



HAL
open science

Quelques problèmes de transport et de contrôle en économie: aspects théoriques et numériques

Aimé Lachapelle

► **To cite this version:**

Aimé Lachapelle. Quelques problèmes de transport et de contrôle en économie: aspects théoriques et numériques. Mathématiques [math]. Université Paris Dauphine - Paris IX, 2010. Français. NNT: . tel-00512404

HAL Id: tel-00512404

<https://theses.hal.science/tel-00512404>

Submitted on 30 Aug 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-DAUPHINE
EDDIMO
DFR MATHÉMATIQUES DE LA DÉCISION

Numéro attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**Quelques problèmes de transport et de contrôle
en économie: aspects théoriques et numériques**

THÈSE

Pour l'obtention du titre de

DOCTEUR EN SCIENCES - SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
(Arrêté du 7 Août 2006)

Présentée par

Aimé LACHAPELLE

Soutenue publiquement le 3 juin 2010 devant le jury composé de:

Examineurs : **J. Frédéric Bonnans**
Directeur de recherche, INRIA
Jean-Michel Lasry
Professeur associé, Université Paris-Dauphine
Jérôme Renault
Professeur, Université de Toulouse I et TSE
Filippo Santambrogio
Maître de conférences, Université Paris-Dauphine

Rapporteurs : **Yves Achdou**
Professeur, Université Paris-Diderot
Giuseppe Buttazzo
Professeur, Università di Pisa

Directeurs de thèse : **Guillaume Carlier**
Professeur, Université Paris-Dauphine
Julien Salomon
Maître de conférences, Université Paris-Dauphine

L'université n'entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans les thèses : ces opinions doivent être considérées comme propres à leurs auteurs.

A Andreea

Remerciements

Ce mémoire est l'aboutissement de trois années de travaux de recherche dirigés par Guillaume Carlier et Julien Salomon. C'est avec un immense plaisir que je les en remercie. Je ne pourrais ici décrire l'étendue de l'emprunte de leurs enseignements laissée sur moi, ni d'ailleurs combien ils m'ont tous deux apporté, tant sur le plan scientifique que personnel. Leur grande disponibilité, leur encadrement amical et bienveillant tout au long d'une belle thèse (et même pendant mes pires crises d'adolescence scientifique), me resteront toujours en mémoire. Personne mieux qu'eux n'aura réussi à stimuler mes envies d'apprendre, de comprendre, de modéliser et de simuler.

J'ai eu la chance de rencontrer Giuseppe Buttazzo à plusieurs reprises. Ses remarques, interprétations et son enthousiasme pour mes travaux m'ont été très bénéfiques. Je suis très honoré qu'il ait accepté d'être rapporteur de cette thèse et lui en sais gré.

Je veux aussi remercier vivement Yves Achdou pour avoir accepté la charge de rapporteur. Les contacts que nous avons pu avoir à Paris comme à Chicago ont été très agréables et enrichissants.

Ma rencontre avec Filippo Santambrogio a eu lieu dès le début de ma thèse et nos relations n'ont cessé de s'intensifier depuis lors. Je tiens à lui dire un grand merci d'avoir accepté de faire partie du jury et pour les très nombreux moments qu'il m'a consacrés; je dois avouer que ces trois années auraient eu un tout autre visage scientifique (mais pas seulement, loin de là!) si je n'avais pas été si souvent auprès de lui. L'amitié par laquelle nous sommes à présent liés m'est extrêmement précieuse. Je suis par ailleurs très heureux d'avoir débuté avec lui une collaboration fructueuse en théorie des contrats, j'apprécie sa sensibilité économique naissante ainsi que de l'y voir changer les maths.

Ma reconnaissance s'adresse aussi à Jean-Michel Lasry pour son éternel et vif enthousiasme, notamment sur les Mean Field Games. Les très nombreuses discussions que nous avons eues ont joué un rôle de premier plan dans l'élaboration de cette thèse. Jean-Michel m'a, je crois, démontré toute l'importance de l'intuition en économie mathématique. Je suis extrêmement heureux de le voir participer au jury de cette thèse, et l'en remercie.

Je tiens aussi à exprimer ma gratitude à l'ensemble du jury, pour m'avoir accordé l'honneur d'y prendre part; un grand merci donc à Frédéric Bonnans et à Jérôme Renault (avec qui j'aurais ainsi débuté - premier amphi, première année - et cloturé mon aventure dauphinoise).

S'il est une personne que j'admire profondément en tous points et sans qui ces pages n'existeraient définitivement pas, c'est sans aucun doute Ivar Ekeland. Je le remercie du fond du cœur pour ses savants conseils qui ont largement contribué à sculpter mon parcours depuis quelques années. Son amitié, son savoir, l'attention toujours grande portée à mes travaux, m'ont beaucoup apporté et je lui en suis infiniment reconnaissant. Je veux enfin le remercier pour les invitations à Vancouver durant lesquelles se sont développées mes affinités pour les applications en économie.

Gabriel Turinici, qui a encadré mon mémoire de Master, est l'homme qui a su me transmettre le goût pour la recherche et organiser mon entrée dans ce monde, notamment en me présentant à d'autres chercheurs. C'est bien souvent vers lui que je me suis tourné, même dans des moments plus difficiles, et il m'a constamment entouré et gentiment conseillé. J'ai appris énormément à ses côtés, notamment durant notre collaboration (avec Julien Salomon) que reprend un chapitre de cette thèse. Pour tout cela et parce qu'il m'honore de son amitié, je tiens à le remercier chaleureusement.

Un grand merci à mes amis thésards, tout particulièrement à Mauricio García, Freddy Hernández, Vito Mandorino, Pierre Ruether, Joana Santos, Nicolas Schmidt. Ils ont tous contribué à créer une atmosphère très conviviale dans le bureau C618 ou lors de nos rendez-vous et groupes de travail du jeudi soir.

J'ai eu la chance d'effectuer mes travaux dans un environnement scientifique et humain tout à fait remarquable. J'ai donc pu croiser et rencontrer nombre de personnes, au CEREMADE comme dans l'environnement de la chaire Finance et Développement Durable, qui comptent beaucoup pour moi. Je voudrais ainsi remercier René Aïd avec qui j'ai eu de passionnantes discussions sur les modèles de choix de technologies, Eric Séré pour sa gentillesse et pour avoir toujours appuyé financièrement mes déplacements, Rabah Tahraoui pour son immuable bonne humeur et les longues discussions dans les couloirs de Dauphine, Bruno Nazaret pour ses suggestions et son aide précieuse dans la preuve du théorème 3.2.1, Rose-Anne Dana qui aura toujours été là pour moi, Guillaume Legendre, et tous les autres membres du CEREMADE. Merci aussi aux hommes perchés du septième étage, Pierre Ruether et Maximilien Nayaradou pour m'avoir ouvert (très) souvent la porte de leur bureau effervescent; je n'oublie pas non plus Olivier Guéant et Damien Fessler.

Par ailleurs, tout au long de ma thèse, j'ai eu la chance de cotoyer de nombreuses personnes à qui je veux exprimer ma gratitude, je pense notamment à Sylvain Sorin, Nadia Oudjane, Myriam Comte.

Je ne souhaite pas m'étendre sur des considérations personnelles mais je ne peux oublier de remercier mes plus proches, en outre parce qu'ils ont écouté patiemment et sans broncher mes tentatives de vulgarisation. Un grand merci donc à mes parents Claire et Philippe, à ma sœur Marie, à mes quatre grands-parents, à mes fidèles amis Cécile, Clarisse, Fanny, Lisa, Mathilde, Nicole, Antoine, Jérémie, Mathieu, Nicolas, Virgile, mais surtout, surtout à ma douce épouse Andreea qui sait le rôle déterminant qu'elle a joué.

Résumé : Dans cette thèse on explore l'utilisation du contrôle optimal et du transport de masse pour la modélisation économique. Nous saisissons ainsi l'occasion de réunir plusieurs travaux faisant intervenir ces deux outils, parfois en interactions l'un avec l'autre. Dans un premier temps nous présentons brièvement la récente théorie des jeux à champ moyen introduite par Lasry et Lions et nous concentrons sur le point de vue du contrôle de l'équation de Fokker-Planck. Nous exploitons cet aspect à la fois pour obtenir des résultats d'existence d'équilibres et pour développer des méthodes numériques de résolution. Nous testons les algorithmes dans deux cas complémentaires à savoir le cadre convexe (aversion à la foule, dynamiques à deux populations) et le cadre concave (attraction, externalités et effets d'échelle dans un modèle stylisé de transition technologique). Dans un second temps, nous étudions un problème de matching mêlant transport optimal et contrôle optimal. Le planificateur cherche un couplage optimal, fixé pour une période donnée (engagement), étant donné que les marges évoluent (éventuellement aléatoirement) de façon contrôlée. Enfin, nous reformulons un problème de partage de risque entre d agents (pour lequel nous prouvons un résultat d'existence) en un problème de contrôle optimal avec contraintes de comonotonie; ceci nous permet d'obtenir des conditions d'optimalité à l'aide desquelles nous construisons un algorithme simple et convergent.

Mots clés : Jeux à champ moyen, contrôle optimal, transport optimal, approximations numériques, calcul des variations, contrôle de Fokker-Planck, économie mathématique.

Abstract : In this thesis we explore some uses of optimal control and mass transport in economic modeling. We thus catch the opportunity to bring together some works involving both tools, sometimes mixing them. First, we briefly present the recent mean field games theory introduced by Lasry & Lions and focus on the optimal control of Fokker-Planck setting. We take advantage of this aspect in order to obtain both existence results and numerical methods to approximate solutions. We test the algorithms on two complementary settings, namely the convex setting (crowd aversion, two populations dynamics) and the concave one (attraction, externalities and scale effect for a stylized technology switch model). Secondly, we study matching problems combining optimal transport and optimal control. The planner looks for an optimal coupling, fixed during the considered time period (commitment), knowing that the marginals evolve (possibly randomly) and that she can control the evolution. Finally we reformulate a risk-sharing problem between d agents (for whose we prove an existence result) into an optimal control problem with comonotonic constraints. This enables us to write optimality conditions that we use to build a simple convergent algorithm.

Keywords : Mean field games, optimal control, optimal transport, numerical approximations, calculus of variations, Fokker-Planck control, mathematical economics.

Table des matières / Contents

1	Introduction	1
2	Présentation des jeux à champ moyen	9
2.1	Un exemple statique simple	9
2.2	Typologie des jeux à champ moyen	11
2.2.1	Dérivation des équations du système MFG, existence et unicité . . .	12
2.2.2	Lien avec le contrôle optimal: le cas dérivant d'un potentiel	13
3	Computation of MFG, technology switch modeling	17
3.1	Introduction	18
3.2	The Model	19
3.2.1	The agents	19
3.2.2	The costs	20
3.2.3	Minimization problem and MFG	21
3.2.4	Existence	21
3.2.5	Optimality conditions	25
3.2.6	Some remarks	26
3.3	Numerical Simulations	26
3.3.1	Discretized cost functional	27
3.3.2	Numerical scheme for the controlled Kolmogorov equation	28
3.3.3	Adjoint state	29
3.3.4	Variations in $J_{dt,dx}$	29
3.3.5	Optimization procedure	30
3.4	Simulations	32
3.4.1	Positive externality: the households choose the same technology . .	33
3.4.2	Multiplicity of solutions: the possibility of a technological transition	35
3.4.3	Dispersion in the case of irreversibility	37
4	MFG et mouvements de foule à deux populations	41
4.1	Introduction	42
4.2	Existence, unicité	43
4.2.1	Présentation du problème	43
4.2.2	Optimalité	44

4.2.3	Existence	46
4.3	Méthode numérique	49
4.4	Simulations	52
4.4.1	Aversion à la foule	52
4.4.2	Interactions dynamiques entre deux groupes	52
5	Optimal transport and optimal control	59
5.1	Introduction	60
5.2	The coupled case	61
5.2.1	The optimization problem	61
5.2.2	Existence	62
5.2.3	Some cases of uniqueness	63
5.2.4	Alternative formulations	66
5.3	The decoupled case	66
5.4	The linear-quadratic deterministic case	68
5.4.1	The coupled case	69
5.4.2	The decoupled case	69
6	Risk-sharing with many agents	73
6.1	Introduction	74
6.2	Reformulation of a class of risk-sharing problems	75
6.2.1	Preliminaries	75
6.2.2	The two-agents case	78
6.2.3	Stability by sup-convolution and existence for $d + 1$ agents	79
6.2.4	Reformulation	82
6.3	Optimality conditions	83
6.4	Algorithm and numerical results	85
6.4.1	Algorithm and convergence	85
6.4.2	Numerical experiments	87

Chapitre 1

Introduction

Introduction Générale

La théorie du contrôle optimal et le transport de masse interviennent dans de nombreux modèles en économie. Aussi proposons-nous dans ce travail relativement pluridisciplinaire de donner quelques exemples d'utilisation de ces outils mathématiques en étudiant les aspects théoriques et numériques de quelques modèles, souvent même en considérant les deux outils (contrôle et transport) à la fois.

En ce qui concerne les problèmes de contrôle optimal en économie, l'une des premières distinctions que l'on peut faire porte sur le contrôleur. Nous détaillons dans cette thèse à la fois des modèles dans lesquels le contrôle est exercé par les individus (au niveau microscopique) aussi bien que par un planificateur. Nous espérons montrer au lecteur que l'usage de la théorie du contrôle optimal est au moins double.

En premier lieu il peut se révéler inattendu et fructueux. Nous exploitons ainsi pour deux modèles (l'un de jeux à champ moyen, l'autre de partage de risque multi-agents) des reformulations de problèmes non initialement posés en termes de contrôle optimal, en vue d'approcher numériquement leurs solutions.

L'usage du contrôle optimal peut aussi être novateur, c'est précisément ce que nous illustrons en empruntant à Lasry et Lions leur récente théorie des jeux à champ moyen, pour deux modèles étudiant les interactions entre individus (ou agents) au sein de grands groupes (ou populations). Nous verrons encore cet aspect novateur en enrichissant un problème de matching avec transport optimal de mesure dans lequel le planificateur a aussi la possibilité de contrôler (i.e. agir sur) les marges.

Par transport de masse nous entendons ici d'une part équation de transport et d'autre part transport optimal de mesure.

Nous insistons sur l'aspect évolutif qui est caractérisé par l'utilisation d'équations de transport (jeux à champ moyen, équation de Fokker-Planck) mais aussi par le contrôle dynamique de marges (contrôle optimal et transport optimal pour la planification).

Dans cette thèse, le transport optimal entre en scène dans un modèle de planification motivé par l'allocation de tâches à des employés (dont les caractéristiques peuvent évoluer et

être contrôlées). Nous voyons ici apparaître un premier mélange des deux outils mathématiques. Un second a lieu dans les modèles basés sur la théorie des jeux à champ moyen dans lesquels interviennent des équations de transport contrôlées (équations de Fokker-Planck ou Kolmogorov).

Jeux à champ moyen

La théorie des jeux à champ moyen (souvent notée dans la suite par MFG, sigle de sa traduction anglaise "Mean Field Games") a été récemment introduite par Lasry et Lions ([51, 52, 53]) pour décrire des situations d'équilibre en considérant un continuum de joueurs (aussi appelés agents). Le nom donné à cette théorie se justifie d'une part parce qu'elle constitue une branche de la théorie des jeux et d'autre part car elle intervient lorsque les joueurs ont des interactions de type "champ moyen" *i.e* des interactions où l'influence d'un agent est négligeable sur l'état global du système considéré. Ceci constitue l'une des principales caractéristiques des situations de jeux à champ moyen, à savoir l'atomisation de l'agent dans l'économie (jeux non-atomiques). Ce dernier adoptera ainsi un comportement stratégique basé sur ses caractéristiques propres mais aussi sur l'ensemble des caractéristiques des joueurs, son action propre ayant un impact très réduit sur l'état global. Citons encore deux hypothèses fondamentales des MFG : l'anonymat des agents (les permutations entre joueurs sont sans effet sur le champ moyen, les joueurs sont indistinguables mais peuvent être différents), ainsi que l'hypothèse, classique en économie, d'anticipations rationnelles. Il convient aussi de noter que les jeux à champ moyen permettent de se placer aussi bien dans un cadre d'étude en temps continu, avec ou sans horizon (laissant grande ouverte la porte à la modélisation de phénomènes de transition) que dans un environnement aléatoire, stochastique.

Un système de jeux à champ moyen décrit une situation d'équilibre dans le jeu avec une infinité d'agents. Aussi désignons-nous ce système par équilibre de champ moyen ou encore système MFG. Lasry et Lions montrent dans [51, 52, 53] qu'un tel système n'est autre que l'asymptotique d'un équilibre de Nash dans un jeu à N joueurs qui optimisent un critère (dans ce travail nous n'étudions jamais cette asymptotique et nous nous plaçons directement dans le cas du continuum d'agents). C'est précisément par ce passage à la limite que se révèle un grand intérêt des MFG : la description de l'équilibre s'allège considérablement dans le cas d'un continuum d'agents dont l'influence individuelle est négligeable sur l'état global. En effet, le système MFG décrit une situation d'équilibre au travers d'un système de deux EDP *forward/backward* couplées :

$$\begin{cases} \partial_t m - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m + \operatorname{div}(m \partial_p H(x, \nabla v)) = 0 \\ \partial_t v + \frac{\sigma^2}{2} \Delta v + H(x, \nabla v) = V[m]. \end{cases}$$

Plus précisément, la première EDP est une équation de transport décrivant l'évolution de la distribution des agents (ou de leurs caractéristiques). La seconde équation correspond quant à elle à une équation de type Hamilton-Jacobi-Bellman, provenant de l'optimisation

d'un critère par le biais d'un contrôle. L'aspect *forward/backward* est intrinsèquement lié à l'hypothèse d'anticipations rationnelles.

Du point de vue des mathématiques appliquées, les systèmes d'EDP couplées de la sorte sont souvent difficiles à résoudre. Cependant, il s'avère que les systèmes MFG conduisent dans bon nombre de cas à une étude théorique (existence, unicité), parfois même à des résolutions explicites, et très souvent à une calculabilité numérique. C'est en fait sur ce dernier point que nous insistons dans cette thèse. Dans certains cas, il résulte que la solution du système d'équilibre d'un jeu à champ moyen est un point critique d'un problème de contrôle optimal régit par une équation de transport (plus précisément l'équation de Fokker-Planck aussi appelée Kolmogorov), ayant la forme suivante :

$$\begin{cases} \inf_{\alpha} J(\alpha, m) := \int_0^T \int_{\Omega} L(x, \alpha) m(t, x) dx + \Phi(m)(T) + \Psi(m_T) \\ \partial_t m - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m + \operatorname{div}(\alpha m) = 0, \quad m(0, \cdot) = m_0(\cdot). \end{cases}$$

C'est en fait un principe d'efficience : les incitations de chaque agents mènent à une situation d'équilibre minimisant un coût global (qui n'est pas cependant la moyenne des coûts individuels). Dans ce qui suit, et à la différence de méthodes numériques récemment proposées par Guéant (voir [38, 39], notion de stabilité éductive) d'une part, et Achdou et Capuzzo-Dolcetta [2] (méthodes développées directement sur le système d'EDP en horizon infini, méthodes de Newton dans le cas de l'horizon fini) d'autre part, nous nous basons et nous appuyons exclusivement sur cette approche "optimisation" (ou contrôle optimal) des jeux à champ moyen pour développer des algorithmes de résolution aussi bien que pour retrouver l'existence de solutions.

Les jeux à champ moyen offrent une nouvelle classe de modélisation particulièrement utile en économie dont l'utilisation semble connaître un essor important. Nous pouvons citer pour exemple une application à la théorie de la croissance soulignant explicitement l'importance des distributions de Pareto déjà observées empiriquement dans la théorie des inégalités (voir [38] ou [40]). Un autre exemple récent auquel s'intéressent Giraud, Guéant, Lasry et Lions dans [37] est une modélisation MFG de la production d'une ressource épuisable (comme le pétrole).

Ci-après nous proposons de donner, dans le chapitre 2, une présentation intuitive et formelle de la théorie des MFG. Nous commençons par un exemple simple fortement inspiré du cours de Lions ([56]), nous écrivons le modèle MFG en le justifiant brièvement, nous rappelons un résultat d'existence et d'unicité et enfin mettons en évidence le lien avec le contrôle optimal. Le chapitre 3 (voir aussi [49]) est quant à lui consacré à la description d'un algorithme de résolution des MFG (dans le cas où le critère de contrôle optimal associé est concave en la distribution globale, ce qui correspond à une attirance pour les choix des autres). Pour ce faire, nous nous appuyons sur un modèle stylisé de choix de technologies avec économie d'échelle et en présence d'externalités positives. Nous voyons dans un cas, grâce aux simulations, que la non-unicité des solutions peut s'interpréter comme la possibilité d'une transition technologique. Nous faisons aussi un bref parallèle avec les travaux de Mancur Olson ([63]) sur l'action collective et le phénomène du passager clandestin.

Enfin, et pour conclure en ce qui concerne les jeux à champ moyen, nous présentons au chapitre 4 un modèle de mouvements de foule pour deux populations, ainsi qu'une méthode de descente de gradient dans le cas complémentaire au précédent, à savoir le cas où le critère est convexe par rapport à la densité globale (aversion à la foule). Nous exhibons ensuite quelques résultats numériques concernant les interactions entre groupes, plus précisément dans un cas de "xénophobie" où les deux populations ont des intérêts contradictoires.

Transport optimal et contrôle optimal

La théorie du transport optimal de mesure est née en 1781 avec les travaux de Monge ([62]) qui a posé le problème suivant. Etant données deux densités de probabilité f et g associées à des mesures de probabilité de Radon μ et ν , trouver une application $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ transportant la première densité sur la seconde i.e. telle que T minimise la quantité

$$\int_{\mathbb{R}^d} |T(x) - x| f(x) dx,$$

et pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}^d$

$$\int_A g(x) dx = \int_{T^{-1}(A)} f(y) dy.$$

Ce problème est longtemps resté sans solution, c'est-à-dire sans résultat d'existence ni caractérisation de minimiseur(s), et ce sont les travaux de Kantorovich et de Koopmans qui l'ont remis au goût du jour au XX^{ième} siècle en s'intéressant à des problèmes de planification (ce qui leur valu le prix Nobel d'économie en 1975). Leur motivations premières étaient le transport optimal de charbon (provenant de mines) à des usines d'acier pour le premier auteur, et le transport maritime en temps de guerre pour le second. Le problème apparaissant alors est en fait une relaxation de celui proposé par Monge. Brièvement, en notant $\Pi(\mu, \nu)$ l'ensemble des couplages entre μ et ν (ou encore des mesures de probabilité ayant pour marges μ et ν), et pour un coût de transport donné $c : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, le problème est de trouver $\gamma \in \Pi(\mu, \nu)$ qui minimise

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} c(x, y) d\gamma(x, y).$$

Depuis une vingtaine d'années (et les travaux de Brenier [7], 1987 pour la publication française), cette théorie a connu un développement fulgurant et un très grand nombre de champs d'application est apparu. En économie, l'on peut mentionner les problèmes d'allocation de ressources ou d'assignement, de matching. Citons par exemple les récents travaux portant sur des problèmes de matching (Ekeland, [28]), ou encore sur les modèles hédoniques (Ekeland d'une part, et Chiappori, McCann & Nesheim d'autre part, [29, 23]), sans oublier les applications en économie urbaine (Carlier & Ekeland, [17, 18], et Buttazzo & Santambrogio, [9]).

Dans les problèmes classiques donc, le planificateur optimise le couplage entre deux marges données. Nous proposons d'enrichir ce problème en considérant des marges non plus fixes mais pouvant évoluer de façon contrôlée. C'est là précisément l'objet du chapitre 5 (correspondant à [20]).

Cette extension nécessite bien évidemment un cadre d'étude dynamique. Insistons bien toutefois sur l'aspect stationnaire du couplage; les marges évoluent durant une période fixée $[0, T]$ alors que l'allocation/matching du planificateur, effectué(e) à l'instant initial, est valable et identique jusqu'en T . Le couplage est ainsi interprété comme un engagement (à durée déterminée T).

La motivation de ce travail est l'allocation de N tâches à N employés ; classiquement, l'employeur attribue les tâches les plus difficiles aux employés les plus qualifiés. Il est naturel d'imaginer que les caractéristiques des tâches et des travailleurs évoluent au cours du temps. Le contrôle optimal apparaît quant à lui dès lors que l'on considère par exemple la possibilité d'agir sur le niveau de qualification des employés (formations diverses, néanmoins coûteuses) ou encore sur la facilité d'exécution des tâches (investissements, typiquement). Mathématiquement, on décrit l'évolution du couple de variable employé/tâche par le processus $Z_t = (X_t, Y_t)$ ayant une dynamique du type

$$dZ_t = b(Z_t, u_t)dt + \sigma(Z_t, u_t)dW_t,$$

pour un contrôle u_t . La solution de cette équation différentielle stochastique ayant pour donnée initiale (x, y) est notée $Z_t^{x,y,u}$. Les marges de référence μ et ν correspondent aux distributions initiales de X_0 et Y_0 . Le planificateur optimise alors le contrôle u et le couplage entre μ et ν , c'est-à-dire qu'il résout le problème

$$\inf_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu), u \in \mathcal{U}} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \mathbb{E} \left(\int_0^T c(Z_s^{x,y,u}, u_s) ds + \phi(Z_T^{x,y,u}) \right) d\gamma(x, y),$$

avec c désignant le coût de transport et de contrôle et ϕ le coût final. Nous distinguerons dans le chapitre 5 les cas couplé et découplé, i.e. le cas pour lequel le contrôle du planificateur peut être choisi pour tout couple (x, y) et la situation (mathématiquement plus compliquée à traiter) où, pour les employés de type x fixé, le contrôle est choisi indépendamment de la tâche y . Nous pouvons par exemple illustrer cet aspect en pensant à l'achat d'une licence d'un nouveau logiciel dont on équipe la machine de tous les cadres. Notre étude contient notamment un résultat d'existence pour le problème couplé, un théorème de relaxation entre problèmes couplé et découplé ainsi que l'étude complète du cas déterministe quadratique.

Partage de risque multi-agents

Les travaux pionniers sur les problèmes de partage de risque (risk-sharing) en assurance datent des années soixante et sont dus à Arrow [3], [4] et Borch [6]. Depuis, ce sujet a fait l'objet de nombreuses études en mathématiques financières pour des utilités invariantes

en loi (*utilités rank-dependent* ou *mesures de risque monétaires*), notamment de la part de Carlier, Dana, Föllmer, Jouini, Schachermayer, et Touzi (voir les références précises dans le chapitre 6). Les travaux existant traitent bien souvent le cas de deux agents. Le dernier sujet abordé dans cette thèse consiste à étudier de tels problèmes de risk-sharing lorsqu'interviennent d agents ($d > 1$), pour des risques unidimensionnels.

Plus précisément, pour d agents ayant des utilités V_i monotones, invariantes en loi, Fatou (i.e. semi-continues inférieurement pour la convergence p.s. des variables aléatoires bornées) et strictement concaves ($i = 1, \dots, d$), le problème que nous souhaitons résoudre s'écrit

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^d V_i(X_i), X_i \in L_+^\infty, \sum_{i=1}^d X_i = X_0 \right\}.$$

La variable aléatoire $X_0 \in L_+^\infty$ correspond au risque global (ou à la richesse totale). Nous voyons ainsi que c'est un problème de sup-convolution et consacrons le chapitre 6 à l'étude de ce dernier (cette partie correspond à la référence [21]). Nous prouvons l'existence et l'unicité d'une solution comotone en détaillant les mécanismes permettant de passer de 2 à d agents. L'intérêt croissant porté aux mesures de risque et l'importance des récentes études sur ce sujet (voir par exemple le livre de Föllmer et Shield [32]), nous conduisent aussi à remarquer que l'existence a encore lieu pour des utilités simplement concaves.

Un cas intéressant (incluant les *rank-linear utilities* et *rank-dependent utilities*) est celui de fonctions d'utilité intégrales d'une fonctionnelle concave du quantile du risque individuel, c'est-à-dire du type

$$V_i(X) := \int_0^1 L_i(t, F_X^{-1}(t)) dt.$$

Dans ce cas, le problème abstrait de sup-convolution peut être reformulé en un problème d'optimisation (ou de contrôle) sous contraintes de comotonie, à savoir :

$$\sup \left\{ \int_a^b F(t, x(t)) dt; x \text{ tel que } \sum_{i=1}^d \dot{x}_i(t) = 1, \sum_{i=1}^d x_i(a) = a \right\}.$$

Cette reformulation variationnelle est le point clé du travail, elle permet successivement de caractériser les solutions et de développer un algorithme convergent (et très simple du fait des contraintes sous forme de simplexes) ; la méthode d'approximation ainsi obtenue est robuste au cas simplement concave. Nous détaillons quelques tests présentant en outre des régimes dans lesquels certains agents en assurent d'autres, ou encore montrant l'impact de la loi du risque global sur les règles optimales de partage.

Chapitre 2

Présentation des jeux à champ moyen

Nous présentons dans cette première section, en nous inspirant de [51, 52] et d'une partie des cours de Lions au Collège de France ([56]), un aperçu formel de la théorie MFG. Nous commençons par un exemple simple de jeu statique, un jeu de position (économie géographique).

2.1 Un exemple statique simple

Considérons un espace compact $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ muni de la distance euclidienne. Chaque joueur souhaitant se positionner "le mieux possible" dans cet espace est caractérisé par sa position. Nous pourrions en outre citer l'exemple du choix de destination de vacances estivales, mais nous ferons plus souvent référence au problème dit "de la plage" sur laquelle sont implantés des centres d'intérêt attractifs. Ainsi, alors même que chacun souhaite se placer près du glacier, proche du parking *etc*, il est assez fréquent d'observer une aversion à la foule, aux autres. En ce sens, nous tentons dans ce qui suit, de modéliser et de résoudre cette situation qui à la fois incite les joueurs à être ensemble et les repousse les uns des autres.

L'inconnue du problème est une mesure de probabilité sur Ω , que nous notons $m \in P(\Omega)$. Chaque joueur minimise un coût $F : (x, m) \in \Omega \times P(\Omega) \rightarrow F(x, m)$. Typiquement, nous pouvons penser à un coût séparé: $F(x, m) = V(x) + G(m)$ dans lequel la première composante serait liée à l'effet géographique (attraction/répulsion de certains centres) et la seconde correspondrait à la prise en compte de la répartition globale des vacanciers (aversion/attraction à la foule). Plus précisément, la fonctionnelle G peut être locale ou non, c'est à dire du type $G(m(x), \nabla m(x), D^2 m(x), \dots)$ ou $G(m * \rho_0, \nabla m * \rho_1, D^2 m * \rho_2, \dots)$.

Très formellement et intuitivement, nous voyons qu'un équilibre dans ce jeu avec un continuum de joueurs peut se décrire de la façon suivante. Un joueur est en situation d'équilibre $x \in \text{supp}(m)$ s'il est un point de minimum de l'application $y \rightarrow F(y, m)$.

Nous voyons bien que c'est un problème de point fixe: nous fixons m , minimisons par rapport à la variable qui reste puis trouvons un ensemble de points de minima ; le support de m doit alors être contenu dans cet ensemble. Mathématiquement le problème MFG

s'écrit:

$$\text{supp}(m) \subseteq \text{argmin}_y F(y, m). \quad (2.1)$$

Remark 1. *A ce stade, nous pouvons aisément remarquer que m résout (2.1) si et seulement si m minimise sur $P(\Omega)$ la fonctionnelle $f \in P(\Omega) \rightarrow \int F(y, m)f(y)dy$.*

Nous pouvons introduire le principe d'efficience dans le cas dérivant d'un potentiel à travers cet exemple simple. Ceci correspond à considérer que $F(x, m) = \phi'(m)(x)$ au sens des différentielles formelles (petites variations), pour une certaine forme linéaire $\phi : P(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. Dans le cas séparé par exemple, à savoir $F(x, m) = V(x) + G(m(x))$, le potentiel est $\phi(m) = \int Vm + \int W(m)$ avec $W' = G$. Notons que si G est croissante (W est convexe), les agents fuient la foule alors que si G est décroissante (W est concave), ils suivent la foule. Dans le cas simple où $G(t) = ct$ pour une constante c , le potentiel s'écrit $\phi(m) = \int (Vm + \frac{c}{2}m^2)$.

Le principe d'efficience donne alors le lien entre l'optimisation joueur par joueur et celle d'un critère global: nous indiquons dans la proposition suivante dans quels cas les incitations individuelles mènent à un critère global optimal et dans quels cas l'on peut se servir des incitations individuelles pour atteindre un état global optimal. Supposons qu'il existe une application $\phi : P(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , telle que $F(x, m) = \phi'(m)(x)$, alors: si m est solution du problème

$$\inf_{m \in P(\Omega)} \phi(m), \quad (2.2)$$

m est un équilibre i.e. une solution de (2.1).

Si de plus ϕ est convexe (F est monotone), il y a équivalence.

Notons bien que la stricte convexité donne automatiquement l'unicité de l'équilibre. Justifions brièvement ce résultat. Si m est un point de minimum de (2.2), nous pouvons écrire l'inéquation d'Euler en invoquant la convexité de $P(\Omega)$: $\phi'(m)(m' - m) \geq 0, \forall m'$. C'est-à-dire que l'on a l'inégalité $\int F(x, m)dm' \geq \int F(x, m)dm$ pour tout m' . Il est alors clair que m ne charge que les points de minima de $F(x, m)$: $\text{supp}(m) \subseteq \text{argmin}_y F(y, m)$.

L'autre implication est triviale dans le cas où ϕ est convexe puisqu'alors l'inéquation d'Euler est suffisante.

Dans le souci de rendre plus complet encore cet exemple de positionnement sur une plage, nous pouvons étudier de plus près la configuration $F(x, m) = V(x) + G(m(x))$. Sans perte de généralité, nous pouvons prendre $G(0) = 0$. Nous nous intéressons au cas de l'aversion à la foule, à savoir G est strictement croissante. Rappelons par ailleurs que $W' = G$. En utilisant le principe d'efficience, le problème à résoudre s'écrit:

$$\inf_{m \in P(\Omega)} \int (Vm + W(m)). \quad (2.3)$$

En se souvenant que la solution est telle que $\text{supp}(m) \subseteq \text{argmin}_y V(y) + G(m(y))$, un point de minimum dans (2.3) vérifie, pour un certain λ réel, les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} V + G(m) &\geq \lambda, \text{ sur } \Omega, \\ V + G(m) &= \lambda, \text{ sur } \text{supp}(m). \end{aligned}$$

Nous pouvons en conclure la forme de la densité de probabilité m à l'équilibre:

$$m(x) = G^{-1}(\lambda - V(x))_+.$$

Le réel λ est choisi de telle sorte que: $\int dm = 1$. Fixons $V(x) = \frac{x^2}{2}$ (le glacier se situe au point 0). Nous pouvons alors donner l'expression de la solution dans les cas suivants:

- Si $G(t) = ct$ avec c constante positive: alors $m(x) = \frac{1}{c}(\lambda - \frac{|x|^2}{2})_+$. C'est une densité semi-circulaire autour de 0.
- Si $G(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha}$, alors on trouve $m(x) = (\lambda - \frac{|x|^2}{2})_+^{1/\alpha}$, densité plus "étalée".
- Enfin, si $G(t) = \log t$, nous obtenons la gaussienne: $m(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \exp \frac{-|x|^2}{2}$.

2.2 Typologie des jeux à champ moyen

Contrairement à l'exemple précédent, nous décrivons ci-après les MFG dans le cadre dynamique (évolution de masses au cours du temps). L'objet de cette section est de présenter formellement le système d'équilibre des jeux à champ moyen et de rappeler un résultat d'existence et d'unicité. Comme nous l'avons déjà signalé plus haut, ce système couple deux EDP évoluant dans des sens opposés en temps. Aussi pouvons-nous donner sans plus attendre le dit système MFG:

$$\partial_t m - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m + \text{div}(m \partial_p H(\cdot, \nabla v)) = 0, \quad m(0, \cdot) = m_0, \quad (2.4)$$

$$\partial_t v + \frac{\sigma^2}{2} \Delta v + H(x, \nabla v) = V(m), \quad v(T, \cdot) = g(m_T). \quad (2.5)$$

Nous précisons un peu plus tard les différents objets ci-dessus (V , g ainsi que le Hamiltonien H). La donnée initiale m_0 est fixée *a priori*; c'est une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d (ou $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$) que nous prendrons régulière (densité de position des agents) et strictement positive. L'indice t représente le temps, nous nous concentrons dans cette thèse sur le cas dynamique à horizon fini, autrement dit: $t \in [0, T]$.

Ceci étant fixé, la première question naturelle que le lecteur est susceptible de se poser est celle de l'origine, du fondement du système (2.4)-(2.5). Lasry et Lions expliquent dans [51, 52, 53] que le système MFG est l'asymptotique d'un équilibre de Nash dans un jeu à N joueurs. Mais le propos du présent travail n'est pas d'étudier ce passage à limite. Le système ci-dessus peut se comprendre directement sur le modèle avec une infinité de joueurs. C'est précisément ce que nous proposons de faire formellement dans la section qui suit.

2.2.1 Dérivation des équations du système MFG, existence et unicité

Introduisons l'espace d'états Ω que nous choisissons pour des raisons de simplicité $\Omega = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, et fixons un bruit $\sigma > 0$. Le point de départ est la définition du problème individuel du joueur dont la position est $x \in \Omega$ à l'instant initial $t = 0$:

$$\begin{cases} \inf_{\alpha} \mathbb{E} \left[\int_0^T L(X_t^x, \alpha_t) + V[m_t](X_t^x) dt + g[m_T](X_T^x) \right] \\ dX_t^x = \alpha_t dt + \sigma dW_t, X_0^x = x. \end{cases} \quad (2.6)$$

Le problème individuel est donc un problème de contrôle stochastique faisant intervenir différents coûts donnés: un coût Lagrangien L lié à la position du joueur et au contrôle α qui sera supposé convexe en α , un coût global (ou de champ moyen) V , ainsi qu'un coût final g .

La dynamique du joueur est un processus stochastique contrôlé X_t partant du point x . Dans cette dynamique, W_t désigne un mouvement brownien standard, et σ correspond au bruit.

Le point clé dans la définition du problème (2.6) est la prise en compte dans le critère d'un coût portant sur l'état global du système, à savoir sur $(m_t)_{t \geq 0}$ qui désigne le champ créé par l'ensemble des joueurs, c'est-à-dire la densité des positions à l'instant t .

La dérivation du système se fait alors en deux étapes. La première est la résolution du problème de contrôle stochastique pour m donné (c'est là l'hypothèse d'anticipations rationnelles). La fonction valeur du problème (2.6) s'écrit:

$$v(t, x) = \inf_{\alpha} \mathbb{E} \left[\int_t^T L(X_s^x, \alpha_s) + V[m_s](X_s^x) ds + g[m_T](X_T^x) \right].$$

Définissons formellement le Hamiltonien $H(x, p) = L^*(x, p) := \sup_{\alpha} \{p\alpha - L(x, \alpha)\}$. Il est alors bien connu que la fonction valeur est solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)

$$\partial_t v + \frac{\sigma^2}{2} \Delta v + H(x, \nabla v) = V[m], \quad v|_{t=T} = g[m_T].$$

Très formellement toujours, dans le cas où il y a suffisamment de régularité, il est possible de définir le feedback optimal α qui est un maximiseur dans l'expression du Hamiltonien H évalué au point $(x, \nabla v(t, x))$. Le contrôle (qui est le drift du processus du joueur) est alors $\alpha := \alpha(t, x) = \partial_p H(x, \nabla v(t, x))$.

La seconde équation aux dérivées partielles du système, qui décrit l'évolution de m , est une équation de transport par drift et diffusion.

Définissons la masse à l'instant t comme suit:

$$\int \varphi dm_t = \int \mathbb{E}[\varphi(X_t^x)] dm_0(x), \quad \forall \varphi \in C^\infty,$$

avec $dX_t^x = \alpha_t dt + \sigma dW_t$. L'obtention de l'équation d'évolution réside dans l'application du Lemme d'Itô :

$$d\varphi(X_t^x) = [\alpha(t, X_t^x)\nabla\varphi(X_t^x) + \frac{\sigma^2}{2}\Delta\varphi(X_t^x)]dt + \sigma\nabla\varphi(X_t^x)dW_t.$$

En effet, en utilisant le fait que le second membre ci-dessus soit une martingale, la définition de m_t et une intégration par parties, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_0^T \varphi \partial_t m &= \frac{d}{dt} \int_0^T \varphi dm_t = \int_0^T \mathbb{E}[d\varphi(X_t^x)] dm_0(x) \\ &= \int_0^T \mathbb{E}[\alpha(t, X_t^x)\nabla\varphi(X_t^x) + \frac{\sigma^2}{2}\Delta\varphi(X_t^x)] dm_0(x) \\ &= \int_0^T \varphi [-\operatorname{div}(m\alpha) + \frac{\sigma^2}{2}\Delta m], \end{aligned}$$

et nous aboutissons ainsi à l'équation de Fokker-Planck (souvent appelée équation de Kolmogorov, notamment dans le langage des mathématiques financières) :

$$\partial_t m - \frac{\sigma^2}{2}\Delta m + \operatorname{div}(m\alpha) = 0, \quad m(0, \cdot) = m_0.$$

Nous pouvons à présent assembler le résultat des deux étapes en considérant le feedback $\alpha(t, x) = \partial_p H(x, \nabla v(t, x))$, et nous obtenons bien le système (2.4)-(2.5) présenté en début de section. Remarquons que le choix du Tore dans \mathbb{R}^d permet d'avoir de la compacité et de garantir que la densité m solution de l'équation de Fokker-Planck reste bien une mesure de probabilité dès que la donnée initiale l'est.

Enfin, pour clore ce paragraphe, rappelons simplement ici un résultat d'existence et d'unicité dont les preuves sont données dans [51, 52, 53].

Si V est un opérateur régularisant, H et g sont régulières avec $|\partial_p H| \leq C(1 + |p|)$, m_0 est régulière, alors le système (2.4)-(2.5) admet une solution. Si de plus V et g sont strictement monotones dans le sens où ils vérifient pour $k = V, g$: $\int \int (k[m_1] - k[m_2])(m_1 - m_2) \leq 0 \Rightarrow m_1 = m_2$, alors la solution est unique.

2.2.2 Lien avec le contrôle optimal: le cas dérivant d'un potentiel

L'objet de ce paragraphe est de décrire le point de vue du contrôle optimal des MFG, qui correspond à un principe d'efficacité (auquel nous avons fait allusion dans l'exemple introductif). Dans cette situation, la situation d'équilibre (dans laquelle les joueurs optimisent leur critère individuel), est un point critique d'un coût global. Le lien entre MFG et contrôle optimal a lieu dans le cas dérivant d'un potentiel, à savoir le cas où il existe deux applications Φ et Ψ telles que $V[m](x) = \Phi'(m)(x)$ et $g[m](x) = \Psi'(m)(x)$.

La solution du système d'équilibre (2.4)-(2.5) correspond alors aux points critiques du problème de contrôle optimal de l'équation de Fokker-Planck:

$$\begin{cases} \inf_{\alpha} J(\alpha, m) := \int_0^T \int_{\Omega} L(x, \alpha) m(t, x) dx + \Phi(m)(t) dt + \Psi(m_T) \\ \partial_t m - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m + \operatorname{div}(\alpha m) = 0, m(0, \cdot) = m_0(\cdot). \end{cases} \quad (2.7)$$

Un cadre fonctionnel rigoureux ainsi que l'obtention des conditions d'optimalité de ce système sont détaillés dans le chapitre 3.

Nous nous concentrons dans cette thèse sur cet aspect d'optimisation globale des jeux à champ moyen qui présente de nombreux intérêts, que ce soit pour le développement de méthodes numériques (ce que nous faisons dans les chapitre 3 et 4) ou encore pour retrouver des preuves d'existence. Enfin, et avant de passer à la suite, nous souhaitons souligner les similarités entre ce cas d'efficience des jeux à champ moyen et les récents travaux de Carlier, Jimenez et Santambroggio dans [19]. Les auteurs, qui étudient la congestion du trafic en utilisant le transport optimal de mesures, montrent qu'un équilibre de Wardrop est Pareto efficace pour le même genre de coût dérivant d'un potentiel.

Chapitre 3

Computation of MFG with application to a stylized model of technology switch

Ce chapitre est basé sur un travail commun avec J. Salomon et G. Turinici, dont le titre original est "Computation of mean field equilibria in economics", publié dans Mathematical Models and Methods in Applied Sciences.

Résumé :

Nous considérons un problème d'optimisation lié à un modèle stylisé pour le choix de technologies (avec externalités et économie d'échelle). Après avoir prouvé un résultat d'existence, nous introduisons un algorithme de résolution du problème MFG. Nous terminons avec quelques résultats numériques mettant notamment au jour un cas de multiplicité d'équilibres de champ moyen décrivant une possible transition technologique.

Mots clés : Mean field games, équilibre dynamique, externalités, algorithmes monotones, contrôle optimal, optimisation non convexe.

Abstract :

Motivated by a mean field games stylized model for the choice of technologies (with externalities and economy of scale), we consider the associated optimization problem and prove an existence result. To complement the theoretical result, we introduce a monotonic algorithm to find the mean field equilibria. We close with some numerical results, including the multiplicity of equilibria describing the possibility of a technological transition.

Keywords : Mean field games, dynamic equilibrium, externalities, monotonic algorithms, optimal control, non-convex optimization.

3.1 Introduction

Mean field games (hereafter MFG), introduced recently by Jean-Michel Lasry and Pierre-Louis Lions (Ref. [51, 52, 53]), appear to be well adapted to economic modeling.

While in standard game theory there are a finite number of players, MFG studies the behavior of a continuum of agents.

Over a finite time horizon T , each rational player minimizes a criterion:

$$\mathbb{E} \left\{ \int_0^T L(X_t, \alpha_t) + V[m](X_t) dt \right\},$$

over all eligible controls α_t . The state of a generic player is $X(t)$ (also denoted X_t), which is a diffusion process governed by the controlled stochastic differential equation $dX_t = \sigma dW_t + \alpha_t dt$, starting at $X_0 = x_0$. Here W_t is a Brownian motion, L is a cost for changing states, and V relates to the state cost. All players solve the same stochastic control problem but differ in their initial characteristic x_0 distributed under a given probability measure m_0 .

The criterion depends on the population density m and this dependence models the interactions between players but reflects the insignificance of the individual influence (the agent is atomized in the economy). This aspect will also be used to traduce a scale effect and externalities. Each player chooses a rational strategy taking into account its own parameters but more especially the global distribution of agents m .

Mathematically, a mean field equilibrium (*i.e.* Nash point for an infinite number of players), leads to a PDE system coupling an Hamilton-Jacobi-Bellman equation and a Kolmogorov equation (see Ref. [53]):

$$\begin{cases} \partial_t m - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m + \operatorname{div}(-\partial_p H(x, \nabla v) m) = 0 \\ \partial_t v + \frac{\sigma^2}{2} \Delta v - H(x, \nabla v) = -V[m], \end{cases} \quad (3.1)$$

where H is the Legendre transform of L (see more details in Section 3.2.5). The MFG are suitable to describe large systems e.g., population dynamics (Ref. [48]), group interactions, etc. ..., in a stylized mathematical way amenable to numerical studies.

In this paper we focus on an application of MFG. The model enables us to design and test an efficient algorithm that finds the corresponding optimal points. The origins of the algorithm are in the field of quantum chemistry (see Ref. [58, 59, 75]).

We will proceed as follows: in Section 3.2 we present a model for the choice of insulation technology of households. We define the optimization problem and prove an existence result using a penalized problem. Then we introduce Eq. (3.1) using the optimal control framework. Section 3.3 is devoted to numerical setting and to the description of the algorithm. Finally, in Section 3.4, we show the efficiency of our method on some simulations. In particular we obtain a result showing the bundling due to the positive externality, and explore numerically the multiplicity of equilibria.

3.2 The Model

As mentioned before, our aim is not to give an exhaustive economic model, but to document qualitative behaviors related to the MFG model and propose an adapted numerical method. We choose to work in a continuous time setting, *i.e.* on the time interval $[0, T]$ where the MFG gives a very convenient characterization of a dynamic equilibrium. We look at a large economy and consider a continuum of consumer agents. Each agent is a household arbitrating between heating or better insulating their home. We next describe the modeling of the agents and their action.

3.2.1 The agents

Two important characteristics are assumed. First, any agent (household) owns exactly one house and cannot move to another before the horizon T . Secondly, we consider that the households are anonymous (*i.e.* they have similar accommodations and preferences) but possibly different insulation levels. One of our goals is to find a dynamic equilibrium when there is the possibility of a technological transition (from energy consumption to insulation). Introducing externalities and economy of scale impacts the strategy of the households. Intuitively, we deal with a model where two particular behaviors are expected: either all agents continue heating their home or they all decide to insulate it.

Thus, each agent is associated to an insulation level, denoted by $x \in [0, 1]$, which fully characterizes her state. The null insulation level $x = 0$ corresponds to a house with only thin walls, whereas in the maximal insulation level $x = 1$ all existent technologies of insulation are used. The dynamics of the agent corresponds to the following controlled process:

$$dX_t = \sigma dW_t + \alpha_t dt + dN_t(X_t). \quad (3.2)$$

In this expression, the control variable is α_t , which can be interpreted as the effort required to insulate. The agent optimizes her cost (described in the next section) with respect to α_t . The term W_t is a standard real valued Brownian motion centered at zero. The multiplicative factor corresponding to W_t is the noise σ , which is related to the technological innovations and the climate (change of temperatures, storm, *etc.*); σ is assumed to be a datum of the model. The variable X_t is a diffusion process with reflexion. In the above formula, the reflexion part has been denoted by $N_t(X_t)$. In our model, this guarantees that the process stays in $[0, 1]$. We refer to Ref. [33] for additional details about this formulation. The initial density of agents, denoted by m_0 , is given; it describes agents' ownership of insulation material at $t = 0$, and corresponds to the density of the initial variable X_0 .

Remark 2. *In what follows, we consider the evolution of the density of agents $m(t, \cdot)$ for $t \in [0, T]$. We recall that for the diffusion process $dY_t = \sigma dW_t + \alpha_t dt$ in \mathbb{R} , with initial distribution m_0 , the evolution of the law of Y_t follows the forward Kolmogorov equation (see*

Ref. [46] for a proof):

$$\partial_t m - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m + \operatorname{div}(\alpha m) = 0 \text{ in } \mathbb{R} \times (0, T], \quad m(0, \cdot) = m_0(\cdot). \quad (3.3)$$

or, equivalently, for every test-function ψ :

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(y) m(t, y) dy = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}(\psi(Y_t^y)) m_0(y) dy.$$

The reflexive part of process X_t leads to the same equation in $[0, 1] \times (0, T]$ with homogeneous Neumann boundary conditions $m'(t, 0) = m'(t, 1) = 0$ for all $t \in (0, T)$. In other contexts this equation is also called the controlled Fokker-Planck equation.

We next model, through a cost functional to be minimized, how the agents control their insulation level.

3.2.2 The costs

In our model, any agent is assumed to minimize a cost functional composed of three terms: the cost of acquiring insulation, the insulation maintenance cost and the heating cost.

The cost of acquiring insulation is modeled as the cost to change the state that we take quadratic in the control variable:

$$h(\alpha_t) := \frac{\alpha_t^2}{2}.$$

The second term is a state cost, namely the insulation maintenance cost:

$$g(t, x, m) := \frac{c_0 x}{c_1 + c_2 m(t, x)},$$

with c_0 , c_1 and c_2 are some positive constants. In this setting, this term is increasing with respect to x which means that the higher is the insulation level the higher is the maintenance cost. On the other hand, it is decreasing with respect to the global density of agents m . This property is related to two economical concepts: economy of scale and positive externality. Basically, this term encourages the agents to do similar choices: higher the number of players having chosen the same insulation level, lower its cost.

Finally, the heating cost is taken into account by introducing the third term:

$$f(t, x) := p(t)(1 - \beta x).$$

In this definition, $\beta \in [0, 1]$ is given, and $p(t)$ stands for the unit price of energy (electricity, gas, ...) that may depend on time; by unit we mean the price of energy for a quantity needed to heat a not insulated house. Various forms of this price are studied in the last section (simulations). The factor $(1 - \beta x)$ is introduced to take into account the discount rate of the heating price with respect to the insulation level. Let us introduce the notation:

$$\phi(m)(t) := \int_0^1 \left(f(t, x) + g(t, x, m) \right) m(t, x) dx.$$

The addition of these three costs will constitute the functional to be minimized, as we will see in the next paragraph.

3.2.3 Minimization problem and MFG

We are now in the position to write the minimization problem we consider in this paper. A first formulation is:

$$\begin{cases} \inf_{\alpha} \mathbb{E} \left[\int_0^T h(\alpha(t, X_t^x)) + V[m](X_t^x) dt \right], \\ dX_t^x = \alpha_t dt + \sigma dW_t + dN_t(X_t^x), \\ X_0^x = x, \end{cases} \quad (3.4)$$

$V = \phi'$ (see Ref. [52]). For the sake of simplicity, we consider that there is no other constraint on the control variable. This system corresponds to a Lagrangian formulation, dealing with the microscopic scale (the agent). As mentioned in Remark (2), it is standard to write the Eulerian formulation of the problem:

$$\begin{cases} \inf_{\alpha} \int_0^T \left[\int_0^1 \frac{\alpha(t, x)^2}{2} m(t, x) dx + \phi(m)(t) \right] dt, \\ \partial_t m - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m + \operatorname{div}(\alpha m) = 0, \quad m(0, \cdot) = m_0(\cdot), \end{cases} \quad (3.5)$$

with boundary conditions: $m'(\cdot, 0) = m'(\cdot, 1) = 0$, $\alpha(\cdot, 0) = \alpha(\cdot, 1) = 0$. Our work is related to the optimal control of the forward Kolmogorov equation. In this model, the agents are rational and they have rational expectations: in the minimization problem, the households see $m(t, \cdot)$ as given for every t in $[0, T]$. A solution of this problem will present many similarities with an equilibrium with rational expectations.

Writing our problem as a MFG problem with a finite horizon (as in Ref. [53]) means that the critical points of problem (3.5) correspond to mean field equilibria. As recalled in the introduction, these are approximations of Nash equilibria of a N -players game, for large values of N . This tool enables to handle a continuum of agents, hence atomized in the economy. Consequently, there is no need to build a representative agent. We consider all the agents, from the macroscopic point of view. Before writing the critical points equations, we investigate the existence of a minimizer for a penalized problem.

3.2.4 Existence

Let Ω be the space domain; we will consider as important cases $(0, 1)$ with Neumann boundary conditions and the d -dimensional torus \mathbb{T}^d .

Let us define the time-space domain $Q := [0, T] \times \Omega$, a nonnegative continuous function $\eta : Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, and the function:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{M}_b^{ac}(\mathbb{R}_+) \times [0, T] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (m, t) &\mapsto \Phi(m)(t) := \int_{\Omega} \eta(t, x, m(x)) dx, \end{aligned}$$

where $\mathcal{M}_b^{ac}(\mathbb{R}_+)$ denotes the space of Borel measures supported on Ω , which are absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure. Note that ϕ introduced in Section 3.2.2 is a particular case of Φ above.

We refer the reader to Ref. [25] (Chap XVIII, § 4.4) for the precise functional space setting. When $\Omega = (0, 1)$ with homogenous Neumann boundary conditions or when $\Omega = \mathbb{T}^d$ we take $V = H^1(\Omega)$. For mixed Dirichlet-Neumann or more general boundary conditions the natural space V satisfies $H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$. In all cases existence of a solution of the evolution problem is ensured for $\alpha \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\Omega))$. Denote $W(0, T) := \{u : u \in L^2(0, T; V), \frac{du}{dt} \in L^2(0, T; V')\}$. One can prove that $W(0, T)$ is continuously included in $C^0(0, T; L^2(\Omega))$. We refer to Ref. [26] (Chap 2. § 5.5) for additional discussions on alternative functional settings.

We are interested in the following minimization problem:

$$\begin{cases} \inf_{\alpha} \int_0^T \left[\int_{\Omega} |\alpha(t, x)|^2 m(t, x) dx + \Phi(m_t)(t) \right] dt, \\ \partial_t m - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m = -\operatorname{div}(\alpha m), m(0, \cdot) = m_0(\cdot), + \text{boundary conditions.} \end{cases} \quad (3.6)$$

For notational convenience we consider in what follows the case $\frac{\sigma^2}{2} = 1$. We introduce, as in Ref. [5] and Ref. [8], the transformation $q = \alpha m$ *i.e.* the functions

$$\psi(a, b) := \begin{cases} \frac{|a|^2}{b} & \text{if } (a, b) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^* \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and

$$K(q, m) := \int_Q \psi(q, m) + \int_0^T \Phi(m_t)(t) dt.$$

Following Ref. [8], we can write K in a simpler form:

$$K(q, m) = \begin{cases} \int_0^T \left[\left(\int_{\Omega} \frac{|q|^2}{m} \right) + \Phi(m_t)(t) \right] dt \\ \quad := \int_0^T \left[\int_{\Omega} |\alpha(t, x)|^2 m(t, x) dx + \Phi(m_t)(t) \right] dt & \text{if } q = \alpha m \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

Then (3.6) can be rewritten:

$$\begin{cases} \inf_{(q, m) \in B} K(q, m) \\ B := \{(q, m) : q \in L^2(Q), m \text{ weak solution of } \partial_t m - \Delta m = -\operatorname{div}(q), \\ m(0, \cdot) = m_0(\cdot) \in L^2(\Omega), m \in W(0, T)\}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Since we have no information about the convexity of Φ , we introduce the penalized problem:

$$\inf_{(q,m) \in B} K_\varepsilon(q, m) := K(q, m) + \varepsilon \|q\|_2^2, \quad (3.8)$$

where $\|\cdot\|_2$ denotes the $L^2(Q)$ -norm.

Theorem 3.2.1. *If $m_0 \in L^2(\Omega)$, then the minimization problem (3.8) admits a solution $(q_\varepsilon, m_\varepsilon) \in B$ with $q_\varepsilon \in L^2(Q)$, moreover:*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\min_{(q,m) \in B} K_\varepsilon(q, m) \right) = \inf_{(q,m) \in B} K(q, m).$$

Proof. The proof proceeds in several steps that we describe below. Let (q_n, m_n) be a minimizing sequence of problem (3.8).

Step 1: bounds and convergence of q_n . Obviously (q_n, m_n) is in the domain of K . There exists a positive constant \tilde{C} such that $\tilde{C} \geq K_\varepsilon(q_n, m_n) \geq \varepsilon \|q_n\|_2^2$. The sequence q_n is bounded in $L^2(Q)$, consequently there exists a subsequence (denoted again by q_n) which converges weakly to a limit $q \in L^2(Q)$. Note also that for all n , $\operatorname{div}(q_n)$ is bounded in $L^2(0, T; V')$.

Step 2: convergence of m_n . As shown in Ref. [55], since $\operatorname{div}(q_n) \in L^2(0, T; V')$ and $m_0 \in L^2(\Omega)$, then $m_n \in W(0, T)$. Moreover $\operatorname{div}(q_n)$ is bounded in $L^2(0, T; V')$ thus m_n is bounded in $W(0, T)$. We want to prove that up to the extraction of a subsequence, m_n converges strongly to a limit m in $L^2(Q)$. The key properties are the injections:

$$V \subset L^2(\Omega) \subset V', \quad (3.9)$$

where both injections are continuous and the first one is compact. Since the injection $V \subset L^2(\Omega)$ is compact one finds that $W(0, T) \subset L^2(Q)$ is also compact, cf. Ref. [72] for a rigorous proof. Then there exists $m \in W(0, T)$ and subsequence m_n such that m_n converges to m weakly in $W(0, T)$ and strongly in $L^2(Q)$. Finally, there is another subsequence (again denoted by m_n) converging *a.e.* to m .

Note that since $q_n \rightharpoonup q$ in $L^2(Q)$ and $m_n \rightharpoonup m$ in $W(0, T)$ then m verifies the weak form of the equation $\partial_t m - \Delta m = -\operatorname{div}(q)$ thus $(q, m) \in B$.

Step 3: taking limits. The last remaining point is the limit of the functional. Thanks to the lower semicontinuity of the $L^2(Q)$ -norm and the left hand side of K (see Ref. [8]), the convergence *a.e.* of m_n to m , the continuity of η and Fatou's Lemma, we have:

$$\begin{aligned} K_\varepsilon(q, m) &= \lim_{n \rightarrow \infty} K_\varepsilon(q_n, m_n) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} K_\varepsilon(q_n, m_n) \\ &\geq \int_Q \frac{|q|^2}{m} + \int_0^T \Phi(m) + \varepsilon \|q\|_2^2 = K_\varepsilon(q, m), \end{aligned}$$

which shows that (q, m) is a minimizer of problem (3.7).
Finally, let us prove the last assertion of the theorem.

Step 4: limit of the penalized problems. Let $(q_\varepsilon, m_\varepsilon)$ be a minimizer of problem (3.8), then:

$$\inf_{(q,m) \in B} K(q, m) \leq K(q_\varepsilon, m_\varepsilon) + \varepsilon \|q_\varepsilon\|_2^2 \leq K(q, m) + \varepsilon \|q\|_2^2, \forall (q, m) \in B$$

Let us take the limit when ε converges to 0:

$$\inf_{(q,m) \in B} K(q, m) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} K_\varepsilon(q_\varepsilon, m_\varepsilon) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} K_\varepsilon(q_\varepsilon, m_\varepsilon) \leq K(q, m), \forall (q, m) \in B$$

Take the infimum in the right hand part of these inequalities and obtain:

$$\inf_{(q,m) \in B} K(q, m) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} K_\varepsilon(q_\varepsilon, m_\varepsilon) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} K_\varepsilon(q_\varepsilon, m_\varepsilon) \leq \inf_{(q,m) \in B} K(q, m),$$

hence the conclusion. □

Remark 3. *Existence of a solution to problem (3.7) is an open problem. Anyway, note that for all $\varepsilon > 0$, if $(q_\varepsilon, m_\varepsilon)$ is a minimizer of problem (3.8), the following assertions are equivalent:*

1. *problem (3.7) admits a solution $(q, m) \in B$ with $q \in L^2(Q)$,*
2. *$\exists M > 0$ such that $\forall \varepsilon > 0$, $\|q_\varepsilon\|_2 < M$.*

To see that 1 \Rightarrow 2 let q be optimal in (3.7); from the optimality of q and q_ε one obtains that for all $\varepsilon > 0$, $\|q_\varepsilon\|_2 \leq \|q\|_2$. Let us now prove 2 \Rightarrow 1. Since $(q_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ is uniformly bounded in $L^2(Q)$, we have:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \|q_\varepsilon\|_2 = 0.$$

Then, using Theorem (3.2.1) we conclude that $(q_\varepsilon, m_\varepsilon)$ is a minimizing sequence for K . Proceeding analogously to the proof of the previous theorem, we obtain that there exists a subsequence $(q_{\varepsilon_n}, m_{\varepsilon_n})$ such that q_{ε_n} converges weakly to a limit $w \in L^2(Q)$ and m_{ε_n} converges strongly to $m_w \in L^2(Q)$. Furthermore, (w, m_w) is a solution of problem (3.7) and:

$$\|q_{\varepsilon_n}\|_2 \leq \|w\|_2.$$

The weak convergence of q_{ε_n} and the previous inequality successively yield to:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q (q_{\varepsilon_n} - w)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q q_{\varepsilon_n}^2 - w^2 \leq 0,$$

so that q_{ε_n} converges strongly in $L^2(Q)$.

3.2.5 Optimality conditions

In this section, we describe in a formal way how to obtain optimality conditions for problem (3.5). A rigorous mathematical derivation is given in Ref. [51, 52, 53]. Let us start by introducing the notation:

$$J(m, \alpha) := \int_0^T \left[\int_0^1 \frac{\alpha(t, x)^2}{2} m(t, x) dx + \phi(m)(t) \right] dt. \quad (3.10)$$

Let us now note that (3.3) can be written in the weak form as:

$$\int_0^1 (v(T, \cdot) m(T, \cdot) - v(0, \cdot) m_0(x)) = \int_0^T \left[\phi(m) + \int_0^1 (\partial_t v + \frac{\sigma^2}{2} \Delta v + \alpha \cdot \nabla v) m \right]$$

for every $v \in C_c^\infty([0, 1] \times [0, T])$. We define the Lagrangian of problem (3.5):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(m, \alpha, v) := J(m, \alpha) + \int_0^T \left[\phi(m) + \int_0^1 (\partial_t v + \frac{\sigma^2}{2} \Delta v + \alpha \cdot \nabla v) m \right] \\ - \int_0^1 v(T, \cdot) m(T, \cdot) + \int_0^1 v(0, \cdot) m_0 \end{aligned}$$

The minimization problem (3.5) can be rewritten as a saddle-point problem:

$$\inf_{(m, \alpha)} \sup_v \mathcal{L}(m, \alpha, v),$$

and the conditions characterizing the saddle-point of \mathcal{L} read as (3.3) together with:

$$\alpha = -\nabla v, \text{ m-a.e.}, \quad (3.11)$$

$$\partial_t v + \frac{1}{2} \alpha^2 + \alpha \cdot \nabla v + \frac{\sigma^2}{2} \Delta v = -\phi'(m), \quad (3.12)$$

$$v(T, \cdot) = 0. \quad (3.13)$$

We obtain the critical point equations that include, in addition to the equation for m , the formula for the optimal control $\alpha := -\nabla v$ and the backward Hamilton-Jacobi-Bellman equation for v

$$\begin{aligned} \partial_t v + \frac{\sigma^2}{2} \Delta v - \frac{1}{2} |\nabla v|^2 = -\phi'(m), \\ v(T, \cdot) = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Remark 4. By introducing the Hamiltonian of the system, defined as the Legendre transform of the changing state cost: $H(x, p) = \sup_\alpha \alpha p - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{p^2}{2}$, it is easy to see that the optimality system of critical points equations reads:

$$\begin{aligned} \partial_t m - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m + \operatorname{div}(\alpha m) = 0, \quad m(0, \cdot) = m_0, \\ \alpha = -\partial_p H(x, \nabla v), \\ \partial_t v + \frac{\sigma^2}{2} \Delta v - H(x, \nabla v) = -\phi'(m), \quad v(T, \cdot) = 0. \end{aligned}$$

Finally, we introduce a mean field equilibrium as the solution of the mean field system:

$$\begin{cases} \partial_t m - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m + \operatorname{div}(\alpha m) = 0, & m(0, \cdot) = m_0, & m'(\cdot, 0) = m'(\cdot, 1) = 0 \\ -\nabla v = \alpha \\ \partial_t v + \frac{\sigma^2}{2} \Delta v + \frac{\alpha^2}{2} + \alpha \cdot \nabla v = -\phi'(m), & v(T, \cdot) = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

consisting in two coupled Partial Differential Equations (PDEs), one being backward (the Hamilton-Jacobi-Bellman equation) and the other one being forward (the Kolmogorov equation). This coupling will be important for the choice of the numerical method.

3.2.6 Some remarks

We conclude this section with some observations about the modeling with the "tool" MFG. The MFG seem to be particularly adapted to describe a situation that combines two economical ideas, positive externality and scale effect. In our model, we introduced a positive externality (if one insulates better her home, her neighbor has a better insulation of her apartment). We saw that there is a clear incentive on any agent to choose some insulation level.

This can be understood considering the form of the insulation maintenance cost, which is decreasing in the global distribution of agents m . In addition, the negative slope in m means that there is also an economy of scale in terms of savings that a firm obtains due to expansion (think of the maintenance costs). We will see in the last section (using some numerical simulations) that people indeed stay together i.e., tend to agglomerate.

Let us add some comments about the characteristics of the model. First of all, recall that the model is in continuous time and space. This is adapted to the study of transition effects (in particular the possibility for the population to change the consumed technology). Moreover the modeling of an infinite number of agents is strongly linked with the atomization of the agents in the economy. The MFG enables to handle such a situation. On the one hand, every household is atomized (she takes into account that her action has no influence on the global density) and, on the other hand, she has rational expectations (thus she sees the global density as a datum), and the Nash point approximation leads consequently to a non-cooperative equilibria.

To conclude our remarks, we emphasize that our model is a stylized model from the industrial point of view. It is not completely realistic (heating price, maintenance cost) nor a simplification of statistical data. A work of calibration can be done, but is beyond the scope of the present paper. Before some comments on the behavior of a population of agents with this modeling, let us give the algorithm that will be used for simulations.

3.3 Numerical Simulations

In this section, we describe the algorithm that we use to solve our problem. This algorithm is an adaptation of a procedure initially developed in the field of quantum chemistry

Ref. [71, 75] (see also Ref. [58, 59]) following an approach introduced by Krotov Ref. [47]. It has recently been extended to some transport problems in Ref. [22] (see also Ref. [48]). For a general presentation of this algorithm, see Ref. [69]. This approach shows excellent results on non-convex problems, where usual gradient methods fail to converge.

Before presenting the optimization algorithm, we introduce a relevant discretization of the problem. Even if what follows easily generalizes to 2D and 3D situations, we focus in the rest of the paper on the 1D-case for its simplicity and the consistence with the initial dimension of the problem. Given a matrix C , we denote by C^* its transpose.

Let us consider two positive integers M, N . We consider here the case of the bounded space domain $[0, 1]$ for (3.3). We define the time and space steps by $dt = \frac{1}{N}$ and $dx = \frac{1}{M}$ and denote for $j = 0, \dots, M$, $i = 0, \dots, N$ by m_j^i the numerical approximations of $m(i.dt, j.dx)$. For reasons that will appear later, the discrete control is defined at the points $(i.dt, (j + 1/2).dx)$, and is therefore denoted by $\alpha_{j+1/2}^i$. We shall also use the notations $\alpha^i = (\alpha_{j+1/2}^i)_{j=1\dots M-1}$ and $m^i = (m_j^i)_{j=1\dots M-1}$. Finally, we denote by $\phi_j(m^i)$ the approximation of the maintenance cost $\phi(m, t, x)$ at the point $(m(i.dt, j.dx), i.dt, j.dx)$. Remember that the total mass of $[0, 1]$ is constant in time, so that at the discrete level, we impose the homogeneous Neumann boundary condition expressed by $\alpha_{1/2}^i = \alpha_{M-1/2}^i = 0$, for $i = 0 \dots N - 1$.

3.3.1 Discretized cost functional

From now on, α stands for the discrete control $(\alpha_{j+1/2}^i)_{i,j}$ and $g(m^i)$ is the real number defined by $g(m^i) = dx \sum_{j=1}^{M-1} \Phi_j(m^i)$ where $\Phi_j(m^i) = \phi_j(m^i)m_j^i$.

We consider the following discrete version of the cost functional J :

$$\begin{aligned} J_{dt,dx}(\alpha) &: = dt \cdot dx \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} \left(\frac{1}{2} r_j(\alpha^i) m_j^i + \Phi_j(m^i) \right) \\ &= dt \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2} \langle m^i, r(\alpha^i) \rangle + g(m^i) \right) \end{aligned}$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the scalar product on \mathbb{R}^{M-1} defined by:

$$\langle u, v \rangle = dx \sum_{j=1}^{M-1} u_j v_j.$$

The vector $r(\alpha^i) = (r_j(\alpha^i))_{j=1\dots M-1}$ is defined from α^i by:

$$r_j(\alpha^i) = \frac{(\alpha_{j-1/2}^i)^2 + (\alpha_{j+1/2}^i)^2}{2},$$

and corresponds to use a trapezoid rule to approximate $|\alpha|^2$ in the integral of (3.10).

3.3.2 Numerical scheme for the controlled Kolmogorov equation

The preservation of the positivity of m at the discrete level appears in numerical simulation as a crucial issue, especially for small values of σ . Indeed, the concavity of J with respect to m leads to numerical instabilities when using schemes which do not possess this property, independently of their order of accuracy. This fact motivates the use of a low order Godunov scheme for the advective part of (3.3) which ensures both small computational cost and positivity of the numerical solutions.

Remark 5. *In addition, this framework enables us to avoid the introduction of Lagrange multipliers corresponding to the constraint $m \geq 0$.*

We are now in the position to define the numerical solver of (3.3). Starting from $m_j^0 = m_0(j \cdot dx)$, m_j^i is computed iteratively for $j = 1 \dots M - 1$ by:

$$\begin{aligned} m_j^{i+1} &= m_j^i + \frac{\sigma^2}{2} \frac{dt}{dx^2} (m_{j+1}^i - 2m_j^i + m_{j-1}^i) \\ &\quad - \frac{dt}{dx} (m_{j+1/2}^i \alpha_{j+1/2}^i - m_{j-1/2}^i \alpha_{j-1/2}^i). \end{aligned} \quad (3.16)$$

In this equation, the terms $m_{j+1/2}^i$ and $m_{j-1/2}^i$ of the advective part are defined according to a Godunov scheme, i.e. using up-winding:

$$m_{j+1/2}^i = \begin{cases} m_{j+1}^i & \text{if } \alpha_{j+1/2}^i < 0 \\ m_j^i & \text{if } \alpha_{j+1/2}^i \geq 0. \end{cases}$$

For more details about this type of schemes, we refer to Ref. [64, 43].

To simplify our notations, we rewrite (3.16) as:

$$m^{i+1} = (A + B(\alpha^i))m^i, \quad (3.17)$$

Here A corresponds to the identity matrix plus the discrete Laplace operator, *i.e.* the first two terms of the right hand-side of (3.16) and B is associated to the advective part, *i.e.* the last term of the right hand-side of (3.16). The choice of such a scheme ensures the positivity of the density at the discrete level, under the condition of the following Lemma:

Lemma 3.3.1. *For $i = 1, \dots, N$, if for every $j = 1, \dots, M - 1$, $m^i \geq 0$ and:*

$$|\alpha_{j+1/2}^i| \leq \lambda := \frac{dx}{2dt} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{1}{dx}, \quad (3.18)$$

then $m^{i+1} \geq 0$.

Proof. Let us fix i , $1 \leq i \leq N$, and j , $1 \leq j \leq M - 1$. Suppose that (3.18) holds, $\alpha_{j+1/2}^i \geq 0$ and $\alpha_{j-1/2}^i \geq 0$. Thanks to (3.16), m_j^{i+1} reads as a linear combination of m_{j+1}^i , m_j^i and m_{j-1}^i , with coefficients $\frac{\sigma^2}{2} \frac{dt}{dx^2}$, $1 - \sigma^2 \frac{dt}{dx^2} - \alpha_{j+1/2}^i \frac{dt}{dx}$ and $\frac{\sigma^2}{2} \frac{dt}{dx^2} + \alpha_{j-1/2}^i \frac{dt}{dx}$. Condition (3.18) then guarantees that these coefficients are positive, so that the linear combination is indeed a convex combination. Other cases shall be dealt similarly. \square

3.3.3 Adjoint state

In the approach we follow, a crucial role is played by the *adjoint state* $v^i = (v_j^i)_{j=1\dots M-1}$ that is defined iteratively for $i = 0\dots N$, by the backward propagation (Hamilton-Jacobi-Bellman PDE):

$$\begin{aligned} v^N &= 0, \\ v^i &= (A^* + B^*(\alpha^i))v^{i+1} + \frac{dt}{2}r(\alpha^i) + dt\Phi'(m^i). \end{aligned} \quad (3.19)$$

where $\Phi'(m^i)$ is the vector with components $\Phi'_j(m^i)$. This variable is the discrete version of the Lagrange multiplier defined by (3.11-3.13).

3.3.4 Variations in $J_{dt,dx}$

We present now the algebraic manipulations at the heart of the monotonic schemes. Let us consider two controls α and α' and the corresponding solutions $(m^i)_{i=0\dots N}$ and $(m'^i)_{i=0\dots N}$ of (3.16). In what follows, the adjoint $v = (v_i)_{i=0\dots N}$ corresponds to α . One has:

$$\begin{aligned} J_{dt,dx}(\alpha') - J_{dt,dx}(\alpha) &= \frac{dt}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \langle m'^i, r(\alpha'^i) - r(\alpha^i) \rangle + \frac{dt}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \langle m'^i - m^i, r(\alpha^i) \rangle \\ &\quad + \sum_{i=0}^{N-1} \langle m'^{i+1} - m^{i+1}, v^{i+1} \rangle - \langle m^i - m^i, v^i \rangle \\ &\quad + dt \sum_{i=0}^{N-1} g(m'^i) - g(m^i). \end{aligned} \quad (3.20)$$

A crucial fact is that, for $j = 1, \dots, M-1$, functions Φ_j are concave in m . Consequently, we get:

$$\sum_{i=0}^{N-1} g(m'^i) - g(m^i) \leq \sum_{i=0}^{N-1} \langle \Phi'(m^i), m'^i - m^i \rangle, \quad (3.21)$$

where Φ' is defined in Section 3.3.3. Combining (3.20) with (3.21) we can write:

$$\begin{aligned} J_{dt,dx}(\alpha') - J_{dt,dx}(\alpha) &\leq \frac{dt}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \langle m'^i, r(\alpha'^i) - r(\alpha^i) \rangle \\ &\quad + \sum_{i=0}^{N-1} \langle (A + B(\alpha'^i))m'^i - (A + B(\alpha^i))m^i, v^{i+1} \rangle \\ &\quad + \sum_{i=0}^{N-1} \langle m'^i - m^i, -v^i + \frac{dt}{2}r(\alpha^i) + dt\Phi'(m^i) \rangle. \end{aligned}$$

We finally obtain:

$$\begin{aligned} J_{dt,dx}(\alpha') - J_{dt,dx}(\alpha) &\leq \frac{dt}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \langle m^i, r(\alpha^i) - r(\alpha^i) \rangle \\ &\quad + \sum_{i=0}^{N-1} \langle (B(\alpha^i) - B(\alpha^i)) m^i, v^{i+1} \rangle. \end{aligned} \quad (3.22)$$

This inequality can also be expressed through the formula:

$$J_{dt,dx}(\alpha') - J_{dt,dx}(\alpha) \leq dt \cdot dx \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-2} \Delta_j^i(\alpha', \alpha), \quad (3.23)$$

where:

$$\begin{aligned} \Delta_j^i(\alpha', \alpha) &= \frac{m_j^i + m_{j+1}^i}{2} \left(\frac{(\alpha_{j+1/2}^i)^2 - (\alpha_{j+1/2}^i)^2}{2} \right) \\ &\quad + \left(m_{j+1/2}^i \alpha_{j+1/2}^i - \widetilde{m}_{j+1/2}^i \alpha_{j+1/2}^i \right) \left(\frac{v_{j+1}^{i+1} - v_j^{i+1}}{dx} \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

In this equation we introduced

$$\widetilde{m}_{j+1/2}^i = \begin{cases} m_{j+1}^i & \text{if } \alpha_{j+1/2}^i < 0 \\ m_j^i & \text{if } \alpha_{j+1/2}^i \geq 0. \end{cases}$$

Note that inequality (3.23) disintegrates the variables of J into a sum of local growth elements. This inequality that reads as a factorization enables to build a monotonic optimization method for functional J .

Remark 6. Given α , note that the value of $m_{j+1/2}^i$ depends on the sign of $\alpha_{j+1/2}^i$, so that $\alpha_{j+1/2}^i \mapsto \Delta_j^i(\alpha', \alpha)$ is a continuous, piecewise polynomial function.

Remark 7. Note that the strategy followed to obtain (3.23) applies for more general situations. Indeed, the two necessary requirements to make use of our method are the linearity of the dynamic and the concavity of the functional with respect to the state variable. We refer to Ref. [69] for more details. In particular other types of dependence of the cost with respect to α could be treated.

3.3.5 Optimization procedure

The method

This section provides a brief summary of the optimization strategy we follow to solve our problem.

Given α and a positive real number θ , we define $\alpha_{j+1/2}^i$ as a solution of

$$\Delta_j^i(\alpha', \alpha) = -\theta \frac{m_j^i + m_{j+1}^i}{2} (\alpha_{j+1/2}^i - \alpha_{j+1/2}^i)^2. \quad (3.25)$$

According to Remark 6, this equation may have one, two or four roots, including the trivial one $\alpha_{j+1/2}^i = \alpha_{j+1/2}^i$. When possible, we define $\alpha_{j+1/2}^i$ as the root of (3.25) that is closer to $\alpha_{j+1/2}^i$; otherwise we set $\alpha_{j+1/2}^i = \alpha_{j+1/2}^i$. Thus, the monotonicity of our algorithm is guaranteed.

Let us give the explicit formula corresponding to this procedure. We suppose that $\frac{m_j^i + m_{j+1}^i}{2} > 0$, otherwise the contribution of this term is zero for all choice of $\alpha_{j+1/2}^i$. We introduce

$$\delta = \frac{2}{\theta + 1}, \quad \nu_{j+1/2}^i = \frac{2\hat{m}_{j+1/2}^i}{m_j^i + m_{j+1}^i}, \quad \tilde{\nu}_{j+1/2}^i = \frac{2\tilde{m}_{j+1/2}^i}{m_j^i + m_{j+1}^i},$$

$$\hat{m}_{j+1/2}^i = \begin{cases} m_{j+1}^i & \text{if } \tilde{m}_{j+1/2}^i = m_j^i \\ m_j^i & \text{if } \tilde{m}_{j+1/2}^i = m_{j+1}^i. \end{cases}$$

Consider now:

$$\xi_{j+1/2}^i = (1 - \delta)\alpha_{j+1/2}^i + \delta\tilde{\nu}_{j+1/2}^i \frac{v_{j+1}^{i+1} - v_j^{i+1}}{dx}, \quad (3.26)$$

$$\beta_{j+1/2}^i = \frac{-b_{j+1/2}^i - \text{sign}(\alpha_{j+1/2}^i) \sqrt{(b_{j+1/2}^i)^2 - 4a_{j+1/2}^i \cdot c_{j+1/2}^i}}{2a_{j+1/2}^i},$$

where sign is the function

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ -1 & \text{if } x < 0, \end{cases}$$

and :

$$a_{j+1/2}^i = 1 + \theta,$$

$$b_{j+1/2}^i = -2(\theta\alpha_{j+1/2}^i + \nu_{j+1/2}^i \frac{v_{j+1}^{i+1} - v_j^{i+1}}{dx}),$$

$$c_{j+1/2}^i = (\theta - 1)(\alpha_{j+1/2}^i)^2 + 2\alpha_{j+1/2}^i \tilde{\nu}_{j+1/2}^i \frac{v_{j+1}^{i+1} - v_j^{i+1}}{dx}.$$

The control α_j^i can be expressed by :

$$\alpha_{j+1/2}^i = \begin{cases} \xi_{j+1/2}^i & \text{if } \alpha_{j+1/2}^i \cdot \xi_{j+1/2}^i \geq 0 \\ \beta_{j+1/2}^i & \text{if } \alpha_{j+1/2}^i \cdot \xi_{j+1/2}^i < 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Proposition 3.3.2. *Under the condition (3.18), the scheme (3.27) ensures $J_{dt,dx}(\alpha') \leq J_{dt,dx}(\alpha)$ i.e., the functional $J_{dt,dx}$ decreases.*

Proof. The monotonicity is a trivial consequence of Inequality (3.23) and Lemma (3.3.1). \square

We recall that the bound (3.18) on the control α is very important for the positivity of the density. As the stability of our optimization scheme is based on the positivity of the variable m , the strategy presented in the next section has to include a slope-limiter such that (3.18) prevails. Instead of defining $\alpha_{j+1/2}^i$ through (3.27), we alternatively denote by $\check{\alpha}_{j+1/2}^i$ the value obtained in (3.27) and consider the definition:

$$\alpha_{j+1/2}^i = \text{sign}(\check{\alpha}_{j+1/2}^i) \cdot \min(\lambda, |\check{\alpha}_{j+1/2}^i|). \quad (3.28)$$

It is easy to check that this modification does not spoil the monotonicity of our procedure, as soon as α satisfies (3.18).

The algorithm

We can now define precisely our optimization algorithm. Suppose that α^k is given. The computation of α^{k+1} is achieved as follows.

- Define v^k by (3.19) with $\alpha = \alpha^k$.
- Define $m^0 = m_0$ and compute iteratively m^i from m^{i-1} according to the sub-steps:
 - define $(\alpha^{k+1})^{i-1}$ by (3.28) where $\check{\alpha}_{j+1/2}^i$ is computed with $v = v^k$,
 - define $(m^{k+1})^i$ by (3.16) with $\alpha^{i-1} = (\alpha^{k+1})^i$.

A possible termination criterion is obtained by checking the discrete optimality conditions, i.e., given a tolerance threshold $\text{Tol} > 0$:

$$\sup_{1 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq M-1} \left| \frac{(m^k)_j^i + (m^k)_{j+1}^i}{2} (\alpha^k)_{j+1/2}^i + (m^k)_{j+1/2}^i \frac{(v^k)_{j+1}^{i+1} - (v^k)_j^{i+1}}{dx} \right| \leq \text{Tol}. \quad (3.29)$$

The choice of a monotonic algorithm comes from specific properties of the MFG model such as the bi-linearity of the state evolution and special concavity in the cost functional (cf. work in Ref. [69] for a detailed description of the required properties). Let us mention that the algorithm converges numerically very quickly.

3.4 Simulations, some results for our model

We present in this section some numerical results.

First, let us write the particular forms that we have chosen for the state costs. We recall that the heating cost is: $f(t, x) = p(t)(1 - \beta x)$. From now on, we take $\beta = 0.8$ which means that it is five times cheaper to heat a home that is fully insulated (than a non-insulated one). The choice that we did for the constants in the insulation maintenance cost lead to take: $g(t, x, m) = \frac{x}{0.1 + m(t, x)}$. In our algorithm, we choose $\theta = 1$. We present in what follows three results that exhibit three qualitatively different phenomena.

In the first one, the unit price of energy $p(t)$ is a constant parameter. With this example, we want to check some simple behaviors of agents. In the second example we look at a non-constant unit price of electricity; more precisely, $p(t)$ reaches a peak. We exhibit in this simulation two numerical equilibria. Finally, in the third example, we consider a more realistic case with irreversibility in the investment in insulation material. In the following and for each example, we fixed the horizon $T = 1$ and the noise $\frac{\sigma^2}{2} = 0.07$.

In figures, the horizontal axis is the level of insulation, the depth is the time and the vertical line is the density of agents.

3.4.1 Positive externality: the households choose the same technology

We consider here a Gaussian distribution centered in $x = 0.5$ as initial density of players. In other words, the households started already to acquire insulation material, but there are still new technologies that enable them to better insulate the houses.

In the next three figures, we present the curve of the density for three different values of the unit price of energy $p(t)$. The energy will be successively free ($p(t) = 0$), then it will have an intermediate price ($p(t) = 3.2$), and finally it will be expensive ($p(t) = 10$).

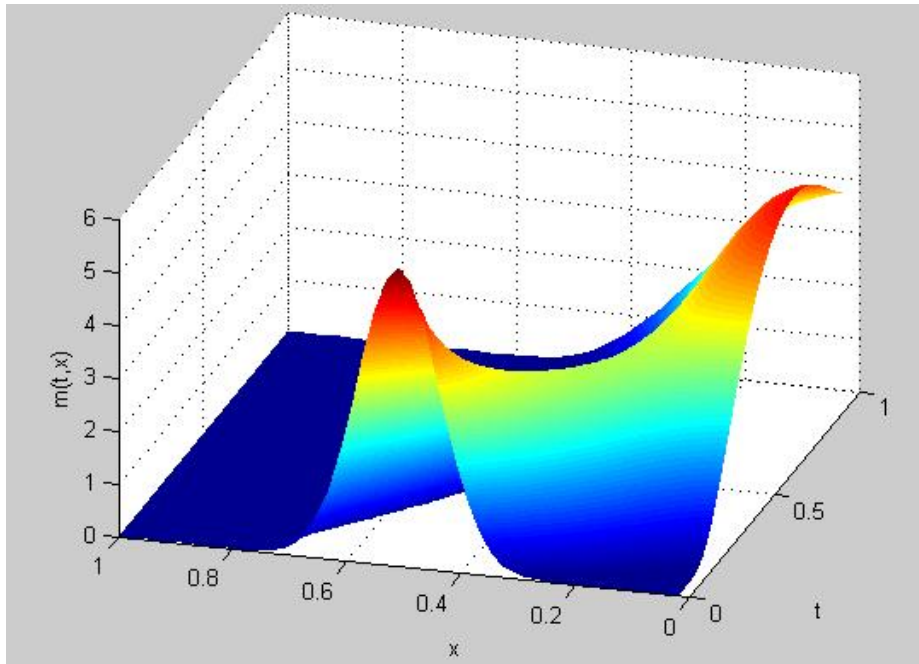


Figure 3.1: Evolution of m for $p(t) = 0$.

On Fig.3.1, we note that, as expected for very low prices of energy, all agents choose to heat their home and they move to this choice together. On Fig.3.2, for an intermediate price of energy, the households stay more or less in the same configuration. The important

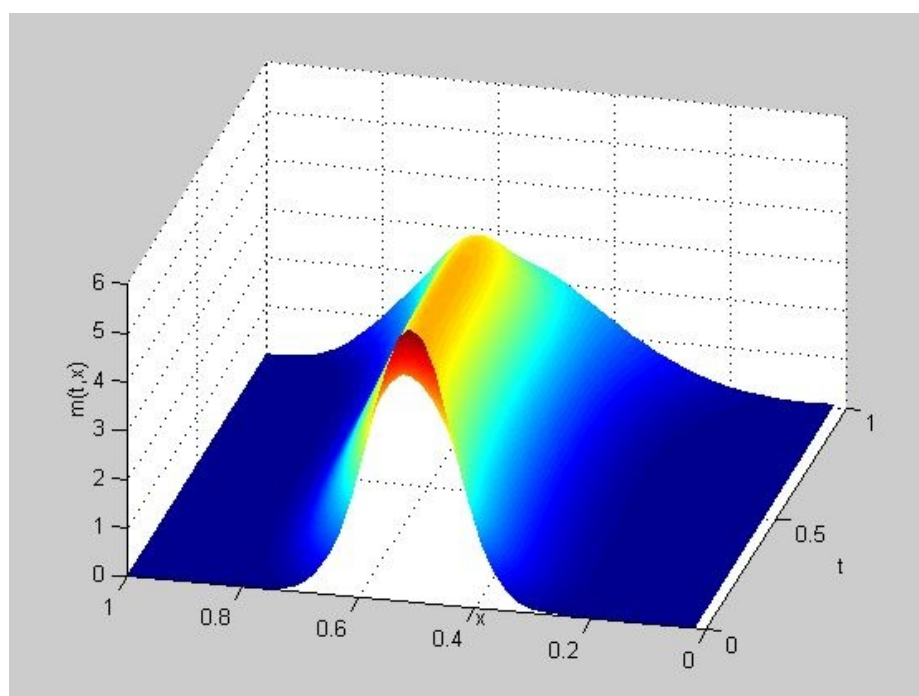


Figure 3.2: Evolution of m for $p(t) = 3.2$.

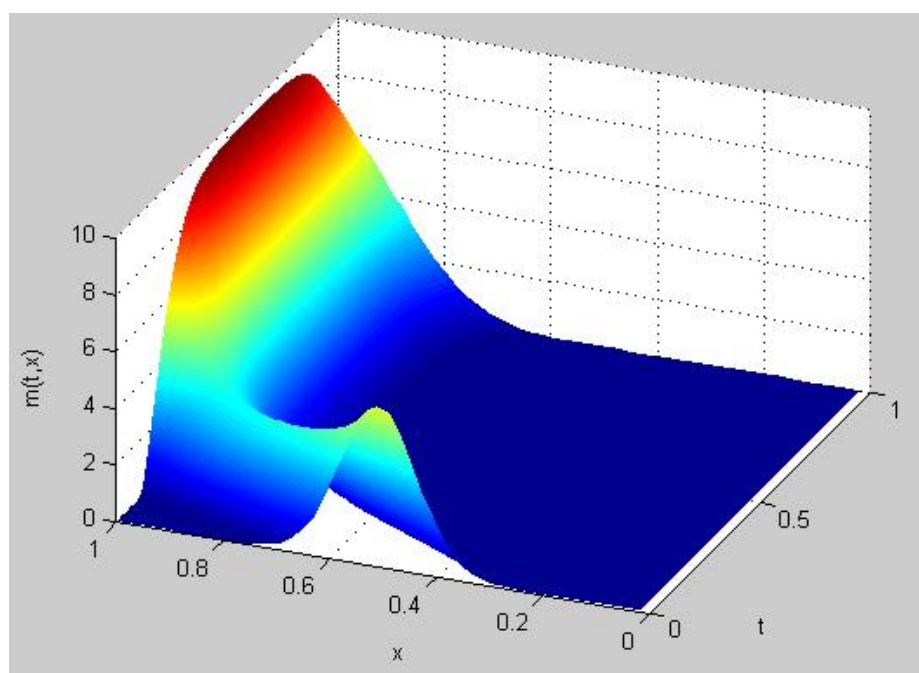


Figure 3.3: Evolution of m for $p(t) = 10$.

point here is that they are grouped around the same state. And in the third case, we can see on Fig.3.3 that when the cost related to energy is high, the population wants to be better insulated. And once again, all the players have the same behavior. These solution involve pure bundling.

The economic reasons that explain the behavior observed in the three cases, which consists in bundling (without dispersion), are the positive externality and the economy of scale. These two aspects make the households choose the same technology, the same level of insulation.

3.4.2 Multiplicity of solutions: the possibility of a technological transition

First, we look at a situation in which the agents are poorly equipped with insulation material at time $t = 0$. Thus, the initial density is an approximation of a Dirac mass in $x = 0.1$, piecewise linear on $[0, 0.1)$, $[0.1, 0.3)$, and $[0.3, 1)$. Another difference with the first example is the form of the unit price of energy $p(t)$. In the present case, it starts from a low level, then reaches a peak and decreases until its initial level as represented in Fig.3.4.

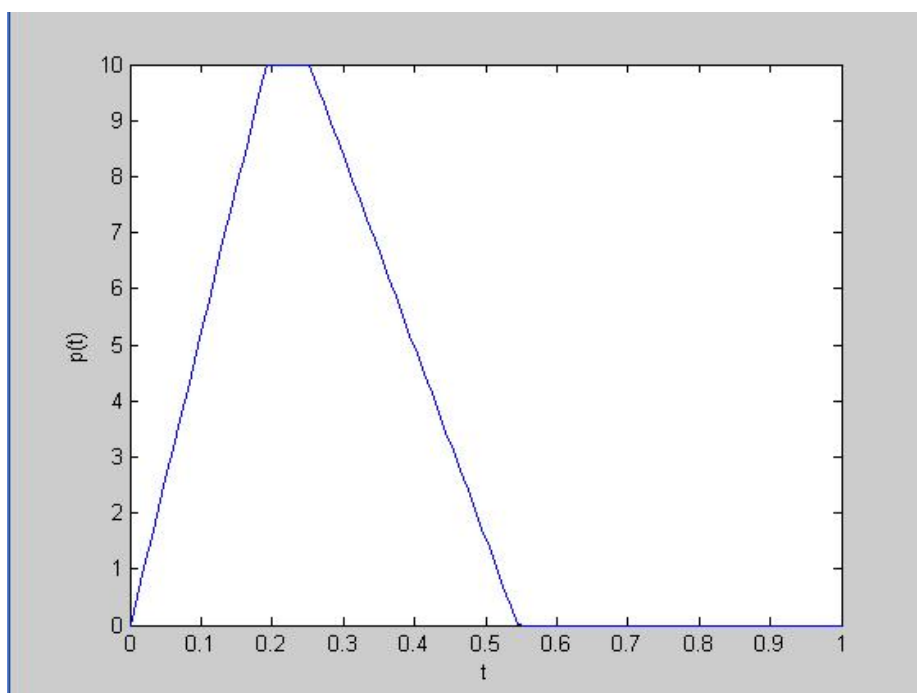


Figure 3.4: Evolution of the unit price of energy $p(t)$.

With this data, we found numerically two MFG equilibria by taking different initializations for the control variable α^0 . These two numerical solutions are presented in Fig.3.5 and Fig.3.6.

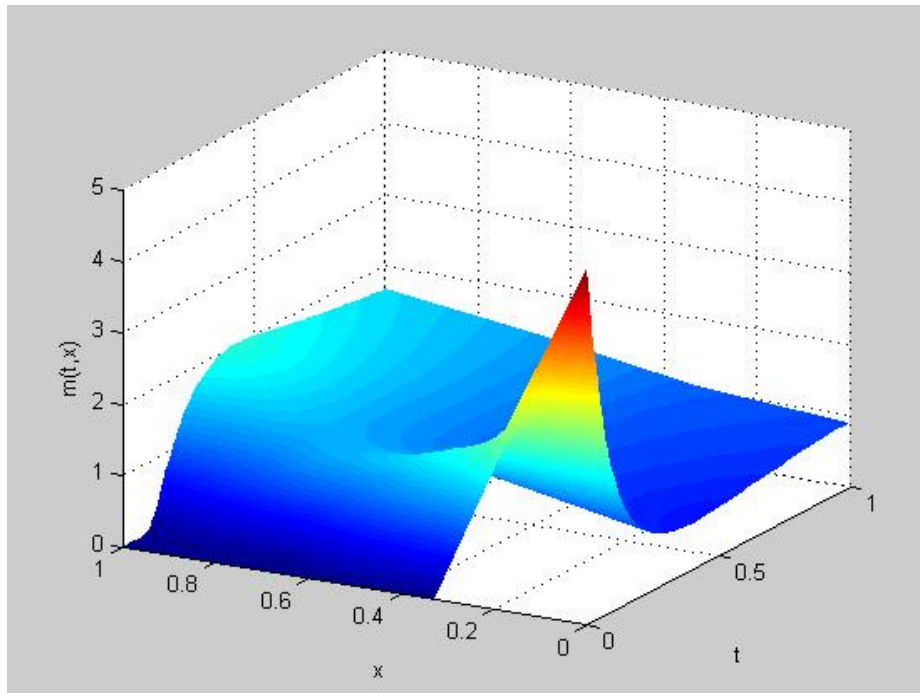


Figure 3.5: Evolution of m , the "insulation equilibrium".

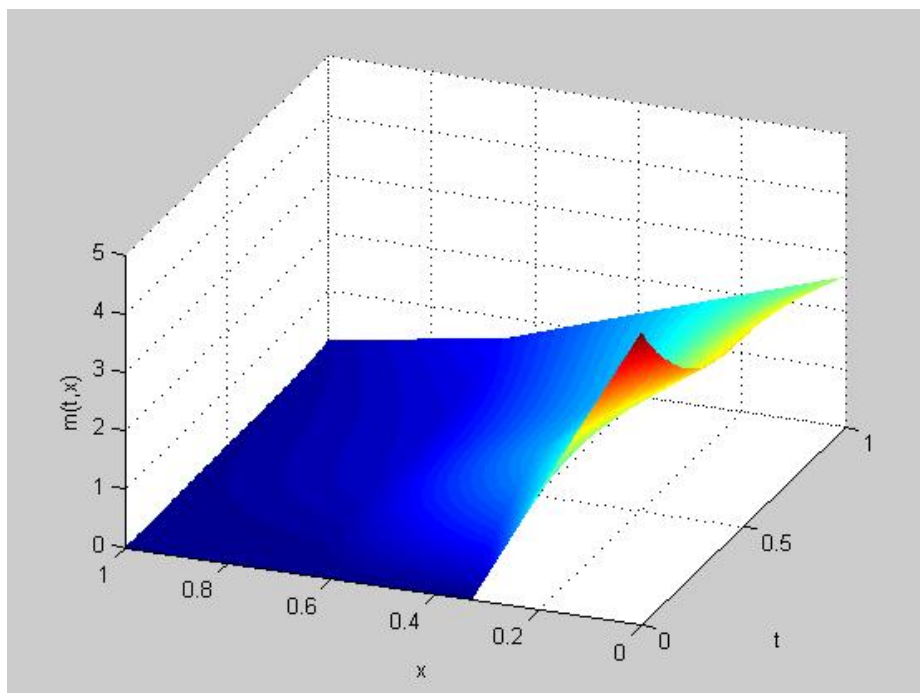


Figure 3.6: Evolution of m , the "energy consumption equilibrium".

Fig.3.5 shows the solution corresponding to the choice of high insulation levels. In this case the optimum corresponds to an insulation equilibrium.

The solution in which the households stay heating their apartment stands for a sort of energy consumption equilibrium and is described on Fig.3.6.

We can explain intuitively the behavior in the following way. If one expects that everybody will still heat their apartment then it is in her interest to do the same, and we get the energy consumption equilibrium. However, if one expects that all the households will improve their insulation, then it is better for her to choose a higher insulation level. In this case we obtain an insulation equilibrium.

By adding a constraint, one can select an equilibrium (e.g. an ecologic equilibrium). In brief, this simple model (based on the MFG) and these simulations (using a monotonic algorithm), enable us to study quantitatively the way the technologies can impact the culture.

Taking into account equilibria's costs or ecologic considerations for instance, we can think of Olson's Paradox (see the book from Mancur Olson [63]) and the competition between the self-interest and the common one. Indeed the multiplicity of equilibria shows that although self-interests could lead to a better (and consensual) situation, they can carry on another equilibrium (switch or not to clean technologies). This is the free rider phenomenon: individual risk taking in choosing the new technologies is too high (individuals expect that everybody will not do it) so that the technology switch does not happen (even if it could be interesting for the group). Let us add that one can imagine the design of incentives or policies (with low costs, e.g. concentrated on few agents in the very first part of the period), in order to reach one of the two mean field equilibria.

3.4.3 Dispersion in the case of irreversibility

Let us show in a last example how additional constraint on the control can be introduced. We impose $\alpha \geq 0$, so that an investment in insulation material is irreversible. Whereas it is possible to decide to insulate better the apartment, it is not allowed to choose a lower level of insulation. The introduction of such a constraint enables us to handle a more realistic situation. In order to make sense, we have chosen as initial distribution a Gaussian centered in 0.25 - the households did not yet choose a high insulation level. Every other parameter is defined as in the second example (unit price of energy reaching a peak, noise, horizon...).

We observe on Fig.3.7 a dispersion in the household choices. During the first part of the period, the agents choose higher insulation levels, and then there is a spreading. Actually some agents that have chosen to be well equipped with insulation material can not go back. Moreover, in this case, the risk has a more important influence. These two reasons explain intuitively the dispersion that is observed in this example.

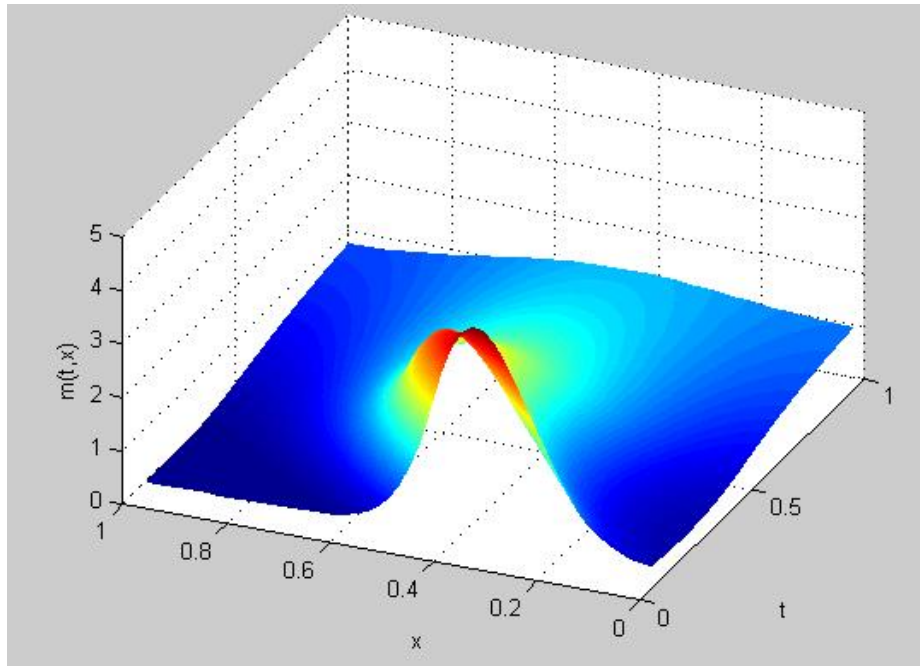


Figure 3.7: Evolution of m , irreversibility and dispersion.

Acknowledgments

This paper was written in the framework of the OTARIE ANR program "ANR-07-BLAN-0235 OTARIE" and the Chaire Finance et Développement Durable (supported by EDF and Calyon) after stimulating conversations. It is our pleasure to thank Jean-Michel Lasry for very helpful discussions on the topic, René Aïd for his active interest in the modeling of the choice of technologies, Guillaume Carlier and Bruno Nazaret for their collaboration in proving Theorem (3.2.1).

Chapitre 4

MFG et mouvements de foule à deux populations

Ce chapitre est lié à un travail intitulé "Human crowds and groups interactions: a mean field games approach", soumis pour publication dans les proceedings de la 49th IEEE Conference on Decision and Control.

Résumé :

Dans ce chapitre nous modélisons des mouvements de foule par des mean field games. Plus précisément, nous nous intéressons à des dynamiques à deux populations (constituée chacune par un continuum d'individus) ayant des intérêts contradictoires. Nous nous concentrons sur le cas de l'aversion à la foule au sein de son propre groupe ainsi qu'envers l'autre groupe (xénophobie dans certains cas). Nous écrivons un macro problème de Nash entre les deux populations, établissons un résultat d'existence et d'unicité et caractérisons les optima comme des solutions MFG. Enfin, nous proposons une méthode simple de descente de gradient pour approcher numériquement les solutions et montrons quelques simulations.

Mots clés : Mean field games, mouvements de foule, contrôle optimal, optimisation convexe, méthodes de descente de gradient.

Abstract :

This chapter is devoted to the MFG modeling of human crowds. More precisely, we study 2-population dynamics (each of whom consisting of a continuum of individuals) with opposite interests. We focus on the crowd aversion case inside the group and also onto the other group (xenophobia in some cases). We write a *macro*-Nash problem between two populations, then we prove an existence and uniqueness result and characterize optimal points as MFG solutions. Finally we provide a simple gradient descent method to numerically approximate the solutions and show some simulations.

Keywords : Mean field games, human crowds, optimal control, convex optimization, gradient descent methods.

4.1 Introduction

Les mouvements de foule ont fait l'objet, ces dernières années, de bien des études et il paraît assez naturel de vouloir les modéliser à l'aide de l'outil MFG, particulièrement adapté à la description d'interactions pour un grand nombre d'individus intelligents (un premier travail dans ce sens à été accompli par Guéant dans [39]). Aussi proposons-nous dans ce chapitre de nous atteler à cette tâche en étudiant des dynamiques à deux populations. Les jeux à champ moyen semblent pouvoir décrire relativement bien les phénomènes de foules (que nous appelons encore populations ou groupes) en ce sens qu'ils donnent un cadre d'étude, nous le rappelons, de jeux dans lesquels interagissent un continuum de joueurs (nous adopterons souvent ici l'appellation "individus") atomisés dans la population. En considérant de nouveau le cas compact en horizon fini, nous sommes dans ce qui suit, tout à fait à même de dévoiler l'aspect dynamique (transition) de l'évolution de foules.

Cette application des MFG est motivée par les récents modèles macroscopiques de mouvements de foule étudiés par Buttazzo, Jimenez & Oudet (voir [8]), Carlier et Salomon ([22]), Hughes ([44]), ou encore Maury, Roudneff-Chupin & Santambrogio ([61]) pour une approche différente par des flots de gradient. Insistons bien sur le fait que l'usage des MFG implique une approche micro-macro (limite lorsque le nombre de joueurs $N \rightarrow \infty$) et permet de considérer une foule d'individus "intelligents" (les individus sont à la fois rationnels et à anticipations rationnelles).

Pour reprendre le vocabulaire précédemment utilisé, nous nous plaçons (encore et toujours...) dans le cadre d'optimalité des jeux à champ moyen pour un coût global : l'équilibre de champ moyen correspond en fait à un point de minimum d'un problème d'optimisation global.

Mathématiquement, nous considérons un cas complémentaire à celui traité dans le chapitre 3. Nous y traitons le cas de l'attraction pour les choix effectués par les autres joueurs, qui correspondait à une fonctionnelle concave par rapport à la densité des joueurs. Nous étudions à partir de maintenant l'aversion à la foule, c'est-à-dire que nous prenons une fonctionnelle convexe de la densité de la foule.

Nous attachons un intérêt tout particulier à la modélisation MFG des interactions dynamiques entre plusieurs groupes et nous proposons de chercher numériquement des approximations d'équilibres de Nash entre eux (comme suggéré dans [52]). La méthode numérique que nous proposons s'avère très performante dans le cas où la mesure initiale des individus est largement positive.

Le chapitre s'organise donc de la façon suivante. Nous commençons dans la section 4.2 par introduire le problème considéré, nous y prouvons l'existence de solution et donnons des conditions d'optimalité (en particulier nous faisons le lien entre problème de Nash entre 2 groupes, MFG et optimisation globale). Dans la partie suivante nous décrivons l'approche numérique, avant de donner quelques résultats numériques obtenus dans le dernier paragraphe. En particulier nous simulons un cas dans lequel deux groupes sont incités à se croiser.

4.2 Dynamique à 2 populations : existence et optimalité

4.2.1 Présentation du problème

L'espace d'étude est ici le Tore d -dimensionnel $\Omega = \mathbb{T}^d$. Nous reprenons dans ce qui suit les notations utilisées dans la partie (3.2.4), à l'instar du domaine temps-espace $Q = [0, T] \times \Omega$, pour un horizon $T > 0$ fixé. En effet, le problème auquel nous nous intéressons est très similaire à celui étudié dans le chapitre 3. Nous rappelons ainsi le problème de contrôle de l'équation de Fokker-Planck (cas d'efficiencia des MFG) :

$$\begin{cases} \inf_{\alpha} \int_0^T \left[\int_{\Omega} \frac{|\alpha(t,x)|^2}{2} m(t,x) dx + \Phi(m_t) \right] dt + \int_{\Omega} \Psi m|_T, \\ \partial_t m - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m = -\operatorname{div}(\alpha m), m(0, \cdot) = m_0(\cdot). \end{cases}$$

La différence avec le chapitre précédent réside dans l'ajout d'un coût terminal Ψ ainsi que dans le choix de la fonction Φ . Plus précisément, $\Psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ correspond à une incitation pour atteindre un état final. Quant à $\Phi : \mathcal{M}_b^{ac}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_+$, elle modélise les interactions de type champ moyen entre les individus de la population (c'est en fait le potentiel dont dérive le coût correspondant à la prise en compte du champ moyen dans le problème individuel). Aussi pouvons-nous rappeler pour mémoire le problème individuel d'un joueur de la population partant de x à l'instant initial :

$$\begin{cases} \inf_{\alpha} \mathbb{E} \left[\int_0^T L(X_t^x, \alpha_t) + \Phi'[m_t](X_t^x) dt + \Psi(X_T^x) \right] \\ dX_t^x = \alpha_t dt + \sigma dW_t, X_0^x = x. \end{cases}$$

Pour une description plus précise de l'aspect jeu à champ moyen de cette modélisation, nous renvoyons le lecteur aux deux chapitres précédents.

Comme déjà mentionné, nous souhaitons donc nous intéresser au cas de l'aversion à la foule (ou encore à la pénalisation de la congestion) et pour cela, nous prendrons l'application Φ semicontinue inférieurement (sci) et convexe.

Elargissons à présent ce que nous venons de voir au cas où cohabitent deux populations dans l'ensemble Ω .

Commençons par bien préciser que nous adoptons, dans le cas présent, une approche d'équilibre entre les différents groupes (équilibre de Nash typiquement, comme le suggèrent Lasry et Lions dans [52]).

Avant de donner le problème associé à la i -ème population, nous introduisons une notation couramment utilisée en théorie des jeux ; pour un élément $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, et pour une coordonnée i fixée, nous noterons l'élément x_{-i} de \mathbb{R} , $x_{-i} = \{x_1, x_2\} - \{x_i\}$. Le problème d'optimisation global (résultant d'un continuum de problèmes individuels) pour la population i , étant donnée toute l'évolution de la masse et du contrôle de l'autre population (c'est-à-dire $(\alpha_t^{-i}, m_t^{-i})$), est alors :

$$\inf_{\alpha^i \in \mathcal{M}_b(Q, \mathbb{R}^d)} J_{\lambda}^i(\alpha) := \int_0^T \left[\int_{\Omega} \frac{|\alpha^i(t,x)|^2}{2} m^i(t,x) dx + \Phi_{\lambda}^i(m_t^1, m_t^2) \right] dt + \int_{\Omega} \Psi^i m^i|_T,$$

la donnée m^i dépend de α^i en ce sens qu'elle est un élément de $\mathcal{M}_b(Q, \mathbb{R}_+)$ (ensemble des mesures bornées sur Q à valeurs réelles positives) solution au sens faible de l'équation

$$\partial_t m^i - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m^i = -\operatorname{div}(\alpha^i m^i), m^i(0, \cdot) = m_0^i(\cdot). \quad (4.1)$$

Les deux groupes diffèrent ainsi par leur situation ou densité initiale $m_0^i(\cdot)$, par le coût Φ_λ^i ainsi que par le coût final Ψ^i (en revanche nous traitons le cas simple dans lequel le bruit est identique pour chaque population). Nous choisissons comme fonction de couplage

$$\Phi_\lambda^i(m_t) := \int_\Omega (m_t^i)^2 + \lambda m_t^1 m_t^2,$$

pour un réel λ positif. Ceci correspond à une situation d'aversion aux membres de sa population mais aussi à ceux de l'autre groupe ; dans ce dernier cas l'aversion est marquée par λ , paramètre dit de "xénophobie". En d'autres termes nous identifions ici la notion de xénophobie à celle de l'aversion à l'étranger (nous distinguons ensuite le cas où la xénophobie est plus ou moins marquée). Remarquons que le critère dépendant du champ moyen (ou distribution globale) m_t est alors

$$\Phi_\lambda^i[m_t](x) = 2m_t^i(x) + \lambda m_t^{-i}(x).$$

Au vu de cette expression, nous voyons que l'on pourrait aussi définir la xénophobie comme l'aversion aux étrangers relativement à l'aversion à ses proches (i.e. en comparant λ et 2). Le problème de Nash entre les populations est alors défini par :

$$(\mathcal{N}) \text{ Trouver } \bar{\alpha} = (\bar{\alpha}^1, \bar{\alpha}^2) \text{ tel que : } J_\lambda^i(\bar{\alpha}) = \inf_{\alpha^i \in \mathcal{M}_b(Q, \mathbb{R}^d)} J_\lambda^i(\alpha^i, \bar{\alpha}^{-i}), \text{ pour } i = 1, 2.$$

4.2.2 Optimalité

Notre but est à présent de caractériser les équilibres de Nash précédemment décrits. Pour cela, nous introduisons le système MFG pour deux populations, pour $i = 1, 2$:

$$(\mathcal{MFG}) \begin{cases} \partial_t m^i - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m^i + \operatorname{div}(m^i \nabla v^i) = 0, m^i(0, \cdot) = m_0^i, \\ \partial_t v^i + \frac{\sigma^2}{2} \Delta v^i + \frac{|\nabla v^i|^2}{2} = \Phi_\lambda^i(m), v^i(T, \cdot) = \Psi^i. \end{cases}$$

ainsi que le problème de minimisation (sur les deux groupes)

$$(\mathcal{Q}) \inf_{\alpha = (\alpha^1, \alpha^2)} J_\lambda(\alpha) := J_{\lambda/2}^1(\alpha) + J_{\lambda/2}^2(\alpha),$$

sous les contraintes : m_i est solution de (4.1), pour $i = 1, 2$. En adoptant les notations $|\alpha|^2 = |\alpha^1|^2 + |\alpha^2|^2$, $\Psi := (\Psi^1, \Psi^2)$, le critère à optimiser peut aussi s'écrire :

$$J_\lambda(\alpha) = \int_Q \frac{|\alpha|^2}{2} . m + (m^1)^2 + (m^2)^2 + \lambda m^1 m^2 + \int_\Omega \Psi . m_T.$$

Notons bien que ce problème reste convexe si le réel λ est inférieur ou égale à 2.

Nous pouvons à présent énoncer des conditions nécessaires et suffisantes pour les points de Nash.

Proposition 4.2.1. *Si $\lambda \leq 2$ alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\bar{\alpha} \in \mathcal{M}_b(Q, \mathbb{R}^d)$ est solution de (\mathcal{N}) et \bar{m} vérifie (4.1) pour $\alpha = \bar{\alpha}$,
2. $\bar{\alpha} \in \mathcal{M}_b(Q, \mathbb{R}^d)$ est solution de (\mathcal{Q}) et \bar{m} vérifie (4.1) pour $\alpha = \bar{\alpha}$,
3. (\bar{m}, \bar{v}) est solution de (\mathcal{MFG}) , avec $\alpha = \bar{\alpha} = \nabla \bar{v}$.

Si $\lambda > 2$ alors on a seulement 2. \Rightarrow 1. et 1. \Leftrightarrow 3.

Proof. Montrons que 1. \Leftrightarrow 3. Pour cela, prenons α solution de (\mathcal{N}) , et notons m la solution de l'équation de Fokker-Planck pour cet α . Etant donnée la forme du critère J_λ^i , il est clair que $m^i \in L^2(\mathbb{R}_+)$ et $\alpha^i \in L^2_{dm^i}(\mathbb{R}^d)$. On en conclut ainsi que $\alpha^i m^i$ est une fonction $L^1(\mathbb{R}^d)$. Introduisons maintenant les perturbations à l'ordre un :

$$\begin{aligned}\alpha_\varepsilon^i &:= \alpha^i + \varepsilon w^i \\ m_\varepsilon^i &:= m^i + \varepsilon h^i + o(h^i),\end{aligned}$$

où $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $(h^i, w^i) \in L^\infty(\mathbb{R}_+) \times L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et h^i est solution faible de l'équation linéarisée:

$$\partial_t h^i - \frac{\sigma^2}{2} \Delta h^i + \operatorname{div}(h^i \alpha^i + m^i w^i) = 0, \quad h^i|_{t=0} = 0. \quad (4.2)$$

Définissons aussi la fonction $l^i : \varepsilon \in \mathbb{R} \rightarrow l^i(\varepsilon) = J_\lambda^i(\alpha_\varepsilon^i, \alpha^{-i})$.

La condition nécessaire et suffisante (par convexité du problème) d'optimalité est alors : $\forall w^i$ admissible $l'(0) = 0$, ce qui est équivalent à :

$$\int_Q \alpha^i m^i w^i + \int_Q \frac{|\alpha^i|^2}{2} h^i + (2m^i + \lambda m^{-i}) h^i + \int_\Omega \Psi^i h_T^i = 0. \quad (4.3)$$

Afin d'obtenir une condition indépendante de h^i , nous introduisons l'état adjoint θ^i comme une solution du problème de Cauchy sur le Tore d -dimensionnel

$$-\partial_t \theta^i - \frac{\sigma^2}{2} \Delta \theta^i - \alpha^i \cdot \nabla \theta^i = \frac{|\alpha^i|^2}{2} + (2m^i + \lambda m^{-i}), \quad \theta^i|_{t=T} = \Psi^i. \quad (4.4)$$

Nous pouvons ainsi, en utilisant successivement l'adjoint ainsi défini, une intégration par parties et le fait que h^i soit solution de (4.2), réécrire l'égalité (4.3) :

$$\begin{aligned}(4.3) &\Leftrightarrow \int_Q \alpha^i m^i w^i + \int_Q \left(-\partial_t \theta^i - \frac{\sigma^2}{2} \Delta \theta^i - \alpha^i \cdot \nabla \theta^i \right) h^i + \int_\Omega \Psi^i h_T^i = 0 \\ &\Leftrightarrow \int_Q \alpha^i m^i w^i + \int_Q \theta^i \left(\partial_t h^i - \frac{\sigma^2}{2} \Delta h^i + \operatorname{div}(h^i \alpha^i) \right) + \int_\Omega (\Psi^i - \theta_T^i) h_T^i = 0 \\ &\Leftrightarrow \int_Q \left(\alpha^i + \nabla \theta^i \right) m^i w^i = 0\end{aligned}$$

ce qui donne $-\nabla \theta^i = \alpha^i$, m^i presque partout. En posant $v^i = -\theta^i$, nous obtenons bien la première équivalence.

L'équivalence 2. \Leftrightarrow 3. s'obtient exactement de la même façon.

Il est par ailleurs facile de voir que si $\lambda > 2$, alors le critère J_λ n'est plus convexe et l'on a seulement 2. \Rightarrow 1. Notons enfin que, par convexité partielle, on a toujours 1. \Leftrightarrow 3. \square

4.2.3 Existence

Au vu de la Proposition (4.2.1), l'existence d'un minimiseur pour le problème (\mathcal{Q}) implique l'existence d'un point de Nash entre les deux populations.

Avant d'énoncer le résultat nous devons reformuler rigoureusement le problème en suivant [5, 8, 49].

Nous adoptons ici un point de vue vectoriel sur le problème, ainsi, nous noterons :

- $m = (m^1, m^2) \in \mathcal{M}_b(Q, \mathbb{R}_+^2)$, et pour tout $x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}_{+*}^2$, $\frac{1}{x} := (\frac{1}{x^1}, \frac{1}{x^2})$,
- $q = (q^1, q^2) \in \mathcal{M}_b(Q, \mathbb{R}^{2d})$, et pour tout $y = (y^1, y^2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, $|y|^2 := (|y^1|^2, |y^2|^2)$,
- $\mathcal{A} := \{(q, m) \in \mathcal{M}_b(Q, \mathbb{R}^{2d}) \times \mathcal{M}_b(Q, \mathbb{R}_+^2) : \int_Q (\partial_t u + \frac{\sigma^2}{2} \Delta u) dm^i + \int_Q \nabla u \cdot dq^i = \int_\Omega \Psi^i m^i(T) - u_0 m_0^i, \forall u \in C^\infty(Q), \text{ pour } i = 1, 2\}$

Introduisons maintenant la transformation $q = \alpha m$ i.e., en suivant la démarche adoptée dans [8], les fonctions

$$\varphi_1(a, b) := \begin{cases} \frac{|a|^2}{2b} \text{ si } (a, b) \in \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}_{+*}^2 \\ +\infty \text{ sinon,} \end{cases}$$

$$\varphi_2(b) := \begin{cases} |b|^2 + \lambda b^1 b^2 \text{ si } (a, b) \in \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}_{+*}^2 \\ +\infty \text{ sinon,} \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} K(q, m) &:= K_1(q, m) + K_2(m) \\ \text{où } K_1(q, m) &= \int_Q \varphi_1\left(\frac{dq}{d\mathcal{L}^{d+1}}, \frac{dm}{d\mathcal{L}^{d+1}}\right) d\mathcal{L}^{d+1} \\ \text{et } K_2(m) &= \int_Q \varphi_2\left(\frac{dm}{d\mathcal{L}^{d+1}}\right) d\mathcal{L}^{d+1} + \int_\Omega \Psi \cdot m|_{t=T} \end{aligned}$$

où \mathcal{L}^{d+1} désigne la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^{d+1} . L'application K peut alors s'écrire plus simplement :

$$K(q, m) = \begin{cases} \int_Q \frac{|\alpha|^2}{2} \cdot m + (m^1)^2 + (m^2)^2 + \lambda m^1 m^2 + \int_\Omega \Psi \cdot m|_T, \text{ si } q \ll m \text{ et } q = \alpha m, \\ +\infty \text{ sinon,} \end{cases}$$

Ceci fait, le problème (\mathcal{Q}) devient :

$$\inf_{(q, m) \in \mathcal{A}} K(q, m), \tag{4.5}$$

et nous pouvons donner le résultat comme annoncé ci-dessus.

Proposition 4.2.2. *Si $\lambda \leq 2$ et $(m_0^1, m_0^2) \in L^2(Q)$, alors le problème (\mathcal{Q}) admet une solution. De plus, il existe un point de Nash i.e. une solution au problème (\mathcal{N}) .*

Une fois cette reformulation faite, la démonstration reprend largement celle obtenue par Buttazzo, Jimenez et Oudet dans [8]. Mais avant de prouver le résultat, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemma 4.2.3. *K_1 est sci pour la topologie faible-* des mesures.*

K_1 est en effet le terme qui pose problème. Cette propriété est très classique et bien souvent utilisée. Nous avons cependant remarqué qu'il s'avère difficile d'en trouver une démonstration complète dans la littérature. Nous en proposons donc une ici.

Proof. Il suffit en fait de montrer que H définie (sur $\mathcal{M}_b(\mathbb{R}^{2d}) \times \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d)$) par

$$H(q, m) := \begin{cases} \int_Q \frac{1}{2} \left| \frac{dq}{dm} \right|^2 dm, & \text{si } q \ll m, \\ +\infty, & \text{sinon,} \end{cases}$$

est sci pour la topologie faible-*. Pour ce faire, nous exploitons l'idée originale de Benamou et Brenier (dans [5]) et proposons d'établir l'égalité :

$$H(q, m) = \sup_{(a,b) \in C_b(Q)} \left\{ \int_Q adq + \int_Q bdm, b + \frac{|a|^2}{2} \leq 0 \right\}, \quad (4.6)$$

où $C_b(Q) := C_b(Q, \mathbb{R}^d) \times C_b(Q, \mathbb{R})$.

Nous allons en fait commencer par montrer que:

$$H(q, m) = \sup \left\{ \int_Q adq + \int_Q bdm, a, b \text{ boréliennes et bornées, } b + \frac{|a|^2}{2} \leq 0 \right\}.$$

Montrons tout d'abord que si le supremum est fini, alors $q \ll m$. Supposons que q ne soit pas absolument continue par rapport à m . Dans ce cas il existe un borélien non vide $A \in Q$ tel que $m(A) = 0$ et $q(A) > 0$. Choisissons à présent $a = \xi 1_A$ et $b = -\frac{|\xi|^2}{2} 1_A$ pour $\xi \in \mathbb{R}^d$. Il vient que $\int_Q adq + \int_Q bdm = \xi \cdot q(A)$. Et puisque ξ est arbitraire (l'on peut choisir une coordonnée aussi grande que souhaitée), nous trouvons que le supremum est infini dans ce cas.

Montrons à présent que lorsque $q \ll m$, on a bien

$$\int_Q \frac{1}{2} \left| \frac{dq}{dm} \right|^2 dm = \sup \left\{ \int_Q adq + \int_Q bdm, a, b \text{ boréliennes et bornées, } b + \frac{|a|^2}{2} \leq 0 \right\}.$$

Notons ρ une densité (vectorielle i.e. à valeurs dans \mathbb{R}^d) de q par rapport à m .

Pour toutes fonctions a, b boréliennes et bornées vérifiant la contrainte inégalité dans (4.6), on a

$$\int_Q (a\rho + b)dm \leq \int_Q \left(a\rho - \frac{|a|^2}{2} \right) dm \leq \frac{1}{2} \int_Q |\rho|^2 dm = H(q, m), \quad (4.7)$$

ceci puisque $a\rho - \frac{|a|^2}{2} \leq \frac{|\rho|^2}{2}$ (pour le voir, prendre le supremum sur a de la quantité de gauche). En prenant le supremum dans le membre de gauche de (4.7), on obtient une première inégalité.

Montrons à présent l'inégalité inverse. Etant donné que la densité ρ n'est pas forcément bornée, nous la tronquons en définissant:

$$\rho_M := \begin{cases} \rho & \text{si } |\rho| \leq M \\ \frac{\rho M}{|\rho|} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient successivement en choisissant $a = \rho_M, b = -\frac{|\rho_M|^2}{2}$, puis en invoquant la colinéarité de ρ_M et ρ (qui implique $\rho_M \cdot \rho = |\rho_M||\rho| \geq |\rho_M|^2$):

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \int_Q adq + \int_Q bdm, b + \frac{|a|^2}{2} \leq 0 \right\} &\geq \int_Q \rho_M \cdot \rho dm - \frac{1}{2} \int_Q |\rho|^2 dm \\ &\geq \int_Q \frac{|\rho_M|^2}{2} dm. \end{aligned}$$

Pour obtenir l'inégalité souhaitée, il suffit de faire $M \rightarrow \infty$.

Pour finir la démonstration, montrons que:

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \int_Q adq + \int_Q bdm, a, b \text{ boréliennes et bornées, } b + \frac{|a|^2}{2} \leq 0 \right\} \\ = \sup_{a, b \in C_b(Q)} \left\{ \int_Q adq + \int_Q bdm, b + \frac{|a|^2}{2} \leq 0 \right\}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Cette dernière étape consiste à appliquer le théorème de Lusin.

Fixons a, b deux fonctions boréliennes et bornées, qui vérifient la contrainte inégalité. Soit $\varepsilon > 0$, alors par le théorème de Lusin, il existe un sous-ensemble A de Q tel que $(|q| + m)(A) < \varepsilon$ (ici $|q|$ est la mesure variation totale associée à q) ainsi que deux fonctions $a_\varepsilon, b_\varepsilon \in C_b(Q)$ telles que $a = a_\varepsilon, b = b_\varepsilon, |a_\varepsilon| \leq \|a\|_\infty$, et $|b_\varepsilon| \leq \|b\|_\infty$ sur le complémentaire de A (noté A^c). Remarquons que si $(a_\varepsilon, b_\varepsilon)$ ne vérifient pas la contrainte inégalité de (4.6), on peut alors prendre $\tilde{a}_\varepsilon = a_\varepsilon, \tilde{b}_\varepsilon = \min(b_\varepsilon, -\frac{|a_\varepsilon|^2}{2})$ et appliquer ce qui suit.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} \sup_{a, b \in C_b(Q)} \left\{ \int_Q adq + \int_Q bdm, b + \frac{|a|^2}{2} \leq 0 \right\} \\ \geq \int_Q a_\varepsilon dq + \int_Q b_\varepsilon dm = \int_Q adq + \int_Q bdm + \int_Q (a_\varepsilon - a) dq + \int_Q (b_\varepsilon - b) dm \\ \geq \int_Q adq + \int_Q bdm - 2\varepsilon(\|a\|_\infty + \|b\|_\infty). \end{aligned}$$

En passant à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient

$$\sup_{a, b \in C_b(Q)} \left\{ \int_Q adq + \int_Q bdm, b + \frac{|a|^2}{2} \leq 0 \right\} \geq \int_Q adq + \int_Q bdm,$$

et on montre finalement (4.8) en prenant le supremum dans le membre de droite sur les fonctions boréliennes bornées (vérifiant la contrainte). Nous pouvons conclure que H est sci pour la topologie faible-* en tant que supremum de fonctions continues. \square

Démontrons à présent la proposition 4.2.2.

Proof. Soit $(q_n, m_n)_n$ une suite minimisante. Cette suite est bien sûr dans le domaine de K . En utilisant l'inégalité de Jensen et la positivité de la masse, on a :

$$\begin{aligned} K(q_n, m_n) &\geq \int_Q \frac{1}{2} \left| \frac{dq_n}{dm_n} \right|^2 dm_n + \|m_n\|_{L^2(Q)}^2 \geq \frac{1}{2} \left(\int_Q dq_n \right)^2 + \|m_n\|_{L^2(Q)}^2 \\ &= \frac{1}{2} \|q_n\|_{\mathcal{M}}^2 + \|m_n\|_{L^2(Q)}^2, \end{aligned}$$

où $\forall \mu \in \mathcal{M}_b(Q, \mathbb{R}^{2d})$, $\|\mu\|_{\mathcal{M}} = \sup_{A \subset Q, |A| < 1, \Xi \in C_b} \int_A \Xi d\mu$. Nous voyons donc que (q_n, m_n) sont respectivement bornées dans $\mathcal{M}_b(Q, \mathbb{R}^{2d})$ et $L^2(Q)$ (*a fortiori* dans $\mathcal{M}_b(Q, \mathbb{R}^2)$). On peut donc extraire une sous-suite (notée (q_{n^k}, m_{n^k})) qui converge pour la topologie faible-* vers une limite $(q, m) \in \mathcal{M}_b(Q, \mathbb{R}^{2d+2})$. L'admissibilité de la limite est équivalente à la fermeture de \mathcal{A} qui s'obtient facilement en passant à la limite dans la formulation faible dans la définition de \mathcal{A} . Finalement, à l'aide du lemme 4.2.3 et puisque K_2 est convexe en m :

$$\inf_{(q,m) \in \mathcal{A}} K(q, m) \geq \limsup_k K_1(q_{n^k}, m_{n^k}) + \limsup_k K_2(m_{n^k}) = K(q, m),$$

ce qui prouve que (q, m) est un point de minimum et permet de conclure. \square

Remark 8. *Le problème de l'existence d'une solution au problème joint dans le cas non convexe $\lambda > 2$ reste ouvert. Néanmoins, insistons encore sur le fait que tout point critique de J_λ est une solution de (\mathcal{N}) .*

Remark 9. *Terminons cette partie théorique par bien remarquer qu'il est clair que l'existence reste vraie si l'on ajoute, à l'instar de Maury, Roudneff-Chupin et Santambrogio dans [61], une contrainte du type $m \leq \text{constante}$ (incompressibilité).*

4.3 Méthode numérique

Dans cette section nous introduisons la discrétisation ainsi qu'une méthode de descente de gradient. Plus précisément nous distinguons les cas selon la convexité du problème joint (\mathcal{Q}) . Dans le cas convexe (c'est-à-dire que $\lambda \leq 2$) nous décrivons la descente de gradient sur la fonctionnelle jointe. Le cas non convexe où $\lambda > 2$, i.e. dans lequel la xénophobie est bien marquée, nous intéresse tout particulièrement (nous nous attendons à perdre l'unicité). Nous décrivons donc dans un second temps la méthode de directions alternées que nous appliquons alors en exploitant la convexité partielle du problème d'une population i , étant donnée l'action de l'autre population $-i$.

Expression du gradient En premier lieu, donnons l'expression du gradient de la fonctionnelle. Nous continuons à jongler entre les formulations en α et en $q = \alpha m$ pour revenir à cette dernière. Ainsi, c'est le problème sous sa forme (4.5) que nous regardons ici. Nous modifions un peu plus le point de vue en ceci que nous considérons la densité m comme une fonction affine du moment q . Pour clarifier les choses, voici le problème joint réécrit :

$$\inf_q F(q) := \sum_{i=1,2} \left(\int_Q \frac{|q_t^i|^2}{2m_t^i} + \Phi_{\lambda/2}^i(m_t) + \int_{\Omega} \Psi^i m_T^i \right), \quad (4.9)$$

avec m^i , solution de :

$$\partial_t m^i - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m^i = -\operatorname{div}(q^i), \quad m^i(0, \cdot) = m_0^i(\cdot), \quad i = 1, 2. \quad (4.10)$$

Grâce à un calcul différentiel semblable à celui effectué dans la preuve de la proposition 4.2.1 de la section 4.2.2, on obtient l'expression du gradient de F :

$$\forall (q, m) \in \mathcal{A}, \forall w = (w^1, w^2) \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^{2d}),$$

$$\nabla F(q) \cdot w = \left(\int_Q \left(\frac{q^1}{m^1} + \nabla \theta^1 \right) \cdot dw^1, \int_Q \left(\frac{q^2}{m^2} + \nabla \theta^2 \right) \cdot dw^2 \right), \quad (4.11)$$

où θ^i , est solution de l'équation :

$$-\partial_t \theta^i - \frac{\sigma^2}{2} \Delta \theta^i = -\frac{|q^i|^2}{2(m^i)^2} + (2m^i + \lambda m^{-i}), \quad \theta^i|_{t=T} = \Psi^i, \quad i = 1, 2. \quad (4.12)$$

Algorithme dans le cas convexe Le problème (4.9) étant convexe pour $\lambda \leq 2$, nous proposons une méthode de descente de gradient pour trouver numériquement une solution. Nous nous concentrons sur le cas de la dimension 2 et plus précisément nous prenons $\Omega = [0, 1]^2$ avec conditions périodiques au bord.

Soit deux entiers M et N , le maillage en temps et en espace est de taille $dt = \frac{T}{N}$ et $dx = dy = \frac{1}{M}$. Pour $(i, j, k) \in A := \{0, \dots, N\} \times \{0, \dots, M\}^2$, nous noterons $f_{j,k}^i$ l'approximation numérique de $f(idt, jdx, kdy)$ pour une fonction f définie sur Q . Les équations (4.10) et (4.12) seront résolues itérativement par différences finies, après initialisation ($m_{j,k}^0 = m_0(jdx, kdy)$ et $\theta_{j,k}^N = \Psi(jdx, kdy)$), selon les approximations des dérivées suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_t f(idt, jdx, kdy) &= \frac{f_{j,k}^{i+1} - f_{j,k}^i}{dt}, \\ \Delta f(idt, jdx, kdy) &= \frac{f_{j+1,k}^i - 2f_{j,k}^i + f_{j-1,k}^i}{(dx)^2} + \frac{f_{j,k+1}^i - 2f_{j,k}^i + f_{j,k-1}^i}{(dy)^2}. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant donner la méthode de descente de gradient (nous la noterons ADG dans la suite) que nous utilisons pour l'approximation des solutions. A l'étape n , nous notons $f^{(n)} := \left(f_{j,k}^{i,(n)} \right)_{(i,j,k) \in A}$. On fixe aussi un seuil de tolérance $\text{TOL} > 0$.

1. Initialisation :

Nous nous donnons $q^{(0)}$ puis calculons $m^{(0)}$ en résolvant (4.10) par le schéma de différences finies.

2. Etape n :

- Nous calculons successivement : $\theta^{(n)}$ en résolvant numériquement l'équation (4.12) avec $q^{(n-1)}$ et $m^{(n-1)}$ en entrées, puis le gradient (discrétisé) de la fonctionnelle: $\nabla F(q^{(n-1)})$, en utilisant la formule (4.11), et à l'aide de $\theta^{(n)}$.
- Nous effectuons la descente : $q^{(n)} = q^{(n-1)} - \rho_n \nabla F(q^{(n-1)})$.
- Si $\|q^{(n)} - q^{(n-1)}\| < \text{TOL}$, on stoppe la procédure.
Sinon, $n = n + 1$.

Ci-dessus, ρ_n est le pas de descente à l'étape n , qui sera choisi optimal en ce sens qu'il minimise : $\rho \in [0, 1] \rightarrow F(q^{(n-1)} - \rho \nabla F(q^{(n-1)}))$. Numériquement nous l'approchons par dichotomie.

Directions alternées dans le cas non convexe Le cas de l'aversion marquée envers l'autre groupe ($\lambda > 2$), dans lequel nous disposons de moins de résultats théoriques, nous semble aussi très riche. L'un des principaux objectifs de notre travail est d'obtenir des résultats numériques dans cette situation. Il convient donc d'expliquer selon quel procédé nous essayons d'approcher les équilibres de Nash entre les 2 populations averses les unes aux autres. Nous optons ici pour une méthode de directions alternées et exploitons ainsi la convexité de chacun des problèmes associés à la i -ème population, étant donnée l'évolution de l'autre population (q^{-i}, m^{-i}) :

$$\inf_{q^i} F^i(q) := \int_0^T \int_{\Omega} \frac{|q_t^i|^2}{m_t^i} + \Phi_{\lambda}^i(m_t) dt + \int_{\Omega} \Psi^i m_T^i,$$

sous la contrainte habituelle que m^i est solution de l'EDP (4.10) pour q^i , et donnée initiale m_0^i . Nous ne répétons pas l'expression du gradient de F^i , pour $i = 1, 2$, qui s'obtient facilement par analogie au cas joint (4.11)-(4.12).

Dans les lignes qui suivent, lorsque nous écrivons que l'on se donne q ou encore que l'on calcule q , nous ne précisons pas que dans chaque cas cela correspond à se donner ou à calculer m en résolvant numériquement, par des différences finies, l'EDP de Fokker-Planck. Nous proposons donc de trouver un équilibre de Nash entre les deux groupes en mettant en œuvre la stratégie que nous décrivons ci-dessous. L'indice du haut correspond à celui du groupe alors que celui du bas désigne l'itération.

1. Initialisation :

L'on se donne q_0^1 puis l'on calcule q_1^2 en appliquant ADG avec q_0^1 .

2. Etape $k \geq 1$:

On dispose de q_k^2 .

- On calcule à l'aide de la méthode ADG q_k^1 puis q_{k+1}^2 (avec en entrée respectivement, q_k^2 et q_k^1).
- Si $\|q_k^i - q_{k-1}^i\| < \text{TOL}$ pour $i = 1, 2$, alors on stoppe la procédure. Sinon, $k = k + 1$.

4.4 Simulations

Comme déjà annoncé dans l'introduction, l'algorithme ADG semble très bien fonctionner (la convergence est très rapide) dans le cas où la masse initiale m_0 est significativement strictement positive.

L'objet de cette dernière section est de le tester, et pour cela, nous nous intéressons à deux exemples. Nous choisissons pour nos simulations $T = 1$ et $\frac{\sigma^2}{2} = 0.01$.

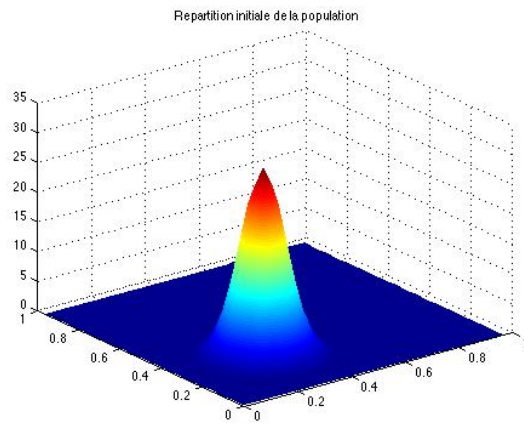
4.4.1 Aversion à la foule

Dans ce paragraphe, nous exhibons des approximations des solutions du problème à une population ($m_0^2 = 0$), c'est-à-dire dans le cadre de Buttazzo, Jimenez et Oudet ([8]).

Nous représentons dans la figure 4.1 le graphe de la masse initiale des individus de la population (concentrée autour du point $(0.3, 0.3)$), ainsi que celui du coût final correspondant à deux puits attractifs au voisinage des points $(0.5, 0.8)$ et $(0.8, 0.5)$. Les figures 4.2 et 4.3 présentent l'évolution de la masse à des instants choisis dans la période $[0, T]$. Plus précisément, nous observons (figure 4.2) un étalement de m dans un premier temps (dispersion due au bruit ainsi qu'à l'aversion à la foule). Notons bien que cet étalement a lieu pendant une bonne partie de la période, plus de la moitié de cette dernière. Dans un second temps (figure 4.3) et à l'approche de l'horizon, nous remarquons que la densité se scinde en deux et tend à se concentrer sur les deux zones attractives. Enfin, nous reproduisons la valeur du coût global en fonction des itérations dans la figure 4.4. Nous voyons aisément que la fonctionnelle semble numériquement atteindre son minimum dans ce cas en 5 itérations.

4.4.2 Interactions dynamiques entre deux groupes

Finalement nous regardons de plus près le cas intéressant de deux populations. Plus particulièrement nous cherchons à approcher numériquement un équilibre de Nash entre les groupes dont le problème d'optimisation est donné par (4.5), en utilisant la procédure décrite ci-avant (et en commençant par optimiser sur le groupe 2). Afin de bien marquer l'aversion des individus d'une population à ceux de l'autre (xénophobie), nous choisissons $\lambda = 20$ dans la définition $\Phi_\lambda^i(m^1, m^2) = \int_\Omega (m^i)^2 + \lambda m^1 m^2$. Les deux populations diffèrent par leur situation initiale (m_0^i , $i = 1, 2$) et leur objectif (Ψ^i , $i = 1, 2$) qui sont représentés dans la figure 4.5. La densité initiale du premier groupe est concentrée autour du point $(0.35, 0.5)$ alors que celle du second l'est autour de $(0.5, 0.35)$. Concernant les coûts finaux, la situation est encore symétrique puisque l'un est un potentiel attractif au voisinage de



(a) Répartition de la population à l'instant initial

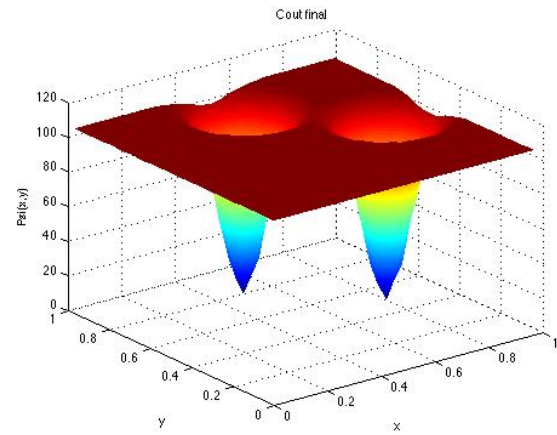
(b) Graphe du coût final Ψ

Figure 4.1: Données du problème

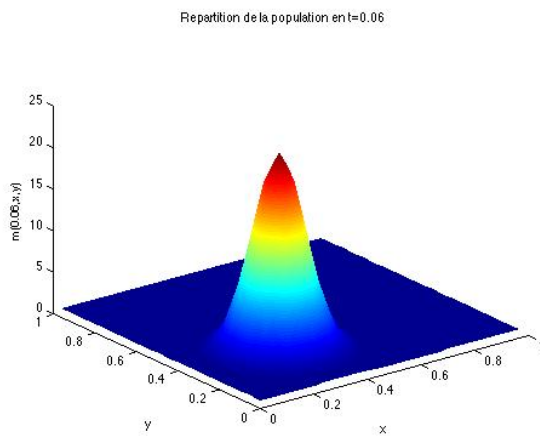
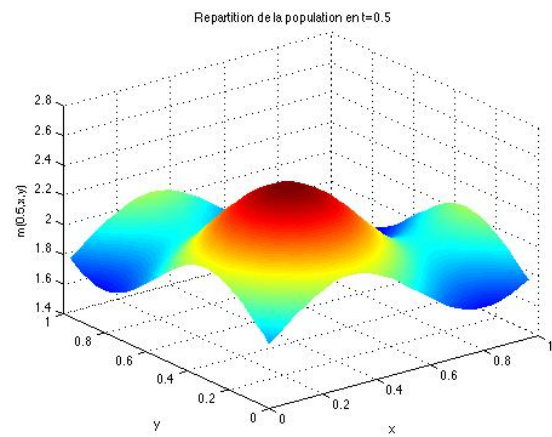
(a) Masse en début de période : $t = 0.06$ (b) Masse en milieu de période : $t = 0.5$

Figure 4.2: Graphes de la masse qui s'étale dans la première moitié de la période

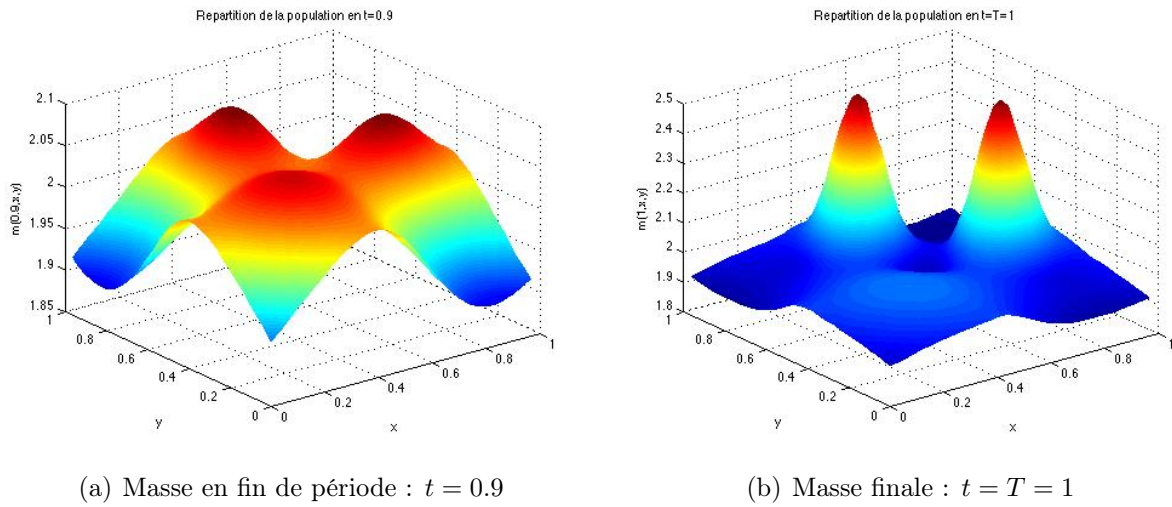


Figure 4.3: Graphes de la masse qui se concentre dans les deux zones attractives en fin de période

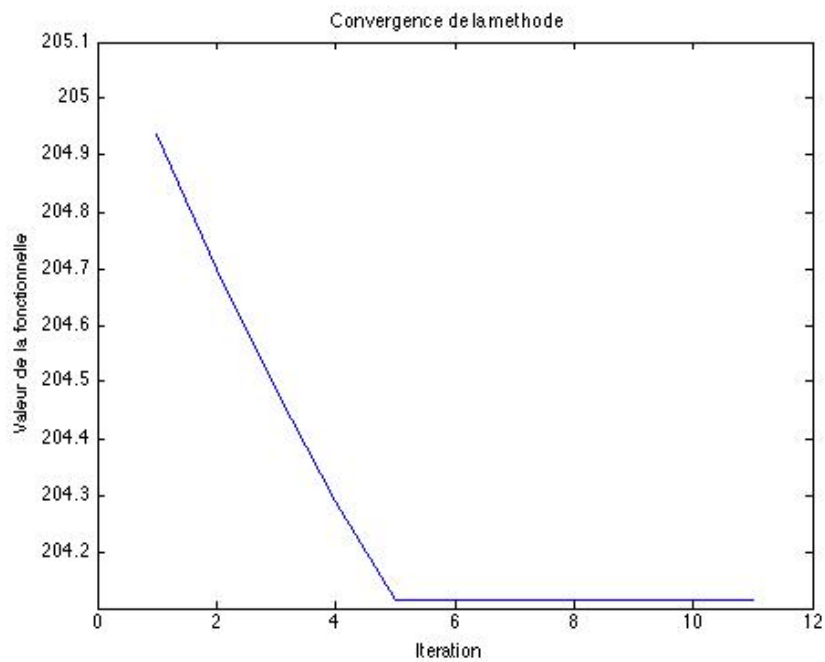
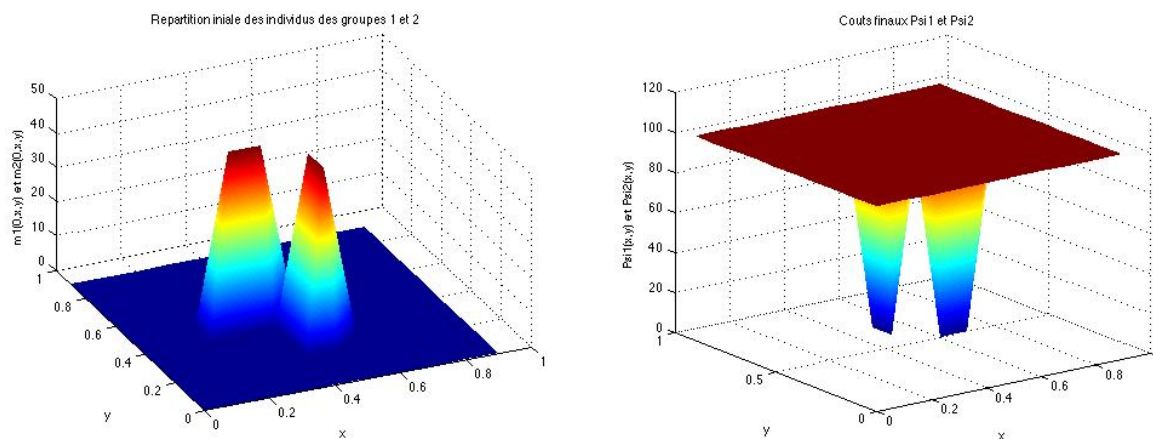


Figure 4.4: Valeur de la fonctionnelle F pour chaque itération

(0.65, 0.5) (groupe 1) et l'autre au voisinage de (0.65, 0.5) (groupe 2).

L'intérêt d'une telle situation est d'observer le comportement des individus ainsi modélisés qui doivent se croiser pour atteindre leur objectif.

Nous pouvons remarquer, en regardant la figure 4.6, où sont dessinés les graphes des



(a) Répartition de la population à l'instant initial

(b) Graphe des coûts finaux Ψ^i

Figure 4.5: Données du problème

deux masses, que l'on observe le même phénomène d'étalement que dans l'exemple à une population. Mais la période d'évolution la plus intéressante à nos yeux est décrite par les éléments de la figure 4.7. En effet, nous voyons bien que la population 1 cède la place à la population 2 qui se dirige alors vers son objectif en passant par le centre du domaine (plus court chemin sans prendre en compte les aspects de congestion). Les individus de la population 1 "patientent" pour quelques uns, passent par le bord (conditions périodiques) pour grande partie, ou même se dirige vers le centre pour d'autres moins nombreux. On remarque que le groupe 1 se concentre moins vite que le groupe 2. Finalement, nous pouvons remarquer, en nous reportant à la figure 4.8, que les deux populations se regroupent effectivement autour des points (0.65, 0.5) et (0.5, 0.65).

Il est en outre important de noter que nous obtenons une situation symétrique dès lors que nous changeons l'ordre d'optimisation (i.e. si nous commençons par le groupe 1). La rupture de symétrie est donc liée au choix dans la procédure d'optimisation (i.e. commencer par tel ou tel groupe).

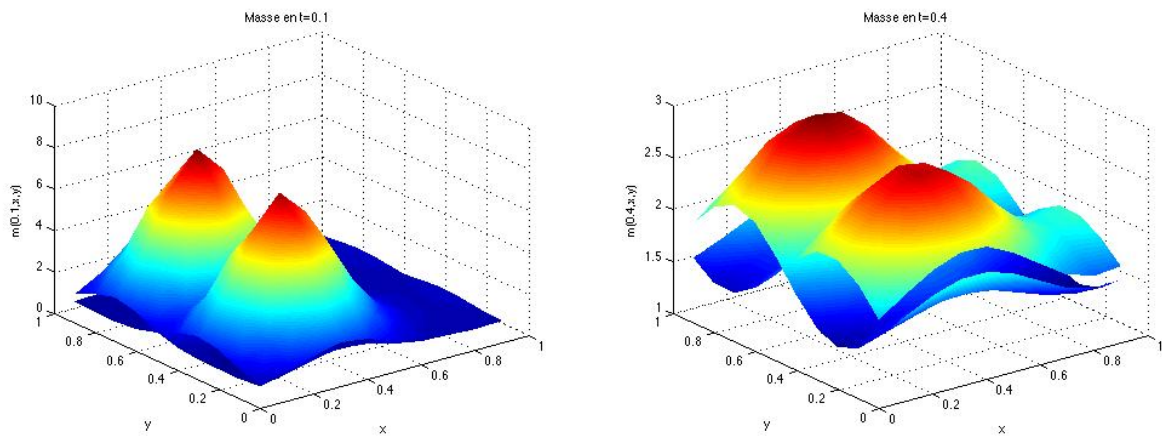
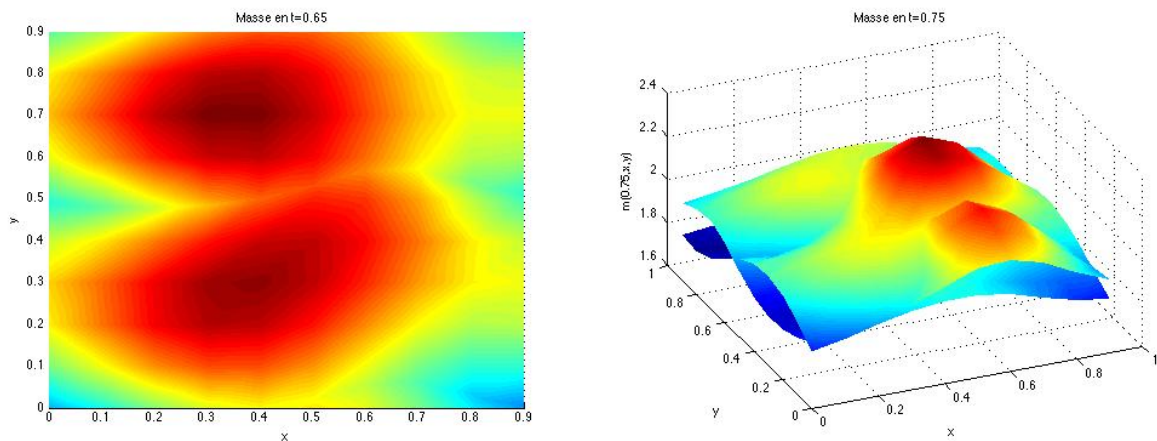
(a) Masses en début de période : $t = 0.1$ (b) Masses en milieu de période : $t = 0.4$ Figure 4.6: Graphes de m^1 et m^2 qui commencent par s'étaler(a) Lignes de niveaux des masses en $t = 0.65$ (b) Masses se croisant : $t = 0.75$

Figure 4.7: Le groupe 2 passe finalement par le centre du domaine à l'instar de quelques uns des individus du groupe 1, mais la majorité par le bord (conditions périodiques)

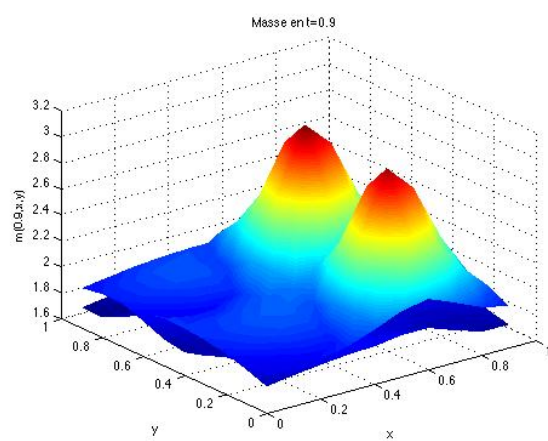
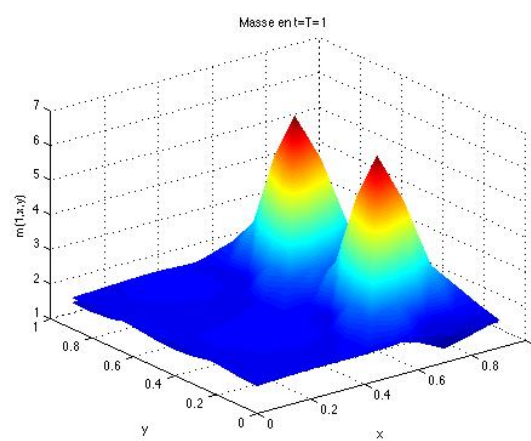
(a) Masses en fin de période : $t = 0.9$ (b) Masses finales : $t = T = 1$

Figure 4.8: Evolution en fin de période.

Chapitre 5

Optimal transport and optimal control

Ce chapitre est basé sur un travail commun avec G. Carlier, intitulé "A planning problem combining calculus of variations and optimal control", accepté, à paraître dans Applied Mathematics and Optimization.

Résumé :

Nous considérons des variantes du problème classique de transport optimal dans lesquelles l'on optimise non seulement sur les couplages entre deux variables x et y , mais aussi sur des contrôles intervenant dans l'évolution (possiblement stochastique) de ces variables. De telles situations sont motivées par un problème d'allocation de tâches à des employés, dont les caractéristiques peuvent évoluer et être contrôlées au cours du temps. Nous distinguons les cas couplé et découplé. Le premier est un problème standard de transport optimal faisant intervenir comme coût la valeur d'un problème de contrôle optimal. Le problème découplé s'avère être plus compliqué puisqu'il est non-linéaire par rapport au plan de transport. Nous traitons complètement le cas déterministe linéaire-quadratique et montrons que même dans ce cas l'existence d'une solution au problème découplé n'est pas toujours vérifiée.

Mots clés : Transport optimal, contrôle optimal

Abstract :

We consider some variants of the classical optimal transport where not only one optimizes over couplings between some variables x and y but also over some control variables governing the (possibly stochastic) evolutions of these variables with time. Such a situation is motivated by an assignment problem of tasks with workers whose characteristics can evolve with time (and be controlled). We distinguish between the coupled and decoupled case. The coupled case is a standard optimal transport with the value of some optimal control problem as cost. The decoupled case is more involved since it is nonlinear in the transport plan. We fully treat the linear quadratic case and show that even in this case existence may fail for the decoupled problem.

Keywords : Optimal transport, optimal control.

5.1 Introduction

In the classical optimal transport problem, a planner has to find some coupling or transport plan between two nonnegative measures of equal total mass (say 1) so as to minimize average cost. The Monge-Kantorovich problem is then the linear program consisting in finding a cost minimizing measure having prescribed marginals on variables, say x and y . Such problems have been very much studied in recent years in particular for their various applications in PDE's, geometry, probability theory (see the recent books of Villani [73], [74])... Interestingly, transport/assignment problems have their modern roots in planning problems (optimally transporting coal from mines to steel factories for instance) and the pioneering works of Kantorovich in the USSR and Koopmans in the West were awarded by the Nobel prize in economics in 1975. Typical applications are optimal allocation of resources or assignment problems; for other economic applications, we refer to the recent work of Ekeland [28], [29] and Chiappori, McCann and Nesheim [23] relating matching problems and hedonic equilibria to optimal transport theory.

If, to fix ideas, we think of a firm having to assign N workers of different skills x to N tasks of different difficulties y , the assignment problem simply consists in assigning a task to each worker (for instance assigning most difficult tasks to most skilled workers). It is however reasonable to think that, in addition to designing such an assignment, the firm has the possibility to act directly on the workers' types using some (costly) control variable like internal training. The same of course applies to the task type y that may change with time if, for example, some investments are made to make the task easier or quicker to execute. This is where optimal control comes into play. The problems we consider in the present paper are precisely intended to deal with such situations where a planner or firm has at disposal as decision variables not only the initial assignment but also control variables that affect the (possibly stochastic) dynamics of the state variables x and y . More precisely, we consider the case where the planner chooses the initial coupling between x and y , initially distributed according to respective probabilities μ_0 and ν_0 , and a control variable governing the evolutions of the characteristics x and y . It is assumed that a pair (worker/task) that is initially formed at time 0 with initial characteristics (x, y) will remain paired or married during a fixed period although its characteristics may evolve with time, this captures the idea that for instance workers are assigned a certain task during some minimal period.

We will consider two different cases that we respectively call the *coupled* and the *decoupled* case and will compare them. In the coupled case, one optimizes over initial transport plans and control for each initial pair (x, y) . The coupled problem thus amounts to solve a standard optimal transport where the cost function simply is the value function of some optimal control problem. In the decoupled case, we will assume that y is constant in time and the control variable for x has to be chosen independently of y (for instance the planner offers the same training to all the workers of same skill, independently of the task they will be assigned). This case is much more involved since it is not linear (and not even lower semicontinuous) in the transport plan. Under quite general assumptions it turns out that the coupled and decoupled problems have the same value but that the latter may fail to

have solutions (a counter-example will be given in section 5.4).

The paper is organized as follows. In section 5.2, the coupled problem is introduced, an existence result is proved and some cases of uniqueness are given. In section 5.3, we study the decoupled problem which, contrary to the coupled case, gives rise to a nonlinear optimization problem over transport plans. Finally, section 5.4 is devoted to a linear quadratic deterministic case that we treat in details and for which we compare the coupled and the decoupled case, we also give some counterexamples.

5.2 The coupled case

5.2.1 The optimization problem

We consider a finite horizon framework on the period $[0, T]$. The state equation for the joint dynamics of $Z_t = (X_t, Y_t)$ is

$$dZ_t = b(Z_t, u_t)dt + \sigma(Z_t, u_t)dW_t, \quad t \in [0, T] \quad (5.1)$$

where W_t is a standard $2d$ -dimensional Brownian motion on some filtered probability space and $(u_t)_{t \in [0, T]}$ is an admissible control process i.e. it is a progressively measurable process with values in a control space U , assumed for simplicity to be a compact metric space. We will denote by \mathcal{U} the set of admissible controls. We assume that $b \in C(\mathbb{R}^{2d} \times U, \mathbb{R}^{2d})$, $\sigma \in C(\mathbb{R}^{2d} \times U, M_{2d})$ (M_{2d} denoting the space of $2d \times 2d$ matrices with real entries) and that there is some constant K_1 such that for every $(z_1, z_2, u) \in \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^{2d} \times U$ one has

$$|b(z_1, u) - b(z_2, u)| + |\sigma(z_1, u) - \sigma(z_2, u)| \leq K_1 |z_1 - z_2|. \quad (5.2)$$

The Lipschitz assumption (5.2) guarantees the existence and uniqueness of a strong solution to (5.1) for every initial condition $Z_0 = (x, y)$ and every admissible control process $u \in \mathcal{U}$. We will denote $Z_t^{x, y, u}$ this solution in the sequel.

To each initial condition (x, y) and each admissible control process $u \in \mathcal{U}$ is associated a cost

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T c(Z_s^{x, y, u}, u_s) ds + \phi(Z_T^{x, y, u}) \right).$$

We assume that both c and ϕ are nonnegative and continuous and that there exist a constant K_2 and an exponent $k \geq 1$ such that for every $(z_1, z_2, u) \in \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^{2d} \times U$:

$$|c(z_1, u) - c(z_2, u)| + |\phi(z_1) - \phi(z_2)| \leq K_2 |z_1 - z_2| (1 + |z_1|^{k-1} + |z_2|^{k-1}). \quad (5.3)$$

The last ingredient in the problem is a pair of Borel probability measures μ_0 and ν_0 on \mathbb{R}^d giving respectively the distributions of the initial state for x and for y . The initial distribution γ for the joint process Z is chosen by the controller, it is a coupling between μ_0 and ν_0 and thus belongs to the set of transport plan $\Pi(\mu_0, \nu_0)$ consisting of all Borel

probability measures γ on $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ having μ_0 and ν_0 as marginals. We shall finally assume the following on μ_0 and ν_0 :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x|^k d\mu_0(x) + \int_{\mathbb{R}^d} |y|^k d\nu_0(y) < +\infty. \quad (5.4)$$

The controller's optimization problem then reads as

$$\inf_{\gamma \in \Pi(\mu_0, \nu_0)} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \left(\inf_{u \in \mathcal{U}} \mathbb{E} \left(\int_0^T c(Z_s^{x,y,u}, u_s) ds + \phi(Z_T^{x,y,u}) \right) \right) d\gamma(x, y) \quad (5.5)$$

which can simply be rewritten as the optimal transport problem :

$$\inf_{\gamma \in \Pi(\mu_0, \nu_0)} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} v(0, x, y) d\gamma(x, y). \quad (5.6)$$

where v is the value function

$$v(t, z) := \inf_{u \in \mathcal{U}} \mathbb{E} \left(\int_t^T c(Z_s^{z,u}, u_s) ds + \phi(Z_T^{z,u}) \mid Z_t^{z,u} = z \right), \quad \forall (t, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{2d}.$$

We won't discuss whether the previous optimal control admits a solution (for each fixed z). This issue relies on whether the value function is regular enough so that one can define an optimal feedback control, this is of course tightly related with the regularity for the corresponding Hamilton-Jacobi-Bellman equation. Instead, we will focus on the optimal transport formulation (5.6).

5.2.2 Existence

It is now easy to check that the infimum in (5.6) is attained, although the arguments are very standard in optimal transport (see [73]), we give a proof for the sake of completeness.

Theorem 5.2.1. *Under the assumptions of paragraph 5.2.1, the value of (5.6) is finite and attained by some optimal transport plan.*

Proof. First, it follows from assumption (5.3) and standard arguments in control theory (see for instance [31], section IV.6) that $v(0, \cdot)$ has polynomial growth and is continuous. More precisely, there is a constant K_3 such that

$$0 \leq v(0, x, y) \leq K_3(1 + |x|^k + |y|^k), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{2d} \quad (5.7)$$

and, for all $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^{2d}$:

$$|v(0, z_1) - v(0, z_2)| \leq K_3 |z_1 - z_2| (1 + |z_1|^{k-1} + |z_2|^{k-1}). \quad (5.8)$$

It immediately follows from (5.7) and (5.4) that the value of (5.6) is finite. Since $\Pi(\mu_0, \nu_0)$ is tight and $v(0, \cdot)$ is continuous, for each $n \in \mathbb{N}^*$, there is some $\gamma_n \in \Pi(\mu_0, \nu_0)$ such that

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} \min(v(0, \cdot), n) d\gamma_n \leq \int_{\mathbb{R}^{2d}} \min(v(0, \cdot), n) d\gamma, \quad \forall \gamma \in \Pi(\mu_0, \nu_0). \quad (5.9)$$

Again, by tightness of $(\gamma_n)_n$, we may assume, taking a subsequence if necessary, that γ_n converges narrowly to some $\bar{\gamma} \in \Pi(\mu_0, \nu_0)$. We thus have, for every $M > 0$ and every $\gamma \in \Pi(\mu_0, \nu_0)$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \min(v(0, \cdot), M) d\bar{\gamma} &= \lim_n \int_{\mathbb{R}^{2d}} \min(v(0, \cdot), M) d\gamma_n \\ &\leq \limsup_n \int_{\mathbb{R}^{2d}} \min(v(0, \cdot), n) d\gamma_n \\ &\leq \limsup_n \int_{\mathbb{R}^{2d}} \min(v(0, \cdot), n) d\gamma \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} v(0, \cdot) d\gamma \end{aligned}$$

and then letting $M \rightarrow +\infty$ we conclude that $\bar{\gamma}$ solves (5.6). □

5.2.3 Some cases of uniqueness

Our aim now is to exhibit some special cases where there is uniqueness of an optimal transport plan for (5.6) and this plan is given by a transport map, that is of the form $\gamma = \delta_{S(x)} \otimes \mu_0$ for some measure preserving map S between μ_0 and ν_0 (which corresponds to a deterministic optimal coupling).

It is indeed well-known (see [35], [54] [11]) that if the transportation cost $v(0, \cdot, \cdot)$ satisfies a certain structural condition called the *generalized Spence-Mirrlees* or *twist* condition and if μ_0 is regular enough (absolutely continuous for instance) then there is uniqueness of an optimal transportation plan that is in fact given by a transport map. We won't insist here on the twist condition and the regularity required on μ_0 in general. Let us indicate some particular cases instead :

- $d = 1$, $v(0, \cdot, \cdot)$ of class C^2 (say) and the cross-derivative $\partial_{xy}v(0, x, y)$ is everywhere strictly positive, in this case, as soon as μ_0 is atomless, there is a unique transport plan that is given by the unique nondecreasing map (or monotone rearrangement) pushing μ_0 forward to ν_0 ,
- $v(0, x, y) = c_0(x - y)$ with c_0 strictly convex and differentiable (see [36]) and μ_0 absolutely continuous and compactly supported, then there is also a unique optimal transport plan and the latter is given by a transport map,
- of particular interest is the quadratic case $c_0(z) = |z|^2$ which was first solved by Brenier [7], in this case, uniqueness of an optimal plan, once again given by a transport map, holds as soon as μ_0 and ν_0 have second moments and μ_0 does not give mass to sets of Hausdorff dimension less than $d - 1$ (see McCann [60]).

Uncontrolled case Let us first consider the uncontrolled case where $b = b(z)$ is a Lipschitz vector field, $\sigma = \sqrt{2}I_{2d}$, the running cost $c = c(z)$ and the terminal cost $\phi = \phi(z)$ satisfy the same assumptions as in section 5.2.1. In this case, it is well-known that the function

$$v(t, z) := \mathbb{E} \left(\int_t^T c(Z_s) ds + \phi(Z_T) \mid Z_t = z \right), \quad (t, z) \in (0, T) \times \mathbb{R}^{2d}$$

is the unique solution with polynomial growth of the backward linear parabolic equation

$$\partial_t v + \Delta v + b \cdot \nabla v = -c, \quad v|_{t=T} = \phi. \quad (5.10)$$

As seen in the previous paragraph, in the optimal transportation problem (5.6), the cost to take into account is $v(0, \cdot)$, the value at time 0 of the solution of (5.10).

Let us treat in details the case $b = 0$ and $\phi = 0$. In this case, (5.10) is simply the heat equation

$$\partial_t v + \Delta v = -c, \quad v|_{t=T} = 0,$$

so that

$$v(0, \cdot) = \int_0^T (G_t \star c)(\cdot) dt \quad \text{with} \quad G_t(z) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp \left(-\frac{|z|^2}{4t} \right). \quad (5.11)$$

Then the optimal transportation problem (5.6) reads as :

$$\inf_{\gamma \in \Pi(\mu_0, \nu_0)} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \left(\int_0^T (G_t \star c)(x, y) dt \right) d\gamma(x, y).$$

In the particular case of the quadratic transportation cost $c(x, y) = \frac{|x-y|^2}{2}$, a direct computation leads to :

$$v(0, x, y) = T \left(\frac{|x-y|^2}{2} + 1 \right).$$

Consequently, the infimum of (5.6) is $T(W^2(\mu_0, \nu_0) + 1)$ where W^2 stands for the squared-2-Wasserstein distance :

$$W^2(\mu_0, \nu_0) := \inf_{\gamma \in \Pi(\mu_0, \nu_0)} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |x-y|^2 d\gamma(x, y).$$

It is well-known that for the quadratic cost, if μ_0 does not *give mass to small sets* (i.e. Borel sets of Hausdorff dimension less than $d-1$) then there is a unique optimal transport plan that is in fact induced by a transport map S . Moreover S is characterized by $S = \nabla u$ with u convex (see [7], [34], [60], [36]).

Linear control and zero transportation cost Let us now consider the linear drift $b(Z_t, u_t) = u_t$ with constant diffusion $\sigma = \sqrt{2}I_{2d}$ and the quadratic running cost $c(z, u) = c(u) = \frac{u^2}{2}$. We also assume that $\phi \in C^2(\mathbb{R}^{2d})$ and satisfies the same assumptions as before. The value function :

$$v(t, z) := \inf_{u \in \mathcal{U}} \mathbb{E} \left(\int_t^T c(u_s) ds + \phi(Z_T) \mid Z_t = z \right), \quad (t, z) \in (0, T) \times \mathbb{R}^{2d}$$

is then the viscosity solution of the Hamilton-Jacobi-Bellman equation :

$$\partial_t v + \Delta v + \frac{|\nabla v|^2}{2} = 0, \quad v|_{t=T} = \phi. \quad (5.12)$$

Performing the usual Hopf-Cole transformation $V(T-t, z) = e^{v(t,z)/2}$, $\Phi := e^{\phi/2}$, transforms (5.12) into the heat equation for V :

$$\partial_t V - \Delta V = 0, \quad V|_{t=0} = \Phi. \quad (5.13)$$

As soon as Φ has polynomial growth, this gives the explicit expression

$$v(t, \cdot) = 2 \log(G_{T-t} \star \Phi(\cdot))$$

where G is again the heat kernel as in (5.11). In the unidimensional case, one may thus check whether $v(0, \cdot, \cdot)$ satisfies the cross-derivative criterion recalled above. Indeed, by a direct computation, $\partial_{xy} v(0, \cdot, \cdot) > 0$ is equivalent to

$$(G_T \star \partial_{xy} \Phi)(G_T \star \Phi) > (G_T \star \partial_x \Phi)(G_T \star \partial_y \Phi).$$

Calculus of variations Let us now consider the simple deterministic case where the variable y is constant with respect to time, where the state equation for X is simply $\dot{X} = u$ and where the running and terminal costs respectively take the form

$$c(x - y) + F(u), \quad \text{and } \phi(x - y)$$

where c , ϕ and F are bounded from below, smooth and strictly convex functions, with $\Lambda \text{id} \geq D^2 F \geq \lambda \text{id}$ for some $\Lambda > 0$, $\lambda > 0$. Let us further assume for simplicity that μ_0 and ν_0 are compactly supported. In this case the value function is given by

$$v(0, x, y) = \inf_{X \in H^1, X(0)=x} \int_0^T \left(c(X(t) - y) + F(\dot{X}(t)) \right) dt + \phi(X(T) - y).$$

We then rewrite the value as $v(0, x, y) = w(x - y)$ where

$$w(z) = \inf_{X \in H^1, X(0)=z} \int_0^T \left(c(X(t)) + F(\dot{X}(t)) \right) dt + \phi(X(T)).$$

It is now easy to check that w is a C^1 and strictly convex function. Then, it is well-known (see [36], [34], [11]) that the corresponding optimal transport problem

$$\inf_{\gamma \in \Pi(\mu_0, \nu_0)} \int w(x - y) d\gamma(x, y)$$

possesses a unique solution that is given by an optimal transport map S as soon as μ_0 is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure (see [36]). In this simple case again, we then have existence and uniqueness of an optimal plan that is further given by a transport map. We will again use this example in the decoupled variant of section 5.3.

5.2.4 Alternative formulations

We now describe formally an alternative formulation of (5.5). Given $\gamma_0 \in \Pi(\mu_0, \nu_0)$ as initial coupling of X and Y and an admissible control that we assume to be of Markovian type i.e. of the form $u_t = u_t(X_t, Y_t)$, let $t \in [0, T]$ and γ_t^u be the joint probability law of (X_t, Y_t) (this is purely formal since the dependence of the Markovian control u on x, y may not be regular enough to define a flow to the SDE (5.1)) :

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi d\gamma_t^u := \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathbb{E}(\varphi(Z_t^{x,y,u})) d\gamma_0(x, y), \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2d}).$$

Then γ_t^u (again formally) solves the Fokker-Planck equation (controlled by u) :

$$\partial_t \gamma - \frac{1}{2} \text{tr} \left(\sigma(z, u_t(z)) \sigma(z, u_t(z))^* D^2 \gamma \right) + \text{div}(b(z, u_t(z)) \gamma) = 0, \quad \gamma|_{t=0} = \gamma_0. \quad (5.14)$$

The total cost becomes linear with respect to γ^u and simply reads as :

$$\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^{2d}} c(z, u_t(z)) d\gamma_t^u(z) \right) dt + \int_{\mathbb{R}^{2d}} \phi(z) d\gamma_T^u(z) \quad (5.15)$$

which suggests as an alternative formulation of (5.5) to minimize (5.15) over initial conditions $\gamma_0 \in \Pi(\mu_0, \nu_0)$ and controls u , the dynamics of γ^u being governed by the PDE (5.14).

Let us also mention that it is well-known that (5.6) admits the dual formulation :

$$\sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu_0 + \int_{\mathbb{R}^d} \psi d\nu_0 : \varphi(x) + \psi(y) \leq v(0, x, y) \right\}. \quad (5.16)$$

5.3 The decoupled case

In the coupled problem considered previously, the situation is rather simple since the problem amounts first to compute the value function and then to solve the optimal transport problem where the cost is precisely this value function. However, this requires that the optimizer is able to design a control that depends on both state variables x and y . If one thinks of x as being workers' skills and y the difficulty of some task (constant in time to fix ideas), it may be reasonable to assume in certain cases that the control governing the evolution of x (training, education...) is the same for every worker of type x independently of the task y he will be assigned. In this case, one faces a somehow decoupled variant of the previous problem.

For the sake of simplicity, we will only consider in this section the deterministic case where in addition y is constant in time and $\dot{X} = u$ (calculus of variations). The running cost is given by some continuous Lagrangian $(x, u, y) \in \mathbb{R}^{3d} \mapsto L(x, u, y)$ that is convex with q -growth in the variable u for some $q > 1$, and the terminal cost is $(x, y) \in \mathbb{R}^{2d} \mapsto \phi(x, y)$.

We also assume for simplicity that μ_0 and ν_0 are compactly supported. In this framework, the coupled problem considered previously reads as

$$(\mathcal{P}) \quad \inf_{\gamma \in \Pi(\mu_0, \nu_0)} I(\gamma) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} v(x, y) d\gamma(x, y)$$

where

$$v(x, y) := \inf_{X \in W^{1,q}, X(0)=x} \int_0^T L(X(t), \dot{X}(t), y) dt + \phi(X(T), y).$$

Of course, (\mathcal{P}) possesses solutions as soon as v is continuous (or more generally lower semicontinuous). In the decoupled case, X is not allowed to depend on y but has instead to minimize the conditional average of the cost. More precisely, for $\gamma \in \Pi(\mu_0, \nu_0)$, let us denote the disintegration of γ with respect to its first marginal as $\gamma = \gamma^x \otimes \mu_0$ and then define for every x :

$$v_\gamma(x) := \inf_{X \in W^{1,q}, X(0)=x} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^T L(X(t), \dot{X}(t), y) dt + \phi(X(T), y) \right) d\gamma^x(y).$$

Then, the decoupled problem is :

$$(\mathcal{Q}) \quad \inf_{\gamma \in \Pi(\mu_0, \nu_0)} J(\gamma) = \int_{\mathbb{R}^d} v_\gamma(x) d\mu_0(x).$$

The novel feature of this decoupled problem is that, contrary to the optimal transport problem (\mathcal{P}) , it is nonlinear. In fact, since $v_\gamma(x)$ is *concave* in γ^x (as an infimum of linear functionals of γ^x), (\mathcal{Q}) is a concave minimization problem over $\Pi(\mu_0, \nu_0)$. Existence of a minimizer is a real issue here since the criterion in (\mathcal{Q}) may not be weakly lower semicontinuous (and in fact even the measurability of $x \mapsto v_\gamma(x)$ is not obvious and a counterexample to lower semicontinuity will be given in the next section). Our aim now is not to study existence or nonexistence issues in general but simply to remark that (\mathcal{P}) turns out to be a kind of relaxation of (\mathcal{Q}) under quite weak assumptions :

Proposition 5.3.1. *If the value function v is continuous and μ_0 is atomless, then one has*

$$\inf(\mathcal{Q}) = \min(\mathcal{P}).$$

Moreover, γ solves (\mathcal{Q}) if and only if it solves (\mathcal{P}) and

$$v_\gamma(x) = \int_{\mathbb{R}^d} v(x, y) d\gamma^x(y) \quad \mu_0\text{-a.e.}$$

In particular, if S is an optimal transport for (\mathcal{P}) , i.e. $\delta_{S(x)} \otimes \mu_0$ solves (\mathcal{P}) , then it also solves (\mathcal{Q}) .

Proof. Since $v_\gamma(x) \geq \int_{\mathbb{R}^d} v(x, y) d\gamma^x(y)$, one immediately deduces that $\inf(\mathcal{Q}) \geq \min(\mathcal{P})$. Now, let us remark that if γ is given by a transport map that is $\gamma = \delta_{S(x)} \otimes \mu_0$ then $v_\gamma(x) = v(x, S(x))$ for μ_0 -a.e. x and then in this case one has $\int_{\mathbb{R}^d} v_\gamma d\mu_0 = \int_{\mathbb{R}^d} v(x, S(x)) d\mu_0(x) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} v d\gamma$. Since μ_0 is atomless the set of transport plans induced by transport maps is weakly-* dense in $\Pi(\mu_0, \nu_0)$ (see [1]). In particular, since v is continuous, there is a minimizing sequence for (\mathcal{P}) of the form $\gamma_n = \delta_{S_n} \otimes \mu_0$ where $S_n \# \mu_0 = \nu_0$ for every n . One then has

$$\inf(\mathcal{Q}) \leq \int v_{\gamma_n} d\mu_0 = \int v(x, S_n(x)) d\mu_0(x)$$

and passing to the limit one gets $\inf(\mathcal{Q}) \leq \min(\mathcal{P})$. Let $\gamma \in \Pi(\mu_0, \nu_0)$, γ solves (\mathcal{Q}) if and only if

$$J(\gamma) = \inf(\mathcal{Q}) = \min(\mathcal{P}) \geq I(\gamma)$$

that is γ solves (\mathcal{P}) and $I(\gamma) = J(\gamma)$ i.e.

$$v_\gamma(x) = \int_{\mathbb{R}^d} v(x, y) d\gamma^x(y) \quad \mu_0\text{-a.e.}$$

□

If we consider again the case

$$L(x, u, y) = c(x - y) + F(u), \quad \phi(x, y) = \phi(x - y)$$

under the same convexity, growth and regularity assumptions as in the example of subsection 5.2.3, then we immediately deduce that if μ_0 is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure, then the corresponding decoupled problem admits a unique solution that is given by a transport map.

5.4 The linear-quadratic deterministic case

In this paragraph, we treat a special case where the state variable Y remains constant and the control on X is $u = \dot{X}$. We will consider the case of a quadratic running cost and zero terminal cost :

$$c(x, y, u) = \frac{1}{2}|x - y|^2 + \frac{1}{2}|u|^2, \quad \phi(x, y) = 0$$

and we will distinguish the coupled case (where u is allowed to depend on both x and y) and the decoupled case where u depends on the initial condition x but has to be the same for every y . Of course, in this quadratic framework, we will also assume that μ_0 and ν_0 have finite second-order moments.

5.4.1 The coupled case

In the coupled case, one first solves for every (x, y) :

$$v(x, y) := \inf_{X \in H^1(0, T, \mathbb{R}^d), X(0)=x} \int_0^T \left(\frac{1}{2} |X(t) - y|^2 + \frac{1}{2} |\dot{X}(t)|^2 \right) dt.$$

By standard arguments, this problem has unique solution given by :

$$X(t, x, y) := a(t)(x - y) + y, \quad \text{with } a(t) = \frac{e^{t-2T} + e^{-t}}{1 + e^{-2T}}, \quad t \in [0, T]. \quad (5.17)$$

Replacing in v then leads to the optimal transportation problem :

$$\frac{1}{2} \int_0^T (a^2 + \dot{a}^2) \inf_{\gamma \in \Pi(\mu_0, \nu_0)} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |x - y|^2 d\gamma(x, y) \quad (5.18)$$

which is simply the optimal transportation problem with quadratic cost. Denoting by $W^2(\mu_0, \nu_0)$ the squared-2-Wasserstein distance between μ_0 and ν_0 , we then have the following expression for the value of (5.18) :

$$\frac{1}{2} \|a\|_{H^1}^2 W^2(\mu_0, \nu_0) \quad \text{with } \|a\|_{H^1}^2 = \frac{1 - e^{-2T}}{1 + e^{-2T}}. \quad (5.19)$$

5.4.2 The decoupled case

In the decoupled case, one has to minimize with respect to $\gamma \in \Pi(\mu_0, \nu_0)$ and $(t, x) \mapsto X(t, x)$ (independent of y) such that $X(0, x) = x$, the quantity

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \left(\int_0^T \left(\frac{1}{2} |X(t, x) - y|^2 + \frac{1}{2} |\dot{X}(t, x)|^2 \right) dt \right) d\gamma(x, y). \quad (5.20)$$

By the disintegration theorem, every $\gamma \in \Pi(\mu_0, \nu_0)$ admits a disintegration with respect to its first marginal μ_0 i.e. can be written as $\gamma = \gamma^x \otimes \mu_0$ where $x \mapsto \gamma^x$ is a Borel family of probability measures (naturally interpreted as conditional probability of y given x). We will denote by $g_\gamma(x)$ the average of γ^x :

$$g_\gamma(x) := \int_{\mathbb{R}^d} y d\gamma^x(y), \quad \text{for } \mu_0\text{-a.e. } x \in \mathbb{R}^d.$$

Using the disintegration of γ with respect to μ_0 and the conditional moment g_γ , it is convenient to rewrite the cost (5.20) as :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^T \left(\frac{1}{2} |X(t, x)|^2 - X(t, x) \cdot g_\gamma(x) + \frac{1}{2} |\dot{X}(t, x)|^2 \right) dt \right) d\mu_0(x) \\ + \frac{T}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |y|^2 d\nu_0(y).$$

Minimizing in $X(\cdot, x)$ for each fixed x then yields

$$X(t, x) = a(t)(x - g_\gamma(x)) + g_\gamma(x) \quad (5.21)$$

where a is as in (5.17). Replacing in (5.20), then yields

$$v_\gamma(x) = \frac{1}{2} \|a\|_{H^1}^2 |x - g_\gamma(x)|^2 + \frac{T}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |y - g_\gamma(x)|^2 d\gamma^x(y). \quad (5.22)$$

We thus find that the least cost, as a function of $\gamma_0 \in \Pi(\mu_0, \nu_0)$ only, is :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|a\|_{H^1}^2 \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 d\mu_0(x) + \frac{T}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |y|^2 d\nu_0(y) \\ & + \frac{1}{2} \left(\|a\|_{H^1}^2 - T \right) \int_{\mathbb{R}^d} |g_\gamma|^2 d\mu_0 - \|a\|_{H^1}^2 \int_{\mathbb{R}^d} x \cdot g_\gamma d\mu_0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Recalling that $\|a\|_{H^1}^2$ is given by (5.19), one easily gets $\|a\|_{H^1}^2 - T < 0$ for every $T > 0$ (which is consistent with the concavity property of the decoupled problem as noticed in section 5.3) and thus finding an optimal transport plan amounts to :

$$\inf_{\gamma \in \Pi(\mu_0, \nu_0)} J(\gamma) = -A(T) \int_{\mathbb{R}^d} |g_\gamma(x)|^2 d\mu_0(x) - 2 \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} x \cdot y d\gamma(x, y) \quad (5.24)$$

where $A(T)$ is the positive constant :

$$A(T) := \frac{T}{\|a\|_{H^1}^2} - 1 = \frac{e^{-2T}(T+1) + T - 1}{1 - e^{-2T}}.$$

Of course when μ_0 is absolutely continuous, there is an optimal transport for the quadratic cost and then by proposition 5.3.1 it is also the unique solution of (5.24). The particular and simple form of the functional J in (5.24) enables us to deduce various counterexamples and some particular simple cases of non existence when μ_0 is atomless but may charge small sets.

The functional J is not lower semicontinuous : To see this, let us take μ_0 and ν_0 equal and uniform on the segment $[-1, 1]$, $\gamma_n = \delta_{S_n} \otimes \mu_0$ where S_n is a sequence of μ_0 -measure preserving maps such that γ_n weakly-* converges to the independent coupling $\mu_0 \otimes \mu_0$, then $\int |g_\gamma|^2 d\mu_0 = 0$ and then

$$\limsup_n \int |g_{\gamma_n}|^2 d\mu_0 = \limsup_n \|S_n\|_{L^2}^2 > \int |g_\gamma|^2 d\mu_0$$

since otherwise S_n would converge to 0 in L^2 and then one would have $\gamma = \delta_0 \otimes \mu_0$.

A counterexample to existence : In view of the previous example, one should in general suspect non existence for the minimization of J over $\Pi(\mu_0, \nu_0)$. Let us consider the two-dimensional case where μ_0 is uniformly distributed on the segment $[0, 1] \times \{0\}$ (it thus charges a small set but still is atomless) and let ν_0 be uniform on the square $[0, 1]^2$.

Assume that there exists a minimizer γ of the decoupled problem. In this case, since μ_0 is atomless, using proposition 5.3.1, the explicit values of $v(x, y)$ and $v_\gamma(x)$ given by (5.22), we would then have for μ_0 -a.e. x

$$\begin{aligned} v_\gamma(x) &= \frac{1}{2} \|a\|_{H^1}^2 |x - g_\gamma(x)|^2 + \frac{T}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |y - g_\gamma(x)|^2 d\gamma^x(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} v(x, y) d\gamma^x(y) = \frac{1}{2} \|a\|_{H^1}^2 \int_{\mathbb{R}^d} |x - y|^2 d\gamma^x(y) \\ &= \frac{1}{2} \|a\|_{H^1}^2 \left(|x - g_\gamma(x)|^2 + \int_{\mathbb{R}^d} |y - g_\gamma(x)|^2 d\gamma^x(y) \right). \end{aligned}$$

Which implies that γ^x should be a Dirac mass for μ_0 -a.e. x , it would thus imply that γ is induced by a transport map $S = (S_1, S_2)$. At this stage it is not possible to conclude directly since there exist measure preserving maps between μ_0 and ν_0 , and even continuous ones such as Peano's function (see for instance [70]). To derive the desired contradiction, one has to use further proposition 5.3.1 to deduce that S is also an *optimal* transport map between μ_0 and ν_0 for the quadratic cost. Thus, by well-known arguments (see [36], [73], [74]) there exists a convex function $(x, y) \in [0, 1]^2 \mapsto \psi(x, y)$ such that $(S_1(x, 0), S_2(x, 0)) \in \partial\psi(x, 0)$ for (Lebesgue)-a.e. $x \in [0, 1]$ which easily implies that $S_1(\cdot, 0)$ is nondecreasing and since $S_1(\cdot, 0)$ preserves the Lebesgue measure this yields $S_1(x, 0) = x$. Now since $S(x, 0) = (x, S_2(x, 0))$ is Borel and measure-preserving between μ_0 and ν_0 we should have

$$\int_0^1 \varphi(x, S_2(x, 0)) dx = \int_{[0,1]^2} \varphi(x, y) dx dy$$

for every Borel and bounded $\varphi : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, so that taking $\varphi(x, y) = (y - S_2(x, 0))^2$ yields the desired contradiction.

The discrete case, different values for the coupled and decoupled problems :

Let us now consider the case where both μ_0 and ν_0 have finite support, in this case (5.24) is in fact a finite-dimensional problem and it is easy to check that it possesses solutions. However, because of atoms, proposition 5.3.1 does not apply and it is easy to find a case where the values are different. To see this, let us choose $d = 1$, $\mu_0 = \delta_0$ and $\nu_0 = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$. The set of transport plans reduces to the single element $\gamma = \frac{1}{2}\delta_{(0,1)} + \frac{1}{2}\delta_{(0,-1)}$. Obviously, the transport plan γ is not induced by any transport map. In this example, the solution of both the coupled and the decoupled problem is the transport plan γ . A simple computation leads to find different values for the two problems. More precisely, for a fixed horizon $T > 0$, one gets the difference : $\inf(\mathcal{Q}) - \inf(\mathcal{P}) = \frac{1}{2} \left(T - \|a\|_{H^1}^2 \right) > 0$. Note that in this very simple case, the difference between the decoupled and coupled problem values is increasing in the horizon T .

Chapitre 6

Risk-sharing problems with many agents : optimal control and numerical approach

Ce chapitre est basé sur un travail commun avec G. Carlier, dont le titre original est " A numerical approach for a class of risk-sharing problems", actuellement soumis au Journal of Mathematical Economics.

Résumé :

Dans ce chapitre nous traitons des problèmes de partage de risque entre d agents ayant des utilités strictement concaves et invariantes en loi. Dans le cas particulier où toutes les utilités des agents s'écrivent comme l'intégrale d'une fonctionnelle concave du quantile du risque individuel, nous donnons une caractérisation des règles optimales de partage de risque. Ces règles ne peuvent pas être calculées analytiquement lorsque le nombre d'agents est grand, aussi construisons-nous un algorithme convergent simple et le testons sur plusieurs exemples.

Mots clés : Partage de risque, comonotonie, sup-convolution, calcul des variations, approximation numérique.

Abstract :

This chapter deals with risk-sharing problems between many agents, each of whom having a strictly concave law invariant utility. In the special case where every agent's utility is given by a concave integral functional of the quantile of her individual endowment, we fully characterize the optimal risk-sharing rules. When there are many agents, these rules cannot be computed analytically. We therefore give a simple convergent algorithm and illustrate it on several examples.

Keywords : Risk-sharing, comonotonicity, sup-convolution, calculus of variations, numerical approximation.

6.1 Introduction

Risk-sharing problems have their roots in the seminal works of Arrow [3], [4] and Borch [6] in insurance and have received a lot of attention since. Starting from the case of two-agents having preferences given by expected utilities, the theory has been developed in recent years in particular to incorporate more general law invariant preferences such as *rank-dependent utilities* or *monetary risk measures* in the financial literature (see Dana [24], Jouini, Schachermayer and Touzi, [45], Carlier and Dana [13], [14], [15] as well as the book by Föllmer and Schied [32] and the references therein).

The fact that *comonotonicity* is a key property in efficient risk-sharing problems is well-known and has been particularly emphasized by Landsberger and Meilijson in [50] (see [16] for an extension to multivariate risks). For suitable law invariant (or quantile-based) and concave utilities, the abstract risk-sharing problem may be brought down to the maximization of some concave functional over the set of *comonotone* allocations. When utilities are integral functionals of the quantile (which covers the rank-dependent utility case and more generally the so-called rank-linear utility case), this enables one to rewrite the problem as a tractable variational problem subject to a comonotonicity constraint. This reformulation is a key point in the papers mentioned above to analyze and actually solve many instances of the two-agents case.

The theoretical analysis of the many agents-case is not significantly harder than in the two-agents case. However, the analysis of optimality conditions is more involved since many more cases may arise in the many agents case. Typically, optimal risk-sharing rules exhibit ranges of aggregated risk for which a subset of agents is fully insured by the others. In the two-agents case, optimal solutions are combinations of three regimes: agent 1 insures agent 2, agent 2 insures agent 1 or the solution is interior and thus given by some first-order condition. If there are more agents, there are many more possibilities for the comonotonicity constraint to be binding. We thus claim that the difficulty of the many agents case is in fact a matter of combinatorics and that the search for an efficient computational scheme is therefore natural.

The paper is organized as follows. In section 6.2, we reformulate a class of risk-sharing problems as tractable variational problems subject to a comonotonicity constraint. More precisely, some notations and preliminaries are given in paragraph 6.2.1, the two-agents case is then addressed in paragraph 6.2.2, we finally show a stability by sup-convolution result in paragraph 6.2.3 which enables us to reformulate the risk-sharing problem as a comonotonicity constrained variational problem. Optimality conditions for such problems are established in section 6.3. Finally, a simple and easy to implement algorithm is described in section 6.4 in which convergence is established and various numerical simulations are presented.

6.2 Reformulation of a class of risk-sharing problems

Let $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{P}))$ be a nonatomic probability space i.e. a probability space such that there is no $A \in \mathcal{F}$ such that $(\mathcal{P})(A) > 0$ and $(\mathcal{P})(B) \in \{0, (\mathcal{P})(A)\}$ for every $B \in \mathcal{F}$ with $B \subset A$. The nonatomicity of $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{P}))$ is well-known to be equivalent to the existence of a uniformly distributed random variable on $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{P}))$. Given a random variable X on $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{P}))$, the law of X is denoted $\mathcal{L}(X)$. If X and Y are two random variables X on $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{P}))$, we shall denote by $X \sim Y$ the fact that $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y)$.

In the sequel, we will only consider essentially bounded random variables -or *risks*- on $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{P}))$. We will denote for short by L_+^∞ the nonnegative cone of $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{P}))$.

Let \mathcal{C} be the class of utility functions $V : L_+^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ that :

- are strictly concave,
- are monotone, i.e. $V(X) \geq V(Y)$ whenever $(X, Y) \in L_+^\infty \times L_+^\infty$ and $X \geq Y$ a.s.,
- law invariant, i.e. $V(X) = V(Y)$ whenever $(X, Y) \in L_+^\infty \times L_+^\infty$ and $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y)$,
- satisfy the following Fatou property:

$$V(X) \geq \limsup_n V(X_n)$$

whenever $(X_n)_n$ is bounded in L_+^∞ and X_n converges a.s. to X .

Given an aggregate risk $X_0 \in L_+^\infty$ and $d+1$ agents, $i = 1, \dots, d+1$, each of whom having a utility V_i in the class \mathcal{C} , the optimal risk-sharing of X_0 among those agents is determined by solving the *sup-convolution* problem:

$$\left(\bigsqcup_{i=1}^{d+1} V_i \right) (X_0) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{d+1} V_i(X_i), X_i \in L_+^\infty, \sum_{i=1}^{d+1} X_i = X_0 \right\}. \quad (6.1)$$

The sup-convolution $\bigsqcup_{i=1}^{d+1} V_i$ is said to be *exact* if the previous supremum is attained (and then it is attained at a unique point by strict concavity). Our aim is to reformulate the previous risk-sharing problem in a more tractable way using the notion of comonotone allocations. Before we do so, we shall need some preliminaries.

6.2.1 Preliminaries

Let X be a bounded random variable on $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{P}))$ and let $F_X(t) = (\mathcal{P})(X \leq t)$, $t \in \mathbb{R}$ denote its distribution function. The generalized inverse of F_X (or *quantile* function of X) is defined by:

$$F_X^{-1}(t) = \inf\{z \in \mathbb{R} : F_X(z) > t\}, \text{ for all } t \in (0, 1). \quad (6.2)$$

The random variable X and the quantile function F_X^{-1} are then *equimeasurable* in the sense that for every continuous function φ one has:

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_0^1 \varphi(F_X^{-1}(t))dt.$$

Let us now recall the well known Hardy-Littlewood inequality (see [42], [57], [10]).

Proposition 6.2.1. *Let X and Y be in L_+^∞ then one has*

$$\mathbb{E}(XY) \leq \int_0^1 F_X^{-1}(t)F_Y^{-1}(t)dt = \sup_{Z \sim Y} \mathbb{E}(XZ)$$

and for every concave $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ one has

$$\mathbb{E}(u(X - Y)) \leq \int_0^1 u(F_X^{-1}(t) - F_Y^{-1}(t))dt.$$

Definition 6.2.2. *Let X and Y be in $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{P}))$, then X dominates Y in the sense of second order stochastic dominance (which we denote by $X \succeq Y$) if $\mathbb{E}(u(X)) \geq \mathbb{E}(u(Y))$ for every concave increasing function $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.*

Various characterizations of stochastic dominance are well-known (see [65]) among which:

$$X \succeq Y \Leftrightarrow \int_0^t F_X^{-1}(s)ds \geq \int_0^t F_Y^{-1}(s)ds, \quad \forall s \in [0, 1],$$

which is equivalent to

$$\int_0^1 g(t)F_X^{-1}(t)dt \leq \int_0^1 g(t)F_Y^{-1}(t)dt, \quad \forall g \text{ bounded nondecreasing.} \quad (6.3)$$

The next statement is originally due to Ryff [67] in the case $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{P}))$ is $[0, 1]$ endowed with its Borel field and the Lebesgue measure, we believe it is well-known but give a short proof for the sake of completeness:

Lemma 6.2.3. *Let X and Y be in L_+^∞ , then $X \succeq Y$ if and only if there is a sequence Z_n of the form $Z_n = \sum_{i=1}^{N_n} \lambda_i^n Y_i^n$ with $\lambda_i^n \geq 0$, $\sum_{i=1}^{N_n} \lambda_i^n = 1$ and each $Y_i^n \sim Y$, such that Z_n converges a.s. to X .*

Proof. Assume first that Z_n is of the form mentioned above and Z_n converges a.s. to X , then for each concave u , one has $\mathbb{E}(u(Z_n)) \geq \mathbb{E}(u(Y))$ and one concludes with Lebesgue's dominated convergence theorem (the Z_n 's being uniformly bounded).

Conversely, assume $X \succeq Y$ and let us prove that $X \in K$ where K is the closed convex hull in L^1 of the set $\{Z \in L^1, Z \sim Y\}$ (clearly $K \subset L_+^\infty$ since $Y \in L_+^\infty$). If $X \notin K$ it follows from Hahn's-Banach theorem that there exists $P \in L^\infty$ and $\varepsilon > 0$ such that

$$\mathbb{E}(PX) \geq \sup_{Z \sim Y} \mathbb{E}(PZ) + \varepsilon.$$

With Hardy-Littlewood's inequality, this yields

$$\int_0^1 F_P^{-1} F_X^{-1} \geq \int_0^1 F_P^{-1} F_Y^{-1} + \varepsilon$$

which contradicts $X \succeq Y$ because of inequality (6.3) recalled above. We thus deduce that X is the L^1 (and thus also a.s. taking a subsequence if necessary) limit of a sequence Z_n of the form mentioned in the statement of the lemma. \square

As a consequence of the previous lemma, we have the following compatibility result which is originally due to Dana [24]:

Lemma 6.2.4. *If a utility function V is in the class \mathcal{C} then it is compatible with second order stochastic dominance that is $V(X) \geq V(Y)$ whenever $(X, Y) \in L_+^\infty \times L_+^\infty$ and $X \succeq Y$.*

Proof. Assume $X \succeq Y$, using lemma 6.2.3, X is an a.s. limit of a sequence Z_n as in lemma 6.2.3. Since V is concave and law invariant, $V(Z_n) \geq V(Y)$ and by the Fatou property, we get $V(X) \geq V(Y)$. \square

A notion that will play an important role in the sequel is that of *comonotonicity* that we now recall,

Definition 6.2.5. *Let X_1 and X_2 be two real-valued random variables on $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{P}))$, then the pair (X_1, X_2) is called comonotone if*

$$(X_1(\omega') - X_1(\omega))(X_2(\omega') - X_2(\omega)) \geq 0 \text{ for } (\mathcal{P}) \otimes (\mathcal{P})\text{-a.e. } (\omega, \omega') \in \Omega^2.$$

A family of random variable (X_1, \dots, X_{d+1}) on $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{P}))$ is said to be comonotone if (X_i, X_j) is comonotone for every $(i, j) \in \{1, \dots, d+1\}^2$.

Roughly speaking (X_1, \dots, X_{d+1}) is comonotone if all the X_i 's evolve in the same direction (or *coevolve*) and we recall that it is well-known that it is equivalent to the fact that each X_i can be written as a nondecreasing function of the sum $\sum_i X_i$ (see for instance [27]). Given $X \in L_+^\infty$, the set of allocations $(X_1, \dots, X_{d+1}) \in L_+^\infty$ that sum to X and are comonotone can then be parametrized by $X_i := x_i(X)$ where the x_i 's are nondecreasing function that sum to the identity map (on the range of X but this can be extended to the whole line if necessary). Obviously, each map x_i is 1-Lipschitz and therefore, by Ascoli's theorem, this parametrization of comonotone allocations with a fixed sum is compact.

Comonotonicity is well-known to be a key property in risk-sharing problems as soon as agents have preferences that are compatible with second order stochastic dominance. Indeed, an important result of Landsberger and Meilijson [50] states that any allocation is dominated (for second order stochastic dominance) by a comonotone one.

6.2.2 The two-agents case

In this paragraph, we study in details the case of two agents ($d = 1$) by a rearrangement argument taken from [16].

Proposition 6.2.6. *Let V_1 and V_2 be two utilities in the class \mathcal{C} and $X_0 \in L_+^\infty$, there exists a unique $(\bar{X}_1, \bar{X}_2) \in L_+^\infty \times L_+^\infty$ such that $\bar{X}_1 + \bar{X}_2 = X_0$ and*

$$V_1 \square V_2(X_0) = V_1(\bar{X}_1) + V_2(\bar{X}_2).$$

Moreover (\bar{X}_1, \bar{X}_2) is comonotone hence there exist two nondecreasing functions \bar{x}_1 and $\bar{x}_2 : [F_{X_0}^{-1}(0), F_{X_0}^{-1}(1)] \rightarrow \mathbb{R}$ such that $\bar{x}_1(t) + \bar{x}_2(t) = t$ for all $t \in [F_{X_0}^{-1}(0), F_{X_0}^{-1}(1)]$ and $(\bar{X}_1, \bar{X}_2) = (\bar{x}_1(X_0), \bar{x}_2(X_0))$.

Proof. Let us first suppose that X_0 has no atom (i.e. F_{X_0} is continuous, or equivalently $F_{X_0}^{-1}$ increasing). Let X_1 and X_2 be in L_+^∞ such that $X_1 + X_2 = X_0$, it follows from Jensen's inequality that $\mathbb{E}(X_i | X_0) \succeq X_i$ so that in the sup-convolution, it is enough to maximize over pairs (X_1, X_2) that are measurable functions of X_0 . Let $X_1 = f(X_0)$ and $X_2 := X_0 - f(X_0)$ be such a pair. Since X_0 is nonatomic there exists a nondecreasing map (or monotone rearrangement) \tilde{f} such that $\tilde{f}(X_0) \sim f(X_0)$ with $0 \leq \tilde{f}(X_0) \leq X_0$ (see [68]). Then set $Y_1 := \tilde{f}(X_0)$ and $Y_2 := X_0 - \tilde{f}(X_0)$. Since $Y_1 \sim X_1$, $V_1(Y_1) := V_1(X_1)$, we now claim that $V_2(Y_2) \geq V_2(X_2)$ and to prove it, thanks to lemma 6.2.4, it is enough to prove that $Y_2 \succeq X_2$. Let u be a concave function, we have

$$\mathbb{E}(u(Y_2)) = \mathbb{E}(u(X_0 - \tilde{f}(X_0))) = \int_0^1 u(F_{X_0}^{-1}(t) - \tilde{f}(F_{X_0}^{-1}(t))) dt$$

but since $\tilde{f}(F_{X_0}^{-1}) = F_{X_1}^{-1}$, by proposition 6.2.1, we get

$$\mathbb{E}(u(X_2)) = \mathbb{E}(u(X_0 - X_1)) \leq \int_0^1 u(F_{X_0}^{-1}(t) - F_{X_1}^{-1}(t)) dt = \mathbb{E}(u(Y_2)).$$

All this proves that given an admissible pair (X_1, X_2) one may find a better one of the form $(f(X_0), X_0 - f(X_0))$ where f is a non decreasing function on $[F_{X_0}^{-1}, F_{X_0}^{-1}] \rightarrow \mathbb{R}$ such that $0 \leq f(t) \leq t$ for every $t \in [F_{X_0}^{-1}(0), F_{X_0}^{-1}(1)] \rightarrow \mathbb{R}$. In particular, one can find a sequence of such maps f_n such that

$$\lim_n V_1(f_n(X_0)) + V_2(X_0 - f_n(X_0)) = V_1 \square V_2(X_0).$$

Since the functions f_n are all nondecreasing and bounded by $\|X_0\|_\infty$, it follows from Helly's theorem that there is some (not relabeled) sequence that converges pointwise to some function f , hence $(f_n(X_0), X_0 - f_n(X_0))$ is bounded in L^∞ and converges a.s. to $(f(X_0), X_0 - f(X_0))$. The Fatou property guarantees then that

$$V_1(f(X_0)) + V_2(X_0 - f(X_0)) = V_1 \square V_2(X_0).$$

This proves existence of a maximizer in the sup-convolution problem (that is the sup-convolution is exact at X_0), uniqueness follows from the strict concavity of V_1 and V_2 . It remains to show that $(f(X_0), X_0 - f(X_0))$ is comonotone i.e. $X_0 - f(X_0)$ is nondecreasing in X_0 . To prove this last claim, we apply the same trick as before : let g be nondecreasing such that $0 \leq g(t) \leq t$ and $g(X_0) \sim X_0 - f(X_0)$, then $X_0 - g(X_0) \succeq f(X_0)$ so that

$$V_1(X_0 - g(X_0)) + V_2(g(X_0)) \geq V_1(f(X_0)) + V_2(X_0 - f(X_0))$$

and therefore $(X_0 - g(X_0), g(X_0))$ is optimal as well and by uniqueness this yields $X_0 - f(X_0) = g(X_0)$. The supremum is thus uniquely attained at some comonotone pair.

Let us now treat the case where X_0 is arbitrary in L_+^∞ . A theorem of Ryff ([68]) enables us to write $X_0 = F_{X_0}^{-1}(U_0)$ with U_0 uniformly distributed. For $n \in \mathbb{N}^*$ then define $X_0^n := F_{X_0}^{-1}(U_0) + n^{-1}U_0$, since X_0^n is nonatomic, we deduce from the previous step that there exists, for every $n \geq 0$, a pair of nondecreasing 1-Lipschitz functions x_1^n and x_2^n summing to the identity such that

$$V_1 \square V_2(X_0^n) = V_1(x_1^n(X_0^n)) + V_2(x_2^n(X_0^n)).$$

By Ascoli's Theorem, we may extract some converging (and not relabeled) subsequence from (x_1^n, x_2^n) and denote (\bar{x}_1, \bar{x}_2) its limit. Now, using the fact that V_1 and V_2 are monotone and that $X_0^n \geq X_0$, we have, for every $X \in L_+^\infty$ such that $X \leq X_0$,

$$V_1(X_0 - X) + V_2(X) \leq V_1(X_0^n - X) + V_2(X) \leq V_1(x_1^n(X_0^n)) + V_2(x_2^n(X_0^n)).$$

Since $(x_1^n(X_0^n), x_2^n(X_0^n))$ is bounded and converges a.s. (and in fact even in L^∞) to $(\bar{X}_1, \bar{X}_2) = (\bar{x}_1(X_0), \bar{x}_2(X_0))$, we deduce from the Fatou property that the limsup of the right-hand side is less than $V_1(\bar{x}_1(X_0)) + V_2(\bar{x}_2(X_0))$. Taking the supremum with respect to X we conclude that the comonotone pair $(\bar{x}_1(X_0), \bar{x}_2(X_0))$ is the unique maximizer in the sup-convolution problem for X_0 . □

6.2.3 Stability by sup-convolution and existence for $d + 1$ agents

In this section, our aim is to generalize the existence and characterization result of proposition 6.2.6 to the case of $d + 1$ agents. To do so, let us prove the following stability by sup-convolution result.

Proposition 6.2.7. *Let V_1 and V_2 be two utilities in the class \mathcal{C} , then $V_1 \square V_2$ also belongs to \mathcal{C} .*

Proof. Let $X_0, Y_0 \in L_+^\infty \times L_+^\infty$, then by proposition 6.2.6, $V_1 \square V_2(X_0)$ and $V_1 \square V_2(Y_0)$ are exact that is, there exist nondecreasing functions \bar{x}_1, \bar{x}_2 , and \bar{y}_1, \bar{y}_2 summing to the identity and such that $V_1 \square V_2(X_0) = V_1(\bar{x}_1(X_0)) + V_2(\bar{x}_2(X_0))$ and $V_1 \square V_2(Y_0) = V_1(\bar{y}_1(Y_0)) + V_2(\bar{y}_2(Y_0))$. Let us prove step by step that $V_1 \square V_2$ belongs to \mathcal{C} .

- **Strict concavity:** let $\lambda \in (0, 1)$, and assume $X_0 \neq Y_0$, we thus have $(\bar{x}_1(X_0), \bar{x}_2(X_0)) \neq (\bar{y}_1(Y_0), \bar{y}_2(Y_0))$, the strict concavity of V_1 and V_2 then yields

$$\begin{aligned} V_1 \square V_2(\lambda X_0 + (1 - \lambda)Y_0) &\geq V_1(\lambda \bar{x}_1(X_0) + (1 - \lambda)\bar{y}_1(Y_0)) \\ &\quad + V_2(\lambda \bar{x}_2(X_0) + (1 - \lambda)\bar{y}_2(Y_0)) \\ &> \lambda[V_1(\bar{x}_1(X_0)) + V_2(\bar{x}_2(X_0))] \\ &\quad + (1 - \lambda)[V_1(\bar{y}_1(Y_0)) + V_2(\bar{y}_2(Y_0))] \end{aligned}$$

so that $V_1 \square V_2$ is strictly concave.

- **Monotonicity:** assume $X_0 \leq Y_0$ and let $X \in L_+^\infty$ be such $X \leq X_0$, since V_1 and V_2 are monotone, we have

$$V_1(X_0 - X) + V_2(X) \leq V_1(Y_0 - X) + V_2(X) \leq V_1 \square V_2(Y_0)$$

taking the supremum with respect to X , we deduce that $V_1 \square V_2$ is monotone.

- **Law invariance property:** assume that $X_0 \sim Y_0$. We then have by law invariance of V_1 and V_2

$$V_1 \square V_2(X_0) = V_1(\bar{x}_1(Y_0)) + V_2(\bar{x}_2(Y_0)) \leq V_1 \square V_2(Y_0),$$

reversing the role of X_0 and Y_0 then yields $V_1 \square V_2(X_0) = V_1 \square V_2(Y_0)$.

- **Fatou property:** let $(X_n)_n$ be a bounded sequence in L_+^∞ that converges a.s. to a limit X . Then for every $n \geq 1$, there exist nondecreasing and 1-Lipschitz nonnegative functions \bar{x}_1^n, \bar{x}_2^n such that

$$V_1 \square V_2(X_n) = V_1(\bar{x}_1^n(X_n)) + V_2(\bar{x}_2^n(X_n)),$$

and, by Ascoli's Theorem, up to a not relabeled subsequence, \bar{x}_1^n and \bar{x}_2^n converge uniformly to some \bar{x}_1 and \bar{x}_2 so that $\bar{x}_i^n(X_n)$ converges a.s. to $\bar{x}_i(X)$. We thus have

$$\begin{aligned} \limsup_n V_1 \square V_2(X_n) &\leq \limsup_n V_1(\bar{x}_1^n(X_n)) + \limsup_n V_2(\bar{x}_2^n(X_n)) \\ &\leq V_1(\bar{x}_1(X)) + V_2(\bar{x}_2(X)) \\ &\leq V_1 \square V_2(X) \end{aligned}$$

from which we deduce the Fatou property for $V_1 \square V_2$.

□

Inductively, one immediately deduces from the previous proposition that if V_1, \dots, V_{d+1} all belong to the class \mathcal{C} then so does $\square_{i=1}^{d+1} V_i$.

Theorem 6.2.8. *Let $X_0 \in L_+^\infty$ and V_1, \dots, V_{d+1} be in the class \mathcal{C} . Then there exists a unique $\bar{X} = (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_{d+1}) \in (L_+^\infty)^{d+1}$ such that $\sum_{i=1}^{d+1} \bar{X}_i = X_0$ and*

$$\square_{i=1}^{d+1} V_i(X_0) = \sum_{i=1}^{d+1} V_i(\bar{X}_i).$$

Moreover \bar{X} is comonotone hence there exist $d+1$ nondecreasing functions $\bar{x}_i: [F_{X_0}^{-1}(0), F_{X_0}^{-1}(1)] \rightarrow \mathbb{R}$ such that $\sum_{i=1}^{d+1} \bar{x}_i(t) = t$ for all $t \in [F_{X_0}^{-1}(0), F_{X_0}^{-1}(1)]$ and $\bar{X} = (\bar{x}_1(X_0), \dots, \bar{x}_{d+1}(X_0))$.

Proof. For the sake of simplicity, let us prove the Theorem for $d+1 = 3$. Introducing the notation $W_2 = V_2 \square V_3$, the maximization problem reads as:

$$\sup\{V_1(X_1) + W_2(Y_2); X_1 \in L_+^\infty, Y_2 \in L_+^\infty, X_1 + Y_2 = X_0\}.$$

By proposition 6.2.7, we know that $W_2 \in \mathcal{C}$. Proposition 6.2.6 then says that there exists a unique solution $(\bar{X}_1 = \bar{x}_1(X_0), \bar{Y}_2 = \bar{y}_2(X_0)) \in L_+^\infty \times L_+^\infty$ such that \bar{x}_1, \bar{y}_2 are nondecreasing, $\bar{x}_1(X_0) + \bar{y}_2(X_0) = X_0$, and

$$V_1 \square W_2(X_0) = V_1(\bar{x}_1(X_0)) + W_2(\bar{y}_2(X_0)).$$

We then solve the sub-problem

$$\sup\{V_2(X_2) + V_3(X_3); X_2 \in L_+^\infty, X_3 \in L_+^\infty, X_2 + X_3 = \bar{y}_2(X_0)\}.$$

By the same arguments, there exists a unique comonotone solution $(\bar{X}_2 = \bar{z}_2(\bar{y}_2(X_0)), \bar{X}_3 = \bar{z}_3(\bar{y}_2(X_0))) \in L_+^\infty \times L_+^\infty$ satisfying the same properties as in proposition 6.2.6. Finally, it is easy to see that $(\bar{X}_1 = \bar{x}_1(X_0), \bar{X}_2 = \bar{x}_2(X_0), \bar{X}_3 = \bar{x}_3(X_0))$, where $\bar{x}_2 := \bar{z}_2 \circ \bar{y}_2$ and $\bar{x}_3 := \bar{z}_3 \circ \bar{y}_2$, is the unique solution of the sup-convolution $\square_{i=1}^3 V_i(X_0)$, with the desired properties.

Inductively, one can prove the theorem for every d . □

Remark 6.2.9. *One may wonder if it is really necessary to proceed inductively to prove the previous result. On the one hand, we believe that proving stability of the class \mathcal{C} by supremal convolution (that is by aggregation) as we did in proposition 6.2.7 has its own interest. On the other hand, the rearrangement trick we used in the two-agents case does not generalize to more agents.*

Remark 6.2.10. *In the previous statements, we have used strict concavity of the elements of \mathcal{C} for uniqueness purpose only. Strict concavity is in fact quite restrictive since it rules out the case of monetary risk measures. We now claim that strict concavity, though convenient because it implies uniqueness, is in fact not necessary to obtain the existence of at least one optimal comonotone solution in the supremal convolution problem. To see this, it is enough to proceed by approximation and use the compactness of comonotone allocations. By the way, in the next section, we will treat numerically the case of concave and non strictly concave utilities by using such strictly concave perturbations.*

6.2.4 Reformulation

It follows from the previous results that the risk-sharing problem (6.1) between $d+1$ agents, each of whom has a utility in \mathcal{C} , and for aggregate risk X_0 , can be simply reformulated as

$$\sup_{x \in \mathcal{A}} J(x), \quad \text{with } J(x) := \sum_{i=1}^d V_i(x_i(X_0)) + V_{d+1}\left(X_0 - \sum_{i=1}^d x_i(X_0)\right) \quad (6.4)$$

where

$$\mathcal{A} := \{x \in W^{1,\infty}([a, b], \mathbb{R}^d) : \dot{x} \in \Delta \text{ a.e.}, x(a) \in \mathcal{S}\},$$

$$a := F_{X_0}^{-1}(0), \quad b := F_{X_0}^{-1}(1),$$

and Δ and \mathcal{S} are the two simplices:

$$\Delta := \{u \in \mathbb{R}_+^d, \sum_{i=1}^d u_i \leq 1\}, \quad \mathcal{S} := \{x \in \mathbb{R}_+^d, \sum_{i=1}^d x_i \leq a\}.$$

This reformulation is more tractable than the initial one since maximization is now performed over a more concrete set of functions over an interval, namely the convex and compact (for the uniform norm) set \mathcal{A} . As we shall see in the next paragraph, the fact that constraints are given by simplices will be very convenient to express necessary conditions.

Of course this reformulation is not very helpful if we keep the previous level of generality on utility functions. This is why we shall now further specify the utilities and restrict them to a subclass for which they have a simple expression in terms of quantiles. From now on, we shall restrict utilities to belong to the class of Rank-Linear Utilities (RLU for short), such utilities are of the form

$$V_L(X) := \int_0^1 L(t, F_X^{-1}(t)) dt. \quad (6.5)$$

This class of utilities is already quite large since it contains expected utilities as well as the Rank-Dependent Utilities defined by Choquet expectations. Utilities in this class are obviously law invariant and satisfy the Fatou property as soon as L is continuous (say). RLU have been studied in details in [14], where it is proved in particular that for V_L defined by (6.5) (with a C^2 function L to simplify), the following statements are equivalent:

1. V_L is compatible with second order stochastic dominance and monotone,
2. $\partial_x L \geq 0$, $\partial_{xx} L \leq 0$ and $\partial_{tx} L \leq 0$ on $[0, 1] \times \mathbb{R}$
3. V_L is concave, monotone and $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$ upper semi-continuous.

Now for a utility of the form (6.5), if x is a nondecreasing function and X_0 is nonatomic with an increasing distribution function (say), one has

$$V_L(x(X_0)) = \int_0^1 L(t, x(F_{X_0}^{-1}(t)))dt = \int_a^b L(F_{X_0}(s), x(s))d\mu_0(s),$$

where μ_0 is the law of X_0 . In this framework, (6.4) takes the form of a simple variational problem with

$$J(x) := \int_a^b \left(\sum_{i=1}^d L_i(F_{X_0}(s), x_i(s)) + L_{d+1}(F_{X_0}(s), s - \sum_{i=1}^d x_i(s)) \right) d\mu_0(s). \quad (6.6)$$

The next paragraphs are precisely devoted to the theoretical and numerical study of such problems (under appropriate regularity and concavity assumptions).

6.3 Optimality conditions

In this section, our aim is to give necessary and sufficient conditions for the problem

$$\sup_{x \in \mathcal{A}} J(x) \quad \text{with} \quad J(x) := \int_a^b F(t, x(t))dt \quad (6.7)$$

where we assume that $F \in C([a, b] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ is such that $F(t, \cdot)$ is strictly concave and differentiable for every $t \in [a, b]$ and $\nabla_x F$ is continuous in its two arguments.

Under these assumptions, problem (6.7) admits a unique solution \bar{x} that is characterized as follows:

Theorem 6.3.1. *Problem (6.7) admits a unique solution \bar{x} that is characterized by the following:*

- $\bar{x} \in \mathcal{A}$,
- for a.e. t , $\dot{\bar{x}}_i(t) = 0$ for every $i \in \{1, \dots, d\}$ with $i \notin I(t)$ where

$$I(t) := \{j \in \{1, \dots, d\} : \bar{p}_j(t) = \min_{i=1, \dots, d} \bar{p}_i(t)\}$$

and \bar{p} is the adjoint variable:

$$\bar{p}(t) = - \int_t^b \nabla_x F(s, \bar{x}(s))ds. \quad (6.8)$$

- $\bar{x}_i(a) = 0$, $\forall i \in \{1, \dots, d\}$ with $i \notin I(a)$.

Proof. Existence and uniqueness follow from standard arguments. Let us denote by \bar{x} the solution of (6.7), by concavity of J and convexity of \mathcal{A} , \bar{x} is characterized by the variational inequalities

$$J'(\bar{x}) \cdot (y - \bar{x}) = \int_a^b \nabla_x F(t, \bar{x}(t)) \cdot (y(t) - \bar{x}(t)) dt \leq 0, \quad \forall y \in \mathcal{A}. \quad (6.9)$$

Now for $y \in \mathcal{A}$, defining \bar{p} by (6.8) and integrating by parts yields

$$J'(\bar{x}) \cdot y = - \int_a^b \bar{p} \cdot \dot{y} - \bar{p}(a) \cdot y(a)$$

so that (6.9) becomes

$$\int_a^b \bar{p} \cdot \dot{\bar{x}} + \bar{p}(a) \cdot \bar{x}(a) = \inf_{y \in \mathcal{A}} \left\{ \int_a^b \bar{p} \cdot \dot{y} + \bar{p}(a) \cdot y(a) \right\}, \quad (6.10)$$

now the rightmost member of the previous identity is easy to compute by pointwise minimization over the simplex and is achieved exactly at those y 's in \mathcal{A} such that for a.e. $t \in [a, b]$, $\dot{y}_i = 0$ as soon as $i \notin I(t)$ and $y_i(a) = 0$ for $i \notin I(a)$. \square

In the algorithm of next section, we shall take full advantage of the fact that (6.10) amounts to linear programming over the simplex and is therefore explicit. In particular, for $x \in \mathcal{A}$ and p the associated adjoint variable:

$$p(t) = - \int_t^b \nabla_x F(s, x(s)) ds, \quad (6.11)$$

this characterizes the set of solutions of the linear programming problem

$$\sup_{y \in \mathcal{A}} J'(x) \cdot y. \quad (6.12)$$

In particular, a solution of (6.12) is given explicitly by:

$$y(t) = y(a) + \int_a^t u(s) ds, \quad t \in [a, b], \quad (6.13)$$

with

$$y_i(a) = \begin{cases} \frac{a}{\#I_p(a)} & \text{if } i \in I_p(a) \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (6.14)$$

$$u_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{\#I_p(t)} & \text{if } i \in I_p(t) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (6.15)$$

and

$$I_p(t) := \{j \in \{1, \dots, d\} : p_j(t) = \min_{i=1, \dots, d} p_i(t)\}.$$

For every $x \in \mathcal{A}$, set

$$G(x) := \{x + \rho(y - x), y \in \operatorname{argmax}_{h \in \mathcal{A}} J'(x) \cdot h, \rho \in \operatorname{argmax}_{\lambda \in [0, 1]} J(x + \lambda(y - x))\}.$$

In the next section, we shall need the following elementary result:

Lemma 6.3.2. *The set valued map $x \in \mathcal{A} \mapsto G(x)$ has a closed graph and \bar{x} , the solution of (6.7), is characterized by the condition $\bar{x} \in G(\bar{x})$.*

Proof. Let $(x_n)_n \in \mathcal{A}$ converge to some x and $z_n = x_n + \rho_n(y_n - x_n)$ converge to some z and let us prove that $z \in G(x)$. Taking subsequences if necessary, we may assume that ρ_n converges to some $\rho \in [0, 1]$ and y_n converges uniformly to some $y \in \mathcal{A}$ so that $z = x + \rho(y - x)$. Using the fact that J is of class C^1 enables us to pass to the limit in

$$J'(x_n) \cdot (y_n - h) \geq 0, \quad \forall h \in \mathcal{A}, \quad J(z_n) \geq J(x + \lambda(y_n - x)), \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

and therefore to deduce that $z \in G(x)$.

It is obvious that \bar{x} , the solution of (6.7), is such that $\bar{x} \in G(\bar{x})$. Now if $x \in G(x)$ then one has either $\rho = 0$ or $x = y$ for some $\rho \in [0, 1]$ and some $y \in \mathcal{A}$ as in the definition of $G(x)$. If $x = y$ then $J'(x) \cdot h$ is maximized over \mathcal{A} for $h = x$ which is exactly the variational inequality characterizing the solution of (6.7). If $\rho = 0$ and $y \neq x$ then $J(x + \lambda(y - x))$ is maximized over $[0, 1]$ for $\lambda = 0$ so that $J'(x) \cdot (y - x) \leq 0$ which again means that $J'(x) \cdot h$ is maximized over \mathcal{A} for $h = x$. □

6.4 Algorithm and numerical results

6.4.1 Algorithm and convergence

The algorithm we propose to solve (6.7) is a simple optimal step gradient ascent-like method. The fact that the constraints are easy to handle relies again on the fact that linear problems over the simplex are very simple. Our algorithm is defined as follows :

- start from $x^0 \in \mathcal{A}$ and define p^0 as the corresponding adjoint:

$$p^0(t) = - \int_t^b \nabla_x F(s, x^0(s)) ds$$

- given (x^k, p^k) define y^k by

$$y^k(t) = y^k(a) + \int_a^t u^k(s) ds, \quad t \in [a, b],$$

with

$$y_i^k(a) = \begin{cases} \frac{a}{\#I_{p^k}(t)} & \text{if } i \in I_{p^k}(a) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

and

$$u_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{\#I_{p^k}(t)} & \text{if } i \in I_{p^k}(t) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (6.16)$$

Then set

$$x^{k+1} := x^k + \rho^k(y^k - x^k)$$

where

$$\rho^k = \operatorname{argmax}_{\rho \in [0,1]} J(x^k + \rho(y^k - x^k))$$

which can be computed by simple dichotomy method.

Finally let p^{k+1} be the adjoint state associated to x^{k+1} :

$$p^{k+1}(t) = - \int_t^b \nabla_x F(s, x^{k+1}(s)) ds.$$

The convergence of this simple ascent algorithm is then given by:

Theorem 6.4.1. *The sequence x^k generated by the previous algorithm converges to \bar{x} , the solution of (6.7) as $k \rightarrow \infty$.*

Proof. Since \mathcal{A} is compact (for the uniform topology) and the sequence $(x^k)_k$ has values in \mathcal{A} , it is enough to show that \bar{x} is the unique cluster point of $(x^k)_k$. Let x be such a cluster point, and let x^{k_n} be a subsequence converging to x , taking a subsequence if necessary we may also assume that x^{k_n+1} converges to some z . Since G has a closed graph, $z \in G(x)$ i.e. z has of the form $z = x + \rho(y - x)$ with y maximizing $J'(x) \cdot y$ over \mathcal{A} and ρ maximizing $J(x + \rho(y - x))$ over $[0, 1]$. By construction $J(x^k)$ is nondecreasing, consequently one has $J(x) = J(z)$. Now, if $x \neq \bar{x}$, then by lemma 6.3.2, one has $x \notin G(x)$ so that $\rho > 0$ and $J'(x) \cdot (y - x) > 0$ which implies that $J(z) = J(x + \rho(y - x)) > J(x)$, giving the desired contradiction. This proves that \bar{x} is the only cluster point of $(x^k)_k$ and thus that the whole sequence $(x^k)_k$ converges to \bar{x} . \square

Remark 6.4.2. *As already mentioned, it may seem very restrictive to assume strict concavity since it excludes monetary utility functions that are relevant in finance. In fact, as we already explained, strict concavity is by no means essential for existence of an optimal comonotone risk-sharing rule. It is however a crucial assumption for convergence of our algorithm. To deal with problems of the form (6.7) with a concave but not strictly concave J it is enough to consider the perturbed problem*

$$\sup_{x \in \mathcal{A}} J_\varepsilon(x) \text{ with } J_\varepsilon(x) := J(x) + \varepsilon \Phi(x) \tag{6.17}$$

where $\varepsilon > 0$ is a small perturbation parameter and Φ is a nice (by this, we mean a smooth integral functional) strictly concave perturbation. Then, our algorithm enables us to compute the solution \bar{x}_ε of the perturbed problem (6.17). Now, it is easy to see that under mild assumptions on the perturbation, \bar{x}_ε converges as $\varepsilon \rightarrow 0^+$ to the unique maximizer of Φ among the maximizers of J on \mathcal{A} . This perturbation scheme thus naturally selects a particular optimal risk-sharing rule that can be approximated by the algorithm described above.

6.4.2 Numerical experiments

In this final section, we implement the algorithm introduced in section 6.4.1 and illustrate it on various examples. The numerical results that we obtain confirm the theoretical convergence established in theorem 6.4.1 and show that our algorithm converges really fast on every example we tested.

More precisely, we first study three particular cases for a uniform distribution of the total risk X_0 on $[0, 1]$. In a fourth example, we compare the solutions for different distributions of X_0 . The last test aims at showing that our numerical procedure is robust for approaching solutions of risk sharing problems with concave but not strictly concave utilities. But before doing so, we would like to mention that the algorithm gives very good results, in particular very quick convergence. Indeed, it is shown on Figure 6.1-(a) how fast the convergence of the value is. We can also see on Figure 6.1-(b) that the difference between two successive iterations converges to zero with about the same speed. In all our tests, the algorithm numerically converges in very few iterations (between 5 and 15).

In the following examples, we always take $a = 0$ and $b = 1$ (which is in fact just a matter of normalization).

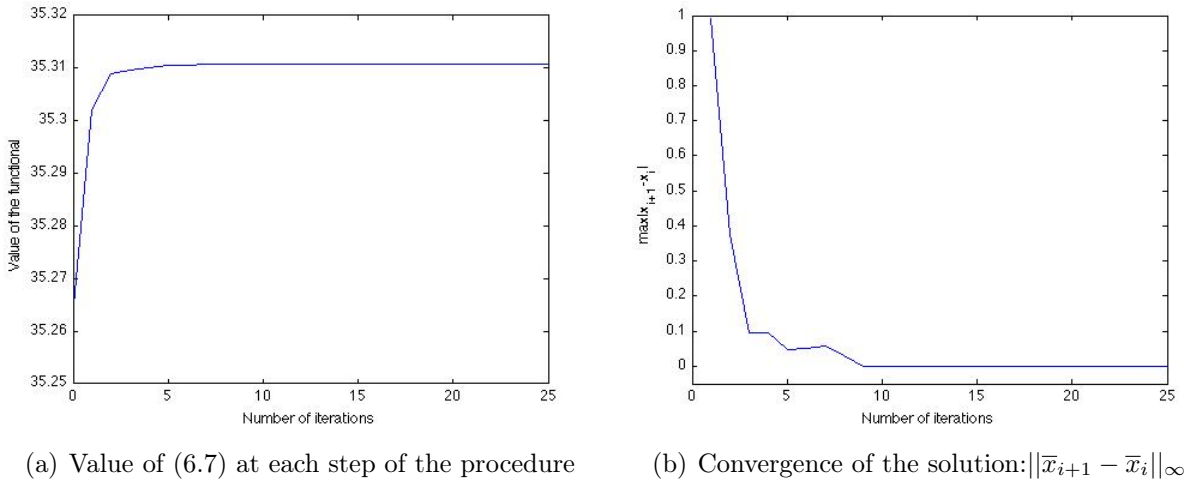


Figure 6.1: Numerical convergence for a 20 agents risk-sharing problem

First case: RDU agents. In the reformulation (6.6), we take functions of the form

$$L_i(t, x) = (1 - t)^{\alpha_i} (1 + x)^{\beta_i},$$

for $i = 1, \dots, d + 1$ which corresponds to RDU with power distortion and power utility indices. It is easy to see that for $\alpha_i \geq 0$ and $0 < \beta_i < 1$, such functions lead to utilities that belong to the class \mathcal{C} . In this first numerical experiment, we look at the case $d + 1 = 5$ and we choose $\alpha := (2.8, 1.6, 2.2, 1.05, 1.3)$ and $\beta := (0.58, 0.52, 0.59, 0.53, 0.57)$. Figure 6.2 shows the optimal risk-sharing for these data and represents the cumulative sharing in the sense that the size of the risk supported by an agent is the difference between her labeled

line (the lines are labeled on the right hand side of the picture) and the nearest sub-line. Looking at Figure 6.2, one can for instance notice that Agent 4 fully insures the others for any risk with value smaller than 0.34. Then, for risk values smaller than about 0.7, Agents 4 and 5 insure the others and finally, for large values of the risk, every agent bears a part of the risk.

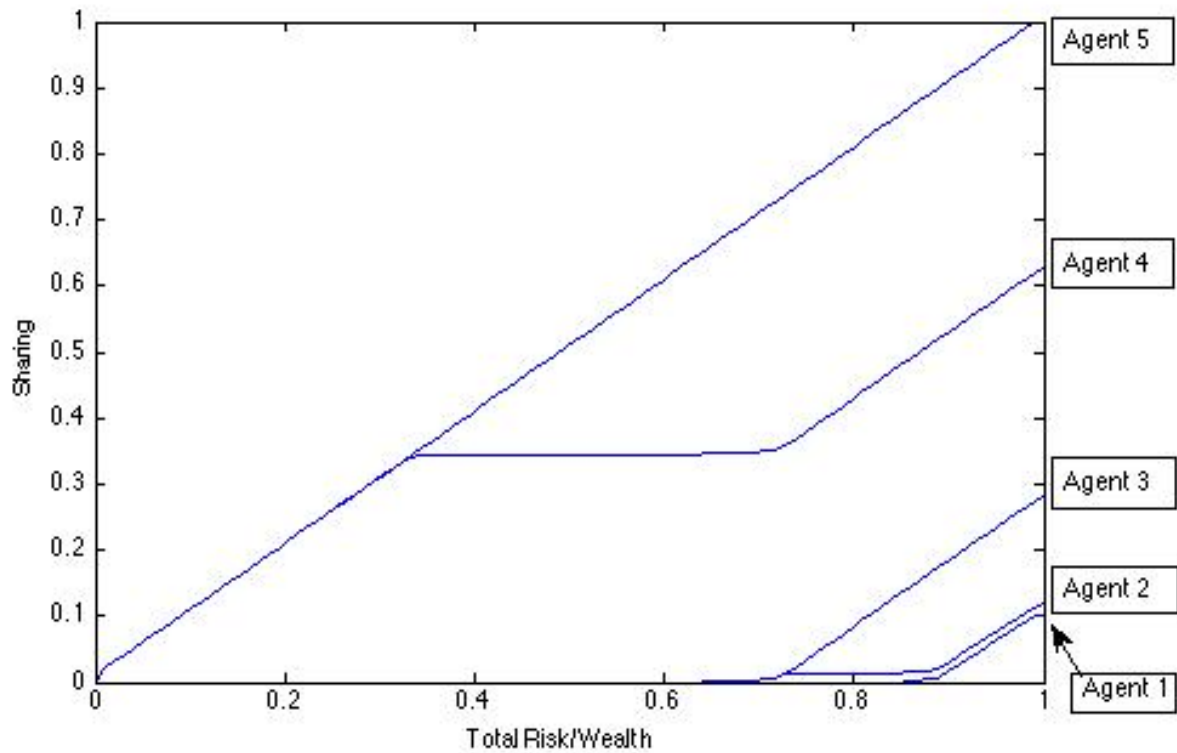


Figure 6.2: Risk Sharing for 5 agents

Second case: logarithmic RLU. In this example, we make a different choice for the functions L_i . We take two logarithmic functions $h_1(t, x) := \log(t^{1/2} + x + 1)$ and $h_2(t, x) := \log(t^{2/3} + x + 1)$. Note that this RLU example does not correspond to RDU agents. We look at the case of 8 agents, five of them being of type $L_i = h_1$ ($i = 3, 4, 5, 6, 7$) and three of them of type $L_i = h_2$ ($i = 1, 2, 8$). The graph of the optimal risk-sharing is represented in Figure 6.3. The continuous lines correspond to agents of type h_1 and the discontinuous ones to those of type h_2 . We can see that for risk values between 0 and 0.3, the three agents of type h_2 fully insure the others. Numerically, agents of the same type support the same proportion of risk which agrees with the theory.

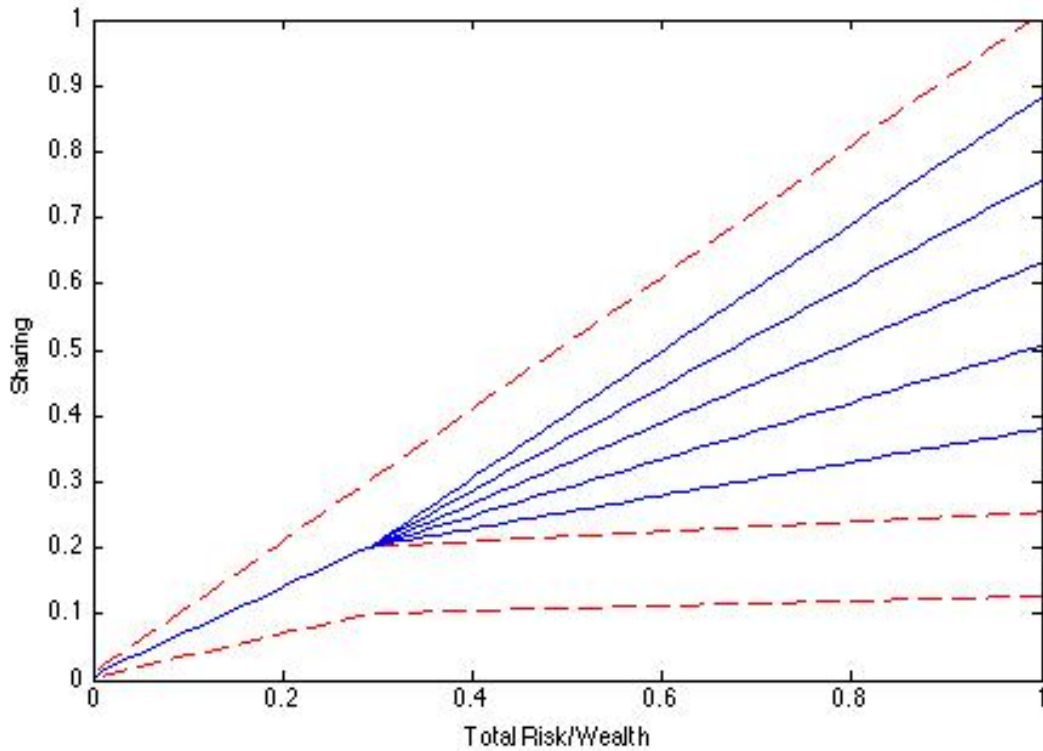


Figure 6.3: Risk Sharing for 8 agents

Third case: mixing RLU and RDU agents. We now turn to a case involving more agents than in the previous ones: $d + 1 = 20$. The functions L_i are chosen between $L_i(t, x) = (1 - t)^{\alpha_i}(1 + x)^{\beta_i}$, for some α_i and β_i satisfying the same assumptions as before, and $L_i(t, x) = \log(t^{\gamma_i} + x + 1)$, $\gamma_i \in (0, 1)$. The graph of the solution is represented on Figure 6.4.

Fourth case: different densities for X_0 . We now aim to see the impact of the law of the aggregate risk X_0 on the optimal individual risks.

To do so, we take $d + 1 = 4$ and functions $L_i(t, x) = (1 - t)^{\alpha_i}(1 + x)^{\beta_i}$, with the particular choice $\alpha = (1.16, 1.89, 1.21, 2.92)$ and $\beta = (0.52, 0.58, 0.54, 0.59)$. We start with a compari-

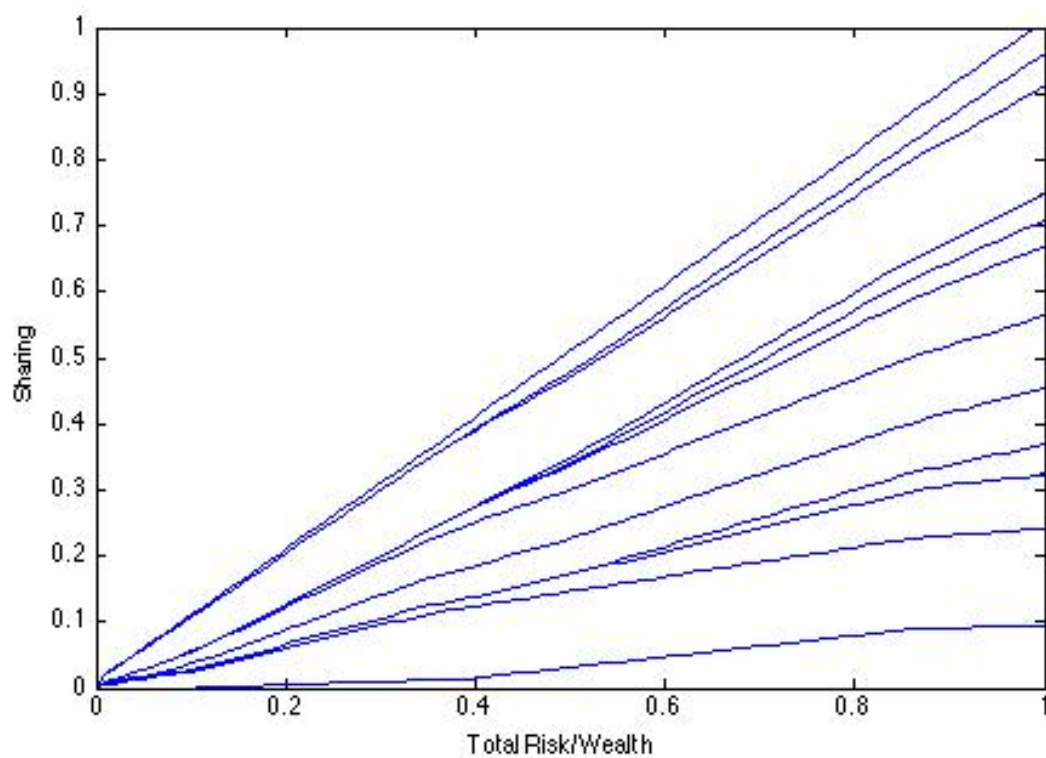


Figure 6.4: Risk Sharing for 20 agents

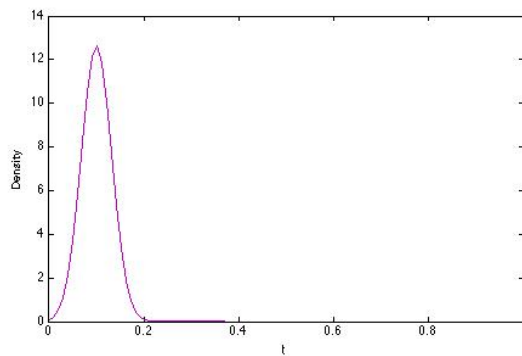
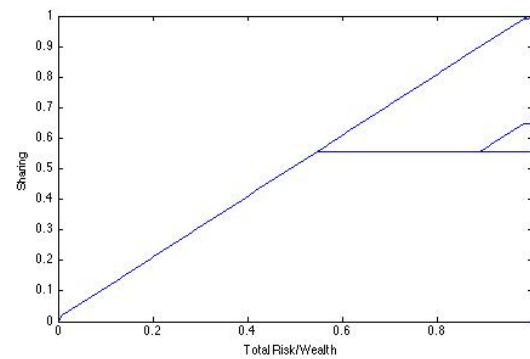
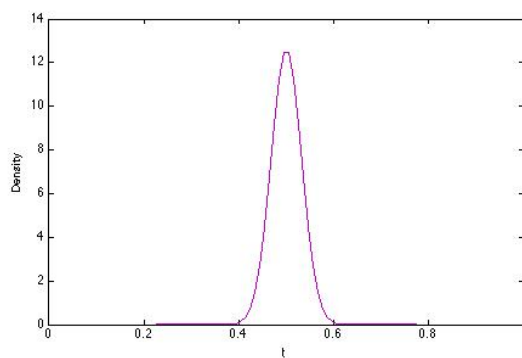
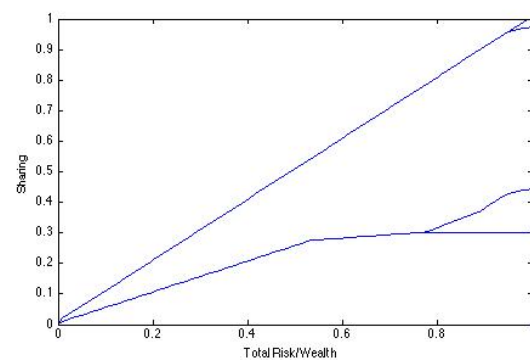
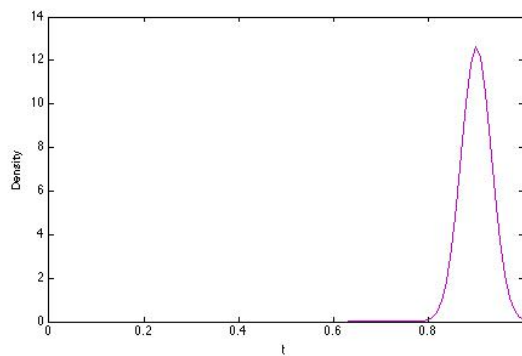
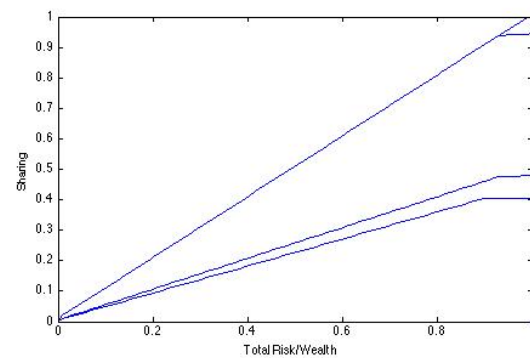
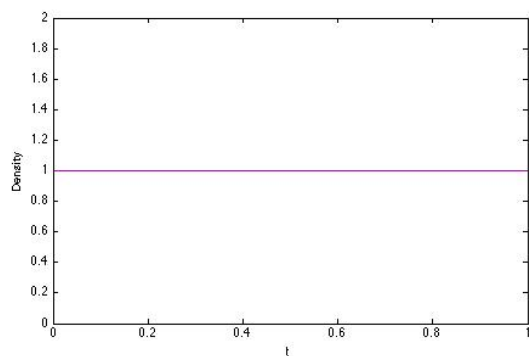
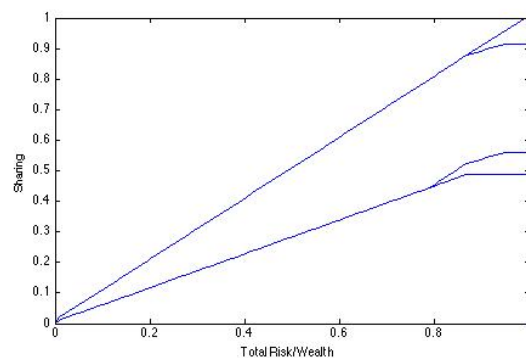
(a) Gaussian density with $\mu = 0.1$ (b) Optimal Risk Sharing for $\mu = 0.1$ (c) Gaussian density with $\mu = 0.5$ (d) Optimal Risk Sharing for $\mu = 0.5$ (e) Gaussian density with $\mu = 0.9$ (f) Optimal Risk Sharing for $\mu = 0.9$

Figure 6.5: Plots of the solutions for three averages of a Gaussian distributions of the total risk X_0 .

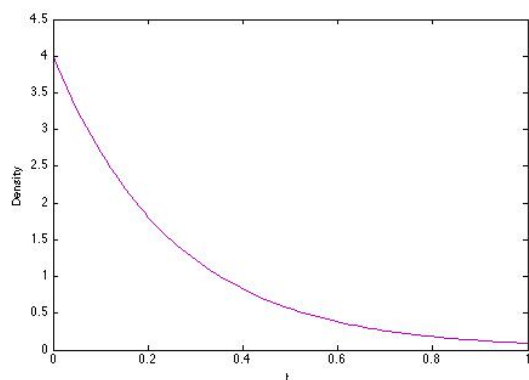
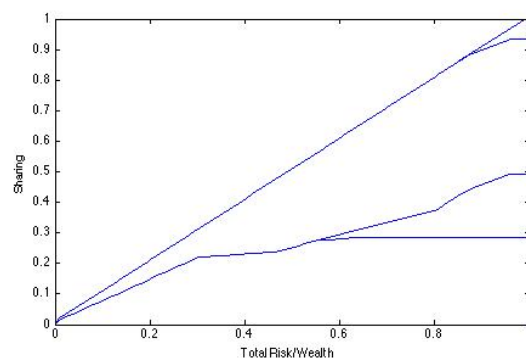
son for three truncated and normalized gaussians with variance $\sigma^2 = 0.01$. More precisely, we plot on Figure 6.5 the graphs of the density for three different values of the average $\mu = 0.1, 0.5, 0.9$, and the corresponding solutions. Let us note for instance that Agent 1 fully insures the others for values lower than 0.57 when the average is small (0.1). This



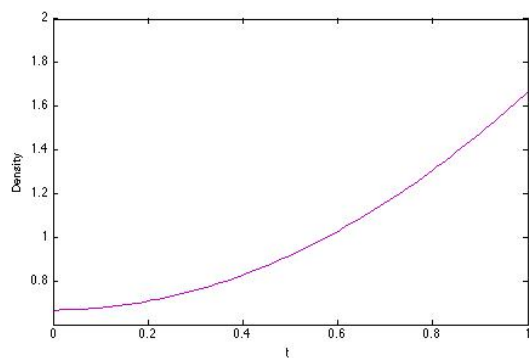
(a) Uniform density



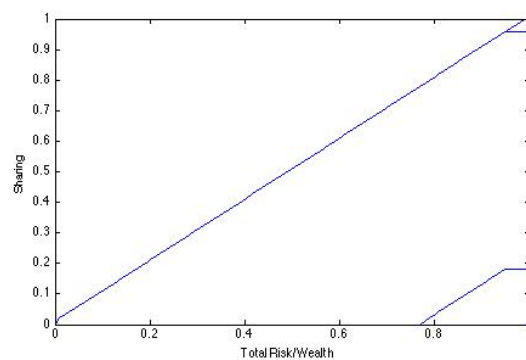
(b) Optimal Risk Sharing for the Uniform density

(c) Exponential density with $\lambda = 4$ 

(d) Optimal Risk Sharing for the Exponential density



(e) Quadratic density



(f) Optimal Risk Sharing for the Quadratic density

Figure 6.6: Plots of the solutions for three different distributions of the total risk X_0 .

phenomenon disappears for larger values of μ . We can also remark that Agent 4 supports a significant proportion of risk only for high values of X_0 and μ . We have drawn on Figure 6.6 the graphs of three other densities with the corresponding optimal risk-sharing. The densities we study are, for $t \in [0, 1]$:

- (a) – (b): $f_{X_0}(t) = 1$ (Uniform density),
- (c) – (d): $f_{X_0}(t) = \lambda e^{-\lambda t} + e^{-\lambda}$ (Exponential-like density),
- (e) – (f): $f_{X_0}(t) = t^2 + \frac{2}{3}$ (Quadratic density, say).

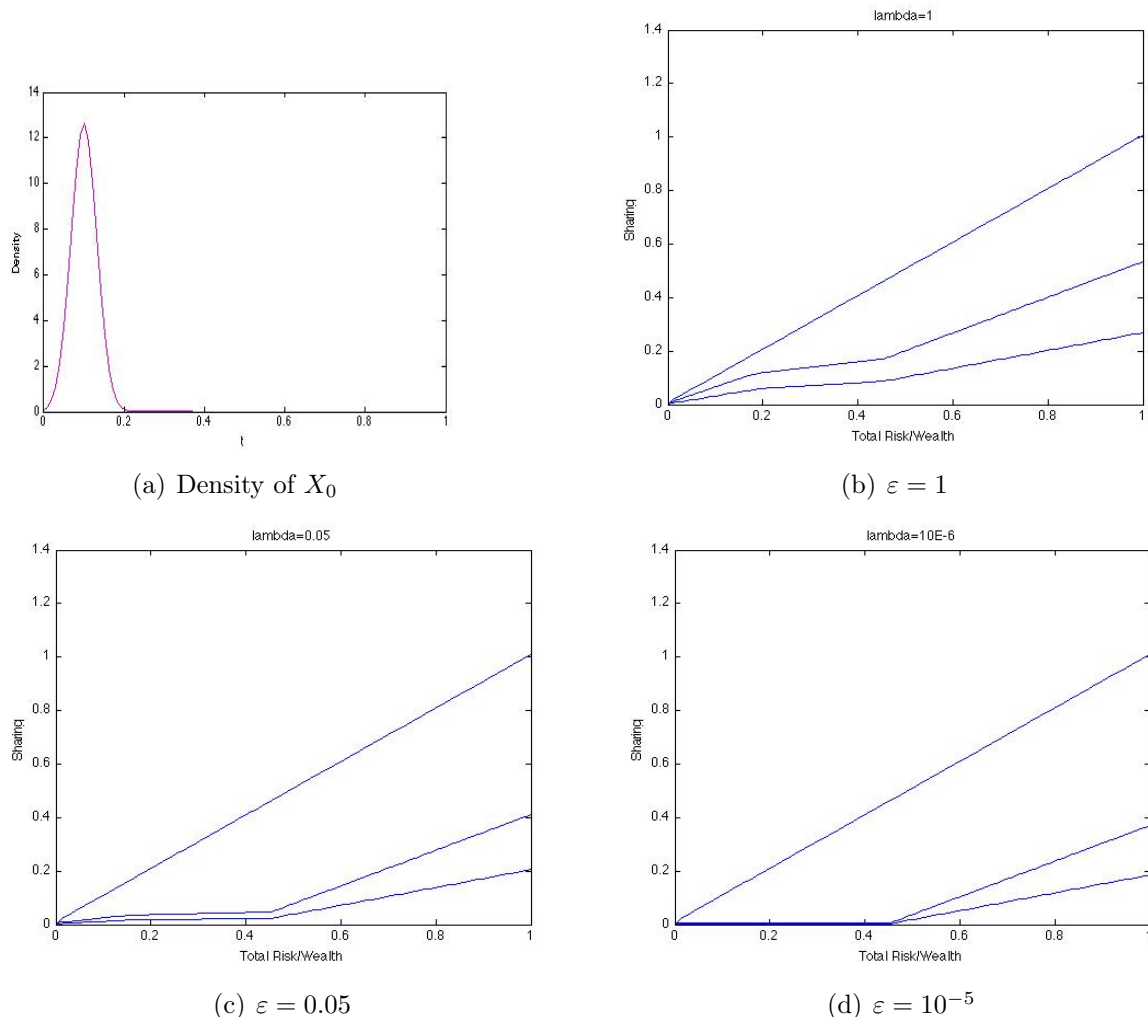


Figure 6.7: Approximation of the solution of the problem for a linear utility

Fifth case: non strictly concave utilities. To close this series of numerical tests, we aim to show that our algorithm is actually able to treat concave but not strictly concave utilities. This is an important extension which is motivated by Choquet expectations and monetary risk measures such as Expected Shortfalls. The idea is to make a small strictly concave perturbation of the utilities as explained in remark 6.4.2. In this example, we look at a case with 5 agents and a gaussian distribution of the aggregate risk X_0 (its density is represented on Figure 6.7-(a)). We then take perturbed utilities of the form

$$L_i^\varepsilon(t, x) = (1 + \varepsilon x^{\beta_i} + (1 - \varepsilon)x)(1 - t)^{\alpha_i},$$

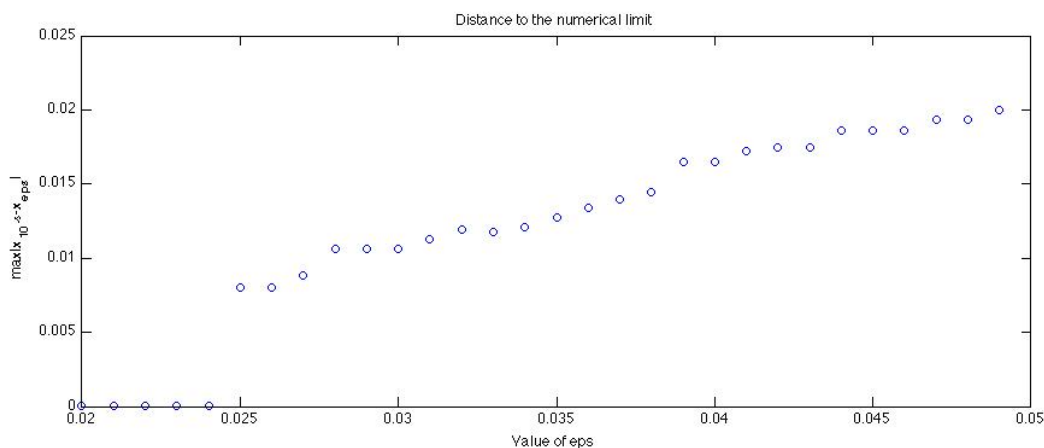


Figure 6.8: Distance of the approximations to the numerical limit

with $0 < \beta_i < 1$ and $\alpha_i > 0$. We then let $\varepsilon \rightarrow 0$ to recover the (linear) Choquet expectation. We show the numerical results for $\varepsilon = 1$ (Figure 6.7-(b)), $\varepsilon = 0.05$ (Figure 6.7-(c)) and $\varepsilon = 10^{-5}$ (Figure 6.7-(d)).

We have finally computed the uniform distance between the approximations and the numerical limit. If \bar{x}_ε denotes the numerical solution for a fixed ε , we define this quantity by $\|\bar{x}_{10^{-5}} - \bar{x}_\varepsilon\|_\infty$, and we give the results on Figure 6.8, for some values of ε in $[0.02, 0.05]$. We therefore observe a numerical convergence.

Acknowledgements

The authors wish to express their gratitude to Rose-Anne Dana for interesting discussions and helpful suggestions.

Bibliography

- [1] L. Ambrosio, *Lecture notes on optimal transport problems*, Lecture Notes in Math., 1812, Springer, Berlin, (2003).
- [2] Y. Achdou and I. Capuzzo-Dolcetta, Mean Field Games: Numerical Methods, hal-00392074, dépôt le 05/04/2009,
- [3] K.J. Arrow, Uncertainty and the welfare of medical care, *Amer. Econom. Rev.* 53 (1963), 941–973.
- [4] K.J. Arrow, Optimal insurance and generalized deductibles, *Scand. Actuar. J.* (1974), 1–42.
- [5] J.-D. Benamou and Y. Brenier, A computational fluid mechanics solution to the Monge-Kantorovich mass transfer problem , *Numer. Math.*, vol. 84 (3), 2000, pp 375-393.
- [6] K. Borch, Equilibrium in a reinsurance market, *Econometrica*, 30 (1962), 424–444.
- [7] Y. Brenier, *Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions*, *Comm. Pure Appl. Math.*, 44, 375–417 (1991).
- [8] G. Buttazzo, E. Oudet and C. Jimenez, An optimization problem for mass transportation with congested dynamics, preprint available at: <http://cvgmt.sns.it/people/buttazzo/>, retrieved september 2008.
- [9] G. Buttazzo, F. Santambrogio, A Model for the Optimal Planning of an Urban Area, *SIAM J. Math. Anal.*, 2005.
- [10] S. Cambanis, G. Simons and W. Stout Inequalities for $Ek(X, Y)$ when the marginals are fixed, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 36, (1976), 285–294.
- [11] G. Carlier, *Duality and existence for a class of mass transportation problems and economic applications*, *Adv. Math. Econ.*, 5, 1–21 (2003).
- [12] G. Carlier, R.-A. Dana, Core of convex distortions of a probability, *Journal of Economic Theory*, 113 (2003), 199-222 (2003).

-
- [13] G. Carlier, R.-A. Dana, Law invariant concave utility functions and optimization problems with monotonicity and comonotonicity constraints, *Statistics and Decisions*, 24 (2006) 127-152.
- [14] G. Carlier, R.-A. Dana, Two-Persons Efficient Risk-Sharing and Equilibria for Concave Law-Invariant Utilities, *Economic Theory*, 36 (2008), 189–223.
- [15] G. Carlier, R.-A. Dana, Optimal demand for contingent claims when agents have law invariant utilities, to appear in *Mathematical Finance*.
- [16] G. Carlier, R.-A. Dana, A. Galichon, Pareto efficiency for the concave order and multivariate comonotonicity, preprint available on arxiv.
- [17] G. Carlier, I. Ekeland, The structure of cities, *Journal of Global Optimization*, vol. 29, no. 4, 371D376, (2004)
- [18] G. Carlier, I. Ekeland, Equilibrium structure of a bidimensional asymmetric city, *Nonlinear Analysis, Series B, Real World Applications*, Volume 8, Issue 3, 725-748 (2007).
- [19] G. Carlier, C. Jimenez, F. Santambrogio, Optimal transportation with traffic congestion and Wardrop equilibria, *SIAM Journal on Control and Opt.* 47(3), 1330-1350, 2008.
- [20] G. Carlier, A. Lachapelle, A planning problem combining optimal control and optimal transport, *submitted*, available on <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00432785/fr/>, 2009.
- [21] G. Carlier, A. Lachapelle, A numerical approach for a class of risk-sharing problems, *submitted*, available on <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00448373/fr/>, 2010.
- [22] G. Carlier, J. Salomon, A monotonic algorithm for the optimal control of the Fokker-Planck equation, *Proc. of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, Cancun, Mexico, Dec. 8–11, 2008.
- [23] P.A. Chiappori, R.J. Mc Cann, L. Nesheim. *Hedonic price equilibria, stable matching, and optimal transport: equivalence, topology, and uniqueness*, to appear in *Econom. Theory*
- [24] R.-A Dana, A representation result for concave Schur concave functions, *Math. Finance* 15 (2005), no. 4, 613–634.
- [25] R. Dautray and J.L. Lions, *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol. 5, Evolution problems. I*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [26] R. Dautray, *Méthodes probabilistes pour les équations de la physique*, Eyrolles, Paris, 1989.

- [27] D. Denneberg, *Non-additive Measures and Integral*, Kluwer Academic Publishers, Holland, 1994.
- [28] I. Ekeland, *An optimal matching problem*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 11, no. 1, 57–71(2005).
- [29] I. Ekeland, *Existence, uniqueness and efficiency of equilibrium in hedonic markets with multidimensional types*, to appear in Econom. Theory.
- [30] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, Grad. Stud. Math., AMS, 1998.
- [31] W. H. Fleming, H.M. Soner, *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Graduate Studies in Mathematics, 58, Springer-Verlag, Applications of Mathematics, (1993).
- [32] H. Föllmer, A. Schied, *Stochastic finance. An introduction in discrete time*, De Gruyter editor, Berlin 2004.
- [33] M. Freidlin, *Functional integration and partial differential equations*, Annales of Mathematics Studies, Princeton University Press, Study 109, 1985.
- [34] W. Gangbo, *An elementary proof of the polar factorization of vector-valued functions*, Arch. Rational Mech. Anal., 128, 380–399 (1994).
- [35] W. Gangbo. Habilitation thesis. Université de Metz, 1995.
- [36] W. Gangbo, R.J. McCann, *The Geometry of Optimal Transportation*, Acta Math., 177, 113–161 (1996).
- [37] P.-N. Giraud, O. Guéant, J.-M Lasry, P.-L. Lions, *A mean field game model of oil production in presence of alternative energy producers*, to appear.
- [38] O. Guéant, *Thèse de doctorat*, Université Paris-Dauphine, juin 2009.
- [39] O. Guéant, A reference case of Mean field Games, to appear in the *Journal de Mathématiques Pures et Applications*.
- [40] O. Guéant, J.M. Lasry, P.L. Lions, Application of Mean Field Games to Growth Theory, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00348376/fr/>.
- [41] K. Guittet, On the time-continuous mass transport problem and its approximation by augmented lagrangian techniques, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 41, No. 1, pp. 382-399.
- [42] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pòlya, *Inequalities*, Reprint of the 1952 edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [43] C. Hirsch, *Numerical Computation of Internal and External Flows: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows* (1990), John Wiley & Sons.

- [44] R. L. Hughes, A continuum theory for the flow of pedestrian, *Transport. Res. Part B* 36 (2002) 507–535.
- [45] E. Jouini, W. Schachermayer, N. Touzi, Optimal risk sharing for law invariant monetary utility functions, *Math. Finance* 18 (2008), 269–292.
- [46] P. E. Kloeden and E. Platen, *Numerical solution of stochastic differential equations*, Applications of Mathematics (New-York), Springer-Verlag, 1214374, 1992.
- [47] V.F. Krotov, *Solution Algorithms and Optimization of Control Systems. I, II*, Tekh. Kibern., no. 5, 1975, pp. 3-15; no. 6, 1975, pp. 3-13.
- [48] A. Lachapelle, Jeux à champ moyen, simulation numérique et application à un modèle de choix technologiques, Mémoire de M2 EDP-MAD, 2006.
- [49] A. Lachapelle, J. Salomon, G. Turinici, Computation of Mean Field Equilibria in Economics, M3AS Issue 4, Vol. 20, 2010.
- [50] M. Landsberger, I.I. Meilijson, Comonotone allocations, Bickel Lehmann dispersion and the Arrow-Pratt measure of risk aversion, *Annals of Operation Research* 52 (1994) 97–106.
- [51] J.-M. Lasry and P.-L. Lions, Jeux à champ moyen. I. Le cas stationnaire. (French) [Mean field games. I. The stationary case], *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, vol. 343 (9), 2006, pp. 619-625.
- [52] J.-M. Lasry and P.-L. Lions, Jeux à champ moyen. II. Horizon fini et contrôle optimal. (French) [Mean field games. II. Finite horizon and optimal control], *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, vol. 343 (10), 2006, pp. 679-684.
- [53] J.-M. Lasry and P.-L. Lions, Mean field games, *Jpn. J. Math.*, vol. 2 (1), 2007, pp. 229-260.
- [54] V.L. Levin, *Abstract cyclical monotonicity and Monge solutions for the general Monge-Kantorovich problem*, *Set-valued Anal.*, 7, 7–32 (1999).
- [55] J.-L. Lions, *Optimal control of systems governed by partial differential equations*, Springer-Verlag, 1971.
- [56] P.-L. Lions, Théorie des jeux à champ moyen et applications, *Cours au Collège de France*, http://www.college-de-france.fr/default/EN/all/equ_der/index.htm, 2009.
- [57] G.G. Lorentz, An inequality for rearrangements, *Amer. Math. Monthly*, 60 (1953), 176–179.
- [58] Y. Maday and G. Turinici, New formulations of monotonically convergent quantum control algorithms, *J. Chem. Phys.*, vol. 118 (18), 2003, pp. 8191-8196.

- [59] Y. Maday, J. Salomon and G. Turinici, Monotonic time-discretized schemes in quantum control, *Num. Math.*, vol. 103 (2), 2006, pp. 323-338.
- [60] R.J. McCann, *Existence and uniqueness of monotone measure-preserving maps*, Duke Math. J., 80, 309–323 (1995).
- [61] B. Maury, A. Roudneff-Chupin, F. Santambrogio, A macroscopic crowd motion model of gradient flow type, to appear in *Math. Models Meth. Appl. Sci.*
- [62] G. Monge, *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*, Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris, 666-704, 1781.
- [63] M. Olson, *The Logic of Collective Action*, Harvard University Press, 1971.
- [64] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, Third Edition (2007), Cambridge University Press.
- [65] M. Rothschild, J. E. Stiglitz,. Increasing Risk, I. A Definition, *Journal of Economic Theory* 2 (1970) 225–243.
- [66] W. Rudin, *Real and complex analysis*, third ed. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.
- [67] J.V. Ryff, Extreme points of some convex subsets of L^1 , *Proc. AMS* 116 (1967), 1026–1034.
- [68] J.V. Ryff, Measure preserving Transformations and Rearrangements, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 31 (1970) 449- 458.
- [69] J. Salomon and G. Turinici, A monotonic method for solving nonlinear optimal control problems, *submitted*, preprint hal-00335297 : <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00335297/fr/>.
- [70] A.H. Stone, *Measure-preserving maps in General topology and its relations to modern analysis and algebra*, IV (Proc. Fourth Prague Topological Sympos., Prague, 1976), Part A, , *Lecture Notes in Math.*, 609, Springer, Berlin, pp. 205–210 1977
- [71] D. Tannor, V. Kazakov and V. Orlov, Control of Photochemical Branching: Novel Procedures for Finding Optimal Pulses and Global Upper Bounds in *Time Dependent Quantum Molecular Dynamics*, Plenum, Broeckhove J. and Lathouwers L. eds., 1992, pp.347-360.
- [72] R. Temam, *Navier-Stokes equations*, North-Holland, Studies in Mathematics and its Applications, 1984.
- [73] C. Villani, *Topics in optimal transportation*, Graduate Studies in Mathematics, 58, American Mathematical Society, Providence, RI, (2003).

- [74] C. Villani, *Optimal transport. Old and new*, Springer-Verlag, Berlin, (2009).
- [75] W. Zhu and H. Rabitz, A rapid monotonically convergen iteration algorithm for quantum optimal control over the expectation value of a positive definite operator, *J. Chem. Phys.*, vol. 109, 1998, pp. 385-391.

Quelques problèmes de transport et de contrôle en économie: aspects théoriques et numériques

Résumé : Dans cette thèse on explore l'utilisation du contrôle optimal et du transport de masse pour la modélisation économique. Nous saisissons ainsi l'occasion de réunir plusieurs travaux faisant intervenir ces deux outils, parfois en interactions l'un avec l'autre. Dans un premier temps nous présentons brièvement la récente théorie des jeux à champ moyen introduite par Lasry et Lions et nous concentrons sur le point de vue du contrôle de l'équation de Fokker-Planck. Nous exploitons cet aspect à la fois pour obtenir des résultats d'existence d'équilibres et pour développer des méthodes numériques de résolution. Nous testons les algorithmes dans deux cas complémentaires à savoir le cadre convexe (aversion à la foule, dynamiques à deux populations) et le cadre concave (attraction, externalités et effets d'échelle dans un modèle stylisé de transition technologique). Dans un second temps, nous étudions un problème de matching mêlant transport optimal et contrôle optimal. Le planificateur cherche un couplage optimal, fixé pour une période donnée (engagement), étant donné que les marges évoluent (éventuellement aléatoirement) de façon contrôlée. Enfin, nous reformulons un problème de partage de risque entre d agents (pour lequel nous prouvons un résultat d'existence) en un problème de contrôle optimal avec contraintes de comonotonie; ceci nous permet d'obtenir des conditions d'optimalité à l'aide desquelles nous construisons un algorithme simple et convergent.

Mots clés : Jeux à champ moyen, contrôle optimal, transport optimal, approximations numériques, calcul des variations, contrôle de Fokker-Planck, économie mathématique.

Transport and control problems in economics: theoretical and numerical aspects

Abstract : In this thesis we explore some uses of optimal control and mass transport in economic modeling. We thus catch the opportunity to bring together some works involving both tools, sometimes mixing them. First, we briefly present the recent mean field games theory introduced by Lasry & Lions and focus on the optimal control of Fokker-Planck setting. We take advantage of this aspect in order to obtain both existence results and numerical methods to approximate solutions. We test the algorithms on two complementary settings, namely the convex setting (crowd aversion, two populations dynamics) and the concave one (attraction, externalities and scale effect for a stylized technology switch model). Secondly, we study matching problems combining optimal transport and optimal control. The planner looks for an optimal coupling, fixed during the considered time period (commitment), knowing that the marginals evolve (possibly randomly) and that she can control the evolution. Finally we reformulate a risk-sharing problem between d agents (for whose we prove an existence result) into an optimal control problem with comonotonic constraints. This enables us to write optimality conditions that we use to build a simple convergent algorithm.

Keywords : Mean field games, optimal control, optimal transport, numerical approximations, calculus of variations, Fokker-Planck control, mathematical economics.