



HAL
open science

**Méthode des éléments spectraux pour la propagation
d'ondes sismiques en milieu géologique fluide-solide avec
pas de temps locaux et couches absorbantes
parfaitement adaptées C-PML**

Ronan Madec

► **To cite this version:**

Ronan Madec. Méthode des éléments spectraux pour la propagation d'ondes sismiques en milieu géologique fluide-solide avec pas de temps locaux et couches absorbantes parfaitement adaptées C-PML. Modélisation et simulation. Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2009. Français. NNT : . tel-00511418

HAL Id: tel-00511418

<https://theses.hal.science/tel-00511418>

Submitted on 24 Aug 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR
ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES EXACTES ET DE LEURS
APPLICATIONS

THÈSE DE DOCTORAT

Présentée pour l'obtention du grade de
DOCTEUR de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour
(Spécialité Sciences de l'Univers)

par
Ronan MADEC

**Méthode des éléments spectraux pour la propagation
d'ondes sismiques en milieu géologique fluide-solide
avec pas de temps locaux et couches absorbantes
parfaitement adaptées C-PML**

Devant être soutenue le 10 décembre devant le jury composé de :

Mme. Jocelyne ERHEL	Directrice de Recherche, HDR, INRIA de Rennes	Rapporteur
M. Stéphane OPERTO	Chargé de Recherche, HDR, CNRS Université de Nice-Sophia-Antipolis	Rapporteur
M. Luc GIRAUD	Directeur de Recherche, HDR, INRIA Bordeaux Sud-Ouest / Toulouse	Examineur
M. Jérôme MONNIER	Professeur, INSA de Toulouse	Examineur
M. Julien DIAZ	Chargé de Recherche, INRIA Bordeaux Sud-Ouest / Pau	Membre du Jury
M. Roland MARTIN	Ingénieur de Recherche, HDR, CNRS Université de Pau	Membre du Jury
M. Dimitri KOMATITSCH	Professeur, Université de Pau et Pays de l'Adour	Directeur de Thèse

Table des matières

Résumé	1
Summary	3
Remerciements	5
Introduction générale	7
1 Équation des ondes sismiques et méthode des éléments spectraux	13
1.1 Présentation de l'équation des ondes	13
1.1.1 Tenseur de déformation	14
1.1.2 Lois de conservation	15
1.1.3 Équations de l'élastodynamique	17
1.1.4 Différents types d'ondes rencontrés en milieux élastiques	23
1.1.5 Équation des ondes acoustiques	25
1.1.6 Conditions de raccord fluide-solide	27
1.2 Méthode des éléments spectraux	27
1.2.1 Discrétisation spatiale	28
1.2.2 Interpolation polynomiale	30
1.2.3 Approximation numérique des intégrales des formulations faibles	32
1.2.4 Discrétisation temporelle	34
1.3 Conclusions	34
2 Introduction d'ondes planes dans une méthode d'éléments spectraux en 2D et étude des mouvements de rotation	35
Introduction	37

2.1	Presentation of the problem	37
2.1.1	2D canyon model	37
2.1.2	Implementation of incident plane waves	37
2.1.3	Initial wave field in the time domain	39
2.2	Numerical results	42
2.2.1	Test parameters	42
2.2.2	Comparing the spectra to the MFS method	44
2.2.3	Results for different angles for $\eta = 1$ with an initial P or SV plane wave or Rayleigh surface wave	46
2.3	Case of a hill	52
2.3.1	2D hill model	52
2.3.2	Results for different angles for $\eta = 1$ with an initial P or SV plane wave or Rayleigh surface wave	53
2.4	Conclusions	58
3	Pas de temps local pour interfaces fluide-solide	59
3.1	Introduction	60
3.2	Brief description of the classical fluid-solid coupling technique with no substepping .	62
3.3	Description of the substepping technique	64
3.3.1	Case of a 1/2 ratio	65
3.3.2	Extension to the more general case of a p/q ratio	68
3.4	Numerical tests	69
3.4.1	Flat interface with $\Delta t_s = \Delta t_f/2$ or with $\Delta t_s = \Delta t_f \times 2/3$	70
3.4.2	Sinusoidal interface with $\Delta t_s = \Delta t_f/2$	73
3.5	Analysis of cost reduction	77
3.6	Conclusions and future work	79
3.7	Acknowledgments	81
3.8	Application à des modèles plus réalistes et plus complexes	82
3.8.1	Modèle à trois couches fluide-solide avec bathymétrie	82
3.8.2	Modèle de sismique marine avec dôme de sel	87
3.8.3	Conclusions sur les applications	92

4	Implémentation de couches absorbantes C-PML dans une formulation variation-	93
	nelle acoustique-élastique	
4.1	Description de la formulation forte classique des PML	94
4.2	Description de la formulation des C-PML	97
4.2.1	Formulation acoustique	99
4.2.2	Formulation élastique	100
4.2.3	Formulation acoustique-élastique	101
4.2.4	Formulation viscoélastique	101
4.3	Tests numériques de validation pour des cas simples	103
4.3.1	Cas acoustique isotrope	103
4.3.2	Discussion sur les cas élastique isotrope et viscoélastique isotrope	106
4.3.3	Cas acoustique-élastique isotrope	111
4.3.4	Cas acoustique-viscoélastique isotrope	114
4.4	Application à des modèles pétroliers plus réalistes	121
4.4.1	Modèle à trois couches fluide-solide avec bathymétrie	121
4.4.2	Modèle de sismique marine avec dôme de sel	124
4.5	Conclusions et travaux futurs	129
	Conclusion générale et perspectives	131
	Annexe Numerical Simulation of Ground Rotations along 2D Topographical Pro-	
	files under the Incidence of Elastic Plane Waves	137

Résumé

Dans l'industrie pétrolière, de nombreuses campagnes sismiques visant à trouver de nouveaux champs pétroliers sont effectuées en mer. Afin de reproduire numériquement les résultats de ces campagnes d'acquisitions sismiques marine, les méthodes de différences finies ou d'éléments finis sont le plus souvent utilisées. Dans cette thèse, nous travaillons avec la méthode des éléments spectraux Komatitsch & Tromp (2002), qui est une méthode d'éléments finis explicite à haut degré d'interpolation polynomiale.

Pour de l'acquisition sismique marine, la propagation d'ondes s'effectue dans des modèles composés de deux parties : une partie fluide (la couche d'eau épaisse homogène représentant l'océan) et une partie solide (les roches composant le fond des océans). La partie fluide étant moins intéressante que la partie solide où peuvent se trouver les réservoirs d'hydrocarbures, nous voulons une méthode numérique où la propagation d'ondes dans le fluide est la moins coûteuse possible en temps calcul.

Un moyen de gagner ce temps est d'utiliser une méthode intégrant des pas de temps locaux Diaz & Joly (2005) où la partie fluide est traitée à l'aide d'un pas de temps plus grand que dans la partie solide. Pour cela, il faut s'assurer que l'augmentation du pas de temps sans modifier le maillage ne change pas la condition de stabilité CFL dans le fluide. Cette condition est calculée à partir de la vitesse maximale de propagation des ondes dans le domaine, et des pas de temps et d'espace. Or, les modèles utilisés présentent généralement un fort contraste des vitesses à l'interface fluide-solide en faveur du solide. C'est donc le pas de temps de ce dernier qui gouverne la condition CFL. Donc augmenter le pas de temps seulement dans le fluide ne changera pas la condition CFL et la simulation numérique pourra s'effectuer sans risquer l'explosion de la solution pour cause d'instabilité du schéma numérique.

Mon travail a consisté à intégrer un tel procédé dans la méthode des éléments spectraux du code SPECFEM à 2D. Comme on a des pas de temps différents de part et d'autre de l'interface fluide-solide, les données à échanger entre les deux milieux ne sont pas coordonnées car à des temps

différents. Pour palier à cette difficulté, on impose la conservation de l'énergie à notre système pour la construction des conditions de raccord. Cette manoeuvre implique néanmoins la résolution d'un système linéaire l'interface mais son coût est négligeable comparé aux calculs économisés dans la partie fluide.

Afin de se rapprocher plus encore de la réalité des modèles pétroliers, j'ai travaillé sur l'implémentation de couches absorbantes de type CPML (convolutional perfectly match layer Komatitsch & Martin (2007)) qui permettent de simuler un milieu infini en absorbant toutes les ondes y pénétrant et donc évitent des réflexions parasites des bords du domaine. Ces conditions ont été implémentées pour des modèles fluide-solide à 2D.

Summary

In the petroleum industry, many oil research is made offshore. Finite difference or finite element methods are usually used to numerically simulate seismic results of petroleum campaigns. In this manuscript, we used the spectral element method Komatitsch & Tromp (2002) which is a finite element method with a high degree polynomial interpolation.

When studying offshore seismic propagation, geological models used are composed of two types of medium : a fluid part (ocean) and a solid part (ocean bottom). As we are interested in the solid part where the oil reservoirs can be, we want to reduce the computational cost on the fluid part which is less important. To do so, we use different time steps in the fluid and in the solid. In most of the case, velocity wave in the fluid is smaller than in the solid, therefore, the stability condition (CFL), which depends on the maximum velocity and the time step, allow us to take a bigger time step in the fluid while preserving the numerical stability of the computation. My work in this thesis has consisted in introducing a local time stepping technique and in insuring coupling between fluid and solid by conserving energy on the interface.

In order to make more realistic simulations, I also introduced absorbing boundary conditions called Perfectly Match Layer (PML) for fluid-solid models. Such boundary conditions have the ability to absorb waves and then avoid artificial unrealistic reflections of the boundaries in order to simulate semi-infinite models.

Remerciements

Je voudrais faire part ici de ma reconnaissance envers toutes les personnes qui m'ont permis de mener à bien cette thèse.

Tout d'abord, merci à Dimitri Komatitsch pour m'avoir permis de faire cette thèse mais surtout pour m'avoir très bien guidé pendant ces 3 années et avoir toujours su trouver des idées quand j'étais en panne, et merci pour la qualité de ta recherche. Ensuite, je voudrais remercier Hélène Barucq qui dirige (et qui sait l'animer) l'équipe Magique 3D dans laquelle s'insérait ce projet de thèse et enfin merci à Total pour le soutien financier et en particulier Pierre Thore (pour l'accueil en stage et pendant la thèse).

Je voudrais également chaleureusement remercier Jocelyne Erhel, Luc Giraud, Stéphane Operto et Jérôme Monnier de m'avoir fait l'honneur d'accepter de juger mon travail.

Merci également à Julien Diaz et Roland Martin pour avoir pris part au jury mais aussi pour m'avoir bien aidé pendant ces 3 ans. Julien, en particulier merci pour l'aide énorme que tu m'as apportée sur la partie des pas de temps locaux mais aussi lors des dernières mises au point de ma soutenance auxquelles j'associe Hélène aussi.

Tout ça n'aurait pas été possible non plus sans le soutien des collègues alors un grand merci aux gens du MIGP (Mado, Pierre, Grégoire, Majed, Toqeer, Julien, Damien, Bertrand...) et de Magique3D (Caroline, Léna, Anne-Gaëlle, Cyril, Véro, Céline, Pieyre, Meriem...), j'en oublie et je m'en excuse. Un merci tout particulier à Bernard et Agnès pour avoir su m'écouter quand ça n'allait pas et me donner la force et le courage de ne pas baisser les bras (cette thèse, elle est pour vous... même si elle ne vous servira sûrement pas à grand chose, héhé!).

Cette thèse m'aura permis de rencontrer des doctorants d'autres disciplines et ainsi de voir qu'une thèse n'est jamais simple. Je voudrais donc saluer ici des amis doctorants à qui je pense : Guilhem, Élodie, Ludo, Isa, Marion, Sabrina (merci pour la compagnie à la cafet'), Lionel, Julie, Estelle, Sylvain, Nico, Christophe... et tous les gens de l'AMDA.

Maintenant pour m'avoir bien divertit en dehors de l'université je voudrais remercier les personnes qui me sont chères : Thomas et Hélène (ainsi que toute leur petite famille), Benoit et Grégoire (les compagnons de Road Trip), Arnaud, Sarah, Luc et Sabrina, Maia, Alistair, Guillaume, Diane, Nassim, Issam, Florent...

Et enfin je voudrais terminer ces remerciements par un gros merci à ma famille pour leur soutien indéfectible tout au long de mes études : merci mes parents (qui ont assuré pour le pot) ainsi que ma soeur et mon frère : Gaëlle et Josselin (qui ont donné un bon coup de main aussi) et mon grand-père qui m'a fait la bonne surprise de venir assister à ma soutenance.

Introduction

La propagation d'ondes sismiques est utilisée en géophysique pour imager le sous-sol. Les ondes sismiques ont pour caractéristique de se réfléchir et de se convertir sur les interfaces entre différents milieux. Ainsi, envoyer des ondes dans le sous-sol à l'aide d'une source sismique et enregistrer leurs temps d'arrivée grâce à des récepteurs sismiques nous permet de découvrir l'emplacement et la forme des différentes couches géologiques qui composent le sous-sol. En modélisant la propagation des ondes, on va pouvoir créer des sismogrammes synthétiques pour permettre la validation des modèles du sous-sol préliminairement définis à l'aide d'autres méthodes géophysiques. Avec les progrès informatiques de ces dernières décennies, de nombreuses méthodes numériques ont vu le jour pour modéliser le phénomène de propagation d'ondes pour différents types de matériaux comme les matériaux acoustiques (fluides), élastiques (roches), viscoélastiques (roches atténuantes), ou poroélastiques (roches poreuses, par exemple les réservoirs).

La méthode des différences finies (Yee, 1966; Alterman & Karal, 1968; Madariaga, 1976; Virieux, 1984, 1986) est une méthode classique très utilisée en géophysique pour la résolution numérique des équations de propagation des ondes sismiques car elle est facile à implémenter. En revanche, cette méthode utilise classiquement des maillages formés d'une grille régulière, ce qui entraîne des difficultés lorsque l'on doit propager des ondes dans des milieux déformés, par exemple des milieux avec topographie ou bathymétrie.

La méthode des éléments frontière (Boundary Element Method - BEM/IBEM, e.g. Sánchez-Sesma & Campillo (1991); Vai et al. (1999)) est une méthode qui est par construction moins coûteuse que les autres en terme de place mémoire. En effet, elle consiste à résoudre un problème posé sur les frontières du domaine à étudier équivalent au problème posé sur tout le domaine. On passe alors d'un problème en N dimensions à un problème en $N - 1$ dimensions. On réduit de ce fait le nombre d'inconnues, ce qui entraîne un gain de place mémoire. Mais cette méthode n'est applicable que pour des modèles composés d'un nombre fini de couches homogènes. De plus, cette méthode conduit à

la résolution d'un système linéaire dont la matrice à inverser est pleine et non symétrique, ce qui demande une grande puissance de calcul. Cette méthode n'est donc pas forcément avantageuse malgré le nombre réduit d'inconnues.

Les méthodes spectrales ou pseudo-spectrales (Tessmer & Kosloff, 1994; Carcione, 1994) sont des méthodes d'ordre élevé. L'avantage de ces méthodes par rapport à des méthodes d'ordre plus faible est qu'elles permettent de réduire le nombre de points par longueur d'onde nécessaire à la bonne approximation des ondes et d'atteindre ainsi une précision proche de la limite spectrale en terme d'échantillonnage. En revanche, ces méthodes sont définies de manière globale sur l'ensemble du domaine, donc elles ne sont pas adaptées à des milieux comportant des discontinuités franches (interfaces entre deux couches géologiques, failles, fractures etc.), ce qui est pourtant quasiment toujours le cas dans les milieux géologiques réels.

Les méthodes d'éléments finis classiques (Lysmer & Drake, 1972; Bielak et al., 2005) permettent l'utilisation de maillages beaucoup plus généraux de manière flexible. Contrairement aux différences finies, les maillages que l'on peut utiliser peuvent être composés d'éléments assez déformés, ce qui permet de s'adapter plus facilement à la forme irrégulière des modèles géologiques. Cependant, dans le cas général, ces méthodes requièrent la résolution d'un système linéaire et donc de ressources de calcul importantes. De plus, la résolution d'un système linéaire de grande taille n'est pas aisée dans le cas (très fréquent en pratique) où l'on utilise un ordinateur parallèle à mémoire distribuée. De plus, ces méthodes sont généralement des méthodes d'ordre faible et ne sont donc pas très adaptées au calcul de la propagation des ondes sismiques car elles entraînent une dispersion numérique importante.

La méthode des éléments spectraux (SEM, Patera (1984); Komatitsch & Vilotte (1998); Komatitsch & Tromp (1999); Fauqueux (2003)) est une méthode d'éléments finis d'ordre élevé utilisant des éléments quadrangulaires à 2D et hexaédriques à 3D. Avec une telle méthode, on combine la souplesse de maillage des éléments finis et l'ordre élevé et donc la précision des méthodes pseudo-spectrales sur chaque élément. De plus, contrairement aux méthodes d'éléments finis classiques, la matrice de masse est exactement diagonale par construction. Ainsi aucune inversion de matrice compliquée et coûteuse ou résolution de système linéaire n'est nécessaire dans l'algorithme.

Les méthodes de Galerkin discontinues (DG, Bernacki et al. (2006); Dumbser et al. (2007)) de haut degré basées sur des éléments triangulaires à 2D et tétraédriques à 3D commencent à être utilisées en géophysique depuis quelques années. Cependant pour un niveau de précision donné leur coût est très supérieur à celui de la méthode des éléments spectraux par exemple.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la modélisation numérique de la propagation des ondes sismiques dans des milieux où l'industrie pétrolière effectue des campagnes d'acquisition sismique marine. Ces campagnes consistent à créer une source sismique sous la surface de la mer (par exemple un canon à air embarqué sur un bateau) et à enregistrer les ondes après réflexion sur le fond de l'océan (bathymétrie) et sur les interfaces des couches géologiques situées en dessous. Ces milieux sont composés d'une partie fluide que l'on peut considérer comme homogène (l'océan, dans lequel on néglige toujours le léger gradient de vitesse des ondes de compression avec la profondeur lié à l'effet de thermocline) et d'une partie solide. Cette partie solide est composée de plusieurs couches géologiques pouvant avoir des formes géométriques complexes (en raison des déformations tectoniques passées). Les techniques de différences finies (Virieux, 1986; van Vossen et al., 2002) ou d'éléments spectraux par exemple (Komatitsch et al., 2000; Chaljub et al., 2007) permettent de calculer la propagation des ondes dans de tels modèles fluide-solide. Cependant, afin de diminuer le coût de calcul de ces méthodes, dans cette thèse nous allons chercher un moyen de diminuer de manière significative le nombre d'opérations à effectuer dans la partie fluide homogène du modèle.

Une première possibilité est de coupler deux méthodes de résolution différentes, par exemple d'utiliser des éléments spectraux pour la partie solide hétérogène qui peut être de forme complexe et d'utiliser une méthode d'éléments frontière dans la partie fluide qui est constituée d'une seule couche homogène. Il existe des exemples de couplage éléments frontière / éléments finis dans la littérature (Soares Jr. & Mansur, 2005), mais il faut calculer la solution en fréquence pour les éléments frontière et la coupler avec une méthode en temps pour les éléments finis, ce qui donne une technique mixte qui est difficile à implémenter sur un ordinateur parallèle à mémoire distribuée.

Une autre possibilité, qui est celle que nous allons développer dans cette thèse, consiste à utiliser la même méthode dans les deux parties mais avec des caractéristiques spatiales ou temporelles différentes afin de les adapter indépendamment de manière optimale aux caractéristiques de chaque milieu. Les méthodes numériques telles que les éléments finis ou les différences finies, dans leur version explicite en temps, sont des méthodes stables et précises sous certaines conditions (par exemple la condition de stabilité dite CFL) dépendant des paramètres de discrétisation et des propriétés mécaniques des milieux étudiés. Or, la vitesse de propagation des ondes sismiques est habituellement plus élevée dans la partie solide que dans la partie fluide. Il est alors tentant de résoudre l'équation des ondes avec un certain pas de temps dans le fluide et avec un pas de temps différent dans le solide afin de rester au plus près de la condition de stabilité dans chacun des deux milieux indépendamment. On économiserait ainsi des calculs en effectuant un raccord non conforme

en temps entre les deux régions (fluide et solide). L'idée est donc de créer une méthode de pas de temps local (Collino et al., 2003a,b; Diaz & Joly, 2005) pour un milieu fluide-solide. Nous créerons et validerons une telle technique dans le chapitre 3 de ce manuscrit. Il est important de noter que l'on pourrait appliquer un procédé similaire pour implémenter un raccord non conforme en espace (Chaljub et al., 2003; Jaiman et al., 2006), par exemple en utilisant une technique de joints dite de 'mortars'. Cependant, effectuer un tel raccord sur l'interface fluide-solide reviendrait à prendre un pas d'espace plus petit dans le fluide, ce qui ne réduirait pas le coût de calcul de cette partie à moins de combiner un raccord non conforme en espace avec un raccord non conforme en temps, mais cela conduirait à des complications techniques importantes.

Ce manuscrit de thèse s'organise de la façon suivante : dans le premier chapitre, nous allons tout d'abord brièvement rappeler et décrire les principes physiques et les équations qui gouvernent la propagation des ondes sismiques dans un milieu élastique ou acoustique ; puis nous décrirons brièvement la méthode des éléments spectraux qui sera utilisée dans toute la suite du manuscrit.

Le deuxième chapitre présentera une application de la méthode des éléments spectraux que nous avons effectuée en collaboration avec le Professeur Fransisco J. Sánchez-Sesma de l'Institut d'Ingénierie de l'Université de Mexico (UNAM) pour étudier les mouvements de rotation au niveau de récepteurs sismiques situés sur une surface libre présentant une topographie et soumis à l'arrivée d'ondes planes avec différents angles d'incidence. Pour cela nous avons dans un premier temps dû étudier comment implémenter des ondes planes dans la méthode des éléments spectraux, qui est une méthode implémentée dans le domaine temporel et sur un maillage de taille finie alors que les ondes planes considérées supposent en principe un milieu semi-infini.

Dans le troisième chapitre, nous présenterons la méthode des éléments spectraux avec pas de temps locaux que nous avons développée pour les interfaces fluide-solide. Nous construirons cette méthode en mettant en oeuvre numériquement le principe de conservation de l'énergie au niveau de l'interface, ce qui nous conduira à devoir résoudre un système linéaire le long de l'interface fluide-solide. Cette méthode sera assez générale car elle pourra s'appliquer pour tout rapport rationnel p/q entre les pas de temps dans le fluide et dans le solide.

Nous terminerons ce manuscrit par un chapitre sur l'implémentation de couches absorbantes parfaitement adaptées et optimisées à incidence rasante, dites Convolutional Perfectly Matched Layers (C-PML). En effet, un modèle géophysique dans le cas d'une étude effectuée à l'échelle locale ou régionale est la représentation d'une zone semi-infinie du sous-sol limitée lors de sa représentation sur un ordinateur par des bords qui sont fictifs (excepté le bord supérieur, qui est la surface libre du

modèle i.e. sa topographie). Mais les autres bords ne sont introduits que pour que le modèle puisse être discrétisé sur une machine de taille finie et donc l'énergie sismique qui touche ces bords doit y être idéalement complètement absorbée afin de simuler un milieu semi infini. Il est donc nécessaire d'introduire des conditions absorbantes (CLA) ou bien des couches absorbantes, les couches CPML étant les plus efficaces. Ces couches optimisées ont été étudiées en détail par Komatitsch & Martin (2007) pour un milieu élastique discrétisé par une technique de différences finies mais dans ce manuscrit de thèse nous les développerons en formulation variationnelle pour la méthode des éléments spectraux dans le cas d'un milieu composé en partie de couches fluides et en partie de couches solides.

Chapitre 1

Équation des ondes sismiques et méthode des éléments spectraux

Ce premier chapitre a pour but de décrire les principes physiques associés à la propagation des ondes pour comprendre le sens physique des équations mathématiques qui sont résolues lors des simulations numériques. Ces principes étant généraux, nous nous basons sur la présentation qui en est faite dans la première partie de la thèse de Dimitri Komatitsch (Komatitsch, 1997). Dans la deuxième partie du chapitre, nous présentons brièvement la méthode des éléments spectraux que nous utiliserons pour la résolution de l'équation des ondes dans les chapitres suivants de cette thèse.

1.1 Présentation de l'équation des ondes

La modélisation de la propagation des ondes dans les milieux élastiques complexes peut faire appel à des techniques numériques très variées telles que les méthodes de différences finies, des méthodes d'éléments finis, éléments frontières, éléments spectraux ou Galerkin discontinu. Toutes ces techniques ayant pour point commun la description des corps considérés à l'aide de la *théorie de l'élasticité*, dont les fondements ont été établis par Cauchy et Poisson au début du XIXème siècle, nous rappelons dans la première partie de ce chapitre les principaux résultats de cette théorie. La description sera inévitablement succincte, pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à de nombreux ouvrages classiques (par exemple Landau & Lifchitz (1953); Brillouin (1964); Germain & Muller (1994); Lemaitre & Chaboche (1985); Lubliner (1990); Duvaut (1990); Pilant (1979); Ben-Menahem & Singh (1981); Aki & Richards (1980); Achenbach (1973)...), dont nous nous sommes largement inspirés ici.

1.1.1 Tenseur de déformation

Le but de la théorie de l'élasticité est l'étude de la mécanique des corps solides considérés comme des milieux continus (approche macroscopique). Sous l'effet de l'ensemble des forces qui leur sont appliquées, les corps considérés subissent une déformation se traduisant tant par un changement de leur forme que par un changement de leur volume. Notons r le *vecteur position* d'un point du corps, notons x_i ses composantes dans un système de coordonnées que l'on se donne. Après déformation du corps, ses points se sont déplacés, notons alors r' (de composantes x'_i) le nouveau vecteur position de ce point matériel. Le *vecteur déplacement* de ce point est alors :

$$u = r' - r. \tag{1.1}$$

Généralement, la connaissance du vecteur déplacement en chaque point du corps suffit à déterminer la déformation de ce corps. Considérons deux points infiniment voisins. Notons dr , de composantes dx_i , le vecteur reliant ces deux points avant déformation, et dr' , de composantes dx'_i , le vecteur reliant ces deux mêmes points après déformation. La distance entre les deux points avant déformation est alors

$$dl = \sqrt{\sum_i dx_i^2} \tag{1.2}$$

et après déformation

$$dl' = \sqrt{\sum_i dx_i'^2}. \tag{1.3}$$

En élevant au carré, en utilisant la relation $dx'_i = dx_i + du_i$, et en sous-entendant la sommation sur l'indice muet i , on obtient

$$dl'^2 = dx_i^2 \tag{1.4}$$

et donc

$$dl'^2 = dx_i'^2 = (dx_i + du_i)^2. \tag{1.5}$$

Si maintenant nous introduisons la relation $du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k$, nous pouvons réécrire l'élément de longueur sous la forme

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_k dx_l. \tag{1.6}$$

Notons au passage qu'est utilisée ici, comme ce sera toujours le cas, sauf indication contraire, dans la suite de cette thèse, la *convention de sommation implicite sur les indices*, dite *convention*

d'Einstein, qui a le mérite de permettre d'alléger considérablement les notations.

L'expression ci-dessus peut être simplifiée en remarquant que, les indices étant muets, il est possible dans le troisième terme d'intervertir les indices i et l , et de réécrire le deuxième terme sous la forme symétrique $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) dx_i dx_k$, ce qui conduit à l'expression suivante

$$dl'^2 = dl^2 + 2\varepsilon_{ik} dx_i dx_k \quad (1.7)$$

où le tenseur ε_{ik} , symétrique par définition ($\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$), et appelé *tenseur de déformation*, est donné par

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right). \quad (1.8)$$

Dans de nombreux cas pratiques, et notamment lorsque l'on étudie la propagation des ondes élastiques, on peut faire l'hypothèse de petites perturbations et dans l'expression (1.8) le dernier terme, qui est du second ordre, peut être négligé, ce qui permet de retrouver l'expression classique pour des *déformations infinitésimales*

$$\varepsilon_{ik} \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (1.9)$$

qui est l'expression que nous utiliserons toujours par la suite.

1.1.2 Lois de conservation

À partir des lois de conservation fondamentales (conservation de la masse, de la quantité de mouvement et du moment angulaire), exprimées sous forme globale, nous pouvons retrouver leur expression locale dans l'hypothèse d'un milieu continu. Nous travaillons dans un espace euclidien muni d'un système de coordonnées cartésiennes. En sismologie, la distinction entre approche lagrangienne et eulérienne est rarement nécessaire car les fluctuations spatiales des déplacements, déformations et contraintes ont des longueurs d'onde beaucoup plus grandes que l'amplitude des déplacements des particules (Aki & Richards, 1980). Dans ce cas particulier, il n'existe en pratique aucune différence entre l'évaluation d'un gradient en un point fixe (approche eulérienne) ou pour une particule donnée que l'on suit dans son mouvement (approche lagrangienne).

Conservation de la masse

Soit $M(t)$ la masse d'un objet de volume $V(t)$ au cours du temps. Pour un système isolé, il n'y a pas de création de masse, la loi de conservation globale de la masse s'écrit donc

$$\frac{dM}{dt}(t) = 0 \tag{1.10}$$

En introduisant la densité de masse $\rho(\mathbf{x}, t)$, la masse totale du volume $V(t)$ s'écrit

$$M(t) = \iiint_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV . \tag{1.11}$$

Le volume $V(t)$ suivant la matière dans son mouvement, la condition (1.11) se traduit par

$$\iiint_{V(t)} \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV + \iint_{S(t)} \rho(\mathbf{x}, t) v_j(\mathbf{x}, t) n_j dS = 0 \tag{1.12}$$

en ayant noté $S(t)$ le contour de $V(t)$, n_j la j -ième composante de la normale extérieure à $S(t)$, et $v_j(\mathbf{x}, t)$ la j -ième composante de la vitesse de la particule se trouvant en x à l'instant t . En utilisant le théorème de la divergence nous obtenons

$$\iiint_{V(t)} \left(\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \partial_j(\rho(\mathbf{x}, t) v_j(\mathbf{x}, t)) \right) dV = 0 . \tag{1.13}$$

Cette expression étant vraie pour tout volume V , et l'intégrande étant continu, on en déduit la loi de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = 0 . \tag{1.14}$$

Conservation de la quantité de mouvement

Par définition, la quantité de mouvement contenue dans le volume $V(t)$ est donnée par

$$P(\mathbf{x}, t) = \iiint_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV . \tag{1.15}$$

La force qui agit sur ce volume est la somme des forces d'origine extérieure appliquées à ce volume

$$F_{ext}(t) = \iiint_{V(t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) dV \tag{1.16}$$

et des forces intérieures résultant de la traction exercée à la surface $S(t)$ du volume $V(t)$

$$F_{int}(t) = \iint_{S(t)} \tau(\mathbf{x}, t) dS \quad (1.17)$$

où le vecteur traction est donné par

$$\tau_i = \sigma_{ij} n_j \quad (1.18)$$

le tenseur σ_{ij} étant appelé tenseur des contraintes, et n_j étant la j -ième composante de la normale extérieure à $S(t)$. En utilisant cette définition de la traction ainsi que le théorème de la divergence, nous avons

$$F_{int}(t) = \iint_{S(t)} \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) n_j(\mathbf{x}, t) dS = \iiint_{V(t)} \partial_j \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) dV. \quad (1.19)$$

En écrivant maintenant la *conservation globale de la quantité de mouvement*, ou *deuxième loi de Newton*, nous obtenons

$$\frac{dP}{dt}(t) = F_{ext}(t) + F_{int}(t). \quad (1.20)$$

Avec l'expression de la quantité de mouvement (1.15) et des forces extérieures (1.16) et intérieures (1.17), nous en déduisons

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \partial_j (\rho v_i v_j) = f_i + \partial_j \sigma_{ij} \quad (1.21)$$

qui donne la forme habituelle de la conservation de la quantité de mouvement écrite sous forme locale

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \partial_j (\rho v_i v_j - \sigma_{ij}) = f_i. \quad (1.22)$$

Conservation du moment angulaire

On peut montrer (voir par exemple Germain & Muller (1994), p. 86), et nous admettrons, que dans le cas de déformations infinitésimales la loi de conservation du moment angulaire se traduit par la symétrie du tenseur des contraintes ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$).

1.1.3 Équations de l'élastodynamique

Loi de comportement

Pour pouvoir résoudre le système d'équations de conservation décrit ci-dessus, il est nécessaire de se donner une loi reliant les contraintes dans le milieu à l'histoire de ses déformations, c'est-à-dire de définir la *rhéologie* du milieu. Une telle loi est appelée *loi de comportement* du matériau. Il

existe de nombreux modèles de rhéologie classiques, par exemple de type élastique, viscoélastique, plastique, viscoplastique, fluide... Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes intéressés plus particulièrement au modèle solide élastique et au modèle fluide acoustique. Commençons par décrire le modèle élastique.

Soit $\sigma(\mathbf{x}, t) = \{\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)\}$ le tenseur des contraintes et $\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \{\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t)\}$ le tenseur des déformations en un point x du milieu à l'instant t . Le milieu est dit *élastique* si les contraintes à l'instant t (au point x) ne dépendent que des déformations à l'instant t (en ce même point x). Pour de petites déformations, un développement de Taylor donne

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + c_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} d_{ijklmn} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} + \dots \quad (1.23)$$

Pour des déformations suffisamment petites, on peut garder seulement le premier terme du développement, ce qui donne la loi de Hooke (parfois appelée loi de Hooke *généralisée*)

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t_0) + c_{ijkl}(x) \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, t). \quad (1.24)$$

Le terme $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t_0)$ est appelé précontrainte et correspond à l'état de contrainte du système lorsqu'il est à l'équilibre. Grâce à la loi de comportement, les tenseurs c_{ijkl} , d_{ijklmn} , ... étant donnés, on peut à tout instant calculer le champ de contrainte σ à partir du champ de déformation ε . Si nous ajoutons cette loi aux lois de conservation énoncées en (1.14) et (1.22), ainsi qu'à la définition du tenseur des déformations (1.9), nous avons alors un ensemble complet d'équations permettant de décrire le système étudié.

Équation classique dans le cas de petites déformations

En développant et en réordonnant les termes de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.22), l'on obtient

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} - \partial_j \sigma_{ij} + \rho v_j \partial_j v_i + v_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_j (\rho v_j) \right) = f_i. \quad (1.25)$$

D'après l'équation de conservation de la masse (1.14), le dernier terme de gauche est nul, donc

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} - \partial_j \sigma_{ij} + \rho v_j \partial_j v_i = f_i. \quad (1.26)$$

Dans le cadre de l'étude de la propagation des ondes élastiques, nous pouvons raisonnablement faire l'hypothèse d'un milieu soumis à de petites perturbations. Cette approximation permet de négliger certains termes et conduit à l'équation classique que nous utiliserons par la suite

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \partial_j \sigma_{ij} + f_i. \quad (1.27)$$

Milieu élastique linéaire isotrope

Dans le cas d'un matériau élastique linéaire, la connaissance du tenseur des paramètres élastiques c_{ijkl} suffit à relier les contraintes aux déformations en tout point du matériau. Ce tenseur possède les symétries suivantes :

$$\begin{aligned} c_{ijkl} &= c_{klij} && \text{(symétries majeures),} \\ c_{ijkl} &= c_{jikl} = c_{ijlk} && \text{(symétries mineures).} \end{aligned} \quad (1.28)$$

De plus, \mathbf{c} est défini positif :

$$c_{ijkl} \psi_{ij} \psi_{kl} > \alpha |\psi| \quad \text{avec} \quad \alpha > 0 \quad \forall \psi, \psi_{ij} = \psi_{ji} \neq 0. \quad (1.29)$$

Le cas le plus simple pour un milieu élastique est le cas où les propriétés de ce milieu sont les mêmes suivant toutes les directions de l'espace. Un tel milieu est dit *isotrope*. Dans un tel cas, deux paramètres élastiques seulement suffisent à caractériser la relation liant les contraintes aux déformations. On peut par exemple utiliser les deux *paramètres de Lamé* λ et μ (Lamé, 1852) et écrire la loi de Hooke sous la forme

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (1.30)$$

ce qui revient à dire que

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu \delta_{il} \delta_{jk} \quad (1.31)$$

où δ_{ij} représente le symbole de Kronecker, défini par $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ sinon.

Si les deux paramètres de Lamé λ et μ sont une des paramétrisations possibles dans le cas élastique isotrope, ce n'est pas la seule. Un défaut des paramètres de Lamé est qu'ils ne sont pas reliés de manière directe à une grandeur physique facilement mesurable. Parmi les autres paramètres mesurables fréquemment utilisés, citons par exemple :

– le module de rigidité à la compression

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \tag{1.32}$$

– le module de Young

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \tag{1.33}$$

– le coefficient de Poisson

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \tag{1.34}$$

– la vitesse des ondes de compression (ondes P)

$$c_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \tag{1.35}$$

– la vitesse des ondes de cisaillement (ondes S)

$$c_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{1.36}$$

Quelques propriétés utiles de ces paramètres peuvent être mentionnées. Le coefficient de Poisson est tel que

$$-1 < \nu \leq \frac{1}{2} \tag{1.37}$$

Le voisinage de la limite $\nu = \frac{1}{2}$ correspond à un milieu très faiblement consolidé. Il est intéressant de remarquer que la nécessité de pouvoir définir une densité d'énergie qui soit une forme définie positive impose seulement la contrainte $\nu > -1$ et non pas $\nu > 0$ (Lemaitre & Chaboche (1985), p. 127). Pour la plupart des roches, le coefficient de Poisson se situe entre 0.20 et 0.35.

Les vitesses de propagation des ondes S et P sont telles que

$$c_S < \frac{c_P}{\sqrt{2}} \tag{1.38}$$

d'où le nom de ces ondes (P=Primary, S=Secondary), les ondes P directes arrivant toujours en premier, avant les ondes S directes. On attribue également la signification P=Pressure et S=Shear à ces noms, les ondes P étant des ondes de compression et les ondes S des ondes de cisaillement.

Système hyperbolique du premier ou du second ordre

Nous venons de voir que l'équation des ondes dans le cas élastique linéaire isotrope peut s'écrire sous la forme du système

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \partial_j \sigma_{ij} + f_i \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j) \\ \sigma_{ij} &= \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}\end{aligned}\tag{1.39}$$

Nous sommes donc en présence d'un système hyperbolique du second ordre pour le champ de déplacement inconnu \mathbf{u} . Nous nous attendons donc à trouver des solutions de type propagatif, en particulier l'existence d'ondes planes comme solutions particulières du système dans le cas homogène.

Notons qu'il est possible de réécrire les équations ci-dessus sous la forme d'un système hyperbolique du premier ordre en temps en choisissant comme inconnues le déplacement, la vitesse et les contraintes (Hughes & Marsden, 1978). Si l'on ne s'intéresse qu'à la vitesse et aux contraintes, le système peut être reformulé très simplement (Virieux, 1986; Carcione & Wang, 1993), par exemple à 2D en écrivant :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} + S\tag{1.40}$$

avec

$$U = [v_x, v_y, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}]^T\tag{1.41}$$

et

$$S = [f_x, f_y, 0, 0, 0]^T\tag{1.42}$$

en ayant posé

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} \\ \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\tag{1.43}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

Formulation faible de l'équation des ondes élastique

La formulation de l'équation des ondes élastique sous la forme du système 1.39 (écrit à l'aide d'opérateurs différentiels) est appelé la formulation *forte* de l'équation des ondes. Généralement, cette formulation est utilisée pour la résolution de l'équation des ondes par des méthodes de différences finies qui consistent à réécrire les dérivées partielles des vecteurs solutions (classiquement le vecteur 1.41) sous forme de différences de ces vecteurs entre points de grille voisins.

Dans cette thèse, nous utilisons une méthode d'éléments finis spectraux pour résoudre le problème. Ces méthodes s'emploient à la résolution d'équations aux dérivées partielles mais ne s'appliquent pas directement à la formulation forte d'un problème. Il faut d'abord reformuler le système d'équation en un système équivalent sous forme de formulation variationnelle : c'est la formulation intégrale ou *faible*. Pour l'obtenir, on multiplie l'eq. (1.39) par des fonctions tests \mathbf{w} prises dans l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ qui est l'espace formé de toutes les fonctions de $L^2(\Omega)$ dont la dérivée première appartient également à $L^2(\Omega)$. Puis on intègre sur tout le domaine Ω . Dans toute cette thèse, on désignera le domaine de résolution des équations par Ω et sa frontière par Γ . On obtient alors un système dont la solution \mathbf{u} appartient à $H^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \mathbf{w} \, dx = - \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{w} \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} \, dx + \int_{\Gamma} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{w} \, d\gamma \quad (1.45)$$

avec $\hat{\mathbf{n}}$ le vecteur unité normal au bord Γ du domaine Ω de composante \hat{n}_j , $j = x, z$ et \mathbf{f} le vecteur source. L'équation des ondes est alors vérifiée quelles que soient les fonctions tests \mathbf{w} prises dans le même espace que le vecteur déplacement \mathbf{u} solution que l'on cherche.

On peut alors appliquer une méthode d'éléments finis telle que la méthode des éléments spectraux que l'on détaillera plus loin pour calculer chaque intégrale numériquement à l'aide de formules de quadratures et ainsi résoudre le problème.

1.1.4 Différents types d'ondes rencontrés en milieux élastiques

Dans le cas de la propagation d'ondes dans un milieu élastique linéaire isotrope, il peut exister différents types d'ondes. Sont détaillés ici les principaux types d'ondes susceptibles d'être rencontrés dans les milieux élastiques isotropes.

Ondes directes, réfléchies ou réfractées

Dans le cas d'une source placée dans un milieu homogène infini élastique, deux types d'ondes existent, appelées onde directe P et onde directe S. Pour un récepteur placé en champ lointain, l'onde P arrive la première, elle a voyagé à la vitesse $c_P = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ et correspond à une compression pure. Le déplacement des particules est parallèle à la direction de propagation (onde longitudinale). L'onde S arrive en second, elle a voyagé à la vitesse $c_S = \sqrt{\mu/\rho}$ et correspond à un cisaillement pur. Le déplacement des particules est perpendiculaire à la direction de propagation (onde transversale). Si maintenant le domaine considéré n'est plus infini, mais borné, lorsque l'une ou l'autre de ces ondes rencontre une frontière du domaine, un couplage entre les modes P et S se produit à cette frontière, et il en résulte dans le cas général des ondes réfléchies des deux types (P et S) pour une onde incidente purement P ou purement S. Dans le cas d'une onde S incidente sur une interface cependant, comme c_P est toujours plus grand que c_S , il existe un *angle critique*

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{c_S}{c_P}\right) \quad (1.46)$$

au-delà duquel il n'existe pas d'onde P réfléchie excitée par l'onde S incidente mais l'onde convertie est une onde inhomogène (Achenbach, 1973). Qualitativement, le même type de phénomène se produit lorsqu'une onde P ou une onde S rencontre une discontinuité de propriétés élastiques au sein du milieu (interface). Dans un tel cas, et suivant la valeur de l'angle d'incidence, une onde P ou S incidente peut donner naissance à quatre ondes : P réfléchie, S réfléchie, P transmise et S transmise. Cette propriété de conversion de mode aux interfaces dans un modèle géologique est à l'origine de la grande complexité de bons nombres d'enregistrements sismiques, le nombre de phases observées pouvant devenir rapidement très important.

Dans le cas particulier où l'onde est incidente avec l'angle critique, pour une onde passant d'un milieu de vitesse plus faible à un milieu de vitesse plus grande, l'onde transmise va ressortir avec un angle de 90 degrés par rapport à la normale à l'interface. L'énergie voyage alors le long de l'interface avec la vitesse du milieu le plus rapide, et les récepteurs placés au delà d'une distance appelée

distance critique vont enregistrer une onde appelée *onde réfractée*, qui est très utilisée en pratique dans de nombreuses campagnes sismiques.

Ondes de Rayleigh, de Love et de Stoneley

Lorsqu'un domaine élastique homogène est limité par une surface libre (correspondant à une condition de traction nulle à la surface), il existe un type d'ondes particulier, mis en évidence par Lord Rayleigh (Rayleigh, 1887) et correspondant à des ondes se propageant le long de la surface du milieu, dans un voisinage de celle-ci, sans toutefois pénétrer dans le milieu (onde évanescence avec la profondeur). Ces ondes sont appelées *ondes de surface* ou *ondes de Rayleigh*. On peut montrer que ces ondes voyagent à une vitesse c_R toujours plus faible que celle de l'onde S (Landau & Lifchitz, 1953), solution de :

$$\left(\frac{c_R}{c_s}\right)^6 - 8\left(\frac{c_R}{c_s}\right)^4 + 8\left(\frac{c_R}{c_s}\right)^2 \left(3 - 2\frac{c_s^2}{c_p^2}\right) - 16\left(1 - \frac{c_s^2}{c_p^2}\right) = 0 \quad (1.47)$$

Comme c_s/c_p ne dépend que du coefficient de Poisson, puisque :

$$\frac{c_s}{c_p} = \sqrt{\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}} \quad (1.48)$$

le rapport c_R/c_s peut être calculé numériquement comme une fonction du seul coefficient de Poisson. Viktorov (1967) trouve par ajustement la loi empirique suivante :

$$\frac{c_R}{c_s} = \frac{0.862 + 1.14\nu}{1 + \nu} \quad (1.49)$$

et les valeurs typiques suivantes peuvent être données (d'après Harker (1988)) :

ν	c_s/c_p	c_R/c_s
0.00	0.707	0.862
0.25	0.577	0.919
0.33	0.500	0.932
0.40	0.408	0.941
0.50	0.000	0.955

Notons au passage quelques propriétés importantes de l'onde de Rayleigh :

- L'onde de Rayleigh à la surface d'un milieu homogène plan est non dispersive. L'onde ne sera

dispersive que si des hétérogénéités de propriétés élastiques sont présentes dans l'épaisseur où se propage l'onde de Rayleigh, par exemple dans la cas d'une fine couche de vitesse lente située sur un demi-espace homogène de vitesse plus rapide.

- Dans le cas d'un milieu dont la surface présente une courbure (topographie), celle-ci induit une dispersion de l'onde de Rayleigh même si le milieu est homogène (Pilant, 1979). La dispersion est alors fortement influencée par la valeur de la courbure relativement à la longueur d'onde caractéristique de l'onde de Rayleigh se propageant dans le milieu. Notons que dans le cas d'une onde de Rayleigh rencontrant une forte courbure de la surface, des conversions de mode d'ondes de Rayleigh en ondes de volume peuvent également se produire (Rulf, 1969).
- L'onde de Rayleigh est aisément reconnaissable à sa polarisation elliptique rétrograde dans le plan de propagation. Un enregistreur tricomposantes placé à la surface du sol l'enregistrera donc à la fois sur la composante horizontale parallèle à la direction de propagation et sur la composante verticale.

Love (1911) a également montré qu'une onde de surface, oscillant perpendiculairement au plan de propagation, peut exister lorsqu'une couche de propriétés élastiques différentes est située à la surface d'un demi-espace. Une telle onde est appelée *onde de Love*. À la différence de l'onde de Rayleigh, l'onde de Love ne peut exister si le demi-espace est totalement homogène. L'onde de Love est de plus toujours dispersive. Ces ondes s'accompagnent d'un mouvement horizontal du sol. Un enregistreur tricomposantes placé à la surface du sol les enregistrera sur la composante horizontale perpendiculaire à la direction de propagation.

Dans le cas d'une interface entre deux solides, ou entre un fluide et un solide, une solution évanescente peut également exister et se propager le long de l'interface. De tels modes sont appelés *ondes d'interface*, ou encore *ondes de Stoneley* (Stoneley, 1924). Il convient cependant de noter que des telles solutions n'existent avec une amplitude significative que pour une plage de valeurs assez réduite des densités et des propriétés élastiques des matériaux en contact (Pilant, 1979). Par exemple, dans le cas de deux solides en contact, il faut que les vitesses S des deux milieux soient proches pour qu'une onde d'interface significative se propage.

1.1.5 Équation des ondes acoustiques

Les modèles auxquels on s'intéresse dans ce manuscrit peuvent comprendre une partie fluide (acoustique) en plus de la partie solide (élastique). L'équation des ondes en milieu acoustique est légèrement différente de celle présentée pour le cas élastique. On redéfinit ici la loi de comportement

dans un milieu acoustique. Les milieux acoustiques sont généralement utilisés pour représenter des fluides même si dans certains cas, comme pour faire de l'inversion sismique, on utilise les équations de l'acoustique en premier lieu pour modéliser la propagation d'ondes dans les milieux solides car les équations sont plus simples. Comparés aux solides, les fluides n'ont pas de résistance à la torsion donc n'ont pas de contraintes de cisaillement c'est-à-dire que la propagation d'ondes S (ondes de cisaillement) est impossible. Le tenseur d'élasticité c_{ijkl} s'exprime donc seulement en fonction du module d'incompressibilité κ dépendant de c_P la vitesse de propagation des ondes (en m.s^{-1}) et de ρ tel que $\kappa = \rho c_P^2$ et s'écrit :

$$c_{ijkl} = \kappa \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (1.50)$$

ce qui revient à prendre

$$\sigma_{ij} = \kappa \delta_{ij} \varepsilon_{kk} . \quad (1.51)$$

On peut remplacer $\underline{\underline{\sigma}}$ dans le système (1.39) par la pression p du fluide en tout point \mathbf{x} et à tout instant t , que l'on définit de la façon suivante :

$$p = -\kappa \nabla \cdot \mathbf{u} , \quad (1.52)$$

donc on a $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}$. On peut alors écrire l'équation des ondes acoustique sous la forme :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} , \\ p &= -\kappa \nabla \cdot \mathbf{u} , \end{aligned} \quad (1.53)$$

avec \mathbf{u} le champ vectoriel de déplacement dans le fluide de composantes u_i avec $i = 1, 2$ (ou $i = x, z$), p un scalaire mesurant la pression en tout point du fluide, ρ la densité (en kg.m^{-3}).

On peut également introduire un potentiel ϕ dans les eq. (1.53) tel que $\nabla \phi = \rho \mathbf{u}$ comme dans Komatitsch & Tromp (2002); Chaljub & Valette (2004); Nissen-Meyer et al. (2007). Le système devient alors :

$$\kappa^{-1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \nabla \cdot (\rho^{-1} \nabla \phi) . \quad (1.54)$$

On en déduit la formulation *faible* (1.55) suivante :

$$\int_{\Omega} \kappa^{-1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} w d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \rho^{-1} \nabla \phi \cdot \nabla w d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} \rho^{-1} \nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{n}} w d\gamma \quad (1.55)$$

où w représente les fonctions tests scalaires prises dans $H^1(\Omega)$ et $\hat{\mathbf{n}}$ le vecteur normal au bord Γ du domaine Ω .

1.1.6 Conditions de raccord fluide-solide

Pour les modèles comprenant des parties fluide et solide, il faut introduire les conditions de raccord à imposer entre les deux systèmes d'équations 1.53 et 1.39. On a sur l'interface fluide-solide la continuité du déplacement normal (eq. 1.56) et du vecteur traction (eq. 1.56) Komatitsch et al. (2000); Diaz & Joly (2005) :

$$\rho^{-1} \nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (1.56)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\partial_t^2 \phi \hat{\mathbf{n}}, \quad (1.57)$$

avec $\hat{\mathbf{n}}$ vecteur unité normal à l'interface. On intègre alors les relations (1.56) et (1.57) dans les formulations faibles respectivement (1.55) et (1.45), et l'on obtient le système couplé suivant :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_f} \kappa^{-1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} w \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega_f} \rho^{-1} \nabla \phi \cdot \nabla w \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{ext}} \rho^{-1} \nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{n}} w \, d\gamma + \int_{\Gamma_{fs}} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} w \, d\gamma \\ \int_{\Omega_s} \rho \partial_t^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{w} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{ext}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{w} \, d\gamma - \int_{\Gamma_{fs}} \partial_t^2 \phi \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{w} \, d\gamma. \end{cases} \quad (1.58)$$

où Ω_f et Ω_s représentent respectivement les domaines fluide et solide, les Γ_{ext} sont les frontières externes du domaine et Γ_{fs} l'interface fluide-solide.

1.2 Méthode des éléments spectraux

On explique ici brièvement comment résoudre l'équation des ondes élastiques ou l'équation des ondes acoustiques à l'aide la méthode des éléments spectraux. Pour la résolution du problème couplé fluide-solide, on renvoie le lecteur à Komatitsch et al. (2000); Komatitsch & Tromp (2002); Chaljub & Valette (2004); Chaljub et al. (2007); Nissen-Meyer et al. (2007, 2008) ou au Chapitre 3 de ce manuscrit.

La méthode des éléments spectraux est une méthode d'éléments finis de degré élevé d'interpolation polynomiale développée initialement pour la résolution de problèmes en mécanique des fluides (Patera, 1984; Rønquist, 1988; Maday & Patera, 1989; Fischer, 1990; Azaiez et al., 1994; Yoon & Chung, 1996) puis appliquée à la propagation d'ondes sismiques c'est-à-dire aux équations

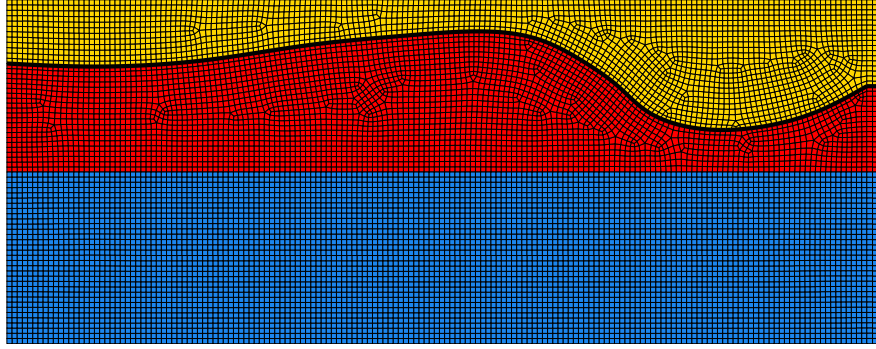


Fig. 1.1 – Exemple de modèle à trois couches que l'on maille à l'aide de quadrangles en suivant la géométrie des couches.

de l'élastodynamique (Priolo et al., 1994; Komatitsch, 1997; Faccioli et al., 1997; Komatitsch & Vilotte, 1998; Seriani, 1998; Komatitsch & Tromp, 1999; Paolucci et al., 1999; Fauqueux, 2003). Cette méthode est basée sur des maillages à éléments quadrangulaires à 2D ou hexahédriques à 3D et utilise les points de Gauss-Lobatto-Legendre comme degrés de liberté, ce qui donne une matrice de masse diagonale rendant la résolution du schéma en temps explicite. On utilise un schéma de différences finies de Newmark d'ordre 2 pour la discrétisation en temps.

1.2.1 Discrétisation spatiale

À partir des formulations faibles des eq. (1.55) ou (1.45), on cherche à calculer les intégrales posées sur le domaine Ω à l'aide de formules d'intégration numérique. Pour cela, on décompose chaque intégrale en somme d'intégrales posées sur des sous-domaines plus petits.

On crée un maillage pour le domaine fermé $\bar{\Omega}$ c'est-à-dire que l'on divise $\bar{\Omega}$ en union d'éléments quadrangulaires $\bar{\Omega}_e$ telle que $\bar{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \bar{\Omega}_e$ où l'intersection $\bar{\Omega}_e \cap \bar{\Omega}_{e'}$ de deux éléments différents e et e' est soit vide soit composée d'un côté ou d'un point (voir Fig. 1.1).

Une fois les éléments définis, on construit des fonctions transformant chaque élément du maillage en l'élément de référence. Dans la méthode des éléments spectraux à 2D, l'élément de référence est le carré $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Sur chaque élément, on introduit les fonctions de forme N_k définies à partir des polynômes de Lagrange l_k^2 et associées aux points de contrôle \mathbf{x}_k pour $k = 1, \dots, n_k$ où n_k est le nombre de points de contrôle nécessaires à la définition de la géométrie d'un élément quelconque. À 2D, on peut avoir soit quatre points de contrôle qui sont les quatre sommets du quadrangle soit neuf points de contrôle qui sont les quatre sommets, les quatre milieux des arêtes et le centre du quadrangle (voir Fig. 1.2).

Les fonctions de forme sont composées d'un produit de polynômes de Lagrange de degré 2 de la

façon suivante (la numérotation des fonctions de forme correspond à la numérotation des points de contrôle de la Fig. 1.2) où (ξ, η) est le système de coordonnées sur l'élément de référence :

– pour les quatre coins des éléments :

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= l_1^2(\xi)l_1^2(\eta) & ; & & N_2(\xi, \eta) &= l_3^2(\xi)l_1^2(\eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= l_3^2(\xi)l_3^2(\eta) & ; & & N_4(\xi, \eta) &= l_1^2(\xi)l_3^2(\eta) \end{aligned} \quad (1.59)$$

– pour le milieu des arêtes :

$$\begin{aligned} N_5(\xi, \eta) &= l_2^2(\xi)l_1^2(\eta) & ; & & N_6(\xi, \eta) &= l_3^2(\xi)l_2^2(\eta) \\ N_7(\xi, \eta) &= l_2^2(\xi)l_3^2(\eta) & ; & & N_8(\xi, \eta) &= l_1^2(\xi)l_2^2(\eta) \end{aligned} \quad (1.60)$$

– pour le centre du quadrangle :

$$N_9(\xi, \eta) = l_2^2(\xi)l_2^2(\eta) \quad (1.61)$$

On peut retrouver les expressions analytiques des fonctions de forme 2D dans Hughes (1987) et dans Dhatt & Touzot (1984). Les polynômes l_k^2 pour $k = 1, \dots, 3$ présents dans la définition des fonctions de forme sont les polynômes de Lagrange de degré 2 posés sur $[-1, 1]$ tels que $l_k^2(\xi_i) = \delta_{ik}$, δ étant le symbole de Kronecker ($\delta_{ik} = 1$ si $i = k$ et $\delta_{ik} = 0$ sinon), et les ξ_i sont les points de contrôles 1D du segment $[-1, 1]$ définis par $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 0$ et $\xi_3 = 1$. Ces polynômes sont de la forme :

$$l_k^n(\xi) = \prod_{\substack{k'=1 \\ k' \neq k}}^{n+1} \frac{\xi - \xi_{k'}}{\xi_k - \xi_{k'}}. \quad (1.62)$$

Par exemple, pour $l_3^2(\xi) = \frac{1}{2}(\xi - 1)\xi$, on a bien $l_3^2(-1) = 0$, $l_3^2(0) = 0$ et $l_3^2(1) = 1$.

Si l'on considère $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$ les coordonnées locales dans l'élément de référence et $\mathbf{x} = (x, z)$ les coordonnées globales projetées de $\boldsymbol{\xi}$ après transformation de l'élément de référence en élément quelconque du maillage, on peut définir une relation permettant de passer des coordonnées locales aux coordonnées globales à partir d'une combinaison linéaire des fonctions de formes N_k associées aux coordonnées des points de contrôle \mathbf{x}_k telle que (Komatitsch, 1997) :

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{k=1}^{n_k} N_k(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}_k \quad (1.63)$$

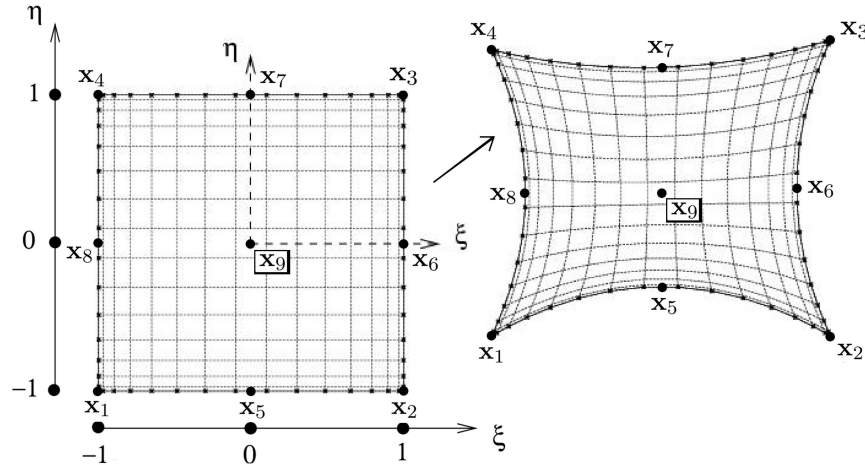


Fig. 1.2 – Illustration du passage de l'élément de référence $[-1, 1] \times [-1, 1]$ à un élément quelconque. Les éléments sont représentés avec leur grille de Gauss-Lobatto-Legendre d'ordre $r = 15$ (soit 16 points de Gauss-Lobatto-Legendre dans chaque direction). Cette figure est prise de Komatitsch (1997).

Lors de la construction d'un maillage, on s'assure de la bonne définition des éléments en calculant leur Jacobien donné par $J(\xi, \eta) = |\partial \mathbf{x}(\xi, \eta) / \partial \boldsymbol{\xi}|$. Le Jacobien représente le déterminant de la matrice Jacobienne (2×2 à 2D) définie sur chaque élément e en (ξ, η) par $(MJ_e)_{\alpha\beta} = \partial \mathbf{x}_\alpha / \partial \xi_\beta$ pour $\mathbf{x} = (x, z)$ et $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$. En utilisant l'eq. (1.63), on déduit les coefficients $(MJ_e)_{\alpha\beta}$ pour un point quelconque $\boldsymbol{\xi} \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ en fonction des points de contrôle $\mathbf{x}^k = (x^k, z^k) = (\mathbf{x}_1^k, \mathbf{x}_2^k)$:

$$(MJ_e(\xi, \eta))_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{n_k} \frac{\partial N_k(\xi, \eta)}{\partial \xi_\beta} \mathbf{x}_\alpha^k. \quad (1.64)$$

Le comportement du Jacobien est directement lié à la géométrie des éléments et donne des informations sur la qualité du maillage (Hughes, 1987). Pour s'assurer qu'il y a une et une seule fonction de transformation de l'élément de référence vers l'élément déformé e , on s'assure que le Jacobien $J_e = \det(MJ_e)$ est non nul en chaque point de l'élément e , et donc qu'il existe une fonction inverse permettant le passage de chaque point \mathbf{x} de l'élément e à son équivalent $\boldsymbol{\xi}$ dans l'élément de référence.

1.2.2 Interpolation polynomiale

Afin de pouvoir représenter le vecteur déplacement \mathbf{u} solution de l'équation des ondes sur chaque élément, on effectue une interpolation polynomiale de la solution aux points d'interpolation (ou degrés de liberté) définis suivant le type d'éléments finis choisi pour résoudre la formulation faible du problème. Dans le cas des éléments spectraux, on utilise les polynômes de Lagrange (eq. 1.62)

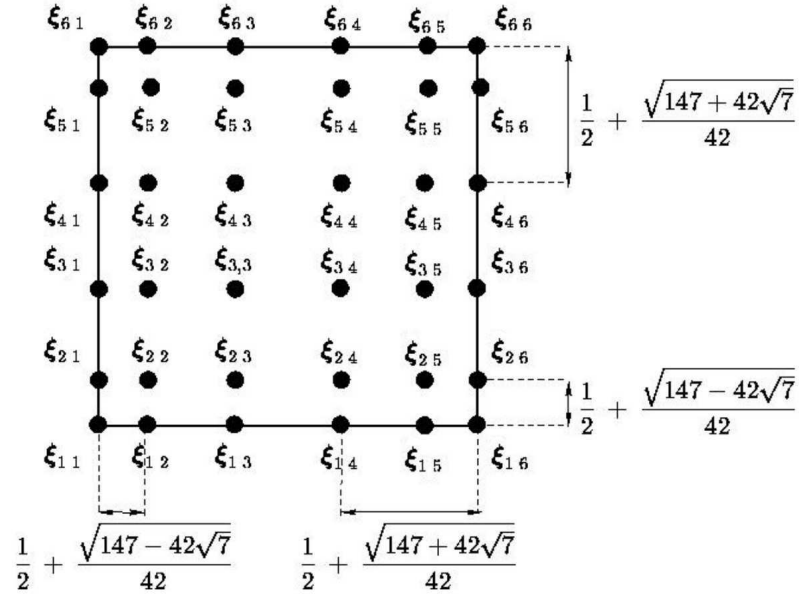


Fig. 1.3 – Illustration de l'élément de référence d'ordre 5 discrétisé avec les points de Gauss-Lobatto-Legendre. Cette figure est prise de Fauqueux (2003).

associés aux points de Gauss-Lobatto-Legendre car ils permettent d'obtenir une matrice de masse diagonale dans le système matriciel final, ce qui permet l'utilisation d'un algorithme explicite pour la résolution en temps.

Décrivons l'interpolation polynomiale pour une méthode d'ordre r . À 1D, les $r + 1$ points d'intégration de Gauss-Lobatto-Legendre $\xi_i, i = 0, \dots, r$ sont les racines du polynôme $(1 - \xi^2)P_r'(\xi)$ où P_r' est la dérivée du polynôme de Legendre de degré r défini sur $[-1, 1]$. On a alors à 2D $(r+1)^2$ points de Gauss-Lobatto-Legendre $\xi^{\alpha\beta} = (\xi_\alpha, \eta_\beta)$ définis sur l'élément de référence (exemple d'élément de référence d'ordre 5 sur la Fig. 1.3).

Une fonction f quelconque est interpolée sur un élément à l'aide d'un produit de polynômes de Lagrange :

$$f(\mathbf{x}(\xi, \eta)) \approx \sum_{\alpha, \beta=0}^r f^{\alpha\beta} l_\alpha^r(\xi) l_\beta^r(\eta) \quad (1.65)$$

où $f^{\alpha\beta} = f(\mathbf{x}(\xi_\alpha, \eta_\beta))$ est la valeur de la fonction f au point de Gauss-Lobatto-Legendre $\mathbf{x}(\xi_\alpha, \eta_\beta)$.

À l'aide de la représentation polynomiale de la fonction f (eq. 1.65), on évalue le gradient de f aux points de Gauss-Lobatto-Legendre de la façon suivante :

$$\nabla f(\mathbf{x}(\xi_{\alpha'}, \eta_{\beta'})) \approx \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \left[(\partial_i \xi)^{\alpha' \beta'} \sum_{\alpha=0}^r f^{\alpha \beta'} l_\alpha'(\xi_{\alpha'}) + (\partial_i \eta)^{\alpha' \beta'} \sum_{\beta=0}^r f^{\alpha' \beta} l_\beta'(\eta_{\beta'}) \right] \quad (1.66)$$

où l'_α est la dérivée des polynômes de Lagrange d'ordre r (la notation de l'ordre du polynôme a été supprimée afin d'alléger la notation). Les $\hat{\mathbf{x}}_i$, $i = 1, 2$, représentent les vecteurs unité dans les directions x et z et les ∂_i sont les dérivées spatiales associées à ces directions. La matrice $\partial \boldsymbol{\xi} / \partial \mathbf{x}$ est obtenue en inversant la matrice Jacobienne définie par l'eq. (1.64). L'inversibilité est garantie car le Jacobien est non nul sur chaque élément.

1.2.3 Approximation numérique des intégrales des formulations faibles

Considérons une intégrale posée sur tout le domaine Ω . Après la création des éléments et la définition des fonctions de forme, on divise chaque intégrale posée sur tout le domaine Ω en somme d'intégrales posées sur les éléments Ω_e . Puis, par un changement de variable, on transforme le calcul de l'intégrale sur chaque élément en calcul sur l'élément de référence, ce qui donne pour une fonction f quelconque intégrée sur l'ensemble Ω :

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})) J_e(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}. \quad (1.67)$$

Pour passer au problème discret et construire une méthode numérique approchée d'ordre r en espace à 2D, il faut choisir une formule d'intégration numérique exacte pour des polynômes de degré inférieur ou égal à $2r - 1$ (Ciarlet & Lions, 1991; Fauqueux, 2003). Cette condition est respectée en utilisant les formules d'intégration numérique de Gauss-Lobatto-Legendre. Si l'on prend comme points d'interpolation les points de Gauss-Lobatto-Legendre, on obtient pour la formulation faible de l'équation des ondes une méthode de résolution d'ordre élevée à condensation de masse, ce qui facilite la parallélisation de l'algorithme (Komatitsch, 1997; Fauqueux, 2003). On va donc interpoler chaque élément e en utilisant les projetés des points de Gauss-Lobatto-Legendre (ξ_α, η_β) de l'élément de référence par la relation (1.63). On obtient alors un maillage où sur chaque élément les points d'interpolation $\mathbf{x}^{\alpha\beta} = \mathbf{x}(\xi_\alpha, \eta_\beta)$ sont les points de Gauss-Lobatto-Legendre sur cet élément.

On peut alors calculer une valeur approchée de $\int_{\Omega_e} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$:

$$\int_{\Omega_e} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \sum_{\alpha, \beta=0}^r \omega_\alpha \omega_\beta f^{\alpha\beta} J_e^{\alpha\beta} \quad (1.68)$$

où les $\omega_\alpha > 0$ pour $\alpha = 0, \dots, r$ (pour une méthode d'ordre r) sont les poids associés à la formule de quadrature de Gauss-Lobatto-Legendre (Canuto et al., 1988), où $f^{\alpha\beta}$ est la valeur de la fonction f au point d'interpolation $\mathbf{x}(\xi_\alpha, \eta_\beta)$, et où $J_e^{\alpha\beta} = J_e(\xi_\alpha, \eta_\beta)$ est le Jacobien associé au point $\mathbf{x}(\xi_\alpha, \eta_\beta)$

de l'élément e et calculé d'après l'eq. (1.64) (Komatitsch & Tromp, 2002).

En reprenant la formulation faible du solide de l'eq. (1.45) (la méthode est analogue pour la formulation fluide de l'eq. (1.55)), on obtient pour le terme de gauche sur l'élément e et pour chaque composante u_i , $i = x, z$:

$$\int_{\Omega_e} \rho \partial_t^2 \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} \approx \sum_{\alpha, \beta=0}^r \omega_\alpha \omega_\beta J_e^{\alpha\beta} \rho^{\alpha\beta} \sum_{i=1}^2 \partial_t^2 u_i^{\alpha\beta}(t) w_i^{\alpha\beta}. \quad (1.69)$$

où $\rho^{\alpha\beta}$ représente la densité au point $x(\xi_\alpha, \eta_\beta)$. Comme la formulation faible est valable pour toute fonction test \mathbf{w} de l'espace des solutions, en rendant les composantes w_1 et w_2 indépendamment égales l'une à zéro et l'autre aux fonctions de base définies par $\sum_{\alpha, \beta}^r l_\alpha^r(\xi) l_\beta^r(\eta)$ (donc $w_i^{\alpha\beta} = 0$ ou 1 aux points de Gauss-Lobatto-Legendre), on se ramène au calcul du vecteur accélération composante par composante et la valeur de l'accélération $\partial_t^2 u_i^{\alpha\beta}(t)$ en chaque point de la grille (points de Gauss-Lobatto-Legendre) est seulement multipliée par le scalaire $\omega_\alpha \omega_\beta J_e^{\alpha\beta} \rho^{\alpha\beta}$, ce qui revient à dire que la matrice de masse est diagonale. On peut donc dire que la méthode des éléments spectraux intègre la condensation de masse dans sa construction.

La seconde intégrale de l'eq. (1.45) faisant intervenir des dérivées spatiales, on l'évalue à l'aide de l'eq. (1.66). et l'on obtient :

$$\int_{\Omega_e} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{w} \, d\mathbf{x} \approx \sum_{\alpha, \beta=0}^r \sum_{i=1}^2 w_i^{\alpha\beta} \left[\omega_\beta \sum_{\alpha'=0}^r \omega_{\alpha'} J_e^{\alpha'\beta} F_{i1}^{\alpha'\beta} l'_\alpha(\xi_{\alpha'}) + \omega_\alpha \sum_{\beta'=0}^r \omega_{\beta'} J_e^{\alpha\beta'} F_{i2}^{\alpha\beta'} l'_\beta(\eta_{\beta'}) \right], \quad (1.70)$$

avec

$$F_{i1} = \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij} \partial_j \xi, \quad F_{i2} = \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij} \partial_j \eta, \quad (1.71)$$

et $F_{ik}^{\alpha\beta} = F_{ik}(\mathbf{x}(\xi_\alpha, \eta_\beta))$. On calcule les σ_{ij} à l'aide des formules (1.9) et (1.30) faisant intervenir les $\partial_j u_i(\mathbf{x}(\xi, \eta), t)$ calculés de manière identique à $\partial_i f$ dans l'eq. (1.66) (Komatitsch & Tromp, 2002).

À partir de la discrétisation des intégrales des eq. (1.55) ou (1.45), on déduit un système matriciel que l'on va résoudre numériquement pour obtenir la solution de l'équation des ondes aux points d'interpolation de notre système. Le système est le suivant :

$$M \ddot{U} = KU + F \quad (1.72)$$

où U est le vecteur déplacement globale que l'on cherche, \ddot{U} sa dérivée seconde en temps (donc le vecteur accélération), M est la matrice de masse (diagonale), K est la matrice de rigidité et F est

le vecteur source.

L'avantage d'avoir une matrice de masse diagonale est d'être très facilement inversible. Son inverse M^{-1} est une matrice diagonale avec sur la diagonale l'inverse des coefficients de M : $M_{ii}^{-1} = 1/M_{ii}$. Ainsi, on a $\ddot{U} = M^{-1}KU + M^{-1}F$.

1.2.4 Discrétisation temporelle

On résout l'équation différentielle en temps posée sur le système matriciel (1.72) à l'aide d'un schéma de différences finies de Newmark explicite d'ordre 2 (voir par exemple Hughes (1987)). Le système devient alors :

$$\begin{cases} U^{n+1} = U^n + \Delta t V^n + \frac{\Delta t^2}{2} A^n \\ V^{n+1/2} = V^n + \frac{\Delta t}{2} A^n \\ MA^{n+1} = KU^{n+1} \\ V^{n+1} = V^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} A^{n+1} \end{cases} \quad (1.73)$$

où U , V et A sont les vecteurs déplacement, vitesse (dérivée première temporelle du déplacement) et accélération (dérivée seconde temporelle du déplacement), M la matrice de masse diagonale, K la matrice de raideur, Δt le pas de temps et n le nombre d'itérations en temps (au pas de temps n , $t = n\Delta t$).

Il est à noter qu'il est possible d'utiliser des schémas en temps d'ordre plus élevé comme le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 ou les schémas symplectiques (Simo et al., 1992; Nissen-Meyer et al., 2008) pour augmenter l'ordre d'approximation en temps et se rapprocher de l'ordre d'approximation en espace qui est élevé. En effet, utiliser un schéma en espace d'ordre plus élevé que le schéma en temps n'est pas optimal.

1.3 Conclusions

Grâce à la méthode de éléments spectraux, nous résoudrons l'équation des ondes sismiques dans les chapitres suivants en y incorporant diverses fonctionnalités telles que des sources sismiques en ondes planes dans le chapitre 2, le pas de temps local pour des modèles à interface fluide-solide dans le chapitre 3 ou l'implémentation de conditions absorbantes C-PML (Convolutional Perfectly Matched Layer) pour des modèles acoustique-élastique couplés dans le chapitre 4.

Chapitre 2

Introduction d'ondes planes dans une méthode d'éléments spectraux en 2D et étude des mouvements de rotation

Ce Chapitre a donné lieu à la publication d'un article :

L. Godinho, P. Amado Mendes, A. Tadeu, A. Cadena-Isaza, C. Smerzini, F. J. Sánchez-Sesma, R. Madec and Dimitri Komatitsch, *Numerical Simulation of Ground Rotations along 2D Topographical Profiles under the Incidence of Elastic Waves*, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 99, No 2B, pp. 1147-1161, May 2009

Avant propos

La motivation de ce chapitre est de valider la méthode des solutions fondamentales (MFS) développée par Fransisco J. Sánchez-Sesma et ses collaborateurs en comparant ses résultats à la méthode des éléments spectraux (SEM) qui a une approche complètement différente de la résolution de l'équation des ondes sismiques. En effet, la MFS résout l'équation des ondes dans le domaine fréquentiel alors que la SEM résout le problème formulé dans le domaine temporel. Un autre but ici est d'étudier le mouvement de rotation au niveau de récepteurs sismiques.

Les comparaisons sont effectuées pour étudier les effets de la topographie soumise à l'excitation d'une onde plane à angle d'incidence variable par rapport à la surface libre. Nous allons notamment analyser les effets d'un canyon ou d'une colline soumis à l'arrivée d'ondes planes P ou S avec différents angles d'incidence ou d'une onde de Rayleigh.

La suite est rédigée en anglais car elle reprend le rapport destiné à l'ensemble des personnes ayant participé au projet dans les différentes universités impliquées. Je tiens à remercier Fransisco J. Sánchez-Sesma de l'Institut d'Ingénierie de l'Université de Mexico (UNAM) de nous avoir impliqués dans ce projet. L'article mentionné plus haut est inclus en annexe à la fin de ce manuscrit.

Introduction

The effect of free surface topography on incident plane waves can be studied for instance based on a boundary-element technique such as the Indirect Boundary-Element Method (IBEM) (see e.g. Sánchez-Sesma & Campillo (1991), Vai et al. (1999)). Another approach, which enables one to include heterogeneous layers in the model, is to use the Spectral-Element Method (SEM) (see for instance Komatitsch & Vilotte (1998), Komatitsch & Tromp (1999) or Komatitsch et al. (1999)). The SEM is a finite-element method that solves the wave equation in the time domain based on high-degree polynomial interpolation on quadrangular elements in 2D and hexahedral elements in 3D. Here we check its accuracy for the numerical modeling of 2D seismic wave propagation, in particular in order to compute the response of a topographic free surface under the incidence of a plane wave with different angles by comparing its results to the Method of Fundamental Solutions (MFS), which is a new method still under development by F. J. Sánchez-Sesma and his co-workers and which solves the wave equation in the frequency domain. To compare our results in the time domain with the MFS we will use a Fourier transform in post-processing to convert them to the frequency domain.

2.1 Presentation of the problem

2.1.1 2D canyon model

The 2D canyon model, represented in Figure 2.1, is included in a semi-infinite half-space. We want to propagate plane waves in the lower half space for different angles of incidence θ with respect to the free surface. The lower half-space is an elastic medium with Poisson's ratio $\nu = 0.25$ (i.e. c_p/c_s ratio of $\sqrt{3}$). To handle such a case with the SEM, we first create a mesh of deformed quadrangles adapted to the shape of the model for which we implement absorbing conditions on the right, left and bottom boundaries in order to simulate a semi-infinite half-space.

2.1.2 Implementation of incident plane waves

The displacement wave field solution of the problem can be separated into two wave fields for our plane wave problem. The first is the incident wave field, which corresponds to the exact solution of the plane wave for the model without the canyon (i.e. with a flat free surface). We can calculate it using the analytical solution for plane waves reflected and converted at the flat free surface (see for

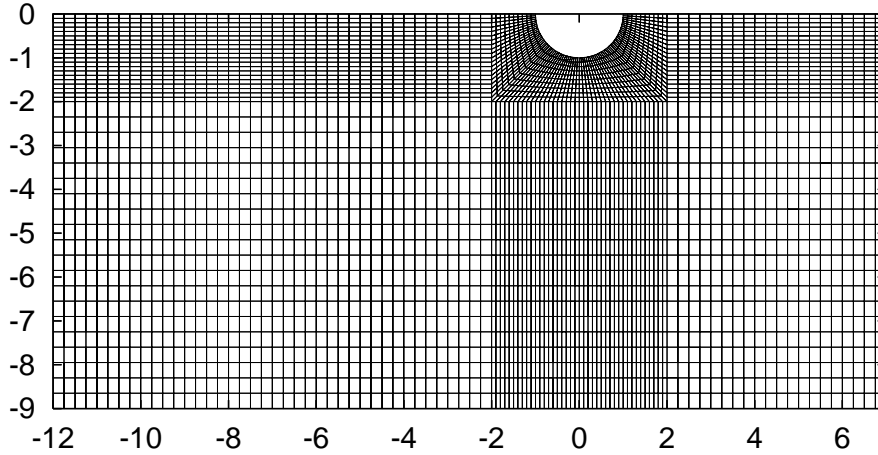


Fig. 2.1 – Geometry of the canyon and spectral-element mesh used ; it is purposely densified in the vicinity of the canyon.

instance Aki & Richards (1980), Volume I p 140-141 and also more details in the next section). The second is the diffracted wave field, which corresponds to the wave field generated when the waves reach the irregularity of the topography and are reflected and converted there. It is not known analytically therefore we use our spectral-element numerical method to compute it. To do that, we use the incident wave field as an initial field in the mesh of the canyon and we let the numerical code compute the diffracted waves (only). The total wave field is then the sum of the analytical incident wave field and the numerical diffracted wave field. Following Bielak & Christiano (1984), the absorbing boundary conditions on three of the four edges of the mesh are applied to the diffracted wave field only. This is based on the observation that in order to simulate a semi-infinite medium, we need to absorb the entire wave field but instead of using a classical absorbing condition, we can take advantage of the decomposition of the wave field because we know the incident part analytically and therefore we can absorb it exactly (instead of applying numerical absorbing conditions, which are always approximate i.e. less accurate). In the context of the weak form of the equations used in the SEM formulation, we have the boundary integral (2.1) :

$$\int_{\Gamma} \tau \cdot w d\Gamma \quad \text{where } \tau \text{ is the traction field} \tag{2.1}$$

The traction can be split in two : $\tau = \tau^0 + \tau^d$. τ^0 is the incident traction. It can be calculated exactly from the incident displacement field which is known at any point and at any time (because it is analytical) therefore we know the associated traction on the boundaries. τ^d is the diffracted

traction. It can be calculated based on

$$\tau^d = \rho c_p v_N^d + \rho c_s v_T^d \quad (2.2)$$

where v_T^d and v_N^d are the tangential and normal components of the 2D velocity vector respectively. Using the same splitting for v_T and v_N , we have $v_T^d = v_T - v_T^0$ and $v_N^d = v_N - v_N^0$. If we take the numerical approximation of v , since we already know v^0 analytically and we also know the normal vector on the boundaries, we can write (Bielak & Christiano, 1984)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \tau \cdot w d\Gamma &= \int_{\Gamma} \tau^0 \cdot w d\Gamma + \int_{\Gamma} \rho c_p (v_N - v_N^0) \cdot w d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma} \rho c_s (v_T - v_T^0) \cdot w d\Gamma \end{aligned} \quad (2.3)$$

We can now discretize these integrals using the spectral-element method and solve the problem.

2.1.3 Initial wave field in the time domain

In the time domain, the equation of a Ricker homogeneous plane wave is of the form

$$\vec{u}_0(t, \vec{x}) = A \vec{k} \text{ ricker}(t - (1/c_{wave})\vec{d} \cdot \vec{x}),$$

where A is a constant deduced from the zero traction condition at the free surface (Aki & Richards, 1980), c_{wave} is the velocity of the wave in the medium, \vec{d} is its direction of propagation (which depends on the incidence angle θ), \vec{k} is the direction of particle motion (i.e. the direction of propagation for P waves \vec{d} and orthogonal to the direction of propagation for SV waves \vec{d}^\perp) and

$$\text{ricker}(x) = - (1 - 2\pi^2 f_0^2 x^2) e^{-\pi^2 f_0^2 x^2}.$$

For an incident plane P wave of angle θ_p , the reflection on a free surface produces a plane P wave with incidence angle θ_p and a converted SV plane wave with incidence angle θ_s , as illustrated in Figure 2.4 (top). θ_p and θ_s are related by $\sin(\theta_p)/c_p = \sin(\theta_s)/c_s$. The final equation for the initial field is then

$$\vec{u}_0^{global} = \vec{u}_0^{P_{inc}} + \vec{u}_0^{P_{refl}} + \vec{u}_0^{SV_{conv}}. \quad (2.4)$$

For an incident SV wave, relation $\sin(\theta_p)/c_p = \sin(\theta_s)/c_s$ is still valid. As in an elastic media we always have $c_p > c_s$, we can calculate θ_p only if we have $\sin(\theta_s)c_p/c_s \leq 1$ which is true for $\theta_s \leq \theta_{cr}$ where θ_{cr} , defined in (2.5), is the critical angle i.e. the last angle for which we can calculate a homogeneous converted plane P wave. In such a case, we can compute the initial wave field in a similar fashion as for an incident plane P wave and use (2.4) to find the analytical wave field solution.

$$\theta_{cr} = \arcsin\left(\frac{c_s}{c_p}\right) \tag{2.5}$$

But when $\theta_s > \theta_{cr}$ (i.e. beyond the critical angle) we cannot calculate θ_p as a real angle, but in spite of this, there still is a converted plane wave. This wave is an example of an inhomogeneous plane wave (see for instance Achenbach (1973), p.179). To our knowledge there is no known analytical expression in the time domain for the initial field and boundary conditions in such a case, but there is an analytical expression in the frequency domain therefore we compute the solution in frequency at every point of the mesh and perform an inverse Fourier transform to convert it back to the time domain. To compute the initial wave field we only need to compute displacement and velocity at the first time step and in the whole mesh; but for the absorbing boundary conditions we need to compute the values at every time step and only for mesh points that are located on the three edges of the mesh where we apply these conditions. In Figure 2.2 we illustrate what happens beyond the critical angle, which is equal to $\theta_{cr} = 35.26^\circ$ for $\nu = 0.25$.

The SV case with an incidence of 45° is particular because we are beyond the critical angle though there is no converted inhomogeneous wave (see for instance Achenbach (1973), p.179), which means that we only have to compute the incident and reflected SV plane waves, and these waves are homogeneous therefore we can use (2.4) instead of the above slower process of computing the solution in the frequency domain and then applying an inverse FFT.

In Figure 2.2 (top) we are right before the critical angle and therefore we can see the incident SV, reflected SV and quasi-vertical plane P waves. When one goes beyond the critical angle, the P wave becomes an inhomogeneous wave (which looks a bit similar to a Rayleigh surface wave, see Figure 2.3). Then, for even larger angles, this inhomogeneous wave vanishes (see in particular the case of 45° discussed above) and for angles over 45° the inhomogeneous wave seems to follow the reflected SV wave and make it larger.

To compute the case of an incident Rayleigh surface wave (Figure 2.3) which is an inhomogeneous

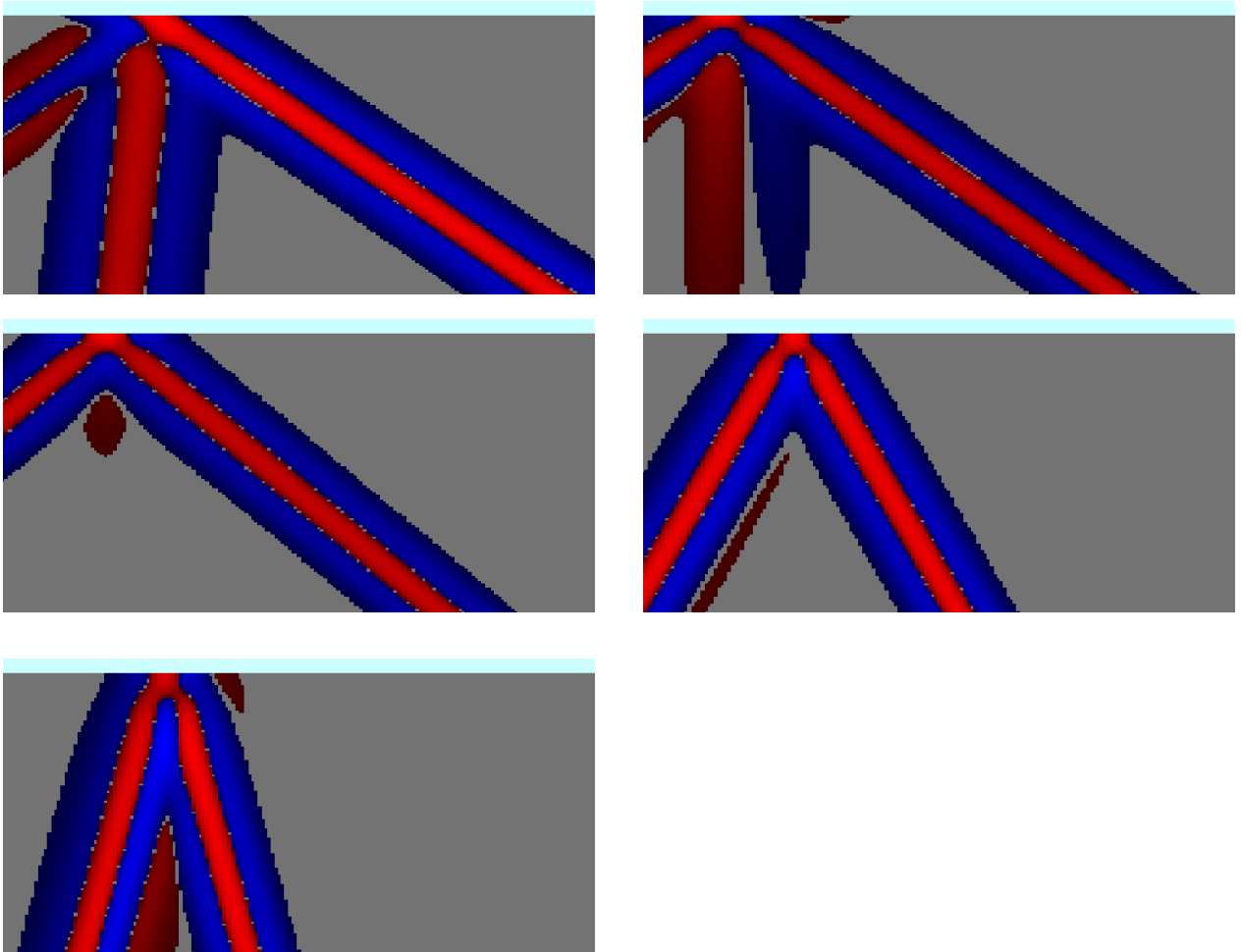


Fig. 2.2 – Snapshots of the spectral-element solution for plane SV waves with $\theta = 35^\circ$ (top left), 36° (top right), 40° (middle left), 60° (middle right) and 75° (bottom left) at the initial time.

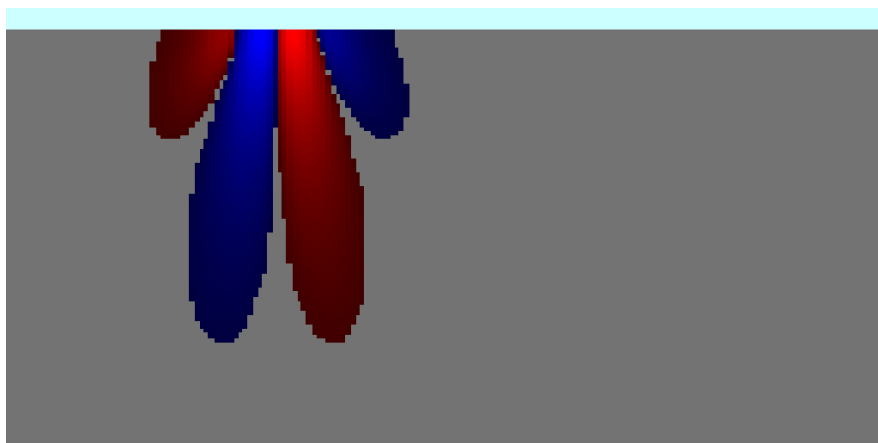


Fig. 2.3 – Snapshot of the spectral-element solution for a Rayleigh surface wave source at the initial time.

wave, we proceed in a similar way : we start from the known solution in the frequency domain and convert it back to time.

2.2 Numerical results

2.2.1 Test parameters

For the computation, we use a model whose size is normalized based on the size of the irregularity at the free surface. The model is therefore non-dimensional. Therefore, let us assume a unit distance of 1 m. The canyon is a semi circle with a radius of size $a = 1$ m (Figure 2.1). The model is rectangular of size 19 m along X and 9 m along Z . The mesh is refined in the vicinity of the canyon to better approximate the solution near the region that is the most difficult to handle from a geometrical point of view. We use 4000 spectral elements with 5 Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) points in each direction of each element. Therefore, we have a total of 64681 unique grid points in the global mesh. The canyon is located on the right of the mesh to permit the introduction of an initial plane wave in contact with the free surface on the left of the canyon at the initial time without being in contact with the canyon (see Figure 2.4 (top)).

We use 141 receivers, with 61 of them located along the canyon surface in $[-1, 1]$ and evenly spaced in angular distance by $\Delta\theta = \pi/60$. The receivers have coordinates : for $n = 0, \dots, 60$, $x_n = \cos(\pi - n\Delta\theta)$ and $z_n = \sin(\pi - n\Delta\theta)$. In $[-3, -1[$ and $]1, 3]$ (i.e., on each side of the canyon), we put 40 receivers evenly spaced by $\Delta x = 0.05$. Therefore we have receivers ranging from $x = -3$ to $x = +3$, where 0 is the center of the canyon.

The medium is elastic, with Poisson's ratio $\nu = 0.25$. Therefore, if we take a velocity for S waves $c_s = 1 \text{ m.s}^{-1}$, we have a velocity for P waves $c_p = \sqrt{3} \simeq 1.732 \text{ m.s}^{-1}$. We perform tests for different incident angles : $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ and 60° for both initial P and SV plane waves. We take a time step $\Delta t = 0.001 \text{ s}$ in the explicit and conditionally-stable time-evolution scheme of the SEM ; therefore, for the mesh of Figure 2.1 we measure experimentally a Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) (Courant et al., 1928) stability number $c_p \Delta t / \Delta x = 0.2554$, which is not too small (the upper limit found by trial and error is around 0.45) and therefore the spectral-element scheme is also not too dispersive Collino et al. (1998), Diaz & Joly (2005). We let the calculation run for a total of 12 s of simulation time. We have chosen this duration because after 12 s the plane wave has crossed the canyon for a few seconds therefore the effect of the canyon can be clearly observed. We do not let the simulation run for more than this duration because if we did so spurious reflected waves would

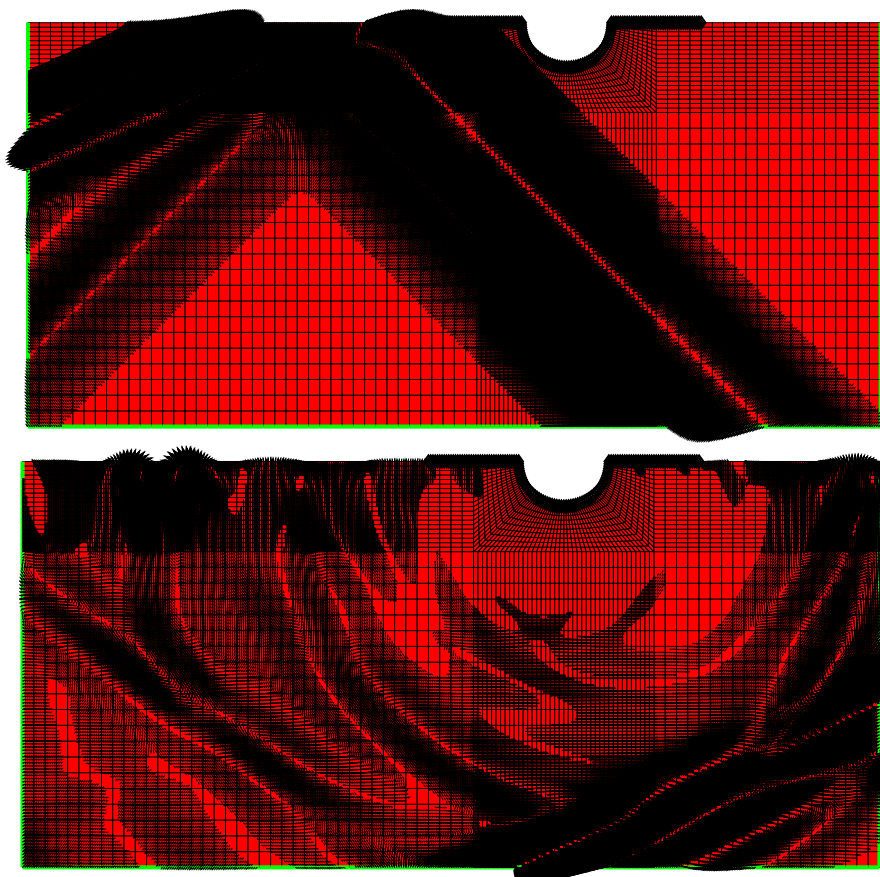


Fig. 2.4 – Snapshot of the spectral-element solution for an incident plane P wave with $\theta = 45^\circ$ at time $t = 0$ s (top) and $t = 10.5$ s (bottom). The thick black line composed of diamonds along the surface of the canyon is the receiver line. The green line on three of the four boundaries of the mesh represents the absorbing boundaries.

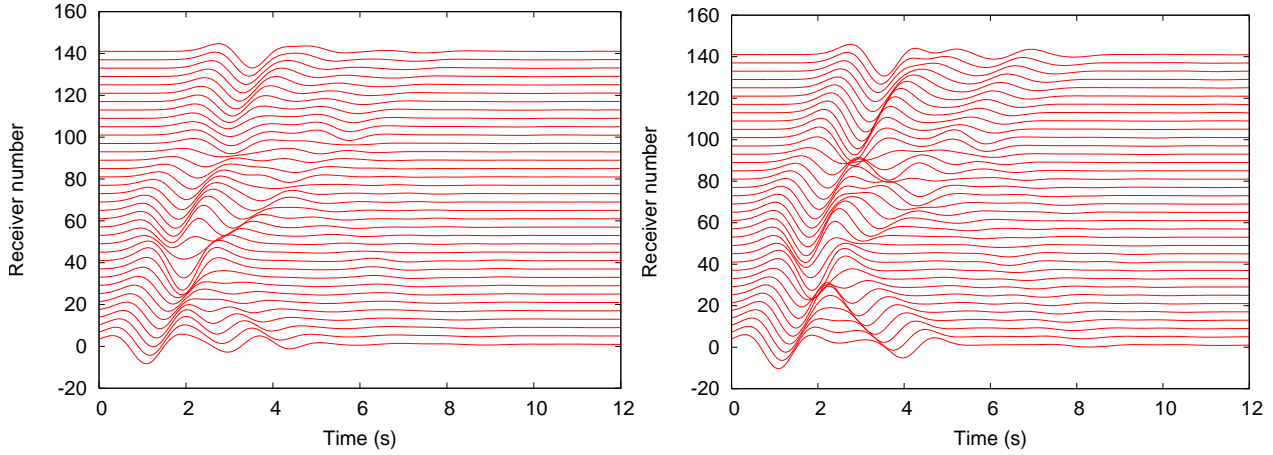


Fig. 2.5 – Example of a set of displacement seismograms for the horizontal component of the displacement vector for an incident P plane wave with 45° angle.

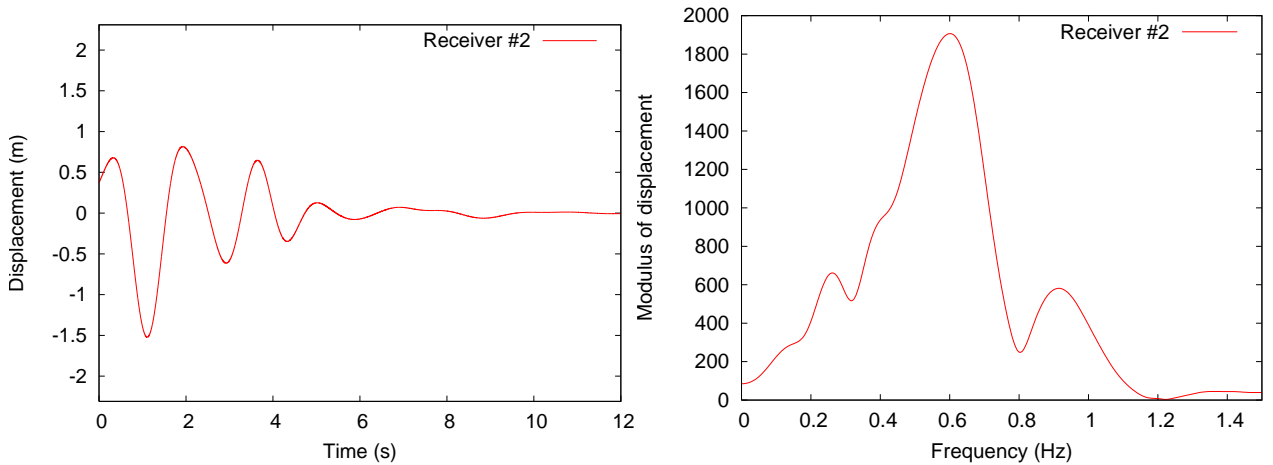


Fig. 2.6 – Example of a seismic trace in time (left) and its spectral amplitude (right) recorded at receiver #2 located in $(x = -2.9, z = 0)$ for the horizontal component of the displacement vector for an incident plane P wave with 45° angle.

come back from the (unperfect) absorbing boundaries (see for example Figure 2.4 (bottom)).

2.2.2 Comparing the spectra to the MFS method

After running the code, at each receiver we obtain two seismograms (see for instance Figure 2.5) composed of seismic traces in the time domain (Figure 2.6 (left)) for the two components of the 2D displacement vector. We perform a Fourier transform of each trace (Figure 2.6 (right)) to measure the spectral amplitude at a given normalized frequency $\eta = 2f_0a/c_s$. We present results for $\eta = 1$. a and c_s are equal to 1 therefore $\eta = 1$ is equivalent to a frequency $f_0 = 0.5$ Hz. The spectral amplitude curve is displayed in Figure 2.7.

Let us mention here that the choice of the method to implement the Fourier transform is

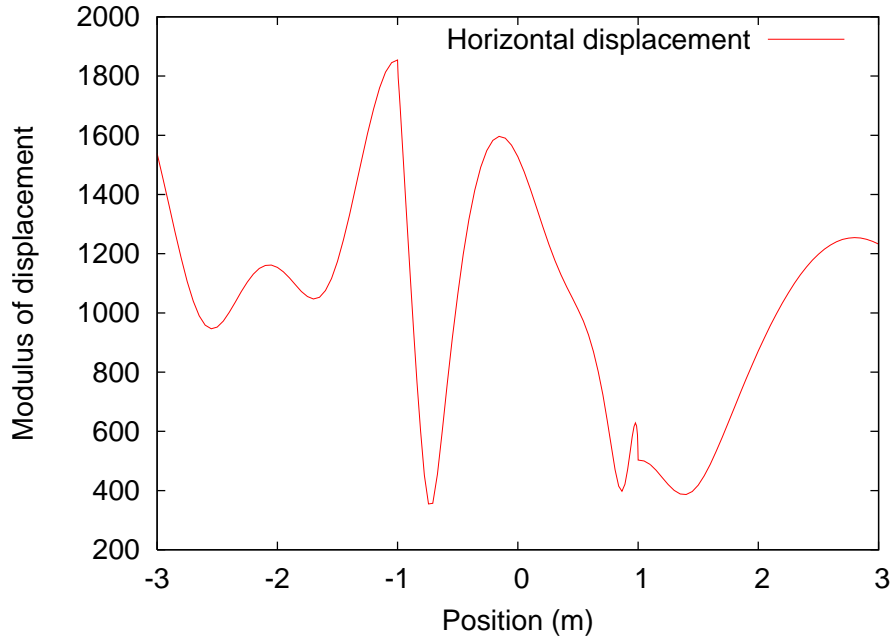


Fig. 2.7 – Example of the spectral amplitude curve obtained along the surface of the mesh after performing an inverse Fourier transform of the seismic time trace recorded at each receiver for an incident plane P wave with 45° angle for the horizontal component of the displacement vector. The results are displayed at frequency $f_0 = 0.5$ Hz (i.e., $\eta = 1$).

important. We must perform the transform with enough points not to lose the high initial accuracy we have in time because the number of points we take determines the frequency discretization step Δf for the Fourier transform, equal to $\Delta f = 1/n\Delta t$ with n the number of points for the Fourier transform. We want to output our frequency spectrum at a precise frequency f_0 (we are interested in results for $\eta = 1$) therefore it is important to choose Δf well to obtain the exact value of f_0 we want, and not an approximate value rounded off.

Classical Fast Fourier Transforms (FFT) require that the number of frequency values be a power of two therefore the choice for n is reduced and it becomes impossible to find a good Δf for our data. For example : $n = 2^{18} = 262144$ gives $\Delta f \simeq 0.0038147$ and then $f_0 \simeq 0.499725$ Hz which is not a perfect match with of 0.5.

The solution is to choose a Fourier transform technique that permits every integer n (for example the python fft module based on the FFTPACK FORTRAN library). Here, we have $\Delta t = 0.001s$, so we can take $n = 100000$ to have $\Delta f = 0.01$ Hz and then $f_0 = 0.5$ Hz exactly. We can now write the spectral amplitude curve for $\eta = 1$ (Figure 2.6 (left)).

We present in Figure 2.8 a comparison between MFS and the SEM for an incident plane SV wave with vertical incidence (i.e., 0°). The spectral amplitude curves are represented at each receiver for

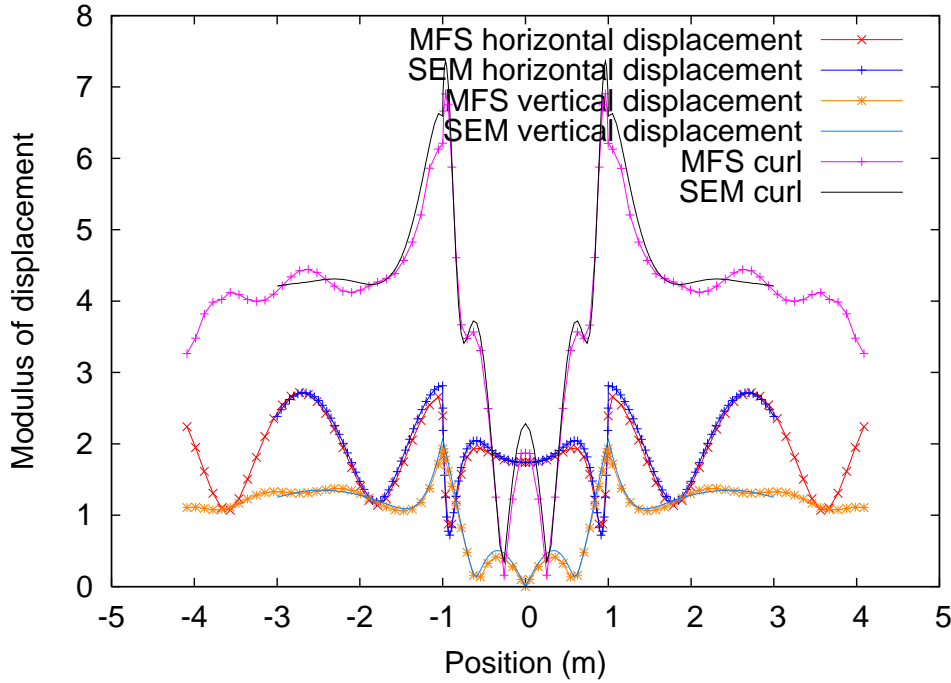


Fig. 2.8 – Comparison between SEM and MFS of spectral amplitude for the rotational, horizontal and vertical components of displacement for an incident plane SV wave with vertical incidence. The results are shown at a frequency of $f_0 = 0.5$ Hz (i.e., $\eta = 1$).

$\eta = 1$ for the horizontal and vertical components of displacement as well as for the rotational (curl) component defined as $\text{curl}(x, z) = -\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}(x, z) - \frac{\partial u_z}{\partial x}(x, z)\right) / 2$. The SEM and MFS results are in good agreement, which validates both methods for this test case because they are independent.

2.2.3 Results for different angles for $\eta = 1$ with an initial P or SV plane wave or Rayleigh surface wave

In this part, we present results for different incident plane wave types and angles :

- P plane waves angles from 0° to 60° ,
- SV plane waves angles from 0° to 60° .
- Rayleigh wave

In figures 2.9 to 2.19 we present spectral amplitude curves for displacement vector components (horizontal and vertical) as well as the rotational component at each receiver for $\eta = 1$. For these three curves, our results are initially computed in the time domain and we subsequently apply the Fourier transform described in section 2.2.2.

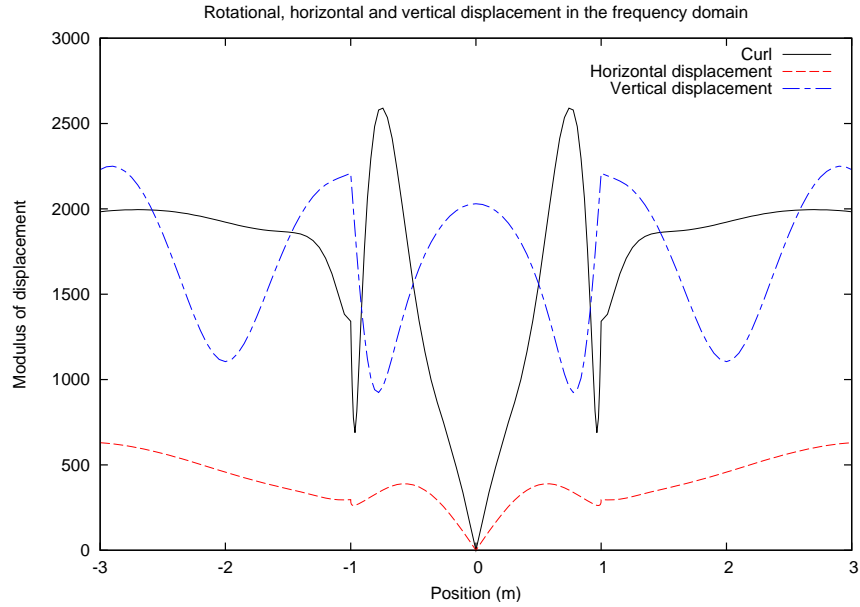


Fig. 2.9 – Spectral amplitude curves obtained above the surface of the canyon after performing a Fourier transform of the seismic time trace recorded at each receiver for an incident P plane wave with 0° angle for the rotational, horizontal and vertical components of the displacement vector. The results are shown at $f_0 = 0.5$ Hz ($\eta = 1$).

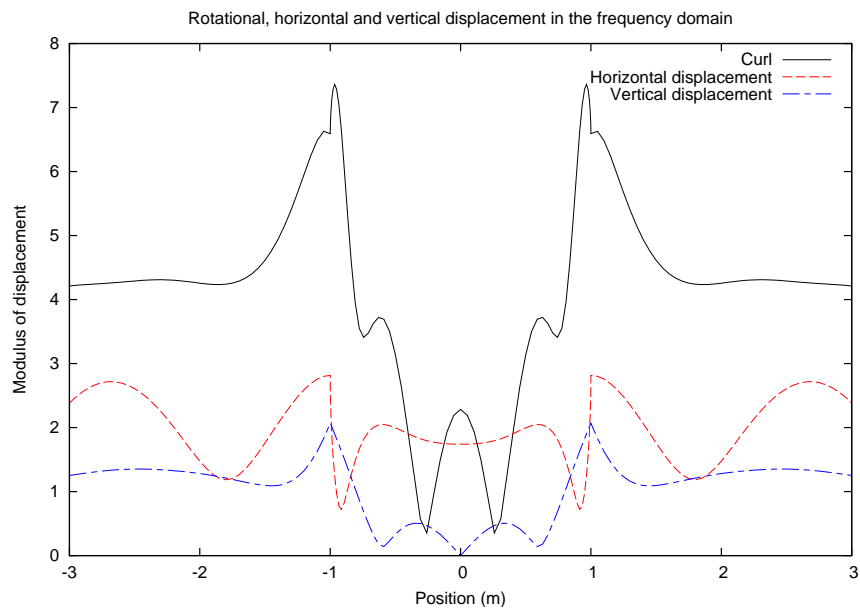


Fig. 2.10 – Spectral amplitude curves obtained above the surface of the canyon after performing a Fourier transform of the seismic time trace recorded at each receiver for an incident SV plane wave with 0° angle for the rotational, horizontal and vertical components of the displacement vector. The results are shown at $f_0 = 0.5$ Hz ($\eta = 1$).

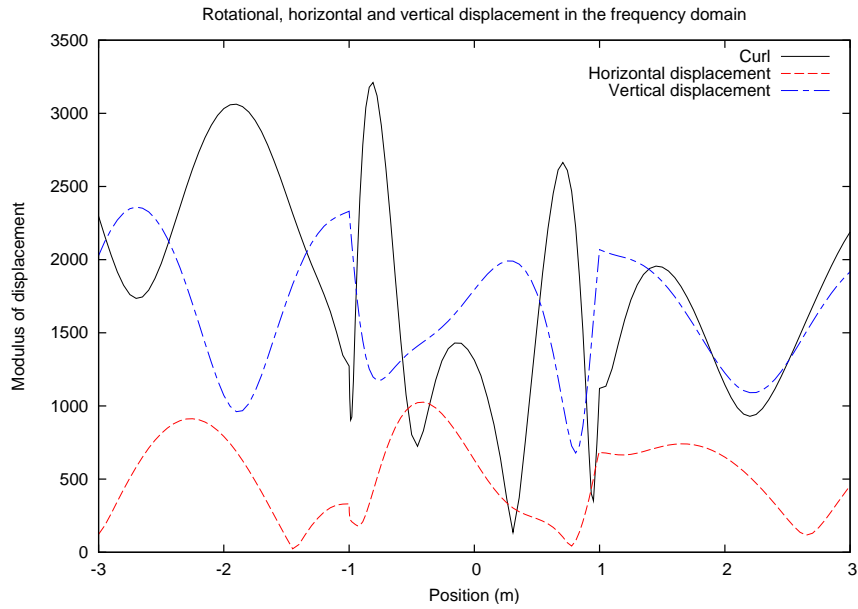


Fig. 2.11 – Spectral amplitude curves obtained above the surface of the canyon after performing a Fourier transform of the seismic time trace recorded at each receiver for an incident P plane wave with 15° angle for the rotational, horizontal and vertical components of the displacement vector. The results are shown at $f_0 = 0.5$ Hz ($\eta = 1$).

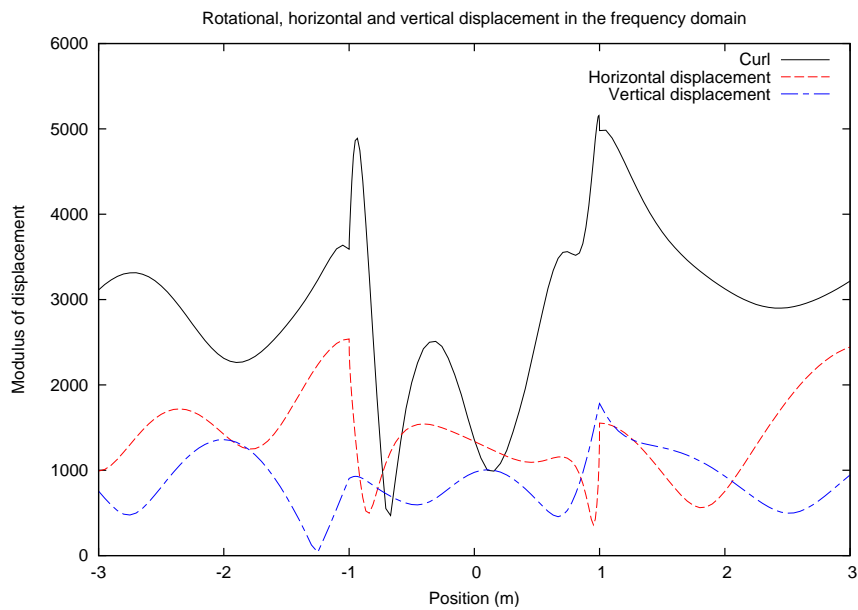


Fig. 2.12 – Spectral amplitude curves obtained above the surface of the canyon after performing a Fourier transform of the seismic time trace recorded at each receiver for an incident SV plane wave with 15° angle for the rotational, horizontal and vertical components of the displacement vector. The results are shown at $f_0 = 0.5$ Hz ($\eta = 1$).

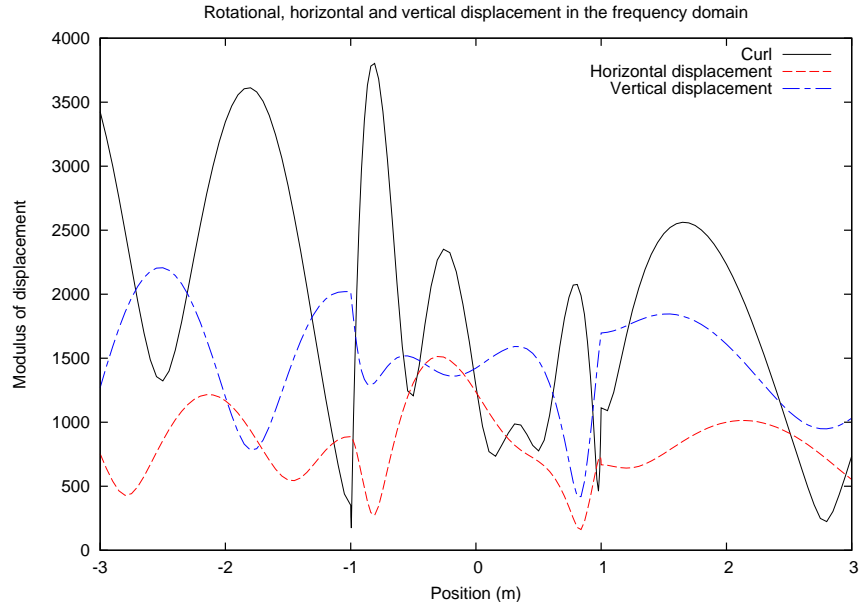


Fig. 2.13 – Spectral amplitude curves obtained above the surface of the canyon after performing a Fourier transform of the seismic time trace recorded at each receiver for an incident P plane wave with 30° angle for the rotational, horizontal and vertical components of the displacement vector. The results are shown at $f_0 = 0.5$ Hz ($\eta = 1$).

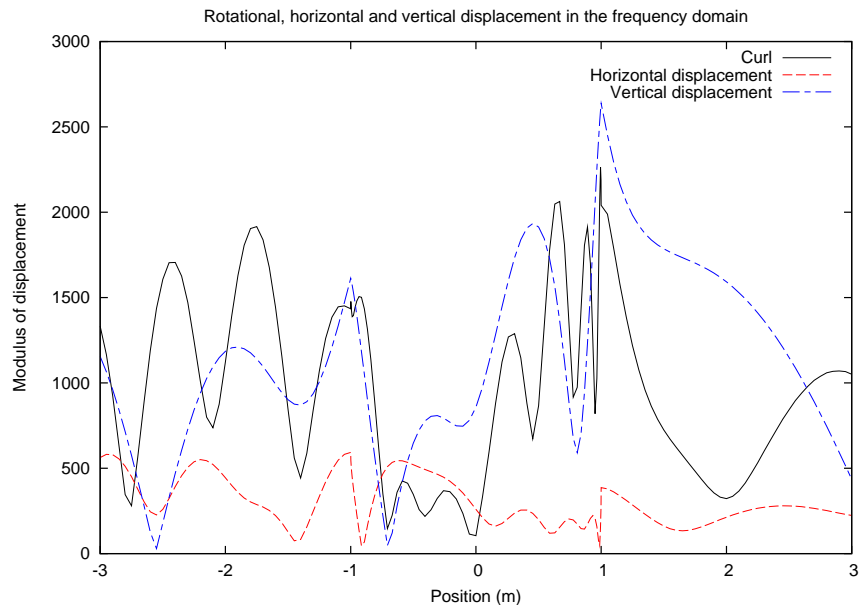


Fig. 2.14 – Spectral amplitude curves obtained above the surface of the canyon after performing a Fourier transform of the seismic time trace recorded at each receiver for an incident SV plane wave with 30° angle for the rotational, horizontal and vertical components of the displacement vector. The results are shown at $f_0 = 0.5$ Hz ($\eta = 1$).

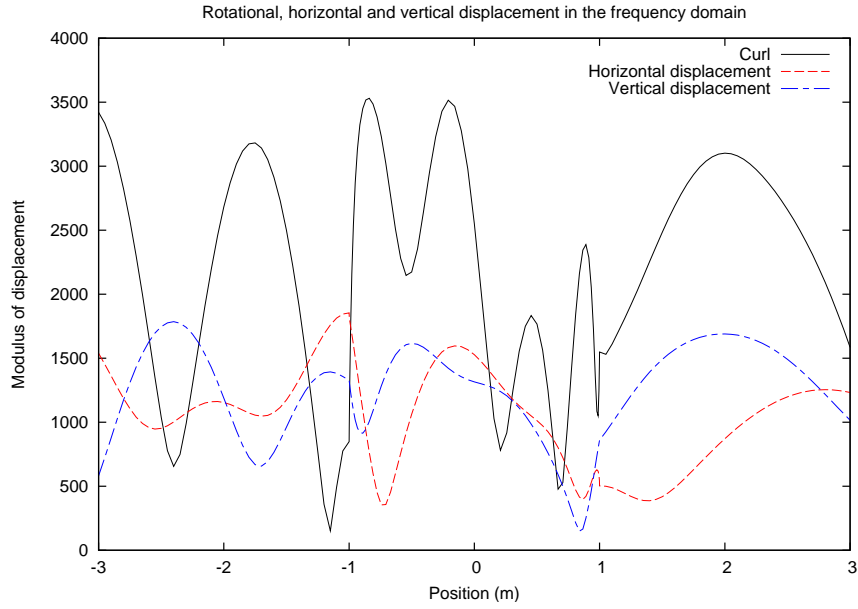


Fig. 2.15 – Spectral amplitude curves obtained above the surface of the canyon after performing a Fourier transform of the seismic time trace recorded at each receiver for an incident P plane wave with 45° angle for the rotational, horizontal and vertical components of the displacement vector. The results are shown at $f_0 = 0.5$ Hz ($\eta = 1$).

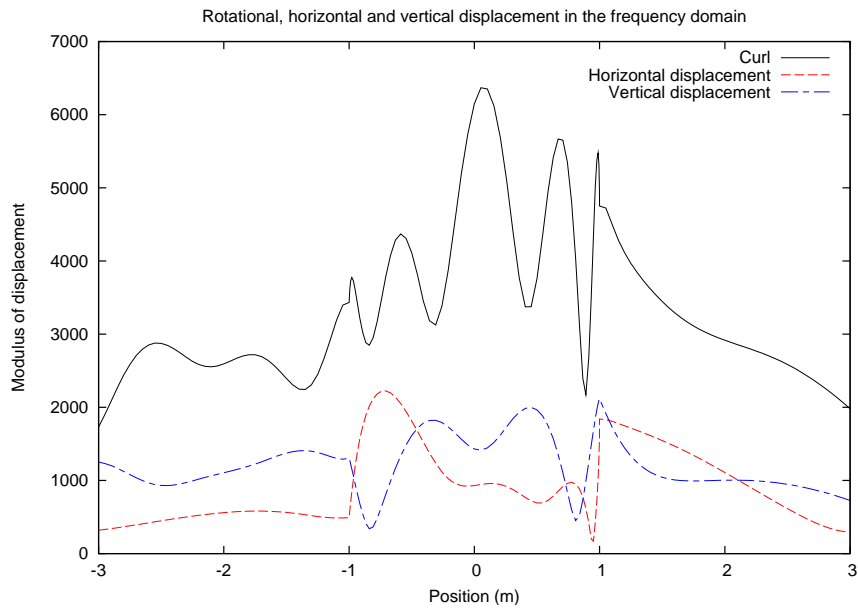


Fig. 2.16 – Spectral amplitude curves obtained above the surface of the canyon after performing a Fourier transform of the seismic time trace recorded at each receiver for an incident SV plane wave with 45° angle for the rotational, horizontal and vertical components of the displacement vector. The results are shown at $f_0 = 0.5$ Hz ($\eta = 1$).

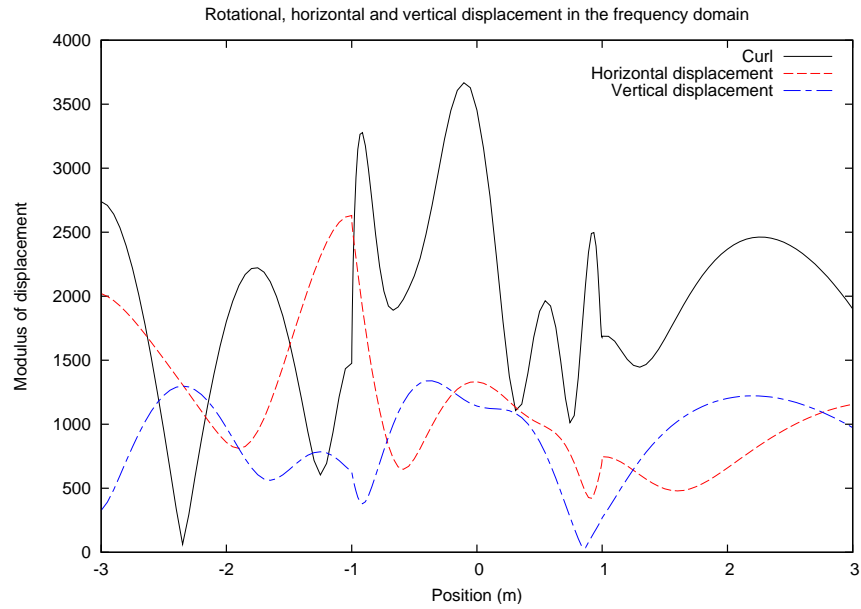


Fig. 2.17 – Spectral amplitude curves obtained above the surface of the canyon after performing a Fourier transform of the seismic time trace recorded at each receiver for an incident P plane wave with 60° angle for the rotational, horizontal and vertical components of the displacement vector. The results are shown at $f_0 = 0.5$ Hz ($\eta = 1$).

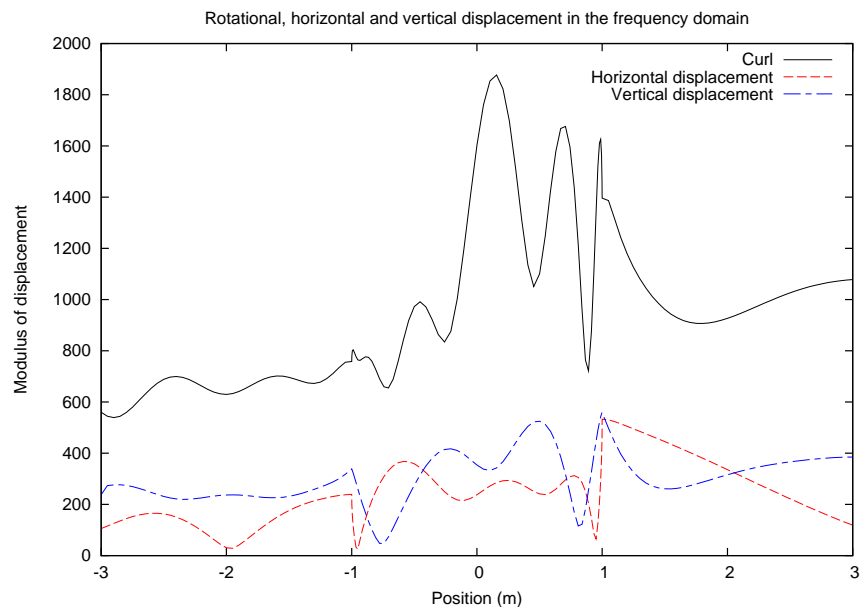


Fig. 2.18 – Spectral amplitude curves obtained above the surface of the canyon after performing a Fourier transform of the seismic time trace recorded at each receiver for an incident SV plane wave with 60° angle for the rotational, horizontal and vertical components of the displacement vector. The results are shown at $f_0 = 0.5$ Hz ($\eta = 1$).

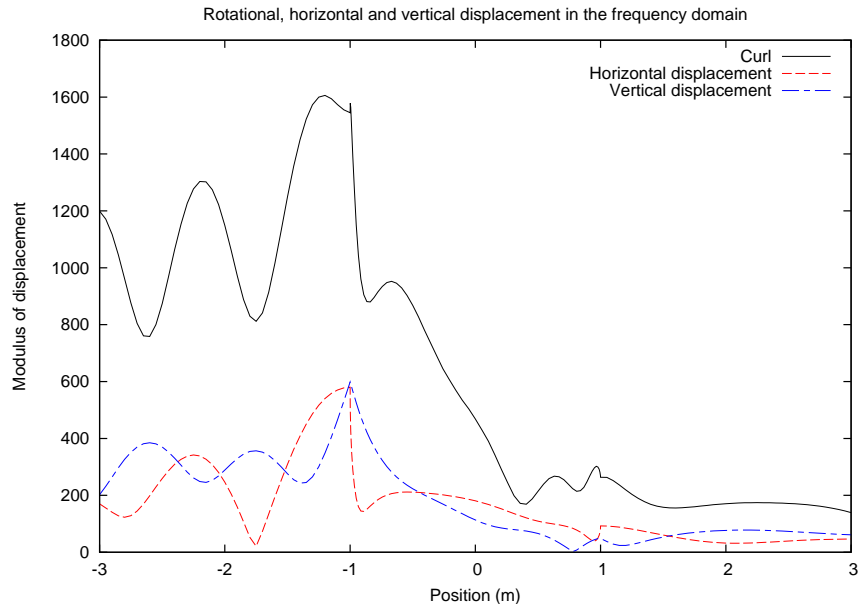


Fig. 2.19 – Spectral amplitude curves obtained above the surface of the canyon after performing a Fourier transform of the seismic time trace recorded at each receiver for an incident *Rayleigh* wave for the rotational, horizontal and vertical components of the displacement vector. The results are shown at $f_0 = 0.5$ Hz ($\eta = 1$).

2.3 Case of a hill

2.3.1 2D hill model

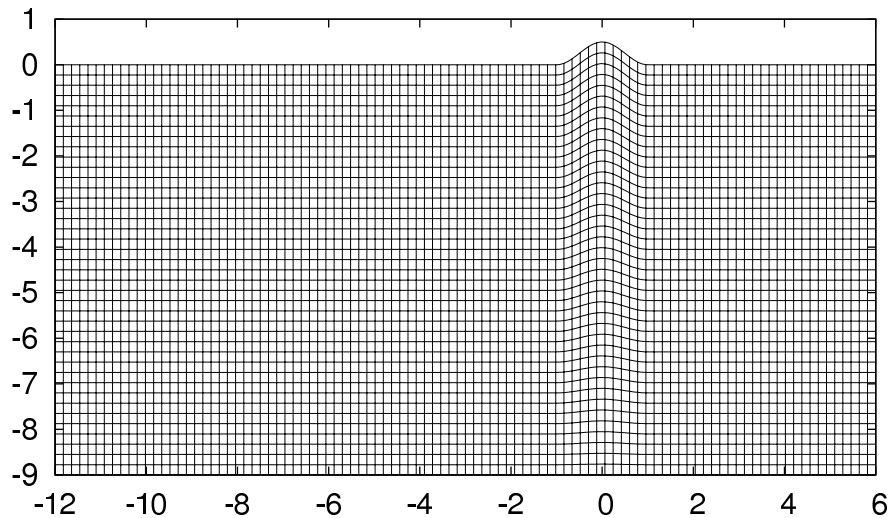


Fig. 2.20 – Geometry of the hill and spectral-element mesh used ; it is purposely densified in the vicinity of the hill.

In this section, we will study the response of a Gaussian-shaped hill to an incident plane wave. We create a mesh of 4000 deformed quadrangles adapted to the shape of the hill (see Figure 2.20).

Each quadrangle is defined by 9 control points in order to have curved boundaries that can better fit to topography. The hill extends from (-1,0) to (1,0) and the top is located in (0,0.5). We use 5 Gauss-Lobatto-Legendre points in each direction for each element therefore we have a mesh of 64561 points. We choose $\Delta t = 0.004s$ to have a CFL of $c_p \Delta t / \Delta x = 0.2229$ i.e. not too small. We put 324 receivers along the topography from $x = -3.269120$ to $x = 3.269120$. We end the calculation after $t = 12$ s when waves have left the last receiver. The code gives results in the time domain therefore we convert them to the frequency domain using the same process as in the case of the canyon above.

2.3.2 Results for different angles for $\eta = 1$ with an initial P or SV plane wave or Rayleigh surface wave

In this part, we present results for different incident plane wave types and angles :

- P plane waves angles for 0° , 30° and 60° ,
- SV plane waves angles for 0° , 30° and 60° .
- Rayleigh wave

In figures 2.21 to 2.27, we present spectral amplitude curves for displacement vector components (horizontal and vertical) as well as the rotational component at each receiver for $\eta = 1$. For the three curves, our results are initially computed in the time domain and we subsequently apply the Fourier transform described in section 2.2.2.

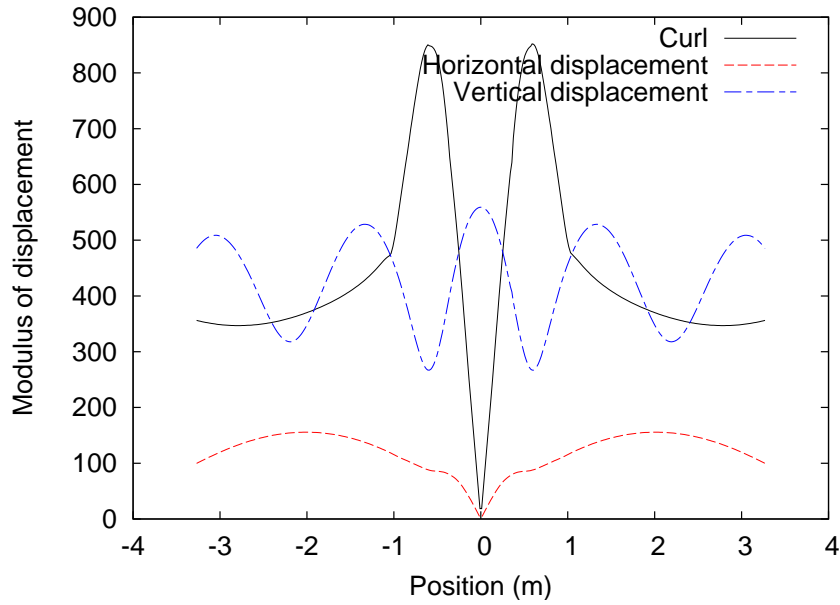


Fig. 2.21 – Spectral amplitude curves obtained above the surface of the hill after performing a Fourier transform of the seismic time trace recorded at each receiver for an incident P plane wave with 0° angle for the rotational, horizontal and vertical components of the displacement vector. The results are shown at $f_0 = 0.5$ Hz ($\eta = 1$).

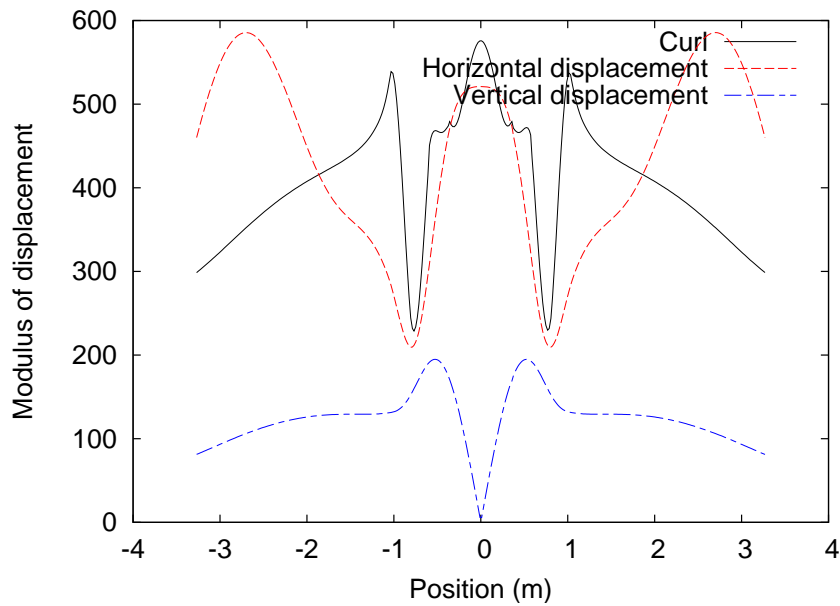


Fig. 2.22 – Spectral amplitude curves obtained above the surface of the hill after performing a Fourier transform of the seismic time trace recorded at each receiver for an incident SV plane wave with 0° angle for the rotational, horizontal and vertical components of the displacement vector. The results are shown at $f_0 = 0.5$ Hz ($\eta = 1$).

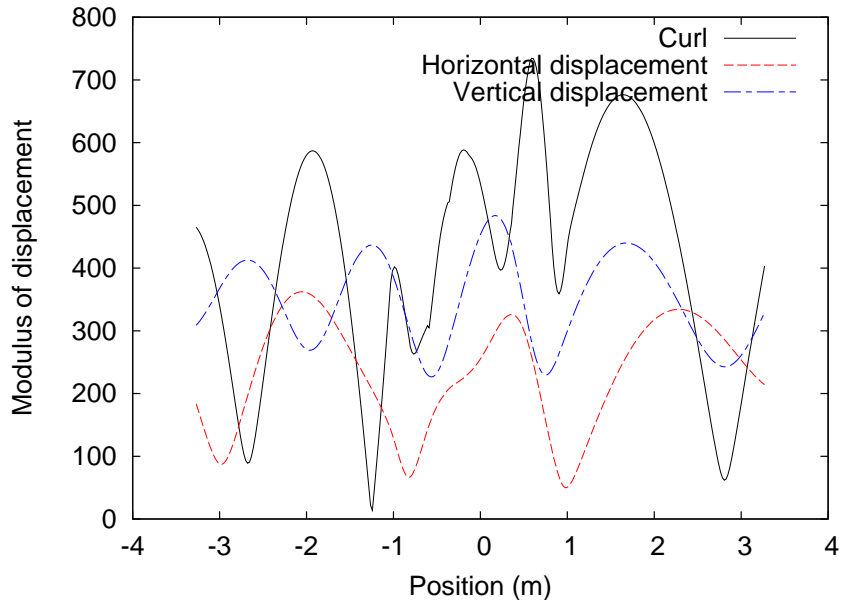


Fig. 2.23 – Spectral amplitude curves obtained above the surface of the hill after performing a Fourier transform of the seismic time trace recorded at each receiver for an incident P plane wave with 30° angle for the rotational, horizontal and vertical components of the displacement vector. The results are shown at $f_0 = 0.5$ Hz ($\eta = 1$).

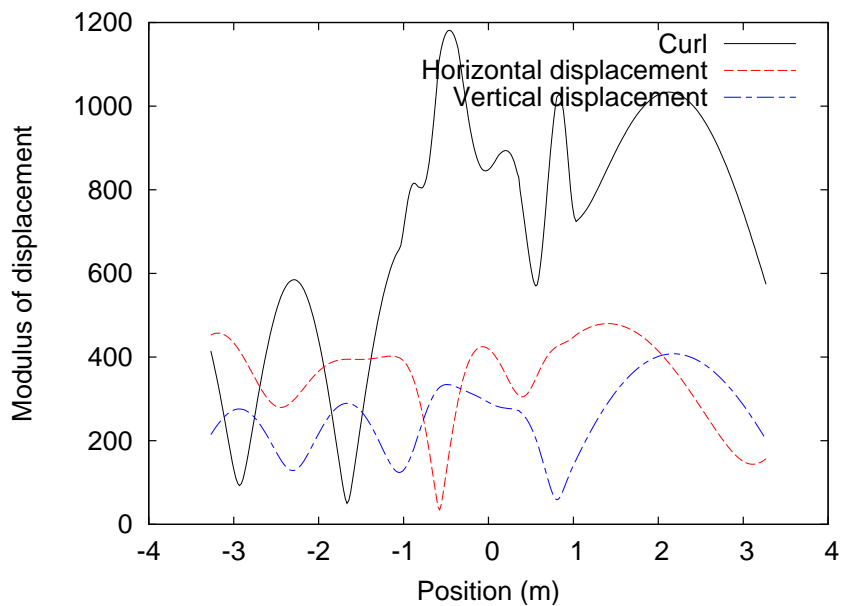


Fig. 2.24 – Spectral amplitude curves obtained above the surface of the hill after performing a Fourier transform of the seismic time trace recorded at each receiver for an incident SV plane wave with 30° angle for the rotational, horizontal and vertical components of the displacement vector. The results are shown at $f_0 = 0.5$ Hz ($\eta = 1$).

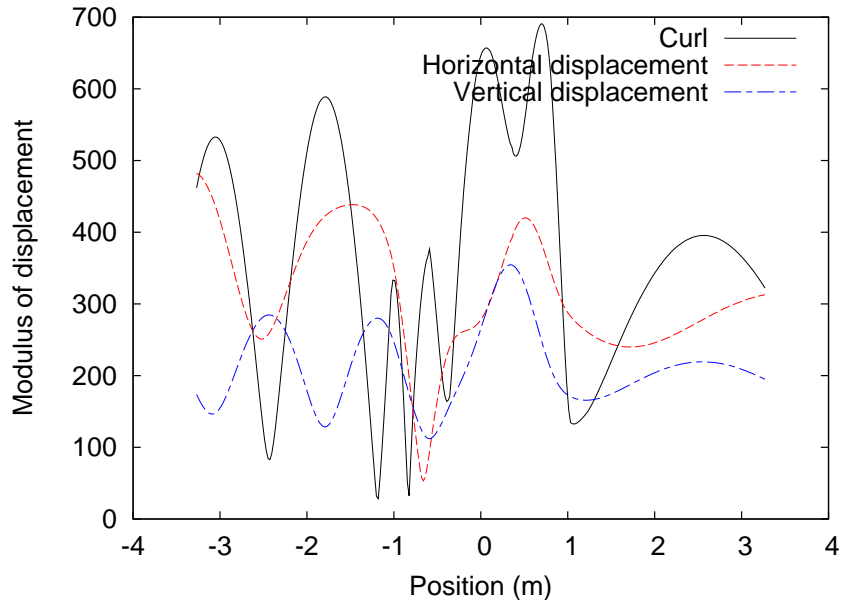


Fig. 2.25 – Spectral amplitude curves obtained above the surface of the hill after performing a Fourier transform of the seismic time trace recorded at each receiver for an incident P plane wave with 60° angle for the rotational, horizontal and vertical components of the displacement vector. The results are shown at $f_0 = 0.5$ Hz ($\eta = 1$).

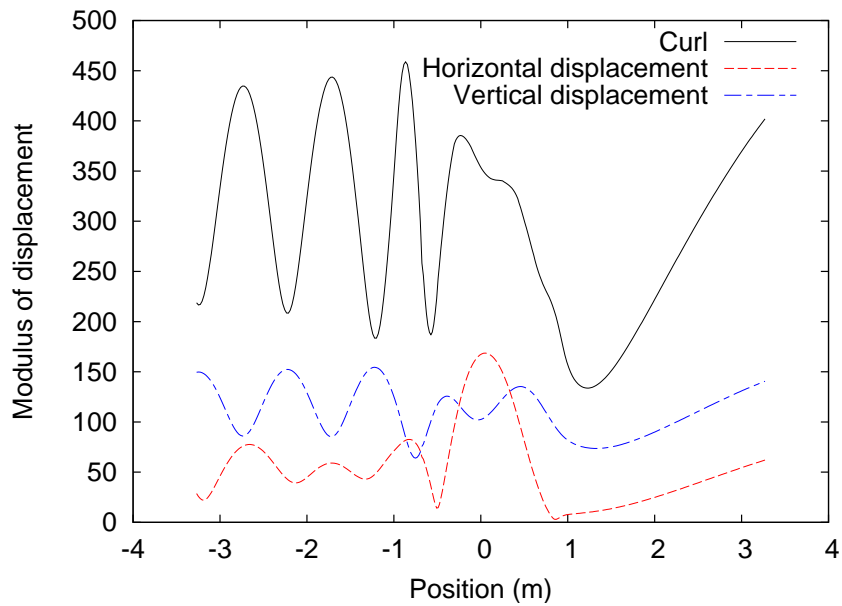


Fig. 2.26 – Spectral amplitude curves obtained above the surface of the hill after performing a Fourier transform of the seismic time trace recorded at each receiver for an incident SV plane wave with 60° angle for the rotational, horizontal and vertical components of the displacement vector. The results are shown at $f_0 = 0.5$ Hz ($\eta = 1$).

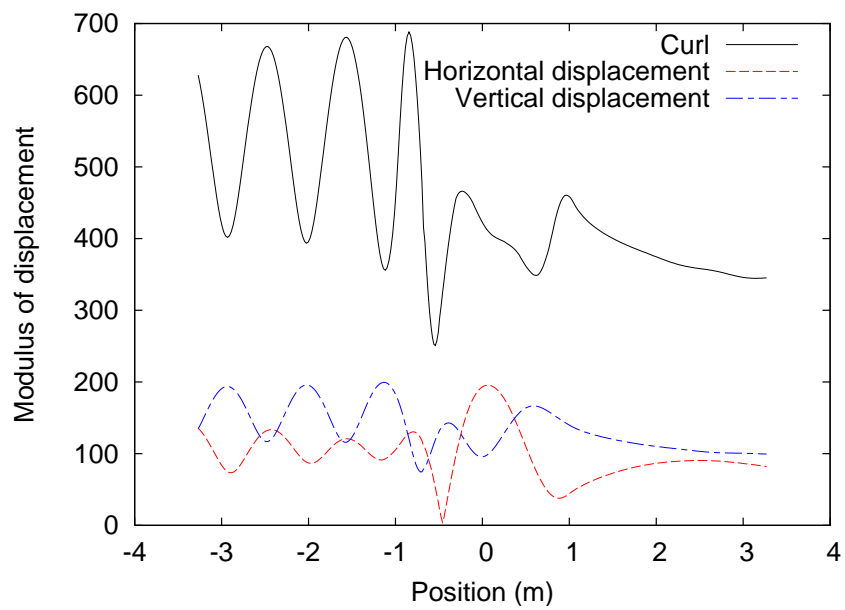


Fig. 2.27 – Spectral amplitude curves obtained above the surface of the hill after performing a Fourier transform of the seismic time trace recorded at each receiver for an incident *Rayleigh* wave for the rotational, horizontal and vertical components of the displacement vector. The results are shown at $f_0 = 0.5$ Hz ($\eta = 1$).

2.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté le processus d'introduction de sources d'onde plane pour différents angles d'incidence dans une méthode d'éléments finis. La méthode employée pour introduire ce type de source, utilisée ici en éléments finis pourrait être adaptée à d'autres méthodes numériques de résolution de l'équation des ondes élastiques dans le domaine temporel comme la méthode des différences finies en posant sur le bord des conditions permettant l'absorption du champ diffracté.

Ce chapitre porte essentiellement sur l'aspect méthodologique de l'introduction de sources d'ondes planes. Pour l'analyse des mouvements de rotation, on renvoie le lecteur à Godinho et al. (2009) présenté en annexe à la fin de ce manuscrit.

Chapitre 3

Pas de temps local pour interfaces fluide-solide

Ce chapitre a donné lieu à l'écriture d'un article :

R. Madec, D. Komatitsch and J. Diaz, *Energy-conserving local time stepping based on high-order finite elements for seismic wave propagation across a fluid-solid interface*, Computer Modelling in Engineering and Science, in press

Avant propos

Quand on étudie la propagation d'ondes sismiques dans un modèle fluide-solide à l'aide d'une méthode numérique dans le domaine temporel avec un schéma en temps explicite, il est souvent intéressant d'avoir recours à un pas de temps local ("time substepping") car la condition de stabilité dans la partie solide est fréquemment plus stricte que dans la partie fluide. Dans un tel cas, il faut imposer la conservation de l'énergie sur l'interface fluide-solide lors de la discrétisation temporelle afin de garantir la précision et la stabilité du schéma temporel. Ce critère de conservation n'est souvent pas respecté dans les techniques présentées dans la littérature. On introduit ici une méthode de pas de temps local en temps garantissant la conservation de l'énergie dans laquelle il est nécessaire de résoudre un système linéaire posé seulement sur l'interface fluide-solide. La méthode est validée par des tests numériques basés sur une méthode d'éléments finis d'ordre élevé. Ce schéma peut être utilisé dans n'importe quelle autre méthode ayant une matrice de masse diagonale.

En fin de chapitre, nous présenterons l'application de notre méthode de pas de temps local à des modèles pétroliers plus complexes que les cas présentés dans l'article.

3.1 Introduction

Coming along with the tremendous increase of computational power, the development of numerical methods for the accurate numerical simulation of the propagation of seismic waves in complex three-dimensional (3D) geological models has been the subject of a continuous effort in the last decades. Several numerical approaches can be used to solve the equations of linear elastodynamics, for instance the finite-difference method (e.g., Alterman & Karal (1968); Madariaga (1976); Virieux (1986)), boundary-element (e.g., Kawase (1988)) or boundary-integral methods (e.g., Sánchez-Sesma & Campillo (1991)), spectral and pseudo-spectral methods (e.g., Tessmer & Kosloff (1994); Carcione (1994)), classical low-order finite-element methods (FEM) (e.g., Lysmer & Drake (1972); Bielak et al. (2005)), the spectral-element method (SEM) for regional (e.g., Liu et al. (2004)) or global (e.g., Chaljub et al. (2007)) seismology, or discontinuous Galerkin formulations (e.g., Bernacki et al. (2006); Käser & Dumbser (2006)).

In many cases of practical interest, for instance in deep offshore seismic studies in the oil industry, in ocean acoustics or in seismological studies of the Earth, which has a fluid outer core, fluid-solid models must be considered. Considering small deformation and non-moving fluid-solid interfaces is always sufficient in that context. Many of the above techniques can be extended to handle such fluid-solid models, for instance the finite-difference method (Virieux, 1986), the spectral-element method (Komatitsch et al., 2000; Chaljub et al., 2007), or the discontinuous Galerkin formulation (Käser & Dumbser, 2008). The so-called ‘grid method’ (Zhang, 2004) can also be used. Another fruitful approach consists in coupling two different techniques at the fluid-solid interface, for instance a boundary-element method in the fluid and a finite-element method in the solid (Soares Jr. & Mansur, 2005) or finite elements and finite differences (Soares Jr. et al., 2007). However using a boundary-element method in the fluid implies that the fluid is considered homogeneous, which is not feasible in the context of some applications such as ocean acoustics at long distance (in which the thermocline, i.e., wave speed variations, must be taken into account to model the SOFAR channel) or full Earth seismology (because in the fluid outer core of the Earth wave speed varies with radius).

In many of the above techniques a different formulation is used in each medium, for instance a formulation in displacement or in velocity and stress in the solid, and in pressure or in a potential in the fluid, and the two formulations are coupled along the fluid-solid interface. In the spectral-element method for instance coupling is enforced through a coupling integral along the fluid-solid interface (Komatitsch et al., 2000; Chaljub et al., 2007). In the finite-difference method, which is

not based on the weak form of the elastodynamics equations but rather on their strong form and on a staggered grid, one can set the shear wave speed to zero in the fluid (Virieux, 1986); however van Vossen et al. (2002) show that many grid points per shortest seismic wavelength are then needed to correctly model the Stoneley-Scholte interface wave at the ocean bottom when the ocean bottom is flat and aligned with a grid axis, and that the situation is even worse when non-flat bathymetry is present and/or when the ocean bottom is not aligned with a grid axis.

A key issue in the numerical modeling of fluid-solid models in the time domain is that it is often desirable to resort to time substepping because the stability condition in the solid part of the medium can be more stringent than in the fluid. This comes from the combination of two reasons :

- in many cases of practical interest, for instance in the oil industry, the value of the shear wave velocity at the ocean bottom on the solid side is similar to the value of the pressure wave velocity on the fluid side (in the ocean) and thus a spatially conforming mesh is needed to keep a similar mesh resolution,
- but the maximum pressure wave speed, which governs the stability condition of explicit time schemes, is often much higher in the solid than in the fluid, which is often water; the ratio can typically be between 2 and 5.

Therefore, being able to use a significantly larger time step on the fluid side is useful in order to save computational time. Several schemes or approximations are available in the literature to do that, for instance Casadei & Halleux (2009) and references therein, or Soares Jr. et al. (2007) in the context of finite difference-finite element coupling. Time substepping is also sometimes used in the context of fluid-fluid (e.g., Diaz & Grote (2009); Soares Jr. (2009)) or solid-solid (e.g., Tessmer (2000); Kang & Baag (2004); Dumbser et al. (2007)) models in which at least one region has much higher pressure wave velocities and/or much smaller mesh cells, i.e., a very restrictive stability limit, for instance to study the interaction of tube waves with cracks in oil wells, or when very low shear wave velocities are present for instance in the weathered zone in oil and gas industry models (Tessmer, 2000). Time substepping can also be of interest to study other systems numerically, for instance the advection-diffusion equation (El Soueidy et al., 2009).

At an interface across which the time step changes, energy conservation should be ensured along the interface, otherwise instabilities and/or inaccuracies can arise. But this is often not done in the available literature and approximate techniques that do not enforce the conservation of energy are used instead. For instance Tessmer (2000) does not explicitly enforce energy conservation and observes that small spurious reflected and refracted waves arise in his snapshots of wave propagation.

In the case of fluid-solid coupling, one should therefore enforce the conservation of energy along the fluid-solid interface in the time-marching algorithm in order to ensure the accuracy and the stability of the time scheme. Some classical time integration schemes ensure the conservation of energy inside a given domain, see e.g. Simo et al. (1992); Tarnow & Simo (1994), Cohen (2002) (p. 142), Kane et al. (2003); Collino et al. (2003a,b); Hairer et al. (2006); Nissen-Meyer et al. (2008); Celledoni et al. (2009). But when coupling two different domains in a non conforming fashion (in time or in space) one must in addition enforce the conservation of total energy along the interface explicitly. In this article we therefore introduce such an energy-conserving local time stepping method, which is both accurate and numerically stable. To implement it we need to solve a linear system along the fluid-solid interface. We validate it based on numerical experiments performed using a spectral-element method and check that energy conservation along the fluid-solid interface is ensured from a numerical point of view.

3.2 Brief description of the classical fluid-solid coupling technique with no substepping

Let us consider an acoustic fluid and an elastic solid in contact. We consider a linear elastic rheology for the solid, while the fluid is assumed to be inviscid. In the heterogeneous, elastic region the linear seismic wave equation can be written in the strong form as :

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}_s = \nabla \cdot (\mathbf{c} : \nabla \mathbf{u}_s), \quad (3.1)$$

where \mathbf{u}_s denotes the displacement vector in the solid, \mathbf{c} the fourth-order stiffness tensor, and ρ the density. A dot over a symbol indicates time differentiation and the colon represents a double tensor contraction operation. The wave field in the heterogeneous, acoustic, inviscid fluid is governed by the conservation and dynamics equations which, neglecting the effects of gravity, are :

$$\begin{aligned} \rho \ddot{\mathbf{u}}_f &= -\nabla p, \\ p &= -\kappa(\nabla \cdot \mathbf{u}_f), \end{aligned} \quad (3.2)$$

where \mathbf{u}_f denotes the displacement vector in the fluid, p denotes pressure and κ is the bulk modulus of the fluid. The displacement in the fluid can be described based on a potential ϕ defined by $\nabla \phi = \rho \mathbf{u}_f$.

To couple the two media at a fluid-solid interface, we have to ensure the continuity of the traction vector and of the normal component of the displacement vector.

In this article we solve the above seismic wave equation in the coupled fluid-solid medium based on a Legendre spectral-element method, as for instance in Komatitsch et al. (2000), Komatitsch & Tromp (2002) or Chaljub et al. (2007), i.e., we rewrite the equations of motion (3.1) and (3.2) in a weak form, using the potential ϕ above as unknown in the fluid. On the edges of the domain we use a free surface (i.e., zero traction) boundary condition. In the solid this condition is easily implemented in the weak formulation since the integral of traction along the boundary simply vanishes (e.g., Komatitsch & Vilotte (1998)). In the fluid the condition needs to be imposed explicitly by setting pressure, or equivalently the potential ϕ , to zero for the grid points that lie on the edges of the domain.

As is traditional for the spectral-element method (see e.g. Chaljub et al. (2007)), temporal discretization is based on a non iterative explicit Newmark scheme, i.e., a central finite-difference scheme, which is conditionally stable and therefore the maximum value of the time step is defined by the Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) stability condition (see e.g. Newmark (1959); Hughes (1987)). That scheme preserves momentum (Simo et al., 1992) and also conserves our definition of discrete energy (3.11) and the so-called ‘equivalent energy’ (Krenk, 2006). Other (slightly different) definitions of discrete energy slightly oscillate, but around a mean value that is preserved (Kane et al., 2003; Krenk, 2006).

Let us write the spectral-element discretization of the variational formulation of the seismic wave equation above in the solid medium as a matrix system (e.g., Komatitsch & Vilotte (1998)), and in order to do so let us denote U , V and A the global displacement, velocity and acceleration vectors of unknowns, respectively, M the diagonal mass matrix and K the stiffness matrix :

$$\begin{cases} U^{n+1} = U^n + \Delta t V^n + \frac{\Delta t^2}{2} A^n \\ V^{n+1/2} = V^n + \frac{\Delta t}{2} A^n \\ MA^{n+1} = KU^{n+1} \\ V^{n+1} = V^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} A^{n+1} \end{cases} \quad (3.3)$$

Let us also write the spectral-element discretization of the variational formulation of the seismic wave equation in the fluid medium as a matrix system and introduce coupling terms to enforce the continuity of the traction vector and of normal displacement on the fluid-solid interface (e.g., Komatitsch et al. (2000); Komatitsch & Tromp (2002)); if we denote Φ the global vector of unknowns

corresponding to the potential ϕ in the fluid defined above, $\dot{\Phi}$ and $\ddot{\Phi}$ its first and second time derivatives, and if we use a conforming time-stepping scheme for now, i.e., the same time step $\Delta t_s = \Delta t_f = \Delta t$ everywhere, this gives :

$$\left\{ \begin{array}{l} U^{n+1} = U^n + \Delta t V^n + \frac{\Delta t^2}{2} A^n \\ V^{n+1/2} = V^n + \frac{\Delta t}{2} A^n \\ M_s A^{n+1} = K_s U^{n+1} - B \ddot{\Phi}^{n+1} \\ V^{n+1} = V^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} A^{n+1} \end{array} \right. \quad (3.4)$$

and

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi^{n+1} = \Phi^n + \Delta t \dot{\Phi}^n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\Phi}^n \\ \dot{\Phi}^{n+1/2} = \dot{\Phi}^n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\Phi}^n \\ M_f \ddot{\Phi}^{n+1} = K_f \Phi^{n+1} + B^* U^{n+1} \\ \dot{\Phi}^{n+1} = \dot{\Phi}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\Phi}^{n+1} . \end{array} \right. \quad (3.5)$$

B is the matrix representation of the coupling integral along the fluid-solid interface on the solid side and is therefore zero everywhere except for grid points that belong to the fluid-solid interface ; B^* is the coupling matrix on the fluid side.

The above system is an explicit scheme, i.e., one can express all its unknowns at a given time step in terms of elements already computed at previous time steps and there is no need to invert any linear matrix system. Let us now see what happens when we introduce time substepping.

3.3 Description of the substepping technique

Let us show how we write a system with two different time steps without losing the conservation of energy along the fluid-solid interface. The ratio between the time steps in the two media (the fluid and the solid) must be a ratio of integers p/q . Rodríguez (2004) and Diaz & Joly (2005) applied this technique to a finite-element method written in velocity and pressure and discretized based on a leap-frog time scheme ; here we write it for a formulation in displacement in the solid and in a potential in the fluid and discretize it based on a Newmark time scheme. For p time steps in the

fluid and q time steps in the solid (i.e., $\Delta t_s/p = \Delta t_f/q = \Delta t$) we write :

$$\left\{ \begin{array}{l} U^{pqn+ip} = U^{pqn+(i-1)p} + \Delta t_s V^{pqn+(i-1)p} + \frac{\Delta t_s^2}{2} A^{pqn+(i-1)p} \\ V^{pqn+(2i-1)\frac{p}{2}} = V^{pqn+(i-1)p} + \frac{\Delta t_s}{2} A^{pqn+(i-1)p} \\ M_s A^{pqn+ip} = K_s U^{pqn+ip} - B[\ddot{\Phi}]^{pqn+ip} \\ V^{pqn+ip} = V^{pqn+(2i-1)\frac{p}{2}} + \frac{\Delta t_s}{2} A^{pqn+ip} \end{array} \right. \quad (3.6)$$

and

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi^{pqn+jq} = \Phi^{pqn+(j-1)q} + \Delta t_f \dot{\Phi}^{pqn+(j-1)q} + \frac{\Delta t_f^2}{2} \ddot{\Phi}^{pqn+(j-1)q} \\ \dot{\Phi}^{pqn+(2j-1)\frac{q}{2}} = \dot{\Phi}^{pqn+(j-1)q} + \frac{\Delta t_f}{2} \ddot{\Phi}^{pqn+(j-1)q} \\ M_f \ddot{\Phi}^{pqn+jq} = K_f \Phi^{pqn+jq} + B^*[U]^{pqn+jq} \\ \dot{\Phi}^{pqn+jq} = \dot{\Phi}^{pqn+(2j-1)\frac{q}{2}} + \frac{\Delta t_f}{2} \ddot{\Phi}^{pqn+jq} \end{array} \right. \quad (3.7)$$

for $i = 1, \dots, q$ and $j = 1, \dots, p$. The difficulty is to find a suitable approximation for the transmission terms at each local time step, $([U]^{pqn+jq})_{j=1,p}$ and $([\ddot{\Phi}]^{pqn+ip})_{i=1,q}$. Here and in all the following, variables between brackets represent terms that we cannot compute directly because the variables are not defined at this time index. The time discretization of these quantities will be chosen in a suitable fashion so as to ensure the conservation of energy along the fluid-solid interface. The important thing is to conserve global energy to ensure that the coupling substepping scheme be physically consistent and stable. After finding suitable approximations for the transmission terms, we can rewrite the system and find the implicit scheme that will permit the propagation for the local time step scheme. Let us illustrate this in the simple particular case $p/q = 1/2$.

3.3.1 Case of a 1/2 ratio

In this section, we impose $\Delta t_s = \Delta t_f/2 = \Delta t$. The coupled system can then be written the same way as in the conforming case :

First time step in the solid :

$$\begin{cases} U^{2n+1} = U^{2n} + \Delta t V^{2n} + \frac{\Delta t^2}{2} A^{2n} \\ V^{2n+1/2} = V^{2n} + \frac{\Delta t}{2} A^{2n} \\ M_s A^{2n+1} = K_s U^{2n+1} - B[\ddot{\Phi}]^{2n+1} \\ V^{2n+1} = V^{2n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} A^{2n+1} \end{cases} \quad (3.8)$$

Second time step in the solid :

$$\begin{cases} U^{2n+2} = U^{2n+1} + \Delta t V^{2n+1} + \frac{\Delta t^2}{2} A^{2n+1} \\ V^{2n+3/2} = V^{2n+1} + \frac{\Delta t}{2} A^{2n+1} \\ M_s A^{2n+2} = K_s U^{2n+2} - B[\ddot{\Phi}]^{2n+2} \\ V^{2n+2} = V^{2n+3/2} + \frac{\Delta t}{2} A^{2n+2} \end{cases} \quad (3.9)$$

First and only time step in the fluid :

$$\begin{cases} \Phi^{2n+2} = \Phi^{2n} + 2\Delta t \dot{\Phi}^{2n} + 2\Delta t^2 \ddot{\Phi}^{2n} \\ \dot{\Phi}^{2n+1} = \dot{\Phi}^{2n} + \Delta t \ddot{\Phi}^{2n} \\ M_f \ddot{\Phi}^{2n+2} = K_f \Phi^{2n+2} + B^*[U]^{2n+2} \\ \dot{\Phi}^{2n+2} = \dot{\Phi}^{2n+1} + \Delta t \ddot{\Phi}^{2n+2} \end{cases} \quad (3.10)$$

For such a system, the discrete energy in the solid and in the fluid is calculated as :

$$\begin{aligned} E_s^{2n} &= (M_s V^{2n+\frac{1}{2}}, V^{2n+\frac{1}{2}}) - (K_s U^{2n}, U^{2n+1}), \\ E_f^{2n} &= (M_f \ddot{\Phi}^{2n}, \ddot{\Phi}^{2n}) - (K_f \dot{\Phi}^{2n-1}, \dot{\Phi}^{2n+1}), \end{aligned} \quad (3.11)$$

where (\cdot, \cdot) represents the scalar product. Total energy is defined as $E^{2n} = E_s^{2n} + E_f^{2n}$. These energies are positive if both time steps verify their respective CFL stability condition because K_f and K_s are definite negative by construction.

$$\begin{aligned} \frac{E^{2n+2} - E^{2n}}{2\Delta t} &= \frac{[U^{2n+2}] - [U^{2n}]}{2\Delta t} \times \frac{\dot{\Phi}^{2n+3} - \dot{\Phi}^{2n-1}}{4\Delta t} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left([\ddot{\Phi}^{2n+1}] \times \frac{U^{2n+2} - U^{2n}}{2\Delta t} + [\ddot{\Phi}^{2n+2}] \times \frac{U^{2n+3} - U^{2n+1}}{2\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ensuring energy conservation along the fluid-solid interface means finding $[\ddot{\Phi}]^{2n+1}$, $[\ddot{\Phi}]^{2n+2}$ and $[U]^{2n+2}$ such that $E^{2n+2} - E^{2n} = 0$, which implies that we must solve

$$([U]^{2n+2} - [U]^{2n}) \times \frac{\dot{\Phi}^{2n+3} - \dot{\Phi}^{2n-1}}{4\Delta t} - [\ddot{\Phi}]^{2n+1} \times \frac{U^{2n+2} - U^{2n}}{2} - [\ddot{\Phi}]^{2n+2} \times \frac{U^{2n+3} - U^{2n+1}}{2} = 0. \quad (3.13)$$

Taking

$$\ddot{\Phi}^{2n} = (\dot{\Phi}^{2n+1} - \dot{\Phi}^{2n-1})/2\Delta t \quad (3.14)$$

we solve (3.13) using

$$\begin{aligned} [U]^{2n+2} &= (U^{2n+3} + U^{2n+2})/2 \quad \text{and} \\ [\ddot{\Phi}]^{2n+2} &= [\ddot{\Phi}]^{2n+1} = (\ddot{\Phi}^{2n+2} + \ddot{\Phi}^{2n})/2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Now we simply need to replace the variables into brackets in (3.8-3.10) with (3.15) to obtain the following implicit system :

First time step in the solid :

$$\left\{ \begin{array}{l} U^{2n+1} = U^{2n} + \Delta t V^{2n} + \frac{\Delta t^2}{2} A^{2n} \\ V^{2n+1/2} = V^{2n} + \frac{\Delta t}{2} A^{2n} \\ M_s A^{2n+1} = K_s U^{2n+1} - B \frac{\ddot{\Phi}^{2n+2} + \ddot{\Phi}^{2n}}{2} \\ V^{2n+1} = V^{2n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} A^{2n+1} \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Second time step in the solid :

$$\left\{ \begin{array}{l} U^{2n+2} = U^{2n+1} + \Delta t V^{2n+1} + \frac{\Delta t^2}{2} A^{2n+1} \\ V^{2n+3/2} = V^{2n+1} + \frac{\Delta t}{2} A^{2n+1} \\ M_s A^{2n+2} = K_s U^{2n+2} - B \frac{\ddot{\Phi}^{2n+2} + \ddot{\Phi}^{2n}}{2} \\ V^{2n+2} = V^{2n+3/2} + \frac{\Delta t}{2} A^{2n+2} \end{array} \right. \quad (3.17)$$

First and only time step in the fluid :

$$\begin{cases} \Phi^{2n+2} = \Phi^{2n} + 2\Delta t \dot{\Phi}^{2n} + 2\Delta t^2 \ddot{\Phi}^{2n} \\ \dot{\Phi}^{2n+1} = \dot{\Phi}^{2n} + \Delta t \ddot{\Phi}^{2n} \\ M_f \ddot{\Phi}^{2n+2} = K_f \Phi^{2n+2} + B^* \frac{U^{2n+3} + U^{2n+2}}{2} \\ \dot{\Phi}^{2n+2} = \dot{\Phi}^{2n+1} + \Delta t \ddot{\Phi}^{2n+2} \end{cases} \quad (3.18)$$

We then rewrite the system to make each variable depend on $\ddot{\Phi}^{2n+2}$. This allows us to write a linear system :

$$C \ddot{\Phi}^{2n+2} = b^{2n+1}, \quad (3.19)$$

to be solved on the fluid-solid interface only, in which the unknown variable is $\ddot{\Phi}^{2n+2}$. Matrix C is defined as :

$$C = M_f + \Delta t^2 B M_s^{-1} B^* + \frac{\Delta t^4}{4} B M_s^{-1} K_s M_s^{-1} B^* \quad (3.20)$$

This matrix to invert is non-zero only for the grid points located on the fluid-solid interface, and the right-hand side b^{2n+1} depends on totally explicit variables plus the explicit part of the partially implicit variables (each variable has an explicit part and most variables also have an implicit part, as seen above). Matrix C does not vary with time and it can therefore be constructed and decomposed once and for all before the time loop. To improve computational efficiency we can therefore keep its LU decomposition and use it in the time loop to compute $\ddot{\Phi}^{2n+2}$.

After solving for $\ddot{\Phi}^{2n+2}$ on the interface, we inject it in the system (3.16-3.18) and we can then compute all the other unknowns of that time step.

3.3.2 Extension to the more general case of a p/q ratio

Let us now extend our method to the more general case of a p/q ratio of integers, such that $\Delta t_s/p = \Delta t_f/q = \Delta t$. The system to solve is then (3.6-3.7), in which discrete energy is defined as :

$$\begin{aligned} E_s^{pqn} &= (M_s V^{pqn + \frac{p}{2}}, V^{pqn + \frac{p}{2}}) - (K_s U^{pqn}, U^{pqn+p}), \\ E_f^{pqn} &= (M_f \dot{\Phi}^{pqn}, \dot{\Phi}^{pqn}) - (K_f \dot{\Phi}^{pqn - \frac{q}{2}}, \dot{\Phi}^{pqn + \frac{q}{2}}). \end{aligned} \quad (3.21)$$

To ensure energy conservation along the fluid-solid interface and therefore the stability of the scheme, we need to enforce that :

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \left(([U]^{pqn+jq} - [U]^{pqn+(j-1)q}) \times \frac{\dot{\Phi}^{pqn+(2j+1)\frac{q}{2}} - \dot{\Phi}^{pqn+(2j-3)\frac{q}{2}}}{2q\Delta t} \right) \\ - \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \left([\ddot{\Phi}]^{pqn+ip} \times \frac{U^{pqn+ip} - U^{pqn+(i-1)p}}{2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.22)$$

which leads to transmission terms $([U]^{pqn+jq})_{j=1,p}$ and $([\ddot{\Phi}]^{pqn+ip})_{i=1,q}$ for the system (3.6-3.7). One can show that (3.22) is ensured if the quantities into brackets verify the following sufficient conditions used by Rodríguez (2004) :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, q-1, \quad [\ddot{\Phi}]^{pqn+(i+1)p} &= [\ddot{\Phi}]^{pqn+ip} \\ \forall j = 1, \dots, p-1, \quad [U]^{pqn+(j+1)q} - [U]^{pqn+jq} &= [U]^{pqn+jq} - [U]^{pqn+(j-1)q}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

This allows us to find a suitable solution to (3.22). For example, in the case of $p/q = 2/3$ (i.e., $p = 2$ and $q = 3$), the solution for the transmission terms is :

$$\begin{aligned} [U]^{6n+3} &= (U^{6n+8} + U^{6n+6} + U^{6n+2} + U^{6n})/4, \\ [U]^{6n+6} &= (U^{6n+8} + U^{6n+6})/2, \\ [\ddot{\Phi}]^{6n+6} &= [\ddot{\Phi}]^{6n+4} = [\ddot{\Phi}]^{6n+2} = (\ddot{\Phi}^{6n+6} + 2\ddot{\Phi}^{6n+3} + \ddot{\Phi}^{6n})/2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

We can then build a linear system and solve (3.6-3.7). In the case of $p/q = 1/2$, we have already built that linear system around $\ddot{\Phi}^{2n+2}$ in (3.19). In the case of $p/q = 2/3$, the linear system would be built around $(\ddot{\Phi}^{6n+6} + 2\ddot{\Phi}^{6n+3})/2$.

3.4 Numerical tests

Let us now validate the time substepping approach by studying its accuracy and the time evolution of total discrete energy for two benchmarks previously studied by Komatitsch et al. (2000) in the conforming case, i.e., with the same time step in the fluid and in the solid.

3.4.1 Flat interface with $\Delta t_s = \Delta t_f/2$ or with $\Delta t_s = \Delta t_f \times 2/3$

The first test is for a flat fluid-solid interface. The model and the mesh are the same as in Komatitsch et al. (2000). The domain has a size of $6400 \text{ m} \times 4800 \text{ m}$ and is meshed with 120×90 spectral elements, therefore each element has a size of $53.33 \text{ m} \times 53.33 \text{ m}$. In each spectral element we use polynomial basis functions of degree $N = 5$, i.e., each spectral element contains $(N + 1)^3 = 216$ grid points. The fluid-solid interface is located at a depth of $z_{fs} = 2400 \text{ m}$ below the free surface of the fluid, i.e., in the middle of the model in the vertical direction (Figure 3.1). The upper layer is a fluid water layer with a compressional wave speed of 1500 m.s^{-1} and density of 1020 kg.m^{-3} ; the lower layer is solid with a compressional wave speed of 3400 m.s^{-1} , a shear wave speed of 1963 m.s^{-1} and density of 2500 kg.m^{-3} . In order to be able to study the conservation of total discrete energy along the fluid-solid interface in our substepping technique we must not use absorbing conditions on the edges of the grid to mimic an infinite medium otherwise some energy would be absorbed and total energy would not remain constant with time. Instead we must study a closed medium. We therefore implement a free surface condition, which ensures total reflection of the waves, on the four sides of the mesh.

The source time function is the second derivative of a Gaussian (a so-called ‘Ricker’ wavelet) of dominant frequency 10 Hz located in the fluid at $x_s = 1575 \text{ m}$ at a depth of $z_s = 1900 \text{ m}$, i.e., 500 m above the fluid-solid interface. A recording station (a receiver) is located in the fluid at $x_r = 3750 \text{ m}$ at a depth of $z_r = 1933.33 \text{ m}$ and records the time variation of the two components of the displacement vector in order to display a so-called ‘seismogram’ (i.e., the time history of a given component of the displacement vector at a given grid point). Since the seismic wave equation is linear, the amplitude of the source does not matter : multiplying the amplitude of the source by a certain factor simply means that the seismograms get multiplied by the same factor ; therefore the actual amplitude of all the seismograms in what follows can be considered meaningless.

The dispersion and stability of the Legendre spectral-element method used in conjunction with an explicit conditionally-stable Newmark finite-difference time scheme have been studied for instance by Fauqueux (2003), De Basabe & Sen (2007) and Seriani & Oliveira (2008). Following Fauqueux (2003), the CFL stability limit for a regular mesh can be determined based on $c_{max}^p \Delta t / h \leq cfl_{1,5} / \sqrt{D}$, where c_{max}^p is the maximum pressure wave speed in a given layer of the model (1500 m.s^{-1} in the fluid and 3400 m.s^{-1} in the solid), Δt is the time step in the fluid or in the solid, h is the length of an edge of a mesh element (53.33 m here), D is the spatial dimension of the problem (2 here), and $cfl_{1,5}$ is the CFL stability limit in the 1D case for polynomial basis

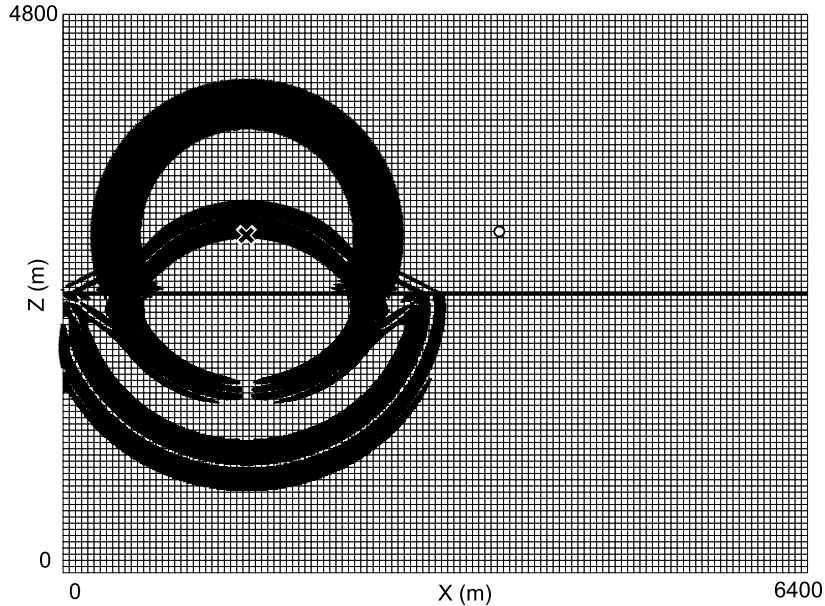


Fig. 3.1 – Mesh used for a flat ocean bottom with free surfaces on the four sides of the grid. The snapshot of the wave field superimposed is shown at time $t = 0.8816$ s and shows the pressure waves in the fluid upper layer and the pressure and shear waves in the solid lower layer. Each mesh cell has a size of $53.33 \text{ m} \times 53.33 \text{ m}$ as in Komatitsch et al. (2000). The cross represents the position of the source and the circle indicates the position of the seismic receiver.

functions of degree $N = 5$ in space. Fauqueux (2003) finds that a sufficient (but not necessary in the elastic case) limit (i.e., a slightly conservative estimate) is $cfl_{1,5} = 0.1010$; numerical tests that we performed to find the CFL limit experimentally showed us that we could go slightly higher (up to $cfl_{1,5} = 0.1014$) and we therefore determined that the CFL stability limit for our model is approximately $\Delta t_f = 2.53$ ms in the fluid and $\Delta t_s = 1.126$ ms in the solid.

Figure 3.2 (top) shows the seismogram recorded at the receiver in the case of conforming time stepping with a time step $\Delta t = 0.42$ ms and 5000 time steps in the fluid and in the solid, compared to the analytical solution computed based on the Cagniard-de Hoop technique using a computer program from Berg et al. (1994). This figure therefore reproduces the results of Komatitsch et al. (2000). The fit between the numerical solution and the analytical solution is excellent. Figure 3.2 (bottom) shows the seismogram in the case of non conforming time steps with a p/q ratio of $1/2$, i.e., $\Delta t_f = 2\Delta t_s = 0.42$ ms, i.e., for a time step in the solid that is about $1/5$ th of that of the CFL stability limit. We therefore perform 5000 time steps in the fluid and 10000 time steps in the solid. Again, we get an excellent fit between the numerical solution and the analytical solution, which shows the accuracy of the substepping technique.

In order to illustrate numerically the stability of the time substepping scheme, in Figure 3.3 we

study the evolution of the total discrete energy of the numerical scheme computed using (3.21) with $p = 1$ and $q = 2$. The source being located in the acoustic medium, energy is partially transferred to the elastic medium when the wave fronts (both the direct pressure wave front and the pressure wave front reflected off the free surface of the fluid layer) reach the fluid-solid interface, but the important thing to note is that total discrete energy is very well conserved.

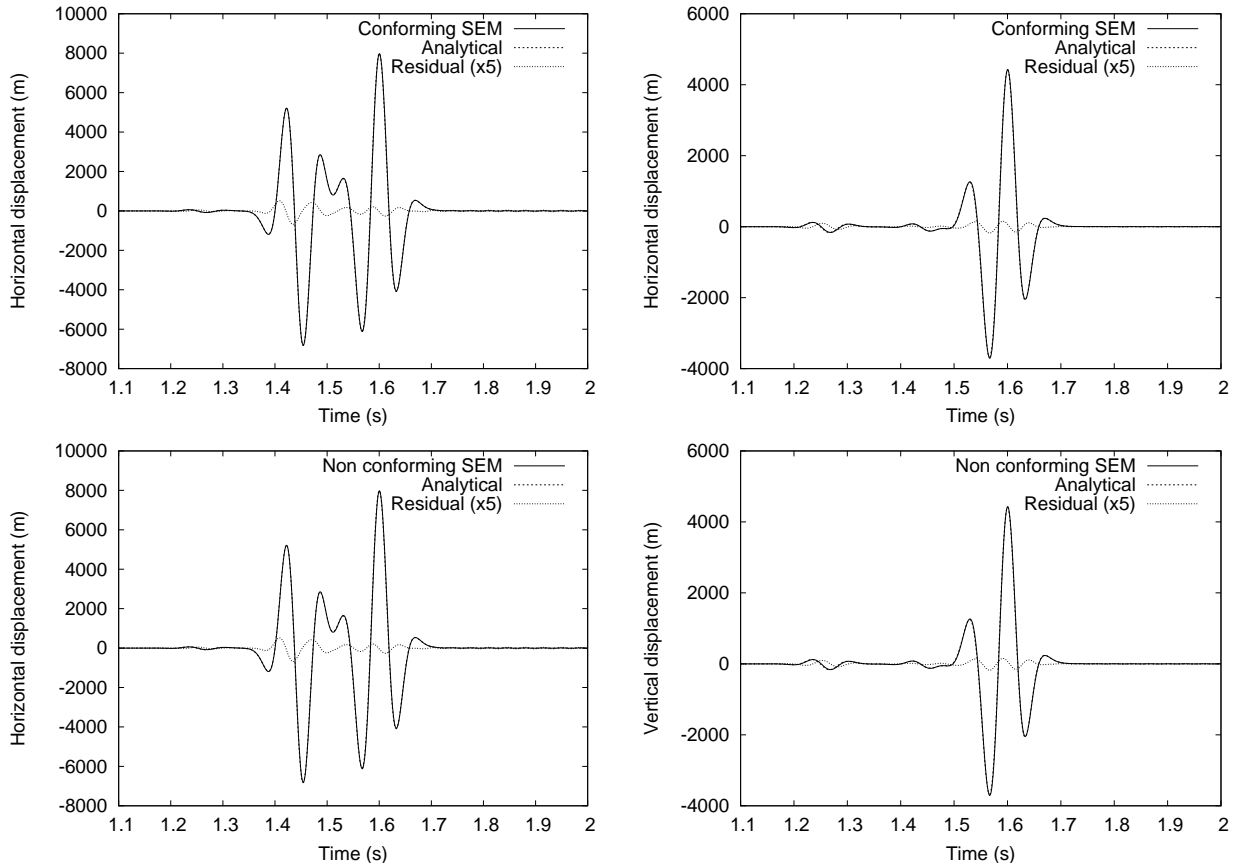


Fig. 3.2 – Comparison with the analytical solution from Berg et al. (1994) (dashed line) of spectral-element seismograms (solid line) for the horizontal (left) and vertical (right) components of the displacement vector at the receiver located in the fluid for the model with a flat fluid-solid interface. The difference amplified by a factor of 5 is also shown (dotted line). (Top) The fit is excellent for conforming time stepping with $\Delta t_f = \Delta t_s = 0.42$ ms, i.e., at about CFL/5 in the fluid and CFL/2.5 in the solid. (Bottom) The fit is also excellent for non-conforming time stepping with $\Delta t_f = 0.42$ ms in the fluid and $\Delta t_s = 0.21$ ms in the solid, i.e., at about CFL/5 in both the fluid and the solid.

The above validation has been performed relatively far from the CFL stability limit (at about 1/5th of that limit). Let us now study what happens when we select a time step closer to the stability limit. For conforming time stepping, let us take $\Delta t = 1.125$ ms, which is very close to the CFL limit computed above and which is therefore the largest time step that we can select for our numerical tests in the conforming case. Figure 3.4 (top) shows that the fit to the analytical

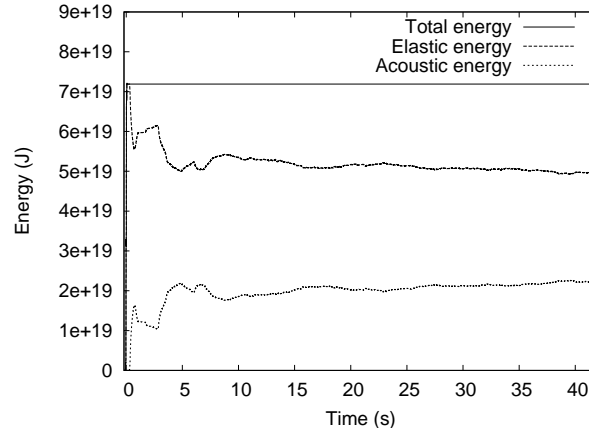


Fig. 3.3 – Time evolution of discrete energy in the fluid and in the solid as well as total discrete energy for the non conforming case with $p/q = 1/2$ for the model with a flat fluid-solid interface. We have $\Delta t_f = 2\Delta t_s = 0.42$ ms. We propagate the wave field for 100,000 time steps in the fluid and for 200,000 time steps in the solid. Total discrete energy is very well conserved.

solution is not very good compared to Figure 3.2 (top). In the non conforming case with $p/q = 1/2$ and $\Delta t_f = 1.125$ ms in the fluid (Figure 3.4, bottom) we observe a similar poorer fit compared to the non conforming case with a smaller time step of Figure 3.2 (bottom). This shows that the main source of discrepancies is not the time substepping scheme but rather the numerical error (numerical dispersion) of the explicit Newmark finite-difference time scheme itself, which is only second-order accurate (Hughes, 1987) while the spatial polynomial basis functions that we have chosen for the spectral-element method are of degree $N = 5$. It would therefore be of interest to switch to higher-order time schemes such as fourth-order Runge-Kutta integration or symplectic schemes (e.g., Simo et al. (1992); Nissen-Meyer et al. (2008)) for instance.

Finally, let us test the case of a p/q ratio equal to $2/3$, i.e., $\Delta t_s = \Delta t_f \times 2/3$. We select $\Delta t_s = 0.28$ ms and $\Delta t_f = 0.42$ ms. Figure 3.5 shows that the fit to the analytical solution is very good, as in the case of $p/q = 1/2$ in Figure 3.2. Figure 3.6 shows that for 100,000 time steps in the fluid for 150,000 time steps in the solid total discrete energy is very well conserved, as in the case of $p/q = 1/2$ in Figure 3.3.

3.4.2 Sinusoidal interface with $\Delta t_s = \Delta t_f/2$

Let us see if our time substepping scheme is still stable and accurate in the case of a fluid-solid interface with a more complex shape. Again, we select the same mesh and model as in Komatitsch et al. (2000), but will introduce time substepping. The size of the mesh, number of spectral elements in the mesh, and the properties of the model remain unchanged compared to the previous section but

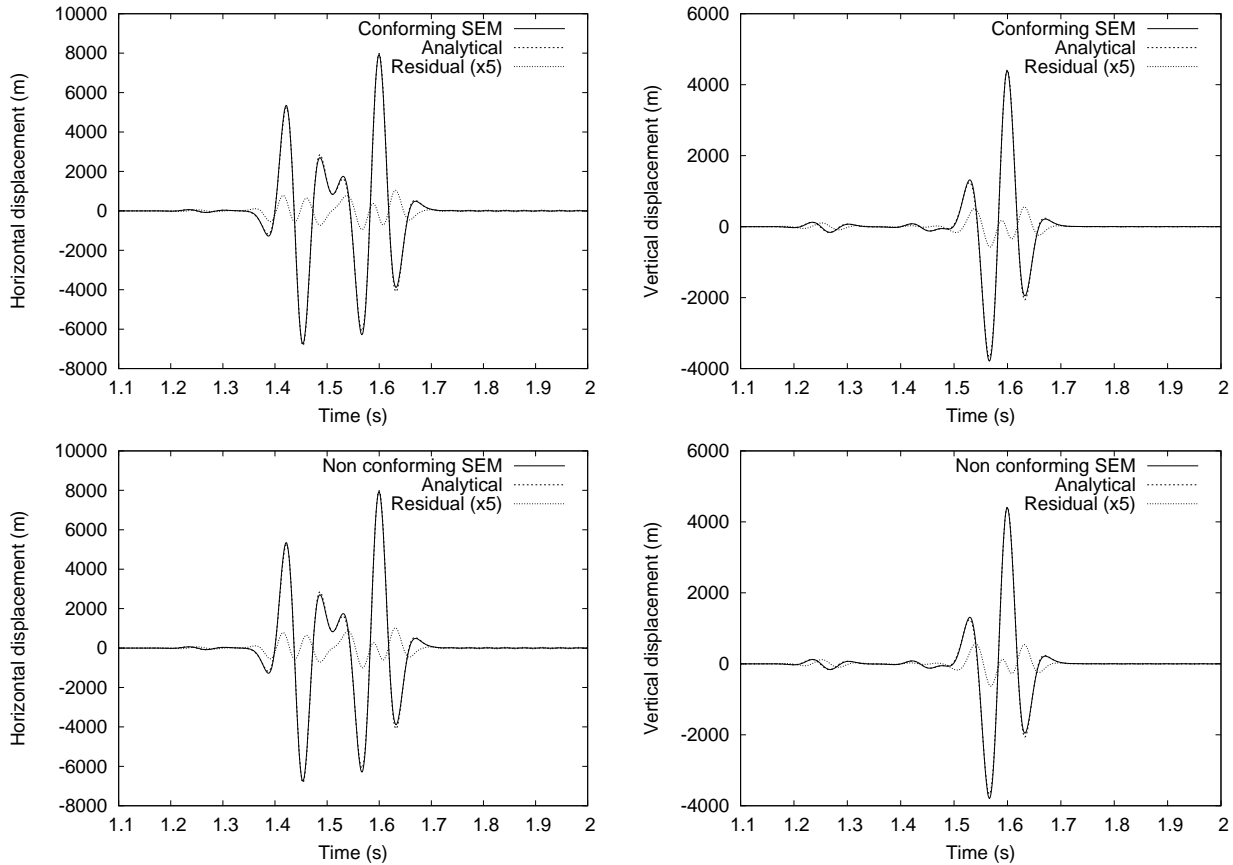


Fig. 3.4 – Comparison with the analytical solution from Berg et al. (1994) (dashed line) of spectral-element seismograms (solid line) for the horizontal (left) and vertical (right) components of the displacement vector at the receiver located in the fluid. The difference amplified by a factor of 5 is also shown (dotted line). (Top) The fit is not very good for conforming time stepping with $\Delta t_f = \Delta t_s = 1.125$ ms, i.e., at about CFL/2 in the fluid and CFL in the solid. (Bottom) The fit is also not very good for non-conforming time stepping with $\Delta t_f = 1.125$ ms in the fluid and $\Delta t_s = 0.5625$ ms in the solid, i.e., at about CFL/2 in both the fluid and the solid.

the fluid-solid interface (the ocean bottom) now has a sinusoidal shape, as illustrated in Figure 3.7. The source is located at $x_s = 2908.33$ m at a depth of $z_s = 1700$ m below the free surface of the fluid, and the receiver is located at $x_r = 4053.06$ m at a depth of $z_r = 1500$ m.

Since there is no known analytical solution in the case of a sinusoidal interface, let us compare the spectral-element solution with conforming time stepping to the spectral-element solution with time substepping for a p/q ratio of 1/2, i.e., for $\Delta t_s = \Delta t_f/2$. In Figure 3.8 we compare the seismograms for the two components of the displacement vector at the receiver for the conforming case with $\Delta t_f = \Delta t_s = 0.7$ ms and the non conforming case with $\Delta t_f = 2\Delta t_s = 0.7$ ms. The fit obtained is excellent. Figure 3.9 illustrates the fact that total discrete energy remains approximately constant for 100,000 time steps in the fluid and 200,000 time steps in the solid.

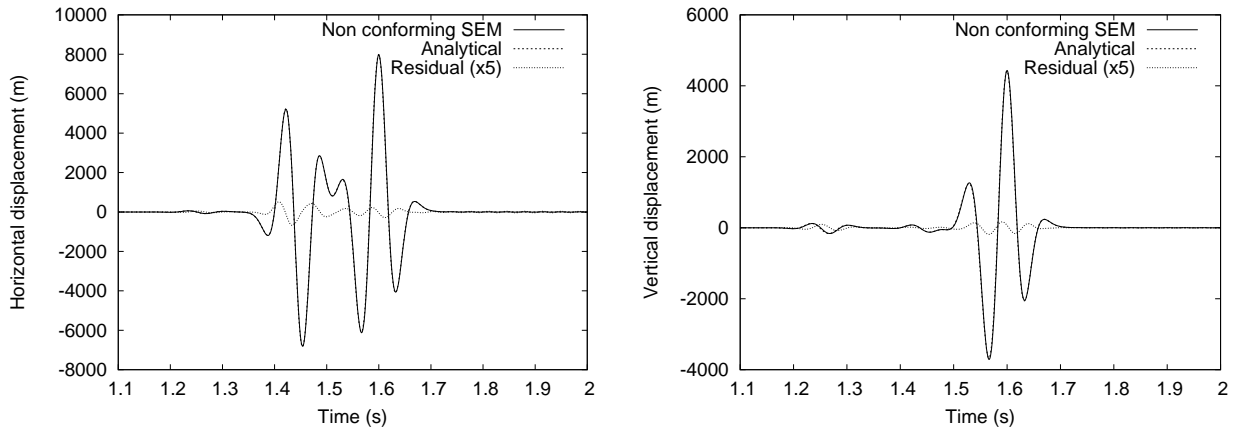


Fig. 3.5 – Comparison with the analytical solution from Berg et al. (1994) (dashed line) of the spectral-element seismogram (solid line) for the horizontal (left) and vertical (right) components of the displacement vector at the receiver located in the fluid. The difference amplified by a factor of 5 is also shown (dotted line). The fit is excellent for non-conforming time stepping with a ratio $p/q = 2/3$, with $\Delta t_f = 0.42$ ms in the fluid and $\Delta t_s = 0.28$ ms in the solid, i.e., at about $CFL/5$ in the fluid and $CFL/4$ in the solid.

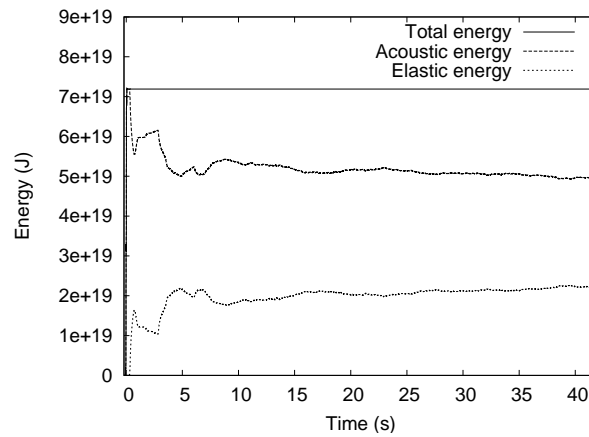


Fig. 3.6 – Time evolution of discrete energy in the fluid and in the solid as well as total discrete energy for the non conforming case with $p/q = 2/3$ for the model with a flat fluid-solid interface. We have $2\Delta t_f = 3\Delta t_s = 0.84$ ms. We propagate the wave field for 100,000 time steps in the fluid for 150,000 time steps in the solid. Total discrete energy is very well conserved.

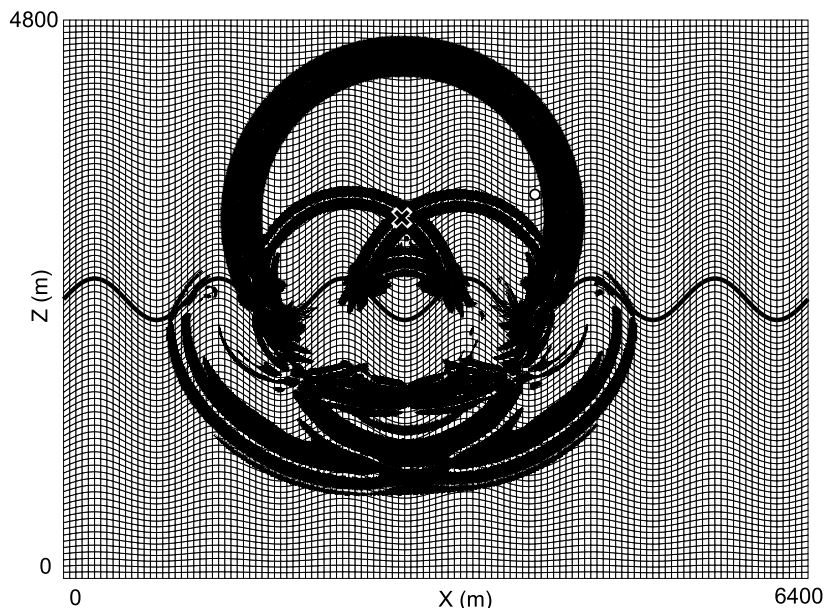


Fig. 3.7 – Mesh used for a sinusoidal ocean bottom with free surfaces on the four sides of the grid. The snapshot of the wave field superimposed is shown at time $t = 1.0493$ s and shows the pressure waves in the fluid upper layer and the pressure and shear waves in the solid lower layer. The mesh is the same as in Komatitsch et al. (2000). The cross represents the position of the source and the circle indicates the position of the seismic receiver.

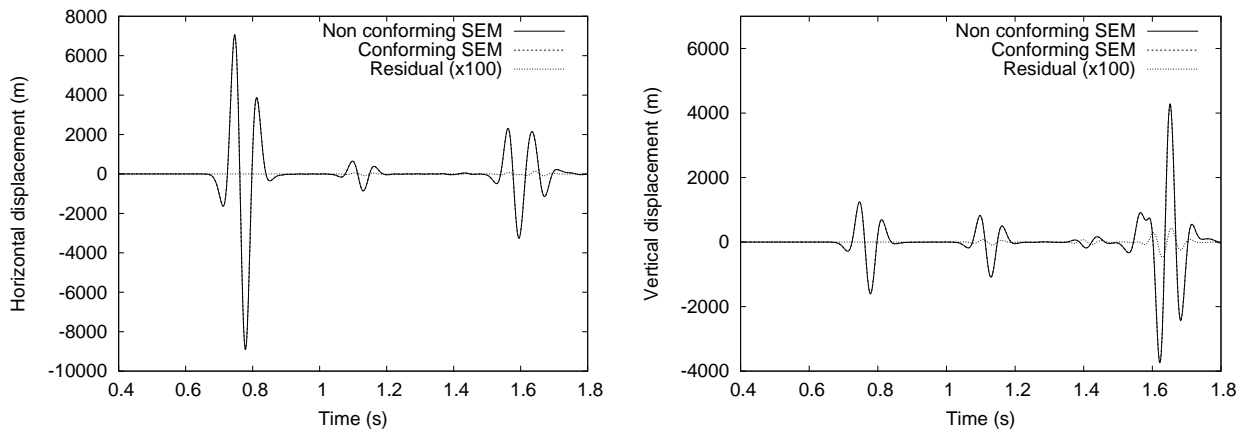


Fig. 3.8 – Comparison of spectral-element seismograms for the horizontal (left) and vertical (right) components of the displacement vector at the receiver located in the fluid for the model with sinusoidal bathymetry. The fit is excellent between non-conforming time stepping (solid line) with $\Delta t_f = 2\Delta t_s = 0.7$ ms (i.e., $p/q = 1/2$) and conforming time stepping (dashed line) with $\Delta t_f = \Delta t_s = 0.7$ ms. The difference amplified by a factor of 100 is also shown (dotted line).

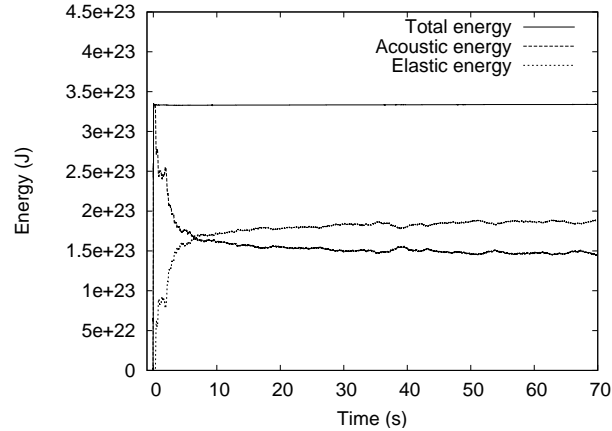


Fig. 3.9 – Time evolution of discrete energy in the fluid and in the solid as well as total discrete energy for the non conforming case with $p/q = 1/2$ for the model with sinusoidal bathymetry. We have $\Delta t_f = 2\Delta t_s = 0.7$ ms. We propagate the wave field for 100,000 time steps in the fluid for 200,000 time steps in the solid. Total discrete energy is very well conserved.

3.5 Analysis of cost reduction

Let us now analyze how the cost (in terms of the total number of calculations to perform) is reduced when resorting to the time substepping technique that we have introduced compared to when using a conforming method in time. For the sake of simplicity let us assume that, as in Figure 3.1, we have a fluid and a solid layer in contact through a horizontal interface, and that the 2D mesh is topologically regular and composed of N_X spectral elements in the horizontal direction, N_{Z_f} spectral elements in the vertical direction in the fluid layer, and N_{Z_s} spectral elements in the vertical direction in the solid layer. The number of spectral-element edges along the fluid-solid interface is therefore also N_X . Let us use a polynomial degree N for the Lagrange interpolants, i.e., a given spectral element contains $N_{GLL} = N + 1$ Gauss-Lobatto-Legendre in each spatial direction. The total number of points in the fluid layer is then

$$n_f = (N_X N + 1)(N_{Z_f} N + 1), \quad (3.25)$$

the total number of points in the solid layer is

$$n_s = (N_X N + 1)(N_{Z_s} N + 1), \quad (3.26)$$

and the total number of points along the fluid-solid coupling interface is

$$n_{\text{interface}} = NXN + 1. \quad (3.27)$$

The number of points to update on the fluid side to implement the coupling with a $p/q < 1$ substepping ratio is therefore

$$n_f^{\text{coupling}} = (NXN + 1)((q - 1)N + 1) \quad (3.28)$$

and the number of points to update on the solid side to implement the coupling is

$$n_s^{\text{coupling}} = (NXN + 1)((p - 1)N + 1). \quad (3.29)$$

When one counts the total number of operations that must be performed at each time step in the SEM algorithm, one can show that the total number of operations in the fluid is

$$f_f(NX, NZ_f) = 9n_f + NX \times NZ_f(10 \text{NGLL}^3 + 18 \text{NGLL}^2) + 13NX \times \text{NGLL} \quad (3.30)$$

and that the total number of operations in the solid is

$$f_s(NX, NZ_s) = 18n_s + NX \times NZ_s(16 \text{NGLL}^3 + 40 \text{NGLL}^2) + 13NX \times \text{NGLL}. \quad (3.31)$$

The additional number of operations required to solve the LU linear system and therefore implement the p/q substepping is

$$\begin{aligned} f_{\text{coupling}}(NX) &= 29n_{\text{interface}} + 2n_{\text{interface}}^2 + 12(q - 1)n_s^{\text{coupling}} \\ &+ NX(q - 1)(16 \text{NGLL}^3 + 40 \text{NGLL}^2) + 13q \times NX \times \text{NGLL} \\ &+ 6q \times n_s^{\text{coupling}} + 6(p - 1)n_f^{\text{coupling}} + NX(p - 1)(10 \text{NGLL}^3 + 18 \text{NGLL}^2) \\ &+ 13p \times NX \times \text{NGLL} + 3n_f^{\text{coupling}} + 6n_s^{\text{coupling}} + 3n_f^{\text{coupling}}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

As a result, the gain that we obtain by resorting to p/q substepping compared to a conforming approach with no substepping is

$$\text{gain}(NX, NZ_f, NZ_s) = \frac{q \times (f_f(NX, NZ_f) + f_s(NX, NZ_s))}{p \times f_f(NX, NZ_f) + q \times f_s(NX, NZ_s) + f_{\text{coupling}}(NX)}. \quad (3.33)$$

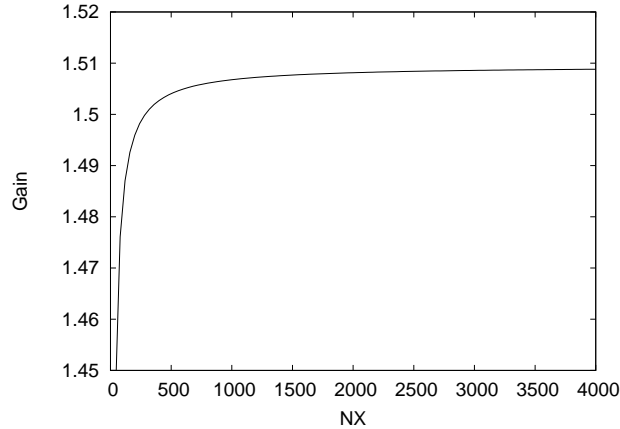


Fig. 3.10 – Gain as a function of the number of spectral-element edges along the fluid-solid interface (NX) for a time substepping ratio $p/q = 1/2$ for an ocean acoustics simulation in which we have a deep ocean layer and a thinner solid layer to represent the coupling at the ocean bottom. The fluid layer occupies 80% of the whole domain in the vertical direction, the solid layer 20%, and we take $NX = (NZ_f + NZ_s) \times 4/3$, i.e., the model is slightly elongated in the horizontal direction, which is often the case in oil industry or ocean acoustics geophysical models. We save a factor of about 1.5 in terms of the total number of operations by resorting to time substepping.

In Figure 3.10 we show that gain as a function of NX for $p/q = 1/2$ for an ocean acoustics simulation in which we have a deep ocean layer and a thinner solid layer to represent the coupling at the ocean bottom. The fluid layer occupies 80% of the whole domain in the vertical direction, the solid layer 20%, and we take $NX = (NZ_f + NZ_s) \times 4/3$, i.e., the model is slightly elongated in the horizontal direction as in Figures 3.1 and 3.7, which is often the case in oil industry or ocean acoustics geophysical models. One can see that we save a factor of about 1.5 in terms of the total number of operations when resorting to time substepping.

3.6 Conclusions and future work

We have introduced a time substepping technique that enforces the conservation of energy along the fluid-solid interface for seismic wave propagation in fluid-solid models and implemented it in the context of an explicit conditionally-stable Newmark finite-difference time scheme. Using time substepping is often of interest for seismic wave propagation modeling because the stability condition in the solid part of the medium can lead to a significantly smaller time step than in the fluid. To enforce conservation of energy along the fluid-solid interface we need to solve a linear system along the fluid-solid interface. This system does not change with time and can therefore be decomposed once and for all before the time loop.

Numerical tests performed based on a spectral-element method (SEM) have shown that energy conservation along the fluid-solid interface is ensured ; therefore the method remains stable even for very long simulations of 200,000 time steps. However the Newmark time-integration scheme used in the classical SEM (independently of fluid-solid coupling or time substepping) is not very accurate compared to the high order of the spatial approximation, therefore the accuracy decreases when one approaches the CFL stability limit because of numerical dispersion in the time scheme on the fluid side (which usually has the largest time step because of a lower maximum pressure wave speed). Therefore in the future higher-order time schemes such as fourth-order Runge-Kutta or symplectic schemes (Simo et al., 1992; Tarnow & Simo, 1994; Nissen-Meyer et al., 2008; Celledoni et al., 2009) should be used. Because the mass matrix is diagonal such an extension should not be too difficult to implement.

Future work could also include using a more complex rheology in the solid, for instance poroelastic (e.g., Ezziani, 2006; Martin et al., 2008a), as well as adding optimized Convolutional Perfectly Matched Layers (CPMLs) in the fluid and in the solid (Komatitsch & Martin, 2007) to absorb outgoing waves on the fictitious edges of the grid. Let us note that CPML is compatible with complex rheologies such as poroelastic media (Martin et al., 2008a) and can be adapted to variational methods (Martin et al., 2008b).

Coupling this technique with a spatially non-conforming mesh at the fluid-solid interface for instance using the ‘mortar’ method (Chaljub et al., 2003) or conservative load transfer (Jaiman et al., 2006) could also be of interest in some cases, although in many cases of practical interest, for instance in the oil industry, the value of the shear wave velocity at the ocean bottom on the solid side is similar to the value of the pressure wave velocity on the fluid side (in the ocean) and thus a spatially-conforming mesh is needed to keep a similar mesh resolution.

Extension to 3D, although straightforward because the time substepping formulation presented does not depend on the spatial dimension of the problem, should be implemented. To solve the linear system on the fluid-solid interface to enforce conservation of energy there, one could still build its LU decomposition once and for all before the time loop. In the case of 3D simulations, it is often inevitable to use a parallel computer because of the large size of the mesh. One should then use a parallel solver such as MUMPS (Amestoy et al., 2001) or PaStiX (Hénon & Saad, 2006), in which the LU decomposition and storage is optimized for large parallel computers.

The time substepping technique introduced for a fluid-solid model and the matrix systems presented can also be used in any other numerical method that has a diagonal mass matrix, such as

discontinuous Galerkin techniques (e.g., Bernacki et al. (2006); Käser & Dumbser (2006)) or finite elements with mass lumping (e.g., Diaz & Joly (2005)).

3.7 Acknowledgments

The authors would like to thank an anonymous reviewer and the associate editor for comments that improved the manuscript. Ronan Madec and Dimitri Komatitsch thank Pierre Thore and TOTAL MTS/INNO for financial support.

3.8 Application à des modèles plus réalistes et plus complexes

Nous allons présenter dans cette section des applications à des modèles pétroliers plus réalistes et plus complexes de notre méthode des éléments spectraux avec pas de temps local. Nous commencerons par un modèle à trois couches avec bathymétrie dans lequel nous plaçons une couche fluide au dessus de deux couches solides, puis nous présenterons un test effectué sur un modèle d'acquisition sismique marine (fourni par TOTAL) comprenant un dôme de sel au milieu de couches solides surmontées par une couche d'eau. Le traitement de ces modèles va nous permettre d'aborder l'étape du maillage qui est importante pour la simulation de la propagation d'ondes sismiques dans des milieux géologiques réalistes.

3.8.1 Modèle à trois couches fluide-solide avec bathymétrie

Le code Specfem2D d'éléments spectraux initialement développé par Komatitsch & Vilotte (1998) et que j'ai modifié intègre un mailleur simple très pratique lorsqu'il s'agit de mailler des milieux simples en couches mais lorsque le modèle contient des couches dont les interfaces sont très irrégulières, il peut être plus judicieux d'utiliser un mailleur professionnel externe créant des maillages à éléments déformés. Par exemple, le modèle présenté ici peut être maillé avec le mailleur interne du code mais le maillage obtenu (Fig. 3.11) contient certains éléments de taille très petite. Ce maillage ne pose aucun problème à la méthode des éléments spectraux (qui est très tolérante aux déformations du maillage) mais l'on se retrouve avec des zones très finement maillées alors que ce n'est pas nécessaire (ce qui va diminuer la condition de stabilité) et de plus l'on obtient un maillage comprenant beaucoup plus d'éléments que ce dont on a réellement besoin. C'est pourquoi nous avons utilisé le mailleur professionnel CUBIT pour mailler le modèle. On obtient un maillage dans lequel toutes les mailles sont de taille similaire (Fig. 3.12). Il est préférable d'utiliser ce second maillage (ce que nous ferons dans toute la suite). Il est à noter que l'avantage du mailleur analytique interne est qu'il est très facile à utiliser et immédiat, ce qui peut être très intéressant, surtout en 3D, car la création de maillages 3D sur des structures complexes peut s'avérer très long et compliqué. Par exemple, Blitz (2009) montre la complexité qu'il y a à mailler un astéroïde en 3D avec CUBIT. En exemple, on présente un maillage 3D de l'astéroïde Eros sur la Fig. 3.13 (e.g. Blitz (2009)).

Le modèle contient un milieu acoustique au-dessus de deux milieux élastiques (voir Fig. 3.14). Le modèle est de taille 5000 m \times 2000 m avec 10968 éléments et l'on prend 6 points de Gauss-Lobatto-Legendre dans chaque direction, pour un total de 275371 points. La taille des éléments est d'environ

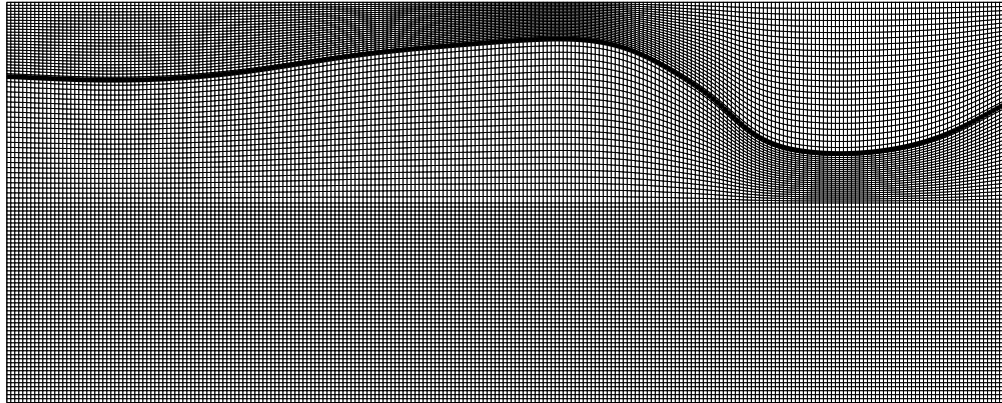


Fig. 3.11 – Maillage réalisé avec le mailleur simple analytique interne du code Specfem2D Komatitsch & Vilotte (1998) avec une interface fluide-solide présentant une bathymétrie. Ce maillage contenant des éléments très petits contraint à prendre un pas de temps très petit pour garantir la condition de stabilité.

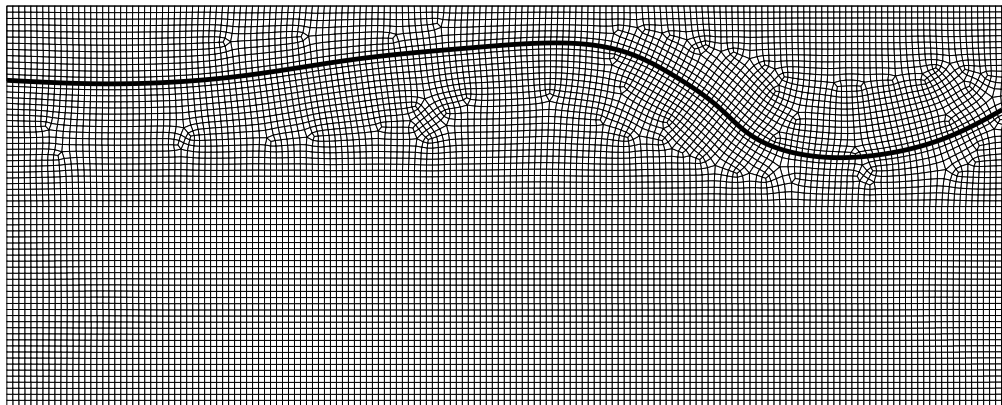


Fig. 3.12 – Maillage réalisé avec le mailleur professionnel CUBIT avec le même modèle que celui de la Fig. 3.11. Ce maillage contient des éléments de taille plus uniforme, il permet donc de prendre un pas de temps qui n'est pas trop petit et donc de gagner en temps de calcul par rapport au maillage réalisé avec le mailleur simple analytique interne de Specfem2D.

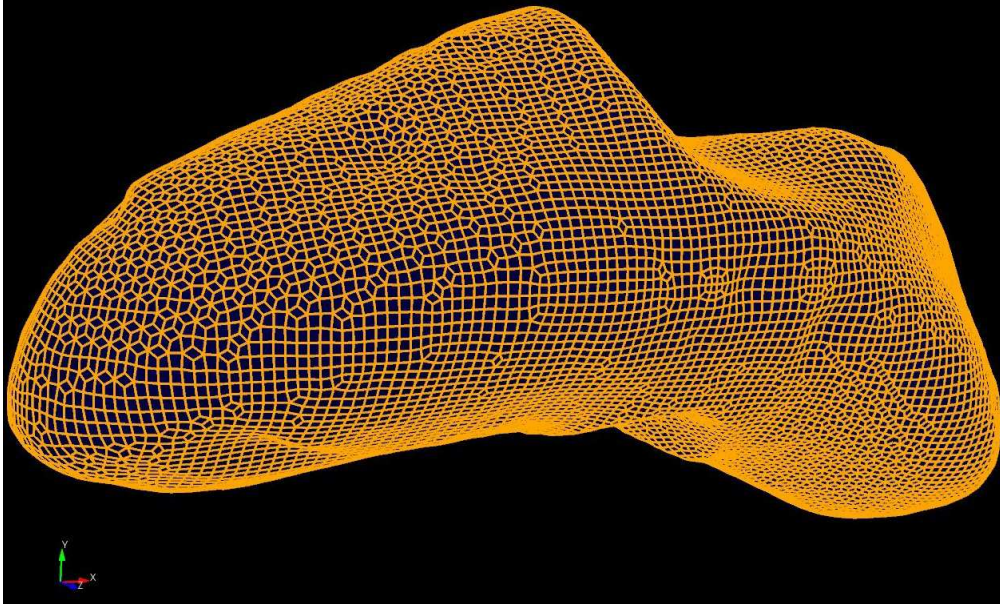


Fig. 3.13 – Maillage 3D de l’astéroïde Eros. Cette figure est extraite de la thèse de Céline Blitz (Blitz (2009)). Nous la présentons ici pour illustrer la complexité qu’il peut y avoir à mailler un objet 3D.

30 m \times 30 m. On prend comme source ponctuelle un Ricker de fréquence dominante $f_0 = 10$ Hz que l’on place en $x_s = 1000$ m en partant du bord gauche du modèle et $z_s = 100$ m de profondeur dans la partie acoustique. On place une ligne de 51 récepteurs à 50 m de profondeur dans le fluide et à un offset de 1000 m de la source pour le premier récepteur ($x_{r1} = 2000$ m) et l’écart entre chaque récepteur est de 50 m (ce qui donne $x_{r51} = 4500$ m pour le dernier). On prend comme propriété du milieu acoustique (partie bleue de la Fig. 3.14) une densité $\rho_1 = 1020$ kg.m $^{-3}$ et une vitesse de propagation des ondes de pression $c_{p1} = 1500$ m.s $^{-1}$. La première couche élastique (située juste sous la couche acoustique, en jaune sur la Fig. 3.14) a pour densité $\rho_2 = 2500$ kg.m $^{-3}$ et pour vitesses de propagation des ondes P $c_{p2} = 3400$ m.s $^{-1}$ et des ondes S $c_{s2} = 1963$ m.s $^{-1}$. Sur la seconde couche élastique (en rouge sur la Fig. 3.14), on prend $\rho_3 = 2000$ kg.m $^{-3}$, $c_{p3} = 8000$ m.s $^{-1}$ et $c_{s3} = 4620$ m.s $^{-1}$. On implémente un pas de temps local avec un rapport $p/q = 1/2$ avec $\Delta t_f = 0,14$ ms dans le fluide et $\Delta t_s = 0,07$ ms dans le solide. On prend comme conditions de bord une condition de surface libre sur tous les bords, ce qui entraîne des réflexions parasites (par exemple à partir de 3 s sur sismogrammes de la Fig. 3.17). En effet, les modèles géologiques représentent le sous-sol, qui est à l’échelle pétrolière un milieu semi-infini c’est pourquoi il est important d’implémenter des conditions de bords absorbantes sur les bords de gauche, de droite et inférieur du maillage, qui sont des bords fictifs du point de vue géophysique. Ceci sera abordé dans le prochain chapitre.

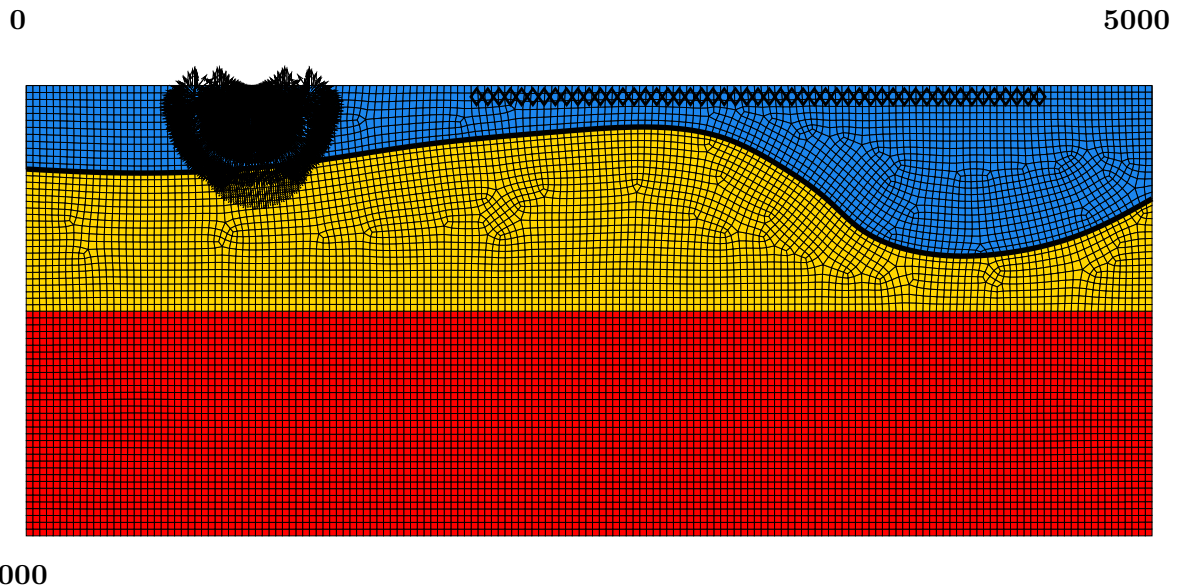


Fig. 3.14 – Propagation d’ondes sismiques dans un modèle à trois couches avec une couche fluide surmontant deux couches solides. L’instantané est représenté au temps $t = 0,280$ s. Les 51 récepteurs sont représentés par des losanges. La couche bleue représente la couche fluide tandis que les couches jaune et rouges sont les couches solides.



Fig. 3.15 – Propagation d’ondes sismiques dans un modèle à trois couches avec une couche fluide surmontant deux couches solides. L’instantané est représenté au temps $t = 0,560$ s. Les 51 récepteurs sont représentés par des losanges. La couche bleue représente la couche fluide tandis que les couches jaune et rouges sont les couches solides.

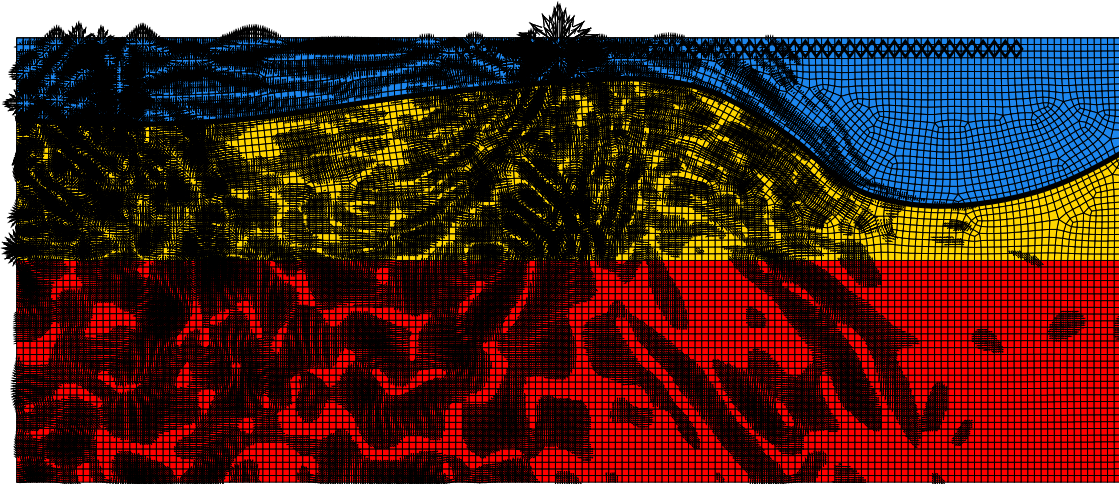


Fig. 3.16 – Propagation d’ondes sismiques dans un modèle à trois couches avec une couche fluide surmontant deux couches solides. L’instantané est représenté au temps $t = 1,120$ s. Les 51 récepteurs sont représentés par des losanges. La couche bleue représente la couche fluide tandis que les couches jaune et rouges sont les couches solides.

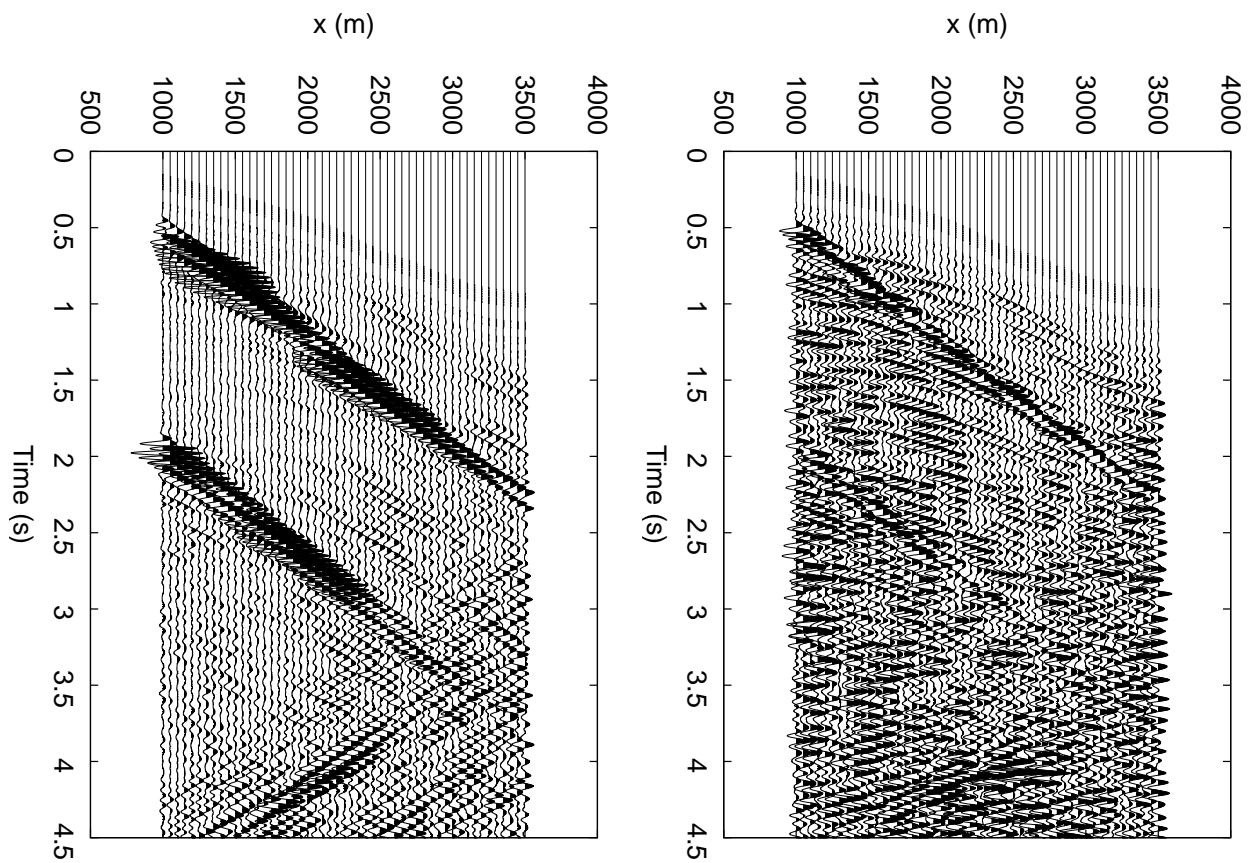


Fig. 3.17 – Sismogrammes enregistrés en 51 récepteurs dans le modèle à trois couches. On présente les composantes horizontale (gauche) et verticale (droite) du déplacement. On voit notamment la réflexion du bord gauche à $t = 2$ s.

3.8.2 Modèle de sismique marine avec dôme de sel

Nous allons à présent modéliser la propagation des ondes sismiques dans un modèle contenant un dôme de sel. Les dômes de sel sont comme des bulles de sel piégées dans les couches géologiques. Le modèle est de taille 6000 m \times 5000 m. Pour un tel modèle il est impossible d'utiliser le mailleur interne quasi analytique de Specfem2D donc nous utilisons le mailleur CUBIT. Le modèle obtenu contient 17052 éléments et on utilise un degré polynomiale $N = 5$, ce qui donne 427681 points (voir Fig. 3.18). Le pas de temps dans le fluide est de $\Delta t_f = 0,2$ ms et dans le solide $\Delta t_s = 0,1$ ms. Les propriétés des différentes couches sont décrites dans la table 3.1 pour la couche fluide, les différentes couches solides et également le dôme de sel.

Couleur	c_P (m.s ⁻¹)	c_S (m.s ⁻¹)	ρ (kg.m ⁻³)
bleu foncé (eau)	1500	—	1020
gris clair	2200	1271	1600
bleu	2500	1200	1800
vert	2700	1300	1800
bleu	3500	1800	1800
jaune	3500	2000	2000
rouge	4000	2300	2000
beige (dôme de sel)	5000	3000	1600

TAB. 3.1 – Propriétés des matériaux des différentes couches du modèle pour les couches citées de haut en bas.

On prend comme source ponctuelle un Ricker de fréquence dominante $f_0 = 10$ Hz que l'on place en $x_s = 1000$ m en partant du bord gauche du modèle et $z_s = 200$ m de profondeur dans la partie acoustique. On place une ligne de 81 récepteurs à 1500 m de profondeur dans le fluide et à un offset de 500 m de la source pour le premier récepteur ($x_{r1} = 1500$ m) et l'écart entre chaque récepteur est de 50 m (ce qui donne $x_{r81} = 5500$ m pour le dernier). La Fig. 3.19 illustre bien la différence de vitesse de propagation des ondes sismiques qu'il y a entre le dôme de sel et les roches environnantes. On voit que le front d'onde est déformé vers le fond du dôme de sel et qu'il se propage plus rapidement. Comme la vitesse des ondes est plus rapide dans le dôme de sel, on va observer les réflexions du fond du dôme avant certaines réflexions des couches situées plus en surface. On représente les sismogrammes de la simulation sur la Fig. 3.21. Comme pour le modèle précédent, on remarque énormément de réflexions des différentes couches mais également des réflexions parasites provenant des bords fictifs du domaine.

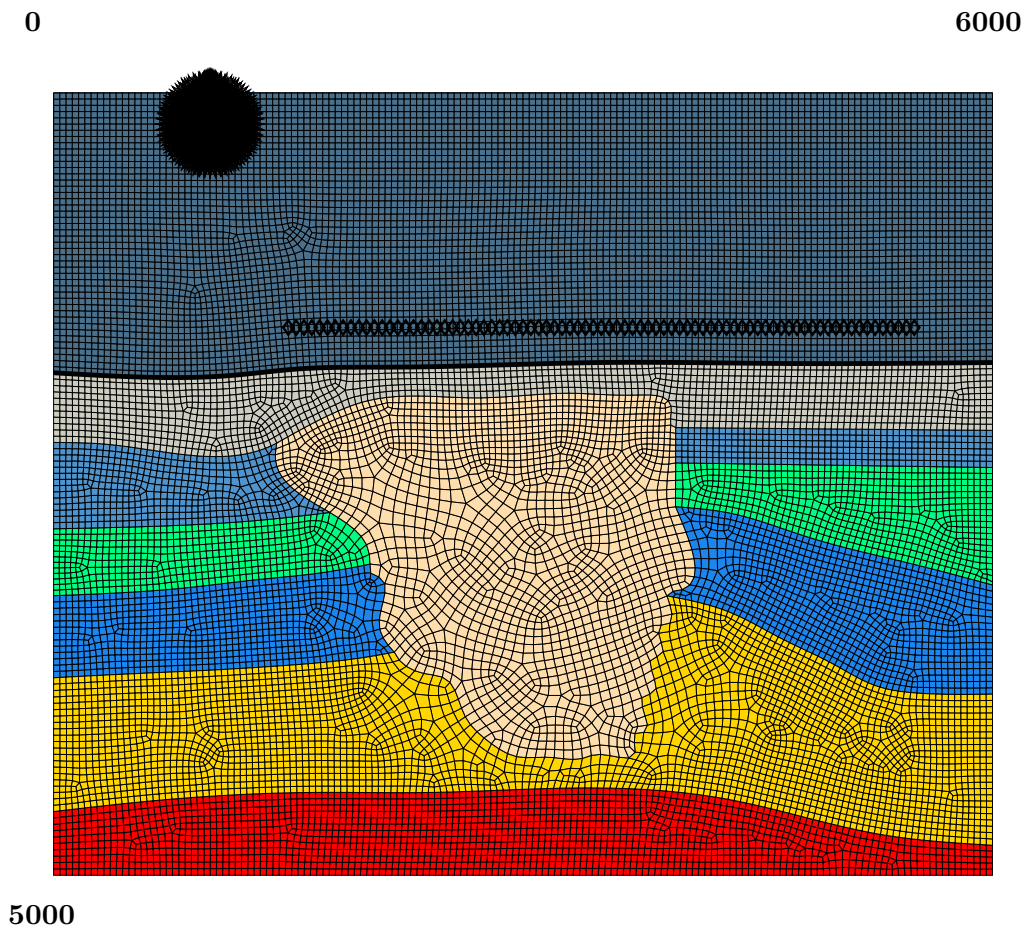


Fig. 3.18 – Propagation d’ondes sismiques dans un modèle comprenant un dôme de sel (au centre en beige). L’instantané de propagation des ondes sismiques est représenté au temps $t = 0,2$ s. Les 81 récepteurs sont représentés par des losanges. La partie fluide (la couche d’eau) est la partie supérieure du modèle et l’interface fluide-solide est mise en évidence par le trait noir épais. Les propriétés des différentes couches sont données dans la table 3.1.

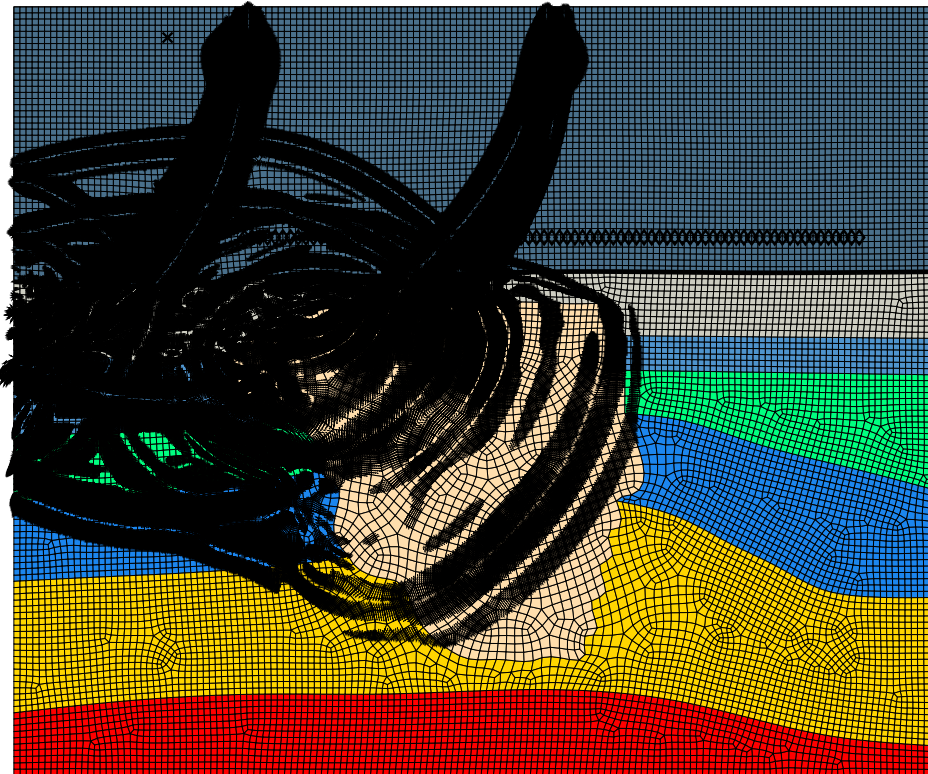


Fig. 3.19 – Propagation d’ondes sismiques dans un modèle comprenant un dôme de sel (au centre en beige). L’instantané de propagation des ondes sismiques est représenté au temps $t = 1,8$ s. Les 81 récepteurs sont représentés par des losanges. La partie fluide (la couche d’eau) est la partie supérieure du modèle et l’interface fluide-solide est mise en évidence par le trait noir épais. Les propriétés des différentes couches sont données dans la table 3.1. On remarque clairement que le front d’onde se déforme et s’accélère à l’intérieur du dôme de sel.

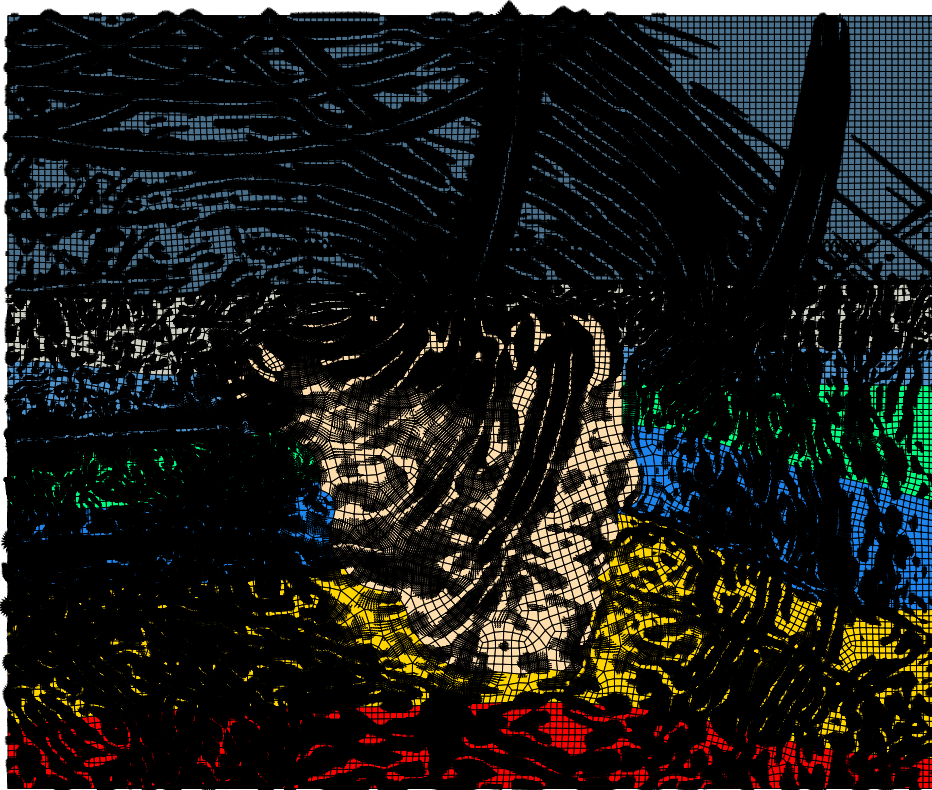


Fig. 3.20 – Propagation d’ondes sismiques dans un modèle comprenant un dôme de sel (au centre en beige). L’instantané de propagation des ondes sismiques est représenté au temps $t = 3$ s. Les 81 récepteurs sont représentés par des losanges. La partie fluide (la couche d’eau) est la partie supérieure du modèle et l’interface fluide-solide est mise en évidence par le trait noir épais. Les propriétés des différentes couches sont données dans la table 3.1. Comme nous n’avons pas de condition absorbantes, des réflexions parasites provenant des trois bords fictifs du modèle contaminent l’ensemble du domaine. Ce problème sera résolu dans le chapitre 4.

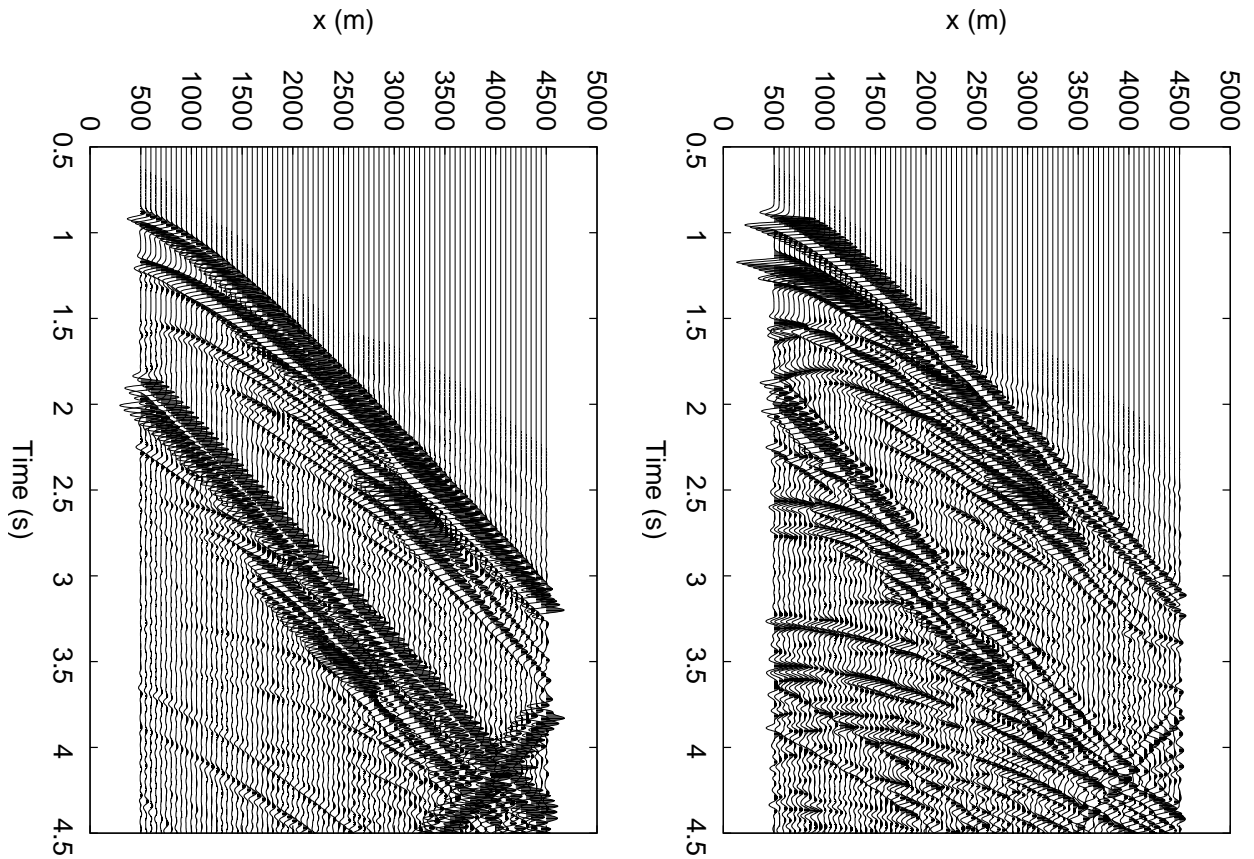


Fig. 3.21 – Sismogrammes enregistrés en 81 récepteurs dans le modèle de la Fig. 3.18 comprenant un dôme de sel. On présente les composantes horizontale (gauche) et verticale (droite) du déplacement. L'absence de conditions absorbantes sur les trois bords fictifs du modèle conduit à des réflexions parasites qui contaminent rapidement les sismogrammes. On observe notamment la réflexion du bord gauche vers $t = 2$ s et celle du bord droit vers $t = 4$ s. Ce problème sera résolu dans le chapitre 4.

3.8.3 Conclusions sur les applications

Nous venons de montrer que la méthode des pas de temps locaux s'applique à des modèles complexes, ce qui donne une bonne base pour un futur passage au 3D. Cependant, les résultats obtenus nous montrent l'importance des réflexions dues à l'absence de bords absorbants. Nous allons donc voir dans le prochain chapitre comment implémenter des couches absorbantes afin de supprimer ces réflexions.

Chapitre 4

Implémentation de couches absorbantes C-PML dans une formulation variationnelle acoustique-élastique

Introduction

Les modèles qui nous intéressent dans cette thèse sont étudiés à une échelle locale ou régionale par rapport à l'ensemble de la Terre et donc les simulations que nous allons effectuer sont supposées se passer dans des milieux semi-infinis. Comme nous l'avons vu dans les exemples du chapitre précédent, l'utilisation de couches ou conditions absorbantes est primordiale pour réduire les réflexions parasites produites par certains bords du modèle (par exemple sur les sismogrammes de la Fig. 3.21). De nombreuses conditions aux limites absorbantes ou couches absorbantes ont été développées depuis la fin des années 70, par exemple les conditions paraxiales (Engquist & Majda, 1977; Clayton & Engquist, 1977; Stacey, 1988; Higdon, 1991; Quarteroni et al., 1998), les couches atténuantes ou "éponges" (Cerjan et al., 1985; Sochacki et al., 1987), les opérateurs asymptotiques locaux ou non-locaux (Givoli, 1991; Hagstrom & Hariharan, 1998), ou encore les conditions optimisées (Peng & Töksoz, 1995). Ces méthodes ont été développées pour différentes méthodes numériques comme les différences finies ou les éléments finis. Mais le plus souvent ces méthodes entraînent des réflexions pour les ondes à incidence rasante. Dans le cadre des équations de Maxwell, Bérenger

(1994) a développé des couches absorbantes parfaitement adaptées, en anglais "Perfectly Match Layer" (PML) ayant un coefficient de réflexion nul pour tous les angles et toutes les fréquences avant discrétisation. Cette formulation s'est avérée être plus efficace que les conditions classiques et est aujourd'hui très utilisée. La formulation des PML a été adaptée aux problèmes élastiques sous une forme "splittée" (Chew & Liu, 1996; Collino & Tsogka, 2001; Fauqueux, 2003; Komatitsch & Tromp, 2003; Cohen & Fauqueux, 2005; Festa & Vilotte, 2005). Une formulation non-"splittée" pour l'élastodynamique appelée convolutional PML (C-PML) qui est plus simple à implémenter car nécessitant moins de tableaux à stocker est présentée dans Komatitsch & Martin (2007) et Martin et al. (2008b). À la base, Cette formulation des C-PML avait été développée en électromagnétisme par Roden & Gedney (2000).

En partant des travaux réalisés sur les C-PML en élastique sur une formulation variationnelle par Martin et al. (2008b), nous allons dans ce chapitre nous intéresser au développement de ces couches absorbantes en acoustique puis au couplage acoustique-élastique dans la méthode des éléments spectraux puis nous verrons en fin de chapitre l'implémentation en viscoélastique des C-PML dans la SEM en nous basant sur Martin & Komatitsch (2009) qui ont développé un C-PML viscoélastique en différences finies. On montrera en fin de chapitre l'application de ces C-PML aux cas réalistes présentés en fin de chapitre 3 et on illustrera ce qu'apporte l'ajout de conditions absorbantes à ces modèles.

4.1 Description de la formulation forte classique des PML

Nous allons décrire succinctement dans cette partie l'ajout de PML classiques dans l'équation des ondes élastiques à partir de la formulation forte (eq. 4.1) exprimée en vitesse-contrainte (équivalente à la formulation en déplacement eq. (1.39)) où \mathbf{C} est le tenseur d'élasticité d'ordre 4, $\underline{\underline{\sigma}}$ le tenseur des contraintes et \mathbf{v} le champ vectoriel des vitesses. Pour plus de détails le lecteur pourra se référer à Collino & Tsogka (2001), Komatitsch & Martin (2007) ou Martin et al. (2008b).

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}, \\ \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial t} &= \mathbf{C} : \nabla \mathbf{v}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Écrire des PML revient à remplacer les opérateurs des dérivées spatiales par des opérateurs qui absorbent l'onde au fur et à mesure qu'elle se propage dans la PML. On construit ces nou-

veaux opérateurs différentiels à partir de la formulation de l'équation des ondes dans le domaine fréquentiel :

$$\begin{aligned} i\omega\rho\mathbf{v} &= \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}, \\ i\omega\underline{\underline{\sigma}} &= \mathbf{C} : \nabla\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Cette équation a des solutions en ondes planes de la forme $\mathbf{A}e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$ où \mathbf{A} représente l'amplitude et la polarisation de l'onde plane, \mathbf{k} le vecteur d'ondes et \mathbf{x} le vecteur position. Dans le cas d'un milieu isotrope, le vecteur d'onde \mathbf{k} est défini comme $k\hat{\mathbf{d}}$ où $\hat{\mathbf{d}}$ est le vecteur directeur de l'onde et k le nombre d'onde. Les ondes P sont polarisées dans le sens de la propagation, donc on a $\mathbf{A} \times \hat{\mathbf{d}} = \mathbf{0}$ et $k = \omega/c_p$ (avec c_p la vitesse de propagation des ondes P) tandis que pour les ondes S qui sont polarisées orthogonalement au déplacement on a $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{d}} = \mathbf{0}$ et $k = \omega/c_s$ (avec c_s la vitesse de propagation des ondes S) (e.g. Aki & Richards (1980)).

On introduit un nouveau système de coordonnées complexes avec un profil d'absorption d_x tel que $d_x(x) = 0$ hors de la PML et $d_x(x) > 0$ dans la PML. En pratique, on choisit un profil polynomial (que nous définirons plus loin dans la partie des tests numériques) qui est nul sur la frontière entre la PML et le domaine. La nouvelle coordonnée \tilde{x} exprimée en fonction de son profil d'absorption est :

$$\tilde{x}(x) = x - \frac{i}{\omega} \int_0^x d_x(s) ds. \quad (4.3)$$

L'opérateur différentiel associé à \tilde{x} est alors :

$$\partial_{\tilde{x}} = \frac{i\omega}{i\omega + d_x} \partial_x = \frac{1}{s_x} \partial_x, \quad (4.4)$$

avec

$$s_x = \frac{i\omega + d_x}{i\omega} = 1 + \frac{d_x}{i\omega}. \quad (4.5)$$

Ensuite, on réécrit l'eq. (4.2), qui était écrite en x, z , en une nouvelle équation écrite en \tilde{x}, z :

$$\begin{aligned} i\omega\rho v_x &= \partial_{\tilde{x}}\sigma_{xx} + \partial_z\sigma_{xz}, \\ i\omega\rho v_z &= \partial_{\tilde{x}}\sigma_{xz} + \partial_z\sigma_{zz}, \\ i\omega\sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu)\partial_{\tilde{x}}v_x + \lambda\partial_zv_z, \\ i\omega\sigma_{zz} &= \lambda\partial_{\tilde{x}}v_x + (\lambda + 2\mu)\partial_zv_z, \\ i\omega\sigma_{xz} &= \mu(\partial_{\tilde{x}}v_z + \partial_zv_x). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ce nouveau système d'équation a comme solutions :

$$\mathbf{A}e^{-i(k_x\tilde{x}+k_zz-\omega t)} = \mathbf{A}e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}e^{-\frac{k_x}{\omega}\int_0^x d_x(s)ds}. \quad (4.7)$$

À l'extérieur de la PML, $d_x = 0$ et donc la solution est la même que pour l'eq. (4.2). À l'inverse, on a dans la PML une décroissance exponentielle de la solution plus on s'enfonce dans la PML dans la direction x .

On procède de manière similaire pour l'axe des z dans les couches PML horizontales en remplaçant les z par des \tilde{z} pour construire le système :

$$\begin{aligned} i\omega\rho v_x &= \partial_{\tilde{x}}\sigma_{xx} + \partial_{\tilde{z}}\sigma_{xz}, \\ i\omega\rho v_z &= \partial_{\tilde{x}}\sigma_{xz} + \partial_{\tilde{z}}\sigma_{zz}, \\ i\omega\sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu)\partial_{\tilde{x}}v_x + \lambda\partial_{\tilde{z}}v_z, \\ i\omega\sigma_{zz} &= \lambda\partial_{\tilde{x}}v_x + (\lambda + 2\mu)\partial_{\tilde{z}}v_z, \\ i\omega\sigma_{xz} &= \mu(\partial_{\tilde{x}}v_z + \partial_{\tilde{z}}v_x). \end{aligned} \quad (4.8)$$

En séparant tous les vecteurs suivant les opérations que l'on effectue dans les directions x et z et en retournant dans le domaine temporel à l'aide d'une transformée de Fourier inverse, cela revient à résoudre :

$$\begin{aligned} (\partial_t + d_x)\rho v_x^1 &= \partial_{\tilde{x}}\sigma_{xx}, \\ (\partial_t + d_z)\rho v_x^2 &= \partial_{\tilde{z}}\sigma_{xz}, \\ (\partial_t + d_x)\rho v_z^1 &= \partial_{\tilde{x}}\sigma_{xz}, \\ (\partial_t + d_z)\rho v_z^2 &= \partial_{\tilde{z}}\sigma_{zz}, \\ (\partial_t + d_x)\sigma_{xx}^1 &= (\lambda + 2\mu)\partial_{\tilde{x}}v_x, \\ (\partial_t + d_z)\sigma_{xx}^2 &= \lambda\partial_{\tilde{z}}v_z, \\ (\partial_t + d_x)\sigma_{zz}^1 &= \lambda\partial_{\tilde{x}}v_x, \\ (\partial_t + d_z)\sigma_{zz}^2 &= (\lambda + 2\mu)\partial_{\tilde{z}}v_z, \\ (\partial_t + d_x)\sigma_{xz}^1 &= \mu\partial_{\tilde{x}}v_z, \\ (\partial_t + d_z)\sigma_{xz}^2 &= \mu\partial_{\tilde{z}}v_x, \\ v_x &= v_x^1 + v_x^2, \\ v_z &= v_z^1 + v_z^2, \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^1 + \sigma_{ij}^2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Le schéma classique des PML ainsi construit peut être résolu à l'aide de différences finies. Un inconvénient pour l'intégration d'un tel schéma dans un code numérique est l'augmentation très forte du nombre d'équations due à la séparation de chaque variable en deux (par exemple v_x nécessite v_x^1 et v_x^2). De plus, l'absorption des PML est moins efficace à incidence rasante (voir Wang & Tang (2003); Rahmouni (2004); Komatitsch & Martin (2007)). La formulation C-PML présentée dans la suite corrige ces deux inconvénients des PML.

4.2 Description de la formulation des C-PML

La formulation non séparée C-PML a été introduite pour les équations de Maxwell dans Roden & Gedney (2000) puis développée pour l'élastodynamique dans Komatitsch & Martin (2007) en formulation forte puis dans Martin et al. (2008b) pour une formulation variationnelle (Festa & Vilotte (2005) avaient précédemment développé une version variationnelle splittée). L'idée pour absorber les ondes à incidence rasante est de faire un choix du coefficient s_x plus général (Kuzuoglu & Mittra, 1996; Roden & Gedney, 2000; Bérenger, 2002a,b) que dans l'éq. (4.5) en introduisant dans son expression les variables $\alpha_x \geq 0$ et $\kappa_x \geq 1$ en plus du profil d'absorption d_x . On choisit pour s_x dans le domaine fréquentiel :

$$s_x(\omega) = \kappa_x + \frac{d_x}{\alpha_x + i\omega}. \quad (4.10)$$

Dans la partie numérique de Komatitsch & Martin (2007), il est expliqué que modifier le facteur κ n'a pas d'influence très significative sur les résultats numériques en élastodynamique, donc pour toute la suite nous posons $\kappa_x = 1$. Il est à noter que si en plus on prend $\alpha_x = 0$, on retrouve l'éq. (4.5) des PML classiques. On applique une transformée de Fourier inverse à $\partial_{\bar{x}} = (1/s_x)\partial_x$ et on obtient, en notant $\bar{s}_x(t)$ l'inverse de la transformée de Fourier de $1/s_x$ et le produit de convolution $*$ sur les opérateurs différentiels (e.g. Roden & Gedney (2000)) :

$$\partial_{\bar{x}} = \bar{s}_x(t) * \partial_x. \quad (4.11)$$

Après réécriture de $1/s_x$ d'après eq. (4.10) en $\frac{1}{s_x} = 1 - \frac{d_x}{\alpha_x + i\omega + 1}$, on peut calculer sa transformé de Fourier inverse $\bar{s}_x(t)$ en utilisant le fait que la transformée de Fourier de $e^{-at}H(t)$, où $H(t)$

est la distribution de Heaviside, est $1/(a + i\omega)$, et la transformée d'un dirac $\delta(t)$ est 1.

$$\bar{s}_x(t) = \delta(t) + d_x e^{-(d_x + \alpha_x)t} H(t). \quad (4.12)$$

Posons $\zeta_x(t) = d_x e^{-(d_x + \alpha_x)t} H(t)$, alors on obtient l'expression de l'opérateur différentiel dans la C-PML :

$$\partial_{\bar{x}} = \partial_x + \zeta_x(t) * \partial_x. \quad (4.13)$$

Si on note ψ_x le produit de convolution $\zeta_x * \partial_x$, alors $\psi_x(t) = \int_0^t (\partial_x)^{t-\tau} \zeta_x(\tau) d\tau$ où $(\partial_x)^t$ est la valeur de la dérivée spatiale au temps t . Après discrétisation temporelle, on trouve une expression de l'opérateur discrétisé ψ_x^n au temps $n\Delta t$ (e.g. Komatitsch & Martin (2007)) (on utilise le fait que $(\partial_x)^n$ étant défini à chaque pas de temps varie faiblement et lentement par morceau sur chaque intervalle $[i\Delta t, (i+1)\Delta t]$ dans le cas discret pour le sortir de l'intégrale) :

$$\psi_x^n = (\zeta_x * \partial_x)^n = \sum_{m=0}^{n-1} Z_x(m) (\partial_x)^{n-m} \approx \psi_x(n\Delta t), \quad (4.14)$$

avec

$$Z_x(m) = \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \zeta_x(\tau) d\tau = d_x \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} e^{-(d_x + \alpha_x)\tau} d\tau = a_x e^{-(d_x + \alpha_x)m\Delta t} \quad (4.15)$$

où

$$a_x = \frac{d_x}{d_x + \alpha_x} (b_x - 1), \quad (4.16)$$

et

$$b_x = e^{-(d_x + \alpha_x)\Delta t}. \quad (4.17)$$

Si on garde l'eq. (4.14) telle quelle, l'implémentation de la somme s'avère très coûteuse car elle requiert de garder en mémoire les valeurs des dérivées partielles à tous les pas de temps antérieurs. Mais comme Z_x est une simple exponentielle, on peut utiliser une technique de calcul de convolution récursive (Luebbbers & Hunsberger, 1992) transformant ψ_x^n en une variable à mémoire que l'on met à jour à chaque pas de temps par :

$$\psi_x^{n+1} = b_x \psi_x^n + a_x \partial_x^{n+1/2}. \quad (4.18)$$

Le fait de calculer explicitement le produit de convolution de l'eq. (4.14) nous évite de séparer les variables pour effectuer la transformée de Fourier inverse en revenant au domaine temporel, donc

l'implémentation dans un code de propagation s'en trouve simplifiée. Il suffit alors de créer puis ajouter les variables à mémoire ψ pour chaque dérivée spatiale de la formulation et enfin remplacer les opérateurs de ces dérivées par les opérateurs suivant :

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{x}} &= \partial_x + \psi_x, \\ \partial_{\bar{z}} &= \partial_z + \psi_z.\end{aligned}\tag{4.19}$$

Regardons maintenant comment effectuer leur intégration dans les formulations variationnelles acoustique et élastique.

4.2.1 Formulation acoustique

Pour implémenter des couches absorbantes C-PML non séparées dans une méthode d'éléments finis telle que la méthode des éléments spectraux, on doit intégrer de nouveaux opérateurs différentiels (eq. 4.19) à la formulation faible du problème considéré (e.g. Martin et al. (2008b)). Pour un milieu acoustique, partant de la formulation (1.55) du chapitre 1, on crée les variables à mémoire ψ pour les C-PML et l'on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \kappa^{-1} \partial_t^2 \phi w d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} (\partial_{x'} \phi \partial_x w + \partial_{z'} \phi \partial_z w) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\psi_x (\partial_{x'} \phi) + \psi_z (\partial_{z'} \phi)) w d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Gamma} (\partial_{x'} \phi n_x + \partial_{z'} \phi n_z) w d\gamma, \\ \partial_{x'} \phi &= \rho^{-1} (\partial_x \phi + \psi_x(\phi)), \\ \partial_{z'} \phi &= \rho^{-1} (\partial_z \phi + \psi_z(\phi)).\end{aligned}\tag{4.20}$$

Il est à noter que le problème (4.20) est résolu pour $\phi \in H^1(\Omega)$ avec en plus $\nabla \cdot (\rho^{-1} \nabla \phi) \in L^2(\Omega)$. Pour avoir le droit de calculer les intégrales faisant intervenir les variables à mémoire ψ , il faut que les ψ soient L^2 -intégrables (i.e. qu'elles appartiennent à $L^2(\Omega)$). $\psi_x(\phi)$ et $\psi_z(\phi)$ sont évidemment L^2 -intégrables d'après l'eq. (4.18) avec $\psi_x(\phi) \in H^1(\Omega)$ et $\psi_z(\phi) \in H^1(\Omega)$. De plus, $\nabla \cdot (\rho^{-1} \nabla \phi) \in L^2(\Omega)$ nous garantit que $\psi_x(\partial_{x'} \phi) \in L^2(\Omega)$ et $\psi_z(\partial_{z'} \phi) \in L^2(\Omega)$. Comme nous résolvons le système (4.20) à l'aide d'une méthode d'éléments finis, la solution Φ du problème discret est une fonction polynomiale sur chaque élément Φ_e , donc une fonction $C^\infty(\Omega_e)$ où Ω_e est un élément e quelconque de Ω , donc $\psi_x(\partial_{x'} \Phi_e)$ est intégrable sur Ω_e . Nous notons $\int_{\Omega} \psi_x(\partial_{x'} \phi) w d\mathbf{x}$ dans la formulation variationnelle mais calculer cette intégrale dans le problème discret revient à calculer $\sum_{e=1}^{nelem} \int_{\Omega_e} \psi_x(\partial_{x'} \Phi_e) w d\mathbf{x}$. On définit alors les variables à mémoire ψ localement sur chaque élément donc pour les points situés

sur les interfaces des éléments. Ainsi, on a deux variables par point.

Les intégrales sont calculées avec la méthode des éléments spectraux qui utilise les points de Gauss-Lobatto-Legendre comme degrés de liberté. La discrétisation en temps est effectuée par un schéma de Newmark d'ordre 2 (voir le Chapitre 1).

4.2.2 Formulation élastique

Pour la formulation élastique, nous partons des travaux de Martin et al. (2008b) mais nous modifions légèrement la formulation des C-PML qui était définie en vitesse-contrainte et nous la remplaçons par une formulation en déplacement classique pour la méthode des éléments spectraux, ce qui nous évite de stocker les contraintes. Partant de la formulation faible élastique de l'eq. (1.45), on intègre les C-PML en remplaçant les opérateurs différentiels ∂_x et ∂_z par les opérateurs différentiels C-PML équivalents $\partial_{\tilde{x}}$ et $\partial_{\tilde{z}}$ introduits dans l'eq. (4.19). On obtient :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \rho \partial_t^2 u_x w_x \, d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} (\sigma_{xx} \partial_x w_x + \sigma_{xz} \partial_z w_x) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\psi_x(\sigma_{xx}) + \psi_z(\sigma_{xz})) w_x \, d\mathbf{x} \\
 &+ \int_{\Gamma} (\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xz} n_z) w_x \, d\gamma, \\
 \int_{\Omega} \rho \partial_t^2 u_z w_z \, d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} (\sigma_{xz} \partial_x w_z + \sigma_{zz} \partial_z w_z) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\psi_x(\sigma_{xz}) + \psi_z(\sigma_{zz})) w_z \, d\mathbf{x} \\
 &+ \int_{\Gamma} (\sigma_{xz} n_x + \sigma_{zz} n_z) w_z \, d\gamma, \\
 \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \partial_x u_x + \lambda \partial_z u_z + (\lambda + 2\mu) \psi_x(u_x) + \lambda \psi_z(u_z), \\
 \sigma_{zz} &= \lambda \partial_x u_x + (\lambda + 2\mu) \partial_z u_z + \lambda \psi_x(u_x) + (\lambda + 2\mu) \psi_z(u_z), \\
 \sigma_{xz} &= \mu (\partial_z u_x + \partial_x u_z) + \mu (\psi_z(u_x) + \psi_x(u_z)).
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Comme dans le cas acoustique, on peut calculer localement sur chaque élément Ω_e , les intégrales $\int_{\Omega_e} \psi(u_i) w \, d\mathbf{x}$ car $u \in H^1(\Omega)$ donc ses dérivées premières sont L^2 -intégrables. En revanche, on n'a pas cette régularité pour $\underline{\underline{\sigma}}$. Pour calculer les variables à mémoire ψ liées à $\underline{\underline{\sigma}}$, on implémente ces variables localement sur chaque élément Ω_e , de la même manière que le calcul des variables à mémoire en acoustique. Les premiers tests numériques semblaient stables même en temps long, cependant des tests plus récents ont fait apparaître que cette formulation des C-PML élastiques devenait instable dans certains cas. Nous discuterons de ces tests instables dans la section 4.3.2.

Avec la formulation des C-PML en déplacement, à la différence de Martin et al. (2008b), il n'est plus nécessaire de coupler la formulation dans la C-PML à celle dans le reste du modèle. Pour l'intégration dans le code, il suffit donc d'ajouter des variables à mémoire dans le calcul des intégrales ce qui simplifie l'implémentation. La discrétisation en temps est effectuée par un schéma

de Newmark d'ordre 2 comme au système (1.73).

4.2.3 Formulation acoustique-élastique

Comme le calcul des termes de couplage acoustique-élastique ne nécessite pas de dérivation spatiale, aucun traitement particulier n'est nécessaire sur l'interface concernant les C-PML. On obtient simplement la formulation acoustique-élastique avec C-PML en combinant les formulation (4.20), (4.21) et les intégrales de couplage sur l'interface comme dans le système (1.58). La formulation variationnelle acoustique-élastique intégrant les C-PML est alors la suivante, en notant Γ_{fs} l'interface acoustique-élastique et Γ_{ext} les bords extérieurs :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \kappa^{-1} \partial_t^2 \phi w \, d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} (\partial_{x'} \phi \partial_x w + \partial_{z'} \phi \partial_z w) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\psi_x(\partial_{x'} \phi) + \psi_z(\partial_{z'} \phi)) w \, d\mathbf{x} \\
 &+ \int_{\Gamma_{ext}} (\partial_{x'} \phi n_x + \partial_{z'} \phi n_z) w \, d\gamma + \int_{\Gamma_{fs}} (u_x n_x + u_z n_z) w \, d\gamma, \\
 \partial_{x'} \phi &= \rho^{-1} (\partial_x \phi + \psi(\phi)), \\
 \partial_{z'} \phi &= \rho^{-1} (\partial_z \phi + \psi(\phi)), \\
 \int_{\Omega} \rho \partial_t^2 u_x w_x \, d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} (\sigma_{xx} \partial_x w_x + \sigma_{xz} \partial_z w_x) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\psi_x(\sigma_{xx}) + \psi_z(\sigma_{xz})) w_x \, d\mathbf{x} \\
 &+ \int_{\Gamma_{ext}} (\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xz} n_z) w_x \, d\gamma + \int_{\Gamma_{fs}} \partial_t^2 \phi n_x w_x \, d\gamma, \\
 \int_{\Omega} \rho \partial_t^2 u_z w_z \, d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} (\sigma_{xz} \partial_x w_z + \sigma_{zz} \partial_z w_z) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\psi_x(\sigma_{xz}) + \psi_z(\sigma_{zz})) w_z \, d\mathbf{x} \\
 &+ \int_{\Gamma_{ext}} (\sigma_{xz} n_x + \sigma_{zz} n_z) w_z \, d\gamma + \int_{\Gamma_{fs}} \partial_t^2 \phi n_z w_z \, d\gamma, \\
 \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \partial_x u_x + \lambda \partial_z u_z + (\lambda + 2\mu) \psi_x(u_x) + \lambda \psi_z(u_z), \\
 \sigma_{zz} &= \lambda \partial_x u_x + (\lambda + 2\mu) \partial_z u_z + \lambda \psi_x(u_x) + (\lambda + 2\mu) \psi_z(u_z), \\
 \sigma_{xz} &= \mu (\partial_z u_x + \partial_x u_z) + \mu (\psi_z(u_x) + \psi_x(u_z)).
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

4.2.4 Formulation viscoélastique

Comme nous l'avons vu précédemment, la propagation d'ondes dans un milieu élastique peut être décrite par la formulation forte (4.1) ou son équivalent au second ordre :

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} \tag{4.23}$$

où $\underline{\underline{\sigma}}$ est obtenu à partir du vecteur déplacement \mathbf{u} avec la loi de Hooke :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}. \tag{4.24}$$

Les milieux viscoélastiques sont des milieux atténuants. Pour ajouter l'atténuation au modèle d'équation élastique, l'éq. (4.23) reste valable mais l'on va modifier la loi de Hooke (4.24) en faisant dépendre $\underline{\underline{\sigma}}$ du temps (donc de ses valeurs passées). On obtient (voir Komatitsch & Tromp (1999); Martin & Komatitsch (2009)) :

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_t \mathbf{C}(t-t') : \nabla \mathbf{u}(t') dt'. \quad (4.25)$$

Les milieux viscoélastiques peuvent être définis à l'aide d'un facteur de qualité Q . Même si l'on considère Q constant, il faut savoir qu'avec cette technique dans le domaine temporel, on ne peut le modéliser constant que sur une certaine bande de fréquence à l'aide d'une série de "standard linear solids" (SLS) (e.g. Liu et al. (1976)). En sismique, on prend généralement $L = 3$ pour obtenir un Q à peu près constant sur la bande de fréquence sismique (e.g. Emmerich & Korn (1987)). On réécrit alors le tenseur \mathbf{C} comme suit (Komatitsch & Tromp (1999)) :

$$C_{ijkl}(t) = C_{ijkl}^R \left[1 - \sum_{l=1}^L (1 - \tau_{ijkl}^{\varepsilon l} / \tau^{\sigma l}) e^{-t/\tau^{\sigma l}} \right] H(t). \quad (4.26)$$

où C_{ijkl}^R est le module relaxé et $H(t)$ la distribution de Heaviside. Les temps de relaxation des contraintes $\tau^{\sigma l}$ sont les mêmes quelle que soit la composante du tenseur \mathbf{C} tandis que les temps de relaxation des déformations $\tau_{ijkl}^{\varepsilon l}$ sont différents pour chaque composante de \mathbf{C} . D'après Komatitsch & Tromp (1999), on réécrit l'éq. (4.25) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{C}^U : \nabla \mathbf{u} - \sum_{l=1}^L \mathbf{R}^l \quad (4.27)$$

où pour chaque l

$$\partial_t \mathbf{R}^l = -\mathbf{R}^l / \tau^{\sigma l} + \delta \mathbf{C}^l : \nabla \mathbf{u} / \tau^{\sigma l}. \quad (4.28)$$

Les coefficients du tenseur de non relaxé \mathbf{C}^U sont donnés par la relation

$$C_{ijkl}^U = C_{ijkl}^R \left[1 - \sum_{l=1}^L (1 - \tau_{ijkl}^{\varepsilon l} / \tau^{\sigma l}) \right] \quad (4.29)$$

et le module $\delta \mathbf{C}^l$ pour chaque l est

$$\delta C_{ijkl}^l = -C_{ijkl}^R \left(1 - \tau_{ijkl}^{\varepsilon l} / \tau^{\sigma l} \right). \quad (4.30)$$

Ces équations sont incorporées à la formulation variationnelle élastique comme dans Komatitsch & Tromp (1999). On résout numériquement l'eq.(4.28) qui va nous donner les $(\mathbf{R}^l)^n \approx \mathbf{R}^l(n\Delta t)$ à l'aide d'un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 (Carcione, 1993).

L'incorporation des C-PML s'effectue comme pour les cas acoustique et élastique, c'est-à-dire qu'on remplace chaque dérivée spatiale ∂_x et ∂_z dans les équations (4.27), (4.28) par $\partial_{\tilde{x}}$ et $\partial_{\tilde{z}}$ d'après la relation (4.19).

4.3 Tests numériques de validation pour des cas simples

Tous les tests sont effectués avec un degré polynômial $N = 5$ dans chaque élément. Comme dans Komatitsch & Martin (2007), nous prenons comme profil d'absorption polynomial

$$d_x = Cd_0(x/L)^N \tag{4.31}$$

le long de l'axe x et $d_z = Cd_0(z/L)^N$ le long de l'axe z , où L est l'épaisseur de la couche C-PML, N l'ordre du polynôme d'absorption et $d_0 = -(N + 1)c_p^{max} \log(R_c)/(2L)$ comme dans Collino & Tsogka (2001) avec le coefficient de réflexion théorique R_c et C une constante dont nous parlerons par la suite. Le polynôme α_x est pris avec la même forme que dans Martin et al. (2008b)

$$\alpha_x = \alpha_{max}[1 - (x/L)^m] \tag{4.32}$$

et avec $\alpha_{max} = \pi f_0$ (voir Komatitsch & Martin (2007)), f_0 est la fréquence dominante de la source. On définit α_z de la même manière. Suivant les tests que nous allons effectuer, nous changerons les valeurs de N , C , R_c , m pour obtenir une meilleure absorption (Gedney, 1998).

4.3.1 Cas acoustique isotrope

Le modèle acoustique présenté dans cette section est de taille $6300 \text{ m} \times 1300 \text{ m}$ discrétisé par des éléments de $50 \text{ m} \times 50 \text{ m}$ soit un maillage de 126×26 éléments. Le milieu acoustique a les propriétés de l'eau homogène c'est-à-dire une densité $\rho = 1020 \text{ kg.m}^{-3}$ et une vitesse de propagation des ondes de pression $c_p = 1500 \text{ m.s}^{-1}$. On prend un pas de temps $\Delta t = 0,5 \text{ ms}$, ce qui revient à effectuer la propagation à environ un cinquième de la condition de stabilité CFL, les tests numérique donnant alors une plus grande précision qu'à la limite de la CFL (voir dans la partie des tests numériques du Chapitre 3). On prend comme source ponctuelle un Ricker (dérivée seconde de Gaussienne) de

fréquence dominante $f_0 = 10$ Hz situé en $x_s = 1150$ m et $z_s = 1050$ m, où l'origine des coordonnées est prise dans le coin en bas à gauche du modèle. Des couches absorbantes C-PML sont placés sur les quatre bords du modèle. Chacune a une épaisseur de trois éléments ce qui nous donne des couches d'épaisseur $L = 150$ m discrétisées par 16 points dans la direction normale à chaque couche. On impose des conditions de bord rigide comme conditions aux limites des C-PML. Afin de vérifier l'efficacité des couches C-PML pour des fronts d'ondes à angle d'incidence rasant par rapport aux couches et quantifier leur absorption, on place trois récepteurs en $x_{r_1} = 1350$ m et $z_{r_1} = 200$ m (en bas au gauche), $x_{r_2} = 3150$ m et $z_{r_2} = 950$ m (en haut au centre), et $x_{r_3} = 6100$ m et $z_{r_3} = 1100$ m (en haut à droite). La source et les récepteurs sont représentés sur chaque image de la Fig. 4.1. Les tests sont effectués ici avec $N = 2$, $m = 3$ et $R_c = 0,01\%$. Nous prenons comme polynôme d'absorption $d_x = Cd_0(x/L)^N$ avec $C = 3$ (d'après les résultats numériques obtenus à la Fig. 4.3).

Sur la Fig. 4.1, on voit très nettement l'absorption de l'onde sismique par les couches C-PML sans aucune réflexion d'amplitude significative. Pour évaluer la qualité de l'absorption, on compare les traces sismiques obtenues par la méthode des éléments spectraux sur le modèle présenté précédemment avec la solution exacte du problème. La solution exacte est calculée par le code Gar6more2D écrit par Julien Diaz et Abdelaziz Ezziani et basé sur la méthode de Cagniard-de Hoop. Sur la Fig. 4.2, on présente la pression du fluide aux trois récepteurs. On trace la différence multipliée par un facteur 5 entre la solution exacte et la solution approchée. Les traces sismiques observées avec C-PML montrent bien qu'il n'y a qu'une très faible réflexion provenant des bords. Le récepteur r_1 (Fig. 4.2 haut) nous donne des informations sur le comportement des C-PML acoustiques quand l'angle d'incidence de l'onde dans la C-PML par rapport à la normale est faible. La comparaison avec la solution exacte montre que l'on n'a quasiment aucune réflexion (seulement une réflexion de faible amplitude à $t = 1,5$ s). Les récepteurs r_2 et r_3 (Fig. 4.2 milieu et bas) sont placés de façon à voir le comportement des C-PML pour des ondes à incidence rasante. Le récepteur r_2 montre une bonne approximation de la solution exacte sur la Fig. 4.2 donc les couches C-PML absorbent bien les ondes à incidence rasante lorsqu'on est proche de la source (pas de réflexions d'amplitude significative). Le récepteur r_3 étant placé à offset lointain (l'offset étant la distance entre la source et le récepteur), on y voit mieux les effets des C-PML sur les ondes. Le résidu est plus important que sur les récepteurs r_1 et r_2 mais la forme de l'onde n'est pas trop altérée par les C-PML. En revanche, cela n'est plus le cas si l'on change la constante C du polynôme d'absorption d_x (voir Fig. 4.3) où la solution approchée est assez éloignée de la solution exacte. On ne présente pas ici les résultats pour les récepteurs r_1 et r_2 avec différentes valeurs de C . Il est à noter que pour

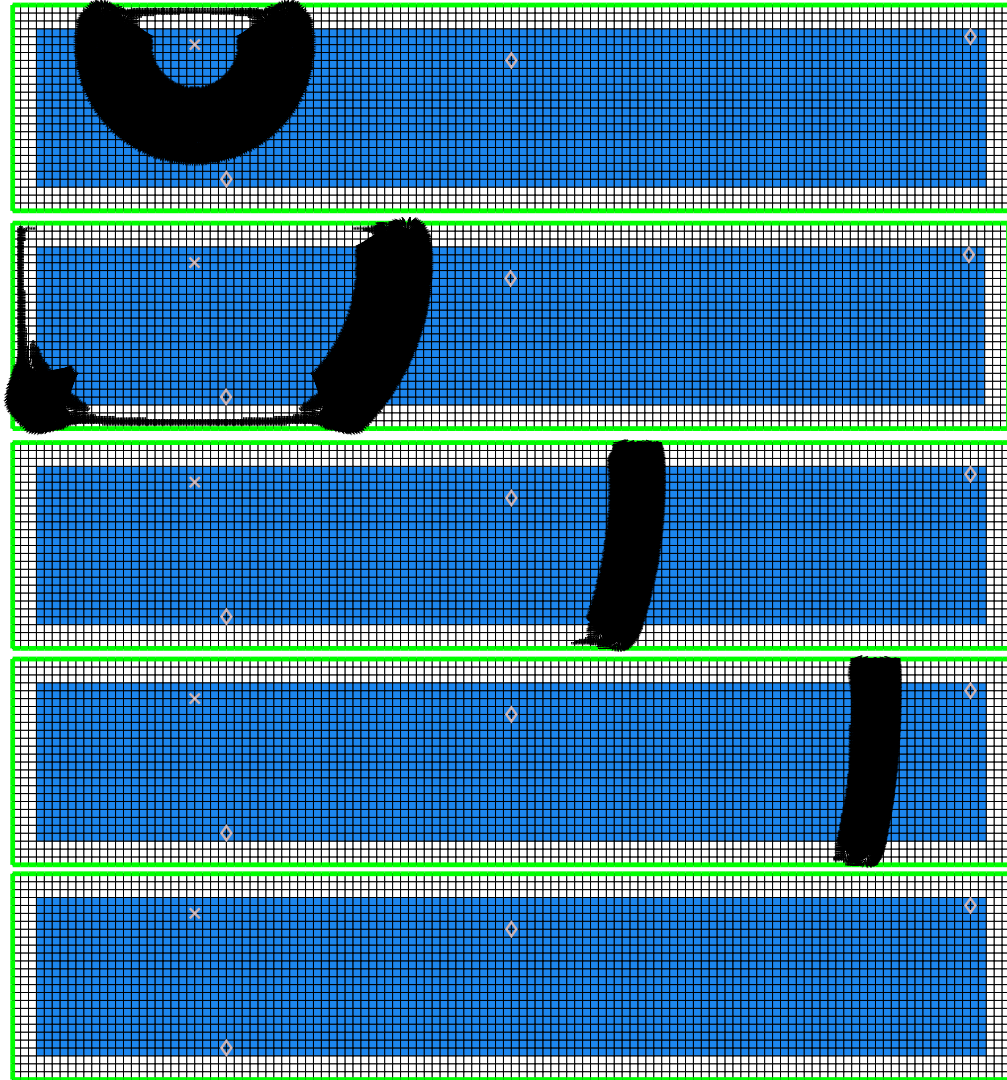


Fig. 4.1 – Propagation d’ondes dans un milieu acoustique homogène avec des couches absorbantes C-PML (en blanc) sur les quatre côtés. On représente les vecteurs du champ de déplacement qui ont une norme supérieure à 1% de la norme du plus grand vecteur. La source est représentée par une croix et les trois récepteurs par des losanges. Les instantanés de propagation sont représentés aux temps 0,5 s, 1 s, 2 s, 3 s et 4 s (de haut en bas).

r_2 , on se retrouve dans le même cas que pour r_3 (résidu élevé) mais de façon moins spectaculaire. En revanche, on a une meilleure approximation à incidence normale (en r_1) mais au détriment de l'absorption à incidence rasante.

En traçant la courbe d'évolution temporelle de l'énergie (Fig. 4.4) prise sur 100 000 pas de temps, on montre la stabilité des conditions absorbantes en temps long et la diminution franche de l'énergie dès l'entrée des ondes dans les couches absorbantes.

4.3.2 Discussion sur les cas élastique isotrope et viscoélastique isotrope

Dans cette partie, nous allons présenter les résultats d'une étude empirique portant sur la stabilité numérique en temps long des couches absorbantes C-PML pour différents milieux élastiques isotropes ou viscoélastiques isotropes. Les milieux élastiques ou viscoélastiques sont des milieux propageant des ondes P et des ondes S avec des vitesses de propagation différentes. Ces vitesses de propagation sont reliées par le coefficient de Poisson ν (défini à l'eq. (1.34)) qui dépend du type de roche. Les différents tests effectués ont montré que la stabilité des couches absorbantes C-PML élastiques, telles que nous les avons implémentées, dépendait du coefficient de Poisson ν . En effet, alors que les premiers tests ne semblaient pas présenter d'instabilité même en temps long, il s'est avéré que dans certains cas nos C-PML élastiques deviennent instables.

Les tests de cette section ont été effectués sur un modèle de taille 1000 m \times 2000 m discrétisé par des éléments de 50 m \times 50 m, ce qui représente un maillage de 20×40 éléments avec des couches absorbantes C-PML implémentées sur les quatre bords du modèle (voir Fig. 4.5). On choisit un tel modèle car il est petit et permet donc d'effectuer un grand nombre de tests sur de longues durées en un temps de calcul raisonnable. On prend une source ponctuelle en espace dont la variation temporelle est un Ricker de fréquence dominante $f_0 = 10$ Hz que l'on place au centre du modèle en $x_s = 500$ m et $z_s = 1000$ m, avec l'origine prise en bas à gauche du modèle. Nous prenons un polynôme d'absorption d_x (eq. 4.31) avec $N = 2$, $C = 1$ (pour se ramener au cas de Martin et al. (2008b)) et $R_c = 0.01\%$ ainsi qu'un polynôme α_x (eq. 4.32) avec $m = 3$. Les tests sont réalisés avec une vitesse de propagation des ondes P $c_p = 3400$ m.s⁻¹ et un pas de temps $\Delta t = 1$ ms.

La Fig. 4.6 montre que la formulation que nous avons utilisée pour implémenter les C-PML est instable pour les matériaux élastiques dont le coefficient de Poisson ν est supérieur ou égal à 0,25 (environ ou exactement, nous ne le savons pas). Cela pose un problème car la plupart des roches étudiées en géophysique ont un coefficient de Poisson compris entre 0,20 et 0,35, ce qui signifie que la formulation est instable pour la plupart des roches. Une piste pour remédier au problème

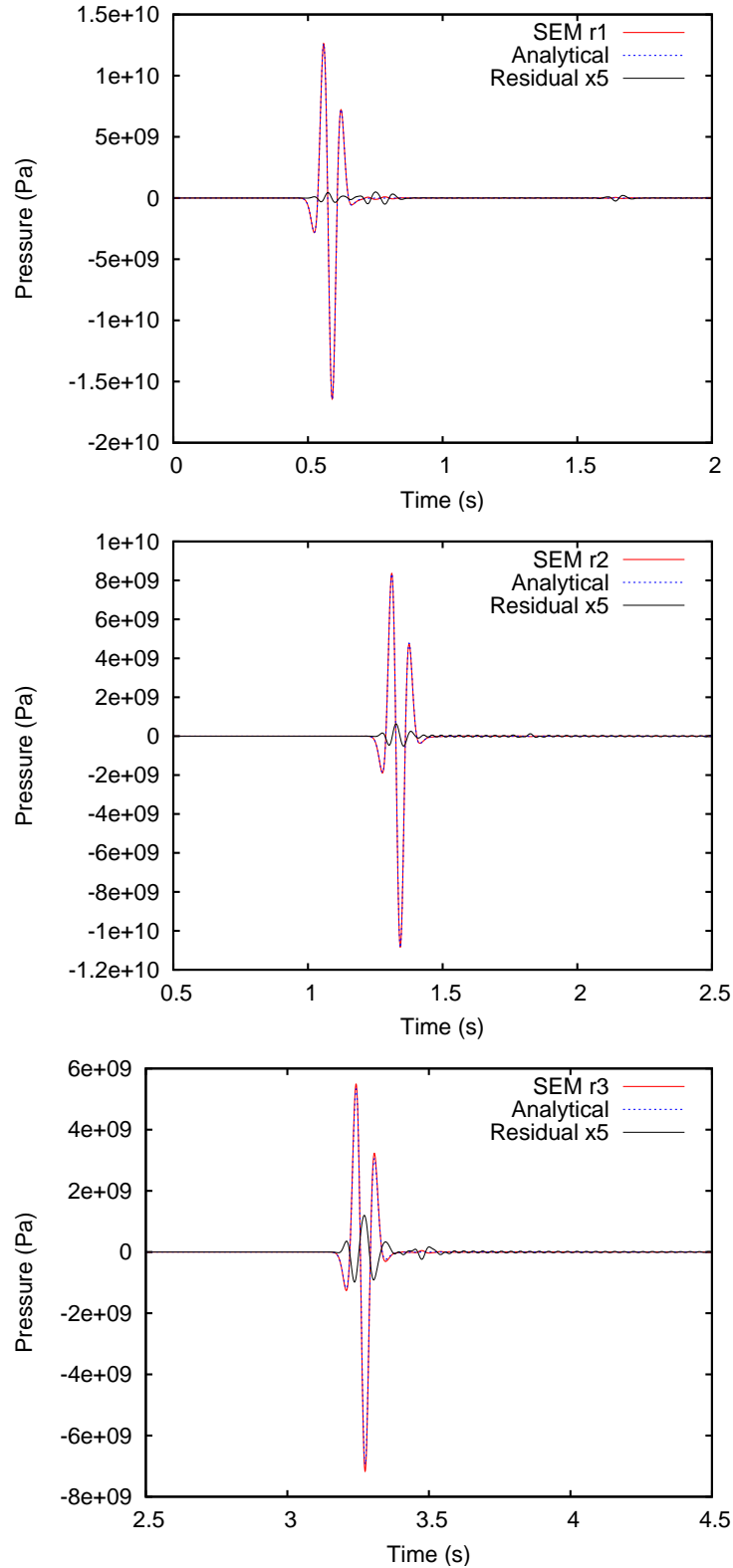


Fig. 4.2 – Traces sismiques enregistrées aux récepteurs r_1 (haut), r_2 (milieu) et r_3 (bas) représentés par des losanges sur la Fig. 4.1. On montre ici la pression du fluide pour chaque récepteur ainsi que le résidu multiplié par un facteur 5 entre la solution calculée avec des couches C-PML et la solution exacte calculée avec le code Gar6more2D. Propageant une onde dans un milieu acoustique homogène, on voit qu'il n'apparaît aucun multiple après le passage de l'onde. L'étude du résidu nous donne des informations sur la qualité de l'absorption. On remarque que les résidus sont très faibles pour les trois récepteurs même à incidence rasante (récepteur r_3).

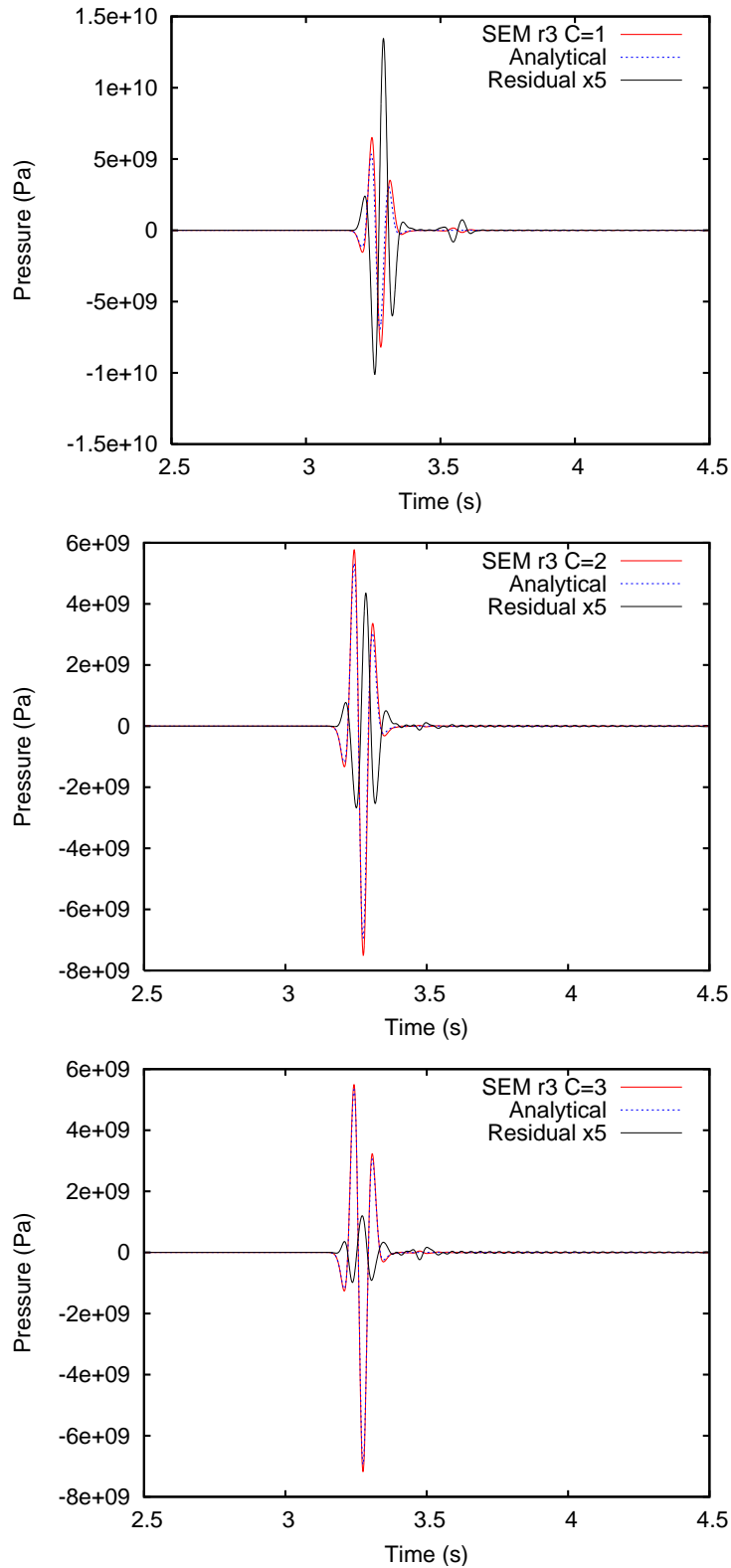


Fig. 4.3 – Évolution temporelle de la pression dans le milieu acoustique enregistrée au récepteur r_3 pour différentes valeurs de la constante C intervenant dans le polynôme d'absorption $d_x = Cd_0(x/L)^2$. On présente les résultats pour $C = 1$ (haut), 2 et 3 (bas). Pour le polynôme d'absorption dans un milieu élastique, $C = 1$ donne de bons résultats (e.g. Martin et al. (2008b)) mais les résultats ci-dessus montrent que ce n'est pas le cas en acoustique et que $C = 3$ est un meilleur choix.

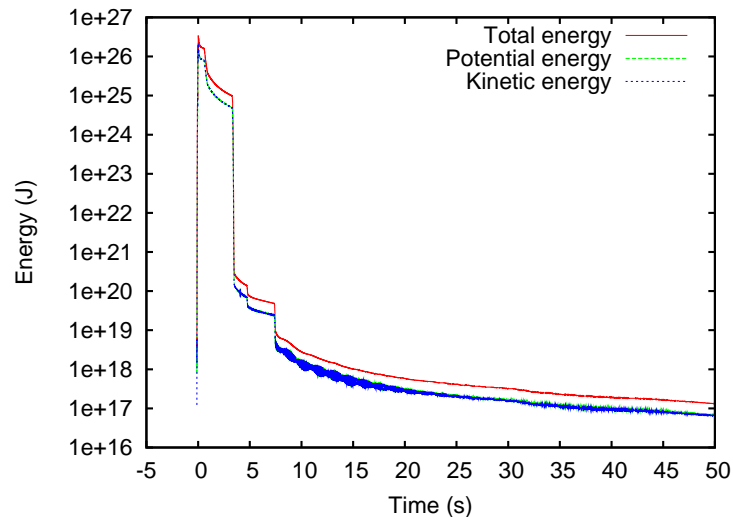
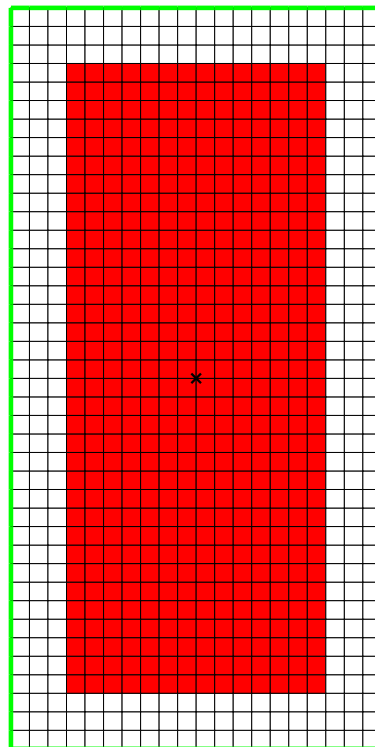


Fig. 4.4 – Évolution temporelle de l'énergie acoustique sur 100 000 pas de temps en échelle semi-logarithmique. L'énergie diminue d'un facteur 10^6 à 10^7 . L'absorption par les C-PML est donc quasi-totale.

2000



0

1000

Fig. 4.5 – Modèle utilisé pour effectuer les tests de stabilité sur les couches absorbantes C-PML (partie blanche) élastiques et viscoélastiques.

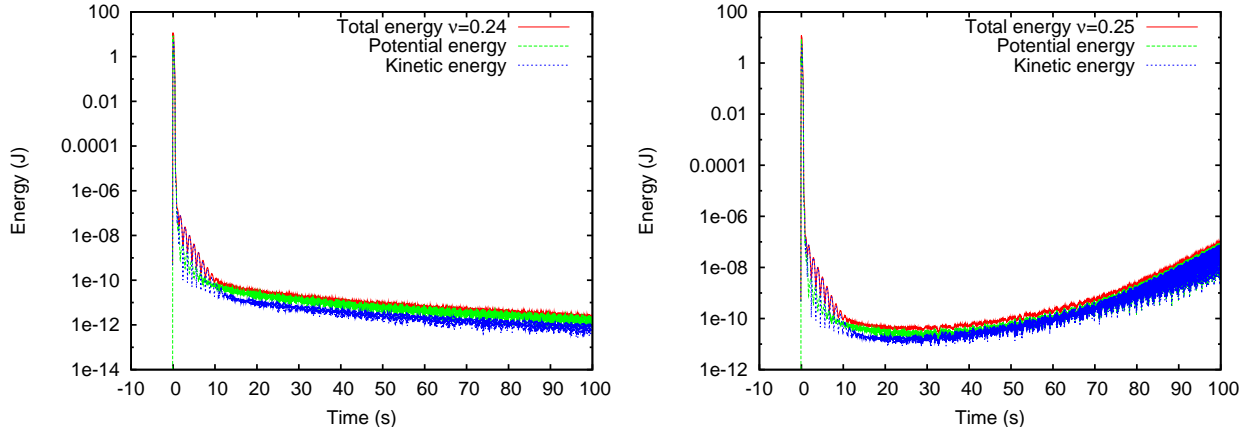


Fig. 4.6 – Évolution temporelle de l'énergie élastique sur 100 000 pas de temps en échelle semi-logarithmique. La figure de gauche est tracée pour un coefficient de Poisson $\nu = 0,24$ et la figure de droite pour $\nu = 0,25$. Ces deux tests nous montrent que la stabilité des C-PML dépend malheureusement du coefficient de Poisson ν du milieu ce qui n'est pas acceptable.

serait de modifier l'implémentation des variables à mémoire ψ associées aux variables $\underline{\sigma}$ dans le système (4.21). Par exemple pour σ_{xx} , le processus de mise à jour des $\psi_x(\sigma_{xx})$, qui est actuellement implémenté de la façon suivante :

$$\psi_x^{n+1}(\sigma_{xx}) = b_x \psi_x^n(\sigma_{xx}) + a_x \partial_x^n \sigma_{xx},$$

serait remplacé par la formulation variationnelle suivante (Martin et al. (2008b)) :

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} \psi_x(\sigma_{xx}) w_x d\mathbf{x} \right)^{n+1} &= - \left(\int_{\Omega} \sigma_{xx} \partial_x (a_x w_x) d\mathbf{x} \right)^n + \left(\int_{\Omega} b_x \psi_x(\sigma_{xx}) w_x d\mathbf{x} \right)^n \\ &+ \left(\int_{\Gamma} \sigma_{xx} n_x a_x w_x d\gamma \right)^n. \end{aligned}$$

Étant donné que nous avons remarqué les instabilités de cette formulation durant la phase de rédaction de ce manuscrit à la fin de la thèse, nous n'avons pas encore pu régler ces problèmes ni étudier plus précisément l'origine de ces instabilités (on pourra notamment regarder les travaux effectués sur l'analyse de la stabilité des PML splittés (Bécache et al. (2003))).

Des tests numériques de stabilité ont également été effectués pour la formulation viscoélastique C-PML qui est basée sur la formulation élastique mais avec des termes d'amortissement supplémentaires. Nous reprenons le même maillage que précédemment (Fig. 4.5). Comme le montrent les énergies représentées sur la Fig. 4.7, l'atténuation du milieu stabilise les C-PML et permet de traiter des milieux avec des coefficients de Poisson supérieurs à 0,25. Cependant, si l'atténuation est trop faible,

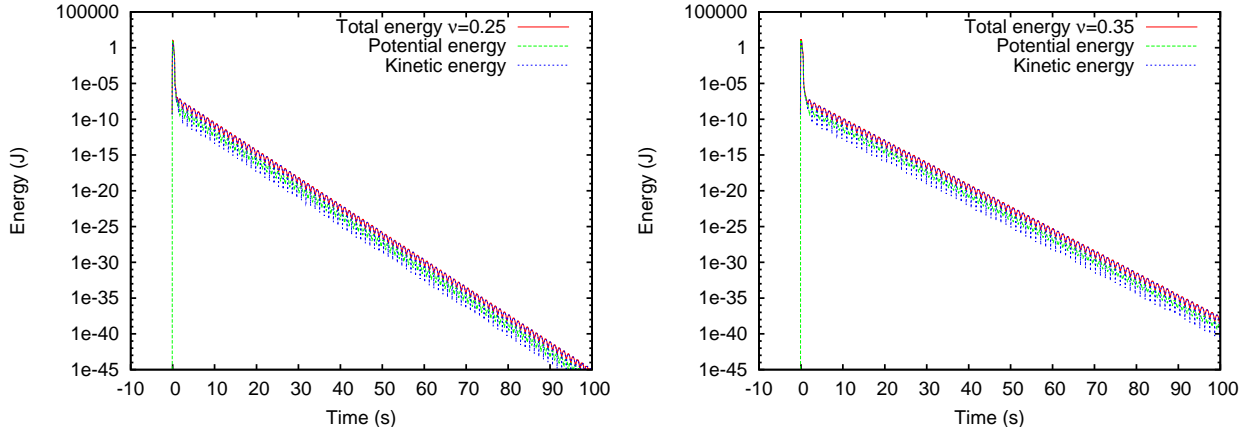


Fig. 4.7 – Évolution temporelle de l'énergie dans le cas d'un matériau viscoélastique avec un facteur de qualité élevé $Q = 50$ sur 100 000 pas de temps en échelle semi-logarithmique. La figure de gauche est tracée pour $\nu = 0,25$ et la figure de droite pour $\nu = 0,35$. Le coefficient de Poisson étant généralement compris entre 0,20 et 0,35 pour la plupart des roches étudiées en géophysique, on peut dire que pour un tel facteur de qualité, les C-PML semblent stables, mais ceci n'est pas paliatif et ne peut pas constituer une solution générale du problème.

c'est-à-dire que le facteur de qualité Q est grand (par exemple $Q = 500$), la Fig. 4.8 montre que le problème de stabilité que l'on a rencontré dans le cas élastique se retrouve dans le cas viscoélastique.

4.3.3 Cas acoustique-élastique isotrope

Le modèle acoustique-élastique est de taille $6300 \text{ m} \times 1300 \text{ m}$ discrétisé par des éléments de $50 \text{ m} \times 50 \text{ m}$ soit un maillage de 126×26 éléments. On place l'interface acoustique-élastique à une hauteur de $z_{interface} = 650 \text{ m}$ par rapport au bas du modèle en mettant le milieu élastique en bas (couche rouge de la Fig. 4.9). Les propriétés de densité et de vitesse de propagation du milieu acoustique sont les mêmes que précédemment. Pour le milieu élastique, on prend une densité $\rho = 2500 \text{ kg.m}^{-3}$, une vitesse de propagation des ondes P $c_p = 3400 \text{ m.s}^{-1}$ et $c_s = 2000 \text{ m.s}^{-1}$ pour les ondes S ce qui donne un coefficient de poisson de $\nu = 0,23544$ (donc a priori convenable car inférieur à 0,25). On prend un pas de temps $\Delta t = 0,5 \text{ ms}$ donnant environ un cinquième de la condition de stabilité CFL dans le fluide et $CFL/2,5$ pour la partie solide car cela donne de meilleurs résultats (voir dans la partie des tests numériques du Chapitre 3). On prend comme source ponctuelle un Ricker de fréquence dominante $f_0 = 10 \text{ Hz}$ dans le fluide en $x_s = 1150 \text{ m}$ et $z_s = 1050 \text{ m}$, l'origine étant prise dans le coin en bas à gauche du modèle. Des couches absorbantes C-PML sont placées sur les quatre bords du modèle. Comme précédemment, on a des couches d'épaisseur $L = 150 \text{ m}$ discrétisées par 16 points dans la direction normale à chaque couche. La vitesse maximale dans le solide (3400 m.s^{-1}) étant inférieure à trois fois la vitesse dans le fluide ($3 \times 1500 = 4500 \text{ m.s}^{-1}$) nous

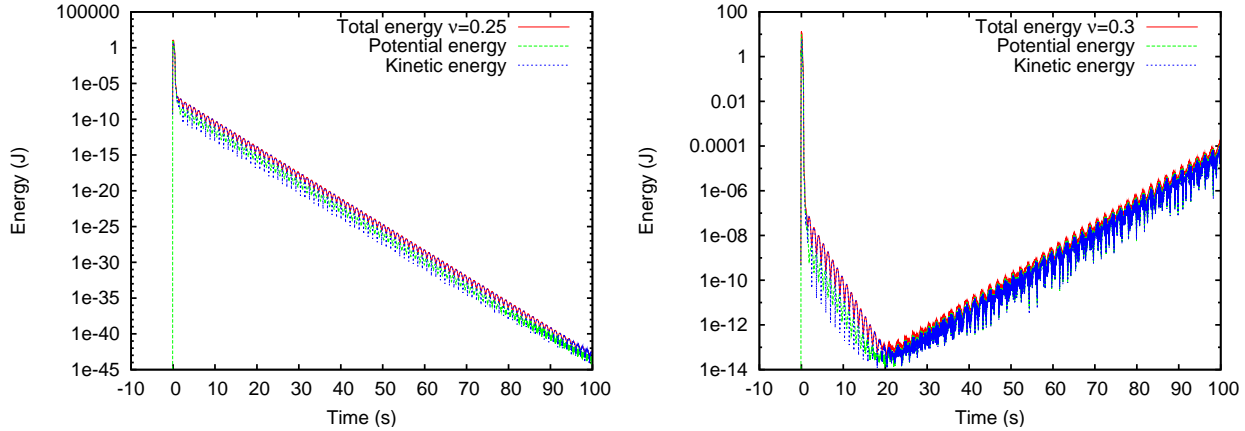


Fig. 4.8 – Évolution temporelle de l'énergie dans le cas d'un matériau viscoélastique avec un facteur de qualité faible $Q = 500$ sur 100 000 pas de temps en échelle semi-logarithmique. La figure de gauche est tracée pour un coefficient de Poisson $\nu = 0,25$ et la figure de droite pour $\nu = 0,30$. Comme dans la Fig. 4.6, on trouve donc une limite au-delà de laquelle les C-PML sont instables (ici la limite observée se situe entre 0,25 et 0,30).

prenons comme polynôme d'absorption $d_x = 3d_0(x/L)^N$, où d_0 est calculé à partir de la vitesse du fluide (ce qui revient à prendre $C = 3$). On impose sur les bords externes des C-PML des conditions de bord rigides. Comme dans le test précédent, la simulation est effectuée ici avec $N = 2$, $m = 3$ et $R_c = 0,01\%$. On utilise trois récepteurs : r_1 en $x_{r_1} = 1350$ m et $z_{r_1} = 200$ m (en bas) dans le solide, r_2 en $x_{r_2} = 3150$ m et $z_{r_2} = 950$ m (en haut au centre) dans le fluide, r_3 en $x_{r_3} = 6100$ m et $z_{r_3} = 1100$ m (en haut à droite) dans le fluide.

Les Fig. 4.10 et 4.11 présentent les comparaisons des traces sismiques obtenues par la méthode des éléments spectraux sur le modèle présenté précédemment (voir Fig. 4.9) par rapport à la solution exacte du problème calculée par le code Gar6more2D de Julien Diaz et Abdelaâziz Ezziani (disponible en ligne) basé sur la méthode de Cagniard-de Hoop (Cagniard, 1939; de Hoop, 1960). Sur la Fig. 4.10, on représente les deux composantes du vecteur déplacement au récepteur r_1 situé dans le solide et sur la Fig. 4.11, on représente la pression du fluide aux récepteurs r_2 et r_3 . On trace également la différence multipliée par un facteur 5 entre la solution exacte et la solution numérique. Les traces sismiques observées avec C-PML montrent qu'il n'y a qu'une très faible réflexion parasites provenant des bords dans le fluide comme dans le solide, ce qui nous montre que le couplage implémenté numériquement entre les deux milieux fonctionne.

La courbe d'évolution temporelle de l'énergie (Fig. 4.12) sur 100 000 pas de temps montre la stabilité des conditions absorbantes en temps long pour ce test et la diminution franche de l'énergie due aux couches absorbantes. On remarque qu'on a dans ce test un coefficient de Poisson $\nu < 0,25$

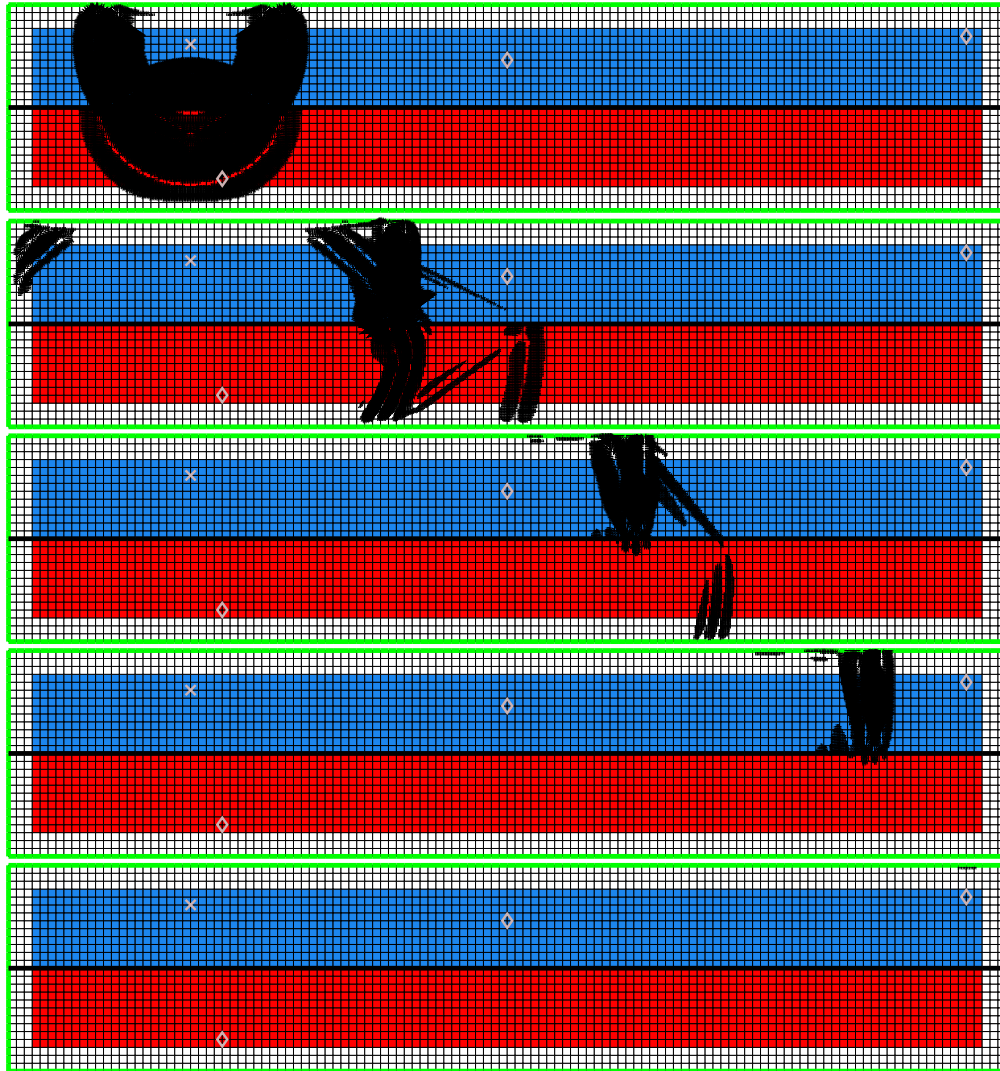


Fig. 4.9 – Propagation d’ondes dans un milieu couplé acoustique-élastique (acoustique : bleu en haut, élastique : rouge en bas) avec des couches absorbantes C-PML (en blanc) implémentées sur les quatre bords. On représente les vecteurs du champ de déplacement qui ont une norme supérieure à 1% de la norme du plus grand vecteur. La source est représentée par une croix et les trois récepteurs par des losanges. Les instantanés de propagation sont représentés aux temps 0, 5 s, 1 s, 2 s, 4 s et 6 s (de haut en bas).

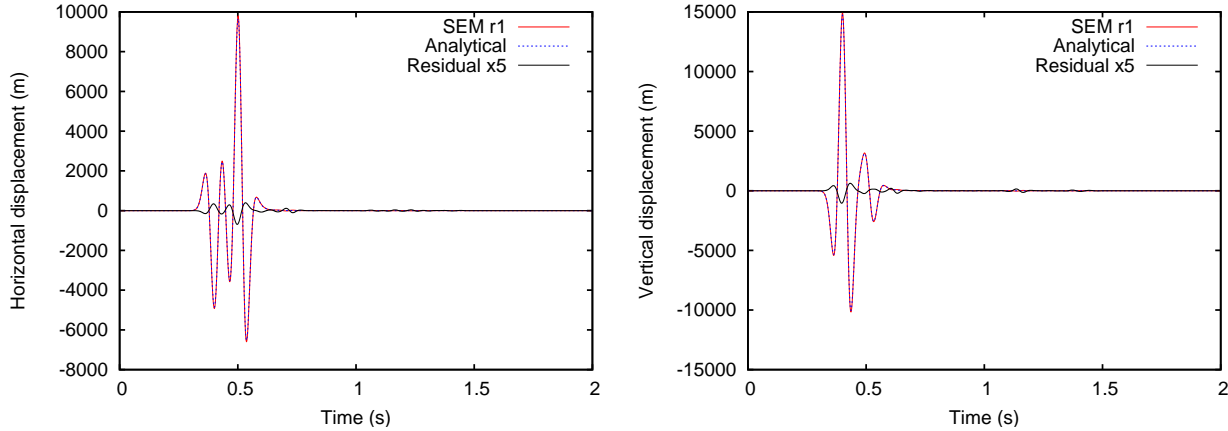


Fig. 4.10 – Composantes horizontale (à gauche) et verticale (à droite) du déplacement enregistrées au récepteur r_1 placé dans la partie élastique du modèle (voir Fig. 4.9). On représente, en plus de la solution numérique, la solution analytique ainsi que le résidu multiplié par un facteur 5 entre les deux courbes. Les deux courbes se superposent bien malgré la proximité de la couche absorbante, ce qui montre son efficacité.

dans le solide.

4.3.4 Cas acoustique-viscoélastique isotrope

Le modèle acoustique-viscoélastique est de taille $6300 \text{ m} \times 1650 \text{ m}$ discrétisé par des éléments de $50 \text{ m} \times 50 \text{ m}$ soit un maillage de 126×33 éléments. On place l'interface acoustique-viscoélastique à une hauteur de $z_{interface} = 1150 \text{ m}$ par rapport au bas du modèle en mettant le milieu viscoélastique en bas (couche rouge de la Fig. 4.13). Les propriétés de densité et de vitesse de propagation du milieu acoustique sont les mêmes que précédemment. Pour le milieu viscoélastique, on prend une densité $\rho = 2500 \text{ kg.m}^{-3}$, une vitesse de propagation des ondes P $c_p = 3400 \text{ m.s}^{-1}$, et $c_s = 1963 \text{ m.s}^{-1}$ pour les ondes S ce qui donne un coefficient de poisson de $\nu = 0,25$, et un facteur de qualité $Q_p = Q_s = 50$. On prend un pas de temps $\Delta t = 0,5 \text{ ms}$. On prend comme source ponctuelle un Ricker de fréquence dominante $f_0 = 10 \text{ Hz}$ dans le fluide en $x_s = 1150 \text{ m}$ et $z_s = 1550 \text{ m}$, l'origine étant prise dans le coin en bas à gauche du modèle. Des couches absorbantes C-PML sont placées sur les bords bas, gauche et droit du modèle et on implémente une condition de surface libre sur le bord haut. On a des couches d'épaisseur $L = 150 \text{ m}$ discrétisées par 16 points dans la direction normale à chaque couche. La vitesse maximale dans le solide (3400 m.s^{-1}) étant inférieure à trois fois la vitesse dans le fluide ($3 \times 1500 = 4500 \text{ m.s}^{-1}$) nous prenons comme polynôme d'absorption $d_x = 3d_0(x/L)^N$, où d_0 est calculé à partir de la vitesse du fluide (ce qui revient à prendre $C = 3$). La simulation est effectuée ici avec avec $N = 2$, $m = 3$ et $R_c = 0,01\%$. On impose sur les bords externes des C-PML des conditions de bord rigides. On utilise trois récepteurs : r_1 en $x_{r_1} = 1350 \text{ m}$

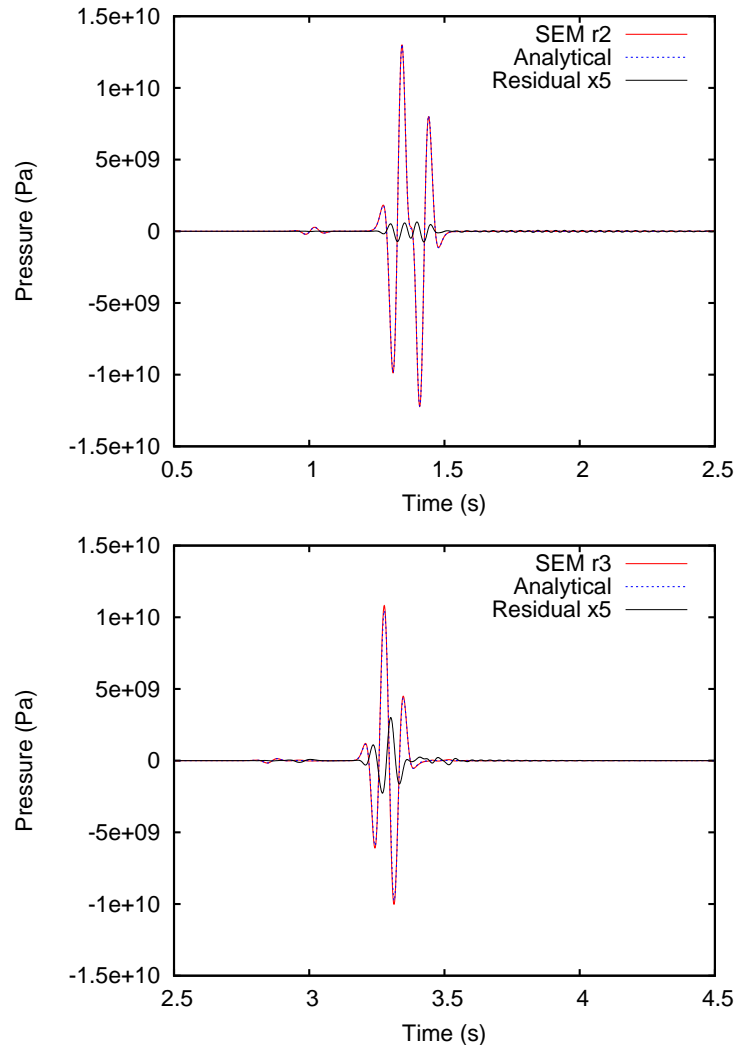


Fig. 4.11 – Pression dans le fluide enregistrée aux récepteurs r_2 (haut) et r_3 (bas) placés dans la partie acoustique du modèle (voir Fig. 4.9). On représente, en plus de la solution numérique, la solution analytique ainsi que le résidu multiplié par un facteur 5 entre les deux courbes. Les courbes se superposent bien pour les deux récepteurs mais le résidu est plus important au niveau du récepteur r_3 car celui-ci est situé à offset lointain.

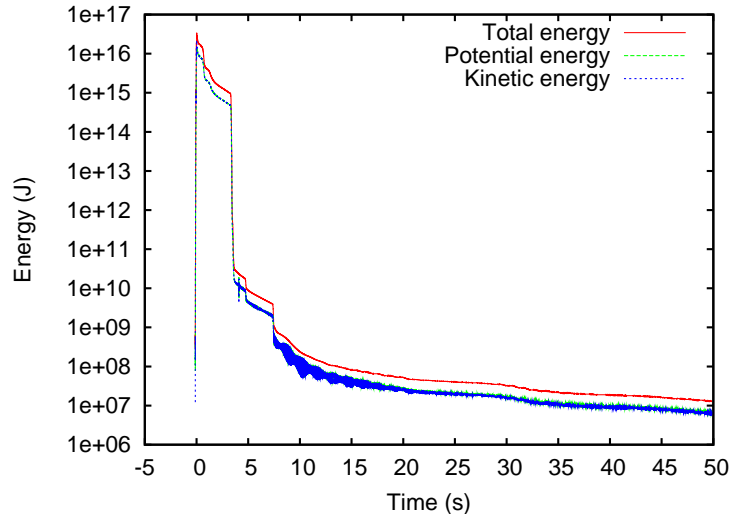


Fig. 4.12 – Évolution temporelle de l'énergie pour le modèle acoustique-élastique sur 100 000 pas de temps avec une échelle logarithmique. La décroissance de l'énergie est rapide et franche, comme dans le cas acoustique pur, ce qui prouve que l'interface acoustique-élastique dans les C-PML ne pose pas de problème et que la couche C-PML est efficace.

et $z_{r_1} = 200$ m (en bas) dans le solide, r_2 en $x_{r_2} = 3150$ m et $z_{r_2} = 1450$ m (en haut au centre) dans le fluide, r_3 en $x_{r_3} = 6100$ m et $z_{r_3} = 1600$ m (en haut à droite) dans le fluide.

Les Fig. 4.14 et 4.15 présentent les comparaisons des traces sismiques obtenues par la méthode des éléments spectraux sur le modèle présenté précédemment par rapport à une solution de référence. Pour obtenir une solution de référence sur un tel modèle qui n'a pas de solution analytique connue, on effectue un test avec des sources identiques et les récepteurs placés aux mêmes endroits mais dans un modèle beaucoup plus grand que le modèle initial afin qu'aucune réflexion parasite ne puisse provenir des bords fictifs du modèle. Sur la Fig. 4.14, on représente les deux composantes du vecteur déplacement du solide au récepteur r_1 et sur la Fig. 4.15, on représente la pression du fluide aux récepteurs r_2 et r_3 . On trace la différence multipliée par un facteur 100 entre la solution de référence et la solution numérique avec C-PML. Les traces sismiques observées avec C-PML montrent qu'il n'y a qu'une très légère différence, et ce dans le fluide comme dans le solide. Ces tests nous montrent donc que le couplage numérique effectué entre les milieux acoustique et viscoélastique ne pose pas de problème.

La courbe d'évolution temporelle de l'énergie (Fig. 4.16) sur 100 000 pas de temps montre la stabilité numérique des conditions absorbantes en temps long et la diminution franche de l'énergie due aux couches absorbantes. Il est à noter que, contrairement aux tests élastiques, les tests effectués dans des milieux viscoélastiques sont stables pour un coefficient de Poisson $\nu = 0,25$ si l'atténuation

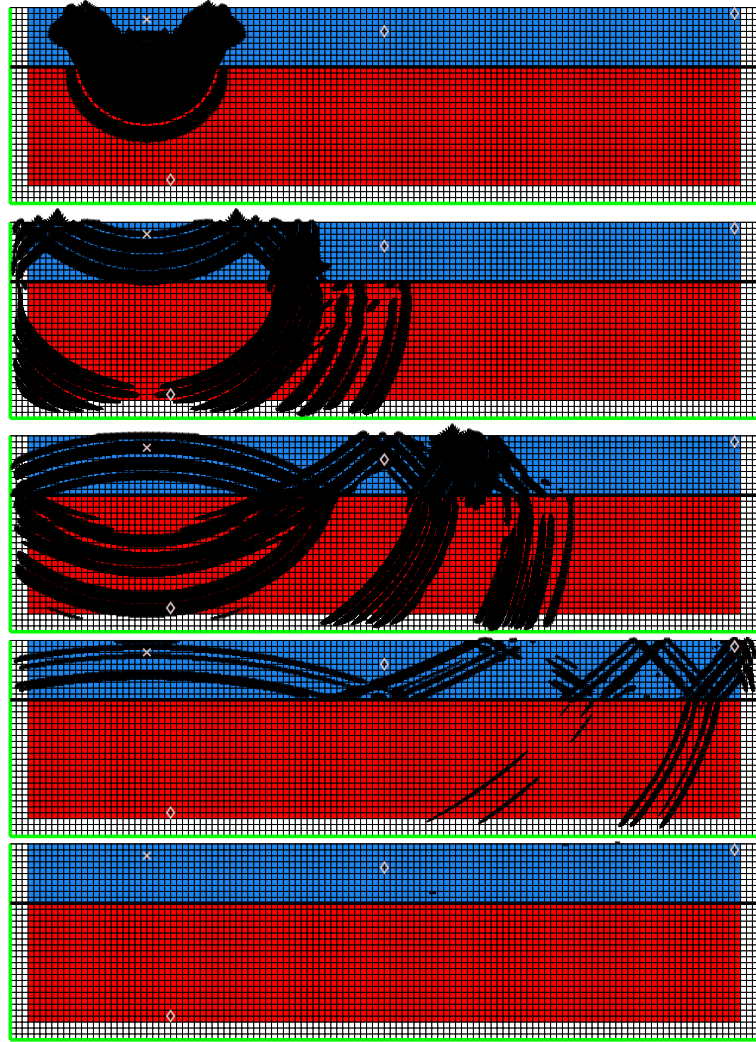


Fig. 4.13 – Propagation d’ondes dans un milieu couplé acoustique-viscoélastique (acoustique : bleu en haut, viscoélastique : rouge en bas) avec des couches absorbantes C-PML (en blanc) implémentées sur trois côtés et une surface libre implémentée sur le bord supérieur. Dans la couche viscoélastique, On prend un facteur de qualité élevé $Q = 50$. On représente les vecteurs du champ de déplacement qui ont une norme supérieure à 1% de la norme du plus grand vecteur. La source est représentée par une croix et les trois récepteurs par des losanges. Les instantanés de la propagation sont représentés aux temps 0, 5 s, 1 s, 2 s, 4 s et 6 s (de haut en bas).

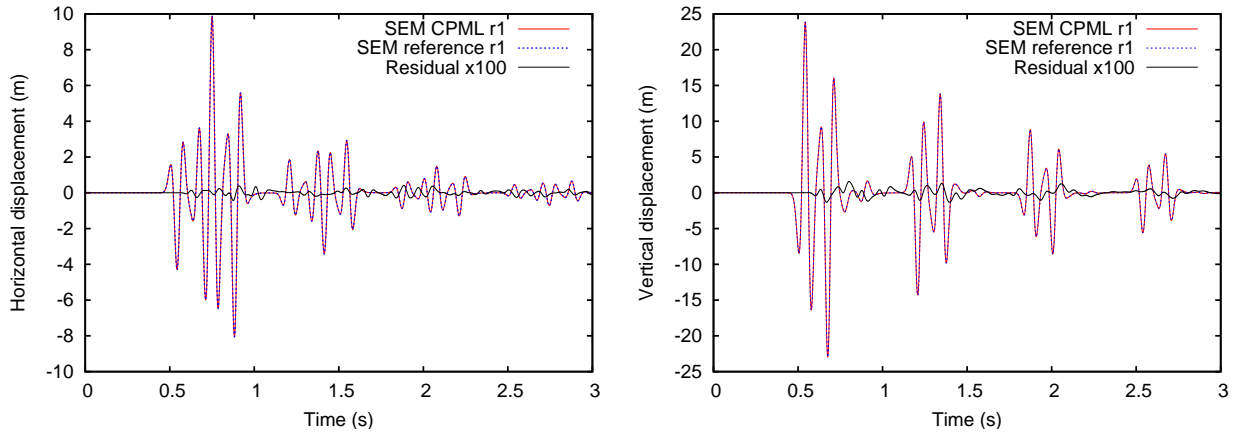


Fig. 4.14 – Composantes horizontale (à gauche) et verticale (à droite) du déplacement enregistrées au récepteur r_1 placé dans la partie viscoélastique du modèle (voir Fig. 4.13). On représente, en plus de la solution numérique avec C-PML, la solution de référence ainsi que le résidu multiplié par un facteur 100 entre les deux courbes. On observe de multiples réflexions se produisant entre la surface libre et l’interface fluide-solide.

est suffisamment forte (ici le facteur de qualité $Q = 50$).

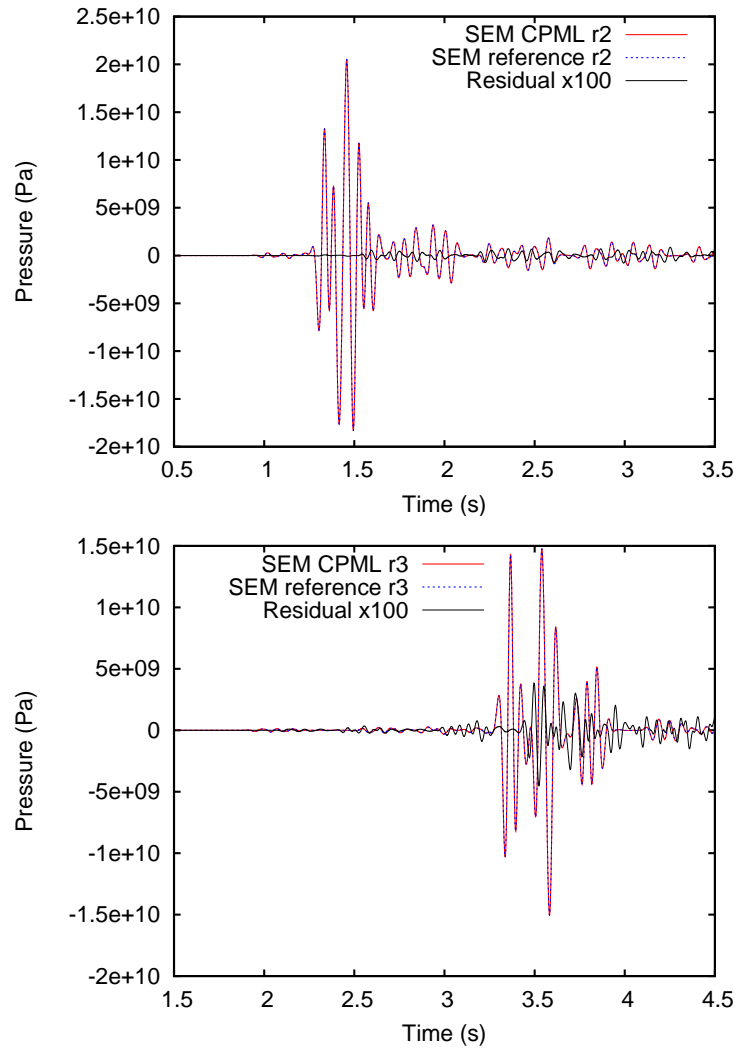


Fig. 4.15 – Pression dans le fluide enregistrée aux récepteurs r_2 (haut) et r_3 (bas) placés dans la partie acoustique du modèle (voir Fig. 4.13). On représente, en plus de la solution numérique avec C-PML, la solution de référence ainsi que le résidu multiplié par un facteur 100 entre les deux courbes. On observe de multiples réflexions se produisant entre la surface libre et l'interface fluide-solide.

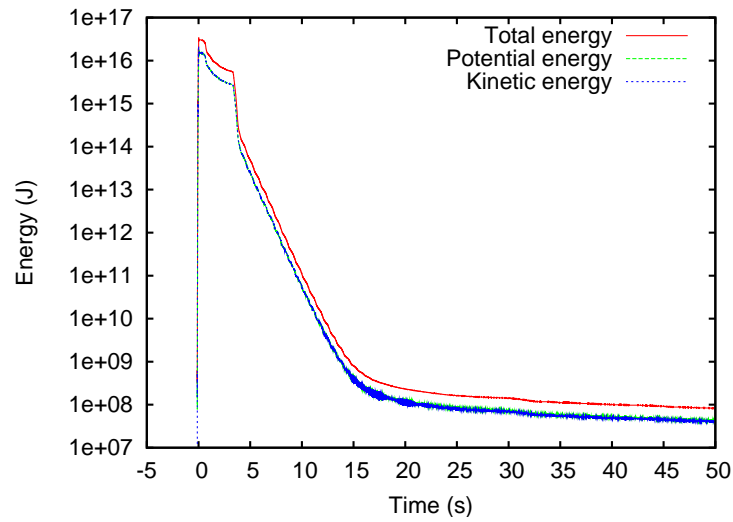


Fig. 4.16 – Évolution temporelle de l'énergie pour le modèle acoustique-viscoélastique sur 100 000 pas de temps représentée en échelle semi-logarithmique. La surface libre sur le bord supérieur entraîne de multiples réflexions dans le domaine et donne cette décroissance en pente douce.

4.4 Application à des modèles pétroliers plus réalistes

Comme dans la dernière partie du chapitre précédent, nous allons présenter dans cette section des applications à des modèles plus réalistes de la méthode des éléments spectraux avec des couches absorbantes C-PML pour un milieu fluide-solide. Nous regarderons les résultats que donnent les modèles à trois couches avec bathymétrie ainsi que le modèle d'acquisition sismique marine (fourni par TOTAL) comprenant un dôme de sel. Les modèles que l'on présente dans cette partie ont des propriétés qui ne vérifient pas les conditions de stabilité empiriques des couches absorbantes C-PML (coefficient de Poisson $\nu > 0,25$) que nous avons observées numériquement. Cependant, ces instabilités se manifestant en temps long, donc afin d'obtenir des résultats préliminaires sur l'apport des conditions absorbantes C-PML, on réalise des tests de propagation sur des durées plus courtes. Ceci sera repris et corrigé dans les prochaines semaines.

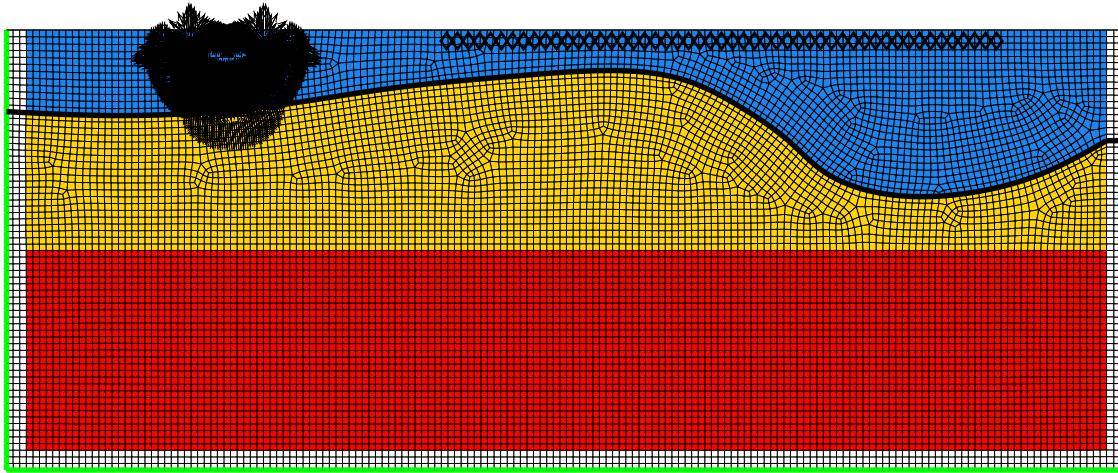
4.4.1 Modèle à trois couches fluide-solide avec bathymétrie

Nous utilisons le maillage représenté sur la Fig. 3.12 mais élargi de 200 m à droite afin d'ajouter les C-PML. Le modèle contient un milieu acoustique au-dessus de deux milieux élastiques (voir Fig.4.17). Comme le bord supérieur représente la surface de l'eau, on y impose une condition de surface libre. Les trois autres bords sont des couches C-PML. Le modèle est de taille 5200 m \times 2000 m avec 11169 éléments et l'on prend un degré polynômial $N = 5$, ce qui donne un total de 280411 points de grille. La taille des éléments est d'environ 30 m \times 30 m. Le pas de temps est pris égal à $\Delta t = 0,07$ ms. On prend comme source ponctuelle un Ricker de fréquence dominante $f_0 = 10$ Hz que l'on place en $x_s = 1200$ m en partant du bord gauche du modèle et $z_s = 100$ m de profondeur dans la partie acoustique. On place une ligne de 51 récepteurs à 50 m de profondeur dans le fluide et à un offset de 1000 m par rapport à la source pour le premier récepteur ($x_{r1} = 2200$ m). L'écart entre chaque récepteur est de 50 m (ce qui donne $x_{r51} = 4700$ m). On prend comme propriétés du milieu acoustique (partie bleue de la Fig. 4.17) une densité $\rho_1 = 1020$ kg.m⁻³ et une vitesse de propagation des ondes de pression $c_1 = 1500$ m.s⁻¹. La première couche élastique (située juste sous la couche acoustique en jaune sur la Fig. 4.17) a pour densité $\rho_2 = 2500$ kg.m⁻³ et pour vitesse de propagation des ondes P $c_{p2} = 3400$ m.s⁻¹ et des ondes S $c_{s2} = 1963$ m.s⁻¹. Pour la dernière couche (en rouge sur la Fig. 4.17), on prend $\rho_3 = 2000$ kg.m⁻³, $c_{p3} = 8000$ m.s⁻¹ et $c_{s3} = 4620$ m.s⁻¹.

On représente les sismogrammes obtenus sur la Fig. 4.20. En les comparant avec les sismogrammes de la Fig. 3.17, on constate la disparition de nombreuses ondes qui polluaient nos résultats.

0

5200



2000

Fig. 4.17 – Propagation d’ondes sismiques dans un modèle à trois couches avec une couche fluide surmontant deux couches solides. L’instantané est pris au temps $t = 0,280$ s. Les 51 récepteurs sont représentés par des losanges. La couche bleue représente le fluide tandis que les couches jaune et rouges sont des couches solides et les zones blanches représentent les couches absorbantes.



Fig. 4.18 – Propagation d’ondes sismiques dans un modèle à trois couches avec une couche fluide surmontant deux couches solides. L’instantané est pris au temps $t = 0,560$ s. Les 51 récepteurs sont représentés par des losanges. La couche bleue représente le fluide tandis que les couches jaune et rouges sont des couches solides et les zones blanches représentent les couches absorbantes.



Fig. 4.19 – Propagation d’ondes sismiques dans un modèle à trois couches avec une couche fluide surmontant deux couches solides. L’instantané est pris au temps $t = 1,120$ s. Les 51 récepteurs sont représentés par des losanges. La couche bleue représente le fluide tandis que les couches jaune et rouges sont des couches solides et les zones blanches représentent les couches absorbantes.

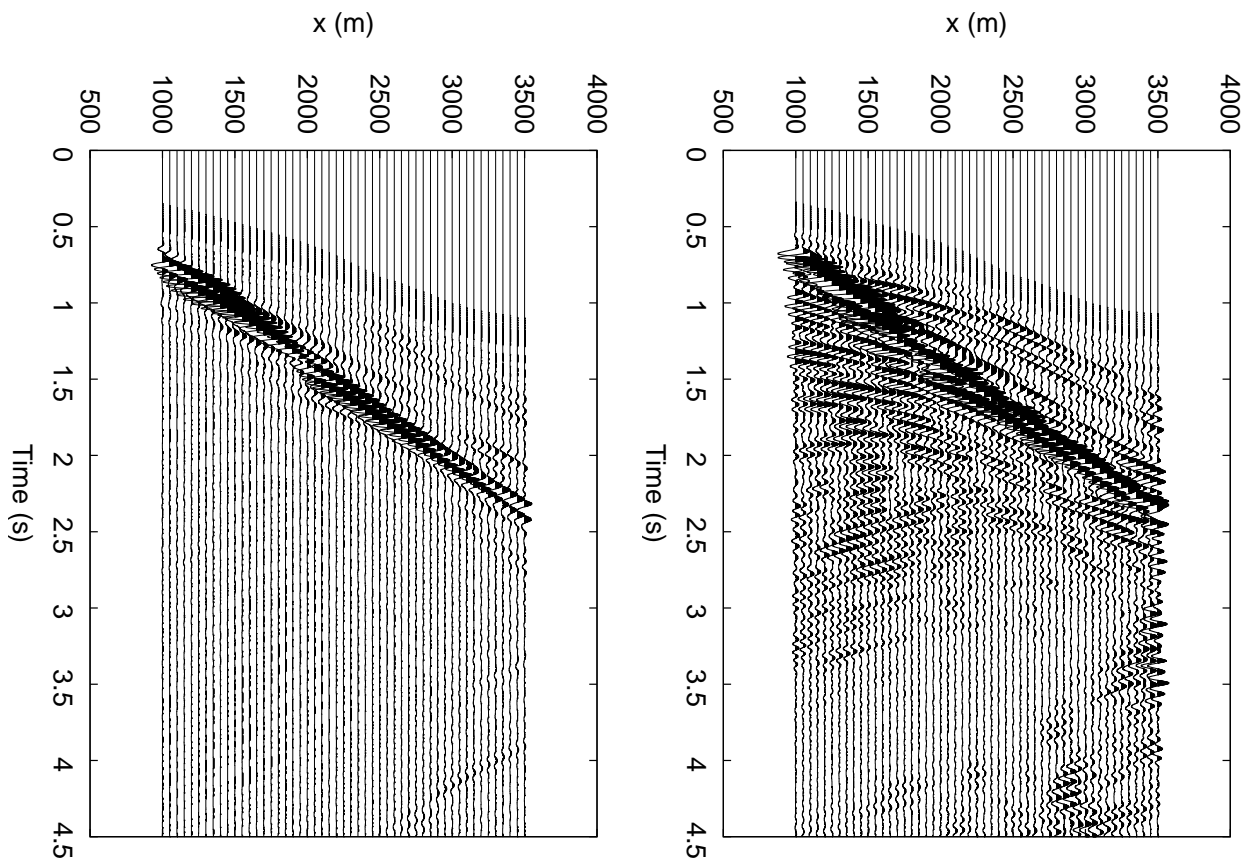


Fig. 4.20 – Sismogrammes enregistrés en 51 récepteurs dans le modèle à trois couches. On présente les composantes horizontale (gauche) et verticale (droite) du déplacement. On voit nettement en comparant ces sismogrammes avec ceux de la Fig. 3.17 que les ondes parasites des bords disparaissent pour ne laisser que les ondes réfléchies des couches internes du modèle.

4.4.2 Modèle de sismique marine avec dôme de sel

Nous allons à présent étudier la propagation dans le modèle contenant un dôme de sel de la Fig. 3.18 mais élargi de 200 m à gauche, à droite et en bas pour y ajouter des couches C-PML. Le modèle est de taille 6400 m \times 5200 m et contient 18606 éléments avec un degré polynômial $N = 5$ ce qui donne 466601 points de grille (voir Fig. 4.21). Le pas de temps est de $\Delta t = 0,1$ ms. Les propriétés des différentes couches sont décrites dans la table 3.1 du chapitre précédent. On prend comme source ponctuelle un Ricker de fréquence dominante $f_0 = 10$ Hz que l'on place en $x_s = 1200$ m en partant du bord gauche du modèle et $z_s = 200$ m de profondeur dans la partie acoustique. On place une ligne de 81 récepteurs à 1500 m de profondeur dans le fluide et à un offset de 500 m de la source pour le premier récepteur ($x_{r1} = 1700$ m) et l'écart entre chaque récepteur est de 50 m (ce qui donne $x_{r81} = 5700$ m pour le dernier). On représente les sismogrammes correspondant à cette simulation sur la Fig. 4.24.

Comme dans le chapitre précédent, la Fig. 4.22 illustre bien la différence de vitesse qu'il y a entre le dôme de sel et les roches environnantes. On voit que le front d'onde est déformé et accélère dans le dôme de sel. Comme la vitesse des ondes est plus rapide dans le dôme de sel, on va observer les réflexions provenant du fond du dôme avant certaines réflexions des couches situées plus en surface. En comparant les sismogrammes de la Fig. 4.24 avec ceux de la Fig. 3.21, on constate la disparition quasi complète de nombreuses ondes parasites qui contaminaient nos résultats numériques.

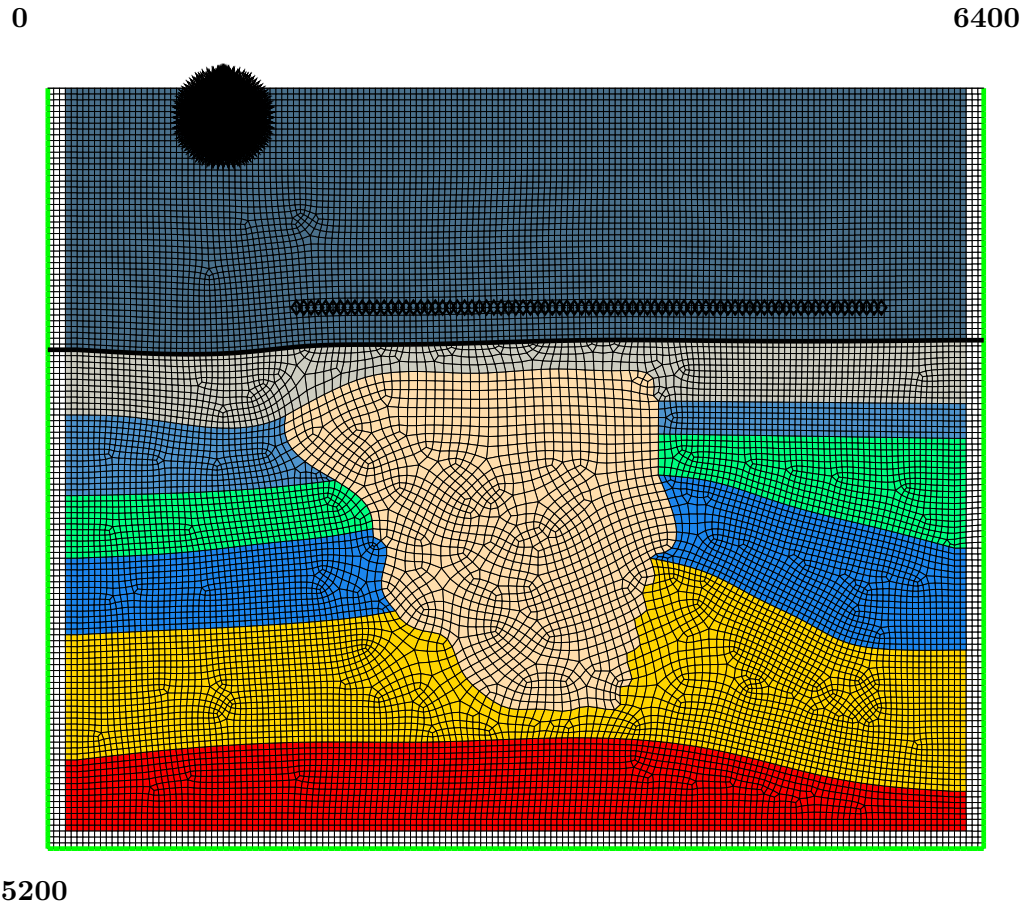


Fig. 4.21 – Propagation d’ondes sismiques dans un modèle avec dôme de sel. L’instantané est pris au temps $t = 0,2$ s. Les 81 récepteurs sont représentés par des losanges. La partie fluide est en surface et l’interface fluide-solide est mise en évidence par le trait gras. Les propriétés des différentes couches sont données dans la table 3.1 du chapitre précédent. Les zones blanches représentent les couches absorbantes.

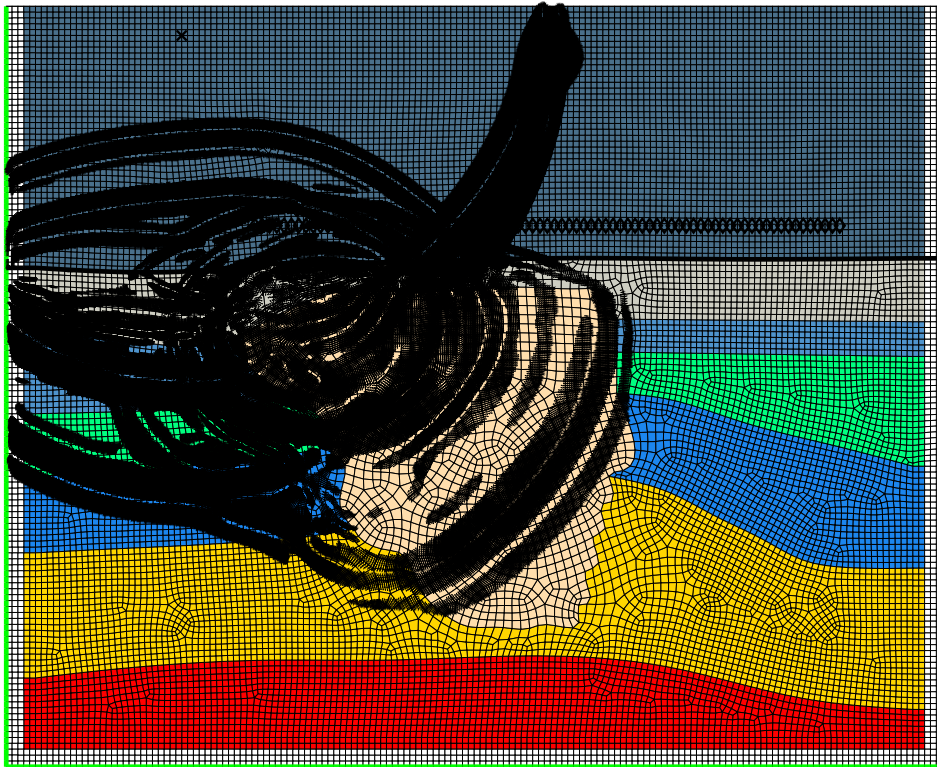


Fig. 4.22 – Propagation d’ondes sismiques dans un modèle avec dôme de sel. L’instantané est pris au temps $t = 1,8$ s. Les 81 récepteurs sont représentés par des losanges. La partie fluide est en surface et l’interface fluide-solide est mise en évidence par le trait gras. Les propriétés des différentes couches sont données dans la table 3.1 du chapitre précédent. Les zones blanches représentent les couches absorbantes. On remarque clairement la différence des vitesses de propagation entre les couches avec la déformation du front d’onde.

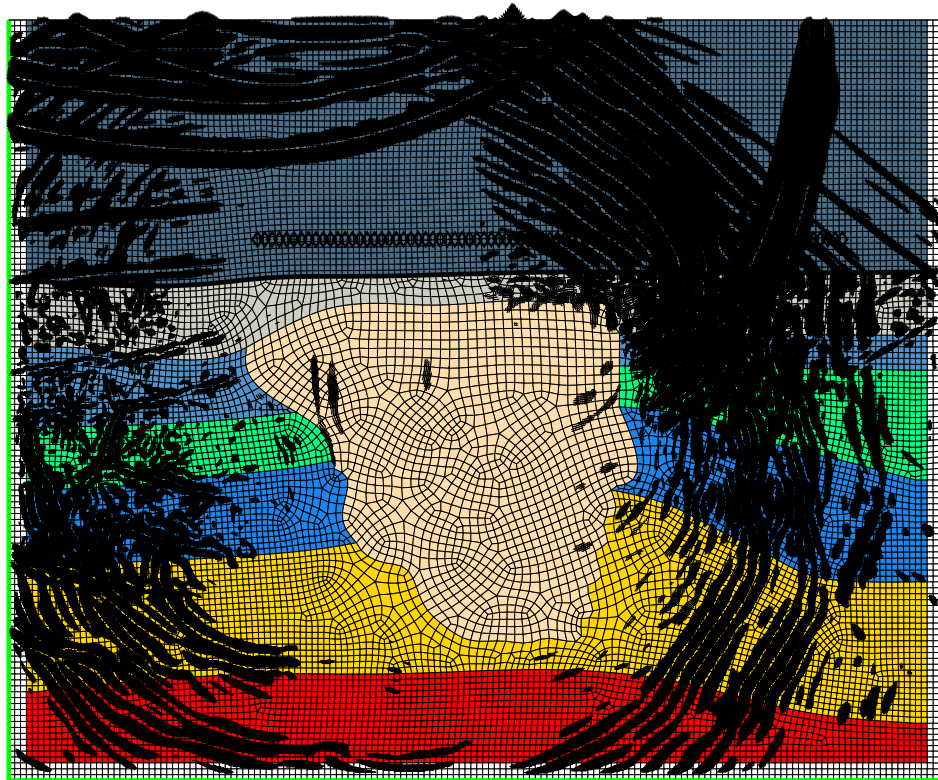


Fig. 4.23 – Propagation d’ondes sismiques dans un modèle avec dôme de sel. L’instantané est pris au temps $t = 3$ s. Les 81 récepteurs sont représentés par des losanges. La partie fluide est en surface et l’interface fluide-solide est mise en évidence par le trait gras. Les propriétés des différentes couches sont données dans la table 3.1 du chapitre précédent. Les zones blanches représentent les couches absorbantes.

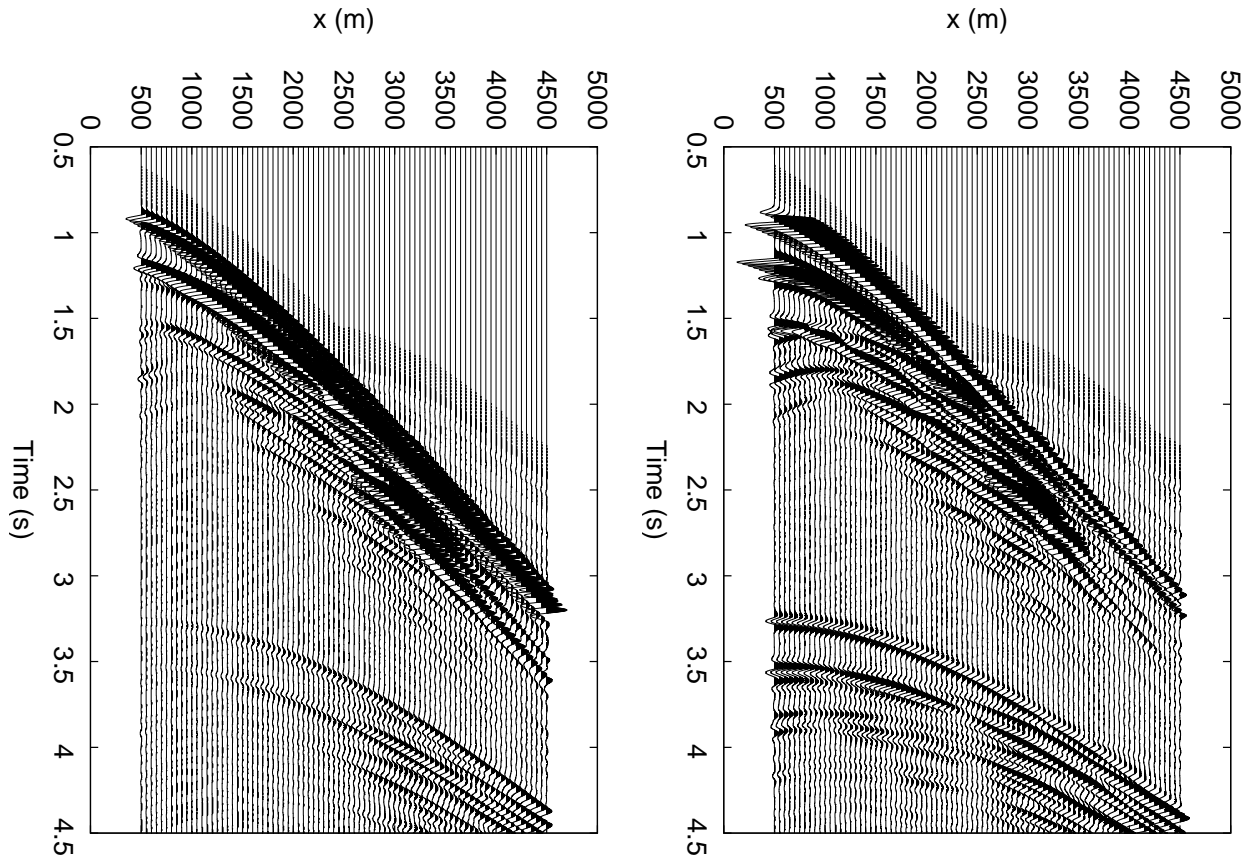


Fig. 4.24 – Sismogrammes enregistrés en 81 récepteurs dans le modèle comportant un dôme de sel. On présente les composantes horizontale (gauche) et verticale (droite) du déplacement. En comparant ces sismogrammes à ceux de la Fig. 3.21, on voit bien l’apport des conditions absorbantes C-PML car les réflexions parasites provenant des bords ont totalement disparu.

4.5 Conclusions et travaux futurs

Dans ce chapitre, nous avons introduit des conditions de bords absorbantes pour des modèles fluide-solide qui peuvent être intéressants pour diverses branches de la géophysique, notamment les modèles acoustique-élastique pour l'industrie pétrolière ainsi que les modèles acoustique-viscoélastique étudiés en océanographie et en acoustique sous marine. Malheureusement, nous ne sommes pas arrivés pour l'instant à stabiliser la formulation des C-PML élastiques pour tous types de roche, ce qui rend ces conditions difficilement exploitables en pratique. C'est pourquoi, dans les prochains mois, nous allons chercher à résoudre le problème en modifiant l'implémentation des variables à mémoire.

Conclusions générales et perspectives

Dans cette thèse, nous avons introduit et développé différentes techniques pour améliorer la méthode des éléments spectraux et l'adapter à des problèmes physiques ou numériques plus complexes que dans certaines applications précédemment développées par d'autres auteurs. Ceci a été fait à partir du code SPECFEM écrit par Dimitri Komatitsch et ses collaborateurs et qui est disponible en logiciel ouvert ('open source').

Dans le chapitre 1, nous avons fait quelques rappels sur l'équation de l'élastodynamique et sur les différents problèmes physiques étudiés, puis nous avons donné de brèves explications sur le fonctionnement de la méthode des éléments spectraux (pour plus de détails, voir par exemple Komatitsch & Vilotte (1998) ou Komatitsch & Tromp (1999)). Puis dans le chapitre 2 nous avons introduit dans la technique des éléments spectraux des sources en ondes planes pour différents angles d'incidence, ce qui n'est pas direct car il s'agit d'introduire une source typique d'un milieu semi-infini dans une grille numérique de taille finie. Pour cela, nous nous sommes inspirés des idées de Bielak & Christiano (1984). Ceci nous a permis de mener à bien avec des collègues mexicains et italiens une étude de l'effet de différentes topographies pour de telles sources en ondes planes et plus particulièrement d'analyser la composante rotationnelle des sismogrammes. Ce travail a donné lieu à la publication de l'article Godinho et al. (2009).

Dans le chapitre 3, nous avons développé une technique de pas de temps local dans la méthode des éléments spectraux en nous inspirant des travaux de Diaz & Joly (2005) pour une méthode d'éléments finis. Notre approche est très stable et ne produit pas d'ondes parasites numériques car elle assure exactement la conservation de l'énergie discrète le long de l'interface fluide-solide. Le code a été développé à 2D, mais la technique de couplage ne dépend pas de la dimension spatiale du problème et est donc adaptable à 3D. Ce travail a donné lieu à la publication de l'article Madec

et al. (2009). Dans des travaux futurs il conviendrait donc de mener à bien une extension à 3D. De nombreuses applications seraient alors possibles, notamment en sismologie globale où le manteau inférieur de la terre, qui est solide, est en contact avec la partie externe du noyau, qui elle est fluide. Il est à noter toutefois que l'on passerait d'un problème 2D où l'on résout un système linéaire sur une interface 1D, à un problème 3D où l'on devrait résoudre un système linéaire sur une interface 2D. Il faudrait alors utiliser des réseaux d'ordinateurs ('clusters') et donc des solveurs parallèles tels que MUMPS (Amestoy et al., 2001) ou PaStiX (Hénon & Saad, 2006) pour efficacement résoudre ces systèmes beaucoup plus gros que dans le cas 2D.

On pourrait également dans des travaux futurs chercher à mettre en oeuvre la méthode de pas de temps local pour des interfaces fluide-fluide ou solide-solide, ou encore chercher à augmenter l'ordre d'approximation de la méthode de résolution en temps. Par exemple, dans Diaz & Grote (2009), une technique de pas de temps local est développée pour une méthode de Galerkin discontinue pour des interfaces fluide-fluide et pour des ordres de discrétisation en temps supérieurs à deux.

Dans le chapitre 4, nous avons développé l'intégration dans la méthode des éléments spectraux de couches absorbantes CPML (PML convoluées) pour des milieux acoustiques, élastiques ou viscoélastiques. Ces conditions absorbantes sont normalement très efficaces pour ces trois types de milieux, par exemple dans le cadre de techniques de différences finies. Elles sont d'un intérêt certain pour les applications de sismique pétrolière qui peuvent présenter ces trois types de milieu dans un même modèle. D'autres applications peuvent être envisagées en acoustique sous-marine à très longue distance, domaine dans lequel les modèles utilisés sont de forme fortement allongée et couplent un milieu acoustique (l'océan) avec un milieu viscoélastique (les fonds marins). Cependant, pour les milieux élastiques et viscoélastiques, de nombreux tests que nous avons effectués durant la thèse ont montré que pour certaines valeurs du coefficient de Poisson ν dans ces milieux ($\nu \geq 0.25$), des instabilités numériques apparaissent en temps long. Ceci est très problématique car $\nu = 0.25$ est une valeur de coefficient de Poisson très fréquente dans les modèles géophysiques, de nombreuses roches ayant un rapport entre la vitesse des ondes de pression et la vitesse des ondes de cisaillement de l'ordre de $\sqrt{3}$, ce qui donne un coefficient de Poisson $\nu = 0.25$. Nous n'avons malheureusement pas pu trouver pour l'instant de solution satisfaisante pour résoudre ces problèmes d'instabilité, nous pensons qu'il s'agit d'un problème lié à la formulation variationnelle et non pas à la technique CPML elle-même car les mêmes tests effectués en différences finies, c'est-à-dire en formulation

forte de l'équation des ondes sismiques, ne montrent aucune instabilité même si nous laissons le code calculer plusieurs centaines de milliers de pas de temps. De ce fait il ne sera probablement pas nécessaire d'utiliser la technique de modification de la PML de Meza-Fajardo & Papageorgiou (2008) pour la transformer en une simple éponge (mais numériquement stable). Il nous paraît plus judicieux d'analyser en détail notre formulation variationnelle au cours des prochaines semaines afin d'essayer de voir si des inconsistances y existent. Ceci nous paraît une meilleure approche que d'essayer de stabiliser la PML par une viscosité numérique. En effet nous avons remarqué que des tests viscoélastiques dans lesquels nous mettons une très forte atténuation géophysique montrent que ces instabilités sont alors contrôlées. On pourrait alors imaginer utiliser des CPML viscoélastiques avec une forte atténuation au bord de milieux élastiques. Mais ceci ne conviendrait pas car cela reviendrait à changer les propriétés physiques du milieu à l'entrée de la couche PML et donc créer une interface fictive entre un milieu élastique et un milieu viscoélastique. On perdrait alors le caractère "parfaitement adapté" de la couche absorbante.

Il conviendra également dans des travaux futurs de passer la formulation de nos C-PML fluide-solide à 3D. Il faudra prendre garde à l'implémentation du point de vue informatique car nous allons alors augmenter significativement le nombre de variables à mémoire nécessaires et par conséquent le nombre de tableaux à stocker en mémoire. Pour l'implémentation, nous pourrions nous inspirer de Komatitsch & Martin (2007) qui ont implémenté des couches C-PML à 3D en différences finies.

Par ailleurs, des premiers tests, non présentés dans ce manuscrit, ont été effectués en 2D pour la mise en place des couches absorbantes CPML en même temps que l'utilisation de la méthode de pas de temps local, afin de combiner l'efficacité des deux. Étant donné que le système linéaire à résoudre pour le pas de temps local ne requiert pas le calcul de dérivées spatiales, l'association de ces deux méthodes s'effectue naturellement et pour l'instant le couplage des deux méthodes semble bien fonctionner.

Annexe

Numerical Simulation of Ground Rotations along 2D Topographical Profiles under the Incidence of Elastic Plane Waves

by L. Godinho, P. Amado Mendes, A. Tadeu, A. Cadena-Isaza, C. Smerzini, F. J. Sánchez-Sesma, R. Madec, and D. Komatitsch

Abstract The surface displacement field along a topographical profile of an elastic half-space subjected to the incidence of elastic waves can be computed using different numerical methods. The method of fundamental solutions (MFS) is one of such techniques in which the diffracted field is constructed by means of a representation in terms of the Green's functions for discrete forces located outside the domain of interest. From the enforcement of boundary conditions, such forces can be computed; thus, the ground motion can be calculated. One important advantage of MFS over boundary integral techniques is that singularities are avoided. The computation of ground-motion rotations implies the application of the rotational operator to the displacement field. This can be done using either numerical derivatives or analytical expressions to compute the rotational Green's tensor. We validate the method using exact analytical solutions in terms of both displacement and rotation, which are known for simple geometries. To demonstrate the accuracy for generic geometries, we compare results against those obtained using the spectral-element method. We compute surface rotations for incoming plane waves (P , SV , and Rayleigh) near a topographical profile. We point out the effects of topography on rotational ground motion in both frequency and time domains.

Online Material: Analysis of the dependence of rotational motion on incident plane-wave frequency.

Introduction

Current seismological analysis mainly deals with amplification of translational motion caused by the seismic loads, while the rotational component of motion is still generally overlooked. In fact, it has been the standard practice in earthquake engineering and seismology to focus more on translational motion, neglecting the rotational motion around horizontal and vertical axes that occur during earthquakes.

Nevertheless, recent investigations have pointed out that rotational motions may be relevant close to the earthquake source (see, e.g., Takeo, 1998) and for surface waves (Lee and Trifunac, 1985, 1987). Based on the theory of defects, Takeo and Ito (1997) demonstrated that abrupt changes of fault slip and/or tensile fracture can generate rotational seismic waves. There are few observational evidences of how significant rotations may be in near-source regions (see, e.g., Nigbor, 1994; Takeo, 1998; Huang *et al.*, 2006). Furthermore, several studies, based partly on numerical simulations (Bouchon and Aki, 1982; Castellani and Boffi, 1986) and partly on finite-differencing of dense seismic arrays (see, e.g., Niazi, 1986; Oliveira and Bolt, 1989; Singh *et al.*, 1997;

Huang, 2003; Suryanto *et al.*, 2006; Ghayamghamian and Nouri, 2007; and the recent work of Spudich and Fletcher, 2008) indicated that rotational components may be non-negligible in certain conditions. The rotational components of ground motions have also been studied theoretically, using, on one side, kinematic source models (Aki and Richards, 1980) and, on the other side, elastodynamics theory of plane wave propagation (Trifunac, 1982; Lee and Trifunac, 1985, 1987).

The potential implications of knowing rotational ground motions are basically the following:

1. In seismology, they can provide useful constraints to correct the response of the seismometers, which is polluted by rotations, even when they are expected to be very small and therefore of negligible interest from an engineering point of view. As first reviewed by Graizer (2005, 2006) and subsequently by Pillet and Virieux (2007), recovery of permanent displacement or long-period far-field wave field requires an accurate estimate of rotations. Furthermore, they might be a powerful indicator of the

local velocity structure (e.g., the presence of an alluvial basin as studied by Wang *et al.*, 2006), and in near-field regions, they might provide further constraints for the source rupture process (Takeo and Ito, 1997).

2. From an engineering standpoint, rotations may be responsible for damage in high-rise buildings and in those structures where soil-structure interaction effects are expected to be significant. For recent reviews of the potential effects of rotational ground motions on structures, we refer the reader to Trifunac (2006) and Kalkan and Graizer (2007).

However, this potential impact in seismology and the importance of rotational motion in engineering practice are still subject to debate.

An alternative approach to assess the importance of the rotational motion is to make use of numerical and mathematical models that allow the simulation of the seismic phenomena. Li *et al.* (2004) proposed a mathematical model that allows the computation of time histories of rocking motion and torsional rotation corresponding to a set of three recorded orthogonal translational components. The proposed model is based upon a representation of soil impedance and the contribution of body waves.

Classical numerical formulations based on finite differences, boundary elements, finite elements, or spectral elements have also been widely used in the simulation of seismic-wave propagation. Different approaches, mainly regarding linear motion amplification, have been used to simulate the propagation of seismic waves in the presence of topography. In particular, the spectral-element method (SEM) has been successfully used to simulate seismic-wave propagation in the presence of two- and three-dimensional (2D and 3D) topographic features (see, e.g., Komatitsch *et al.*, 1999; Paolucci *et al.*, 1999). The SEM is well suited to this problem because it is based on a variational formulation of the seismic-wave equation and is similar to the finite-element method. Therefore, the mesh can be adapted to the shape of the geometry, and the free-surface boundary condition is automatically enforced as a natural boundary condition. Pedersen *et al.* (1994) used an indirect boundary element method (BEM) formulation to calculate the 3D seismic response of 2D topographies under the incidence of plane waves using Green's functions for an infinite space. Reinoso *et al.* (1997) used a BEM formulation to compute 3D reflections by valleys and irregular topography. Later, Tadeu, Santos, and António (2001) used a direct BEM approach to compute the 3D reflected field generated in the presence of smooth topography, making use of the Green's functions for an unbounded space.

In many cases, the geometry of the problem consists of half-spaces or layered media containing inclusions; it is then possible to use fundamental solutions that take the layered structure of the medium into account without having to explicitly discretize it. One such set of functions has been proposed by Tadeu, António, and Godinho (2001) for the cases

of half-spaces and solid layers subjected to 2.5D loads. The functions introduced by these authors are defined as summations of the effects of plane waves with different incidence angles with respect to the horizontal axis.

In recent years, a different class of numerical techniques has become popular: the so-called meshless techniques. A few examples are the method of fundamental solutions (MFS; Fairweather and Karageorghis, 1998; Golberg and Chen, 1999), the radial basis functions (RBF) collocation method (Kansa, 1990), and the meshless local Petrov–Galerkin method (Atluri, 2004). The MFS seems to be particularly effective in the study of wave propagation, overcoming some of the mathematical complexity of the BEM, and providing accurate solutions. Godinho *et al.* (2006) studied the performance of the MFS for simulating the propagation of acoustic waves in a fluid domain with an inclusion, concluding that the method can be very efficient, even better in terms of performance than the BEM for this type of problem. Later, Godinho *et al.* (2007) successfully applied the MFS to study acoustic and elastic wave propagation around thin structures using a domain decomposition technique.

These results indicated that the MFS should be a suitable tool to analyze the rotational motion generated in the presence of topography. We therefore develop an MFS formulation to study the rotational motion caused by the incidence of plane and surface waves in 2D geometries. First, we will present the formulation followed by a brief description of the half-space fundamental solutions used. We will then benchmark the method against known analytical solutions for specific geometrical configurations. We will also compare the results to those provided by a classical spectral-element formulation including the computation of rotations. We will then perform a number of numerical simulations to assess the magnitude of the rotational motion generated by the incidence of plane waves with different angles of incidence and by surface waves. The analyzed topographies include the classic case of a semicircular valley, triangular valleys with different slopes, elliptical canyons with different depths, and a hill. The results are analyzed in both frequency and time domains.

Generic Problem Formulation

Consider a homogeneous, linear isotropic elastic domain with mass density ρ , shear-wave velocity β , and compressional wave velocity α . In the frequency domain, the propagation of elastic waves can be described by

$$\alpha^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \beta^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = -\omega^2 \mathbf{u}, \quad (1)$$

where the vector \mathbf{u} represents the displacement, ω is the circular frequency, and for a 3D problem, $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{k} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{j}$ with \hat{i} , \hat{k} , \hat{j} being unit vectors along the positive directions of

the x , y , and z axes, respectively. If the problem is purely 2D, then $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{j}$.

The MFS approximates the solution in terms of a linear combination of fundamental solutions of the governing equation. The approximate solution ($\hat{\mathbf{u}}$) is then given by

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{cases} \hat{u}_x = \sum_{k=1}^N [a_{xk} G_{xx}(x, x_k, z, z_k) + a_{zk} G_{zx}(x, x_k, z, z_k)] + u_x^{\text{inc}} \\ \hat{u}_z = \sum_{k=1}^N [a_{xk} G_{xz}(x, x_k, z, z_k) + a_{zk} G_{zz}(x, x_k, z, z_k)] + u_z^{\text{inc}} \end{cases}, \quad (2)$$

where $\{(x_k, z_k)\}_{k=1}^N$ are N distinct source points on a curve that lies outside of the domain of interest, $G_{ij}(x, x_k, z, z_k)$, ($i, j = x, z$) are the displacements in the direction j at (x, z) caused by a unit point force applied at (x_k, z_k) and directed along direction i , and u_x^{inc} and u_z^{inc} represent either an incoming plane wave or an incident field generated by a source inside of the domain. The discrete sources in equation (2) are located along a fictitious curve Γ' placed outside of the domain in order to avoid the treatment of singularities.

Once the source points have been chosen, the coefficients $\{a_{ik}\}_{k=1}^N$ can be determined by enforcing the boundary conditions at M collocation points along the physical boundary Γ . Here, the number of source points (N) on Γ' is typically one third of the number of collocation points (M) on boundary Γ , and the resulting equation systems are solved using a least-squares solver.

In the present work, the propagation domain consists of a half-space with a topographical feature at the surface as depicted in Figure 1, illuminated by incident elastic plane waves. The discretization of the horizontal surface of the half-space may be avoided if fundamental solutions that take its presence into account are used. For a half-space, the total wave field can be expressed by taking the incident field generated by the source (source terms) and the terms generated at the surface (surface terms) into account. The source terms can be written based on the equations proposed by Tadeu and Kausel (2000) for 2.5D loads, while the surface terms can be represented by one dilatational and two shear potentials with unknown amplitude values (Tadeu, António, and Godinho, 2001).

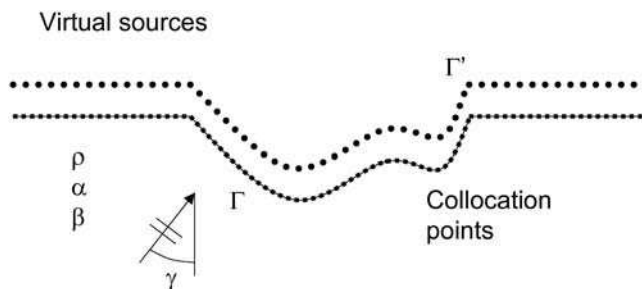


Figure 1. Geometry of the problem with the location of the sources and collocation points.

Although these fundamental solutions are accurate and easy to implement, they are computationally demanding with the involved summations requiring long computational times to reach convergence, especially when the sources or the receivers are located close to the surface of the half-space. For this reason, it can be interesting to use alternative formulations, which may result in significant improvements in terms of performance. In fact, in the alternative approach by Sánchez-Sesma and Rosenblueth (1979), the Green's function for the full-space is used for all of the fictitious sources describing the diffracted waves by the surface, while the enforcement of boundary conditions at the surface of the half-space is already included in the incident field. However, modeling the geometry using only full-space solutions implies that some additional sources and collocation points have to be considered along the surface of the half-space near the geometric discontinuity. The distance to be discretized on each side of the discontinuity should be large enough so that all relevant contributions from surface reflections are taken into account and spurious wave arrivals will not interfere with the response recorded at the receivers. In this work, we consider a distance equal to five times the length of the topographical feature on each side, along which the additional sources and collocation points should be placed. A graphical representation of the model is shown in Figure 1.

The fundamental solutions to be used are thus simple and can be written as (see Sánchez-Sesma and Campillo, 1991; Tadeu and Kausel, 2000)

$$G_{ij}(x, x_k, z, z_k) = -\frac{i}{8\rho} [(A + B)\delta_{ij} - 2B\gamma_i\gamma_j],$$

$$\text{with } A = \frac{H_0^{(2)}(k_\alpha r)}{\alpha^2} + \frac{H_0^{(2)}(k_\beta r)}{\beta^2}, \quad k_\alpha = \frac{\omega}{\alpha}, \quad (3)$$

$$\text{and } k_\beta = \frac{\omega}{\beta}, \quad B = \frac{H_2^{(2)}(k_\alpha r)}{\alpha^2} - \frac{H_2^{(2)}(k_\beta r)}{\beta^2},$$

$$\gamma_i = \partial r / \partial x_i, \quad \gamma_j = \partial r / \partial x_j,$$

where $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ ($[x_0, y_0]$ being the position of the source).

The rotational motion can be computed by analytically calculating the necessary derivatives of these functions to obtain $\theta_y = -\frac{1}{2}(\frac{\partial \hat{u}_x}{\partial z} - \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial x})$. Applying this operator to the aforementioned defined fundamental solutions, the rotational field can be expressed as

$$\theta_y = \frac{i}{8\mu} k_\beta H_1^{(2)}(k_\beta r) (\gamma_j \phi_i - \gamma_i \phi_j), \quad (4)$$

where ϕ_i is the i th component of the applied unit force.

As for the incident field, different types of waves may be taken into account. Defining the apparent horizontal wave velocity, c , and the wavenumbers $l = \frac{\omega}{c}$, $m = \sqrt{(\frac{\omega}{\alpha})^2 - l^2}$,

and $k = \sqrt{\left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 - l^2}$ for the case of incident P and SV waves, the wave field generated in the presence of a half-space can be written as a function of one dilatational (ϕ_1) and one shear (ψ_1) potential,

$$\begin{aligned}\phi_1 &= (A_1 e^{imz} + A_2 e^{-imz}) e^{-ilx}, \\ \psi_1 &= (B_1 e^{ikz} + B_2 e^{-ikz}) e^{-ilx},\end{aligned}\quad (5)$$

in which A_1 and B_1 represent the amplitude of the incident P and SV waves, respectively, and A_2 and B_2 are unknown coefficients to be determined by enforcing the fact that the traction vector vanishes along the free surface. The rotational motion generated at the surface of an elastic half-space can then be written as

$$\theta_y^{(0)} = -\frac{1}{2}(k^2 + l^2)\psi_1. \quad (6)$$

Model Verification

The previously defined MFS model was first applied to a number of test cases, comparing the results it provides with those computed by applying other techniques. In what follows, we present a number of results from those tests.

Verification against Analytical Solutions—The Case of a Wedge

When the geometric configuration of the topographical profile is that of a wedge with an internal angle of 120° (Fig. 2a), and the propagation medium has a Poisson ratio $\nu = 0.25$, it becomes possible to analytically calculate the solution for the displacement field when the system is illuminated by an incident SV -plane wave with an incident angle $\gamma = 0^\circ$ as shown by Sánchez-Sesma (1990). For this case, adequately differentiating the displacements, the rotational motion can be obtained as

$$\theta_y = -u_0 k e^{-ikh} \sin[k(z + h)], \quad (7)$$

where u_0 is the incident displacement field, and h is the depth of the wedge structure as identified in Figure 2a.

We analyzed this geometry using the MFS model with a number of collocation points ranging from 5 to 20 per wavelength. Observation of the results allowed us to conclude that they approach the analytical solution as a higher number of points is considered. However, very small differences were found between the results above 15 points per wavelength. Thus, the presented results are computed using 15 collocation points per wavelength for the different frequencies of the incident wave. Figure 2b shows the corresponding results (numerical and analytical) for the dimensionless frequency $\eta = \frac{\omega a}{\beta\pi}$, where a is half the width of the irregularity. The pre-

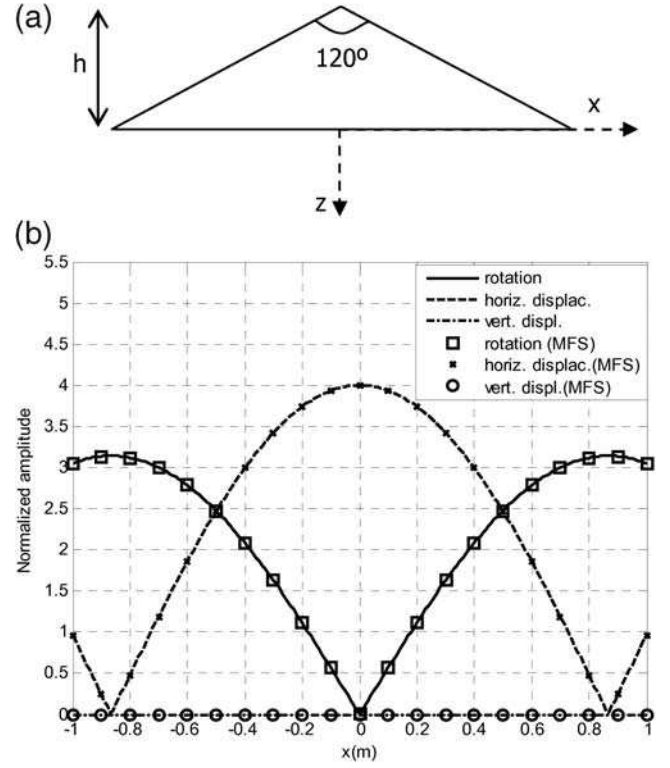


Figure 2. (a) Geometry of the topography used in the verification. (b) Normalized displacements and rotations at the surface.

sented displacements are normalized with respect to the incident field u_0 , while the normalized rotations are obtained as $\frac{\theta_y a}{u_0 \eta}$. Observing these results, we conclude that the MFS provides a very accurate estimation of both the displacements and the rotation.

Benchmarks for Generic Geometries

To ensure that reliable results are obtained, we benchmark the proposed MFS against an SEM for a few simple geometrical configurations. As previously mentioned, the spectral-element method is an independent numerical technique similar to the finite-element method that has been extensively validated and used to study 2D and 3D seismic-wave propagation problems in recent years (see, e.g., Komatitsch *et al.*, 2005 for a review and references therein).

By running this method, we obtain two seismograms composed of seismic traces in the time domain for the two components of the 2D displacement vector. We perform a Fourier transform of each trace to measure spectral amplitude at a given normalized frequency η , and then the SEM results can be compared with the MFS results, which are obtained in the frequency domain. To introduce initial plane waves in the SEM mesh, the displacement field is split into an incident field in a half-space and a diffracted field resulting from the presence of topography at the free surface of the half-space. The incident field in the half-space is analytically known;

therefore, its exact expression is implemented in the SEM code, whereas the diffracted field is numerically computed by the SEM. To simulate a semi-infinite half-space, absorbing conditions are implemented on all of the boundaries of the mesh except the free surface based on the method of Bielak and Christiano (1984), in which the known initial field is subtracted on the boundary during propagation; then, one only needs to absorb the diffracted wave field.

The first set of results corresponds to the case of a semi-circular canyon, as depicted in Figure 3, subjected to a plane P or SV wave with a 60° incidence angle. Both translational (along the x and z axes) and rotational motions are computed. Figures 4 and 5 present the results computed along a line of receivers located exactly at the surface when the incident wave field has a normalized frequency $\eta = 1$. The medium has a Poisson ratio of 0.25. The SEM calculation is performed on a mesh of 4000 spectral elements with five Gauss–Lobatto–Legendre points in each direction of each element. Therefore, we have a total of 64,681 unique grid points in the global mesh. We take a timestep $\Delta t = 0.001$ sec in the explicit and conditionally stable time-evolution scheme; therefore, for the mesh of Figure 3, we experimentally measure a Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) stability number $\alpha\Delta t/\Delta x = 0.255$ (the upper limit found by trial and error is around 0.45). We let the calculation run for a total duration of 12 sec.

The SEM and MFS results are in good agreement, which indicates a good behavior of the MFS for the analyzed problem.

Let us perform a second benchmark for another topographic profile, the Gaussian-shaped hill represented in Figure 6. We study the response of that hill under the incidence of a Rayleigh wave based on both the MFS and the SEM. Figure 7 shows the results computed along a line of receivers located exactly at the free surface. The SEM calculation is performed on a mesh of 4000 deformed quadrangles adapted to the shape of the hill. Each quadrangle is defined by nine control points in order to have curved boundaries that can better fit the topography. We use five Gauss–Lobatto–Legendre points in each direction for each element; there-

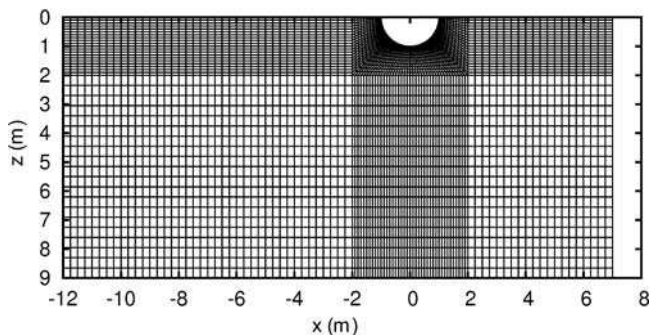


Figure 3. Mesh used in the spectral-element method to describe the geometry of the canyon model.

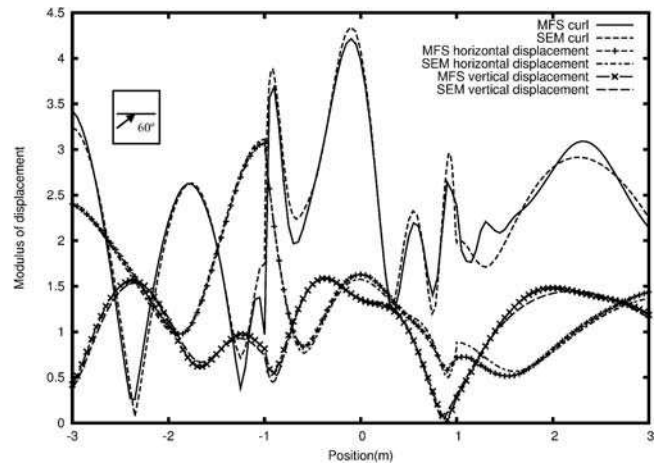


Figure 4. Comparison between the spectral amplitude computed based on the SEM and based on the MFS for the rotational, horizontal, and vertical components of displacement in the case of a P wave with an incidence angle of 60° .

fore, we have a total of 64,561 unique grid points in the mesh. We take a timestep $\Delta t = 0.04$ sec, that is, a CFL stability number of 0.223. We let the calculation run for a total duration of 12 sec.

In Figure 7a, results obtained for a specific normalized frequency of $\eta = 1.0$ are displayed, showing a good agreement, although small differences are observed between the two curves. To make sure that these differences are not significant, synthetic seismograms have also been computed considering an incident Rayleigh wave defined by a Ricker pulse with a characteristic period $T = 4$ and a delay of 6. A normalized time scale is used, with the normalized time being given by $\bar{t} = t \times \frac{\beta}{a}$, where a is half of the width of the irregularity and β is the S -wave velocity. The results pre-

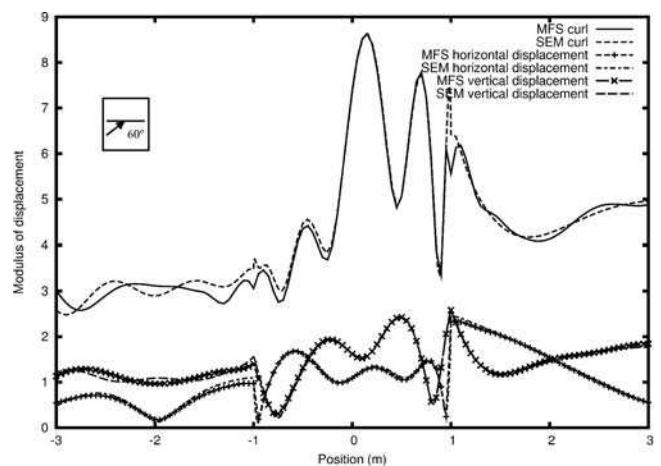


Figure 5. Comparison between the spectral amplitude computed based on the SEM and based on the MFS for the rotational, horizontal, and vertical components of displacement in the case of an SV wave with an incidence angle of 60° .

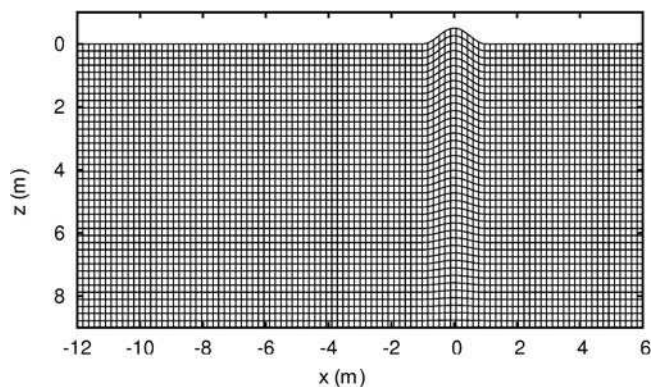


Figure 6. Mesh used in the spectral-element method to describe the geometry of the hill model.

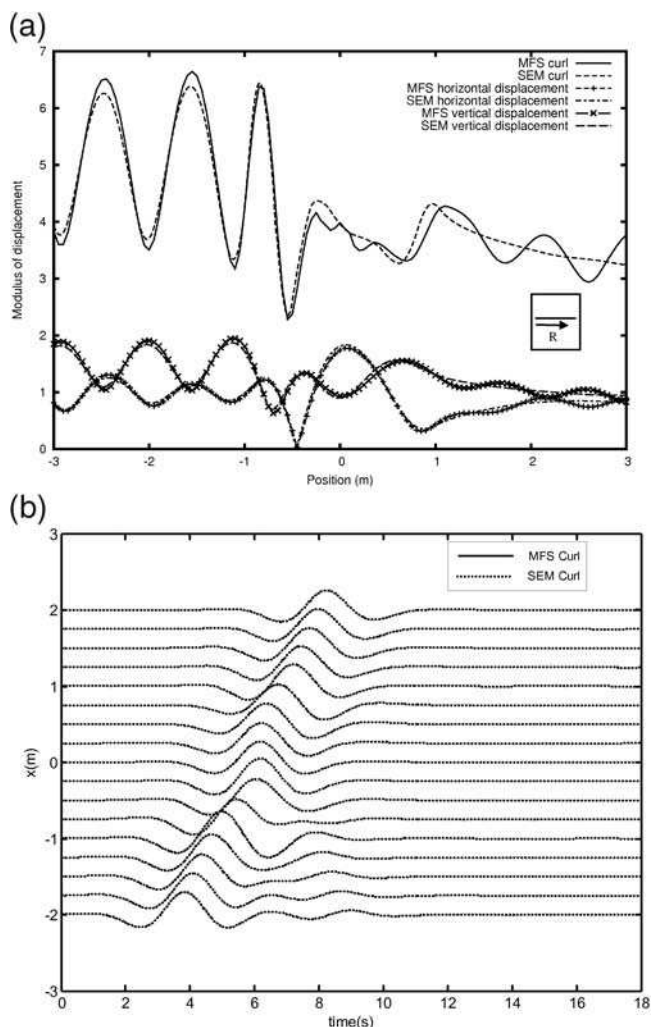


Figure 7. Verification results for the case of an incident Rayleigh wave: (a) comparison between the spectral amplitude computed using the SEM and the MFS for the rotational, horizontal, and vertical components of displacement and (b) comparison of synthetic seismograms for rotational motion, computed by the SEM and MFS at 17 stations located along the surface.

sented in Figure 7b show that there is an excellent agreement between the seismograms computed by both methods.

Influence of Surface Topography on the Rotational Motion

Although earthquake-induced translational ground motions have been widely studied, the knowledge on the corresponding rotational components and on their possible dependence on topographical irregularity is still very limited. In this section, a number of 2D typical topographical configurations, subject to the incidence of different wave types, is analyzed using the proposed MFS method.

To ensure that comparable results are obtained between all of the presented cases, the problem is normalized with respect to half of the horizontal dimension of the irregularity (a); a constant Poisson ratio $\nu = 0.25$ is assumed throughout this section. For this reason, results in the frequency domain are shown as a function of the dimensionless frequency $\eta = \frac{\omega a}{\beta \pi}$. As a reference, the results for an elastic half-space were first calculated for $\eta = 1$ and are presented in Figure 8a,b for incident P and SV waves with different incidence angles, respectively. For both cases, the figures display the displacements normalized with respect to the incident field and the normalized rotations given by $\frac{\theta_s a}{u_{0i} \eta}$. As expected, when the incident wave is a P wave, the maximum vertical displacement is recorded for an incidence angle of 0° , while zero displacement is recorded for 90° incidence. Globally, these results seem to be consistent with those presented by Trifunac (1982). When the incident field is given by SV waves, the response is significantly different, but the displacements in both vertical and horizontal directions still follow the results presented by Trifunac. The rotations generated at the surface vary somewhat differently, reaching maximum values for different incidence angles γ . Although a systematic correlation between translational and rotation ground motions is not found, vertical displacements and rotations show similar patterns.

When a surface irregularity is introduced (see Fig. 9), the generated wave field becomes more complicated. Figure 10 depicts some representative results for the case of a semicircular canyon (defined by the geometry displayed in Fig. 9 with $a = 1$ m and $d = 1$ m) under the incidence of both P and SV waves. For simplicity, only the case of a normalized frequency $\eta = 1$ will be discussed herein. In all cases, the geometries have been described using a number of collocation points at the surface, large enough to ensure a minimum of 15 points per wavelength λ .

It is worth noticing that marked discontinuities occur at the edges of the canyon. Although these discontinuities are more visible in the rotational response, they can also be seen in the vertical and horizontal displacements; they may be associated with the sharp edge that exists at this point. For lower inclinations of the incident plane wave, peak values of the rotation are recorded near this edge as can be seen in

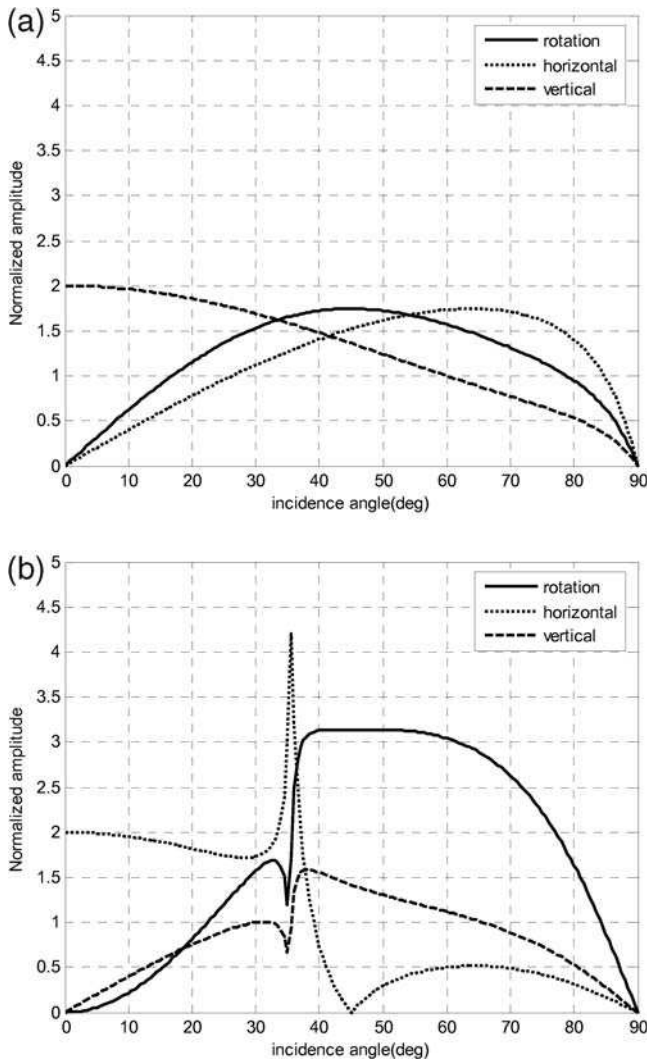


Figure 8. Results for an elastic half-space under the incidence of (a) P waves and (b) SV waves.

Figure 10a,b for incident P and SV waves parallel to the surface. However, as γ approaches larger values, high amplifications are recorded at the central part of the irregularity, reaching normalized rotations of amplitude 9 for SV waves with $\gamma = 60^\circ$. Comparing the incidence of P and SV waves, it can be seen that the rotational motion generated by the latter are much larger, as intuitively expected by simple theoretical considerations (e.g., Cochard *et al.*, 2006).

Although no results are presented for other frequencies, a systematic study has been conducted analyzing the relation of both displacements and rotations with frequency. In this analysis (see the electronic edition of *BSSA*), it was found that, as a general tendency, a similar behavior is obtained, but the responses tend to exhibit a more pronounced oscillatory behavior; the influence of the topographical feature is further enhanced with respect to the case $\eta = 1$.

It is important to note that, although all results for rotational motion in Figure 10 are presented as normalized rota-

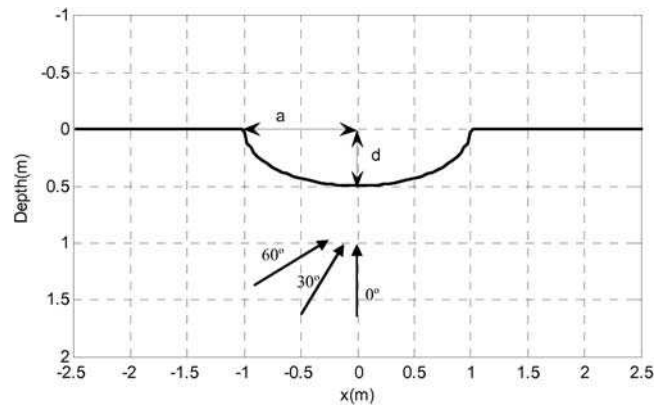


Figure 9. Geometry of the elliptical canyon.

tions, these results can be easily related to relevant physical quantities and may be used to predict rotational motion amplifications for more specific conditions. Consider, for instance, that the incident wave is generated in the context by an M_w 6 earthquake generated by a fault rupture at a depth of 4 km and that the propagation medium at the surface has an S -wave velocity of 1000 m/sec. Using the well-known attenuation law proposed by Joyner and Boore (1993), it is possible to assess the particle velocity for such incoming waves by means of

$$\log_{10}(v) = 2.150 + 0.461 \times (M_w - 6) - \log_{10}(\sqrt{R^2 + 4^2}) - 0.00256 \times (\sqrt{R^2 + 4^2}) + 0.167, \quad (8)$$

where R is the distance from the station to the projection of the fault rupture surface on the earth surface and M_w is the moment magnitude. Using this expression, we can conclude that this earthquake would generate velocities around 18 cm/sec at $R = 10$ km and 0.57 cm/sec for $R = 150$ km. Because the normalized rotation can be written as $\frac{\theta_v \beta \pi}{v_0}$, a unit normalized rotation implies a rotational motion of 0.6×10^{-4} rad in the first case and of 1.8×10^{-6} rad in the second. From the amplifications displayed in Figure 10c for an incoming SV wave, it is possible to establish that the peak rotational motions predicted for the epicentral region would be of about 5.4×10^{-4} rad. This value is large enough to induce significant structural damage and even failure. However, the precise understanding of the rotational structural vulnerability contributing factors (damping, ductility, dominant period, etc.) will require more data and further scrutiny.

To give insight into the physics behind the performed simulations, time domain results are also computed. To this end, the synthetic seismograms have been computed from the corresponding transfer functions calculated for $N = 128$ frequencies by means of an inverse Fourier transform, assuming that the incident wave corresponds to a Ricker pulse

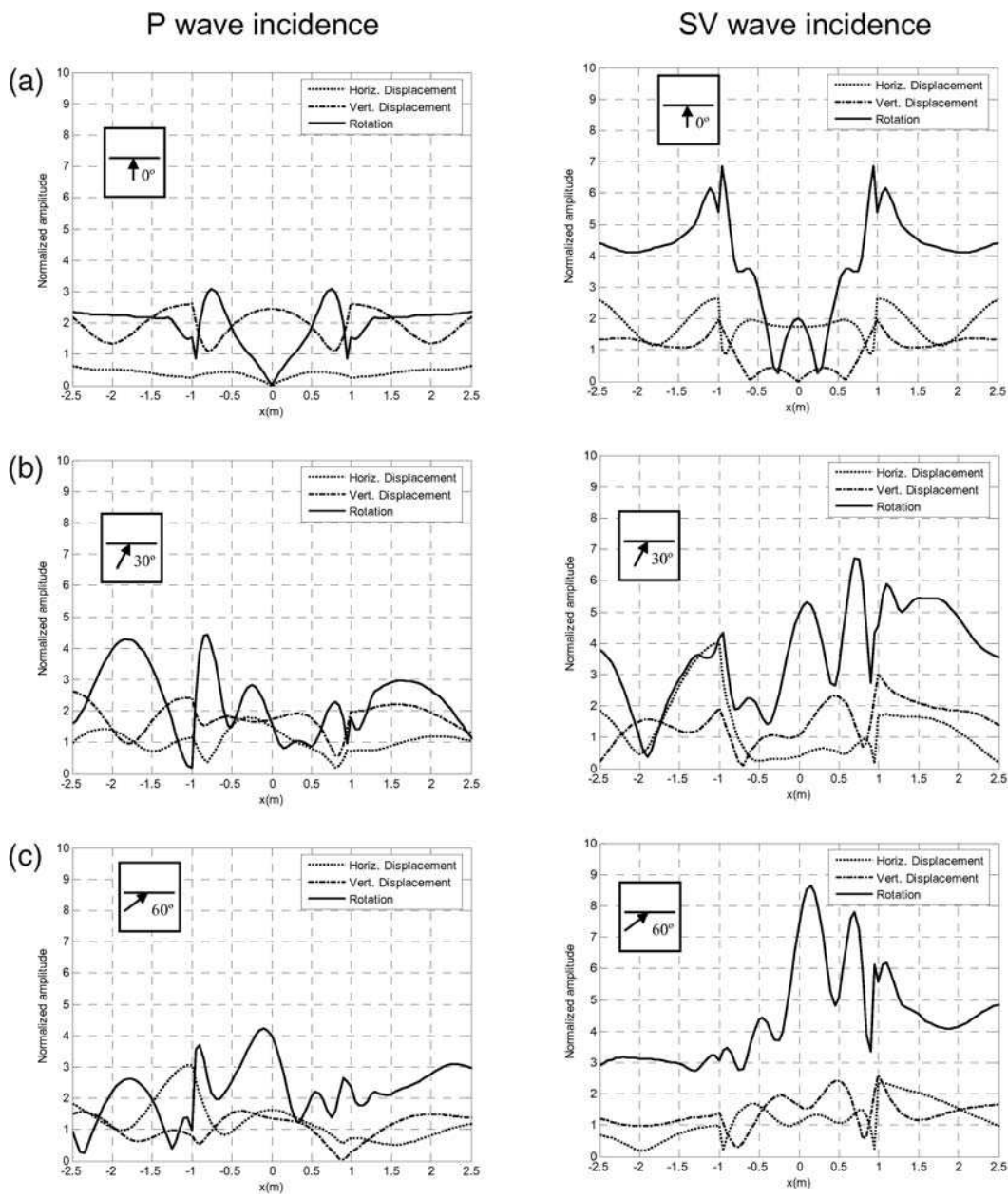


Figure 10. Results for a semicircular canyon ($d = 1$ m): incidence at (a) 0° , (b) 30° , and (c) 60° .

with a characteristic period $T = 2$ and a delay of 6. Time signals are displayed in Figure 11 in terms of horizontal displacement (left), vertical displacement (center), and rotation (right) using a normalized time scale such that $\tilde{t} = t \times \frac{\beta}{a}$. Observing this figure, it is possible to confirm that no rotations are generated by an incident P wave; thus, these rotational effects can only be observed once the incident pulse impinges upon the surface. Globally, the rotational ground response at the surface exhibits similar patterns to those of the displacement field. However, under the incidence of SV waves, rotational ground motions seem to be more significant, which is consistent with what is observed in the frequency domain.

The relative depth of the canyon can also have significant effects on the surface ground response. To assess its importance, parametric analyses with respect to the parameter d have been carried out. In Figure 12, results for incident SV waves at 30° and 60° are shown for elliptical canyons with $d = 0.25, 0.5,$ and 0.75 m. The response for $d = 0.25$ m appears more regular with flatter curves describing the displacement field at the surface points. However, a marked amplification in the rotational response is still recorded at the edge of the irregularity located at $x = 1.0$ m when the incidence angle is 60° . Observing the results for the other two geometries, it can be seen that, in fact, at this point a marked amplification is always recorded; this is the region where

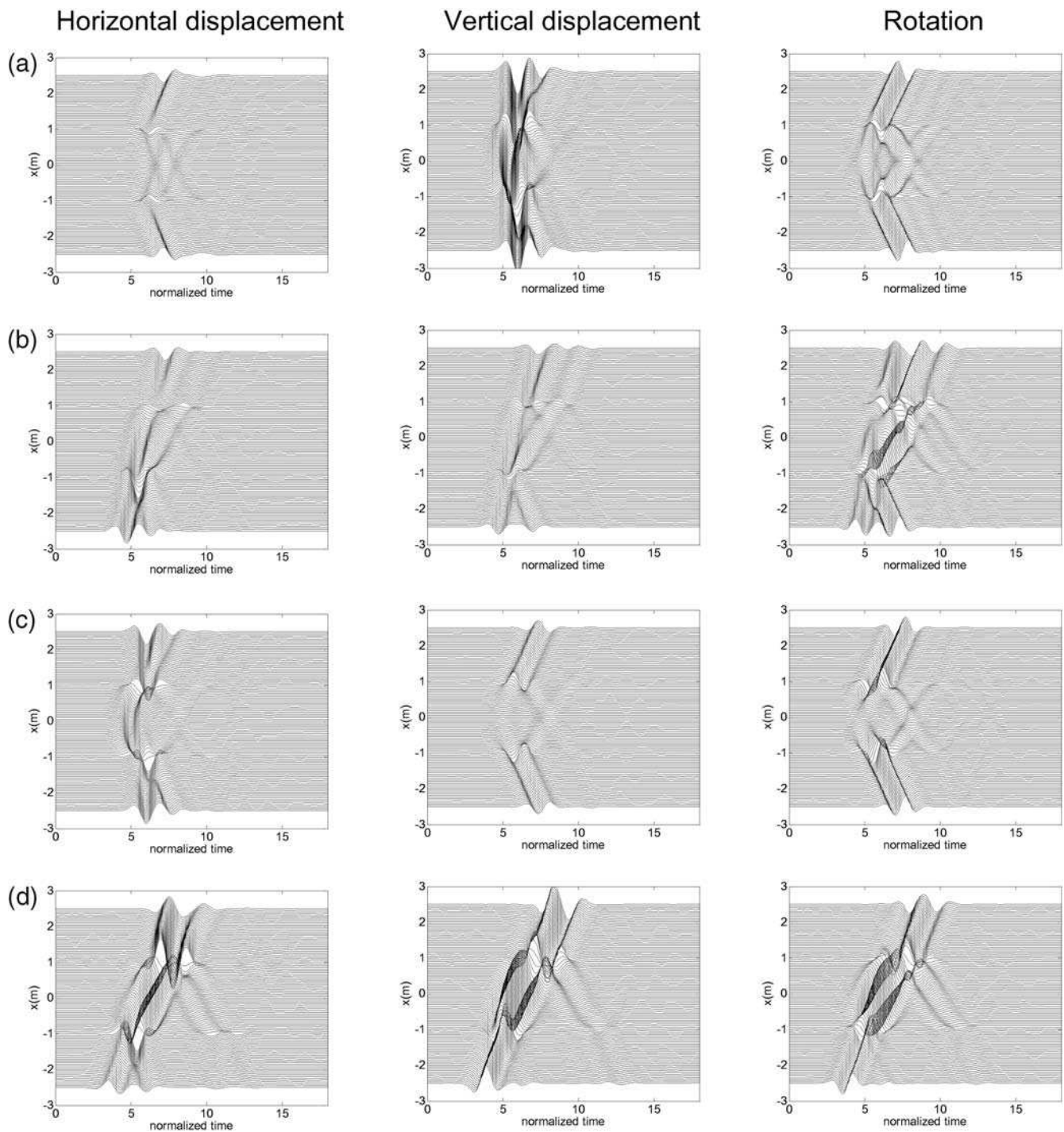


Figure 11. Normalized time signals for a semicircular canyon ($d = 1$ m) under the incidence of (a) P wave at 0° , (b) P wave at 60° , (c) SV wave at 0° , and (d) SV wave at 60° .

peak values occur. By contrast, in all cases, rotations around $x = 0.5$ m are minimum. As a general trend, amplification of surface ground motions tends to occur in the ascending part of the canyon ($x > 0$ m), while deamplification can be observed in the descending part ($x < 0$ m). It is possible to observe that, globally, as larger values of d are considered, larger amplifications occur. Interestingly, for all

cases, the amplification of the rotational field is more pronounced than that of the translational field. However, there seems to be a limit for this amplification, which is generally not exceeded in the normalized rotational response. In fact, although marked amplifications have been identified in Figures 10 and 12, the normalized rotation is generally lower than 2π . Because the presented results are normalized with

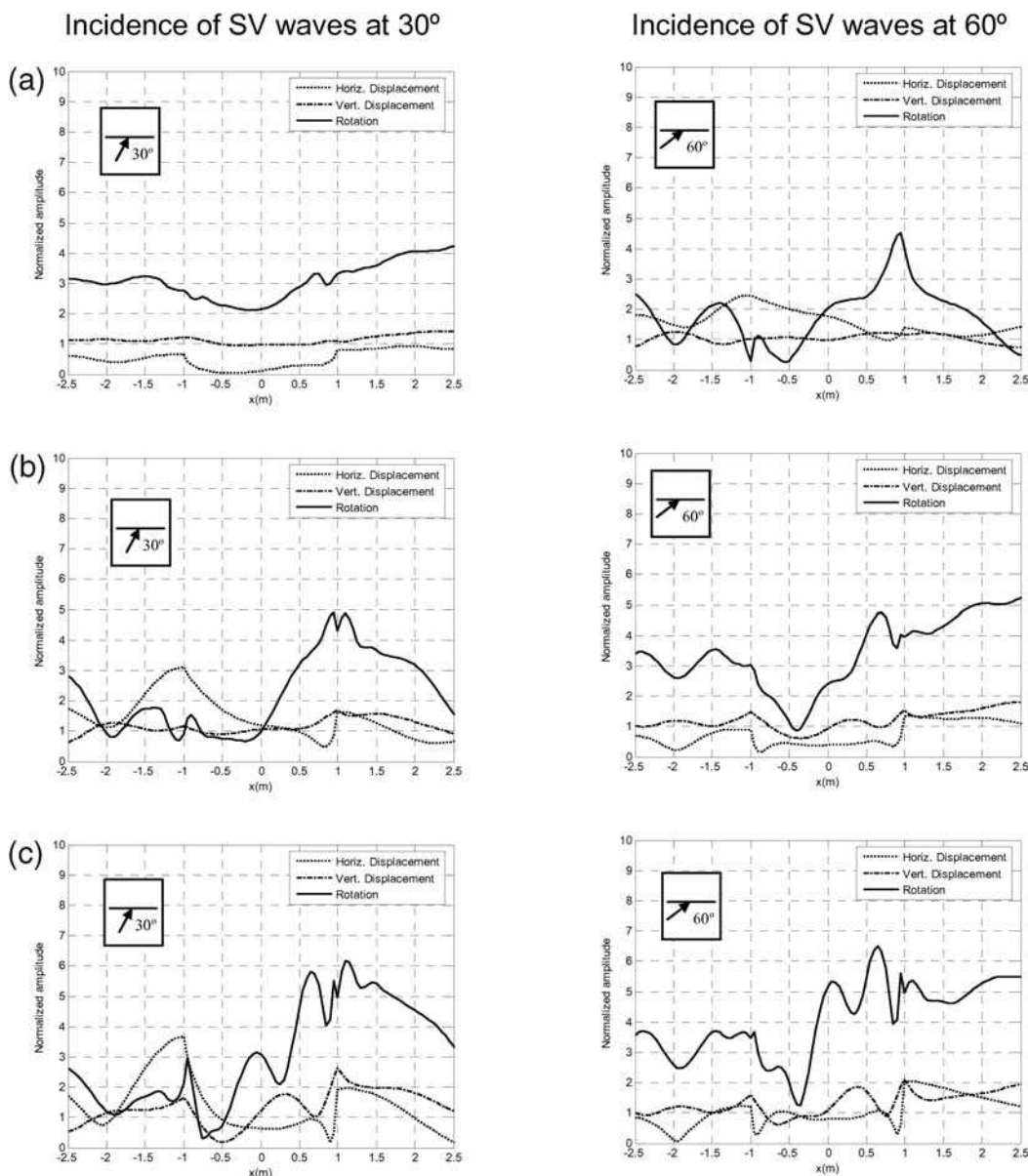


Figure 12. Results for the elliptical canyon with different depths: (a) $d = 0.25$ m, (b) $d = 0.50$ m, and (c) $d = 0.75$ m.

respect to the incident displacement field and to the dimensionless frequency, the rotational motion should follow the relation

$$\theta_y \leq 2\pi u_0 \eta = 2u_0 \frac{\omega a}{\beta}. \tag{9}$$

Analyzing the previous equation, we believe that, in general, the rotations scale with the ground velocity and should be bounded by the upper limit \dot{u}_g/β . However, localized amplification due to diffraction effects may generate local peaks as can be seen in Figure 10c for the incidence of SV waves at 60°.

After acquiring confidence with rotational ground motions induced by smooth topographies, the influence of sharp

geometric irregularities is investigated. In fact, it is known that the presence of sharp edges significantly influences the propagation of seismic waves; thus, it may influence both the displacements and the rotations recorded at the surface. For this purpose, a number of simulations was performed for triangular canyons with varying depths (see Fig. 13). Figure 14 displays the results computed for two different values of the canyon depth when the incidence of SV waves occurs at 0°, 30°, and 60°.

As expected, the amplification of both displacements and rotations decreases as lower depths are considered; the displacements' and rotations' curves have a smoother trend. For 0° incidence, the recorded response is symmetric, and peak amplifications are visible after the transition from the

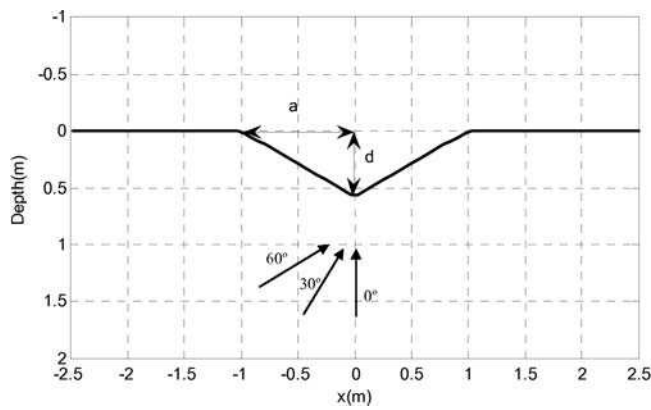


Figure 13. Geometry of the triangular canyon.

half-space to the canyon. As higher incidence angles are considered, the response becomes more complex, and, as in the previous examples, an amplified rotational response is visible in the ascending part of the topographic feature (between $x = 0.0$ m and $x = 1.0$ m). Interestingly, the displacement field in this region exhibits very little amplification, indicating that the rotational effects are stronger than the translational ones. Again, it is worth noting that the normalized rotations do not exceed 2π , following the relation defined in equation (9).

A particular case of seismic-wave incidence occurs when Rayleigh waves are generated because these waves have an important rotational component themselves. The in-

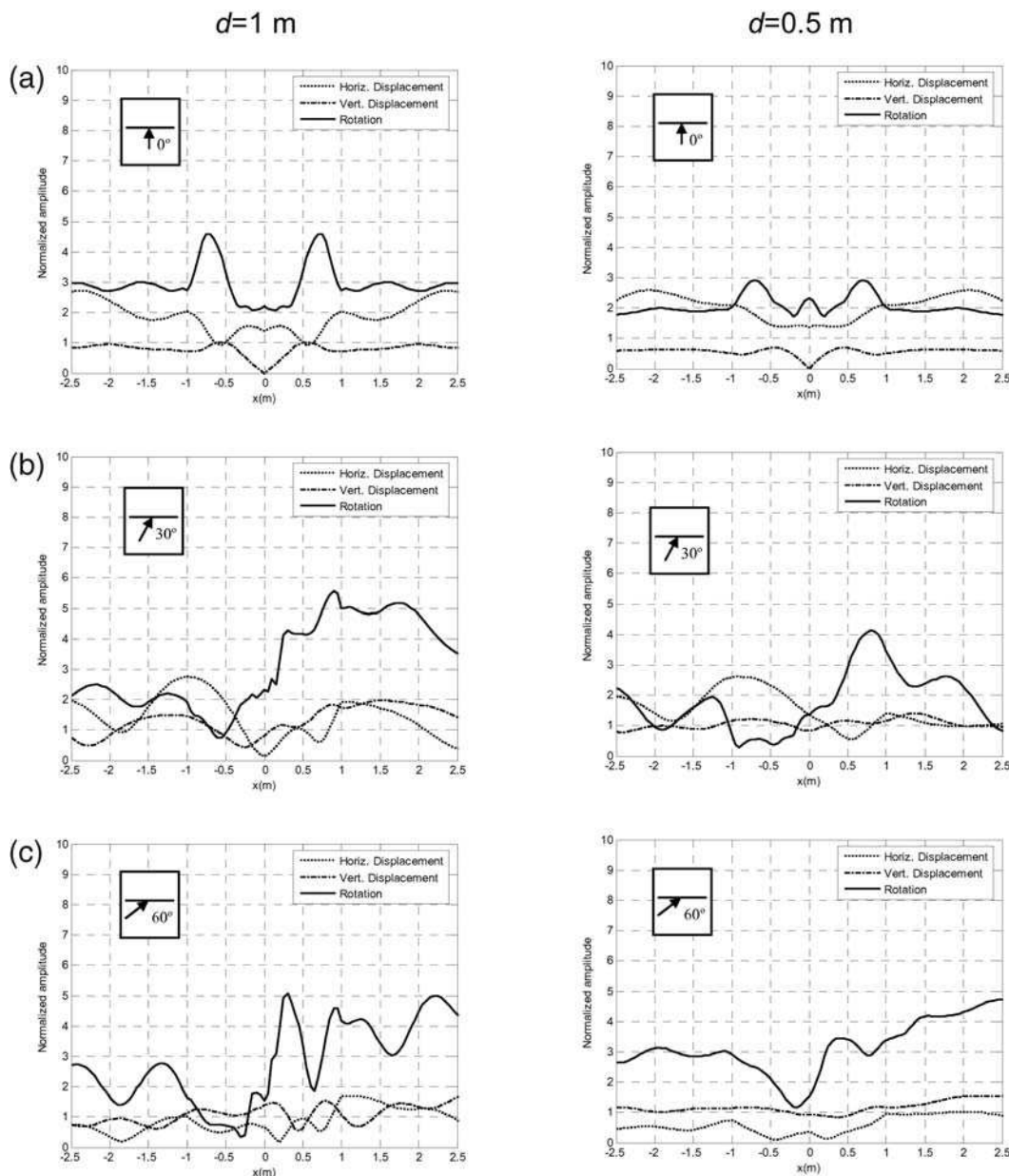


Figure 14. Results for triangular canyons under the incidence of an SV wave: incidence at (a) 0° , (b) 30° , and (c) 60° .

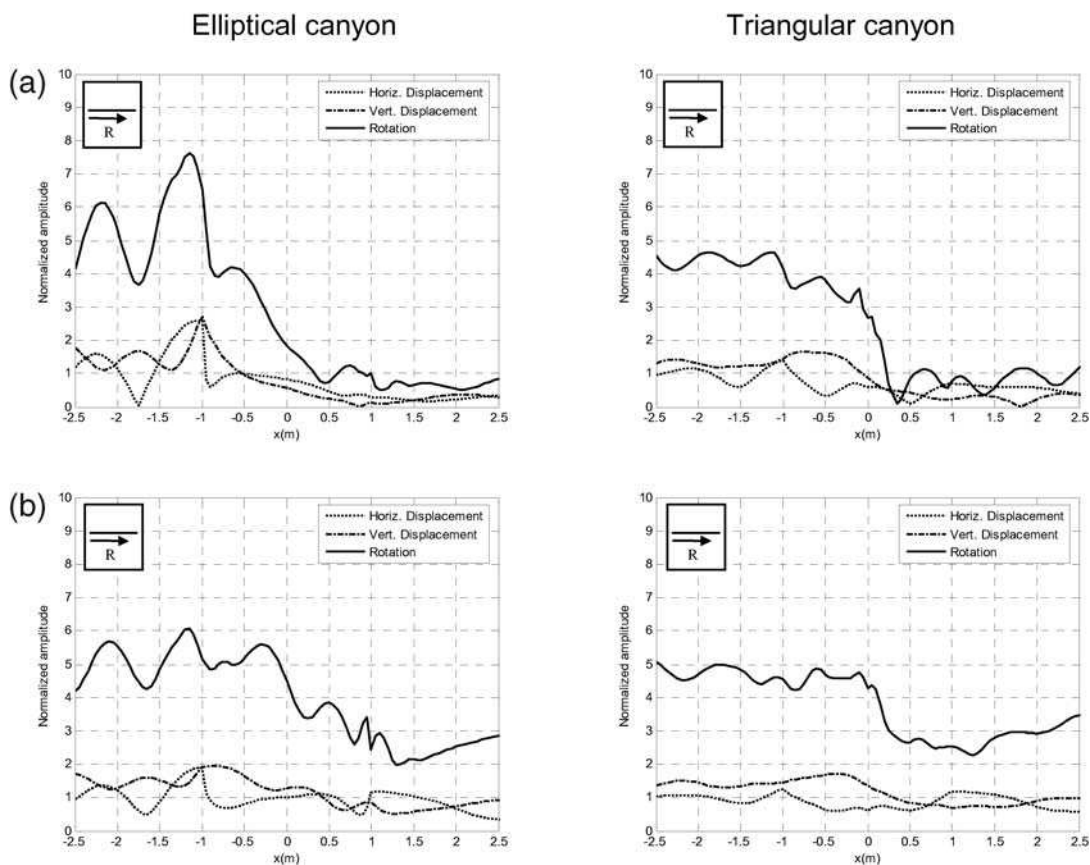


Figure 15. Results for different canyon geometries under the incidence of a Rayleigh wave: (a) $d = 1.0$ m and (b) $d = 0.5$ m.

idence of Rayleigh waves has also been simulated; the results computed for elliptical and for triangular canyons with different depths are displayed in Figure 15.

The results obtained for this type of incidence reveal similar behaviors for the two geometries with the canyon attenuating both the rotational and the translational response. Indeed, both cases register responses close to those of the half-space (Fig. 16) before the canyon ($x \leq 1.0$ m), and then a progressive decrease occurs as the receiver points are placed further away from the source region. Once again, the relation defined by equation (9) seems to be generally followed with the exception of very localized amplifications occurring near the edge of the elliptical canyon.

It is interesting to note that the energy of the displacement and rotation field smoothly decreases when the canyon has rounded geometry, while a steep decrease is visible right after the edge of the triangular canyon. This behavior indicates a very strong diffraction effect that may be occurring at the edge of the triangular canyon, which helps to spread the energy of the propagating wave throughout the propagation domain.

The previously described behaviors can be further confirmed in the time domain plots presented in Figure 17, computed for an incident Rayleigh wave defined by a Ricker pulse with a characteristic period $T = 4$ and a delay of 6.

In this figure, the time responses generated by the incidence of a Rayleigh wave in the presence of elliptical canyons with $d = 1.0$ m and with $d = 0.5$ m are displayed, together with the response generated in the presence of a triangular canyon

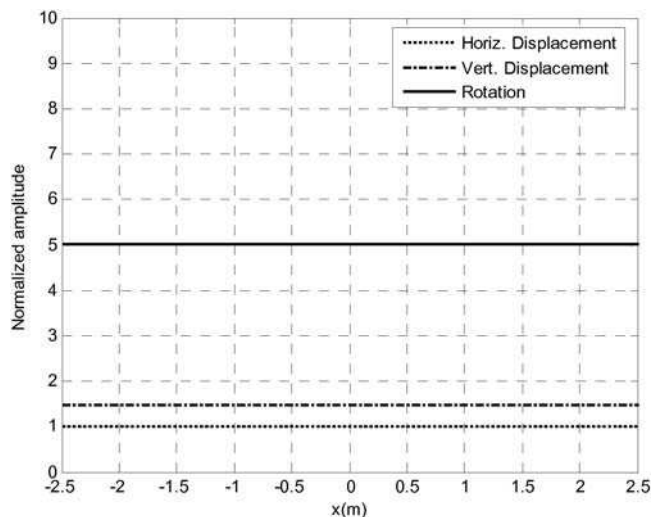


Figure 16. Displacements and rotations for a half-space under the incidence of a Rayleigh wave.

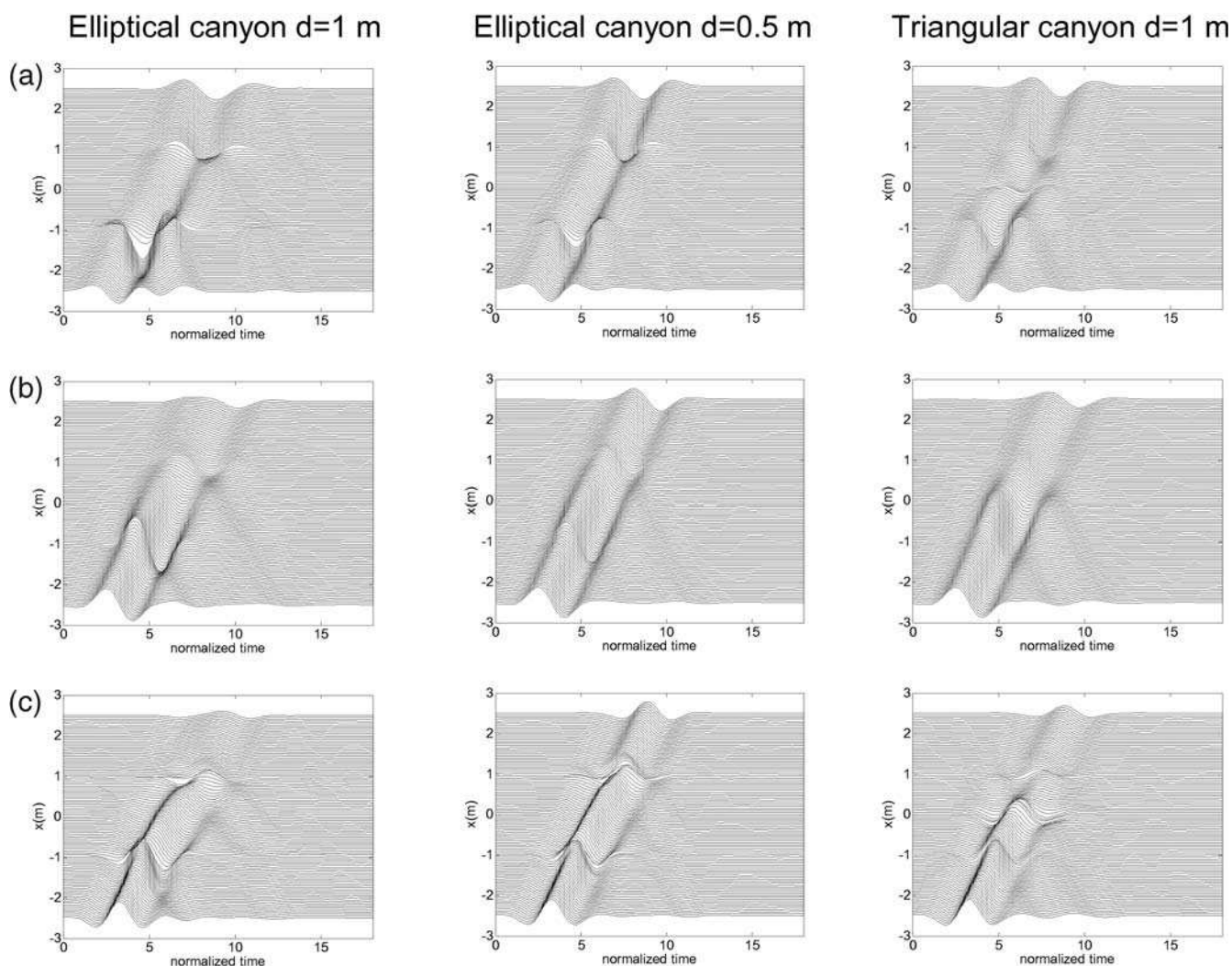


Figure 17. Normalized time domain responses along the surface of canyons with different geometries under the incidence of a Rayleigh wave: (a) horizontal displacement, (b) vertical displacement, and (c) rotation.

with $d = 1.0$ m. It is apparent that there is a smoother variation in the amplitude when the canyon has a smoother shape with the energy being slowly transferred to the propagation domain along the curve defining the canyon. It is possible to observe that the rotational motion follows a pattern similar to that of the displacements with the shield effect of the canyon being clearly visible in the upper half of these plots. It is also clear that the vertex in the triangular canyon has a very strong effect in the response, which is even more evident in the rotational field. For this case, the position of the vertex can be easily identified from the marked deamplification occurring at this specific point.

Conclusions

In this article, we evaluated the rotational ground motion at the surface of a 2D half-space with a topographical profile using an MFS method, which was verified using both analyti-

cal solutions known for wedges with specific internal angles and the SEM, which is applicable to arbitrary geometries. The method provided stable and accurate results and proved to be adequate for the study of rotational motion.

We then analyzed different topographical features, namely, elliptical and triangular canyons of varying depths under the incidence of P , SV , and Rayleigh waves. For all cases, significant amplifications were found in both the rotational and the translational fields. As inferred from previous theoretical studies, a comparative analysis revealed that larger amplifications of the rotational motion at the surface are generated by SV and Rayleigh waves. The computed results confirmed that the shape and depth of the canyon are important variables that influence the level of amplification and deamplification recorded at the surface. The shield effect of canyons for displacements under oblique incidence of plane waves and Rayleigh surface waves is also clearly identifiable for rotations. For all cases, time responses reveal

a very strong contribution of *SV* and Rayleigh waves, which are a dominant factor for the rotational motion.

From the various cases studied in this work, we believe that rotational ground motion should be generally bounded by the expected (or nominal) ground velocity divided by the shear-wave propagation velocity. As a general guideline, ground rotations scale with ground-motion velocities; however, diffraction may induce significant localized variations. More specific guidelines will emerge after the analysis of real data using more powerful methods that consider realistic models of surface geology.

Data and Resources

All data used in this article came from published sources listed in the references.

Acknowledgments

This work stems from the International Workshop on Rotational Seismology held at Menlo Park, California, in September 2007. Thanks are given to M. Suarez for her careful reading of the manuscript and constructive remarks. G. Sánchez N. and her team at Unidad de Servicios de Información helped us in locating useful references. Partial support from Dirección General de Asuntos del Personal Académico, Universidad Nacional Autónoma de México, Mexico, under Project Number IN114706, is gratefully acknowledged.

References

- Aki, K., and P. G. Richards (2002). *Quantitative Seismology*, Second Ed., University Science Books, Sausalito.
- Atluri, S. N. (2004). *The Meshless Method (MLPG) for Domain and BIE Discretizations*, Tech. Science Press, Forsyth, Georgia.
- Bielak, J., and P. Christiano (1984). On the effective seismic input for nonlinear soil-structure interaction systems, *Earthq. Eng. Struct. Dyn.* **12**, 107–119.
- Bouchon, M., and K. Aki (1982). Strain, tilt, and rotation associated with strong ground motion in the vicinity of earthquake faults, *Bull. Seismol. Soc. Am.* **72**, 1717–1738.
- Castellani, A., and G. Boffi (1986). Rotational components of the surface ground motion during an earthquake, *Earthq. Eng. Struct. Dyn.* **14**, 751–767.
- Cochard, A., H. Igel, B. Schuberth, W. Suryanto, A. Velikoseltsev, U. Schreiber, J. Wassermann, F. Scherbaum, and D. Vollmer (2006). Rotational motions in seismology: theory, observations, simulation, in *Earthquake Source Asymmetry, Structural Media and Rotation Effects*, R. Teisseyre, M. Takeo, and E. Majewski (Editors), Springer-Verlag, New York.
- Fairweather, G., and A. Karageorghis (1998). The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems, *Adv. Comp. Math.* **9**, 69–95.
- Ghayamghamian, M. R., and G. R. Nouri (2007). On the characteristics of ground motion rotational components using Chiba dense array data, *Earthq. Eng. Struct. Dyn.* **36**, 1407–1429.
- Godinho, L., A. Tadeu, and P. Amado Mendes (2007). Wave propagation around thin structures using the MFS, *Comput. Mat. Contin.* **5**, 117–128.
- Godinho, L., A. Tadeu, and N. A. Simões (2006). Accuracy of the MFS and BEM in the analysis of acoustic wave propagation and heat conduction problems, in *Advances in Meshless Methods*, Jan Sladek and Vladimir Sladek (Editors), Tech. Science Press, Forsyth, Georgia.
- Golberg, M. A., and C. S. Chen (1999). The method of fundamental solutions for potential, Helmholtz and diffusion problems, in *Boundary Integral Methods: Numerical and Mathematical Aspects*, M. A. Golberg (Editor), WIT Press and Computational Mechanics Publications, Boston, 103–176.
- Graizer, V. M. (2005). Effect of tilt on strong motion data processing, *Soil Dyn. Earthq. Eng.* **25**, 197–204.
- Graizer, V. M. (2006). Tilts in strong ground motion, *Bull. Seismol. Soc. Am.* **96**, no. 6, 2090–2102.
- Huang, B. S. (2003). Ground rotational motions of the 1991 Chi-Chi, Taiwan earthquake as inferred from dense array observations, *Geophys. Res. Lett.* **30**, 1307–1310.
- Huang, B. S., C. C. Liu, C. R. Lin, C. F. Wu, and W. H. K. Lee (2006). Measuring mid- and near-field rotational ground motions in Taiwan, in a poster presented at the *2006 Fall American Geophysical Union Meeting*, San Francisco.
- Joyner, W. B., and D. M. Boore (1993). Methods for regression analysis of strong-motion data, *Bull. Seismol. Soc. Am.* **83**, 469–487.
- Kalkan, E., and V. Graizer (2007). Coupled tilt and translational ground motion response spectra, *J. Struct. Eng.* **133**, 609–619.
- Kansa, E. J. (1990). A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics II, *Comput. Math. Appl.* **19**, 147–161.
- Komatitsch, D., J. P. Jean-Pierre Vilotte, R. Rossana Vai, J. M. Castillo-Covarrubias, and F. J. Sánchez-Sesma (1999). The spectral element method for elastic wave equations: Application to 2D and 3D seismic problems, *Int. J. Num. Meth. Eng.* **45**, 1139–1164.
- Komatitsch, D., S. Tsuboi, and J. Tromp (2005). The spectral-element method in seismology, in *Seismic Earth: Array Analysis of Broadband Seismograms*, A. Levander and G. Nolet (Editors), Vol. **157**, American Geophysical Union, Washington, D.C., 205–228.
- Lee, V. W., and M. D. Trifunac (1985). Torsional accelerograms, *Int. J. Soil Dyn. Earthq. Eng.* **4**, 132–139.
- Lee, V. W., and M. D. Trifunac (1987). Rocking strong earthquake accelerations, *Int. J. Soil Dyn. Earthq. Eng.* **6**, 75–89.
- Li, H-N, L-Y Sun, and S-Y Wang (2004). Improved approach for obtaining rotational components of seismic motion, *Nucl. Eng. Des.* **232**, 131–137.
- Niazi, M. (1986). Inferred displacements, velocities and rotations of a long rigid foundation located at El Centro differential array site during the 1979 Imperial Valley, California, earthquake, *Earthq. Eng. Struct. Dyn.* **14**, no. 4, 531–542.
- Nigbor, R. (1994). Six-degree-of-freedom ground-motion measurement, *Bull. Seismol. Soc. Am.* **84**, 1665–1669.
- Oliveira, C. S., and B. A. Bolt (1989). Rotational components of surface strong ground motion, *Earthq. Eng. Struct. Dyn.* **18**, 517–526.
- Paolucci, R., E. Faccioli, and F. Maggio (1999). 3D response analysis of an instrumented hill at Matsuzaki, Japan, by a spectral method, *J. Seism.* **3**, 191–209.
- Pedersen, H., F. Sánchez-Sesma, and M. F. Campillo (1994). Three-dimensional scattering by two-dimensional topographies, *Bull. Seismol. Soc. Am.* **84**, 1169–1183.
- Pillet, R., and J. Virieux. (2007). The effects of seismic rotations on inertial sensors, *Geophys. J. Int.* **171**, no. 3, 1314–1323.
- Reinoso, E., L. Wrobel, and H. Power (1997). Three-dimensional scattering of seismic waves from topographical structures, *Soil Dyn. Earthq. Eng.* **16**, 41–61.
- Sánchez-Sesma, F. J. (1990). Elementary solutions for the response of a wedge-shaped medium to incident *SH* and *SV* waves, *Bull. Seismol. Soc. Am.* **80**, 737–742.
- Sánchez-Sesma, F. J., and M. Campillo (1991). Diffraction of *P*, *SV*, and Rayleigh waves by topographic features: A boundary integral formulation, *Bull. Seismol. Soc. Am.* **81**, no. 6, 2234–2253.
- Sánchez-Sesma, F. J., and E. Rosenblueth (1979). Ground motion at canyons of arbitrary shape under incident *SH* waves, *Earthq. Eng. Struct. Dyn.* **7**, 441–450.

- Singh, S. K., M. Santoyo, P. Bodin, and J. Gomberg (1997). Dynamic deformations of shallow sediments in the Valley of Mexico, Part II: Single-station estimates, *Bull. Seismol. Soc. Am.* **87**, 540–550.
- Spudich, P., and J. B. Fletcher (2008). Observation and prediction of dynamic ground strains, tilts and torsions caused by the *M* 6.0 2004 Parkfield, California, earthquake and aftershocks derived from UPSAR array observations, *Bull. Seismol. Soc. Am.* **98**, no. 4, 1898–1914.
- Suryanto, W., H. Igel, J. Wassermann, A. Cochard, B. Schuberth, D. Vollmer, F. Scherbaum, U. Schreiber, and A. Velikoseltsev (2006). First comparison of array-derived rotational ground motions with direct ring laser measurements, *Bull. Seismol. Soc. Am.* **96**, 2059–2071.
- Tadeu, A., and E. Kausel (2000). Green's functions for two-and-a-half dimensional elastodynamic problems, *J. Eng. Mech.* **126**, 1093–1097.
- Tadeu, A., J. António, and L. Godinho (2001). Green's function for two-and-a-half dimensional elastodynamic problems in a half-space, *Comput. Mech. J.* **27**, 484–491.
- Tadeu, A., P. Santos, and J. António (2001). Amplification of elastic waves due to a point source in the presence of complex surface topography, *J. Comp. Struct.* **79**, no. 18 1697–1712.
- Takeo, M. (1998). Ground rotational motions recorded in near-source region of earthquakes, *Geophys. Res. Lett.* **25**, 789–792.
- Takeo, M., and H. M. Ito (1997). What can be learned from rotational motions excited by earthquakes?, *Geophys. J. Int.* **129**, 319–329.
- Trifunac, M. D. (1982). A note on rotational components of earthquake motions on ground surface for incident body waves, *Soil Dyn. Earthq. Eng.* **1**, 11–19.
- Trifunac, M. D. (2006). Effects of torsional and rocking excitations on the response of structures, in *Earthquake Source Asymmetry, Structural Media and Rotation Effects*, R. Teisseyre, M. Takeo, and E. Majewski (Editors), Springer-Verlag, New York, 569–582.
- Wang, H., H. Igel, A. Cochard, and M. Ewald (2006). Variations of peak ground motions due to slip histories: Application to the Newport Inglewood fault, Los Angeles basin, in *the International Symposium on the Effects of Surface Geology on Seismic Motion*, Vol. 3, Grenoble, France.
- Centro de Investigação em Ciências da Construção
Department of Civil Engineering
University of Coimbra
Rua Luis Reis Santos Pólo 2-FCTUC
3030-788 Coimbra, Portugal
lgodinho@dec.uc.pt
pamendes@dec.uc.pt
tadeu@dec.uc.pt
(L.G., P.A., A.T.)
- Instituto de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad Universitaria, Coyoacán 04510
Mexico, D.F., Mexico
acadenai@ii.unam.mx
sesma@servidor.unam.mx
(A.C., F.J.S.)
- ROSE School
c/o EUCENTRE
via Ferrata 1
Pavia 27100, Italy
csmerzini@roseschool.it
(C.S.)
- Laboratoire de Modélisation et d'Imagerie en Géosciences de Pau (CNRS)
UMR 5212
Université de Pau et des Pays de l'Adour and INRIA MAGIQUE-3D
Bâtiment IPRA
Avenue de l'Université
BP 1155, 64013 Pau Cedex, France
ronan.madec@gmail.com
dimitri.komatitsch@univ-pau.fr
(R.M., D.K.)

Manuscript received 31 May 2008

Bibliographie

- Achenbach, J. D., 1973. *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands.
- Aki, K. & Richards, P. G., 1980. *Quantitative seismology, theory and methods*, W. H. Freeman, San Francisco, USA.
- Alterman, Z. & Karal, F. C., 1968. Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **58**, 367–398.
- Amestoy, P. R., Duff, I. S., Koster, J., & L'Excellent, J.-Y., 2001. A fully asynchronous multifrontal solver using distributed dynamic scheduling, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **23**(1), 15–41.
- Azaiez, M., Dauge, M., & Maday, Y., 1994. Méthodes spectrales et des éléments spectraux, Tech. rep., Institut de Recherche Mathématique de Rennes, Université de Rennes, France.
- Bécache, E., Fauqueux, S., & Joly, P., 2003. Stability of Perfectly Matched Layers, group velocities and anisotropic waves, *J. Comput. Phys.*, **188**(2), 399–433.
- Ben-Menahem, A. & Singh, S. J., 1981. *Seismic waves and sources*, Springer-Verlag, New York.
- Bérenger, J. P., 1994. A Perfectly Matched Layer for the absorption of electromagnetic waves, *J. Comput. Phys.*, **114**, 185–200.
- Bérenger, J. P., 2002a. Application of the CFS PML to the absorption of evanescent waves in waveguides, *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, **12**(6), 218–220.
- Bérenger, J. P., 2002b. Numerical reflection from FDTD-PMLs : A comparison of the split PML with the unsplit and CFS PMLs, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **50**(3), 258–265.

- Berg, P., If, F., Nielsen, P., & Skovegaard, O., 1994. Analytic reference solutions, in *Modeling the Earth for oil exploration, Final report of the CEC's GEOSCIENCE I Program 1990-1993*, pp. 421–427, ed. Helbig, K., Pergamon Press, Oxford, United Kingdom.
- Bernacki, M., Lanteri, S., & Piperno, S., 2006. Time-domain parallel simulation of heterogeneous wave propagation on unstructured grids using explicit, nondiffusive, discontinuous Galerkin methods, *J. Comput. Acoust.*, **14**(1), 57–81.
- Bielak, J. & Christiano, P., 1984. On the effective seismic input for non-linear soil-structure interaction systems, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, **12**, 107–119.
- Bielak, J., Ghattas, O., & Kim, E. J., 2005. Parallel octree-based finite element method for large-scale earthquake ground motion simulation, *Comput. Model. Eng. Sci.*, **10**(2), 99–112.
- Blitz, C., 2009. *Modélisation de la propagation des ondes sismiques et des ejecta dans les astéroïdes : application à l'érosion des cratères de l'astéroïde 433-Eros*, Ph.D. thesis, Institut de Physique du Globe de Paris, Paris, France.
- Brillouin, L., 1964. *Tensors in Mechanics and Elasticity*, Academic Press, New York, 3rd edn.
- Cagniard, L., 1939. *Réflexion et Réfraction des Ondes Sismiques Progressives*, Gauthiers-Villars, Paris.
- Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A., & Zang, T. A., 1988. *Spectral methods in fluid dynamics*, Springer-Verlag, New-York, USA.
- Carcione, J. M., 1993. Seismic modeling in viscoelastic media, *Geophysics*, **58**(1), 110–120.
- Carcione, J. M., 1994. The wave equation in generalized coordinates, *Geophysics*, **59**, 1911–1919.
- Carcione, J. M. & Wang, P. J., 1993. A Chebyshev collocation method for the wave equation in generalized coordinates, *Comp. Fluid Dyn. J.*, **2**, 269–290.
- Casadei, F. & Halleux, J.-P., 2009. Binary spatial partitioning of the central-difference time integration scheme for explicit fast transient dynamics, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **78**(12), 1436–1473.
- Celledoni, E., McLachlan, R. I., McLaren, D. I., Owren, B., Quispel, G. R. W., & Wright, W. M., 2009. Energy-preserving Runge-Kutta methods, *M2AN*, **43**, 645–649.

- Cerjan, C., Kosloff, D., Kosloff, R., & Reshef, M., 1985. A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equation, *Geophysics*, **50**, 705–708.
- Chaljub, E. & Valette, B., 2004. Spectral element modelling of three-dimensional wave propagation in a self-gravitating Earth with an arbitrarily stratified outer core, *Geophys. J. Int.*, **158**, 131–141.
- Chaljub, E., Capdeville, Y., & Vilotte, J. P., 2003. Solving elastodynamics in a fluid-solid heterogeneous sphere : a parallel spectral-element approximation on non-conforming grids, *J. Comput. Phys.*, **187**(2), 457–491.
- Chaljub, E., Komatitsch, D., Vilotte, J.-P., Capdeville, Y., Valette, B., & Festa, G., 2007. Spectral element analysis in seismology, in *Advances in Wave Propagation in Heterogeneous Media*, vol. 48 of **Advances in Geophysics**, pp. 365–419, eds Wu, R.-S. & Maupin, V., Elsevier - Academic Press.
- Chew, W. C. & Liu, Q., 1996. Perfectly Matched Layers for elastodynamics : a new absorbing boundary condition, *J. Comput. Acoust.*, **4**(4), 341–359.
- Ciarlet, P. & Lions, J., 1991. *Handbook of numerical analysis*, vol. 2, North Holland.
- Clayton, R. & Engquist, B., 1977. Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **67**, 1529–1540.
- Cohen, G., 2002. *Higher-Order Numerical Methods for Transient Wave Equations*, Springer-Verlag, Berlin, Germany.
- Cohen, G. & Fauqueux, S., 2005. Mixed spectral finite elements for the linear elasticity system in unbounded domains, *SIAM Journal on Scientific Computing*, **26**(3), 864–884.
- Collino, F. & Tsogka, C., 2001. Application of the PML absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media, *Geophysics*, **66**(1), 294–307.
- Collino, F., Fouquet, T., & Joly, P., 1998. Analyse numérique d’une méthode de raffinement de maillage espace-temps pour l’équation des ondes, Tech. rep., INRIA, Research report RR-3474.
- Collino, F., Fouquet, T., & Joly, P., 2003a. A conservative space-time mesh refinement method for the 1-D wave equation. I. Construction, *Numerische Mathematik*, **95**(2), 197–221.
- Collino, F., Fouquet, T., & Joly, P., 2003b. A conservative space-time mesh refinement method for the 1-D wave equation. II. Analysis, *Numerische Mathematik*, **95**(2), 223–251.

- Courant, R., Friedrichs, K. O., & Lewy, H., 1928. Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik, *Mathematische Annalen*, **100**, 32–74.
- De Basabe, J. D. & Sen, M. K., 2007. Grid dispersion and stability criteria of some common finite-element methods for acoustic and elastic wave equations, *Geophysics*, **72**(6), T81–T95.
- de Hoop, A. T., 1960. A modification of Cagniard’s method for solving seismic pulse problems, *Applied Science Research*, **B8**, 349–356.
- Dhatt, G. & Touzot, G., 1984. *The finite element method displayed*, John Wiley and sons, New York.
- Diaz, J. & Grote, M. J., 2009. Energy conserving explicit local time stepping for second-order wave equations, *SIAM J. Sci. Comput.*, **31**(3), 1985–2014.
- Diaz, J. & Joly, P., 2005. A robust high-order non-conforming finite-element formulation for time domain fluid-structure interaction, *J. Comput. Acoust.*, **13**(3), 403–431.
- Dumbser, M., Käser, M., & Toro, E., 2007. An arbitrary high order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes, Part V : Local time stepping and p -adaptivity, *Geophys. J. Int.*, **171**(2), 695–717.
- Duvaut, G., 1990. *Mécanique des milieux continus*, Masson, Paris.
- El Soueidy, C. P., Younes, A., & Ackerer, P., 2009. Solving the advection-diffusion equation on unstructured meshes with discontinuous/mixed finite elements and a local time stepping procedure, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **79**(9), 1068–1093.
- Emmerich, H. & Korn, M., 1987. Incorporation of attenuation into time-domain computations of seismic wave fields, *Geophysics*, **52**, 1252–1264.
- Engquist, B. & Majda, A., 1977. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves, *Math. Comp.*, **31**, 629–651.
- Ezziani, A., 2006. Ondes dans les milieux poroélastiques : analyse du modèle de Biot, *Revue Africaine de la Recherche en Informatique et Mathématiques Appliquées ARIMA*, **5**, 95–109.
- Faccioli, E., Maggio, F., Paolucci, R., & Quarteroni, A., 1997. 2D and 3D elastic wave propagation by a pseudo-spectral domain decomposition method, *J. Seismol.*, **1**, 237–251.

- Fauqueux, S., 2003. *Éléments finis mixtes spectraux et couches absorbantes parfaitement adaptées pour la propagation d'ondes élastiques en régime transitoire*, Ph.D. thesis, Université Paris-Dauphine, Paris, France.
- Festa, G. & Vilotte, J. P., 2005. The Newmark scheme as velocity-stress time-staggering : an efficient PML implementation for spectral-element simulations of elastodynamics, *Geophys. J. Int.*, **161**, 789–812.
- Fischer, P. F., 1990. Analysis and application of a parallel spectral element method for the solution of the Navier-Stokes equations, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **80**, 483–491.
- Gedney, S. D., 1998. The Perfectly Matched Layer absorbing medium, in *Advances in Computational Electrodynamics : the Finite-Difference Time-Domain method*, chap. 5, pp. 263–343, ed. Taflové, A., Artech House, Boston, USA.
- Germain, P. & Muller, P., 1994. *Introduction à la mécanique des milieux continus*, Masson, Paris, 2nd edn.
- Givoli, D., 1991. Non-reflecting boundary conditions : review article, *J. Comput. Phys.*, **94**, 1–29.
- Godinho, L., Mendes, P. A., Tadeu, A., Cadena-Isaza, A., Smerzini, C., Sánchez-Sesma, F. J., Madec, R., & Komatitsch, D., 2009. Numerical simulation of ground rotations along 2D topographical profiles under the incidence of elastic waves, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **99**(2B), 1147–1161.
- Hagstrom, T. & Hariharan, S. I., 1998. A formulation of asymptotic and exact boundary conditions using local operators, *Appl. Num. Math.*, **27**, 403–416.
- Hairer, E., Lubich, C., & Wanner, G., 2006. *Geometric numerical integration*, vol. 31 of **Springer Series in Computational Mathematics**, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2nd edn.
- Harker, A. H., 1988. *Elastic waves in solids, with application to non destructive testing of pipelines*, British Gas Editions, Bristol.
- Hénon, P. & Saad, Y., 2006. A parallel multistage ILU factorization based on a hierarchical graph decomposition, *SIAM Journal of Scientific Computing*, **28**(6), 2266–2293.
- Higdon, R. L., 1991. Absorbing boundary conditions for elastic waves, *Geophysics*, **56**, 231–241.
- Hughes, T. J. R., 1987. *The finite element method, linear static and dynamic finite element analysis*, Prentice-Hall International, Englewood Cliffs, New Jersey, USA.

- Hughes, T. J. R. & Marsden, J. E., 1978. Classical elastodynamics as a linear symmetric hyperbolic system, *Journal of Elasticity*, **8**(1), 97–110.
- Jaiman, R. K., Jiao, X., Geubelle, P. H., & Loth, E., 2006. Conservative load transfer along curved fluid-solid interface with non-matching meshes, *J. Comput. Phys.*, **218**(1), 372–397.
- Kane, C., Marsden, J., Ortiz, M., & West, M., 2003. Variational integrators and the Newmark algorithm for conservative and dissipative mechanical systems, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **49**(10), 1295–1325.
- Kang, T.-S. & Baag, C.-E., 2004. Finite-difference seismic simulation combining discontinuous grids with locally variable timesteps, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **94**(1), 207–219.
- Käser, M. & Dumbser, M., 2006. An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes-I. The two-dimensional isotropic case with external source terms, *Geophys. J. Int.*, **166**(2), 855–877.
- Käser, M. & Dumbser, M., 2008. A highly accurate discontinuous Galerkin method for complex interfaces between solids and moving fluids, *Geophysics*, **73**(3), T23–T35.
- Kawase, H., 1988. Time-domain response of a semi-circular canyon for incident *SV*, *P* and Rayleigh waves calculated by the discrete wavenumber boundary element method, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **78**, 1415–1437.
- Komatitsch, D., 1997. *Méthodes spectrales et éléments spectraux pour l'équation de l'élastodynamique 2D et 3D en milieu hétérogène (Spectral and spectral-element methods for the 2D and 3D elastodynamics equations in heterogeneous media)*, Ph.D. thesis, Institut de Physique du Globe, Paris, France, 187 pages.
- Komatitsch, D. & Martin, R., 2007. An unsplit convolutional Perfectly Matched Layer improved at grazing incidence for the seismic wave equation, *Geophysics*, **72**(5), SM155–SM167.
- Komatitsch, D. & Tromp, J., 1999. Introduction to the spectral-element method for 3-D seismic wave propagation, *Geophys. J. Int.*, **139**(3), 806–822.
- Komatitsch, D. & Tromp, J., 2002. Spectral-element simulations of global seismic wave propagation-I. Validation, *Geophys. J. Int.*, **149**(2), 390–412.

- Komatitsch, D. & Tromp, J., 2003. A Perfectly Matched Layer absorbing boundary condition for the second-order seismic wave equation, *Geophys. J. Int.*, **154**(1), 146–153.
- Komatitsch, D. & Vilotte, J. P., 1998. The spectral-element method : an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **88**(2), 368–392.
- Komatitsch, D., Vilotte, J. P., Vai, R., Castillo-Covarrubias, J. M., & Sánchez-Sesma, F. J., 1999. The spectral-element method for elastic wave equations : application to 2D and 3D seismic problems, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **45**(9), 1139–1164.
- Komatitsch, D., Barnes, C., & Tromp, J., 2000. Wave propagation near a fluid-solid interface : a spectral element approach, *Geophysics*, **65**(2), 623–631.
- Krenk, S., 2006. Energy conservation in Newmark based time integration algorithms, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, pp. 6110–6124.
- Kuzuoglu, M. & Mittra, R., 1996. Frequency dependence of the constitutive parameters of causal perfectly matched anisotropic absorbers, *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, **6**(12), 447–449.
- Lamé, G., 1852. *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, Gauthier-Villars, Paris.
- Landau, L. & Lifchitz, E., 1953. *Théorie de l'élasticité (Theory of Elasticity)*, Mir, Moscow, Russia, 2nd edn.
- Lemaitre, J. & Chaboche, J. L., 1985. *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, Paris.
- Liu, H. P., Anderson, D. L., & Kanamori, H., 1976. Velocity dispersion due to anelasticity : implications for seismology and mantle composition, *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, **47**, 41–58.
- Liu, Q., Polet, J., Komatitsch, D., & Tromp, J., 2004. Spectral-element moment tensor inversions for earthquakes in Southern California, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **94**(5), 1748–1761.
- Love, A. E. H., 1911. *Some problems of geodynamics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Lubliner, J., 1990. *Plasticity theory*, Macmillan Publishing Company, New York.
- Luebbers, R. J. & Hunsberger, F., 1992. FDTD for Nth-order dispersive media, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **40**(11), 1297–1301.

- Lysmer, J. & Drake, L. A., 1972. A finite element method for seismology, in *Methods in Computational Physics*, vol. 11, chap. 6, pp. 181–216, eds Alder, B., Fernbach, S., & Bolt, B. A., Academic Press, New York, USA.
- Madariaga, R., 1976. Dynamics of an expanding circular fault, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **66**(3), 639–666.
- Maday, Y. & Patera, A. T., 1989. Spectral-element methods for the incompressible Navier-Stokes equations, in *State of the art survey in computational mechanics*, pp. 71–143, A. K. Noor and J. T. Oden editors.
- Madec, R., Komatitsch, D., & Diaz, J., 2009. Energy-conserving local time stepping based on high-order finite elements for seismic wave propagation across a fluid-solid interface, *Comput. Model. Eng. Sci.*, **49**(2), 163–189.
- Martin, R. & Komatitsch, D., 2009. An unsplit convolutional perfectly matched layer technique improved at grazing incidence for the viscoelastic wave equation, *Geophys. J. Int.*, pp. 333–344.
- Martin, R., Komatitsch, D., & Ezziani, A., 2008a. An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for seismic wave equation in poroelastic media, *Geophysics*, **73**(4), T51–T61.
- Martin, R., Komatitsch, D., & Gedney, S. D., 2008b. A variational formulation of a stabilized unsplit convolutional perfectly matched layer for the isotropic or anisotropic seismic wave equation, *Comput. Model. Eng. Sci.*, **37**(3), 274–304.
- Meza-Fajardo, K. C. & Papageorgiou, A. S., 2008. A nonconvolutional, split-field, perfectly matched layer for wave propagation in isotropic and anisotropic elastic media; stability analysis, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **98**(4), 1811–1836.
- Newmark, N. M., 1959. A method of computation for structural dynamics, in *Engineering mechanics division : Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, pp. 67–93.
- Nissen-Meyer, T., Dahlen, F. A., & Fournier, A., 2007. Spherical-earth Fréchet sensitivity kernels, *Geophys. J. Int.*, **168**(3), 1051–1066.
- Nissen-Meyer, T., Fournier, A., & Dahlen, F. A., 2008. A 2-D spectral-element method for computing spherical-earth seismograms - II. Waves in solid-fluid media, *Geophys. J. Int.*, **174**, 873–888.

- Paolucci, R., Faccioli, E., & Maggio, F., 1999. 3D response analysis of an instrumented hill at Matsuzaki, Japan, by a spectral method, *J. Seismol.*, **3**, 191–209.
- Patera, A. T., 1984. A spectral element method for fluid dynamics : laminar flow in a channel expansion, *J. Comput. Phys.*, **54**, 468–488.
- Peng, C. B. & Töksoz, M. N., 1995. An optimal absorbing boundary condition for elastic wave modeling, *Geophysics*, **60**, 296–301.
- Pilant, W. L., 1979. *Elastic waves in the Earth*, vol. 11 of "Developments in Solid Earth Geophysics" Series, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, The Netherlands.
- Priolo, E., Carcione, J. M., & Seriani, G., 1994. Numerical simulation of interface waves by high-order spectral modeling techniques, *J. Acoust. Soc. Am.*, **95**(2), 681–693.
- Quarteroni, A., Tagliani, A., & Zampieri, E., 1998. Generalized Galerkin approximations of elastic waves with absorbing boundary conditions, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **163**, 323–341.
- Rahmouni, A. N., 2004. Un modèle PML bien posé pour l'élastodynamique anisotrope (A well-posed PML model for anisotropic elastodynamics), *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, **338**, 963–968.
- Rayleigh, L. J. W. S., 1887. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid, *Proc. London Math. Soc.*, **17**, 4–11.
- Roden, J. A. & Gedney, S. D., 2000. Convolution PML (CPML) : An efficient FDTD implementation of the CFS-PML for arbitrary media, *Microwave and Optical Technology Letters*, **27**(5), 334–339.
- Rodríguez, J., 2004. *Raffinement de maillage spatio-temporel pour les équations de l'élastodynamique*, Ph.D. thesis, Université Paris IX-Dauphine, Paris, France.
- Rønquist, E. M., 1988. *Optimal spectral element methods for the unsteady three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations*, Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts.
- Rulf, B., 1969. Rayleigh waves on curved surfaces, *J. Acoust. Soc. Am.*, **45**, 493–499.
- Sánchez-Sesma, F. J. & Campillo, M., 1991. Diffraction of *P*, *SV* and Rayleigh waves by topographic features : a boundary integral formulation, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **81**, 2234–2253.

- Seriani, G., 1998. 3-D large-scale wave propagation modeling by a spectral element method on a Cray T3E multiprocessor, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **164**, 235–247.
- Seriani, G. & Oliveira, S. P., 2008. Dispersion analysis of spectral-element methods for elastic wave propagation, *Wave Motion*, **45**, 729–744.
- Simo, J. C., Tarnow, N., & Wong, K. K., 1992. Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for nonlinear dynamics, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **100**, 63–116.
- Soares Jr., D., 2009. Acoustic modelling by BEM-FEM coupling procedures taking into account explicit and implicit multi-domain decomposition techniques, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **78**(9), 1076–1093.
- Soares Jr., D. & Mansur, W. J., 2005. An efficient time-domain BEM/FEM coupling for acoustic-elastodynamic interaction problems, *Comput. Model. Eng. Sci.*, **8**(2), 153–164.
- Soares Jr., D., Mansur, W. J., & Lima, D. L., 2007. An explicit multi-level time-step algorithm to model the propagation of interacting acoustic-elastic waves using finite-element/finite-difference coupled procedures, *Comput. Model. Eng. Sci.*, **17**(1), 19–34.
- Sochacki, J., Kubichek, R., George, J., Fletcher, W. R., & Smithson, S., 1987. Absorbing boundary conditions and surface waves, *Geophysics*, **52**(1), 60–71.
- Stacey, R., 1988. Improved transparent boundary formulations for the elastic wave equation, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **78**(6), 2089–2097.
- Stoneley, R., 1924. Elastic waves at the surface of separation of two solids, *Proc. R. Soc. London Ser. A*, **106**, 416–428.
- Tarnow, N. & Simo, J. C., 1994. How to render second-order accurate time-stepping algorithms fourth-order accurate while retaining the stability and conservation properties, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **115**, 233–252.
- Tessmer, E., 2000. Seismic finite-difference modeling with spatially varying time steps, *Geophysics*, **65**(4), 1290–1293.
- Tessmer, E. & Kosloff, D., 1994. 3-D elastic modeling with surface topography by a Chebyshev spectral method, *Geophysics*, **59**(3), 464–473.

- Vai, R., Castillo-Covarrubias, J. M., Sánchez-Sesma, F. J., Komatitsch, D., & Vilotte, J. P., 1999. Elastic wave propagation in an irregularly layered medium, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, **18**(1), 11–18.
- van Vossen, R., Robertsson, J. O. A., & Chapman, C. H., 2002. Finite-difference modeling of wave propagation in a fluid-solid configuration, *Geophysics*, **67**(2), 618–624.
- Viktorov, I. A., 1967. *Rayleigh and Lamb waves : physical theory and applications*, Plenum Press, New-York, USA.
- Virieux, J., 1984. *SH* wave propagation in heterogeneous media : velocity-stress finite-difference method, *Geophysics*, **49**, 1933–1942.
- Virieux, J., 1986. *P-SV* wave propagation in heterogeneous media : velocity-stress finite-difference method, *Geophysics*, **51**, 889–901.
- Wang, T. & Tang, X., 2003. Finite-difference modeling of elastic wave propagation : A nonsplitting perfectly matched layer approach, *Geophysics*, **68**(5), 1749–1755.
- Yee, K. S., 1966. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **14**, 302–307.
- Yoon, K. T. & Chung, T. J., 1996. Three-dimensional mixed explicit-implicit generalized Galerkin spectral element methods for high-speed turbulent compressible flows, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **135**, 343–367.
- Zhang, J., 2004. Wave propagation across fluid-solid interfaces : a grid method approach, *Geophys. J. Int.*, **159**(1), 240–252.

