictif que le critère dynamique mais ne disent rien quant au critère d'existence de solutions stationnaires.

Le critère à retenir semble alors être celui énergétique, et pourtant, en présence d'un potentiel périodique, il ne semble pas être le plus pertinent. En effet, si on considère l'expérience du groupe de Florence sur les oscillations d'un condensat en présence d'un potentiel périodique [56], il est clair que l'instabilité dynamique joue un rôle plus im-

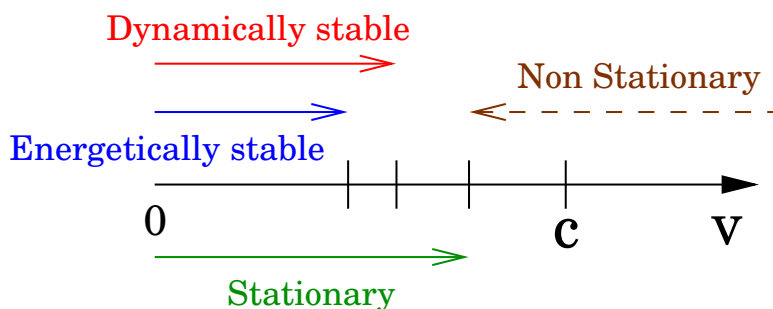


FIG. 2.11 – Relation d'ordre entre les différents "critères de superfluidité". Le critère le plus restrictif est l'instabilité énergétique, tandis que le moins restrictif est l'existence de solutions stationnaires. Entre les deux se trouve le critère d'instabilité dynamique. Très souvent, ces trois critères sont confondus.

portant que l'instabilité énergétique. Ceci s'explique naturellement par une différence importante dans les échelles de temps nécessaires à ces instabilités pour se manifester. Dans le cas de l'instabilité dynamique, cette échelle de temps peut facilement être évaluée en considérant l'inverse de la fréquence du mode le plus instable. Par contre, en ce qui concerne l'instabilité énergétique, il n'y a pas, à notre connaissance, de théorie permettant de l'évaluer. Ce temps est en particulier très sensible à la fraction non condensée. Dans leur expérience, ils peuvent évaluer ce temps qui est au moins dix fois inférieur à celui de l'instabilité dynamique.

De manière théorique, on peut donc dire que le critère énergétique est le véritable critère de superfluidité. Mais en pratique, compte tenu de la durée finie des expériences, l'instabilité énergétique peut ne pas se manifester. Dans le cas "pathologique" d'un potentiel périodique, l'instabilité dynamique peut alors s'avérer être la plus pertinente.

D'autre part, il reste encore à éclaircir le lien entre l'existence de solutions stationnaires et leurs stabilités. En particulier, pour des raisons pratiques (du point de vue théorique) car analyser les équations stationnaires est un travail beaucoup moins difficile (même si on ne sait pas encore le faire pour un potentiel quelconque, même numériquement) que d'étudier leurs stabilités, ce qui réclame d'ailleurs d'avoir résolu le problème précédent.

Notons enfin que toute cette discussion n'a de sens que dans le régime de champ moyen. En effet, la vitesse critique d'un gaz de bosons à une dimension est en théorie nulle [20] car il existe toujours une force de trainée quelle que soit la vitesse du fluide. Cependant, à mesure qu'on approche le régime de champ moyen, celle-ci devient de plus en plus faible et tend vers une fonction non nulle uniquement au-delà d'une certaine vitesse critique finie.

Critère de Landau local

Dans le cas où le potentiel extérieur est suffisamment lisse, ou pour être plus précis qu'il induit des fluctuations de densité sur une échelle de longueur bien plus grande que la longueur de relaxation, il est naturel d'utiliser l'approximation de la densité locale. En pratique, cela revient à définir une vitesse du son locale $c^2(x) = n(x)d\epsilon(n)/dn$ et de dire que le comportement du fluide est analogue à celui d'un fluide homogène infini. On peut alors formuler le critère d'instabilité énergétique de manière très simple en remarquant que la superfluidité sera brisée s'il existe un point du fluide où la vitesse locale excède la vitesse du son : c'est le *critère de Landau local*.

Couplé à la théorie de perturbation précédemment introduite, on peut alors calculer

analytiquement la vitesse critique. Si on considère un flux homogène, de densité n_0 et de vitesse v_0 à l'infini, diffusé par un obstacle de taille fini, la conservation du flux relie la vitesse locale à la densité, via la formule suivante

$$n_0 v_0 = n(x) v(x). \quad (2.63)$$

En imposant comme critère de superfluidité que $v(x) = c(x)$ en un x donné, il vient

$$v_0^c = \frac{n(x)}{n_0} c(x), \quad (2.64)$$

qui traduit simplement le fait qu'en présence d'un obstacle répulsif, la vitesse critique est diminuée car d'une part la vitesse du son diminue localement mais d'autre part la vitesse du fluide augmente (conservation du flux). Dans le cas d'un obstacle attractif, le pire endroit est au contraire celui où le potentiel est faible, c'est pourquoi on retrouve le critère de Landau usuel. En utilisant (2.42), on obtient dans les deux différents régimes

$$\frac{v_0^c}{c_0} = \begin{cases} \left[1 - \frac{m}{\hbar^2 \kappa} \int dy e^{-2\kappa|x-y|} V(y) \right]^{1/2+1/\nu} & \text{si répulsif} \\ 1 & \text{si attractif} \end{cases}. \quad (2.65)$$

Dans le cas d'une barrière Gaussienne $V(x) = V_0 e^{-x^2/(2\sigma^2)}$, (2.65) se réduit à

$$\frac{v_0^c}{c_0} = \left[1 - \frac{\sqrt{2\pi} V_0 \sigma}{\kappa} e^{(\kappa\sigma)^2} \operatorname{erf}(\sqrt{2}\kappa\sigma) \right]^{1/2+1/\nu}. \quad (2.66)$$

Malheureusement, (2.65) reste une équation implicite sur la vitesse critique (puisque v est cachée dans κ), il faut donc la résoudre numériquement.

Si le potentiel est vraiment très lisse, on peut alors approximer l'exponentielle dans (2.65) par une distribution delta. Ceci permet d'obtenir une relation très simple entre le maximum d'amplitude V_m du potentiel et la vitesse critique

$$\frac{V_m}{\mu_\nu} = \nu \left[1 - \left(\frac{v_c}{c_\nu} \right)^{2\alpha} \right] \left[1 - \left(\frac{v_c}{c_\nu} \right)^2 \right], \quad (2.67)$$

où $\alpha = \nu/(\nu + 2)$, $\mu_\nu = gn_0^\nu$ et $c_\nu = \sqrt{\mu\nu/m}$. Il est alors facile d'obtenir des expressions explicites dans les deux cas limites :

$$\frac{v_c}{c_\nu} \simeq \begin{cases} 1 - \sqrt{\frac{V_m}{4\nu\alpha\mu_\nu}} & \text{si } \frac{v_c}{c_\nu} \simeq 1, \\ \left(1 - \frac{V_m}{\nu\mu_\nu} \right)^{1/(2\alpha)} & \text{si } \frac{v_c}{c_\nu} \ll 1. \end{cases} \quad (2.68)$$

Résultats expérimentaux

Afin d'illustrer les considérations théoriques précédentes, nous discutons ici les résultats de l'expérience récente de Engels et Atherton [62]. Celle-ci consiste à déplacer une barrière gaussienne, créée par un laser, à vitesse constante au sein d'un condensat en forme de cigare. En variant la vitesse de l'obstacle et en mesurant la déformation qu'il induit sur le condensat (taux d'excitations), les trois régimes de transport décrits dans ce chapitre ont été observés sans ambiguïté. La figure 2.12 montre le schéma expérimental ainsi que le taux d'excitations mesuré après temps de vol.

La vitesse critique superfluide observée, dans le cas répulsif, est de l'ordre de 0.35 mm/s qui est bien plus faible que la vitesse du son au centre du piège $c = 2.1 \text{ mm/s}$. Cependant,

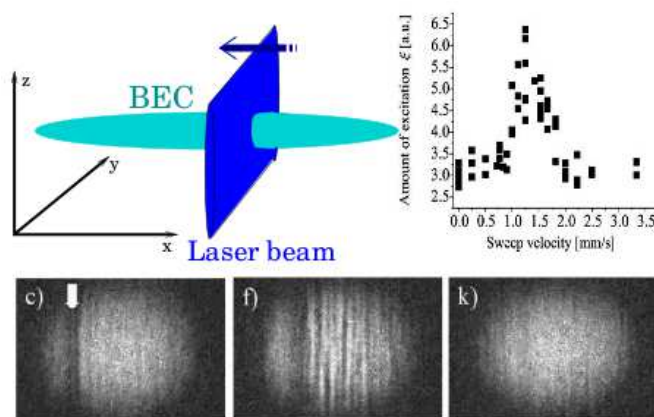


FIG. 2.12 – **En haut à gauche** : schéma de l'expérience [62]. Un faisceau laser est déplacé à vitesse constante au sein du condensat, jouant le rôle d'une impureté gaussienne. **En haut à droite** : résultats expérimentaux du taux d'excitations en fonction de la vitesse de l'obstacle (cas attractif). **En bas** : profils de densité du condensat après temps de vol (cas répulsif). En termes de la classification des régimes introduite dans ce chapitre, (c) correspond au régime superfluide, (f) au régime dépendant du temps et (k) au régime stationnaire faiblement dissipatif.

dans cette expérience, les paramètres sont tels que le système est dans le régime Thomas-Fermi Transverse, et elle est donc décrite par l'équation (1.69) ($na \simeq 25 \gg 1$). D'autre part, la largeur $w \simeq 7.8 \mu\text{m}$ de la barrière gaussienne étant à la fois bien plus grande que la longueur de relaxation $\xi \simeq 0.17 \mu\text{m}$ et bien plus petite que la taille longitudinale du condensat $R \simeq 100 \mu\text{m}$, l'approximation de la densité locale pour la vitesse critique semble être justifiée. Celle-ci, via la formule (2.65) et compte tenu de l'intensité du laser, donne une vitesse critique de 0.37 mm/s , en très bon accord avec le résultat expérimental.

Ces éléments sont donc qualitativement et quantitativement en accord avec les prévisions théoriques du modèle unidimensionnel de transport. Malheureusement une étude systématique de la dépendance de cette vitesse critique en termes des paramètres expérimentaux n'est pas encore disponible à ce jour. Il n'est alors pas encore possible de valider complètement l'approche "Landau local" et les mauvaises langues pourraient dire qu'il ne s'agit que du fruit du hasard.

Fraction normale

Une application intéressante de la théorie de perturbation exposée précédemment est le calcul de la fraction normale. En effet l'impulsion $P = \hbar \int dx \delta n \partial_x S$ peut être associée au flot et dans l'esprit de l'approche à la Landau pour déterminer la fraction normale dans l'hélium liquide on peut associer à cette impulsion une masse $M_n = P/v$. On obtient alors :

$$\frac{M_n}{M} = \frac{m^2}{2\hbar^4 \kappa^3 L} \int_{\mathbb{R}^2} dy_1 dy_2 V(y_1) V(y_2) [1 + 2\kappa|y_1 - y_2|] e^{-2\kappa|y_1 - y_2|}, \quad (2.69)$$

avec $M = mn_0 L$ la masse du fluide non perturbé dans la région de taille L .

Pour un potentiel aléatoire de la forme

$$V(x) = \lambda \mu \xi \sum_{n=1}^{N_i} \delta(x - x_n), \quad (2.70)$$

où les x_n sont des variables aléatoires uniformément distribuées entre 0 et L , $n_i = N_i/L$ est la densité d'impuretés, avec pour moyenne $\langle V \rangle = \lambda \mu \xi n_i$ et pour fonction de corrélation

$$\langle V(x)V(0) \rangle - \langle V \rangle^2 = \left(\frac{\hbar}{m} \right)^2 \sigma \delta(x), \quad (2.71)$$

où $\sigma = \lambda^2 n_i \xi^{-2}$, on obtient

$$\frac{M_n}{M} = \frac{\lambda^2 n_i \xi}{2(1 - v^2)^{3/2}}. \quad (2.72)$$

Ce résultat généralise le fameux calcul de Huang et Meng [88] au cas d'une vitesse non nulle.

Chapitre 3

Localisation d'Anderson

Là où le hasard règne, règnent les lois du hasard.
Laurent Nottale.

3.1 Introduction générale

La localisation d'Anderson, également connue sous le nom de localisation quantique forte, se résume, en première approximation, à l'absence de diffusion d'une onde dans un milieu aléatoire. Initialement découverte par P.W. Anderson en 1958 [13] dans le contexte du transport électronique dans un matériau désordonné, ce phénomène est maintenant connu pour être bien plus général et se produit dès que ondes et désordre sont mêlés au sein d'un même système physique. Elle apparait en particulier dans les domaines de l'acoustique, des ondes électromagnétiques, des vagues, du transport de particules quantiques ou encore d'ondes de spin.

3.1.1 Description heuristique

Avant de discuter cette physique avec rigueur il est utile de se faire une image simple du phénomène en question. Considérons par exemple le transport d'une particule à travers un région désordonnée comme présenté sur la figure 3.1.

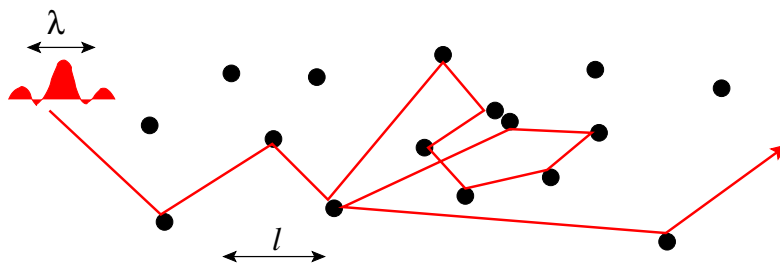


FIG. 3.1 – Transport dans un milieu désordonné constitué d'impuretés fixes aléatoirement disposées (ronds noirs). Une particule quantique est représentée par un paquet d'onde incident caractérisé par sa longueur d'onde de de Broglie λ . l est le libre parcours moyen élastique.

Plusieurs échelles de distances sont importantes ici. Tout d'abord, la longueur d'onde de de Broglie λ de la particule va déterminer le caractère "classique" ou "quantique" du transport en fonction de sa relation d'ordre avec les autres échelles du problème. Le libre parcours moyen élastique l est quant à lui défini comme la distance moyenne parcourue par la particule entre deux collisions élastiques. Celui-ci dépend bien évidemment de la densité d'impuretés et de la section efficace sur le diffuseur mais on ne discutera pas en

détails cette quantité ici. La taille du système L ainsi que la longueur de cohérence de phase l_ϕ , définie comme la distance au bout de laquelle la phase de l'onde a suffisamment varié pour que l'on puisse la considérer décorrélée de la phase initiale, sont également des grandeurs pertinentes. Plusieurs combinaisons de ces paramètres sont bien sûr possibles mais on va discuter ici essentiellement les systèmes diffusifs cohérents, à savoir quand $l \ll L \ll l_\phi$, où les effets ondulatoires peuvent se manifester.

Dans le cas où la longueur d'onde λ de la particule est bien plus faible que le libre parcours moyen élastique l , la théorie "classique"¹ du transport s'applique. En particulier, dans le cas du transport électronique, la formule de Drude [19, 53] pour la conductivité est pertinente et domine complètement le transport². Celle-ci s'écrit

$$\sigma_D = \frac{ne^2\langle\tau\rangle}{m^*} = \frac{e^2}{h}k_F^{d-1}l, \quad (3.1)$$

où $\langle\tau\rangle$ désigne le temps moyen entre deux collisions, m^* la masse effective des porteurs de charge, n la densité d'électrons et k_F le vecteur d'onde de Fermi. Ce modèle explique bien pourquoi les métaux ont une résistance finie et pourquoi elle est proportionnelle à la longueur de l'échantillon ($R^{-1} = G = \sigma_D \text{ section}/L$). Cependant, à mesure que la longueur d'onde de de Broglie s'approche du libre parcours moyen, il est clair que les effets d'interférences vont se manifester.

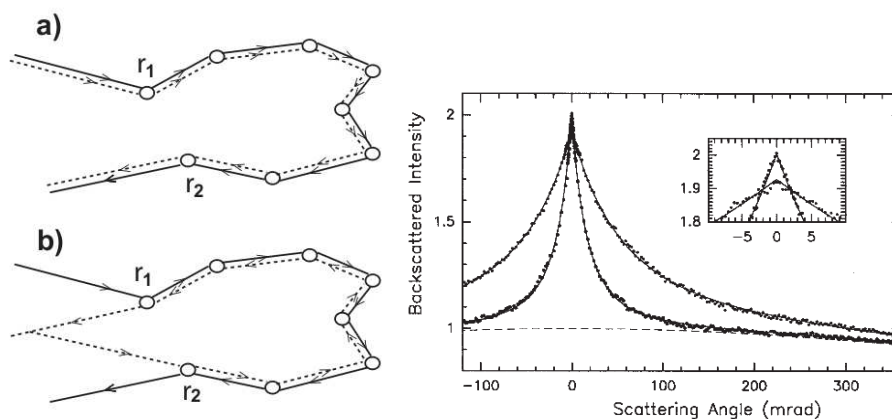


FIG. 3.2 – Illustration de la rétro-diffusion cohérente. **À gauche** : Représentation schématique des deux types de chemins de diffusion qui contribuent à l'intensité du champ diffusé ; a) chemins parcourus en sens identiques qui correspondent à la diffusion classique ; b) chemins parcourus en sens opposés (termes interférentiels) qui sont à l'origine de la rétrodiffusion. **À droite** : mesures expérimentales de l'intensité lumineuse rétro-diffusée pour deux types d'échantillons (deux libres parcours moyen). À angle nul un facteur 2 est observé dans l'intensité. Figure extraite de [192].

En supposant que la cohérence de phase est préservée sur l'échelle de l'échantillon, on peut alors distinguer deux régimes.

- $kl \gg 1$: l'effet des interférences est faible et ne conduit qu'à des corrections dites de localisation faible. En effet, si on regarde la probabilité qu'une particule traverse l'échantillon il faut, conformément à la mécanique ondulatoire, sommer les amplitudes de chaque chemin puis prendre le module au carré. Ceci conduit à un terme diagonal, qui ne fait intervenir aucune interférence et redonne la diffusion classique, ainsi qu'à une série de

¹Le terme classique est à mettre entre guillemets car nombreux concepts quantiques sont utilisés pour décrire le transport électronique comme l'effet tunnel par exemple. Le terme classique signifie ici qu'on néglige les interférences entre les différents chemins possibles.

²Les corrections quantiques sont faibles comme on va le discuter par la suite.

termes croisés dits termes d'interférences. Les phases relatives de ces différents chemins de diffusion étant essentiellement aléatoires, ces termes ne survivent pratiquement pas à la moyenne d'ensemble. Seuls quelques chemins particuliers, illustrés sur la figure 3.2, conduisent à des corrections non nulles qui survivent au moyennage sur les configurations de désordre. Ce sont des chemins parcourus en sens opposés par l'onde qui, de ce fait, ont exactement la même phase et interfèrent constructivement. Ce type de corrections conduit à une augmentation de la rétro-diffusion³ et donc à une légère diminution de la transmission.

- $kl \leq 1$: les effets d'interférences deviennent prédominants et gouvernent complètement le transport. L'ensemble des contributions s'autodétruit par interférences destructrices et la transmission d'une onde à travers le milieu est exponentiellement réduite. Les fluctuations de conductance deviennent du même ordre de grandeur que la conductance elle-même, de sorte qu'un échantillon n'est plus représentatif de l'ensemble.

Ce critère, $kl \sim 1$, dit critère de Ioffe-Regel [91], est nécessaire mais pas suffisant pour la localisation. D'autre part, il n'apporte pas beaucoup d'informations sinon que quelque chose se produit. Notons tout de même que la formule de Drude (3.1), même si elle n'a a priori plus de sens dans le régime $kl \leq 1$, prédit dans un cas un bon conducteur et dans l'autre un très mauvais. La localisation forte, due aux effets ondulatoires en présence de désordre conduit donc le système vers un état isolant d'un nouveau genre (différent d'un isolant de bande par exemple).

Encore une fois, il est important de noter que dans le cas du transport d'une particule, ce phénomène est de nature purement quantique (ondulatoire en général) dans la mesure où le transport, classiquement autorisé, est inhibé par les effets d'interférences. Même si l'énergie de la particule est très grande, *ie* bien plus grande que le potentiel désordonné, elle est tout de même localisée à cause des interférences destructives.

3.1.2 Transition d'Anderson

Dans son article initial de 1958 [13], Anderson montre que les fonctions d'onde électroniques d'un matériau peuvent être profondément altérées par la présence d'un désordre suffisamment fort. Le modèle qu'il considère est le suivant :

$$E\psi_n = \epsilon_n\psi_n + \sum_{k \neq n} t_{kn}\psi_k, \quad (3.2)$$

où ψ_n désigne la composante de la fonction d'onde sur le site n d'un réseau à d dimensions, ϵ_n est une énergie sur site aléatoire comprise entre $-W$ et W et t_{kn} sont les éléments de matrices d'effet tunnel d'un site k vers un site n qui sont le plus souvent restreints aux plus proches voisins.

Contrairement à la vision traditionnelle d'ondes de Bloch diffusées par des impuretés, les fonctions d'ondes peuvent devenir exponentiellement localisées (figure 3.3) dans l'espace dû à la présence de désordre

$$|\psi(\vec{r})| \sim \exp(-|\vec{r} - \vec{r}_0|/L_{loc}), \quad (3.3)$$

³Notons une légère différence entre ce qu'on appelle les corrections de localisation faible et la rétro-diffusion cohérente. Les deux prennent leurs origines dans les interférences entre deux chemins parcourus et désignent des corrections quantiques au transport d'une particule d'un point A vers un point B . La rétro-diffusion correspond au cas particulier où $A = B$. Dans ce cas, les chemins qui interfèrent sont exactement les mêmes et l'intensité est doublée en ce point. Dans le cas général où $A \neq B$, les chemins qui interfèrent sont des boucles presque identiques mais qui diffèrent par un croisement qui rend ces corrections faibles. L'effet sur la conductance est alors faible alors que dans le cas de la rétro-diffusion il est très fort mais concentré en un point seulement.

où L_{loc} est appelée la longueur de localisation et dépend de l'énergie et du désordre. L'existence de tels états est assez claire dans le régime de désordre très fort. Les états propres sont alors, en première approximation, des états classiquement piégés dans les minima locaux du désordre. En partant de ces états, Anderson a développé une théorie des perturbations en terme du paramètre d'effet tunnel sur le réseau.

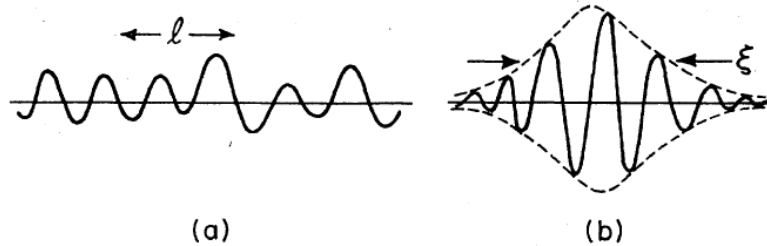


FIG. 3.3 – Fonctions d'onde typiques de (a) un état étendu et (b) un état localisé. ℓ et ξ sont respectivement le libre parcours moyen et la longueur de localisation. Figures extraites de [113].

La conclusion principale est qu'il est finalement difficile de délocaliser un état de cette manière car le couplage entre les états est soit pénalisé par des recouvrements exponentiellement faibles soit par un dénominateur (différences des énergies apparaissant dans la théorie des perturbations) très grand. En effet, deux états proches en énergie ne sont pas nécessairement proches spatialement et ont donc un recouvrement négligeable alors que des états spatialement proches ont en général des énergies très différentes.

Une conséquence intuitive de l'existence de ces états localisés est alors la suppression du transport et donc l'absence de diffusion, titre de l'article d'Anderson. Par contre, à mesure que le désordre diminue, on espère alors finir par délocaliser les états propres et rétablir le transport à travers le système. Seulement les choses ne sont pas si simples. Par exemple, Mott, Twose et Borland [139, 36] ont montré qu'en dimension un tous les états sont exponentiellement localisés et ceci quelque soit l'amplitude du désordre alors qu'en dimension trois il existe une valeur critique du désordre en dessous de laquelle les états sont délocalisés [13]. La phénoménologie de la localisation d'Anderson dépend donc hautement de la dimensionnalité, point sur lequel nous reviendrons par la suite.

Deux points extrêmement importants sont alors à noter. Tout d'abord la localisation due au désordre peut avoir lieu même si l'énergie de l'onde est bien plus grande que le désordre environnant (la dimension un en est l'exemple le plus frappant). En d'autres termes, la localisation d'Anderson est un phénomène profondément non classique car elle interdit le transport classiquement autorisé. L'autre point est l'existence d'une transition métal-isolant (transition d'Anderson) due aux effets d'interférences.

Enfin, à la place de varier l'amplitude du désordre on peut simplement la fixer et regarder le comportement des états en fonctions de leurs énergies. S'il existe une valeur critique du désordre (transition d'Anderson à 3d) pour localiser un état, il est clair que tous les états d'énergie inférieure à ce seuil seront localisés et ceux au dessus, délocalisés. Pour un désordre fixe, on parle alors de bord de mobilité (mobility edge) désignant ainsi la valeur de l'énergie au delà de laquelle le transport est possible. En particulier dans un solide, si l'énergie de Fermi est en dessous ou en dessus de ce seuil, le système sera isolant ou conducteur. Ce concept, introduit par Mott en 1967 [138], explique clairement pourquoi une transition métal-isolant est possible en changeant la densité d'électrons et donc l'énergie de Fermi dans un semi-conducteur⁴ (voir le paragraphe sur les expériences).

⁴La théorie des bandes prédit bien sûr aussi ce genre de comportement mais là on parle d'une transition métal-isolant alors que la théorie des bandes prédit un conducteur. Autrement dit l'énergie de Fermi n'est

3.1.3 Critères de localisation

The noise⁵ is the signal. R. Landauer.

Comme on l'a dit précédemment, le phénomène de localisation se produit lorsqu'on considère les propriétés d'une onde dans un milieu désordonné. Cependant il n'existe pas de définition universelle, du moins à ma connaissance, de la localisation. En effet, sa définition peut varier en fonction du système que l'on considère et en particulier en fonction du fait qu'il soit infini, fini, fermé ou ouvert. Parfois on parle d'absence de diffusion, parfois d'états propres localisés, de transmission exponentiellement décroissante, de statistiques spectrales etc... L'objectif de ce paragraphe, largement inspiré de [186] est donc de discuter brièvement ces différents critères et de voir dans quelles conditions ils sont pertinents.

Localisation dans un système de taille infinie

Un premier concept à discuter est celui d'absence de diffusion originalement proposée par Anderson dans son célèbre article de 1958 [13], à savoir

$$D(E) = \frac{1}{2d} \lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \frac{\bar{r}^2}{t} \right\rangle = 0, \quad (3.4)$$

où \bar{r} désigne la position moyenne d'un paquet d'onde, d est la dimension de l'espace et $\langle \dots \rangle$ la moyenne sur le désordre. Cette quantité semble naturelle car elle est par exemple liée à la conductivité moyenne du système à travers la relation d'Einstein ($\sigma = e^2 \rho D$ où ρ est la densité d'états). Seulement cette définition est loin d'être "bijective" puisque une constante de diffusion peut a priori être réduite par d'autres phénomènes. D'autre part cette contrainte est moins restrictive que la localisation d'un paquet ($\langle \bar{r}^2 \rangle < ct$) d'onde puisqu'elle ne requiert en fait que la sous diffusion ($\langle \bar{r}^2 \rangle < t$). Une définition plus satisfaisante consiste à imposer que le spectre du système soit discret ("pure point") et que les fonctions d'ondes soient au moins exponentiellement localisées sur une échelle typique L_{loc} . La différence avec des états liés standards réside dans le fait qu'un intervalle d'énergie ΔE peut contenir un nombre infini d'états localisés car ceux-ci ne se recouvrent que très peu.

Une quantité souvent considérée est la probabilité de retour à l'origine, car celle-ci doit être nulle pour un état étendu mais finie pour un état localisé. Celle-ci est définie par

$$P(\vec{r}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt |\langle \vec{r} | \exp(-iHt) | \vec{r} \rangle|^2 = \sum_n |\psi_n(\vec{r})|^4. \quad (3.5)$$

Elle est analogue au nombre de participation \mathcal{P} (participation ratio) défini par

$$\mathcal{P}^{-1}(E) = \sum_i |\psi_E(\vec{r}_i)|^4, \quad (3.6)$$

qui représente le nombre d'états de la base spatiale nécessaires pour construire un état propre d'énergie E . Si ce nombre (\mathcal{P}) est faible cela signifie que l'état en question est localisé.

pas dans une bande interdite.

⁵Notons que le bruit en question n'est pas celui considéré par Landauer. Il s'agit ici d'insister sur le fait qu'une signature non ambiguë de la localisation est à chercher dans les fluctuations du signal et non dans les valeurs moyennes.

Localisation dans un système fermé

Les premières complications commencent à arriver lorsqu'on s'intéresse à un système de taille finie. En particulier le rapport entre la taille du système et la longueur de localisation d'un état d'énergie E devient important. En effet si la taille du système est bien plus faible que la longueur de localisation typique, il devient impossible de faire la distinction entre un état localisé par le désordre et un état lié dû aux conditions aux limites. Cependant, les considérations précédentes restent correctes à condition de faire attention à ce fameux rapport L/L_{loc} .

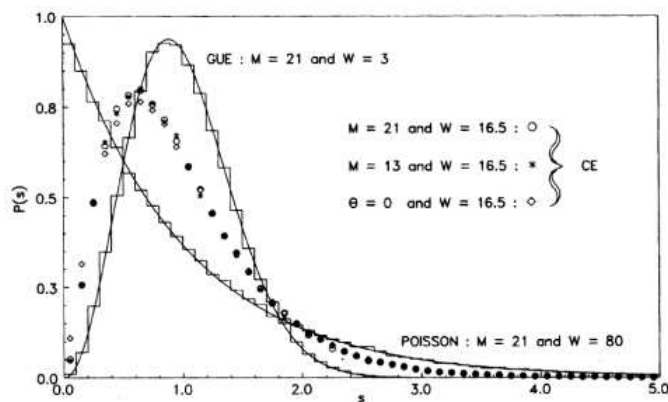


FIG. 3.4 – Distribution des écarts entre les niveaux d'énergie dans le modèle d'Anderson à trois dimensions [85]. Une transition de (3.9) à (3.7) est observée à mesure que l'amplitude du désordre W augmente.

Une autre quantité pour caractériser la localisation, est reliée à l'existence ou non de corrélations spectrales. En effet, on sait que si deux états proches en énergie se recouvrent spatialement alors ils tendent à se repousser (en énergie). Ceci est par exemple à la base de la théorie des bandes en physique du solide où la dégénérescence des niveaux d'énergie est levée par effet tunnel entre les potentiels atomiques identiques [106]. Au contraire, si le recouvrement est négligeable, les niveaux d'énergies sont indépendants les uns des autres et possèdent ainsi les mêmes propriétés statistiques qu'un spectre aléatoire. Une manière quantitative de faire la distinction consiste, par exemple, à regarder la statistique des écarts $s = E_{i+1} - E_i$ entre les niveaux d'énergie. Dans le régime localisé on attend donc une distribution de "Poisson"

$$P(s) = \frac{1}{\Delta} \exp\left(-\frac{s}{\Delta}\right), \quad (3.7)$$

où Δ est l'écart moyen entre les niveaux donné par $1/\rho(E)$ (ρ est la densité d'états.).

Dans le régime étendu, l'écart entre les niveaux est dicté par les symétries globales du système comme la symétrie par renversement du temps par exemple. La théorie des matrices aléatoire conduit à [81]

$$P(s) = \frac{\pi s}{2\Delta^2} \exp\left(-\frac{\pi s^2}{4\Delta^2}\right), \quad (3.8)$$

pour un système symétrique par renversement du temps et

$$P(s) = \frac{32s^2}{\pi\Delta^3} \exp\left(-\frac{4s^2}{\pi\Delta^2}\right), \quad (3.9)$$

sans symétrie par renversement du temps.

Les résultats numériques pour le modèle d'Anderson sont illustrés sur la figure 3.4. Il est clair que (3.8) et (3.9) présentent une répulsion des niveaux d'énergie à travers les termes pré-exponentiels qui annulent $P(s)$ à faible s , ce qui n'est pas le cas de la distribution de Poisson (3.7) dans le régime localisé.

Localisation dans un système ouvert

D'un point de vue expérimental, le cas des systèmes ouverts est évidemment le plus pertinent, d'autant que ni les fonctions d'ondes ni les distributions spectrales ne sont des quantités faciles à mesurer expérimentalement (pour ne pas dire impossible à mesurer dans la plupart des cas). En particulier, dans le cas des systèmes électroniques, qui ont majoritairement été étudiés jusque dans les années 80, ces quantités là étaient innaccessibles et seules des mesures indirectes comme celles de la conductance ont permis d'identifier le phénomène de localisation.

Un système ouvert est caractérisé par, un courant non nul d'une part, et des niveaux d'énergie de largeurs finies d'autre part. Il n'est donc plus pertinent d'étudier le système en termes de son spectre ou de ses fonctions propres puisque ni l'un ni l'autre n'existe à proprement parler. Une bonne manière de caractériser le système est alors de regarder les propriétés de transmission d'une onde à travers lui. Ces propriétés seront discutées en détails dans la partie suivante où la théorie des matrices aléatoires permet d'obtenir des résultats non perturbatifs à une dimension. Ici on se contente de décrire quelques résultats afin de pouvoir clairement exposer la théorie d'échelle de la localisation.

Considérons un système de longueur L et de section finie caractérisé par N canaux de transmission (fonctions d'ondes transverses accessibles à l'énergie considérée). On note l le libre parcours moyen et $L_{loc}(k)$ la longueur de localisation qui dépend de l'énergie. Si l'on dénote par T_{ab} le coefficient de transmission d'un mode a entrant vers un mode b sortant, la conductance totale du système est donnée par la formule de Landauer [53] (Annexe C).

$$G = \frac{2e^2}{h} \sum_{a,b} T_{ab} = \frac{2e^2}{h} g, \quad (3.10)$$

où g est appelée conductance sans dimension.

Dans le régime étendu, le système doit être un bon conducteur et sa conductance doit obéir à la loi d'Ohm usuelle ($G = \sigma \cdot \text{section}/L$). Par contre dans le régime localisé, à la fois la transmission et la conductance décroissent exponentiellement avec L

$$T_{ab} \sim \exp(-L/L_{loc}). \quad (3.11)$$

En pratique ceci n'est pas toujours une mesure claire de la localisation dans le sens où d'autres effets comme l'absorption peuvent conduire aux mêmes conséquences. Une meilleure caractérisation de la localisation demande la connaissance de la distribution complète des coefficients de transmission. Au même titre que pour un système fermé la distribution des valeurs propres est une bonne mesure de la localisation, la distribution des coefficients de transmission (et donc du spectre de la matrice de diffusion) en est une bonne pour les systèmes ouverts.

Dans le régime étendu la distribution des coefficients de transmission est bien connue. On a par exemple la célèbre loi de Rayleigh pour les T_{ab} [74]

$$P(T_{ab}) = \frac{1}{\langle T_{ab} \rangle} \exp\left(-\frac{T_{ab}}{\langle T_{ab} \rangle}\right), \quad (3.12)$$

dont on espère déduire une distribution gaussienne pour les T_a ($\sum_b T_{ab}$) et la conductance. Ceci est bien le cas mais la présence des corrélations fortes entre les canaux de transmission conduit à une variance bien plus grande que prévue⁶ [71]

$$\langle T_a \rangle \sim l/L, \quad \Delta T_a \sim \sqrt{\frac{l}{NL}}, \quad (3.13)$$

et pour la conductance

$$\langle g \rangle \sim Nl/L, \quad \Delta g \simeq 1. \quad (3.14)$$

Cette conductance est bien conforme à la loi d'Ohm mais ses fluctuations ne s'annulent pas à la limite thermodynamique⁷ ($L \rightarrow \infty$). Ce sont les fameuses fluctuations universelles de conductance initialement découvertes par Altshuler [9] et Lee et Stone [114] en 1985.

Par contre, dans le régime localisé, les choses sont à ce jour encore assez obscures. Il semble raisonnable de penser qu'asymptotiquement, c'est à dire pour des longueurs bien plus grandes que toutes échelles microscopiques, la distribution des transmissions devrait aussi converger vers une forme universelle. Reste à savoir de combien de paramètres dépend cette distribution et qu'elle est sa forme analytique. Une idée communément admise, mais qui commence à être remise en question depuis quelques années, est qu'un seul paramètre serait nécessaire pour la spécifier et qu'elle tendrait vers une loi log-normale, que ce soit pour les T_a ou la conductance elle même [155, 185],

$$P(T) = \frac{1}{\sqrt{4\pi T}} \frac{L_{loc}}{L} \exp \left[-\frac{L_{loc}}{4L} \left(\frac{L}{L_{loc}} + \ln T \right)^2 \right], \quad (3.15)$$

où T est ici la transmission totale. Cette distribution prédit des fluctuations très importantes de la conductance ce qui différencie la localisation d'Anderson du phénomène d'absorption par exemple.

$$\langle \ln T \rangle^2 = -2\langle \ln T \rangle = -2L/L_{loc}. \quad (3.16)$$

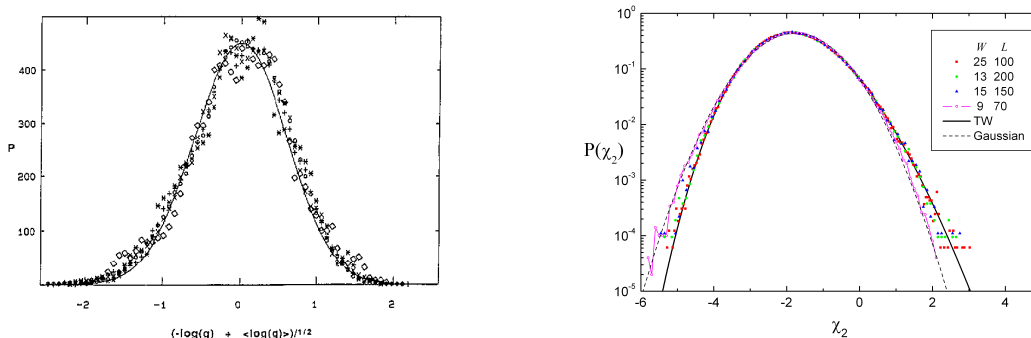


FIG. 3.5 – **À gauche** : distribution du logarithme de la conductance dans le modèle d'Anderson 3d [100] comparée à la loi log-normale (3.15). **À droite** : distribution du logarithme de la conductance pour le modèle d'Anderson 2d [160] pour différentes amplitudes du désordre W et différentes longueurs L en gardant le rapport L/L_{loc} constant. Pour les grandes valeurs du désordre la distribution suit la loi de Tracy-Widom alors que pour le faible désordre la loi log-normale semble être une description satisfaisante.

En réalité il semble que cette distribution universelle ne soit pas fonction d'un seul paramètre mais plutôt de deux [47], ce qui, en anticipant sur la suite, constitue une violation de la théorie d'échelle à un seul paramètre. Celle-ci, que l'on discutera au paragraphe

⁶En négligeant les corrélations, le théorème de la limite centrale donnerait $\Delta T_a = l/(\sqrt{NL})$.

⁷Contrairement au cas d'un conducteur incohérent en $d \leq 3$ [4].

suisant, postule que les propriétés d'un système en présence de désordre, en tout cas ses propriétés moyennes, sont dictées par un seul paramètre, qui est par exemple le rapport entre la taille du système et la longueur de localisation. Des calculs numériques de plus en plus précis ont permis de montrer des déviations importantes à la loi log-normale dans le régime de désordre très fort [169, 160]. Ceci est lié à une différence fondamentale, sur laquelle nous reviendrons en détails au cours du chapitre 6, à savoir la différence d'origine de la localisation quand le désordre est très fort et quand il est modéré. Par très fort on veut dire ici que même classiquement une particule ne pourrait traverser le désordre, alors que désordre modéré signifie que, classiquement, une particule peut se faufiler à travers le désordre mais les effets ondulatoires font que le paquet d'onde s'auto-détruit par interférences. Il est clair que dans les deux cas la transmission va décroître exponentiellement sur une échelle de longueur que l'on peut définir comme la longueur de localisation, mais l'origine étant différente on peut suspecter que la distribution sera différente. Le rapport L/L_{loc} n'est alors plus suffisant pour décrire l'universalité et un autre paramètre doit être introduit comme le rapport entre l'énergie cinétique et l'amplitude du désordre par exemple. Bien entendu, dans la limite de désordre faible on retrouve l'universalité en fonction d'un seul paramètre.

Le régime de désordre très fort a été étudié à deux dimensions récemment [169, 160] et mis en relation avec un problème de polymères dirigés. Une conclusion importante de ce travail est que, dans ce régime, la transmission est dominée par un seul chemin, rendant ainsi les effets d'interférences secondaires. La distribution de la conductance est alors donnée par la distribution d'extrêmes corrélés de type Tracy-Widom [184] (figure 3.5).

3.1.4 Loi d'échelle et transition métal-isolant

Un pas très important dans la compréhension de la localisation fut le développement de la théorie d'échelle, essentiellement par le "gang des 4" (Abrahams, Anderson, Licciardello et Ramakrishnan), en 1979, inspiré des idées de Thouless [60, 179]. Cette théorie phénoménologique repose sur une interpolation entre un conducteur et un isolant lors d'une transformation d'échelle. Bien que très simpliste, puisqu'elle ne considère que le comportement moyen de la conductance et néglige totalement les fluctuations, elle prédit tout de même qu'une transition métal-isolant, due au désordre, n'est possible qu'en dimension strictement supérieure à deux (en l'absence d'interaction spin-orbite).

Critère de Thouless

L'histoire de la théorie d'échelle a donc commencé vers le milieu des années soixante dix à travers les travaux de Thouless et collaborateurs [178]. L'idée était d'essayer de construire les états propres d'un système (s2) désordonné de taille $(2L)^d$ en fonction du même système (s1) de taille L^d , ce qui semble a priori raisonnable. Une chose moins évidente était de comprendre combien de paramètres sont nécessaires pour faire ce passage. Tout d'abord, il est clair que les états du système (s2) peuvent être écrits comme des combinaisons linéaires du système (s1) et le degré de mélange des niveaux dépend a priori des intégrales de recouvrement et de dénominateurs contenant les écarts entre les niveaux d'énergie (théorie des perturbations sur les états). Ce dernier est en gros donné par l'écart moyen entre les niveaux, à savoir $\Delta E = (\nu(E)L^d)^{-1}$ où $\nu(E)$ est la densité d'états par unité de volume. Afin d'estimer l'autre ingrédient, à savoir les intégrales de recouvrement, Thouless a utilisé une astuce intéressante, à savoir la dépendance en énergie d'un état face à un changement de conditions aux limites. En refermant sur lui même un échantillon de taille L^d , les niveaux d'énergie se déplacent en fonction des

conditions aux limites et forment désormais des bandes d'énergies⁸. La largeur de bande ΔE est obtenue en comparant les énergies avec conditions périodique et anti-périodique. Celle-ci est une bonne mesure de l'intégrale de recouvrement entre les états des deux sous systèmes de taille L^d dans la mesure où si un état est localisé il est alors très peu sensible aux conditions de bords (exponentiellement faible) alors qu'un état délocalisé l'est fortement. En rassemblant les pièces du puzzle on voit que le seul paramètre qui dicte la nature des états propres lors de cette transformation est bien le rapport $\delta E/\Delta E$. Pour des états localisés du système (s1) de taille L^d , celui-ci est exponentiellement faible. Ainsi, après transformation d'échelle, un état localisé de (s1) donnera en gros naissance à 2 états propres localisés, chacun dans leur boîte respective, puisque leur couplage est faible. Par contre dans le cas d'états étendus ce rapport est fort il n'y a donc aucune raison que les états ne se délocalisent pas sur l'ensemble du système.

Thouless remarqua d'autre part que cet unique paramètre d'échelle est intimement lié à la conductance du système par la relation

$$G = \sigma L^{d-2} = \alpha \frac{e^2}{h} \frac{\delta E}{\Delta E} = \alpha \frac{e^2}{h} g, \quad (3.17)$$

ce qui semble logique dans la mesure où les états localisés conduisent très mal le courant. Dans cette expression, α est un nombre proche de un qui dépend du modèle considéré et g est appelée *conductance sans dimension* où encore *nombre de Thouless* et caractérise les états propres du système.

Notons que l'on peut interpréter ce nombre de Thouless d'une manière légèrement différente. Considérons un système ouvert de longueur $L \gg l$ dans le régime étendu. Par diffusion, une onde mettra un temps typique L^2/D pour traverser le système. À cette échelle de temps correspond une échelle d'énergie $\delta E = \hbar D/L^2$ ($D = kl$) appelée *énergie de Thouless*. Une autre échelle de temps est celle fixée par l'écart entre les niveaux d'énergie à savoir $\hbar/\Delta E$ qui est appelée temps de Heisenberg. Celui-ci représente le temps nécessaire à un système pour explorer les détails de son spectre au cours de la dynamique quantique. Le rapport de ces deux énergies redonne bien le nombre de Thouless g . $g \ll 1$ correspond au fait que le temps nécessaire à traverser le système est bien plus grand que le temps de Heisenberg. Le système peut alors réaliser que son spectre est discret et que les états sont localisés. La diffusion ne peut donc plus être supportée par les états propres puisque en gros un seul état participe et celui-ci est localisé. Encore une fois ceci met en avant la nature quantique de la localisation puisqu'elle est liée à la nature discrète du spectre.

Enfin, le critère de localisation de Thouless s'écrit $g = 1$.

Evolution de la conductance lors d'une transformation d'échelle

Nous avons donc maintenant tous les éléments pour comprendre la théorie d'échelle telle qu'elle a été formulée par le gang des quatres en 1979 [1].

La question posée par cette théorie est de connaître l'évolution de la conductance d'un système lors d'une transformation d'échelle en dimension d . On considère alors un système de taille L^d avec $L \gg l$, le libre parcours moyen, afin de pouvoir oublier les détails microscopiques du problème.

L'idée centrale est de faire une interpolation entre un bon conducteur et un isolant d'Anderson. Dans le premier cas on s'attend à observer la loi d'Ohm usuelle pour la conductance

⁸Tout comme dans un potentiel périodique on a des bandes d'énergies en fonction du vecteur d'onde de Bloch qui paramétrise les conditions de bords à l'échelle d'un pas du réseau. À une dimension on a par exemple $\psi(x+a) = \psi(x)e^{ika}$ où a est la périodicité de la chaîne.

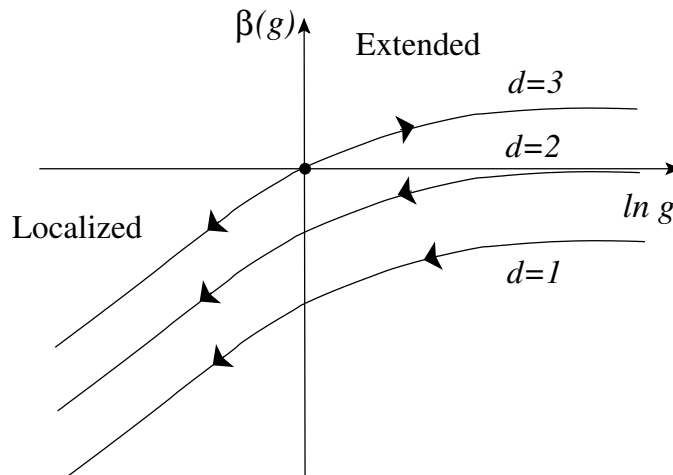


FIG. 3.6 – Fonction $\beta(g)$ en dimension $d = 1, 2$ et 3 . En dimension $d > 2$ il existe un point critique à $\beta = 0$. Les flèches représentent le flot lors d'une transformation d'échelle.

$$g(L) = \sigma L^{d-2}, \quad (3.18)$$

alors que dans l'autre la conductance devrait décroître exponentiellement avec L

$$g(L) \sim \exp(-L/L_{loc}). \quad (3.19)$$

En se basant sur ces relations (et aussi sur (3.17)) on peut remarquer la chose suivante. Dans le régime étendu, augmenter L ne conduit pas vers le régime localisé, à part en dimension un, mais dans tous les cas la conductance du système de taille $2L$ peut clairement être déduite de celle du système de taille L . Dans le régime localisé, la même remarque est valable et le système va de plus en plus vers le régime localisé. En d'autres termes, la conductance, lors d'une transformation d'échelle, semble dépendre essentiellement d'elle-même et de la taille du système. Ceci constitue la première hypothèse fondamentale de la théorie d'échelle et est strictement équivalente à dire que l'évolution de la conductance ne dépend que de L/L_{loc} . Formellement on écrit

$$g(nL) = f(n, g(L)), \quad (3.20)$$

ou encore

$$\frac{d \ln g}{d \ln L} = \beta(g), \quad (3.21)$$

où β est obtenue de la sorte

$$\frac{d \ln g}{d \ln L} = \frac{L}{g} \frac{dg}{dL} = \frac{L}{g} \frac{dg(nL)}{dL} \Big|_{n=1} = \frac{1}{g} \frac{dg(nL)}{dn} \Big|_{n=1} = \frac{L}{g} \frac{df(n, g)}{dn} \Big|_{n=1} = \beta(g). \quad (3.22)$$

La seconde hypothèse fondamentale de la théorie suppose que β est une fonction lisse qui interpole de manière monotone entre les deux régimes

$$\beta(g) = \begin{cases} d-2 & g \gg g_c \\ \ln g & g \ll g_c \end{cases}, \quad (3.23)$$

où g_c est donné par $\beta(g_c) = 0$ et correspond au point fixe instable entre régime localisé et étendu. La figure 3.6 résume la situation selon la dimension spatiale. En dimension un,

le système est toujours dans le régime localisé alors qu'en dimension trois une transition existe pour une valeur critique de la conductance. La dimension deux apparaît comme le cas marginal où le système est localisé mais avec une longueur de localisation a priori extrêmement grande.

Notons enfin que même si cette théorie n'a jusqu'à présent aucune justification rigoureuse, elle est confortée par de nombreux calculs numériques [127] et analytiques [15, 2, 76, 190] à ce jour. Elle semble, cela dit, incomplète en ce qui concerne la description des fluctuations.

3.2 Localisation à une dimension

Après avoir discuté la physique de la localisation de manière générale, on a pu constater le rôle important joué par la dimensionnalité de l'espace. Ici on se propose de regarder quelques particularités de la dimension un, puisqu'elle constitue le cadre de cette thèse.

Certains pensent que la localisation à une dimension n'est pas intéressante et que seul le comportement critique de la transition d'Anderson en dimension trois est digne d'intérêt. Evidemment c'est un avis que je ne partage pas. L'existence d'une localisation interdite classiquement est en soit un phénomène non trivial et qui n'est a priori pas encore complètement compris. En particulier des problèmes tels que l'effet des interactions ou encore la nature du potentiel désordonné, à savoir ses corrélations, le fait qu'il soit borné ou pas, le degré de pseudo-aléatoire etc... sont des problèmes non triviaux dont les réponses dépendent probablement de la dimensionnalité. On sait déjà par exemple, que les interactions entre particules sont très différentes selon la dimensionnalité et en particulier en dimension un où la théorie des liquides de Fermi n'est plus correcte. C'est en ce sens que l'étude de la localisation, quelle que soit la dimension considérée, me semble digne d'intérêt. Bien sûr l'avantage du cas unidimensionnel, ou quasi-unidimensionnel, réside dans sa simplicité et ceci tant d'un point de vu numérique, qu'analytique ou expérimental. Les effets d'interférences et d'interactions y sont aussi les plus forts, c'est pourquoi il semble pertinent de commencer par regarder ce cas avec intérêt.

L'objectif de cette partie n'est évident pas de donner une description exhaustive de tout ce qui est connu en terme de localisation à une dimension. On renvoie le lecteur à d'autres documents comme le livre de Lifshits, Gredeskul et Pastur [18, 118] ou la revue de Beenakker sur les matrices aléatoires et le transport quantique [27] par exemples.

3.2.1 Équation DMPK

En 1980, Anderson *et al* ont proposé une nouvelle théorie d'échelle [16] basée sur une relation plus précise entre la conductance et la matrice de diffusion d'un système ouvert [108, 109]. Ils considéraient un système unidimensionnel dans la limite de faible désordre ($k_F l \gg 1$) et ont calculé comment le coefficient de transmission T et donc la conductance $G = 2e^2 T/h$ changent avec la taille L de la chaîne. Pour $L > l$ ils ont obtenu une décroissance exponentielle de la transmission moyenne mettant ainsi en évidence la localisation dans ce système. Notons par ailleurs que dans ce cas la longueur de localisation peut être identifiée au libre parcours moyen l . Les années suivantes ont ensuite connues le développement détaillé d'une théorie d'échelle pour les systèmes 1D [3, 134, 97, 101, 131] permettant la connaissance de la distribution complète de la transmission $P(T, L)$ et pas seulement sa valeur moyenne (restreint au régime de faible désordre toutefois).

Un métal réel n'est évidemment pas unidimensionnel. Typiquement son extension transverse finie W peut conduire à un transport multi-modes, c'est à dire que différents

canaux (fonctions d'ondes transverses) de transmission peuvent être empruntés. Ce nombre de canaux est typiquement donné par le rapport entre la section W et la longueur d'onde des porteurs (λ_F pour les électrons, $N \sim (W/\lambda_F)^{d-1}$). La matrice de transmission possède alors N valeurs propres T_n et la conductance totale est donnée par $G = (2e^2/h) \sum_n T_n$. Les choses se compliquent désormais à cause du recouvrement non nul des différents canaux de transmission qui conduit à des corrélations entre les différents coefficients de transmission. La quantité à déterminer est alors la distribution jointe des transmissions $P(T_1, T_2, \dots, T_N; L)$. D'autre part, une conséquence importante de ces corrélations est l'augmentation de la longueur qui devient $L_{loc} \simeq Nl$ [179]. Dans ce cas, on peut alors distinguer un régime métallique d'un régime isolant selon la valeur de L . En effet pour $l \ll L \ll Nl$ la conductance décroît linéairement avec L comme prédit par la loi d'Ohm. Ce régime est appelé *régime diffusif* alors que le *régime localisé* ($L \geq Nl$) est caractérisé par une conductance exponentiellement faible.

La théorie d'échelle d'un système multi-modes a fait ses débuts après les travaux pionniers de Dorokhov [58] et Mello, Pereyra et Kumar [132] qui ont obtenu indépendamment une équation de Fokker-Planck (équation DMPK) décrivant l'évolution de $P(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N; L)$ (où $\lambda_i = (1 - T_i)/T_i$) lors d'une transformation d'échelle (unidimensionnelle)

$$l \frac{\partial P}{\partial L} = \frac{2}{\beta N + 2 - \beta} \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial \lambda_n} \lambda_n (1 + \lambda_n) J \frac{\partial P}{\partial \lambda_n} J. \quad (3.24)$$

avec

$$J = \prod_{i=1}^N \prod_{j=i+1}^N |\lambda_j - \lambda_i|^\beta, \quad (3.25)$$

et $\beta = 1, 2$ selon que la symétrie par renversement du temps est satisfaite ou non. Nous ne donnerons pas de dérivation de cette équation ici et renvoyons le lecteur à la revue de Beenakker [27] pour plus de détails. Notons cela dit son cadre de validité, à savoir le régime de faible diffusion ($kl \gg 1$) et de transport quasi-unidimensionnel ($L \gg W$). Dans le cas $\beta = 2$ elle a été résolue exactement par Beenakker et Rejaei en 1993 [29, 28] via une analogie avec un système de fermions libres.

Régime métallique $L \ll Nl$

Dans le régime métallique ($L \ll Nl$) la conductance est supposée décroître linéairement avec la longueur L du système conformément à la loi d'Ohm usuelle. En effet, l'équation DMPK (3.24) permet de calculer la conductance moyenne qui s'écrit à l'ordre dominant en N [27]

$$\langle G \rangle = \frac{2e^2}{h} N (1 + L/l)^{-1}. \quad (3.26)$$

Dans le régime diffusif ($L \gg l$) on a donc $\langle G \rangle \sim Nl/L$ comme attendu, alors que dans le régime ballistique ($L \ll l$) la conductance tend vers la conductance de contact entre le fil et les réservoirs $\langle G/G_0 \rangle \rightarrow N$ où $G_0 = 2e^2/h$ est le quantum de conductance.

Les ordres suivants du développement permettent de calculer les corrections de localisation faible

$$\text{Var } G/G_0 = \frac{2}{15} \beta^{-1} \left(1 - \frac{1 + 6L/l}{(1 + L/l)^6} \right) + \mathcal{O}(N^{-1}), \quad (3.27)$$

qui, dans la limite diffusive, se réduisent à $\text{Var } G/G_0 = \frac{2}{15} \beta^{-1}$ soit exactement la valeur obtenue par des développements diagrammatiques [9, 114, 133].

Régime localisé $L \geq Nl$

On vient de voir que dans le régime métallique les fluctuations de conductance sont faibles par rapport à la conductance typique (facteur L/Nl) et donc que chaque échantillon est relativement représentatif de la moyenne d'ensemble. Par contre, à mesure que L augmente et dépasse $L_{loc} \simeq Nl$, le système entre dans le régime localisé et les fluctuations de conductance deviennent aussi importantes que la conductance elle-même. La distribution de la conductance $P(G)$ devient ainsi très large et très asymétrique avec une longue queue vers les faibles valeurs de G .

Dans la limite $L \gg Nl$ la distribution de la conductance converge vers une loi log-normale (on rappelle que cette équation est valide dans le régime de désordre modéré) dont la moyenne et la variance peuvent être déduites directement de l'équation DMPK (3.24)

$$-\langle \ln(G/G_0) \rangle = \frac{1}{2} \text{Var} [\ln(G/G_0)] = 2L/L_{loc}, \quad (3.28)$$

avec $L_{loc} = (\beta N + 2 - \beta)l$.

De plus si le nombre de canaux est très grand ($N \gg 1$), $L_{loc} \simeq \beta Nl$ est directement proportionnelle au facteur de symétrie β . La distribution log-normale de la conductance, ainsi que ce facteur β ont été testés numériquement par Pichard [154] comme illustré sur la figure 3.7.

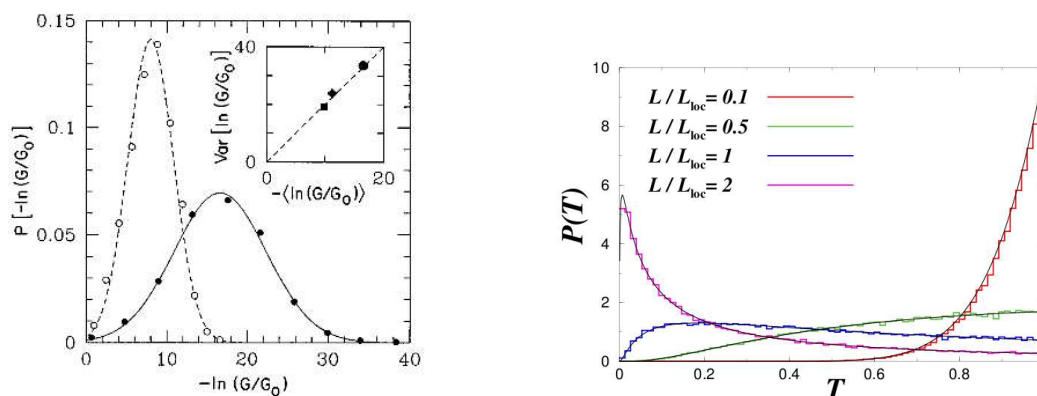


FIG. 3.7 – À gauche : distribution de $-\ln(G/G_0)$ pour le modèle d'Anderson quasi 1d (10x250 sites). Les points pleins correspondent à la situation sans champ magnétique et donc avec symétrie par renversement du temps tandis que les points creux sont ceux en présence de champ magnétique. Les courbes continues sont des gaussiennes avec les paramètres donnés par l'équation (3.28). À droite : distribution de la transmission dans le cas du modèle d'Anderson 1d continu en présence d'un potentiel de type (3.34) pour différents rapports L/L_{loc} pour un désordre faible. Les lignes continues sont les prédictions de l'équation DMPK monomode (3.29). À mesure que L augmente la distribution tend vers une loi log-normale.

Cas monomode $N = 1$

Dans le cas strictement 1D le transport est monomode ($N = 1$). Le Jacobien J contenant toutes les corrélations est alors égal à 1 et l'équation DMPK (3.24) se réduit à

$$l \frac{\partial P}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \lambda(1 + \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} P, \quad (3.29)$$

qui est indépendante de la symétrie par renversement du temps. Cette équation est apparue pour la première fois dans la littérature en 1959 dans le contexte des ondes

électromagnétiques [72]. Cet article, contenant beaucoup de résultats redécouverts dans les années 1980 dans le contexte du transport électronique, est malheureusement resté longtemps inaperçu pour cette communauté.

$$P(\lambda, t) = \frac{e^{-t/4}}{\sqrt{2\pi t}} \int_{u_\lambda}^{+\infty} \frac{ue^{-u^2/4t}}{\sqrt{\cosh(u) - 1 - 2\lambda}}, \quad (3.30)$$

avec $u_\lambda = \cosh^{-1}(1 + 2\lambda)$ et $t = L/L_{loc}$. Ce régime est un peu particulier dans la mesure où le régime diffusif n'existe pas. C'est le cas que l'on étudiera en détails dans le chapitre 5 à propos de la localisation d'un faisceau d'atomes condensés dans un potentiel aléatoire.

Notons encore une fois que dans ce cas la longueur de localisation peut être identifiée au libre parcours moyen. D'autre part, la distribution (3.30) possède deux limites simples.

$$P(T, t) = \exp(-(1 - T)/t)/t \quad (3.31)$$

dans le régime ballistique ($t \ll 1$) et

$$P(\ln T, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp[-(t + \ln T)/4t], \quad (3.32)$$

dans le régime localisé profondément $t \gg 1$.

3.2.2 Modèles de désordre

Le désordre est l'état naturel du monde, la forme organisée y est l'exception.

Jacques Attali.

Jusqu'à présent nous avons gardé la discussion à un niveau le plus général possible sans jamais préciser à quel modèle de désordre on avait affaire. On se propose, ici, de décrire quelques modèles de désordre, avec ou sans corrélations, que l'on réutilisera par la suite pour des calculs explicites.

De manière générale, on modélise le désordre à une dimension par un potentiel extérieur $U(x)$ possédant certaines propriétés statistiques. La donnée de la distribution complète de cette fonction aléatoire ne sera pas utile par la suite et seules quelques propriétés comme sa valeur moyenne $\langle U(x) \rangle$, sa distribution locale $P(U)$, ou encore la fonction de corrélation à deux points $\langle U(x)U(x') \rangle$ nous seront suffisantes. D'autre part, on ne considèrera que des potentiels aléatoires de longueur finie L dans la mesure où l'on s'intéresse essentiellement aux propriétés de transmission d'une onde à travers une région désordonnée de taille L . L'équation d'onde correspondante est l'équation de Schrödinger

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + U(x)\psi(x). \quad (3.33)$$

Potentiel d'impuretés δ

Considérons une série d'impuretés de la forme

$$U_\delta(x) = \frac{\hbar^2}{mb} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i). \quad (3.34)$$

L'intensité des pics est mesurée par la quantité non aléatoire b tandis que les positions x_n des centres diffuseurs sont tirées au hasard de manière uniforme et décorrélée sur l'intervalle $[0, L]$. La densité d'impuretés est alors $n_\delta = N/L$ et l'écart typique entre les impuretés est $1/n_\delta$.

La valeur moyenne du désordre est

$$\langle U_\delta(x) \rangle = \frac{\hbar^2 n_\delta}{m b}, \quad (3.35)$$

et la fonction de corrélation

$$\langle U_\delta(x) U_\delta(x') \rangle - \langle U_\delta \rangle^2 = \sigma (\hbar^2/m)^2 \delta(x - x'), \quad (3.36)$$

où

$$\sigma = \frac{n_\delta}{b^2}. \quad (3.37)$$

Processus gaussien corrélé

Un autre modèle couramment utilisé est le processus gaussien de moyenne nul (gaussien signifie ici, comme on le verra un peu plus loin, que les fluctuations locales du désordre sont gaussiennes). Ce type de désordre corrélé peut être généré en convoluant un bruit blanc $\eta(x)$, $\langle \eta(x)\eta(y) \rangle = \delta(x - y)$, avec une fonction $w(x)$ d'extension finie.

$$U_g(x) = \frac{\hbar^2 \sqrt{\sigma}}{m} \int_0^L w(x - y) \eta(y) dy, \quad (3.38)$$

où σ est un paramètre caractéristique du désordre dont la signification précise va être explicitée plus tard. Si w était une distribution delta alors U_g serait un bruit blanc gaussien étendu sur $[0, L]$. Par contre, en utilisant une fonction $w(x)$ de largeur finie, on introduit des corrélations.

À partir de (3.38) il est clair que $\langle U_g \rangle = 0$. Si le domaine d'intégration était infini on aurait strictement une distribution gaussienne pour U_g

$$\mathcal{P}(U_g) = \frac{\exp[-\frac{U_g^2}{2\Sigma^2}]}{\sqrt{2\pi\Sigma^2}}, \quad (3.39)$$

où

$$\Sigma^2 = \sigma (\hbar^2/m)^2 \int_{\mathbb{R}} w^2(x) dx. \quad (3.40)$$

En définissant la fonction de corrélation C par

$$\langle U_g(x) U_g(x') \rangle - \langle U_g \rangle^2 = \sigma (\hbar^2/m)^2 C(x - x'), \quad (3.41)$$

on obtient

$$C(x) = \int_{\mathbb{R}} dy w(x + y) w(y), \quad (3.42)$$

qui a pour transformée de Fourier

$$\hat{C}(q) = \int_{\mathbb{R}} dx C(x) e^{-iqx} = |\hat{w}(q)|^2, \quad (3.43)$$

où \hat{w} est la transformée de Fourier de w .

En imposant la condition de normalisation suivante

$$\int_{\mathbb{R}} w(x) dx = 1, \quad (3.44)$$

cela donne une fonction de corrélation (3.41) qui est, comme pour (3.36), de la forme $\sigma (\hbar^2/m)^2$ multiplié par une fonction d'intégrale unité ($C(x)$ dans (3.41) à la place de $\delta(x)$ dans (3.36)). Ainsi avec la définition (3.38) et la normalisation (3.44), σ joue, pour le

désordre (3.38), le même rôle que n_δ/b^2 pour le désordre (3.34). Il caractérise l'amplitude des fluctuations locales du potentiel tandis que l'extension typique de $w(x)$ caractérise les corrélations du désordre.

On peut considérer deux exemples de corrélations pour illustrer nos propos.

Prenons par exemple $w(x)$ de forme lorentzienne

$$w_L(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\ell_c/2}{(\ell_c/2)^2 + x^2}, \quad (3.45)$$

ou gaussienne

$$w_G(x) = \frac{1}{\ell_c \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{\ell_c^2}\right). \quad (3.46)$$

et on note les potentiels correspondants U_L et U_G . Pour les fonctions de corrélation on obtient respectivement

$$C_L(x) = \frac{\ell_c/\pi}{\ell_c^2 + x^2}, \quad \hat{C}_L(q) = e^{-\ell_c|q|}, \quad (3.47)$$

et

$$C_G(x) = \frac{e^{-x^2/(2\ell_c^2)}}{\sqrt{2\pi}\ell_c^2}, \quad \hat{C}_G(q) = e^{-q^2\ell_c^2/2}. \quad (3.48)$$

Dans les deux cas ℓ_c est la longueur de corrélation typique.

Le choix de corrélations lorentziennes provient de résultats expérimentaux et théoriques dans le cadre de guides d'ondes microscopiques sur des puces atomiques. Dans ce genre de situations, des atomes froids sont guidés magnétiquement sur une puce [69]. Le désordre provient des fluctuations du champ magnétique, elles mêmes originaires des fluctuations du courant à l'origine de ce champ. Ce désordre est typiquement corrélé de manière lorentzienne avec une longueur de corrélation qui décroît avec la distance entre le guide magnétique et la puce [98, 177, 188, 146]. Les corrélations gaussiennes semblent plus académiques mais en les comparant au cas lorentzien cela permet de différencier ce qui est spécifique aux corrélations lorentziennes des propriétés générales induites par les corrélations.

Champ de tavelure (speckle)

Un autre type de désordre extrêmement important du point de vu expérimental, dans le contexte des atomes froids, est le potentiel de tavelure (speckle). Celui-ci est un potentiel optique créé par un laser illuminant un verre dépoli [75, 176, 64]. Le potentiel U_S agissant sur les atomes (interaction lumière-matière) peut être mathématiquement généré de la sorte

$$U_S(x) = \frac{\hbar^2 \sqrt{\sigma}}{m} \left| \int_0^L w_S(x-y) [\eta_1(y) + i\eta_2(y)] dy \right|^2, \quad (3.49)$$

où η_1 et η_2 sont deux bruits blancs gaussien indépendants de moyennes nulles avec $\langle \eta_\alpha(x) \eta_{\alpha'}(x') \rangle = \delta(x-x') \delta_{\alpha\alpha'}$ (α and $\alpha' = 1$ or 2).

On obtient ainsi

$$\mathcal{P}(U_S) = \frac{\exp(-\frac{U_S}{2\Sigma^2})}{2\Sigma^2}, \quad (3.50)$$

où Σ est donné par (3.40) (en remplaçant w par w_S). Cela donne $\langle U_S \rangle = 2\Sigma^2$ et pour la fonction de corrélation

$$\begin{aligned} C_S(x-x') &= \frac{1}{\sigma(\hbar^2/m)^2} [\langle U_S(x)U_S(x') \rangle - \langle U_S \rangle^2] \\ &= 4 \left[\int_{\mathbb{R}} dy w_S(x-x'+y)w_S(y) \right]^2. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Contrairement au choix (3.44), w_s ne peut pas être choisie d'intégrale unité car à cause de (3.49) c'est impossible au niveau dimensionnel. À la place on choisit

$$w_s(x) = \left(\frac{\ell_c}{4\pi^3} \right)^{1/4} \frac{\sin(\frac{x}{\ell_c})}{x}, \quad (3.52)$$

qui correspond à la plupart des situations expérimentales [176] et donne la fonction de corrélation

$$C_s(x) = \frac{\ell_c}{\pi} \frac{\sin^2(\frac{x}{\ell_c})}{x^2}, \quad (3.53)$$

dont l'intégrale est unité et la transformée de Fourier est

$$\hat{C}_s(q) = \begin{cases} 1 - |q| \ell_c/2 & \text{if } |q| \ell_c < 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.54)$$

3.2.3 Formalisme de phase

Une technique très utile pour calculer un certain nombre de quantités à une dimension est le formalisme de phase. Cette théorie des perturbations sur la phase a été initialement développée par Benderskii et Pastur [30] pour calculer la densité d'états intégrée en énergie d'une particule dans un potentiel aléatoire continu à 1d, puis généralisée pour un modèle sur réseau avec désordre corrélé par Izrailev [92]. Une description détaillée de cette technique peut être trouvée dans [18] par exemple.

Ici on va utiliser ce formalisme pour calculer la longueur de localisation à haute énergie et discuter en particulier comment celle-ci dépend des corrélations du désordre.

On considère alors l'équation de Schrödinger (3.33) à une particule dans un potentiel aléatoire $U(z)$. On pose d'autre part $E = \hbar^2 k^2/2m$, ainsi que

$$\begin{cases} \psi(z) &= r(z) \sin \theta(z) \\ \psi'(z) &= kr(z) \cos \theta(z) \end{cases}, \quad (3.55)$$

où $r(z)$ et $\theta(z)$ représentent l'amplitude et la phase de la fonction d'onde. En insérant ces relations dans l'équation de Schrödinger on obtient un système de deux équations couplées

$$\theta'(z) = k - \frac{2mU(z)}{\hbar^2 k} \sin^2 \theta(z) \quad (3.56)$$

$$\ln[r(z)/r(0)] = \int_0^z dt \frac{mU(t)}{\hbar^2 k} \sin[2\theta(z)]. \quad (3.57)$$

L'équation (3.56) ne dépend que de θ et peut être résolue perturbativement dans la limite de haute énergie $E \gg U(z)$ en posant $\theta(z) = \theta_0 + kz + \delta\theta(z)$

$$\theta(z) \simeq \theta_0 + kz - \int_0^z dt \frac{2mU(z)}{\hbar^2 k} \sin^2 \theta(z). \quad (3.58)$$

Enfin, l'exposant de Lyapunov ou inverse de la longueur de localisation est définie par⁹

⁹Le facteur 1/2 dans (3.59) n'est pas traditionnel. On choisit cette définition car on préfère travailler avec le coefficient de transmission plutôt que la fonction d'onde. En effet, si $\psi(z) \sim e^{-\gamma|z|/2}$ alors $T = |t|^2 \sim e^{-\gamma|z|}$.

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \langle \ln[r(z)/r(0)] \rangle = \frac{1}{2} \gamma(k) |z| = \frac{|z|}{2L_{loc}}, \quad (3.59)$$

soit en injectant (3.58) dans (3.57) et en supposant que la fonction de corrélation du désordre $\langle U(z)U(z') \rangle$ est paire et invariante par translation on obtient

$$\gamma(k) = \frac{m^2}{\hbar^4 k^2} \int dz e^{2ikz} C(z) = \frac{m^2}{\hbar^4 k^2} \hat{C}(2k), \quad (3.60)$$

où $C(z) = \langle U(z)U(0) \rangle$ est la fonction de corrélation du désordre et \hat{C} sa transformée de Fourier.

Notons que la solution (3.59) correspond à une fonction d'onde exponentiellement croissante. En principe, une solution de l'équation de Schrödinger (3.33) combine des exponentielles croissante et décroissante dont les coefficients sont déduits des conditions aux limites. Ici, dans la mesure où aucune condition aux limites n'est imposée, seule la solution exponentiellement croissante survit à l'infini.

La formule (3.60), parfois appelée formule de Antsygina, Pastur et Slyusarev, permet donc de déterminer la longueur de localisation à haute énergie, *ie* là où l'effet du désordre est finalement le moins trivial puisqu'il localise une particule alors que classiquement celle-ci pourrait traverser le désordre sans la moindre difficulté. Elle montre également que celle-ci décroît avec l'énergie, croît avec le désordre et dépend des corrélations du désordre plutôt que de ses fluctuations locales. En particulier elle prédit que si la transformée de Fourier de la fonction de corrélation s'annule pour certains vecteurs d'ondes, alors la longueur de localisation diverge. Ce phénomène, parfois appelé "bord de mobilité effectif" ("effective mobility edge") [166, 92], n'est en fait qu'un artefact de l'approche perturbative car à une dimension tous les états sont localisés. En effet un développement aux ordres suivants apporte des corrections non nulles à l'exposant de Lyapunov (qui peuvent éventuellement conduire à une cascade de bords de mobilité effectifs) [175, 80, 123] rendant ainsi la longueur de localisation finie. Bien sûr, d'un point de vu pratique, si cette longueur est bien plus grande que la taille du système les effets de localisation sont presque inexistantes.

Enfin pour compléter cette discussion nous reportons la formule équivalente à (3.60) dans le cas d'un modèle unidimensionnel sur réseau de la forme

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} = (E + \epsilon_n) \psi_n. \quad (3.61)$$

Dans ce cas l'exposant de Lyapunov a été calculé dans [92] et s'écrit

$$\gamma = \frac{\epsilon_0^2 \varphi(\mu)}{8 \sin^2 \mu}, \quad (3.62)$$

avec $E = 2 \cos \mu$, $\langle \epsilon_n \epsilon_{n-k} \rangle = \epsilon_0^2 \xi(k)$ et

$$\varphi(\mu) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \xi(k) \cos(2\mu k). \quad (3.63)$$

3.3 Expériences

3.3.1 Transport par effet tunnel dans les semi-conducteurs amorphes

Une des conséquences dramatiques de l'existence d'états localisés est, comme on l'a discuté précédemment, l'inhibition du transport, du moins à température nulle. Dès que l'on branche la température les choses se compliquent au sein d'un solide. En particulier

les vibrations du réseau peuvent désormais assister le transport par effet tunnel entre états localisés suffisamment proches spatialement et énergétiquement (la différence d'énergie étant compensée par les phonons du réseau).

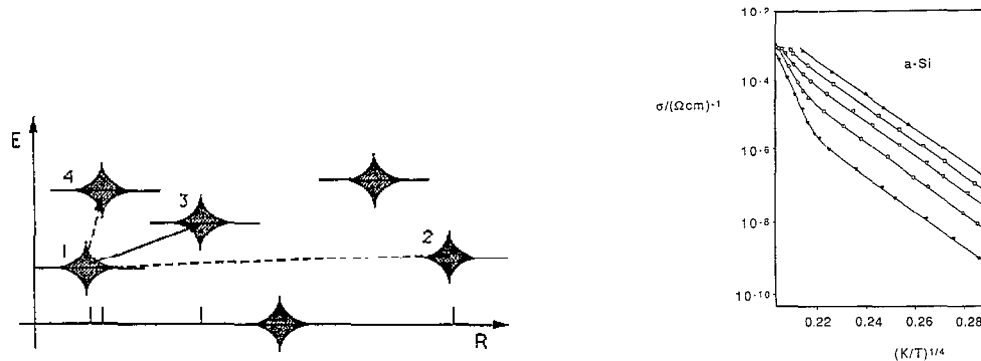


FIG. 3.8 – À gauche : transport par effet tunnel entre états localisés assisté par les phonons du réseau. À droite : résultats expérimentaux sur la conductivité en fonction de la température pour le silicium [31].

Ceci conduit à une dépendance en température de la conductivité tout à fait particulière et connue sous le nom de loi de Mott [140]

$$\sigma = \sigma_0 \exp[-(T_0/T)^{1/4}]. \tag{3.64}$$

La figure 3.8 montre une illustration du transport entre états localisés par effet tunnel ainsi que les résultats expérimentaux de Beyer *et al* sur le silicium [31]. Pour plus de détails le lecteur peut consulter la revue de Kramer et MacKinnon par exemple [99].

3.3.2 Transition d'Anderson

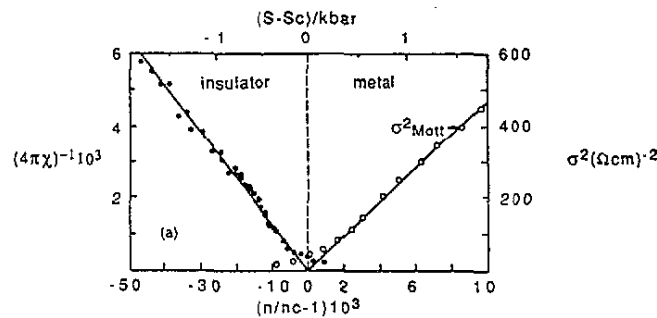


FIG. 3.9 – Résultats expérimentaux [143] sur la conductivité (échelle de droite) et l'inverse de la susceptibilité diélectrique (échelle de gauche) en fonction de la densité de dopants renormalisée pour un semi-conducteur de silicium dopé Si :P.

Le graal expérimental de la localisation est bien entendu l'observation de la transition d'Anderson en dimension 3. Beaucoup d'expériences se sont penchées sur ce problème et encore une fois le but de cette partie n'est pas d'en faire une description exhaustive. On a déjà discuté précédemment l'existence d'un bord de mobilité à trois dimensions, c'est à dire l'existence d'une valeur critique du désordre ou encore de l'énergie de Fermi, pour que le système soit isolant. La figure 3.9 montre les résultats expérimentaux de Paalanen et Thomas [143] sur le silicium dopé où l'énergie de Fermi est changée en variant

la concentration de dopants. Ces résultats indiquent clairement une transition métal-isolant mais aucune information n'est disponible au niveau microscopique puisque seule la conductivité est mesurée. Ceci constitue donc une observation indirecte de la transition d'Anderson.

3.3.3 Quelques expériences avec des ondes classiques

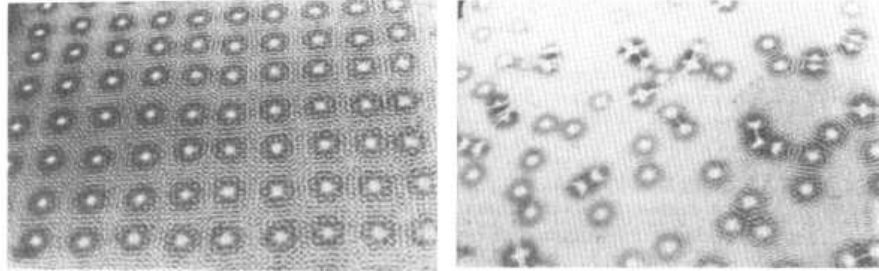


FIG. 3.10 – Vagues générées par les vibrations d'obstacles périodiquement (gauche) ou aléatoirement (droite) disposés. Figures extraites de [120].

Bien qu'originellement étudié dans le contexte des électrons dans les solides, le phénomène de localisation d'Anderson a une portée bien plus générale. L'intérêt de chercher à l'observer dans d'autres systèmes ondulatoires est en fait double. Tout d'abord cela permet de confirmer sa généralité en montrant qu'il existe à partir du moment où une onde est plongée dans un milieu aléatoire. D'autre part, les paramètres sont très difficiles à contrôler dans un système électronique et les outils d'observations sont finalement assez limités de sorte que seules des observations indirectes de la localisation sont possibles. Les ondes classiques, comme le son où les ondes d'eau par exemple, sont donc apparues dans les années 1980 comme les meilleurs candidats pour l'observation directe de la localisation.

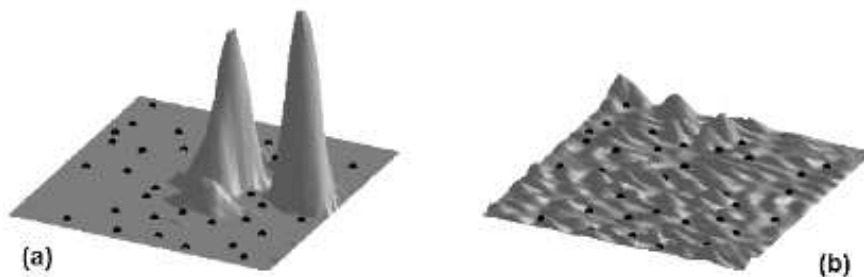


FIG. 3.11 – Intensité des micro-ondes pour deux modes propres de fréquences (énergies) différentes d'une cavité 2D (billard) en présence de diffuseurs aléatoirement disposés. (a) $f = 3.04 \text{ GHz}$: la longueur de localisation est plus petite que la taille du système. L'état propre est donc bien localisé. (b) $f = 7.33 \text{ GHz}$: la longueur de localisation est plus grande que la taille du système. L'état paraît donc délocalisé dans l'espace.

La figure 3.10 extraite de [120] montre des vagues d'eau à deux dimensions générées par les vibrations d'obstacles périodiquement ou aléatoirement disposés. Dans le cas périodique l'état stationnaire observé est une onde délocalisée (figure de gauche) qui s'ajuste aux déformations (théorème de Bloch) alors que dans le cas aléatoire (figure de droite) on observe des vagues localisées dans l'espace.

Un autre exemple d'observation d'ondes localisées est présenté sur la figure 3.11 dans le cas d'ondes électromagnétique micro-ondes [158].

Dans le cadre des micro-ondes, d'autres groupes ont également observé des modes localisés [51, 110] tandis que la localisation de la lumière a fait l'objet de nombreuses expériences concluantes [116, 191, 42, 41, 167, 183, 102] ainsi que les ondes sonores [86, 189, 197] à ce jour, mais il ne s'agit pas ici de les décrire en détails.

3.3.4 Expansion d'un condensat à 1D en présence de désordre

Un dernier outil de choix pour l'étude expérimentale de la localisation est désormais le condensat de Bose-Einstein. Ses avantages sont multiples, à commencer par l'incroyable contrôle expérimental qu'il est possible d'avoir sur lui. En effet, non seulement la majeure partie des paramètres sont ajustables à souhait : signe et force des interactions entre atomes, potentiels de piégeage, réseau optique sous jacent ou non, désordre artificiel extrêmement bien contrôlé... mais les outils d'observation sont également extraordinaires. Avec les condensats pas besoin de mesurer des quantités indirectes, comme la conductance, on peut directement jeter un oeil à la fonction d'onde elle même par de simples mesures d'absorption.

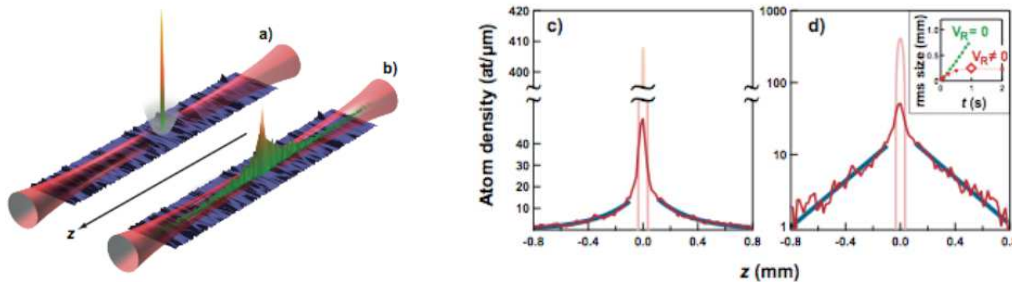


FIG. 3.12 – À gauche : représentation schématique de l'expérience de Palaiseau [33]. Le condensat est créé dans un piège très anisotrope puis une direction de piégeage est supprimée à $t = 0$. Le condensat peut alors s'étendre dans le désordre jusqu'à quelques longueurs de localisation. À droite on peut voir le profil de densité, à la fois en échelle normale et logarithmique, mesuré expérimentalement. Celui-ci montre clairement des ailes exponentielles comme prédit par la théorie [166].

C'est ainsi que depuis le début des années 2000 la quête à l'observation de la localisation d'Anderson dans ce type de système a commencé [177, 188, 68, 176, 64, 125, 44, 165, 70, 146, 166] et a trouvé ses premiers grands succès récemment via l'observation directe l'ondes localisées en présence de désordre [33, 162].

Notons cependant que même si les deux dernières expériences réalisées respectivement à Palaiseau [33] et à Florence [162] sont conceptuellement très proches, elles n'utilisent pas le même type de "désordre". La première utilise un vrai potentiel aléatoire créé par un champ de tavelure (speckle) alors que l'autre utilise un potentiel bichromatique quasi-périodique. Dans les faits ceci ne semble pas conduire à des différences fondamentales puisque dans les deux cas les états sont localisés. Et pourtant l'origine de la localisation est différente dans les deux cas et seule la première est une conséquence de la localisation d'Anderson au sens de phénomène supprimé par les effets d'interférences quantiques alors qu'il est classiquement autorisé. Nous reviendrons en détails sur cette discussion dans le chapitre 6 qui est entièrement dédié à ce problème.

Pour revenir aux expériences, elles sont conceptuellement relativement simples. On prépare un condensat dans un piège harmonique que l'on fait disparaître à $t = 0$. En

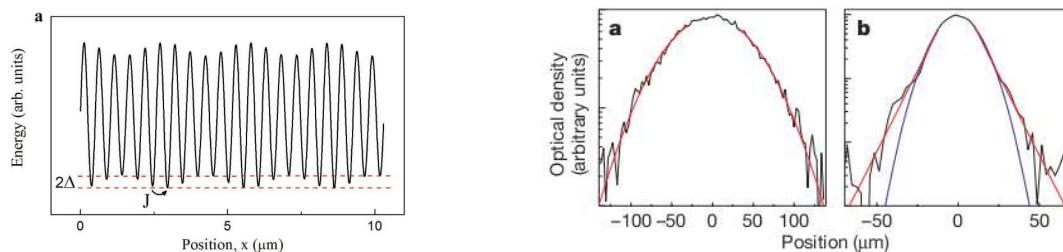


FIG. 3.13 – **À gauche** : Schéma du potentiel bichromatique subit par les atomes. Ceux-ci se disposent dans les minima locaux dont la position est donnée par la périodicité du premier potentiel optique qui est bien plus intense que le second. Ce dernier, de fréquence incommensurable avec le premier, crée une modulation de l'énergie sur site qui semble, à première vue, aléatoire. **À droite** : mesures expérimentales de la densité d'atomes après expansion dans : (a) le cas où les états propres sont délocalisés, l'expansion est alors ballistique et le profil de densité reste de la forme du profil d'origine (gaussien) et (b) les états propres sont localisés et l'expansion est alors immédiatement stoppée.

l'absence de désordre le condensat s'étalerait donc tranquillement, soit dû aux interactions répulsives entre atomes, soit du à la pression quantique. L'idée de ces deux expériences était donc de regarder cette expansion en présence d'un potentiel additionnel en rendant les effets d'interaction négligeables, à cause de la faible densité de particules au cours de l'expansion (ou en utilisant des résonances de Feshbach dans le cas de l'expérience de Florence). En particulier si les états propres, en présence de ce potentiel, sont localisés, on s'attend à ce que l'expansion soit stoppée au bout d'un certain temps. C'est précisément ce que ces deux groupes ont observé (figure 3.12 et figure 3.13).

3.3.5 Expansion d'un paquet d'onde dans un cristal photonique désordonné

Exactement le même type d'expériences que celles décrites dans le paragraphe précédent avec les atomes froids ont été réalisées avec de la lumière dans des cristaux photoniques, à la même époque [103, 102]. Dans ce cas, on envoie un paquet d'onde lumineux à l'entrée d'un cristal tel que celui représenté sur la figure 3.15. La lumière se propage ensuite de manière libre dans la direction z et par effet tunnel dans la direction x . z peut alors être formellement assimilée à la dimension temporelle tandis que x est la dimension spatiale. On réalise ainsi un modèle unidimensionnel sur réseau. D'autre part, les barrières à traverser peuvent être dessinées avec précision et ainsi être choisies aléatoires, régulières ou quasi-périodiques. Si le milieu est non linéaire on peut même introduire des interactions via un terme non-linéaire équivalent à celui de l'équation de Gross-Pitaevskii [78].

En particulier le groupe du Weizmann a étudié les cas désordonnés et quasi-périodiques en réalisant ainsi le modèle d'Anderson unidimensionnel

$$H = \sum_n (|n+1\rangle\langle n| + |n\rangle\langle n+1|) + \lambda \sum_n \varepsilon_n |n\rangle\langle n|, \quad (3.65)$$

où ε_n est un nombre aléatoire compris entre -1 et 1 et $|n\rangle$ désigne l'état propre de l'opérateur position centré sur le site n , et d'Aubry-André [21]

$$H = \sum_n (|n+1\rangle\langle n| + |n\rangle\langle n+1|) + \lambda \sum_n \cos(2\pi\beta n) |n\rangle\langle n|, \quad (3.66)$$

où β est le rapport des deux périodicités.

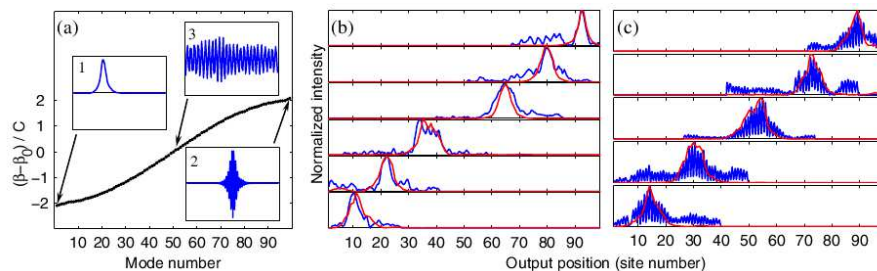


FIG. 3.14 – Résultats expérimentaux et théoriques en présence de désordre [102]. (a) bande d'énergie et trois états propres correspondants. En bords de bande les états sont localisés alors qu'il sont délocalisés en milieu de bande simplement parce que la longueur de localisation correspondante est plus grande que la taille du système. (b) et (c) quelques états propres peuplés expérimentalement et comparés aux états prédits par la diagonalisation numérique du système pour le bas et le haut de la bande respectivement.

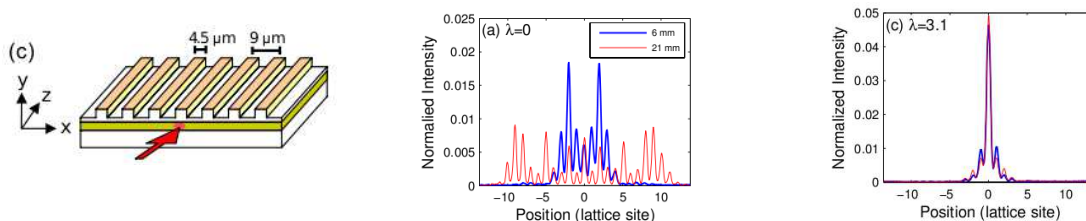


FIG. 3.15 – Résultats expérimentaux [103] en présence d'une modulation périodique mais incommensurable au réseau des barrières. **Au centre** : expansion libre du paquet d'onde. **À droite** : l'expansion n'a pas lieu dans le régime localisé.

Encore une fois nous gardons la discussion sur les points communs et différences des deux modèles pour le chapitre 6.

3.3.6 Transition métal-isolant dans le rotateur pulsé

Un autre système particulièrement intéressant pour l'étude de la localisation provient du chaos quantique. En 1982, Fishman, Grepel et Prange [66] ont proposé une analogie formelle entre la localisation dynamique du rotateur pulsé quantique et le modèle d'Anderson à une dimension. Sans rentrer dans les détails, ce système est décrit par le hamiltonien suivant

$$H = \frac{p^2}{2m} + K \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT). \quad (3.67)$$

Il représente, par exemple, un pendule rigide d'angle θ et d'impulsion p , qui ne serait soumis à la gravité que périodiquement et ceci pendant une durée nulle. L'énergie de ce système n'est bien sûr pas conservée et pour K suffisamment grand il est totalement chaotique [81]. Dans ce régime, l'énergie augmente linéairement avec le temps et l'impulsion classique diffuse dans l'espace des phases (dans le régime chaotique tous les tores invariants ont disparu. La dynamique peut alors s'étaler sur l'espace des phases tout entier). Par contre, quand on regarde la dynamique quantique du système, on observe que $\langle p^2(t) \rangle$ ralentit sa croissance et tend vers une valeur finie. C'est le phénomène de localisation dynamique, qui semble en effet équivalent à la localisation d'un paquet d'onde due au désordre mais cette fois dans l'espace des impulsions.

Fishman, Grempel et Prange ont en fait montré que ce modèle était analogue à un pseudo modèle d'Anderson dans le sens où l'énergie sur site n'est pas aléatoire mais déterminée par

$$\varepsilon_n = \tan\left(\frac{\phi - n^2/2}{2}\right), \quad (3.68)$$

où ϕ est une phase constante et n un nombre entier, qui peut être vue comme un nombre pseudo aléatoire distribué de manière lorentzienne $p(\varepsilon) = 1/\pi(1 + \varepsilon^2)$. D'autre part ce modèle ne se restreint pas aux plus proches voisins mais prend en compte tous les voisins avec une amplitude qui décroît, asymptotiquement, exponentiellement.

À ce jour personne n'a encore donné de preuve rigoureuse de la localisation dans ce système mais de nombreux résultats numériques suggèrent l'équivalence avec le modèle d'Anderson. Les observations expérimentales de cette physique sont multiples, par exemple dans les systèmes atomiques [136] mais aussi les atomes froids [119].

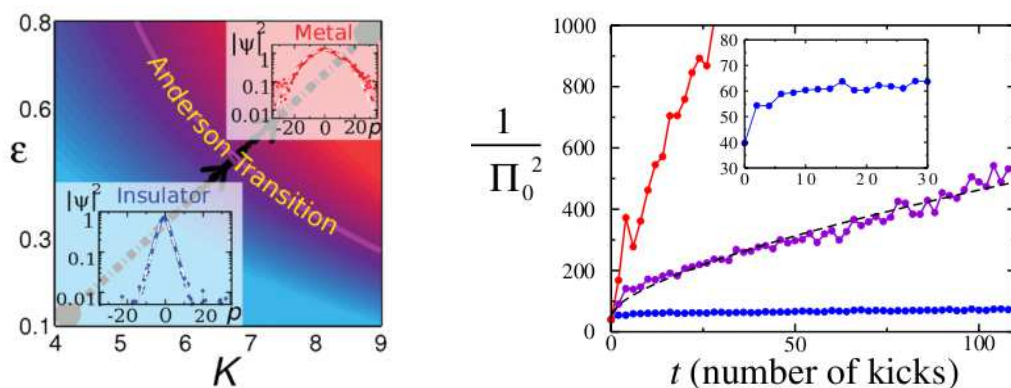


FIG. 3.16 – À gauche : diagramme de phase du rotateur pulsé issu de simulations numériques [43]. Dans ce travail K , qui désignait l'amplitude des kicks dans (3.67), est remplacé par $K(1 + \varepsilon \cos(\omega_2 t) \cos(\omega_3 t))$. Les encadrés correspondent aux distributions d'impulsions expérimentalement mesurées et sont exponentiellement localisé dans le régime isolant et gaussienne dans le régime métallique (l'état initial est gaussien est augmente sa largeur avec le temps). À droite : courbes typiques de $\langle p^2 \rangle$ (en fait une quantité proportionnelle à celle-ci) pour trois valeurs de ε .

Le plus intéressant arrive lorsqu'on commence à rajouter des fréquences. En effet, Casati, Guarneri et Shepelyansky ont proposé en 1989 [40] d'introduire une modulation temporelle de l'amplitude des kicks K . En introduisant trois fréquences incommensurables, à savoir celle des kicks plus les deux autres intervenant dans la modulation de K , ils ont observé numériquement une transition type transition d'Anderson à une valeur critique de l'amplitude des modulations ε de K .

Introduire de nouvelles fréquences apparaît alors comme un moyen de varier la dimensionnalité du modèle effectif. Cette astuce a ainsi été utilisée expérimentalement avec des atomes froids récemment [43] et analysée théoriquement avec rigueur [117] afin, non seulement d'observer la transition d'Anderson à trois dimensions, mais aussi de caractériser avec grande précision les exposants critiques.

Chapitre 4

Oscillations dipolaires d'un condensat

La main qui fait osciller le berceau gouverne le monde.
Proverbe américain.

4.1 Introduction

Comme on l'a discuté dans la première partie de ce manuscrit, les modes collectifs d'un condensat ont été étudiés en détails et ont confirmé la validité de l'équation de Gross-Pitaevskii. Depuis quelques années, plusieurs groupes s'intéressent aux propriétés des condensats dans des potentiels aléatoires. Ici nous discutons des expériences sur l'amortissement des oscillations dipolaires d'un condensat dans un piège harmonique en présence d'un potentiel additionnel. L'origine de cet amortissement a été le sujet de débats pendant quelque temps et en particulier son lien ou non avec la localisation d'Anderson. Nous montrons ici qu'il n'en est rien et qu'il ne s'agit que d'une belle illustration de la transition d'un régime stationnaire à un régime dissipatif dépendant du temps via l'émission d'excitations élémentaires.

Le problème est le suivant : plusieurs groupes expérimentaux [125, 44, 46] ont constaté qu'en présence de désordre (essentiellement du speckle) les oscillations dipolaires d'un condensat étaient amorties et ceci quelque soit l'amplitude du désordre imposée.

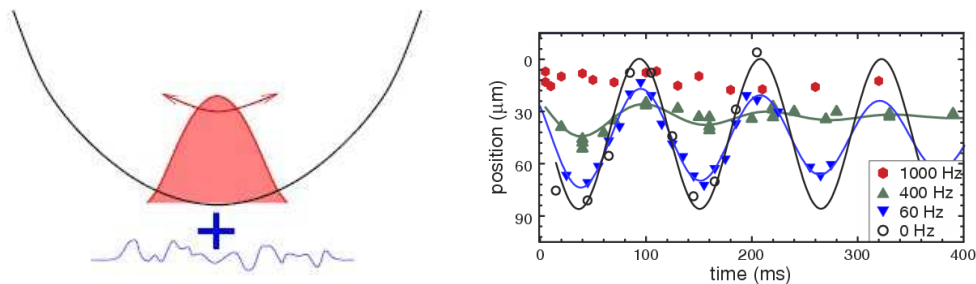


FIG. 4.1 – **À gauche** : schéma d'une expérience d'oscillations dipolaires en présence de désordre. **À droite** : résultats expérimentaux du groupe de Florence issus de la référence [125]. Cette figure montre la position du centre de masse, au cours du temps, pour différentes amplitudes du désordre.

Le principe des expériences, ainsi que des résultats typiques, sont présentés sur la figure 4.1. Un condensat en forme de cigare est préparé dans un piège harmonique de fréquence longitudinale ω . À $t = 0$, le piège est soudainement déplacé d'une distance d

induisant ainsi des oscillations du condensat d'amplitude d . En l'absence de désordre, les oscillations ont lieu à la fréquence du piège et ne sont pas amorties. En passant au centre du piège, le condensat atteint sa vitesse maximale notée v et reliée à l'amplitude d des oscillations par conservation de l'énergie ($\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2d^2$). Par la suite, on comparera souvent cette vitesse à la vitesse du son c au centre du condensat. Celle-ci est donnée par la relation $c = \sqrt{\nu\mu/m}$ où $\nu = 1$ dans le régime de champ moyen 1D et $\nu = 1/2$ dans le régime Thomas-Fermi transverse et μ est le potentiel chimique du condensat au repos.

Initialement, les expériences ont été réalisées dans une fenêtre de paramètres très restreinte, rendant la compréhension globale de la physique difficile. Ces expériences ont été reprises récemment dans le groupe de R. Hulet et confirment désormais l'interprétation et les prédictions données dans l'article 1 de cette thèse. Dans ce qui suit on donne un résumé succinct de notre compréhension du phénomène, renvoyant le lecteur à l'article 1 [6] pour une étude plus approfondie. Quelques compléments sur le décalage de fréquence, l'émission des solitons et les résultats expérimentaux récents sont également discutés.

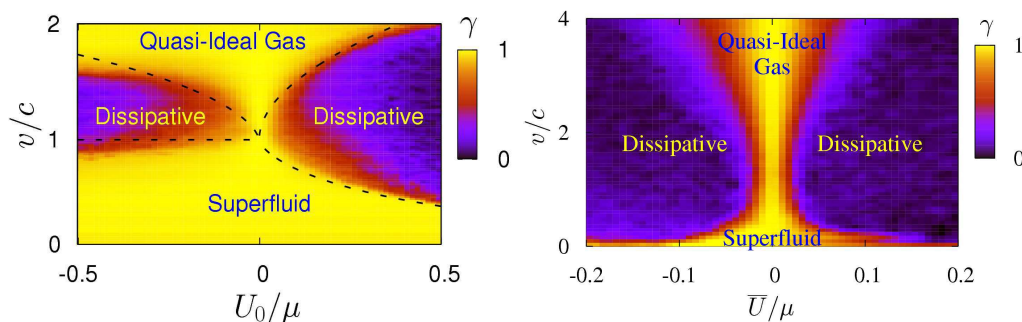


FIG. 4.2 – Diagrammes de phases des oscillations dipolaires en fonction de la vitesse maximale v du condensat et de l'amplitude du potentiel additionnel. Le code couleur représente le rapport γ entre l'amplitude des oscillations finales et d , le déplacement initial du piège harmonique. **À gauche** : cas d'une barrière gaussienne étroite disposée au centre du piège. **À droite** : cas d'un potentiel aléatoire de type speckle. Les paramètres sont donnés dans l'article 1.

L'étude systématique du problème, via des simulations numériques de l'équation Gross-Pitaevskii (1.78) ou (1.69), consistant à étudier la dynamique temporelle du condensat en fonction de l'amplitude des oscillations d (c'est à dire la vitesse du fluide v), de l'amplitude du désordre et du type de potentiel conduit aux constats suivants.

- À basse vitesse ($v < c$) ou faibles amplitudes d'oscillations, les oscillations ne sont pas amorties. Seul un décalage de fréquence est observable. Dans ce régime le condensat est en fait superfluide, selon les critères exposés dans le chapitre 2. Ceci n'a pas été observé dans les premières expériences [125, 44, 46] car l'amplitude des oscillations était trop grande et le condensat était donc supersonique.

- Au-delà d'une certaine vitesse ($v \sim c$), où à vitesse fixe pour une amplitude critique du potentiel, le système émet des excitations de type solitons et phonons et une partie de l'énergie du centre de masse est alors transmise à ces modes. Un amortissement est ainsi observé. Encore une fois il faut noter qu'on parle de dissipation même si l'équation de Gross-Pitaevskii est conservative. En effet l'énergie totale est conservée mais pas celle du mode d'oscillation qui se disperse dans les excitations. C'est précisément dans ce régime que se situaient les expériences pionnières (voir discussion à la fin de l'article 1).

- Enfin, pour une vitesse encore plus grande, les oscillations sont de nouveau non amorties. On entre dans le régime "stationnaire" quasiment non dissipatif.

En résumé ce système est une réalisation expérimentale du modèle de fluide exposé au chapitre 2, si ce n'est qu'on ne parle pas de régimes stationnaires mais d'oscillations non

amorties. Les diagrammes de phases en présence d'une seule impureté et d'un potentiel aléatoire (speckle) sont présentés sur la figure 4.2. Pour une seule impureté nous avons prédit analytiquement les frontières entre les différents régimes à partir du modèle de transport décrit au chapitre 2. Plus de détails sont fournis dans l'article 1.

Pour valider notre approche nous avons comparé les résultats expérimentaux à une simulation numérique utilisant l'équation unidimensionnelle (1.69) qui est la plus pertinente dans les expériences considérées. L'accord relativement satisfaisant est illustré sur les figures 4.3.

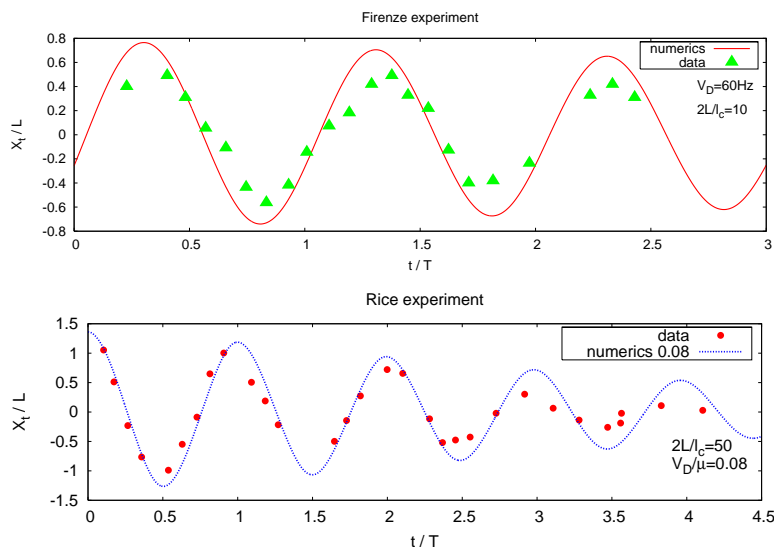


FIG. 4.3 – Position du centre de masse du condensat au cours du temps en présence de speckle. Les paramètres du désordre et des interactions sont pris en accord avec les paramètres expérimentaux de Florence [125] et de Rice [44]. Les lignes correspondent aux simulations numériques de l'équation 1D (1.69) dans le régime Thomas-Fermi transverse sans aucun paramètre libre.

Nous avons également évalué les seuils d'apparition de l'amortissement dans les conditions de ces expériences qui montrent que quels que soient les paramètres choisis elles étaient toujours dans le régime dissipatif.

Enfin, en ce qui concerne la localisation d'Anderson une discussion plus poussée sera donnée dans le chapitre suivant. On se contentera ici de dire que l'on trouve exactement la même phénoménologie avec une seule impureté qu'avec du désordre. Le désordre ne domine donc pas la physique dans ce problème et si un effet de la localisation existe il est en tout cas très indirect.

4.2 Décalage de fréquence dans le régime superfluide

L'effet d'un potentiel additionnel dans le régime superfluide consiste essentiellement en un décalage de fréquence comme discuté précédemment. Dans ce qui suit on décrit comment calculer ce décalage de fréquence par deux méthodes indépendantes et on compare les prédictions aux simulations numériques.

4.2.1 Modèle de l'oscillateur perturbé

Une technique simple pour déterminer le décalage de fréquence consiste à traiter l'équation du mouvement du centre de masse,

$$m \frac{d^2}{dx^2} \langle x \rangle = \int \psi^*(x, t) \left[-\frac{dV(x)}{dx} \right] \psi(x, t) dx, \quad (4.1)$$

où $\langle x \rangle = \int \psi^* x \psi dx$ et $V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \delta V(x)$, de manière perturbative. Dans ce cas précis celle-ci s'écrit sous la forme

$$\frac{d^2}{dx^2} \langle x \rangle = -\omega^2 \langle x \rangle - \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} dx n(x - \langle x \rangle) \frac{d\delta V}{dx}. \quad (4.2)$$

Pour des oscillations de faible amplitude, on peut développer l'opérateur force autour de $\langle x \rangle = 0$. Au premier ordre on obtient un terme proportionnel à $\langle x \rangle$ que l'on peut alors identifier au décalage de fréquence. D'autre part si le potentiel perturbateur est faible on peut se contenter d'utiliser l'expression non perturbée de la densité. En rassemblant toutes les pièces on obtient

$$\delta\omega = -\frac{1}{2m\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} dx n'_0(x) V'(x) = \frac{1}{2m\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} dx n''_0(x) V(x), \quad (4.3)$$

où n_0 désigne la densité d'équilibre non perturbée. Cette expression a déjà été obtenue par M. Modugno [125] à l'aide des règles de sommes et testée pour un potentiel de speckle.

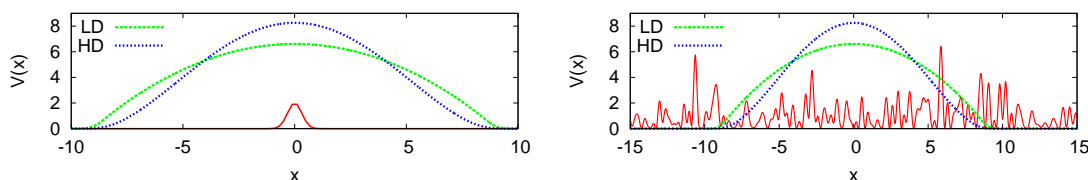


FIG. 4.4 – Profils de densité du condensat dans un piège harmonique dans les régimes transverse gaussien et transverse Thomas-Fermi à potentiel chimique équivalent. A gauche une barrière gaussienne est représentée alors qu'à droite il s'agit d'une réalisation typique d'un speckle. Ces figures illustrent le fait que dans le régime Thomas-Fermi transverse la densité décroît de manière bien moins abrupte que dans le régime gaussien. En particulier la dérivée seconde de la densité est bien définie même dans l'approximation de Thomas-Fermi.

On peut déjà noter un phénomène intéressant à savoir que le décalage de fréquence dépend fortement de la courbure du profil de densité (la dérivée seconde). Si on prend par exemple un pic très étroit, le signe du décalage pourra changer selon la position de ce pic.

Les figures 4.4 montrent l'allure des profils d'équilibre selon le régime transverse (HD (LD) signifie High (Low) Density et correspond donc au régime Thomas-Fermi Transverse (Champ Moyen 1d) et donc à $\nu = 1/2$ (1)). Dans le régime Thomas-Fermi transverse ce changement de courbure arrive loin du bord alors que dans l'autre cas cela se produit très proche du bord. Ceci est un problème majeur si on veut appliquer l'approximation de Thomas-Fermi sur la densité longitudinale. En effet celle-ci donne pour le profil d'équilibre

$$n_0(x) = \mathcal{N}_\nu (X^2 - x^2)^{1/\nu}, \quad (4.4)$$

où $\mathcal{N}_\nu = \frac{3}{4}(1 + \nu^{-2})/X^{1+2/\nu}$ provient de la normalisation et $\frac{1}{2}m\omega^2 X^2 = \mu$, ce qui conduit aux dérivées secondes suivantes :

$$n''_0(x) = \frac{2\mathcal{N}_\nu}{\nu} (X^2 - 3x^2)^{1/\nu-1}. \quad (4.5)$$

Dans le cas Thomas-Fermi transverse tout va bien : l'approximation est très proche de la réalité et prédit un changement de courbure pour $x = \pm X/\sqrt{3}$. L'autre cas est pathologique puisqu'elle prédit une courbure constante alors qu'en réalité la dérivée seconde présente deux pics étroits de grande amplitude au voisinage des bords. Ceci veut donc dire que le décalage de fréquence dans ce régime est extrêmement sensible aux bords. L'explication physique de cette différence n'est pas très claire mais vient probablement du fait que dans ce régime le condensat garde un rayon transverse constant alors que dans l'autre régime la structure est tridimensionnelle avec un rayon transverse $R_{\perp}(x) = \sqrt{X^2 - x^2}$. Cela dit, tant que l'on considère un obstacle qui ne s'approche pas trop des bords l'approximation de Thomas-Fermi longitudinale donne des résultats très satisfaisant (voir le paragraphe 4.2.3).

4.2.2 Approche hydrodynamique perturbative

En présence d'un potentiel localisé, suffisamment éloigné des bords, les pathologies mentionnées plus haut ne sont pas présentes et on peut obtenir les mêmes résultats à partir d'une approche perturbative des équations hydrodynamiques. Dans le régime Thomas-Fermi la densité du condensat non perturbée est donnée par (4.4). Les équations hydrodynamiques 1D, en présence d'un potentiel extérieur suffisamment lisse pour utiliser l'approximation de la densité locale, se réduisent alors à (annexe B)

$$\Omega^2 \delta n(x) = \omega^2 \left[-\frac{\nu}{2} (X^2 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} \right] \delta n(x) + \frac{1}{m} \frac{d}{dx} \left[\delta V(x) \frac{d}{dx} \right] \delta n(x), \quad (4.6)$$

qui a la structure d'une équation aux valeurs propres type équation de Schrödinger.

En l'absence de perturbation il est possible de déterminer les modes de basse énergie et leurs fréquences en développant $\delta n(x)$ sous forme d'un polynôme. Pour le mode dipolaire la fréquence est bien sûr ω et la variation de densité $\delta n(x) = x$. Si on pose $\Omega^2 = \omega^2 + \delta\omega^2$ la théorie de perturbation à l'ordre 1 donne¹

$$\delta\omega^2 = \mathcal{N}_{\nu} \int_{-X}^{+X} dx (X^2 - x^2)^{1/\nu-1} \delta n(x) \left\{ x \frac{d}{dx} \left[\frac{\delta V(x)}{m} \frac{d}{dx} \right] \right\} \delta n(x), \quad (4.7)$$

et on obtient alors pour $\delta\omega = \Omega - \omega \simeq \frac{\delta\omega^2}{2\omega}$:

$$\delta\omega = \frac{\mathcal{N}_{\nu}}{2m\omega} \int_{-X}^{+X} dx (X^2 - x^2)^{1/\nu-1} x \delta V'(x). \quad (4.8)$$

Cette relation est équivalente à celle obtenue précédemment en utilisant l'approximation de Thomas-Fermi. Cette approche a le défaut de négliger les effets de bords, qui sont en particulier très important dans le régime de champ moyen 1d, mais à l'avantage de pouvoir se généraliser facilement aux autres modes contrairement au modèle précédemment exposé.

4.2.3 Application au cas d'une barrière gaussienne

Si on considère une barrière gaussienne $\delta V(x) = V_0 \exp(-\frac{1}{2}x^2/\sigma^2)$, au centre du puits, qui pourrait expérimentalement être créée par un laser, avec $\sigma \ll X$ on obtient facilement

¹On note l'importance de la mesure d'intégration qui vient de la relation d'orthogonalité des polynômes. Physiquement elle traduit le fait que dans le régime Thomas-Fermi transverse la taille transverse du condensat n'est pas homogène ($R_{\perp} = \sqrt{X^2 - x^2}$) alors que dans le régime de champ moyen elle est constante.

$$\delta\omega = -(4 - 3\nu)\frac{3V_0\sigma}{8\mu^{3/2}}\omega^2\sqrt{\pi m} \quad (4.9)$$

qui est en excellent accord avec nos résultats numériques exposés sur la figure (4.5).

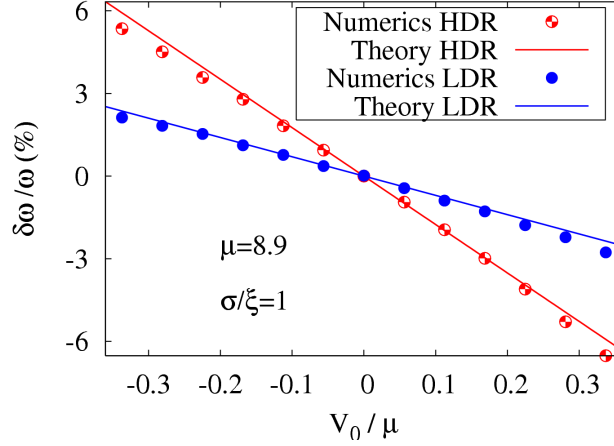


FIG. 4.5 – Décalage de fréquence calculé numériquement à partir de simulations de (1.78) et (1.69) et comparé aux prédictions analytiques (4.9).

D'autre part, l'effet de changement de signe en fonction de la position de la barrière, qui a été discuté précédemment a aussi été observé numériquement en accord avec les prédictions de (4.3).

4.2.4 Application au cas d'un potentiel désordonné

Le cas d'un potentiel désordonné est plus subtil puisqu'il faut prendre garde aux effets de bords dans le régime de champ moyen 1d. D'autre part, puisque le décalage de fréquence dépend de la réalisation du désordre, il est intéressant de regarder des propriétés statistiques de ce décalage. À partir de (4.3) on peut calculer la moyenne et l'écart type de ce décalage :

$$\langle\delta\omega\rangle = \frac{1}{2m\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} dx n_0''(x) \langle V(x) \rangle = 0, \quad (4.10)$$

$$\langle(\delta\omega)^2\rangle = \frac{1}{4m^2\omega^2} \iint_{\mathbb{R}^2} dx dy n_0''(x) n_0''(y) \langle V(x)V(y) \rangle. \quad (4.11)$$

Notons que la moyenne du décalage est nulle² même si $\langle V(x) \rangle \neq 0$ car $n_0(x)$ est symétrique.

L'accord entre ces formules et le numérique est très bon comme on peut le voir sur la figure 4 de l'article 1.

²Dans [46] des mesures de $\delta\omega$ ne montrent aucun décalage de fréquence significatif. Ceci n'est pas en désaccord avec notre approche puisque la grande densité de pics dans ce travail rend l'équation (4.10) auto-moyennante.

4.3 Nucléation de solitons dans le régime dépendant du temps

L'étude du régime dépendant du temps est plus délicate dans le sens où il n'est plus possible d'écrire analytiquement la fonction d'onde du condensat. En effet celle-ci peut devenir fortement irrégulière au cours du temps et de ce fait totalement imprédictible. Malgré tout, quelques simulations numériques sont bien entendu possibles et toujours les bienvenues pour permettre de comprendre la physique qui est en train de se produire.

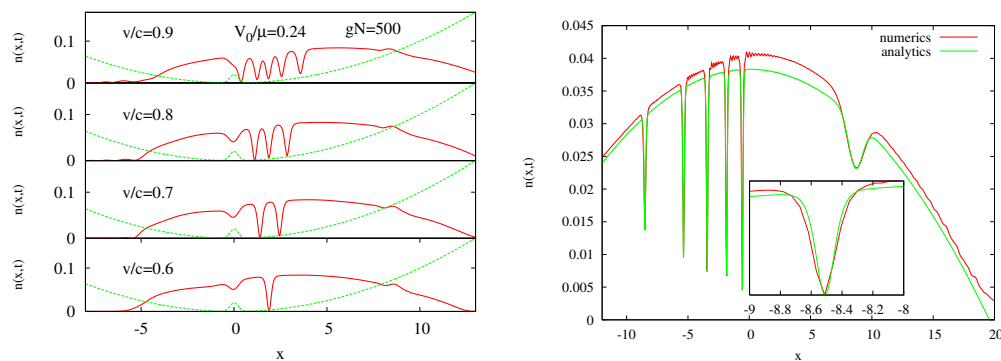


FIG. 4.6 – **À gauche** : densité du condensat au cours de la première oscillation pour différentes valeurs de l'amplitude initiale (ou vitesse de passage au centre). La perte de superfluidité est ici clairement illustrée par la présence de solitons dont le nombre dépend de la vitesse du condensat. **À droite** : comparaison entre la densité extraite de la simulation numérique et une superposition de solutions solitons (1.100) modulée par le profil Thomas-Fermi.

La figure 4.6 montre par exemple la densité du condensat au cours de la première oscillation pour différentes amplitudes initiales, c'est à dire différentes vitesses de passage au centre. $v/c = 0.6$ est au dessus mais très proche du seuil d'amortissement. À cette vitesse on observe l'émission d'un premier soliton qui emporte avec lui une partie de l'énergie appartenant initialement au mode d'oscillation du centre de masse. Cette énergie étant prise, la vitesse globale du condensat diminue et l'amortissement cesse. On observe alors le condensat qui oscille et le soliton qui se déplace en son sein. Sa dynamique n'est pas trop complexe. Il rebondit à l'approche des bords lorsque sa densité touche zéro et se modifie légèrement à la traversée de l'obstacle. Le mouvement d'un soliton piégé dans un condensat est bien connu [55, 137, 38] et a même été observé expérimentalement récemment dans un condensat piégé [26]. Ceci confirme donc notre image de l'amortissement lié à l'émission d'excitations.

À mesure que la vitesse augmente, le nombre de solitons émis augmente et ceux-ci commencent à interagir les uns avec les autres, rendant la dynamique complètement chaotique³.

Notons cependant que ces résultats numériques sont à considérer comme qualitativement correctes mais probablement pas quantitativement. En effet dans ce régime le condensat commence à chauffer et une fraction thermique non négligeable [124, 63] commence à se manifester. Dans ce cas l'équation de Gross-Pitaevskii sort malheureusement de son domaine de validité mais les grandeurs seuils sont a priori décrites avec précision par cette équation.

³Dans le cas des solitons brillants il a été montré dans [129] que la dynamique devient plus complexe au-delà de deux solitons.

4.4 Résultats expérimentaux récents

Tout ce qu'un homme peut imaginer, un jour d'autres hommes le réaliseront.

Jules Verne.

Suite à nos travaux sur les oscillations dipolaires, le groupe de R. Hulet à Houston a décidé de reprendre les expériences à ce sujet, en élargissant la fenêtre des paramètres. C'est ainsi qu'ils ont récemment vérifié le diagramme de phase proposé ainsi que le mécanisme de dissipation par émission de solitons. Leurs résultats [59] sont présentés sur les figures 4.7 et 4.8.

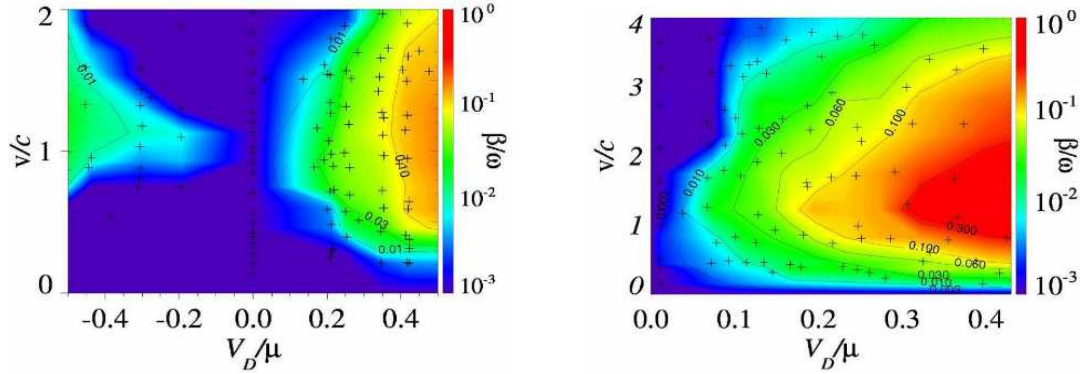


FIG. 4.7 – Diagrammes de phases expérimentaux pour une impureté gaussienne (à gauche) et pour un potentiel de tavelure (à droite). Notons que la quantité dessinée en couleur ne correspond au facteur de fluidité mais au taux d'amortissement des oscillations obtenu par un ajustement des données expérimentales à la trajectoire d'un oscillateur amorti $\langle x(t) \rangle = de^{-\beta t} \cos(\Omega t + \phi)$.

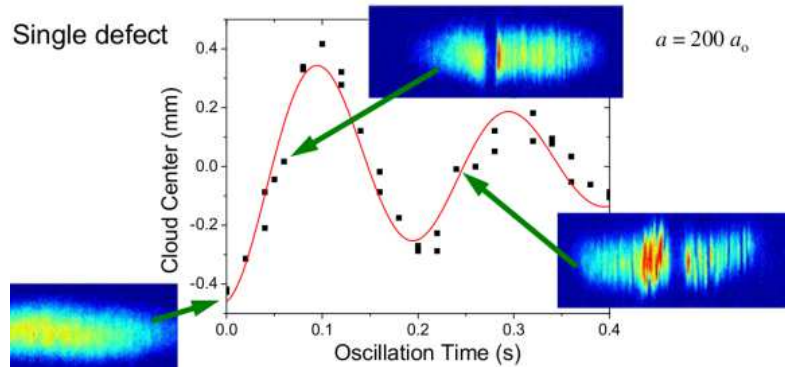


FIG. 4.8 – Position du centre de masse au cours du temps en présence d'une impureté gaussienne. Les encadrés montrent la densité du condensat à différents temps et indique clairement l'émission de solitons dans le régime d'amortissement.

Non seulement l'existence des trois régimes de transport a été vérifiée qualitativement (figure 4.7) mais en plus l'accord est quantitativement très satisfaisant en ce qui concerne les frontières entre les phases. Des calculs plus précis, avec leur jeu de paramètres expérimentaux, sont en cours dans notre équipe. À notre connaissance, il s'agit également de la première preuve expérimentale de l'existence d'un régime superfluide, en présence de désordre, avec un condensat gazeux.

Le mécanisme d'amortissement par émission de solitons est illustré sur la figure 4.8 où l'on peut voir la densité du condensat à différentes étapes de sa dynamique.

Ces résultats expérimentaux constituent un véritable aboutissement de notre travail théorique, illustrant de ce fait la possibilité de travailler en étroite collaboration avec les expérimentateurs dans le domaine des atomes froids.

4.5 Remarque sur la symétrie du diagramme de phase en présence de désordre

En regardant les diagrammes de phases présentés dans l'article 4 (et sur la figure 4.2), on peut constater une différence qualitative entre le cas d'une seule impureté et celui d'un potentiel désordonné. En effet, la frontière superfluide est asymétrique dans le premier alors qu'elle est symétrique dans le second cas. Ceci est en fait un effet dû à la taille finie du condensat et au critère de Landau local.

Pour une seule impureté, on a vu au chapitre précédent que, selon son signe, la densité présente un trou (cas répulsif) ou une bosse (cas attractif). Dans le cas répulsif, la densité décroît au voisinage de l'obstacle, rendant le superfluide plus fragile. La vitesse critique est alors plus faible que dans le cas attractif où, au contraire, la densité augmente. Ceci explique alors l'asymétrie observée sur la figure 1 de l'article 4 (figure 4.2 à gauche). Notons par ailleurs que nous avons ici négligé les effets de normalisation de la densité. En effet, si un trou de densité apparaît, la conservation du nombre de particule implique que la densité, loin de l'obstacle, soit légèrement augmentée.

Si cet effet reste négligeable en présence d'une seule impureté, il n'en est plus de même en présence de désordre. Un potentiel répulsif induit des trous de densités sur l'ensemble du condensat. La densité moyenne doit alors être renormalisée. Ainsi, l'effet d'un potentiel répulsif devient analogue à celui d'un potentiel attractif, à cause de la conservation du nombre de particules. C'est pourquoi le diagramme présenté sur la figure 3 de l'article (figure 4.2 à droite) est symétrique par rapport au signe du désordre.

4.6 Article 1 : Dipole oscillations of a Bose-Einstein Condensate in the presence of defects and disorder

Dipole Oscillations of a Bose-Einstein Condensate in the Presence of Defects and Disorder

M. Albert, T. Paul, N. Pavloff, and P. Leboeuf

Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques, CNRS, Université Paris Sud, UMR8626, 91405 Orsay Cedex, France
(Received 28 March 2008; published 26 June 2008)

We consider dipole oscillations of a trapped dilute Bose-Einstein condensate in the presence of a scattering potential consisting either in a localized defect or in an extended disordered potential. In both cases the breaking of superfluidity and the damping of the oscillations are shown to be related to the appearance of a nonlinear dissipative flow. At supersonic velocities the flow becomes asymptotically dissipationless.

DOI: [10.1103/PhysRevLett.100.250405](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.250405)

PACS numbers: 03.75.Kk, 05.60.Gg

One of the most spectacular consequences of phase coherence and interactions in condensed matter is superfluidity, a direct manifestation of which is the capacity of a fluid to move without dissipation. According to the standard Landau criterion, the superfluidity (SF) of a uniform flow of, e.g., liquid ^4He , or a Bose-Einstein condensate (BEC) will be broken if an obstacle moves through the fluid with a speed higher than a critical velocity v_c^L . In the case of a BEC v_c^L is the sound velocity. Though this property has been explicitly checked in ^4He [1] and in a BEC flow [2] in the presence of small impurities, experiments in superfluid ^4He (see, e.g., [3]) and more recently in BEC [4,5] have shown that the critical velocity for breaking SF is generically lower than v_c^L , due to phase slips induced by vortex (or soliton) emission, as originally proposed by Feynman.

Collective oscillations of BEC confined by harmonic traps offer new opportunities to explore the central question of the breaking of SF and of the origin of drag and dissipation in quantum liquids and gases. In a recent series of experiments, damping of the oscillations (such as dipole, quadrupole, or Bloch oscillations) in the presence of a single localized scatterer [6], and disordered [7–9] or quasiperiodic [10] superimposed potentials has been used to investigate different dynamical regimes, including the possibility of a Bose glass, (Anderson) localization or other possible phases. These investigations have clearly shown the experimental relevance of analyzing transport properties of BEC *via* the damping of collective excitations. However the connection of the damping with localization properties still remains to be clarified.

Our purpose here is to provide a global analysis of the damping of dipole oscillations in the presence of a single localized scatterer or a disordered potential. We consider the regime where the experiments have been realized up to now, i.e., a quasi-1D geometry where the chemical potential is larger than the typical amplitude of the perturbing potential. The reason why we treat together the localized defect and the random potential is that, qualitatively, several of the main features of the dynamics are contained in the former case. Its analysis therefore facilitates the com-

prehension of the latter, and stresses the generic aspects, leading to a unified picture of dissipation (as illustrated in Fig. 1). We find that in both cases there exist SF undamped oscillations at small amplitudes. As the amplitude of oscillation (or the typical size of the perturbation) increases, the system enters a dissipative regime of damped oscillations where solitons and phononlike excitations are emitted (this regime was recently studied experimentally in Ref. [5] for a moving obstacle). In the case of a superimposed disordered potential, this dissipative or resistive phase, where nonlinearities of the system play a crucial role, has no relation with (Anderson) localization.

The system considered is a weakly interacting BEC confined in a cylindrically symmetric 3D harmonic potential $m(\omega_\perp^2 r_\perp^2 + \omega_x^2 x^2)/2$ in presence of an additional potential $U(x)$. In the limit of a highly anisotropic trap, $\omega_\perp \gg \omega_x$, the transverse confinement is such that the quasi-1D regime can be reached. It is important to note that for moderate $U(x)$ (even a disordered one) the phase coherence of the system is preserved as demonstrated in Refs. [8,11]. The system is thus accurately described by a 1D order parameter $\psi(x, t)$, depending on a single spatial

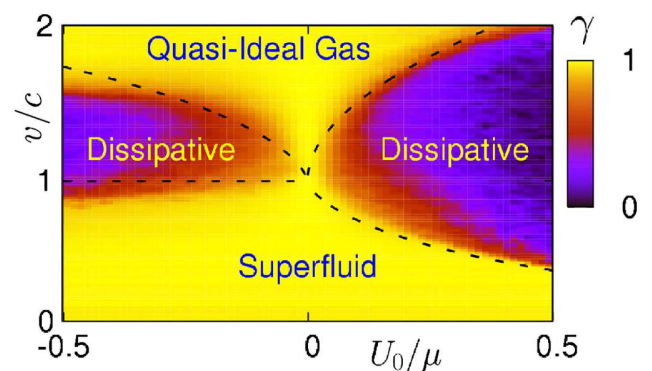


FIG. 1 (color online). Dynamical regimes for dipole oscillations in presence of a localized Gaussian defect. The plot represents the fluidity factor γ (see text) computed after a time $t_f = 25 \times 2\pi/\omega_x$. The yellow (light gray) region correspond to zero damping ($\gamma = 1$). The dashed lines are analytic determinations of the frontiers between the different regimes.

coordinate x along the axial direction of the trap. $\psi(x, t)$ obeys the nonlinear Schrödinger equation [12,13]

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m}{2} \omega_x^2 x^2 + U(x) + 2\hbar\omega_\perp (an)^\nu \right] \psi. \quad (1)$$

Here, $n(x, t) \equiv |\psi(x, t)|^2$ is the condensate density per unit of longitudinal length and $a > 0$ is the 3D s -wave scattering length. In the low-density regime (LDR, $an \ll 1$) the density profile in the transverse direction is Gaussian shaped and $\nu = 1$, whereas $\nu = 1/2$ in the opposite high density regime (HDR, $an \gg 1$) where the Thomas-Fermi approximation holds for the transverse degree of freedom. Equation (1) does not account for transverse excitations which may be relevant in the HDR. We checked that it nonetheless gives an excellent account of the experimental result on dipole oscillations of the Florence and Rice groups [7,8] performed in the HDR.

After preparing the condensate in the ground state of the trap [with density $n_0(x)$, chemical potential μ and, at the center of the cloud, speed of sound $c = (\nu\mu/m)^{1/2}$], dipole oscillations are excited by a sudden displacement d_0 of the harmonic potential. For $U(x) \equiv 0$ the center of mass oscillates freely with frequency ω_x , and acquires a velocity $v = \omega_x d_0$ when passing through the origin. The time evolution of the density reads $n(x, t) = n_0(x - X_t)$ where $X_t = d_0 \cos(\omega_x t)$ is the position of the center of mass. For a finite $U(x)$, which is turned on simultaneously with the sudden displacement of the trap, $X_t = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}} xn(x, t) dx$ is computed numerically up to a time t_f chosen such that $X_{t > t_f}$ assumes an oscillatory pattern of roughly constant amplitude which we denote d_f . In order to measure the damping of the dipole oscillations we define a fluidity factor $\gamma = d_f/d_0$ ($\gamma = 1$ in the absence of damping and $\gamma \rightarrow 0$ for strong damping).

Localized defect.—We start by considering a Gaussian-shaped defect $U(x) = U_0 \exp(-x^2/2\sigma^2)$. The fluidity factor γ is plotted in Fig. 1 as a function of the normalized defect strength U_0/μ and velocity $v/c = \omega_x d_0/c$. The numerical calculations were performed for a BEC in the LDR with chemical potential $\mu = 40\hbar\omega_x$ selected to have a Thomas-Fermi like density-profile along the axial direction. In this case $n_0(x) = \mathcal{N}_\nu \Theta(L - |x|)[L^2 - x^2]^{1/\nu}$ where the factor \mathcal{N}_ν normalizes the density to the number of atoms N , $\Theta(x)$ is the Heavyside step function and $L = \sqrt{2\mu/m\omega_x^2}$ is half the longitudinal size of the condensate. The parameters are $N = 1.5 \times 10^4$ ^{87}Rb atoms, $\omega_x = 2\pi \times 9 \text{ s}^{-1} = \omega_\perp/10$ and $\sigma = \xi = 0.28 \mu\text{m}$, where $\xi = \hbar/\sqrt{2m\mu}$ is the healing length at the center of the condensate. The qualitative structure of Fig. 1 is generic and does not depend on the specific values of σ and μ , and is also observed in the HDR ($\nu = 1/2$).

In the deep subsonic limit $v/c \ll 1$, the Gaussian scatterer induces no observable damping of the dipole oscillations. Numerical results show that the oscillating

condensate is only locally perturbed in the vicinity of the defect: a dip or a peak appear in the condensate density for $U_0 > 0$ and $U_0 < 0$, respectively [see Fig. 2(a)]. These are characteristic features of a superfluid flow, with no energy dissipation, nor drag exerted [14], and with no damping of the oscillations (perfect transmission through the scatterer potential). In this regime, a perturbative treatment of Eq. (1) and a local density approximation yield a condensate density of the form

$$n(x, t) = n_0(x - X_t)[1 + \delta n(x, t)], \quad (2)$$

with

$$\delta n(x, t) = -\frac{2m}{\hbar^2 \kappa} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-\kappa|x-y|} U(y), \quad (3)$$

where $\kappa = \frac{2m}{\hbar} |c_0^2 - \dot{X}_t^2|^{1/2}$, c_0 being the unperturbed local sound velocity: $mc_0^2 = 2\nu\hbar\omega_\perp [an_0(x - X_t)]^\nu$. The accuracy of this approximation is shown in Fig. 2(a); it is well justified if $mU_0\sigma/(\hbar^2\kappa) \ll 1$ when $\kappa\sigma \ll 1$, or $mU_0/(\hbar\kappa)^2 \ll 1$ when $\kappa\sigma \gg 1$ [13], and if $\sigma \ll L$.

For weak defect potentials, $|U_0| \ll \mu$, and if the TF size L is large compared to the dipole oscillation amplitude, the center of mass position X_t can be computed analytically. To lowest order, the solution of the small-amplitude linearization yields $X_t = d_0 \cos[(\omega_x + \delta\omega)t]$ where the defect-induced frequency shift reads

$$\delta\omega = \frac{-1}{2m\omega_x} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dn_0(x)}{dx} \frac{dU(x)}{dx}. \quad (4)$$

This gives $\delta\omega = -(4 - 3\nu) \frac{3U_0\sigma}{8\mu^{3/2}} \omega_x^2 \sqrt{\pi m}$ for a Gaussian defect, in excellent agreement with our numerical results. Hence the analytical evaluations of the density profile (2)

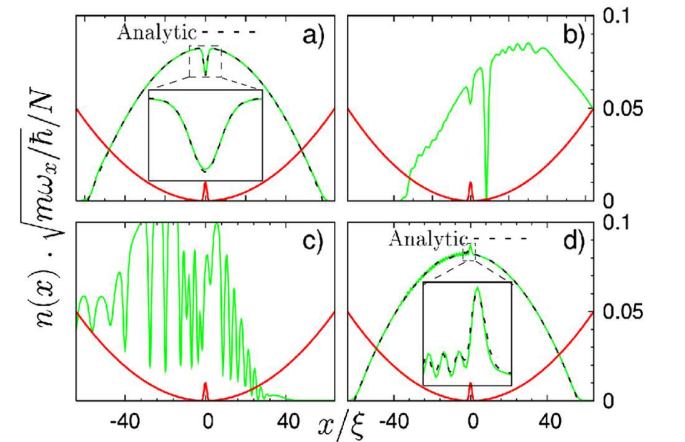


FIG. 2 (color online). Density profile after a time $t = 3/4 \times 2\pi/\omega_x$ for $U_0/\mu = 0.24$ at different initial velocities: (a) $v/c = 0.1$, (b) $v/c = 0.67$, (c) $v/c = 1.2$, (d) $v/c = 2.5$. The confining potential is represented as a full (red) curve. Insets blow up the density around the defect. (Other parameters as in Fig. 1)

and of the center of mass motion confirm the superfluid behavior of the oscillations in the deep subsonic regime.

The situation changes as the velocity increases at fixed U_0/μ or as U_0/μ is increased at constant velocity. In the former case, at some critical velocity $v_c \leq v_c^L = c$, that depends on the strength of the defect potential, the system loses SF, damping is observed and the fluidity factor diminishes. Using a local Landau criterion [15] we identify the border between the SF and this “dissipative region” as the locus of points where the maximum local condensate velocity $v(x, t)$ equals the local speed of sound $c(x, t) = (2\nu\hbar\omega_\perp/m)^{1/2}[an(x, t)]^{\nu/2}$. The former can be computed from mass conservation and Eq. (2). For an impurity localized at $x = 0$ this yields

$$\begin{aligned} \frac{v_c}{c} &= [1 + \delta n_c]^{1/2+1/\nu} \quad \text{if } U_0 > 0, \\ \frac{v_c}{c} &= 1 \quad \text{if } U_0 < 0, \end{aligned} \quad (5)$$

where δn_c is the factor $\delta n(x, t)$ [Eq. (3)] evaluated when $x = X_t = 0$. The lower dashed lines in Fig. 1 show that these estimates coincide well with the numerical findings.

When the system enters the dissipative regime, one or a few gray solitons detach from the defect during the first oscillations, as well as some phononlike excitations [see Fig. 2(b)]. As time goes on, the interactions of the solitons among them, with the defect and with the phononlike excitations produce time-dependent fluctuations of the shape. During this process the condensate does not lose phase coherence, but the center of mass motion loses collectivity, part of the kinetic collective energy being transformed into density fluctuations. The damping process continues until the center of mass velocity becomes comparable with v_c . Thereupon, though presenting local density fluctuations, the amplitude of the oscillations remain constant in time. Deeper in the dissipative regime, an increased emission of gray solitons and phononlike excitations is observed, leading to a massive distortion of the initial condensate profile [see Fig. 2(c)]. The BEC enters a strongly irregular time-dependent regime, the collectivity of the dipole motion is totally lost, and the damping increases drastically.

Finally, at sufficiently high supersonic velocities, a different phase is reached where the damping tends again to zero ($\gamma \rightarrow 1$). In this regime, that we denote as “quasi-ideal”, the kinetic energy of the condensate is large compared to the strength of the external potential, and interactions tend to be negligible. We find, in agreement with previous theoretical studies [13,14], a strong suppression of dissipation as the velocity increases. The condensate density is again only locally distorted in the vicinity of the defect (cf. Figure 2(d)). This local distortion is very well described by applying the combination of perturbative and local density approach already used in the SF regime. The density is of the same form as in Eq. (2) with here [13]

$$\delta n(x, t) = \frac{4m}{\hbar^2\kappa} \left[\frac{U(x)}{\kappa} + \Theta(-x\dot{X}_t) \text{Im}\{e^{i\kappa x} \hat{U}(\kappa)\} \right], \quad (6)$$

where \hat{U} is the Fourier transform of U . This form indeed corresponds to almost perfect transmission, with small reflexion on the defect (see the inset of Fig. 2(d)), the amount of which decreases at large velocity ($\kappa \rightarrow \infty$).

The frontier between the dissipative and the quasi-ideal region can be estimated by studying the related problem of a homogeneous condensate flowing through a barrier potential [16]. In this simplified configuration it is possible to determine analytically the velocity at which the system undergoes a transition from a local perturbation to an irregular fluctuating density profile [13]. We find that this estimate fits very well the numerically determined supersonic frontier (see Fig. 1). This stresses the qualitative similarities between Fig. 1 and the phase diagram obtained for a defect moving through a homogeneous fluid [13,14]. Interestingly, the existence of the three regions (SF, nonlinear dissipative, and quasi-ideal weakly-damped) has been recently observed experimentally for a localized defect in Ref. [5].

Disordered potential.—Keeping the same parameters as in Fig. 1, we now replace the single localized impurity by a disordered potential and compute, as before, the fluidity factor as a function of velocity and of the intensity of the (now random) potential. Figure 3 corresponds to the case where $U(x)$ is an optical speckle potential of mean value \bar{U} with a correlation length l_c such that $L/l_c = 30$, typical of experimental configurations [17]. The picture is generic and does not depend on the details of the disorder. The main result that emerges from the comparison of Figs. 1 and 3 is that, in the weak-disorder limit ($\bar{U}/\mu \ll 1$), the global properties of the damping phase diagram are qualitatively similar in both cases. The same three phases observed for the localized defect are again present. However, their relative importance is quite different. One observes a considerable shrinking of the SF and quasi-ideal weakly damped regions, compared to the nonlinear dissipative one. The symmetry of γ with respect to the sign of \bar{U}

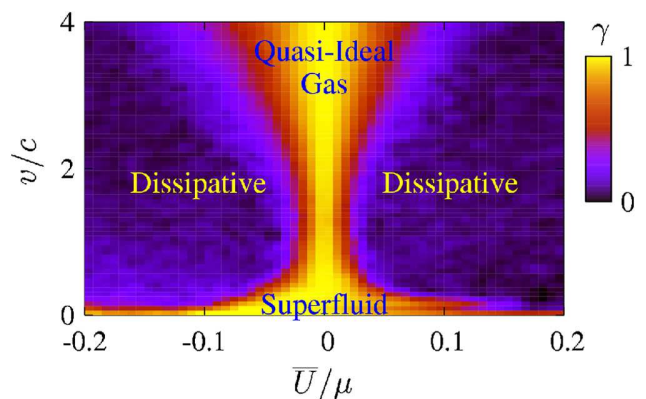


FIG. 3 (color online). Fluidity factor γ of dipole oscillations in presence of a speckle potential.

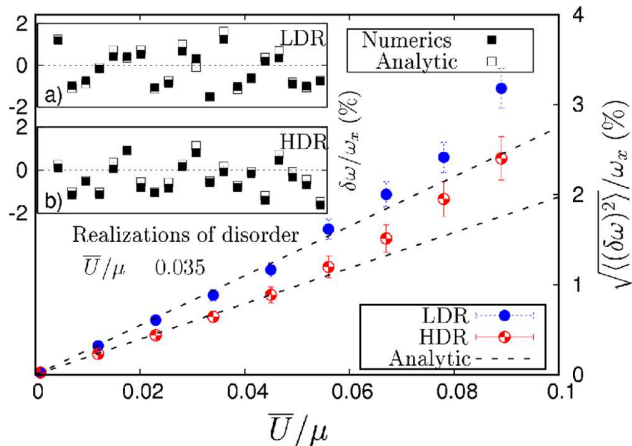


FIG. 4 (color online). Relative standard deviation $\omega_x^{-1}\langle\delta\omega^2\rangle^{1/2}$ as function of average speckle intensity. The analytical results correspond to Eq. (7). The insets compare numerical and analytical frequency shifts for different realization of disorder for $\bar{U}/\mu = 0.035$ in the HDR and LDR.

is greatly enhanced in the disordered case (Fig. 3). We interpret this as an effect of particle number conservation [18].

In the presence of disorder, important experimental efforts have been undertaken for understanding the possible connection of damping of dipole oscillations with Anderson localization. Our analysis shows that damping occurs in the dissipative phase. However, the dissipative mechanism observed in this phase is—as in the case of a localized defect—connected to the loss of collectivity due to the emission of solitons and linear excitations, and not to a localization phenomenon. From what is known in the case of a homogeneous flow, genuine Anderson localization might only occur in the deep supersonic regime $v/c \gg 1$ [19]. Without going into a detailed analysis of the experimental results [7,8], let us mention that the displacement of the harmonic potential (around $700 \mu\text{m}$) used at Rice University gives $v/c \approx 2.8$, while the lowest speckle height considered is $\bar{U}/\mu \approx 0.04$, which locates the system in the dissipative phase (under the experimental conditions, we find that at $v/c \approx 2.8$ the dissipative phase border is at $\bar{U}/\mu \approx 0.008$). Similarly, from the data published in Ref. [7] our analysis shows that the experiments at Florence were also performed in the supersonic dissipative region. These simple remarks explain the experimentally observed damping, and locate the experimental configurations in a regime where the effects of Anderson localization are at best indirect.

In the subsonic SF regime it is possible to compute the frequency shift due to the disordered potential similarly as in the one-peak case. The approach is found to be equivalent to the sum rule approach developed in [7]. One can also derive a simple relation for the variance of the frequency shift:

$$\langle(\delta\omega)^2\rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx dx'}{4m^2\omega_x^2} \frac{d^2n_0(x)}{dx^2} \frac{d^2n_0(x')}{dx'^2} \langle U(x)U(x') \rangle, \quad (7)$$

where $\langle \dots \rangle$ denotes ensemble average. For small \bar{U}/μ Eq. (7) is found to be in very good agreement with numerical integration of Eq. (1), as seen in Fig. 4.

To conclude, we have presented a comprehensive picture of the damping properties of dipole oscillations of BEC in the presence of a scattering potential. Strong analogies are stressed between different types of potentials. Three different phases are shown to exist: superfluid ($v/c < 1$), nonlinear dissipative ($v/c \sim 1$) and quasi-ideal ($v/c > 1$). The mechanism that breaks SF and leads to damped oscillations is shown to correspond to a generic onset of dissipation which, in the presence of disorder, is unrelated to localization properties. As the strength of the disorder potential increases the nonlinear dissipative phase occupies most of the phase diagram. Our findings allow us to give a simple interpretation of experimental results.

This work was supported by Grants No. ANR-05-Nano-008-02 and ANR-NT05-2-42103, by the IFRAF Institute and by the Alexander von Humboldt Foundation. We are grateful to L. Sanchez-Palencia for discussions.

-
- [1] D. R. Allum, P. V. E. McClintock, A. Phillips, and R. W. Bowley, *Phil. Trans. R. Soc. A* **284**, 179 (1977).
 - [2] A. P. Chikkatur *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 483 (2000).
 - [3] J. Wilks, *The Properties of Liquid and Solid Helium* (Clarendon, Oxford, 1967).
 - [4] S. Inouye *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 080402 (2001).
 - [5] P. Engels and C. Atherton, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 160405 (2007).
 - [6] C. Fort *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 170410 (2005).
 - [7] J. E. Lye *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 070401 (2005).
 - [8] Y. P. Chen *et al.*, *Phys. Rev. A* **77**, 033632 (2008).
 - [9] S. Drenkelforth *et al.*, *New J. Phys.* **10**, 045027 (2008).
 - [10] J. E. Lye *et al.*, *Phys. Rev. A* **75**, 061603(R) (2007).
 - [11] D. Clément, P. Bouyer, A. Aspect, and L. Sanchez-Palencia, *Phys. Rev. A* **77**, 033631 (2008).
 - [12] A. D. Jackson, G. M. Kavoulakis, and C. J. Pethick, *Phys. Rev. A* **58**, 2417 (1998).
 - [13] P. Leboeuf and N. Pavloff, *Phys. Rev. A* **64**, 033602 (2001).
 - [14] N. Pavloff, *Phys. Rev. A* **66**, 013610 (2002).
 - [15] V. Hakim, *Phys. Rev. E* **55**, 2835 (1997).
 - [16] In the deep supersonic regime the moving condensate can be considered in the vicinity of the obstacle as a stationary homogeneous flow because the defect produces only a local perturbation; see Eq. (6).
 - [17] The intensity of the potential is usually characterized by $U_D = 2|\bar{U}|$ [7,8].
 - [18] M. Albert *et al.* (to be published).
 - [19] T. Paul, P. Schlagheck, P. Leboeuf, and N. Pavloff, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 210602 (2007).

Chapitre 5

Transport d'un faisceau d'atomes condensés en présence de désordre

Le vrai caractère perce presque toujours dans les grandes circonstances.
Napoléon Bonaparte.

5.1 Introduction

La question des effets d'interactions sur le phénomène de localisation d'Anderson n'est évidemment pas propre à la physique des condensats de Bose-Einstein, et peut être adressée de manière bien plus générale (voir [67, 10, 168, 163, 73, 25], par exemple). Cela dit, ces systèmes présentent un certains nombres d'avantages non négligeables tant du point de vue théorique qu'expérimental. Ce sont des systèmes parfaitement cohérents de phase que l'on peut décrire avec relativement peu de paramètres et des concepts de physique "à une particule", à savoir l'équation de Gross-Pitaevskii (dans le régime de champ moyen). D'autre part, ces mêmes paramètres, comme l'intensité des interactions entre particules, le désordre, la dimensionnalité, peuvent être contrôlés de manière exceptionnelle dans les expériences d'atomes froids. On se trouve alors au paradis même du théoricien puisque dans ce domaine les expérimentateurs peuvent réaliser, dans un délai souvent assez court, nos rêves les plus fous.

Dans le cadre de la théorie de champ moyen, dont la validité a été discutée dans les chapitres précédents, l'effet des interactions se traduit par la non linéarité de l'équation de Gross-Pitaevskii, celle-ci pouvant dépendre de la dimensionnalité, de la forme des interactions, etc ... Par la suite on discutera essentiellement le cas unidimensionnel, où des approches analytiques et numériques sont relativement simples à mettre en oeuvre, mais il est fort probable que les effets en questions restent qualitativement corrects en dimensions supérieures. Par ailleurs, on se limite au régime de faible désordre de sorte que la localisation induite par le désordre, ne soit que de nature interférentielle.

Pour caractériser la localisation, on regarde ici les propriétés de transport d'un condensat unidimensionnel infini à travers un région désordonnée de taille finie L . Ainsi, notre mesure de la localisation sera la transmission plutôt que les états propres d'un système infini. Notons tout de même que, dans ce cas, la transmission n'est pas simple à définir. En effet, la non-linéarité de l'équation détruit le principe de superposition et il est alors impossible de séparer une onde incidente d'une onde réfléchies car celles-ci interagissent entre elles. Ceci entraîne en particulier une difficulté, jusque là non résolue, à comprendre le lien entre états stationnaires de diffusion et dynamique d'un paquet d'onde, qui, dans le cas linéaire, s'opère via une simple transformation de Fourier. Pour définir la transmission il faut alors faire appel à des approximations, qui seront discutées

dans la première partie de l'article 2 [144] ainsi que dans [146, 145] par exemple.

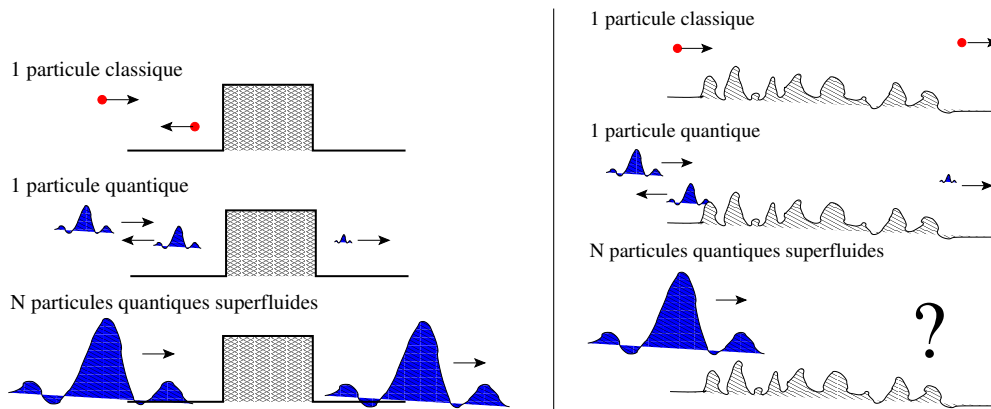


FIG. 5.1 – Représentation schématique de la question des effets d'interactions sur le transport d'un condensat en présence de désordre. **À gauche** : condensat superfluide arrivant sur un obstacle simple : la transmission est parfaite si la vitesse est plus faible que la vitesse critique alors qu'une particule classique n'aurait pu le traverser. Dans ce cas, les effets ondulatoires assistent la transmission. **À droite** : une particule classique ou quantique arrivant avec une très grande énergie sur une région désordonnée. Alors que la particule classique traverse sans problème, la particule quantique est pratiquement totalement réfléchi. Dans ce cas, les effets ondulatoires détruisent la transmission. La dernière image pose finalement la question de la transmission d'un superfluide à travers une région désordonnée, fil conducteur de cette thèse.

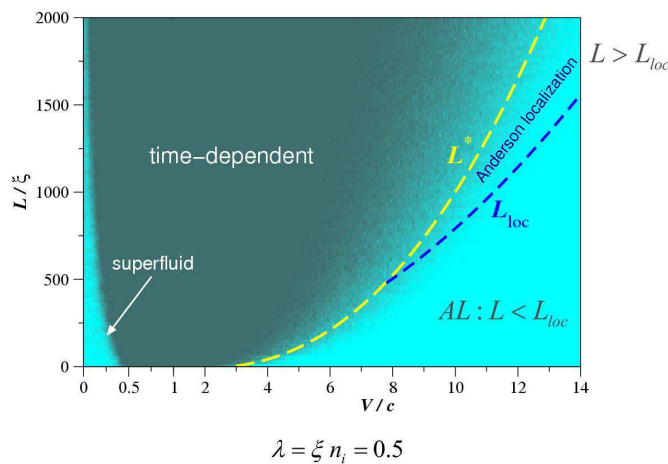


FIG. 5.2 – Diagramme de phase en présence d'un potentiel désordonné de type (3.34), en fonction de la vitesse du fluide et de la longueur de l'échantillon désordonné. Le code couleur symbolise le pourcentage de solutions stationnaires sur un ensemble de configurations de désordre. Les frontières entre les différents régimes sont discutés dans le texte.

Globalement, l'image générale du transport, telle qu'elle a été discutée dans le chapitre 2, reste valable en présence d'un potentiel aléatoire (de taille finie). À basse vitesse on a donc le régime superfluide, où la transmission est parfaite et la localisation ne se manifeste absolument pas. Au contraire, à très grande vitesse, les effets d'interaction tendent à disparaître dû à l'énergie cinétique très grande mise en jeu. La phénoménologie de l'équation de Schrödinger est alors retrouvée et donc la localisation d'Anderson par la même occasion. Entre les deux se trouve encore ce régime dépendant du temps. Pour l'instant peu de choses sont connues dans ce régime où même la validité de l'équation de

Gross-Pitaevskii unidimensionnelle peut être discutée [63]. Ce que l'on peut dire est que numériquement aucune trace de la localisation n'y a été trouvée dans la mesure où la transmission décroît linéairement avec L ($T \sim L_0/(L_0 + L)$) [145]. Qualitativement, on peut imaginer que due à l'émission continue de solitons et autres excitations, les effets d'interférences sont nettoyés et la localisation avec. L'existence de ce régime constitue l'effet le plus spectaculaire des interactions sur la localisation dans le sens où, en entrant dans ce régime, la localisation est détruite. Le diagramme de phase, pour un type de désordre particulier, est représenté sur la figure 5.2 mais ce résultat est qualitativement général et ne dépend donc pas du modèle de désordre utilisé.

Les détails de la physique en question ainsi que les frontières entre les domaines sont discutés dans les articles 2 [144] et 3. Notons tout de même la dépendance non triviale des frontières entre les domaines en fonction de la longueur de l'échantillon désordonné. Pour le cas superfluide on verra que ceci est relié aux propriétés du maximum d'un potentiel aléatoire alors que dans le cas supersonique il s'agit d'une marche au hasard de la pseudo-particule dans le potentiel effectif (2.19).

5.2 Article 2 : Anderson localization in a weakly interacting one dimensional Bose gas

Anderson localization of a weakly interacting one-dimensional Bose gasT. Paul,^{1,2} M. Albert,¹ P. Schlagheck,^{3,4} P. Leboeuf,¹ and N. Pavloff¹¹*Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques, CNRS, Université Paris Sud, UMR 8626, 91405 Orsay Cedex, France*²*Institut für Theoretische Physik, Universität Heidelberg, Philosophenweg 19, 69120 Heidelberg, Germany*³*Institut für Theoretische Physik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg, Germany*⁴*Mathematical Physics, Lund Institute of Technology, P.O. Box 118, 22100 Lund, Sweden*

(Received 1 July 2009; published 17 September 2009; publisher error corrected 21 September 2009)

We consider the phase coherent transport of a quasi-one-dimensional beam of Bose-Einstein condensed particles through a disordered potential of length L . Among the possible different types of flow we identified [T. Paul, P. Schlagheck, P. Leboeuf, and N. Pavloff, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 210602 (2007)], we focus here on the supersonic stationary regime where Anderson localization exists. We generalize the diffusion formalism of Dorokhov-Mello-Pereyra-Kumar to include interaction effects. It is shown that interactions modify the localization length and also introduce a length scale L^* for the disordered region, above which most of the realizations of the random potential lead to time-dependent flows. A Fokker-Planck equation for the probability density of the transmission coefficient that takes this effect into account is introduced and solved. The theoretical predictions are verified numerically for different types of disordered potentials. Experimental scenarios for observing our predictions are discussed.

DOI: [10.1103/PhysRevA.80.033615](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.80.033615)

PACS number(s): 03.75.-b, 05.60.Gg, 42.65.Tg, 72.15.Rn

I. INTRODUCTION

The absence of diffusion of waves in disordered media was predicted by Anderson 50 years ago [1]. Originally proposed in the context of electronic transport in disordered crystals, it has since been observed for different types of waves, including light and sound. Recently, direct observations of the Anderson localization by disorder [2] and of a localization transition by quasiperiodic potentials [3] of quasi-one-dimensional (1D) matter waves of ultracold atoms were reported. These experiments pave the way to the observation of new phenomena and shed new light on long standing problems, among which the question of possible Anderson localization in presence of interactions.

In the present paper we consider the case of an atomic vapor described as a weakly interacting Bose gas in the presence of a weak disorder (what is meant by “weak” here will be made quantitative in Sec. II). In this configuration it has been shown theoretically in Refs. [4,5] and supported by numerical simulations in Ref. [6] that a small amount of disorder does not drastically alter the *equilibrium* properties of the system, but merely decreases the condensate and superfluid fractions. Furthermore, even in the 1D limit considered in the present work, it has been experimentally demonstrated in Refs. [7,8] that one can observe global phase coherence in the presence of disorder and remain far from, say, the Bose glass phase originally proposed by Giamarchi and Schulz and Fisher *et al.* [9,10].

Here, we are interested in *transport* properties. Specifically, we study a quasi-1D weakly interacting Bose-Einstein condensate (BEC), propagating through a disordered potential. In this context, localization has been theoretically studied mainly for effective *attractive* interactions (see, e.g., [11] and references therein), with less attention on the *repulsive* case we consider here (see, however, Refs. [12,13]). In the absence of an external potential, (repulsive) interactions make the system superfluid and introduce a new characteris-

tic speed in the system, the speed of sound c . As mentioned above, when the speed V of the BEC relative to the external potential tends to zero, the addition of a weak random potential preserves superfluidity, although with a reduced superfluid fraction. What happens as V increases? This question was investigated in a previous publication [14], where the disordered potential, of length L , was modeled by a series of randomly located delta peaks. For small velocities $V/c \ll 1$, perturbation theory shows that the superfluidity is preserved, e.g., the flow is dissipationless and with a perfect transmission. In contrast, in the high speed limit $V/c \gg 1$, where the kinetic energy dominates over the interaction energy, the transport properties of the BEC are deeply altered and tend to those of the noninteracting gas, displaying an exponential damping of the transmission with length L , a behavior characteristic of the strong Anderson localization. Thus, two limiting cases of stationary flow have been identified [14], with contrasting transport properties: superfluidity in the deep subsonic regime and Anderson localization in the deep supersonic one. In between, in the region $V \sim c$ where both interaction and kinetic energies are important, it was shown that stationary scattering solutions do not exist: one reaches a regime of time-dependent flows with more or less (depending on the speed) complex density excitations. The range of speeds around c where this phenomenon is observed increases as the length L increases. The different types of existing flows are summarized in Fig. 1.

In the present study we concentrate on the supersonic stationary region of the phase diagram [gray (light blue online), $V/c > 1$ region in Fig. 1]. In this domain we provide analytical and numerical evidence of Anderson localization in the presence of interaction for different types of disorder. We compute analytically the interaction-dependent localization length as well as the corresponding distribution of transmission coefficients. We also explain the disappearance of the supersonic stationary flow observed at a given velocity for increasing length of the disordered sample. This onset of time dependence is an important qualitative effect revealed

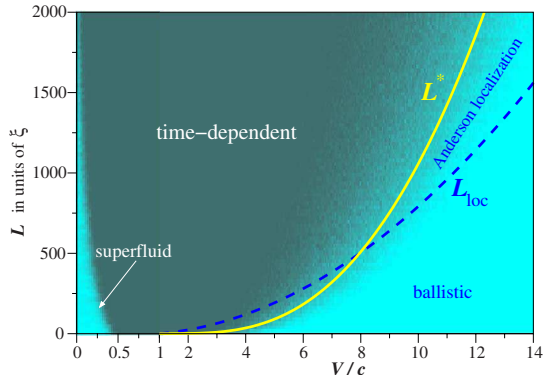


FIG. 1. (Color online) Transport of a quasi-1D BEC with velocity V through a disordered potential U_δ consisting in a series of uncorrelated delta peaks extending over a domain of size L [cf. Eq. (21) and the discussion in Sec. V C]. Dark region: time-dependent flow; light gray (light blue online) regions: stationary flow. In the supersonic case, the yellow solid line corresponds to the threshold L^* between these two domains as determined from Eq. (81). The blue dashed line is the localization length L_{loc} (87). The supersonic region below L_{loc} denoted as “ballistic” corresponds to the region where the perturbation theory of Sec. V A applies. Note the enlarged scale for $V/c \in [0, 1]$.

by our study. We show that it is directly connected to interaction effects and provide an analytical estimate of the length L^* of the disordered region above which most of the realizations of the random potential lead to time-dependent flows (see Fig. 1).

The paper is organized as follows. In Sec. II we present the model and identify its range of validity. In Sec. III we take some time to properly define the transmission coefficient of a Bose-condensed beam over an obstacle. In Sec. IV we introduce the different types of disordered potentials studied in the present work. In Sec. V we present analytical and numerical results showing that Anderson localization is indeed possible in the supersonic regime. We consider the three possible supersonic regimes: perturbative (Sec. V A), Anderson localized (Sec. V B), and onset of time dependence (Sec. V C). In Sec. VI we discuss experimental strategies and possible signatures for the observation of Anderson localization in an interacting Bose-Einstein condensate. Finally, we present our conclusions in Sec. VII. Some technical points are given in appendixes. In Appendix A we derive the probability distribution of transmission in a special case (perturbative regime and correlated Gaussian potential). In Appendix B we present the derivation of the Fokker-Plank equation (66) for the distribution of the transmission coefficients.

II. MODEL

We study here the transport properties of a quasi-1D Bose-Einstein condensate formed of particles of mass m , experiencing a repulsive effective interaction [characterized by the three-dimensional (3D) s -wave scattering length $a > 0$], in the presence of an obstacle represented by the external potential U . The potential is not necessarily disordered at this

point; the only restriction we impose throughout the present work is that it should have a finite extent, i.e., $U(x) \rightarrow 0$ when $x \rightarrow \pm \infty$. The configuration we consider corresponds to the “1D mean-field regime” [15] (see also the discussion in Ref. [16]), where the system is described by a 1D order parameter $\psi(x, t)$ depending on a single spatial variable: the coordinate x along the direction of propagation. $\psi(x, t)$ obeys the nonlinear Schrödinger equation

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + [U(x - Vt) + g|\psi|^2 - \mu]\psi. \quad (1)$$

In all the present work we choose to work in the “laboratory frame” where the condensate is initially at rest. Equation (1) describes its 1D dynamics in the presence of an obstacle moving at constant velocity V in this frame, which corresponds to the experimental situation where an obstacle is swept through a condensate initially at rest (see, e.g., Refs. [17–19]). On the theoretical side, one should imagine that, from an initial static configuration where the condensate is at rest with $U \equiv 0$, the potential intensity and the speed have been slowly ramped up to a point where the condensate dynamics is described by Eq. (1). We choose $V > 0$; this corresponds to a potential moving from left to right in the laboratory frame.

The reduction of the motion of the condensate to a single spatial dimension is typically achieved through a transverse harmonic confining potential of pulsation ω_\perp . We choose a normalization such that $n(x, t) = |\psi(x, t)|^2$ is the linear density of the condensate. In this case, the interaction among particles results in Eq. (1) in the nonlinear term $g|\psi|^2$, with $g = 2\hbar\omega_\perp a$ [20–22].

In the stationary regime, where the flow is time-independent in the frame moving with the potential, ψ depends on x and t only through the variable $X = x - Vt$. The appropriate boundary condition is $\psi(X \rightarrow -\infty) = \sqrt{n_0}$ (where n_0 is a constant) (see [22] and the discussion in Sec. III A below). The condensate is then characterized by a chemical potential $\mu = gn_0$, a speed of sound $c = (gn_0/m)^{1/2}$, and a healing length $\xi = \hbar/(mc)$.

It is customary to characterize the transverse confinement via the “harmonic-oscillator length” $a_\perp = (\hbar/m\omega_\perp)^{1/2}$. With n_1 denoting a typical order of magnitude of $n(x, t)$, the 1D mean-field regime in which Eq. (1) is valid corresponds to a density range such that

$$(a/a_\perp)^2 \ll n_1 a \ll 1. \quad (2)$$

In this domain the wave function of the condensate can be factorized in a transverse part and in a longitudinal part [20–22]. The transverse wave function is Gaussian (this is ensured by the condition $n_1 a \ll 1$); the longitudinal one is of the form $\psi(x, t) \exp\{-i\mu t/\hbar\}$ and $\psi(x, t)$ satisfies Eq. (1) [21, 22]. The left-hand side (l.h.s.) inequality in Eq. (2) prevents the system to enter in the Tonks-Girardeau regime. More precisely, a general analysis of 1D Bose gas shows that at zero temperature no BEC is possible [23]. This results in an algebraic decrease of the one-body density matrix monitored by phase fluctuations occurring over a phase-coherence length $L_\phi = \xi \exp\{\pi a_\perp (n_1/2a)^{1/2}\}$ [24, 25]. Hence, the results

obtained using Eq. (1) are valid if they describe structures with a characteristic length scale smaller than L_ϕ . The l.h.s. inequality in Eq. (2) ensures that L_ϕ is exponentially large compared to the healing length. If one considers, for instance, ^{87}Rb or ^{23}Na atoms in a guide with a transverse confinement characterized by $\omega_\perp = 2\pi \times 500$ Hz, the ratio a/a_\perp is roughly of order 10^{-2} and restriction (2) still allows the density to vary over four orders of magnitude.

Even if the mean-field approach is legitimate in one dimension, the effects of disorder have to be taken into account with some care. It may well be that the introduction of a disordered potential U in Eq. (1) modifies the properties of the ground state. This is indeed the case as shown in Refs. [4,5]: a disordered potential decreases the condensate and the superfluid fraction, but the effects are weak provided the intensity of the disorder remains weak (see Ref. [26] for an extension to finite temperature). More precisely, in the case of a disorder formed by randomly spaced delta impurities with density n_δ (see Sec. IV A) one can show [14,27] that, in the dilute impurity limit, at $V=0$ the nonsuperfluid fraction (normal part) is proportional to $n_\delta \xi (\xi/b)^2$ [the notations are those of Eq. (21)] and thus remains small provided the dimensionless coefficient (ξ/b) is small (weak disorder limit). At finite V , the normal fraction is multiplied by a factor $[1 - (V/c)^2]^{-3/2}$ (see Ref. [14]), which diverges when $V=c$. One thus expects the mean-field approach to fail near the region $V \simeq c$ of Fig. 1. This is supported by the numerical results presented in [28]. Hence, in the center of the time-dependent region of Fig. 1, we cannot trust the results obtained from Eq. (1). However, far from this region, the 1D mean-field approach is expected to be valid even in presence of (weak) disorder, as experimentally demonstrated in Refs. [7,8].

III. DEFINITION OF THE TRANSMISSION

In the present work we characterize the localization properties of the condensate in the random potential by studying the transmission coefficient. Equation (1) being nonlinear, the definition of transmission and reflection coefficients needs to be treated with special care. This is the purpose of the present section where we first define the stationary regime (Sec. III A) and then the transmission coefficient within this regime (Sec. III B).

A. Stationary regime

It is customary to perform a Madelung transformation and to write $\psi(x,t) = \sqrt{n(x,t)} \exp\{iS(x,t)\}$, where $n(x,t)$ is the density and $\hbar \partial_x S / m = v(x,t)$ is the local velocity. From Eq. (1) one can check that they verify the continuity equation

$$\partial_t n + \partial_x (nv) = 0. \quad (3)$$

The stationary regime is defined as the regime where the system is at rest in the frame moving with the obstacle. In this case, in the laboratory frame, ψ , S , n , and v are time dependent, but they depend on x and t only through the variable $X = x - Vt$. It is then possible to get a first integral of Eq. (3) under the form

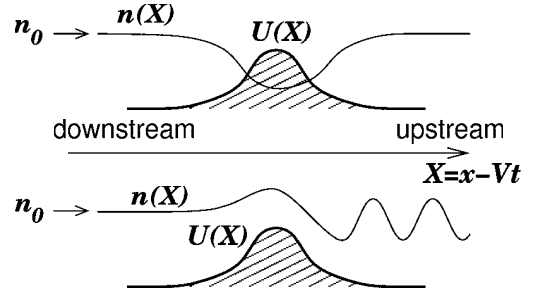


FIG. 2. Schematic representation of the typical density profiles. The upper plot corresponds to a subsonic stationary profile, while the lower one corresponds to a supersonic stationary profile. The potential moves from left to right, and the upstream (downstream) region thus corresponds to the region $X \rightarrow +\infty$ ($X \rightarrow -\infty$). In both plots the potential is represented by a thick solid line (hatched down to zero) and the density profile is represented by a thin solid line.

$$n(X) \left(\frac{\hbar}{m} \frac{dS}{dX} - V \right) = C^{st}. \quad (4)$$

In the case of subsonic ($V < c$) and stationary motion, the flow is superfluid and the order parameter is only affected in the vicinity of the obstacle, with $n(X \rightarrow \pm\infty) = n_0$ and $v(X \rightarrow \pm\infty) = 0$ [22,29].

For $V > c$, a regime of stationary flow also exists but in this case the obstacle induces density oscillations with a pattern stationary in its rest frame [22]. This means that in the laboratory frame the phase velocity of these waves is identical to the velocity V of the obstacle. On the other hand, the energy transferred from the obstacle to the fluid propagates with the group velocity, which in the case of Bogoliubov excitations is greater than the phase velocity—i.e., as just argued—than V . As a consequence, radiation conditions require that the wake is always located ahead of the obstacle, i.e., upstream, with no long-range perturbation of the fluid on the downstream side [22,30]. This means that in this case the flow far in the downstream region remains unperturbed, with $n(X \rightarrow -\infty) = n_0$ and $v(X \rightarrow -\infty) = 0$. The two possible stationary configurations (subsonic and supersonic) are represented in Fig. 2. Hence, in any stationary configuration (subsonic or supersonic), the above reasoning fixes the integration constant in the right-hand side (r.h.s.) of Eq. (4) to its value at $X \rightarrow -\infty$, i.e., $-n_0 V$.

In the stationary regime one gets from Eqs. (1) and (4)

$$U(X) \frac{dA^2}{dX} = \frac{d}{dX} \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{dA}{dX} \right)^2 + W(A) \right\}, \quad (5)$$

where $A(X) = \sqrt{n(X)/n_0}$ and

$$W(A) = \frac{m}{2} (A^2 - 1) \left[c^2 + V^2 - c^2 A^2 - \frac{V^2}{A^2} \right]. \quad (6)$$

B. Transmission coefficient

In this section we restrict the analysis to the stationary regime of Sec. III A and define the transmission of the condensate through the obstacle represented by a potential U

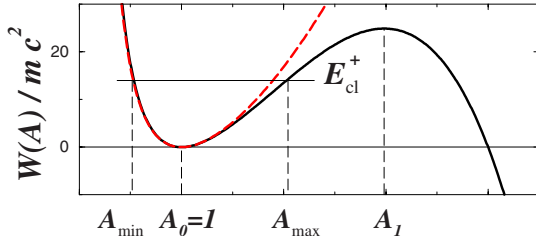


FIG. 3. (Color online) W as a function of $A=|\psi|/\sqrt{n_0}$ (drawn for $V/c=4$). The fictitious particle has a classical energy E_{cl}^+ when $X \rightarrow +\infty$. The (red) dashed line corresponds to an approximation of $W(A)$ by $\hbar^2 \kappa^2 (A-1/A)^2 / (2m)$, obtained by keeping only the first term in expansion (13).

(not necessarily disordered) verifying $U(|x| \rightarrow \infty) = 0$. As the wave equation (1) is nonlinear, one cannot, in general, properly define reflection and transmission coefficients since it is generally not possible to disentangle incoming and reflected waves in the nonlinear flow upstream the obstacle. However, following a procedure devised in Ref. [31] (see also [32]), we will show that one can define a transmission and a reflection coefficient in the limit of small nonlinearity as well as in the limit of weak reflection and arbitrary nonlinearity.

Outside the scattering region, $U(X)=0$ and one can get a first integral of Eq. (5) under the form

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{dA}{dX} \right)^2 + W(A) = E_{cl}^\pm \quad \text{when } X \rightarrow \pm \infty, \quad (7)$$

which defines the “free” asymptotic density profiles. E_{cl}^\pm in Eq. (7) are integration constants. The boundary condition discussed in the previous section imposes $A=1$ and $dA/dX=0$ when $X \rightarrow -\infty$. This fixes the value $E_{cl}^- = 0$. The value of E_{cl}^+ at $+\infty$ has to be determined by the integration of Eq. (1) (cf. Ref. [22]). Equation (7) expresses the energy conservation for a fictitious classical particle with “mass” \hbar^2/m , “position” A , and “time” X , evolving in a potential W (whose typical shape is displayed in Fig. 3). This type of analysis is common in the study of nonlinear equations such as Eq. (1); see, e.g., the review [33] (the first time we found its use is in Ref. [34]). It is employed here as a convenient tool for getting intuition about the behavior of the solution of the Gross-Pitaevskii equation (see below).

From now on we restrict to the supersonic stationary regime where an imperfect transmission occurs (in the subsonic stationary regime one has perfect transmission). In this case the fictitious particle is initially (i.e., when $X \rightarrow -\infty$) at rest at the bottom of the potential W with $E_{cl}^- = 0$. The behavior of A for $X \rightarrow +\infty$ depends on the value of E_{cl}^+ . A stationary solution exists only if $A(X \rightarrow +\infty)$ remains bounded, i.e., if $E_{cl}^+ < W(A_1)$ (where A_1 corresponds to the local maximum of W ; see Fig. 3). In this case, the asymptotic behavior of $A(X)$ corresponds to oscillations between the values A_{\min} and A_{\max} defined in Fig. 3.

For future references we note that $W(A)$ is zero when $A=A_0=1$ and when $A=V/c$, and that the derivative dW/dA is zero when $A=A_0=1$ and when $A=A_1$, with

$$A_1 = \frac{V}{2c} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8c^2}{V^2}} \right)^{1/2}. \quad (8)$$

At large velocity, when $V \gg c$, one has

$$A_1 = \frac{V}{\sqrt{2}c} + O\left(\frac{1}{V/c}\right), \quad (9)$$

$$W(A_1) = \frac{mV^4}{8c^2} + O\left(\frac{V^2}{c^2}\right). \quad (10)$$

Writing $A^2(X) = \rho(X) = 1 + \delta\rho(X)$ we now argue that, following Ref. [31], one can write a perturbative version of Eq. (7) in a limit where

$$|\delta\rho(X)| \ll \left| \frac{V^2}{c^2} - 1 \right|. \quad (11)$$

We emphasize that restriction (11) corresponds to $|\delta\rho| \ll 1$ (i.e., small oscillations) only when V is of order of c or smaller. The approach developed below is however able to tackle large relative density oscillations ($|\delta\rho| \gg 1$) at large velocities ($V \gg c$) [35]. In this sense it will allow us to penetrate in the nonperturbative regime where the upstream density oscillations are large and the transmission is low.

Using the variable ρ , we write Eq. (7) in the upstream region ($X \rightarrow +\infty$) as

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d\rho}{dX} \right)^2 + 8F(\rho) = 8\rho E_{cl}^+, \quad (12)$$

where $F(\rho) = \rho W(A = \sqrt{\rho})$. A simple limited expansion around $\rho=1$ yields

$$F(\rho) \simeq \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} (\delta\rho)^2 + \frac{mc^2}{2} (\delta\rho)^3 + \dots, \quad (13)$$

where $\delta\rho(X) = \rho(X) - 1$ and

$$\kappa = \frac{m}{\hbar} |V^2 - c^2|^{1/2}, \quad \left| \frac{V^2}{c^2} - 1 \right| = \kappa^2 \xi^2. \quad (14)$$

The second term in the r.h.s. of expansion (13) is small compared to the first one precisely in the limit (11). In the following we restrict to this regime and neglect the second term of the r.h.s. of Eq. (13). This corresponds to approximating the exact $W(A)$ by the (red online) dashed line in Fig. 3 and to write Eq. (12) under the form

$$\left(\frac{d\delta\rho}{dX} \right)^2 + 4\kappa^2 (\delta\rho)^2 = 16\kappa^2 \lambda (1 + \delta\rho), \quad (15)$$

where the dimensionless parameter λ is defined by

$$\lambda = \frac{mE_{cl}^+}{2\hbar^2 \kappa^2}. \quad (16)$$

The solution of Eq. (15) is

$$\frac{n(X)}{n_0} = \rho(X) = 1 + 2\lambda + 2\Lambda \cos(2\kappa X + \theta), \quad (17)$$

where

$$\Lambda = \sqrt{\lambda^2 + \lambda} \quad (18)$$

and θ is a phase factor. We recall that Eq. (17) describes the density oscillations in the upstream region $X \rightarrow +\infty$. These oscillations can be described as the sum of incident and reflected waves (ψ_{inc} and ψ_{ref}) of the form

$$\begin{aligned} \psi_{\text{inc}}(X) &= \sqrt{n_0(1+\lambda)} \exp(-i\kappa X), \\ \psi_{\text{ref}}(X) &= \sqrt{n_0\lambda} \exp(i\kappa X + i\theta). \end{aligned} \quad (19)$$

This analysis allows one to determine the reflection and the transmission coefficients as

$$R = \frac{|\psi_{\text{ref}}|^2}{|\psi_{\text{inc}}|^2} = \frac{\lambda}{1+\lambda}, \quad T = 1 - R = \frac{1}{1+\lambda}. \quad (20)$$

Of course the sum of the incident ψ_{inc} and the reflected ψ_{ref} waves (19) is an approximate solution of the nonlinear Schrödinger equation (1), which is only valid in regime (11), i.e., in the regime of arbitrary interaction and small transmission ($\lambda \ll 1$), or in the regime of arbitrary transmission and small interaction ($V \gg c$).

IV. DIFFERENT TYPES OF DISORDER

Up to this point we presented a theory valid for any potential of finite extent. From now on we concentrate on the particular case of random potentials. We denote $U(x)$ an arbitrary random potential and use a subscript when dealing with one of the particular cases defined below.

A. Potential formed by a series of δ peaks

The first potential of interest, analyzed in Ref. [14], is a series of N randomly located identical delta peaks of the form

$$U_{\delta}(x) = \frac{\hbar^2}{mb} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i). \quad (21)$$

The intensity of the peaks is measured by the (nonrandom) positive quantity b . The scatterers have random uncorrelated positions $0 = x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$, with mean density n_{δ} and average separation $l_{\delta} = 1/n_{\delta}$. Hence, the potential extends over a mean length $L = (N-1)l_{\delta}$.

Denoting henceforth the disorder average by $\langle \dots \rangle$ for x and x' inside the disordered region, one gets the mean value

$$\langle U_{\delta}(x) \rangle = \frac{\hbar^2 n_{\delta}}{mb} \quad (22)$$

and the irreducible two-point correlation function

$$\langle U_{\delta}(x)U_{\delta}(x') \rangle - \langle U_{\delta} \rangle^2 = \sigma(\hbar^2/m)^2 \delta(x - x'), \quad (23)$$

where

$$\sigma = \frac{n_{\delta}}{b^2}. \quad (24)$$

B. Correlated Gaussian potential

Another commonly used model of disorder is provided by Gaussian random processes with zero average. We consider

here potentials which are nonzero only over a region of finite extent (with typical size L) and generate them in the following way (see, e.g., Chap. 5 of Ref. [36] and references therein): let us consider a Gaussian white noise $\eta(x)$ extending over all the real axis, with zero mean and second moment $\langle \eta(x)\eta(y) \rangle = \delta(x-y)$. Then for a given function $w(x)$ one defines

$$U_g(x) = \frac{\hbar^2 \sqrt{\sigma}}{m} \int_0^L w(x-y) \eta(y) dy, \quad (25)$$

where σ is a parameter characterizing the disorder and whose meaning is explained below. If w were a delta function, then U_g would be a Gaussian white noise over $[0, L]$ (and zero everywhere else). The actual function $w(x)$ has a finite extension, and this induces finite correlations in the disordered potential.

From Eq. (25) it is clear that $\langle U_g \rangle = 0$. If the domain of integration in the r.h.s. of Eq. (25) were extended to all \mathbb{R} , U_g would have a Gaussian distribution

$$\mathcal{P}(U_g) = \frac{\exp\left[-\frac{U_g^2}{2\Sigma^2}\right]}{\sqrt{2\pi\Sigma^2}}, \quad (26)$$

where

$$\Sigma^2 = \sigma(\hbar^2/m)^2 \int_{\mathbb{R}} w^2(x) dx. \quad (27)$$

Defining the correlation function C as

$$\langle U_g(x)U_g(x') \rangle - \langle U_g \rangle^2 = \sigma(\hbar^2/m)^2 C(x - x'), \quad (28)$$

one would get in this case

$$C(x) = \int_{\mathbb{R}} dy w(x+y)w(y), \quad (29)$$

with a Fourier transform

$$\hat{C}(q) = \int_{\mathbb{R}} dx C(x) e^{-iqx} = |\hat{w}(q)|^2, \quad (30)$$

where \hat{w} is the Fourier transform of w .

Imposing here the normalization condition

$$\int_{\mathbb{R}} w(x) dx = 1, \quad (31)$$

leads to a two-point correlation function (28), which is—as in Eq. (23)—of the form of $\sigma(\hbar^2/m)^2$ multiplied by a function whose integral over x equals unity [$C(x)$ in Eq. (28) instead of $\delta(x)$ in Eq. (23)]. Thus, with definition (25) and normalization (31), σ plays for disorder (25) the same role as n_{δ}/b^2 [Eq. (24)] for disorder (21): it characterizes the amplitude of the fluctuations of the potential. The typical extent of $w(x)$ will in turn characterize the range of the correlations.

Since U_g as given by Eq. (25) is typically nonzero only over a region of finite extent, Eqs. (28) and (29) are only correct if x and x' are inside this region. More precisely, they should be in this region, at a distance from 0 or L larger than

the typical extent ℓ_c of the function w . In the following we always consider the case where L is very large compared to ℓ_c (otherwise, one could simply not speak of a disordered region) and it is clear that the characteristics of the disorder are properly defined only inside the disordered region.

We consider two special cases of correlation corresponding to different forms of w : a Lorentzian

$$w_L(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\ell_c/2}{(\ell_c/2)^2 + x^2} \quad (32)$$

and a Gaussian

$$w_G(x) = \frac{1}{\ell_c \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{\ell_c^2}\right). \quad (33)$$

We denote the corresponding potentials by U_L and U_G . For the correlation functions one gets, respectively,

$$C_L(x) = \frac{\ell_c/2 \pi}{\ell_c^2 + x^2}, \quad \hat{C}_L(q) = e^{-\ell_c |q|}, \quad (34)$$

$$C_G(x) = \frac{e^{-x^2/(2\ell_c^2)}}{\sqrt{2\pi\ell_c^2}}, \quad \hat{C}_G(q) = e^{-q^2 \ell_c^2/2}. \quad (35)$$

In both cases ℓ_c is the typical correlation radius.

The choice of a Lorentzian correlated disordered potential originates from experimental and theoretical results in the case of microfabricated guides. In this type of setting, the atoms are magnetically guided over a chip [37]. Unavoidable imperfections and irregularities in the design of the circuit induce fluctuations in the current which, in turn, result in a random contribution to the magnetic field used for guiding the atoms. Thus, the potential seen by the atoms has a random component which is typically Lorentzian correlated, with a correlation length ℓ_c which decreases when the distance between the guide and the chip increases [13,38–40]. The Gaussian correlated potential U_G is more academic, but by comparison with the results obtained with U_L it allows one to check what is really specific to the Lorentzian case and what is a mere effect of finite correlation length.

C. Speckle potential

Another experimentally relevant type of disorder is the so-called speckle potential, which is generated by an optical speckle field produced by a laser beam passing through a diffusing plate [41–43]. The corresponding potential will be denoted by U_S and may be mathematically generated as follows [44]:

$$U_S(x) = \frac{\hbar^2 \sqrt{\sigma}}{m} \left| \int_0^L w_S(x-y) [\eta_1(y) + i\eta_2(y)] dy \right|^2, \quad (36)$$

where η_1 and η_2 are two independent Gaussian white noise processes of zero mean with $\langle \eta_\alpha(x) \eta_{\alpha'}(x') \rangle = \delta(x-x') \delta_{\alpha\alpha'}$ (α and $\alpha' = 1$ or 2).

Here also, we characterize the disorder by studying its statistical properties in the limit where the domain of integration in the r.h.s. of Eq. (36) is extended to all \mathbb{R} . In this case one gets

$$\mathcal{P}(U_S) = \frac{\exp\left(-\frac{U_S}{2\Sigma^2}\right)}{2\Sigma^2}, \quad (37)$$

where Σ is given by formula (27) (replacing w by w_S). This yields $\langle U_S \rangle = 2\Sigma^2$ and the correlation function defined in Eq. (28) reads here

$$\begin{aligned} C_S(x-x') &= \frac{1}{\sigma(\hbar^2/m)^2} [\langle U_S(x) U_S(x') \rangle - \langle U_S \rangle^2] \\ &= 4 \left[\int_{\mathbb{R}} dy w_S(x-x'+y) w_S(y) \right]^2. \end{aligned} \quad (38)$$

Contrarily to choice (31), w_S should not be normalized to unity here because—from Eq. (36)—this is homogeneitywise impossible. Instead, the choice

$$w_S(x) = \left(\frac{\ell_c}{4\pi^3}\right)^{1/4} \frac{\sin\left(\frac{x}{\ell_c}\right)}{x} \quad (39)$$

corresponds to the typical experimental situations [42] and leads to a correlation function

$$C_S(x) = \frac{\ell_c}{\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{\ell_c}\right)}{x^2}, \quad (40)$$

whose integral over x equals unity and whose Fourier transform is

$$\hat{C}_S(q) = \begin{cases} 1 - |q|\ell_c/2 & \text{if } |q|\ell_c < 2 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (41)$$

Hence, definition (36) and choice (39) correspond here also to characterizing the amplitude of the disorder's fluctuations by the parameter σ and the range of the correlations by ℓ_c .

V. SUPERSONIC STATIONARY REGIME

As explained in Ref. [14], and recalled in the Introduction, Anderson localization in a weakly repulsive Bose-Einstein condensate is only possible in the supersonic regime (cf. Fig. 1), which we consider now. In the present section we first analyze the transmission across a short disordered sample, in which case perturbation theory is applicable (Sec. V A). We then turn to generic nonperturbative configurations (Sec. V B) where Anderson localization is expected. In this regime we obtain evidences of the occurrence of Anderson localization in the presence of interaction. Finally, we discuss the upper limit of the localized regime and the onset of time-dependent flows for long disordered samples (Sec. V C).

A. Perturbation theory ($\lambda \ll 1$)

In the supersonic stationary regime, simple perturbation theory yields $n(x,t) = n_0 + \delta n(X)$, where [22]

$$\delta n(X) = \frac{2mn_0}{\hbar^2\kappa} \int_{-\infty}^X dy U(y) \sin[2\kappa(X-y)] \quad (42)$$

and κ is given by Eq. (14). Perturbation theory always predicts a stationary density profile. This is certainly wrong when V is close to c (cf. Fig. 1), but in this case κ gets very small and one precisely goes out of the domain of validity of perturbation theory [δn as given by Eq. (42) is no longer small compared to n_0].

Far ahead of the obstacle (in a region where $X-L$ is larger than ℓ_c and κ^{-1}), Eq. (42) gives

$$\frac{\delta n(X)}{n_0} = \frac{2m}{\hbar^2\kappa} \text{Im}\{e^{2i\kappa X} \hat{U}(2\kappa)\}. \quad (43)$$

The perturbative regime in which Eqs. (42) and (43) are valid is also the one where the constant λ in Eqs. (16) and (17) is small compared to unity. This can be inferred from the comparison of Eqs. (17) and (43) which indeed shows that $\lambda \ll 1$ in the regime where Eq. (43) holds and that, in this case, $\sqrt{\lambda} \approx m|\hat{U}(2\kappa)|/(\hbar^2\kappa)$. The corresponding reflection coefficient can then be obtained from Eq. (20), yielding

$$R \approx \lambda \approx \frac{m^2}{\hbar^4\kappa^2} |\hat{U}(2\kappa)|^2. \quad (44)$$

From Eq. (44) it is clear that the average reflection coefficient is

$$\langle R \rangle = \langle \lambda \rangle = \frac{m^2}{\hbar^4\kappa^2} \langle |\hat{U}(2\kappa)|^2 \rangle \ll 1. \quad (45)$$

Furthermore, one can show that the corresponding probability distribution of the reflection coefficient is Poissonian with

$$P(R) = \frac{1}{\langle R \rangle} \exp(-R/\langle R \rangle). \quad (46)$$

Note that, for properly normalizing this probability distribution for $R \in [0, 1]$, one should include in the prefactor of the r.h.s. of Eq. (46) a correcting term of order $\exp(-1/\langle R \rangle)$, which can be safely neglected in the limit (45).

We give in Appendix A a demonstration of result (46) for the special case of a correlated Gaussian potential U_g of type (25). Below, we show that the same result holds for a potential U_δ of type (21) [see Eq. (68) in Sec. V B], and we checked numerically that it is also the case for the speckle potential U_S (36) (cf. Fig. 4). In all these cases, the average reflection coefficient reads (up to the above discussed exponentially small correction)

$$\langle R \rangle = L/L_{\text{loc}}(\kappa), \quad (47)$$

where

$$L_{\text{loc}}(\kappa) = \frac{\kappa^2/\sigma}{\hat{C}(2\kappa)}. \quad (48)$$

We recall that the function \hat{C} depends on the type of disorder considered. For a potential of form (21), one has $\hat{C}_\delta \equiv 1$; for the other potentials considered in this work it is given by Eqs. (34), (35), and (41).

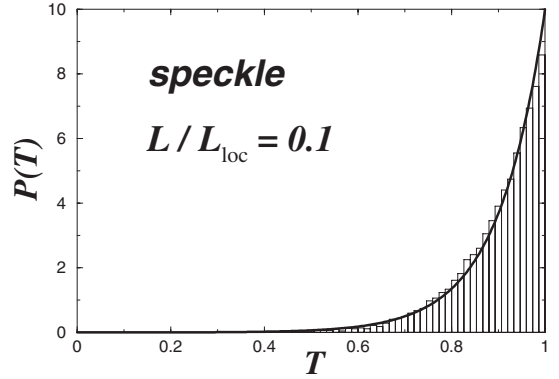


FIG. 4. Probability distribution $P(T)$ for the transmission coefficient T in a potential U_S with $\sigma=3.14\mu^2\xi$, $\ell_c=0.1\xi$, and $L=50\xi$ moving at velocity $V=7c$ in a condensate of initial constant density $n_0\xi=1$. The corresponding localization length is $L_{\text{loc}}=500\xi$. The histogram corresponds to a statistical analysis of the results of the numerical solution of Eq. (1) for 10 000 different random potentials. The solid line is the perturbative result (49).

Concomitantly to distribution (46) of reflection coefficients, one gets for the transmission

$$P(T) = \frac{L_{\text{loc}}}{L} \exp\left\{- (1-T) \frac{L_{\text{loc}}}{L}\right\}. \quad (49)$$

From Eq. (49) [or Eq. (47)], one gets

$$\langle T \rangle = 1 - \frac{L}{L_{\text{loc}}(\kappa)}. \quad (50)$$

The perturbative approach holds when $\langle R \rangle \ll 1$, i.e., when $L \ll L_{\text{loc}}$. This corresponds to the region which is denoted as “ballistic” in Fig. 1 [45]. Its accuracy is shown for $L/L_{\text{loc}}=0.1$ in Fig. 4 for a speckle potential U_S of type (36) (we also checked this prediction for the potentials U_δ and U_G , with also excellent results).

At this stage, L_{loc} is simply a notation for expression (48), but it will be shown to be the actual localization length of the matter wave in a disordered potential (in Sec. V B).

The results derived here also hold for a noninteracting gas, obtained by taking the limit $g \rightarrow 0$ in Eq. (1), in which case $c=0$ and $\kappa=k$. Equation (48), with κ replaced with k , then coincides with the Antsygina-Pastur-Slyusarev formula for the localization length [46,47] and the distribution of transmissions (49) holds, with $L_{\text{loc}}=L_{\text{loc}}(k)$.

In the present work, those formulas are modified to include interactions. The generalization simply consists in replacing the wave vector $k=mV/\hbar$ with $\kappa=m(V^2-c^2)^{1/2}/\hbar$. This replacement has—as an important physical consequence—the effect of diminishing, at a given speed V , the localization length (there is an effective reduction of the available kinetic energy by the repulsive interactions). For instance, in the case of a potential U_δ , since $L_{\text{loc}}(\kappa) \propto \kappa^2$, there is a relative difference c^2/V^2 between $L_{\text{loc}}(\kappa)$ and $L_{\text{loc}}(k)$, that is 11% for $V=3c$. This is illustrated in Fig. 5, which displays the average $\langle T \rangle$ as a function of L for a disorder U_δ of type (21), with and without interactions.

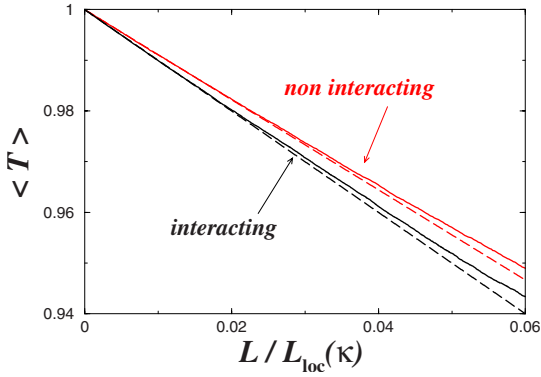


FIG. 5. (Color online) Average transmission as a function of L for a potential U_δ (characterized by $n_\delta\xi=0.5$ and $\xi/b=0.1$). In the interacting case $V=3c$ and $L_{\text{loc}}(\kappa)=1600\xi$. The noninteracting case is drawn for the same velocity and corresponds to a value $L_{\text{loc}}(k)=\frac{9}{8}L_{\text{loc}}(\kappa)=1800\xi$. In both cases the dashed line is the analytical result (50) and the solid line corresponds to a statistical analysis of the results of the numerical solution of Eq. (1) for 15 000 different random potentials. The departure of the numerical results from the dashed lines occurs when the systems leaves the perturbative regime.

B. Nonperturbative approach

When the size L of the sample is large compared to the value L_{loc} determined in Sec. V A, the perturbative approach fails. We now propose a nonperturbative method allowing to treat both the regimes $L < L_{\text{loc}}$ and $L \geq L_{\text{loc}}$ and showing that L_{loc} , as defined in Eq. (48), is indeed the localization length in the presence of interactions.

Within the framework of the nonperturbative approach, we are able to provide approximate analytical results in the case of the model disorder potential (21). This potential being zero between two impurities, one can write a series of first integrals of Eq. (5) in each segment $]x_n, x_{n+1}[$ as follows:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{dA}{dX} \right)^2 + W[A(X)] = E_{\text{cl}}^{(n)}. \quad (51)$$

In the region $X < x_1=0$ the integration constant E_{cl}^- of Eq. (7) is denoted as $E_{\text{cl}}^{(0)}$ in Eq. (51) (taking $x_0=-\infty$) and is zero, whereas in the region $X > x_N$ one has $E_{\text{cl}}^+ = E_{\text{cl}}^{(N)}$ (and $x_{N+1} = +\infty$).

From Eq. (5) it is a simple matter to show that the matching condition of the density at impurity position x_n is

$$A'(x_n^+) - A'(x_n^-) = \frac{2}{b}A(x_n), \quad (52)$$

where $A'(x_n^-)$ [$A'(x_n^+)$] denotes the limit of the derivative dA/dX at the left [at the right] of x_n . Relation (52) between the derivatives of the amplitude results [from Eq. (51)] in a relation between the classical energies,

$$E_{\text{cl}}^{(n)} = E_{\text{cl}}^{(n-1)} + \frac{2\hbar^2}{mb^2}A(x_n)[bA'(x_n^-) + A(x_n)]. \quad (53)$$

Hence, Eq. (51) allows one to draw a classical analog of the solution of the nonlinear Schrödinger equation in the presence of potential (21) formed by a series of delta peaks:

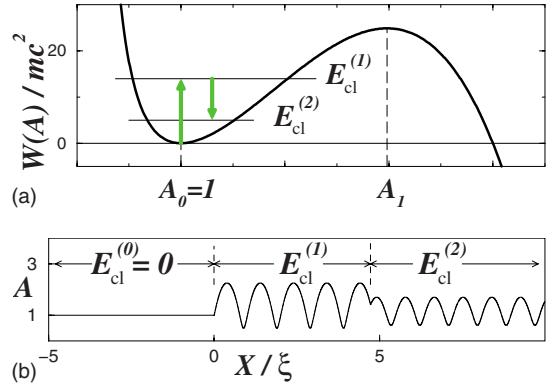


FIG. 6. (Color online) Upper panel: W as a function of A (drawn for $V/c=4$). For $X < x_1=0$, the fictitious particle is initially at rest at the bottom of potential W with $E_{\text{cl}}^{(0)}=0$. The value of the classical energy changes from $E_{\text{cl}}^{(n-1)}$ to $E_{\text{cl}}^{(n)}$ at each impurity x_n . The lower panel displays the corresponding oscillations of $A(X)$, with two impurities at $x_1=0$ and $x_2=4.7\xi$ (their position is indicated by vertical dashed lines).

the fictitious classical particle defined in Sec. III B evolves in the potential W and experiences kicks at times x_n . Each kick changes the “energy” according to Eq. (53), as illustrated in Fig. 6. The key point in the remaining of this section will be to derive the probability distribution of $E_{\text{cl}}^+ = E_{\text{cl}}^{(N)}$ which then directly allows one to get the distribution of λ 's and of the transmission coefficients [through Eqs. (16) and (20)].

Let us introduce the quantities

$$\lambda_n = \frac{mE_{\text{cl}}^{(n)}}{2\hbar^2\kappa^2}, \quad \Lambda_n = \sqrt{(\lambda_n)^2 + \lambda_n}. \quad (54)$$

The parameters λ and Λ defined in Eqs. (16) and (18) are related to the ones of Eq. (54) by $\lambda = \lambda_N$ and $\Lambda = \Lambda_N$ (i.e., λ is the last of λ_n 's; the same holds for Λ). Denoting by θ_{n-1} the value of the phase θ [appearing in Eq. (17)] for $X \in]x_{n-1}, x_n[$, one gets in this domain [the derivation is exactly the same as for Eq. (17)]

$$A^2(X) = 1 + 2\lambda_{n-1} + 2\Lambda_{n-1} \cos(2\kappa X + \theta_{n-1}), \quad (55)$$

and one can rewrite Eq. (53) as

$$E_{\text{cl}}^{(n)} = E_{\text{cl}}^{(n-1)} + \frac{2\hbar^2}{mb^2}[1 + 2\lambda_{n-1}] + \frac{4\hbar^2}{mb^2}\Lambda_{n-1}\sqrt{\kappa^2b^2 + 1}\zeta_{n-1}, \quad (56)$$

where

$$\zeta_{n-1} = \cos[2\kappa x_n + \theta_{n-1} + \tan^{-1}(\kappa b)]. \quad (57)$$

Using definition (54) one can rewrite Eq. (56) in terms of the parameter λ_n as

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} + \frac{1 + 2\lambda_{n-1}}{\kappa^2b^2} + \frac{2\Lambda_{n-1}}{\kappa^2b^2}\sqrt{\kappa^2b^2 + 1}\zeta_{n-1}. \quad (58)$$

Equations (56) and (58) are valid provided Eq. (11) holds, i.e., provided $E_{\text{cl}}^{(n-1)} \ll W(A_1)$, which reads

$$E_{\text{cl}}^{(n-1)} \ll \frac{\hbar^2 \kappa^2}{m} (\kappa^2 \xi^2), \quad \text{i.e., } \lambda_{n-1} \ll \kappa^2 \xi^2. \quad (59)$$

In the following we also impose the condition

$$\kappa b \gg 1. \quad (60)$$

Precisely, we neglect all the quantities of order $1/(\kappa^3 b^3)$. This is an important technical point. It facilitates the analysis by allowing one to get simple formulas as we now illustrate in the perturbative case: Eq. (58) allows, for instance, to compute the average value of the reflection coefficient in the perturbative regime [as already done in Sec. V A, Eq. (47)]. In this regime, additionally to condition (59) one has $\lambda_n \ll 1$. Then Eq. (58) implies at leading order $\langle \lambda_n \rangle = \langle \lambda_{n-1} \rangle + 1/(\kappa^2 b^2)$ which, together with the initial condition $\lambda_0 = 0$, leads immediately to

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\kappa^2 b^2} \langle N \rangle = \frac{1}{\kappa^2 b^2} \frac{L}{l_\delta}, \quad (61)$$

which is identical to result (47) in the case of a potential U_δ for which $L_{\text{loc}}(\kappa) = \kappa^2 / \sigma = \kappa^2 b^2 l_\delta$ [cf. Eq. (48)].

Let us now proceed and consider the generic nonperturbative regime where λ_n may become large compared to unity and where Eqs. (11) and (59) are still valid. Taking condition (60) into account, Eq. (58) reads

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} + \frac{1 + 2\lambda_{n-1}}{\kappa^2 b^2} + \frac{2\Lambda_{n-1}}{\kappa b} \zeta_{n-1}. \quad (62)$$

It is natural to assume that the phase of the cosine in the r.h.s. of Eq. (57) is uniformly distributed in $[-\pi, \pi]$ and independent of the phase at step $n-1$. This could be called a ‘‘phase randomization’’ approximation. This relies on hypothesis (60) and on the assumption that there is a large number of density oscillations over the (random) length between x_{n-1} and x_n , i.e.,

$$\kappa \langle x_n - x_{n-1} \rangle = \kappa l_\delta \gg 1. \quad (63)$$

Then, the argument of the cosine in definition (57) is uniformly distributed; ζ_n 's are uncorrelated random variables, with all the same law characterized by its average $\langle \zeta_n \rangle = 0$ and variance

$$\langle \zeta_n \zeta_{n'} \rangle = \frac{1}{2} \delta_{n,n'}. \quad (64)$$

Note that the regimes (60) and (63) imply that

$$\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} \gg \frac{\hbar^2 n_\delta}{mb} = \langle U_\delta \rangle, \quad (65)$$

which in turn implies that the kinetic energy $\frac{1}{2} m V^2$ is much larger than $\langle U_\delta \rangle$; i.e., one is exactly in the Anderson regime where the incident kinetic energy is much larger than the typical value of the (disordered) potential representing the obstacle. Hence, a classical particle would flow almost unperturbed over the potential but, as we shall see, a quantum particle experiences an exponentially small transmission.

Let $P(\lambda, n) d\lambda$ be the probability that λ_n lies in the interval $\lambda, \lambda + d\lambda$. Going to the continuous limit and defining the continuous variable $t = n / (\kappa^2 b^2) = X / L_{\text{loc}}$ [where $L_{\text{loc}} = \kappa^2 / \sigma$ is the parameter (48) in the case of a potential U_δ] it is shown

in Appendix B that $P(\lambda, t)$ verifies the following Fokker-Planck equation:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\lambda(1 + \lambda) \frac{\partial P}{\partial \lambda} \right]. \quad (66)$$

Equation (66) follows directly from Eq. (62) in the regime where conditions (60) and (63) hold. It is precisely the Dorokhov-Mello-Pereyra-Kumar (DMPK) equation [48] for the transmission in a single disordered channel [with $T = 1/(1 + \lambda)$]. Equation (66) is sometimes referred to as Mel'nikov's equation (after Ref. [49]) but has a much longer history (see the discussion in Refs. [47,50]).

Since before entering the disordered region the particle has a classical energy $E_{\text{cl}}^{(0)} = 0$ corresponding to $\lambda = 0$, Eq. (66) has to be solved for the initial condition

$$\lim_{t \rightarrow 0} P(\lambda, t) = \delta_+(\lambda), \quad (67)$$

where δ_+ is the one-sided delta function: $\int_0^\infty \delta_+(\lambda) d\lambda = 1$. In the limit of small t (i.e., in the perturbative regime $X \ll L_{\text{loc}}$), λ remains small and one can approximate in the r.h.s. of Eq. (66) the term $\lambda(\lambda + 1)$ by λ . It is then simple to verify that the solution of this approximate equation that satisfies Eq. (67) is

$$P(\lambda, t) = \frac{\exp\{-\lambda/t\}}{t} \quad \text{for } t \ll 1. \quad (68)$$

This result for the small t solution of the DMPK equation has been already obtained in Ref. [51] (see also the discussion in Ref. [52]). The distribution law (68) is exactly equivalent to distribution (46) of the reflection coefficient in the perturbative regime and this proves the validity of the Poissonian distribution (49) for a potential U_δ of type (21) [53].

In the general case (i.e., for all $t \geq 0$) the solution of Eq. (66) with the initial condition (67) is (see, e.g., Refs. [47,50] and references therein)

$$P(\lambda, t) = \frac{e^{-t/4}}{\sqrt{2\pi t^3}} \int_{u_\lambda}^\infty \frac{u e^{-u^2/(4t)}}{\sqrt{\cosh(u) - 1 - 2\lambda}} du, \quad (69)$$

where $u_\lambda = \cosh^{-1}(1 + 2\lambda)$.

From distribution (69), a lengthy computation or alternatively the direct use of the DMPK equation (66) [54] yields

$$\langle \ln T \rangle = \int_0^\infty d\lambda \ln \left(\frac{1}{1 + \lambda} \right) P(\lambda, t) = -t. \quad (70)$$

In the large t limit, distribution (69) tends to a log-normal distribution, i.e., the distribution of the variable $\ln T$ is Gaussian (see Ref. [54])

$$P(\ln T, t) = \frac{\exp\{-(t + \ln T)^2/4t\}}{\sqrt{4\pi t}} \quad \text{for } t \gg 1. \quad (71)$$

From this distribution one gets the correct average $\langle \ln T \rangle = -t$ [Eq. (70)] and a standard deviation $[\langle (\ln T)^2 \rangle - \langle \ln T \rangle^2]^{1/2} = \sqrt{2t}$, which is in agreement with the exact result in the limit $t \gg 1$ [54]. At the extremity of a sample of length L , one has $t = L / L_{\text{loc}}$, and distribution (71) is the logarithmic-normal distribution of transmission typical for Anderson localization in the regime $L \gg L_{\text{loc}}$ (see, e.g., Refs. [50,55]). As

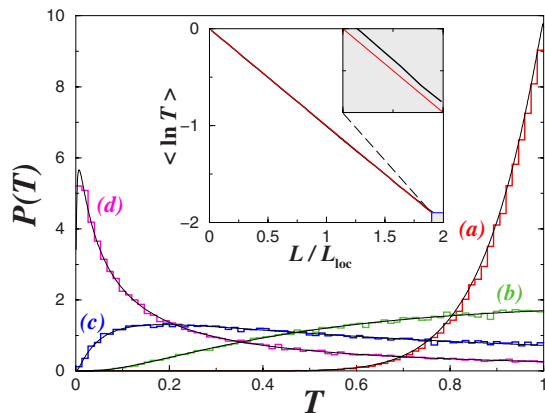


FIG. 7. (Color online) Probability distribution of the transmission through a disordered potential U_δ of type (21) (characterized by $\xi/b=0.5$ and $n_\beta\xi=0.5$) plotted for different values of the ratio $t=L/L_{\text{loc}}(\kappa)$ with $V=30c$. The black solid lines are the DMPK result (69) and the colored histograms correspond to the numerical simulations (50 000 samples used for each value of t). Cases (a), (b), (c), and (d) correspond, respectively, to $t=0.1, 0.5, 1$, and 2 . The inset displays $\langle \ln T \rangle$ as a function of t . The thick solid line is extracted from numerical simulations and the thin (red) solid line is the DMPK prediction (70). They can be distinguished only around $t \approx 2$ as shown in the blowup of the (gray) shaded region for $1.9 < t < 2$.

a side product of this analysis, Eqs. (70) and (71) confirm that L_{loc} is indeed the localization length as was anticipated in the notation.

We have tested the validity of the DMPK approach for a Bose-Einstein beam of interacting particles propagating in a disordered potential U_δ of type (21). The numerical results for the probability distribution $P(T)$ are compared in Fig. 7 with the DMPK prediction (69). The agreement is seen to be excellent. The distribution evolves from the Poissonian result (49) (for low values of L/L_{loc}) toward a distribution peaked at low- T values for large L/L_{loc} . In this latter case one can check that the distribution tends to a log-normal by plotting $P(\ln T)$.

We have also checked the validity of the present approach over a sizable range of lengths of disordered region and of intensities of disordered potential by plotting in the inset of Fig. 7 the average $\langle \ln T \rangle$ as a function of L/L_{loc} . The agreement of the numerical results with the DMPK prediction (70) is excellent. Note however the beginning of a small departure around $L/L_{\text{loc}} \approx 2$; this effect will be studied more thoroughly in Sec. V C (cf. Fig. 9).

Finally, we discuss numerical results obtained for the disordered potentials introduced in Secs. IV B and IV C. Although we do not have an analytical derivation of the DMPK equation for these potentials, the numerical results indicate a very good quantitative agreement for a disordered potential U_G and for a speckle potential U_S . We display the comparison of the numerical data with the DMPK predictions for a speckle potential in Fig. 8. The same agreement is obtained for a Gaussian potential U_G . Hence, the behavior analytically predicted for the potential U_δ appears to be of general validity, meaning that the above defined regime of phase randomization can probably be extended to correlated potentials,

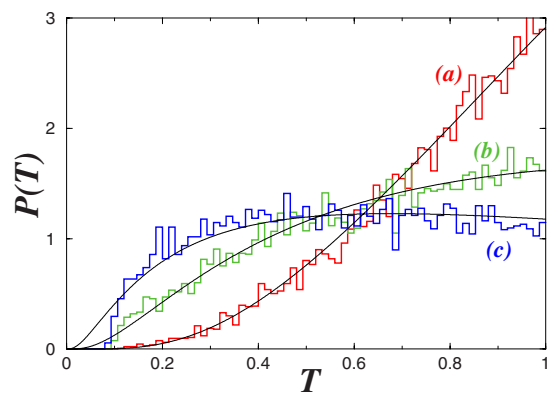


FIG. 8. (Color online) Probability distribution of the transmission through a speckle disordered potential U_S (characterized by $\ell_c/\xi=0.05$ and $\sigma=3.13\mu^2\xi$) plotted for different values of the ratio $t=L/L_{\text{loc}}(\kappa)$ with $V=13c$. Curves (a), (b), and (c) corresponds, respectively, to $t=0.31, 0.52$, and 0.68 . For each curve, the black solid line is the DMPK result (69) and the colored histogram is the result of 10 000 numerical simulations.

leading to a regime of single parameter scaling. However, we have noticed that, although showing an overall good agreement with the DMPK prediction, the Lorentzian correlated potential U_L exhibits some deviations in the tail of the distribution; the details of which will be studied elsewhere.

C. Threshold for the existence of a stationary flow

In the previous sections the main effect of interaction has been shown to be a renormalization of the localization length L_{loc} . Interaction induces a modification of the wave vector: expression (48) for the localization length coincides with the noninteracting one but computed for an effective interaction-independent wave vector κ given by Eq. (14), instead of $k = mV/\hbar$. The repulsive interaction diminishes the available kinetic energy and therefore reduces the localization length with respect to the noninteracting case (since $\kappa < k$).

We now discuss another, more spectacular, effect of interactions on the localization properties of a propagating BEC on a disordered potential. In the previous Secs. V A and V B, we completely neglected the presence of an upper limit for the classical energy E_{cl} , which is given by the local maximum of the effective potential $W(A)$, namely, $E_{\text{cl}}^{\text{max}} = W(A_1)$ (see Fig. 3). Trajectories that pass beyond $E_{\text{cl}}^{\text{max}}$ would become unstable and develop singularities with infinitely large density at $X \rightarrow \infty$. In practice this implies, on the level of Eq. (1), that a stationary flow cannot be maintained in this case and that the disorder induces time-dependent dynamics of the condensate.

In the vicinity of $E_{\text{cl}}^{\text{max}}$, the density profile of the condensate in between two adjacent scatterers becomes quite different from the cosine shape (17) that was derived for weak nonlinearities and/or low density modulations and resembles more to a periodic train of gray solitons [22]. In a crude approximation, we neglect this complication and assume that the spatial evolution of the density is still given by Eq. (17) for all classical energies until $E_{\text{cl}} = E_{\text{cl}}^{\text{max}}$. Trajectories that happen to pass beyond $E_{\text{cl}}^{\text{max}}$ are considered to be “lost,” i.e.,

they do no longer contribute to the probability distribution for the transmission. This formally amounts to introducing a “sink” in the stochastic equation (62), namely, at $\lambda = \lambda_{\max} = mE_{\text{cl}}^{\max}/(2\hbar^2\kappa^2)$. In the corresponding Fokker-Planck equation (66), this sink is appropriately modeled by imposing the boundary condition

$$P(\lambda_{\max}, t) = 0. \quad (72)$$

As a consequence of this boundary condition, the integrated probability distribution $\int_0^{\lambda_{\max}} P(\lambda, t) d\lambda$ is no longer conserved, but decreases with increasing t , i.e., increasing length L of the disorder region.

In the following, we show how this affects the DMPK predictions of Sec. V B and how the “survival probability,” i.e., the fraction of trajectories that remain below this boundary at given length L , can be analytically computed in the limit $V \gg c$. In this limit, from Eq. (10) one gets $E_{\text{cl}}^{\max} \approx mV^4/(8c^2)$ and thus $\lambda_{\max} \approx V^2/(16c^2) \gg 1$. Modifications of the probability density $P(\lambda, t)$ due to the presence of the sink appear only when the typical value of λ is of order λ_{\max} which, as just remarked, is large compared to unity in the case $V \gg c$. In this case $P(\lambda, t)$ is already negligibly small around $\lambda \sim 1$. We therefore make the approximation $\lambda + 1 \approx \lambda$ in the Fokker-Planck equation (66), which then reads

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\lambda^2 \frac{\partial P}{\partial \lambda} \right]. \quad (73)$$

Using, from now on, the probability distribution $P(\ln T, t)$ for finding a given value of $\ln T$ at fixed $t \equiv L/L_{\text{loc}}$, we obtain in this limit

$$\frac{\partial}{\partial t} P(z, t) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} P(z, t) - \frac{\partial}{\partial z} P(z, t), \quad (74)$$

where we introduce $z \equiv -\ln T$. Clearly, the log-normal distribution (71) corresponds to a solution of Eq. (74) in the absence of any additional boundaries.

In the presence of the sink, which is imposed by the boundary condition $P(z_{\max}, t) = 0$ with

$$z_{\max} = \ln(\lambda_{\max} + 1) \approx \ln \lambda_{\max} \approx \ln \left(\frac{V^2}{16c^2} \right), \quad (75)$$

we can straightforwardly find the solution of Eq. (74) by subtracting from the log-normal distribution (71) a “mirror” distribution centered at some $z > z_{\max}$ (namely, $2z_{\max} + t$) with a suitable prefactor. This yields the distribution

$$P(z, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left[\exp\left(-\frac{(z-t)^2}{4t}\right) - e^{z_{\max}} \times \exp\left(-\frac{(z-t-2z_{\max})^2}{4t}\right) \right], \quad (76)$$

which is defined for $z < z_{\max}$. Clearly, this distribution satisfies the evolution equation (74) as well as the boundary condition $P(z_{\max}, t) = 0$ for all t and the initial condition $P(z, 0) = \delta(z)$ for $z < z_{\max}$.

The presence of the sink at $z = z_{\max}$ explains a phenomenon barely noticeable in Fig. 7, but exemplified in Fig. 9, namely, the departure of the observed average $\langle \ln T \rangle$ from

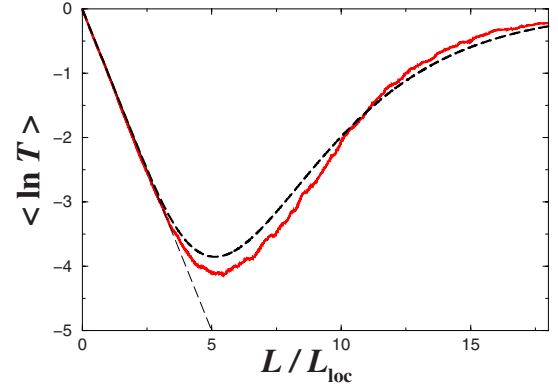


FIG. 9. (Color online) $\langle \ln T \rangle = -\langle z \rangle$ plotted as a function of $t = L/L_{\text{loc}}(\kappa)$ in the case of random potentials U_δ characterized by $n_\delta \xi = 0.5$ and $\xi/b = \sqrt{2}$. The curve is drawn in the case $V/c = 450$. The red solid line is the numerical result and the black dashed line is the analytical result (77). The straight (thin dashed) line is the usual DMPK result $\langle \ln T \rangle = -t$ [Eq. (70)].

the usual DMPK result $\langle \ln T \rangle = -t$. This departure is due to the fact that the numerically computed average only takes into account the stationary solutions which—as will be seen from Eq. (79)—become less and less numerous when t increases. Hence, what is computed numerically is the average of $\ln T = -z$ over distribution (76). This reads

$$\begin{aligned} \langle z \rangle &= \int_{-\infty}^{z_{\max}} z P(z, t) dz \\ &= \frac{t}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{z_{\max} - t}{2\sqrt{t}} \right) \right] \\ &\quad - e^{z_{\max}} \left(\frac{t}{2} + z_{\max} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{t + z_{\max}}{2\sqrt{t}} \right). \end{aligned} \quad (77)$$

where the error function is defined by

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-y^2) dy, \quad (78)$$

and $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$.

Expression (77) is compared in Fig. 9 with the results of a numerical simulation performed in the case $V/c = 450$ (corresponding to $z_{\max} = 9.43$) for 10 000 random potentials U_δ of type (21) characterized by $n_\delta \xi = 0.5$ and $\xi/b = \sqrt{2}$ [leading to $L_{\text{loc}}(\kappa) = 100\xi$]. The agreement is seen to be very good. Since the sink cuts the solutions which are strongly scattered by the random potential, the remaining stationary states have a higher transmission coefficient. This effect increases with the sample length L , which explains the behavior of the curve in Fig. 9.

As another test of the validity of our approach (which amounts to model the upper boundary z_{\max} by a perfect sink and to neglect nonlinear deformations of the density pattern of the flow close to the threshold), we now determine the probability for a trajectory to remain below the boundary. This survival probability reads

$$\begin{aligned}
P_s(t) &= \int_{-\infty}^{z_{\max}} P(z,t) dz \\
&= \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{z_{\max} - t}{\sqrt{4t}} \right) \right] - \frac{e^{z_{\max}}}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{z_{\max} + t}{\sqrt{4t}} \right).
\end{aligned} \tag{79}$$

As anticipated, $P_s(t)$ clearly decreases from 1 (at $t=0$) to 0 (for large t). The knowledge of $P_s(t)$ allows one to determine the value L^* of the length of the disordered region beyond which most of the random realizations lead to a nonstationary flow of the condensate. We can, most conveniently, define L^* through the condition

$$P_s(t^*) = 1/2, \tag{80}$$

with $t^* \equiv L^*/L_{\text{loc}}$. This leads to the implicit equation for the threshold value t^* ,

$$\operatorname{erf} \left(\frac{z_{\max} - t^*}{\sqrt{4t^*}} \right) = e^{z_{\max}} \operatorname{erfc} \left(\frac{z_{\max} + t^*}{\sqrt{4t^*}} \right). \tag{81}$$

This equation can be explicitly solved in the limiting case of large z_{\max} . As it is natural to assume that t^* ought to be of the order of z_{\max} , which is the only relevant scale in this equation, we make the ansatz

$$t^* = z_{\max} + \delta t \tag{82}$$

and assume (which is to be verified *a posteriori*) that δt is of the order of unity, whereas $z_{\max} \gg 1$. This yields to lowest nonvanishing order

$$\operatorname{erf} \left(\frac{z_{\max} - t^*}{\sqrt{4t^*}} \right) = - \frac{\delta t}{\sqrt{\pi z_{\max}}} [1 + O(z_{\max}^{-1})], \tag{83}$$

for the left-hand side of Eq. (81) and

$$\begin{aligned}
e^{z_{\max}} \operatorname{erfc} \left(\frac{z_{\max} + t^*}{\sqrt{4t^*}} \right) &= e^{z_{\max}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{z_{\max}}^{\infty} e^{-y^2} dy [1 + O(z_{\max}^{-2})] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi z_{\max}}} [1 + O(z_{\max}^{-1})],
\end{aligned} \tag{84}$$

for the right-hand side of Eq. (81). This finally results in

$$\delta t = -1 + O(z_{\max}^{-1}). \tag{85}$$

Neglecting terms of the order of z_{\max}^{-1} , we therefore obtain for the threshold length

$$L^* = (z_{\max} - 1)L_{\text{loc}} = L_{\text{loc}} \left[\ln \left(\frac{V^2}{16c^2} \right) - 1 \right]. \tag{86}$$

We emphasize that Eq. (86) holds for $z_{\max} \gg 1$, i.e., for $\ln(V^2/16c^2) \gg 1$ [see Eq. (75)]. This is much more restrictive than the condition $V \gg c$ which is assumed to hold true when deriving Eqs. (76) and (81).

Figure 10 shows a comparison of the analytical predictions (79) and (86) with numerical data obtained from the integration of the time-dependent Gross-Pitaevskii equation (1). The condensate flows through a disorder potential U_δ of type (21) with $V^2/c^2 = 2 \times 10^5$. We see that the fraction of

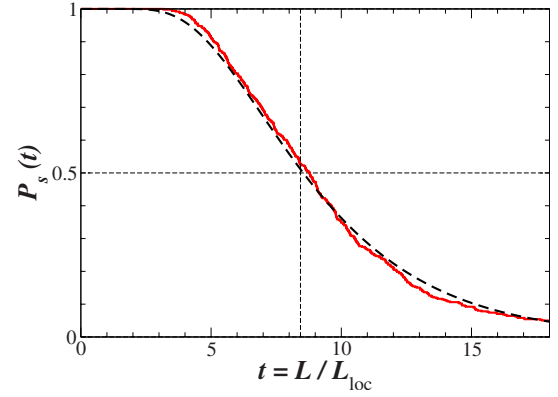


FIG. 10. (Color online) Fraction of stationary trajectories $P_s(t)$ plotted as a function of the length L of the disordered region. The condensate flow through disorder potentials U_δ of type (21) was numerically computed for this purpose (red solid line), at parameters for which $V^2/c^2 = 2 \times 10^5$. The black dashed line shows the analytical prediction of this survival probability $P_s(L/L_{\text{loc}})$ according to Eq. (79). The vertical dashed line marks prediction (86) for the threshold length L^* at which $P_s(L^*/L_{\text{loc}}) = 1/2$ (horizontal dashed line), namely, $L^*/L_{\text{loc}} = 8.433$.

stationary trajectories $P_s(t)$ is very well described by Eq. (79), and that the approximate expression (86) predicts very well the length L^* at which the crossover length from stationary to time-dependent flow occurs.

For velocities V not extremely large compared to the speed of sound, the condition $z_{\max} \gg 1$ will not be fulfilled and estimate (86) will not be valid, while $\lambda_{\max} \gg 1$ might still hold and the average evolution of the system might still be fairly well described by the simplified Fokker-Planck equation (73). In that case, the implicit equation (81) has to be solved numerically. In Fig. 1 one can see that the numerical solution of Eq. (81) (yellow solid line) provides a very reasonable estimate of the boundary between the bright supersonic region (stationary flows) and the dark time-dependent region, in a regime of not extremely large V/c , where Eq. (86) fails to properly predict the threshold length L^* . The simulations are performed by solving Eq. (1) numerically using a potential of type U_δ (characterized by $\langle U_\delta \rangle / \mu = 0.025$ and $n_\delta \xi = 0.5$). For each V and L we consider 100 realizations of such a potential and statistically determine the quantity P_s , i.e., the fraction of stationary solutions. P_s is plotted in Fig. 1 using a grayscale (dark, $P_s = 0$; light blue/gray, $P_s = 1$) as a function of the normalized variables L/ξ and V/c (this normalization rescales interaction effects). The qualitative agreement of Fig. 1 is made quantitative in Fig. 11. In this figure the numerical solution of Eq. (81) is compared with its determination extracted from numerical simulations in the supersonic regime. More precisely, the solid (red) line in Fig. 11 is simply the contour $P_s = 1/2$ in Fig. 1. This corresponds exactly to definition (80) of L^* . The agreement between the numerical result and the theory of the present section [dashed curve, solution of Eq. (81)] is seen to be excellent [56].

We conclude this section by emphasizing that the existence of an upper threshold L^* corresponding to lengths of the disordered region beyond which most of the flows are

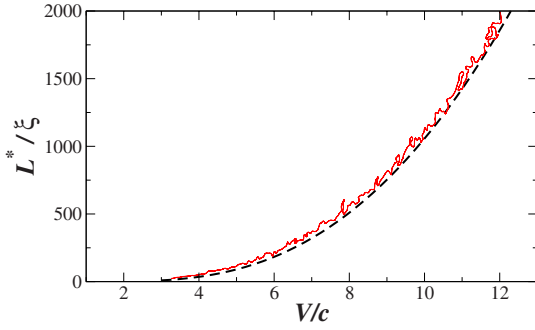


FIG. 11. (Color online) L^* as a function of V in dimensionless units. The black dashed line corresponds to the solution of Eq. (81) and the red solid line corresponds to the value of L^* extracted from numerical simulations for a potential U_δ with the same characteristics as in Fig. 1 (see the text).

time dependent is a genuine nonlinear effect [absent if one sets $g=0$ in Eq. (1)]. Actually, whereas interactions only weakly modify the precise value of the localization length, the existence of the threshold L^* is a remarkable qualitative effect induced by nonlinearity. Moreover, as illustrated in Figs. 9 and 10, this effect persists even in the limit $V \gg c$ where naively one would expect no noticeable consequence of interaction.

VI. EXPERIMENTAL CONSIDERATIONS

On the basis of the results obtained in the previous section we present here what are the more favorable experimental configurations for observing Anderson localization in an interacting Bose-Einstein beam. We also discuss a possible experimental signature of localization.

A. Appropriate configurations for observing Anderson localization

In the noninteracting regime the only condition for observing Anderson localization in one dimension is that the size of the disordered region should be larger than the localization length. Then one can observe an exponential decay of transmission with a log-normal distribution (in the limit $L \gg L_{\text{loc}}$).

The situation is more complex when interactions are turned on. What is particularly interesting is the interplay between localization and superfluidity. Indeed these two phenomena are conflicting one with the other: superfluidity is the (counterintuitive) ability to pass over an obstacle without reflection, whereas Anderson localization corresponds to a large reflection in a domain where one would expect almost perfect transmission. As a result of the interplay between these two extreme phenomena, and depending on the fluid velocity and on the sample size, the flow may be stationary and superfluid, dissipative and time dependent, or stationary supersonic (and also dissipative) [14]. Anderson localization does not occur in the superfluid region (where the transmission is perfect) and either does not exist or cannot be clearly identified in the time-dependent regime (where interference effects are washed out [13]), but is truly observed in the supersonic stationary regime, as demonstrated in Sec. V.

In that regime, a first experimentally relevant effect is the modification of the localization length with respect to its value in the absence of interactions. This effect is very well described by renormalizing the wave vector k to κ [Eq. (48)], which means that part of the kinetic energy available to the flow is taken by interactions. However, as already discussed in Ref. [14] this effect is only sizable in a regime where V is not too large compared to c and is thus relevant only in the perturbative regime (cf. Fig. 5).

A second experimentally observable effect is the modification of the localization length due to the correlations of the disordered potential. This is described by formula (48) where \hat{C} is the Fourier transform of the two-point correlation function of the disorder. For the different potentials considered here, $\hat{C} \equiv 1$ for a potential U_δ or is alternatively given by Eqs. (34), (35), and (41) for correlated potentials. Explicitly, this yields

$$L_{\text{loc}}(\kappa) = \frac{\kappa^2}{\sigma}, \quad (87)$$

for a potential U_δ of type (21);

$$L_{\text{loc}}(\kappa) = \frac{\kappa^2}{\sigma} \exp\{2\kappa^2 \ell_c^2\}, \quad (88)$$

for a potential U_G of type (25);

$$L_{\text{loc}}(\kappa) = \frac{\kappa^2}{\sigma} \exp\{2\kappa \ell_c\}, \quad (89)$$

for a potential U_L of type (25); and

$$L_{\text{loc}}(\kappa) = \frac{\kappa^2}{\sigma} \frac{1}{1 - \kappa \ell_c}. \quad (90)$$

for a potential U_S of type (36) (when $\kappa \ell_c < 1$). The validity of these expressions has been tested in Sec. V B. In the noninteracting case (i.e., $\kappa = k$), expressions (87)–(90) correspond to a high-energy limit and can be obtained through a first-order Born expansion within the phase formalism of Refs. [46,47]. In all three cases, one sees that the localization length is drastically enhanced due to the nonzero correlation length with respect to the uncorrelated disorder [Eq. (87)]. In the Gaussian and the Lorentzian cases the localization length scales exponentially with $(\kappa \ell_c)^2$ and $\kappa \ell_c$, respectively [see Eqs. (88) and (89)]. In the case of a speckle potential, the effect is even stronger: one sometimes speaks of an “effective mobility edge” [57,58], meaning that beyond a critical wave vector (or a critical velocity) the localization length (90) is infinite. This is an artifact of the Antsygina-Pastur-Slyusarev formula (48), which can be corrected by going to higher orders (see Refs. [59–61]): the corrections to this result give a localization length which is finite, but typically larger than any other relevant scale in experimental systems.

Hence, in all the cases the dependence of the localization length with respect to κ (i.e., with velocity) is amplified by correlations. Mathematically this is due to the fact that the denominator in the Antsygina-Pastur-Slyusarev formula (48) for the localization length in the presence of correlations

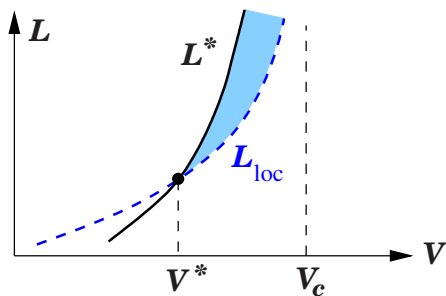


FIG. 12. (Color online) Schematic phase diagram in arbitrary units. The (blue) dashed line is the localization length L_{loc} and the solid line is the threshold length L^* . $V_c = \hbar/m\ell_c$ is the typical velocity beyond which it is almost impossible to observe Anderson localization in a realistic system (see text). The (blue) colored zone corresponds to the region where Anderson localization can be experimentally observed in presence of interaction.

tends to zero when $\kappa\ell_c \gg 1$. In order to minimize this effect one needs to impose the following condition:

$$\kappa\ell_c \lesssim 1 \quad \text{or} \quad V \lesssim V_c = \frac{\hbar}{m\ell_c} = c \frac{\xi}{\ell_c}. \quad (91)$$

In the r.h.s. of Eq. (91) we replaced κ with mV/\hbar because in practice condition (91) is verified in regimes where $V \gtrsim 3c$, i.e., when the approximation $\kappa \approx k$ is sound. Note that this condition is arbitrary and is only superficially analogous to the 3D Ioffe-Regel criterion [62]. The latter defines a true mobility edge that separates a metallic from a localized phase, whereas Eq. (91) only requires that the localization length does not get too large. Understood in this sense, criterion (91) is exactly equivalent to the definition of an effective mobility edge sometimes used in the literature.

In the absence of interactions it is always possible (at least theoretically) to define a system with a length $L > L_{\text{loc}}$ which verifies Eq. (91); i.e., a system where one can observe Anderson localization. If we now turn on interactions, a major effect is the appearance of a length scale L^* which signals the onset, for $L > L^*$, of a regime of time-dependent flows (cf. Sec. V C). In this regime, Anderson localization disappears, and the time-averaged transmission coefficient scales as $1/L$ [13]. This is the most spectacular effect of interactions in the transport properties of the system. In order to observe Anderson localization, the system size should therefore satisfy $L_{\text{loc}} < L < L^*$. In practice, one should be in a regime of parameters such as illustrated in Fig. 12: the crossing $L^* > L_{\text{loc}}$ has to occur at a velocity lower than V_c .

Based on the numerical solution of Eq. (81) one can show that the crossing $L^* \geq L_{\text{loc}}$ occurs at a velocity $V^* \approx 7.95c$ [63] (see also Fig. 1). This condition only allows the system to reach a (stationary) regime where $L = L_{\text{loc}}$. But if one wants to observe Anderson localization one should be able to reach a regime where, say, $L^* \geq L \geq 2L_{\text{loc}}$, in order to get as close as possible to the domain of log-normal distribution of transmissions still remaining in the region of stationary flows. This imposes $V/c \geq 20$. This must be supplemented by condition (91), i.e., $V/c \leq \xi/\ell_c$. Hence, the correlation length ℓ_c should be smaller or equal to $\xi/20$. Figure 13 shows the

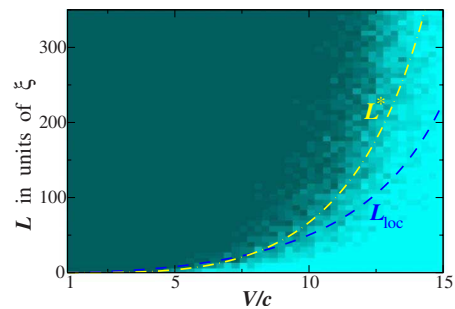


FIG. 13. (Color online) Phase diagram displaying the fraction of stationary trajectory P_s for a beam with velocity V moving in a speckle disorder of extent L . The figure has been drawn for a potential U_S of type (36) characterized by $\ell_c/\xi = 0.05$ and $\sigma = 3.93\mu^2\xi$. The light blue region corresponds to a domain of stationary flow ($P_s = 1$: 100% of the solutions are stationary; see the explanation in the text); the dark region corresponds to time-dependent flow. The curves indicating the values of L_{loc} and L^* correspond to the analytical results (90) and to the numerical solution of Eq. (81).

phase diagrams of a one-dimensional interacting beam of condensed atoms moving through a speckle potential in this regime. For plotting this diagram, one has generated 16 random potentials and studied in each case if a stationary solution exists or not. The dark blue region corresponds to a domain where no stationary solution exists while the light blue one corresponds to a domain where all the potentials admit a stationary solution (the color code is the same as in Fig. 1 and is explained in Sec. V C). The region between L_{loc} and L^* in Fig. 13 is the region where one can observe Anderson localization.

Let us now evaluate the orders of magnitude of the different parameters allowing one to reach the appropriate regime. For concreteness we consider a beam of ^{87}Rb atoms such as the one of the Atom Optics Group at Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique. For a correlation length of $0.26 \mu\text{m}$ the velocity cutoff for observing Anderson localization is roughly $V_c \approx 2.7 \text{ mm/s}$. Note that in Ref. [2] the velocity of the expanding condensate is about 1.6 mm/s , i.e., smaller than V_c as it should. If we use the parameters of Ref. [64] ($an_1 \approx 0.25$, $V \approx 9 \text{ mm/s}$, $a = 5.3 \text{ nm}$, $n_1 = 45 \text{ atoms}/\mu\text{m}$, $c \approx 0.9 \text{ mm/s}$, and $\xi \approx 0.8 \mu\text{m}$) it is impossible to satisfy condition (91) because $V \approx 9 \text{ mm/s} > V_c$ and also because $\ell_c/\xi \approx 0.3$. However, the Atom Optics Group has recently improved the sensitivity of its detectors, which is now close to being able to detect a density as small as $1 \text{ atom}/\mu\text{m}$. This allows one to work with a smaller density and to improve the ratio ℓ_c/ξ , which can be tuned down to the value of 0.05 . Then, the localization length can be selected by tuning the speckle amplitude. For instance $L_{\text{loc}} = 0.25 \text{ mm}$ can be obtained by choosing $\langle U_S \rangle = 34 \text{ Hz}$ at $V = 1.6 \text{ mm/s}$. These parameters are close to those used in Fig. 13 and are reachable experimentally. However, for observing Anderson localization one needs to keep the beam stable for almost 1 s (0.31 s if we want $L = 2L_{\text{loc}}$), whereas in the current experiment this is only possible during 0.1 s ; hence, it is still a matter of debate to decide if the observation of Ander-

son localization of a Bose condensed beam in the presence of interaction is within the reach of present-time technology.

It is also interesting to make a connection between the physics described here and the recent experiment observation of Anderson localization of a condensate expanding in a disordered potential performed in the same group [2]. Contrarily to the propagation of a beam studied in the present work, Ref. [2] considers the spreading of a wave packet (initially at rest) in a speckle potential. After a first stage of expansion, mainly driven by interactions, the experimental cloud expands with a constant velocity $V \approx 1.6$ mm/s but the particle density and the sound velocity are functions of the position. Therefore, it is not possible to place this experiment on a single point of the phase diagram displayed in Fig. 13. However one can evaluate the ratio V/c at different positions—that is, at different L . For instance, at the typical value $L = L_{\text{loc}}$, Fig. 2 of Ref. [2] allows one to calculate the sound velocity as well as the healing length ξ , yielding the typical experimental values $V/c \approx 12$ and $L/\xi \approx 55$. Moreover, the ratio between the typical disorder amplitude $\langle U_S \rangle$ and the chemical potential $\mu = gn_0$ is the same in Fig. 13 and in experiment: $\langle U_S \rangle / \mu = 5$ (note however that in the experimental case this is the value of the *local* chemical potential that matters). Hence, although the experimental setup of Ref. [2] forbids a direct comparison with the results of the present work, the estimates of the typical values $V/c \approx 12$ and $L/\xi \approx 55$ indeed locate the experimental system within the regime of Anderson localization of Fig. 13.

B. Experimental signature

Once the appropriate regime of parameters for observing Anderson localization in a Bose condensed beam has been determined, it is also important to identify possible experimental signatures. In our theoretical approach we use the transmission coefficient T of the beam over the disordered region as the relevant parameter. However, the measure of T might be experimentally involved, and we propose here to use another related quantity, namely, the rate of energy dissipation [27] $\dot{E} = -VF_d$, where

$$F_d = \int_{\mathbb{R}} dx n(x,t) \frac{\partial U}{\partial x} \quad (92)$$

is the drag force exerted by the beam on the obstacle. Definition (92) is quite natural: the force exerted on the obstacle is the mean value of the operator $\partial_x U$ over the condensate wave function. It is rigorously justified by the analysis of Ref. [65] in terms of stress tensor. In the stationary case, changing integration from x to X in Eq. (92), a simple integration by parts yields

$$F_d = -n_0 \int_{\mathbb{R}} U \frac{dA^2}{dX} dX = n_0 (E_{\text{cl}}^- - E_{\text{cl}}^+). \quad (93)$$

In the r.h.s. of Eq. (93) we made use of relations (5) and (7).

It has been shown in Sec. III B that $E_{\text{cl}}^- = 0$ and that under assumption (11) (small nonlinearity and arbitrary transmission or weak transmission and arbitrary nonlinearity) one has [see Eqs. (16) and (20)] $E_{\text{cl}}^+ = 2\hbar^2 \kappa^2 / m(R/T)$, which yields

$$F_d = -\frac{2\hbar^2 \kappa^2}{m} n_0 \frac{R}{T}. \quad (94)$$

In the regime $R \ll 1$, using Eq. (44) one recovers from Eq. (94) the perturbative result already obtained in Ref. [65]: $F_d = -2n_0 m |\hat{U}(2\kappa)|^2 / \hbar^2$ [66].

The physics embodied in Eq. (94) is rather simple and it is worth spending some time to discuss it. Consider an incident beam of particles with density n_{inc} and momentum $p = -\hbar\kappa$ moving from $+\infty$ toward an obstacle at rest. Part of the particles is transmitted (a fraction T) and the other part is reflected (a fraction R). The collisions are elastic and each of the reflected particles experiences an exchange of momentum $\delta p = 2\hbar\kappa$ with the obstacle. During a time δt there are N_{coll} collisions and by the law of action and reaction the obstacle experiences a force

$$F_d = -N_{\text{coll}} \frac{\delta p}{\delta t} = -\frac{2\hbar^2 \kappa^2}{m} n_{\text{inc}} R. \quad (95)$$

In the r.h.s. of Eq. (95), one has written that $N_{\text{coll}} / \delta t$ is the flux of particles colliding with the obstacle, i.e., $\frac{\hbar\kappa}{m} R n_{\text{inc}}$. Equations (94) and (95) are identical because what we call n_0 is the downstream density of the beam (cf. Fig. 2), i.e., precisely $T n_{\text{inc}}$. Depending on which quantity is held constant (n_0 as in the present paper, or n_{inc} , Eq. (94) or Eq. (95) is more appropriate (cf. the discussion of the fixed input and fixed output problem in Ref. [32]). This is somewhat reminiscent of the controversy on the correctness of the Landauer formula (see, e.g., the discussion in Ref. [67]).

On the basis of Eq. (94) one sees that the measure of \dot{E} gives direct information on the transmission of the interacting beam through the disordered region, allowing one to reveal in which configuration is the system. For instance, in the localized regime the energy dissipation is high ($\propto 1/T$) and grows exponentially with the size L of the disordered region, whereas in the perturbative regime \dot{E} is much lower and scales as L .

VII. CONCLUSION

In the present work we have presented an analysis of the transmission of a weakly interacting Bose gas incident on a disordered potential. We have shown on the basis of numerical and analytical results that there is a regime of Anderson localization in this system and proposed experimental signature of this phenomenon. In order to properly identify a “localized regime,” we have studied the transmission coefficient and its probability distribution. The transmission coefficient T is well defined under assumption (11), which holds in the following regimes: (i) small nonlinearity and arbitrary transmission or (ii) weak transmission and arbitrary nonlinearity. In other cases there is no obvious way to define the transmission of the nonlinear beam because one cannot separate in the upstream region an incident flow from a reflected one. However, our analysis in terms of E_{cl} and λ (defined in Sec. III B) is always valid, even when condition (11) is not fulfilled. This just means that, out of regime (11), the connection (20) between λ and T is invalid. But, for instance, this

does not invalidate at all the analysis leading to the DMPK equation (66), and the experimental signature proposed in Sec. VI B also remains valid even when it is not possible to properly define T .

We note that the validity of the DMPK approach for non-interacting particles is a well-established fact in the theory of disordered systems. What is achieved in the present work is its extension to the case of interacting particles. Other studies of Anderson localization in the presence of interactions have concentrated on the long-time behavior of the time evolution of initial wave packets [68]. Although those results are still a matter of active debate in the community, the results of the present work produce strong evidence of the existence of Anderson localization for weakly interacting Bose particles (with effective repulsive interaction) propagating through disordered samples of finite size $L < L^*$.

Although the present study leads to the important conclusion that Anderson localization in the presence of interaction is possible, it is rather disappointing to remark that it can be clearly identified only when $V \geq 20c$, i.e., in a regime where interactions do not play a major role (see the discussion of Sec. VI A and also Ref. [14]). In this respect, the more interesting effect of interactions is the existence of an upper threshold L^* for the length of the disordered region: for $L > L^*$ no stationary flow is possible. As shown in Sec. V C, L^* is directly connected to the probability distribution of the parameter λ and to the localization properties of the system. It would be very interesting to lead a systematic study of the transmission in the interaction-induced time-dependent regime ($L > L^*$) where the numerical results of Ref. [13] indicate a power-law decay of the time-averaged transmission, a signature generally considered as of loss of phase coherence, and onset of Ohmic behavior [69,70]. Work in this direction is in progress.

ACKNOWLEDGMENTS

It is a pleasure to thank B. Altshuler, A. Comtet, J.-L. Pichard, and C. Texier for inspiring discussions. This work was supported by ANR Grants No. 05-Nano-008-02, No. NT05-2-42103, and No. 08-BLAN-0165-01; by the IFRAF Institute; and by the Alexander von Humboldt Foundation. We gratefully acknowledge funding by the Excellence Initiative of the German Research foundation (DFG) through the Heidelberg Graduate School of Fundamental Physics (Grant No. GSC 129/1) and the Global Networks Mobility Measures the Frontier Innovation Fund of the University of Heidelberg. We furthermore acknowledge support through the DFG Forschergruppe 760 ‘‘Scattering systems with complex dynamics.’’

APPENDIX A: DISTRIBUTION OF REFLECTION COEFFICIENTS IN THE PERTURBATIVE CASE FOR A POTENTIAL OF TYPE (25)

We give here a demonstration of the perturbative results (46)–(48) in the special case of a Gaussian disordered potential U_g of type (25). A simple way to obtain this results starts by noticing that any Gaussian noise verifying $\langle \eta(x) \rangle = 0$ and

$\langle \eta(x)\eta(x') \rangle = \delta(x-x')$ [and here we are specifically interested in $\eta(x)$ that appears in Eq. (25)] can be written as (see, e.g., Ref. [71])

$$\eta(x) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \epsilon_j \delta(x - X_j), \quad (\text{A1})$$

where X_j 's are random positions uniformly distributed on the real axis with density ν and mean spacing $1/\nu$, and $\epsilon_j = \pm 1$ is a random variable (with $\langle \epsilon_j \rangle = 0$ and $\langle \epsilon_i \epsilon_j \rangle = \delta_{ij}$).

In order to calculate the probability distribution of the reflection coefficient R [whose value is given by Eq. (44)] one should first consider the distribution of

$$\hat{U}_g(2\kappa) = \int_{\mathbb{R}} dx U_g(x) e^{2i\kappa x} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\hbar^2 \sqrt{\sigma} \hat{w}(2\kappa)}{m \sqrt{\nu}} \sum_{j=0}^{\nu L} \epsilon_j e^{2i\kappa X_j}. \quad (\text{A2})$$

The quantity $\hat{U}_g(2\kappa)$ as given by Eq. (A2) is formally equivalent to the position z of a particle performing a random walk in the complex plane after $N = \nu L$ iterations. The particle is initially at the origin and performs jumps of constant amplitude $s = (\hbar^2/m) |\hat{w}(2\kappa)| \sqrt{\sigma/\nu}$ with random direction. Denoting by $d^2P = p(z, N) dx dy$ the probability to find the particle in the domain $dx dy$ around z after N steps, if $N \gg 1$ [which is ensured by taking the limit $\nu \rightarrow \infty$ in Eq. (A2)], the central limit theorem yields

$$p(z, N) = \frac{1}{\pi N s^2} \exp\left(-\frac{|z|^2}{N s^2}\right). \quad (\text{A3})$$

It is then a simple exercise to get the distribution of $|z|^2$. One obtains

$$P(|z|^2, N) = \frac{1}{\langle |z|^2 \rangle} \exp\left[-\frac{|z|^2}{\langle |z|^2 \rangle}\right], \quad (\text{A4})$$

where

$$\langle |z|^2 \rangle = s^2 N = \sigma (\hbar^2/m)^2 |\hat{w}(2\kappa)|^2 L. \quad (\text{A5})$$

From relation (44), Eq. (A5) immediately yields the announced probability distribution (46) with

$$\langle R \rangle = \frac{m^2}{\hbar^4 \kappa^2} \langle |z|^2 \rangle = \frac{\sigma L}{\kappa^2} |\hat{w}(2\kappa)|^2. \quad (\text{A6})$$

For a potential U_g of type (25), $|\hat{w}|^2 = \hat{C}$ [see Eq. (30)] and Eq. (A6) demonstrates in this case the validity of Eqs. (47) and (48).

APPENDIX B: DERIVATION OF THE DMPK EQUATION (66)

In this appendix, we explain how to obtain the DMPK equation (66) starting from the discrete Langevin equation (62). Let us consider a generic situation where λ_n obeys a stochastic recursion relation of the type

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = F(\lambda_n, \zeta_n), \quad (\text{B1})$$

with uncorrelated random variables ζ_n ,

$$\langle \zeta_{n_1} \zeta_{n_2} \cdots \zeta_{n_N} \rangle = C_N \delta_{n_1 n_2} \cdots \delta_{n_1 n_N}. \quad (\text{B2})$$

It is clear that, under assumption (63), Eq. (62) is of type (B1) with all the odd N averages in Eq. (B2) being zero and $C_2=1/2$ [cf. Eq. (64)].

Let $P(\lambda, n)d\lambda$ be the probability that λ_n lies in the interval $\lambda, \lambda+d\lambda$. One can express $P(\lambda, n)$ as

$$P(\lambda, n) = \langle \delta(\lambda_n - \lambda) \rangle = \left\langle \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(\lambda_n - \lambda)} \right\rangle. \quad (\text{B3})$$

This yields

$$\begin{aligned} P(\lambda, n+1) - P(\lambda, n) &= \left\langle \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(\lambda_n - \lambda)} (e^{ikF(\lambda_n, \zeta_n)} - 1) \right\rangle \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \frac{\partial^\ell}{\partial \lambda^\ell} \left\langle F^\ell(\lambda_n, \zeta_n) \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(\lambda_n - \lambda)} \right\rangle \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \frac{\partial^\ell}{\partial \lambda^\ell} \langle F^\ell(\lambda, \zeta_n) \delta(\lambda_n - \lambda) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

Using the fact that λ_n depends on the variables $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-1}$ but not on ζ_n [as can be seen directly from Eq. (B1)] one can write the last of Eqs. (B4) as

$$P(\lambda, n+1) - P(\lambda, n) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \frac{\partial^\ell}{\partial \lambda^\ell} \{ \langle F^\ell(\lambda, \zeta_n) \rangle P(\lambda, n) \}. \quad (\text{B5})$$

In the case of Eq. (62) one has $F(\lambda, \zeta) = (1+2\lambda)/\kappa^2 b^2 + 2(\lambda^2 + \lambda)^{1/2} \zeta / \kappa b$ and the successive moments of F read

$$\langle F(\lambda, \zeta_n) \rangle = \frac{1+2\lambda}{\kappa^2 b^2}, \quad (\text{B6})$$

$$\langle F^2(\lambda, \zeta_n) \rangle = \frac{2(\lambda^2 + \lambda)}{\kappa^2 b^2} + O\left(\frac{1}{\kappa^4 b^4}\right), \quad (\text{B7})$$

with all the other moments being of order $1/(\kappa^3 b^3)$ or more, i.e., negligible in regime (60). Equation (B5) thus reads

$$\begin{aligned} \kappa^2 b^2 [P(\lambda, n+1) - P(\lambda, n)] &= -\frac{\partial}{\partial \lambda} [(1+2\lambda)P] + \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} [(\lambda^2 + \lambda)P] \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\lambda(\lambda+1) \frac{\partial P}{\partial \lambda} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B8})$$

In the continuous limit, defining $t = n/(\kappa^2 b^2)$, the l.h.s. of Eq. (B8) is simply the first derivative of P with respect to t , and Eq. (B8) reduces to Eq. (66) of the main text.

-
- [1] P. W. Anderson, Phys. Rev. **109**, 1492 (1958).
[2] J. Billy *et al.*, Nature (London) **453**, 891 (2008).
[3] G. Roati *et al.*, Nature (London) **453**, 895 (2008).
[4] K. Huang and H. F. Meng, Phys. Rev. Lett. **69**, 644 (1992).
[5] S. Giorgini, L. Pitaevskii, and S. Stringari, Phys. Rev. B **49**, 12938 (1994).
[6] G. E. Astrakharchik, J. Boronat, J. Casulleras, and S. Giorgini, Phys. Rev. A **66**, 023603 (2002).
[7] D. Clément, P. Bouyer, A. Aspect, and L. Sanchez-Palencia, Phys. Rev. A **77**, 033631 (2008).
[8] Y. P. Chen, J. Hitchcock, D. Dries, M. Junker, C. Welford, and R. G. Hulet, Phys. Rev. A **77**, 033632 (2008).
[9] T. Giamarchi and H. J. Schulz, Phys. Rev. B **37**, 325 (1988).
[10] M. P. A. Fisher, P. B. Weichman, G. Grinstein, and D. S. Fisher, Phys. Rev. B **40**, 546 (1989).
[11] S. A. Gredeskul and Y. S. Kivshar, Phys. Rep. **216**, 1 (1992).
[12] N. Bilas and N. Pavloff, Phys. Rev. Lett. **95**, 130403 (2005).
[13] T. Paul, P. Leboeuf, N. Pavloff, K. Richter, and P. Schlagheck, Phys. Rev. A **72**, 063621 (2005).
[14] T. Paul, P. Schlagheck, P. Leboeuf, and N. Pavloff, Phys. Rev. Lett. **98**, 210602 (2007).
[15] C. Menotti and S. Stringari, Phys. Rev. A **66**, 043610 (2002).
[16] D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven, Phys. Rev. Lett. **85**, 3745 (2000).
[17] C. Raman, M. Kohl, R. Onofrio, D. S. Durfee, C. E. Kuklewicz, Z. Hadzibabic, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **83**, 2502 (1999).
[18] R. Onofrio, C. Raman, J. M. Vogels, J. R. Abo-Shaer, A. P. Chikkatur, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **85**, 2228 (2000).
[19] P. Engels and C. Atherton, Phys. Rev. Lett. **99**, 160405 (2007).
[20] M. Olshanii, Phys. Rev. Lett. **81**, 938 (1998).
[21] A. D. Jackson, G. M. Kavoulakis, and C. J. Pethick, Phys. Rev. A **58**, 2417 (1998).
[22] P. Leboeuf and N. Pavloff, Phys. Rev. A **64**, 033602 (2001).
[23] L. P. Pitaevskii and S. Stringari, J. Low Temp. Phys. **85**, 377 (1991).
[24] M. Schwartz, Phys. Rev. B **15**, 1399 (1977).
[25] D. S. Petrov, Ph.D. thesis, University of Amsterdam, 2003; available online at <http://www-old.amolf.nl/publications/theses/petrov>
[26] A. V. Lopatin and V. M. Vinokur, Phys. Rev. Lett. **88**, 235503 (2002).
[27] G. E. Astrakharchik and L. P. Pitaevskii, Phys. Rev. A **70**, 013608 (2004).
[28] T. Ernst, T. Paul, and P. Schlagheck, e-print arXiv:0905.4750.
[29] V. Hakim, Phys. Rev. E **55**, 2835 (1997).
[30] H. Lamb, *Hydrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1997).
[31] P. Leboeuf, N. Pavloff, and S. Sinha, Phys. Rev. A **68**, 063608 (2003).
[32] T. Paul, M. Hartung, K. Richter, and P. Schlagheck, Phys. Rev. A **76**, 063605 (2007).
[33] B. I. Ivlev and N. B. Kopnin, Adv. Phys. **33**, 47 (1984).
[34] J. S. Langer and V. Ambegaokar, Phys. Rev. **164**, 498 (1967).
[35] Note in particular that condition (11) is always fulfilled in the absence of interaction since in this case the speed of sound is $c \equiv 0$.

- [36] B. I. Shklovskii and A. L. Efros, *Electronic Properties of Doped Semiconductors* (Springer-Verlag, Berlin, 1984).
- [37] J. Fortágh and C. Zimmermann, *Rev. Mod. Phys.* **79**, 235 (2007).
- [38] S. Kraft, A. Günther, H. Ott, D. Wharam, C. Zimmermann, and J. Fortágh, *J. Phys. B* **35**, L469 (2002).
- [39] J. Estève, C. Aussibal, T. Schumm, C. Figl, D. Mailly, I. Bouchoule, C. I. Westbrook, and A. Aspect, *Phys. Rev. A* **70**, 043629 (2004); T. Schumm *et al.*, *Eur. Phys. J. D* **32**, 171 (2005).
- [40] D.-W. Wang, M. D. Lukin, and E. Demler, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 076802 (2004).
- [41] J. W. Goodman, *Speckle Phenomena in Optics: Theory and Applications*, (Roberts and Company Publishers, Greenwood Village, 2007).
- [42] D. Clément, A. F. Varón, J. A. Retter, L. Sanchez-Palencia, A. Aspect and P. Bouyer, *New J. Phys.* **8**, 165 (2006).
- [43] L. Fallani, C. Fort, and M. Inguscio, *Adv. At., Mol., Opt. Phys.* **56**, 119 (2008).
- [44] Equation (36) corresponds to a typical physical situation where the potential seen by the particles is proportional to the intensity of an electric field whose components are random Gaussian variables.
- [45] In Ref. [14] this region has been improperly called “Ohmic.”
- [46] T. N. Antsygina, L. A. Pastur, and V. A. Slyusarev, *Fiz. Nizk. Temp.* **7**, 5 (1981); [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **7**, 1 (1981)].
- [47] I. M. Lifshits, S. A. Gredeskul, and L. A. Pastur, *Introduction to the Theory of Disordered Systems* (John Wiley, New York, 1988).
- [48] O. N. Dorokhov, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **36**, 259 (1982); [*JETP Lett.* **36**, 318 (1982)]; P. A. Mello, P. Pereyra, and N. Kumar, *Ann. Phys. (N.Y.)* **181**, 290 (1988).
- [49] V. I. Mel'nikov, *Fiz. Tverd. Tela (Leningrad)* **23**, 782 (1981); [*Sov. Phys. Solid State* **23**, 444 (1981)].
- [50] C. W. J. Beenakker, *Rev. Mod. Phys.* **69**, 731 (1997).
- [51] P. A. Mello, *J. Math. Phys.* **27**, 2876 (1986).
- [52] C. W. J. Beenakker and J. A. Melsen, *Phys. Rev. B* **50**, 2450 (1994).
- [53] In order to complete the proof of this equivalence one has to show that the mean value $\langle \lambda \rangle = t = L/L_{\text{loc}}(\kappa)$ obtained from Eq. (68) for a sample of length $X=L$ is identical to result (45). This amounts to show that for a potential of form (21) one has $\langle |\hat{U}_\delta(2\kappa)|^2 \rangle = (\hbar^2/m)^2 \sigma L$, which is easily obtained.
- [54] A. A. Abrikosov, *Solid State Commun.* **37**, 997 (1981).
- [55] B. A. Van Tiggelen, in *Diffusive Waves in Complex Media*, edited by J. P. Fouque (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999), p. 1.
- [56] Note that in Ref. [14] the theoretical determination of L^* was obtained using a criterion different from Eq. (80) resulting in a less precise estimate at high V/c .
- [57] F. M. Izrailev and A. A. Krokhin, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4062 (1999).
- [58] L. Sanchez-Palencia, D. Clement, P. Lugan, P. Bouyer, G. V. Shlyapnikov, and A. Aspect, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 210401 (2007).
- [59] L. Tessieri, *J. Phys. A* **35**, 9585 (2002).
- [60] E. Gurevich and O. Kenneth, *Phys. Rev. A* **79**, 063617 (2009).
- [61] P. Lugan, A. Aspect, L. Sanchez-Palencia, D. Delande, B. Gremaud, C. Muller, and C. Miniatura, *Phys. Rev. A* **80**, 023605 (2009).
- [62] A. F. Ioffe and A. R. Regel, *Prog. Semicond.* **4**, 237 (1960).
- [63] Note that the value $V^*/c=7.95$ does not depend on the type of correlation of the disordered potential considered since it is simply the value of V/c for which Eq. (81) admits the solution $t^*=1$.
- [64] W. Guerin, J.-F. Riou, J. P. Gaebler, V. Josse, P. Bouyer, and A. Aspect, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 200402 (2006).
- [65] N. Pavloff, *Phys. Rev. A* **66**, 013610 (2002).
- [66] Note that there is a factor of 2 difference between the present definition (14) of κ and the one used in Ref. [65].
- [67] Y. Imry, *Introduction to Mesoscopic Physics* (Oxford University Press, Oxford, 1997).
- [68] D. L. Shepelyansky, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1787 (1993); G. Kopidakis, S. Komineas, S. Flach, and S. Aubry, *ibid.* **100**, 084103 (2008); A. S. Pikovsky and D. L. Shepelyansky, *ibid.* **100**, 094101 (2008); S. Fishman, A. Iomin, and K. Mallick, *Phys. Rev. E* **78**, 066605 (2008).
- [69] S. Datta, *Electronic Transport in Mesoscopic Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1995).
- [70] M. V. Berry and S. Klein, *Eur. J. Phys.* **18**, 222 (1997).
- [71] C. Texier, Ph.D. thesis, Université Paris 6, 1999; available online at <http://www.lptms.u-psud.fr/membres/texier/research.html>

5.3 Article 3 : Breakdown of superfluidity of a matter wave in a random environment

Breakdown of the superfluidity of a matter wave in a random environment

M. Albert,¹ T. Paul,² N. Pavloff,² and P. Leboeuf²

¹*Département de Physique Théorique, Université de Genève, CH-1211 Genève, Switzerland*

²*Univ. Paris Sud, CNRS, Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques, UMR 8626, F-91405 Orsay, France*

(Received 30 March 2010; published 6 July 2010)

We consider a guided Bose-Einstein matter wave flowing through a disordered potential. We determine the critical velocity at which superfluidity is broken and compute its statistical properties. They are shown to be connected to extreme values of the random potential. Experimental implementations of this physics are discussed.

DOI: [10.1103/PhysRevA.82.011602](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.82.011602)

PACS number(s): 03.75.Kk, 05.60.Gg, 67.10.Jn

I. INTRODUCTION

The simplest and most intuitive definition of superfluidity (SF) is the ability to move without dissipation. According to a perturbative mechanism proposed by Landau, superfluidity is broken when the velocity of the flow exceeds a critical value V_c^L at which it is energetically favorable to emit elementary excitations. Although this mechanism has been explicitly verified in ^4He [1], $^3\text{He-B}$ [2], and Bose-Einstein condensates (BECs) [3], many experiments in ^4He [4], $^3\text{He-A}$ [5], and BECs [6,7] have shown that the actual critical velocity V_c is generally lower than V_c^L due to the occurrence of phase slips. In this scenario, SF is protected by an energy barrier, which may be overcome by fluctuations of thermal (as first suggested by Iordanskii in the context of liquid He II [8] and by Little for superconductors [9]) or quantal origin (as more recently observed in ^4He [10], in superconducting nanowires [11], and possibly also in BECs [12]), leading to what is called a resistive state in the physics of superconductors.

In what follows we address the problem of determining the critical velocity for the breakdown of SF of a matter wave moving in a disordered potential. The matter-wave beam is formed by a guided BEC in a quasi-one-dimensional (1D) geometry. We assume zero temperature; it is well known that in this case superconductivity and superfluidity are not destroyed by weak disorder. This is Anderson's theorem for nonmagnetic impurities in superconductors [13]; similar results (with a different physical mechanism) hold for BECs [14]. In the latter case, the phase coherence of the system is preserved in 1D in the presence of a weak disorder as demonstrated in the experiments reported in Refs. [15,16]. As a consequence, one may study a simple scenario for breakdown of superfluidity in disordered BECs where phase slips are neither thermally nor quantum-mechanically nucleated but rather have a dynamical origin: the barrier disappears at a given critical velocity. This mechanism is standard in the absence of disorder (see, e.g., [17] and references therein) and the extraordinary control achieved in the domain of atomic vapor has even allowed a direct observation of the nonlinear excitations nucleated above the critical velocity V_c [6,7]. However, to our knowledge there is up to now only one clear experimental evidence of dynamical breakdown of SF and of finite critical velocity in the presence of disorder, obtained by studying the damping of dipole oscillations in an elongated BEC [18]. In our fully 1D case, as well as in the dipole oscillation experiments [18], an important issue is to understand the out-of-equilibrium solutions of a nonlinear continuous system in the presence of disorder. In this context, the phase diagram of the fluid flowing

through a quasi-1D disordered potential $U(x)$ of finite extent L was recently studied in Refs. [19–21]. Here, we concentrate on the SF part of this diagram and more specifically on the description of the breakdown of SF when the velocity (or the length L of the disordered region) increases.

We study two different types of disordered potential with opposite characteristics. The first one is a smooth potential whose typical spatial scale of variation is large compared to the healing length of the condensate. In this case a local-density approximation holds and a local Landau criterion can be applied [22]. This mechanism reconciles the Landau approach with the phase-slip phenomenon, because it predicts that SF is broken when the local Landau velocity is reached by emission of nonlinear excitations (solitons in our 1D case). The second type of disordered potential consists in a series of pointlike impurities and thus has, contrarily to the previous type, strong fluctuations on small spatial scales. We show that in this case the criterion can be adapted, yielding—as in the previous case—very good agreement with numerical simulations. In both cases we explicitly compute the statistical properties of the critical velocity V_c and show that they are closely related to the extreme-value statistics of the disordered potential. We finally discuss experimental realizations of our models.

The system considered is a weakly interacting BEC transversely confined by a harmonic potential of frequency ω_\perp . For simplicity, the disordered potential U is supposed to depend on a single spatial variable—the coordinate x along the axial direction of the guide. A stationary flow of the system is then accurately described by a 1D order parameter $\psi(x)$ obeying the nonlinear Schrödinger equation [23,24]

$$\mu\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + [U(x) + gn^\nu(x)]\psi. \quad (1)$$

Here, $n(x) \equiv |\psi(x)|^2$ is the condensate density per unit of longitudinal length, μ is the chemical potential, and $g = 2\hbar\omega_\perp a^\nu$ is the nonlinear parameter ($a > 0$ is the 3D s -wave scattering length). In the low-density regime ($an \ll 1$) the density profile in the transverse direction is Gaussian shaped and $\nu = 1$, whereas $\nu = 1/2$ in the opposite high-density regime ($an \gg 1$), where the Thomas-Fermi approximation holds for the transverse degree of freedom [25].

II. SUPERFLUID FLOWS

In addition to the density $n(x)$, it is convenient to characterize the flow by its velocity $v(x) = \frac{\hbar}{m} [\arg(\psi)]_x$. We assume that the disordered potential $U(x)$ takes sizable values only over a

region of finite length L . In this case a SF flow corresponds to a solution of Eq. (1) with constant density n_0 and velocity V at $\pm\infty$. The chemical potential μ then reads

$$\mu = \frac{1}{2}mV^2 + gn_0^v. \quad (2)$$

In the following we denote the chemical potential of a BEC at rest as μ_0 ($\mu_0 = gn_0^v$).

In the absence of an external potential, the SF solution corresponds to $n(x) = n_0$ and $v(x) = V$ for all x , and one can show that it is stable under a weak perturbing potential provided $V \leq c_0$, where

$$c_0 = \sqrt{\frac{vgn_0^v}{m}} \quad (3)$$

is the sound velocity of the unperturbed condensate. The condition $V \leq c_0$ is exactly the Landau criterion for SF because in a BEC the velocity V_c^L is precisely the speed of sound.

III. SLOWLY VARYING DISORDERED POTENTIALS

In the case of a slowly varying potential, that is, when the typical length of spatial variations of $U(x)$ is much larger than the healing length $\xi = \hbar/\sqrt{m\mu_0}$ of the fluid, one can devise a local-density approximation for describing stationary flows. In this scheme, the flow verifies current conservation and local equilibrium. This reads $n(x)v(x) = C^{\text{st}} = n_0V$ and

$$\mu = \frac{1}{2}mv^2(x) + gn^v(x) + U(x). \quad (4)$$

From these considerations it is easy to see that the velocity $v(x)$ is determined by a simple algebraic equation [22]: $U(x) = \mu_0 G(v(x))$, where $G(v) = 1 - (V/v)^v + \frac{v}{2}(V^2 - v^2)/c_0^2$. This equation admits a solution provided $\dot{U}(x)/\mu_0$ is lower than the maximum of G . If this condition is violated the flow no longer admits a stationary solution, SF is broken and the flow becomes dissipative [one can show that in this case the obstacle described by the potential $U(x)$ experiences a finite drag [26]]. The maximum of G is reached when $V^v c_0^2 = [v(x)]^{2+v}$, which precisely reads $v(x) = c(x)$ where $c(x) = \sqrt{vgn^v(x)/m}$ can be termed the local sound velocity [compare with (3)]: SF is broken when one reaches the local Landau criterion.

In this approximation, it is clear that SF will first break down at the point $x = x_m$ where the potential is maximum: $U(x_m) = \max[U(x)] = U_m$. The condition $v(x_m) = c(x_m)$ yields an explicit relation between U_m and V_c :

$$\frac{U_m}{\mu_0} = 1 + \frac{v}{2} \left(\frac{V_c}{c_0}\right)^2 - \left(1 + \frac{v}{2}\right) \left(\frac{V_c}{c_0}\right)^{2v/(v+2)}. \quad (5)$$

Everything now boils down to a problem of extreme value: once the statistical properties of the maximum U_m of $U(x)$ over $[0, L]$ are known, the distribution of the critical velocities V_c can be obtained readily through (5). Namely, if one denotes by $\mathcal{F}_L(U_m)$ the probability distribution of U_m and by $P_L(V_c)$ the corresponding distribution of the critical velocity V_c , one has

$$P_L(V_c) = \frac{v\mu_0}{c_0} \left[\frac{V_c}{c_0} - \left(\frac{V_c}{c_0}\right)^{(v-2)/(v+2)} \right] \mathcal{F}_L(U_m). \quad (6)$$

The distribution function of U_m (and thus also that of V_c) depends on the size L of the disordered region for the simple

reason that the longer the disordered region, the larger the probability of finding a large maximum of U . Hence it is clear that, on average, the critical velocity decreases with increasing sample length L . Note also that, in this picture, the critical velocity is related to the local fluctuations of the disorder and not to the details of the correlations.

In order to calculate the distribution of U_m , the first step consists in mapping the problem of finding the maximum value of a correlated continuous function to a problem of a set of N discrete uncorrelated variables. According to [27] this mapping can be done if the correlation function of $U(x)$, characterized by a correlation length ℓ_c , decays faster than a logarithm and provided $L/\ell_c \gg 1$. From now on we assume that these requirements are fulfilled, and study the extreme-value statistics of a set of $N = \gamma L/\ell_c$ uncorrelated random variables $\{U_1, U_2, \dots, U_N\}$ distributed according to the probability distribution of the disorder potential $p(U)$. γ is a parameter of order unity that depends on the correlation function and has to be determined numerically [28]. If we denote by $f(U)$ and $\mathcal{F}_L(U_m)$ the cumulative distribution functions of U and U_m , respectively, we have $\mathcal{F}_L(U_m) = [f(U_m)]^N$. Taking the derivative of this expression yields the probability distribution $\mathcal{P}_L(U_m)$ and then the distribution of the critical velocity through (5) and (6).

To estimate the frontier between the superfluid and the dissipative regimes, we calculate the median $L(V_c)$ of this distribution and obtain

$$\frac{L(V_c)}{\ell_c} = \frac{\gamma^{-1} \ln 1/2}{\ln f(U_m(V_c))}, \quad (7)$$

where $U_m(V_c)$ is given by (5).

In order to check the validity of our approach, we have numerically determined the critical velocity from time-dependent simulations of the Gross-Pitaevskii equation. Starting from the ground state in the presence of disorder at zero velocity, we have adiabatically accelerated the disordered potential until it reaches a velocity V . For each V and L we consider 80 realizations of the random potential and determine the fraction P_s of stationary solutions. This quantity is plotted in Fig. 1 using a gray scale [dark, $P_s = 0$; light blue (gray), $P_s = 1$] as a function of the normalized variables L/ℓ_c and V/c_0 . The inset displays $F_L(V_c)$, the cumulative probability distribution of the critical velocity. Very good agreement is observed in the expected limit of validity of our approach ($L/\ell_c \gg 1$). Figure 1 is drawn in the case of a Gaussian disorder, $p(U) = \exp(-U^2/2\Sigma^2)/\sqrt{2\pi\Sigma^2}$, with a Gaussian correlation function (numerically we find $\gamma \simeq 0.8$). We have also checked the accuracy of our predictions for other types of disorder of experimental interest (Lorentz-correlated disorder and speckle potential).

IV. A SERIES OF δ SCATTERERS

Another commonly used model of disorder is a potential formed by a series of δ -like impurities: $U(x) = \lambda\mu_0\xi \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i)$, where the x_i 's are uncorrelated random variables distributed between 0 and L with density $\rho = N/L$. $\lambda > 0$ is the dimensionless strength of a scatterer. In the presence of such a potential, the local Landau criterion is no longer applicable because the density is not smooth. However,

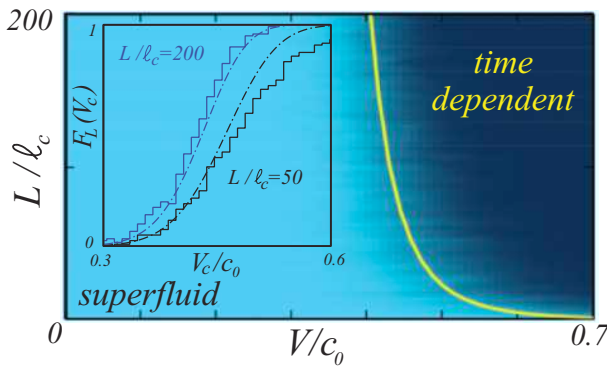


FIG. 1. (Color online) Transport of a quasi-1D BEC with velocity V through a Gaussian-correlated disordered potential of extension L (the parameters ν , ℓ_c , and Σ take here the values $\nu = 1$, $\ell_c = 5\xi$, and $\Sigma = 0.1\mu_0$). Dark region: time-dependent flow; light gray (light blue online) region: SF stationary flow. The (yellow online) solid line displays the boundary between the two regions as predicted by Eq. (7). The inset displays the cumulative probability distribution of the critical velocity V_c for samples of two different lengths. Staircase functions: numerical computations; dot-dashed lines: theory.

one can devise an approach adapted to this particular case. One first remarks that each impurity repels the condensate, the density of which reaches its lowest local value at the position of the δ peak. The region in space where the decrease in density is the largest will correspond to configurations where two (or more) scatterers lie very close to each other. SF will break down, therefore, at the point where the local concentration of δ peaks is maximum.

The smallest length scale for density modulations of the condensate is the healing length ξ . The condensate is therefore not sensitive to details of the disordered potential on scales smaller than ξ . One thus divides the disordered region into $B = L/\xi$ boxes, each of size ξ , and replaces the m_i δ peaks present in box i by a single effective peak of strength $m_i \lambda$. The goal is then to determine the probability distribution of intensity of the strongest of the effective peaks, because it is at this peak that SF will first be broken. One thus needs to calculate the probability distribution of $M = \max\{m_1, m_2, \dots, m_B\}$, where $\sum_i m_i = N$.

The probability of finding m peaks in an interval of length ξ is $\pi(m) = \binom{N}{m} p^m (1-p)^{N-m}$, where $p = \xi/L$. In the limit of a wide disordered region ($L \rightarrow \infty$), the product pN remaining constant, the binomial law can be approximated by a Poisson law of parameter $\zeta = pN$: $\pi(m) \simeq e^{-\zeta} \zeta^m / m!$. In this limit, the m_i 's are uncorrelated and the cumulative distribution of M is $\mathcal{F}_L(M) = f(M)^B$, where $f(M) = \Gamma(M+1, \zeta) / M!$ is the cumulative distribution function associated with the Poisson law [$\Gamma(x, \zeta)$ is the incomplete gamma function].

One can relate the SF critical velocity to the strength $\Lambda_e = M \lambda$ of the strongest effective peak by using the criterion for the critical velocity obtained in [23] for a single peak: $\Lambda_e = K(V_c/c_0)$, where

$$K(z) = \frac{\sqrt{2}}{4z} [-8z^4 - 20z^2 + 1 + (1 + 8z^2)^{3/2}]^{1/2}. \quad (8)$$

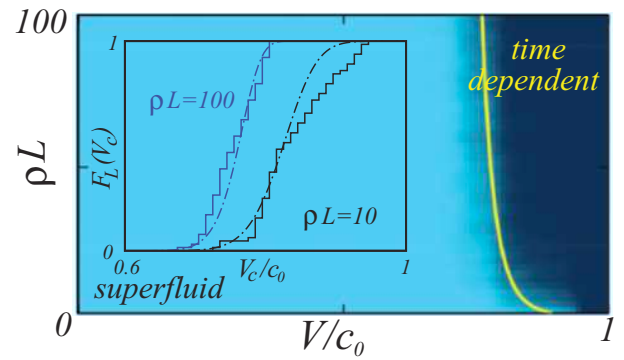


FIG. 2. (Color online) Same as Fig. 1 but for a random potential formed by a sequence of uncorrelated δ peaks ($\lambda = 0.1$, $\rho \xi = 0.1$).

The probability distribution of V_c is then

$$P_L(V_c) = \frac{K'(V_c/c_0)}{\lambda c_0} \mathcal{P}_L(M = \Lambda_e(V_c)/\lambda), \quad (9)$$

where $\mathcal{P}_L(M) = d\mathcal{F}_L(M)/dM$. Defining again the typical critical velocity as the median, the boundary of the SF region corresponds to

$$\frac{L(V_c)}{\xi} = \frac{\ln 1/2}{\ln f(\Lambda_e(V_c)/\lambda)}. \quad (10)$$

Figure 2 displays the stability phase diagram and the cumulative distribution of the critical velocity. Here also we find excellent agreement with the numerical results.

V. DISCUSSION

There are several experimental possibilities for studying the statistical properties of the boundary of the SF region. The Gaussian disorder with zero average may be implemented experimentally in the case of microfabricated circuits, where the atoms are magnetically guided over a chip [29]. Roughness and disorder in the circuits induce fluctuations along the guide which are typically Lorentzian correlated, with a correlation length ℓ_c which decreases with increasing distance between the guide and the chip [30]. However, the most common type of experimental disorder is the so-called speckle potential, generated by a laser beam passing through a diffusing plate [31]. One of the most appropriate setups seems to be the one used in Ref. [7], where the critical velocity of a trapped Bose-Einstein condensate has been probed by sweeping a laser beam through it. The critical velocity was determined from measurements of the amount of excitations related to the emission of solitons and linear excitations. Similar studies could be done by sweeping the laser beam through a diffusive plate at constant velocity, thus creating a moving speckle potential. Finally, the statistical properties of the SF breaking may also be studied by simply adapting our calculations to the damping of dipole oscillations, along the lines of the recent experiments of Ref. [18].

In conclusion, we have stressed the link between the SF critical velocity in the presence of disorder and the statistics of extreme events. We have developed simple models in two opposite situations where the disorder is either very

smooth or composed of pointlike impurities. In both cases the agreement between numerical simulations and our analytical model is very good. We note that, because of the mapping of the statistical properties of the critical velocities to that of extreme events of an uncorrelated sequence, in the limit $L \rightarrow \infty$ the distribution of V_c tends to one of the universal distributions of extreme-value statistics [32]. A possible extension of this work could be the application to fermionic superfluids in the BCS regime. In that case, the

Landau critical velocity is related to the pairing gap, and an equation similar to (5) can be explicitly written down [17].

ACKNOWLEDGMENTS

We are grateful to S. Majumdar and J. Randon-Furling for fruitful discussions. This work was supported by Grant No. ANR-08-BLAN-0165-01 and by the IFRAF Institute.

-
- [1] D. R. Allum, P. V. E. McClintock, A. Phillips, and R. W. Bowley, *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A* **284**, 179 (1977).
- [2] C. A. M. Castelijns, K. F. Coates, A. M. Guénault, S. G. Mussett, and G. R. Pickett, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 69 (1986).
- [3] A. P. Chikkatur *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 483 (2000).
- [4] O. Avenel and E. Varoquaux, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2704 (1985).
- [5] V. M. H. Ruutu *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 5058 (1997); P. M. Walmsley, D. J. Cousins, and A. I. Golov, *ibid.* **91**, 225301 (2003).
- [6] S. Inouye *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 080402 (2001).
- [7] P. Engels and C. Atherton, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 160405 (2007).
- [8] S. V. Iordanskii, *Zh. Eksp. Theor. Fiz.* **48**, 708 (1965) [*Sov. Phys. JETP* **21**, 467 (1965)].
- [9] W. A. Little, *Phys. Rev.* **156**, 396 (1967).
- [10] G. G. Ihas, O. Avenel, R. Aarts, R. Salmelin, and E. Varoquaux, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 327 (1992).
- [11] C. N. Lau, N. Markovic, M. Bockrath, A. Bezryadin, and M. Tinkham, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 217003 (2001).
- [12] D. McKay, M. White, M. Pasienski, and B. DeMarco, *Nature (London)* **453**, 76 (2008).
- [13] P. W. Anderson, *J. Phys. Chem. Solids* **11**, 26 (1959).
- [14] K. Huang and H. F. Meng, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 644 (1992); S. Giorgini, L. Pitaevskii, and S. Stringari, *Phys. Rev. B* **49**, 12938 (1994).
- [15] D. Clément, P. Bouyer, A. Aspect, and L. Sanchez-Palencia, *Phys. Rev. A* **77**, 033631 (2008).
- [16] Y. P. Chen *et al.*, *Phys. Rev. A* **77**, 033632 (2008).
- [17] G. Watanabe, F. Dalfovo, F. Piazza, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Phys. Rev. A* **80**, 053602 (2009).
- [18] D. Dries, S. E. Pollack, J. M. Hitchcock, and R. G. Hulet (submitted for publication), e-print [arXiv:1004.1891](https://arxiv.org/abs/1004.1891).
- [19] T. Paul, P. Schlagheck, P. Leboeuf, and N. Pavloff, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 210602 (2007).
- [20] M. Albert, T. Paul, N. Pavloff, and P. Leboeuf, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 250405 (2008).
- [21] T. Paul, M. Albert, P. Schlagheck, P. Leboeuf, and N. Pavloff, *Phys. Rev. A* **80**, 033615 (2009).
- [22] V. Hakim, *Phys. Rev. E* **55**, 2835 (1997).
- [23] P. Leboeuf and N. Pavloff, *Phys. Rev. A* **64**, 033602 (2001).
- [24] A. D. Jackson, G. M. Kavoulakis, and C. J. Pethick, *Phys. Rev. A* **58**, 2417 (1998).
- [25] Note that the time-dependent extension of Eq. (1) in the case $\nu = 1/2$ is delicate. However, its use in the stationary regime is perfectly legitimate.
- [26] N. Pavloff, *Phys. Rev. A* **66**, 013610 (2002).
- [27] J. Pickands, *Trans. Am. Math. Soc.* **145**, 75 (1969).
- [28] γ is obtained by comparing the exact extreme-value statistics of the maxima (a continuous disordered potential) with the result of the discrete model. Note, however, that γ is not a fitting parameter.
- [29] J. Fortágh and C. Zimmermann, *Rev. Mod. Phys.* **79**, 235 (2007).
- [30] T. Paul, P. Leboeuf, N. Pavloff, K. Richter, and P. Schlagheck, *Phys. Rev. A* **72**, 063621 (2005).
- [31] D. Clément *et al.*, *New J. Phys.* **10**, 045019 (2008).
- [32] E. J. Gumbel, *Statistics of Extremes* (Dover Publications, New York, 2004).

5.4 Quelques compléments sur la transition superfluide-dissipatif

5.4.1 Convergence vers la loi de Gumbel et frontière superfluide

On montre ici comment les deux types de potentiels (3.38) et (3.49) peuvent être traité sur un pied d'égalité. Pour ce faire on commence par discuter comment leur distribution du maximum converge vers la loi de Gumbel [79].

Speckle

Dans ce cas les fluctuations locales sont distribuées de manière exponentielle

$$p(U) = \frac{1}{\Sigma} e^{-U/\Sigma} \quad \Rightarrow \quad f(U) = \int_0^U dx p(x) = 1 - e^{-U/\Sigma}. \quad (5.1)$$

La distribution cumulée du maximum U_m d'un ensemble de N variables $\{U_1, U_2, \dots, U_N\}$ décorréelées s'écrit¹

$$F_N(U) = [f(U_m)]^N = [1 - e^{-U/\Sigma}]^N \simeq \exp \left\{ -N e^{-U/\Sigma} \right\}, \quad (5.2)$$

si $N \gg 1$, qui prend donc la forme de la loi de Gumbel

$$F_N^G(x) = \exp \left[-e^{-\frac{x-\mu}{\beta}} \right], \quad (5.3)$$

avec $\beta = \Sigma$ et $\mu = \Sigma \ln N$.

Gaussien

Cette fois-ci, les fluctuations locales sont distribuées de manière gaussienne

$$p(U) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Sigma} e^{-(U/\Sigma)^2} \quad \Rightarrow \quad f(U) = \int_0^U dx p(x) = \frac{1 + \operatorname{erf}(U/\Sigma)}{2}. \quad (5.4)$$

La distribution cumulée du maximum U_m d'un ensemble de N variables U_i décorréelées s'écrit

$$F_N(U) = [f(U_m)]^N = \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(U/\Sigma) \right]^N \simeq \exp \left\{ -\frac{N}{2} \operatorname{erfc}(U/\Sigma) \right\}, \quad (5.5)$$

si $N \gg 1$. La convergence vers la loi de Gumbel nécessite une contrainte supplémentaire. En effet, pour $x \gg 1$ on a $\operatorname{erfc}(x) \simeq e^{-x^2}/(\sqrt{\pi}x)$, ce qui donne

$$F_N(U) \simeq \exp \left\{ -N \exp \left[-\left(\frac{U}{\Sigma}\right)^2 - \ln \left(\frac{2\sqrt{\pi}U}{\Sigma}\right) \right] \right\}. \quad (5.6)$$

Pour négliger les corrections logarithmiques en U/Σ il faut alors $N \gg 2\sqrt{\pi}U/\sigma$. On obtient finalement une loi de Gumbel pour $\rho = (U/\Sigma)^2$ avec $\mu = \ln N$ et $\beta = \Sigma^2$.

¹ $F_N(U_m) = \operatorname{Proba}[(U_1 \leq U_m) \cap (U_2 \leq U_m) \cap \dots \cap (U_N \leq U_m)] = f(U_m)f(U_m) \dots f(U_m) = [f(U_m)]^N$.

Frontière superfluide

Pour évaluer la frontière superfluide on calcule la médiane de la distribution de probabilité. En utilisant la loi de Gumbel, on peut obtenir une formule qui englobe les deux cas étudiés. De manière plus générale elle permet même de traiter toute distribution des fluctuations locales de la forme $p(U) = \exp(-(U/\Sigma)^\lambda)$, où $\lambda = 1$ dans le cas du speckle et $\lambda = 2$ dans le cas gaussien. La médiane \tilde{x} de (5.3) se calcule aisément et donne

$$\tilde{x} = \mu - \beta \ln(\ln 2). \quad (5.7)$$

En appliquant cette relation, ainsi que le critère de Landau local (2.67) et la relation entre la longueur de l'échantillon désordonné L et N et la longueur de corrélation (voir article 3), $N = \gamma L/l_c$, on obtient

$$\frac{L}{l_c} = \gamma^{-1} \ln 2 \exp \left\{ \left[\frac{\nu \mu_0}{\Sigma} (1 - x^{2\alpha})(1 - x^2) \right]^\lambda \right\}, \quad (5.8)$$

avec $x = V/c$ et ν, α, μ_0 et Σ définis dans l'article 4.

Chapitre 6

Localisation par un potentiel quasi-périodique

Sire, je n'ai pas eu besoin de cette hypothèse.

P. S. de Laplace.

Au cours de ce chapitre, on laisse de côté les interactions afin d'étudier en quoi le "degré d'aléatoire" est important pour la localisation quantique. On discute en détails les propriétés de localisation d'un modèle quasi-périodique particulier, à savoir le modèle de Aubry et André [21] (également connu sous le nom de modèle de Harper dans le cadre de l'effet Hall [83]), et le compare au modèle d'Anderson à une dimension. Le choix de ce modèle particulier prend son origine dans des résultats expérimentaux récents avec des atomes froids [162] et des cristaux photoniques [103] mais la discussion générale ne se limite pas aux paramètres précis de ces expériences. L'introduction présente les grandes lignes de la phénoménologie de ce modèle ainsi que les résultats principaux de notre analyse, les détails étant reportés dans l'article 4 [5] de ce manuscrit.

6.1 Introduction

Les potentiels quasi-périodiques sont d'un intérêt fondamental pour essayer de répondre à une question comme la transition entre ordre et désordre. En effet, ceux-ci se trouvent à l'interface entre un potentiel périodique et un potentiel aléatoire et leur caractère déterministe permet de mener l'investigation en détails. Seulement, il faut les traiter avec grande attention, car ce caractère hybride fait qu'ils peuvent à la fois induire les effets de l'un ou de l'autre et ceci dépend fondamentalement du type de quantités étudiées.

En ce qui concerne la localisation d'Anderson par un potentiel aléatoire ou pseudo aléatoire¹, le problème reste encore largement ouvert. Par exemple, même si le degré d'aléatoire¹ est suffisant pour rendre des états localisés, il est fort probable que les propriétés statistiques, comme par exemple les fluctuations de transmission, soient très différentes entre un potentiel et un autre.

Le modèle de Aubry et André [21]

$$H = J \sum_n (|n+1\rangle\langle n| + |n\rangle\langle n+1|) + \Delta \sum_n \cos(2\pi\beta n) |n\rangle\langle n|, \quad (6.1)$$

¹On reste ici volontairement vague sur la notion de degré d'aléatoire qui pourrait, par exemple, être précisée par des moments de la transformée de Fourier du potentiel, car personne à notre connaissance n'est à ce jour capable de préciser clairement les conditions pour avoir la localisation.

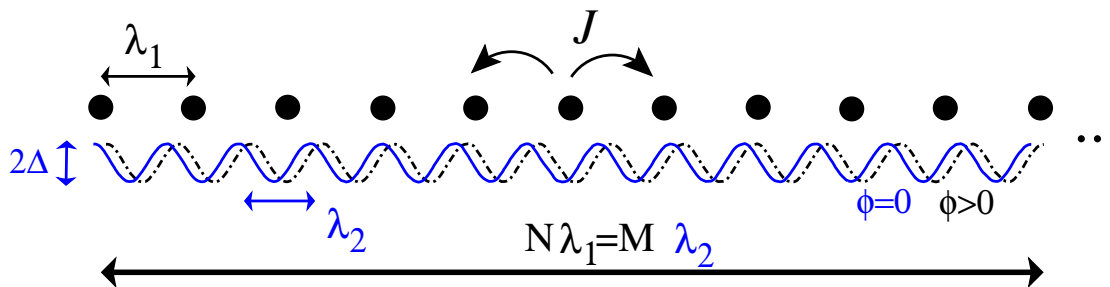


FIG. 6.1 – Représentation schématique du modèle d'Aubry et André à une dimension. Une particule peut se déplacer par effet tunnel avec une amplitude J sur des sites distants de λ_1 . À ceci on rajoute un potentiel extérieur sinusoïdale d'amplitude Δ mais de période spatiale λ_2 différente de λ_1 . Si le rapport de ces deux longueurs est rationnel ($\lambda_1/\lambda_2 = M/N$) alors, le système est périodique de période $N\lambda_1 = M\lambda_2$. Dans la limite où M et N tendent vers l'infini le rapport tend vers un nombre irrationnel et la périodicité disparaît. ϕ est une phase décrivant la position relative entre le potentiel additionnel et le réseau sous-jacent.

où β est le rapport des deux périodicités (voir figure 6.1), introduit en 1980, est d'une simplicité remarquable et pourtant possède une phénoménologie assez riche. En particulier sa version à une dimension présente une transition de localisation pour une valeur critique du potentiel perturbateur. Cependant la simplicité du modèle de "désordre", à savoir un "désordre" qui n'a que deux fréquences, conduit à s'interroger sur l'analogie ou non avec le modèle d'Anderson.

Après avoir présenté brièvement la phénoménologie de ce modèle, ce chapitre se consacre justement à cette question, à savoir si la localisation des fonctions propres de ce modèle est analogue à celle du modèle d'Anderson. Par une analyse semi-classique on montre que ce n'est pas le cas et que la localisation est ici d'origine classique et n'a donc aucune relation avec le phénomène de localisation d'Anderson tel qu'on l'a défini au chapitre 3. L'existence d'une phase délocalisée dans ce modèle est plutôt une manifestation du caractère classique du modèle et donc de "non localisation" par effets interférentiels, alors que la phase localisée n'est qu'une conséquence de la dynamique classique elle-même localisée dans l'espace.

6.2 Phénoménologie du modèle d'Aubry et André à une dimension

En réécrivant le hamiltonien (6.1) à l'aide des opérateurs de translations du réseau sous-jacent

$$T_{\lambda_1}^{\pm} = \exp(\pm i\hat{p}\lambda_1/\hbar), \quad (6.2)$$

où \hat{p} est l'opérateur impulsion canoniquement conjugué à l'opérateur position \hat{q} dont les vecteurs propres sont notés $|n\rangle$ et les valeurs propres $q_n = n\lambda_1$, on obtient

$$\hat{H} = 2J \cos(2\pi\hat{p}/P) + \Delta \cos(2\pi\hat{q}/Q). \quad (6.3)$$

$P = 2\pi/\lambda_1$ et $Q = \lambda_2$ sont ici des grandeurs introduites par pur souci de simplification des écritures. Mis sous cette forme, le hamiltonien présente explicitement une symétrie de dualité, à savoir que lors d'une inversion des variables p et q le hamiltonien garde la même forme. Il existe même un point fixe à $2J = \Delta$ où le hamiltonien n'est absolument pas affecté par la transformation. Une conséquence immédiate de cette symétrie est que

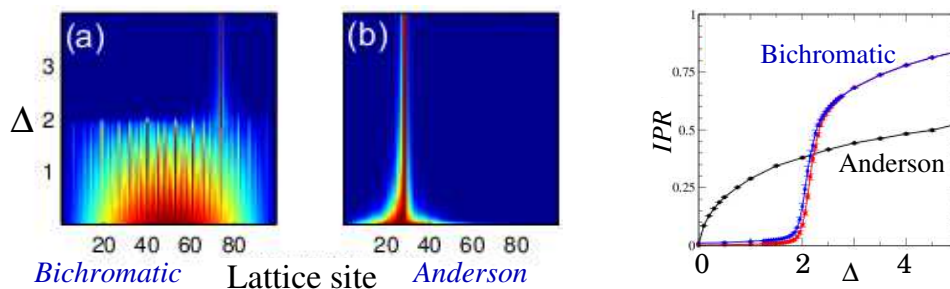


FIG. 6.2 – **À gauche** : densité d'un état propre du modèle d'Aubry-André (a) et du modèle d'Anderson (b). L'abscisse correspond à la position sur la chaîne unidimensionnelle, l'ordonnée à différentes valeurs de Δ (ici $J = 1$) et la couleur au module de la fonction d'onde. (a) présente une transition entre état délocalisé et localisé pour $\Delta = 2$ alors que pour (b) l'état propre est toujours localisé. Figures extraites de [103]. **À droite** : IPR (inverse participation ratio), c'est à dire l'inverse du nombre d'états propres de l'opérateur \hat{q} nécessaires pour construire un état propre de \hat{H} (défini dans le chapitre 3). Encore une fois, le modèle d'Anderson ne montre pas de transition alors que le modèle d'Aubry et André a une transition à $\Delta = 2$ à savoir le seuil pour la localisation classique. Figure extraite de [164].

s'il existe une phase localisée en position et donc délocalisée en impulsion en vertu du principe d'indétermination de Heisenberg, il existe une phase équivalente localisée en impulsion et donc délocalisée en position. Le passage d'une phase à une autre est alors piloté par le rapport entre l'effet tunnel J et l'amplitude du potentiel perturbateur Δ , $\Delta = 2J$ étant le point fixe. La phase délocalisée se trouve du côté $\Delta \simeq 0$ puisque à $\Delta = 0$ les états propres sont des états propres d'impulsion bien définie. La phase localisée se trouve quand à elle au voisinage de $J = 0$, la transition entre les deux ayant lieu à $\Delta = 2J$. Notons que cette symétrie est une spécificité de ce modèle et n'est pas générale dans le monde des potentiels quasi-périodiques.

Cependant, l'existence d'une transition est très claire ici et est liée au fait que l'énergie cinétique, à savoir le terme en $\cos p$ dans (6.3), est bornée. De ce fait, si le second terme du hamiltonien (6.3) est plus grand que l'énergie cinétique (si $\Delta > 2J$), le transport est classiquement inhibé car une particule est coincée dans un minimum local du potentiel. Les états quantiques se localisent ainsi sur les trajectoires classiques du système. La correspondance entre les deux pouvant se faire via la règle de quantification de Bohr-Sommerfeld [106, 23, 193] (voir l'annexe D pour une présentation simple de cette technique).

C'est en ce sens que ce modèle, ainsi que tout modèle sur réseau à une dimension (y compris le modèle d'Anderson), peut présenter une transition de localisation mais au sens de localisation classique. La question non triviale concerne maintenant l'existence ou non d'états localisés dans le régime $\Delta < 2J$ où l'énergie cinétique domine. Ce problème est discuté en détail dans l'article 4 [5] présenté dans la section suivante. Il s'agit ici d'une différence fondamentale entre le modèle d'Anderson et ce modèle puisque le premier ne connaît pas de transition en dimension un (figure 6.2).

Une autre caractéristique intéressante de ce modèle concerne ses propriétés spectrales. Pour β rationnel le système est périodique et son spectre est donné par des bandes d'énergies, conformément au théorème de Bloch. Au cours du processus d'approche d'un nombre irrationnel par des nombres rationnels, via un développement en fractions continues par exemple², ces bandes d'énergies se scindent en différentes branches qui se scindent de

²Un nombre irrationnel peut être approximé par une série de nombres rationnels avec un degré d'approximation de plus en plus bon. Le développement en fractions continues s'écrit $\beta = \frac{1}{m_1 + \frac{1}{m_2 + \frac{1}{m_3 + \dots}}}$, qui

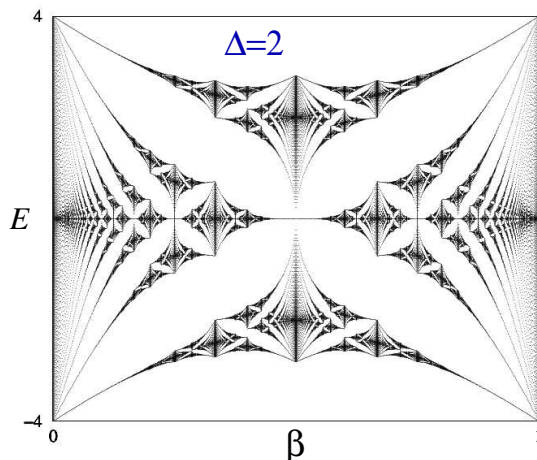


FIG. 6.3 – Spectre du hamiltonien (6.1) au point fixe $\Delta = 2J$ pour différentes valeurs de β le rapport des périodicités. Ce spectre, connue sous le nom de Papillon de Hofstadter, possède une structure multi-fractale de type ensemble de Cantor.

nouveau à l'étape d'approximation suivante, ..., conduisant enfin à une structure fractale de type ensemble de Cantor pour β irrationnel [173, 193, 22]. Au point critique, ce spectre est connu sous le nom de papillon de Hofstadter et possède une structure multi-fractale [21] (figure 6.3). Pour $\Delta < 2J$ le spectre est absolument continu et les états sont étendus alors que pour $\Delta > 2J$ le spectre est discret et les états localisés [21, 94], en accord avec le critère de localisation introduit au chapitre 3.

6.3 Article 4 : Localization by bichromatic potentials versus Anderson localization

donne les approximations suivantes : $\beta_1 = 1/m_1$, $\beta_2 = m_2/(m_1 m_2 + 1)$, ..., où les m_i sont des nombres entiers.

Localization by bichromatic potentials versus Anderson localization

Mathias Albert and Patricio Leboeuf

Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques, CNRS, Université Paris Sud, UMR8626, F-91405 Orsay Cedex, France

(Received 14 May 2009; published 19 January 2010)

The one-dimensional propagation of waves in a bichromatic potential may be modeled by the Aubry-André Hamiltonian. This, in turn, presents a localization transition that has been observed in recent experiments using ultracold atoms or light. It is shown here that, in contrast to the Anderson model, the localization mechanism has a classical origin, namely it is not due to a quantum suppression of a classically allowed transport process, but rather is produced by a trapping by the potential. Explicit comparisons with the Anderson model as well as with experiments are presented.

DOI: [10.1103/PhysRevA.81.013614](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.81.013614)

PACS number(s): 67.85.-d, 72.15.Rn, 03.65.Sq

I. INTRODUCTION

It is by now well established that disorder may lead to the absence of diffusion in the propagation of linear waves (Anderson localization). The phenomenology of Anderson localization strongly depends on dimensionality. In one-dimensional (1D) and uncorrelated disorders it has been shown that all wave functions are exponentially localized. This implies that the transmission of a wave packet incident on a disordered region of length L decreases as $\exp(-L/L_{\text{loc}})$, where $L_{\text{loc}} \ll L$ is the localization length. This phenomenon is valid for arbitrary energies, even when the energy E of the incident wave packet is much higher than the highest barrier of the disordered potential. In this respect, Anderson localization is a strongly nonclassical phenomenon.

Another class of interesting potentials are quasiperiodic potentials. They arise, typically, from the superposition of two periodic lattices with incommensurate periods. Part of their interest is that they provide an example of intermediate potentials between ordered (e.g., periodic) and disordered potentials: The system has neither translational symmetry nor true disorder. In particular, the model we consider here (the Aubry-André Hamiltonian) is known to present a localization transition as a parameter varies; thus wave functions change from extended to exponentially localized [1].

In recent experiments both random [2] and quasiperiodic potentials [3] were used to directly observe the localization of matter waves. The expansion of noninteracting Bose-Einstein condensates through one-dimensional quasiperiodic potentials was shown to clearly display a delocalized-localized crossover (with a shift, however, with respect to the predicted critical value of the parameter) [3]. A similar transition was recently observed with light propagating in quasiperiodic photonic lattices [4]. Our purpose here is to provide a semiclassical analysis of the experiments and, more generally, of the Aubry-André Hamiltonian, which allows for a simple and lucid picture of the underlying physical phenomena (for related semiclassical analysis see, e.g., Refs. [5–10]). In particular, and in contrast to what is quite often claimed, the analysis shows that there are deep fundamental differences between the Anderson localization and the localization in quasiperiodic potentials, although both present exponential localization of the wave functions.

As already pointed out, Anderson localization is a strongly nonclassical phenomenon where a quantum particle of energy

E incident on a 1D disordered region of length $L \rightarrow \infty$ is reflected with probability one even though its incident energy is much higher than the maximum height of the disordered potential. Thus, in Anderson localization a quantum particle is perfectly reflected, whereas its classical counterpart is perfectly transmitted. In this sense, Anderson localization is a purely wave-mechanical effect. In contrast, as shown in the following, localization in quasiperiodic potentials is different. It is a purely classical effect due to the trapping of the particle by the potential barriers. It is not due to a destructive interference process. Quantum mechanically, there is thus no suppression of a classical diffusive process. Moreover, the delocalized phase of the model corresponds to classical trajectories with a kinetic energy higher than the potential. Thus, in this integrable model the wave functions, quantized through a Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) semiclassical approximation, simply follow the classical behavior. It is our purpose to stress these aspects of the model and to clarify the connections with recent experiments.

II. THE MODEL

The Hamiltonian we are interested in is of the tight-binding form with nearest-neighbor hopping between discrete position sites q_n and a superimposed quasiperiodic potential

$$\hat{H} = J \sum_n (|q_{n+1}\rangle \langle q_n| + |q_n\rangle \langle q_{n+1}|) + W \sum_n \cos(2\pi\beta n) |q_n\rangle \langle q_n|, \quad (1)$$

where β is the commensurability parameter, $|q_n\rangle$ is a localized Wannier state on site n of the lattice, and J and W are parameters that control the amplitude of the hopping transitions and of the quasiperiodic potential, respectively. Since the Hamiltonian is invariant under the increase of β by an arbitrary integer, we can restrict it to $0 < \beta \leq 1$. This Hamiltonian is known as the Aubry-André or Harper Hamiltonian in the literature [1,11]. There are two well-known physical problems effectively described by Eq. (1). The first is the motion of electrons in two dimensions for a periodic potential in the presence of a magnetic field applied perpendicular to the plane when interband transitions are neglected [12]. In this case, β is related to the ratio of the area of the magnetic flux quantum to the unit cell in coordinate space. The second, directly related to the experiments described here, is the 1D motion of particles in

the presence of two superimposed periodic potentials, the main one of period λ_1 that determines the position of the discrete lattice points q_n and the perturbing one of period λ_2 ; in this case $\beta = \lambda_1/\lambda_2$. The connection between the latter problem and Eq. (1) is explicitly described in the next section and in Appendix A.

Expressing the hopping between nearest-neighbor sites of the main lattice in terms of the translation operator $\exp(-i\lambda_1\hat{p}/\hbar)$ (\hat{q} and \hat{p} are the usual position and momentum operators, respectively), one can transform Eq. (1) into the more symmetric form

$$\hat{H} = 2J \cos(2\pi\hat{p}/P) + W \cos(2\pi\hat{q}/Q), \quad (2)$$

where $P = 2\pi\hbar/\lambda_1$ and $Q = \lambda_2$. The classical analog of this Hamiltonian is obtained by replacing the operators by c numbers

$$\mathcal{H}(q, p) = 2J \cos(2\pi p/P) + W \cos(2\pi q/Q). \quad (3)$$

This classical Hamiltonian is periodic in both position and momentum. Therefore, its study can be restricted to a single cell of size (Q, P) . Note that $\mathcal{H}(q, p)$ contains, through the momentum scale factor $P = h/\lambda_1$, quantum Planck's constant. Its validity and applicability as well as the apparent paradox that it contains a quantum scale will be discussed.

$\mathcal{H}(q, p)$ defines a time-independent 1D problem that conserves the energy. It is thus an integrable system with Eq. (3) defining, for different values of the energy $E = \mathcal{H}(q, p)$, 1D curves in the phase-space plane (q, p) . The classical phase-space dynamics is sketched in Fig. 1 for different values of $\alpha = W/J$. For $\alpha = 0$ there is no potential and all trajectories are extended in space, a simple ballistic motion (e.g., the projection of the classical curves onto the q axis covers the entire interval $[0, Q]$, in contrast to localized orbits that cover only a fraction of it) and have constant momentum. For $\alpha \gg 1$

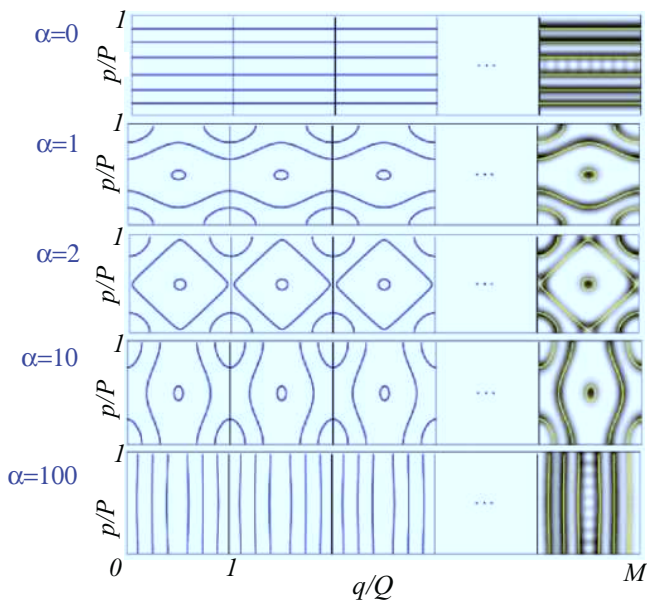


FIG. 1. (Color online) Phase-space trajectories of Hamiltonian (3) for different values of the parameter $\alpha = W/J$ solid lines. In the right-hand column, the Husimi representation of several eigenstates for $\beta = 1/51$ is superimposed on the classical trajectories (see text).

exactly the opposite happens; the potential part dominates, the kinetic energy becomes negligible, and trajectories are trapped or localized in space by the potential and delocalized in momentum. This latter behavior is a consequence of the boundedness of the kinetic term. In between, a crossover is observed with the presence of two separatrices that delimit three different types of trajectories. The first type are closed localized orbits that oscillate around $(q, p) = (Q/2, P/2)$. This is a standard clockwise oscillation around the minimum of $\cos(2\pi q/Q)$. The second type is also a closed localized oscillation, now around $(q, p) = (0, 0) \pmod{(Q, P)}$, which is a less standard counterclockwise oscillation around the maximum of $\cos(2\pi q/Q)$ due to a local negative mass. Finally, the third type, in between the separatrices, is an extended orbit in q for $\alpha < 2$ and p for $\alpha > 2$. At $\alpha = 2$ the two separatrices merge together. This is the critical value of the parameter α above which the potential part dominates over the kinetic one and all classical trajectories are localized in space by the potential barriers.

The quantum-mechanical motion is richer than the classical one as a result of the additional parameter $\beta = \lambda_1/\lambda_2 = 2\pi\hbar/QP$. Its presence in the quantum Hamiltonian is a consequence of the discrete nature of the motion in the q direction, defined by the position of the main lattice sites and the commensurability effects with respect to the secondary lattice. The quantum operator Eq. (2) commutes with the translation operators $\hat{T}_Q = \exp(-iQ\hat{p}/\hbar)$ and $\hat{T}_P = \exp(iP\hat{q}/\hbar)$, which translate by one unit cell in each phase-space direction. However, quantum dynamics simultaneously periodic in both directions, as in the classical one, are possible if and only if the translation operators also commute with each other. The most general condition enforces commutation by translations over a phase-space domain of dimensions (MQ, P) , where M is an arbitrary positive integer. It is easy to show [9] that the operators T_{MQ} and T_P commute if and only if β is a rational number

$$\frac{1}{\beta} = \frac{QP}{2\pi\hbar} = \frac{N}{M}, \quad (4)$$

where N is an arbitrary positive integer. Keeping in mind the old Weyl rule “one quantum state per phase-space volume h ,” the physical interpretation of this condition is clear: To be periodic in both directions, the extended phase-space cell (MQ, P) made of M units in the q direction should contain an integer number N of quantum states. This defines the torus (MQ, P) as the quantum phase space. An arbitrary quantum state now satisfies the generalized boundary conditions

$$\begin{aligned} T_{MQ}|\psi\rangle &= e^{i\theta_1}|\psi\rangle, \\ T_P|\psi\rangle &= e^{i\theta_2}|\psi\rangle, \end{aligned} \quad (5)$$

where $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ are good quantum numbers preserved by the dynamics (the Bloch phases). Hence the Hilbert space breaks down into N -dimensional subspaces parametrized by $\vec{\theta}$. \hat{H} is therefore a finite-dimensional periodic operator where the spectrum is absolutely continuous. The latter term consists of N Bloch bands $E_i(\vec{\theta})$, defined by

$$\hat{H}|\psi_i(\vec{\theta})\rangle = E_i(\vec{\theta})|\psi_i(\vec{\theta})\rangle \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (6)$$

where $|\psi_i(\vec{\theta})\rangle$ are the eigenvectors that satisfy Eq. (5). Strictly speaking, due to the periodicity all eigenstates are thus delocalized for any value of the parameter α .

Note that the semiclassical limit is obtained when $N \rightarrow \infty$, that is, when the number of quantum states is large (possibly with $M \rightarrow \infty$ but $M/N \rightarrow 0$). In this case the fraction of phase space occupied by one quantum state tends to zero and the quantum dynamics is described with increasing precision by the classical Hamiltonian, Eq. (3). The semiclassical limit is thus equivalent to the limit $\beta \rightarrow 0$ (or, more generally, due to the periodicity, to the limit β tending to an arbitrary integer from above). In practice, β plays the role of an effective Planck's constant. Since $\beta = \lambda_1/\lambda_2$, an appropriate choice for the period of the two superimposed periodic potentials allows to tune β and control whether the system is quantum or classical. This limit is thus different from the usual semiclassical limit, where one formally takes $\hbar \rightarrow 0$ or considers a high-energy regime. From this point of view, there is no contradiction in the fact that the classical Hamiltonian $\mathcal{H}(q, p)$ contains \hbar since the path toward the classical behavior described by that Hamiltonian is controlled by the two frequencies λ_1 and λ_2 . This emphasizes that the classical limit $\beta \rightarrow 0$ that we are considering has a more general character. It is one example among a wider class of semiclassical limits, sometimes generically called large- N limits, that are often encountered in physics (see, for instance, Ref. [13] and references therein). In our case, the classical limit does not correspond to the standard limit of a classical particle of kinetic energy $p^2/2m$ moving in the presence of two superimposed periodic potentials [cf. Eq. (10)]. Although purely classical, the structure of $\mathcal{H}(q, p)$ keeps information about some of the quantum mechanical processes associated to the original model, Eq. (1). The periodicity in the p direction arises from the discreteness of the lattice sites distant by λ_1 imposed by the tight-binding form of the dynamics related to a tunneling process. As mentioned earlier, the boundedness of the kinetic energy term has important consequences, in particular in the appearance of the unusual localized-in-space delocalized-in-momentum classical trajectories observed in the limit of a large α .

Now we turn to the case of irrational β , the quantum-mechanical behavior of which deserves special attention. Contrary to our previous discussion, in this case the phase space is not compact, the Bloch angles are not good quantum numbers, and the matrix \hat{H} is of infinite dimension. For any irrational value of β it can be shown [14] that the spectrum is a Cantor set (among which is the famous Hofstadter butterfly for $\alpha = 2$). In addition, the model displays a localization transition [1, 15]. For $\alpha < 2$, the spectrum is absolutely continuous and all states are extended. For $\alpha > 2$, the spectrum is pure point and all states are localized. Finally, at $\alpha = 2$ the spectrum is singular continuous with multifractal eigenstates [1].

The ideal situation concerning any physical experiment, the aim of which is to display the localization transition, is to implement an irrational β , typically the golden mean $(\sqrt{5} - 1)/2$. In practice, one can only approach an irrational as some rational approximation. It is thus of interest to analyze an irrational β as the limit of a sequence of rational numbers. The most efficient sequence (in terms of convergence) is known to be the continuous fraction expansion

$$\beta = \frac{1}{m_1 + \frac{1}{m_2 + \frac{1}{m_3 + \dots}}}. \quad (7)$$

This sequence of rational approximations $\beta_1 = 1/m_1$, $\beta_2 = m_2/(m_1 m_2 + 1)$, and so on generates a sequence of periodic systems that approximate the quasiperiodic one with increasing accuracy. In the lowest-order approximation $\beta_1 = 1/m_1$, only one unit cell is quantized ($M = 1$), with $N = m_1$ quantum states supported by this cell. For such a situation, the WKB method semiclassically allows us, in 1D, to construct the eigenstates $\psi_i(\vec{\theta})$ and eigenvalues $E_i(\vec{\theta})$ from the quantization of some specific classical trajectories in a one-to-one correspondence. The m_1 states are selected by the Bohr-Sommerfeld quantization rule [16]

$$S = \int_t pdq = \beta QP \left[i + \left(\frac{1}{2} \right) + w_1 \frac{\theta_1}{2\pi} + w_2 \frac{\theta_2}{2\pi} \right], \quad (8)$$

where $i = 0, \dots, m_1$, (w_1, w_2) are the winding numbers of the quantized classical trajectory t in the (q, p) directions, respectively, and $S = S(E)$ is the action of t . The Maslov index half applies only to trajectories with $(w_1, w_2) = (0, 0)$ (closed trajectories). The eigenvalues of states associated to $(0, 0)$ trajectories are thus, at this semiclassical level of approximation, independent of $\vec{\theta}$.

Equation (8) associates one quantum state to one classical trajectory of the elementary phase-space cell and defines the spectrum of energies $E_i(\vec{\theta})$. In this description, the associated quantum state $\psi_i(\vec{\theta})$ can be shown to strongly concentrate or localize around the corresponding quantized classical trajectory. To illustrate this point it is useful to display the eigenstates in the phase-space Husimi representation [9], defined in Appendix B. In this representation, each eigenstate $\psi_i(\vec{\theta})$ of energy $E_i(\vec{\theta})$ corresponds to a positive-definite phase-space function $W_i(q, p; \vec{\theta})$, which, in the semiclassical limit $1/\beta_1 = m_1 \rightarrow \infty$, behaves as [10]

$$W_i(q, p; \vec{\theta}) \propto \frac{1}{v(q, p)} \exp \left[-\frac{2}{m_1} \left(\frac{\mathcal{H}(q, p) - E_i(\vec{\theta})}{v(q, p)} \right)^2 \right], \quad (9)$$

where $v(q, p) = \sqrt{\dot{q}^2 + \dot{p}^2}$ is the phase-space velocity of the classical trajectory of energy E_i . The right-hand column of Fig. 1 superimposes on the classical trajectories the corresponding quantized eigenstates for $N = m_1 = 51$, $M = 1$, $\vec{\theta} = (0, 0)$, and different values of α . One can clearly see that, for a given α , the concentration over the corresponding classical trajectory as well as, for varying α , the transition from extended to localized states, which simply follow the classical crossover (e.g., localization by the potential barriers). For open trajectories (either in the q direction for $\alpha < 2$ or in p for $\alpha > 2$) the quantum state is supported by two symmetric and isoenergetic classical curves coupled by tunneling. This effect is observed at $\vec{\theta} = (0, 0)$ where the eigenstates are real. The quantum state combines both classical trajectories, each of which has a current but whose overall superimposed net current vanishes. As $\vec{\theta}$ is varied, the eigenstate becomes complex and can concentrate on one or the other of the classical trajectories.

At the second step of the rational approximation to an irrational β , $\beta \approx \beta_2 = m_2/(m_1 m_2 + 1)$, the quantum phase space is an extended torus of dimensions $(m_2 Q, P)$. This space now supports $N = m_1 m_2 + 1$ quantum states. With respect to the previous approximation $\beta \approx \beta_1 = 1/m_1$, the

size of the quantum cell and the number of states $N \approx m_1 m_2$ increases by a factor m_2 ; in contrast, the number of quantum states per unit of phase-space cell remains almost constant. The scheme repeats as one further increases the order of the continuous-fraction approximation. Along this process, the size of the extended phase-space cell increases in the q direction (thus tending toward a cylindrical geometry); the dimension of the corresponding Hilbert space also increases, while the effective Planck constant β , which measures the fraction of the elementary phase-space cell occupied by one quantum state remains approximately constant. At a given step of the approximation and a given $\vec{\theta}$, it can be shown from Eq. (8) that two types of quantum states exist classified according to the structure of the wave function in the extended phase space (MQ, P) . First, the delocalized ones, which are associated to classical orbits open in the q direction of the $(\pm 1, 0)$ type with a kinetic energy higher than the potential barriers (that exist only for $\alpha < 2$). Second, localized states associated to either closed orbits [of the $(0, 0)$ type] or to open orbits in the p direction [of the $(0, \pm 1)$ type], in other words, orbits that are trapped by the potential barriers. These states are typically localized over one (or several, when resonances occur) isoenergetic classical orbits of the extended phase space. Their width, controlled by β , remains almost constant along the continuous-fraction approximation. Thus, as the size of the extended torus increases in the q direction, the relative width of the localized states compared to MQ diminishes. Husimi plots of wave functions that confirm our general picture can be found in Ref. [17] for sequences of rational approximations of the golden mean.

III. RELATION TO EXPERIMENTS

In recent experiments [3], a cloud of noninteracting ultracold ^{39}K atoms created from a Bose-Einstein condensate is released in a bichromatic potential produced by superimposing two lasers of wavelengths λ_1 and λ_2 (and of corresponding wave numbers k_1 and k_2) in a standing-wave configuration. The dynamics is described by the following Hamiltonian

$$\hat{H}_B = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_1 \cos^2(k_1 x) + V_2 \cos^2(k_2 x), \quad (10)$$

where V_1 and V_2 denote the amplitude of each of the two laser beams and m is the mass of the atom. If the primary lattice (say, V_1) is deep enough, that is if the recoil energy $E_R = \hbar^2 k_1^2 / 2m$ is much lower than V_1 , one can approximate the motion in the primary lattice using a tunneling process between localized states of neighboring sites, each of which feels the presence of the superimposed additional periodic potential V_2 . The Hamiltonian can thus be reduced to the tight-binding form of Eq. (1) where $\beta = \lambda_1 / \lambda_2$. The effective parameters J and W in Eq. (1) are directly related to V_1 , V_2 , and E_R (see Appendix A).

Several different laser frequencies were used in the experiments. In Ref. [3] they realized the system described by the Hamiltonian (10) with $\lambda_1 = 1032$ nm and $\lambda_2 = 862$ nm, which yields $\lambda_1 / \lambda_2 = 516 / 431$ (431 is a prime number). By restricting to $0 < \beta \leq 1$, we have $\beta = 85 / 431 \simeq 0.1972$. Moreover, the typical amplitude of the primary lattice is ten times larger than the corresponding recoil energy, which makes

Eq. (1) a good approximation to the experiment. With the above values of λ_1, λ_2 , and β the quantum system under study is therefore periodic in both q and p directions (because β is rational), with $N = 431$ states accommodated in $M = 85$ elementary cells. This means that every 431 wells of the primary lattice the system repeats. The Hamiltonian (1) is thus a finite matrix of dimension $N = 431$ and the eigenvalues and eigenstates depend parametrically on the two phases $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$. It can be shown (see Ref. [9] and Appendix B) that the two phases are determined by the relative position of the two lattice sites. Though not directly measured in the previous experiments, the Bloch phases are fixed by the experimental conditions. To be specific, we fix them here to $\vec{\theta} = (0, 0)$. Coming back to β , its continuous-fraction decomposition gives two lower-order approximants, $\beta_1 = 1/5$ and $\beta_2 = 14/71$. The system is thus nearly periodic after five wells of the primary lattice. The approximation $\beta \sim \beta_1$ also means that approximately five quantum states are accommodated in one elementary phase-space cell (Q, P) . Moreover, the relatively low value of $\beta \approx 0.2$ indicates that the classical approximation of the dynamics given by Eq. (3) as well as the semiclassical picture developed in the previous section is a meaningful framework, as discussed in the following.

Figure 2 shows the Husimi function of several eigenstates of Eq. (1) represented in the quantum phase space (MQ, P) for the experimental conditions, namely $\beta = 85/431$, and different values of α , assuming $\vec{\theta} = (0, 0)$. One verifies

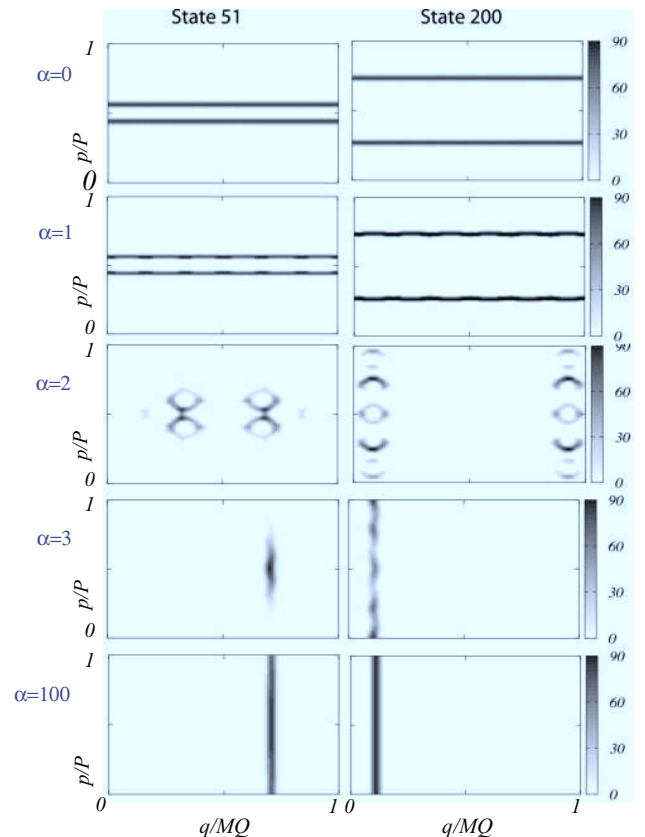


FIG. 2. (Color online) Husimi functions for $N = 431$ and $M = 516$ for two arbitrary quantum states as a function of α . Their evolution clearly illustrates the delocalized-localized crossover.

that the eigenstates follow, for different α 's, the general description given at the end of the last section. For $\alpha \ll 2$ the eigenstates are concentrated along the delocalized classical trajectories [mixing right and left-propagating orbits because $\vec{\theta} = (0, 0)$] while for $\alpha \gg 2$ the eigenstates are concentrated on localized trajectories that wind around in the p direction. In between, a crossover among these two limits is observed. This figure illustrates, under the experimental conditions, that the transition from delocalized to localized states as α increases may be interpreted in terms of classical dynamics and is therefore different in nature from the Anderson localization. Moreover, as already pointed out in the introduction, this behavior is generic and not restricted to the special set of parameters used in the experiment.

Experimentally, the transition was probed through the evolution of different values of α of an initial cloud of atoms released from the ground state of a confining magnetic trap. The initial state is thus a Gaussian wave packet centered around some initial point q_0 and contains zero average initial momentum with an extension of about ten main lattice sites. After letting the cloud expand for some time (750 ms), the final root-mean-square (RMS) width of the wave packet is measured. These results are reported in Fig. 3. To test our setting, we computed, using the eigenstates discussed earlier, the time evolution $|\phi(t)\rangle$ of such an initial state, given by

$$|\phi(t)\rangle = \sum_{i=0}^{N-1} \exp[-i E_i(\vec{\theta})t/\hbar] \bar{\psi}_i(z_0) |\psi_i(\vec{\theta})\rangle, \quad (11)$$

where, for the actual experiment, $N = 431$, $\bar{\psi}_i(z_0)$ is the coherent-state representation of the eigenstate i , where $z_0 = q_0/\sqrt{2}$ (cf. Appendix B), and the Bloch angles $\vec{\theta}$ are set to zero. In Fig. 3 the width averaged over the initial position computed from Eq. (11) (dashed-dot line) is compared to the experimental data. The agreement is quite good. Note that the transition takes place here for $\alpha \approx 2$, as predicted by theory, and not around $\alpha \approx 7$, as obtained in Ref. [3]. The difference is due to an improved estimate of the dependence of the effective parameters W and J upon V_1 , V_2 , and E_R (see Appendix A and Ref. [18]). Note also that the maximal experimental width observed after expansion of the order of 40 μm corresponds

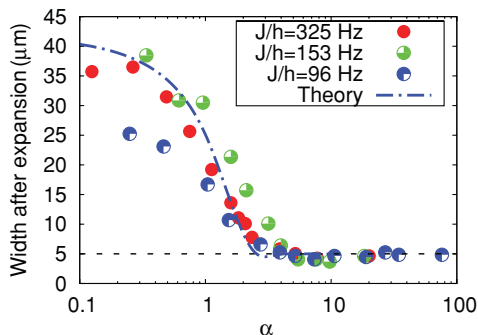


FIG. 3. (Color online) RMS width of a cloud of ^{39}K atoms after $t = 750$ ms of expansion in a (quasi)periodic potential characterized by $\beta = 85/431 = 0.1972, \dots$ as a function of α . The initial width of the cloud is $5 \mu\text{m}$, indicated by a horizontal dashed line. Dots represent the experimental results for different values of J/h (taken from Ref. [3]) and dashed-dots the theory (see text).

to ~ 80 main lattice sites, much smaller than the phase-space cell, which covers 431 main lattice sites.

IV. COMPARISON WITH THE ANDERSON MODEL

In the previous sections we stress the classical origin of the localization transition and the localized phase in bichromatic potentials. Let us be more explicit, in particular in the comparison with respect to the Anderson model of localization by emphasizing their differences and similarities (comparisons between the quantum motion in disordered and quasiperiodic potentials may also be found in Refs. [17,19,20]).

The original Anderson model of localization [21] with diagonal disorder is described, in 1D, by a Hamiltonian similar to Eq. (1). The difference is that the energy of site n , instead of being $\cos(2\pi\beta n)$, is now given by a random variable V_n having, for instance, a uniform distribution between -1 and 1 . Then W simply controls the amplitude of the random potential and WV_n has a uniform distribution between $-W$ and W .

If one wishes to follow a semiclassical analysis similar to the previous one but for the Anderson model, the first difficulty is to define appropriately the classical limit. The potential, as defined earlier, is not continuous and has no direct classical limit. One way to get around this difficulty is to smooth the previous random potential, for instance, by convoluting V_n with a Gaussian of width σ

$$V(q) = W \sum_n V_n \frac{e^{-(q-q_n)/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}, \quad (12)$$

where q_n denotes, as in the previous sections, the position of the sites of the discrete lattice separated by a distance λ_1 . Then, the classical limit of the Anderson model is described by the Hamiltonian

$$\mathcal{H}(q, p) = 2J \cos(2\pi p/P) + WV(q), \quad (13)$$

where $P = h/\lambda_1$. The classical phase-space trajectories of such a Hamiltonian are, qualitatively, not very different from those of the quasiperiodic potential in Eq. (3), in particular in the two extreme limits $\alpha \rightarrow 0$ and $\alpha \rightarrow \infty$ (see Fig. 4): They are given, again, by delocalized constant- p trajectories in the former limit where the kinetic part of the energy dominates over the potential and localized constant- q trajectories in the latter one, where the potential traps the orbits (we are using, as before, the parameter $\alpha = W/J$). The main difference is in the intermediate regime where, for the Anderson model, the classical trajectories are more irregularly shaped and a larger number of separatrices is observed. Thus, as in the quasiperiodic Hamiltonian, in the Anderson model a delocalized to localized crossover is observed classically as α increases.

As we saw in the previous sections, the quasiperiodic case qualitatively follows the classical behavior. For $\alpha < 2$ the kinetic part dominates, the classical trajectories lie above the potential barriers and are delocalized in space. In contrast, at $\alpha = 2$ the last delocalized classical trajectory disappears and all orbits are, for $\alpha > 2$, trapped by the potential barriers and thus are localized in space. Quantum mechanically, a crossover that simply follows this classical behavior is observed from delocalized states that dominate at $\alpha < 2$ to localized ones at

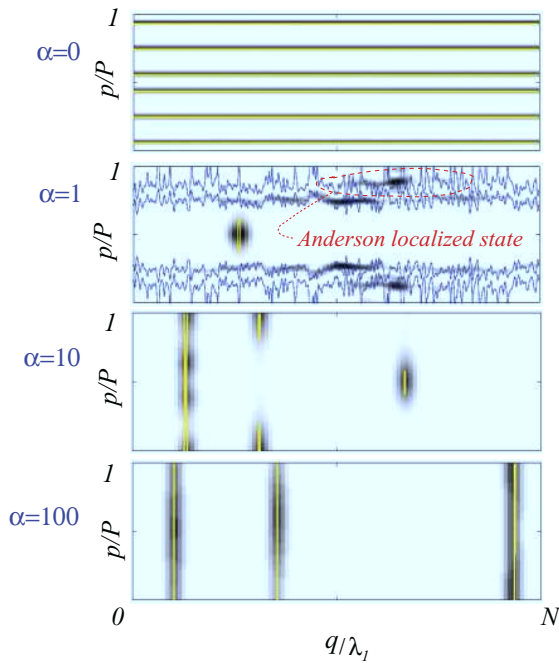


FIG. 4. (Color online) Husimi distributions (gray code) of several eigenstates and their corresponding classical orbits (solid lines) in phase space for the Anderson model with $N = 401$ and $\sigma = \lambda_1$. As α increases the classical model also exhibits a delocalized-localized crossover. Localized quantum eigenstates already exist for $\alpha < 2$ even if the corresponding classical orbits are delocalized in space as shown for $\alpha = 1$.

$\alpha > 2$ (cf. Fig. 3). This behavior contrasts with the Anderson model, where quantum states are localized for arbitrary values of $\alpha > 0$, in spite of having a qualitatively similar classical behavior. Figure 4 illustrates this point by showing several quantum states for different values of α . We numerically diagonalized the Anderson model on a finite chain of $N = 401$ sites with $\hat{\theta} = (0, 0)$ and obtained the classical phase-space orbits from Eq. (13) with $\sigma = \lambda_1$. For the sake of clarity, Fig. 4 does not show all the classical orbits at a given energy but only the ones directly associated to a quantum state. In the two limiting cases, namely $\alpha = 0$ and $\alpha \gg 1$ (here 100), the quantum states are associated to very simple classical orbits (i.e., fully delocalized and fully localized trajectories, respectively). However, at finite α the eigenstates are localized, even those where the energy corresponds to classical orbits above the potential barriers, as shown in Fig. 4 for $\alpha = 1$ (of course the length of the system should be longer than the corresponding localization length). This latter behavior is not observed in the quasiperiodic case.

Thus, the main difference between the quantum behavior of the two models is in the range $\alpha < 2$, where the Anderson model, in contrast to the classical behavior (orbits above the barriers), has localized states while the quasiperiodic model follows the behavior of the classical trajectories. For large values of α , the localization in the Anderson model has, as the quasiperiodic potential, a classical interpretation because the classical orbits are themselves localized (e.g., trapped by the potential barriers). In this respect, the nontrivial regime in the Anderson model is the nonclassical

localization observed for small values of α , an effect that is absent in the bichromatic potential. A particularly interesting way to stress this difference is to look at the effects of decoherence. It is well known that decoherence drives the system dynamics toward the classical motion by suppressing the interference effects [22]. In the regime $\alpha < 2$, decoherence will therefore destroy localization in the Anderson case leading to a classical diffusion, whereas it will fundamentally not affect the dynamics, aside from quantum corrections, in the quasiperiodic potential. This stresses the differences and similarities between the two models in their quantum and classical behavior.

V. CONCLUSION

In the present article we analyze, using semiclassical methods, the localization transition observed in quasiperiodic potentials. A general analysis of the corresponding Aubry-André Hamiltonian in terms of the commensurability properties of the parameter β is given. Particular attention is devoted to the interpretation of recent cold-atom experiments as well as to a comparison with the 1D Anderson model of localization.

Several extensions and generalizations of the dynamics considered here are of interest, with possible experimental realizations. They are motivated by the possibility of exploring more complex transport effects. Among them, we can mention the possibility of pulsating in time one of the two superimposed potentials, thus introducing chaotic motion in the dynamics described by the kicked Harper Hamiltonian [23]. Along similar lines of research concerning kicked systems, it is worthwhile to mention recent cold-atom experiments that explore the three-dimensional Anderson metal-insulator transition [24]. Another important issue is related to the effects of interactions on the localization properties of quasiperiodic as well as random potentials [20,25].

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by Grant Nos. ANR-05-Nano-008-02 and ANR-NT05-2-42103 and by the IFRAF Institute.

APPENDIX A: CORRECTION TO THE HAMILTONIAN PARAMETERS

In Ref. [3] they use the following notations. The original Hamiltonian describing the motion of cold atoms in a bichromatic potential is written

$$\hat{H}_B = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + s_1 E_{R_1} \cos^2(k_1 x) + s_2 E_{R_2} \cos^2(k_2 x), \quad (\text{A1})$$

where $k_i = 2\pi/\lambda_i$ and $E_{R_i} = \hbar^2 k_i^2 / 2m$, $i = 1, 2$, denote the wave numbers and the two recoil energies, respectively. Its reduction to a tight-binding form is expressed as

$$\hat{H} = J \sum_m |w_{m+1}\rangle \langle w_m| + |w_m\rangle \langle w_{m+1}| + W \sum_m \cos(2\pi\beta m) |w_m\rangle \langle w_m|, \quad (\text{A2})$$

where $\beta = \lambda_1/\lambda_2$ (not restricted to $[0, 1]$). The parameters in (A2), namely J and W , were calculated as follows

$$J = 1.43s_1^{0.98} \exp(-2.07\sqrt{s_1}), \quad (\text{A3})$$

$$W = \frac{s_2 E_{R_2}}{2E_{R_1}},$$

and thus

$$\alpha = \frac{W}{J} = \frac{\beta^2}{2.86} \frac{s_2}{s_1^{0.98}} \exp(2.07\sqrt{s_1}). \quad (\text{A4})$$

On the other hand, in Ref. [26] the mapping between the two Hamiltonians (A1) and (A2) was studied very carefully to analyze the presence of possible mobility edges due to deviations from the tight-binding approximation. Writing their formulas with the same set of notations as in Ref. [3] yields

$$\alpha = \frac{W}{J} = \frac{\sqrt{\pi}\beta^2}{8} \frac{s_2}{s_1^{3/4}} \exp(2\sqrt{s_1} - \beta^2/\sqrt{s_1}), \quad (\text{A5})$$

which turns out to present significant deviations with respect to Eq. (A4). Indeed, if one takes, for instance, $s_1 = 10$ and $\beta = 1.2$, which are of the order of magnitude of the experimental parameters in Ref. [3], there is about a factor 2 between the two expressions.

APPENDIX B: BARGMAN REPRESENTATION ON THE TORUS

Following Ref. [9], we present here the Bargman's representation on the extended torus. Classically, the two-dimensional toroidal phase space is a periodically repeated cell having sides (Q, P) in suitable coordinates (q, p) . The classical dynamics is invariant under translations by the elementary cell. Quantum mechanically, the states of the Hilbert space are required to be periodic functions (up to a phase) under translations defined on an extended torus of size (MQ, P) (M is an arbitrary, strictly positive integer)

$$T_{MQ}|\psi\rangle = e^{i\theta_1}|\psi\rangle, \quad (\text{B1})$$

$$T_P|\psi\rangle = e^{i\theta_2}|\psi\rangle,$$

where $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ are two Bloch phases ranging from 0 to 2π and

$$\hat{T}_Q = \exp(-iQ\hat{p}/\hbar), \quad (\text{B2})$$

$$\hat{T}_P = \exp(iP\hat{q}/\hbar).$$

To simultaneously satisfy Eq. (B1) T_Q and T_P must commute. This imposes that the area of the extended phase space, measured in units of Planck's constant \hbar , must be an integer

$$\frac{MQP}{2\pi\hbar} = N. \quad (\text{B3})$$

Thus, the Hilbert space is an N -dimensional space parametrized by $\vec{\theta}$ and denoted $\mathcal{H}_N(\vec{\theta})$. For a fixed area MQP the semiclassical limit $\hbar \rightarrow 0$ is equivalent to $N \rightarrow \infty$.

For each $\mathcal{H}_N(\vec{\theta})$ one can define normalizable basis states $|q_n, \vec{\theta}\rangle$ and $|p_m, \vec{\theta}\rangle$ in the q and p representations, respectively,

$$|q_n, \vec{\theta}\rangle = \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{-iv\theta_1} |q_n + vMQ\rangle, \quad n = 0, \dots, N-1,$$

$$|p_m, \vec{\theta}\rangle = \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{-iv\theta_2} |p_m + vP\rangle, \quad m = 0, \dots, N-1, \quad (\text{B4})$$

where

$$q_n = \frac{MQ}{N} \left(n + \frac{\theta_2}{2\pi} \right), \quad (\text{B5})$$

$$p_m = \frac{P}{N} \left(m - \frac{\theta_1}{2\pi} \right).$$

In Eq. (B4), $|q_n + vMQ\rangle$ and $|p_m + vP\rangle$ are the usual position and momentum eigenstates, respectively, that have to be distinguished with respect to their periodized counterpart, $|q_n, \theta\rangle$ and $|p_m, \theta\rangle$. The latter states satisfy the boundary conditions in Eq. (B1) and $\langle n, \theta | m, \theta \rangle = \exp(iq_n p_m / \hbar) / \sqrt{N}$. As Eq. (B5) shows, the arbitrariness in the boundary conditions may be viewed as an arbitrariness under shifts of order $1/N$ in the position of the discrete basis states $|n, \theta\rangle$ and $|m, \theta\rangle$ with respect to the intervals $q : [0, MQ]$ and $p : [0, P]$, respectively.

Diagonalization of the Harper Hamiltonian in, for instance, the $|q_n, \vec{\theta}\rangle$ basis gives the eigenstates $|\psi_i(\vec{\theta})\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \psi_{i,n}(\vec{\theta}) |q_n, \vec{\theta}\rangle$ and $i = 0, \dots, N-1$, characterized by N complex numbers that satisfy $\sum_{n=0}^{N-1} |\psi_{i,n}(\vec{\theta})|^2 = 1$. An alternative representation is in terms of coherent states [9], or Bargman representation, defined as

$$|\psi_i(z, \vec{\theta})\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \psi_{i,n}(\vec{\theta}) \langle z | q_n, \vec{\theta} \rangle, \quad (\text{B6})$$

where

$$\langle z | q_n, \vec{\theta} \rangle = (\pi\hbar)^{-1/4} \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \left[\frac{1}{2}(z^2 + q_n^2) - \sqrt{2}zq_n \right] \right\}$$

$$\times \theta_3 \left[-\frac{\theta_1}{2} - i\frac{\pi N}{P}(\sqrt{2}z - q_n) \middle| \frac{iMNQ}{P} \right]. \quad (\text{B7})$$

The complex variable $z = (q - ip)/\sqrt{2}$ denotes the central position of the coherent state and

$$\theta_3(v|\tau) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \exp(i\pi\tau v^2 + 2ivv), \quad (\text{B8})$$

is the Jacobi θ function [27].

Finally the Husimi representation $W_\psi(z)$ of an eigenstate corresponds to the normalized squared modulus of the coherent state representation

$$W_i(q, p) = \frac{|\psi_i(z, \vec{\theta})|^2}{\langle z | z \rangle} = e^{-|z|^2/\hbar} |\psi_i(z, \vec{\theta})|^2. \quad (\text{B9})$$

- [1] S. Aubry and G. André, *Ann. Isr. Phys. Soc.* **3**, 133 (1980).
- [2] J. Billy *et al.*, *Nature (London)* **453**, 891 (2008).
- [3] G. Roati *et al.*, *Nature* **453**, 895 (2008).
- [4] Y. Lahini *et al.*, e-print arXiv:0807.2845 (2008).
- [5] M. Ya. Azbel, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1954 (1979).
- [6] I. M. Suslov, *Sov. Phys. JETP* **56**, 612 (1982).
- [7] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 405 (1982).
- [8] M. Wilkinson, *Proc. R. Soc. London Ser. A* **391**, 305 (1984).
- [9] P. Leboeuf and A. Voros, *J. Phys. A* **23**, 1765 (1990).
- [10] J. Kurchan, P. Leboeuf, and M. Saraceno, *Phys. Rev. A* **40**, 6800 (1989).
- [11] P. G. Harper, *Proc. Phys. Soc. A* **68**, 874 (1955).
- [12] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid State Physics* (Harcourt, Orlando, 1976).
- [13] L. G. Yaffe, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 407 (1982).
- [14] A. Avila and S. Jitomirskaya, *Lecture Notes in Phys.* **690**, 5 (2006).
- [15] S. Jitomirskaya, *Ann. Math.* **150**, 1159 (1999).
- [16] F. Faure, *J. Phys. A* **33**, 531 (2000).
- [17] C. Aulbach *et al.*, *New J. Phys.* **6**, 70 (2004).
- [18] M. Modugno, *New J. Phys.* **11**, 033023 (2009).
- [19] S. Aubry and P. Quémenerais, in *Low-dimensional Electronic Properties of Molybdenum Bronzes and Oxides* (Kluwer Academic, Dordrecht/Boston/London, 1989) pp. 295–405.
- [20] G. Roux, T. Barthel, I. P. McCulloch, C. Kollath, U. Schöllwöck, and T. Giamarchi, *Phys. Rev. A* **78**, 023628 (2008).
- [21] P. W. Anderson, *Phys. Rev.* **109**, 1492 (1958).
- [22] In the context of localization, this effect has been experimentally observed for ultracold atoms in a kicked potential in H. Ammann, R. Gray, I. Shvachuck, and N. Christensen, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4111 (1998).
- [23] P. Leboeuf, J. Kurchan, M. Feingold, and D. P. Arovas, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3076 (1990).
- [24] J. Chabé, G. Lemarié, B. Grémaud, D. Delande, P. Szriftgiser, and J. C. Garreau, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 255702 (2008).
- [25] T. Paul, P. Schlagheck, P. Leboeuf, and N. Pavloff, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 210602 (2007); M. Albert, T. Paul, N. Pavloff, and P. Leboeuf, *ibid.* **100**, 250405 (2008); X. Deng, R. Citro, E. Orignac, and A. Minguzzi, *Eur. Phys. J. B* **68**, 435 (2008).
- [26] D. J. Boers, B. Goedeke, D. Hinrichs, and M. Holthaus, *Phys. Rev. A* **75**, 063404 (2007).
- [27] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis* (Cambridge University Press, Cambridge, England 1965), Chap 21.

Conclusion et perspectives

No man should escape our universities without knowing how little he knows.
J. Robert Oppenheimer.

Alles hat ein Ende, nur die Wurst hat zwei.
(*Tout a une fin. Seule la saucisse en a deux.*)
Proverbe Allemand.

Ainsi s'achève ce manuscrit, dont nous rappelons ici le fil conducteur et les principaux résultats. Cette thèse s'axe essentiellement autour de l'étude du transport cohérent d'un condensat de Bose-Einstein, en présence de désordre à une dimension. L'effet des interactions sur la localisation d'Anderson, décrites ici dans le cadre de l'approximation du champ moyen, constitue la question majeure à laquelle elle essaie de répondre.

Inspirés par des expériences récentes, nous avons étudié l'effet du désordre, ou d'une simple impureté, sur les oscillations dipolaires d'un condensat. L'amortissement observé expérimentalement est expliqué en terme d'émission d'excitations, de type solitons et phonons, qui emportent avec eux une partie de l'énergie associée au mouvement du centre de masse.

La phénoménologie étant la même dans le cas d'une seule impureté et d'un potentiel aléatoire, les effets de localisation ne dominent pas la physique et, s'ils existent, ne sont que très indirects. Celle-ci est résumée dans un diagramme de phase en fonction de l'amplitude du potentiel perturbateur et de la vitesse maximale du condensat (amplitude des oscillations). Trois régimes de transport sont possibles. À basse vitesse, le condensat est superfluide et les oscillations ne sont pas amorties. Seul un décalage de fréquence est observé. Celui-ci est décrit avec précision par un modèle analytique simple. Au-delà d'une vitesse critique, que nous avons déterminée dans le cas d'une seule impureté via le critère de Landau local, les oscillations commencent à être amorties et la dynamique du condensat devient très complexe. Enfin à très grande vitesse, les oscillations sont de nouveau non amorties et le fluide tend vers une dynamique où les interactions sont négligeables.

Ce système réalise alors le modèle de transport décrit au chapitre 2 où les états stationnaires sont remplacés par des états d'amortissement nul. Notons enfin qu'un tel schéma a été vérifié par des expériences récentes dans le groupe de P. Engels à Seattle [62] et de R. Hulet à Houston (non publié).

En guise de perspectives, on pourrait imaginer étudier des modes plus complexes, comme le mode quadrupolaire qui est également très facile à exciter expérimentalement.

Des prédictions plus quantitatives du taux d'amortissement seraient également les bienvenues.

D'autre part, l'analogie fermionique, ou encore le cas des bosons dans le régime fortement corrélé, pourraient également ouvrir de nouvelles pistes d'investigation. On peut citer à ce titre les travaux de Pezze, Hambrecht et Sanchez-Palencia [152], qui ont étudié l'amortissement des oscillations d'un gaz de fermions libres en présence de désordre.

Le travail précédent nous a ensuite emmené jusqu'à l'étude de la vitesse critique superfluide d'un condensat en présence de désordre. L'effet du confinement harmonique compliquant la situation, nous sommes revenus à un système plus simple, à savoir un laser à atomes. En étudiant deux cas limites de désordre, à savoir des potentiels corrélés lentement variables dans l'espace et un potentiel décorréolé constitué de pics delta, nous avons établi une connexion entre la vitesse critique et des problèmes de statistiques de valeurs extrêmes. Ceci nous a permis de calculer analytiquement la distribution complète de la vitesse critique, qui s'accorde quantitativement aux simulations numériques.

Cependant, des progrès sont encore à faire pour inclure les effets d'un piège harmonique. Dans ce cas, deux effets sont à prendre en compte : le désordre doit être à la fois maximal et la densité doit être non négligeable au point où la superfluidité est brisée. Ceci complique évidemment le lien avec la statistique du maximum d'un potentiel aléatoire.

D'autre part, une théorie interpolant entre les deux cas limites étudiés serait un progrès très important pour la théorie de la superfluidité. La difficulté se trouve dans la formulation du critère de superfluidité, qui nécessite une description rigoureuse de l'état superfluide avant de pouvoir étudier sa stabilité. L'opérateur de stabilité (2.52) devenant une matrice aléatoire, une approche possible serait un modèle simplifié de matrices aléatoires dont on chercherait à déterminer la valeur propre minimale en fonction du supercourant. L'intime connexion entre superfluidité et statistique de valeurs extrêmes serait alors renforcée.

Dans le même contexte, nous avons étudié les propriétés de localisation en présence d'interactions et de corrélations, généralisant ainsi les travaux précédents au sein du groupe [147]. Par l'étude des propriétés de transmission à travers le désordre, nous avons montré que la localisation d'Anderson peut exister en présence d'interactions répulsives. Nous avons calculé analytiquement et numériquement la longueur de localisation et la distribution complète de la transmission à l'aide d'une généralisation de l'équation DMPK.

L'effet des interactions sur la localisation est double. D'une part, la longueur de localisation est renormalisée par les interactions, mais ceci ne constitue qu'une correction relativement faible. D'autre part, et il s'agit là du point le plus important, la localisation n'existe que dans le régime supersonique stationnaire. Ainsi, augmenter la taille de la région désordonnée peut induire la destruction de la localisation via l'émission d'excitations (régime dépendant du temps).

En ce qui concerne les corrélations, elles induisent en général une augmentation importante de la longueur de localisation. Cette dépendance est prise en compte à travers une formule de type Antsygina-Pastur-Slyusarev généralisée en présence d'interactions.

Enfin, nous avons discuté les conditions optimales pour observer la localisation d'Anderson et les effets d'interactions dans ce type de système.

À une dimension, les perspectives commencent à se rarefier mais il est encore possible d'en dégager quelques unes. Du point de vue de la localisation, on pourrait bien sûr étudier des modèles de désordre avec des corrélations plus subtiles ou encore jouer avec la forme des interactions entre particules. D'autre part, des résultats numériques (sans interactions) nous suggèrent des violations de la théorie d'échelle à un paramètre au niveau de la distribution de la transmission. En effet, certains potentiels conduisent à des déviations importantes dans la queue de la distribution, mais ceci reste encore un problème ouvert qui doit être approfondi avec rigueur. Notons par ailleurs que ceci rejoint les remarques soulevées au chapitre 3, dans le cadre de la localisation à 2 dimensions.

Toujours à une dimension, les propriétés de transport dans le régime dépendant du temps reste encore mystérieuses à ce jour. Des résultats numériques [146] suggèrent une décroissance Ohmique de la transmission, mais l'interprétation de ce résultat reste encore

incomplète. Notons d'autre part que la validité même de l'équation de Gross-Pitaevskii est questionnable dans ce régime [63].

On pourrait également poser la question du devenir de notre scénario général en présence de corrélations fortes dans le cadre de la théorie des liquides de Luttinger par exemple.

Évidemment, le monde des dimensions supérieures reste encore un vaste domaine d'exploration. On peut citer les travaux de Hartung *et al* [84] sur la localisation faible d'un condensat, en présence d'interactions à deux dimensions.

Enfin, quelle que soit la dimension, le lien entre la dynamique d'un paquet d'ondes et les états stationnaires de diffusion pour l'équation de Gross-Pitaevskii, reste à ce jour un vaste programme.

La dernière contribution de ce manuscrit concerne la comparaison entre la localisation par un potentiel aléatoire et un potentiel bichromatique (modèle de Aubry-André-Harper). Nous avons montré que, dans le second cas, la localisation est de nature purement classique puisqu'elle existe déjà au niveau de la dynamique classique du système. La transition de localisation est alors interprétée semi-classiquement via la quantification des orbites classiques à la Bohr-Sommerfeld.

Une comparaison explicite est faite entre le modèle de Aubry-André et celui d'Anderson. On montre en particulier que, dans le premier cas, les états propres en représentation de Husimi, s'accrochent toujours aux orbites classiques (qu'elles soient localisées où délocalisées) alors que dans le second ceci n'est pas toujours vrai. En particulier, les orbites classiquement délocalisées du modèle d'Anderson ne sont que très partiellement recouvertes par les états propres. Ceux-ci sont alors localisés par des effets d'interférences, qui dépassent le cadre de la dynamique classique.

Arrive alors la question de la transition entre quasi-périodique et aléatoire. Quelles sont les conditions sur le "désordre" pour observer la localisation d'Anderson ? Le modèle de Aubry et André est l'un des modèles quasi-périodiques les plus simples puisqu'il ne contient que deux fréquences. Il serait alors intéressant de voir comment les effets d'interférences apparaissent à mesure que l'on approche un potentiel aléatoire en ajoutant des fréquences.

Dans ce travail, les effets d'interactions ont été complètement négligés. Il semble alors naturel de s'interroger sur leurs effets dans ce type de système. On peut citer à ce sujet les travaux récents de Roux *et al* [164] et de Deng *et al* [57], qui ont utilisé le DMRG pour analyser les propriétés de l'état fondamental du modèle.

Enfin, l'intégrabilité du modèle pourrait être brisée en pulsant le potentiel additionnel. Dans ce cas, la dynamique chaotique est plus riche et les propriétés de transport peuvent être analysées en termes de nombres topologiques appelés les indices de Chern [180, 111].

Annexe A

Fluctuations de la phase à une dimension

On se propose ici de montrer que dans le régime extrêmement dilué, la description de champ moyen s'écroule et que la cohérence phase elle-même est détruite. De manière plus quantitative on va montrer que la condition de dilution est donnée par $na < (a/a_\perp)^2$.

Commençons par réécrire l'opérateur champ $\hat{\Psi}$ en représentation phase-densité de la sorte $\hat{\Psi} = e^{i\hat{\phi} - i\mu t/\hbar} \sqrt{\hat{n}}$.

En injectant cette expression dans l'équation de Gross-Pitaevskii uni-dimensionnelle (1.78) on obtient le jeu de deux équations suivant

$$-\hbar \frac{\partial \hat{n}}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{m} \partial_x (\partial_x \hat{\phi} \hat{n}), \quad (\text{A.1})$$

$$-\hbar \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} (\partial_x \hat{\phi})^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial_x^2 \sqrt{\hat{n}}}{\sqrt{\hat{n}}} + g_{1D} \hat{n} - \mu. \quad (\text{A.2})$$

Dans le régime de faibles fluctuations de densité, on peut linéariser ces équations autour d'une solution stationnaire ($\nabla \hat{\phi} = 0$, $\hat{n} = n_\infty$) en posant $\hat{n} = n_\infty + \delta \hat{n}$. Il vient

$$-\hbar \frac{\partial \delta \hat{n} / \sqrt{n_\infty}}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{m} \partial_x^2 (2\sqrt{n_\infty} \hat{\phi}), \quad (\text{A.3})$$

$$-\hbar \frac{\partial (2\sqrt{n_\infty} \hat{\phi})}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + 2\mu \right) \frac{\delta \hat{n}}{\sqrt{n_\infty}}, \quad (\text{A.4})$$

avec $\mu = g_{1D} n_\infty$.

En décomposant les opérateurs de la sorte

$$\delta \hat{n}(x) = i\sqrt{n_\infty} \sum_i f_i^+ e^{-i\omega_i t} \hat{b}_i + cc, \quad (\text{A.5})$$

$$\hat{\phi}(x) = \frac{1}{2\sqrt{n_\infty}} \sum_i f_i^- e^{-i\omega_i t} \hat{b}_i + cc, \quad (\text{A.6})$$

on obtient

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 f_i^- = \epsilon_i f_i^+, \quad (\text{A.7})$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + 2\mu \right) f_i^+ = \epsilon_i f_i^-, \quad (\text{A.8})$$

où $\epsilon_i = \hbar\omega_i$.

Les solutions de ce système sont des ondes planes de la forme [151]

$$f^\pm(k) = C \left(\frac{\epsilon(k)}{E(k)} \right)^{\mp 1/2} e^{ikx}, \quad (\text{A.9})$$

avec C une constante de normalisation, $E(k) = \hbar^2 k^2 / 2m$ et $\epsilon(k) = \sqrt{E(k)[E(k) + 2\mu]}$. On peut alors en déduire que les fluctuations de densité sont bornées à température nulle [151]

$$\langle [\delta\hat{n}(x) - \delta\hat{n}(x')]^2 \rangle / n_\infty^2 < (\mu/k_B T_d)^{1/2}, \quad (\text{A.10})$$

où T_d est définie par $k_B T_d = \hbar^2 n_\infty^2 / m$. Si on considère une situation¹ où $\mu \ll k_B T_d$ les fluctuations de densité seront faibles et l'on pourra alors approximer l'opérateur champ par

$$\hat{\Psi} \simeq \sqrt{n_\infty} e^{i\hat{\phi}}. \quad (\text{A.11})$$

Ainsi à température nulle, le gaz possède les mêmes propriétés de densité qu'un condensat de Bose-Einstein, mais la phase n'est pas encore uniforme. En effet, la réduction des fluctuations de densité n'implique en rien la réduction des fluctuations de phase. Celles-ci, à température nulle, s'écrivent

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \langle [\hat{\phi}(x) - \hat{\phi}(0)]^2 \rangle = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{k_B T_d}} \ln \frac{x}{\xi}. \quad (\text{A.12})$$

Les fluctuations de phases divergent logarithmiquement rendant impossible la condensation de Bose-Einstein d'un système infini en dimension un. Il est toutefois possible de définir une échelle de longueur sur laquelle la phase est préservée. Cette longueur, définie par

$$\langle [\hat{\phi}(x) - \hat{\phi}(0)]^2 \rangle \sim 1, \quad (\text{A.13})$$

est appelée

$$L_\phi = \xi \exp \left\{ \pi \sqrt{\frac{k_B T_d}{\mu}} \right\}, \quad (\text{A.14})$$

longueur de cohérence de phase. Dans le régime $\mu \ll k_B T_d$, c'est à dire $L_\phi \gg \xi$, les fluctuations de phases sont négligeables et il est alors possible de parler de condensat² et de le décrire par l'équation de Gross-Pitaevskii. Cette condition de cohérence peut être réécrite sous la forme

$$n_\infty a \gg \left(\frac{a}{a_\perp} \right)^2, \quad (\text{A.15})$$

soit la condition de dilution annoncée au préalable.

Notons par ailleurs que ce régime où la cohérence de phase est brisée correspond également à une régime d'interactions très fortes. Ceci se voit facilement en comparant les ordres de grandeurs des énergies cinétiques

¹Avec des grandeurs expérimentales typiques $n_\infty = 2 \cdot 10^7$ atomes/m et $m = 3 \cdot 10^{-26}$ kg alors $T_d \sim 8.4 \cdot 10^{-6}$ K alors que par exemple dans les expériences le potentiel chimique est de l'ordre du kHz ce qui donne en unité de température $\sim 5 \cdot 10^{-8}$ K.

²Dans le cas où cette condition n'est pas respectée on parle de quasi-condensat.

$$E_c \sim -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{d^2} \sim -\frac{\hbar^2 n^2}{2m}, \quad (\text{A.16})$$

et d'interaction

$$E_{int} = g_{1D} n. \quad (\text{A.17})$$

En effet leur rapport

$$\frac{E_c}{E_{int}} \sim n \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow 0. \quad (\text{A.18})$$

De ce fait, le gaz de Bose à une dimension, est plus interagissant à basse densité qu'à haute densité.

Annexe B

Équations hydrodynamiques dans un piège harmonique très anisotrope

On montre ici comment obtenir les équations hydrodynamiques effectives à une dimension à partir des équations hydrodynamiques à trois dimensions. Dans l'esprit du travail de Stringari [171], on moyenne l'équation 3D sur les degrés de liberté transverses puis on cherche des solutions sous forme de polynômes orthogonaux et ceci dans les deux régimes unidimensionnels.

Considérons alors un potentiel de confinement harmonique, à symétrie cylindrique, très anisotrope ($\lambda \gg 1$)

$$U(x, \vec{r}_\perp) = \frac{m\omega^2}{2} \left(x^2 + \frac{r_\perp^2}{\lambda^2} \right) \quad (\text{B.1})$$

L'équation à résoudre est en principe (1.45) mais plusieurs approximations sont possibles. Tout d'abord on gèle la dynamique transverse sur laquelle on va moyenner l'équation. Mais attention, cette procédure est subtile et dépend du régime unidimensionnel concerné. D'autre part, comme dans la plupart des expériences, on se place dans le régime Thomas-Fermi dans la direction longitudinale, ce qui permet de se débarrasser du terme de pression quantique. Enfin, on se contente de la version linéarisée des équations afin de chercher les modes propres comme de faibles perturbations de densité du profil Thomas-Fermi.

B.1 Régime Thomas-Fermi transverse

Ce régime est celui considéré dans l'article de Stringari [171]. Dans ce cas, on peut négliger la pression quantique dans les trois directions spatiales et le profil d'équilibre est donné par

$$gn_{TF}(x, \vec{r}_\perp) = \mu - U(x, \vec{r}_\perp), \quad (\text{B.2})$$

qui a donc pour extension longitudinale $X = \sqrt{2\mu/m\omega^2}$ et transverse $R_\perp(x) = \lambda\sqrt{X^2 - x^2}$. Cette dépendance en x de R_\perp est ici fondamentale et constitue une différence majeure avec le cas du champ moyen 1D que l'on discutera dans la section suivante.

En linéarisant (1.45), comme expliqué dans le chapitre 1, autour de ce profil d'équilibre et en cherchant les solutions sous la forme $n(t, \vec{r}) = n_{TF}(x, \vec{r}_\perp) + e^{-i\Omega t} \delta n(\vec{r})$ on obtient

$$-\Omega^2 \delta n = \partial_x [c^2(x, \vec{r}_\perp) \partial_x \delta n] + \nabla_\perp [c^2(x, \vec{r}_\perp) \nabla_\perp \delta n], \quad (\text{B.3})$$

où

$$c^2(x, \vec{r}_\perp) = \frac{\omega^2}{2} (X^2 - x^2 - \frac{r_\perp^2}{\lambda^2}). \quad (\text{B.4})$$

On suppose maintenant que $\delta n(\vec{r})$ ne dépend que de x et on moyenne sur les degrés de liberté transverse en intégrant de la sorte

$$\int_0^{R_\perp(x)} r_\perp dr_\perp (\dots). \quad (\text{B.5})$$

Notons ici l'importance de la dépendance de R_\perp en x qui apporte une contribution non triviale, après intégration. Physiquement cela correspond au fait que comme la densité transverse varie avec x , la contribution moyenne change aussi. Finalement on obtient

$$-\Omega^2 \delta n(x) = -\omega^2 x \partial_x \delta n(x) + \frac{\omega^2}{4} (X^2 - x^2) \partial_x^2 \delta n(x) \quad (\text{B.6})$$

où tous les efforts sont finalement cachés dans une facteur 1/4 au lieu de 1/2 si on avait pris naïvement l'équation hydrodynamique à une dimension.

Cette équation peut enfin être résolue à l'aide d'un développement en série de la forme $\delta n = \sum_n a_n x^n$. La série n'étant pas convergente cela impose de la tronquer et conduit au spectre quantifié

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2}{4} n(n+3), \quad (\text{B.7})$$

avec n entier supérieur ou égal à 1.

Le mode d'oscillation dipolaire est donné par $n = 1$. Sa fréquence est égale à ω , la fréquence du piège transverse, conformément au théorème de Khon, et $\delta n_1 \sim x$.

Notons enfin que les solutions sont orthogonales entre elles à condition d'intégrer sur le condensat total. On a donc

$$\int_{-X}^X dx \int_0^{R_\perp(x)} r_\perp dr_\perp \delta n_i(x) \delta n_j(x) \sim \int_{-X}^X (X^2 - x^2) \delta n_i(x) \delta n_j(x) \sim \delta_{ij}. \quad (\text{B.8})$$

B.2 Régime de champ moyen 1D

Ce régime est à la fois plus simple et plus subtile à traiter. Tout d'abord il n'est plus possible ici de négliger la pression quantique dans les directions transverse. Cependant, le condensat reste dans l'état fondamental du piège dans ces directions et sa largeur ne dépend plus de la coordonnée longitudinale. L'équation à considérer n'est alors que la version unidimensionnelle naïve de (1.45). Une fois linéarisée ce la donne

$$-\Omega^2 \delta n(x) = -\omega^2 x \partial_x \delta n(x) + \frac{\omega^2}{2} (X^2 - x^2) \partial_x^2 \delta n(x), \quad (\text{B.9})$$

puisque l'intégration sur \vec{r}_\perp n'apporte aucune contribution subtile (du fait que la largeur ne dépend pas de x). Cette équation peut être résolue comme précédemment et conduit au spectre

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2}{2} n(n+1). \quad (\text{B.10})$$

Encore une fois, le mode dipolaire satisfait le théorème de Khon mais les fréquences supérieures sont différentes du cas Thomas-Fermi transverse. D'autre part la relation d'orthogonalité se simplifie en $\int_{-X}^X \delta n_i(x) \delta n_j(x) \sim \delta_{ij}$.

Annexe C

Formule de Landauer

Dans le cas où la cohérence de phase est préservée à l'échelle de l'échantillon, l'approche de Drude n'est plus valable et les propriétés de transport doivent être reconsidérées. En particulier, les effets d'interférences induisent un comportement non local et la conductivité locale n'est plus la grandeur adéquate pour décrire le système. En 1957, Rolf Landauer a proposé une approche du transport mésoscopique [108] analogue à celle de la transmission d'une onde à travers un guide. La conductance G , mesure globale du transport, est alors proportionnelle à la probabilité de transmission d'une particule à travers ce guide.

Comme les échantillons considérés sont généralement des fils, leur longueur est bien plus grande que les deux autres dimensions. Par conséquent, la fonction d'onde du porteur de courant peut en principe être décomposée en un produit de la fonction longitudinale (onde progressive) par la fonction transverse (état lié du guide). En général, on peut négliger cette dernière, ou bien l'éliminer en intégrant sur les dimensions transverses et se ramener ainsi à un formalisme à une dimension. La section du fil W détermine alors le nombre de modes transverses, que l'on appelle des canaux de transmission, qui est de l'ordre de la surface W traversée, divisée par la longueur d'onde du porteur au carré ($2W/\lambda^2$ pour des électrons dû au spin $1/2$).

Le fil est connecté de part et d'autre à deux réservoirs maintenus chacun à un potentiel chimique, par exemple μ_L et μ_R . Si on veut qu'un courant circule dans le conducteur, il faut alors appliquer une différence de potentiel entre les deux réservoirs $\mu_L - \mu_R = eV$. Si un courant circule, le fil se retrouve alors dans une situation hors de l'équilibre. En toute rigueur, il serait alors nécessaire d'appliquer la thermodynamique hors d'équilibre mais si la tension n'est pas trop élevée la théorie de la réponse linéaire permet d'appliquer le formalisme d'équilibre.

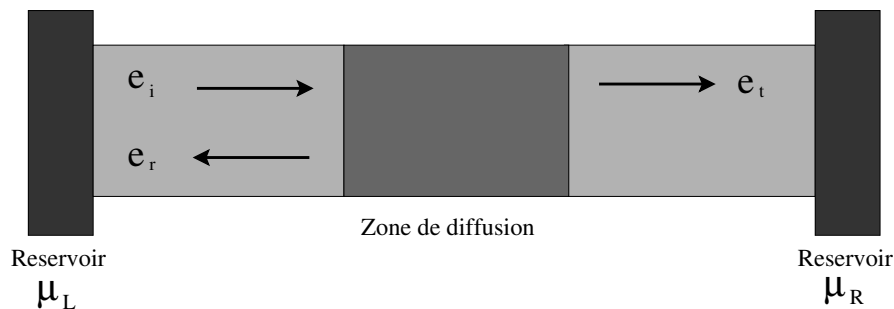


FIG. C.1 – Fil quantique relié à deux réservoirs comportant une zone de diffusion. Un électron incident e_i a une probabilité T d'être transmis et une probabilité R d'être réfléchi.

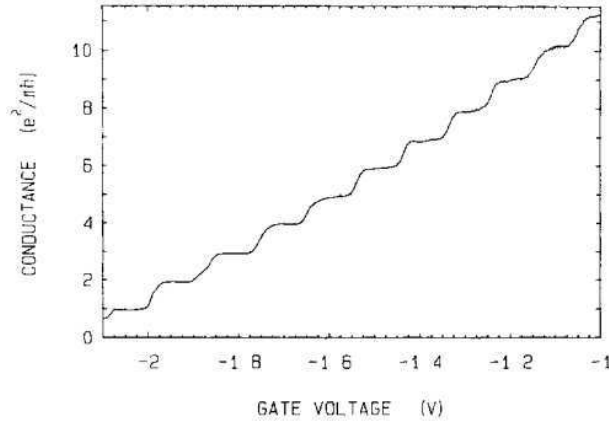


FIG. C.2 – Conductance d’un point quantique en fonction de la tension de grille appliquée. L’existence des paliers de conductance est reliée à l’apparition de nouveaux canaux de transmission. Figure extraite de [187].

Au milieu du fil peut se trouver une zone de diffusion (potentiel, constriction, jonction entre métaux, etc...). Une onde incidente est alors en partie réfléchi et en partie transmise. Chaque conducteur de part et d’autre de la zone de diffusion s’appelle un terminal. Ce qui fait la force de l’approche de Landauer c’est qu’il n’est pas réellement nécessaire de connaître les détails de ce qui se passe dans cette zone de diffusion. Celle-ci se comporte comme une boîte noire, simplement décrite par une matrice S de diffusion, qui relie les états incidents aux états réfléchis et transmis. Dans le cas d’un simple fil (donc deux terminaux) à un seul canal, on recense deux états incidents et deux états réfléchis et la matrice S n’est donc qu’une matrice 2 par 2. Mais on peut également imaginer un ensemble de N conducteurs reliés chacun à un réservoir et connectés entre eux au niveau de la zone de diffusion. Le système est alors décrit par une matrice S de dimension N . Ce formalisme permet alors de calculer toutes les quantités caractéristiques du fil comme le courant, la conductance ou encore le bruit.

Dans le cas d’électrons se propageant dans un conducteur à N canaux soumis à une faible différence de potentiel, la conductance moyenne est donnée par la formule de Landauer [53, 34]

$$G = \frac{2e^2}{h} \sum_{\alpha=1}^N T_{\alpha}, \quad (\text{C.1})$$

où T_{α} est la probabilité de transmission d’un mode α ($T_{\alpha} = \sum_{\rho} T_{\alpha\rho}$ où α et ρ désignent un mode entrant et un mode transmis respectivement) et $2e^2/h$ est appelé le quantum de conductance.

Une conséquence directe de cette formule est la quantification de la conductance. En effet si on imagine un conducteur parfait, de sorte que tous les coefficients de transmission sont proches de 1 alors la conductance totale est un multiple du quantum de conductance. Ceci a été observé expérimentalement [187] sur un échantillon dont le nombre de canaux de transmission est contrôlé par une tension de grille (figure C).

Dans un échantillon macroscopique, la conductance est donnée par la formule $G = \sigma W/L$, où σ est la conductivité. Ainsi on s’attendrait à ce qu’à mesure que L tende vers zéro, la résistance tende aussi vers zéro. D’autre par il semble raisonnable de penser qu’un conducteur ayant une transmission unité conduise à une résistance nulle. Et pourtant ce n’est pas ce que nous dit la formule de Landauer (C.1) qui prédit une résistance de l’ordre

du quantum de résistance, à savoir environ $13 k\Omega$ pour un conducteur monomode. Il est alors légitime de se demander d'où vient cette résistance gigantesque. C'est en fait la présence des réservoirs qui en est à l'origine, à cause du raccordement entre les modes du fil et ceux des réservoirs.

Par ailleurs, on peut décomposer la résistance de la sorte (pour un conducteur monomode)

$$G^{-1} = \frac{h}{2e^2} \frac{1}{T} = \frac{h}{2e^2} + \frac{h}{2e^2} \frac{1-T}{T} = G_C^{-1} + G_I^{-1}. \quad (\text{C.2})$$

La résistance totale est donc la somme d'une résistance G_C^{-1} de contact et d'une résistance intrinsèque à l'échantillon G_I^{-1} . La résistance de contact a une valeur très grande d'environ $13 k\Omega$ alors que la résistance intrinsèque s'annule effectivement si la probabilité de transmission tend vers 1. Si on raisonne à nouveau en termes de conductance, la formule précédente nous donne

$$\frac{2e^2}{h} \frac{T}{R}. \quad (\text{C.3})$$

Ce paradoxe, à savoir quelle est la bonne formule de Landauer, n'est en fait qu'apparent et dépend de la mesure effectuée. Si la résistance est mesurée par des sondes disposées sur les réservoirs (mesure à deux points) alors la formule (C.1) est la plus pertinente tandis que si le courant est imposé par les réservoirs et la mesure faite au sein de l'échantillon (mesure à quatre points) c'est la formule (C.3) qui l'est. Ce point est particulièrement délicat et le lecteur pourra se reporter à [90, 53, 39], par exemple, pour une discussion plus détaillée.

Enfin, la formule de Landauer décrit correctement le transport à l'échelle de la longueur de cohérence de phase en incorporant correctement les effets ondulatoires de la mécanique quantique. Cela dit, la loi d'Ohm règne en maître à l'échelle macroscopique et il est alors naturel de se demander comment reconcilier les deux approches. Ceci se fait justement en assemblant en série des conducteurs n'ayant aucune relation de phase. On montre ainsi [53] que la transmission évolue de la sorte

$$T = \frac{L_0}{L + L_0}, \quad (\text{C.4})$$

où L_0 est une grandeur microscopique caractéristique, de l'ordre du libre parcours moyen. D'autre part, le fil est suffisamment large pour que l'on puisse négliger la quantification du nombre de canaux alors donné par $2W/\lambda^2$. En rassemblant les morceaux il vient

$$G \sim \frac{W}{L + L_0} \quad \Rightarrow \quad G^{-1} \sim \frac{L_0}{W} + \frac{L}{W}, \quad (\text{C.5})$$

le coefficient de proportionnalité définissant ainsi la conductivité. Cette loi se décompose en une résistance de contact, qui devient négligeable dans la limite macroscopique ($L \gg L_0$) et une résistance identique à la loi d'Ohm.

Annexe D

Méthode WKB

L'équation de Schrödinger n'admet de solutions analytiques que dans de très rares cas. Il est bien sûr possible de la résoudre numériquement, même si cette résolution exige souvent des calculateurs très puissants. Il existe également des méthodes approchées de résolution de cette équation comme la *méthode semi-classique WKB* [106], du nom des physiciens Wentzel, Kramers et Brillouin. Celle-ci devient intéressante lorsque les longueurs d'ondes de De-Broglie des particules sont petites devant les dimensions caractéristiques du problème.

D.1 Lien avec l'équation de Hamilton-Jacobi

L'idée essentielle de cette technique est d'introduire l'ansatz $\psi(\vec{x}, t) = e^{iS(\vec{x}, t)/\hbar}$ dans l'équation de Schrödinger et d'écrire $S(\vec{x}, t)$ sous forme d'un développement formel en puissances de \hbar . La limite classique est ainsi prise en considérant $S(\vec{x}, t) \gg \hbar$ soit formellement $\hbar \rightarrow 0$.

L'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{x}) \right] \psi(\vec{x}, t), \quad (\text{D.1})$$

conduit à

$$-\frac{\partial S}{\partial t} \psi = \left[-\frac{1}{2m} (\vec{\nabla} S)^2 - \frac{i\hbar}{2m} (\vec{\nabla} S^2) + V \right] \psi, \quad (\text{D.2})$$

soit quand $\psi \neq 0$ et $\hbar \rightarrow 0$

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{2m} (\vec{\nabla} S)^2 + V, \quad (\text{D.3})$$

qui n'est autre que l'équation de Hamilton-Jacobi de la mécanique classique. Celle-ci gouverne l'action d'une particule, vue comme une fonction du point d'arrivée d'une trajectoire physique.

L'ordre zéro de l'approximation WKB semble dire que l'action classique est la phase de la fonction d'onde semi-classique¹. Cela dit pour conclure sur le comportement classique de la particule il faut former le paquet d'onde et regarder son évolution. Pour simplifier la discussion regardons le cas d'un hamiltonien indépendant du temps tel que :

$$S(\vec{x}, t) = \int \vec{p} \cdot d\vec{x} - H(\vec{x}, \vec{p}) dt = \tilde{S}(\vec{x}, E) - Et, \quad (\text{D.4})$$

¹C'est entre autres ce qui a conduit R.P. Feynman à associer la mesure $e^{iS/\hbar}$ à chaque chemin possible reliant deux points de l'espace-temps pour une particule dans sa formulation de la mécanique quantique par l'intégrale de chemins.

dont la transformation de Legendre inverse donne l'équation implicite sur la position \vec{x} de la particule classique au cours du temps

$$t = \frac{\partial \tilde{S}(\vec{x}, E)}{\partial E}. \quad (\text{D.5})$$

Pour former le paquet d'onde il faut regrouper les ondes d'énergies voisines :

$$\psi(\vec{x}, t) = \int dE g(E) e^{i(\tilde{S}(\vec{x}, E) - Et)/\hbar}. \quad (\text{D.6})$$

Maintenant on se demande où se trouve le paquet d'onde dans l'espace. La moyenne sur E provoque de fortes oscillations de phase à cause de $\hbar \rightarrow 0$ et donc de fortes interférences destructives. Seul le terme de phase stationnaire par rapport à E survit à cette limite c'est à dire celui tel que

$$\frac{\partial}{\partial E} (\tilde{S}(\vec{x}, E) - Et) = \frac{\partial \tilde{S}(\vec{x}, E)}{\partial E} - t = 0, \quad (\text{D.7})$$

qui n'est autre que l'équation de la trajectoire classique. Ainsi, le paquet d'onde suit la dynamique classique et l'approximation WKB donne bien la transition entre la mécanique quantique et la mécanique classique. En poussant le développement en \hbar à des ordres de plus en plus élevés on intègre de plus en plus la nature quantique du système.

D.2 Développement en \hbar et validité de l'approximation

Dans ce qui suit on ne considère que le problème d'une particule à une dimension. L'équation de Schrödinger donne

$$\frac{1}{2m} S'^2 - \frac{i\hbar}{2m} S'' = E - V(x). \quad (\text{D.8})$$

On pose le développement suivant

$$S = S_0 + \hbar S_1 + \hbar^2 S_2 + \dots \quad (\text{D.9})$$

• Ordre 0

Il est facile d'obtenir

$$S_0 = \pm \int \sqrt{2m[E - V(x)]} dx = \int p dx = \text{action}, \quad (\text{D.10})$$

ce qui suppose de négliger le terme en \hbar devant les autres, soit $\hbar |S''/S'^2| \ll 1$ ou $|\frac{d}{dx} (\frac{\hbar}{S'})| \ll 1$. En introduisant $\lambda = h/p = h/S'$ ceci s'écrit

$$\left| \frac{d\lambda}{dx} \right| \ll 1 \quad \text{ou encore} \quad \frac{m\hbar|F|}{p^3} \ll 1 \quad \left(F = -\frac{dV}{dx} \right) \quad (\text{D.11})$$

La condition de quasi-classisme est donc que la longueur d'onde de la particule varie peu sur des distances équivalentes à la longueur d'onde elle-même. Sous l'autre forme on voit que l'approximation ne s'applique pas quand l'impulsion devient faible et en particulier au voisinage des points de rebroussements ($E = V(x)$). Ceci constitue le défaut majeur de cette méthode, typique des théories de perturbations singulières² [89].

• Ordre 1

²On pourrait penser que ce défaut vient du développement en perturbations et qu'il s'atténue avec l'ordre du développement mais en fait c'est de pire en pire.

En intégrant à l'ordre 1 on trouve

$$S_1 = \frac{i}{2} \ln p, \quad (\text{D.12})$$

soit pour la fonction d'onde

$$\psi = \frac{c_1}{\sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \int p dx} + \frac{c_2}{\sqrt{p}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int p dx}. \quad (\text{D.13})$$

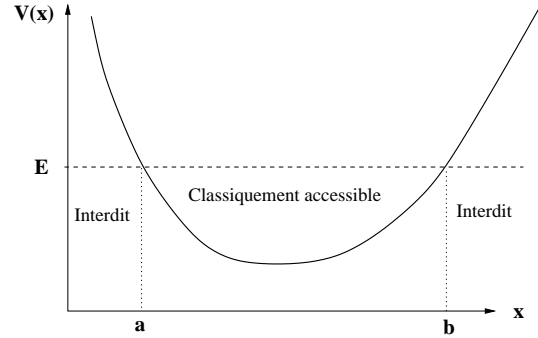
Aux ordres suivants on trouve alternativement des corrections à la phase et au module de la fonction d'onde mais en général il n'est pas utile d'aller plus loin.

La présence du préfacteur $1/\sqrt{p}$ a une interprétation classique simple car la probabilité de présence ($|\psi|^2 dx$) est inverse à la vitesse de la particule tout comme l'indique l'intuition classique.

D.3 Fonctions d'onde WKB

Il est à noter que la fonction d'onde va être différente dans une région classiquement permise que classiquement interdite. Dans le cas permis on a une superposition de 2 fonctions exponentielles complexes qui conduit à une fonction oscillante. Dans une région interdite on a 2 exponentielles réelles qui conduisent en général à une onde évanescence.

Le problème est maintenant de raccorder les deux types de solutions, d'autant qu'à la limite entre les deux se trouve le point de rebroussement où l'approximation WKB diverge. Il existe plusieurs types de méthodes pour résoudre le problème en particulier on peut utiliser une approximation linéaire du potentiel au voisinage de ce point et raccorder les solutions avec la solution exacte de ce problème en terme de fonctions d'Airy, ou encore utiliser l'analyticité des fonctions d'ondes et les raccorder dans le plan complexe [106]. Le raccordement de ces solutions nécessite en général la connaissance du problème particulier, c'est pourquoi nous renvoyons le lecteur vers d'autres références ([106] par exemple) pour plus de détails.



Dans le cas d'un puits de potentiel avec deux points de rebroussement (figure ci-dessus) on a deux conditions de raccordement (une à chaque point). Ceci conduit à 2 expressions de la fonction d'onde dans la zone classiquement accessible

$$\text{à droite de } a : \quad \psi = \frac{c}{\sqrt{p}} \sin \left(\frac{1}{\hbar} \int_a^x p dx + \frac{\pi}{4} \right), \quad (\text{D.14})$$

$$\text{à gauche de } b : \quad \psi = \frac{c'}{\sqrt{p}} \sin \left(\frac{1}{\hbar} \int_x^b p dx + \frac{\pi}{4} \right).$$

Et ainsi, pour que ces deux fonctions s'identifient dans toute la région, la somme de leurs phases (qui est une constante) doit être un multiple de π

$$\frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx + \frac{\pi}{2} = (n+1)\pi \quad \text{et} \quad c = (-1)^n c'. \quad (\text{D.15})$$

Ce qui donne la *condition de quantification semi-classique de Bohr-Sommerfeld* :

$$\oint p dx = 2\pi\hbar \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (\text{D.16})$$

où n s'interprète comme le nombre de noeuds de la fonction d'onde (à 1D). Cette formule est en générale utilisable pour les états excités de n grand.

On peut normaliser la fonction d'onde en intégrant son module au carré entre a et b en négligeant la contribution exponentiellement décroissante dans la zone classiquement interdite. De plus, l'argument du sinus variant rapidement on peut remplacer le carré du sinus par sa valeur moyenne, il vient

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi v}} \sin \left(\frac{1}{\hbar} \int_a^x p dx + \frac{\pi}{4} \right), \quad \omega = \frac{2\pi}{m \oint \frac{dx}{p}}. \quad (\text{D.17})$$

On obtient de même dans la zone classiquement interdite

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi v}} \exp \left(-\frac{1}{\hbar} \int_x^a |p| dx \right). \quad (\text{D.18})$$

Annexe E

Méthodes numériques

Dans cette annexe, nous décrivons la procédure d'intégration numérique de l'équation de Gross-Pitaevskii dépendante du temps. On considère l'équation suivante (on pose $\hbar = 1$, $m = 1$)

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = H(x, t) \psi(x, t), \quad (\text{E.1})$$

avec le hamiltonien effectif

$$H(x, t) \equiv -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) + g|\psi(x, t)|^2, \quad (\text{E.2})$$

que l'on cherche à intégrer en partant d'un état initial du condensat $\psi(x, t_0)$. Pour calculer l'évolution temporelle de $\psi(x, t)$ à $t > t_0$, on divise l'intervalle de temps $t - t_0$ en n pas $\Delta t = (t - t_0)/n$, et on utilise un schéma implicite de type Crank-Nicholson [159]. L'opérateur d'évolution effectif \mathcal{U} , pour une étape d'intégration temporelle Δt , est alors donné par [11]

$$\mathcal{U}(t + \Delta t, t) \equiv \frac{1}{1 + \frac{i}{2} H(x, t) \Delta t} \left[1 - \frac{i}{2} H(x, t) \Delta t \right]. \quad (\text{E.3})$$

Cette représentation est unitaire et conserve ainsi la norme de la fonction d'onde au cours du temps. Le schéma implicite d'intégration s'écrit

$$\left(1 + \frac{i \Delta t}{2} H \right) \psi(x, t + \Delta t) = \left(1 - \frac{i \Delta t}{2} H \right) \psi(x, t). \quad (\text{E.4})$$

On développe ensuite la fonction d'onde sur un réseau de N sites

$$\chi_j \equiv \begin{cases} 1 : x_j - \frac{1}{2} \Delta x \leq x < x_j + \frac{1}{2} \Delta x \\ 0 : \text{sinon,} \end{cases} \quad (\text{E.5})$$

avec $\Delta x \equiv (x_{max} - x_{min})/N$. Ici, x_{min} et x_{max} sont les limites de notre grille de taille finie. La fonction d'onde s'écrit alors

$$\psi(x, t_n) = \sum_{j=1}^N \psi_j^n \chi_j, \quad (\text{E.6})$$

où $\psi_j^n \equiv \psi(x_j, t_n)$ est la valeur de la fonction d'onde à la position x_j du site j (l'indice n désigne le temps discret, $t_n = t_0 + n \Delta t$). On obtient alors

$$\left(1 \pm \frac{i \Delta t}{2} H \right) \psi(x_j, t_n) \simeq \psi_j^n \pm \frac{i \Delta t}{2} \times \left[-\frac{\psi_{j+1}^n - 2\psi_j^n + \psi_{j-1}^n}{2 \Delta x^2} + V_j \psi_j^n + g|\psi_j^n|^2 \psi_j^n \right], \quad (\text{E.7})$$

Bibliographie

- [1] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan. Scaling theory of localization : Absence of quantum diffusion in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 42(10) :673–676, Mar 1979.
- [2] E. Abrahams and T. V. Ramakrishnan. Scaling theory of localization and non-ohmic effects in two dimensions. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 35-36(1) :15–20, 1980.
- [3] A. A. Abrikosov. The paradox with the static conductivity of a one-dimensional metal. *Solid State Communications*, 37(12) :997 – 1000, 1981.
- [4] E. Akkermans and G. Montambaux. *Physique mésoscopique des électrons et des photons*. 2004.
- [5] M. Albert and P. Leboeuf. Localization by bichromatic potentials versus anderson localization, 2009.
- [6] M. Albert, T. Paul, N. Pavloff, and P. Leboeuf. Dipole oscillations of a bose-einstein condensate in the presence of defects and disorder. *Physical Review Letters*, 100(25) :250405, 2008.
- [7] J. F. Allen and H. Jones. Phenomena connected with heat flow in helium ii. *Nature*, 141 :243, 1938.
- [8] J. F. Allen and A. D. Misener. Flow of liquid helium ii. *Nature*, 141 :75, 1938.
- [9] B. L. Altshuler. Fluctuations in the extrinsic conductivity of disordered conductors. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 41 :648–+, June 1985.
- [10] B. L. Altshuler, A. G. Aronov, and D. E. Khmel'nitsky. Effects of electron-electron collisions with small energy transfers on quantum localisation. *Journal of Physics C : Solid State Physics*, 15(36) :7367–7386, 1982.
- [11] W. A. Ames. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 1977.
- [12] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Observation of bose-einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, 269(5221) :198–201, 1995.
- [13] P. W. Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.*, 109(5) :1492–1505, Mar 1958.
- [14] P. W. Anderson. Considerations on the flow of superfluid helium. *Rev. Mod. Phys.*, 38(2) :298–310, Apr 1966.
- [15] P. W. Anderson, E. Abrahams, and T. V. Ramakrishnan. Possible explanation of nonlinear conductivity in thin-film metal wires. *Phys. Rev. Lett.*, 43(10) :718–720, Sep 1979.
- [16] P. W. Anderson, D. J. Thouless, E. Abrahams, and D. S. Fisher. New method for a scaling theory of localization. *Phys. Rev. B*, 22(8) :3519–3526, Oct 1980.

- [17] M. R. Andrews, D. M. Kurn, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, C. G. Townsend, S. Inouye, and W. Ketterle. Propagation of sound in a bose-einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 79(4) :553–556, Jul 1997.
- [18] T. N. Antsygina, L. A. Pastur, and V. A. Slyusarev. Localization of states and kinetic properties of one-dimensionnal disordered systems. *Sov. J. Low Temp. Phys.*, 7(1) :1, 1981.
- [19] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin. *Solide State Physics*. 1976.
- [20] G. E. Astrakharchik and L. P. Pitaevskii. Motion of a heavy impurity through a bose-einstein condensate. *Phys. Rev. A*, 70(1) :013608, Jul 2004.
- [21] S. Aubry and G. André. Analyticity breaking and anderson localization in incommensurate lattices. *Ann. Israel. Phys. Soc.*, 3 :133, 1980.
- [22] A. Avila and S. Jitormirskaja. Solving the ten martini problem. *Lecture Notes in Physics*, 690(5), 2006.
- [23] M. Y. Azbel. Quantum particle in one-dimensional potentials with incommensurate periods. *Phys. Rev. Lett.*, 43(26) :1954–1957, Dec 1979.
- [24] S. Balibar. The discovery of superfluidity. *J. Low. Temp. Phys.*, 146 :441, 2007.
- [25] D. M. Basko, I. L. Aleiner, and B. L. Altshuler. Metal-insulator transition in a weakly interacting many-electron system with localized single-particle states. *Annals of physics*, 321(5) :1126–1205, 2006.
- [26] C. Becker, S. Stellmer, P. Soltan-Panahi, S. Dorscher, M. Baumert, E. Richter, J. Kronjager, K. Bongs, and K. Sengstock. Oscillations and interactions of dark and dark-bright solitons in bose-einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 4 :496, Jun 2008.
- [27] C. W. J. Beenakker. Random-matrix theory of quantum transport. *Rev. Mod. Phys.*, 69(3) :731–808, Jul 1997.
- [28] C. W. J. Beenakker and B. Rajaei. Exact solution for the distribution of transmission eigenvalues in a disordered wire and comparison with random-matrix theory. *Phys. Rev. B*, 49(11) :7499–7510, Mar 1994.
- [29] C. W. J. Beenakker and B. Rejaei. Nonlogarithmic repulsion of transmission eigenvalues in a disordered wire. *Phys. Rev. Lett.*, 71(22) :3689–3692, Nov 1993.
- [30] M. M. Benderskii and L. A. Pastur. Calculation of the average number of states in a model problem. *Sov. Phys. JETP*, 30(1) :158, 1970.
- [31] W. Beyer. PhD thesis, 1974.
- [32] N. Bilas. *Transport dans les condensats de Bose-Einstein uni-dimensionnels désordonnés*. PhD thesis, 2006.
- [33] J. Billy, V. Josse, Z. Zuo, A. Bernard, B. Hambrecht, P. Lugan, D. Clément, L. Sanchez-Palencia, P. Bouyer, and A. Aspect. Direct observation of anderson localization of matter waves in a controlled disorder. *Nature*, 453 :891, Jun 2008.
- [34] Y. M. Blantier and M. Büttiker. Shot noise in mesoscopic conductors. *Physics reports*, 336(1) :1, 2000.
- [35] N. N. Bogoliubov. Theory of superfluidity. *J. Phys. U.S.S.R.*, 11 :23, 1947.
- [36] R. E. Borland. The Nature of the Electronic States in Disordered One-Dimensional Systems. *Royal Society of London Proceedings Series A*, 274 :529–545, aug 1963.
- [37] S. N. Bose. Plancks gesetz und lichtquantenhypothese. *Zeitschrift für Physik*, 26 :178, 1924.

- [38] T. Busch and J. R. Anglin. Motion of dark solitons in trapped bose-einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 84(11) :2298–2301, Mar 2000.
- [39] M. Büttiker. Symmetry of electrical conduction. *IBM J. Res. Dev.*, 32(3) :317, 1988.
- [40] G. Casati, I. Guarneri, and D. L. Shepelyansky. Anderson transition in a one-dimensional system with three incommensurate frequencies. *Phys. Rev. Lett.*, 62(4) :345–348, Jan 1989.
- [41] A. A. Chabanov and A. Z. Genack. Photon localization in resonant media. *Phys. Rev. Lett.*, 87(15) :153901, Sep 2001.
- [42] A. A. Chabanov, M. Stoytchev, and A. Z. Genack. Statistical signatures of photon localization. *Nature*, 404 :850–853, 2000.
- [43] J. Chabe, G. Lemarie, B. Gremaud, D. Delande, P. Szriftgiser, and J. C. Garreau. Experimental observation of the anderson metal-insulator transition with atomic matter waves. *Physical Review Letters*, 101(25) :255702, 2008.
- [44] Y. P. Chen, J. Hitchcock, D. Dries, M. Junker, C. Welford, and R. G. Hulet. Phase coherence and superfluid-insulator transition in a disordered bose-einstein condensate. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 77(3) :033632, 2008.
- [45] A. P. Chikkatur, A. Görlitz, D. M. Stamper-Kurn, S. Inouye, S. Gupta, and W. Ketterle. Suppression and enhancement of impurity scattering in a bose-einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 85(3) :483–486, Jul 2000.
- [46] D. Clément. *Propriétés statiques et dynamiques d’un condensat de Bose-Einstein dans un potentiel aléatoire*. PhD thesis, <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00262463/fr>, 2007.
- [47] A. Cohen, Y. Roth, and B. Shapiro. Universal distributions and scaling in disordered systems. *Phys. Rev. B*, 38(17) :12125–12132, Dec 1988.
- [48] C. Cohen-Tannoudji. Cours du collège de france de 1996 à 2000.
- [49] E. Cornell and P. Wieman. La condensation de bose-einstein. *Pour la science*, 247, 1998.
- [50] F. Dalfovo, L. Pitaevskii, and S. Stringari. Order parameter at the boundary of a trapped bose gas. *Phys. Rev. A*, 54(5) :4213–4217, Nov 1996.
- [51] R. Dalichaouch, J. P. Armstrong, S. S., P. M. Platzmann, and M. S. L. Microwave localization by 2d random scattering. *Nature*, 354 :53, 1991.
- [52] I. Danshita and S. Tsuchiya. Stability of bose-einstein condensates in a kronig-penney potential. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 75(3) :033612, 2007.
- [53] S. Datta. *Electronic transport in mesoscopic systems*. 1995.
- [54] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle. Bose einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 75 :3969, 1995.
- [55] M. A. de Moura. Newtonian behavior of schrödinger solitons and kinks. *Phys. Rev. A*, 37(12) :4998–4999, Jun 1988.
- [56] L. De Sarlo, L. Fallani, J. E. Lye, M. Modugno, R. Saers, C. Fort, and M. Inguscio. Unstable regimes for a bose-einstein condensate in an optical lattice. *Phys. Rev. A*, 72(1) :013603, Jul 2005.
- [57] X. Deng, R. Citro, A. Minguzzi, and E. Orignac. Superfluidity and anderson localisation for a weakly interacting bose gas in a quasiperiodic potential, 2008.

- [58] O. N. Dorokhov. Transmission coefficient and the localization length of an electron in N bound disordered chains. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 36 :318–+, Oct. 1982.
- [59] D. Dries, Y. P. Chen, T. Corcovilos, S. Pollack, J. Hitchcock, M. Junker, and R. Hulet. Anderson localization and damping of superfluid transport by disorder and defects. http://www.sif.it/SIF/resources/public/files/va2009/hulet_0624.pdf, 2009.
- [60] J. T. Edwards and D. J. Thouless. Numerical studies of localization in disordered systems. *Journal of Physics C : Solid State Physics*, 5(8) :807–820, 1972.
- [61] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen gases. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1 :3, 1925.
- [62] P. Engels and C. Atherton. Stationary and nonstationary fluid flow of a bose-einstein condensate through a penetrable barrier. *Physical Review Letters*, 99(16) :160405, 2007.
- [63] T. Ernst, T. Paul, and P. Schlagheck. Transport of ultracold bose gases beyond the gross-pitaevskii description, 2009.
- [64] L. Fallani, C. Fort, and M. Inguscio. Bose-einstein condensates in disordered potentials. *Adv. At. Mol. Opt. Phys.*, 56 :119, 2008.
- [65] R. Feynman. *Prog. in Low Temp. Phys. C.G. Gorter ed.*, 1, 1955.
- [66] S. Fishman, D. R. Grempel, and R. E. Prange. Chaos, quantum recurrences, and anderson localization. *Phys. Rev. Lett.*, 49(8) :509–512, Aug 1982.
- [67] L. Fleishman and P. W. Anderson. Interactions and the anderson transition. *Phys. Rev. B*, 21(6) :2366–2377, Mar 1980.
- [68] C. Fort, L. Fallani, V. Guarrera, J. E. Lye, M. Modugno, D. S. Wiersma, and M. Inguscio. Effect of optical disorder and single defects on the expansion of a bose-einstein condensate in a one-dimensional waveguide. *Phys. Rev. Lett.*, 95(17) :170410, Oct 2005.
- [69] J. Fortagh and C. Zimmermann. Magnetic microtraps for ultracold atoms. *Reviews of Modern Physics*, 79(1) :235, 2007.
- [70] U. Gavish and Y. Castin. Matter-wave localalization in disordered cold atom lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 95(2) :020401, Jul 2005.
- [71] A. Z. Genack. Fluctuations, correlations and average transport of electromagnetic radiation in random media. *Scattering and localization of classical waves in random media*, 1990.
- [72] M. E. Gertsenshtein and V. B. Vasil’ev. Waveguides with random inhomogeneities and brownian motion in the lobochevsky plane. *Teor. Veroyatn. Primen.*, 4 :424, 1959.
- [73] T. Giamarchi and H. J. Schulz. Anderson localization and interactions in one-dimensional metals. *Phys. Rev. B*, 37(1) :325–340, Jan 1988.
- [74] J. W. Goodman. *Statistical optics*. 2000.
- [75] J. W. Goodman. Speckle phenomena in optics : Theory and applications. *Roberts and Compagny Publishers (Greenwood Village)*, 2007.
- [76] L. P. Gor’kov, A. I. Larkin, and D. E. Khmel’nitskii. *JETP Lett.*, 30 :248, 1979.
- [77] E. P. Gross. Structure of a quantized vortex in boson systems. *Il Nuovo Cimento*, 20 :354, 1961.

- [78] G. Grynberg, A. Aspect, and C. Fabre. *Introduction aux lasers et à l'optique quantique*. 1997.
- [79] E. J. Gumbel. Multivariate extremal distributions. *Bull. Inst. Internat. de Statistique*, 37 :471–475, 1960.
- [80] E. Gurevich. Lyapunov exponent for the laser speckle potential : a weak disorder expansion, 2009.
- [81] F. Haake. *Quantum signatures of chaos*. 1991.
- [82] V. Hakim. Nonlinear schrödinger flow past an obstacle in one dimension. *Phys. Rev. E*, 55(3) :2835–2845, Mar 1997.
- [83] P. G. Harper. Single band motion of conduction electrons in a uniform magnetic field. *Proc. Phys. Soc. A*, 68 :874, 1955.
- [84] M. Hartung, T. Wellens, C. A. Müller, K. Richter, and P. Schlagheck. Coherent backscattering of bose einstein condensates in two dimensional disorder potentials. *Phys. Rev. Lett.*, 101 :020603, 2008.
- [85] E. Hofstetter and M. Schreiber. Does broken time reversal symmetry modify the critical behavior at the metal-insulator transition in 3-dimensional disordered systems? *Phys. Rev. Lett.*, 73(23) :3137–3140, Dec 1994.
- [86] H. Hu, A. Strybulevych, J. H. Page, S. E. Skipetrov, and B. A. Van Tiggelen. Localization of ultrasound in a three-dimensional elastic network. *Nature Physics*, 4 :945, 2008.
- [87] K. Huang. *Statistical mechanics*. 1987.
- [88] K. Huang and H.-F. Meng. Hard-sphere bose gas in random external potentials. *Phys. Rev. Lett.*, 69(4) :644–647, Jul 1992.
- [89] T. Hyouguchi, S. Adachi, and M. Ueda. Divergence-free wkb method. *Phys. Rev. Lett.*, 88(17) :170404, Apr 2002.
- [90] Y. Imry. *Introduction to mesoscopic physics*. 1997.
- [91] A. F. Ioffe and A. R. Regel. *Prog. Semicond.*, 4 :237, 1960.
- [92] F. M. Izrailev and A. A. Krokhn. Localization and the mobility edge in one-dimensional potentials with correlated disorder. *Phys. Rev. Lett.*, 82(20) :4062–4065, May 1999.
- [93] D. S. Jin, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Collective excitations of a bose-einstein condensate in a dilute gas. *Phys. Rev. Lett.*, 77(3) :420–423, Jul 1996.
- [94] S. Jitomirskaja. Metal-insulator transition for the almost mathieu operator. *Ann. Math.*, 150(2), 1999.
- [95] P. Kapitza. Viscosity of liquid helium below the λ point. *Nature*, 141 :74, 1938.
- [96] W. H. Keesom and A. P. Keesom. New measurements on the specific heat of liquid helium. *Physica*, 2 :557, 1935.
- [97] P. D. Kirkman and J. B. Pendry. The statistics of the conductance of one-dimensional disordered chains. *Journal of Physics C Solid State Physics*, 17 :5707–5728, Nov. 1984.
- [98] S. Kraft, H. Günther, A. and. Ott, D. Wharam, C. Zimmermann, and J. Fortágh. *Phys. B*, 35 :469, 2002.
- [99] B. Kramer and A. MacKinnon. Localization : theory and experiment. *Rep. Prog. Phys.*, 56 :1469–1564, 1993.

- [100] B. Kramer and M. Schreiber. *J. Non-Cryst. Solids*, 114, 1989.
- [101] N. Kumar. Resistance fluctuation in a one-dimensional conductor with static disorder. *Phys. Rev. B*, 31(8) :5513–5515, Apr 1985.
- [102] Y. Lahini, A. Avidan, F. Pozzi, M. Sorel, R. Morandotti, D. N. Christodoulides, and Y. Silberberg. Anderson localization and nonlinearity in one-dimensional disordered photonic lattices. *Physical Review Letters*, 100(1) :013906, 2008.
- [103] Y. Lahini, R. Pugatch, F. Pozzi, M. Sorel, R. Morandotti, N. Davidson, and Y. Silberberg. Observation of a localization transition in quasiperiodic photonic lattices. *Physical Review Letters*, 103(1) :013901, 2009.
- [104] L. D. Landau. Theory of superfluidity of he ii. *J. Phys. U.S.S.R.*, 5 :71, 1941.
- [105] L. D. Landau. Theory of superfluidity of he ii. *J. Phys. U.S.S.R.*, 11 :91, 1947.
- [106] L. D. Landau and E. Lifchitz. *Mécanique quantique*. 1975.
- [107] L. D. Landau, E. Lifchitz, and L. P. Pitaevskii. *Statistical Physics Part 2*. 1980.
- [108] L. Landauer. *IBM J. Res. Rev.*, 1 :223, 1957.
- [109] L. Landauer. Electrical resistance of disordered one-dimensional lattices. *Philos. Mag.* 21, 21 :683, 1970.
- [110] D. Laurent, O. Legrand, P. Sebbah, C. Vanneste, and F. Mortessagne. Localized modes in a finite-size open disordered microwave cavity. *Physical Review Letters*, 99(25) :253902, 2007.
- [111] P. Leboeuf, J. Kurchan, M. Feingold, and D. P. Arovas. Phase-space localization : Topological aspects of quantum chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 65 :3076, 1990.
- [112] P. Leboeuf and N. Pavloff. Bose-einstein beams : Coherent propagation through a guide. *Phys. Rev. A*, 64(3) :033602, Aug 2001.
- [113] P. A. Lee and T. V. Ramakrishnan. Disordered electronic systems. *Rev. Mod. Phys.*, 57(2) :287–337, Apr 1985.
- [114] P. A. Lee and A. D. Stone. Universal conductance fluctuations in metals. *Phys. Rev. Lett.*, 55(15) :1622–1625, Oct 1985.
- [115] A. J. Leggett. Superfluidity. *Rev. Mod. Phys.*, 71(2) :S318–S323, Mar 1999.
- [116] R. Lehner, J. Koota, G. Maret, and T. Gisler. Segment distributions of end-tethered polymers in a good solvent. *Physical Review Letters*, 96(10) :107801, 2006.
- [117] G. Lemarie, B. Gremaud, and D. Delande. Universality of the anderson transition with the quasiperiodic kicked rotor, 2009.
- [118] I. M. Lifshits, S. A. Gredeskul, and L. A. Pastur. *Introduction to the Theory of Disordered Systems*. 1988.
- [119] H. Lignier, J. C. Garreau, P. Szriftgiser, and D. Delande. Quantum diffusion in the quasiperiodic kicked rotor. *Europhysics Letters*, 69(3) :327, 2005.
- [120] P. E. Lindelof, J. Norregaard, and J. Hanberg. *Phys. Scr.*, T14 :17, 1986.
- [121] C. Lobo, A. Sinatra, and Y. Castin. Vortex lattice formation in bose-einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 92(2) :020403, Jan 2004.
- [122] F. London. The λ phenomenon of liquid helium and the bose-einstein degeneracy. *Nature*, 141 :643, 1938.
- [123] P. Lukan, A. Aspect, L. Sanchez-Palencia, D. Delande, B. Gremaud, C. A. Muller, and C. Miniatura. One-dimensional anderson localization in certain correlated random potentials, 2009.

- [124] J. E. Lye, L. Fallani, C. Fort, V. Guarrera, M. Modugno, D. S. Wiersma, and M. Inguscio. Effect of interactions on the localization of a bose-einstein condensate in a quasiperiodic lattice. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 75(6) :061603, 2007.
- [125] J. E. Lye, L. Fallani, M. Modugno, D. S. Wiersma, C. Fort, and M. Inguscio. Bose-einstein condensate in a random potential. *Phys. Rev. Lett.*, 95(7) :070401, Aug 2005.
- [126] M. Machholm, C. J. Pethick, and H. Smith. Band structure, elementary excitations, and stability of a bose-einstein condensate in a periodic potential. *Phys. Rev. A*, 67(5) :053613, May 2003.
- [127] A. MacKinnon and B. Kramer. One-parameter scaling of localization length and conductance in disordered systems. *Phys. Rev. Lett.*, 47(21) :1546–1549, Nov 1981.
- [128] K. W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, and J. Dalibard. Vortex formation in a stirred bose-einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 84(5) :806–809, Jan 2000.
- [129] A. D. Martin, C. S. Adams, and S. A. Gardiner. Bright matter-wave soliton collisions in a harmonic trap : Regular and chaotic dynamics. *Physical Review Letters*, 98(2) :020402, 2007.
- [130] J. Matricon and G. Waysand. *La guerre du froid*. 1999.
- [131] P. A. Mello. Central-limit theorems on groups. *Journal of Mathematical Physics*, 27 :2876–2891, Dec. 1986.
- [132] P. A. Mello, P. Pereyra, and N. Kumar. Macroscopic approach to multichannel disordered conductors. *Annals of Physics (San Diego)*, 181(2) :290–317, 1988.
- [133] P. A. Mello and A. D. Stone. Maximum-entropy model for quantum-mechanical interference effects in metallic conductors. *Phys. Rev. B*, 44(8) :3559–3576, Aug 1991.
- [134] V. I. Mel’nikov. Fluctuations in the resistivity of a finite disordered system. *Soviet Physics - Solid State*, 23(3) :444–446, 1981.
- [135] M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. M. Kurn, D. S. Durfee, C. G. Townsend, and W. Ketterle. Collective excitations of a bose-einstein condensate in a magnetic trap. *Phys. Rev. Lett.*, 77(6) :988–991, Aug 1996.
- [136] F. L. Moore, J. C. Robinson, C. F. Bharucha, B. Sundaram, and M. G. Raizen. Atom optics realization of the quantum δ -kicked rotor. *Phys. Rev. Lett.*, 75(25) :4598–4601, Dec 1995.
- [137] S. A. Morgan, R. J. Ballagh, and K. Burnett. Solitary-wave solutions to nonlinear schrödinger equations. *Phys. Rev. A*, 55(6) :4338–4345, Jun 1997.
- [138] N. F. Mott. Electrons in disordered structures. *Advances in Physics*, 16 :49–144, jan 1967.
- [139] N. F. Mott and W. D. Twose. The theory of impurity conduction. *Advances in Physics*, 10 :107–163, apr 1961.
- [140] N. F. S. Mott and E. A. Davis. *Electronic processes in non-crystalline materials*. Oxford University Press, 1979.
- [141] A. M. noz Mateo and V. Delgado. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 77(1) :013617, 2008.
- [142] P. Nozières and D. Pines. *The theory of quantum liquids Vol II*. 1964.
- [143] M. A. Paalanen and G. A. Thomas. *Helv. Phys. Acta.*, 56 :27, 1983.

- [144] T. Paul, M. Albert, P. Schlagheck, P. Leboeuf, and N. Pavloff. Anderson localization of a weakly interacting one-dimensional bose gas. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 80(3) :033615, 2009.
- [145] T. Paul, M. Hartung, K. Richter, and P. Schlagheck. Nonlinear transport of bose-einstein condensates through mesoscopic waveguides. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 76(6) :063605, 2007.
- [146] T. Paul, P. Leboeuf, N. Pavloff, K. Richter, and P. Schlagheck. Nonlinear transport of bose-einstein condensates through waveguides with disorder. *Phys. Rev. A*, 72(6) :063621, Dec 2005.
- [147] T. Paul, P. Schlagheck, P. Leboeuf, and N. Pavloff. Superfluidity versus anderson localization in a dilute bose gas. *Physical Review Letters*, 98(21) :210602, 2007.
- [148] N. Pavloff. Breakdown of superfluidity of an atom laser past an obstacle. *Phys. Rev. A*, 66(1) :013610, Jul 2002.
- [149] O. Penrose. The quantum mechanics of helium 2. *Philisophical Magazine*, 42 :1373, 1951.
- [150] O. Penrose and L. Onsager. Bose-einstein condensation and liquid helium. *Phys. Rev.*, 104(3) :576–584, Nov 1956.
- [151] D. S. Petrov. *Bose-Einstein condensation in low dimensional trapped gases*. PhD thesis, [http ://www.old.amolf.nl/publications/theses/petrov](http://www.old.amolf.nl/publications/theses/petrov), 2003.
- [152] L. Pezze, B. Hambrecht, and L. Sanchez-Palencia. Dipole oscillations of a fermi gas in a disordered trap : Damping and localization, 2008.
- [153] A. Phillips and P. V. E. McClintock. Breaking the roton barrier : An experimental study of motion faster than the landau critical velocity for roton creation in he ii. *Phys. Rev. Lett.*, 33(25) :1468–1471, Dec 1974.
- [154] J. L. Pichard. in *Quantum Coherence in Mesoscopic Systems*, page 369, 1991.
- [155] J. L. Pichard and M. Sanquer. Quantum conductance fluctuations and maximum entropy ensembles for the transfert matrix. *Physica A*, 167 :66, 1990.
- [156] L. Pitaevskii. 50 years of landau s theory of superfluidity. *J. Low Temp. Phys.*, 87 :127, 1992.
- [157] L. P. Pitaevskii. Vortex lines in an imperfect bose gas. *Soviet Physics JETP-USSR*, 13 :451, 1961.
- [158] P. Pradhan and S. Sridhar. Correlations due to localization in quantum eigenfunctions of disordered microwave cavities. *Phys. Rev. Lett.*, 85(11) :2360–2363, Sep 2000.
- [159] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C++*. 2002.
- [160] J. Prior, A. M. Somoza, and M. Ortuño. Conductance distribution in two-dimensional localized systems with and without magnetic fields. *Eur. Phys. J. B*, PREPRINT, 2009.
- [161] C. Raman, M. Köhl, R. Onofrio, D. S. Durfee, C. E. Kuklewicz, Z. Hadzibabic, , and W. Ketterle. Evidence for a critical velocity in a bose-einstein condensed gas. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :2502, 1999.
- [162] G. Roati, C. D’Errico, L. Fallani, M. Fattori, C. Fort, M. Zaccanti, G. Modugno, M. Modugno, and M. Inguscio. Anderson localization of a non-interacting bose-einstein condensate. *Nature*, 453 :895, Jun 2008.

- [163] R. A. Römer and M. Schreiber. No enhancement of the localization length for two interacting particles in a random potential. *Phys. Rev. Lett.*, 78(3) :515–518, Jan 1997.
- [164] G. Roux, T. Barthel, I. P. McCulloch, C. Kollath, U. Schollwöck, and T. Giamarchi. Quasiperiodic bose-hubbard model and localization in one-dimensional cold atomic gases. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 78(2) :023628, 2008.
- [165] L. Sanchez-Palencia, D. Clément, P. Lugan, P. Bouyer, and A. Aspect. Disorder-induced trapping versus anderson localization in bose–einstein condensates expanding in disordered potentials. *New Journal of Physics*, 10(4) :045019 (30pp), 2008.
- [166] L. Sanchez-Palencia, D. Clément, P. Lugan, P. Bouyer, G. V. Shlyapnikov, and A. Aspect. Anderson localization of expanding bose-einstein condensates in random potentials. *Physical Review Letters*, 98(21) :210401, 2007.
- [167] T. Schwartz, G. Bartal, S. Fishman, and M. Segev. Transport and anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices. *Nature*, 446 :52–55, 2007.
- [168] D. L. Shepelyansky. Coherent propagation of two interacting particles in a random potential. *Phys. Rev. Lett.*, 73(19) :2607–2610, Nov 1994.
- [169] A. M. Somoza, M. Ortuno, and J. Prior. Universal distribution functions in two-dimensional localized systems. *Physical Review Letters*, 99(11) :116602, 2007.
- [170] S. Stringari. Collective excitations of a trapped bose-condensed gas. *Phys. Rev. Lett.*, 77(12) :2360–2363, Sep 1996.
- [171] S. Stringari. Dynamics of bose-einstein condensed gases in highly deformed traps. *Phys. Rev. A*, 58(3) :2385–2388, Sep 1998.
- [172] S. Stringari and L. P. Pitaevskii. *Bose-Einstein Condensation*. 2004.
- [173] I. M. Suslov. Localization in one-dimensional incommensurate systems. *Sov. Phys. JETP*, 56(3), 1982.
- [174] D. Taras-Semchuk and J. M. F. Gunn. Superfluid flow past an array of scatterers. *Phys. Rev. B*, 60(18) :13139–13151, Nov 1999.
- [175] L. Tessieri. Delocalization phenomena in one-dimensional models with long-range correlated disorder : a perturbative approach. *J. Phys. A*, 35 :9585, 2002.
- [176] D. C. *et al.* Experimental study of the transport of coherent interacting matter-waves in a 1d random potential induced by laser speckle. *New J. Phys.*, 8 :165, 2006.
- [177] J. E. *et al.* Role of wire imperfections in micromagnetic traps for atoms. *Phys. Rev. A*, 70 :043629, 2004.
- [178] D. J. Thouless. Electrons in disordered systems and the theory of localization. *Physics Reports*, 13(3) :93 – 142, 1974.
- [179] D. J. Thouless. Maximum metallic resistance in thin wires. *Phys. Rev. Lett.*, 39(18) :1167–1169, Oct 1977.
- [180] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs. Quantized hall conductance in a two-dimensional periodic potential. *Phys. Rev. Lett.*, 49(6) :405–408, Aug 1982.
- [181] L. Tisza. *Comptes Rendus Acad. Sc.*, 207 :1035, 1938.
- [182] L. Tisza. Transport phenomena in helium ii. *Nature*, 141 :913, 1938.

- [183] J. Topolancik, B. Ilic, and F. Vollmer. Experimental observation of strong photon localization in disordered photonic crystal waveguides. *Physical Review Letters*, 99(25) :253901, 2007.
- [184] C. A. Tracy and W. H. Level-spacing distributions and the airy kernel. *Commun. Math. Phys.*, 159, 1994.
- [185] S. A. van Langen, P. W. Brouwer, and C. W. J. Beenakker. Nonperturbative calculation of the probability distribution of plane-wave transmission through a disordered waveguide. *Phys. Rev. E*, 53(2) :R1344–R1347, Feb 1996.
- [186] B. A. Van Tiggelen. *Diffusive waves in complex media*, chapter Localization of waves, pages 1–60. Kluwer Academic Publisher, Printed in the Netherland, 1999.
- [187] B. J. van Wees, H. van Houten, C. W. J. Beenakker, J. G. Williamson, L. P. Kouwenhoven, D. van der Marel, and C. T. Foxon. Qunatized conductance of point contact in a two-dimensionnal electron gas. *Phys. Rev. Lett.*, 60(9) :848, 1988.
- [188] D.-W. Wang, M. D. Lukin, and E. Demler. Disordered bose-einstein condensates in quasi-one-dimensional magnetic microtraps. *Phys. Rev. Lett.*, 92(7) :076802, Feb 2004.
- [189] R. L. Weaver. Anderson localization of ultrasound. *Wave Motion*, 12(2) :129 – 142, 1990.
- [190] F. Wegner. The mobility edge problem : Continuous symmetry and a conjecture. *Zeitschrift für Physik B*, 35(3) :207–210, 1979.
- [191] D. S. Wiersma, P. Bartolini, A. Lagendijk, and R. Righini. Localization of light in a disordered medium. *Nature*, 390 :671–673, 1997.
- [192] D. S. Wiersma, M. P. van Albada, B. A. van Tiggelen, and A. Lagendijk. Experimental evidence for recurrent multiple scattering events of light in disordered media. *Phys. Rev. Lett.*, 74(21) :4193–4196, May 1995.
- [193] M. Wilkinson. Critical properties of electron eigenstates in incommensurat systems. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 391 :305–350, 1984.
- [194] B. Wu and Q. Niu. Landau and dynamical instabilities of the superflow of bose-einstein condensates in optical lattices. *Phys. Rev. A*, 64 :061603(R), 2001.
- [195] B. Wu and Q. Niu. Superfluidity of bose-einstein condensate in an optical lattice : Landau-zener tunneling and dynamical instability. *New. J. Phys.*, 5 :104, 2003.
- [196] E. J. Yarmchuk, M. J. V. Gordon, and R. E. Packard. Observation of stationary vortex arrays in rotating superfluid helium. *Phys. Rev. Lett.*, 43(3) :214–217, Jul 1979.
- [197] L. Ye, G. Cody, M. Zhou, P. Sheng, and A. N. Norris. Observation of bending wave localization and quasi mobility edge in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 69(21) :3080–3083, Nov 1992.
- [198] I. Zapata and F. Sols. Supercurrent flow through an effective double-barrier structure. *Phys. Rev. B*, 53(10) :6693–6704, Mar 1996.

Superfluidité et localisation quantique dans les condensats de Bose-Einstein unidimensionnels

Résumé

Cette thèse présente une étude théorique des propriétés de transport d'un condensat unidimensionnel en présence de désordre. La cohérence de phase, le désordre et les interactions induisent une compétition entre le caractère superfluide d'un condensat et la suppression du transport par effets d'interférences destructives. En premier lieu, nous avons étudié une configuration expérimentalement pertinente, à savoir les oscillations dipolaires d'un condensat en présence d'impuretés. L'amortissement de celles-ci s'avère n'avoir aucune relation avec la localisation d'Anderson et s'explique en terme d'émission d'excitations élémentaires. Des comparaisons avec des expériences récentes appuient ce scénario général. Ensuite, nous avons étudié la vitesse critique d'un superfluide en présence d'un potentiel désordonné. Un lien explicite avec des problèmes de statistiques de valeurs extrêmes est donné, permettant ainsi de déterminer la distribution de probabilité de la vitesse critique, en accord quantitatif avec des simulations numériques. Nous avons montré d'autre part que la localisation d'Anderson n'est possible que dans un certain régime de paramètres. La longueur de localisation ξ est affectée par les interactions et les corrélations du potentiel aléatoire. Enfin, nous avons étudié la localisation par un potentiel bichromatique et expliqué celle-ci de manière semi-classique. Nous avons ainsi montré la différence profonde entre cette dernière et celle induite par un potentiel purement aléatoire.

Mots clés : Condensats de Bose-Einstein, transport non linéaire, superfluidité, désordre, localisation d'Anderson.

Abstract

This thesis presents a theoretical study of the transport properties of a Bose-Einstein condensate in the presence of disorder. Phase coherence, disorder and interactions lead to a non-trivial competition between superfluidity and Anderson localization. In a first stage, we have studied an experimentally relevant transport situation, namely the dipole oscillations of a condensate in the presence of impurities. The disorder-induced damping has been found to be disconnected to localization effects, and has been explained in terms of the radiation of excitations. This predicted general scenario has recently been confirmed by several experiments. In a second stage, we have studied the superfluid critical velocity of an atom laser moving through a disordered region. An explicit connection between this problem and extreme-value statistics has been established, and it has allowed us to calculate the whole probability distribution of the critical velocity. This distribution is in agreement with numerical simulations. Moreover, we have shown that Anderson localization is only observable for a given set of parameters. Hence, the localization length is affected by interactions and correlations. Finally, we have considered the localization induced by a bichromatic potential and explained it in a semi-classical framework. We have thus pointed out an essential difference between this kind of localization and the one induced by real disorder.

Keywords : Bose-Einstein condensates, nonlinear transport, superfluidity, disorder, Anderson localization.