HAL
open science

Modélisation numérique objective des problèmes couplés hydromécaniques dans le cas des géomatériaux

Roméo Fernandes

To cite this version:

Roméo Fernandes. Modélisation numérique objective des problèmes couplés hydromécaniques dans le cas des géomatériaux. Mécanique [physics.med-ph]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2009. Français. NNT : . tel-00517702

HAL Id: tel-00517702

https://theses.hal.science/tel-00517702v1

Submitted on 15 Sep 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I
(arrêté ministériel du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Spécialité : Mécanique

par Roméo FERNANDES

Modélisation numérique objective des problèmes couplés hydromécaniques dans le cas des géomatériaux

---

Soutenue le 23 janvier 2009 devant le jury composé de MM. :

Président :	**Yves LEROY**	Professeur à l'ENS, Paris
Rapporteurs :	**Robert CHARLIER**	Professeur de l'Université de Liège
	Ioannis VARDOULAKIS	Professeur de l'Université d'Athènes
Examinateurs :	**Patrick MASSIN**	Directeur du LaMSID - UMR CNRS-EDF
	Clément CHAVANT	Co-encadrant de thèse, Ingénieur Chercheur EDF
Directeur de thèse :	**René CHAMBON**	Professeur de l'Université de Grenoble

Thèse préparée conjointement aux :

Laboratoire Sols, Solides, Structures - Risques, UMR UJF-INPG-CNRS 5521
Laboratoire de Mécanique des Structures Industrielles Durables, UMR EDF-CNRS 2832
Département d'Analyse Mécanique et Acoustique de EDF R&D

Résumé :

L'objectif technique principal auquel répond cette thèse est la mise au point d'une méthode de régularisation, donnant des résultats objectifs par rapport au maillage, pour traiter les problèmes couplés hydromécaniques dans le cas des géomatériaux. La modélisation proposée s'inscrit dans le cadre des milieux à microstructure dilatants et s'inspire, du point de vue numérique, des formulations second gradient. Elle permet de prédire de façon robuste les comportements hydrauliques et mécaniques produits par la dégradation d'un milieu naturel.

Le modèle ainsi obtenu, dit second gradient de dilatation, se distingue par le faible nombre de degrés de liberté ajouté dans la discrétisation éléments finis par rapport à celui des milieux continus. L'objectif numérique est de réduire les temps de calcul pour rendre les études à portée industrielle acceptables. On montre son efficacité en réalisant des simulations couplées hydromécaniques d'excavations souterraines.

Enfin, on présente un algorithme de recherche de solutions multiples dans la direction des modes singuliers basé sur les principes de la théorie de la bifurcation pour traiter des non-linéarités dues à des comportements irréversibles de matériaux adoucissants. Le cadre de l'analyse de bifurcation proposée se limite au cas des opérateurs symétriques. On montre ainsi, sur des simulations d'essais biaxiaux homogènes et d'excavations souterraines en conditions drainées, que cet algorithme est un outil de calcul efficace et robuste pour détecter plusieurs solutions mais également pour franchir des instabilités numériques liées au mauvais conditionnement des matrices tangentes au voisinage des points singuliers ou à la présence de snap-back.

Mots-clés : Régularisation, second gradient, dilatation, dilatance, plasticité, radoucissement, élément fini, localisation, géomatériaux, couplage hydro-mécanique, excavation souterraine, bifurcation, indice des vides critiques.

Abstract:

The main technical purpose of this PhD Thesis is to build up and validate a regularisation method, able to remedy to the spurious mesh dependency of post localized computations, in order to make possible hydromechanical coupling studies for geomaterials. The proposed model is based on the framework of second gradient models and is called the microdilation model. It allows to predict robustly the hydromechanical coupled behaviors related to the degradation of natural soils and rocks.

This modeling is a clear enhancement with respect to classical second gradient computations since it requires less degrees of freedom and consequently is less time consuming. Its efficiency is shown through hydromechanical coupled simulations of underground excavations.

Finally, an algorithm to detect several solutions in the direction of singular modes associated with negative eigenvalues is presented. It allows us to deal with the non-linear nature of the irreversible behavior of soils and rocks. The scope of this bifurcation analysis is restricted to symetrical operators. Through the simulations of homogeneous biaxial tests and underground excavations under drained conditions, it is shown that this algorithm is an efficient and robust tool not only to detect several solutions but also to overcome numerical instabilities near singular points or due to snap-back.

Keywords: Regularisation, second gradient, dilation, dilatancy, plasticity, softening, finite element, localisation, geomaterial, hydro-mechanical coupling, underground excavation, bifurcation, critical void ratio.

Remerciements

Je tiens à débuter ces remerciements en exprimant ma plus grande gratitude à **François Waeckel**, chef du département d'Analyse Mécanique et Acoustique de EDF R&D, grâce à qui cette formidable aventure a pu voir le jour. Tout d'abord, merci François de m'avoir soutenu et accordé une oreille attentive depuis mon Projet de Fin d'Etudes. Merci également d'avoir été à l'origine de ce projet, de m'avoir poussé et motivé dans sa réalisation.

Dans la continuité de ces remerciements, je souhaite m'adresser au quatuor qui a constitué mon comité d'encadrement. Merci donc à **René Chambon**, directeur de thèse, pour ses précieux conseils, son enthousiasme en matière de publications et son investissement dans le suivi de mon travail malgré la distance qui nous a séparé pendant ces 3 années. Merci également à **Stéphane Andrieux** pour les riches discussions que nous avons pu avoir mais aussi pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail. Un grand Merci à **Eric Lorentz** pour son implication régulière dans mon encadrement, pour l'orientation qu'il a su donner à mon travail grâce à ses idées si fructueuses, et pour la motivation qu'il m'a insufflée. Et enfin, j'adresse une reconnaissance plus particulière à **Clément Chavant**, bien entendu pour sa pédagogie et son encadrement mais aussi pour ses qualités humaines. C'est avec un immense plaisir que j'ai pu partager ces inoubliables moments de ma vie avec toi et si ce travail est une réussite c'est en très grande partie grâce à toi.

Ma pensée va ensuite aux membres du jury qui ont accepté d'évaluer mon travail. Je remercie donc chaleureusement **Yves Leroy** d'avoir accepté d'endosser le rôle de président. Un grand Merci également à **Ioannis Vardoulakis** et **Robert Charlier** pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma thèse en acceptant de la juger en tant que rapporteurs. Leurs remarques pertinentes ont fortement contribués à l'amélioration de ce mémoire. Enfin, **Patrick Massin** m'a fait le grand plaisir de compléter ce jury. Je le remercie pour ses remarques avisées dans la préparation de ma soutenance et pour toute l'aide qu'il m'a apportée depuis son encadrement lors de mon Projet de Fin d'Etudes.

Je remercie également les personnes que j'ai côtoyées de près et qui m'ont guidé. Je pense ainsi à Vincent Godard et Pierre Badel qui m'ont régulièrement ouvert leur porte pour m'écouter et m'orienter dans ma quête scientifique. Aimery Assire pour son soutien au quotidien et qui a su faire de mes problèmes informatiques les siens. Nabila Sellali pour toute l'aide qu'elle a pu m'apporter notamment lors de la rédaction de mon mémoire. Et enfin, tous ceux qui ont contribué au bon déroulement de mon projet : Sylvie Michel-Ponnelle, Sylvie Granet, Joumana El-Gharib, Nicolas Tardieu, Renaud Bargellini, Claude Rospars, Jean-Luc Flejou, Jérome Laverne, Sébastien Meunier, Jean-Pierre Lefebvre, Jean-Michel Proix, Jacques Pellet, Mickaël Abbas, Mathieu Courtois, Christophe Durand, Xavier Desroches, Erwan Galenne, The-Hiep Chau, François Voldoire, Alexandre Foucault, Olivier Boiteau, Sylvie Rouaix et Géraldine Fassassi... sans oublier tous mes autres collègues du groupe de Mécanique Non-Linéaire et du département AMA.

Je remercie aussi l'équipe de Recherche "Géomatériaux, Déformation et Rupture" du Laboratoire 3S-R de Grenoble, et en particulier Jacques Desrues, Pierre Bésuelle, Yannick Sieffert, Denis Caillerie et Cino Viggiani pour leurs soutiens et leurs conseils lors de mes passages à Grenoble ou lors des conférences auxquelles nous avons pu participer ensemble. Je remercie également Frédéric Collin de l'Université de Liège pour m'avoir conseillé au début de ma thèse sur la prise en main informatique du modèle second gradient.

J'adresse, enfin, un profond remerciement à ma famille : parents, beaux-parents et soeurs qui m'ont toujours écouté et épaulé... et bien entendu à mon épouse Sylvie pour sa compréhension et pour m'avoir offert deux merveilleux enfants (Clément et Mathilde) pendant la durée de cette thèse.

C'est une chance que d'avoir pu être entouré de personnes aussi formidables dans cette aventure scientifique et humaine. C'est grâce à vous que cette thèse a pu être pour moi si stimulante et agréable.

Je n'oublie pas, non plus, que si cette expérience a pu voir le jour c'est grâce à la structure de EDF R&D. Je l'en remercie donc pour l'opportunité qui m'a été donnée et les moyens mis en oeuvre pour me permettre de la mener à bien. Cet investissement a contribué sans nul doute à mon épanouissement scientifique.

Table des matières

1 Problématique de la thèse 1
1.1 le contexte industriel 1
1.2 le projet scientifique 2
1.3 le code de calcul Code_Aster 4
1.4 le plan du mémoire 10

2 Notations et restrictions 13

3 Une approche bibliographique 15
3.1 Les méthodes de régularisation 17
3.2 Les simulations d'excavations souterraines 33
3.3 Les méthodes de recherche de solutions bifurquées 36

4 Le second gradient de dilatation 53
4.1 Un modèle de second gradient simplifié pour traiter les matériaux dilatants 54
4.2 Formulation numérique 63
4.3 Validation numérique de la formulation second gradient de dilatation 72
4.4 Bilan du chapitre et perspectives à venir 94

5 Le second gradient de dilatation couplé aux équations de l'hydraulique 95
5.1 Introduction aux milieux poreux 95
5.2 Les milieux poreux en équations 96
5.3 Les équations de l'hydraulique n'apportent pas d'effet régularisant 98
5.4 Les milieux poreux par une formulation second gradient de dilatation 101
5.5 Bilan et perspectives 111

6 Recherche de solutions bifurquées pour les modèles à gradient 113
6.1 La bifurcation dans les structures à comportement non-linéaires adoucissants 114
6.2 Application numérique sur un essai biaxial homogène en compression 118
6.3 Les techniques de changement de branche : Un soutien à la convergence numérique 134
6.4 Application numérique sur une simulation d'excavation en condition drainée 136
6.5 Bilan et perspectives 142

7 Conclusions générales et perspectives 145

8 Annexes 147
8.1 Calcul des conditions aux limites associées au modèle second gradient de dilatation 147
8.2 Analyse numérique des dérivées géométriques pour les éléments finis de type triangles 149

Bibliographie 151

1

Problématique de la thèse

1.1 le contexte industriel **1**

1.2 le projet scientifique **2**

1.3 le code de calcul Code_Aster **4**

1.3.1 Algorithme de Newton 5

1.3.2 Le pilotage 6

1.3.3 Le module de couplage Thermo-Hydro-Mécanique 8

1.3.4 L'analyse aux valeurs et vecteurs propres 9

1.3.5 Les méthodes de régularisation disponibles dans Code_Aster 9

1.4 le plan du mémoire **10**

1.1 le contexte industriel

Le stockage profond des déchets nucléaires est un des trois axes envisagés par la loi du 30 décembre 1991 relative aux recherches sur la gestion des déchets radioactifs. L'objectif principal de cette solution est de construire une barrière géologique pour la protection de l'Homme et de son environnement. L'état actuel des connaissances accumulées en une quinzaine d'années montre que cette solution est possible et raisonnable. Les expérimentations qui commencent dans le laboratoire de Bure permettront d'affiner les modèles et contribueront à faire évoluer les concepts de stockage. Au fur et à mesure que ces concepts se préciseront, des études de plus en plus détaillées devront être menées pour dimensionner les solutions retenues et pour préciser leur mise en oeuvre industrielle.

L'ensemble de ces études, aussi bien au niveau des concepts que de l'ingénierie, est de la responsabilité de l'Agence Nationale pour la gestion des Déchets RadioActifs (ANDRA). Cependant, EDF contribue à ces études, soit en collaboration directe avec l'ANDRA, soit pour son propre compte et à des fins d'évaluation des solutions proposées par l'ANDRA.

Parmi les problèmes suivis par EDF, celui de l'initiation et de l'évolution de l'endommagement des terrains suite aux travaux d'excavation des ouvrages tient une place importante. En effet, cet endommagement peut avoir des conséquences déterminantes sur la tenue des ouvrages et peut aussi fortement modifier les propriétés de rétention du stockage, ce qui est sa fonction première. Prédire l'extension et l'évolution de la zone endommagée par excavation suppose de savoir faire des calculs de structure qui prennent en compte simultanément et de façon couplée la fissuration des roches et les écoulements de l'eau interstitielle.

1.2 le projet scientifique

L'objectif scientifique du stockage en milieu géologique profond (de l'ordre de 500 mètres) est d'isoler les matières radioactives de l'environnement pendant le temps nécessaire à la décroissance de la radioactivité. Il faut par conséquent apporter une attention particulière à la migration des radionucléides et à leur retour vers la biosphère. La propagation de ces substances est possible via l'écoulement de l'eau dont la présence est inévitable en couche profonde. C'est pourquoi la roche hôte doit être le plus imperméable possible. Mais ses propriétés vont être altérées par les travaux d'excavation qui vont créer, dans la roche, des zones endommagées et fissurées. Celles-ci vont alors perturber la tenue des ouvrages mais aussi engendrer des chemins préférentiels pour les écoulements d'eau. Il est donc absolument nécessaire de maîtriser non seulement la conception et la tenue des galeries et des alvéoles - qui vont servir, à terme, à entreposer les colis - mais aussi l'évolution au cours du temps des zones endommagées lors des travaux d'excavation en tenant compte du comportement couplé hydromécanique du milieu.

C'est donc tout naturellement que ces travaux de recherches s'inscrivent dans le cadre de la branche de la mécanique des roches, une des branches des géomécaniques. Les lois de comportements qui en découlent, permettent de représenter la dégradation du matériau sous sollicitations mécaniques. Ces lois sont caractérisées par une diminution de la résistance malgré une augmentation des déformations. On parle de lois de comportement de type adoucissant. Le fort couplage de ces lois avec le comportement hydraulique du milieu considéré conduit la communauté scientifique à élaborer des simulations numériques complexes. Pour les résoudre, la méthode des éléments finis est sans nul doute une des méthodes les plus prometteuses. Mais aujourd'hui encore, la modélisation de ces phénomènes couplés est une aventure difficile.

Une des raisons, bien connue et largement publiée, vient du fait que les descriptions locales des matériaux présentant un adoucissement de comportement - c'est le cas des géomatériaux - ne décrivent pas correctement les interactions entre champs mécaniques macroscopiques et phénomènes se déroulant à une échelle inférieure. Mathématiquement, le problème continu est en fait mal posé. En effet, il ne permet pas de rendre compte des forts gradients de déformation qui se concentrent dans des petites zones, qu'on appelle bandes de localisations, dont l'épaisseur dépend du matériau. Numériquement, cela se traduit par une dépendance pathologique des résultats aux maillages : à la nature des éléments

finis (formes géométriques et espace d'interpolation), à la finesse de la discrétisation, à l'orientation et à la distorsion des mailles. La localisation des déformations se concentre alors sur une bande d'épaisseur un élément (voir Pijaudier-Cabot et Bazant [116] ou encore les travaux plus récent de Forest et Lorentz [62]). Physiquement, l'énergie dissipée pour atteindre la rupture diminue avec le raffinement du maillage. Ce qui est inacceptable.

Pour remédier à de telles déficiences et limiter la localisation, les modèles locaux doivent faire l'objet de traitements numériques particuliers regroupés sous le nom générique de régularisation. Ce domaine est bien couvert dans le cas de simulations purement mécaniques, mais l'est beaucoup moins dans le cas des couplages avec l'hydraulique. L'objectif technique majeur de cette thèse est d'explorer ce domaine afin de produire une méthode de régularisation pour traiter les problèmes couplés hydromécaniques dans le cadre des géomatériaux. Cette méthode devra :

- donner des résultats objectifs par rapport à la dépendance du maillage à convergence;
- permettre de prédire de façon robuste le comportement hydraulique produit par la dégradation du milieu naturel;
- être acceptable du point de vue temps de calcul et volumes de données. Le but étant à terme de pouvoir réaliser des études à portée industrielle;
- être simple à introduire informatiquement dans un code de calcul élément fini existant. Cela suppose qu'elle soit, si possible, indépendante du type de la loi de comportement géomécanique, et qu'il est préférable que l'algorithme de résolution du problème non-linéaire soit classique;
- avoir le moins possible de données supplémentaires à fournir pour être facile à utiliser.

La démarche adoptée dans le cadre de ce travail étant orientée sur la mise au point de méthodes numériques, l'utilisation de modèles de comportement de sol complexe difficile à appréhender scientifiquement ne nous a pas semblé être un choix pertinent. C'est pourquoi nous considérons une loi simple, de type Drucker-Prager, qui permet de représenter - simplement - la rhéologie des roches.

Le second objectif de ce travail porte sur l'utilisation de la théorie de la bifurcation comme outil de calcul numérique. En effet, l'application de méthodes de régularisation permet de rendre la solution du problème aux limites objective par rapport à la discrétisation du maillage, mais le problème mathématique n'assure pas l'unicité de la solution. Les simulations deviennent alors numériquement instables dans le sens où les algorithmes de résolutions présentent des difficultés de convergence. Nous souhaitons donc identifier une méthode :

- simple et robuste,
- qui permette de détecter l'ensemble - le plus complet possible - des solutions du problème non-linéaire à résoudre,
- et qui soit un soutien pour franchir les difficultés numériques.

L'obstable majeur qui se pose dans le cadre de cette approche réside dans le caractère non-continûment différentiable des équations représentatives des lois de comportement

élasto-plastiques. Discontinuité qui est d'autant plus forte lorsque le matériau est adoucissant.

Le troisième objectif est de capitaliser ce travail de recherche en l'intégrant dans le code de calcul élément fini Code_Aster en vue d'un transfert vers l'ingénierie.

1.3 le code de calcul Code_Aster

EDF doit garantir, dans le temps, la maîtrise technique et économique de ses moyens de production et de transport d'électricité. La sûreté et la disponibilité de ces installations mécaniques nécessitent d'étayer les décisions d'exploitation, de maintenance ou de remplacement par des modélisations non-linéaires. Code_Aster [40] est l'outil de simulation numérique prévu pour répondre à ces enjeux. Animé par EDF-R&D, il a pour mission de capitaliser les travaux de recherche de la communauté mécanicienne et de mettre à disposition de l'ingénierie du parc nucléaire en exploitation des méthodes d'analyses avancées en mécanique des solides et structures.

Pour assurer la performance et la crédibilité de ce logiciel, une équipe d'ingénieurs a en charge la responsabilité de la cohérence de son architecture et de sa mise en exploitation, sous assurance de la qualité. De plus, EDF-R&D a choisi de diffuser Code_Aster en logiciel libre [40] pour accroître sa qualité et sa robustesse par l'usage, en créant un réseau plus large d'utilisateurs, pour acquérir une reconnaissance par un jugement externe, et pour faciliter des partenariats de Recherche notamment avec le monde académique.

Basés sur une méthode par éléments finis, les domaines d'application de Code_Aster sont, de façon général, les analyses multi-échelle ou multi-physique (telles que le chaînage thermo-mécanique ou le couplage thermo-hydro-mécanique), pouvant prendre en compte en 3D les aspects non-linéaires de type géométriques ou bien matériaux pour des études statiques ou dynamiques.

Le travail de recherche de cette thèse est ainsi réalisé pour être capitalisé dans Code_Aster. Il s'inscrit principalement dans le cadre industriel de la géotechnique et a comme objectif d'assurer la robustesse et la fiabilité des calculs couplés hydro-mécaniques pour simuler le comportement d'un site de stockage de déchets radio-actifs. D'autres applications, comme la tenue de certains barrages hydrauliques, feront suite.

Nous décrivons brièvement ci-dessous quelques aspects numériques des algorithmes de Code_Aster qui ont été utilisés dans le cadre de ce travail. Cette description a, de plus, vocation à introduire certaines expressions mathématiques classiques.

- Il est essentiel de commencer par décrire l'algorithme de résolution des systèmes d'équations non-linéaires. Classiquement, le système est discrétisé en une séquence de plusieurs pas de temps et la résolution du problème sur un pas de temps est basée sur une méthode de Newton. On présente les équations principales et les notations

associées.

- Dans un deuxième temps, on présente la méthode de pilotage que nous avons utilisée dans le cadre de nos études. Godard et al [77] donnent une description détaillée de l'ensemble des méthodes de pilotages, dites également de continuation, disponibles dans Code_Aster.

- En troisième lieu, on situe le cadre théorique dans lequel s'inscrit le module Thermo-Hydro-Mécanique. En quelques mots, il a pour objectif de traiter les équations de la mécanique des milieux continus en utilisant la théorie des milieux poreux, saturés ou non en eau. Une description plus complète est faite au chapitre 5.

- Dans le cadre de la recherche de solutions multiples basée sur la théorie de la bifurcation il peut-être utile de faire une analyse aux valeurs et vecteurs propres. On rappelle quelques notions de base des problèmes modaux généralisés.

- Enfin, on décrit brièvement les méthodes de régularisation, déjà disponibles dans le code. Une description plus complète de ces différentes approches est proposée au chapitre 3.1 de ce rapport.

1.3.1 Algorithme de Newton

On décrit brièvement, dans cette partie, l'algorithme de résolution de Code_Aster permettant d'intégrer les systèmes d'équations non-linéaires dans le cas d'une sollicitation quasi-statique. Une description plus complète est proposée par Abbas [1].

Dans les algorithmes de résolution des problèmes quasi-statique non-linéaire, la solution est calculée de proche en proche. La raison principale de cette méthode de calcul est d'améliorer la convergence numérique qui est rendue chaotique par les aspects non-linéaire. On introduit alors une discrétisation des équations à résoudre selon une séquence incrémentale. On parle d'une décomposition du problème en pas de temps. Notion temporelle qui peut parfois sembler abusive car elle peut ne pas avoir de signification physique lorsque les lois de comportement sont indépendantes du temps.

L'histoire du chargement du problème à résoudre se déduit alors de la séquence des T pas de temps $\{t^s\}^{1\leq s\leq T}$. Pour chaque pas de temps t^s, on a le système d'équations non-linéaires

$$\mathbf{F}^{int}\left(u_i^s, t^s\right) = \mathbf{F}^{ext}\left(t^s\right) \tag{1.1}$$

où $\mathbf{F}^{int}$ et $\mathbf{F}^{ext}$ sont respectivement les vecteurs des forces internes et des forces externes, et u_i^s sont les composantes du champ de déplacement. Pour résoudre ce système, on utilise classiquement un algorithme de Newton-Raphson, dont l'initialisation est donnée par une technique d'Euler explicite.

$$\frac{\partial \mathbf{F}^{int}\left(u_i^{n,s}, t^s\right)}{\partial u_i^{n,s}} \delta u_i^{n+1} = -\mathbf{F}^{int}\left(u_i^{n,s}, t^s\right) + \mathbf{F}^{ext}\left(t^s\right) \tag{1.2}$$

et

$$u_i^{n+1,s} = u_i^{n,s} + \delta u_i^{n+1} \tag{1.3}$$

où $u_i^{n,s}$ désigne une inconnue nodale du champ de déplacement à l'itération n du $s^{\text{ième}}$ pas de temps et δu_i^n est la correction incrémentale de u_i pour la $n^{\text{ième}}$ itération de Newton. On appelle, $\mathbf{K}^{n,s}$ la matrice de rigidité tangente en $u_i^{n,s}$ définie par les composantes $K_{ij}^{n,s}$

$$K_{ij}^{n,s} = \frac{\partial F_i^{int}\left(u_i^{n,s}, t^s\right)}{\partial u_i^{n,s}} \tag{1.4}$$

On appelle $\theta^{n,s}$ la norme du vecteur résidu de la $n^{\text{ième}}$ itération de Newton

$$\theta^{n,s} = \frac{\mid \mathbf{F}^{int}\left(u_i^{n,s}, t^s\right) - \mathbf{F}^{ext}\left(t^s\right) \mid_\infty}{\mid \mathbf{F}^{ext}\left(t^s\right) \mid_\infty} \tag{1.5}$$

où $\mid . \mid_\infty$ désigne la norme infinie. On définit alors $\left(\theta^{n,s}\right)^{Max}$ et $\left(\theta^{n,s}\right)^{Min}$ par

$$\begin{cases} \left(\theta^{n,s}\right)^{Max} = Max\left\{\theta^{n-2,s};\, \theta^{n-1,s};\, \theta^{n,s}\right\} \\ \left(\theta^{n,s}\right)^{Min} = Min\left\{\theta^{n-2,s};\, \theta^{n-1,s};\, \theta^{n,s}\right\} \end{cases}, \tag{1.6}$$

pour 3 pas de temps successifs. La convergence est supposée atteinte lorsque

$$\begin{cases} \dfrac{\left(\theta^{n,s}\right)^{Min}}{\left(\theta^{n,s}\right)^{Max}} \leq \eta^1 \\ \text{et} \\ \left(\theta^{n,s}\right)^{Min} \leq \eta^2 \end{cases}, \tag{1.7}$$

où η^1 et η^2 sont des données (scalaires). Cette procédure vise à obtenir la convergence de l'algorithme lorsque le bruit numérique a été atteint (bien entendu cela dépend d'un choix judicieux et rigoureux de η^1 et η^2 comme nous en discuterons tout au long de ce document).

On adopte comme notation q^s la quantité $q^{n,s}$ obtenue après vérification de la condition de convergence (1.7).

1.3.2 Le pilotage

Dans le cas des matériaux adoucissants, il n'est pas toujours possible de contrôler l'intensité du chargement extérieur par des valeurs qui augmentent. On se trouve alors confronté à des instabilités numériques, telles que les phénomènes de snap-back (dont on reparlera lors de la présentation des techniques de bifurcation en section 3.3), pour lesquelles il est nécessaire d'utiliser des méthodes de pilotage (également connues sous l'appellation de méthodes de continuation ou de suivi de réponse). Le principe de ces méthodes est de déterminer l'intensité d'une partie du chargement pour satisfaire une contrainte portant sur les déplacements. En revanche, leur emploi est limité à des simulations pour lesquelles le temps ne joue pas de rôle physique, ce qui exclut a priori les

problèmes couplés hydro-mécaniques.

Les différentes techniques de pilotage disponibles dans Code_Aster sont décrites par Godard et al [77]. Elles introduisent des équations de contrôle :

- par degré de liberté imposé (voir Batoz et Dhatt [9]). Dans ce cas, les forces sont contrôlées par le déplacement d'un point de la structure. Cette méthode suppose, implicitement, qu'au moins un degré de liberté du champ de déplacement a une évolution monotone;

- par longueur d'arc (voir Crisfield [44]). Dans ce cas, le niveau de chargement est contrôlé par la norme de l'incrément de déplacement. Cette technique est plus adaptée pour traiter les instabilités de natures géométriques (de type flambement) plutôt que celles liées aux non-linéarités physiques (comme pour les matériaux adoucissants) comme le souligne Geers [71]. Cette méthode ne permet pas en effet de distinguer la branche dissipative de la solution et la décharge élastique;

- par incrément de déformation (voir Badel [8], Lorentz et Badel [96]). L'idée de cette méthode est d'éviter d'obtenir une solution qui soit en décharge sur tous les points de la structure en même temps. Dans ce cas, on demande que le sens de variation de la déformation du pas de temps courant soit la même que celle du pas de temps précédent pour au moins un point de la structure. Lorsque nous avons utilisé une méthode de pilotage pour franchir certaines instabilités numériques, c'est cette méthode par incrément de déformation que nous avons choisie;

- par prédiction élastique (voir également Badel [8], Lorentz et Badel [96]). Pour déterminer l'intensité du chargement, cette méthode définie comme contrainte de pilotage, pour les lois de comportement gouvernées par une fonction seuil, le maximum de la valeur de la fonction seuil sur l'ensemble des points d'intégrations dans le cas d'une réponse incrémentale d'un essai élastique. Cette méthode permet ainsi de contrôler la perte de stabilité (numérique) locale en maîtrisant les points les plus chargés et s'avère particulièrement efficace pour suivre des solutions dissipatives dans la plupart des instabilités matériaux.

Le principe général des techniques de pilotage est d'introduire une nouvelle inconnue scalaire $\eta\left(t^s\right)$ (non monotone) dans le système d'équations à résoudre et de lui associer une équation $\widetilde{P}$ dite contrainte de pilotage (voir Crisfield [46] pour une description plus détaillée). Le système d'équations s'écrit alors

$$\begin{cases} \mathbf{F}^{int}\left(u_i^s, t^s\right) = \mathbf{F}^{ext}\left(\eta\left(t^s\right),\right) \\ \widetilde{P}\left(\varepsilon_{ij}^s\right) \quad = A \end{cases}, \tag{1.8}$$

où A est une nouvelle donnée (sans dimension) strictement positive du problème et ε_{ij}^s désignent les composantes du champ des déformations au pas de temps t^s. Dans le cas particulier de la méthode de pilotage par incrément de déformation, la contrainte de

pilotage s'exprime par la relation

$$\widetilde{P}\left(\varepsilon_{ij}^{s}\right) = \underset{g}{max}\left(\frac{\varepsilon_{ij}^{s-1}}{\left(\varepsilon^{II}\right)^{s-1}}(\varepsilon_{ij}^{s} - \varepsilon_{ij}^{s-1})\right), \tag{1.9}$$

où $\varepsilon_{ij}^{s} - \varepsilon_{ij}^{s-1}$ désigne l'incrément de déformation du pas de temps t^{s-1} au pas de temps t^{s}, ε^{II} est une norme (définie au chapitre 2) du champ de déformation défini par les composantes ε_{ij} et l'indice g désigne les points de Gauss de la structure. D'après Badel [8], il semble que cette fonction est bien capable de sélectionner une branche de solution avec un incrément monotone quelque part dans la structure, mais l'existence d'une solution n'est pas assurée.

Nous avons choisi de prendre en compte cette méthode dans le cas de nos études, car pour la loi de comportement de type Drucker-Prager que nous utilisons, elle permet de distinguer clairement la réponse dissipative de la réponse élastique et l'impact informatique est plus simple que celui de la méthode par prédiction élastique.

1.3.3 Le module de couplage Thermo-Hydro-Mécanique

Une description précise des équations prises en compte dans Code_Aster pour représenter les problèmes Thermo-Hydro-Mécanique est donnée par Chavant [38] et Granet [68]. Ce module (THM) permet de traiter les équations de la mécanique des milieux continus en utilisant la théorie des milieux poreux (voir Coussy [42]), saturés ou non, en considérant que les phénomènes mécaniques, thermiques et hydrauliques sont fortement couplés, sous l'hypothèse dite des contraintes de Bishop [19]. Les relations y sont définies à partir de considérations thermodynamiques et par homogénéisation. Une présentation plus détaillée des relations de couplage entre les équations de l'hydraulique et de la mécanique est faite au chapitre 5.

Du point de vue numérique, les équations sont interpolées par des polynômes d'ordre 2 pour les degrés de liberté de déplacements, et par des polynômes d'ordre 1 pour les pressions et la température. Ce choix a, en partie, été justifié mathématiquement par Meunier [102], Ern et Meunier [55]. Dans le cadre des méthodes d'approximations par éléments finis en espace et différences finies en temps pour traiter les problèmes hydromécaniques couplés intervenant dans la théorie de la poro-élasticité linéaire quasi-statique, ces derniers montrent par une analyse d'erreur a posteriori qu'il faut prendre en compte des fonctions d'interpolations polynomiales d'un ordre plus élevé pour décrire le champ de déplacement que pour décrire le champ des pressions pour garantir une convergence optimale des estimateurs d'erreur.

Enfin, l'intégration numérique conseillée pour résoudre ce type de problème couplé est dite sélective : les termes faisant intervenir une dérivée en temps et les termes de couplage sont intégrés aux sommets (méthode de Newton-Cotes) tandis que les autres termes sont intégrés par la méthode de quadrature de Gauss. Le but de cette stratégie d'intégration est de pallier la dégradation des résultats due à une diffusion excessive tout en évitant

des oscillations dues au non respect du Principe du Maximum (voir Fernandes et al [58]). Deux autres méthodes d'intégration numérique sont tout de même disponibles : soit une intégration complète aux points de Gauss, soit aux sommets.

1.3.4 L'analyse aux valeurs et vecteurs propres

Pour étudier le comportement dynamique de structures il est en général nécessaire de faire une analyse transitoire sur base modale (pour les études de flambage par exemple). Cela consiste à faire une analyse aux valeurs et vecteurs propres de la matrice tangente de rigidité $\mathbf{K}^s$ définie par (1.4) après convergence du pas de temps t^s. Pour rappel, si $\mathbf{K}^s$ est une matrice et s'il existe un vecteur non-nul $\boldsymbol{\theta}^s$ tel que la relation

$$\mathbf{K}^s.\boldsymbol{\theta}^s = \omega^s \boldsymbol{\theta}^s \tag{1.10}$$

soit vérifiée alors ω^s est une valeur propre de $\mathbf{K}^s$ et $\boldsymbol{\theta}^s$ est le vecteur propre associé. Pour identifier une valeur propre ω^s il suffit par exemple de résoudre

$$\det\left(\mathbf{K}^s - \omega^s \mathbf{I}\right) = 0 \tag{1.11}$$

où $\mathbf{I}$ désigne la matrice identité définie par $I_{ij} = \delta_{ij}$.

Dans le cas des calculs statiques non-linéaires, l'analyse aux valeurs et vecteurs propres disponible dans Code_Aster (décrite en détail par Boiteau et Nicolas [20]) est basée sur l'algorithme "Implicit Restarted Arnoldi" initié par Sorensen [131]. Cet algorithme a l'avantage d'être plus robuste que la méthode classique de Lanczos et permet de capter de façon rigoureuse les multiplicités des valeurs propres. De plus, pour des raisons d'efficacité numérique, notamment du point de vue coût de calcul, le spectre d'analyse des valeurs propres est réduit par des méthodes de sous-espaces basées sur l'analyse de Rayleigh-Ritz.

1.3.5 Les méthodes de régularisation disponibles dans Code_Aster

L'utilisation, par la méthode des éléments finis, de lois rhéologiques qui présentent un adoucissement du comportement traduisant l'endommagement d'un matériau avant fissuration, conduit à une dépendance pathologique des résultats numériques au maillage. Cette dépendance conduit à une localisation des déformations dans une bande de largeur un seul élément. Pour corriger ce phénomène, il existe des techniques dites "méthodes de régularisation". Une description plus précise de ces méthodes est proposée au chapitre 3.1 de ce rapport dans la partie bibliographique. Par conséquent, on se limite à citer, ci-dessous, les méthodes disponibles dans Code_Aster.

Le principe de ces méthodes est d'enrichir la cinématique pour décrire le comportement d'un point matériel en prenant en compte un effet de voisinage spatial au travers d'un ensemble de variables qui localisent, issu soit du champ de déformation, soit des variables internes. On trouve dans Code_Aster deux types d'approches. Le premier est fondé sur un opérateur de délocalisation qui remplace une grandeur locale dans la loi de comportement tandis que le second est basé sur les milieux continus enrichis en gradient de déformations dans la relation d'équilibre.

- Dans le cadre de l'approche fondée sur un opérateur de délocalisation on trouve le modèle à gradient de déformation introduit par Godard [79], [76] et le modèle à gradient de variables internes de Lorentz [93], Godard et Lorentz [78]. On présentera davantage ces modèles dans le cadre d'une approche bibliographique au chapitre 3.1.

- Dans le cadre des milieux continus enrichis on trouve le modèle second gradient de Chambon et al [31] dont une description est proposée au chapitre 4.1.2 et le modèle second gradient de dilatation de Fernandes et al [59] qui fait l'objet de ce travail de recherche et dont une description est proposée au chapitre 4.1.4.

1.4 le plan du mémoire

Tout d'abord, le chapitre 2 de ce mémoire a pour objet de répertorier les notations utilisées dans ce rapport. On y rappelle également les restrictions numériques qui limitent la portée de ce travail.

Dans le chapitre 3, on présente une étude bibliographique des trois thématiques principales qui font l'objet de cette thèse. Le principe de cette étude consiste à situer le contexte dans lequel s'inscrit ce projet scientifique. Dans un permier temps, on rappelle les différentes **méthodes de régularisation** qui sont aujourd'hui largement décrites dans la littérature scientifique. Pour chacune d'elles, on précise si un couplage avec l'hydraulique a déjà été fait, et dans quel cadre. Dans la seconde partie, on s'intéresse aux simulations numériques d'**excavations souterraines** qui ont fait l'objet de publications. On porte bien entendu une attention particulière à celles qui ont été réalisées en condition couplée hydro-mécanique avec régularisation. Enfin, dans une troisième et dernière partie, après avoir définit quelques notions issues de la théorie de la bifurcation, on présente les différentes techniques qui permettent d'identifier la position de points singuliers et de détecter un ensemble de **solutions bifurquées**. On parle dans ce cas de techniques de changement de branches.

Le chapitre 4 décrit la modélisation second gradient de dilatation mise au point dans le cadre de cette thèse. On y décrit la démarche scientifique qui nous a menée à sa conception en partant de la théorie des milieux à microstructure. On détaille la phase de validation numérique ainsi que la stratégie adoptée pour le choix des fonctions d'interpolations de la discrétisation éléments finis.

L'objectif du chapitre 5 est d'inclure les équations de l'hydraulique dans le problème physique à résoudre pour rendre compte du couplage hydromécanique des milieux poreux. On montre dans une première partie que le couplage avec l'hydraulique ne permet pas de rendre le problème physique bien posé et que les résultats restent dépendant de la discrétisation spatiale si aucune méthode de régularisation n'est introduite. On présente alors, dans une seconde partie, une approche de la formulation second gradient de dilatation couplée aux équations de l'hydraulique. On exhibe, dans une troisième partie, son influence sur les écoulements d'eau dans le cadre d'un problème analytique. Enfin, dans

une quatrième et dernière partie, on présente les résultats d'une simulation d'excavation souterraine en condition couplée hydromécanique prenant en compte une formulation second gradient de dilatation. On montre alors l'objectivité des résultats par rapport au maillage.

Enfin, le chapitre 6 décrit un algorithme de recherche de solutions multiples dans la direction des modes singuliers basé sur la théorie de la bifurcation. L'intérêt majeur de celui-ci est d'avoir pour but de traiter les non-linéarités dues à des comportements irréversibles de matériaux adoucissants. On montre alors, sur des essais biaxiaux homogènes et sur une simulation d'excavation en conditions drainées, que cet algorithme est un outil de calcul pour détecter plusieurs solutions mais également pour franchir des instabilités numériques liées au mauvais conditionnement des matrices tangentes de rigidité au voisinage des points singuliers ou à la présence de phénomènes tels que les snap-back.

Le dernier chapitre 7 est consacré aux conclusions générales de ce travail et présente quelques nouvelles perspectives de recherche qui font suite aux résultats présentés dans le cadre de cette thèse.

2

Notations et restrictions

On précise dans cette partie les principales restrictions de ce travail. Tout d'abord, on se place dans le cadre des problèmes quasi-statique. Les termes correspondant aux composantes d'inerties (macroscopique ou microscopique) sont par conséquent négligés. La seconde limitation de ce travail vient du fait qu'il s'inscrit dans le cadre des petites déformations. Enfin, la dernière des restrictions, la plus importante, est due à la formulation microstructurale mise en oeuvre, pour laquelle les effets de régularisation portent uniquement sur la variation volumique et, de fait, ne convient pas pour traiter les matériaux qui ne se dilatent pas durant la phase plastique.

Le principe des notations de ce document est le suivant. Les composantes d'un vecteur ou d'un tenseur sont exprimées par le nom (du vecteur ou du tenseur) suivi d'indices écrient en minuscules en position basse. Ainsi les composantes du tenseur $\mathbf{A}$ s'écrivent A_{ij}. On applique également la convention de sommation par la répétition des indices tensoriels. Tout autre indice, soit positionné en position haute, soit positionné en position basse mais écrit en majuscule a un autre sens qui est décrit dans la liste des notations suivante et est précisé dans le corps du texte. De plus, ces notations sont, pour la plupart, cohérentes avec les notations classiques utilisées dans le cadre des méthodes des éléments finis.

- n_j est la normale sortante à la frontière du domaine
- x_j sont les coordonnées exprimées dans la base cartésienne orthonormée
- u_i sont les composantes du champ de déplacements
- Dq est la dérivée normale de la variable q. $\quad Dq = \dfrac{\partial q}{\partial x_j} n_j$
- $\dfrac{Dq}{Dx_j}$ est la dérivée tangentielle de la variable q. $\quad \dfrac{Dq}{Dx_j} = \dfrac{\partial q}{\partial x_j} - n_j Dq$
- ε_{ij} sont les composantes du champ de déformations macroscopiques $\varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$
- ε_V est la déformation volumique macroscopique $\varepsilon_V = \varepsilon_{pp}$
- ε^{II} est la norme du champ de déformation macroscopique $\varepsilon^{II} = \sqrt{\varepsilon_{ij}.\varepsilon_{ij}}$
- χ_{ijk} sont les composantes des doubles gradients du champ de déplacement $\chi_{ijk} = \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k}$
- f_{ij} sont les composantes des gradients cinématiques microscopiques

- h_{ijk} sont les composantes des gradients de déformations microscopiques $h_{ijk} = \dfrac{\partial f_{ij}}{\partial x_k}$
- χ est la déformation volumique microscopique
- σ_{ij} sont les composantes du champ de contraintes macroscopiques
- s_{ij} sont les composantes du champ de contraintes macroscopiques déviatoriques
- s^{II} est la norme du champ de contraintes macroscopiques déviatoriques $s^{II} = \sqrt{s_{ij}.s_{ij}}$
- I^1 est le premier invariant du champ de contraintes macroscopique
- J^2 est le second invariant du tenseur des déformations macroscopiques déviatoriques
- κ est la contrainte de dilatation microscopique
- τ_{ij} sont les composantes du champ des contraintes microscopiques
- S_j sont les composantes du champ des doubles contraintes de dilatation microscopiques
- Σ_{ijk} sont les composantes des doubles contraintes microscopiques
- p^{lq} est la pression d'eau
- K^0 est le module de compressibilité du milieu poreux drainé
- K^s est le module de compressibilité des grains solides
- K^{lq} est le module d'incompressibilité de l'eau
- M_j^{lq} sont les composantes du flux hydraulique
- $\lambda^{H,lq}$ est la conductivité hydraulique de l'eau
- ϕ est la porosité
- k^{int} est la perméabilité intrinsèque du milieu poreux
- μ^{lq} est la viscosité dynamique de l'eau
- ρ^{lq} est la masse volumique de l'eau
- δ_{ij} est le symbole de Kronecker
- E^0 est le module d'élasticité de Young
- ν^0 est le coefficient de Poisson
- l^c est la largeur caractéristique de la bande de localisation
- φ est l'angle de frottement
- ψ est l'angle de dilatance
- b est le coefficient de Biot
- c est la cohésion du matériau intact
- γ^p est la déformation plastique cumulée $\gamma^p = \displaystyle\int_0^t \left(\dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p\right)^{\frac{1}{2}} dt$
- γ^R la valeur ultime de la déformation plastique cumulée
- K_{ij} désigne les composantes de la matrice tangente de rigidité
- ω désigne une valeur propre
- $\boldsymbol{\theta}$ désigne un vecteur propre
- t_i désigne la force de traction
- T_{ij} désigne les doubles forces de traction
- Ω est le volume représentatif du domaine considéré
- $\partial\Omega$ est la frontière du domaine Ω supposée vérifiée la condition de C1-continuitée
- (r) en exposant signifie une puissance de r, par exemple : $x \times x = x^{(2)}$
- $*$ désigne les quantités cinématiques virtuelles

3

Une approche bibliographique

3.1 Les méthodes de régularisation **17**

3.1.1 Les modèles à conservation d'énergie de fissuration 19

3.1.2 Introduction d'une dépendance en temps 20

3.1.3 Introduction d'une dépendance en espace 20

3.1.3.1 Les formulations à variables régularisées 21

3.1.3.2 Les modélisations à gradient de variables internes 26

3.1.3.3 Les milieux continus enrichis par la microstructure 27

3.1.4 Bilan des méthodes de régularisation 30

3.2 Les simulations d'excavations souterraines **33**

3.3 Les méthodes de recherche de solutions bifurquées **36**

3.3.1 Identification des points singuliers 40

3.3.1.1 Les méthodes indirectes 41

3.3.1.2 Les méthodes directes 43

3.3.2 Les techniques de changement de branches 45

3.3.2.1 Les techniques de perturbation de la prédiction du champ de déplacement 46

3.3.2.2 Les autres techniques 51

On précise en introduction de ce chapitre, quelques notions simplifiées de mécanique des milieux continus, pour illustrer un problème aux limites régi par un modèle de plasticité dans le cadre d'une formulation standard généralisée, restreint aux petites déformations. La prise en compte d'autres phénomènes comme l'endommagement, les grandes déformations ou le caractère non-associé des relations de comportement ne modifie pas fondamentalement l'expression des relations présentée ci-dessous.

La formulation d'un problème continu peut s'exprimer sous la forme d'un système d'équations comportant les relations d'équilibre et de comportement. La première découle de la théorie classique des milieux continus (macroscopiques), que Germain [73] présente

par la méthode des puissances virtuelles. On retiendra que son expression s'écrit sous forme variationnelle :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\left(u_i^*\right) dv = \int_{\partial\Omega} t_i u_i^* ds \qquad \forall u_i^* \in KA \tag{3.1}$$

où KA est l'espace des champs solutions cinématiquement admissibles vérifiant les conditions aux limites dont une partie est décrite par le chargement extérieur t_i appliqué sur une partie de la structure.

L'état du matériau est, quant à lui, caractérisé au niveau du point matériel par le champ des déformations ε_{ij} et les valeurs des variables d'état ou internes. Pour clarifier la discussion et simplifier les notations à venir, et bien entendu uniquement pour ces raisons, on réduit le champ de variables internes à la variable scalaire d'écrouissage isotrope, qu'est la déformation plastique cumulée (notée γ^p). On déduit l'évolution de cette variable d'écrouissage à partir du domaine de réversibilité qui définit la limite du domaine d'élasticité

$$f\left(\sigma_{ij}, \gamma^p\right) \leq 0 \tag{3.2}$$

où f désigne la fonction seuil qu'on appelle également surface de charge. L'expression du taux d'accroissement du champ des déformations, dites globales ou encore totales, est décomposée additivement en une partie élastique et une autre plastique

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \tag{3.3}$$

La partie élastique découle des relations classiques de l'élasticité, tandis que la partie plastique (3.4) dérive de la loi dite d'écoulement plastique pour laquelle l'hypothèse de normalité des matériaux standards généralisés est appliquée

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \tag{3.4}$$

où λ est un multiplicateur plastique gouverné par les conditions de Kuhn-Tucker appliquées à la surface de charge f

$$\begin{cases} \lambda & \geq 0 \\ f\left(\sigma_{ij}, \gamma^p\right) & \leq 0 \\ \lambda f\left(\sigma_{ij}, \gamma^p\right) & = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

dont le rôle est d'imposer, qu'en charge plastique, le champ de contraintes σ_{ij} reste sur la surface de charge. Enfin, pour déterminer pleinement le taux d'accroissement du champ des déformations plastiques $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$, il faut adopter une relation entre le multiplicateur plastique λ et la variable d'écrouissage γ^p.

Lorentz et Andrieux [94] montrent que ce problème mécanique peut être formulé, dans le cadre des matériaux standards généralisés, de façon équivalente par un problème incrémental de minimisation énergétique (3.6), après discrétisation en temps, exprimé à l'échelle de la structure.

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}\left(\mathbf{u}^{n+1}\right) = \arg\min\limits_{\mathbf{u}\in KA} E_{pot}\left(\varepsilon_{ij}\left(\mathbf{u}\right), a^{n+1}\right) \\ a^{n+1} \quad = \arg\min\limits_{a} E_{pot}\left(\varepsilon_{ij}\left(\mathbf{u}^{n+1}\right), a\right) \end{cases} \tag{3.6}$$

où l'énergie potentielle E_{pot} s'exprime comme la somme d'une énergie libre et d'un potentiel de dissipation, u_i^{n+1} est une composante du champ de déplacement à l'instant $n+1$ du problème incrémental, KA représente l'espace des champs cinématiquement admissibles et a^{n+1} une variable d'état. La relation (3.6)-(a) traduit l'équilibre tandis que la relation (3.6)-(b) est liée à la loi d'évolution des variables internes de la loi de comportement.

3.1 Les méthodes de régularisation

Les milieux continus classique reproduisent le comportement mécanique d'un matériau réel à l'échelle macroscopique. Mais, dans le cas de matériaux fragiles tels que les géomatériaux, il ne permettent pas de suivre l'initiation et l'évolution des bandes de localisation, qui sont le lieu d'une accumulation de déformations plastiques irréversibles dues à des phénomènes de mouvements intergranulaires à l'échelle microscopique. Dans le régime post-localisation, c'est le comportement du matériau à l'intérieur de la bande de localisation qui va gouverner la réponse de la structure. Il est donc essentiel de prendre en compte correctement les phénomènes micromécaniques pour prédire de façon précise les zones endommagées dans un calcul de structures.

Pour cela, il faut considérer des lois rhéologiques adoucissantes caractéristiques du comportement endommageant du matériau. Mais, il est largement connu aujourd'hui, que les équations mathématiques qui décrivent de telles lois conduisent à un problème aux limites mal posé (voir entre autres Lorentz [93]). En statique, le problème d'équilibre est caractérisé par une perte d'ellipticité de l'opérateur tangent conduisant à l'exitence d'une infinité de solutions.

Du point de vue numérique, il est indispensable de corriger le comportement non physique des solutions générées par les modélisations classiques, dites "locales", et pour lesquelles les interactions entre points matériels voisins sont minimes. Pour pallier ces défauts il est nécessaire d'introduire des modèles enrichis qui intègrent une longueur interne qui caractérise l'épaisseur de la bande de localisation dont l'existence et les caractéristiques géométriques et phénoménologiques ont été mises en évidence pour les géomatériaux grâce aux travaux de Vardoulakis et al [138], Vardoulakis [139], Aifantis [3], Bazant et al [13], Vardoulakis et Graf [140], Han et Vardoulakis [80], Vardoulakis et Sulem [141] ou encore Mokni et Desrues [105].

Plusieurs théories ont été développées pour traiter ces problèmes inhérents au caractère fragile du matériau. On peut distinguer différentes approches, certaines d'ordre numérique, d'autres plus physique notamment par la prise en compte d'une échelle microstructurale dans les équations macroscopiques et d'autres enfin par des justifications d'ordre mathématique. Toutes ces techniques ont pour objet l'introduction d'une longueur interne caractéristique de l'échelle microstructurale. Elles permettent ainsi de prendre en

compte un effet de voisinage pour corriger la dépendance numérique de la solution à la discrétisation spatiale. La description de l'ensemble de ces différentes méthodes est proposée ci-dessous dans le cadre d'une approche bibliographique. Chacune d'entre elles ayant une spécificité propre, c'est en général à l'ingénieur de choisir quelle méthode est la plus appropriée pour répondre à ses besoins en fonction des ressources informatiques dont il dispose. On présentera ainsi :

- les modèles à conservation d'énergie de fissuration dont le principe est d'assurer que l'énergie dissipée lors de la fissuration du matériau reste constante quelle que soit la finesse du maillage;

- les modèles visqueux qui introduisent une longueur caractéristique au travers d'un gradient temporel;

- les formulations à variables régularisées, portant sur les gradients des variables nodales, pour lesquelles la régularisation est introduite par une moyennation spatiale exprimée soit sous forme intégrale soit par des termes en gradients d'espace d'ordre supérieur;

- les formulations à gradient de variables internes pour lesquelles les gradients des variables qui localisent sont introduis directement dans l'expression de l'énergie de la structure;

- les milieux à microstucture, pour lesquels la cinématique est enrichie par des termes en gradients de déformations qui introduisent, par dualité, des variables statiques conjuguées de type doubles contraintes.

A noter que, bien que les formulations à variables régularisées, à gradient de variables internes et les milieux à microstucture sont axés sur des principes différents, puisque les deux premières formulations prennent en compte une cinétique enrichie au travers des relations de comportement tandis que les milieux à microstucture considèrent une cinématique enrichie sur les relations d'équilibre, le résultat final est identique puisqu'il consiste à introduire une longueur caractéristique par l'intermédiaire d'un gradient spatial.

D'autres techniques alternatives sont couramment utilisées pour supprimer la dépendance des résultats numériques au maillage. Leur principe consiste à intégrer une cinématique discontinue dans la discrétisation éléments finis. On peut citer :

- les éléments d'interface, également connus sous l'appellation de modèles cohésifs de fissuration, qui relient une force d'interaction cohésive au saut de déplacement généré par l'écartement des lèvres d'une fissure au travers d'une nouvelle relation de comportement matériau. Cette force suppose l'existence d'une zone de transition à l'intérieure de laquelle la séparation des surfaces est progressive (voir les travaux de Laverne [90] pour une description plus détaillée). Du point de vue numérique, il s'agit de nouveaux éléments finis d'épaisseur nulle qui discrétisent uniquement la surface de discontinuité. Le saut de déplacement en un point d'un tel élément est interpolé à l'aide des fonctions de formes usuelles. La contribution énergétique des forces cohésives est introduite

dans l'expression des forces nodales intérieures. Dans ce cas, le trajet de fissuration est supposé connu;

- les éléments à surface de dicontinuité interne dont le principe est de permettre l'apparition d'une discontinuité des champs de déplacements et/ou de déformations à l'intérieur même d'un élément fini. Pour cela, la cinématique est enrichie par combinaison d'un champ de déplacements réguliers et d'un saut de déplacement (en général) constant par élément. L'intérêt de cette stratégie vient du fait que les degrés de liberté introduits pour représenter le saut des déplacements sont éliminés localement par condensation statique et par conséquent le système global à résoudre est équivalent au problème local classique. En revanche, les fonctions d'interpolations ne sont plus des fonctions de formes usuelles et ne vérifient pas entre autres le critère de C0-continuité d'un élément à un autre. On parle d'éléments finis non compatibles. De plus, cette approche ne cherche pas à décrire finement le comportement à l'intérieur des bandes de localisation mais plutôt à représenter leurs effets à l'échelle de la structure. C'est la raison principale pour laquelle elle ne nécessite pas une définition fine du maillage. Une classification de ces éléments est par ailleurs proposée par Jirásek [87].

Mais les approches par discontinuité n'intègrent plus de notions microstructurales et la phénoménologie n'est pas représentée à l'intérieur des bandes de localisation. Or, c'est précisément cet aspect qui nous semble essentiel à maîtriser pour rendre compte des effets hydrauliques dans les bandes de localisation. C'est pourquoi l'utilisation de ces modèles ne nous semble pas opportune dans le cadre de nos travaux.

3.1.1 Les modèles à conservation d'énergie de fissuration

Une des premières solutions apportées pour répondre au besoin d'indépendance des résultats par rapport à la discrétisation spatiale pour les lois mécaniques adoucissantes est le modèle "de bande de fissure" proposé par Bazant [11], [12] pour les comportements en traction (voir Pietruszczak et Mroz [115] pour le cisaillement). L'idée de la méthode est d'assurer que l'énergie dissipée lors de la fissuration du matériau reste constante quelle que soit la finesse de l'élément fini. Il en résulte alors que pour bien faire, il est nécessaire de faire dépendre la pente post-pic de la relation contraintes-déformations (et donc d'ajuster les paramètres matériaux) en fonction de la taille caractéristique de chaque élément fini considéré.

Cette approche est séduisante par sa simplicité de mise en oeuvre. Mais, la taille des éléments est conditionnée par des considérations numériques. Tout d'abord la bande de fissure doit impérativement être incluse dans l'épaisseur d'un seul élément ce qui implique une taille de maille minimale. Ensuite, comme le montre Bazant et Oh [12], les paramètres matériaux permettent d'identifier une taille de maille maximale au-dessus de laquelle la conservation d'énergie de fissuration ne pourra pas être assurée. De plus, il est connu que cette technique ne corrige pas l'influence de l'orientation des éléments du maillage.

3.1.2 Introduction d'une dépendance en temps

Partant du principe que la réponse non-physique au problème local réside dans le caractère mal posé des équations d'équilibre, Needleman [107] propose d'introduire dans le comportement matériau un terme de viscosité. La localisation des déformations en bande de cisaillement est alors interprétée comme un phénomène quasi-statique visqueux. L'introduction d'un effet de vitesse par l'ajout d'un terme visqueux permet de préserver l'hyperbolicité des équations, rendant ainsi le problème bien posé. La longueur interne est prise en compte par des considérations purement mathématiques. De Borst et al [23] montrent d'ailleurs que, dans le cadre particulier des problèmes dynamiques, cette formulation est celle qui souffre le moins d'une sévère dépendance des résultats au maillage.

Mais d'un point de vue quasi-statique le terme visqueux ne permet pas de prendre en compte un couplage entre les points matériels voisins et par conséquent n'introduit pas de longueur interne permettant de contrôler la largeur de la bande de localisation. En fait, c'est un temps caractéristique qui est introduit dont le seul effet est de déplacer les difficultés numériques dans le temps. Notion de temps qui, à présent, a une interprétation physique dont on maîtrise mal la signification.

Basée sur une technique purement numérique, cette méthode ne permet pas de rendre les résultats indépendants de la discrétisation spatiale comme le montrent Forest et Lorentz [62] dans le cadre d'une simulation de plaque trouée. Ce constat est confirmé par les travaux de Sluys [132] dans le cadre des chargements statiques.

De façon analogue, certains auteurs précisent que dans le cadre d'études mécaniques couplées avec des équations de type diffusion - c'est le cas pour les simulations couplées avec l'hydraulique - la régularisation est introduite naturellement par les termes en gradient du temps. Dans le cadre d'un essai biaxial saturé en eau par une approche dynamique, Schrefler et al [124] précisent qu'en effet les résultats ne sont pas aussi dramatiques que dans le cas purement mécanique. Mais Liu et al [91] ajoutent que l'effet régularisant introduit par les termes en gradient des équations de l'hydraulique - de la loi de Darcy - dépend fortement du paramètre de perméabilité. Ils insistent sur le fait que la dépendance des résultats au maillage est directement liée à l'amplitude du couplage entre solide et fluide. Dans le cinquième chapitre on montre dans le cas d'une simulation d'excavation souterraine en condition couplée que les résultats sont bien fortement dépendant de la discrétisation spatiale.

3.1.3 Introduction d'une dépendance en espace

Il est important de noter que les formulations à variables régularisées et à gradient de variables internes considèrent que l'équation d'équilibre du système reste inchangée et par conséquent n'impliquent que le champ des contraintes de Cauchy habituelles. Elles préservent donc la signification physique classique de ce champ. A contrario, des termes de contraintes d'ordre supérieur apparaissent dans les modélisations à microstructrure. Cela aura notamment pour effet d'influencer, dans ce dernier cas, le calcul dès la phase

élastique. Ce qui n'est pas le cas des formulations précédentes.

Une particularité importante qui concerne l'ensemble de ces modèles vient du fait que de nouvelles conditions aux limites doivent être prises en compte. Il faut donc s'attendre à ce que ces conditions aient une influence sur le calcul et particulièrement lorsqu'une fissure atteint le bord de la structure. Dans ce cas, une technique consiste à mailler la structure au-delà de ses dimensions réelles comme le proposent entre autres Bourdin et al [24]. On présente dans le cadre de la description du modèle second gradient à micro-dilatation, au chapitre 4.1.4, l'impact de ces nouvelles conditions dans l'expression du modèle.

Pour classer l'ensemble de ces formulations, Lorentz et Andrieux [95] présentent une analyse basée sur le problème de minimisation énergétique (3.6) dans le cadre des matériaux standards généralisés. Cette classification prend en compte une régularisation soit du champ de déformation, soit d'un ensemble de variables d'état. Les auteurs distinguent trois types de méthodologie :

- La première comprend une régularisation dite couplée pour laquelle les variables non-locales (soit de déformation, soit de type variable d'état) sont introduites à la fois dans les problèmes de minimisation de l'énergie potentielle par rapport au champ de déformations et par rapport aux variables internes. Les auteurs montrent que ce type de méthode a bien un effet régularisant si l'opérateur de délocalisation est non-coercif. Cette condition est impérative pour garantir l'existence d'une solution.

- La deuxième, dite méthode de régularisation découplée, introduit les variables non-locales (soit de déformation, soit de type variable d'état) dans le problème de minimisation de la variable non régularisée (respectivement soit (3.6)-b, soit (3.6)-a). Cette méthode a l'avantage d'assurer l'existence de solutions mais elle ne permet pas, en revanche, de faire apparaître une dissipation d'énergie dont on saurait démontrer qu'elle est toujours positive.

- La dernière méthode prévoit une régularisation dite séparée puisque dans ce cas, la variable non-locale (toujours de type variable d'état) est introduite uniquement dans la formulation de l'énergie libre des problèmes de minimisation (3.6)-a et (3.6)-b. On retrouve alors dans cette catégorie les mêmes inconvénients que ceux décrits dans la méthode dite de régularisation couplée.

3.1.3.1 Les formulations à variables régularisées

Dans ce type d'approche, le principe est de décrire le comportement d'un point matériel en prenant en compte un effet de voisinage spatial à travers un ensemble de variables qui localisent - soit issu du champ de déformation, soit des variables internes. Pour cela, la grandeur locale est remplacée par un opérateur de délocalisation soit dans la loi de comportement, soit dans la loi d'évolution des variables internes, soit dans l'énergie potentielle elle-même. Cet opérateur peut être exprimé soit sous forme intégrale, soit à travers des

gradients d'ordre supérieur.

3.1.3.1.1 Les modélisations intégrales

Ce concept a été introduit par Pijaudier-Cabot et Bazant [116] pour traiter les problèmes de localisation associés aux lois de comportement adoucissantes de type endommagement. Si on considère que $g(x)$ est une variable locale d'un domaine Ω - par exemple la déformation plastique cumulée ou la variable d'endommagement -, sa moyenne non-locale est définie par

$$G(x) = \int_{\Omega} \alpha_V(x,\xi) g(\xi) d\xi \tag{3.7}$$

où $\alpha_V(x,\xi)$ est une fonction poids. Celle-ci est en fait une fonction de pondération qui dépend de la distance entre le point x et son voisinage ξ inscrit dans le volume d'influence V. Parmi les nombreuses publications qui gravitent autour de ces modèles, cette fonction est souvent décrite par une distribution gaussienne qui intègre une longueur intrinsèque qui caractérise l'échelle de la microstructure. Bazant et Jirasek [14] en proposent une description exhaustive dans un article qui résume une large bibliographie dérivant de ce type de modélisation. La variable à régulariser est en général choisie de façon plutôt arbitraire.

Une faiblesse de ces modélisations intégrales concerne l'interaction entre des points matériels qui se trouvent de part et d'autre d'une fissure. Comme le soulignent Peerlings et al [114] au travers de la figure 3.1, les déformations calculées au point y qui se trouve de l'autre côté de la fissure ont exactement le même impact sur le calcul non-local des déformations au point x que les déformations calculées en y' alors que ce point se trouve du même côté de la fissure. Les mêmes défauts se produiraient pour une structure ayant une interface entre deux matériaux sans pour autant qu'il y ait une réelle interaction physique entre eux. Pour corriger cette phénoménologie, il est possible de prendre en compte, dès la définition des fonctions de pondération, un effet dû à la présence d'éléments frontières. Mais cette correction complexifie l'intégration informatique, notamment si la structure considérée a des formes complexes. De plus, Lorentz [93] souligne que si ce type de correction est envisageable pour prendre en compte des frontières existantes sur des structures initiales, il paraît illusoire de vouloir s'en assurer au cours de l'histoire du chargement et par conséquent lors de l'évolution de la fissure.

Du point de vue numérique, le couplage entre les éléments finis au niveau des points d'intégrations a pour effet d'agrandir considérablement la largeur de bande de la matrice tangente, et par conséquent, d'augmenter les temps de résolution nécessaire à son inversion.

A noter que Majorana et al [99] présentent une formulation couplée thermo-hydro-mécanique avec une formulation non-locale intégrale dans le cas d'une structure composée d'un matériau endommageable de type béton.

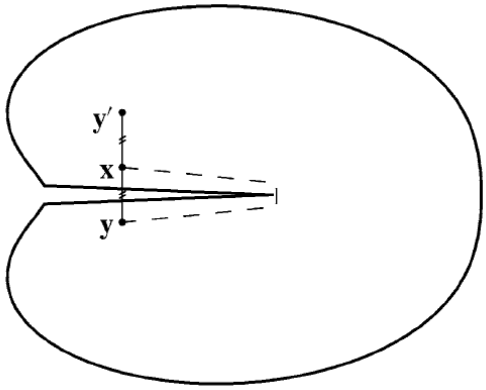


Fig. 3.1. Modélisation non-locale sous forme intégrale : Interaction entre points matériels au travers d'une fissure. Figure extraite de Peerlings et al [114].

3.1.3.1.2 Les modèles à gradient de déformations

A l'origine de ces modèles, on trouve les travaux de Aifantis [3] qui suggèra d'étendre la théorie de la plasticité en introduisant dans la fonction seuil (3.2) le laplacien de la variable d'écrouissage. En fait, on peut montrer que ce type d'approche dérive des modèles intégraux précédents. Pour cela, il suffit de considérer un développement en série de Taylor du champ local, noté $g(x)$, dans l'expression de la relation (3.7). Le terme régularisé $G(x)$, précédemment écrit sous forme intégrale, s'exprime alors par une équation différentielle.

Pour illustrer cette démarche on peut se reporter aux travaux de Peerlings et al [112] qui, prenant en compte une distribution gaussienne sous l'hypothèse d'isotropie pour décrire la fonction de pondération $\alpha_V(x,\xi)$, montrent que le principe des modèles à gradient revenait à résoudre l'équation différentielle

$$G\left(x\right) = g\left(x\right) + c\nabla^2 g\left(x\right) + d\nabla^4 g\left(x\right) + \cdots \tag{3.8}$$

où les paramètres c, d, $\ldots \geq 0$ se déduisent de la fonction poids $\alpha_V(x,\xi)$ et introduisent naturellement des dimensions homogènes à des longueurs (en puissances carrées) caractérisant la taille du voisinage autour du point matériel ayant une influence dans la régularisation. En considérant alors une troncature de la série de Taylor on introduit la notion de régularisation explicite - puisque exprimée directement en fonction de variables locales $g\left(x\right)$ - par une approche à gradients, par exemple du second ordre dans (3.9).

$$G\left(x\right) = g\left(x\right) + c\nabla^2 g\left(x\right) \tag{3.9}$$

La variable régularisée peut alors être introduite soit dans la loi d'évolution des variables d'état, soit directement dans l'expression de la fonction seuil f de la relation (3.2). Mais on peut déduire de la classification des formulations non-locales proposée par Lorentz et Andrieux [95] (classification brièvement décrite au chapitre 3.1.3 et qui pour rappel porte sur les matériaux standards généralisés) que le second choix, celui qui consiste à introduire la variable régularisée dans l'expression de la fonction seuil, n'est pas judicieux dans le sens où il ne permet pas de préserver l'existence d'une solution régulière d'un problème (local)

bien posé. Pour cela, les auteurs précisent qu'il est nécessaire de conserver la déformation locale dans la relation entre contraintes et déformations.

Pour illustrer ce phénomène on peut se reporter à la simulation numérique décrite par Chang et al [36]. Considérant un modèle à gradient du second ordre liant les contraintes de Cauchy au champ de déformations régularisées, ils observent sur l'exemple d'une barre élastique en traction ayant deux rigidités différentes, un champ de déformation non physique le long de la barre avec un profil oscillant. On peut interpréter ce résultat unidimensionnel par une approche analytique. On exprime ainsi le comportement élastique du matériau à partir d'une formulation à gradient de déformation du second ordre (expression déduite à partir de la relation (3.9))

$$\sigma(x) = E^0 \left(\varepsilon(x) + c \frac{\partial^2 \varepsilon(x)}{\partial x^2} \right) \tag{3.10}$$

où $\sigma(x)$ et $\varepsilon(x)$ désignent respectivement la contrainte et la déformation locale et E^0 le module de Young. En supposant l'absence de forces externes de volume, l'équation d'équilibre statique s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \tag{3.11}$$

On en déduit l'expression analytique de la déformation sous la forme :

$$\varepsilon(x) = A_1 + A_2 \cos \frac{x}{\sqrt{c}} + A_3 \sin \frac{x}{\sqrt{c}} \tag{3.12}$$

où les constantes A_1, A_2 et A_3 se déduisent des conditions aux limites. Ainsi, la moindre perturbation - par exemple la variation de la rigidité du matériau dans l'exemple de la barre en traction cité ci-dessus - conduit à une solution oscillante à cause de la présence des relations périodiques sinusoïdales de (3.12).

De plus, Peerlings et al [113] soulignent que le caractère non-local des modèles à gradient par une formulation explicite (ajout de l'équation différentielle (3.8) dans le système à résoudre) n'est assuré que sous condition de conserver la série de Taylor dans son intégralité. L'aspect inévitable de la troncature de la série est, par voie de conséquence, de rendre la formulation faiblement régularisante. L'interaction spatiale n'agit alors qu'à une distance infinitésimale du point matériel.

Enfin, Askes et al [6] et Askes et Sluys [7] montrent qu'enrichir la troncature de la série de Taylor par l'ajout de termes en gradients du quatrième ordre modifie de façon significative le comportement de la structure par rapport à la formulation du second ordre (3.9), que les résultats ne sont pas objectifs par rapport à la discrétisation spatiale et que les instabilités numériques sont très importantes.

Peerlings et al [112] considérent alors une approche par une formulation implicite des modèles à gradients. Pour obtenir une expression implicite du second ordre (par exemple), il suffit de dériver deux fois la relation (3.8) puis de la substituer dans (3.9).

$$G(x) - c\nabla^2 G(x) = g(x) \tag{3.13}$$

où le champ régularisé $G(x)$ devient, à présent, la solution d'une équation aux dérivées partielles. Dans ce cas, Peerlings et al [113] montrent que cette formulation a bien un caractère non-local qui la rend fortement régularisante. Ils montrent, ainsi, que (3.13) est équivalente à une formulation intégrale, de type (3.7), pour laquelle la fonction poids est une fonction de Green.

Du point de vue mathématique, la résolution de l'équation différentielle (3.13) nécessite la prise en compte de conditions aux limites portant soit sur les variables régularisées G, soit sur les dérivées normales de ces variables $\dfrac{\partial G}{\partial n_j}$ (où n_j désignent les composantes des normales sortantes aux frontières du domaine). Comme le soulignent Peerlings et al [112], il n'existe pas d'interprétation physique associée à ces conditions aux limites (celles-ci relevant des lois de comportement et non des relations d'équilibre).

En comparant les solutions obtenues dans le cas d'un test unidimensionnel d'une barre endommageable soumise à une traction par une approche non-locale de type intégrale (qui sera la solution de référence) et de type gradients implicite du second et du quatrième ordre, Askes et Sluys [7] montrent que les résultats convergent bien, dans tous les cas, vers la solution de référence. Ils concluent alors que pour les modèles à gradients, une formulation implicite du second ordre est le choix optimal pour un compromis entre qualité des résultats et performances en temps de calcul.

En résumé, du point de vue numérique, le principe des modèles à gradients consiste à utiliser les composantes du champ des déformations régularisées (par une formulation implicite) dans la loi d'évolution des variables internes. Un des intérêts majeur de ces modèles est donc de ne pas dépendre de l'intégration numérique des lois de comportement. Pour résoudre l'équation différentielle (3.13), Peerlings et al [112] emploie l'opérateur par moindres carrés avec pénalisation du gradient suivant

$$G(x) = \underset{G(x)}{\arg\min} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \left(G(x) - g(x) \right)^{(2)} + \frac{1}{2} c \left(\nabla G(x) \right)^{(2)} \right) \tag{3.14}$$

Le problème de la minimisation de cette intégrale trouve alors son intérêt dans le cadre d'une approche par la méthode des éléments finis, puisque cela revient à introduire de nouveaux degrés de libertés pour représenter les variables régularisées G. Un des inconvénients de cette stratégie vient du fait qu'à présent la matrice tangente n'est plus symétrique.

A titre d'illustration pour ces modèles, on peut citer les travaux de Peerlings et al [112] ou encore ceux de Godard [76]. Pour les premiers la régularisation porte sur une variable scalaire, la déformation équivalente de von Mises (définie par la relation (3.15)) calculée à partir du champ des déformations totales.

$$\varepsilon^{eq}(x) = \frac{1}{1+\nu^0} \sqrt{-3J^2(x)} \tag{3.15}$$

où ν^0 est le coefficient de Poisson, et J^2 est le second invariant du tenseur des déformations déviatoriques

$$J^2(x) = \frac{1}{6}\varepsilon_V^{(2)} - \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{3.16}$$

Dans ce cas c'est donc la variable $\varepsilon^{eq}(x)$ qui joue le rôle de $g(x)$ dans l'opérateur de régularisation (3.14).

Pour la version non-locale adoptée par Godard [76], la régularisation est portée par l'ensemble des composantes du tenseur des déformations totales. L'objectif dans ce cas étant d'offrir une plus grande souplesse de la formulation à gradients de déformations par rapport aux lois de comportement traitées.

Mais dans ce type d'approche, la bande de localisation représentant l'endommagement de la structure est amenée à s'élargir de façon inacceptable comme le montrent Geers et al [70] puis Simone et al [129], Godard [76] ou encore Simone [130]. Ceci se traduit par une évolution de l'endommagement dans la partie saine du matériau. Geers et al [70] considèrent que ce phénomène est dû au paramètre constant caractérisant la longueur interne (le coefficient c de la relation (3.13)) qui donne un effet permanent à la régularisation. Ils proposent alors de faire évoluer ce paramètre pour que la déformation régularisée reste constante à partir d'une certaine déformation critique. Mais cette démarche reste fortement dépendante du choix de la variable régularisée. Godard [76] propose une technique plus générale dont le principe est de relaxer l'opérateur de régularisation. Mais cette solution peut détériorer la convergence numérique des calculs.

De plus, Lorentz et Andrieux [95] montrent que ce type d'approche, qui s'inscrit dans la catégorie des méthodes découplées de la classification qu'ils proposent et qui est brièvement décrite en partie 3.1.3, ne permet pas de garantir le second principe de la thermodynamique. Autrement dit la dissipation d'énergie peut ne pas être positive. Acharya et Shawki [2] apportent un complément d'analyse thermodynamique, dans le cadre de la plasticité, en précisant qu'il est nécessaire que le champ des contraintes soit lui-aussi enrichi par le principe de dualité entre champs cinématique et statique.

Du point de vue de l'intégration numérique, si la régularisation porte sur le champ de déformation, il faut soit introduire des éléments C1-continus, soit utiliser une formulation mixte comme le propose Godard [76], qui, moyennant l'introduction de quelques degrés de liberté supplémentaires, a l'avantage de ne nécessiter que des conditions de C0-continuité moins coûteuses en temps de calcul.

3.1.3.2 Les modélisations à gradient de variables internes

Le principe de ces modèles est d'introduire dans l'énergie de la structure un terme supplémentaire qui dépend du gradient d'une variable qui localise. La minimisation de l'énergie de la structure va ensuite empêcher le terme en gradient de croître trop fortement. Lorentz [93] propose dans ce cadre une modélisation à gradient d'endommagement. Il montre que la positivité de la dissipation d'énergie est garantie sur le plan physique à l'échelle de toute la structure. Lorentz et Benallal [97] proposent un premier algorithme de résolution de cette modélisation en applicant un algorithme de type Uzawa. Mais celui-ci

est difficile à intégrer dans un code de calcul élément fini pré-existant. Lorentz [98] propose alors un second algorithme plus rapide en temps de calcul et qui a un impact moins important dans un code de calcul.

Mais Lorentz [98] montre qu'avec cette approche, il n'est pas possible d'imposer une évolution continue de l'endommagement en chaque point d'intégration malgré un raffinement des pas d'incréments du chargement, ce qui traduit la présence d'instabilités numériques. Ce point est toujours en phase d'amélioration. Il montre également que la bande des points totalement endommagés tend vers une fissure d'épaisseur un élément dont l'orientation n'est pas tributaire du maillage et dont la propagation dissipe une quantité d'énergie finie - cette phénoménologie étant propice pour décrire une transition de l'endommagement vers une fissure macroscopique. Du point de vue de l'intégration numérique, comme les termes en gradients portent sur les variables internes il suffit d'introduire les nouveaux degrés de liberté correspondant à la variable régularisée.

3.1.3.3 Les milieux continus enrichis par la microstructure

La dernière catégorie des modèles introduisant un effet de voisinage par une dépendance en espace s'inscrit dans le cadre d'une extension des milieux continus généralisés pour prendre en compte les caractéristiques de la microstructure des matériaux. On parle des milieux continus à microstructure, ou encore de milieux d'ordre supérieur, dont les fondements ont été introduits par Toupin [134] et Mindlin [103], puis généralisés par Germain [73] dans le cadre d'une approche par la méthode des puissances virtuelles. Le principe de ces milieux est lié à l'enrichissement de la cinématique par l'ajout de degrés de liberté indépendants du champ des déplacements u_i caractérisant les milieux de Cauchy, dits macroscopiques. La formulation thermomécanique des problèmes aux limites associés à ces milieux est solidement établie. Voir notamment les travaux de Chambon et al [29] dans le cadre de la plasticité et ceux de Chambon et al [34] pour une approche en grandes déformations.

Les milieux micromorphiques prennent ainsi en compte, en chaque point de la structure, un tenseur du second ordre définit comme étant le gradient cinématique microscopique. Il est non-symétrique et représente les effets microscopiques des champs de rotations et de déformations. On présente succintement, ci-dessous, les caractéristiques principales de ces milieux. Mais la complexité de ces derniers a conduit de nombreux scientifiques à restreindre la portée générale de cette approche, en vue d'une exploitation informatique. Ces restrictions ont été d'ordre numérique ou/et théorique. Forest et Sievert [63] en présentent une vue d'ensemble triée par une hiérarchisation en fonction du nombre de degrés de liberté introduit dans la description du champ cinématique.

L'inconvénient de ces milieux vient des équations de conservation qui se trouvent modifiées. Il faut donc prendre garde à l'interprétation mécanique des efforts intérieurs en tenant compte des champs de contraintes d'ordres supérieurs.

En guise d'introduction on présente en table 3.1 la liste de ces différentes approches, s'inscrivant dans le cadre de ces milieux, en établissant les relations qui les lient entre elles. On se limite ci-dessous à une description dans le cadre des petites déformations. Pour rappel, les milieux micromorphiques prennent en compte, en chaque point de la structure, un tenseur du second ordre de composantes f_{ij}, définit comme étant le gradient cinématique microscopique. Son rôle est de décrire les transformations mécaniques à l'échelle de la microstructure. Il se décompose ainsi en un champ anti-symétrique de micro-rotation r_{ij} et en un champ symétrique de micro-déformation pure d_{ij}.

$$r_{ij} = \frac{1}{2}\left(f_{ij} - f_{ji}\right) \tag{3.17}$$

$$d_{ij} = \frac{1}{2}\left(f_{ij} + f_{ji}\right) \tag{3.18}$$

Cette micro-déformation peut, elle-même être décomposée en une partie hydrostatique χ et une partie déviatorique d_{ij}^{dev}.

$$d_{ij} = \chi\delta_{ij} + d_{ij}^{\mathrm{dev}} \tag{3.19}$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker.

Nom du milieu	Nombre de ddls supplémentaires	décomposition des micro-transformations f_{ij}		
		micro-rotations	micro-deformations pure d_{ij}	
		r_{ij}	hydrostatique χ	déviatorique d_{ij}^{dev}
Microdilatation	1	non	oui	non
Micropolaire	3	oui	non	non
Microstretch	4	oui	oui	non
Microstrain	6	non	oui	oui
Micromorphique	9	oui	oui	oui

Table 3.1. Hiérarchisation des milieux à microstructure en fonction du nombre de degrés de liberté ajouté.

L'évolution des milieux micromorphiques est caractérisée par le champ de déplacement habituel u_i des milieux continus de Cauchy et le tenseur du second ordre f_{ij} dont on rappelle que le rôle est de modéliser à la fois les déformations et les rotations microscopiques. Chaque point matériel est alors décrit par 12 degrés de liberté. A partir de cette nouvelle cinématique on définit le tenseur des déformations généralisées qui englobe les déformations macroscopiques ε_{ij}, les déformations relatives ε_{ij}^{rel} et les gradients de déformations microscopiques h_{ijk}.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.20}$$

$$\varepsilon_{ij}^{rel} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - f_{ij}\right) \tag{3.21}$$

$$h_{ijk} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} \tag{3.22}$$

On associe par dualisation, à ce tenseur de déformations, le tenseur des contraintes généralisées qui se décompose respectivement en contraintes macroscopiques σ_{ij}, contraintes microscopiques τ_{ij} et doubles contraintes Σ_{ijk}. En l'absence de forces volumiques ces contraintes vérifient les équations de conservation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\left(\sigma_{ij} - \tau_{ij}\right)}{\partial x_j} = 0 \\ \dfrac{\partial \Sigma_{ijk}}{\partial x_k} - \tau_{ij} = 0 \end{cases} \tag{3.23}$$

On trouve de nombreuses références bibliographiques faisant usage de telles modélisations pour des applications par la méthode des éléments finis. Mais, la complexité de son expression mathématique et des besoins informatiques qu'elle suscite fait que les scientifiques ont souvent cherchés à la simplifier. Citons, entre autres, le modèle second gradient proposé par Chambon et al [31] pour lequel, sur des considérations expérimentales dans le cas particulier des géomatériaux, les déformations macroscopiques et microscopiques sont supposées égales. Ils suppriment ainsi dans la description mathématique des efforts intérieurs toute notion issue des déformations relatives. A noter, qu'une extension de cette approche a été formulée par Collin et al [41] pour modéliser le comportement poreux des sols dans un milieu saturé en eau.

Mais les discrétisations numériques restent tout de même honéreuses en terme de degrés de liberté. Pour en diminuer le nombre, on trouve des approches microstructurales "simplifiées" dont la portée théorique est moins générale que celle des milieux micromorphes. On décrit, brièvement, ci-dessous les principes sur lesquels sont basés ces simplifications.

On trouve, tout d'abord, les milieux à déformations microscopiques pures (de l'anglais microstrain) décrits par Forest et Sievert, pour lesquels la partie rotation du tenseur f_{ij} est supposée ne jouer aucun rôle dans le comportement matériau. La relation (3.17) se réduit alors à $r_{ij} = 0$. Chaque point de la structure est alors décrit par 9 degrés de liberté. Mais, comme cette modélisation est très récente, il n'existe pas encore, à notre connaissance, de références bibliographiques l'utilisant dans le cadre d'applications numériques.

Puis, les milieux introduit par Eringen [54] (connus selon la terminologie anglaise sous le nom de microstretch), pour lesquels ce sont les rotations r_{ij} et la partie hydrostatique χ des micro-déformations qui jouent un rôle important, tandis que la partie déviatorique d_{ij}^{dev} n'a que peu d'influence. Les points de la structure ne sont plus, alors, que décrit par 7 degrés de liberté. Cette théorie est utilisée pour traiter des matériaux composites, mais

également en milieux poreux.

Mais c'est sans conteste les milieux micro-polaires, plus connus sous le nom de milieux de Cosserat, qui sont les plus couramment utilisés. Leur domaine d'application est des plus variés. On les utilise aussi bien pour décrire les effets d'échelle dans le comportement des matériaux polycristallins (Forest et al [61]) que dans le cadre de modélisations en biomécanique (Rosenberg et Cimrman [122]). Muhlhaus et Vardoulakis [106] ont été les premiers à les prendre en compte pour décrire le comportement des géomateriaux, puis Papanastasiou et Vardoulakis [111] l'ont utilisé pour simuler, par la méthode des éléments finis, une excavation souterraine en conditions drainées. Les milieux micro-polaires sont fondés sur le principe que les micro-déformations pures sont négligeables. Par conséquent, $d_{ij} = 0$ et $f_{ij} = r_{ij}$. Les points matériels sont alors décrits par 6 degrés de liberté. Ehlers et Volk [52] ont utilisé cette approche dans le cadre des milieux poreux saturés et partiellement saturés en eau.

Enfin, on trouve les milieux micro-dilatation, pour lesquels, c'est la variation volumique, associée à la partie hydrostatique χ du champ des déformations microscopiques, qui joue un rôle essentiel. Les points de la structure sont décrit par 4 degrés de liberté. C'est à partir de cette approche que nous orientons notre réflexion au chapitre 4.

3.1.4 Bilan des méthodes de régularisation

En conclusion, on apporte une évaluation qualitative des différentes méthodes décrites dans ce chapitre bibliographique, que l'on résume en table 3.2. Ce bilan est bien entendu un avis personnel, le plus souvent fondé au travers de différentes lectures.

L'évaluation ainsi proposée s'articule autour des quatre thématiques qui s'inscrivent dans le cadre du projet scientifique de cette thèse décrit au chapitre 1.2. Ces thématiques sont les suivantes :

- l'indépendance effective par rapport au maillage, pour laquelle on utilise la convention ++ pour désigner les stratégies efficaces permettant d'assurer des solutions numériques objectives, bien entendu sous condition que la variable régularisée soit pertinente pour le problème mécanique considéré. La convention − est utilisée pour désigner des méthodes qui ne régularisent pas;

- la simplicité de l'intégration informatique dans un code de calcul. Bien entendu, il s'agit d'une appréciation relative, consistant plutôt à évaluer la complexité du développement informatique d'une méthode par rapport à une autre en tenant compte, notamment, de l'impact dans les sources existants et/ou éventuellement à venir. C'est pour cela que la convention ++ a été utilisé pour distinguer des méthodes dont l'impact informatique est très simple, malgré le fait qu'il soit dépendant des lois de comportement. Développements tellement simples qui par ailleurs ne permettent pas d'obtenir une réelle régularisation. Les développements informatiques nécessaire pour la mise en oeuvre des autres modélisations sont tous, globalement, du même ordre de complexité. On distingue alors ces modélisations suivant la convention + pour désigner celles pour

Modélisations		Indépendance par rapport au maillage	Facilité de l'intégration numérique	Coût de calcul	Possibilité de couplage hydraulique
Conservation d'énergie		−	++	++	+
Dépendance en temps		−	++	++	−
Les modélisations intégrales		++	+/−	+/−	+
Les modèles à gradients	formulation explicite	−	++	++	+
	formulation implicite	++	+	+/−	+
Modélisation à gradient de variables internes		++	−	+/−	+
Les milieux de Cosserat		++	+	−	+
Formulation second gradient		++	+	−	+
Formulation second gradient de dilatation		++	+	+	+

Table 3.2. Bilan des méthodes de régularisation.

lesquelles le développement informatique s'intègre dans un code de calcul sans avoir à modifier ni le source existant, ni celui à venir comme par exemple dans le cas de l'intégration de nouvelles lois de comportement, la convention − désignant les autres méthodes;

- le coût en temps de calcul. Cette estimation est particulièrement hasardeuse, il est vrai, puisque toutes les modélisations ne s'adaptent pas à tous les types de problèmes. Chacune d'entre elles a des spécificités qui lui sont propre, c'est donc en général à l'ingénieur de choisir quelle méthode est la plus appropriée pour répondre à ses besoins. On utilise la convention ++ pour les modélisations ayant des temps de calcul par itération de Newton équivalents aux modélisations locales. La convention + désigne les modélisations pour lesquelles les temps de calcul sont un peu plus coûteux que les modélisations précédentes par itération de Newton. Ce coût de calcul supplémentaire est dû soit à l'ajout de quelques nouveaux degrés de liberté soit à l'augmentation de la largeur de bande des matrice tangentes de rigidité. Enfin, la convention − désigne les modélisations les plus coûteuses. On pourra tout de même attirer l'attention sur le fait que la convergence des simulations numériques devient souvent bien meilleure avec les modélisations régularisantes. C'est ainsi qu'on pourra remarquer au chapitre 5.4.3.2 que dans le cadre d'une simulation d'excavation souterraine profonde en conditions couplées hydro-mécanique les temps de calculs ont été inférieurs avec la formulation

second gradient de dilatation qu'avec la formulation locale;

- la possibilité d'un couplage avec les équations de l'hydraulique. Hormis les modélisations visqueuses, qui ont déjà introduit une notion de temps, en général sans signification physique, et à laquelle il faudra donner un sens pour la lier aux équations de l'hydraulique, toutes les autres modélisations ne présentent, à priori, aucune incompatibilité pour traiter les problèmes couplés hydromécaniques. Pour la plupart d'entre elles d'ailleurs, comme cela a déjà été précisé au cours de ce chapitre bibliographique, des couplages avec l'hydraulique ont déjà été réalisés.

3.2 Les simulations d'excavations souterraines

Comme cela l'a déjà été précisé en introduction de ce rapport de thèse, un des objectifs de ce travail est de pouvoir réaliser, à terme, une simulation numérique d'une excavation souterraine en milieu géologique profond tenant compte du caractère fragile du massif rocheux et du comportement hydraulique de la nappe phréatique. Pour prédire de façon fiable l'étendue des zones endommagées et leur propagation au cours du temps, nous avons vu au chapitre 3.1 qu'il est nécessaire de prendre en compte des méthodes de régularisation pour supprimer la dépendance des résultats à la discrétisation spatiale. L'accumulation de ces exigences (calcul de structures complexe, régularisation, couplage hydraulique) fait qu'il n'existe pas, à notre connaissance, de références bibliographiques qui correspondent à notre besoin.

En effet, si on s'intéresse à l'évolution de la complexité numérique des simulations d'excavations souterraines par la méthode des éléments finis, on constate que cette problématique est encore relativement récente. La cause principale est, sans nul doute, les capacités et les performances informatiques qui ont rendues ce type de calcul irréalisable. C'est pourquoi, cela ne fait que quelques décennies, que Osaimi et Clough [110] ont présenté une des toutes premières simulation numérique d'excavation souterraine en milieu profond, en condition drainée et dans le cadre de l'élasticité.

Ce n'est que quelques années plus tard, que Jardine et al [86], ont montré qu'il était nécessaire de prendre en compte les propriétés non-linéaires des relations contraintes-déformations pour décrire plus convenablement le comportement des sols. C'est enfin, encore quelques temps après, que Finno et al [60] puis Gioda et Locatelli [75], entre autres, utilisant les résultats de Pijaudier-Cabot et Bazant [116], ont conclu que les méthodes éléments finis classiques (locales) n'étaient effectivement pas adaptées pour modéliser les bandes de localisation. Ces derniers auteurs introduisant alors des imperfections numériques dans certains éléments de leur structure pour reproduire l'apparition des bandes de localisation lors de la phase d'excavation.

Une des toutes premières simulations numériques d'excavation souterraine prenant en compte une loi de comportement adoucissante par une approche régularisée, dans le cadre particulier des milieux de Cosserat (voir description au chapitre 3.1), a été proposée par Papanastasiou et Vardoulakis [111]. Ils montrent ainsi, que c'est le caractère adoucissant du comportement matériau qui est le principal mécanisme physique qui permet d'initier l'apparition des bandes de localisation. Dans la continuité de ces travaux, d'autres auteurs se sont souciés de l'influence que pouvait avoir les discrétisations spatiales sur les résultats. Prenant en compte une formulation second gradient de déformation par une approche implicite, Zervos et al [148] montrent que leurs simulations sont indépendantes de la taille des mailles de leur structure. La discrétisation élément fini proposée, par ces derniers, est de type C1 et conduit à la définition d'un élément comprenant 36 degrés de liberté par triangles. Al Holo-Al Radi [4] produisant un résultat similaire par des considérations second gradient microstructurales selon la formulation proposée par Matsushima et al [100]. Dans ce cas, c'est 36 degrés de libertés par élément quadrangle qu'il faut prendre

en compte.

C'est ainsi que pour des raisons de diminution du nombre d'inconnues nodales principalement, que d'autres auteurs ont utilisés des modèles à conservation d'énergie de fissuration. Cette méthode, comme nous l'avons vu au chapitre 3.1 a l'avantage de n'introduire aucun degré de liberté supplémentaire. Le principe est alors d'ajouter une dépendance des paramètres matériaux en fonction de la taille caractéristique des éléments finis pour assurer une dissipation d'énergie constante lors de la fissuration de la structure. On trouve, dans ce cadre, les travaux de Sterpi [133] et ceux de Crook et al [47].

D'autres auteurs montrent enfin, dans le cas de simulations d'excavations souterraines en conditions drainées, que si les modélisations numériques souffrent d'une pathologie certaine à la discrétisation éléments finis dans les zones qui ont plastifiées sur les déformations plastiques calculées, la réponse macroscopique varie peu pour le critère macroscopique qu'ils ont pris en compte. Par exemple, pour certains, la sensibilité numérique n'est pas suffisamment significative pour déterminer la tenue en charge des tunnels, du point de vue de l'ingénierie. On peut citer, entre autres Varas et al [137], qui présentent ainsi une étude comparative sur différents maillages sans technique de régularisation.

Mais, pour simuler plus fidèlement une excavation souterraine en milieu poreux profond, il est bien souvent nécessaire de prendre en compte la présence de la nappe phréatique et par conséquent l'aspect du couplage numérique avec les équations de l'hydraulique. L'étude des effets de la localisation dans les milieux dits multiphases (solide et fluide) est, aujourd'hui, un thème de recherche particulièrement ambitieux car s'ajoute aux difficultés déjà évoquées les interactions entre le fluide et la matrice poreuse solide.

Les premières simulations numériques en milieu couplé ont conduit à la conclusion que la dépendance au maillage n'était pas si critique grâce à la présence naturelle d'une longueur interne dans les équations de l'hydraulique au travers de la loi de Darcy qui décrit la diffusion de l'eau à l'intérieur des pores. Mais, Liu et al [91] soulignent que cet effet régularisant dépend fortement du coefficient de perméabilité qui caractérise la facilité avec laquelle l'eau traverse le sol. Plus le couplage entre le solide et le fluide est faible plus la sensibilité au maillage est importante. On montre, par ailleurs, au chapitre 5 que l'effet de la localisation génère dans les simulations numériques une incertitude conséquente sur l'extension de la zone endommagée autour de la galerie excavée.

Or, il est essentiel de maîtriser correctement le comportement de cette zone et plus particulièrement les bandes de localisation qui s'y concentrent pour pouvoir appréhender les écoulements d'eau qui sont des moyens de transports privilégiés des radionucléides, comme cela a été précisé en introduction du chapitre 1.

Force est de constater que les simulations numériques d'excavations souterraines, en condition non-drainées et prenant en compte le comportement matériau fragile, ne font pas l'objet de publications scientifiques abondantes. On peut citer les travaux de Borja [21], de Xu et al [146] et de Kolmayer et al [88], mais dans aucun cas l'influence de la discrétisation

spatiale n'a été étudiée. Nous n'avons trouvé qu'une seule référence souhaitant s'affranchir de cette dépendance des résultats au maillage. Il s'agit de l'étude de Callari [25] qui représente les bandes de localisation par des surfaces de discontinuités. La loi de comportement considérée est un modèle élasto-plastique de type Drucker-Prager en version associée. L'approche par surface de discontinuité a l'avantage de n'introduire aucun degré de liberté supplémentaire par rapport à une formulation locale et les auteurs précisent qu'il n'est pas nécessaire de disposer d'une discrétisation spatiale fine. En revanche, il ne s'agit pas d'une méthode de régularisation permettant de représenter la phénoménologie physique à l'intérieur des bandes de localisation.

3.3 Les méthodes de recherche de solutions bifurquées

L'utilisation de lois de comportement adoucissantes - type endommagement ou mécanique des roches - donne des résultats non physiques car pathologiquement dépendants de la discrétisation spatiale si aucune régularisation n'est introduite pour restaurer le caractère bien posé du problème mathématique. Mais elle peut aussi conduire à une perte d'unicité de la solution. Du point de vue physique, ce résultat est en revanche justifié. En effet, dans le cadre d'essais en laboratoire sur la dégradation de matériaux, il est difficile et bien souvent impossible de reproduire deux fois la même expérience. Mathématiquement, il existe une littérature assez riche qui justifie la non-unicité de la solution par la non-positivité stricte du travail du second ordre. A l'origine de ce constat, on trouve les travaux de Nova [108] qui a montré que, dans le cas d'une loi élasto-plastique isotrope durcissante ayant une règle d'écoulement de type non-associée et sous certaines conditions aux limites, il était possible de construire un problème ayant un état initial homogène et pour lequel l'unicité d'une solution homogène était perdue. En considérant la notion de contrôlabilité introduite par Nova pour caractériser l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites, Chambon [35] prouve que, pour tout type de matériau décrit par une relation de comportement inélastique et indépendante du temps, le problème en vitesse peut ne pas être contrôlable dès lors que le travail du second ordre devient négatif.

Les premiers résultats concernant la non-unicité du problème en vitesse ont été donnés par Hill [81], dans le cas restrictif des matériaux élastoplastiques standards, c'est-à-dire vérifiant une règle de normalité de type associée. Il introduit la notion de solide linéaire de comparaison dont le comportement est décrit par une loi incrémentale linéaire (par incrément). Les points en charge de ce solide sont situés sur la surface de charge. On parle de points en "pleine charge" suivant un chargement le long d'un chemin sans bifurcation. Les autres points subissent une décharge élastique. Hill montre alors que la bifurcation du solide réel ne peut pas avoir lieu avant que le solide linéaire de comparaison n'admette une solution bifurquée. Raniecki et Bruhns [119] ont ensuite étendu ce travail aux cas des matériaux élastoplastiques non-standards. Ils introduisent pour cela de nouveaux solides linéaires de comparaison (qui sont caractérisés par des matériaux élastoplastiques standard) liés par un paramètre scalaire pour associer la normale de la surface de charge à la règle d'écoulement normalisée. Si pour tous ces solides de comparaison la bifurcation est exclue, alors elle l'est aussi pour le solide réel. Mais cette technique est peu utilisée car il est difficile de bien calibrer le paramètre scalaire.

En considérant la loi de comportement incrémentale élastoplastique adoucissante pour les sols décrite dans [28], Chambon et al [29] ont montré de façon analytique sur un problème aux limites unidimensionnel, sous l'hypothèse des petites déformations, que des solutions multiples peuvent exister malgré la prise en compte d'un modèle régularisant du second ordre, de type milieu continu enrichi en gradient de contrainte de la classification présentée dans ce rapport en section 3.1.

Il est essentiel de préciser, à ce stade de la présentation, quelques notions de bases. On conseille de suivre la définition de ces notions munis de la figure 3.2. Pour des raisons de

cohérences avec les notations communément utilisées dans la littérature scientifique on rappelle que l'équation (1.1) s'écrit de façon équivalente

$$\mathbf{R}\left(u_i^s, \eta^s\right) = \mathbf{0} \tag{3.24}$$

où $\mathbf{R}$ correspond au vecteur résidu, u_i^s et η^s sont respectivement les composantes du champ de déplacement et le paramètre scalaire contrôlant l'intensité du chargement mécanique extérieur au pas de temps t^s.

On appelle **solution fondamentale** en un point de chargement η donné, un champ de déplacement qui vérifie (3.24). On la note $\mathbf{u}^0(\eta)$. L'ensemble des solutions fondamentales parcourant tous les points de chargement du domaine de validité est appelé **branche fondamentale**.

On appelle **point de bifurcation**, un état de chargement η^0 à partir duquel il existe au moins une solution continue de plus que la solution fondamentale au voisinage de η^0 qui vérifient (3.24). Pour des raisons de simplification de notations, supposons qu'il en existe qu'une seule. On la note $\mathbf{u}^1(\eta)$ et on l'appelle **solution bifurquée** en η. L'ensemble des solutions bifurquées $\mathbf{u}^1$ parcourant les points de chargement du domaine de validité tels que $\eta > \eta^0$ est appelé **branche bifurquée**. Au voisinage d'un point de bifurcation on a donc la propriété

$$\text{Si } \eta \xrightarrow{\eta > \eta^0} \eta^0 \qquad \text{alors} \qquad \mathbf{u}_1(\eta) \longrightarrow \mathbf{u}_0\left(\eta^0\right) \tag{3.25}$$

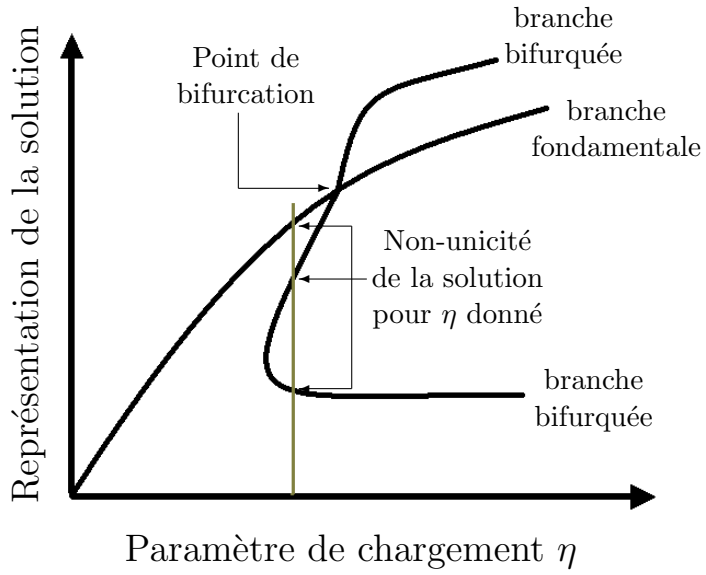


Fig. 3.2. Représentation graphique des notions de bifurcations de bases. Mise en évidence de la non-unicité d'une solution pour un chargement donné avant bifurcation.

On appelle, enfin, **point singulier**, ou encore point critique, un état de chargement η^c

pour lequel la matrice tangente de rigidité du système d'équations à résoudre, définie par ses composantes

$$K_{ij}^{\eta^c} = \frac{\partial R_i \left(u_k \left(\eta^c\right)\right)}{\partial u_j} \tag{3.26}$$

est singulière. Pour identifier la présence d'un tel point il faut mener une analyse des plus petites valeurs propres de $\mathbf{K}$.

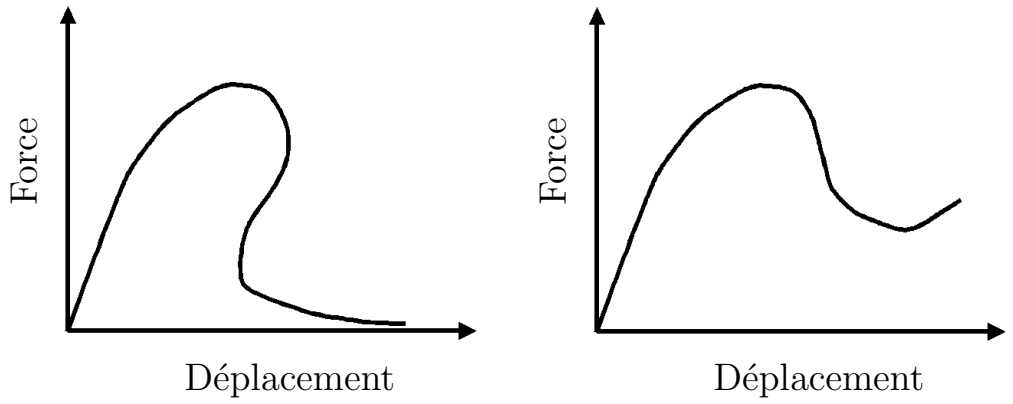
On exprime, enfin, le théorème des fonctions implicites, qui précise que, si pour un paramètre de chargement η donné, il existe une solution fondamentale en ce point et que la matrice tangente de rigidité associée est strictement positive, alors il n'y a pas de point de bifurcation. On en déduit que les points de bifurcation sont des cas particuliers des points singuliers.

Un point de bifurcation est donc un point à partir duquel l'unicité de la solution n'est pas préservée. En revanche, on attire l'attention sur le fait qu'il peut exister des paramètres de chargement η pour lesquels le problème à résoudre a plusieurs solutions mais pour lesquels il n'y a ni points de bifurcations, ni points singuliers (voir pour cela la figure 3.2). Par conséquent, on pourra noter que bifurcation et non-unicité d'une solution sont deux notions bien distinctes.

Au voisinage d'un point singulier, le problème devient mal posé. Numériquement, le problème discret conduit à une matrice tangente de rigidité mal conditionnée. Les simulations numériques deviennent alors instables et les algorithmes de résolution ne convergent plus, avant même d'avoir atteint le mécanisme de rupture.

Le second type de point singulier est le point limite qui caractérise un état de chargement maximal. Dans une représentation conventionnelle des courbes forces/déplacements, le point limite précède toujours le retour (dans le sens décroissance) de forces. On parle de phénomènes de "snap-back" (voir figure 3.3(a)) ou de "snap-through" (voir figure 3.3(b)). A noter que cette notion de "snap-back" ou de "snap-through" n'est pas une propriété intrinsèque du matériau. Mais ce point est déjà bien connu et, dans ce cas particulier, les instabilités numériques peuvent être surmontées grâce à des méthodes dites de continuation, parfois connues sous l'appellation de pilotage (voir Lorentz et Badel [96] pour un descriptif de ces méthodes).

L'utilisation des méthodes de continuation peut également permettre de franchir les points de bifurcation mais ne permet pas, en revanche, de capter toutes les solutions ni de garantir l'obtention de la solution la plus pertinente, c'est-à-dire la plus critique du point de vue de l'ingénieur. Pour identifier ces différentes solutions, il existe des techniques dites de changement de branches. Shi [126] en propose un état de l'art exhaustif. Ces techniques sont couramment utilisées dans le domaine de l'ingénierie pour traiter des problèmes présentant des non-linéarités géométriques comme les phénomènes de type flambage. En revanche, lorsque les non-linéarités sont liées aux propriétés matériaux, comme par exemple le comportement adoucissant des géomatériaux, ces techniques ne sont que très



(a) Snap-back (b) Snap-through

Fig. 3.3. Courbes représentatives des phénomènes de snap-back et de snap-through dans une configuration force-déplacement.

rarement appliquées.

Pour s'affranchir de cette complexité d'analyse de bifurcation, il est courant d'introduire un défaut dans la structure en modifiant légèrement certaines propriétés matériaux dans une zone identifiée. Mais cette démarche est périlleuse voire même peu judicieuse dans le cas d'études complexes. Tout d'abord, elle suppose, de la part de l'ingénieur qui réalise son étude, une connaissance fine a priori du comportement de la structure pour savoir où placer convenablement le défaut. Ce choix occulte donc toute initiation de localisation non prévue par l'ingénieur. De plus, le pic de chargement qui caractérise le comportement du matériau se trouve modifié à l'échelle de la structure. Cet aspect sera mis en évidence au chapitre 6.3.

Certains chercheurs, comme Gastebled et May [67], ont tout de même montré qu'il était nécessaire de chercher à identifier toutes les solutions bifurquées dans le cadre de calcul de structures en béton. Mais sont-elles toutes physiquement observables dans leur milieu naturelle? Y en a-t-il une plus pertinente que les autres? Benallal et Marigo [15] proposent de considérer uniquement les solutions pour lesquelles la dérivée seconde de l'énergie totale est positive. Ils montrent alors, dans le cas d'une barre en traction dont le comportement est de type endommagement décrit par une formulation non-locale à gradient d'endommagement que sous certaines conditions il est possible d'exhiber plusieurs solutions vérifiant leur critère.

La littérature scientifique est relativement pauvre dans la description de techniques adaptées à la recherche de solutions bifurquées dans le cadre spécifique des calculs de structures ayant un comportement matériau de type adoucissant. Les raisons sont multiples. Tout d'abord, le problème mathématique est mal-posé (voir la partie correspondante aux méthodes de régularisation du chapitre 3.1). Il faut donc commencer par donner un sens physique aux solutions en introduisant de la régularisation dans l'expression du

modèle. Cette étape se traduit bien souvent par une augmentation significative des temps de calcul. La recherche de solutions multiples peut alors conduire à des temps de calculs prohibitifs, particulièrement pour des études à portée industrielle pour lesquelles les dimensions comprennent plusieurs milliers voire millions de degrés de liberté. De plus, les expressions mathématiques qui décrivent les lois de comportements ne sont pas, en général, continûment dérivables. Ceci n'est pas le cas pour les analyses de type flambement pour lesquelles toutes les équations sont indéfiniment différentiables. C'est pourquoi, la plupart des références bibliographiques sont produites dans le cadre d'une telle analyse.

Pour déterminer les différentes solutions d'un problème donné, il faut tout d'abord être en mesure d'identifier les points de bifurcation, ou de façon plus générale les points singuliers. Ce thème fait l'objet de la première partie de cette section. A partir de ce point, il est possible de capter plusieurs solutions. Pour cela il existe des techniques dites de changement de branches qui font l'objet de la seconde partie.

3.3.1 Identification des points singuliers

Les points de bifurcation sont un cas particulier de points singuliers. Il existe, dans la littérature scientifique, une classification très riche de ces points. On peut citer, entre autres, la classification proposée par Ikeda et Murota [83]. Dans le cas d'un problème quasi-statique non-linéaire, ces points sont caractérisés par une matrice tangente de rigidité singulière. Pour rappel, l'expression de la matrice tangente de rigidité est donnée par l'équation (1.4). On note que cette équation s'exprime sous forme d'une dérivée en espace. Or, dans le cas des lois de comportement élasto-plastiques, les équations ne sont pas continûment dérivables. Discontinuité d'autant plus forte lorsque le matériau est adoucissant.

Pour des raisons de simplification, à la fois théorique et algorithmique, on se limite dans cette analyse au cas particulier des problèmes menant à des matrices tangentes de rigidité symétriques à coefficients réels. Cette limitation à notamment comme conséquence d'interdire l'utilisation des lois de comportement non-associées ou un couplage avec des équations de l'hydraulique. Cette hypothèse est donc très contraignante compte tenu des études que nous souhaitons, à terme, réaliser comme par exemple la simulation d'une excavation souterraine en milieu géologique, puisque ce problème combine à la fois l'aspect hydraulique, par la présence naturelle de nappes d'eau dans les sols, et le caractère non-standard des lois de comportements typique des géomatériaux. L'extension de ce travail à un cadre plus général s'inscrit d'ores et déjà comme perspective indispensable. Il faut, tout de même noter, qu'une première analyse portant sur des opérateurs non-symétriques a été menée par van der Veen [135] et van der Veen et al [136] dans le cadre de recherche en mécanique des sols. Nous présenterons quelques résultats de ces travaux en fin de section 3.3.2.1.

L'identification d'un point singulier consiste à déterminer l'intensité du chargement η^s, de la relation (3.24), pour laquelle la matrice tangente de rigidité devient singulière. Cette étape se traduit par une analyse aux valeurs et vecteurs propres (voir section 1.3.4), qui se traduit mathématiquement par la détermination de η^s telle que

$$\omega^{\eta^s} = 0 \tag{3.27}$$

ou de façon équivalente

$$\det\left(\mathbf{K}^{\eta^s}\right) = 0 \tag{3.28}$$

où ω^{η^s} désigne la plus petite valeur propre de la matrice $\mathbf{K}^{\eta^s}$. Numériquement, on interprète le problème mathématique des équations (3.28) et (3.27) par le changement de signe de ces expressions. On distingue pour cela, dans la littérature, deux catégories de méthodes :

- Les méthodes **indirectes** pour lesquelles on se contente d'estimer le facteur de chargement pour lequel la matrice tangente de rigidité est singulière. Il s'agit de méthodes très simples dans leur mise en oeuvre informatique, mais pas efficaces en temps de calcul ni en terme de précision.

- Les méthodes **directes** pour lesquelles on cherche de façon exacte (à la précision machine près) le chargement pour lequel la matrice tangente de rigidité est singulière. Ces méthodes sont en fait semblables aux techniques de pilotage pour lesquelles la contrainte à vérifier est l'obtention d'une matrice singulière.

On dit qu'un point singulier est simple si la matrice tangente de rigidité a une seule valeur propre nulle et qu'il est multiple s'il en a plusieurs. En notant en ce point, u_i^s les composantes du champ de déplacement, η^s l'intensité du chargement, et $\boldsymbol{\theta}^s$ le vecteur propre associé à la valeur propre nulle, si la relation

$$\boldsymbol{\theta}^{sT} \frac{\partial \mathbf{R}\left(u_i^s, \eta^s\right)}{\partial \eta} = 0 \tag{3.29}$$

est vérifiée alors le point singulier est un point de bifurcation. Le lecteur peut se reporter à la classification proposée par Ikeda et Murota [83] pour de plus amples précisions.

3.3.1.1 Les méthodes indirectes

Le principe de ces méthodes est de vérifier, pour chaque incrément de chargement, si la matrice tangente de rigidité est singulière. Cette étape se traduit par une analyse aux valeurs et vecteurs propres. Pour cela, il est indispensable de se munir d'algorithmes de résolutions efficaces pour traiter des systèmes de grandes dimensions. Les plus couramment cités sont ceux de Lanczos [89] et de Arnoldi [5]. Mais une telle analyse peut devenir très vite onéreuse. Pour la restreindre, la technique la plus couramment utilisée consiste à limiter les calculs à l'identification du pas de chargement à partir duquel le déterminant change de signe (voir (3.28)). L'intérêt de cette stratégie vient de sa simplicité d'intégration numérique. Mais attention, en cas de singularité multiple conduisant à un nombre pair de valeurs propres qui changent de signe, le déterminant, lui, ne change pas de signe.

Une méthode plus simple pour réduire les temps de calcul consiste à compter le nombre de pivots de la matrice factorisée qui changent de signe. Celui-ci correspond également au nombre de valeurs propres qui ont changées de signe. Huang et Atluri [82] proposent une

démonstration de cette propriété. Van der Veen [135] a utilisé ce principe dans le cas particulier des matrices tangentes symétriques. L'intérêt de cette méthode vient du fait qu'elle nécessite très peu de calcul puisqu'il suffit de compter le nombre de pivots changeant de signe de la matrice factorisée - matrice dont on dispose car elle est nécessaire pour la résolution du système. L'inconvénient de cette solution est liée à l'étape de la factorisation qui n'est pas toujours possible dès lors que la matrice tangente devient mal conditionnée. Or ceci est souvent le cas au voisinage d'un point singulier.

Le principal défaut des méthodes indirectes est dû au fait qu'elles dépendent directement de l'incrément de chargement appliqué au problème. La précision dans l'identification d'un point singulier est donc elle-même directement liée à la valeur de cet incrément. Pour améliorer cette précision il faut donc jouer sur des ajustements de ces incréments. Il s'agit là de techniques dites d'extrapolation par bi-section. Waszczyszyn [143] propose, dans ce cadre, des relations formulées à partir du déterminant ou de la plus petite des valeurs propres. Les linéarisations respectives de ces expressions s'écrivent

$$\Delta\eta^{m+1} = -\frac{\det \mathbf{K}^{\eta^m}}{\det \mathbf{K}^{\eta^m} - \det \mathbf{K}^{\eta^{m-1}}} \left(\eta^m - \eta^{m-1}\right) \tag{3.30}$$

$$\Delta\eta^{m+1} = -\frac{\omega^{\eta^m}}{\omega^{\eta^m} - \omega^{\eta^{m-1}}} \left(\eta^m - \eta^{m-1}\right) \tag{3.31}$$

où η^m désigne l'intensité du chargement cumulée après les m incréments $\Delta\eta$. Il s'agit de méthodes de sécantes dont le but est d'évaluer un bon incrément de chargement pour approcher judicieusement un point singulier. Elles ne peuvent en revanche prétendre à une identification fine. De plus, la relation (3.31) est à utiliser avec prudence, puisque la notion de plus petite valeur propre est un critère bien difficile à manier.

Une alternative à ces méthodes a été proposée par Bergan [16]. L'auteur définit un critère dit "paramètre courant de rigidité" dont l'objectif initial est de mesurer une rigidité moyenne dans une structure entre deux incréments de chargement. Il montre, sur des calculs de flambement, que le changement de signe de ce paramètre est également un critère d'identification d'un point singulier. Ce paramètre dépend, en fait, du calcul de $\Delta\mathbf{u}^{\eta^m T}.\mathbf{K}^{\eta^m}.\Delta\mathbf{u}^{\eta^m}$ où $\Delta\mathbf{u}^{\eta^m}$ est l'incrément du champ de déplacement calculé pour le chargement η^m, et $\Delta\mathbf{u}^{\eta^m T}$ est son transposé. Mais l'inconvénient de ce paramètre vient du fait que, s'il est vrai qu'un changement de signe de $\Delta\mathbf{u}^{\eta^m T}.\mathbf{K}^{\eta^m}.\Delta\mathbf{u}^{\eta^m}$ implique un changement de signe du déterminant de $\mathbf{K}^{\eta^m}$, la réciproque n'est pas vraie. Des points singuliers peuvent donc être ignorés. Feng et al [57] montrent, sur des exemples de flambement, que ce critère n'est pas fiable en ce qui concerne l'identification des points de bifurcation.

Fujii et Noguchi [66] proposent une seconde alternative basée sur une décomposition $\mathrm{LDL^T}$ de la matrice tangente de rigidité. Leur critère d'identification s'appuie sur la loi de Sylvester qui, pour rappel, précise que le nombre de valeurs propres négatives d'une matrice est égal au nombre de termes diagonaux négatifs de la matrice diagonale $\mathbf{D}$. L'intérêt de la décomposition vient de son originalité à déterminer le vecteur propre singulier (associé à une valeur propre quasi-nulle). Ils montrent à partir des propriétés

algébriques de la décomposition $\mathrm{LDL^T}$ et des propriétés mathématiques des valeurs et des vecteurs propres, qu'une approximation de ce vecteur au voisinage d'un point singulier (supposé simple), que l'on note $\boldsymbol{\theta}^s$, est donnée, au paramètre de normalisation près, par le vecteur colonne de la matrice $\left(\mathbf{L}^T\right)^{-1}$ associé au terme diagonal nul de l'opérateur $\mathbf{D}$.

$$\boldsymbol{\theta}^s = \zeta \boldsymbol{s}_k \tag{3.32}$$

où ζ est un paramètre de normalisation, k est la position du terme diagonal quasi-nul de $\mathbf{D}$ et $\boldsymbol{s}_k$ est le vecteur colonne de la matrice $\left(\mathbf{L}^T\right)^{-1}$ associé à D_k. Cette propriété est en effet très intéressante puisqu'elle permet d'avoir une estimation du vecteur propre pour un coût de calcul nul lorsque le système de résolution est basé sur la méthode de décomposition $\mathrm{LDL^T}$. Mais il est connu que cette méthode de résolution n'est pas la plus optimale. De plus, à notre avis cette estimation est fondée sur des considérations heuristiques, et par conséquent sa fiabilité reste à établir.

Cette stratégie a tout de même été utilisée par Ikeda et al [84] dans le cas de calculs de structures en grandes déformations ayant des lois de comportement hyper-elasto-plastique et par Falzon et Cerini [56] dans le cas d'analyses de flambement. Mais Ikeda et al [85] précisent, qu'en cas de valeurs propres nulles multiples, cette méthode éprouve des difficultés numériques liées à la séparation des vecteurs propres singuliers.

3.3.1.2 Les méthodes directes

Pour une identification plus précise des points singuliers, des méthodes plus évoluées ont été mises en oeuvre. Elles interviennent en soutien aux méthodes indirectes. Elles sont utilisées au voisinage des points singuliers et sont, en général, basées sur l'hypothèse que dans la relation d'équilibre la direction de chargement est connue et que seule son intensité η reste à déterminer. L'équation (3.24) s'écrit alors :

$$\mathbf{R}\left(u_i, \eta\right) = \mathbf{G}\left(u_i\right) - \eta \mathbf{F} = \mathbf{0} \tag{3.33}$$

Le principe de ces méthodes est semblable à celui des méthodes de continuation telles que celles présentées par Lorentz et Badel [96]. Il consiste à introduire des informations supplémentaires, portant sur la singularité de la matrice tangente de rigidité, par l'intermédiaire de nouvelles équations, directement dans le système à résoudre, pour définir précisément le critère de singularité. On parle alors de systèmes étendus. Le but est d'obtenir de façon précise le chargement η^{sg} pour lequel le point singulier est atteint. Le système d'équations à résoudre est alors défini par la relation (3.33) complétée par l'une des expressions suivantes

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} \mathbf{K}^{\eta^{sg}}.\boldsymbol{\theta}^{sg} = \mathbf{0} \\ \|\boldsymbol{\theta}^{sg}\| - 1 = \mathbf{0} \end{cases}; \qquad \text{(b)} \quad \det \mathbf{K}^{\eta^{sg}} = \mathbf{0}; \qquad \text{(c)} \quad \omega^{\eta^{sg}} = \mathbf{0} \tag{3.34}$$

où $\boldsymbol{\theta}^{sg}$ et $\omega^{\eta^{sg}}$ sont respectivement le vecteur propre singulier et la valeur propre singulière associés à la matrice tangente de rigidité $\mathbf{K}^{\eta^{sg}}$ calculée pour un chargement imposé η^{sg}.

L'intérêt principal de ces méthodes directes, par rapport aux méthodes indirectes, vient du fait qu'elles réduisent incontestablement le nombre d'incréments de chargement nécesssaire pour identifier de façon précise la localisation d'un point singulier. Elles ont, en revanche, l'inconvénient d'être très coûteuse en temps de calcul par incrément de chargement.

On trouve dans la littérature de nombreuses références bibliographiques définissant de telles approches, la plupart pour une application dans le cas d'analyses de flambement de structures. La distinction principale vient de l'algorithme de résolution proposé. Certains assurent une convergence quadratique de l'algorithme en mettant en oeuvre une méthode de Newton. C'est ainsi la stratégie adoptée par Wriggers et al [144] pour résoudre le système qui combine (3.33) et (3.34)(a), mais aussi par Planinc et Saje [118] pour le système (3.33) et (3.34)(b) ou encore par Eriksson [53] pour le système (3.33) et (3.34)(c).

Pour réduire le coût de calcul des méthodes de résolution basées sur un algorithme de Newton, d'autres auteurs proposent certaines alternatives. C'est ainsi le cas de Fujii et Ramm [64], qui, pour résoudre le système (3.33) et (3.34)(c), proposent un algorithme de résolution uniquement basé sur les propriétés mathématiques des valeurs propres et des vecteurs propres singuliers.

Mais tous ces auteurs précisent que, dans tous les cas, la convergence de l'algorithme dépend crucialement d'une bonne prédiction. Pour rendre l'algorithme de résolution plus robuste, Battini et al [10] activent la méthode de Newton, conservant ainsi une convergence quadratique, uniquement lorsque la plus petite des valeurs propres a diminuée. Ils observent ainsi, dans le cadre d'analyses de flambement de huit structures, que contrairement à d'autres méthodes basées uniquement sur l'algorithme de Newton, leur stratégie n'est pas aussi sensible à une mauvaise initialisation.

Fujii et al [65] précisent que les méthodes directes dégénèrent souvent en présence d'un point singulier multiple à cause de la non-unicité de l'expression du vecteur propre. Pour corriger ce type de problème, ils utilisent une méthode de perturbation de la matrice tangente de rigidité au cours des itérations de Newton pour séparer les valeurs propres multiples et donc les vecteurs propres associés.

Enfin, on peut noter que certains auteurs considèrent directement un système pour détecter les points de bifurcation en introduisant, comme caractéristique supplémentaire, la condition de bifurcation (3.29). On peut citer, parmi beaucoup d'autres, Lopez [92] qui résoud un tel système en mettant en oeuvre un algorithme de Newton. Dans le cadre d'un exercice similaire, on trouve d'autres références, comme Wriggers et Simo [145] ou Cardona et Huespe [27] qui modifient l'expression de la matrice tangente de rigidité $\mathbf{K}^{\eta^{sg}}$ par pénalisation pour réduire les difficultés numériques liées à son mauvais conditionnement.

3.3.2 Les techniques de changement de branches

Pour diverses raisons, d'ordre physique, phénoménologique, mathématique ou encore numérique, il est largement répandu dans la littérature scientifique l'idée selon laquelle des imperfections doivent être introduites dans les simulations numériques.

- La première de ces raisons peut-être justifiée, expérimentalement, par la non-reproductibilité des essais en laboratoires. Citons, entre autres, les travaux de Desrues et Viggiani [50], qui ont montré sur des essais biaxiaux de sables que si l'orientation et l'épaisseur des bandes de cisaillement étaient toujours identiques, en revanche le nombre de bandes et leurs positions ne pouvaient pas être prédits d'un essai à l'autre.

- La seconde raison, d'ordre purement numérique, découle du fait que pour changer de solution il suffit de changer de défaut. C'est ainsi que pour reproduire certains résultats expérimentaux en milieux granulaires tels que le sable, Nübel et Huang [109] ont introduit une initialisation aléatoire dans certaines propriétés mécaniques de leur loi de comportement hypo-plastique.

De nombreux auteurs supposent alors une corrélation entre unicité de la solution et introduction d'un défaut. Certains précisent même que les points de bifurcation ne sont, en fait, possibles que sous des conditions de symétrie parfaite (géométrie, matériau). L'analyse de bifurcation n'apparaît donc plus comme nécessaire puisque les seuls points singuliers possibles sont des points limites. Points pour lesquels les méthodes de continuation suffisent.

Mais, Chambon et Moullet [33] ont montré, dans le cadre de simulations numériques d'un problème aux limites décrit par une loi de comportement mécanique adoucissante avec une formulation régularisée de type second gradient, qu'il était possible de trouver plusieurs solutions (toutes bien convergées) malgré l'introduction du même défaut dans les simulations. Ils montrent ainsi que l'unicité de la solution n'est pas systématique lorsqu'on introduit une imperfection.

Cependant, il est essentiel de noter que l'introduction de défaut dans une simulation numérique n'est pas un acte anodin car il impacte toujours le comportement de la structure avant et après le point de bifurcation, comme nous le montrerons dans le cadre de recherche de solutions multiples au chapitre 6. De plus, il restreint toute simulation à un unique mode de rupture (à ne pas confondre avec l'unicité de la solution) alors qu'à l'instar des études de flambage on peut s'attendre à observer une compétition entre différents modes. Nous aborderons également ce sujet au chapitre 6.2. Enfin, l'initialisation des bandes de localisation doit être le seul fruit d'une concentration de déformation plastique dans une zone localisée et non le produit d'une intuition quelconque. Pour obtenir toutes les solutions numériquement réalisables, il est donc nécessaire de ne pas introduire de défaut et il est indispensable de mener une analyse complète de bifurcation, y compris lorsqu'il s'agit de calculs de structures présentant un adoucissement dans la relation de comportement. C'est ce que concluent Papanastasiou et Vardoulakis [111] dans le cadre précis d'une simulation numérique d'excavation souterraine décrite par une formulation

des milieux continus enrichie par la micro-structure de type Cosserat. En effet, ils constatent qu'il n'est pas possible, a priori, de prévoir quel mode de bifurcation va finalement s'imposer.

Pour identifier toutes les branches bifurquées, la méthode la plus répandue consiste à introduire des perturbations numériques sur les champs de variables (déplacements, chargement) pour orienter la direction de recherche des solutions du problème. On parle de méthodes de changement de branches - "branch-switching" ou encore "path-switching" par analogie aux méthodes de continuations dites "path-following". On fait une distinction entre la notion de solution fondamentale, issue de la résolution du calcul sans perturbation numérique, et la notion de solution bifurquée, issue d'une recherche par changement de branches. Bien entendu, ces notions sont arbitraires comme le soulignent Papanastasiou et Vardoulakis [111] en montrant qu'il est possible de changer de solutions en changeant l'amplitude des incréments de chargement, ou en modifiant la prédiction de l'algorithme de Newton d'après Chambon et al [32], ou encore en fonction de l'ordre dans lequel les équations sont résolues d'après Varas et al [137]. On comprend ainsi que les notions de solutions fondamentales et bifurquées dépendent de la moindre perturbation numérique et que, d'une simulation à une autre, une solution bifurquée peut devenir fondamentale et vice-versa.

3.3.2.1 Les techniques de perturbation de la prédiction du champ de déplacement

Une fois le point singulier détecté, le principe le plus intuitif pour orienter l'algorithme de recherche de solutions bifurquées, dans le cas d'une résolution par un code de calcul élément fini, consiste à perturber la solution fondamentale - par la relation (3.35) - en introduisant, à l'initialisation du pas de chargement, le vecteur propre associé à la valeur propre nulle obtenue en ce point singulier. Pour clarifier la discussion dans la suite de ce chapitre, on suppose que le point de bifurcation a été atteint pour un niveau de chargement correspondant à un pas de temps t. On cherche alors les solutions bifurquées telles que

$$\left(\Delta\mathbf{u}^t\right)^{pert,0} = \beta\left(\Delta\mathbf{u}^t\right)^{fond,cv} + \alpha\boldsymbol{\theta}^t \tag{3.35}$$

où $\left(\Delta\mathbf{u}^t\right)^{pert,0}$ désigne la nouvelle initialisation de l'incrément du champ de déplacement pour le pas de temps t depuis le pas de temps $t-1$, $\left(\Delta\mathbf{u}^t\right)^{fond,cv}$ est la solution fondamentale obtenue après convergence du calcul au pas de temps t depuis le pas de temps $t-1$, $\boldsymbol{\theta}^t$ est le vecteur propre singulier au point singulier, α et β sont des coefficients à déterminer.

Dans la plupart des références bibliographiques, pour lesquelles cette technique de recherche de solutions bifurquées est utilisée, le paramètre β est pris égal à un et il est précisé que α ne doit pas être ni trop petit, ni trop grand. Il faut, tout de même, être attentif sur le fait que les algorithmes de calcul de vecteurs propres fournissent, en général, des résultats de norme unitaire et que par conséquent il est préférable que les paramètres

β et α dépendent d'une norme de $\left(\Delta\mathbf{u}^t\right)^{fond,cv}$.

Parmi les auteurs qui utilisent cette technique de perturbation - par application de la relation (3.35) - on trouve de Borst [22]. C'est un des rares auteurs qui précise clairement sa façon de procéder pour identifier les paramètres β et α. Pour cela, il considère les deux propriétés suivantes :

- La solution fondamentale $\left(\Delta\mathbf{u}^t\right)^{fond,cv}$ et la prédiction $\left(\Delta\mathbf{u}^t\right)^{pert,0}$ doivent avoir la même norme.
$$\| \left(\Delta\mathbf{u}^t\right)^{pert,0} \| = \| \left(\Delta\mathbf{u}^t\right)^{fond,cv} \| \tag{3.36}$$
où $\|.\|$ désigne une norme euclidienne. Cette première propriété permet de calibrer les paramètres β et α en tenant compte de la norme du vecteur propre singulier via la relation (3.35).

- Les champs de déplacements de la solution fondamentale $\left(\Delta\mathbf{u}^t\right)^{fond,cv}$ et de la prédiction $\left(\Delta\mathbf{u}^t\right)^{pert,0}$ doivent être orthogonaux.
$$\left(\left(\Delta\mathbf{u}^t\right)^{pert,0}\right)^T . \left(\Delta\mathbf{u}^t\right)^{fond,cv} = 0 \tag{3.37}$$
où $\left((\Delta\mathbf{u}^t)^{pert,0}\right)^T$ désigne le champ transposé de $(\Delta\mathbf{u}^t)^{pert,0}$. En considèrant la relation
$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^f + \boldsymbol{\theta}^\perp \tag{3.38}$$
où $\boldsymbol{\theta}^f$ est la projection du vecteur propre $\boldsymbol{\theta}$ sur l'axe de direction de la solution fondamentale, et $\boldsymbol{\theta}^\perp$ la projection sur la direction orthogonale, alors la propriété (3.37) revient à dire que l'on cherche les solutions bifurquées $\left(\Delta\mathbf{u}^t\right)^{pert,0}$ suivant la direction $\boldsymbol{\theta}^\perp$ - voir la figure 3.4, que l'on peut exprimer par la relation
$$\left(\Delta\mathbf{u}^t\right)^{pert,0} = \gamma\boldsymbol{\theta}^\perp \tag{3.39}$$
où γ est un coefficient caractérisant la norme de la solution fondamentale.

Ces propriétés l'amènent à définir les paramètres β et α par les relations

$$\beta = \frac{\left((\Delta\mathbf{u}^t)^{fond,cv}\right)^T \boldsymbol{\theta}^t}{\sqrt{\left((\Delta\mathbf{u}^t)^{fond,cv}\right)^T (\Delta\mathbf{u}^t)^{fond,cv} - \left[\left((\Delta\mathbf{u}^t)^{fond,cv}\right)^T \boldsymbol{\theta}^t\right]^2}} \tag{3.40}$$

$$\alpha = -\frac{\left((\Delta\mathbf{u}^t)^{fond,cv}\right)^T (\Delta\mathbf{u}^t)^{fond,cv}}{\left((\Delta\mathbf{u}^t)^{fond,cv}\right)^T \boldsymbol{\theta}^t} \tag{3.41}$$

Lorsque $\left(\left(\Delta\mathbf{u}^t\right)^{fond,cv}\right)^T \boldsymbol{\theta}^t = 0$ l'expression de α n'est plus définie mais dans ce cas $\boldsymbol{\theta}^t$ devient la direction de recherche de la solution perturbée puisque $\boldsymbol{\theta}^t = \boldsymbol{\theta}^\perp$. Il suffit alors

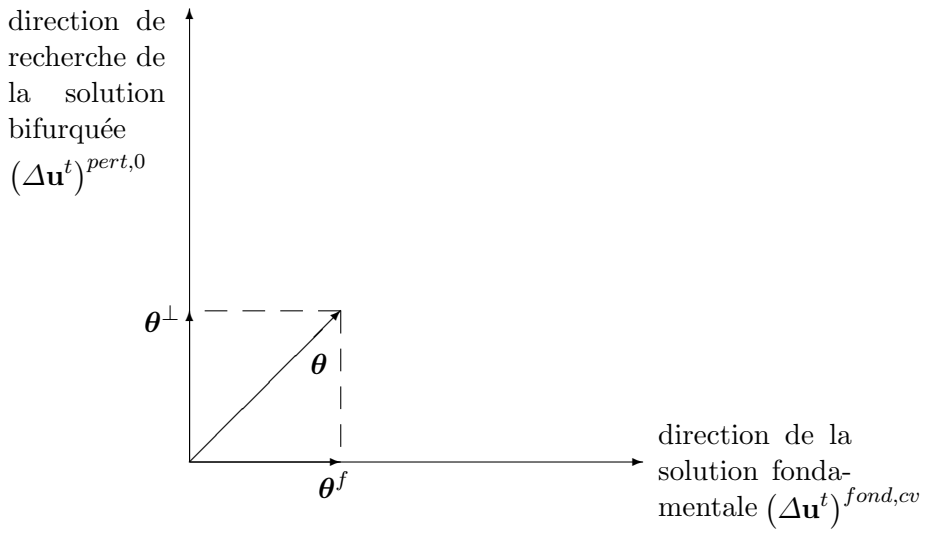


Fig. 3.4. Direction de recherche de la solution bifurquée par la méthode de de Borst.

de choisir γ tel quel

$$\gamma = \left(\left(\Delta\mathbf{u}^t\right)^{fond,cv}\right)^T \left(\Delta\mathbf{u}^t\right)^{fond,cv} \tag{3.42}$$

Une fois la solution bifurquée identifiée, de Borst précise qu'il faut faire une nouvelle analyse de singularité et que si la plus petite des valeurs propres est à nouveau négative, alors il faut chercher une nouvelle solution en réitérant l'algorithme de bifurcation à partir du dernier vecteur propre singulier. Ce choix trouve une justification dans Ikeda et Murota [83] qui définissent un critère mathématique selon lequel une solution bifurquée est dite linéairement stable, suivant la terminologie employée par les auteurs, si toutes les valeurs propres du système associé sont strictement positives.

Dans le cas de simulations numériques d'essais homogènes de poutres en béton soumises à des forces de traction, dont le comportement est décrit par une modélisation non-locale (régularisation par moyennation du taux d'endommagement sous forme intégrale), Pijaudier-Cabot et Huerta [117] utilisent la technique de recherche de solutions bifurquées proposée par de Borst avec succès pour détecter des solutions non-symétriques.

Parmi les auteurs qui ont également considérés la méthode de recherche de solutions bifurquées par perturbation du champ de déplacements donnée par la relation (3.35) et qui ont précisés leur choix quant à la détermination des paramètres β et α, on trouve

- Wagner et Wriggers [142] qui proposent

$$\beta = 1; \qquad \alpha = \frac{\| \left(\Delta\mathbf{u}^t\right)^{fond,cv} \|}{\tau} \tag{3.43}$$

  où $\|.\|$ désigne une norme euclidienne. Les auteurs conseillent de fixer la variable τ à 100 dans un premier temps de façon à ce que le paramètre α soit petit par rapport à la

norme de la solution fondamentale $(\Delta \mathbf{u}^t)^{fond,cv}$. Ils ajoutent que si la solution obtenue par cette méthode avec ces paramètres ne correspond pas à une solution bifurquée, alors il faut itérer sur d'autres valeurs - non précisées - de τ.

- Crisfield et Wills [45] qui proposent

$$\beta = 1; \qquad \alpha = \pm 10^{-4} \frac{\mid (\Delta \mathbf{u}^t)^{fond,cv} \mid_\infty}{\mid \boldsymbol{\theta}^t \mid_\infty} \tag{3.44}$$

où $\mid . \mid_\infty$ désigne la norme infinie.

- Riks [121] qui, dans le cadre des analyses de flambement, détermine les paramètres β et α par résolution de l'équation polynomiale d'ordre 2

$$p_1 \alpha^2 + 2 p_2 \alpha \beta + p_3 \beta^2 = 0 \tag{3.45}$$

où p_1, p_2 et p_3 sont des coefficients qui dépendent du premier vecteur propre et des dérivées secondes de l'équation du principe des travaux virtuels (3.24). Mais cette technique a l'inconvénient de ne pas être facilement généralisable pour des études dont les non-linéarités ne sont pas d'ordre géométrique. En effet, lorsque la non-linéarité mathématique est introduite par le caractère adoucissant des lois de comportement représentatives du matériau de la structure, alors les équations ne sont, en général, pas continûment différentiables. Le calcul des paramètres p_1, p_2 et p_3 est ainsi compromis. Une solution consisterait à utiliser des méthodes de calcul par différences finies, mais dont le coût de calcul n'est pas envisageable dans le cadre d'une application industrielle.

Enfin, on peut citer les travaux de van der Veen [135] qui considère l'étude de bifurcation des solutions par une analyse aux valeurs propres en prenant en compte les matrices non-symétriques. Le cadre d'application est en fait la mécanique des sols pour laquelle les lois de comportement suivent des règles d'écoulement de type non-associé. Bien que dépassant le cadre simplifié, des matrices symétriques, fixé au début de ce chapitre il est utile de mentionner ces travaux pour trois raisons :

- Tout d'abord, on peut toujours considérer que les opérateurs symétriques sont des cas particuliers d'opérateurs non-symétriques, et par voie de conséquence toute méthode applicable aux cas non-symétriques est également applicable aux cas symétriques.

- Les calculs couplés hydro-mécaniques conduisent à la définition de matrices tangentes de rigidité non-symétriques et, même si ce cas ne sera pas traité dans le cadre de ce travail de recherche, il s'inscrit naturellement dans la continuité de celui-ci.

- Enfin, les formulations régularisées, telles que le second gradient par exemple (dont on donne une présentation détaillée au chapitre 4.1), peuvent également conduire à des matrices tangentes de rigidité non-symétriques soit au travers du champ des doubles contraintes Σ_{ijk}, soit au travers de l'ajout de multiplicateurs de Lagrange.

Pour poursuivre cette discussion, il est nécessaire d'étendre la définition du vecteur propre de la relation (1.11) au cas d'une matrice $\mathbf{K}$ non-symétrique. On dit que $\boldsymbol{\theta}^d$ est un vecteur propre à droite associé à la valeur propre ω si

$$\mathbf{K}.\boldsymbol{\theta}^d = \omega \boldsymbol{\theta}^d \tag{3.46}$$

et que $\boldsymbol{\theta}^g$ est un vecteur propre à gauche associé à la valeur propre ω si

$$\left(\boldsymbol{\theta}^g\right)^T.\mathbf{K} = \omega \boldsymbol{\theta}^g \tag{3.47}$$

L'idée de la méthode, proposée par van der Veen, est de s'assurer que la matrice tangente de rigidité associée à la prédiction de l'algorithme de Newton pour chercher une solution bifurquée soit conditionnellement stable au sens que toutes ses valeurs propres soient strictement positives. Le but est de faciliter la convergence numérique en partant d'un système bien conditionné et d'orienter le calcul pour que toutes les valeurs propres de la solution convergée soient toujours strictement positives.

Ainsi, en supposant qu'une valeur propre (et une seule dans un premier temps, pour des raisons de simplification) soit devenue négative ω^{η^s}, le principe de la méthode est basé sur la technique dite de déflation qui consiste à perturber la matrice tangente de rigidité $\mathbf{K}^{\eta^s}$ pour que la matrice tangente de rigidité associée à la prédiction de la solution bifurquée $\left(\Delta\mathbf{u}^{t+1}\right)^{pert,0}$, que l'on note $\widetilde{\mathbf{K}}$, ait toutes ses valeurs propres positives.

$$\widetilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \rho\omega^{\eta^s}\boldsymbol{\theta}^{s,d}.\left(\boldsymbol{\theta}^{s,g}\right)^T \tag{3.48}$$

où $\boldsymbol{\theta}^{s,d}$ et $\boldsymbol{\theta}^{s,g}$ désignent respectivement les vecteurs propres à droite et à gauche associés à la valeur propre ω^{η^s}, et ρ est un nouveau paramètre qui doit être strictement supérieur à un ($\rho > 1$) pour que la valeur propre négative de $\mathbf{K}^{\eta^s}$ devienne bien une valeur propre positive pour $\widetilde{\mathbf{K}}$.

Pour activer la recherche d'une solution bifurquée, l'auteur utilise la méthode par perturbation de la prédiction du champ de déplacement - équation (3.35) - pour initialiser l'algorithme de Newton. Dans son cas, il montre que

$$\beta = 1; \qquad \alpha = \frac{\rho}{1-\rho}\left(\boldsymbol{\theta}^{s,g}\right)^T\left(\Delta\mathbf{u}^{t+1}\right)^{fond,cv} \tag{3.49}$$

Il ajoute, de plus, que la solution obtenue par de Borst - avec les paramètres β et α des relations respectives (3.40) et (3.41) - est un cas particulier (dépendant de ρ) de la méthode de déflation à une norme près (absence de la propriété (3.36) postulée par de Borst dans la formulation de van der Veen) mais pour laquelle il n'est pas garanti que la condition $\rho > 1$ soit vérifiée (auquel cas $\widetilde{\mathbf{K}}$ n'est pas un opérateur conditionnellement stable au sens de la positivité de toutes les valeurs propres).

Enfin, van der Veen utilise avec succès sa méthode de recherche de solution bifurquée dans le cadre de simulations de biaxiaux dont le comportement matériau non-standard est celui

d'un sol et la modélisation numérique est exprimée par une formulation régularisée des milieux à micro-structures de type Cosserat. En revanche, dans le cas de la simulation numérique d'une excavation souterraine, l'auteur précise qu'il ne lui a pas été possible de trouver une solution bifurquée malgré la présence d'une valeur propre négative.

Chaque stratégie illustrée dans le cadre de cette section peut donc permettre d'identifier une solution bifurquée, mais une seule. Il existe très peu de références bibliographiques qui présentent des techniques de changement de branches dans le but de capter une multitude de branches bifurquées. Celles-ci font l'objet de la section suivante.

3.3.2.2 Les autres techniques

On peut, tout d'abord, rappeler que Papanastasiou et Vardoulakis [111] ont montré, dans le cadre de la simulation d'une excavation souterraine prenant en compte une formulation régularisée par la micro-structure de type Cosserat, que pour obtenir différentes solutions bifurquées il suffit de modifier numériquement la liste des pas de temps.

De façon alternative, Chambon et al [32] proposent une méthode de recherches de solutions bifurquées multiples par initialisation aléatoire de la prédiction du champ de déplacement de l'algorithme de Newton. L'inconvénient de cette stratégie de recherche vient du caractère aléatoire de la prédiction qui, de fait, ne garantit pas une convergence numérique systématique. Toutefois, en utilisant cette technique et en considérant une formulation à micro-structure de type second gradient pour régulariser des simulations numériques prenant en compte un comportement matériau quasi-fragile représentatif des sols, Bésuelle et al [17], puis Sieffert et al [128] ont détecté plusieurs solutions bifurquées respectivement dans le cadre d'essais biaxiaux en compression pour les premiers et dans le domaine géotechnique d'une excavation souterraine pour les seconds.

4

Le second gradient de dilatation

4.1 Un modèle de second gradient simplifié pour traiter les matériaux dilatants 54

4.1.1 Les milieux à microstructure 54

4.1.2 Le modèle second gradient 56

4.1.3 Les milieux à microstructure dilatants 58

4.1.4 Le modèle second gradient de dilatation 59

4.1.5 Le second gradient de dilatation : un cas particulier du second gradient 61

4.2 Formulation numérique 63

4.2.1 La discrétisation spatiale géométrique 64

4.2.1.1 Elément géométrique triangulaire 64

4.2.1.2 Elément géométrique quadrangulaire 65

4.2.2 Non-équivalence des formulations mixtes discrètes 66

4.2.3 Les espaces d'approximation des fonctions de formes des multiplicateurs de Lagrange 67

4.2.4 Un élément fini pénalisé pour le second gradient de dilatation . . . 69

4.2.5 Bilan sur les discrétisations éléments finis 70

4.3 Validation numérique de la formulation second gradient de dilatation 72

4.3.1 Description du problème aux limites : Un essai biaxial 72

4.3.1.1 Géométrie et conditions aux limites 72

4.3.1.2 Loi de comportement 72

4.3.1.3 Les paramètres matériau 73

4.3.2 Présentation des résultats 75

4.3.2.1 Allure typique de la convergence des itérations de Newton 76

4.3.2.2 Influence de l'espace d'interpolation des fonctions de forme 77

4.3.2.3 Influence de la discrétisation spatiale 79
4.3.2.4 Influence de la discrétisation du pas de chargement 80
4.3.2.5 Influence de la pénalisation dans la formulation mixte . . . 81
4.3.2.6 Comparaison des performances numériques des formulations éléments finis 83
4.3.2.7 Les éléments géométriques de type quadrangles 86
4.3.2.8 Contrôle de l'élargissement des bandes 89
4.4 Bilan du chapitre et perspectives à venir 94

4.1 Un modèle de second gradient simplifié pour traiter les matériaux dilatants

Cette partie a pour objectif de présenter, du point de vue théorique, un nouveau modèle de régularisation. Nous en avons déjà proposé une première description dans Fernandes et al [59]. Ce chapitre reprend les points de l'article en question et le complète essentiellement dans sa partie validation numérique et analytique.

En quelques mots, ce modèle peut être perçu comme un modèle de structure à dilatation microscopique contraint, mais aussi comme un modèle second gradient simplifié. Pour bien clarifier le cheminement qui nous permet d'établir les liens entre ces différents modèles, nous présentons dans la suite de ce chapitre :

- un rappel des milieux à microstructure;
- la formulation second gradient obtenue par l'ajout d'une contrainte mathématique dans les milieux à microstructure;
- les milieux à microstructure dilatants, obtenus par simplification des milieux à microstructure;
- la formulation second gradient de dilatation qui peut être déduite soit à partir des milieux à microstructure dilatants, soit par simplification de la formulation second gradient.

On résume en figure 4.1 les deux cheminements qui permettent de définir le modèle second gradient de dilatation que nous allons élaborer dans cette partie.

4.1.1 Les milieux à microstructure

A l'origine de cette théorie, on trouve les travaux de Mindlin [103] [104] dans le cadre de l'élasticité linéaire. Ces travaux ont ensuite été repris par Germain [73] [74] qui en a donné une expression par application du principe des travaux virtuels, base des méthodes numériques en vue d'une application par éléments finis.

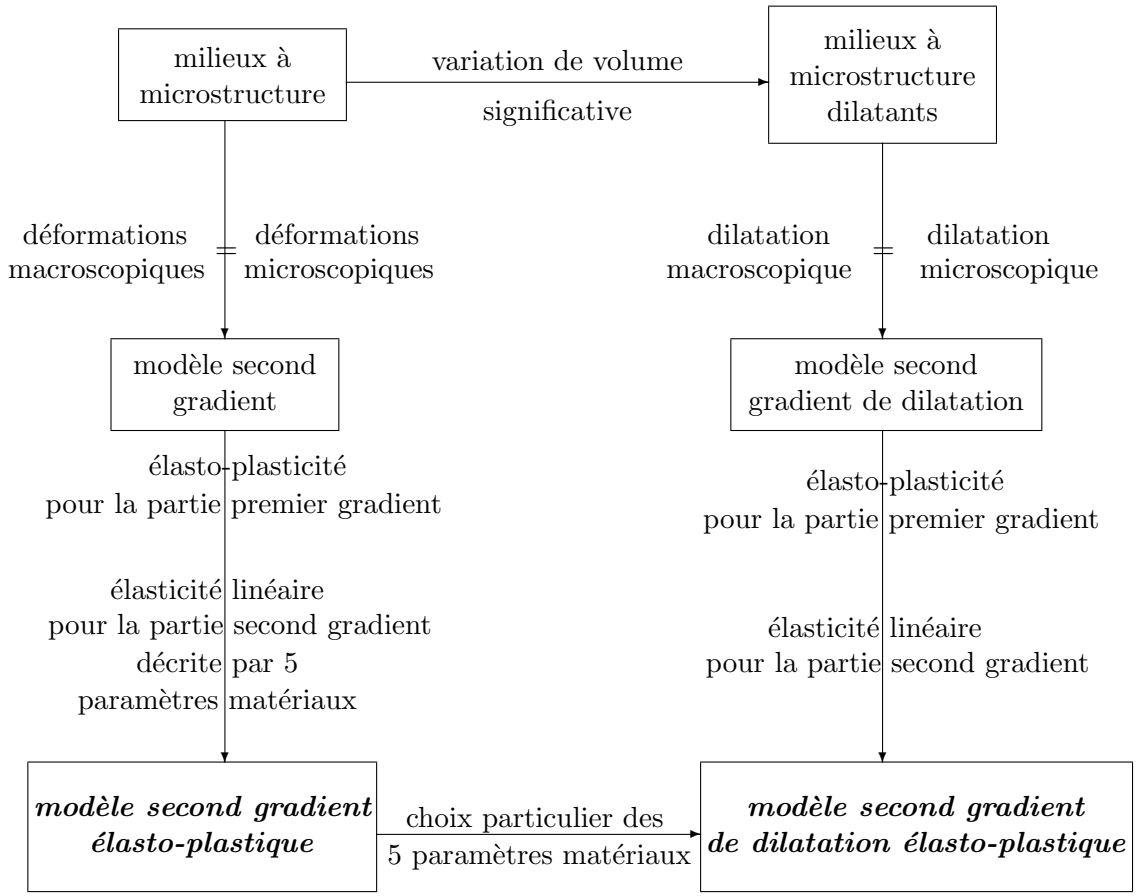


Fig. 4.1. Deux chemins possibles pour définir le modèle second gradient de dilatation à partir des milieux à micro-structure.

Cette théorie implique la définition d'une cinématique enrichie. En plus du champ classique des déplacements u_i, on considère le tenseur du second ordre, noté f_{ij} et appelé gradient cinématique microscopique, qui modélise à la fois les déformations et les rotations à l'échelle des grains de la structure. On attire ici l'attention sur le fait que, dans le cadre des milieux à microstructure, le gradient de déformation microscopique n'a aucune raison d'être lié au gradient d'un quelconque champ dépendant du déplacement macroscopique. Il n'est pas nécessairement symétrique. Le gradient de déformation microscopique f_{ij} est une variable au même titre que le déplacement macroscopique u_i, contrairement au champ de déformation classique (macroscopique), qui lui est obtenu par dérivation

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{4.1}$$

Un fait essentiel à la base de l'écriture de cette théorie porte sur l'énoncé de l'axiome des puissances virtuelles des efforts intérieurs (également connu sous l'appellation de principe d'objectivité ou d'indifférence matérielle).

La puissance virtuelle des efforts intérieurs à un système Ω est nulle dans tout mouve-

ment virtuel rigidifiant le système Ω à l'instant considéré.

En négligeant l'expression des efforts extérieurs de volume pour des raisons de simplification d'écriture, la conséquence de l'axiome des puissances virtuelles des efforts intérieurs conduit à l'expression de la formulation variationnelle, pour tout champ cinématiquement admissible $\left(u_i^*, f_{ij}^*\right)$

$$\int_\Omega \left(\sigma_{ij}\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \tau_{ij}\left(f_{ij}^* - \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j}\right) + \Sigma_{ijk}\frac{\partial f_{ij}^*}{\partial x_k}\right) dv = \int_{\partial\Omega} \left(t_i u_i^* + T_{ij} f_{ij}^*\right) ds \tag{4.2}$$

où t_i et T_{ij} sont respectivement les forces de traction et les doubles forces correspondant aux conditions aux limites, sur la frontière $\partial\Omega$, conjuguées des variables cinématiques.

La formulation variationnelle (4.2) est un autre moyen d'exprimer les relations d'équilibre qui s'expriment

$$\frac{\partial\left(\sigma_{ij} - \tau_{ij}\right)}{\partial x_j} = 0 \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial \Sigma_{ijk}}{\partial x_k} - \tau_{ij} = 0 \tag{4.4}$$

et on trouve pour l'expression des conditions aux limites

$$t_i = \left(\sigma_{ij} - \tau_{ij}\right) n_j \tag{4.5}$$

$$T_{ij} = \Sigma_{ijk} n_k \tag{4.6}$$

où n_j désigne la normale sortante à la frontière $\partial\Omega$.

Pour compléter le problème, il faut définir les lois de comportement qui vont lier les variables statiques σ_{ij}, τ_{ij} et Σ_{ijk} respectivement à l'histoire des variables cinématiques de $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$, $\left(f_{ij} - \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$ et $\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial x_k}$.

Ces modèles ont déjà prouvé qu'ils étaient efficaces du point de vue de la régularisation. Cependant, ils sont complexe dans leur utilisation à cause des différentes lois de comportement à spécifier. De plus, la discrétisation par la méthode des éléments finis en 3D induit l'ajout de 9 degrés de liberté supplémentaires par noeud correspondant aux composantes f_{ij}. Les temps de calcul sont alors relativement importants et par conséquent non-compatibles avec le type d'études que nous souhaitons réaliser.

4.1.2 Le modèle second gradient

En partant du modèle précédent, exprimé par la relation (4.2), on peut restreindre la cinématique en forçant le gradient microscopique a être égal au gradient macroscopique (voir Chambon et al [31] pour une analyse détaillée).

$$f_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{4.7}$$

L'avantage de cette hypothèse est de réduire le nombre de variables indépendantes et d'introduire des lois de comportement plus simples. On peut trouver une justification cohérente de cette hypothèse dans les travaux de Calvetti et al [26] ou encore Matsushima et al [101] qui, dans le cadre des matériaux granulaires, ont montré expérimentalement que les micro-rotations sont égales aux macro-rotations.

Avec le choix de cette hypothèse, il est naturel de choisir également

$$f^*_{ij} = \frac{\partial u^*_i}{\partial x_j} \tag{4.8}$$

L'expression de la puissance virtuelle (4.2) remaniée après quelques manipulations algébriques s'écrit alors pour tout champ de déplacement cinématiquement admissible u^*_i

$$\int_\Omega \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u^*_i}{\partial x_j} + \Sigma_{ijk} \frac{\partial^2 u^*_i}{\partial x_j \partial x_k} \right) dv = \int_{\partial\Omega} \left(p_i u^*_i + P_i D u^*_i \right) ds \tag{4.9}$$

où p_i et P_i sont les conditions aux limites définies par

$$\begin{aligned} p_i = \sigma_{ij} n_j - n_k n_j D\Sigma_{ijk} - \frac{D\Sigma_{ijk}}{Dx_k} n_j - \frac{D\Sigma_{ijk}}{Dx_j} n_k \\ + \frac{Dn_l}{Dx_l} \Sigma_{ijk} n_j n_k - \frac{Dn_j}{Dx_k} \Sigma_{ijk} \end{aligned} \tag{4.10}$$

et

$$P_i = \Sigma_{ijk} n_j n_k. \tag{4.11}$$

On peut remarquer que l'hypothèse sur l'égalité entre champ de déformations microscopique et macroscopique (4.7) a un impact direct sur l'expression des conditions aux limites. La raison vient du fait qu'à présent, les variables u_i et f_{ij}, et donc u^*_i et f^*_{ij}, ne sont plus indépendantes.

Il a déjà été montré que ce modèle corrige la dépendance de l'épaisseur des bandes de localisation par rapport à la discrétisation du maillage (voir Chambon et al [29], et Matsushima et al [100]). Pour cela, le modèle peut être utilisé en prenant en compte deux lois de comportement différentes, l'une pour décrire la partie premier gradient classique et l'autre pour le second gradient. En ce qui concerne cette dernière, n'importe quelle relation classique peut-être considérée, mais jusqu'à aujourd'hui, c'est en général de l'élasticité linéaire qui a été choisie. C'est d'ailleurs également dans ce cadre que nous poursuivrons ce travail. Pour les matériaux isotropes, Mindlin [104] a étendu la théorie de l'élasticité linéaire qui implique une loi de comportement second gradient pour laquelle sont introduits 5 nouveaux paramètres indépendants. Cette expression sera détaillée en section 4.1.5.

Mais la difficulté de cette approche est induite par la condition que doivent vérifier les champs u_i et u_i^*, celle de devoir être deux fois dérivables. La mise en oeuvre d'une telle condition pour un traitement par la méthode des éléments finis implique l'intégration d'éléments C1-continus (voir Chambon et al [29] dans le cadre d'une formulation second gradient unidimensionnelle ou encore Zervos et al [147] qui dans une approche similaire en gradient de déformation utilisent des éléments finis de Hermite).

Un moyen pour contourner cette difficulté est d'introduire une formulation mixte dans l'écriture de la formulation variationnelle (4.9). Pour cela, il faut ajouter la contrainte mathématique (4.7) par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange (voir, entre autres, dans le cas du second gradient Shu et al [127] et Matsushima et al [100]). L'expression de la puissance virtuelle s'écrit alors pour tout champ cinématiquement admissible $(u_i^*, f_{ij}^*, \lambda_{ij}^*)$

$$\int_\Omega \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \Sigma_{ijk} \frac{\partial f_{ij}^*}{\partial x_k} - \lambda_{ij} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} - f_{ij}^* \right) + \lambda_{ij}^* \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - f_{ij} \right) \right) dv = \int_{\partial\Omega} (p_i u_i^* + P_i D u_i^*)\, ds \tag{4.12}$$

où λ_{ij} sont les multiplicateurs de Lagrange. En comparant les équations 4.2 et 4.12, on peut interpréter les multiplicateurs de Lagrange comme des micro-contraintes.

L'avantage de cette nouvelle formulation est liée à la méthode des éléments finis puisque les interpolations des inconnues nodales, que sont $(u_i, f_{ij}, \lambda_{ij})$, ne nécessitent que des conditions de C0-continuité. L'inconvénient est dû, en revanche, à l'ajout des nouveaux degrés de liberté qui ne permet pas de faire diminuer le nombre d'inconnues du problème par rapport aux modélisations classiques des milieux à microstructure du chapitre précédent (4.1.1).

4.1.3 Les milieux à microstructure dilatants

Le principe des milieux à microstructure est basé sur la prise en compte des déformations microscopiques pour introduire dans l'expression du modèle une longueur interne. Nous souhaitons conserver ce principe mais en introduisant un minimum d'inconnues. Bien entendu, cette condition va impliquer une restriction dans l'applicabilité de la méthode. On va déterminer cette restriction en fonction du type de simulations numériques que nous souhaitons réaliser. Ce sera dans le contexte des géomatériaux.

Desrues et al [48] ont montré, parmi d'autres, par des essais expérimentaux en laboratoire, que les géomatériaux étaient souvent très dilatants et particulièrement à l'intérieur des bandes de localisation. Définir un modèle de type second gradient basé uniquement sur la prise en compte de la dilatance apparaît donc comme une solution séduisante puisqu'on introduit qu'une nouvelle inconnue scalaire.

Considérons ainsi dans un premier temps, c'est l'objet de cette section, un milieu continu dilatant à microstructure. La cinématique de celui-ci est définie par le champ de

déplacement habituel u_i, la variation volumique microscopique, notée χ et ses gradients. Par dualité à cette cinématique enrichie, est introduite la statique définie par les contraintes macroscopiques classiques σ_{ij}, la contrainte microscopique de dilatation κ et les doubles contraintes vectorielles de dilatation S_j. La variable scalaire κ est la composante conjuguée de la déformation volumique relative (du champ macroscopique par rapport au microscopique) $\varepsilon_V - \chi$, tandis que les composantes S_j définissent un vecteur qui est le conjugué du gradient de la dilatation microscopique $\dfrac{\partial \chi}{\partial x_j}$.

De façon analogue à l'expression de la puissance virtuelle des milieux à microstructure on trouve pour les milieux à microstructure dilatants, que pour tout champ cinématiquement admissible (u_i^*, χ^*)

$$\int_\Omega \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \kappa \left(\varepsilon_V^* - \chi^* \right) + S_j \frac{\partial \chi^*}{\partial x_j} \right) dv = \int_{\partial\Omega} \left(t_i u_i^* + m \chi^* \right) ds. \tag{4.13}$$

pour laquelle

$$t_i = \left(\sigma_{ij} + \kappa \delta_{ij} \right) n_j \tag{4.14}$$

et

$$m = S_j n_j. \tag{4.15}$$

sont les conditions aux limites, exprimées sur la frontière $\partial\Omega$, conjuguées par dualité aux variables cinématiques u_i et χ respectivement.

Les relations d'équilibre de ce problème s'écrivent

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} = 0 \tag{4.16}$$

$$\kappa + \frac{\partial S_j}{\partial x_j} = 0 \tag{4.17}$$

Le système d'équations composé de (4.14), (4.15), (4.16) et (4.17) est obtenu classiquement par application du théorème de la divergence et par une intégration par partie de (4.13).

On trouve une présentation de ces milieux dans le cadre de l'élasticité linéaire dans les travaux de Cowin et Nunziato [43]. Les auteurs proposent ensuite quelques exemples d'application de cette théorie. Citons entre autre l'étude de la flexion d'une poutre composée d'un matériau poreux élastique isotrope.

4.1.4 Le modèle second gradient de dilatation

Comme cela a été fait lors de la mise au point du modèle second gradient (section 4.1.2), on peut introduire une contrainte mathématique pour forcer l'égalité entre les déformations volumiques macroscopique ε_V et microscopique χ dans la formulation variationnelle des milieux à microstructure dilatants (4.13)

$$\chi = \varepsilon_V \tag{4.18}$$

Il est alors naturel de choisir

$$\chi^* = \varepsilon_V^* \tag{4.19}$$

On trouve après quelques manipulations algébriques la nouvelle expression des puissances virtuelles, pour tout champ cinématiquement admissible u_i^*

$$\int_\Omega \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + S_j \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_i \partial x_j} \right) dv = \int_{\partial\Omega} \left(p_i u_i^* + P n_i D u_i^* \right) ds \tag{4.20}$$

où p_i et P sont les conditions aux limites (dont le calcul est détaillé en Annexe 8.5)définies par

$$p_i = \sigma_{ij} n_j - n_i n_j D S_j - \frac{D S_j}{D x_j} n_i - \frac{D S_j n_j}{D x_i} + \frac{D n_p}{D x_p} S_j n_j n_i \tag{4.21}$$

et

$$P = S_j n_j \tag{4.22}$$

Comme pour le modèle second gradient du chapitre 4.1.2 par rapport au modèle micromorphique de la section 4.1.1, l'expression des conditions aux limites du modèle second gradient de dilatation sous contrainte (4.20) est modifiée par rapport à celle des modèles à microstructure dilatants (4.13). La raison vient du fait que les variables u_i^* et χ^* ne sont plus indépendantes dans le cas second gradient de dilatation.

Pour des raisons de simplicité, on suppose que $P = 0$. La conséquence de cette hypothèse est que $S_j n_j = 0$ sur la frontière, ce qui réduit (4.21) à

$$p_i = \sigma_{ij} n_j - \left(n_j D S_j + \frac{D S_j}{D x_j} \right) n_i = \sigma_{ij} n_j - \frac{\partial S_j}{\partial x_j} n_i \tag{4.23}$$

Une propriété remarquable de cette condition vient du fait qu'elle se décompose en la partie classique $\sigma_{ij} n_j$ et un second terme qui n'induit pas de composantes de cisaillement.

L'équation d'équilibre s'écrit

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 S_j}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \tag{4.24}$$

Mais, le but de cette démarche est de définir un modèle régularisant, objectif par rapport à la discrétisation spatiale, ayant le moins d'inconnues à résoudre et qui soit adapté pour une application dans le cadre des géomatériaux par la méthode des éléments finis. Or introduire directement dans l'expression de la puissance virtuelle des milieux à microstructure dilatants (4.13) l'hypothèse sur l'égalité des déformations volumiques (4.19) a comme conséquence que le champ de déplacement ainsi que sa divergence doivent être continus et dérivables (voir (4.20)). Cela revient à devoir prendre en compte des éléments finis C1-continus.

On propose donc d'introduire la contrainte mathématique (4.18) au moyen d'un multiplicateur de Lagrange. On obtient alors à partir de (4.20) le système d'équations pour tout

champ cinématiquement admissible $(u_i^*, \chi^*, \Lambda^*)$

$$\int_\Omega \left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^* + S_j \frac{\partial \chi^*}{\partial x_j} - \Lambda \left(\varepsilon_V^* - \chi^* \right) \right) dv = \int_{\partial\Omega} \left(p_i u_i^* + P n_i D u_i^* \right) ds \tag{4.25}$$

$$\int_\Omega \Lambda^* \left(\varepsilon_V - \chi \right) dv = 0 \tag{4.26}$$

ou de façon équivalente

$$\int_\Omega \left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^* + S_j \frac{\partial \chi^*}{\partial x_j} - \Lambda \left(\varepsilon_V^* - \chi^* \right) + \Lambda^* \left(\varepsilon_V - \chi \right) \right) dv = \int_{\partial\Omega} \left(p_i u_i^* + P n_i D u_i^* \right) ds \tag{4.27}$$

où tous les champs cinématiques sont au plus C0-continus. On peut remarquer que les termes faisant intervenir les multiplicateurs de Lagrange sont de signes opposés. La raison principale est de préserver une matrice tangente de rigidité définie positive pour la résolution du système d'équations par un algorithme de Newton. L'inconvénient vient du fait que, du coup, la matrice tangente de rigidité est nécessairement toujours non-symétrique.

La comparaison de la formulation mixte du modèle second gradient de dilatation (4.27) avec celle du second gradient (4.12) montre clairement que les tenseurs d'ordre 2 de (4.12), f_{ij} et λ_{ij}, sont remplacés par les deux champs scalaires χ et Λ dans (4.27).

4.1.5 Le second gradient de dilatation : un cas particulier du second gradient

En comparant les expressions (4.9) et (4.20), on montre que si la loi de comportement second gradient vérifie les relations sur les doubles contraintes suivantes

$$\begin{cases} S_1 = \Sigma_{111} = 2\Sigma_{212} = 2\Sigma_{221} = 2\Sigma_{313} = 2\Sigma_{331} \\ S_2 = \Sigma_{222} = 2\Sigma_{112} = 2\Sigma_{121} = 2\Sigma_{323} = 2\Sigma_{332} \\ S_3 = \Sigma_{333} = 2\Sigma_{113} = 2\Sigma_{131} = 2\Sigma_{223} = 2\Sigma_{232} \\ \Sigma_{122} = \Sigma_{123} = \Sigma_{132} = \Sigma_{133} = 0 \\ \Sigma_{211} = \Sigma_{213} = \Sigma_{231} = \Sigma_{233} = 0 \\ \Sigma_{311} = \Sigma_{312} = \Sigma_{321} = \Sigma_{322} = 0 \end{cases} \tag{4.28}$$

alors le modèle second gradient se simplifie en second gradient de dilatation

$$\int_\Omega \left(\Sigma_{ijk} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j \partial x_k} \right) dv = \int_\Omega \left(S_j \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j \partial x_i} \right) dv, \tag{4.29}$$

pour tout champ cinématiquement admissible u_i^*.

On peut donner un exemple simple de cette équivalence dans le cadre bidimensionnel (2D). Supposons pour cela que les lois de comportement associées aux parties premier

et second gradient sont découplées et que les doubles contraintes dépendent des dérivées secondes du champ de déplacement de façon linéaire et isotrope. Dans ce cas, Mindlin [104] a montré que

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{111} \\ \Sigma_{112} \\ \Sigma_{121} \\ \Sigma_{122} \\ \Sigma_{211} \\ \Sigma_{212} \\ \Sigma_{221} \\ \Sigma_{222} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{12345} & 0 & 0 & a^{23} & 0 & a^{12} & a^{12} & 0 \\ 0 & a^{145} & a^{145} & 0 & a^{25} & 0 & 0 & a^{12} \\ 0 & a^{145} & a^{145} & 0 & a^{25} & 0 & 0 & a^{12} \\ a^{23} & 0 & 0 & a^{34} & 0 & a^{25} & a^{25} & 0 \\ 0 & a^{25} & a^{25} & 0 & a^{34} & 0 & 0 & a^{23} \\ a^{12} & 0 & 0 & a^{25} & 0 & a^{145} & a^{145} & 0 \\ a^{12} & 0 & 0 & a^{25} & 0 & a^{145} & a^{145} & 0 \\ 0 & a^{12} & a^{12} & 0 & a^{23} & 0 & 0 & a^{12345} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{111} \\ \chi_{112} \\ \chi_{121} \\ \chi_{122} \\ \chi_{211} \\ \chi_{212} \\ \chi_{221} \\ \chi_{222} \end{bmatrix}, \tag{4.30}$$

où $\chi_{pqr} = \dfrac{\partial^2 u_p}{\partial x_q \partial x_r}$ et tous les termes dépendent des cinq constantes a^1, a^2, a^3, a^4, a^5 définies par Mindlin selon la relation suivante

$$\begin{cases} a^{12345} = 2(a^1 + a^2 + a^3 + a^4 + a^5) \\ a^{23} = a^2 + 2a^3 \\ a^{12} = a^1 + \dfrac{a^2}{2} \\ a^{145} = \dfrac{a^1}{2} + a^4 + \dfrac{a^5}{2} \\ a^{25} = \dfrac{a^2}{2} + a^5 \\ a^{34} = 2(a^3 + a^4) \end{cases} \tag{4.31}$$

La relation (4.28) conduit alors au système

$$\begin{cases} a^{12345} = 2a^{12} \\ a^{23} = 0 \\ a^{12} = 2a^{145} \\ a^{25} = 0 \\ a^{34} = 0 \end{cases} \tag{4.32}$$

En remplaçant ces conditions dans (4.30) on a

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{111} \\ \Sigma_{112} \\ \Sigma_{121} \\ \Sigma_{122} \\ \Sigma_{211} \\ \Sigma_{212} \\ \Sigma_{221} \\ \Sigma_{222} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^1 & a^1 & 0 \\ 0 & \frac{a^1}{2} & \frac{a^1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & a^1 \\ 0 & \frac{a^1}{2} & \frac{a^1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & a^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a^1}{2} & \frac{a^1}{2} & 0 \\ a^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a^1}{2} & \frac{a^1}{2} & 0 \\ 0 & a^1 & a^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{111} \\ \chi_{112} \\ \chi_{121} \\ \chi_{122} \\ \chi_{211} \\ \chi_{212} \\ \chi_{221} \\ \chi_{222} \end{bmatrix}. \tag{4.33}$$

A partir des conditions (4.28) et de la définition de ε_V, on montre l'égalité (4.29) si la loi de comportement associée à la partie second gradient de dilatation s'écrit

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a^1 & 0 \\ 0 & 3a^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial x_2} \end{bmatrix}. \tag{4.34}$$

4.2 Formulation numérique

L'objectif numérique de la formulation mixte second gradient de dilatation (4.27) est d'être la moins coûteuse possible en terme de temps de calcul et précise sur la qualité des résultats (notamment sur l'approximation de l'égalité entre déformations volumiques macroscopique et microscopique (4.18)). Cette qualité va dépendre du choix des fonctions d'interpolation des inconnues nodales (degrés de liberté) que sont les déplacements u_i, les déformations volumiques microscopique χ et les multiplicateurs de Lagrange. Ces fonctions d'interpolation sont les fonctions de forme de la méthode des éléments finis, dont on trouve les expressions mathématiques dans Zienkiewicz [149]. Le choix de ces fonctions d'interpolation est une étape primordiale dans l'optique de bien respecter l'objectif numérique.

Pour cela on montre que :

- Partie 4.2.1 : il est préférable de considérer des éléments géométriques triangulaires plutôt que des quadrangles avec la formulation second gradient.

- Partie 4.2.2 : il n'y a plus équivalence, dans le cas des formulations mixte discrètes, entre le second gradient de dilatation et le second gradient simplifié.

- Partie 4.2.3 : l'epace des fonctions de formes P0 (constantes par élément) est l'espace optimal d'interpolations des multiplicateurs de Lagrange.

- Partie 4.2.4 : l'ajout d'un terme de pénalisation dans l'expression énergétique de la formulation second gradient de dilatation est nécessaire pour accroître la performance numérique des calculs.

4.2.1 La discrétisation spatiale géométrique

La simulation numérique par la méthode d'approximation par éléments finis implique trois étapes préliminaires :

- L'approximation de la géométrie de la structure par sous-domaines (les éléments). Dans le cas bidimensionel, ce sont soit des triangles, soit des quadrangles.

- La définition des fonctions de transformations géométriques des noeuds de l'élément réel par rapport à l'élément de référence.

- La définition des fonctions d'interpolation des inconnues nodales.

Les fonctions de transformations géométriques et d'interpolations ont les mêmes propriétés mathématiques et sont en général, des fonctions polynômiales. Lorsqu'elles sont identiques, l'élément fini est dit iso-paramétrique. Si le degré des polynômes des fonctions d'interpolations des inconnues nodales est plus élevé que celui des fonctions de transformations géométriques, l'élément fini est dit sous-paramétrique.

Dans le cas de la méthode d'approximation par éléments finis, il existe divers types d'éléments (définis par les trois étapes préliminaires décrites ci-dessus) construits sur des principes mathématiques rigoureux (voir entre autres Zienkiewicz [149]). La particularité des formulations mixtes, telle que celle que nous proposons pour le second gradient de dilatation (4.27), vient du fait qu'elles introduisent une contrainte mathématique entre différentes inconnues nodales. Pour conserver la propriété des éléments finis selon laquelle l'erreur de l'approximation nodale par rapport à la solution exacte tend vers zéro lorsque la taille des éléments tend vers zéro, il faut assurer la cohérence entre les espaces d'approximations des inconnues nodales. Dans notre situation, la contrainte mathématique s'écrit

$$\chi = \varepsilon_V \tag{4.35}$$

Il faut donc assurer, le mieux possible, la cohérence entre l'espace d'approximation de la déformation volumique microscopique χ et celui de la déformation volumique macroscopique ε_V. Or, nous souhaitons conserver comme espace d'approximation du champ des déplacements les bases polynômiales du second ordre pour des raisons déjà évoquées au chapitre 1.3.3 et qui sont fondées sur les couplages hydro-mécaniques.

4.2.1.1 Elément géométrique triangulaire

Dans le cas des éléments géométriques triangulaires, la base polynômiale d'approximation du second ordre définie sur l'élément de référence est caractérisée par les monômes

$$< P > = < 1; \quad \xi; \quad \eta; \quad \xi^{(2)}; \quad \xi\eta; \quad \eta^{(2)} > \tag{4.36}$$

où ξ et η sont les coordonnées des points de l'élément de référence. C'est dans cette base que sont formulées les fonctions de formes, dites P2, des composantes du champ de déplacement. La déformation volumique macroscopique ε_V est calculée par dérivation de ces fonctions de formes. La base polynômiale d'approximation de ε_V est du premier ordre

$$< P > = < 1; \quad \xi; \quad \eta > \tag{4.37}$$

C'est donc dans cette base, dite P1, qu'il faut définir les composantes de déformations volumiques microscopiques χ pour assurer au mieux la contrainte mathématique (4.35). Ainsi, sur l'élément triangulaire de référence il est cohérent de choisir des interpolations du second ordre pour le champ des déplacements u_i et du premier ordre pour les déformations volumiques microscopiques χ. A noter tout de même, que si les bases d'approximation sont identiques, la variable χ n'approche pas complètement ε_V car les fonctions de formes définissant la première assurent, en plus, la condition de continuité des interpolations d'un élément à un autre.

Sur l'élément réel, il faut également tenir compte des fonctions de transformations géométriques à cause du terme en gradient introduit lors du calcul des composantes du champ de déformations volumiques macroscopique $\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)$.

- Si le champ de déplacement s'inscrit dans un élément fini quadratique de type sous-paramétrique - fonction d'interpolation du second ordre pour u_i et la fonction de transformations géométriques du premier ordre pour x_i - alors la cohérence sur les espaces d'approximations est immédiate, étant donné que dans ce cas les dérivées des composantes géométriques sont constantes.

- Si l'élément fini quadratique est de type iso-paramétrique - fonction d'interpolation et de transformations géométriques du second ordre - alors les déformations volumiques macroscopiques ε_V sont décrites par des fractions rationnelles. La qualité de l'approximation de la contrainte mathématique (4.35) est dans ce cas liée à la courbure des éléments (on montre en annexe 8.2 que, pour l'élément réel, si les noeuds milieux sont tous alignés avec leurs noeuds sommets respectifs alors les dérivées géométriques sont également constantes - la fraction rationnelle se réduisant ainsi à un polynôme).

4.2.1.2 Elément géométrique quadrangulaire

Dans le cas des éléments géométriques quadrangulaires, on considère la base polynômiale d'approximation du second ordre (de type Serendip ou encore incomplète) définie sur l'élément de référence à huit noeuds par les monômes

$$< P > = < 1; \quad \xi; \quad \eta; \quad \xi^{(2)}; \quad \xi\eta; \quad \eta^{(2)}; \quad \xi^{(2)}\eta; \quad \xi\eta^{(2)} > \tag{4.38}$$

où ξ et η sont les coordonnées des points de l'élément de référence. C'est dans cette base que sont formulées les fonctions de formes, dites Q2, des composantes du champ de

déplacement. La déformation volumique macroscopique ε_V est calculée par dérivation de ces fonctions de formes. La base polynômiale d'approximation de ε_V est

$$< P > = < 1; \quad \xi; \quad \eta; \quad \xi\eta; \quad \xi^{(2)}; \quad \eta^{(2)} > \tag{4.39}$$

C'est donc dans cette base qu'il faut définir les composantes de déformations volumiques microscopiques χ pour assurer au mieux la contrainte mathématique (4.35). Le premier inconvénient de cet élément vient donc du fait qu'il faut :

- soit garder la même base polynômiale Q2 pour le champ de déplacement et pour les déformations volumiques microscopiques. On peut ainsi remettre en cause les performances numériques liées à ce choix puisque le nombre de degrés de liberté supplémentaires sera conséquent;

- soit définir pour le champ des déformations volumiques microscopiques une nouvelle base polynômiale Q1 enrichie par deux fonctions bulles. Les performances numériques devraient ainsi être améliorées par rapport à la solution proposée précédemment. En revanche, 2 degrés de liberté par élément de plus que la base polynômiale Q1 sont nécessaire;

- soit considérer comme pour les éléments triangulaires une base polynômiale Q1 moins riche pour les déformations volumiques microscopiques mais auquel cas il y a un risque que l'erreur sur la contrainte mathématique (4.35) ne tende pas vers zéro malgré une taille de maille de plus en plus fine.

Le second inconvénient d'une discrétisation géométrique en quadrangles est dû au calcul, sur l'élément réel, du terme en gradient introduit par les déformations volumiques macroscopiques. Dans ce cas, les fractions rationnelles ne se réduisent pas à des fonctions polynômiales quel que soit le degré des fonctions de transformations géométriques.

Nous privilégions donc dans la suite de ce document les structures discrétisées en éléments triangles.

4.2.2 Non-équivalence des formulations mixtes discrètes

On a montré au chapitre 4.1.5 que le second gradient de dilatation (4.20) est un cas particulier du second gradient (4.9) pour un jeu de paramètres matériau donné (4.32) du comportement second gradient de l'élasticité linéaire. Dans ce cas, les doubles contraintes dépendent des dérivées secondes du champ de déplacement de façon linéaire et isotrope. Les relations entre doubles contraintes et dérivées secondes sont établies, entre autres, par application du théorème de Schwarz qui stipule que les dérivées partielles d'une fonction en un point ne dépendent pas de l'ordre dans lequel se fait la dérivation si toutes les dérivées partielles existent et sont continues. Dans ce cas on a

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} \tag{4.40}$$

Or, dans le cas discret des formulations mixtes considérées, cette propriété n'est pas vérifiée :

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} \neq \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_j} \tag{4.41}$$

On montre aisément (4.41) en considérant simplement les fonctions de formes du premier ordre (des éléments triangulaires ou quadrangulaires indifféremment). Par conséquent, dans le cadre de l'élasticité linéaire, l'expression qui lie les doubles contraintes Σ_{ijk} aux gradients du champ des déformations microscopiques $\dfrac{\partial f_{lm}}{\partial x_n}$ dans le cas de la formulation mixte du second gradient (4.12) et qui s'écrit

$$\Sigma_{ijk} = D_{ijklmn} \frac{\partial f_{lm}}{\partial x_n} \tag{4.42}$$

où D_{ijklmn} est fonction des 5 paramètres $(a^1, a^2, a^3, a^4, a^5)$, n'est pas équivalente à la relation proposée par Mindlin et formulée en (4.30) à moins d'assurer comme contraintes mathématiques supplémentaires par élément fini

$$\sum_{p=1}^{NS} f_{lm}^p \frac{\partial N^p}{\partial x_n} = \sum_{p=1}^{N} f_{ln}^p \frac{\partial N^p}{\partial x_m} \qquad \forall\ l, m, n \tag{4.43}$$

où NS est le nombre de noeuds sommets de l'élément géométrique et où f_{lm}^p et N^p désignent respectivement les valeurs de la déformation microscopique f_{lm} et de la fonction de forme du premier ordre N en chaque noeud sommet p.

On peut remarquer, que cette difficulté ne se pose pas dans le cas du second gradient de dilatation pour lequel il n'y a aucune contrainte à vérifier sur le gradient du champ de déformation volumique microscopique $\dfrac{\partial \chi}{\partial x_j}$.

Deux constatations méritent donc une attention particulière :

- Tout d'abord, les simulations numériques considérant les formulations mixtes second gradient de dilatation et second gradient complet restreint aux paramètres particuliers (4.32) ne convergent pas vers des solutions strictement identiques.

- Il y a une erreur d'approximation de la formulation mixte discrète second gradient (4.12) par rapport à la formulation continue.

4.2.3 Les espaces d'approximation des fonctions de formes des multiplicateurs de Lagrange

Le choix des fonctions de forme des multiplicateurs de Lagrange doit être fait de telle sorte que l'espace d'interpolation de ces multiplicateurs soit compatible avec les espaces d'interpolation des déplacements macroscopiques u_i et des déformations microscopiques χ. Le respect de cette condition, connue sous le nom de "condition inf-sup", assure la stabilité

numérique de la formulation mixte discrète vis-à-vis des multiplicateurs de Lagrange et évite que les simulations aboutissent à des verrouillages numériques. Cette condition s'écrit

$$\inf_{\lambda^h \in L^h} A^h \geq \alpha^h > \alpha > 0 \tag{4.44}$$

avec

$$A^h = \sup_{u_i^h, \chi^h \in U^h} \frac{\displaystyle\int_{\Omega^h} \lambda^h \left(\varepsilon_V^h - \chi^h\right)}{\|\lambda^h\|_{L^h} \|u_i^h, \chi^h\|_{U^h}} \tag{4.45}$$

où L^h et U^h désignent les espaces d'approximation des champs cinématiquement admissibles respectivement pour λ^h et pour $\left(u_i^h, \chi^h\right)$, $\|.\|_{L^h}$ et $\|.\|_{U^h}$ sont des normes dans L^2, et α est une constante indépendante de la discrétisation spatiale et strictement positive.

La vérification de cette condition s'interprète phénoménologiquement par le fait qu'une petite erreur due à l'imprécision du schéma numérique n'aura qu'une conséquence d'amplitude bornée sur la solution du problème. C'est dans ce sens qu'on parle de stabilité numérique. Mathématiquement, il s'agit d'assurer l'existence (et donc éviter les verrouillages numériques pour cause de problèmes surcontraints) et l'unicité de la solution d'un problème bien posé. Numériquement, enfin, elle traduit le fait que l'espace d'approximation des solutions L^h doit être suffisamment riche mais pas trop par rapport à l'espace U^h.

Pour déterminer les espaces d'approximation des multiplicateurs de Lagrange dans le cas des formulations second gradient de dilatation, on s'intéresse aux espaces d'approximation des multiplicateurs de Lagrange qui ont été proposés dans le cas des formulations mixtes pour les problèmes d'élasticité incompressible. La condition inf-sup dans ce cas particulier s'écrit

$$\inf_{\lambda^h \in L^h} B^h \geq \beta^h > \beta > 0 \tag{4.46}$$

avec

$$B^h = \sup_{u_i^h \in U^h} \frac{\displaystyle\int_{\Omega^h} \lambda^h \operatorname{div} u_i^h}{\|\lambda^h\|_{L^h} \|u_i^h\|_{U^h}} \tag{4.47}$$

L'intérêt que nous portons aux éléments incompressibles vient du fait qu'il existe déjà une littérature scientifique très riche (voir entre autres Chapelle et Bathe [37]) sur ces éléments et notamment sur les espaces d'interpolation qui vérifient la condition inf-sup. En remarquant que

$$A^h = \sup_{u_i^h, \chi^h \in U^h} \frac{\displaystyle\int_{\Omega^h} \lambda^h \left(\varepsilon_V^h - \chi^h\right)}{\|\lambda^h\|_{L^h} \|u_i^h, \chi^h\|_{U^h}} \geq \sup_{\substack{u_i^h \in U^h \\ \chi^h = 0}} \frac{\displaystyle\int_{\Omega^h} \lambda^h \left(\varepsilon_V^h\right)}{\|\lambda^h\|_{L^h} \|u_i^h\|_{U^h}} = A^{0,h} \tag{4.48}$$

on en déduit

$$A^h \geq A^{0,h} = B^h \tag{4.49}$$

On interprète cette relation comme la preuve que si les espaces d'approximation sont numériquement stables au sens de la condition inf-sup pour les formulations mixtes des problèmes d'élasticité incompressible alors ils le sont également dans le cas des problèmes second gradient de dilatation.

C'est pourquoi, on a considéré les trois interpolations polynômiales suivantes pour discrétiser l'espace d'approximation des multiplicateurs de Lagrange :

- Une discrétisation de Λ constante par élément. On note cet élément (u_i - P2 ; χ - P1 ; Λ - P0). L'espace d'approximation des multiplicateurs de Lagrange est ainsi moins riche que celui des déformations. On interprète numériquement ce choix comme celui qui permet d'assurer l'égalité entre déformations volumiques macroscopique et microscopique en moyenne par élément. Pour s'en persuader, il suffit de considérer l'expression de cette égalité sous forme intégrale (4.26). Dans le cas des éléments incompressibles, une telle formulation (P2 en déplacements et constante sur les multiplicateurs de Lagrange) est numériquement stable et converge avec une précision linéaire.

- Une discrétisation de Λ par une fonction polynômiale d'ordre 1. On note cet élément (u_i - P2 ; χ - P1 ; Λ - P1). L'espace d'approximation des multiplicateurs de Lagrange est identique à celui des déformations. Dans le cas des éléments incompressibles, une telle formulation (P2 en déplacements et P1 sur les multiplicateurs de Lagrange) est numériquement stable et converge avec une précision du second ordre. Il s'agit de l'élément le plus répandu dans la littérature des éléments incompressibles.

- Une discrétisation de Λ par une fonction polynômiale d'ordre 2. On note cet élément (u_i - P2 ; χ - P1 ; Λ - P2). L'espace d'approximation des multiplicateurs de Lagrange est identique à celui des déplacements. Dans le cas des éléments incompressibles, une telle formulation (P2 en déplacements et P2 sur les multiplicateurs de Lagrange) est instable au sens de la condition inf-sup mais il est précisé que ce type d'élément fournit parfois de bons résultats et converge avec une précision du second ordre.

4.2.4 Un élément fini pénalisé pour le second gradient de dilatation

De façon alternative aux méthodes de formulations mixtes, il est numériquement possible d'imposer la contrainte mathématique sur l'égalité des déformations volumiques macroscopique et microscopique (4.18) par une méthode de pénalisation. Les multiplicateurs de Lagrange sont remplacés par un terme de pénalisation. La formulation second gradient de dilatation pénalisée s'écrit alors pour tout champ cinématiquement admissible (u_i^*, χ^*)

$$\int_\Omega \left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^* + S_j \frac{\partial \chi^*}{\partial x_j} + r\left(\varepsilon_V - \chi\right)\left(\varepsilon_V^* - \chi^*\right) \right) dv = \int_{\partial\Omega} \left(p_i u_i^* + P n_i D u_i^*\right) ds. \tag{4.50}$$

Cette équation est semblable à l'expression des modèles à microstructure dilatants 4.13

pour laquelle la contrainte microscopique de dilatation κ est définie par la loi de comportement

$$\kappa = r\left(\varepsilon_V - \chi\right), \tag{4.51}$$

où r est une constante élastique. Dans le cas de la formulation pénalisée (4.50), r est un coefficient de pénalisation qui doit être grand pour assurer une bonne approximation de la relation $\varepsilon_V - \chi = 0$. L'avantage de cette formulation vient du fait que les inconnues nodales sont réduites aux champs de déplacements u_i et de déformations volumiques microscopiques χ.

Pour compléter l'analyse portant sur la discrétisation spatiale, on considère le cas où l'interpolation éléments finis est calée sur cette formulation pénalisée et pour laquelle le champ des déplacements u_i est discrétisé par une fonction polynômiale d'ordre 2 et le champ des déformations volumiques microscopiques par une fonction polynômiale d'ordre 1. On note cet élément (u_i - P2 ; χ - P1).

Mais il est connu que les méthodes exprimées par une approche pénalisée donnent des solutions sensibles aux coefficients de pénalisation. Pour combiner l'avantage des formulations mixte (4.27) et pénalisée (4.50) du modèle second gradient de dilatation on définit la relation pour tout champ cinématiquement admissible $(u_i^*, \chi^*, \lambda^*)$

$$\int_\Omega \left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^* + S_j\frac{\partial \chi^*}{\partial x_j} - \Lambda\left(\varepsilon_V^* - \chi^*\right) + \Lambda^*\left(\varepsilon_V - \chi\right) + r\left(\varepsilon_V - \chi\right)\left(\varepsilon_V^* - \chi^*\right)\right) dv = \int_{\partial\Omega} \left(p_i u_i^* + P n_i D u_i^*\right) ds \tag{4.52}$$

4.2.5 Bilan sur les discrétisations éléments finis

On résume dans cette partie toutes les discrétisations éléments finis considérées pour la validation du modèle mixte second gradient de dilatation. Dans tous les cas que l'on considère dorénavant, c'est toujours l'expression avec pénalisation qui est prise en compte. Une description en est proposée au tableau 4.1. On y précise également les points de Gauss-Hammer pris en compte pour l'intégration numérique de l'équation 4.52. Ils ont été déterminés de sorte à intégrer "exactement" toute la partie second gradient pénalisée. Les éléments finis :

- (u_i - P2 ; χ - P1 ; Λ - P0) : Fonctions de forme du second ordre pour les déplacements, du premier ordre pour les déformations volumiques microscopiques, et constante pour les multiplicateurs de Lagrange.

- (u_i - P2 ; χ - P1 ; Λ - P1) : Fonctions de forme du second ordre pour les déplacements, du premier ordre pour les déformations volumiques microscopiques, et du premier ordre pour les multiplicateurs de Lagrange.

- (u_i - P2 ; χ - P1 ; Λ - P2) : Fonctions de forme du second ordre pour les déplacements, du premier ordre pour les déformations volumiques microscopiques, et du second ordre

Formulation élément fini	Interpolation numérique (degrés de libertés)	Intégration numérique (points de Gauss)
(u_i - P2 ; χ - P1) ● u_i, χ □ u_i		
(u_i - P2 ; χ - P1 ; Λ - P0) ● u_i, χ □ u_i △ Λ		
(u_i - P2 ; χ - P1 ; Λ - P1) ● u_i, χ, Λ □ u_i		
(u_i - P2 ; χ - P1 ; Λ - P2) ● u_i, χ, Λ □ u_i, Λ		

Table 4.1. Discrétisations éléments finis.

pour les multiplicateurs de Lagrange.

- (u_i - P2 ; χ - P1) : Fonctions de forme du second ordre pour les déplacements et du premier ordre pour les déformations volumiques microscopiques. On peut remarquer que cet élément a une formulation éléments finis numériquement très proche de la formulation mixte du modèle second gradient de dilatation (4.27) pour laquelle les multiplicateurs de Lagrange sont décrits dans l'espace d'approximation P1-discontinu (étant donné le choix qui a été fait sur les points d'intégration de cette formulation). Or dans ce cas, les éléments incompressibles (voir section 4.2.3) sont instables au sens de la condition inf-sup mais il est précisé dans la littérature scientifique que ce type d'élément fournit parfois de bons résultats.

4.3 Validation numérique de la formulation second gradient de dilatation

4.3.1 Description du problème aux limites : Un essai biaxial

4.3.1.1 Géométrie et conditions aux limites

On représente la géométrie du modèle considéré en figure 4.2. L'exemple simule un essai biaxial. La structure a une largeur de 25 mètres et une hauteur de 50 mètres. Les forces externes p_i sont considérées nulles sur les deux faces verticales de la structure (représentatives d'un confinement nul) et les doubles forces externes P sont prises égales à zéro sur toutes les frontières de la structure. La partie infèrieure de la structure est supposée fixée selon la verticale ($dy = 0$) et bloquée horizontalement en son milieu ($dx = 0$). La partie supérieure subit, quant à elle, un déplacement vertical imposé u^a.

Une imperfection est prise en compte dans la structure. Elle est située en bas à gauche et sa dimension est de 2,5 mètres de large et de 2,5 mètres de haut. Dans cette zone, la cohésion du matériau est légèrement affaiblie (voir les paramètres matériau en partie 4.3.1.3).

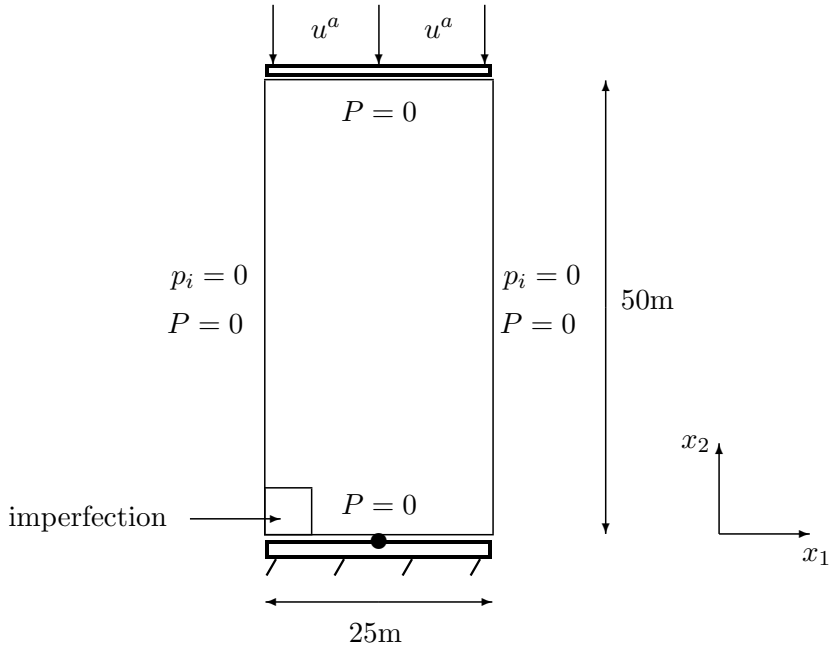


Fig. 4.2. Simulation du problème aux limites de l'essai biaxial

4.3.1.2 Loi de comportement

Pour valider les développements informatique et les principes de la formulation second gradient de dilatation, on considère un modèle élasto-plastique de type Drucker-Prager [51] pour décrire le comportement mécanique des roches. L'objet fondamental de ce type de

loi comportementale est de représenter la réponse post-pic, dite adoucissante, traduisant la dégradation subie par le matériau avant rupture. Pour cela, et dans le cadre des argiles, il est classique de prendre en compte une fonction d'écrouissage négatif caractérisée par une diminution progressive de la cohésion, variable représentative de la cimentation du milieu. On exprime ainsi la surface de charge suivante

$$F^{Ce} = \sqrt{\frac{3}{2}} s^{II} + \frac{2\sin\varphi}{3-\sin\varphi} I^1 - \frac{6c\cos\varphi}{3-\sin\varphi} f\left(\gamma^p\right). \tag{4.53}$$

pour laquelle, c'est la fonction $f\left(\gamma^p\right)$ qui reproduit la dégradation du matériau

$$f\left(\gamma^p\right) = \begin{cases} \left(1-(1-\alpha)\dfrac{\gamma^p}{\gamma^R}\right)^{(2)} & \text{si } \ 0<\gamma^p<\gamma^R \\ \alpha^{(2)} & \text{si } \ \gamma^R \leq \gamma^p \end{cases} \tag{4.54}$$

c est le paramètre matériau représentant la cohésion du matériau sain, α caractérisant son état résiduel. φ est l'angle de frottement et γ^p est la variable d'état du modèle qui représente la déformation plastique cumulée

$$\gamma^p = \int_0^t \left(\dot{\varepsilon}^p_{ij}\dot{\varepsilon}^p_{ij}\right)^{\frac{1}{2}} dt, \tag{4.55}$$

Lorsque $\gamma^p \geq \gamma^R$, l'état de contrainte résiduel s'exprime par $\sigma^{res} = \dfrac{6c\cos\varphi}{3-\sin\varphi}\alpha^{(2)}$.

Enfin, pour compléter le modèle élasto-plastique, on ajoute une loi d'écoulement de type associée. Par conséquent, l'évolution de la déformation plastique s'écrit

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \dot{p}\frac{\partial F^{Ce}}{\partial \sigma_{ij}} \tag{4.56}$$

où $\dot{p}$ est le multiplicateur plastique. Dans le cas d'un essai triaxial homogène ayant une contrainte radiale nulle, cette équation induit la réponse présentée en figure 4.3 dans le repère contrainte axiale σ^a selon la déformation axiale ε^a. Après un chargement élastique linéaire, la réponse produit un adoucissement quasi-linéaire suivi par un plateau. La pente moyenne de la branche adoucissante est noté m.

Les figures 4.4(a) et 4.4(b) caractérisent respectivement la contrainte déviatorique équivalente $\sigma_{11} - \sigma_{22}$ et la déformation volumique ε_V en fonction de la déformation axiale ε_{22} dans le cas d'un essai biaxial à confinement nul et pour lequel l'état initial est isotrope. On voit clairement apparaître le comportement fortement adoucissant du modèle.

4.3.1.3 Les paramètres matériau

Les paramètres matériau considérés (tableau 4.2) ne sont pas caractéristiques d'une roche identifiée. Par conséquent, nous ne donnerons qu'une interprétation numérique aux résultats que nous obtenons. Cependant, du moins pour la partie premier gradient, ces

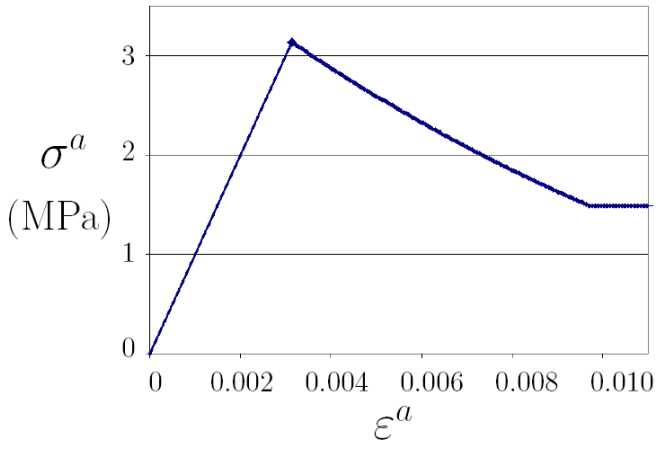
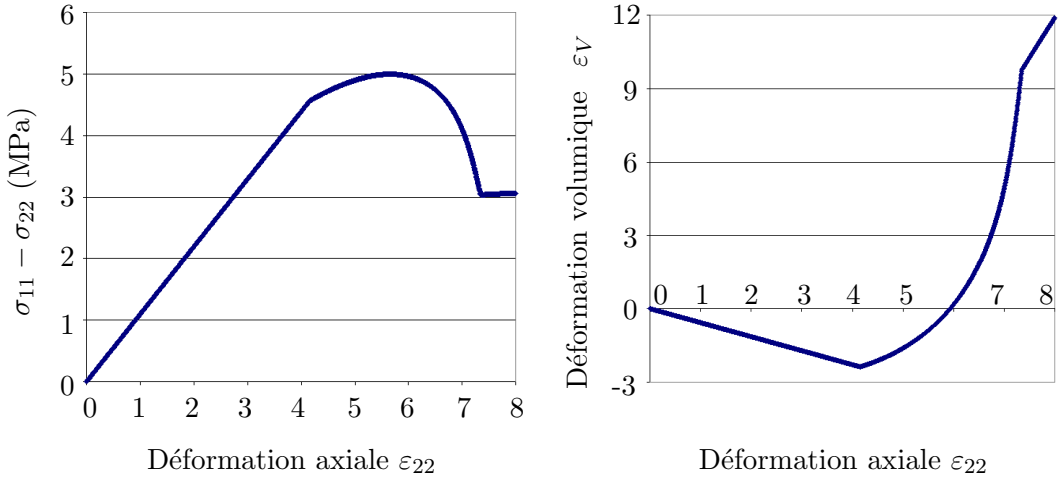


Fig. 4.3. Réponse de la contrainte axiale σ^a en fonction de la déformation axiale ε^a pour l'essai triaxial à confinement nul avec le comportement Drucker-Prager.



(a) Contrainte déviatorique équivalente

(b) Déformation volumique

Fig. 4.4. Courbes caractéristiques d'un essai biaxial à confinement nul avec la loi de comportement adoucissante Drucker-Prager.

paramètres sont physiquement réalistes et pourraient représenter le comportement d'une roche tendre.

Elasticité	comportement Drucker-Prager
$E^0 = 1000$ MPa	$c = 1$ MPa
$\nu^0 = 0.3$	$\varphi = 25\,^\circ$
$a^1 = 90$ MPa m^2	$\gamma^R = 0.015$
	$\alpha = 0.688$

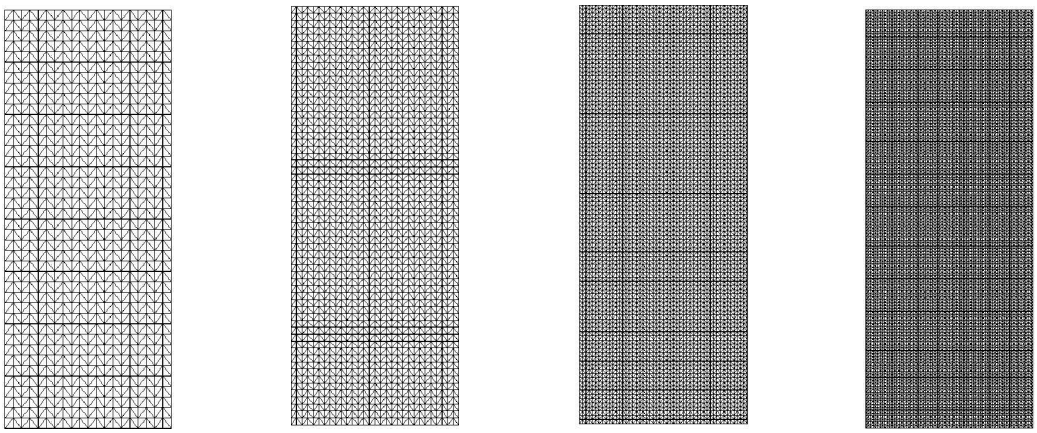
Table 4.2. Paramètres matériau.

Comme cela l'a déjà été précisé dans l'introduction de cette partie, un défaut est introduit pour initier l'apparition d'une bande de cisaillement dans les simulations numériques. C'est l'imperfection due au matériau qui apporte dans la simulation le caractère non-homogène. Pour cela, la zone de dimension 2,5 mètres de largeur sur 2,5 mètres de hauteur et située en bas à gauche de la structure a une cohésion légèrement affaiblie de 5% ($c = 0.95$ MPa) par rapport à la cohésion du reste de la structure ($c = 1.00$ MPa).

4.3.2 Présentation des résultats

L'algorithme non-linéaire utilisé pour la résolution numérique a été présenté en section 1.3.1. Dans cette phase de validation on s'intéresse particulièrement aux points suivants :

- La convergence numérique de l'algorithme de Newton.
- L'influence des différentes discrétisations éléments finis définies au chapitre 4.2.5.
- L'influence de la discrétisation spatiale : pour cela on considère 5 maillages différents. Les quatre premiers sont structurés et possèdent respectivement 1600, 3600, 10000 and 19600 éléments triangulaires (voir figures 4.5) tandis que le dernier est non structuré en (environ) 3600 triangles (voir figure 4.6).
- L'influence de l'histoire du chargement dans sa partie finale pilotée. On considère ainsi les 4 discrétisations du paramètre A suivantes $3.10^{(-4)}$, $6.10^{(-4)}$, $1.10^{(-3)}$ et $1,2.10^{(-3)}$ (voir l'équation (1.8) pour la définition de A).
- L'influence du coefficient de pénalisation r. Pour cela, on considère les 7 valeurs ($10^{(-1)}$, $10^{(0)}$, $10^{(1)}$, $10^{(2)}$, $10^{(3)}$, $10^{(4)}$ et $10^{(5)}$) pour définir le ratio adimensionné $\dfrac{r}{E^0}$ où E^0 est le module de Young du matériau.
- Les performances en temps CPU consommé.



(a) 1.600 éléments (b) 3.600 éléments (c) 10.000 éléments (d) 19.600 éléments

Fig. 4.5. Maillages réglés en éléments triangles.

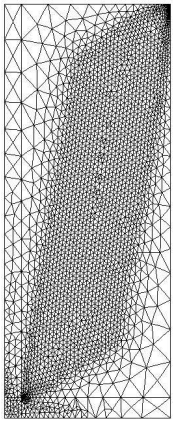


Fig. 4.6. Maillage non structuré.

Dans cette phase de validation on s'intéresse particulièrement à la comparaison des post-traitements suivants :

- L'amplitude des déformations plastiques cumulées (définies par la relation (4.55)) sous forme d'isovaleurs représentées aux points de Gauss.

- L'indicateur d'état plastique instantané défini en chaque point de Gauss par un entier qui vaut 1 en charge plastique et 0 en décharge ou en charge élastique.

- La courbe représentative du comportement global de la structure en fonction du déplacement imposé u^a sur la partie supérieure de la structure.

Pour un déplacement vertical imposé u_a de 0,2829 mètre on observe des difficultés de convergence numérique de l'algorithme de Newton. Celles-ci sont liées à la présence d'un snap-back, comme on peut le constater sur la figure 4.9 représentative du comportement global de la structure. Pour franchir cette étape, on active la méthode de pilotage présentée au chapitre 1.8.

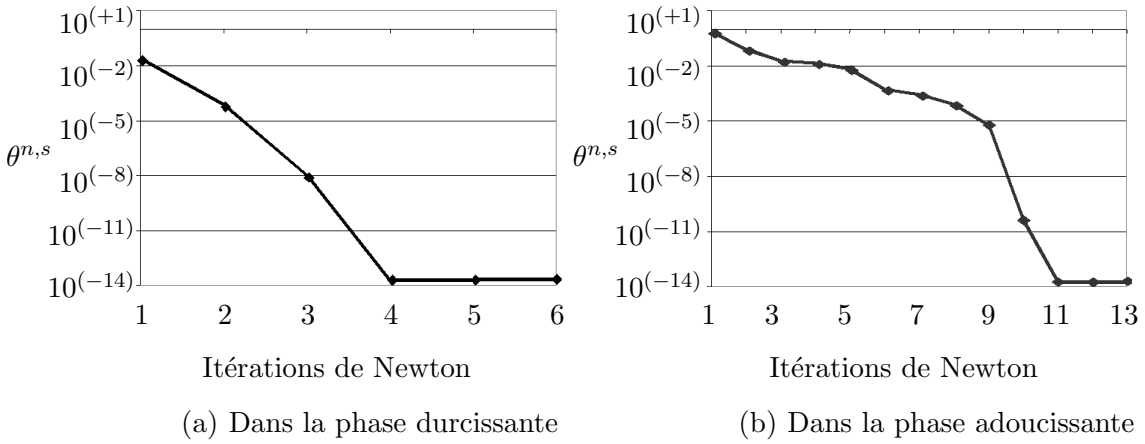
Le nombre prohibitif de calculs effectués dans le cadre de cette phase de validation (4 formulations éléments finis, 5 maillages, 4 histoires de chargement, 7 paramètres de pénalisation) fait qu'il n'est pas raisonable de présenter l'ensemble des résultats. On montre donc les isovaleurs typiques représentatives des résultats obtenus. Elles sont similaires pour l'ensemble des essais numériques réalisés.

4.3.2.1 Allure typique de la convergence des itérations de Newton

Les figures 4.7 montrent l'allure typique de la convergence de l'algorithme de Newton avec la formulation second gradient de dilatation, dans les phases durcissante et adoucissante, en représentant la norme du vecteur résidu $\theta^{n,s}$ de l'équation (1.5) en fonction des itérations de Newton dans le cas d'une interpolation éléments finis (u_i - P2; χ - P1 ;

Λ - P0). On observe, comme on pouvait s'y attendre, que la convergence est plus difficile en régime adoucissant qu'en régime durcissant. Dans les deux cas, la convergence devient quadratique dans les dernières itérations de Newton avant d'atteindre un palier représentatif du bruit numérique. Aucune difficulté de convergence n'est à signaler lors de ces calculs, y compris lors du passage du snap-back pour lequel il est nécessaire d'activer le pilotage.

Il est important de rappeler ici que la notion de bruit numérique dépend des grandeurs calculées dans l'expression de la formulation éléments finis et bien entendu de la machine de calcul. Ainsi, dans le cas du second gradient de dilatation en version pénalisée (4.52), lorsque le paramètre de pénalisation r augmente, le palier représentatif du bruit numérique augmente aussi. Ce phénomène a un impact direct sur les critères de convergence à définir dans l'équation (1.7) et notamment sur la composante η^2. Pour l'ensemble des calculs réalisés, ce paramètre a toujours été inférieur à $10^{(-11)}$. η^1 est quant à lui fixé à $10^{(-1)}$.



(a) Dans la phase durcissante (b) Dans la phase adoucissante

Fig. 4.7. Allure typique de la convergence de l'algorithme : $\theta^{n,s}$ par itération de Newton

4.3.2.2 Influence de l'espace d'interpolation des fonctions de forme

Dans cette partie, on se fixe un maillage (discrétisé de façon structurée en 3600 éléments triangles - figure 4.5(b)), une liste de pas de chargement (déplacement imposé u^a par incréments constants de $3.10^{(-3)}$ m), et un coefficient de pénalisation ($\frac{r}{E} = 10^{(5)}$). On considère ainsi que seul l'espace d'interpolation des fonctions de forme des multiplicateurs de Lagrange change - ou n'est pas présent dans le cas de la formulation (u_i - P2; χ - P1).

On visualise en figure 4.10 les isovaleurs de l'état plastique instantané pour un déplacement vertical imposé de $0,2829$ mètre. Quelle que soit la discrétisation éléments finis, les solutions sont identiques dès lors que les autres paramètres (maillage, chargement, pénalisation) sont fixés. On observe le même résultat sur les réponses globales de la structure présentées en figures 4.9. Par conséquent, les performances en termes de temps de

calcul sont un critère décisif pour le choix de l'espace d'interpolation optimal pour la discrétisation éléments finis.

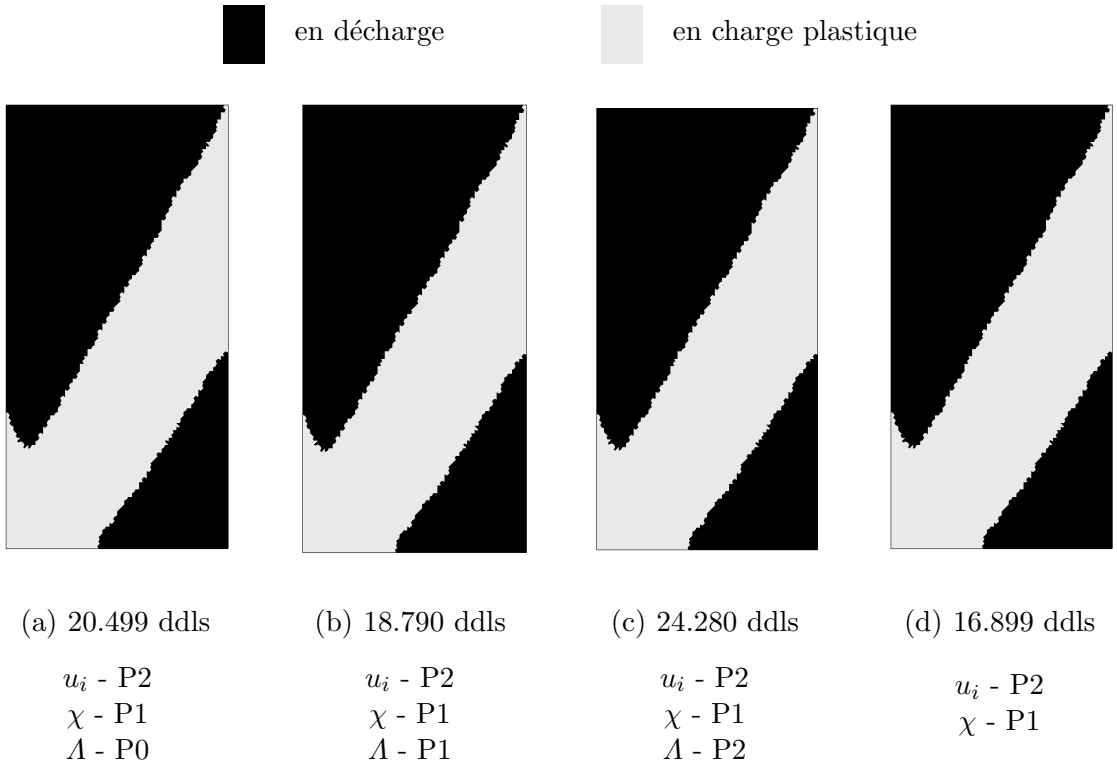


Fig. 4.8. Visualisation aux points de Gauss de l'état plastique instantané pour les différents espaces d'interpolations considérés. Prise en compte du maillage de la figure 4.5(b).

Comme cela a déjà été mentionné, en partie, lors de la description des paramètres matériau au chapitre 4.3.1.3, l'objectif n'était pas ici de faire une analyse complète des simulations par rapport à des essais expérimentaux, comme cela se pratique souvent (voir entre autres Ikeda et al [84]), ni de faire une analyse de bifurcation en cherchant plusieurs solutions au problème comme cela a pu être fait par Bésuelle et al [17]. Ce dernier point sera, par ailleurs, abordé au chapitre 6.1. Toutefois, il est important de noter que la forme de la bande de localisation représentée par le chargement plastique et son orientation sont semblables aux résultats expérimentaux présentés par Desrues et Chambon [49]. Ce qui nous conforte sur la validation de la formulation second gradient de dilatation.

Matsushima et al [100] ont montré, dans le cas de la formulation second gradient (4.12) exprimée dans un repère unidimensionnel, que l'épaisseur de la bande de localisation était proportionnelle à la longueur interne

$$l^c = c^p \sqrt{\frac{a^1}{\mid m \mid}} \tag{4.57}$$

où $\mid m \mid$ désigne la valeur absolue de la pente (négative) moyenne de la partie adoucissante de la loi de comportement définie au chapitre 4.3.1.2 et c^p est le coefficient de proportionnalité. En considérant alors les paramètres matériaux et l'épaisseur de la bande obtenue en figure 4.10, on en déduit que le coefficient de proportionnalité c^p est, dans cette simulation, de 20.

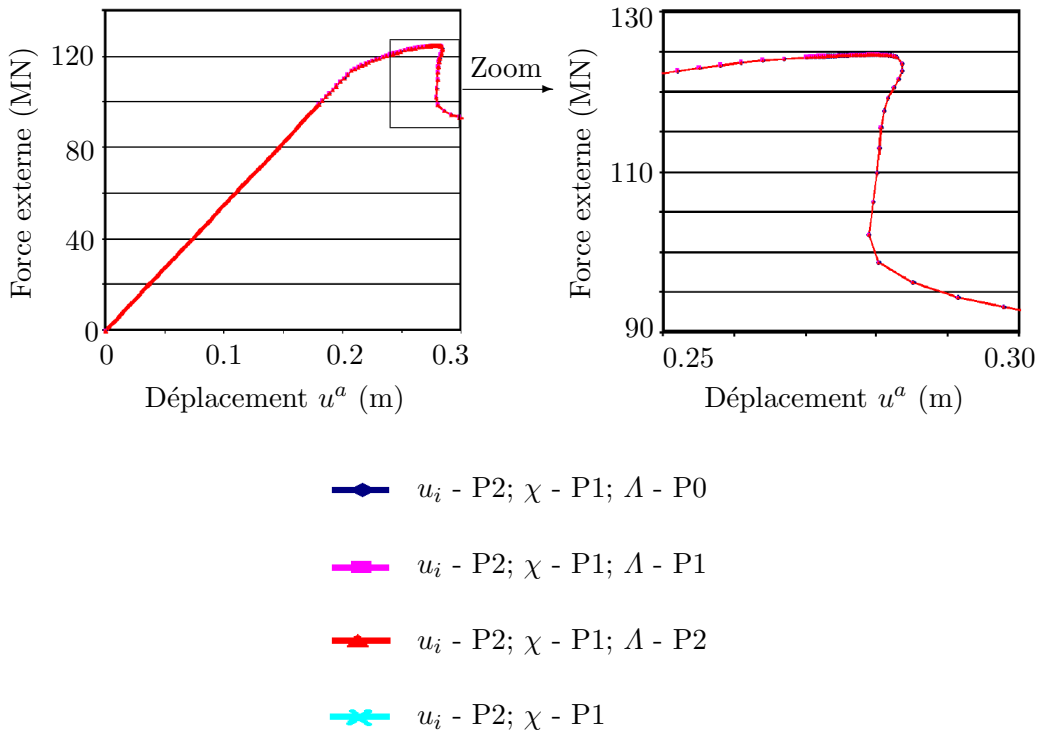


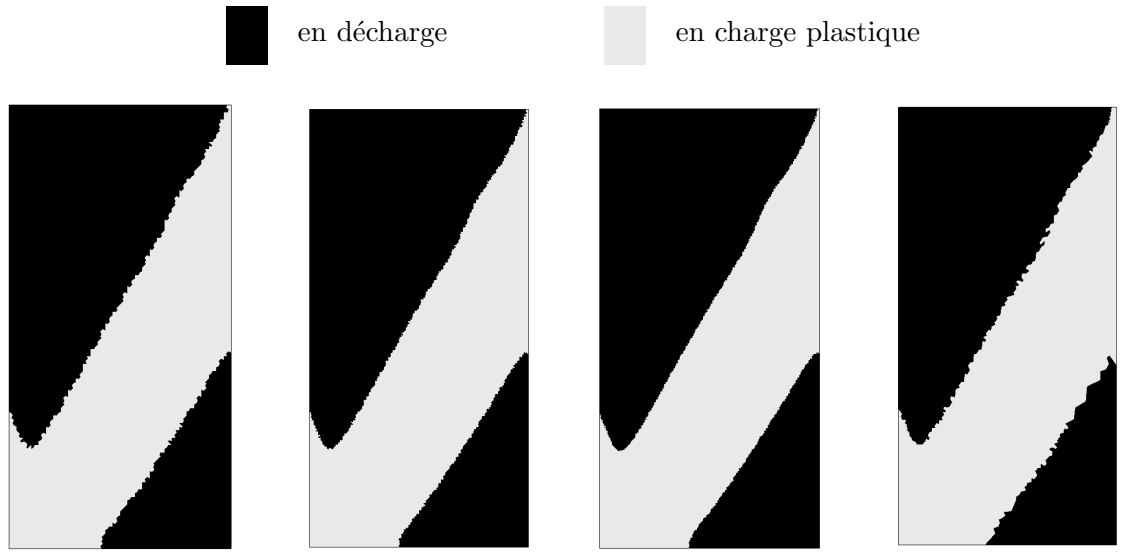
Fig. 4.9. Réponse globale de la simulation de l'essai biaxial soumis à une compression. Indépendance de la solution par rapport à l'espace d'interpolation des éléments finis.

4.3.2.3 Influence de la discrétisation spatiale

On présente ici les résultats obtenus lors de la simulation de quatre essais biaxiaux pour lesquels la seule différence numérique est due au maillage. On prend en compte soit un maillage structuré avec différentes finesses de mailles soit un maillage non-structuré. Ces derniers ont été présentés au chapitre 4.3.2. La formulation second gradient de dilatation est appliquée dans sa version pénalisée avec multiplicateurs de Lagrange constants par élément (discrétisation éléments finis notée (u_i - P2 ; χ - P1 ; Λ - P0). Pour toutes ces simulations, le coefficient de pénalisation est fixé par $\dfrac{r}{E^0} = 10^{(5)}$ ainsi que la discrétisation du pas de chargement (déplacement imposé u^a par incréments constants de $3.10^{(-3)}$ m).

Les résultats sont présentés pour un déplacement vertical imposé de $0,2829$ mètre, de façon identique à celui du chapitre 4.3.2.2. Les isovaleurs aux points de Gauss de la variable d'état plastique instantanée sont semblables quelle que soit la discrétisation spatiale,

à la finesse des éléments près. Les résultats sont clairement indépendants du maillage et on en déduit que la formulation second gradient de dilatation fournit dans ce sens des résultats objectifs du point de vue de l'épaisseur des bandes de localisation. Ce résultat est bien confirmé par les courbes représentatives de la réponse globale de la structure présentées en figure 4.11.



(a) 20.499 ddls

Avec le maillage de la figure 4.5(b)

(b) 56.159 ddls

Avec le maillage de la figure 4.5(c)

(c) 109.419 ddls

Avec le maillage de la figure 4.5(d)

(d) 20.372 ddls

Avec le maillage de la figure 4.6

Fig. 4.10. Visualisation aux points de Gauss de l'état plastique instantané pour les différents maillages considérés.

On montre enfin que les simulations réalisées avec la formulation second gradient de dilatation permettent d'assurer une bonne convergence quantitative des résultats. On observe ainsi en figure 4.12 que les écarts aux points de Gauss de la déformation plastique cumulée, définie par la relation (4.56), sont inférieurs à 2% malgré le raffinement de maillage.

4.3.2.4 Influence de la discrétisation du pas de chargement

Les simulations numériques dont on présente les résultats dans cette partie, sont toutes réalisées avec le même maillage (celui de la figure 4.5(b)), la même discrétisation éléments finis (u_i - P2 ; χ - P1 ; Λ - P0) et le même coefficient de pénalisation $\left(\frac{r}{E^0} = 10^{(5)}\right)$. Le seul paramètre qui varie est le coefficient A, défini dans le cadre des méthodes de pilotage au chapitre 1.3.2, pour lequel sont prises en compte les valeurs $A = 3.10^{(-4)}$, $A = 6.10^{(-4)}$, $A = 1.10^{(-3)}$ et $A = 1,2.10^{(-3)}$.

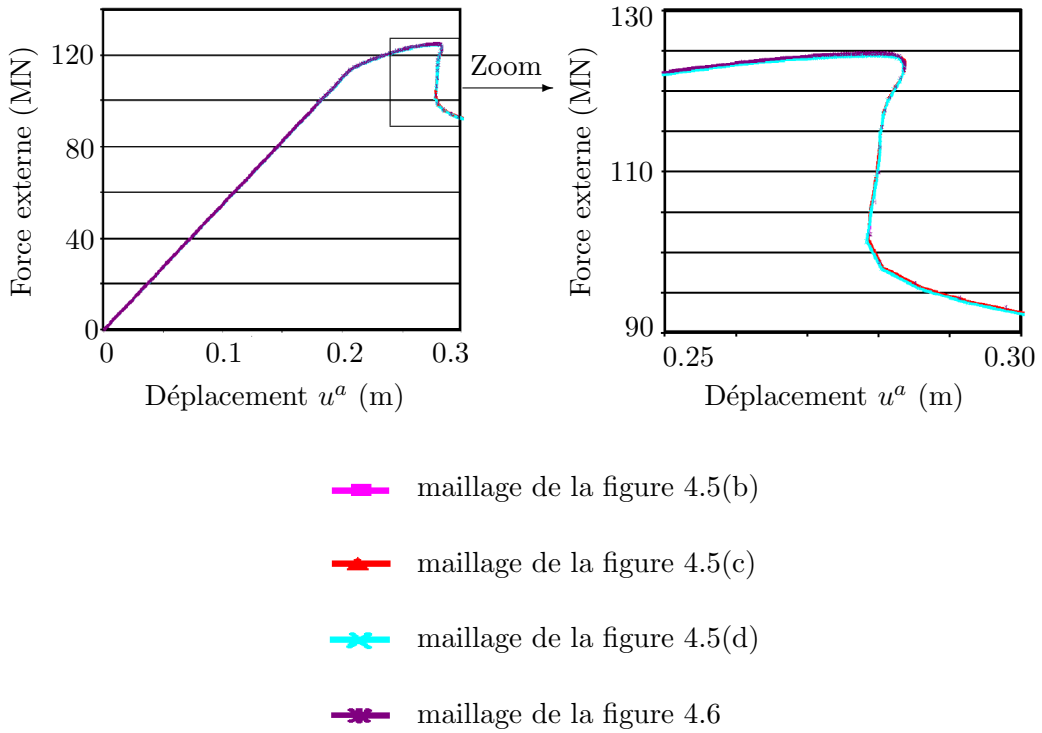


Fig. 4.11. Réponse globale de la simulation de l'essai biaxial soumis à une compression. Indépendance de la solution par rapport à la discrétisation spatiale.

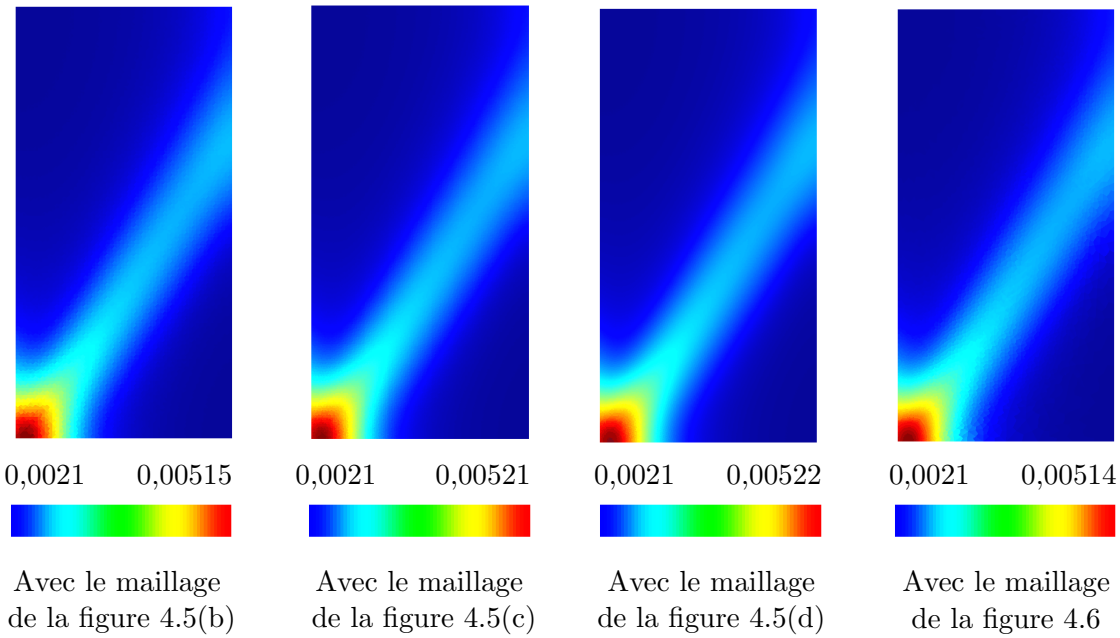
Les réponses globales de ces quatre simulations, figure 4.13, sont similaires. On observe d'infimes différences, dans la partie zoomée de la figure, dues à l'imprécision de pas de chargement trop grand.

On peut ainsi, raisonnablement, conclure sur l'objectivité des solutions proposées par la formulation second gradient de dilatation puisqu'elles sont indépendantes de tous les paramètres numériques que nous avons testés (maillage, espace d'interpolation, pas de chargement).

4.3.2.5 Influence de la pénalisation dans la formulation mixte

Pour compléter l'analyse d'objectivité de la formulation second gradient de dilatation proposée au chapitre 4.2.4 par la relation (4.50), on considère 7 valeurs du paramètre de pénalisation adimensionné par rapport au module de Young $\frac{r}{E^0} = 10^{(-1)}$, $10^{(0)}$, $10^{(1)}$, $10^{(2)}$, $10^{(3)}$, $10^{(4)}$, $10^{(5)}$. On étudie l'influence du terme de pénalisation dans la formulation en fonction des espaces d'interpolation éléments finis (décrits au chapitre 4.2.5) et par rapport aux différents maillages (présentés en figures 4.5 et 4.6).

On évalue, tout d'abord, la précision avec laquelle la contrainte mathématique $\chi = \varepsilon_V$ est respectée en considérant le ratio



Déformation plastique cumulée avec $u^a = 0,2829$ mètres

Fig. 4.12. Visualisation aux points de Gauss de la déformation plastique cumulée pour différentes discrétisations spatiales après un chargement vertical imposé $u^a = 0,2829$ mètre.

$$R^1 = \left(\frac{\displaystyle\int_\Omega (\varepsilon_V - \chi)^{(2)}}{\displaystyle\int_\Omega (\varepsilon_V)^{(2)}} \right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} \tag{4.58}$$

En figure 4.14, on trace l'évolution de R^1 en fonction des paramètres de pénalisation $\dfrac{r}{E^0}$. Sur la gauche, le maillage est fixé et correspond à celui de la figure 4.5(b) tandis que les espaces d'interpolation des fonctions de forme varient. Sur la droite, c'est la discrétisation éléments finis u_i - P2; χ - P1; Λ - P0 qui est choisie tandis que les maillages diffèrent.

On observe figure 4.14 que, pour tous les espaces d'interpolations éléments finis et quelle que soit la discrétisation du maillage, R^1 décroît lorsque le paramètre de pénalisation $\dfrac{r}{E^0}$ augmente. La précision de la formulation est ainsi d'autant plus fine que la pénalisation est forte. Dans la continuité de ce constat, on interprète la figure de droite, fonction des différents maillages, comme la preuve que l'ajout du terme de pénalisation améliore la qualité des résultats y compris lorsque les discrétisations spatiales sont fines.

Le second point considéré porte sur l'énergie élastique introduite dans la formulation second gradient de dilatation (4.50) par l'ajout du terme de pénalisation. On définit, dans ce sens, R^2 par

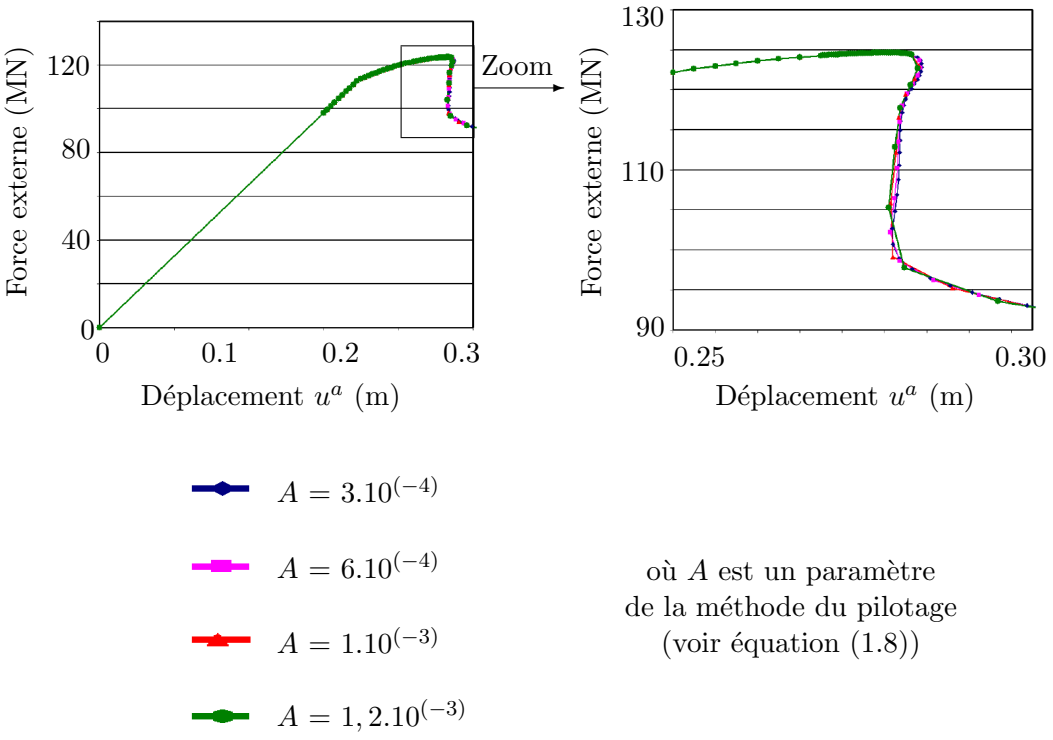


Fig. 4.13. Réponse globale de la simulation de l'essai biaxial soumis à une compression. Indépendance de la solution par rapport au pas de chargement dans sa partie finale pilotée.

$$R^2 = r \int_\Omega (\varepsilon_V - \chi)^{(2)} . \tag{4.59}$$

En figure 4.15, on trace l'évolution de R^2 en fonction des paramètres de pénalisation $\dfrac{r}{E^0}$ en suivant les mêmes critères que pour les courbes de la figure 4.14, à savoir que sur la gauche le maillage est fixé à celui de la figure 4.5(b) et les espaces d'interpolation des fonctions de forme varient et que sur la droite, c'est la discrétisation élément fini u_i - P2; χ - P1; Λ - P0 qui est choisie tandis que les maillages diffèrent.

On constate en figure 4.15 que, quels que soient, le paramètre de pénalisation, la discrétisation spatiale ou l'interpolation éléments finis, l'énergie élastique introduite par le terme de pénalisation est faible. Par conséquent elle n'a que très peu, voire pas d'influence sur l'énergie dissipée.

4.3.2.6 Comparaison des performances numériques des formulations éléments finis

Nous avons montré précédemment qu'avec la formulation second gradient de dilatation les résultats sont qualitativement identiques et quantitativement très proches, quels que soient l'espace d'interpolation éléments finis ou les discrétisations spatiales et temporelles dès lors que le terme de pénalisation était présent.

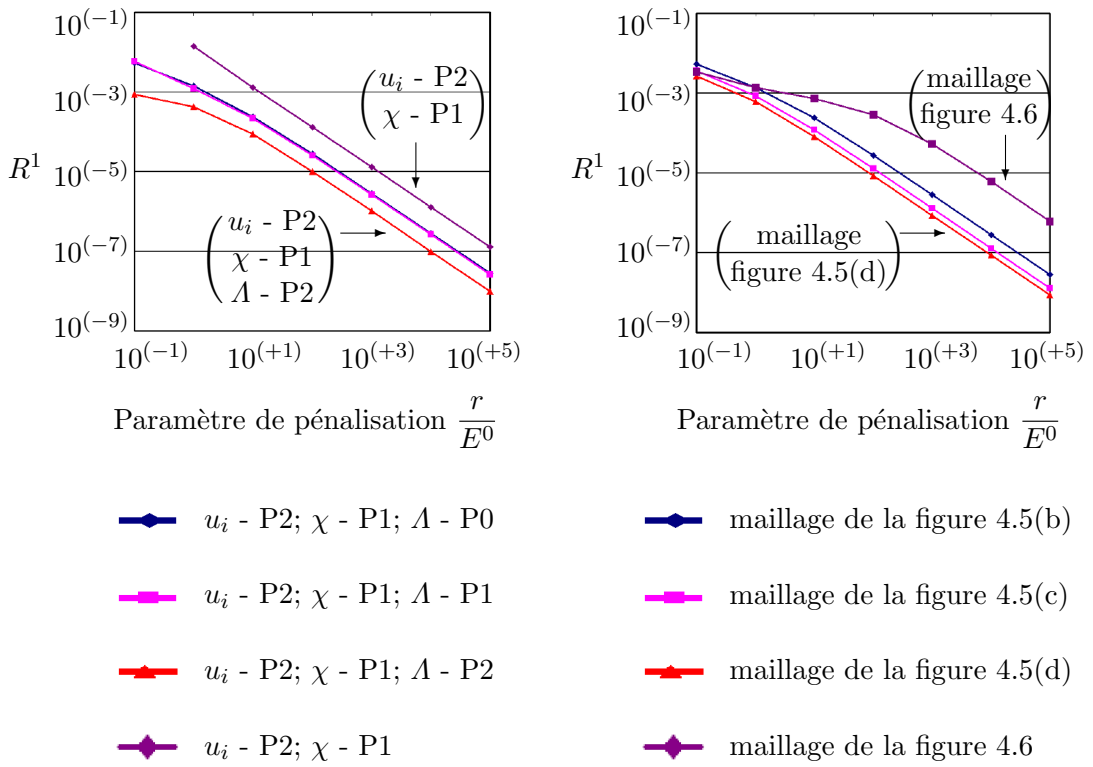


Fig. 4.14. Courbes représentatives de R^1 en fonction du paramètre de pénalisation. Etude de l'influence des espaces d'interpolations et de la finesse des discrétisations spatiales.

Avec une précision équivalente sur les solutions, il devient cohérent de choisir l'espace d'interpolation des fonctions de forme à partir de considérations numériques. Celles sur lesquelles nous portons particulièrement notre attention sont, l'aspect performance en temps de calcul, la vitesse de convergence numérique et dans une moindre mesure la taille de la mémoire machine nécessaire pour traiter le volume de données. De toute évidence, ces trois points sont étroitement liés - le lien étant d'autant plus fort que le nombre d'éléments finis représentant la structure est important.

C'est dans ce sens qu'on trace en figure 4.16 un indicateur des performances des différentes formulations éléments finis. Les calculs ont tous été réalisés en séquentiel sur la même machine et avec la même version du code et simulent l'essai biaxial décrit au chapitre 4.3. On compare ainsi les performances de la formulation second gradient de dilatation dans sa version pénalisée en fonction des espaces d'approximation des fonctions de formes considérés au chapitre 4.2.5. Le paramètre de pénalisation $\frac{r}{E^0} = 10^{(5)}$ et la discrétisation en temps caractérisée par $A = 1,2.10^{(-3)}$ sont fixés. On porte sur les courbes les temps de calcul, nécessaire pour résoudre le problème du biaxial jusqu'à obtenir un chargement final de $0,3$ m de déplacement, en fonction du nombre d'éléments triangulaires définissant le maillage. On complète cette comparaison en y intégrant la même simulation résolue par la formulation classique second gradient (dont les détails sont disponibles dans Chambon

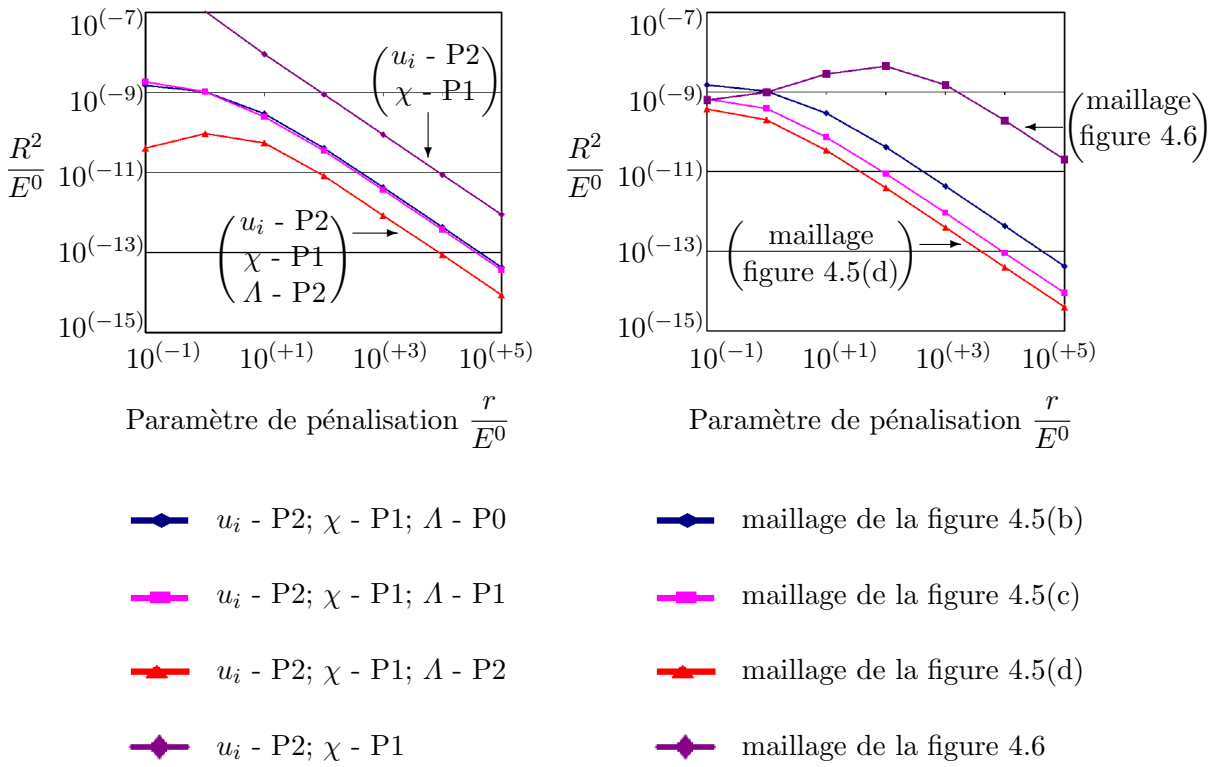


Fig. 4.15. Courbes représentatives de R^2 en fonction du paramètre de pénalisation. Etude de l'influence des espaces d'interpolations et de la finesse des discrétisations spatiales.

et al [31], Matsushima et al [100]).

A titre de comparaison, on ajoute entre parenthèses sur la figure 4.16 le nombre de degrés de liberté correspondant aux calculs effectués, dans le cas de la formulation second gradient complète - exprimée selon l'équation (4.12) dans sa version (u_i - P2; f_{ij} - P1; λ_{ij} - P0) - et dans le cas de la formulation second gradient de dilatation (u_i - P2; χ - P1; Λ - P0). On spécifie dans le tableau 4.3 une description comparative plus précise du nombre de degrés de liberté par formulation en fonction des espaces d'interpolation et de la discrétisation spatiale.

On constate que les formulations second gradient de dilatation, soit sans multiplicateurs de Lagrange, soit avec multiplicateurs constants par élément, sont les plus rapides bien que la seconde ait 20% de degrés de liberté de plus que la première. Cela s'explique par la convergence numérique de l'algorithme de Newton qui est plus difficile à obtenir lorsque la contrainte mathématique n'est assurée que par le terme de pénalisation.

On observe de plus, que la formulation second gradient de dilatation u_i-P2 ; χ-P1 ; Λ-P1 est plus coûteuse (31% de CPU en plus) que la formulation u_i-P2 ; χ-P1 ; Λ-P0 alors qu'elle a moins de degrés de liberté (9% de moins). L'interprétation de cette observation vient du fait que les degrés de liberté correspondant aux multiplicateurs de Lagrange sont internes aux éléments lorsque c'est la seconde formulation qui est prise en compte, tandis

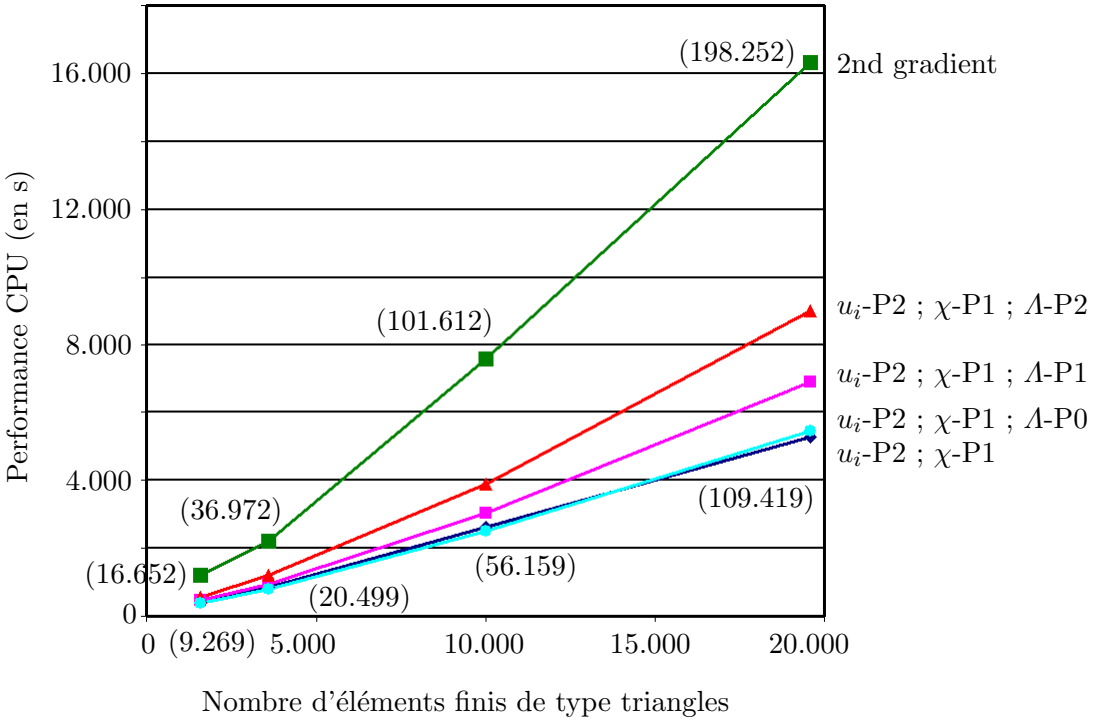


Fig. 4.16. Performance CPU des formulations second gradient et second gradient de dilatation en fonction de la discrétisation spatiale.

que dans le cas de la première, les degrés de liberté communiquent d'un élément à ses voisins. Numériquement cela se traduit par une matrice tangente de rigidité plus riche, en terme de coefficients non nuls, pour la formulation u_i-P2 ; χ-P1 ; Λ-P1 (10% de plus) et par conséquent une inversion de matrice plus coûteuse lors de la résolution par la méthode de Newton.

La formulation second gradient dans sa version complète est en moyenne trois fois plus coûteuse en temps de calcul et a deux fois plus de degrés de liberté que dans sa version dilatation pour une interpolation éléments finis équivalente (multiplicateurs de Lagrange constants par élément).

Etant donné les résultats que nous venons de présenter, on voit clairement l'intérêt de la formulation second gradient de dilatation pour traiter des problèmes portant sur des géomatériaux ou du moins dans le domaine restrictif des matériaux pour lesquels l'évolution de la déformation volumique est non-nulle. Cet intérêt peut paraître encore plus important si l'on envisage des simulations tridimensionnelles. Nous retenons comme version optimale de la formulation second gradient de dilatation celle pour laquelle les multiplicateurs de Lagrange sont constants par élément.

4.3.2.7 Les éléments géométriques de type quadrangles

Bien que nous ayons déconseillé l'utilisation des éléments géométriques de type quadrangles au chapitre 4.2.1.2 nous montrons ici qu'ils fournissent tout de même des résultats

Formulations éléments finis	Maillage à 3.600 éléments (figure 4.5(b))	Maillage à 19.600 éléments (figure 4.5(d))
Second gradient complet u_i - P2; f_{ij} - P1; λ_{ij} - P0	36.972 ddls	198.252 ddls
Second gradient dilatation u_i - P2; χ - P1; Λ - P2	24.280 ddls	129.440 ddls
Second gradient dilatation u_i - P2; χ - P1; Λ - P1	18.790 ddls	99.830 ddls
Second gradient dilatation u_i - P2; χ - P1; Λ - P0	20.499 ddls	109.419 ddls
Second gradient dilatation u_i - P2; χ - P1	16.899 ddls	89.819 ddls

Table 4.3. Comparaison du nombre de degrés de liberté par formulation à gradient en fonction du nombre de mailles.

satisfaisants. Avec une discrétisation élément fini (u_i - P2; χ - P1; Λ - P0) les bandes de localisations obtenues à partir des maillages présentés en figure 4.17 sont identiques à celles des figures 4.10. On constate, de plus, que les isovaleurs aux points de Gauss des déformations plastiques cumulées (figure 4.18) sont en accord avec les valeurs présentées au chapitre 4.3.2.3 - les écarts restent inférieurs à 2%.

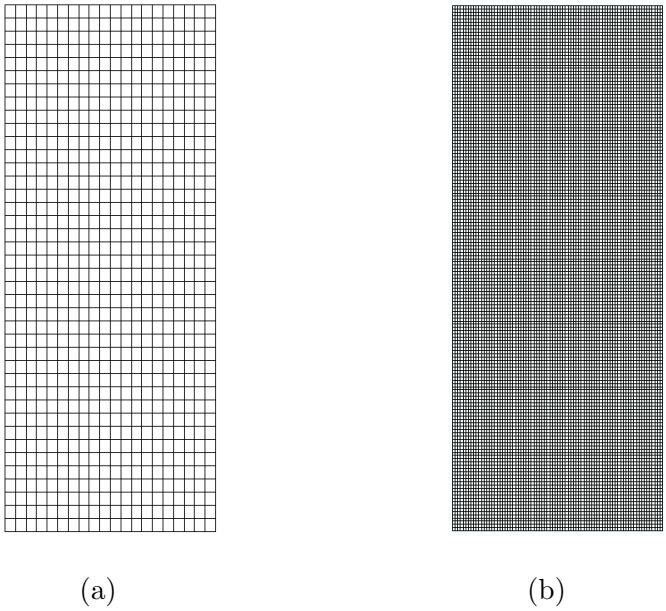
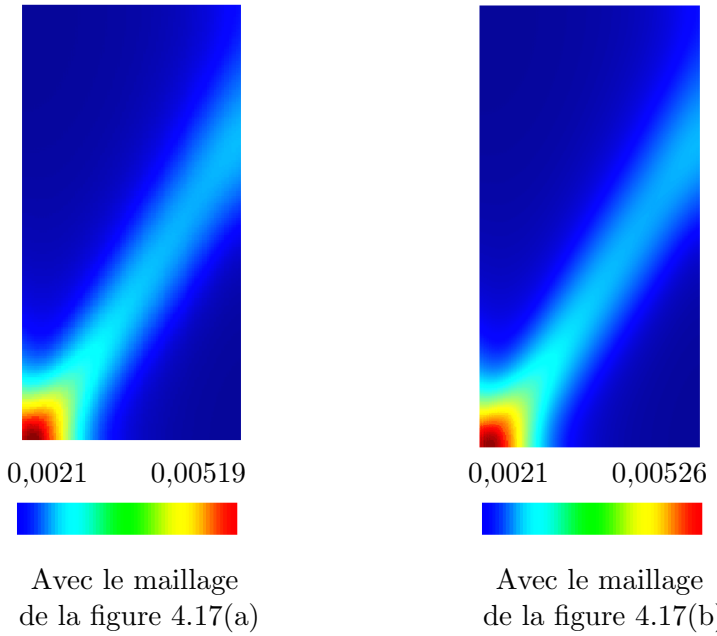


Fig. 4.17. Maillages réglés avec des éléments géométriques de type quadrangles. 4.17(a): 1.800 éléments. 4.17(b): 12.800 éléments.



Déformation plastique cumulée avec $u^a = 0,2829$ mètre

Fig. 4.18. Visualisation aux points de Gauss de la déformation plastique cumulée pour les 2 discrétisations spatiales de la figure 4.17 après un chargement vertical imposé $u^a = 0,2829$ m.

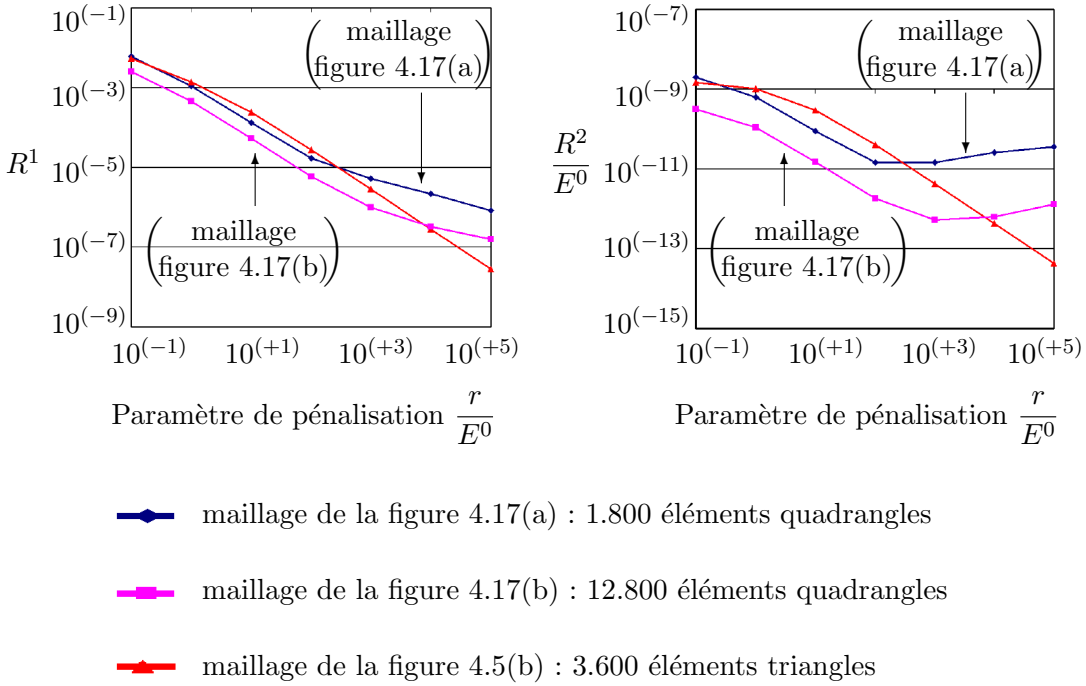


Fig. 4.19. Courbes représentatives de R^1 et de R^2 en fonction des discrétisations en quadrangles.

On constate en revanche en figure 4.19, qu'il n'est pas toujours possible d'améliorer la précision de l'approximation de la contrainte mathématique $\chi = \varepsilon_V$ en augmentant l'amplitude du coefficient de pénalisation malgré le raffinement du maillage. Ce résultat s'interprète directement par l'incompatibilité des espaces d'interpolations des variables χ et ε_V comme nous l'avons précisé au chapitre 4.2.1.2.

4.3.2.8 Contrôle de l'élargissement des bandes

Comme cela a été constaté avec les méthodes de régularisation à gradient de déformation ou par formulation intégrale, voir entre autres Geers et al [70] ou Godard [76] pour les premières et Simone et al [129] pour les secondes, un élargissement des bandes de localisation peut également se produire dans les parties saines de la structure avec la formulation second gradient de dilatation. C'est ce que l'on constate figure 4.20 en comparant la largeur de la bande de localisation après un chargement imposé de $u^a = 0,2829$ mètre puis de $u^a = 0,3$ mètre. Ce phénomène est bien entendu physiquement inadmissible.

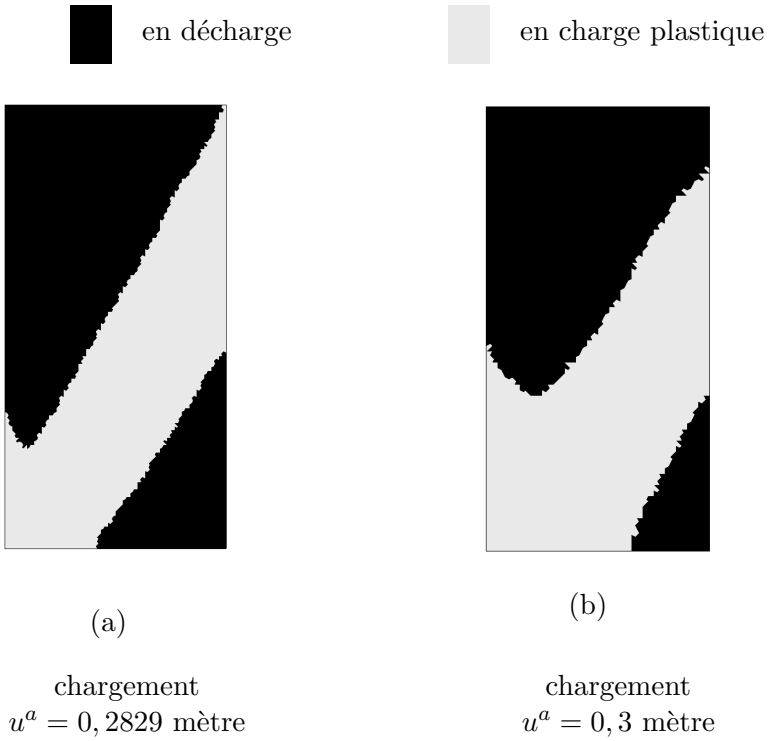


Fig. 4.20. Visualisation aux points de Gauss de l'état plastique instantané après deux pas de chargements distincts. Prise en compte du maillage de la figure 4.5(b).

Pour y remédier, Geers et al [70] proposent de faire évoluer la valeur de la longueur interne tandis que Godard [76] utilise une technique de relaxation de l'opérateur de régularisation. Dans la continuité de ces solutions, pour la formulation second gradient de dilatation, on pourrait également adapter l'opérateur de régularisation en faisant évoluer le paramètre de contrôle des composantes du champ des doubles contraintes de dilatation microscopique

S_j. Le but étant alors de faire diminuer l'influence de la déformation volumique au fur et à mesure que le matériau se dégrade.

Fort de ce constat, l'interprétation devient immédiate puisque l'élargissement des bandes observé précédemment sur l'essai biaxial est, en fait, lié au caractère associé de la loi de comportement Drucker-Prager. Une solution pour affaiblir l'influence de la formulation second gradient de dilatation lorsque le matériau s'endommage consiste donc à prendre en compte des lois de comportements non-associées, pour lesquelles l'angle de dilatance (et par voie de conséquence la déformation volumique) décroît lorsque la déformation plastique augmente.

Pour valider cette démarche on adapte la version de la loi de comportement Drucker-Prager décrite au chapitre 4.3.1.2 en proposant une version non-associée. Pour cela, on définit un potentiel plastique différent de la surface de charge. On propose ainsi une version de la loi de comportement Drucker-Prager non-associée que nous formulons à partir du potentiel plastique G^{Ce}

$$G^{Ce} = \sqrt{\frac{3}{2}} s^{II} + \beta\left(\gamma^p\right) I^1 \tag{4.60}$$

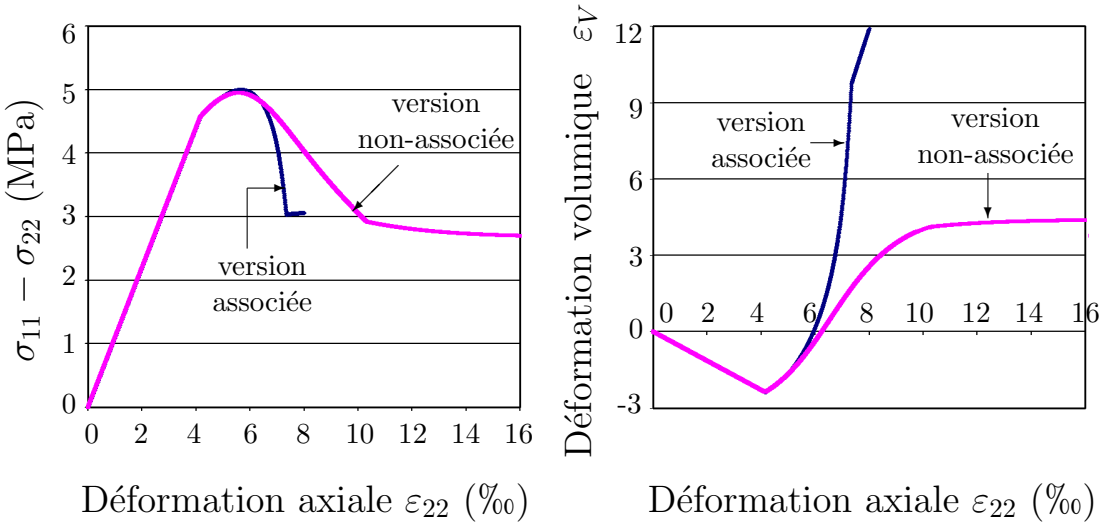
$$\text{avec} \qquad \beta\left(\gamma^p\right) = \begin{cases} \dfrac{2\sin\psi}{3-\sin\psi}\left(1-\dfrac{\gamma^p}{\gamma^R}\right) & \text{si} \quad 0 < \gamma^p < \gamma^R \\ 0 & \text{si} \quad \gamma^p \geq \gamma^R \end{cases} \tag{4.61}$$

où ψ désigne l'angle de dilatance initial. On porte en figures 4.21 les courbes représentatives de la contrainte déviatorique équivalente $\sigma_{11} - \sigma_{22}$ et de la déformation volumique ε_V en fonction de la déformation axiale ε_{22} dans le cas d'un essai biaxial à confinement nul et pour lequel l'état initial est isotrope. A titre de comparaison, on compare les courbes caractéristiques de la loi de comportement Drucker-Prager dans sa version non-associée par rapport à la version associée présentée en figure 4.4.

A partir de la figure 4.21(b) on interprète bien l'élargissement de la bande de localisation dans le cas de la version associée de la loi de comportement Drucker-Prager (représentée en figure 4.20 par l'indicateur de l'état plastique instantané) par l'augmentation perpétuelle de la déformation volumique, puisque c'est cette variable qui contrôle la régularisation par la formulation second gradient de dilatation.

En revanche, pour la version non-associée de la loi de comportement Drucker-Prager l'amplitude de la déformation volumique est contrôlée et cesse de croître dès lors que la déformation plastique ultime a été atteinte.

On montre alors en figure 4.22 qu'en procédant ainsi l'élargissement de la bande de localisation ne se produit plus. Une fois le plateau résiduel atteint dans le plan caractérisant la contrainte déviatorique équivalente (figure 4.21(a)) la largeur de bande reste constante et ne se concentre pas uniquement sur l'épaisseur d'un élément. En figure 4.22 les maillages ont volontairement été représentés pour montrer, qu'en effet, dans le cas de la formulation non-associée de la loi de comportement Drucker-Prager plusieurs éléments sont contenus dans la bande. L'effet régularisant du modèle second gradient de dilatation est



(a) Contrainte déviatorique équivalente (b) Déformation volumique

Fig. 4.21. Comparaison des courbes caractéristiques des lois de comportements adoucissantes en versions non-associée et associée dans le cas d'un essai biaxial à confinement nul.

donc préservé.

On constate, dans le cadre de cet essai biaxial, qu'avec la version non-associée de la loi de comportement, la convergence numérique a été un peu plus difficile à obtenir. Quelques itérations de Newton supplémentaires, ont été nécessaire pour que l'algorithme converge. Enfin, comme pour la version associée, la méthode de continuation décrite au chapitre 1.3.2 a également été activée pour franchir l'instabilité numérique due à la présence d'un snap-back, comme on peut le visualiser sur la courbe représentative des forces externes en fonction du déplacement de la figure 4.23.

Si l'on compare les isovaleurs aux points de Gauss de la déformation plastique cumulée au dernier pas de chargement calculé ($u^a \approx 0,3$ mètre), on observe qu'avec la loi de comportement Drucker-Prager dans sa version non-associée, la bande de localisation ne s'étale pas et se concentre sur une épaisseur de quelques éléments. L'influence de la régularisation par le second gradient de dilatation diminue donc lorsque le matériau se plastifie. Une fois que le plateau résiduel est atteint, le comportement matériau n'est plus adoucissant, la déformation volumique est alors constante et l'effet second gradient de dilatation cesse.

Les résultats obtenus avec la formulation second gradient de dilatation et la version non-associée de la loi de comportement Drucker-Prager suscitent beaucoup d'intérêt à plusieurs titres :

- Tout d'abord, les lois de comportements représentatives du comportement des sols, et plus particulièrement des roches, sont en général non-associées. L'angle de dilatance varie avec l'endommagement du matériau.

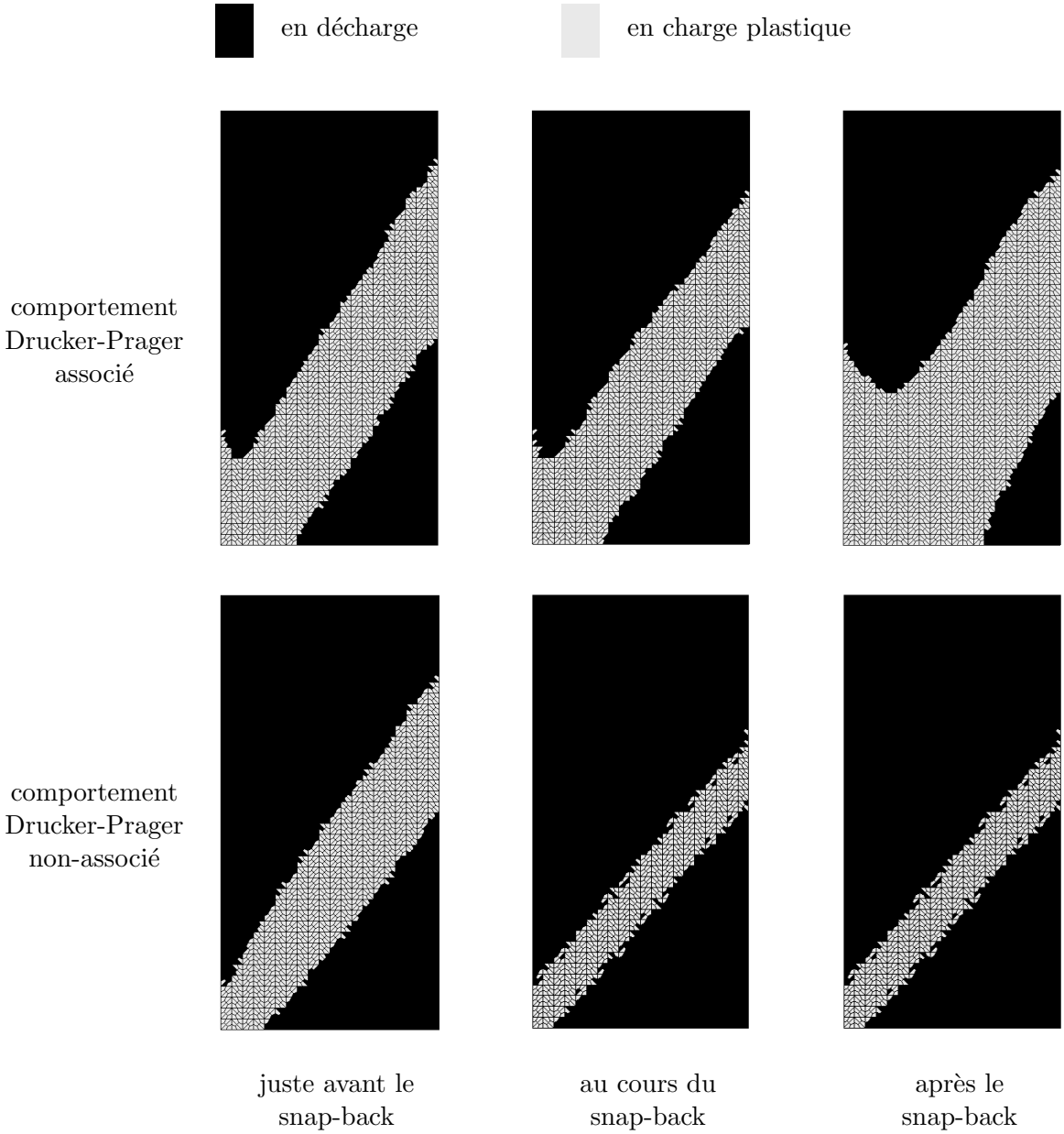


Fig. 4.22. Visualisation aux points de Gauss de l'état plastique instantané. Comparaison de l'évolution des bandes de localisation obtenues au cours d'un essai biaxial en compression. Prise en compte du maillage de la figure 4.5(b).

- La régularisation est bien objective, dans le sens où la bande de localisation ne se concentre pas dans l'épaisseur d'un seul élément.
- La bande de localisation ne s'élargie pas de façon intempestive.
- Enfin, les isovaleurs de la déformation plastique cumulée (résultats présentés en figure 4.24) et la baisse d'influence de la régularisation au voisinage du plateau résiduel

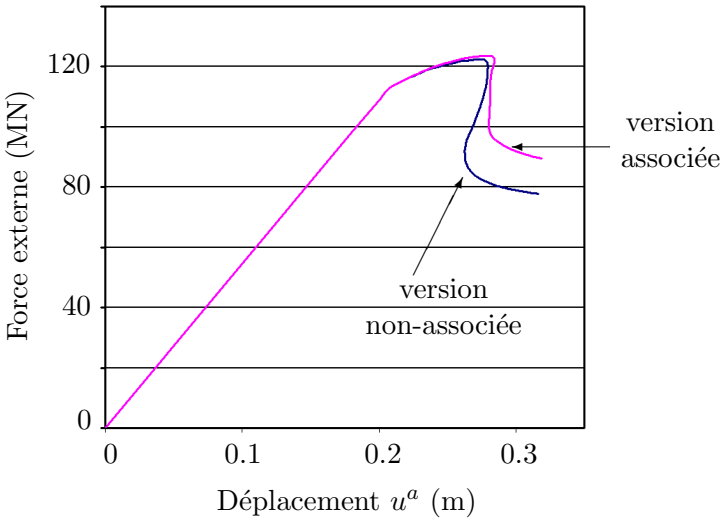
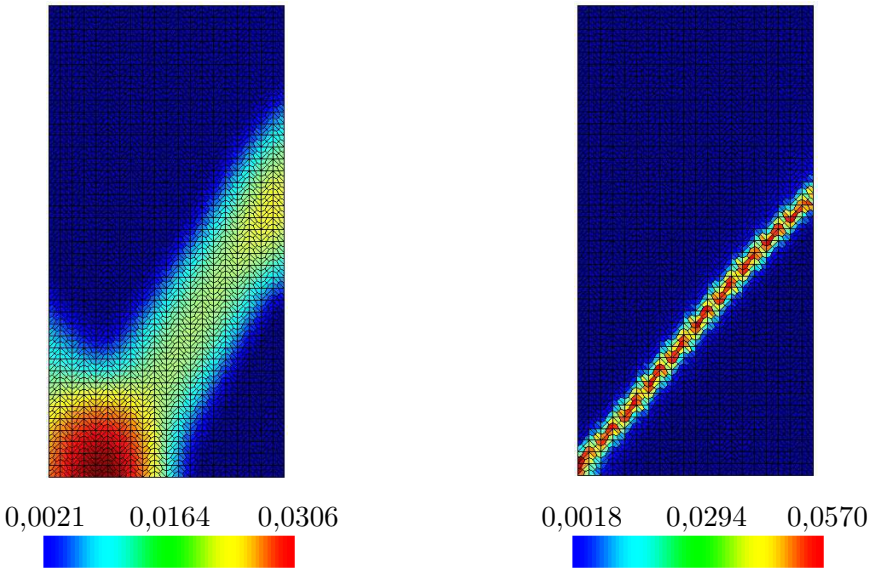


Fig. 4.23. Comparaison des réponses globales obtenues lors de la simulation d'un essai biaxial soumis à une compression avec les lois de comportements Drucker-Prager en versions associée et non-associée.



(a) loi de comportement Drucker-Prager associée

(b) loi de comportement Drucker-Prager non-associée

Fig. 4.24. Visualisation aux points de Gauss de la déformation plastique cumulée après un chargement de $u^a = 0,3$ mètre. Comparaison des résultats obtenus en fonction de la régle de normalité de la loi de comportement Drucker-Prager à partir du maillage de la figure 4.5(b).

confortent l'utilisation de la formulation second gradient de dilatation comme étape préliminaire avant la transition du modèle continu vers un modèle discontinu.

4.4 Bilan du chapitre et perspectives à venir

L'objectif de ce chapitre était de définir un modèle capable de donner des résultats objectifs par rapport à la discrétisation spatiale d'une structure complexe en vue d'applications numériques industrielles dans le cas particulier des géomatériaux. Nous avons montré que le modèle second gradient de dilatation était, dans ce sens, une solution performante vérifiant l'ensemble des conditions de ce cahier des charges :

- Solution performante, car elle introduit peu d'inconnues nodales supplémentaires par rapport à une formulation locale de type premier gradient. Les temps de calculs par itération de Newton sont alors acceptables par rapport à la plupart des autres méthodes de régularisation. Comme nous le verrons au chapitre suivant, les simulations numériques comportant une grande finesse dans la précision du maillage deviennent abordables.

- Mais solution limitée aux géomatériaux, ou de façon plus général, à toute sorte de matériau dilatant. La dilatance désigne, par définition, l'augmentation du volume d'un échantillon de matériau sous l'effet d'un chargement. C'est une des propriétés caractéristiques des sols surconsolidées. C'est pourquoi l'effet régularisant apporté par le terme en second gradient porte sur la variable de déformation volumique.

On a montré dans ce chapitre que le modèle second gradient de dilatation est capable de détecter les bandes de localisation de façon indépendante par rapport à la discrétisation spatiale. Les résultats sont, dans ce sens, objectifs vis-à-vis du maillage.

La modélisation numérique que nous avons retenue est une formulation mixte qui, en plus des multiplicateurs de Lagrange constants par élément, utilise un terme de pénalisation. Celui-ci permet d'améliorer la précision des résultats numérique et d'accélérer la convergence numérique.

Enfin, nous avons également montré que pour éviter un élargissement non-physique des bandes de localisation, il est préférable de prendre en compte des lois de comportement non-associées, ou de façon plus précise des modèles non-associés capables de représenter l'état critique. Modèles qui par ailleurs sont plus communément admis dans le cadre de la mécanique des sols pour décrire le comportement des géomatériaux, comme précisé par Gens et Potts [72].

5

Le second gradient de dilatation couplé aux équations de l'hydraulique

5.1 Introduction aux milieux poreux **95**

5.2 Les milieux poreux en équations **96**

5.3 Les équations de l'hydraulique n'apportent pas d'effet régularisant **98**

5.4 Les milieux poreux par une formulation second gradient de dilatation **101**

5.4.1 Une première approche analytique des problèmes couplés hydromécaniques régularisés 102

5.4.1.1 La consolidation unidimensionnelle de Terzaghi étendue au second gradient 102

5.4.1.2 Les solutions analytiques dans le cadre d'une formulation second gradient 104

5.4.1.3 Application numérique 104

5.4.2 Discrétisation éléments finis 105

5.4.3 Simulation régularisée d'une excavation souterraine en condition non-drainée 107

5.4.3.1 Indépendance des résultats par rapport à la finesse du maillage et des pas de temps 109

5.4.3.2 Performances numériques du modèle second gradient de dilatation dans le cas d'un problème couplé hydromécanique 109

5.5 Bilan et perspectives **111**

5.1 Introduction aux milieux poreux

Pour compléter l'objectif technique de ce travail de recherche il faut étendre notre analyse au cas des milieux poreux. Un tel milieu est constitué d'une matrice solide "poreuse"

à l'intérieur de laquelle s'écoule un fluide. Dans le cas particulier des applications que nous considérons pour décrire les géomatériaux, on se limite aux milieux saturés en eau. C'est à travers les pores de la matrice solide que s'effectuent les mouvements de fluides. L'étude de ces mouvements est un problème essentiel dans le cadre du stockage profond de substances radio-actives car ce sont des moyens de transports pour les radionucléides. Problème important également pour le calcul du dimensionnement des ouvrages souterrain car l'évolution au cours du temps de la distribution des champs de pressions altère les comportements mécanique et hydraulique des massifs rocheux.

La matrice solide est dite poreuse car elle est constituée d'un ensemble de particules solides séparées par des vides qu'on appelle interstices ou pores. Le rapport entre le volume des vides et le volume total d'un échantillon définit le concept de porosité. Dans le cas particulier d'un milieu saturé en eau, le volume des vides est entièrement occupé par de l'eau et la porosité caractérise donc la teneur en eau du milieu.

Le mouvement de l'eau à l'intérieur des pores est décrit par la loi expérimentale de Darcy. Sous l'hypothèse que l'écoulement de l'eau est laminaire et que le le milieu est homogène et isotrope, cette loi fondamentale de l'hydraulique des sols mesure le débit d'eau qui s'écoule, par unité de temps, à travers un échantillon de milieu poreux. Ce débit dépend de la perméabilité du milieu poreux qui définit la facilité avec laquelle l'eau traverse le sol sous l'effet d'un gradient de pression.

L'équilibre du milieu est décrit, du point de vue mécanique par la conservation de la quantité de mouvement et, du point de vue hydraulique par la conservation des masses fluides (dans notre cas l'eau). La notion de couplage entre phénomènes hydraulique et mécanique a été introduite par la théorie de la consolidation unidimensionnelle et le principe des contraintes effectives par Terzaghi (1923). Mais le schéma proposé est très idéalisé puisqu'il suppose que les grains du massif solide et le fluide sont tous deux incompressibles. Biot [18] généralise le principe des contraintes effectives aux cas tridimensionnels en remettant en cause l'hypothèse d'incompressibilité de la matrice rocheuse. Une description complète de la théorie de ces milieux est donnée par Coussy [42].

5.2 Les milieux poreux en équations

Pour résoudre les problèmes couplés hydro-mécaniques la méthode la plus couramment employée est celle des éléments finis. Une de ces premières formulations a été proposée dans le cadre de l'élasticité par les travaux de Sandhu et Wilson [123]. Celle que nous considérons dans ce chapitre introduit les grandeurs suivantes :

- $\sigma_{ij}^{'}$ est une composante du champ des contraintes effectives.
- σ_{ij} est une composante du champ des contraintes totales.
- p^{lq} est la pression d'eau interstitielle.

Ces trois grandeurs sont liées par le principe de Biot

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{'} - bp^{lq}\delta_{ij} \tag{5.1}$$

où b est le coefficient de Biot défini par

$$b = 1 - \frac{K^0}{K^s} \tag{5.2}$$

où K^0 et K^s désignent respectivement les modules de compressibilités du milieu poreux drainé et des grains solides, le premier étant défini par les caractéristiques élastiques du milieu

$$K^0 = \frac{E^0}{3\left(1 - 2\nu^0\right)} \tag{5.3}$$

Du point de vue comportemental, les contraintes effectives $\sigma_{ij}^{'}$ sont définies par un modèle rhéologique à partir des déformations ε_{ij} et de variables d'état.

L'évolution de la porosité est, quant à elle, donnée par la relation

$$d\phi = (b - \phi)\left(d\varepsilon_V + \frac{p^{lq}}{K^s}\right) \tag{5.4}$$

où ϕ est la variable de porosité. Le comportement de l'eau est décrit par la loi des fluides

$$\frac{d\rho^{lq}}{\rho^{lq}} = \frac{dp^{lq}}{K^{lq}} \tag{5.5}$$

où ρ^{lq} et K^{lq} désignent respectivement la masse volumique et le module d'incompressibilité de l'eau. L'apport de masses d'eau m^{lq} depuis la configuration initiale est alors donnée par

$$m^{lq} = \rho^{lq}\left(1 + \varepsilon_V\right)\phi - \rho^{lq,0}\phi^0 \tag{5.6}$$

où $\rho^{lq,0}$ et ϕ^0 sont les valeurs initiales respectivement de la masse volumique de l'eau et de la porosité du milieu.

La diffusion de l'eau est décrite par la loi de Darcy qui relie le flux hydraulique $\mathbf{M}^{lq}$ (on parle également de vitesse d'écoulement) au gradient hydraulique

$$M_i^{lq} = -\frac{k_{ij}^{int}}{\mu^{lq}}\frac{\partial p^{lq}}{\partial x_j} \tag{5.7}$$

où k_{ij}^{int} sont les composantes du tenseur de perméabilité intrinsèque du milieu poreux. Ce tenseur, dépend de l'indice des vides et donc de la porosité du milieu notée ϕ. Il est, de plus, lié au tenseur de conductivité hydraulique de l'eau, noté $\lambda_{ij}^{H,lq}$ par la relation

$$\lambda_{ij}^{H,lq} = \frac{\rho^{lq} g_j}{\mu^{lq}}.k_{ij}^{int} \tag{5.8}$$

où μ^{lq} désigne la viscosité dynamique de l'eau et g_j sont les composantes du champ d'accélération de la pesanteur. Dans le cadre de ce travail, la perméabilité a toujours été

considérée isotrope.

L'application du principe des travaux virtuels permet d'écrire le problème, pour tout champ cinématiquement admissible $\left(u_i^*, p^{lq,*}\right)$

L'équilibre du mélange
$$\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^* dv = \int_{\partial\Omega} p_i u_i^* ds \tag{5.9}$$

Bilan de masse du fluide
$$-\int_\Omega \frac{dm^{lq}}{dt} p^{lq,*} dv + \int_\Omega M_j^{lq} \frac{\partial p^{lq,*}}{\partial x_j} dv = \int_{\partial\Omega} M_j^{lq,ext} p^{lq,*} ds \tag{5.10}$$

où p_i et $M_j^{lq,ext}$ sont respectivement les forces de surfaces d'origine mécanique et le flux d'eau imposés aux frontières.

5.3 Les équations de l'hydraulique n'apportent pas d'effet régularisant

Prendre en compte des équations de type diffusion - c'est le cas pour les simulations mécaniques couplées avec l'hydraulique telles que celles formulées par le système des équations (5.9) et (5.10) - ne permet pas de rendre les solutions indépendantes du maillage comme nous l'avons déjà évoqué au chapitre 3.1.2. En fait, la phase liquide apporte un caractère différé aux déformations subies par le sol.

Pour évaluer la fiabilité des résultats obtenus par calcul éléments finis et mettre en évidence leur dépendance par rapport aux maillages dans le cas de calculs couplés hydro-mécaniques, le Groupe de Recherche des Modélisations Mathématiques et simulations numériques liées à la gestion des déchets nucléaires (GdR MoMas [69]) a proposé un benchmark dont le principe était de simuler l'excavation d'une galerie souterraine. Toutes les équations du problème étaient fixées, ainsi que les propriétés matériau et les conditions de chargement. Les participants (au nombre de 6) étaient libres des méthodes numériques. La loi de comportement de la roche était de type Drucker-Prager, identique à celle décrite au chapitre 4.3.1.2, produit une phase adoucissante de nature à représenter l'état de fissuration du terrain.

Le bilan du benchmark, présenté par Chavant [39], est que sur toutes les simulations bidimensionnelles des différences apparaissent entre les équipes. Ces différences sont d'ailleurs plus importantes sur les contraintes et les déformations plastiques que sur les déplacements et les pressions d'eau. Cela implique qu'une éventuelle bonne concordance sur les résultats globaux (en l'occurence les déplacements) entre les outils logiciels ou entre simulations par rapport aux essais peut ne pas être significative, d'autant plus que l'endommagement de la roche et l'augmentation de la perméabilité dans le terrain sont plus liés aux résultats locaux (les déformations). Les phénomènes de localisation apparaissent systématiquement : la position des fissures, leur nombre et leur épaisseur diffèrent selon le maillage ou les critères de convergence utilisés par les équipes. Des écarts de plus de 50% sont observés

sur les contraintes et les déformations plastiques. L'extension de la zone endommagée est alors entachée d'une incertitude de plus de 20%.

A titre d'exemple on présente un des problèmes traités dans le cadre du benchmark hydro-mécanique fragile du GdR MoMas. Il s'agit d'une cavité cylindrique non revêtue en massif infini avec un état de contrainte initial anisotrope. On représente en figure 5.1 un quart de la géométrie. Il s'agit d'un domaine plan limité par un cercle de rayon 3 mètres et de deux segments chacun situé à 60 mètres du centre du cercle. L'étude du problème est considérée en déformations planes par rapport à la direction z. Les conditions initiales (5.11) décrivent les contraintes effectives et les pressions d'eau du milieu dues au poids et à la poussée des terres. Sur les frontières extérieures les contraintes effectives et les pressions d'eau sont maintenues égales aux conditions initiales.

$$\begin{cases} \sigma'^{,init}_{xx} &= -7,24 \text{ MPa} \\ \sigma'^{,init}_{yy} &= -11,64 \text{ MPa} \\ \sigma'^{,init}_{zz} &= -7,24 \text{ MPa} \\ p^{lq,init} &= 4,7 \text{ MPa} \end{cases} \tag{5.11}$$

Pour simuler le creusement de la galerie, on applique au bord de la zone à excaver une force qui décroît des valeurs initiales à zéro de manière à obtenir un bord libre. On impose ainsi comme conditions aux limites sur la cavité circulaire, à partir des relations mathématiques (5.9) et (5.10) :

$$\begin{cases} p_i\left(t\right) &= \lambda\left(t\right)\sigma^0_{ij}.n_j \\ p^{lq}\left(t\right) &= \lambda\left(t\right)p^{lq,init} \end{cases} \tag{5.12}$$

où σ^0_{ij} est l'état de contrainte initial, n_j le vecteur normal à la cavité et $\lambda(t)$ est une fonction linéaire décroissante valant 1 à l'état initial et 0 à la fin de l'excavation. L'indicatrice de la discrétisation temporelle est t. La durée de la phase d'excavation est de 17 jours tandis que la phase de consolidation étudiée est de 15 mois.

$$\lambda(t) = 1 - \frac{t}{T} \qquad \text{avec T = 17 jours} \tag{5.13}$$

On appelle taux de déconfinement, la valeur $1 - \lambda(t)$.

La perméabilité du milieu poreux est supposée constante et isotrope. La loi de comportement mécanique prise en compte est adoucissante de type Drucker-Prager comme décrite au chapitre 4.3.1.2. Les paramètres matériau sont définis en table 5.1.

Aucun défaut numérique n'a été introduit dans les simulations comme cela a été fait pour initier l'apparition d'une bande de localisation dans l'essai biaxial du chapitre 4.3.1.3. On considère deux discrétisations spatiales de la géométrie présentée en figure 5.1. La taille des éléments est d'autant plus faible qu'ils sont proches de la cavité circulaire. Le premier maillage comporte 18.867 éléments triangles et est caractérisé par une taille de maille de $0,05$ mètre dans les premières couches d'éléments autour de la cavité. Le second maillage comporte 78.164 éléments triangles et la taille des mailles autour de la cavité est de $0,015$

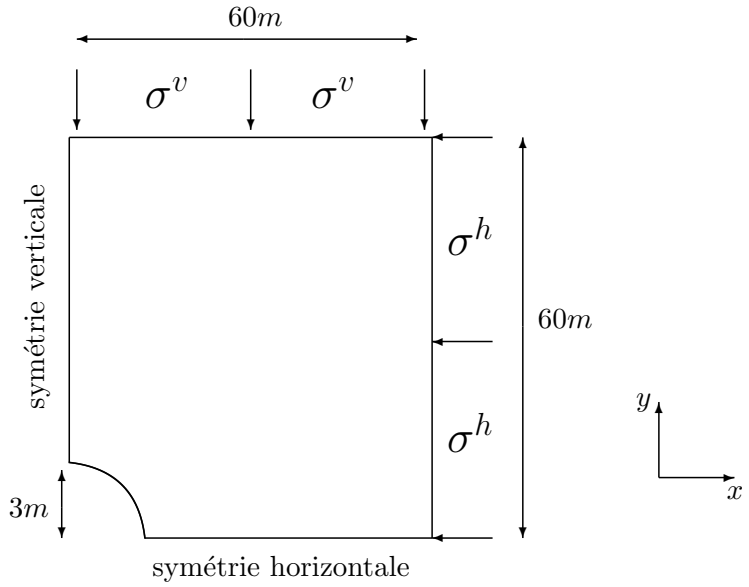


Fig. 5.1. Géométrie pour la simulation de l'excavation d'une galerie souterraine

Elasticité	Comportement Drucker-Prager	Hydraulique du milieu poreux
$E^0 = 5.800$ MPa	$c = 1$ MPa	$b = 0.8$
$\nu^0 = 0.3$	$\varphi = 25\,^\circ$	$\phi^0 = 0.15$
	$\gamma^R = 0.015$	$K^{lq} = 2.000$ MPa
	$\alpha = 0.01$	$k^{int} = 10^{(-19)}$ m$^{(2)}$
		$\rho^{lq,0} = 1.000$ kg/m$^{(3)}$
		$\mu^{lq} = 10^{(-3)}$ Pa.s

Table 5.1. Paramètres matériau.

mètre. Les simulations numériques réalisées sont strictement identiques excepté sur la discrétisation spatiale.

Dans cet exemple les résultats sont fortement dépendants du maillage, comme on peut l'observer sur les isovaleurs des variations de porosité dans le milieu poreux en figures 5.2 obtenues après la simulation de l'excavation suivie d'une période de consolidation de 15 mois. Les bandes de localisation ont des épaisseurs égales à la taille d'un élément. La conséquence directe de ce phénomène se traduit par des résultats numériques avec des amplitudes d'isovaleurs d'autant plus importantes que le maillage est fin. On observe ainsi, une variation de porosité de l'ordre de 20% sur le maillage le plus grossier et d'un peu plus de 26% sur le maillage le plus raffiné. Ces ordres de grandeurs sont très importants compte tenu du fait que nous avons considéré que le milieu était saturé et surtout que la perméabilité était constante.

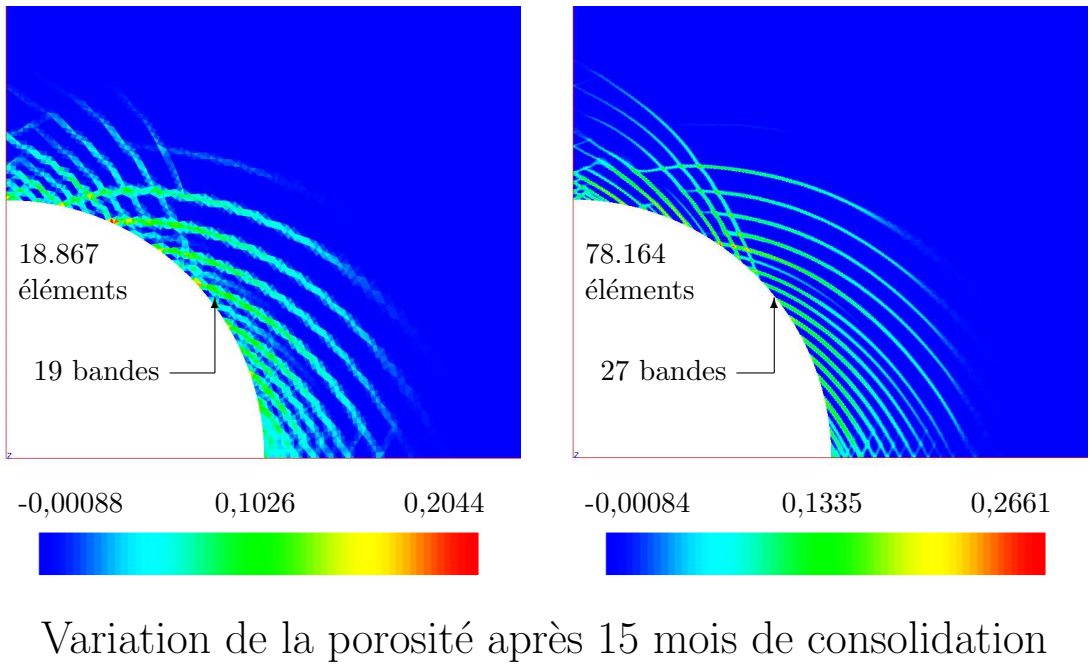


Fig. 5.2. Visualisation aux points de Gauss de la variation de la porosité dans le cas d'une simulation couplée hydromécanique décrite par une formulation locale. Deux discrétisations spatiales donnent deux résultats différents.

De plus, on observe un écart de 8 bandes de localisation d'un maillage à l'autre (voir figure 5.2). La localisation dans des bandes de plus en plus fines fait qu'à convergence du maillage le nombre de bandes explose. On espère, avec l'ajout d'une méthode de régularisation, qu'un tel phénomène ne puisse pas se produire. En effet, en contrôlant l'épaisseur des bandes de localisation on doit parvenir à contraindre le nombre de bandes autour de la cavité excavée.

Le bilan de ce benchmark confirme que les simulations numériques, avec des modèles adoucissants et sans méthode de régularisation doivent être regardés avec la plus grande prudence, y compris si la modélisation du problème tient compte d'un couplage avec l'hydraulique. Dans les modélisations éléments finis, les équations de l'hydraulique n'apportent pas d'effet régularisant.

5.4 Les milieux poreux par une formulation second gradient de dilatation

Sur le même principe que celui proposé par Collin et al [41], on élargit l'expression des milieux poreux à la théorie des milieux à microstructure par la formulation second gradient de dilatation présentée au chapitre 4.1.4. L'application du principe des travaux virtuels permet de modifier la formulation du système couplé hydro-mécanique des relations (5.9) et (5.10), pour obtenir le problème relatif aux déformations du squelette et à l'écoulement du fluide interstitiel pour tout champ cinématiquement admissible $\left(u_i^*, p^{lq,*}\right)$

$$\int_{\Omega} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + S_j \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_i \partial x_j} \right) dv = \int_{\partial\Omega} \left(p_i u_i^* + P n_i D u_i^* \right) ds \tag{5.14}$$

$$-\int_{\Omega} \frac{dm^{lq}}{dt} p^{lq,*} dv + \int_{\Omega} M_j^{lq} \frac{\partial p^{lq,*}}{\partial x_j} dv = \int_{\partial\Omega} M_j^{lq,ext} p^{lq,*} ds \tag{5.15}$$

où p_i, P et $M_j^{lq,ext}$ sont respectivement les forces de surfaces d'origine mécanique et le flux d'eau imposés aux frontières.

Enfin, les contraintes effectives notées $\sigma_{ij}^{'}$ sont liées aux contraintes totales et à la pression d'eau interstitielle par la relation (5.1), et sont définies par une loi de comportement à partir des déformations ε_{ij} et de variables d'état. Les doubles contraintes de dilatation, notées S_j, sont quant à elles liées aux composantes du gradient de dilatation $\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j}$ par une autre loi de comportement.

5.4.1 Une première approche analytique des problèmes couplés hydromécaniques régularisés

Pour appréhender le rôle que joue la régularisation des équations de la mécanique sur le problème couplé hydromécanique et particulièrement les conséquences sur l'hydraulique on étudie, de façon analytique, le problème de la consolidation unidimensionnelle de Terzaghi sous l'hypothèse de la théorie du second gradient. A noter que dans le cas unidimensionnel, les formulations second gradient et second gradient de dilatation sont identiques.

On considère ainsi une étude unidirectionnelle (1D) suivant la direction x. On parle de tranche de sol de longueur L. Celle-ci est saturée par un fluide incompressible et décrite par une loi de comportement mécanique élastique. Les forces volumiques ne sont pas prises en compte. On utilise la notation $q(x,t)$ pour désigner la valeur de la composante q en un point de coordonnée x à l'instant t. La composante du champ de contrainte mécanique premier gradient est notée σ, celle du second gradient Σ, la pression d'eau p^{lq} et le déplacement u.

5.4.1.1 La consolidation unidimensionnelle de Terzaghi étendue au second gradient

On résume ci-dessous les équations considérées dans le cas particulier du problème de la consolidation unidimensionnelle de Terzaghi par une approche en second gradient.

$$
\begin{array}{lll}
\text{Equilibre mécanique} & \dfrac{\partial \sigma}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 \Sigma}{\partial x^2} = 0 & \\
\text{Equilibre hydraulique} & \dfrac{\partial \rho^{lq}\phi}{\partial t} - \rho^{lq}\lambda^{H,lq}\dfrac{\partial^2 p^{lq}}{\partial x^2} = 0 & \\
\text{Contraintes effectives} & \sigma = \sigma^{'} - p^{lq} \qquad (b=1) & \\
\text{Relation second gradient} & \Sigma = D\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \\
\text{Comportement mécanique élastique} & \sigma^{'} = H\dfrac{\partial u}{\partial x} &
\end{array}
\tag{5.16}
$$

où D est un paramètre matériau caractérisé par les coefficients de Mindlin (voir (4.30)), H est le module de l'élasticité (fonction du module de Young E^0 et du coefficient de poisson ν^0 drainés).

Les conditions initiales du problème sont

$$
\begin{cases}
\sigma\,(x,0) &= 0 \\
\Sigma\,(x,0) &= 0 \\
p^{lq}\,(x,0) &= P^a
\end{cases}
\tag{5.17}
$$

Tenant compte du système d'équations décrivant le problème second gradient couplé hydromécanique, les conditions à imposer aux frontières (les deux extrémités de la tranche de sol) sont soit de type déplacements imposés en u, soit de type forces en p_i et P (exprimées respectivement par (4.21) et (4.22)) pour la première expression (5.14) et soit de type pression d'eau imposée p^{lq}, soit en flux imposés $M^{lq,ext}$ pour la seconde expression (5.15).

$$
\text{en } x=0 \quad \begin{cases}
p_i\,(0,t) &= G(t) \\
P\,(0,t) &= 0 \\
p^{lq}\,(0,t) &= P^a
\end{cases}
\qquad
\text{en } x=L \quad \begin{cases}
u\,(L,t) &= 0 \\
P\,(L,t) &= 0 \\
M^{lq,ext}\,(L,t) &= 0
\end{cases}
\tag{5.18}
$$

La condition à la limite de type force imposée en $x=0$ peut également s'écrire sous la forme

$$
p_i = \sigma(0,t) - \frac{\partial \Sigma(0,t)}{\partial x} = G(t)
\tag{5.19}
$$

Après quelques manipulations algébriques sur les équations du système (5.16) on définit le problème

$$
\begin{cases}
\sigma - \dfrac{D}{H}\dfrac{\partial^2\left(\sigma + p^{lq}\right)}{\partial x^2} &= G(t) \\
\dfrac{1}{H}\dfrac{\partial\left(\sigma + p^{lq}\right)}{\partial t} - \lambda^{H,lq}\dfrac{\partial^2 p^{lq}}{\partial x^2} &= 0
\end{cases}
\tag{5.20}
$$

où les inconnues du problème sont les composantes σ et p^{lq} toutes deux fonctions des coordonnées spatiale x et temporelle t.

5.4.1.2 Les solutions analytiques dans le cadre d'une formulation second gradient

En considérant une discrétisation en Δt, on s'intéresse à l'analyse du problème analytique sur le premier pas de temps. On exprime alors une solution sous la forme de séries de Fourier

$$\begin{cases} \sigma(x) &= \sigma^0 + \sum_{n\in\mathbf{N}^*} \sigma^n \sin(\omega^n x) \\ p^{lq}(x) &= P^a + \sum_{n\in\mathbf{N}^*} p^n \sin(\omega^n x) \end{cases}$$

avec :

$$\sigma^0 = G + \frac{\partial \Sigma^0}{\partial x} \qquad \text{où} \qquad G = G(\Delta t)$$

$$\omega^n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}$$

$$det^n = (\omega^n)^{(2)} \lambda^{H,lq} \left(1 + \frac{D}{H}(\omega^n)^{(2)}\right) \Delta t + \frac{1}{H}$$

$$\frac{\partial \Sigma^0}{\partial x} = -\frac{G}{H} \frac{\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{det^n}}{\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{\left(\frac{1}{H} + \lambda^{H,lq}(\omega^n)^{(2)} \Delta t\right)}{det^n}}$$

$$\sigma^n = -\frac{2}{\omega^n L det^n} \left(\frac{\partial \Sigma^0}{\partial x} \left(\frac{1}{H} + \lambda^{H,lq}(\omega^n)^{(2)} \Delta t - \frac{D(\omega^n)^{(2)}}{H^{(2)}} \right) - \frac{D(\omega^n)^{(2)}}{H^{(2)}} G \right)$$

$$p^n = -\frac{2}{\omega^n L det^n} \left(\frac{\partial \Sigma^0}{\partial x} \frac{D(\omega^n)^{(2)}}{H^{(2)}} + \frac{1}{H} \left(1 + \frac{D(\omega^n)^{(2)}}{H}\right) G \right)$$

On vérifie que les deux séries définissant la variable $\frac{\partial \Sigma^0}{\partial x}$ sont bien convergentes vers des valeurs non nulles et que les séries définissant les fonctions $\sigma(x)$ et $p^{lq}(x)$ sont absolument convergentes.

5.4.1.3 Application numérique

L'intérêt numérique de ce test vient du fait qu'en fonction de la discrétisation spatiale et pour un temps relativement court les conditions aux limites peuvent être assimilées à des conditions de type choc hydraulique. La tranche de sol unidimensionnelle a une longueur de 10 mètres. Considérant les données suivantes

$$\begin{cases} H & = 5 \text{ MPa} \\ L & = 10 \text{ m} \\ \Delta t & = 0,01 \text{ s} \\ G & = -1 \text{ MPa} \\ \lambda^{H,lq} & = 10^{(-10)} \text{ m}^{(2)}.(\text{Pa.s})^{(-1)} \\ D & = 2,5\,10^{(-2)} \text{ MPa.m}^{(2)} \end{cases}$$

on présente en figure 5.3 les courbes représentatives des solutions analytiques obtenues au chapitre 5.4.1.2, sur les pressions d'eau et les contraintes totales. A titre de comparaison on a également tracé la solution classique - dans sa formulation locale sans régularisation - du problème de consolidation de Terzaghi.

- Il est connu que dans le cas non régularisé, la pression d'eau le long de la tranche de sol est représentée par une fonction de type Heavyside. Numériquement le saut de pression à la frontière du sol est caractérisé par la distance entre les deux premiers points calculés (voir la courbe des pressions d'eau non régularisées). Plus la discrétisation spatiale est fine, plus la solution numérique approchera la fonction Heavyside.

- Dans le cas second gradient, il est intéressant de noter que les variables du modèle (contraintes totales et pressions d'eau) ne subissent pas de façon aussi rapide - voire instantanée - l'effet de la consolidation. Les pressions interstitielles sont ainsi étalées sur les premiers éléments. Ce nombre dépend de la longueur d'influence du modèle second gradient qui est contrôlée par le paramètre de régularisation D défini par le système d'équations (5.16). A paramètre de régularisation fixé, la longueur d'influence reste constante. Le nombre d'éléments dans la zone étalée dépend alors de la discrétisation spatiale.

On constate, en figure 5.4, que l'écart entre les courbes représentatives des contraintes et des pressions s'estompe progressivement en augmentant l'incrément de temps. Cet écart diminue plus vite pour les pressions que pour les contraintes. La conséquence en est une diminution de l'effet régularisant, plus rapide pour les pressions que pour les contraintes effectives, avec l'augmentation de l'incrément de temps.

On attire l'attention sur le fait que cette approche est, assez différente de la théorie second gradient proposée par Sciarra et al [125] dans le cadre des matériaux poreux puisque dans ce dernier cas, les auteurs introduisent des termes en second gradient sur les pressions. En revanche, on retrouve comme eux, un effet régularisant sur la pression au bord du domaine et sur les premiers instants.

5.4.2 Discrétisation éléments finis

En vue d'une résolution des équations par la méthode des éléments finis, on adopte la même technique que celle présentée au chapitre 4.2.4 qui combine dans sa partie second gradient de dilatation une formulation mixte avec une approche pénalisée.

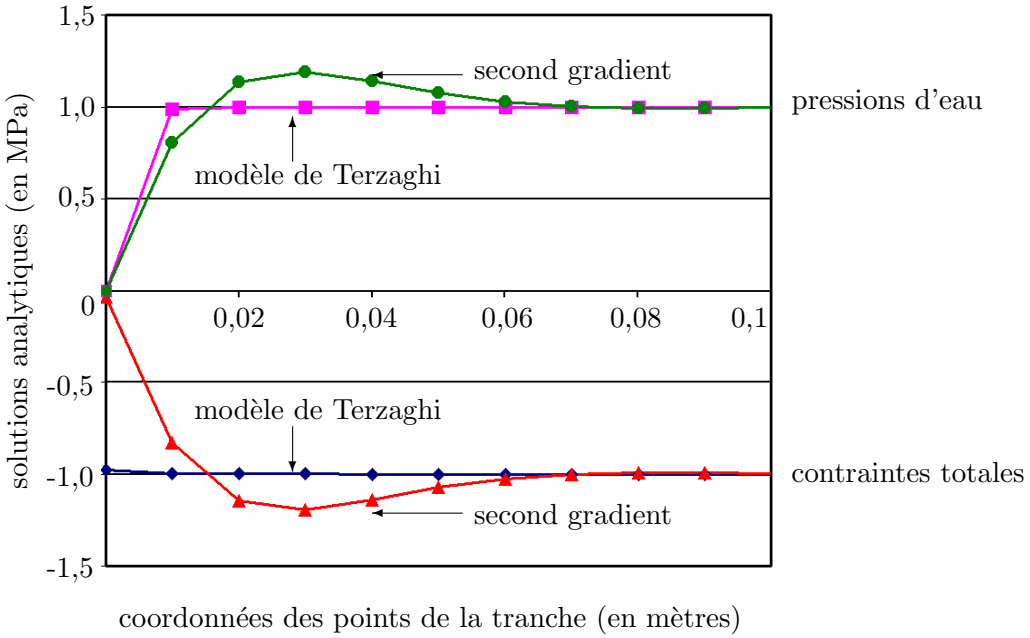


Fig. 5.3. Solutions analytiques du problème couplé hydromécanique de la consolidation de Terzaghi pour un incrément de temps $\Delta t = 0,01$ s. Comparaison des contraintes totales et des pressions d'eau au bord de la tranche de sol subissant une force imposée.

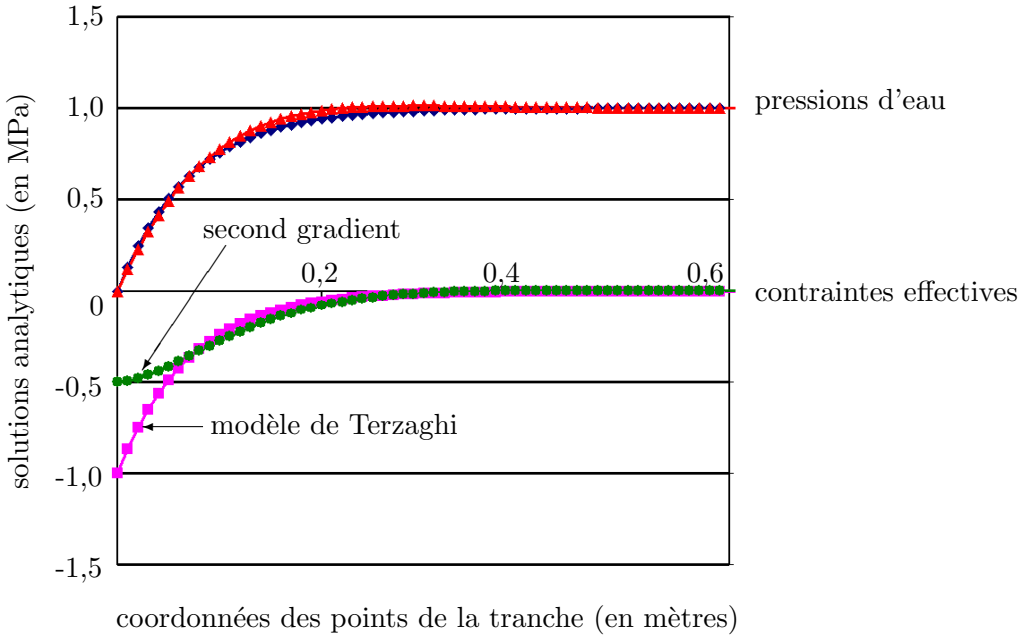


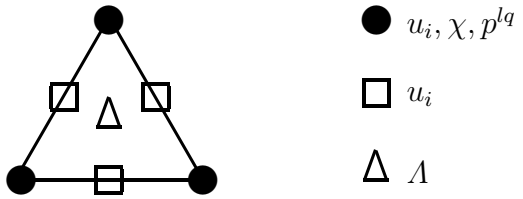
Fig. 5.4. Solutions analytiques du problème couplé hydromécanique de la consolidation de Terzaghi pour un incrément de temps $\Delta t = 10$ s. Comparaison des contraintes effectives et des pressions d'eau au bord de la tranche de sol subissant une "force" imposée.

$$\int_{\Omega}\left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{*}+S_{j}\frac{\partial\chi^{*}}{\partial x_{j}}-\Lambda\left(\varepsilon_{V}^{*}-\chi^{*}\right)+\Lambda^{*}\left(\varepsilon_{V}-\chi\right)+r\left(\varepsilon_{V}-\chi\right)\left(\varepsilon_{V}^{*}-\chi^{*}\right)\right)dv=$$
$$\int_{\partial\Omega}\left(p_{i}u_{i}^{*}+Pn_{i}D\left(u_{i}^{*}\right)\right)ds \tag{5.21}$$

$$-\int_{\Omega}\frac{dm^{lq}}{dt}p^{lq,*}dv+\int_{\Omega}M_{j}^{lq}\frac{\partial p^{lq,*}}{\partial x_{j}}dv=\int_{\partial\Omega}M_{j}^{lq,ext}p^{lq,*}ds \tag{5.22}$$

où p_i, P et $M_j^{lq,ext}$ sont respectivement les forces de surfaces d'origine mécanique et le flux d'eau imposés aux frontières.

La discrétisation élément fini que nous proposons pour résoudre ce système d'équations est issue de la combinaison des stratégies adoptées à la fois pour traiter le problème régularisé du chapitre 4 et pour traiter les problèmes couplés du chapitre 1.3.3. On obtient ainsi pour le couple d'inconnues nodales l'élément fini $\left(u_i-\mathrm{P2},\chi-\mathrm{P1},\lambda-\mathrm{P0},p^{lq}-\mathrm{P1}\right)$:



5.4.3 Simulation régularisée d'une excavation souterraine en condition non-drainée

On considère à nouveau la simulation numérique du problème couplé hydro-mécanique de l'excavation souterraine du benchmark décrit au chapitre 5.3 et dont la géométrie est présentée en figure 5.1. L'état de contrainte initial du milieu, supposé anisotrope, est décrit par les conditions (5.11). Les conditions aux limites traduisent, d'une part, les effets du poids et de la poussée des terres, respectivement σ^v et σ^h, et d'autre part, les forces hydro-mécaniques générées par le creusement de la galerie. On ajoute, dans le cas particulier de la formulation second gradient de dilatation, les conditions aux limites simulant les doubles forces, notées P dans l'équation (5.21). On les suppose nulles sur toutes les frontières de la géométrie. On impose enfin comme conditions aux limites sur la cavité circulaire, à partir des relations mathématiques (5.21) et (5.22).

$$\begin{cases} p_i\left(t\right) &= \lambda\left(t\right)\left(\sigma_{ij}^{0}.n_j-\left(n_jDS_j^0+\dfrac{DS_j^0}{Dx_j}\right).n_i\right)\\ P\left(t\right) &= 0\\ p^{lq}\left(t\right) &= \lambda\left(t\right)p^{lq,init}\end{cases} \tag{5.23}$$

où p_i a été définie au chapitre 4.1.4 par l'équation (4.23). On remarque que la prise en compte de la régularisation du problème par la formulation second gradient de dilatation a un impact sur les relations définissant les conditions aux limites. Il suffit de comparer

les expressions de p_i dans les équations (5.12) et (5.23).

Le comportement matériau est décrit de façon identique à celui du benchmark MoMas. Par conséquent la loi de comportement Drucker-Prager est consevée dans sa version associée. Les paramètres matériau sont ceux de la table 5.1. On ajoute, enfin, pour décrire le comportement élastique second gradient, le paramètre définit par Mindlin et noté a^1 dans (4.34). Ce paramètre sera le même pour toutes les simulations de ce chapitre. Pour rappel, ce paramètre permet d'identifier l'épaisseur de la bande de localisation (dans sa partie adoucissante) d'après la relation (4.57) et s'écrit donc

$$a^1 = \frac{l^{c^{(2)}}}{\left(c^p\right)^{(2)}} \mid m \mid \tag{5.24}$$

où c^p est un coefficient de proportionnalité que l'on a trouvé égal à 20 au chapitre 4.3.2.2, l^c est la largeur caractéristique de la bande de localisation et m est l'amplitude de la pente adoucissante représentative du comportement matériau sur un essai triaxial. Avec les paramètres matériau définit en table 5.1 on a $\mid m \mid = 7,2.10^{(8)}$. Compte tenu de la finesse des discrétisations spatiales, qui seront décrites ci-dessous, on souhaite avoir une bande de localisation, au bord de la cavité circulaire, dont l'épaisseur soit égale à 3 fois la taille de la maille du maillage le plus grossier. Cette taille de maille a été fixée a $0,05$ mètre. On en déduit

$$a^1 = 4.\,10^{(4)} \text{ MPa.m}^{(2)} \tag{5.25}$$

Le paramètre de pénalisation est défini tel que $r = 10^{(12)}$ MPa. Dans la suite de ce chapitre, on compare les solutions obtenues avec la formulation second gradient de dilatation par rapport à celles présentées sans régularisation au chapitre 5.3. On montre, l'indépendance des résultats par rapport aux paramètres numériques en espace et en temps. Pour cela, on considère

- trois finesses de discrétisations spatiales. On reprend les deux maillages définis au chapitre 5.3. Le premier, le plus "grossier", comprend 18.867 éléments triangles et est caractérisé par une taille de maille au bord de la cavité circulaire de $0,05$ mètre. Le second, "très fin", comprend 78.164 éléments triangles et la taille de maille au bord de la galerie est de $0,015$ mètre. Enfin, on ajoute une troisième discrétisation, "intermédiaire", caractérisée par une taille de maille de $0,03$ mètre dans les premières couches d'éléments autour de la cavité. Le maillage comprend 30.471 éléments triangles.

- deux listes d'instants. La première liste est identique à celle prise en compte lors des simulations présentées au chapitre 5.3. Les 17 jours de la phase d'excavation sont discrétisés en 150 pas de temps de 10.000 secondes. La phase de consolidation, d'une durée de 15 mois, est définie par des pas de temps de 500.000 secondes. La seconde liste d'instants est plus fine, les pas de temps sont divisés par 10, correspondant ainsi à des temps de 1.000 secondes dans la phase d'excavation et de 50.000 secondes dans la phase de consolidation.

On s'intéresse, enfin, aux aspects purement numériques comme les performances temps de calcul et la convergence de l'algorithme de Newton.

5.4.3.1 Indépendance des résultats par rapport à la finesse du maillage et des pas de temps

Dans cette section, tous les paramètres de calculs sont identiques pour toutes les simulations. Seules les discrétisations spatiales diffèrent. Les résultats présentés ci-dessous sont obtenus à partir de la liste d'instants la moins fine décrite ci-dessus (section 5.4.3). Le premier constat vient de la bonne convergence numérique de la version second gradient de dilatation par rapport à la version locale, non régularisée. Le résidu, défini par la relation (1.5) du chapitre 1.3.1, descend jusqu'à des valeurs de l'ordre de $10^{(-12)}$ en une petite dizaine d'itérations de Newton pour la version second gradient de dilatation (les critères d'arrêt définis au chapitre 1.3.1 par les relations (1.7) ont été fixés à $\eta^1 = 10^{(-1)}$ et $\eta^2 = 10^{(-11)}$), tandis que pour la version locale le résidu atteint péniblement des valeurs de l'ordre de $10^{(-6)}$.

Comme on peut l'observer, en figures 5.5 et 5.6 sur les isovaleurs de la variation de porosité aux points de Gauss après 3 et 15 mois de consolidation, les bandes de localisation obtenues et les amplitudes des isovaleurs sont semblables quel que soit le maillage considéré. Les différences semblent minimes d'un maillage à un autre.

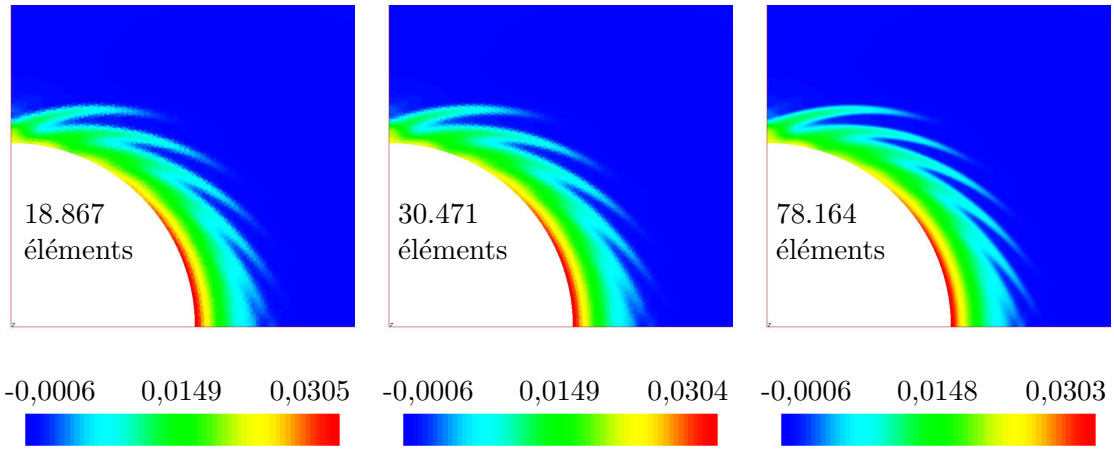
De plus, on constate que l'amplitude de la variation de porosité depuis l'état initial est d'environ 3% après 3 mois de consolidation et de 5% après 15 mois de consolidation, alors qu'elle était de plus de 20% dans le cas non-régularisé présenté en figure 5.2. On remarque donc que l'écart entre solutions régularisées et solutions locales est significatif, malgré le fait que les calculs aient été réalisés en considérant une perméabilité constante.

On constate, enfin, que pour une durée de consolidation donnée, l'épaisseur des bandes de localisation est identique quelle que soit la discrétisation spatiale. On observe à nouveau des bandes qui s'élargissent comme cela à déjà été mentionné au chapitre 4.3.2.8. Pour y remédier, une solution consiste à considérer la loi de comportement Drucker-Prager dans sa version non-associée. Il s'agit là d'une étape à inclure dans nos perspectives de travail.

Les simulations numériques réalisées avec les deux listes de pas de temps conduisent à des solutions extrêmement proches pour un maillage donné.

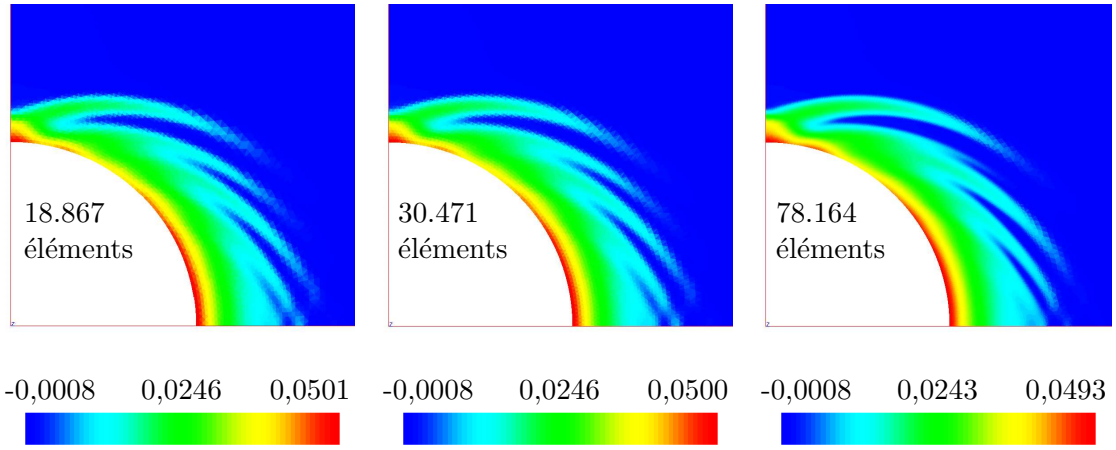
5.4.3.2 Performances numériques du modèle second gradient de dilatation dans le cas d'un problème couplé hydromécanique

Du point de vue numérique, on constate (table 5.2) que la formulation second gradient de dilatation introduit en moyenne 33% de degrés de liberté supplémentaires par rapport au modèle continu classique du premier gradient. Les temps de calculs sont en revanche nettement à l'avantage du modèle régularisant. Les temps CPU affichés n'ont pas d'autres intérêt que de prouver qu'avec le modèle second gradient les simulations prenant en compte



Variation de la porosité après 3 mois de consolidation

Fig. 5.5. Visualisation aux points de Gauss de la variation de la porosité dans le cas d'une simulation couplée hydromécanique décrite par la formulation second gradient de dilatation. Trois discrétisations spatiales donnent des résultats similaires.



Variation de la porosité après 15 mois de consolidation

Fig. 5.6. Visualisation aux points de Gauss de la variation de la porosité dans le cas d'une simulation couplée hydromécanique décrite par la formulation second gradient de dilatation. Trois discrétisations spatiales donnent des résultats similaires.

des discrétisations fines sont envisageables, d'autant que les calculs ont été réalisés sur le même serveur de calculs et de façon séquentielle (le calcul parallèle n'a pas été activé). Il apparaît donc clairement que, bien que le coût de calcul soit un peu plus cher par itération de Newton pour le modèle second gradient (puisque le nombre de degrés de liberté est plus important), la convergence est bien plus rapide.

Méthodes	Locale		Second gradient de dilatation	
Formulations	(u_i-P2; p^{lq}-P1)		(u_i-P2; χ-P1; Λ-P0; p^{lq}-P1)	
Maillages	Nombre de ddls	CPU	Nombre de ddls	CPU
18.867 triangles	86.540	26 heures	114.985	10 heures
30.471 triangles	139.028	3 jours	184.909	19 heures
78.164 triangles	355.056	$7,5$ jours	472.606	$2,5$ jours

Table 5.2. Comparaison des performances numériques du modèle second gradient de dilatation par rapport à la formulation locale. Détails des temps de calculs pour simuler entièrement la phase d'excavation.

5.5 Bilan et perspectives

Nous avons montré dans ce chapitre que la formulation second gradient de dilatation est une modélisation qui permet de donner des résultats objectifs par rapport à la discrétisation spatiale y compris dans le cas des milieux poreux couplés hydro-mécaniques. Les performances numériques sont appréciables. Il a en effet été réalisée des simulations d'une excavation souterraine en condition non-drainée comprenant un peu moins de 500.000 degrés de liberté pour un peu plus de 78.000 éléments quadratiques de type triangles .

Les simulations numériques ont cependant été réalisées en tenant compte d'une loi de comportement premier gradient associée. Il n'a donc pas été possible de s'affranchir de l'élargissement des bandes de localisation. Une des perspectives, à venir, de ce travail porte donc sur une simulation similaire à celle du chapitre 5.4.3 avec une version non-associée d'une loi rhéologique représentative du comportement des sols.

Dans la continuité de ces travaux, une seconde perspective porte sur la réalisation d'une simulation d'excavation souterraine plus réaliste du point de vue phénoménologique, prenant en compte, notamment, une variation de la perméabilité et une évolution de la saturation en eau dans le milieu poreux en fonction de l'état d'endommagement du terrain.

Enfin, une troisième perspective qui s'inscrit dans le contexte numérique, consiste à étendre l'analyse couplée régularisée par la formulation second gradient de dilatation aux simulations tridimensionnelles.

6

Recherche de solutions bifurquées pour les modèles à gradient

6.1 La bifurcation dans les structures à comportement non-linéaires adoucissants . . . 114

6.1.1 Identification des points singuliers . . . 116

6.1.2 L'algorithme de recherche de solutions bifurquées . . . 116

6.2 Application numérique sur un essai biaxial homogène en compression . . . 118

6.2.1 Recherche des points singuliers à partir d'un critère global . . . 120

6.2.1.1 Recherche de solutions bifurquées à partir du premier point singulier . . . 121

6.2.1.2 Recherche de solutions bifurquées à partir de la deuxième valeur propre . . . 124

6.2.2 Recherche de solutions bifurquées à partir d'un critère local . . . 130

6.2.3 Bilan de la simulation . . . 132

6.3 Les techniques de changement de branche : Un soutien à la convergence numérique . . . 134

6.4 Application numérique sur une simulation d'excavation en condition drainée . . . 136

6.4.1 Solutions multiples au problème de l'excavation . . . 139

6.4.2 Analyse de la vitesse d'évolution de la déformation plastique cumulée . . . 141

6.5 Bilan et perspectives . . . 142

Un autre objectif de ce travail de recherche porte sur l'utilisation de la théorie de la bifurcation comme outil de calcul numérique. La présentation des méthodes de recherche de solutions bifurquées du chapitre 3.3 est une lecture préalable et indispensable pour poursuivre cette partie. En effet, le vocabulaire de base et une approche simplifiée de la théorie de la bifurcation y sont décrits.

Comme nous l'avons déjà évoqué en partie introductive de ce rapport, si l'application de méthodes de régularisation permet de rendre la solution du problème aux limites objective par rapport à la discrétisation du maillage, le problème mathématique n'assure pas pour autant l'unicité de la solution. A titre d'exemple, c'est ce qu'on peut observer lors de la simulation de l'excavation souterraine en condition non-drainée présentée au chapitre 5.4.3. Munis d'un oeil attentif, on ne manque pas d'observer en figure 5.6 que le nombre de bandes de localisation est différent sur le maillage le plus fin malgré des largeurs de bandes équivalentes d'un maillage à un autre. Cette non-unicité se traduit par l'existence d'une multiplicité de chemins de chargements possible vérifiant, en tout point de la structure, toutes les équations du problème aux limites.

L'objectif de ce travail se résume en trois points :

- Evaluer la faisabilité de la mise en oeuvre informatique d'une technique de changement de branches en vue d'une application dans le cadre d'études industrielles complexes. Nous avons vu que ces méthodes étaient basées sur une analyse numérique aux valeurs propres de la matrice tangente de rigidité du système. On se limite donc volontairement au cas des opérateurs symétriques qui sont plus simples à appréhender et pour lesquels la littérature scientifique est plus riche. Cette hypothèse suppose implicitement que les lois de comportements doivent être inscrites dans un cadre standard généralisé et que les couplages avec l'hydraulique sont proscrits. L'extension de cette étape à tous les types d'opérateurs est d'ores et déjà une perspective d'après thèse.

- Permettre à l'ingénieur de trouver le maximum de solutions à son problème aux limites. Il n'est pas possible a priori de prévoir quelle solution est la plus pertinente. Il faudrait pour cela avoir un critère définissant cette pertinence. De plus, il a été montré expérimentalement, qu'il pouvait exister une multiplicité de solutions à un problème donné dans le cadre des géomatériaux. Des argumentations basées sur l'existence préalable de défauts dans les parties microstructurales de la structure ont été avancées pour justifier cette multiplicité. Mais il a été démontré numériquement que la prise en compte de défauts dans un calcul de structure ne permettait pas de restaurer l'unicité de la solution.

- Donner à l'ingénieur des outils efficaces et performants pour mener à bien ses études. Le mauvais conditionnement de la matrice tangente de rigidité au voisinage d'un point de bifurcation se traduit souvent par des difficultés de convergence numériques. Nous souhaitons ainsi montrer que, dans certains cas, les techniques de changement de branches peuvent aussi être des solutions alternatives aux méthodes de continuation pour franchir des instabilités numériques.

6.1 La bifurcation dans les structures à comportement non-linéaires adoucissants

Pour simuler le comportement de structures présentants des non-linéarités matériaux caractérisées par une réduction du domaine de réversibilité - comportement adoucissant -,

il est bien connu que des méthodes de régularisation doivent être introduites. Or ces méthodes ont chacune des spécificités différentes et s'adaptent plus ou moins efficacement à un type particulier de problème. Il est donc essentiel de bien choisir une formulation sur des considérations théoriques. Le cadre d'applications dans lequel s'inscrit ce travail est celui des géomatériaux. Nous avons montré au chapitre 4.1, que dans ce cas, une régularisation basée sur la variable de dilatation était une solution efficace. C'est la solution proposée par le second gradient de dilatation. Par conséquent, toutes les simulations présentées dans la suite de ce chapitre s'inscrivent dans le cadre des géomatériaux régularisées par le second gradient de dilatation.

De plus, nous avons restreint le cadre de ce travail aux simulations numériques de comportement de structures pour lesquelles la matrice tangente de rigidité était symétrique pour des raisons théoriques. En effet, la plupart des propriétés et théorèmes associés à la recherche de valeurs et vecteurs propres s'inscrivent dans ce cadre. Or, la présence de fluide ou de multiplicateurs de Lagrange rend l'opérateur tangent dissymétrique. Il faut donc impérativement prendre en compte la loi de comportement Drucker-Prager dans sa version associée décrite au chapitre 4.3.1.2 (et non dans sa version non-associée) et la formulation second gradient de dilatation sans multiplicateurs de Lagrange (4.50) dans le cadre d'une approche purement mécanique. Pour rappel l'expression mathématique en est la suivante, pour tout champ cinématiquement admissible (u_i^*, χ^*)

$$\int_\Omega \left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^* + S_j \frac{\partial \chi^*}{\partial x_j} + r\left(\varepsilon_V - \chi\right)\left(\varepsilon_V^* - \chi^*\right) \right) dv = \int_{\partial\Omega} \left(p_i u_i^* + P n_i D u_i^*\right) ds. \tag{6.1}$$

où r est le paramètre de pénalisation.

L'algorithme de recherche de solutions bifurquées que nous proposons se veut simple dans sa mise en oeuvre informatique pour des raisons de robustesse en vue d'applications numériques complexes et efficace dans sa capacité à détecter les solutions multiples. C'est pour cela que l'algorithme s'articule autour des deux idées suivantes :

- Le ou les points de bifurcations sont des indicateurs spécifiant la présence probable de solutions multiples. Bien que leur identification soit une étape indispensable, il ne nous semble pas essentiel du point de vue numérique que leur position soit déterminée de façon précise. Pour des raisons de performances numériques principalement, car il faudrait alors utiliser soit une des techniques dites "directe" de recherches de points singuliers, soit une discrétisation très fine des pas de temps pour appliquer de façon rigoureuse la méthode d'identification par analyse des plus petites valeurs propres.

- Toute solution doit être prise en compte. En effet, la plupart des techniques mises en oeuvre dans la littérature proposent des méthodes permettant de détecter une seule solution bifurquée. Mais de notre point de vue, il faut d'abord être en mesure d'identifier toutes les solutions probables pour l'ingénieur qui devra ensuite les trier suivant les critères qu'il se sera fixé.

6.1.1 Identification des points singuliers

Cette étape d'identification consiste à définir un critère numérique comme fonction indicatrice de la perte d'unicité de la solution du problème discrétisé. Nous avons considéré deux types de critères :

- Un critère global basé sur l'analyse de la singularité de la matrice tangente de rigidité calculée à partir des équations exprimées en vitesse. La fonction indicatrice de la perte d'unicité de la solution est activée dès lors que la plus petite des valeurs propres s'annule. Pour des raisons de précisions numériques l'activation du critère s'interprète, en fait, par le changement de signe de la plus petite des valeurs propres. Mais ce critère, issu de la théorie de la bifurcation des problèmes quasi-statique non-linéaires continus, souffre dans son extension aux problèmes discrets de deux défauts. Le premier est un défaut mineur, lié à la discrétisation en temps du problème mécanique. Pour bien faire, il faudrait que les pas de temps soit infiniment fin. Le second est, en revanche, un défaut majeur lié au caractère non-différentiable de la loi de comportement Drucker-Prager à la transition entre la phase élastique et le comportement adoucissant post-pic (voir figure 4.3) d'une part, et à la transition entre les conditions de charge et de décharge d'autre part.

- Un critère local basé sur l'analyse du tenseur acoustique, du problème incrémental, défini par Rice [120]. Ce critère présente la perte de l'unicité de la solution du problème incrémental comme la conséquence de l'apparition de bandes de localisation, sous l'hypothèse d'un état de déformation homogène et pour des modèles linéaires. Pour les modèles bilinéaires, c'est le cas de la loi de comportement Drucker-Prager que nous considérons, Chambon et al [30] montrent que ce critère local est également un indicateur de localisation. Enfin, Chambon et al [31] et Bésuelle et al [17], montrent que la bifurcation de la solution vers un état de déformation non-homogène, dans le cas des modélisations enrichies par la microstructure, est due uniquement au comportement local du matériau. Cet indicateur est donc défini en chaque point d'intégration, par la relation
$$\det\left(\mathbf{n}.\mathbf{H}.\mathbf{n}\right) = 0 \tag{6.2}$$
où $\mathbf{H}$ désigne la matrice tangente de rigidité en charge et $\mathbf{n}$ la normale à la bande de localisation.

6.1.2 L'algorithme de recherche de solutions bifurquées

Pour identifier les solutions bifurquées d'un problème de calcul de structure caractérisé par un matériau décrit par une loi de comportement de type adoucissante, on prend en compte l'algorithme de recherche basé sur la perturbation de la prédiction du champ de déplacement décrit au chapitre 3.3.2.1 par la relation (3.35). Pour rappel, on suppose que le point de bifurcation a été atteint pour un niveau de chargement correspondant à un pas de temps t et on cherche les solutions bifurquées en orientant la prédiction de l'algorithme de Newton dans la direction du mode de bifurcation.

$$\left(\Delta\mathbf{u}^t\right)^{pert,0} = \beta\left(\Delta\mathbf{u}^t\right)^{fond,cv} + \alpha\boldsymbol{\theta}^t \tag{6.3}$$

où $\left(\Delta\mathbf{u}^t\right)^{pert,0}$ désigne l'initialisation de l'incrément du champ de déplacement pour le pas de temps t depuis $t-1$, $\left(\Delta\mathbf{u}^t\right)^{fond,cv}$ est l'incrément du champ de déplacement de la solution fondamentale obtenue après convergence du calcul à l'instant t depuis l'instant $t-1$, $\boldsymbol{\theta}^t$ est le vecteur propre singulier au point de bifurcation associé à la solution fondamentale, α et β sont des coefficients à déterminer.

La première étape d'identification des paramètres α et β consiste à normer les champs de la relation (6.3) entre eux. L'intérêt de cette démarche est d'essayer de contrôler l'amplitude de la perturbation par le vecteur propre en fonction de la norme du champ des déplacements pour éviter des calculs prohibitifs sans intérêt. C'est pour cela qu'on se défini la norme α^M suivante

$$\alpha^M = \frac{1}{2}\frac{\mid (\mathbf{u}^t)^{fond,cv} \mid_\infty}{\mid \boldsymbol{\theta}^t \mid_\infty} \tag{6.4}$$

où $(\mathbf{u}^t)^{fond,cv}$ désigne le champ de déplacement de la solution fondamentale après convergence du calcul à l'instant t et $\mid . \mid_\infty$ est la norme infinie.

Une fois que α^M est identifié, le principe de l'algorithme de recherche de solutions bifurquées consiste à itérer sur un ensemble de 1000 paramètres α régulièrement répartis entre $-\alpha^M$ et $+\alpha^M$. Pour toutes les simulation réalisées, on a pris $\beta = 1$.

Pour simplifier l'écriture de l'algorithme on va supposer que les points singuliers sont simples. Ainsi pour un pas de temps t donné, un seul vecteur propre est pris en compte comme direction de recherche des solutions bifurquées. En revanche, on considère que suivant cette direction, plusieurs solutions sont possibles. Voici en quelques mots le principe de l'algorithme détaillé en table 6.1 et décrit par le graphique de la figure 6.1 :

- La première étape permet d'identifier le pas de temps pour lequel un point de bifurcation est détecté. Pour cela il faut choisir un des critères d'identification, global ou local, décrit en section 6.1.1.

- La deuxième étape consiste alors à chercher des solutions bifurquées en perturbant l'initialisation de l'algorithme de Newton selon l'équation (6.3). Pour trier les différentes solutions, on considère que, pour deux paramètres α^1 et α^2 donnés, les solutions convergées sont les mêmes si la plus petite des valeurs propres respective de chacune des matrices tangente de rigidité (notées ω^1 et ω^2) sont identiques. Il s'agit d'un choix arbitraire issu du retour d'expérience des premières simulations que nous avons menées. Du point de vue numérique, on interprète cette notion par

$$\text{Si} \quad 0 < \frac{\max\left(\omega^1, \omega^2\right)}{\min\left(\omega^1, \omega^2\right)} < 0,01 \qquad \text{alors les solutions sont identiques.} \tag{6.5}$$

- La troisième étape poursuit le calcul statique non-linéaire suivant la branche bifurquée. On réactive durant cette étape la recherche de point de bifurcation comme lors de la première étape. On peut ainsi détecter des bifurcations dites en cascade.

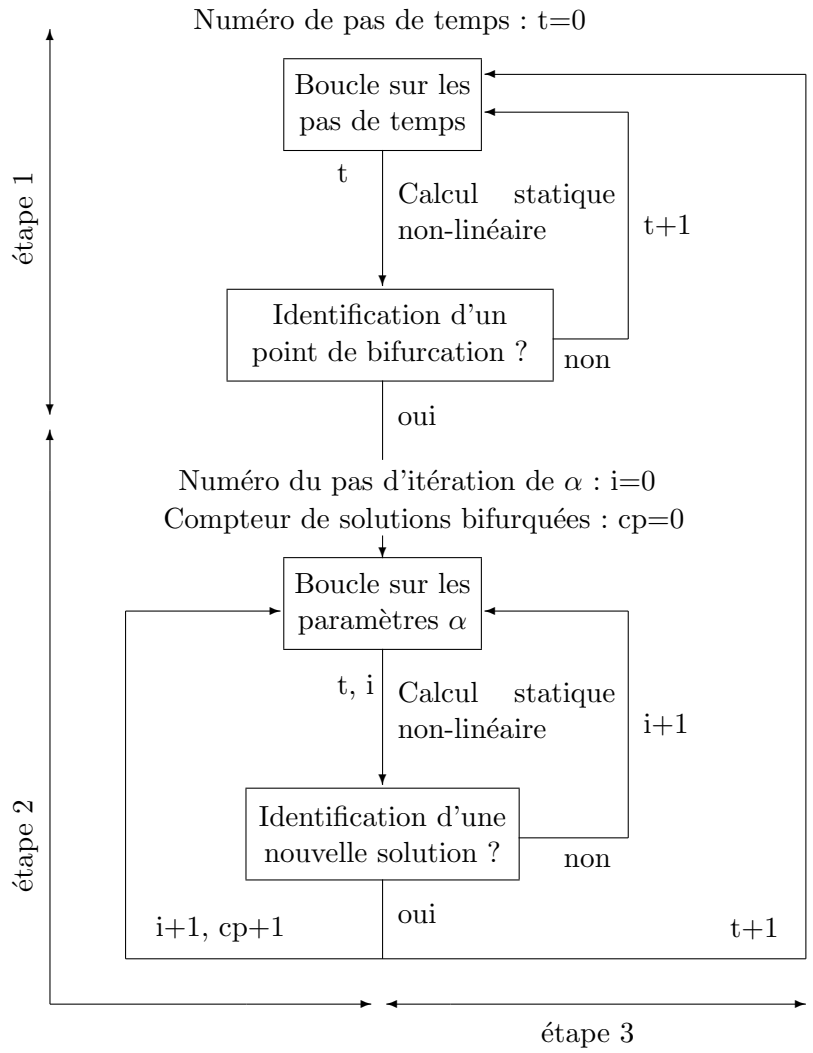


Table 6.1. Algorithme de recherches de solutions bifurquées

6.2 Application numérique sur un essai biaxial homogène en compression

On considère, dans cette partie, la simulation d'un essai biaxial homogène en compression (voir figure 6.2). La différence de l'essai réalisé dans ce chapitre par rapport à celui présenté au chapitre 4.3 vient uniquement de la suppression de l'imperfection matériau qui avait été introduite pour déclencher l'apparition d'une bande de localisation. Pour rappel, la loi de comportement prise en compte est la loi Drucker-Prager dans sa version associée décrite au chapitre 4.3.1.2.

On considère dans tous les cas que le paramètre de pénalisation vaut $r = 10^{(14)}$ MPa. Enfin, nous prenons en compte deux discrétisations spatiales (figure 6.3) de la géométrie de la figure 6.2. Celles-ci correspondent aux maillages des figures 4.5(a) et 4.5(d) et comprennent respectivement 1.600 et 19.600 éléments triangles.

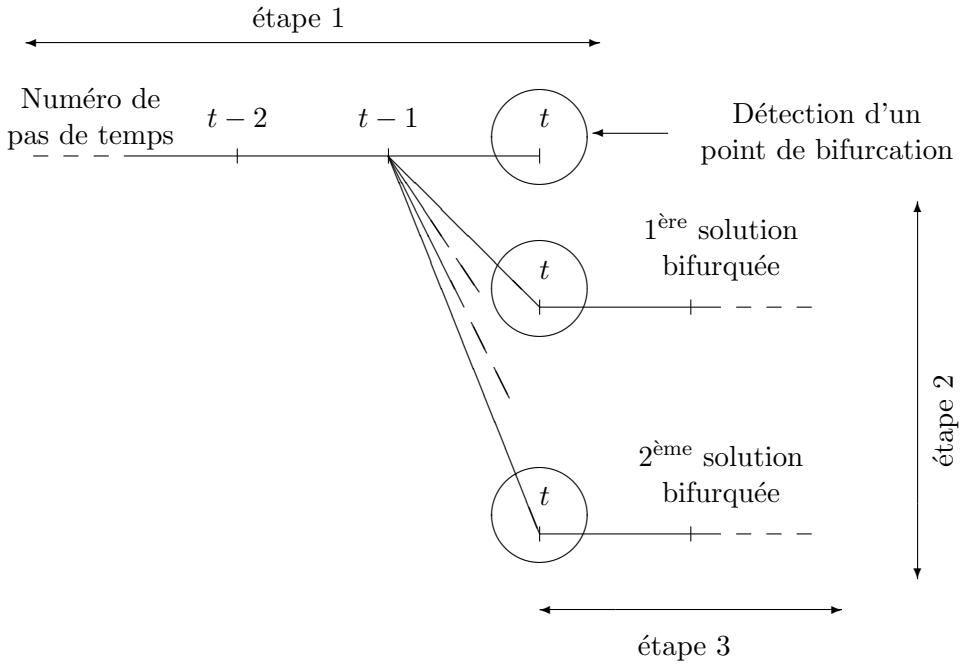


Fig. 6.1. Graphique décrivant l'algorithme de recherche de solutions multiples

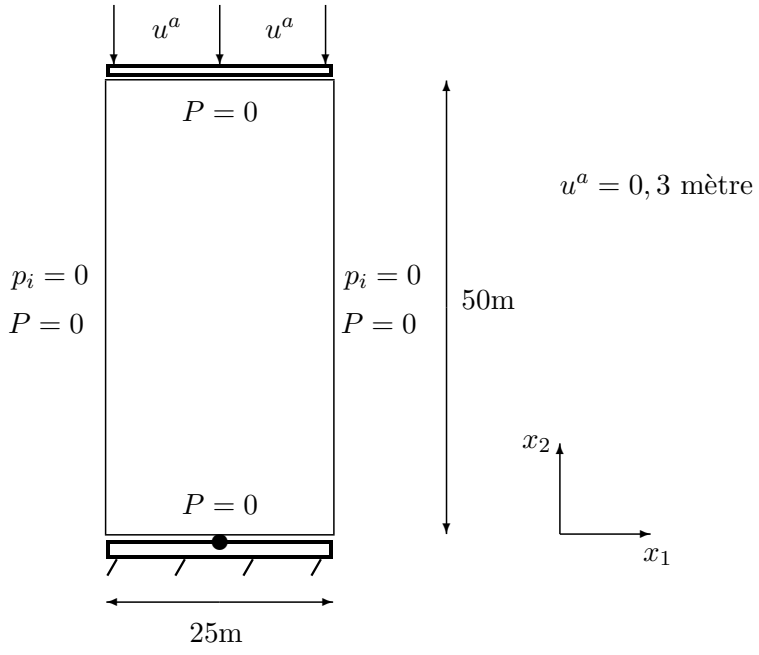
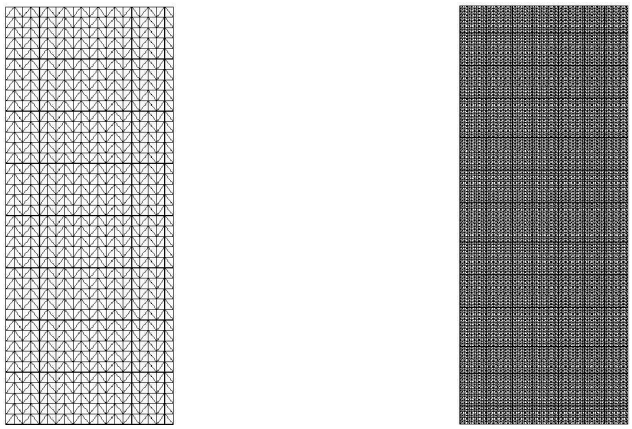


Fig. 6.2. Simulation du problème aux limites de l'essai biaxial

La résolution numérique classique de ce problème conduit à une solution homogène, en terme de contraintes et de déformations, en tout point d'intégration. On utilise alors l'algorithme décrit dans la table 6.1. Dans les deux sections on présente les solutions bifurquées obtenues en fonction du critère, global ou local, d'identification d'un point de bifurcation.

Elasticité	comportement Drucker-Prager
$E^0 = 1000$ MPa	$c = 1$ MPa
$\nu^0 = 0.3$	$\varphi = 25\,^\circ$
$a^1 = 90$ MPa m^2	$\gamma^R = 0.015$
	$\alpha = 0.688$

Table 6.2. Paramètres matériau.



(a) 1.600 éléments triangles

(b) 19.600 éléments triangles

Fig. 6.3. Maillages réglés identiques à ceux du chapitre 4.3.

6.2.1 Recherche des points singuliers à partir d'un critère global

Pour rappel, le critère global que l'on considère pour identifier les points de bifurcation porte sur le changement de signe de la (ou des) plus petite des valeurs propres de la matrice tangente de rigidité. En considérant le maillage le plus grossier (celui présenté en figure 6.3(a)) dans un premier temps, on présente en figure 6.4 les courbes représentatives de l'évolution des trois plus petites valeurs propres de la matrice tangente de rigidité calculée en vitesse à partir de la solution convergée à l'issue de chaque pas de temps. On observe, que les deux plus petites valeurs propres changent de signe pour des valeurs de chargement très proche. En revanche, la troisième valeur propre ne diminue pas aussi rapidement que les précédentes. On interprète ces observations comme l'identification de deux points de bifurcations simples.

On observe le même résultat, à savoir l'existence de deux points de bifurcations simples, en considérant l'analyse aux valeurs propres basée sur une simulation prenant en compte le maillage le plus fin (celui de la figure 6.3(b)).

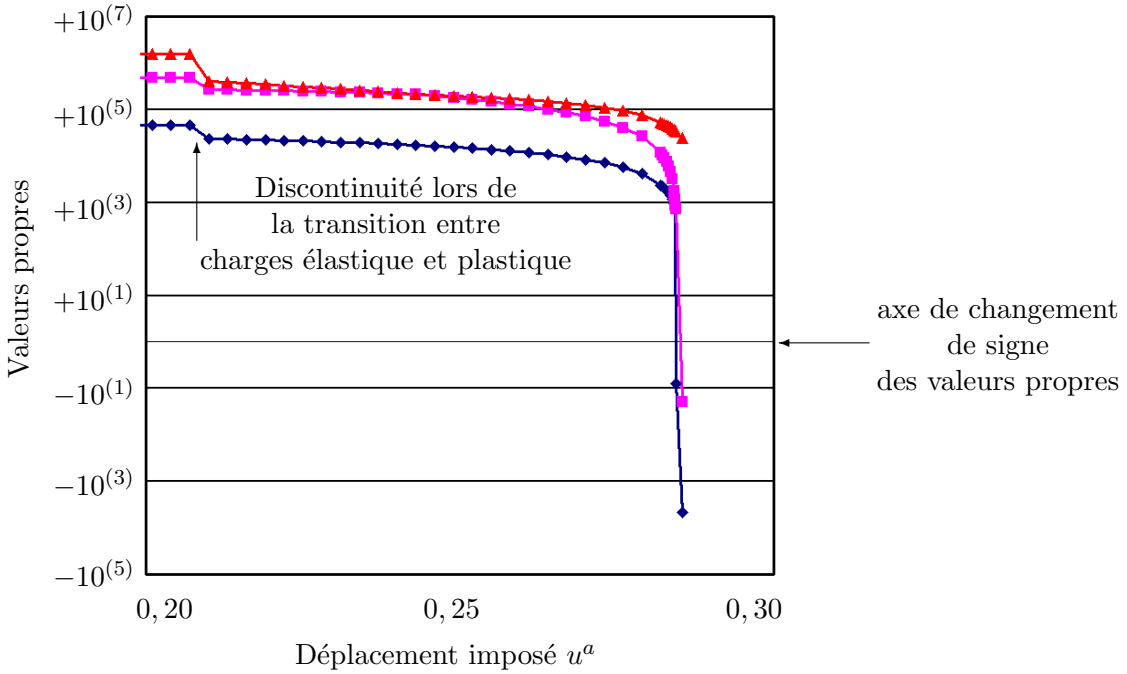


Fig. 6.4. Essai biaxial homogène en compression : Allure des trois plus petites valeurs propres de la matrice tangente de rigidité.

6.2.1.1 Recherche de solutions bifurquées à partir du premier point singulier

6.2.1.1.1 Recherche de solutions bifurquées en considérant le maillage grossier de la figure 6.3(a)

Le premier point singulier est détecté pour un chargement vertical imposé $u^a = 0,28443$ mètre. Les deux plus petites valeurs propres de la matrice tangente de rigidité valent alors respectivement -8 et $+726$. On appelle alors mode propre de bifurcation le vecteur propre associé à la valeur propre -8. On observe sur la figure 6.5, représentant la déformation volumique de ce mode dans sa configuration déformée, qu'il s'agit d'un mode symétrique.

La norme maximale de la perturbation à introduire dans l'initialisation de l'algorithme de recherche des solutions bifurquées est obtenue à partir de l'équation (6.4) et vaut $\alpha^M = 0,3$. Par application de l'algorithme de changement de branche présenté en table 6.1, on trouve trois solutions bifurquées au sens de la relation (6.5).

Les solutions convergées (lors de la deuxième étape de l'algorithme) pour lesquelles une valeur propre est négative ne sont pas prises en compte pour deux raisons :

- Elles ne sont pas stable mathématiquement selon la définition proposée par Ikeda et Murota [83] (voir pour rappel le chapitre 3.3.2.1).

- En essayant, tout de même, de poursuivre l'étape 3 de la simulation l'algorithme de Newton ne converge pas.

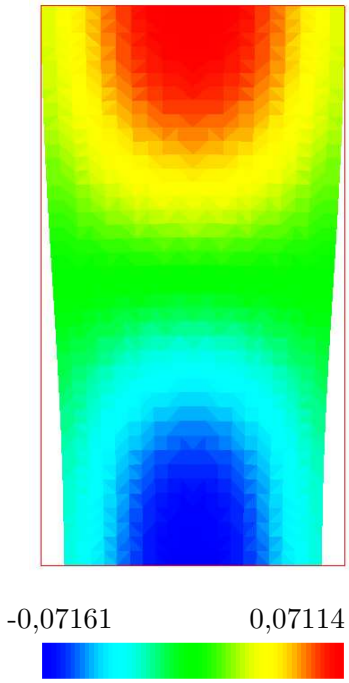


Fig. 6.5. Visualisation aux points de Gauss de la déformation volumique du premier mode de bifurcation sur sa configuration déformée.

On compare en figure 6.6 l'allure typique de la plus petite valeur propre au cours du chargement avant détection d'un point de bifurcation (la plus petite valeur propre diminue jusqu'à devenir négative) et après identification d'une solution bifurquée, pour laquelle la plus petite valeur propre remonte de façon plus ou moins significative et est toujours positive.

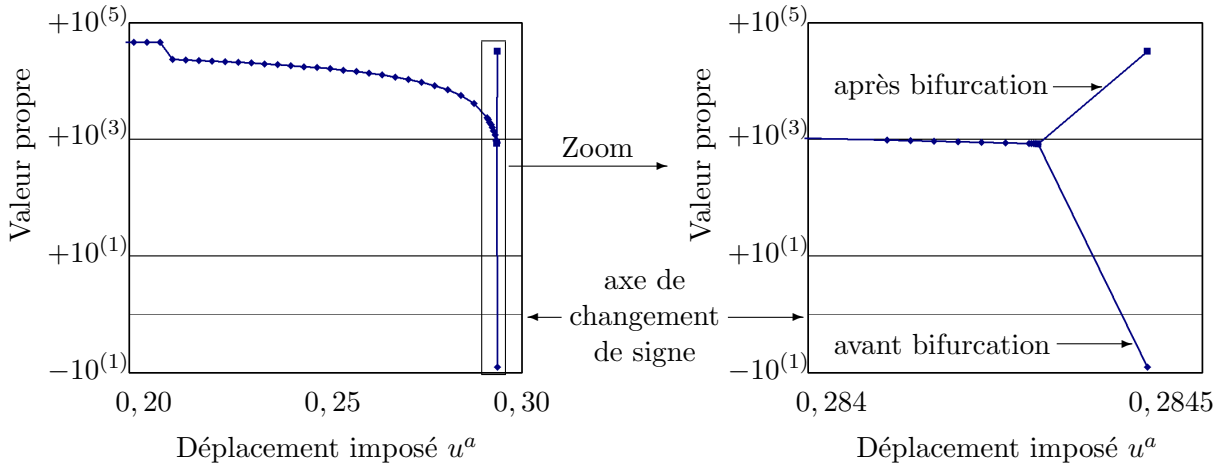


Fig. 6.6. Allure typique de la plus petite valeur propre avant et après bifurcation.

On détaille dans la table 6.3 ci-dessous le bilan de l'étape 2. On y précise, entre autres, les valeurs de la plus petite valeur propre positive qui ont permis de distinguer les différentes solutions.

Pour chacune de ces plus petites valeurs propres, on spécifie la première valeur du paramètre α, introduit dans la prédiction de l'équation (6.3), qui a permis d'obtenir cette solution. On distingue, toutefois, les valeurs positives et négatives de α.

Plus petite valeur propre	Paramètre $\alpha > 0$	Paramètre $\alpha < 0$	Pourcentage
835	$0,005$	$-0,001$	32
1.039	$0,001$	$-0,005$	35
32.485	$0,02$	$-0,251$	13
négative			4
Calcul non convergé			16

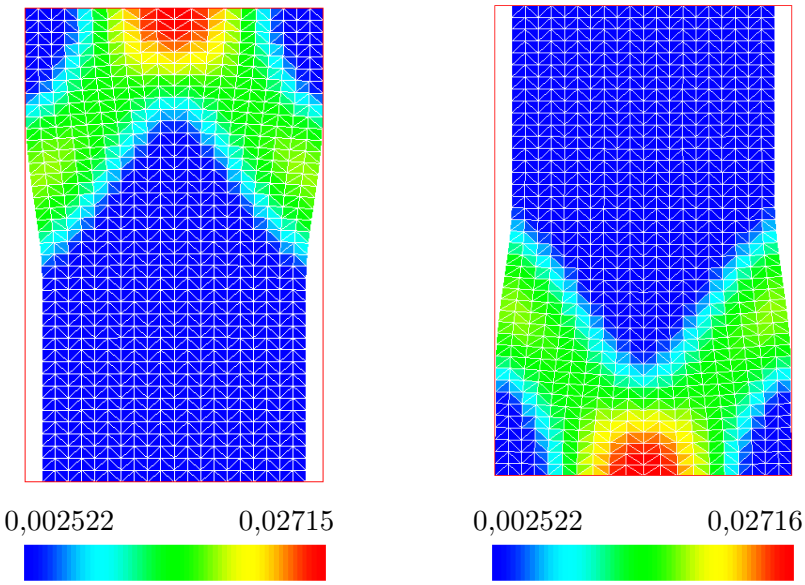
Table 6.3. Bilan de l'étape 2 de l'algorithme de recherche de solutions bifurquées sur l'essai biaxial homogène en compression prenant en compte le maillage de la figure 6.3(a) .

On constate sur cet exemple, à partir du bilan de la table 6.3, qu'un cinquième des résultats n'est pas exploitable pour cause de calculs non convergés ou de solutions instables (pour lesquelles toutes les valeurs propres du système ne sont pas strictement positives d'après la définition donnée par Ikeda et Murota [83]). La prédiction apportée par l'algorithme de recherche de solutions dans la direction du mode de bifurcation permet d'obtenir les solutions en déformations plastiques cumulées présentées en figure 6.7 pour un chargement imposé $u^a = 0,3$ mètre. Les solutions ainsi obtenues sont non-homogènes et présentent les mêmes symétries que le mode propre présenté en figure 6.5. On visualise en figure 6.8 l'état plastique instantané final. On observe que la largeur de la bande de localisation s'étend sur plusieurs éléments.

On montre, qu'en perturbant la prédiction de l'algorithme de résolution de Newton dans la direction du mode de bifurcation on parvient à orienter la simulation d'un essai biaxial homogène vers plusieurs solutions non-homogènes. On en déduit ainsi l'intérêt de l'algorithme proposé qui, bien que peu optimal du point de vue numérique à cause de la boucle sur les paramètres α, permet de trouver différentes solutions au problème. A titre de comparaison on teste les méthodes proposées par de Borst et van der Veen, toutes deux décrites au chapitre 3.3.2.1. Dans les deux cas, les simulations convergent bien vers la solution présentée en figures 6.7(b) et 6.8(b).

6.2.1.1.2 Recherche de solutions bifurquées en considérant le maillage raffiné de la figure 6.3(b)

On s'intéresse dans un second temps à l'influence du maillage sur les solutions bifurquées. On considère alors une discrétisation spatiale dix fois plus fine que la précédente (19.600



Solutions non-homogènes convergées pour $u^a = 0,3$ mètre
associées au valeurs propres de l'étape 2 :
(a) 1.039 et 32.485 (b) 835

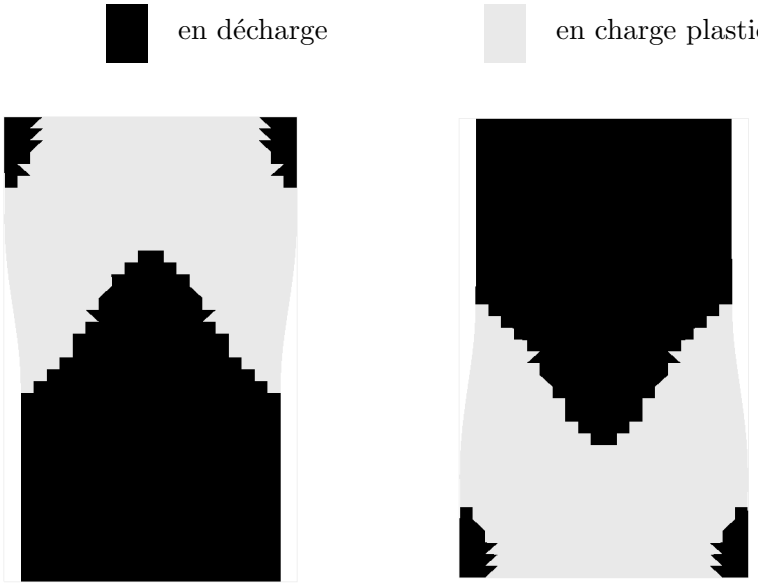
Fig. 6.7. Visualisation aux points de Gauss de la déformation plastique cumulée sur la configuration déformée. Solutions non-homogènes obtenues par la technique de changement de branches après un chargement imposé $u^a = 0,3$ mètre. Maillage de la figure 6.3(a).

éléments contre 1.600). On conserve, en revanche, tous les autres paramètres numériques identiques. Le changement de signe de la plus petite valeur propre de la matrice tangente de rigidité de ce nouveau problème se produit pour le même pas de temps et donc le même chargement imposé que l'étude précédente, à savoir $u^a = 0,28443$ mètre. En activant l'algorithme de recherche des solutions bifurquées on parvient à retrouver une des solutions non-homogènes précédentes. Du point de vue qualitatif, les bandes de localisation en figure 6.9(b) sont semblables à celles présentées en figure 6.8(a) à la finesse du maillage près. Du point de vue quantitatif, l'écart maximal sur les solutions en déformations plastiques cumulées entre les deux simulations est de l'ordre de 1%. En activant la méthode de recherche d'une solution bifurquée proposée par de Borst, on retrouve également cette solution. On observe ainsi qu'en changeant de maillage, la méthode dite de Borst ne donne pas la même solution.

6.2.1.2 Recherche de solutions bifurquées à partir de la deuxième valeur propre

6.2.1.2.1 Recherche de solutions bifurquées en considérant le maillage grossier de la figure 6.3(a)

Pour rappel, le second point singulier correspond au point pour lequel la seconde valeur propre de la matrice tangente de rigidité associée à la solution fondamentale a été négative. Il a été identifié pour un chargement imposé u^a légèrement supérieur à celui du premier



Solutions non-homogènes convergées pour $u^a = 0,3$ mètre
associées au valeurs propres de l'étape 2 :

(a) 1.039 et 32.485 (b) 835

Fig. 6.8. Visualisation aux points de Gauss de l'état plastique instantané sur la configuration déformée. Solutions non-homogènes obtenues par la technique de changement de branches après un chargement imposé $u^a = 0,3$ mètre. Maillage de la figure 6.3(a).

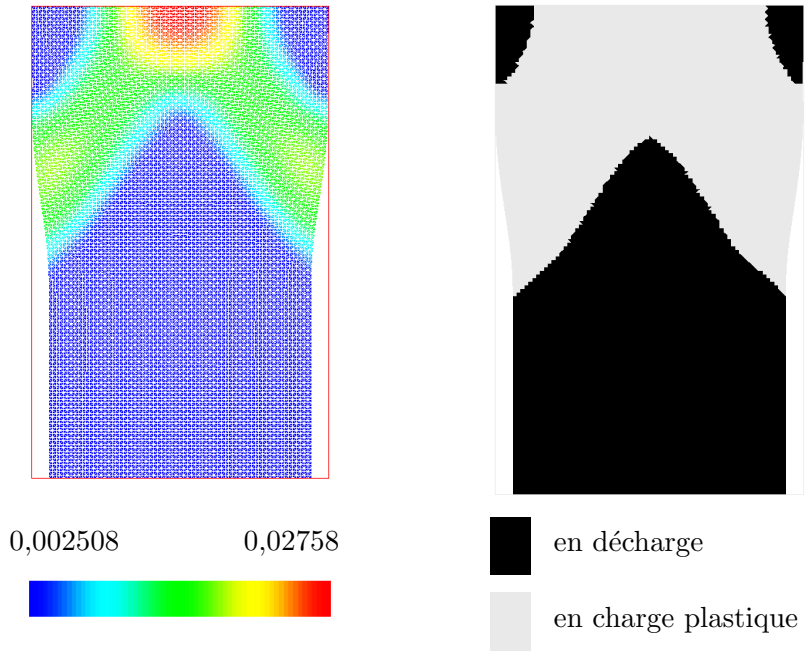
point singulier ($0,2854$ mètre contre $0,28443$ mètre). Ces deux points étant très proches, on estime que la bifurcation est possible dans la direction du second mode propre. On observe en figure 6.10 qu'il s'agit, à présent, d'un mode antisymétrique. Dans cet exemple le paramètre $\alpha^M = 0,4$.

On obtient alors plus de solutions bifurquées dans ce cas que dans le précédent (voir figure 6.11). En revanche, le pourcentage d'apparition de ces solutions est plus faible puisque seulement 7% des simulations ont aboutit à l'une de ces solutions. On détaille en table 6.4 le bilan de ces calculs.

En observant la figure 6.11 on constate que

- les deux solutions des figures 6.11(a) et les deux solutions des figures 6.11(c) sont parfaitement symétriques entre elles. La symétrie par rapport à l'axe horizontal se traduit par des valeurs propres différentes, tandis que la symétrie par rapport à l'axe vertical est liée au changement de signe du paramère α;

- ces quatres solutions (figures 6.11(a) et 6.11(c)) sont qualitativement semblables à celle qui avait été obtenue avec l'introduction d'une imperfection matériau lors de la simulation de l'essai biaxial du chapitre 4.3. En revanche, pour un chargement imposé identique ($u^a = 0,3$ mètre), l'écart sur les déformations plastiques cumulées qui se concentrent dans les bandes de localisation est de l'ordre de 20% entre l'essai avec



(a) Déformation plastique cumulée (b) Etat plastique instantané

Fig. 6.9. Visualisation aux points de Gauss de la déformation plastique cumulée et de l'état plastique instantané sur la configuration déformée. Solution non-homogène obtenue par la technique de changement de branche après un chargement imposé $u^a = 0,3$ m sur le maillage 6.3(b).

Plus petite valeur propre	Paramètre $\alpha > 0$	Paramètre $\alpha < 0$	Pourcentage
20.275	$0,237$	$-0,268$	2
32.419	$0,282$	$-0,282$	1
35.950	$0,382$	$-0,382$	4
négative			26
Calcul non convergé			67

Table 6.4. Bilan de l'étape 2 de l'algorithme de recherche de solutions bifurquées suivant la direction du deuxième mode sur l'essai biaxial homogène en compression prenant en compte le maillage de la figure 6.3(a) .

défaut (figure 4.24(a)) et celui homogène (figure 6.11(c)). L'introduction d'un défaut peut donc perturber les résultats de façon conséquente;

- les isovaleurs des figures 6.11(b) et 6.11(d) sont symétriques entre elles;
- les largeurs de bandes sont identiques sur toutes les figures, y compris par rapport à celles obtenues à partir du premier mode de bifurcation;

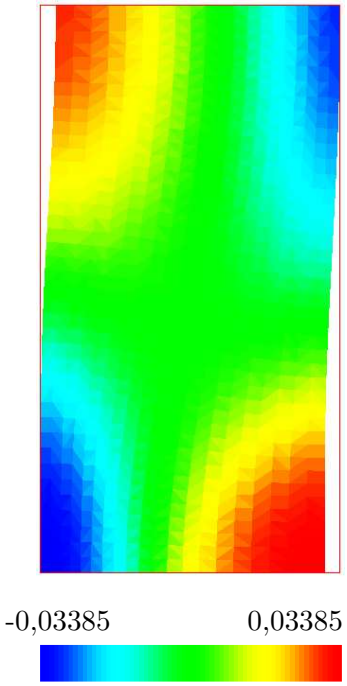


Fig. 6.10. Visualisation aux points de Gauss de la déformation volumique du second mode de bifurcation sur la configuration déformée.

- L'orientation des bandes de localisation est préservée d'une simulation à une autre, en revanche, les points où les bandes se réfléchissent sont situés à une translation près.

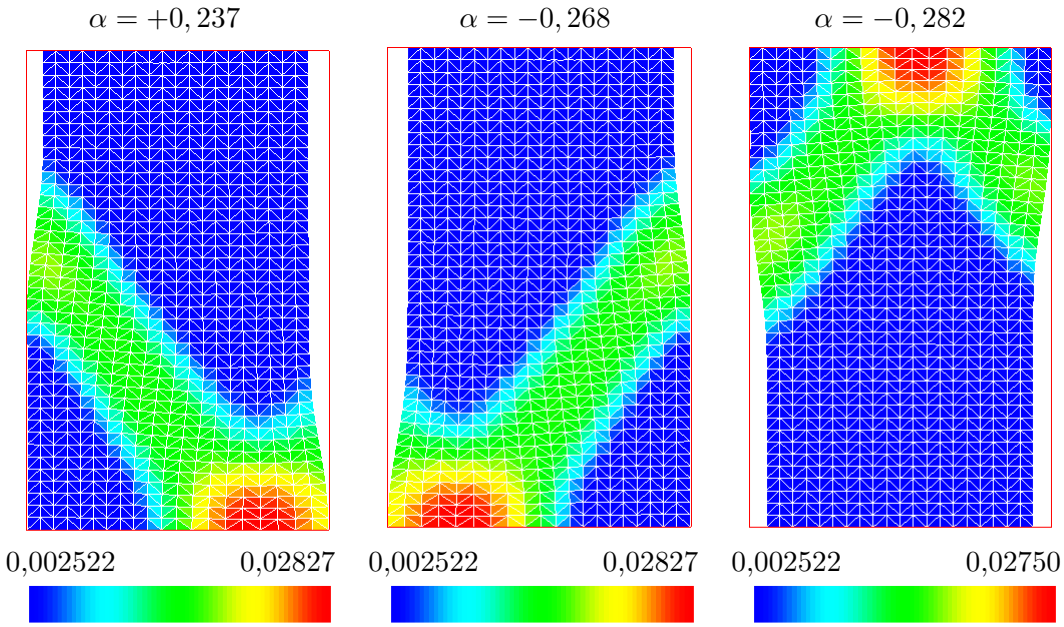
6.2.1.2.2 Recherche de solutions bifurquées en considérant le maillage raffiné de la figure 6.3(b)

Comme au cours du chapitre 6.2.1.1 précédent, on cherche à évaluer l'influence de la discrétisation spatiale sur l'algorithme de recherche de solutions bifurquées. L'analyse aux valeurs propres de la matrice tangente de rigidité associée au système "raffiné" conduit à l'identification d'un chargement imposé u^a de $0,2854$ mètre pour localiser le second point singulier.

On obtient, dans ce cas, quatre solutions symétriques similaires à celles obtenues avec le maillage plus grossier (figures 6.11(a) et 6.11(c)). On présente ainsi, en figure 6.12, les isovaleurs de la déformation plastique cumulée aux points d'intégration numérique de la structure, et en figure 6.13 l'état plastique instantané.

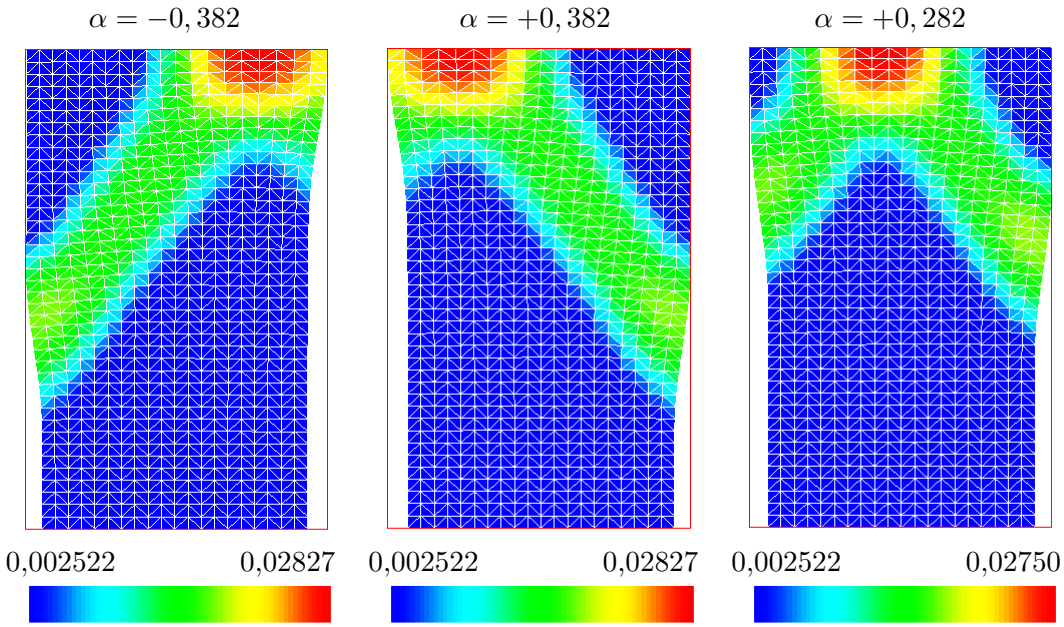
L'utilisation de la méthode proposée par de Borst, ainsi que celle décrite par van der Veen, à partir de ce second mode propre n'ont pas abouties à l'une des solutions convergées avec le premier maillage, tandis qu'avec le maillage raffiné c'est, dans les deux cas, la solution correspondant à la figure 6.12(a) avec le paramètre $\alpha = -0,220$ qui est obtenue.

Un premier bilan de l'algorithme proposé pour détecter une multitude de solutions peut-être formulé à partir des premiers résultats obtenus.



Solutions non-homogènes convergées pour $u^a = 0,3$ mètre
associées au valeurs propres de l'étape 2 :

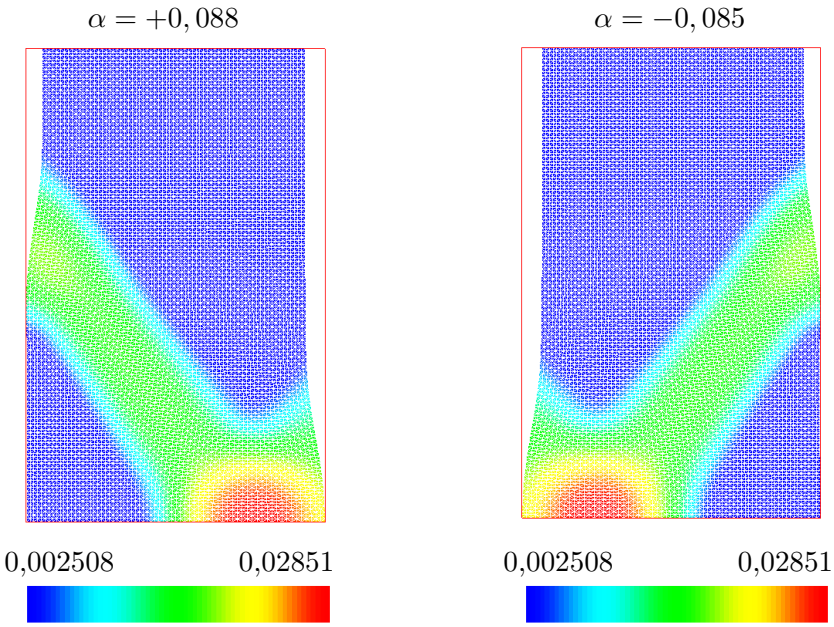
(c) 20.275 (d) 32.419



Solutions non-homogènes convergées pour $u^a = 0,3$ mètre
associées au valeurs propres de l'étape 2 :

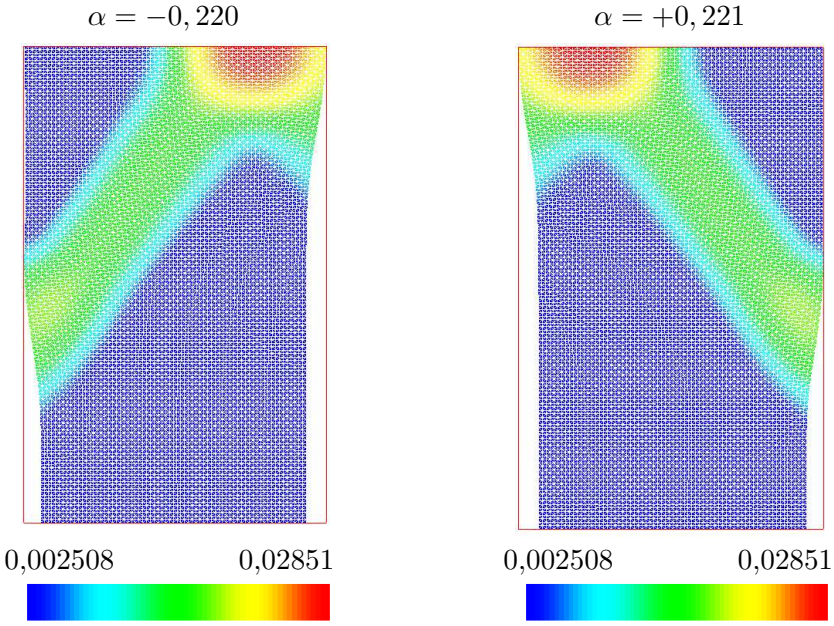
(a) 35.950 (b) 32.419

Fig. 6.11. Visualisation aux points de Gauss de la déformation plastique cumulée sur la configuration déformée. Solutions non-homogènes obtenues par changement de branches suivant le second mode de bifurcation après un chargement $u^a = 0,3$ mètre. Maillage de la figure 6.3(a).



Solutions non-homogènes convergées pour $u^a = 0,3$ mètre
associées au valeurs propres de l'étape 2 :

(b) 1.547



Solutions non-homogènes convergées pour $u^a = 0,3$ mètre
associées au valeurs propres de l'étape 2 :

(a) 2.747

Fig. 6.12. Visualisation aux points de Gauss de la déformation plastique cumulée sur la configuration déformée. Solutions non-homogènes obtenues par changement de branches suivant le second mode de bifurcation après un chargement $u^a = 0,3$ mètre. Maillage de la figure 6.3(b).

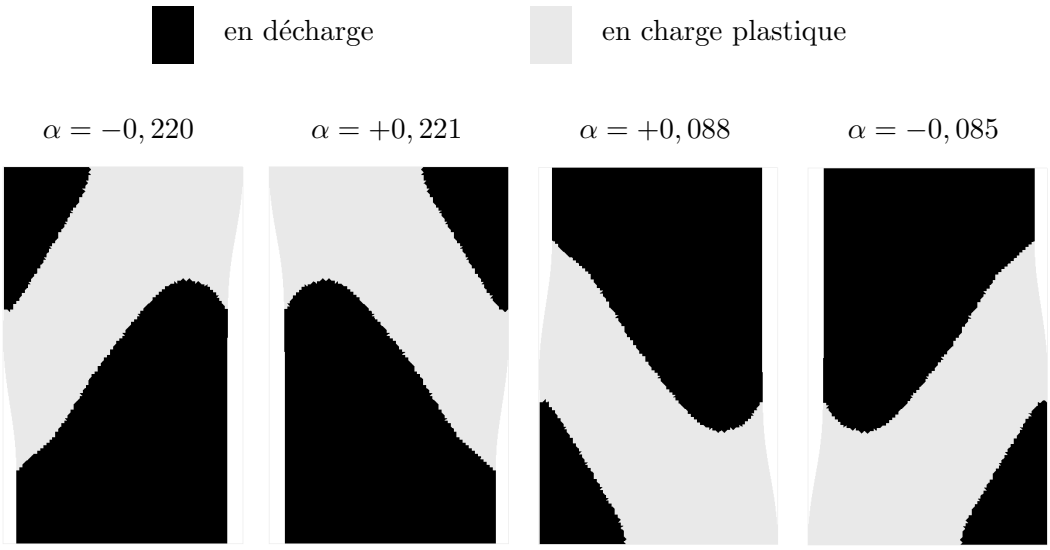


Fig. 6.13. Visualisation aux points de Gauss de l'état plastique instantané sur la configuration déformée. Solutions non-homogènes obtenues par changement de branches suivant le second mode de bifurcation après un chargement $u^a = 0,3$ mètre. Maillage de la figure 6.3(b).

- Tout d'abord, il s'est avéré robuste dans le sens où il a toujours permis d'aboutir à une solution convergée sans jamais avoir eu à faire appel à des méthodes de pilotage.

- De plus il permet d'obtenir des solutions non-homogènes sans introduire de défaut pour initier l'apparition des bandes de localisation. Or, bien que cette technique soit courante et malgré une imperfection faible dans la structure, nous avons montré que les conséquences sur les résultats pouvaient être importantes. En effet, en diminuant de 5% la cohésion du matériau dans une zone représentant 2% de la structure d'un essai biaxial, on obtient au final un écart de 20% sur les déformations plastiques cumulées.

- Enfin, sa combinaison avec la formulation second gradient de dilatation est efficace puisqu'on trouve des solutions multiples indépendantes des discrétisations spatiales.

6.2.2 Recherche de solutions bifurquées à partir d'un critère local

L'utilisation de lois de comportements adoucissantes de type endommagement ou plasticité (entre autres) conduisent à des expressions mathématiques non-linéaires qui ne sont pas, en général, continûment dérivables. On considère alors un critère local d'activation de l'algorithme de recherche de solutions bifurquées. Ce critère est basé sur l'indicateur de localisation définie par Rice (voir pour rappel le chapitre 6.1.1).

L'indicateur de localisation est vérifié, pour le problème discrétisé avec le maillage le plus grossier (celui de la figure 6.3(a)) et sur tous les points d'intégration, pour un pas de chargement tel que $u^a = 0,2835$ mètre. Soit un pas de chargement légèrement inférieur à celui obtenu lors de l'analyse aux valeurs propres, comme on peut le vérifier sur la figure 6.14. Les deux plus petites valeurs propres associées à la matrice tangente de rigidité sont

donc toujours strictement positives et valent respectivement +1.369 et +4.433.

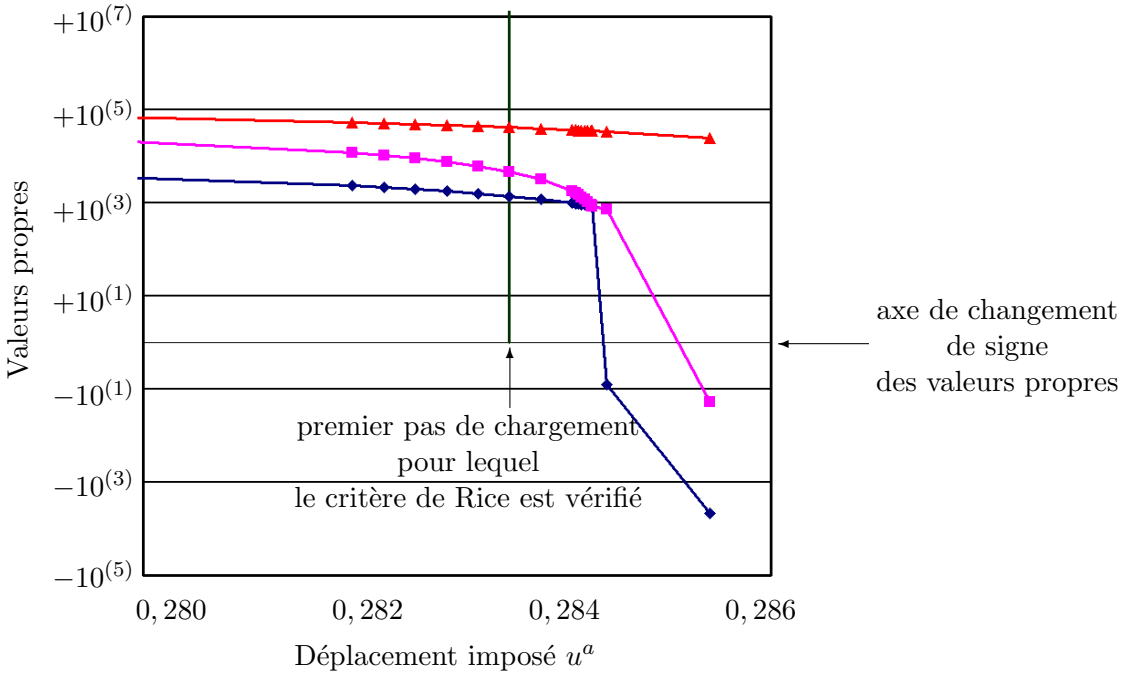


Fig. 6.14. Essai biaxial homogène en compression : Allure des trois plus petites valeurs propres de la matrice tangente de rigidité

En activant l'algorithme de recherche proposé précédemment en table 6.1 dans la direction des deux modes propres associés aux deux plus petites valeurs propres (qui sont donc positives) on trouve, une fois encore, 5 solutions. Elles sont présentées en figure 6.15 et sont identiques à celles des figures 6.12 et 6.9(a). En raffinant le maillage on obtient à nouveau ces 5 solutions (voir figure 6.16).

On montre ainsi, dans le cas particulier d'une loi de comportement adoucissante, que des solutions multiples peuvent exister avant même que la matrice tangente de rigidité ait des valeurs propres nulles. Ceci traduit bien le fait, énoncé dans la description bibliographique du chapitre 3.3, selon lequel la non-unicité d'une solution n'implique pas l'existence de points de bifurcation.

On pourra noter que Chambon et al [32] ont également déjà utilisé ce critère local pour activer leur méthode de recherche de solutions multiples basée sur une prédiction aléatoire de l'algorithme de Newton. Bien que dans leur approche, il n'y avait pas de prise en compte d'une méthode de régularisation ils avaient également constaté, dans le cadre d'une étude similaire de biaxial homogène, que l'unicité de la solution n'était plus préservée, non pas dès l'activation du critère, mais un peu après, en faisant remarquer que plus le maillage était raffiné plus la perte d'unicité se produisait tôt.

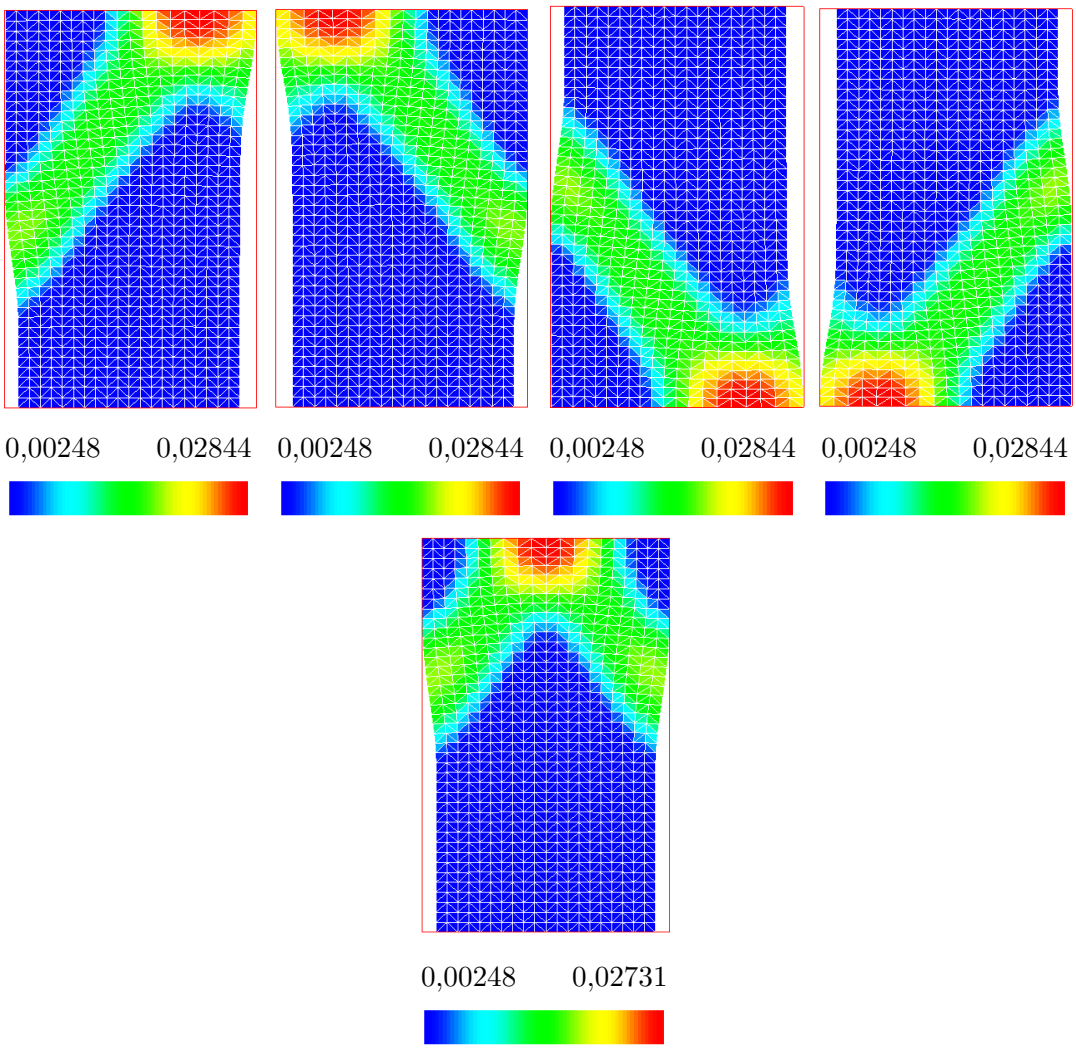


Fig. 6.15. Visualisation aux points de Gauss de la déformation plastique cumulée sur la configuration déformée. Maillage de la figure 6.3(a).

6.2.3 Bilan de la simulation

On a montré dans cette première partie, sur l'exemple d'un essai biaxial homogène en compression, que l'algorithme de recherche de solutions bifurquées dans la direction des modes propres, décrit en table 6.1, dans le cadre spécifique des lois rhéologiques présentant un adoucissement du comportement matériau, est une technique robuste, fiable et efficace. Il a en effet été possible de détecter une multitude de solutions non-homogènes, indépendantes de la discrétisation spatiale grâce à sa combinaison avec la formulation second gradient de dilatation, sans introduire de défaut pour initier l'apparition de bandes de localisation.

Par ailleurs, nous avons montré que l'ajout d'un "petit" défaut pouvait générer d'importants écarts sur les solutions, et notamment sur les déformations plastiques cumulées.

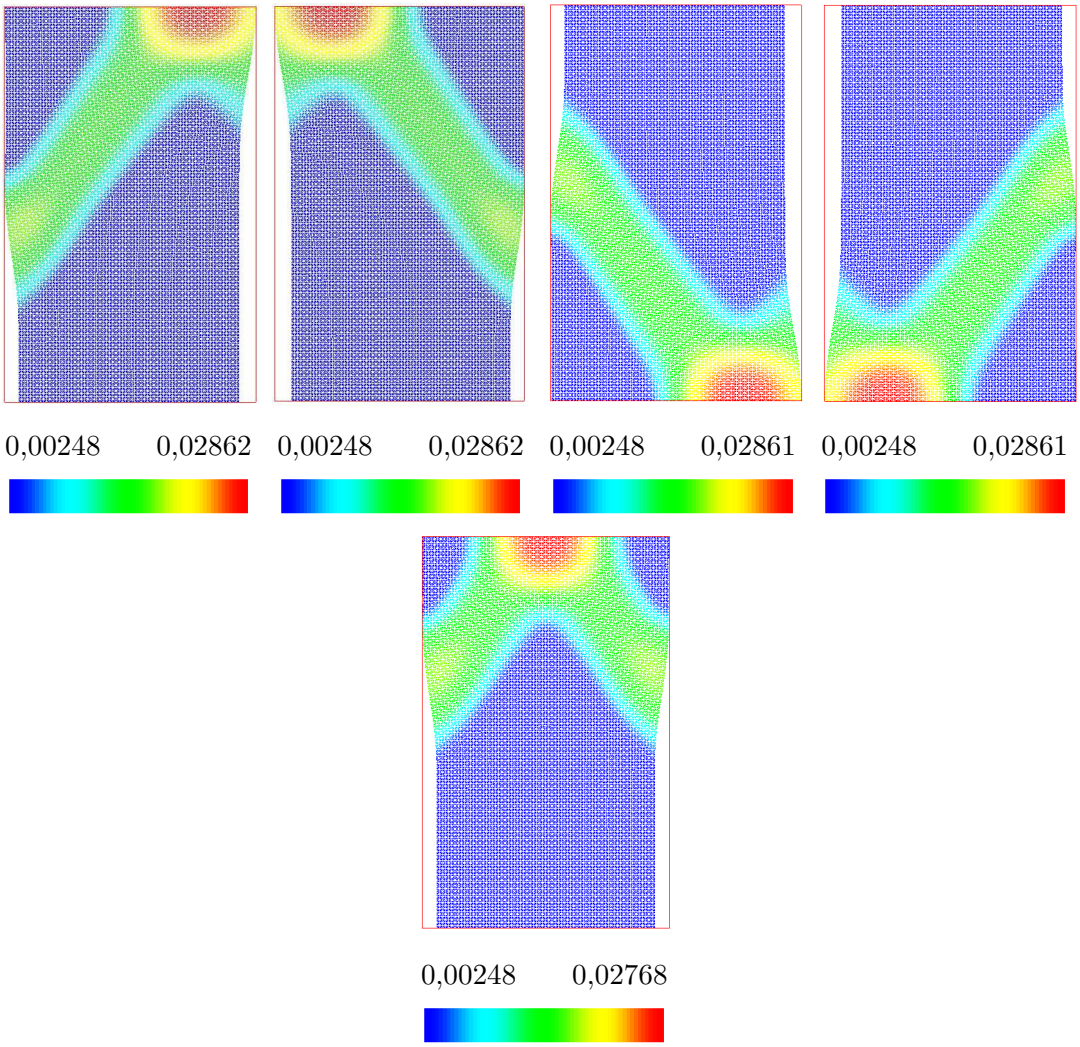


Fig. 6.16. Visualisation aux points de Gauss de la déformation plastique cumulée sur la configuration déformée sur le maillage raffiné de la figure 6.3(b).

Nous avons également montré que, dans le cas particulier d'une loi de comportement adoucissante, des solutions multiples peuvent exister avant même que la matrice tangente de rigidité associée ait des valeurs propres nulles. Nous avions déjà annoncé cette possibilité au chapitre 3.3 en attirant l'attention sur le fait qu'à partir d'un point de bifurcation il n'y a plus unicité de la solution, mais qu'il peut y avoir non-unicité de la solution sans pour autant qu'il y ait un point de bifurcation. Cette conclusion peut sembler en contradiction avec les résultats des travaux de Hill [81]. Mais la théorie établie par Hill concerne, d'une part, les problèmes en vitesse et ne se situe pas, d'autre part, dans le cadre des milieux enrichis.

On valide ainsi, sur un exemple simple, le deuxième objectif que nous avions fixé dans le cadre de ce travail qui, pour rappel, devait donner à l'ingénieur un outil pour trouver le maximum de solutions d'un problème aux limites donné (voir l'introduction du chapitre

6). On valide également, en partie, le premier objectif qui porte quant à lui sur la faisabilité numérique de la mise en oeuvre informatique d'un algorithme de changement de branches.

6.3 Les techniques de changement de branche : Un soutien à la convergence numérique

Dans cette partie, nous montrons que l'algorithme de recherche de solutions multiples décrit en table 6.1 satisfait également le troisième objectif de ce chapitre et qui pour rappel, devait donner à l'ingénieur un outil efficace et performant pour mener à bien des études éprouvant des difficultés de convergence numériques dues au mauvais conditionnement de la matrice tangente de rigidité au voisinage d'un point singulier.

En effet, lors des simulations par la méthode des éléments finis, il est fréquent de rencontrer des difficultés de convergence liées à des instabilités numériques dues aux lois de comportement matériau de type adoucissantes. L'utilisation des méthodes de continuation, ou encore de pilotage, ne permet pas toujours de franchir ces instabilités. En effet, en cas de branches multiples, elles ne peuvent suivre qu'une seule voie, choisie de façon aléatoire en fonction de l'ordre de résolution des équations. Il n'y a donc aucune garantie de convergence vers une solution stable (du moins suivant la définition de la stabilité définie par Ikeda et Murota [83] et rappeler au chapitre 3.3.2.1). A titre d'exemple, il suffit de prendre en compte le bilan numérique des tables 6.3 et 6.4 des simulations de l'essai biaxial homogène du chapitre 6.2.

Il est alors intéressant de comparer les stratégies mises en oeuvre, d'une part pour initier l'apparition de la bande de localisation dans la simulation de cet essai biaxial, et d'autre part pour franchir les instabilités numériques. Pour cela, il faut :

- soit introduire un défaut pour initier l'apparition de la bande de localisation, puis utiliser une méthode de continuation pour franchir l'instabilité numérique liée à la présence de snap-back. C'est la méthodologie employée au chapitre 4.3;

- soit utiliser une technique de changement de branche comme au chapitre 6.2.

On observe alors en figure 6.17 que :

- la courbe représentative de l'effort global de la stratégie prenant en compte une imperfection de structure est caractérisée par un snap-back et que son amplitude maximale est plus faible que celle de la courbe représentative de l'effort global de la stratégie utilisant la technique de changement de branche;

- les stratégies se distinguent par leur façon de franchir l'instabilité numérique puisque dans le premier cas, celui avec défaut, il faut suivre le snap-back, tandis que dans le second le "saut" est pris en charge par l'algorithme de bifurcation;

- les courbes correspondantes aux efforts globaux des différentes solutions obtenues par l'algorithme de changement de branches sont très proches les unes des autres excepté la solution notée 1. Il s'agit de la solution présentée en figure 6.7(b).

Plusieurs listes de pas de temps ont également été utilisées pour évaluer la fiabilité des résultats. On constate que, quelle que soit la discrétisation temporelle, les résultats sont toujours semblables, y compris dans le cadre des courbes représentatives des efforts globaux, à la dimension près de chacun des incréments. Les résultats présentés ci-après prennent toujours en compte la discrétisation en temps la plus fine.

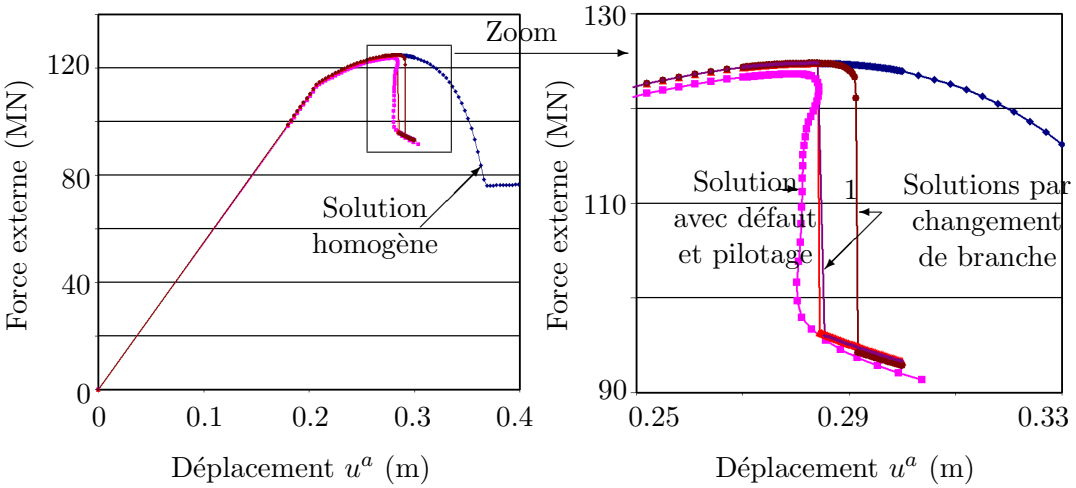


Fig. 6.17. Réponse globale de la simulation de l'essai biaxial soumis à une compression.

Pour interpréter l'écart sur les efforts globaux entre les solutions obtenues par l'algorithme de recherches de solutions multiples, on définit un nouveau critère de référence, noté $\Delta m\left(t^i\right)$, basé sur la vitesse maximale d'évolution de la déformation plastique cumulée

$$\Delta m\left(t^i\right) = \frac{\mid \gamma_g^p\left(t^{i+1}\right) \mid_\infty - \mid \gamma_g^p\left(t^i\right) \mid_\infty}{t^{i+1} - t^i} \tag{6.6}$$

où $\gamma_g^p\left(t^i\right)$ désigne la valeur de la déformation plastique cumulée au point de Gauss g à l'instant t^i et $\mid . \mid_\infty$ est la norme infinie.

Ce critère permet alors de classer l'ensemble des solutions en quatre catégories de façon plus distincte que les courbes représentatives des efforts globaux de la figure 6.17. Dans une même catégorie, toutes les solutions sont représentées par la même courbe. On distingue ainsi en figure 6.18 :

- la catégorie 1 qui rassemble les solutions identiques à la figure 6.7(a);
- la catégorie 2 qui rassemble la solution de la figure 6.7(b);
- la catégorie 3 qui rassemble les solutions identiques aux figures 6.11(a) et 6.11(c);

- la catégorie 4 qui rassemble les solutions des figures 6.11(b) et 6.11(d).

Pour les deux discrétisations spatiales utilisées dans cette simulation (figures 6.3(a) et 6.3(b)), les courbes représentatives du critère $\Delta m\,(t^i)$ sont identiques et se superposent parfaitement.

On peut également noter que les pics des différentes courbes ont tous une amplitude importante (environ trois ordres de grandeurs). On interprète ces évolutions brutales du critère en vitesse d'accroissement de la déformation plastique cumulée $\Delta m\,(t^i)$ comme caractéristiques de la présence de snap-back.

Enfin, on montre que l'algorithme de la table 6.1 peut être une alternative aux techniques de continuation. En considérant la simulation du biaxial prenant en compte une imperfection, simulation décrite au chapitre 4.3, on obtient une solution identique, sur la déformation plastique cumulée, à celle présentée en figure 4.12. Avec l'algorithme de recherche de solutions bifurquées on ne trouve dans cet exemple qu'une seule solution stable (dont la plus petite valeur propre est positive). On compare, en figure 6.19, les réponses globales de la structure obtenues par les deux approches (méthodes de continuation ou de recherche de solutions bifurquées). Suivant les deux approches, plusieurs listes de pas de temps ont été considérées et dans les deux cas toutes les simulations numériques ont bien convergées vers des solutions identiques. On présente en figure 6.19 les courbes obtenues avec les discrétisations en temps les plus fines que nous avons utilisées.

6.4 Application numérique sur une simulation d'excavation en condition drainée

On considère dans cette partie, la simulation d'une excavation de galerie souterraine en condition drainée avec la loi de comportement Drucker-Prager dans sa version associée. Les équations d'équilibre du problème s'inscrivent dans le cadre de la modélisation second gradient de dilatation présentée par la formulation faible (6.1). Il s'agit d'une étude similaire à celle détaillée au chapitre 5.3 mais en condition drainée (voir figure 6.20). La cavité est cylindrique, d'un rayon de 3 mètres, et l'état de contrainte initial du milieu est anisotrope (voir les relations (6.7)). Par symétries géométriques horizontale et verticale on prend en compte uniquement un quart de la structure. On se place dans le cadre des déformations planes par rapport à la direction z.

$$\text{Conditions initiales} \quad \begin{cases} \sigma^{xx} = \ \ -7,24 \text{ MPa} \\ \sigma^{yy} = -11,64 \text{ MPa} \\ \sigma^{zz} = \ \ -7,24 \text{ MPa} \end{cases} \tag{6.7}$$

Les conditions aux limites sont les suivantes

$$\text{Conditions aux limites} \quad \begin{cases} \sigma^{h} = \ \ -7,24 \text{ MPa} \\ \sigma^{v} = -11,64 \text{ MPa} \end{cases} \tag{6.8}$$

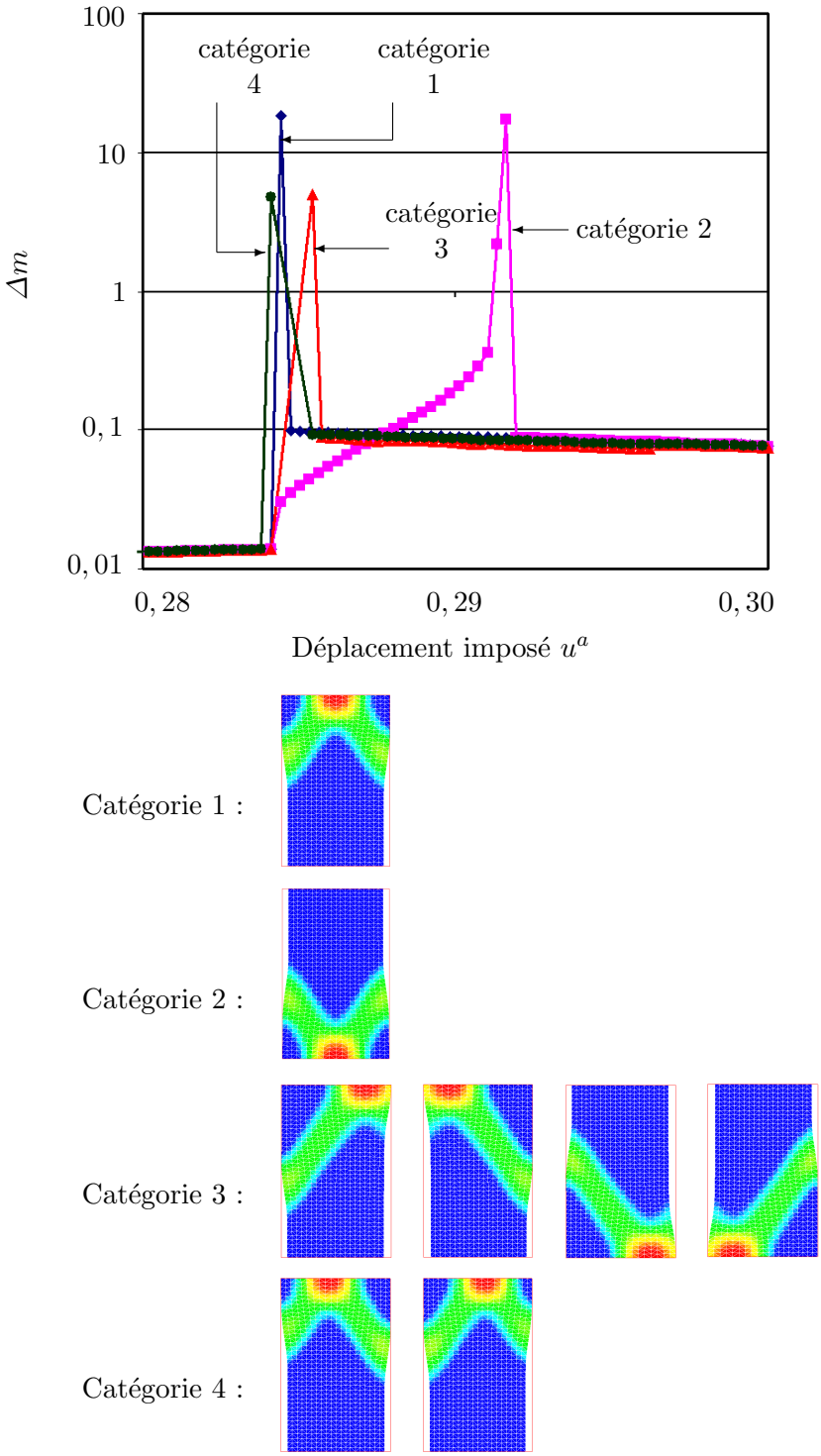


Fig. 6.18. Essai biaxial homogène en compression : Classification des solutions suivant le critère $\Delta m\left(t^i\right)$ décrit par l'équation (6.6).

Pour simuler la phase de creusement au bord de la galerie, on fait décroître linéairement l'état de contraintes initial σ_{ij}^0 dans la direction normale n_j à la cavité . On appelle F^{exc}

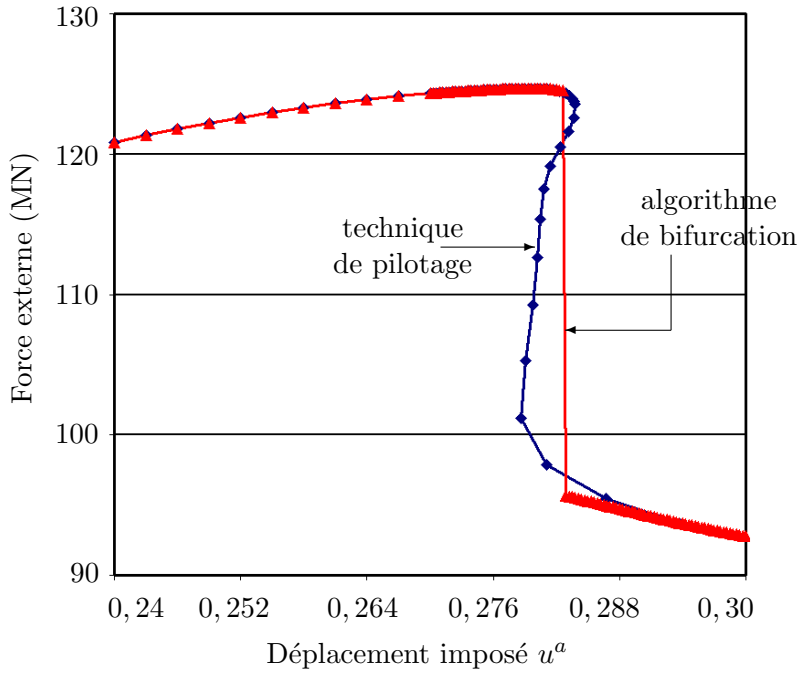


Fig. 6.19. Essai biaxial avec défaut en compression. Comparaison des efforts globaux en fonction de la stratégie de résolution : pilotage versus bifurcation.

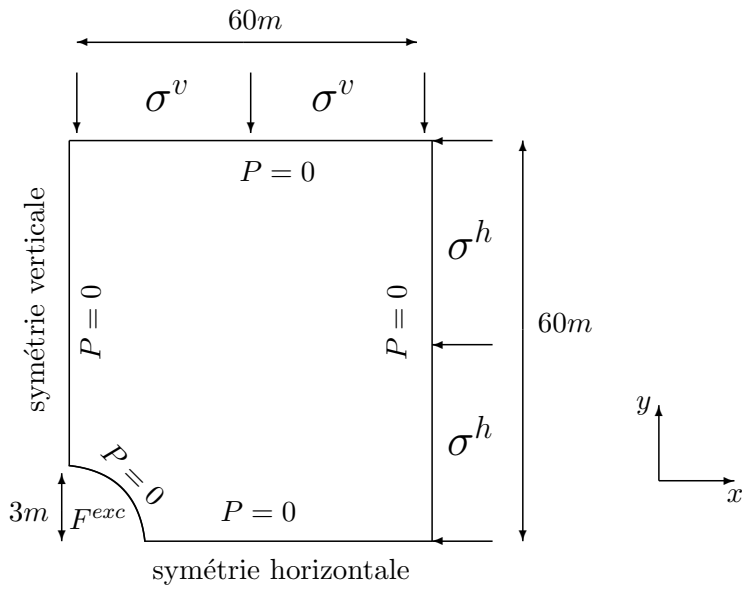


Fig. 6.20. Géométrie et conditions aux limites de la simulation d'une excavation de galerie souterraine

les forces nodales correspondantes.

$$F^{exc} = \lambda\,(t)\,\sigma^0_{ij}.n_j \tag{6.9}$$

où $\lambda(t)$ est la fonction linéaire décroissante. On appelle taux de déconfinement, la valeur $1 - \lambda(t)$.

Les paramètres matériau sont, quant à eux, extraits d'un jeu de donnée du benchmark MoMas [69].

Elasticité	Comportement Drucker-Prager
$E^0 = 5.800$ MPa	$c = 1$ MPa
$\nu^0 = 0.3$	$\varphi = 25\,^\circ$
$a^1 = 4.10^{(-2)}$ MPa.m$^{(2)}$	$\gamma^R = 0.015$
	$\alpha = 0.01$

Table 6.5. Paramètres matériau.

Aucune imperfection numérique n'est introduite dans la simulation. La géométrie de la figure 6.20 est discrétisée soit par le maillage le plus "grossier", soit par le plus "fin" du chapitre 5.4.3. Pour rappel, le premier comprend 18.867 éléments triangles et est caractérisé par une taille de maille au bord de la cavité circulaire de 0,05 mètre. Le second comprend 78.164 éléments triangles et la taille de maille au bord de la galerie est de 0,015 mètre. Deux listes d'instants sont également définies pour discrétiser l'évolution de la fonction de déconfinement. La première liste contient des incréments de temps uniforme de $10^{(4)}$ secondes correspondant à des incréments de $0,67\%$ de déconfinement. La seconde liste est identique à la précédente jusqu'à $61,3\%$ de déconfinement, taux pour lequel la simulation ne présente aucune difficulté de convergence numérique. A ce taux de déconfinement, l'analyse aux valeurs propres montre que toutes les valeurs propres sont largement positives (la plus petite valant pour le maillage le plus grossier 34.853). Les incréments suivants de cette seconde liste sont divisés par trois ordres de grandeur par rapport à la première liste d'instants correspondant ainsi à des incréments de déconfinements de $0,00067\%$.

Dans le cadre de cette simulation, on montre dans un premier temps qu'avec l'algorithme de recherche de solutions bifurquées, décrit en table 6.1, on trouve deux solutions distinctes, indépendantes des discrétisations spatio-temporelles. Dans un deuxième temps, on montre que l'analyse du critère d'évolution maximale de la déformation plastique cumulée permet de conclure sur la non présence de snap-back. On en interprète ainsi une nouvelle définition de la notion de snap-back.

6.4.1 Solutions multiples au problème de l'excavation

On prend, tout d'abord, en compte le maillage le plus grossier, 18.867 éléments triangles correspondant à 86.298 degrés de liberté, avec la liste d'incréments de déconfinement de $0,67\%$. L'analyse aux valeurs propres détecte une valeur propre qui change de signe pour un déconfinement de $61,90\%$. A partir de ce pas de chargement, le calcul numérique ne converge plus.

On active, alors, l'algorithme de recherche de solutions bifurquées (voir table 6.1) dont le bilan confirme la présence de deux solutions distinctes, au problème de l'excavation décrit ci-dessus (chapitre 6.4), au sens de la relation (6.5) qui pour rappel précise que deux solutions sont distinctes si leur plus petite valeur propre respective sont différentes et strictement positives. On détaille ce bilan en table 6.6. Dans cet exemple, la norme maximale de la perturbation à introduire dans l'initialisation de l'algorithme de recherche des solutions bifurquées (voir définition dans l'équation (6.4)) vaut $\alpha^M = 0,1$.

Plus petite valeur propre	Paramètre $\alpha > 0$	Paramètre $\alpha < 0$	Pourcentage
60.696	$0,014$	$-0,001$	18
71.826	$0,001$	$-0,014$	23
négative			3
Calcul non convergé			56

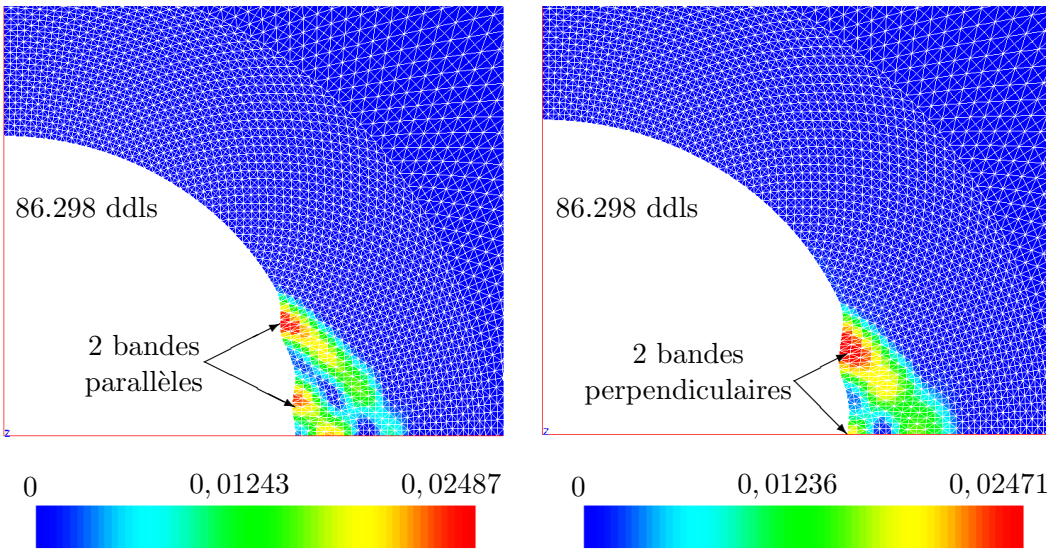
Table 6.6. Bilan de l'étape 2 de l'algorithme de recherche de solutions bifurquées sur la simulation de l'excavation souterraine en condition drainée.

On visualise en figure 6.21 les deux solutions bifurquées convergées correspondantes aux déformations plastiques cumulées pour un taux de déconfinement de 74%. Ces deux solutions sont distinctes. La première a deux bandes de localisation parallèles (figure 6.21(a)) tandis que pour la seconde les deux bandes sont orthogonales (figure 6.21(b)). Il n'est pas évident de conclure à ce stade si l'une de ces solutions est plus pertinente que l'autre. Sur quel critère? C'est une des raisons pour laquelle nous considérons qu'il est important de disposer d'un algorithme qui soit, d'abord, capable de détecter ces différentes solutions.

En prenant en compte, dans un deuxième temps, le maillage le plus fin, celui discrétisé en 78.164 éléments triangles (soit 354.420 degrés de liberté) et la même liste d'instants, pour laquelle les incréments de déconfinement sont de $0,67\%$, on trouve, à nouveau, deux solutions différentes. Celles-ci sont similaires, à la finesse du maillage près, aux solutions obtenues en figure 6.21. On résume le bilan numérique de l'analyse de l'algorithme de changement de branches en table 6.7 et on compare en figure 6.22 les bandes de localisation des déformations plastiques cumulées en fonction des deux maillages.

Enfin, on considère la seconde liste d'instants, mille fois plus fine que la précédente à partir du taux de déconfinement de $61,3\%$, on retrouve exactement les mêmes solutions que celles présentées en figure 6.21. On montre ainsi, sur un exemple plus complexe que celui du biaxial homogène du chapitre 6.2, l'efficacité de l'algorithme de changement de branches dans sa capacité à détecter des solutions bifurquées de façon indépendante des discrétisations spatio-temporelles grâce notamment à sa combinaison avec la formulation second gradient de dilatation du chapitre 4.1.4.

A titre de comparaison, on utilise la méthode décrite par de Borst et déjà utilisée au chapitre 6.2. Pour rappel, le principe de cette technique consiste à chercher une solution



Solutions convergées pour un taux de déconfinement de 74%
respectivement associées aux valeurs propres de la table 6.6 :

(a) 60.696 (b) 71.826

Fig. 6.21. Visualisation des deux solutions bifurquées (déformations plastiques cumulées) dans le cadre de la simulation d'une excavation de galerie souterraine en condition drainée après un taux déconfinement de 74%.

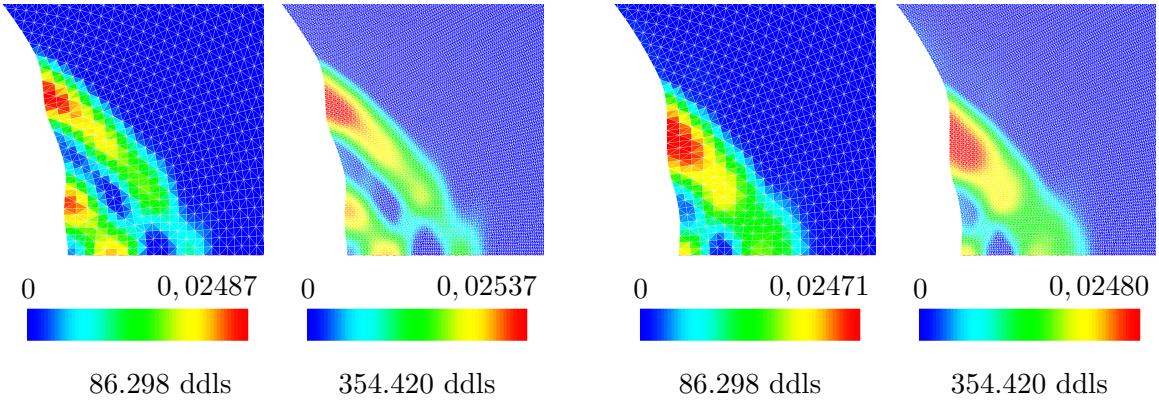
Plus petite valeur propre	Paramètre $\alpha > 0$	Paramètre $\alpha < 0$	Pourcentage
3.327	$0,002$	$-0,001$	28
6.372	$0,001$	$-0,002$	37
négative			4
Calcul non convergé			31

Table 6.7. Bilan de l'étape 2 de l'algorithme de recherche de solutions bifurquées sur la simulation de l'excavation souterraine en condition drainée.

bifurquée dans la direction orthogonale à la solution fondamentale (voir le chapitre 3.3.2.1 pour davantage de précision). Lorsque la première liste d'instants est prise en compte, cette méthode converge vers la solution 1 de la figure 6.22(a) quelle que soit la discrétisation spatiale. En revanche, lorsque c'est la seconde liste d'instants qui est considérée, c'est la solution 2 de la figure 6.22(b) qui est trouvée. On constate ainsi que cette stratégie de recherche d'une solution bifurquée est également efficace et robuste, dans le sens où elle a presque toujours permis de trouver une solution convergée. En revanche, elle est sensible à certaines considérations numériques, comme nous l'avons observé avec la sensibilité de la discrétisation temporelle, dans le cadre de cette simulation d'excavation souterraine.

6.4.2 Analyse de la vitesse d'évolution de la déformation plastique cumulée

On s'intéresse dans cette partie à l'analyse du critère $\Delta m\left(t^i\right)$ défini par l'équation (6.6). Pour rappel, ce critère définit la vitesse maximale d'évolution de la déformation plastique



(a) Solution 1 (b) Solution 2

Fig. 6.22. Visualisation des deux solutions bifurquées (déformations plastiques cumulées) dans le cadre de la simulation d'une excavation de galerie souterraine en condition drainée après un taux déconfinement de 74%. Solutions similaires malgré différents maillages.

cumulée aux points d'intégrations par incrément de temps. On trace ce critère en figure 6.23 en fonction des discrétisations spatiales et temporelles, dans le cas des simulations d'excavations souterraines du chapitre 6.4.1. Chaque courbe prise séparément n'a pas nécessairement grand intérêt. En revanche, on constate que toutes les courbes sont très proches les unes des autres, et que l'enveloppe de ces courbes a une amplitude maximale très faible, puisque sa valeur est infèrieure à deux ordres de grandeurs pour une valeur maximale de Δm infèrieure à $0,01$.
On interprète ces résultats en deux points :

- Le premier, est la preuve que les résultats sont indépendants des discrétisations spatio-temporelles. En effet, l'impact d'une modification de maillage ou de la liste des pas de temps sur la courbe représentative du critère $\Delta m\left(t^i\right)$ est mineur.

- Le second, confirme qu'il n'y a pas d'évolution brutale du critère au cours du déconfinement. On en déduit qu'il n'y a pas de snap-back au cours de cette simulation.

6.5 Bilan et perspectives

L'algorithme de recherche de solutions multiples dans la direction des modes de bifurcation est un outil de simulation numérique qui s'est avéré efficace et robuste. Efficace car il permet de détecter des solutions (multiples) sans introduire de défaut numérique dans les simulations. Robuste car il facilite l'orientation du calcul vers les solutions qui convergent.

En appliquant cet algorithme de bifurcation sur des structures homogènes ayant un comportement plastique adoucissant régularisé par une formulation second gradient de dilatation, on a trouvé plusieurs solutions. Le fait le plus remarquable a retenir est que certains calculs qui présentaient des snap-back ont pu être menés sans avoir à suivre la partie

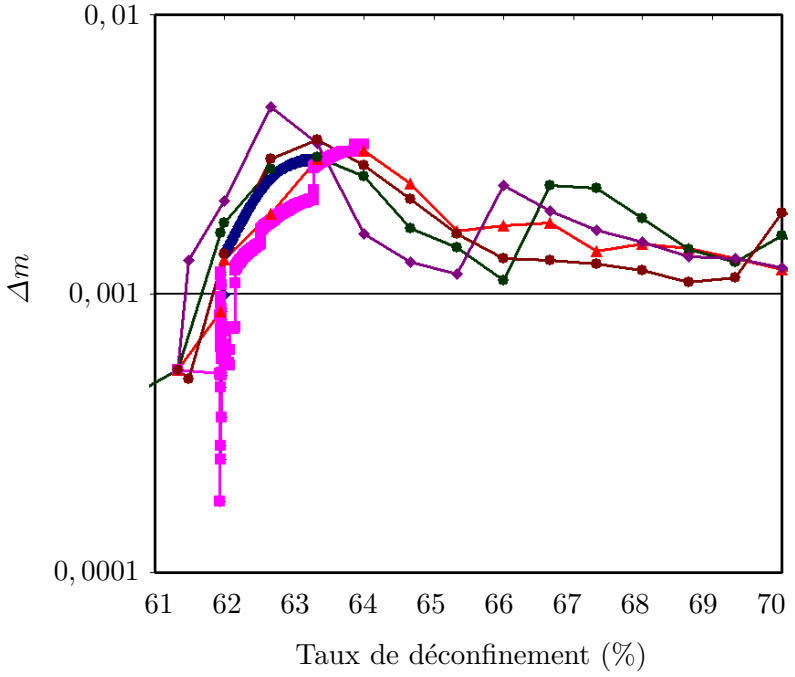


Fig. 6.23. Enveloppe du critère Δm lors de la simulation de l'excavation fonction du pas de temps et de la finesse de la discrétisation spatiale.

instable du snap-back.

Certaines questions restent tout de même à approfondir. Tout d'abord, faut-il effectivement chercher toutes les solutions numériques possibles ou peut-on en déterminer un ensemble restreint? La voie la plus pertinente que nous considérons, à ce jour, consisterait à étudier la stabilité des solutions bifurquées, à l'instar de ce qui est fait dans le cadre des matériaux standards généralisés, basée sur une analyse du quotient de Rayleigh sous contrainte.

Une autre étape à venir, inévitable, concerne l'extension de l'algorithme de recherche de solutions bifurquées aux cas des opérateurs tangents non-symétriques pour rendre accessible, entre autres, les études de bifurcation sur des problèmes couplés hydro-mécaniques ou sur des problèmes prenant en compte des lois de comportement non-associées qui sont plus représentatives de la rhéologie du milieu poreux.

7

Conclusions générales et perspectives

La localisation des déformations se produit également dans les milieux poreux partiellement ou totalement saturés en eau, dès lors que la dégradation du milieu naturel est prise en compte par un modèle rhéologique de type adoucissant. Les simulations numériques par la méthode des éléments finis conduisent alors à des solutions qui dépendent de la discrétisation spatiale : les déformations se concentrent sur une bande d'épaisseur un élément. Pour corriger ce type de problème, plusieurs méthodes de régularisation ont déjà été mises en oeuvre, mais elles sont en général très coûteuses en temps de calcul.

Le modèle que nous proposons, dit second gradient de dilatation, est une méthode de régularisation, particulièrement adaptée pour traiter le comportement des géomatériaux, qui rend les simulations couplées hydromécaniques objectives par rapport au maillage. Elle permet de prédire de façon numériquement stable les comportements mécaniques et hydrauliques produits par la dégradation d'un milieu naturel.

L'intérêt de cette formulation vient du faible nombre de degrés de liberté supplémentaires introduit dans la discrétisation éléments finis. Les temps de calcul sont ainsi considérablement réduits par rapport à d'autres méthodes de régularisation et la convergence numérique est améliorée par rapport à la formulation classique des milieux continus.

Nous avons montré l'efficacité et la robustesse de la formulation second gradient de dilatation dans le cadre d'une simulation numérique industrielle. Il s'agit d'une étude couplée hydro-mécanique d'excavation souterraine en milieu géologique profond, dont les discrétisations spatiales contiennent jusqu'à un peu plus de 70.000 éléments se traduisant numériquement par un calcul d'un peu plus de 470.000 degrés de liberté.

Il faudra, cependant, poursuivre les simulations aux calculs 3D prenant en compte une évolution de la perméabilité du milieu poreux en fonction de son état d'endommagement.

Le second point abordé dans ce rapport, porte sur l'existence de plusieurs solutions d'un problème aux limites pour lequel la structure est composée d'un matériau dont le comportement est décrit par une loi élasto-plastique adoucissante. On montre que l'application de la théorie de la bifurcation apporte une réponse partielle bien que son application n'ait

essentiellement été étudiée que dans le cas du flambement de structures élancées. En effet, celle-ci est basée sur l'analyse des valeurs propres des matrices tangentes de rigidité mais a été développée dans le cadre d'équations continûment dérivables et pour lesquelles les seules non-linéarités sont d'origine géométrique. Or, ceci n'est plus le cas des non-linéarités introduites par le caractère irréversible du comportement matériau.

Néanmoins, on utilise dans le cadre des géomatériaux un algorithme de recherche de branches bifurquées dans la direction des modes de bifurcation déterminés par une analyse des plus petites valeurs propres de l'opérateur tangent. On parvient ainsi à détecter plusieurs solutions distinctes à un problème donné et on constate que cette technique permet de mener certains calculs présentant des snap-back sans avoir à suivre la partie instable du snap-back.

Il faudra donc poursuivre cette analyse pour consolider les résultats obtenus et approfondir certaines questions qui n'ont pu être développées comme par exemple l'étude de la stabilité des solutions bifurquées par recherche d'un quotient de Rayleigh sous contrainte à l'instar de ce qui existe pour les problèmes d'endommagement dans le cadre des matériaux standard généralisés. Une seconde étape à prendre en compte également concerne l'extension de ces travaux aux problèmes générant des opérateurs non-symétriques, notamment dans l'optique de rendre accessible une analyse de bifurcation pour les problèmes couplés hydromécaniques plus représentatifs de la réalité physique des milieux poreux.

En résumé, voici les points qui ont été présentés dans ce rapport.

Bilan

- Développement d'un nouveau modèle enrichi;
- Implémentation numérique de ce modèle dans le cadre de la méthode des éléments finis;
- Validation numérique du modèle;
- Application numérique du modèle enrichi dans le cadre d'une simulation d'excavation souterraine en condition couplée hydromécanique;
- Etude de l'évolution de l'épaisseur de la bande de localisation;
- Recherche de solutions bifurquées dans le cas d'un problème enrichi pour une loi de comportement non-linéaire;
- Mise au point d'une technique alternative aux méthodes de continuation pour passer les snap-back.

Perspectives

- Simuler un calcul 3D enrichi par le modèle second gradient de dilatation, couplé hydromécanique avec prise en compte d'une part, de l'évolution de la perméabilité du milieu poreux, et d'autre part, d'une loi de comportement non-associée basée sur le principe d'état critique.;
- Approfondir la notion de stabilité numérique des solutions bifurquées;
- Etendre l'algorithme de changement de branches aux opérateurs non-symétriques.

8

Annexes

8.1 Calcul des conditions aux limites associées au modèle second gradient de dilatation **147**

8.2 Analyse numérique des dérivées géométriques pour les éléments finis de type triangles **149**

8.1 Calcul des conditions aux limites associées au modèle second gradient de dilatation

On rappelle l'expression mathématique des puissances virtuelles du modèle second gradient de dilatation, pour tout champ cinématiquement admissible u_i^*

$$\int_\Omega \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + S_j \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_i \partial x_j} \right) dv = P^{CL,*} \tag{8.1}$$

où $P^{CL,*}$ désigne le travail virtuel des efforts extérieurs réduit aux conditions aux limites puisque pour des raisons de simplification d'écriture nous avons négligé les efforts extérieurs de volume.

En faisant une intégration par parties du terme premier gradient de (8.1), on a

$$\int_\Omega \sigma_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} dv = - \int_\Omega \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} u_i^* dv + \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}.n_j u_i^* ds \tag{8.2}$$

En faisant deux intégrations par parties du terme second gradient de dilatation de (8.1), on obtient

$$\int_\Omega S_j \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_i \partial x_j} dv = \int_\Omega \frac{\partial^2 S_j}{\partial x_i \partial x_j} u_i^* dv - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial S_j}{\partial x_j}.n_i u_i^* ds + \int_{\partial\Omega} S_j.n_j \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} ds \tag{8.3}$$

En reportant les relations (8.2) et (8.3) dans l'équation (8.1) on déduit la relation d'équilibre du modèle second gradient de dilatation

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 S_j}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \tag{8.4}$$

ainsi qu'une première version, écrite sous forme intégrale, de la relation des conditions aux limites

$$P^{CL,*} = \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}.n_j u_i^* ds - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial S_j}{\partial x_j}.n_i u_i^* ds + \int_{\partial\Omega} S_j.n_j \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} ds \tag{8.5}$$

Mais les variables u_i et $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ et donc u_i^* et $\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i}$ ne sont pas indépendantes. Il faut donc exprimer l'expression des conditions aux limites en fonction de u_i et de sa dérivée normale Du_i qui elles sont indépendantes en tout point de la frontière $\partial\Omega$. Pour rappel la dérivée normale Du_i s'écrit

$$Du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} n_j \tag{8.6}$$

La dérivée tangentielle de u_i suivant la direction n_j, notée $\frac{Du_i}{Dx_j}$, est définie par décomposition canonique du gradient de u_i par

$$\frac{Du_i}{Dx_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - n_j Du_i \tag{8.7}$$

En portant la relation (8.7) dans l'expression des conditions aux limites (8.5), on a

$$P^{CL,*} = \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}.n_j u_i^* ds - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial S_j}{\partial x_j}.n_i u_i^* ds + \int_{\partial\Omega} S_j.n_j \frac{Du_i^*}{Dx_i} ds + \int_{\partial\Omega} S_j.n_j.n_i Du_i^* ds \tag{8.8}$$

En exprimant également le gradient de S_j en fonction de ses dérivées normale et tangentielles, on peut écrire le deuxième terme de (8.8) suivant

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial S_j}{\partial x_j}.n_i u_i^* ds = \int_{\partial\Omega} \left[\frac{DS_j}{Dx_j} + n_j.DS_j \right] .n_i u_i^* ds \tag{8.9}$$

En utilisant la propriété de développement de la dérivée du produit d'une fonction, on exprime le troisième terme de (8.8) par

$$\int_{\partial\Omega} S_j.n_j \frac{Du_i^*}{Dx_i} ds = \int_{\partial\Omega} \left[\frac{DS_j n_j u_i^*}{Dx_i} - \frac{DS_j}{Dx_i} n_j u_i^* - \frac{Dn_j}{Dx_i} S_j u_i^* \right] ds \tag{8.10}$$

En supposant que la frontière $\partial\Omega$ est fermée à plan tangent et que sa courbure est continue, le théorème de la divergence permet d'écrire

$$\int_{\partial\Omega} \frac{DS_j n_j u_i^*}{Dx_i} ds = \int_{\partial\Omega} \frac{Dn_p}{Dx_p} n_i S_j n_j u_i^* ds \tag{8.11}$$

En reportant, enfin, (8.9), (8.10) et (8.11) dans (8.8) on définit les relations de conditions aux limites en fonction de u_i^* et de $\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i}$ selon

$$P^{CL,*} = \int_{\partial\Omega} (p_i u_i^* + P n_i D u_i^*)\, ds \tag{8.12}$$

avec

$$p_i = \sigma_{ij} n_j - n_i n_j D S_j - \frac{D S_j}{D x_j} n_i - \frac{D S_j n_j}{D x_i} + \frac{D n_p}{D x_p} S_j n_j n_i \tag{8.13}$$

et

$$P = S_j . n_j \tag{8.14}$$

8.2 Analyse numérique des dérivées géométriques pour les éléments finis de type triangles

Cette partie vient en complément du chapitre 4.2.1.1 dans lequel on précise que pour les éléments finis quadratiques iso-paramétriques de type triangulaires, la qualité d'approximation de la contrainte mathématique $\chi = \varepsilon_V$ dépend de la courbure des éléments réels. En effet, les fonctions d'interpolations géométriques étant dans ce cas du second ordre, les déformations volumiques macroscopiques ε_V sont décrites par des fractions rationnelles tandis que les déformations volumiques microscopiques χ sont décrites par des fonctions polynômiales.

On souhaite montrer que si les noeuds milieux sont tous alignés avec leurs noeuds sommets respectifs, alors les dérivées géométriques sont constantes et que par conséquent les fractions rationnelles d'interpolations des déformations volumiques macroscopiques ε_V se réduisent à des fonctions polynômiales.

On considère ainsi l'élément fini de type triangle de la figure 8.1

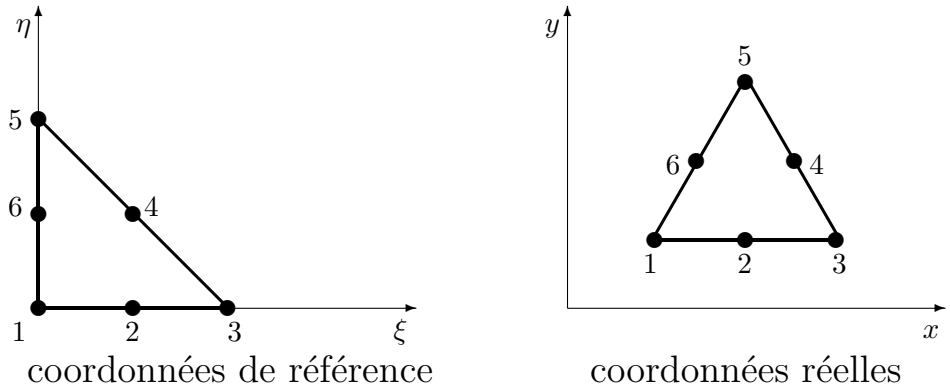


Fig. 8.1. Numérotation des noeuds de l'élément géométrique de type triangle en fonction du repère des coordonnées.

Pour rappel, si on note

- N^p la fonction d'interpolation du noeud p;

- u_i^p la valeur de la variable nodale u_i au noeud p dans le repère réel;
- $u_i(\xi,\eta)$ la valeur de la variable nodale u_i dans le repère de référence;
- x_j^p les coordonnées géométriques du noeud p dans le repère réel;
- $x_j(\xi,\eta)$ les coordonées géométriques dans le repère de référence;
- ξ et η les coordonnées d'un point dans l'élément de référence.

on a

$$u_i(\xi,\eta) = \sum_{p=1}^{6} N^p(\xi,\eta)\, u_i^p \qquad \text{et} \qquad x_j(\xi,\eta) = \sum_{p=1}^{6} N^p(\xi,\eta)\, x_j^p \tag{8.15}$$

et les déformations macroscopiques s'expriment par des fonctions rationnelles d'après

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\xi,\eta) = \frac{\partial u_i}{\partial \xi}.\frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial \eta}.\frac{\partial \eta}{\partial x_j} \tag{8.16}$$

où le numérateur est issu des dérivées des variables nodales $\dfrac{\partial u_i}{\partial \xi}$ et $\dfrac{\partial u_i}{\partial \eta}$ tandis que le dénominateur est issu des dérivées des transformations géométriques $\dfrac{\partial x_j}{\partial \xi}$ et $\dfrac{\partial x_j}{\partial \eta}$. Or, d'après (8.15), on a

$$\frac{\partial x_j}{\partial \xi} = \sum_{p=1}^{6} \frac{\partial N^p(\xi,\eta)}{\partial \xi} x_j^p \qquad et \qquad \frac{\partial x_j}{\partial \eta} = \sum_{p=1}^{6} \frac{\partial N^p(\xi,\eta)}{\partial \eta} x_j^p \tag{8.17}$$

On trouve l'expression des dérivées des fonctions de forme des éléments quadratiques dans Zienkiewicz [149]. Pour rappel, en notant $\lambda = 1-\xi-\eta$, on a

$$\frac{\partial N^p(\xi,\eta)}{\partial \xi} = \begin{cases} 1-4\lambda \\ 4(\lambda-\xi) \\ -1+4\xi \\ 4\eta \\ 0 \\ -4\eta \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{\partial N^p(\xi,\eta)}{\partial \eta} = \begin{cases} 1-4\lambda \\ -4\xi \\ 0 \\ 4\xi \\ -1+4\eta \\ 4(\lambda-\eta) \end{cases} \quad \text{respectivement pour} \begin{cases} p=1 \\ p=2 \\ p=3 \\ p=4 \\ p=5 \\ p=6 \end{cases}$$

et donc également les relations

$$\frac{\partial x_j(\xi,\eta)}{\partial \xi} = (1-4\lambda)\, x_j^1 + 4(\lambda-\xi)\, x_j^2 + (-1+4\xi)\, x_j^3 + 4\eta x_j^4 - 4\eta x_j^6 \tag{8.18}$$

$$\frac{\partial x_j(\xi,\eta)}{\partial \eta} = (1-4\lambda)\, x_j^1 - 4\xi x_j^2 + 4\xi x_j^4 + (-1+4\eta)\, x_j^5 + 4(\lambda-\eta)\, x_j^6 \tag{8.19}$$

Si on suppose que tous les noeuds milieux sont alignés avec leurs noeuds sommets respectifs on a également les relations

$$x_j^2 = \frac{x_j^1 + x_j^3}{2} \qquad \text{et} \qquad x_j^4 = \frac{x_j^3 + x_j^5}{2} \qquad \text{et} \qquad x_j^6 = \frac{x_j^5 + x_j^1}{2} \tag{8.20}$$

En injectant (8.20) dans (8.18) et dans (8.19) on trouve que les dérivées des transformations géométriques (8.21) sont bien des fonctions constantes puisque indépendantes des coordonnées ξ et η.

$$\frac{\partial x_j(\xi,\eta)}{\partial \xi} = x_j^3 - x_j^1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial x_j(\xi,\eta)}{\partial \eta} = x_j^5 - x_j^1 \tag{8.21}$$

Bibliographie

[1] Abbas M. Algorithme non-linéaire quasi-statique. Documentation de référence Code_Aster R5.03.01 accessible via le lien internet [40].

[2] Acharya A, Shawki TG (1995). Thermodynamic restrictions on constitutive equations for second-deformation-gradient inelastic behavior. J. Mech. Phys. Solids **43** pp 1751-1772.

[3] Aifantis E.(1984). On the microstructural origin of certain inelastic models. Transactions of ASME. J. Mat. Engng. Tech. **106** pp 326-330.

[4] Al Holo-Al Radi S (2005). Etude numérique de la localisation à l'aide de modèles de second gradient : Perte d'unicité et évolution de la taille de la zone localisée Thèse de doctorat, Université Grenoble 1

[5] Arnoldi WE (1951). The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem. Quart. Appl. Math. **9** pp 17-19.

[6] Askes H, Pamin J, de Borst R (2000). Dispersion analysis and element-free Galerkin solutions of second and fourth order gradient-enhanced damage models. International Journal for Numerical Methods in Engineering **49** pp 811-832.

[7] Askes H, Sluys LJ (2002). Explicit and implicit gradient series in damage mechanics. European Journal of Mechanics A/Solids **21** pp 379-390.

[8] Badel PB (2001). Contributions à la simulation numérique de structures en béton armé. Thèse de doctorat, Université Paris 6.

[9] Batoz JL, Dhatt G (1979). Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering **14** pp 1262-1267.

[10] Battini JM, Pacoste C, Eriksson A (2003). Improved minimal augmentation procedure for the direct computation of critical points. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg **192** pp 2169-2185.

[11] Bazant ZP (1976). Instability, ductility and size effect in strain softening concrete. Journal of Eng. Mech., ASCE **102** pp 331-344.

[12] Bazant ZP, Oh BH (1983). Crack band theory for fracture of concrete. Materials and Structures **16** RILEM : Paris, France, pp 155-177.

[13] Bazant ZP, Belytschko TB, Chang TP (1984). Continuum theory for strain softening. J. Eng. Mech. ASCE **110** pp 1666-1692.

[14] Bazant ZP, Jirásek M (2002). Nonlocal integral formulations of plasticity and damage : survey of progress. J. Eng. Mech. ASCE **128** pp 1119-1149.

[15] Benallal A, Marigo JJ (2007). Bifurcation and stability issues in gradient theories with softening. Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering **15** pp 283-295.

[16] Bergan PG (1980). Solution algorithms for nonlinear structural problems. Computers and Structures **12** pp 497-509.

[17] Bésuelle P, Chambon R, Collin F (2006). Switching deformation modes in post-localization solutions with a quasibrittle material. Journal of Materials and Structures **1** pp 1115-1134.

[18] Biot MA (1941). General theory of three dimensionnal consolidation. Journal of Applied Physics **12** pp 155-164.

[19] Bishop AW, Blight GE (1963). Some Aspects of effective stress in saturated and partly saturated soils. Géotechnique **13** pp 177-197.

[20] Boiteau O, Nicolas O. Algorithme de résolution pour le problème généralisé. Documentation de référence Code_Aster R5.01.01 accessible via le lien internet [40].

[21] Borja RI (1990). Analysis of incremental excavation based on critical state theory. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE **116.** pp 964-985.

[22] de Borst R (1987). Computation of post-bifurcation and post-failure behavior of strain-softening solids. Computers and Structures **25** pp 211-224.

[23] de Borst R, Sluys LJ, Muhlhaus H, Pamin J (1993). Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation. Engineering Computations **10** pp 99-121.

[24] Bourdin B, Francfort GA, Marigo JJ (2000). Numerical experiments in revisited brittle fracture. Journal of the Mechanics and Physics of Solids **48** pp 797-826.

[25] Callari C (2004). Coupled numerical analysis of strain localization induced by shallow tunnels in saturated soils. Computers and Geotechnics **31.** pp 193-207.

[26] Calvetti F, Combe G, Lanier J (1997). Experimental micromechanical analysis of a 2D granular material: relation between structure evolution and loading paths. Mechanics of Cohesive-Frictionnal Materials **2** pp 121-163.

[27] Cardona A, Huespe A (1999). Evaluation of simple bifurcation points and post-critical path in large finite rotation problems. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **175** pp 137-156.

[28] Chambon R, Desrues J, Hammad W, Charlier R (1994). CLoE, a new rate-type constitutive model for geomaterials theoretical basis and implementation. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics **18** pp 253-278.

[29] Chambon R, Caillerie D, El Hassan N (1998). One-dimensional localisation studied with a second grade model. Eur. J. Mech. A/Solids **17** pp 637-656.

[30] Chambon R, Crochepeyre S, Desrues J (2000). Localization criteria for non-linear constitutive equations of geomaterials. Mech. Cohesive-Frictional Mater. **5** pp 61-82.

[31] Chambon R, Caillerie D, Matsushima T (2001). Plastic continuum with microstructure, local second gradient theories for geomaterials : localization studies. International Journal of Solids and Structures **38** pp 8503-8527.

[32] Chambon R, Crochepeyre S, Charlier R (2001). An algorithm and a method to search bifurcation points in non-linear problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering **51** pp 315-332.

[33] Chambon R, Moullet JC (2004). Uniqueness studies in boundary value problems involving some second gradient models. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **193** pp 2771-2796.

[34] Chambon R, Caillerie D, Tamagnini C (2004). A strain space gradient plasticity theory for finite strain. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **193** pp 2797-2826.

[35] Chambon R (2005). Some theoretical results about second order work, uniqueness, existence and controllability independant of the constitutitve equation. Journal of Engineering Mathematics **52** pp 53-61.

[36] Chang CS, Askes H, Sluys LJ (2002). Higher-order strain/higher-order stress gradient models derived from a discrete microstructure, with application to fracture. Engineering Fracture Mechanics **69** pp 1907-1924.

[37] Chapelle D, Bathe KJ (1993). The inf-sup test. Computers and Structures **47** pp 537-545.

[38] Chavant C. Modélisations THHM. Généralités et algorithmes. Documentation de référence Code_Aster R7.01.10 accessible via le lien internet [40].

[39] Chavant C. (2007). Simulation d'excavation en comportement hydro-mécanique fragile. Résultats du benchmark mené dans le cadre du GdR MoMas. Note EDF/H-T64-2006-01307-FR.

[40] www.code-aster.org.

[41] Collin F, Chambon R, Charlier R (2006). A finite element method for poro mechanical modelling of geotechnical problems using local second gradient models. Int. J. Num. Meth. Eng. **65.** pp 1749-1772.

[42] Coussy O (2004). Poromechanics. J.Wiley&Sons.

[43] Cowin SC, Nunziato JW (1983). Linear elastic materials with voids. Journal of Elasticity **13.** pp 125-147.

[44] Crisfield MA (1981). A fast incremental-iterative solution procedure that handles snap-through Computers and Structures.**13.** pp 55-62.

[45] Crisfield MA, Wills J (1988). Solution strategies and softening materials. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **66** pp 267-289.

[46] Crisfield MA (1996). Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures.**1.** Wiley : Chichester.

[47] Crook T, Willson S, Yu JG, Owen R (2003). Computational modelling of the localized deformation associated with borehole breakout in quasi-brittle materials. Journal of Petroleum Science and Engineering **38.** pp 177-186.

[48] Desrues J, Chambon R, Mokni M, Mazerolle F (1996). Void ratio evolution inside shear bands in triaxial sand specimens studied by computed tomography. Géotechnique **46** pp 529-546.

[49] Desrues J, Chambon R (2002). Shear band analysis and shear moduli calibration. International Journal of Solids and Structures **39** pp 3757-3776.

[50] Desrues J, Viggiani G (2004). Strain localization in sand : an overview of the experimental results obtained in Grenoble using stereophotogrammetry. Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. **28** pp 279-321.

[51] Drucker DC, Prager W (1952). Soil mechanics and plastic analysis design. Quaterly Journal of Applied Mathematics **10** pp 157-165.

[52] Ehlers W, Volk W (1998). On theoretical and numerical methods in the theory of porous media based on polar and non-polar elasto-plastic solid materials. International Journal of Solids and Structures **35** pp 4597-4617.

[53] Eriksson A (1998). Structural instability analyses based on generalised path-following. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **156** pp 45-74.

[54] Erigen A (1990). Theory of thermo-microstretch elastic solids. Int. J. Eng. Sci. **28** pp 1291-1301.

[55] Ern A, Meunier S (2008). A posteriori error analysis of Euler-Galerkin approximations to coupled elliptic-parabolic problems. Mathematical Modelling and Numerical Analysis A paraître.

[56] Falzon BG, Cerini M (2006). An automated hybrid procedure for capturing mode-jumping in postbuckling composite stiffened structures. Composite Structures **73** pp 186-195.

[57] Feng YT, Peric D, Owen DRJ (1995). Determination of travel directions in path-following methods. Math. Comput. Modelling **21** pp 43-59.

[58] Fernandes R, Chavant C, Du Suau G (2005). Définition d'une modélisation à intégration sélective pour les couplages Thermo-Hydro-Mécaniques. Document de référence EDF/R&D, HT-66/05/012/A.

[59] Fernandes R, Chavant C, Chambon R (2008). A simplified second gradient model for dilatant materials: theory and numerical implementation. International Journal of Solids and Structures **45** pp 5289-5307.

[60] Finno RJ, Harahap IS, Sabatini PJ (1991). Analysis of braced excavations with coupled finite element, formulations. Computers and Geotechnics **12** pp 91-114.

[61] Forest S, Barbe F, Cailletaud G (2000). Cosserat modelling of size effects in the mechanical behaviour of polycrystals and multiphase materials. International Journal of Solids and Structures **37** pp 7105-7126.

[62] Forest S, Lorentz E (2004). Localization and regularization. In Local Approach to Fracture, eds J.Besson, Presses de l'Ecole des Mines de Paris.

[63] Forest S, Sievert R (2006). Nonlinear microstrain theories. International Journal of Solids and Structures **43** pp 7224-7245.

[64] Fujii F, Ramm E (1997). Computational bifurcation theory : path-tracing, pinpointing and path-switching. Enginnering Structures **19** pp 385-392.

[65] Fujii F, Ikeda K, Noguchi H, Okazawa S (2001). Modified stiffness iteration to pinpoint multiple bifurcation points. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **190** pp 2499-2522.

[66] Fujii F, Noguchi H (2002). The buckling mode extracted from the LDL^T-decomposed marge-order stiffness matrix. Commun. Numer. Meth. Engng **18** pp 459-467.

[67] Gastebled OJ, May IM (2000). Bifurcation in the numerical simulation of softening mechanisms. Computers and Structures **78** pp 745-755.

[68] Granet S. Modéles de comportement THHM. Documentation de référence Code_Aster R7.01.11 accessible via le lien internet [40].

[69] www.gdrmomas.org.

[70] Geers MGD, de Borst R, Brekelmans WAM, Peerlings RHJ (1998). Strain-based transient-gradient damage model for failure analyses. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **160** pp 133-153.

[71] Geers MGD (1999). Enhanced solution control for physically and geometrically non-linear problems. Part I & II. Int. J. Num. Meth. Eng. **46** pp 177-230.

[72] Gens A, Potts DM (1988). Critical state models in computational geomechanics. Engng. Comput. **5** pp 178-197.

[73] Germain P (1973). La méthode des puissances virtuelle en mécanique des milieux continus. Première partie: théorie du second gradient. Journal de Mécanique **12** pp 235-274.

[74] Germain P (1973). The method of virtual power in continuum mechanics. Part 2 : Microstructure. SIAM J. Appl. Math. **25.** pp 556-575.

[75] Gioda G, Locatelli L (1999). Back analysis of the measurements performed during the excavation of a shallow tunnel in sand. Int. J. Num. Anal. Mech. Geomech. **23** pp 1407-1425.

[76] Godard V (2005). Modélisation de l'endommagement anisotrope du béton avec prise en compte de l'effet unilatéral : Application à la simulation des enceintes de confinement nucléaires. Thèse de doctorat, Université Paris 6.

[77] Godard V, Badel P, Lorentz E. Méthodes de pilotage du chargement. Documentation de référence Code_Aster R5.03.80 accessible via le lien internet [40].

[78] Godard V, Lorentz E. Modélisation non locale à gradient de variables internes. Documentation de référence Code_Aster R5.04.01 accessible via le lien internet [40].

[79] Godard V. Modélisation non locale à gradient de déformation. Documentation de référence Code_Aster R5.04.02 accessible via le lien internet [40].

[80] Han C, Vardoulakis I (1991). Plane-strain compression experiments on water-saturated fine-grained sand. Géotechnique **41** pp 49-78.

[81] Hill R (1978). Aspect of invariance in solids. Advances in Applied Mechanics, Academic Press, New York **18** pp 1-75.

[82] Huang BZ, Atluri SN (1995). A simple method to follow post-buckling paths in finite element analysis. Computers and Structures **57** pp 477-489.

[83] Ikeda K, Murota K (2002). Imperfect Bifurcation in Structures and Materials. Applied Mathematical Sciences, (Springer) **149**.

[84] Ikeda K, Yamakawa Y, Tsustumi S (2003). Simulation and interpretation of diffuse mode bifurcation of elastoplastic solids. Journal of the Mechanics and Physics of Solids **51** pp 1649-1673.

[85] Ikeda K, Murota K, Yanagimoto A, Noguchi H (2007). Improvement of the scaled corrector method for bifurcation analysis using symmetry-exploiting block-diagonalization. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **196** pp 1648-1661.

[86] Jardine RJ, Potts DM, Fourie AB, Burland JB (1986). Studies of the influence of non-linear stress-strain characteristics in soil-structure interaction. Gotechnique **36** pp 377-396.

[87] Jiráresk M (2000). Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **188** pp 307-330.

[88] Kolmayer P, Fernandes R, Chavant C (2004). Numerical implementation of a new rheological law for argilites. Applied Clay Science **26.** pp 499-510.

[89] Lanczos C (1950). An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. Journal of research of the national bureau of standards **45** pp 255-282.

[90] Laverne J (2004). Formulation énergétique de la rupture par des modèles de forces cohésives : considérations théoriques et implantations numériques. Thèse de doctorat, Université Paris 13.

[91] Liu X, Scarpas A, Blaauwendraad J (2005). Numerical modelling of nonlinear response of soil. Part2 : Strain localization investigation on sand. Int. J. Solids Structures **42** pp 1883-1907.

[92] Lopez S (2002). Detection of bifurcation points along a curve traced by a continuation method. International Journal for Numerical Methods in Engineering **53** pp 983-1004.

[93] Lorentz E (1999). Lois de comportement à gradients de variables internes : Construction, formulation variationnelle et mise en oeuvre numérique. Thèse de doctorat, Université Paris 6

[94] Lorentz E, Andrieux S (1999). A variational formulation for nonlocal damage models. International Journal of Plasticity **15** pp 119-138.

[95] Lorentz E, Andrieux S (2003). Analysis of non-local models through energetic formulations. Int. J. Solids Structures **40** pp 2905-2936.

[96] Lorentz E, Badel P (2004). A new path-following constraint for strain-softening finite element simulations. International Journal for Numerical Methods in Engineering **60** pp 499-526.

[97] Lorentz E, Benallal A (2005). Gradient constitutive relations : numerical aspects and application to gradient damage. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **194** pp 5191-5220.

[98] Lorentz E (2008). Modélisation et simulation numérique de l'endommagement des structures. Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris 6

[99] Majorana CE, Salomoni V, Schrefler BA (1998). Some observations about strain localisation and shear band formation in concrete samples. Journal of Materials Processing Technology **78** pp 128-137.

[100] Matsushima T, Chambon R, Caillerie D (2002). Large strain finite element analysis of local second gradient models, application to localization. Int. J. Num. Meth. Eng. **54** pp 499-521.

[101] Matsushima T, Saomoto H, Tsubokawa Y, Yamada Y (2003). Grain rotation versus continuum rotation during shear deformation of granular assembly. Soils and Foundations **43** pp 95-106.

[102] Meunier S (2007). Analyse d'erreur a posteriori pour les couplages Hydro-Mécaniques et mise en oeuvre dans Code_Aster. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

[103] Mindlin RD (1964). Micro-structure in linear elasticity. Arch. Ration. Mech. Anal. **16** pp 51-78.

[104] Mindlin RD (1965). Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. Int. J. Solids Structures **1** pp 417-738.

[105] Mokni M, Desrues J (1999). Strain localisation measurements in undrained plane-strain biaxial tests on hostun RF sand. Mech. Cohes.-Frict. Mater. **4** pp 419-441.

[106] Mühlhaus HB, Vardoulakis I (1987). The thickness of shear bands in granular materials. Geotechnique **37** pp 271-283.

[107] Needleman A (1988). Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **67** pp 69-85.

[108] Nova R (1994). Controllability of the incremental response of soil specimens subjected to arbitrary loading programmes. Journal of Mechanical Behavior of Materials **5** pp 221-243.

[109] Nübel K, Huang W (2004). A study of localized deformation patterin in granular media. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **193** pp 2719-2743.

[110] Osaimi AE, Clough GW (1979). Pore-pressure dissipation during excavation. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE **105** pp 481-498.

[111] Papanastasiou PC, Vardoulakis I (1992). Numerical treatment of progressive localization in relation to borehole stability. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics **16** pp 389-424.

[112] Peerlings RHJ, de Borst R, Brekelmans WAM, de Vree JHP (1996). Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. International Journal for Numerical Methods in Engineering **39** pp 3391-3403.

[113] Peerlings RHJ, Geers MGD, de Borst R, Brekelmans WAM (2001). A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua. International Journal of Solids and Structures **38** pp 7723-7746.

[114] Peerlings RHJ, de Borst R, Brekelmans WAM, Geers MGD (2002). Localisation issues in local and nonlocal continuum approaches to fracture. European Journal of Mechanics A/Solids **21** pp 175-189.

[115] Pietruszczak S, Mroz Z (1981). Finite element analysis of deformation of strain softening materials. Int. Jou. Num. Methods Eng. **17** pp 327-334.

[116] Pijaudier-Cabot G, Bazant ZP (1987). Nonlocal damage theory. Journal of Engineering Mechanics, ASCE **113** pp 1512-1533.

[117] Pijaudier-Cabot G, Huerta A (1991). Finite element analysis of bifurcation in nonlocal strain softening solids. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **90** pp 905-919.

[118] Planinc I, Saje M (1999). A quadratically convergent algorithm for the computation of stability points : the application of the determinant of the tangent stiffness matrix. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **169** pp 89-105.

[119] Raniecki B, Bruhns OT (1981). Bounds to bifurcation stresses in solids with non associated plastic flow rule at finite strain. J. Mech. Phys. Solids **29** pp 153-172.

[120] Rice J (1976). The localization of plastic deformation. International Congress of Theoretical and Applied Mechanics W.D. Koiter ed. North Holland Publishing Comp. pp 207-220.

[121] Riks E (1979). An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. International Journal of Solids and Structures **15** pp 529-551.

[122] Rosenberg J, Cimrman R (2003). Microcontinuum approach in biomechanical modeling. Mathematics and Computers in Simulation **61** pp 249-260.

[123] Sandhu RS, Wilson EL (1969). Finite element analysis of seepage in elastic media. Journal of Eng. Mech. Div., ASCE **95** pp 641-652.

[124] Schefler BA, Majorana CE, Sanavia L (1995). Shear band localization in saturated porous media. Archives of Mechanics **47** pp 577-599.

[125] Sciarra G, dell'Isola F, Coussy O (2007). Second gradient poromechanics. International Journal of Solids and Structures **44** pp 6607-6629.

[126] Shi J (1996). Computing critical points and secondary paths in nonlinear structural stability analysis by the finite element method. Computers and Structures **58** pp 203-220.

[127] Shu J, King W, Fleck N (1999). Finite elements for materials with strain gradient effects. Int. J. Numer. Meth. Eng. **44.** pp 373-391.

[128] Sieffert Y, Collin F, Chambon R (2007). Objectivité de la solution d'un problème d'excavation d'une cavité. 18ème Congrès Français de Mécanique, 27-31 août 2007.

[129] Simone A, Askes H, Sluys LJ (2004). Incorrect initiation and propagation of failure in non-local and gradient-enhanced media. International Journal of Solids and Structures **41** pp 351-363.

[130] Simone A (2007). Explicit and implicit gradient-enhanced damage models. Revue Française de génie civil **11** pp 1023-1044.

[131] Sorensen DC (1992). Implicit applications of polynomial filters in a k-step Arnoldi method. SIAM J. Matrix Anal. Appl. **13** pp 357-385.

[132] Sluys LJ (1992). Wave propagation, localisation and dispersion in softening solids. PhD thesis, Delft University of Technology

[133] Sterpi D (1999). An analysis of geotechnical problems involving strain softening effects. Int. J. Numer. Anal. Mech. Geomech. **23.** pp 1427-1454.

[134] Toupin RA (1962). Elastic materials with couple-stresses. Arch. Rational Mech. Anal. **11** pp 385-414.

[135] van der Veen H (1998). The significance and use of eigenvalues and eigenvectors in the numerical analysis of elasto-plastic soils. PhD thesis, Delft University of Technology

[136] van der Veen H, Vuik K, de Borst R (2000). Branch switching techniques for bifurcation in soil deformation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **190** pp 707-719.

[137] Varas F, Alonso E, Alejano LR, Fernandez-Manin G (2005). Study of bifurcation in the problem of unloading a circular excavation in a strain-softening material. Tunneling and Underground Space Technology **20** pp 311-322.

[138] Vardoulakis I, Goldscheider M, Gudehus QG (1978). Formation of shear bands in sand bodies as a bifurcation problem. Int. J. Num. Anal. Meth. Geom. **2** pp 99-128.

[139] Vardoulakis I (1980). Shear band inclination and shear modulus of sand in biaxial tests. Int. J. Num. Anal. Meth. Geom. **4** pp 103-119.

[140] Vardoulakis I, Graf B (1985). Calibration of constitutive models for granular materials using data from biaxial experiments. Géotechnique **35** pp 299-317.

[141] Vardoulakis I. and Sulem J. (1995). *Bifurcation Analysis in Geomechanics.* Blackie Academic and Professional, Glasgow.

[142] Wagner W, Wriggers P (1988). A simple method for the calculation of postcritical branches. Eng. Comput. **5** pp 103-109.

[143] Waszczyszyn Z (1983). Numerical problems of nonlinear stability analysis of elastic structures. Computers and Structures **17** pp 13-24.

[144] Wriggers P, Wagner W, Miehe C (1988). A quadratically convergent procedure for the calculation of stability points in finite element analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **70** pp 329-347.

[145] Wriggers P, Simo JC (1990). A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points. Int. Jou. Num. Methods Eng. **30** pp 155-176.

[146] Xu G, Guo Q, Zheng Z, McLennan J, Green S (1997). A finite element poro-inelastic analysis of borehole problems. Int. J. Rock Mech. & Min. Sci. **34.** paper 342.

[147] Zervos, A., Papanastasiou, P. and Vardoulakis, I. (2001). A finite element displacement formulation for gradient elastoplasticity. Int. J. Num. Meth. Eng. **50.** pp 1369-1388.

[148] Zervos A, Papanastasiou P, Vardoulakis I (2001). Modelling of localisation and scale effect in thick-walled cylinders with gradient elastoplasticity. International Journal of Solids and Structures **38** pp 5081-5095.

[149] Zienkiewicz OC (1977). The Finite Element Method in Engineering Science. McGraw-Hill, New York, 3rd edition.