



Analyse en stabilité et synthèse de lois de commande pour des systèmes polynomiaux saturants

Giorgio Valmorbida

► To cite this version:

Giorgio Valmorbida. Analyse en stabilité et synthèse de lois de commande pour des systèmes polynomiaux saturants. Mathématiques [math]. INSA de Toulouse, 2010. Français. NNT : . tel-00512335

HAL Id: tel-00512335

<https://theses.hal.science/tel-00512335>

Submitted on 30 Aug 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse (INSA Toulouse)

Discipline ou spécialité :

SYSTÈMES AUTOMATIQUES

Présentée et soutenue par :

Giórgio VALMORBIDA

le : 8 juillet 2010

Titre :

Analyse en Stabilité et Synthèse de Lois de Commande pour des Systèmes
Polynomiaux Saturants

Ecole doctorale :

Systèmes (EDSYS)

Unité de recherche :

LAAS - CNRS

Directeur(s) de Thèse :

Sophie TARBOURIECH

Germain GARCIA

Rapporteurs :

Laurent EL GHAOUI

Silviu-Iulian NICULESCU

Autre(s) membre(s) du jury

Alessandro ASTOLFI

Jean-Marc BIANNIC

Olivier SENAME

Matthew C. TURNER

Avant Propos

La gratitude est un second plaisir, qui en prolonge un premier : comme un écho de joie à la joie éprouvée, comme un bonheur de plus pour un plus de bonheur.

André Comte-Sponville, *Petit traité des grandes vertus*

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du Centre National de la Recherche Scientifique (LAAS-CNRS). Je tiens à remercier M. Raja Chatila, directeur du LAAS, pour avoir mis à ma disposition toutes les ressources nécessaires pour le bon déroulement des travaux.

Je remercie également l'Asociación Grupo Santander pour financement de la bourse Alban, sans lequel ce travail n'aurait pas été possible.

J'exprime ma gratitude à Mme. Sophie Tarbouriech et M. Germain Garcia, mes directeurs de thèse pour leur encouragement constant et pour m'avoir accompagné tout le long de ces années sachant guider mes choix sans m'imposer les leurs.

J'exprime ma reconnaissance envers M. Laurent El Ghaoui et M. Silviu-Iulian Niculescu d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail. Je remercie également M. Alessandro Astolfi, M. Jean-Marc Biannic, M. Matthew Turner et M. Olivier Sename d'avoir accepté de participer au jury de cette thèse.

Je remercie Mme. Isabelle Queinnec, responsable du groupe MAC, pour les moyens mis à ma disposition, notamment pour rendre possible ma participation dans des conférences. Je remercie aussi tous les membres du groupe MAC, en particulier Christophe Prieur, Dimitri Peaucelle et Didier Henrion pour toutes leurs questions et suggestions.

Je suis également reconnaissant à l'école doctorale EDSYS qui m'as permis d'effectuer un séjour au sein de l'Université de Leicester où j'ai été chaleureusement accueilli. Je dois remercier l'Université Fédérale du Rio Grande do Sul et l'équipe du Prof. João Manoel Gomes da Silva et à l'Universidade Estadual de Campinas et le Prof. Pedro Luis Dias Peres pour leurs accueils.

Je remercie aussi les collègues thésards et stagiaires qui m'ont accompagné dans ce parcours.

À ma douce Ana, tout le soutien que j'ai eu lui tenant la main.

Je remercie également tous les amis qui m'ont soutenu de ce côté ou de l'autre côté de l'Atlantique, dans les pages suivantes ils comprendront “*porque furei nossos churrascos*” ces trois dernières années.

Table des matières

Introduction Générale	1
1 État de l'art	5
1.1 Introduction	5
1.2 Concepts Fondamentaux	5
1.3 Solutions Numériques	10
1.4 Systèmes polynomiaux	17
1.4.1 Méthodes de synthèse	17
1.5 Conclusion	19
2 Représentations des Systèmes	21
2.1 Introduction	21
2.2 Systèmes Polynomiaux Autonomes	21
2.2.1 Définition d'un espace augmenté	26
2.3 Systèmes non-autonomes	29
2.4 Représentation multiple des formes quadratiques	32
2.5 Conclusion	33
3 Analyse de stabilité des systèmes polynômiaux	35
3.1 Introduction	35
3.2 Tester la positivité d'un polynôme localement	35
3.3 Analyse avec des fonctions Polynomiales	42
3.4 Stratégies pour l'optimisation de la ERA	45
3.4.1 Minimiser la Trace de la matrice de Lyapunov	45
3.4.2 Maximiser un ensemble intérieur	46
3.4.3 Chercher une $V(x)$ favorable	46
3.5 Exemples	48
3.6 Conclusion	57
4 Synthèse des lois de commande polynomiales	59
4.1 Introduction	59
4.2 Synthèse de retour d'état	59

4.3	Synthèse d'un retour de sortie	70
4.4	Stratégies d'optimisation	74
4.5	Exemples numériques	75
4.6	Conclusion	81
5	Systèmes avec saturation en entrée	83
5.1	Introduction	83
5.2	Analyse de Stabilité	84
5.3	Synthèse des correcteurs anti-windup	92
5.4	Exemples numériques	103
5.4.1	Analyse de stabilité des systèmes saturants	104
5.4.2	Synthèse des correcteurs anti-windup	108
5.5	Conclusion	111
	Conclusion Générale	113
A	Quelques éléments de calcul tensoriel	117
A.1	Produits de Kronecker	117
B	Matrices utiles	119
B.1	Calcul des matrices	119
B.2	Boucle fermée avec un retour de sortie dynamique	125
C	Donnés des Exemples Numériques	131
C.1	Données des exemples	131
C.1.1	Exemples du chapitre 3	131
C.1.2	Exemples du chapitre 4	132
C.2	Résultats numériques	133
C.2.1	Exemples du chapitre 3	133
C.2.2	Exemples du chapitre 4	138
C.2.3	Exemples du chapitre 5	144

Table des figures

1.1	Ellipsoïde qui “touche” la courbe $\dot{V}(x) = 0$	13
1.2	Estimation petite par rapport à la région d’attraction de l’origine. . .	13
1.3	Ensembles touchant les courbes $\dot{V} = 0$ donnant une ERA pour l’origine : $\mathcal{E}_1$ (vert) et $\mathcal{E}_2$ (rouge)	15
1.4	Ellipsoïde qui “touche” l’ensemble $\dot{V}(x) = 0$	16
3.1	Inclusion de l’ensemble polynomial $\mathcal{E}(P_b)$ dans $\mathcal{E}(P_a)$	40
3.2	Les courbes noires et vertes correspondent à l’ensemble $\{x \in \mathfrak{R}^n; \dot{V}(x) = 0\}$ pour deux fonctions quadratiques $V(x)$ différentes, remarquons que le vecteur $\nabla \dot{V}(x_{eq_i})$ a un angle plus petit avec la droite reliant x_{eq} à l’origine avec la deuxième courbe.	48
3.3	ERAs ellipsoïdales du système (3.56) obtenues en optimisant la fonction $\text{Trace}(P)$	49
3.4	ERAs ellipsoïdales du système (3.56).	50
3.5	Ellipsoïde maximal obtenu avec la Corollaire 3.3	51
3.6	ERA obtenues avec les fonctions de degré 4 et de degré 2.	51
3.7	Ellipsoïde maximal obtenu avec le Corollaire 3.3	52
3.8	ERAs définies par des fonctions de degré 4 obtenues en optimisant la trace et un ensemble intérieur	53
3.9	ERAs définies par des fonctions de degré 6 obtenues en optimisant la trace et un ensemble intérieur	53
3.10	ERAs définies par des fonctions de degré 8 obtenues en optimisant la trace et un ensemble intérieur	54
3.11	Courbe $\dot{V}(x) = 0$ (en noir) et ensemble maximal pour une fonction de Lyapunov de degré 4 (en vert).	54
3.12	Trajectoires du système (3.5) et ERA du point d’équilibre x_{eq2}	55
3.13	Estimation de la Région d’Attraction sous forme ellipsoïdale de l’origine (3.5).	56
4.1	Trajectoires de la boucle ouverte du système (4.72).	76
4.2	Trajectoires de la boucle fermée de (4.72) avec la loi de commande (4.73) et une ERA donnée par une fonction de degré 4.	77

4.3	Trajectoires de la boucle fermée de (4.72) avec la loi de commande (4.74) et une ERA avec une fonction de degré 4.	77
4.4	Estimations de la RA du système (4.75) avec des lois de commande de différents degrés : en rouge $g_u = 1$ (à l'intérieur des deux autres ellipsoïdes), en noir $g_u = 2$ et en bleu $g_u = 3$	79
4.5	Trajectoires de la boucle fermée de (4.75) avec la loi de commande (4.78) et l'estimation de la RA sous forme ellipsoïdale.	79
5.1	Seule la dynamique de x est affectée par $g(x, e, u)$	95
5.2	ERAs ellipsoïdales pour le système (5.87) avec respectivement $u_0 = 1$, $u_0 = 0.5$ et $u_0 = 0.1$	105
5.3	Les courbes rouges indiquent la frontière de l'ensemble $S_0(u_0)$	106
5.4	Trajectoires de la boucle fermée de (5.89) avec l'entrée saturante $u_0 = 1$ pour deux lois de commande données respectivement par (5.90) et (5.91), et les ERA avec les fonctions de degré 4 obtenues dans le chapitre précédent.	107
5.5	ERAs ellipsoïdales pour le système saturant avec respectivement les lois linéaire et quadratique.	107
5.6	Les estimations ellipsoïdales du système saturant avec les lois de commande linéaire et quadratique et des trajectoires avec la loi de commande linéaire.	108
5.7	Trajectoire à partir de la condition initiale $x_0 = [0 \ -0.5]'$	110
5.8	Evolution de la variable x_2 pour le système avec (courbe solide) et sans (courbe pointillée) le correcteur anti-windup.	110
5.9	Evolution de la variable x_2 du système avec (courbe solide) et sans (courbe pointillée) le correcteur anti-windup pour la condition initiale $x_0 = [0 \ 0.31]'$	111

Liste des tableaux

3.1	Pourcentage du volume de la RA obtenu avec l'estimation.	56
4.1	Valeurs de β^{-1} définissant l'ERA $\mathcal{E}(P_l) = \{\lambda \in \Re^{n+n_c}; \lambda' P_l \lambda \leq \beta^{-1}\}$.	81
5.1	Valeurs de c^* définissant une ERA sous la forme (5.92) pour différents seuils de saturation et différentes lois de commande.	108
5.2	Gains du correcteur anti-windup (5.51) pour différents valeurs du terme quadratique a_q	109

Notations

$\Re^{a \times b}$	Ensemble des matrices réelles de dimensions a par b
$\Re^a$	Ensemble des vecteurs réels de dimension a
$\mathcal{E}(P_r)$	Ensemble à l'intérieur d'une courbe de niveau de la fonction polynomiale définie par la matrice P_r
$\partial \mathcal{E}(P_r)$	Ensemble de points sur la frontière de $\mathcal{E}(P_r)$
$\text{diag}\{M_1, \dots, M_t\}$	Matrice bloc-diagonale composée par les blocs M_i
$\text{null}(A)$	Noyau de la matrice A
Σ_r	Ensemble des polynômes somme des carrés de degré r
$\ x\ $	Norme euclidienne du vecteur x
$\propto$	"proportionnel à"
$\det(P)$	Déterminant de la matrice P
$\text{Trace}(P)$	Trace de la matrice P
$I_n \in \Re^{n \times n}$	Matrice identité de dimension n
$0_{a \times b} \in \Re^{a \times b}$	Matrice de zéros avec a lignes et b colonnes
$\lceil n \rceil$	Le plus petit entier plus grand que n
$\lfloor n \rfloor$	Le plus grand entier plus petit que n
$A \otimes B$	Produit de Kronecker entre les matrices A et B
$\dim(M)$	Rang de lignes de la matrice M
$\text{Re}(\lambda)$	La partie réelle de λ

Acronymes

AS	Asymptotiquement Stable
BMI	<i>Bilinear Matrix Inequality</i> (Inégalité Matricielle Bilinéaire)
ERA	Estimation de la Région d'Attraction
IMC	<i>Internal Model Control</i> (Commande par Modèle Interne)
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i> (Inégalité Matricielle Linéaire)
NDI	<i>Nonlinear Dynamics Inversion</i> (Inversion de la Dynamique Non-linéaire)
RA	Région d'Attraction
SDP	<i>Semidefinite Programming</i> (Programmation Sémi-définie)
SOS	<i>Sum of Squares</i> (Somme de Carrés)

Introduction Générale

É, a gente quer valer o nosso amor
A gente quer valer nosso suor

Gonzaguinha, *É*

Afin de satisfaire des cahiers de charges de plus en plus exigeants, l'ingénieur en Automatique doit avoir une connaissance précise des divers phénomènes liés au système dynamique sous étude. La connaissance que l'on peut avoir sur un système se traduit par le niveau de détails du modèle utilisé pour décrire sa dynamique. Dans la plupart des cas, c'est à l'aide d'un modèle que les différentes étapes telles que l'analyse en stabilité, la conception de lois de commande et les simulations numériques sont menées. Pourtant un modèle fidèle au comportement du système peut s'avérer plus complexe et il est donc nécessaire de pondérer entre une modélisation plus riche et les outils pour l'étude de ce modèle à disposition.

De nombreuses avancées sur les méthodes de modélisation, d'analyse et de synthèse pour les systèmes dynamiques non-linéaires ont vu le jour au cours de ces dernières décennies [52]. Les systèmes linéaires sont une classe particulière pour laquelle il existe un panel de méthodes et outils d'analyse et de synthèse bien établis [67]. Classifier un système comme non-linéaire en général implique que les outils conçus pour les systèmes linéaires ne peuvent plus être utilisés. Notons cependant que ces outils peuvent s'appliquer directement, ou être étendus, à certaines classes de systèmes non-linéaires : citons par exemple, les systèmes linéaires avec certains types de non-linéarités isolées (saturations), les non-linéarités pouvant être décrites via les LFT ou via les conditions de secteur [47].

La plupart des problèmes en Automatique peuvent être formulés comme des problèmes d'étude de la stabilité des trajectoires du système considéré. Dans ce cadre, les résultats de la théorie de Lyapunov permettent de vérifier cette propriété sans résoudre les équations différentielles, c'est-à-dire sans calculer explicitement les trajectoires du système [33]. De ce fait ce sont des résultats qui s'appliquent à l'étude des systèmes non-linéaires pour lesquels il peut être généralement difficile de connaître des solutions analytiques. En outre, il existe une diversité de comportements dans le contexte des systèmes non-linéaires, comme par exemple des trajectoires chaotiques,

des cycles limites, des trajectoires qui divergent en temps fini ou la possibilité d'avoir de multiples points d'équilibre [25]. Ainsi la stabilité des trajectoires peut être une propriété satisfaite seulement de façon locale, c'est-à-dire dans une région autour d'un point d'équilibre. Nous pouvons donc appliquer les résultats de Lyapunov pour calculer des ensembles invariants et contractifs, définissant ainsi des régions où la stabilité asymptotique est garantie [5]. Plus rarement, lorsqu'il y a un seul point d'équilibre, la stabilité globale des trajectoires du système peut être satisfaite [47].

Pour des classes particulières de systèmes non-linéaires, il est possible de calculer des lois de commande qui garantissent la stabilité des trajectoires de façon globale. Nous avons par exemple, dans le cadre de stabilité au sens de Lyapunov, la méthode de backstepping [66], qui s'applique aux systèmes sous forme triangulaire stricte. Des lois de commande linéaires peuvent garantir la stabilité des systèmes où les non-linéarités sont bornées par des contraintes linéaires, et la boucle fermée du système sans les termes non-linéaires est un système passif [47].

Récemment, le problème de vérifier la positivité d'un polynôme a été abordé avec des outils de programmation sémi-définie si ce polynôme s'écrit comme une somme de carrés [63]. Ce résultat a permis l'étude des systèmes polynomiaux de façon numérique [42]. Les systèmes polynomiaux permettent de représenter plusieurs types de systèmes réels, notamment certains systèmes biologiques, chimiques ou électriques. Ces systèmes peuvent aussi être obtenus par une approximation de systèmes décrits par des fonctions analytiques [10]. Des fonctions de Lyapunov polynomiales, récemment utilisées dans le contexte d'analyse de robustesse face à des incertitudes paramétriques [6], [13], [35] peuvent s'avérer adaptées aux systèmes polynomiaux. Dans le contexte de synthèse de lois de commande pour des systèmes polynomiaux, quelques méthodes numériques permettent le calcul de lois de commande garantissant la stabilité locale de la boucle fermée [93].

Une caractéristique omniprésente dans l'étude des systèmes de contrôle est la présence des limites dans l'action de la commande. Des contraintes physiques, technologiques ou imposées par des consignes de sécurité se traduisent par des limitations sur les entrées, les états ou les sorties du système, conduisant naturellement à prendre en compte les saturations de ces variables [45]. Des techniques pour traiter ces non-linéarités sont maintenant bien connues pour les systèmes linéaires mais encore peu développées pour l'étude des systèmes non-linéaires [70]. Il peut s'avérer qu'une loi de commande globalement stabilisante, conçue sans tenir compte de la saturation en entrée, ne garantit la stabilité que localement si le système sature en entrée. Il est alors souhaitable de disposer d'outils pour la synthèse de lois de commande saturantes ou pour l'analyse des systèmes saturants afin d'évaluer l'apport des lois de commande non-linéaires vis-à-vis des saturations. Une autre approche envisageable pour traiter les saturations est l'introduction des correcteurs anti-windup [27], qui n'interviennent que lorsque l'actionneur sature. Ces correcteurs sont introduits après le calcul d'un contrôleur, en considérant le système sans les saturations.

Dans ce contexte, nous nous sommes intéressés à l'étude des systèmes polynomiaux saturants. En effet, si des résultats pour l'analyse en stabilité des systèmes polynomiaux et pour l'analyse des systèmes linéaires saturants en entrée sont relativement bien développés, peu d'études sur les systèmes polynomiaux saturants ont été menés. En outre, des méthodes existantes pour la synthèse de lois de commande polynomiales garantissant la stabilité locale requièrent une définition préalable de la région de stabilité. Or, un des objectifs de la synthèse peut être l'optimisation de cette région, c'est pourquoi nous cherchons une méthode de synthèse pour laquelle cette région est une des variables du problème. L'objectif poursuivi est donc l'obtention de méthodes numériques, basés sur des outils de programmation semi-définie pour l'analyse en stabilité et la synthèse de lois de commande polynomiales ayant pour objectif l'optimisation des estimations de la région d'attraction. La présentation des résultats s'organise de la manière suivante.

Une revue bibliographique constitue le premier chapitre où quelques concepts fondamentaux pour l'étude du problème de stabilité des trajectoires de systèmes non-linéaires sont présentés. Des méthodes pour la définition de la région d'attraction de points d'équilibre stables de systèmes non-linéaires sont rappelées, notamment celles permettant d'obtenir des solutions en utilisant des outils de programmation semi-définie.

Le chapitre 2 introduit les représentations des systèmes étudiés dans ce manuscrit, à savoir des systèmes polynomiaux autonomes et des systèmes commandés par des lois polynomiales possiblement saturantes. Ce chapitre présente notamment les bases des monômes homogènes et non-homogènes, et des matrices qui établissent les liens entre les représentations des systèmes polynomiaux décrits dans ces différentes bases.

Dans le chapitre 3 nous présentons des résultats pour l'analyse en stabilité des systèmes polynomiaux autonomes. Un résultat permettant de tester la positivité d'un polynôme dans une région autour de l'origine est obtenu à partir d'une inégalité valable localement. Ce résultat est ensuite appliqué pour obtenir un ensemble invariant et contractif, définissant une estimation de la région d'attraction d'un point d'équilibre stable d'un système polynomial. Quelques méthodes pour l'optimisation de ces estimations, basées sur différentes mesures de la taille des ensembles polynomiaux, sont aussi présentées.

Par la suite, dans le chapitre 4 des méthodes permettant la synthèse de lois de commande polynomiales sont présentées. En nous inspirant des techniques pour la synthèse des gains de retour d'état pour des systèmes linéaires, nous proposons une méthode pour le calcul des gains de retour d'état définissant une loi de commande polynomiale. Nous présentons le changement de coordonnées qui rend possible un changement de variables d'optimisation éliminant le produit entre les éléments d'une matrice de Lyapunov et ceux de la matrice de gain. La condition permet alors de calculer simultanément les gains et la région d'attraction associée à l'origine. De cette façon il est possible de formuler un problème d'optimisation permettant le calcul de

gains afin d'élargir la région d'attraction de l'origine. Une méthode pour calculer des gains polynomiaux afin d'élargir l'ERA d'un système en boucle fermée avec une loi de commande de retour de sortie est également présentée.

La prise en compte des saturations en entrée est à l'origine des résultats du chapitre 5. L'analyse en stabilité des systèmes dont on permet la saturation est construite avec des fonctions de Lyapunov polynomiales. L'incorporation des saturations dans les conditions de stabilité est obtenue à partir d'une généralisation d'une condition de secteur modifiée (maintenant bien connue dans le contexte des systèmes linéaires saturés) pour des fonctions polynomiales. Un résultat pour la synthèse des lois de commande polynomiales est présenté dans le cadre du calcul d'un correcteur anti-windup pour un système polynomial de degré 2.

Le manuscrit se termine avec des observations sur l'ensemble des résultats obtenus et décrit de possibles directions de recherche.

Chapitre 1

État de l'art

1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à une synthèse bibliographique de quelques problèmes liés aux systèmes non-linéaires, plus précisément ceux dédiés à l'étude des régions d'attraction des points d'équilibre stables, à l'obtention de lois de commande stabilisantes et à l'étude des entrées saturantes. Quelques théorèmes fondamentaux, nécessaires pour une bonne compréhension des outils présentés, sont rappelés sans donner les démonstrations. Celles-ci peuvent être trouvées dans les références citées tout au long du chapitre. Il est cependant difficile d'aborder les systèmes non-linéaires sans introduire les concepts pour les systèmes linéaires. Nous décrivons ainsi certaines propriétés des systèmes linéaires pour mieux présenter les problèmes traités. Le texte ne se prétend pas exhaustif de sorte que les références choisies le sont pour mettre en avant les derniers progrès dans le domaine ainsi que pour aider à souligner les atouts et les inconvénients des méthodes développées jusqu'à présent.

1.2 Concepts Fondamentaux

L'étude des propriétés d'un système dynamique passe d'abord par le choix du modèle qui le représente. C'est le moment où nous faisons face au dilemme d'avoir un modèle simple auquel un ensemble de techniques génériques et bien établies peuvent s'appliquer, ou avoir un modèle plus complexe, et de ce fait plus riche, au prix de disposer de moins de techniques fiables et de devoir effectuer des analyses ad hoc.

La description d'un système dynamique par des équations différentielles linéaires est sans doute la représentation la plus simple possible et pour laquelle nous avons le plus de méthodes disponibles pour l'étude des propriétés du système. Malgré ses limitations, l'étude d'un modèle linéaire est intéressante dans la mesure où nous avons des garanties locales, c'est-à-dire que les propriétés du système linéarisé seront

valables dans la région où le modèle est représentatif de la dynamique du système.

Le modèle n'est qu'un outil pour étudier les propriétés d'un système, comme par exemple la stabilité des trajectoires. Comment vérifier si les trajectoires du système sont stables sans résoudre les équations différentielles décrivant le système? Nous pouvons certainement affirmer que ce sont les résultats de Lyapunov [56] qui ont guidé la grande majorité des réponses à cette question. Formulées comme des conditions génériques, à savoir applicables à toute classe de systèmes dynamiques, les travaux de Lyapunov ont eu, et ont toujours, une grande influence sur les travaux en théorie de la commande.

Comme souligné précédemment, pour les systèmes linéaires de dimension finie nous avons une multitude de méthodes pour l'étude de la stabilité et la synthèse de contrôleurs et notamment basées sur la théorie de Lyapunov.

Mettre en évidence les limites des modèles linéaires et les outils d'analyse associés est peut-être la meilleure façon d'introduire la classe des systèmes non-linéaires. Un modèle linéaire peut représenter correctement la dynamique d'un système autour d'un point d'équilibre. Afin d'obtenir une représentation plus fidèle au comportement du système réel dans des domaines plus grands de l'espace d'état nous devons certainement introduire des termes non-linéaires dans le modèle. Par conséquent nous ne pouvons plus utiliser les mêmes techniques et le développement de méthodes numériques adaptées à ces systèmes devient nécessaire.

Nous allons décrire des systèmes non-linéaires invariants dans le temps, par un modèle déterministe :

$$\dot{x}(t) = f(x) + G(x)u(x) \quad (1.1)$$

où $f(x) : D \rightarrow Im$ est un champs de vecteur générique avec des éléments possiblement non-différentiables et $D \in \mathfrak{R}^n$, $Im \in \mathfrak{R}^n$ sont respectivement le domaine et l'image de $f(x)$. $G(x) : D_G \rightarrow Im_G$ est une matrice générique avec des éléments possiblement non-différentiables et $D_G \in \mathfrak{R}^n$, $Im_G \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ sont respectivement le domaine et l'image de la matrice $G(x)$, $u(x) : D_u \rightarrow Im_u$ est la loi de commande et $D_u \in \mathfrak{R}^n$, $Im_u \in \mathfrak{R}^m$ sont respectivement le domaine et l'image de $u(x)$. Le système est dit autonome si $u(x) = 0$. Afin de présenter les techniques pour l'étude de (1.1) nous présentons quelques définitions [47].

Définition 1.1 (Solution). *Considérons un état initial, $x(0) = x_0$. La solution de (1.1) avec $u(x) = 0$, est la trajectoire $s(t, x_0)$ qui satisfait*

$$\frac{d}{dt}s(t, x_0) = f(s(t, x_0)) \quad (1.2)$$

Des solutions auxquelles nous nous intéressons sont des points d'équilibre.

Définition 1.2 (Point d'équilibre). *Tout point x_e satisfaisant*

$$\dot{x}_e = f(x_e) = 0 \quad (1.3)$$

est un point d'équilibre du système (1.1).

Nous pouvons maintenant définir le concept de stabilité d'un point d'équilibre :

Définition 1.3 (Stabilité). *Un point d'équilibre de l'équation (1.1) est stable si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon, \forall t \geq 0 \quad (1.4)$$

Le point est dit asymptotiquement stable s'il est stable et δ peut être choisi tel que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow x_e \quad (1.5)$$

La satisfaction de l'expression $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow x_e$ définit que le point d'équilibre est attractif. Ainsi un point est asymptotiquement stable (AS) s'il est stable et attractif.

Ayant défini la stabilité asymptotique d'un point d'équilibre nous pouvons présenter la définition de la région d'attraction, associée à un point d'équilibre AS.

Définition 1.4 (Région d'attraction). *Supposons que x_e est un point d'équilibre attractif pour le système. La région d'attraction (ou domaine d'attraction) $\Omega(x_e)$ est définie par*

$$\Omega(x_e) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n; s(t, x_0) \rightarrow x_e \text{ quand } t \rightarrow \infty\} \quad (1.6)$$

En d'autres termes il s'agit de l'ensemble des points à partir desquels les trajectoires convergent au point d'équilibre x_e . De ce fait, la région d'attraction (RA) présente l'intérêt pratique de définir une région d'opération autour d'un point d'équilibre et est le point de départ pour la définition des classes de perturbation pour lesquelles nous avons des garanties que les trajectoires perturbées convergent au point d'équilibre [17], [47]. Nous disons que la stabilité est globale si $\Omega(x_e) = \mathbb{R}^n$. Quelques propriétés de cet ensemble peuvent être obtenues à partir de quelques notions de topologie [47], [88] :

Lemme 1.1. *Supposons que x_e est un point d'équilibre du système (1.1). Alors $\Omega(x_e)$ est ouvert, connexe et invariant. La frontière de $\Omega(x_e)$ est formée par des trajectoires.*

Dans le cas des systèmes linéaires, on s'intéresse en général seulement à l'origine comme point d'équilibre. Ce sera d'ailleurs le seul point d'équilibre du système lorsqu'il est asymptotiquement stable. Alors si celle-ci est stable nous savons que la RA correspond à tout l'espace. C'est pourquoi pour des systèmes linéaires nous parlons souvent de stabilité du système, au lieu de stabilité des trajectoires.

En revanche, pour des systèmes non-linéaires nous n'avons la stabilité globale que pour des cas particuliers. Alors pour des points d'équilibre AS une caractérisation de la RA s'impose. Cependant une représentation analytique de cet ensemble peut

rarement être obtenue [33]. C'est pourquoi les techniques pour l'estimation de la région d'attraction (ERA) s'avèrent nécessaires. En particulier nous voulons des ERA qui soient des ensembles représentés sous une forme fermée, dans le sens où un test simple (avec peu de calculs) nous permet d'affirmer si un point quelconque appartient ou pas à la ERA. Notons que toute région $\mathcal{R}$ qui contient le point d'équilibre, considéré désormais comme l'origine ($f(0) = 0$), telle que $\mathcal{R} \subset \Omega(0)$ est une estimation de la région d'attraction de ce point. Ces ensembles ne doivent pas forcément être des régions de forme simple, car il est peu probable que la vraie région le soit [28]. Nous sommes cependant souvent contraints à chercher des formes simples, telles qu'un ellipsoïde, étant donné les outils numériques disponibles.

Suivant une classification des méthodes pour l'estimation de la RA proposée par [28], nous pouvons distinguer les méthodes de Lyapunov et les méthodes non-Lyapunov. Pour présenter les méthodes basées sur les résultats de Lyapunov nous rappelons d'abord les deux théorèmes de Lyapunov [47] :

Théorème 1.1 (Méthode indirecte de Lyapunov). *Soit x_e un point d'équilibre pour le système (1.1) où $f(x)$ est continuellement différentiable et D est un voisinage de x_e . Soit*

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x)|_{x_e} \quad (1.7)$$

Alors

1. x_e est asymptotiquement stable si $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ pour toutes les valeurs propres de A
2. x_e est instable si $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ pour au moins une valeur propre de A

Ce théorème formule une condition suffisante pour la stabilité asymptotique de l'origine basée sur la linéarisation du système. Ainsi à un système avec une partie linéaire stable nous pouvons associer une RA. La plupart des méthodes développées pour l'estimation de la RA tiennent compte de ce résultat car exigent que la matrice Jacobienne de $f(x)$ soit Hurwitz. Pour les cas où nous avons les valeurs propres de la matrice A à partie réelle négative ou égale à zéro, ce sont des termes non-linéaires qui pourront définir si l'origine est asymptotiquement stable. Le résultat suivant pose le problème de la définition de la stabilité d'un point d'équilibre comme un problème d'existence d'une fonction satisfaisant certaines contraintes.

Théorème 1.2 (Méthode directe de Lyapunov). *Soient $x_e = 0$ un point d'équilibre pour le système (1.1) et $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine qui contient l'origine. Soit $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continuellement différentiable telle que*

$$V(0) = 0 \text{ et } V(x) > 0 \text{ dans } D - \{0\} \quad (1.8)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ dans } D \quad (1.9)$$

Alors, $x_e = 0$ est stable. En outre, si

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ dans } D - \{0\} \quad (1.10)$$

alors $x_e = 0$ est asymptotiquement stable.

Il s'agit sans doute de la méthode la plus utilisée pour l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques. À la différence de la méthode indirecte, elle ne requiert pas que la partie linéaire soit stable. La stabilité (asymptotique) du point d'équilibre est garantie par l'existence d'une fonction $V(x)$ satisfaisant (1.8)-(1.9) (ou (1.8)-(1.10)). Pourtant la classe des fonctions à laquelle $V(x)$ doit appartenir n'est pas imposée.

Nous savons qu'un point d'équilibre AS est associé à une région d'attraction, alors s'il existe une fonction $V(x)$ satisfaisant (1.8)-(1.10) nous pouvons trouver des estimations de cet ensemble. Le fait d'avoir seulement (1.10) satisfaite ne garantit pas que l'ensemble D est une ERA car le fait que $\dot{V}(s) < 0$ dans D ne garantit pas que les trajectoires ne sortent pas de l'ensemble D . Ceci est garanti seulement si D est une région d'invariance. Rappelons qu'un ensemble M est dit positivement invariant si

$$x_0 \in M \Rightarrow x(t) \in M, \forall t \geq 0 \quad (1.11)$$

Ainsi une estimation de la RA peut être définie par la fonction de Lyapunov $V(x)$, plus précisément par l'ensemble à l'intérieur d'une courbe de niveau de cette fonction. De ce fait les ERA obtenues à partir du théorème 1.2 doivent être aussi des ensembles invariants [5]. Les résultats de LaSalle [54] et de Zubov [94] permettent de trouver une fonction de Lyapunov et la courbe de niveau qui correspond à une ERA.

La plupart des méthodes pour l'estimation de la RA sont basées sur le résultat suivant :

Théorème 1.3 (Principe d'Invariance de LaSalle). *Soit $\Omega \subset D$ un ensemble compact positivement invariant par rapport au système (1.1). Soit $V(x) : D \rightarrow \mathfrak{R}$ une fonction continuellement différentiable telle que $\dot{V}(x) \leq 0$ dans Ω . Soit E l'ensemble de tous les points dans Ω où $\dot{V}(x) = 0$. Soit M l'ensemble invariant le plus grand inclus dans E . Alors toute solution initialisée dans Ω converge vers M quand $t \rightarrow \infty$.*

Bien que ce théorème rende possible l'analyse de stabilité avec des fonctions de Lyapunov semi-définies positives, nous allons nous concentrer sur le cas où les fonctions $V(x)$ sont définies positives. :

Si les inégalités

$$V(x) > 0, \forall x \in \mathfrak{R}^n - \{0\} \quad (1.12)$$

$$\dot{V}(x) < 0, \forall x \in \{x \in \mathfrak{R}^n; V(x) \leq c\} \quad (1.13)$$

sont satisfaites, alors nous avons $E = \{0\}$, $M = \{0\}$ et l'ensemble $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; V(x) \leq c\}$ est l'ensemble invariant qui définit l'ERA.

D'autre part nous avons la méthode de Zubov [94] qui impose une expression pour $\dot{V}(x)$ dans un ensemble S :

Théorème 1.4 (Méthode de Zubov). *Soient deux fonctions scalaires $V(x)$ et $h(x)$ avec les propriétés suivantes :*

1. $V(x)$ est continue et définie positive dans un ensemble S et satisfait dans cet ensemble l'inégalité $0 < V(x) < 1$, $x \neq 0$;
2. $h(x)$ est définie pour tout x fini, $h(0) = 0$, h est continue et positive pour $x \neq 0$;
3. pour $x \in S$ nous avons

$$\dot{V}(x) = -h(x)(1 - V(x))\sqrt{1 + \|f(x)\|^2} \quad (1.14)$$

4. si $x \rightarrow \partial S$, où ∂S est la frontière de l'ensemble S , ou si $\|x\| \rightarrow \infty$ dans le cas où S est non-borné, nous avons $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = 1$

Alors S est le domaine d'attraction de l'origine du système $\dot{x} = f(x)$.

Autrement dit, une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité asymptotique de l'origine pour toute condition initiale dans l'ensemble S est l'existence d'une fonction de Lyapunov pour (1.1) dans S . Notons qu'un inconvénient de cette méthode est l'exigence de la différentiabilité du champs des vecteurs, car la fonction de Lyapunov est obtenue en résolvant l'équation à dérivées partielles (1.14). Alors nous ne pouvons pas traiter des systèmes avec des non-linéarités telles que backlash, saturation ou hystérésis.

À cause de ces difficultés peu de résultats ont été proposés pour obtenir des ERA de façon systématique avec le Théorème 1.4. Dans [86] une simplification des conditions a permis l'obtention des ERA décrites à partir de fonctions de Lyapunov rationnelles. Plus récemment, des fonctions avec des incertitudes paramétriques afin d'obtenir des ERA robustes ont été étudiées dans [8].

1.3 Solutions Numériques

Notons que ni le Théorème 1.3 ni le Théorème 1.4 n'imposent la classe des fonctions à laquelle $V(x)$ doit appartenir. Restreindre cette fonction à une classe spécifique se traduit par des restrictions quant aux formes possibles des courbes de niveau de $V(x)$ et par conséquent des ERA. Pour un système linéaire nous savons qu'une fonction quadratique est suffisante pour vérifier la stabilité asymptotique de l'origine. De ce fait pour des systèmes non-linéaires qui possèdent une linéarisation stable nous

pouvons toujours utiliser une fonction quadratique pour certifier la stabilité asymptotique localement. Afin d'autoriser des formes mieux adaptées aux trajectoires des systèmes non-linéaires, d'autres fonctions, telles que des fonctions polynomiales positives ont aussi été prises en compte pour l'estimation de la RA. D'ailleurs l'existence d'une fonction de Lyapunov sous cette forme est garantie pour certaines classes de systèmes [64]. En effet, les travaux de Zubov [33], avaient déjà proposé des solutions aproximées pour (1.9) sous la forme

$$V(x) = V_2(x) + V_3(x) + V_4(x) + \dots \quad (1.15)$$

où V_i indique une fonction polynomiale de degré i .

Les résultats utilisant des fonctions quadratiques pour l'obtention des ERA sont nombreux, voir par exemple : [1], [2], [15], [24], [26], [29], [34], [53], [74], [75], [76], [77], [78], [90], qui n'est pas une liste exhaustive. Des fonctions polynomiales décrites par des sommes de carrés (SOS de l'anglais sum-of-squares) ont été proposées par [12], [75], [77], [78], [80]. Ces fonctions ont connu un développement notable à partir des résultats de [91] où elles ont été utilisées dans le contexte d'analyse robuste d'un système linéaire. Parmi d'autres fonctions nous pouvons citer des fonctions quadratiques dépendantes des paramètres [10], [11], une interpolation des fonctions quadratiques non-centrées à l'origine [43], des fonctions rationnelles [21], [31], [81], [86] ou des fonctions polynomiales par morceaux [68].

Bien que nous puissions trouver des fonctions mieux adaptées à chaque système, c'est décidément la possibilité de traiter le problème de façon numérique qui va guider le choix de la classe des fonctions de Lyapunov qui sera utilisée pour estimer la RA.

L'utilisation des méthodes numériques, notamment avec des logiciels d'optimisation semi-définie, pour rendre possible l'analyse des systèmes non-linéaires de façon systématique comme dans le cas des systèmes linéaires s'est beaucoup développée ces dernières années. Ces méthodes s'avèrent avantageuses vis-à-vis de l'étude des systèmes d'ordre élevé.

Le développement des logiciels de programmation semi-définie, conçus pour résoudre des problèmes d'optimisation avec des contraintes données par des matrices semi-définies, et donc définissant des ensembles convexes, a sans doute orienté plusieurs recherches en théorie de la commande. Dans le cadre des systèmes linéaires, la formulation avec des inégalités matricielles linéaires a permis une résolution efficace de plusieurs problèmes d'analyse et de synthèse, en particulier l'analyse de robustesse des systèmes linéaires [7]. L'extension pour traiter des systèmes non-linéaires est apparue naturellement. Dans le contexte des estimations de la RA nous pouvons citer les travaux de [26], [74], [30] comme les premiers à proposer des solutions avec des LMIs. Par la suite la plupart des travaux ont suivi cette ligne, c'est-à-dire ont cherché à formuler le problème d'estimer une RA comme un problème d'optimisation sujet à des contraintes données par des LMIs.

Tandis que les travaux proposant des solutions numériques réalisés auparavant

étaient spécifiques pour des systèmes de dimension réduite [28], [29] ou avec de sérieuses limitations dues à la complexité numérique croissante avec l'ordre du système, la formulation comme un problème de Programmation Sémi-Définie (SDP de l'anglais *Semi-Definite Programming*) est capable de traiter des systèmes d'ordre plus élevé. Bien sûr, des limites de calcul sont toujours présentes mais nous pouvons estimer a priori les limites en fonction du nombre de variables et de contraintes ou prévoir l'effort de calcul une fois le problème formulé.

Plus récemment [63] a démontré que tester la positivité d'un polynôme SOS est un problème de SDP linéaire, c'est-à-dire correspond à un test de positivité d'une LMI. Ceci a permis notamment la formulation du problème d'analyse de stabilité avec des fonctions polynomiales comme un problème SDP.

Lorsqu'il n'est pas possible de formuler le problème sous contraintes LMI, des stratégies pour résoudre les problèmes qui présentent des produits entre variables de décision ont été proposées : citons en particulier l'utilisation des recherches alternées où une des variables est fixée et l'optimisation est réalisée dans l'espace des autres variables de décision qui sont ensuite fixées pour rendre possible l'optimisation dans l'espace des variables préalablement fixées. Une relative maturité des techniques d'optimisation non-convexe a permis le développement de logiciels pour résoudre des contraintes bilinéaires (BMIs, bilinear matrix inequalities) [48]. Dans la plupart des cas, ce problème n'est pas convexe et donc la solution peut être fortement dépendante de l'initialisation des variables de décision.

Dans le cadre de l'estimation de la RA, une solution pour éviter le produit des variables consiste à imposer la fonction de Lyapunov. C'est l'approche adoptée dans [10], [11], [12], [15], [24], [31], [32], [34], [44], [53], [74], [75], [76], imposant des fonctions quadratiques ; dans [32], [44] imposant des fonctions polynomiales et dans [31] où des fonctions rationnelles sont fixées. Pour une fonction vérifiant la stabilité asymptotique autour de l'origine, nous cherchons alors le plus grand ensemble satisfaisant (1.12)-(1.13), c'est-à-dire, nous cherchons la valeur c^* satisfaisant

$$\mathcal{E}^* = \{x \in \mathfrak{R}^n; V(x) \leq c^*\} \quad (1.16)$$

$$c^* = \inf_{x \in \mathfrak{R}^n} V(x) \text{ tel que } \dot{V}(x) = 0 \quad (1.17)$$

Malgré les conditions convexes obtenues, imposer la fonction de Lyapunov peut présenter quelques inconvénients. Une fois choisie, la fonction qui vérifie les critères de Lyapunov pour le voisinage du point d'équilibre, nous n'avons pas de garantie que la taille de la ERA optimale $\mathcal{E}^*$ soit comparable à la RA. Dans [11], l'auteur a ainsi souligné que le choix de la fonction de Lyapunov reste un problème ouvert. L'exemple ci-dessous présente ce cas de figure.

Exemple 1.1 Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_2 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -3x_1 - x_2 + 0.5x_1x_2 \end{cases}$$

La fonction $V(x) = x'Px$ avec

$$P = \begin{bmatrix} 9.72 & 2.16 \\ 2.16 & 10.8 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

permet de prouver la stabilité locale et l'ensemble $\mathcal{E}(P) = \{x \in \mathbb{R}^2; x'Px \leq 1\}$ est une ERA optimale comme nous le voyons dans la figure 1.1.

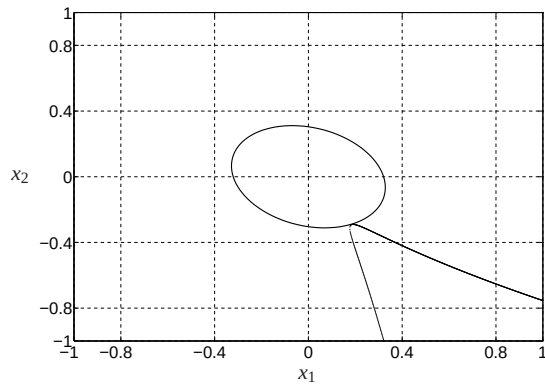


Figure 1.1 – Ellipsoïde qui “touche” la courbe $\dot{V}(x) = 0$.

Pourtant cette ERA est petite par rapport à la RA de l'origine comme nous pouvons le constater dans la figure 1.2.

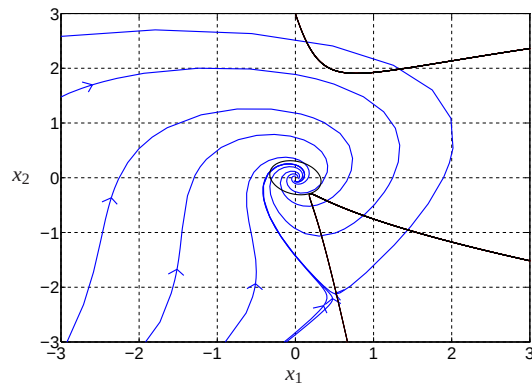


Figure 1.2 – Estimation petite par rapport à la région d'attraction de l'origine.

D'autre part, parmi les méthodes utilisant une fonction de Lyapunov variable nous pouvons mettre en avant des formulations faisant apparaître les variables d'état

dans les contraintes matricielles [1], [2], [19], [21], [23], [26], [81], [90]. Dans ce cas, nous obtenons des inégalités matricielles qui dépendent des variables d'état de façon linéaire. La stratégie adoptée est de garantir que les contraintes sont satisfaites dans une région convexe qui contient l'origine et ensuite de trouver le plus grand ensemble invariant à l'intérieur de cette région. Le problème majeur devient alors le choix de la région convexe, qui est souvent un ensemble polyédral. Ceci permet de formuler le problème avec un nombre fini d'inégalités devant être satisfaites en chacun des sommets d'un polytope, et d'un ensemble d'inégalités garantissant l'inclusion d'une courbe de niveau de la fonction de Lyapunov dans cette région.

Les inconvénients de cette approche sont la croissance exponentielle des points à tester lorsque l'ordre du système augmente, le besoin d'utiliser les deux représentations pour l'ensemble polyédral, à savoir ses sommets et ses facettes, et l'imposition de la région dans laquelle la ERA devra être incluse. Or, ce n'est que pour des cas où nous connaissons une forme approximée de la RA que l'on pourrait choisir la forme de l'ensemble polyédral la plus adéquate afin de favoriser l'obtention d'une ERA de taille satisfaisante. Dans certains cas nous pouvons nous contenter de définir simplement des directions particulières suivant lesquelles nous aimerions optimiser l'estimation [2].

Une autre formulation utilisant des fonctions de Lyapunov variables tient compte des résultats de [63]. À partir d'une généralisation de la *S*-procédure des fonctions polynomiales variables peuvent être utilisées [80]. Cependant des conditions ainsi formulées présentent des produits entre les variables de décision. Ceci n'empêche pas l'obtention de résultats satisfaisants avec des stratégies de recherche alternée [15] ou des logiciels pour résoudre des BMIs [80].

Lorsque nous avons des fonctions de Lyapunov variables, il est nécessaire de proposer un critère d'optimisation pour maximiser la taille de la ERA. La question qui se pose est comment mesurer la taille d'une ERA ? Prenons le cas d'un ellipsoïde $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n; x^T P x \leq \alpha\}$. Son volume satisfait

$$\text{vol}(\mathcal{E}) \propto \sqrt{\frac{\alpha^n}{\det(P)}} \quad (1.19)$$

Pour un α fixé nous pourrions minimiser le déterminant de la matrice P afin d'obtenir un volume optimal. Pourtant, il ne s'agit pas d'un problème d'optimisation convexe car la fonction déterminant n'est pas convexe en P . De ce fait, le problème est résolu de façon approximative en résolvant

$$\min \text{Trace}(P) \quad (1.20)$$

L'exemple suivant montre un cas où une région avec un volume plus petit peut être plus significative autour du point d'équilibre qu'une région avec un volume plus grand

Exemple 1.2 Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 4x_2^2 - (x_1^2 - 3)^2 x_2 \end{cases} \quad (1.21)$$

Les ensembles $\mathcal{E}_1 = \{x \in \mathbb{R}^2; x'P_1x \leq 1\}$ et $\mathcal{E}_2 = \{x \in \mathbb{R}^2; x'P_2x \leq 1\}$ avec

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.002 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}; P_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

sont des estimations de la région d'attraction de l'origine de (1.21). Nous pouvons visualiser ces ensembles avec la courbe $\dot{V}(x) = 0$ dans la figure 1.3.

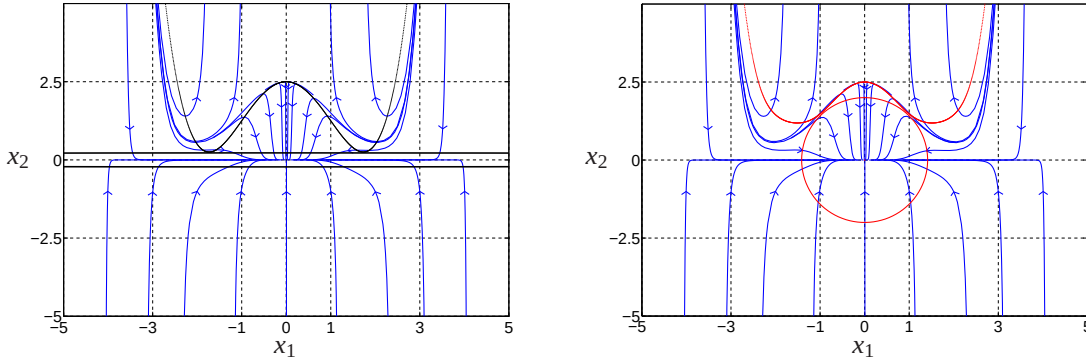


Figure 1.3 – Ensembles touchant les courbes $\dot{V} = 0$ donnant une ERA pour l'origine : $\mathcal{E}_1$ (vert) et $\mathcal{E}_2$ (rouge) .

Nous obtenons que le volume (dans ce cas la surface) des régions obéit à la relation $\text{vol}(\mathcal{E}_1) = 2.5\text{vol}(\mathcal{E}_2)$, pourtant autour de l'origine nous pouvons voir que l'ensemble $\mathcal{E}_2$ estime mieux la RA. La figure 1.4 présente les deux ensembles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$.

Faute d'expressions analytiques du volume d'une région polynomiale, la stratégie d'optimisation adoptée est l'élargissement d'un ensemble intérieur à la ERA. Ceci peut se faire en définissant des directions prioritaires [2], [26], [78] ou en élargissant un ensemble défini par une courbe de niveau d'une fonction de Lyapunov définie positive [42], [68], [80]. Le critère consistant à minimiser la trace de la matrice de Lyapunov polynomiale a été utilisée dans [12], [18] et [20].

Des méthodes d'estimation de la RA autres que celles utilisant les Théorèmes de Lyapunov exploitent les propriétés topologiques de la frontière de la RA [17], [16]. Une représentation numérique de cet ensemble peut être obtenue à partir de l'intégration à temps inversé de l'équation différentielle. Pour autant son application demeure restreinte à des systèmes d'ordre petit non seulement à cause des maillages nécessaires pour définir des points de départ pour l'intégration [24], [28], [87], [49], mais aussi de par la complexité des comportements qui peuvent apparaître avec un

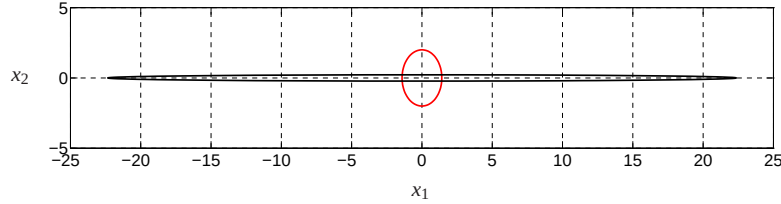


Figure 1.4 – Ellipsoïde qui “touche” l’ensemble $\dot{V}(x) = 0$.

ordre croissant et de ce fait l’impossibilité d’exprimer la frontière de la RA avec un nombre fini de trajectoires comme pour des systèmes d’ordre $n = 2$. Notons que ces approches ont été peu poursuivies après l’apparition des logiciels de SDP.

Néanmoins des informations sur des trajectoires convergentes à l’origine peuvent être combinées avec des approches Lyapunov. Nous pouvons citer l’élargissement des RA données par des courbes de niveau d’une fonction de Lyapunov [55], ou chercher des fonctions de Lyapunov garantissant l’invariance d’une région contenant un ensemble de trajectoires convergentes [80], [43].

Le calcul d’une ERA pour un modèle nominal peut être seulement le point de départ pour une analyse plus substantielle, à savoir une analyse à laquelle plus de critères sont rajoutés. La prise en compte des incertitudes paramétriques garantissant une estimation de la région d’attraction robuste (ERAR) constitue l’objet d’étude de [10], [20], [21], [81] où les paramètres incertains sont considérés à l’intérieur d’un polytope. Dans [19], les auteurs tiennent compte des retards dans les variables. L’incorporation de critères de performance est à l’origine des conditions pour calculer la région dans laquelle les trajectoires donnent des sorties bornées en énergie [26], [80], [79] ou des ensembles dans lesquels les trajectoires restent pour une entrée d’énergie finie.

1.4 Systèmes polynomiaux

La classe des systèmes non-linéaires la plus étudiée dans le contexte de l'estimation de la RA est certainement celle définie par des champs de vecteurs polynomiaux

$$f(x) = Ax + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots + A_gx^g \quad (1.23)$$

où x^i est le vecteur contenant les monômes de degré i . Une séparation de cette classe de celle des systèmes non-linéaires plus généraux est mise en évidence lorsque les auteurs traitent des systèmes non-polynomiaux [12], [23] [21], [28], [81], [12], [62]. Dans ce cas ce sont des approches considérant des fonctions analytiques approximées par des systèmes polynomiaux [59] ou des bornes pour l'influence de ces termes dans le cas contraire [12]. Une classe beaucoup étudiée est celle des systèmes rationnels [26] c'est-à-dire des système où $f(x)$ est donnée par la division de deux polynômes.

Plusieurs systèmes peuvent être représentés par l'équation (1.23), des dynamiques de population [36], [60], [37] des systèmes électriques [46], mécaniques [3], électromécaniques [58] ou chimiques [57]. Le plus simple des systèmes s'écrivant comme (1.23), sont les systèmes quadratiques. Cette classe est même étudiée séparément étant donnée leur applicabilité à des systèmes réels [2], [49], [50].

À la différence des systèmes linéaires, (1.23) peut présenter plusieurs racines isolées. Bien que le calcul de ces racines s'avère lourd numériquement, l'obtention du modèle autour d'un point d'équilibre est facile si ce point d'équilibre est connu. Le système associé à cette équation peut également présenter des trajectoires périodiques, un comportement chaotique et des trajectoires divergentes en temps fini. Dans [25] une liste d'exemples de systèmes polynomiaux et les particularités de ces solutions est présentée.

Le choix des fonction de Lyapunov pour des systèmes polynomiaux n'est pas non plus bien établi. Certes si la matrice A est Hurwitz nous pouvons utiliser des fonctions quadratiques afin d'estimer la RA. Dans la suite du manuscrit nous verrons comment aborder l'analyse en stabilité et le choix de la fonction de Lyapunov pour y parvenir.

1.4.1 Méthodes de synthèse

Si l'origine n'est pas un point d'équilibre stable, nous nous intéressons au calcul d'une loi de commande $u(x)$ pour stabiliser, au moins localement, les trajectoires du système (1.1). Même pour une classe particulière de systèmes, telle que celle où $f(x)$ est donnée par (1.23) et $G(x)$ est polynomiale, le choix de la structure de $u(x)$ peut s'avérer difficile. Pour un système commandable autour de l'origine [41], des lois de commande linéaires peuvent garantir la stabilité asymptotique de l'origine. La stabilité globale peut être garantie pour des systèmes de phase minimale avec des lois de commande construites à partir des concepts de géométrie différentielle. Ces lois sont basées sur la notion d'inversion de la dynamique (NDI de l'anglais nonlinear

dynamic inversion). Cette méthode a pour objectif la linéarisation de la relation entrée-sortie pour permettre l'utilisation de lois de commande linéaires pouvant être obtenues suivant ou pas des critères de stabilité de Lyapunov.

Pour des systèmes présentant une structure bloc-triangulaire, il est possible de construire à la fois la loi de commande et la fonction de Lyapunov garantissant la stabilité globale [66].

Une application de ces méthodes de façon numérique reste difficile, et de ce fait, ces méthodes sont mieux adaptées pour des systèmes d'ordre réduit. Des méthodes numériques, notamment celles utilisant SDP ont été proposées associées à des critères d'optimisation visant l'élargissement de la RA. Un retour d'état statique avec des termes quadratiques a été proposé par [1]; un retour d'état statique tenant compte d'un critère optimisant le gain L_2 par rapport à des perturbations a été présenté dans [21]; [23] propose la synthèse d'un contrôleur dynamique linéaire. Le retour de sortie est étudié par [9] pour des systèmes polynomiaux avec des lois de commande polynomiales; [26] propose la construction d'une loi de commande avec l'accès aux variables d'état présentes dans les termes non-linéaires.

Plus récemment, des conditions pour la synthèse de lois de commande pour des systèmes polynomiaux ont été rendues possibles grâce à la formulation des problèmes de positivité de polynômes avec des relaxations de somme des carrés (SOS de l'anglais *Sum of Squares*). Nous pouvons citer notamment les résultats de [25] qui formule des conditions pour établir la passivité d'un système polynomial, [39] dans lequel une loi de commande est cherchée pour satisfaire des critères de performance et [93] qui propose le calcul d'une loi de commande garantissant la stabilité locale de l'origine pour une classe de systèmes dans une région imposée par des limites sur les dérivées de l'état.

Un autre facteur qui doit être absolument pris en compte lors de la synthèse est la saturation des actionneurs. L'analyse de l'influence des saturations dans la définition de la RA d'un système non-linéaire est une étape décisive car comme souligné par [4] "Linéariser un système non-linéaire instable peut cacher les vraies limites de stabilité du système saturé, celles-ci seront certainement plus petites que celles obtenues pour le modèle linéaire résultant".

Dans le cadre des systèmes linéaires, des techniques basées sur SDP pour la synthèse de lois saturantes et pour une analyse locale se sont beaucoup développées ces dernières années. L'analyse est réalisée notamment avec des fonctions quadratiques ou des fonctions quadratiques par morceaux [70] où la saturation est traitée soit avec la définition des régions de saturation [38], soit à l'aide de conditions de secteur modifiées [71]. En revanche, des résultats pour des systèmes non-linéaires sont moins nombreux [22]. Quelques méthodes aident à définir des régions dans lesquelles les saturations ne seront pas actives [26].

Lorsque l'ERA est peu satisfaisante ou lorsque les performances sont trop dégradées à cause de la saturation, une démarche consiste à modifier le contrôleur par

l'introduction d'un correcteur anti-windup. Ces correcteurs, activés dès que la saturation est atteinte, sont employés pour améliorer la performance et ramener le système à une zone non-saturée. La synthèse de ces correcteurs s'est beaucoup développée dans le cadre des systèmes linéaires [72], [70], [27]. En revanche peu de résultats ont été obtenus pour des systèmes ayant des non-linéarités autres que la saturation, nous pouvons pour autant faire référence à quelques publications proposant des schémas anti-windup pour des systèmes avec lois de commande NDI [40], [61].

1.5 Conclusion

Nous avons présenté différentes méthodes de la littérature donnant des solutions pour les problèmes traités dans ce manuscrit, à savoir l'analyse en stabilité et la synthèse de contrôleur pour les systèmes non-linéaires polynomiaux pouvant être soumis à des saturation sur la commande. Ce chapitre nous permettra donc de mieux situer nos résultats dans le domaine, en mettant en avant leurs apports mais aussi leurs limites.

Chapitre 2

Représentations des Systèmes

2.1 Introduction

Ce chapitre détaille les représentations choisies pour décrire les systèmes polynomiaux. Dans un premier temps nous présentons des choix de vecteurs des monômes dans les variables d'état qui guident la construction des matrices définissant un système autonome. Par la suite, des systèmes commandés par des lois de commande polynomiales sont également décrits, ainsi que le cas où l'entrée est saturée.

2.2 Systèmes Polynomiaux Autonomes

Nous allons traiter les systèmes dont la dynamique est définie par un champ de vecteurs polynomial invariant dans le temps :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{2.1}$$

où chaque composante de $f(x) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ est un polynôme homogène en x . Par la suite, nous allons simplifier la notation en supprimant la dépendance par rapport au temps, c'est-à-dire, nous allons utiliser $\dot{x} = f(x)$. Le système sera dit de degré g_f si g_f est le degré le plus grand des monômes présents dans $f(x)$.

Afin de rendre possible l'analyse des systèmes polynomiaux avec des outils numériques, notamment avec des outils de SDP, il sera nécessaire de trouver une représentation pour (2.1) au moyen de matrices construites à partir des coefficients des monômes composant $f(x)$. Ceci sera fait en définissant des vecteurs contenant les monômes dans les variables d'état [15]. Considérons $x \in \mathbb{R}^n$,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Les éléments d'un vecteur x^r sont des monômes de degré r ordonnés comme

$$x^r = \begin{bmatrix} x^r(1) \\ x^r(2) \\ \vdots \\ x^r(n) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

où $x^r(i)$, $i = 1, \dots, n$, est le vecteur qui contient tous les monômes de degré r avec la variable x_i à l'exception de ceux avec les variables x_j , $j < i$. Pour illustrer, nous avons pour $i = 1$:

$$x^r(1) = \begin{bmatrix} x_1^r \\ \hline x_1^{(r-1)} x_2 \\ \vdots \\ x_1^{(r-1)} x_n \\ \hline x_1^{(r-2)} x_2^2 \\ x_1^{(r-2)} x_1 x_2 \\ \vdots \\ x_1^{(r-2)} x_n^2 \\ \hline \vdots \\ \hline x_1 x_2^{(r-1)} \\ \vdots \\ x_1 x_n^{(r-1)} \end{bmatrix} = x_1 x^{(r-1)} \quad (2.4)$$

pour $i = 2$:

$$x^r(2) = \begin{bmatrix} x_2^r \\ \hline x_2^{(r-1)}x_3 \\ \vdots \\ x_2^{(r-1)}x_n \\ \hline x_2^{(r-2)}x_3^2 \\ x_2^{(r-2)}x_3x_4 \\ \vdots \\ x_2^{(r-2)}x_n^2 \\ \hline \vdots \\ \hline x_2x_3^{(r-1)} \\ \vdots \\ x_2x_n^{(r-1)} \end{bmatrix} = x_2x^{(r-1)}(2) \quad (2.5)$$

et ainsi jusqu'à $i = n$:

$$x^r(n) = x_n^r = x_nx^{(r-1)}(n) \quad (2.6)$$

Exemple 2.1 Pour $n = 3$, $r = 4$, nous avons

$$\begin{aligned} x^4 &= \begin{bmatrix} x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^3x_3 & x_1^2x_2^2 & x_1^2x_2x_3 & x_1^2x_3^2 & x_1x_2^3 & x_1x_2^2x_3 \\ x_1x_2x_3^2 & x_1x_3^3 & & x_2^4 & x_2^3x_3 & x_2^2x_3^2 & x_2x_3^3 & x_3^4 \end{bmatrix}' \\ x^4 &= [x^{4'}(1) \mid x^{4'}(2) \mid x^{4'}(3)]' \end{aligned}$$

Notons que, suivant (2.4)-(2.6), nous avons

$$x^4 = \begin{bmatrix} x_1x^3(1) \\ x_2x^3(2) \\ x_3x^3(3) \end{bmatrix}$$

Lemme 2.1 ([15]). *Le nombre de termes $\sigma(n, r)$ dans le vecteur d'ordre n et de degré r est donné par*

$$\sigma(n, r) = \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!} \quad (2.7)$$

Notons que le vecteur x^r est construit de sorte à ne pas présenter de termes répétés. De ce fait, pour un polynôme de degré g , il existe une représentation unique et donc minimale par rapport au nombre de coefficients du polynôme qui peut être construite avec les vecteurs x^i , $i = 1, \dots, g$.

Nous pouvons alors écrire $f(x)$ en fonction des vecteurs x^i , $i = 1, \dots, g_f$, avec des matrices $A_i \in \mathfrak{R}^{n \times \sigma(n, i)}$, $i = 1, \dots, g_f$, comme

$$f(x) = A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots + A_{g_f}x^{g_f} \quad (2.8)$$

Exemple 2.2 La fonction polynomiale d'ordre 2 et de degré 3 définie par :

$$f(x) = \begin{bmatrix} ax_2 + bx_1x_2 \\ cx_1 + dx_1^2x_2 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

s'exprime aussi comme

$$f(x) = A_1x + A_2x^2 + A_3x^3$$

avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & a \\ c & 0 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La relation entre le vecteur x^r et le vecteur $x^{(r-1)}$ est établie via la matrice $\mathbb{I}_r \in \mathfrak{R}^{n\sigma(n,r-1) \times \sigma(n,r)}$ satisfaisant ¹.

$$\mathbb{I}_r x^r = x^{(r-1)} \otimes x \quad (2.10)$$

Étant donné que les matrices $\mathbb{I}_r$ possèdent toujours un rang complet de colonnes, il est possible d'établir la relation

$$x^r = \mathbb{I}_r \left(x^{(r-1)} \otimes x \right) \quad (2.11)$$

avec $\mathbb{I}_r \in \mathfrak{R}^{\sigma(n,r) \times n\sigma(n,r-1)}$ la pseudo-inverse de la matrice $\mathbb{I}_r$:

$$\mathbb{I}_r = (\mathbb{I}_r' \mathbb{I}_r)^{-1} \mathbb{I}_r' \quad (2.12)$$

Exemple 2.3 Pour l'instant nous illustrons le cas $n = 2$ et $r = 2$. Nous avons :

$$x^2 = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix}$$

et

$$x \otimes x = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1x_2 \\ x_1x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix}$$

Alors la matrice $\mathbb{I}_2$ est définie par :

$$\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Un algorithme pour la construction des matrices $\mathbb{I}_r$ est donné dans l'annexe B. Nous présentons également quelques propriétés des produits de Kronecker dans l'annexe A.

et la matrice $\mathbb{L}_2$ est donnée par

$$\mathbb{L}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les matrices $\mathbb{L}_r$ et $\mathbb{L}_r$ nous aident à définir la relation entre le vecteur x^r et le vecteur $x^{r\otimes}$, donnée par

$$x^{r\otimes} = x^{(r-1)\otimes} \otimes x \in \mathfrak{R}^{n^r}$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} x^r &= \mathbb{L}_r \left(x^{(r-1)} \otimes x \right) \\ &= \mathbb{L}_r \left(\mathbb{L}_{r-1} \left(x^{(r-2)} \otimes x \right) \otimes x \right) \\ &= \mathbb{L}_r (\mathbb{L}_{r-1} \otimes I_n) \left(x^{(r-2)} \otimes x \otimes x \right) \\ &\vdots \\ &= M_c(r) x^{r\otimes} \end{aligned}$$

avec $M_c(r) \in \mathfrak{R}^{\sigma(n,r) \times n^r}$ donnée par

$$M_c(r) = \mathbb{L}_r (\mathbb{L}_{r-1} \otimes I_n) (\mathbb{L}_{r-2} \otimes I_{n^2}) \dots (\mathbb{L}_2 \otimes I_{n^{r-2}}) \quad (2.13)$$

De façon similaire, nous pouvons obtenir la relation

$$x^{r\otimes} = M_e(r) x^r$$

avec $M_e(r) \in \mathfrak{R}^{n^r \times \sigma(n,r)}$ donnée par²

$$M_e(r) = (\mathbb{L}_2 \otimes I_{n^{r-2}}) (\mathbb{L}_3 \otimes I_{n^{r-3}}) \dots (\mathbb{L}_{r-1} \otimes I_n) \mathbb{L}_r \quad (2.14)$$

Ainsi nous pouvons décrire $f(x)$ par

$$f(x) = \bar{A}_1 x + \bar{A}_2 x^{2\otimes} + \bar{A}_3 x^{3\otimes} + \dots + \bar{A}_{g_f} x^{g_f \otimes} \quad (2.15)$$

où les matrices $\tilde{A}_i \in \mathfrak{R}^{n \times n^r}$, $i = 1, \dots, g_f$, peuvent être calculées par

$$\bar{A}_i = A_i M_c(i) \quad (2.16)$$

où A_i , $i = 1, \dots, g_g$, sont les matrices de (2.8).

2. Nous pouvons exprimer également $M_e(n,r)$ $M_c(n,r)$ pour faire apparaître la dépendance de ces matrices dans la dimension du vecteur x .

Exemple 2.4 La fonction $f(x)$ de (2.9) est décrite par

$$f(x) = \bar{A}_1 x + \bar{A}_2 x^{2\otimes} + \bar{A}_3 x^{3\otimes}$$

avec

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & a \\ c & 0 \end{bmatrix}; \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{b}{2} & \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \bar{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{4} & \frac{d}{4} & 0 & \frac{d}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque 2.1. Notons que cette représentation n'est pas unique car les vecteurs $x^{r\otimes}$ contiennent des éléments répétés. Nous avons que la matrice

$$R_r = \text{null}(M_e(r)')' \quad (2.17)$$

satisfait

$$R_r x^{r\otimes} = R_r M_e(r) x^r = 0 \quad (2.18)$$

Alors quelle que soit la matrice $S_r \in \Re^{n \times d_n}$ avec $d_n = \dim(\text{null}(M_e(r)')) = n^r - \sigma(n, r)$ on a la relation suivante :

$$\bar{A}_r x^{r\otimes} = (\bar{A}_r + S_r R_r) x^{r\otimes} \quad (2.19)$$

Exemple 2.5 Afin d'illustrer cette multiplicité de représentations, considérons les termes quadratiques de l'exemple 2.4 précédent :

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{b}{2} & \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous avons, en appliquant (2.17), $R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, et avec $S_2 = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \end{bmatrix}'$, nous obtenons pour (2.19)

$$(\bar{A}_2 + S_2 R_2) x^{2\otimes} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{b}{2} + s_1 & \frac{b}{2} - s_1 & 0 \\ 0 & s_2 & -s_2 & 0 \end{bmatrix} x^{2\otimes}$$

2.2.1 Définition d'un espace augmenté

Nous pouvons décrire les systèmes polynomiaux sous une forme compacte à l'aide du vecteur ξ_r constitué par les vecteurs x^i , $i = 1, \dots, r$:

$$\xi_r = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^r \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Nous avons $\xi_r \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n,r)}$, avec

$$\sigma_t(n,r) = \sum_{i=1}^r \sigma(n,i) = \frac{(n+r)!}{n!r!} - 1 \quad (2.21)$$

Nous pouvons ainsi écrire $f(x)$, (définie dans (2.8)) en fonction de $\xi_{g_f} \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n,g_f)}$ comme

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{g_f} \end{bmatrix} \xi_{g_f} \\ &= A_c \xi_{g_f} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Nous pouvons également exprimer la dynamique du système (2.1) dans les coordonnées ξ_r . L'expression de $\dot{\xi}_r = f_r(x)$ contient des monômes en x de degré $g_{f_r} = 1, \dots, g_f + (r-1)$, alors nous avons

$$f_r(x) = A_{r1}x + A_{r2}x^2 + A_{r3}x^3 + \dots + A_{rg_{f_r}}x^{g_{f_r}} \quad (2.23)$$

où $A_{ri} \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n,r) \times \sigma(n,i)}$, ou bien

$$f_r(x) = A_{rc} \xi_{g_{f_r}} \quad (2.24)$$

avec

$$A_{rc} = \begin{bmatrix} A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rg_{f_r}} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Exemple 2.6 Avec $r=2$ nous avons pour le système (2.9) $g_{f_r} = 4$ et

$$\frac{d(x^2)}{dt} = (\dot{x}^2) = \begin{bmatrix} 2ax_1x_2 + 2bx_1^2x_2 \\ cx_1^2 + ax_2^2 + bx_1x_2^2 + dx_1^3x_2 \\ 2cx_1x_2 + 2dx_1^2x_2^2 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Nous pouvons donc obtenir une expression sous la forme de (2.24) à partir de

$$\dot{\xi}_2 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ (x^2) \end{bmatrix} = f_r(x)$$

$$A_{r1} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ c & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; A_{r2} = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & 2c & 0 \end{bmatrix}; A_{r3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{r4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2d & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et l'on obtient

$$\dot{\xi}_2 = \begin{bmatrix} A_{r1} & A_{r2} & A_{r3} & A_{r4} \end{bmatrix} \xi_4 \quad (2.27)$$

Définissons aussi le vecteur η_r , constitué par les vecteurs $x^{i\otimes}$, $i = 1, \dots, r$

$$\eta_r = \begin{bmatrix} x \\ x^{2\otimes} \\ \vdots \\ x^{r\otimes} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Nous avons donc $\eta_r \in \mathfrak{R}^{g_t}$, $g_t = \sum_{i=1}^r n^i$, et nous pouvons décrire (2.15) par

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_2 & \dots & \bar{A}_{g_f} \end{bmatrix} \eta_{g_f} \\ &= A_c \eta_{g_f} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Lorsque l'on utilise la relation (2.10), nous pouvons obtenir une contrainte algébrique qui établit une relation entre les éléments de ξ_r . Pour le terme de degré i nous avons

$$\mathbb{I}_i x^i = \left(x^{(i-1)} \otimes x \right) = \left(I_{\sigma(n, i-1)} \otimes x \right) x^{(i-1)} \quad (2.30)$$

Ceci nous conduit à la relation suivante :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_2 x^2 - (I_{\sigma(n,1)} \otimes x) x \\ \mathbb{I}_3 x^3 - (I_{\sigma(n,2)} \otimes x) x^2 \\ \vdots \\ \mathbb{I}_v x^r - (I_{\sigma(n, r-1)} \otimes x) x^{r-1} \end{bmatrix} &= 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbb{I}_2 x^2 \\ \mathbb{I}_3 x^3 \\ \vdots \\ \mathbb{I}_v x^r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (I_{\sigma(n,1)} \otimes x) x \\ (I_{\sigma(n,2)} \otimes x) x^2 \\ \vdots \\ (I_{\sigma(n, r-1)} \otimes x) x^{r-1} \end{bmatrix} &= 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

En définissant $\mathbb{I}_t(r) = \text{diag} \{ \mathbb{I}_2, \dots, \mathbb{I}_r \}$, (2.31) s'exprime par

$$\left(\begin{bmatrix} 0_{n\sigma_t(n, r-1) \times n} & \mathbb{I}_t(r) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (I_{\sigma_t(n, r-1)} \otimes x) & 0_{n\sigma_t(n, r-1) \times \sigma(n, r)} \end{bmatrix} \right) \xi_r = 0 \quad (2.32)$$

Nous avons également

$$x = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times \sigma_t(n, \mathbf{v}) - n} \end{bmatrix} \xi_{\mathbf{v}} \quad (2.33)$$

et donc

$$(I_{\sigma_t(n, r-1)} \otimes x) = (I_{\sigma_t(n, r-1)} \otimes \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times \sigma_t(n, \mathbf{v}) - n} \end{bmatrix}) (I_{\sigma_t(n, r-1)} \otimes \xi_{\mathbf{v}}) \quad (2.34)$$

Définissons alors les matrices $N_1(n, r)$ et $N_2(n, r, \mathbf{v})$

$$\begin{aligned} N_1(n, r) &= \begin{bmatrix} 0_{n \sigma_t(n, r-1) \times n} & \mathbb{I}_t(r) \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n \sigma_t(n, r-1) \times \sigma_t(n, r)} \\ N_2(n, r, \mathbf{v}) &= -(I_{\sigma_t(n, r-1)} \otimes \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times \sigma_t(n, \mathbf{v}) - n} \end{bmatrix}) \in \mathfrak{R}^{n \sigma_t(n, r-1) \times \sigma_t(n, r-1) \sigma_t(n, \mathbf{v})} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Ainsi ces matrices satisfont :

$$(N_1(n, r) + \begin{bmatrix} N_2(n, r, \mathbf{v}) (I_{\sigma_t(n, r-1)} \otimes \xi_{\mathbf{v}}) & 0_{n \sigma_t(n, r-1) \times \sigma(n, r)} \end{bmatrix}) \xi_r = 0 \quad (2.36)$$

ou bien

$$N_1(n, r) \xi_r + N_2(n, r, \mathbf{v}) (I_{\sigma_t(n, r-1)} \otimes \xi_{\mathbf{v}}) \xi_{r-1} = 0 \quad (2.37)$$

2.3 Systèmes non-autonomes

Dans cette section, nous introduisons une représentation pour des systèmes commandés par une loi de commande polynomiale.

Nous considérons donc le système :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + G(x)u(x) \\ &= \tilde{f}(x) \end{aligned} \quad (2.38)$$

où $f(x) \in \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}^n$, $G(x) \in \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}^{n \times m}$ et $u(x) \in \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}^m$ sont des fonctions polynomiales en x . Les degrés respectifs sont g_f , g_G et g_u . Le degré de la fonction polynomiale $\tilde{f}(x)$ est donc donné par $g_{\tilde{f}} = \max(g_f, g_u + g_G)$. Nous vérifions également que $g_{\tilde{f}} > g_G$ car nous allons traiter seulement des cas où $g_u \geq 1$.

La matrice $G(x)$ peut être décrite par l'expression

$$\begin{aligned} G(x) &= B_0 + B_1(x \otimes I_m) + B_2(x^2 \otimes I_m) + \dots + B_{g_G}(x^{g_G} \otimes I_m) \\ &= B_t(\xi_{g_G} \otimes I_m) \end{aligned} \quad (2.39)$$

avec

$$\bar{\xi}_{g_G} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{g_G} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n, g_G) + 1}; \quad B_t = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & \dots & B_{g_G} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n \times m(1 + \sigma_t(n, g_G))}$$

où $B_i \in \mathfrak{R}^{n \times m\sigma(n,i)}$, $i = 0, \dots, g_G$.

Exemple 2.7 Considérons $n = 2$, $m = 1$ et $G(x) \in \mathfrak{R}^{2 \times 1}$ donnée par

$$G(x) = \begin{bmatrix} e + fx_2 \\ gx_1x_2 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Nous pouvons exprimer $G(x)$ (2.39) avec les matrices :

$$B_0 \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \end{bmatrix}$$

La représentation (2.39) est en particulier utilisée dans le chapitre 5 pour formuler des conditions d'analyse de stabilité des systèmes saturants. Pour l'obtention des conditions de synthèse nous utilisons la représentation suivante :

$$\begin{aligned} G(x) &= \tilde{B}_0 + \tilde{B}_1(x \otimes I_m) + \tilde{B}_2(x^{2\otimes} \otimes I_m) + \dots + \tilde{B}_{g_G}(x^{g_G \otimes} \otimes I_m) \\ &= \tilde{B}_t(\bar{\eta}_{g_G} \otimes I_m) \end{aligned} \quad (2.41)$$

avec

$$\bar{\eta}_{g_G} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^{2\otimes} \\ \vdots \\ x^{g_G \otimes} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n_t+1}; \tilde{B}_t = \begin{bmatrix} \tilde{B}_0 & \tilde{B}_1 & \dots & \tilde{B}_{g_G} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n \times mn_t}$$

$$n_t = \sum_{i=0}^{g_G} n^i \text{ avec } \tilde{B}_i \in \mathfrak{R}^{n \times mn^i}, i = 0, \dots, g_G.$$

Des lois de commande polynomiale $u(x)$ sont décrites par

$$\begin{aligned} u(x) &= K_1x + K_2x^2 + \dots + K_{g_u}x^{g_u} \\ &= K_t\xi_{g_u} \end{aligned} \quad (2.42)$$

avec $K_i \in \mathfrak{R}^{m \times n\sigma(n,i)}$ et $K_t = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & \dots & K_{g_u} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{m \times \sigma_t(n, g_u)}$.

Nous pouvons également écrire

$$\begin{aligned} u(x) &= \tilde{K}_1x + \tilde{K}_2x^{2\otimes} + \dots + \tilde{K}_{g_u}x^{g_u \otimes} \\ &= \tilde{K}_t\eta_{g_u} \end{aligned} \quad (2.43)$$

avec $\tilde{K}_i \in \mathfrak{R}^{m \times n^i}$ et $\tilde{K}_t = \begin{bmatrix} \tilde{K}_1 & \tilde{K}_2 & \dots & \tilde{K}_{g_u} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{m \times n_{t_u}}, n_{t_u} = \sum_{i=1}^{g_u} n^i$.

Exemple 2.8 Considérons $m = 1$, $n = 2$ et la loi de commande

$$u(x) = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_2^2 \quad (2.44)$$

Nous obtenons

$$K_1 = \tilde{K}_1 = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}; K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}; \tilde{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$$

Étant données les matrices d'entrée (2.39) et les matrices de gain (5.13), nous obtenons

$$\begin{aligned} G(x)u(x) &= B_t(\bar{\xi}_{g_G} \otimes I_m)K_t \xi_{g_u} \\ &= B_t(\bar{\xi}_{g_G} \otimes K_t \xi_{g_u}) \\ &= B_t(I_{\sigma_t(n, g_G)+1} \otimes K_t)(\bar{\xi}_{g_G} \otimes \xi_{g_u}) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Nous pouvons ensuite calculer une matrice $M_{fg}(g_g, g_u)$ satisfaisant³

$$(\bar{\xi}_{g_G} \otimes \xi_{g_u}) = M_{fg} \xi_{g_G + g_u} \quad (2.46)$$

et ainsi obtenir

$$G(x)u(x) = B_t(I_{\sigma_t(n, g_G)+1} \otimes K_t)M_{fg} \xi_{g_G + g_u} \quad (2.47)$$

Exemple 2.9 Prenons $G(x)$ et $u(x)$ données respectivement par (2.40) et (2.44), nous avons $g_G + g_u = 4$ et

$$\begin{aligned} &B_t(I_{\sigma_t(n, g_G)+1} \otimes K_t)M_{Gu} \\ &= \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc} ek_1 & ek_2 & 0 & fk_1 & (ek_1 + fk_2) & 0 & 0 & 0 & fk_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_1 g & k_2 g & 0 & 0 & 0 & k_3 g & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (2.48)$$

Dans le manuscrit nous allons étudier aussi les systèmes saturants décrits par

$$\dot{x} = f(x) + G(x)\text{sat}_{u_0}(u(x)) \quad (2.49)$$

où $u_0 \in \mathfrak{R}_+^m$ est le vecteur dont chaque élément est le seuil de saturation de l'entrée correspondante. Nous avons alors pour chaque composante

$$\text{sat}_{u_0}(u_{(i)}(x)) = \begin{cases} -u_{0(i)} & \text{si } u_{(i)}(x) < -u_{0(i)} \\ u_{(i)}(x) & \text{si } -u_{0(i)} \leq u_{(i)}(x) \leq u_{0(i)} \\ u_{0(i)} & \text{si } u_{(i)}(x) > u_{0(i)} \end{cases} \quad i = 1, \dots, m$$

3. L'algorithme pour la construction de cette matrice est présenté dans l'annexe B.

En utilisant la fonction zone-morte $\phi_{u_0}(u(x)) = \text{sat}_{u_0}(u(x)) - u(x)$, une représentation équivalente à (2.49) est donnée par

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u(x) + G(x)\phi_{u_0}(u(x))$$

ou encore

$$\dot{x} = \tilde{f}(x) + G(x)\phi_{u_0}(u(x)) \quad (2.50)$$

2.4 Représentation multiple des formes quadratiques

Soient deux polynômes $f(x) : \Re n \mapsto \Re$ et $g(x) : \Re n \mapsto \Re$ correspondant à des fonctions polynomiales respectivement de degré g_f et g_g sous la forme

$$\begin{aligned} f(x) &= F\xi_{g_f} \\ g(x) &= G\xi_{g_g} \end{aligned} \quad (2.51)$$

où $F \in \Re^{1 \times \sigma_t(n, g_f)}$, $G \in \Re^{1 \times \sigma_t(n, g_g)}$. Le vecteur $(F \otimes G)$ issu du produit

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= F\xi_{g_f}G\xi_{g_g} \\ &= F\xi_{g_f} \otimes G\xi_{g_g} \\ &= (F \otimes G)(\xi_{g_f} \otimes \xi_{g_g}) \end{aligned} \quad (2.52)$$

peut avoir des représentations multiples car le vecteur $(\xi_{g_f} \otimes \xi_{g_g})$ contient des éléments répétés. Autrement dit, il existe des matrices R_{fg} telles que $R_{fg}(\xi_{g_f} \otimes \xi_{g_g}) = 0$.

Afin de paramétrer ces représentations multiples, considérons le vecteur

$$\tilde{\xi}_{g_f+g_g} = \begin{bmatrix} x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^{g_f+g_g} \end{bmatrix} \in \Re^{\sigma_t(n, g_f+g_g)-n}$$

et la matrice $M_{fg} \in \Re^{\sigma_t(n, g_f)\sigma_t(n, g_g) \times \sigma_t(n, g_f+g_g)-n}$ satisfaisant ⁴

$$M_{fg}\tilde{\xi}_{g_f+g_g} = (\xi_{g_f} \otimes \xi_{g_g}) \quad (2.53)$$

Considérons donc la matrice $R \in \Re^{\sigma_t(n, g_f)\sigma_t(n, g_g) - (\sigma_t(n, g_f+g_g)-n) \times \sigma_t(n, g_f)\sigma_t(n, g_g)}$ telle que $RM_{fg} = 0$. Quelle que soit la matrice $S \in \Re^{\sigma_t(n, g_f)\sigma_t(n, g_g) \times \sigma_t(n, g_f+g_g)-n}$ la relation suivante est satisfaite

4. La construction de cette matrice est présentée dans l'annexe B.

$$(F \otimes G)(\xi_{g_f} \otimes \xi_{g_g}) = (F \otimes G + SR)(\xi_{g_f} \otimes \xi_{g_g}) \quad (2.54)$$

Nous pouvons ainsi paramétrer toutes les représentations de (2.52) avec des matrices $S \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n, g_f) \times \sigma_t(n, g_f) \times \sigma_t(n, g_f + g_g) - n}$.

De façon similaire, le polynôme représenté par la forme quadratique

$$q(x) = \xi_r' Q_r \xi_r \quad (2.55)$$

peut avoir de multiples représentations pour $r > 2$. Ces représentations sont paramétrées par les matrices $C(n, r) \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n, r) \times \sigma_t(n, r)}$ satisfaisant $\xi_r' C(n, r) \xi_r = 0$

$$\xi_r' Q_r \xi_r = \xi_r' (Q_r + C(n, r)) \xi_r \quad (2.56)$$

En effet, les matrices $C(n, r)$ peuvent être calculées à partir d'une représentation équivalente à (2.55) donnée par

$$\begin{aligned} q(x) &= M_Q(\xi_r \otimes \xi_r) \\ &= (M_Q + S_Q R_Q)(\xi_r \otimes \xi_r) \end{aligned} \quad (2.57)$$

nous pouvons donc calculer $C(n, r)$ en réécrivant la fonction quadratique (2.57), telle que

$$\xi_r' C(n, r) \xi_r = S_Q R_Q(\xi_r \otimes \xi_r) \quad (2.58)$$

Dans [14] les matrices $C(n, r)$ sont introduites pour définir le CSMR (complete square matrix representation) qui paramètre toutes les représentations d'un polynôme homogène de degré pair sous forme matricielle.

2.5 Conclusion

Nous avons décrit un certain nombre de représentations des systèmes polynomiaux autonomes, et avec entrée saturée, qui seront utilisées pour l'obtention de conditions pour l'analyse en stabilité et la synthèse de lois de commande polynomiales. Ces conditions, comme nous le verrons dans la suite du manuscrit, peuvent être testées à l'aide des outils numériques puissants de programmation semi-définie.

Des propriétés telles que les relations entre les éléments des vecteurs contenant les monômes ou la multiplicité des représentations jouent un rôle particulier comme nous le verrons par la suite.

Afin d'étudier la stabilité du système avec des fonctions de Lyapunov polynomiales, nous avons également introduit une description de la dynamique du système avec un vecteur dont les composantes sont des monômes de différents degrés dans les

variables du système. Nous avons aussi défini des vecteurs constituant une base non-homogène, dans lesquels nous retrouvons des éléments répétés. Ces vecteurs seront utilisés dans la construction des conditions de synthèse.

Les représentations proposées dans ce chapitre rendent possible l'écriture d'une représentation algébro-différentielle (DAR) pour des systèmes polynomiaux, telle que celle présentée dans [20], [21] par exemple, les relations différentielles étant décrites par (2.1) et les relations algébriques par (2.37).

Chapitre 3

Analyse de stabilité des systèmes polynômiaux

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons des résultats pour l'estimation de régions d'attraction de points d'équilibre stables pour des systèmes polynomiaux. À partir d'un lemme qui nous permettra d'effectuer l'analyse localement, c'est-à-dire dans une région autour du point d'équilibre étudié, nous présentons les conditions pour l'obtention de fonctions polynomiales pour lesquelles l'intérieur d'une courbe de niveau est une ERA. Pour clore le chapitre nous présentons des ERA obtenues avec différentes méthodes d'optimisation.

3.2 Tester la positivité d'un polynôme localement

Afin de rendre possible l'obtention des ERA définies par les ensembles à l'intérieur des courbes de niveau des fonctions polynomiales positives, nous utilisons une paramétrisation des points sur la frontière d'un ellipsoïde donnée par le lemme suivant.

Lemme 3.1. *Considérons la matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P = P' > 0$ et un vecteur v tel que $\|v\| = 1$. Tout point appartenant à la frontière d'un ellipsoïde $\partial\mathcal{E}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n; x'Px = 1\}$, peut être représenté par $x = P^{-\frac{1}{2}}T(x)v$, avec $T(x)$ une matrice orthogonale, $T'(x)T(x) = I$.*

Démonstration. Si $x \in \partial\mathcal{E}$ alors $\|P^{\frac{1}{2}}x\|^2 = 1$, ainsi pour tout $x \in \partial\mathcal{E}(P)$ il existe une matrice orthogonale $T(x)$, c'est-à-dire $T(x)'T(x) = I$, telle que $T(x)'P^{\frac{1}{2}}x = v$, ce qui implique que x peut être exprimé par $x = P^{-\frac{1}{2}}T(x)v$. $\square$

Considérons le théorème suivant qui présente un sous-ensemble des fonctions polynomiales définies positives.

Théorème 3.1 ([18]). *Un polynôme $p(x) : \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}_+$ de degré $2r$ a une décomposition en somme de carrés si et seulement s'il existe une matrice définie positive Q telle que*

$$p(x) = \bar{\xi}_r' Q \bar{\xi}_r \quad (3.1)$$

$$\bar{\xi} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^r \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{1+\sigma_t(n,r)} \quad (3.2)$$

Par la suite nous considérons des fonctions $V_r(x) : \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}_+$ avec $V_r(0) = 0$, qui appartiennent à l'ensemble des fonctions somme de carrés de degré $2r$, $V_r(x) \in \Sigma_r$. Ces fonctions sont paramétrées par des matrices $P_r \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n,r) \times \sigma_t(n,r)}$, $P_r = P_r' > 0$, telles que

$$V_r(x) = \bar{\xi}_r' P_r \bar{\xi}_r \quad (3.3)$$

avec

$$\bar{\xi}_r = \begin{bmatrix} x \\ \vdots \\ x^r \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n,r)} \quad (3.4)$$

Ainsi, dans le cas des fonctions quadratiques, nous pouvons paramétrer la frontière d'une courbe de niveau de cette fonction comme cela est montré dans le corollaire suivant.

Corollaire 3.1. *La frontière de la région*

$$\mathcal{E}(P_r) = \left\{ \bar{\xi}_r \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n,r)} ; \bar{\xi}_r' P_r \bar{\xi}_r \leq 1 \right\} \quad (3.5)$$

avec $P_r = P_r' > 0$ est donnée par

$$\partial \mathcal{E}(P_r) = \left\{ x \in \mathfrak{R}^n ; \bar{\xi}_r = P_r^{-\frac{1}{2}} T v, \quad T' T = I, \quad \|v\| = 1 \right\} \quad (3.6)$$

avec $T \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n,r) \times \sigma_t(n,r)}$ et $v \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n,r)}$.

L'ensemble $\partial\mathcal{E}(P_r)$ correspond à une courbe de niveau d'une fonction polynomiale de degré $2r$ dans la variable x . Comme nous avons $P_r = P'_r > 0$, l'ensemble $\mathcal{E}(P_r)$ est un ensemble connexe et fermé. Les courbes de niveau $\{x \in \mathfrak{R}^n; \xi'_r P_r \xi_r = c\}$, sont paramétrées avec v satisfaisant $\|v\|^2 = c$.

Cette paramétrisation rend possible l'obtention d'inégalités valables à l'intérieur d'une courbe de niveau d'une fonction SOS. Par la suite, on définit une inégalité qui est valable dans l'ensemble $\mathcal{E}(P_r) = \{x \in \mathfrak{R}^n; \xi'_r P_r \xi_r \leq 1\}$.

Lemme 3.2. *Soient les matrices $G \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n,a) \times \sigma_t(n,b) \sigma_t(n,r)}$, $P_r \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n,r) \times \sigma_t(n,r)}$, $P_r = P'_r > 0$, une matrice $M \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n,b) \times \sigma_t(n,b)}$, $M = M' > 0$, des vecteurs $\xi_a \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n,a)}$, $\xi_b \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n,b)}$ et $\xi_r \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n,r)}$. L'inégalité*

$$\xi'_a G (I_{\sigma_t(n,b)} \otimes \xi_r) \xi_b + \xi'_b (I_{\sigma_t(n,b)} \otimes \xi'_r) G' \xi_a \leq \xi'_b M \xi_b + \xi'_a G (M^{-1} \otimes P_r^{-1}) G' \xi_a \quad (3.7)$$

est valable dans l'ensemble $\mathcal{E}(P_r) = \{x \in \mathfrak{R}^n; \xi'_r P_r \xi_r \leq 1\}$.

Démonstration. Les points de l'ensemble $\partial\mathcal{E}(P_r)$ satisfont

$$\begin{aligned} & \xi'_a G (I_{\sigma_t(n,b)} \otimes \xi_r) \xi_b + \xi'_b (I_{\sigma_t(n,b)} \otimes \xi'_r) G' \xi_a \\ &= \xi'_a G \left(I_{\sigma_t(n,b)} \otimes P_r^{-\frac{1}{2}} T v \right) \xi_b + \xi'_b \left(I_{\sigma_t(n,b)} \otimes v' T' P_r^{-\frac{1}{2}} \right) G' \xi_a \end{aligned} \quad (3.8)$$

En effet, $\forall x \in \partial\mathcal{E}(P_r)$ nous avons $\xi_r = P_r^{-\frac{1}{2}} T v$ avec $\|v\| = 1$. Alors considérons une matrice $M \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n,b) \times \sigma_t(n,b)}$, $M = M' > 0$, on a donc $(M \otimes P) > 0$ et dans $\partial\mathcal{E}(P_r)$ on obtient

$$\begin{aligned} & \xi'_a G (I_{\sigma_t(n,b)} \otimes \xi_r) \xi_b + \xi'_b (I_{\sigma_t(n,b)} \otimes \xi'_r) G' \xi_a \\ & \leq \xi'_b \left(I_{\sigma_t(n,b)} \otimes v' T' P_r^{-\frac{1}{2}} \right) (M \otimes P_r) \left(I_{\sigma_t(n,b)} \otimes P_r^{-\frac{1}{2}} T v \right) \xi_b \\ & \quad + \xi'_a G (M^{-1} \otimes P_r^{-1}) G' \xi_a \\ & = \xi'_b (M \otimes v' T' T v) \xi_b + \xi'_a G (M^{-1} \otimes P_r^{-1}) G' \xi_a \\ & = \xi'_b M \xi_b + \xi'_a G (M^{-1} \otimes P_r^{-1}) G' \xi_a \end{aligned} \quad (3.9)$$

Comme dans $\mathcal{E}(P_r)$ nous avons $\xi_r = P_r^{-\frac{1}{2}} T v$ avec $\|v\| \leq 1$, l'inégalité (3.9) est aussi valable dans l'ensemble $\mathcal{E}(P_r)$. □

Remarque 3.1. De façon similaire, nous pouvons montrer que l'inégalité

$$\xi'_a G(I_{\sigma_t(n,b)} \otimes \xi_r) \xi_b + \xi'_b (I_{\sigma_t(n,b)} \otimes \xi'_r) G' \xi_a \geq -\xi'_b M \xi_b - \xi'_a G(M^{-1} \otimes P_r^{-1}) G' \xi_a \quad (3.10)$$

est valable dans l'ensemble $\mathcal{E}(P_r) = \{x \in \mathfrak{R}^n; x' P_r x \leq 1\}$.

Le Lemme 3.2 rend possible la vérification des inégalités ayant une dépendance dans la variable x dans une région autour de l'origine. C'est-à-dire, nous pouvons vérifier si une inégalité telle que

$$\xi'_v S(x) \xi_v < 0 \quad (3.11)$$

est satisfaite dans $\mathcal{E}(P_r)$ avec $\xi'_r P_r \xi_r \in \Sigma_r$. Nous considérons des matrices $S(x) = S(x)'$ et $S(x) = S_0 + s(x)$ avec $s(x)$ contenant des monômes de degré r en x . Ces tests de positivité de polynômes dans une région autour de l'origine seront effectués à l'aide de la proposition suivante :

Proposition 3.1. Considérons $S(x) \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n,v) \times \sigma_t(n,v)}$, une matrice symétrique donnée par

$$S(x) = S_0 + S_1(I_{\sigma_t(n,v)} \otimes \xi_r) + (I_{\sigma_t(n,v)} \otimes \xi_r)' S'_1 \quad (3.12)$$

où $S_0 \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n,v) \times \sigma_t(n,v)}$ et $S_1 \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n,v) \times \sigma_t(n,v) \times \sigma_t(n,r)}$. Si l'inégalité

$$S_B = \begin{bmatrix} S_0 + M + C(n,v) & S_1 \\ S'_1 & -(M \otimes P_r) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.13)$$

est satisfaite avec $M \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n,v) \times \sigma_t(n,v)}$, $M = M' > 0$, $P_r \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n,r) \times \sigma_t(n,r)}$, $P_r = P'_r > 0$, et la matrice $C(n,v)$ définie dans la section 2.4, alors $\xi'_v S(x) \xi_v < 0 \forall x \in \mathcal{E}(P_r)$.

Démonstration. Considérons l'expression

$$\xi'_v S(x) \xi_v = \xi'_v (S_0 + S_1(I_{\sigma_t(n,v)} \otimes \xi_r) + (I_{\sigma_t(n,v)} \otimes \xi_r)' S'_1) \xi_v \quad (3.14)$$

Comme dans $\mathcal{E}(P_r)$ nous avons

$$\xi'_v (S_1(I_{\sigma_t(n,v)} \otimes \xi_r) + (I_{\sigma_t(n,v)} \otimes \xi_r)' S'_1) \xi_v \leq \xi'_v M \xi_v + \xi'_v S_1 (M^{-1} \otimes P_r^{-1}) S'_1 \xi_v \quad (3.15)$$

l'inégalité suivante est vérifiée

$$\xi'_v S(x) \xi_v \leq \xi'_v (S_0 + M + S_1(M^{-1} \otimes P_r^{-1}) S'_1) \xi_v, \forall x \in \mathcal{E}(P_r) \quad (3.16)$$

Alors si

$$S_0 + M + S_1(M^{-1} \otimes P_r^{-1})S_1' < 0 \quad (3.17)$$

ou bien si (3.13) est satisfaite nous avons $\xi_v' S(x) \xi_v < 0, \forall x \in \mathcal{X}(P_r)$.

□

L'ensemble de résultats présentés dans ce manuscrit sont des cas particuliers de la proposition 3.1. Pour la plupart, nous partons des expressions des polynômes sous la forme (3.11) avec $S(x) = S$, $S \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n,v) \times \sigma_t(n,v)}$ étant une matrice constante. Afin de retrouver une expression qui dépende de la variable x et ainsi obtenir une expression similaire à (3.12) nous pouvons introduire des polynômes $s(x)$ satisfaisant $\xi_v' S(x) \xi_v = \xi_v' (S + s(x)) \xi_v$, c'est-à-dire $\xi_v' s(x) \xi_v = 0$. Pour ceci nous pouvons utiliser les matrices $N_1(n, v)$ et $N_2(n, v, r)$ présentées dans la sous-section 2.2.1 telles que

$$\xi_v' G \left(N_1(n, v) + \begin{bmatrix} N_2(n, v, r) (I_{\sigma_t(n, v-1)} \otimes \xi_r) & 0_{n\sigma_t(n, v-1) \times \sigma(n, v)} \end{bmatrix} \right) \xi_v = 0$$

avec $G \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n, v) \times n\sigma_t(n, v-1)}$. Ainsi, à partir de $S(x) = S + s(x)$ avec

$$s(x) = G \left(N_1(n, v) + \begin{bmatrix} N_2(n, v, r) (I_{\sigma_t(n, v-1)} \otimes \xi_r) & 0_{n\sigma_t(n, v-1) \times \sigma(n, v)} \end{bmatrix} \right)$$

nous retrouvons l'expression (3.12) avec

$$\begin{aligned} S_0 &= S + GN_1(n, v) + N_1'(n, v)G' \\ S_1 &= G \begin{bmatrix} N_2(n, v, r) & 0_{n\sigma_t(n, v-1) \times \sigma(n, v)\sigma_t(n, r)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En outre, des polynômes tels que le polynôme $s(x) = 0$, correspondant à des contraintes algébriques entre les éléments de ξ_v (dans les variables du système) peuvent être introduits dans l'expression de $S(x)$. Ceci permet notamment de vérifier des inégalités dans une variété définie par une fonction polynomiale, c'est-à-dire dans un sous-ensemble de l'espace d'état défini par $\{x \in \mathfrak{R}^n; p(x) = 0\}$ où $p(x)$ est une fonction polynomiale.

Remarque 3.2. Si nous multiplions la matrice S_B de (3.13) par le vecteur

$$\eta = \begin{bmatrix} \xi_v \\ \xi_v \otimes \xi_r \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

on retrouve l'expression

$$\begin{aligned} &\xi_v' (S_0 + M) \xi_v + \xi_v' S_1 (\xi_v \otimes \xi_r) + (\xi_v \otimes \xi_r)' S_1' \xi_v + (\xi_v \otimes \xi_r)' (M \otimes P_r) (\xi_v \otimes \xi_r) \\ &= \xi_v' (S_0 + S_1 (I_{\sigma_t(n, v)} \otimes \xi_r) + (I_{\sigma_t(n, v)} \otimes \xi_r)' S_1') \xi_v + \xi_v' M \xi_v - \xi_v' M \xi_v \xi_r' P_r \xi_r \\ &= \xi_v' S(x) \xi_v - \xi_v' M \xi_v (\xi_r' P_r \xi_r - 1) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Comme nous avons $\xi_r' P_r \xi_r - 1 \leq 0$, $\forall x \in \mathcal{E}(P_r)$ et $M = M' > 0$, nous pouvons identifier les termes $\xi_v' S(x) \xi_v$, $\xi_v' M \xi_v$ et $-(\xi_r' P_r \xi_r - 1)$ respectivement comme $g_1(x)$, $s_2(x)$ et $g_2(x)$ termes de la S -procédure généralisée du Lemme 2 de [80]. Comme $\xi_v' M \xi_v$ est un polynôme SOS, et donc, un polynôme positif, et comme $(\xi_r' P_r \xi_r - 1) \leq 0$ dans $\mathcal{E}(P_r)$, nous avons $-\xi_v' M \xi_v (\xi_r' P_r \xi_r - 1) \geq 0$. Ceci nous permet d'obtenir la relation

$$\xi_v' S(x) \xi_v - \xi_v' M \xi_v (\xi_r' P_r \xi_r - 1) < 0 \Rightarrow \xi_v' S(x) \xi_v < 0 \quad (3.20)$$

Nous présentons maintenant des conditions pour tester l'inclusion d'un ensemble limité par une courbe de niveau d'une fonction de degré $2a$, $V_a(x) = \xi_a' P_a \xi_a$, $P_a \in \Re^{\sigma_t(n,a) \times \sigma_t(n,a)}$, $P_a = P_a' > 0$ dans l'ensemble limité par une courbe de niveau d'une fonction de degré $2b$, $V_b(x) = \xi_b' P_b \xi_b$, $P_b \in \Re^{\sigma_t(n,b) \times \sigma_t(n,b)}$, $P_b = P_b' > 0$. Définissons les ensembles :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(P_a) &= \{x \in \Re^n; \xi_a' P_a \xi_a \leq 1\} \\ \mathcal{E}(P_b) &= \{x \in \Re^n; \xi_b' P_b \xi_b \leq 1\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Nous voulons garantir l'inclusion de $\mathcal{E}(P_b)$ dans $\mathcal{E}(P_a)$ comme illustré dans la figure 3.1 pour le cas $n = 2$

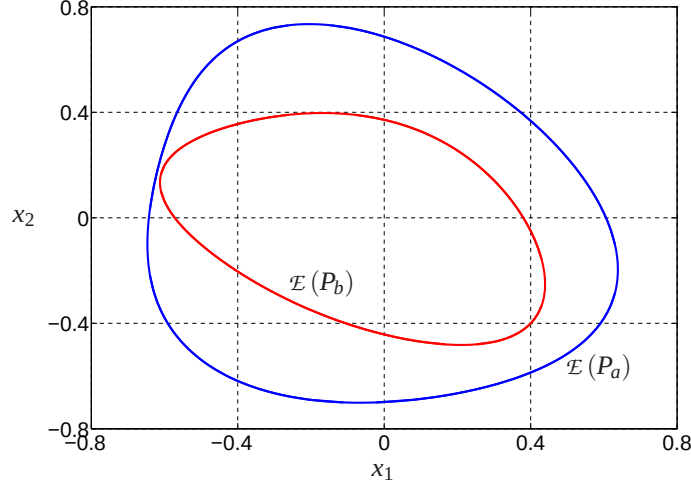


Figure 3.1 – Inclusion de l'ensemble polynomial $\mathcal{E}(P_b)$ dans $\mathcal{E}(P_a)$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{E}(P_a) \supseteq \mathcal{E}(P_b)$ est que dans l'ensemble $\mathcal{E}(P_a)$ nous ayons $V_a(x) \leq V_b(x)$.

Corollaire 3.2. Soient deux ensembles $\mathcal{E}(P_a)$ et $\mathcal{E}(P_b)$, et soit $m = \max(a, b)$. S'il existe une matrice $G \in \Re^{\sigma_t(n,m) \times n \sigma_t(n,m-1)}$, une matrice symétrique $M \in \Re^{\sigma_t(n,m-1) \times \sigma_t(n,m-1)}$, $M > 0$, telles que

$$\begin{bmatrix} M_i + \bar{M} + GN_1(n, m) + N'_1(n, m)G' + C(n, m) & GN_2(n, m, a) \\ N'_2(n, m, a)G' & -(M \otimes P_a) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.22)$$

avec

$$M_i = \bar{P}_a - \bar{P}_b \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_a &= \text{diag}(P_a, 0_{\sigma_t(n, m) - \sigma_t(n, a) \times \sigma_t(n, m) - \sigma_t(n, a)}) \\ \bar{P}_b &= \text{diag}(P_b, 0_{\sigma_t(n, m) - \sigma_t(n, b) \times \sigma_t(n, m) - \sigma_t(n, b)}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

et

$$\bar{M} = \text{diag}(M, 0_{\sigma(n, m) \times \sigma_t(n, m)}) \quad (3.25)$$

et les matrices $N_1(n, m)$, $N_2(n, m, a)$ et $C(n, m)$ définies dans les sections 2.2.1 et 2.4, alors $\mathcal{E}(P_a) \supseteq \mathcal{E}(P_b)$.

Démonstration. Avec $m = \max(a, b)$, nous avons

$$V_a(x) - V_b(x) = \xi'_m(\bar{P}_a - \bar{P}_b)\xi_m = \xi'_m M_i \xi_m \quad (3.26)$$

Considérons donc les expressions

$$\xi'_m G(N_1(n, m)\xi_m + N_2(n, m, a)(I_{\sigma_t(n, m-1)} \otimes \xi_a)\xi_{m-1}) = 0 \quad (3.27)$$

et

$$\xi'_m C(n, m)\xi_m = 0 \quad (3.28)$$

Avec le lemme 3.2, on a :

$$\begin{aligned} &\xi'_m GN_2(n, m, a)(I_{\sigma_t(n, m-1)} \otimes \xi_a)\xi_{m-1} + \xi'_{m-1}(I_{\sigma_t(n, m-1)} \otimes \xi_a)'N_2(n, m, a)'G'\xi_m \\ &\leq \xi'_{m-1}M\xi_{m-1} + \xi'_m GN_2(n, m, a)(M^{-1} \otimes P_a^{-1})N_2(n, m, a)'G'\xi_m \end{aligned} \quad (3.29)$$

avec $M \in \Re^{\sigma_t(n, m-1) \times \sigma_t(n, m-1)}$, $M = M' > 0$.

Ainsi si

$$\begin{aligned} &\xi'_m (M_i + \bar{M} + C(n, m) + GN_1(n, m) + N_1(n, m)'G' \\ &\quad + GN_2(n, m, a)(M^{-1} \otimes P_a^{-1})N_2(n, m, a)'G'\xi_m) \xi_m < 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

ou de façon équivalente si la relation (3.22) est satisfaite, nous avons $M_i \leq 0$ dans $\mathcal{E}(P_a)$ ainsi $V_a(x) \leq V_b(x)$ et de ce fait $\mathcal{E}(P_a) \supseteq \mathcal{E}(P_b)$. $\square$

Une méthode pour optimiser la taille de la ERA sera proposée en utilisant le Corollaire 3.2. Ce résultat sera également utile pour la définition des ERA des systèmes saturés.

3.3 Analyse de stabilité avec des fonctions de Lyapunov polynomiales

L'analyse de stabilité des systèmes non-linéaires doit prendre en compte le fait que la stabilité d'un point d'équilibre peut être seulement locale. Si l'origine est le point d'équilibre, nous pouvons trouver une approximation de la RA avec une courbe de niveau d'une fonction polynomiale. D'après le théorème 1.3 pour que cette région corresponde à une estimation de la région d'attraction d'un point d'équilibre, nous devons vérifier que la dérivée de cette fonction est négative à l'intérieur de la région limitée par la courbe de niveau. Ainsi, nous avons une garantie que cet ensemble sera contractif et invariant, et de ce fait, que les trajectoires convergent asymptotiquement à l'origine.

Nous allons étudier la stabilité de l'origine de

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.31)$$

où $f(x)$ est un polynôme de degré g_f . Nous utilisons des fonctions de polynomiales de la forme

$$V_v(x) = \xi_v' P_v \xi_v \quad (3.32)$$

comme fonctions de Lyapunov candidates afin d'obtenir des ERA de l'origine du système (3.31).

Corollaire 3.3. *Supposons qu'il existe une matrice $P_v \in \Re^{\sigma_t(n,v) \times \sigma_t(n,v)}$, $P_v = P_v' > 0$, une matrice $G \in \Re^{\sigma_t(n,r) \times \sigma_t(n,r-1) \times \sigma_t(n,v)}$, une matrice $M_r \in \Re^{\sigma_t(n,r-1) \times \sigma_t(n,r-1)}$, $M_r = M_r' > 0$, telles que l'inégalité suivante est vérifiée*

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_v + \bar{M}_r + GN_1(n,r) + N_1(n,r)'G' + C(n,r) & GN_2(n,v,r) \\ N_2(n,v,r)'G' & -(M_r \otimes P_v) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.33)$$

avec

$$\bar{M}_r = \text{diag}(M_r, 0_{\sigma(n,r) \times \sigma(n,r)}) \quad (3.34)$$

et

$$\bar{M}_v = \text{diag}(M_v, 0_{(\sigma_t(n,r) - \sigma_t(n,d)) \times (\sigma_t(n,r) - \sigma_t(n,d))}) \quad (3.35)$$

où M_v satisfait

$$\dot{V}_v(x) = 2\xi_v' P_v A_{tv} \xi_{g_{fv}} = \xi_d' M_v \xi_d \quad (3.36)$$

et $d = \left\lceil \frac{g_{fv} + v}{2} \right\rceil$, $g_{fv} = g_f + v - 1$. Alors $\mathcal{E}(P_v)$ est une ERA de l'origine du système polynomial (3.31).

Démonstration. Considérons la fonction polynomiale

$$V_v(x) = \xi'_v P_v \xi_v \quad (3.37)$$

Nous considérons sa dérivée le long des trajectoires du système (3.31) écrite comme

$$\dot{V}_v(x) = \xi'_d M_{\dot{V}} \xi_d \quad (3.38)$$

La relation suivante, est satisfaite :

$$\xi'_r G(N_1(n, r) \xi_r + N_2(n, r, v)(I_{\sigma_t(n, r-1)} \otimes \xi_v) \xi_{r-1}) = 0 \quad (3.39)$$

où $N_1(n, r)$ et $N_2(n, r, v)$ sont données par (2.37). Nous allons considérer $r \geq d$. Nous avons aussi l'inégalité

$$\begin{aligned} & \xi'_r G N_2(n, r, v)(I_{\sigma_t(n, r-1)} \otimes \xi_v) \xi_{r-1} + \xi'_{r-1} (I_{\sigma_t(n, r-1)} \otimes \xi_v)' N_2(n, r, v)' G' \xi_r \\ & \leq \xi'_r G N_2(n, r, v)(M_r^{-1} \otimes P_v^{-1}) N_2(n, r, v)' G' \xi_r + \xi'_{r-1} M_r \xi_{r-1} \end{aligned} \quad (3.40)$$

satisfaite dans $\mathcal{E}(P_v)$ avec $M_r \in \Re^{\sigma_t(n, r-1) \times \sigma_t(n, r-1)}$, $M_r = M'_r > 0$. Ainsi nous avons

$$\begin{aligned} \dot{V}_v(x) & \leq \xi'_d M_{\dot{V}} \xi_d + \xi'_r G N_1(n, r) \xi_r + \xi'_r N_1(n, r)' G' \xi_r \\ & \quad + \xi'_r G N_2(n, r, v)(M_r^{-1} \otimes P_v^{-1}) N_2(n, r, v)' G' \xi_r + \xi'_{r-1} M_r \xi_{r-1} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Nous pouvons donc conclure que, si (3.33) est satisfaite nous avons $\dot{V}_v(x) < 0$ dans $\mathcal{E}(P_v)$. $\square$

Remarque 3.3. Nous pouvons utiliser des fonctions $\xi'_{r-1} M_r \xi_{r-1}$ de degré $r \geq d$ avec r arbitraire.

L'inégalité (3.33) contient le produit $(M_r \otimes P_v)$, ce qui peut être un inconvénient pour la solution avec des outils de programmation semi-définie. D'une part, si nous voulons satisfaire l'inégalité avec M_r et P_v étant des variables nous aurons plus de degrés de liberté mais en devant résoudre une Inégalité Matricielle Bilinéaire (BMI de l'anglais *Bilinear Matrix Inequality*). D'autre part, si M_r ou P_v est fixée, la relation (3.33) devient une LMI, mais des degrés de liberté sont perdus et la possibilité de trouver une ERA satisfaisante est réduite, surtout si nous fixons P_v car dans ce cas la forme des courbes de niveau est définie a priori. Remarquons pour autant que le produit $(M_r \otimes P_v)$ est très particulier car il s'agit d'un produit entre les éléments de deux matrices définies positives apparaissant dans la diagonale de l'inégalité (3.33).

On peut explorer des propriétés de la RA afin d'utiliser des matrices M_r variables ayant une structure imposée, c'est-à-dire des matrices $M_r = \alpha M_\alpha$ avec $\alpha \in \Re_+$ et M_α

une matrice donnée permettant ainsi la formulation d'un problème de programmation convexe pour calculer des ERA.

La région d'attraction de l'origine de (3.31) est aussi la région d'attraction de tout système sous la forme :

$$\dot{x} = g(x)f(x) \quad (3.42)$$

où $g(x) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^+$ (possiblement $g(0) = 0$). De ce fait, une fois trouvé une ERA pour un $g(x)$ particulier, nous avons une ERA pour tout système décrit par (3.42).

Pour une fonction $f(x)$ polynomiale nous choisissons $g(x) = \alpha$, $\alpha > 0$ et nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha f(x) \\ &= \alpha A_1 x + \alpha A_2 x^2 + \alpha A_3 x^3 + \dots + \alpha A_g x^{g_f} \\ &= \alpha \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_g \end{bmatrix} \xi_{g_f} \end{aligned} \quad (3.43)$$

qui est utilisé dans le résultat suivant.

Corollaire 3.4. *Supposons qu'il existe des matrices $\tilde{P}_v \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n,v) \times \sigma_t(n,v)}$, $\tilde{P}_v = \tilde{P}_v' > 0$, $G \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n,v) \times \sigma_t(n,r-1)\sigma_t(n,v)}$ et un scalaire positif α , tels que l'inégalité suivante soit vérifiée*

$$\begin{bmatrix} \tilde{M}_v + \alpha \tilde{M}_\alpha + GN_1(n,r) + N_1(n,r)'G' + C(n,r) & GN_2(n,v,r) \\ N_2(n,v,r)'G' & -(M_\alpha \otimes \tilde{P}_v) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.44)$$

avec

$$\tilde{M}_\alpha = \text{diag}(M_\alpha, 0_{\sigma(n,r) \times \sigma(n,r)}) \quad (3.45)$$

et

$$\tilde{M}_v = \text{diag}(M_v, 0_{\sigma_t(n,r) - \sigma_t(n,d) \times \sigma_t(n,r) - \sigma_t(n,d)}) \quad (3.46)$$

où M_v satisfait

$$\dot{V}_v(x) = 2\xi_v' \tilde{P}_v A_{tv} \xi_{g_{fv}} = \xi_d' \tilde{M}_v \xi_d \quad (3.47)$$

$d = \lceil \frac{g_{fv} + v}{2} \rceil$, et nous exprimons la dynamique dans les coordonnées ξ_v par $\dot{\xi}_v = A_{tv} \xi_{g_{fv}}$, $g_{fv} = g_f + v - 1$ et la matrice M_α est une matrice symétrique satisfaisant $M_\alpha > 0$. Alors $\mathcal{E}(\tilde{P}, \alpha) = \{x \in \mathfrak{R}^n; \xi_v' \tilde{P}_v \xi_v \leq \alpha\}$ est une ERA pour la classe des systèmes (3.42).

Démonstration. Considérons la classe de systèmes (3.42) et imposons $g(x) = \alpha$. Prenons alors l'inégalité (3.33) avec $M_r = \alpha M_\alpha$, alors on obtient

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_v + \alpha \tilde{M}_\alpha + GN_1(n,r) + N_1(n,r)'G' + C(n,r) & GN_2(n,v,r) \\ N_2(n,v,r)'G' & -(\alpha M_\alpha \otimes P_v) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.48)$$

avec

$$\xi_d' \tilde{M}_V \xi_d = 2 \xi_v' \tilde{P}_v \alpha A_{tv} \xi_{g_{fv}} \quad (3.49)$$

Nous pouvons donc effectuer le changement de variables $\tilde{P}_v = \alpha P_v$ pour retrouver l'inégalité (3.44). Comme $\mathcal{E}(P) = \mathcal{E}(\tilde{P}, \alpha)$, une ERA est donnée par $\mathcal{E}(\tilde{P}, \alpha)$. $\square$

Remarque 3.4. Pour le cas où M_r est imposée dans (3.33) nous retrouvons $\alpha = 1$. Avec (3.44) la matrice M_α est imposée et α est la variable définissant la courbe de niveau de la fonction $V_v(x)$ qui correspond à une ERA.

3.4 Stratégies pour l'optimisation de la ERA

Nous présentons par la suite différentes méthodes pour maximiser l'ensemble des points donnant une ERA. Des mesures indirectes du volume d'un ensemble polynomial sont proposées comme fonctions objectifs des problèmes d'optimisation soumis à des contraintes exprimées par des inégalités matricielles.

3.4.1 Minimiser la Trace de la matrice de Lyapunov

Comme nous avons vu dans le chapitre 1, le volume d'un ellipsoïde est proportionnel à

$$\det(P)^{-1} = \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{-1}$$

où λ_i est la i -ème valeur propre de la matrice P , $P = P' > 0$.

Pourtant, utiliser la fonction $\det(P)^{-1}$ comme fonction objectif avec des contraintes linéaires n'est pas envisageable de par la possibilité de la multiplicité des minima locaux. Une mesure indirecte du volume, donnée par la fonction

$$\text{Trace}(P) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

comme fonction objectif permet la formulation d'un problème d'optimisation convexe. La minimisation de la fonction $\text{Trace}(P)$ implique une maximisation des axes de l'ellipsoïde $\mathcal{E}(P)$, donnés par $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$.

Dans le cadre des fonctions polynomiales il est difficile d'obtenir une expression pour le volume de $\mathcal{E}(P_v)$. Néanmoins il est possible d'utiliser $\text{Trace}(P_v)$ comme une mesure de la taille de $\mathcal{E}(P_v)$ [12]. Dans ce cas ce sont les coefficients des monômes contenant exclusivement des puissances paires des variables d'état qui seront minimisés et $\text{Trace}(P_v) = \text{Trace}(P_{vd})$ où $P_{vd} = \{P_v(1, 1), \dots, P_v(\sigma_t(n, v), \sigma_t(n, v))\}$

Par exemple, pour $i = 2$, $n = 2$ nous avons

$$\text{Trace}(P_v) = \text{Trace}(P_{vd}) = \sum_{i=1}^5 P_v(i, i)$$

où

$$V_{vd}(x) = P_v(1, 1)x_1^2 + P_v(2, 2)x_2^2 + P_v(3, 3)x_1^4 + P_v(4, 4)x_1^2x_2^2 + P_v(5, 5)x_2^4 \quad (3.50)$$

Alors la résolution de

$$\min \text{Trace}(P_v) \quad \text{soumis à (3.33)} \quad (3.51)$$

implique la minimisation des coefficients de la fonction $V_{vd}(x)$.

3.4.2 Maximiser un ensemble intérieur

On peut également s'intéresser à caractériser une ERA qui contient l'ensemble le plus grand défini par une courbe de niveau d'une fonction $V_d = \xi_d' P_d \xi_d$, $V_d \in \Sigma_d$. Nous utiliserons donc l'inégalité (3.22) pour garantir l'inclusion de l'ensemble $\mathcal{E}(\beta P_d) = \{x \in \mathfrak{R}^n; \xi_d' \beta P_d \xi_d \leq 1\} = \{x \in \mathfrak{R}^n; \xi_d' P_d \xi_d \leq \beta^{-1}\}$ dans $\mathcal{E}(P_v)$ et ainsi garantir que $\mathcal{E}(\beta P_d)$ est à l'intérieur de la ERA du système (3.31). Nous pouvons donc formuler le problème d'optimisation

$$\min \beta \quad \text{soumis à (3.22), (3.33)} \quad (3.52)$$

avec $P_a = P_v$ et $P_b = \beta P_d$ dans (3.22).

3.4.3 Chercher une $V(x)$ favorable

Comme nous l'avons souligné, une façon d'obtenir des ERA avec des LMIs est d'effectuer une recherche alternée en fixant une des variables dans (3.33), soit la matrice M_r , soit la matrice P_v . Les figures 1.1 et 1.2 montrent qu'une courbe de niveau optimale pour une fonction $V_v(x)$ fixée peut donner une ERA petite par rapport à la RA de l'origine. Par la suite nous proposons une méthode qui considère des propriétés de la frontière de la RA et de l'ensemble qui limite l'estimation de la RA avec une fonction donnée $V_v(x)$, c'est-à-dire l'ensemble $S_{VZ} = \{x \in \mathfrak{R}^n; \dot{V}_v(x) = 0\}$.

Pour n'importe quelle fonction polynomiale $V_v(x) = \xi_v' P_v \xi_v$, nous vérifions que $\dot{V}_v(x_{eq}) = 2\xi_v' P_v f(x_{eq}) = 0$ avec x_{eq} étant un point d'équilibre du système (3.31). De ce fait nous avons $\{x \in \mathfrak{R}^n; f(x) = 0\} \subset S_{VZ}$.

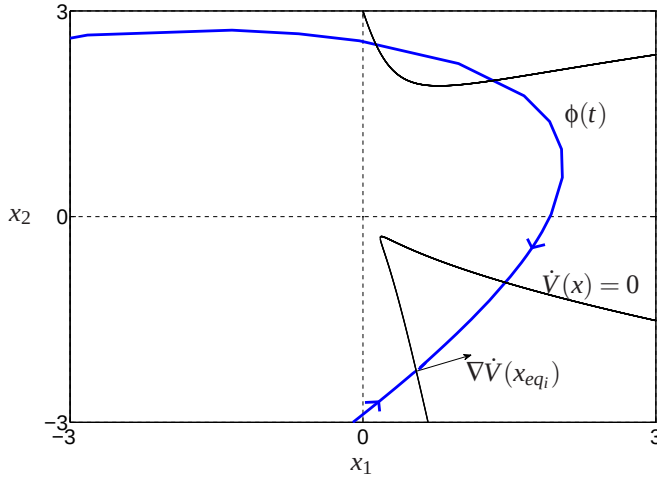
Si l'on exclut la possibilité de cycles-limites, nous avons que la frontière de la RA de l'origine est constituée de trajectoires qui convergent à un sous-ensemble de points d'équilibre du système [88].

Or, si l'intersection de l'ensemble $\partial\mathcal{E}(P_V)$ avec l'ensemble S_{VZ} contient un point d'équilibre alors la frontière de la ERA "touche" la frontière de la RA. Nous cherchons donc une méthode qui favorise l'obtention d'une fonction $V_V(x)$ telle que $x_{eq} \in \partial\mathcal{E}(P_V) \cap S_{VZ}$, où x_{eq} est un point d'équilibre autre que l'origine. Par la suite nous considérons que des points d'équilibre du système sont connus. Une condition pour que $x_{eq} \in \mathcal{E}(P_V) \cap S_{VZ}$ est que la direction de croissance de la fonction $\dot{V}_V(x)$ dans le point x_{eq} soit parallèle au vecteur x_{eq} . Autrement dit, nous devons donc vérifier $x'_{eq} \nabla \dot{V}_V(x_{eq}) = \|x_{eq}\| \|\nabla \dot{V}_V(x_{eq})\|$, ou bien

$$x_{eqij}^{\perp'} \nabla \dot{V}_V(x_{eq}) = 0 \quad (3.53)$$

où $x_{eqij}^{\perp}$ représente le j -ième vecteur de la base des vecteurs perpendiculaires à x_{eqi} , le i -ième point d'équilibre du système (3.31).

Reprenons l'exemple 1.1 où la fonction $V(x)$ pour laquelle la ERA était petite par rapport à la RA. La Figure 3.2 montre en bleu les trajectoires définissant la frontière de la RA de l'origine, qui convergent au point d'équilibre x_{eq} . Remarquons que le vecteur $\nabla \dot{V}(x_{eq_i})$ a un angle moindre avec le vecteur x_{eq} de sorte que la courbe en vert permet une ERA qui soit plus proche du point d'équilibre. Il n'est pas pour autant possible de trouver une fonction quadratique telle que $x_{eq} \in \mathcal{E}(P_V) \cap S_{VZ}$.



Définissons alors la fonction

$$d_{\nabla \dot{V}}(x_{eq_i}) = \sum_{j=1}^{n-1} \nabla \dot{V}(x_{eq_i})' x_{eqij}^{\perp} \quad (3.54)$$

linéaire dans les éléments de P_V . Afin de minimiser l'angle entre $\nabla \dot{V}(x_{eq_i})$ et x_{eq_i} nous considérons $\gamma > 0$ et $\gamma - \left(\sum_{i=1}^{n_{eq}} d_{\nabla \dot{V}}(x_{eq_i}) \right)^2 > 0$ et nous résolvons :

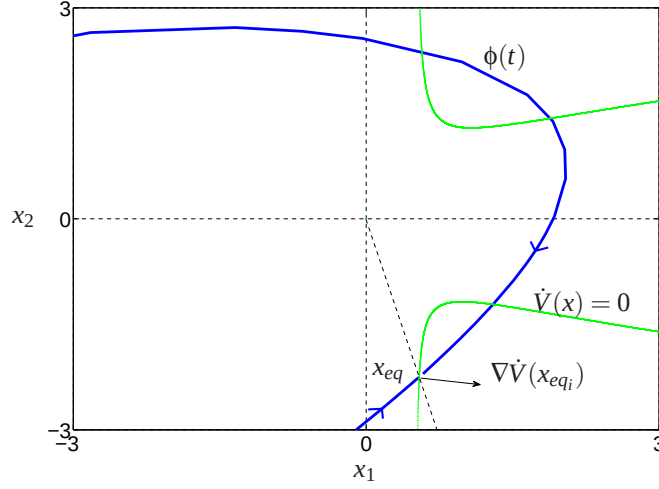


Figure 3.2 – Les courbes noires et vertes correspondent à l'ensemble $\{x \in \mathfrak{R}^n; \dot{V}(x) = 0\}$ pour deux fonctions quadratiques $V(x)$ différentes, remarquons que le vecteur $\nabla \dot{V}(x_{eq_i})$ a un angle plus petit avec la droite reliant x_{eq} à l'origine avec la deuxième courbe.

$$\begin{aligned} & \min \quad \gamma \\ \text{soumis à} \quad & \begin{bmatrix} -\gamma & \sum_{i=1}^{n_{eq}} d_{\nabla \dot{V}}(x_{eq_i}) \\ \sum_{i=1}^{n_{eq}} d_{\nabla \dot{V}}(x_{eq_i}) & -1 \end{bmatrix} < 0, \quad (3.33) \end{aligned} \quad (3.55)$$

Nous pouvons ne pas prendre en compte tous les points d'équilibre du système seulement ceux que nous espérons appartenir à la frontière de la RA. Une fois ce critère optimisé dans un point précis, c'est-à-dire dans un point x_{eq} , nous n'avons pas de garantie que l'intersection de la courbe de niveau optimale avec S_{VZ} peut être ailleurs que dans le point d'équilibre. La méthode est indiquée pour trouver une fonction $V_v(x)$ qui servira de point de départ pour une recherche alternée. Certes, un des inconvénients de cette méthode est l'exigence de calculer des points d'équilibre.

3.5 Exemples

Les exemples de cette section illustrent des ERA obtenues en utilisant les conditions de stabilité et les méthodes d'optimisation présentées dans ce chapitre. Premièrement nous nous intéressons à des systèmes d'ordre $n = 2$. Des exemples de systèmes

de degré $g_f = \{2, 3, 7\}$ nous permettent de visualiser les ERA dans le plan de phase et de mettre en évidence quelques propriétés des méthodes d'optimisation proposées.

Pour des systèmes d'ordre $n = 3$ nous montrons des trajectoires et des estimations des régions d'attraction obtenues. Par la suite nous tiendrons compte des systèmes d'ordre plus élevé pour tester les limites des méthodes proposées, à savoir, les degrés du polynôme et de la fonction de Lyapunov pour lesquels nous pouvons appliquer ces méthodes avec des outils disponibles pour résoudre des problèmes de SDP.

Certains des systèmes étudiés ont été empruntés à la littérature avec le souci de comparaison avec l'état de l'art. D'autres systèmes ont été choisis pour mieux montrer les propriétés des méthodes proposées. Les matrices utilisées pour représenter les systèmes ainsi que les matrices des fonctions de Lyapunov obtenues sont présentées dans l'annexe C.

Exemple 1 Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -1.1x_1 + 0.7x_2 - 0.32x_1^2 - 0.2x_1x_2 - 0.03x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 0.1x_1 - 0.6x_2 - 0.2x_1^2 - 0.02x_1x_2 + 0.4x_2^2 \end{cases} \quad (3.56)$$

Nous choisissons comme fonction $V(x)$ une fonction quadratique. Une fois obtenue la matrice de Lyapunov en choisissant la matrice M_r comme dans le corollaire 3.4 nous pouvons résoudre le problème comme avec des LMIs. L'optimisation de la fonction $\text{Trace}(P)$ soumise à l'inégalité (3.48) nous donne donc la courbe en rouge de la figure 3.3. Ensuite nous essayons d'augmenter cette courbe de niveau avec la condition du corollaire 3.3. Dans ce cas M_r est une variable de décision et nous cherchons donc la plus grande courbe de niveau de la fonction de Lyapunov obtenue pour trouver la courbe noire de la figure 3.3 qui présente aussi en noir l'ensemble $\dot{V}(x) = 0$

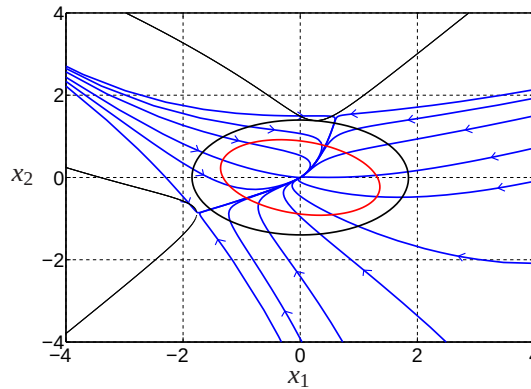


Figure 3.3 – ERAs ellipsoïdales du système (3.56) obtenues en optimisant la fonction $\text{Trace}(P)$.

Nous essayons ensuite d'obtenir la plus grande courbe de niveau à partir de la connaissance des points d'équilibre du système, à savoir

$$x_{eq1} = \begin{bmatrix} 0.6298 \\ 1.5453 \end{bmatrix}; x_{eq2} = \begin{bmatrix} -1.646 \\ -0.8859 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Alors en résolvant (3.55) avec la matrice M_r fixée nous obtenons l'ellipsoïde rouge. Nous espérons que la courbe de niveau de la fonction de Lyapunov obtenue puisse s'approcher de la frontière de la région d'attraction, ce qui est obtenu en maximisant la courbe de niveau avec une matrice M_r variable. L'ERA résultante est donnée par la région à l'intérieur de l'ellipse noire. La figure 3.4 montre les ERAs obtenues et l'ensemble $S_{VZ} = \{x \in \mathbb{R}^2; \dot{V}(x) = 0\}$.

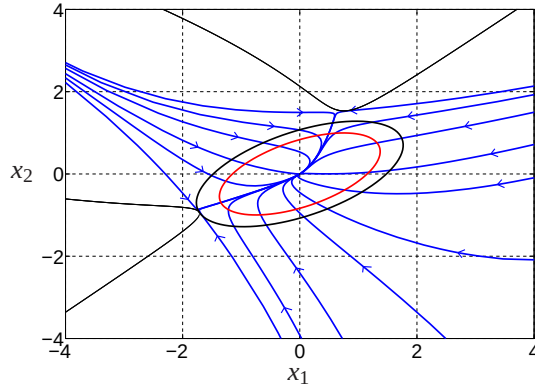


Figure 3.4 – ERAs ellipsoïdales du système (3.56).

Exemple 2 Considérons maintenant l'oscillateur de Van-der-Pol à temps inversé qui présente un cycle-limite instable et l'origine comme point d'équilibre stable.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + x_1^2 x_2 \end{cases} \quad (3.58)$$

Ce système ne possède que des termes de degré impair. Ses trajectoires sont donc symétriques par rapport à l'origine. On s'attend à ce que les estimations de la ERA soient données par des courbes de niveau symétriques, c'est à dire, données par des fonctions de Lyapunov contenant seulement des monômes de degré pair.

Nous résolvons (3.51), pour obtenir la courbe rouge dans la figure 3.5. Par la suite on cherche la ERA maximale avec la fonction obtenue en permettant la variation de M_r pour obtenir l'ellipsoïde en noir. La figure 3.5 illustre en bleu des trajectoires du système et en noir l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n; \dot{V}(x) = 0\}$.

En introduisant une fonction de degré 4 nous espérons avoir une ERA plus proche de la frontière de la RA. La figure 3.6 présente en vert la frontière de la région $\mathcal{E}(P_2)$ définie par la fonction de degré 4 donnée par $V(x) = \xi_2' P_2 \xi_2$ ainsi que la région de la figure 3.5. Nous avons dans la même figure l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n; \dot{V}_2(x) = 0\}$.

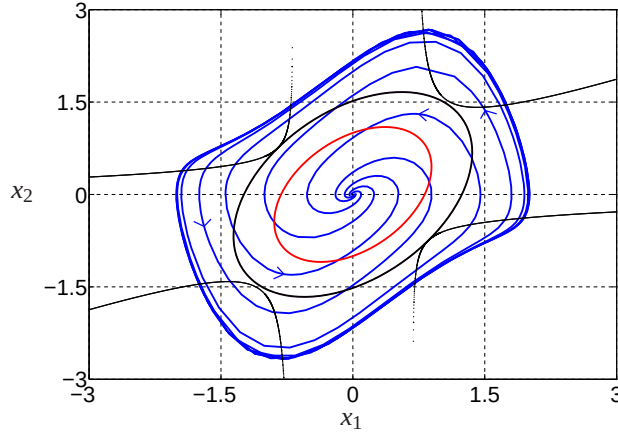


Figure 3.5 – Ellipsoïde maximal obtenu avec la Corollaire 3.3

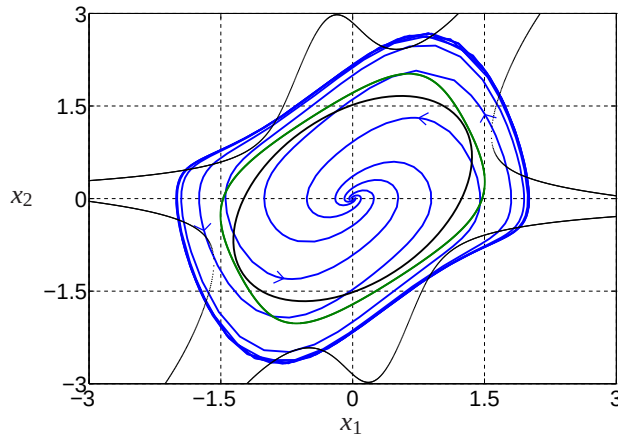


Figure 3.6 – ERA obtenues avec les fonctions de degré 4 et de degré 2.

Comme ce système ne possède pas d'autres points d'équilibre que l'origine, il n'est pas possible de formuler le problème (3.54).

Exemple 3 Considérons le système suivant de degré $g = 7$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -2x_1 + 0.5x_2 + 3x_1x_2 + x_1^3 - 2x_1^3x_2^2 + x_1^3x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= -1.5x_1 - 3x_2 + 1.5x_2^2 + 2x_2^3 + x_1^2x_2^2 + x_1^5x_2^2 \end{cases} \quad (3.59)$$

La ERA de forme ellipsoïdale et l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n; \dot{V}(x) = 0\}$ sont illustrés dans la figure 3.7.

Nous pouvons noter que l'ensemble $\dot{V}(x) = 0$, se rapproche de la frontière de la région d'attraction.

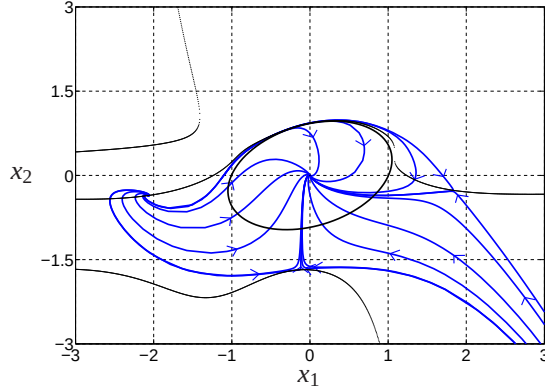


Figure 3.7 – Ellipsoïde maximal obtenu avec le Corollaire 3.3

Exemple 4 Le système suivant de degré $g = 2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -3x_1 - 1.6x_2 - x_1^2 + 1.8x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= 1.3x_1 - x_2 + 5.5x_1x_2 + 2x_2^2 \end{cases} \quad (3.60)$$

Nous appliquons les deux méthodes d'optimisation, à savoir, la minimisation de la fonction $\text{Trace}(P_V)$ et l'élargissement d'un ensemble intérieur. La méthode d'optimisation d'un ensemble intérieur est réalisée avec l'ensemble intérieur défini par la fonction de degré 2 avec la matrice identité, c'est-à-dire, nous avons pour (3.22) $P_b = \beta I_2$. Les figures 3.8, 3.9 et 3.10 montrent les résultats de l'optimisation de la $\text{Trace}(P_V)$ et des ensembles intérieurs pour des fonctions de Lyapunov de degré 4, 6 et 8. Les courbes en couleur foncée correspondent aux estimations obtenues en optimisant la fonction $\text{Trace}(P_V)$.

Nous n'avons pas de garantie que la région sera plus grande que celle obtenue en maximisant la fonction $\text{Trace}(P)$. Notons que ni la région d'attraction ni les ERA ne sont convexes et que pour les deux critères testés rien ne nous permet de décider quel est le meilleur.

Exemple 5 L'exemple suivant nous permet de mettre en évidence un possible inconvénient de la méthode d'optimisation qui minimise l'angle entre $\nabla \dot{V}_V(x_{eq})$ et le point d'équilibre. Le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= 2x_2 - 0.2x_1^2 + 3x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - 2x_2 + 0.5x_1^2 - 2x_1x_2 - 0.2x_2^2 \end{cases} \quad (3.61)$$

admet le point d'équilibre $x_{eq} = [-0.6910 \quad 1.3103]'$. En utilisant une fonction $V_V(x)$ de degré 4, même si nous avons $\nabla \dot{V}_V(x_{eq})'x_{eq} = 0$, rien n'est garanti pour d'autres points. Alors la courbe $\dot{V}_V(0) = 0$ peut être à l'intérieur de la région de stabilité comme nous le voyons dans la figure 3.11 où $V_V(x)$ est la solution de (3.55).

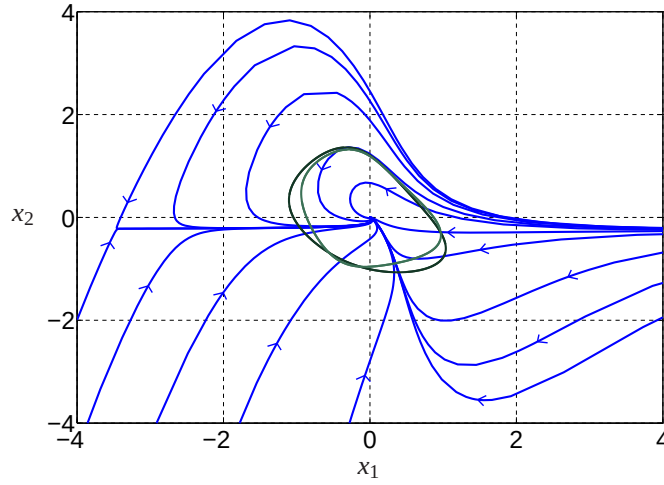


Figure 3.8 – ERAs définies par des fonctions de degré 4 obtenues en optimisant la trace et un ensemble intérieur

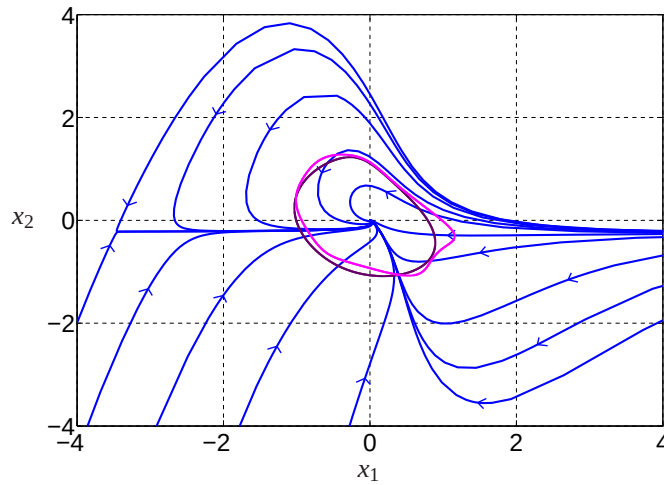


Figure 3.9 – ERAs définies par des fonctions de degré 6 obtenues en optimisant la trace et un ensemble intérieur

Dans ce cas, la courbe de niveau de la fonction de Lyapunov de degré 4 qui “touche” l’ensemble $\dot{V}_V(x) = 0$ est incluse dans une ERA de forme ellipsoïdale obtenue en minimisant la $\text{Trace}(P)$ d’une fonction quadratique $V(x) = x'Px$.

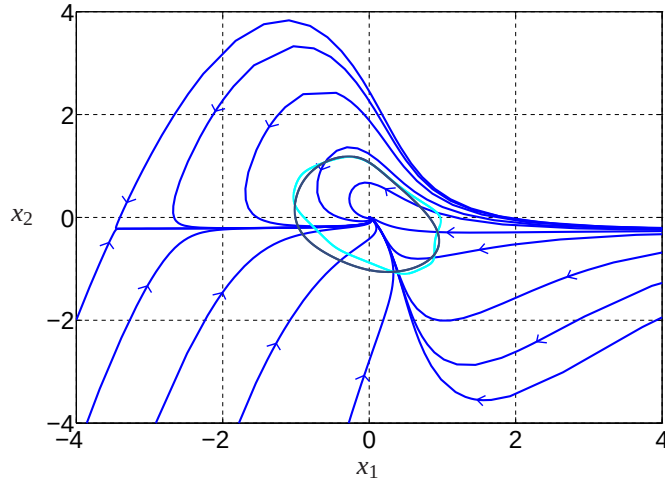


Figure 3.10 – ERAs définies par des fonctions de degré 8 obtenues en optimisant la trace et un ensemble intérieur

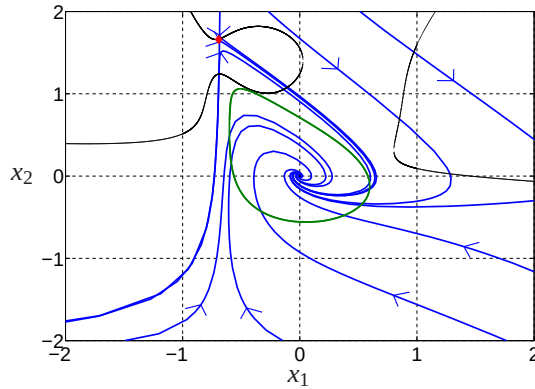


Figure 3.11 – Courbe $\dot{V}(x) = 0$ (en noir) et ensemble maximal pour une fonction de Lyapunov de degré 4 (en vert).

Exemple 6 Nous présentons maintenant des résultats pour des systèmes d'ordre $n = 3$. Considérons l'attracteur de Lorenz

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -\sigma x_1 + \sigma x_2 \\ \dot{x}_2 &= \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 &= -b x_3 + x_1 x_2 \end{cases}$$

où σ , ρ et b sont des scalaires positifs. Le système présente trois points d'équilibre :

$$x_{e1} = 0 ; x_{e2} = \begin{bmatrix} \sqrt{b(\rho-1)} \\ \sqrt{b(\rho-1)} \\ \rho-1 \end{bmatrix} ; x_{e3} = \begin{bmatrix} -\sqrt{b(\rho-1)} \\ -\sqrt{b(\rho-1)} \\ \rho-1 \end{bmatrix}$$

Pour $\rho > 1$ l'origine est un point d'équilibre instable et x_{e2} et x_{e3} sont des points d'équilibre stables. Nous nous intéressons à calculer la région d'attraction autour de l'équilibre x_{e2} . Pour cela nous avons d'abord besoin du système décrit autour de ce point :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -\sigma x_1 + \sigma x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - \sqrt{b(\rho-1)}x_3 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= \sqrt{b(\rho-1)}x_1 + \sqrt{b(\rho-1)}x_2 - bx_3 + x_1x_2 \end{cases}$$

Nous allons obtenir des ERA de degrés 2 et 4 pour le système défini par $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ et $\rho = 4$. Les ERA obtenues sont présentées dans la figure 3.12 : en bleu sont présentées les trajectoires qui convergent vers x_{e2} et en rouge, les trajectoires qui convergent vers x_{e3} .

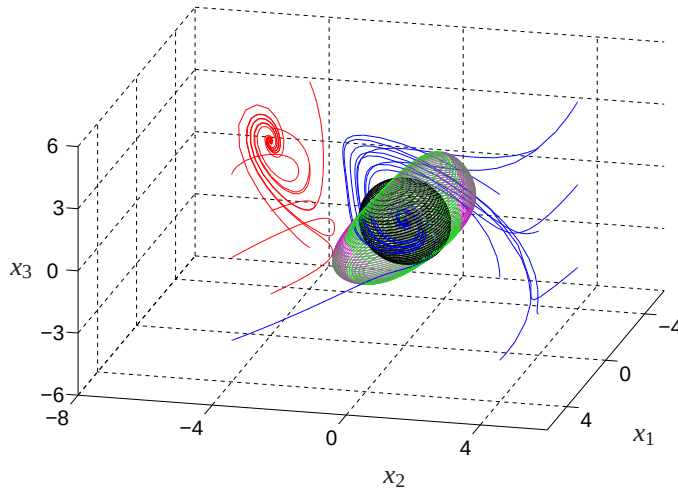


Figure 3.12 – Trajectoires du système (3.5) et ERA du point d'équilibre x_{eq2} .

Remarquons que la fonction de degré 4 résulte en une ERA plus grande, notamment dans les direction pour lesquelles la convergence au point d'équilibre en question est plus rapide.

Exemple 7 Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_3 \\ \dot{x}_3 &= -0.915x_1 + (1 - 0.915x_1^2)x_2 - x_3 \end{cases}$$

Ce système a été étudié dans [24]. Il présente un cycle limite instable autour de l'origine. Avec une fonction quadratique obtenue à partir du corollaire 3.3 nous avons obtenu la ERA présentée dans la figure 3.13. en rouge nous avons des trajectoires

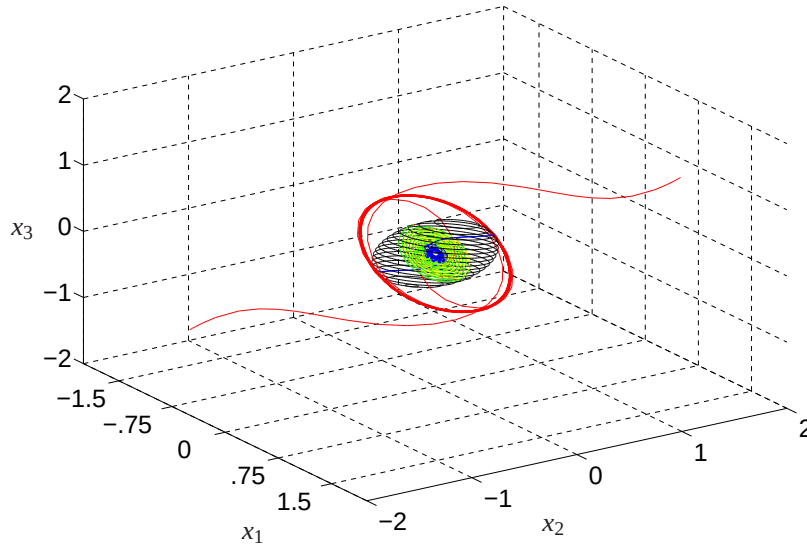


Figure 3.13 – Estimation de la Région d’Attraction sous forme ellipsoïdale de l’origine (3.5).

unstables qui se rapprochent d’abord du plan défini par le cycle limite et en bleu, jaune et vert, des trajectoires qui débutent à la frontière de la ERA obtenue. Notons que ce système ne comporte que des termes de degré impair. La RA est alors symétrique par rapport à l’origine.

Exemple 8 Dans cet exemple nous obtenons des ERA pour des systèmes d’ordre croissant en utilisant le corollaire 3.3. Pour cela, nous allons prendre le système d’ordre n et de degré 3 défini par l’équation suivante.

$$\dot{x} = (A + x'QxI_n)x \quad (3.62)$$

Ce système présente l’intérêt d’avoir une région d’attraction connue et définie par $\mathcal{E}(Q)$. En effet il s’agit d’un système pour lequel la RA est une hypersphère qui est obtenue avec $-A = Q = I_n$. Nous avons testé des systèmes de dimensions $n = \{1, \dots, 9\}$. Pour tous les cas testés, les ERA obtenues sont définies par la matrice identité multipliée par un scalaire. Le tableau ci-dessus décrit le pourcentage du volume de la RA obtenu avec les estimations.

n	3	4	5	6	7	8	9
Cor. 3.3	0.8695	0.8299	0.7921	0.7560	0.7216	0.6888	0.6574

Tableau 3.1 – Pourcentage du volume de la RA obtenu avec l’estimation.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une méthode permettant l'étude de la positivité d'une fonction polynomiale dans un ensemble limité par une courbe de niveau d'une fonction polynomiale. Nous l'avons ensuite appliqué au problème de l'estimation des régions d'attraction de l'origine des systèmes polynomiaux. Nous avons ainsi formulé le problème comme un test de positivité de polynômes, comme cela est présenté dans le Corollaire 3.3. Comme nous arrivons à une formulation avec des produit entre les variables d'optimisation, une formulation comme un problème de SDP soumis à des LMI est obtenu si on fixe une des variables. Après avoir obtenu une fonction de Lyapunov favorable nous pouvons donc améliorer l'estimation avec des recherches alternées.

Des mesures de la taille de la région polynomiale sont utilisées comme critère d'optimisation des estimations des ERA. Les résultats numériques ne permettent pas d'affirmer quel est le critère le plus avantageux. Bien évidemment nous pouvons utiliser différents critères pour construire des ensembles plus grands car l'union des estimations est aussi une ERA. La croissance exponentielle du nombre de variables du problème selon le degré du système et le degré de la fonction de Lyapunov reste cependant un inconvénient majeur des méthodes présentées ici.

Remarquons finalement que les ERA obtenues, basées sur des critères de stabilité de Lyapunov, ne sont pas seulement des régions d'attraction des points d'équilibre mais aussi des régions d'invariance.

Chapitre 4

Synthèse des lois de commande polynomiales

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons deux méthodes permettant la synthèse de lois de commande polynomiale pour des systèmes polynomiaux.

Une formulation pour le problème de synthèse de retour d'état est possible à partir d'un changement de variables similaire à celui effectué pour la synthèse de lois de commande linéaires pour des systèmes linéaires. Ceci permet de considérer simultanément une fonction de Lyapunov et des gains polynomiaux comme des variables d'un problème de SDP.

Le cas du retour de sortie est étudié en considérant une loi de commande linéaire, possiblement dynamique, à laquelle nous rajoutons des termes polynomiaux afin d'élargir la région d'attraction de l'origine.

4.2 Synthèse de retour d'état

La synthèse des contrôleurs de retour d'état statique posé comme un problème SDP pour des systèmes linéaires est bien établie. Une formulation convexe du problème a été le point de départ pour l'obtention des contrôleurs satisfaisant plusieurs critères telles que la robustesse face à des incertitudes et des critères de performance ainsi que la prise en compte de certaines non-linéarités statiques.

Pour des systèmes polynomiaux des techniques inspirées de celles existantes pour des systèmes linéaires ont été proposées récemment : [9] considère le calcul de gains polynomiaux pour élargir une région polynomiale pour une fonction de Lyapunov donnée ; [42] propose des recherches alternées entre les variables de gain et la fonction de Lyapunov ; [25] calcule des gains polynomiaux pour stabiliser globalement l'origine

d'un système polynomial avec une matrice de Lyapunov polynomiale structurée ; [39] cherche des gains polynomiaux afin de stabiliser le système dans une région pré-définie et dans [93] la synthèse cherche une région d'invariance à l'intérieur d'un ensemble où la norme de la dérivée est bornée par une valeur donnée.

Nous avons donc des solutions proposées pour le problème de synthèse des gains polynomiaux comme des problème SDP qui considèrent soit une région imposée dans laquelle il est souhaitable d'avoir la stabilité soit des recherches alternées entre les variables des gains et la fonction de Lyapunov. Dans le deuxième cas des méthodes proposent fixer la fonction de Lyapunov vérifiant la stabilité de la partie linéaire du système et ensuite de calculer un contrôleur qui maximise la région d'attraction de l'origine lorsque les termes non-linéaires du système sont pris en compte [9], [42]. Or, comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, une fonction de Lyapunov vérifiant la stabilité des termes linéaires du système peut donner des ERA petites lorsque les termes non-linéaires sont présents. De façon similaire nous ne pouvons pas garantir que l'introduction des gains polynomiaux avec une fonction de Lyapunov fixée peut élargir des régions d'attraction.

Ceci dit, nous nous intéressons au problème de synthèse de gains statiques polynomiaux qui considère à la fois la fonction de Lyapunov et les gains du contrôleur comme des variables. Ces gains sont censés garantir la stabilité de l'origine dans une région définie par une courbe de niveau de la fonction de Lyapunov.

Nous considérons le système

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u(x) \quad (4.1)$$

où $f(x) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, $G(x) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{n \times m}$ et $u(x) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ sont des fonctions polynomiales respectivement de degré g_f , g_G et g_u . Rappelons les expressions (2.15) et (2.41) qui utilisent des vecteurs η_{g_f} et $\bar{\eta}_{g_G}$ contenant des monômes répétés :

$$\begin{aligned} f(x) &= \bar{A}_t \eta_{g_f} \\ &= \bar{A}_1 x + \bar{A}_2 x^{2\otimes} + \bar{A}_3 x^{3\otimes} + \dots + \bar{A}_{g_f} x^{g_f \otimes} \\ &= \sum_{j=1}^{g_f} \bar{A}_j x^{j\otimes} \\ G(x) &= \bar{B}(\bar{\eta}_{g_G} \otimes I_m) \\ &= B_0 + B_1(x \otimes I_m) + B_2(x^{2\otimes} \otimes I_m) + \dots + B_{g_G}(x^{g_G \otimes} \otimes I_m) \\ &= \sum_{j=1}^{g_G} B_j(x^{j\otimes} \otimes I_m) \end{aligned} \quad (4.2)$$

La loi de commande polynomiale de retour d'état de degré g_u est écrite comme dans (2.43) par

$$\begin{aligned}
u(x) &= K_1 x + K_2(x \otimes x) + K_3(x \otimes x \otimes x) + \dots + K_{g_u} x^{g_u \otimes} \\
&= \sum_{k=1}^{g_u} K_k x^{k \otimes}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

avec $K_i \in \mathfrak{R}^{m \times n^i}$, $i = 1, \dots, g_u$, ou écrite sous la forme

$$\begin{aligned}
u(x) &= \tilde{K}_1 x + \tilde{K}_2 x^{2 \otimes} + (x' \otimes I_m) \tilde{K}_3 x^{2 \otimes} + (x' \otimes I_m) \tilde{K}_4 x^{3 \otimes} + \dots \\
&= \sum_{k=1}^{g_u} (x^{g_k \otimes'} \otimes I_m) \tilde{K}_k x^{d_k \otimes}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

avec $d_k = \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$ et $g_k = k - d_k$. La boucle fermée est donc donnée par

$$\dot{x} = \tilde{f}(x) \tag{4.5}$$

avec

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{g_{\tilde{f}}} \tilde{A}_i(x) \tag{4.6}$$

où $g_{\tilde{f}} = \max(g_f, g_G + g_u)$ et

$$\tilde{A}_i(x) = \bar{A}_i x^{i \otimes} + \sum_{j=0, k=i-j}^{i-1} B_j (I_{n_j} \otimes x^{g_k \otimes'} \otimes I_m) (I_{n_j} \otimes \tilde{K}_k) x^{(d_k+j) \otimes} \tag{4.7}$$

Dans (4.7) les termes influencés par l'entrée sont obtenus à partir des expressions (4.2) de $G(x)$ et (4.4) de $u(x)$:

$$\begin{aligned}
G(x)u(x) &= B_j (x^{j \otimes} \otimes I_m) (x^{g_k \otimes'} \otimes I_m) \tilde{K}_k x^{d_k \otimes} \\
&= B_j (x^{j \otimes} \otimes (x^{g_k \otimes'} \otimes I_m) \tilde{K}_k x^{d_k \otimes}) \\
&= B_j (I_{n_j} \otimes x^{g_k \otimes'} \otimes I_m) (I_{n_j} \otimes \tilde{K}_k) x^{(d_k+j) \otimes}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Étant donné que la matrice d'entrée $G(x)$ dépend des monômes en x de degré 0 à g_G les éléments de la matrice de gains $\tilde{K}_k$ peuvent apparaître dans la boucle fermée multipliés par des monômes en x de degré $j = k, \dots, k + g_G$.

Comme il s'agit d'un système non-linéaire, la stabilité de l'origine de (4.5) peut généralement n'être garantie que localement. Il est donc souhaitable d'obtenir une ERA de l'origine simultanément avec le calcul des gains stabilisants. Par la suite, nous présentons un résultat qui permet de déterminer les gains $\tilde{K}_i$, $i = 1, \dots, g_u$, définissant la loi de commande $u(x)$ donnée par (4.4) tels que la stabilité asymptotique des trajectoires du système en boucle fermée (4.5) est garantie dans une région qui sera estimée par un ellipsoïde. Nous allons donc utiliser des fonctions de Lyapunov quadratiques $V(x) = x' P x$, $P = P' > 0$, pour calculer les gains de la loi de commande. La dérivée de cette fonction le long des trajectoires de (4.5) s'écrit

$$\dot{V}(x) = 2x'P\tilde{f}(x) \quad (4.9)$$

où nous retrouvons les termes de degré i , $i = 2, \dots, g_{\tilde{f}} + 1$. Dans l'expression du polynôme $\dot{V}(x)$, l'élément de degré $i + 1$ est donné par

$$x'P \left(\bar{A}_i x^{i \otimes} + \sum_{j=0, k=i-j}^{i-1} B_j (I_{n_j} \otimes x^{g_k \otimes'} \otimes I_m) (I_{n_j} \otimes \tilde{K}_k) x^{(d_k+j) \otimes} \right) \quad (4.10)$$

Pour représenter ces termes sous forme matricielle nous calculons $t_{di} = \lceil \frac{i+1}{2} \rceil$ et $t_{gi} = i - t_{di}$ et nous utilisons des matrices $A_{vi} \in \mathfrak{R}^{n^{(t_{gi}+1)} \times n^{t_{di}}}$, $B_{vjk} \in \mathfrak{R}^{n^{(t_{gi}+1)} \times n^{(g_k+e_{jk})}}$ et $K_{vjk} \in \mathfrak{R}^{n^{(g_k+e_{jk})} \times n^{t_{di}}}$, avec $e_{jk} = t_{di} - d_k$ telles que¹

$$\begin{aligned} x'P \left(\bar{A}_i x^{i \otimes} + \sum_{j=0, k=i-j}^{i-1} B_j (I_{n_j} \otimes x^{g_k \otimes'} \otimes I_m) (I_{n_j} \otimes \tilde{K}_k) x^{(d_k+j) \otimes} \right) \\ = x^{(t_{gi}+1) \otimes'} (I_{n^{t_{gi}}} \otimes P) \left(A_{vi} + \sum_{j=0, k=i-j}^{i-1} B_{vjk} \tilde{K}_{vjk} \right) x^{t_{di} \otimes} \\ = x^{(t_{gi}+1) \otimes'} M_{BFi} x^{t_{di} \otimes} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Pour l'instant nous présentons des exemples de matrices M_{BFi} :

Exemple 1 Considérons $g_f = 3$, $g_G = 0$, $g_u = 3$, à savoir

$$f(x) = \bar{A}_1 x + \bar{A}_2 x^{2 \otimes} + \bar{A}_3 x^{3 \otimes}$$

$$G(x) = B_0$$

$$u(x) = \tilde{K}_1 x + \tilde{K}_2 x^{2 \otimes} + (x' \otimes I_m) \tilde{K}_3 x^{2 \otimes}$$

Nous avons la boucle fermée donnée par $\dot{x} = \tilde{f}(x)$, avec

$$\tilde{f}(x) = (\bar{A}_1 + B_0 \tilde{K}_1) x + (\bar{A}_2 + B_0 \tilde{K}_2) x^{2 \otimes} + (\bar{A}_3 x^{3 \otimes} + B_0 (x' \otimes I_m) \tilde{K}_3 x^{2 \otimes})$$

On peut donc écrire

$$\dot{V}(x) = 2x'P\tilde{f}(x) = \begin{bmatrix} x' & x^{2 \otimes'} \end{bmatrix} (M_{BF} + M'_{BF}) \begin{bmatrix} x \\ x^{2 \otimes} \end{bmatrix}$$

avec

1. Les pas pour la construction des matrices A_{vi} , B_{vjk} et K_{vjk} sont présentés dans l'annexe B.

$$M_{BF} = \begin{bmatrix} M_{BF1} & M_{BF2} \\ 0_{n^2 \times n} & M_{BF3} \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} M_{BF1} &= P(A_1 + B_0 \tilde{K}_1) \\ M_{BF2} &= P(A_2 + B_0 \tilde{K}_2) \\ M_{BF3} &= (I_n \otimes P)(A_{v3} + (I_n \otimes B_0) \tilde{K}_3) \end{aligned}$$

Exemple 2 Considérons maintenant $g_f = 3$, $g_G = 2$, $g_u = 2$, à savoir

$$f(x) = \bar{A}_1 x + \bar{A}_2 x^{2\otimes} + \bar{A}_3 x^{3\otimes}$$

$$G(x) = B_0 + B_1(x \otimes I_m) + B_2(x^{2\otimes} \otimes I_m)$$

$$u(x) = \tilde{K}_1 x + \tilde{K}_2 x^{2\otimes}$$

La boucle fermée est donnée par $\dot{x} = \tilde{f}(x)$, avec

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= (\bar{A}_1 + B_0 \tilde{K}_1)x \\ &\quad + (\bar{A}_2 + B_0 \tilde{K}_2 + B_1(I_n \otimes \tilde{K}_1))x^{2\otimes} \\ &\quad + \bar{A}_3 x^{3\otimes} + (B_1(x' \otimes I_m) \tilde{K}_2 + B_2(x' \otimes I_{nm})(I_n \otimes \tilde{K}_1))x^{2\otimes} \\ &\quad + B_2(x' \otimes I_{nm})(I_n \otimes \tilde{K}_2)x^{3\otimes} \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} M_{BF1} &= P(A_1 + B_0 \tilde{K}_1) \\ M_{BF2} &= P(A_2 + B_0 \tilde{K}_2 + B_1(I_n \otimes \tilde{K}_1)) \\ M_{BF3} &= (I_n \otimes P)(A_{v3} + (I_n \otimes B_1) \tilde{K}_2 + (I_n \otimes B_2)(I_n \otimes \tilde{K}_1)) \\ M_{BF4} &= (I_n \otimes P)(I_n \otimes B_2)(I_n \otimes \tilde{K}_2) \end{aligned}$$

L'objectif poursuivi avec la représentation des termes de $\dot{V}(x)$ comme dans (4.11) est d'utiliser le vecteur

$$\eta_r = \begin{bmatrix} x \\ x^{2\otimes} \\ \vdots \\ x^{r\otimes} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

avec $r = \left\lceil \frac{g_{\tilde{f}} + 1}{2} \right\rceil$ pour exprimer $\dot{V}(x)$ par

$$\dot{V}(x) = \eta_r' M_{\dot{V}} \eta_r \quad (4.13)$$

avec $M_{\dot{V}} = M_{BF} + M'_{BF}$, comme

$$M_{BF} = \begin{bmatrix} M_{BF1} & M_{BF2} & 0_{n \times n^3} & \dots & 0_{n \times n^r} \\ 0_{n^2 \times n} & M_{BF3} & M_{BF4} & \dots & 0_{n^2 \times n^r} \\ 0_{n^2 \times n} & 0_{n^3 \times n} & M_{BF5} & \dots & 0_{n^3 \times n^r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{n^r \times n} & 0_{n^r \times n^2} & 0_{n^r \times n^3} & \dots & M_{BFg_m} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

si g_m est impair et

$$M_{BF} = \begin{bmatrix} M_{BF1} & M_{BF2} & 0_{n \times n^3} & \dots & 0_{n \times n^{r-1}} & 0_{n \times n^r} \\ 0_{n^2 \times n} & M_{BF3} & M_{BF4} & \dots & 0_{n^2 \times n^{r-1}} & 0_{n^2 \times n^r} \\ 0_{n^3 \times n} & 0_{n^3 \times n^2} & M_{BF5} & \dots & 0_{n^3 \times n^{r-1}} & 0_{n^3 \times n^r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{n^{r-1} \times n} & 0_{n^{r-1} \times n^2} & 0_{n^{r-1} \times n^3} & \dots & M_{BF(g_m-1)} & M_{BFg_m} \\ 0_{n^r \times n} & 0_{n^r \times n^2} & 0_{n^r \times n^3} & \dots & 0_{n^r \times n^{r-1}} & 0_{n^r \times n^r} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

si g_m est pair et chaque matrice M_{BFi} est définie comme dans (4.1) par

$$M_{BFi} = (I_{n^{t_{gi}}} \otimes P) \left(A_{vi} + \sum_{j=0, k=i-j}^{i-1} B_{vjk} K_{vjk} \right) \quad (4.16)$$

avec $t_{gi} = i - \lceil \frac{i+1}{2} \rceil = \lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor$.

Notons que dans le cas d'un système linéaire, commandé par une loi de commande linéaire de retour d'état, à savoir, $g_f = 1$, $g_G = 0$ et $g_u = 1$ on obtient

$$M_{BF} = M_{BF1} = P(A_1 + B_0 \tilde{K}_1)$$

Pour ce cas particulier $\dot{V}(x)$ s'exprime

$$\dot{V}(x) = x'(P(A_1 + B_0 \tilde{K}_1) + (A_1 + B_0 \tilde{K}_1)'P)x$$

Avec le changement de coordonnées $y = Px$, on obtient

$$\dot{V}(y) = y'((A_1 + B_0 \tilde{K}_1)Q + Q(A_1 + B_0 \tilde{K}_1)')y$$

où $Q = P^{-1}$. Alors une condition nécessaire et suffisante pour que le système linéaire soit stable est que l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$A_1 Q + Q A_1' + B_0 \tilde{K}_1 Q + Q \tilde{K}_1' B_0' < 0 \quad (4.17)$$

si nous considérons la matrice Q et le gain $\tilde{K}_1$ comme des inconnues, le changement de variable $L = \tilde{K}_1 Q$ permet d'écrire l'inégalité (4.17) comme une LMI :

$$A_1 Q + Q A_1' + B_0 L + L' B_0' < 0$$

La satisfaction de cette inégalité, permet le calcul du gain stabilisant $\tilde{K}_1$ avec $\tilde{K}_1 = LQ^{-1}$.

On peut étendre ces résultats et se demander quel changement de coordonnées permet une formulation similaire pour la synthèse de gains polynomiaux et comment effectuer les changements de variables tels que $\tilde{K}_1 = LQ^{-1}$ pour les gains non-linéaires. Il est possible de donner des réponses à ces questions grâce à la représentation du polynôme obtenue avec le vecteur (4.12), c'est-à-dire avec des vecteurs contenant des monômes répétés.

Avant de présenter le résultat principal de ce chapitre, nous introduisons une relation similaire à (2.32). Le vecteur η_r satisfait

$$\left(\begin{bmatrix} 0_{n\alpha \times n} & I_{n\alpha} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (I_\alpha \otimes x) & 0_{n\alpha \times n^r} \end{bmatrix} \right) \eta_r = 0 \quad (4.18)$$

avec $\alpha = \sum_{i=1}^{r-1} n^i$. Alors quelle que soit la matrice $G_0 \in \mathfrak{R}^{g_t \times n\alpha}$, où $g_t = n(1 + \alpha) = \sum_{i=1}^r n^i$, nous avons

$$\eta_r' G_0 \left(\begin{bmatrix} 0_{n\alpha \times n} & I_{n\alpha} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (I_\alpha \otimes x) & 0_{n\alpha \times n^r} \end{bmatrix} \right) \eta_r = 0 \quad (4.19)$$

Maintenant nous sommes en mesure de formuler un résultat qui rend possible le calcul des gains de la loi de commande (4.4) et de trouver la ERA de forme ellipsoïdale associée.

Proposition 4.1. *Supposons qu'il existe une matrice $Q \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $Q = Q' > 0$, une matrice $G_1 \in \mathfrak{R}^{g_t \times n\alpha}$, $\alpha = \sum_{i=1}^{r-1} n^i$, $g_t = n + n\alpha = \sum_{i=1}^r n^i$, $r = \left\lceil \frac{g_f + 1}{2} \right\rceil$, une matrice $M_r \in \mathfrak{R}^{\alpha \times \alpha}$, $M_r = M_r' > 0$, des matrices $L_{vi} \in \mathfrak{R}^{n^{(i-k)} m \times n^k}$, $k = \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil$, $i = 1, \dots, g_u$, telles que*

$$\left[\begin{array}{cc} \tilde{M}_{\tilde{V}} + \begin{bmatrix} 0_{g_t \times n} & G_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{g_t \times n} & G_1 \end{bmatrix}' & G_1 \\ & - (M_r \otimes Q) \\ M_r' \begin{bmatrix} (I_{\frac{g_t - n^r}{n}} \otimes Q) & 0_{(g_t - n^r) \times n^r} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} (I_{\frac{g_t - n^r}{n}} \otimes Q) \\ 0_{n^r \times (g_t - n^r)} \\ 0_{(g_t - n) \times (g_t - n^r)} \\ -M_r \end{bmatrix} M_r \end{array} \right] < 0 \quad (4.20)$$

et $\tilde{M}_{\tilde{V}} = \text{diag} \{ M_v + M_v', 0_{(n\alpha - n^r) \times (n\alpha - n^r)} \}$

$$M_v = \begin{bmatrix} M_{v1} & M_{v2} & 0_{n \times n^3} & \dots & 0_{n \times n^r} \\ 0_{n^2 \times n} & M_{v3} & M_{v4} & \dots & 0_{n^2 \times n^r} \\ 0_{n^2 \times n} & 0_{n^3 \times n} & M_{v5} & \dots & 0_{n^3 \times n^r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{n^r \times n} & 0_{n^r \times n^2} & 0_{n^r \times n^3} & \dots & M_{vg_m} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

si g_m est impair et

$$M_v = \begin{bmatrix} M_{v1} & M_{v2} & 0_{n \times n^3} & \dots & 0_{n \times n^{r-1}} & 0_{n \times n^r} \\ 0_{n^2 \times n} & M_{v3} & M_{v4} & \dots & 0_{n^2 \times n^{r-1}} & 0_{n^2 \times n^r} \\ 0_{n^3 \times n} & 0_{n^3 \times n^2} & M_{v5} & \dots & 0_{n^3 \times n^{r-1}} & 0_{n^3 \times n^r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{n^{r-1} \times n} & 0_{n^{r-1} \times n^2} & 0_{n^{r-1} \times n^3} & \dots & M_{v(g_m-1)} & M_{vg_m} \\ 0_{n^r \times n} & 0_{n^r \times n^2} & 0_{n^r \times n^3} & \dots & 0_{n^r \times n^{r-1}} & 0_{n^r \times n^r} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

si g_m est pair et

$$M_{vi} = A_{vi}(I_{n^s} \otimes Q) + \sum_{j=0, k=i-j}^{i-1} B_{jv} L_{jvk} \quad (4.23)$$

pour $i = 1, \dots, g_m$ et avec $s = \lceil \frac{i+1}{2} \rceil - 1$ et les matrices L_{vjk} sont structurées comme les matrices $\tilde{K}_{vjk}$ de (4.11), c'est-à-dire

$$L_{vjk} = (I_{n^j} \otimes L_{vk} x^{(r_k+j)\otimes})$$

Alors la loi de commande

$$\begin{aligned} u(x) &= \tilde{K}_1 x + \tilde{K}_2 x^{2\otimes} + (x' \otimes I_m) \tilde{K}_3 x^{2\otimes} + (x' \otimes I_m) \tilde{K}_4 x^{3\otimes} + \dots \\ &= \sum_{i=1}^{g_u} (x^{g_k \otimes i} \otimes I_m) \tilde{K}_{vi} x^{r_k \otimes} \end{aligned} \quad (4.24)$$

où les gains $\tilde{K}_{vi}$ sont donnés par

$$\tilde{K}_{vi} = L_{vi}(I_{n^r} \otimes Q^{-1}), \quad r = \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil - 1, \quad i = 1, \dots, g_u \quad (4.25)$$

garantit la stabilité asymptotique des trajectoires du système bouclé (4.1) initialisé dans l'ensemble

$$\mathcal{E}(Q^{-1}) = \{x \in \mathfrak{R}^n; x' Q^{-1} x \leq 1\} \quad (4.26)$$

Autrement dit, $\mathcal{E}(Q^{-1})$ est une estimation de la Région d'Attraction de l'origine de (4.1).

Démonstration. Considérons la fonction quadratique $V(x) = x'Px$ avec $P \in \Re^{n \times n}$, $P = P' > 0$, comme fonction de Lyapunov candidate. Comme dans (4.13) la dérivée de $V(x)$ le long des trajectoires de (4.1) s'écrit :

$$\dot{V}(x) = \eta_r' M_{\dot{V}} \eta_r$$

Considérons la relation (4.19) avec $\alpha = \sum_{i=1}^{r-1} n^i$ et une matrice $G_0 \in \Re^{g_t \times n\alpha}$, nous avons

$$\begin{aligned} \eta_r' M_{\dot{V}} \eta_r &= \eta_r' \left(M_{\dot{V}} + \begin{bmatrix} 0_{g_t \times n} & G_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{g_t \times n} & G_0 \end{bmatrix}' \right) \eta_r \\ &\quad - \eta_r' G_0 (I_\alpha \otimes x) \eta_{r-1} - \eta_{r-1}' (I_\alpha \otimes x') G_0' \eta_r \end{aligned} \quad (4.27)$$

Nous avons

$$- \eta_r' G_0 (I_\alpha \otimes x) \eta_{r-1} - \eta_{r-1}' (I_\alpha \otimes x') G_0' \eta_r \leq \eta_r' G_0 (M_r^{-1} \otimes P^{-1}) G_0' \eta_r + \eta_{r-1}' M_r \eta_{r-1} \quad (4.28)$$

valable dans $\mathcal{E}(P)$, où $M_r \in \Re^{\alpha \times \alpha}$, $M_r = M_r' > 0$. Alors, si

$$\left[\begin{array}{c} M_{\dot{V}} + \begin{bmatrix} 0_{g_t \times n} & G_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{g_t \times n} & G_0 \end{bmatrix}' + \bar{M}_r \\ G_0' \end{array} \quad \begin{array}{c} G_0 \\ -(M_r \otimes P) \end{array} \right] < 0 \quad (4.29)$$

avec $\bar{M}_r = \text{diag}\{M_r, 0_{n^r \times n^r}\}$, nous avons $\dot{V}(x) < 0$ dans $\mathcal{E}(P)$.

Considérons donc la matrice $Q \in \Re^{n \times n}$, $Q = P^{-1}$. Avec la transformation de congruence donnée par

$$\text{diag}\{(I_{(1+\alpha)} \otimes Q), (I_\alpha \otimes Q)\} \quad (4.30)$$

et les changement de variables

$$G_1 = (I_{(1+\alpha)} \otimes Q) G_0 (I_\alpha \otimes Q) \quad (4.31)$$

$$L_i = \tilde{K}_i (I_{n^{r_i-1}} \otimes Q) \quad (4.32)$$

$i = 1, \dots, g_u$ et $r_i = \lceil \frac{i+1}{2} \rceil$, nous avons donc

$$M_v = (I_{(1+\alpha)} \otimes Q) M_{BF} (I_{(1+\alpha)} \otimes Q)$$

où M_v est donnée par (4.21) (ou (4.22)) et M_{BF} par (4.14) (ou (4.15)) et (4.29) devient

$$\left[\begin{array}{c} \tilde{M}_{\dot{V}} + \begin{bmatrix} 0_{g_t \times n} & G_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{g_t \times n} & G_1 \end{bmatrix}' + (I_{(1+\alpha)} \otimes Q) \bar{M}_r (I_{(1+\alpha)} \otimes Q) \\ G_1' \end{array} \quad \begin{array}{c} G_1 \\ -(M_r \otimes Q) \end{array} \right] < 0 \quad (4.33)$$

avec $\tilde{M}_{\dot{V}} = M_v + M'_v$. Comme nous avons

$$\begin{aligned} (I_{(1+\alpha)} \otimes Q) \bar{M}_r (I_{(1+\alpha)} \otimes Q) &= (I_{(1+\alpha)} \otimes Q) \text{diag} \{M_r, 0_{n^r \times n^r}\} (I_{(1+\alpha)} \otimes Q) \\ &= \begin{bmatrix} (I_{\frac{\alpha}{n}} \otimes Q) \\ 0_{n^r \times \alpha} \end{bmatrix} M_r M_r^{-1} M_r \begin{bmatrix} (I_{\frac{\alpha}{n}} \otimes Q) & 0_{\alpha \times n^r} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.34)$$

avec le complément de Schur on obtient

$$\begin{bmatrix} \tilde{M}_{\dot{V}} + \begin{bmatrix} 0_{g_t \times n} & G_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{g_t \times n} & G_1 \end{bmatrix}' & G_1 & \begin{bmatrix} (I_{\frac{\alpha}{n}} \otimes Q) \\ 0_{n^r \times \alpha} \end{bmatrix} M_r \\ M_r \begin{bmatrix} G'_1 & 0_{\alpha \times n^r} \end{bmatrix} & -(M_r \otimes Q) & \begin{bmatrix} 0_{n\alpha \times \alpha} \\ -M_r \end{bmatrix} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.35)$$

comme $\alpha = g_t - n_r$ et $n\alpha = g_t - n$ on obtient (4.20). $\square$

Remarque 4.1. Comme dans le cas de synthèse linéaire, la variable Q est introduite à partir d'un changement de coordonnées défini par $x = Qy$. Nous avons donc

$$\begin{bmatrix} x \\ x^{2\otimes} \\ x^{3\otimes} \\ \vdots \\ x^{r\otimes} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Qy \\ x \otimes Qy \\ x^{2\otimes} \otimes Qy \\ \vdots \\ x^{(r-1)\otimes} \otimes Qy \end{bmatrix} = (I_{(1+\alpha)} \otimes Q) \begin{bmatrix} y \\ x \otimes y \\ x^{2\otimes} \otimes y \\ \vdots \\ x^{(r-1)\otimes} \otimes y \end{bmatrix}$$

avec $\alpha = \sum_{i=1}^{r-1} n^i$. En définissant

$$\eta_r^* = \begin{bmatrix} y \\ x \otimes y \\ x^{2\otimes} \otimes y \\ \vdots \\ x^{(r-1)\otimes} \otimes y \end{bmatrix}$$

on a la relation

$$\eta_r = (I_{(1+\alpha)} \otimes Q) \eta_r^*$$

Ainsi nous obtenons l'expression pour la dérivée de Lyapunov donnée par

$$\dot{V}(x,y) = \eta_r^{*'} (I_{(1+\alpha)} \otimes Q) M_{\dot{V}} (I_{(1+\alpha)} \otimes Q) \eta_r^* \quad (4.36)$$

exprimée donc à la fois dans les variables x et y . Comme ces variables ne sont pas indépendantes, la relation (4.19) doit s'exprimer par

$$\eta_r^{*'}(I_{(1+\alpha)} \otimes Q)G_0 \left(\begin{bmatrix} 0_{n\alpha \times n} & I_{n\alpha} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (I_\alpha \otimes x) & 0_{n\alpha \times n^r} \end{bmatrix} \right) (I_{1+\alpha} \otimes Q)\eta_r^* = 0 \quad (4.37)$$

pour une matrice $G_0 \in \mathfrak{R}^{g_t \alpha \times n\alpha}$. Si cette matrice est une variable de décision nous pouvons effectuer le changement de variables $G_1 = (I_{(1+\alpha)} \otimes Q)G_0(I_\alpha \otimes Q)$ pour obtenir

$$\eta_r^{*'} \begin{bmatrix} 0_{g_t \times n} & G_1 \end{bmatrix} \eta_r^* - \eta_r^{*'}(I_\alpha \otimes Q)G_0(I_\alpha \otimes x)(I_{\frac{\alpha}{n}} \otimes Q)\eta_{(r-1)}^* = 0 \quad (4.38)$$

L'inégalité suivante est valable dans $\mathcal{E}(Q^{-1})$

$$\begin{aligned} & \eta_r^{*'}(I_{(1+\alpha)} \otimes Q)G_0(I_\alpha \otimes x)(I_{\frac{\alpha}{n}} \otimes Q)\eta_{(r-1)}^* + \eta_{(r-1)}^{*'}(I_{\frac{\alpha}{n}} \otimes Q)(I_\alpha \otimes x')G_0'(I_{(1+\alpha)} \otimes Q)\eta_r^* \\ & \leq \eta_r^{*'}(I_{(1+\alpha)} \otimes Q)G_0(M_r^{-1} \otimes Q)G_0'(I_{(1+\alpha)} \otimes Q)\eta_r^* + \eta_{(r-1)}^{*'}(I_{\frac{\alpha}{n}} \otimes Q)M_r(I_{\frac{\alpha}{n}} \otimes Q)\eta_{(r-1)}^* \end{aligned} \quad (4.39)$$

dont les termes satisfont

$$\begin{aligned} & \eta_r^{*'}(I_{(1+\alpha)} \otimes Q)G_0(M_r \otimes Q)G_0'(I_{(1+\alpha)} \otimes Q)\eta_r^* + \eta_{(r-1)}^{*'}(I_{\frac{\alpha}{n}} \otimes Q)M_r(I_{\frac{\alpha}{n}} \otimes Q)\eta_{(r-1)}^* \\ & = \eta_r^{*'}(I_\alpha \otimes Q)G_0(I_\alpha \otimes Q)(M_r^{-1} \otimes Q^{-1})(I_\alpha \otimes Q)G_0'(I_\alpha \otimes Q)\eta_r^* \\ & \quad + \eta_{(r-1)}^{*'}(I_{\frac{\alpha}{n}} \otimes Q)M_r(I_{\frac{\alpha}{n}} \otimes Q)\eta_{(r-1)}^* \\ & = \eta_r^{*'}G_1(M_r^{-1} \otimes Q^{-1})G_1'\eta_r^* + \eta_{(r-1)}^{*'}(I_{\frac{\alpha}{n}} \otimes Q)M_r(I_{\frac{\alpha}{n}} \otimes Q)\eta_{(r-1)}^* \end{aligned} \quad (4.40)$$

Alors à partir de (4.36) et (4.38) nous avons

$$\begin{aligned} \dot{V}(x,y) &= \eta_r^{*'}(I_{(1+\alpha)} \otimes Q)M_{\dot{V}}(I_{(1+\alpha)} \otimes Q)\eta_r^* \\ & \quad + 2 \left(\eta_r^{*'} \begin{bmatrix} 0_{g_t \times n} & G_1 \end{bmatrix} \eta_r^* + \eta_r^{*'}(I_{\frac{\alpha}{n}} \otimes Q)G_0(I_\alpha \otimes x)(I_{\frac{\alpha}{n}} \otimes Q)\eta_{(r-1)}^* \right) \end{aligned}$$

Avec (4.39) et (4.40) nous avons qu'une condition suffisante pour que $\dot{V}(x) < 0$ dans l'ensemble $\mathcal{E}(Q)$ est que l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} & \eta_r^{*'}(I_{(1+\alpha)} \otimes Q)M_{\dot{V}}(I_{(1+\alpha)} \otimes Q)\eta_r^* + 2\eta_r^{*'} \begin{bmatrix} 0_{g_t \times n} & G_1 \end{bmatrix} \eta_r^* \\ & \quad + \eta_r^{*'}G_1(M_r^{-1} \otimes Q^{-1})G_1'\eta_r^* + \eta_{(r-1)}^{*'}(I_{\frac{\alpha}{n}} \otimes Q)M_r(I_{\frac{\alpha}{n}} \otimes Q)\eta_{(r-1)}^* < 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

soit satisfaite, ou de façon équivalente, que (4.20) soit satisfaite.

Le fait de représenter (4.41) au moyen des vecteurs de monômes avec des termes répétés, et donc de dimension qui n'est pas minimale, peut s'avérer un inconvénient car les dimensions des inégalités matricielles résultantes dépend des dimensions de ces vecteurs. Afin de réduire les dimensions du problème SDP résultant, une fois effectué le changement de variables $y = Qx$, nous pouvons représenter le polynôme dans les variables x et y avec des monômes homogènes, c'est-à-dire, des monômes sans éléments répétés.

Remarque 4.2. *Notons que*

$$\eta_r^* = \begin{bmatrix} y \\ x \otimes y \\ x^{2\otimes} \otimes y \\ \vdots \\ x^{(r-1)\otimes} \otimes y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^{2\otimes} \\ \vdots \\ x^{(r-1)\otimes} \end{bmatrix} \otimes y \quad (4.42)$$

Rappelons la relation entre le vecteur x^i et le vecteur $x^{i\otimes}$ établi par la matrice $M_e(n, i)$ de (2.2). Nous avons

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^{2\otimes} \\ \vdots \\ x^{(r-1)\otimes} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ M_e(n, 2)x^2 \\ M_e(n, 3)x^3 \\ \vdots \\ M_e(n, r-1)x^{(r-1)} \end{bmatrix} \\ &= M_{et}(n, r-1)\bar{\xi}_{(r-1)} \end{aligned} \quad (4.43)$$

avec

$$M_{et}(n, r-1) = \text{diag}\{1, I_n, M_e(n, 2), M_e(n, 3), \dots, M_e(n, r-1)\} \quad (4.44)$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \eta_r^* &= M_{et}(n, r-1)\bar{\xi}_{(r-1)} \otimes y \\ &= (M_{et}(n, r-1) \otimes I_n)(\bar{\xi}_{(r-1)} \otimes y) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Ainsi nous pouvons écrire l'inégalité (4.41) avec des vecteurs $(\bar{\xi}_{(r-1)} \otimes y)$ à la place des vecteurs η_r^* et par conséquent réduire les dimensions du problème SDP résultant.

4.3 Synthèse d'un retour de sortie

Dans cette section, nous considérons qu'un correcteur linéaire d'ordre n_c stabilisant la partie linéaire du modèle polynomial a été calculé et nous proposons

l'élargissement de la RA en modifiant le contrôleur linéaire par le rajout des gains polynomiaux. Nous considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) + G(x)u(x) \\ y &= h(x) \end{cases} \quad (4.46)$$

où $f(x) : \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}^n$, $G(x) : \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}^{n \times m}$ et $h(x) : \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}^p$ sont des fonctions polynomiales définies par

$$\begin{aligned} f(x) &= A_1x + A_2x^2 + \dots + A_{g_f}x^{g_f} \\ G(x) &= B_0 + B_1(x \otimes I_m) + B_2(x^2 \otimes I_m) + \dots + B_{g_u}(x^{g_u} \otimes I_m) \\ h(x) &= C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \dots + C_{g_h}x^{g_h} \end{aligned} \quad (4.47)$$

où $A_i \in \mathfrak{R}^{n \times \sigma(n,i)}$, $B_i \in \mathfrak{R}^{n \times m \sigma(n,i)}$ et $C_i \in \mathfrak{R}^{p \times \sigma(n,i)}$.

Nous considérons qu'un contrôleur linéaire d'ordre n_c :

$$\begin{cases} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y_l \\ u_l &= C_c x_c + D_c y_l \end{cases} \quad (4.48)$$

avec $A_c \in \mathfrak{R}^{n_c \times n_c}$, $B_c \in \mathfrak{R}^{n_c \times p}$, $C_c \in \mathfrak{R}^{m \times n_c}$ et $D_c \in \mathfrak{R}^{m \times p}$ a été calculé tenant compte seulement de la partie linéaire de (4.46), c'est-à-dire, en considérant seulement le modèle

$$\begin{cases} \dot{x}_l &= A_1 x_l + B_0 u_l \\ y_l &= C_1 x_l \end{cases} \quad (4.49)$$

ainsi nous avons une garantie de stabilité pour le système linéaire en boucle fermée (4.48)-(4.49) donné par

$$\dot{\lambda}_l = A_l \lambda_l \quad (4.50)$$

$$\lambda_l = \begin{bmatrix} x_l \\ x_c \end{bmatrix}; A_l = \begin{bmatrix} A_1 + B_0 D_c C_1 & B_0 C_c \\ B_c C_1 & A_c \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Cependant nous ne connaissons pas la région dans l'espace d'état où la stabilité des trajectoires est effectivement garantie pour le système non-linéaire (4.46). Autrement dit, nous ne connaissons pas la région d'attraction de l'origine de la boucle fermée (4.46)-(4.48). Néanmoins, comme le système linéarisé est stable nous pouvons toujours estimer le domaine d'attraction de l'origine du système non-linéaire avec les méthodes présentées dans le chapitre précédent. Définissons

$$\lambda = \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n_\lambda} \quad (4.52)$$

où $n_\lambda = n + n_c$ et considérons le vecteur

$$\xi_{v_l} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{v_l} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n_\lambda, v_l)} \quad (4.53)$$

nous pouvons obtenir une ERA de l'origine du système (4.46)-(4.48) de la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(P_{v_l}, \alpha) &= \{\lambda \in \mathfrak{R}^{n+n_c}; \xi'_{v_l} P_{v_l} \xi_{v_l} \leq \alpha\} \\ &= \{\lambda \in \mathfrak{R}^{n+n_c}; \xi'_{v_l} \beta P_{v_l} \xi_{v_l} \leq 1\} \end{aligned} \quad (4.54)$$

avec $P_{v_l} \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n_\lambda, v_l) \times \sigma_t(n_\lambda, v_l)}$, $P_{v_l} = P'_{v_l} > 0$ et $\beta = \alpha^{-1}$.

Ce que nous proposons par la suite, c'est de modifier la loi de commande (4.48) en rajoutant des termes polynomiaux afin d'élargir la région d'attraction du système en boucle fermée. En effet, nous espérons obtenir une meilleure estimation de la RA sous la forme $\mathcal{E}(P_{v_l}, \alpha^*)$, $\alpha^* > \alpha$, en utilisant une loi de commande avec des termes non-linéaires donnée par :

$$\begin{aligned} u(\lambda_y) &= K_1 \lambda_y + K_2 \lambda_y^2 + K_3 \lambda_y^3 + \dots + K_{g_u} \lambda_y^{g_u} \\ &= \sum_{i=1}^{g_u} K_i \lambda_y^i \end{aligned} \quad (4.55)$$

avec

$$\lambda_y = \begin{bmatrix} y \\ x_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(x) \\ x_c \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{p+n_c} \quad (4.56)$$

et $K_i \in \mathfrak{R}^{m \times \sigma(p+n_c, i)}$.

Notons que dans la loi de commande linéaire (4.48) nous n'avons que le gain $K_1 = \begin{bmatrix} D_c & C_c \end{bmatrix}$.

La boucle fermée du système (4.46) avec la loi de commande

$$\begin{cases} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y \\ u(\lambda_y) &= \sum_{i=1}^{g_u} K_i \lambda_y^i \end{cases} \quad (4.57)$$

devient

$$\dot{\lambda} = \tilde{f}(\lambda) + \tilde{G}(\lambda) \tilde{u}(\lambda) \quad (4.58)$$

où $\tilde{f}(\lambda) : \mathfrak{R}^{n_\lambda} \mapsto \mathfrak{R}^{n_\lambda}$, $\tilde{G}(\lambda) : \mathfrak{R}^{n_\lambda} \mapsto \mathfrak{R}^{n_\lambda \times m}$ et $\tilde{u}(\lambda) : \mathfrak{R}^{n_\lambda} \mapsto \mathfrak{R}^m$, sont respectivement des fonctions de degré $g_{\tilde{f}}$, $g_{\tilde{G}}$ et $g_h g_u$ ². La loi de commande $\tilde{u}(\lambda)$ peut être écrite comme

2. La construction des matrices définissant ces fonctions polynomiales est détaillée dans l'annexe B.

$$\tilde{u}(\lambda) = \tilde{K}\tilde{C} \begin{bmatrix} \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{g_u g_h} \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

où $\tilde{K}$ est une matrice qui dépend de façon linéaire des gains K_i , $i = 1, \dots, g_u$, de (4.55) et $\tilde{C}$ dépend des matrices C_i , $i = 1, \dots, g_h$, de (4.47).

Considérons la fonction polynomiale qui donne l'ERA sous la forme (4.54), c'est-à-dire, la fonction

$$V(\lambda) = \xi'_{v_l} \beta P_{v_l} \xi_{v_l}$$

$\beta > 0$. Sa dérivée le long des trajectoires de (4.58) s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{V}(\lambda) &= 2\xi'_{v_l} \beta P_{v_l} (\tilde{f}(\lambda) + \tilde{G}(\lambda)\tilde{u}(\lambda)) \\ &= \xi'_{d_l} \beta M_{\dot{V}}(\tilde{K}) \xi_{d_l} \end{aligned}$$

où $d_l = \left\lceil \frac{g_{\tilde{f}} + v_l}{2} \right\rceil$. Nous avons exprimé $M_{\dot{V}}(\tilde{K})$ pour souligner la dépendance de la dérivée dans la variable et $\tilde{K}$. Nous pouvons donc calculer la loi de commande de retour de sortie à partir du résultat suivant :

Corollaire 4.1. *Supposons qu'il existe une matrice $P_{v_l} \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n_\lambda, v_l) \times \sigma_t(n_\lambda, v_l)}$, $P_{v_l} = P'_{v_l} > 0$, un scalaire $\beta \in \mathfrak{R}_+$, des matrices $K_i \in \mathfrak{R}^{m \times \sigma_t(p+n_c, i)}$, $i = 1, \dots, g_u$, une matrice $M_r \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n_\lambda, r-1) \times \sigma_t(n_\lambda, r-1)}$, $M_r = M'_r > 0$ et une matrice $G \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n_\lambda, r) \times \sigma_t(n_\lambda, v_l) \sigma_t(n_\lambda, r-1)}$, telles que*

$$\left[\begin{array}{c} \beta \bar{M}_{\dot{V}}(\tilde{K}) + \bar{M}_r + \left[\begin{array}{cc} 0_{\sigma_t(n_\lambda, r) \times n} & G \mathbb{I}_t \\ G' & \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 0_{\sigma_t(n_\lambda, r) \times n} & G \mathbb{I}_t \\ \begin{array}{c} G \\ -(M_r \otimes \beta P_{v_l}) \end{array} \end{array} \right]' \end{array} \right] < 0 \quad (4.60)$$

où $\bar{M}_{\dot{V}}(\tilde{K}) = \text{diag}\{M_{\dot{V}}(\tilde{K}), 0_{\sigma_t(n_\lambda, r) - \sigma_t(n_\lambda, d_l) \times \sigma_t(n_\lambda, r) - \sigma_t(n_\lambda, d_l)}\}$ et la matrice $\bar{M}_r$ satisfait $\bar{M}_r = \text{diag}\{M_r, 0_{n_\lambda^r \times n_\lambda^r}\}$. Alors $\mathcal{E}(\beta P_{v_l})$ est une ERA de l'origine du système (4.57).

Démonstration. Considérons une fonction de Lyapunov $V(\lambda) = \xi'_{v_l} \beta P_{v_l} \xi_{v_l}$. Sa dérivée le long des trajectoires de (4.57) est donnée par

$$\dot{V}(\lambda) = \xi'_{d_l} \beta M_{\dot{V}}(\tilde{K}) \xi_{d_l} \quad (4.61)$$

$$\xi_{d_l} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{d_l} \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

où $d_l = \lceil \frac{g_l+1}{2} \rceil$ et $M_{\tilde{V}}(\tilde{K})$ est une matrice linéaire en $\tilde{K}$. De façon similaire à l'inégalité de la proposition 3.1 nous avons l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \xi_r' & \left(-G \begin{bmatrix} (I_{\sigma(n_\lambda, r-1)} \otimes \lambda) & 0_{n_\lambda \sigma_t(n_\lambda, r-1) \times \sigma(n_\lambda, r)} \end{bmatrix} \right. \\ & \quad \left. - \begin{bmatrix} (I_{\sigma(n_\lambda, r-1)} \otimes \lambda) & 0_{n_\lambda \sigma_t(n_\lambda, r-1) \times \sigma(n_\lambda, r)} \end{bmatrix}' G' \right) \xi_r \\ & \leq \xi_{r-1}' M_r \xi_{r-1} + \xi_r' G (M_r^{-1} \otimes P_{vl}^{-1}) G' \xi_r \quad (4.63) \end{aligned}$$

valable dans $\mathcal{E}(\beta P_{vl})$. Une condition suffisante pour que $\dot{V}(x) < 0$ dans $\mathcal{E}(\beta P_{vl})$ est que l'inégalité

$$\begin{aligned} \xi_r' & \left(\beta \bar{M}_{\tilde{V}}(\tilde{K}) + G(M_r^{-1} \otimes \beta^{-1} P_{vl}^{-1}) G' + \text{diag}\{M_r, 0_{\sigma(n_\lambda, r)}\} \right. \\ & \quad \left. + \begin{bmatrix} 0_{n_\lambda \sigma_t(n_\lambda, r-1) \times n_\lambda} & G \mathbb{I}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n_\lambda \sigma_t(n_\lambda, r-1) \times n_\lambda} & G \mathbb{I}_t \end{bmatrix}' \right) \xi_r < 0 \quad (4.64) \end{aligned}$$

soit satisfaite pour tout, $\xi_r \in \Re^{\sigma_t(n_\lambda, r)}$, ou de façon équivalent que l'inégalité (4.60) soit vérifiée. $\square$

Bien évidemment, l'élargissement de la RA est attendu lorsque les estimations sont élargies par le changement de la loi de commande, pourtant nous ne pouvons pas avoir la garantie que la RA augmente quand ses estimations augmentent. Néanmoins les exemples de la fin du chapitre pourrons illustrer que des régions d'attraction élargies sont effectivement obtenues.

4.4 Stratégies d'optimisation

La proposition 4.1 et le corollaire 4.1 permettent le calcul de lois de commande polynomiales et l'estimation de la RA de l'origine du système en boucle fermée. Nous pouvons ensuite orienter le choix d'une des solutions faisables au moyen de la résolution de problèmes d'optimisation. L'optimisation d'une mesure de la taille de la ERA est choisie comme critère à optimiser.

Le calcul du retour d'état avec la proposition 4.1 garantit que l'ensemble

$$\mathcal{E}(P) = \mathcal{E}(Q^{-1}) = \{x \in \Re^n; x' Q^{-1} x \leq 1\} \quad (4.65)$$

est une ERA du système en boucle fermée. Afin de maximiser la taille de cet ensemble en résolvant un problème d'optimisation convexe nous considérons l'ensemble

$$\mathcal{E}(M_Q) = \{x \in \Re^n; x' M_Q x \leq 1\} \quad (4.66)$$

qui doit satisfaire $\mathcal{E}(M_Q) \subseteq \mathcal{E}(Q^{-1})$. Cette relation est garantie si et seulement si $M_Q \geq Q^{-1}$. Alors nous allons maximiser l'ensemble $\mathcal{E}(M_Q)$ et imposer

$$M_Q - Q^{-1} > 0$$

ou de façon équivalente

$$\begin{bmatrix} M_Q & I_n \\ I_n & Q \end{bmatrix} > 0 \quad (4.67)$$

et le problème qui se pose est

$$\min_{Q, M_w, L_{vi}, M_r, G_1} \text{Trace}(M_Q) \text{ soumis à (4.20), (4.67)} \quad (4.68)$$

Dans le cadre de l'élargissement de la RA par le rajout des termes non-linéaires à une loi de commande de retour de sortie nous partons de la connaissance d'une fonction de Lyapunov qui certifie la stabilité locale du système bouclé avec la loi de commande linéaire pour calculer des gains non-linéaires additionnels afin de trouver la plus grande courbe de niveau qui limite un ensemble invariant et contractif. Autrement dit, à partir d'une fonction donnée par l'ensemble

$$V(x) = \xi'_{v_l} P_{v_l} \xi_{v_l} \quad (4.69)$$

nous cherchons le scalaire β , le plus petit tel que l'ensemble

$$\mathcal{E}(\beta P_{v_l}) = \{x \in \mathcal{R}^n; \xi'_{v_l} \beta P_{v_l} \xi_{v_l} \leq 1\} \quad (4.70)$$

soit une ERA dy système non-linéaire. Nous devons donc résoudre

$$\min_{K_i, M_r} \beta \text{ soumis à (4.60)} \quad (4.71)$$

La résolution de ce problème est obtenue par relaxation convexe avec une recherche unidimensionnelle dans le paramètre β . En effet il s'agit d'un GEVP (*generalized eigenvalue problem*).

4.5 Exemples numériques

Par la suite nous présentons les résultats obtenus pour le calcul de lois de commande polynomiales en résolvant les problèmes (4.68) et (4.71). Une fois obtenue une loi de commande polynomiale nous estimons la ERA en utilisant les résultats du chapitre précédent.

Exemple 1 Considérons le système suivant³ d'ordre $n = 2$ et de degré $g_f = 3$ et $g_G = 1$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_1x_2 + x_2u \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 2x_2 + x_1^2 + x_1^2x_2 + u \end{cases} \quad (4.72)$$

L'origine de ce système est un point selle. Dans la Figure 4.1 nous pouvons voir quelques trajectoires de la boucle ouverte.

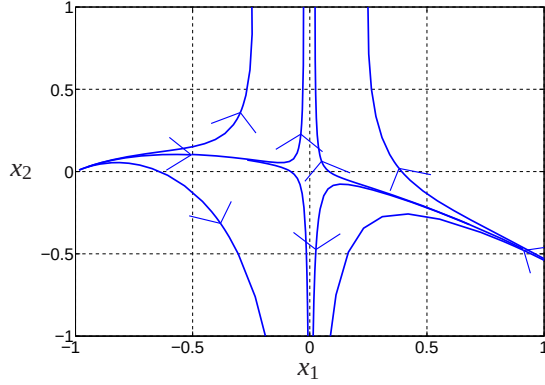


Figure 4.1 – Trajectoires de la boucle ouverte du système (4.72).

Avec la Proposition 4.1 nous cherchons une loi de commande de retour d'état linéaire, $g_u = 1$, en résolvant le problème (4.68) nous obtenons des gains tels que

$$u(x) = -1.4141x_1 - 4.2902x_2 \quad (4.73)$$

Des trajectoires de la boucle fermée ainsi que l'estimation de la région d'attraction obtenue avec une fonction de Lyapunov de degré 4 sont présentées dans la figure 4.2.

En cherchant des gains linéaires et quadratiques, c'est-à-dire $g_u = 2$, nous obtenons la loi de commande suivante :

$$u(x) = -0.7319x_1 - 4.4623x_2 - 1.0012x_1^2 - 0.2975x_1x_2 + 0.3968x_2^2 \quad (4.74)$$

Nous obtenons alors les trajectoires et l'estimation de la région d'attraction avec une fonction de Lyapunov de degré 4 présentées dans la figure 4.2.

3. Les matrices utilisées pour représenter les systèmes en boucle ouverte et en boucle fermée ainsi que les valeurs numériques des matrices définissant les estimations de régions d'attraction sont présentées dans l'annexe C.

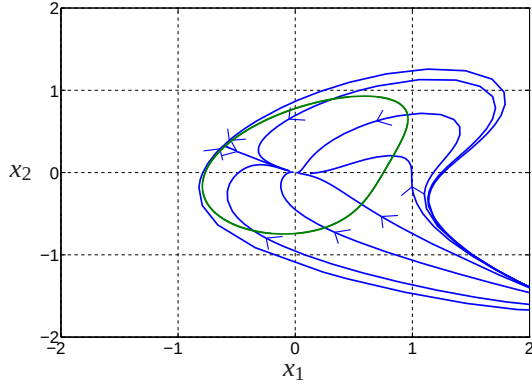


Figure 4.2 – Trajectoires de la boucle fermée de (4.72) avec la loi de commande (4.73) et une ERA donnée par une fonction de degré 4.

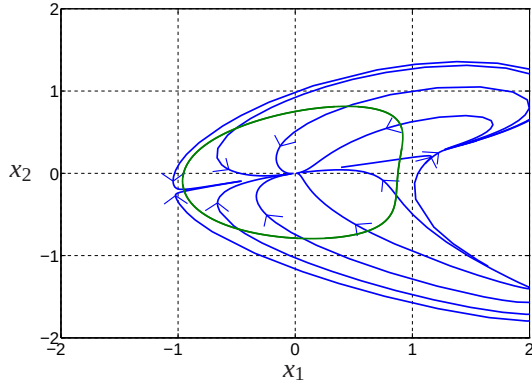


Figure 4.3 – Trajectoires de la boucle fermée de (4.72) avec la loi de commande (4.74) et une ERA avec une fonction de degré 4.

Exemple 2 Considérons le système suivant d'ordre $n = 3$ et de degré $g_f = 3$, $g_G = 1$ avec deux entrées ($m = 2$), inspiré de l'exemple 5.1.1 de [66] dans lequel nous avons introduit les termes non-linéaires $x_1^2 x_2^2$, $x_1 x_2$ et $x_1 u_1$, ce qui élimine la structure bloc-triangulaire, propice à l'application de la méthode de backstepping, utilisée dans l'exemple original

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1^2 x_2^2 + x_2 + x_3^2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 + u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 + (1 + x_1) u_1 \end{cases} \quad (4.75)$$

Nous essayons d'obtenir des lois de commande de degré $g_u = \{1, 2, 3\}$ en optimisant la trace d'une matrice définissant un ellipsoïde intérieur à la région d'attraction du système en boucle fermée ce qui nous donne respectivement les lois suivantes

$$\begin{cases} u_1 &= -0.3189x_1 - 0.5240x_2 - 0.8589x_3 \\ u_2 &= -9.5700x_1 - 10.9382x_2 + 2.2820x_3 \end{cases} \quad (4.76)$$

pour $g_u = 1$,

$$\begin{cases} u_1 &= 1.4656x_1 + 0.1168x_2 - 15.2319x_3 \\ &\quad + 2.1014x_1^2 + 0.4565x_1x_2 - 14.8426x_3x_1 + 0.0013x_2^2 + 0.0008x_3x_2 \\ u_2 &= -9.6129x_1 - 11.0340x_2 + 2.2932x_3 \\ &\quad + 0.0016x_1^2 + 0.0012x_1x_2 - 0.0072x_1x_3 + 0.0025x_2^2 \\ &\quad + 0.0018x_2x_3 - 0.017x_3^2 \end{cases} \quad (4.77)$$

pour $g_u = 2$ et

$$\begin{cases} u_1 &= -0.2907x_1 - 0.4358x_2 - 3.1823x_3 \\ &\quad + 0.2832x_1^2 - 0.5661x_1x_2 - 2.3188x_3x_1 + 0.0003x_2^2 - 0.0001x_3x_2 \\ &\quad + 0.4016x_1^2x_2 - 0.227x_1^3 - 0.9274x_1^2x_3 - 0.0291x_1x_2^2 \\ &\quad + 0.0002x_1x_3^2 - 0.0001x_2^2 - 0.8693x_2^2x_3 - 1.0x_3^3 \\ u_2 &= -4.2986x_1 - 2.9330x_2 + 0.6544x_3 \\ &\quad + 0.0072x_1x_3 - 0.0001x_1^2 - 0.0875x_3^2 - 0.0015x_2x_3 \\ &\quad + 0.0036x_1x_2x_3 - 2.3356x_1^2x_2 - 0.5677x_1x_2^2 - 0.5501x_1^3 \\ &\quad - 0.5421x_1x_3^2 - 2.3338x_2^3 - 0.0013x_2^2x_3 - 2.3384x_2x_3^2 \end{cases} \quad (4.78)$$

pour $g_u = 3$. La figure 4.4 montre des estimations de la RA de forme ellipsoïdale avec le système en boucle fermée obtenu avec les lois de commande présentées ci-dessus. L'ellipsoïde en rouge correspond à la loi de commande (4.76), celle en noir à la loi de commande (4.77), celle en bleu à la loi de commande (4.78).

La figure 4.5 présente quelques trajectoires du système bouclé avec la loi de commande (4.78), ainsi que la ERA obtenue pour cette loi de commande. Notons que des trajectoires proches de la frontière de la ERA ne convergent pas vers l'origine, ce qui indique une proximité de la frontière de la région d'attraction du système.

Notons que la loi de commande (4.78) présente des gains linéaires plus faibles que ceux des lois de commande (4.76) et (4.77).

Exemple 3 Considérons le système d'ordre $n = 5$ et $g_f = 2$, $g_G = 1$ avec deux entrées de commande [41], (exemple 6.1.6, page 303)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 &= x_4 + x_3u_1 + x_2u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_4 + u_2 \\ \dot{x}_4 &= x_5 + x_5u_1 + x_2u_2 \\ \dot{x}_5 &= x_3 + u_1 + u_2 \end{cases} \quad (4.79)$$

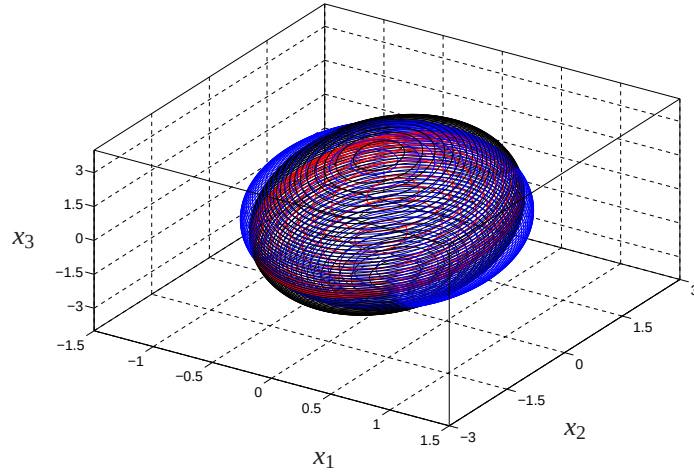


Figure 4.4 – Estimations de la RA du système (4.75) avec des lois de commande de différents degrés : en rouge $g_u = 1$ (à l'intérieur des deux autres ellipsoïdes), en noir $g_u = 2$ et en bleu $g_u = 3$

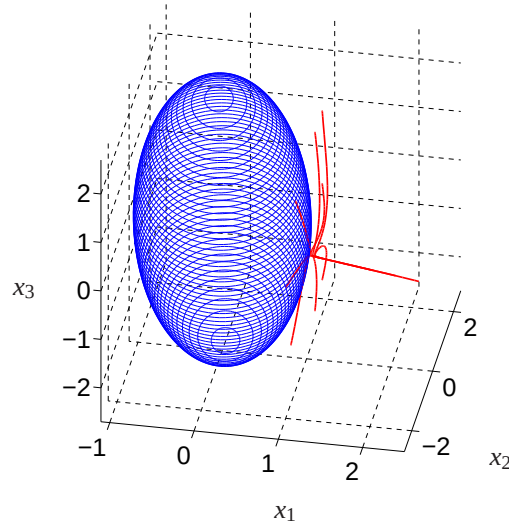


Figure 4.5 – Trajectoires de la boucle fermée de (4.75) avec la loi de commande (4.78) et l'estimation de la RA sous forme ellipsoïdale.

En résolvant le problème (4.68) nous pouvons obtenir la loi de commande linéaire suivante

$$\begin{cases} u_1 &= -0.7541x_1 - 1.9348x_2 - 0.229x_3 - 3.0115x_4 - 2.1025x_5 \\ u_2 &= -0.1226x_1 - 0.537x_2 - 0.5313x_3 - 1.0946x_4 - 1.0192x_5 \end{cases} \quad (4.80)$$

Dans le cas d'une loi de commande quadratique on obtient

$$\begin{cases} u_1 &= -0.3574x_1 - 0.9374x_2 - 0.1342x_3 - 1.4177x_4 - 1.011x_5 \\ &\quad + 0.2424x_1x_2 - 0.0689x_1x_3 - 0.0294x_1x_4 - 0.0226x_2x_3 - 0.4354x_1x_5 \\ &\quad + 1.2265x_2x_4 - 0.08260x_2x_5 - 0.2609x_3x_4 - 0.3059x_3x_5 - 1.8185x_4x_5 \\ &\quad + 0.7211x_2^2 + 0.0361x_3^2 - 1.2491x_5^2 \\ u_2 &= -0.0741x_1 - 0.3835x_2 - 0.4433x_3 - 0.8114x_4 - 0.7903x_5 \\ &\quad + 0.177x_2x_5 - 0.2684x_2x_3 - 0.546x_2x_4 - 0.3296x_2^2 - 0.1156x_1x_2 \\ &\quad - 0.0495x_3^2 - 0.3236x_3x_4 - 0.1553x_3x_5 - 0.0806x_1x_3 + 0.0001x_4^2 \\ &\quad + 0.9688x_4x_5 - 0.3415x_1x_4 + 0.676x_5^2 + 0.2372x_1x_5 \end{cases} \quad (4.81)$$

ce qui donne un système en boucle fermée de degré $g_{\tilde{f}} = 3$. L'estimation de la région d'attraction ellipsoïdale de l'origine pour le système bouclé avec la loi de commande (4.81) contient celle obtenue pour le système en boucle fermée avec la loi linéaire (4.80).

Remarque 4.3. *Nous pouvons remarquer que pour les exemples présentés ci-dessus la partie linéaire du système doit être stabilisable.*

Exemple 4 Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + (1 + x_1)u \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_1^2 \\ y &= x_1 + 2x_2 + 0.5x_2(1 + x_1) \end{cases} \quad (4.82)$$

pour lequel nous avons calculé une loi de commande linéaire stabilisante d'ordre $n_c = 2$ sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y \\ u &= C_c x_c + D_c y \end{cases} \quad (4.83)$$

tenant compte seulement de l'approximation linéaire de (4.82). La stabilité de la boucle fermée est donc garantie par une fonction de Lyapunov quadratique $V(x, x_c) = \lambda^T P_l \lambda^4$. Alors il est possible de trouver la région d'attraction du système en boucle fermée (4.82)-(4.83) sous la forme

4. La matrice de la fonction de Lyapunov P_l ainsi que les matrices du contrôleur A_c , B_c , C_c et D_c sont présentés dans l'annexe C.

$$\mathcal{E}(P_l, \beta) = \{\lambda \in \Re^{n+n_c}; \lambda' \beta P_l \lambda \leq 1\}$$

Nous cherchons la courbe de niveau qui correspond à une ERA du système non-linéaire avec les gains du correcteur linéaire (4.83), c'est-à-dire pour le gain

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} D_c & C_c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2.32 & -0.00695 & -0.8673 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.84)$$

Nous avons obtenu la courbe de niveau définie par $\beta = 2.4$. Ensuite nous essayons d'optimiser l'ERA à partir de la résolution du problème (4.71). D'abord en recalculant un gain linéaire, c'est-à-dire avec une loi de commande de degré $g_u = 1$, on obtient

$$K_1 = \begin{bmatrix} -1.7690 & 1.4774 & 1.1919 \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

et l'ERA est définie par $\beta = 1.3$. Ensuite on considère $g_u = 2$, c'est à dire, la loi de commande donnée par

$$u = K_1 \lambda_y + K_2 \lambda_y^2$$

En résolvant (4.71) nous obtenons

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} -1.818 & 1.5593 & 1.2755 \end{bmatrix} \\ K_2 &= \begin{bmatrix} 0.2895 & -0.4268 & -0.1429 & -0.0469 & -0.1199 & -0.0518 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.86)$$

et l'ERA est définie par $\beta = 0.7$. Nous avons donc élargi l'ERA en introduisant un terme quadratique dans la loi de commande. Le tableau 4.1 présente les scalaires définissant les courbes de niveau pour les différentes lois de commande

	gain de (4.84)	gain de (4.85)	gains de (4.86)
β^{-1}	0.4167	0.7692	1.4285

Tableau 4.1 – Valeurs de β^{-1} définissant l'ERA $\mathcal{E}(P_l) = \{\lambda \in \Re^{n+n_c}; \lambda' P_l \lambda \leq \beta^{-1}\}$.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux résultats qui permettent la synthèse de lois de commande polynomiales. La synthèse des gains de retour d'état, à la différence des résultats existants, est obtenue avec la résolution d'un problème de SDP où la matrice définissant la fonction de Lyapunov est une variable d'optimisation. Nous avons donc formulé un problème de vérification de la positivité d'un polynôme

dans une région autour de l'origine. Cette formulation est rendue possible grâce à une représentation particulière des polynômes, basée sur l'utilisation des vecteurs de monômes non-homogènes, c'est-à-dire, des vecteurs contenant des monômes répétés. Ceci permet d'effectuer un changement de coordonnées et ensuite un changement de variables tels que les matrices de gains polynomiaux peuvent être calculées à partir de la solution d'un problème d'optimisation soumis à des contraintes sous forme d'inégalités matricielles. Ce résultat généralise, pour des systèmes polynomiaux, des résultats de synthèse de lois de commande pour des systèmes linéaires.

Concernant le problème de calcul d'une loi de commande de retour de sortie, nous proposons un résultat qui permet la modification d'une loi de commande linéaire garantissant la stabilité locale de la boucle fermée. Le résultat permettant l'addition de termes polynomiaux pour le retour de sortie considère qu'un contrôleur linéaire de retour de sortie a été calculé, ce qui garantit la stabilité locale d'un système polynomial. Dans ce cas les gains polynomiaux sont introduits afin d'élargir l'ERA obtenue pour le système en boucle fermée avec la loi de commande linéaire. Ceci permet notamment de prendre en compte des sorties données par des fonctions polynomiales de l'état.

Quoiqu'il s'agisse de conditions basées sur des tests de positivité de polynômes, la formulation présentée ici exige que le modèle linéarisé du système soit stabilisable. Nous avons donc une garantie que l'origine est un point d'équilibre isolé et de ce fait, qu'il existe une région d'attraction pour ce point d'équilibre.

Nous soulignons que les problèmes d'optimisation dans la section 4.4 visent le calcul des gains élargissant des estimations de la région d'attraction. En les résolvant nous espérons que la région d'attraction soit en effet élargie.

Des fonctions de Lyapunov quadratiques ont été utilisées pour calculer des gains de retour d'état polynomiaux, garantissant donc la stabilité et la convergence vers l'origine des trajectoires à l'intérieur d'un ellipsoïde. La stabilité des trajectoires du système en boucle fermée peut pour autant être globale et impossible de certifier avec une fonction de Lyapunov quadratique. Par conséquent il est intéressant d'obtenir de nouvelles estimations de la RA avec les résultats du chapitre précédent une fois calculée la loi de commande polynomiale.

Des exemples numériques montrent que pour des lois de commande de différents degrés la norme des gains peut beaucoup varier. C'est en particulier le cas de figure qui se présente lorsque l'on essaye d'élargir l'ERA d'un système pour lequel la matrice d'entrée est constante ($G(x) = B_0$) avec une loi de commande linéaire. Dans ce cas l'élargissement de l'ERA est obtenu au prix de l'obtention de gains linéaires arbitrairement grands. Une telle solution n'est pas envisageable pour des systèmes saturants et dans ce cas les lois polynomiales, avec de faibles gains, peuvent s'avérer avantageuses.

Chapitre 5

Systèmes avec saturation en entrée

5.1 Introduction

Le modèle polynomial utilisé pour la synthèse des lois de commande dans le chapitre précédent ne tient pas compte des limites dans l'action de commande. Par conséquent, si nous avons des entrées saturantes la stabilité des trajectoires obtenues avec des efforts de commande qui dépassent les seuils de saturation peut ne pas être garantie. Une analyse a posteriori de la boucle fermée du système saturant s'impose alors. Un cas de lois de commande non-linéaires qui présente un intérêt particulier est celui des lois de commande d'inversion de la dynamique pour lesquels l'action linéarisante du signal de commande est perdue si l'entrée sature.

Étant donnée une loi de commande dynamique, une stratégie souvent adoptée pour traiter les saturations est l'introduction d'un correcteur anti-windup dans la boucle fermée [27]. Ce correcteur, n'est actif que lorsque la commande sature. Ainsi en introduisant de tels correcteurs il est envisageable d'élargir l'ERA du système commandé sans directement changer le contrôleur initial ou nominal (i.e. conçu sans tenir compte des saturations).

Dans ce chapitre, nous présentons des conditions pour la définition des ERA pour des systèmes polynomiaux, commandés par des lois de commande polynomiales avec entrée saturante. Les résultats sont basés sur une condition de secteur modifiée généralisée pour des fonctions polynomiales.

Nous proposons également une méthode pour calculer un correcteur anti-windup pour un système quadratique, c'est-à-dire un système polynomial de degré 2, pour lequel nous considérons donnée une loi commande basée sur l'inversion de la dynamique. Dans ce cadre, nous utilisons une architecture du correcteur proposée par [73].

5.2 Analyse de Stabilité

Dans cette section nous nous intéressons à l'étude de stabilité des systèmes polynomiaux saturés commandés par une loi de commande polynomiale sous la forme

$$\dot{x} = f(x) + G(x)\text{sat}_{u_0}(u(x)) \quad (5.1)$$

où $f(x) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, $G(x) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{n \times m}$, $u(x) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ sont des fonctions polynomiales respectivement de degré g_f , g_G et g_u et $u_0 \in \mathbb{R}_+^m$ représente le vecteur contenant les seuils de saturation de chaque entrée.

La région d'attraction d'un point d'équilibre du système (5.1) en boucle fermée avec une loi de commande polynomiale calculée sans prendre en compte la saturation probablement contient celle d'un système saturant. Le cas échéant, cela indique que la saturation est possiblement plus restrictive que d'autres termes non-linéaires de la dynamique pour l'élargissement des ERA.

Nous souhaitons évaluer si une loi de commande avec des termes polynomiaux s'avère avantageuse ou si des ERA similaires pourraient être obtenues avec des lois de commande linéaires.

Afin de formuler des conditions d'analyse de stabilité nous réécrivons (5.1) comme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + G(x)u(x) + G(x)\phi_{u_0}(u(x)) \\ &= \tilde{f}(x) + G(x)\phi_{u_0}(u(x)) \end{aligned} \quad (5.2)$$

où $\phi_{u_0} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ est la fonction zone-morte décentralisée, définie par

$$\phi_{u_0}(u(x)) = \text{sat}_{u_0}(u(x)) - u(x)$$

La dynamique est alors donnée par le polynôme $\tilde{f}(x)$ de degré $g_{\tilde{f}} = \max(g_f, g_G + g_u)$ qui définit la dynamique en absence de saturation et par le terme $G(x)\phi_{u_0}(u(x))$ qui introduit l'influence des saturations. Nous pouvons exprimer

$$\tilde{f}(x) = A_t \xi_{g_{\tilde{f}}}$$

$$G(x) = \bar{B}(\bar{\xi}_{g_G} \otimes I_m)$$

et

$$u(x) = K_t \xi_{g_u}$$

avec $A_t \in \mathbb{R}^{n \times \sigma_t(n, g_{\tilde{f}})}$, $\bar{B} \in \mathbb{R}^{n \times m(1 + \sigma_t(n, g_G))}$ et $K_t \in \mathbb{R}^{m \times \sigma_t(n, g_u)}$. Alors le problème que nous abordons est celui de l'estimation de la RA de l'origine du système (5.2). L'analyse des entrées saturantes se fait à l'aide de la condition de secteur modifiée donnée dans le corollaire suivant :

Corollaire 5.1. *Considérons l'ensemble polynomial*

$$S_0(u_0) = \{x \in \mathfrak{R}^n; -u_{0(i)} \leq w_{(i)}(x) \leq u_{0(i)}, i = 1, \dots, m\} \quad (5.3)$$

où $w(x) : \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}^m$ est une fonction polynomiale de degré g_w et $u_0 \in \mathfrak{R}_+^m$. Dans $S_0(u_0)$, l'inégalité

$$\left(\bar{\xi}_{g_\phi}' \otimes \phi_{u_0}'(u(x)) \right) (M_\phi \otimes T) \left(\bar{\xi}_{g_\phi} \otimes (\phi_{u_0}(u(x)) + u(x) - w(x)) \right) \leq 0 \quad (5.4)$$

est vérifiée avec $T \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ diagonale et $T \geq 0$, $M_\phi \in \mathfrak{R}^{(1+\sigma_t(n, g_\phi)) \times (1+\sigma_t(n, g_\phi))}$, $M_\phi = M_\phi' > 0$ et le vecteur $\bar{\xi}_{g_\phi} \in \mathfrak{R}^{1+\sigma_t(n, g_\phi)}$, donné par

$$\bar{\xi}_{g_\phi} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{g_\phi} \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Démonstration. Nous allons d'abord montrer que l'inégalité

$$\phi_{u_0}'(u(x)) T (\phi_{u_0}(u(x)) + u(x) - w(x)) \leq 0 \quad (5.6)$$

est vérifiée dans $S_0(u_0)$. Considérons les i -ièmes éléments de $u_0(x)$, de $w(x)$ et de $\phi_{u_0}(u(x))$ donnés respectivement par $u_{0(i)}$, $w_{(i)}(x)$ et $\phi_{u_0(i)}(u(x))$ et une matrice $T \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ diagonale satisfaisant $T \geq 0$. Nous avons

$$\begin{aligned} & \phi_{u_0}'(u(x)) T (\phi_{u_0}(u(x)) + u(x) - w(x)) \\ &= \sum_{i=1}^m \phi_{u_0(i)}(u(x)) T(i, i) (\phi_{u_0(i)}(u(x)) + u_{(i)}(x) - w_{(i)}(x)) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Si $-u_{0(i)} \leq u_{(i)} \leq u_{0(i)}$ nous avons $\phi_{u_0(i)} = 0$ et donc

$$\phi_{u_0(i)}(u(x)) T(i, i) (\phi_{u_0(i)}(u(x)) + u_{(i)}(x) - w_{(i)}(x)) = 0 \quad (5.8)$$

Si $u_{(i)} \leq -u_{0(i)}$ nous avons $\phi_{u_0(i)}(u(x)) \geq 0$ et $\text{sat}_{u_0(i)}(u(x)) = \phi_{u_0(i)}(u(x)) + u_{(i)}(x) = -u_{0(i)}$. Comme dans $S_0(u_0)$ nous avons $w_{0(i)}(x) \geq -u_{0(i)}$ et l'on obtient

$$\phi_{u_0(i)}(u(x)) T(i, i) (\phi_{u_0(i)}(u(x)) + u_{(i)}(x) - w_{(i)}(x)) \leq 0 \quad (5.9)$$

Si $u_{(i)} \geq u_{0(i)}$ nous avons $\phi_{u_0(i)}(u(x)) \leq 0$ et $\text{sat}_{u_0(i)}(u(x)) = \phi_{u_0(i)}(u(x)) + u_{(i)}(x) = u_{0(i)}$. Comme dans $S_0(u_0)$ nous avons $w_{0(i)}(x) \leq u_{0(i)}$ et l'on obtient

$$\phi_{u_0(i)}(u(x))T(i, i) (\phi_{u_0(i)}(u(x)) + u_{(i)}(x) - w_{(i)}(x)) \leq 0 \quad (5.10)$$

et donc la relation (5.6) est satisfaite. Si la matrice $M_\phi \in \mathfrak{R}^{(1+\sigma_t(n, g_\phi)) \times (1+\sigma_t(n, g_\phi))}$, satisfait $M_\phi = M'_\phi > 0$, on a $\bar{\xi}'_{g_\phi} M_\phi \bar{\xi}_{g_\phi} > 0$ et donc

$$\left(\bar{\xi}'_{g_\phi} M_\phi \bar{\xi}_{g_\phi} \right) (\phi'_{u_0}(u(x))T(\phi_{u_0}(u(x)) + u(x) - w(x))) \leq 0 \quad (5.11)$$

ou bien

$$\begin{aligned} \left(\bar{\xi}'_{g_\phi} M_\phi \bar{\xi}_{g_\phi} \right) \otimes (\phi'_{u_0}(u(x))T(\phi_{u_0}(u(x)) + u(x) - w(x))) &\leq 0 \\ \left(\bar{\xi}'_{g_\phi} \otimes \phi'_{u_0}(u(x)) \right) (M_\phi \otimes T) (\bar{\xi}_{g_\phi} \otimes (\phi_{u_0}(u(x)) + u(x) - w(x))) &\leq 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

□

Remarque 5.1. Ce résultat généralise la condition du secteur modifiée de [71], dans laquelle (5.4) est présentée avec $g_\phi = 0$, c'est-à-dire $\bar{\xi}_{g_\phi} = 1$, et des fonctions $w(x)$ et $u(x)$ données par des fonctions linéaires.

Nous pouvons exprimer la loi de commande $u(x)$ par

$$u(x) = K_t \xi_{g_u} \quad (5.13)$$

avec $K_t \in \mathfrak{R}^{m \times \sigma_t(n, g_u)}$, $\xi_{g_u} \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n, g_u)}$ et la fonction $w(x)$ par

$$w(x) = W \xi_{g_w} \quad (5.14)$$

$W \in \mathfrak{R}^{m \times \sigma_t(n, g_w)}$ et $\xi_{g_w} \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n, g_w)}$. On peut donc utiliser les relations (5.13) et (5.14) pour réécrire les termes $\bar{\xi}_{g_\phi} \otimes u(x)$ et $\bar{\xi}_{g_\phi} \otimes w(x)$ de l'inégalité (5.4) comme¹

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{g_\phi} \otimes u(x) &= \bar{\xi}_{g_\phi} \otimes u(x) \\ &= \bar{\xi}_{g_\phi} \otimes K_t \xi_{g_u} \\ &= (I_{(1+\sigma_t(n, g_\phi))} \otimes K_t) (\bar{\xi}_{g_\phi} \otimes \xi_{g_u}) \\ &= (I_{(1+\sigma_t(n, g_\phi))} \otimes K_t) M_{fg}(\bar{\xi}_{g_\phi}, \xi_{g_u}) \xi_{(g_\phi + g_u)} \\ &= \bar{K} \xi_{(g_\phi + g_u)} \end{aligned} \quad (5.15)$$

et

1. Les matrices $M_{fg}(\bar{\xi}_{g_\phi}, \xi_{g_u})$ satisfaisant $(\bar{\xi}_{g_\phi} \otimes \xi_{g_w}) = M_{fg}(\bar{\xi}_{g_\phi}, \xi_{g_u}) \xi_{(g_\phi + g_u)}$ sont présentées dans l'annexe B.

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}_{g_\phi} \otimes w(x) &= \bar{\xi}_{g_\phi} \otimes w(x) \\
&= \bar{\xi}_{g_\phi} \otimes W \xi_{g_w} \\
&= (I_{(1+\sigma_t(n, g_\phi))} \otimes W) (\bar{\xi}_{g_\phi} \otimes \xi_{g_w}) \\
&= (I_{(1+\sigma_t(n, g_\phi))} \otimes W) M_{fg} (\bar{\xi}_{g_\phi}, \xi_{g_w}) \xi_{(g_\phi + g_w)} \\
&= \bar{W} \xi_{(g_\phi + g_w)}
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Nous avons donc $\bar{K} \in \mathfrak{R}^{m(1+\sigma_t(n, g_\phi)) \times \sigma_t(n, g_\phi + g_w)}$ et $\bar{W} \in \mathfrak{R}^{m(1+\sigma_t(n, g_\phi)) \times \sigma_t(n, g_\phi + g_w)}$. L'inégalité (5.4) peut alors être écrite comme

$$\left(\bar{\xi}'_{g_\phi} \otimes \phi_{u_0}(u(x))' \right) (M_\phi \otimes T) \left(\bar{\xi}_{g_\phi} \otimes \phi_{u_0}(u(x)) + \bar{K} \xi_{(g_\phi + g_w)} - \bar{W} \xi_{(g_\phi + g_w)} \right) \leq 0 \tag{5.17}$$

Par la suite, nous présentons une condition qui, si elle est satisfaite, garantit que l'ensemble polynomial $\mathcal{E}(P_v)$ est inclus dans l'ensemble $S_0(u_0)$ et ainsi que l'inégalité (5.17) est vérifiée dans $\mathcal{E}(P_v)$. Nous pouvons exprimer l'ensemble $S_0(u_0)$ donné par (5.3) comme

$$S_0(u_0) = \left\{ x \in \mathfrak{R}^n; \xi'_{g_w} W'_{(i)} \frac{1}{u_{0(i)}^2} W_{(i)} \xi_{g_w} \leq 1, i = 1, \dots, m \right\} \tag{5.18}$$

où $W_{(i)}$ correspond à la i -ième ligne de la matrice W . Le résultat suivant est un cas particulier de la condition d'inclusion donnée par le corollaire 3.2 :

Corollaire 5.2. *Considérons une matrice $P_v \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n, v) \times \sigma_t(n, v)}$, $P_v = P'_v > 0$ et supposons qu'il existe des matrices $G_i \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n, r_i) \times n \sigma_t(n, r_i - 1)}$, $i = 1, \dots, m$, et des matrices $M_{r_i} \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n, r_i - 1) \times \sigma_t(n, r_i - 1)}$, $M_{r_i} = M'_{r_i} > 0$, $i = 1, \dots, m$ avec $r_i \geq \max(v, g_w)$, telles que*

$$\left[\begin{array}{cc} M_{P_v} - \bar{M}_{r_i} + G_i N_1(n, r_i) + N_1(n, r_i)' G'_i + C(n, r_i) & G_i N_2(n, r_i, v) \\ N_2(n, r_i, v)' G'_i & (M_{r_i} \otimes P_v) \\ M_{W_{(i)}} & 0_{1 \times \sigma_t(n, r_i - 1) \sigma_t(n, v)} \\ & M'_{W_{(i)}} \\ & 0_{\sigma_t(n, r_i - 1) \sigma_t(n, v) \times 1} \\ & u_{0(i)}^2 \end{array} \right] \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \tag{5.19}$$

avec $\bar{M}_{r_i} = \text{diag} \{ M_{r_i}, 0_{\sigma(n, r_i) \times \sigma(n, r_i)} \}$ et

$$M_{W_{(i)}} = \begin{cases} W_{(i)} & \text{si } r_i = g_w \\ \begin{bmatrix} W_{(i)} & 0_{1 \times \sigma_t(n, r_i) - \sigma_t(n, g_w)} \end{bmatrix} & \text{si } r_i > g_w \end{cases} \tag{5.20}$$

$$M_{P_v} = \begin{cases} P_v & \text{si } r_i = v \\ \text{diag} \{ P_v, 0_{(\sigma_t(n, r_i) - \sigma_t(n, v)) \times (\sigma_t(n, r_i) - \sigma_t(n, v))} \} & \text{si } r_i > v \end{cases} \tag{5.21}$$

où $W_{(i)}$ correspond à la i -ième ligne de la matrice W , les matrices $N_1(n, r_i)$ et $N_2(n, r_i, \mathbf{v})$ sont les matrices présentées dans la section 2.2.1 et la matrice $C(n, r_i)$ est présentée dans la section 2.4. Alors nous avons $\mathcal{E}(P_V) = \{x \in \mathfrak{R}^n; \xi'_V P_V \xi_V \leq 1\} \subseteq S_0(u_0)$.

Démonstration. Pour que $\mathcal{E}(P_V) \subseteq S_0(u_0)$ les inégalités

$$M_i(x) = \xi'_V P_V \xi_V - \xi'_{g_w} W'_{(i)} \frac{1}{u_{0(i)}^2} W_{(i)} \xi_{g_w} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (5.22)$$

doivent être vérifiées dans $\mathcal{E}(P_V)$. Considérons ensuite les expressions

$$2\xi'_{r_i} G'_i [N_1(n, r_i) \xi_{r_i} + N_2(n, r_i, \mathbf{v})(I_{\sigma_t(n, r_i-1)} \otimes \xi_V) \xi_{r_i-1}] = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (5.23)$$

avec $G_i \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n, r_i) \times \sigma_t(n, r_i-1)}$ et les matrices $N_1(n, r_i)$ et $N_2(n, r_i, \mathbf{v})$ définies dans la section 2.2.1. On vérifie l'inégalité

$$\xi'_{r_i} C_i(n, r_i) \xi_{r_i} = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (5.24)$$

où les matrices $C_i(n, r_i)$ sont celles que nous avons définies dans la section 2.4. Nous avons donc

$$M_i(x) = M_i(x) + \xi'_{r_i} C_i(n, r_i) \xi_{r_i} + 2\xi'_{r_i} G'_i [N_1(n, r_i) \xi_{r_i} + N_2(n, r_i, \mathbf{v})(I_{\sigma_t(n, r_i-1)} \otimes \xi_V) \xi_{r_i-1}], \quad i = 1, \dots, m \quad (5.25)$$

L'inégalité suivante est vérifiée dans $\mathcal{E}(P_V)$

$$\begin{aligned} & \xi'_{r_i} G_i N_2(n, r_i, \mathbf{v})(I_{\sigma_t(n, r_i-1)} \otimes \xi_V) \xi_{r_i-1} + \xi'_{r_i-1} (I_{\sigma_t(n, r_i-1)} \otimes \xi'_V) N_2(n, r_i, \mathbf{v})' G'_i \xi_{r_i}, \\ & \geq -\xi'_{r_i} G_i N_2(n, r_i, \mathbf{v})(M_{r_i}^{-1} \otimes P_V^{-1}) N_2(n, r_i, \mathbf{v})' G'_i \xi_{r_i} - \xi_{r_i-1} M_{r_i} \xi_{r_i-1} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} M_i(x) & \geq \xi'_{r_i} \left(M_{P_V} + M'_{W(i)} \frac{1}{u_{0(i)}^2} M_{W(i)} + C_i(n, r_i) - \bar{M}_{r_i} \right. \\ & \quad \left. - G_i N_2(n, r_i, \mathbf{v})(M_{r_i}^{-1} \otimes P_V^{-1}) N_2(n, r_i, \mathbf{v})' G'_i \right) \xi_{r_i}, \\ & \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (5.27)$$

Alors si nous vérifions

$$\begin{aligned} \xi'_{r_i} \left(M_{P_v} + M'_{W(i)} \frac{1}{u_{0(i)}^2} M_{W(i)} + C_i(n, r_i) - \bar{M}_{ri} \right. \\ \left. - G_i N_2(n, r_i, v) (M_{ri}^{-1} \otimes P_v^{-1}) N_2(n, r_i, v)' G'_i \right) \xi_{r_i} \geq 0, \\ i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

ou de façon équivalente, si les inégalités (5.19) sont satisfaites, nous pouvons conclure que $M_i(x) \geq 0$, $i = 1, \dots, m$ et de ce fait $\mathcal{E}(P_v) \subseteq S_0(u_0)$. $\square$

Avec les fonctions $f(x)$, $G(x)$ et la loi de commande $u(x)$ nous pouvons décrire le système (5.1) dans les coordonnées ξ_v avec

$$\dot{\xi}_v = \tilde{f}_v(x) + G_v(x)\phi(u(x)) \quad (5.28)$$

où les fonctions $\tilde{f}_v(x) : \mathcal{R}^n \mapsto \mathcal{R}^{\sigma_t(n, v)}$, $G_v(x) : \mathcal{R}^n \mapsto \mathcal{R}^{\sigma_t(n, v) \times m}$ sont des fonctions polynomiales respectivement de degré $g_{\tilde{f}_v} = g_{\tilde{f}} + v - 1$ et $g_{G_v} = g_G + v - 1$ que nous pouvons exprimer en utilisant des matrices $A_{tv} \in \mathcal{R}^{\sigma_t(n, v) \times \sigma_t(n, g_{\tilde{f}_v})}$ et $\bar{B}_v \in \mathcal{R}^{\sigma_t(n, v) \times m(1 + \sigma_t(n, g_{G_v}))}$ comme

$$\tilde{f}_v(x) = A_{tv} \xi_{g_{\tilde{f}_v}}$$

$$G_v(x) = \bar{B}_v (\bar{\xi}_{g_{G_v}} \otimes I_m)$$

Le résultat suivant nous permet d'estimer la RA de l'origine du système (5.1).

Proposition 5.1. *Supposons qu'il existe des matrices $P_v \in \mathcal{R}^{\sigma_t(n, v) \times \sigma_t(n, v)}$, $P_v = P'_v > 0$, $T \in \mathcal{R}^{m \times m}$ diagonale, $T \geq 0$, une matrice $W \in \mathcal{R}^{m \times \sigma_t(n, g_w)}$, des matrices $G_s \in \mathcal{R}^{\sigma_t(n, r_s) \times \sigma_t(n, r_s - 1) \times \sigma_t(n, v)}$, $G_i \in \mathcal{R}^{\sigma_t(n, r_i) \times \sigma_t(n, r_i - 1) \times \sigma_t(n, v)}$, $i = 1, \dots, m$ et des matrices $M_{r_s} \in \mathcal{R}^{\sigma_t(n, r_s - 1) \times \sigma_t(n, r_s - 1)}$, $M_{r_s} = M'_{r_s} > 0$, $M_{ri} \in \mathcal{R}^{\sigma_t(n, r_i - 1) \times \sigma_t(n, r_i - 1)}$, $M_{ri} = M'_{ri} > 0$, $i = 1, \dots, m$, $M_\phi \in \mathcal{R}^{m \times m}$, $M_\phi = M'_\phi > 0$ telles que l'inégalité*

$$\left[\begin{array}{cc} \bar{M}_{V_v} + \bar{M}_{r_s} + G_s N_1(n, r_s) + N_1(n, r_s)' G'_s + C(n, r_s) & G_s N_2(n, r_s, v) \\ & -(M_{r_s} \otimes P_v) \\ \bar{M}'_{B_v} - (M_\phi \otimes T) M'_K + (M_\phi \otimes T) \bar{M}'_W & 0_{m(1 + \sigma_t(n, g_\phi)) \times \sigma_t(n, v) \times \sigma_t(n, r_s - 1)} \\ & \bar{M}_{B_v} - \bar{M}_K (M_\phi \otimes T) + \bar{M}_W (M_\phi \otimes T) \\ & 0_{\sigma_t(n, v) \times \sigma_t(n, r_s - 1) \times m(1 + \sigma_t(n, g_\phi))} \\ & -2(M_\phi \otimes T) \end{array} \right] < 0 \quad (5.29)$$

avec

$$\bar{M}_{\bar{B}_v} = \begin{bmatrix} P_v \bar{B}_v \\ 0_{(\sigma_t(n, r_s) - \sigma_t(n, v)) \times m(1 + \sigma_t(n, g_{Gv}))} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

$$\bar{M}_K = \begin{bmatrix} \bar{K}' \\ 0_{(\sigma_t(n, r_s) - \sigma_t(n, g_\phi + g_u)) \times m(1 + \sigma_t(n, g_\phi))} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

$$\bar{M}_W = \begin{bmatrix} \bar{W}' \\ 0_{(\sigma_t(n, r_s) - \sigma_t(n, g_\phi + g_w)) \times m(1 + \sigma_t(n, g_\phi))} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

où les matrices $\bar{K}$ et $\bar{W}$ sont respectivement données par (5.15) et (5.16), la matrice $M_{\dot{V}_v}$ satisfait $\xi_d' M_{\dot{V}_v} \xi_d = 2\xi_v' P_v A_{tv} \xi_{g_{\tilde{v}}}$ avec $d = \left\lceil \frac{g_{\tilde{v}} + v}{2} \right\rceil$,

$$\bar{M}_{\dot{V}_v} = \text{diag}\{M_{\dot{V}_v}, 0_{(\sigma_t(n, r_s) - \sigma_t(n, d)) \times (\sigma_t(n, r_s) - \sigma_t(n, d))}\} \quad (5.33)$$

et

$$\bar{M}_{r_s} = \text{diag}\{M_{r_s}, 0_{\sigma(n, r_s) \times \sigma_t(n, r_s)}\} \quad (5.34)$$

et les inégalités

$$\left[\begin{array}{ccc} M_{P_v} - \bar{M}_{r_i} + G_i N_1(n, r_i) + N_1(n, r_i)' G_i' + C(n, r_i) & G_i N_2(n, r_i, v) & \\ N_2(n, r_i, v)' G_i' & (M_{r_i} \otimes P_v) & \\ M_{W_{(i)}} & 0_{1 \times \sigma_t(n, r_i - 1) \sigma_t(n, v)} & \\ & M_{W_{(i)}}' & \\ & 0_{\sigma_t(n, r_i - 1) \sigma_t(n, v) \times 1} & \\ & u_{0(i)}^2 & \end{array} \right] \geq 0 \quad (5.35)$$

i = 1, \dots, m

avec $\bar{M}_{r_i} = \text{diag}\{M_{r_i}, 0_{\sigma(n, r_i) \times \sigma(n, r_s)}\}$ et

$$M_{W_{(i)}} = \begin{cases} W_{(i)} & \text{si } r_i = g_w \\ \begin{bmatrix} W_{(i)} & 0_{1 \times (\sigma_t(n, r_i) - \sigma_t(n, g_w))} \end{bmatrix} & \text{si } r_i > g_w \end{cases} \quad (5.36)$$

$$M_{P_v} = \begin{cases} P_v & \text{si } r_i = v \\ \text{diag}\{P_v, 0_{(\sigma_t(n, r_i) - \sigma_t(n, v)) \times (\sigma_t(n, r_i) - \sigma_t(n, v))}\} & \text{si } r_i > v \end{cases} \quad (5.37)$$

sont satisfaites. Alors $\mathcal{E}(P_v)$ est une ERA du système (5.1).

Démonstration. Considérons la fonction

$$V_v(x) = \xi'_v P_v \xi_v \quad (5.38)$$

$P_v \in \Re^{\sigma_t(n,v) \times \sigma_t(n,v)}$, $P_v = P'_v > 0$. Nous avons sa dérivée le long des trajectoires de (5.1) donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V}_v(x) &= 2\xi'_v P_v \dot{\xi}_v \\ &= 2\xi'_v P_v \left(A_{tv} \xi_{g_{\tilde{f}_v}} + \bar{B}_v (\bar{\xi}_{g_{Gv}} \otimes \phi_{u_0}(u(x))) \right) \end{aligned} \quad (5.39)$$

Nous écrivons

$$2\xi'_v P_v A_{tv} \xi_{g_{\tilde{f}_v}} = \xi'_d M_{\dot{V}_v} \xi_d \quad (5.40)$$

avec $d = \left\lceil \frac{g_{\tilde{f}_v} + v}{2} \right\rceil$. Ainsi nous avons

$$\dot{V}_v(x) = \xi'_d M_{\dot{V}_v} \xi_d + 2\xi'_v P_v \bar{B}_v (\bar{\xi}_{g_{Gv}} \otimes \phi_{u_0}(u(x))) \quad (5.41)$$

Considérons $r_s \geq \max(d, g_\phi + g_u, g_\phi + g_u)$, et les relations

$$2\xi'_{r_s} G'_s (N_1(n, r_s) \xi_{r_s} + N_2(n, r_s, v) (I_{\sigma_t(n, r_s-1)} \otimes \xi_v) \xi_{r_s-1}) = 0 \quad (5.42)$$

$$\xi'_{r_s} C(n, r) \xi_{r_s} = 0 \quad (5.43)$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} &\xi'_{r_s} G_s N_2(n, r_s, v) (I_{\sigma_t(n, r_s-1)} \otimes \xi_v) \xi_{r_s-1} + \xi'_{r_s-1} (I_{\sigma_t(n, r_s-1)} \otimes \xi'_v) N_2(n, r_s, v)' G'_s \xi_{r_s}, \\ &\leq \xi'_{r_s} G_s N_2(n, r_s, v) (M_{r_s}^{-1} \otimes P_v^{-1}) N_2(n, r_s, v)' G'_s \xi_{r_s} + \xi_{r_s-1} M_{r_s} \xi_{r_s-1} \end{aligned} \quad (5.44)$$

valable dans $\mathcal{E}(P_v)$ et donc

$$\begin{aligned} \dot{V}_v(x) &\leq \xi'_{r_s} (\bar{M}_{\dot{V}_v} + \bar{M}_{r_s} + G_s N_1(n, r_s) + N_1(n, r_s)' G'_s + C(n, r_s) \\ &\quad + G_s N_2(n, r_s, v) (M_{r_s}^{-1} \otimes P_v^{-1}) N_2(n, r_s, v)' G'_s) \xi_{r_s} + 2P_v \bar{B}_v (\bar{\xi}_{g_{Gv}} \otimes \phi_{u_0}(u(x))) \end{aligned} \quad (5.45)$$

dans $\mathcal{E}(P_v)$. Si les inégalités (5.35) sont satisfaites, d'après le corollaire 5.2 nous pouvons conclure que $\mathcal{E}(P_v) \subseteq S_0(u_0)$, et l'inégalité (5.17) est valable dans $\mathcal{E}(P_v)$, c'est-à-dire

$$-2 \left(\bar{\xi}'_{g_\phi} \otimes \phi_{u_0}(u(x))' \right) (M_\phi \otimes T) \left(\bar{\xi}_{g_\phi} \otimes \phi_{u_0}(u(x)) + \bar{K} \xi_{(g_\phi + g_u)} - \bar{W} \xi_{(g_\phi + g_w)} \right) > 0$$

Ainsi, dans $\mathcal{E}(P_v)$ la dérivée de la fonction $V_v(x)$ satisfait

$$\begin{aligned} \dot{V}_v(x) \leq & \xi'_{r_s} (\bar{M}_{\dot{V}_v} + \bar{M}_{r_s} + G_s N_1(n, r_s) + N_1(n, r_s)' G'_s + C(n, r_s) \\ & + G N_2(n, r_s, v) (M_{r_s}^{-1} \otimes P_v^{-1}) N_2(n, r_s, v)' G') \xi_{r_s} + 2 \xi'_{(g_{G_v} + v)} \bar{M}_{\bar{B}_v} \phi_{u_0}(u(x)) \\ & - 2 \left(\bar{\xi}'_{g_\phi} \otimes \phi_{u_0}(u(x))' \right) (M_\phi \otimes T) \left(\bar{\xi}_{g_\phi} \otimes \phi_{u_0}(u(x)) + \bar{K} \xi_{(g_\phi + g_u)} - \bar{W} \xi_{(g_\phi + g_w)} \right) \end{aligned} \quad (5.46)$$

Alors si

$$\begin{aligned} & \xi'_{r_s} (\bar{M}_{\dot{V}_v} + \bar{M}_{r_s} + G_s N_1(n, r_s) + N_1(n, r_s)' G'_s + C(n, r_s) \\ & + G N_2(n, r_s, v) (M_{r_s}^{-1} \otimes P_v^{-1}) N_2(n, r_s, v)' G') \xi_{r_s} + 2 \xi'_{(g_{G_v} + v)} \bar{M}_{\bar{B}_v} \phi_{u_0}(u(x)) \\ & - 2 \left(\bar{\xi}'_{g_\phi} \otimes \phi_{u_0}(u(x))' \right) (M_\phi \otimes T) \left(\bar{\xi}_{g_\phi} \otimes \phi_{u_0}(u(x)) + \bar{K} \xi_{(g_\phi + g_u)} - \bar{W} \xi_{(g_\phi + g_w)} \right) \leq 0 \end{aligned} \quad (5.47)$$

ou sous la forme équivalente (5.29) est satisfaite, nous avons $\dot{V}_v(x) < 0$ dans $\mathcal{E}(P_v)$. Par conséquent nous pouvons conclure que $\mathcal{E}(P_v)$ est une ERA de l'origine de (5.1). $\square$

Remarque 5.2. Afin de simplifier la construction des matrices $\bar{M}_{B_v}$, $\bar{M}_K$ et $\bar{M}_W$ nous utilisons $g_\phi = g_{G_v}$.

Remarque 5.3. Le bloc

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_{\dot{V}_v} + \bar{M}_{r_s} + G_s N_1(n, r_s) + N_1(n, r_s)' G'_s + C(n, r_s) & G_s N_2(n, r_s, v) \\ N_2(n, r_s, v)' G'_s & -(M_{r_s} \otimes P_v) \end{bmatrix}$$

dans la matrice de (5.29) correspond à la matrice de la condition de stabilité du système non-saturant donnée par la Proposition 5.1. Une condition nécessaire à la satisfaction de la condition (5.29) est alors que la condition de stabilité du système sans saturation soit satisfaite.

5.3 Synthèse des correcteurs anti-windup

La plupart des méthodes pour le calcul des correcteurs anti-windup formulés comme des problèmes de SDP traite des systèmes saturants dont la saturation est la seule non-linéarité présente. Pourtant, la dégradation du comportement de la boucle fermée peut être plus importante suite à une action déstabilisante des termes polynomiaux. C'est effectivement ce qui peut arriver dans le cas d'un contrôleur basé sur l'inversion de la dynamique (NDI) pour lequel l'action linéarisante est perdue lorsque l'entrée sature.

Une approche envisageable pour traiter l'influence de termes non-linéaires autres que la saturation est l'introduction des termes non-linéaires dans le correcteur anti-windup [51], [61]. Le rôle du correcteur non-linéaire est donc de garantir la stabilité de la boucle fermée dans un ensemble plus grand que celui garanti par le compensateur anti-windup linéaire.

Dans ce qui suit, nous présentons un résultat permettant la synthèse d'un correcteur anti-windup pour un système saturant en entrée avec des termes quadratiques, c'est-à-dire un système polynomial de degré 2, pour lequel nous considérons avoir calculé un correcteur non-linéaire par inversion dynamique (NDI).

Nous posons le problème de synthèse de l'anti-windup comme un problème de synthèse d'un retour d'état quadratique avec saturation en entrée, comme dans [84], [85].

Considérons le système avec des termes quadratiques et entrée saturante

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + B(A_2(x \otimes x) + \text{sat}_{u_0}(u)) \\ y &= Cx \end{cases} \quad (5.48)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{m \times n^2}$ pour lequel nous supposons avoir calculé le contrôleur NDI donné par

$$\begin{cases} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c(Cx - \theta_2) \\ v &= C_c x_c + D_c(Cx - \theta_2) \\ u &= -A_2(x \otimes x) + v + \theta_1 \end{cases} \quad (5.49)$$

avec $x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$, $A_c \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$, $B_c \in \mathbb{R}^{n_c \times p}$, $C_c \in \mathbb{R}^{m \times n_c}$ et $D_c \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Les matrices A_c , B_c , C_c and D_c sont supposées avoir été calculées en tenant compte seulement du modèle linéarisé. La saturation dans la commande sera traitée en utilisant les termes $\theta_1 \in \mathbb{R}^{n_c}$, $\theta_2 \in \mathbb{R}^p$ qui serviront d'entrée pour l'action anti-windup sur le système.

Dans le cas non-saturant, avec $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = 0$, le système (5.48) en boucle fermée avec le contrôleur NDI (5.49) est globalement stable. Autrement dit, le système linéaire

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + BD_c C & BC_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} \\ &= \tilde{A} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.50)$$

est globalement asymptotiquement stable. Nous considérons alors, dans ce qui suit, que $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n+n_c \times n+n_c}$ est Hurwitz.

Nous allons utiliser une architecture particulière d'anti-windup, basée sur une factorisation première comme dans [89], donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_a &= Ax_a + B(F_a x_a + (A_2 + F_{a2})(x_a \otimes x_a)) + B\phi_{u_0}(u) \\ \theta_1 &= F_a x_a + (A_2 + F_{a2})(x_a \otimes x_a) \\ \theta_2 &= Cx_a \end{cases} \quad (5.51)$$

où $\phi_{u_0}(u(x)) = \text{sat}_{u_0}(u) - u$ est la fonction zone-morte décentralisée. Le correcteur anti-windup est alors du même ordre que le système (5.48).

Si nous avons les matrices $F_a = 0$ et $F_{a2} = -A_2$, nous avons $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = Cx_a$, le correcteur devient donc une copie du système. Dans ce cas, le correcteur devient le correcteur anti-windup de modèle interne (IMC) [61]. Les propriétés de performance et de robustesse d'un tel correcteur sont bien connues pour des systèmes linéaires, par contre, pour des systèmes non-linéaires ces propriétés ne sont guère connues. C'est l'une des raisons pour lesquelles nous utilisons des matrices F_a and F_{a2} différentes de zéro.

En introduisant l'anti-windup dans le système nous avons l'entrée de commande $u(x, x_a, x_c)$ définie dans (5.49) donnée par

$$u(x, x_a, x_c) = -A_2(x \otimes x) + F_a x_a + (A_2 + F_{a2})(x_a \otimes x_a) + C_c x_c + D_c C(x - x_a) \quad (5.52)$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(A_2(x \otimes x) + \text{sat}_{u_0}(u)) \\ &= Ax + B(A_2(x \otimes x) + u) + B\phi_{u_0}(u) \\ &= Ax + BF_a x_a + B(A_2 + F_{a2})(x_a \otimes x_a) + BC_c x_c + BD_c C(x - x_a) + B\phi_{u_0}(u) \end{aligned} \quad (5.53)$$

Deux non-linéarités influencent alors la dynamique de x , à savoir, la fonction zone-morte $\phi_{u_0}(u)$ et le terme quadratique $(x_a \otimes x_a)$.

En introduisant la variable $e = x - x_a$, nous avons

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{x}_a \\ &= Ax + BC_c x_c + BD_c C(x - x_a) + B(A_2 + F_{a2})(x_a \otimes x_a) + BF_a x_a + B\phi_{u_0}(u) \\ &\quad - [(A + BF_a)x_a + B(A_2 + F_{a2})(x_a \otimes x_a)] + B\phi_{u_0}(u) \\ &= (A + BD_c C)e + BC_c x_c \end{aligned} \quad (5.54)$$

et la dynamique du contrôleur (5.49) s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c Cx - B_c Cx_a \\ &= A_c x_c + B_c Ce \end{aligned} \quad (5.55)$$

Finalement nous pouvons écrire (5.53) comme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B\phi_{u_0}(u) + B(C_c x_c + D_c Cx) + B(-D_c Cx_a + (A_2 + F_{a2})(x_a \otimes x_a) + F_a x_a) \\ &\quad - B(F_a x + (A_2 + F_{a2})(x \otimes x)) + B(F_a x + (A_2 + F_{a2})(x \otimes x)) \\ &= Ax + B\phi_{u_0}(u) + B(C_c x_c + D_c Ce + (A_2 + F_{a2})(x \otimes x) + F_a x) \\ &\quad - B(F_a e - (A_2 + F_{a2})(e \otimes e - (e \otimes x + x \otimes e))) \end{aligned} \quad (5.56)$$

en utilisant l'identité

$$\begin{aligned} x_a \otimes x_a &= (x - e) \otimes (x - e) \\ &= (x \otimes x) - (x \otimes e) - (e \otimes x) + (e \otimes e) \end{aligned} \quad (5.57)$$

Nous pouvons réécrire la dynamique du système complet dans les coordonnées

$$\gamma = \begin{bmatrix} x \\ e \\ x_c \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{2n+n_c}$$

Le système complet s'écrit

$$\dot{\gamma} = \bar{A}\gamma + \bar{B}g(x, e, u) \quad (5.58)$$

avec

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{c|c} A + BF_a & \begin{bmatrix} B(D_c C - F_a) & BC_c \end{bmatrix} \\ \hline 0_{n+n_c \times n} & \tilde{A} \end{array} \right]; \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0_{n \times m} \\ 0_{n_c \times m} \end{bmatrix}$$

et

$$g(x, e, u) = (A_2 + F_{a2})(x \otimes x) + (A_2 + F_{a2})(e \otimes e - (e \otimes x + x \otimes e)) + \phi_{u_0}(u)$$

Comme les dynamiques des variables e et x_c ne dépendent pas de x , nous avons que les trajectoires dans l'espace défini par $\begin{bmatrix} e' & x_c' \end{bmatrix}'$ sont les solutions de l'équation :

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} e \\ x_c \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

Le système est donc formé par une partie linéaire autonome en cascade avec un sous-système non-autonome comme dans [61], [89] et [73]. Ce système est illustré dans la figure 5.1.

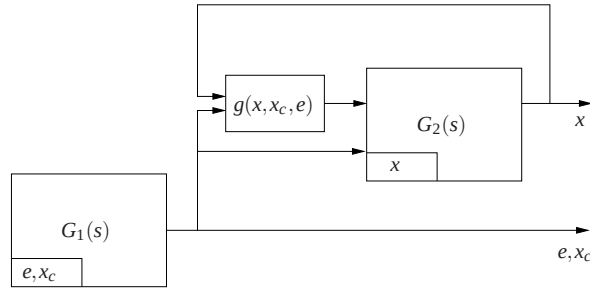


Figure 5.1 – Seule la dynamique de x est affectée par $g(x, e, u)$.

Le problème que nous abordons dans cette section est celui de la synthèse d'un correcteur anti-windup sous la forme (5.51), c'est-à-dire le calcul des matrices F_a et F_{a2} telles que nous puissions garantir la stabilité du système (5.58) dans une région autour de l'origine.

Nous allons nous concentrer sur l'analyse de stabilité du deuxième sous-système pour lequel les variables du sous-système linéaire, e et x_c , agissent comme des entrées.

Le lemme suivant présente une inégalité qui sera utile pour démontrer le résultat principal de cette section.

Lemme 5.1. *L'inégalité suivante*

$$\|e \otimes e - (e \otimes x + x \otimes e)\|^2 \leq 2(1 + 2\alpha_1^{-1})\|e\|^4 + 4\alpha_1\|x\|^4$$

est vérifiée avec $\alpha_1 \in \mathfrak{R}^+$.

Démonstration. Considérons $\alpha_1 \in \mathfrak{R}^+$, nous avons :

$$\begin{aligned} \|e \otimes e - (e \otimes x + x \otimes e)\|^2 &\leq 2\|e \otimes e\|^2 + 2\|e \otimes x + x \otimes e\|^2 \\ &\leq 2\|e\|^4 + 4(\|e\|^2\|x\|^2 + \|x\|^2\|e\|^2) \\ &\leq 2\|e\|^4 + 4(\alpha_1\|x\|^4 + \alpha_1^{-1}\|e\|^4) \\ &= 2(1 + 2\alpha_1^{-1})\|e\|^4 + 4\alpha_1\|x\|^4 \end{aligned}$$

□

Nous pouvons alors présenter le résultat suivant qui nous permet de calculer le correcteur (5.51) pour garantir la stabilité du système (5.58) et d'obtenir une estimation de la région d'attraction associée.

Proposition 5.2. *Supposons qu'il existe une matrice $Q \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $Q = Q' > 0$ une matrice diagonale $S_1 \in \mathfrak{R}^{m \times m}$, des matrices $L_a \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $L_{a2} \in \mathfrak{R}^{m \times n^2}$, $H \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ et une matrice $M_r \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $M_r = M_r' > 0$ telles que les inégalités suivantes sont vérifiées*

$$\begin{bmatrix} QA' + AQ + BL_a + L_a'B' & BS_1 - L_a' + H' & B(A_2(I_n \otimes Q) + L_{a2}) & QM_r \\ S_1B' - L_a + H & -2S_1 & -L_{a2} & 0 \\ ((I_n \otimes Q)A_2' + L_{a2}')B' & -L_{a2}' & -(M_r \otimes Q) & 0 \\ M_rQ & 0 & 0 & -M_r \end{bmatrix} < 0 \quad (5.60)$$

$$\begin{bmatrix} Q & H_{(i)}' \\ H_{(i)} & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, i = 1, \dots, m \quad (5.61)$$

alors il existe un correcteur anti-windup sous la forme (5.51) garantissant qu'un sous-ensemble de la région d'attraction de l'origine du système (5.58) est donné par l'ensemble

$$\mathcal{R}(P_1, P_l, v) = \{x \in \mathfrak{R}^n, \tilde{x} \in \mathfrak{R}^{n+n_c}; x'P_1x + \tilde{x}'(vP_l)\tilde{x}(1 + \tilde{x}'(vP_l)\tilde{x}) \leq 1\} \quad (5.62)$$

où $P_1 = Q^{-1}$. Le vecteur $\tilde{x}$ est donné par

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} e \\ x_c \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

et $P_l \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$, $P_l = P'_l > 0$ satisfait

$$\tilde{A}'P_l + P_l\tilde{A} = -R_l < 0 \quad (5.64)$$

ν est un scalaire positif qui dépend de Q , P_l , L_a , L_{a2} et des matrices C_c et D_c du contrôleur (5.49). En outre, le correcteur anti-windup sous la forme (5.51) peut être calculé avec $F_a = L_a Q^{-1}$ and $F_{a2} = L_{a2}(I_n \otimes Q)^{-1}$.

Démonstration. Considérons deux matrices $P_1 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $P_1 = P'_1 > 0$ et $P_2 \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$, $P_2 = P'_2 > 0$ et la fonction polynomiale de degré 4 :

$$V(x, \tilde{x}) = x'P_1x + \tilde{x}'P_2\tilde{x} + (\tilde{x}'P_2\tilde{x})^2 \quad (5.65)$$

comme fonction de Lyapunov candidate. La dérivée temporelle de $V(x, \tilde{x})$ le long des trajectoires du système (5.58) s'écrit $\dot{V}(x, \tilde{x}) = \dot{V}_1(x) + \dot{V}_2(\tilde{x})$, avec

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x) = & 2x'P_1[Ax + B\phi_{u_0}(u) + B(C_c x_c + D_c C e + (A_2 + F_{a2})(x \otimes x) + F_a x) \\ & - B(F_a e - (A_2 + F_{a2})(e \otimes e - (e \otimes x + x \otimes e)))] \end{aligned} \quad (5.66)$$

et

$$\dot{V}_2(\tilde{x}) = (1 + 2\tilde{x}'P_2\tilde{x})\tilde{x}'(\tilde{A}'P_2 + P_2\tilde{A})\tilde{x} \quad (5.67)$$

Par la suite nous présentons une inégalité sous la forme de (5.4) valable dans l'ensemble $\mathcal{R}(P_1, P_l, \nu)$. Considérons la condition de secteur modifiée du corollaire 5.1 avec $g_\phi = 0$ et $w(x) = HP_1x$

$$x \in S_0(u_0) = \{x \in \mathfrak{R}^n; -u_{0(i)} \leq H_{(i)}P_1x \leq u_{0(i)}, i = 1, \dots, m\}$$

où $H_{(i)}$ représente la i -ème ligne de la matrice H . Dans l'ensemble $S_0(u_0)$ l'inégalité (5.4) avec $u(x)$ donnée par (5.52) s'écrit :

$$\begin{aligned} -2\phi'_{u_0}T[-A_2(x \otimes x) + F_a x_a + (A_2 + F_{a2})(x_a \otimes x_a) + C_c x_c + D_c C(x - x_a)] \\ -2\phi'_{u_0}T\phi_{u_0} + 2\phi'_{u_0}THP_1x \geq 0 \end{aligned}$$

En introduisant $x_a = -e + x$ et $(-F_{a2} + F_{a2})(x \otimes x)$ on obtient

$$\begin{aligned} -2\phi'_{u_0}T[-(A_2 + F_{a2})((x \otimes x) - (x_a \otimes x_a)) \\ + F_{a2}(x \otimes x) - F_a e + F_a x + C_c x_c + D_c C(x - x_a)] \\ -2\phi'_{u_0}T\phi_{u_0} + 2\phi'_{u_0}THP_1x \geq 0 \end{aligned}$$

ou bien, en utilisant la relation (5.57) :

$$\begin{aligned} -2\phi'_{u_0} T [(A_2 + F_{a2})(e \otimes e - (e \otimes x + x \otimes e)) + F_{a2}(x \otimes x) + F_a x + (D_c C - F_a)e + C_c x_c] \\ -2\phi'_{u_0} T \phi_{u_0} + 2\phi'_{u_0} T H P_1 x \geq 0 \end{aligned} \quad (5.68)$$

A partir du corollaire 5.2, la vérification de la relation (5.61) implique que l'ensemble $\mathcal{E}(P_1) = \{x \in \mathfrak{R}^n; x' P_1 x \leq 1\}$, est inclus dans l'ensemble polyédral défini par $S_0(u_0)$, et ainsi, que (5.68) est vérifiée dans $\mathcal{E}(P_1)$. Par ailleurs, notons que, quel que soit $v > 0$ nous avons

$$x' P_1 x \leq x' P_1 x + \tilde{x}' (v P_1) \tilde{x} + (\tilde{x}' (v P_1) \tilde{x})^2$$

Alors l'ensemble $\mathcal{R}(P_1, P_l, v)$ défini par (5.62) est inclus dans $\mathcal{E}(P_1)$ et donc dans $S_0(u_0)$ si (5.61) est vérifiée. Dans ce cas (5.68) est vérifiée dans $\mathcal{R}(P_1, P_l, v)$.

Avec l'inégalité (5.68), dans l'ensemble $\mathcal{R}(P_1, P_l, v)$ une borne supérieure pour $\dot{V}_1$ est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & 2x' P_1 [Ax + B(C_c x_c + D_c C e + (A_2 + F_{a2})(x \otimes x) + F_a x) \\ & + B\phi_{u_0}(u) - B(F_a e - (A_2 + F_{a2})(e \otimes e - (e \otimes x + x \otimes e)))] \\ & - 2\phi'_{u_0} T [(A_2 + F_{a2})(e \otimes e - (e \otimes x + x \otimes e)) + F_{a2}(x \otimes x) \\ & + F_a x + (D_c C - F_a)e + C_c x_c] \\ & - 2\phi'_{u_0} T \phi_{u_0} + 2\phi'_{u_0} T H P_1 x \end{aligned} \quad (5.69)$$

Nous séparons cette inégalité en deux termes, à savoir un terme qui ne dépend que de x et ϕ_{u_0} et un terme qui dépend de x , ϕ_{u_0} et $\tilde{x}$:

$$\dot{V}_1 \leq \dot{V}_{1a}(x, \phi_{u_0}) + \dot{V}_{1b}(x, \phi_{u_0}, \tilde{x}) \quad (5.70)$$

où

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1a}(x, \phi_{u_0}) = & 2x' P_1 [Ax + B((A_2 + F_{a2})(x \otimes x) + F_a x) + B\phi_{u_0}(u)] \\ & - 2\phi'_{u_0} T \phi_{u_0} + 2\phi'_{u_0} T H P_1 x - 2\phi'_{u_0} T (F_{a2}(x \otimes x) + F_a x) \end{aligned} \quad (5.71)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1b}(x, \phi_{u_0}, \tilde{x}) = & 2 \begin{bmatrix} x' & \phi'_{u_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 B \\ -T \end{bmatrix} ((D_c C - F_a)e + C_c x_c \\ & + (A_2 + F_{a2})(e \otimes e - (e \otimes x + x \otimes e))) \end{aligned}$$

Avec ces relations, une borne supérieure pour $\dot{V}(x)$ est donnée par

$$\dot{V}(x, \tilde{x}) \leq \dot{V}_{1a}(x, \phi_{u_0}) + \dot{V}_{1b}(x, \phi_{u_0}, \tilde{x}) + \dot{V}_2(\tilde{x}) \quad (5.72)$$

où seul le terme $\dot{V}_{1b}(x, \phi_{u_0}, \tilde{x})$ contient les variables des deux sous-systèmes (5.56) et (5.59).

Considérons le terme $\dot{V}_{1a}(x, \phi_{u_0})$, si $\dot{V}_{1a}(x, \phi_{u_0}) < 0$ dans un ensemble compact contenant l'origine, nous pouvons toujours trouver un scalaire ρ tel que dans cet ensemble une borne supérieure de $\dot{V}_{1a}$ est donnée par

$$\dot{V}_{1a} \leq -\rho \left\| \begin{bmatrix} x \\ \phi_{u_0} \end{bmatrix} \right\|^2 = -\rho \|x\|^2 - \rho \|\phi_{u_0}\|^2 \quad (5.73)$$

La suite de la démonstration consiste à prouver que une condition suffisante pour que $\dot{V}(x, \tilde{x}) < 0$ dans $\mathcal{R}(P_1, P_l, v)$ est que $\dot{V}_{1a}(x, \phi_{u_0}) < 0$, ou bien, que (5.73) soit satisfaite dans $\mathcal{R}(P_1, P_l, v)$.

Le terme $\dot{V}_{1b}(x, \phi_{u_0}, \tilde{x})$ peut être borné comme

$$\dot{V}_{1b} \leq \eta \left\| \begin{bmatrix} x \\ \phi_{u_0} \end{bmatrix} \right\|^2 + \eta^{-1} \|M_1 \tilde{x} + M_2(e \otimes e - (e \otimes x + x \otimes e))\|^2$$

où η est un scalaire satisfaisant $\eta > 0$, la matrice M_1 multipliant les termes linéaires et la matrice M_2 les termes quadratiques sont données respectivement par

$$M_1 = \begin{bmatrix} P_1 B \\ -T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_c C - F_a & C_c \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

et

$$M_2 = \begin{bmatrix} P_1 B \\ -T \end{bmatrix} (A_2 + F_{a2}) \quad (5.75)$$

Avec la relation $\|a + b\|^2 \leq 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$, nous avons que

$$\dot{V}_{1b} \leq \eta \left\| \begin{bmatrix} x \\ \phi_{u_0} \end{bmatrix} \right\|^2 + 2\eta^{-1} (\|M_1\|^2 \|\tilde{x}\|^2 + \|M_2\|^2 \|e \otimes e - (e \otimes x + x \otimes e)\|^2)$$

Selon le Lemme 5.1, il existe un scalaire $\alpha_1 > 0$ tel que

$$\|e \otimes e - (e \otimes x + x \otimes e)\|^2 \leq 2(1 + 2\alpha_1^{-1}) \|e\|^4 + 4\alpha_1 \|x\|^4$$

Alors nous avons la borne supérieure pour le terme $\dot{V}_{1b}$:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1b} &\leq \eta \left\| \begin{bmatrix} x \\ \phi_{u_0} \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &\quad + 2\eta^{-1} \left(\|M_1\|^2 \|\tilde{x}\|^2 + \|M_2\|^2 \left(2(1 + 2\alpha_1^{-1}) \|e\|^4 + 4\alpha_1 \|x\|^4 \right) \right) \\ &\leq \eta \|x\|^2 + \eta \|\phi_{u_0}\|^2 \\ &\quad + 2\eta^{-1} \left(\|M_1\|^2 \|\tilde{x}\|^2 + \|M_2\|^2 \left(2(1 + 2\alpha_1^{-1}) \|\tilde{x}\|^4 + 4\alpha_1 \|x\|^4 \right) \right) \end{aligned} \quad (5.76)$$

où nous avons utilisé la relation $\|e\|^2 \leq \|\tilde{x}\|^2$.

Comme la matrice $\tilde{A}$ est Hurwitz, il existe une matrice $P_l = P_l' > 0$ et une matrice $R_l = R_l' > 0$ telles que

$$\tilde{A}'P_l + P_l\tilde{A} = -R_l$$

et nous pouvons choisir $P_2 = \mathbf{v}P_l$ telle que

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\tilde{x}) &= -\mathbf{v}\tilde{x}'R_l\tilde{x} - 2\mathbf{v}^2\tilde{x}'P_l\tilde{x}\tilde{x}'R_l\tilde{x} \\ &\leq -\mathbf{v}\lambda_{\min}(R_l)\|\tilde{x}\|^2 - 2\mathbf{v}^2\lambda_{\min}(R_l)\lambda_{\min}(P_l)\|\tilde{x}\|^4 \end{aligned} \quad (5.77)$$

Ainsi, avec les majorations (5.73), (5.76) et (5.77) des termes de (5.72), nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \tilde{x}) &\leq \dot{V}_{1a}(x, \phi_{u_0}) + \dot{V}_{1b}(x, \phi_{u_0}, \tilde{x}) + \dot{V}_2(\tilde{x}) \\ &\leq -(\rho - \eta)\|\phi_{u_0}\|^2 - (\rho - \eta - 8\eta^{-1}\|M_2\|^2\alpha_1\|x\|^2)\|x\|^2 \\ &\quad - (\mathbf{v}\lambda_{\min}(R_l) - 2\eta^{-1}\|M_1\|^2)\|\tilde{x}\|^2 \\ &\quad - \left(2\mathbf{v}^2\lambda_{\min}(R_l)\lambda_{\min}(P_l) - 4\eta^{-1}\|M_2\|^2(1 + 2\alpha_1^{-1})\right)\|\tilde{x}\|^4 \end{aligned} \quad (5.78)$$

Par la suite nous montrons que si l'inégalité (5.73) est satisfaite nous pouvons calculer $\mathbf{v}$ garantissant que $\dot{V}(x, \tilde{x}) < 0$ dans $\mathcal{R}(P_1, P_l, \mathbf{v})$.

On suppose que

$$\gamma = \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}(P_1, P_l, \mathbf{v})$$

alors on a

$$\lambda_{\min}(P_1)\|x\|^2 + \lambda_{\min}(\mathbf{v}P_l)\|\tilde{x}\|^2 + \lambda_{\min}(\mathbf{v}P_l)^2\|\tilde{x}\|^4 \leq 1$$

ou bien

$$\|x\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(P_1)} - \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{v}P_l)}{\lambda_{\min}(P_1)}\|\tilde{x}\|^2 - \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{v}P_l)^2}{\lambda_{\min}(P_1)}\|\tilde{x}\|^4 \quad (5.79)$$

Une condition nécessaire pour que le terme $-(\rho - \eta - 8\eta^{-1}\|M_2\|^2\alpha_1\|x\|^2)\|x\|^2$ de (5.78) soit négatif est que

$$-\rho + \eta + 8\eta^{-1}\|M_2\|^2\alpha_1\|x\|^2 < 0 \quad (5.80)$$

soit vérifiée. En introduisant dans (5.80) la majoration de $\|x\|^2$ donnée par (5.79) et valable dans $\mathcal{R}(P_1, P_l, \mathbf{v})$, nous avons que si

$$\begin{aligned}
& -\rho + \eta + 8\eta^{-1}\|M_2\|^2\alpha_1 \left(\frac{1}{\lambda_{\min}(P_1)} \right) \\
& \quad - 8\eta^{-1}\|M_2\|^2\alpha_1 \left(\frac{\lambda_{\min}(\mathbf{v}P_l)}{\lambda_{\min}(P_1)}\|\tilde{x}\|^2 + \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{v}P_l)^2}{\lambda_{\min}(P_1)}\|\tilde{x}\|^4 \right) < 0
\end{aligned}$$

est satisfaite alors (5.80) sera aussi vérifiée. Dans l'expression ci-dessus nous avons

$$-8\eta^{-1}\|M_2\|^2\alpha_1 \left(\frac{\lambda_{\min}(\mathbf{v}P_l)}{\lambda_{\min}(P_1)}\|\tilde{x}\|^2 + \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{v}P_l)^2}{\lambda_{\min}(P_1)}\|\tilde{x}\|^4 \right) \leq 0 \quad (5.81)$$

satisfaite pour tout $\|\tilde{x}\|$ car $P_l > 0$, $\eta > 0$, $\alpha_1 > 0$ et $\mathbf{v} > 0$. Quelle que soit la valeur de ρ il est possible de calculer η et α_1 tels que

$$\eta + \frac{8\eta^{-1}\|M_2\|^2}{\lambda_{\min}(P_1)}\alpha_1 < \rho$$

et donc tels que (5.80) est satisfaite.

Les scalaires α_1 et η étant connus, nous pouvons calculer $\mathbf{v}$ pour satisfaire

$$(\mathbf{v}\lambda_{\min}(R_l) - 2\eta^{-1}\|M_1\|^2) > 0$$

$$\left(2\mathbf{v}^2\lambda_{\min}(R_l)\lambda_{\min}(P_l) - 4\eta^{-1}\|M_2\|^2(1 + 2\alpha_1^{-1}) \right) > 0$$

et ainsi garantir la négativité des termes liés à $\tilde{x}$ dans (5.78).

Alors, afin de vérifier $\dot{V}(x, \tilde{x}) < 0$, $\forall \gamma \in \mathcal{R}(P_1, P_l, \mathbf{v})$, il suffit de trouver des matrices P_1 et T qui vérifient $\dot{V}_{1a} \leq -\rho\|x\|^2 - \rho\|\phi_{u_0}\|^2$ où ρ est un scalaire positif. Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un tel ρ est que $\dot{V}_{1a} < 0$. En utilisant (5.71) nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} x' & \phi'_{u_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1(A + BF_a) + (A_B F_a)'P_1 & P_1 H' T + P_1 B \\ T H P_1 + B' P_1 & -2T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \phi_{u_0} \end{bmatrix} \\
& \quad + \begin{bmatrix} x' & \phi'_{u_0} \end{bmatrix} G(x \otimes x) + (x' \otimes x') G' \begin{bmatrix} x \\ \phi_{u_0} \end{bmatrix} < 0
\end{aligned}$$

où

$$G = \begin{bmatrix} P_1 B(A_2 + F_{a2}) \\ -T F_{a2} \end{bmatrix}$$

L'inégalité suivante est valable dans $\mathcal{E}(P_1)$:

$$\begin{bmatrix} x' & \phi'_{u_0} \end{bmatrix} G(x \otimes x) + (x' \otimes x') G' \begin{bmatrix} x \\ \phi_{u_0} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x' & \phi'_{u_0} \end{bmatrix} G(M_r^{-1} \otimes P_1^{-1}) G' \begin{bmatrix} x \\ \phi_{u_0} \end{bmatrix} + x' M_r x$$

Par conséquent, si l'inégalité suivante est vérifiée, $\dot{V}(x, \tilde{x}) < 0$ est vérifiée dans $\mathcal{E}(P_1)$ et donc dans $\mathcal{R}(P_1, P_l, v)$:

$$\begin{bmatrix} (A + BF_a)' P_1 + P_1 (A + BF_a) + M_r & P_1 (B + H' T) - F_a' T & P_1 B (A_2 + F_{a2}) \\ (B' + TH) P_1 - T F_a & -2T & -T F_{a2} \\ (A_2 + F_{a2})' B' P_1 & -F_{a2}' T & -(M_r \otimes P_1) \end{bmatrix} < 0$$

Avec la transformation de congruence $\text{diag}(Q, S_1, (I_n \otimes Q))$ où $Q = P_1^{-1}$ et $S_1 = T^{-1}$ et le changement de variables $L_a = F_a Q$ et $L_{a2} = F_{a2} (I_n \otimes Q)$, nous avons

$$\begin{bmatrix} QA' + AQ + BL_a + L_a' B' & BS_1 - L_a' + H' & B(A_2(I_n \otimes Q) + L_{a2}) & QM_r \\ S_1 B' - L_a + H & -2S_1 & -L_{a2} & 0 \\ ((I_n \otimes Q)A_2' + L_{a2}') B' & -L_{a2}' & -(M_r \otimes Q) & 0 \\ M_r Q & 0 & 0 & -M_r \end{bmatrix} < 0$$

Finalement, rappelons que l'inégalité ci-dessus garantit que $\dot{V}_{1a} < 0$ dans $\mathcal{E}(P_1)$ et que ceci implique que nous pouvons trouver η , α_1 et v tels que pour tout $\gamma \in \mathcal{R}(P_1, P_l, v)$ nous avons $\dot{V}(x, \tilde{x}) < 0$, par conséquent toute trajectoire dans $\mathcal{R}(P_1, P_l, v)$ converge asymptotiquement à l'origine.

□

Remarque 5.4. Avec $F_{a2} = -A_2$ nous obtenons $\|M_2\| = 0$, et le terme de degré 4 dans la variable $\tilde{x}$ de (5.78) ne dépend que du terme de degré 4 de (5.65) et sera donc toujours négatif. Alors pour le cas particulier, $F_{a2} = -A_2$, il est possible d'obtenir une ERA définie par la fonction quadratique $V(x, \tilde{x}) = x' P_1 x + \tilde{x}' P_2 \tilde{x}$.

Corollaire 5.3. Supposons qu'il existe une matrice $Q \in \mathfrak{R}^n$, $Q = Q' > 0$, une matrice diagonale $S_1 \in \mathfrak{R}^m$, $S_1 > 0$, une matrice $H \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ et une matrice $M_r \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $M_r = M_r' > 0$ telles que les inégalités (5.60) et (5.61) soient satisfaites avec $L_{a2} = -A_2(I_n \otimes Q)$. Alors le correcteur anti-windup (5.51) défini par $F_a = L_a Q^{-1}$ et $F_{a2} = -A_2$ garantit que l'ensemble

$$\mathcal{R}(Q, P_l, v) = \left\{ \gamma \in \mathfrak{R}^{2n+n_c}; \gamma \begin{bmatrix} Q^{-1} & 0_{n \times n+n_c} \\ 0_{n+n_c \times n} & v^* P_l \end{bmatrix} \gamma \leq 1 \right\}$$

est une estimation de la région d'attraction de l'origine du système (5.58) avec

$$v^* = \frac{2\|M_1\|^2}{\lambda_{\min}(R_l) \rho} \quad (5.82)$$

et M_1 est donnée par (5.74), R_l satisfait (5.64) et ρ satisfait (5.73).

Démonstration. Considérons la fonction quadratique suivante comme une fonction de Lyapunov candidate

$$V(x, e, x_c) = x'Q^{-1}x + \tilde{x}'vP_l\tilde{x} \quad (5.83)$$

où P_l satisfait (5.64). Dans ce cas la borne supérieure de $\dot{V}(x, e, x_c)$ dans l'ensemble $\mathcal{R}(Q, P_l, v)$, équivalente à (5.78), s'exprime comme

$$\dot{V}(x, e, x_c) \leq -(\rho - \eta)\|\phi_{u_0}\|^2 - (\rho - \eta)\|x\|^2 - (v\lambda_{\min}(R_l) - 2\eta^{-1}\|M_1\|^2)\|\tilde{x}\|^2 \quad (5.84)$$

alors pour obtenir $\dot{V}(x, e, x_c) < 0$ nous devons avoir

$$\rho < \eta \text{ et } v \geq \frac{2\|M_1\|^2}{\eta\lambda_{\min}(R_l)}$$

ou bien

$$v \geq \frac{2\|M_1\|^2}{\rho\lambda_{\min}(R_l)}$$

Si la relation (5.60) est satisfaite alors nous pouvons calculer ρ et donc v tel que $\dot{V}(x, e, x_c) < 0$ dans $\mathcal{R}(Q, P_l, v)$.

□

Remarque 5.5. Étant données les matrices R_l et P_l , la valeur v^* de (5.82) correspond à la plus petite valeur de v telle que $\mathcal{R}(Q, P_l, v)$ soit une ERA.

Notons que v^* est inversement proportionnel à ρ . Comme ρ mesure d'une certaine façon la vitesse de convergence du sous-système (5.56), pour une réponse plus rapide de ce sous-système nous pouvons obtenir des valeurs plus petites pour v^* , ce qui implique une ERA plus grande dans l'espace défini par $\tilde{x} = \begin{bmatrix} e' & x_c' \end{bmatrix}'$.

La matrice M_1 établit l'influence des gains C_c et D_c du contrôleur sur v^* et ainsi vis-à-vis de la taille de l'ensemble $\mathcal{R}(Q, P_l, v)$.

Les ensembles sous la forme $\mathcal{R}(Q, P_l, v)$, présentés dans la proposition 5.2 et dans le corollaire 5.3, sont une estimation de la RA du système complet. L'obtention de ces régions, simultanément au calcul des lois de commande, garantit qu'il existe une région dans laquelle nous avons une convergence garantie à l'origine. De meilleures estimations pourraient certainement être obtenues avec les résultats de la section précédente.

5.4 Exemples numériques

Dans cette section nous présentons des résultats numériques pour l'analyse de stabilité de systèmes polynomiaux et saturants (section 5.2) et pour la synthèse de correcteurs anti-windup (section 5.3).

5.4.1 Analyse de stabilité des systèmes saturants

Nous utilisons les conditions de la proposition 5.1 pour trouver une ERA de l'origine du système (5.1). Notons qu'une inégalité équivalente à (5.29) peut être obtenue avec la transformation de congruence définie par la matrice $\text{diag} \{I_{(\sigma_t(n,r_s)+\sigma_t(n,r_s-1)\sigma_t(n,v))}, (I_{g_\phi} \otimes T^{-1})\}$. Alors en définissant $S = T^{-1}$ nous obtenons

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_{V_v} + \bar{M}_{r_s} + G_s N_1(n, r_s) + N_1(n, r_s)' G_s' + C(n, r_s) & G_s N_2(n, r_s, v) \\ N_2(n, r_s, v)' G_s' & -(M_{r_s} \otimes P_v) \\ (I_{\sigma_t(n, g_\phi)} \otimes S) \bar{M}_{B_v}' - (M_{\phi_{u_0}}' \otimes I_m) \bar{M}_K' + (M_{\phi_{u_0}}' \otimes I_m) \bar{M}_W' & 0_{m(1+\sigma_t(n, g_\phi)) \times \sigma_t(n, v) \sigma_t(n, r_s-1)} \\ \bar{M}_{B_v} (I_{\sigma_t(n, g_\phi)} \otimes S) - \bar{M}_K (M_{\phi_{u_0}} \otimes I_m) + \bar{M}_W (M_{\phi_{u_0}} \otimes I_m) & \\ 0_{\sigma_t(n, v) \sigma_t(n, r_s-1) \times m(1+\sigma_t(n, g_\phi))} & \\ -2(M_{\phi_{u_0}} \otimes S) & \end{bmatrix} < 0 \quad (5.85)$$

Dans cette inégalité nous avons des produits entre les éléments des matrices P_v et M_{r_s} , entre P_v et S et entre $M_{\phi_{u_0}}$ et S . Nous avons également dans (5.35) le produit entre P_v et M_{r_i} . Alors afin de trouver une ERA à partir de la formulation d'un problème soumis à des contraintes LMI, nous pouvons considérer qu'une ERA du système non-saturant est donnée par une région définie à partir d'une fonction de Lyapunov, et donc supposer connue une fonction de Lyapunov définie par une matrice P_{v0} et chercher la plus grande courbe de niveau de cette fonction définissant une ERA pour le système saturant.

Nous avons donc un problème de recherche unidimensionnelle d'un scalaire positif qui est défini comme :

$$\min \alpha \text{ soumis à (5.85), (5.35) et } P_v = \alpha P_{v0} \quad (5.86)$$

Pour les cas du calcul des ERA avec une P_v variable nous utilisons des recherches alternées.

Exemple 1 Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= (x_1 + 0.5x_2)x_2 + \text{sat}_{u_0}(u(x)) \end{cases} \quad (5.87)$$

et la loi de commande polynomiale

$$u(x) = -(x_1 + 0.5x_2)x_2 - x_1 - 2x_2 \quad (5.88)$$

qui, en absence de saturation, est une loi de commande qui définit une dynamique linéaire pour la boucle fermée. La stabilité du système peut être vérifiée avec la fonction de Lyapunov quadratique $V(x) = x' P_0 x$ avec

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Une fois la saturation active, l'action linéarisante de (5.88) est perdue. Dans ce cas quelques trajectoires peuvent ne plus présenter une convergence à l'origine et la stabilité de ce point d'équilibre n'est plus globale. Nous nous intéressons donc à trouver la courbe de niveau $\{x \in \mathbb{R}^n; V(x) = c_{u_0}\}$ qui correspond à la frontière d'une ERA de l'origine du système saturant pour différents niveaux de saturation. Pour les valeurs $u_0 = 1$, $u_0 = 0.5$ et $u_0 = 0.1$ on obtient respectivement les ERA définies par $c_1 = 2.5$, $c_{0.5} = 1.1$ et $c_{0.1} = 0.116$. La figure 5.2 présente pour les trois seuils de saturation une ERA ellipsoïdale ainsi que des trajectoires du système en boucle fermée.

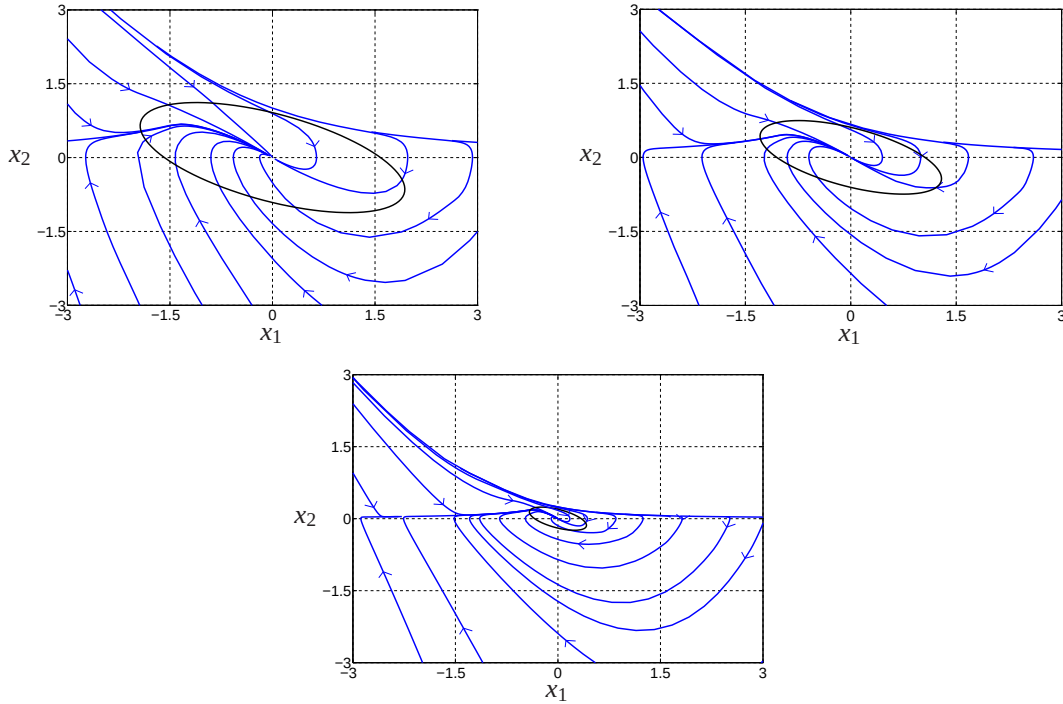


Figure 5.2 – ERAs ellipsoïdales pour le système (5.87) avec respectivement $u_0 = 1$, $u_0 = 0.5$ et $u_0 = 0.1$.

Notons que les ellipsoïdes sont proches de la frontière de la RA mais sont des estimations petites par rapport à la vraie région d'attraction. Une des raisons réside vraisemblablement dans le fait que ce sont des ensembles symétriques.

Les courbes en rouge dans la figure 5.3 correspondent à la frontière de l'ensemble $S_0(u_0)$ pour le cas $u_0 = 1$. Notons qu'il s'agit d'un ensemble qui n'est pas symétrique par rapport à l'origine. Cette propriété peut favoriser des estimations données par

des régions également non-symétriques surtout dans les cas de fonctions de Lyapunov polynomiales non-quadratiques.

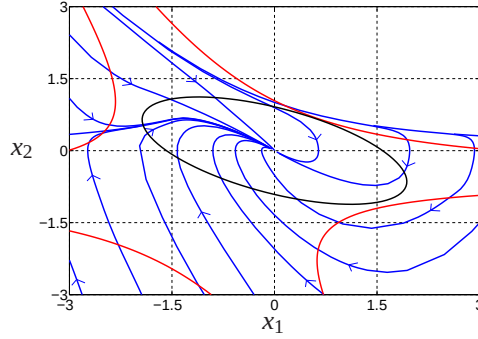


Figure 5.3 – Les courbes rouges indiquent la frontière de l'ensemble $S_0(u_0)$.

Exemple 2 Reprenons l'exemple 1 du chapitre 3, maintenant en considérant l'entrée saturante nous avons le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_1x_2 + x_2 \text{sat}_{u_0}(u(x)) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 2x_2 + x_1^2 + x_1^2x_2 + \text{sat}_{u_0}(u(x)) \end{cases} \quad (5.89)$$

et les lois linéaire et quadratique données respectivement par

$$u_\ell(x) = -1.4141x_1 - 4.2902x_2 \quad (5.90)$$

$$u_q(x) = -0.7319x_1 - 4.4623x_2 - 1.0012x_1^2 - 0.2975x_1x_2 + 0.3968x_2^2 \quad (5.91)$$

Nous considérons le seuil de saturation $u_0 = 1$. Avec les fonctions de Lyapunov obtenues dans le chapitre précédent nous cherchons les courbes de niveau qui correspondent à la frontière d'une ERA du système saturant. Nous obtenons respectivement pour $u_\ell(x)$ et pour $u_q(x)$ les valeurs $c_l = 0.085$ et $c_q = 0.067$, et ces ensembles ainsi que quelques trajectoires sont présentés dans la figure 5.4.

Ces valeurs décevantes pour les courbes de niveau peuvent indiquer d'une part que la région est effectivement réduite par rapport à la RA du système bouclé à cause de la saturation, ce qui est vrai pour cet exemple, et d'autre part qu'une ERA donnée par une autre fonction de Lyapunov peut s'avérer plus satisfaisante, étant donné que les trajectoires qui convergent vers l'origine sont affectées par la saturation de l'entrée et que les ERA sont calculées avec des fonctions quadratiques saturant. Ces ERA qui sont présentées dans la figure 5.5, respectivement pour la loi de commande linéaire et pour la loi de commande quadratique.

Tandis que les estimations données par les fonctions de degré 4 n'étaient pas satisfaisantes, avec les fonctions quadratiques nous obtenons des fonctions de Lyapunov

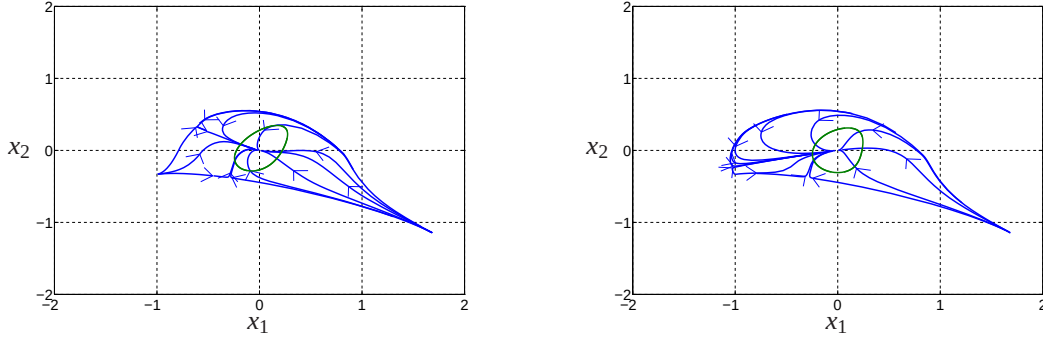


Figure 5.4 – Trajectoires de la boucle fermée de (5.89) avec l'entrée saturante $u_0 = 1$ pour deux lois de commande données respectivement par (5.90) et (5.91), et les ERA avec les fonctions de degré 4 obtenues dans le chapitre précédent.

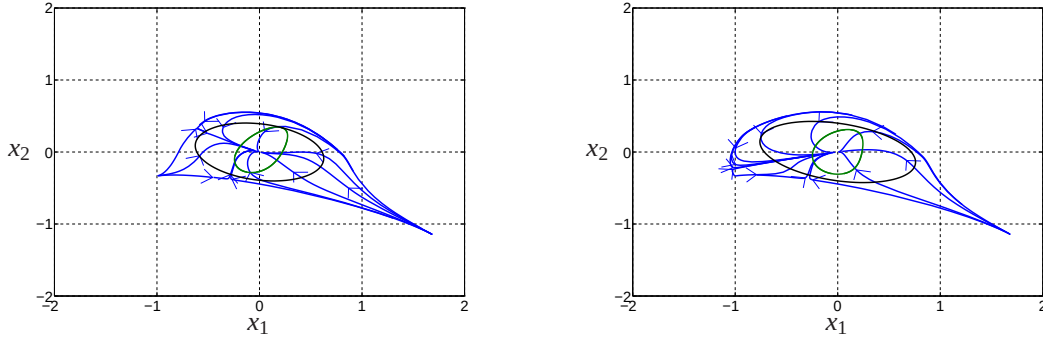


Figure 5.5 – ERAs ellipsoïdales pour le système saturant avec respectivement les lois linéaire et quadratique.

qui sont plus adéquates pour le système saturé. La figure 5.6 montre les estimations pour les lois linéaire et quadratique. Nous pouvons voir que l'ellipsoïde rouge, correspondant à la loi quadratique contient l'estimation de la loi linéaire et des points à l'extérieur de la RA de l'origine avec la loi linéaire.

Exemple 3 Considérons l'exemple 3 du chapitre précédent pour lequel nous avons proposé des lois de commande polynomiales de différents degrés. Rappelons que pour les lois de degré $g_u = 2$ et $g_u = 3$ les ERA ellipsoïdales étaient comparables, c'est-à-dire avec des volumes similaires sans qu'une des estimations contienne l'autre. Par ailleurs, la loi de commande de degré $g_u = 2$ donnée par (4.77) présentait des gains linéaires et quadratiques plus importants que ceux de la loi avec $g_u = 3$ donnée par (4.78).

Si l'on considère que les entrées peuvent saturer, une réduction de la RA et par conséquent de ses estimations sont attendues. Nous avons donc considéré dans un

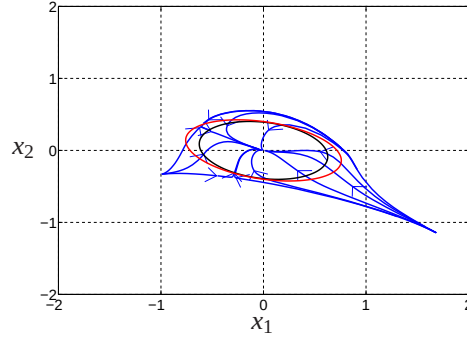


Figure 5.6 – Les estimations ellipsoïdales du système saturant avec les lois de commande linéaire et quadratique et des trajectoires avec la loi de commande linéaire.

premier temps que seule une des entrées sature, et par la suite que les deux peuvent saturer. Pour chacun des cas nous avons calculé la courbe de niveau de la fonction quadratique obtenue dans le chapitre précédent qui donne une ERA pour le système saturant. Nous avons alors des estimations sous la forme

$$\mathcal{E}(P) = \{x \in \mathbb{R}^3; x'Px \leq c^*\} \quad (5.92)$$

pour les lois de commande (4.77) et (4.78) et différents seuils de saturation. Bien entendu, pour le système non-saturant nous avons $c^* = 1$. Nous pouvons donc mesurer la dégradation de la ERA via la valeur de c^* . Nous obtenons les valeurs présentés dans le tableau 5.1

u_0	$u_{0(1)} = 3$	$u_{0(2)} = 3$	$u_{0(1)} = 3$ et $u_{0(2)} = 3$
$g_u = 2$ ($u(x)$ de (4.77))	0.0515	0.6250	0.0515
$g_u = 3$ ($u(x)$ de (4.78))	0.2631	0.3571	0.2439

Tableau 5.1 – Valeurs de c^* définissant une ERA sous la forme (5.92) pour différents seuils de saturation et différentes lois de commande.

Notons que lorsque l'entrée $u_{(1)}$ peut saturer la dégradation de la ERA avec la loi de commande (4.77) est beaucoup plus importante qu'avec la loi de commande donnée par (4.78). L'influence d'une saturation dans l'entrée $u_{(2)}$ est moins importante avec (4.77) et reste comparable avec celle obtenue pour (4.78). Ceci peut indiquer que (4.78) est plus appropriée lorsque les entrées peuvent saturer.

5.4.2 Synthèse des correcteurs anti-windup

Exemple 4 Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_q x_1 x_2 + \text{sat}_{u_0}(u(x)) \\ y &= x_1 \end{cases} \quad (5.93)$$

qui est sous la forme de (5.48), avec $u_0 = 0.5$. Nous supposons connu un contrôleur stabilisant donné par

$$\begin{cases} \dot{x}_c &= -2x_c + y \\ v &= 0.9x_c - 0.6y \\ u &= -a_q x_1 x_2 + v \end{cases} \quad (5.94)$$

En utilisant la proposition 5.2 nous calculons donc un anti-windup sous la forme (5.51) pour introduire les termes θ_1 et θ_2 dans le contrôleur comme dans (5.49). Nous considérons différents valeurs pour le terme quadratique afin de vérifier son influence sur les gains du compensateur anti-windup.

Nous avons donc calculé les gains F_a et F_{a2} pour $a_q = 1$ et $a_q = 5$. :

	$a_q = 1$	$a_q = 5$
F_a	$\begin{bmatrix} -4.6028 & -6.5560 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -6.2477 & -9.2028 \end{bmatrix}$
F_{a2}	$\begin{bmatrix} 0 & -0.5 & -0.5 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -2.5 & -2.5 & 0 \end{bmatrix}$

Tableau 5.2 – Gains du correcteur anti-windup (5.51) pour différents valeurs du terme quadratique a_q .

Notons que les valeurs calculés pour le gain F_{a2} sont telles que le terme quadratique est annulé dans (5.51) car nous vérifions $a_q x_{a1} x_{a2} + F_{a2}(x_a \otimes x_a) = 0$. Ce terme a pour autant une influence sur les éléments de la matrice F_a . Par la suite nous présentons des réponses temporelles pour différentes conditions initiales du système (5.93) avec $a_q = 5$. Nous considérons que les conditions initiales dans le contrôleur et dans le correcteur anti-windup sont égales à zéro. La figure 5.7 présente l'évolution temporelle de x pour la condition initiale $x_0 = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \end{bmatrix}'$, lorsque l'anti-windup est présent nous avons la trajectoire qui converge vers l'origine. Nous présentons également l'évolution temporelle de ϕ_{u_0} pour le système avec le correcteur anti-windup, notons que l'entrée sature, autrement dit ϕ_{u_0} assume des valeurs différentes de zéro.

La figure 5.8 montre que la variable x_2 du système sans anti-windup diverge pour la même condition initiale.

Même si nous n'avons pas une trajectoire qui se déstabilise, l'introduction de l'anti-windup peut améliorer la réponse de la boucle fermée. La figure 5.9 montre la réponse pour la condition initiale $x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0.31 \end{bmatrix}'$ pour les systèmes en boucle fermée avec et sans le correcteur anti-windup.

Notons que les oscillations sont éliminées avec l'introduction du correcteur. Nous soulignons que les critères employés ont tenu compte seulement de la majoration

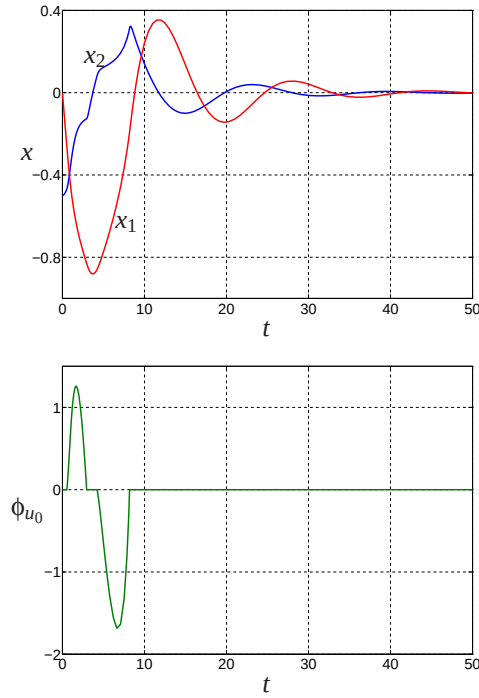


Figure 5.7 – Trajectoire à partir de la condition initiale $x_0 = [0 \ -0.5]'$.

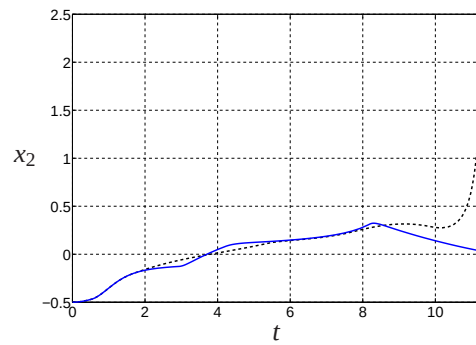


Figure 5.8 – Evolution de la variable x_2 pour le système avec (courbe solide) et sans (courbe pointillée) le correcteur anti-windup.

de la ERA dans l'espace défini par les variables du correcteur, aucun critère de performance n'a été considéré.

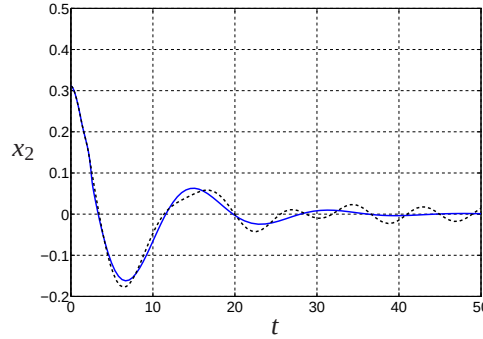


Figure 5.9 – Evolution de la variable x_2 du système avec (courbe solide) et sans (courbe pointillée) le correcteur anti-windup pour la condition initiale $x_0 = [0 \ 0.31]'$.

5.5 Conclusion

Nous avons abordé dans ce chapitre le problème de la définition des ERA de l'origine pour des systèmes polynomiaux saturants. Une condition pour la stabilité locale est formulée comme un problème de positivité de polynômes. Comme auparavant nous avons dans les inégalités matricielles des produits de variables de décision, notamment entre la fonction de Lyapunov et des coefficients d'un polynôme positif (défini par la matrice M_{r_s}). Or, si nous avons déjà obtenue une estimation de la RA pour le système non-saturant nous pouvons formuler le problème de SDP avec des LMIs en utilisant la matrice de Lyapunov qui définit la ERA du système non-saturant. En revanche, comme nous l'avons vu dans les exemples numériques, une courbe de niveau d'une fonction de Lyapunov pour le système non-saturant peut s'avérer inadéquate pour les trajectoires du systèmes saturant en ce qui concerne l'optimisation de la ERA. Le cas échéant cela donnera sûrement des ERA petites lorsqu'elles seront comparées à une estimation obtenue considérant le système saturé.

Notons également qu'une loi de commande polynomiale peut donner des régions d'attraction plus grandes pour le système saturant. Cependant, il reste à vérifier si cette augmentation de la ERA est avantageuse compte tenu des calculs nécessaires pour l'obtention d'une loi polynomiale.

Le problème de synthèse d'un correcteur anti-windup pour un système quadratique (système polynomial de degré 2), pour lequel nous considérons connue une loi de commande par inversion de la dynamique, a été également abordé. Pour calculer une loi anti-windup dynamique du même ordre que le système nous avons proposé un problème de synthèse de gains de retour d'état pour un système quadratique saturant. Le correcteur résultant garantit la stabilité des trajectoires d'une région autour de l'origine. Cette région peut alors être estimée en utilisant les conditions de la première section de ce chapitre.

Conclusion Générale

Le développement d'outils pour la résolution des problèmes de programmation semi-définie accompagné des progrès dans le cadre de l'optimisation polynomiale a rendu possible la résolution numérique des conditions de stabilité ou de synthèse pour les systèmes non-linéaires. Certes, des formulations génériques pour le problème de stabilité et de synthèse de lois de commande n'est pas envisageable pour tous les systèmes non-linéaires dans leur globalité. Néanmoins, ces divers résultats récents, nous permettent d'aborder des classes de systèmes non-linéaires, comme par exemple, les systèmes non-linéaires polynomiaux avec ou sans saturation sur l'entrée de commande.

Comme nous l'avons vu tout au long de ce manuscrit, l'étude des systèmes non-linéaires aborde la stabilité des trajectoires dans un contexte local. Les résultats basés sur l'approche Lyapunov fournissent le cadre pour la caractérisation des régions d'attraction des points d'équilibre stables du système en boucle fermée, ou au moins de leur estimation.

Pourtant cette analyse locale pose des difficultés pour la formulation des méthodes numériques et une des solutions souvent adoptée est de fixer un ensemble dans l'espace où il serait intéressant d'avoir une garantie de stabilité, et ensuite de trouver la plus grande estimation de la région d'attraction à l'intérieur de cet ensemble. Afin d'éviter l'imposition d'une telle région nous avons proposé dans [83] une méthode qui considère cet ensemble, à l'intérieur duquel nous aurons des ERA, comme une des variables du problème. La méthode présentée dans [82] s'applique à des systèmes rationnels et permet que l'ERA soit obtenue sans besoin de définir cet ensemble extérieur. Une comparaison entre les méthodes d'analyse présentées ici et des méthodes qui utilisent la définition des ensembles extérieurs est présentée dans [84].

Les résultats présentés dans ce manuscrit ont ciblé la classe des systèmes polynomiaux saturants. Nous avons formulé des méthodes numériques pour l'analyse en stabilité locale et pour la synthèse de lois de commande polynomiales. Les conditions de stabilité sont basées sur la vérification d'inégalités polynomiales qui, si elles sont satisfaites, garantissent la contractivité et l'invariance d'un ensemble polynomial et donc, la stabilité asymptotique à l'intérieur de cet ensemble. Bien que la formulation de ces résultats peut être obtenue avec la $\mathcal{S}$ -procédure généralisée [42], nous

les avons construits à partir d'une paramétrisation des points d'une courbe de niveau d'une fonction de Lyapunov polynomiale positive. Les fonctions polynomiales s'avèrent bien adaptées pour approximer des ensembles non-convexes, et donc des régions d'attraction des systèmes polynomiaux.

Le cas d'analyse pour des systèmes saturants a été traité en utilisant une condition de secteur que nous avons généralisée pour des fonctions polynomiales. Ceci a permis d'estimer la région d'attraction des systèmes saturants avec des fonctions polynomiales, il s'agit de conditions qui autorisent la saturation de l'entrée.

Nous avons également obtenu un résultat permettant la synthèse de lois de commande polynomiales de retour d'état. Le changement de coordonnées linéaire qui élimine le produit entre les gains du contrôleur et la matrice d'une fonction de Lyapunov quadratique est rendu possible à partir d'une représentation de polynômes avec des vecteurs non-homogènes.

La synthèse pour des systèmes saturants a été présentée dans le cadre du calcul d'un correcteur anti-windup pour un système quadratique (système polynomial de degré 2).

Les problèmes d'analyse et de synthèse sont formulés comme des problèmes de programmation semi-définie. La plupart des problèmes d'optimisation se présentent avec des contraintes BMI. Bien que ces inégalités présentent une structure particulière, en général elles ne définissent pas des ensembles convexes dans les variables de décision. En effet, la résolution des problèmes d'optimisation est basée sur des recherches alternées.

Nous soulignons également que les résultats sont valables pour des systèmes polynomiaux ayant une partie linéaire stable ou stabilisable. Bien évidemment il ne s'agit pas d'une condition nécessaire pour qu'un point d'équilibre isolé soit asymptotiquement stable. Il est donc souhaitable d'obtenir des extensions des résultats pour étudier des systèmes polynomiaux qui ne satisfont pas cette propriété.

Comme les problèmes d'optimisation formulés sont basés sur des mesures indirectes du volume des régions polynomiales, à savoir la trace de la matrice de Lyapunov et une courbe de niveau d'un ensemble intérieur, il n'est pas possible de garantir que les résultats seront optimaux par rapport au volume que l'on peut obtenir avec une fonction de Lyapunov d'un degré donné.

Un autre inconvénient des résultats présentés, et d'ailleurs de tout analyse concernant la positivité de polynômes, est la croissance exponentielle des dimensions des inégalités avec la croissance de l'ordre et du degré du système.

Certes, les limitations des résultats indiquent plusieurs directions pour des travaux futurs. Quelques extensions nous semblent immédiates, à savoir, la formulation d'une méthode pour la synthèse de lois de commande polynomiales pour des systèmes polynomiaux de degré arbitraire avec entrée saturante, la formulation d'une méthode de synthèse en utilisant des fonctions de Lyapunov polynomiales et l'introduction des critères de performance pour les conditions d'analyse et de synthèse [69], [65], [92].

L'apport des termes polynomiaux dans une loi de commande sera plus clair si nous calculons des lois polynomiales en considérant la saturation. Des conditions de synthèse saturante sont intéressante notamment dans le contexte du calcul de correcteurs anti-windup.

Le fait qu'une fonction quadratique peut ne pas certifier que la stabilité d'un système non-linéaire est globale est à l'origine de l'intérêt par des fonctions de Lyapunov polynomiales pour la synthèse. Ainsi avec des fonctions de Lyapunov polynomiales nous espérons être en mesure d'obtenir des lois de commande polynomiales globalement stabilisantes.

Même si cela n'as pas été mentionnée dans le manuscrit, l'analyse en robuste semble être une autre extension naturelle des conditions présentés [10]. Un possible apport pourrait être alors la description de régions polynomiales, et donc non convexes, dans l'espace des paramètres.

Comme nous l'avons souligné précédemment, une extension envisageable est l'analyse des systèmes qui n'ont pas une partie linéaire stable ou stabilisable ainsi que la prise en compte de non-linéarités obéissant à des conditions du secteur mais différentes de la saturation. Dans ce cadre des conditions de stabilité asymptotique devront être remplacées par des conditions de stabilité. Des adaptations des méthodes pour des systèmes non-polynomiaux sont aussi souhaitables, quelques directions pour ceci sont par exemple indiquées par [12], [62].

Annexe A

Quelques éléments de calcul tensoriel

A.1 Produits de Kronecker

Définition A.1. Soient les matrices $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{p \times q}$. Le produit de Kronecker (ou produit tensoriel) de A par B est défini comme la matrice

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{mp \times nq} \quad (\text{A.1})$$

Les propriétés suivantes en découlent

Propriété A.1. Soient les matrices $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{r \times s}$, $C \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ et $D \in \mathfrak{R}^{s \times t}$. Alors

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD \in \mathfrak{R}^{mr \times pt} \quad (\text{A.2})$$

Propriété A.2. Pour toute matrice A et B , $(A \otimes B)' = A' \otimes B'$

Propriété A.3. Si A et B sont invertibles, $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$

Propriété A.4. Soient les valeurs propres de la matrice $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ λ_i , $i = 1, \dots, n$ et les valeurs propres de la matrice $B \in \mathfrak{R}^{m \times m}$, μ_j , $j = 1, \dots, m$. Les nm valeurs propres de $A \otimes B$ sont données par $\lambda_i \mu_j$, $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, m$

Propriété A.5. Si $a \in \mathfrak{R}$ et $b \in \mathfrak{R}$ alors $ab = a \otimes b$.

Annexe B

Matrices utiles

Cette annexe présente des matrices utilisées tout le long du texte, notamment pour aider à manipuler des expressions polynomiales et pour la description des systèmes polynomiaux.

B.1 Calcul des matrices

Calcul des matrices $\mathbb{I}_i$

Le vecteur x^i , présenté dans le chapitre 1 est ordonné de sorte que seulement les σ_{i-1} premiers termes présentent la composante x_1 . Cet ordre nous permet d'écrire ces termes comme $x_1 x^{i-1}$. Les autres termes contiennent des monômes de degré i avec les composantes x_r , $r = 2, \dots, n$, c'est-à-dire, les éléments qui complètent le vecteur x^i peuvent être obtenus avec un vecteur x d'ordre $n - 1$ (autrement dit, le vecteur est considéré sans la composante x_1). Cette structure indique que la matrice $\mathbb{I}_i$ peut être obtenue de façon récursive. Pour un système avec n états la matrice $\mathbb{I}_i$ s'écrit

$$\mathbb{I}_i(n) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_{(i-1)}(n) & 0_{n\sigma_{i-2} \times \sigma_i - \sigma_{i-1}} \\ \hline \mathbb{I}_z & \mathbb{I}_{i0}(n) \end{array} \right] \quad (\text{B.1})$$

$\mathbb{I}_{i0}(n)$ présente les mêmes termes que $\mathbb{I}_i(n - 1)$ qui pourtant possède des lignes de zéros au début de chaque bloc de $n - 1$ lignes.

$\mathbb{I}_z$ est donnée par

$$\mathbb{I}_z = \left[\begin{array}{cc} 0_{n(\sigma_{i-1} - \sigma_{i-2}) \times \sigma_{i-2}} & I_{\sigma_{i-1} - \sigma_{i-2}} \otimes e_1 \end{array} \right] \quad (\text{B.2})$$

Les pas suivants peuvent donc être suivis pour calculer $\mathbb{I}_i$:

1. Si $n = 1$, $\mathbb{I}_i(n) = 1$;
2. Si $i = 1$, $\mathbb{I}_i(n) = I_n$;
3. Sinon calculer $\mathbb{I}_i(n)$ comme dans (B.1).

Pour illustrer la procédure décrite ci-dessus, voyons la définition de $\mathbb{I}_4$ pour $n = 2$

$$\mathbb{I}_4 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

La relation suivante est alors vérifiée

$$\begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_1^2 x_2 \\ x_1 x_2^2 \\ x_2^3 \end{bmatrix} \otimes x = \mathbb{I}_4 \begin{bmatrix} x_1^4 \\ x_1^3 x_2 \\ x_1^2 x_2^2 \\ x_1 x_2^3 \\ x_2^4 \end{bmatrix}$$

Calcul de la matrice $M_{fg}(n)$

La matrice $M_{fg}(n) \in \mathfrak{R}^{(\sigma_t(n, g_f) - n)(\sigma_t(n, g_g) - n) \times (\sigma_t(n, g_f + g_g) - n)}$ est un cas particulier d'une matrice $M_{ab} \in \mathfrak{R}^{d_1 \times d_2}$, $d_1 = (\sigma_t(n, a_f) - \sigma_t(n, a_i))(\sigma_t(n, b_f) - \sigma_t(n, b_i))$, $d_2 = \sigma_t(n, a_f + b_f) - \sigma_t(n, a_i + b_i)$ présentée par la suite.

Considérons les vecteurs $\phi_a \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n, a_f) - \sigma_t(n, a_i)}$, et $\phi_b \in \mathfrak{R}^{\sigma_t(n, b_f) - \sigma_t(n, b_i)}$:

$$\phi_a = \begin{bmatrix} x^{a_i} \\ x^{a_i+1} \\ \vdots \\ x^{a_f} \end{bmatrix}; \phi_b = \begin{bmatrix} x^{b_i} \\ x^{b_i+1} \\ \vdots \\ x^{b_f} \end{bmatrix}$$

Nous voulons construire la matrice $M_{ab}(n, [a_i \ a_f], [b_i \ b_f])$ satisfaisant

$$\phi_a \otimes \phi_b = \begin{bmatrix} x^{a_i} \\ x^{a_i+1} \\ \vdots \\ x^{a_f} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x^{b_i} \\ x^{b_i+1} \\ \vdots \\ x^{b_f} \end{bmatrix} = M_{ab} \begin{bmatrix} x^{a_i+b_i} \\ x^{a_i+b_i+1} \\ \vdots \\ x^{a_f+b_f} \end{bmatrix}$$

Afin de calculer M_{ab} nous pouvons calculer deux matrices M_t et M_r telles que

$$M_{ab} = M_t M_r$$

où M_t et M_r satisfont

$$\phi_a \otimes \phi_b = M_t \left[\begin{array}{c} x^{a_i} \otimes x^{b_i} \\ x^{a_i} \otimes x^{b_i+1} \\ \vdots \\ x^{a_i} \otimes x^{b_f} \\ \hline x^{a_i+1} \otimes x^{b_i} \\ x^{a_i+1} \otimes x^{b_i+1} \\ \vdots \\ x^{a_i+1} \otimes x^{b_f} \\ \hline \vdots \\ \hline x^{a_f} \otimes x^{b_i} \\ x^{a_f} \otimes x^{b_i+1} \\ \vdots \\ x^{a_f} \otimes x^{b_f} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{c} x^{a_i} \otimes x^{b_i} \\ x^{a_i} \otimes x^{b_i+1} \\ \vdots \\ x^{a_i} \otimes x^{b_f} \\ \hline x^{a_i+1} \otimes x^{b_i} \\ x^{a_i+1} \otimes x^{b_i+1} \\ \vdots \\ x^{a_i+1} \otimes x^{b_f} \\ \hline \vdots \\ \hline x^{a_f} \otimes x^{b_i} \\ x^{a_f} \otimes x^{b_i+1} \\ \vdots \\ x^{a_f} \otimes x^{b_f} \end{array} \right] = M_r \left[\begin{array}{c} x^{a_i+b_i} \\ \vdots \\ x^{a_f+b_f} \end{array} \right]$$

D'abord nous allons construire la matrice M_t . Pour ce faire, nous avons besoin de $a_f - a_i + 1$ matrices satisfaisant

$$x^j \otimes \phi_b = M_{jb} \left[\begin{array}{c} x^j \otimes x^{b_i} \\ \vdots \\ x^j \otimes x^{b_f} \end{array} \right]; \quad j = a_i, \dots, a_f$$

Ces matrices sont structurées telles que

$$M_{jb} = \begin{bmatrix} M_{jb1} \\ \vdots \\ M_{jb\sigma(n,j)} \end{bmatrix}$$

où les matrices $M_{jbk} \in \Re^{\sigma(n,j)(\sigma_t(n,b_f)-\sigma_t(n,b_i)) \times \sigma(n,j)(\sigma_t(n,b_f)-\sigma_t(n,b_i))}$ satisfont

$$x^j(k) \otimes \phi_b = M_{jbk} \begin{bmatrix} x^j \otimes x^{b_i} \\ \vdots \\ x^j \otimes x^{b_f} \end{bmatrix}; \quad k = 1, \dots, \sigma(n, j)$$

Ainsi, on obtient

$$M_t = \text{diag} \left\{ M_{a_i b}, M_{(a_0+1)b}, \dots, M_{a_f b} \right\}$$

ensuite nous construisons la matrice $M_r \in \Re^{(\sigma_t(n,a_f)-\sigma_t(n,a_i))(\sigma_t(b_f)-\sigma_t(b_i)) \times (\sigma_t(a_f+b_f)-\sigma_t(a_i+b_i))}$. Cette matrice est structurée comme

$$M_r = \begin{bmatrix} M_{ra_i} \\ M_{r(a_i+1)} \\ \vdots \\ M_{ra_f} \end{bmatrix}$$

où chaque matrice M_{rj} satisfait

$$\begin{bmatrix} x^j \otimes x^{b_i} \\ x^j \otimes x^{b_i+1} \\ \vdots \\ x^j \otimes x^{b_f} \end{bmatrix} = M_{ra_i} \begin{bmatrix} x^{a_i+b_i} \\ \vdots \\ x^{a_f+b_f} \end{bmatrix}$$

Calcul des matrices A_{vi} , B_{vjk} et $\tilde{K}_{vjk}$

Pour obtenir la matrice A_{vi} , considérons A_i telle que

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{in^{t_{di}}} \end{bmatrix} \in \Re^{n \times n^i} \quad (\text{B.3})$$

et $A_{ik} \in \Re^{n \times n^{t_{gi}}}$, $k = 1, \dots, n^{t_{di}}$. Nous avons

$$A_i(x^{t_{di} \otimes} \otimes x^{a \otimes}) = A_i(I_{n^{t_{di}}} \otimes x^{t_{gi} \otimes})x^{t_{di} \otimes} = (x^{t_{gi} \otimes'} \otimes I_n)A_{vi}x^{t_{di} \otimes} \quad (\text{B.4})$$

avec

$$A_{vi} = \begin{bmatrix} \text{vec}(A_{i1}) & \text{vec}(A_{i2}) & \dots & \text{vec}(A_{in^{t_{di}}}) \end{bmatrix} \in \Re^{n^{t_{di}+1} \times n^i} \quad (\text{B.5})$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} x'PA_i x^{i\otimes} &= (1 \otimes x')(1 \otimes P)(x^{t_{gi}\otimes'} \otimes I_n)A_{iv}x^{t_{di}\otimes} \\ &= x^{(t_{gi}+1)\otimes'}(I_{n^{gi}} \otimes P)A_{iv}x^{t_{di}\otimes} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Afin de calculer B_{vjk} et K_{vjk} considérons les relations

$$\begin{aligned} t_{di} + t_{gi} &= i \\ &= k + j \\ &= d_k + g_k + j \\ &= (d_k + j) + g_k \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Nous avons également

$$\begin{aligned} t_{di} &= \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{k+j+1}{2} \right\rceil \\ &\leq \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil \\ &\leq \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil + j = d_k + j \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Définissant

$$t_{cjk} = (d_k + j) - t_{di} \quad (\text{B.9})$$

nous avons

$$d_k + j = t_{di} + t_{cjk} \quad (\text{B.10})$$

$$g_k = t_{gi} - t_{cjk} \quad (\text{B.11})$$

De cette façon nous obtenons pour les termes de (4.7)

$$\begin{aligned} x'PB_j(I_{nj} \otimes x^{g_k\otimes'} \otimes I_m)(I_{nj} \otimes \tilde{K}_k)x^{(d_k+j)\otimes} \\ = x'PB_j(I_{nj} \otimes x^{(t_{gi}-t_{cjk})\otimes'} \otimes I_m)(I_{nj} \otimes \tilde{K}_k)x^{(t_{di}+t_{cjk})\otimes} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

À partir de (B.9), nous avons

$$\begin{aligned} (j - t_{cjk}) &= t_{di} - d_k \\ &= \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

puisque $i \geq k$ et alors $j \geq t_{cjk}$. Définissons donc

$$e_{jk} = j - t_{cjk} \quad (\text{B.14})$$

ainsi nous pouvons développer (B.12) :

$$\begin{aligned} x'PB_j(I_{nj} \otimes x^{(t_{gi}-t_{cjk}) \otimes'} \otimes I_m)(I_{nj} \otimes \tilde{K}_k)x^{(t_{di}+t_{cjk}) \otimes} \\ = x'PB_j(I_{nj} \otimes x^{(t_{gi}-t_{cjk}) \otimes'} \otimes I_m)(I_{nj} \otimes \tilde{K}_k)(x^{t_{cjk}} \otimes I_{n^{t_{di}}})x^{t_{di} \otimes} \\ = x'PB_j(I_{nj} \otimes x^{(t_{gi}-t_{cjk}) \otimes'} \otimes I_m)(x^{t_{cjk}} \otimes I_{n^{e_{jk}}} \otimes \tilde{K}_k)x^{t_{di} \otimes} \\ = x'PB_j(x^{t_{cjk}} \otimes I_{n^{e_{jk}}} \otimes x^{(t_{gi}-t_{cjk}) \otimes'} \otimes I_m)(I_{n^{e_{jk}}} \otimes \tilde{K}_k)x^{t_{di} \otimes} \quad (\text{B.15}) \\ = x'PB_j(x^{t_{gi} \otimes'} \otimes I_{mnj})M_{tc}(j, k)(I_{n^{e_{jk}}} \otimes \tilde{K}_k)x^{t_{di} \otimes} \\ = x^{(t_{gi}+1) \otimes'}(I_{n^{t_{gi}}} \otimes P)(I_{n^{t_{gi}}} \otimes B_j)M_{tc}(j, k)(I_{n^{e_{jk}}} \otimes \tilde{K}_k)x^{t_{di} \otimes} \end{aligned}$$

où la matrice $M_{tc}(j, k)$ satisfait (la construction de cette matrice est présentée par la suite)

$$(x^{t_{gi} \otimes'} \otimes I_{mnj})M_{tc}(j, k) = (x^{t_{cjk}} \otimes I_{n^{e_{jk}}} \otimes x^{(t_{gi}-t_{cjk}) \otimes'} \otimes I_m) \quad (\text{B.16})$$

Ainsi nous avons

$$B_{vjk} = (I_{n^{t_{gi}}} \otimes B_j)M_{tc}(j, k) \quad (\text{B.17})$$

et

$$\tilde{K}_{vjk} = (I_{n^{e_{jk}}} \otimes \tilde{K}_k) \quad (\text{B.18})$$

Calcul de la matrice $M_{tc}(j, k)$

Considérons le vecteur $y \in \mathfrak{R}^n$ et la matrice $M_t(n)$ satisfaisant

$$y = (y' \otimes I_n)M_t(n)$$

donnée par

$$M_t(n) = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

où e_i est le i -ième vecteur de la base canonique de $\mathfrak{R}^n$. Considérons aussi la matrice $M_{dg}(b, n)$ satisfaisant

$$(I_b \otimes y') = (y' \otimes I_b)M_{dg}(b, n)$$

donnée par

$$M_{dg}(b, n) = \begin{bmatrix} I_b \otimes e_1 & I_b \otimes e_2 & \dots & I_b \otimes e_n \end{bmatrix}$$

Considérons la relation suivante avec $y \in \mathfrak{R}^n$ et $z \in \mathfrak{R}^m$

$$\begin{aligned} (y \otimes I_\alpha \otimes z') &= ((y' \otimes I_n) M_t(n) \otimes I_\alpha \otimes z') \\ &= (y' \otimes I_n \otimes I_\alpha \otimes z') (M_t(n) \otimes I_{m\alpha}) \\ &= (y' \otimes (z' \otimes I_{n\alpha}) M_{dg}(n\alpha, m)) (M_t(n) \otimes I_{m\alpha}) \\ &= (y' \otimes z' \otimes I_{n\alpha}) (I_n \otimes M_{dg}(n\alpha, m)) (M_t(n) \otimes I_{m\alpha}) \end{aligned}$$

De façon similaire nous pouvons calculer la matrice $M_{tc}(j, k)$ satisfaisant

$$(x^{t_{gi} \otimes I'} \otimes I_{mnj}) M_{tc}(j, k) = (x^{t_{cjk}} \otimes I_{n^{e_{jk}}} \otimes x^{(t_{gi} - t_{cjk}) \otimes I'} \otimes I_m)$$

c'est-à-dire

$$M_{tc}(j, k) = \left(I_{n^{t_{cjk}}} \otimes M_{dg}(n^j, n^{(t_{gi} - t_{cjk})}) \otimes I_m \right) (M_t(n^{t_{cjk}}) \otimes I_{mn^{e_{jk}}})$$

B.2 Boucle fermée avec un retour de sortie dynamique

Considérons le système sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) + G(x)u(x) \\ y &= h(x) \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

avec

$$f(x) = \sum_{i=1}^{g_f} A_i x^i \quad (\text{B.20})$$

$$G(x) = \sum_{i=0}^{g_G} B_i (x^i \otimes I_m)$$

$$h(x) = \sum_{i=1}^{g_h} C_i x^i$$

et une loi de commande donnée par

$$\begin{cases} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y \\ u(x) &= \sum_{i=1}^{g_u} K_i \lambda_y^i \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

où

$$\lambda_y = \begin{bmatrix} y \\ x_c \end{bmatrix} \in \Re^{p+n_c}$$

Nous voulons exprimer la boucle fermée (B.19)-(B.21) sous la forme

$$\dot{\lambda} = \tilde{f}(\lambda) + \tilde{G}(\lambda)\tilde{u}(\lambda) \quad (\text{B.22})$$

avec

$$\lambda = \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} \in \Re^{n_\lambda}$$

$n_\lambda = n + n_c$, et $\tilde{f}(\lambda) : \Re^{n_\lambda} \mapsto \Re^{n_\lambda}$, $\tilde{G}(\lambda) : \Re^{n_\lambda} \mapsto \Re^{m \times n_\lambda}$ et $\tilde{u}(\lambda) : \Re^{n_\lambda} \mapsto \Re^m$, sont respectivement des fonctions de degré g_f , g_u et $g_h g_u$.

Par la suite nous présentons les procédures pour construire les fonctions polynomiales $\tilde{f}(\lambda)$, $\tilde{G}(\lambda)$ et $\tilde{u}(\lambda)$.

En utilisant la relation

$$x^i = M_e(n, i) \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times n_c} \end{bmatrix}^{i \otimes} M_c(n_\lambda, i) \lambda^i$$

nous pouvons écrire les termes de $f(x)$ comme

$$A_i x^i = A_i M_e(n, i) \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times n_c} \end{bmatrix}^{i \otimes} M_c(n_\lambda, i) \lambda^i \quad (\text{B.23})$$

Afin de décrire le système dans les coordonnées λ nous introduisons

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} A & 0_{n+n_c} \\ B_c C & A_c \end{bmatrix} \quad (\text{B.24})$$

et pour $i = 2, \dots, g_f$:

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} A_i M_e(n, i) \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times n_c} \end{bmatrix}^{i \otimes} M_c(n_\lambda, i) \\ B_c C_i M_e(n, i) \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times n_c} \end{bmatrix}^{i \otimes} M_c(n_\lambda, i) \end{bmatrix} \quad (\text{B.25})$$

ce qui donne

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{g_f} \tilde{A}_i \lambda^i$$

Nous construisons les matrices de $\tilde{G}(\lambda)$ à partir des relations

$$B_i(x^i \otimes I_m) = B_i \left(M_e(n, i) \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times n_c} \end{bmatrix}^{i \otimes} M_c(n_\lambda, i) \otimes I_m \right) (\lambda^i \otimes I_m)$$

Nous définissons donc

$$\tilde{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \left(M_e(n, i) \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times n_c} \end{bmatrix}^{i \otimes} M_c(n_\lambda, i) \otimes I_m \right) \\ 0_{n_c \times m \sigma(n_\lambda, i)} \end{bmatrix} \quad (\text{B.26})$$

$i = 0, \dots, g_G$. Et ainsi nous avons

$$\tilde{G}(x) = \sum_{i=0}^{g_G} \tilde{B}_i(\lambda^i \otimes I_m)$$

Notons que dû à la structure des matrices $\tilde{B}_i$, l'entrée $\tilde{u}(\lambda)$ n'a pas une influence directe sur la dynamique du contrôleur.

Considérons donc l'expression de la loi de commande polynomiale

$$u(\lambda_y) = K_1 \lambda_y + K_2 \lambda_y^2 + K_3 \lambda_y^3 + \dots + K_{g_u} \lambda_y^{g_u}$$

avec

$$\lambda_y = \begin{bmatrix} y \\ x_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(x) \\ x_c \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{p+n_c}$$

que nous voulons exprimer en fonction du vecteur λ , c'est-à-dire, nous voulons trouver $\tilde{u}(\lambda)$ tel que $\tilde{u}(\lambda) = u(\lambda_y)$. D'abord, réécrivons la sortie λ_y en fonction de λ :

$$\lambda_y = \sum_{i=1}^{g_h} \bar{C}_i \lambda^i$$

où $\bar{C}_i \in \mathfrak{R}^{p+n_c \times \sigma(n_\lambda, i)}$ sont les matrices données par

$$\bar{C}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0_{p \times n_c} \\ 0_{n_c \times n} & I_{n_c} \end{bmatrix}$$

et

$$\bar{C}_i = \begin{bmatrix} C_i M_e(n, i) \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times n_c} \end{bmatrix}^{i \otimes} M_c(n_\lambda, i) \\ 0_{n_c \times \sigma(n_\lambda, i)} \end{bmatrix}$$

pour $i = 2, \dots, g_h$. Ainsi, en définissant

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 & \dots & \bar{C}_{g_h} \end{bmatrix}$$

nous obtenons

$$\lambda_y = \bar{C} \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{g_h} \end{bmatrix}$$

Ensuite nous cherchons une expression pour le terme λ_y^i , dans laquelle apparaît la matrice $M_{Cg_h}(i)$ qui sera présentée à la fin de la section. Nous avons

$$\begin{aligned}
 \lambda_y^i &= M_c(p+n_c, i) \lambda_y^{i \otimes} \\
 &= M_c(p+n_c, i) \bar{C}^{i \otimes} \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{g_h} \end{bmatrix}^{i \otimes} \\
 &= M_c(p+n_c, i) \bar{C}^{i \otimes} M_{Cg_h}(i) \begin{bmatrix} \lambda^i \\ \lambda^{i+1} \\ \vdots \\ \lambda^{ig_h} \end{bmatrix} \\
 &= C_i^* \begin{bmatrix} \lambda^i \\ \lambda^{i+1} \\ \vdots \\ \lambda^{ig_h} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Alors avec la matrice

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_1^* & 0_{\sigma(p+n_c, 1) \times (\sigma_t(n_\lambda, g_u g_h) - \sigma_t(n_\lambda, g_h))} \\ 0_{\sigma(p+n_c, 2) \times \sigma_t(n_\lambda, 1)} & C_2^* & 0_{\sigma(p+n_c, 2) \times (\sigma_t(n_\lambda, g_u g_h) - \sigma_t(n_\lambda, 2g_h))} \\ & & \vdots \\ 0_{\sigma(p+n_c, i) \times \sigma_t(n_\lambda, i-1)} & C_i^* & 0_{\sigma(p+n_c, i) \times (\sigma_t(n_\lambda, g_u g_h) - \sigma_t(n_\lambda, ig_h))} \\ & & \vdots \\ & 0_{\sigma(p+n_c, g_u) \times \sigma_t(n_\lambda, g_u-1)} & C_{g_u}^* \end{bmatrix}$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}(\lambda) &= [K_1 \ K_2 \ \dots \ K_{g_u}] \tilde{C} \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{g_u g_h} \end{bmatrix} \\
 &= \tilde{K} \tilde{C} \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{g_u g_h} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Dans l'expression de la matrice C_i^* nous avons utilisé la matrice M_{Cg_h} , satisfaisant

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{g_h} \end{bmatrix} = M_{Cg_h} \begin{bmatrix} \lambda^i \\ \lambda^{i+1} \\ \vdots \\ \lambda^{ig_h} \end{bmatrix}$$

on a donc

$$M_{Cg_h} = \Pi_{j=1}^{i-1} \left(M_{ab}(n_\lambda, [j \quad jg_h], [1 \quad g_u]) \otimes I_{n_\lambda^{(i-1-j)}} \right)$$

Annexe C

Donnés des Exemples Numériques

C.1 Données des exemples

C.1.1 Exemples du chapitre 3

Les matrices suivantes sont utilisées pour représenter les systèmes dans les différents exemples

Exemple 1

$$A = \begin{bmatrix} -1.1 & 0.7 \\ 0.1 & -0.6 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} -0.32 & -0.2 & -0.03 \\ -0.2 & -0.02 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Exemple 2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple 3

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0.5 \\ -1.5 & -1 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix}; A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A_5 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Exemple 4

$$A = \begin{bmatrix} -1.1 & 0.7 \\ 0.1 & -0.6 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 & 0.1 \\ -0.3 & -1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Exemple 5

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1.6 \\ 1.3 & -1 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1.8 & 0 \\ 0 & 5.5 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemple 6

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 3 & 0 \\ 0.5 & -2 & -0.2 \end{bmatrix}$$

Exemple 7

$$A = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(\rho-1)} \\ -\sqrt{b(\rho-1)} & -\sqrt{b(\rho-1)} & -b \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\sigma = 10; b = \frac{8}{3}; \rho = 4$$

Exemple 8

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -0.915 & 1 & -1 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.915 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple 9 Pour $n = 2$ nous avons

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

C.1.2 Exemples du chapitre 4**Exemple 1**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} M_e(2,2); A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} M_e(2,3)$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple 2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} M_e(3,2); A_3 = 0_{3 \times 27}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} M_e(3,4)$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple 3

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} M_e(5,2);$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple 4

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}; C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$A_c = \begin{bmatrix} -4.989 & -2.481 \\ 2.4814 & 0 \end{bmatrix}; B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; C_c = \begin{bmatrix} -0.0069 & -0.8673 \end{bmatrix}; D_c = 2.320$$

La matrice de Lyapunov est donnée par

$$P_{vl} = \begin{bmatrix} 1.8159 & 1.5968 & -0.5255 & -0.3997 \\ 1.5968 & 3.3718 & -1.6777 & -1.2655 \\ -0.5255 & -1.6777 & 7.1791 & 2.3302 \\ -0.3997 & -1.2655 & 2.3302 & 2.2509 \end{bmatrix}$$

C.2 Résultats numériques

C.2.1 Exemples du chapitre 3

Exemple 1 Matrice correspondante à la première ellipse obtenue en optimisant la trace avec $M_r = I_2$

$$P_v = \begin{bmatrix} 0.5761 & 0.2123 \\ 0.2123 & 1.2646 \end{bmatrix}$$

Matrices obtenues après deux iterations de recherche alternée avec M_r , correspondant à l'ellipse noire dans la figure 3.3

$$P_v = \begin{bmatrix} 0.2927 & 0.0027 \\ 0.0027 & 0.5127 \end{bmatrix}$$

$$M_r = \begin{bmatrix} 0.3425 & -0.1272 \\ -0.1272 & 0.3056 \end{bmatrix}$$

Matrice correspondante à la première ellipse obtenue en minimisant l'angle entre le gradient dans les points d'équilibre et les vecteurs dans la direction de ces points

$$P_v = \begin{bmatrix} 0.7556 & -0.5678 \\ -0.5678 & 1.4328 \end{bmatrix}$$

Matrices obtenues en cherchant la plus grande courbe de niveau de la fonction précédente, nous obtenons $P_{vo} = \frac{1}{1.65}P_v$ et la matrice M_r suivante

$$P_{vo} = \begin{bmatrix} 0.4568 & -0.3433 \\ -0.3433 & 0.8663 \end{bmatrix}$$

$$M_r = \begin{bmatrix} 0.6672 & -0.6657 \\ -0.6657 & 0.9440 \end{bmatrix}$$

Exemple 2 La matrice suivante correspond à l'ellipsoïde en rouge de la figure 3.5

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Les matrices suivantes correspondent à l'optimisation de la courbe de niveau de la fonction définie par la matrice précédente

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.6509 & -0.2169 \\ -0.2169 & 0.4393 \end{bmatrix}$$

$$M_r = \begin{bmatrix} 0.4325 & -0.0015 \\ -0.0015 & 0.4321 \end{bmatrix}$$

La matrice de degré 4 obtenue en maximisant l'ensemble intérieur donné par une courbe de niveau de la fonction définie par la matrice précédente est donnée par

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0.4583 & -0.1334 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1334 & 0.2829 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0009 & 0.0127 & -0.0043 \\ 0 & 0 & 0.0127 & 0.1696 & -0.0577 \\ 0 & 0 & -0.0043 & -0.0577 & 0.0196 \end{bmatrix}$$

Exemple 3 Matrice obtenue en optimisant la trace ($\text{Trace}(P_2) = 2.1588$)

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.9905 & -0.3114 \\ -0.3114 & 1.1683 \end{bmatrix}$$

Exemple 4 Fonctions de degré 4, matrices définissant les courbes de niveau. Matrice obtenue en maximisant l'ensemble intérieur $\text{Trace}(P_4) = 3.5571$, correspond à la courbe vert clair

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0.8762 & 0.4711 & -0.0054 & -0.0149 & 0.003 \\ 0.4711 & 0.8510 & 0.2366 & 0.3753 & -0.0959 \\ -0.0054 & 0.2366 & 0.5981 & 0.3060 & -0.1570 \\ -0.0149 & 0.3753 & 0.3060 & 1.1727 & -0.2154 \\ 0.0030 & -0.0959 & -0.1570 & -0.2154 & 0.0592 \end{bmatrix}$$

en optimisant la trace, courbe vert foncé $\text{Trace}(P_4) = 2.4362$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1.1677 & 0.5917 & 0.1622 & 0.3361 & -0.0700 \\ 0.5917 & 0.8061 & 0.0320 & 0.2204 & -0.0703 \\ 0.1622 & 0.0320 & 0.0787 & 0.0815 & -0.0041 \\ 0.3361 & 0.2204 & 0.0815 & 0.3480 & -0.1009 \\ -0.0700 & -0.0703 & -0.0041 & -0.1009 & 0.0356 \end{bmatrix}$$

Fonctions de degré 6, matrices définissant les courbes de niveau. Matrice obtenue en maximisant l'ensemble intérieur $\text{Trace}(P_6) = 5.3232$

$$P_6 = \begin{bmatrix} 0.9780 & 0.4315 & 0.0193 & -0.1720 & -0.0786 \\ 0.4315 & 0.8041 & -0.0175 & 0.1589 & 0.0717 \\ 0.0193 & -0.0175 & 0.0153 & -0.1009 & -0.0303 \\ -0.1720 & 0.1589 & -0.1009 & 0.7685 & 0.3017 \\ -0.0786 & 0.0717 & -0.0303 & 0.3017 & 0.1972 \\ -0.1602 & 0.1553 & -0.0684 & 0.5589 & 0.2340 \\ -0.2775 & 0.2667 & -0.0831 & 0.8901 & 0.5049 \\ -0.0462 & 0.0365 & -0.0340 & 0.2713 & 0.1788 \\ 0.1038 & -0.1009 & 0.0252 & -0.2945 & -0.1932 \\ -0.1602 & -0.2775 & -0.0462 & 0.1038 & \\ 0.1553 & 0.2667 & 0.0365 & -0.1009 & \\ -0.0684 & -0.0831 & -0.0340 & 0.0252 & \\ 0.5589 & 0.8901 & 0.2713 & -0.2945 & \\ 0.2340 & 0.5049 & 0.1788 & -0.1932 & \\ 0.4758 & 0.7801 & 0.1653 & -0.2813 & \\ 0.7801 & 1.6299 & 0.3275 & -0.5985 & \\ 0.1653 & 0.3275 & 0.2196 & -0.1294 & \\ -0.2813 & -0.5985 & -0.1294 & 0.2347 & \end{bmatrix}$$

en optimisant la trace, courbe magenta foncé $\text{Trace}(P_6) = 2.2061$

$$P_6 = \begin{bmatrix} 0.9247 & 0.5682 & 0.185 & 0.2918 & 0.1779 \\ 0.5682 & 0.8283 & 0.0501 & 0.0792 & 0.0463 \\ 0.185 & 0.0501 & 0.0568 & 0.0897 & 0.0542 \\ 0.2918 & 0.0792 & 0.0897 & 0.1416 & 0.0854 \\ 0.1779 & 0.0463 & 0.0542 & 0.0854 & 0.0528 \\ 0.2125 & 0.0564 & 0.065 & 0.1025 & 0.0627 \\ -0.0122 & -0.0019 & -0.0034 & -0.0053 & -0.0041 \\ 0.2106 & 0.0563 & 0.0645 & 0.1018 & 0.062 \\ -0.1784 & -0.0485 & -0.0548 & -0.0866 & -0.0522 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.2125 & -0.0122 & 0.2106 & -0.1784 \\ 0.0564 & -0.0019 & 0.0563 & -0.0485 \\ 0.065 & -0.0034 & 0.0645 & -0.0548 \\ 0.1025 & -0.0053 & 0.1018 & -0.0866 \\ 0.0627 & -0.0041 & 0.062 & -0.0522 \\ 0.0748 & -0.0044 & 0.0741 & -0.0627 \\ -0.0044 & 0.0008 & -0.0042 & 0.0032 \\ 0.0741 & -0.0042 & 0.0734 & -0.0622 \\ -0.0627 & 0.0032 & -0.0622 & 0.0529 \end{bmatrix}$$

Fonctions de degré 8, en optimisant l'ensemble intérieur, courbe bleu foncé $\text{Trace}(P_8) = 15.3784$

$$P_8 = \begin{bmatrix} 1.0303 & 0.4263 & 0.0771 & 0.0611 & -0.0617 & -0.1379 & -0.1331 & 0.0169 \\ 0.4263 & 0.9148 & -0.0888 & -0.0697 & 0.0711 & 0.1585 & 0.153 & -0.0194 \\ 0.0771 & -0.0888 & 0.1762 & -0.1856 & -0.1557 & -0.1034 & -0.3133 & -0.1936 \\ 0.0611 & -0.0697 & -0.1856 & 2.0929 & 0.3875 & -0.5118 & -0.0768 & 0.2777 \\ -0.0617 & 0.0711 & -0.1557 & 0.3875 & 0.1742 & 0.0566 & 0.2059 & 0.1203 \\ -0.1379 & 0.1585 & -0.1034 & -0.5118 & 0.0566 & 0.4426 & 0.1763 & -0.3047 \\ -0.1331 & 0.153 & -0.3133 & -0.0768 & 0.2059 & 0.1763 & 0.875 & 0.6883 \\ 0.0169 & -0.0194 & -0.1936 & 0.2777 & 0.1203 & -0.3047 & 0.6883 & 1.4094 \\ 0.1528 & -0.1757 & 0.158 & 0.2502 & -0.13 & -0.4362 & -0.2013 & 0.3642 \\ -0.0761 & 0.0877 & -0.2662 & 0.5825 & 0.2533 & -0.0091 & 0.4418 & 0.4132 \\ 0.0843 & -0.0971 & -0.1582 & 0.0196 & 0.0176 & -0.5329 & 0.9571 & 2.1593 \\ 0.2425 & -0.2788 & 0.1211 & 0.9153 & -0.0581 & -0.8609 & 0.0142 & 1.1464 \\ -0.1497 & 0.172 & 0.0319 & -0.7883 & -0.0446 & 0.6604 & -0.301 & -1.2663 \\ -0.0355 & 0.0407 & 0.0353 & -0.2834 & -0.0394 & 0.1918 & -0.1394 & -0.4294 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.1528 & -0.0761 & 0.0843 & 0.2425 & -0.1497 & -0.0355 \\ -0.1757 & 0.0877 & -0.0971 & -0.2788 & 0.172 & 0.0407 \\ 0.158 & -0.2662 & -0.1582 & 0.1211 & 0.0319 & 0.0353 \\ 0.2502 & 0.5825 & 0.0196 & 0.9153 & -0.7883 & -0.2834 \\ -0.13 & 0.2533 & 0.0176 & -0.0581 & -0.0446 & -0.0394 \\ -0.4362 & -0.0091 & -0.5329 & -0.8609 & 0.6604 & 0.1918 \\ -0.2013 & 0.4418 & 0.9571 & 0.0142 & -0.301 & -0.1394 \\ 0.3642 & 0.4132 & 2.1593 & 1.1464 & -1.2663 & -0.4294 \\ 0.4865 & -0.1025 & 0.7047 & 0.9073 & -0.6869 & -0.1932 \\ -0.1025 & 0.4812 & 0.4007 & 0.1144 & -0.2966 & -0.1298 \\ 0.7047 & 0.4007 & 3.5324 & 1.8871 & -1.9975 & -0.6516 \\ 0.9073 & 0.1144 & 1.8871 & 2.0495 & -1.6888 & -0.5233 \\ -0.6869 & -0.2966 & -1.9975 & -1.6888 & 1.5501 & 0.496 \\ -0.1932 & -0.1298 & -0.6516 & -0.5233 & 0.496 & 0.1634 \end{bmatrix}$$

En optimisant la trace, courbe bleu clair $\text{Trace}(P_8) = 2.2837$

$$P_8 = \begin{bmatrix} 0.8917 & 0.591 & 0.1596 & 0.2461 & 0.162 & 0.1807 & -0.0204 & 0.2159 \\ 0.591 & 0.9235 & 0.0549 & 0.1 & 0.048 & 0.0578 & 0.0045 & 0.07 \\ 0.1596 & 0.0549 & 0.0476 & 0.0737 & 0.0482 & 0.0538 & -0.0058 & 0.0643 \\ 0.2461 & 0.1 & 0.0737 & 0.1232 & 0.07 & 0.0807 & -0.0022 & 0.097 \\ 0.162 & 0.048 & 0.0482 & 0.07 & 0.0511 & 0.0557 & -0.0093 & 0.0663 \\ 0.1807 & 0.0578 & 0.0538 & 0.0807 & 0.0557 & 0.0615 & -0.0085 & 0.0734 \\ -0.0204 & 0.0045 & -0.0058 & -0.0022 & -0.0093 & -0.0085 & 0.0058 & -0.0098 \\ 0.2159 & 0.07 & 0.0643 & 0.097 & 0.0663 & 0.0734 & -0.0098 & 0.0875 \\ -0.1136 & -0.0351 & -0.0338 & -0.05 & -0.0354 & -0.0388 & 0.0059 & -0.0463 \\ -0.0203 & -0.0131 & -0.0062 & -0.0132 & -0.0044 & -0.0059 & -0.002 & -0.0073 \\ 0.1409 & 0.0564 & 0.0422 & 0.07 & 0.0403 & 0.0463 & -0.0016 & 0.0556 \\ 0.0456 & 0.0128 & 0.0135 & 0.0192 & 0.0146 & 0.0158 & -0.003 & 0.0188 \\ -0.0008 & 0.0074 & -0.0001 & 0.0044 & -0.0024 & -0.0014 & 0.0034 & -0.0014 \\ -0.0647 & -0.0388 & -0.0196 & -0.0402 & -0.0149 & -0.0194 & -0.0049 & -0.0238 \\ & & & & -0.1136 & -0.0203 & 0.1409 & 0.0456 & -0.0008 & -0.0647 \\ & & & & -0.0351 & -0.0131 & 0.0564 & 0.0128 & 0.0074 & -0.0388 \\ & & & & -0.0338 & -0.0062 & 0.0422 & 0.0135 & -0.0001 & -0.0196 \\ & & & & -0.05 & -0.0132 & 0.07 & 0.0192 & 0.0044 & -0.0402 \\ & & & & -0.0354 & -0.0044 & 0.0403 & 0.0146 & -0.0024 & -0.0149 \\ & & & & -0.0388 & -0.0059 & 0.0463 & 0.0158 & -0.0014 & -0.0194 \\ & & & & 0.0059 & -0.002 & -0.0016 & -0.003 & 0.0034 & -0.0049 \\ & & & & -0.0463 & -0.0073 & 0.0556 & 0.0188 & -0.0014 & -0.0238 \\ & & & & 0.0246 & 0.0035 & -0.0287 & -0.0101 & 0.0012 & 0.0114 \\ & & & & 0.0035 & 0.0023 & -0.0074 & -0.0011 & -0.0018 & 0.0065 \\ & & & & -0.0287 & -0.0074 & 0.0398 & 0.0111 & 0.0023 & -0.0225 \\ & & & & -0.0101 & -0.0011 & 0.0111 & 0.0042 & -0.0009 & -0.0037 \\ & & & & 0.0012 & -0.0018 & 0.0023 & -0.0009 & 0.0023 & -0.0049 \\ & & & & 0.0114 & 0.0065 & -0.0225 & -0.0037 & -0.0049 & 0.0187 \end{bmatrix}$$

Exemple 5

$$P_4 = \begin{bmatrix} 2.7629 & 0.6843 & -0.0971 & 0.0608 & 0.3149 \\ 0.6843 & 2.4355 & 0.0386 & 0.6398 & -0.5309 \\ -0.0971 & 0.0386 & 0.9310 & 0.2890 & -0.1252 \\ 0.0608 & 0.6398 & 0.2890 & 1.5782 & 0.4608 \\ 0.3149 & -0.5309 & -0.1252 & 0.4608 & 0.5962 \end{bmatrix}$$

Exemple 6

$$P_2 = \begin{bmatrix} 7.7298 & -7.4291 & 0.5542 \\ -7.4291 & 15.2085 & -7.6481 \\ 0.5542 & -7.6481 & 7.9774 \end{bmatrix}$$

Exemple 7 Les régions de la figure 4 sont définies par les matrices suivantes :

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.0829 & 0.1092 & 0.0534 \\ 0.1092 & 0.9485 & -0.2378 \\ 0.0534 & -0.2378 & 0.4432 \end{bmatrix}$$

pour l'ellipsoïde et pour la fonction de degré 4 :

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0.0798 & 0.1126 & 0.0560 & -0.0001 & 0.0073 \\ 0.1126 & 0.9801 & -0.2382 & -0.0110 & -0.0360 \\ 0.0560 & -0.2382 & 0.4527 & -0.0026 & 0.0116 \\ -0.0001 & -0.0110 & -0.0026 & 0.0215 & 0.0067 \\ 0.0073 & -0.0360 & 0.0116 & 0.0067 & 0.0068 \\ 0.0033 & -0.0211 & 0.0113 & -0.0008 & 0.0030 \\ 0.0084 & -0.0507 & 0.0189 & 0.0083 & 0.0094 \\ -0.0037 & 0.0277 & -0.0070 & 0.0013 & -0.0031 \\ 0.0063 & -0.0018 & 0.0037 & 0.0066 & 0.0030 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.0033 & 0.0084 & -0.0037 & 0.0063 \\ -0.0211 & -0.0507 & 0.0277 & -0.0018 \\ 0.0113 & 0.0189 & -0.0070 & 0.0037 \\ -0.0008 & 0.0083 & 0.0013 & 0.0066 \\ 0.0030 & 0.0094 & -0.0031 & 0.0030 \\ 0.0038 & 0.0054 & -0.0002 & 0.0037 \\ 0.0054 & 0.0138 & -0.0035 & 0.0050 \\ -0.0002 & -0.0035 & 0.0091 & 0.0105 \\ 0.0037 & 0.0050 & 0.0105 & 0.0206 \end{bmatrix}$$

C.2.2 Exemples du chapitre 4

Exemple 1 Gain linéaire

$$K_1 = \begin{bmatrix} -1.4141 & -4.2902 \end{bmatrix}$$

Boucle fermée avec ce gain

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -0.4141 & -2.2902 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.4141 & -4.2902 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice définissant la ERA de la figure 4.2 est donnée par

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1.7091 & -0.6392 & 0.0233 & -0.1747 & -0.2149 \\ -0.6392 & 1.0387 & -0.0045 & -0.3071 & -0.0793 \\ 0.0233 & -0.0045 & 0.0315 & 0.0521 & -0.1880 \\ -0.1747 & -0.3071 & 0.0521 & 0.7681 & -0.0691 \\ -0.2149 & -0.0793 & -0.1880 & -0.0691 & 1.2072 \end{bmatrix}$$

et satisfait $\text{Trace}(P_4) = 4.7548$. La matrice M_r est donnée par

$$M_r = \begin{bmatrix} 1.7595 & -0.6263 & 0.2509 & 0.2696 & 0.0570 \\ -0.6263 & 2.4059 & 0.2668 & -0.1501 & -0.4442 \\ 0.2509 & 0.2668 & 2.1465 & -0.1362 & 0.2356 \\ 0.2696 & -0.1501 & -0.1362 & 2.8806 & 0.2742 \\ 0.0570 & -0.4442 & 0.2356 & 0.2742 & 3.0537 \end{bmatrix}$$

Gains linéaire et quadratique

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.7319 & -4.4623 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -1.0012 & -0.0176 & -0.2798 & 0.3968 \end{bmatrix}$$

Boucle fermée correspondante

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.2680 & -2.4623 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.2680 & -4.4623 \\ -0.0012 & -0.2975 & 0.3968 \end{bmatrix};$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1.0012 & -0.2975 & 0.3968 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice définissant la ERA de la figure 4.3 est définie par

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1.1734 & -0.1795 & 0.0567 & 0.0679 & -0.3935 \\ -0.1795 & 0.5878 & -0.0175 & -0.2465 & 0.0863 \\ 0.0567 & -0.0175 & 0.0381 & 0.0407 & -0.2653 \\ 0.0679 & -0.2465 & 0.0407 & 0.7260 & -0.1776 \\ -0.3935 & 0.0863 & -0.2653 & -0.1776 & 1.8634 \end{bmatrix}$$

La matrice M_r est donnée par

$$M_r = \begin{bmatrix} 1.3317 & -0.3472 & 0.1489 & 0.1821 & 0.1104 \\ -0.3472 & 2.5607 & 0.2824 & 0.2159 & 0.1092 \\ 0.1489 & 0.2824 & 1.5800 & -0.2280 & -0.0568 \\ 0.1821 & 0.2159 & -0.2280 & 2.4934 & -0.0631 \\ 0.1104 & 0.1092 & -0.0568 & -0.0631 & 2.8947 \end{bmatrix}$$

Exemple 2 Le gain linéaire

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.3189 & -0.5240 & -0.8589 \\ -9.5700 & 10.9382 & 2.2819 \end{bmatrix}$$

Les matrices de la boucle fermée

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -9.5700 & -10.9382 & 3.2820 \\ -0.3189 & -0.5240 & -0.8589 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3189 & 0.4760 & -0.8589 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous avons $\tilde{A}_3 = A_3$, $\tilde{A}_4 = A_4$. La matrice de l'estimation de la RA

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1.2018 & 0.0888 & -0.0764 \\ 0.0888 & 0.1338 & 0.0048 \\ -0.0764 & 0.0048 & 0.7340 \end{bmatrix}$$

Gains obtenus avec $g_u = 2$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1.4656 & 0.1168 & -15.2319 \\ -9.6129 & -11.0340 & 2.2932 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 2.1014 & 0.4565 & -14.8426 & 0.0013 & 0.0008 & 0 \\ 0.0016 & 0.0012 & -0.0072 & 0.0025 & 0.0018 & -0.0170 \end{bmatrix}$$

Les matrices de la boucle fermée

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & 0 \\ -9.6129 & -11.0340 & 3.2932 \\ 1.4656 & 0.1168 & -15.2319 \end{bmatrix} \\ \tilde{A}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.0016 & 0.0012 & -0.0072 & 0.0025 & 0.0018 & -0.0170 \\ 3.5670 & 1.5733 & -30.0745 & 0.0013 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{A}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.1014 & 0.4565 & -14.8426 & 0.0013 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et $\tilde{A}_4 = A_4$. La matrice correspondante à la ERA est donnée par

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1.1735 & 0.0868 & 0.0024 \\ 0.0868 & 0.1335 & 0.0109 \\ 0.0024 & 0.0109 & 0.1157 \end{bmatrix}$$

Gains obtenus avec $g_u = 3$

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} -0.2907 & -0.4358 & -3.1823 \\ -4.2986 & -2.9330 & 0.6544 \end{bmatrix} \\ K_2 &= \begin{bmatrix} 0.2832 & -0.5661 & -2.3188 & 0.0003 & -0.0001 & 0 \\ -0.0001 & 0 & 0.0072 & 0 & -0.0015 & -0.0875 \end{bmatrix} \\ K_3 &= \begin{bmatrix} -0.2270 & 0.4016 & -0.9274 & -0.0291 & 0 \\ -0.5501 & -2.3356 & 0 & -0.5677 & 0.0036 \\ & & 0.0002 & -0.0001 & -0.8693 & 0 & -1.0000 \\ & & -0.5421 & -2.3338 & -0.0013 & -2.3384 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et la boucle fermée :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4.2986 & -2.9330 & 1.6544 \\ -0.2907 & -0.4358 & -3.1823 \end{bmatrix}; \\ \tilde{A}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 0 & 0.0072 & 0 & -0.0015 & -0.0875 \\ -0.0076 & -0.0019 & -5.5010 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \tilde{A}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5501 & -2.3356 & 0 & -0.5678 & 0.0036 \\ 0.0561 & -0.1645 & -3.2461 & -0.0288 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & -0.5421 & -2.3338 & -0.0013 & -2.3384 & 0 & 0 & -1.0000 \\ & & 0 & 0 & -0.8693 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\tilde{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2270 & 0.4016 & -0.9274 & -0.0291 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & -0.8693 & 0 & -1.0000 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

La matrice de la fonction quadratique est

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.9095 & 0.0714 & 0.0079 \\ 0.0714 & 0.1482 & 0.0182 \\ 0.0079 & 0.0182 & 0.1358 \end{bmatrix}$$

Exemple 3 Les matrices de la boucle ouverte

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} & 0_{2 \times 15} & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0_{1 \times 11} \\ & 0_{2 \times 15} & \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

Le gain linéaire

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.7541 & -1.9348 & -0.2290 & -3.0115 & -2.1025 \\ -0.1226 & -0.5370 & -0.5313 & -1.0946 & -1.0192 \end{bmatrix};$$

La boucle fermée devient

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} -0.7541 & -0.9348 & -0.2290 & -3.0115 & -2.1025 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.1226 & -0.5370 & -0.5313 & -1.0946 & -1.0192 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.8767 & -2.4718 & 0.2397 & -4.1061 & -3.1217 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{A}'_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1226 & 0 & -0.1226 & 0 \\ 0 & -0.7541 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.7541 & 0 \\ 0 & -0.5370 & 0 & -0.5370 & 0 \\ 0 & -2.4661 & 0 & -0.5313 & 0 \\ 0 & -1.0946 & 0 & -1.0946 & 0 \\ 0 & -1.0192 & 0 & -2.9540 & 0 \\ 0 & -0.2290 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.0115 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.1025 & 0 & -0.2290 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.0115 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.1025 & 0 \end{bmatrix}$$

et l'estimation de la région d'attraction est donnée par

$$P_{gu1} = \begin{bmatrix} 4.4595 & 2.8152 & -5.2280 & 4.2935 & -0.6178 \\ 2.8152 & 15.7650 & 1.5561 & 13.6405 & 10.5977 \\ -5.2280 & 1.5561 & 16.2824 & -2.7390 & 4.3579 \\ 4.2935 & 13.6405 & -2.7390 & 23.4634 & 11.5673 \\ -0.6178 & 10.5977 & 4.3579 & 11.5673 & 18.2604 \end{bmatrix};$$

Les gains linéaire et quadratique

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.3574 & -0.9374 & -0.1342 & -1.4177 & -1.0110 \\ -0.0741 & -0.3835 & -0.4433 & -0.8114 & -0.7903 \end{bmatrix};$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.2424 & -0.0689 & -0.0294 & -0.4354 & 0.7211 & -0.0226 & 1.2265 \\ 0 & -0.1156 & -0.0806 & -0.3415 & 0.2372 & -0.3296 & -0.2684 & -0.5460 \\ -0.0826 & 0.0361 & -0.2609 & -0.3059 & 0 & -1.8185 & -1.2491 \\ 0.1770 & -0.0495 & -0.3236 & -0.1553 & 0.0001 & 0.9688 & 0.6760 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} -0.3574 & 0.0626 & -0.1342 & -1.4177 & -1.0110 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.0741 & -0.3835 & -0.4433 & -0.8114 & -0.7903 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4315 & -1.3209 & 0.4225 & -2.2291 & -1.8013 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{A}'_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2424 & -0.0741 & -0.1156 & -0.0741 & 0.1268 \\ -0.0689 & -0.3574 & -0.0806 & 0 & -0.1495 \\ -0.0294 & 0 & 0.6585 & 0 & -0.3709 \\ -0.4354 & 0 & 0.2372 & -0.3574 & -0.1982 \\ 0.7211 & -0.3835 & -0.3296 & -0.3835 & 0.3915 \\ -0.0226 & -1.3807 & -0.2684 & -0.4433 & -0.2910 \\ 1.2265 & -0.8114 & -0.5460 & -0.8114 & 0.6805 \\ -0.0826 & -0.7903 & 0.1770 & -1.7277 & 0.0944 \\ 0.0361 & -0.1342 & -0.0495 & 0 & -0.0134 \\ -0.2609 & -1.4177 & -0.3236 & 0 & -0.5845 \\ -0.3059 & -1.0110 & -0.1553 & -0.1342 & -0.4612 \\ 0 & 0 & 0.0001 & 0 & 0.0001 \\ -1.8185 & 0 & 0.9688 & -1.4177 & -0.8497 \\ -1.2491 & 0 & 0.6760 & -1.0110 & -0.5731 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{A}_3 = \begin{bmatrix} 0_{1 \times 35} \\ A_3(2)' \\ 0_{1 \times 35} \\ A_3(4)' \\ 0_{1 \times 35} \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned}
A_3(2) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.1156 \\ 0.1618 \\ -0.3415 \\ 0.2372 \\ -0.0689 \\ -0.0294 \\ -0.4354 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.3296 \\ 0.4527 \\ -0.5460 \\ 0.1770 \\ -0.0721 \\ 0.9029 \\ -0.2379 \\ 0.0001 \\ 0.9688 \\ 0.6760 \\ 0.0361 \\ -0.2609 \\ -0.3059 \\ 0 \\ -1.8185 \\ -1.2491 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; A_3(4) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.1156 \\ -0.0806 \\ -0.3415 \\ 0.4796 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0689 \\ 0 \\ -0.0294 \\ -0.4354 \\ -0.3296 \\ -0.2684 \\ -0.5460 \\ 0.8981 \\ -0.0495 \\ -0.3236 \\ -0.1779 \\ 0.0001 \\ 2.1953 \\ 0.5934 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0361 \\ 0 \\ -0.2609 \\ -0.3059 \\ 0 \\ 0 \\ -1.8185 \\ -1.2491 \end{bmatrix} ; \\
P_{g_u2} &= \begin{bmatrix} 3.3242 & 3.2064 & -2.8975 & 3.1352 & -0.0183 \\ 3.2064 & 13.5800 & -0.2284 & 11.8652 & 7.7005 \\ -2.8975 & -0.2284 & 9.4313 & -2.7145 & 1.9517 \\ 3.1352 & 11.8652 & -2.7145 & 17.9359 & 9.4788 \\ -0.0183 & 7.7005 & 1.9517 & 9.4788 & 13.4261 \end{bmatrix} ;
\end{aligned}$$

C.2.3 Exemples du chapitre 5

Exemple 1 Les matrices de la boucle fermée

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} ; B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ;$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}; K_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -0.5 \end{bmatrix};$$

Les valeurs de T et W pour $u_0 = 1$

$$T = 1.4497; W = \begin{bmatrix} -0.3165 & -0.7246 & 0.0046 & -0.5117 & -0.2276 \end{bmatrix}$$

pour $u_0 = 0.5$

$$T = 0.6794; W = \begin{bmatrix} -0.2538 & -0.5840 & -0.0026 & -0.5028 & -0.2377 \end{bmatrix}$$

et pour $u_0 = 0.1$

$$T = 0.0708; W = \begin{bmatrix} -0.1831 & -0.42644 & -0.0283 & -0.4656 & -0.2603 \end{bmatrix}$$

Exemple 2 Pour la loi de commande linéaire la matrice M_{r_s} correspondant à la ERA obtenue en utilisant la fonction de Lyapunov obtenue dans le chapitre précédent et les valeurs de T et W sont données par

$$M_{r_s} = \begin{bmatrix} 3.5352 & 0.0419 & -0.2857 & -0.0080 & -0.2713 \\ 0.0419 & 4.3312 & 0.0865 & -0.1938 & -0.4699 \\ -0.2857 & 0.0865 & 3.151 & 0.0567 & 0.1774 \\ -0.0080 & -0.1938 & 0.0567 & 3.0867 & 0.2073 \\ -0.2713 & -0.4699 & 0.1774 & 0.2073 & 3.4067 \\ 0.2395 & 0.1527 & -0.0276 & 0.0131 & -0.0313 \\ 0.07981 & 0.2953 & 0.0270 & -0.0040 & -0.0234 \\ 0.2295 & 0.3638 & -0.0199 & -0.0172 & -0.0878 \\ 0.2462 & 0.7419 & 0.0204 & -0.0692 & -0.1748 \\ 0.2395 & 0.0798 & 0.22950 & 0.2462 \\ 0.1527 & 0.2953 & 0.3638 & 0.7419 \\ -0.0276 & 0.0270 & -0.0199 & 0.0204 \\ 0.0131 & -0.0040 & -0.0172 & -0.0692 \\ -0.0313 & -0.0234 & -0.0878 & -0.1748 \\ 3.0814 & 0.0370 & 0.0751 & 0.0709 \\ 0.0370 & 2.9958 & 0.0543 & 0.1279 \\ 0.0751 & 0.0543 & 3.0697 & 0.1455 \\ 0.0709 & 0.1279 & 0.1455 & 3.3352 \end{bmatrix}$$

$$T = 0.1756; W = \begin{bmatrix} 0.2523 & -2.9508 & -0.6867 & 0.4307 & -0.1903 \end{bmatrix}$$

La nouvelle estimation de forme ellipsoïdale est définie par la matrice

$$P_v = \begin{bmatrix} 2.6725 & 0.9075 \\ 0.9075 & 6.4895 \end{bmatrix}$$

avec les matrices

$$T = 0.2604; W = \begin{bmatrix} -0.8791 & -2.3314 & -0.7189 & 0.6203 & 0.0636 \end{bmatrix}$$

$$M_{r_s} = \begin{bmatrix} 2.2289 & 0.2627 & -0.0387 & -0.4062 & -0.1184 \\ 0.2627 & 2.3235 & -1.5745 & 1.4922 & 0.3450 \\ -0.0387 & -1.5745 & 6.2230 & -0.4171 & -0.8958 \\ -0.4062 & 1.4922 & -0.4171 & 7.0769 & -3.8243 \\ -0.1184 & 0.3450 & -0.8958 & -3.8243 & 7.7500 \end{bmatrix}$$

Pour la loi de commande quadratique les valeurs pour l'estimation avec la fonction de degré 4 sont

$$M_{r_s} = \begin{bmatrix} 3.3547 & -0.1321 & 0.0191 & 0.1021 & 0.2465 & 0.1399 & 0.0363 & 0.1152 & 0.0817 \\ -0.1321 & 3.7700 & 0.1746 & 0.3515 & 1.0545 & 0.0541 & 0.2032 & 0.1654 & 0.7750 \\ 0.0191 & 0.1746 & 3.4101 & 0.0339 & 0.1912 & 0.0202 & 0.0427 & 0.0104 & 0.0510 \\ 0.1021 & 0.3515 & 0.0339 & 3.3789 & 0.1963 & 0.0340 & 0.0389 & 0.0413 & 0.1247 \\ 0.2465 & 1.0545 & 0.1912 & 0.1963 & 4.1147 & 0.0516 & 0.0748 & 0.1251 & 0.1832 \\ 0.1399 & 0.0541 & 0.0202 & 0.0340 & 0.0516 & 3.4422 & 0.0342 & 0.0810 & 0.0202 \\ 0.0363 & 0.2032 & 0.0427 & 0.0389 & 0.0748 & 0.0342 & 3.3155 & 0.0069 & 0.1426 \\ 0.1152 & 0.1654 & 0.0104 & 0.0413 & 0.1251 & 0.0810 & 0.0069 & 3.3316 & 0.0198 \\ 0.0817 & 0.7750 & 0.0510 & 0.1247 & 0.1832 & 0.0202 & 0.1426 & 0.0198 & 3.8721 \end{bmatrix}$$

$$T = 0.0919; W = \begin{bmatrix} -0.5855 & -2.7461 & -0.3783 & 0.7789 & -0.2468 \end{bmatrix}$$

et la nouvelle estimation de forme ellipsoïdale est définie par la matrice

$$P_v = \begin{bmatrix} 1.9474 & 1.1517 \\ 1.1517 & 6.2228 \end{bmatrix}$$

avec

$$T = 0.3079; W = \begin{bmatrix} -0.6682 & -2.3952 & -0.9414 & 0.7684 & 0.0260 \end{bmatrix}$$

$$M_{r_s} = \begin{bmatrix} 0.3352 & -0.0531 & 0.1404 & -0.2687 & 0.7150 \\ -0.0531 & 0.9754 & -0.4328 & 0.0090 & 1.4365 \\ 0.1404 & -0.4328 & 4.2199 & 0.4284 & 6.3756 \\ -0.2687 & 0.0090 & 0.4284 & 2.3389 & -0.6902 \\ 0.7150 & 1.4365 & 6.3756 & -0.6902 & 21.5737 \end{bmatrix}$$

Exemple 3 Nous présentons d'abord les résultats obtenus pour la loi de commande avec $g_u = 2$. Pour le seuil de saturation $u_{0(1)} = 3$

$$T = \begin{bmatrix} 3.2867 & 0 \\ 0 & 6.1280 \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} 22.7660 & 1.6857 & 0.0482 \\ 1.6857 & 2.5910 & 0.2115 \\ 0.0482 & 0.2115 & 2.2449 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} -0.5305 & -0.8854 & -4.2915 & -4.3706 & -3.2284 \\ -9.6088 & -11.0197 & 2.2911 & 0.0096 & -0.0008 \\ & & & & -0.2696 & -0.1873 & -1.4706 & 0.0111 \\ & & & & -0.0109 & -0.0064 & 0.0044 & -0.0205 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 5.2418 & 0 \\ 0 & 7.7398 \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} 3.7291 & 0.2931 & 0.0326 \\ 0.2931 & 0.6079 & 0.0749 \\ 0.0326 & 0.0749 & 0.5570 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} -0.8314 & -0.3085 & -2.1099 & 0.5512 & -0.2251 \\ -2.1394 & -2.0745 & 0.4955 & -0.3516 & -0.3021 \\ & & & & -0.7136 & 0.1425 & -0.4518 & 0.0009 \\ & & & & -0.8330 & -0.0634 & -0.3846 & -0.6378 \end{bmatrix}$$

Bibliographie

- [1] F. Amato, R. Ambrosino, M. Ariola, C. Consentino, and A. Merola. State feedback control of nonlinear quadratic systems. In *Proceedings of the 47th Conference on Decision and Control (CDC'07)*, pages 1699–1703, New Orleans, USA, December 2007.
- [2] F. Amato, C. Consentino, and A. Merola. On the region of attraction of nonlinear quadratic systems. *Automatica*, 43 :2119–2123, 2007.
- [3] E. M. Aylwarda, P. A. Parrilo, and J.-J. E. Slotine. Stability and robustness analysis of nonlinear systems via contraction metrics and sos programming. *Automatica*, 44 :2163–2170, 2008.
- [4] D. S. Bernstein. A plant taxonomy for designing control experiments. *IEEE Control Systems Magazine*, pages 7–14, 2001.
- [5] F. Blanchini. Set invariance in control. *Automatica*, 35 :1747–1767, 1999.
- [6] P.-A. Bliman. A convex approach to robust stability for linear systems with uncertain scalar parameters. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 42(6) :2016–2042, 2004.
- [7] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- [8] F. Camilli, L. Grune, and F. Wirth. A generalization of Zubov’s method to perturbed systems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 40(2) :496–515, 2001.
- [9] G. Chesi. Computing output feedback controllers to enlarge the domain of attraction in polynomial systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(10) :1846–1850, 2004.
- [10] G. Chesi. Estimating the domain of attraction for uncertain polynomial systems. *Automatica*, 40(11) :1981–1986, 2004.
- [11] G. Chesi. Estimating the domain of attraction via union of continuous families of Lyapunov estimates. *System & Control Letters*, 56 :326–333, 2007.
- [12] G. Chesi. Estimating the domain of attraction for non-polynomial systems via LMI optimizations. *Automatica*, 45(6) :1536–1541, 2009.

- [13] G. Chesi, A. Garulli, A. Tesi, and A. Vicino. Homogeneous lyapunov functions for systems with structured uncertainties. *Automatica*, 39(6) :1027–1035, 2003.
- [14] G. Chesi, A. Garulli, A. Tesi, and A. Vicino. Solving Quadratic Distance Problems : LMI-Based Approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(2) :200–212, 2003.
- [15] G. Chesi, A. Garulli, A. Tesi, and A. Vicino. LMI-based computation of optimal quadratic lyapunov functions for odd polynomial systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 15 :35–49, 2005.
- [16] H.-D. Chiang, M. W. Hirsch, and F. F. Wu. Stability regions of nonlinear autonomous dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(1) :16–27, 1988.
- [17] H.-D. Chiang and J. S. Thorp. Stability regions of nonlinear dynamical systems : A constructive methodology. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(12) :1229–1241, 1989.
- [18] M. Choi, T. Lam, and B. Reznick. Sum of squares of real polynomials. In *Proceedings of Symposium in Pure Mathematics*, pages 103–126, 1995.
- [19] D. F. Coutinho and C. E. de Souza. Delay-dependent robust stability and L_2 -gain analysis of a class of nonlinear time-delay systems. *Automatica*, 44(44) :2006–2018, 2008.
- [20] D. F. Coutinho, C. E. de Souza, and A. Trofino. Stability analysis of implicit polynomial systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54 :1012–1018, 2009.
- [21] D. F. Coutinho, M. Fu, A. Trofino, and P. Danès. L_2 -gain analysis and control of uncertain nonlinear systems with bounded disturbance inputs. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18 :88–110, 2008.
- [22] D. F. Coutinho and J. M. Gomes da Silva Jr. Estimating the region of attraction of nonlinear control systems with saturating actuators. *IET*, – :–, 2010. to appear.
- [23] D. F. Coutinho, A. Trofino, and M. Fu. Guaranteed const control of uncertain nonlinear systems via polynomial Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(9) :1575–1580, 2008.
- [24] E. J. Davison and M. Kurak. A computational method for determining quadratic Lyapunov functions for non-linear systems. *Automatica*, 7 :627–636, 1971.
- [25] C. Ebenbauer and F. Allgöwer. Analysis and design of polynomial control systems using dissipation inequalities and sum of squares. *Computers and Chemical Engineering*, 30 :1590–1602, 2006.
- [26] L. El Ghaoui and G. Scorletti. Control of rational systems using linear-fractional representations and linear matrix inequalities. *Automatica*, 32(9) :1273–1284, 1996.

- [27] S. Galeani, S. Tarbouriech, M. Turner, and L. Zaccarian. A tutorial on modern anti-windup design. *European Journal of Control*, 15(3–4) :418–440, 2009.
- [28] R. Genesio, M. Tartaglia, and A. Vicino. Some results on the asymptotic stability of second-order nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(9) :747–755, 1985.
- [29] R. Genesio and A. Vicino. Some results on the asymptotic stability of second-order nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29(9) :857–861, 1984.
- [30] J. M. Gomes da Silva and S. Tarbouriech. Local stabilization of discrete-time linear systems with saturating controls : an LMI-based approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(1) :119–125, 2001.
- [31] O. Hachicho. A novel LMI-based optimization algorithm for the guaranteed estimation of the domain of attraction using rational Lyapunov functions. *Journal of the Franklin Institute*, 344 :535–552, 2007.
- [32] O. Hachicho and B. Tibken. Estimating domains of attraction of a class of nonlinear dynamical systems with LMI methods based on the theory of moments. In *Proceedings of the 41st Conference on Decision and Control*, pages 3150–3155, Las Vegas, USA, December 2002.
- [33] W. Hahn. *Stability of Motion*. Springer-Verlag, 1967.
- [34] J. Hauser and M. C. Lai. Estimating quadratic stability domains by nonsmooth optimization. In *Proceedings of the 1992 American Control Conference*, pages 571–576, Chicago, USA, June 1992.
- [35] D. Henrion, D. Arzelier, D. Peaucelle, and J. B. Lasserre. On parametric-dependent lyapunov function for robust stability of linear systems. In *Proceedings of the 43rd Conference on Decision and Control*, Paradise Island, Bahamas, December 2004.
- [36] C. S. Holling. Principles of insect predation. In Edward A. Steinhaus and Ray F. Smith, editors, *Annual Review of Entomology*, volume 6, pages 163–182. Annual Reviews, 1961.
- [37] S. B. Hsu. Limiting behavior for competing species. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 34(4) :760–763, 1978.
- [38] T. Hu and Z. Lin. *Control Systems with Actuator Saturation : Analysis and Design*. Birkhäuser Boston, 2001.
- [39] H. Ichihara. Optimal control for polynomial systems using matrix sum of squares relaxations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(5) :1048–1053, 2009.
- [40] F. C. Doyle III. An anti-windup input-output linearisation scheme for SISO systems. *Journal of Process Control*, 9(3) :213–220, 1999.
- [41] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, 1995.

- [42] Z. Jarvis-Wloszek, R. Feeley, W Tan, K. Sun, and A. Packard. Control applications of sum of squares programming. In D. Henrion and A. Garulli, editors, *Positive Polynomials in Control*, pages 3–22. Springer-Verlag, 2005.
- [43] T. A. Johansen. Computation of Lyapunov function for smooth nonlinear systems using convex optimization. *Automatica*, 36 :1617–1626, 2000.
- [44] V. A. Kamenetsky. A method for construction of stability regions by Lyapunov functions. *System & Control Letters*, 26 :147–151, 1995.
- [45] V. Kapila and K. Grigoriadis (Eds.). *Actuator saturation control*. Marcel Dekker, Inc., 2002.
- [46] N. Kawasaki, H. Nomura, and M. Masuhiro. A new control law of bilinear DC-DC converters developed by direct application lyapunov. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 10(3) :318–325, 1995.
- [47] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, third edition, 2002.
- [48] M. Kocvara and M. Stingl. *PENBMI User's Guide (Version 2.1)*, 2006.
- [49] D. E. Koditschek and K. S. Narendra. The stability of second-order quadratic differential equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(4) :783–798, 1982.
- [50] D. E. Koditschek and K. S. Narendra. Limit cycles of planar quadratic differential equations. *Journal of Differential Equations*, 54 :181–195, 1984.
- [51] D. E. Koditschek and K. S. Narendra. An observer based anti-windup scheme for nonlinear systems with input constraints. *International Journal of Control*, 72(1) :18–29, 1999.
- [52] P. Kokotovic and M. Arkac. Constructive nonlinear controle : a historical perspective. *Automatica*, 5 :637–662, 2001.
- [53] M. C. Lai and J. Hauser. Computing maximal stability region using given Lyapunov function. In *Proceedings of the 1993 American Control Conference*, pages 1500–1502, San Francisco, USA, June 1993.
- [54] J. P. LaSalle. Stability theory for ordinary differential equations. *Journal of Differential Equations*, 4 :57–65, 1968.
- [55] M. Loccufier and E. Noldus. A new trajectory reversing method for estimating stability regions of autonomous nonlinear systems. *Nonlinear Dynamics*, 21 :265–288, 2000.
- [56] A. M. Lyapunov. *Le problème général de la stabilité du mouvement*. PhD thesis, Université de Moscou, 1892. Republiée par l'université de Toulouse en 1908.
- [57] A. Magyar, G. Szederkenyi, and K. M. Hangos. Globally stabilizing feedback control of process systems in generalized lotka-volterra form. *Journal of Process control*, 18(1) :80–91, 2008.

- [58] P. March and M. Turner. Anti-Windup compensator designs for nonsalient permanent-magnet synchronous motor speed regulators. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 45(5) :1598–1609, 2009.
- [59] S. Mastellone, P. F. Hokayem, C. T. Abdallah, and P. Dorato. Nonlinear Stability Analysis for Non-Polynomial Systems. In *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, pages 1725–1730, Boston, USA, June 2004.
- [60] F. Mazenc and M. Malisoff. Strict lyapunov function constructions under lasalle conditions with an application to lotka-volterra systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(4) :841–854, 2010.
- [61] P. P. Menon, G. Herrmann, M. C. Turner, D. G. Bates, and I. Postlethwaite. General anti-windup synthesis for input-constrained nonlinear systems controlled using nonlinear dynamic inversion. In *Proceedings of the 45th Conference on Decision and Control*, pages 5435–5440, San Diego, USA, December 2006.
- [62] A. Papachristodoulou and S. Prajna. Analysis of non-polynomial systems using the sum of squares decomposition. In D. Henrion and A. Garulli, editors, *Positive Polynomials in Control*, pages 23–43. Springer-Verlag, 2005.
- [63] P. Parillo. *Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization*. PhD thesis, Caltech, Pasadena, CA, 2000.
- [64] M. M. Peet. Exponentially stable nonlinear systems have polynomial Lyapunov functions on bounded regions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 5 :979–987, 2009.
- [65] E. Prempain. An application of the sum of squares decomposition to the $\mathcal{L}_2$ computation for a class of nonlinear systems. In *Proceedings of the 44th Conference on Decision and Control and the European Control Conference*, pages 6865–6867, Seville, Spain, December 2004.
- [66] R. Sepulchre, M. Jankovic, and P. Kokotovic. *Constructive Nonlinear Control*. Springer Verlag, 1997.
- [67] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control*. Wiley, 2005.
- [68] W. Tan and A. Packard. Stability Region Analysis Using Polynomial and Composite Polynomial Lyapunov Functions and Sum-of-Squares Programming. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(2) :265–571, 2008.
- [69] W. Tan, A. Packard, and T. Wheeler. Local gain analysis of nonlinear systems. In *Proceedings of the 2006 American Control Conference*, pages 92–96, Minneapolis, USA, June 2006.
- [70] S. Tarbouriech, G. Garcia, and A. H. Glatfelter (Eds.). *Advanced strategies in control systems with input and output constraints*. LNCIS, vol.346, Springer Verlag, 2007.

- [71] S. Tarbouriech, C. Prieur, and J.M. Gomes da Silva Jr. Stability analysis and stabilization of systems presenting nested saturations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(8) :1364–1371, 2006.
- [72] S. Tarbouriech and M.C. Turner. Anti-windup design : an overview of some recent advances and open problems. *IET Control Theory and Application*, 3(1) :1–19, 2009.
- [73] A. R. Teel and N. Kapoor. The $\mathcal{L}_2$ anti-windup problem : its definition and solution. In *Proceedings of the 4th European Control Conference*, Bruxelles, Belgique, July 2006.
- [74] A. Tesi, F. Villoresi, and R. Genesio. On the stability domain estimation via a quadratic lyapunov function : Convexity and optimality properties for polynomial systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 15 :1650–1657, 2005.
- [75] B. Tibken. Estimation of the domain of attraction for polynomial systems via LMI's. In *Proceedings of the 39th Conference on Decision and Control*, pages 3860–3864, Sidney, Australia, December 2000.
- [76] B. Tibken and K. F. Dilaver. Computation of subsets of the domain of attraction for polynomial systems. In *Proceedings of 48th Conference on Decision and Control*, pages 2651–2656, Las Vegas, USA, December 2002.
- [77] B. Tibken and K. F. Dilaver. Robust stability of nonlinear polynomial systems by LMI. In *Proceedings of the 2004 IEEE Conference on Control Applications*, pages 1017–1019, Taipei, Taiwan, September 2004.
- [78] B. Tibken and Y. Fan. Computing the domain of attraction for polynomial systems via BMI optimization method. In *Proceedings of the 2006 American Control Conference*, pages 117–122, Minneapolis, USA, June 2006.
- [79] J. E. Tierno, R. M. Murray, and J. C. Doyle. An efficient algorithm for performance analysis of nonlinear control systems. In *Proceedings of the 1995 American Control Conference*, pages 2717–2721, Seattle, USA, June 1995.
- [80] U. Topcu, A. Packard, and P. Seiler. Local stability analysis using simulations and sum-of-squares programming. *Automatica*, 44 :2669–2675, 2008.
- [81] A. Trofino. Robust stability and domain of attraction of uncertain nonlinear systems. In *Proceedings of the 2000 American Control Conference*, pages 3707–3711, Chicago, USA, June 2000.
- [82] G. Valmorbida, S. Tarbouriech, and G. Garcia. Region of attraction estimates for polynomial systems. In *Proceedings of 48th Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference*, pages 5947–5952, Shanghai, China, December 2009.
- [83] G. Valmorbida, S. Tarbouriech, and G. Garcia. State feedback design for input-saturating nonlinear quadratic systems. In *Proceedings of the 2009 American Control Conference*, pages 1231–1236, Saint-Louis, USA, June 2009.

- [84] G. Valmorbida, S. Tarbouriech, and G. Garcia. State feedback design for input-saturating quadratic systems. *Automatica*, 46(7) :1196–1202, 2010.
- [85] G. Valmorbida, S. Tarbouriech, M. Turner, and G. Garcia. Anti-windup for ndi quadratic systems. In *Proceedings of the 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, pages –, Bologna, Italie, September 2010.
- [86] A. Vannelli and M. Vidyasagar. Maximal Lyapunov function and domains of attraction for autonomous nonlinear systems. *Automatica*, 21(1) :69–80, 1985.
- [87] V. Venkatasubramanian and W. Ji. Numerical approximations of (n-1)-dimensional stable manifolds in large systems such as the power system. *Automatica*, 33(10) :1877–1883, 1997.
- [88] H. K. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. SIAM, second edition, 2002.
- [89] P.F. Weston and I. Postlethwaite. Analysis and design of linear conditioning schemes for systems containing saturating actuator. In *Proceedings of the 1998 NOLCOS - IFAC Nonlinear and Control System Design Symposium*, Enschede, Pays-Bas, July 1998.
- [90] A. I. Zecevic and D. D. Siljak. Estimating the region of attraction for large-scale systems with uncertainties. *Automatica*, 46(2) :445–451, 2010.
- [91] A. L. Zelentsovsky. Nonquadratic Lyapunov Functions for Robust Stability Analysis of Linear Uncertain Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(1) :135–138, 1994.
- [92] Q. Zheng and F. Wu. Nonlinear output feedback $\mathcal{H}_\infty$ control for polynomial nonlinear systems. In *Proceedings of the 2008 American Control Conference*, Seattle, USA, June 2008.
- [93] Q. Zheng and F. Wu. Regional stabilisation of polynomial non-linear systems using rational Lyapunov functions. *International Journal of Control*, 82(9) :1605–1615, 2009.
- [94] V. I. Zubov. *Methods of A. M. Lyapunov and Their Application*. Noordhoff, first edition, 1964.